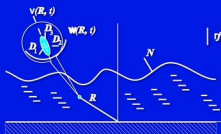


В. А. Еремеев, Л. М. Зубов

Основы механики вязкоупругой микрополярной жидкости



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ЮЖНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

В. А. Еремеев, Л. М. Зубов

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ
ВЯЗКОУПРУГОЙ
МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

Ростов-на-Дону
Издательство ЮНЦ РАН

2009

УДК 532.5: 539.3

Е 70

Е 70 Еремеев В. А., Зубов Л. М. Основы механики вязкоупругой микрополярной жидкости. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮНЦ РАН, 2009. – 128 с.

В монографии рассмотрена модель неклассической жидкости, а именно вязкоупругой микрополярной жидкости. В этой модели частицы жидкости обладают вращательным взаимодействием и присутствуют моментные напряжения. Описанная здесь модель сплошной жидкой среды характеризуется тем свойством, что в состоянии равновесия микрополярная жидкость, подобно жидкому кристаллу, обладает ориентационной упругостью и способна выдерживать как моментные напряжения, так и силовые касательные напряжения. Таким образом, разрешающие уравнения для вязкоупругой микрополярной жидкости позволяют рассматривать краевые задачи при учете поверхностных и объемных сил и моментов. В общем случае вязкоупругая микрополярная жидкость может обладать разнообразными свойствами памяти по отношению к переменной актуальной конфигурации. Достаточно подробно рассмотрена кинематика микрополярной среды. Введены необходимые в дальнейшем меры и тензоры деформаций. Представлена теория напряжений в микрополярной среде (континууме Коссера). Дан вывод уравнений движения. Развита теория определяющих соотношений вязкоупругой микрополярной жидкости. Приведены постановки краевых задач. Решен ряд задач равновесия, движения и устойчивости вязкоупругой микрополярной жидкости. Полученные решения иллюстрируют особенности данной модели сплошной среды.

Книга адресована студентам вузов, аспирантам, преподавателям, научным сотрудникам и инженерам.

Табл. — 3. Ил. — 23. Библиогр. — 155 назв.

УДК 532.5: 539.3

ISBN 978-5-902982-56-2

© В. А. Еремеев, 2009

© Л. М. Зубов, 2009

© Южный научный центр РАН, 2009

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOUTH SCIENTIFIC CENTER

V. A. Eremeyev, L. M. Zubov

PRINCIPLES
OF VISCOELASTIC MICROPOLAR
FLUID MECHANICS

Rostov on Don
SSC of RASci Publishers
2009

UDK 532.5: 539.3

E 66

E 66 **Eremeyev V. A., Zubov L. M.** Principles of viscoelastic micropolar fluid mechanics. Rostov on Don: South Scientific Center of RASci, 2009. – 128 pp.

In the monograph we present the one model of nonclassical fluid. This model is the viscoelastic micropolar fluid. Within frameworks of the considered model each material point of the fluid has the translational and rotational degrees of freedom and there exist the couple stresses. The characteristic feature of the described model is the property of the orientation elasticity. This property is well-known in the hydromechanics of liquid crystals. The difference and similarity between the model of nematic-type liquid crystal and the elastic micropolar fluid are discussed. The micropolar fluid can be subjected by forces and moments distributed in the volume which is occupied by the micropolar fluid and on its surface. The various fading memory properties are considered. The kinematics of Cosserat continuum is considered in details. The strain measures and wriness tensor are introduced. The theory of stresses is developed. The motion equations of the Cosserat continuum are deduced. The thermodynamical theory of the constitutive equations is considered. The statements of initial-boundary-value problems are given. The solutions of the selected problems of the statics, dynamics, and instability are presented.

UDK 532.5: 539.3

ISBN 978-5-902982-56-2

© V. A. Eremeyev, 2009

© L. M. Zubov, 2009

© South Scientific Center of RASci, 2009

Введение

Классическая механика сплошной среды и, в частности, теория упругости и гидродинамика ньютоновской жидкости прекрасно зарекомендовали себя в огромном количестве практических приложений. В рамках классического подхода реальное материальное тело ассоциируется с некоторой областью в трехмерном евклидовом пространстве, а частицы (атомы, молекулы, комплексы молекул, элементарные ячейки кристаллической решетки, зерна), формирующие тело, с точками в этой области, не имеющими размеров. Такие точки, наделенные дополнительными свойствами (плотностью, температурой и др.), называются материальными. При этом происходит переход от астрономического, но конечного числа реальных частиц к бесконечному множеству материальных точек. После этого перехода деформация среды может быть описана как достаточно гладкое отображение одной области трехмерного евклидова пространства на другую. Классическая механика сплошной среды при этом ограничивается использованием векторных полей, определяющих положение частиц материала (материальных точек) в разные моменты времени или при различных нагрузках. Материалы, которые описываются таким способом, называются *простыми*.

Классическим примером среды, не укладывающейся в рамки модели простого материала, служит *n*-азоксианизол (ПАА), который при температурах между 116 и 135°C образует так называемую мезофазу нематического типа. Молекула ПАА имеет формулу, показанную на рис. 1, и представляет собой достаточно жесткий стержень длиной около 20 Å и толщиной около 5 Å. Расплав ПАА в указанном диапазоне температур обладает свойствами, присущими как жидкости (текучесть), так и кристаллу (двойное лучепреломление, оптическая анизотропия, способность выдерживать крутящие моменты,

наличие дисклинаций). Такие вещества получили название *жидких кристаллов* и широко используются в современной технике (см., например, [81]).

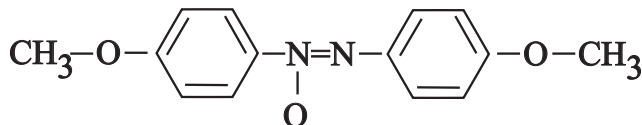


Рис. 1. Молекула ПАА.

Характерной особенностью жидких кристаллов типа ПАА является отсутствие упорядоченности центров тяжести молекул, и в то же время им присуща *ориентационная упорядоченность*: молекулы выстраиваются преимущественно в одном направлении. Это означает, что степеней свободы, связанных с положением молекул жидкого кристалла в пространстве недостаточно для его описания и необходимо введение дополнительных ориентационных степеней свободы.

Наряду с термотропными жидкими кристаллами, представляющими собой расплавы, в природе и технике также широко представлены лиотропные жидкие кристаллы, образующиеся при растворении некоторых веществ (например, фосфолипидов). Такого рода жидкокристаллическая структура присуща многим биологическим тканям, в частности, клеточным мембранам [14, 51, 53, 154].

Другим примером среды с дополнительными степенями свободы служат магнитные жидкости, представляющие собой коллоидные растворы мельчайших частиц ферромагнетиков или специальным образом изготовленные суспензии магнитных твердых частиц в сильновязких жидкостях [84]. Для описания течения магнитных жидкостей существенную роль играет учет упорядоченности ориентации магнитных частиц в магнитном поле [80].

Становление и развитие механики сплошной среды тесно связано с появлением обобщенных математических моделей, рассматривающих частицу материала не как материальную точку, а как более сложный объект, наделенный дополнительными свойствами, описывающими микроструктуру материала. В значительной степени выдающимся этапом в развитии механики сплошной среды явилась работа братьев Эжена и Франсуа Коссера [101], в которой описана модель,

впоследствии получившая названия *континуума Коссера* или *микрополярной среды*. В рамках этой модели каждая “микрочастица”, образующая среду, представляет собой абсолютно-твердое тело. Другими словами, учитывается не только изменение центров тяжести “микрочастиц”, но и их ориентации. Таким образом, в рамках континуума Коссера учитывается вращательное взаимодействие частиц. Наряду с обычным полем напряжений в микрополярной среде присутствуют также и моментные напряжения.

Начиная с работы Э. и Ф. Коссера [101], опубликованной в 1909 г., механика микрополярной среды (континуума Коссера) получила значительное развитие в основополагающих работах Э.Л. Аэро и соавторов [7, 8, 56], В.И. Ерофеева [39], П.А. Жилина [42], Л.М. Зубова [45, 155], В.Т. Койтера [126], Р.Д. Миндлина [63], В. Новацкого [70, 138], В.А. Пальмова [73], Р.А. Тушина [151], Л.И. Шкутина [91, 92], К. Эрингена [120], а также в [18, 64, 123, 124, 133, 137, 140]. Более общие модели сред, содержащие большее число степеней свободы (микроморфные среды или среды с микродеформацией), изучались В.И. Ерофеевым [39], Л.М. Зубовым [155], В.Т. Койтером [126], Р.Д. Миндлиным [134], Р.А. Тупиным [151], К. Эрингеном [95, 120] и др. Механика сред с внутренними степенями свободы изучалась также М.А. Гузовым, И.А. Куниным, В.П. Мясниковым [57, 65, 66]. Практически важный случай моментной среды – жидкие кристаллы исследовались Э.Л. Аэро [9], П. де Женем [41], А.С. Сониным [78], Ф.М. Лесли [129], Дж. Эриксоном [94, 114], К. Эрингеном [121, 118]. Эта модель нашла значительные приложения в механике гранулированных и сыпучих сред, поликристаллических тел, композитов, геоматериалов, а в последнее время – также и в наномеханике [50].

Модели типа Коссера оказалось полезной для построения неклассических моделей тонкостенных конструкций – стержней, пластин и оболочек [2, 23, 5, 25, 35, 42, 44, 52, 55, 76, 92, 91, 93, 99, 109, 110, 113, 120, 132, 142, 147, 155].

Модели жидких сред с микровращениями и моментными напряжениями, получивших название микрополярных жидкостей, ведут свое начало от работ Э.Л. Аэро [8] и К.Эрингена [115]. Реологические уравнения вязкоупругих моментных тел содержатся в работах О.Ю. Динариева и В.Н. Николаевского, К. Эрингена, К. де Сильвы [21, 96, 97, 104, 116, 120, 121]. Обширный обзор литературы по механике микрополярных жидкостей содержится в монографии [62].

Там же даны применения теории моментных жидкостей в микрофльтрации и капиллярной дефектоскопии. Динамика магнитных жидкостей с учетом вращательного взаимодействия частиц обсуждалась в [80]. Приложениям несимметричной гидромеханики к проблемам трибологии посвящены работы [6, 12]. Разным вопросам гидромеханики микрополярных жидкостей, в том числе исследованию конвективных течений, течениям в тонких слоях, течениям при наличии электромагнитных полей и другим задачам, посвящено огромное количество публикаций, отметим здесь только некоторые работы [60, 67, 68, 69, 74, 75, 100, 103, 106, 122, 127, 128, 136, 139, 149, 150].

Особенность всех моделей микрополярных жидкостей, описанных в [8, 12, 62, 115, 120], состоит в том, что в состоянии покоя они не отличаются от простых (изотропных) жидкостей, так как статические моментные напряжения в них равны нулю, а статический тензор силовых напряжений является шаровым. Излагаемая ниже теория микрополярной жидкости предложена в [33, 46]. Она включает в себя модели [8, 12, 62, 115, 120] как частные случаи и существенно отличается от этих моделей тем, что в состоянии равновесия микрополярная жидкость, подобно жидкому кристаллу, обладает ориентационной упругостью и способна выдерживать как моментные напряжения, так и силовые касательные напряжения. Рассмотренная здесь модель вязкоупругой микрополярной жидкости является максимально общей моделью ориентированной жидкой среды, ориентация частиц которой характеризуется ортонормированной тройкой направляющих векторов. Модель жидкой среды [33, 46] обобщает теорию вязкой микрополярной жидкости в той же степени, в какой определяющие соотношения простой вязкоупругой жидкости [4, 82] обобщают уравнения состояния ньютоновской жидкости. В общем случае вязкоупругая микрополярная жидкость может обладать разнообразными свойствами памяти по отношению к переменной актуальной конфигурации.

Сходство и различие модели упругой микрополярной жидкости и модели среды, оснащенной полем директоров и применяемой для описания нематических жидких кристаллов, обсуждаются ниже в главе 3.

Во второй главе достаточно подробно рассмотрена кинематика микрополярной среды. Здесь введены необходимые в дальнейшем меры и тензоры деформаций. Третья глава посвящен развитию теории напряжений в континууме Коссера и выводу уравнений движения.

В следующей главе рассмотрена теория определяющих соотношений вязкоупругой микрополярной жидкости. Постановка краевых задач содержится в пятой главе. Шестая и седьмая главы посвящены исследованию упругой микрополярной жидкости. Рассмотрены задачи о равновесии микрополярной жидкости, в том числе задача со свободной поверхностью. Вариационным методом выведены условия равновесия фаз упругой микрополярной жидкости.

В восьмой главе решены задачи о вискозиметрических течениях вязкоупругой жидкости в круглой трубе, канале и между соосными вращающимися цилиндрами. Особенностью этого класса течений является то, что для них произвольная вязкоупругая жидкость неотличима от вязкоупругой жидкости дифференциального типа.

Далее решена задача о потере устойчивости плоского слоя упругой микрополярной жидкости под действием магнитного поля, аналогичная задаче о переходе Фредерикса в теории жидких кристаллов.

Десятая и одиннадцатая главы содержат обобщение уравнений состояния на случай влияния температуры. Здесь сформулированы предположения, аналогичные приближению Обербека–Буссинеска для ньютоновской жидкости. Решена задача о конвективной неустойчивости плоского подогреваемого снизу слоя тяжелой микрополярной жидкости. Показано, что учет эффектов вязкоупругости приводит к повышению порога устойчивости по сравнению со случаями ньютоновской и вязкой микрополярной жидкости.

Также рассмотрено распространение капиллярных волн в микрополярной жидкости.

Полученные результаты могут быть полезными для механики суспензий, магнитных и биологических жидкостей, жидких кристаллов и других жидких сред сложной структуры.

Отметим, что в этой книге используется прямое (бескоординатное) исчисление [43, 48]. Тензоры будут обозначаться прямым полужирным шрифтом, а векторы – наклонным полужирным.

При написании книги были использованы статьи [10, 33, 34, 36, 37, 29, 46, 47, 98, 111, 112, 108, 143, 144], а также ранее не опубликованные результаты.

Исследования, лежащие в основе данной монографии, на разных этапах были поддержаны грантами РФФИ (в том числе №№ 07-01-00525, 09-01-00459, 09-01-00849), программой развития Южного федерального университета, а также другими фондами и организациями.

Глава 1

Кинематика континуума Коссера

Микрополярный континуум представляет собой сплошную среду, в которой каждая частица обладает шестью степенями свободы абсолютно твердого тела [32, 45, 92, 101, 119, 120, 126, 151, 155]. Каждая частица микрополярной сплошной среды помимо обычных трансляционных степеней свободы обладает также ориентационными, или вращательными, степенями свободы.

В текущей, или актуальной, конфигурации в момент времени t положение частицы микрополярного тела описывается радиус-вектором \mathbf{R} , а ее ориентация задается при помощи трех ортонормированных векторов \mathbf{D}_k ($k = 1, 2, 3$), которые называются *директорами*. Эти векторные поля и определяют трансляционные и вращательные степени свободы частиц тела.

Для описания деформации рассмотрим некоторое фиксированное состояние тела, например, но не обязательно, взятое при $t = 0$, которое назовем отсчетной конфигурацией. В этом состоянии положение частиц определяется при помощи радиус-вектора \mathbf{r} , а ориентация – директорами \mathbf{d}_k (рис. 1.1). Движение микрополярной среды может быть описано при помощи векторных полей

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{D}_k = \mathbf{D}_k(\mathbf{r}, t). \quad (1.1)$$

Поскольку в процессе деформации директора \mathbf{D}_k остаются ортонормированными, их изменение может быть представлено при помощи ортогонального тензора

$$\mathbf{H} = \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{D}_k,$$

называемого *тензором микроповорота*. Предполагается, что векторы D_1, D_2, D_3 , а также векторы d_1, d_2, d_3 образуют правые тройки. Поэтому \mathbf{H} является собственно ортогональным. Следовательно, деформация микрополярной среды может также быть описана при помощи следующих отображений

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \quad (1.2)$$

Поскольку кинематика микрополярной сплошной среды отличается от простых материалов наличием дополнительных векторных или тензорных полей, то отображения (1.1) или (1.2) порождают меры и тензоры деформации, вообще говоря, отличные от используемых в классической механике сплошной среды.

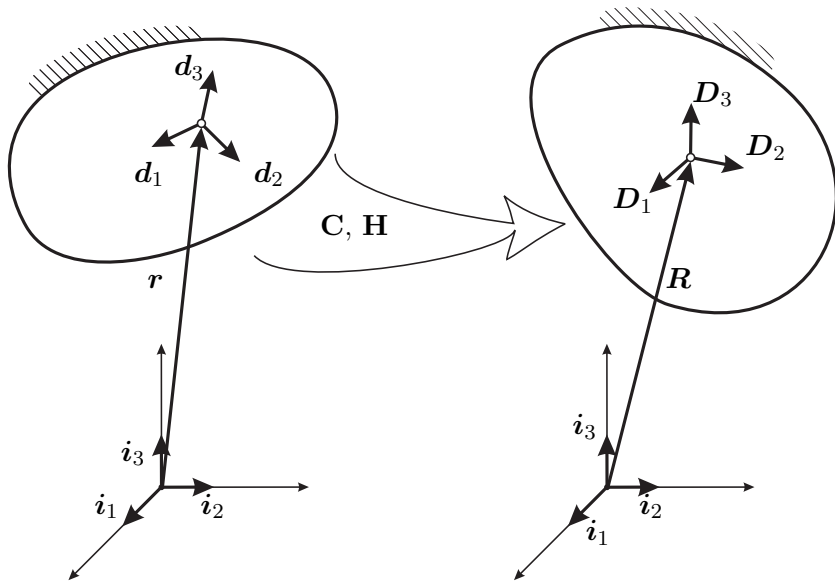


Рис. 1.1. Движение микрополярного тела.

1.1 Меры и тензоры деформаций в континууме Коссера

Для введения мер и тензоров деформации рассмотрим бесконечно малые приращения величин, описывающих движение микрополярного тела.

Градиент деформации $\mathbf{C} \equiv \text{grad } \mathbf{R}$ связывает бесконечно малые приращения радиус-вектора частиц тела в отсчетной и актуальной конфигурациях:

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{C}. \quad (1.3)$$

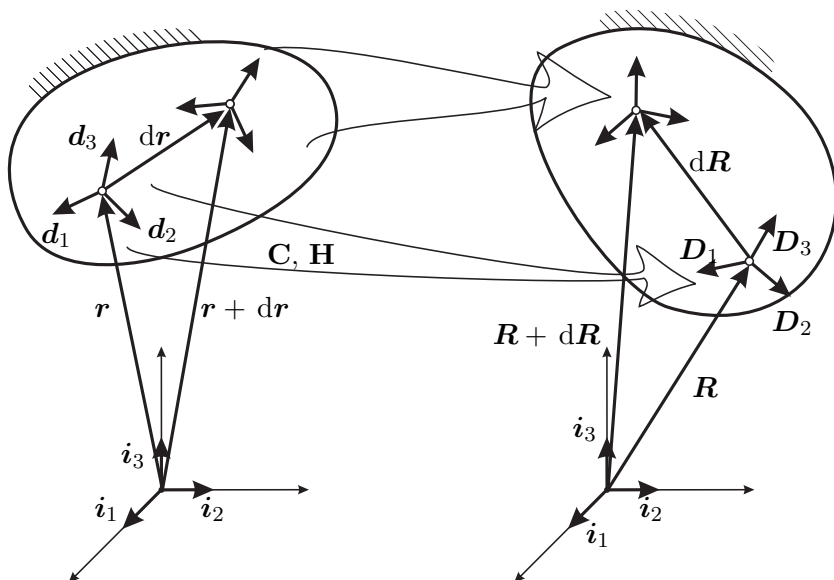


Рис. 1.2. Деформация микрополярного тела.

Рассмотрим далее приращения директоров \mathbf{D}_k в актуальной конфигурации. Поскольку \mathbf{D}_k единичны, то вектор $d\mathbf{D}_k$ будет ортогонален к \mathbf{D}_k . Отсюда следует представление

$$d\mathbf{D}_k = \mathbf{B}' \times d\mathbf{D}_k, \quad \mathbf{B}' = \frac{1}{2} \mathbf{D}_i \times d\mathbf{D}_i. \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) позволяет ввести тензор \mathbf{B} следующим формулой

$$\mathbf{B}' = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{D}_k) \times \mathbf{D}_k. \quad (1.6)$$

Тензор \mathbf{B} можно назвать *тензором кривизны микроструктуры* актуальной конфигурации, поскольку он описывает изменение триэдра директоров \mathbf{D}_k в этой конфигурации.

Рассматривая приращения директоров \mathbf{d}_k в отсчетной конфигурации, аналогично можно ввести тензор кривизны микроструктуры \mathbf{b} отсчетной конфигурации

$$\begin{aligned} d\mathbf{d}_k &= \mathbf{b}' \times \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{b}' = \frac{1}{2}\mathbf{d}_k \times dd_k, \quad \mathbf{b}' = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}, \\ \mathbf{b} &= -\frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{d}_k) \times \mathbf{d}_k. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В (1.6) и (1.7) Grad и grad – операторы градиента в актуальной и отсчетной конфигурациях. Тензоры \mathbf{B} и \mathbf{b} описывают локальное изменение директоров в актуальной и отсчетной конфигурациях соответственно.

Найдем приращение тензора микроповоротов \mathbf{H} . Выполняются соотношения

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} &= d(\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{D}_k) = (d\mathbf{d}_k) \otimes \mathbf{D}_k + \mathbf{d}_k \otimes d\mathbf{D}_k = \\ &= \mathbf{b}' \times \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{D}_k - \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{D}_k \times \mathbf{B}' = \\ &= d\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \times \mathbf{B}^T \cdot d\mathbf{R} = \\ &= d\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{I}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Используя (1.4)–(1.7), из (1.8) получим формулу

$$(d\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^T = d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^T) \times \mathbf{I}, \quad (1.9)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор.

Учитывая, что по определению градиента выполняется равенство

$$d\mathbf{H} = d\mathbf{r} \cdot \text{grad } \mathbf{H},$$

из (1.9) вытекает формула для градиента тензора микроповорота

$$\text{grad } \mathbf{H} = (\mathbf{b} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^T) \times \mathbf{I}. \quad (1.10)$$

При деформации частицы микрополярного континуума испытывают не только трансляционные перемещения, но и повороты, которые, в отличие от простого нелинейно упругого тела, вообще говоря, не связаны с тензором макроповорота $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C})^{-1/2} \cdot \mathbf{C}$, являющимся ортогональным сомножителем в полярном разложении градиента деформации [48, 61]. Ориентация частиц в пространстве задается при помощи тензора микроповорота \mathbf{H} . Найдем разность $d\mathbf{R} - d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}$. Получим

$$d\mathbf{R} - d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{H}). \quad (1.11)$$

Меры и тензоры деформаций естественно связать с нормами рассматриваемых приращений. Используя евклидову норму, получим

$$\|d\mathbf{R} - d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}\|^2 = d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.12)$$

$$\|d\mathbf{H}\|^2 = 2 d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^T - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{b}^T) \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.13)$$

Формула (1.12) следует из (1.11), а (1.13) получается из (1.9) с учетом равенств $\|d\mathbf{H}\| = \|(\mathbf{dH}) \cdot \mathbf{H}^T\|$ и $\|\mathbf{W}\| = \sqrt{2}\|\mathbf{w}\|$, выполняющегося для любого антисимметричного тензора \mathbf{W} , связанного со своим аксиальным вектором \mathbf{w} формулой $\mathbf{W} = \mathbf{I} \times \mathbf{w}$.

На основании (1.12) и (1.13) естественно ввести следующие тензоры и меры деформаций типа Коши-Грина

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T - \mathbf{I}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^T - \mathbf{b}, \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{K} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^T. \end{aligned} \quad (1.14)$$

При отсутствии деформаций ($\mathbf{R} = \mathbf{r}$, $\mathbf{H} = \mathbf{I}$) тензоры деформаций обращаются в нуль ($\mathbf{E} = \mathbf{L} = \mathbf{0}$), в то время как меры деформаций нет ($\mathbf{Y} = \mathbf{I}$, $\mathbf{K} = \mathbf{b}$).

Следует отметить, что соотношения (1.12), (1.13) в принципе позволяют ввести несимметричные тензоры деформаций бесчисленным числом способов. Выбранный здесь связан с тем обстоятельством, что как будет отмечено ниже, такие же меры и тензоры деформации могут

быть введены на основе и других идей, не связанных с рассмотрением бесконечно малых приращений.

Через \mathbf{Y} также выражается изменение длины элементарного волокна:

$$\|\mathbf{dR}\|^2 - \|\mathbf{dr}\|^2 = \mathbf{dr} \cdot (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{dr}. \quad (1.15)$$

Отметим, что соотношение (1.15) вместе с равенством

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{H} \quad (1.16)$$

позволяет считать \mathbf{Y} аналогом правого тензора растяжения в нелинейной теории упругости простых материалов, однако уравнение (1.16) не является полярным разложением градиента деформации \mathbf{C} , и \mathbf{Y} – несимметричный тензор.

Соотношения (1.12), (1.13) можно записать в другом виде

$$\|\mathbf{dR} - \mathbf{dr} \cdot \mathbf{H}\|^2 = \mathbf{dR} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{C}^{-T}) \cdot \mathbf{dR}, \quad (1.17)$$

$$\|\mathbf{dH}\|^2 = 2 \mathbf{dR} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{B}^T - \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{C}^{-T}) \cdot \mathbf{dR}. \quad (1.18)$$

Уравнения (1.17), (1.18) позволяют ввести меры и тензоры деформаций типа Альманзи

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{H}, & \boldsymbol{\ell} &= \mathbf{B} - \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{H}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{H}, & \mathbf{k} &= \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В результате рассмотренных выше геометрических рассуждений формулами

(1.14), (1.19) для континуума Коссера естественным образом были введены *первая мера деформаций* \mathbf{Y} и *тензоры деформаций* \mathbf{E} , \mathbf{e} , *вторая мера деформаций* \mathbf{y} , *первая и вторая меры изгибных деформаций* \mathbf{K} , \mathbf{k} , *тензоры изгибных деформаций* \mathbf{L} , $\boldsymbol{\ell}$.

Следует заметить, что определенные таким образом меры и тензоры деформаций для микрополярной среды могут быть введены и по-другому, например, на основе дополнительных рассуждений с использованием принципа материальной индифферентности (см., например, [155]) или как сопряженные к соответствующим тензорам напряжений и моментных напряжений. Подробное обсуждение мер деформации в континууме Коссера дано в [143, 144]. В [143] кроме того приведен обзор работ, в которых обсуждалось введение мер деформации в микрополярном континууме.

1.2 Тензоры кривизны микроструктуры

Наряду с мерами и тензорами деформаций выше были также введены тензоры кривизны микроструктуры \mathbf{B} и \mathbf{b} в актуальной и отсчетной конфигурациях, определяемые формулами

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{D}_k) \times \mathbf{D}_k, \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{d}_k) \times \mathbf{d}_k. \quad (1.20)$$

Тензоры кривизны микроструктуры \mathbf{B} и \mathbf{b} не имеют прямых аналогов в механике простых тел и играют важную роль в механике микрополярного континуума. Если поля директоров постоянны $\mathbf{D}_k = \text{const}$, $\mathbf{d}_k = \text{const}$, то $\mathbf{b} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Можно также показать, что \mathbf{B} и \mathbf{b} определяются через дифференциальные связности.

Чтобы прояснить эту связь, предположим, что векторы \mathbf{D}_k связаны с какой-то криволинейной ортогональной системой координат Q^m

$$\mathbf{D}_m = \frac{1}{H_m} \mathbf{R}_m, \quad \mathbf{R}_m = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial Q^m}, \quad H_m = |\mathbf{R}_m|, \quad \mathbf{R}_m \cdot \mathbf{R}_n = \delta_{mn}.$$

Найдем вторые производные \mathbf{R} . По определению символов Кристоффеля Γ_{ij}^k имеем [22]

$$\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q^k} = \Gamma_{ik}^j \mathbf{R}_j$$

откуда с учетом предыдущих формул и определения \mathbf{B} получим

$$\mathbf{D}_k \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{H_k}{H_i} \epsilon_{ijp} \Gamma_{ik}^j,$$

где ϵ_{ijp} – символы Леви-Чивиты.

