

Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана

На правах рукописи

ТОКАРЕВА Светлана Андреевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА  
НА ОСНОВЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор М. П. Галанин

Москва — 2010

# Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Применение разрывного метода Галеркина для численного моделирования течений жидкости и газа</b>	<b>13</b>
1.1. Численное решение одномерных уравнений с использованием RKDG-метода . . . . .	13
1.1.1. Схема RKDG-метода для одномерного гиперболического уравнения . . . . .	13
1.1.2. Решение одномерного квазилинейного уравнения переноса	19
1.2. Численное моделирование двумерных течений идеального газа на основе RKDG-метода . . . . .	30
1.2.1. Схема RKDG-метода для гиперболических уравнений . .	30
1.2.2. Численное решение уравнений Эйлера . . . . .	37
<b>Глава 2. Программная реализация и оптимизация алгоритма разрывного метода Галеркина</b>	<b>57</b>
2.1. Численное моделирование двумерных течений вязкого теплопроводного газа на основе RKDG-метода . . . . .	57
2.1.1. Схема RKDG-метода для уравнений конвекции-диффузии	57
2.1.2. Численное решение уравнений Навье–Стокса . . . . .	59
2.2. Оптимизация параметров лимитера в алгоритме RKDG-метода	66
2.2.1. Классический лимитер . . . . .	66
2.2.2. Алгоритм автоматического выбора параметров лимитера	70
2.2.3. Результаты расчетов . . . . .	72
2.3. Сравнение вычислительных затрат метода конечных объемов и RKDG-метода . . . . .	79
2.4. Параллельный алгоритм RKDG-метода . . . . .	81
2.5. Организация программного комплекса . . . . .	82
2.6. Применение RKDG-метода к расчету аэродинамических характеристик крылового профиля NACA23012 с закрылком . . . . .	85
2.6.1. Постановка задачи . . . . .	85

2.6.2. Результаты расчетов . . . . .	87
<b>Глава 3. Численное моделирование двухфазных потоков с использованием разрывного метода Галеркина</b>	<b>89</b>
3.1. Математическая модель и задача Римана . . . . .	89
3.1.1. Одномерные уравнения Баера–Нунциато . . . . .	90
3.1.2. Точное решение задачи Римана . . . . .	94
3.2. HLLC-метод решения задачи Римана . . . . .	97
3.3. Тестирование HLLC-метода на локальных задачах Римана . . .	103
3.4. HLLC-метод решения задачи Римана в методе конечных объе- мов, RKDG-методе и РС-методе . . . . .	108
3.4.1. Численный поток типа HLLC . . . . .	108
3.4.2. Метод конечных объемов . . . . .	110
3.4.3. RKDG-метод . . . . .	111
3.4.4. РС-метод . . . . .	114
3.5. Анализ эффективности RKDG-метода с потоком типа HLLC по сравнению с другими методами . . . . .	117
3.5.1. Задачи Римана . . . . .	117
3.5.2. Задача о взаимодействии двух материалов . . . . .	122
<b>Выводы</b>	<b>132</b>
<b>Литература</b>	<b>133</b>

# Введение

**Актуальность темы.** Математическое моделирование течений жидкости и газа является важнейшим элементом решения сложных инженерных задач [1–13]. Основным инструментом моделирования таких течений является вычислительный эксперимент [14]. При рассмотрении реальных технических устройств, как правило, приходится работать с очень сложной геометрией, что приводит к необходимости использования в расчетах неструктурированных сеток.

Одним из главных требований, предъявляемых к методам решения задач газовой динамики, является правильность воспроизведения решения в областях, где оно претерпевает сильные изменения во времени и пространстве, в частности, на ударных волнах, волнах разрежения и контактных разрывах [15–17]. Для решения задач газовой динамики часто применяются конечно-объемные схемы типа Годунова [15, 18]. Для получения конечно-объемной схемы исходные уравнения интегрируются по элементу (ячейке) сетки. Эта процедура соответствует методу Галеркина–Петрова, в котором в качестве пробных функций используются кусочно-постоянные характеристические функции ячеек сетки. В этом случае определяемые в ходе решения величины являются средними значениями искомого решения на ячейке сетки. Таким образом, решение на каждой ячейке сетки приближается постоянной функцией. При построении простейшего метода конечных объемов межэлементные граничные потоки вычисляются с использованием свойств приближенного решения задачи Римана о распаде разрыва [15], в которой исходными данными служат средние значения численного решения в смежных ячейках. Такая схема обеспечивает только первый порядок аппроксимации по пространству, поэтому для качественной передачи особенностей решения приходится очень сильно измельчать сетку. Этого можно избежать в методах конечных объемов повышенного порядка аппроксимации, в которых межэлементные потоки вычисляются на основе величин, полученных полиномиальной интерполяцией средних значений решения. Однако, как правило, повышение порядка метода связано с расширением шаблона аппроксимации, что может отрицательно сказаться на качестве решения на неструктурированных сетках [18], а также вычислительных затратах и эффективности рас-

параллеливания метода. Поэтому предпочтительным является использование в расчетах численных методов, обладающих высоким порядком аппроксимации и сохраняющих при этом компактность шаблона аппроксимации. Одним из таких методов является метод RKDG (Runge–Kutta discontinuous Galerkin) [19–24], развитию и применению которого и посвящена настоящая работа.

Идеи разрывного метода Галеркина, или DG-метода, впервые предложены в работе [25] (Reed, Hill) для численного решения линейного уравнения переноса нейтронов вида

$$\sigma u + \operatorname{div}(\mathbf{a}u) = f,$$

где  $\sigma \in \mathbb{R}$ , а  $\mathbf{a}$  — некоторый постоянный вектор. Согласно предложенной в [25] схеме, решение данного уравнения вычислялось последовательно для каждого элемента сетки при условии, что ячейки сетки были расположены вдоль соответствующего характеристического направления.

В дальнейшем Lesaint и Raviart [26] провели подробный анализ DG-метода применительно к задачам данного класса и показали, что порядок сходимости метода при использовании в качестве базисных функций полиномов степени не выше  $k$  равен  $(\Delta x)^k$  для сеток общего вида и  $(\Delta x)^{k+1}$  для прямоугольных сеток. Позднее в работе [27] (Johnson, Pitkaranta) получен порядок сходимости  $(\Delta x)^{k+1/2}$  для произвольных сеток, а в работе [28] (Peterson) доказано, что эта оценка порядка является оптимальной. В работе [29] (Richter) получена оценка порядка сходимости  $(\Delta x)^{k+1}$  для некоторых неортогональных двумерных сеток.

Положительные результаты применения DG-метода к решению линейных гиперболических задач мотивировали дальнейшие исследования возможности использования метода для решения нелинейных гиперболических уравнений и систем вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial \mathbf{f}_i(\mathbf{u})}{\partial x_i} = 0$$

с необходимыми начальными и граничными условиями, где  $\mathbf{u}$  — вектор неизвестных. Присутствующие в системе нелинейные потоки  $\mathbf{f}_i(\mathbf{u})$  приводят к невозможности рассмотрения ее как совокупности уравнений переноса и поэлементного вычисления решения. Применение первоначальной схемы DG-метода, предложенной в [25], вело к необходимости решения нелинейной си-

системы уравнений относительно всех неизвестных функций, что делало данную схему крайне неэффективной для сложных гиперболических систем.

Для преодоления указанной трудности Chavent и Salzano [30] впервые построили явную схему DG-метода для одномерного гиперболического уравнения в дивергентной форме. Для этого использовалась DG-дискретизация исходных уравнений по пространству кусочно-линейными функциями, а получаемая в результате система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов аппроксимирующей кусочно-линейной функции решалась явным методом Эйлера. Однако анализ устойчивости построенной схемы показал, что она являлась безусловно неустойчивой при условии постоянства отношения шагов по времени и пространству  $\Delta t/\Delta x$ ; схема устойчива только если отношение  $\Delta t/\Delta x$  имеет порядок  $\sqrt{\Delta x}$ , что является слишком жестким ограничением для гиперболических задач.

Chavent и Cockburn в работе [31] предложили метод улучшения устойчивости схемы с помощью так называемых ограничителей [32, 33]. Таким образом им удалось получить схему, которая относилась к классу TVDM (т.е. к классу схем с невозрастающей полной вариацией средних значений) и классу TVB (т.е. к классу схем с ограниченной полной вариацией) при фиксированном числе Куранта  $C_{\text{CFL}} = f' \frac{\Delta t}{\Delta x}$ , которое выбиралось из условия  $C_{\text{CFL}} \leq \frac{1}{2}$ . Таким образом гарантировалась сходимость решения к точному. Основным недостатком предложенной схемы являлось то, что она имела только первый порядок аппроксимации по времени при втором порядке аппроксимации по пространству. Ограничитель при этом должен обеспечивать высокий порядок аппроксимации в областях, где решение является гладкой функцией и в то же время подавлять нефизичные осцилляции на разрывах решения.

Этот недостаток исправлен в работе Cockburn и Shu [34], в которой впервые представлен вариант RKDG-метода. Такая схема сочетает в себе DG аппроксимацию решения по пространству, специальный TVD алгоритм метода Рунге–Кутты для решения возникающей системы ОДУ и модифицированную процедуру построения ограничителя. Для результирующей явной схемы с кусочно-линейной пространственной аппроксимацией решения доказана устойчивость при  $C_{\text{CFL}} \leq \frac{1}{3}$  в линейном случае и показано, что схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству и по времени, в том числе в точках локального экстремума, а также доказано TVBM свойство (ограни-

ченность полной вариации средних значений решения по ячейке). Проведенный численный анализ свидетельствует о сходимости метода к решению, удовлетворяющему условию неубывания энтропии, даже для невыпуклых функций потока; разрывы решения передаются на 2–3 вычислительных ячейках, а решение в областях гладкости и на локальных экстремумах сходится со вторым порядком.

В работе [35] (Cockburn, Shu) данный подход формально обобщен для получения RKDG схем высокого порядка аппроксимации скалярных законов сохранения. При построении RKDG-метода порядка  $(k + 1)$  использована кусочная пространственная аппроксимация решения полиномами степени не выше  $k$ , TVD вариант явного метода Рунге-Кутты порядка  $(k + 1)$  для дискретизации по времени и обобщенная процедура монотонизации решения. Схемы такого типа применены в работе [36] (Cockburn, Lin, Shu) при решении одномерных систем, а обобщение RKDG-метода на случай многомерных систем уравнений впервые рассмотрено в работе [37] (Cockburn, Hou, Shu). Преимущество использования RKDG-метода при решении многомерных систем состоит в том, что он позволяет работать со сложной геометрией расчетной области и использовать при вычислениях неструктурированные сетки для пространственной DG-дискретизации, при этом временная TVD дискретизация остается такой же, как и в случае одномерных уравнений и систем. Единственной проблемой при разработке схемы RKDG для многомерных задач остается построение ограничителя, так как в этой ситуации условия устойчивости становятся более жесткими по сравнению с одномерным случаем. В отличие от одномерных задач, для которых возможно создание TVD схем высокого порядка, порядок многомерных TVD схем на неструктурированных сетках не превышает первого [18, 38]. Поэтому использование любого TVD ограничителя неизбежно будет приводить к потере порядка результирующей схемы. В [37] разработан вариант обобщенного ограничителя, основанный на требовании выполнения локального принципа максимума для численных схем. В работах [19–24, 39–41] область применения RKDG-метода расширена для решения двух- и трехмерных задач газовой динамики.

В последнее время наблюдается возрастающий интерес к RKDG-методу в связи с необходимостью численного решения задач динамики многофазных сред, описываемых неконсервативными гиперболическими системами урав-

нений. В качестве математической модели двухфазных сред наиболее часто используются уравнения Баера–Нунциато, которые в трехмерном случае представляют собой систему одиннадцати уравнений в частных производных первого порядка и описывают динамику смеси, состоящей, как правило, из твердой и газообразной фазы. Такая модель впервые предложена Baer и Nunziato [42] при описании динамики гранулированных горючих материалов в газообразных продуктах горения. Отличительной чертой уравнений Баера–Нунциато является то, что они предполагают наличие двух векторов скорости и двух давлений (в соответствии с числом фаз). Другие распространенные модели динамики многофазных сред имеют вид, сходный с уравнениями Баера–Нунциато [43–47], поэтому с практической точки зрения целесообразно исследовать эти уравнения, сохраняя при этом некоторую степень общности. Математические особенности одномерных однородных уравнений Баера–Нунциато исследованы в [48] (Embid, Baer). Эти уравнения являются гиперболическими, известна их характеристическая структура. Однако уравнения не могут быть записаны в форме законов сохранения (дивергентной форме): в консервативных переменных уравнения сохраняют неконсервативные члены, что делает невозможным применение классических условий Гюгонио на разрывах решения. Решение неконсервативных уравнений и систем долгое время оставалось сложной проблемой как с теоретической, так и с вычислительной точек зрения [49–54].

В настоящей работе преимущественно исследована задача Римана для уравнений Баера–Нунциато [47, 55, 56], разработан численный метод ее решения и численный поток типа HLLC, который впоследствии использован в методе конечных объемов, RKDG-методе и PC-методе (англ. path-conservative) [43, 44, 46, 56–61].

**Цель и задачи исследования.** Целью работы является развитие RKDG-метода, его оптимизация, разработка и применение основанного на нем программного комплекса для математического моделирования процессов газовой динамики и динамики двухфазных сред.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач.

1. Реализация алгоритма RKDG-метода для решения одномерного квазилинейного уравнения переноса и создание основы программного комплекса.



Проверка реализованного алгоритма и программного комплекса с использованием как известных в литературе, так и специально созданных тестовых задач.

2. Реализация алгоритма RKDG-метода для решения двумерных уравнений Эйлера и создание программного комплекса для численного решения задач идеальной газовой динамики. Проверка реализованного алгоритма и программного комплекса на примере известных тестовых задач и сравнение различных вариантов RKDG-метода с другими известными методами.

3. Реализация алгоритма RKDG-метода для решения двумерных уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа и расширение программного комплекса для учета вязкости и теплопроводности среды. Тестирование реализованного алгоритма на задачах обтекания различных профилей и сравнение полученных в результате вычислительного эксперимента аэродинамических коэффициентов с экспериментальными данными.

4. Оптимизация параметров алгоритма монотонизации численного решения и анализ эффективности монотонизации как элемента RKDG-метода.

5. Разработка и программная реализация параллельного алгоритма RKDG-метода, анализ его эффективности на различных типах вычислительных систем.

6. Разработка численного метода HLLC решения задачи Римана для уравнений Баера–Нунциато, описывающих динамику двухфазных сред, разработка численного потока типа HLLC. Сравнительный анализ эффективности RKDG-метода с потоком типа HLLC.

**Методы исследования.** Основным методом исследования задач, поставленных в диссертационной работе, является вычислительный эксперимент.

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными, а также данными вычислительных экспериментов, выполненных известными численными методами.

**Научная новизна.** Работа посвящена развитию RKDG-метода применительно к решению квазилинейного уравнения переноса и задач газовой динамики, включая задачи моделирования потоков как идеального, так и вязкого теплопроводного газа, а также задачи динамики двухфазных сред.

Для уравнений Эйлера, описывающих динамику идеального газа, проведен детальный сравнительный анализ RKDG-метода с другими известными методами, такими как метод конечных объемов с численными потоками годовского типа, а именно: потоками Куранта–Изаксона–Риса (КИР), Лакса–Фридрихса и потоками типа Хартена–Лакса–ван Лира (HLL и HLLC) [18]. RKDG-метод является одним из обобщений конечно-объемных методов на случай кусочно-полиномиальной аппроксимации решения. Численные потоки выбираются аналогично тем, которые используются в конечно-объемных методах. Шаблон аппроксимации в RKDG-методе состоит из ячейки и ее ближайших соседей, а порядок аппроксимации зависит лишь от порядка полинома базисной функции ячейки. Это дает возможность локально изменять порядок аппроксимации и адаптировать ее к особенностям решения. RKDG-метод позволяет работать с геометрически сложными областями, достигая при этом высокой точности. Благодаря узкому шаблону RKDG-метода возможно использование неструктурированных сеток. В методе достаточно просто реализуются параллельные вычисления.

При сравнении различных классов методов использованы треугольные сетки, конечные объемы (элементы) выбирались как треугольники сетки. Расчетные величины во всех случаях также относятся к указанным ячейкам — треугольникам. Таким образом, приближенное решение представляет собой кусочно-гладкую функцию, заданную на совпадающих треугольных сетках, но полученную разными методами. Этот факт позволяет проводить корректное сравнение результатов расчетов и самих методов.

Исследована эффективность применения RKDG-метода для решения системы уравнений динамики вязкого теплопроводного газа. В этом случае градиенты неизвестных величин рассматриваются как независимые переменные, в результате чего система сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, после чего применяется стандартная схема RKDG-метода. Невязкие потоки через границу ячейки аппроксимируются так же, как и в случае идеального газа, а для вязких потоков используется центральный численный поток.

Разработана модификация RKDG-метода, позволяющая автоматически оптимизировать параметры монотонизатора решения в процессе расчетов, адаптируя их к локальным особенностям решения. Проведено сравнение результа-

тов, полученных с использованием предложенного алгоритма монотонизации и стандартного алгоритма, использующего фиксированные параметры ограничителя.

Разработан параллельный алгоритм RKDG-метода, имеющий в своей основе принцип разделения расчетной области по количеству имеющихся вычислительных узлов. Представлены результаты распараллеливания RKDG-метода, проведен анализ эффективности созданного параллельного алгоритма на различных типах вычислительных систем.

В работе изучена возможность расширения области применения RKDG-метода для решения неконсервативных гиперболических систем. В качестве примера исследована система уравнений Баера–Нунциато, описывающая движения двухфазной среды без учета фазовых переходов. Разработан численный поток типа HLLC, основанный на аппроксимации решения задачи Римана для уравнений Баера–Нунциато, который затем использован при построении численной схемы метода конечных объемов, RKDG-метода и РС-метода. Результирующие схемы проверены на специально подобранных тестовых задачах, сделаны соответствующие выводы о работоспособности RKDG-метода по сравнению с другими методами решения неконсервативных систем.

**Практическая ценность** диссертационной работы связана с её прикладной ориентацией, а созданные программные комплексы могут быть использованы для численного моделирования течений жидкости и газа, вычисления аэродинамических нагрузок, численного моделирования динамики многофазных сред.

**На защиту выносятся следующие положения.**

1. Оптимизированный алгоритм RKDG-метода с возможностью пространственно-временной адаптации монотонизатора к особенностям решения.
2. Алгоритм численного решения задачи Римана для уравнений Баера–Нунциато. Применение численного потока на его основе в методах конечных объемов, РС и RKDG.
3. Параллельный алгоритм RKDG-метода.
4. Применение программного комплекса на основе RKDG-метода для расчета течений жидкости и газа, определения аэродинамических характеристик профилей и моделирования динамики двухфазных сред.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы апробирова-

ны на XVI-й Школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А. И. Леонтьева (Санкт-Петербург, 2007), Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (Новосибирск, 2008), XII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2008), 5-й Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2009), Международной конференции по вычислительному тепло- и массообмену (Гуанчжоу, Китай, 2009), 17-й Международной конференции по математической физике (Прага, Чехия, 2009), 6-й Международной конференции по вычислительной газовой динамике (Санкт-Петербург, 2010).

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 2 препринтах [62, 63], 6 научных статьях [24, 60, 64–67], в том числе в 5 статьях из Перечня рецензируемых ведущих научных журналов и изданий [24, 60, 64–66], и 10 тезисах и докладах конференций [68–77].

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

**Структура и объём работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, общих выводов и списка литературы. Работа изложена на 141 страницах, содержит 96 иллюстраций и 24 таблицы. Список литературы включает 110 наименований.

# Глава 1.

## Применение разрывного метода Галеркина для численного моделирования течений жидкости и газа

### 1.1. Численное решение одномерных уравнений с использованием RKDG-метода

#### 1.1.1. Схема RKDG-метода для одномерного гиперболического уравнения

Рассмотрим применение RKDG-метода [19, 21, 24, 62] для решения одномерного гиперболического уравнения, записанного в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T] \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, L) \quad (1.2)$$

и необходимыми граничными условиями.

На интервале  $(0, L)$  введем сетку с узлами  $\{x_{j+1/2}\}$ ,  $j = 0 \dots, N$  и обозначим

$$I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}], \quad \Delta_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, \quad j = 1, \dots, N, \quad \Delta x = \max_{1 \leq j \leq N} \Delta_j.$$

Умножим уравнения (1.1), (1.2) на произвольную гладкую функцию  $v(x)$  и проинтегрируем это произведение по  $I_j$ . После интегрирования по частям получим:

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} v(x) dx - \int_{I_j} f(u(x, t)) \frac{dv(x)}{dx} dx + \\ + f(u(x_{j+1/2}, t)) v(x_{j+1/2}) - f(u(x_{j-1/2}, t)) v(x_{j-1/2}) = 0, \quad (1.3) \\ \int_{I_j} u(x, 0) v(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Для каждого момента времени  $t \in [0, T]$  будем искать приближенное решение  $u_h(x, t)$  как элемент конечномерного пространства

$$V_h = V_h^k \equiv \left\{ v_h \in L_1(0, L) : v_h|_{I_j} \in P^k(I_j), j = 1, \dots, N \right\},$$

где  $P^k(I_j)$  — пространство полиномов степени не выше  $k$  на  $I_j$ .

Заменим гладкую функцию  $v$  произвольной пробной функцией  $v_h$ , принадлежащей пространству  $V_h$ , а точное решение  $u$  — приближенным  $u_h$ . Функция  $u_h$  разрывна в точках  $x_{j+1/2}$ , поэтому необходимо заменить функцию потока  $f(u_h(x_{j+1/2}, t))$  численным потоком  $h$ , зависящим от предельных значений функции  $u_h$  слева и справа от точки  $x_{j+1/2}$ , т. е.

$$h = h\left(u_h(x_{j+1/2}^-, t), u_h(x_{j+1/2}^+, t)\right) \equiv \tilde{h}(u_h(x_{j+1/2}, t)).$$

Тогда уравнения (1.3) принимают следующий вид  $\forall j = 1, \dots, N, \forall v_h \in P^k(I_j)$ :

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \frac{\partial u_h(x, t)}{\partial t} v_h(x) dx - \int_{I_j} f(u_h(x, t)) \frac{dv_h(x)}{dx} dx + \\ + \tilde{h}(u_h(x_{j+1/2}, t)) v_h(x_{j+1/2}^-) - \tilde{h}(u_h(x_{j-1/2}, t)) v_h(x_{j-1/2}^+) = 0, \quad (1.4) \\ \int_{I_j} u_h(x, 0) v_h(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) v_h(x) dx. \end{aligned}$$

Численный поток  $h(\cdot, \cdot)$  должен быть согласованным с физическим потоком  $f$  и обеспечивать монотонность схемы при кусочно-постоянной аппроксимации решения, что эквивалентно следующим условиям [15, 19]:

- 1)  $h(a, a) = f(a)$ ;
- 2)  $h(a, b)$  — неубывающая функция по  $a$ ;
- 3)  $h(a, b)$  — невозрастающая функция по  $b$ .

Численные потоки могут быть выбраны различными способами, среди которых наиболее распространены следующие [15, 18]:

- 1) поток Годунова:

$$h^G(a, b) = \begin{cases} \min_{a \leq u \leq b} f(u), & \text{при } a \leq b; \\ \max_{b \leq u \leq a} f(u), & \text{при } a > b; \end{cases}$$

2) поток Энгквиста–Ошера:

$$h^{EO}(a, b) = \int_a^b \min(f'(s), 0) ds + \int_a^b \max(f'(s), 0) ds + f(0);$$

3) поток Лакса–Фридрихса:

$$h^{LF}(a, b) = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) - C(b - a)];$$

$$C = \max_s |f'(s)|, \quad \inf_{0 \leq x \leq L} u_0(x) \leq s \leq \sup_{0 \leq x \leq L} u_0(x);$$

4) «локальный» поток Лакса–Фридрихса:

$$h^{LLF}(a, b) = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) - C(b - a)];$$

$$C = \max_s |f'(s)|, \quad \min(a, b) \leq s \leq \max(a, b);$$

5) поток Роу:

$$h^R = \begin{cases} f(a), & \text{если } f'(u) \geq 0 \text{ при } u \in [\min(a, b), \max(a, b)]; \\ f(b), & \text{если } f'(u) \leq 0 \text{ при } u \in [\min(a, b), \max(a, b)]; \\ h^{LLF}(a, b), & \text{иначе.} \end{cases}$$

На следующем этапе на каждом интервале  $I_j$  необходимо выбрать систему базисных функций. Для этого удобно использовать ортогональную систему функций, например, полиномы Лежандра, так как матрица Грама системы таких базисных функций является диагональной, что позволяет получить явную схему.

Пусть  $P_l$  — полином Лежандра степени  $l$ . Тогда для  $x \in I_j$  приближенное решение  $u_h^j$  будем искать в виде

$$u_h^j(x, t) = \sum_{l=0}^k u_j^l(t) \varphi_l(x), \quad (1.5)$$

где

$$\varphi_l(x) = P_l\left(\frac{2(x - x_j)}{\Delta_j}\right), \quad x_j = \frac{x_{j+1/2} + x_{j-1/2}}{2}.$$

Используя в качестве пробных функций на отрезке  $I_j$  базисные функции  $\varphi_l$ ,  $l = 0, \dots, k$  и учитывая равенства

$$\int_{-1}^1 P_m(s) P_n(s) ds = \left(\frac{2}{2n+1}\right) \delta_{mn}, \quad P_l(1) = 1, \quad P_l(-1) = (-1)^l,$$

где  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера, получим следующую форму уравнений (1.4)  $\forall j = 1, \dots, N, \forall l = 0, \dots, k$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l+1} \frac{du_j^l(t)}{dt} - \frac{1}{\Delta_j} \int_{I_j} f(u_h(x, t)) \frac{d\varphi_l(x)}{dx} dx + \\ + \frac{1}{\Delta_j} \left\{ h(u_h(x_{j+1/2}, t)) - (-1)^l h(u_h(x_{j-1/2}, t)) \right\} = 0; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$u_j^l(0) = \frac{2l+1}{\Delta_j} \int_{I_j} u_0(x) \varphi_l(x) dx. \quad (1.7)$$

Таким образом, задача нахождения приближенного решения  $u_h(x, t)$  сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $u_j^l(t)$  с начальным условием (1.7), которую с учетом представления решения  $u_h^j(x, t)$  на отрезке  $I_j$  в виде разложения по базису (1.5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} &= \mathbf{L}_h(\mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}), \quad t \in (0, T]; \\ \mathbf{u}_j|_{t=0} &= \mathbf{u}_j^0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{u}_j = [u_j^0, \dots, u_j^k]^T$ , а  $\mathbf{u}_j^0 = [u_j^0(0), \dots, u_j^k(0)]^T$ .

Пусть  $\{t^n\}$ ,  $n = 0, \dots, M$  — разбиение отрезка  $[0, T]$ , и  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ . Для решения полученной системы (1.8) воспользуемся явным методом Рунге–Кутты порядка  $(k+1)$ , применяя на каждом промежуточном шаге специальный ограничитель, что обеспечивает монотонность схемы. Тогда RKDG-метод записывается следующим образом:

$\forall n = 0, \dots, M-1$ :

а)  $\mathbf{u}_j^{(0)} = \mathbf{u}_j^n$ ;

б)  $\forall i = 1, \dots, k+1$ :  $\mathbf{u}_j^{(i)} = \Lambda \Pi_h \left\{ \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} \mathbf{u}_j^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n \mathbf{L}_h(\mathbf{u}_{j-1}^{(l)}, \mathbf{u}_j^{(l)}, \mathbf{u}_{j+1}^{(l)}) \right\}$ ;

в)  $\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^{(k+1)}$ ,

Коэффициенты  $\alpha_{il}$ ,  $\beta_{il}$  должны быть неотрицательными и удовлетворять условиям

$$\sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} = 1, \quad \max_{l=0, \dots, i-1} \frac{\beta_{il}}{\alpha_{il}} = 1, \quad i = 1, \dots, k+1.$$



Обозначим через  $\bar{u}_j$  среднее значение приближенного решения на интервале  $I_j$ . «Идеальным» [19] является ограничитель  $\Lambda\Pi_h$ , удовлетворяющий следующим требованиям.

1. Ограничитель не может изменять «массу», содержащуюся в каждом интервале, т.е. если  $u_h = \Lambda\Pi_h(v_h)$ , то  $\bar{u}_j = \bar{v}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где  $\bar{u}_j$  и  $\bar{v}_j$  — средние значения функций  $u_h$  и  $v_h$  на ячейке  $I_j$ .
2. Если  $u_h = \Lambda\Pi_h(v_h)$ ,  $w_h = u_h + \delta L_h(u_h)$ , где  $L_h$  — оператор пересчета значений численного решения на новом временном слое, то для достаточно малого параметра  $\delta$  должно выполняться неравенство:  $|\bar{w}_h|_{TV(0,L)} \leq |\bar{u}_h|_{TV(0,L)}$ , где  $|\cdot|_{TV(0,L)}$  — полная вариация функции на интервале  $(0, L)$ .
3. Ограничитель не должен снижать точность метода.

Однако построить такой «идеальный» ограничитель невозможно, т.к. при попытке обеспечить свойство TVDM (total variation diminishing in the means) теряется точность в локальных экстремумах решения. Избежать этого можно с помощью TVBM (total variation bounded in the means) ограничителей. При этом условие TVBM является более слабым, чем TVDM.

TVDM-свойство RKDG-метода означает выполнение неравенства

$$|\bar{u}_h^n|_{TV(0,L)} \leq |\bar{u}_0|_{TV(0,L)}, \quad \forall n \geq 0,$$

а TVBM-свойство — выполнение неравенства

$$|\bar{u}_h^n|_{TV(0,L)} \leq |\bar{u}_0|_{TV(0,L)} + CM, \quad \forall n \geq 0,$$

где  $C$  зависит только от  $k$ , а  $M = \sup_{0 < x_0 < L} \left\{ \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_0) \right|, x_0 : \frac{\partial u_0}{\partial x}(x_0) = 0 \right\}$  — верхняя оценка второй производной начального условия в экстремуме.

Приведем примеры TVDM-ограничителей [19, 32]. Для этого определим функцию

$$m(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} s \min(|a_1|, \dots, |a_n|), & \text{если } s = \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_n), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1. MUSCL-ограничитель (monotonic upstream-centered scheme for conservation laws).

В случае кусочно-линейной аппроксимации функция из пространства  $V_h$  представляется в виде

$$v_h|_{I_j} = \bar{v}_j + (x - x_j)v_{x,j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

тогда имеем

$$\Lambda\Pi_h(v_h)|_{I_j} = \bar{v}_j + (x - x_j)m\left(v_{x,j}, \frac{\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j}{\Delta_j}, \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}}{\Delta_j}\right).$$

2. «Менее строгий» ограничитель  $\Lambda\Pi_h^1$ .

$$\Lambda\Pi_h(v_h)|_{I_j} = \bar{v}_j + (x - x_j)m\left(v_{x,j}, \frac{\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j}{\Delta_j/2}, \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}}{\Delta_j/2}\right).$$

Отметим, что  $\|\bar{v}_h - \Lambda\Pi_h^1(v_h)\|_{L_1(0,L)} \leq \frac{\Delta x}{2}|\bar{v}_h|_{TV(0,L)}$ .

3. Ограничитель  $\Lambda\Pi_h^k$ .

В случае кусочно-полиномиальной аппроксимации решения, когда

$$v_h|_{I_j} = \sum_{l=0}^k v_j^l(t)\varphi_l(x),$$

ограничитель вычисляется следующим образом. Обозначим

$$v_h^1(x, t) = \sum_{l=0}^1 v_j^l(t)\varphi_l(x).$$

Для  $j = 1, \dots, N$ :

а) вычисляем

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{j+1/2}^- &= \bar{v}_j + m(v_{j+1/2}^- - \bar{v}_j, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}); \\ \tilde{v}_{j-1/2}^+ &= \bar{v}_j - m(\bar{v}_j - v_{j-1/2}^+, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}),\end{aligned}$$

где  $v_{j+1/2}^- = \lim v(x)$  при  $x \rightarrow x_{j+1/2}^-$ , а  $v_{j-1/2}^+ = \lim v(x)$  при  $x \rightarrow x_{j-1/2}^+$ ;

б) если  $\tilde{v}_{j+1/2}^- = v_{j+1/2}^-$  и  $\tilde{v}_{j-1/2}^+ = v_{j-1/2}^+$ , то полагаем  $\Lambda\Pi_h(v_h)|_{I_j} = v_h|_{I_j}$ .

в) если нет, то полагаем  $\Lambda\Pi_h(v_h)|_{I_j} = \Lambda\Pi_h^1(v_h^1)|_{I_j}$ .

4. Ограничитель  $\Lambda\Pi_{h,\alpha}^k$ .

Ограничитель  $\Lambda\Pi_{h,\alpha}^k$  представляет собой модифицированный ограничитель  $\Lambda\Pi_h^k$ , в котором

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{j+1/2}^- &= \bar{v}_j + m(v_{j+1/2}^- - \bar{v}_j, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}, C(\Delta x)^\alpha), \\ \tilde{v}_{j-1/2}^+ &= \bar{v}_j - m(\bar{v}_j - v_{j-1/2}^+, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}, C(\Delta x)^\alpha),\end{aligned}$$

где  $\Delta x = \max_j \Delta_j$ ,  $C \in (0, 1)$ .

Если вместо функции  $m$  использовать функцию  $\bar{m}$ , такую что

$$\bar{m}(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1, & \text{если } |a_1| \leq M(\Delta x)^2; \\ m(a_1, \dots, a_n) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где  $M$  — заданная константа, то получим TVBM-ограничители.

### 1.1.2. Решение одномерного квазилинейного уравнения переноса

#### Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T] \quad (1.9)$$

с начальными условиями  $u(x, 0) = u_0(x)$  вида:

1) «треугольник»:

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{2(x - l_1)}{l_2 - l_1}, & x \in [l_1, 0,5(l_1 + l_2)]; \\ \frac{2(l_2 - x)}{l_2 - l_1}, & x \in [0,5(l_1 + l_2), l_2]; \\ 0, & x \notin [l_1, l_2]; \end{cases}$$

2) «прямоугольник»:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [l_1, l_2], \\ 0, & x \notin [l_1, l_2]; \end{cases}$$

3) «левый треугольник»:

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x - l_1}{l_2 - l_1}, & x \in [l_1, l_2], \\ 0, & x \notin [l_1, l_2]; \end{cases}$$

4) «правый треугольник»:

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{l_2 - x}{l_2 - l_1}, & x \in [l_1, l_2], \\ 0, & x \notin [l_1, l_2]; \end{cases}$$

5) «ступенька вверх»:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, l_1], \\ 1, & x \in [l_1, L]; \end{cases}$$

6) «ступенька вниз»:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, l_1], \\ 0, & x \in [l_1, L]; \end{cases}$$

Для задачи (1.9) (для всех приведенных выше начальных условий) известны точные обобщенные решения, которые имеют вид [78]:

1) «треугольник»:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{2(x - l_1)}{l_2 - l_1 + 2t}, & x \in [l_1, 0,5(l_1 + l_2) + t], \quad 0 < t \leq 0,5(l_2 - l_1); \\ \frac{2(l_2 - x)}{l_2 - l_1 - 2t}, & x \in (0,5(l_1 + l_2) + t, l_2], \quad 0 < t \leq 0,5(l_2 - l_1); \\ 0, & x \notin [l_1, l_2], \quad 0 < t \leq 0,5(l_2 - l_1); \\ \frac{2(x - l_1)}{l_2 - l_1 + 2t}, & x \in [l_1, l_1 + \sqrt{0,5(l_2 - l_1)(l_2 - l_1 + 2t)}], \quad t > 0,5(l_2 - l_1); \\ 0, & x \notin [l_1, l_1 + \sqrt{0,5(l_2 - l_1)(l_2 - l_1 + 2t)}], \quad t > 0,5(l_2 - l_1); \end{cases}$$

2) «прямоугольник»:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{x - l_1}{t}, & x \in [l_1, l_1 + t], \quad 0 < t \leq 2(l_2 - l_1); \\ 1, & x \in (l_1 + t, l_2 + 0,5t], \quad 0 < t \leq 2(l_2 - l_1); \\ 0, & x \notin [l_1, l_2 + 0,5t], \quad 0 < t \leq 2(l_2 - l_1); \\ \frac{x - l_1}{t}, & x \in [l_1, l_1 + \sqrt{2(l_2 - l_1)t}], \quad t > 2(l_2 - l_1); \\ 0, & x \notin [l_1, l_1 + \sqrt{2(l_2 - l_1)t}], \quad t > 2(l_2 - l_1); \end{cases}$$

3) «левый треугольник»:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{x - l_1}{t + l_2 - l_1}, & x \in [l_1, l_1 + \sqrt{(l_2 - l_1)(t + l_2 - l_1)}]; \\ 0, & x \notin [l_1, l_1 + \sqrt{(l_2 - l_1)(t + l_2 - l_1)}]; \end{cases}$$

4) «правый треугольник»:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{x - l_1}{t}, & x \in [l_1, l_1 + t], \quad 0 < t \leq l_2 - l_1; \\ \frac{l_2 - x}{l_2 - l_1 - t}, & x \in (l_1 + t, l_2], \quad 0 < t \leq l_2 - l_1; \\ 0, & x \notin [l_1, l_2], \quad 0 < t \leq l_2 - l_1; \\ \frac{x - l_1}{t}, & x \in [l_1, l_1 + \sqrt{(l_2 - l_1)t}], \quad t > l_2 - l_1; \\ 0, & x \notin [l_1, l_1 + \sqrt{(l_2 - l_1)t}], \quad t > l_2 - l_1; \end{cases}$$

5) «ступенька вверх»:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in [0, l_1]; \\ \frac{x - l_1}{t}, & x \in [l_1, l_1 + t]; \\ 1, & x \in [l_1 + t, L]; \end{cases}$$

6) «ступенька вниз»:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [l_1, l_1 + 0,5t]; \\ 0, & x \notin [l_1, l_1 + 0,5t]. \end{cases}$$

Сравнение численного решения с точным будем проводить с использованием следующих норм в пространствах  $C, L_1, L_2$  в области  $\Omega = (0, L) \times [0, T]$ :

$$\|u\|_C = \max_{\Omega} |u|, \quad \|u\|_{L_1} = \int_0^T \int_0^L |u| dx dt, \quad \|u\|_{L_2} = \left( \int_0^T \int_0^L u^2 dx dt \right)^{1/2}$$

и на  $R = (0, L)$  при  $t = t_j$ :

$$\|u\|_C = \max_R |u|, \quad \|u\|_{L_1} = \int_0^L |u| dx, \quad \|u\|_{L_2} = \left( \int_0^L u^2 dx \right)^{1/2}.$$

### Организация вычислительного эксперимента

Численное решение поставленной задачи (1.9) получено для всех указанных начальных условий при следующих значениях параметров:

$L = 520, l_1 = 0, l_2 = 20, T = 1000$ .

Шаги по  $x$  и  $t$  выбирались постоянными:  $\forall j \Delta_j = \Delta x = 1, \forall n \Delta t^n = \Delta t$ .

Число Куранта

$$\gamma = \max_x \frac{\Delta t}{\Delta x} |u_0(x, t)|$$

принимало значения: 0,1; 0,25; 0,5 и 0,9. Для определения точности полученного решения вычислялись относительные ошибки с использованием норм

$$\|u\|_C = \max_{j,n} |u_j^n|, \quad 0 \leq j \leq N, \quad 0 \leq n \leq M,$$

$$\|u\|_{L_1} = \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^M |u_j^n|, \quad \|u\|_{L_2} = \left( \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^M (u_j^n)^2 \right)^{1/2}$$

интегрально по временному промежутку  $[0, T]$ , а также

$$\|u\|_C = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j^n|, \quad \|u\|_{L_1} = \Delta x \sum_{j=0}^N |u_j^n|, \quad \|u\|_{L_2} = \left( \Delta x \sum_{j=0}^N (u_j^n)^2 \right)^{1/2}$$

локально для момента времени  $t_n$ .

В работе тестировался RKDG-метод для кусочно-линейной и кусочно-квадратичной аппроксимаций (т. е. для  $k = 1, 2$ ).

### Результаты численного исследования

В таблицах 1–4 приведены относительные локальные и интегральные по времени ошибки вычислений для всех начальных условий и используемых норм для различных чисел Куранта. Для каждого из начальных профилей представлены графики решения для нескольких промежуточных моментов времени. Каждый рисунок 1.1–1.12 содержит графики точного и численного решений для числа Куранта  $\gamma = 0,5$ .

В таблицах 1, 2 и на рисунках 1.1–1.6 приведены результаты расчетов, выполненных для случая кусочно-линейной аппроксимации решения с ограничителем  $\Lambda \Pi_h^1$ , а в таблицах 3, 4 и на рисунках 1.7–1.12 — аналогичные результаты, полученные с использованием кусочно-квадратичной аппроксимации решения с ограничителем  $\Lambda \Pi_h^k$ .

В работе [62] проведен сравнительный анализ RKDG-метода с другими известными методами решения квазилинейного уравнения переноса [78]. Сравнение относительных ошибок численного решения показывает, что в большинстве случаев RKDG-метод обеспечивает более высокое качество решения квазилинейного уравнения переноса по сравнению с другими методами высокого порядка аппроксимации, например, методом Лакса-Вендроффа или монотонизированной схемой К. И. Бабенко [78]. Размазывание разрывов решения происходит на 2–3 шага как для кусочно-линейной, так и для кусочно-квадратичной пространственной аппроксимации решения.

Таблица 1.

Таблицы ошибок (локально при  $t = T$ ),  $k = 1$ 

$C_{CFL}$	$\ \cdot\ $	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4	Тест 5	Тест 6
$\gamma = 0,1$	$C$	0,6310	0,4022	0,6216	0,6305	0,0003	0,2252
	$L_1$	0,0044	0,0043	0,0046	0,0075	0,0006	0,0005
	$L_2$	0,0423	0,0315	0,0487	0,0551	0,0005	0,0086
$\gamma = 0,25$	$C$	0,6311	0,4105	0,6214	0,6329	0,0004	0,2331
	$L_1$	0,0044	0,0044	0,0046	0,0075	0,0006	0,0005
	$L_2$	0,0423	0,0321	0,0487	0,0553	0,0005	0,0089
$\gamma = 0,5$	$C$	0,6315	0,4351	0,6209	0,6438	0,0004	0,2657
	$L_1$	0,0044	0,0047	0,0047	0,0077	0,0007	0,0006
	$L_2$	0,0423	0,0338	0,0487	0,0563	0,0006	0,0099
$\gamma = 0,9$	$C$	0,6326	0,5311	0,6191	0,6998	0,0013	0,4211
	$L_1$	0,0044	0,0058	0,0047	0,0090	0,0010	0,0009
	$L_2$	0,0424	0,0409	0,0487	0,0616	0,0009	0,0145

Таблица 2.

Таблицы ошибок (интегрально по  $t$ ),  $k = 1$ 

$C_{CFL}$	$\ \cdot\ $	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4	Тест 5	Тест 6
$\gamma = 0,1$	$C$	0,6257	0,8200	0,7412	0,7039	0,3967	0,8200
	$L_1$	0,0081	0,0086	0,0080	0,0129	0,0005	0,0012
	$L_2$	0,0668	0,0598	0,0674	0,0737	0,0012	0,0192
$\gamma = 0,25$	$C$	0,5998	0,7750	0,7816	0,6755	0,3750	0,7750
	$L_1$	0,0081	0,0088	0,0080	0,0130	0,0005	0,0012
	$L_2$	0,0669	0,0604	0,0675	0,0737	0,0012	0,0196
$\gamma = 0,5$	$C$	0,5485	0,6116	0,6136	0,6221	0,4000	0,6000
	$L_1$	0,0082	0,0093	0,0080	0,0133	0,0006	0,0013
	$L_2$	0,0674	0,0616	0,0679	0,0742	0,0014	0,0197
$\gamma = 0,9$	$C$	0,5718	0,7301	0,5317	0,5809	0,4098	0,7417
	$L_1$	0,0087	0,0113	0,0083	0,0160	0,0009	0,0017
	$L_2$	0,0696	0,0683	0,0694	0,0824	0,0021	0,0228

Таблица 3.

Таблицы ошибок (локально при  $t = T$ ),  $k = 2$ 

$C_{CFL}$	$\ \cdot\ $	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4	Тест 5	Тест 6
$\gamma = 0,1$	$C$	0,2000	0,1785	0,2549	0,3350	0,0006	0,1227
	$L_1$	0,0040	0,0037	0,0049	0,0071	0,0008	0,0005
	$L_2$	0,0312	0,0231	0,0387	0,0491	0,0007	0,0077
$\gamma = 0,25$	$C$	0,2220	0,2001	0,2533	0,3466	0,0004	0,1379
	$L_1$	0,0046	0,0041	0,0048	0,0074	0,0006	0,0006
	$L_2$	0,0352	0,0274	0,0384	0,0510	0,0005	0,0087
$\gamma = 0,5$	$C$	0,2182	0,1898	0,2474	0,3954	0,0014	0,1320
	$L_1$	0,0046	0,0039	0,0047	0,0072	0,0007	0,0005
	$L_2$	0,0346	0,0266	0,0374	0,0578	0,0006	0,0083
$\gamma = 0,9$	$C$	0,2168	0,2118	0,2436	0,3276	0,0036	0,1418
	$L_1$	0,0045	0,0043	0,0046	0,0075	0,0021	0,0005
	$L_2$	0,0343	0,0278	0,0367	0,0483	0,0023	0,0088

Таблица 4.

