

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

05.98 0.0 02194

На правах рукописи

Вохмянин И.Т.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ
ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.В. Немировский



Новосибирск – 1997

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
Глава 1. Основные кинематические и физические соотношения теории оболочек	17
1.1. Кинематические соотношения	17
1.2. Физические соотношения для однородных изотропных оболочек	21
1.3. Законы деформирования конструктивно-неоднородных оболочек	27
1.4. Условие текучести Мизеса осесимметрично-нагруженных однородных изотропных оболочек вращения	38
1.5. Условие текучести Мизеса произвольных тонких однородных изотропных пластин и оболочек	47
1.6. Условие текучести однородных анизотропных пластин и оболочек	55
1.7. Об условиях текучести неоднородных и конструктивно-неоднородных пластин и оболочек	61
Глава 2 Основные уравнения предельных состояний неоднородных и конструктивно-неоднородных оболочек и пластин	64
2.1. Геометрически линейные уравнения предельного равновесия тонких оболочек и пластин	64
2.2. Геометрически нелинейные уравнения предельного равновесия тонких оболочек и пластин	72

2.3.	Уравнения изгиба и выпучивания упругопластических конструктивно-неоднородных пластин и оболочек	75
2.4.	Частные виды уравнений изгиба и выпучивания упругопластических конструктивно-неоднородных пластин и оболочек	85
2.5.	Постановка задачи несущей способности жестко-пластических пластин и оболочек	92
Глава 3	Анализ предельного состояния сжатых неоднородных стержней за пределом упругости	104
3.1.	Об устойчивости и выпучивании неоднородных стержней за пределом упругости	105
3.2.	Об устойчивости и выпучивании неоднородных стержней с пропорциональными диаграммами	119
3.3.	Об устойчивости неоднородных стержней с учетом геометрической нелинейности и малых возмущений.....	128
3.4.	Об устойчивости и выпучивании неоднородных стержней с учетом физической нелинейности и гладкости диаграмм	136
3.5.	Об устойчивости упругопластического стержня при циклических нагружениях	142
3.6.	Об устойчивости и выпучивании конструктивно-неоднородных стержней за пределом упругости	151
3.7.	Основные особенности предельных состояний неоднородных стержней за пределом упругости	153
Глава 4	Некоторые задачи предельного состояния неупругих конструктивно-неоднородных пластин и оболочек	157

4.1.	Характерные особенности метода решения задач устойчивости упругопластических конструктивно-неоднородных оболочек по сравнению с упругими.	158
4.2.	Цилиндрический изгиб и устойчивость упругопластической трехслойной пластинки с легким заполнителем	169
4.3.	Устойчивость и выпучивание упругопластической прямоугольной трехслойной пластинки с мембранными несущими слоями и легким заполнителем под действием продольных и поперечных нагрузок	178
4.4.	Устойчивость и выпучивание упругопластической трехслойной подкрепленной осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки	198
4.5.	Устойчивость и выпучивание упругопластической трехслойной осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки с легким заполнителем	216
4.6.	Устойчивость, несущая способность и рациональное проектирование армированных упругопластических пластин	220
4.7.	Несущая способность гладких и подкрепленных жесткопластических цилиндрических оболочек	233
Глава 5	Оптимальное проектирование жесткопластических элементов конструкций минимального объема	242
5.1.	Основные теоремы и следствия теории идеальной пластичности	243
5.2.	О проектировании жесткопластических неразрезных равнопрочных и ступенчатых балок	248

5.3.	О проектировании и оптимизации жесткопластических равнопрочных тонкостенных элементов конструкций	257
5.4.	Оценки и критерий оптимального проектирования жесткопластических элементов конструкций минимального объема	269
5.5.	Аппроксимация условия текучести и критерий оптимального проектирования	287
5.6.	Оптимальное проектирование жесткопластических балок сложного поперечного сечения	300
5.7.	Устойчивость и оптимальное проектирование жесткопластических элементов конструкций	315
Глава 6	Оптимальное проектирование равнопрочных упругих балок	321
6.1.	Условие равнопрочности и основные уравнения оптимального проектирования слоистых упругих балок	322
6.2.	Оптимальное проектирование равнопрочных слоистых статически неопределимых упругих балок при номинальной температуре (20°C)	329
6.3.	Оптимальное проектирование равнопрочных слоистых статически неопределимых упругих балок при повышенных температурах	341
Заключение		345
Литература		376

ВВЕДЕНИЕ

Прочность элементов строительных конструкций была и остается предметом исследований крупнейших ученых (Галилей, Гук, Эйлер, Максвелл, Мизес, Кирхгоф, Работнов Ю.Н., Ильюшин А.А.). Вследствие ограниченности прочностных физических характеристик строительных материалов, внимание исследователей устремлено на создание новых методов расчетов, позволяющих выявить все ресурсы надежной эксплуатации инженерных сооружений. В этом направлении, в условиях все возрастающего дефицита и дороговизны строительных материалов важное практическое значение имеет разработка методов рационального и оптимального проектирования элементов конструкций по их предельным состояниям. В нашей стране расчеты по предельным состояниям приняты в качестве основных с 1955 года. Упругая и неупругая устойчивость, упругопластическая и жесткопластическая несущие способности, жесткопластическая устойчивость – это те основные предельные состояния, изучению которых посвящена масса научной литературы в механике деформируемого твердого тела. На настоящем этапе научно-технического прогресса, когда все большее применение находят конструкции из различных материалов (подкрепленные, слоистые, различные, композитные), разработка и развитие методов оптимального проектирования по предельным состояниям приобретают актуальное научное и практическое значение.

Исследования продольно – поперечного изгиба и связанного с ним явления потери устойчивости оболочек и пластин в пределах упругости основаны на использовании различных критериев устойчивости – динамического, статического, энергетического и критерия начальных несовершенств [1]. Первоначальный подход в таких исследованиях, восходящий к работе Эйлера [2] и ставший классическим, основан на статическом критерии устойчивости, применяемом к пластинкам и оболочкам в предположении безмоментности их исходного деформированного основного состояния. Предположение о безмоментности

основного состояния связано с идеализацией реальной конструкции и условий нагружения. Такая идеализация, пренебрежение анизотропией, эксцентриситетом приложенных нагрузок, начальными прогибами, в некоторых случаях оправдана и получаемые при этом путем решения проблемы собственных значений дифференциальных операторов критические нагрузки экспериментально хорошо подтверждаются [1,3].

Систематические отклонения теоретических значений критических нагрузок, полученных классическим методом, от экспериментальных (в особенности, для оболочек [3]) вызвали в настоящее время необходимость учета моментности докритического состояния, возникающей в реальных конструкциях уже в начале нагружения, и рассматривать при изучении устойчивого равновесия с математической точки зрения нелинейные дифференциальные операторы. Вследствие моментности докритического состояния значительно усложняются методы определения критических нагрузок. Главное затруднение происходит от того, что заранее неизвестно то основное состояние, при котором впервые возникают смежные формы равновесия. Для того, чтобы найти такое основное состояние необходимо решить краевую задачу о продольно – поперечном изгибе и задачу о собственных значениях дифференциальных операторов во всем интервале значений нагрузок, включающем критическое.

Сущность метода определения критических нагрузок заключается в следующем [1,4]. Пусть $L(w, \lambda)$ – действующий в пространстве смещений нелинейный дифференциальный оператор, включающий уравнения равновесия и граничные условия задачи о продольно – поперечном изгибе оболочки, и пусть λ – числовой параметр, пропорционально которому изменяются все действующие на оболочку нагрузки. Пусть w_1 – решение операторного уравнения $L(w, \lambda) = 0$ при $\lambda = \lambda_1$; такое решение существует и может быть получено методами теории упругости, по крайней мере, для значений λ в окрестности нуля. Далее проверяется, имеется ли при полученном основном состоянии w_1 смежная форма равновесия $w_1 + \delta w$. Для этого определяется разность $L(w_1 + \delta w, \lambda_1) - L(w_1, \lambda_1) = L_1(\delta w, \lambda_1)$ и решается проблема собственных значений для $L_1(\delta w, \lambda_1)$ или для соответствующего

ему линеаризованного оператора. Если λ_1 равно собственному значению, то λ_1 является критическим значением параметра нагрузки, иначе находится новое основное состояние w_2 при $\lambda = \lambda_2$ и процедура определения собственных значений повторяется для нового оператора $L_2(\delta w, \lambda_2)$. Применение такой процедуры от нулевого значения параметра λ с последующими малыми его приращениями позволяет определить наименьшую критическую нагрузку.

Использование такого метода определения критических нагрузок ведет к сложной ситуации. С одной стороны, невозможно решить задачу о собственных значениях дифференциального оператора без знания основного докритического состояния, с другой стороны, — существование, единственность и методы решения краевой задачи для определения основного состояния в значительной степени зависят от искомых собственных значений. Нахождение критических нагрузок, в общем случае, принципиально невозможно без применения метода последовательных приближений. Существенное упрощение в нахождении критических нагрузок достигается, когда основное моментное состояние является аналитическим решением краевой задачи [5,6]. В большинстве случаев практическое осуществление рассмотренного метода невозможно без применения мощных ЭВМ.

Имеет смысл определять только деформированное состояние пластинки или оболочки без обращения к проблеме собственных значений в интервале значений параметра нагрузки до тех его значений, при которых предпочтительный метод решения краевой задачи уже не позволяет найти новую конфигурацию конструкции. В математической формулировке краевой задачи о продольно — поперечном изгибе пластинки или оболочки параметр нагружения λ формально ничем не отличается от других параметров конструкции, фигурирующих в исходных дифференциальных уравнениях и граничных условиях. Расчет оболочки или пластинки недостаточно вести для одних фиксированных значений параметров. Необходимо учитывать, как возможные отклонения значений параметров от расчетных при изготовлении конструкций (допуски) так и неточность измерения. Если конфигурации конструкции мало различаются в малой окрестности какой-либо точки области из-

менения параметров, то она в этой точке устойчива в малом. Для значений параметров, при которых предпочтительный метод не обеспечивает решения краевой задачи, требуется рассмотреть проблему о собственных значениях. Если соответствующая нагрузка не является критической, то следует изменить метод дальнейшего решения. Если доказано, что при некоторых значениях параметров решение краевой задачи о статическом равновесии оболочки или пластинки в условиях продольно-поперечного изгиба не существует, то необходимо перейти к исследованию динамического поведения (хлопков). Метод исследования устойчивости пластин и оболочек в указанном смысле примыкает к методу, основанному на критерии начальных несовершенств. Такой метод предлагался и применялся рядом авторов, как для исследования устойчивого равновесия так для исследования закритического поведения (выпучивания) [7-11]. Обширные исследования, посвященные устойчивости тонких упругих оболочек и пластин отражены в многочисленных обзорах и монографиях [1,3,12,13].

Полное изучение поведения пластин и оболочек невозможно без учета пластических свойств материалов. Влияние пластичности проявляется в виде остаточных вмятин даже в экспериментах, поставленных для подтверждения теории устойчивости упругих пластин и оболочек [1].

С самого начала в исследованиях продольно-поперечного изгиба стержней, пластин и оболочек за пределами упругости наблюдается стремление к обобщению появившихся ранее методов решения в пределах упругости. Теория устойчивости неупругих стержней, развитая Ф.Энгессером [14], является обобщением теории устойчивости упругих стержней. При этом в выражении для критической нагрузки Эйлера, [15], модуль Юнга заменяется касательным модулем. В последующих исследованиях принимается во внимание открытый Ф.Герстнером, (1831г.), закон разгрузки и создается теория Энгессера-Ясинского-Кармана-Ильюшина, в которой для определения критической нагрузки стержня модуль Юнга заменяется приведенным модулем [16-18]. Затем эти теории распространяются на пластинки и оболочки. Теория упругопластической потери устойчивости, (теория приведен-

ного модуля), тонких оболочек и пластин для несжимаемого материала с произвольным упрочнением и основанная на деформационной теории пластичности была разработана А.А.Ильюшиным [19-20] и обобщена впоследствии на оболочки и пластинки для сжимаемого материала в работе [21]. Появившаяся раньше, чем теория приведенного модуля, теория чистопластической потери устойчивости, (теория касательного модуля), получила широкое развитие только после работ Ф.Шенли [22-23]. Теория чистопластической потери устойчивости тонких оболочек и пластин была разработана Р.Бижляром [24], Г.Джерардом [25], Э.И.Григолюком [26-27] и явилась основой для решения большого числа задач. В большинстве работ использованы деформационная теория или теория течения. Общая теория чистопластической потери устойчивости неоднородных тонких оболочек построена Э.И.Григолюком [28]. Теория чистопластической потери устойчивости конструктивно-неоднородных пластин и оболочек развита в работах [29-32]. Многочисленные исследования по устойчивости пластин за пределами упругости отражены в монографии [1] и обзоре [33].

Теория приведенного модуля и теория касательного модуля основаны на статическом критерии устойчивости в предположении безмоментности основного состояния. При этом, так же как и в классической теории упругой устойчивости, критические нагрузки определяются решением проблемы собственных значений. В большинстве задач об устойчивости реальных неупругих оболочек и пластин предположение о безмоментности основного состояния является необоснованным, так как уже в начале нагружения возникает моментное состояние, вызываемое, как теми же причинами, что и для упругих конструкций, так и вследствие пластичности их материалов. Для конструктивно-неоднородных оболочек и пластин предположение о безмоментности основного состояния можно сохранить только в некоторых частных случаях [34].

При решении задач о критических нагрузках моментных неупругих оболочек и пластин естественно использовать метод, являющийся обобщением метода теории устойчивости моментных упругих оболочек и пластин. Существенной особенностью таких задач является

физически- и геометрически нелинейный характер исходных дифференциальных операторов. При этом заранее неизвестны области действия закона упругости и законов пластичности – пластической догрузки, разгрузки и вторичных пластических деформаций. Чтобы определить критическое основное состояние требуется проследить всю историю, в общем случае, сложного нагружения. Для неупругих моментных оболочек и пластин, так же как упругих, имеет смысл определять критические нагрузки без обращения к проблеме собственных значений, пока выбранный метод решения красовой задачи позволяет найти конфигурацию при последующем малом приращении нагрузки. Здесь так же, как и для упругих конструкций, можно применить критерий начальных несовершенств. Исследованию устойчивости равновесия и закритического поведения неупругих тонких моментных пластин и оболочек посвящено сравнительно немного работ [35-37].

Изучение поведения упруго-пластических элементов конструкций выявило активное развитие зон пластических деформаций с возрастанием параметра нагружения, близкого к простому. Это обстоятельство послужило причиной создания теории течения идеального жесткопластического тела. Теория, основанная на далекой от реальности модели материала, остается до настоящего времени единственной, позволяющей определять несущую способность конструкций без изучения истории нагружения. У ее истоков были Сен-Венан, Мизес, венгерский инженер Казинчи, А.Ингереслев [40], А.А.Гвоздев [41]. Впервые экстремальные принципы для определения нижней и верхней оценок предельной нагрузки строго доказаны А.А.Гвоздевым [42]. Существенный вклад в доказательства вариационных принципов теории пластического течения внес А.А.Марков [43]. Основные результаты в теории идеальной пластичности принадлежат А.А.Ильюшину [44], Р.Хиллу [45], В.Прагеру и Ф.Г.Ходжу [46-47], Л.М.Качанову [48].

Применение теории идеальной пластичности для определения несущей способности пластин и оболочек стало возможным только после перехода от условий текучести в напряжениях к условиям текучести в обобщенных усилиях и моментах. Конечное соотношение между усилиями и моментами на основе условия текучести Мизеса при плоском

напряженном состоянии оболочек получено А.А.Ильюшиным в двухпараметрической форме [20], затем для оболочек вращения – в трехпараметрической форме Ф.Г.Ходжем [49]. Условия текучести (конечные соотношения) в обобщенных усилиях и моментах на основе условия текучести Треска в напряжениях для цилиндрической оболочки получены Ф.Г.Ходжем [50] и Е.Т.Онатом [51]. Более сложные условия текучести для подкрепленных и композитных оболочек найдены в работах Ю.В.Немировского и Ю.Н.Работнова [52-53]. Все указанные условия текучести в обобщенных усилиях и моментах получены на основе гипотезы Кирхгофа для скоростей перемещений, и в решениях краевых задач о несущей способности пластин и оболочек применены классические уравнения равновесия в компонентах главного вектора и главного момента внутренних сил [20,47-54].

Наряду с постановкой и решением краевых задач о несущей способности пластин и оболочек развивались простые приближенные статические и кинематические методы определения предельных нагрузок по шарнирно-пластическим схемам. Важных практических результатов в этом направлении достигли А.Р.Ржаницын [57], А.М.Дубинский [58], А.О.Рассказов и А.С.Лехтярь [59-60]. Достоверность теоретических значений предельных нагрузок подтверждается экспериментами, в особенности, если в некоторых случаях учесть изменение первоначальной формы конструкции перед исчерпанием несущей способности [54,61-68].

Проблема оптимального проектирования жесткопластических элементов конструкций встала перед учеными в более поздний период времени, в связи с запросами научно-технического прогресса. В ее решении приняли активное участие Прагер, Друкер, Шилд и другие исследователи, [69-77]. Критерии оптимального проектирования оболочек относительно минимальных объема, веса и момента инерции доказаны в работе [73]. Здесь же рассмотрен частный критерий, обеспечивший абсолютный минимум объема в задаче оптимального проектирования трехслойной цилиндрической оболочки с мембранными несущими слоями. Другое направление в теории оптимального проектирования жесткопластических элементов конструкций развито в ра-

ботах А.А.Чираса, А.Е.Боркаускаса и Р.В.Вебры [78-81]. Предложены критерии оптимального проектирования, поставлены поверочная и проектная задачи. Сформулированы двойственные теоремы, соответствующие поставленным задачам. Решение задач оптимального проектирования предполагается осуществимым за счет выбора весовых коэффициентов соответствующих критериев оптимальности методами линейного программирования.

Все методы оптимального проектирования по предельным состояниям неупругих конструкций имеют существенный недостаток, связанный с трудностью (большой стоимостью) экспериментальной проверки теоретических результатов. Оптимальные проекты упругих конструкций в значительной степени лишены этого недостатка. Известно также, что допущение пластических деформаций приводит к более эффективному по весу, прочности или стоимости проектированию элементов конструкций. В работе Ю.В.Немировского [82] объединены только преимущества оптимального проектирования упругих и неупругих конструкций. В ней разработан метод оптимального проектирования упругих арок и балок, основанный на критерии равнопрочности. Последний состоит в том, что на конечных по площади поверхностях из фибр внешних слоев напряжения достигают предела текучести.

В настоящей работе представлены: а) исследования предельных состояний конструктивно-неоднородных стержней, пластин и оболочек (упруго-пластической устойчивости и несущей способности); б) исследования предельных состояний жесткопластических однородных и неоднородных, изотропных и анизотропных стержней, балок, пластин и оболочек (несущей способности и жесткопластической устойчивости); в) оптимальное проектирование жесткопластических элементов конструкций; г) оптимальное проектирование равнопрочных упругих балок, в том числе с учетом температурных воздействий. Эти исследования отражены в публикациях [83-115, 279-285]. Работа состоит из 6 глав.

В первой главе изложены основные кинематические и физические соотношения теории оболочек и пластин. Кроме известных кинемати-

ческих гипотез в теории оболочек и пластин, рассмотрена линейная гипотеза для скоростей деформаций, состоящая в том, что параллельно перенесенные по нормали к срединной поверхности оболочки компоненты вектора скорости перемещения имеют определенные зависимости от нормальной координаты в пространственном базисе на срединной поверхности—линейные зависимости для касательных составляющих и квадратичную зависимость нормальной составляющей. Изложены законы упругости, термоупругости, активных пластических деформаций, разгрузки и вторичных пластических деформаций, условия текучести в напряжениях и закон течения. На основе законов в теории малых упруго-пластических деформаций определены зависимости между осредненными деформациями и напряжениями конструктивно-неоднородного слоя. Введены в рассмотрение обобщенные усилия и моменты, а также обобщенные скорости деформаций. Определено условие текучести Мизеса для изотропных пластин и оболочек, как в пространстве обобщенных усилий и моментов, так и в пространстве квадратичных форм. Рассмотрены частные случаи условия текучести. Определено условие текучести анизотропных однородных пластин и оболочек. Рассмотрен метод аппроксимации кусочных условий текучести поверхностями текучести анизотропных оболочек. Сформулированы обобщенные законы течения изотропных и анизотропных пластин и оболочек.

Во второй главе рассмотрена общая модель конструктивно-неоднородной оболочки, из которой путем предельных переходов по имеющимся параметрам можно перейти к слоистым, подкрепленным, вавфлеобразным, биметаллическим и однородным оболочкам и пластинам. Материал элементов модели предполагается несжимаемым и с произвольным упрочнением. В основе анализа деформированного состояния положена деформационная теория пластичности А.А.Ильюшина. Допустимость деформационной теории пластичности и границы ее применимости в настоящей работе в широком смысле не обсуждаются. Предпочтение ей оказано только потому, что для нее имеется эффективный метод решения краевой задачи об изгибе пластин и оболочек за пределами упругости — метод упругих решений, а так-

же потому, что использование деформационной теории пластичности при исследовании проблемы неупругой устойчивости оболочек является традиционным. Дифференциальные уравнения и граничные условия задачи о статическом равновесии конструктивно-неоднородной оболочки получены в геометрически нелинейной постановке с помощью принципа Лагранжа и записаны в форме удобной для решения ее методом последовательных приближений, аналогичным методу упругих решений при каждом малом приращении параметра нагрузки. Поставлена общая задача об изгибе и выпучивании конструктивно-неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости. Приведены постановки частных задач об изгибе и выпучивании трехслойных и цилиндрических оболочек с легким заполнителем, а также осесимметричной цилиндрической оболочки.

На основе линейной гипотезы о скоростях деформаций с помощью вариационного принципа Лагранжа получены геометрически линейные и геометрически нелинейные уравнения предельного равновесия тонких оболочек и пластин в тензорной форме. Поставлена общая задача о несущей способности элементов конструкций, выполненных из жесткопластического материала, удовлетворяющего условию текучести Мизеса в обобщенных усилиях и моментах. Приведены постановки задач о несущей способности балки, пластинки и цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении.

В третьей главе рассмотрена элементарная модель неоднородного стержня и проведен подробный анализ ее поведения за пределом упругости для того, чтобы выявить основные особенности выпучивания конструктивно-неоднородных элементов конструкций. Изучено поведение элементарной модели неоднородного стержня из материала с пропорциональными диаграммами. При этом основное внимание уделено влиянию возмущений, а также физически— и геометрически— нелинейных факторов на устойчивость равновесия.

В четвертой главе решены практически важные задачи устойчивости выпучивания и несущей способности неупругих конструктивно-неоднородных пластин и оболочек. Аналитически решена задача об изгибе и выпучивании широкой трехслойной пластинки с легким запол-

нителем и мембранными несущими слоями за пределом упругости. Численно на ЭВМ решены задачи об изгибе и выпучивании трехслойных прямоугольной пластины и цилиндрической оболочки с легким заполнителем, а также подкрепленной осесимметрической цилиндрической оболочки. Решена задача об устойчивости и рациональном проектировании трехслойных армированных пластин за пределом упругости. Получено точное аналитическое решение задачи о несущей способности подкрепленных жесткопластических цилиндрических оболочек.

В пятой главе доказаны теоремы об оценках и сформулирован критерий оптимального проектирования жесткопластических пластин и оболочек абсолютно минимального объема. Поставлена общая геометрически линейная задача оптимального проектирования жесткопластических элементов конструкций абсолютно минимального объема. Аналитически решена задача об оптимальном проектировании жесткопластической статически неопределимой балки. Определены условия текучести и получены решения соответствующих задач об оптимальном проектировании балок, арок и рам, в том числе, балок сложного поперечного сечения минимального объема. Поставлена задача об устойчивости оптимальных жесткопластических элементов конструкций и показана связь критических объемов с объемами соответствующих оптимальных проектов, получаемых с помощью геометрически линейной теории оптимального проектирования.

В шестой главе развит метод оптимального проектирования равнопрочных слоистых упругих балок, предложенный Ю.В.Немировским. Разработаны алгоритмы, вычислительные программы на ЭВМ решения задач оптимального проектирования статически неопределимых слоистых упругих балок по весу и стоимости, в том числе, с учетом температурных воздействий на основе критерия равнопрочности.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Общие кинематические и физические соотношения механики деформируемого твердого тела не всегда применимы в теории оболочек. В целях упрощения исследования явлений для оболочек вводятся достаточно достоверные модели, кинематические гипотезы и допущения [116-126].

1.1. Кинематические соотношения

Рассмотрим оболочку в системе координат с координатными линиями, x_1 , x_2 , направленными вдоль линий главных кривизн отсчетной срединной поверхности и с координатной линией x_3 , направленной вдоль нормали к той же поверхности. Неравные нулю компоненты метрического тензора g_{ij} в выбранной ортогональной системе координат с переменным базисом по толщине оболочки имеют вид,

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{11}^0(1 + k_1 x_3)^2, & g_{22} &= g_{22}^0(1 + k_2 x_3)^2, & g_{33} &= g_{33}^0 = 1, \\ g &= g_{11}g_{22}g_{33}, & g^0 &= g_{11}^0g_{22}^0g_{33}^0, & -h &\leq x_3 \leq h \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Здесь g_{ij}^0 -компоненты метрического тензора в рассматриваемой системе координат с пространственным базисом на срединной поверхности, причем g_{11}^0 и g_{22}^0 являются коэффициентами ее первой квадратичной формы, k_1 и k_2 -главные кривизны, g и g^0 -детерминанты тензоров, $2h$ -толщина оболочки.

Для компонент тензора деформаций γ_{ij} имеем геометрически нелинейные выражения через ковариантные производные компонент вектора перемещения u_i и u^n [116],

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{,i}^n u_{j,n}) \quad (1.1.2)$$

Теории оболочек отличаются различными предположениями о виде зависимости компонент вектора перемещений от нормальной координаты [1,11,117-126]. Наиболее общий вид этой зависимости [127]:

$$u_i^0 = \sum_{m=0}^n v_{im}^0 x_3^m, \quad (1.1.3)$$

где число членов ряда должно быть выбрано надлежащим образом, причем v_{i0}^0 — компоненты вектора перемещения точек отсчетной поверхности в пространственном базисе, связанным с этой же поверхностью. Известный способ определения выражений деформаций через перемещения состоит в принятии $u_i = u_i^0$, ковариантном дифференцировании, согласно равенству (1.1.2), последующими преобразованием полученных выражений к переменному базису по толщине оболочки и линеаризации, с учетом допущений на величины и характер перемещений. Если воспользоваться гипотезой Кирхгофа, то

$$\begin{aligned} u &= u_0 - [(1/A)\partial w/\partial x_1 + u_0/R_1]x_3, \\ v &= v_0 - [(1/B)\partial w/\partial x_2 + v_0/R_2]x_3, \quad w = w(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

где A и B — коэффициенты Ламе, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны, а для перемещений в срединной поверхности и координат приняты традиционные в теории оболочек обозначения. Для пологих оболочек можно принять $A = B = 1$ [1].

В работе [97] рассмотрена гипотеза, состоящая в том, что выражение для параллельно перенесенных по нормали на отсчетную срединную поверхность компонент вектора перемещения имеет вид,

$$u_i^0 = v_i^0(x^1, x^2) + a_i^0(x^1, x^2)x^3 + \frac{1}{2}b_3^0(x^1, x^2)\delta_i^3(x^3)^2 \quad (1.1.5)$$

Здесь v_i^0 , a_i^0 , b_i^0 — векторы в пространственном базисе на отсчетной поверхности, причем v_i^0 — вектор перемещения точек на отсчетной поверхности; a_i^0 и b_i^0 — векторы, характеризующие изменение вектора перемещения по толщине оболочки; δ_i^j — символы Кронекера. Выражения для деформаций, соответствующие гипотезе (1.1.5), будут получены во второй главе. Гипотеза вида (1.1.5), за исключением множителей

$(\frac{1}{2})$ и δ_i^3 для физических компонент вектора перемещений была предложена в работе [128].

В исследованиях устойчивости трехслойных оболочек и пластин принимают гипотезу Кирхгофа для внешних слоев и гипотезу прямой линии в среднем слое (заполнителе) с соблюдением непрерывности перемещений по всей толщине оболочки. Пусть отсчетная поверхность расположена на расстояниях h_j ($j = 1, 2$) от внутренних поверхностей внешних слоев, координатные линии x_r , ($r = 1, 2$) совпадают с линиями главных кривизн, координатная линия x_3 направлена по нормали к центру кривизны, δ_j -толщины внешних слоев, ($j = 1, 2$), и среднего слоя (заполнителя), $j = 3$, рис. 1.1-1.3. Тогда для смещений точек внешних слоев, u_r^j , (в соответствии с гипотезой прямых нормалей), и смещений в заполнителе, u_r^3 , (согласно гипотезе прямой линии), получим выражения:

в первом внешнем слое, $(-h_1 - \delta_1 \leq x_3 \leq -h_1)$,

$$u_r^1 = u_{r1} - (x_3 + h_1 + \delta_1/2)w_{1,r}; \quad (1.1.6)$$

во втором внешнем слое, $(h_2 \leq x_3 \leq h_2 + \delta_2)$,

$$u_r^2 = u_{r2} - (x_3 - h_2 - \delta_2/2)w_{2,r}; \quad (1.1.7)$$

в слое заполнителя, $(-h_1 \leq x_3 \leq h_2)$,

$$u_r^3 = (1/\delta_3)(h_2 u_{r1} + h_1 u_{r2} + h w_{3,r}) + (x_3/\delta_3)(u_{r2} - u_{r1} + h_0 w_{3,r}); \quad (1.1.8)$$

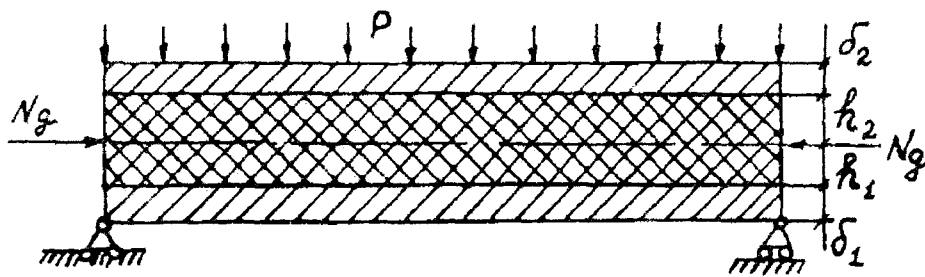
$$h_0 = (\delta_1 + \delta_2)/2, \quad h = (\delta_2 h_1 - \delta_1 h_2)/2$$

Здесь u_{rj} , w_j , -смещения точек срединных поверхностей внешних слоев, w_3 - смещения точек отсчетной поверхности, при этом $w_1 = w_2 = w_3 = w$; индексом после запятой обозначено дифференцирование по x_r .

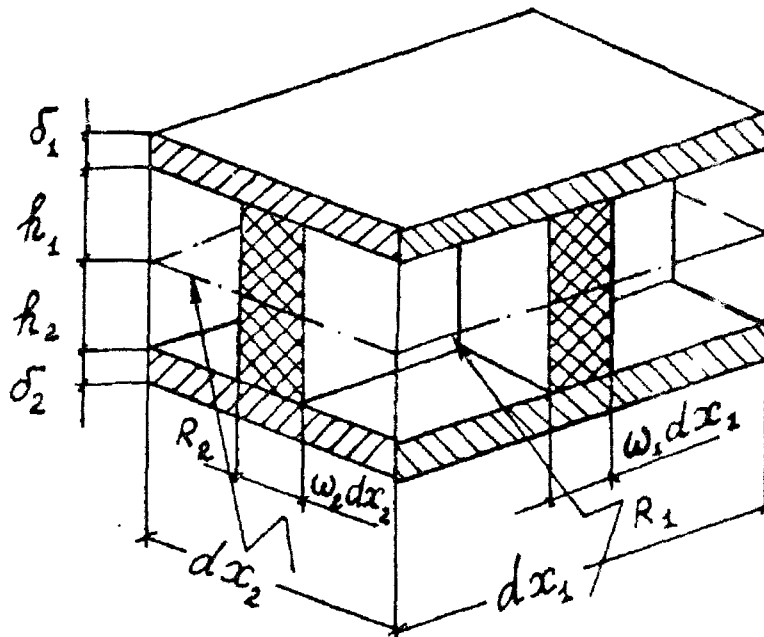
Для деформаций слоев воспользуемся выражениями,[1]:

$$\begin{aligned} \epsilon_r^j &= u_{r,r}^j - w/R_r + (1/2)(w_{,r})^2; & \epsilon_{12}^j &= u_{1,2}^j + u_{2,1}^j + w_{,1}w_{,2} \\ \epsilon_{13} &= w_{,1} + u_{1,3}; & \epsilon_{23} &= w_{,2} + u_{2,3} \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

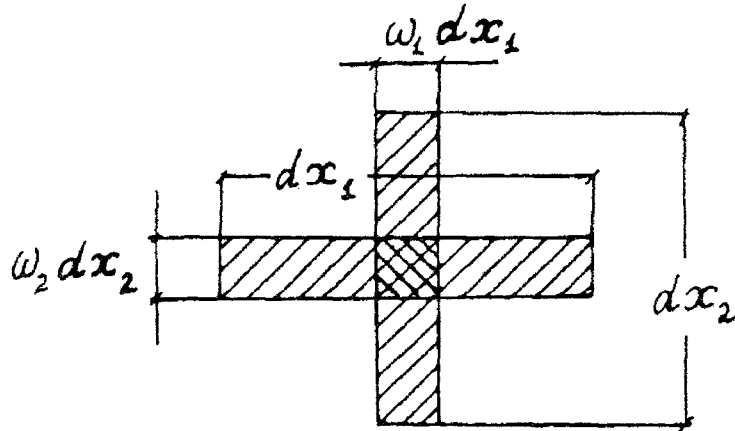
Последние два соотношения необходимы только для среднего слоя, где имеют место деформации сдвига в плоскостях x_1x_3 и x_2x_3 .



Puc. 1.1.



Puc. 1.2.



Puc. 1.3.

В работе [129] гипотеза вида (1.1.3) использована, чтобы учесть граничные сдвиговые напряжения на лицевых поверхностях оболочки.

1.2. Физические соотношения для однородных изотропных оболочек

1.2.1 Закон Гука деформирования тела [130].

Зависимость деформаций от напряжений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= (1/E)[(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}))], & \varepsilon_{12} &= \sigma_{12}/G, \\ \varepsilon_{22} &= (1/E)[(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11}))], & \varepsilon_{23} &= \sigma_{23}/G, \\ \varepsilon_{33} &= (1/E)[(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}))], & \varepsilon_{31} &= \sigma_{31}/G\end{aligned}\quad (1.2.1)$$

Здесь модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν определяются через модуль сдвига G и модуль объемной деформации K ,

$$E = 9GK/(3K + G), \quad \nu = (3K - 2G)/[2(3K + G)]$$

Зависимость напряжений от деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_{11}, & \sigma_{12} &= G\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_{22}, & \sigma_{23} &= G\varepsilon_{23}, \\ \sigma_{33} &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_{33}, & \sigma_{31} &= G\varepsilon_{31}\end{aligned}\quad (1.2.2)$$

где θ —относительное объемное расширение, $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, и λ —постоянная Ламе, $\lambda = K - 2G/3$.

Закон Гука для оболочек получим из равенств (1.2.1)-(1.2.2), полагая $\sigma_{33} = 0$ [1].

Связь деформаций с напряжениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii} &= (1/E)(\sigma_{ii} - \nu\sigma_{jj}), \\ \varepsilon_{12} &= \sigma_{12}/G, \quad \varepsilon_{23} = \sigma_{23}/G, \quad \varepsilon_{31} = \sigma_{31}/G\end{aligned}\quad (1.2.3)$$

Связь напряжений с деформациями:

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= E_1(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}), \\ \sigma_{12} &= G\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = G\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = G\varepsilon_{31}\end{aligned}\quad (1.2.4)$$

где $E_1 = E/(1 - \nu^2)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

1.2.2 Закон термоупругости оболочек.

На основании закона Гука (1.2.3)-(1.2.4) и закона Дюамеля-Неймана имеем [131,129]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= (1/E)(\sigma_{ii} - \nu\sigma_{jj}) + \alpha\Theta, \\ \varepsilon_{12} &= \sigma_{12}/G, \quad \varepsilon_{23} = \sigma_{23}/G, \quad \varepsilon_{31} = \sigma_{31}/G, \\ \sigma_{ii} &= E_1(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}) - \beta\Theta, \\ \sigma_{12} &= G\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = G\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = G\varepsilon_{31} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

где $\beta = \alpha E/(1 - \nu)$, α -коэффициент линейного теплового расширения, Θ - температура.

1.2.3 Условия текучести.

Условие текучести Мизеса [132-134]:

$$\begin{aligned} f &= 2(\sigma_i^2 - \sigma_0^2) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \\ &\quad + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) - 2\sigma_0^2 = 0, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

где σ_i -интенсивность напряжений, σ_0 -предел текучести.

Условие текучести Треска—Сен-Венана [135]:

$$f = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} - \sigma_0 = 0, \quad (1.2.7)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные напряжения.

Условие текучести максимального приведенного напряжения [136]:

$$f = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} - 2\sigma_0/3 = 0, \quad (1.2.8)$$

1.2.4 Законы малых упруго-пластических деформаций [20,137-141].

Закон активных пластических деформаций при простом нагружении:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= (K - G_1)\theta + 3G_1\varepsilon_{11}, & \sigma_{12} &= 3G_1\varepsilon_{12}/2, \\
 \sigma_{22} &= (K - G_1)\theta + 3G_1\varepsilon_{22}, & \sigma_{23} &= 3G_1\varepsilon_{23}/2, \\
 \sigma_{33} &= (K - G_1)\theta + 3G_1\varepsilon_{33}, & \sigma_{31} &= 3G_1\varepsilon_{31}/2, \\
 \varepsilon_{11} &= \sigma_{11}/3G_1 - (1/G_1 - 1/K)\sigma/3, & \varepsilon_{12} &= (2/3)\sigma_{12}/G_1, \\
 \varepsilon_{22} &= \sigma_{22}/3G_1 - (1/G_1 - 1/K)\sigma/3, & \varepsilon_{23} &= (2/3)\sigma_{23}/G_1, \\
 \varepsilon_{33} &= \sigma_{33}/3G_1 - (1/G_1 - 1/K)\sigma/3, & \varepsilon_{31} &= (2/3)\sigma_{31}/G_1
 \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Здесь $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$, $G_1 = (2/9)\sigma_i/e_i$, причем e_i и σ_i — интенсивности деформаций и напряжений, определяемые из выражений,

$$\begin{aligned}
 e_i &= (\sqrt{2}/3)[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 \\
 &\quad + 3(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)/2]^{1/2}, \\
 \sigma_i &= (1/\sqrt{2})[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \\
 &\quad + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Здесь функции $\sigma_i = \Phi(e_i)$ и $e_i = \Phi^{-1}(\sigma_i)$ предполагаются известными из эксперимента. Функцию $\Phi(e_i)$ представим в виде, предложенном в работе [20]:

$$\sigma_i = \Phi(e_i) = 3G[1 - \omega(e_i)],$$

где $\omega = (3Ge_i - \sigma_i)/(3Ge_i)$.

Закон активной пластической деформации (1.2.9) справедлив при соблюдении неравенства $e_i \geq e_0$. Величина e_0 называется деформацией начала текучести. Если $e_i \leq e_0$, то соотношения (1.2.9) переходят в закон Гука, так как при этом $\sigma_i = 3Ge_i$. Определению предела текучести σ_0 металлов посвящена работа [142].

Закон разгрузки [20]:

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{11} &= \lambda\theta' + 2G\varepsilon'_{11}, & \sigma'_{12} &= G\varepsilon'_{12}, \\
 \sigma'_{22} &= \lambda\theta' + 2G\varepsilon'_{22}, & \sigma'_{23} &= G\varepsilon'_{23}, \\
 \sigma'_{33} &= \lambda\theta' + 2G\varepsilon'_{33}, & \sigma'_{31} &= G\varepsilon'_{31}
 \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Здесь значком $'$ обозначены разности напряжений σ_{ij}^* , деформаций ε_{ij}^* в начале разгрузки и текущих напряжений σ_{ij} , деформаций ε_{ij} , $\sigma'_{ij} =$

$\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}$, $\varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Таким образом, при разгрузке тело переходит из стадии активной деформации в стадию упругой деформации.

Закон вторичных пластических деформаций [20,140]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{11}^* + (K - G_2)\theta + 3G_2\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^* + 3G_2\varepsilon_{12}/2, \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}^* + (K - G_2)\theta + 3G_2\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^* + 3G_2\varepsilon_{23}/2, \\ \sigma_{33} &= \sigma_{33}^* + (K - G_2)\theta + 3G_2\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{31} &= \sigma_{31}^* + 3G_2\varepsilon_{31}/2,\end{aligned}\tag{1.2.12}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^* + \sigma_{11}/3G_2 - (1/G_2 - 1/K)\sigma/3, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^* + (2/3)\sigma_{12}/G_2,$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^* + \sigma_{22}/3G_2 - (1/G_2 - 1/K)\sigma/3, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}^* + (2/3)\sigma_{23}/G_2,$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^* + \sigma_{33}/3G_2 - (1/G_2 - 1/K)\sigma/3, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}^* + (2/3)\sigma_{31}/G_2$$

Здесь $G_2 = (2/9)\sigma_{i1}/e_{i1}$, $\sigma_{i1} = \Phi_1(e_{i1})$, $e_{i1} = \Phi_1^{-1}(\sigma_{i1})$, $\Phi(e_{i1}) = 3Ge_{i1}[1 - \omega_1(e_{i1})]$, $\omega_1 = (3Ge_{i1} - \sigma_{i1})/(3Ge_{i1})$, интенсивности σ_{i1} и e_{i1} определяются из выражений (1.2.6) и (1.2.10) после постановки над напряжениями и деформациями значков l . Функция $\Phi(e_{i1})$ также определяется из эксперимента. Закон вторичных пластических деформаций справедлив при соблюдении неравенства, $e_{i1} \geq e_1$ или $\sigma_{i1} \geq \sigma_1$, где σ_{01} и e_{01} - вторичные предел текучести и деформация начала текучести. Для материала с идеальным эффектом Баушингера $\sigma_1 = 2\sigma_0$, $e_1 = 2e_0$.

Законы малых упруго-пластических деформаций (1.2.3)-(1.2.4), (1.2.9), (1.2.11), (1.2.12) оболочек представим в единообразной форме [84,89].

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= E_1(\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{ss}) - \sigma_{0r}, \\ \sigma_{ij} &= G\varepsilon_{ij} - \sigma_{0ij}, \\ \varepsilon_{rr} &= (\sigma_{rr} - \nu\sigma_{ss})/E + \varepsilon_{0r}, \\ \varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij}/G + \varepsilon_{0ij}, \quad (r, s = 1, 2, \quad r \neq s, \quad i, j = 1, 2, 3)\end{aligned}\tag{1.2.13}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\sigma_{0r} &= E_1[k\omega_0(e_{i0})(\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{ss}) + m\omega_0(e_{i0}^*)(\varepsilon_{rr}^* + \nu\varepsilon_{ss}^*) \\ &\quad + n\omega_1(e_{i1})(\varepsilon_{rr1} + \nu\varepsilon_{ss1})];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{0ij} &= G[k\omega_0(e_{i0})\varepsilon_{ij} + m\omega_0(e_{i0}^*)\varepsilon_{ij}^* + n\omega_1(e_{i1})\varepsilon_{ij1}]; \\
\varepsilon_{0r} &= [a(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{ss}) + b(\sigma_{rr}^* - \nu\sigma_{ss}^*)]/E; \quad \varepsilon_{0ij} = (a\sigma_{ij} + b\sigma_{ij}^*)/G; \\
e_{i0} &= (2/\sqrt{3}[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)/4])^{1/2}; \\
e_{i0}^* &= (2/\sqrt{3}[\varepsilon_{11}^{*2} + \varepsilon_{11}^*\varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{22}^{*2} + (\varepsilon_{12}^{*2} + \varepsilon_{23}^{*2} + \varepsilon_{31}^{*2})/4])^{1/2}; \\
\omega_t(e_{it}) &= 0, \quad \text{если} \quad e_{it} \leq e_t; \\
\omega_t(e_{it}) &= (3Ge_{it} - \sigma_{it})/(3Ge_{it}), \quad \text{если} \quad e_{it} > e_t; \\
\omega_t(\sigma_{it}) &= 0, \quad \text{если} \quad \sigma_{it} \leq \sigma_{0t}; \\
\omega_t(\sigma_{it}) &= (3Ge_{it} - \sigma_{it})/(3Ge_{it}), \quad \text{если} \quad \sigma_{it} > \sigma_{0t}; \\
G &= E/[2(1 + \nu)], \quad e_1 = 2e_0, \quad \sigma_1 = 2\sigma_0, \\
\varepsilon_{rr1} &= \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^*; \quad \varepsilon_{ij1} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*; \\
\sigma_{i0} &= [\sigma_{11}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]^{1/2}; \\
\sigma_{i1} &= [\sigma_{111}^2 + \sigma_{111}\sigma_{221} + \sigma_{221}^2 + 3(\sigma_{121}^2 + \sigma_{231}^2 + \sigma_{311}^2)]^{1/2}; \\
a &= [k\omega_0(\sigma_{i0}) + n\omega_1(\sigma_{i1})]/[1 - k\omega_0(\sigma_{i0}) - n\omega_1(\sigma_{i1})]; \\
b &= [m\omega_0(\sigma_{i0}) - n\omega_1(\sigma_{i1})]/\{[1 - \omega_0(\sigma_{i0}^*)][1 - k\omega_0(\sigma_{i0}) - n\omega_1(\sigma_{i1})]\}; \\
\sigma_{rr1} &= \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^*; \quad \sigma_{ij1} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*; \quad e_{it} = \Phi_t(\sigma_{it}); \\
\sigma_{it} &= \Phi_t^{-1}(e_{it}), \quad t = 0, 1
\end{aligned}$$

Функции $\Phi_t(e_{it})$ определяются из диаграммы растяжения-сжатия при упруго-пластических деформациях для упрочняющихся материалов; ε_{ij}^* и σ_{ij}^* -деформации и напряжения в начале разгрузки; выражение для e_{i1} получим из выражения для e_{i0} путем замены ε_{ij} на ε_{ij1} ; по одинаковым индексам суммирования нет. В упругой области $k = m = n = 0$; в области догрузки (активных пластических деформаций) $m = n = 0$, $k = 1$; в области разгрузки $k = n = 0$, $m = 1$; в области вторичных пластических деформаций (вторичной догрузки) $k = 0$, $m = n = 1$.

1.2.5 Закон течения жесткопластического материала.

В теории идеальной пластичности однородных и неоднородных тел устанавливается связь между скоростями перемещений и напряжениями [45,46,54-56]. Основное допущение в теории идеальных жесткопластических тел состоит в том, что упругими деформациями и скоростями деформаций можно пренебречь при решении широкого круга задач. Примем обозначения скоростей деформаций и скоростей перемещений одинаковыми с принятыми нами обозначениями деформаций

и перемещений. Тогда равенства, выражающие закон течения имеют вид:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{p=1}^k \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.2.14)$$

где f_p функции текучести, выражающие, в общем случае, отдельные части полной замкнутой односвязной выпуклой поверхности текучести, λ_p — произвольные положительные множители.

Пластическое деформирование происходит, если $\lambda_p \geq 0$, то есть когда

$$\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} = 0, \quad f_p(\sigma_{ij}) = 0.$$

Приращения пластической деформации отсутствуют, если напряжения не достигают предела текучести,

$$\lambda_p = 0, \quad \text{если} \quad f_p(\sigma_{ij}) \leq 0,$$

или, когда происходит упругая разгрузка,

$$\lambda_p = 0, \quad \text{если} \quad \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$$

В частности, полная поверхность текучести может быть гладкой и представлена одной функцией текучести. Тогда $f_p = f$, $\lambda_p = \lambda$.

В качестве функций текучести принимают различные выпуклые функции в пространстве напряжений. Одни из них носят феноменологический характер [143-146], другие содержат элементы структурного анализа [147-149] или полностью основаны на структурном исследовании предельных состояний элементарных ячеек конструкции [150-151]. Для однородных изотропных металлов наиболее достоверно экспериментально проверенными функциями текучести являются функции, выражающие условие текучести Мизеса (1.2.6), Треска—Сен-Венана (1.2.7) и условие текучести максимального приведенного напряжения (1.2.8). Условия текучести в напряжениях из-за математических трудностей редко применяются в теории оболочек. Условия текучести и законы течения пластин и оболочек в обобщенных усилиях и моментах будут получены в разделах (1.4)-(1.6).

1.3. Законы деформирования конструктивно-неоднородных оболочек [89-90]

В исследованиях изгиба и устойчивости упругих и неупругих конструктивно-неоднородных пластин и оболочек для учета неоднородности имеются различные подходы. Для слоистых пластин и оболочек, когда они выполнены в виде набора однородных вдоль их образующей поверхности слоев, учет неоднородности по толщине достигается, во-первых, использованием соответствующих законов деформирования материалов слоев и, во-вторых, — введением различных гипотез относительно связи между перемещениями в несущих слоях и заполнителе. В большинстве работ используются гипотеза прямой нормали для несущих слоев и гипотеза прямой линии для слоев заполнителя [1,28,152-159].