В общем случае неголономного базиса \mathbf{D}_k компоненты тензора \mathbf{B} также можно связать со связностями Γ_{ik}^j .

Знание тензорных полей \mathbf{B} и \mathbf{b} позволяет определить поля триэдров \mathbf{D}_k и \mathbf{d}_k соответственно. Рассмотрим этот вопрос более подробнее.

1.3 Определение направляющих векторов \mathbf{D}_k по заданному полю тензора кривизны микроструктуры. Уравнения совместности для \mathbf{B} .

Следуя [49], рассмотрим задачу определения триэдра векторов \mathbf{D}_k при заданном тензорном поле $\mathbf{B}(\mathbf{R})$, которое будем предполагать непрерывно дифференцируемым. Обозначим через \mathbf{i}_k орты декартовых координат X_k и введем ортогональный тензор $\mathbf{Q} \triangleq \mathbf{D}_k \otimes \mathbf{i}_k$. Так как $\mathbf{D}_m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_m$, то между триэдром \mathbf{D}_k и тензором \mathbf{Q} имеется взаимно однозначное соответствие. Из (1.20) вытекает следующая система уравнений для определения тензора \mathbf{Q} при заданном поле тензора \mathbf{B}

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial X_s} = \mathbf{\Pi}_s \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{\Pi}_s = \mathbf{I} \times \mathbf{B}_s, \quad \mathbf{B}_s = \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{B}. \quad (1.21)$$

Необходимые и достаточные условия разрешимости системы (1.21) относительно тензора \mathbf{Q} имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial X_s} = \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial X_k} + \mathbf{B}_s \times \mathbf{B}_k. \quad (1.22)$$

Это соотношение можно записать в безкоординатном виде

$$(\text{Rot } \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^2 - (\text{tr } \mathbf{B})\mathbf{B} + \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{B} - \text{tr } \mathbf{B}^2) \mathbf{I}. \quad (1.23)$$

В случае неособого тензора \mathbf{B} уравнение совместности (1.23) при помощи формулы Гамильтона–Кэли можно записать иначе

$$(\text{Rot } \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^{-1} \det \mathbf{B}.$$

В односвязной области тройка ортонормированных векторов \mathbf{D}_k определяется по заданному гладкому тензорному полю \mathbf{B} , удовлетворяющему условию совместности (1.23), единственным образом, если триэдр \mathbf{D}_k задан в некоторой точке области, а решение можно записать при помощи *мультипликативного криволинейного интеграла* [155]

$$\mathbf{Q} = \int_{\mathcal{M}_0}^{\wedge \mathcal{M}} (\mathbf{I} + d\mathbf{R} \cdot \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}(\mathcal{M}_0), \quad (1.24)$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{\Pi}_s, \quad d\mathbf{R} = \mathbf{i}_s dX_s.$$

В односвязной области формула (1.24) дает однозначное (т.е. не зависящее от выбора пути, соединяющего точки \mathcal{M}_0 и \mathcal{M}) выражение ортогонального тензора \mathbf{Q} , определяющего ориентацию частиц жидкого континуума Коссера. Если область многосвязна, то несмотря на однозначность тензорного поля $\mathbf{B}(\mathbf{R})$, тензорное поле $\mathbf{Q}(\mathbf{R})$, вообще говоря, будет неоднозначным. Если провести разрезы (перегородки), превращающие область в односвязную, то при пересечении каждого из разрезов функция $\mathbf{Q}(\mathbf{R})$ может претерпевать скачок. Можно показать, что скачок описывается формулой

$$\mathbf{Q}_+ = \mathbf{Q}_- \cdot \boldsymbol{\Omega},$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ – постоянный для данного разреза и ортогональный тензор, определяемый соотношением

$$\boldsymbol{\Omega} \triangleq \mathbf{Q}_0^T \cdot \oint_{\mathcal{M}_0}^{\wedge} (\mathbf{I} + d\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Pi}) \cdot \mathbf{Q}_0.$$

Здесь замкнутый контур мультипликативного интегрирования должен пересекать только одну перегородку.

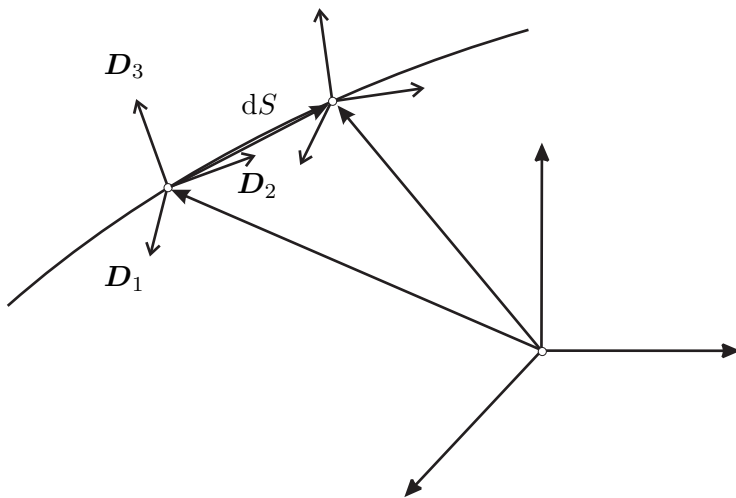
1.4 Определение векторов \mathbf{D}_k вдоль кривой

Можно определить векторы \mathbf{D}_k по заданному полю тензора кривизны микроструктуры и в том случае, если тензор \mathbf{B} задан не во всем пространстве, а только на некоторой кривой. При этом выполнение условий совместности от \mathbf{B} не потребуется.

Рассмотрим в актуальной конфигурации произвольную гладкую кривую L , заданную при помощи естественной параметризации $\mathbf{R} = \mathbf{R}(S) \equiv X_k(S)\mathbf{i}_k$, где S – длина дуги, \mathbf{i}_k – декартов базис. Определим, как связано изменение триэдра \mathbf{D}_k вдоль кривой L с тензором кривизны микроструктуры \mathbf{B} и геометрическими характеристиками кривой L . Обозначим через $\boldsymbol{\tau}$ единичный вектор касательной к L . Тогда $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{R}/dS$.

Можно показать, что на кривой L выполняется соотношение

$$\frac{d}{dS} \mathbf{D}_k = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D}_k = \mathbf{W} \cdot \mathbf{D}_k, \quad (1.25)$$

Рис. 1.3. Изменение триэдра D_k вдоль кривой.

где $\mathbf{W} \triangleq \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{I}$ – антисимметричный тензор.

Действительно, имеем

$$\frac{d}{dS} D_k = \frac{dX_m}{dS} \frac{\partial D_k}{\partial X_m} = \frac{dX_m}{dS} B_m \times D_k.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{\tau} = \frac{dX_m}{dS} \mathbf{i}_m$ и $\mathbf{B} = \mathbf{i}_m \otimes B_m$, отсюда сразу следует формула (1.25).

Если поле тензора кривизны микроструктуры задано на кривой L , то (1.25) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющих определить триэдр D_k на кривой L по начальным данным, заданным в произвольной точке кривой: $D_k(S_0) = D_k^0$. Например, если тензор \mathbf{W} постоянный на кривой L ($\mathbf{W} = \mathbf{W}_0$), то из (1.25) следует формула

$$D_k(S) = e^{\mathbf{W}_0 S} \cdot D_k^0.$$

Отметим важное следствие, следующее из (1.25). Имеет место

Теорема 1.1. Если задано поле тензора кривизны микроструктуры \mathbf{B} , дифференцируемое в некоторой области, и \mathbf{B} вырожден в каждой точке области, то найдется такая кривая, что на этой кривой триэдр \mathbf{D}_k постоянен, т.е. не зависит от выбора точки на ней.

Доказательство. Если $\det \mathbf{B} = 0$, то \mathbf{B} имеет левый собственный вектор, т.е. существует вектор \mathbf{e} , такой, что $\mathbf{e} \cdot \mathbf{B} = 0$. Выберем кривую так, чтобы \mathbf{e} был к ней касательным вектором. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что эта задача разрешима всегда и, следовательно, такая кривая существует. На этой кривой тензор $\mathbf{W} \equiv \mathbf{e} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{I} = 0$ и \mathbf{D}_k не меняется вдоль кривой. \square

1.5 Относительные меры деформаций

В механике простых материалов [4, 82, 152] используется относительное описание, при котором в качестве отсчетной выбирается текущая конфигурация. Это означает, что момент наблюдения t выбран как начало отсчета, а прошлая и будущая деформация тела измеряется по отношению к выбранному моменту времени. Для микрополярных тел относительное описание рассматривалось в [120, 119, 125].

Введем понятие *относительного градиента деформации*

$$\mathbf{C}_t(\tau) \triangleq \mathbf{C}^{-1}(t) \cdot \mathbf{C}(\tau), \quad (1.26)$$

при определении которого текущая конфигурация в момент времени t рассматривается в качестве отсчетной, а конфигурация, соответствующая моменту времени τ , играет роль текущей.

Аналогичным образом для микрополярной среды введем понятие *относительного тензора микроповорота*

$$\mathbf{H}_t(\tau) \triangleq \mathbf{D}_k(t) \otimes \mathbf{D}_k(\tau) = \mathbf{H}^T(t) \cdot \mathbf{H}(\tau). \quad (1.27)$$

Из (1.26), (1.27) видно, что относительные тензоры градиента деформации и микроповорота при $\tau = t$ оказываются единичными: $\mathbf{C}_t(t) = \mathbf{I}$, $\mathbf{H}_t(t) = \mathbf{I}$.

Также введем *относительные меры и тензоры деформации*

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t(\tau) &\triangleq \mathbf{C}_t(\tau) \cdot \mathbf{H}_t^T(\tau), \quad \mathbf{K}_t(\tau) \triangleq \mathbf{L}_t(\tau) + \mathbf{B}(t), \\ \mathbf{L}_t(\tau) \times \mathbf{I} &\triangleq -[\text{Grad } \mathbf{H}_t(\tau)] \cdot \mathbf{H}_t^T(\tau). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Естественно, что при $\tau = t$ актуальная и отсчетная конфигурация совпадают и деформации среды отсутствуют: $\mathbf{Y}_t(t) = \mathbf{I}$, $\mathbf{K}_t(t) = \mathbf{B}(t)$, $\mathbf{L}_t(\tau) = 0$.

Для предысторий относительных тензоров (1.28) воспользуемся обозначениями

$$\mathbf{C}_t(t-s) \triangleq \mathbf{C}_t^t(s), \quad \mathbf{H}_t(t-s) \triangleq \mathbf{H}_t^t(s) \text{ и т.д.}$$

Из (1.28) вытекают формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^t(s) &= \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{Y}_t^t(s) \cdot \mathbf{H}^T(t), \\ \mathbf{K}^t(s) &= \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{K}_t^t(s) \cdot \mathbf{H}^T(t), \\ \mathbf{Y}_t^t(0) &= \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}_t^t(0) = \mathbf{B}(t), \quad \mathbf{L}_t^t(0) = 0, \\ \mathbf{K}_t^t(s) &= \mathbf{L}_t^t(s) + \mathbf{B}(t). \end{aligned} \tag{1.29}$$

1.6 Линейная и угловая скорости

Как уже отмечалось выше, движение “микрочастицы” микрополярированной среды описывается шестью скалярными параметрами – радиус-вектором $\mathbf{R}(t)$, задающим ее положение в пространстве, и собственно ортогональным тензором $\mathbf{H}(t)$ ($\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^T$, $\det \mathbf{H} = 1$), определяющим ориентацию частиц. В связи с этим тело обладает независимыми полями линейной и угловой скоростей, определяемых равенствами

$$\mathbf{v} \triangleq \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{H}}{dt} \triangleq -\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1.30}$$

где символ $\frac{d}{dt}$ обозначает материальную производную по времени.

1.7 Тензоры скоростей деформации и изгибной деформации

Вычислим производные по времени от меры деформации \mathbf{Y} и тензора изгибной деформации \mathbf{L} . С учетом равенства (1.30)₂ можно про-

вести следующие выкладки

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{Y}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T) = \frac{d\mathbf{C}}{dt} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{C} \cdot \frac{d\mathbf{H}^T}{dt} = \\ &= \text{grad } \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{C} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}^T) = \mathbf{C} \cdot \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}^T + \\ &\quad + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{H}^T,\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{Grad } \mathbf{v} + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega}$.

Определение 1.1. Тензор $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{Grad } \mathbf{v} + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega}$ называется тензором скоростей деформации микрополярной среды.

Нетрудно убедиться, что $\boldsymbol{\varepsilon}$ является индифферентным тензором [61]. Если тело движется как абсолютно твердое, то $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$. Таким образом, $\boldsymbol{\varepsilon}$ характеризует скорость изменения чистой деформации тела.

Заметим, что введенный тензор скоростей деформации в микрополярной среде $\boldsymbol{\varepsilon}$ несимметричен в отличие от обычно используемого в механике простых материалов тензора скоростей деформаций $\boldsymbol{\epsilon} \triangleq \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{v} + (\text{Grad } \mathbf{v})^T)$.

Продифференцируем по времени тензор изгибной деформации

$$\mathbf{L} \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{r}^s \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^s} \cdot \mathbf{H}^T \right)_{\times}.$$

Индексом \times внизу обозначается векторный инвариант тензора второго ранга [61]. Например, для диады $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ векторный инвариант определяется равенством $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Операция $()_{\times}$ является линейной и перестановочной с операцией взятия производной по времени. Имеет место следующая последовательность выкладок

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{1}{2} \mathbf{r}^s \otimes \left[\frac{\partial}{\partial q^s} \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt} \right) \cdot \mathbf{H}^T + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^s} \cdot \frac{d\mathbf{H}^T}{dt} \right]_{\times} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{r}^s \otimes \left[-\frac{\partial(\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega})}{\partial q^s} \cdot \mathbf{H}^T + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^s} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}^T) \right]_{\times} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{r}^s \otimes \left[-\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^s} \times \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \mathbf{H}^T - \left(\mathbf{H} \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q^s} \right) \cdot \mathbf{H}^T + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^s} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}^T) \right]_{\times}.\end{aligned}$$

С учетом свойства смешанного произведения $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ следует, что

$$\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^s} \times \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \mathbf{H}^T = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^s} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}^T).$$

Продолжая преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= -\frac{1}{2} \mathbf{r}^s \otimes \left[\left(\mathbf{H} \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q^s} \right) \cdot \mathbf{H}^T \right]_{\times} = \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{r}^s \otimes \left(\mathbf{H} \cdot \mathbf{I} \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q^s} \cdot \mathbf{H}^T \right)_{\times}. \end{aligned}$$

Для дальнейших вычислений нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Для любого симметричного тензора второго ранга \mathbf{X} и любого собственно ортогонального тензора \mathbf{Q} справедливо соотношение*

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^T)_{\times} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_{\times}. \quad (1.31)$$

Доказательство. В силу линейности (1.31) относительно тензора \mathbf{X} достаточно доказать его для диадного тензора \mathbf{X} : $\mathbf{X} = \mathbf{a}\mathbf{b}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T)_{\times} &= (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T) = \\ &= (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_{\times}. \end{aligned}$$

□

С учетом утверждения 1.1 производной от \mathbf{L} можно придать вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= -\frac{1}{2} \mathbf{r}^s \otimes \mathbf{H} \cdot \left(\mathbf{I} \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q^s} \right)_{\times} = \mathbf{r}^s \otimes \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q^s} = \\ &= \mathbf{r}^s \otimes \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q^s} \cdot \mathbf{H}^T = (\text{grad } \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varkappa} \cdot \mathbf{H}^T, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\varkappa} = \text{Grad } \boldsymbol{\omega}$.

Определение 1.2. *Тензор $\boldsymbol{\varkappa} = \text{Grad } \boldsymbol{\omega}$ называется тензором скоростей изгибной деформации.*

Как и ε , тензор \mathfrak{a} является индифферентным тензором.

Если деформация представляет собой движение абсолютно жесткого тела, то $\mathfrak{a} = 0$. Тем самым, тензор \mathfrak{a} характеризует скорость изгибных деформаций микрополярной среды.

Таким образом, получены формулы, определяющие скорости деформации и изгибной деформации в континууме Коссера

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \mathbf{C}^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Y} \right) \cdot \mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{v} + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathfrak{a} &= \mathbf{C}^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{L} \right) \cdot \mathbf{H} = \text{Grad } \boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\tag{1.32}$$

1.8 Скорости деформации более высокого порядка

Введем тензоры скоростей деформации более высокого порядка. Вычислим n -е производные по времени \mathbf{Y} и \mathbf{L} . Заметим, что первые производные от \mathbf{Y} и \mathbf{L} имеют вид $\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{H}^T$, где \mathbf{X} – индифферентный тензор. Можно проверить, что выполняется формула

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{H}^T) = \mathbf{C} \cdot \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \times \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \mathbf{H}^T,$$

причем выражение $\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \times \boldsymbol{\omega}$ также представляет собой индифферентный тензор.

Таким образом, n -е производные \mathbf{Y} и \mathbf{L} можно представить в виде

$$\frac{d^n \mathbf{Y}}{dt^n} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{H}^T, \quad \frac{d^n \mathbf{L}}{dt^n} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{H}^T.$$

Например, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}_1 = \varepsilon$, $\mathbf{A}_2 = \frac{d\varepsilon}{dt} + \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \varepsilon + \varepsilon \times \boldsymbol{\omega}$ и т.д.

Определение 1.3. Тензоры $\mathbf{A}_n = \mathbf{C}^{-1} \cdot \frac{d^n \mathbf{Y}}{dt^n} \cdot \mathbf{H}$, $\mathbf{B}_n = \mathbf{C}^{-1} \cdot \frac{d^n \mathbf{L}}{dt^n} \cdot \mathbf{H}$ называются тензорами скоростей деформации и изгибной деформации типа Ривлина–Эриксона.

Вместо определения для вычисления тензоров скоростей типа Ривлина-Эриксона часто более удобно пользоваться рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{n+1} &= \frac{d}{dt} \mathbf{A}_n + (\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_n \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.33) \\ \mathbf{B}_{n+1} &= \frac{d}{dt} \mathbf{B}_n + (\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_n \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}.\end{aligned}$$

В случае простых материалов с памятью тензоры скоростей деформации Ривлина-Эриксона широко используются при записи уравнений состояния дифференциального типа, в частности, неньютоновских жидкостей [4].

Если предыстории $\mathbf{Y}_t^t(s)$ и $\mathbf{L}_t^t(s)$ являются бесконечно дифференцируемыми, то разлагая их в ряды Тейлора в окрестности момента наблюдения ($s = 0$), можно получить формальные разложения

$$\mathbf{Y}_t^t(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} s^n \mathbf{A}_n(t), \quad \mathbf{L}_t^t(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} s^n \mathbf{B}_n(t). \quad (1.34)$$

Таким образом, предыстории $\mathbf{Y}_t^t(s)$ и $\mathbf{L}_t^t(s)$, по крайней мере формально, могут быть вычислены по тензорам скоростей деформаций и изгибных деформаций, измеренных в момент наблюдения t . В частности, если движение тела таково, что тензоры \mathbf{A}_n и \mathbf{B}_n обращаются в ноль начиная с некоторого номера, то вся предыстория деформации полностью определяется конечным числом тензоров скоростей.

Глава 2

Теория напряжений

В этой главе последовательно проводится введение тензоров напряжений и моментных напряжений на основе законов баланса импульса и момента импульса (законов Эйлера), а также выводятся уравнения движения. Также рассматривается частный случай отсутствия в среде моментных напряжений и внешних моментов, приводящий к теории напряженного состояния простых материалов.

2.1 Силы и моменты

Силы и моменты – это первичные понятия механики сплошной среды. Их определение возможно на пути построения системы аксиом подобно данному Трусделлом и Ноллом для простых тел [82, 152, 153].

Рассмотрим материальное тело в момент времени t и выделим в нем произвольную часть \mathcal{P} (рис. 2.1). На \mathcal{P} действуют силы и моменты двух типов: во-первых, действующие на массу части \mathcal{P} независимо от контакта и называемые массовыми, во-вторых, контактные или поверхностные – передающиеся на \mathcal{P} непосредственно через ограничивающую ее поверхность. Если мысленно убрать внешность части \mathcal{P} , то ее действие на \mathcal{P} заменяется силами и моментами. Внешняя среда также воздействует на тело посредством контактных сил.

Примерами массовых сил служат сила тяжести, центробежные силы, пондеромоторная сила. Массовые моменты, как правило, связаны с действием на тело электромагнитного поля.

Таким образом, действующие на \mathcal{P} силы и моменты можно представить следующим образом

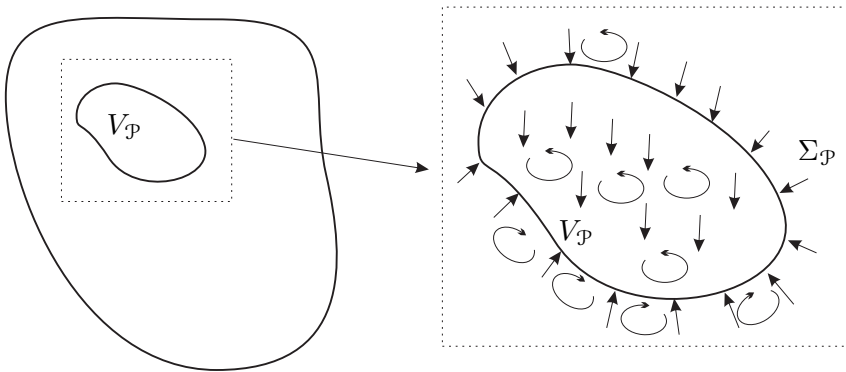


Рис. 2.1. Силы и моменты, действующие на часть тела.

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) = \mathbf{f}_B(\mathcal{P}) + \mathbf{f}_C(\mathcal{P}), \quad \mathbf{m}(\mathcal{P}) = \mathbf{m}_B(\mathcal{P}) + \mathbf{m}_C(\mathcal{P}).$$

Здесь индекс B обозначает массовые силы и моменты, а индекс C – поверхностные.

Будем считать, что $\mathbf{f}_B(\mathcal{P})$, $\mathbf{m}_B(\mathcal{P})$ являются абсолютно непрерывными функциями массы той части тела, на которую они действуют, а $\mathbf{f}_C(\mathcal{P})$, $\mathbf{m}_C(\mathcal{P})$ – абсолютно непрерывные функции площади поверхности. Таким образом, можно ввести их массовые и поверхностные плотности

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_B(\mathcal{P}) &= \iiint_{V_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{f} dV, & \mathbf{m}_B(\mathcal{P}) &= \iiint_{V_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{m} dV, \\ \mathbf{f}_C(\mathcal{P}) &= \iint_{\Sigma_{\mathcal{P}}} \mathbf{t} d\Sigma, & \mathbf{m}_C(\mathcal{P}) &= \iint_{\Sigma_{\mathcal{P}}} \boldsymbol{\mu} d\Sigma, \end{aligned}$$

где $V_{\mathcal{P}}$ – объем, занимаемый частью тела \mathcal{P} в текущей конфигурации, $\Sigma_{\mathcal{P}} = \partial V_{\mathcal{P}}$ – граница \mathcal{P} , \mathbf{t} , $\boldsymbol{\mu}$ – сила и момент, приходящаяся на единицу площади в текущей конфигурации. Величина \mathbf{t} называется *вектором напряжений*, а $\boldsymbol{\mu}$ – *вектором моментных напряжений*.

2.2 Динамические законы Эйлера

Напомним, что микрополярное тело обладает независимыми полями линейной и угловой скоростей \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$. Дадим определения импульса и момента импульса.

Определение 2.1. Импульсом (количеством движения) части тела \mathcal{P} называется выражение

$$\mathfrak{M}(\mathcal{P}) \triangleq \iint_{V_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{v} \, dV. \quad (2.1)$$

Определение 2.2. Моментом импульса (моментом количества движения) части тела \mathcal{P} называется выражение

$$\mathfrak{N}(\mathcal{P}) \triangleq \iint_{V_{\mathcal{P}}} \{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \rho \mathbf{v} + j \boldsymbol{\omega}\} \, dV, \quad (2.2)$$

где ρ – плотность материала, \mathbf{R}_0 – радиус-вектор некоторой точки пространства, j – скалярная мера вращательной инерции “микрочастиц” материала.

В общем случае j имеет тензорную природу и его следует заменить на \mathbf{j} – положительно определенный тензор инерции, являющийся характеристикой материала и определяющий инерцию вращения частиц тела. Выражение (2.2) соответствует случаю, когда \mathbf{j} – шаровой тензор: $\mathbf{j} = J\mathbf{I}$.

Следует заметить, что данные выше определения являются обобщением на сплошную среду соответствующих определений для количества движения и момента количества движения в теоретической механике.

Примем в качестве аксиом два динамических закона Эйлера.

Первый динамический закон Эйлера. В инерциальной системе отсчета скорость изменения импульса произвольной части тела \mathcal{P} равна главному вектору всех сил, действующих на \mathcal{P} :

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{M}(\mathcal{P}) = \iiint_{V_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{f} \, dV + \iint_{\Sigma_{\mathcal{P}}} \mathbf{t} \, d\Sigma. \quad (2.3)$$

Второй динамический закон Эйлера. В инерциальной системе отсчета скорость изменения момента количества движения произвольной части тела \mathcal{P} относительно неподвижной точки \mathbf{R}_0 равна главному моменту, действующему на \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathfrak{M}(\mathcal{P}) = & \iiint_{V_{\mathcal{P}}} \{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{m}\} dV + \\ & + \iint_{\Sigma_{\mathcal{P}}} \{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{t} + \boldsymbol{\mu}\} d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что определение импульса (2.1) и формулировка первого закона (2.3) для ориентированных сред не претерпевает никаких изменений по сравнению со случаем простых материалов. В то же время для сред с моментными напряжениями изменяется как определение момента импульса (2.2), так и формулировка второго закона (2.4) за счет появления дополнительных слагаемых, учитывающих момент инерции материальных частиц и распределенные массовые и поверхностные моменты.

При учете первого закона можно показать, что формулировка второго закона не зависит от выбора радиус-вектора \mathbf{R}_0 .

2.3 Тензоры напряжений и моментных напряжений

Векторы напряжений и моментных напряжений в данный момент времени зависят только от положения частицы \mathbf{R} , а также от нормали к поверхности \mathbf{N} . Этот факт выражается в виде так называемого постулата Коши:

Постулат Коши. Векторы напряжений и моментных напряжений в данной точке тела принимают одно и то же значение для всех частей тела, имеющих в этой точке общую касательную плоскость и лежащих по одну сторону от касательной плоскости.

В дальнейшем вектор нормали \mathbf{N} к поверхности тела будем выбирать так, чтобы он был внешним по отношению к рассматриваемой части тела.

Лемма Коши. *Принцип действия и противодействия для микрополярной среды выражается соотношениями*

$$\mathbf{t}(\mathbf{R}, \mathbf{N}) = -\mathbf{t}(\mathbf{R}, -\mathbf{N}), \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{R}, \mathbf{N}) = -\boldsymbol{\mu}(\mathbf{R}, -\mathbf{N}), \quad (2.6)$$

Формулы (2.5), (2.6) описывают взаимодействие контактирующих между собой частей тела.

Доказательство. Рассмотрим произвольную часть тела, занимающую область $V_{\mathcal{P}}$ и содержащую внутри себя точку \mathbf{R} (рис. 2.2). Разрежем $V_{\mathcal{P}}$ поверхностью Γ , проходящей через \mathbf{R} , на две части V_1, V_2 . Для доказательства (2.5), (2.6) воспользуемся динамическими законами Эйлера, применив их к $V_{\mathcal{P}}, V_1, V_2$.