Таблицы ошибок (интегрально по  $t$ ),  $k = 2$ 

$C_{CFL}$	$\ \cdot\ $	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4	Тест 5	Тест 6
$\gamma = 0,1$	$C$	0,5030	0,5660	0,5029	0,6065	0,2197	0,5827
	$L_1$	0,0099	0,0105	0,0096	0,0152	0,0008	0,0015
	$L_2$	0,0726	0,0675	0,0729	0,0846	0,0020	0,0207
$\gamma = 0,25$	$C$	0,4660	0,5330	0,4661	0,5779	0,2411	0,5391
	$L_1$	0,0098	0,0097	0,0097	0,0150	0,0006	0,0015
	$L_2$	0,0719	0,0644	0,0726	0,0828	0,0016	0,0207
$\gamma = 0,5$	$C$	0,4689	0,5588	0,4839	0,5228	0,2155	0,5000
	$L_1$	0,0097	0,0098	0,0095	0,0130	0,0011	0,0014
	$L_2$	0,0717	0,0655	0,0723	0,0756	0,0027	0,0209
$\gamma = 0,9$	$C$	0,4107	0,6296	0,4533	0,5287	0,1882	0,5275
	$L_1$	0,0098	0,0134	0,0095	0,0162	0,0020	0,0014
	$L_2$	0,0716	0,0802	0,0728	0,0859	0,0042	0,0199



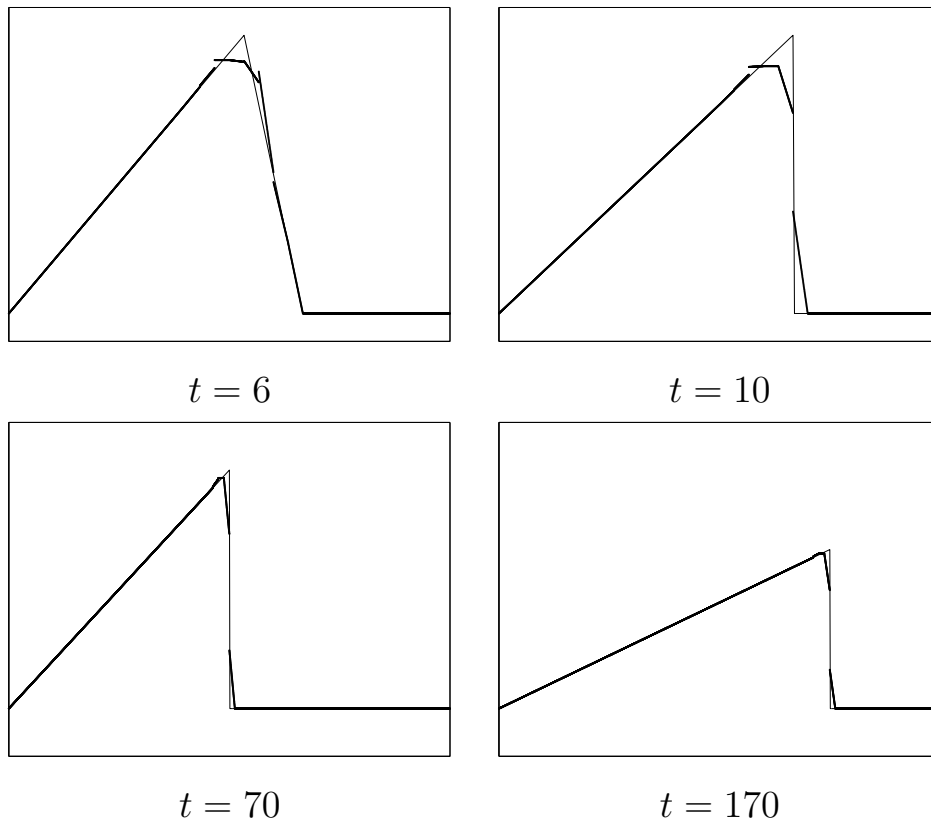


Рис. 1.1. Численное решение для теста «треугольник»

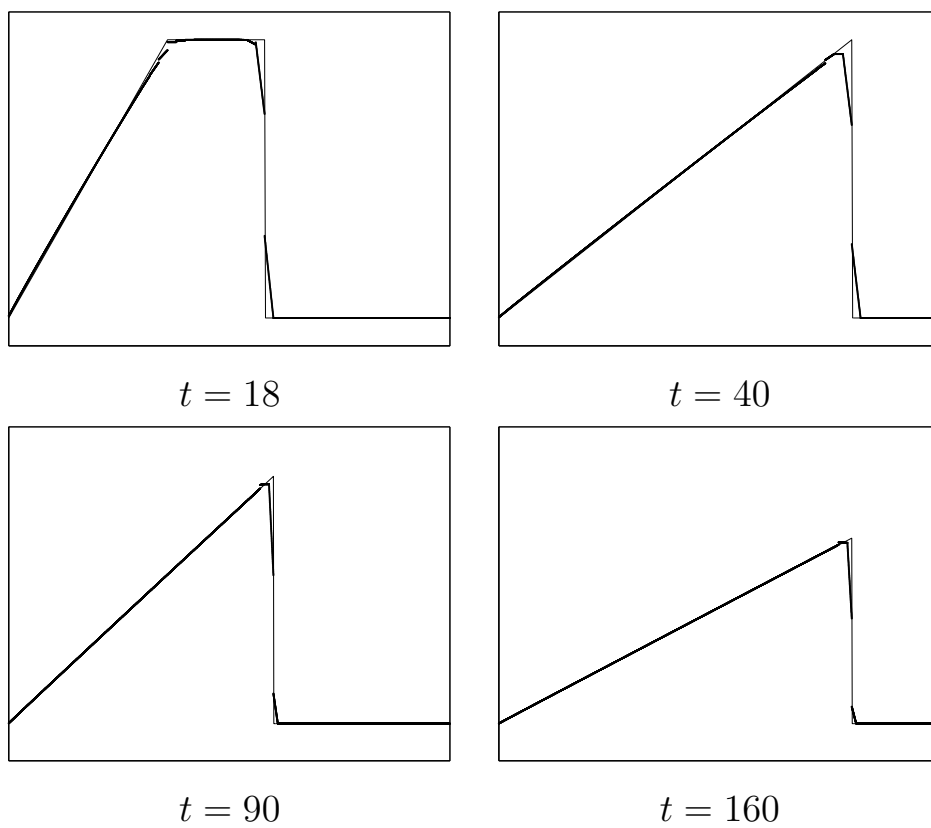


Рис. 1.2. Численное решение для теста «прямоугольник»

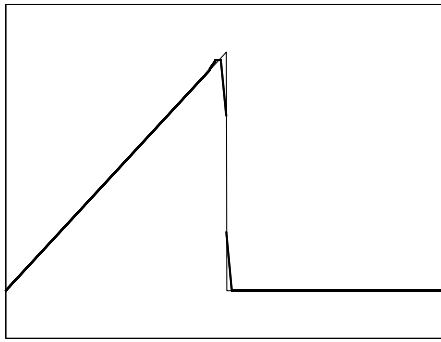
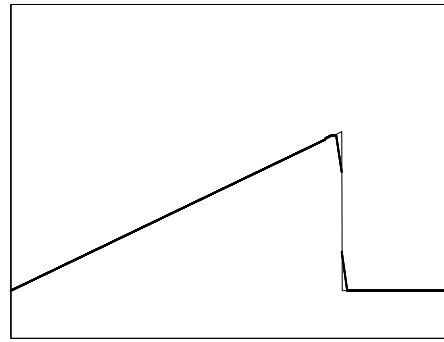

 $t = 60$ 

 $t = 160$ 

Рис. 1.3. Численное решение для теста «левый треугольник»

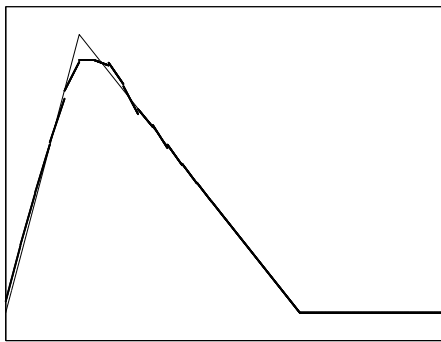
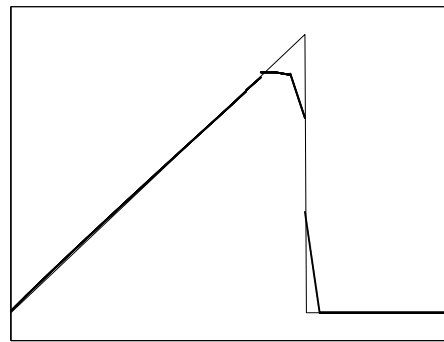

 $t = 5$ 

 $t = 20$ 

Рис. 1.4. Численное решение для теста «правый треугольник»

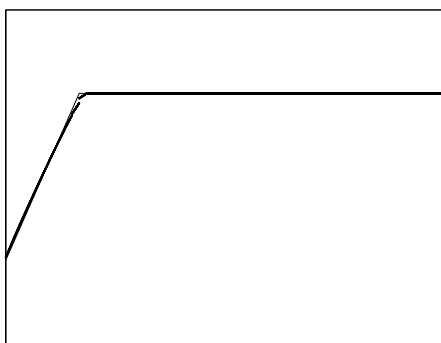
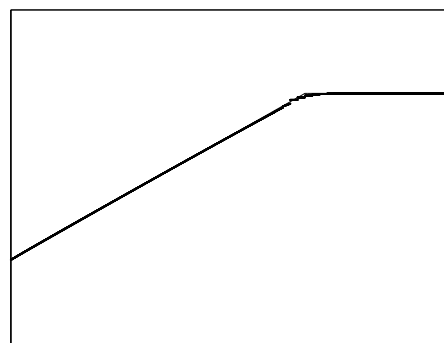

 $t = 10$ 

 $t = 40$ 

Рис. 1.5. Численное решение для теста «ступенька вверх»

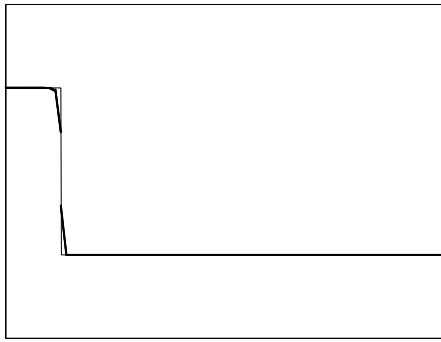
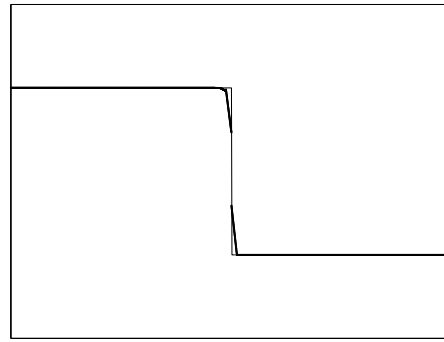

 $t = 20$ 

 $t = 80$ 

Рис. 1.6. Численное решение для теста «ступенька вниз»

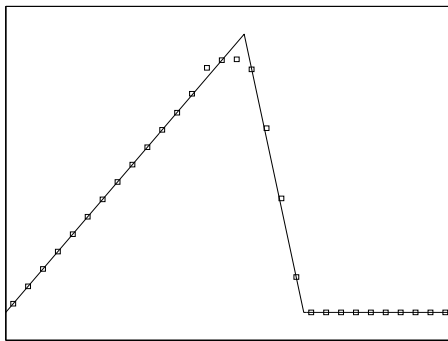
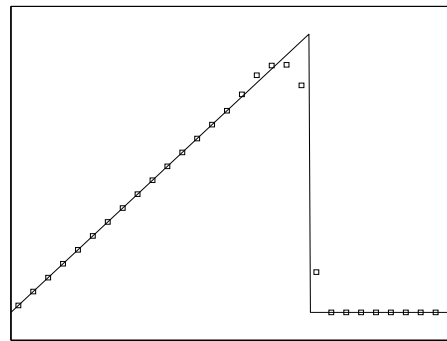
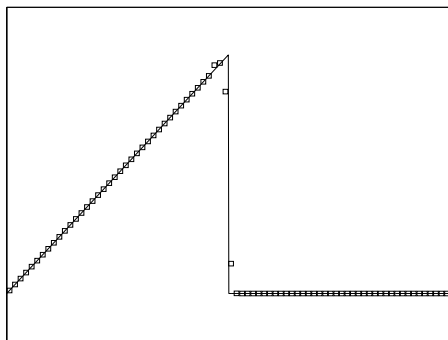
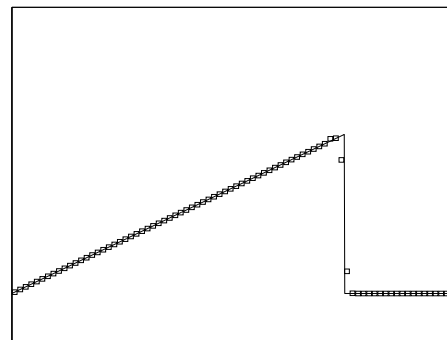

 $t = 6$ 

 $t = 10$ 

 $t = 70$ 

 $t = 170$ 

Рис. 1.7. Численное решение для теста «треугольник»

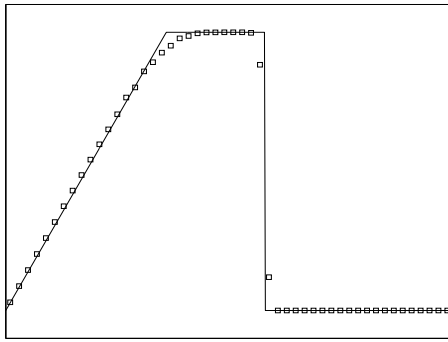
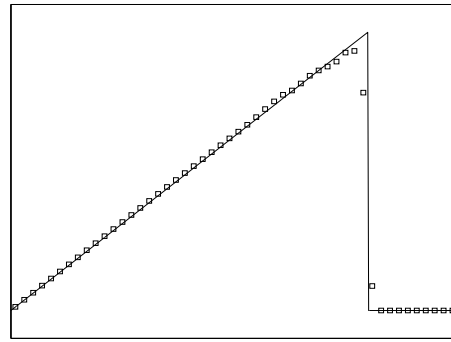
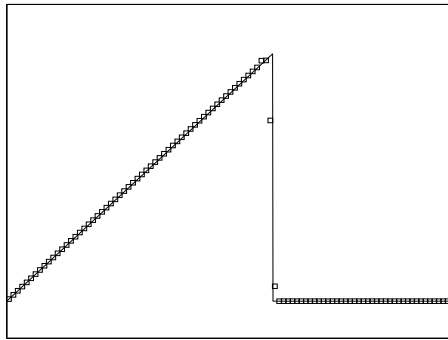
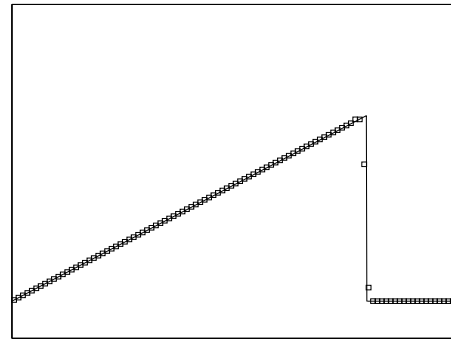

 $t = 18$ 

 $t = 40$ 

 $t = 90$ 

 $t = 160$ 

Рис. 1.8. Численное решение для теста «прямоугольник»

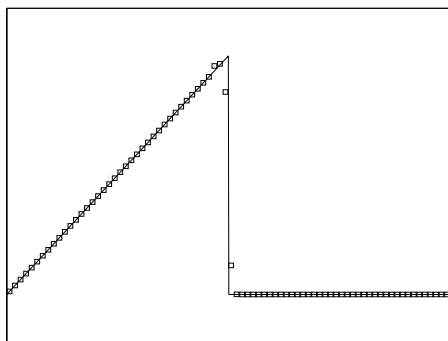
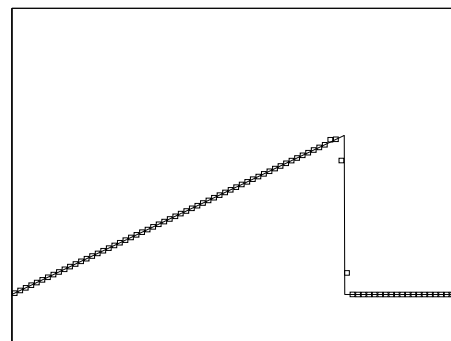

 $t = 60$ 

 $t = 160$ 

Рис. 1.9. Численное решение для теста «левый треугольник»

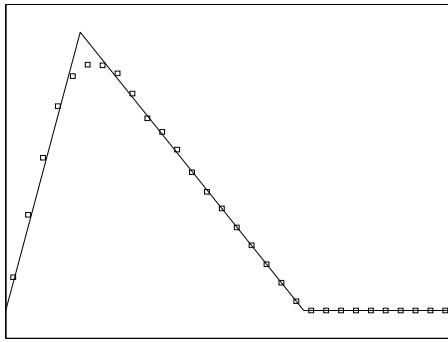
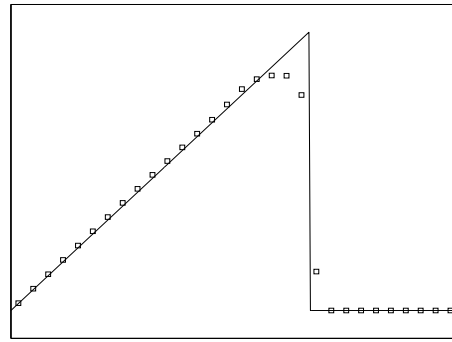

 $t = 5$ 

 $t = 20$ 

Рис. 1.10. Численное решение для теста «правый треугольник»

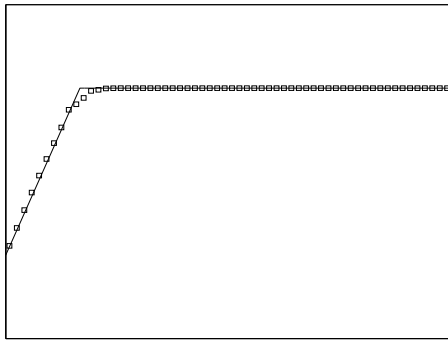
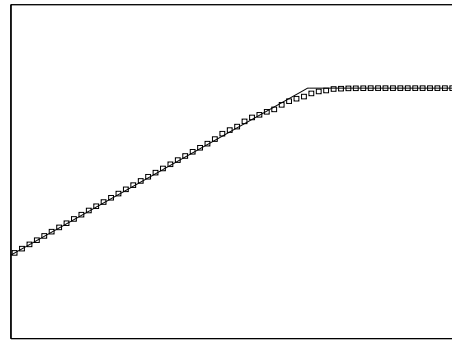

 $t = 10$ 

 $t = 40$ 

Рис. 1.11. Численное решение для теста «ступенька вверх»

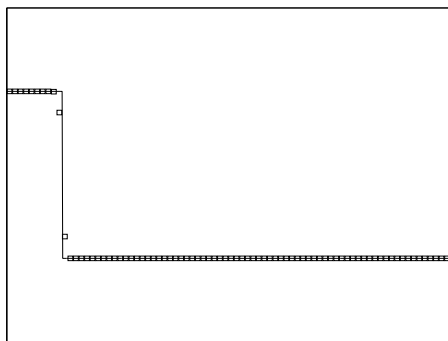
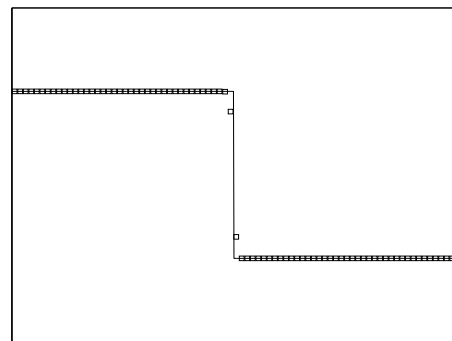

 $t = 20$ 

 $t = 80$ 

Рис. 1.12. Численное решение для теста «ступенька вниз»

## 1.2. Численное моделирование двумерных течений идеального газа на основе RKDG-метода

### 1.2.1. Схема RKDG-метода для гиперболических уравнений

Рассмотрим схему RKDG-метода [19, 21, 24] для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{f}(u) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T] \quad (1.10)$$

с начальным условием

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.11)$$

и необходимыми граничными условиями, где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \equiv (x, y)$  — точка двумерного пространства,  $\Omega$  — двумерная область, в которой ищется решение.

Поскольку RKDG-метод для систем применяется покомпонентно к каждому уравнению системы, достаточно рассмотреть схему метода для случая скалярной функции  $u$ .

Пусть  $T_h$  — правильное разбиение области  $\Omega$ , т. е. такое ее разбиение на непересекающиеся конечные элементы (ячейки), что любые две ячейки имеют либо пустое пересечение, либо общее ребро, либо общую вершину. При этом считается, что ячейки покрывают всю расчетную область  $\Omega$ . Введем конечномерное пространство  $V_h$ , в котором будем искать решение задачи

$$V_h = V_h^k \equiv \left\{ v_h \in L_1(\Omega) : v_h|_K \in P^k(K) \ \forall K \in \Omega \right\},$$

где  $P^k(K)$  — пространство полиномов степени не выше  $k$  на  $K \in \Omega$ .

Умножим уравнение (1.10) на произвольную функцию  $v_h \in V_h$  и проинтегрируем по элементу  $K$  из разбиения  $T_h$ . Точное решение  $u$  заменим приближенным  $u_h \in V_h$ . После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K u_h(\mathbf{x}, t) v_h(\mathbf{x}) dV + \sum_{e \in \partial K} \int_e \mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_{e,K} v_h(\mathbf{x}) d\Gamma - \\ - \int_K \mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \operatorname{grad} v_h(\mathbf{x}) dV = 0, \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}_{e,K}$  — внешняя единичная нормаль к ребру  $e$ . Заметим, что величина  $\mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_{e,K}$ , вообще говоря, может быть разрывной при  $\mathbf{x} \in e \subset \partial K$ .

Поэтому эту величину следует заменить функцией  $h_{e,K} \left( u_h^{int(K)}, u_h^{ext(K)} \right)$ , зависящей от значений приближенного решения по обе стороны ребра, где  $h_{e,K}(\cdot, \cdot)$  — произвольная функция монотонного численного потока, соответствующая  $\mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}_{e,K}$ . В качестве численного потока может быть использован поток HLLC, Лакса–Фридрихса и другие [18]. Они определяются из приближенного решения задачи Римана (если используемый численный поток — годуновского типа) или каким-либо другим способом [15].

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K u_h(\mathbf{x}, t) v_h(\mathbf{x}) dV + \sum_{e \in \partial K} \int_e h_{e,K} \left( u_h^{int(K)}, u_h^{ext(K)} \right) v_h(\mathbf{x}) d\Gamma - \\ - \int_K \mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \text{grad } v_h(\mathbf{x}) dV = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Интегралы в последнем уравнении заменяем квадратурными формулами нужного порядка.

Введем в области  $\Omega$  некоторую треугольную сетку и зададим на каждом из треугольников  $K$  систему базисных функций. В простейшем случае кусочно-линейных базисных функций (и, соответственно, методе второго порядка аппроксимации) они строятся следующим образом. Пусть  $\mathbf{m}_i$  — центр  $i$ -го ребра треугольника. Тогда базисная функция  $\varphi_i(\mathbf{x})$  — линейная функция в пределах каждого треугольника, принимающая значение 1 в центре  $i$ -го ребра и значение 0 в центрах двух других ребер. Далее в качестве пробной функции  $v_h$  будем использовать базисные функции  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Приближенное решение в треугольнике  $K$  ищем в виде разложения по базису  $\{\varphi_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , т.е.

$$u_h^K(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^3 u_K^i(t) \varphi_i(\mathbf{x}),$$

где  $u_i(t)$  равно значению численного решения в центре  $i$ -го ребра.

Матрица Грама системы  $\{\varphi_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  является диагональной, т. е.

$$\mathbf{M} = \frac{|K|}{3} \text{diag}(1, 1, 1),$$

где  $|K|$  — площадь треугольника  $K$ , что позволяет сразу получить явную схему для определения коэффициентов  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

В случае линейной аппроксимации для вычисления интегралов следует воспользоваться квадратурными формулами типа центральных прямоугольников и Гаусса:

$$\int_K g(\mathbf{x}) dV \approx \frac{|K|}{3} \sum_{i=1}^3 g(\mathbf{m}_i), \quad \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Окончательно задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $u_i(t)$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{|K|}{3} \frac{du_K^i(t)}{dt} &= \int_K \mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \text{grad } \varphi_i(\mathbf{x}) dV - \\ &\quad - \sum_{e \in \partial K} \int_e h_{e,K} \left( u_h^{int(K)}, u_h^{ext(K)} \right) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma; \\ u_K^i(0) &= \frac{3}{|K|} \int_K u_0(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) dV, \quad \forall K \in T_h, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_K}{dt} &= \mathbf{L}_h(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N(K)}), \quad t \in (0, T]; \\ \mathbf{u}_K|_{t=0} &= \mathbf{u}_K^0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u}_K = [u_K^1, u_K^2, u_K^3]^T$  — вектор коэффициентов разложения в треугольнике  $K$ ,  $\mathbf{u}_K^0 = [u_K^1(0), u_K^2(0), u_K^3(0)]^T$ , а  $\mathbf{u}_{N(K)}$  — вектор коэффициентов разложения в треугольниках, соседних с треугольником  $K$ .

Пусть  $\{t^n\}$ ,  $n = 0, \dots, M$  — разбиение отрезка  $[0, T]$ ,  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ . Для решения системы воспользуемся явным методом Рунге – Кутты порядка  $(k+1)$  [14], применяя на каждом промежуточном шаге специальный ограничитель, что обеспечивает монотонность схемы. Тогда RKDG-метод записывается следующим образом:

$$\forall n = 0, \dots, M-1:$$

$$\text{а) } \mathbf{u}_K^{(0)} = \mathbf{u}_K^n;$$

$$\text{б) } \forall i = 1, \dots, k+1: \mathbf{u}_K^{(i)} = \Lambda \Pi_h \left\{ \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} \mathbf{u}_K^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n \mathbf{L}_h(\mathbf{u}_K^{(l)}, \mathbf{u}_{N(K)}^{(l)}) \right\};$$

$$\text{в) } \mathbf{u}_K^{n+1} = \mathbf{u}_K^{(k+1)},$$



Коэффициенты  $\alpha_{il}$ ,  $\beta_{il}$  должны быть неотрицательными и удовлетворять условиям

$$\sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} = 1, \quad \max_{l=0, \dots, i-1} \frac{\beta_{il}}{\alpha_{il}} = 1, \quad i = 1, \dots, k+1.$$

Перейдем к описанию ограничителя  $\Lambda\Pi_h$  [19], который для кусочно-линейных функций  $u_h$  должен удовлетворять следующим условиям.

1. Точность: если  $u_h$  — линейная функция, то  $\Lambda\Pi_h u_h = u_h$ .

2. Сохранение «массы»: для любого элемента  $K \in T_h$

$$\int_K \Lambda\Pi_h u_h dV = \int_K u_h dV.$$

3. Ограничение наклона: на каждом элементе  $K \in T_h$  градиент  $\Lambda\Pi_h u_h$  не должен превышать градиента  $u_h$ .

4. Ограничитель не должен снижать точность метода.

Построим ограничитель на треугольных элементах (см. рис. 1.13).

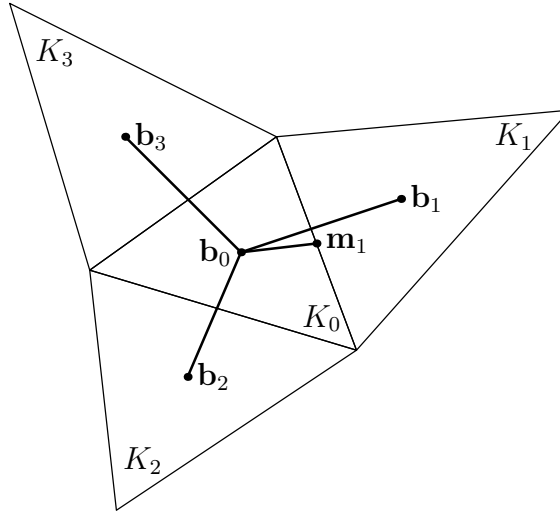


Рис. 1.13. Построение ограничителя

Обозначим через  $\mathbf{b}_i$  центр масс треугольника  $K_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Пусть

$$\mathbf{m}_1 - \mathbf{b}_0 = \alpha_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + \alpha_2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0)$$

для некоторых неотрицательных коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , которые зависят только от геометрии сетки, то для любой линейной функции  $u_h$  справедливо равенство

$$u_h(\mathbf{m}_1) - u_h(\mathbf{b}_0) = \alpha_1(u_h(\mathbf{b}_1) - u_h(\mathbf{b}_0)) + \alpha_2(u_h(\mathbf{b}_2) - u_h(\mathbf{b}_0)).$$

Поскольку для среднего значения линейной функции справедливо

$$\bar{u}_{K_i} = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} u_h dV = u_h(\mathbf{b}_i), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

получаем, что

$$u_h(\mathbf{m}_1) - u_h(\mathbf{b}_0) = \alpha_1(\bar{u}_{K_1} - \bar{u}_{K_0}) + \alpha_2(\bar{u}_{K_2} - \bar{u}_{K_0}).$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(\mathbf{m}_1, K_0) &\equiv u_h(\mathbf{m}_1) - u_h(\mathbf{b}_0), \\ \Delta \bar{u}(\mathbf{m}_1, K_0) &\equiv \alpha_1(\bar{u}_{K_1} - \bar{u}_{K_0}) + \alpha_2(\bar{u}_{K_2} - \bar{u}_{K_0}). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим кусочно-линейную функцию  $u_h$ . Пусть  $\mathbf{m}_i, i = 1, 2, 3$  — центры ребер треугольника  $K_0$ . Тогда для  $\mathbf{x} \in K_0$  можно записать (в фиксированный момент времени  $t$ ):

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 u_h(\mathbf{m}_i) \varphi_i(\mathbf{x}) = \bar{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^3 \tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0) \varphi_i(\mathbf{x}).$$

Для определения  $\Lambda \Pi_h u_h$  вычислим величины

$$\Delta_i = \bar{m}(\tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0), \nu \Delta \bar{u}(\mathbf{m}_i, K_0)),$$

где  $\nu > 1$ , а  $\bar{m}$  — функция «TVB minmod» (в случае TVB-ограничителя) [79]:

$$\bar{m}(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1, & \text{если } |a_1| \leq M(\Delta x)^2; \\ m(a_1, \dots, a_n) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$m(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} s \min(|a_1|, \dots, |a_n|), & \text{если } s = \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_n); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь  $M$  — заданная константа,  $\Delta x$  — характерный шаг сетки. Под последним может пониматься, например, такая величина  $\Delta x$ , что для любой ячейки  $K_i$  сетки справедливо

$$C_1 \Delta x \leq \text{diam}(K_i) \leq C_2 \Delta x,$$

где  $C_1, C_2$  — некоторые константы. В этом случае также говорят, что сетка является квазиравномерной. Именно такие сетки в дальнейшем используются в расчетах.

Если вместо функции  $\bar{m}$  используется функция  $m$ , то получим TVD-ограничитель [80–82].

Далее, если  $\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0$ , то полагаем

$$\Lambda \Pi_h u_h = \bar{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^3 \Delta_i \varphi_i(\mathbf{x}).$$

Иначе, если  $\sum_{i=1}^3 \Delta_i \neq 0$ , то вычисляем

$$\Delta_{\text{pos}} = \sum_{i=1}^3 \max(0, \Delta_i), \quad \Delta_{\text{neg}} = \sum_{i=1}^3 \max(0, -\Delta_i),$$

и полагаем

$$\theta^+ = \min \left( 1, \frac{\Delta_{\text{neg}}}{\Delta_{\text{pos}}} \right), \quad \theta^- = \min \left( 1, \frac{\Delta_{\text{pos}}}{\Delta_{\text{neg}}} \right).$$

Определим величину

$$\tilde{\Delta}_i = \theta^+ \max(0, \Delta_i) - \theta^- \max(0, -\Delta_i).$$

Тогда окончательно получим

$$\Lambda \Pi_h u_h(\mathbf{x}) = \bar{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^3 \tilde{\Delta}_i \varphi_i(\mathbf{x}).$$

Представленный ограничитель удовлетворяет перечисленным выше требованиям.

Как было отмечено ранее, RKDG-метод для систем уравнений применяется покомпонентно к каждому уравнению системы. Пусть система уравнений записана в дивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (1.12)$$

где  $\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_n]^T$  — вектор консервативных переменных, а  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  — тензор потоков, который можно представить в виде  $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\mathbf{F}_1(\mathbf{U}), \mathbf{F}_2(\mathbf{U})]^T$ , где  $\mathbf{F}_1(\mathbf{U}) = [f_{11}(\mathbf{U}), \dots, f_{n1}(\mathbf{U})]$  и  $\mathbf{F}_2(\mathbf{U}) = [f_{12}(\mathbf{U}), \dots, f_{n2}(\mathbf{U})]$ , а  $n$  — размерность системы.

Приближенное решение  $\mathbf{U}_h$  системы (1.12) в каждой ячейке также представляется в виде разложения по некоторому конечноэлементному базису порядка  $k$   $\{\varphi_j\}$ ,  $j = 1, \dots, m$ :

$$\mathbf{U}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{U}_j(t) \varphi_j(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{U}_j(t) = [u_1^j(t), \dots, u_n^j(t)]^T$ , откуда для каждого компонента  $u_l$  вектора  $\mathbf{U}_h$  следует представление

$$u_{hl}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^m u_l^j(t) \varphi_j(\mathbf{x}). \quad (1.13)$$

В покомпонентной записи система уравнений (1.12) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{f}_1(\mathbf{U}) &= 0, \\ \dots \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{f}_l(\mathbf{U}) &= 0, \\ \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{f}_n(\mathbf{U}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{f}_l(\mathbf{U}) = [f_{l1}(\mathbf{U}), f_{l2}(\mathbf{U})]^T$  — вектор потоков  $l$ -го уравнения системы (1.14).

Домножив каждое уравнение системы (1.14) на базисную функцию  $\varphi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$  и проинтегрировав результат по ячейке  $K$  заданной расчетной сетки, с учетом представления решения (1.13) получим систему ОДУ для определения неизвестных коэффициентов разложения  $u_l^j$ ,  $l = 1, \dots, n$ , :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{du_l^j(t)}{dt} \int_K \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) dV &= \int_K \mathbf{f}_l(\mathbf{U}_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \operatorname{grad} \varphi_i(\mathbf{x}) dV - \\ &- \sum_{e \in \partial K} \int_e h_{e,K}^l \left( \mathbf{U}_h^{int(K)}, \mathbf{U}_h^{ext(K)} \right) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma; \quad (1.15) \\ \sum_{j=1}^m u_k^j(0) \int_K \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) dV &= \int_K u_{0k}(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) dV, \quad \forall K \in T_h. \end{aligned}$$

Для решения системы (1.15) используется явный  $(k+1)$ -шаговый метод Рунге-Кутты, что в результате дает RKDG-метод  $(k+1)$ -го порядка аппроксимации по пространству и времени (при  $k \leq 4$ ). На каждом промежуточном

шаге метода Рунге–Кутты применяется процедура монотонизации решения, которая реализуется для проекции приближенного решения на пространство кусочно-линейных функций. В случае систем уравнений ограничитель формулируется в локальных характеристических переменных, вычисленных относительно вектора решения  $\hat{\mathbf{U}}$  в координатах  $(x', y')$ , в которых ось  $x'$  совпадает по направлению с вектором

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0}{|\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0|} = [\cos \alpha, \sin \alpha],$$

тогда

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{T}(\alpha) \cdot \mathbf{U},$$

где  $\mathbf{T}(\alpha)$  — матрица поворота на угол  $\alpha$ .

Затем вычисляется разложение матрицы Якоби в точке  $\bar{\mathbf{U}}_{K_0}$ , соответствующей среднему значению решения  $\hat{\mathbf{U}}$  в ячейке  $K_0$ :

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}}_{K_0}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(\bar{\mathbf{U}}_{K_0}) = \mathbf{R}(\bar{\mathbf{U}}_{K_0}) \cdot \mathbf{D}(\bar{\mathbf{U}}_{K_0}) \cdot \mathbf{L}(\bar{\mathbf{U}}_{K_0}),$$

где матрица  $\mathbf{R}$  состоит из правых собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1}$ , а  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  — диагональная матрица собственных чисел матрицы  $\mathbf{A}$ . Локальные характеристические переменные  $\tilde{\mathbf{U}}$  вычисляются путем домножения вектора  $\hat{\mathbf{U}}$  слева на матрицу  $\mathbf{L}$  [15, 19]:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{U}}.$$

Далее ограничитель определяется для каждого компонента вектора  $\tilde{\mathbf{U}}$  точно так же, как и в случае скалярного уравнения, а после его применения осуществляется обратный переход к исходным переменным  $\mathbf{U}$ .

### 1.2.2. Численное решение уравнений Эйлера

#### Система уравнений Эйлера

Запишем нестационарную систему Эйлера уравнений газовой динамики, описывающую двумерные течения идеального нетеплопроводного газа [1, 2, 15, 18]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I}) &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}[(E + p) \mathbf{v}] &= 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Здесь  $t$  — время;  $(x, y)$  — декартовы координаты точки пространства;  $\rho = \rho(x, y, t)$  — плотность среды;  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t) = [u, v]^T$  — скорость движения газа;  $\mathbf{I} = \text{diag}[1, 1]$  — единичный тензор размерности 2;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $E = \rho\varepsilon + 0,5\rho(u^2 + v^2)$  — полная энергия единицы объема;  $p = p(\rho, \varepsilon)$  — давление.

Систему (1.16) следует дополнить уравнением состояния. Будем рассматривать случай идеального совершенного газа:  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ , где  $\gamma > 1$  — показатель адиабаты.

При решении тестовых задач использованы безразмерные переменные

$$\tilde{x} = x/L, \quad \tilde{y} = y/L, \quad \tilde{\rho} = \rho/\rho_0, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/V_0, \quad \tilde{t} = V_\infty t/L,$$

где  $L$  — характерный размер задачи, а  $\rho_0$  и  $V_0$  — характерные плотность и скорость, соответственно. Исходные параметры задач даны в безразмерных величинах, при этом знак « $\sim$ » над ними опущен.

## Тестирование RKDG-метода второго порядка

### Задача 1: течение газа в канале со ступенькой

Расчетная область (рис. 1.14) представляет собой прямоугольник шириной 1 и длиной 3; на расстоянии 0,6 от левой границы канала начинается ступенька высотой 0,2, продолжающаяся до правой границы.

Набегающий поток газа — сверхзвуковой (число Маха  $M = 3$ ). Движущийся в трубе газ считается идеальным, а его показатель адиабаты  $\gamma = 7/5$ .

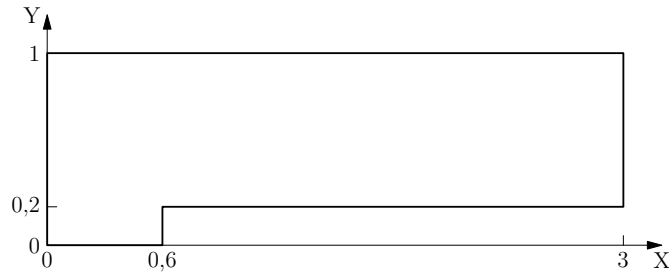


Рис. 1.14. Расчетная область

Начальные условия:  $\rho_0 = 0,5$ ,  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,  $E_0 = 0,125$ .

Граничные условия:

- на левой границе канала — условие свободного втекания, при этом  $\rho = 1$ ,  $u = 3$ ,  $v = 0$ ,  $E = 6,286$ ,  $p = 1/\gamma$ ;

- на правой границе задание граничных условий не требуется, так как поток газа является сверхзвуковым; тем не менее, при расчетах необходимо использовать условие свободного вытекания, задаваемое в виде  $\rho_F = \rho_B$ ,  $u_F = u_B$ ,  $v_F = v_B$ ,  $p_F = p_B$ , где индексами  $B$  и  $F$  обозначены граничная и соответствующая фиктивная ячейки;
- на нижней и верхней границах, включая ступеньку, — условие непротекания, характеризующееся равенством нулю нормального компонента скорости.

Постановка задачи и ряд примеров ее решения приведены в [84, 85]. Результаты многочисленных вычислительных экспериментов показывают, что в данном течении образуется ударная волна, которая последовательно отражается от ступеньки и от стенок канала. После отражения от ступеньки образуется ударная волна в виде колокола, которая при взаимодействии с верхней стенкой приводит к появлению так называемой «ножки Маха» и контактного разрыва, в котором может развиваться неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Различные численные методы оцениваются исходя из качества разрешения этих структур.

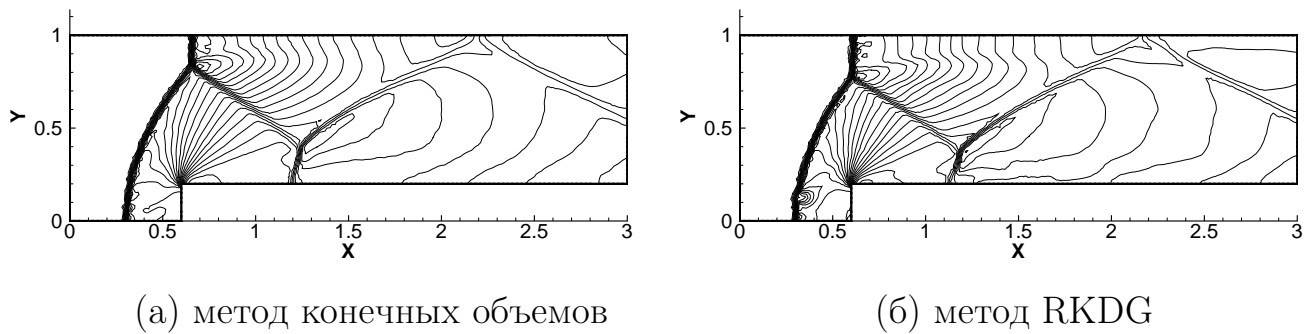


Рис. 1.15. Результаты расчетов с использованием потока HLLC на сетке 1/40

Рис. 1.15–1.17 изображают 20 линий уровня плотности. Представлены результаты расчетов разными численными методами и на различных сетках: методом конечных объемов (МКО) с потоками КИР, Лакса-Фридрикса, HLL и HLLC, а также RKDG-методом с потоками Лакса-Фридрикса и HLLC. Расчеты, проведенные методом RKDG, получены с использованием TVD-ограничителя. Применение TVB-ограничителя дает схожие результаты. Рассмотрена кусочно-линейная аппроксимация решения.

На рис. 1.15–1.17 приведены расчеты для сетки, в которой на единицу

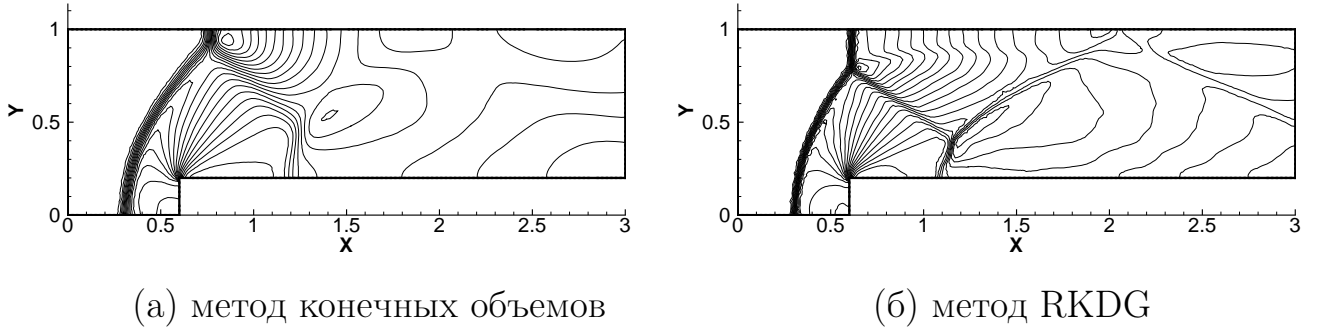


Рис. 1.16. Результаты расчетов с использованием  
потока Лакса-Фридрихса на сетке 1/40

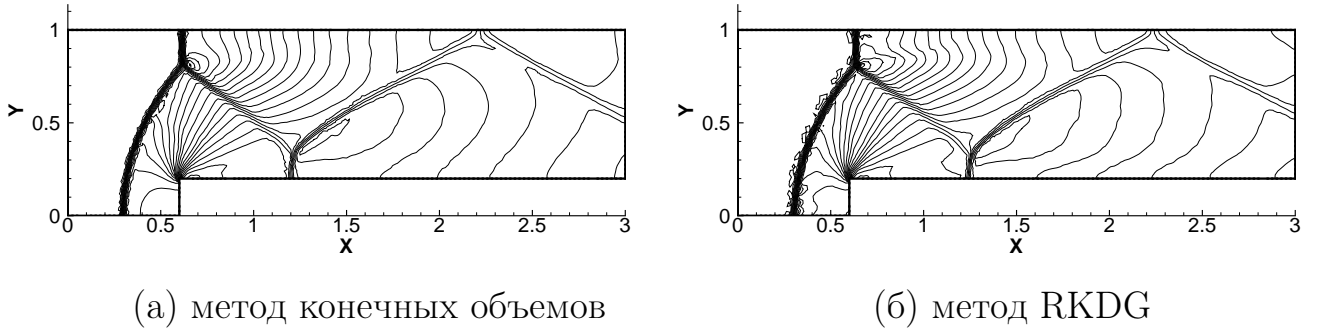


Рис. 1.17. Результаты расчетов с использованием  
потоков HLL и КИР на сетке 1/40

длины по оси  $Y$  приходится приблизительно 40 треугольников. В расчетах используются квазиравномерные сетки. По построению треугольники сетки имеют диаметры одного порядка и близки к правильным, поэтому шаг сетки на границе расчетной области можно характеризовать длиной ребра треугольника. В этом смысле мы и будем говорить «сетка 1/40» и т. д. Сетка содержит 13 574 ячейки и 6949 узлов. Представленные результаты соответствуют моменту времени  $t = 4$ .