В исследованиях упругих и неупругих слоистых пластин и оболочек с жестким заполнителем, (подкрепленным ребрами, вафлеобразным), преобладают две постановки задачи. В первой постановке учитывается дискретность распределения подкрепляющих элементов и их контактное взаимодействие с обшивкой [160-163]. В другой постановке, принятой и в настоящей работе, подкрепленные и вафлеобразные оболочки и пластины рассматриваются, как анизотропные [164-167]. При этом предполагается, что подкрепляющие элементы расположены регулярно и настолько часто, что введение осредненных характеристик, (деформаций, напряжений, усилий и моментов), имеет смысл. Жесткости, характеризующие анизотропные свойства заполнителя определяются исследованием локального равновесия элементов оболочек и пластин [168,169,85,89-92]. Определение анизотропных жесткостей является затруднительной задачей, как для упругих так и неупругих конструктивно-неоднородных оболочек и пластин. Основное затруднение возникает при определении жесткостей на сдвиг, в особенности, на сдвиг в направлении образующей поверхности оболочки. Кроме того, для неупругих оболочек численные значения жесткостей возможно получить только в результате решения задачи об изгибе и выпучивании рассматриваемых конструкций. При этом в решении

задачи об изгибе и устойчивости неупругих пластин и оболочек необходимо определить историю нагружения в каждой точке, аналогично тому, как она была определена для точечной модели в работе [84]. Следует также ожидать, что в каждой точке оболочки или пластины возможно действие закона активной пластической деформации или разгрузки или вторичной пластической деформации. Какой-либо качественный или количественный предварительный анализ существующих возможностей поведения конструктивно-неоднородных оболочек за пределом упругости, который позволил бы разработать простые и эффективные методы определения критических нагрузок в этих случаях вряд ли возможен. Поэтому возникает необходимость в построении модели конструктивно-неоднородной оболочки с учетом явлений разгрузки и вторичных пластических деформаций. Ниже построена математическая модель однородной анизотропной оболочки, эквивалентная конструктивно-неоднородной оболочке.

Пусть в трехслойной оболочке, уже рассмотренной в разделе (1.1), внешние слои выполнены из однородных изотропных несжимаемых материалов с модулями Юнга E^j , пределами текучести σ_0^j , пределами начала текучести e_0^j . Для напряжений, $\sigma_{rr} = \sigma_r, \sigma_{12}$, во внешних слоях, согласно закону (1.2.13), имеем выражения

$$\begin{aligned}\sigma_r^j &= E_1^j(\varepsilon_r^j + \nu_j \varepsilon_s^j) - \sigma_{0r}^j, \\ \sigma_{12}^j &= G \varepsilon_{12}^j - \sigma_{012}^j, \\ (r, s, j &= 1, 2, \quad r \neq s)\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\sigma_{0r}^j &= E_1^j[k_j \omega_0^j(e_{i0}^j)(\varepsilon_r^j + \nu_j \varepsilon_s^j) + m_j \omega_0^j(e_{i0}^{j*})(\varepsilon_r^{j*} + \nu_j \varepsilon_s^{j*}) \\ &\quad + n_j \omega_1^j(e_{i1}^j)(\varepsilon_{r1}^j + \nu_j \varepsilon_{s1}^j)]; \\ \sigma_{012}^j &= G_j[k_j \omega_0^j(e_{i0}^j) \varepsilon_{12}^j + m_j \omega_0^j(e_{i0}^{j*}) \varepsilon_{12}^{j*} + n_j \omega_1^j(e_{i1}^j) \varepsilon_{121}^j];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{i0}^j &= (2/\sqrt{3})[(\varepsilon_1^j)^2 + \varepsilon_1^j \varepsilon_2^j + (\varepsilon_2^j)^2 + (\varepsilon_{12}^j)^2/4]^{1/2}; \\
\sigma_{i0}^j &= [(\sigma_1^j)^2 - \sigma_1^j \sigma_2^j + (\sigma_2^j)^2 + 3(\sigma_{12}^j)^2]^{1/2}; \\
e_{i0}^{j*} &= (2/\sqrt{3})(\varepsilon_1^{j*2} + \varepsilon_1^{j*} \varepsilon_2^{j*} + \varepsilon_2^{j*2} + \varepsilon_{12}^{j*2}/4)^{1/2}; \\
\omega_t^j(e_{it}^j) &= 0, \text{ если } e_{it}^j \leq e_t^j; \\
\omega_t^j(e_{it}^j) &= (3G_j e_{it}^j - \sigma_{it}^j)/(3G_j e_{it}^j), \text{ если } e_{it}^j > e_t^j; \\
G_j &= E_j/[2(1 + \nu_j)], \quad e_1^j = 2e_0^j, \\
\varepsilon_{r1}^j &= \varepsilon_r^j - \varepsilon_r^{j*}; \quad \varepsilon_{121}^j = \varepsilon_{12}^j - \varepsilon_{12}^{j*}; \\
e_{it}^j &= \Phi_t^j(\sigma_{it}^j), \quad t = 0, 1
\end{aligned}$$

Функции $\Phi_t^j(e_{it}^j)$ определяются из диаграммы растяжения-сжатия при упруго-пластических деформациях для упрочняющихся материалов слоев; ε_r^{j*} , ε_{12}^{j*} - деформации в начале разгрузки; выражение для e_{i1}^j получим из выражения для e_{i0}^j путем замены ε_r^j , ε_{12}^j на ε_{r1}^j , ε_{121}^j ; по одинаковым индексам суммирования нет. В упругой области $k_j = m_j = n_j = 0$; в области догрузки (активных пластических деформаций) $m_j = n_j = 0$, $k_j = 1$; в области разгрузки $k_j = n_j = 0$, $m_j = 1$; в области вторичной догрузки $k_j = 0$, $m_j = n_j = 1$.

Пусть средний слой, (заполнитель), представляет собой набор ребер, направленных вдоль линий главных кривизн отсчетной поверхности. Предположим, что ребра в обоих направлениях распределены равномерно и на элементе $dx_1 dx_2$ имеется по одному ребру каждого направления. Введем в рассмотрение коэффициент $k = 1$, если ребра жестко соединены с узлом по середине и $k = 0$, если ребра не связаны между собой. Сечения ребер для простоты предположим прямоугольными, при этом $\omega_2 dx_2 dx_3$ и $\omega_1 dx_1 dx_3$ - площади поперечных сечений, $\omega_i = d_1/(a_i + d_i)$ - плотности их в направлениях координатных линий x_1 и x_2 , a_i - расстояния между ребрами, d_i - толщины ребер ($i = 1, 2$), рис. 1.2, 1.3.

Выразим деформации элемента $dx_1 dx_2 dx_3$ среднего слоя ε_{ij}^3 через деформации ребер и узла.

Относительные удлинения ε_1^y и ε_1^{p1} ребра в направлении x_1 определим из следующих выражений:

$$\varepsilon_1^y = \frac{\Delta u_1^y}{\omega_1 dx_1}, \quad \varepsilon_1^{p1} = \frac{\Delta u_1^{p1}}{(1 - \omega_1) dx_1}.$$

Здесь Δu_1^y и Δu_1^{p1} – удлинения узла и ребра в направлении x_1 , причем $\Delta u_1 = \Delta u_1^y + \Delta u_1^{p1}$ – удлинение всего элемента, рис. 1.4. Для относительного удлинения $\varepsilon_1^3 = \Delta u_1 / dx_1$ получим выражение,

$$\varepsilon_1^3 = k\omega_1 \varepsilon_1^y + (1 - k\omega_1) \varepsilon_1^{p1}, \quad (1.3.2)$$

Аналогично выразим относительное удлинение ε_2^3 элемента через деформации удлинения ε_2^y узла и ε_2^{p2} ребра в направлении x_2 ,

$$\varepsilon_2^3 = k\omega_2 \varepsilon_2^y + (1 - k\omega_2) \varepsilon_2^{p2} \quad (1.3.3)$$

Деформации сдвига элемента определим через изменения прямого угла сечений узла и ребер. Изменение прямого угла в сечении узла плоскостью x_1x_3 определим, как отношение Δw^y к длине $\omega_1 dx_1$, а изменение прямого угла того же сечения в направлении x_1 – как отношение $\Delta' u_1^y$ к длине dx_3 ; при этом деформацию сдвига ε_{13}^y определим из выражения, рис. 1.4,

$$\varepsilon_{13}^y = \frac{\Delta' u_1^y}{dx_3} + \frac{\Delta w^y}{\omega_1 dx_1} \quad (1.3.4)$$

Определяя деформацию сдвига ребра в направлении x_1 , ε_{13}^{p1} в плоскости x_1x_3 , как сумму отношений смещений Δw^{p1} и $\Delta' u_1^{p1}$ к длинам $(1 - \omega_1) dx_1$ и dx_3 , соответственно, получим,

$$\varepsilon_{13}^{p1} = \frac{\Delta' u_1^{p1}}{dx_3} + \frac{\Delta w^{p1}}{(1 - \omega_1) dx_1} \quad (1.3.5)$$

Деформацию сдвига ε_{13}^3 элемента в плоскости x_1x_3 определим соотношением,

$$\varepsilon_{13}^3 = \frac{\Delta' u_1}{dx_3} + \frac{\Delta w}{dx_1} \quad (1.3.6)$$

Здесь

$$\Delta' u_1 = \Delta' u_1^y = \Delta' u_1^{p1}; \quad \Delta w = \Delta w^{p1} + \Delta w^y$$

Воспользовавшись выражениями (1.3.4)-(1.3.6) получим,

$$\varepsilon_{13}^3 = k\omega_1 \varepsilon_{13}^y + (1 - k\omega_1) \varepsilon_{13}^{p1} \quad (1.3.7)$$

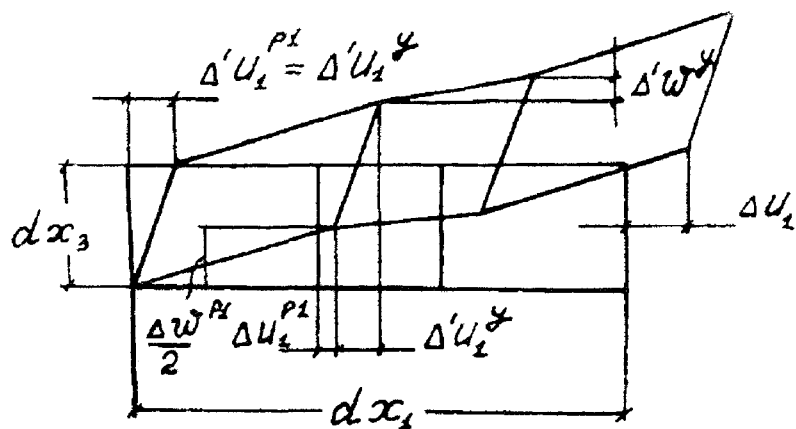


Рис. 1.4.

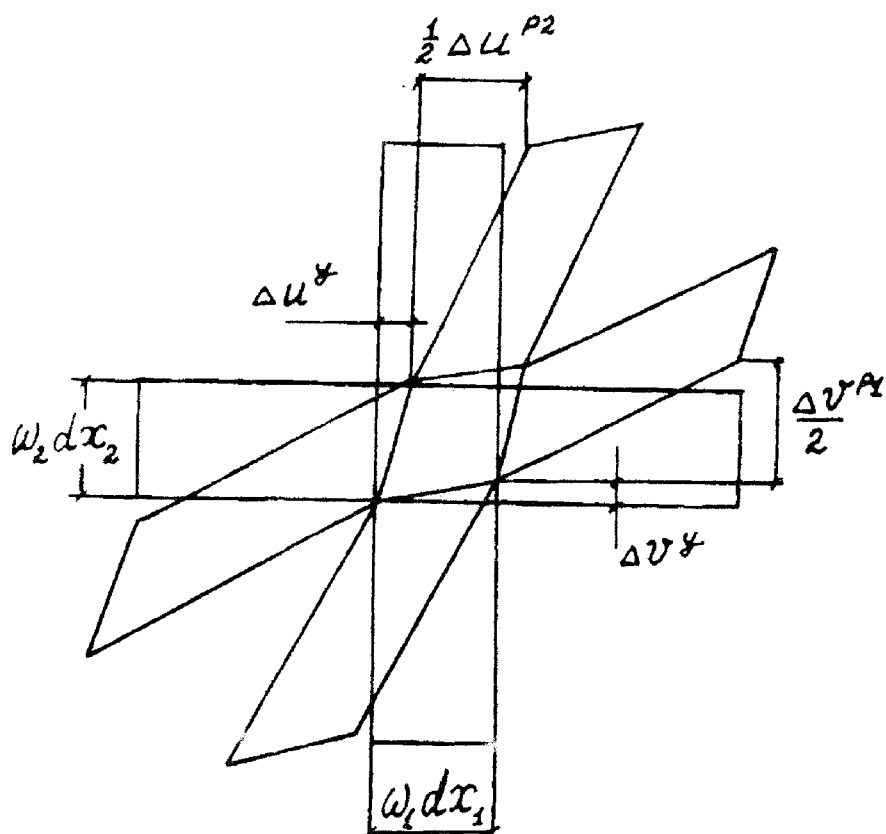


Рис. 1.5.

Аналогично находим

$$\varepsilon_{23}^3 = k\omega_2\varepsilon_{23}^y + (1 - k\omega_2)\varepsilon_{23}^{p2} \quad (1.3.8)$$

Здесь ε_{23}^y , ε_{23}^{p2} — деформации сдвига в узле и ребре, ε_{23}^3 — деформация сдвига элемента в плоскости x_2x_3 .

Зависимости (1.3.2)-(1.3.3), (1.3.7)-(1.3.8) возможно получить и энергетическим методом. Рассмотрим элемент $dx_1dx_2dx_3$ из однородного ортотропного материала эквивалентный конструктивно-неоднородному элементу $dx_1dx_2dx_3$ заполнителя в следующем отношении: равномерно-распределенные напряжения по граням, соответственно, равны,

$$\sigma_1^3 = \omega_2\sigma_1^{p1}, \quad \sigma_2^3 = \omega_1\sigma_2^{p2}, \quad \sigma_{13}^3 = \omega_2\sigma_{13}^{p1}, \quad \sigma_{23}^3 = \omega_1\sigma_{23}^{p2},$$

где σ_1^{p1} , σ_2^{p2} , σ_{13}^{p1} , σ_{23}^{p2} — напряжения в сечениях соответствующих ребер; σ_1^3 , σ_2^3 , σ_{13}^3 , σ_{23}^3 — напряжения в однородном ортотропном заполнителе. Деформации в элементе определяются в соответствии с равенствами (1.1.9).

Определяя работу напряжения σ_1^3 в эквивалентном заполнителе получим,

$$A = \sigma_1^3\varepsilon_1^3dx_1dx_2dx_3$$

Работа напряжения σ_1^{p1} в элементе рассматриваемого ребристого заполнителя, с учетом зависимости (1.3.2), равна

$$A' = \sigma_1^{p1}[\omega_1\omega_2\varepsilon_1^y + (1 - \omega_1)\omega_2\varepsilon_1^{p1}]dx_1dx_2dx_3,$$

так как напряжения в ребре и узле равны, $\sigma_1^{p1} = \sigma_1^y$.

Из равенства работ $A = A'$ получим выражение (1.3.2). По аналогии нетрудно определить и зависимости (1.3.3), (1.3.7) и (1.3.8).

Найдем зависимости деформаций сдвига ε_{12}^3 заполнителя от деформаций сдвига элементов крестовины в плоскости x_1x_2 . Выражая изменение прямого угла крестовины через изменения прямых углов ее элементов, получим,

$$\varepsilon_{12}^3 = k\omega_1\varepsilon_{12}^y + k\omega_2\varepsilon_{21}^y + (1 - k\omega_1)\varepsilon_{12}^{p1} + (1 - k\omega_2)\varepsilon_{12}^{p2} \quad (1.3.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12}^y &= \frac{\Delta u^y}{\omega_2 dx_2}, \quad \varepsilon_{21}^y = \frac{\Delta v^y}{\omega_1 dx_1}, \quad \varepsilon_{12}^{p1} = \frac{\Delta v^{p1}}{(1 - \omega_1) dx_1}, \\ \varepsilon_{12}^{p2} &= \frac{\Delta u^{p2}}{(1 - \omega_2) dx_2}, \quad \varepsilon_{12}^3 = \frac{\Delta u}{dx_2} + \frac{\Delta v}{dx_1}, \\ \Delta u &= \Delta u^y + \Delta u^{p2}, \quad \Delta v = \Delta v^y + \Delta v^{p1}\end{aligned}$$

где ε_{12}^y , ε_{21}^y — деформации сдвига в узле по направлениям x_1 и x_2 ; ε_{12}^{p1} , ε_{12}^{p2} — деформации сдвига в ребрах, соответственно, в перпендикулярных к ним направлениях; Δu^y , Δv^y , Δu^{p1} , Δv^{p2} , — смещения в узле и ребрах, рис. 1.5.

Соотношения (1.3.9) можно получить и энергетическим методом. Для этого предположим, что по всему объему эквивалентного элемента $dx_1 dx_2 dx_3$ касательные напряжения равны $\sigma_{12}^3 = \sigma_{21}^3 = \omega_2 \sigma_{12}^{p1} = \omega_1 \sigma_{21}^{p2}$, где σ_{12}^{p1} и σ_{21}^{p2} — напряжения в ребрах. При таких предположениях для работы в эквивалентном элементе получим выражение,

$$A = \sigma_{12}^3 \varepsilon_{12}^3 dx_1 dx_2 dx_3$$

Работа в элементе заполнителя (крестовины):

$$\begin{aligned}A' &= [\omega_1 \omega_2 \varepsilon_{12}^y \sigma_{12}^{p1} + \omega_1 \omega_2 \varepsilon_{21}^y \sigma_{21}^{p1} + (1 - \omega_1) \omega_2 \varepsilon_{12}^{p1} \sigma_{12}^{p1} \\ &\quad + (1 - \omega_2) \omega_1 \varepsilon_{12}^{p2} \sigma_{21}^{p2}] dx_1 dx_2 dx_3\end{aligned}$$

Из равенства $A = A'$, в принятых предположениях, находим зависимость (1.3.9). В выводе соотношения (1.3.9) предположено, что изгибом ребер в плоскости крестовины можно пренебречь, и, что закон парности касательных напряжений в узле заполнителя выполняется приближенно. Соотношения типа (1.3.9), связывающие деформацию сдвига эквивалентного элемента заполнителя с деформациями элементов крестовины возможно получить и при иных предположениях. Так, если деформации сдвига ребер и узла определим из выражений, рис. 1.5,

$$\varepsilon_{12}^y = \frac{\Delta u^y}{\omega_2 dx_2} + \frac{\Delta v^y}{\omega_1 dx_1}, \quad \varepsilon_{12}^{p1} = \frac{\Delta v^{p1}}{(1 - \omega_1) dx_1} + \frac{\Delta u^y}{\omega_2 dx_2},$$

$$\varepsilon_{12}^{p2} = \frac{\Delta u^{p2}}{(1 - \omega_2)dx_2} + \frac{\Delta v^y}{\omega_1 dx_1},$$

то соотношение типа (1.3.9) примет вид, [89],

$$\varepsilon_{12}^3 = k[(\omega_1 + \omega_2 - 1)\varepsilon_{12}^y + (1 - \omega_1)\varepsilon_{12}^{p1} + (1 - \omega_2)\varepsilon_{12}^{p2}] \quad (1.3.10)$$

Здесь также, как и в (1.3.9), величина ε_{12}^3 есть изменение прямого угла крестовины. Деформации ε_r^3 , ε_{r3}^3 , ε_{12}^3 определяются в соответствии с выражениями нелинейной теории деформаций (1.1.9). В предельном случае, $\omega_1 = \omega_2 = 1$, из равенства (1.3.10) следует $\varepsilon_{12}^3 = \varepsilon_{12}^y$. Если плотности ребер малы, то необходимо учитывать их изгиб. Вопрос о выборе соотношения (1.3.9) или (1.3.10) в каждом конкретном случае расчета оболочек решается после сравнения расчетных и экспериментальных данных.

В случае, когда ребра в узле не соединены определим деформацию сдвига каждого ребра в отдельности. Предположим, что сечения ребер в направлениях x_1 и x_2 остаются параллельными осям x_2 и x_1 , соответственно. При таком предположении деформации сдвига ε_{12}^{p1} и ε_{21}^{p2} ребер определим из соотношений,

$$\varepsilon_{12}^{p1} = u_{2,1}, \quad \varepsilon_{12}^{p2} = u_{1,2} \quad (1.3.11)$$

Выражения для остальных деформаций получим из равенств (1.3.2), (1.3.3), (1.3.7), (1.3.8) при $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\varepsilon_{12}^y = 0$.

В работе [89] предложена теория изгиба и выпучивания конструктивно-неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости, причем для деформаций крестообразного заполнителя в зависимости от деформаций элементов крестовины приняты соотношения (1.3.2), (1.3.3), (1.3.7), (1.3.8) и (1.3.10) или (1.3.11). Воспользуемся теми же соотношениями, кроме (1.3.10), которое заменим равенством (1.3.9).

Рассмотрим напряженное состояние в узле и ребрах. Предположим, что узел и ребра выполнены из различных несжимаемых материалов. В ребрах, направленных вдоль x_1 считаем $\sigma_2^{p1} = \sigma_{23}^{p1} = 0$, $\sigma_1^{p1} = \sigma_1^{p1}(x_1, x_2, x_3)$; в ребрах, направленных вдоль x_2 , $\sigma_1^{p2} = \sigma_{13}^{p2} = 0$, $\sigma_2^{p2} = \sigma_2^{p2}(x_1, x_2, x_3)$; в узле $\sigma_r^y = \sigma_r^{pr}$, $\sigma_{12}^y = \sigma_{12}^{p1}$, $\sigma_{21}^y =$

σ_{21}^{21} , $\sigma_{r3}^y = \sigma_{r3}^{pr}$; отличные от нуля напряжения в узле и ребрах считаем постоянными по всему элементу $dx_1 dx_2 dx_3$. Тогда для деформаций в узле и ребрах, согласно законам малых упруго-пластических деформаций при идеальном эффекте Баушингера, имеем, (1.2.13),

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^y &= (\sigma_r^{pr} - \nu_y \sigma_s^{ps})/E_y + \varepsilon_{0r}^y, \\ \varepsilon_{rs}^y &= \sigma_{rs}^{yr}/G_y + \varepsilon_{0rs}^y, \quad \varepsilon_{r3}^y = \sigma_{r3}^{pr}/G_y + \varepsilon_{0r3}^y, \quad \varepsilon_r^{pr} = \sigma_r^{pr}/E_{pr} + \varepsilon_{0r}^{pr}, \\ \varepsilon_{12}^{pr} &= \sigma_{12}^{pr}/G_{pr} + \varepsilon_{012}^{pr}, \quad \varepsilon_{r3}^{pr} = \sigma_{r3}^{pr}/G_{pr} + \varepsilon_{0r3}^{pr}, \\ &\quad (r, s = 1, 2, \quad r \neq s) \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0r}^y &= [a_y(\sigma_r^{pr} - \nu_y \sigma_s^{ps}) + b_y(\sigma_r^{pr*} - \nu_y \sigma_s^{ps*})]/E_y, \\ \varepsilon_{012}^y &= (a_y \sigma_{12}^{p1} + b_y \sigma_{12}^{p1*})/G_y, \quad \varepsilon_{021}^y = (a_y \sigma_{21}^{p2} + b_y \sigma_{21}^{p2*})/G_y, \\ \varepsilon_{0r3}^y &= (a_y \sigma_{r3}^{pr} + b_y \sigma_{r3}^{pr*})/G_y, \quad \varepsilon_{0r}^{pr} = (a_{pr} \sigma_r^{pr} + b_{pr} \sigma_r^{pr*})/G_{pr}, \\ \varepsilon_{012}^{pr} &= (a_{pr} \sigma_{12}^{pr} + b_{pr} \sigma_{12}^{pr*})/G_{pr}, \quad \varepsilon_{0r3}^{pr} = (a_{pr} \sigma_{r3}^{pr} + b_{pr} \sigma_{r3}^{pr*})/G_{pr}, \\ a_y &= [k_y \omega_0^y(\sigma_{i0}^y) + n_y \omega_1^y(\sigma_{i1}^y)]/[1 - k_y \omega_0^y(\sigma_{i0}^y) - n_y \omega_1^y(\sigma_{i1}^y)], \\ b_y &= [m_y \omega_0^y(\sigma_{i0}^y) - n_y \omega_1^y(\sigma_{i1}^y)]/\{[1 - \omega_0^y(\sigma_{i0}^y)][1 - k_y \omega_0^y(\sigma_{i0}^y) - n_y \omega_1^y(\sigma_{i1}^y)]\}; \\ \omega_t^y(\sigma_{it}^y) &= 0, \quad \text{если} \quad \sigma_{it}^y \leq \sigma_{0t}^y; \\ \omega_t^y(\sigma_{it}^y) &= (3G_y e_{it}^y - \sigma_{it}^y)/(3G_y e_{it}^y), \quad \text{если} \quad \sigma_{it}^y > \sigma_{it}^y; \\ G_y &= E_y/[2(1 + \nu_y)], \quad G_{pr} = E_{pr}/[2(1 + \nu_{pr})], \quad \sigma_1^y = 2\sigma_0^y, \quad \sigma_1^{pr} = \sigma_0^{pr} \\ \sigma_{i0}^y &= \{(\sigma_1^y)^2 + \sigma_1^y \sigma_2^y + (\sigma_2^y)^2 + 3[(\sigma_{12}^y + \sigma_{21}^y)^2/4 + (\sigma_{13}^y)^2 + (\sigma_{23}^y)^2]\}^{1/2}, \\ \sigma_{i0}^{pr} &= [(\sigma_r^{pr})^2 + 3[(\sigma_{12}^{pr})^2 + (\sigma_{r3}^{pr})^2]]^{1/2}; \\ \sigma_{r1}^3 &= \sigma_r^3 - \sigma_r^{3*}, \quad \sigma_{121}^3 = \sigma_{12}^3 - \sigma_{12}^{3*}, \\ \sigma_{211}^3 &= \sigma_{21}^3 - \sigma_{21}^{3*}, \quad \sigma_{121}^{pr} = \sigma_{12}^{pr} - \sigma_{12}^{pr*}, \\ \sigma_{r31}^3 &= \sigma_{r3}^3 - \sigma_{r3}^{3*}, \\ e_{it}^y &= \Phi_t^{-1y}(\sigma_{it}^y), \quad e_{it}^{pr} = \Phi_t^{-1pr}(\sigma_{it}^{pr}), \\ \sigma_{rs}^{yr} &= \sigma_{rs}^{pr}, \quad \sigma_{21}^{p2} = \sigma_{12}^{p2}, \quad t = 0, 1, \\ &\quad (r, s = 1, 2, \quad r \neq s) \end{aligned}$$

Функции $\Phi_t^y(e_{it}^y)$ и $\Phi_t^{pr}(e_{it}^{pr})$ определяются из диаграммы растяжения-сжатия при упруго-пластических деформациях для упрочняющихся

материалов узла и ребер; σ_r^{pr*} , σ_{12}^{pr*} , σ_{r3}^{pr*} — напряжения в начале разгрузки; E_y , E_{pr} , σ_0^y , σ_0^{pr} — модули Юнга и пределы текучести узла и ребер; коэффициенты Пуассона ν_y и ν_{pr} подразумеваем равными 1/2; возведение в степень обозначено индексом над скобками. Интенсивности напряжений σ_{i0}^{y*} , σ_{i0}^{pr*} и σ_{i1}^y , σ_{i1}^{pr} определим из выражений для σ_{i0}^y , σ_{i0}^{pr} заменой σ_r^{pr} , σ_{12}^{pr} , σ_{r3}^{pr} на σ_r^{pr*} , σ_{12}^{pr*} , σ_{r3}^{pr*} и σ_{r1}^{pr} , σ_{121}^{pr} , σ_{r31}^{pr} , соответственно; величины a_{pr} и b_{pr} определим из выражений для a_y и b_y после замены индекса "y" на "pr". Для интенсивности напряжений в узле воспользовались приближенным выражением. В упругой области для ребер ($r = 1, 2$) или узла коэффициенты $k_{pr} = m_{pr} = n_{pr} = 0$ или $k_y = m_y = n_y = 0$; в области догрузки $m_{pr} = n_{pr} = 0$, $k_{pr} = 1$ или $m_y = n_y = 0$, $k_y = 1$; в области разгрузки $k_{pr} = n_{pr} = 0$, $m_{pr} = 1$ или $k_y = n_y = 0$, $m_y = 1$; в области вторичных пластических деформаций $k_{pr} = 0$, $m_{pr} = n_{pr} = 1$ или $k_y = 0$, $m_y = n_y = 1$.

Подставляя выражения (1.3.12) в равенства (1.3.2), (1.3.3), (1.3.7) — (1.3.9), после преобразований получим осредненный закон деформирования однородного анизотропного материала, эквивалентного конструктивно — неоднородному материалу заполнителя:

$$\begin{aligned}\sigma_r^3 &= a_r \varepsilon_r^3 + b_s \varepsilon_s^3 - \sigma_{0r}^3, & \sigma_{12}^3 &= G_{12} \varepsilon_{12}^3 - \sigma_{012}^3, \\ \sigma_{r3}^3 &= G_{r3} \varepsilon_{r3}^3 - \sigma_{0r3}^3.\end{aligned}\quad (1.3.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\sigma_{0r}^3 &= a_r [\omega_r \varepsilon_{0r}^y + (1 - \omega_r) \varepsilon_{0r}^{pr}] + b_s [\omega_s \varepsilon_{0s}^y + (1 - \omega_s) \varepsilon_{0s}^{ps}], \\ \sigma_{0r3}^3 &= G_{r3} [\omega_r \varepsilon_{0r3}^y + (1 - \omega_r) \varepsilon_{0r3}^{pr}], \\ \sigma_{012}^3 &= G_{12} [\omega_1 \varepsilon_{012}^y + \omega_2 \varepsilon_{012}^y + (1 - \omega_1) \varepsilon_{012}^{p1} + (1 - \omega_2) \varepsilon_{012}^{p2}], \\ a_1 &= \frac{\omega_2 [k \omega_2 E_{p2} + (1 - k \omega_2) E_y]}{E_y E_{p2} \Delta}, & a_2 &= \frac{\omega_1 [k \omega_1 E_{p1} + (1 - k \omega_1) E_y]}{E_y E_{p1} \Delta}, \\ b_2 &= b_1 = k \omega_1 \omega_2 \nu_y / (E_y \Delta), \\ \Delta &= \frac{[k \omega_1 E_{p1} + (1 - k \omega_1) E_y] [k \omega_2 E_{p2} + (1 - k \omega_2) E_y]}{(E_y)^2 E_{p1} E_{p2}} - \frac{k \omega_1 \omega_2 (\nu_y)^2}{(E_y)^2},\end{aligned}$$

$$G_{r3} = \frac{G_y G_{pr} \omega_s}{k \omega_r G_{pr} + (1 - k \omega_r) G_y},$$

$$G_{12} = \frac{G_y G_{p1} G_{p2} \omega_1 \omega_2}{k(\omega_1^2 + \omega_2^2) G_{p1} G_{p2} + \omega_2(1 - k \omega_1) G_y G_{p2} + \omega_1(1 - k \omega_2) G_y G_{p1}},$$

где, согласно равенству работ напряжений в эквивалентном и конструктивно-неоднородном элементах $dx_1 dx_2 dx_3$, $\sigma_r^3 = \omega_s \sigma_r^{pr}$, $\sigma_{r3}^3 = \omega_s \sigma_{r3}^3$, $\sigma_{12}^3 = \omega_s \sigma_{12}^{pr}$, ($r, s = 1, 2, r \neq s$).

Если воспользоваться соотношениями (1.3.10), то в равенствах (1.3.13) следует принять

$$G_{12} = \frac{k c G_y G_{p1} G_{p2} \omega_1 \omega_2}{(\omega_1 + \omega_2 - 1) G_{p1} G_{p2} + (1 - \omega_1) G_y G_{p2} + (1 - \omega_2) G_y G_{p1}},$$

$$\sigma_{12}^{p1} = \sigma_{12}^{p2} = \sigma_{21}^{p2}, \quad (1.3.14)$$

где коэффициент c выбирается в зависимости от выбранного метода осреднения. В работе [89] этот коэффициент выбран, с учетом равенства работ в конструктивно-неоднородном и эквивалентном слое и в предположении, что деформации в ребрах и узлах незначительно отличаются от деформаций эквивалентного однородного элемента заполнителя, $c = \omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \omega_2$. Возможны и другие варианты метода осреднения касательных напряжений в поверхностях, параллельных отсчетной поверхности. Если воспользоваться соотношением $\sigma_{12}^3 = \sigma_{21}^3 = \omega_2 \sigma_{12}^{p1} = \omega_1 \sigma_{12}^{p2}$, то необходимо допущение и на величину напряжения в узле, например, $\sigma_{12}^{y1} = \sigma_{21}^{y2} = (\sigma_{12}^{p1} + \sigma_{21}^{p2})/2$. Таким образом, в общем случае, осреднение тангенциальных напряжений σ_{12} (при кручении оболочек) в элементе $dx_1 dx_2 dx_3$ конструктивно-неоднородного слоя является затруднительной, требующей исследования и экспериментальной проверки задачей.

В случае, когда ребра не соединены в узле, связь между напряжениями σ_{sr}^3 и деформациями ε_{sr}^{pr} , (1.3.11), в среднем слое, на основании равенств (1.3.12)-(1.3.13), имеет вид:

$$\sigma_{rs}^3 = G_{12} \sigma_{rs}^{pr} - \sigma_{0rs}^{pr}, \quad (1.3.15)$$

где

$$\sigma_{0rs}^{pr} = G_{rs} \varepsilon_{0rs}^{pr}, \quad G_{rs} = E_{pr} \omega_s / [2(1 + \nu_{pr})]$$

Остальные обозначения такие же, как в равенствах (1.3.12)-(1.3.13).

1.4. Условие текучести Мизеса осесимметрично нагруженных однородных изотропных оболочек вращения [93]

Как показывает анализ исследований предельных состояний жесткопластических пластин и оболочек, условия текучести в напряжениях (1.2.6)-(1.2.8) не нашли широкого применения. Большинство исследований предельного равновесия оболочек и пластин основано на условиях текучести в обобщенных усилиях и моментах. Определению условий текучести однородных изотропных оболочек вращения в обобщенных усилиях и моментах посвящено большое число работ [47, 49-61]. Предельные соотношения между обобщенными усилиями и моментами для осесимметрично нагруженных пластин и оболочек вращения на основе условия текучести Треска в напряжениях определены в работах [170, 50, 51]. Двухпараметрические и трехпараметрические уравнения поверхности текучести оболочек вращения получены в работах [20, 49]. В работе [93] установлено координатное уравнение поверхности текучести тонких оболочек вращения в пространстве обобщенных усилий и моментов, а также в пространстве их квадратичных форм на основе условия текучести Мизеса в напряжениях.

Рассмотрим тонкую оболочку вращения толщиной $2h$, выполненной из идеального жесткопластического материала, удовлетворяющему условию текучести (1.2.6),

$$f = \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_0^2 = 0. \quad (1.4.1)$$

Здесь f - функция текучести; σ_i - главные напряжения ($i=1,2$); σ_0 - предел текучести.

Для мощности диссипации имеем выражение,

$$D = \int_{-h}^h (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2) dz, \quad (1.4.2)$$

где e_i — скорости деформаций, z — координата по толщине оболочки.

Предположим, что скорости деформаций выражаются через скорости деформаций ε_{0i} и скорости главных кривизн k_i срединной поверхности согласно гипотезе Кирхгофа,

$$e_i = e_{0i} + zk_i. \quad (1.4.3)$$

Подставляя выражение (1.4.3) в (1.4.2), определим мощность диссипации в обобщенных усилиях, n_i , n_2 , моментах, m_1 , m_2 и обобщенных скоростях деформаций, ε_{0i} , κ_i [171]:

$$D = 2\sigma_0 h(n_1 \varepsilon_{01} + n_2 \varepsilon_{02} + m_1 \kappa_1 + m_2 \kappa_2). \quad (1.4.4)$$

Здесь

$$n_i = N_i/N_0, \quad m_i = M_i/M_0, \quad N_i = \int_{-h}^h \sigma_i dz, \quad M_i = \int_{-h}^h \sigma_i z dz$$

$$N_0 = 2\sigma_0 h, \quad M_0 = \sigma_0 h^2, \quad \varepsilon_{0i} = e_{0i}, \quad \kappa_i = hk_i/2$$

Воспользуемся ассоциированным законом течения (1.2.14):

$$e_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \lambda(2\sigma_i - \sigma_j); \quad i, j = 1, 2; i \neq j, \quad \lambda > 0. \quad (1.4.5)$$

Разрешив уравнения (1.4.5) относительно напряжений, имеем

$$\sigma_i = (2e_i + e_j)/(3\lambda). \quad (1.4.6)$$

С помощью выражений (1.4.3) и (1.4.6) из условия текучести (1.4.1) получим

$$\lambda = |\kappa_2| X/(\sqrt{3}\sigma_0). \quad (1.4.7)$$

Здесь

$$X = \sqrt{4ax^2 + 2bx + c}, \quad a = \kappa^2 + k\kappa + 1, \quad b = \kappa(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + k(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2),$$

$$c = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{0i}/|\kappa_2|,$$

$$x = z/h, \quad k = \text{sign}(\kappa_2 / |\kappa_2|).$$

Из выражений (1.4.3)-(1.4.4), (1.4.6)-(1.4.7) для обобщенных усилий и моментов найдем

$$\begin{aligned} n_i &= [(2\varepsilon_i + \varepsilon_j)I_1/2 + (ik + j\kappa)I_2]/\sqrt{3}, \\ m_i &= [(2\varepsilon_i + \varepsilon_j)I_2 + 2(ik + j\kappa)I_3]/\sqrt{3}, \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

где

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{r + \sqrt{a}}{r - \sqrt{a}}, \quad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{X} = \frac{t}{a} (1 - rI_1),$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{X} = \frac{r}{2a} - \frac{3bt}{8a^2} + \frac{(3b^2 - 4ac)}{32a^2} I_1,$$

$$r = (X_1 + X_2)/4, \quad t = (X_1 - X_2)/4, \quad X_1 = \sqrt{4a + 2b + c},$$

$$X_2 = \sqrt{4a - 2b + c}, \quad \kappa = -k/2 \pm \sqrt{a - 3/4},$$

$$\varepsilon_1 = [b - \varepsilon_2(2k + \kappa)]/(2\kappa + k),$$

$$\varepsilon_2 = bk/(2a) \pm [(4ac - b^2)(a - 3/4)]^{1/2}/(\sqrt{3}a),$$

$$b = 4rt, \quad c = 4(r^2 + t^2 - a), \quad a \geq 3/4.$$

Уравнения (1.4.8) определяют поверхность текучести Мизеса в четырехмерном пространстве обобщенных усилий и моментов в зависимости от трех параметров a, r, t . Трехпараметрические уравнения такой поверхности установлены в зависимости от других параметров в работе [49].

Исключив множитель λ из уравнений (1.4.6), с учетом (1.4.3) получим

$$\sigma_1[2(\varepsilon_{02} + zk_2) + \varepsilon_{01} + zk_1] - \sigma_2[2(\varepsilon_{01} + zk_1) + \varepsilon_{02} + zk_2]. \quad (1.4.9)$$

Умножив равенство (1.4.9) на dz , проинтегрировав его по толщине оболочки, имеем

$$(2n_1 - n_2)\varepsilon_{02} - (2n_2 - n_1)\varepsilon_{01} + (2m_1 - m_2)\kappa_2 - (2m_2 - m_1)\kappa_1 = 0. \quad (1.4.10)$$

Обобщенные скорости деформаций связаны с обобщенными усилиями и моментами ассоциированным законом течения [171]:

$$\varepsilon_{0i} = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial n_i}, \quad \kappa_i = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial m_i}, \quad \lambda_1 > 0. \quad (1.4.11)$$

Здесь F – функция текучести в обобщенных усилиях и моментах.

Внося выражения (1.4.11) в уравнение (1.4.10) и сокращая на множитель λ_1 , получим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} (2n_1 - n_2) \frac{\partial F}{\partial n_2} - (2n_2 - n_1) \frac{\partial F}{\partial n_1} + (2m_1 - m_2) \frac{\partial F}{\partial m_2} \\ - (2m_2 - m_1) \frac{\partial F}{\partial m_1} = 0. \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Первые интегралы уравнения (1.4.12) имеют вид:

$$\begin{aligned} Q_n = n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2, \quad Q_m = m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2, \\ Q_{nm} = n_1(2m_1 - m_2) + n_2(2m_2 - m_1) \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Решение уравнения (1.4.12) $F(n_1, n_2, m_1, m_2)$, может быть выражено, как функция трех квадратичных форм (1.4.13):

$$F(n_1, n_2, m_1, m_2) = \Phi(Q_n, Q_m, Q_{nm}). \quad (1.4.14)$$

Чтобы определить вид функции Φ , необходимо и достаточно знать вид функции F при какой-либо фиксированной координате, например $n_1 = 0$:

$$F(0, n_2, m_1, m_2) = F_1(n_2, m_1, m_2). \quad (1.4.15)$$

Полагая в первом уравнении (1.4.8) $n_1 = 0$ и исключая с помощью его интеграл I_1 из оставшихся уравнений, найдем:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\beta |m_1|/2 = (1 + 3\alpha n_2^2/4) \sqrt{1 - 3\alpha/4} \\ - (1 + 3\alpha/4) |n_2| \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - 3\alpha n_2^2/4)}; \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

$$\beta |m| / \sqrt{3\alpha} = |n_2| \sqrt{(1-\beta^2)(1-3\alpha n_2^2/4)(1-3\alpha/4)} + 1 - 2n_2^2(1-3\alpha/8); \quad (1.4.17)$$

$$\alpha = \frac{4(4n_2^2\beta^2 - A)}{3n_2^2(4\beta^2 - A)}; \quad (1.4.18)$$

где

$$A = (1-\beta^2) \ln^2 \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad m = 2m_2 - m_1, \quad \alpha = 1/a,$$

$$\beta = 1/(r\sqrt{\alpha}), \quad 0 \leq \alpha \leq 4/3, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Уравнения (1.4.16)-(1.4.18) определяют функцию F_1 в зависимости от двух параметров α и β . Выражая усилия и моменты через квадратичные формы при $n_1 = 0$, получим двухпараметрические уравнения поверхности текучести Мизеса для оболочек вращения:

$$\beta \sqrt{4Q_n Q_m - Q_{nm}^2} = 2\sqrt{Q_n} \left[(1 + 3\alpha Q_n/4) \sqrt{1 - 3\alpha/4} - \sqrt{Q_n} (1 + 3\alpha/4) \sqrt{(1-\beta^2)(1-3\alpha Q_n/4)} \right]; \quad (1.4.19)$$

$$\beta |Q_{nm}| / \sqrt{3\alpha Q_n} = \sqrt{Q_n(1-\beta^2)(1-3\alpha Q_n/4)(1-3\alpha/4)} + 1 - 2Q_n(1-3\alpha/8); \quad (1.4.20)$$

$$\alpha = \frac{4(4Q_n\beta^2 - A)}{3Q_n(4\beta^2 - A)}. \quad (1.4.21)$$

Определив параметры α и β из уравнений (1.4.19)-(1.4.20), подставив их выражения в уравнение (1.4.21), получим координатное уравнение поверхности текучести Мизеса в пространстве квадратичных форм:

$$\Phi \equiv \left(1 - \frac{3}{4}\alpha Q_n\right) (1-\beta^2) \ln^2 \frac{1+\beta}{1-\beta} - 4 \left(1 - \frac{3}{4}\alpha\right) Q_n \beta^2 = 0. \quad (1.4.22)$$

Здесь

$$\beta = \frac{12\sqrt{\alpha}(1-Q_n)}{\sqrt{3} \left[2(1+3\alpha/4) |m| + 3 |m_1| \sqrt{\alpha(1-3\alpha/4)} \right]}, \quad (1.4.23)$$

$$m = \pm Q_{nm}/\sqrt{Q_n}, \quad m_1 = \pm (\sqrt{4Q_m - m^2})/\sqrt{3}$$

Для параметра α имеем алгебраическое уравнение четвертого порядка,

$$Q_1^2 - Q_2 = 0, \quad (1.4.24)$$

где

$$Q_1 = m^2 y + 9m_1^2(1 - 4Q_n + 9\alpha Q_n/4)\alpha + 48Q_n(1 - Q_n)\alpha(1 - 3\alpha Q_n/4),$$

$$Q_2 = 144(1 + 9\alpha Q_n/4)^2 m_1^2 m^2 \alpha(1 - 3\alpha/4), \quad y = 4 - 3(1 + Q_n)\alpha - 27\alpha^2 Q_n/4.$$

Корни уравнения (1.4.24) из-за громоздкости не выписываем. На рис. 1.6 приведены кривые $\mu = 1, 2, 3, 4$, полученные сечениями поверхности текучести плоскостями $Q_n = 0.2\mu$. Штриховой линией изображена проекция границы поверхности на плоскость $Q_m Q_{nm}$. Проекция поверхности текучести на плоскость $Q_m Q_n$ показана на рис. 1.7, причем верхняя граница — сплошной линией, а нижняя граница — штриховой линией. Зависимости $m_2(m_1)$ для $n_1 = 0$ и $n_2^2 = 0.2\mu$, ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) показаны кривыми μ на рис. 1.8, а для $Q_n = 0.4$ в случаях: 1) $n_1 = 0$, $n_2^2 = 0.4$; 2) $n_1^2 = n_2^2 = 0.4$; 3) $n_1^2 = 0.4$, $n_2 = 0$, — кривыми 1, 2, 3, соответственно на рис. 1.9. Функции $n_2(n_1)$ при $Q_m = 0.4$ в случаях: 1) $m_1 = 0$, $m_2^2 = 0.4$; 2) $m_1^2 = m_2^2 = 0.4$; 3) $m_1^2 = 0.4$, $m_2 = 0$, — кривыми 1, 2, 3, соответственно на рис. 1.10.

Определим поверхность текучести Мизеса в частных случаях.

а) Чисто моментное состояние оболочки. Тогда $Q_n = 0$ и из уравнений (1.4.24) следует

$$\alpha = m^2/(3Q_m). \quad (1.4.25)$$

Здесь значение (1.4.23) для m следует рассматривать как предельное при Q_n , стремящемся к нулю. Из уравнения (1.4.22) найдем $\beta = 1$ и, с учетом равенства (1.4.25), на основании выражений (1.4.13), (1.4.23), получим уравнение кривой текучести,

$$m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 = 1. \quad (1.4.26)$$

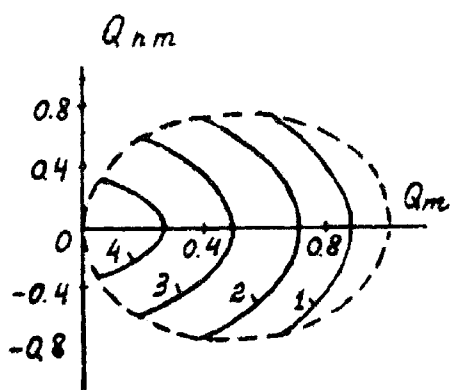


Рис. 1.6.

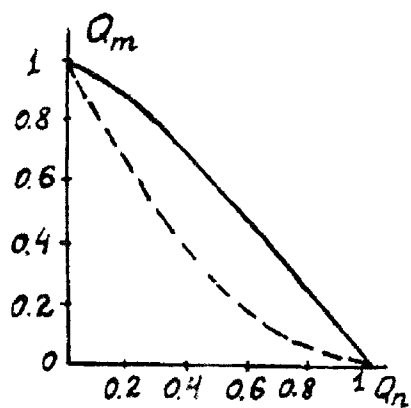


Рис. 1.7.

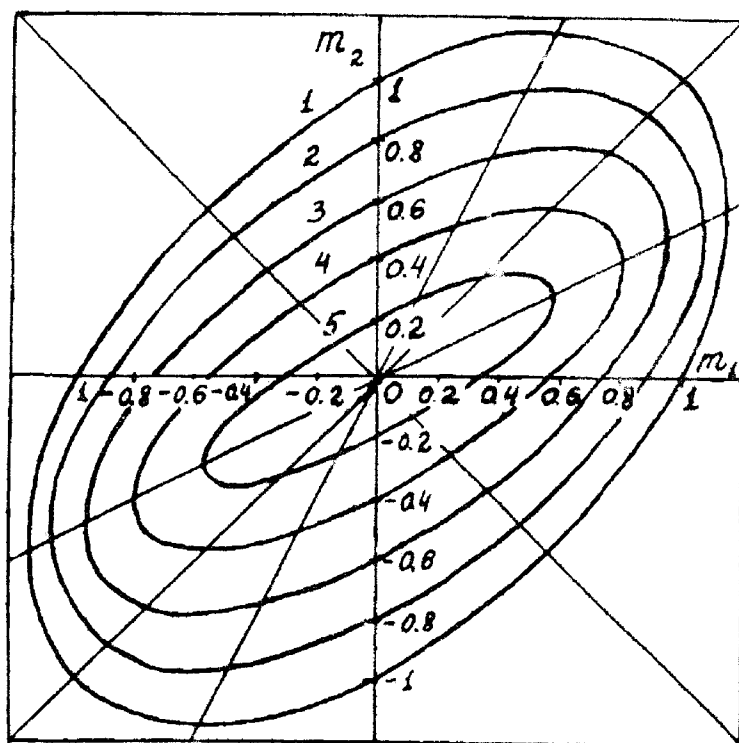


Рис. 1.8.