Применяя первый динамический закон Эйлера (2.3) к части $V_{\mathcal{P}}$ с учетом равенства

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{M}(\mathcal{P}) = \iiint_{V_{\mathcal{P}}} \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} dV,$$

выполняющегося для достаточно гладкого поля скорости, имеем

$$\iiint_{V_{\mathcal{P}}} \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} dV = \iiint_{V_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{f} dV + \iint_{\Sigma_{\mathcal{P}}} \mathbf{t} d\Sigma. \quad (2.7)$$

Применяя (2.3) к части V_1 , получим

$$\iiint_{V_1} \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} dV = \iiint_{V_1} \rho \mathbf{f} dV + \iint_{\Sigma_1} \mathbf{t} d\Sigma + \iint_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{N}_1) d\Sigma, \quad (2.8)$$

где Σ_1 – часть поверхности Σ , принадлежащая V_1 , \mathbf{N}_1 – вектор внешней нормали к Γ .

Аналогично, для части V_2 имеем

$$\iiint_{V_2} \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} dV = \iiint_{V_2} \rho \mathbf{f} dV + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{t} d\Sigma + \iint_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{N}_2) d\Sigma. \quad (2.9)$$

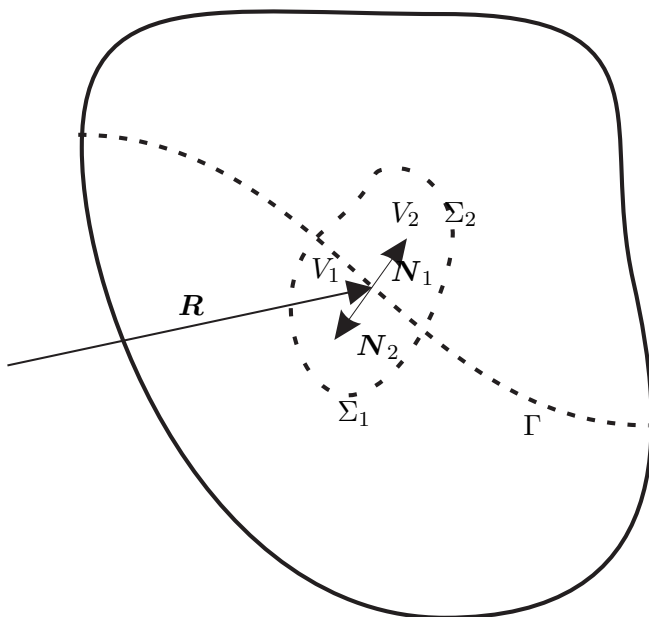


Рис. 2.2. К доказательству леммы Коши.

Вычитая из (2.7) почленно соотношения (2.8), (2.9), получим равенство

$$\mathbf{0} = \iint_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{N}_1) d\Sigma + \iint_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{N}_2) d\Sigma. \quad (2.10)$$

В силу произвольности области $V_{\mathcal{P}}$ и, следовательно, произвольности Γ , при достаточных условиях гладкости подинтегральных функций из (2.10) следует равенство

$$\mathbf{t}(\mathbf{N}_1) + \mathbf{t}(\mathbf{N}_2) = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{N}_2$, отсюда следует искомая формула (2.5), и доказательство первой части леммы закончено.

Доказательство формулы (2.6) проводится аналогично. Имеет ме-

сто формула

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{N}(\mathcal{P}) = \iiint_{V_{\mathcal{P}}} \left\{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} + j \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} \right\} dV.$$

Применяя второй динамический закон (2.4) последовательно к областям $V_{\mathcal{P}}$, V_1 , V_2 , и проводя такие же преобразования, получим

$$\mathbf{0} = \iint_{\Gamma} \{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times (\mathbf{t}(\mathbf{N}_1) + \mathbf{t}(\mathbf{N}_2)) + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{N}_1) + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{N}_2) \} d\Sigma. \quad (2.11)$$

При учете (2.5) из (2.11) следует вторая искомая формула (2.6), что и завершает доказательство. \square

Доказанный принцип действия и противодействия существенно используется при введении тензоров напряжений и моментных напряжений, даваемом *теоремой Коши*.

Теорема 2.1. *В каждой точке тела существуют тензоры второго ранга \mathbf{T} и \mathbf{M} , такие, что векторы напряжений и моментных напряжений, действующие на площадку с нормалью \mathbf{N} , выражаются формулами*

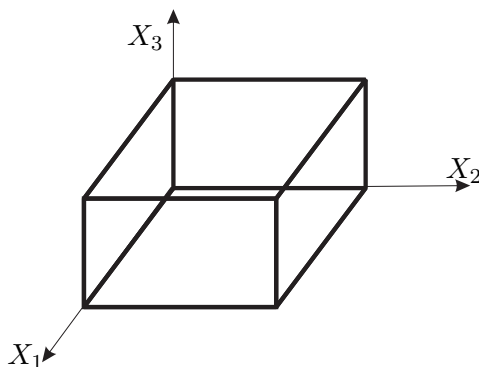
$$\mathbf{t} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}, \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{M}.$$

Доказательство. Вначале докажем существование тензора \mathbf{T} . Рассмотрим произвольный параллелепипед Π , ориентированный по осям декартовой системы координат X_1, X_2, X_3 (рис. 2.3). Вектор нормали к поверхности параллелепипеда с точностью до знака совпадает с координатными ортами: $\mathbf{N} = \pm \mathbf{i}_k$ ($k = 1, 2, 3$). Разложим вектор напряжений, действующий на поверхности параллелепипеда, по базису \mathbf{i}_k

$$\mathbf{t}(\mathbf{R}, \mathbf{i}_k) = t_{ks}(\mathbf{R}) \mathbf{i}_s. \quad (2.12)$$

Далее в доказательстве аргумент \mathbf{R} будем опускать. Здесь t_{ks} – компоненты \mathbf{t} в базисе \mathbf{i}_k . Из принципа действия и противодействия следует, что

$$\mathbf{t}(-\mathbf{i}_k) = -t_{ks} \mathbf{i}_s.$$

Рис. 2.3. Параллелепипед Π .

Обозначим компоненты нормали в этом же базисе через N_k . Для координатных площадок представление (2.12) может быть записано следующим образом

$$\mathbf{t}(\mathbf{i}_1) = N_1 t_{1s} \mathbf{i}_s, \quad \mathbf{t}(\mathbf{i}_2) = N_2 t_{2s} \mathbf{i}_s, \quad \mathbf{t}(\mathbf{i}_3) = N_3 t_{3s} \mathbf{i}_s. \quad (2.13)$$

Применим к параллелепипеду первый динамический закон. Имеем

$$\iiint_{V_\Pi} \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right) dV = \iint_{\Sigma_\Pi} \mathbf{t} d\Sigma.$$

Учитывая представление (2.13), это соотношение можно записать в виде

$$\iiint_{V_\Pi} \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right) dV = \iint_{\Sigma_\Pi} N_k t_{ks} \mathbf{i}_s d\Sigma.$$

Применяя к поверхностному интегралу теорему Гаусса–Остроградского, получим

$$\iiint_{V_\Pi} \left\{ \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right) - \frac{\partial t_{ks}}{\partial X_k} \mathbf{i}_s \right\} dV = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

Так как параллелепипед произвольный, то из интегрального соотношения (2.14) следует дифференциальное уравнение

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right) - \frac{\partial t_{ks}}{\partial X_k} \mathbf{i}_s = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Рассмотрим теперь произвольный тетраэдр T (рис. 2.4). Применяя к нему первый динамический закон, получим

$$\iiint_{V_T} \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right) dV = \iint_{\Sigma_T} N_k t_{ks} \mathbf{i}_s d\Sigma + \iint_{M_1 M_2 M_3} \mathbf{t}(\mathbf{N}) d\Sigma. \quad (2.16)$$

Здесь V_T и Σ_T – объем и часть границы тетраэдра, образованная гранями, лежащими на координатных плоскостях, $M_1 M_2 M_3$ – наклонная грань. В (2.16) использована возможность представления вектора напряжений на координатных площадках (2.13).

Преобразуя левую часть (2.16) с помощью дифференциального уравнения (2.15), получим

$$\iiint_{V_T} \frac{\partial t_{ks}}{\partial X_k} \mathbf{i}_s dV = \iint_{\Sigma_T} N_k t_{ks} \mathbf{i}_s d\Sigma + \iint_{M_1 M_2 M_3} \mathbf{t}(\mathbf{N}) d\Sigma. \quad (2.17)$$

Применяя к объемному интегралу в (2.17) формулу Гаусса–Остроградского, это уравнение можно привести к виду

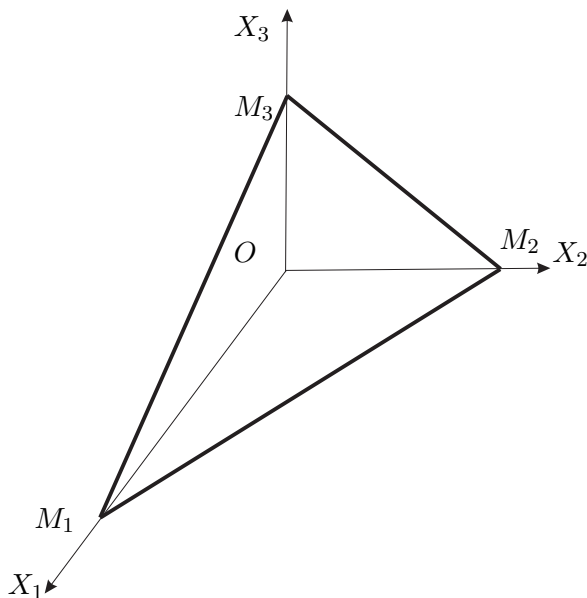
$$\iint_{M_1 M_2 M_3} [\mathbf{t}(\mathbf{N}) - N_k t_{ks} \mathbf{i}_s] d\Sigma = \mathbf{0}.$$

В силу произвольности тетраэдра и, в частности, грани $M_1 M_2 M_3$, отсюда следует, что выполняется тождество

$$\mathbf{t}(\mathbf{N}) - N_k t_{ks} \mathbf{i}_s = \mathbf{0}$$

для любого вектора нормали \mathbf{N} , а не только совпадающего с координатными ортами.

Таким образом, показано, что зависимость вектора напряжений \mathbf{t} от вектора нормали \mathbf{N} линейна. По теореме о представлении линейной

Рис. 2.4. Тетраэдр T .

вектор-функции векторного аргумента [48] следует, что существует такой тензор \mathbf{T} , что

$$t(\mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}. \quad (2.18)$$

Итак, первая часть теоремы Коши доказана.

Вторая часть теоремы о существовании тензора \mathbf{M} доказывается путем аналогичных рассуждений с применением второго динамического закона Эйлера сначала к произвольному параллелепипеду, а потом – к произвольному тетраэдру. Представим вектор моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ на координатных площадках формулой

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{i}_k) = m_{ks} \mathbf{i}_s,$$

которую можно также записать с использованием компонент вектора

нормали на координатных площадках

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{i}_1) = N_1 m_{1s} \mathbf{i}_s, \quad \boldsymbol{\mu}(\mathbf{i}_2) = N_2 m_{2s} \mathbf{i}_s, \quad \boldsymbol{\mu}(\mathbf{i}_3) = N_3 m_{3s} \mathbf{i}_s. \quad (2.19)$$

При этом учтено, что $\boldsymbol{\mu}(-\mathbf{i}_k) = -m_{ks} \mathbf{i}_s$.

Применив к Π второй закон Эйлера, получим

$$\begin{aligned} \iiint_{V_\Pi} \left\{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right) + j \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \rho \mathbf{m} \right\} dV = \\ = \iint_{\Sigma_\Pi} \{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{t} + \boldsymbol{\mu} \} d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Используя (2.13), (2.19), поверхностный интеграл в (2.20) можно записать следующим образом

$$\iint_{\Sigma_\Pi} \{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times N_k t_{ks} \mathbf{i}_s + N_k m_{ks} \mathbf{i}_s \} d\Sigma.$$

Применение теоремы Гаусса-Остроградского позволяет преобразовать интеграл по Σ_Π к интегралу по объему V_Π

$$\iiint_{V_\Pi} \frac{\partial}{\partial X_k} \{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times t_{ks} \mathbf{i}_s + m_{ks} \mathbf{i}_s \} dV.$$

Таким образом, с учетом тождества $\partial \mathbf{R} / \partial X_k = \mathbf{i}_k$, соотношение (2.20) приводится к виду

$$\begin{aligned} \iiint_{V_\Pi} \left\{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \left[\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right) - \frac{\partial t_{ks}}{\partial X_k} \mathbf{i}_s \right] + \right. \\ \left. + j \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \rho \mathbf{m} - t_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s - \frac{\partial m_{ks}}{\partial X_k} \mathbf{i}_s \right\} dV = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Как уже было показано ранее с помощью первого динамического закона, здесь выражение в квадратных скобках обращается в нуль. Таким образом, окончательно имеем уравнение

$$\iiint_{V_{\Pi}} \left\{ j \frac{d\omega}{dt} - \rho \mathbf{m} - t_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s - \frac{\partial m_{ks}}{\partial X_k} \mathbf{i}_s \right\} dV = \mathbf{0},$$

откуда вытекает дифференциальное уравнение

$$j \frac{d\omega}{dt} - \rho \mathbf{m} = \frac{\partial m_{ks}}{\partial X_k} \mathbf{i}_s + t_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s. \quad (2.21)$$

Последнее слагаемое в (2.21) представляет собой уже встречавшийся ранее векторный инвариант тензора второго ранга \mathbf{T} : $\mathbf{T}_{\times} \triangleq t_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s$.

Далее покажем, что представление (2.19) выполняется не только для координатных площадок. Для этого применим второй закон Эйлера к произвольному тетраэдру и получим

$$\iiint_{V_T} \left\{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right) + j \frac{d\omega}{dt} - \rho \mathbf{m} \right\} dV = \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{\Sigma_T} \{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{t} + N_k m_{ks} \mathbf{i}_s \} d\Sigma + \\ &+ \iint_{M_1 M_2 M_3} \{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{t} + \boldsymbol{\mu}(N) \} d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Приведем (2.22) к уравнению, содержащему только поверхностный интеграл по грани $M_1 M_2 M_3$. Для этого в (2.22) преобразуем слагаемые, содержащие множитель $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$. С учетом (2.18) и тождества

$$\text{Div} [(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{T}] = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \text{Div } \mathbf{T} + \mathbf{T}_{\times}$$

можно показать, что выполняется равенство

$$\begin{aligned} &\iiint_{V_T} \left\{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right) \right\} dV - \iint_{\partial V_T} \{ (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{t} \} d\Sigma = \\ &= \iiint_{V_T} \mathbf{T}_{\times} dV, \end{aligned}$$

где $\partial V_T = \Sigma_T \cup M_1 M_2 M_3$.

Таким образом, объемный интеграл в (2.22) принимает вид

$$\iiint_{V_T} \left(j \frac{d\omega}{dt} - \rho \mathbf{m} - \mathbf{T} \times \right) dV,$$

и с помощью (2.21) уравнение (2.22) приводится к требуемому виду

$$\iint_{M_1 M_2 M_3} \{ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{N}) - N_k m_{ks} \mathbf{i}_s(\mathbf{N}) \} d\Sigma = \mathbf{0}.$$

В силу произвольности тетраэдра отсюда следует линейность функции $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{N})$ для любого вектора \mathbf{N} и, соответственно, представление

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{M}. \quad (2.24)$$

Формула (2.24) завершает доказательство теоремы Коши для среды Коссера.

□

Определение 2.3. Тензор \mathbf{T} называется тензором напряжений Коши, а тензор \mathbf{M} – тензором моментных напряжений Коши.

Таким образом, из доказательства теоремы видно, что матрицы t_{ks} , m_{ks} представляют собой компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений в декартовом базисе \mathbf{i}_k :

$$\mathbf{T} = t_{ks} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s, \quad \mathbf{M} = m_{ks} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s.$$

Следует отметить такое важное свойство тензоров напряжений и моментных напряжений как их несимметричность, в общем случае: $\mathbf{T}^T \neq \mathbf{T}$, $\mathbf{M}^T \neq \mathbf{M}$.

Это свойство кардинально отличает полярные среды от простых материалов, где тензор напряжений всегда симметричен.

Несимметричность матриц t_{ks} и m_{ks} заставляет более внимательно следить за их индексами. Рассмотрим в теле произвольный куб, ориентированный по осям декартовой системы координат. Действующие на его поверхности касательные и нормальные напряжения показаны на рис. 2.5. Первый индекс у t_{ks} указывает на площадку с

нормалью \mathbf{i}_k , а второй – на направление действия напряжения (совпадающего с направлением \mathbf{i}_s). Например, t_{31} – это напряжение, действующее на сечении тела, перпендикулярном оси X_3 , в направлении оси X_1 .

Заметим, что это соглашение для индексов имеет место не только для декартового базиса, но и для любого ортонормированного.

При рассмотрении сил, действующих на тело, и для постановки статических краевых условий важное значение имеет следующее правило выбора знаков для компонент тензора напряжений.

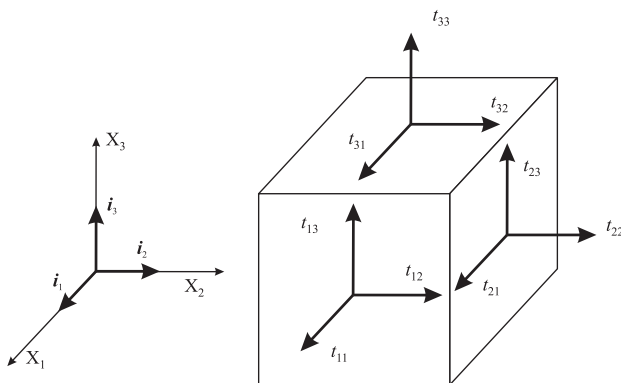


Рис. 2.5. Положительные напряжения.

Правило знаков для напряжений. Нормальные напряжения положительны, если они растягивающие, и отрицательны, если сжимающие. Касательные напряжения положительны, если они действуют на площадке, нормаль к которой совпадает с координатным ортом, и направлены в ту же сторону, что и остальные координатные орты. Если напряжение действует на площадке, нормаль к которой имеет противоположное орту направление, то оно положительно, если оно направлено против другого координатного орта.

Согласно этому правилу, изображенные на рис. 2.5 напряжения положительны. Случай отрицательных напряжений, действующих на видимые части кубика, приведен на рис. 2.6

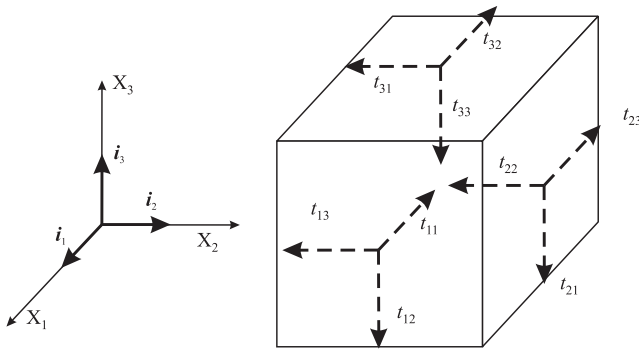


Рис. 2.6. Отрицательные напряжения.

Все сказанное выше для напряжений имеет место и для моментных напряжений. Так, первый индекс у m_{ks} соответствует площадке с нормалью $\pm i_k$, а второй определяет направление действия – вектор i_s . Традиционным является способ изображения моментов и моментных напряжений в виде круговых стрелок. Например, действующие на площадке с нормалью i_3 моментные напряжения показаны на рис. 2.7. Видно, что нормальные моментные напряжения образуют крутящий момент, а касательные – изгибающие моменты.

Вместе с тем, для обозначения векторов, в том числе и векторов моментных напряжений, более удобным оказывается обычный способ представления в виде прямых стрелок. Чтобы отличать векторы, описывающие действие моментных напряжений, от векторов, соответствующих силам и напряжениям, будем обозначать их двойными стрелками. Так, на рис. 2.8 эти обозначения использованы для изображения тех же моментных напряжений, что и на рис. 2.7. Момент, соответствующий двойной стрелке, действует в направлении движения часовой стрелки, если смотреть в направлении стрелки.

Правило знаков для моментных напряжений с точностью до обозначений полностью аналогично предыдущему правилу для обычных напряжений. На рис. 2.9 положительные моментные напряжения показаны сплошными двойными стрелками, отрицательные – пунктирными.

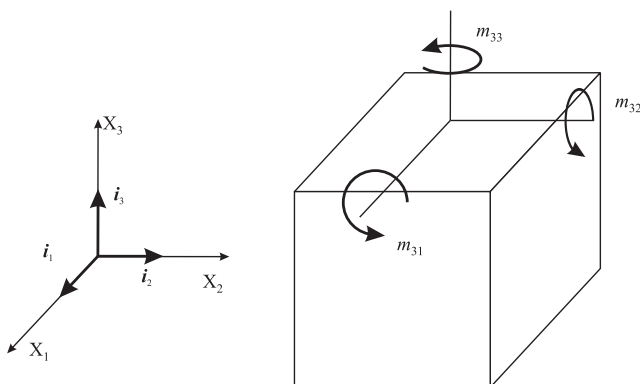


Рис. 2.7. Моментные напряжения.

Сформулируем это правило в терминах крутящих и изгибающих моментов.

Правило знаков для моментных напряжений. *Распределенные на площадке крутящие моменты (нормальные моментные напряжения) положительны, если они действуют по часовой стрелке, если смотреть в направлении внешней нормали к площадке.*

Распределенные на площадке изгибающие моменты (касательные моментные напряжения) положительны, если они заданы на площадке, нормаль к которой совпадает с координатным ортом, и действуют против часовой стрелки, если смотреть в направлении, противоположном другому координатному орту. Когда изгибающие моменты действуют на площадке нормаль к которой имеет противоположное орту направление, то они положительны, если они направлены по часовой стрелке, если смотреть в направлении, противоположном другому координатному орту.

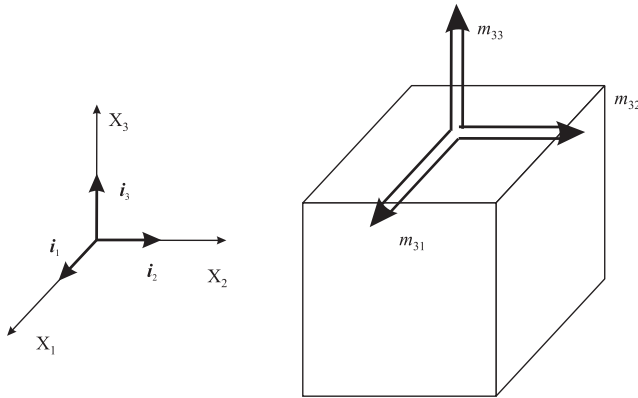


Рис. 2.8. Другое обозначение для моментов.

2.4 О главных напряжениях и главных площадках для микрополярной среды

В общем случае представление тензора напряжений Коши \mathbf{T} в каком-либо произвольном, не обязательно ортогональном базисе имеет вид

$$\mathbf{T} = t_{sk} \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k,$$

где матрица t_{sk} содержит девять ненулевых элементов.

Рассмотрим задачу определения такого базиса, в котором представление тензора \mathbf{T} имеет наиболее простой вид.

Хорошо известно, что в случае простых материалов, когда тензор напряжений симметричен, такое представление является диагональным

$$\mathbf{T} = \sigma_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad (2.25)$$

где σ_k – собственные числа матрицы t_{sk} , называемые *главными напряжениями*, а \mathbf{e}_k – собственные векторы, образующие нормали к *главным площадкам*, на которых отсутствуют касательные напряжения. С учетом симметрии \mathbf{T} для простых материалов *спектральное разложение* (2.25) существует всегда, причем векторы \mathbf{e}_k ортогональны. С физической точки зрения спектральное разложение (2.25) означает,

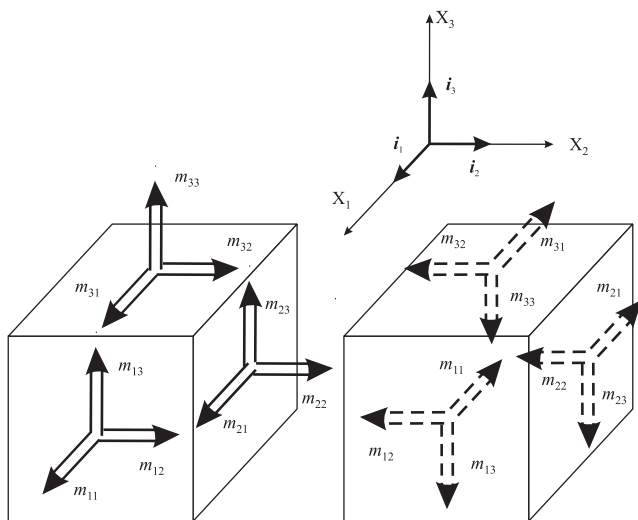


Рис. 2.9. Направления положительных и отрицательных моментных напряжений.

что в каждой точке тела можно выбрать три взаимно ортогональных площадки, такие, что на них действуют только нормальные (растягивающие или сжимающие) напряжения. Это означает возможность выбора в данной точке тела такого элементарного кубика, что на его грани действуют только нормальные напряжения.

К сожалению, в механике микрополярных сред в общем случае тензор \mathbf{T} является несимметричным и спектральное разложение может отсутствовать. Своего рода аналогом (2.25) может служить сингулярное разложение [89], которое существует всегда и для несимметричных тензоров.

Сингулярным разложением тензора второго ранга \mathbf{T} называется представление следующего вида

$$\mathbf{T} = s_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}'_1 + s_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}'_2 + s_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}'_3, \quad (2.26)$$

где s_k ($k = 1, 2, 3$) – неотрицательные числа, \mathbf{e}_k , \mathbf{e}'_j – ортонормированные базисы. Сингулярное разложение непосредственно вытекает

из полярного разложения [48] тензора $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}$, где $\mathbf{S} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T)^{1/2}$ – неотрицательно определенный симметричный тензор, \mathbf{Q} – ортогональный тензор. В самом деле, обозначим через s_k собственные значения тензора \mathbf{S} , а через \mathbf{e}_k – ортонормированный базис собственных векторов этого тензора. Тогда базис, определяемый формулой $\mathbf{e}'_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{Q}$ также будет ортонормированным. Подставив в полярное разложение тензора \mathbf{T} вместо \mathbf{S} его спектральное разложение

$$\mathbf{S} = s_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + s_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + s_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,$$

получим (2.26).

Недостатком сингулярного разложения (2.26) является наличие двух ортогональных базисов.

Зададимся вопросом о наиболее простом представлении несимметричного тензора напряжений \mathbf{T} , ограничившись одним, вообще говоря, не ортогональным базисом.

Воспользуемся результатами о каноническом представлении несимметричной вещественной матрицы [89] на основе вещественной нормальной жордановой формы. Можно показать, что несимметричная вещественная матрица A размерности 3×3 подобна (с вещественной матрицей подобия) одной из следующих матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

в зависимости от собственных значений матрицы A и их кратности. Здесь λ_k – вещественные собственные числа A ($k = 1, 2, 3$), ε – произвольное действительное число, не равное нулю, которое, в частно-

сти, можно взять сколь угодно малым, α и β – вещественная и мнимая части комплексного собственного числа матрицы A (если таковое имеется). Отметим, что обычно используется $\varepsilon = 1$ [89]. Это соответствует определенному выбору матрицы подобия. Случай (2.27) соответствует наличию трех различных вещественных собственных чисел A ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$), случай (2.28) соответствует наличию двухкратного вещественного собственного значения ($\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$), в случае трехкратного вещественного собственного числа ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) возможны представления (2.29). Последний, четвертый, случай (2.30) выполняется, если матрица A обладает одним вещественным и двумя комплексными собственными числами ($\lambda_1 \neq \lambda_2 = \bar{\lambda}_3 \equiv \alpha + i\beta$).

Таким образом, несимметричный тензор напряжений может быть представлен в виде

$$\mathbf{T} = t_{mn}^{\circ} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n,$$

где t_{mn}° – одна из матриц, определенных выше формулами (2.27)–(2.30), а векторы \mathbf{e}_m – вообще говоря, не ортогональны друг другу.