Результаты вычислений, представленные на рис. 1.15–1.17, показывают, что качество вычислений в сильной степени зависит от метода расчета. Так, везде наблюдается ударная волна в виде так называемого «колокола». В МКО с потоком Лакса-Фридрихса фронт ударной волны «размазан» на 5 вычислительных ячеек, в МКО с потоком КИР — примерно на 3, в МКО с потоком HLLC — на 2–3 вычислительные ячейки, а в МКО с потоком HLL — на 3. В RKDG-методе фронт «размазан» на 2–3 вычислительных ячейки вне зависимости от используемого потока. Причиной сильного «размазывания» решения, вычисленного с использованием МКО с потоком Лакса-Фридрихса,



является его (метода) значительная, по сравнению с другими, численная вязкость. Как показывают расчеты МКО с потоком Лакса–Фридрихса, при измельчении сетки до 320 ячеек на единицу длины по вертикали контуры набегающей и отраженной волн, а также «ножки Маха», становятся отчетливыми. Сравнение же с другими методами (RKDG, МКО с потоками HLL, HLLC и КИР) показывает, что даже для достаточно грубой сетки очертания набегающей и отраженной волн, а также «ножки Маха», отчетливо видны из-за малой численной вязкости приведенных выше схем.

Приведем результаты расчетов, выполненных с помощью МКО с потоком HLLC и RKDG с потоком HLLC на более подробной сетке, где на единицу длины по оси  $Y$  приходится 80 треугольников. Эта сетка состоит из 55 314 элементов и 27 979 узлов. Представленные результаты также соответствуют моменту времени  $t = 4$ .

Сравним рис. 1.15(б) и 1.18(а). Они соответствуют одному и тому же моменту времени  $t = 4$ , но рассчитаны на разных сетках и разными методами. На рис. 1.15(б) представлен расчет на сетке  $1/40$  RKDG-методом с потоком HLLC, тогда как на рис. 1.18(а) сетка мельче —  $1/80$ , а расчеты выполнены с использованием МКО с потоком HLLC. Необходимо отметить, что все структуры, передаваемые HLLC методом на сетке  $1/80$ , отчетливо передаются с использованием RKDG-метода и на сетке  $1/40$ , т.е. на более грубой сетке.

Наилучшее качество решения достигается при использовании RKDG-метода с потоком HLLC и TVB-ограничителем на сетке  $1/80$  (рис. 1.18(б)).

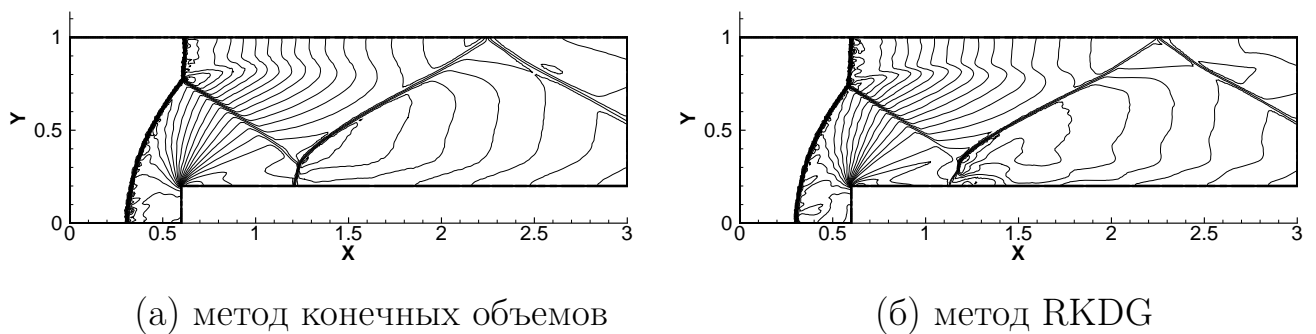


Рис. 1.18. Результаты расчетов с использованием потока HLLC на сетке  $1/80$

Расчет с использованием каждого из приведенных методов проводился до  $t_{\max} = 4$ . Для достижения такого момента времени требовалось 40 000 временных слоев. Отметим, что при использовании мелкой сетки время вычислений

достаточно велико, в особенности при расчетах методом RKDG.

Расчеты RKDG-методом, дающие приемлемую точность на сравнительно грубых сетках, позволяют проанализировать процесс распространения газа в канале. На рисунках представлена картина распространения ударной волны, движущейся слева направо и последовательно отражающейся от стенок (границ вычислительной области). Расчеты, результаты которых приведены на рис. 1.19–1.27, получены методом RKDG с потоком HLLC на сетке  $1/80$ .

На рис. 1.19–1.20 ударная волна движется к правой границе канала, а также появляется волна, отраженная от ступеньки.

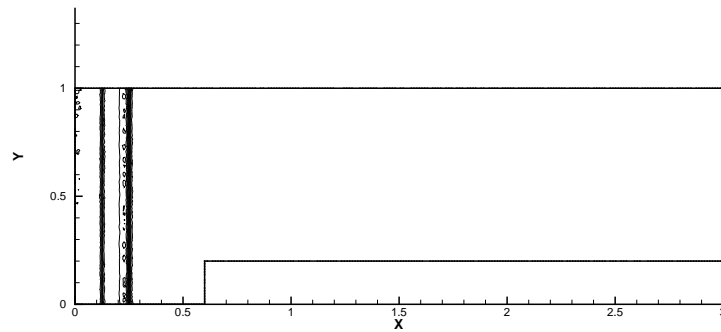


Рис. 1.19. Решение в момент времени  $t = 0,1$

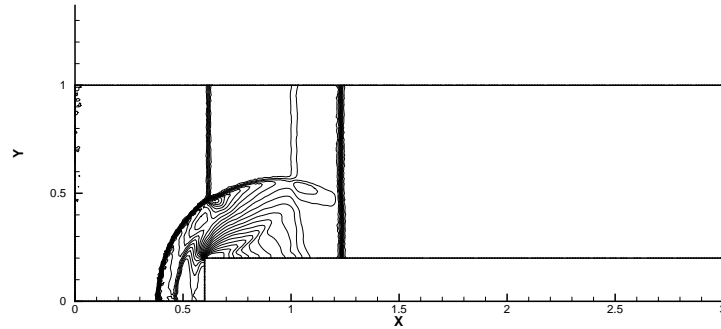


Рис. 1.20. Решение в момент времени  $t = 0,5$

На рис. 1.21 ударная волна приближается к правой границе. Появляется волна, отраженная от верхней границы канала.

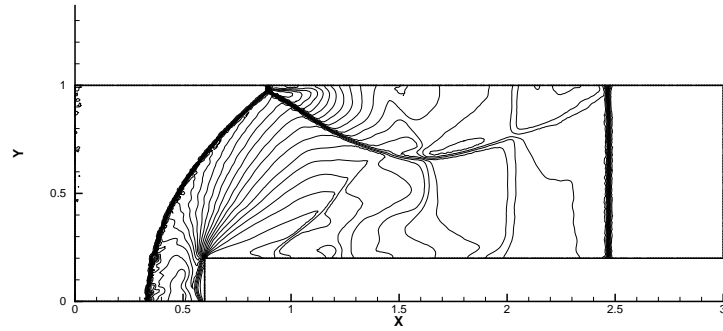


Рис. 1.21. Решение в момент времени  $t = 1,0$

На рис. 1.22–1.23 продолжается формирование отраженных ударных волн. Заметно появление «ножек Маха» и контактного разрыва.

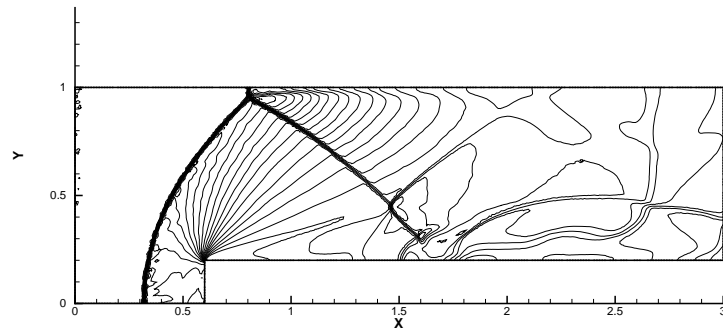


Рис. 1.22. Решение в момент времени  $t = 1,5$

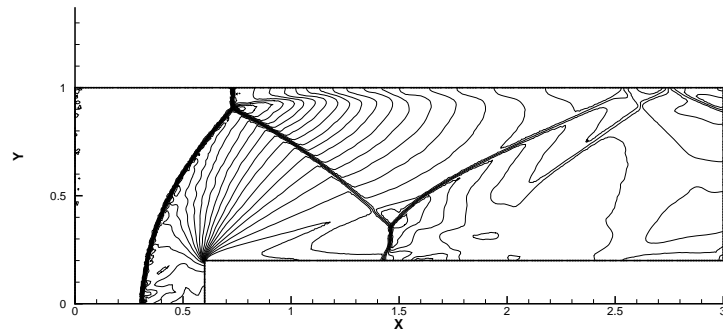


Рис. 1.23. Решение в момент времени  $t = 2,0$

На рис. 1.24–1.27 завершается формирование последней отраженной ударной волны и контактного разрыва.

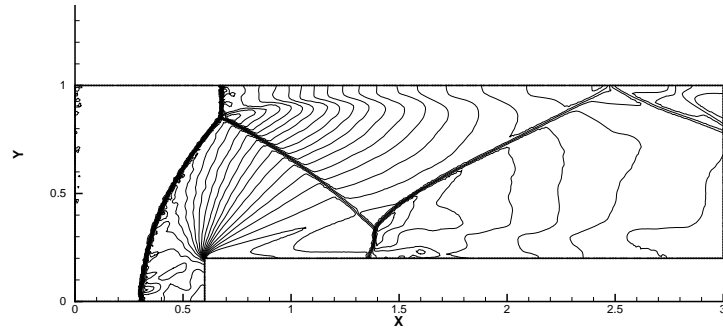


Рис. 1.24. Решение в момент времени  $t = 2,5$

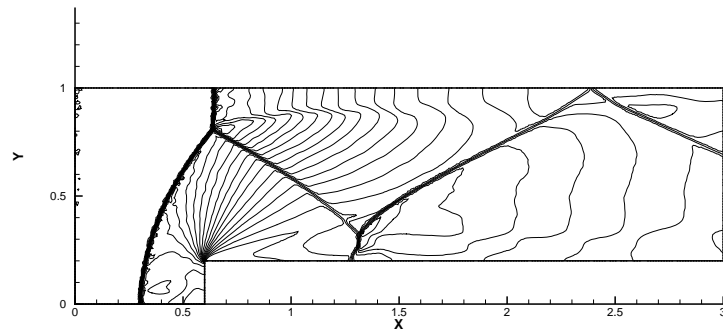


Рис. 1.25. Решение в момент времени  $t = 3,0$

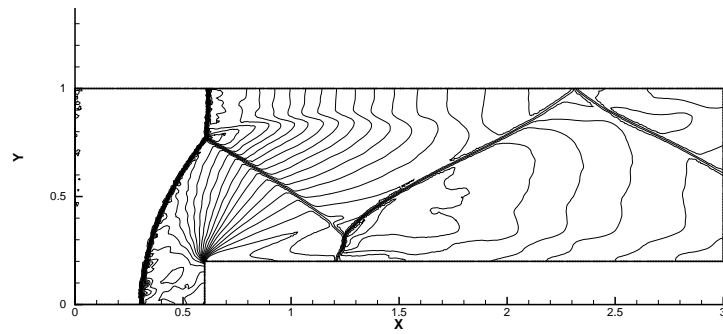


Рис. 1.26. Решение в момент времени  $t = 3,5$

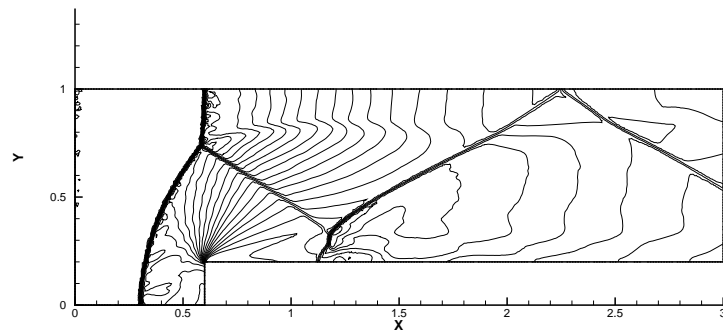


Рис. 1.27. Решение в момент времени  $t = 4,0$

## Задача 2: распространение ударной волны в канале клинообразной формы

Область представляет собой канал формы клина (рис. 1.28) размером  $3,2 \times 2,2$  в координатах  $(x, y)$ . Начальное условие задается в виде ударной волны, фронт которой расположен на прямой  $x = 0,15$ , клин находится на расстоянии  $0,2$  по оси  $x$ , угол  $\varphi = 30^\circ$ . Число Маха ударной волны равно  $M_S = 10$ . Параметры течения за фронтом волны следуют из условий Гюгонио [83].

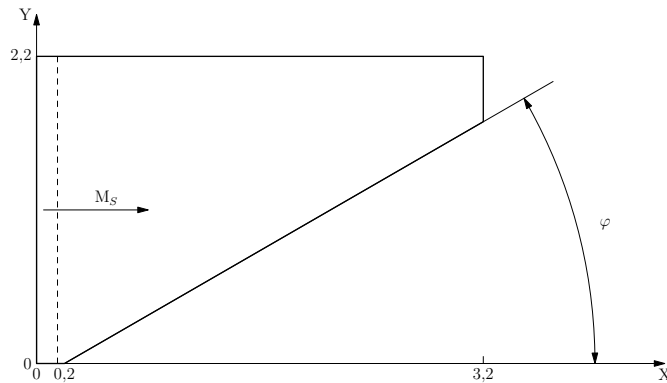


Рис. 1.28. Расчетная область

Начальные условия: при  $x < 0,15$   $\rho_0 = 8$ ,  $u_0 = 8,25$ ,  $v_0 = 0$ ,  $E_0 = 563,5$ , в противном случае  $\rho_0 = 1,4$ ,  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,  $E_0 = 2,5$ .

Граничные условия:

- на левой границе канала — условие свободного втекания, при этом  $\rho = 8$ ,  $u = 8,25$ ,  $v = 0$ ,  $E = 563,5$ ;
- на правой — условие свободного вытекания, задаваемое в виде  $\rho_F = \rho_B$ ,  $u_F = u_B$ ,  $v_F = v_B$ ,  $p_F = p_B$ , где индексами  $B$  и  $F$  обозначены граничная и соответствующая ей фиктивная ячейки;
- на нижней и верхней границах, включая клин, — условие непротекания, характеризующееся равенством нулю нормального компонента скорости.

Постановку задачи и ряд примеров ее решения см. в [15, 84, 85]. Поскольку падающая ударная волна достаточно сильна, наблюдается так называемое нерегулярное маховское отражение. Углы наклона падающей и отраженной ударных волн к поверхности клина не равны между собой, так как явление в целом нелинейно. Характерная особенность картины состоит в том, что отраженная ударная волна над клином состоит из прямолинейной и криволинейной частей. Двойное отражение Маха содержит как устойчивую, так

и неустойчивую структуры. Изогнутая ударная волна, растягивающаяся по всей вычислительной области, быстро движется в ее правый конец и совсем не движется в левый. Третья ударная волна — маховская ножка — идет практически под углом  $90^\circ$  к поверхности и в тройной точке пересекается с падающей и отраженной ударными волнами. Наиболее сложным является правильное численное моделирование контактных разрывов, поэтому сравнение схем целесообразно проводить исходя из качества разрешения данных структур.

На рис. 1.29–1.36 представлены 30 линий уровня плотности, демонстрирующих конфигурацию ударной волны в канале клинообразной формы, рассчитанную с помощью методов RKDG и МКО с потоками HLLC и Лакса–Фридрикса на различных сетках, полученных с помощью MatLab. Для каждого численного метода результаты представлены на сетках  $1/30$  и  $1/60$  (здесь в знаменателе дроби указано количество треугольников на единицу длины по оси  $Y$ ), а для RKDG-метода также на сетке  $1/120$ . Момент времени  $t$  для всех результатов равен  $0,2$ .

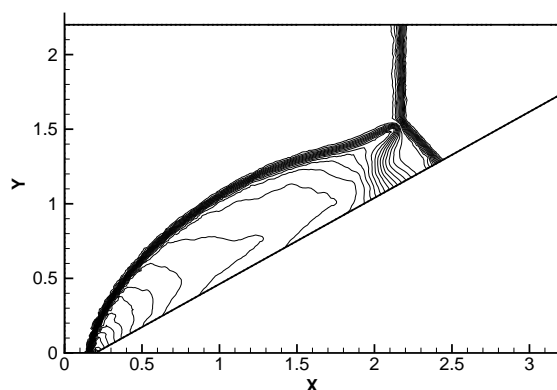


Рис. 1.29. Расчет с помощью МКО с потоком HLLC (сетка  $1/30$ )

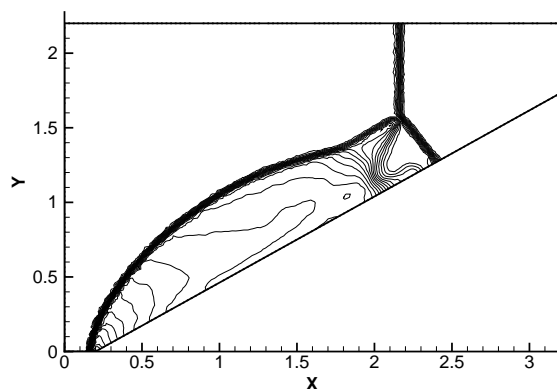


Рис. 1.30. Расчет методом RKDG с потоком HLLC (сетка  $1/30$ )

Рассмотрим рис. 1.30, 1.31, 1.35, 1.36. Поток, сформированный двойным отражением Маха, остается неразрешенным при расчетах с помощью МКО с потоком Лакса–Фридрихса и HLLC на сетке 1/60. В то же время RKDG-метод с теми же потоками позволяет увидеть эту структуру уже на сетке 1/30, что свидетельствует о более высоком порядке аппроксимации RKDG-метода. Наилучшее качество решения достигается при использовании RKDG-метода с потоком HLLC на сетке 1/120 (рис. 1.33).

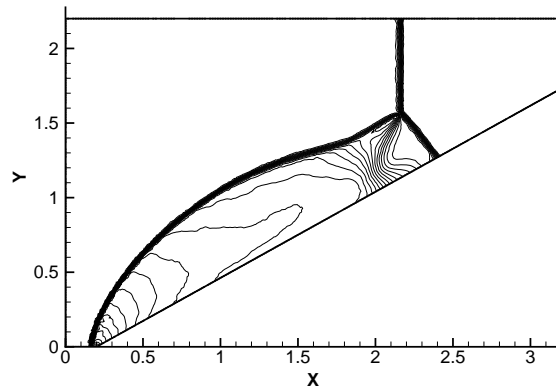


Рис. 1.31. Расчет с помощью МКО с потоком HLLC (сетка 1/60)

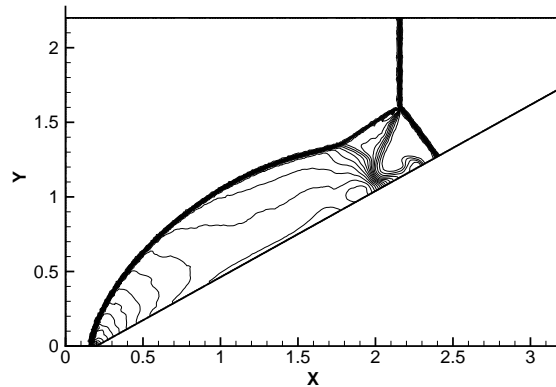


Рис. 1.32. Расчет методом RKDG с потоком HLLC (сетка 1/60)

Проанализируем процесс распространения газа. Картина течения линейно расширяется со временем, начиная с момента контакта ударной волны с клином.

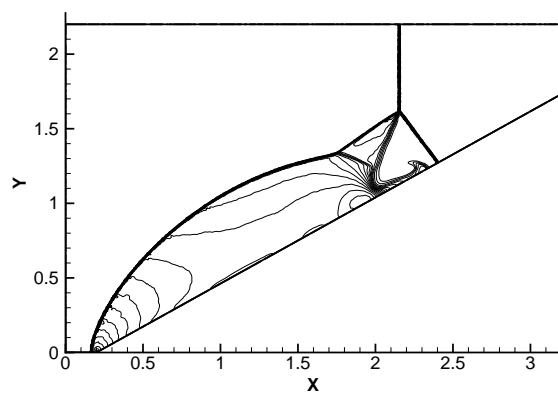


Рис. 1.33. Расчет методом RKDG с потоком HLLC (сетка 1/120)

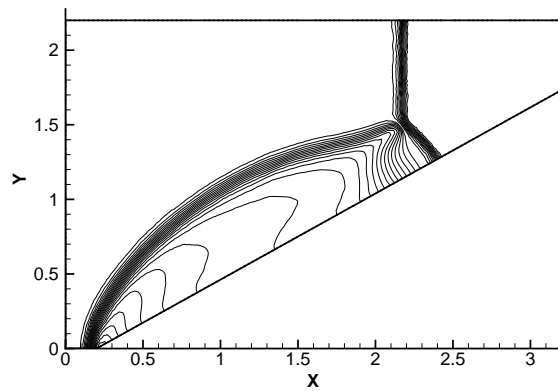


Рис. 1.34. Расчет с помощью МКО с потоком Лакса-Фридрихса (сетка 1/30)

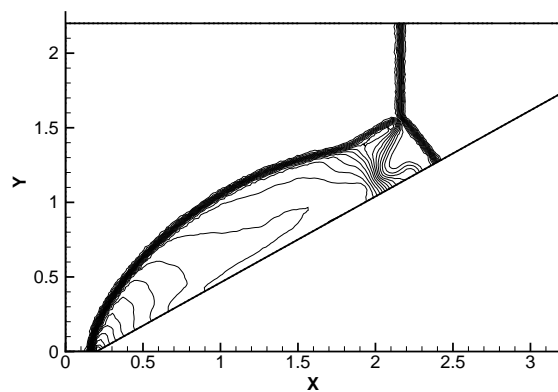


Рис. 1.35. Расчет методом RKDG с потоком Лакса-Фридрихса (сетка 1/30)



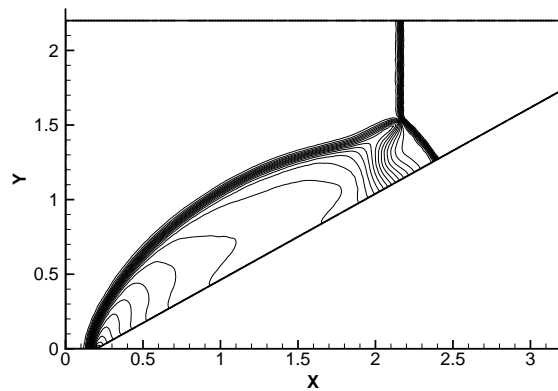
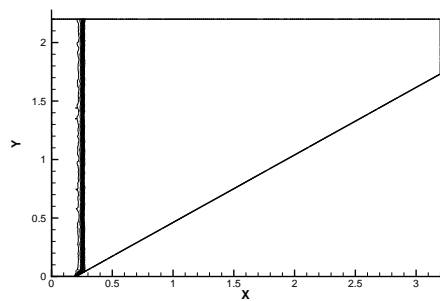
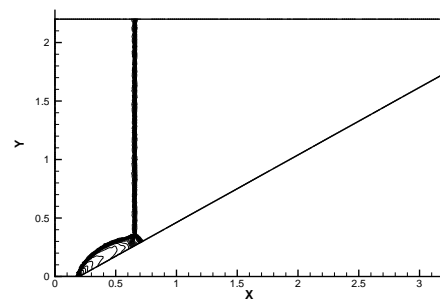


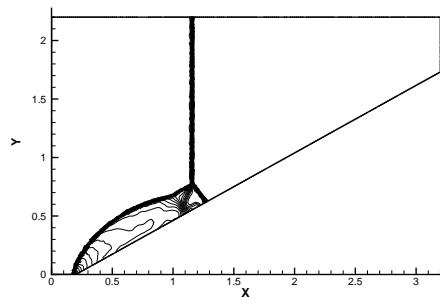
Рис. 1.36. Расчет с помощью МКО с потоком Лакса-Фридрихса (сетка 1/60)



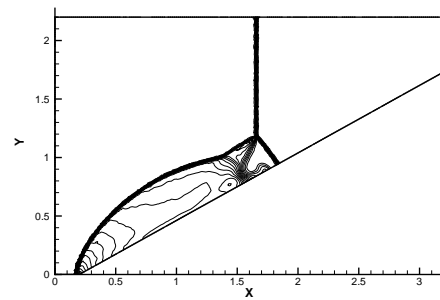
$t = 0,01$



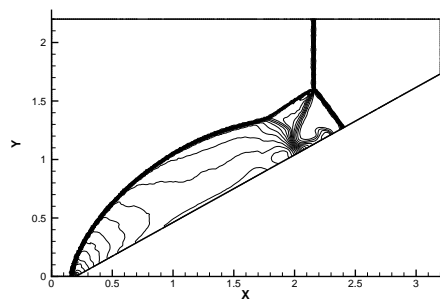
$t = 0,05$



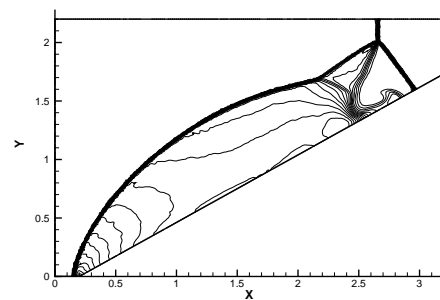
$t = 0,1$



$t = 0,15$



$t = 0,2$



$t = 0,25$

Рис. 1.37. Распространение газа в канале клинообразной формы

## Тестирование RKDG-метода третьего порядка

Рассмотрим двумерную схему RKDG-метода третьего порядка для уравнений Эйлера, соответствующую кусочно-квадратичной аппроксимации решения на треугольных сетках, на примере уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{f}(u) &= 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T]; \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega\end{aligned}$$

с необходимыми граничными условиями, где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \equiv (x, y)$ .

В этом случае решение внутри каждой треугольной вычислительной ячейки представляет собой квадратичную функцию и может быть записано в виде разложения по конечноэлементному базису второго порядка внутри рассматриваемого треугольника. Результатом такого пространственного представления решения является система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных коэффициентов разложения по квадратичному базису, для решения которой используется трехшаговый метод Рунге–Кутты. Теоретические и численные исследования порядка RKDG-схемы свидетельствуют о том, что в этом случае результирующая схема обладает третьим порядком аппроксимации по пространству и по времени [19, 20].

Для построения квадратичного базиса внутри каждого из треугольников сетки используется шесть точек: три вершины треугольника и три центра его ребер. Пусть точки  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  пронумерованы так, что точки с номерами 1–3 соответствуют вершинам треугольника, а точки с номерами 4–6 — центрам ребер. Тогда базисная функция  $\xi_i$  принимает значение 1 в точке  $\mathbf{p}_i$  и значение 0 во всех других точках:  $\xi_i(\mathbf{p}_j) = \delta_{ij}$ . Квадратичные базисные функции могут быть получены с использованием координат площади, или барицентрических координат (рис. 1.38) [86, 87]:

$$L_1 = \frac{S_{P23}}{S_{123}}, \quad L_2 = \frac{S_{P13}}{S_{123}}, \quad L_3 = \frac{S_{P12}}{S_{123}},$$

при этом  $L_i(x, y) = \frac{1}{2S_{123}}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)$ ,  $\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$ ,  $\beta_i = y_j - y_k$ ,  $\gamma_i = x_k - x_j$ , где координатами  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$ ,  $(x_k, y_k)$  обозначены различные вершины треугольника. Координаты площади обладают следующим свойством:

$$L_i(x_i, y_i) = 1, \quad L_i(x_j, y_j) = L_i(x_k, y_k) = 0 \text{ при } i \neq j, i \neq k.$$

Тогда квадратичные базисные функции выражаются через координаты площади следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (2L_1 - 1)L_1, & \xi_2 &= (2L_2 - 1)L_2, & \xi_3 &= (2L_3 - 1)L_3, \\ \xi_4 &= 4L_1L_2, & \xi_5 &= 4L_2L_3, & \xi_6 &= 4L_1L_3.\end{aligned}$$

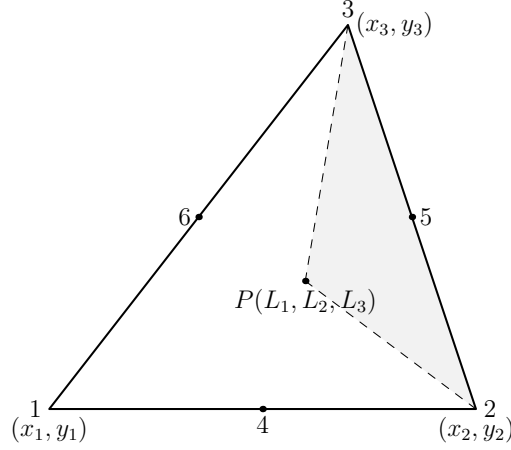


Рис. 1.38. Координаты площади

Численное решение внутри рассматриваемого треугольного элемента представляется в виде разложения по квадратичному базису  $\{\xi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ :

$$u_h^K(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^6 u_K^i(t) \xi_i(\mathbf{x}).$$

Применяя схему RKDG-метода так же, как и в случае кусочно-линейной аппроксимации, получим следующую задачу Коши для системы ОДУ относительно неизвестных коэффициентов разложения  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ :

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^6 \frac{du_K^l(t)}{dt} (\xi_i, \xi_l) &= \int_K \mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \text{grad } \xi_i(\mathbf{x}) dV - \\ &\quad - \sum_{e \in \partial K} \int_e h_{e,K} \left( u_h^{int(K)}, u_h^{ext(K)} \right) \xi_i(\mathbf{x}) d\Gamma; \quad (1.17)\end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^6 u_K^l(0) (\xi_i, \xi_l) = \int_K u_0(\mathbf{x}) \xi_i(\mathbf{x}) dV, \quad \forall K \in T_h, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (1.18)$$

Здесь

$$(\xi_i, \xi_l) = \int_K \xi_i \xi_l dV.$$

Перепишем систему (1.17)–(1.18) в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} &= \mathbf{L}_h(u_h), \quad t \in (0, T], \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_6(t)]^T$  — вектор коэффициентов разложения функции  $u_h(\mathbf{x}, t)$ . Матрица  $\mathbf{M}$  представляет собой матрицу Грама системы базисных функций  $\{\xi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, 6$  с компонентами

$$\mathbf{M} = S_{123} \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & -\frac{1}{180} & -\frac{1}{180} & 0 & -\frac{1}{45} & 0 \\ -\frac{1}{180} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{180} & 0 & 0 & -\frac{1}{45} \\ -\frac{1}{180} & -\frac{1}{180} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{45} & \frac{8}{45} & \frac{4}{45} & \frac{4}{45} \\ -\frac{1}{45} & 0 & 0 & \frac{4}{45} & \frac{8}{45} & \frac{4}{45} \\ 0 & -\frac{1}{45} & 0 & \frac{4}{45} & \frac{4}{45} & \frac{8}{45} \end{bmatrix}$$

Матрица  $\mathbf{M}$  имеет размерность  $6 \times 6$ , поэтому компоненты обратной к ней матрицы могут быть легко получены аналитически, и систему ОДУ для определения неизвестных коэффициентов разложения  $\mathbf{u}(t)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{L}_h(u_h), \quad t \in (0, T], \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{u}_0.\end{aligned}$$

Для аппроксимации интегралов по ребру треугольника в (1.17) используются трехточечные квадратурные формулы Гаусса, а для вычисления двойных интегралов по элементу — семиточечные квадратурные формулы Гаусса на треугольнике.

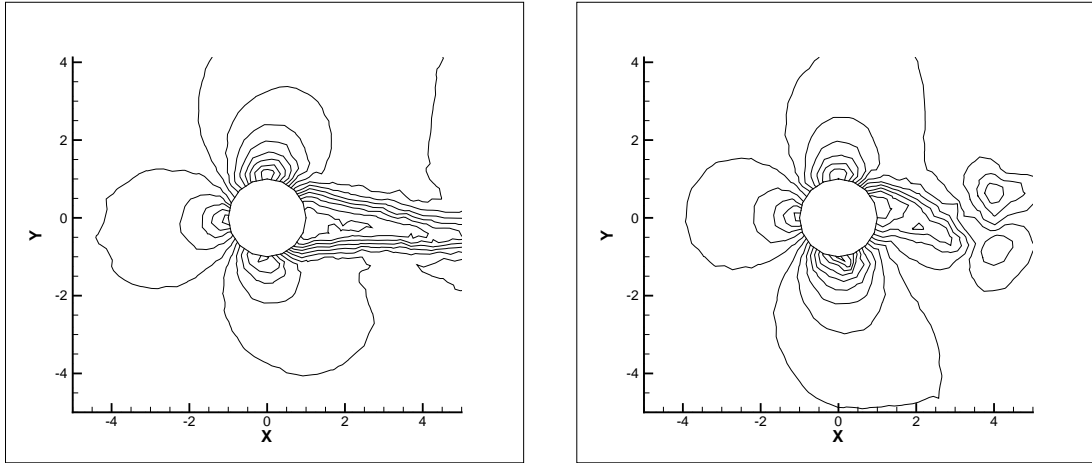
Для решения полученной системы ОДУ, следующей из кусочно-квадратичного представления решения по пространству, должен быть использован метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности, обладающий TVD-свойством [82]. На каждом промежуточном шаге метода, как и при кусочно-линейной пространственной аппроксимации решения, должна применяться специальная процедура монотонизации решения, алгоритм которой строится аналогично описанному ранее для кусочно-линейных функций. Монотонизация базируется на предположении, что осцилляция решения полностью содержится в

кусочно-квадратичном решении только если она присутствует в его линейной части. Поэтому монотонизация проводится в два этапа: сначала вычисляется проекция численного решения  $u_h$  на пространство кусочно-линейных функций, которую обозначим  $u_h^1$ . Затем к функции  $u_h^1$  применяется лимитер, построенный ранее для кусочно-линейных функций, кусочно-линейную часть решения после монотонизации обозначим  $v_h^1$ . Далее, если в рассматриваемом треугольнике выполняется равенство  $u_h^1 = v_h^1$ , то, согласно предположению, нефизическая осцилляция отсутствует, поэтому соответствующее квадратичное решение  $u_h$  в этом треугольнике остается без изменения. Если же  $u_h^1 \neq v_h^1$ , то это означает наличие нефизической осцилляции в решении, в таком случае полагают  $u_h = v_h^1$ .

Для демонстрации различий между решениями системы уравнений Эйлера, полученными с помощью RKDG-метода с кусочно-линейной и кусочно-квадратичной пространственной аппроксимацией решения, рассмотрим следующую тестовую задачу [19, 20]. В двумерной прямоугольной области размерами  $[-5, 15] \times [-5, 5]$  расположен цилиндр с центром в точке  $(0, 0)$  и диаметром  $d = 2$ . Исследуется обтекание этого цилиндра потоком газа с числом Маха  $M = 0,38$ , в результате которого вокруг цилиндра должна образоваться стационарная симметричная картина обтекания. Качество получаемого численного решения зависит от многих факторов, таких как порядок расчетной схемы, количество отрезков, которыми аппроксимируется круговой контур, качество используемой сетки и др. По степени симметричности, например, линий уровня числа Маха вокруг цилиндра можно судить о точности того или иного численного алгоритма решения уравнений Эйлера.

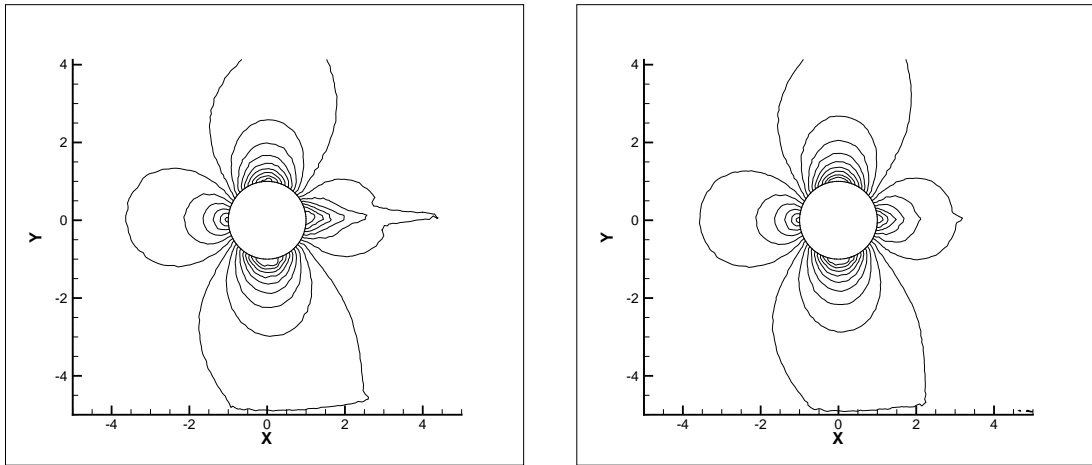
На рис. 1.39–1.40 представлены результаты расчетов, выполненных методом RKDG с кусочно-линейной (а) и кусочно-квадратичной (б) аппроксимацией. Результаты, показанные на рис. 1.39(а,б) получены на одной и той же сетке при использовании 16 точек для аппроксимации контура цилиндра, а результаты на рис. 1.40(а,б) — на другой, более мелкой сетке при использовании 128 точек на цилиндре. В качестве граничного условия на цилиндре использовано условие непротекания.

Видно, что во всех случаях картина течения, полученная с помощью метода RKDG с кусочно-квадратичным пространственным представлением решения, ближе к симметричной, что говорит о повышении порядка схемы по



(а) линейная аппроксимация      (б) квадратичная аппроксимация

Рис. 1.39. Численное решение при использовании 16 точек на цилиндре



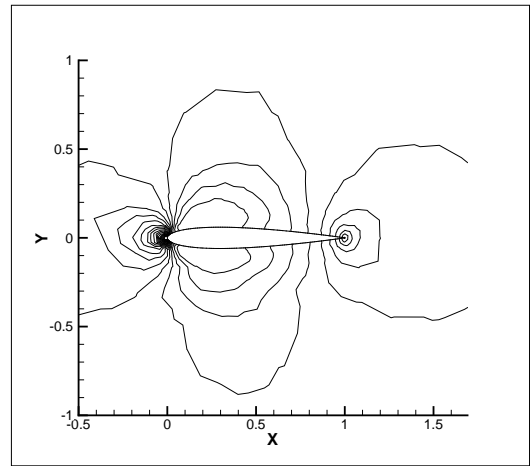
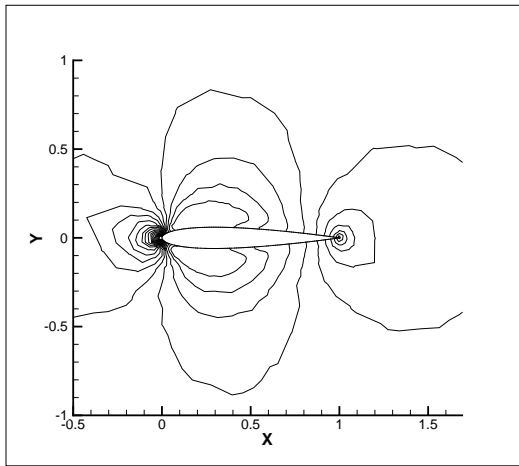
(а) линейная аппроксимация      (б) квадратичная аппроксимация

Рис. 1.40. Численное решение при использовании 128 точек на цилиндре

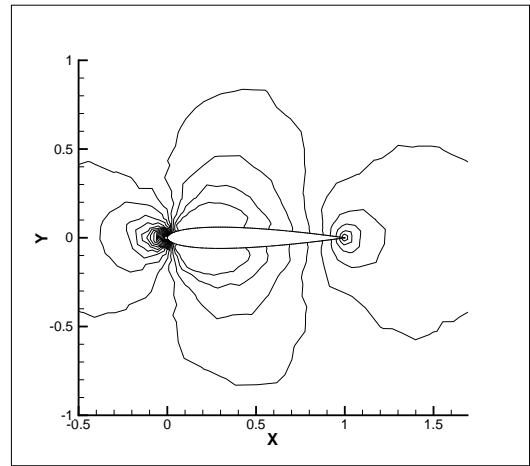
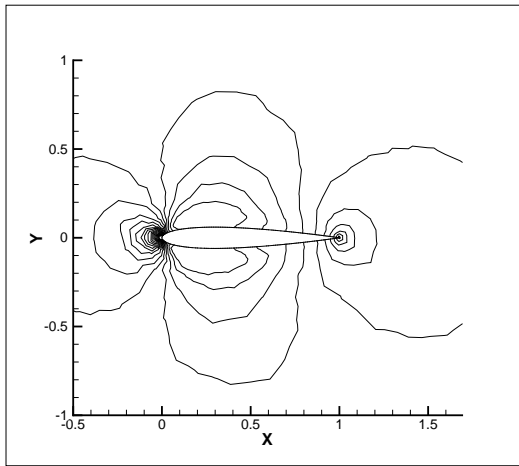
сравнению с RKDG-методом второго порядка с линейными базисными функциями.

Сравним результаты расчетов, выполненных RKDG-методом второго и третьего порядка, на примере задачи обтекания профиля NACA0012 газом с числом Маха набегающего потока, равным  $M = 0,2$  [88]. На каждом из рисунков 1.41–1.43 показаны 22 линии уровня числа Маха. Расчетная область имеет размеры, равные, соответственно,  $15l$  и  $10l$  по оси  $x$  и  $y$ , где  $l$  — хорда профиля. Характеристики сетки для каждого расчета обозначены в соответствующей подрисуночной подписи. Во всех расчетах крыло аппроксимировалось 200 линейными панелями. В качестве граничного условия на профиле использовано условие непротекания.

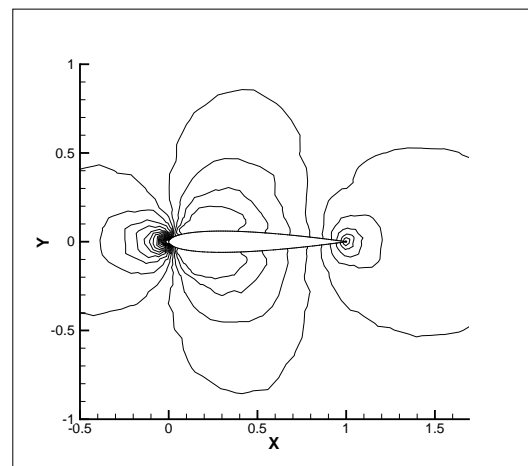
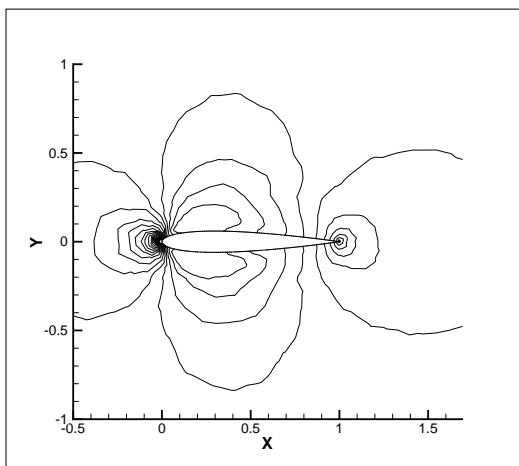
Так как в рассматриваемой задаче моделируется поток невязкого газа, опи-



(а) RKDG-метод второго порядка (б) RKDG-метод третьего порядка  
Рис. 1.41. Линии уровня числа Маха (сетка из 12054 треугольников)



(а) RKDG-метод второго порядка (б) RKDG-метод третьего порядка  
Рис. 1.42. Линии уровня числа Маха (сетка из  $\approx 26000$  треугольников)



RKDG-метод второго порядка (б) RKDG-метод третьего порядка  
Рис. 1.43. Линии уровня числа Маха (сетка из  $\approx 50000$  треугольников)

сываемый уравнениями Эйлера, то в ее решении вокруг поверхности крыла должен отсутствовать пограничный слой. Однако нефизический погранич-

ный слой может возникнуть вследствие недостаточной точности используемого численного метода; минимизировать этот эффект можно путем добавления дополнительных линейных панелей для аппроксимации крылового профиля или при использовании криволинейных панелей. Образование нефизичного пограничного слоя можно наблюдать в расчетах RKDG-методом второго порядка. В то же время, увеличивая порядок базисных полиномов в RKDG-методе, можно добиться улучшения качества численного решения при сохранении кусочно-линейной аппроксимации крыла, о чем свидетельствуют результаты вычислений методом RKDG третьего порядка.