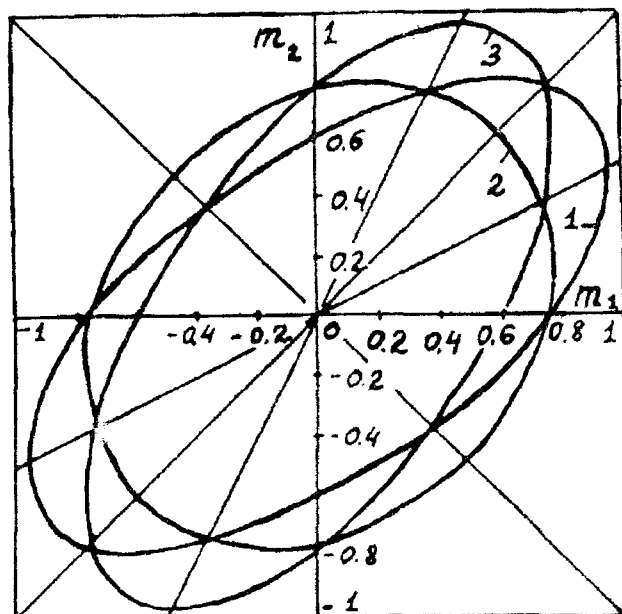


Рис. 1.9.

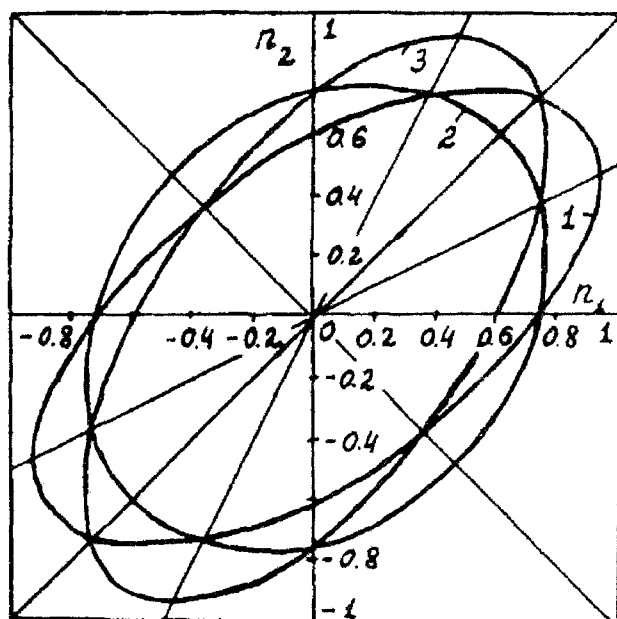


Рис. 1.10.

б) Безмоментное состояние оболочки. Полагая в уравнениях (1.4.22), (1.4.24) $Q_m = 0$ и $Q_{nm} = 0$, имеем

$$1 - 3\alpha/4 = 0, \quad 1 - 3\alpha Q_n/4 = 0. \quad (1.4.27)$$

Из выражения (1.4.27) следует $Q_n = 1$. Вследствие равенства (1.4.13) уравнение кривой текучести примет вид,

$$n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 = 1. \quad (1.4.28)$$

в) Для балки (точнее — криволинейного стержня) предполагаем, что $m_1 = n_1 = 0$. Уравнения (1.4.16)–(1.4.18) справедливы при $n_1 = 0$. Полагая в (1.4.16) $m_1 = 0$, с учетом равенства (1.4.18), найдем

$$\beta = 1, \quad \alpha = 4/3. \quad (1.4.29)$$

Из уравнения (1.4.17) и равенств (1.4.29) следует условие текучести криволинейного стержня,

$$m_2 = \pm(1 - n_2)^2. \quad (1.4.30)$$

г) Для цилиндрической оболочки $\kappa_2 = 0$, при этом $\alpha = 0$. Из уравнения (1.4.24) определим

$$y \mid m \mid = 6\sqrt{\alpha} \left[(1 + 9\alpha Q_n/4) \mid m_1 \mid \sqrt{1 - 3\alpha/4} - \right. \\ \left. - 2\sqrt{A_1 Q_n (1 - 3\alpha Q_n/4)} \right]. \quad (1.4.31)$$

Здесь

$$A_1 = m_1^2 - (1 - Q_n)y/3.$$

Переходя в уравнении (1.4.22) к пределу при α , стремящемся к нулю, с учетом выражений (1.4.23), (1.4.31) получим условие текучести цилиндрической оболочки,

$$2\sqrt{Q_n} (1 - Q_n) - \left(\sqrt{Q_n Q_m} - \sqrt{Q_n + Q_m - 1} \right) \ln B = 0, \quad (1.4.32),$$

где

$$B = \frac{\sqrt{Q_m} - \sqrt{Q_n(Q_n + Q_m - 1)} + 1 - Q_n}{\sqrt{Q_m} - \sqrt{Q_n(Q_n + Q_m - 1)} - 1 + Q_n}.$$

Из равенств (1.4.23) и (1.4.31) при $\alpha = 0$ следует $Q_{nm} = 0$.

В таком случае, ($Q_{nm} = 0$), поверхность текучести (1.4.32) нетрудно получить и методом исключения из соответствующих параметрических уравнений работы [20]. Легко проверить, что уравнение (1.4.32) содержит, как частные случаи, условия текучести безмоментного и чисто моментного состояний оболочки.

1.5. Условие текучести Мизеса произвольных тонких однородных изотропных пластин и оболочек [96]

Теория предельного равновесия оболочек и пластин получила широкое развитие, благодаря представлению условий текучести в напряжениях их образами — условиями текучести в усилиях и моментах [20, 50, 51, 172-174]. Формально такое представление состоит в интегральном преобразовании поверхности текучести пространства напряжений в поверхность текучести пространства усилий и моментов с помощью ассоциированного закона течения и соотношений, выражающих гипотезу прямых нормалей для скоростей деформаций. Параметрические уравнения поверхности текучести для пластин и оболочек с учетом перерезывающих сил установлены в работе [174]. Наиболее общая поверхность текучести получена, с учетом всех компонент тензора напряжений, в статье [96].

Рассмотрим тонкую оболочку толщиной $2h$, выполненную из идеального жесткопластического материала, удовлетворяющего условию текучести Мизеса,

$$\begin{aligned} f = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 \\ + 6\sigma_{23}^2 + 6\sigma_{31}^2 - 2\sigma_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Здесь σ_{ij} — физические компоненты тензора напряжений в ортогональной криволинейной системе координат $x_1 x_2 x_3$, причем координатные

линии направлены вдоль линий главных кривизн оболочки, σ_0 – предел текучести.

В общем случае диссипативная функция в напряжениях имеет вид [136]:

$$D = \sigma_{11}e_{11} + \sigma_{22}e_{22} + \sigma_{33}e_{33} + \sigma_{12}e_{12} + \sigma_{23}e_{23} + \sigma_{13}e_{13}. \quad (1.5.2)$$

Здесь величины e_{ij} – физические компоненты тензора скоростей деформаций в системе координат $x_1x_2x_3$.

Из ассоциированного с условием (1.5.1) закона течения имеем,

$$\begin{aligned} e_{11} &= \lambda(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}), & e_{22} &= \lambda(2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}), \\ e_{33} &= \lambda(2\sigma_{33} - \sigma_{22} - \sigma_{11}), & e_{12} &= 6\lambda\sigma_{12}, & e_{23} &= 6\lambda\sigma_{23}, \\ & & e_{13} &= 6\lambda\sigma_{13}, & & (\lambda > 0). \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Из первых трех выражений (1.5.3) следует условие несжимаемости материала оболочки,

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0. \quad (1.5.4)$$

Вследствие линейной зависимости компонент тензора скоростей деформаций (1.5.4) диссипативная функция (1.5.2) принимает вид:

$$D = \sum_{i=1}^{i=5} s_i e_i. \quad (1.5.5)$$

Здесь

$$s_1 = \sigma_{11} - \sigma_{33}, \quad s_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33}, \quad s_3 = \sigma_{12}, \quad s_4 = \sigma_{23}, \quad s_5 = \sigma_{13},$$

$$e_1 = e_{11}, \quad e_2 = e_{22}, \quad e_3 = e_{12}, \quad e_4 = e_{23}, \quad e_5 = e_{13}.$$

Условие текучести (1.5.1) в обобщенных напряжениях s_i :

$$s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2 + 3(s_3^2 + s_4^2 + s_5^2) - \sigma_0^2 = 0. \quad (1.5.6)$$

Отметим, что при $s_3 = s_4 = s_5 = 0$ условие (1.5.6) с точностью до обозначений совпадает с условием текучести в главных напряжениях для плоского напряженного состояния. С помощью ассоциированного

с условием (1.5.6) закона течения для скоростей деформаций получим выражения:

$$e_\mu = \lambda(2s_\mu - s_\nu); \quad e_j = 6\lambda s_j; \quad \mu, \nu = 1, 2; \mu \neq \nu; \quad j = 3, 4, 5. \quad (1.5.7)$$

Предположим, что скорости деформаций изменяются по толщине оболочки, согласно линейной гипотезе:

$$e_i = \varepsilon_{0i}(x_1, x_2) + x_3 k_i(x_1, x_2); \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (1.5.8)$$

где ε_{0i} — скорости деформаций срединной поверхности, k_i — параметры изменения скоростей деформаций по толщине оболочки.

Воспользовавшись выражениями (1.5.5), (1.5.8), определим диссипативную функцию в обобщенных усилиях n_i , моментах m_i и обобщенных скоростях деформаций, ε_i , κ_i , при этом имеем [171]

$$D_1 = \int_{-h}^h D dx_3 = 2\sigma_0 h \sum_{i=1}^{i=5} (n_i \varepsilon_i + m_i \kappa_i). \quad (1.5.9).$$

Здесь

$$n_i = N_i/N_0, \quad m_i = M_i/M_0, \quad N_0 = 2\sigma_0 h, \quad M_0 = \sigma_0 h^2,$$

$$N_i = \int_{-h}^h s_i dx_3, \quad M_i = \int_{-h}^h s_i x_3 dx_3, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{0i}, \quad \kappa_i = k_i h/2.$$

Обобщенные усилия и моменты выразим через обобщенные скорости деформаций, используя соотношения (1.5.6)-(1.5.9):

$$\begin{aligned} n_\mu &= [(2\varepsilon_\mu + \varepsilon_\nu)I_1/2 + (2\kappa_\mu + \kappa_\nu)I_2]/\sqrt{3}, \\ m_\mu &= [(2\varepsilon_\mu + \varepsilon_\nu)I_2 + 2(2\kappa_\mu + \kappa_\nu)I_3]/\sqrt{3}, \\ n_j &= (\varepsilon_j I_1/2 + \kappa_j I_2)/(2\sqrt{3}), \quad m_j = (\varepsilon_j I_2 + 2\kappa_j I_3)/(2\sqrt{3}), \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

где

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{X}, \quad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{X}, \quad I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{X},$$

$$X = \sqrt{4ax^2 + 2bx + c}, \quad a = \kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 + (\kappa_3^2 + \kappa_4^2 + \kappa_5^2)/4,$$

$$b = \varepsilon_1(2\kappa_1 + \kappa_2) + \varepsilon_2(2\kappa_2 + \kappa_1) + (\varepsilon_3 \kappa_3 + \varepsilon_4 \kappa_4 + \varepsilon_5 \kappa_5)/2,$$

$$c = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + (\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2)/4, \quad x = x_3/h.$$

Уравнения (1.5.10) можно рассматривать, как параметрические зависимости, определяющие поверхность текучести Мизеса в пространстве обобщенных усилий и моментов. Полагая в уравнениях (1.5.10) $\sigma_{33} = \kappa_4 = \kappa_5 = 0$, переходим к уравнениям поверхности текучести, установленным в работе [174]. При этом моменты M_4 и M_5 играют роль реакций идеальных связей.

Определим параметрические уравнения поверхности текучести Мизеса в пространстве квадратичных форм обобщенных усилий и моментов:

$$\begin{aligned} Q_n &= n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + 3(n_3^2 + n_4^2 + n_5^2); \\ Q_m &= m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + 3(m_3^2 + m_4^2 + m_5^2); \\ Q_{nm} &= n_1(2m_1 - m_2) + n_2(2m_2 - m_1) + \\ &\quad + 6(n_3 m_3 + n_4 m_4 + n_5 m_5). \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

Внося выражения (1.5.10) в квадратичные формы (1.5.11), получим:

$$\begin{aligned} Q_n &= cI_1^2 + 2bI_1 I_2 + 4aI_2^2; \quad Q_m = cI_2^2 + 2bI_2 I_3 + 4aI_3^2; \\ Q_{nm} &= 2[cI_1 I_2 + b(I_1 I_3 + I_2^2) + 4aI_2 I_3]. \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

Правые части уравнения (1.5.12) являются однородными функциями нулевого измерения относительно квадратичных форм, a, b, c . Вводя параметры, равные отношениям каких-либо двух из квадратичных форм, a, b, c , к третьей нетрудно получить двухпараметрические уравнения поверхности текучести пластин и оболочек в пространстве квадратичных форм (1.5.11). В случае выполнения равенств $\sigma_{33} = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \kappa_4 = \kappa_5 = 0$ двухпараметрические уравнения поверхности текучести для пластин и оболочек при $n_4 = n_5 = m_4 = m_5 = 0$ установлены в работе [20].

Координатное уравнение поверхности текучести пластин и оболочек найдем, воспользовавшись координатным уравнением поверхности текучести для оболочек вращения, полученным в работе [93].

Предварительно докажем неравенство

$$I = I_1 I_3 - I_2^2 \geq 0. \quad (1.5.13)$$

Вычислив интегралы, имеем

$$I = \{(1 - \xi) \ln \varphi [2y - (1 - y^2) \ln \varphi] + 4\xi y \ln \varphi - 8\xi y^2\} / (8y^2 a). \quad (1.5.14)$$

Здесь

$$y = (\sqrt{a})/r, \quad \xi = t^2/a, \quad \varphi = (1 + y)/(1 - y), \quad r = (X_1 + X_2)/4, \\ t = (X_1 - X_2)/4, \quad X_1 = \sqrt{4a + 2b + c}, \quad X_2 = \sqrt{4a - 2b + c}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенств :

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \ln \varphi \geq 2y. \quad (1.5.15)$$

Из выражений (1.5.14), с учетом неравенств (1.5.15), найдем

$$I \geq (1 - y^2)(1 - \xi)\Psi(y)/(4ay), \quad (1.5.16)$$

где

$$\Psi(y) = 2y/(1 - y^2) - \ln \varphi.$$

Функция $\Psi(y)$ – не отрицательная, так как она является монотонно возрастающей в интервале $0 \leq 1$ от нулевого значения. Поэтому из неравенств (1.5.15), (1.5.16) следует неравенство (1.5.13).

В уравнениях (1.5.10) принимаем

$$n_j = 0, \quad m_j = 0, \quad j = 3, 4, 5. \quad (1.5.17)$$

Тогда имеем три системы уравнений, по два уравнения каждая, для определения ε_j , κ_j , определитель которых I , согласно (1.5.13), не равен нулю тождественно. Решая их, с учетом равенств (1.5.17), в предположении, что $I \neq 0$, получим

$$\varepsilon_j = 0, \quad \kappa_j = 0. \quad (1.5.18)$$

Равенства (1.5.18) остаются в силе и в том случае, если при некоторых значениях параметров, a, b, c , определитель I стремится к нулю, (например для $a = 0$ и $c \rightarrow \infty$), так как значения величин, n_j, m_j , можно устремить к нулю любым образом.

С учетом равенств, (1.5.17), (1.5.18), уравнения (1.5.10), как и уравнения (1.5.12), определяют поверхность текучести Мизеса для осесимметрично нагруженных оболочек вращения. При этом параметрические уравнения (1.5.12) не изменяются, то есть имеют тождественный вид, как для оболочек вращения так и для произвольных оболочек и пластин. Поэтому координатное уравнение поверхности текучести для произвольных пластин и оболочек в пространстве квадратичных форм (1.5.11) имеет такой же вид, как и для оболочек вращения, (1.4.22),

$$\Phi(Q_n, Q_m, Q_{nm}) = 0. \quad (1.5.19)$$

Внося выражения (1.5.11) для квадратичных форм в условие текучести (1.5.19), получим координатное уравнение поверхности текучести Мизеса произвольных пластин и оболочек в пространстве обобщенных усилий и моментов:

$$\begin{aligned} F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \equiv \\ \equiv \Phi[Q_n(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5), Q_m(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5), \\ Q_{nm}(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)] = 0 \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

Ассоциированный с условием текучести (1.5.20) закон пластического течения в обобщенных усилиях и моментах имеет вид:

$$\varepsilon_i = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial n_i}, \quad \kappa_i = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial m_i}, \quad \lambda_1 > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (1.5.21)$$

В отличие от оболочек вращения, когда имеет место одно дифференциальное уравнение (1.4.12), для произвольных пластин и оболочек аналогичным способом, с помощью выражений (1.5.7)-(1.5.9) выведем систему из четырех линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} (2n_2 - n_1) \frac{\partial F}{\partial n_1} - (2n_1 - n_2) \frac{\partial F}{\partial n_2} + (2m_2 - m_1) \frac{\partial F}{\partial m_1} - \\ - (2m_1 - m_2) \frac{\partial F}{\partial m_2} = 0, \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

$$(2n_2 - n_1) \frac{\partial F}{\partial n_j} + (2m_2 - m_1) \frac{\partial F}{\partial m_j} - 6n_j \frac{\partial F}{\partial n_2} - 6m_j \frac{\partial F}{\partial m_2} = 0, \\ (j = 3, 4, 5).$$

Нетрудно проверить, что квадратичные формы (1.5.11) являются независимыми первыми интегралами системы (1.5.22). Поэтому функция текучести F , как функция первых интегралов, удовлетворяет той же системе дифференциальных уравнений.

При выводе уравнения поверхности текучести для пластин и оболочек учтены изменения скоростей деформаций сдвига по толщине оболочки в нормальных плоскостях к срединной поверхности, ($\kappa_4 \neq 0, \kappa_5 \neq 0$). Пренебрежение такими изменениями ($\kappa_4 = \kappa_5 = 0$) приводит к укороченным дифференциальным уравнениям (1.5.22), $j = 4, 5$, в которых отсутствуют вторые слагаемые. Квадратичные формы (1.5.11), как показывает их подстановка в укороченные уравнения (1.5.22), не являются первыми интегралами. Следовательно, функция текучести не удовлетворяет укороченным дифференциальным уравнениям, то есть противоречит ассоциированным законам течения (1.5.7) и (1.5.21), если $\kappa_4 = \kappa_5 = 0$.

Покажем, что для нахождения уравнения поверхности текучести Мизеса для произвольных пластин и оболочек посредством интегрирования системы (1.5.22) необходимо и достаточно знать уравнение поверхности текучести для оболочек вращения (1.4.22).

Система (1.5.22) не является полной или яковиевой. Воспользовавшись условиями интегрируемости системы (1.5.22), получим, что соответствующая ей инволюционная или яковиева система уравнений имеет вид [175]:

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= (a_1/a_2)F_{y_1} - (a_3/a_2)F_{y_2} + (a_4/a_2)F_{y_3}; \\ F_{x_2} &= (2/a_2)[3x_2F_{y_1} + (1/a_5)(x_2a_3 - x_5a_2)(a_3F_{y_2} - a_4F_{y_3})]; \\ F_{x_3} &= (2/a_2)[3x_3F_{y_1} + (1/a_5)(x_3a_3 - x_6a_2)(a_3F_{y_2} - a_4F_{y_3})]; \\ F_{x_4} &= (2/a_2)[3x_4F_{y_1} + (1/a_5)(x_4a_3 - x_7a_2)(a_3F_{y_2} - a_4F_{y_3})]; \\ F_{x_5} &= -(2/a_5)[(x_2a_3 - x_5a_2)F_{y_2} - (x_2a_4 - x_5a_1)F_{y_3}]; \end{aligned} \quad (1.5.24)$$

$$F_{x_6} = -(2/a_5)[(x_3a_3 - x_6a_2)F_{y_2} - (x_3a_4 - x_6a_1)F_{y_3}];$$

$$F_{x_7} = -(2/a_5)[(x_4a_3 - x_7a_2)F_{y_2} - (x_4a_4 - x_7a_1)F_{y_3}];$$

где $a_1 = 2x_1 - y_1$, $a_2 = 2y_1 - x_1$, $a_3 = 2y_3 - y_2$, $a_4 = 2y_2 - y_3$, $a_5 = y_1y_2 - x_1y_3$, $x_1 = n_{11}$, $x_2 = n_3$, $x_3 = n_4$, $x_4 = n_5$, $x_5 = m_3$, $x_6 = m_4$, $x_7 = m_5$, $y_1 = n_2$, $y_2 = m_1$, $y_3 = m_2$; индекс функции текучести означает ее частную производную по соответствующей переменной.

Воспользуемся методом Майера [175] интегрирования системы уравнений (1.5.24). Введем новые переменные: u , u_ρ , $x_\rho = uu_\rho$, $\rho = 1, 2, 3, \dots, 7$. Тогда уравнение Майера, эквивалентное системе (1.5.24) или (1.5.23), имеет вид:

$$\begin{aligned} b_1b_2\frac{\partial Z}{\partial u} &= [2u(u_1^2 + 3u_2^2 + 3u_3^2 + 3u_4^2) - u_1y_1]b_2\frac{\partial Z}{\partial y_1} - \\ &- (b_2b_3u_1 - 2b_3^2c_1u - 2b_1^2c_2u + 4b_1b_3c_3u)\frac{\partial Z}{\partial y_2} + \\ &+ (b_2b_4u_1 - 2b_3b_4c_1u - 2b_1b_5c_2u + 4b_1b_4c_3u)\frac{\partial Z}{\partial y_3} \end{aligned}$$

Здесь $b_1 = 2y_1 - uu_1$, $b_2 = y_1y_2 - uu_1y_3$, $b_3 = 2y_3 - y_2$, $b_4 = 2y_2 - y_3$, $b_5 = 2uu_1 - y_1$, $c_1 = u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, $c_2 = u_5^2 + u_6^2 + u_7^2$, $c_3 = u_2u_5 + u_3u_6 + u_4u_7$, $Z(u, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, y_1, y_2, y_3) = F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2, y_3)$.

Нетрудно проверить, что независимыми первыми интегралами уравнения Майера являются квадратичные формы (1.5.11), выраженные через переменные Майера [175] u и u_ρ :

$$Q_n = u^2u_1^2 - uu_1y_1 + y_1^2 + 3u^2(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2),$$

$$Q_m = y_2^2 - y_2y_3 + y_3^2 + 3u^2(u_5^2 + u_6^2 + u_7^2),$$

$$\begin{aligned} Q_{nm} &= uu_1(2y_2 - y_3) + y_1(2y_3 - y_2) + \\ &+ 6u^2(u_2u_5 + u_3u_6 + u_4u_7). \end{aligned}$$

Зададим начальную поверхность при $u = 0$. В этом случае $x_\rho = 0$, $\rho = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Такая начальная поверхность, (1.4.16)-(1.4.18),

использована для определения условия текучести оболочек вращения (1.4.22). Следовательно, чтобы получить условие текучести произвольных пластин и оболочек необходимо и достаточно знать частный случай условия текучести оболочек вращения. Уравнение поверхности (условия) текучести произвольных пластин и оболочек получим, согласно методу Майера, подстановкой квадратичных форм (1.5.11) в выражения условия текучести оболочек вращения (1.4.22), вместо одинаково обозначенных квадратичных форм (1.4.13).

Приведенный вывод условия текучести произвольных тонких пластин и оболочек показывает, что в нем содержится условие текучести для осесимметрично нагруженных оболочек вращения со всеми частными случаями, отмеченными в разделе 1.4. Для балки при изгибе $m_3 = m_4 = m_5 = n_1 = n_2 = 0$, поэтому $Q_{nm} = 0$ и условие текучести, в этом предположении, совпадает в пространстве квадратичных форм Q_n , Q_m с условием текучести цилиндрической оболочки без осевых сил.

1.6. Условие текучести однородных анизотропных пластин и оболочек[99]

Определению условий текучести анизотропных тел в напряжениях посвящено значительное число работ [45,143-146,176]. В то же время остаются единичными исследования по представлению условий текучести анизотропных пластин и оболочек в обобщенных усилиях и моментах [177,99]. Все возрастающий интерес к вопросам прочности неоднородных, в том числе, конструктивно-неоднородных, элементов конструкций вызывает необходимость разработки условий текучести не столько достаточно достоверно подтверждаемых экспериментами, сколько наиболее простых и имеющих наибольшие возможности аппроксимации сложных условий текучести, получаемых методами структурного анализа.

В работе [45] предложено условие текучести, которое при исчезающей анизотропии материала совпадает с условием текучести Мизеса. Такой подход правомерен для материалов со слабой анизотропией, а также может служить для эффективной аппроксимации кусочных

условий текучести конструктивно-анизотропных (композитных, слоистых и других) элементов конструкций [150]. В настоящем разделе рассмотрена реализация этого подхода, получено условие текучести в обобщенных усилиях и моментах с ассоциированным законом течения анизотропных оболочек и пластин.

Рассмотрим тонкую оболочку толщиной $2h$, выполненную из идеального анизотропного жесткопластического материала, удовлетворяющего следующему условию текучести:

$$\begin{aligned}
 2f \equiv & [(\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)/a_{11} - (\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)/a_{22}]^2 + \\
 & + [(\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)/a_{22} - (\sigma_{33} - \sigma_{33}^0)/a_{33}]^2 + \\
 & + [(\sigma_{33} - \sigma_{33}^0)/a_{33} - (\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)/a_{11}]^2 + \\
 & + 6[(\sigma_{12} - \sigma_{12}^0)^2/a_{12}^2 + (\sigma_{23} - \sigma_{23}^0)^2/a_{23}^2 + \\
 & + (\sigma_{13} - \sigma_{13}^0)^2/a_{13}^2] - 2\sigma_0^2 = 0
 \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Здесь σ_{ij} — напряжения оболочки в ортогональной криволинейной системе координат $x_1x_2x_3$ с координатными линиями x_1x_2 , направленными вдоль линий главных кривизн отсчетной срединной поверхности, совпадающими с главными осями анизотропии; σ_{ij}^0 , $a_{ij} > 0$, $\sigma_0 > 0$, — параметры анизотропии, постоянные для данного материала, $i, j = 1, 2, 3$. Из условия (1.6.1) при $\sigma_{ij}^0 = 0$ и $a_{ij} = 1$ следует условие текучести Мизеса, а в случае $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{33} = 0$, $a_{23} = a_{13} = \infty$ — модифицированное условие текучести Хилла [177].

С помощью ассоциированного с условием текучести (1.6.1) закона течения, определим скорости деформаций ε_{ij} :

$$\begin{aligned}
 a_{11}\varepsilon_{11} &= \lambda[2(\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)/a_{11} - (\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)/a_{22} - \\
 &\quad - (\sigma_{33} - \sigma_{33}^0)/a_{33}]; \\
 a_{22}\varepsilon_{22} &= \lambda[2(\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)/a_{22} - (\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)/a_{11} - \\
 &\quad - (\sigma_{33} - \sigma_{33}^0)/a_{33}]; \\
 a_{33}\varepsilon_{33} &= \lambda[2(\sigma_{33} - \sigma_{33}^0)/a_{33} - (\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)/a_{22} - \\
 &\quad - (\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)/a_{11}]; \\
 a_{12}\varepsilon_{12} &= 6\lambda(\sigma_{12} - \sigma_{12}^0)/a_{12}; \\
 a_{23}\varepsilon_{23} &= 6\lambda(\sigma_{23} - \sigma_{23}^0)/a_{23}; \\
 a_{13}\varepsilon_{13} &= 6\lambda(\sigma_{13} - \sigma_{13}^0)/a_{13}; \\
 \lambda &> 0.
 \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Из соотношений (1.6.2) получим равенство

$$a_{11}\varepsilon_{11} + a_{22}\varepsilon_{22} + a_{33}\varepsilon_{33} = 0, \quad (1.6.3)$$

которое означает сжимаемость жесткопластического материала оболочки [178].

Введем параметры напряжений s_r и параметры скоростей деформаций e_r , $r = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned} s_1 &= (\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)/a_{11} - (\sigma_{33} - \sigma_{33}^0)/a_{33}; \\ s_2 &= (\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)/a_{22} - (\sigma_{33} - \sigma_{33}^0)/a_{33}; \\ s_3 &= (\sigma_{12} - \sigma_{12}^0)/a_{12}; \\ s_4 &= (\sigma_{23} - \sigma_{23}^0)/a_{23}; \quad s_5 = (\sigma_{13} - \sigma_{13}^0)/a_{13}; \\ e_1 &= a_{11}\varepsilon_{11}; \quad e_2 = a_{22}\varepsilon_{22}; \quad e_3 = a_{12}\varepsilon_{12}; \\ e_4 &= a_{23}\varepsilon_{23}; \quad e_5 = a_{13}\varepsilon_{13}. \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

После преобразований выражений (1.6.1)-(1.6.2), с учетом введенных величин s_r и e_r получим:

$$f_1 = s_1^2 - s_1s_2 + s_2^2 + 3(s_3^2 + s_4^2 + s_5^2) - \sigma_0^2 = 0; \quad (1.6.5)$$

$$e_\mu = \lambda(2s_\mu - s_\nu); \quad e_l = 6\lambda s_l; \quad (1.6.6)$$

$$\mu, \nu = 1, 2; \quad \mu \neq \nu; \quad l = 3, 4, 5.$$

Примем для параметров скоростей деформаций линейную гипотезу (1.5.8) [96],

$$e_r = \varepsilon_{0r}(x_1, x_2) + k_r(x_1, x_2)x_3, \quad (1.6.7)$$

где x_3 — нормальная координата.

Соотношения (1.6.5)-(1.6.7) в точности совпадают с соответствующими выражениями (1.5.6)-(1.5.8). Поэтому, если ввести безразмерные параметры t_r и h_r ,

$$t_r = T_r/N_0; \quad h_r = H_r/M_0; \quad N_0 = 2\sigma_0 h; \quad M_0 = \sigma_0 h^2;$$

$$T_r = \int_{-h}^h s_r dx_3; \quad H_r = \int_{-h}^h s_r x_3 dx_3; \quad (1.6.8)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{0r}; \quad \kappa_r = k_r h/2,$$

то, выполнив все вычисления, аналогичные проведенным в разделе (1.5), получим параметрические зависимости поверхности для анизотропных оболочек в пространстве переменных t_r и h_r , в точности совпадающие с параметрическими зависимостями поверхности текучести, соответственно, в обобщенных усилиях n_r и моментах m_r , полученными в разделе (1.5) для изотропных оболочек.

Из определения параметров напряжений s_r (1.6.4) для параметров t_r и h_r получим выражения:

$$\begin{aligned} t_1 &= (n_{11} - n_{11}^0)/a_{11} - (n_{33} - n_{33}^0)/a_{33}; \\ t_2 &= (n_{22} - n_{22}^0)/a_{22} - (n_{33} - n_{33}^0)/a_{33}; \\ t_3 &= (n_{12} - n_{12}^0)/a_{12}; \quad t_4 = (n_{23} - n_{23}^0)/a_{23}; \\ t_5 &= (n_{13} - n_{13}^0)/a_{13}; \quad h_1 = m_{11}/a_{11} - m_{33}/a_{33}; \\ h_2 &= m_{22}/a_{22} - m_{33}/a_{33}; \quad h_3 = m_{12}/a_{12}; \\ h_4 &= m_{23}/a_{23}; \quad h_5 = m_{13}/a_{13}. \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

Здесь

$$n_{ij} = N_{ij}/N_0; \quad m_{ij} = M_{ij}/M_0; \quad n_{ij}^0 = N_{ij}^0/N_0; \quad m_{ij}^0 = M_{ij}^0/M_0;$$

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3; \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3; \\ N_{ij}^0 &= \int_{-h}^h \sigma_{ij}^0 dx_3 = 2\sigma_{ij}^0 h; \quad M_{ij}^0 = \int_{-h}^h \sigma_{ij}^0 x_3 dx_3 = 0; \\ n_{ij}^0 &= 0; \quad m_{ij}^0 = 0. \end{aligned}$$

Благодаря тождественности основных соотношений (1.6.5)-(1.6.8) и (1.5.6)-(1.5.8), параметрические уравнения полученной поверхности в пространстве квадратичных форм анизотропных оболочек также в точности совпадают с параметрическими уравнениями поверхности

текучести изотропных оболочек, причем только для последних в квадратичных формах Q_n, Q_m, Q_{nm} , следует заменить переменные n_r и m_r на t_r и h_r , соответственно:

$$\begin{aligned} Q_n &= t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2 + 3(t_3^2 + t_4^2 + t_5^2); \\ Q_m &= h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2 + 3(h_3^2 + h_4^2 + h_5^2); \\ Q_{nm} &= t_1(2h_1 - h_2) + t_2(2h_2 - h_1) + \\ &\quad + 6(t_3 h_3 + t_4 h_4 + t_5 h_5). \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

Следовательно, координатные уравнения указанных поверхностей для изотропных и анизотропных оболочек в пространстве квадратичных форм совпадают; различие состоит только в виде этих квадратичных форм, которые для анизотропных оболочек определены выражениями (1.6.10), а для изотропных оболочек – выражениями (1.5.11).

Рассмотрим диссипативную функцию анизотропного материала оболочки,

$$D = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (1.6.11)$$

где скорости деформаций ε_{ij} определены с точностью до произвольного положительного множителя.

Согласно линейной гипотезе (1.6.7),

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{0ij}(x_1, x_2) + k_{ij}(x_1, x_2)x_3, \quad (1.6.12)$$

где ε_{0ij} – скорости деформаций в срединной поверхности, k_{ij} – параметры изменения скоростей деформаций по толщине оболочки.

С учетом выражений (1.6.11)-(1.6.12) определим диссипативную функцию в обобщенных усилиях n_{ij} , моментах m_{ij} и обобщенных скоростях деформаций ε_{0ij} , κ_{ij} :

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_{-h}^h D dx_3 = N_{ij} \varepsilon_{0ij} + M_{ij} k_{ij} = \\ &= 2\sigma_0 h (n_{ij} \varepsilon_{0ij} + m_{ij} \kappa_{ij}). \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Здесь N_{ij} , M_{ij} – физические составляющие обобщенных усилий и моментов; ε_{0ij} , κ_{ij} – физические составляющие обобщенных скоростей деформаций; $\kappa_{ij} = k_{ij}h/2$.

Из теории идеального жесткопластического тела известно, что в пространстве обобщенных усилий и моментов существует единственная выпуклая поверхность текучести, $F(n_{ij}, m_{ij}) = 0$. Приведенные вычисления (1.6.2)-(1.6.10) на основе условия текучести (1.6.1) показывают, что полученная поверхность в пространстве обобщенных усилий n_{ij} и m_{ij} единственна и поэтому является поверхностью текучести анизотропных оболочек и пластин.

Таким образом, условие текучести анизотропных оболочек и пластин принимает вид:

$$\begin{aligned} F(n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{22}, n_{23}, n_{33}, m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{22}, m_{23}, m_{33}) &\equiv \\ &\equiv \Phi[Q_n(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5), Q_m(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5), \\ &Q_{nm}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)] = 0, \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

где параметры, t_r , h_r , квадратичные формы, Q_n, Q_m, Q_{nm} , определены выражениями (1.6.9)-(1.6.10), а функция Φ определена равенством (1.4.22) [93-96].

Полагая в равенстве (1.6.14) $a_{ij} = 1$, $\sigma_{ij}^0 = 0$, получим условие текучести изотропных оболочек. Частные случаи условий текучести для симметрических оболочек и пластин, балок, безмоментного и чисто-моментного состояний следуют из соответствующих частных случаев, рассмотренных в разделах (1.4)-(1.5) после замены обобщенных усилий n_r и моментов m_r на параметры t_r и h_r , соответственно определенные выражениями (1.6.9).

Обобщенные скорости деформаций определим из ассоциированного с условием текучести (1.6.14) закона течения:

$$\varepsilon_{0ij} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial n_{ij}}; \quad \kappa_{ij} = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial m_{ij}}; \quad \lambda_2 > 0. \quad (1.6.15)$$

Здесь n_{ij} , m_{ij} – определенные ранее обобщенные усилия и моменты.

1.7. Об условиях текучести неоднородных и конструктивно-неоднородных пластин и оболочек

Изучение предельных состояний элементов строительных конструкций в настоящее время научно-технического прогресса привело к насущной необходимости разработок методов расчетов с учетом неоднородности материалов. В одних случаях неоднородность строительных материалов создается умышленно, например, в целях оптимизации конструкции, в других – появляется в реальных конструкциях, как не зависящий от проектировщика фактор. Причины появления неоднородности разнообразны: влияние потоков элементарных частиц, воздействие температурных градиентов, неоднородным упрочнением материала, поверхностной обработкой, неоднородностью состава и др. При этом в различных областях объема материала конструкции возможны неоднородности различного происхождения. Некоторые из факторов, например, температурные градиенты оказывают значительное влияние на физические характеристики, как упругих так и неупругих материалов. Множество факторов вызывают пластическую неоднородность материалов конструкций [139,179-180].

Воздействие нейтронных потоков пренебрежимо мало влияет на модуль Юнга, но оказывает существенное влияние на предел текучести и предел прочности конструкционных материалов. Так предел текучести нескольких сортов нержавеющей стали при дозе облучения $8 \cdot 10^{19} \text{ нейтр/см}^2$ увеличивается в 2 – 2,5 раза. Диаграмма сильно упрочняющейся в необлученном состоянии отожженной стали типа 347 после, практически, той же дозы облучения становится весьма близкой к диаграмме идеального жесткопластического тела [181].

С возрастанием температуры, вообще, происходит падение прочностных характеристик металлов. Как исключение, предел текучести алюмотермического хрома увеличивается с 4700 Н/см^2 при 70° до 10000 Н/см^2 при 1100° [182]. Понижение температуры для многих сталей приводит к увеличению предела пластичности и предела прочности. Так предел текучести стали 1010 возрастает с 23000 (17°) до 72000 Н/см^2 (-197°C) [183]. Одновременно растет тенденция к хруп-

кому разрушению.

Поверхностная обработка (закалка, обработка токами высокой частоты, наклеп) приводит к изменению прочностных свойств и возникновению неоднородностей по глубине. Предел текучести в поверхностном слое существенно повышается и с увеличением расстояния от поверхности уменьшается до значения, отвечающего необработанному однородному материалу.

Пластическая неоднородность присуща всем конструкциям, эксплуатируемым за пределом упругости, так как после каждого снятия нагрузки изменяются пределы текучести, появляется упругая, пластическая анизотропия.

Композитные материалы, по своему определению, являются неоднородными анизотропными и в наибольшей степени подвержены всем отмеченным факторам.

Естественно, существующие условия текучести не в состоянии точно отразить многофакторную природу неоднородности реальных материалов. Однако, если известна зависимость предела текучести от преобладающего фактора пластической неоднородности, то возможна приближенная постановка задачи о несущей способности неоднородных элементов конструкций [179].

Условие текучести анизотропных пластин и оболочек (1.6.14) содержит двенадцать независимых коэффициентов a_{ij} и σ_{ij}^0 . Эти коэффициенты определяются из условия текучести (1.6.1), если известны экспериментальные значения пределов текучести σ_{0ij}^\pm . Для этого требуется двенадцать экспериментов: шесть на растяжение и сжатие в трех главных направлениях анизотропии, а также шесть на сдвиг в противоположных направлениях на каждой площадке. В результате получим условие текучести в одной точке оболочки. Если предположить, что влияние фактора пластической неоднородности не зависит от координаты по толщине оболочки и известно только, как функция координат отсчетной поверхности, ($a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2)$, $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0(x_1, x_2)$), то условие текучести (1.6.14) остается справедливым во всем объеме материала неоднородной оболочки.

Иное положение имеем, когда условие текучести конструктивно-

неоднородной оболочки получено известными методами структурного анализа [52,53,150]. В таком случае пределы текучести определены расчетными методами на основе экспериментальных данных о прочностных характеристиках элементов композиции, полученных в простейших экспериментах. Число необходимых пределов текучести для симметрических оболочек вращения равно четырем, чтобы определить коэффициенты a_{11} , a_{22} , σ_{11}^0 , σ_{22}^0 в условии (1.6.1).

Рассмотренной методикой возможно воспользоваться для аппроксимации, как феноменологических так и структурных условий текучести неоднородных тел. Согласно теории идеальной пластичности, предельная нагрузка при данном условии текучести меньше предельной нагрузки, полученной по описанному условию текучести, и больше предельной нагрузки с вписанным условием текучести [136]. Таким образом с помощью условия текучести (1.6.14) получим нижние и верхние оценки предельных нагрузок неоднородных пластин и оболочек.

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ И КОНСТРУКТИВНО-НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

Условия текучести пластин и оболочек получены в обобщенных усилиях и моментах (разделы 1.4–1.7). В то же время известные теории оболочек и пластин сформулированы в компонентах главного вектора и главного момента [116–128], которые не являются обобщенными усилиями и моментами, фигурирующими в условиях текучести. Скорости деформаций оболочек в этих теориях также не могут быть названными обобщенными скоростями деформаций, связанными с диссипативной функцией в обобщенных усилиях и моментах, отнесенной к единице площади отсчетной поверхности. Это обстоятельство затрудняет применение теории течения в исследованиях предельных состояний оболочек или приводит к необходимости увеличивать на порядок объемы вычислений в задачах, что сводит на нет преимущества редукции трехмерных задач в теории оболочек к двумерным. Поэтому в настоящей главе получены геометрически линейные [97] и геометрически нелинейные уравнения равновесия тонких оболочек в обобщенных усилиях и моментах, определены обобщенные скорости деформаций с учетом рассеяния мощности всех компонент тензора напряжений.

Получены основные уравнения изгиба, устойчивости и выпучивания конструктивно-неоднородных пластин и оболочек (трехслойных с легким заполнителем, подкрепленных, биметаллических, вафлеобразных) несимметричного строения за пределом упругости [89–91].

Поставлены задачи о предельных состояниях однородных и конструктивно-неоднородных оболочек в общем и частных случаях.

2.1. Геометрически линейные уравнения предельного равновесия тонких оболочек и пластин [97]

Рассмотрим оболочку под действием внешних поверхностных сил в системе координат $x^1 x^2 x^3$, отнесенной к главным линиям кривизны отсчетной поверхности S_0 , с компонентами метрического тензора

(1.1.1),

$$g_{11} \neq 0, \quad g_{22} \neq 0, \quad g_{33} \neq 0, \quad g_{12} = g_{23} = g_{13} = 0. \quad (2.1.1)$$

Для определения условий равновесия оболочки в обобщенных усилиях и моментах воспользуемся вариационным уравнением Лагранжа [116],

$$\delta L^i + \delta L^p + \delta L^\mu = 0, \quad (2.1.2)$$

где δL^i , δL^p , δL^μ – вариации мощности внутренних сил, внешних сил на лицевой поверхности S_p , ($x^3 = -h$), и внешних сил на боковой поверхности S_μ , образованной из нормалей к срединной поверхности оболочки, при этом

$$\delta L^i = - \int_V \int \int \sigma^{ij} \delta \gamma_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3;$$

$$\delta L^p = \int_{S_p} \int \sigma^{ij} n_i \delta u_j dS_p; \quad \delta L^\mu = \int_{S_\mu} \int \sigma^{ij} n_i \delta u_j dS_\mu. \quad (2.1.3)$$

Здесь σ^{ij} , γ_{ij} , u_j , n_i – компоненты тензора напряжений на площадках с внешней нормалью к граням элемента, тензора скоростей деформаций, вектора скорости перемещения, внешней нормали к лицевой и боковой поверхностям. Для компонент тензора скоростей деформаций имеем выражения через ковариантные производные,

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.1.4)$$

Символы Кристоффеля в данной системе координат,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= 0; & \Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial x^j}; & \Gamma_{ii}^j &= -\frac{\sqrt{g_{ii}}}{g_{jj}} \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial x^j}; \\ \Gamma_{ii}^i &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial x^i}; & i, j, k &= 1, 2, 3; & i &\neq j \neq k. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Проведем параллельный перенос компонент тензоров и векторов в уравнении (2.1.2) на отсчетную поверхность S_0 , $x^3 = 0$, вдоль нормали к ней. Интегрируя дифференциальные уравнения параллельного

переноса [185], найдем соотношения:

$$\begin{aligned}\sigma^{ij} &= \sigma_0^{ij} \sqrt{\frac{g_{ii}^0 g_{jj}^0}{g_{ii} g_{jj}}}; & \gamma_{ij} &= \gamma_{ij}^0 \sqrt{\frac{g_{ii}^0 g_{jj}^0}{g_{ii} g_{jj}}}; \\ u_i &= u_i^0 \sqrt{\frac{g_{ii}^0}{g_{ii}}}; & n_i &= n_i^0 \sqrt{\frac{g_{ii}^0}{g_{ii}}}.\end{aligned}\quad (2.1.6)$$

Здесь компоненты тензоров и векторов, отнесенных к базису на отсчетной поверхности, отмечены индексом 0.

Введем параллельно перенесенные обобщенные скорости деформаций ε_{ij} деформируемого твердого тела, равные произведениям параллельно перенесенных компонент тензора скоростей деформаций γ_{ij}^0 на отношение площадей элементов параллельной ($x^3 = \text{const}$) и отсчетной поверхностей:

$$\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}^0 \sqrt{g/g^0}. \quad (2.1.7)$$

Линеаризируем компоненты ε_{ij} , разлагая их в ряд по нормальной координате x^3 , с учетом выражений (2.1.4)-(2.1.6), отбрасывая члены с порядком $(x^3)^2$ и выше. Необходимо, чтобы и в частном случае — для пластин $k_1 = k_2 = 0$ — все компоненты ε_{ij} были линейными функциями координаты. Поэтому принимаем зависимости параллельно перенесенных компонент скорости перемещения от координаты x^3 (1.1.5),

$$u_i^0 = v_i^0(x^1, x^2) + a_i^0(x^1, x^2)x^3 + \frac{1}{2}b_3^0(x^1, x^2)\delta_i^3(x^3)^2 \quad (2.1.8)$$

Здесь v_i^0 , a_i^0 , b_i^0 — векторы в пространственном базисе на отсчетной поверхности, причем v_i^0 — вектор перемещения точек на отсчетной поверхности; a_i^0 и b_i^0 — векторы, характеризующие изменение вектора скорости перемещения по толщине оболочки; δ_i^j — символы Кронекера; предполагаем, что изменением толщины оболочки при ее деформировании можно пренебречь.