2.5 Уравнения движения

Из динамических законов Эйлера при помощи преобразований, уже использованных при доказательстве теоремы Коши, вытекают уравнения движения микрополярной среды в локальной форме

$$\rho \frac{dv}{dt} = \text{Div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}, \quad (2.31)$$

$$j \frac{d\omega}{dt} = \text{Div } \mathbf{M} + \mathbf{T}_{\times} + \rho \mathbf{m}. \quad (2.32)$$

Следует заметить, что при выводе уравнения (2.32) было использовано (2.31).

Если среда не обладает моментными свойствами, т.е. вращательным взаимодействием частиц тела пренебрегают, то в уравнении (2.32) следует положить равными нулю вращательную инерцию j , моментные напряжения \mathbf{M} и объемные моменты \mathbf{m} . Тогда следствием закона сохранения момента количества движения является уравнение

$$\mathbf{T}_{\times} = 0, \quad (2.33)$$

которое эквивалентно требованию симметричности тензора напряжений: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$. Таким образом, при отсутствии моментных напряжений и распределенных моментов уравнение баланса момента импульса эквивалентно симметричности тензора напряжений Коши, присущей классической механике сплошной среды. Естественно, что в этом случае учесть действие моментных нагрузок, например, действие поверхностных или массовых моментов, невозможно.

Для простых материалов (при отсутствии моментных напряжений) уравнение (2.33) выполняется автоматически, как следствие уравнений состояния.

Глава 3

Уравнения состояния микрополярной жидкости

Уравнения движения (2.31), (2.32) являются общими уравнениями баланса, выражающими баланс импульса и момента импульса для произвольной части тела. Эти 6 скалярных уравнений содержат большое количество неизвестных величин – 18 компонент тензора напряжений \mathbf{T} и тензора моментных напряжений \mathbf{M} , компоненты скоростей. Зависимость \mathbf{T} и \mathbf{M} от деформации среды устанавливается при помощи *уравнений состояния (определяющих соотношений)*. Естественно, что уравнения состояния зависят от конкретного материала и устанавливаются на основе экспериментальных данных. Вместе с тем при построении уравнений состояния на основе экспериментов должны выполняться аксиомы определяющих соотношений, т.е. требования, налагаемые на форму любых определяющих соотношений [82, 148, 153, 152].

Отметим, что в рамках механической теории микрополярной среды, рассматриваемой в этом параграфе, помимо определяющих соотношений для \mathbf{T} и \mathbf{M} могут быть также рассмотрены *кинематические уравнения состояния*, определяющие плотности импульса и момента импульса более общего вида, чем приведенные в определениях (2.1), (2.2). В частности, в случае общей нелинейной теории оболочек [1, 34, 42, 92, 102, 107, 130, 131, 141], уравнения движения которых совпадают с уравнениями движения двумерной микрополярной среды, используются более сложные зависимости для плотности момента импульса.

3.1 Аксиомы определяющих соотношений

В данном параграфе сформулируем аксиомы определяющих соотношений для микрополярной среды, ограничившись рамками чисто механической теории (без учета влияния температуры и введения внутренней энергии, энтропии и т.п. величин.) Аксиомы определяющих соотношений представляют собой требования, налагаемые на форму любых определяющих соотношений [82, 148, 153].

Принцип детерминизма. *Тензор напряжений и тензор моментных напряжений в данной точке тела определяются предысторией движения тела.*

Принцип локальности. *Тензор напряжений и тензор моментных напряжений в данной точке тела полностью определяются движением не всего тела, а лишь движением сколь угодно малой окрестности данной точки.*

Отметим, что в отличие от принципа детерминизма (аксиомы причинности), выполнение которого не вызывает сомнений (уравнение состояния не может “предсказывать” будущее), принцип локальности зависит от наших представлений об уравнениях состояния и, вообще говоря, может не выполняться для некоторых материалов. Модели нелокальных сред, в том числе и микрополярной, рассмотрены в [105, 117].

Принцип материальной индифферентности. *Определяющие соотношения должны быть такими, чтобы задаваемые ими тензор напряжений и тензор моментных напряжений были индифферентными величинами.*

Напомним, что тензор \mathbf{T} называется индифферентным, если для любых двух эквивалентных движений выполняется равенство

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q},$$

где индексом * отмечены значения величин в эквивалентном движении. Два движения называются *эквивалентными*, если они связаны соотношениями

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{a}(t) + (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \cdot \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{H}^* = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}(t)$$

где $\mathbf{Q}(t)$ – произвольный ортогональный тензор, $\mathbf{a}(t)$ – произвольный вектор, \mathbf{R}_0 – постоянный вектор, задающий фиксированную точку

пространства. Эквивалентные движения можно трактовать как одно и то же движение тела, но рассматриваемое с точки зрения разных систем отсчета.

Этот принцип (*аксиома объективности*) выражает интуитивно понятный принцип независимости материальных свойств, фигурирующих в определяющих соотношениях для тензоров напряжений и моментных напряжений от изменения системы отсчета наблюдателя. Вместе с тем строгое определение этого принципа, сформулированного достаточно давно [152], вызывают дискуссии и по настоящее время (см., например, [135]).

3.2 Уравнения состояния вязкоупругой микрополярной жидкости

Учитывая принцип локального действия [82, 152], определяющие соотношения континуума Коссера с памятью в случае конечных деформаций следует принять в виде

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{A}_1 [\mathbf{C}^t(s), \mathbf{H}^t(s), \text{grad } \mathbf{H}^t(s)], \quad (3.1)$$

$$\mathbf{M}(t) = \mathcal{A}_2 [\mathbf{C}^t(s), \mathbf{H}^t(s), \text{grad } \mathbf{H}^t(s)],$$

$$\mathbf{C}^t(s) = \mathbf{C}(t - s), \quad \mathbf{H}^t(s) = \mathbf{H}(t - s), \quad \mathbf{C}(t) = \text{grad } \mathbf{R}(t), \quad (s \geq 0).$$

В (3.1) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — операторы отклика, зависящие от предыстории градиента деформации $\mathbf{C}^t(s)$, тензора микроповорота $\mathbf{H}^t(s)$ и его градиента, grad — оператор градиента в начальном состоянии, т.е. в отсчетной конфигурации.

Требование инвариантности определяющих соотношений (3.1) относительно трансляций системы отсчета наблюдателя выполняется автоматически, а требование инвариантности относительно вращений будет выполнено в том и только в том случае, если операторы $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ удовлетворяют условию

$$\mathcal{A}_\alpha [\mathbf{C}^t(s) \cdot \mathbf{Q}^t(s), \mathbf{H}^t(s) \cdot \mathbf{Q}^t(s), \text{grad } \mathbf{H}^t(s) \cdot \mathbf{Q}^t(s)] = \quad (3.2)$$

$$= \mathbf{Q}^T(t) \cdot \mathcal{A}_\alpha [\mathbf{C}^t(s), \mathbf{H}^t(s), \text{grad } \mathbf{H}^t(s)] \cdot \mathbf{Q}(t) \quad (\alpha = 1, 2)$$

для любого собственно ортогонального тензора $\mathbf{Q}^t(s)$. Положив в (3.2) $\mathbf{Q}^t(s) = \mathbf{H}^{tT}(s)$, получим

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{H}^T(t) \cdot \mathcal{B}_1 [\mathbf{Y}^t(s), \mathbf{L}^t(s)] \cdot \mathbf{H}(t), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{H}^T(t) \cdot \mathcal{B}_2 [\mathbf{Y}^t(s), \mathbf{L}^t(s)] \cdot \mathbf{H}(t).$$

Здесь $\mathbf{Y}^t(s)$ – предыстория первой меры деформации, $\mathbf{L}^t(s)$ – предыстория тензора изгибной деформации. Указанные тензоры определяются формулами (1.28), (1.29).

Легко видеть, что представления (3.3) не только необходимы, но и достаточны для материальной независимости от системы отсчета.

Операторы \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 в определяющих соотношениях (3.3), вообще говоря, зависят от некоторых постоянных (т.е. не меняющихся в процессе деформации) тензоров, определяемых выбором отсчетной конфигурации материального тела. К таким тензорам, в частности, относится тензор кривизны начального состояния \mathbf{b} . Поэтому, учитывая (1.29), определяющие соотношения (3.3) можно представить в следующей форме

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{H}^T(t) \cdot \mathcal{D}_1 [\mathbf{Y}^t(s), \mathbf{K}^t(s)] \cdot \mathbf{H}(t), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{H}^T(t) \cdot \mathcal{D}_2 [\mathbf{Y}^t(s), \mathbf{K}^t(s)] \cdot \mathbf{H}(t).$$

В случае упругого материала тензоры \mathbf{T} и \mathbf{M} не зависят от прошлой предыстории деформации, и определяющие соотношения (3.4) принимают вид

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{H}^T(t) \cdot f_1 [\mathbf{Y}(t), \mathbf{K}(t)] \cdot \mathbf{H}(t), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{H}^T(t) \cdot f_2 [\mathbf{Y}(t), \mathbf{K}(t)] \cdot \mathbf{H}(t).$$

где f_1, f_2 – тензорные функции.

С использованием законов термодинамики уравнения состояния (3.5) упругого континуума Коссера могут быть представлены при помощи удельной потенциальной энергии деформации $W_0(\mathbf{Y}, \mathbf{K})$, совпадающей с удельной свободной энергией в изотермическом процессе и удельной внутренней энергией в адиабатическом процессе, следующим образом [155]

$$\mathbf{T} = \rho \mathbf{C}^T \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H}, \quad W = \rho_0^{-1} W_0, \quad \mathbf{M} = \rho \mathbf{C}^T \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{K}} \cdot \mathbf{H}. \quad (3.6)$$

Здесь W – массовая плотность потенциальной энергии деформации, ρ_0 – плотность материала в отсчетной конфигурации.

В дальнейшем будем рассматривать класс *изотропных материалов*, для которых тензорные операторы отклика $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ в (3.4) являются изотропными, т.е. удовлетворяют соотношениям ($\eta = \det \mathbf{Q}$)

$$\mathcal{D}_1 [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}^t(s) \cdot \mathbf{Q}^T, \eta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}^t(s) \cdot \mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q} \cdot \mathcal{D}_1 [\mathbf{Y}^t(s), \mathbf{K}^t(s)] \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (3.7)$$

$$\eta \mathcal{D}_2 [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}^t(s) \cdot \mathbf{Q}^T, \eta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}^t(s) \mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q} \cdot \mathcal{D}_2 [\mathbf{Y}^t(s), \mathbf{K}^t(s)] \cdot \mathbf{Q}^T$$

для любого ортогонального тензора \mathbf{Q} . Согласно (1.14), (3.4), (3.7) тензоры $\mathbf{T}(t)$ и $\mathbf{M}(t)$ не меняются при заменах

$$\mathbf{C}^t(s) \rightarrow \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}^t(s), \quad \mathbf{H}^t(s) \rightarrow \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H}^t(s), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-T}. \quad (3.8)$$

Это означает, что изотропные материалы нечувствительны к любым изменениям отсчетной конфигурации, описываемой ортогональными преобразованиями.

Определение изотропного материала, а также различных типов анизотропных материалов, может быть дано строго при помощи понятия локальной группы симметрии материала. Это понятие базируется на инвариантности формы уравнений состояния по отношению к некоторым изменениям отсчетной конфигурации, или, другими словами, невозможности определения некоторых изменений отсчетной конфигурации путем экспериментов (своего рода “нечувствительности” по отношению к таким преобразованиям отсчетного состояния). Для простых материалов определение локальной группы симметрии

вместе с классификацией уравнений состояния дано в [61, 82, 148, 152, 153]. Для полярной трехмерной среды определение локальной группы симметрии содержится в [119], а для микрополярных оболочек – в [34, 107], где также даны представления определяющих соотношений упругих оболочек для некоторых типов анизотропии. Вместе с тем следует отметить, что определение локальной группы материальной симметрии, данное в [119], не учитывает тот факт, что тензоры моментных напряжений, мера изгибных деформаций, тензоры кривизны микроструктуры являются псевдотензорами, которые отличаются от истинных (полярных) тензоров тем, что меняют знак при инверсии пространства [48]. Это различие было учтено в [30], а в случае оболочек Коссера – в [110]. Данное здесь определение изотропного материала (3.7), аналогичное [30, 110], дано с учетом того, что \mathbf{M} и \mathbf{K} – псевдотензоры.

С использованием относительных мер деформации и их предыстории, определенных формулами (1.26)–(1.29), можно сформулировать теорему.

Теорема 3.1. *Определяющие соотношения любой изотропной среды Коссера с памятью могут быть представлены в форме*

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{F}_1 [\mathbf{y}(t), \mathbf{Y}_t^t(s), \mathbf{K}_t^t(s)], \quad \mathbf{M}(t) = \mathcal{F}_2 [\mathbf{y}(t), \mathbf{Y}_t^t(s), \mathbf{K}_t^t(s)], \quad (3.9)$$

где $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ – изотропные операторы.

Доказательство. На основании (1.29) определяющее соотношение (3.4) для тензора напряжений можно представить в виде

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{H}^T(t) \cdot \mathcal{D}_1 [\mathbf{Y}(t), \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{Y}_t^t(s) \cdot \mathbf{H}^T(t), \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{K}_t^t(s) \cdot \mathbf{H}^T(t)] \cdot \mathbf{H}(t). \quad (3.10)$$

Положим в (3.8) $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^T(t)$. Тогда тензор $\mathbf{Y}(t)$ согласно (1.14), (1.19) заменится тензором $\mathbf{y}^{-1}(t)$, а тензор $\mathbf{H}(t)$ заменится единичным тензором \mathbf{I} , что на основании (3.10) дает

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{D}_1 [\mathbf{y}^{-1}(t), \mathbf{Y}_t^t(s), \mathbf{K}_t^t(s)].$$

Аналогично преобразуется определяющее соотношение для тензора моментных напряжений $\mathbf{M}(t)$, что приводит к выражениям (3.9). Изотропность операторов $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ вытекает из свойства изотропности операторов $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$. \square

Определение 3.1. Вязкоупругой микрополярной жидкостью будем называть такую среду Коссера с памятью, которая нечувствительна к любым изменениям отсчетной конфигурации, сохраняющим плотность среды.

Очевидно, что жидкость относится к классу изотропных материалов. Поскольку тензоры $\mathbf{Y}_t^t(s)$ и $\mathbf{K}_t^t(s)$ в (3.9) не зависят от выбора отсчетной конфигурации, изотропная среда будет жидкостью тогда и только тогда, когда зависимость от тензора $\mathbf{u}(t)$ в определяющих соотношениях сводится к зависимости от $\det \mathbf{u}(t)$ или, что эквивалентно, к зависимости от плотности $\rho(t)$. Таким образом, справедлива

Теорема 3.2. *Общее представление определяющих уравнений вязкоупругой микрополярной жидкости имеет вид*

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{H}_1 [\rho(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{Y}_t^t(s), \mathbf{L}_t^t(s)], \quad (3.11)$$

$$\mathbf{M}(t) = \mathcal{H}_2 [\rho(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{Y}_t^t(s), \mathbf{L}_t^t(s)],$$

где $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — изотропные операторы.

В (3.11) учтено соотношение (1.29).

Теорема 3.2 является обобщением теоремы Нолла [4, 82] о простых жидкостях на случай микрополярных жидкостей.

Для покоящейся жидкости имеем $\mathbf{L}_t^t(s) = \mathbf{0}$, $\mathbf{Y}_t^t(s) = \mathbf{I}$ и определяющие соотношения (3.11) принимают вид уравнений состояния *упругой микрополярной жидкости*

$$\mathbf{T} = \varphi(\rho, \mathbf{B}), \quad \mathbf{M} = \psi(\rho, \mathbf{B}), \quad (3.12)$$

где φ, ψ — изотропные тензорные функции.

Модель упругой микрополярной жидкости можно получить иначе, а именно как частный случай упругой изотропной среды Коссера, для которой функции f_1, f_2 в (3.5) изотропны. Полагая в условии изотропности $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^T$, из (3.5) придем к такому представлению уравнений состояния изотропного упругого материала

$$\mathbf{T} = f_1(\mathbf{y}^{-1}, \mathbf{y}^{-1} \cdot \mathbf{B}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{B}), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{M} = f_2(\mathbf{y}^{-1}, \mathbf{y}^{-1} \cdot \mathbf{B}) = \psi(\mathbf{y}, \mathbf{B}).$$

В соотношениях (3.13) только первый тензорный аргумент изотропных функций φ и ψ зависит от выбора отсчетной конфигурации. Свойство нечувствительности материала к любым изменениям отсчетной конфигурации при условии сохранения объема выполняются в том и только в том случае, если зависимость от \mathbf{y} в (3.13) сводится к зависимости от $\det \mathbf{y}$. Это приводит к определяющим соотношениям (3.12).

Соотношения (3.11) содержат в себе модель микрополярной жидкости дифференциального типа. Учитывая формальные разложения (1.34) предыстории меры деформации $\mathbf{Y}_t^t(s)$ и тензора изгибной деформации $\mathbf{L}_t^t(s)$, это определение формулируется следующим образом.

Определение 3.2. Назовем жидкостью дифференциального типа сложности (m, n) микрополярную жидкость с уравнениями состояния следующего вида

$$\mathbf{T} = f_1(\rho, \mathbf{B}, \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_m, \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_n), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{M} = f_2(\rho, \mathbf{B}, \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_m, \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_n),$$

где f_1, f_2 — изотропные функции.

Частным случаем (3.14) является модель вязкой микрополярной жидкости [8, 115, 120], уравнения состояния которой имеют вид

$$\mathbf{T} = f_1(\rho, \varepsilon), \quad \mathbf{M} = f_2(\rho, \mathfrak{a}).$$

3.3 Краевые условия в гидромеханике микрополярных жидкостей

Силовые и моментные краевые условия состоят в задании на части границы области Σ_1 , занятой жидкостью, векторов сил и моментов

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}|_{\Sigma_1} = \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{M}|_{\Sigma_1} = \boldsymbol{\mu}, \quad (3.15)$$

где $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\mu}$ — известные функции.

Кинематические краевые условия для вязкой микрополярной жидкости состоят в задании на поверхности Σ_2 полей линейной скорости \mathbf{v} и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{v}|_{\Sigma_2} = \mathbf{v}_0, \quad \boldsymbol{\omega}|_{\Sigma_2} = \boldsymbol{\omega}_0. \quad (3.16)$$

Случай $\mathbf{v}_0 = 0$, $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$ соответствует условиям прилипания частиц жидкости. Если же $\mathbf{v}_0 \neq 0$, например, когда граничная поверхность тоже движется, то возможна постановка граничных условий, связывающих угловую и линейную скорости. Такие краевые условия обсуждались в [62] и могут быть представлены соотношением

$$\mathbf{v}|_{\Sigma_2} = \mathbf{v}_0, \quad \boldsymbol{\omega}|_{\Sigma_2} = \alpha \text{Rot } \mathbf{v}|_{\Sigma_2}, \quad (3.17)$$

где α – некоторая постоянная. Последнее соотношение означает, что скорость микровращения частиц жидкости вблизи граничной поверхности пропорциональна скорости макровращения.

Для вязкоупругой жидкости задание скорости микровращения недостаточно, здесь кинематическими условиями служат граничные условия для триэдра D_k

$$D_k|_{\Sigma_2} = D_k^0. \quad (3.18)$$

3.4 Уравнения упругой микрополярной жидкости

Для упругой жидкости в изотермическом процессе массовая плотность свободной энергии W – изотропная функция тензора кривизны \mathbf{B} и плотности ρ . Учитывая вытекающее из (1.6), (1.32) соотношение

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega},$$

вычислим скорость изменения функции W в фиксированной частице среды

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \text{tr} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \cdot \frac{d\mathbf{B}^T}{dt} \right) + \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} = \\ &= \text{tr} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T \right) - \text{tr} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}^T + \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \mathbf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T \right] + \\ &\quad + \text{tr} \left[\left(\mathbf{B}^T \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}^T \right) \times \boldsymbol{\omega} \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

С другой стороны, на основании (3.6), (1.32) имеем

$$\frac{dW}{dt} = \rho^{-1} \text{tr} (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{a}}^T). \quad (3.20)$$

Сравнивая (3.19), (3.20) и учитывая, что тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\mathfrak{a}}$ при движении среды могут принимать произвольные значения, получим

$$\mathbf{M} = \rho \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T, \quad p = \rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho}. \quad (3.21)$$

Из произвольности вектора $\boldsymbol{\omega}$ и (3.19)–(3.21) вытекает соотношение

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_{\times} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{M})_{\times}. \quad (3.22)$$

Можно показать, что уравнения состояния (3.21) упругой жидкости справедливы для любых термодинамических процессов, при этом свободную энергию W следует считать зависящей также и от температуры.

Модель упругой микрополярной жидкости близка модели нематического жидкого кристалла [9, 41, 54, 59, 94], но отличается от нее тем, что ориентация частицы микрополярной жидкости задается ортонормированной тройкой векторов, в то время как в континуальной теории нематиков ориентация характеризуется одним единичным вектором – директором \mathbf{n} . Свободная энергия W в теории нематиков является [41, 59, 90, 94] изотропной функцией двух аргументов: векторного \mathbf{n} и тензорного $\text{Grad } \mathbf{n}$, в то время как в микрополярной жидкости W зависит от одного тензорного аргумента \mathbf{B} . Разумеется, в обоих случаях присутствуют также скалярные аргументы: плотность и температура. Более близкими к модели упругой микрополярной жидкости оказываются двухосные нематики [3, 129], в которых рассматриваются два ортогональных друг другу директора, а также модели некоторых смектиков [145, 146].

Заметим, что свойство изотропности функции $W(\rho, \mathbf{B})$ не означает, что упругая микрополярная жидкость является изотропной жидкостью. Последний термин эквивалентен понятию простой упругой жидкости и соответствует случаю, когда $W = W(\rho)$. Точно также свойство изотропности функции свободной энергии нематика

$$W(\rho, \mathbf{n}, \text{Grad } \mathbf{n})$$

не мешает называть его [85] анизотропной жидкостью.

Уравнения состояния упругой микрополярной жидкости (3.21) могут быть использованы при моделировании поведения сложных микроструктурных жидкостей, подобных жидким кристаллам. Анизотропия свойств и ориентационная упругость нематиков объясняется существованием предпочтительной ориентации вытянутых молекул или образованных ими комплексов, при этом микроструктуру жидкого кристалла можно представить плавающими длинными стержнями или нитями. По аналогии с этим представлением микроструктуру упругой микрополярной жидкости (3.21) можно считать образованной упорядоченным набором плавающих эллипсоидов с разными полуосями.

Полная система уравнений движения упругой микрополярной жидкости в эйлеровых координатах содержит в качестве неизвестных функций плотность ρ , поле скоростей \mathbf{v} , поле угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$, тензорное поле кривизны \mathbf{B} , и после подстановки в уравнения движения (2.31), (2.32) определяющих соотношений (3.21) принимает вид

$$-\text{Grad } p - \text{div } (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T) + \rho \mathbf{f} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } \mathbf{v} \right), \quad (3.23)$$

$$\text{div } \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_{\times} + \rho \mathbf{m} = j \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\omega} \right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } \mathbf{B} = \text{Grad } \boldsymbol{\omega} - (\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Здесь символ $\frac{\partial}{\partial t}$ означает локальную производную по времени, а величины p и \mathbf{M} предполагаются выраженными через ρ и \mathbf{B} при помощи уравнений состояния (3.21). Вращательная инерция j , вообще говоря, может быть заданной функцией плотности ρ . В случае несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, давление p не выражается через ρ и \mathbf{B} , а является неизвестной функцией координат и времени.

В задаче о покоящейся жидкости $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} = 0$, и уравнения (3.23) превращаются в уравнения равновесия. В силу (1.20) и определяющих соотношений (3.21) эти уравнения содержат четыре неизвестных функции: плотность ρ и триэдр \mathbf{D}_k . Поскольку число скалярных уравнений равно шести, система уравнений равновесия переопределенная.

Несмотря на это, она будет разрешима, как показано ниже, при некоторых дополнительных условиях, наложенных на массовые силы и моменты.

Вычислим градиент свободной энергии, считая жидкость однородной и учитывая уравнения состояния (3.21)

$$\begin{aligned} \text{Grad } W &= \mathbf{i}_s \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \odot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial X_s} + \mathbf{i}_s \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial X_s} = \\ &= \mathbf{i}_s \rho^{-1} \mathbf{M} \odot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial X_s} - \mathbf{i}_s p \frac{\partial}{\partial X_s} (\rho^{-1}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Представим тензоры \mathbf{B} и \mathbf{M} через их векторные компоненты

$$\mathbf{B} = \mathbf{i}_k \otimes B_k, \quad \mathbf{M} = \mathbf{i}_k \otimes M_k.$$

Приняв во внимание уравнения совместности (1.22), выражение (3.24) преобразуем к виду

$$\text{Grad } W = \mathbf{i}_s \rho^{-1} M_k \cdot \left(\frac{\partial B_s}{\partial X_k} + B_s \times B_k \right) - \text{Grad } (\rho^{-1} p) + \rho^{-1} \text{Grad } p.$$

Перебросим в последнем выражении производные с B_s на M_k :

$$\begin{aligned} \text{Grad } W &= -\rho^{-1} \frac{\partial M_k}{\partial X_k} \cdot \mathbf{B}^T + \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial X_k} (M_k \cdot \mathbf{B}^T) - \\ &- \text{Grad } (\rho^{-1} p) + \rho^{-1} \text{Grad } p + \rho^{-1} \mathbf{i}_s B_s \cdot (B_k \times M_k) = \\ &= \rho^{-1} \text{Div } (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T) - \rho^{-1} (\text{Div } \mathbf{M}) \cdot \mathbf{B}^T + \rho^{-1} \text{Grad } p - \\ &- \text{Grad } (\rho^{-1} p) + \rho^{-1} \mathbf{i}_s B_s \cdot (B_k \times M_k). \end{aligned}$$

Сославшись на соотношение (3.22) и непосредственно проверяемое равенство

$$B_k \times M_k = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{M})_{\times},$$

из (3.22) получим тождество

$$\begin{aligned} \text{Grad } (W + \rho^{-1} p) &= \rho^{-1} [\text{Grad } p + \text{Div } (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)] - \\ &- \rho^{-1} [\text{Div } \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_{\times}] \cdot \mathbf{B}^T. \end{aligned} \quad (3.25)$$

С учетом уравнений равновесия соотношение (3.25) принимает вид

$$\text{Grad} (W + \rho^{-1}p) = \mathbf{f} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^T. \quad (3.26)$$

Как известно [71, 72], законом сохранения для системы уравнений с частными производными называется равенство, выражающее обращение в нуль на всех решениях данной системы дивергенции некоторого тензорного поля, зависящего от неизвестных функций и их производных. При $\mathbf{f} = \mathbf{m} = 0$ соотношение (3.26) является законом сохранения для статических уравнений микрополярной жидкости, поскольку оно означает обращение в нуль дивергенции тензорного поля $(W + \rho^{-1}p) \mathbf{I}$.

Из (3.26) видно, что для того, чтобы равновесие микрополярной жидкости было возможным, необходимо и достаточно выполнение условия совместности

$$\text{Rot} (\mathbf{f} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^T) = 0, \quad (3.27)$$

которое зависит не только от внешних сил и моментов \mathbf{f} , \mathbf{m} , но и от тензора кривизны микроструктуры \mathbf{B} , т.е. от искажения микроструктуры жидкости (Rot – оператор ротора в эйлеровых координатах).