## Глава 2.

# Программная реализация и оптимизация алгоритма разрывного метода Галеркина

## 2.1. Численное моделирование двумерных течений вязкого теплопроводного газа на основе RKDG-метода

### 2.1.1. Схема RKDG-метода для уравнений конвекции-диффузии

Рассмотрим RKDG-метод [19, 21, 22] для уравнения конвекции-диффузии, имеющего вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial f_s(u)}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^2 \frac{\partial r_s(u, \nabla u)}{\partial x_s}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T] \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

и необходимыми граничными условиями, где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \equiv (x, y)$ , векторы  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$  образуют невязкие потоки, а векторы  $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$  — вязкие потоки.

Для решения уравнения (2.1) необходимо преобразовать его к системе дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка. Для этого введем дополнительные переменные:  $q_1 = \partial u / \partial x_1$ ,  $q_2 = \partial u / \partial x_2$ .

Тогда исходную систему (2.1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{f}(u) &= \operatorname{div} \mathbf{r}(u, q_1, q_2); \\ q_1 &= \operatorname{div} \mathbf{Q}_1(u); \\ q_2 &= \operatorname{div} \mathbf{Q}_2(u), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{Q}_1 = (u, 0)^T$ ,  $\mathbf{Q}_2 = (0, u)^T$ .

Таким образом, (2.3) — это система дифференциальных уравнений 1-го порядка, записанная в дивергентном виде. Для решения такой системы можно использовать RKDG-метод [19], как указано ранее.

Пусть  $T_h$  — правильное разбиение рассматриваемой области  $\Omega$  на треугольники. На каждом элементе  $K \in T_h$  введем систему линейных базисных функций  $\{\varphi_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  так что  $\varphi_i(\mathbf{m}_j) = \delta_{ij}$ , где  $\mathbf{m}_j$  — центр  $j$ -го ребра треугольника  $K$ .

Приближенное решение  $w_h = (u_h, q_{1h}, q_{2h})$  будем искать в треугольнике  $K$  в виде разложения по базису:

$$u_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^3 u_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}); \quad q_{1h}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^3 q_1^i(t) \varphi_i(\mathbf{x}); \quad q_{2h}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^3 q_2^i(t) \varphi_i(\mathbf{x}),$$

где неизвестные коэффициенты разложения зависят от времени.

Умножим уравнение (2.3) на базисную функцию  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  и проинтегрируем произведение по треугольнику  $K$ . После преобразований получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения  $u_i(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t)}{dt} = \frac{3}{|K|} & \left[ \int_K \left( \mathbf{f}(u_h(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{r}(w_h(\mathbf{x}, t)) \right) \cdot \text{grad } \varphi_i(\mathbf{x}) dV - \right. \\ & \left. - \sum_{e \in \partial K} \int_e \left( f_{e,K} \left( u_h^{int(K)}, u_h^{ext(K)} \right) - r_{e,K} \left( w_h^{int(K)}, w_h^{ext(K)} \right) \right) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma \right]; \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1^i = \frac{3}{|K|} & \left[ \sum_{e \in \partial K} \int_e Q_{e,K}^1 \left( u_h^{int(K)}, u_h^{ext(K)} \right) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \right. \\ & \left. - \int_K \mathbf{Q}_1(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \text{grad } \varphi_i(\mathbf{x}) dV \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2^i = \frac{3}{|K|} & \left[ \sum_{e \in \partial K} \int_e Q_{e,K}^2 \left( u_h^{int(K)}, u_h^{ext(K)} \right) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \right. \\ & \left. - \int_K \mathbf{Q}_2(u_h(\mathbf{x}, t)) \cdot \text{grad } \varphi_i(\mathbf{x}) dV \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $f_{e,K}$ ,  $r_{e,K}$ ,  $Q_{e,K}^1$ ,  $Q_{e,K}^2$  — численные потоки, т.е. потоки через границу элемента  $K$ , зависящие от значений численного решения внутри и вне  $K$ . В качестве численных потоков для  $f_{e,K}$  могут быть выбраны те же потоки, что и в случае чисто гиперболических систем [19].

Для аппроксимации численных потоков  $r_{e,K}$ ,  $Q_{e,K}^1$ ,  $Q_{e,K}^2$  могут быть использованы центральные потоки вида

$$H(a, b) = \frac{1}{2}(H(a) + H(b)).$$

Для решения системы ОДУ (2.4) используется явный двухшаговый метод Рунге–Кутты 2-го порядка точности.

В случае систем уравнений конвекции-диффузии RKDG-метод применяется к каждому из уравнений системы.

### 2.1.2. Численное решение уравнений Навье–Стокса

#### Система уравнений Навье–Стокса

Система уравнений, описывающая течение вязкого теплопроводного газа, имеет вид [1, 2, 15]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I}) = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}[(E + p)\mathbf{v}] = -\operatorname{div} \mathbf{W} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}), \quad (2.7)$$

где  $t$  — время;  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{v}$  — вектор скорости;  $p$  — давление;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $E = \rho\varepsilon + \rho\mathbf{v}^2/2$  — полная энергия единицы объема;  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор вязких напряжений, который в простейшем случае принимает вид

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D} + \left(\nu - \frac{2}{3}\eta\right) \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mathbf{I},$$

где  $\nu, \eta$  — коэффициенты вязкости;  $\mathbf{D}$  — тензор скоростей деформаций, компоненты которого в декартовой ортогональной системе координат имеют вид

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$$

$\mathbf{W}$  — вектор плотности теплового потока,  $\mathbf{W} = -\kappa \operatorname{grad} T$ , где  $T$  — температура;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности, в общем случае зависящий от температуры.

Приведенную систему уравнений (2.5)–(2.7) следует дополнить уравнением состояния, например, совершенного газа  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ , внутренняя энергия

которого определяется соотношением  $\varepsilon = c_V T$ , где  $c_V$  — теплоемкость при постоянном объеме.

Уравнения Навье–Стокса могут быть записаны в следующем удобном для использования RKDG-метода виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{F}_s(\mathbf{U})}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U})}{\partial x_s}. \quad (2.8)$$

Здесь  $\mathbf{U} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, E)^T$  — вектор консервативных переменных,

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{U}) = (\rho v_s, \rho v_s v_1 + \delta_{s1} p, \rho v_s v_2 + \delta_{s2} p, (E + p) v_s)^T, \quad s = 1, 2$$

— невязкие (эйлеровы) потоки,

$$\mathbf{R}_s(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) = \left( 0, \tau_{s1}, \tau_{s2}, \sum_{k=1}^2 \tau_{sk} v_k + \varkappa \frac{\partial T}{\partial x_s} \right), \quad s = 1, 2$$

— вязкие потоки.

Приведем систему (2.5)–(2.7) к безразмерному виду. Для этого введем безразмерные величины

$$\tilde{x}_1 = x_1/L, \quad \tilde{x}_2 = x_2/L, \quad \tilde{\rho} = \rho/\rho_0, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/V, \quad \tilde{t} = V L^{-1} t,$$

где величины  $L, \rho_0, V$  — характерные для задачи длина, плотность и скорость соответственно. В качестве  $\rho_0$  можно выбрать плотность набегающего потока  $\rho_\infty$ , а в качестве характерной скорости — скорость набегающего потока  $V_\infty$ .

Тогда, опуская знак « $\sim$ » над оператором  $\operatorname{div}$ , уравнение (2.5) можно переписать в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0. \quad (2.9)$$

Используя следующие безразмерные комплексы

$$\tilde{p} = \rho_0^{-1} V^{-2} p, \quad \tilde{\eta} = \rho_0^{-1} V^{-1} L^{-1} \eta = 1/\operatorname{Re}, \quad \tilde{\nu} = \rho_0^{-1} V^{-1} L^{-1} \nu,$$

где  $\operatorname{Re}$  — число Рейнольдса, запишем выражение для тензора вязких напряжений в безразмерной форме:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \rho_0^{-1} V^{-2} \boldsymbol{\tau} = 2\tilde{\eta} \tilde{\mathbf{D}} + \left( \tilde{\nu} - \frac{2}{3} \tilde{\eta} \right) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{I},$$

где

$$\tilde{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right).$$

Уравнение (2.6) в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{div} (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{p} \mathbf{I}) = \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (2.10)$$

Для записи уравнения (2.7) в безразмерном виде введем величины

$$\tilde{E} = \rho_0^{-1} V^{-2} E, \quad \tilde{T} = T/T_0, \quad \tilde{\varkappa} = \frac{\varkappa T_0}{\rho_0 L V^3} = \frac{1}{\operatorname{Re} \eta} \frac{\varkappa T_0}{V^2},$$

тогда

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{div} [(\tilde{E} + \tilde{p}) \tilde{\mathbf{v}}] = \operatorname{div} (\tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\varkappa} \operatorname{grad} \tilde{T}). \quad (2.11)$$

Величина  $T_0$  может быть выбрана различными способами, например:

1.  $T_0 = \frac{V^2}{R}$ , тогда  $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\gamma - 1} \tilde{T}$ ,  $\tilde{p} = \tilde{\rho} \tilde{T}$
2.  $T_0 = \frac{V^2}{c_V}$ , тогда  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{T}$ ,  $\tilde{p} = (\gamma - 1) \tilde{\rho} \tilde{T}$
3.  $T_0 = \frac{V^2}{\gamma R}$ , тогда  $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} \tilde{T}$ ,  $\tilde{p} = \frac{1}{\gamma} \tilde{\rho} \tilde{T}$
4.  $T_0 = \frac{V^2}{\gamma c_V}$ , тогда  $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\gamma} \tilde{T}$ ,  $\tilde{p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \tilde{\rho} \tilde{T}$

### Тестирование RKDG-метода второго порядка

Для оценки эффективности применения RKDG-метода к решению уравнений динамики вязкого теплопроводного газа рассматривается несколько тестовых задач, в том числе задачи обтекания различных тел и крыловых профилей, и вычисляются аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления  $C_x^a$  и подъемной силы  $C_y^a$ , определяемые следующими соотношениями [2]:

$$C_x^a(t) = \frac{F_x^a(t)}{1/2 \rho_\infty V_\infty^2 S}, \quad C_y^a(t) = \frac{F_y^a(t)}{1/2 \rho_\infty V_\infty^2 S}.$$

Здесь  $\rho_\infty$  и  $V_\infty$  — плотность и скорость набегающего потока,  $S$  — характерная площадь (или характерная длина в двумерном случае),  $F_x^a(t)$  и  $F_y^a(t)$  — проекции главного вектора аэродинамических сил  $\mathbf{F}(t)$  на координатные оси скоростной системы координат, в которой направление оси абсцисс совпадает с направлением набегающего потока. Вектор  $\mathbf{F}(t)$  определяется как интеграл давления  $p(t)$  по поверхности обтекаемого тела

$$\mathbf{F}(t) = - \int_{\Omega} p(t) \mathbf{n} dS,$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя единичная нормаль к элементу поверхности  $dS$ .

Определяемое в расчетах число Струхалия характеризует безразмерную частоту схода вихрей и вычисляется как частота колебаний коэффициента подъемной силы  $C_y^a(t)$ .

Во всех задачах обтекания тел граничные условия задаются следующим образом:

- на границах расчетной области параметры  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $E$  полагаются равными соответствующим параметрам набегающего потока;
- температура поверхности обтекаемого тела полагается равной температуре потока.

При решении тестовых задач использован RKDG-метод второго порядка аппроксимации с потоком HLLC и TVB-ограничителем.

### **Обтекание цилиндра круглого сечения**

На рис. 2.1–2.2 показана картина обтекания цилиндра единичного диаметра потоком вязкого газа ( $M = 0,05$ ,  $Re = 2000$ ). На рисунках изображены линии уровня числа Маха, а также линии тока. Известно, что картина обтекания любого тела зависит от числа Рейнольдса набегающего потока. Так, при малых числах Рейнольдса ( $Re \leq 40$ ) в кормовой части плохообтекаемого тела образуется стационарная замкнутая срывная зона, поэтому при малых числах  $Re$  за цилиндром образуется симметричная пара вихрей. При увеличении числа  $Re$  течение в следе за телом становится нестационарным, что приводит к отрыву вихрей поочередно то с верхней, то с нижней поверхностей обтекаемого тела. При обтекании цилиндра в следе за ним образуется регулярная, расположенная в определенном порядке, система дискретных вихрей, называемая вихревой дорожкой Кармана. В работе [89] показано, что симметричное расположение вихрей в два ряда при достаточно больших числах Рейнольдса неустойчиво, а устойчивым может быть только асимметричное расположение вихрей в шахматном порядке при определенном соотношении расстояния между рядами и расстояния между двумя последовательными вихрями каждого ряда. Неустойчивость симметричной дорожки Кармана означает, что малейшее возмущение стремится нарушить равновесие такой системы вихрей. Поэтому при численном моделировании обтекания цилиндра наличие погрешностей аппроксимации неизбежно будет приводить к образованию несимметричных вихревых дорожек, даже при использовании

явных методов на сетках, симметричных относительно оси сечения цилиндра.

Расчетная область в данной задаче представляет собой прямоугольник размерами  $[-2, 2] \times [-2, 10]$ , круговой контур аппроксимируется 200 линейными панелями, а используемая треугольная сетка содержит 6434 элемента.

В расчетах получены следующие оценки стационарных коэффициентов лобового сопротивления, подъемной силы и числа Струхаля:  $C_x^a = 1,18$ ,  $C_y^a = 0,05$ ,  $Sh = 0,26$ , а их экспериментальные значения равны  $C_x^a = 1,2$ ,  $C_y^a = 0$ ,  $Sh = 0,2$  [90].

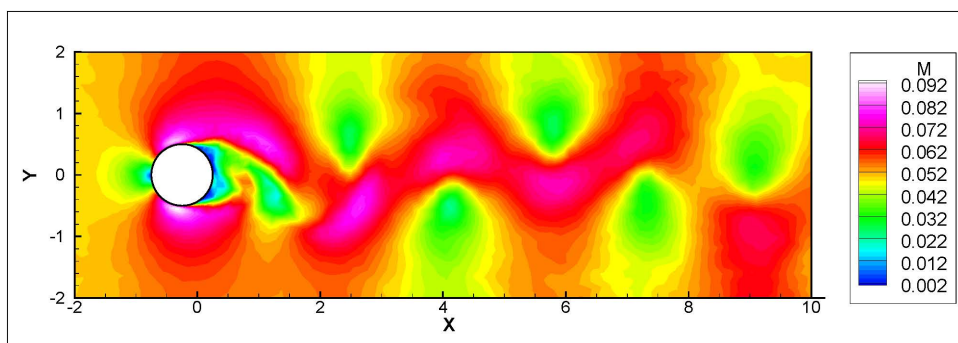


Рис. 2.1. Распределение чисел Маха

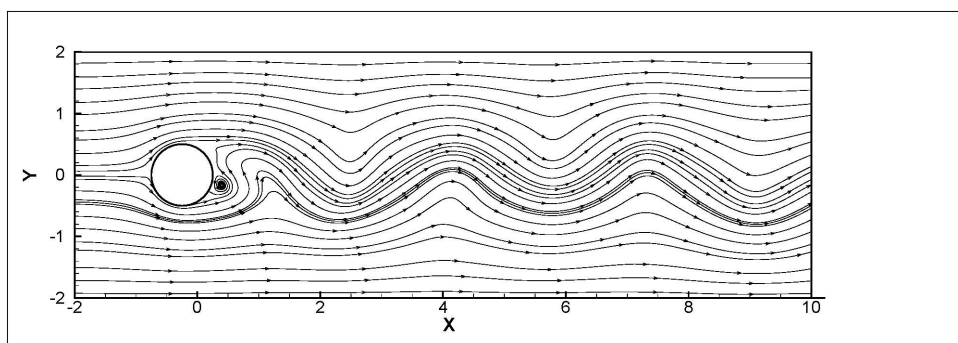


Рис. 2.2. Линии тока

### Обтекание цилиндра квадратного сечения

Расчет аэродинамических характеристик цилиндра квадратного сечения считается достаточно сложной задачей вычислительной гидродинамики. Существует ряд работ, в которых экспериментально определяются соответствующие коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы различных прямоугольных профилей [91–97]. Тем не менее, наблюдается достаточно значительный разброс значений аэродинамических коэффициентов, полученных в ходе экспериментов.

Расчетная область в данной тестовой задаче представляет собой прямоугольник размерами  $[-5, 5] \times [-5, 15]$ ; используемая треугольная сетка со-

держит около 10 000 элементов.

На рис. 2.3–2.4 показаны результаты расчетов обтекания квадратного профиля при следующих параметрах набегающего потока:  $Re = 22\,000$ ,  $M = 0,1$  и нулевом угле атаки. Полученные оценки для коэффициентов сопротивления и числа Струхали равны, соответственно,  $C_x^a = 2,25$ ,  $C_y^a = 0,05$ ,  $Sh = 0,13$ , а значения коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы, полученные в эксперименте [91], равны  $C_x^a = 2,15$ ,  $C_y^a = 0$ .

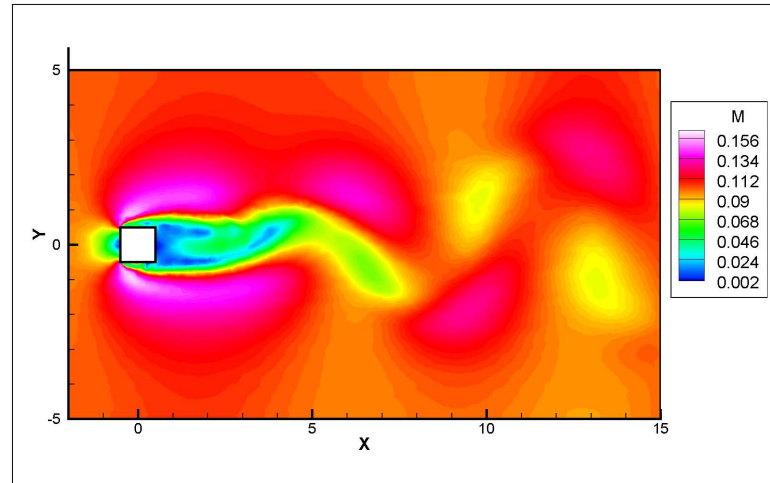


Рис. 2.3. Распределение чисел Маха

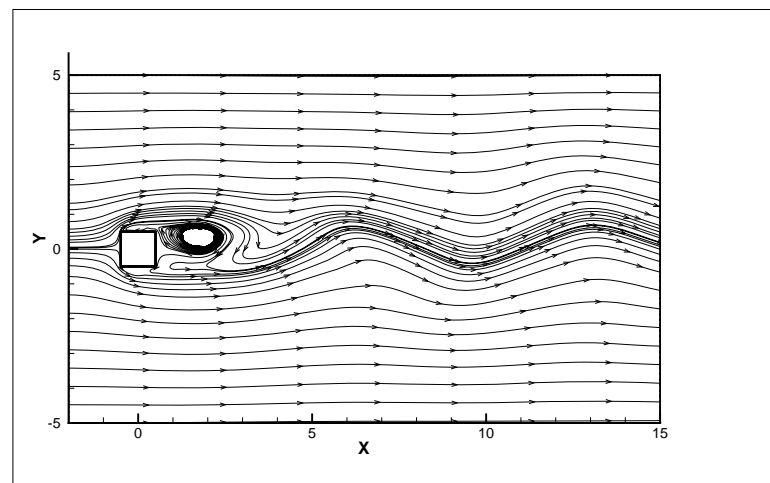


Рис. 2.4. Линии тока

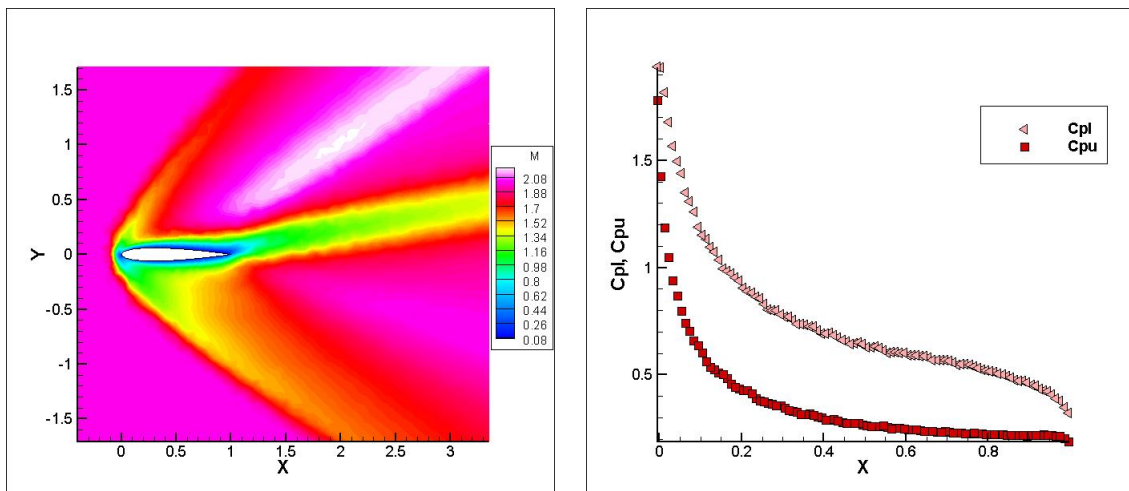
### Обтекание крылового профиля

Рассмотрим примеры расчета обтекания крылового профиля NACA0012 [21, 22, 98]. Расчеты проведены RKDG-методом для вязкого теплопроводного газа. Расчетная область представляет собой прямоугольник величиной  $5 \times 10$  размахов крыла. Для вычислений использована треугольная сетка, содержащая приблизительно 50 000 элементов со сгущением вблизи крыла.



На рис. 2.5, 2.6 изображены линии уровня числа Маха и коэффициенты давления на поверхности крыла. В подрисуночной подписи указаны параметры набегающего потока и угол атаки. Температура в каждой точке поверхности крыла предполагается равной температуре газа в этой же точке.

Расчет, результаты которого показаны на рис. 2.5, соответствует обтеканию крыла потоком газа, имеющим в невозмущенном состоянии параметры  $Re = 500$ ,  $M = 2$ , при угле атаки  $\alpha = 10^\circ$ . Особенностью данной задачи является образование отсоединенной ударной волны перед крыловым профилем, которая с хорошей точностью передается в расчетах RKDG-методом (рис. 2.5(а)). Вычисленные значения коэффициента лобового сопротивления и подъемной силы, равные, соответственно,  $C_x^a = 0,1719$  и  $C_y^a = 0,3566$ , согласуются со значениями из [21, 22], равными  $C_x^a = 0,2312$  и  $C_y^a = 0,3738$ . Распределение коэффициентов давления по поверхности крыла показано на рис. 2.5(б): на графике кривая «Cpl» соответствует нижней поверхности крыла, а кривая «Cpu» — верхней.



(а) линии уровня числа Маха

(б)  $C_p$

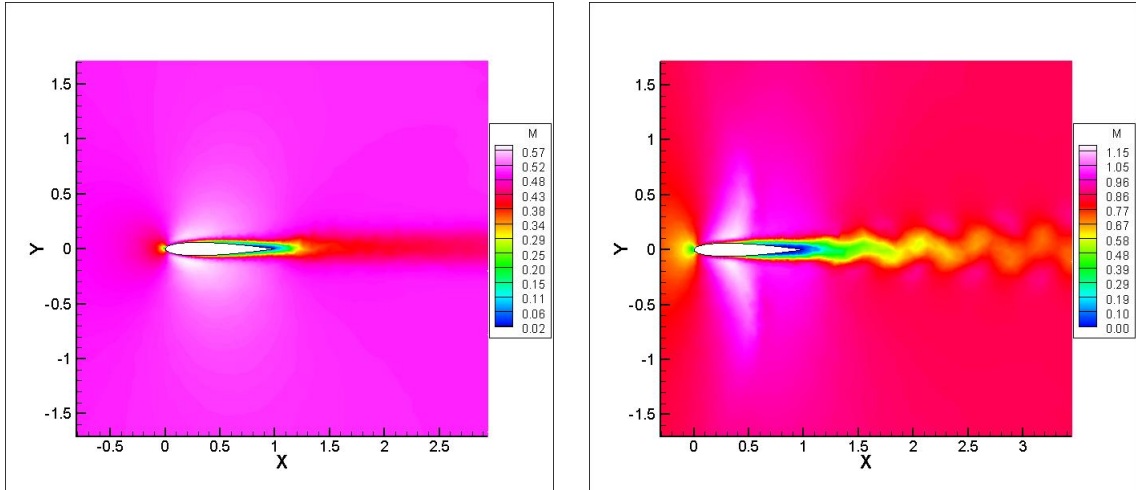
Рис. 2.5. Обтекание крылового профиля NACA0012.

Параметры набегающего потока:  $Re = 500$ ,  $M = 2$ ,  $\alpha = 10^\circ$

Рис. 2.6(а) демонстрирует результаты расчетов, проведенных при параметрах набегающего потока  $Re = 5000$ ,  $M = 0,5$ ,  $\alpha = 0^\circ$ . Полученные в расчетах стационарные коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы таковы:  $C_x^a = 0,0303$ ,  $C_y^a = -0,02$ , что соответствует значениям, полученным в [22, 98]:  $C_x^a = 0,0311$ ,  $C_y^a = -0,013$

Рис. 2.6(б) изображает результаты расчетов, полученные при моделирова-

нии обтекания крыла газом с параметрами набегающего потока  $Re = 10\,000$ ,  $M = 0,85$ ,  $\alpha = 0^\circ$ . Режим обтекания в этом случае становится нестационарным, а за крылом образуется вихревая дорожка [98]. Расчетные стационарные коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы соответственно равны  $C_x^a = 0,0689$ ,  $C_y^a = -0,005$ .



(а)  $Re = 5\,000$ ,  $M = 0,5$ ,  $\alpha = 0^\circ$     (б)  $Re = 10\,000$ ,  $M = 0,85$ ,  $\alpha = 0^\circ$

Рис. 2.6. Обтекание крылового профиля NASA0012.

Линии уровня числа Маха

## 2.2. Оптимизация параметров лимитера в алгоритме RKDG-метода

### 2.2.1. Классический лимитер

Схема RKDG-метода [19, 24], вне зависимости от порядка используемых базисных полиномов, предполагает применение на каждом промежуточном шаге метода Рунге–Кутты специальных ограничителей, или лимитеров, которые обеспечивают монотонность результирующей схемы.

Лимитер формулируется для кусочно-линейных функций, а в случае аппроксимации решения кусочно-полиномиальными функциями степени выше 1 (т.е. квадратичными, кубическими и т.д.) лимитер применяется к проекции решения на кусочно-линейный базис, а затем делается вывод о наличии или отсутствии осцилляции в конкретной точке исходного кусочно-полиномиального решения.

Лимитер для кусочно-линейных функций, построенный в [19], может использоваться в двух вариантах: TVD (total variation diminishing) и TVB (total variation bounded). Первый вариант основан на анализе наклона плоскости решения по отношению к разности средних значений решения в шаблоне; эта процедура не зависит от конкретной рассматриваемой задачи, однако имеет один существенный недостаток: получаемая в результате схема сохраняет TVD-свойство, но может не обеспечивать нужный высокий порядок аппроксимации вблизи локальных экстремумов решения, так как в данном случае монотонизация оказывается избыточной. Для преодоления указанного недостатка предложен второй вариант лимитера, в котором предусматривается возможность избежать слишком жесткой монотонизации решения вблизи локальных экстремумов за счет введения некоторого дополнительного параметра  $\Phi$ , характеризующего максимально возможный наклон плоскости решения, при котором решение в окрестности экстремума остается без монотонизации. При превышении наклоном плоскости решения заданного значения  $\Phi$  к нему применяется TVD-ограничитель.

Такая модификация лимитера позволяет сохранить высокий порядок аппроксимации решения во всей расчетной области. Однако основной проблемой при таком подходе является то, что значение параметра  $\Phi$  должно быть задано перед началом вычислений и не может корректироваться в процессе работы алгоритма, поэтому необходимо иметь надежный метод оценки этого параметра. В качестве одного из возможных вариантов такой оценки в одномерном случае предложен следующий [19]:

$$\Phi = (\Delta x)^2 \sup \left\{ \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_0) \right|, x_0 : \frac{\partial u_0}{\partial x}(x_0) = 0 \right\},$$

где  $u_0(x)$  — профиль решения  $u(x, t)$  в начальный момент времени, а  $\Delta x$  — характерный размер сетки. Таким образом, параметр  $\Phi$  можно определить как точную верхнюю грань второй производной начального условия, взятую по точкам локального экстремума  $u_0(x)$ , и умноженную на  $(\Delta x)^2$ .

Такой подход может быть легко использован в случае, если профиль решения является гладкой функцией (класса  $C^2$ ). Однако если начальное условие содержит разрывы, то подобный метод оценки становится практически неприменимым, так как в решении имеются точки, в которых первая производная не существует. Еще большие трудности возникают, если необходимо

уточнять параметр  $\Phi$  в двумерном и трехмерном случаях, когда необходимо численно решать задачу оптимизации на каждом шаге по времени для определения точек экстремума, а затем численно оценивать вторую производную, что особенно проблематично при наличии разрывов решения.

В работе [19] утверждается, что все представленные в ней расчеты проведены при значении параметра  $\Phi = 50(\Delta x)^2$ , а также то, что качество решения перестает зависеть от  $\Phi$  при возрастании степени используемых базисных полиномов для аппроксимации решения. Тем не менее, проведенные исследования показывают, что количественные характеристики решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса существенным образом зависят от значения параметра  $\Phi$ . В качестве примера можно привести задачу обтекания цилиндра полукруглого сечения при нулевом угле атаки и следующих числах Маха и Рейнольдса:  $M = 0,05$ ,  $Re = 90\,000$ . На рис. 2.7–2.9 показаны результаты расчетов аэродинамических коэффициентов сопротивления и подъемной силы при различных значениях параметра  $\Phi$ .

Как видно из представленных выше графиков, аэродинамические коэффициенты значительно изменяются при изменении параметра  $\Phi$ , и неакку-

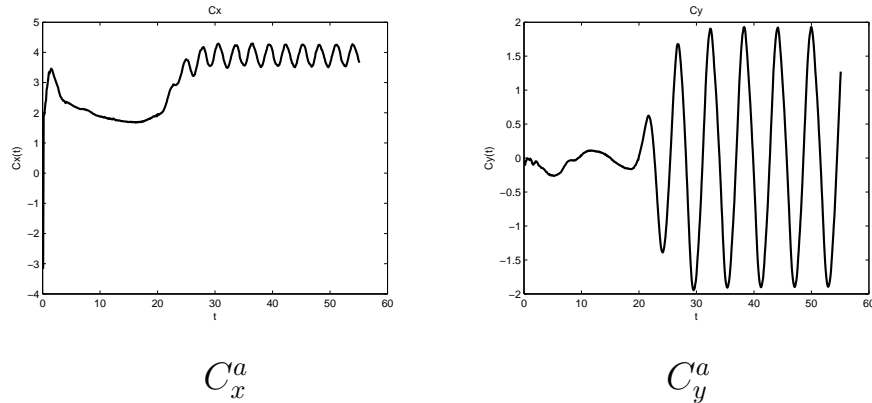


Рис. 2.7. Аэродинамические коэффициенты при  $\Phi = 0,5(\Delta x)^2$ :  $C_x^a \approx 3,7$

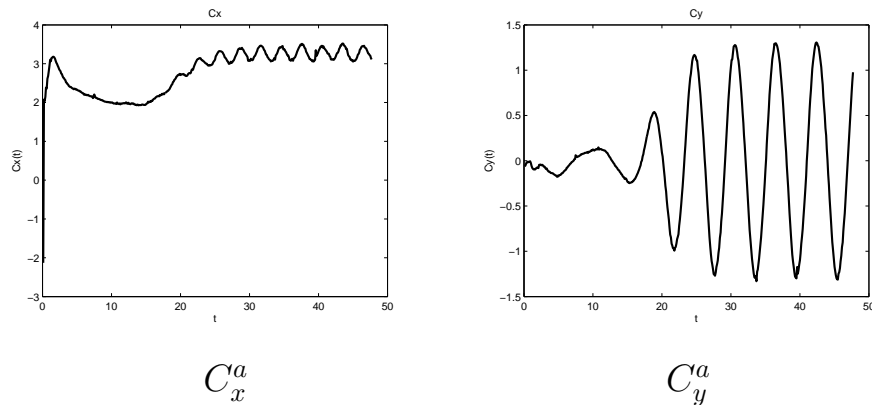


Рис. 2.8. Аэродинамические коэффициенты при  $\Phi = 0,05(\Delta x)^2$ :  $C_x^a \approx 3,2$

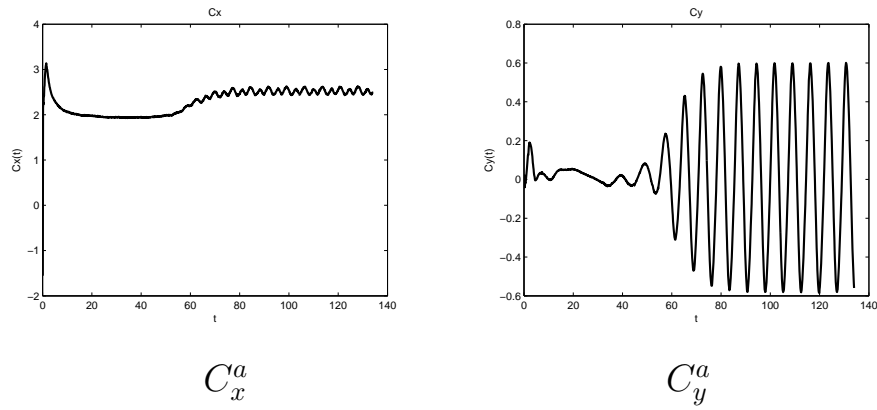


Рис. 2.9. Аэродинамические коэффициенты при  $\Phi = 0,01(\Delta x)^2$ :  $C_x^a \approx 2,5$

ратное задание постоянного значения  $\Phi$  может привести к существенному искажению количественных результатов расчетов. Очевидно, что невозможно определить оптимальное значение параметра  $\Phi$ , обеспечивающее хорошее количественное соответствие расчетов с экспериментальными данными даже для одного класса задач, поэтому значение  $\Phi$  необходимо подбирать для каждой новой задачи отдельно. Также новое значение параметра  $\Phi$  необходимо подбирать при изменении параметров пространственно-временной расчетной сетки. При этом качественные результаты расчетов могут, вообще говоря, слабо зависеть от  $\Phi$ , как в случае с полукруглым профилем (см. рис. 2.10, 2.11), однако решение с учетом неверных количественных характеристик оказывается слабо применимым для практических целей.

Таким образом, разработка алгоритма автоматического выбора параметра  $\Phi$  с возможностью его корректировки в процессе вычислений является одной из важнейших задач для создания программного комплекса, реализующего RKDG-метод для использования его в практических приложениях.

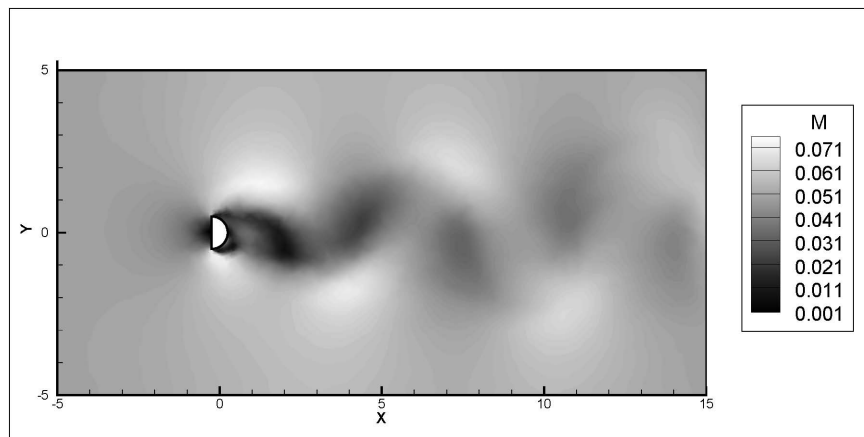


Рис. 2.10. Распределение чисел Маха

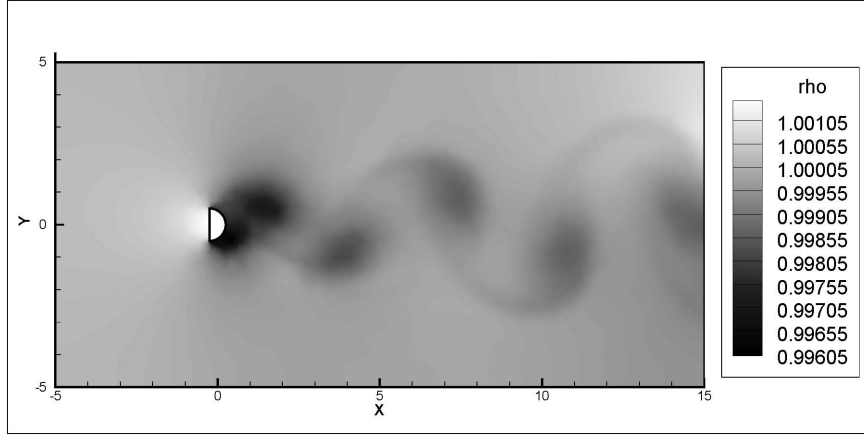


Рис. 2.11. Распределение плотности

### 2.2.2. Алгоритм автоматического выбора параметров лимитера

В данной работе предлагается следующий алгоритм автоматического выбора параметра  $\Phi$  [67]. Как и в классической схеме, лимитер для кусочно-линейных функций базируется на вычислении допустимых скачков функции численного решения  $u_h$  в центрах ребер  $\mathbf{m}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  треугольника  $K_0$  с центром масс в точке  $\mathbf{b}_0$

$$\Delta_i = \bar{m}(\tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0), \nu \Delta \bar{u}(\mathbf{m}_i, K_0), \Phi), \quad (2.12)$$

где  $\tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0) = u_h(\mathbf{m}_i) - \bar{u}_{K_0}$  — скачок численного решения в центре  $i$ -го ребра треугольника  $K_0$ , а

$$\bar{u}_{K_0} = \frac{1}{|K_0|} \int_{K_0} u_h dV = u_h(\mathbf{b}_0)$$

— среднее значение численного решения на треугольнике  $K_0$ .

Функция  $\bar{m}$  в (2.12) соответствует модифицированной функции minmod:

$$\bar{m} = \begin{cases} \tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0), & \text{если } |\tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0)| < \Phi; \\ m(\tilde{u}_h(\mathbf{m}_i, K_0), \nu \Delta \bar{u}(\mathbf{m}_i, K_0)), & \end{cases} \quad (2.13)$$

а функция  $m$  — стандартной функции minmod:

$$m(a_1, a_2) = \begin{cases} s \min(|a_1|, |a_2|), & \text{если } s = \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2), \\ 0, & \text{если } \text{sign}(a_1) \neq \text{sign}(a_2). \end{cases}$$

Очевидно, что параметр  $\Phi$  задает максимально возможный скачок функции в центре ребра, при котором решение не монотонизируется. В исходной

схеме этот параметр задается одинаковым для всех треугольников сетки, и, соответственно, для всех ребер. С помощью предлагаемого алгоритма автоматического определения параметра  $\Phi$  можно достичь большей гибкости вычислений, выбирая этот параметр для каждого ребра каждого треугольника независимо.

Алгоритм автоматического выбора основан на представлении функции  $u_h$  по формуле Тейлора с центром в точке  $\mathbf{b}_0$ , где  $\mathbf{b}_0$  — центр масс рассматриваемого треугольника  $K_0$ :

$$u_h(\mathbf{m}_i) - u_h(\mathbf{b}_0) = \nabla u_h(\mathbf{b}_0) \cdot (\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0) + (\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0)^T \mathbf{H}(\mathbf{b}_0) (\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0) + \dots, \quad (2.14)$$

где  $\nabla u_h(\mathbf{b}_0)$  — градиент функции  $u_h$  в точке  $\mathbf{b}_0$ , а  $\mathbf{H}(\mathbf{b}_0)$  — матрица Гессе в этой же точке.

Далее, сохраняя в (2.14) только первый член разложения, запишем

$$u_h(\mathbf{m}_i) - \bar{u}_{K_0} \approx \nabla u_h(\mathbf{b}_0) \cdot (\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0),$$

тогда норму скачка функции на  $i$ -м ребре треугольника  $K_0$  можно оценить как

$$\|u_h(\mathbf{m}_i) - \bar{u}_{K_0}\| \approx \|\nabla u_h(\mathbf{b}_0) \cdot (\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0)\| = \Phi_i, \quad (2.15)$$

где  $\Phi_i$  и есть искомое значение параметра  $\Phi$  на  $i$ -м ребре треугольника  $K_0$ .

Таким образом, для вычисления  $\Phi_i$  необходимо определить функцию градиента численного решения  $q_h = \nabla u_h$  и взять ее значение в точке  $\mathbf{b}_0$ .

Градиент в ячейке  $K_0$  аппроксимируется постоянной функцией  $\bar{q}$  следующим образом:

$$\bar{q} = \frac{1}{|K_0|} \int_{K_0} q_h dV = \frac{1}{|K_0|} \int_{K_0} \nabla u_h dV = \frac{1}{|K_0|} \int_{\partial K_0} \tilde{u} \mathbf{n} d\Gamma \approx \frac{1}{|K_0|} \sum_{k=1}^3 \tilde{u}_k \mathbf{n}_k L_k, \quad (2.16)$$

где  $\mathbf{n}_k$  — внешняя единичная нормаль к  $k$ -му ребру треугольника  $K_0$ , а  $L_k$  — длина  $k$ -го ребра. Значение  $\tilde{u}_k$  соответствует некоторой аппроксимации численного решения на ребре, в качестве которой используется аппроксимация решения задачи Римана с начальными данными  $\bar{u}_L^k, \bar{u}_R^k$ , где  $\bar{u}_L^k = \bar{u}_{K_0}$  и  $\bar{u}_R^k = \bar{u}_{K_p}$  — средние значения решения в треугольнике  $K_0$  и соседнем с ним по  $k$ -му ребру треугольнике  $K_p$  (см. рис. 2.12).

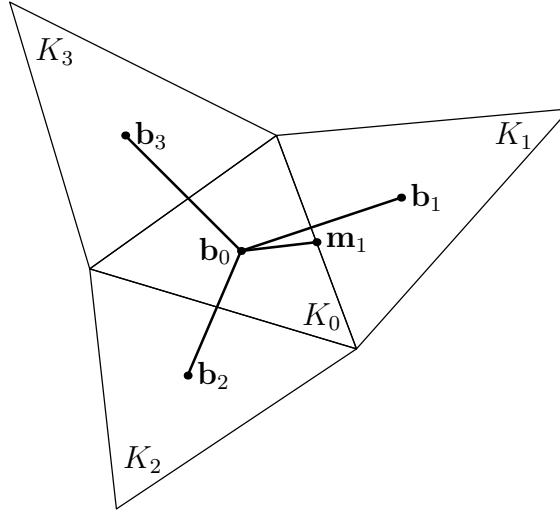


Рис. 2.12. Шаблон аппроксимации

Для получения решения задачи Римана используется метод HLLC [15,104]. Приближенное решение задачи Римана  $\bar{\mathbf{U}}(0)$  по схеме HLLC имеет вид

$$\bar{\mathbf{U}}(0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & \text{если } 0 \leq S_L; \\ \mathbf{U}_{*L}, & \text{если } S_L \leq 0 \leq S_*; \\ \mathbf{U}_{*R}, & \text{если } S_* \leq 0 \leq S_R; \\ \mathbf{U}_R, & \text{если } 0 \geq S_R, \end{cases}$$

где для  $K = L, R$

$$\mathbf{U}_{*K} = \rho_K \left( \frac{S_K - u_K}{S_K - S_*} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ S_* \\ v_K \\ \frac{E_K}{\rho_K} + (S_* - u_K) \left( S_* + \frac{p_K}{\rho_K(S_K - u_K)} \right) \end{bmatrix},$$

а  $S_L$ ,  $S_*$  и  $S_R$  — известные оценки скоростей характеристик, присутствующих в задаче Римана.

### 2.2.3. Результаты расчетов

#### Результаты: уравнения Эйлера

Исследуем сначала работоспособность предложенного алгоритма расчета параметра  $\Phi$  для решения уравнений Эйлера. Результаты вычислений, проведенных с использованием указанного алгоритма оценки  $\Phi$ , представлены на



рис. 2.13–2.14. На рис. 2.13 изображены 20 линий уровня одинаковых значений плотности для двух расчетов рассмотренной ранее задачи моделирования течения газа в канале со ступенькой — с заданием  $\Phi$  вручную и с автоматическим выбором  $\Phi$ . Для аппроксимации решения в обоих расчетах использованы кусочно-линейные базисные функции, вычисления выполнены на одной и той же треугольной сетке с характерным размером элемента  $1/80$ . Видно, что при задании  $\Phi$  вручную RKDG-метод, обладающий вторым порядком аппроксимации, может породить нефизичные осцилляции, которые успешно подавляются при использовании предложенного алгоритма автоматического выбора  $\Phi$ .