Перед линеаризацией обобщенных скоростей деформаций ε_{ij} отнесем перенесенные компоненты u_i^0 обратно к переменному базису по

толщине оболочки и воспользуемся равенствами в последовательности (2.1.4), (2.1.6), (2.1.7). После отмеченных вычислений, для линеаризованных компонент ε_{ij} найдем выражения через ковариантные производные:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0(x^1, x^2) + k_{ij}^0(x^1, x^2)x^3; \quad (2.1.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^0 &= \frac{1}{2}\{v_{i,j}^0 + v_{j,i}^0 + \delta_j^3[a_i^0 + k_{(i)}v_i^0] + \delta_i^3[a_j^0 + k_{(j)}v_j^0]\}; \\ k_{ij}^0 &= \frac{1}{2}\{a_{i,j} + a_{j,i} + [k_{(i)}v_i^0]_{,j} + [k_{(j)}v_j^0]_{,i} - \\ &- 2\bar{\Gamma}_{ij}^n v_n^0 + 2\delta_i^3 \delta_j^3 b_3^0 + 2\delta_i^3 k_{(j)}a_j^0 + 2\delta_j^3 k_{(i)}a_i^0\} + c^{(ij)}\varepsilon_{ij}^0; \\ v_{i,j}^0 &= \frac{\partial v_i^0}{\partial x^j} - \bar{\Gamma}_{ij}^n v_n^0; \quad a_{i,j}^0 = \frac{\partial a_i^0}{\partial x^j} - \bar{\Gamma}_{ij}^n a_n^0; \\ c^{(ij)} &= k_1 + k_2 - k_i - k_j; \quad k_i = -1/R_i; \quad k_3 = 0; \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

где ε_{ij}^0 , k_{ij}^0 – обобщенные скорости деформаций тонких оболочек в пространственном базисе на поверхности S_0 ; R_i – ее главные радиусы кривизны; по заключенным в круглые скобки индексам свертывания нет. Символы $\bar{\Gamma}_{ij}^n$, $\tilde{\Gamma}_{ij}^n$ получены в результате разложения в ряд символов Кристоффеля (2.1.5) и пренебрежения нелинейными членами, при этом

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^k &= 0; \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}^0}} \frac{\partial \sqrt{g_{\alpha\alpha}^0}}{\partial x^\beta}; \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^\beta = -\frac{\sqrt{g_{\alpha\alpha}^0}}{g_{\beta\beta}^0} \frac{\partial \sqrt{g_{\alpha\alpha}^0}}{\partial x^\beta}; \\ \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}^0}} \frac{\partial \sqrt{g_{\alpha\alpha}^0}}{\partial x^\alpha}; \quad \bar{\Gamma}_{\alpha 3}^\alpha = k_\alpha; \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^3 = -g_{\alpha\alpha}^0 k_\alpha; \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha}^\beta &= \frac{\sqrt{g_{\alpha\alpha}^0}}{g_{\beta\beta}^0} \left[2(k_\alpha - k_\beta) \frac{\partial \sqrt{g_{\alpha\alpha}^0}}{\partial x^\beta} + \sqrt{g_{\alpha\alpha}^0} \frac{\partial k_\alpha}{\partial x^\beta} \right]; \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= 0; \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{\partial k_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha}^\alpha = \frac{\partial k_\alpha}{\partial x^\alpha}; \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha 3}^\alpha = -k_\alpha^2; \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha}^3 &= -g_{\alpha\alpha}^0 k_\alpha^2; \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad i \neq j \neq k; \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2; \quad \alpha \neq \beta.$$

Выполняя интегрирование по толщине оболочки, с учетом равенств (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9), приведем выражение для вариации мощности внутренних сил к виду:

$$\delta L^i = - \int_{S_0} \int (N_0^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^0 + M_0^{ij} \delta k_{ij}^0) \sqrt{g^0} dx^1 dx^2. \quad (2.1.12)$$

Здесь $\delta \varepsilon_{ij}^0$, δk_{ij}^0 – вариации обобщенных скоростей деформаций; N_0^{ij} , M_0^{ij} – обобщенные усилия и моменты в базисе на отсчетной поверхности,

$$N_0^{ij} = \int_{-h}^h \sigma_0^{ij} dx^3; \quad M_0^{ij} = \int_{-h}^h \sigma_0^{ij} x^3 dx^3. \quad (2.1.13)$$

Воспользовавшись выражениями (2.1.10) и свойством симметрии компонент N_0^{ij} , M_0^{ij} , из равенства (2.1.12) имеем:

$$\begin{aligned} \delta L^i = \int_{S_0} \int \{ & N_0^{ij} \delta v_{i,j}^0 + [N_0^{i3} + c^{(i3)} M_0^{i3}] [\delta a_i^0 + k_{(i)} \delta v_i^0] - \\ & - M_0^{ij} \tilde{\Gamma}_{ij}^n \delta v_n^0 + M_0^{ij} \delta a_{i,j}^0 + M_0^{ij} [k_{(i)} \delta v_i^0]_{,j} + \\ & + M_0^{33} \delta b_3^0 + 2 M_0^{i3} k_{(i)} \delta a_i^0 + c^{(ij)} M_0^{ij} \delta v_{i,j}^0 \} \sqrt{g^0} dx^1 dx^2; \quad k_{(i)} = k_i \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Преобразуем первый интеграл с ковариантной производной,

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \int N_0^{ij} \delta v_{i,j}^0 dS_0 &= \int_{S_0} \int \left[\frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial x^j} (N_0^{ij} \sqrt{g_0} \delta v_i^0) - N_{0,j}^{ij} \delta v_i^0 \right] dS_0; \\ dS_0 &= \sqrt{g_0} dx^1 dx^2. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Так как компоненты N_0^{ij} и M_0^{ij} не зависят от нормальной координаты, то первое слагаемое под интегралом (2.1.15) представляет собой дивергенцию контравариантного вектора на отсчетной поверхности, то есть

$$\frac{1}{g_0} \frac{\partial}{\partial x^j} (N_0^{ij} \sqrt{g_0} \delta v_i^0) = R_{,\alpha}^{\alpha}; \quad R^{\alpha} = N_0^{i\alpha} \delta v_i^0; \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.1.16)$$

Проведя подобные преобразования в других интегралах с ковариантными производными и применяя формулу Грина на поверхности, найдем:

$$\begin{aligned}
 \int_{S_0} \int N_0^{ij} \delta v_{i,j}^0 dS_0 &= - \oint_l N_0^{i\alpha} \delta v_i^0 \mu_\alpha dl - \int_{S_0} \int N_{0,j}^{ij} \delta v_i^0 dS_0; \\
 \int_{S_0} \int M_0^{ij} [k_{(i)} \delta v_{i,j}^0]_{,j} dS_0 &= - \oint_l k_{(i)} M_0^{i\alpha} \delta v_i^0 \mu_\alpha dl - \\
 &\quad - \int_{S_0} \int k_{(i)} M_{0,j}^{ij} \delta v_i^0 dS_0; \\
 \int_{S_0} \int M_0^{ij} c^{(ij)} \delta v_{i,j}^0 dS_0 &= - \oint_l c^{(i\alpha)} M_0^{i\alpha} \delta v_i^0 \mu_\alpha dl - \\
 &\quad - \int_{S_0} \int [c^{(ij)} M_0^{ij}]_{,j} \delta v_i^0 dS_0;
 \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

где μ_α — внутренняя нормаль к граничной кривой l на поверхности S_0 .

Учитывая преобразования (2.1.17), для вариации мощности δL^i (2.1.14) получим выражение.

$$\begin{aligned}
 \delta L^i &= \int_{S_0} \int \{ [N_{0,j}^{ij} - k_{(i)} N_0^{i3} + \tilde{\Gamma}_{nj}^i M_0^{nj} + k_{(i)} M_{0,j}^{ij} + \\
 &\quad + (c^{(ij)} M_0^{ij})_{,j} - c^{(i3)} k_{(i)} M_0^{i3}] \delta v_i^0 + \\
 &\quad + [M_{0,j}^{ij} - N_0^{i3} - c^{(i3)} M_0^{i3} - 2k_{(i)} M_0^{i3}] \delta a_i^0 - M_0^{33} \delta b_3^0 \} dS_0 + \\
 &\quad + \oint_l \{ [N_0^{i\alpha} + k_{(i)} M_0^{i\alpha} + c^{(i\alpha)} M_0^{i\alpha}] \mu_\alpha \delta v_i^0 + M_0^{i\alpha} \mu_\alpha \delta a_i^0 \} dl.
 \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Рассмотрим вариацию мощности внешних сил на лицевой поверхности. Воспользуемся соотношениями (2.1.6), (2.1.8), связью элементов площадей лицевой и отсчетной поверхностей без учета членов порядка $(x^3)^2$, а также коллинеарностью единичных нормалей к поверхностям S_p и S_0 , тогда

$$\delta L^p = \int_{S_0} \int [(p_0^i \delta v_i^0 - h p_0^i \delta a_i^0) [1 - (k_1 + k_2) h] +$$

$$+ \frac{1}{2} p_0^3 h^2 \delta b_3^0 \Big] dS_0 \quad (2.1.19)$$

где $p_0^i = -\sigma_0^{3i}(-h)$.

Переходя к рассмотрению вариации мощности внешних сил на боковой поверхности, примем во внимание равенства (2.1.6), (2.1.8) и следующие соотношения, справедливые для S_μ :

$$\begin{aligned} dS_\mu &= \frac{\sqrt{g}}{n_1} dx^2 dx^3; & n_\alpha &= (-1)^\beta \sqrt{g} \frac{dx^\beta}{dl}; \\ \mu_\alpha &= (-1)^\alpha \sqrt{g^0} \frac{dx^\beta}{dl}; & n_\alpha &= -\sqrt{\frac{g}{g^0}} \mu_\alpha; \\ n_\alpha^0 &= -(1 + k_\beta x^3) \mu_\alpha; & \alpha, \beta &= 1, 2; \quad \alpha \neq \beta, \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

где $x^1 = x^1(l)$; $x^2 = x^2(l)$ – уравнения граничной кривой и поверхности S_μ .

Воспользовавшись выражением (2.1.20) и выполнив интегрирование по толщине оболочки, определим

$$\begin{aligned} \delta L^\mu &= \int_{S_\mu} \sigma_0^{ij} \delta u_j^0 n_i^0 dS_\mu = - \oint_l [(N_{0e}^{i\alpha} + k_\beta M_{0e}^{i\alpha}) \delta v_i^0 + \\ &+ M_{0e}^{i\alpha} \delta a_i^0] \mu_\alpha dl. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Здесь индексом e обозначены обобщенные усилия и моменты заданных внешних сил.

Подставляя выражения (2.1.18), (2.1.19), (2.1.21) в уравнение Лагранжа (2.1.2), суммируя множители при независимых вариациях δv_i^0 , δa_i^0 , δb_3^0 , приравнивая эти суммы к нулю, получим уравнения предельного равновесия с ковариантными производными и граничные условия тонких оболочек в обобщенных усилиях и моментах, отнесенных к базису на S_0 :

$$\begin{aligned} N_{0,j}^{ij} + [c^{(ij)} M_0^{ij}]_{,j} + \tilde{\Gamma}_{nj}^i M_0^{nj} + k_{(i)} [M_{0,j}^{ij} - N_0^{i3} - c^{(i3)} M_0^{i3}] + \\ + p_0^i [1 - (k_1 + k_2)h] = 0; \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

$$M_{0,j}^{ij} - N_0^{i3} - [c^{(i3)} + 2k_{(i)}]M_0^{i3} - p_0^i h[1 + (k^1 + k^2)h] = 0; \quad (2.1.23)$$

$$M_0^{33} - \frac{1}{2}p_0^3 h^2 = 0; \quad (2.1.24)$$

$$(N_0^{i\alpha} + k_\beta M_0^{i\alpha})\mu_\alpha = (N_{0l}^{i\alpha} + k_\beta M_{0l}^{i\alpha})\mu_\alpha; \quad M_0^{i\alpha}\mu_\alpha = M_{0e}^{i\alpha}\mu_\alpha; \quad (2.1.25)$$

$$i, j, n = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta$$

Переход к физическим составляющим обобщенных усилий и моментов в уравнениях (2.1.22)-(2.1.24) и граничных условиях (2.1.25), а также для обобщенных скоростей деформаций (2.1.9)-(2.1.10), выполним в системе координат на поверхности S_0 с метрическим тензором g_{ij}^0 по обычным правилам тензорного исчисления [185], (см. раздел 2.5). Уравнения равновесия (2.1.22)-(2.1.24) и граничные условия (2.1.25) справедливы для оболочек из любого материала и не зависят от физических законов их деформирования. Уравнения (2.1.22), ($i = 1, 2, 3$), и (2.1.23), ($i = 1, 2$), в физических составляющих совпадают с точностью порядка h^2 с уравнениями равновесия классической геометрически линейной теорией оболочек, если пренебречь вводимыми, в соответствии с условием текучести (1.5.20), компонентами обобщенных усилий и моментов, N_0^{33} , M_0^{i3} , влиянием кривизн оболочек на компоненты главного момента и учесть формулы Кодацци [186]. Уравнение (2.1.23), $i = 3$, отличается от классического, а (2.1.24) является дополнительным, вследствие принятого предположения (2.1.8) о непостоянстве нормальных скоростей смещений в элементе оболочки.

В теории идеального жесткопластического тела скорости деформаций определены с точностью до произвольного положительного множителя. Поэтому введение обобщенных скоростей деформаций, согласно (2.1.7), правомерно для тонких оболочек, удовлетворяющих, с точностью порядка h^2 , неравенствам:

$$1 - |k_i + k_j|h > 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad k_3 = 0.$$

Рассеяние мощности всех компонент тензора напряжений на пластических скоростях деформаций в единице объема определим, вследствие равенств (2.1.3), (2.1.6), (2.1.7) выражением $D = \sigma_{ij}e_{ij}$, где σ_{ij}

и e_{ij} — физические составляющие тензора напряжений и обобщенных скоростей деформаций. Диссипативная функция D вместе с линейной гипотезой для скоростей деформаций (2.1.9) и условием несжимаемости материала (1.5.4) является основополагающей при исследовании поверхности текучести произвольных тонких оболочек (1.5.20). Свойство несжимаемости материала позволило представить условие текучести оболочек в обобщенных усилиях и моментах, которые, как следует из их определения, равны или линейно выражены через физические составляющие обобщенных усилий и моментов, входящих в уравнения (2.1.22)–(2.1.24) и граничные условия (2.1.25). При исследовании несущей способности пластин полагаем $k_1 = k_2 = 0$.

Для оболочек и пластин имеем, следовательно, семь уравнений равновесия, причем одно из них не является дифференциальным, и шесть граничных условий, — в обобщенных усилиях и моментах.

2.2. Геометрически нелинейные уравнения предельного равновесия тонких оболочек и пластин

Для компонент тензора скоростей деформаций примем геометрически нелинейные выражения через ковариантные производные,

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{,i}^n u_{j,n}) \quad (2.2.1)$$

Выражения (2.2.1) для скоростей деформаций, как правило, не применяются, так как в третьем слагаемом необходим множитель — дифференциал времени dt , [119]. Поскольку в теории идеальной пластичности "материал лишен вязкости, то масштаб времени явлений деформации не играет никакой роли" [54]. Поэтому можно время отождествить с безразмерной возрастающей величиной [54]. Согласно теории идеальной пластичности, скорости деформаций и скорости перемещений определены с точностью до произвольного положительного множителя. В частности, такой множитель можно принять сколь угодно малым и отождествить его с дифференциалом безразмерного "времени". Тогда равенство (2.2.1) имеет смысл, так как третье слагаемое пренебрежимо мало (как и требуется) с первыми двумя слагаемыми

в круглых скобках и со скоростью деформаций. Равенством (2.2.1) воспользуемся для определения геометрически нелинейных уравнений предельного равновесия тонких оболочек и пластин. Как и в разделе 2.1, такие уравнения останутся также без изменения, если в равенствах (2.2.1) под скоростями деформаций и перемещений подразумевать деформации и перемещения.

Согласно процедуре, изложенной в разделе (2.1), в тех же предположениях и обозначениях, с учетом равенств (2.2.1), получим следующие соотношения и уравнения предельного равновесия.

Выражения для линейаризированных компонент тензора скоростей деформаций ε_{ij} и обобщенных скоростей деформаций $\varepsilon_{ij}^0, \kappa_{ij}^0$ в пространственном базисе на отсчетной поверхности:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0(x^1, x^2) + k_{ij}^0(x^1, x^2)x^3;$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}\{v_{i,j}^0 + v_{j,i}^0 + \delta_j^3[a_i^0 + k_{(i)}v_i^0] + \delta_i^3[a_j^0 + k_{(j)}v_j^0]\} + \tilde{\varepsilon}_{ij}^0; \quad (2.2.2)$$

$$k_{ij}^0 = \frac{1}{2}\{a_{i,j}^0 + a_{j,i}^0 + [k_{(i)}v_i^0]_{,j} + [k_{(j)}v_j^0]_{,i} - 2\tilde{\Gamma}_{ij}^n v_n^0 + 2\delta_i^3\delta_j^3 b_3^0 +$$

$$+ 2\delta_i^3 k_{(j)}a_j^0 + 2\delta_j^3 k_{(i)}a_i^0\} + c^{(ij)}\varepsilon_{ij}^0 + \tilde{k}_{ij}^0;$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^0 = \frac{1}{2}[v_{i,i}^{0n} + \delta_i^3(a^{0n} - k_{(n)}v^{0n})][v_{n,j}^0 + \delta_j^3(a_n^0 + k_{(n)}v_n^0)];$$

$$\tilde{k}_{ij}^0 = \{[v_{i,i}^{0n} + \delta_i^3(a^{0n} - k_{(n)}v^{0n})][-\tilde{\Gamma}_{nj}^m v_m^0 + a_{n,j}^0 + (k_{(n)}v_n^0)_{,j} +$$

$$+ b_3^0\delta_n^3\delta_j^3 + 2\delta_j^3 k_{(n)}a_n^0] + [v_{n,j}^0 + \delta_j^3(a_n^0 + k_{(n)}v_n^0)][\tilde{\Gamma}_{im}^n v^{0m} + a_{i,i}^{0n} -$$

$$- (k_{(n)}v^{0n})_{,i} + b_3^0\delta^{n3}\delta_i^3 - 2\delta_i^3 k_{(n)}a^{0n}] + 2c_{ij}\varepsilon_{ij}^0\}; \quad (2.2.3)$$

причем

$$v_{i,j}^0 = \frac{\partial v_i^0}{\partial x^j} - \bar{\Gamma}_{ij}^n v_n^0, \quad a_{i,j}^0 = \frac{\partial a_i^0}{\partial x^j} - \bar{\Gamma}_{ij}^n a_n^0;$$

$$v_{j,i}^0 = \frac{\partial v_j^0}{\partial x^i} + \bar{\Gamma}_{nj}^i v^{0n}, \quad a_{j,i}^0 = \frac{\partial a_j^0}{\partial x^i} + \bar{\Gamma}_{nj}^i a^{0n};$$

$$c^{(ij)} = k_1 + k_2 - k_i - k_j, \quad k_i = -1/R_i, \quad k_3 = 0$$

Геометрически нелинейные уравнения предельного равновесия оболочки с ковариантными производными в обобщенных усилиях и моментах, отнесенных к пространственному базису на отсчетной поверхности:

$$\begin{aligned}
 N_{0,j}^{ij} + [c^{(ij)} M_0^{ij}]_{,j} + \tilde{\Gamma}_{nj}^i M_0^{nj} + k_{(i)} [M_{0,j}^{ij} - N_0^{i3} - c^{(i3)} M_0^{i3}] + \\
 + p_0^i [1 - (k_1 + k_2)h] + \tilde{N}^i = 0; \\
 M_{0,j}^{ij} - N_0^{i3} - [c^{(i3)} + 2k_{(i)}] M_0^{i3} - p_0^i h [1 + (k_1 + k_2)h] + \tilde{M}^i = 0; \\
 M_0^{33} - \frac{1}{2} p_0^3 h^2 + \tilde{M}^{33} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Здесь векторы \tilde{N}^i и \tilde{M}^i , \tilde{M}^{33} отражают геометрическую нелинейность в выражениях (2.2.1),

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}^i = & (N_0^{nj} v_{,n}^{0i})_{,j} + (N_0^{3j} a^{0i})_{,j} - k_{(i)} (M_0^{3j} k_{(i)} v^{0i})_{,j} + (M_0^{nj} a_{,n}^{0i})_{,j} + \\
 & + (M_0^{3j} b_3^0 \delta^{i3})_{,j} + (M_0^{nj} c^{(nj)} v_{l,j}^0)_{,n} g^{il} + (M_0^{n3} c^{(nj)} a_l^0)_{,n} g^{il} - \\
 & - \frac{1}{2\sqrt{g_0}} \partial (M_0^{\alpha j} \tilde{\Gamma}_{lj}^m v_m^0 g^{il} \sqrt{g_0}) / \partial x^\alpha + \frac{1}{2} M_0^{nj} \tilde{\Gamma}_{lj}^m v_m^0 g^{sl} \tilde{\Gamma}_{sn}^i + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{g_0}} \partial (M_0^{n\alpha} \tilde{\Gamma}_{nm}^i v^{0m} \sqrt{g_0}) / \partial x^\alpha + \frac{1}{2} M_0^{nj} \tilde{\Gamma}_{nm}^s v^{0m} \tilde{\Gamma}_{sj}^i + \\
 & + 2M_0^{33} k_{(i)}^2 a^{0i} + M_0^{33} v^{0i} - \frac{1}{2} M_0^{3j} \tilde{\Gamma}_{lj}^m v_m^0 k_{(i)} g^{il} - \frac{1}{2} M_0^{3j} k_{(n)} v^{0n} \tilde{\Gamma}_{nj}^i - \\
 & - M_0^{n3} \tilde{\Gamma}_{nm}^i v^{0m} k_{(i)} - M_0^{n3} \tilde{\Gamma}_{nm}^k k_{(k)} v_k^0 g^{mi}; \\
 \tilde{M}^i = & -N_0^{n3} v_{,n}^{0i} - N_0^{33} a^{0i} + (M_0^{nj} v_{,n}^{0i})_{,j} + (M_0^{3j} a^{0i})_{,j} + 2M_0^{33} k_{(i)}^2 v^{0i} - \\
 & - M_0^{n3} a_{,n}^{0i} - M_0^{33} b_3^0 \delta^{i3} - M_0^{3j} c^{(3j)} v_{l,j}^0 g^{il} - M_0^{33} c^{(33)} a_l^0 g^{il} + \\
 & + \frac{1}{2} M_0^{3j} \tilde{\Gamma}_{lj}^m v_m^0 g^{il} - \frac{1}{2} M_0^{n3} \tilde{\Gamma}_{nm}^i v^{0m}; \\
 \tilde{M}^{33} = & -M_0^{i3} v_{,i}^{03} - M_0^{33} a^{03}
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Граничные условия:

$$(N_0^{i\alpha} + k_\beta M_0^{i\alpha}) \mu_\alpha + \tilde{N}^i = (N_{0l}^{i\alpha} + k_\beta M_{0e}^{i\alpha}) \mu_\alpha;$$

$$M_0^{i\alpha} \mu_\alpha + \bar{M}^i = M_{0c}^{i\alpha} \mu_\alpha; \quad (2.2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{N}^i = \mu_\alpha \{ & M_0^{3\alpha} k_{(i)}^2 v^{0i} - M_0^{n\alpha} a_{,n}^{0i} - M_0^{3\alpha} b_3^0 \delta^{i3} - M_0^{\alpha j} v_{l,j}^0 g^{il} - \\ & - M_0^{\alpha 3} c^{(\alpha 3)} a_l^0 g^{il} + \frac{1}{2} M_0^{\alpha j} \bar{\Gamma}_{lj}^m v_m^0 g^{il} - \frac{1}{2} M_0^{n\alpha} \bar{\Gamma}_{nm}^i v^{0m} \}; \\ \bar{M}^i = & -\mu_\alpha (M_0^{n\alpha} v_{,n}^{0i} + M_0^{3\alpha} a^{0i}). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Уравнения (2.2.4) и граничные условия (2.2.6) совпадают с геометрически линейными уравнениями (2.1.22)-(2.1.24) и граничными условиями (2.1.25) при $\bar{N}^i = \bar{M}^i = \bar{M}^{33} = \bar{N}^i = \bar{M}^i = 0$. Из уравнений (2.2.4) и граничных условий (2.2.6) получим геометрически нелинейные уравнения и граничные условия продольно-поперечного изгиба оболочек, если под скоростями перемещений подразумевать перемещения и принять известные классические допущения [1].

2.3. Уравнения изгиба и выпучивания упругопластических конструктивно-неоднородных пластин и оболочек [89]

Построение теории изгиба и устойчивости слоистых конструктивно-неоднородных пластин и оболочек на основе уравнений, установленных в разделе (2.2), содержит значительные вычислительные трудности. Сложность такого подхода состоит в том, что необходимо определить распределение поверхностных нагрузок $p_0^{i\pm}(x^1, x^2)$ действия (+) и противодействия (-) слоев при условии непрерывности перемещений на внутренних общих поверхностях этих слоев. Поэтому широко распространенный подход в исследованиях устойчивости упругих и неупругих конструктивно-неоднородных оболочек основан на применении гипотезы ломаной нормали для несущих слоев и заполнителя [1,28,152-159].

В настоящем разделе также воспользуемся моделью конструктивно-неоднородной оболочки, рассмотренной в разделах (1.1) и (1.3),

основанной на гипотезе Кирхгофа для внешних слоев, гипотезе прямой линии для среднего слоя (заполнителя) и деформационной теории в физических составляющих кинематических и физических характеристик.

Введем удельные усилия и моменты в оболочке:

$$\begin{aligned}\hat{N}_r &= \sum_{j=1}^3 \hat{N}_{rj}; & \hat{T} &= \sum_{j=1}^3 \hat{T}_j; & \hat{M}_r &= \sum_{j=1}^3 \hat{M}_{rj}; & \hat{H} &= \sum_{j=1}^3 \hat{H}_j; \\ \hat{N}_{rj} &= \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_r^j dx_3; & \hat{T}_j &= \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{12}^j dx_3; & & & & (2.3.1) \\ \hat{M}_{rj} &= \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_r^j x^3 dx_3; & \hat{H}_j &= \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{12}^j x^3 dx_3; & \hat{Q}_{r3} &= \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{r3} dx_3;\end{aligned}$$

где

$$z_{11} = -h_1 - \delta_1; \quad z_{12} = z_{23} = h_2; \quad z_{13} = z_{21} = -h_1; \quad z_{22} = h_2 + \delta_2$$

Подставляя в равенства (2.3.1) напряжения, выраженные в соответствии с равенствами (1.1.6)-(1.1.9), (1.3.1), (1.3.13) через перемещения, получим:

$$\begin{aligned}\hat{N}_r &= N_r - N_{0r}; & \hat{T} &= T - T_0; & \hat{M}_r &= M_r - M_{0r}; \\ \hat{H} &= H - H_0; & \hat{Q}_{r3} &= Q_{r3} - Q_{0r3}; \\ N_r &= \sum_{j=1}^3 N_{rj}; & T &= \sum_{j=1}^3 T_j; & M_r &= \sum_{j=1}^3 M_{rj}; & (2.3.2) \\ H &= \sum_{j=1}^3 H_j; & N_{0r} &= \sum_{j=1}^3 N_{0rj}; & T_0 &= \sum_{j=1}^3 T_{0j}; \\ M_{0r} &= \sum_{j=1}^3 M_{0rj}; & H_0 &= \sum_{j=1}^3 H_{0j}.\end{aligned}$$

Здесь

$$N_{rl} = B_l \left[u_{rl,r} + \nu u_{sl,s} - \frac{(R_s + \nu_l R_r)}{R_1 R_2} w + \frac{1}{2} (w_{,r})^2 + \frac{1}{2} \nu_l (w_{,s})^2 \right];$$

$$T_l = \frac{B_l(1 - \nu_l)}{2}(u_{1l,2} + u_{2l,1} + w_{,1}w_{,2});$$

$$M_{rl} = -D_l(w_{,rr} + \nu_l w_{,ss}) + (-1)^l(h_l + \delta_l/2) \times \\ \times B_l \left[u_{rl,r} + \nu u_{sl,s} - \frac{R_s + \nu_l R_r}{R_1 R_2} w + \frac{1}{2}(w_{,r})^2 + \frac{1}{2}\nu_l(w_{,s})^2 \right];$$

$$H_l = -(1 - \nu_l)D_l w_{,12} + (-1)^l B_l(1 - \nu_l)(h_l + \delta_l/2)(u_{1l,2} + u_{2l,1} + w_{,1}w_{,2})/2 :$$

$$N_{r3} = B_{r3} \left\{ a_r \left[\frac{1}{\delta_3} (h_2 u_{r1} + h_1 u_{r2} + h w_{,r})_{,r} - \frac{w}{R_r} + \frac{1}{2}(w_{,r})^2 \right] + \right. \\ \left. + b_s \left[\frac{1}{\delta_3} (h_2 u_{s1} + h_1 u_{s2} + h w_{,s})_{,s} - \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2}(w_{,s})^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{2\delta_3^2} [a_r(u_{r2} - u_{s2} + h_0 w_{,r})_{,r} + b_s(u_{s2} - u_{s1} + h_0 w_{,s})_{,s}] \right\};$$

$$T_3 = B_3 \left\{ \frac{1}{\delta_3} [(h_2 u_{11} + h_1 u_{12} + h w_{,1})_{,2} + \right. \\ \left. + (h_2 u_{21} + h_1 u_{22} + h w_{,2})_{,1}] + w_{,1}w_{,2} + \right. \\ \left. + \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{2\delta_3^2} [(u_{12} - u_{11} + h_0 w_{,1})_{,2} + (u_{22} - u_{21} + h_0 w_{,2})_{,1}] \right\};$$

$$M_{r3} = \frac{3 D_{r3}(h_2^2 - h_1^2)}{2 (h_1^3 + h_2^3)} \left\{ a_r \left[\frac{1}{\delta_3} (h_2 u_{r1} + h_1 u_{r2} + h w_{,r})_{,r} - \frac{w}{R_r} + \frac{1}{2}(w_{,r})^2 \right] + \right. \\ \left. + b_s \left[\frac{1}{\delta_3} (h_2 u_{s1} + h_1 u_{s2} + h w_{,s})_{,s} - \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2}(w_{,s})^2 \right] \right\} + \\ + (D_3/\delta_3) [a_r(u_{r2} - u_{r1} + h_0 w_{,r})_{,r} + b_s(u_{s2} - u_{s1} + h_0 w_{,s})_{,s}];$$

$$H_3 = \frac{3 D_3(h_2^2 - h_1^2)}{2 (h_1^3 + h_2^3)} \left[\frac{1}{\delta_3} (h_2 u_{11} + h_1 u_{12} + h w_{,1})_{,2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\delta_3} (h_2 u_{21} + h_1 u_{22} + h w_{,2})_{,1} + w_{,1}w_{,2} \right] + \\ + \frac{D_3}{\delta_3} [(u_{12} - u_{11} + h_0 w_{,1})_{,2} + (u_{22} - u_{21} + h_0 w_{,2})_{,1}];$$

$$Q_3 = G_{r3} [u_{r2} - u_{r1} + (h_0 + \delta_3) w_{,r}];$$

$$N_{0rj} = \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{0r}^j dx^3; \quad T_{0j} = \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{012}^j dx^3; \quad M_{0rj} = \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{0r}^j x^3 dx^3;$$

$$H_{0j} = \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{012}^j x^3 dx^3; \quad Q_{0r3} = \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{0r3}^j dx^3;$$

$$B_l = \frac{E_l \delta_l}{[1 - (\nu_l)^2]}; \quad D_l = \frac{E_l (\delta_l)^3}{12[1 - (\nu_l)^2]}; \quad B_{r3} = \delta_3;$$

$$D_{r3} = \frac{1}{3}(h_1^3 + h_2^3); \quad B_3 = G_{12} \delta_3; \quad D_3 = \frac{1}{3} G_{12} (h_1^3 + h_2^3);$$

$$(l, r, s = 1, 2; \quad r \neq s).$$

Если ребра в узле не соединены, то, вместо усилия T и крутящего момента H , введем усилие \bar{T}^{pr} и крутящий момент \bar{H}^{pr} , для которых, воспользовавшись выражениями (1.1.6)-(1.1.8), (1.3.11), (1.3.14), получим:

$$\begin{aligned} \bar{T}^{pr} &= T^{pr} + T_0^{pr}; & \bar{H}^{pr} &= H_{pr} + H_0^{pr}; \\ T^{pr} &= T_1 + T_2 + T_3^{pr}; & T_0^{pr} &= T_{01} + T_{02} + T_{03}^{pr}; \\ H^{pr} &= H_1 + H_2 + H_3^{pr}; & H_0^{pr} &= H_{01} + H_{02} + H_{03}^{pr}; \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} T_3^{pr} &= B_{pr} \left\{ \frac{1}{\delta_3} (h_2 u_{s1} + h_1 u_{s2} + h w_{,s})_{,r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{2\delta_3^2} (u_{s2} - u_{s1} + h_0 w_{,s})_{,r} \right\}; \\ H_3^{pr} &= D_{pr} \left[\frac{3}{2} \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{(h_1^3 + h_2^3) \delta_3} (h_2 u_{s1} + h_1 u_{s2} + h w_{,s})_{,r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta_3} (u_{s2} - u_{s1} + h_0 w_{,s})_{,r} \right]; \\ T_{03}^{pr} &= \omega_s \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{012}^{pr} dx^3; & H_{03}^{pr} &= \omega_s \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{012}^{pr} x^3 dx^3; \\ B_{pr} &= \omega_s G_{pr} \delta_3; & D_{pr} &= \frac{1}{3} \omega_s G_{pr} (h_1^3 + h_2^3); \end{aligned}$$

$$(r, s = 1, 2; \quad r \neq s).$$

Величины T_j , H_j , T_{0j} , H_{0j} , а также остальные усилия и моменты определим из выражений (2.3.2). Интегралы в выражениях для N_0 , T_0 , M_0 , H_0 , Q_0 , N_0^{pr} , H_0^{pr} подразумеваем выраженными через перемещения; при этом $u_{rj1} = u_{rj} - u_{rj}^*$, $w_1 = w - w^*$, u_{rj}^* , w^* — смещения в начале разгрузки. Каждое из усилий и моментов в (2.3.2) или (2.3.3) представлено в виде суммы двух слагаемых; первое слагаемое обусловлено компонентами упругих деформаций, второе слагаемое — компонентами пластических деформаций. Вторые слагаемые отражают различный характер упруго-пластического деформирования каждого элемента во внешних слоях и заполнителе. В зависимости от величины напряжений и деформаций, а также от истории нагружения, в каждом элементе внешних слоев может реализоваться какое-либо одно состояние — упругое, пластическое или разгрузка. В слое заполнителя в каждом элементе могут реализоваться несколько состояний, например, в ребре x_1 упругое, в узле — пластическое, в ребре x_2 — разгрузка или вторичные пластические деформации. Интегралы, входящие во вторые слагаемые можно вычислить, если по всей оболочке известны напряжения и деформации при любых значениях внешних нагрузок, с которыми оболочка находится в статическом равновесии.

Рассматриваемая модель позволяет непосредственно перейти к различным типам конструктивно-неоднородных оболочек. Так, для трехслойной оболочки со сплошным изотропным заполнителем следует положить:

$$\omega_1 = \omega_2 = 1. \quad (2.3.4)$$

Для трехслойной оболочки со сплошным легким заполнителем примем:

$$\omega_1 = \omega_2 = 1; \quad a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = G_{12} = 0. \quad (2.3.5)$$

В случае несимметрично подкрепленной оболочки, состоящей из одного слоя обшивки и подкрепляющего набора, следует, в зависимости от того, с какой стороны расположены подкрепляющие ребра, положить:

$$\delta_1 = 0 \quad \text{или} \quad \delta_2 = 0. \quad (2.3.6)$$

Для биметаллических оболочек следует положить:

$$\begin{aligned} h_1 = h_2 = 0; \quad u_{11} &= u_{10} + \frac{\delta_1}{2} w_{,1}; \\ u_{12} &= u_{10} - \frac{\delta_2}{2} w_{,1}; \quad u_{21} = u_{20} + \frac{\delta_1}{2} w_{,2}; \\ u_{22} &= u_{20} - \frac{\delta_2}{2} w_{,2}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Здесь u_{10} , u_{20} — смещения в отсчетной поверхности, являющейся поверхностью спая слоев.

Для оболочки, подкрепленной ребрами, не соединенными в узле, следует в выражениях (2.3.2) принять $k = 0$, а усилия T^{pr} , T_0^{pr} и крутящие моменты H^{pr} , H_0^{pr} определить, согласно равенствам (2.3.3); если имеются только ребра первого или второго направления, то в выражениях (2.3.3) примем

$$\omega_2 = 0, \quad \text{или} \quad \omega_1 = 0. \quad (2.3.8)$$

В различных предположениях относительно материалов, из которых выполнена оболочка, нетрудно получить и другие варианты конструктивно-неоднородных оболочек.

Уравнения изгиба и выпучивания, а также граничные условия задачи об изгибе и устойчивости конструктивно-неоднородных пластин и оболочек получим с помощью вариационного принципа Лагранжа [20].

$$\delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 = \int_a^b \int_c^d P \delta w \, dx_1 dx_2 + \delta A_k. \quad (2.3.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta W_j &= \int_a^b \int_c^d \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} (\sigma_1^j \delta \varepsilon_1^j + \sigma_2^j \delta \varepsilon_2^j + \sigma_{12}^j \delta \varepsilon_{12}^j) \, dx_1 dx_2 dx_3; \\ \delta W_3 &= \int_a^b \int_c^d \int_{z_{13}}^{z_{23}} (\sigma_1^3 \delta \varepsilon_1^3 + \sigma_2^3 \delta \varepsilon_2^3 + \sigma_{12}^3 \delta \varepsilon_{12}^3 + \\ &+ \sigma_{13}^3 \delta \varepsilon_{13}^3 + \sigma_{23}^3 \delta \varepsilon_{23}^3) \, dx_1 dx_2 dx_3; \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

Величины, δW_1 , δW_2 , δW_3 , – работы внутренних сил во внешних слоях и заполнителе; интеграл в правой части равенства (2.3.9) и δA_k представляют собой работу внешних поверхностных и контурных сил. В предположениях, соответствующих равенствам (1.3.11), выражение для работы внутренних сил в заполнителе (2.3.9) δW_3 заменим – на $\delta W'_3$:

$$\delta W'_3 = \int_a^b \int_c^d \int_{z_{13}}^{z_{23}} (\sigma_1^3 \delta \varepsilon_1^3 + \sigma_2^3 \delta \varepsilon_2^3 + \omega_2 \sigma_{12}^{p1} \delta \varepsilon_{12}^{p1} + \omega_1 \sigma_{12}^{p2} \delta \varepsilon_{12}^{p2} + \sigma_{13}^3 \delta \varepsilon_{13}^3 + \sigma_{23} \delta \varepsilon_{23}^3) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (2.3.10)$$

Воспользовавшись выражениями (1.1.6)-(1.1.9), (1.3.13), (1.3.14), (2.3.1), (2.3.2) из равенства (2.3.9), при помощи известной процедуры, получим [165]:

$$\begin{aligned} & - \int_a^b \int_c^d \left\{ (\hat{N}_{1,1} + \hat{T}_{,2}) \delta u + (\hat{N}_{2,2} + \hat{T}_{,1}) \delta v + \right. \\ & + [(h_2 N_{12} - h_1 N_{11} + M_{13})_{,1} + (h_2 T_2 - h_1 T_1 + H_3)_{,2} - Q_{13}] \delta \varphi + \\ & + [(h_2 N_{22} - h_1 N_{21} + M_{23})_{,2} + (h_2 T_2 - h_1 T_1 + H_3)_{,1} - Q_{23}] \delta \psi + \\ & + [\hat{N}_1/R_1 + \hat{N}_2/R_2 + (\hat{N}_1 w_{,1})_{,1} + (\hat{N}_2 w_{,2})_{,2} + (\hat{T} w_{,1})_{,2} + \\ & + (\hat{T} w_{,2})_{,1} + \hat{M}_{1,11} + 2\hat{H}_{,12} + \hat{M}_{2,22} + P] \delta w \left. \right\} dx_1 dx_2 \\ & + \int_a^b \left\{ (\hat{T} - \hat{T}_g) \delta u + (\hat{N}_2 - \hat{N}_{g2}) \delta v + \right. \\ & + (h_2 T_2 - h_1 T_1 + H_3 - h_2 T_{g2} + h_1 T_{g1} - H_{g3}) \delta \varphi + \\ & + (h_2 N_{22} - h_1 N_{21} + M_{23} - h_2 N_{g22} + h_1 N_{g21} - M_{g23}) \delta \psi + \\ & + [\hat{N}_2 w_{,2} + T w_{,1} + \hat{M}_{2,2} - (1 + h_0/\delta_3) M_{23,2} + 2\hat{H}_{,1} - \\ & - 2(1 + h_0/\delta_3) H_{3,1} + (h_1 + \delta_1/2) N_{21,2} - (h_2 + \delta_2/2) N_{22,2} - \\ & - (h/\delta_3) N_{23,2} + 2(h_1 + \delta_1/2) T_{1,1} - 2(h_2 + \delta_2/2) T_{2,1} - 2(h/\delta_3) T_{3,1} + \\ & + (1 + h_0/\delta_3) Q_{23} - (h_1 + \delta_1/2) T_{g1,1} + (h_2 + \delta_2/2) T_{g2,1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (h/\delta_3)T_{g3,1} - H_{g,1} + (1 + h_0/\delta_3)H_{g3,1} - Q_{g23} \delta w + \\
& + [(h_2 + \delta_2/2)N_{22} - (h_1 + \delta_1/2)N_{21} + (h/\delta_3)N_{23,2} - M_2 + \\
& + (1 + h_0/\delta_3)M_{23} - (h_2 + \delta_2/2)N_{g22} + \quad (2.3.11) \\
& + (h_1 + \delta_1/2)N_{g21} - (h/\delta_3)N_{g23,2} + M_{g2} - (1 + h_0/\delta_3)M_{g23}] \delta w_{,2} \Big|_c^d dx_1 \\
& + \int_c^d \{ (\hat{T} - \hat{T}_g) \delta v + (\hat{N}_1 - \hat{N}_{g1}) \delta u + \\
& + (h_2 T_2 - h_1 T_1 + H_3 - h_2 T_{g2} + h_1 T_{g1} - H_{g3}) \delta \psi + \\
& + (h_2 N_{12} - h_1 N_{11} + M_{13} - h_2 N_{g12} + h_1 N_{g11} - M_{g13}) \delta \varphi + \\
& + [\hat{N}_1 w_{,1} + T w_{,2} + \hat{M}_{1,1} - (1 + h_0/\delta_3)M_{13,2} + 2\hat{H}_{,2} - \\
& - 2(1 + h_0/\delta_3)H_{3,2} + (h_1 + \delta_1/2)N_{11,1} - (h_2 + \delta_2/2)N_{12,2} - \\
& - (h/\delta_3)N_{13,1} + 2(h_1 + \delta_1/2)T_{1,2} - 2(h_2 + \delta_2/2)T_{2,2} - 2(h/\delta_3)T_{3,2} + \\
& + (1 + h_0/\delta_3)Q_{13} - (h_1 + \delta_1/2)T_{g1,2} + (h_2 + \delta_2/2)T_{g2,2} + \\
& + (h/\delta_3)T_{g3,2} - H_{g,2} + (1 + h_0/\delta_3)H_{g3,2} - Q_{g13}] \delta w + \\
& + [(h_2 + \delta_2/2)N_{12} - (h_1 + \delta_1/2)N_{11} + (h/\delta_3)N_{13,2} - M_1 + \\
& + (1 + h_0/\delta_3)M_{13} - (h_2 + \delta_2/2)N_{g12} + \\
& + (h_1 + \delta_1/2)N_{g11} - (h/\delta_3)N_{g13,2} + M_{g1} - (1 + h_0/\delta_3)M_{g13}] \delta w_{,1} \Big|_a^b dx_2 + \\
& + 2 \{ \{ [-(h_1 + \delta_1/2)T_1 + (h_2 + \delta_2/2)T_2 - \\
& - H + (1 + h_0/\delta_3)H_3 + (h/\delta_3)T_3 + (h_1 + \delta_1/2)T_{g1} + \\
& + H_g - h/\delta_3 T_{g3} - (1 + h_0/\delta_3)H_{g3} - (h_2 + \delta_2/2)T_{g2}] \Big|_a^b \Big|_c^d = 0.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\delta u &= (h_2 \delta u_{11} + h_1 \delta u_{12})/\delta_3; & \delta v &= (h_2 \delta u_{21} + h_1 \delta u_{22})/\delta_3; \\
\delta \varphi &= (\delta u_{12} - \delta u_{11})/\delta_3; & \delta \psi &= (\delta u_{22} - \delta u_{21})/\delta_3.
\end{aligned}$$

Символ δ , так же как и в выражениях (2.3.9), (2.3.10), означает варьирование соответствующих переменных. Индексами после запятой обозначены частные производные по координатам x_1 и x_2 , соответственно. Полагая в уравнении (2.3.11) под знаком поверхностного интеграла сомножители при независимых вариациях равными нулю, получим пять уравнений равновесия оболочки, которые запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 N_{1,1} + T_{,2} &= F_1; & N_{2,2} + T_{,1} &= F_2; \\
 (h_2 N_{12} - h_1 N_{11} + M_{13})_{,1} + (h_2 T_2 - \\
 - h_1 T_1 + H_3)_{,2} - Q_{13} &= F_3; \\
 (h_2 N_{22} - h_1 N_{21} + M_{23})_{,2} + (h_2 T_2 - \\
 - h_1 T_1 + H_3)_{,1} - Q_{23} &= F_4; \\
 M_{1,11} + 2H_{,12} + M_{2,22} + N_1/R_1 + N_2/R_2 + (N_1 w_{,1})_{,1} + \\
 + (T w_{,1})_{,2} + (T w_{,2})_{,1} + (N_2 w_{,2})_{,2} + P &= F_5
 \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 F_1 &= N_{01,1} + T_{0,2}; & F_2 &= N_{02,2} + T_{0,1}; \\
 F_3 &= (h_2 N_{012} - h_1 N_{011} + M_{013})_{,1} + (h_2 T_{02} - \\
 - h_1 T_{01} + H_{03})_{,2} - Q_{013}; \\
 F_4 &= (h_2 N_{022} - h_1 N_{021} + M_{023})_{,2} + (h_2 T_{02} - \\
 - h_1 T_{01} + H_{03})_{,1} - Q_{023} &= F_4; \\
 F_5 &= M_{01,11} + 2H_{0,12} + M_{02,22} + N_{01}/R_1 + N_{02}/R_2 + (N_{01} w_{,1})_{,1} + \\
 + (T_0 w_{,1})_{,2} + (T_0 w_{,2})_{,1} + (N_{02} w_{,2})_{,2} + P &= F_5
 \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Различные варианты граничных условий также могут быть получены из уравнения Лагранжа (2.3.9).

Для шарирно опертого края $x_1 = a$ граничные условия получим, принимая во втором контурном интеграле в уравнении (2.3.11) сомножители при независимых вариациях δu , δv , $\delta \varphi$, $\delta \psi$, $\delta w_{,1}$ равными нулю; с учетом геометрического условия $w(x_1 = a) = 0$ получим:

$$N_1 = N_{g1} + f_1; \quad T = T_g + f_2;$$

$$\begin{aligned}
h_1 N_{11} - h_2 N_{12} - M_{13} &= h_1 N_{g11} - h_2 N_{g12} - M_{g13} + f_3; \\
h_1 T_1 - h_2 T_2 - H_3 &= h_1 T_{g1} - h_2 T_{g2} - H_{g3} + f_4; \\
(h_1 + \delta_1/2) N_{11} - (h_2 + \delta_2/2) N_{12} - (h/\delta_3) N_{13} + \\
+ M_1 + (1 + h_0/\delta_3) M_{13} &= (h_1 + \delta_1/2) N_{g11} - (h_2 + \delta_2/2) N_{g12} - \\
- (h/\delta_3) N_{g13} + M_{g1} + (1 + h_0/\delta_3) M_{13} + f_5
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
f_1 &= N_{01}; & f_2 &= T_0; & f_3 &= h_1 N_{011} - h_2 N_{012} - M_{013}; & f_4 &= \\
&= h_1 T_{01} - h_2 T_{02} - H_{03}; & f_5 &= (h_1 + \delta_1/2) N_{011} - (h_2 + \delta_2/2) N_{012} - (h/\delta_3) N_{013} + \\
&+ M_{01} + (1 + h_0/\delta_3) M_{013} + f_5.
\end{aligned}$$

Величины, N_{g1} , T_g , M_{g1} , — внешние контурные усилия и момент на краю оболочки; N_{g1j} , T_{gj} , ($j = 1, 2$), — внешние контурные усилия на краях внешних слоев; N_{g13} , M_{g13} , H_{g3} , — внешние контурные усилия и моменты на краю заполнителя.

Уравнения равновесия оболочки, для которой ребра в узле не соединены между собой, получим на основании равенств (2.3.9)-(2.3.12), (1.3.11), (1.3.14), (2.3.3), (1.1.7), (1.1.8) при $k = 1$ заменой в первом уравнении (2.3.12) величин T , T_0 на T^{p2} , T_0^{p2} ; во втором уравнении — T , T_0 на T^{p1} , T_0^{p1} ; в третьем — H_3 , H_{03} на H_3^{p2} , H_{03}^{p2} ; в четвертом — H_3 , H_{03} на $H_3^{p1} + h_3^{p2}$, $H_{03}^{p1} + h_{03}^{p2}$ и T_3 , T_{03} на $T_3^{p1} + T_3^{p2}$, $T_{03}^{p1} + T_{03}^{p2}$. Граничные условия для шарнирно-опертого края в таком случае получим заменой во втором граничном условии величин T , T_0 на T^{p1} , T_0^{p1} и в четвертом — H_3 , H_{03} на H_3^{p1} , H_{03}^{p1} .

В уравнениях равновесия (2.3.12) и граничных условиях (2.3.13) функции F_α , f_α , ($\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$), обусловлены физически нелинейным характером деформирования оболочки; для упругой оболочки $F_\alpha = f_\alpha = 0$.

Запись уравнений равновесия и граничных условий в форме, (2.3.12)-(2.3.13), аналогична записи уравнений равновесия и граничных условий при решении задач пластичности методом упругих решений [20].

2.4. Частные виды уравнений изгиба и выпучивания упруго-пластических конструктивно-неоднородных пластин и оболочек [89]

Уравнения равновесия в частных случаях получим из уравнений (2.3.12) при различных предположениях, (2.3.4)-(2.3.5), относительно их геометрических и физических характеристик. Для оболочки с упругим заполнителем положим

$$k^{pr} = k^y = m^{pr} = m^y = n^{pr} = n^y = 0; \quad (2.4.1)$$

для оболочки со сплошным изотропным заполнителем -

$$\omega_1 = \omega_2 = 1; \quad (2.4.2)$$

для оболочки с легким заполнителем -

$$B_{13} = B_{23} = B_3 = D_{13} = D_{23} = D_3 = 0; \quad (2.4.3)$$

для оболочки с мембранными несущими слоями -

$$D_1 = D_2 = M_{01} = M_{02} = H_0 = 0. \quad (2.4.4)$$

Для несимметрично подкрепленной оболочки, состоящей из одного слоя обшивки и подкрепляющего набора, следует положить $\delta_1 = 0$ или $\delta_2 = 0$ в зависимости от того, с какой стороны расположены подкрепляющие ребра.

Уравнения равновесия биметаллической оболочки получим из уравнений (2.3.12) при предположениях (2.3.7). В этом случае третье и четвертое уравнения равновесия (2.3.12), так же как и третье и четвертое из граничных условий (2.3.13), выпадают. Для упругой трехслойной оболочки симметричного строения с жестким изотропным заполнителем и изотропными внешними слоями уравнение (2.3.12) при $h_1 = h_2$, $\delta_1 = \delta_2$ с точностью до обозначений совпадают с уравнениями равновесия, полученными в работе [165].