При $\mathbf{m} = 0$, т.е. при отсутствии внешних массовых моментов, силовое уравнение равновесия согласно (3.23), (3.25) приводится к виду

$$\text{Grad} \left(W + \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) = \mathbf{f}, \quad (3.28)$$

и будет разрешимо в случае потенциальных массовых сил \mathbf{f} . Для несжимаемой жидкости выражение в скобках в (3.28) следует заменить на $W + \rho^{-1}p$. Таким образом, определение равновесного состояния упругой микрополярной жидкости сводится к определению ортонормированной тройки векторов \mathbf{D}_k из уравнений

$$\text{Div} \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_{\times} = 0, \quad \mathbf{M} = \rho \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{2} (\text{Grad} \mathbf{D}_k) \times \mathbf{D}_k, \quad (3.29)$$

а затем – к нахождению плотности или давления при помощи (3.28).

Отметим, что аналогичное (3.28) условие совместности есть и в теории жидких кристаллов [78].

Поскольку согласно (3.21) тензор напряжений Коши в упругой жидкости не является шаровым, микрополярная покоящаяся жидкость способна выдерживать касательные силовые напряжения, а также моментные напряжения. Это свойство упругой микрополярной жидкости аналогично способности нематических жидких кристаллов выдерживать касательные напряжения, например, передавать момент кручения [41].

Рассматривая задачу о равновесии микрополярной жидкости, к уравнениям

(3.29) необходимо присоединить краевые условия на границе Σ объема V , занимаемого жидкостью. Эти условия состоят в задании триэдра D_k или вектора моментной нагрузки: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{l}$, где \mathbf{N} – единичная нормаль к границе. Нетрудно проверить, что указанная краевая задача в случае несжимаемой жидкости может быть сформулирована в виде вариационного принципа

$$\delta \iiint_V \rho W dV - \iint_{\Sigma_2} \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\psi} d\Sigma = 0, \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad \boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{2} \delta \mathbf{D}_k \times \mathbf{D}_k.$$

Здесь Σ_1 – часть поверхности Σ , на которой задан триэдр D_k , Σ_2 – часть поверхности, на которой задана моментная нагрузка, $\boldsymbol{\psi}$ – вектор виртуальной ориентации, через который выражается вариация тензора кривизны

$$\delta \mathbf{B} = \text{Grad } \boldsymbol{\psi} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\psi}.$$

Из системы уравнений (3.29) можно исключить векторы D_k , заменив последнее соотношение в (3.29) уравнением совместности относительно тензора \mathbf{B}

$$\text{Rot } \mathbf{B} = \mathbf{B}^2 - (\text{tr } \mathbf{B})\mathbf{B} + \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{B} - \text{tr } \mathbf{B}^2) \mathbf{I}. \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) при помощи формулы Гамильтона-Кэли для неособого тензора \mathbf{B} можно записать иначе

$$\text{Rot } \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \det \mathbf{B}.$$

В односвязной области тройка ортонормированных векторов \mathbf{D}_k определяется по заданному гладкому тензорному полю \mathbf{B} , удовлетворяющему условию совместности (3.31), единственным образом, если триэдр \mathbf{D}_k задан в некоторой точке области.

Поскольку кривизна микроструктуры \mathbf{B} является псевдотензором второго ранга, свободная энергия W – четная функция от \mathbf{B} :

$$W(\rho, -\mathbf{B}) = W(\rho, \mathbf{B}).$$

Простейшим примером четной функции служит квадратичная форма, общее представление которой с учетом изотропности функции $W(\mathbf{B})$ в случае несжимаемой среды имеет вид

$$\rho W = \frac{1}{2} [\lambda \text{tr}^2 \mathbf{B} + \mu \text{tr} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T) + \nu \text{tr} \mathbf{B}^2], \quad (3.32)$$

где λ, μ, ν – постоянные.

Нетрудно показать, что необходимые и достаточные условия положительной определенности формы (3.32) состоят в выполнении неравенств

$$3\lambda + \mu + \nu > 0, \quad \mu + \nu > 0, \quad \mu > 0. \quad (3.33)$$

Согласно (3.21) выражению (3.32) соответствует линейная зависимость тензора моментных напряжений от кривизны структуры

$$\mathbf{M} = \lambda \text{Itr} \mathbf{B} + \mu \mathbf{B} + \nu \mathbf{B}^T. \quad (3.34)$$

Как и в нелинейной теории упругости [61, 82], целесообразно сформулировать дополнительные ограничения на форму зависимости $W(\mathbf{B})$ помимо положительной определенности. В частности, таким условием может служить *условие сильной эллиптичности* уравнений равновесия. Ранее условие сильной эллиптичности было сформулировано для твердой деформируемой среды с моментными напряжениями [32]. Нетрудно проверить, что система уравнений (3.28), (3.29) не является сильно эллиптической в смысле этого определения, как, впрочем, и в смысле теории дифференциальных уравнений в частных производных [24, 87]. Тем не менее достаточно потребовать выполнения сильной эллиптичности для уравнения (3.29). Можно показать, что условие сильной эллиптичности моментного уравнения равновесия (3.29) эквивалентно неравенству

$$\left. \frac{d^2}{d\tau^2} W(\mathbf{B} + \tau \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \right|_{\tau=0} > 0 \quad (3.35)$$

для любых ненулевых векторов \mathbf{c} , \mathbf{d} .

Для уравнения состояния (3.32) условие (3.35) выполнено, если и только если

$$\mu > 0, \quad \mu + \nu + \lambda > 0.$$

Как и в случае линейной теории упругости последние неравенства вытекают из условий положительной определенности (3.33). Вместе с тем, для уравнений состояния общего вида условие (3.35) не следует из положительности функции $W(\mathbf{B})$.

Глава 4

Некоторые задачи о равновесии упругих жидкостей

В этом разделе ограничимся нахождением равновесных решений в случае однородной несжимаемой жидкости при отсутствии объемных моментов.

4.1 Закрученная структура

Рассмотрим следующее поле направляющих векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \mathbf{i}_1 \cos \alpha(Z) + \mathbf{i}_2 \sin \alpha(Z), \\ \mathbf{D}_2 &= -\mathbf{i}_1 \sin \alpha(Z) + \mathbf{i}_2 \cos \alpha(Z), \quad \mathbf{D}_3 = \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь и далее $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – ортонормированный декартовый базис, а X, Y, Z – декартовы координаты. Функция $\alpha(Z)$ представляет собой угол поворота триэдра \mathbf{D}_k вокруг оси Z , так что деформация (4.1) описывает кручение однородной микроструктуры микрополярной жидкости (рис. 4.1).

Тензор кривизны \mathbf{B} , соответствующий (4.1), определяется соотношением

$$\mathbf{B} = \alpha'(Z) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3.$$

Из свойства изотропности функции $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ следует, что

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_\times = \mathbf{0}$$

для произвольных определяющих соотношений.

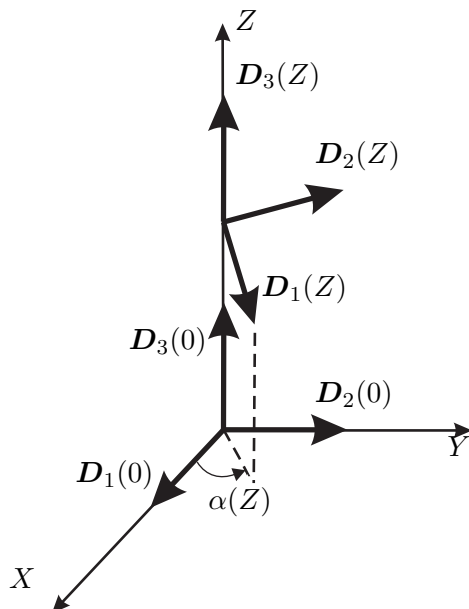


Рис. 4.1. Кручение направляющих векторов вокруг вертикальной оси.

В предположении, что $\alpha(Z)$ – линейная функция Z , тензор \mathbf{M} постоянен, и уравнение (3.29) выполняется тождественно. Таким образом, структура (4.1) при

$$\alpha(Z) = aZ + b$$

является универсальным решением, не зависящим от выбора уравнений состояния.

4.2 Плоская задача

В случае плоской задачи ориентация частиц микрополярной жидкости определяется одним параметром – углом поворота $\alpha(X, Y)$ триэдра \mathbf{D}_k вокруг некоторой оси. Для определенности будем считать,

что ось совпадает с направлением D_3 . Тогда триэдр D_k определяется равенствами

$$\begin{aligned} D_1 &= \mathbf{i}_1 \cos \alpha(X, Y) + \mathbf{i}_2 \sin \alpha(X, Y), \\ D_2 &= -\mathbf{i}_1 \sin \alpha(X, Y) + \mathbf{i}_2 \cos \alpha(X, Y), \quad D_3 = \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для (4.2) тензор кривизны \mathbf{B} дается формулой

$$\mathbf{B} = \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_3 \frac{\partial \alpha}{\partial X} + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_3 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = (\text{Grad } \alpha) \otimes \mathbf{i}_3. \quad (4.3)$$

Из (3.21), (4.3) следует, что для деформации (4.2) все компоненты \mathbf{M} обращаются в нуль, кроме M_{13} , M_{23} , M_{31} , M_{32} . Кроме того, выполняется равенство $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_\times = 0$. Таким образом, из трех моментных уравнений равновесия (3.29) два выполнены тождественно, а последнее принимает вид

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial X} + \frac{\partial M_{23}}{\partial Y} = 0. \quad (4.4)$$

Рассмотрим некоторые решения, получаемые в рамках плоской задачи для упругой микрополярной жидкости.

Первым примером плоской деформации может служить изогнутая структура, определяемая соотношениями

$$\begin{aligned} D_1 &= \mathbf{e}_R \cos \beta \Phi + \mathbf{e}_\Phi \sin \beta \Phi, \quad \beta = \text{const}, \\ D_2 &= -\mathbf{e}_R \sin \beta \Phi + \mathbf{e}_\Phi \cos \beta \Phi, \quad D_3 = \mathbf{e}_Z. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь R , Φ , Z – полярные координаты, \mathbf{e}_R , \mathbf{e}_Φ , \mathbf{e}_Z – координатные орты. Тензор кривизны \mathbf{B} дается формулой

$$\mathbf{B} = \frac{1 + \beta}{R} \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_Z. \quad (4.6)$$

Можно показать, что решение (4.5) является универсальным, как и решение (4.1).

Решение (4.5) описывает искажение микроструктуры, которое соответствует наличию в микрополярной жидкости линейного дефекта – клиновой дисклинации. Нетрудно убедиться, что поле триэдра (4.5) не является непрерывным, в то время как тензор микроструктуры, определяемый по формуле (4.6), оказывается непрерывным.

Далее рассмотрим уравнения плоской задачи для определяющих соотношений (3.32). С учетом (4.3) уравнение состояния (3.34) записывается следующим образом

$$\mathbf{M} = \mu(\text{Grad } \alpha) \otimes \mathbf{i}_3 + \nu \mathbf{i}_3 \otimes (\text{Grad } \alpha),$$

а уравнение равновесия (4.4) сокращается до уравнения Лапласа

$$\mu \Delta \alpha = 0.$$

Таким образом, для закона состояния (3.32) определение структуры микрополярной жидкости в плоской задаче сводится к нахождению гармонической функции. Заметим, что эта же задача получается при исследовании плоской деформации нематического жидкого кристалла в одноконстантном приближении [41].

4.3 Равновесие микрополярной жидкости со свободной поверхностью

Рассмотрим задачу о равновесии тяжелой несжимаемой жидкости, имеющей свободную поверхность и содержащейся в бесконечно длинном цилиндрическом сосуде (рис. 4.2). Эта задача представляет непосредственный интерес для экспериментального изучения свойств упругой микрополярной жидкости, поскольку позволяет по наблюдениям формы свободной поверхности получать информацию о материальных постоянных, используемых для записи уравнений состояния микрополярной жидкости.

Уравнение свободной поверхности Σ запишем в виде

$$Z = \zeta(X, Y), \quad (X, Y) \in \Omega,$$

где область Ω представляет собой поперечное сечение цилиндра. Свободная граница Σ обладает поверхностной энергией, которую в простейшем случае примем в виде

$$\mathcal{O} = \iint_{\Sigma} \varsigma \, d\Sigma.$$

Здесь ς – постоянный коэффициент поверхностного натяжения.

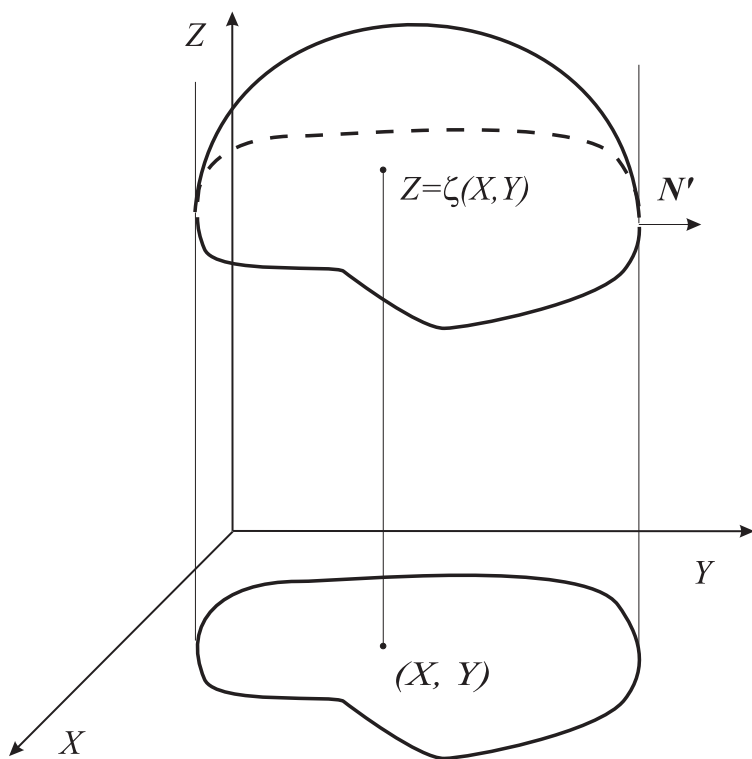


Рис. 4.2. Свободная поверхность микрополярной жидкости.

Краевые условия на Σ можно получить, как и в случае простой жидкости [88], используя вариационный принцип Лагранжа (3.30), в котором функционал энергии дополнен поверхностной энергией \mathcal{O} и потенциальной энергией силы тяжести \mathcal{G} :

$$\mathcal{J}_f \triangleq \mathcal{I}_f + \mathcal{O} + \mathcal{G}, \quad \mathcal{G} \triangleq \iiint_V gZ \, dV. \quad (4.7)$$

В (4.7) g – ускорение свободного падения, также для простоты предполагаем, что поверхностные нагрузки отсутствуют.

Следует заметить, что полная энергия капиллярной жидкости представляет собой функционал не только от триэдра \mathbf{D}_k , но и формы поверхности $\zeta(X, Y)$: $\mathcal{J}_f = \mathcal{J}_f[\mathbf{D}_k, \zeta]$.

Из условия стационарности функционала полной энергии $\delta\mathcal{J}_f = 0$ получим следующее уравнение для функции ζ

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} \nabla \zeta \right) = F \zeta + \frac{1}{\zeta} W \Big|_{Z=\zeta(X,Y)}, \quad (X, Y) \in \Omega. \quad (4.8)$$

В (4.8) ∇ – оператор градиента на плоскости (X, Y) , $F = \rho g / \zeta$ – капиллярная постоянная. Последнее слагаемое в (4.8) отличает полученное соотношение от уравнений капиллярной поверхности простой жидкости [88].

На границе области Ω выполняются условия, заключающиеся в задании угла контакта ξ свободной границы Σ со стенками сосуда

$$\mathbf{N}' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} \nabla \zeta = \cos \xi. \quad (4.9)$$

Здесь \mathbf{N}' – внешняя единичная нормаль к стенке цилиндра.

Таким образом, задача об определении формы капиллярной поверхности микрополярной жидкости сводится к уравнениям равновесия (3.28), (3.29), краевым условиям на поверхности цилиндра для триэдра \mathbf{D}_k и соотношениям (4.8), (4.9) для определения формы поверхности.

Следует заметить, что краевая задача, описывающая равновесие капиллярной поверхности микрополярной жидкости, образована нелинейными уравнениями относительно неизвестных функций разного числа переменных.

Уравнения (4.8), (4.9) позволяют сделать качественный вывод о влиянии микроструктуры на величину объема жидкости, поднявшейся в сосуде над некоторым исходным уровнем под действием капиллярных эффектов. А именно, пусть V_0 – указанный выше объем в случае простой жидкости, а V – объем поднявшейся микрополярной жидкости в том же сосуде. Тогда, интегрируя уравнение (4.8) с учетом краевого условия (4.9), получим, что

$$V - V_0 = - \iint_{\Omega} \frac{1}{\rho g} W \Big|_{Z=\zeta(X,Y)} d\Omega, \quad V_0 = \frac{1}{F} \int_{\partial\Omega} \cos \xi ds.$$

Так как плотность свободной энергии W неотрицательна, последнее соотношение показывает, что в случае микрополярной жидкости объем поднявшейся жидкости будет меньше.

4.4 Равновесие фаз микрополярной жидкости

Рассмотрим задачу о равновесии фаз микрополярной жидкости в однородном поле температур. Для этого, как и в случае нелинейной теории упругости [11, 19], воспользуемся принципом стационарности свободной энергии в изотермическом процессе [17]. Условия термодинамического равновесия фаз упругого материала с моментными напряжениями общего вида получены вариационным методом в [31]. Для микрополярной жидкости условия фазового равновесия можно получить непосредственно при помощи вариационного уравнения (3.30) с учетом того, что граница раздела фаз может изменяться независимо от поля направляющих векторов \mathbf{D}_k .

Для *микрокогерентного фазового перехода*, т.е. в случае непрерывного в окрестности фазовой границы поля \mathbf{D}_k , скачки вектора виртуальной ориентации $\boldsymbol{\psi}$ и тензора кривизны \mathbf{B} связаны соотношением

$$[\boldsymbol{\psi}]_{-}^{+} + \mathcal{C} \mathbf{N} \cdot [\mathbf{B}]_{-}^{+} = 0. \quad (4.10)$$

В (4.10) \mathcal{C} – скорость движения фазовой границы в направлении нормали [77, 82], квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины при пересечении фазовой границы. Для фазового перехода с *микропроскальзыванием*, т.е. когда на межфазной поверхности поля \mathbf{D}_k имеют разрывы первого рода, векторы виртуальной ориентации $\boldsymbol{\psi}$ по разные стороны границы независимы. Вследствие этого на межфазной границе обращается в нуль вектор моментных напряжений $\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}$.

Из условия стационарности (3.30) для микрокогерентных фазовых переходов и фазовых переходов с микропроскальзыванием следует дополнительное краевое условие на фазовой границе, необходимое для ее определения

$$\left[W + \frac{p}{\rho} \right]_{-}^{+} = 0, \quad (4.11)$$

при этом для фазовых переходов с микропроскальзыванием на фазовой границе обращается в нуль вектор моментных напряжений $\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}$.

Можно показать, что уравнение (4.11) также вытекает из условия термодинамического равновесия [31] с использованием уравнений состояния (3.21).

В качестве примера рассмотрим задачу об образовании новой фазы – простой несжимаемой жидкости в окрестности изогнутой структуры (4.5) – дисклинации. В силу симметрии решения (4.5) область, занятая новой фазой, представляет собой круговой цилиндр радиуса d . Предположим, что плотности фаз совпадают и равны ρ . Для микрополярной жидкости уравнение состояния выберем в форме (3.32), для простой жидкости массовая плотность свободной энергии W_- постоянна. Тогда радиус фазового включения находится из уравнения (4.11) и дается формулой

$$d = (1 + \beta) \sqrt{\frac{\mu}{2\rho W_-}}.$$

Как и в случае фазового перехода в окрестности дефекта в жидких кристаллах [28] в этой задаче не составляет труда учесть поверхностное натяжение на границе раздела фаз.

Глава 5

Вискозиметрические течения несжимаемой микрополярной жидкости

В теории простых неньютоновских жидкостей важное место занимает класс вискозиметрических течений [4, 82]. В этом классе течений произвольная неньютоновская жидкость ведет себя как жидкость дифференциального типа. Подобные течения играют значительную роль при экспериментальных исследованиях свойств вязкоупругих жидкостей, позволяющих, в частности, определить постоянные, входящие в уравнения состояния.

5.1 Сдвиговое течение

Простейшим примером вискозиметрического течения служит плоское установившееся течение жидкости в слое глубины h ($-\infty < X < \infty$, $0 \leq Y \leq h$, $-\infty < Z < \infty$), вызванное либо приложением на поверхности $Y = h$ касательных напряжений ($T_{21} = \tau$), либо заданием скорости сдвига ($\mathbf{v} = v^0 \mathbf{e}_1$) (так называемое линейное течение Куэтта [4]).

Рассмотрим более детально плоское движение микрополярной жидкости. В нем направляющие векторы \mathbf{D}_k определяются формулами (4.2) с учетом того, что угол поворота α зависит и от времени t : $\alpha = \alpha(X, Y, t)$. Поля скорости и угловой скорости имеют вид

$$\mathbf{v} = v_1(X, Y, t)\mathbf{e}_1 + v_2(X, Y, t)\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(X, Y, t)\mathbf{e}_3. \quad (5.1)$$

Величина угловой скорости ω связана с углом поворота формулой

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (5.2)$$

Представим уравнение состояния для тензора напряжений Коши в виде

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}.$$

Тогда, учитывая (5.1), (5.2), уравнения движения и условие несжимаемости приведем к виду

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial S_{11}}{\partial X} + \frac{\partial S_{21}}{\partial Y} &= \rho \frac{dv_1}{dt}, \\ -\frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{\partial S_{12}}{\partial X} + \frac{\partial S_{22}}{\partial Y} &= \rho \frac{dv_2}{dt}, \\ \frac{\partial M_{13}}{\partial X} + \frac{\partial M_{23}}{\partial Y} + S_{12} - S_{21} &= j \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial Y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В стационарном (установившемся) течении скорости v_1 , v_2 , ω и давление p не зависят от времени. Пусть в сдвиговом течении скорость и угол поворота имеют вид

$$v_1 = v(Y), \quad v_2 = 0, \quad \alpha = \alpha(Y). \quad (5.4)$$

Можно показать, что все тензоры скоростей деформаций и изгибных деформаций кроме $\boldsymbol{\varepsilon}$ в сдвиговом стационарном течении вида (5.4) обращаются в нуль. С учетом разложений (1.34) это означает, что в течении (5.1), (5.4) зависимость уравнений состояния от предыстории деформации сводится к зависимости от \mathbf{B} и $\boldsymbol{\varepsilon}$. Другими словами, в сдвиговом течении никакая вязкоупругая жидкость неотличима от жидкости дифференциального типа сложности (1,0).

Определение полей v и α из уравнений (5.3) требует конкретизации уравнений состояния. Примем следующие зависимости для \mathbf{S} и \mathbf{M}

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mu_1 \boldsymbol{\varepsilon} + \mu_2 \boldsymbol{\varepsilon}^T - (\nu_1 \mathbf{B} + \nu_2 \mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{B}^T, \\ \mathbf{M} &= \eta_1 \boldsymbol{\alpha} + \eta_2 \boldsymbol{\alpha}^T + \nu_1 \mathbf{B} + \nu_2 \mathbf{B}^T, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \eta_1, \eta_2$ – постоянные.

Уравнения (5.5) представляют собой линейную зависимость тензоров напряжений и моментных напряжений от тензоров скоростей. В состоянии равновесия закон состояния (5.5) сводится к зависимостям типа (3.32).

В предположении об отсутствии поверхностных моментов ($\mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = 0$ при $Y = h$) решение (5.3) дает

$$T_{21} = \tau, \quad T_{22} = 0, \quad M_{23} = \tau \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \right) (h - Y), \quad (5.6)$$

$$v(Y) = v^0 Y, \quad v^0 = \frac{\tau}{\mu_1}, \quad \alpha(Y) = \alpha^0 + \frac{\tau}{\nu_1} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \right) \left(hY - \frac{Y^2}{2} \right)$$

(α^0 – угол ориентации при $Y = 0$).

Формулы (5.6) описывают линейное распределение скоростей и моментных напряжений по глубине.

5.2 Течение в канале

Рассмотрим плоское течение микрополярной жидкости в слое между двумя параллельными пластинами ($-\infty < X < \infty, -h < Y < h, -\infty < Z < \infty$), вызванное перепадом давления в направлении оси X .

Поля скорости, угла поворота триэдра \mathbf{D}_k и давление p примем в виде

$$v_1 = v(Y), \quad v_2 = 0, \quad \alpha = \alpha(Y), \quad p = -Gx \quad (G = \text{const}). \quad (5.7)$$

Как и в сдвиговом течении, в течении (5.7) микрополярная жидкость неотличима от жидкости дифференциального типа сложности (1.0).

Для закона состояния (5.5) решение уравнений (5.3) дается форму-

лами

$$T_{21} = -GY, \quad T_{22} = -GX, \quad v(Y) = \frac{G}{2\mu_1} (h^2 - Y^2), \quad (5.8)$$

$$M_{23} = -G \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_1} Y^2 - G \frac{\mu_1 - \mu_2}{6\mu_1} h^2 - \frac{\nu_1}{2h} (\alpha_+ - \alpha_-),$$

$$\alpha(Y) = G \frac{\mu_1 - \mu_2}{6\nu_1\mu_1} Y (h^2 - Y^2) + \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2h} Y + \frac{1}{2} (\alpha_+ + \alpha_-).$$

В (5.8) α_{\pm} – углы ориентации триэдра на пластинах ($\alpha(\pm h) = \alpha_{\pm}$).

5.3 Течение Куэтта

Рассмотрим течение вязкоупругой микрополярной жидкости между вращающимися соосными цилиндрами. Пусть течение определяется формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v(R)\mathbf{e}_{\Phi}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{v(R)}{R}\mathbf{e}_Z, \quad p = p(R), \quad \alpha = \alpha(R), \\ \mathbf{D}_1 &= \mathbf{e}_R \cos \alpha + \mathbf{e}_{\Phi} \sin \alpha, \\ \mathbf{D}_2 &= -\mathbf{e}_R \sin \alpha + \mathbf{e}_{\Phi} \cos \alpha, \\ \mathbf{D}_3 &= \mathbf{e}_Z. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Можно показать, что в этом случае выполняются равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \alpha' \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_Z + \frac{1}{R} \mathbf{e}_{\Phi} \otimes \mathbf{e}_Z, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \left(v' - \frac{v}{R} \right) \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_{\Phi}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \left(\frac{v'}{R} - \frac{v}{R^2} \right) \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_Z, \\ \mathbf{A}_k &= \mathbf{B}_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Последние два равенства означают, что в классе течений (5.9) произвольная вязкоупругая микрополярная жидкость неотличима от жидкости дифференциального типа сложности $(1, 1)$.

Уравнения движения сводятся к трем уравнениям относительно v , α и p

$$\begin{aligned} -p' + S'_{RR} + (S_{RR} - S_{\Phi\Phi})/R + \rho v^2/R &= 0, \\ S'_{R\Phi} + (S_{R\Phi} + S_{\Phi R})/R &= 0, \\ M'_{RZ} + M_{RZ}/R + S_{R\Phi} - S_{\Phi R} &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В силу громоздкости получаемых выражений приведем только решение уравнений (5.10) для поля скорости и угла поворота

$$v(R) = c_0 R + \frac{c_1}{2\eta_1} R \ln \frac{R^2}{\frac{\eta_1}{\mu_1} + R^2}, \quad (5.11)$$

$$\alpha(R) = \alpha_0 + c_2 \ln \frac{R}{R_0} +$$

$$+ c_1 \int_{R_0}^R \left[\frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1} \ln \left(\frac{\eta_1}{\mu_1} + R^2 \right) - \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu_1 R^2} \right] dR,$$

$$c_0 = \Omega_1 - \frac{c_1}{2\eta_1} \ln \frac{\mu_1 R_1^2}{\eta_1 + \mu_1 R_1^2},$$

$$c_1 = \frac{2\eta_1(\Omega_0 - \Omega_1)}{\ln [R_0^2(\eta_1 + \mu_1 R_1^2)] - \ln [R_1^2(\eta_1 + \mu_1 R_0^2)]},$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \left[\ln \left(\frac{R_1}{R_0} \right) \right]^{-1} \left\{ \alpha_1 - \alpha_0 - \right. \\ &\left. - c_1 \int_{R_0}^{R_1} \left[\frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1} \ln \left(\frac{\eta_1}{\mu_1} + R^2 \right) - \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu_1 R^2} \right] dR \right\}. \end{aligned}$$

В (5.11) Ω_0 и Ω_1 – угловые скорости вращения цилиндров, между которыми движется жидкость, R_0 и R_1 – их радиусы ($R_1 > R_0$), α_0 и α_1 – углы ориентации триэдра направляющих векторов на поверхностях цилиндров. При выводе (5.11) также были использованы определяющие соотношения (5.5).