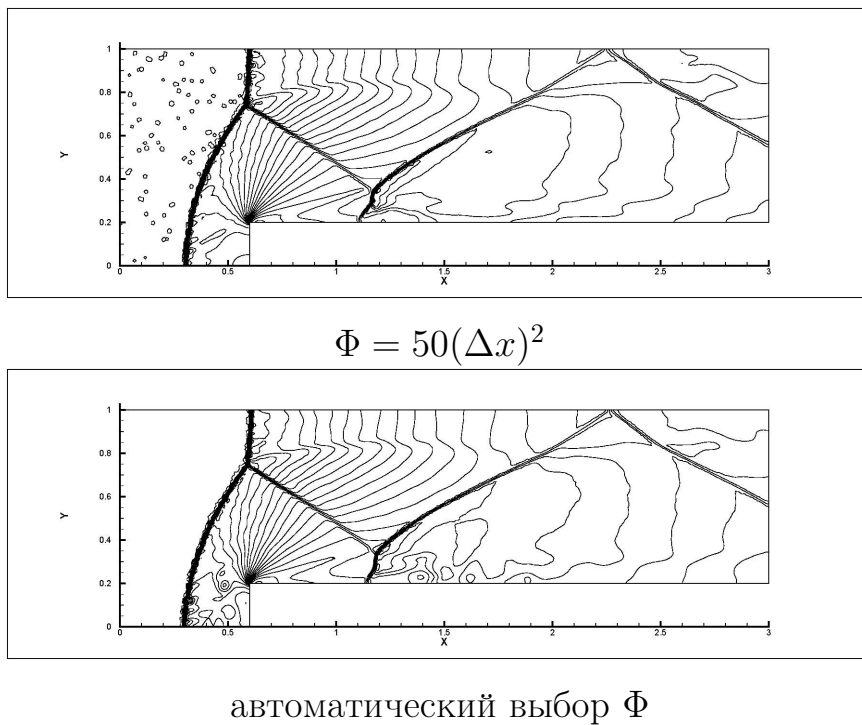
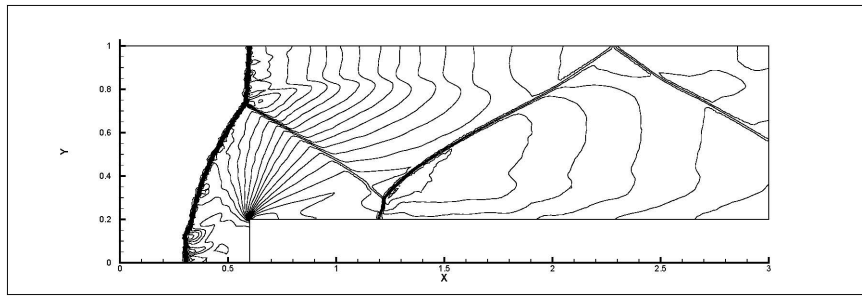


Рис. 2.13. Линии уровня плотности,  
кусочно-линейная аппроксимация решения

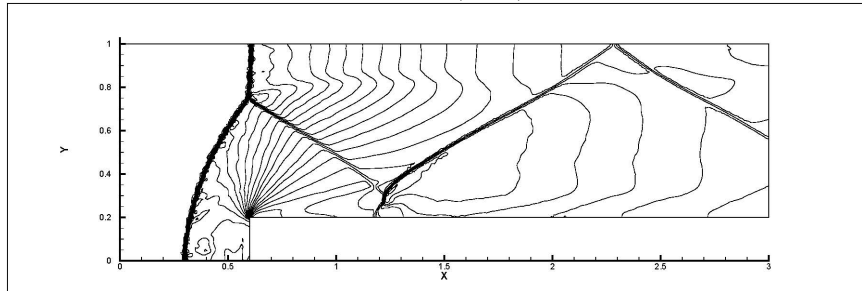
Результаты аналогичных расчетов, проведенных с использованием кусочно-квадратичной аппроксимации решения, показаны на рис. 2.14.

Рис. 2.15–2.16 показывают результаты расчетов для задачи моделирования течения газа в канале клинообразной формы. Рис. 2.15 соответствует кусочно-линейной аппроксимации решения, рис. 2.16 — кусочно-квадратичной.

В качестве еще одного примера использования автоматического выбора параметра  $\Phi$  при решении уравнений Эйлера приведем расчет обтекания крылового профиля NACA0012 идеальным газом с числом Маха  $M = 0,001$  в случае

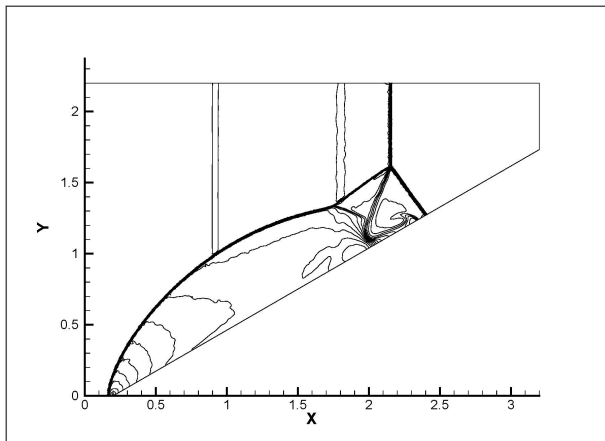


$$\Phi = 50(\Delta x)^2$$

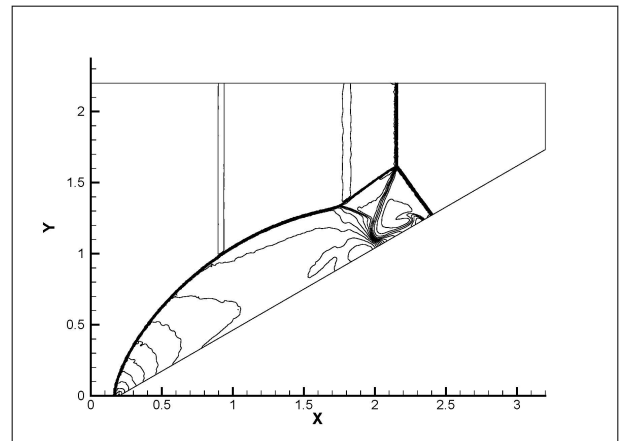


автоматический выбор  $\Phi$

Рис. 2.14. Линии уровня плотности,  
кусочно-квадратичная аппроксимация решения



$$\Phi = 50(\Delta x)^2$$

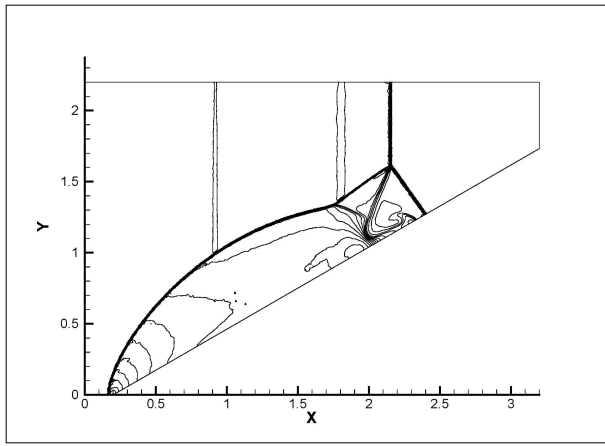


автоматический выбор  $\Phi$

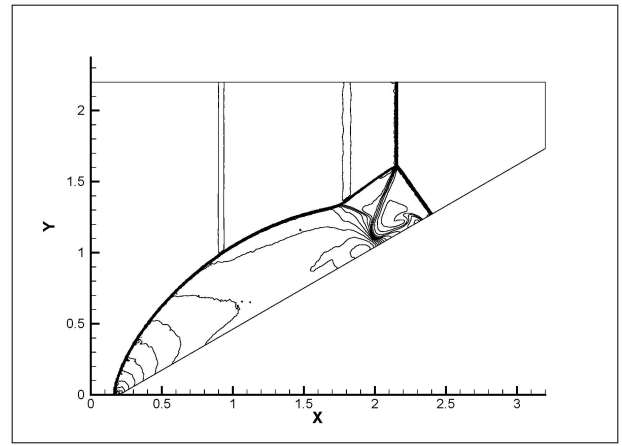
Рис. 2.15. Линии уровня плотности,  
кусочно-линейная аппроксимация решения

кусочно-квадратичной аппроксимации. На рис. 2.17 приведены результаты расчетов при  $\Phi = 50(\Delta x)^2$  и при использовании алгоритма автоматического выбора  $\Phi$ .

Как видно из рисунков, автоматический выбор  $\Phi$  с корректировкой на каждом временном шаге позволяет погасить нефизичные осцилляции решения, появляющиеся в схеме из-за ее высокого порядка.

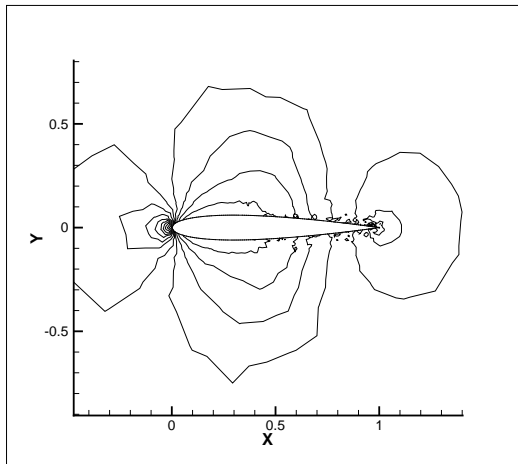


$$\Phi = 50(\Delta x)^2$$

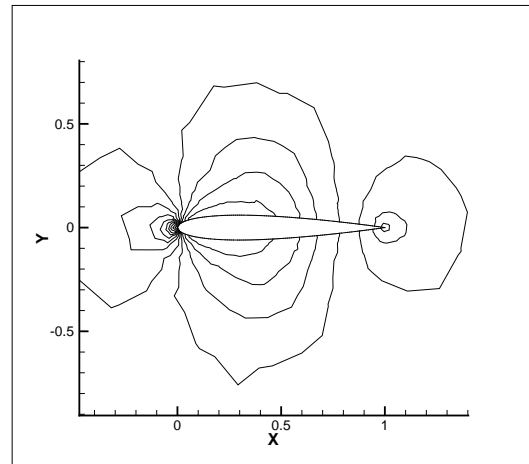


автоматический выбор  $\Phi$

Рис. 2.16. Линии уровня плотности,  
кусочно-квадратичная аппроксимация решения



$$\Phi = 50(\Delta x)^2$$



автоматический выбор  $\Phi$

Рис. 2.17. Линии уровня числа Маха

### Результаты: уравнения Навье–Стокса

Автоматический выбор параметра  $\Phi$  позволяет получить хорошее количественное и качественное согласование результатов расчетов с экспериментальными данными при моделировании течений вязкого теплопроводного газа путем численного решения уравнений Навье–Стокса.

В качестве первого примера рассмотрим задачу об обтекании цилиндра кругового сечения потоком газа с числом Маха  $M = 0,05$  и числом Рейнольдса  $Re = 2000$ . При обтекании кругового профиля за ним образуется вихревая дорожка Кармана. Экспериментально установлено, что в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = 10^3 \dots 10^5$  безразмерная частота схода вихрей является практически постоянной и характеризуется числом Струхала  $Sh \approx 0,2$ , при

этом стационарные коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, получаемые путем усреднения нестационарных коэффициентов при установившемся режиме обтекания, равны, соответственно  $C_x^a \approx 0,2$  и  $C_y^a \approx 0$ . Для вычислений использована схема RKDG-метода с кусочно-линейными базисными функциями на сетке из 6434 треугольников.

На рис. 2.18, 2.19 представлены зависимости нестационарных аэродинамических коэффициентов от времени. Рис. 2.18 соответствует алгоритму с принудительным заданием параметра  $\Phi = 50(\Delta x)^2$ , а рис. 2.19 — алгоритму с автоматическим выбором этого параметра.

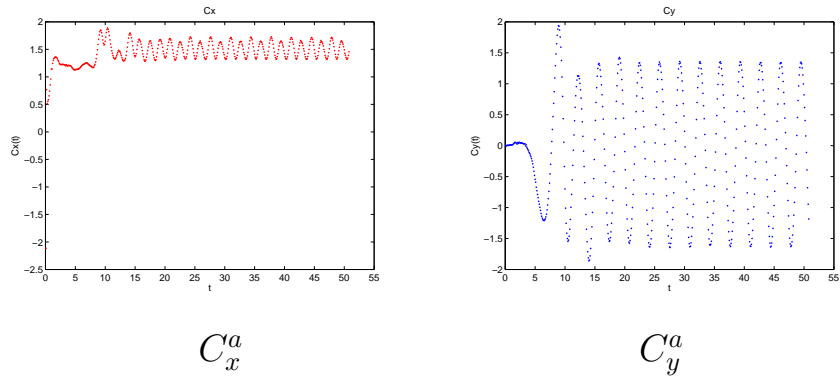


Рис. 2.18. Аэродинамические коэффициенты,  $\Phi = 50(\Delta x)^2$

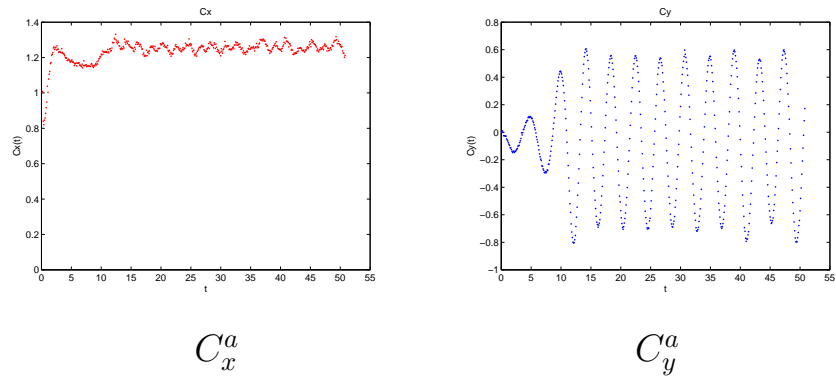


Рис. 2.19. Аэродинамические коэффициенты, автоматический выбор  $\Phi$

Вариант RKDG-метода с  $\Phi = 50(\Delta x)^2$  дает искаженные значения стационарных аэродинамических коэффициентов и числа Струхаля:  $C_x^a \approx 1,46$ ,  $C_y^a \approx -0,12$ ,  $Sh \approx 0,25$ , в то время как алгоритм с автоматическим выбором параметра лимитера дает результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом:  $C_x^a \approx 1,24$ ,  $C_y^a \approx -0,07$  и  $Sh \approx 0,2$  [90].

Характерный вид следа за цилиндром представлен на рис 2.20.

В работе проведено исследование зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов полукруглого профиля от угла атаки и сравнение по-

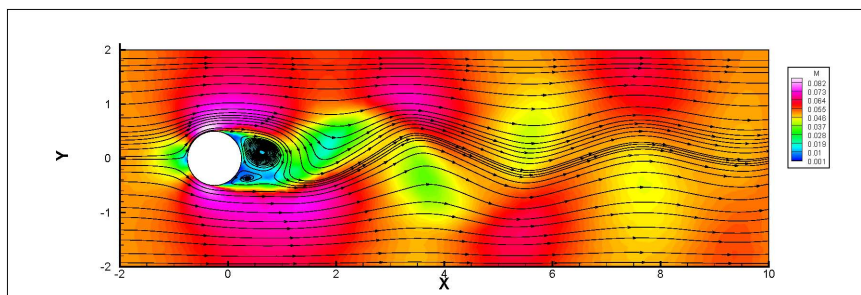


Рис. 2.20. Распределение чисел Маха и линии тока

лученных расчетных величин с экспериментальными [91]. Число Маха набегающего потока равно  $M = 0,025$ , а число Рейнольдса —  $Re = 31\,500$ . Для вычислений использован вариант RKDG-метода с кусочно-линейными базисными функциями на сетке, содержащей около 8 000 треугольников. Расчеты проведены для углов атаки от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  с шагом  $30^\circ$ , результаты представлены на рис. 2.21–2.22.

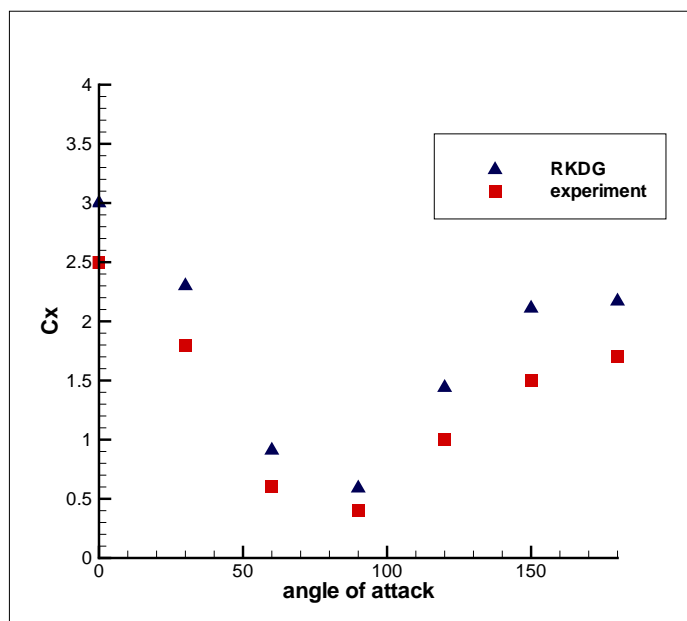


Рис. 2.21. Зависимость коэффициента лобового сопротивления от угла атаки

Характерный вид следа, образующегося за полукругом при углах атаки  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$ , представлен на рис. 2.23–2.25.

Таким образом, результаты проведенных расчетов свидетельствуют о высокой работоспособности и надежности предложенного метода оценки параметра лимитера в схеме RKDG-метода и возможности его применения для решения широкого класса задач газовой динамики, включающего изучение течений как идеальной, так и вязкой теплопроводной среды.

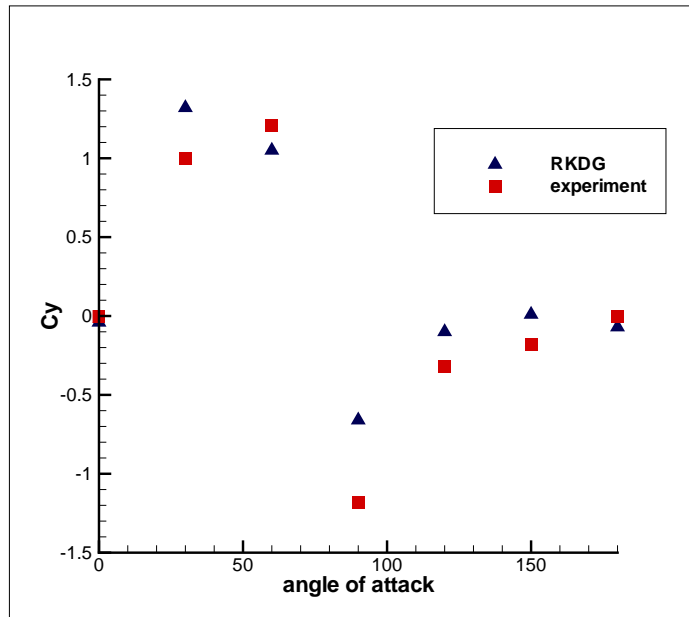


Рис. 2.22. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки

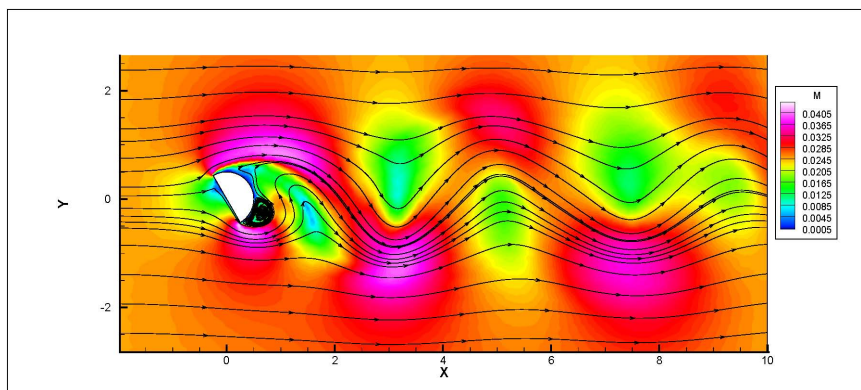


Рис. 2.23. Распределение чисел Маха и линии тока, угол атаки  $30^\circ$

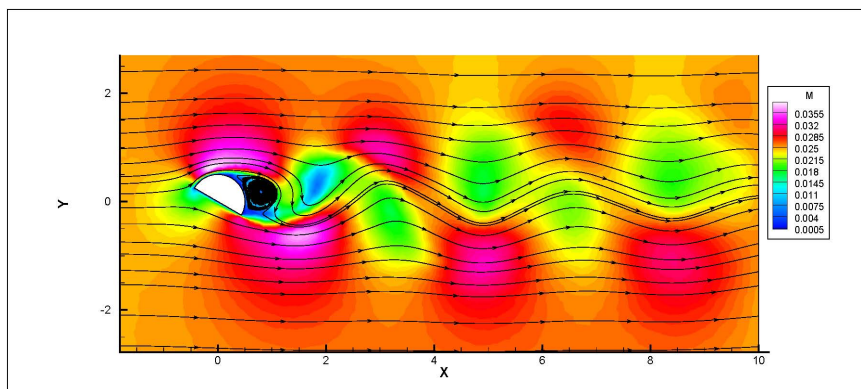


Рис. 2.24. Распределение чисел Маха и линии тока, угол атаки  $60^\circ$

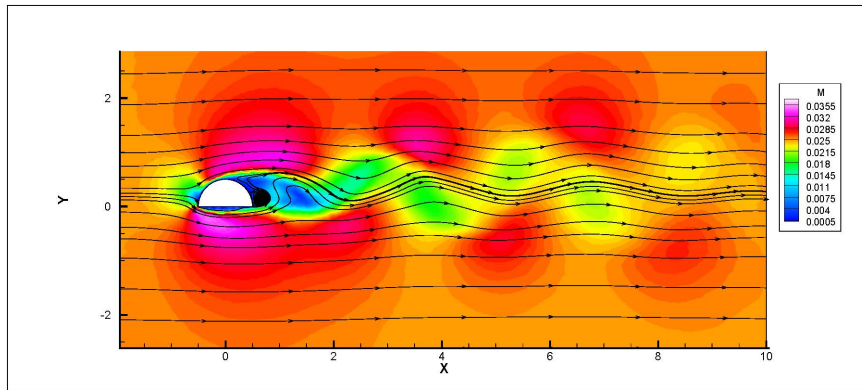


Рис. 2.25. Распределение чисел Маха и линии тока, угол атаки  $90^\circ$

### 2.3. Сравнение вычислительных затрат метода конечных объемов и RKDG-метода

RKDG-метод, обладая более высоким порядком аппроксимации по сравнению с рассмотренными методами годуновского типа, является и существенно более трудоемким. Годуновские методы первого порядка требуют для каждого треугольника 3-х вычислений численного потока (по одному для каждой стороны). RKDG-метод из-за использования двухточечных квадратурных формул для интегралов по границе требует по 2 вычисления потока на каждой стороне треугольника, т.е. всего 6 вычислений на каждый треугольник. Кроме того, используется двухшаговый метод Рунге–Кутты, поэтому при переходе на новый временной слой необходимо 12 раз вычислить поток. Использование лимитера также существенно увеличивает время выполнения расчетов.

Для тестовой задачи 2 раздела 1.2. (течение газа в канале клинообразной формы) время расчетов RKDG-методом второго порядка на сетке  $1/30$  и каким-либо конечно-объемным методом (Лакса–Фридрихса, HLLC, КИР) на сетке  $1/120$  приблизительно одинаково. Проводя расчеты указанными методами на различных сетках при соизмеримых затратах машинного времени, можно видеть, что RKDG-метод передает особенности решения с тем же качеством, но на сетке, содержащей приблизительно в 16 раз меньше треугольников, чем методы HLLC и Лакса–Фридрихса (рис. 1.30, 1.35, 2.26, 2.27).

В таблице 5 приведены параметры сеток, а также относительные затраты машинного времени  $t_M$  (в условных единицах) на 1 временной слой для

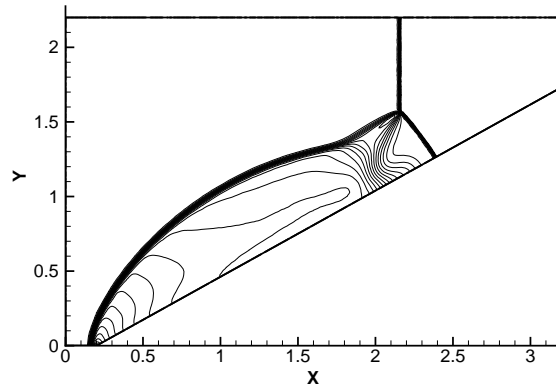


Рис. 2.26. Расчет МКО с потоком Лакса-Фридрихса на сетке 1/120

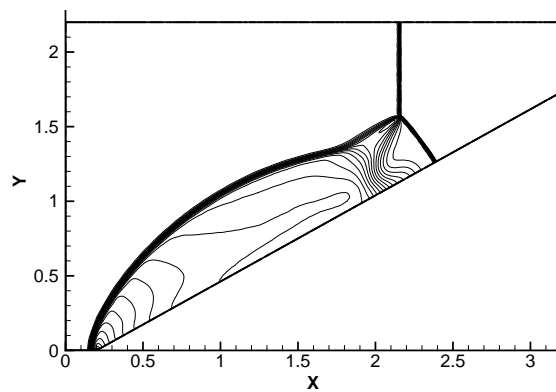


Рис. 2.27. Расчет МКО с потоком HLLC на сетке 1/120

сравниваемых методов при расчетах на различных сетках. Для вычислений требовалось 20 000 временных слоев.

Таблица 5.

#### Вычислительные затраты

	Сетка		
	1/30	1/60	1/120
Число элементов	17 086	54 800	221 330
Число узлов	8704	27 688	111 239
Метод HLLC, $t_M$	1	3	12
Метод Лакса-Фридрихса, $t_M$	1	3,6	15
RKDG-метод с потоком HLLC, $t_M$	16,7	52	207
RKDG-метод с потоком Лакса-Фридрихса, $t_M$	18,6	58,8	232



## 2.4. Параллельный алгоритм RKDG-метода

Одним из основных преимуществ RKDG-метода является возможность использования максимально узкого шаблона аппроксимации, состоящего из треугольника и его ближайших соседей. На этом основан эффективный параллельный алгоритм метода, реализуемый с помощью библиотеки параллельных процедур MPI [100–102].

Идея распараллеливания алгоритма RKDG-метода состоит в разделении расчетной области на несколько подобластей по количеству вычислительных узлов (процессоров) [66]. Каждый процессор определяет решение на новом временном слое только в «своей» подобласти. Для этого с предыдущего слоя ему необходимы данные о решении в «своей» подобласти, а также в ячейках, граничащих с ней. На рис. 2.28 приведен пример деления области на 3 подобласти; ячейки, принадлежащие разным подобластям, выделены разными цветами, «приграничные» ячейки обведены полужирным.

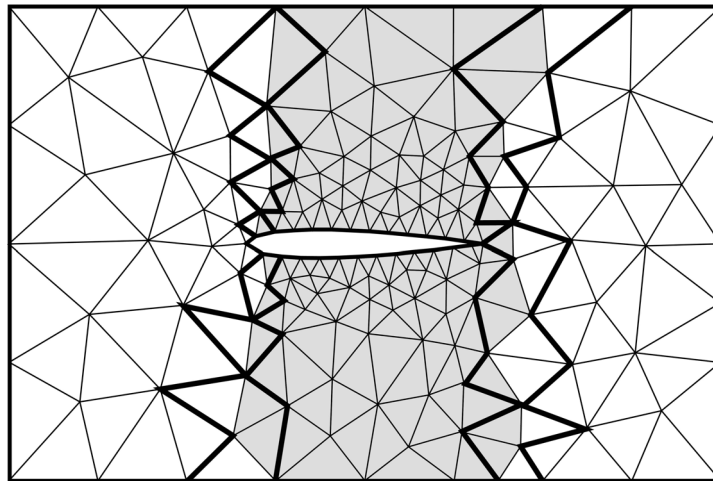


Рис. 2.28. Разбиение области

Таким образом, между компьютерами необходимо организовать обмен данными о решении только в «приграничных» ячейках. Эффективность предложенного алгоритма обеспечивается относительно небольшим количеством «приграничных» ячеек по сравнению с общим числом ячеек в каждой из подобластей.

На рис. 2.29 представлены графики, характеризующие эффективность предложенного параллельного алгоритма RKDG-метода. Здесь пунктирные линии показывают максимально возможное (теоретически) ускорение, сплошные линии — реальное ускорение, полученное в ходе расчетов с исполь-

зованием высокопроизводительного кластера МВС-6000IM, а также на сети из ПЭВМ.

В таблице 6 представлены значения ускорения алгоритма на использованных вычислительных комплексах, а также отношение, характеризующее эффективность сети ПЭВМ по сравнению с МВС-6000IM.

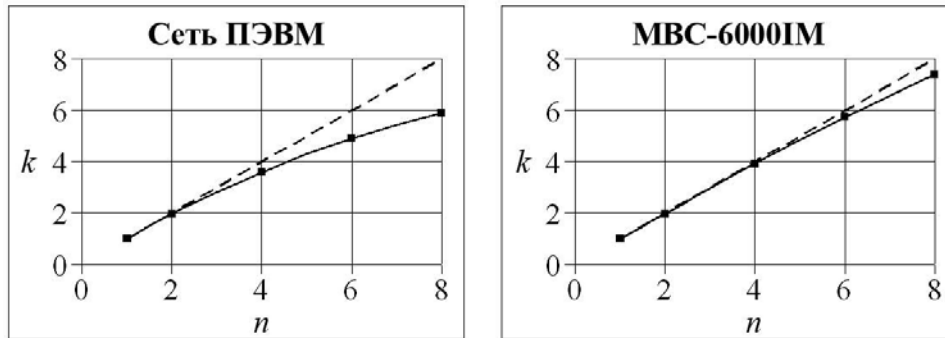


Рис. 2.29. Эффективность распараллеливания

Таблица 6.

Ускорение алгоритма

Число процессоров	$k_{\text{ПЭВМ}}$	$k_{\text{МВС}}$	$(k_{\text{ПЭВМ}}/k_{\text{МВС}}) \cdot 100\%$
2	1,97	1,97	99,9
4	3,58	3,94	90,8
6	4,92	5,75	85,5
8	5,90	7,41	79,6

Таким образом, при использовании параллельного алгоритма RKDG-метода можно достичь значительного сокращения времени расчетов.

Эффективность распараллеливания RKDG-метода на высокопроизводительном кластере МВС-100к представлена на рис. 2.30. На графике слева показано время в секундах, необходимое для выполнения одного шага расчета, а на графике справа — соответствующее ускорение алгоритма.

## 2.5. Организация программного комплекса

Для проведения расчетов с помощью RKDG-метода создан специальный программный комплекс, разработанный на языке Fortran 90 и состоящий из

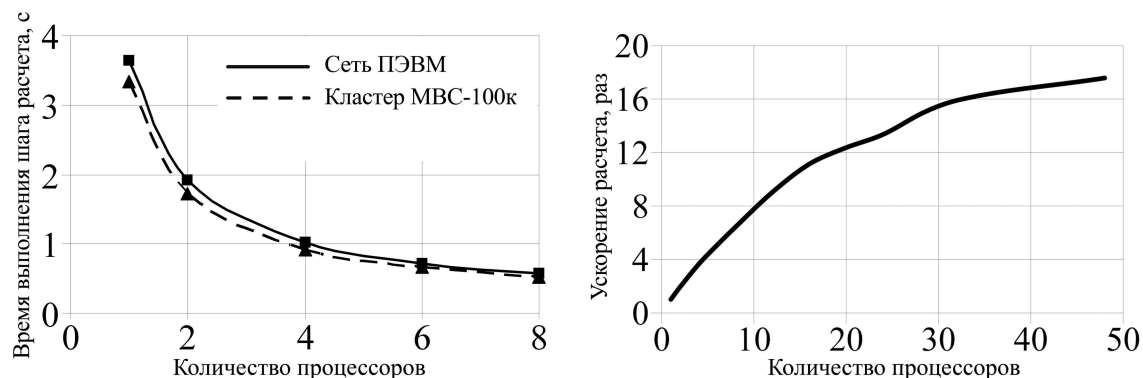


Рис. 2.30. Эффективность распараллеливания на МВС-100к

17 модулей. Каждый модуль содержит подпрограммы, необходимые для выполнения подзадач различных типов.

1. Модуль `mesh.f90` содержит все процедуры, необходимые для работы с пространственной сеткой: выбор генератора сеток, в формате которого сохранены исходные данные сетки, считывание необходимой информации о сетке из файлов, вычисление геометрических параметров расчетной сетки, а также процедуры пространственного разбиения сетки на подобласти, используемые при распараллеливании алгоритма.

2. Модуль `time.f90` содержит процедуры задания параметров расчета по времени: начального и конечного момента времени расчета, шага по времени, числа Куранта, а также процедуру автоматического выбора временного шага.

3. Модуль `names.f90` содержит сервисные подпрограммы, определяющие, например, имена сохраняемых выходных файлов и их типы.

4. Модуль `solution.f90` включает в себя подпрограммы сохранения решения в формате, пригодном для визуализации с помощью пакета Tecplot 360.

5. Модуль `dimensions.f90` содержит процедуры задания физических параметров потока, таких как число Маха, число Рейнольдса, температура, коэффициенты вязкости и теплопроводности и др., а также процедуры обезразмеривания системы уравнений.

6. Модуль `boundc.f90` служит для задания начальных и граничных условий.

7. Модуль `viscosity.f90` включает в себя описание компонентов системы уравнений газовой динамики, отвечающих за вязкость.

8. Модуль `heat.f90` содержит описание компонентов системы уравнений газовой динамики, отвечающих за процессы теплопроводности.

9. Модуль `finite_elems.f90` содержит описание используемых конечно-элементных процедур: задание базисных функций на треугольных элементах и подпрограммы работы с ними.

10. В модуле `dg_proc.f90` содержатся процедуры RKDG-метода получения результирующей системы ОДУ относительно коэффициентов разложения по базису в каждом треугольнике сетки для уравнений конвекции.

11. В модуле `dg_proc_visc.f90` содержатся процедуры учета диссипативных членов при построении результирующей системы ОДУ RKDG-метода.

12. Модуль `flux.f90` служит для задания функции численного потока конвективной части системы уравнений газовой динамики, который может быть выбран из нескольких вариантов.

13. Модуль `viscous_flux.f90` служит для задания функции численного потока диссипативной части системы уравнений газовой динамики.

14. Модуль `ode_solve.f90` включает в себя подпрограммы, реализующие метод Рунге-Кутты решения результирующей системы ОДУ для определения коэффициентов разложения решения по заданному базису.

15. В модуле `limiter.f90` содержатся процедуры, реализующие алгоритм монотонизации решения.

16. Модуль `parallel.f90` содержит процедуры, необходимые для организации параллельных вычислений.

17. Главный модуль `main.f90` служит для организации работы всей программы и взаимодействия всех остальных модулей.

Алгоритм решения задачи RKDG-методом состоит из следующих этапов:

1. Построение сетки. Для этого используется специальный свободно расширяемый генератор сеток `Triangle` или генератор сеток из системы `Matlab`.

2. Задание начальных и граничных условий.

3. Задание параметров потока.

4. Пересчет по времени до достижения интересующего момента времени:

- построение правой части ОДУ: выбор численных потоков, пространственная схема DG;
- решение ОДУ методом Рунге-Кутты с монотонизацией и обновлением граничных условий на каждом промежуточном шаге;

— сохранение промежуточных данных о решении.

5. Сохранение решения.

6 Визуализация решения в специализированном пакете Tecplot 360.

## 2.6. Применение RKDG-метода к расчету аэродинамических характеристик крылового профиля NACA23012 с закрылком

Созданный программный комплекс на основе RKDG-метода с возможностью автоматического выбора параметров монотонизатора может быть эффективно использован для расчета аэродинамических характеристик реальных крыловых профилей при необходимости анализа уже имеющихся профилей или проектировании новых.

В качестве примера такого расчета рассмотрим вычисление аэродинамических характеристик профиля NACA23012 с закрылком [103] с использованием разработанного программного комплекса.

### 2.6.1. Постановка задачи

Геометрические параметры рассматриваемого сечения крыла таковы: длина аэродинамической хорды крыла  $c = 0,9144$  м, длина закрылка составляет  $0,2c$  (рис. 2.31).

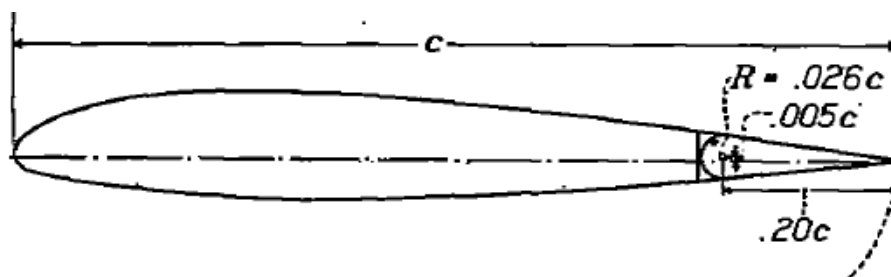


Рис. 2.31. Профиль NACA23012 с закрылком

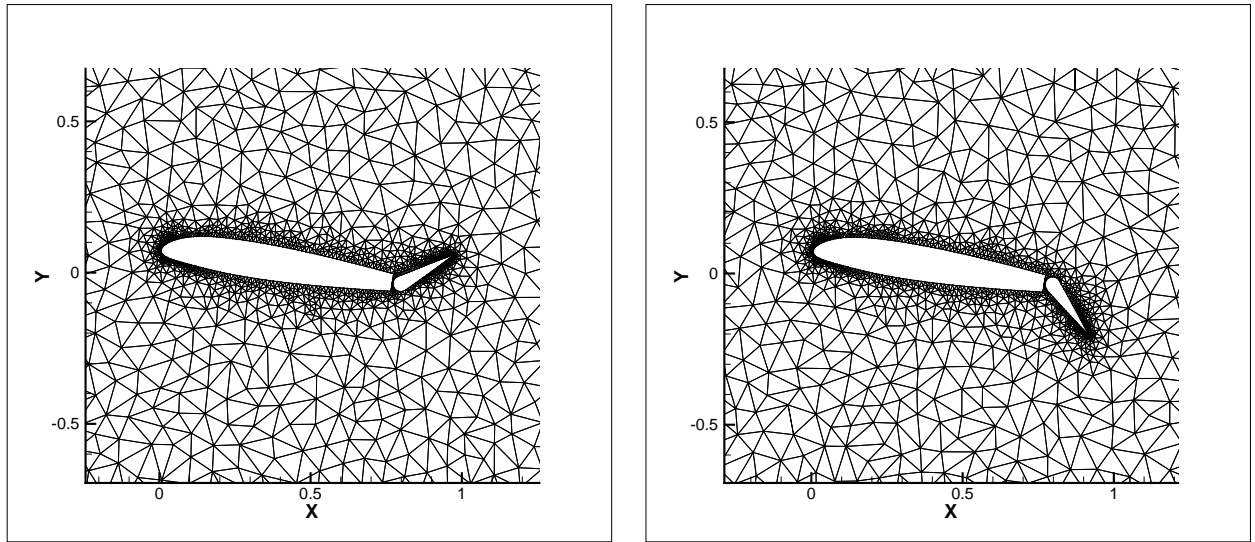
Закрылок может отклоняться от горизонтальной оси вниз на максимальный угол  $\alpha_f = 75^\circ$  и вверх на максимальный угол  $\alpha_f = -38^\circ$  (здесь и далее положительные углы  $\alpha_f$  соответствуют отклонению закрылка вниз, а отрицательные — вверх). Угол атаки профиля в рассматриваемой задаче составляет  $\alpha_a = 8^\circ$ .

Набегающий поток (воздух) имеет следующие физические параметры:

- плотность  $\rho_\infty = 1,204 \text{ кг/м}^3$ ;
- скорость  $V_\infty = 35 \text{ м/с}$ ;
- температура  $T_\infty = 293,15 \text{ К}$ ;
- показатель адиабаты  $\gamma = 1,4$ ;
- динамический коэффициент вязкости  $\eta = 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$ ;
- коэффициент теплопроводности  $\kappa = 0,0257 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ;
- удельная теплоемкость при постоянном объеме  $c_V = 717,85 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,

что приблизительно соответствует числу Маха  $M = 0,1$ , числу Рейнольдса  $Re = 2\,190\,000$  и числу Прандтля  $Pr = 0,712$ .

При переходе к безразмерным координатам за характерный размер задачи принимается аэродинамическая хорда крыла  $c$ , а вычислительная область в безразмерных координатах представляет собой прямоугольник размерами  $[-2, 10] \times [-2, 2]$ . Расчеты проводились на сетках, содержащих около 17 000 треугольных элементов и 9000 узлов, из которых 246 лежат на крыловом профиле. Характерный вид сетки вблизи поверхности профиля представлен на рис. 2.32.



$$\alpha_f = -38^\circ$$

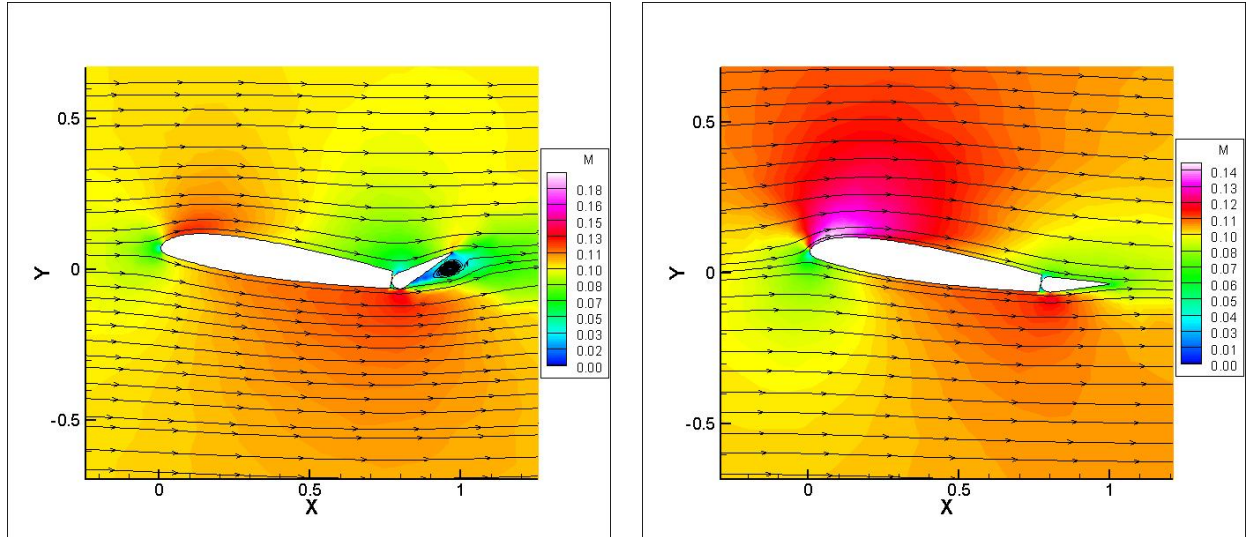
$$\alpha_f = 45^\circ$$

Рис. 2.32. Характерный вид расчетной сетки

Для решения задачи использован вариант RKDG-метода с кусочно-линейными базисными функциями и потоком HLLC, обладающий вторым порядком аппроксимации по времени и пространству.

### 2.6.2. Результаты расчетов

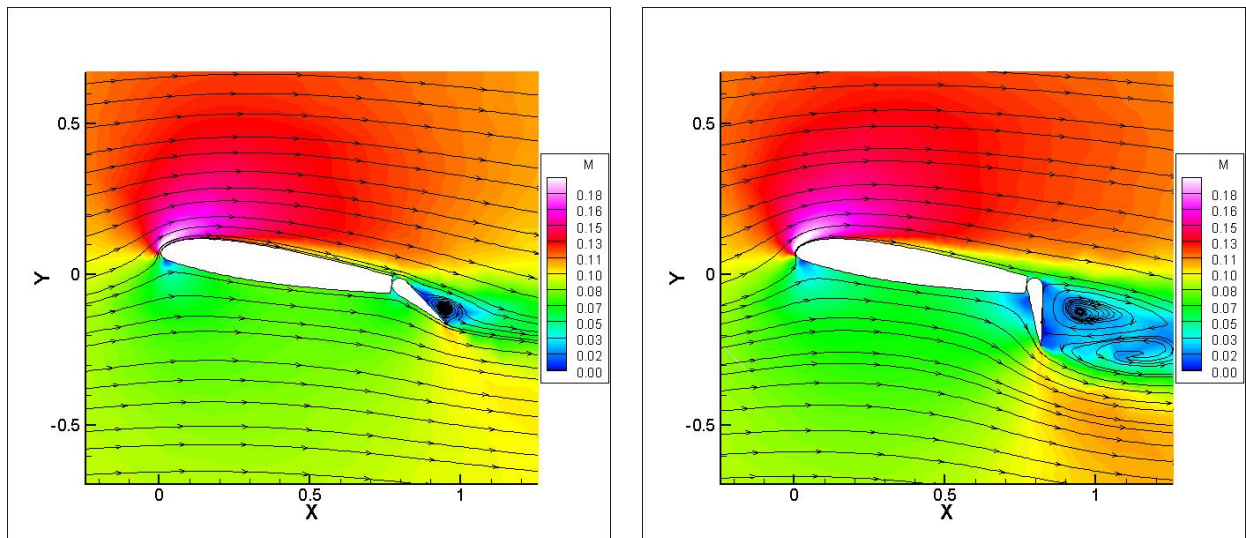
Результаты моделирования обтекания крылового профиля NASA23012 для разных положений закрылка представлены на рис. 2.33, 2.34.



$$\alpha_f = -38^\circ$$

$$\alpha_f = -10^\circ$$

Рис. 2.33. Распределение чисел Маха и линии тока



$$\alpha_f = 30^\circ$$

$$\alpha_f = 75^\circ$$

Рис. 2.34. Распределение чисел Маха и линии тока

На рис. 2.35 представлены результаты расчета аэродинамических характеристик профиля при угле атаки, равном  $\alpha_a = 8^\circ$  и различных углах отклонения закрылка. Точки «RKDG» соответствуют расчетным значениям коэффициентов лобового сопротивления  $C_x^a$  и подъемной силы  $C_y^a$ , а точки «experiment» — экспериментальным значениям этих величин [103].