Для пластинок принимаем

$$R_1 = R_2 = \infty. \quad (2.4.5)$$

Уравнения изгиба и выпучивания в перемещениях трехслойной пологой оболочки с легким заполнителем получим, воспользовавшись выражениями (2.3.12), (2.3.2), (2.4.2)-(2.4.3):

$$\begin{aligned}
 & B_1(u_{11,11} + \frac{3}{4}u_{21,12} + \frac{1}{4}u_{11,22}) + B_2(u_{12,11} + \\
 & + \frac{3}{4}u_{22,12} + \frac{1}{4}u_{12,22}) + aw_{,1} = \Psi_1; \\
 & B_1(u_{21,22} + \frac{3}{4}u_{11,11} + \frac{1}{4}u_{21,11}) + B_2(u_{22,22} + \\
 & + \frac{3}{4}u_{12,12} + \frac{1}{4}u_{22,11}) + bw_{,2} = \Psi_2; \\
 & h_2B_2(u_{12,11} + \frac{3}{4}u_{22,12} + \frac{1}{4}u_{12,22}) - h_1B_1(u_{11,11} + \\
 & + \frac{3}{4}u_{21,12} + \frac{1}{4}u_{11,22}) - G(u_{12} - u_{11}) - \\
 & - (h_0 + \delta_3)w_{,1} + cw_{,1} = \Psi_3; \\
 & h_2B_2(u_{22,22} + \frac{3}{4}u_{12,12} + \frac{1}{4}u_{22,11}) - h_1B_1(u_{21,22} + \\
 & + \frac{3}{4}u_{11,12} + \frac{1}{4}u_{21,11}) - G_3(u_{22} - u_{21}) - \\
 & - G_3(h_0 + \delta_3)w_{,2} + dw_{,2} = \Psi_4; \\
 & [(h_2 + \delta_2/2)B_2 \Delta u_{12} - (h_1 + \delta_1/2)B_1 \Delta u_{11}]_{,1} + \\
 & + [(h_2 + \delta_2/2)B_2 \Delta u_{22} - (h_1 + \delta_1/2)B_1 \Delta u_{21}]_{,2} - \\
 & - (D_1 + D_2) \Delta \Delta w + ew_{,11} + fw_{,22} = \Psi_5
 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= -(B_1 + B_2)(w_{,1}w_{,11} + \frac{1}{4}w_{,1}w_{,22} + \frac{3}{4}w_{,2}w_{,12}) - \\
 & - N_{01,1} - T_{0,2}; \\
 \Psi_2 &= -(B_1 + B_2)(w_{,2}w_{,22} + \frac{1}{4}w_{,2}w_{,11} + \frac{3}{4}w_{,1}w_{,12}) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -N_{02,2} - T_{0,2}; \\
\Psi_3 = & -(h_2 B_2 - h_1 B_1)(w_{,1} w_{,11} + \frac{1}{4} w_{,1} w_{,22} + \frac{3}{4} w_{,2} w_{12}) - \\
& -(h_2 N_{012} - h_1 N_{011})_{,1} - (h_2 T_{02} - h_1 T_{01})_{,2}; \\
\Psi_4 = & -(h_2 B_2 - h_1 B_1)(w_{,2} w_{,22} + \frac{1}{4} w_{,2} w_{,11} + \frac{3}{4} w_{,1} w_{12}) - \\
& -(h_2 N_{022} - h_1 N_{012})_{,2} - (h_2 T_{02} - h_1 T_{01})_{,1}; \\
\Psi_5 = & -\frac{1}{2}(B_2 \delta_2 - B_1 \delta_1)(w_1 \Delta w_{,1} + w_{,2} \Delta w_{,2} + \\
& + w_{,11}^2 + w_{22}^2 \frac{1}{2} w_{,11} w_{,22} + 3 w_{12}^2) - \\
& -N_1 w_{,11} - N_2 w_{,22} - 2T w_{,12} - Q_{013,1} - Q_{023,2} + \Psi_{3,1} + \Psi_{4,2}; \\
a = & -\frac{(B_1 + B_2)(R_2 + R_1/2)}{R_1 R_2}; \\
b = & -\frac{(B_1 + B_2)(R_1 + R_2/2)}{R_1 R_2}; \\
c = & \frac{(h_1 B_1 - h_2 B_2)(R_2 + R_1/2)}{R_1 R_2}; \\
d = & \frac{(h_1 B_1 - h_2 B_2)(R_1 + R_2/2)}{R_1 R_2}; \\
e = & \frac{[(h_1 + \delta_1/2)B_1 - (h_2 + \delta_2/2)B_2](R_2 + R_1/2)}{R_1 R_2}; \\
f = & \frac{[(h_1 + \delta_1/2)B_1 - (h_2 + \delta_2/2)B_2](R_1 + R_2/2)}{R_1 R_2};
\end{aligned}$$

Граничные условия на шарнирно-опертом крае $x_1 = 0$ трехслойной оболочки с легким заполнителем получим, воспользовавшись выражениями (2.3.13), (2.3.2), (2.4.2), (2.4.3):

$$B_1(u_{11,1} + \frac{1}{2}u_{21,2}) + B_2(u_{12,1} + \frac{1}{2}u_{22,2}) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(B_1 + B_2)(R_2 + R_1/2)}{R_1 R_2} w = N_{01} + N_{g1} - \\
& -\frac{(B_1 + B_2)}{2} \left(w_{,1}^2 + \frac{w_{,2}^2}{2} \right); \\
& (B_1/4)(u_{11,2} + u_{21,1}) + (B_2/4)(u_{12,2} + u_{22,1}) = \\
& = T_g + T_0 - \frac{(B_1 + B_2)}{4} w_{,1} w_{,2} \\
& h_1 B_1 (u_{11,2} + u_{21,1}) - h_2 B_2 (u_{12,2} + u_{22,1}) = h_1 T_{g1} - \\
& - h_2 T_{g2} + h_1 T_{01} + h_1 T_{01} - H_2 T_{02} - (h_1 B_1 - H_2 B_2) w_{,1} w_{,2}; \\
& h_1 B_1 (u_{11,1} + \frac{1}{2} u_{21,2}) - h_2 B_2 (u_{12,1} + \frac{1}{2} u_{22,2}) - \\
& - \frac{(h_1 B_1 - h_2 B_2)(R_2 + R_1/2)}{R_1 R_2} w = h_1 N_{011} - \\
& - h_2 N_{012} + h_1 N_{g11} - h_2 N_{g12} - \\
& - \frac{(h_1 B_1 - h_2 B_2)}{2} \left(w_{,1}^2 + \frac{w_{,2}^2}{2} \right); \tag{2.4.7} \\
& (h_1 + \delta_1/2) B_1 (u_{11,1} + \frac{1}{2} u_{21,2}) - (h_2 + \delta_2/2) \times \\
& \times B_2 (u_{12,1} + \frac{1}{2} u_{22,2}) - \\
& - \frac{[(h_1 + \delta_1/2) B_1 - (h_2 + \delta_2/2) B_2](R_2 + R_1/2)}{R_1 R_2} w = \\
& = (h_1 + \delta_1/2) N_{g11} - (h_2 + \delta_2/2) N_{g12} + (h_1 + \delta_1/2) N_{011} - \\
& - (h_2 + \delta_2/2) N_{012} - \frac{1}{2} [(h_1 + \delta_1/2) B_1 - \\
& - (h_2 + \delta_2/2) B_2] \left(w_{,1}^2 + \frac{1}{2} w_{,2}^2 \right); \\
& w = 0
\end{aligned}$$

В уравнениях (2.4.6) и граничных условиях (2.4.7) в левых частях выписаны линейные дифференциальные операторы, соответствующие

задаче об изгибе линейной упругой трехслойной оболочки с легким заполнителем; правые части обусловлены физически и геометрически нелинейным характером деформирования рассматриваемой оболочки.

Уравнения изгиба и выпучивания трехслойной пластинки с легким заполнителем получим из (2.4.6) и (2.4.7), полагая $R_1 = R_2 = \infty$.

Уравнения осесимметричного изгиба и выпучивания трехслойной цилиндрической оболочки с легким заполнителем получим из (2.4.6), (2.4.7), полагая $R_1 = \infty$ и учитывая, что $u_{21} = u_{22} = 0$; при этом второе и четвертое из уравнений равновесия (2.4.6), так же как второе и четвертое из граничных условий (2.4.7) выпадают.

Уравнения осесимметричного изгиба и выпучивания подкрепленной цилиндрической оболочки получим из уравнений (2.3.12) и равенств (2.3.2), принимая $R_1 = \infty$, $u_{21} = u_{22} = 0$. Будем иметь в этом случае:

$$\begin{aligned} a_{11}u_{11,1} + a_{12}u_{12,1} + a_{13}w_{,11} + a_{14}w &= -a_{15}w_{,1}^2N_{01} - N_1; \\ a_{21}u_{11,11} + a_{22}u_{12,11} + a_{23}w_{,111} + a_{24}w_{,1} - G_{13}(u_{12} - u_{11}) &= \\ &= -a_{25}w_{,1}^2 + (h_2N_{012} - h_1N_{011} + M_{013})_{,1} - Q_{013}; \\ a_{31}w_{,1111} + a_{32}w_{,11} + a_{33}u_{11,111} + a_{34}u_{12,111} + \\ &+ a_{35}u_{11,1} + a_{36}u_{12,1} + a_{37}w = -P - \\ &- a_{38}(w_{,1})_{,1}^2 + M_{01,11} + \frac{N_{02}}{R_2} - a_{39}(w_{,1})^2; \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= B_1 + \frac{B_{13}h_2a_1}{\delta_3} - \frac{B_{13}\alpha_1a_1}{\delta_3^2}; \\ a_{12} &= B_2 + \frac{B_{13}h_1a_1}{\delta_3} + \frac{B_{13}\alpha_1a_1}{\delta_3^2}; \\ a_{13} &= \frac{B_{13}a_1}{\delta_3} \left(h + \frac{\alpha_1h_0}{\delta_3} \right); \\ a_{14} &= -\frac{1}{2R_2}(B_1 + B_2 + 2B_{13}b_2); \quad a_{15} = \frac{1}{2}(B_1 + B_2 + B_{13}a_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -h_1 B_1 + \frac{D_{13}\alpha_1 h_2 a_1}{\alpha_2 \delta_3} - \frac{D_{13} a_1}{\delta_3}; \\
a_{22} &= -h_2 B_2 + \frac{D_{13}\alpha_1 h_1 a_1}{\alpha_2 \delta_3} - \frac{D_{13} a_1}{\delta_3}; \\
a_{23} &= \frac{D_{13}\alpha_1 h a_1}{\alpha_2 \delta_3} - \frac{D_{13} h_0 a_1}{\delta_3}; \\
a_{24} &= -\frac{h_2 B_2}{2R_2} + \frac{h_1 B_1}{2R_2} - \frac{D_{13}\alpha_1}{R_2 \alpha_2} - \\
&\quad - G_{13} \delta_3 (1 + h_0/\delta_3); \\
a_{25} &= \frac{h_2 B_2}{2} - \frac{h_1 B_1}{2} + \frac{D_{13}\alpha_1 a_1}{2\alpha_2 \delta_3}; \\
a_{31} &= -D_1 - D_2 + \frac{D_{13}\alpha_1 h}{\alpha_2 \delta_3} + \frac{D_{13} a_1 h_0}{\delta_3}; \\
a_{32} &= \frac{1}{2R_2} [h_1(h_1 + \delta_1/2)B_1 - (h_2 + \delta_2/2)B_2] - \frac{D_{13}\alpha_1 b_2}{\alpha_2 R_2} + \\
&\quad - \frac{B_{23}\alpha_1 b_1 h_0}{\delta_3^2 R_2} + \frac{B_{23} b_1 h}{\delta_3 R_2} - N_1; \\
a_{33} &= -(h_1 + \delta_1/2)B_1 + \frac{D_{13}\alpha_1 a_1 h_2}{\delta_3 \alpha_2} - \frac{D_{13} a_1}{\delta_3}; \\
a_{34} &= -(h_2 + \delta_2/2)B_2 + \frac{D_{13}\alpha_1 a_1 h_1}{\delta_3 \alpha_2} - \frac{D_{13} a_1}{\delta_3}; \\
a_{35} &= \frac{B_1}{2R_2} + \frac{B_{23} b_1 h_2}{R_2 \delta_3} - \frac{B_{23} b_1 \alpha_1}{R_2 \delta_3^2}; \\
a_{36} &= \frac{B_2}{2R_2} + \frac{B_{23} b_1 h_1}{R_2 \delta_3} + \frac{B_{23} b_1 \alpha_1}{2R_2 \delta_3^2}; \\
a_{37} &= -\frac{1}{R_2^2} (B_1 + B_2 + B_{23} a_2); \\
a_{38} &= -\frac{1}{2} [(h_1 + \delta_1/2) + B_2(h_2 + \delta_2/2)] - \frac{D_{13}\alpha_1 a_1}{2\alpha_2 R_2};
\end{aligned}$$

$$a_{39} = \frac{1}{4R_2}(B_1 + B_2 + 2B_{23}b_1);$$

$$\alpha_1 = (h_2^2 - h_1^2)/2; \quad \alpha_2 = (h_1^3 + h_2^3)/3.$$

Граничные условия для шарнирно-опертого края $x_1 = a$ получим, воспользовавшись выражениями, (2.3.13), (2.3.2), принимая в них $R_1 = \infty$, $u_{22} = u_{21} = 0$:

$$\begin{aligned} a_{11}u_{11,1} + a_{12}u_{12,1} + a_{13}w_{,11} + a_{14}w = \\ = -a_{15}(w_{,1})^2 + N_{01} + N_{g1}; \\ b_{11}u_{11,1} + b_{12}u_{12,1} + b_{13}w_{,11} + b_{14}w = h_1N_{011} - \\ - h_2N_{012} - M_{013} + h_1N_{g11} - h_2N_{g12} - \\ - M_{g13} - b_{15}(w_{,1})^2; \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

$$\begin{aligned} b_{21}u_{11,1} + b_{22}u_{12,1} + b_{23}w_{,11} + b_{24}w = (h_1 + \delta_1/2)N_{011} - \\ - (h_2 + \delta_2/2)N_{012} - (h/\delta_3)N_{013} + M_{01} - (1 + h_0/\delta_3)M_{013} + \\ + (h_1 + \delta_1/2)N_{g11} - (h_2 + \delta_2/2)N_{g12} + M_{g1} - (1 + h_0/\delta_3)M_{g13} - \\ - b_5(w_{,1})^2; \quad w = 0; \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_{11} = B_1h_1 - \frac{D_{13}\alpha_1h_2a_1}{\alpha_2\delta_3} - \frac{D_{13}a_1}{\delta_3}; \quad b_{12} = B_2h_2 - \frac{D_{13}\alpha_1h_1a_1}{\alpha_2\delta_3} - \frac{D_{13}a_1}{\delta_3}; \\ b_{13} = -\frac{D_{13}\alpha_1ha_1}{\alpha_2\delta_3} + \frac{D_{13}a_1h_0}{\delta_3}; \quad b_{14} = -\frac{B_1h_1}{2R_2} + \frac{B_2h_2}{2R_2} + \frac{D_{13}\alpha_1b_2}{\alpha_2R_2}; \\ b_{15} = \frac{1}{2}(B_1h_1 - B_2h_2) - \frac{D_{13}3\alpha_1}{2\alpha_2}; \quad b_{21} = -\frac{B_{13}hh_2a_1}{\delta_3^2} + \frac{B_{13}h\alpha_1a_1}{\delta_3^2} - \\ - \frac{D_{13}h_0\alpha_1a_1h_2}{\alpha_2\delta_3^2} - \frac{D_{13}h_0a_1}{\delta_3^2}; \\ b_{22} = -\frac{B_{13}hh_1a_1}{\delta_3^2} + \frac{B_{13}h\alpha_1a_1}{\delta_3^2} - \frac{D_{13}h_0\alpha_1a_1h_1}{\alpha_2\delta_3^2} - \frac{D_{13}h_0a_1}{\delta_3^2}; \end{aligned}$$

$$b_{23} = -D_1 - D_2 \frac{D_{13}\alpha_1 h_0 h a_1}{\alpha_2 \delta_3^2} - \frac{D_{13} h_0^2}{\delta_3^2} - \frac{B_{13} h^2 a_1}{\delta_3^2} - \frac{B_{13} \alpha_1 h h_0 a_1}{\delta_3^3};$$

$$b_{24} = \frac{B_{13} h b_2}{R_2 \delta_3} + \frac{D_{13} h_0 \alpha_1 b_2}{\alpha_2 \delta_3 R_2}; \quad b_{25} = -\frac{B_{13} h a_1}{2 \delta_3} - \frac{D_{13} \alpha_1 h_0 a_1}{2 \alpha_2 \delta_3}.$$

В уравнениях (2.4.8) и граничных условиях (2.4.9) индексы после запятой означают обыкновенные производные по координате x_1 вдоль образующей оболочки.

2.5. Постановка задачи несущей способности жесткопластических пластин и оболочек [99]

Практическое значение модели идеального жесткопластического тела состоит в том, что она позволяет определить величину предельной нагрузки, больше которой нормально эксплуатируемая конструкция не может выдержать. Такую нагрузку по обыкновению называют нагрузкой несущей способности или просто несущей способностью. Теорию, основанную на модели идеального жесткопластического тела называют теорией предельного равновесия элементов конструкций. Известные факты превышения расчетной предельной нагрузки над экспериментальными не умаляют важности многочисленных исследований в теории предельного равновесия балок, стержней, пластин и оболочек [40-66]. Практическая потребность строителей инженерных сооружений определить нагружение, после превышения которого конструкция заведомо неработоспособна, продолжает вызывать интерес исследователей к модели жесткопластического тела [57-61].

Важнейшей особенностью теории предельного равновесия является то, что нагрузка несущей способности определяется из недеформированного состояния элемента конструкции. Это обстоятельство позволяет применять теорию предельного равновесия к конструкциям, эксплуатируемым в условиях продольно-поперечного изгиба. На базе множества практически важных решений задач определения несущей способности необходима математическая формулировка общей задачи несущей способности пластин и оболочек, в частности, на основе условия текучести Мизеса.

В предыдущих главах определены условия текучести и законы течения однородных изотропных и анизотропных тонких оболочек и пластин в обобщенных усилиях и моментах. Рассмотрим постановку задачи несущей способности элементов конструкций в обобщенных кинематических и физических переменных.

Выражения для геометрически линейных физических составляющих обобщенных скоростей деформаций ε_{0ij} и κ_{ij} в базисе на отсчетной поверхности оболочки, согласно равенствам (2.1.9)-(2.1.10), имеют вид [99,185]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{011} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_{10}}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} v_{20} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + k_1 v_{30}; \\ \varepsilon_{022} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_{20}}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1 A_2} v_{10} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + k_2 v_{30}; \\ \varepsilon_{012} &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{v_{10}}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v_{20}}{A_2} \right) \right]; \\ \varepsilon_{013} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v_{30}}{\partial x_1} + a_1 - k_1 v_{10} \right); \\ \varepsilon_{023} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v_{30}}{\partial x_2} + a_2 - k_2 v_{20} \right); \quad \dot{\varepsilon}_{033} = a_3; \quad (2.5.1) \\ k_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[v_{20} \frac{\partial (A_1 k_1)}{\partial x_2} + a_2 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right] + k_1 a_3 + \\ &\quad + \frac{k_2}{A_1} \frac{\partial v_{10}}{\partial x_1} + k_1 k_2 v_{30}; \\ k_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[v_{10} \frac{\partial (A_2 k_2)}{\partial x_1} + a_1 \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right] + k_2 a_3 + \\ &\quad + \frac{k_1}{A_2} \frac{\partial v_{20}}{\partial x_2} + k_1 k_2 v_{30}; \\ k_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{a_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{a_2}{A_2} \right) + k_1 \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{v_{10}}{A_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v_{20}}{A_2} \right) - \frac{v_{10}}{A_2} \frac{\partial k_1}{\partial x_2} - \frac{v_{20}}{A_1} \frac{\partial k_2}{\partial x_1} \right];\end{aligned}$$

$$k_{13} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial a_3}{\partial x_1} + \frac{k_2}{A_1} \frac{\partial v_{30}}{\partial x_1} + k_2(a_1 - k_1 v_{10}) \right];$$

$$k_{23} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial a_3}{\partial x_2} + \frac{k_1}{A_2} \frac{\partial v_{30}}{\partial x_2} + k_1(a_2 - k_2 v_{20}) \right];$$

$$k_{33} = (k_1 + k_2)a_3 + b_3.$$

Здесь k_ν — главные кривизны, A_ν — параметры Ламе отсчетной срединной поверхности; v_{i0} — физические составляющие скорости перемещения точки срединной поверхности a_i и b_3 — параметры, характеризующие изменение скорости перемещения по толщине оболочки; $\nu = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$.

Геометрически линейные уравнения предельного равновесия оболочки (2.1.22)–(2.1.24) после перехода к физическим составляющим обобщенных усилий N_{ij} и моментов M_{ij} имеют вид [99,185]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2 \tilde{N}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1 \tilde{N}_{21}}{\partial x_2} + \tilde{N}_{12} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \tilde{N}_{22} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + A k_1 \tilde{N}_{13} + A B p_1 &= 0; \\ \frac{\partial A_2 \tilde{N}_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1 \tilde{N}_{22}}{\partial x_2} + \tilde{N}_{21} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \tilde{N}_{11} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + A k_2 \tilde{N}_{23} + A B p_2 &= 0; \\ \frac{\partial (A_2 \tilde{N}_{13})}{\partial x_1} + \frac{\partial (A_1 \tilde{N}_{23})}{\partial x_2} - A k_1 \tilde{N}_{11} - A k_2 \tilde{N}_{22} + A B p_3 &= 0; \quad (2.5.2) \\ \frac{\partial (A_2 M_{11})}{\partial x_1} + \frac{\partial (A_1 M_{12})}{\partial x_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - A \tilde{N}_{13} - A B p_1 h &= 0; \\ \frac{\partial (A_2 M_{12})}{\partial x_1} + \frac{\partial (A_1 M_{22})}{\partial x_2} + M_{12} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - M_{11} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - A \tilde{N}_{23} - A B p_2 h &= 0; \\ \frac{\partial (A_2 M_{13})}{\partial x_1} + \frac{\partial (A_1 M_{23})}{\partial x_2} - A(k_1 M_{11} + k_2 M_{22}) - A[N_{33} + (k_1 + & \\ + k_2) M_{33}] - A B p_3 h &= 0; \end{aligned}$$

$$M_{33} = \frac{1}{2} p_3 h^2; \quad A = A_1 A_2; \quad B = 1 - (k_1 + k_2) h.$$

Здесь $\tilde{N}_{\alpha\gamma} = N_{\alpha\gamma} + k_\beta M_{\alpha\gamma}$, $\tilde{N}_{\alpha 3} N_{\alpha 3} + k_\beta M_{\alpha 3}$, — физические компоненты главных векторов внутренних сил; $M_{\alpha\gamma}$, $M_{\alpha 3}$ — физические

компоненты главных моментов внутренних сил без учета влияния на них кривизн оболочки; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$; $\alpha \neq \beta$; $k_\alpha = -1/R_\alpha$.

Граничные условия (2.1.25) в физических составляющих обобщенных усилий и моментов, N_{ij} , M_{ij} , [99,185]:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{11}n_1 + \tilde{N}_{12}n_2 &= \tilde{N}_{11e}n_1 + \tilde{N}_{12e}n_2; \\ \tilde{N}_{21}n_1 + \tilde{N}_{22}n_2 &= \tilde{N}_{21e}n_1 + \tilde{N}_{22e}n_2; \\ \tilde{N}_{13}n_1 + \tilde{N}_{23}n_2 &= \tilde{N}_{13e}n_1 + \tilde{N}_{23e}n_2; \\ M_{11}n_1 + M_{12}n_2 &= M_{11e}n_1 + M_{12e}n_2; \\ M_{21}n_1 + M_{22}n_2 &= M_{21e}n_1 + M_{22e}n_2; \\ M_{31}n_1 + M_{32}n_2 &= M_{31e}n_1 + M_{32e}n_2;\end{aligned}\tag{2.5.3}$$

где $\tilde{N}_{\alpha\gamma e}$, $\tilde{N}_{\alpha 3}$ – компоненты главных векторов внешних сил на координатных площадках; $M_{\alpha\gamma}$, $M_{\alpha 3}$ – компоненты главных моментов внешних сил без учета влияния на них кривизн оболочки; n_α – физические составляющие внутренней нормали граничной кривой на отсчетной поверхности. Ассоциированный с условием текучести (1.5.20) или (1.6.21) закон течения в безразмерных обобщенных усилиях и моментах, n_{ij} , m_{ij} имеет вид:

$$\varepsilon_{0ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial n_{ij}}; \quad \kappa_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial m_{ij}};\tag{2.5.4}$$

где безразмерные обобщенные усилия и моменты выражены через обобщенные усилия и моменты, N_{ij} , M_{ij} , равенствами (1.5.9) или (1.6.9), λ – произвольный положительный множитель, F – функция текучести, определенная равенствами (1.4.14), (1.5.20) или (1.6.19), причем

$$F(n_{ij}, m_{ij}) = 0.\tag{2.5.5}$$

Система уравнений для решения задачи о предельном равновесии оболочки содержит условие текучести (2.5.5), двенадцать уравнений закона течения (2.5.4), семь уравнений равновесия (2.5.2), – всего двадцать

уравнений. Из этих уравнений требуется найти двенадцать обобщенных усилий и моментов, (N_{ij}, M_{ij}) , семь скоростей перемещений и параметров скоростей перемещений, (v_{i0}, a_i, b_3) , а также множитель λ , – всего двадцать неизвестных. Предельную нагрузку определим с помощью одного из геометрических или статических граничных условий (2.5.3).

В результате получена полная система уравнений для исследования несущей способности изотропных и анизотропных пластин и оболочек.

Выражения для скоростей деформаций (2.5.1), уравнения равновесия (2.5.2) и граничные условия (2.5.3) пластин в декартовой ортогональной системе координат, когда $A_1 = A_2 = k_1 = k_2 = 0$, принимают вид :

а)Обобщенные скорости деформаций.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{011} &= \frac{\partial v_{10}}{\partial x_1}; & \varepsilon_{022} &= \frac{\partial v_{20}}{\partial x_2}; & \varepsilon_{012} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{20}}{\partial x_1} \right); \\ \varepsilon_{013} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{30}}{\partial x_1} + a_1 \right); & \varepsilon_{023} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{30}}{\partial x_2} + a_2 \right); & \varepsilon_{033} &= a_3; \\ k_{11} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1}; & k_{22} &= \frac{\partial a_2}{\partial x_2}; & k_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right); \\ k_{13} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial x_1}; & k_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial x_2}; & k_{33} &= b_3.\end{aligned}\quad (2.5.6)$$

б)Уравнения равновесия.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{21}}{\partial x_2} + p_1 &= 0; \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + p_2 &= 0; \\ \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + p_3 &= 0; \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - N_{13} - p_1 h &= 0;\end{aligned}\quad (2.5.7)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - N_{23} - p_2 h = 0;$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{23}}{\partial x_2} - N_{33} - p_3 h = 0;$$

$$M_{33} = \frac{1}{2} p_3 h^2.$$

в) Граничные условия.

$$N_{11}n_1 + N_{12}n_2 = N_{11e}n_1 + N_{12e}n_2;$$

$$N_{21}n_1 + N_{22}n_2 = N_{21e}n_1 + N_{22e}n_2;$$

$$N_{13}n_1 + N_{23}n_2 = N_{13e}n_1 + N_{23e}n_2;$$

$$M_{11}n_1 + M_{12}n_2 = M_{11e}n_1 + M_{12e}n_2; \quad (2.5.8)$$

$$M_{21}n_1 + M_{22}n_2 = M_{21e}n_1 + M_{22e}n_2;$$

$$M_{31}n_1 + M_{32}n_2 = M_{31e}n_1 + M_{32e}n_2;$$

Решение задачи о несущей способности пластинки, так же как и в общем случае оболочек, состоит в решении двадцати уравнений с двадцатью неизвестными.

Осесимметрично нагруженная цилиндрическая оболочка ($k_1 = N_{12} = M_{12} = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = R_2$):

а) Обобщенные скорости деформаций.

$$\varepsilon_{011} = \frac{dv_{10}}{dx_1}; \quad \varepsilon_{022} = k_2 v_{30}; \quad \varepsilon_{012} = 0; \quad \varepsilon_{013} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_{30}}{dx_1} + a_1 \right);$$

$$\varepsilon_{023} = \frac{1}{2} (a_2 - k_2 v_{20}); \quad \varepsilon_{033} = a_3; \quad (2.5.9)$$

$$k_{11} = \frac{da_1}{dx_1} + k_2 \frac{dv_{10}}{dx_1}; \quad k_{22} = k_2 a_3, \quad k_{12} = 0;$$

$$k_{13} = \frac{1}{2} \left[\frac{da_3}{dx_1} + k_2 \frac{dv_{30}}{dx_1} + k_2 a_1 \right]; \quad k_{23} = 0; \quad k_{33} = k_2 a_3 + b_3.$$

б) Уравнения равновесия ($p_2 = N_{12} = M_{12} = N_{23} = 0$).

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{N}_{11}}{dx_1} + p_1 &= 0; \\
 \frac{d\tilde{N}_{13}}{dx_1} - k_2\tilde{N}_{22} + p_3 &= 0; \\
 \frac{dM_{11}}{dx_1} - N_{13} - p_1h &= 0; \\
 \frac{dM_{13}}{dx_1} - k_2M_{22} - N_{33} - k_2M_{33} - p_3h &= 0; \\
 M_{33} &= \frac{1}{2}p_3h^2.
 \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

в) Граничные условия.

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_{11}n_1 &= \tilde{N}_{11e}n_1; & \tilde{N}_{13}n_1 &= \tilde{N}_{13e}n_1; \\
 M_{11}n_1 &= M_{11e}n_1; & M_{31}n_1 &= M_{31e}n_1;
 \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Если воспользоваться гипотезой Кирхгофа, ($a_1 = -\partial v_{30}/\partial x_1$, $a_2 = -\partial v_{30}/\partial x_2$, $a_3 = b_3 = 0$), то уравнения (2.5.6)-(2.5.11) переходят в соответствующие уравнения теории Кирхгофа-Лява пластин и оболочек [1,168].

Для балки с двумя плоскостями симметрии ее поперечного сечения из уравнений (2.5.6)-(2.5.8) получим:

а) Выражения обобщенных скоростей деформаций.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{011} &= \frac{dv_{10}}{dx_1}; & \varepsilon_{022} &= 0; & \varepsilon_{012} &= 0; \\
 \varepsilon_{013} &= \frac{1}{2} \left(\frac{dv_{30}}{dx_1} + a_1 \right); & \varepsilon_{023} &= 0; & \varepsilon_{033} &= 0; \\
 k_{11} &= \frac{da_1}{dx_1}; & k_{22} &= 0; & k_{12} &= 0; \\
 k_{13} &= 0; & k_{23} &= 0; & k_{33} &= b_3.
 \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

б) Уравнения равновесия ($p_2 = N_{12} = M_{12} = N_{23} = 0$).

$$\begin{aligned}\frac{dN_{11}}{dx_1} + p_1 &= 0; \\ \frac{dN_{13}}{dx_1} + p_3 &= 0; \\ \frac{dM_{11}}{dx_1} - N_{13} - p_1 h &= 0; \\ \frac{dM_{13}}{dx_1} - p_3 h &= 0; \\ M_{33} &= \frac{1}{2} p_3 h^2.\end{aligned}\tag{2.5.13}$$

в) Граничные условия.

$$\begin{aligned}N_{11}n_1 &= N_{11e}n_1; & N_{13}n_1 &= N_{13e}n_1; \\ M_{11}n_1 &= M_{11e}n_1; & M_{31}n_1 &= M_{31e}n_1;\end{aligned}\tag{2.5.14}$$

По гипотезе Кирхгофа уравнения (2.5.12)-(2.5.14) примут вид [1]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{011} &= \frac{dv_{10}}{dx_1}; & k_{11} &= -\frac{d^2 v_{30}}{dx_1^2}; \\ \frac{dN_{11}}{dx_1} + p_1 &= 0; & \frac{dN_{13}}{dx_1} + p_3 &= 0; \\ \frac{dM_{11}}{dx_1} - N_{13} &= 0;\end{aligned}\tag{2.5.15}$$

$$N_{11}n_1 = N_{11e}n_1; \quad N_{13}n_1 = N_{13e}n_1; \quad M_{11}n_1 = M_{11e}n_1.$$

Использование гипотезы Кирхгофа приводит к тому, что некоторые из уравнений, полученных на основе линейной гипотезы (1.1.5), выпадают.

Геометрически нелинейные уравнения (2.2.2)-(2.2.7) в физических составляющих обобщенных переменных для оболочек, в общем случае, здесь из-за их громоздкости не приводим. Рассмотрим частный

случай таких уравнений – для пластин в декартовой ортогональной системе координат.

а) Обобщенные скорости деформаций.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{011} &= \frac{\partial v_{10}}{\partial x_1} + \tilde{\varepsilon}_{011}; & \varepsilon_{022} &= \frac{\partial v_{20}}{\partial x_2} + \tilde{\varepsilon}_{022}; & \varepsilon_{012} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{20}}{\partial x_1} \right) + \tilde{\varepsilon}_{012}; \\ \varepsilon_{013} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{30}}{\partial x_1} + a_1 \right) + \tilde{\varepsilon}_{013}; & \varepsilon_{023} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{30}}{\partial x_2} + a_2 \right) + \tilde{\varepsilon}_{023}; \\ \varepsilon_{033} &= a_3 + \tilde{\varepsilon}_{033};\end{aligned}\quad (2.5.16)$$

$$\begin{aligned}k_{11} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \tilde{k}_{11}; & k_{22} &= \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \tilde{k}_{22}; & k_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right) + \tilde{k}_{12}; \\ k_{13} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial x_1} + \tilde{k}_{13}; & k_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial x_2} + \tilde{k}_{23}; & k_{33} &= b_3 + \tilde{k}_{33}.\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{0ij} &= \frac{1}{2} [v_{0n,i} + \delta_i^3 (a_n - k_{(n)} v_{0n})] [v_{0n,j} + \delta_j^3 (a_n + k_{(n)} v_{0n})]; \\ \tilde{k}_{ij} &= \{ [v_{0n,i} + \delta_i^3 (a_n - k_{(n)} v_{0n})] [a_{n,j} + (k_{(n)} v_{0n})_{,j} + \\ &+ b_3 \delta_n^3 \delta_j^3 + 2 \delta_j^3 k_{(n)} a_n] + [v_{0n,j} + \delta_j^3 (a_n + k_{(n)} v_{0n})] [a_{n,i} - \\ &- (k_{(n)} v_{0n})_{,i} + b_3 \delta_n^3 \delta_i^3 - 2 \delta_i^3 k_{(n)} a_n] + 2 c_{ij} \tilde{\varepsilon}_{0ij} \};\end{aligned}\quad (2.5.17)$$

причем индексом после запятой обозначено частное дифференцирование по соответствующей координате, а частные производные по x_3 всюду равны нулю.

б) Геометрически нелинейные уравнения предельного равновесия пластинки.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{21}}{\partial x_2} + \tilde{N}_1 + p_1 &= 0; \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \tilde{N}_2 + p_2 &= 0; \\ \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + \tilde{N}_3 + p_3 &= 0; \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - N_{13} + \tilde{M}_1 - p_1 h &= 0;\end{aligned}\quad (2.5.18)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - N_{23} + \bar{M}_2 - p_2 h &= 0; \\ \frac{\partial M_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{23}}{\partial x_2} - N_{33} + \bar{M}_3 - p_3 h &= 0; \\ M_{33} + \bar{M}_{33} &= \frac{1}{2} p_3 h^2.\end{aligned}$$

Здесь векторы \bar{N}_i и \bar{M}_i , \bar{M}_{33} отражают геометрическую нелинейность в выражениях (2.2.1),

$$\begin{aligned}\bar{N}_i &= (N_{nj}v_{i0,n})_{,j} + (N_{3j}a_i)_{,j} - k_{(i)}(M_{3j}k_{(i)}v_{i0})_{,j} + (M_{nj}a_{i,n})_{,j} + \\ &+ (M_{3j}b_3\delta^{i3})_{,j} + (M_{nj}c^{(nj)}v_{i0,j})_{,n}g^{il} + (M_{n3}c^{(nj)}a_l)_{,n}g^{il} - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{g_0}}\partial(M_{\alpha j}\tilde{\Gamma}_{lj}^m v_{m0}g^{il}\sqrt{g_0})/\partial x^\alpha + \\ &+ 2M_{33}k_{(i)}^2 a_i + M_{33}v_{i0} - \frac{1}{2}M_{3j}k_{(i)}v_{i0};\end{aligned}\quad (2.5.19)$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_i &= -N_{n3}v_{i0,n} - N_{33}a_i + (M_{nj}v_{i0,n})_{,j} + (M_{3j}a_i)_{,j} + 2M_{33}k_{(i)}^2 v^{i0} - \\ &- M_{n3}a_{i,n} - M_{33}b_3\delta^{i3} - M_{3j}c^{(3j)}v_{i0,j}g^{il} - M_{33}c^{(33)}a_{,l}g^{il}; \\ \bar{M}_{33} &= -M_{i3}v_{30,i} - M_{33}a_3.\end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}(N_{i\alpha} + k_\beta N_{i\alpha})\mu_\alpha + \bar{N}_i &= (N_{i\alpha\epsilon} + k_\beta M_{i\alpha\epsilon})\mu_\alpha; \\ M_{i\alpha}\mu_\alpha + \bar{M}_i &= M_{i\alpha\epsilon}\mu_\alpha;\end{aligned}\quad (2.5.20)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{N}_i &= \mu_\alpha \{ M_{3\alpha}k_{(i)}^2 v_{i0} - M_{n\alpha}a_{i,n} - M_{3\alpha}b_3\delta^{i3} - M_{\alpha j}v_{l,j}g_{il} - \\ &- M_{\alpha 3}c^{(\alpha 3)}a_{lgil} \}; \\ \bar{M}_i &= -\mu_\alpha (M_{n\alpha}v_{i,n} + M_{3\alpha}a_i).\end{aligned}\quad (2.5.21)$$

Из структуры геометрически нелинейных уравнений (2.2.2)-(2.2.7) или (2.5.16)-(2.5.21) следует, что уже в самом начале нагружения появляются дополнительные проекции "повернутых" [1] не только внутренних сил, но и моментов. Поэтому, даже при отсутствии заданных внешних сил на лицевых поверхностях упругой оболочки возникнут отклоненные формы равновесия. Исследованию этого явления посвящены работы [187,119,188].

Анализ геометрически нелинейных уравнений (2.2.2)-(2.2.7), (2.5.16)-(2.5.21) показывает, что формально постановка задачи несущей способности оболочек и пластин с учетом геометрической нелинейности не отличается от постановки такой задачи по геометрически линейной теории с уравнениями (2.1.9)-(2.1.10), (2.1.22)-(2.1.25). В том и другом случае, при одинаковых условиях текучести (2.5.5) и законе течения (2.5.4), необходимо решить двадцать уравнений с одинаковыми двадцатью неизвестными. Однако, имеет место принципиальная разница в этих постановках задачи о несущей способности. Она заключается в том, что в геометрически нелинейных уравнениях оболочки (2.1.22)-(2.1.25) или пластинки (2.5.16)-(2.5.21) содержатся слагаемые с компонентами скоростей перемещений. Последние, согласно теории идеальной пластичности, определены с точностью до произвольного положительного множителя. В то же время усилия и моменты, входящие в уравнения равновесия и граничные условия, не могут быть произвольными, так как они должны удовлетворять, при заданных размерах оболочки или пластинки, определенному условию текучести (2.5.5). Следовательно, задача несущей способности жесткопластических оболочек и пластин на основе геометрически нелинейных уравнений равновесия и граничных условий принципиально не может быть поставлена. Этот вывод справедлив и в нелинейной теории оболочек, основанной на гипотезе Кирхгофа. Вопрос о применимости геометрически нелинейных уравнений теории жесткопластических оболочек и пластин будет рассмотрен в пятой главе.

Приведем геометрически нелинейные уравнения балки, как част-

ный случай уравнений (2.5.16)-(2.5.21):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{011} &= \frac{dv_{10}}{dx_1} + \tilde{\varepsilon}_{011}; & \varepsilon_{013} &= \frac{1}{2} \left(\frac{dv_{30}}{dx_1} + a_1 \right) + \tilde{\varepsilon}_{013}; & \varepsilon_{33} &= a_3 + \tilde{\varepsilon}_{033}; \\
 k_{11} &= \frac{da_1}{dx_1} + \tilde{k}_{11}; & k_{13} &= \frac{1}{2} \frac{da_3}{dx_1} + \tilde{k}_{13}; & k_{33} &= b_3 + \tilde{k}_{33}. \\
 \tilde{\varepsilon}_{0ij} &= \frac{1}{2} [v_{0n,i} + \delta_i^3 a_n] [v_{0n,j} + \delta_j^3 a_n]; & \tilde{k}_{ij} &= \{ [v_{0n,i} + \delta_i^3 a_n] [a_{n,j} + \\
 & + b_3 \delta_n^3 \delta_j^3] + [v_{0n,j} + \delta_j^3 a_n] [a_{n,i} + b_3 \delta_n^3 \delta_i^3] + 2c_{ij} \tilde{\varepsilon}_{0ij} \}; \\
 \frac{dN_{11}}{dx_1} + \tilde{N}_1 + p_1 &= 0; & \frac{dN_{13}}{dx_1} + \tilde{N}_3 + p_3 &= 0; & (2.5.23) \\
 \frac{dM_{11}}{dx_1} - N_{13} + \tilde{M}_1 - p_1 h &= 0; & \frac{dM_{13}}{dx_1} - N_{33} + \tilde{M}_3 - p_3 h &= 0; \\
 M_{33} + \tilde{M}_{33} &= \frac{1}{2} p_3 h^2. \\
 \tilde{N}_i &= (N_{11} v_{i0,1} + N_{13} a_i - M_{11} a_{i,1})_{,1} + (M_{13} b_3) \delta_{i3} + M_{33} v_{i0}; \\
 \tilde{M}_i &= -N_{13} v_{i0,1} - N_{33} a_i + (M_{11} v_{i0,1} + M_{13} a_i)_{,1} - M_{13} a_{i,1} - M_{33} b_3 \delta_{i3}; \\
 \tilde{M}_{33} &= -M_{13} v_{10,1} - M_{33} a_3; \\
 (N_{1i} + \tilde{N}_i &= N_{1ie}; & M_{1i} &= M_{1ie}; \\
 \tilde{N}_i &= -M_{11} a_{i,1} - M_{13} b_3 \delta_{i3}; \\
 \tilde{M}_i &= M_{11} v_{i0,1} - M_{13} a_i,
 \end{aligned}$$

причем индексом после запятой обозначены обыкновенные производные по координате вдоль балки, ($i, j, n = 1, 3$), и производные по x_3 всюду равны нулю.

Для сравнения с уравнениями (2.5.23) запишем геометрически нелинейные уравнения балки, основанные на гипотезе Кирхгофа [1]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{011} &= \frac{dv_{i0}}{dx_1} + \frac{1}{2} v_{30,1}^2; & k_{11} &= -v_{30,11}; \\
 N_{11,1} + p_1 &= 0; & N_{13,1} - N_{11} v_{30,11} + p_3 &= 0; & (2.5.24) \\
 M_{11,1} - N_{13} &= 0;
 \end{aligned}$$

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ СЖАТЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

После Ф.Шенли [22,23] равновесие сжатых однородных стержней было исследовано Ю.Н.Работновым [3], Я.Г.Пановко [190], В.Д.Клюшниковым [191], В.Г.Зубчаниновым [192] и многими другими авторами. В исследовании Ю.Н.Работнова показано, что вывод Ф.Шенли о начале выпучивания сжатой элементарной модели стойки при возрастании сжимающей нагрузки от касательно-модульного ее значения остается верным и для однородного стержня сплошного прямоугольного сечения. В работе Я.Г.Пановко [190], в дополнение к исследованию Ф.Г.Шенли [23] закритического поведения (выпучивания) элементарной модели сжатого стержня, показано, что неограниченное возрастание деформации изгиба происходит при силе меньшей, чем карманова критическая нагрузка. Вследствие изменения модуля разгрузки в одной из полок стержня нагрузка при выпучивании, как функция прогиба, имеет точку максимума, причем, чтобы обнаружить точку максимума необходимо учитывать вторичные пластические деформации. В работе В.Д.Клюшникова [191] исследование Ф.Шенли дополнено по двум пунктам. Во-первых, с помощью динамического анализа подтверждена правомерность в применении к вопросу устойчивости процесса сжатия идеализированного упруго-пластического стержня статического анализа. Во-вторых, показано, что предистория малых возмущений не оказывает решающего влияния на величину критической силы, полученной с помощью статического анализа. В работе В.Г.Зубчанинова исследование Ф.Шенли [23] дополнено по вопросу о влиянии истории нагружения на выпучивание идеализированной модели стержня. При этом показано, что изгиб стержня, начавшийся вследствие действия возмущающей силы, может происходить далее и в отсутствие ее при значениях сжимающей силы, меньших касательно-модульной нагрузки.

Ниже рассматривается элементарная модель неоднородного стержня и исследуется его поведение при сжатии за пределом упругости.

Определены три типа критических нагрузок при выпучивании неоднородного стержня, причем каждая из них характеризует как нагрузку несущей способности так и, в определенном смысле, нагрузку потери устойчивости рассматриваемой модели стержня. Исследуется устойчивость неупругих неоднородных стержней с пропорциональными диаграммами с точек зрения как линейной так и геометрически- и физически- нелинейных теорий. Изучается поведение и устойчивость упругопластического стержня при циклическом нагружении. Приведена постановка задачи об устойчивости и выпучивании конструктивно-неоднородного стержня несимметричного строения за пределом упругости.

3.1. Об устойчивости и выпучивании неоднородных стержней за пределом упругости

Рассмотрим сжатие идеализированного стержня Ф.Шенли [23], (рис. 3.1), полки которого выполнены из различных упругопластических материалов с линейным упрочнением, (рис. 3.2). Пусть L – длина жесткой части стержня, l – длина деформируемой части, F_i – площади поперечного сечения несущих полок, H_i – расстояние середин полок до линии действия сжимающего усилия T , σ_{0i} – пределы пропорциональности, E_i – модули упругости, E_{ki} – касательные модули, соответствующие первой и второй полкам стержня, ($i = 1, 2$). Предполагаем поведение материалов при растяжении и сжатии одинаковым. Линию действия внешнего сжимающего усилия выберем так, чтобы до достижения критической нагрузки Эйлера,

$$T_0 = \sigma_{02} F_2 t_0, \quad t_0 = \omega^2 e_2 / (1 + \alpha f), \quad (3.1.1)$$

$$(\omega^2 = H^2 / Ll, \quad \alpha = e_2 / e_1, \quad e_i = E_i / \sigma_{02}, \quad f = F_2 / F_1),$$

в стержне реализовалось безмоментное невыпученное состояние [34]. Тогда

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha f / (1 + \alpha f), \quad h_2 = 1 / (1 + \alpha f), \\ h_i &= H_i / H, \quad H_1 + H_2 = H. \end{aligned} \quad (3.1.1')$$

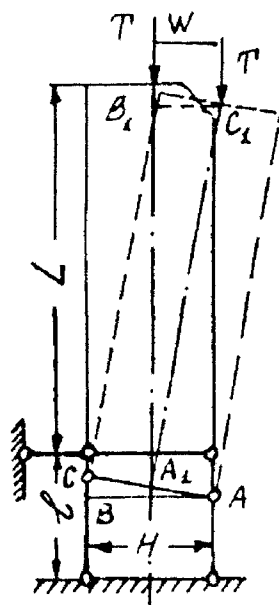


Рис. 3.1.

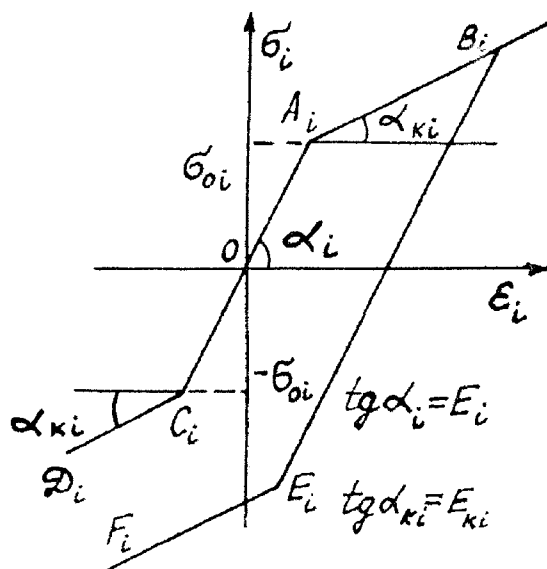


Рис. 3.2.

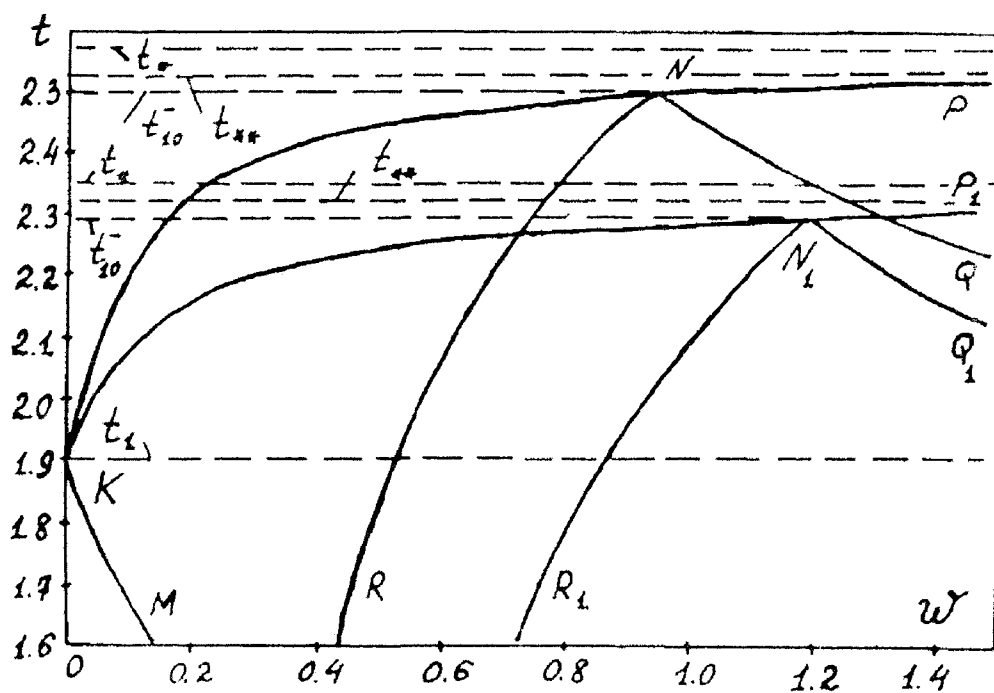


Рис. 3.3.