5.4 Течение Пуазейля

В качестве примера трехмерного течения рассмотрим стационарное осесимметричное течение вязкоупругой микрополярной несжимаемой жидкости в круглой трубе, вызванное перепадом давления. Введем цилиндрические координаты R, Φ, Z так, чтобы ось Z совпадала с осью симметрии трубы. Будем искать решение в виде

$$\mathbf{v} = v(R)\mathbf{e}_Z, \quad \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (5.12)$$

$$p = -GZ + q(R), \quad G = \text{const},$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{e}_R \cos \alpha + \mathbf{e}_Z \sin \alpha, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{e}_\Phi, \quad \mathbf{D}_3 = -\mathbf{e}_R \sin \alpha + \mathbf{e}_Z \cos \alpha,$$

$$\alpha = \alpha(R).$$

В течении вида (5.12) тензор кривизны \mathbf{B} и тензоры скоростей деформаций согласно (1.6), (1.32) даются формулами

$$\mathbf{B} = -\alpha' \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_\Phi + \frac{1}{R} \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_Z, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = v' \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_Z, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 0.$$

Тем самым, в течении (5.12) все тензоры скоростей деформации и изгибной деформации кроме $\boldsymbol{\varepsilon}$ обращаются в нуль. С учетом равенств (1.34) это означает, что в течении вида (5.12) зависимости уравнений состояния от предыстории деформации заключаются в зависимости от \mathbf{B} и $\boldsymbol{\varepsilon}$. Другими словами, в этом течении никакая жидкость неотличима от жидкости дифференциального типа сложности $(1, 0)$.

Записав уравнения состояния в виде

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{B}, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B}, \boldsymbol{\varepsilon}),$$

и используя свойство изотропности функций \mathbf{S} и \mathbf{M} , можно показать, что в течении (5.12) обращаются в нуль следующие компоненты тензоров \mathbf{S} и \mathbf{M} : $S_{R\Phi}, S_{\Phi R}, S_{Z\Phi}, S_{\Phi Z}, M_{RR}, M_{\Phi\Phi}, M_{ZZ}, M_{RZ}, M_{ZR}$.

Уравнения движения сводятся к трем уравнениям относительно

неизвестных v , α и q

$$\begin{aligned} S'_{RZ} + S_{RZ}/R + G &= 0, \\ S'_{RR} + (S_{RR} - S_{\Phi\Phi})/R - q' &= 0, \\ M'_{R\Phi} + (M_{R\Phi} + M_{\Phi R})/R + S_{ZR} - S_{RZ} &= 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Из уравнений (5.2) может быть найдена компонента тензора напряжений Коши T_{RZ}

$$T_{RZ} = \frac{c_1}{R} - GR, \quad c_1 = \text{const.}$$

Интегрирование уравнений (5.13) для определяющих соотношений

(5.5) и граничных условий при $R = R_0$: $v(R_0) = 0$, $\alpha(R_0) = \alpha_0$ приводит к решению уравнений (5.2) в форме

$$v(R) = \frac{G}{4\mu_1}(R_0^2 - R^2), \quad \alpha(R) = \alpha_0 + \frac{G(\mu_2 - \mu_1)}{18\nu_1\mu_1}(R_0^3 - R^3).$$

Аналогичным методом могут быть построены решения о вискозиметрическом течении микрополярной жидкости между двумя соосными цилиндрами. Вместе с тем следует отметить, что класс подобных решений для вязкоупругой микрополярной жидкости уже множества решений, описывающего вискозиметрические течения простой неньютоновской жидкости [4]. В частности, можно показать, что в этот класс не попадает течение между вращающимся конусом и плоскостью.

Глава 6

Устойчивость равновесия упругой микрополярной жидкости в магнитном поле

В этой главе на основе работ [26, 27] рассмотрена потеря устойчивости равновесия упругой микрополярной жидкости при действии магнитного поля.

6.1 Влияние магнитного поля

Магнитное поле оказывает значительное ориентирующее воздействие на микрополярные жидкости. Анизотропия их свойств во многом объясняется существованием предпочтительной ориентации вытянутых молекул или образованных ими агрегатов, при этом микроструктуру упругой микрополярной жидкости можно представить образованной упорядоченным набором плавающих эллипсоидов с разными полуосями. В состоянии равновесия магнитное поле \mathbf{H} ориентирует эллипсоиды так, чтобы искажения силовых линий были минимальны (как это показано на рис. 6.1). Другими словами, происходит взаимодействие между микроструктурой жидкости и внешним магнитным полем. В магнитном поле могут существенно изменяться свойства жидкости, что делает магнитные жидкости полезными для конструирования различных устройств и приборов [80, 84].

Связь намагниченности Υ с величиной магнитного поля примем в форме

$$\Upsilon = \chi \cdot H, \quad \chi \triangleq \sum_{i=1}^3 \chi_i D_i \otimes D_i,$$

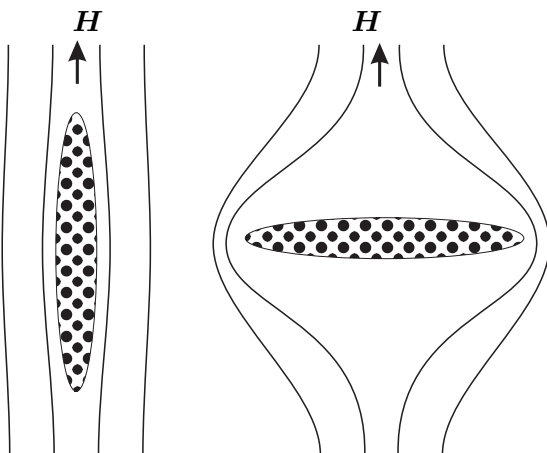


Рис. 6.1. Искажение линий магнитного поля в окрестности частицы.

где χ – отрицательно определенный тензор диамагнитных восприимчивостей. В отличие от нематиков, где тензор χ имеет только два различных собственных значения, соответствующих направлению вдоль оси директора и перпендикулярного ему, здесь предполагается существование у χ трех различных собственных чисел, соответствующих направлениям \mathbf{D}_k (или направлениям главных полуосей плавающих эллипсоидов, с которыми ассоциируется микроструктура микрополярной жидкости).

Как и для нематиков [41], слагаемое в выражении для потенциальной энергии микрополярной жидкости, описывающее влияние магнитного поля, имеет вид $-\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \chi \cdot \mathbf{H}$, а объемный момент, порождаемый магнитным полем вычисляется по формуле

$$\rho\boldsymbol{\mu} = \mathbf{H} \cdot \chi \times \mathbf{H}. \quad (6.1)$$

Рассмотрим плоскую деформацию микрополярной жидкости. В этом случае ориентация частиц микрополярной жидкости определяется одним параметром – углом поворота $\alpha(X, Y)$ триэдра \mathbf{D}_k вокруг некоторой оси (4.2).

Если $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ($\mu_k = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{i}_k$), то моментное уравнение равновесия (4.4) не является однородным и принимает вид

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial X} + \frac{\partial M_{23}}{\partial Y} + \rho\mu_3 = 0. \quad (6.2)$$

Для закона состояния (3.32) уравнение (6.2) сводится к соотношению

$$\mu\Delta\alpha + \rho\mu_3 = 0.$$

В предположении об однородности магнитного поля, нетрудно проверить, что в случае плоской задачи условие совместности (3.27) для объемного момента вида (6.1) выполнено тождественно, т.е. равновесие микрополярной жидкости под влиянием магнитного поля реализуемо.

Аналогично действию магнитного поля можно учесть и влияние электрического поля. Как и в случае жидких кристаллов [41], в микрополярных жидкостях вообще говоря присутствуют различные эффекты, связанные с электрическими полями, например, флексоэлектрический эффект.

6.2 Переход Фредерикса

В теории жидких кристаллов примером ориентирующего влияния магнитного поля служит переход Фредерикса, который заключается в потере устойчивости однородного состояния равновесия слоя жидкого кристалла, находящегося между гладкими пластинами, при достижении критического значения магнитного поля [41, 59]. Найденные экспериментально значения критического поля используются для определения упругих постоянных нематика.

В рамках плоской задачи рассмотрим потерю устойчивости однородного поля микроструктуры микрополярной жидкости, занимающей полосу толщины h (рис. 6.2). Рассмотрим два случая направления магнитного поля. Пусть магнитное поле однородно и направлено вдоль слоя: $\mathbf{H} = H\mathbf{i}_1$. Тогда уравнение равновесия (6.2) принимает вид

$$\mu\Delta\alpha + (\chi_2 - \chi_1)H^2 \sin\alpha \cos\alpha = 0. \quad (6.3)$$

С учетом краевых условий $\alpha = 0$ при $Y = 0, h$ уравнение (6.3) всегда имеет тривиальное решение $\alpha = 0$ при любых значениях напряженности магнитного поля H . Величина критического поля $H_k^{*(1)}$,

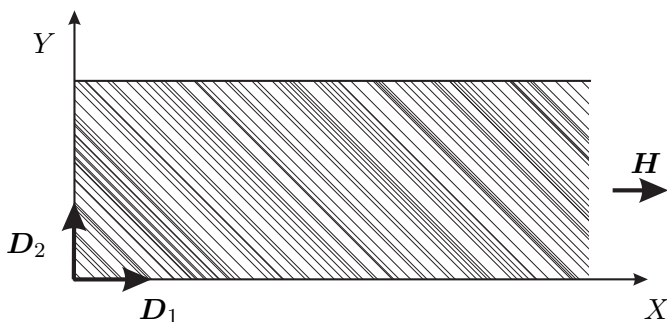


Рис. 6.2. Магнитное поле параллельно слою.

при которой происходит бифуркация равновесия, для уравнения (6.3) дается формулой

$$H_k^{*(1)} = \frac{\pi k}{h} \sqrt{\frac{\mu}{\chi_2 - \chi_1}} \quad (6.4)$$

при $\chi_2 - \chi_1 > 0$.

Аналогично рассмотрим случай поперечной ориентации магнитного поля: $\mathbf{H} = H\mathbf{i}_1$ (рис. 6.3).

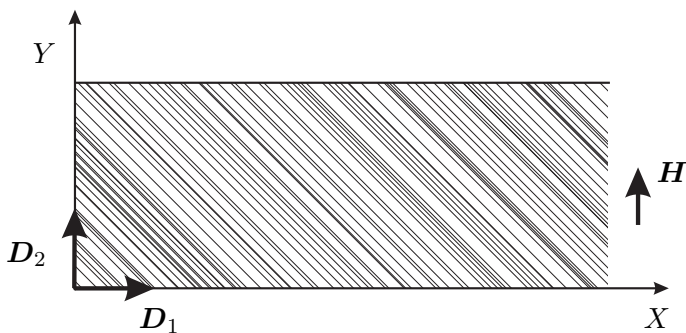


Рис. 6.3. Магнитное поле перпендикулярно слою.

Здесь

$$\rho\mu_3 = (\chi_1 - \chi_2) H^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

и величина критического поля дается формулой

$$H_k^{*(2)} = \frac{\pi k}{h} \sqrt{\frac{\mu}{\chi_1 - \chi_2}} \quad (6.5)$$

при $\chi_1 - \chi_2 > 0$.

Формулы (6.4), (6.5) подобны выражениям для критического магнитного поля, полученным в теории нематиков [41]. Вместе с тем имеются существенные отличия, связанные с их интерпретацией.

Во-первых, величина критического поля зависит только от одной упругой постоянной μ вне зависимости от ориентации магнитного поля.

Во-вторых, одновременно может произойти потеря устойчивости только для одного из случаев, описанных выше, в зависимости от знака $\chi_1 - \chi_2$, в то время как для нематиков это происходит всегда.

Полученные результаты показывают качественные отличия модели упругой микрополярной жидкости от модели нематического жидкого кристалла [41, 59, 90, 94].

Глава 7

Термодинамика микрополярной среды

В отличие от кинематики и теории напряжений, термодинамика полярных сред не претерпевает существенных изменений по сравнению с классической [61, 82, 77, 148, 153].

Уравнение теплопереноса и второе начало термодинамики в форме неравенства Клазиуса-Дюгема, дополняющие уравнения движения (2.31), (2.32), имеют вид

$$\rho \frac{d}{dt} \varepsilon = \rho s + \text{Div } \mathbf{h} + \text{tr} \left(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{a}}^T \right), \quad (7.1)$$

$$\rho \theta \frac{d}{dt} \eta \geq \rho s + \text{Div } \mathbf{h} - \frac{1}{\theta} \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}. \quad (7.2)$$

Здесь $\mathbf{g} = \text{Grad } \theta$, θ – температура, \mathbf{h} – вектор потока тепла, s – плотность источников тепла, ε и η – массовые плотности внутренней энергии и энтропии.

В случае учета влияния теплопроводности определяющие соотношения термовязкоупругой микрополярной жидкости даются теоремой, аналогичной 3.2.

Теорема 7.1. *Общее представление определяющих уравнений термовязкоупругой микрополярной жидкости имеет вид*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \mathcal{H}_1 \left[\rho(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{Y}_t^t(s), \mathbf{L}_t^t(s), \theta^t(s), \mathbf{g}^t(s) \right], \\ \mathbf{M}(t) &= \mathcal{H}_2 \left[\rho(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{Y}_t^t(s), \mathbf{L}_t^t(s), \theta^t(s), \mathbf{g}^t(s) \right], \\ \mathbf{h}(t) &= \mathcal{H}_3 \left[\rho(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{Y}_t^t(s), \mathbf{L}_t^t(s), \theta^t(s), \mathbf{g}^t(s) \right], \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \mathcal{H}_4 [\rho(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{Y}_t^t(s), \mathbf{L}_t^t(s), \theta^t(s), \mathbf{g}^t(s)], \\ \eta(t) &= \mathcal{H}_5 [\rho(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{Y}_t^t(s), \mathbf{L}_t^t(s), \theta^t(s), \mathbf{g}^t(s)],\end{aligned}$$

где $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4, \mathcal{H}_5$ – изотропные операторы и функционалы.

Здесь введены предыстории температуры $\theta^t(s) = \theta(t-s)$ и градиента температуры $\mathbf{g}^t(s) \equiv \mathbf{g}(t-s)$.

Рассмотрим частные случаи уравнений состояния (7.3). Модель *термоупругой микрополярной жидкости* имеет уравнения состояния в форме

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{T}(\rho, \mathbf{B}, \theta), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\rho, \mathbf{B}, \theta), \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}(\rho, \mathbf{B}, \theta, \mathbf{g}), \\ \varepsilon &= \varepsilon(\rho, \mathbf{B}, \theta), \quad \eta = \eta(\rho, \mathbf{B}, \theta),\end{aligned}$$

причем выполняются соотношения

$$\mathbf{T} = \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T, \quad \mathbf{M} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

где $\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta$ – массовая плотность свободной энергии. Уравнение теплопроводности приводится к виду

$$\rho \theta \frac{d\eta}{dt} = \text{Div } \mathbf{h} + \rho s,$$

а неравенство Клазиуса-Дюгема сводится к неравенству Фурье

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{g} \geq 0.$$

Для модели термоупругой жидкости диссипация энергии связана только с теплопроводностью. Простейшим примером функции ψ служит зависимость, аналогичная (3.32)

$$\rho \psi = \frac{1}{2} [\lambda \text{tr}^2 \mathbf{B} + \mu \text{tr} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T) + \nu \text{tr} \mathbf{B}^2] + \rho \psi_0(\rho, \theta), \quad (7.4)$$

где ψ_0 – массовая плотность свободной энергии при $\mathbf{B} = 0$. Этим уравнениям состояния соответствует линейная зависимость тензора моментных напряжений от кривизны микроструктуры (3.34).

Рассмотрим термодинамику вязкоупругих жидкостей дифференциального типа. Здесь, используя термодинамический подход [153],

уравнения состояния жидкости дифференциального типа сложности (m, n) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{f}_1(\rho, \mathbf{B}, \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_m, \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_n, \theta, \mathbf{g}), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{f}_2(\rho, \mathbf{B}, \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_m, \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_n, \theta, \mathbf{g}), \\ \mathbf{h} &= \mathbf{f}_3(\rho, \mathbf{B}, \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_m, \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_n, \theta, \mathbf{g}), \\ \varepsilon &= \varepsilon(\rho, \mathbf{B}, \theta), \quad \eta = \eta(\rho, \mathbf{B}, \theta).\end{aligned}\tag{7.5}$$

где $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ – изотропные тензорные и векторная функции.

Рассмотрим более подробно уравнения состояния микрополярной жидкости дифференциального типа сложности $(1, 1)$. Здесь определяющие соотношения записываются следующим образом

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{f}_1(\rho, \mathbf{B}, \varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \mathbf{g}), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{f}_2(\rho, \mathbf{B}, \varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \mathbf{g}), \\ \mathbf{h} &= \mathbf{f}_3(\rho, \mathbf{B}, \varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \mathbf{g}), \\ \varepsilon &= \varepsilon(\rho, \mathbf{B}, \theta), \quad \eta = \eta(\rho, \mathbf{B}, \theta).\end{aligned}\tag{7.6}$$

Тензоры напряжений и моментных напряжений можно представить в виде суммы равновесного и диссипативного слагаемых

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{T}_E + \mathbf{T}_D, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_E + \mathbf{M}_D, \\ \mathbf{T}_E &= \mathbf{T}_E(\rho, \mathbf{B}, \theta) \equiv \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I} - \mathbf{M}_E \cdot \mathbf{B}^T, \\ \mathbf{M}_E &= \mathbf{M}_E(\rho, \mathbf{B}, \theta) \equiv \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}}, \\ \mathbf{T}_D &= \mathbf{T}_D(\rho, \mathbf{B}, \theta, \varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{g}), \quad \mathbf{T}_D(\rho, \mathbf{B}, \theta, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_D &= \mathbf{M}_D(\rho, \mathbf{B}, \theta, \varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{g}), \quad \mathbf{M}_D(\rho, \mathbf{B}, \theta, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Для жидкости дифференциального типа сложности $(1, 1)$ неравенство Клазиуса-Дюгема сводится к диссипативному неравенству

$$\text{tr}(\mathbf{T}_D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T) + \text{tr}(\mathbf{M}_D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T) + \frac{1}{\theta} \mathbf{g} \cdot \mathbf{h} \geq 0,$$

а уравнение теплопереноса (7.1) преобразуется к виду

$$\rho \theta \frac{d\eta}{dt} = \text{Div} \mathbf{h} + \rho s + \text{tr}(\mathbf{T}_D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T) + \text{tr}(\mathbf{M}_D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T).\tag{7.7}$$

Заметим, что в общем случае уравнение теплопроводности (7.7) содержит слагаемые, зависящие не только от температуры, но и от деформаций.

7.1 Приближение типа Обербека-Буссинеска для вязкоупругой микрополярной жидкости

Система уравнений (2.31), (2.32), (7.7), описывающая движение сжимаемой термовязкоупругой жидкости, может быть приведена к более простому виду, если сделать упрощающие предположения, аналогичные приближению Обербека-Буссинеска [13, 15, 16, 20]. Далее будем считать, что жидкость является несжимаемой в изотермических процессах, материальные постоянные, присутствующие в уравнениях состояния для \mathbf{T} и \mathbf{M} не зависят от температуры, диссипация энергии, связанная с течением, пренебрежимо мала, а влияние температуры проявляется только в массовых силах и моментах через зависимость плотности от температуры.

Помимо этих предположений будем считать, что в уравнении теплопроводности (7.7) зависимостью η от \mathbf{V} также можно пренебречь, а вектор потока тепла подчинен закону Фурье $\mathbf{h} = \kappa \mathbf{g}$, κ – постоянный коэффициент теплопроводности. Считая поле температуры мало отклоняющимся от некоторого среднего значения θ° и пренебрегая слагаемыми более высоких порядков малости по сравнению с линейными по $\theta - \theta^\circ$ членами, уравнение (7.7) можно записать в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = \chi \text{Div Grad } \theta, \quad (7.8)$$

где χ – коэффициент температуропроводности,

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho \theta^\circ C_v}, \quad C_v = \left. \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta^\circ}.$$

Представим уравнение состояния для тензора напряжений Коши в виде

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S},$$

где p – давление, дополнительным уравнением для определения которого служит уравнение несжимаемости

$$\text{Div } \mathbf{v} = 0. \quad (7.9)$$

Для тензоров напряжений \mathbf{S} и моментных напряжений \mathbf{M} далее примем уравнения состояния в форме (5.5), где материальные постоянные предполагаются независимыми от температуры.

Глава 8

Конвективная неустойчивость вязкоупругой микрополярной жидкости

Тепловая конвекция в подогреваемом снизу бесконечно протяженном слое представляет собой один из примеров неустойчивости в гидродинамике, который привлекал внимание многих исследователей. В связи с исследованиями конвективных неустойчивостей отметим работы [13]–[20]. Исследование конвективных неустойчивостей плоского слоя вязкоупругой микрополярной жидкости дифференциального типа проводилось в [37, 37, 38, 111, 112] для различных типов краевых условий.

Здесь рассмотрена конвективная неустойчивость по отношению к бесконечно малым возмущениям бесконечно протяженного плоского слоя термовязкоупругой микрополярной жидкости дифференциального типа, подогреваемого снизу (задача Рэлея). Рассмотрены так называемые нормальные возмущения, экспоненциально зависящие от времени и периодические в горизонтальном направлении. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поведение амплитуд нормальных возмущений. Определены критические значения числа Грасгофа для различных значений материальных параметров, характеризующих вещество жидкости. Построены графики нейтральных кривых, разделяющие области устойчивости и неустойчивости. Дан анализ влияния закрученности микроструктуры жидкости на потерю устойчивости: для различных типов краевых условий показано стабилизирующее влияние увеличения начальной кривизны. Полученные результаты могут быть использованы в механике суспензий, магнитных и биологических жидкостей, жидких

кристаллов и других жидких сред сложной структуры.

Рассмотрим задачу о конвективной неустойчивости механического равновесия плоского бесконечного горизонтального слоя тяжелой вязкоупругой микрополярной жидкости толщины $2h$ ($-\infty < X < \infty$, $-h \leq Y \leq h$) (задачу Рэлея). Температура и угол ориентации микроструктуры на границах слоя фиксированы. Верхняя граница поддерживается при температуре $-\theta_*$ и угле ориентации микроструктуры α_B , а нижняя – при θ_* и α_H соответственно (рис. 8.1). Будем использовать уравнения состояния вязкоупругой микрополярной жидкости дифференциального типа сложности (1, 1), для **S** и **M** примем линейные относительно тензоров скоростей деформации зависимости (5.5).

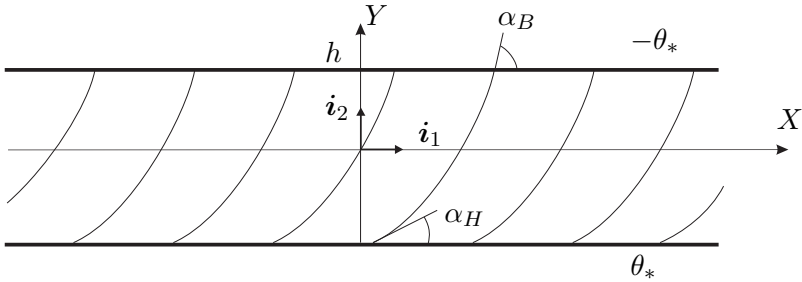


Рис. 8.1. Слой микрополярной жидкости.

Уравнения движения (5.3), несжимаемости (7.9) и теплопроводности (7.8) имеют вид

$$-\frac{\partial p}{\partial X} + \mu_1 \Delta v_1 + (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \nu_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X} \left(2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y} \right) = \rho \frac{dV_1}{dt}, \quad (8.1)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial Y} + \mu_1 \Delta v_2 - (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial \omega}{\partial X} - \nu_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y} \left(2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial X} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y} \right) + \tilde{\rho}(1 + \beta(\theta - \theta^*))g = \rho \frac{dV_2}{dt}, \quad (8.2)$$

$$\eta_1 \Delta \omega + \nu_1 \Delta \alpha + (\mu_1 - \mu_2) \left(\frac{\partial v_2}{\partial X} - \frac{\partial v_1}{\partial Y} - 2\omega \right) = j \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad (8.3)$$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial Y} = 0, \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial X} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \chi \Delta \theta. \quad (8.5)$$

Здесь $f_1 = 0$, $f_2 = g$, g – ускорение свободного падения, использовано уравнение состояния для плотности вида $\rho = \tilde{\rho}(1 + \beta(\theta - \theta^\circ))$, $\tilde{\rho}$ – значение плотности при температуре θ° , β – температурный коэффициент расширения жидкости ($\beta > 0$); $\Delta = \partial/\partial X^2 + \partial/\partial Y^2$. Далее знак “~” будем опускать.

В состоянии равновесия система уравнений (8.1)–(8.5) допускает решение, зависящее только от Y ($p = p_0(Y)$, $\theta = \theta_0(y)$, $\alpha = \alpha_0(y)$), которое находится из уравнений (здесь штрих означает дифференцирование по Y)

$$-p'_0 + \rho g \beta \theta_0 = 0, \quad \alpha''_0 = 0, \quad \theta''_0 = 0, \quad (8.6)$$

и при учете краевых условий

$$\begin{aligned} \theta_0(h) &= -\theta_*, & \theta_0(-h) &= \theta_*, \\ \alpha_0(h) &= \alpha_B, & \alpha_0(-h) &= \alpha_H, \end{aligned} \quad (8.7)$$

дается формулами

$$\theta_0 = -\theta_* \frac{Y}{h}, \quad \alpha_0 = -A \frac{Y}{h} \quad (A = (\alpha_B - \alpha_H)/2). \quad (8.8)$$

Распределение давления p_0 определяется уравнениями (8.6) с учетом уравнений (8.8).

Для исследования устойчивости механического равновесия плоского бесконечного горизонтального слоя используем метод малых возмущений. Для этого рассмотрим малые нестационарные возмущения $\theta_0 + \tau$, v_1 , v_2 , $\alpha_0 + a$, $p_0 + p$, ω . Подставляя малые возмущения в систему уравнений (8.1)–(8.5) и линеаризуя по τ , v_1 , v_2 , a , p , ω , получим систему уравнений для возмущений:

$$-\frac{\partial p}{\partial X} + \mu_1 \Delta v_1 + (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \nu_1 \alpha'_0 \frac{\partial^2 a}{\partial X \partial Y} = \rho \frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad (8.9)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial Y} + \mu_1 \Delta v_2 - (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial \omega}{\partial X} - \quad (8.10)$$

$$-\nu_1 \alpha'_0 \left(2 \frac{\partial^2 a}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial X^2} \right) + \rho g \beta \tau = \rho \frac{\partial v_2}{\partial t},$$

$$\eta_1 \Delta \omega + \nu_1 \Delta a + (\mu_1 - \mu_2) \left(\frac{\partial v_2}{\partial X} - \frac{\partial v_1}{\partial Y} - 2\omega \right) = j \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}, \quad (8.11)$$

$$\omega = \frac{\partial a}{\partial t} + \alpha'_0 v_2, \quad \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial Y} = 0, \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + T'_0 v_2 = \chi \Delta \tau. \quad (8.13)$$

Приведем систему уравнений к безразмерному виду. Для этого за единицы измерения расстояния, времени, скорости, частоты, давления и температуры выберем соответственно h , $\frac{\rho h^2}{\mu_1}$, $\frac{\mu_1}{\rho h}$, $\frac{\mu_1}{\rho h^2}$, $\frac{\mu_1^2}{\rho h^2}$, θ_* . Система уравнений (8.9)–(8.13) примет вид

$$-\frac{\partial p}{\partial X} + \Delta v_1 + S_1 \frac{\partial \omega}{\partial Y} - S_2 \alpha'_0 \frac{\partial^2 a}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad (8.14)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial Y} + \Delta v_2 - S_1 \frac{\partial \omega}{\partial X} - \quad (8.15)$$

$$-S_2 \alpha'_0 \left(2 \frac{\partial^2 a}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial X^2} \right) + \text{Gr} \tau = \frac{\partial v_2}{\partial t},$$

$$\Delta \omega + S_4 \Delta a + S_1 S_3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial X} - \frac{\partial v_1}{\partial Y} - 2\omega \right) = S_5 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}, \quad (8.16)$$

$$\omega = \frac{\partial a}{\partial t} + \alpha'_0 v_2, \quad \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial Y} = 0, \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + T'_0 v_2 = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \tau. \quad (8.18)$$

При этом для новых безразмерных величин сохраним старые обозначения.