Аэродинамические характеристики профиля NASA23012 хорошо (качественно и количественно) согласуются с результатами экспериментов, представленными в работе [103]. Погрешность вычислений сравнима с приведенной в [103] погрешностью эксперимента, что позволяет говорить об эффективности созданного программного комплекса на базе RKDG-метода при решении реальных газодинамических задач.

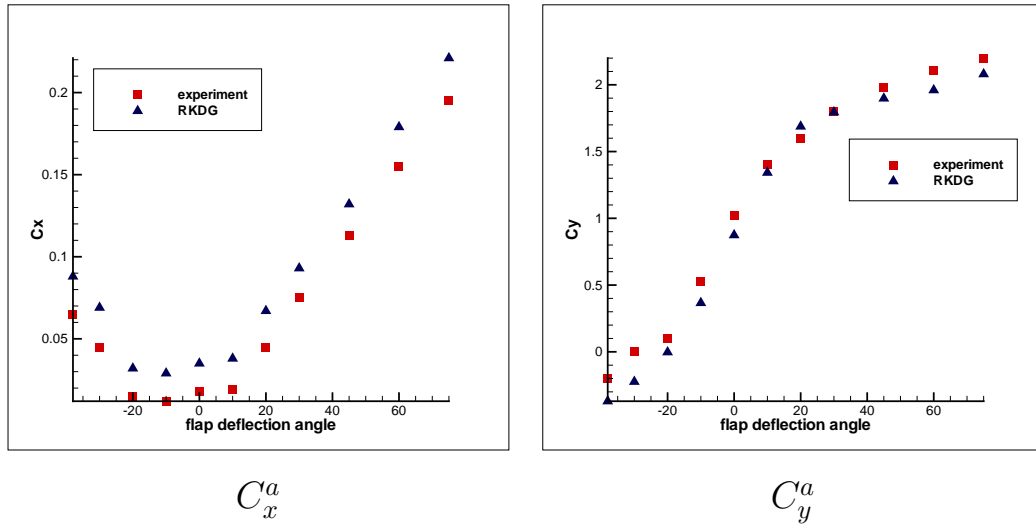


Рис. 2.35. Зависимость аэродинамических коэффициентов профиля NASA23012 от угла отклонения закрылка при угле атаки  $\alpha_a = 8^\circ$



## Глава 3.

# Численное моделирование двухфазных потоков с использованием разрывного метода Галеркина

### 3.1. Математическая модель и задача Римана

Уравнения динамики двухфазной среды представляют собой систему одиннадцати дифференциальных уравнений в частных производных [42]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v}_I \operatorname{grad} \bar{\alpha} &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\alpha} \bar{\rho}) + \operatorname{div}(\bar{\alpha} \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\alpha} \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \operatorname{div}(\bar{\alpha} \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}}) + \operatorname{grad}(\bar{\alpha} \bar{p}) &= p_I \operatorname{grad} \bar{\alpha} + \lambda(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}), \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\alpha} \bar{\rho} \bar{E}) + \operatorname{div}((\bar{\alpha} \bar{\rho} \bar{E} + \bar{\alpha} \bar{p}) \bar{\mathbf{v}}) &= p_I \mathbf{v}_I \operatorname{grad} \bar{\alpha} + \lambda \mathbf{v}_I(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}), \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\alpha \rho) + \operatorname{div}(\alpha \rho \mathbf{v}) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\alpha \rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\alpha \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \operatorname{grad}(\alpha p) &= -p_I \operatorname{grad} \bar{\alpha} - \lambda(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}), \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\alpha \rho E) + \operatorname{div}((\alpha \rho E + \alpha p) \mathbf{v}) &= -p_I \mathbf{v}_I \operatorname{grad} \bar{\alpha} - \lambda \mathbf{v}_I(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}), \\
 \alpha + \bar{\alpha} &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь величины  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{E}$  соответствуют параметрам твердой фазы, а  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $E$  — параметрам газовой фазы. Отличительной особенностью модели является наличие в ней пограничной скорости  $\mathbf{v}_I$  и давления  $p_I$ , которые могут быть выбраны различными способами в зависимости от предполагаемой области использования модели [45]. Эти параметры характеризуют скорости и давления на границе раздела двух фаз. Так, в одной из самых распространенных моделей движения двухфазной среды, модели Баера–Нунциато, предполагается, что пограничное значение скорости равно скорости твердой фазы, а пограничное значение давления принимает значение газового давления, т.е.  $\mathbf{v}_I = \mathbf{v}$  и  $p_I = p$ . Такая модель описывает прежде всего газообразные среды с примесями твердых частиц и является основой для построения чис-

ленных методов анализа многофазных сред такого типа. Именно эту модель будем рассматривать в дальнейшем.

Многие современные численные методы решения уравнений типа Баера–Нунциато, например, метод конечных объемов, основаны на аппроксимации физического потока через границу вычислительной ячейки. Для нахождения численного потока важно рассмотреть уравнения математической модели в направлении, нормальном к границе ячейки, которые сводятся к одномерным уравнениям вдоль оси  $x$ .

### 3.1.1. Одномерные уравнения Баера–Нунциато

Одномерные уравнения Баера–Нунциато представлены следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [42]:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \mathbf{T}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}), \quad (3.2)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{w} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{E} \\ \alpha\rho \\ \alpha\rho u \\ \alpha\rho v \\ \alpha\rho w \\ \alpha\rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\alpha}(\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p}) \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}\bar{w} \\ \bar{\alpha}\bar{u}(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p}) \\ \alpha\rho u \\ \alpha(\rho u^2 + p) \\ \alpha\rho uv \\ \alpha\rho uw \\ \alpha u(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ 0 \\ -p \\ 0 \\ 0 \\ -p\bar{u} \\ 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \\ p\bar{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \\ s_9 \\ s_{10} \\ s_{11} \end{bmatrix}.$$

Первые шесть уравнений этой системы описывают движение твердой фазы, а остальные пять — газовой. Здесь  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $E$  — это плотность, компоненты скорости, давление и полная энергия газовой фазы, а  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{E}$  — аналогичные параметры твердой фазы;  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$  обозначают объемные концентрации каждой из фаз.

В качестве уравнения состояния для газовой фазы будем рассматривать уравнение состояния совершенного газа. В качестве твердой фазы рассмот-

рены материалы, подчиняющиеся жесткому уравнению состояния:

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad \bar{p} = (\bar{\gamma} - 1)\bar{\rho}\bar{e} - \bar{\gamma}\bar{P}_0,$$

где  $e$  и  $\bar{e}$  — удельные внутренние энергии,  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$  — показатели адиабаты для газовой и твердой фазы, соответственно, а  $\bar{P}_0$  — некоторая известная константа, влияние которой на решение уравнений (3.2) обусловлено зависимостью характеристических матриц системы от функции давления  $\bar{p}$ . Концентрации фаз связаны друг с другом следующим условием насыщения:  $\bar{\alpha} + \alpha = 1$ .

Наибольший интерес представляет исследование главной части уравнений (3.2), поэтому можно считать, что источники отсутствуют, т. е.  $\mathbf{S}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$ .

Уравнения (3.2) включают в себя также чисто одномерный случай при равенстве нулю тангенциальных скоростей. Поэтому изучение уравнений такого вида оправдано для решения как трехмерных, так и одномерных уравнений.

Уравнения Баера–Нунциато, записанные в квазилинейной форме относительно консервативных переменных, выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

где, как и ранее,  $\mathbf{Q}$  обозначает вектор консервативных переменных, а матрица  $\mathbf{A}(\mathbf{Q})$  имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p - \bar{\gamma}\bar{P}_0 & \hat{\gamma}\bar{H} - \bar{u}^2 - \bar{a}^2 & (3 - \bar{\gamma})\bar{u} & -\hat{\gamma}\bar{v} & -\hat{\gamma}\bar{w} & \hat{\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{u}\bar{v} & \bar{v} & \bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{u}\bar{w} & \bar{w} & 0 & \bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{u}(-p - \bar{\gamma}\bar{P}_0) & \bar{u}[-\bar{H} + \frac{\hat{\gamma}\bar{\mathbf{V}}^2}{2}] & \bar{H} - \hat{\gamma}\bar{u}^2 & -\hat{\gamma}\bar{u}\bar{v} & -\hat{\gamma}\bar{u}\bar{w} & \bar{\gamma}\bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\gamma}H - u^2 - a^2 & (3 - \gamma)u & -\hat{\gamma}v & -\hat{\gamma}w & \hat{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -uv & v & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -uw & w & 0 & u & 0 \\ p\bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u[-H + \frac{\hat{\gamma}\mathbf{V}^2}{2}] & H - \hat{\gamma}u^2 & -\hat{\gamma}uv & -\hat{\gamma} & \gamma u \end{bmatrix},$$

где  $\hat{\gamma} = \bar{\gamma} - 1$ ,  $\bar{\gamma} = \gamma - 1$ ,  $\bar{\mathbf{V}}^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2$ ,  $\mathbf{V}^2 = u^2 + v^2 + w^2$ , а энтальпии твердой и газовой фазы равны соответственно  $\bar{H} = \bar{E} + \bar{p}/\bar{\rho} = \bar{\mathbf{V}}^2/2 + \bar{a}^2/(\bar{\gamma} - 1)$  и  $H = E + p/\rho = \mathbf{V}^2/2 + a^2/(\gamma - 1)$ . Скорости звука в газовой и твердой фазах  $a$  и  $\bar{a}$  равны, соответственно,

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad \bar{a} = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}(\bar{p} + \bar{P}_0)}{\bar{\rho}}},$$

Матрица  $A$  имеет одиннадцать действительных собственных чисел

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= u - a, & \lambda_2 &= \lambda_3 = \lambda_4 = u, & \lambda_5 &= u + a, \\ \lambda_6 &= \bar{u} - \bar{a}, & \lambda_7 &= \lambda_8 = \lambda_9 = \bar{u}, & \lambda_{10} &= \bar{u} + \bar{a}, & \lambda_{11} &= \bar{u}\end{aligned}$$

и полный набор соответствующих линейно независимых правых собственных векторов

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ u - a \\ v \\ w \\ H - ua \end{bmatrix}, \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ u \\ 0 \\ 0 \\ u^2 - \frac{\mathbf{V}^2}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v \\ uv \\ \frac{\mathbf{V}^2}{2} - u^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \\ uw \\ 0 \\ \frac{\mathbf{V}^2}{2} - u^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ u + a \\ v \\ w \\ H + ua \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}^6 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{u} - \bar{a} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{H} - \bar{u}\bar{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{u} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{u}^2 - \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^8 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{v} \\ \bar{u}\bar{v} \\ \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2} - \bar{u}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^9 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{w} \\ \bar{u}\bar{w} \\ 0 \\ \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2} - \bar{u}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{u} + \bar{a} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{H} + \bar{u}\bar{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}^{11} &= \begin{bmatrix} (\bar{\gamma} - 1)(a^2 - (u - \bar{u})^2)(\frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2} - \bar{u}^2) \\ (p + \bar{\gamma}\bar{P}_0)(a^2 - (u - \bar{u})^2) \\ \bar{u}(p + \bar{\gamma}\bar{P}_0)(a^2 - (u - \bar{u})^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(\bar{\gamma} - 1)p(\bar{u}^2 - \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2}) \\ \gamma(\bar{\gamma} - 1)p\bar{u}(\bar{u}^2 - \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2}) \\ \gamma(\bar{\gamma} - 1)p\bar{v}(\bar{u}^2 - \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2}) \\ \gamma(\bar{\gamma} - 1)p\bar{w}(\bar{u}^2 - \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2}) \\ \frac{\bar{\gamma}-1}{\gamma-1}p \left[ a^2 - \frac{\gamma-1}{2}((\gamma-2)(u - \bar{u})^2 - \gamma(u^2 - \bar{u}^2) - \gamma\mathbf{V}^2) \right] (\bar{u}^2 - \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2}) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Отметим, что выражения для правых собственных векторов используются, например, при построении ограничителей в схемах высокого порядка.

Уравнения Баера–Нунциато также могут быть записаны в физических (или естественных) переменных, а именно:

$$\mathbf{W} = [\bar{\alpha}, \bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \rho, u, v, w, p]^T,$$

в неконсервативной форме

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{B}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0. \quad (3.4)$$

В этом случае матрица системы  $\mathbf{B}(\mathbf{W})$  имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta p}{\bar{\alpha}\bar{\rho}} & 0 & \bar{u} & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}\bar{a}^2 & 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho\Delta u}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ -\frac{\rho a^2 \Delta u}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho a^2 & 0 & 0 & u \end{bmatrix}.$$

Собственными значениями матрицы  $\mathbf{B}(\mathbf{W})$  являются

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u - a, & \lambda_2 &= \lambda_3 = \lambda_4 = u, & \lambda_5 &= u + a, \\ \lambda_6 &= \bar{u} - \bar{a}, & \lambda_7 &= \lambda_8 = \lambda_9 = \bar{u}, & \lambda_{10} &= \bar{u} + \bar{a}, & \lambda_{11} &= \bar{u}, \end{aligned}$$

а соответствующими им собственными векторами —

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ -a \\ 0 \\ 0 \\ \rho a^2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ a \\ 0 \\ 0 \\ \rho a^2 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{K}^6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\rho} \\ -\bar{a} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\rho}\bar{a}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^9 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\rho} \\ \bar{a} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\rho}\bar{a}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{K}^{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta p}{\bar{\alpha}} \\ -\frac{\rho(\bar{\alpha}(\Delta u)^2)}{\alpha(a^2 - (\Delta u)^2)} \\ \frac{a^2 \Delta u}{\alpha(a^2 - (\Delta u)^2)} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\rho a^2 (\Delta u)^2}{\alpha(a^2 - (\Delta u)^2)} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

где  $\Delta p = p - \bar{p}$ ,  $\Delta u = u - \bar{u}$ .

### 3.1.2. Точное решение задачи Римана

Рассмотрим следующую задачу Римана для уравнений Баера–Нунциато (3.2):

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \mathbf{T}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{Q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_L(x), & \text{если } x < 0; \\ \mathbf{Q}_R(x), & \text{если } x > 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Анализ собственных векторов системы в естественных переменных (3.5)–(3.7) позволяет описать структуру точного решения задачи Римана (3.8). Известно, что переменная, соответствующая нулевому компоненту  $i$ -го собствен-

ного вектора, не изменяется при переходе через  $i$ -ю характеристику [15]; таким образом, для шести характеристических полей рассматриваемой системы справедливы следующие соотношения:

1.  $\lambda_1 = u - a$  (левая нелинейная волна газовой фазы)

Твердая фаза:  $d\bar{\alpha} = 0, d\bar{\rho} = 0, d\bar{u} = 0, d\bar{v} = 0, d\bar{w} = 0, d\bar{p} = 0$ .

Газовая фаза:  $d\alpha = 0, dv = 0, dw = 0$ .

2.  $\lambda_2 = u$  (контактный разрыв газовой фазы)

Твердая фаза:  $d\bar{\alpha} = 0, d\bar{\rho} = 0, d\bar{u} = 0, d\bar{v} = 0, d\bar{w} = 0, d\bar{p} = 0$ .

Газовая фаза:  $d\alpha = 0, du = 0, dp = 0$ .

3.  $\lambda_3 = u + a$  (правая нелинейная волна газовой фазы)

Твердая фаза:  $d\bar{\alpha} = 0, d\bar{\rho} = 0, d\bar{u} = 0, d\bar{v} = 0, d\bar{w} = 0, d\bar{p} = 0$ .

Газовая фаза:  $d\alpha = 0, dv = 0, dw = 0$ .

4.  $\lambda_4 = \bar{u} - \bar{a}$  (левая нелинейная волна твердой фазы)

Твердая фаза:  $d\bar{\alpha} = 0, d\bar{v} = 0, d\bar{w} = 0$ .

Газовая фаза:  $d\alpha = 0, d\rho = 0, du = 0, dv = 0, dw = 0, dp = 0$ .

5.  $\lambda_5 = \bar{u}$  (контактный разрыв твердой фазы)

Твердая фаза:  $d\bar{u} = 0$ .

Газовая фаза:  $dv = 0, dw = 0$ .

6.  $\lambda_6 = \bar{u} + \bar{a}$  (правая нелинейная волна твердой фазы)

Твердая фаза:  $d\bar{\alpha} = 0, d\bar{v} = 0, d\bar{w} = 0$ .

Газовая:  $d\alpha = 0, d\rho = 0, du = 0, dv = 0, dw = 0, dp = 0$ .

Эти соотношения позволяют сделать вывод о том, что переменные твердой фазы остаются постоянными при переходе через все три газовые характеристические волны, а контактный разрыв твердой фазы изменяет все газовые переменные, кроме тангенциальных скоростей. Левая и правая нелинейные волны твердой фазы не влияют на газовые переменные.

Структура точного решения этой задачи изображена на рис. 3.1. В общем случае в задаче присутствуют шесть волновых семейств: три для газовой фазы и три для твердой фазы; таким образом, на плоскости  $(x, t)$  шесть характеристик разделяют семь областей, в которых параметры среды сохраняют постоянные значения. На рис. 3.1 переменные газовой фазы обозначены как  $\mathbf{U}$ , а переменные твердой фазы — как  $\bar{\mathbf{U}}$ , за исключением фазовых концентраций  $\bar{\alpha}$ , представленных отдельно, где

$$\bar{\mathbf{U}} = [\bar{\alpha}\bar{\rho}, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v}, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{w}, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{E}]^T, \quad \mathbf{U} = [\alpha\rho, \alpha\rho u, \alpha\rho v, \alpha\rho w, \alpha\rho E]^T.$$

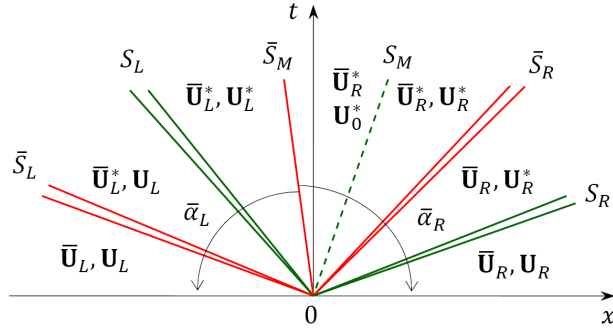


Рис. 3.1. Структура точного решения задачи Римана для уравнений Баера-Нунциато

Рассмотрим рис. 3.2, 3.3, иллюстрирующие более подробно особенности промежуточных состояний на плоскости  $(x, t)$ . Твердая фаза содержит на плоскости  $(x, t)$  две промежуточных подобласти « $L$ » и « $R$ », разделенных контактным разрывом, в которых все параметры твердой фазы постоянны, причем нормальные скорости в этих подобластях равны ( $\bar{u}_L^* = \bar{u}_R^*$ ), а давления и плотности различны. Для газовой фазы промежуточные состояния представлены тремя подобластями постоянного значения параметров « $L$ », « $0$ » и « $R$ ». Точное определение параметров газа в этих подобластях в общем случае зависит от взаимного расположения двух имеющихся контактных разрывов; для конфигурации волн, представленной на рис. 3.3, справедливы следующие выражения для величин в подобласти « $0$ »:

$$u_0^* = u_R^*, \quad p_0^* = p_R^*, \quad \rho_0^* = \rho_L^* \left( \frac{p_R^*}{p_L^*} \right)^{1/\gamma}.$$

Выражения для  $\bar{\rho}_L^*$ ,  $\bar{u}_L^*$ ,  $\bar{p}_L^*$ ,  $\bar{\rho}_R^*$ ,  $\bar{u}_R^*$ ,  $\bar{p}_R^*$  и  $\rho_L^*$ ,  $u_L^*$ ,  $p_L^*$ ,  $\rho_R^*$ ,  $u_R^*$ ,  $p_R^*$  могут быть получены, например, из соотношений Гюгонио для правых и левых волн [15].

Тангенциальные скорости  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ,  $v$  и  $w$  не изменяются при переходе через левые и правые нелинейные волны обеих фаз; скачок этих величин происходит на контактном разрыве соответствующей фазы и определяется только начальным условием. Таким образом, решение задачи Римана для трехмерных уравнений принципиально не отличается от решения одномерной задачи Римана.

Важным свойством уравнений Баера-Нунциато является тот факт, что скачок фазовой концентрации  $\bar{\alpha}$  происходит только на контактном разрыве твердой фазы, поэтому во всех других точках области  $(x, t)$  производная  $\partial_x \bar{\alpha}$  обращается в нуль, и уравнения (3.2) сводятся к двум независимым систе-



мам уравнений Эйлера, что значительно упрощает анализ всей системы. В окрестности контактного разрыва твердой фазы правая часть системы уравнений Баера–Нунциато становится ненулевой, и уравнения Эйлера для обеих фаз связываются из-за наличия скачка концентрации, классические условия Гюгоньо становятся неприменимыми для этой волны, поэтому необходимо рассматривать специальные ее аппроксимации. Одна из возможных аппроксимаций контактного разрыва твердой фазы как тонкого слоя предложена в работе [56], где выведены уравнения тонкого слоя и предложен алгоритм их решения.

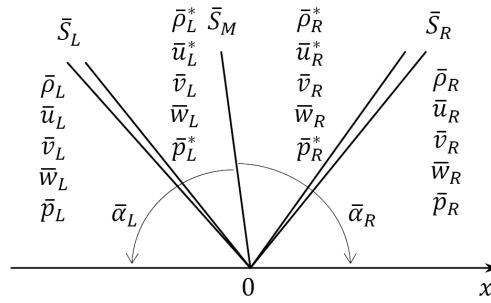


Рис. 3.2. Промежуточные состояния твердой фазы

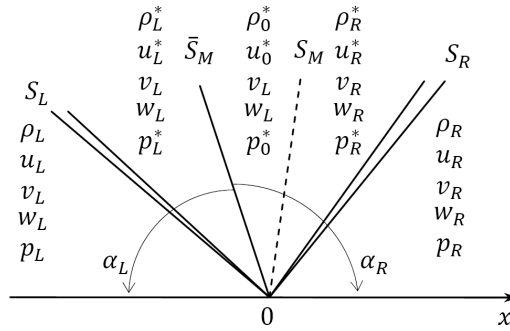


Рис. 3.3. Промежуточные состояния газовой фазы

### 3.2. HLLC-метод решения задачи Римана

Предположим, что имеются некоторые оценки скоростей  $\bar{S}_L$ ,  $S_L$ ,  $\bar{S}_R$ ,  $S_R$ . Предлагаемое решение задачи Римана основано на анализе поведения переменных при переходе через левые и правые нелинейные волны обеих фаз и рассмотрении соотношений на контактных разрывах, имеющих скорости  $\bar{S}_M$ ,  $S_M$ .

Рассмотрим сначала контактный разрыв твердой фазы. В работе [56] контактный разрыв твердой фазы рассматривается как бесконечно тонкий слой, в котором все параметры газа изменяются непрерывно, и существуют производные всех необходимых величин. Тогда можно записать уравнения тонкого слоя, связывающие параметры среды по обе стороны от контактного разрыва твердой фазы. Возможны две принципиально разные конфигурации волн в решении задачи Римана: «дозвуковая» и «сверхзвуковая». Так называемый «дозвуковой» случай реализуется, если выполнено соотношение  $(u - \bar{u})^2 < a^2$ ; в противном случае имеем «сверхзвук».

Далее рассматривается только «дозвуковая» конфигурация волн, которая считается более распространенной в реальных приложениях [56]. В этой модели контактный разрыв твердой фазы расположен между левой и правой волнами газовой фазы, как показано на рис. 3.3. При этом возможны два варианта взаимного расположения контактных разрывов друг относительно друга. В случае, показанном на рис. 3.3, уравнения тонкого слоя на контактном разрыве твердой фазы принимают вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}_R^* - \bar{u}_L^* &= 0; \\ \alpha_R \left( \frac{p_R^*}{p_L^*} \right)^{1/\gamma} (u_R^* - \bar{u}_R^*) - \alpha_L (u_L^* - \bar{u}_L^*) &= 0; \\ \bar{\alpha}_R \bar{p}_R^* + \alpha_R p_R^* - \bar{\alpha}_L \bar{p}_L^* - \alpha_L p_L^* + \alpha_L \rho_L^* (u_L^* - \bar{u}_L^*) (u_R^* - u_L^*) &= 0; \\ \frac{\gamma p_R^*}{(\gamma - 1) \rho_L^*} \left( \frac{p_L^*}{p_R^*} \right)^{1/\gamma} + \frac{1}{2} (u_R^* - \bar{u}_R^*)^2 - \frac{\gamma p_L^*}{(\gamma - 1) \rho_L^*} - \frac{1}{2} (u_L^* - \bar{u}_L^*)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для второй возможной «дозвуковой» конфигурации волн, когда контактный разрыв твердой фазы лежит справа от контактного разрыва газовой фазы, уравнения тонкого слоя могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}_R^* - \bar{u}_L^* &= 0; \\ \alpha_R (u_R^* - \bar{u}_R^*) - \alpha_L \left( \frac{p_L^*}{p_R^*} \right)^{1/\gamma} (u_L^* - \bar{u}_L^*) &= 0; \\ \bar{\alpha}_R \bar{p}_R^* + \alpha_R p_R^* - \bar{\alpha}_L \bar{p}_L^* - \alpha_L p_L^* + \alpha_R \rho_R^* (p_R^*) (u_R^* - \bar{u}_R^*) (u_R^* - u_L^*) &= 0; \\ \frac{\gamma p_R^*}{(\gamma - 1) \rho_R^* (p_L^*)} + \frac{1}{2} (u_R^* - \bar{u}_R^*)^2 - \frac{\gamma p_L^*}{(\gamma - 1) \rho_R^*} \left( \frac{p_R^*}{p_L^*} \right)^{1/\gamma} - \frac{1}{2} (u_L^* - \bar{u}_L^*)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В работе [56] системы нелинейных уравнений (3.10) и (3.11) решаются от-

носителем неизвестных давлений  $p_L^*, p_R^*, \bar{p}_L^*, \bar{p}_R^*$ , а соответствующие скорости находятся из нелинейных зависимостей, справедливых на левых и правых волнах. Так, чтобы выразить  $u_L^*$  через  $p_L^*$ , необходимо сначала определить тип левой волны (ударная волна или волна разрежения), а затем выбрать выражение для функции скачка на этой волне:

$$F_L(p_L^*) = \begin{cases} (p_L^* - p_L) \left[ \frac{A_L}{p_L + B_L} \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{если } p_L^* > p_L \text{ (ударная волна);} \\ \frac{2a_L}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_L^*}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} - 1 \right], & \text{если } p_L^* < p_L, \text{ (волна разрежения),} \end{cases} \quad (3.12)$$

где  $A_L = \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_L}$ ,  $B_L = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}p_L$ , и записать окончательное выражение для скорости:

$$u_L^* = u_L - F_L(p_L^*). \quad (3.13)$$

Такой анализ волновых структур должен выполняться на каждом шаге итерационного решения нелинейных уравнений (3.10) или (3.11), при этом матрицы Якоби этих систем будут зависеть от конкретного типа имеющихся волн.

Можно предложить следующее упрощение процедуры решения уравнений (3.10) или (3.11), заключающееся в комбинации подхода HLLC [15, 104–107] и численного решения уравнений тонкого слоя на контактном разрыве твердой фазы. Вместо анализа типов левой и правой волн обеих фаз мы оцениваем их скорости и используем эти оценки для выражения параметров газа в области « $L$ » через параметры в области « $L$ » (и, соответственно, « $R$ » через « $R$ »), с помощью схемы HLLC. Затем мы используем полученные параметры при решении уравнений тонкого слоя.

Рассмотрим «дозвуковую» конфигурацию волн, изображенную на рис. 3.2 и 3.3. Мы рассматриваем левые и правые нелинейные волны обеих фаз как разрывы, распространяющиеся с известными скоростями  $\bar{S}_L$ ,  $\bar{S}_R$ ,  $S_L$  и  $S_R$ , соответственно. Как отмечено выше, концентрация фаз не изменяется при переходе через эти волны, поэтому уравнения Баера–Нунциато распадаются в окрестности этих волн на две независимые системы уравнений Эйлера, для которых справедливы следующие усредненные соотношения Гюгонио:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_L^* &= \bar{\mathbf{G}}_L + \bar{S}_L(\bar{\mathbf{U}}_L^* - \bar{\mathbf{U}}_L), \\ \bar{\mathbf{G}}_R^* &= \bar{\mathbf{G}}_R + \bar{S}_R(\bar{\mathbf{U}}_R^* - \bar{\mathbf{U}}_R), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_L^* &= \mathbf{G}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L), \\ \mathbf{G}_R^* &= \mathbf{G}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R),\end{aligned}\tag{3.15}$$

где векторы состояний  $\bar{\mathbf{U}}_L, \bar{\mathbf{U}}_R, \bar{\mathbf{U}}_L^*, \bar{\mathbf{U}}_R^*, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L^*, \mathbf{U}_R^*$  представлены на рис. 3.1, а  $\bar{\mathbf{G}}_L, \bar{\mathbf{G}}_R, \mathbf{G}_L, \mathbf{G}_R$  — компоненты соответствующих векторов потока  $\mathbf{F}$  в (3.2):

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{G}}_L &= \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{U}}_L), \quad \bar{\mathbf{G}}_R = \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{U}}_R); \\ \mathbf{G}_L &= \mathbf{G}(\mathbf{U}_L), \quad \mathbf{G}_R = \mathbf{G}(\mathbf{U}_R),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{G}} &= [\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}, \bar{\alpha}(\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p}), \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}\bar{v}, \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}\bar{w}, \bar{\alpha}\bar{u}(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p})]^T; \\ \mathbf{G} &= [\alpha\rho u, \alpha(\rho u^2 + p), \alpha\rho uv, \alpha\rho uw, \alpha u(\rho E + p)]^T.\end{aligned}$$

Из уравнений (3.14)–(3.15) можно получить явные выражения для промежуточных состояний:

$$\bar{\rho}_L^*(\bar{u}_L^*) = \bar{\rho}_L \left( \frac{\bar{S}_L - \bar{u}_L}{\bar{S}_L - \bar{u}_L^*} \right), \tag{3.16}$$

$$\bar{p}_L^*(\bar{u}_L^*) = \bar{p}_L + \bar{\rho}_L(\bar{S}_L - \bar{u}_L)(\bar{u}_L^* - \bar{u}_L),$$

$$\bar{\rho}_R^*(\bar{u}_R^*) = \bar{\rho}_R \left( \frac{\bar{S}_R - \bar{u}_R}{\bar{S}_R - \bar{u}_R^*} \right), \tag{3.17}$$

$$\bar{p}_R^*(\bar{u}_R^*) = \bar{p}_R + \bar{\rho}_R(\bar{S}_R - \bar{u}_R)(\bar{u}_R^* - \bar{u}_R).$$

Аналогичные выражения справедливы для состояний с индексами « $L$ » и « $R$ » газовой фазы при известных  $S_L$  и  $S_R$ :

$$\rho_L^*(u_L^*) = \rho_L \left( \frac{S_L - u_L}{S_L - u_L^*} \right), \tag{3.18}$$

$$p_L^*(u_L^*) = p_L + \rho_L(S_L - u_L)(u_L^* - u_L),$$

$$\rho_R^*(u_R^*) = \rho_R \left( \frac{S_R - u_R}{S_R - u_R^*} \right), \tag{3.19}$$

$$p_R^*(u_R^*) = p_R + \rho_R(S_R - u_R)(u_R^* - u_R).$$

Отметим, что в уравнениях (3.18)–(3.19) газовые скорости  $u_L^*$  и  $u_R^*$  могут быть различными, в отличие от классических уравнений Эйлера.

Для решения «дозвуковых» уравнений тонкого слоя на контактном разрыве твердой фазы мы выбираем в качестве независимых неизвестных четыре давления  $p_L^*, p_R^*, \bar{p}_L^*, \bar{p}_R^*$  и выражаем скорости и плотности обеих фаз через

давления из соотношений HLLC (3.16)–(3.19), т.е. при  $K = L, R$

$$\bar{u}_K^*(\bar{p}_K^*) = \bar{u}_K + \frac{\bar{p}_K^* - \bar{p}_K}{\bar{\rho}_K (\bar{S}_R - \bar{u}_K)}, \quad (3.20)$$

$$\bar{\rho}_K^*(\bar{p}_K^*) = \bar{\rho}_K^* \left( \frac{\bar{S}_K - \bar{u}_K}{\bar{S}_K - \bar{u}_K^*(\bar{p}_K^*)} \right) = \frac{\bar{\rho}_K^2 (\bar{S}_K - \bar{u}_K)^2}{\bar{\rho}_K (\bar{S}_K - \bar{u}_K)^2 - (\bar{p}_K^* - \bar{p}_K)}, \quad (3.21)$$

для твердой фазы, и

$$u_K^*(p_K^*) = u_K + \frac{p_K^* - p_K}{\rho_K (S_R - u_K)}, \quad (3.22)$$

$$\rho_K^*(p_K^*) = \rho_K^* \left( \frac{S_K - u_K}{S_K - u_K^*(p_K^*)} \right) = \frac{\rho_K^2 (S_K - u_K)^2}{\rho_K (S_K - u_K)^2 - (p_K^* - p_K)}, \quad (3.23)$$

для газовой фазы.

Подставляя выражения (3.20)–(3.23) в уравнения (3.10) или (3.11), получим в результате следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{u}_R^*(\bar{p}_R^*) - \bar{u}_L^*(\bar{p}_L^*) &= 0; \\ \alpha_R \left( \frac{p_R^*}{p_L^*} \right)^{1/\gamma} (u_R^*(p_R^*) - \bar{u}_R^*(\bar{p}_R^*)) - \alpha_L (u_L^*(p_L^*) - \bar{u}_L^*(\bar{p}_L^*)) &= 0; \\ \alpha_L \rho_L^*(p_L^*) (u_L^*(p_L^*) - \bar{u}_L^*(\bar{p}_L^*)) (u_R^*(p_R^*) - u_L^*(p_L^*)) + \\ &+ \bar{\alpha}_R \bar{p}_R^* + \alpha_R p_R^* - \bar{\alpha}_L \bar{p}_L^* - \alpha_L p_L^* = 0; \\ \frac{\gamma p_R^*}{(\gamma - 1) \rho_L^*(p_L^*)} \left( \frac{p_L^*}{p_R^*} \right)^{1/\gamma} + \frac{1}{2} (u_R^*(p_R^*) - \bar{u}_R^*(\bar{p}_R^*))^2 - \\ &- \frac{\gamma p_L^*}{(\gamma - 1) \rho_L^*(p_L^*)} - \frac{1}{2} (u_L^*(p_L^*) - \bar{u}_L^*(\bar{p}_L^*))^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

для конфигурации волн на рис. 3.2 и рис. 3.3, или

$$\begin{aligned} \bar{u}_R^*(\bar{p}_R^*) - \bar{u}_L^*(\bar{p}_L^*) &= 0; \\ \alpha_R (u_R^*(p_R^*) - \bar{u}_R^*(\bar{p}_R^*)) - \alpha_L \left( \frac{p_L^*}{p_R^*} \right)^{1/\gamma} (u_L^*(p_L^*) - \bar{u}_L^*(\bar{p}_L^*)) &= 0; \\ \alpha_R \rho_R^*(p_R^*) (u_R^*(p_R^*) - \bar{u}_R^*(\bar{p}_R^*)) (u_R^*(p_R^*) - u_L^*(p_L^*)) + \\ &+ \bar{\alpha}_R \bar{p}_R^* + \alpha_R p_R^* - \bar{\alpha}_L \bar{p}_L^* - \alpha_L p_L^* = 0; \\ \frac{\gamma p_R^*}{(\gamma - 1) \rho_R^*(p_L^*)} + \frac{1}{2} (u_R^*(p_R^*) - \bar{u}_R^*(\bar{p}_R^*))^2 - \\ &- \frac{\gamma p_L^*}{(\gamma - 1) \rho_R^*(p_R^*)} \left( \frac{p_R^*}{p_L^*} \right)^{1/\gamma} - \frac{1}{2} (u_L^*(p_L^*) - \bar{u}_L^*(\bar{p}_L^*))^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

для второго «дозвукового» волнового шаблона.

Для решения соответствующей нелинейной системы и нахождения давлений  $p_L^*$ ,  $p_R^*$ ,  $\bar{p}_L^*$ ,  $\bar{p}_R^*$  используется метод Ньютона. Отметим, что скорости контактных разрывов включаются в систему уравнений в качестве неизвестных параметров, поэтому нет необходимости в предварительных оценках этих скоростей. Все оставшиеся величины находятся с помощью выражений (3.20)–(3.23) и соотношений в области «\*0»:

$$\rho_0^* = \rho_L^* \left( \frac{p_R^*}{p_L^*} \right)^{1/\gamma}, \quad u_0^* = u_R^*, \quad p_0^* = p_R^* \quad (3.26)$$

для волнового шаблона на рис. 3.3 и

$$\rho_0^* = \rho_R^* \left( \frac{p_L^*}{p_R^*} \right)^{1/\gamma}, \quad u_0^* = u_L^*, \quad p_0^* = p_L^* \quad (3.27)$$

для второй возможной конфигурации.

Практика показывает, что для достижения приемлемой точности решения уравнений (3.10) или (3.11) достаточно 1–2 итераций метода Ньютона.

Соотношения (3.16)–(3.19) для промежуточных HLLC-состояний предполагают известными оценки волновых скоростей  $\bar{S}_L$ ,  $\bar{S}_R$ ,  $S_R$  и  $S_L$ , необходимые на каждом шаге метода Ньютона; несколько методов оценок предложено в [15]. Для уравнений Эйлера одной из возможных оценок скоростей является

$$\begin{aligned} \bar{S}_L &= \bar{v}_L - \bar{a}_L, & \bar{S}_R &= \bar{v}_R + \bar{a}_R; \\ S_L &= v_L - a_L, & S_R &= v_R + a_R \end{aligned}$$

Вторая возможность заключается в использовании оценок, зависящих от значений давления

$$\begin{aligned} \bar{S}_L &= \bar{v}_L - \bar{a}_L \bar{q}_L, & \bar{S}_R &= \bar{v}_R + \bar{a}_R \bar{q}_R, \\ S_L &= v_L - a_L q_L, & S_R &= v_R + a_R q_R, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где функции  $\bar{q}_K$  и  $q_K$  для  $K = L, R$  принимают вид:

$$\bar{q}_K = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{p}_K^* \leq \bar{p}_K; \quad (\text{волна разрежения}) \\ \left[ 1 + \frac{\bar{\gamma} + 1}{2\bar{\gamma}} \left( \frac{\bar{p}_K^* + \bar{P}_0}{\bar{p}_K + \bar{P}_0} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{если } \bar{p}_K^* > \bar{p}_K, \quad (\text{ударная волна}) \end{cases} \quad (3.29)$$

$$q_K = \begin{cases} 1, & \text{если } p_K^* \leq p_K; \quad (\text{волна разрежения}) \\ \left[ 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left( \frac{p_K^*}{p_K} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{если } p_K^* > p_K, \quad (\text{ударная волна}) \end{cases} \quad (3.30)$$

где  $a_K = \sqrt{\gamma p_K / \rho_K}$ ,  $\bar{a}_K = \sqrt{\gamma(\bar{p}_K + \bar{P}_0) / \bar{\rho}_K}$ ,  $K = L, R$  — скорости звука в твердой и газовой фазах, соответственно.

### 3.3. Тестирование HLLC-метода на локальных задачах Римана

HLLC-метод решения задачи Римана, предложенный в предыдущей главе, апробирован на нескольких тестовых задачах, полученные параметры обеих фаз сравнены с точными значениями. В таблицах 8–19 представлены результаты шести тестовых задач. Тесты 1 и 2 взяты из работы [56], решение теста 3 содержит звуковую волну разрежения, решение теста 4 содержит область с очень низкой плотностью, с помощью теста 5 оценивается разрешение стационарных контактных разрывов, а решение теста 6 включает в себя очень сильные ударные волны.

Таблица 7.

Параметры уравнений состояния

	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4	Тест 5	Тест 6
$\bar{\gamma}$	1,4	3,0	1,4	1,4	3,0	3,0
$\gamma$	1,4	1,35	1,4	1,4	1,4	1,4
$\bar{p}_0$	0,0	3400,0	0,0	0,0	10,0	100,0

Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенная процедура приближенного решения задачи Римана на основе метода HLLC для большинства тестовых задач дает достаточно точные значения параметров состояний. Погрешности появляются в таких сложных задачах, как задачи с очень низкой плотностью или сильными ударными волнами. Стоит отметить, что такая погрешность не приводит к какому-либо заметному ухудшению качества решения, полученного, например, в методе конечных объемов, основанном на приближенном HLLC-методе решения задачи Римана.

Таблица 8.

Тест 1 (точное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,8	0,8	0,8	0,3	0,3
$\bar{\rho}$	1,0	0,9436	0,9436	1,0591	1,0
$\bar{v}$	0,0	0,0684	0,0684	0,0684	0,0
$\bar{p}$	1,0	0,9219	0,9219	1,0837	1,0
$\rho$	0,2	0,3266	0,6980	0,9058	1,0
$v$	0,0	-0,7683	-0,7683	-0,1159	0,0
$p$	0,3	0,6045	0,6045	0,8707	1,0

Таблица 9.

Тест 1 (приближенное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,8	0,8	0,8	0,3	0,3
$\bar{\rho}$	1,0	0,9446	0,9446	1,0545	1,0
$\bar{v}$	0,0	0,0693	0,0693	0,0632	0,0
$\bar{p}$	1,0	0,9180	0,9180	1,0772	1,0
$\rho$	0,2	0,3257	0,7040	0,9115	1,0
$v$	0,0	-0,7631	-0,7631	-0,1149	0,0
$p$	0,3	0,6018	0,6018	0,8641	1,0

Таблица 10.

Тест 2 (точное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,2	0,2	0,9	0,9	0,9
$\bar{\rho}$	1900,0	2040,1092	1821,4053	1821,4053	1950,0
$\bar{v}$	0,0	-0,1716	-0,1716	-0,1716	0,0
$\bar{p}$	10,0	824,4354	185,6560	185,6560	1000,0
$\rho$	2,0	2,1093	1,6733	1,8554	1,0
$v$	0,0	-0,0761	0,7912	0,7912	0,0
$p$	3,0	3,2235	2,3580	2,3580	1,0



Таблица 11.

Тест 2 (приближенное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,2	0,2	0,9	0,9	0,9
$\bar{\rho}$	1900,0	2030,2381	1834,8937	1834,8937	1950,0
$\bar{v}$	0,0	-0,1594	-0,1632	-0,1632	0,0
$\bar{p}$	10,0	762,8331	171,9396	171,9396	1000,0
$\rho$	2,0	2,0930	1,6298	1,8108	1,0
$v$	0,0	-0,0649	0,7558	0,7558	0,0
$p$	3,0	3,1898	2,2756	2,2756	1,0

Таблица 12.

Тест 3 (точное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,8	0,8	0,8	0,3	0,3
$\bar{\rho}$	1,0	0,5799	0,5799	0,3397	0,125
$\bar{v}$	0,75	1,3609	1,3609	1,3609	0,0
$\bar{p}$	1,0	0,4663	0,4663	0,4663	0,1
$\rho$	1,0	0,5799	0,3397	0,3397	0,125
$v$	0,75	1,3609	1,3609	1,3609	0,0
$p$	1,0	0,4663	0,4663	0,4662	0,1

Таблица 13.

Тест 3 (приближенное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,8	0,8	0,8	0,3	0,3
$\bar{\rho}$	1,0	0,7389	0,7389	0,3542	0,125
$\bar{v}$	0,75	1,1680	1,1680	1,4487	0,0
$\bar{p}$	1,0	0,5054	0,5054	0,5054	0,1
$\rho$	1,0	0,7389	0,3542	0,3542	0,125
$v$	0,75	1,1680	1,1680	1,4487	0,0
$p$	1,0	0,5053	0,5054	0,5054	0,1

Таблица 14.

Тест 4 (точное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,8	0,8	0,5	0,5	0,5
$\bar{\rho}$	1,0	0,0219	0,0219	0,0219	1,0
$\bar{v}$	-2,0	0,0	0,0	0,0	2,0
$\bar{p}$	0,4	0,0019	0,0019	0,0019	0,4
$\rho$	1,0	0,0219	0,0219	0,0219	1,0
$v$	-2,0	0,0	0,0	0,0	2,0
$p$	0,4	0,0019	0,0019	0,0019	0,4

Таблица 15.

Тест 4 (приближенное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,8	0,8	0,5	0,5	0,5
$\bar{\rho}$	1,0	0,2723	0,2723	0,2723	1,0
$\bar{v}$	-2,0	0,0	0,0	0,0	2,0
$\bar{p}$	0,4	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	0,4
$\rho$	1,0	0,2723	0,2723	0,2723	1,0
$v$	-2,0	0,0	0,0	0,0	2,0
$p$	0,4	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	0,4

Таблица 16.