Упругоустойчивый стержень остается прямым, пока хотя бы одна из полков не перейдет в пластическое состояние. Пусть материалы полков таковы, что выполняется неравенство

$$1/e_2 < s_{01}/e_1, \quad (s_{0i} = \sigma_{0i}/\sigma_{02}). \quad (3.1.2)$$

Тогда вторая полка переходит в пластическое состояние при сжимающем усилии

$$T_1 = \sigma_{02} F_2 t_1, \quad t_1 = (1 + \alpha f)/(\alpha f). \quad (3.1.3)$$

Нагрузку t_1 назовем первой критической нагрузкой. В дальнейшем ограничимся рассмотрением стержней, для которых $t_1 < t_2$, или

$$\omega^2 > (1 + \alpha f)/(\alpha f e_2). \quad (3.1.4)$$

При $t > t_1$, в соответствии с диаграммами растяжения-сжатия, (рис. 3.2), закон связи напряжений σ_i с деформациями ε_i без учета эффекта Баушингера имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = & s_i/e_i + k_i \mu_i [s_i - \text{sign}(s_i) s_{0i}] + \\ & + m_i \mu_i [s_i - \text{sign}(s_i) s_{1i}] + n_i \mu_i (s_{1i} - s_{0i}). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} s_i = \sigma_i/\sigma_{02}, \quad \mu_i = (e_i - e_{ki})/(e_i e_{ki}), \\ e_{ki} = E_{ki}/\sigma_{02}, \quad s_{1i} = \sigma_{1i}/\sigma_{02}. \end{aligned}$$

Режимы $A_i C_i$: $k_i = m_i = n_i = 0$.

Режимы $A_i B_i$, $C_i D_i$: $k_i = 1$, $m_i = n_i = 0$.

Режимы $B_i E_i$: $k_i = m_i = 0$, $n_i = 1$.

Режимы $E_i F_i$: $k_i = 0$, $m_i = n_i = 1$.

В равенствах (3.1.5) величины σ_{1i} — пределы текучести материалов полков при сжатии после упрочнения. В дальнейшем сжимающие напряжения считаются положительными.

Уравнение совместности деформаций, которое можно получить, рассматривая подобие треугольников ABC и $A_1 B_1 C_1$, (рис. 3.1):

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \omega^2 (1 - r^2 w^2)^{-1/2} w, \quad (3.1.6)$$

где

$$\varepsilon_i = (l_i - l)/l, \quad w = W/H, \quad r = H/L,$$

l_i — длины полков после деформации.

Считая прогиб W малым по сравнению с длиной L , из равенства (3.1.6) получим линейризованное уравнение совместности деформаций,

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \omega^2 w. \quad (3.1.6')$$

Воспользовавшись уравнениями равновесия стержня,

$$s_1 = ft(h_2 - w), \quad s_2 = t(h_1 + w), \quad (T = \sigma_{02} F_2 t), \quad (3.1.7)$$

а также законом деформирования (3.1.5) и уравнением совместности деформаций (3.1.6'), получим

$$w = (c + at)/(\omega^2 - bt). \quad (3.1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= (k_2 + m_2)\mu_2 h_1 - (k_1 + m_1)\mu_1 f h_2, \\ b &= \beta + (k_2 + m_2) + (k_1 + m_1)\mu_1 f, \\ c &= k_1 \operatorname{sign}(s_1) s_{01} \mu_1 - k_2 \operatorname{sign}(s_2) \mu_2 + \\ &\quad + n_2 \mu_2 (s_{12} - 1) - n_1 \mu_1 (s_{11} - s_{01}) + \\ &\quad + m_1 \mu_1 \operatorname{sign}(s_1) s_{11} - m_2 \mu_2 \operatorname{sign}(s_2) s_{12}, \\ \beta &= (1 + \alpha f)/e_2. \end{aligned}$$

Если в равенстве (3.1.8), умноженном на его знаменатель, положить $k_i = m_i = n_i = 0$, то получим нагрузку, при которой возможны смежные формы равновесия стержня, то есть нагрузку Эйлера t_0 (3.1.1).

В случае, когда выполняются неравенства (3.1.2) и (3.1.4), в равенстве (3.1.8) полагаем $k_2 = 1$, $k_1 = m_i = n_i = 0$. Тогда при $t > t_1$ получим

$$w = A(t - t_1)/(t_* - t), \quad (3.1.9)$$

где

$$A = fh_2(e_2 - e_{k2})/\beta_1, \quad \beta_1 = e_1 + e_{k2}f,$$

$$t_* = \omega^2 e_1 e_{k2} / \beta_1.$$

Из уравнения равновесия, пользуясь выражением (3.1.9), находим:

$$\begin{aligned} s'_1(t) &= \frac{e_1 f[(t - t_*)^2 - B]}{\beta_1(t_* - t)^2}, \\ s'_2(t) &= \frac{e_{k2} f[(t - t_*)^2 + e_1 B / (e_{k2} f)]}{\beta_1(t_* - t)^2}, \\ B &= f t_* (e_2 - e_{k2})(t_* - t_1) / (\beta e_1 e_2), \\ s'_1(t_1) &= \frac{f(t_* e_{k2} - e_2 t_1)}{\beta_1 \alpha(t_* - t_1)}, \quad s'_2(t_1) = \frac{e_{k2} f(t_* - t_1)}{\beta_1(t_* - t_1)}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

где штрих означает производную по t .

В зависимости от свойств материалов и геометрических параметров стержня при $t = t_1 < t_*$ возможны следующие случаи.

$$a) t_* > t_1 \quad t_* e_{k2} > t_1 e_2. \quad (3.1.11)$$

Тогда $s'_1(t_1) > 0$, $s'_2(t_1) > 0$, то есть в обеих полках происходит догрузка, (режимы $A_i B_i$), причем во второй полке она имеет место при всех $t > t_1$, а в первой полке при $t_1 \leq t \leq t_m$,

$$t_m = t_* - \sqrt{B}, \quad (t_1 \leq t_m \leq t_*). \quad (3.1.12)$$

Полагая в равенстве (3.1.7) $s_1 = s_{01}$ и воспользовавшись выражением (3.1.9), получим

$$\begin{aligned} t_{10}^+ &= p - \sqrt{p^2 - q}, \\ p &= \frac{s_{01} + f h_2 t_* + A f t_1}{2 f (h_2 + A)}, \quad q = \frac{s_{01} t_*}{(h_2 + A) f}. \end{aligned}$$

Нагрузка t_{10}^+ соответствует достижению предела текучести при сжатии первой полки.

Рассмотрим сначала такие материалы и параметры стержня, для которых

$$t_m \leq t_{10}^+ \quad (3.1.13)$$

Тогда из равенства (3.1.10) и неравенства (3.1.13) следует, что при $t_1 \leq t \leq t_m$ в первой полке происходит упругая догрузка, а для $t > t_m$ — упругая разгрузка, пока напряжение σ_1 не будет равным пределу текучести на растяжение. Для усилия t_{10}^- , соответствующего напряжению $\sigma_1 = -\sigma_{10}$, из равенств (3.1.7) и (3.1.10) получим выражение

$$t_{10}^- = r + \sqrt{r^2 + q}, \quad r = p - q/t_+.$$

Воспользовавшись первым из неравенств (3.1.11), нетрудно убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$t_m \leq t_{10}^- \leq t_* \leq t_+. \quad (3.1.14)$$

Из выражения (3.1.10) следует, что с выполнением неравенств (3.1.14) производная $s_1'(t_{10}^-)$ отрицательна, так как при этом

$$(t_{10}^- - t_* - \sqrt{B})(t_{10}^- + \sqrt{B}) < 0. \quad (3.1.15)$$

В рассматриваемом случае, когда выполняются неравенства (3.1.11) и (3.1.13), зависимость прогиба от нагрузки при $t \leq t_{10}^-$ определяется выражением (3.1.9) и изображена кривой KN , ($\alpha = 1.1$, $f = 1$, $\omega^2 = 1/16$, $e_1 = 100$, $e_2 = 110$, $e_{k2} = 70$, $s_{01} = 1.5$, $s_{02} = 1$), на рис. 3.3.

Рассмотрим теперь поведение стержня при нагрузках $t > t_{10}^-$, считая справедливыми неравенства (3.1.11) и (3.1.13). Тогда первая полка переходит в пластическое состояние с растяжением, (режим D_1C_1 на рис. 3.2), а вторая остается в пластическом состоянии на сжатие, (режим A_2B_2). Используя равенства (3.1.5) и (3.1.8), для прогиба получим выражение,

$$w = w_0^- + D^-(t - t_{10}^-)/(t_{**} - t), \quad (3.1.16)$$

где

$$D^- = \frac{f[(e_2 - e_{k2})\beta_2(t_* - t_1) - e_{k2}e_2(e_1 - e_{k1})\beta(t_* - t_{10}^-)]}{e_2\beta\beta_1\beta_2(t_* - t_{10}^-)},$$

$$t_{**} = \omega^2 e_{k1} e_{k2} / \beta_2, \quad \beta_2 = e_{k1} + e_{k2} f,$$

$$w_0^- = A(t_{10}^- - t_1)/(t_* - t_{10}^-).$$

Пользуясь выражением (3.1.16), из равенств (3.1.7) получим:

$$\begin{aligned}
 s'_1(t) &= e_{k1}f[(t - t_{**})^2 - R^-]/\beta_2(t_{**} - t)^2, \\
 s'_2(t) &= e_{k2}f[(t - t_{**})^2 + e_{k1}R^-(e_{k2}f)]/\beta_2(t_{**} - t)^2, \\
 R^- &= D^- \beta_2 t_{**}(t_{**} - t_{10}^-)/e_{k1}, \\
 s'_1(t_{10}^-) &= \frac{e_{k1}f[(t_{10}^- - t_*)^2 - B]}{(t_* - t_{10}^-)(t_{**} - t_{10}^-)\beta_2}, \\
 s'_2(t_{10}^-) &= \frac{\beta_2(t_* - t_{10}^-)(t_{**} - t_{10}^-) - e_{k1}[(t_{10}^- - t_*)^2 - B]}{(t_* - t_{10}^-)(t_{**} - t_{10}^-)\beta_2}.
 \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Рассмотрим два возможных подслучая.

$a_1)$ Пусть материалы полков и геометрические параметры стержня таковы, что, наряду с неравенствами (3.1.11) и (3.1.13) выполняется также неравенство

$$t_{**} > t_{10}^-. \tag{3.1.18}$$

Тогда, на основании неравенств (3.1.14) и (3.1.15), имеем $s'_1(t_{10}^-) < 0$, $s'_2(t_{10}^-) > 0$. Первое из этих неравенств, в соответствии с (3.1.17), эквивалентно неравенствам,

$$t_{**} - \sqrt{R^-} \leq t_{10}^- \leq t_* + \sqrt{R^-}, \quad R^- > 0. \tag{3.1.19}$$

При этом для любых t из интервала $t_{10}^- < t < t_{**} + \sqrt{R^-}$ имеем $s'_1(t) < 0$, $s'_2(t) > 0$. Следовательно, решением (3.1.16) можно воспользоваться во всем указанном интервале изменения t . В соответствии с неравенствами (3.1.19), прогиб является монотонно возрастающей функцией усилия t и $w \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_{**}$.

Таким образом, для $t > t_1$, в случае справедливости неравенств (3.1.11), (3.1.13) и (3.1.18), прогиб от нуля возрастает до бесконечности в интервале $t_1 \leq t \leq t_{**}$. Соответствующая кривая NP , ($\alpha = 1.1$, $f = 1$, $\omega^2 = 1/16$, $e_1 = 100$, $e_2 = 110$, $e_{k1} = 95$, $e_{k2} = 70$, $s_{01} = 1.5$, $s_{02} = 1$) изображена на рис. 3.3. Нагрузку t_{**} назовем второй критической нагрузкой.

a_2) Если материалы полки и геометрические параметры стержня таковы, что, наряду с неравенствами (3.1.11) и (3.1.13), выполняется также неравенство,

$$t_{**} < t_{10}^-, \quad (3.1.20)$$

то, предполагая, что обе полки находятся в пластическом состоянии, имеем $s'_1(t_{10}^-) < 0$. Тогда из равенств (3.1.7) и (3.1.9) с неравенствами (3.1.15) и (3.1.20) следует, что при $\Delta t = t - t_{10}^- > 0$

$$s_1 + s_{01} = \frac{e_{k1} f \Delta t [(t_{10}^- - t_*)^2 - B - \Delta t (t_* - t_{10}^-)]}{\beta_2 (t_* - t_{10}^-) (t_{**} 9t)} > 0.$$

Последнее неравенство означает, что нарушается предполагаемый закон пластического деформирования в первой полке, (режим $D_1 C_1$). Предположение о том, что для $t > t_{10}^-$ напряжение в первой полке остается постоянным и равным пределу текучести при растяжении, также приводит к нарушению уравнений равновесия или совместности деформаций.

Допустим теперь, что при $t > t_{10}^-$ вторая полка догружается в пластическом состоянии, (режим $A_2 B_2$), а первая находится в упругом состоянии, (режим $A_1 C_1$). Тогда, как нетрудно убедиться, придем к противоречию с неравенством (3.1.15) или, что то же, — с законом деформирования первой полки. Предположение, что во второй полке, начиная с нагрузки t_{10}^- происходит упругая разгрузка в режиме $B_2 E_2$, а в первой полке происходит растяжение в режиме $C_1 A_1$, очевидно, противоречит неравенству $t > t_{10}^-$.

Возможен еще случай, когда для $t > t_{10}^-$ вторая полка разгружается в режиме $B_2 E_2$, а напряжение в первой полке соответствует режиму $A_1 C_1$, (при этом, в принципе, возможно увеличение нагрузки от значения t_{10}^- за счет различной скорости уменьшения модулей напряжений в полках). В этом случае из равенств (3.1.5) и (3.1.8) для прогиба w получим выражение:

$$w = \frac{w_0^- (t_s - t_{10}^-)}{t_s - t}. \quad (3.1.21)$$

Подставляя это выражение в равенства (3.1.7) и пользуясь неравен-

ствами (3.1.14), будем иметь,

$$s'_2(t_{10}^-) = h_1 + \frac{At_2(t_{10}^- - t_1)}{(t_* - t_{10}^-)(t_2 - T_{10}^-)} > 0,$$

что противоречит исходному предположению о разгрузке при $t > t_{10}^-$ во второй полке.

Таким образом, в случае стержней, для которых справедливы неравенств (3.1.11), (3.1.13), (3.1.20) равновесные состояния при $t > t_{10}^-$ невозможны. Дальнейшее увеличение прогиба возможно только с уменьшающейся нагрузкой. График зависимости прогиба от нагрузки в таком случае изображен на рис. 3.3 линией KNQ , ($\alpha = 1.1$, $f = 1$, $\omega^2 = 1/16$, $e_1 = 100$, $e_2 = 110$, $e_{k1} = 50$, $e_{k2} = 70$, $s_{01} = 1.5$, $s_{02} = 1$). При этом отрезку KN соответствует решение (3.1.9), а отрезку NQ — решение (3.1.16), когда выполняется неравенство, $e_{k1}^0 \leq e_{k1} \leq e_{k1}^1$; в случае выполнения неравенства $0 \leq e_{k1} \leq e_{k1}^0$ имеем следующее (соответствующее режиму A_1C_1 в первой полке и режиму B_2E_2 — во второй полке) решение:

$$w = w_0^- - D_y^-(t - t_{10}^-)/(t_{***} - t), \quad (3.1.22)$$

где

$$D_y^- = [-\mu_1 h_2 f + (\beta + \mu_1 f) w_0^-]/(\beta + \mu_1 f),$$

$$e_{k1}^0 = \frac{e_1 e_{k2} f t_{10}}{e_{k2} f t_{10}^-(t_* - t_{10}^-) + e_1 B},$$

$$e_{k1}^1 = \frac{e_1 e_{k2} f t_{10}^-}{t_* \beta_1 - e_1 t_{10}^-}, \quad t_{***} = \frac{\omega^2}{\beta + \mu_1 f}$$

Нагрузку t_{10}^- назовем третьей критической нагрузкой. Для указанного класса стержней эта нагрузка характеризует их несущую способность.

Отметим, что нагрузка t_{10}^- (и ей подобные) является критической нагрузкой в обычном бифуркационном смысле, так как при уменьшении нагрузки после достижения уровня t_{10}^- , наряду с равновесной кривой NQ , возможна также равновесная кривая NR , описываемая решением (3.1.21), соответствующим упругой разгрузке в обеих полках рис. 3.3.

Как и выше, нетрудно убедиться, что при выполнении неравенств (3.1.18) и

$$t_* > t_1, \quad t_* e_{k2} \leq t_1 e_2 \quad (3.1.23)$$

поведение стержней соответствует ветви KN_1P_1 на рис. 3.3, ($\alpha = 1.1$, $f = 1$, $\omega^2 = 1/16$, $e_1 = 100$, $e_2 = 110$, $e_{k1} = 98$, $e_{k2} = 60$, $s_{01} = 2$, $s_{02} = 1$), описываемой соотношениями (3.1.9) и (3.1.16), а в случае выполнения неравенств (3.1.20) и (3.1.23) - ветви KN_1Q_1 , ($\alpha = 1.1$, $f = 1$, $\omega^2 = 1/16$, $e_1 = 100$, $e_2 = 110$, $e_{k1} = 50$, $e_{k2} = 70$, $s_{01} = 2$, $s_{02} = 1$), описываемой соотношениями (3.1.9) и (3.1.16) или (3.1.22) с критической нагрузкой t_{10}^- , рис.3.3. Смежная ветвь с разгрузкой в обеих полках, описываемая зависимостью (3.1.21) показана кривой N_1R_1 на том же рисунке.

Если выполняются неравенства $t_* < t_1$ и $t_* e_{k2} \leq t_1 e_2$, то поведение стержня соответствует кривой KM , ($\alpha = 1$, $f = 1$, $\omega^2 = 1/16$, $e_1 = 100$, $e_2 = 110$, $e_{k1} = 90$, $e_{k2} = 5$, $s_{01} = 1.5$, $s_{02} = 1$), определяемой уравнением (3.1.9), и для таких стержней первая критическая нагрузка определяет их несущую способность, рис. 3.3.

Опуская подробности аналогичного анализа, приведем окончательные результаты для других случаев.

$$b) \quad t_* > t_1, \quad t_* e_{k2} > t_1 e_2, \quad t_m > t_{10}^+, \quad e_{k1} > e_{k1}^* \quad (3.1.24).$$

$$t_{k1}^* = e_1 e_{k2} f t_{10}^+ (t_* - t_{10}^+) / [e_{k2} f t_* (t_* - t_{10}^+ e_1 B)];$$

$$w = w_0^+ \frac{D^+(t - t_{10}^+)}{(t_* - t)}; \quad (t_{10}^+ \leq t \leq t_{11}^+, \quad A_1 B_1, \quad A_2 B_2, \quad K_2 N_2);$$

$$w_0^+ = A(t_{10}^+ - t_1) / (t_* - t_{10}^+); \quad t_{11}^+ = t_{**} - \sqrt{D^+ \beta_2 t_{**} (t_{**} - t_{10}^+) / e_{k1}};$$

$$D^+ = \frac{f[(e_2 - e_{k2})\beta_2(t_* - t_1) - e_{k2}e_2(e_1 - e_{k1})\beta(t_* - t_{10}^+)]}{e_2\beta\beta_1\beta_2(t_* - t_{10}^+)};$$

$$w = w_1^+ + \frac{D_1^+(t - t_{11}^+)}{t_* - t}; \quad (t_{11}^+ \leq t \leq t_{11}^-, \quad B_1 E_1, \quad A_2 B_2, \quad K_2 N_2);$$

$$w_1^+ = w_0^+ \frac{D^+(t_{11}^+ - t_{10}^+)}{(t_{**} - t_{11}^+)}; \quad D_1^+ = \frac{[\mu_2 h_1 + (\mu_2 + \beta)w_1^+]}{(\mu_2 + \beta)};$$

$$t_{11}^- = p_1 + \sqrt{p_1^2 + q_1}; \quad p_1 = \frac{f(h_2 - w_1^+)t_*}{+} D_1^+ f t_{11}^+ - s_{11} 2f(h_2 - w_1^+ + D_1^+);$$

$$q_1 = \frac{s_{11} t_*}{f(h_2 - w_1^+ + D_1^+)}; \quad s_{11} = f t_{11}^+(h_2 - w_1^+);$$

$$b_1) \quad t_{**} > t_{11}^-; \quad (3.1.25)$$

$$w = w_1^- + \frac{D_1^-(t - t_{11}^-)}{t_{**} - t}; \quad (t_{11}^- \leq t \leq t_{**}, E_1 F_1, A_2 B_2, K_2 N_2 P_2);$$

$$w_1^- = w_1^+ + D_1^+(t_{11}^- - t_{11}^+)(t_* - t_{11}^-);$$

$$D_1^- = [\mu_2 h_1 - \mu_1 h_2 f + (\beta + \mu_2 + \mu_1 f) w_1^-] / (\beta + \mu_2 + \mu_1 f);$$

$$b_2) \quad t_{**} \leq t_{11}^-, \quad r_1 > 0; \quad (3.1.26)$$

$$r_1 = (t_* - t_{11}^-)(t_{**} - t_{11}^-) -$$

$$-\frac{(\mu_2 + \beta h_2)}{(\beta + \mu_2 + \mu_1 f)} \left[(t_* - t_{11}^-)^2 - \frac{(\mu_2 + \beta)}{(\mu_2 + \beta h_2)} D_1^+ t_* (t_* - t_{11}^+) \right];$$

$$w = w_1^- + \frac{D_1^-(t - t_{11}^-)}{t_{**} - t}; \quad (t \leq t_{11}^-, E_1 F_1, A_2 B_2, K_2 N_2 Q_2);$$

$$b_3) \quad t_{**} \leq t_{11}^-, \quad r_1 \leq 0; \quad (3.1.27)$$

$$w = w_1^- + \frac{D_{1y}^-(t - t_{11}^-)}{t_{***} - t}; \quad (t \leq t_{11}^-, E_1 F_1, B_2 E_2, K_2 N_2 Q_2);$$

$$D_{1y}^- = [-\mu_1 h_2 f + (\beta + \mu_1 f) w_1^-] / (\beta + \mu_1 f);$$

$$b_4) \quad t_{**} < t_{11}^-; \quad (3.1.28)$$

$$w = w_1^-(t - \vartheta - t_{11}^-) / (t_\vartheta - t); \quad (t \leq t_{11}^-, B_1 E_1, E_2 F_2, K_2 N_2 R_2);$$

$$c) \quad t_* > t_1, t_\vartheta e_{k2} > t_1 e_2, t_m > t_{10}^-, e_{k1} \leq e_{k1}^*,$$

$$t_{**} > t_{10}^+; \quad (3.1.29)$$

$$w = w_0^+ + \frac{D_2^+(t - t_{10}^+)}{t_{***} - t}; \quad (t_{10}^+ \leq t \leq t_2, A_1 B_1, B_2 E_2, K F U);$$

$$D_2^+ = \frac{-\mu_1 h_2 f + (\beta + \mu_1 f) w_0^+}{(\beta + \mu_1 f)}; \quad t_2 = p_2 + \sqrt{p_2^2 + q_2};$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{(h_1 + w_0^+)t_{***} - (h_1 + w_0^+ + D_2^+)t_{10}^+}{h_1 + w_0^+ - D_2^+}, \\
q_2 &= \frac{t_{10}^+ t_{***} (h_1 + w_0^+)}{h_1 + w_0^+ - D_2^+}, \\
c_1) \quad t_{**} &> t_2;
\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

$$\begin{aligned}
w &= w_2 + \frac{D_2^-(t - t_2)}{(t_{**} - t)}; \quad (t_2 \leq t \leq t_{**}, A_1B_1, E_2F_2, KFUL); \\
w_2 &= w_0^+ + \frac{(t_2 - t_{10}^+)}{(t_{***} - t_2)}; \\
D_2^- &= \frac{\mu_2 h_1 - \mu_1 h_2 f + (\beta + \mu_2 + \mu_1 f)w_2^-}{(\beta + \mu_2 + \mu_1 f)}; \\
c_2) \quad t_{**} &< t_2; \quad g > 0;
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

$$\begin{aligned}
g &= [(t_{***} - t_2)(\beta + \mu_2 + \mu_1 f) - (\beta h_1 + \mu_1 f)(t_{**} - t_2)](t_{**} - t_2) - \\
&\quad - D_2^+(\beta + \mu_1 f)t_{***}(t_{***} - t_{10}^+); \\
w &= w_2 + \frac{D_2^-(t - t_2)}{(t_{**} - t)}; \quad (t \leq t_2, A_1B_1, E_2F_2, KFUG); \\
c_3) \quad t_{**} &\leq t_2; \quad g \leq 0;
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

$$\begin{aligned}
w &= w_2 + \frac{D_{2y}^-(t - t_2)}{(t_* - t)}; \quad (t \leq t_2, B_1E_1, E_2F_2, KFUG); \\
D_{2y}^- &= [\mu_2 h_1 + (\beta + \mu_2)w_2]/(\beta + \mu_2); \\
c_4) \quad t_{**} &\leq t_2;
\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

$$w = w_2(t_* - t_2)/(t - t_* - t); \quad (t \leq t_2, B_1E_1, B_2F_2, KFUV);$$

$$d) \quad t_* > t_1; \quad t_* e_{k2} > t_1 e_2, \quad t_m > t_{10}^+;$$

$$e_{k1} \leq e_{k1}^*, \quad t_{**} \leq t_{10}^+; \tag{3.1.34}$$

$$w = w_0^+ \frac{+D_2^+(t - t_{10}^+)}{(t_{***} - t)}; \quad (t \leq t_{10}^+, A_1B_1, B_2E_2, KFT);$$

$$w = w_0^+(t_* - t_{10}^+)/(t_* - t); \quad (t \leq t_{10}^+, A_1C_1, B_2E_2, KFS).$$

В каждом случае (3.1.24)-(3.1.34) в скобках указаны интервалы задаваемых нагрузок и режимы, для которых получены приведенные рядом решения. Там же указаны кривые, которыми изображены зависимости прогиба от нагрузки, справедливые для классов стержней, описанных соответствующими неравенствами, на рис. 3.4 – 3.5:

$$K_2N_2P_2, (\alpha = 1.1, f = 1, \omega^2 = 1/16, e_1 = 100, e_2 = 110,$$

$$e_{k1} = 99, e_{k2} = 90, s_{01} = 1.03);$$

$$K_2N_2R_2, K_2N_2Q_2, (\alpha = 1.1, f = 1, \omega^2 = 1/16, e_1 = 100, e_2 = 110,$$

$$e_{k1} = 75, e_{k2} = 90, s_{01} = 1.03);$$

$$KFUL, (\alpha = 1.1, f = 1, \omega^2 = 1/16, e_1 = 100, e_2 = 110,$$

$$e_{k1} = 61, e_{k2} = 108, s_{01} = 0.95);$$

$$KFUG, KFUV, (\alpha = 1.1, f = 1, \omega^2 = 1/16, e_1 = 100, e_2 = 110,$$

$$e_{k1} = 50, e_{k2} = 108, s_{01} = 0.95);$$

$$KFT, KFS, (\alpha = 1.1, f = 1, \omega^2 = 1/16, e_1 = 100, e_2 = 110,$$

$$e_{k1} = 10, e_{k2} = 108, s_{01} = 0.95);$$

Для каждого случая на рис. 3.3 – 3.5 отмечены критические нагрузки.

Окончательно можно сделать следующие выводы. В общем случае неоднородного идеализированного стержня, сохраняющего прямолинейное невыпученное состояние в пределах упругости, изгиб начинается при первой критической нагрузке t_1 , соответствующей достижению в одной из несущих полок предела текучести.

При этом, если материалы и геометрические параметры стержня таковы, что удовлетворяются неравенства (3.1.4) и $t < t_1$, $t_2 e_{k2} \leq t_1 e_2$, то критическая нагрузка t_1 определяет несущую способность стержня. Если же удовлетворяются неравенства (3.1.4), (3.1.11), (3.1.13) и (3.1.20) или (3.1.4), (3.1.20) и (3.1.23), то несущая способность стержня определяется критической нагрузкой t_{10}^- . В случае, когда справедливы неравенства (3.1.4), (3.1.24), (3.1.26) или (3.1.27) несущая способность

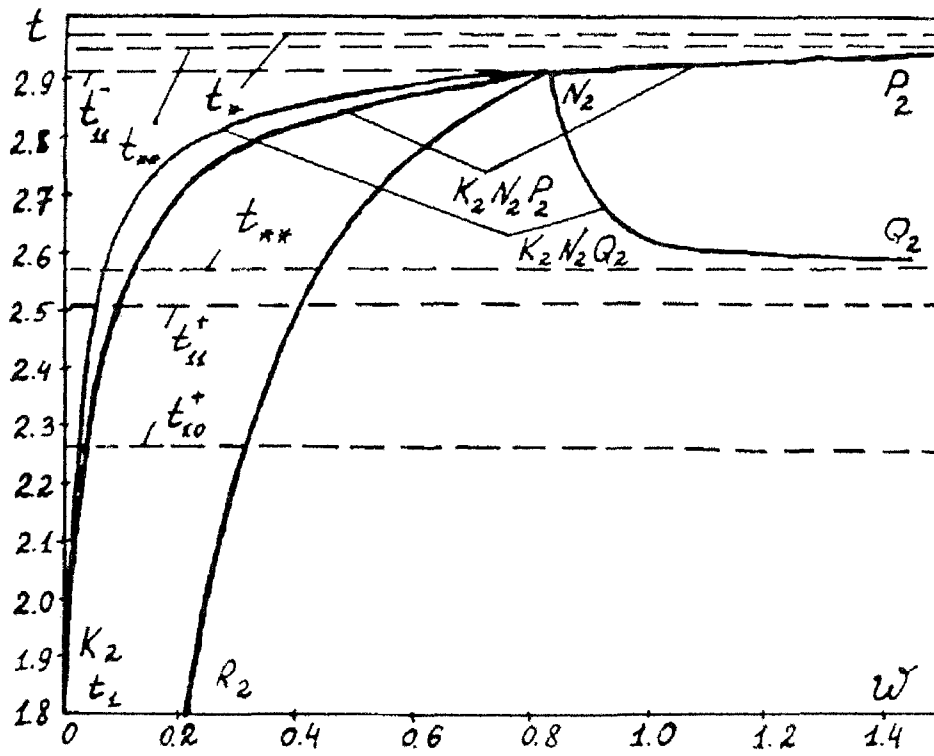


Рис. 3.4.

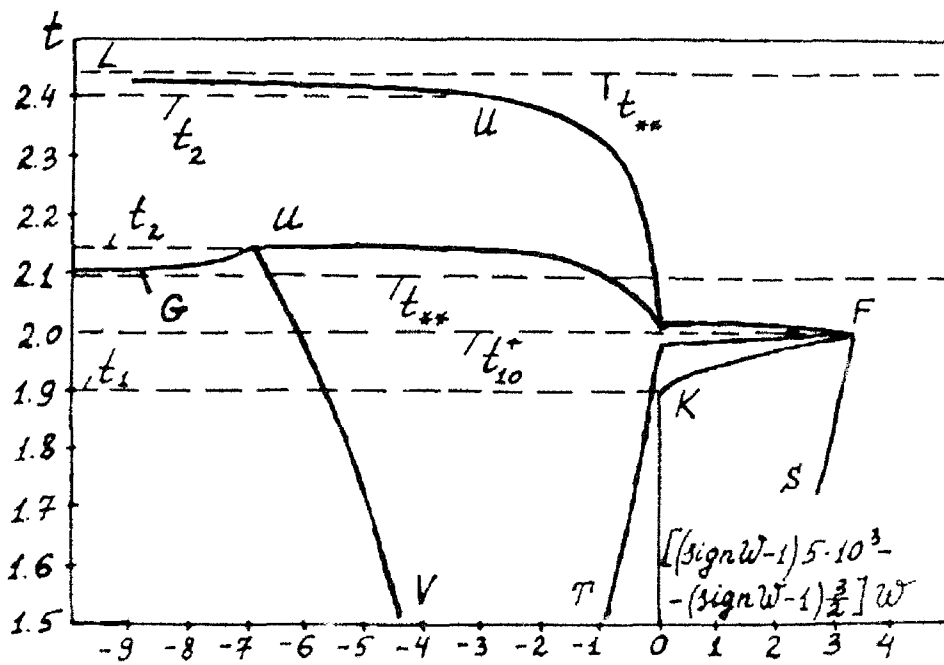


Рис. 3.5.

стержня определяется критической нагрузкой t_{11}^- , когда выполняются неравенства (3.1.4), (3.1.29) и (3.1.23) или (3.1.32) – критической нагрузкой t_2 и когда удовлетворяются неравенства (3.1.4), (3.1.34) – критической нагрузкой t_{10}^+ . Если удовлетворяются неравенства (3.1.4), (3.1.11), (3.1.13) и (3.1.18) или (3.1.4), (3.1.18) и (3.1.23) или (3.1.4), (3.1.24) и (3.1.25) или (3.1.4), (3.1.29) и (3.1.30), то несущую способность стержня можно оценивать критической нагрузкой t_{**} . Нагрузка несущей способности стержня всегда является критической в бифуркационном смысле.

3.2. Об устойчивости и выпучивании неоднородных стержней с пропорциональными диаграммами

Предыдущий анализ показывает, что, в общем случае, неоднородный идеализированный стержень начинает выпучиваться при нагрузке, соответствующей переходу одной из полок в пластическое состояние. Однако, при некоторых ограничениях на характеристики материалов невыпученное безмоментное состояние стержня может сохраниться и после перехода полок в пластическое состояние. Чтобы выяснить эти ограничения, положим в выражении (3.1.8) $w = 0$, $k_i = 1$, $m_i = n_i = 0$, режимы $A_i B_i$, при нескольких, (по крайней мере, двух), близких значениях $t > t_1$. Тогда получим:

$$h_1 \mu_2 - h_2 \mu_1 f = 0, \quad \sigma_{10} \mu_1 - \sigma_{20} \mu_2 = 0. \quad (3.2.1)$$

Из равенства (3.2.1) следует,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}} = \alpha \quad (3.2.2)$$

Диаграммы материалов, характеристики которых связаны соотношениями (3.2.2) называются пропорциональными, величина α – коэффициентом пропорциональности [34].

Считая диаграммы полок пропорциональными, из равенств (3.1.5)–(3.1.7) найдем,

$$(t_{**} - t)w = 0, \quad t_{**} = \omega^2 e_{k2} / (1 + \alpha f), \quad (3.2.3)$$

Анализ уравнения (3.2.3) показывает, что для упругопластического стержня при соблюдении законов пластичности отклоненные формы равновесия стержня невозможны; если полки находятся в пластическом состоянии ($k_i = 1$, $m_i = n_i = 0$), то любое поперечное возмущение стержня вызывает нарушение закона пластической догрузки, (см. равенство (3.3.12)). Проверим, возможны ли и при каких обстоятельствах отклоненные формы равновесия, если первая полка разгружается из пластического состояния, ($k_1 = m_1 = 0$, $n_1 = 1$), режим $B_1 E_1$, а вторая полка догружается пластически, ($k_2 = 1$, $m_2 = n_2 = 0$), режим $A_2 B_2$. В таком случае из равенства (3.1.8) получим выражение:

$$w = A_1 \frac{(t - t^+)}{(t_* - t)}, \quad A_1 = \frac{\mu_2 h_1}{\beta + \mu_2}. \quad (3.2.4)$$

Здесь t^+ – нагрузка, соответствующая началу разгрузки в первой полке, t_* – критическая нагрузка Кармана, $t_* \leq t_o$, [190]. Воспользовавшись равенствами (3.2.4) и (3.1.7) получим:

$$\begin{aligned} s'_1(t) &= \frac{f[e_1(1 + \alpha f)(t_* - t)^2 - \alpha f(e_1 - e_{k1})t_*(t_* - t^+)]}{(1 + \alpha f)(e_1 + \alpha f e_{k1})(t_* - t)^2}; \\ s'_2(t) &= \frac{1}{f}[f - s'_1(t)]; \\ s'_1(t^+) &= -\frac{f e_1(t^+ - t_{**})}{(e_1 + \alpha f e_{k1})(t_* - t^+)}; \\ s'_2(t^+) &= \frac{\alpha f e_{k1}(t_o - t^+)}{(e_1 + \alpha f e_{k1})(t_* - t^+)}; \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Из выражений производных, s'_1 , s'_2 , (3.2.5) следует, что при $t^+ < t_{**}$ выпучивание стержня невозможно, когда $t_{**} \leq t^+ < t_*$, если $t_{**} \leq t^+ < t_*$, то выпучивание стержня от прямолинейного состояния возможно с возрастанием нагрузки, для $t_* \leq t^+ < t_o$ оно имеет место с уменьшением нагрузки и когда $t^+ > t_o$ – выпучивание стержня невозможно.

Рассмотрим процесс выпучивания стержня при возрастающей нагрузке. В таком случае зависимость прогиба от нагрузки определена

выражением (3.2.4). Для нагрузки t^- , при которой в первой полке возникает вторичная пластическая деформация из равенств (3.1.7) и (3.2.4) получим выражение:

$$t^- = p_2 + \sqrt{p_2^2 + q_2}. \quad (3.2.6)$$

Здесь

$$p_2 = \frac{h_2 t_* + (A - h_2) t^+}{2(h_2 + A)}, \quad q_2 = \frac{t^+ h_2 t_*}{(h_2 + A)}.$$

Зависимость прогиба от нагрузки в случае, когда вторая полка догружается пластически, а в первой полке происходят вторичные пластические деформации получим, воспользовавшись равенством (3.1.8) и полагая $k_2 = 1$, $m_2 = n_2 = 0$, $k_1 = 0$, $m_1 = n_1 = 1$, (режимы $E_1 F_1$ и $A_2 B_2$), при этом имеем:

$$w = w_3 \frac{(t_{**} - t^-)}{(t_{**} - t)}, \quad (t_* \geq t^- \geq t^+ \geq t_{**}). \quad (3.2.7)$$

Здесь

$$w_3 = A_1 \frac{(t^- - t^+)}{(t_* - t^-)}.$$

Воспользовавшись равенствами (3.2.7) и (3.1.7) для производных, s'_1 , s'_2 , получим выражения:

$$s'_1(t) = \frac{f[h_2(t_{**} - t)^2 - w_3 t_{**}(t_{**} - t^-)]}{(t_{**} - t)^2};$$

$$s'_2(t) \frac{1}{f} [f - s'_1(t)]; \quad (3.2.8)$$

$$s'_1(t^-) = \frac{f[h_2(t_{**} - t^-) - w_3 t_{**}]}{(t_{**} - t^-)};$$

$$s'_2(t^-) = \frac{h_1(r_2 - t^-)}{(t_{**} - t^-)};$$

$$r_2 = t_{**}(h_1 + w_3)/h_1$$

Из равенств (3.2.8), (3.2.7) и (3.2.6) следует, что при выполнении неравенства $r_2 \geq t^-$ дальнейшее увеличение прогиба возможно только с уменьшением нагрузки. В этом случае во второй полке имеет место пластическая деформация, а в первой полке – вторичная пластическая деформация; прогиб увеличивается монотонно от значения w_3 до бесконечности. Если $r_2 < t^-$, то рассматриваемые режимы не реализуются, как с возрастанием нагрузки так и ее уменьшением. Возможны следующие пути нагружения в полках: в первой – вторичные пластические деформации, режим $E_1 F_1$ ($k_1 = 0$, $m_1 = n_1 = 1$), во второй – разгрузка от значения напряжения, соответствующего нагрузке t^- , режим $B_1 E_1$ ($k_2 = m_2 = 0$, $n_2 = 1$). В таком случае из равенства (3.1.8) для определения прогиба найдем соотношение:

$$w = w_3 + D_3 \frac{(t - t^-)}{(t_{***} - t)}, \quad (3.2.9)$$

где

$$D_3 = w_3 - \mu_2 h_1 / (\beta + \mu_1 f), \quad (D_3 > 0).$$

Воспользовавшись выражениями (3.2.9) и (3.1.7) для производных, s'_1 , s'_2 , находим равенства:

$$\begin{aligned} s'_1(t) &= f \left[\frac{\beta h_2}{(\beta + \mu_1 f)} - \frac{D_3 t_{***} (t_{***} - t^-)}{(t_{***} - t)^2} \right]; \\ s'_2(t) &= \frac{1}{f} [f - s'_1]; \\ s'_1(t^-) &= f \left[\frac{\beta h_2}{(\beta + \mu_1 f)} - \frac{D_3 t_{***}}{(t_{***} - t^-)} \right]; \\ s'_2(t^-) &= \frac{(\beta + \mu_1 f) h_1 (r_2 - t^-)}{(\beta + \mu_2 + \mu_1) (t_{***} - t^-)}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Так как

$$r_2 = t_{**} (h_1 + w_3) / h_1 = t_{***} (h_1 + w_3) / (h_1 + w_3 - D_3) > t_{***},$$

то при выполнении неравенства $r_2 \leq t^-$ из равенств (3.2.10) следует, что увеличение прогиба от значения w_3 возможно только с уменьшающейся нагрузкой, причем в первой полке имеет место пластическая догрузка в режиме E_1F_1 , а во второй – упругая разгрузка в режиме B_2E_2 .

Разгрузка во второй полке происходит до некоторого минимального напряжения, соответствующего нагрузке t_3 , для определения которой с помощью (3.2.10) получим выражение:

$$t_3 = t_{***} + \sqrt{D_3(t^- - t_{***})t_{**}/h_1}.$$

Дальнейшее уменьшение нагрузки $t < t_3$ приводит к увеличению напряжения во второй полке и при нагрузке t_4 в ней снова возникают пластические деформации. Нагрузку t_4 определим из условия, что напряжение во второй полке в начале разгрузки ($t = t^-$) и для $t = t_4$ одинаковы. Воспользовавшись выражениями (3.2.9) и (3.1.7) найдем,

$$t_4 = r_2 = \frac{t_{***}(h_1 + w_3)}{(h_1 + w_3 - D_3)}.$$

При дальнейшем уменьшении нагрузки от значения t_4 в первой полке происходят вторичные пластические деформации, режим E_1F_1 ($k_1 = 0$, $m_1 = n_1 = 1$), а во второй пластическая догрузка, режим A_2B_2 ($k_2 = 1$, $m_2 = n_2 = 0$). Зависимость прогиба от нагрузки в таком случае получим, воспользовавшись выражением (3.1.8), при этом имеем:

$$w = w_4 \frac{(t_{**} - t_4)}{(t_{**} - t)}. \quad (3.2.11)$$

Здесь

$$w_4 = w_3 + D_3 \frac{(t_4 - t^-)}{(t_{***} - t^-)}.$$

Используя выражения (3.2.11) и (3.1.7), для производных получим равенства:

$$s'_1(t) = \frac{f[h_2(t_{**} - t)^2 - w_4 t_{**}(t_{**} - t)]}{(t_{**} - t)^2};$$

$$s'_2(t) = \frac{1}{f}[f - s'_1(t)]; \quad (3.2.12)$$

$$s'_1(t_4) = \frac{f[h_2(t_{**} - t_4) - w_4 t_{**}]}{(t_{**} - t_4)};$$

$$s'_2(t_4) = \frac{(w_4 - w_3)t_{**}}{(t_{**} - t_4)}.$$

Из равенств (3.2.11) и (3.2.12) следует, что с изменением нагрузки в интервале $t_{**} \leq t \leq t_4$, $s'_1(t) > 0$ и $s'_2(t) < 0$. Следовательно, в этом интервале изменения нагрузки в первой полке происходит вторичная пластическая деформация, а во второй - пластическая догрузка; прогиб изменяется монотонно от значения w_4 до бесконечности.

Зависимости, $w(t)$, $s_1(t)$, $s_2(t)$, в случае $t_4 > t^-$, ($t^+ = t_{**}$, $e_1 = 100$, $e_{k1} = 70$, $\alpha = 1.1$, $f = 1$, $\omega^2 = 1/16$), приведены, соответственно, кривыми ABC , DEF , GKL и в случае $t_4 < t^-$, ($t^+ = t_{**}$, $e_1 = 100$, $\alpha = 10$, $e_{k1} = 70$, $\omega^2 = 1/16$), - кривыми, $A_1B_1C_1$, $D_1E_1F_1$, $G_1K_1L_1$, на рис. 3.6, 3.7.

Если выпучивание стержня возможно с уменьшающейся нагрузкой, ($t_2 > t^+ > t_*$), то зависимости $w(t)$, как нетрудно проверить, для $t_4 > t^-$ имеет вид (3.2.4), (3.2.7) и при $t_4 < t^-$ - вид (3.2.4), (3.2.7), (3.2.11) для соответствующих интервалов нагрузки. Зависимости, $w(t)$, $s_1(t)$, $s_2(t)$, в таком случае для $t_4 > t^-$, ($t^+ = 1.13t_*$, $e_1 = 100$, $\alpha = 1.1$, $f = 1$, $e_{k1} = 70$, $\omega^2 = 1/16$), приведены, соответственно, кривыми, $A_2B_2C_2$, $D_2E_2F_2$, $G_2K_2L_2$, и при $t_4 \leq t^-$, ($t^+ = 1.13t_*$, $e_1 = 100$, $\alpha = 10$, $e_{k1} = 70$, $f = 1$, $\omega^2 = 1/16$), - кривыми, $A_3B_3C_3$, $D_3E_3F_3$, $G_3K_3L_3$, на рис. 3.8, 3.9.

В любом из рассмотренных случаев при нагрузке t^+ имеет место разветвление решений; кроме полученных выше зависимостей $w(t)$ существует зависимость $w(t)$, обусловленная разгрузкой в обеих полках, режимы B_iE_i , ($k_i = m_i = 0$, $n_i = 1$):

$$w = w_3 \frac{(t_2 - t^-)}{(t_2 - t)}.$$

Приведенное рассмотрение процесса выпучивания стержня, выполненного из материалов с пропорциональными диаграммами и линей-

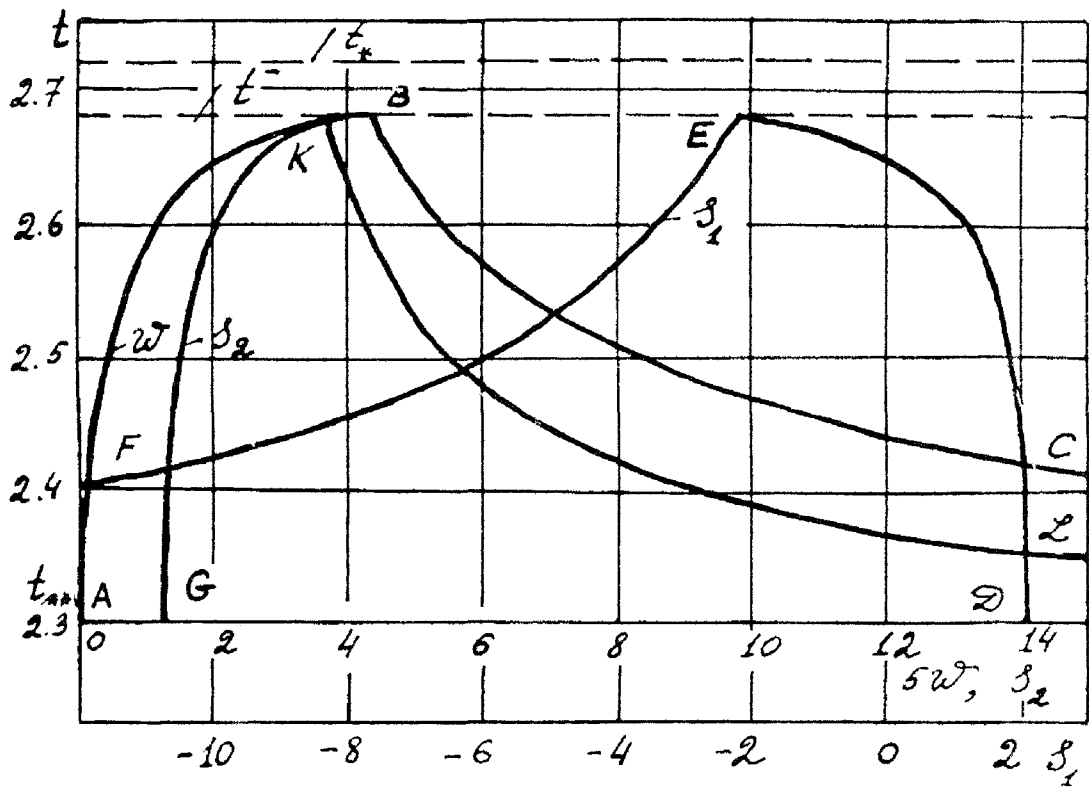


Рис. 3.6.