Профили температуры и угла ориентации микроструктуры (8.8)

для случая механического равновесия в безразмерных переменных запишутся в следующем виде

$$\theta_0 = -Y, \quad \alpha_0 = -AY. \quad (8.19)$$

Входящие в уравнения (8.14)–(8.18) безразмерные параметры определяются формулами

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1}, \quad S_2 = \frac{\rho\nu_1 h^2}{\mu_1^2}, \quad S_3 = \frac{\mu_1 h^2}{\eta_1}, \\ S_4 &= \frac{\rho\nu_1 h^2}{\eta_1 \mu_1}, \quad S_5 = j \frac{\mu_1}{\rho\eta_1}, \\ \text{Gr} &= \frac{\rho^2 g \beta \theta h^3}{\mu_1^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu_1}{\rho\chi}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Здесь Gr и Pr – числа Грасгофа и Прандтля соответственно.

Сформулируем теперь граничные условия. Так как, температура и угол ориентации микроструктуры на границах слоя фиксированы то, следовательно, возмущения температуры, угла ориентации микроструктуры и угловой скорости микрочастиц на границах слоя исчезают. Кроме этого, на твердых границах слоя возмущения скорости обращаются в нуль. Таким образом, граничные условия при $Y = \pm 1$ примут вид

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \tau = 0, \quad a = 0, \quad \omega = 0. \quad (8.21)$$

Определим функцию тока для плоских возмущений соотношениями

$$v_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad v_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial X}. \quad (8.22)$$

Учитывая (8.19), получим из системы уравнений (8.14)–(8.18) систему уравнений следующего вида:

$$\Delta \Delta \Psi - S_1 \Delta \omega + S_2 A \frac{\partial}{\partial X} \Delta a + \text{Gr} \frac{\partial \tau}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi, \quad (8.23)$$

$$\Delta \omega + S_4 \Delta a + S_1 S_3 (\Delta \Psi - 2\omega) = S_5 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}, \quad (8.24)$$

$$\omega = \frac{\partial a}{\partial t} - A \frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \tau. \quad (8.25)$$

Граничные условия при $Y = \pm 1$ для системы уравнений (8.23)–(8.25) запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \quad \tau = 0, \quad a = 0, \quad \omega = 0. \quad (8.26)$$

По аналогии с [15, 16] будем искать решение задачи (8.23)–(8.26) в виде так называемых нормальных возмущений:

$$\begin{aligned} \Psi(X, Y, t) &= \tilde{\Psi}(Y) \exp(-\lambda t + ikX), \\ \omega(X, Y, t) &= \tilde{\omega}(Y) \exp(-\lambda t + ikX), \\ a(X, Y, t) &= \tilde{a}(Y) \exp(-\lambda t + ikX), \\ \tau(X, Y, t) &= \tilde{\tau}(Y) \exp(-\lambda t + ikX), \end{aligned} \quad (8.27)$$

где $\tilde{\Psi}(Y)$, $\tilde{\omega}(Y)$, $\tilde{a}(Y)$, $\tilde{\tau}(Y)$ – амплитуды возмущений, λ – декремент возмущений, k – вещественное волновое число, характеризующее периодичность возмущений в горизонтальном направлении. Подставляя (8.27) в (8.23)–(8.25), получим систему уравнений для амплитуд в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{(IV)} - k^2 \tilde{\Psi}'' + k^4 \tilde{\Psi} - S_1 (\tilde{\omega}'' - k^2 \tilde{\omega}) + \\ + ikS_2 A (\tilde{a}'' - k^2 \tilde{a}) + ikGr\tilde{\tau} = -\lambda (\tilde{\Psi}'' - k^2 \tilde{\Psi}), \end{aligned} \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}'' - k^2 \tilde{\omega} + S_4 (\tilde{a}'' - k^2 \tilde{a}) + \\ + S_1 S_3 (\tilde{\Psi}'' - k^2 \tilde{\Psi} - 2\tilde{\omega}) = \lambda^2 S_5 \tilde{a}, \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\tilde{\omega} = \lambda \tilde{a} - ikA\tilde{\Psi}, \quad (8.30)$$

$$\lambda \tilde{\tau} - ik\tilde{\Psi} = \frac{1}{Pr} (\tilde{\tau}'' - k^2 \tilde{\tau}). \quad (8.31)$$

Граничные условия (8.26) примут вид:

$$\tilde{\Psi}' = 0, \quad \tilde{\Psi} = 0, \quad \tilde{\tau} = 0, \quad \tilde{a} = 0, \quad \tilde{\omega} = 0. \quad (8.32)$$

Система уравнений (8.28)–(8.32) имеет нетривиальные решения при определенных значениях декрементов возмущений λ , которые являются собственными числами этой краевой задачи. Они зависят от

числа Грасгофа Gr, числа Прандтля Pr и других параметров, определенных выше формулами (8.25). Граница устойчивости в случае монотонно изменяющихся возмущений находится из условия

$$\lambda(\text{Gr}, \text{Pr}, A, k, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) = 0.$$

Далее рассмотрим монотонно изменяющиеся со временем возмущения. Для этого в системе уравнений (8.28)–(8.31) положим декремент λ равным нулю, получим:

$$\tilde{\Psi}^{(IV)} - k^2 \tilde{\Psi}'' + k^4 \tilde{\Psi} - S_1 (\tilde{\omega}'' - k^2 \tilde{\omega}) + \quad (8.33)$$

$$+ ik S_2 A (\tilde{a}'' - k^2 \tilde{a}) + ik \text{Gr} \tilde{\tau} = 0, \quad (8.34)$$

$$\tilde{\omega}'' - k^2 \tilde{\omega} + S_4 (\tilde{a}'' - k^2 \tilde{a}) +$$

$$+ S_1 S_3 (\tilde{\Psi}'' - k^2 \tilde{\Psi} - 2\tilde{\omega}) = 0,$$

$$\tilde{\omega} = -ikA\tilde{\Psi}, \quad \frac{1}{\text{Pr}} (\tilde{\tau}'' - k^2 \tilde{\tau}) - ik\tilde{\Psi} = 0. \quad (8.35)$$

Исключая из системы уравнений (8.33)–(8.35) амплитуды функции тока $\tilde{\Psi}$, угловой скорости вращения микрочастиц $\tilde{\omega}$ и угла ориентации микрочастиц \tilde{a} , получим обыкновенное дифференциальное уравнение с вещественными коэффициентами для амплитуды температуры $\tilde{\tau}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} & S_3 \tilde{\tau}^{(VIII)} - k^2 (A^2 + 3S_3) \tilde{\tau}^{(VI)} + \quad (8.36) \\ & + k^2 (3k^2 A^2 + 2A^2 S_1 S_3 + 4k^2 S_3) \tilde{\tau}^{(IV)} - \\ & - k^2 (3k^4 A^2 + 4k^2 A^2 S_1 S_3 + 3S_3 k^4 - S_3 \text{Pr Gr}) \tilde{\tau}^{(II)} + \\ & + k^4 (k^4 A^2 + 2k^2 A^2 S_1 S_3 + k^4 S_3 - S_3 \text{Pr Gr}) \tilde{\tau} = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия для уравнения (8.36) запишутся таким образом:

$$\begin{aligned} & S_3 \tilde{\tau}^{(VI)} - k^2 (A^2 + 2S_3) \tilde{\tau}^{(IV)} = 0, \quad (8.37) \\ & \tilde{\tau}^{(III)} - k^2 \tilde{\tau}' = 0, \quad \tilde{\tau}'' = 0, \quad \tilde{\tau} = 0. \end{aligned}$$

Собственные значения краевой задачи (8.36), (8.37) будем определять методом пошагового интегрирования с ортогонализацией [16].

Для нахождения критических значений числа Грасгофа, при достижении которых происходит переход слоя жидкости от устойчивого состояния к неустойчивому, будем использовать следующие значения параметров, входящих в уравнения задачи (8.36), (8.37):

$$S_1 = -1; 0; 1/2; \quad S_3 = 1; \quad A = 0.1; \pi/4; \pi/2; 3\pi/4; \pi; \quad \text{Pr} = 0.01.$$

В уравнение (8.36) числа Грасгофа и Прандтля входят в виде произведения, поэтому Pr можно считать фиксированным. Значения параметра A соответствуют различным значениям, определяющим разницу между углами ориентации на границах слоя, и определяют закрученность микроструктуры. Критические значения числа Грасгофа Gr и соответствующие им значения волновых чисел k для различных значений параметров приведены ниже в табл. 2.1. Графики зависимости числа Грасгофа Gr от волнового числа k приведены на рис. 8.2 для различных значений параметров жидкости. Стрелкой показано направление возрастания параметра закрученности микроструктуры A .

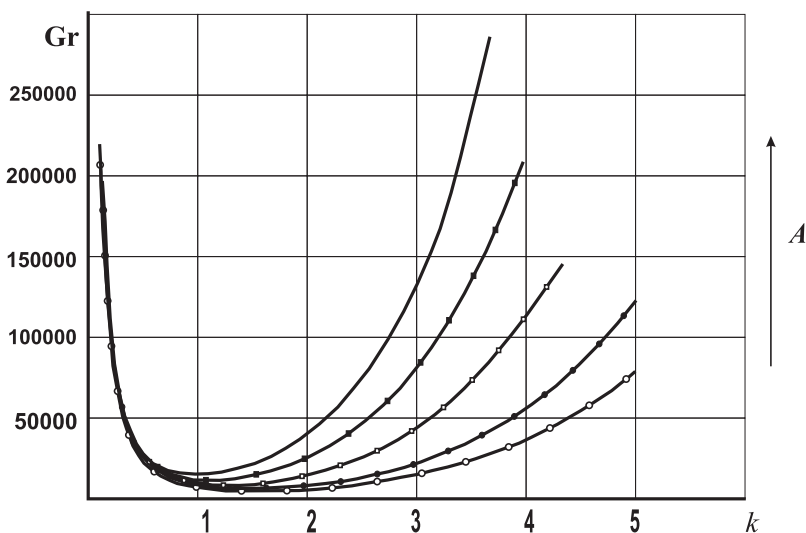


Рис. 8.2. Нейтральные кривые для вязкоупругой микрополярной жидкости. Случай твердых границ.

A	Gr_{min}	k_{min}	A	Gr_{min}	k_{min}	A	Gr_{min}	k_{min}
0.1	9160.12	1.64	0.1	9170.58	1.63	0.1	9175.80	1.63
$\pi/4$	10216.98	1.51	$\pi/4$	10809.66	1.49	$\pi/4$	11102.75	1.48
$\pi/2$	12690.04	1.32	$\pi/2$	14771.32	1.27	$\pi/2$	15790.31	1.25
$3\pi/4$	15811.35	1.17	$3\pi/4$	20065.59	1.11	$3\pi/4$	22142.02	1.09
π	19329.15	1.06	π	26398.51	1.00	π	26398.52	1.00

 $S_1 = -1$ $S_1 = 0$ $S_1 = 1/2$

Таблица 8.1. Критические параметры монотонной неустойчивости. Твердые границы. $Pr = 0.01$ и $S_3 = 1$.

Аналогично может быть исследован случай смешанных краевых условий, когда одна из границ слоя свободная, например верхняя, а другая граница (нижняя) – твердая. Критические значения числа Грасгофа Gr и соответствующие им значения волновых чисел k для случая слоя со смешанными границами приведены в табл. 2.2. Нейтральные кривые в этом случае имеют такой же вид, как и нейтральные кривые для слоя с твердыми границами.

Проведенный анализ зависимости критического числа Грасгофа Gr от параметров, характеризующих вещество жидкости и от волнового числа k , показал, что с увеличением значения параметра S_1 увеличиваются и критические значения числа Грасгофа Gr , а минимум на нейтральных кривых смещается в сторону коротковолновых возмущений. При этом чем сильнее начальное искривление микроструктуры жидкости (чем больше значение параметра A), тем больший перепад температур требуется для потери устойчивости. Слой жидкости со смешанным типом границ обладает меньшей устойчивостью по сравнению со слоем с твердыми границами.

Приведем результаты анализа зависимости критических значений чисел Рэлея $Ra(k)$ для слоя со свободными границами. Граничные условия в случае свободных границ примут вид

$$v_2 = 0, \quad v_2^{(II)} = 0, \quad v_2^{(IV)} = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при} \quad Y = 0 \quad \text{и} \quad Y = h. \quad (8.38)$$

Как и в случае обычной ньютоновской жидкости [15], для граничных условий (8.38) решение задачи оказывается элементарным, и

A	Gr_{min}	k_{min}	A	Gr_{min}	k_{min}	A	Gr_{min}	k_{min}
0.1	5642.53	1.41	0.1	5651.65	1.41	0.1	5656.21	1.41
$\pi/4$	6351.20	1.31	$\pi/4$	6874.50	1.28	$\pi/4$	7133.16	1.27
$\pi/2$	8040.27	1.14	$\pi/2$	9912.84	1.09	$\pi/2$	10830.25	1.07
$3\pi/4$	10212.77	1.01	$3\pi/4$	14098.30	0.95	$3\pi/4$	15997.57	0.93
π	12699.05	0.91	π	19228.87	0.85	π	22421.49	0.83

 $S_1 = -1$ $S_1 = 0$ $S_1 = 1/2$

Таблица 8.2. Критические параметры монотонной неустойчивости. Смешанный тип границ. $Pr = 0.01$ и $S_3 = 1$.

собственные функции задачи имеют вид простых гармоник

$$v_2 = a_n \sin(\pi n Y), \quad \tau = b_n \sin(\pi n Y) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (8.39)$$

где n определяет характерный масштаб возмущений по вертикали, a_n и b_n – некоторые коэффициенты.

Рассматривая монотонно изменяющиеся со временем возмущения в единичном слое вязкоупругой микрополярной жидкости подогреваемого снизу ($Ra > 0$) и пользуясь тем, что собственные функции задачи имеют вид (8.39), получим следующие выражения для критических чисел Рэлея Ra^*

$$\begin{aligned} Ra_1^* = & (S_3 (\pi^6 n^6 + k^2 \pi^4 n^4) + k^2 (2S_3 + S_2 S_5) (\pi^4 n^4 + k^2 \pi^2 n^2) + \\ & + k^2 (k^2 S_3 + k^2 S_2 S_5 + 2S_2 S_4 S_5) (\pi^2 n^2 + k^2) / k^2 S_3, \end{aligned} \quad (8.40)$$

$$\begin{aligned} Ra_2^* = & (\pi^6 n^6 + k^2 \pi^4 n^4 + (2k^2 + 2S_4 - S_1 S_4) (\pi^4 n^4 + k^2 \pi^2 n^2) + \\ & + k^2 (k^2 + 2S_4 - S_1 S_4) (\pi^2 n^2 + k^2)) (\pi^2 n^2 + k^2) / \\ & / (k^2 (\pi^2 n^2 + k^2 + 2S_4)). \end{aligned} \quad (8.41)$$

Здесь введены параметры

$$\begin{aligned} Ra = & \rho g \beta \frac{A h^4}{\mu_1 \chi}, \quad S_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1}, \quad S_2 = \nu_1 \rho \frac{B h}{\mu_1^2}, \\ S_3 = & \nu_1 \rho \frac{h^2}{\eta_1 \mu_1}, \quad S_4 = \frac{(\mu_1 - \mu_2) h^2}{\eta_1}, \quad S_5 = B h, \quad S_6 = \frac{j \mu_1}{\rho \eta_1}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Формулы (8.40) и (8.41) определяют нейтральные кривые в плоскости (Ra, k) , разграничивающие области устойчивости ($k < Ra(k)$) и неустойчивости ($k > Ra(k)$) соответственно для случая вязкоупругой микрополярной жидкости и вязкой микрополярной жидкости. Для любого n нейтральная кривая $Ra(k)$ имеет минимум, и при всех k наименьшее значение имеет число Рэлея для $n = 1$. Возмущениям, имеющим меньший масштаб по вертикали ($n > 1$), соответствуют более высокие значения чисел Рэлея.

Полученные значения критических чисел Рэлея и соответствующих ему волновых чисел приведены в табл. 2.3 для вязкоупругой жидкости.

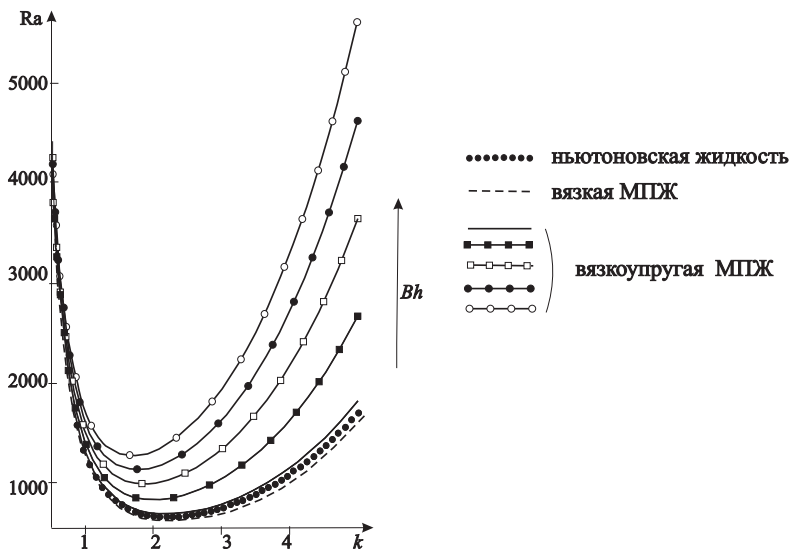


Рис. 8.3. Нейтральные кривые. Случай свободных границ.

Графики зависимости числа Рэлея Ra от волнового числа k приведены на рис. 8.3 для характерных значений параметров жидкости. На рис. 8.3 стрелкой показано направление возрастания параметра закрученности микроструктуры $S_5 \equiv Bh$, который изменялся от 0.1 до

S_4	S_5	Ra^*	k^*
-1	0.1	676.26	2.19
-1	$\pi/4$	796.23	2.02
-1	$\pi/2$	921.47	1.89
-1	$3\pi/4$	1038.53	1.79
-1	π	1149.92	1.72
0	0.1	679.19	2.19
0	$\pi/4$	818.09	2.01
0	$\pi/2$	963.57	1.87
0	$3\pi/4$	1100.02	1.78
0	π	1230.29	1.70
1/2	0.1	680.66	2.19
1/2	$\pi/4$	828.99	2.00
1/2	$\pi/2$	984.54	1.86
1/2	$3\pi/4$	1130.64	1.77
1/2	π	1270.30	1.69

Таблица 8.3. Минимальные критические числа Рэлея и волновые числа вязкоупругой микрополярной жидкости при $S_2 = 10^{-6}$ и $S_3 = 10^{-6}$ ($n = 1$, $h = 1$) .

π . Этот параметр определяет степень начального искривления микроструктуры. Значение $S_5 = 0$ соответствует отсутствию начального поворота частиц жидкости.

Проведенный анализ зависимости $Ra(k)$ показал, что учет вязкоупругих эффектов приводит к повышению числа Рэлея по сравнению со случаем чисто вязкой микрополярной жидкости и вязкой ньютоновской жидкостей. При этом чем сильнее начальное искривление микроструктуры жидкости, тем больший перепад температур требуется для потери устойчивости, а значение волнового числа k^* , соответствующее Ra^* , уменьшается. Заметим, что случай вязкой микрополярной жидкости оказывается более неустойчивым (число Рэлея меньше) по сравнению со случаем обычной жидкости, что согласуется с результатами [79].

Таким образом, показано, что учет эффектов вязкоупругости приводит к повышению порога устойчивости по сравнению со случаями ньютоновской и вязкой микрополярной жидкости. Это означает, что учет эффектов ориентационной упругости, подобных присутствующим в гидромеханике жидких кристаллов, оказывает стабилизирующее действие при переходе к конвективному течению.

Глава 9

Распространение поверхностных волн в упругой микрополярной жидкости

В этой главе исследована задача о распространении поверхностных волн в плоском слое упругой микрополярной жидкости. В связи с волновыми процессами в микрополярных средах следует отметить широкий спектр исследований волновых процессов, проведенный в [39], где в том числе рассмотрены и некоторые волновые задачи гидродинамики вязкой микрополярной гидродинамики. Сходная задача распространения сдвиговой волны на границе раздела вязкой микрополярной жидкости и упругого тела исследована в [40].

Рассмотрим движение микрополярной жидкости в плоском слое со свободной границей (рис. 9.1). В случае плоской задачи ориентация частиц микрополярной жидкости определяется одним параметром – углом поворота $\alpha(X, Y, t)$ триэдра \mathbf{D}_k вокруг некоторой оси, для определенности совпадающей с направлением $\mathbf{D}_3 \equiv \mathbf{i}_3$, поля скорости даются формулами $\mathbf{v} \equiv v_1(X, Y, t)\mathbf{i}_1 + v_2(X, Y, t)\mathbf{i}_2$, $\boldsymbol{\omega} \equiv \omega(X, Y, t)\mathbf{i}_3$, тензор кривизны \mathbf{V} равен $(\text{Grad } \alpha) \otimes \mathbf{i}_3$ ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – координатные орты) (см. раздел 4.2). С учетом сделанных предположений и соотношений (3.32) уравнения (3.23) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial X} - \mu \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X} \left(2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y} \right) = \\ = \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } v_1 \right), \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial Y} - \mu \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y} \left(2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial X} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y} \right) - \rho g = \\
 = \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } v_2 \right),
 \end{aligned}$$

$$\mu \Delta \alpha = j \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } \omega \right), \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial Y} = 0.$$

Эти уравнения являются частным случаем уравнений (8.1)–(8.5).

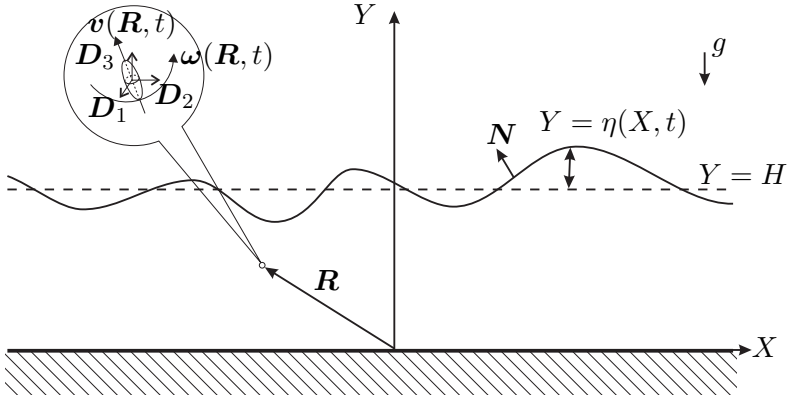


Рис. 9.1. Слой микрополярированной жидкости со свободной границей.

На нижней границе слоя ($Y = 0$) будем считать выполненными соотношения

$$v_2 = 0, \quad \omega = 0 \quad (\alpha = \text{const}), \quad (9.2)$$

а на свободной границе ($Y = \eta(X, t)$) потребуем обращения в нуль векторов напряжений и моментов:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = 0.$$

С учетом формул [83] для вектора нормали к свободной поверхности

$$\mathbf{N} = \frac{1}{|\text{Grad}(Y - \eta(X, t))|} (i_2 - \text{Grad } \eta)$$

и уравнений состояния (3.21), (3.32) получим динамические условия на свободной границе

$$p = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial Y} - \frac{\partial \eta}{\partial X} \frac{\partial \alpha}{\partial X} = 0. \quad (9.3)$$

На свободной границе возможно также задание ориентации частиц жидкости (т.е. задание угла поворота α). Это соотношение аналогично условию сильной ориентации в гидромеханике жидких кристаллов [41, 78]. В этом случае динамические условия принимают вид

$$p + \frac{\mu}{|\text{Grad}(Y - \eta(X, t))|} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y} - \frac{\partial \eta}{\partial X} \frac{\partial \alpha}{\partial X} \right)^2 = 0, \quad \alpha = \alpha_H, \quad (9.4)$$

где α_H известна.

Кинематическое условие, необходимое для определения свободной поверхности (функции $\eta(X, t)$), имеет стандартный вид [58, 83]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \eta}{\partial X} = v_2. \quad (9.5)$$

Рассмотрим равновесные решения системы (9.1) при учете краевых условий (9.2), (9.5), (9.3) или (9.4). Нетрудно убедиться, что при выполнении краевых условий (9.3) существует только постоянное решение: $\alpha = \text{const}$, в то время как выполнение (9.4) приводит к решению для α , зависящему от координат: $\alpha = \alpha_0 + AY$, где $A = (\alpha_H - \alpha_0)/H$, α_0 — значение α при $Y = 0$.

Линеаризованная в окрестности равновесного решения краевая задача (9.1)–(9.5) описывает распространение волн бесконечно малой амплитуды в слое упругой микрополярной жидкости и дается формулами

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial X} - \mu A \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y} &= \rho \frac{\partial v_1}{\partial t}, \\ -\frac{\partial p}{\partial Y} - \mu A \left(2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} \right) &= \rho \frac{\partial v_2}{\partial t}, \\ \mu \Delta \alpha &= j \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + j A \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial Y} = 0, \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned}
v_2 = 0, \quad \alpha = 0 \quad \text{при } Y = 0, \\
p - \rho g \eta = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = 0 \\
\text{или} \\
p - \rho g \eta + 2\mu A \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = 0, \quad \alpha + A \eta = 0, \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} = v_2 \quad \text{при } Y = H.
\end{aligned} \tag{9.7}$$

Здесь для бесконечно малых возмущений полей линейной и угловой скорости, давления и угла поворота сохранены прежние обозначения. Первая пара краевых условий в (9.7) соответствует граничным уравнениям (9.3), для которых начальное решение постоянно ($A = 0$). Вторая пара уравнений в (9.7) представляет собой линеаризацию (9.4), где $A \neq 0$.

При $A = 0$ система уравнений (9.6), (9.7) распадается на две независимые краевые задачи для p , v_1 , v_2 и α соответственно. Первая из них описывает волны на поверхности несжимаемой жидкости [58, 83], а распространение волны микровращения описывается волновым уравнением. При этом наличие микроструктуры жидкости не оказывает воздействия на поверхностные волны.

Случай $A \neq 0$ оказывается более сложным, здесь поля p , v_1 , v_2 и α определяются совместно.

Следуя [83], введем потенциал скорости $\mathbf{v} = \text{Grad } \varphi$. Решение (9.6), (9.7) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
p &= P(Y)e^{i(kX - \Omega t)}, \\
\varphi &= \Phi(Y)e^{i(kX - \Omega t)}, \\
\alpha &= \Lambda(Y)e^{i(kX - \Omega t)}, \\
\eta &= Ne^{i(kX - \Omega t)},
\end{aligned}$$

где k – волновое число, Ω – частота. Для неизвестных функций $P(Y)$, $\Phi(Y)$, $\Lambda(Y)$ из (9.6) следует система обыкновенных дифференциаль-

ных уравнений

$$-ikP' - \mu Aik\Lambda' = k\Omega\rho\Phi, \quad (9.8)$$

$$-P' - \mu A(2\Lambda' - k^2\Lambda) = -i\Omega\rho\Phi',$$

$$\mu(\Lambda'' - k^2\Lambda) = -\Omega^2 j\Lambda - ijA\Omega\Phi'.$$

Здесь штрихом обозначена производная по Y .