Тест 5 (точное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,6	0,6	0,3	0,3	0,3
$\bar{\rho}$	1,4	1,4	1,0	1,0	1,0
$\bar{v}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\bar{p}$	2,0	2,0	3,0	3,0	3,0
$\rho$	1,4	1,4	1,4	1,0	1,0
$v$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$p$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Таблица 17.

Тест 5 (приближенное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,6	0,6	0,3	0,3	0,3
$\bar{\rho}$	1,4	1,4	0,9999	0,9999	1,0
$\bar{v}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\bar{p}$	2,0	2,0	2,9999	2,9999	3,0
$\rho$	1,4	1,3999	1,4	1,0	1,0
$v$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$p$	1,0	0,9999	1,0	1,0	1,0

Таблица 18.

Тест 6 (точное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,7	0,7	0,2	0,2	0,2
$\bar{\rho}$	1,0	0,7687	1,6087	1,6087	1,0
$\bar{v}$	-19,5975	-6,3085	-6,3085	-6,3085	-19,5975
$\bar{p}$	1000,0	399,5878	466,7257	466,7257	0,01
$\rho$	1,0	0,4684	0,5030	5,9991	1,0
$v$	-19,5975	6,7332	-1,7541	-1,7541	-19,5975
$p$	1000,0	345,8279	382,0858	382,0858	0,01

Таблица 19.

Тест 6 (приближенное решение)

	Область $L$	Область $*L$	Область $*0$	Область $*R$	Область $R$
$\bar{\alpha}$	0,7	0,7	0,2	0,2	0,2
$\bar{\rho}$	1,0	0,8372	1,5648	1,5648	1,0
$\bar{v}$	0,0	-8,4297	-7,7409	-7,7409	0,0
$\bar{p}$	1000,0	358,4630	389,4630	389,4630	0,01
$\rho$	1,0	0,6778	0,6978	5,9990	1,0
$v$	0,0	-1,8135	-2,5577	-2,5577	0,0
$p$	1000,0	334,5839	348,4473	348,4473	0,01

### 3.4. HLLC-метод решения задачи Римана в методе конечных объемов, RKDG-методе и РС-методе

В данной главе построен численный поток, основанный на предложенном HLLC-методе решения задачи Римана для уравнений Баера-Нунциато, который затем использован в конечно-объемной схеме из [56] и разрывном методе Галеркина (RKDG) из [19, 57].

#### 3.4.1. Численный поток типа HLLC

Приближенное решение задачи Римана может быть использовано для построения численного потока для консервативной части уравнений (3.2). Рассмотрим рис. 3.2 и рис. 3.3. Плоскость  $(x, t)$  для твердой фазы разделена присутствующими в ней волновыми семействами на четыре подобласти, в каждой из которой параметры газа принимают постоянное значение  $\bar{\mathbf{U}}$ ; поэтому необходимо определить аппроксимацию вектора консервативных потоков в каждой из этих подобластей. В газовой фазе присутствуют пять подобластей постоянного значения вектора  $\mathbf{U}$ , и необходимо аппроксимировать вектор потоков в каждой из них.

Вектор потоков твердой фазы имеет вид (здесь  $\bar{S}_M = \bar{u}_L^* = \bar{u}_R^*$ )

$$\bar{\mathcal{G}}(\bar{\mathbf{U}}_L, \bar{\mathbf{U}}_R) = \begin{cases} \bar{\mathbf{G}}_L, & \text{если } 0 \leq \bar{S}_L; \\ \bar{\mathbf{G}}_L^* = \bar{\mathbf{G}}_L + \bar{S}_L(\bar{\mathbf{U}}_L^* - \bar{\mathbf{U}}_L), & \text{если } \bar{S}_L \leq 0 \leq \bar{S}_M; \\ \bar{\mathbf{G}}_R^* = \bar{\mathbf{G}}_R + \bar{S}_R(\bar{\mathbf{U}}_R^* - \bar{\mathbf{U}}_R), & \text{если } \bar{S}_M \leq 0 \leq \bar{S}_R; \\ \bar{\mathbf{G}}_R, & \text{если } \bar{S}_R \leq 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

где  $\bar{\mathbf{G}}_L = \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{U}}_L)$ ,  $\bar{\mathbf{G}}_R = \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{U}}_R)$ .

В случае, когда контактный разрыв твердой фазы лежит левее контактного разрыва газовой фазы (рис. 3.3), имеем следующие выражения для вектора

потоков газовой фазы ( $S_M = u_0^* = u_R^*$ ):

$$\mathcal{G}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \begin{cases} \mathbf{G}_L, & \text{если } 0 \leq S_L; \\ \mathbf{G}_L^* = \mathbf{G}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L), & \text{если } S_L \leq 0 \leq \bar{S}_M; \\ \mathbf{G}_0^* = \mathbf{G}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R) + S_M(\mathbf{U}_0^* - \mathbf{U}_R^*), & \text{если } \bar{S}_M \leq 0 \leq S_M; \\ \mathbf{G}_R^* = \mathbf{G}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R), & \text{если } S_M \leq 0 \leq S_R; \\ \mathbf{G}_R, & \text{если } S_R \leq 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Если контактный разрыв твердой фазы находится справа от газового контактного разрыва, то справедливы аналогичные выражения ( $S_M = u_0^* = u_L^*$ ):

$$\mathcal{G}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \begin{cases} \mathbf{G}_L, & \text{если } 0 \leq S_L; \\ \mathbf{G}_L^* = \mathbf{G}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L), & \text{если } S_L \leq 0 \leq S_M; \\ \mathbf{G}_0^* = \mathbf{G}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) + S_M(\mathbf{U}_0^* - \mathbf{U}_L^*), & \text{если } S_M \leq 0 \leq \bar{S}_M; \\ \mathbf{G}_R^* = \mathbf{G}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R), & \text{если } \bar{S}_M \leq 0 \leq S_R; \\ \mathbf{G}_R, & \text{если } S_R \leq 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

где  $\mathbf{G}_L = \mathbf{G}(\mathbf{U}_L)$ ,  $\mathbf{G}_R = \mathbf{G}(\mathbf{U}_R)$ .

Результирующий поток для всей системы строится из  $\bar{\mathcal{G}}$  и  $\mathcal{G}$ :

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) = [0, \bar{\mathcal{G}}^T, \mathcal{G}^T]^T.$$

В уравнениях (3.31)-(3.33) параметры газа определяются согласно методу HLLC ( $K = L, R$ ) [15]:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_K^* &= \bar{\alpha}_K \bar{\rho}_K \left( \frac{\bar{S}_K - \bar{u}_K}{\bar{S}_K - \bar{S}_M} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{S}_M \\ \bar{E}_K + (\bar{S}_M - \bar{u}_K) \left( \bar{S}_M + \frac{\bar{p}_K}{\bar{\rho}_K(\bar{S}_K - \bar{u}_K)} \right) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{U}_K^* &= \alpha_K \rho_K \left( \frac{S_K - u_K}{S_K - S_M} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ S_M \\ E_K + (S_M - u_K) \left( S_M + \frac{p_K}{\rho_K(S_K - u_K)} \right) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{U}_0^* &= [\alpha_0 \rho_0^*, \alpha_0 \rho_0^* u_0^*, \alpha_0 \rho_0^* E_0^*]^T, \end{aligned}$$

где для конфигурации волн на рис. 3.3

$$\alpha_0 = \alpha_R, \quad \rho_0^* = \rho_L^* \left( \frac{p_R^*}{p_L^*} \right)^{1/\gamma}, \quad u_0^* = u_R^*, \quad p_0^* = p_R^*, \quad E_0^* = \frac{p_0^*}{(\gamma - 1)\rho_0^*} + \frac{1}{2}u_0^{*2},$$

а для второй возможной волновой конфигурации

$$\alpha_0 = \alpha_L, \quad \rho_0^* = \rho_R^* \left( \frac{p_L^*}{p_R^*} \right)^{1/\gamma}, \quad u_0^* = u_L^*, \quad p_0^* = p_L^*, \quad E_0^* = \frac{p_0^*}{(\gamma - 1)\rho_0^*} + \frac{1}{2}u_0^{*2}.$$

### 3.4.2. Метод конечных объемов

Будем рассматривать конечно-объемную сетку  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ , с граничными ячейками  $x_{j+1/2}$ , шагом сетки  $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ , центром ячейки  $x_j = (x_{j-1/2} + x_{j+1/2})/2$  и временным шагом  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ . Определим среднее значение решения по ячейке как

$$\mathbf{Q}_j^n = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{Q}(x, t_n) dx.$$

После интегрирования уравнений математической модели по объему  $\Omega_j^n = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$  получим точное соотношение

$$\mathbf{Q}_j^{n+1} = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} \left( \mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n \right) - \frac{1}{\Delta x_j} \iint_{\Omega_j^n} \mathbf{T}(\mathbf{Q}) \partial_x \bar{\alpha} dx dt, \quad (3.34)$$

где

$$\mathbf{F}_{j-1/2}^n = \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_{j-1}^n, \mathbf{Q}_j^n) = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{Q}(x_{j-1/2}, t)) dt.$$

Мы используем подход, изложенный в [56], для аппроксимации интегралов неконсервативных членов в (3.34). После нахождения решения задачи Римана с помощью предложенного HLLC-метода мы используем это решение для

следующей аппроксимации члена  $\frac{1}{\Delta t_n} \iint_{\Omega_j^n} \mathbf{T}(\mathbf{Q}) \partial_x \bar{\alpha} dx dt$ :

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\bar{p}_R^* \bar{\alpha}_R - \bar{p}_L^* \bar{\alpha}_L) \\ -\bar{S}_M(\bar{p}_R^* \bar{\alpha}_R - \bar{p}_L^* \bar{\alpha}_L) \\ \bar{S}_M(\bar{\alpha}_R - \bar{\alpha}_L) \\ 0 \\ \bar{p}_R^* \bar{\alpha}_R - \bar{p}_L^* \bar{\alpha}_L \\ \bar{S}_M(\bar{p}_R^* \bar{\alpha}_R - \bar{p}_L^* \bar{\alpha}_L) \end{bmatrix}$$

Результирующая конечно-объемная схема Годунова для уравнений (3.2) принимает вид

$$\mathbf{Q}_j^{n+1} = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} \left( \mathbf{H}_{j+1/2}^- - \mathbf{H}_{j-1/2}^+ \right),$$

где  $\mathbf{H}_{j-1/2}^-$  и  $\mathbf{H}_{j-1/2}^+$  удовлетворяют условиям

$$\mathbf{H}_{j-1/2}^- = \begin{cases} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_{j-1}^n, \mathbf{Q}_j^n) + \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}_{j-1}^n, \mathbf{Q}_j^n), & \text{если } \bar{S}_{M,j-1/2}^n \leq 0, \\ \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_{j-1}^n, \mathbf{Q}_j^n), & \text{если } \bar{S}_{M,j-1/2}^n > 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_{j-1/2}^+ = \begin{cases} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_{j-1}^n, \mathbf{Q}_j^n), & \text{если } \bar{S}_{M,j-1/2}^n \leq 0, \\ \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_{j-1}^n, \mathbf{Q}_j^n) - \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}_{j-1}^n, \mathbf{Q}_j^n), & \text{если } \bar{S}_{M,j-1/2}^n > 0, \end{cases}$$

### 3.4.3. RKDG-метод

Рассмотрим уравнения (3.2) на отрезке  $[0, 1]$ . Будем искать приближенное решение  $\mathbf{Q}_h(x, t)$  уравнений (3.2) в виде кусочно-полиномиальной функции в пространстве

$$V_h = V_h^k \equiv \left\{ v_h \in L_1(0, L) : v_h|_{I_j} \in P^k(I_j), j = 1, \dots, N \right\},$$

где  $P^k(I_j)$  — пространство полиномов степени не выше  $k$  на  $I_j$ . Это означает, что приближенное решение  $\mathbf{Q}_h^j$  внутри вычислительной ячейки  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  является полиномом степени  $k$ . Такое решение может быть представлено как разложение по базисным функциям

$$\mathbf{Q}_h^j(x, t) = \sum_{l=0}^k \mathbf{Q}_j^l(t) \varphi_l(x),$$

$$\varphi_l(x) = P_l \left( \frac{2(x - x_j)}{\Delta x_j} \right), \quad \Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, \quad x_j = \frac{x_{j+1/2} + x_{j-1/2}}{2},$$

где  $P_l$  — полином Лежандра порядка  $l$ . Мы далее рассматриваем кусочно-линейные аппроксимации.

Пусть существует такая функция  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Q})$ , что

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}) = [\mathbf{T}(\mathbf{Q}), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}],$$

где  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{T}$  заданы в (3.2). Тогда можно переписать математическую модель в консервативной форме, где  $\mathbf{H} = \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{F}}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{Q})}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (3.35)$$

Умножим уравнения (3.35) на базисную функцию  $\varphi_i$  и проинтегрируем произведение по каждой вычислительной ячейке:

$$\int_{I_j} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \varphi_i(x) dx - \int_{I_j} \mathbf{H}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} dx + \left( \mathbf{H}(\mathbf{Q}) \varphi_i(x) \right) \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = 0.$$

Используя теорию, изложенную в [109], можно получить следующее уравнение в слабой форме (3.35):

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \varphi_i(x) dx - \int_{I_j} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} dx + \left( \mathbf{H}(\mathbf{Q}) \varphi_i(x) \right) \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = \\ & = - \int_{I_j} \mathbf{T}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \varphi_i(x) dx - \left( \frac{1}{2} \varphi_i(x) \int_0^1 \mathbf{T}(\bar{\varphi}(s; \mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R)) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} d\tau \right) \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где выбран путь  $\bar{\varphi}(s; \mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R)$ , обладающий свойствами

$$\bar{\varphi} : [0, 1] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

$$\bar{\varphi}(0, \mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) = \mathbf{Q}_L, \quad \bar{\varphi}(1, \mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) = \mathbf{Q}_R.$$

Мы используем линейный путь, а именно

$$\bar{\varphi}(s, \mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) = \mathbf{Q}_L + s(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L), \quad s \in [0, 1].$$

Будем рассматривать кусочно-линейную аппроксимацию решения, когда внутри  $j$ -й вычислительной ячейки искомая функция представима в виде

$$\mathbf{Q}_h^j = \mathbf{Q}_0^j(t) \varphi_0^j(x) + \mathbf{Q}_1^j(t) \varphi_1^j(x), \quad (3.37)$$



где

$$\varphi_0^j(x) = 1, \quad \varphi_1^j(x) = \frac{2(x - x_j)}{\Delta x_j}.$$

Подставляя (3.37) в (3.36), получим следующую систему ОДУ относительно коэффициентов разложения для  $j$ -й ячейки:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}_0^j(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta x_j} & \left[ \mathbf{P}_{j-1/2}(\mathbf{Q}_h) - \mathbf{P}_{j+1/2}(\mathbf{Q}_h) - \int_{I_j} \mathbf{T}(\mathbf{Q}_h) \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} dx - \right. \\ & \left. - 1/2 \int_0^1 \mathbf{T}(\bar{\varphi}(s; \bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2})) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{T}(\bar{\varphi}(s; \bar{\mathbf{Q}}_{j-1/2})) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} d\tau \right], \quad (3.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}_1^j(t)}{dt} = \frac{3}{\Delta x_j} & \left[ \int_{I_j} \mathbf{F}(\mathbf{Q}_h) \frac{2}{\Delta x_j} dx - \mathbf{P}_{j-1/2}(\mathbf{Q}_h) - \mathbf{P}_{j+1/2}(\mathbf{Q}_h) - \right. \\ & - \int_{I_j} \mathbf{T}(\mathbf{Q}_h) \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \frac{2(x - x_j)}{\Delta x_j} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{T}(\bar{\varphi}(s; \bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2})) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} d\tau - \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{T}(\bar{\varphi}(s; \bar{\mathbf{Q}}_{j-1/2})) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} d\tau \right], \quad (3.39) \end{aligned}$$

где  $\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2} = [\mathbf{Q}_{j+1/2}^L, \mathbf{Q}_{j+1/2}^R]$  — решения на общей границе  $j$ -й и  $(j+1)$ -й ячеек.

В (3.38)–(3.39)  $\mathbf{P}_{j+1/2}(\mathbf{Q}_h)$  функция обозначает неконсервативный численный поток через границу ячейки. Он зависит от значений численного решения по обе стороны от границы  $\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2}$ . Этот численный поток является аппроксимацией «консервативного» межэлементного потока  $\mathbf{H}(\mathbf{Q})$ ; при этом он состоит из консервативной и неконсервативной части. Такой подход предложен в [57].

Мы используем численный поток, построенный в главе 3.4.1., для аппроксимации консервативной части  $\mathbf{P}$  и добавляем к нему соответствующую неконсервативную часть.

Результирующий поток  $\mathbf{P}$  выглядит следующим образом:

$$\mathbf{P}|_{x_{j+1/2}} = \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) - \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{T}(\bar{\varphi}(s; \mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R)) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} d\tau, \quad (3.40)$$

где  $\mathbf{Q}_L$  и  $\mathbf{Q}_R$  — векторы состояний слева и справа от  $x_{j+1/2}$ , соответственно, а  $\hat{\mathbf{F}}$  — численный поток, основанный на HLLC-методе решения задачи Римана.

Важным этапом при построении RKDG-метода является аппроксимация производной фазовой концентрации  $\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x}$ . Введем дополнительные переменные так, чтобы производная концентрации стала независимой переменной:

$$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} = \mathbf{V}. \quad (3.41)$$

Для аппроксимации  $\mathbf{V}$  также представим ее в виде линейной функции внутри  $j$ -й вычислительной ячейки:

$$\mathbf{V}_h^j = \mathbf{V}_0^j(t)\varphi_0^j(x) + \mathbf{V}_1^j(t)\varphi_1^j(x). \quad (3.42)$$

Умножим уравнение (3.41) на базисные функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  и проинтегрируем по ячейке  $I_j$ ; в результате получим следующие выражения для коэффициентов разложения  $\mathbf{V}_h^j$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0^j(t) &= \frac{1}{\Delta x_j} [\bar{\alpha}_{j+1/2} - \bar{\alpha}_{j-1/2}], \\ \mathbf{V}_1^j(t) &= \frac{3}{\Delta x_j} \left[ \bar{\alpha}_{j+1/2} + \bar{\alpha}_{j-1/2} - \int_{I_j} \bar{\alpha}_h^j(x) \frac{2}{\Delta x_j} dx \right], \end{aligned}$$

где  $\bar{\alpha}_h^j(x)$  — это линейная аппроксимация  $\bar{\alpha}(x)$  на  $I_j$ , а  $\bar{\alpha}_{j\pm 1/2}$  — оценки концентраций на границах ячеек:

$$\bar{\alpha}_{j\pm 1/2} = \begin{cases} \bar{\alpha}_L, & \text{если } \bar{S}_M \geq 0, \\ \bar{\alpha}_R, & \text{если } \bar{S}_M < 0, \end{cases}$$

где  $\bar{\alpha}_L$  и  $\bar{\alpha}_R$  — концентрации справа и слева от границы ячейки, являющиеся начальными данными для задачи Римана, из решения которой следует значение скорости контактного разрыва твердой фазы  $\bar{S}_M$  (см. рис. 1).

Для решения возникающей системы ОДУ (3.38)–(3.39) мы используем двухшаговый метод Рунге-Кутты с применением ограничителя на каждом промежуточном шаге.

#### 3.4.4. РС-метод

Консервативные и неконсервативные системы уравнений могут быть записаны в общей квазилинейной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}), \quad (3.43)$$

где  $\mathbf{Q}$  — вектор неизвестных. В случае консервативных систем  $\mathbf{A}(\mathbf{Q})$  является матрицей Якоби для функции потока  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ , т.е.  $\mathbf{A}(\mathbf{Q}) = \partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}) / \partial \mathbf{Q}$ . В случае неконсервативных систем, таких как, например, система уравнений Баера-Нунциато, не существует явного выражения для такой функции потока  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ . В данной главе приведена схема РС-метода (от англ. path-conservative) для уравнений типа (3.43), в которой применен разработанный HLLC-метод решения задачи Римана.

Основные сложности при работе с гиперболическими системами типа (3.43), которые не могут быть записаны в консервативной форме, возникают, если решение такой системы содержит разрывы. В этом случае невозможно использовать классические условия Гюгонио на разрывах решения. Уравнения такого типа рассмотрены в работе [108] и многих других. В работе [109] предложена математическая теория, которая позволяет определить слабые решения для неконсервативных гиперболических систем; ключевым моментом этой теории является введение пути  $\varphi$  на фазовой плоскости, обладающего свойствами, описанными в предыдущей главе:

$$\varphi : [0, 1] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Очевидным примером такого пути является канонический путь

$$\varphi(s, \mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) = \mathbf{Q}_L + s(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L), \quad s \in [0, 1]. \quad (3.44)$$

Решение в виде ударной волны со скоростью  $S$  в форме

$$\mathbf{Q}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{Q}_L, & \text{если } x/t < S; \\ \mathbf{Q}_R, & \text{если } x/t > S \end{cases}$$

удовлетворяет обобщенным условиям Гюгонио

$$\int_0^1 S \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, \mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) ds = \int_0^1 \mathbf{A}(\varphi(s, \mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R)) \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, \mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) ds. \quad (3.45)$$

Отметим, что если использовать канонический путь (3.44) в формуле (3.45), то мы получим

$$S(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L) = \left( \int_0^1 \mathbf{A}(\mathbf{Q}_L + s(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L)) ds \right) (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L).$$

Следуя теории [109], можно построить численные методы для решения систем в неконсервативной форме; некоторые примеры таких методов представлены в [58, 59, 110]. Концепция РС-методов предложена в [59]; общая схема этих методов может быть записана как

$$\mathbf{Q}_j^{n+1} = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{D}_{j-1/2}^+ + \mathbf{D}_{j+1/2}^-], \quad (3.46)$$

где  $\mathbf{D}_{j+1/2}^-$  and  $\mathbf{D}_{j+1/2}^+$  удовлетворяют условиям

$$\mathbf{D}_{j+1/2}^-(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}_{j+1/2}^+(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{D}_{j+1/2}^- + \mathbf{D}_{j+1/2}^+ = \int_0^1 \mathbf{A}(\varphi(s, \mathbf{Q}_j^n, \mathbf{Q}_{j+1}^n)) \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, \mathbf{Q}_j^n, \mathbf{Q}_{j+1}^n) ds.$$

«Противопоточные» РС-схемы строятся на основе идеи Роу для консервативных систем. Для этого вводится матрица Роу  $\hat{\mathbf{A}}$ , обладающая стандартными свойствами, а именно, свойствами консервативности, согласованности и сохранения. Первые два свойства очевидны, а третье означает следующее:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}_{j+1}^n - \mathbf{Q}_j^n) = \int_0^1 \mathbf{A}(\varphi(s, \mathbf{Q}_j^n, \mathbf{Q}_{j+1}^n)) \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, \mathbf{Q}_j^n, \mathbf{Q}_{j+1}^n) ds.$$

Имея линеаризованную матрицу Роу  $\hat{\mathbf{A}}$ , можно определить РС-схему вида (3.46), где

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{j+1/2}^- &= \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^-(\mathbf{Q}_{j+1}^n - \mathbf{Q}_j^n), \quad \mathbf{D}_{j+1/2}^+ = \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^+(\mathbf{Q}_{j+1}^n - \mathbf{Q}_j^n), \\ \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- &= \mathbf{R}_{j+1/2} \Lambda_{j+1/2}^- \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^+ = \mathbf{R}_{j+1/2} \Lambda_{j+1/2}^+ \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Lambda_{j+1/2}^-$  — диагональная матрица неположительных собственных значений, а  $\Lambda_{j+1/2}^+$  — диагональная матрица неотрицательных собственных значений,  $\mathbf{R}_{j+1/2}$  — матрица правых собственных векторов на границе ячейки.

В данной работе предложен альтернативный вариант РС-метода. Предположим, что  $\mathbf{Q}_{j+1/2}(x/t)$  является решением следующей задачи Римана

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{Q}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{Q}_j^n, & \text{если } x < 0; \\ \mathbf{Q}_{j+1}^n, & \text{если } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Обозначим соответствующий вектор состояния по Годунову как  $\mathbf{Q}_{j+1/2}(0)$ . Тогда РС-метод типа (3.46) может быть получен, если определить  $\mathbf{D}_{j+1/2}^-$  и

$\mathbf{D}_{j+1/2}^+$  как

$$\mathbf{D}_{j+1/2}^- = \int_0^1 \mathbf{A}(\varphi(s, \mathbf{Q}_j^n, \mathbf{Q}_{j+1/2}(0))) \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, \mathbf{Q}_j^n, \mathbf{Q}_{j+1/2}(0)) ds \quad (3.48)$$

и

$$\mathbf{D}_{j+1/2}^+ = \int_0^1 \mathbf{A}(\varphi(s, \mathbf{Q}_{j+1/2}(0), \mathbf{Q}_{j+1}^n)) \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, \mathbf{Q}_{j+1/2}(0), \mathbf{Q}_{j+1}^n) ds. \quad (3.49)$$

Используя как канонический путь (3.44), получим

$$\mathbf{D}_{j+1/2}^- = \tilde{\mathbf{A}}_{j+1/2}^-(\mathbf{Q}_{j+1/2}(0) - \mathbf{Q}_j^n), \quad \mathbf{D}_{j+1/2}^+ = \tilde{\mathbf{A}}_{j+1/2}^+(\mathbf{Q}_{j+1}^n - \mathbf{Q}_{j+1/2}(0)), \quad (3.50)$$

где  $\tilde{\mathbf{A}}_{j+1/2}^-$  и  $\tilde{\mathbf{A}}_{j+1/2}^+$  получены с помощью численного интегрирования следующих выражений

$$\tilde{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- = \int_0^1 \mathbf{A}(\varphi(s, \mathbf{Q}_j^n, \mathbf{Q}_{j+1/2}(0))) ds, \quad (3.51)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{j+1/2}^+ = \int_0^1 \mathbf{A}(\varphi(s, \mathbf{Q}_{j+1/2}(0), \mathbf{Q}_{j+1}^n)) ds. \quad (3.52)$$

### 3.5. Анализ эффективности RKDG-метода с потоком типа HLLC по сравнению с другими методами

В данной главе дана оценка работоспособности процедуры решения задачи Римана для уравнений Баера-Нунциато при использовании ее в трех рассмотренных выше численных методах, а именно: методе конечных объемов, RKDG-методе и PC-методе. RKDG-метод обладает вторым порядком аппроксимации, а другие два метода — первым.

#### 3.5.1. Задачи Римана

Рассмотрим шесть тестовых задач. Начальные данные представляют собой кусочно-постоянную функцию, заданную с разрывом в точке  $x = x_0$ , все параметры представлены в таблицах 20–22. В точках  $x = 0$  и  $x = 1$ , т. е. на границах вычислительной области, ставятся граничные условия «вытекания». Рис. 3.4–3.15 иллюстрируют результаты вычислений для всех предложенных тестов. Все вычисления проведены на сетке из  $N = 100$  ячеек на отрезке  $[0, 1]$  при числе Куранта  $C_{\text{CFL}} = 0,9$ , за исключением RKDG-метода,

для которого число Куранта равнялось 0,6. Для шага по времени использована следующая оценка:

$$\Delta t^n = C_{\text{CFL}} \Delta x / S_{\text{max}}^n,$$

где  $C_{\text{CFL}}$  — заданное число Куранта, а  $S_{\text{max}}^n$  равно

$$S_{\text{max}}^n = \max_i \{|u_i^n| + a_i^n\}, \quad i = 1 \dots N.$$

Таблица 20.

Параметры уравнений состояния, положение начального разрыва

	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4	Тест 5	Тест 6
$\bar{\gamma}$	1,4	3,0	1,4	1,4	3,0	3,0
$\gamma$	1,4	1,35	1,4	1,4	1,4	1,4
$\bar{P}_0$	0,0	3400,0	0,0	0,0	10,0	100,0
$x_0$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,8

Таблица 21.

Начальные условия (твердая фаза)

Тест	$\bar{\alpha}_L$	$\bar{\rho}_L$	$\bar{u}_L$	$\bar{p}_L$	$\bar{\alpha}_R$	$\bar{\rho}_R$	$\bar{u}_R$	$\bar{p}_R$
1	0,8	1,0	0,0	1,0	0,3	1,0	0,0	1,0
2	0,2	1900,0	0,0	10,0	0,9	1950,0	0,0	1000,0
3	0,8	1,0	0,75	1,0	0,3	0,125	0,0	0,1
4	0,8	1,0	-2,0	0,4	0,5	1,0	2,0	0,4
5	0,6	1,4	0,0	2,0	0,3	1,0	0,0	3,0
6	0,7	1,0	-19,5975	1000,0	0,2	1,0	-19,5975	0,01

На каждом рисунке представлены результаты расчетов, выполненных тремя методами: методом конечных объемов (обозначено на рисунке как FV), RKDG-методом (DG) и РС-методом (PC). Для теста 4 представлены результаты только двух методов, так как РС-метод не позволяет получить решение этой задачи. Для всех остальных тестов можно видеть хорошее качественное совпадение результатов расчетов с точным решением для всех трех методов.

### Результаты теста 1

Тест 1 представлен в работе [56]; результаты проведенных расчетов показаны на рис. 3.4, 3.5. Волновой шаблон для твердой фазы состоит из левой

Начальные условия (газовая фаза)

Тест	$\alpha_L$	$\rho_L$	$u_L$	$p_L$	$\alpha_R$	$\rho_R$	$u_R$	$p_R$
1	0,2	0,2	0,0	0,3	0,7	1,0	0,0	1,0
2	0,8	2,0	0,0	3,0	0,1	1,0	0,0	1,0
3	0,2	1,0	0,75	1,0	0,7	0,125	0,0	0,1
4	0,2	1,0	-2,0	0,4	0,5	1,0	2,0	0,4
5	0,4	1,4	0,0	1,0	0,7	1,0	0,0	1,0
6	0,3	1,0	-19,5975	1000,0	0,8	1,0	-19,5975	0,01

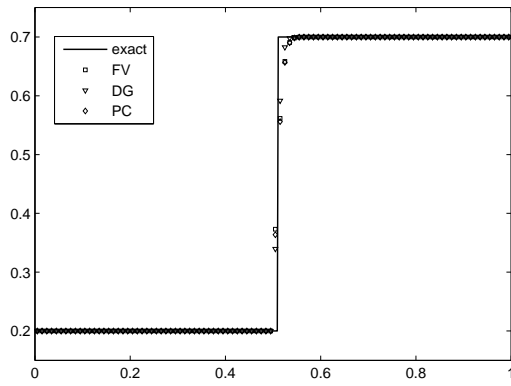
волны разрежения, правой ударной волны и движущегося вправо контактного разрыва; для газовой фазы волновая картина также содержит левую волну разрежения, правую ударную волну и контактный разрыв, движущийся влево. Для данной тестовой задачи все рассматриваемые методы дают приблизительно одинаковые результаты; РС-метод приводит к несколько большим ошибкам в скорости, плотности и давлении твердой фазы (рис. 3.5).

### Результаты теста 2

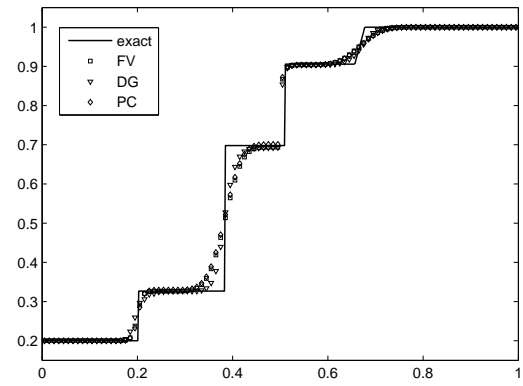
Тест 2 также представлен в [56]; результаты расчетов показаны на рис. 3.6, 3.7. Данная тестовая задача является более сложной по сравнению с тестом 1, так как она включает в себя большие изменения начальных данных, а также жесткое уравнение состояния твердой фазы. Расчеты тремя методами вновь дают схожее качество решения.

### Результаты теста 3

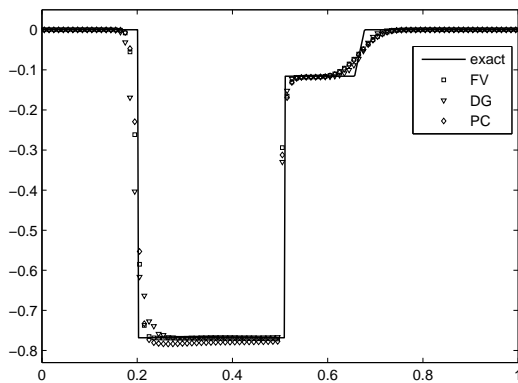
Тест 3 является усложненным вариантом аналогичного теста из [15]; результаты представлены на рис. 3.8, 3.9. Для обеих фаз решение состоит из правой ударной волны, движущегося вправо контактного разрыва и левой звуковой волны разрежения. Правильная передача решения в окрестности звуковой точки очень важна для оценки численных схем в смысле удовлетворения условию неубывания энтропии. Среди рассмотренных в данной работе численных схем только РС-метод приводит к нефизическому скачку в окрестности звуковой точки, который, тем не менее, постепенно исчезает при измельчении сетки.



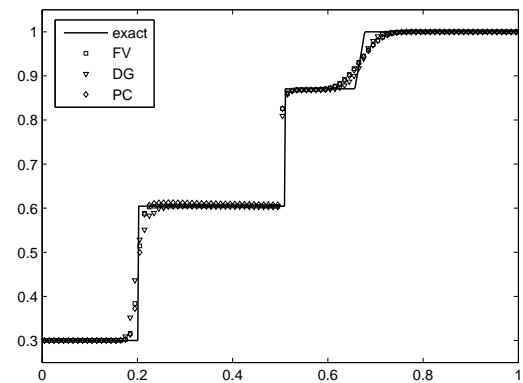
концентрация газовой фазы



плотность газовой фазы



скорость газовой фазы



давление газовой фазы

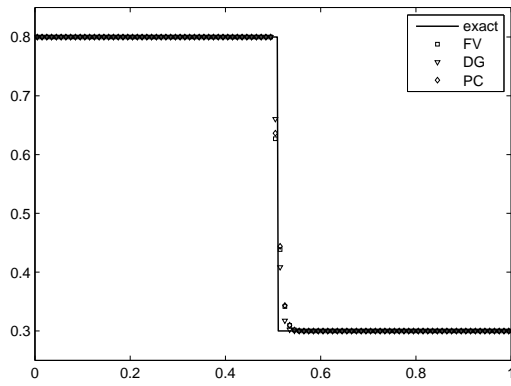
Рис. 3.4. Тест 1. Результаты расчетов для газовой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,15$

### Результаты теста 4

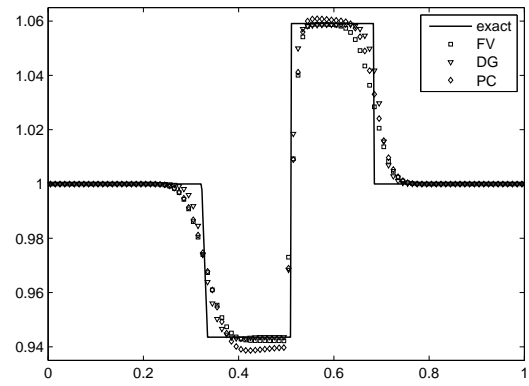
Тест 4 является обобщением «задачи 123» из [15] на случай двухфазных сред; результаты расчетов показаны на рис. 3.10, 3.11. Твердая и газовая фазы содержат симметричные волны разрежения и простейший контактный разрыв нулевой скорости. Параметры газа в области между двумя волнами разрежения близки к вакууму, что создает дополнительные сложности при численном решении, так как численные схемы зачастую приводят к отрицательным значениям давления.

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что метод конечных объемов с потоком HLLC дает наиболее точное решение, тогда как в RKDG-методе неточно передается фазовая концентрация. Данный эффект, однако, уменьшается при измельчении сетки. РС-метод не позволяет получить решение данной задачи.

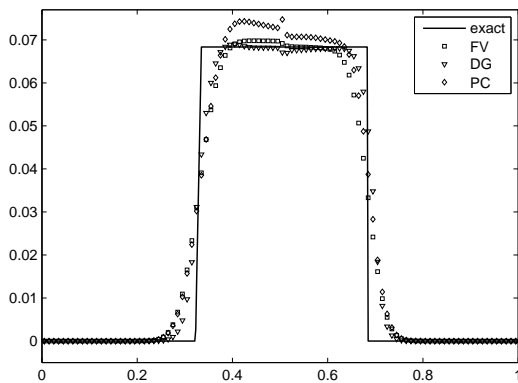




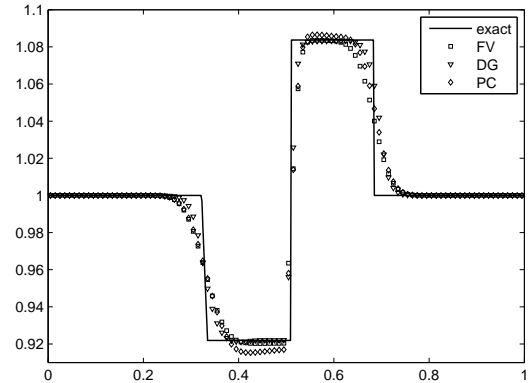
концентрация твердой фазы



плотность твердой фазы



скорость твердой фазы



давление твердой фазы

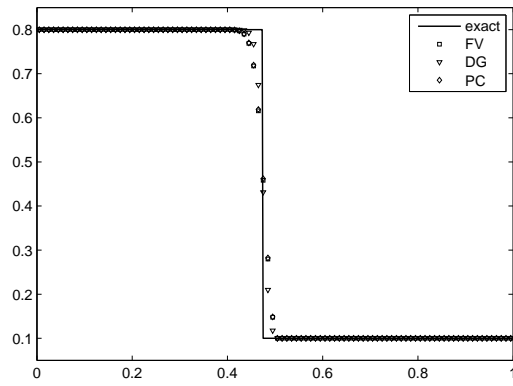
Рис. 3.5. Тест 1. Результаты расчетов для твердой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,15$

### Результаты теста 5

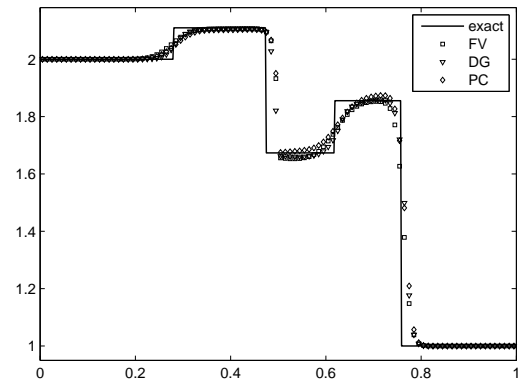
Тест 5 разработан специально для оценки способности численных схем правильно передавать изолированные стационарные контактные разрывы [15]; результаты расчетов показаны на рис. 3.12 и 3.13. Как видно из графиков, все три численных метода дают практически точное решение данного класса задач.

### Результаты теста 6

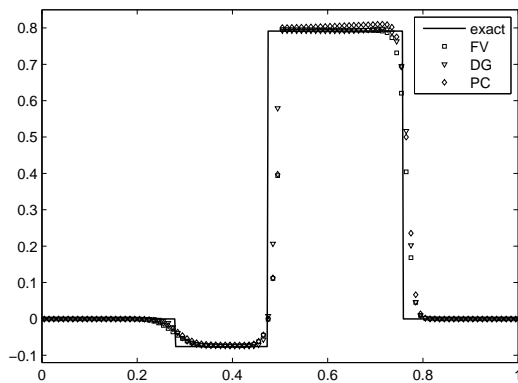
Тест 6 является обобщением тестовой задачи с сильными ударными волнами из [15], которая разработана для оценки надежности численных методов. Результаты расчетов представлены на рис. 3.14 и 3.15. Решение этой задачи содержит для каждой фазы движущуюся вправо ударную волну, контактный разрыв и левую волну разрежения. Так как скачок давлений в начальных



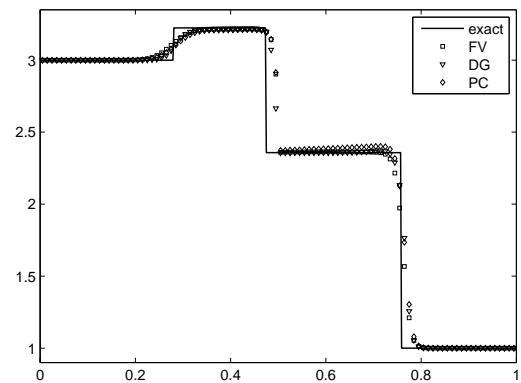
концентрация газовой фазы



плотность газовой фазы



скорость газовой фазы



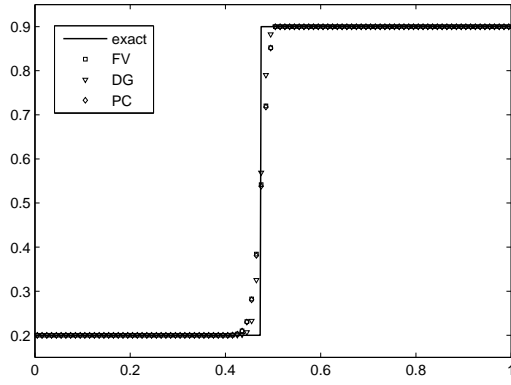
давление газовой фазы

Рис. 3.6. Тест 2. Результаты расчетов для газовой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,15$

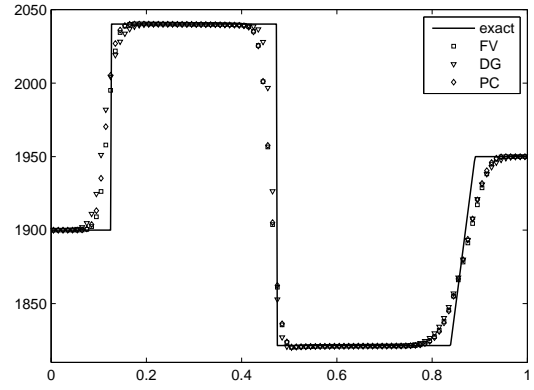
данных очень велик, это приводит к образованию сильных ударных волн в обеих фазах; в газовой фазе расстояние между правой ударной волной и контактным разрывом очень мало. Эти особенности решения могут приводить к большим ошибкам в численном решении. Для данной тестовой задачи процедура решения задачи Римана более чувствительна по отношению к выбору начального приближения в методе Ньютона. Сравнивая результаты расчетов тремя численными методами, можно видеть, что RKDG-метод дает наиболее точное решение данной задачи.

### 3.5.2. Задача о взаимодействии двух материалов

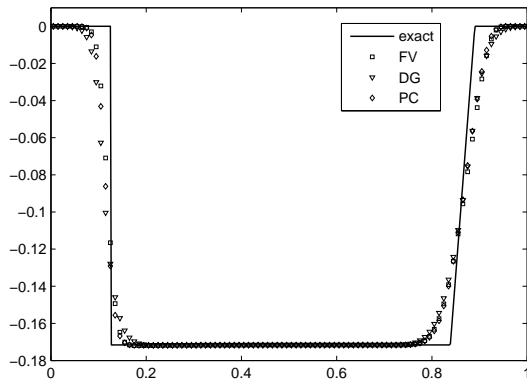
В данном разделе изучена работоспособность предложенного HLLC-метода решения задачи Римана, встроенного в метод конечных объемов, на приме-



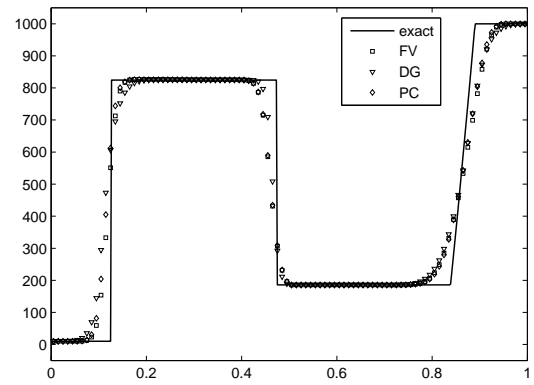
концентрация твердой фазы



плотность твердой фазы



скорость твердой фазы



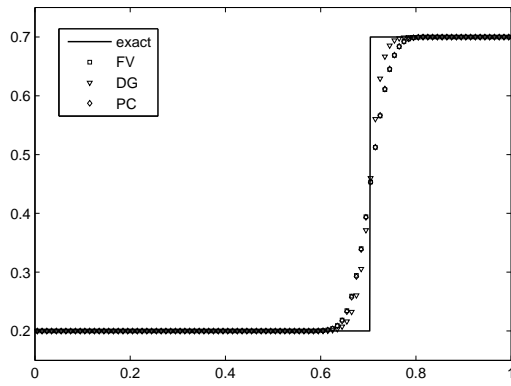
давление твердой фазы

Рис. 3.7. Тест 2. Результаты расчетов для твердой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,15$

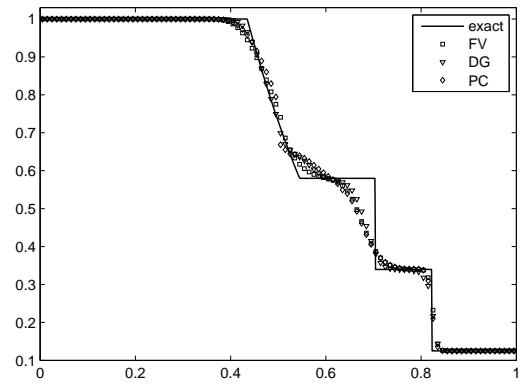
ре взаимодействия двух однофазных материалов. Разнообразные постановки таких тестовых задач можно найти в [43, 44].