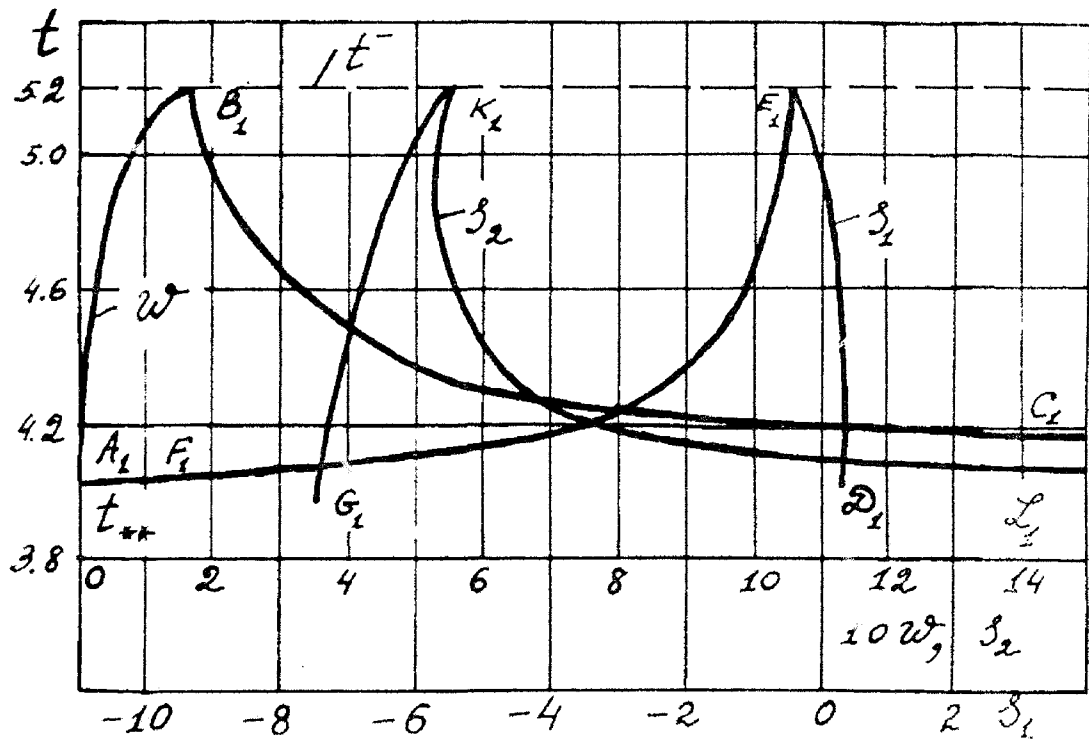


Рис. 3.7.

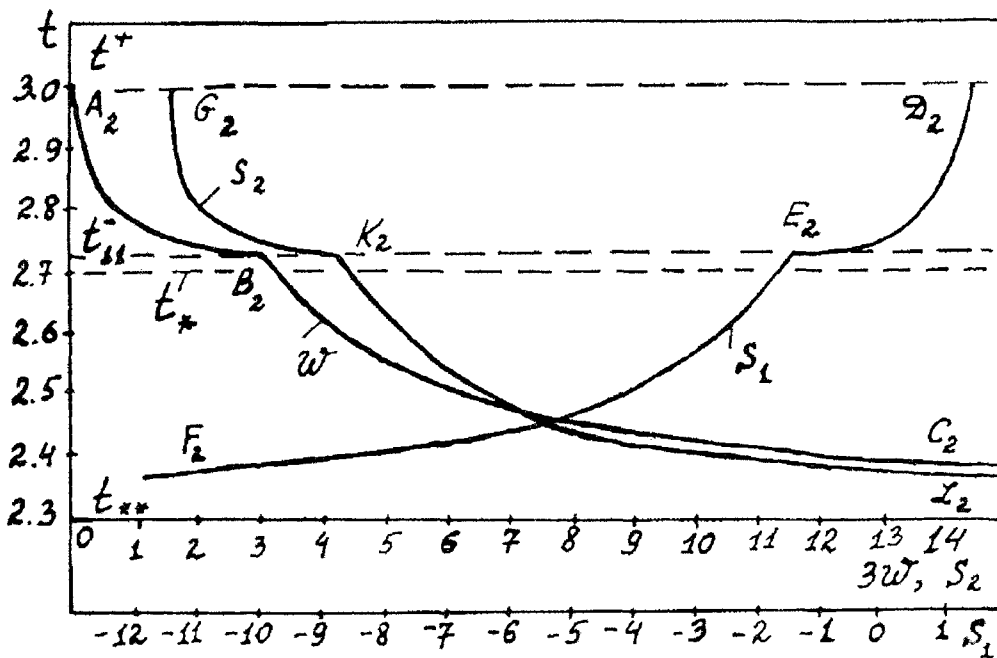


Рис. 3.8.

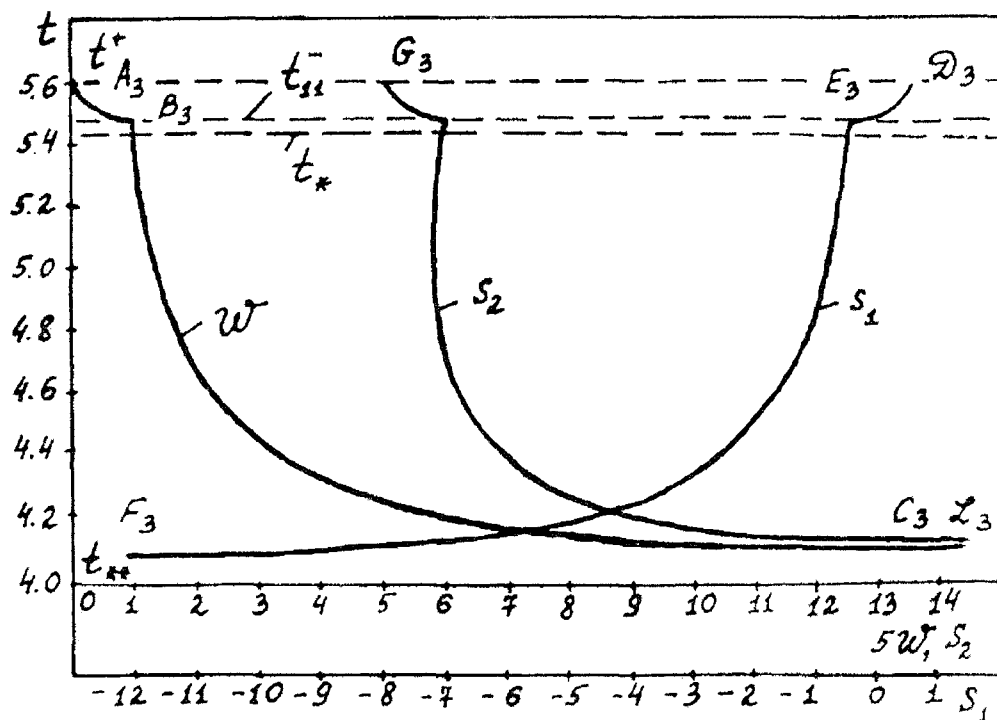


Рис. 3.9.

ным упрочнением на основе линейного уравнения совместности деформаций (3.1.6') показывает, что выпучивание возможно для любого t^+ в интервале $t_{**} \leq t^+ \leq t_2$. Если справедливы неравенства $t_{**} \leq t^+ \leq t_*$, то оно происходит с возрастанием нагрузки в интервале $t^+ \leq t \leq t^-$ и с уменьшением нагрузки в интервале $t_{**} \leq t < t^-$. Если же выполняются неравенства $t_* \leq t^+ \leq t_2$, то выпучивание возможно только при уменьшающейся нагрузке в интервале $t_{**} \leq t \leq t^+$. Прогиб $w(t)$ монотонно увеличивается от нуля до бесконечности и напряжение в первой полке $s_1(t)$ монотонно уменьшается от значения, соответствующего началу разгрузки до $(-\infty)$. Напряжение во второй полке $s_2(t)$ в случае выполнения неравенства $t_4 > t^-$ монотонно увеличивается от значения, соответствующего началу вторичных пластических деформаций в первой полке, до бесконечности, а в случае выполнения неравенства $t_4 < t^-$ оно, в отличие от однородных стержней [190], изменяется немонотонно и имеет характерные зависимости $s_2(t)$ (уменьшение напряжения с увеличением прогиба), показанные кривыми, $G_1 K_1 L_1$, $G_3 K_3 L_3$, на рис. 3.7, 3.9.

Проведенный анализ равновесия сжатого стержня с пропорциональными диаграммами аналогичен анализу, выполненному Ф.Шенли [24] и Я.Г.Пановко [190] для однородных стержней. Следует отметить, что в выражениях производных, $s'_1(t)$, s'_2 , (3.2.5), являющихся основополагающими при выяснении условий выпучивания стержня, не содержится явно нагрузка t_1 , соответствующая переходу полков в пластическое состояние. Это происходит вследствие того, что данный анализ не учитывает влияние на поведение стержня геометрической и физической нелинейности реальных законов пластичности и уравнения совместности деформаций. Поэтому из равенств (3.2.5) также следует, что в случае выполнения неравенства $t_2 > t_1 > t_{**}$, выпучивание упруго-устойчивого стержня начинается с нагрузки $t^+ = t_1$.

Таким образом, наименьшая нагрузка, при которой впервые возможно выпучивание стержня с пропорциональными диаграммами в случае выполнения неравенства $t_{**} > t_1$ равна касательно-модульной нагрузке t_{**} , а в случае выполнения неравенств $t_2 \geq t_1 \geq t_*$ - нагрузке t_1 , соответствующей переходу полков в пластическое состояние.

В заключение настоящего раздела заметим, что критическую нагрузку t_{**} неоднородного стержня нетрудно оценить с помощью касательно-модульных критических нагрузок стержней с пропорциональными диаграммами, полученными перестроением реальных диаграмм [34]. Так, заменяя реальную диаграмму материала первой полки пропорциональной по сравнению с диаграммой материала второй полки с коэффициентом $\alpha = E_2/E_1$ и определяя критическую нагрузку, получим,

$$t_{k1} = \omega^2 e_{k2} / (1 + \alpha f). \quad (3.2.13)$$

Перестраивая диаграмму материала второй полки пропорционально первой с коэффициентом α и определяя критическую нагрузку, найдем,

$$t_{k2} = \omega^2 e_{k1} \alpha / (1 + \alpha f). \quad (3.2.14)$$

Сравнивая критическую нагрузку t_{**} с критическими нагрузками (3.2.13)-(3.2.14), находим:

$$t_{k2} \leq t_{**} \leq t_{k1}, \quad \text{если } E_{k2}/E_{k1} \geq \alpha;$$

$$t_{k1} \leq t_{**} \leq t_{k2}, \quad \text{если } E_{k2}/E_{k1} \leq \alpha.$$

3.3. Об устойчивости неоднородных стержней с учетом геометрической нелинейности и малых возмущений

Рассмотрим равновесие стержня с пропорциональными диаграммами на основе нелинейного уравнения совместности деформаций (3.1.6), оставив прежними предположения о физических законах деформирования в полках, (3.1.5). Предполагая обе полки упруго-устойчивого стержня пластическими, из выражений, (3.1.5)-(3.1.7), (3.2.2) получим:

$$F \equiv \omega t - t_{**} w / (1 - r^2 w^2)^{1/2} = 0. \quad (3.3.1)$$

Определим при каких значениях нагрузки происходит ветвление решений уравнения (3.3.1), то есть при каких значениях нагрузки имеют место отклоненные формы равновесия. Воспользовавшись условием

$$\left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{w=0} = 0$$

найдем $t = t_{**}$, то есть ветвление решений уравнения (3.3.1) происходит при касательно-модульной критической нагрузке. Из уравнения (3.3.1) для ветвей отклоненных форм равновесия получим выражение:

$$w = \pm \frac{1}{rt} \sqrt{t^2 - t_{**}^2}. \quad (3.3.2)$$

Вычислив производные, $s'_1(t)$, $s'_2(t)$, в соответствии с выражениями (3.1.7) и (3.3.2) находим, что для $t = t_{**}$, $\text{sign } s'_1(t_{**}) = -\text{sign } s'_2(t_{**})$. Следовательно, ветви отклоненных форм равновесия (3.3.2) не реализуются, так как в одной из полк не выполняется предполагаемый закон пластической догрузки. Нетрудно убедиться на основании равенств, (3.1.5)-(3.1.7), что отклоненные формы равновесия упругоустойчивого стержня не существуют и в том случае, когда в обеих полках происходит разгрузка.

Предположим, что отклонение стержня от прямолинейного состояния происходит с разгрузкой в первой полке и пластической догрузкой во второй полке, режимы B_1E_1 ($k_1 = m_1 = 0$, $n_1 = 1$) и A_2B_2 ($k_2 = 1$, $m_2 = n_2 = 0$). Тогда, воспользовавшись равенствами (3.1.5)-(3.1.7) и (3.3.1), для определения абсолютной величины прогиба получим уравнение:

$$F_1 \equiv A_1(t - t^+) + |w|t - t_*|w|/\sqrt{1 - r^2w^2} = 0, \quad (3.3.3)$$

где величина A_1 определена равенством (3.2.4).

Если отклонение стержня происходит с разгрузкой во второй полке и догрузкой в первой полке, режимы A_1B_1 ($k_1 = 1$, $m_1 = n_1 = 0$) и B_2E_2 ($k_2 = m_2 = 0$, $n_2 = 1$), то зависимость абсолютной величины прогиба от нагрузки получим из уравнения:

$$F_2 \equiv A_2(t - t^+) + |w|t - t_{***}|w|/\sqrt{1 - r^2w^2} = 0, \quad (3.3.4)$$

где

$$A_2 = \frac{\mu_2 h_1}{\beta + \mu_1 f}.$$

Нагрузка t^+ , как и ранее (раздел 3.2), соответствует началу разгрузки в одной из полк, причем в случае разгрузки в первой полке $w = |w|$

и в случае разгрузки во второй полке $w = -|w|$. Отклонение стержня может происходить в любую сторону ($w < 0$ или $w > 0$), поэтому уравнение для определения зависимости $|w|(t)$ запишем в виде:

$$\Phi(w, t) \equiv F_1 F_2 = 0. \quad (3.3.5)$$

Из уравнения (3.3.5) следует, что $w = 0$ является решением при $t = t^+$. Вычислив частную производную $\partial\Phi(0, t)/\partial|w|$, получим выражение:

$$\left. \frac{\partial\Phi(0, t)}{\partial|w|} \right|_{|w|=0} = (t - t^+)[A_2(t - t_*) + A_1(t - t_{***})]. \quad (3.3.6)$$

Из выражения (3.3.6) следует, что $\partial\Phi(0, t)/\partial|w| = 0$, если $t = t^+$. Таким образом при нагрузке $t = t^+$ происходит ветвление решений уравнения (3.3.5). Для определения решений уравнения (3.3.5) воспользуемся диаграммой Ньютона [193].

Рассмотрим в уравнении (3.3.5) сомножитель $F_1 = 0$, представив его в следующей форме:

$$F_1(w, \lambda) = A_1\lambda + w\lambda + wt^+ - t_* \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n = 0. \quad (3.3.7)$$

где $\lambda = t - t^+$ и произведено разложение в ряд функции G ,

$$G = |w|/\sqrt{1 - r^2 w^2}.$$

Диаграмма Ньютона, соответствующая уравнению (3.3.7), приведена на рис. 3.10, ($y = \text{ord } F_1(w, 0)$, $x = \text{ord } F_1(0, \lambda)$).

Ограничиваясь главными членами разложения решений уравнения (3.3.7), для ветвей форм равновесия получим выражения:

$$w_1 = \frac{A_1\lambda}{(t_* - t^+)} + 0(\lambda); \quad w_2 = 0; \quad (3.3.8)$$

$$w_{3,4} = \pm \frac{1}{rt^+} \sqrt{t^{+2} - t_*^2} + 0 \left(\pm \frac{1}{rt^+} \sqrt{t^{+2} - t_*^2} \right).$$

Из четырех ветвей (3.3.8) только одна ветвь w_1 является малым решением уравнения (3.3.5). При этом, как нетрудно проверить, главный

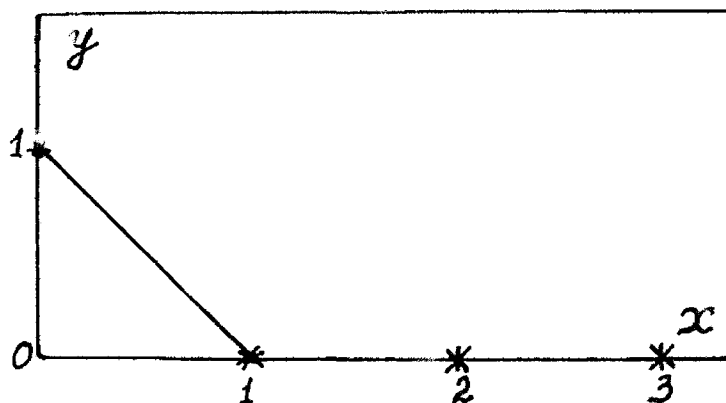


Рис. 3.10.

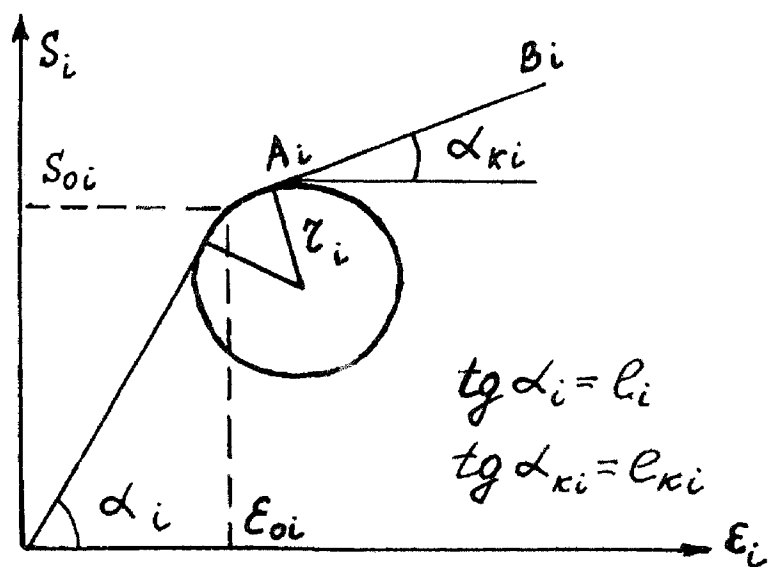


Рис. 3.11.

член разложения w_1 совпадает с главным членом разложения зависимости $w(t)$, полученной на основе линеаризованного уравнения совместности деформаций (3.1.6'). Следовательно, выводы относительно условий выпучивания стержня, полученные в разделе 3.2, остаются правильными и с точки зрения геометрически нелинейной теории. Следующие четыре ветви решения уравнения (3.3.5) получим, рассматривая сомножитель $F_2 = 0$, при этом имеем:

$$w_5 = -\frac{A_2 \lambda}{(t_{***} - t^+)} + 0(\lambda); \quad w_6 = 0; \quad (3.3.9)$$

$$w_{7,8} = \pm \frac{1}{rt^+} \sqrt{t^{+2} - t_{***}^2} + 0 \left(\pm \frac{1}{rt^+} \sqrt{t^{+2} - t_{***}^2} \right).$$

Здесь, так же как и в (3.3.8), только одна ветвь w_5 является малым решением уравнения (3.3.5): главный член разложения w_5 совпадает с главным членом разложения зависимости $w(t)$, полученной в результате аналогичного анализа, проведенного в разделе 3.2 на основе линеаризованного уравнения совместности деформаций (3.1.6'). Выпучивание сжатого стержня, как по линейной так и геометрически нелинейной теории, начинается с возрастанием нагрузки, если $t^+ \geq \max(t_{**}, t_1)$, и с уменьшением нагрузки, в случае выполнения неравенства $t_* < t^+ \leq t_2$ в одну сторону, а в случае справедливости неравенства $t_{***} < t^+ \leq t_2$ – в другую сторону; причем t_* и t_{***} – критические нагрузки Кармана. Если справедливо неравенство $t^+ > t_2$, то статически равновесные формы сжатого идеализованного стержня не существуют.

Обратимся к вопросу о влиянии малых возмущений на равновесные состояния сжатого стержня. Пусть на сжатый стержень действует поперечное возмущение $p(\lambda)$. Тогда уравнения равновесия идеализованного стержня (рис.3.1) имеют вид:

$$s_1 = f[t(h_2 - w) - p(\lambda)]; \quad s_2 = t(h_1 - w) + p(\lambda). \quad (3.3.10)$$

Здесь $p(\lambda)$ – малое поперечное возмущение, то есть такое возмущение, для которого $|p(\lambda)|$ и $|p'(\lambda)|$ являются сколько угодно малыми величинами.

Анализ возмущенных равновесных состояний сжатого стержня проведем на основе линейного уравнения совместности деформаций (3.1.6'). В предположении малости прогибов такой анализ является правильным и с точки зрения геометрически нелинейной теории. Предположим, что возмущение приложено при сжимающей нагрузке $t^+ \neq t_{**}$, для которой обе полки находятся в пластическом состоянии, ($k_i = 1$, $m_i = n_i = 0$). Тогда, воспользовавшись равенствами (3.1.5) – (3.1.6'), (3.3.10) получим:

$$w = \frac{p}{(t_{**} - t)}. \quad (3.3.11)$$

Определяя с помощью равенств (3.3.10)–(3.3.11) производные, $s'_1(t)$, $s'_2(t)$, находим:

$$\begin{aligned} s'_1(t) &= \frac{f}{(t_{**} - t)^2} \{ (h_2 - p')(t_{**} - t)^2 - p(t_{**} - t) - \\ &\quad - t[p'(t_{**} - t) + p] \}; \\ s'_2(t) &= \frac{1}{(t_{**} - t)^2} \{ (h_1 + p')(t_{**} - t)_2 + p(t_{**} - t) + \\ &\quad + t[p'(t_{**} - t) + p] \}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Из выражений (3.3.11) и (3.3.12) следует, что в случае, когда удовлетворяется неравенство $t^+ < \max(t_{**}, t_1)$ выпучивание происходит при возрастающей сжимающей нагрузке $t_{**} > t > t^+$ и вынуждающем возмущении, то есть таком возмущении, когда

$$\text{sign } p = \text{sign } w.$$

В таком случае в обеих полках происходит пластическая догрузка. С возрастанием сжимающей нагрузки до любого значения меньшего, чем касательно-модульная нагрузка t_{**} , всегда можно найти достаточно малое вынуждающее возмущение, при котором в процессе нагружения стержень, согласно равенству (3.3.11), остается в сколь угодно близком к прямолинейному состоянию. Касательно-модульную нагрузку t_{**}

можно назвать критической в том смысле, что для нее не существуют возмущения, для которого стержень сохраняет равновесное состояние, сколь угодно близкое к прямолинейному.

Зададим малое возмущение следующим выражением:

$$p = p_0(-\lambda + q_0), \quad (p_0, q_0 = \text{const} > 0). \quad (3.3.13)$$

Тогда с возрастанием нагрузки, соответствующим пределам $0 \leq \lambda \leq q_0$, как следует из выражения (3.3.11), происходит сначала увеличение прогиба, а затем его уменьшение и при $\lambda = q_0$ выпрямление стержня. Если выполняется неравенство, $t_+ > \max(t_{**}, t_1)$, то выпучивание стержня с пластической догрузкой в обеих полках происходит с возрастающей нагрузкой и удерживающим возмущением, то есть когда

$$\text{sign } p = -\text{sign } w.$$

Если выполняется неравенство, $\max(t_{**}, t_1) \leq t^+ < t_*$, то возможно выпучивание при возрастающей нагрузке с разгрузкой в первой полке и пластической догрузкой – во второй полке. Действительно, в таком случае, в соответствии с равенствами, (3.1.5), (3.1.6'), (3.3.10), для определения прогиба и производных получим выражения:

$$\begin{aligned} w &= \frac{A_1(t - t^+)}{(t_* - t)} + \frac{p(\lambda)}{(t_* - t)}; \\ s'_1(t) &= \bar{s}'_1(t) - \frac{ft[p'(\lambda)(t_* - t) + p(\lambda)]}{(t_* - t)^2} - \frac{fp(\lambda)}{(t_* - t)}; \\ s'_2(t) &= \bar{s}'_2(t) - \frac{t[p'(\lambda)(t_* - t) + p(\lambda)]}{(t_* - t)^2} + \frac{p(\lambda)}{(t_* - t)}. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Здесь $\bar{s}'_1(t)$ и $\bar{s}'_2(t)$ определены, соответственно, выражениями $s'_1(t)$ и $s'_2(t)$ в равенствах (3.2.5). Сравнивая равенства (3.3.14), (3.2.4) и (3.2.5), можно заключить, что с возрастанием нагрузки в первой полке выполняются условия разгрузки и во второй – условие пластической догрузки. Этот процесс выпучивания имеет место не только всегда при вынуждающем возмущении, но и при достаточно малом удерживающем возмущении. Аналогично, с помощью равенств (3.3.14), (3.2.4)

и (3.2.5), нетрудно показать, что при малых возмущениях и справедливости неравенств, $t_* < t^+ \leq t_0$, выпучивание происходит с уменьшающейся нагрузкой, причем возмущенные формы равновесия сколь угодно мало отличаются от форм равновесия в отсутствие возмущений. Если выполняется неравенство $t^+ > t_0$, то статически равновесные формы с разгрузкой в первой полке и пластической догрузкой во второй полке не реализуются. В последнем случае выпучивание возможно только при удерживающем возмущении.

В результате проведенного анализа, с учетом геометрической нелинейности уравнения совместности деформаций и малых возмущений, можно заключить следующее. Сжимающая нагрузка t^+ , ($\max(t_{**}, t_1) \leq t^+ \leq t_0$), является нагрузкой ветвления равновесных форм. С точки зрения, как линейной так и геометрически нелинейной теории, существует одна ветвь отклоненных равновесных форм при $w > 0$ и одна — когда $w < 0$. При этом главные члены разложения зависимостей $w(\lambda)$, полученных по линейной и нелинейной теориям совпадают. Выводы, относительно условий выпучивания сжатого стержня, сформулированные в разделе 3.2 на основе линейной теории остаются правильными и с точки зрения геометрически нелинейной теории. Анализ возмущенных равновесных состояний упруго-устойчивого сжатого стержня показывает, что при нагрузке t^+ в пределах $0 \leq t^+ < \max(t_{**}, t_1)$ прямолинейная форма равновесия устойчива в том смысле, что при сколь угодно малом поперечном вынуждающем возмущении она сколь угодно мало изменяется с возрастанием сжимающего усилия в достаточно малой окрестности нагрузки t^+ . В этих же пределах изменения нагрузки устойчива и ветвь отклоненных форм равновесия с разгрузкой в одной полке и пластической догрузкой — в другой полке, если такая ветвь реализуется. Причиной возникновения такой ветви может быть достаточно большое поперечное возмущение. Если нагрузка t^+ заключена в пределах $t_0 \geq t^+ > \max(t_{**}, t_1)$, то устойчива только ветвь отклоненных форм равновесия с разгрузкой в одной полке и пластической догрузкой — в другой полке, так как равновесные состояния стержня, близкие к прямолинейному, с пластической догрузкой в обеих полках возможны только при удерживающем возмущении. В

случае, когда $t^+ > t_0$, устойчивые ветви равновесных форм сжатого стержня отсутствуют, так как они возможны только при удерживающем возмущении, причем с пластической догрузкой в обеих полках. В условиях продолжающегося сжатия возможны такие малые возмущения, при которых с пластической догрузкой в обеих полках сначала происходит отклонение, а затем выпрямление стержня.

3.4. Об устойчивости и выпучивании неоднородных стержней с учетом физической нелинейности и гладкости диаграмм

Предыдущий анализ основан на линейных соотношениях между напряжениями и деформациями. При этом на пределе пропорциональности диаграмма имеет угловую точку, рис. 3.2. В действительности, в большинстве случаев, реальные диаграммы материалов не имеют угловых точек и являются гладкими кривыми [140]. Поэтому необходимо оценить правомерность принятых ранее предположений о кусочно-линейности диаграмм, а также выявить дополнительные особенности поведения стержней за пределом упругости.

Допустим, что кусочно-линейные диаграммы материалов полков в окрестности предела текучести (пропорциональности) имеют переходный участок с радиусом закругления r_i с переменными s_i и ε_i , рис. 3.11. Тогда зависимости между напряжениями и деформациями для упругих полков имеют вид,

$$s_i = e_i \varepsilon_i; \quad (3.4.1)$$

для пластических полков, (переходные участки диаграмм),-

$$s_i = s_i^0 + \frac{r_i}{\sqrt{1 + e_{ki}^2}}; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i^0 - \frac{r_i e_{ki}}{\sqrt{1 + e_{ki}^2}}, \quad (3.4.2)$$

где

$$s_i^0 = s_{i0} - \frac{r_i}{\sqrt{(1 + e_i^2)}}; \quad \varepsilon_i^0 = \varepsilon_{i0} + \frac{r_i e_i}{\sqrt{1 + e_i^2}};$$

для разгружающихся полок —

$$s_i = r_i \left[\frac{(1 + e_i e_{ki}^*)}{\sqrt{1 + e_{ki}^{*2}}} - \sqrt{1 + e_i^2} \right] + e_i \varepsilon_i. \quad (3.4.3)$$

Здесь e_{ki}^* — касательные модули в начале разгрузки, e_{ki} — текущие касательные модули. Зависимости между напряжениями и деформациями в пластических полках на линейных участках $A_i B_i$, (рис. 3.11) имеют вид (3.1.5).

Рассмотрим процесс сжатия упруго-устойчивого неоднородного стержня в предположении, что $s_{10} \gg s_{20}/\alpha$. В этом случае при $t = t_1$ вторая полка переходит в пластическое состояние, а первая — остается упругой. Воспользовавшись выражениями, (3.1.6') — (3.1.7), (3.4.1) — (3.4.2), для нагрузки $t > t_1$ и прогиба w , в зависимости от касательного модуля второй полки e_{k2} , получим выражения:

$$\begin{aligned} t &= p_3 - \sqrt{p_3^2 - q_3}; \\ w &= \frac{1}{\omega^2 e_1 - f t} \left[e_1 \left(\frac{1}{e_2} + \frac{r_2 e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_2 e_{k2} e_1}{\sqrt{1 + e_{k2}^2}} - f t h_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{1}{2} \left[t_0 + \frac{e_1}{f} \left(\frac{1}{e_2} + \frac{r_2 e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} - \frac{r_2 e_{k2}}{\sqrt{1 + e_{k2}^2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 1 - \frac{r_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} + \frac{r_2}{\sqrt{1 + e_{k2}^2}} \right]; \\ q_3 &= t_1 t_0 \left(1 - \frac{r_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} + \frac{r_2}{\sqrt{1 + e_{k2}^2}} \right). \end{aligned}$$

Из выражения (3.4.4) для $t(e_{k2})$ следует, что текущая нагрузка t стремится к нагрузке t_1 , соответствующей переходу второй полки в пластическое состояние, определенной равенством (3.1.3), при $r_2 \rightarrow 0$ и любом e_{k2} в пределах $0 \leq e_{k2} < e_2$. Определим величину нагрузки t

для $e_{k2} = 0$ и малого r_2 . Разлагая функцию $t(e_{k2})$ в ряд по степеням r_2 и удерживая два члена ряда, получим выражение:

$$t = t_0 = t_1(1 - cr_2). \quad (3.4.5)$$

Здесь

$$c = \frac{1}{(t_2 - t_1)\alpha f \sqrt{1 + e_2^2}} [e_2^2 - (1 + \alpha f)(\sqrt{1 + e_2^2} - 1)].$$

Так как отношение модуля упругости материала полки к пределу текучести практически всегда много больше единицы ($e_2 \gg 1$), то из выражения (3.4.5) следует, что при $f \cong \alpha \cong 1$ нагрузка t_0 , соответствующая нулевому касательному модулю, $e_{k2} = 0$, всегда меньше нагрузки t_1 начала выпучивания. Следовательно, если касательный модуль линейного участка диаграммы $e_{k2} = 0$, (рис. 3.11), то, при выполнении неравенства ≥ 0 и для сколь угодно малого r_2 , критическая нагрузка t_m , (t_m — максимум нагрузки), сколь угодно мало отличается от нагрузки t_1 , соответствующей переходу второй полки в пластическое состояние. В таком случае $t_m \rightarrow t_1$, если $r_2 \rightarrow 0$. Зависимости $t(e_{k2})$ и $w(t)$ в случае конечного r_2 , когда максимум нагрузки достигается раньше, чем точка напряжений выйдет на линейный участок диаграммы, приведены кривыми, t , w , ($e_1 = 100$, $\alpha = 1.1$, $r_2 = 0.2$, $f = 1$, $s_{20} = 1$, $\omega^2 = 1/16$), на рис. 3.12.

Определим, какой должна быть нелинейная часть диаграммы материала второй полки для того, чтобы упруго-устойчивый стержень оставался прямым и после перехода в пластическое состояние обеих полок, если нелинейная часть диаграммы материала первой полки имеет радиус закругления r_1 . Уравнение нелинейной части диаграммы первой полки (3.4.2) запишем в виде:

$$s_1 = s_1^0 + \sqrt{r_1^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0)^2}. \quad (3.4.6)$$

Из уравнений (3.1.6)-(3.1.7) следует, что для прямолинейного стержня $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ $s_2 = \alpha s_1$; тогда, умножая равенство (3.4.6) на α , получим,

$$s_2 = \alpha s_1^0 + \alpha \sqrt{r_1^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0)^2}. \quad (3.4.7)$$

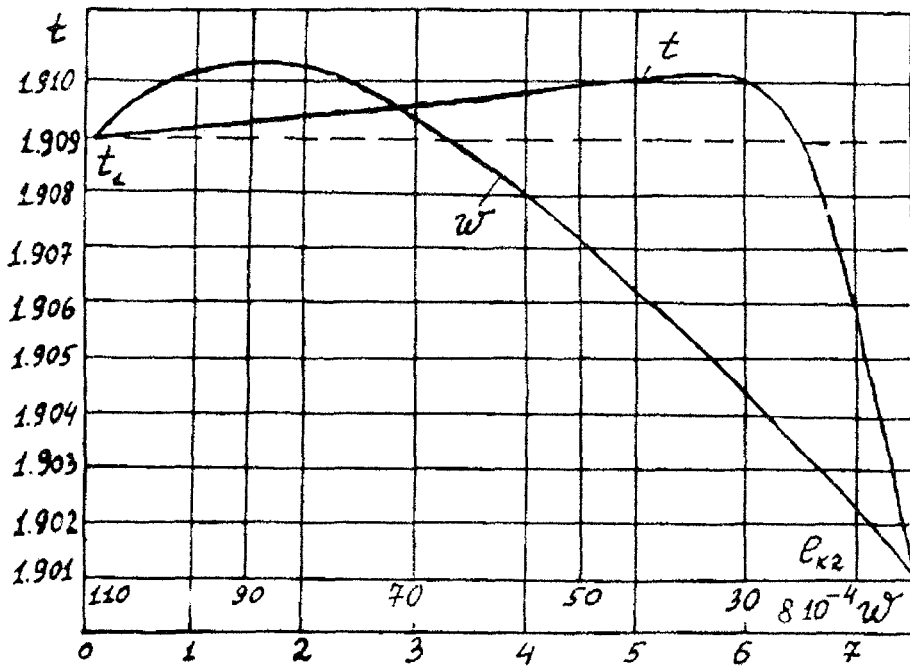


Рис. 3.12.

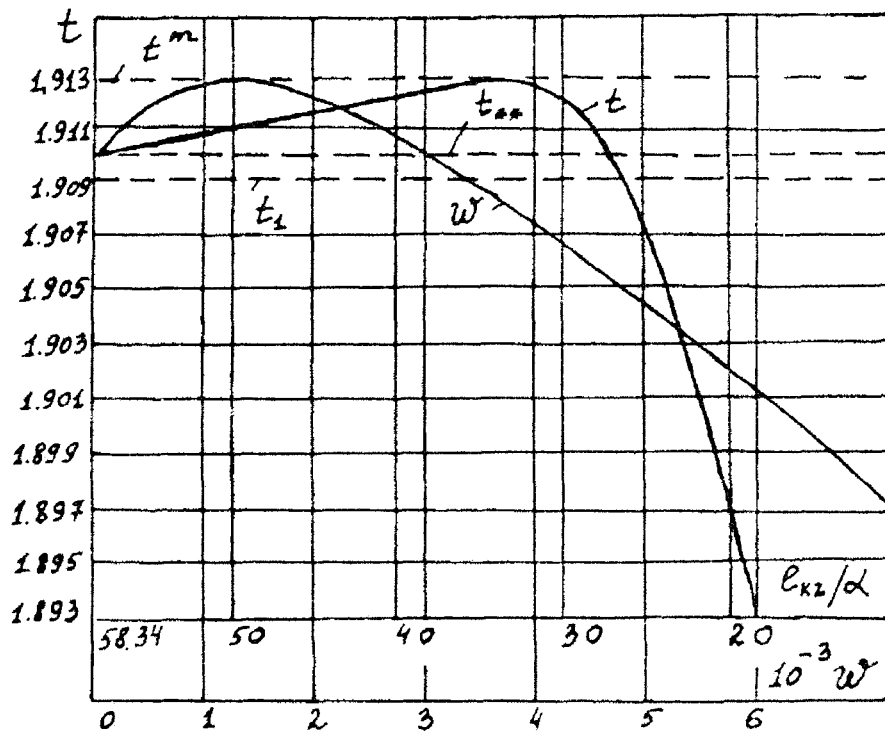


Рис. 3.13.

Нетрудно проверить, что для диаграмм (3.4.6) и (3.4.7) выполняются условия пропорциональности, полученные ранее на основе линейных соотношений (раздел 3.2). Таким образом, если диаграмма одной полки имеет радиус закругления r_1 , то пропорциональная ей диаграмма второй полки имеет форму эллипса.

Найдем условия, при которых возможно выпучивание сжатого пластического стержня с нелинейными пропорциональными диаграммами. Предположим, что выпучивание происходит при нагрузке t^+ , соответствующей началу разгрузки в первой полке; при этом соотношения между напряжениями и деформациями в первой полке имеют вид (3.4.3), а во второй – вид (3.4.2). Воспользовавшись уравнениями, (3.4.2)-(3.4.3), (3.1.6)-(3.1.7), для производной $s'_1(t)$ получим выражение:

$$\begin{aligned} s'_1(t) = \frac{f}{G_1} \{ \alpha e_{k1} \omega^4 e_1^2 h_2 + t^2 e_1 f - t \omega^2 e_1^2 + \\ + \alpha e_{k1} \omega^2 e_1 [e_1 (\varepsilon_{1*} - \varepsilon_2) - s_{1*}] \}, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

$$G_1 = (ft - \omega^2 e_1) [(e_1 + \alpha f e_{k1})t - \omega^2 \alpha e_1 e_{k1}].$$

Здесь s_{1*} – напряжение в первой полке, соответствующее началу разгрузки. Используя условие разгрузки $s'_1(t^+) = 0$ и условия, $\varepsilon_2(t^+) = \varepsilon_{1*}$, $e_{k1}(t^+) = e_{k1}^*$, из равенства (3.4.8) для касательно-модульной критической нагрузки t_{**} получим выражение:

$$t^+ = t_{**} = \frac{\omega^2 \alpha e_{k1}^*}{(1 + \alpha f)}. \quad (3.4.9)$$

Чтобы определить в выражении (3.4.9) неизвестную величину e_{k1}^* , воспользуемся уравнением нелинейной части диаграммы первой полки (3.4.2). Тогда, с учетом равенств, (3.4.9), (3.1.7), $w(t_{**}) = 0$, e_{k1}^* , имеем следующее уравнение:

$$\frac{\omega^2 h_1 e_{k1}^*}{(1 + \alpha f)} - s_{10} + \frac{r_1}{\sqrt{1 + e_1^2}} - \frac{r_1}{1 + e_{k1}^{*2}} = 0. \quad (3.4.10)$$

Из уравнения (3.4.10) следует, что при малом r_1 и нулевом значении касательного модуля линейного участка диаграммы касательно-

модульная нагрузка t_{**} мало отличается от величины нагрузки t_1 , соответствующей переходу полков в пластическое состояние и $t_{**} \rightarrow t_1$, если $r_1 \rightarrow 0$; кроме того, всегда $t_{**} > t_1$.

Нетрудно проверить с помощью равенств (3.1.7)-(3.1.8), что для производных, $s'_1(t^+)$, $s'_2(t^+)$, имеют место выражения в точности совпадающие с соответствующими выражениями, полученными разделе 3.2. Следовательно, с учетом неравенства $t_{**} > t_1$, выводы относительно условий выпучивания остаются правильными и с точки зрения физически-нелинейной теории.

С помощью уравнений, (3.4.1)-(3.4.3), (3.4.7), (3.1.6)-(3.1.7), для определения зависимостей $t(e_{k1})$ и $w(t)$, получим выражения:

$$\begin{aligned}
 t &= p_4 - \sqrt{p_4^2 - q_4}; \\
 w &= \frac{1}{g_2} \left(\frac{r_1 e_1 e_{k1}}{\sqrt{1 + e_{k1}^2}} - \frac{r_1 e_1 e_{k1}^*}{\sqrt{1 + e_{k1}^{*2}}} - s_{1*} + f t h_2 \right); \\
 p_4 &= \frac{1}{2f} \left(\omega^2 e_1 h_1 - \frac{r_1 e_{k1} e_1}{\sqrt{1 + e_{k1}^2}} + \frac{r_1 e_1 e_{k1}^*}{\sqrt{1 + e_{k1}^{*2}}} - \right. \\
 &\quad \left. - f h_2 t^+ \right) - \frac{\alpha s_1^0}{2} - \frac{\alpha r_1}{2\sqrt{1 + e_{k1}^2}}; \\
 q &= \frac{1}{f} \omega^2 e_1 \alpha \left(s_1^0 + \frac{r_1}{\sqrt{1 + e_{k1}^2}} \right);
 \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

где

$$G_2 = f t - \omega^2 e_1.$$

Графики зависимостей $t(e_{k1})$ и $w(t)$, (3.4.11), для случая, когда $t^+ = t_{**}$, приведены кривыми, t , w , ($\omega^2 = 1/16$, $e_1 = 100$, $\alpha = 1.1$, $s_{10} = 0.91$, $r_1 = 0.2$), на рис. 3.13.

Приведенные на последнем рисунке графики показывают, что нагрузка в зависимости от прогиба имеет максимум и уменьшение нагрузки происходит за счет уменьшения касательного модуля нелинейного участка диаграммы.

3.5. Об устойчивости упруго-пластического стержня при циклических нагружениях

При многократных нагружениях (особенно, с наличием перемен знака) поведение упруго-пластической системы существенно отличается от ее поведения в случае однократного нагружения. В некоторых условиях нагружения проявляется свойство конструктивной приспособляемости – деформация после нескольких циклов изменяется только упруго. Многочисленные вопросы, связанные с анализом упруго-пластического напряженного состояния конструкций при циклическом нагружении освещены в монографии [140]. Исследования устойчивости конструкций с циклическими нагружениями, по-видимому, не многочисленны [86]. На этом пути можно ожидать (в случае приспособляемости, когда после некоторого числа циклов нагружения пластические деформации возникать не будут) возможности увеличения критических нагрузок, поскольку критическая нагрузка Эйлера численно больше численных значений критических нагрузок типа Шенли или Кармана. В настоящем разделе вопрос об устойчивости упруго-пластического стержня при циклических нагружениях для простоты будет исследован на уже использованной в предыдущих разделах настоящей главы элементарной модели стержня, но с одинаковыми полками, рис. 3.14. Пусть F – площадь поперечного сечения каждой из несущих полок, H – расстояние между серединами полок, σ_0 , E , E_k , – соответственно, предел пропорциональности, модуль упругости и касательный модуль материалов полок, T – сжимающее усилие, линия действия которого отстоит на равных расстояниях от полок стержня, P – поперечная нагрузка. Выберем при $P = 0$ параметры стержня таковыми, чтобы с нагрузкой T он оставался упруго-устойчивым до перехода полок в пластическое состояние. Для этого потребуем выполнения следующего неравенства,

$$t_2 > t_1 = 2. \quad (3.5.1)$$

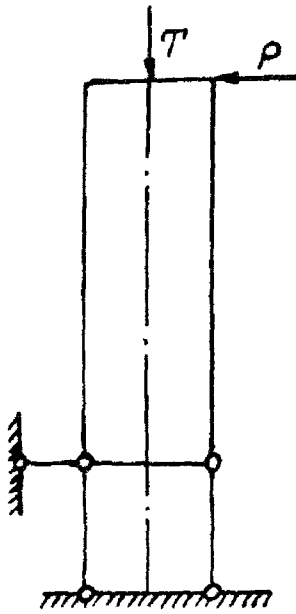


Рис. 3.14.

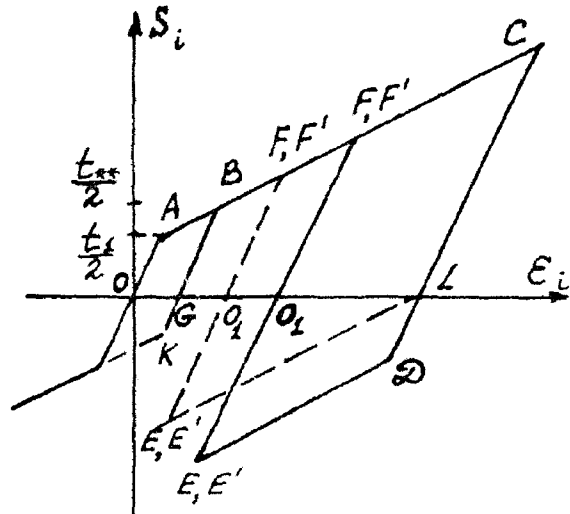


Рис. 3.15.

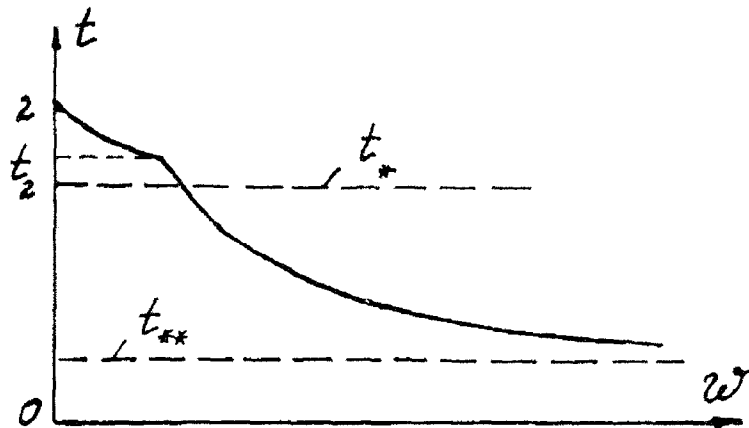


Рис. 3.16.

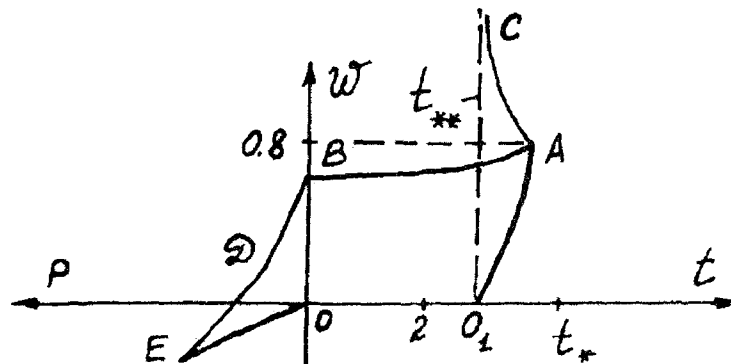


Рис. 3.17.

где

$$t_2 = \frac{\omega^2 e}{2}; \quad t_2 = \frac{T_2}{\sigma_0 F}; \quad t_1 = \frac{T_1}{\sigma_0 F}; \quad \omega^2 = \frac{H^2}{Ll}; \quad e = \frac{E}{\sigma_0};$$

T_2 – критическая нагрузка Эйлера, при величине нагрузки $t = t_1 = 2$, ($t = T/(\sigma_0 F)$), полки стержня переходят в пластическое состояние.

Допустим, что упругопластические материалы полок обладают линейным упрочнением, рис. 3.15. Тогда закон связи между напряжениями σ_i , ($i = 1, 2$) и деформациями ε_i можно записать в виде [140]:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ni} + \frac{s_i}{e} + k_i \mu (s_i - s_{ni}^{\pm} \text{sign } s_i); \quad (3.5.2)$$

$$(s_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}; \quad \mu = \frac{e - e_k}{ee_k}; \quad e_k = \frac{E_k}{\sigma_0}; \quad s_{ni}^{\pm} = \frac{\sigma_{ni}^{\pm}}{\sigma_0})$$

Здесь

$$\varepsilon_{ni} = \varepsilon_{n-1i} \pm (s_{ni}^{\pm} - s_{n-1i}^{\pm});$$

в пластическом состоянии $k_i = 1$, а в упругом состоянии $k_i = 0$; величины ε_{ni} – остаточные деформации, σ_{ni}^{\pm} – текущие пределы пропорциональности при сжатии (+) и растяжении (–) на n -ом упругом участке диаграммы растяжения-сжатия, рис. 3.15. В дальнейшем сжимающие напряжения, как и раньше, считаются положительными.

Уравнение совместности деформаций имеет вид (3.1.6'):

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \omega^2 w; \quad \varepsilon_i = \frac{l_i - l}{l}; \quad w = \frac{W}{H}. \quad (3.5.3)$$

Здесь l_i – длины полок после деформации.