Краевые условия на дне (при $Y = 0$) сводятся к соотношениям

$$\varphi'(0) = 0, \quad \Lambda(0) = 0, \quad (9.9)$$

а на свободной поверхности (при $Y = H$) – к уравнениям

$$P - \rho gN + 2\mu A\Lambda' = 0, \quad \Lambda + AN = 0, \quad -i\Omega N = \Phi'.$$

Решение (9.8)–(9) дается формулами

$$\Lambda = \Lambda_0 \operatorname{sh} kY,$$

$$\Phi = \frac{i\Omega}{Ak} \Lambda_0 \operatorname{ch} kY, \quad P = -\left(\mu Ak + \frac{\rho\Omega^2}{Ak}\right) \Lambda_0 \operatorname{ch} kY,$$

где Λ_0 – произвольная постоянная. При этом должно быть выполнено дисперсионное соотношение, связывающее частоту Ω с волновым числом k :

$$\Omega^2 = gk \operatorname{th} kH + \frac{\mu A^2}{\rho} k^2. \quad (9.10)$$

Сравнивая дисперсионное уравнение (9.10) с аналогичным уравнением для случая обычной жидкости [58, 83], можно сказать, что влияние сильной ориентации частиц микрополярной жидкости на свободной поверхности эквивалентно действию поверхностного натяжения, равного $\frac{\mu A}{k \operatorname{th} kH}$ и зависящего от волнового числа, т.е. более сложной зависимости поверхностной энергии от микродеформации жидкости в окрестности границы раздела. Дисперсионные кривые и графики отношения групповой скорости C к фазовой с представлены на рис. 9.2 для разных значений параметра $\vartheta = \frac{\mu A^2}{\rho gH}$. Кривым 1–4 соответствуют значения ϑ , равные 0, 0.01, 0.1 и 1. Значение $\vartheta = 0$ соответствует

случаю невязкой несжимаемой жидкости [83]. Из рис. 9.2 видно, что влияние микрополярных свойств наиболее сильно проявляется для капиллярных волн, длина которых мала ($kH \rightarrow \infty$).

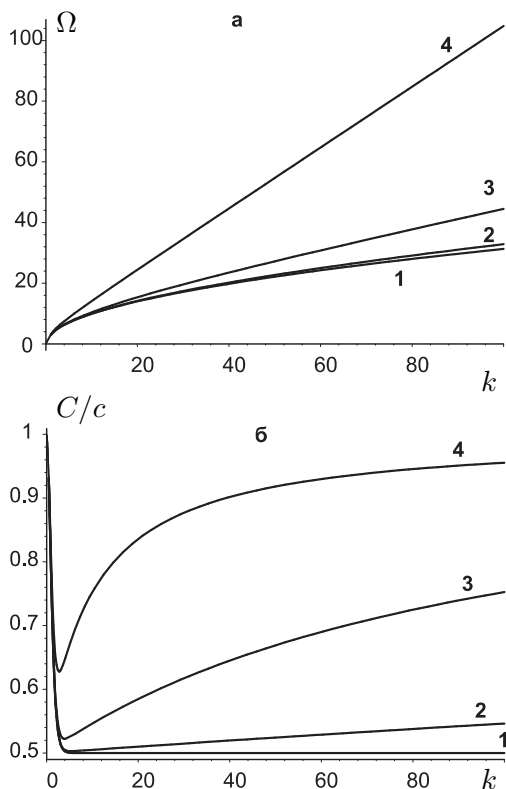


Рис. 9.2. Дисперсионные кривые (а) и отношение групповой скорости к фазовой (б) для разных значений параметра ϑ .

Полученные в этом параграфе результаты представляют интерес в частности для разработки ультразвуковых методов экспериментального определения свойств жидкостей и растворов, аналогичных описанным в [86].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альтенбах Х., Жилин П. А.* Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики. 1988. Т. 11. Вып. 4. С. 107–148.
2. *Амбарцумян С. А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. 214 с.
3. *Анисимов М. А.* Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. М.: Наука, 1987. 272 с.
4. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 311 с.
5. *Атоян А. А., Саркисян С. О.* Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин // Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104. № 2. С. 18–33.
6. *Ахвердиев К. С., Колобов И. А., Ялышев Р. Г.* Гидродинамический расчет металлополимерного подшипника, работающего в режиме полужидкостного трения с микрополярным смазочным материалом // Трение и износ. 2003. Т. 24. № 6.
7. *Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2. №7. С. 1399–1409.
8. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидромеханика // ПММ. 1965. Т.29. № 2. С. 297–308.
9. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н.* Гидромеханика жидких кристаллов // Итоги науки и техники. Гидромеханика. Т. 7. М.: ВИНТИ, 1973. С. 106–213.
10. *Белов К. Л., Еремеев В. А.* О конвективной неустойчивости пространственного слоя вязкоупругой микрополярной жидкости // Вестник ЮНЦ РАН. 2008. Т. 4. № 4. С. 3–8.
11. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
12. *Бессонов Н. М., Аэро Э. Л.* Моментная гидродинамическая теория трения // Трение и износ. 1993. Т. 14. № 1. С. 107–111.

13. Буссе Ф. Г. Переход к турбулентности в конвекции Рэлея–Бенара // В кн. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Под ред. Х. Суинни, Дж. Голуба. М.: Мир, 1984. С. 124–168.
14. Геннис Р. Биомембраны. Молекулярная структура и функции. М., 1997. 624 с.
15. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
16. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
17. Гиббс Дж. В. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. 584 с.
18. Грекова Е. Ф., Жилин П. А. Уравнения нелинейных упругих полярных сред // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. С. 24–46.
19. Гринфельд М. А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
20. Джозеф Дж. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 639 с.
21. Динариев О. Ю., Николаевский В. Н. Определяющие соотношения для вязкоупругой среды с микровращениями // ПММ. 1997. Т. 61. № 6. С. 1023–1030.
22. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760 с.
23. Дудников В. А., Назаров С. А. Асимптотически точные уравнения тонких пластин на основе теории Коссера // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 2. С. 306–309.
24. Егоров Ю. В., Шубин М. А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории / В кн. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 30. Дифференциальные уравнения с частными производными–1. ВИНТИ, 1987. С. 1–262.

25. *Елисеев В. В.* Механика упругих тел. СПб: СПбГТУ, 1999. 341 с.
26. *Еремеев В. А.* Некоторые задачи устойчивости микрополярной жидкости, находящейся в магнитном поле // Труды 4 Межд. конф. "Современные проблемы механики сплошной среды". Т.1. Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ. 1999. С. 137–141.
27. *Еремеев В. А.* Некоторые задачи устойчивости равновесия упругой микрополярной жидкости // Тез. II Белорусского конгресса по теорет. и прикл. Механике "Механика-99" Минск. Беларусь. 28-30.06.1999. Гомель: ИММ НАНБ, 1999. С. 153–154.
28. *Еремеев В. А.* Фазовые превращения в сильно деформированных нематических жидких кристаллах // Математ. моделирование систем и проц. 2002. Вып. 10. С. 26–31.
29. *Еремеев В. А.* Волны ускорения в упругих микрополярных средах // Докл. РАН. 2005. Т. 401. № 5. С. 623–625.
30. *Еремеев В. А.* О локальной группе материальной симметрии в механике микрополярных сред // Математ. моделирование систем и проц. 2006. № 14. С. 62–73.
31. *Еремеев В. А., Zubov Л. М.* Условия фазового равновесия в нелинейно-упругих средах с микроструктурой // Докл. АН (Россия). 1992. Т. 322. № 6. С. 1052–1056.
32. *Еремеев В. А., Zubov Л. М.* Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 181–190.
33. *Еремеев В. А., Zubov Л. М.* Теория упругих и вязкоупругих микрополярных жидкостей // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 801–815.
34. *Еремеев В. А., Zubov Л. М.* Общая нелинейная теория упругих микрополярных оболочек // Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. Нелин. пробл. мех. сплошных сред. С. 124–169.
35. *Еремеев В. А., Zubov Л. М.* Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 288 с.

36. *Еремеев В. А., Сухов Д. А.* О конвективной неустойчивости вязкоупругой микрополярной жидкости // Тр. Международной школы-семинара “Симметрия и коссимметрия в теории бифуркаций и фазовых переходов”. Сочи. 27.08–2.09.2002. С. 55–59.
37. *Еремеев В. А., Сухов Д. А.* Конвективная неустойчивость плоского слоя вязкоупругой микрополярной жидкости со свободными границами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2003. № 4. С. 24–27.
38. *Еремеев В. А., Сухов Д. А.* Конвективная неустойчивость плоского слоя вязкоупругой микрополярной жидкости // Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. С. 101–109.
39. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: МГУ, 1999. 328 с.
40. *Ерофеев В. И., Солдатов И. Н.* Поверхностная сдвиговая волна на границе упругого тела с микрополярной жидкостью // ПММ. 1999. Т.63. № 2. С. 289–294.
41. *Жен де П.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1982. 304 с.
42. *Жилин П. А.* Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–46.
43. *Жилин П. А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб: Нестор, 2001, 275 с.
44. *Жилин П. А.* Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. пособие. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.
45. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы и инвариантные интегралы для нелинейно-упругих тел с моментными напряжениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 10–16.
46. *Зубов Л. М., Еремеев В. А.* Уравнения вязкоупругой микрополярной жидкости // Докл. АН (Россия). 1996. Т. 351. № 4. С. 472–475.
47. *Зубов Л. М., Еремеев В. А.* Механика упругих микрополярных оболочек // Дальневосточный математический журнал. 2003. Т. 4. № 2. С. 182–225.

48. *Зубов Л. М., Карякин М. И.* Тензорное исчисление. Основы теории. М.: Вузовская книга, 2006. 120 с.
49. *Зубов Л. М., Филиппова Л. М.* Дисклинации в упругой микрополярной жидкости // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды 3-й международной конференции. Т.1. Ростов-на-Дону. МП "Книга". 1997. С. 193–197.
50. *Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф., Фирсова А. Д.* Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 6. С. 764–768.
51. *Ивенси И., Скейлак Р.* Механика и термодинамика биологических мембран. М.: Мир, 1982. 304 с.
52. *Илюхин А. А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наукова думка, 1979. 216 с.
53. *Кагава Ясую.* Биомембраны. М.: Мир, 1985. 303 с.
54. *Кац Е. И., Лебедев В. В.* Динамика жидких кристаллов. М.: Наука, 1988. 144 с.
55. *Каюк Я. Ф., Жуковский А. П.* К теории пластин и оболочек на основе концепции поверхностей Коссера // Прикладн. механика. 1981. Т. XVII. № 10. С. 80–85.
56. *Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л.* Континуальная теория асимметрической упругости // ФТТ. 1969. Т. 5. № 9. С. 2591–2598.
57. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 416 с.
58. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 599 с.
59. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: в 10-ти т. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
60. *Листров А. Т.* О модели вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений // ПММ. 1967. Т. 31. № 1. С. 112–115.
61. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

62. Мигун Н. П., Прохоренко П. П. Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости. Минск: Наука и техника, 1984. 264 с.
63. Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика. 1964. № 4/86. С. 80–114.
64. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
65. Мясников В. П., Гузев М. А. Геометрическая модель внутренних самоуравновешенных напряжений в твердых телах // Докл. АН (Россия). 2001. Т. 380. № 5. С. 1–3.
66. Мясников В. П., Гузев М. А., Ушаков А. А. Структурное описание материалов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. Нелин. пробл. мех. сплошных сред. С. 256–265.
67. Нго Зуй Кан, Нгуен Суан Хью. О тепловой конвекции микрополярной жидкости // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 3. С. 559–562.
68. Нгуен Ван Дьеп. Об уравнениях пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями // ПММ. 1968. Т. 32. № 4. С. 748–753.
69. Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т. О неізотермической модели несимметрических жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 5. С. 132–136.
70. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
71. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
72. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 640 с.
73. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т.28. Вып.3. С. 401–408.

74. *Петросян Л. Г.* К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей // Прикладная механика. 1976. Т. 12. № 11. С. 103–109.
75. *Петросян Л. Г.* Некоторые вопросы механики жидкостей с несимметричным тензором напряжений. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1986. 304 с.
76. *Саркисян С. О.* Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек // Изв. НАН Армении. 2005. Т. 58. № 2. С. 84–94.
77. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: в 2-х т. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
78. *Сонин А. С.* Введение в физику жидких кристаллов. М.: Наука, 1987. 320 с.
79. *Та Нгок Кау.* Некоторые математические аспекты модели микрополярной жидкости // Автореф. дисс... к. ф.-м.н. Ростов-на-Дону, 1990. 22 с.
80. *Такетоми С., Тиладзуми С.* Магнитные жидкости. М.: Мир, 1983. 272 с.
81. *Томилин М. Г.* Взаимодействие жидких кристаллов с поверхностью. СПб.: Политехника, 2001. 325 с.
82. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. М.: Мир, 1975. 592 с.
83. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
84. *Фертман В. Е.* Магнитные жидкости. Минск: Высш. школа, 1988. 184 с.
85. Физическая энциклопедия. Т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1990. С. 31–36.
86. Физическая акустика. Т. II. Ч. А. Свойства газов, жидкостей и растворов. Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1968. 488 с.
87. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
88. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 312 с.

89. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
90. Чандрасекар С. Жидкие кристаллы. М.: Мир, 1980. 344 с.
91. Шкутин Л. И. Нелинейные модели деформируемых моментных сред // ПМТФ. 1980. № 6. С. 111–117.
92. Шкутин Л. И. Механика деформаций гибких тел. Н.: Наука, 1988. 127 с.
93. Шкутин Л. И. Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 3. С. 120–132.
94. Эриксен Дж. Статика жидких кристаллов / В кн. Исследования по механике сплошных сред. М.: Мир, 1997. С. 46–123.
95. Эринген А. К. Теория микрополярной упругости / В кн. “Разрушение”. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 646–751.
96. Эринген А. К. Теория микрополярных жидкостей // Механика. М.: Мир, 1969. № 4. С. 79–93.
97. Allen S. J., de Silva C. N., Kline K. A. A theory of simple deformable directed fluids // Phys. Fluids. 1967. Vol. 10. № 12. P. 2551–2555.
98. Altenbach H., Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Rendón L. A. Acceleration waves and ellipticity in thermoelastic micropolar media // Arch. Appl. Mech. 2009. DOI 10.1007/s00419-009-0314-1.
99. Antman S. S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1995. 751 pp.
100. Bhargava R., Kumar L., Takhar H. Mixed convection from a continuous surface in a parallel moving stream of a micropolar fluid // Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 39. No 5–6. P. 407–413.
101. Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris, 1909. vi+226 pp. (Appendix, pp. 953–1173 of Chwolson’s Traite de Physique. 2nd ed., Paris).
102. Chróścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W. Statics and Dynamics of Multifold Shells: Nonlinear Theory and Finite Element Method (in Polish). Warszawa: Wydawnictwo IPPT PAN, 2004.

103. *Goldbeck-Wood G., Windle A.H.* Lattice modelling of nematodynamics // *Rheol. Acta*. 1999. Vol. 38. Pp. 548–561.
104. *De Silva C.N., Kline K.A.* Nonlinear constitutive equations for directed viscoelastic materials with memory // *Z. Angew. Math. and Phys.* 1968. Vol. 19. № 1. P. 128–139.
105. *Edelen D.G.B.* Nonlocal field theories / In: *A. C. Eringen* (ed.), *Continuum Physics*, Vol. 4. Academic Press: New York, 1976. P. 76–204.
106. *El-Hakiem M.* Effects of a transverse flows with variable viscosity in micropolar fluids // *Heat and Mass Transfer*. 1998. Vol. 34. P. 91–99.
107. *Eremeyev V. A.* Nonlinear micropolar shells: theory and applications// In: *W. Pietraszkiewicz, C. Szymczak* (eds). *Shell Structures: Theory and Applications*. London et al.: Taylor & Francis, 2005. P. 11–18.
108. *Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Rendón L. A.* On the propagation of acceleration waves in thermoelastic micropolar media // *Revista Colombiana de Matemáticas*. 2007. Vol. 41. No 2. Pp. 397–406.
109. *Eremeyev V.A. Pietraszkiewicz W.* The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions // *J. Elasticity*. 2004. Vol. 74. P. 67–86.
110. *Eremeyev V.A. Pietraszkiewicz W.* Local symmetry group in the general theory of elastic shells // *J. Elasticity*. 2006. Vol. 85. № 2. Pp. 125–152.
111. *Eremeyev V.A., Sukhov D.A.* On the convective instabilities of viscoelastic micropolar fluid // *Proc. of XXXII Summer school “Advanced Problems in Mechanics” (APM 2004)*. Saint-Petersburg. P. 128–134.
112. *Eremeyev V.A., Sukhov D.A.* Convective instabilities in thermoviscoelastic micropolar fluids // *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*. 2005. Vol. XIII. No 1. P. 31–42.
113. *Eremeyev V.A., Zubov L.M.* On constitutive inequalities in nonlinear theory of elastic shells// *ZAMM*. 2007. Vol. 87. No. 2. P. 94–101.

114. *Eriksen J.L.* Anisotropic fluids // Archives Ration. Mech. Analysis. 1960. Vol. 4. P. 231–237.
115. *Eringen A. C.* Theory of micropolar fluids // J. Math. Mech. 1966. Vol. 16. № 1. P. 1–18.
116. *Eringen A. C.* Linear theory of micropolar viscoelasticity // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. № 2. P. 191–204.
117. *Eringen A. C.* Nonlocal polar field theories // In. *A. C. Eringen* (ed.), *Continuum Physics*, Vol. 4. Academic Press: New York, 1976. P. 205–268.
118. *Eringen A. C.* A unified continuum theory of liquid crystals// ARI. 1997. Vol. 50.: Pp. 73–84.
119. *Eringen A. C., Kafadar C. B.* Polar field theories// In. *A. C. Eringen* (ed.), *Continuum Physics*, Vol. 4. New York: Academic Press, 1976. P. 1–75.
120. *Eringen A. C.* Microcontinuum field theories. I. Foundations and solids. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1999. 325 pp.
121. *Eringen A. C.* Microcontinuum field theories. II. Fluent media. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 2001. 342 pp.
122. *Faria S.H., Hutter K.* A systematic approach to the thermodynamics of single and mixed flowing media with micro structure. Part I: balance equations and jump conditions // Continuum Mech. Thermodyn. 2002. Vol. 14. Pp. 459–481.
123. *Grekova E. F.* Ferromagnets and Kelvin's medium: basic equations and wave processes // J. Computational Acoustics. 2001. Vol. 9. No 2. P. 427–446.
124. *Grekova E., Zhilin P.* Basic equations of Kelvin's medium and analogy with ferromagnets // J. Elasticity. 2001. Vol. 64. P. 29–70.
125. *Kafadar C. B., Eringen A. C.* Micropolar media// Int. J. Engng. Sci. 1971. Vol. 9. Pp. 271–305.
126. *Koiter W. T.* Couple-stresses in the theory of elasticity. Pt I–II // Proc. Koninkl. Neterland. Akad. Wetensh. 1964. Vol. B 67. № 1. P. 17 –44.

127. *Kusaba-Pietal A.* Application of micropolar fluid theory in biomechanics // Proc. Int. Conf. Mechanics-98. Rzeszow. Poland. 1998.
128. *Hassanien I. A.* Combined forced and free convection in boundary layer flow of a micropolar fluid over a horizontal plate // ZAMP. 1997. Vol. 48. P. 571–583.
129. *Leslie F. M., Laverty J. C., Carlsson N.* Continuum theory for biaxial nematic liquid crystals // In: Nonlinear Elasticity and Theoretical Mechanics. In honour of A.E.Green. Eds. *Naghdi P. M., Spencer A. J. M., England A. H.* Oxford, New York, Tokyo: Oxford University Press. 1994. P. 79–89.
130. *Libai A., Simmonds J. G.* The Nonlinear theory of elastic shells, 2nd ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press. 1998. 560 pp.
131. *Makowski J., Stumpf H.* Buckling equations for elastic shells with rotational degrees of freedom undergoing finite strain deformation // Int. J. Solids Struct. 1990. Vol. 26. Pp. 353–368.
132. *Makowski J., Pietraszkiewicz W.* Thermomechanics of shells with singular curves. Gdansk: Institute of Fluid-Flow Machinery, PAS, 2002. Zesz. Nauk. No 528/1487/2002. 100 p.
133. *Maugin G. A.* Material inhomogeneities in elasticity. London et al.: Chapman Hall. 1993. 276 p.
134. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity// Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. Vol. 16. N 1. P. 51–78.
135. *Murdoch A. I.* On criticism of the nature of objectivity in classical continuum physics // Continuum Mech. Thermodyn. 2005. Vol. 17. P. 135–148.
136. *Ngo Huy Can, Nguen Xuan Huy, Ta Ngoc Cau.* On the convective motion in a micropolar viscous fluid // Int. J. Engn. Sci. 1989. Vol. 27. № 10. P. 1183–1202.
137. *Nikitin E. N., Zubov L. M.* Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress // J. Elasticity. 1998. Vol. 51. P. 1–22.

138. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New-York, Toronto et al: Pergamon-Press. 1986. 383 pp.
139. *Perdikis C., Raptis A.* Heat transfer of a micropolar fluid by the presence of radiation // Heat and Mass Transfer. 1996. Vol. 31. P 381–382.
140. *Pietraszkiewicz W., Badur J.* Finite rotations in the description of continuum deformation // Int. J. Engng. Sci. 1983. Vol. 21. No 9. P. 1097–1115.
141. *Pietraszkiewicz W.* Teorie nieliniowe powłok / In: *Cz. Woźniak* (ed.), *Mechanika sprężystych płyt i powłok*. Warszawa, 2001. P. 424–497.
142. *Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A., Konopińska V.* Extended non-linear relations of elastic shells undergoing phase transitions // ZAMM. 2007. Vol. 87. No 2. P. 150–159.
143. *Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A.* On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum // Int. J. of Solids and Structures. 2009. Vol. 46. No 3–4. P. 774–787.
144. *Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A.* On vectorially parameterized natural strain measures of the non-linear Cosserat continuum // Int. J. of Solids and Structures. 2009. Vol. 46. No 11–12. P. 2477–2480.
145. *Pleiner H., Brand H.R.* Nonlinear hydrodynamics of strongly deformed smectic C and C* liquid crystals // Physica A. 1999. Vol. 265. P. 62–77.
146. *Pleiner H., Stannarius R., Zimmerman W.* Electrically driven instabilities in smectic liquid crystal films / In: *F.H. Busse, S.C. Müller* (eds.) LNPm 55, Berlin et al.: Springer-Verlag, 1998. P. 295–334.
147. *Rubin M.B.* Cosserat theories: shells, rods and points. (Ser.: Solid Mechanics and its applications. Vol. 79., Ed. *G.M.L. Gladwell*) Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2000. 480 p.
148. *Šilhavý M.* The mechanics and thermodynamics of continuous media. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1997. 505 p.

149. *Stavre R.* The control of the pressure for a micropolar fluid // ZAMP. 2002. Vol. 53. P. 912–922.
150. *Takhar H. S., Agarwal R. S., Bhargava R., Jain S.* Mixed convection flow of a micropolar fluid over a stretching sheet // Heat and Mass Transfer. 1998. Vol. 34. P. 213–219.
151. *Toupin R. A.* Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. Vol. 17. № 2. P. 85–112.
152. *Truesdell C., Noll W.* The nonlinear field theories of mechanics / In: Handbuch der Physik. III/3. (ed. *S. Flügge*), Berlin: Springer-Verlag, 1965. P. 1–602.
153. *Truesdell C.* Rational thermodynamics. New York: Springer-Verlag, 1984.
154. *Yeagle P. L.* The structure of biological membranes. Boca Raton: CRC Press, 1991. 1227 p.
155. *Zubov L. M.* Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1997. 205 p.

Оглавление

Введение	5
1 Кинематика континуума Коссера	10
1.1 Меры и тензоры деформаций в континууме Коссера . .	12
1.2 Тензоры кривизны микроструктуры	16
1.3 Уравнения совместности для \mathbf{B}	17
1.4 Определение векторов \mathbf{D}_k вдоль кривой	18
1.5 Относительные меры деформаций	20
1.6 Линейная и угловая скорости	21
1.7 Тензоры скоростей деформации и изгибной деформации	21
1.8 Скорости деформации более высокого порядка	24
2 Теория напряжений	26
2.1 Силы и моменты	26
2.2 Динамические законы Эйлера	28
2.3 Тензоры напряжений и моментных напряжений	29
2.4 О главных напряжениях	42
2.5 Уравнения движения	45
3 Уравнения состояния микрополярной жидкости	47
3.1 Аксиомы определяющих соотношений	48
3.2 Уравнения состояния микрополярной жидкости	49
3.3 Краевые условия	54
3.4 Уравнения упругой микрополярной жидкости	55

4	Некоторые задачи статики	63
4.1	Закрученная структура	63
4.2	Плоская задача	64
4.3	Равновесие со свободной поверхностью	66
4.4	Равновесие фаз микрополярной жидкости	69
5	Вязкозаметрические течения	71
5.1	Сдвиговое течение	71
5.2	Течение в канале	73
5.3	Течение Куэтта	74
5.4	Течение Пуазейля	76
6	Устойчивость в магнитном поле	78
6.1	Влияние магнитного поля	78
6.2	Переход Фредерикса	80
7	Термодинамика микрополярной среды	83
7.1	Приближение типа Обербека-Буссинеска для вязкоупругой микрополярной жидкости	86
8	Конвективная неустойчивость	88
9	Распространение поверхностных волн	101
	Литература	107

CONTENTS

Introduction	5
1 Kinematics of Cosserat continuum	10
1.1 Strain and wryness tensors	12
1.2 Tensors of curvature of microstructure	16
1.3 Compatibility conditions for \mathbf{B}	17
1.4 Determination of \mathbf{D}_k along a curve	18
1.5 Relative strain measures	20
1.6 Linear and angular velocities	21
1.7 Rates of strain	21
1.8 Higher rates of strain	24
2 Theory of stresses	26
2.1 Forces and couples	26
2.2 Euler's dynamics laws	28
2.3 Stress and couple stress tensors	29
2.4 On principal stresses	42
2.5 Motion equations	45
3 Constitutive equations of the micropolar fluid	47
3.1 Axioms of the constitutive equations	48
3.2 Constitutive equations of the micropolar fluid	49
3.3 Boundary conditions	54
3.4 Equations of an elastic micropolar fluid	55
4 Selected problems of statics	63
4.1 Twisted structure	63
4.2 Plane problem	64
4.3 Equilibrium with free-boundary	66
4.4 Equilibrium of phases of micropolar fluid	69

5	Viscometric flows	71
5.1	Shear flow	71
5.2	Channel flow a	73
5.3	Couette flow	74
5.4	Poiseuille flow	76
6	Instability in a magnetic field	78
6.1	Influence of a magnetic field	78
6.2	Frederiks transition	80
7	Thermodynamics of the micropolar continuum	83
7.1	Oberbeck–Boussinesq’s type approximation	86
8	Convective instabilities	88
9	Surface waves propagation	101
	References	107

Научное издание

Еремеев Виктор Анатольевич
Зубов Леонид Михайлович

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ВЯЗКОУПРУГОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

Редактор *С. А. Шестак*
Оформление обложки *Е. В. Журухина*
Верстка *В. А. Еремеев*

Подписано в печать 15.04.2009
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура “Таймс”. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,2. Тираж 200 экз. Зак №

Издательство Южного научного центра
Российской академии наук
344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41
Тел. 8 (863) 250-98-21
E-mail: ssc-ras@mmbi.krinc.ru

Отпечатано в ЗАО “Книга”
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57