Начальными условиями для рассматриваемой тестовой задачи являются следующие: начальный разрыв решения находится в точке  $x = 0,5$  вычислительной области  $[0, 1]$ , а начальные значения решения справа и слева от этого разрыва представлены в таблицах 23.

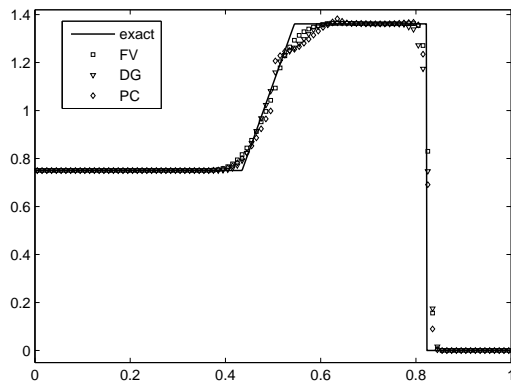
Эта задача описывает взаимодействие двух почти чистых материалов: твердого (слева) и газообразного (справа), разделенных в начальный момент времени разрывом. Для моделирования чистого материала соответствующая ему концентрация полагается близкой к 1, а именно,  $\bar{\alpha}_L = 1 - \varepsilon$  и  $\alpha_R = 1 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Точное решение данной задачи повторяет решение задачи Римана для уравнений Эйлера со следующими начальными данными: начальное условие слева соответствует начальным величинам плотности, скорости



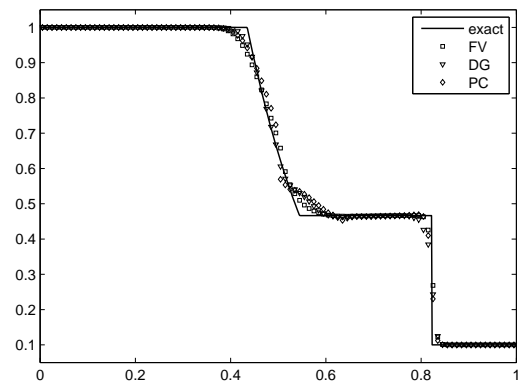
концентрация газовой фазы



плотность газовой фазы



скорость газовой фазы



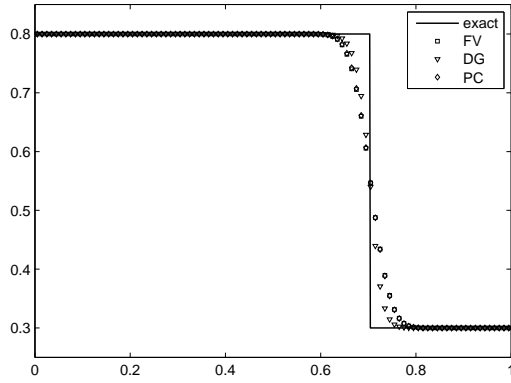
давление газовой фазы

Рис. 3.8. Тест 3. Результаты расчетов для газовой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,15$

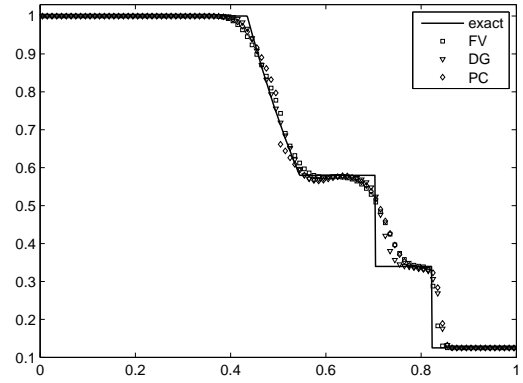
и давления твердой фазы, а начальное условие справа соответствует аналогичным параметрам газовой фазы. Это свойство позволяет выбрать параметры материалов произвольным образом в тех областях, где его концентрация близка к нулю и равна  $\epsilon$ .

На рис. 3.16–3.17 изображено численное решение, полученное с использованием предложенного HLLC-метода решения задачи Римана в методе конечных объемов. Результаты получены при числе Куранта, равном 0,9, на трех сетках, состоящих, соответственно, из 100, 1000 и 5000 ячеек для демонстрации сходимости метода. Две различные фазы на рисунке разделены вертикальной штриховой линией, слева от которой находится твердая фаза, а справа — газовая.

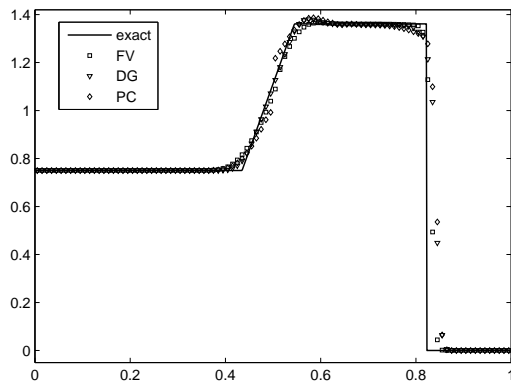
Следует отметить, что при численном моделировании задач взаимодействия различных материалов могут возникнуть определенные трудности. Хо-



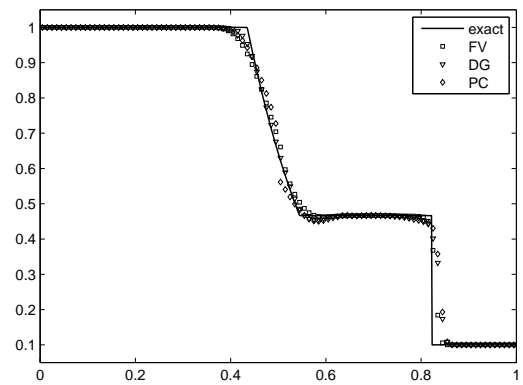
концентрация твердой фазы



плотность твердой фазы



скорость твердой фазы

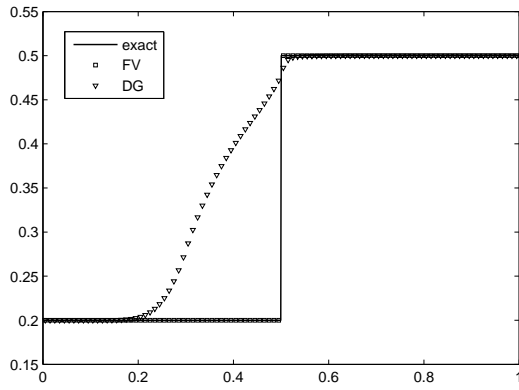


давление твердой фазы

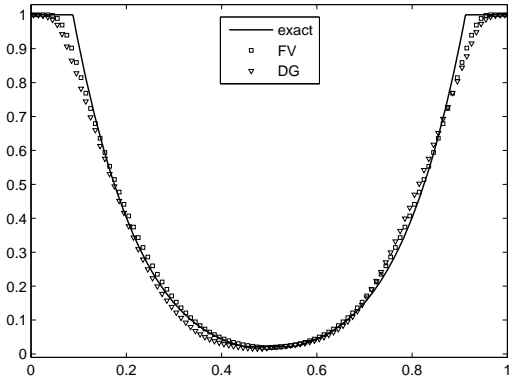
Рис. 3.9. Тест 3. Результаты расчетов для твердой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,15$

тя процедура решения задачи Римана методом HLLC дает достаточно хорошее соответствие с точным решением локальной задачи Римана, построенный с его помощью численный метод может быть непригодным для получения решения во всей вычислительной области. Так, решение рассмотренной задачи, включающей в себя очень низкие фазовые концентрации и большие скачки давления, не могло быть получено с помощью RKDG-метода и PC-метода вне зависимости от используемого численного потока. При этом метод конечных объемов дает достаточно хорошее приближение к точному решению, как следует из рис. 3.16.

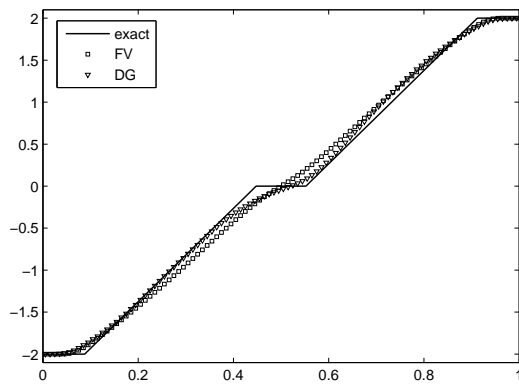
Сравнивая результаты вычислений с помощью предложенного приближенного численного потока с результатами, полученными при использовании точного потока из [56], можно отметить, что качество решения остается практически неизменным, в то время как использование приближенного потока



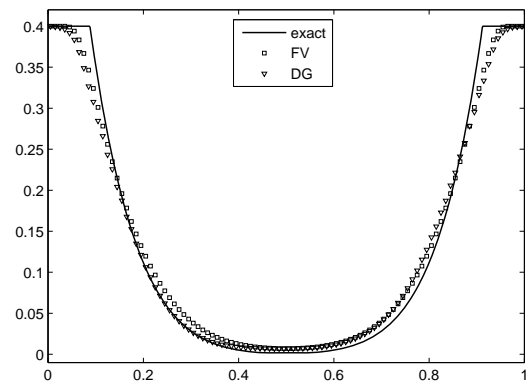
концентрация газовой фазы



плотность газовой фазы



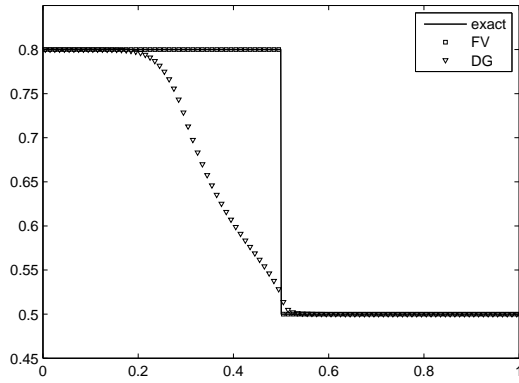
скорость газовой фазы



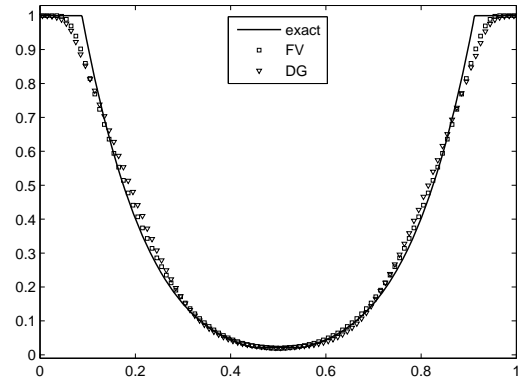
давление газовой фазы

Рис. 3.10. Тест 4. Результаты расчетов для газовой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,15$

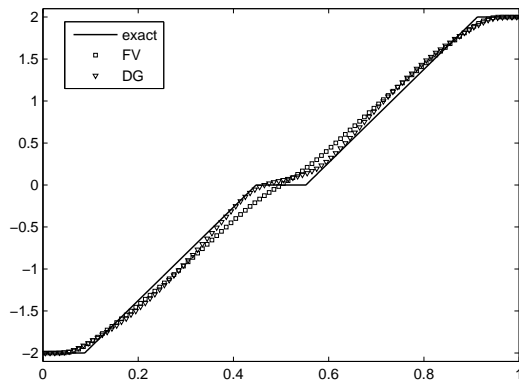
позволяет сократить общее время вычислений на 50 – 60%. В таблице 24 представлено среднее время вычислений для обоих потоков (в секундах), а также их отношение.



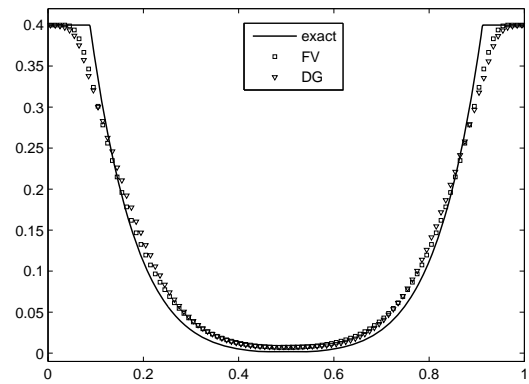
концентрация твердой фазы



плотность твердой фазы

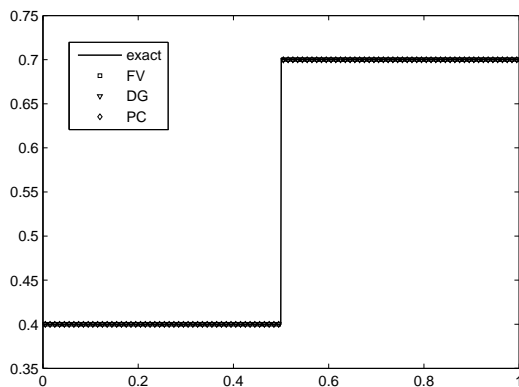


скорость твердой фазы

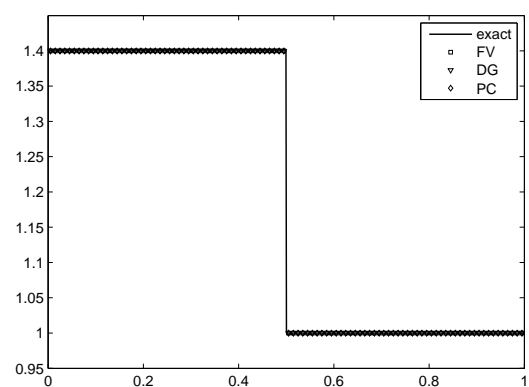


давление твердой фазы

Рис. 3.11. Тест 4. Результаты расчетов для твердой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,15$

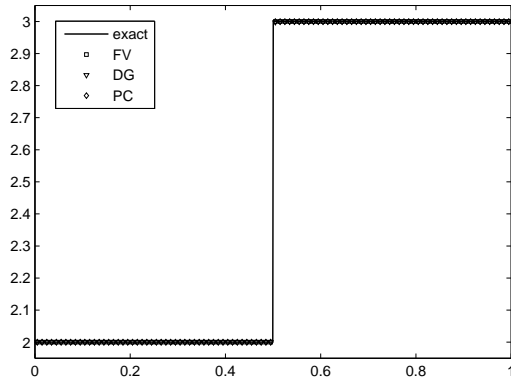


концентрация газовой фазы

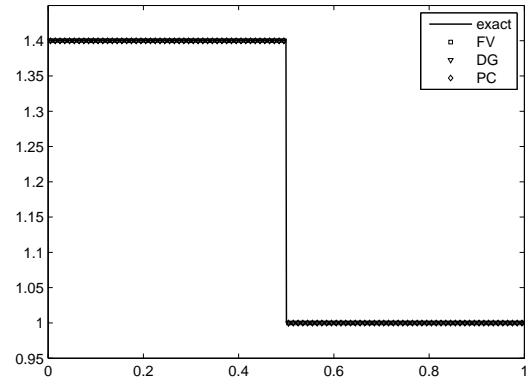


плотность газовой фазы

Рис. 3.12. Тест 5. Результаты расчетов для газовой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,15$

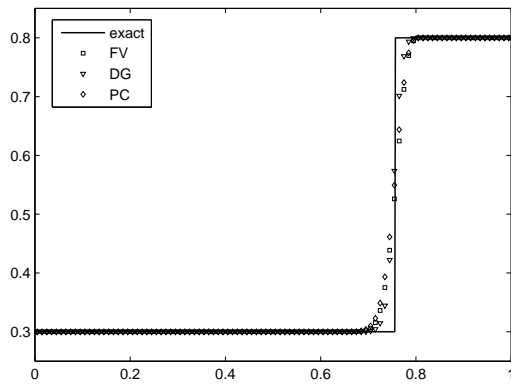


давление твердой фазы

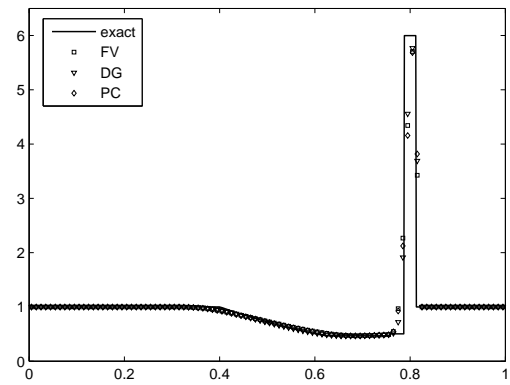


плотность твердой фазы

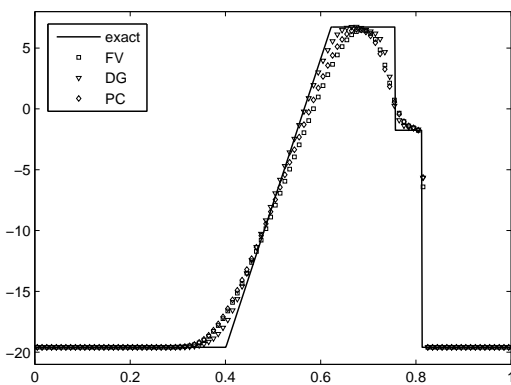
Рис. 3.13. Тест 5. Результаты расчетов для твердой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,15$



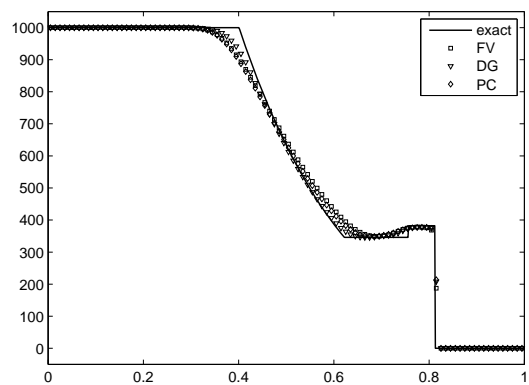
концентрация газовой фазы



плотность газовой фазы



скорость газовой фазы



давление газовой фазы

Рис. 3.14. Тест 6. Результаты расчетов для газовой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,007$



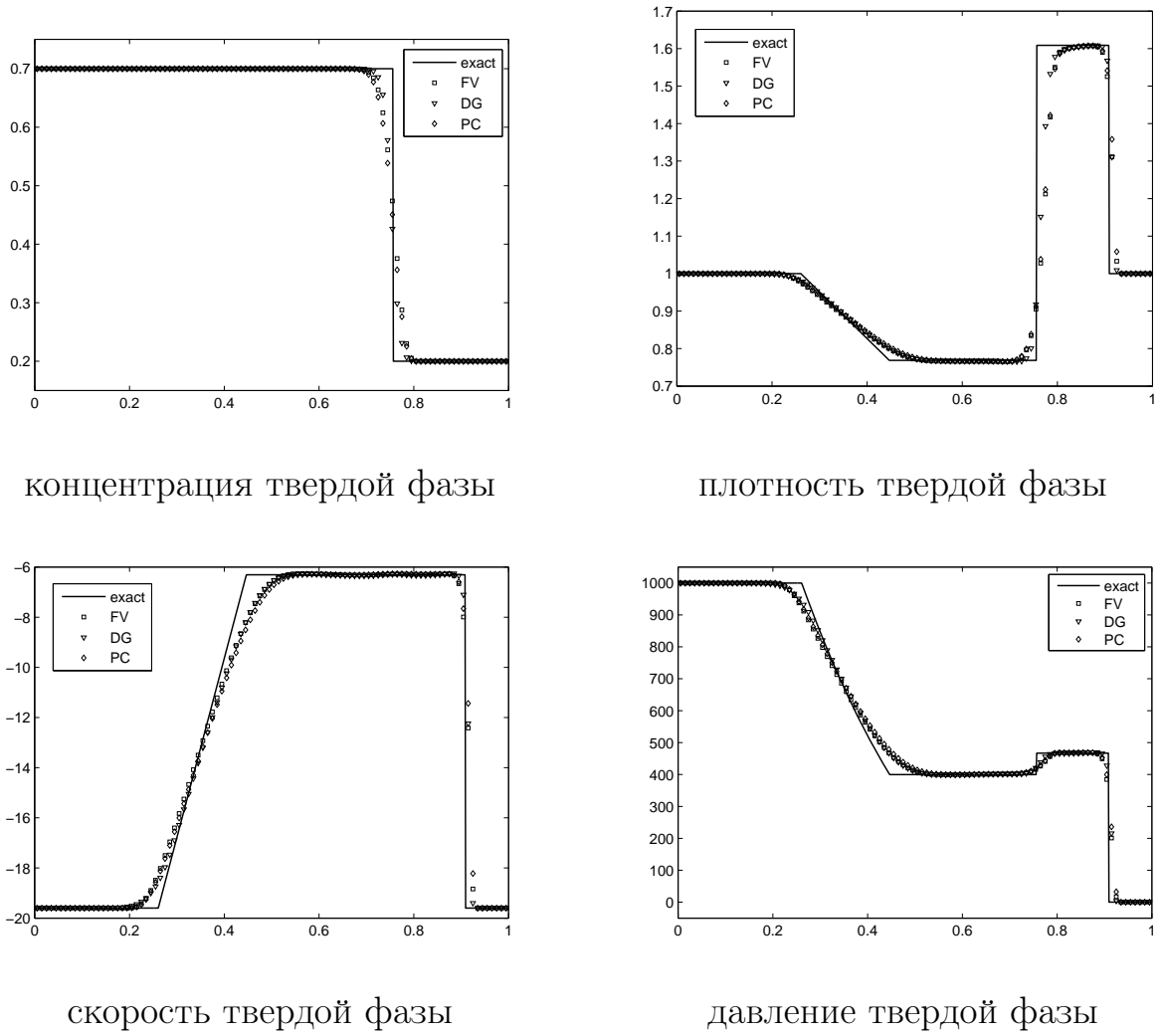
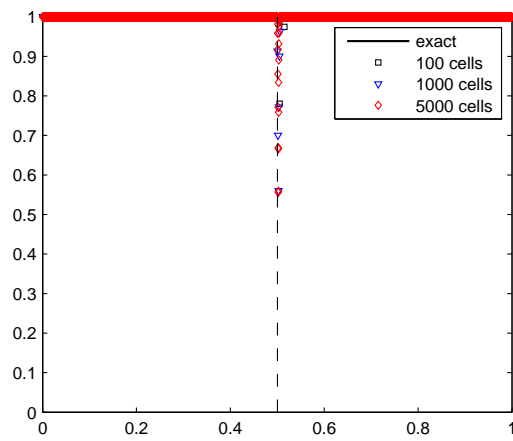


Рис. 3.15. Тест 6. Результаты расчетов для твердой фазы: численное решение (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,007$

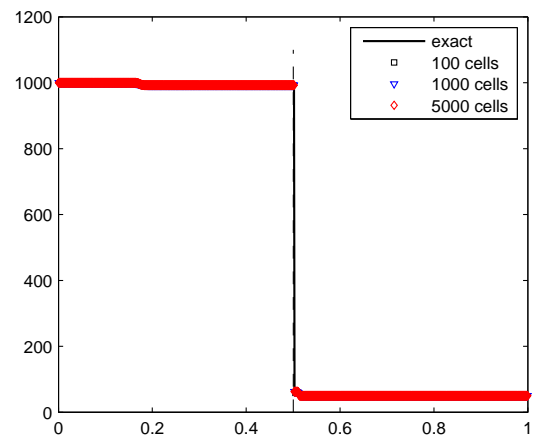
Таблица 23.

Начальные данные

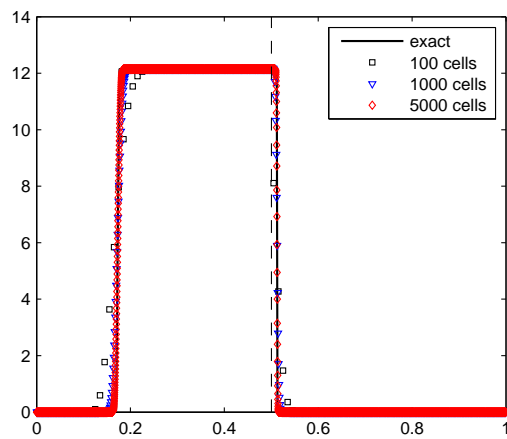
Твердая фаза							
$\bar{\alpha}_L$	$\bar{\rho}_L$	$\bar{u}_L$	$\bar{p}_L$	$\bar{\alpha}_R$	$\bar{\rho}_R$	$\bar{u}_R$	$\bar{p}_R$
$1 - \varepsilon$	$10^3$	0,0	$2 \cdot 10^7$	$\varepsilon$	$10^3$	0,0	$2 \cdot 10^7$
Газовая фаза							
$\alpha_L$	$\rho_L$	$u_L$	$p_L$	$\alpha_R$	$\rho_R$	$u_R$	$p_R$
$\varepsilon$	50,0	0,0	$10^5$	$1 - \varepsilon$	50,0	0,0	$10^5$



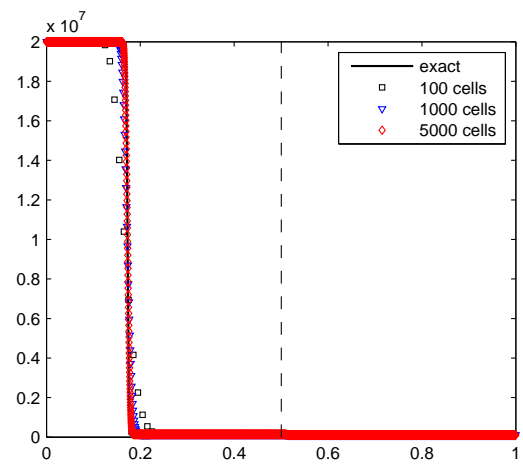
фазовая концентрация



плотность



скорость



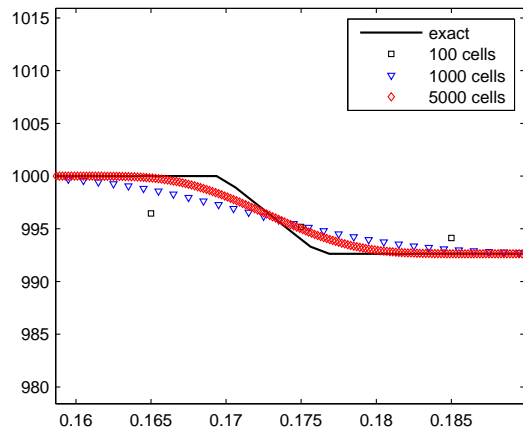
давление

Рис. 3.16. Тест 7. Численное (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,0002$

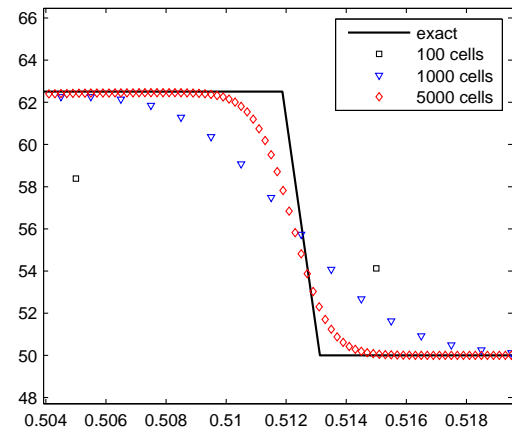
Таблица 24.

Вычислительные затраты

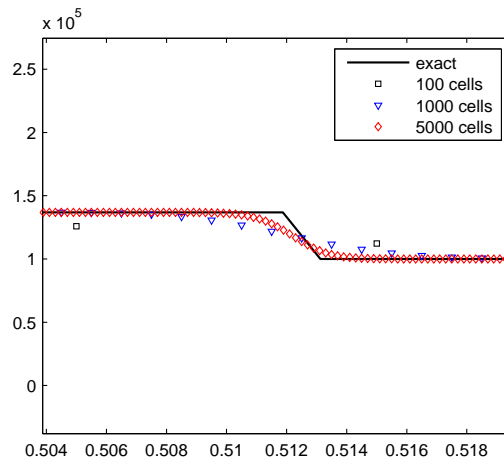
	Время, $10^{-6}$ сек
Точный поток	10,14
Приближенный поток	3,90
Отношение	2,60



плотность (увеличено)



плотность (увеличено)



давление (увеличено)

Рис. 3.17. Тест 7. Численное (символ) и точное решение (сплошная линия) в момент времени  $t = 0,0002$

## Выводы

По результатам проведенных в работе исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Разработан оптимизированный алгоритм RKDG-метода, позволяющий проводить процедуру монотонизации с автоматическим выбором параметров лимитера в процессе решения задачи с возможностью пространственно-временной адаптации лимитера к особенностям решения. Разработан алгоритм численного решения задачи Римана для уравнений Баера-Нунциато, на его основе создан алгоритм вычисления потока, примененный в качестве базового элемента в методе конечных объемов, РС-методе и RKDG-методе.

2. Создан программный комплекс на основе RKDG-метода, позволяющий проводить расчеты течений как идеального, так и вязкого теплопроводного газа или жидкости, а также моделировать течения двухфазных сред с помощью метода конечных объемов, РС-метода и RKDG-метода. Разработан параллельный алгоритм RKDG-метода и проанализирована эффективность распараллеливания на различных вычислительных комплексах.

3. Продемонстрирована работоспособность RKDG-метода и основанного на нем программного комплекса на задачах моделирования течений газа в каналах сложной формы, а также задачах определения аэродинамических характеристик различных профилей, включая крыловые профили с закрылками. Эффективность созданного алгоритма вычисления потока типа HLLC при его использовании в RKDG-методе решения двухфазных уравнений Баера-Нунциато проверена на специально подобранных задачах Римана и задаче взаимодействия материалов.

## Литература

1. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели термомеханики. М. : Физматлит, 2002. 168 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Дрофа, 2003. 840 с.
3. Черный Г. Г. Газовая динамика. М. : Наука, 1988. 424 с.
4. Чжен П. К. Отрывные течения. : В 3 т. М. : Мир, 1972. Т. 1. 1972. 299 с. Т. 2. 1973. 279 с. Т. 3. 1973. 333 с.
5. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Калугин В. Т. Аэродинамика отрывных течений. М. : Высшая школа, 1988. 351 с.
6. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов А. Н. и др. Прикладная аэродинамика. М. : Высшая школа, 1974. 731 с.
7. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Захарченко В. Ф., Данилов А. И. Основы прикладной аэродинамики. Кн. 2. Обтекание тел вязкой жидкостью. Рулевые устройства. М. : Высшая школа, 1991. 351 с.
8. Дейч М. Е. Техническая газодинамика (основы газодинамики турбин). М.-Л. : Энегроиздат, 1953. 544 с.
9. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 576 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие. : В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М. : Наука, 1986. 736 с.
11. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. М. : Изд-во иностранной литературы, 1963. 244 с.
12. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М. : Мир, 1973. 779 с.
13. Patankar S. V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation, 1980. 196 p.
14. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.
15. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer, 2009. 724 p.
16. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М. : Наука, 1978. 687 с.
17. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М. : Мир, 1977. 624 с.
18. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические

- вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М. : Физматлит, 2001. 608 с.
19. Cockburn B., Shu C. W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems // J. Sci. Comp. 2001. V. 3. P. 173–261.
  20. Bassi F., Rebay S. A high-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equations // J. Comp. Phys. 1997. V. 138. P. 251–285.
  21. Bassi F., Rebay S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations // J. Comp. Phys. 1997. V. 131. P. 267–279.
  22. Dolejší V. On the discontinuous Galerkin method for the numerical solution of the Navier-Stokes equations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2004. V. 45. P. 1083–1106.
  23. Van der Vegt J. J. W., Van der Ven H. Discontinuous Galerkin finite element method with anisotropic local grid refinement for inviscid compressible flows // J. Comp. Phys. 1998. V. 141. P. 46–77.
  24. Галанин М. П., Савенков Е. Б., Токарева С. А. Решение задач газовой динамики с ударными волнами RKDG-методом // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 11. С. 55–66.
  25. Reed W. H., Hill T. R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation // Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-479. 1973.
  26. LeSaint P., Raviart P. A. On a finite element method for solving the neutron transport equation // Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations (C. de Boor, Ed.). Academic Press. 1974. P. 89–145.
  27. Johnson C., Pitkaranta J. An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation // Math. Comp. 1986. V. 46. P. 1–26.
  28. Peterson T. A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation // SIAM J. Numer. Anal. 1991. V. 28. P. 133–140.
  29. Richter G. R. An optimal-order error estimate for the discontinuous Galerkin method // Math. Comp. 1988. V. 50. P. 50–75.
  30. Chavent G., Salzano G. A finite element method for the 1d water flooding problem with gravity // J. Comp. Phys. 1982. V. 45. P. 307–344.
  31. Chavent G., Cockburn B. The local projection  $p^0p^1$ -discontinuous Galerkin

- finite element method for scalar conservation laws // *M<sup>2</sup>AN*. 1989. V. 23. P. 565–592.
32. Van Leer B. Towards the ultimate conservation difference scheme, ii // *J. Comp. Phys.* 1974. V. 14. P. 361–376.
  33. Холодов А. С. Численные методы решения уравнений и систем гиперболического типа // *Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Часть 2*. 2008. С. 220–235.
  34. Cockburn B., Shu C. W. The Runge-Kutta local projection  $p^1$ -discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws // *M<sup>2</sup>AN*. 1991. V. 25. P. 337–361.
  35. Cockburn B., Shu C. W. Tvb Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws ii: General framework // *Math. Comp.* 1989. V. 52. P. 411–435.
  36. Cockburn B., Lin S. Y., Shu C. W. Tvb Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws iii: One-dimensional systems // *J. Comp. Phys.* 1989. V. 84. P. 90–113.
  37. Cockburn B., Hou S., Shu C. W. Tvb Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws iv: The multidimensional case // *Math. Comp.* 1990. V. 54. P. 545–581.
  38. Goodman J., LeVeque R. On the accuracy of stable schemes for 2d scalar conservation laws // *Math. Comp.* 1985. V. 45. P. 15–21.
  39. Cockburn B., Shu C. W. The  $p^1$ -Rkdg method for two-dimensional Euler equations of gas dynamics // *ICASE Report*. 1991. №91–32.
  40. Cockburn B., Shu C. W. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws v: Multidimensional systems // *J. Comp. Phys.* 1998. V. 141. P. 199–224.
  41. Ляпунов С. В. Разработка и исследование численных схем высокого порядка точности для решения уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках : Дис. ... д. ф.-м. н. М. : 2007. 127 с.
  42. Baer M. R., Nunziato J. W. A Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials // *J. Multiphase Flow*. 1986. V. 12. P. 861–889.
  43. Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // *J. Comp. Phys.* 1999. V. 150. P. 425–467.

44. Saurel R., Abgrall R. Discrete Equations for Physical and Numerical Compressible Multiphase Mixtures // J. Comp. Phys. 2003. V. 186. P. 361–396.
45. Stewart H. B., Wendroff B. Two-Phase Flow: Models and Methods // J. Comp. Phys. 1984. V. 56. P. 363–409.
46. Romenski E., Resnyanski E. D., Toro E. F. Conservative Hyperbolic Formulation for Compressible Two-Phase Flow with Different Phase Pressures and Temperatures // Quarterly of Applied Mathematics. 2007. V. 65. P. 259–279.
47. Deledicque V., Papalexandris M. V. An Exact Riemann Solver for Compressible Two-Phase Flow Models Containing Non-Conservative Products // J. Comp. Phys. 2007. V. 222. P. 217–245.
48. Embid P., Baer M. Mathematical Analysis of a Two-Phase Continuum Mixture Theory // Continuum Mech. Thermodyn. 1992. V. 4. P. 279–312.
49. Toro E. F. Riemann-Problem Based Techniques for Computing Reactive Two-Phase Flows // Lecture Notes in Physics. 1989. V. 351. P. 472–481.
50. Tourni I. An Upwind Numerical Method for Two-Fluid Two-Phase Flow Models // Nuclear Sci. Eng. 1996. V. 123. P. 147–168.
51. Saurel R., Abgrall R. A Simple Method for Compressible Multifluid Flows // SIAM J. Sci. Comput. 1999. V. 21, № 3. P. 1115–1145.
52. Pailliere H., Kumbaro A., Bestion D. et al. Advanced Three-Dimensional Two-Phase Flow Simulation Tools for Application to Reactor Safety (ASTAR) // Nuclear Engineering and Design. 2005. V. 235. P. 379–400.
53. Chang C. H., Liou M. S. A Robust and Accurate Approach to Computing Compressible Multiphase Flow: Stratified Flow Model and AUSM+-up Scheme // J. Comp. Phys. 2007. V. 225. P. 840–873.
54. Saurel R., Le Métayer O., Massoni J., Gavriluk S. Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation // Shock Waves. 2007. V. 16. P. 209–232.
55. Andrianov N., Warnecke G. The Riemann Problem for the Baer-Nunziato Model of Two-Phase Flows // J. Comp. Phys. 2004. V. 195. P. 434–464.
56. Schwendeman D. W., Wahle C. W., Kapila A. K. The Riemann Problem and a High-Resolution Godunov Method for a Model of Compressible Two-Phase Flow // J. Comp. Phys. 2006. V. 212. P. 490–526.



57. Rhebergen S., Bokhove O., Van der Vegt J. J. W. Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Hyperbolic Nonconservative Partial Differential Equations // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. P. 1887–1922.
58. Parés C. Numerical Methods for Nonconservative Hyperbolic Systems: a theoretical framework // SIAM J. Numer. Anal. 2006. V. 44. P. 300–321.
59. Luz Muñoz-Ruiz M., Parés C. Godunov Method for Nonconservative Hyperbolic Systems // Modélisation mathématique et analyse numérique. 2007. V. 41. P. 169–185.
60. Tokareva S. A., Toro E. F. HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow // J. Comp. Phys. 2010. V. 229. P. 3573–3604.
61. Dumbser M., Hidalgo A., Castro M., Parés C., Toro E. FORCE Schemes on Unstructured Meshes II: Nonconservative Hyperbolic Systems // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 2010. V. 199. P. 625–647
62. Галанин М. П., Савенков Е. Б., Токарева С. А. Применение разрывного метода Галеркина для численного решения квазилинейного уравнения переноса. М., 2005. 34 с. (Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, № 105).
63. Применение RKDG метода для численного решения задач газовой динамики / С. А. Токарева [и др.]. М., 2006. 30 с. (Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, № 52).
64. Galanin M. P., Tokareva S. A. The RKDG method and its application for the numerical solution of gas dynamics problems // Heat Transfer Research. 2008. V. 39, № 2. P. 123–132.
65. Galanin M. P., Savenkov E. B., Tokareva S. A. Solving gas dynamics problems with shock waves using the Runge-Kutta discontinuous Galerkin method // Mathematical Models and Computer Simulations. 2009. V. 5, № 1. P. 635–645.
66. Марчевский И. К., Токарева С. А. Сравнение эффективности параллельных алгоритмов решения задач газовой динамики на разных вычислительных комплексах // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана Естественные науки. 2009. № 1. С. 90–97.
67. Tokareva S. A. A problem-independent slope limiting algorithm for the Runge-Kutta discontinuous Galerkin method // Computational Methods in

- Applied Mathematics. 2010. V. 10, № 3. P. 326–342.
68. Токарева С. А. Применение разрывного метода Галеркина для численного решения задач газовой динамики // Студенческий научный Вестник : Тез. докл. общеуниверситетской научно-технической конференции «Студенческая весна — 2006». М., 2006. Т. 3. С. 145.
  69. Токарева С. А. RKDG-метод для численного решения задач динамики вязкого газа // Студенческий научный Вестник : Тез. докл. общеуниверситетской научно-технической конференции «Студенческая весна — 2007». М., 2007. Т. 4. С. 86–87.
  70. Галанин М. П., Токарева С. А. RKDG метод и его применение для численного решения задач газовой динамики // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках : Труды XVI Школы-семинара молодых учёных и специалистов под руководством академика РАН А. И. Леонтьева. Санкт-Петербург, 2007. Т. 1. С. 99–102.
  71. Токарева С. А. Параллельный алгоритм RKDG-метода для расчета заполнения газом канала ускорителя // Студенческий научный Вестник : тез. докл. общеуниверситетской научно-технической конференции «Студенческая весна — 2008». М., 2008. Т. 6., ч. 2. С. 25–26.
  72. Токарева С. А., Марчевский И. К. Анализ эффективности параллельных алгоритмов решения задач газовой динамики // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: Тез. докл. международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск, 2008. С. 571.
  73. Токарева С. А. RKDG-метод и его применение для численного решения задач газовой динамики // Необратимые процессы в природе и технике: Труды пятой Всероссийской конференции. Москва, 2009. Ч. 2. С. 93–96.
  74. Марчевский И. К., Токарева С. А. Параллельный алгоритм RKDG-метода для решения задач газовой динамики // Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону, 2008. С. 150–154.
  75. Tokareva S. A. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin method for simulation of flow around obstacles // Proceedings of the 6th International Conference of Computational Heat and Mass Transfer. Guangzhou, China, 2009. P. 111–116.
  76. Tokareva S. A. Numerical simulation of fluid flow with Discontinuous

- Galerkin methods // Proceedings of 16th ICMP, Prague, Czech Republic, 2009.
77. Tokareva S. A., Toro E. F. HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow // Proceedings of the 6th ICCFD, St. Petersburg, Russia, 2010. P. 238–239.
  78. Александрикова Т. А., Галанин М. П. Нелинейная монотонизация схемы К. И. Бабенко для численного решения квазилинейного уравнения переноса. М., 2003. 35 с. (Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, № 62).
  79. Shu C. W. TVB uniformly high order schemes for conservation laws // Math. Comp. 1987. V. 49. P. 105–121.
  80. Shu C. W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. 1988. V. 77. P. 439–471.
  81. Shu C. W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, ii // J. Comput. Phys. 1989. V. 83. P. 32–78.
  82. Shu C. W. TVD time discretizations // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1988. V. 9. P. 1073–1084.
  83. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М. : Едиториал УРСС, 2004. 424 с.
  84. Кузнецов О. А. Математическое моделирование двойных звездных систем : Дис. ... д. ф.-м. н. М. : 1999. 323 с.
  85. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. 1984. V. 54. P. 115–173.
  86. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975. 541 с.
  87. Li B. Q. Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer. Berlin: Springer, 2006. 578 p.
  88. Bassi F., De Bartolo C., Hartmann R., Nigro A. A discontinuous Galerkin method for inviscid low Mach number flows // J. Comp. Phys. 2009. V. 228. P. 3996–4001.
  89. Th. von Kármán. Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt // Göttinger Nachrichten, mathematisch-physikalische Klasse. 1912. P. 547–556.
  90. Zahm A. F. Flow and drag formulas for simple quadrics // Aerodynamical Laboratory, U. S. Navy, 1927. Report №253.
  91. Случановская З. П. Распределение давления на поверхности прямо-

- угольного, трехгранного и полукруглого цилиндров и их аэродинамические коэффициенты // Тр. Инс-та механики МГУ, № 24 / Под ред. С. М. Горлина. М. : Изд-во МГУ, 1973. С. 52–60.
92. Novak M., Tanaka H. Effect of Turbulence on Galloping Instability // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1984. V. 100. P. 27–47.
  93. Novak M. Aeroelastic Galloping of Prismatic Bodies // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1969. V. 95. P. 115–142.
  94. Novak M. Galloping Oscillations of Prismatic Structures // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1972. V. 98. P. 27–46.
  95. Novak M., Davenport A.G. Aeroelastic Instability of Prisms in Turbulent Flow // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1970. V. 96. P. 17–39
  96. Parkinson G. V., Smith J. D. The square prism as an aeroelastic nonlinear oscillator // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1964. V. 17. P. 255.
  97. Lyn D. A., Einav S., Rodi W., Park J. H. A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent wake of a square cylinder // J. Fluid Mech. 1995. V. 304. P. 285–319.
  98. Dolejší V. Semi-implicit interior penalty discontinuous Galerkin methods for viscous compressible flows // Commun. in Comput. Phys. 2008. V. 4. P. 231–274.
  99. Ван Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М. : Мир, 1986. 184 с.
  100. Корнеев В. Д. Параллельное программирование в MPI. Новосибирск : Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2002. 215 с.
  101. Гергель В. П. Теория и практика параллельных вычислений. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 423 с.
  102. Лупин С. А., Посыпкин М. А. Технологии параллельного программирования. М. : Форум Инфра-М, 2008. 208 с.
  103. Wenzinger C. J., Harris T. A. Wind-tunnel investigation of an N.A.C.A. 23102 airfoil with various arrangements of slotted flaps // National Advisory Committee for Aeronautics, 1939. Report №664.
  104. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver // Technical Report CoA-9204, Department of Aerospace Science, College of Aeronautics, Cranfield Institute of Technology,

- UK, 1992.
105. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver // Shock Waves 1994. V. 4. P. 25–34.
  106. Batten P., Clarke N., Lambert C., Causon D. On the Choice of Wave Speeds in the HLLC Riemann Solver // SIAM J. Sci. and Stat. Comp. 1997. V. 18. P. 1553–1570.
  107. Batten P., Leschziner M. A., Golberg U. C. Average-State Jacobians and Implicit Methods for Compressible Viscous and Turbulent Flows // J. Comput. Phys. 1997. V. 137. P. 38–78.
  108. Volpert A. I. The Space BV and Quasilinear Equations // Math. USSR Sbornik. 1967. V. 73. P. 225–267.
  109. Dal Maso G., LeFloch P. G., Murat F. Definition and Weak Stability of Nonconservative Products // J. Math. Pures Appl. 1995. V. 74. P. 483.
  110. Tóuimi I. A Weak Formulation of Roe's Approximate Riemann Solver // J. Comput. Phys. 1992. V. 102. P. 360–373.