Пользуясь уравнениями равновесия стержня,

$$s_1 = t(1/2 - w) + p, \quad s_2 = t(1/2 + w) - p, \quad p = PL/(2\sigma_0 FH), \quad (3.5.4)$$

а также законом деформирования (3.5.2) и уравнением совместности деформаций (3.5.3), получим:

$$w = \frac{c + at}{\omega^2 - bt} - \frac{dp}{\omega^2 - bt}. \quad (3.5.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\mu(k_2 - k_1); & b &= \frac{2}{e} + \mu(k_2 - k_1); \\ c &= \varepsilon_{n2} - \varepsilon_{n1} \pm \mu(k_1 s_{n1}^{\pm} - k_2 s_{n2}^{\pm}); \\ d &= \frac{2}{e} + \mu(k_2 + k_1). \end{aligned}$$

Из равенства (3.5.5) в случае $k_1 = k_2 = \varepsilon_{n1} = \varepsilon_{n2} = 0$, при условии $w \neq 0$, получим критическую нагрузку Эйлера t_0 рассматриваемой модели стержня. При циклическом нагружении в пределах упругости эта нагрузка Эйлера остается неизменной.

Если параметры стержня таковы, что выполняется неравенство (3.5.1), то на первом цикле нагружения стержень переходит в пластическое состояние до достижения нагрузки Эйлера. Для таких стержней рассмотрим далее два возможных цикла нагружения. Первый цикл — типа нагружение—разгрузка с удержанием прямолинейной формы стержня с помощью дополнительных связей, $P = 0$. Второй цикл — соответствует нагружению продольной силой T с выпучиванием стержня, затем выпрямление стержня поперечной нагрузкой P и повторений этого процесса.

А) Рассмотрим первый случай ($P = 0$). Поведение рассматриваемой модели стержня на первоначальном участке нагружения сжатием было исследовано в работах [194, 192, 190] и, как частный случай стержня с пропорциональными диаграммами материалов полук ($\alpha = 1$), в предыдущих разделах настоящей главы, где установлено, что в интервале сжимающих нагрузок,

$$2 \leq t \leq t_{**}, \quad (t_{**} = \omega^2 \nu / 2, \quad \nu = E_k / E),$$

стержень деформируется пластически, сохраняя прямолинейную невыпученную форму. При нагрузках выше t_{**} свободный стержень может иметь отклоненную форму равновесия.

Предположим теперь, что с увеличением сжимающей нагрузки от значения t_{**} до некоторого значения t^+ стержень сохраняет невыпученное состояние за счет наложения дополнительных связей, а затем

освобождается. Тогда при изменении нагрузки от значения t^+ нетрудно убедиться, что в отклоненном состоянии одна из несущих полок будет догружаться, а другая – разгружаться. (Предположение об одновременной догрузке или разгрузке обеих полок при принятом законе деформирования ведет к нарушению уравнения равновесия или уравнения совместности деформаций). Полагая, в соответствии с этим, в (3.5.5) $k_1 = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = 0$, $k_2 = s_{12} = 1$, получим:

$$w = \frac{A(t - t^+)}{(t_* - t)}, \quad (3.5.6)$$

где

$$A = \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)}, \quad t_* = \frac{\omega^2 \nu e}{1 + \nu}, \quad \nu = e_k/e, \quad (3.5.7)$$

причем $t_{**} \leq t_* \leq t_o$. Из равенств (3.5.4) и (3.5.6) при $p = 0$ находим:

$$s'_1(t) = \frac{2e(t_* - t)^2 - (e - e_k)t_*(t_* - t^+)}{2(e + e_k)(t_* - t)^2}; \quad (3.5.8)$$

$$s'_2(t) = 1 - s'_1(t);$$

$$s'_1(t^+) = -\frac{(t^+ - t_{**})}{(1 + \nu)(t_* - t^+)}; \quad s'_2(t^+) = \frac{\nu(t_o - t^+)}{(1 + \nu)(t_* - t^+)}.$$

Штрих обозначает производную по t .

Выражение (3.5.6) имеет смысл для тех значений t , при которых $s'_1(t) \leq 0$, $s'_2(t) \geq 0$. Из равенств (3.5.7)-(3.5.9) видно, что наименьшее значение t^+ , для которого это возможно, равно $t^+ = t_{**}$. Если $t_{**} \leq t^+ \leq t_*$, то это требование выполняется, когда t монотонно увеличивается от значения t^+ (выпучивание происходит с возрастанием нагрузки). Если $t_* < t^+ \leq t_o$, то выпучивание происходит с уменьшением нагрузки. При $t^+ > t_o$ имеем $s'_1(t^+) > 0$ и $s'_2(t^+) > 0$. Так как предположение об одновременном нагружении или разгрузке полок нарушает уравнения совместности или равновесия, то, следовательно, при $t^+ > t_o$ обычный квазистатический подход не позволяет

отыскать отклоненные формы равновесия и поведение стержня должно быть уточнено на основе динамического анализа, как, например, в работе [191] или воспользоваться понятием удерживающего возмущения, (раздел 3.3). Из приведенного анализа следует, что если $t_+ < t_*$, то при разгрузке стержень в состоянии сохранить невыпученную форму без поддерживающих связей. Если же $t^+ \geq t_*$, то для сохранения прямолинейной формы стержня необходимо на участке разгрузки сохранить поддерживающие связи.

Допустим теперь, что после снятия нагрузки стержень нагружается вторично до значения $t = t^+$. Тогда, если $t^+ < t_*$, то стержень будет устойчивым при нагружении (и упругим) для любых нагрузок $t < t^+$ с любым числом последующих циклов. С нагруженным до значения $t = t^+$ он будет оставаться невыпученным, как при упругой догрузке так и упругой разгрузке (полная приспособляемость), если $t^+ \leq t_*$, и будет невыпученным в процессе нагружения, но может выпучиваться на каждом цикле с разгрузкой одной из полок, (неполная приспособляемость), если $t^+ > t_*$. В последнем случае на каждом цикле при достижении нагрузки $t = t^+$ на стержень следует налагать ограничивающие от выпучивания связи, чтобы он сохранил прямолинейную форму.

До сих пор неявно предполагалось, что параметры стержня удовлетворяют неравенствам (3.5.1) и

$$t_1 < t_{**}.$$

Если же параметры стержня таковы, что $t_1 > t_{**}$ (например, материал со слабым упрочнением), то нагрузка t_1 имеет такой же смысл, как и t^+ в выражениях (3.5.6)-(3.5.9). Так что при $t_{**} < t_1 < t_*$ стержень выпучивается с возрастанием нагрузки от значения t_1 , а для $t_1 > t_*$ — с уменьшением нагрузки, то есть достижение предела текучести в этом случае соответствует исчерпанию несущей способности. Увеличение критической нагрузки в таком случае при циклическом нагружении без поддерживающих связей невозможно. При отсутствии поддерживающих связей график зависимости нагрузки t от прогиба w

для

$$\omega^2 = 0.1, \quad e = 100, \quad \nu = 0.2, \quad t_1 = 2$$

изображен на рис. 3.16. В случае неполной приспособляемости к нагрузке t^+ с отсутствием поддерживающих связей график зависимости $t(w)$ на участке разгрузки от значения t^+ будет иметь такой же вид. При этом асимптотой служит нагрузка Шенли t_{**} .

В) Рассмотрим теперь другой случай. Пусть свободный от поддерживающих связей стержень нагружается усилием до максимального значения t_2 , ($t_{**} < t < t_*$),

$$t_2 = p_1 + \sqrt{p_1^2 + q}, \quad p_1 = \frac{t_* + At^+ - s_{11}^-}{(1 - 2A)}, \quad q = \frac{2s_{11}^- t_*}{(1 - 2A)}, \quad (3.5.10)$$

после которого дальнейшее возрастание нагрузки невозможно [190]. При этом прогиб стержня равен,

$$w_1 = A \frac{(t_2 - t_{**})}{(t_* - t_2)}. \quad (3.5.11)$$

В формуле (3.5.10) s_{11}^- обозначает предел пропорциональности при растяжении, соответствующий точке К на рис. 3.15. Будем теперь уменьшать нагрузку от значения $t = t_2$. Тогда возможны два случая.

1) Обе полки деформируются пластически (одна при растяжении, другая со сжатием) и прогиб равен,

$$w = w_1 \frac{(t_{**} - t_2)}{(t_{**} - t)}. \quad (3.5.12)$$

2) Обе полки разгружаются по упругим участкам и прогиб равен,

$$w = w_1 \frac{(t_2 - t_2)}{(t_2 - t)}. \quad (3.5.13)$$

На рис. 3.17 приведены графики зависимости $w(t)$ на участке нагружения (кривая O_1A), и разгрузки (кривые AC и AB), подсчитанные,

соответственно, равенствам (3.5.6) при $t^+ = t_{**}$ и (3.5.12), (3.5.13) для значений,

$$t_1 = 2, \quad \nu = 0.5, \quad e = 100, \quad \omega^2 = 0.1.$$

Вопрос о том, какой из участков диаграммы, AC или AB на рис. 3.17 реализуется не может быть решен без динамического анализа. Но следует ожидать по-видимому, что при быстром снятии нагрузок будет реализован участок AB , так как в этом случае быстрому росту прогибов будут препятствовать силы инерции (удерживающее возмущение, раздел 3.3). Не обсуждая здесь этот вопрос детально, заметим, что во всяком случае с помощью дополнительной ограничивающей связи всегда можно направить процесс разгрузки по участку AB , что и принимается в дальнейшем. Тогда остаточный прогиб при $t = 0$ (точка B на рис. 3.17) определяется выражением,

$$w_0 = \frac{w_1(t_2 - t_2)}{t_2}.$$

На указанном пути нагружения и разгрузки стержня точки напряжений в полках на диаграмме рис. 3.15 проходят траектории $ABCL$ и $ABKG$.

Подберем теперь нагрузку $p = p_*$ (при $T = 0$) таким образом, чтобы после нагружения ею и последующей разгрузки остаточные деформации в обеих полках были одинаковыми, а остаточный прогиб исчез. Так как обе полки деформируются в соответствии с диаграммой на рис. 3.15, то из уравнений равновесия (3.5.4) и совместности деформаций (3.5.3) следует, что на этом пути нагружения траектории точек напряжений на диаграмме рис. 3.15 в первой и второй полках соответствуют ломаным $GBFO_1$ и $LDEO_1$, а зависимость прогиба от нагрузки p , $w(p)$, схематически изображена на рис. 3.17 ломаной линией $BDEO$. При этом точки D и E на рис. 3.15 и 3.17 находятся в соответствии друг с другом.

Для упрощения дальнейшего анализа предположим, что предел текучести, соответствующий точке D равен нулю, то есть точки D и L

совпадают (рис.3.15). Тогда из рис. 3.15 видно, что при нагрузке

$$p_* = (s_F - s_E)/2$$

напряжения в полках соответствуют точкам F и E на диаграмме рис. 3.15. После уменьшения нагрузки p до нуля в обеих полках получим одинаковые остаточные деформации, соответствующие точке O_1 на рис. 3.15. Из этого рисунка следует

$$s_F = (t_2 + s_{11}^-)/2,$$

откуда, в соответствии с вышесказанным,

$$s_F > t_2/2 > t_{**}/2.$$

В соответствии с обобщенным принципом Мазинга [140] пределы пропорциональности s_E и $s_{F'}$ на растяжение и сжатие во второй полке связаны соотношением,

$$s_E + s_{F'} = m, \quad (m > 2)$$

С другой стороны из рис. 3.15 следует

$$s_E + s_F = m, \quad m = t_2 + s_{11}^-.$$

Поэтому $s_F = s_{F'}$, то есть пределы пропорциональности в обеих полках одинаковы. Аналогично можно показать, что пределы пропорциональности на растяжение одинаковы.

Таким образом, в новом прямолинейном состоянии будем иметь однородный стержень с новым пределом пропорциональности на сжатие s_F . Следовательно, стержень полностью приспособляется к циклическому изменению нагрузки с амплитудой $t_F = 2s_F$, если $t_F < t_*$, и неполностью приспособится, если $t_F \geq t_*$. В последнем случае на каждом полуцикле разгрузки следует прикладывать удерживающие связи.

Выше предполагалось для простоты, что точки L и D на рис. 3.15 совпадают. Если отказаться от этого предположения, то придем к

тем же выводам, только величина s_F увеличится. Это ясно видно, например, из рис. 3.15.

Если $t_F < t_*$, то, увеличивая сжимающую нагрузку на свободный от связей стержень выше этого значения, получим новую максимальную нагрузку t'_2 для отклоненного стержня. Разгружая стержень от этой нагрузки и выпрямляя его, как и выше, поперечной нагрузкой, получим новый предел пропорциональности и новую нагрузку t'_F , для которой справедливы те же выводы, что и для t_F . Продолжая этот процесс, можно, по крайней мере, достигнуть нагрузки Кармана t_* . Таким образом, при указанной программе нагружения стержень может увеличивать критическую силу, полностью приспособляясь к нагрузке Кармана или к нагрузке меньшей, но достаточно близкой к t_F , ($t_F > t_*$) и к нагрузке $t_F > t_*$, если использовать поддерживающие связи при разгрузке.

Отметим, наконец, что если при циклическом нагружении для материала стержня не справедлив обобщенный принцип Мазинга, то после первого цикла выпучивания и выпрямления стержень становится неоднородным и для дальнейших циклов следует проводить такой же анализ, как в предыдущих разделах [84].

3.6. Об устойчивости и выпучивании конструктивно-неоднородных стержней за пределом упругости

Анализ устойчивости и выпучивания, проведенный в разделах 3.1–3.5 относился к элементарной модели конструктивно-неоднородного стержня, которая является точечной моделью и позволяет выявить только основные закономерности поведения конструктивно-неоднородных стержней в условиях продольно-поперечного изгиба за пределом упругости в общем случае. В реальном стержне в каждой его точке возможны все случаи равновесия, имеющие место для рассмотренной модели стержня.

Рассмотрим конструктивно-неоднородный стержень длиной L , состоящий из двух несущих слоев с толщинами δ_j ($j = 1, 2$) и легкого заполнителя толщиной δ_3 , рис. 1.1. Материалы несущих слоев

предположим имеющими линейное упрочнение, причем E_j , E_{kj} , σ_{sj} – их модули Юнга, касательные модули и пределы пропорциональности. Легкий заполнитель предположим упругим с модулем Юнга E_3 . Пусть такой стержень шарнирно оперт по концам и к нему приложено сжимающее усилие N_g . Поведение такого стержня будет существенно зависеть от того, каким образом приложено сжимающее усилие N_g . Безмоментное состояние и прямолинейная форма сжатого стержня сохраняется до перехода одного из несущих слоев в пластическое состояние, если сжимающее усилие действует по прямой линии, отстоящей от внутренних плоскостей несущих слоев на расстояниях, определяемых из выражений [34]:

$$h_1 = \frac{2B_2\delta_3 + B_2\delta_2 - B_1\delta_1}{2(B_1 + B_2)}; \quad h_2 = \frac{2B_1 + B_1\delta_1 - B_2\delta_2}{2(B_1 + B_2)}. \quad (3.6.1)$$

Здесь h_j и B_j – соответственно, расстояния от линии действия усилия N_g до внутренних плоскостей первого ($j = 1$) и второго ($j = 2$) несущих слоев и их жесткости на сжатие ($B_j = E_j\delta_j$). При выполнении условий (3.6.1) рассматриваемый конструктивно-неоднородный стержень сохраняет безмоментное невыпученное состояние и после перехода слоев в пластическое состояние, если материалы несущих слоев имеют пропорциональные диаграммы сжатия. В таком случае общепринятую постановку задачи об упруго-пластической устойчивости можно сохранить [34]. Условия (3.6.1) и условия пропорциональности [34] для рассматриваемого стержня аналогичны условиям безмоментности (3.1.1') и условиям пропорциональности (3.2.2), полученными при рассмотрении элементарной модели стержня. Так же как для элементарной модели стержня, материалы полок которого имеют непропорциональные диаграммы, выпучивание рассматриваемого конструктивно-неоднородного стержня, материалы несущих слоев которого имеют непропорциональные диаграммы, начинается после перехода одного из слоев в пластическое состояние. Подробный анализ поведения рассматриваемого стержня будет проведен в главе 4 на основе полученных в главе 2 уравнений изгиба и выпучивания конструктивно-неоднородных пластин и оболочек.

3.7. Основные особенности предельных состояний неоднородных стержней за пределом упругости

В общем случае, выпучивание сжатого неоднородного стержня происходит при нагрузке t_1 (первая критическая нагрузка), соответствующей переходу одной из полок в пластическое состояние (раздел 3.1).

Если материал полки, первой перешедшей в пластическое состояние, имеет достаточно малое упрочнение, то статическое равновесие при нагрузках больших ее невозможно, а с уменьшением нагрузки от значения t_1 возможны две ветви равновесных форм (бифуркация). Такой вывод подтверждается и анализом с учетом физической нелинейности и гладкости диаграммы (раздел 3.3). Критическая нагрузка t_1 является нагрузкой исчерпания несущей способности.

Если упрочнение материала полки, первой перешедшей в пластическое состояние, достаточно большое, то выпучивание стержня сначала происходит при возрастающей нагрузке, а затем, в зависимости от его физических и геометрических характеристик, могут реализоваться два возможных случая. В первом случае возрастание прогиба возможно только с возрастанием нагрузки, причем касательно-модульная нагрузка (вторая критическая нагрузка) t_{**} , является критической в том смысле, что с возрастанием нагрузки до такого значения прогиб увеличивается до бесконечности. Во втором случае равновесие стержня с возрастанием нагрузки возможно только до некоторого ее критического значения (третья критическая нагрузка, t_{10}^+ , t_{10}^- , t_{11}^+ , t_{11}^- , или t_2), которое в одних подслучаях равно значению нагрузки, соответствующей переходу одной из полок в пластическое состояние при растяжении после разгрузки (вторичные пластические деформации), а в других – значению нагрузки, соответствующей переходу первой полки в пластическое состояние при сжатии. Дальнейшее возрастание прогиба возможно только при уменьшающейся нагрузке. Третья критическая нагрузка является критической в том смысле, что последующее уменьшение нагрузки влечет разветвление равновесных форм (бифуркация). Величина третьей критической нагрузки зависит от

всех геометрических и физических характеристик стержня. Во всех случаях, с изменением нагрузки до критического ее значения, имеют место различные пути деформирования полков. В случае первой критической нагрузки в обеих полках происходит упругая догрузка. В случае второй критической нагрузки в каждой из полков могут иметь место или только пластическая догрузка или последовательно пластическая догрузка, разгрузка и вторичные пластические деформации. Такой же вывод следует и в случае третьей критической нагрузки. Прогиб с изменением нагрузки до второго или третьего критического ее значения может как возрасти так и уменьшаться, (выпрямление, раздел 3.1, кривые FUG и FT на рис. 3.5).

В случае пропорциональных диаграмм материалов полков упруго-устойчивый стержень остается прямым и после перехода в пластическое состояние. Прямолинейная форма равновесия стержня с пропорциональными диаграммами, перешедшего в пластическое состояние, устойчива при нагрузках меньших касательно модульной нагрузки t_{**} в том смысле, что малое поперечное вынуждающее возмущение с продолжающимся продольным нагружением (сжатием) не приводит к большим отклонениям стержня от прямолинейного состояния; при сжатии нагрузкой меньшей, чем касательно-модульная нагрузка, прямолинейная форма равновесия является единственной, (разделы 3.2 и 3.3).

Если сжимающая нагрузка равна касательно-модульной нагрузке, то с продолжающимся нагружением (сжатием) происходит разветвление форм равновесия; при этом устойчивой является отклоненная форма равновесия в том смысле, что малое вынуждающее поперечное возмущение ведет к малым изменениям отклоненной формы равновесия, (разделы 3.2 и 3.3). Разветвление форм равновесия может произойти при любой нагрузке большей касательно-модульной нагрузки, но меньшей нагрузки Эйлера, если до того, как она была достигнута, стержень оставался прямым. Если сжимающая нагрузка прямолинейного стержня, перешедшего в пластическое состояние больше касательно-модульной нагрузки и меньше критической нагрузки Кармана, то реализуются отклоненные формы равновесия с возрастающей

нагрузкой. Увеличение сжимающей нагрузки в этом случае возможно до третьей критической нагрузки, соответствующей возникновению в одной из полок вторичных пластических деформаций с первичной пластической догрузкой в другой полке. Третья критическая нагрузка здесь также имеет бифуркационный смысл и для $t^+ = t_{**}$ определяет несущую способность стержня. Если же выпучивание начинается с нагрузки большей нагрузки Кармана и меньшей нагрузки Эйлера, то реализуются отклоненные формы равновесия с уменьшающейся нагрузкой. Таким образом, приведенно-модульная нагрузка является верхней оценкой несущей способности стержня. Закритическое выпучивание происходит с различными путями деформирования полок. В стержнях с одной областью физических и геометрических параметров имеет место необратимый переход от первичной пластической догрузки к разгрузке, а с другой областью изменения тех же параметров – обратный переход от разгрузки к первичной пластической догрузке в одной и той же полке. Последующее увеличение прогиба с уменьшением сжимающей нагрузки происходит с пластической догрузкой в одной полке и вторичными пластическими деформациями – в другой полке, (раздел 3.2). В случае, когда сжимающая нагрузка превышает значение нагрузки Эйлера, отклоненные статически равновесные формы стержня не существуют или имеют место только при удерживающем поперечном возмущении, (раздел 3.3).

Полученные на основе линейной теории, выводы относительно условий выпучивания и равновесных форм стержня остаются верными и с точки зрения геометрически нелинейной теории.

Проведенный в разделе 3.4 анализ показывает, что выводы относительно условий выпучивания сжатого стержня остаются верными и с точки зрения физически-нелинейной теории с учетом гладкости диаграмм.

В случае гладких нелинейных пропорциональных диаграмм материалов полок величина касательно- модульной критической нагрузки зависит от величины нагрузки t_1 , соответствующей переходу полок в пластическое состояние. При этом всегда $t_{**} \geq t_1$, что не всегда выполняется при использовании кусочно-линейной теории. Если радиус за-

кругления r_i ; кусочно-линейной диаграммы мал и величина касательного модуля линейного участка диаграммы равна нулю, то касательно-модульная нагрузка практически совпадает с нагрузкой t_1 , а в пределе $t_{**} \rightarrow t_1$ при $r_i \rightarrow 0$. Закритическое выпучивание с уменьшающейся нагрузкой происходит за счет уменьшения касательного модуля в догружаемой полке и без вторичных пластических деформаций в разгружаемой полке.

Исследование устойчивости сжатого однородного стержня при циклическом нагружении показывает, что стержень может приспособиться и увеличить свою несущую способность вплоть до нагрузки Кармана без применения поддерживающих связей и до нагрузки Эйлера с применением таких связей. В общем случае эксплуатационных нагрузок приспособляемость стержня возможна, если справедлив принцип Мазинга. Иначе, стержень становится неоднородным и для определения его несущей способности необходим анализ, проведенный в разделе 3.1.

ГЛАВА 4. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НЕУПРУГИХ КОНСТРУКТИВНО-НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Решению задач устойчивости упругих и неупругих конструктивно-неоднородных оболочек и пластин посвящена обширная литература [152-167, 195-248]. Почти все эти исследования основаны на допущении о безмоментности докритического состояния. В то же время известно, что существует много причин, вызывающих моментное основное докритическое состояние [1]. Исследование элементарной модели, проведенное в главе 3 настоящей работы показывает, что неоднородность приводит к выпучиванию сразу же после перехода в пластическое состояние одной из полок стержня. Для неоднородного (как и для однородного) стержня появляются критические нагрузки устойчивости и несущей способности, не совпадающие с известными критическими нагрузками Кармана, Энгессера или Шенли. Изменение характера предельного состояния (устойчивости и несущей способности) следует ожидать и в общем случае неупругих конструктивно-неоднородных пластин и оболочек. Однако, за исключением, сравнительно, немногих работ [240-248], остается подход в исследованиях устойчивости таких оболочек и пластин, основанный на предположении о безмоментности докритического состояния. Такое положение в теории устойчивости неупругих тонкостенных элементов конструкций можно объяснить не только практической допустимостью приближенного соответствия теории и эксперимента, но и рядом специфических особенностей методов и, связанных с ними, вычислительных трудностей решения задач устойчивости и выпучивания конструктивно-неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости.

В разделе 4.1 рассмотрены особенности метода решения задач изгиба, устойчивости и выпучивания конструктивно-неоднородных пластин и оболочек, а так же его численной реализации на ЭВМ. В последующих разделах решены задачи устойчивости и выпучивания трехслойных пластинок с легким заполнителем, осесимметричного выпу-

чивания подкрепленной и с легким заполнителем цилиндрических оболочек, устойчивости и рационального армирования пластинки, несущей способности гладких и подкрепленных жестко-пластических цилиндрических оболочек.

4.1. Характерные особенности метода решения задач устойчивости упругопластических конструктивно-неоднородных оболочек по сравнению с упругими

Решение задач изгиба и устойчивости конструктивно-неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости, если учитывать моментность докритического состояния, сводится к решению систем геометрически и физически нелинейных дифференциальных уравнений, в общем случае, в частных производных (2.3.12) при заданном изменении граничных условий (2.3.13). Численное решение этих задач предполагается осуществимым путем перехода от дифференциальных уравнений к их дискретным аналогам. В зависимости от метода дискретизации возможны различные методы решения – метод конечных разностей, проекционный метод или метод конечных элементов. В данной работе этот переход производится методом конечных разностей. Последние два метода не представлены, как дающие меньшую точность при определении пластических зон с одинаковой затратой труда и машинного времени. После перехода к конечным разностям, система дифференциальных уравнений заменяется с известной точностью системой нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений. Таким образом, вопросы, рассмотренные в настоящей главе, касаются изучения особенностей и методов численного решения систем нелинейных недифференцируемых алгебраических и трансцендентных уравнений. Изучению этих вопросов в литературе посвящено немного работ [90,141,246]. По существу, в настоящей главе делается одна из попыток разрешить или хотя бы поставить вопросы, возникающие при численном решении рассматриваемых задач, как из-за громоздкости дифференциальных уравнений так из-за нетривиальности законов упругопластического деформирования конструктивно-

неоднородных оболочек. Далее принимаем, согласно новейшим исследованиям, что "сложное докритическое нагружение по силам не оказывает существенного влияния на величины критических интенсивностей напряжений и деформаций по сравнению с простым нагружением" [248]. Тем более, что в настоящей главе решаются задачи изгиба и выпучивания конструктивно-неоднородных пластин и оболочек при пропорциональном нагружении. А "теория малых упруго-пластических деформаций дает правильные (согласные с опытом) результаты по крайней мере в том случае, когда процесс нагружения тела является простым, т. е. внешние силы от начала их приложения возрастают пропорционально общему параметру" p [20].

Рассмотрим систему нелинейных недифференцируемых алгебраических или трансцендентных уравнений, которую запишем в виде:

$$f(x, x_*, p, K) = 0 \quad (4.1.1)$$

Здесь $f(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$ – вектор-функция, $x(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ – радиус-вектор, p – общий параметр нагружения, $x_*(x_{1*}, x_{2*}, x_{3*}, \dots, x_{n*})$ – вектор, смысл которого будет разъяснен ниже, $K[k_1, m_1, n_1, k_2, m_2, n_2, k_y, m_y, n_y, k_{p1}, m_{p1}, n_{p1}, k_{p2}, m_{p2}, n_{p2}]$ – совокупность 15-и векторов-функций с целочисленными составляющими, причем $k_1 = k_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, p, x^3)$, $m_1 = m_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, p, x^3)$, $\dots n_{p2} = n_{p2}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, p, x^3)$, где x^3 – координата по толщине оболочки, $n = 1, 2, 3, \dots$. Целочисленные функции принимают значения 0 или 1, в зависимости от процесса деформирования элементов конструктивно-неоднородной оболочки и определяются из условий догрузки, разгрузки или вторичных пластических деформаций, (см. разделы 1.3 и 2.3).

Для упругой оболочки:

$$K(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, p, x^3) = 0. \quad (4.1.2)$$

Здесь равенство символически обозначает тождественное равенство нулю всех 15-и векторов целочисленных функций.

При выполнении равенства (4.1.2) все дальнейшие рассуждения можно отнести к теории нелинейных упругих конструктивно-неоднородных оболочек. Функции f_i непрерывны по координатам x_i при

любых значениях параметра нагрузки p и коэффициентах-функциях K , если они отвечают естественному ходу процесса деформирования, — догрузка, разгрузка, вторичные пластические деформации. Однако функции f_i не являются дифференцируемыми, так как на границах зон разгрузки и догрузки их производные по координатам терпят разрывы. Аналогичное положение имеет место с уравнением диаграммы растяжения-сжатия для стержня, когда при переходе от активных пластических деформаций к разгрузке образуется угловая точка. Факт наличия разрывов производных по деформациям отражен в теории устойчивости приведенного модуля [20].

Решение системы нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений, как правило, возможно только методом последовательных приближений или методом итераций. Разрывность производных является основным препятствием для применения классических доказательств вычислительных процессов. Следует отметить, что в области изменения нагрузки, для которой в оболочке происходят только активные пластические деформации (дгрузка), классические доказательства остаются в силе.

Другая особенность численного решения системы (4.1.1) связана с заменой конструктивно-неоднородных оболочек их эквивалентами [89]. Замена делается в предположении, что главные векторы и моменты в малых элементах конструктивно-неоднородного и анизотропного эквивалентного средних слоев оболочки одинаковы. При этом в отдельных конструктивных элементах некоторые компоненты напряжения оказываются равными нулю, другие же отличаются от напряжений эквивалентного элемента известным множителем. Таким образом, интенсивности напряжений для различных конструктивных элементов имеют различные выражения. Деформации эквивалентного элемента выражаются линейно через деформации конструктивных элементов (ребер, узла), которые определяются, согласно деформационной теории, как нелинейные функции его напряжений. Для определения закона деформирования эквивалентного ортотропного материала следует затем выразить напряжения через деформации эквивалентного элемента из получившихся уравнений. Такие уравнения при жестком соединении

ребер в узлах даже в лучшем случае, когда диаграммы материалов конструктивных элементов кусочно-линейны, имеют порядок выше четвертого, то есть не разрешимы в радикалах. Если уравнение диаграммы трансцендентно, то и уравнения, связывающие напряжения и деформации эквивалентного материала трансцендентны. Трансцендентная диаграмма эквивалентного ортотропного элемента становится известной только после решения задачи об изгибе и выпучивании конструктивно-неоднородной оболочки. Поэтому, если даже деформированное состояние в эквивалентной ортотропной оболочке известно, то и в этом случае определить деформации и напряжения в конструктивных элементах возможно только методом последовательных приближений. Так как деформированное состояние эквивалентной оболочки само является искомым, то решение системы (4.1.1) принципиально невозможно без метода последовательных приближений при каждом малом приращении параметра нагрузки. Поэтому в уравнении (4.1.1) уже содержится процесс последовательных приближений и вектор x_* обозначает радиус-вектор для предыдущей итерации. При этом оценки сходимости вычислительных процессов затруднены. Вследствие рассматриваемой особенности, невозможна явная постановка задачи об упруго-пластической устойчивости конструктивно-неоднородных пластин и оболочек по приведенному модулю.

Еще одна особенность численного решения системы (4.1.1) связана с самой сущностью явления потери устойчивости конструкций за пределом упругости. Критические значения нагрузки находятся на границе области значений нагрузок, для которых существуют статические формы равновесия. Изменение значений нагрузок обратно в область существования решений приводит к раздвоению (бифуркации) равновесных форм. Одна из них происходит с разгрузкой из пластического состояния, а другая – с дальнейшим развитием зон активных пластических деформаций. Последняя неустойчива в вычислительном смысле, то есть в процессе итераций наблюдается, как показывает практика вычислений, переход с этой ветви на ветвь с разгрузкой во всей пластической зоне или в части ее. Критические нагрузки отвечают максимальному критическому значению общего значения параметра

нагружения, при котором существуют статические формы равновесия. Если после достижения критического состояния идти с уменьшением параметра нагрузки по неустойчивой ветви (с активными пластическими деформациями), то любое значение параметра нагрузки можно считать критическим в бифуркационном смысле. Наибольшее критическое значение характеризует также несущую способность оболочки для первого нагружения. При циклическом нагружении наибольшее практическое значение имеет наименьшая критическая нагрузка.

В целом, в вопросе об особенностях численных методов решения рассматриваемых далее задач можно сделать вывод, что полное аналитическое исследование существования их решения, сходимости вычислительных процессов возможно только в исключительных, простейших случаях. В основном приходится полагаться на грубые оценки сходимости или же на численный эксперимент. При этом в качестве критерия для определения критических нагрузок принимается быстрый рост пластических зон и условие максимума параметра нагрузки, до которого существуют статические формы равновесия, если путем численного эксперимента можно определить ветвь равновесных форм с уменьшающейся нагрузкой и расширением зон пластических деформаций, или быстрый рост прогибов.

Для применения классических численных методов к решению упруго-пластической задачи устойчивости оказывается важным то обстоятельство, что до перехода оболочки в пластическое состояние в ней происходят упругие деформации. Методы численного решения задач для упругих оболочек разработаны достаточно полно и считаются классическими [249-252]. С переходом оболочки в пластическое состояние эти методы получают видоизменение, так как для упругопластической оболочки требуется определить закон деформирования (догрузка, разгрузка, вторичные пластические деформации) при каждом значении параметра нагрузки. Это можно произвести, решая уравнение (4.1.1) последовательно при малых приращениях параметра нагрузки и сравнивая интенсивности деформаций и напряжений для двух соседних значений параметра нагрузки. Поэтому представляется естественным решение уравнения (4.1.1) методом линеаризации. Тогда

вместо уравнения (4.1.1) рассматривается линейное уравнение:

$$f_x(x_0, x_{*0}, p_0, K_0)\Delta x + f_p(x_0, x_{*0}, p_0, K_0)\Delta p = 0. \quad (4.1.3)$$

Здесь нижний индекс вектор-функции f означает частную производную по указанному аргументу при заданном значении нагрузки и соответствующем, найденном уже, решении уравнения (4.1.1), то есть когда $f(x_0, x_{*0}, p_0, K_0) = 0$, где x_{*0} — вектор x_* при предыдущем приращении нагрузки. Замена уравнения (4.1.1) линейным уравнением (4.1.3) проведена с предположением, что при малом приращении нагрузки изменением коэффициентов K и вектора x_* можно пренебречь.

Решение уравнения (4.1.3) имеет вид:

$$\Delta x = -f_x^{-1} f_p \Delta p, \quad (4.1.4)$$

где f_x^{-1} — обратная матрица.

Затем вычисляются коэффициенты уравнения (4.1.3) при $p = p_0 + \Delta p$, $x = x_0 + \Delta x$ и решение находится для следующего приращения нагрузки. Недостатками метода линеаризации являются:

1) неприменимость его в области изменения параметра нагружения с образованием областей разгрузки, так как в этом случае на границе областей догрузки и разгрузки производные f_x терпят разрывы;

2) неприменимость его, когда решение уравнения (4.1.1) принципиально невозможно без метода последовательных приближений, например для подкрепленных оболочек ребрами двух направлений, жестко соединенными в узлах;

3) трудность обращения матрицы, если требуется высокая точность аппроксимации уравнений, вследствие ее громоздкости.

Другим методом, более предпочтительным, если решение уравнения (4.1.1) ищется при малых приращениях нагрузки, является метод Ньютона [253]. Этот метод дает наилучшую сходимость, если начальное приближение близко к искомому решению. Так как функция f в уравнении (4.1.1) непрерывна, то можно всегда выбором малости приращения нагрузки удовлетворить поставленному требованию, если статическое решение существует. Итерационное равенство в методе

Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n + f_x^{-1} f. \quad (4.1.5)$$

В равенство (4.1.5), так же как и в методе линеаризации, входит производная f_x . Поэтому перечисленные недостатки метода линеаризации имеют место и в методе Ньютона. При этом третий недостаток усугубляется, так как обращение матрицы приходится производить для каждой итерации. Что касается первого из перечисленных недостатков, то он состоит только в неприменимости классических доказательств сходимости итерационных процессов. Те же недостатки свойственны и модифицированному методу Ньютона, а также методам скорейшего спуска (градиентным методам).

Перечисленные методы применимы как для упругой, так и для упругопластической оболочки, если в ней происходят только пластические деформации и напряжения в каждом элементе конструктивно-неоднородной оболочки можно выразить в явной форме через деформации эквивалентного элемента с помощью закона деформирования.

Методом, специально предназначенным для решения упругопластических задач является метод упругих решений, который наиболее разработан для решения геометрически линейных задач изгиба пластин [254-256]. При этом уравнение (4.1.1) представляется в форме:

$$f_1 x = f_2 x. \quad (4.1.6)$$

Здесь f_1 — линейный оператор упругой пластинки или оболочки, f_2 — нелинейный оператор, обусловленный пластическими деформациями. Для упругой оболочки $f_2 = 0$.

Решение операторного уравнения (4.1.6) при заданной нагрузке получают итерациями,

$$x_{n+1} = f_1^{-1}(f_2 x_n), \quad (4.1.7)$$

где f_1^{-1} — обратный оператор.

Метод упругих решений традиционно использовался для пластин и оболочек, когда в них происходят только активные пластические деформации [256]. Разработке метода упругих решений в общем случае посвящены работы [257-258].

Как было отмечено, метод линеаризации уравнения (4.1.1) имеет недостаток, заключающийся в том, что производная f_x терпит разрывы на границах областей догрузки и разгрузки. Этого недостатка можно избежать, если представить уравнение (4.1.1) в виде:

$$f_x \Delta x + f_p \Delta p + f_3(x, x_*, p, K) = 0. \quad (4.1.8)$$

Здесь

$$f_3(\dots) = f(\dots) - f_x \Delta x - f_p \Delta p,$$

где точками обозначены аргументы функции f в равенстве (4.1.1), а частные производные этой функции вычислены для известного решения.

Функция f_3 включает таким образом неглавную часть своего приращения. Так как функция f_3 не является дифференцируемой, то эта неглавная часть приращения необязательно будет пренебрежимо мала по сравнению с линейной частью приращения, содержащейся в первых двух слагаемых выражения (4.1.8). Решение уравнения (4.1.8) следует искать методом итераций. Точные оценки сходимости такого итерационного процесса получить классическими методами также невозможно. Грубую оценку сходимости можно получить из следующих соображений.

Равенство для $n + 1$ -ой итерации решения уравнения (4.1.8) представим в следующем виде:

$$f_x \Delta x_{n+1} + f_p \Delta p = -f_3(x_0 + \Delta x_n, x_{*n}, p_0 + \Delta p, K_n). \quad (4.1.9)$$

Вычитая из уравнения (4.1.9) аналогичное ему уравнение для n -ой итерации, получим:

$$\begin{aligned} |f_x(\Delta x_{n+1} - \Delta x_n)| &= \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x_n^2 - \Delta x_{n-1}^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p} (\Delta x_n - \Delta x_{n-1}) \Delta p \right|. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Здесь производные вычисляются при начальном приближении.

Если Δp выбрать достаточно малым так, чтобы Δx_n и Δx_{n-1} были

тоже достаточно малыми, то и при наличии разрывов в производных имеет место неравенство:

$$|\Delta x_{n+1} - \Delta x_n| < A |\Delta x_n - \Delta x_{n-1}|,$$

причем, в случае ограниченности производных, $0 < A < 1$, то есть последовательные приближения, согласно равенству (4.1.9), сходятся к решению уравнения (4.1.8). В результате находим приближенное решение уравнения (4.1.1) $x = x_0 + \Delta x$ для параметра нагружения $p = p_0 + \Delta p$. Этим решением воспользуемся, чтобы найти коэффициенты K из условий догрузки, разгрузки и вторичных пластических деформаций, а также вектор x_* , приняв его равным x , $x_* = x$. В качестве начального приближения при последующем приращении параметра нагружения воспользуемся полученным решением.

Другим, наиболее важным, методом, который может быть применен, как обобщенный метод, для решения уравнения (4.1.1), является метод Зейделя [253]. Этот метод обычно применяется для решения систем линейных уравнений, например, уравнения (4.1.3). Тогда метод Зейделя дает хорошую сходимость, если матрица f_x положительно определенная и симметричная. Однако, в литературе имеется обобщение метода и на произвольные операторы, а также получены оценки сходимости и решения для некоторых операторов [1,252,259]. Особенностью метода Зейделя, в приложении к решению рассматриваемых далее задач, состоит в том, что в нем не требуется вычислять производные, а так как функция f в уравнении (4.1.1) непрерывна, то в процессе последовательных приближений не приходится сталкиваться с трудностями, связанными с разрывами производных на границах областей догрузки и разгрузки. Однако, применение классических доказательств сходимости здесь также затруднено, так как доказательства должны учитывать разрывные производные. Таким образом, для доказательства сходимости метода Зейделя в таком случае можно только или воспользоваться грубыми оценками, как это было сделано выше для уравнения (4.1.10), или положиться на численный эксперимент.

В последующих разделах настоящей главы для решения задач об изгибе и устойчивости конструктивно-неоднородных пластин и обо-

лочек метод Зейделя применяется в модифицированной форме с геометрически нелинейным уравнением (4.1.1). После замены дифференциальных уравнений их конечно-разностными аналогами через центральные разности каждое координатное уравнение векторного уравнения (4.1.1) разрешается относительно координат в центре расчетной ячейки. При этом нелинейная часть уравнения предполагается известной по величине. Итерационный процесс описывается равенством:

$$\begin{aligned} x_i^{(j+1)} &= \varphi_1(x_1^{(j+1)}, x_2^{(j+1)}, x_3^{(j+1)}, \dots, x_{i-1}^{(j+1)}, \\ & x_{i+1}^j, \dots, x_n^j, p_0 + \Delta p) + \varphi_2(x_1^{(j+1)}, x_2^{(j+1)}, \\ & x_3^{(j+1)}, \dots, x_{i-1}^{(j+1)}, x_i^j, x_{i+1}^j, \dots, x_n^j, x_{*j}, p_0 + \Delta p, K_j); \\ & (i = 1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Здесь φ_1 — линейная функция координат, φ_2 — нелинейная функция координат, в число аргументов которой входит и координата центра расчетной ячейки. В качестве начального приближения берутся значения координат при предыдущем значении нагрузки и физически нелинейной части уравнения (4.1.1). Итерации заканчиваются, если

$$\sup_i |x_i^{j+1} - x_i^j|$$

становится меньше наперед заданной малой величины.

Метод упругих решений также является методом, в котором итерации не зависят явно от разрывных производных, если даже в оболочке образуются зоны догрузки, разгрузки и вторичных пластических деформаций. Реализация этого метода при наличии таких зон осуществляется для малых приращений параметра нагрузки с проверкой закона деформирования в каждой точке оболочки. В рассматриваемых ниже задачах применяется модифицированный метод упругих решений и основное уравнение (4.1.1) записывается в виде:

$$f_{11}x = f_{12}x. \quad (4.1.12)$$

Здесь f_{11} — геометрически нелинейный оператор, f_{12} — физически и геометрически нелинейный оператор, обусловленный пластическими

деформациями и разгрузкой. При известной правой части уравнение (4.1.12) решается методом Зейделя. По полученному решению для заданного параметра нагрузки p_0 определяются коэффициенты K и вектор x_* из сравнения полученных интенсивностей деформаций или напряжений в несущих слоях, ребрах и узлах с интенсивностями деформаций и напряжений при меньшем, достаточно мало отличающемся от заданного, параметре нагрузки, $p_0 - \Delta p$, как показано в разделах 1.3 и 2.3. После такого предварительного определения зон пластических деформаций вычисляются правые части уравнения (4.1.12) и снова применяется метод Зейделя.

Чтобы полнее представить процесс последовательных приближений запишем его в следующей форме:

$$x_r^k = \Phi_1(x_{r-1}, p_f) + \Phi_2^k(x^k, x_*^k, p_f, K^k). \quad (4.1.13)$$

Здесь вектор-функция Φ_1 отражает линейные и геометрически нелинейные слагаемые, вектор-функция Φ_2^k — физически нелинейные слагаемые, обусловленные пластическими деформациями и разгрузкой, входящие в уравнение (4.1.1); по индексу r выполняются итерации методом Зейделя, а по индексу k — методом упругих решений; p_f — параметр нагружения, изменяющийся малыми приращениями Δp , $p_f = p_{f-1} + \Delta p$, ($f = 1, 2, 3, \dots$), $x_*^k = x^{(k-1)}$; $x_{jr-1} = x_{jr}$ ($j < i$); $x_{jr-1} = x_{jr-1}$ ($j > i$); $x_{ir-1} = 0$. Для упругой оболочки $\Phi_2^k = 0$ и итерации не зависят от индекса k .

Итерации по r при фиксированном k служат для решения геометрически нелинейной задачи с неизменными Φ_2^k , то есть с "неизменными" зонами пластических деформаций и разгрузки. После решения такой задачи из сравнения полученных интенсивностей деформаций в несущих слоях и интенсивностей напряжений в узлах и ребрах при $p = p_f$ с соответствующими интенсивностями для $p = p_{f-1}$ с помощью условий догрузки, разгрузки и вторичных пластических деформаций определим коэффициенты K^{k+1} , вектор x_*^{k+1} , вектор-функцию Φ_2^{k+1} и итерации по r повторим. Чередуя итерации по r и k производим до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность приближений по индексу k . Если обнаружено начало разгрузки в

какой-либо области оболочки, то радиус-вектор $x^* = x$ сохраняется для последующего решения. Затем задаем параметру нагружения следующее приращение и снова выполняем поочередно итерации по r и k . В результате определим развитие зон пластических деформаций и разгрузки с возрастанием параметра нагружения и максимальное значение параметра нагружения, до которого решение рассматриваемым численным методом уравнения (4.1.1) существует и единственно. Если последующее уменьшение параметра нагрузки малыми отрицательными приращениями с использованием метода упругих решений уравнения (4.1.12) приводит также к активному развитию зон пластических деформаций, то полученное максимальное значение параметра нагружения является критическим в бифуркационном смысле. Если же приближение к некоторому значению параметра нагружения ведет к резкому увеличению областей пластических деформаций, то такое значение параметра нагружения так же является критическим. Подобное поведение конструктивно-неоднородных оболочек следует ожидать на основе проведенного анализа устойчивости и выпучивания неоднородных стержней в главе 3 и результатов исследования в разделе 4.2.

4.2. Цилиндрический изгиб и устойчивость упругопластической трехслойной пластинки с легким заполнителем [85, 89]

Рассмотрим бесконечно широкую трехслойную пластинку длиной a со сплошным легким упругим заполнителем, мембранными несущими слоями, шарнирно опертую по краям, нагруженную равномерно распределенными по краям сжимающими усилиями $N_{g11} + N_{g12} = -N_g$ и равномерно распределенным по поверхности второго слоя ($j = 2$) давлением P , рис. 1.1. В этом случае

$$u_1^j = u_1^j(x_1), \quad w = w(x_1), \quad u_2^j = \text{const}, \quad (j = 1, 2). \quad (4.2.1)$$

Тогда каждая элементарная полоска длиной a в направлении x_1 деформируется одинаково и поведение ее соответствует поведению конструктивно-неоднородного стержня с легким заполнителем, описанного в

разделе 3.6. Таким образом, приведенное ниже решение справедливо и для шарнирно опертого трехслойного стержня с легким заполнителем при тех же, что и для рассматриваемой пластики, условиях нагружения.

Предположим, что первый слой ($j = 1$) в течение всего процесса деформирования остается упругим, а материал второго слоя – линейно упрочняющийся, причем E_k – касательный модуль; материалы обоих несущих слоев несжимаемы, как в упругом так и в пластическом состояниях. Расстояния h_j^0 несущих слоев до отсчетной поверхности определим из выражений (3.6.1), то есть

$$h_i^0 = 0.5(2B_m\delta_3 + B_m\delta_m^0 - B_j\delta_j^0)/(B_1 + B_2), \quad (j, m = 1, 2, j \neq m), \quad (4.2.2)$$

где $B_j = 4E_j\delta_j^0/3$, δ_j^0 – толщины несущих слоев. Если $p = 0$, то при таком выборе отсчетной поверхности, в которой действуют сжимающие усилия N_g , пластинка сохраняет невыпученное безмоментное состояние, пока эти усилия не превзойдут величины N_{0g} , соответствующей переходу второго слоя в пластическое состояние и равной

$$N_{0g} = 2e_{2s}(B_1 + B_2)/\sqrt{3}.$$

где e_{2s} – предел пропорциональности материала второго слоя. Если $p \neq 0$, то изгиб пластинки начинается сразу после приложения нагрузки.

Воспользовавшись выражениями (2.4.1)-(2.4.3), (2.4.5), (4.2.1), из (2.3.12) получим уравнения равновесия пластинки, которые запишем в виде:

$$\begin{aligned} u_{1,\xi} + bu_{2,\xi} &= -tt_0\gamma^{-1} + c; \\ h_1u_{1,\xi\xi} - bh_2u_{2,\xi\xi} - G\gamma^{-2}(u_1 - u_2) + \\ &+ G\gamma_{-1}\delta_*w_{,\xi} = 0; \\ (h_1^+u_1 - bh_2^+u_2)_{,\xi\xi\xi} + tt_0\gamma_{-1}w_{,\xi\xi} - p &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Здесь

$$\xi = x_1\pi a^{-1}; \quad \gamma = 0.5\pi\delta_3a^{-1}; \quad h_j = 2h_j^0(\delta_3)^{-1};$$

$$\begin{aligned}\delta_j &= 2\delta_j^0\delta_3^{-1}; & h_j^+ &= h_j + \delta_j/2; & \delta_* &= 2 + (\delta_1 + \delta_2)/2; \\ u_j &= u_{1j}\delta_3^{-1}; & w &= 2w\delta^{-1}; & G &= G_3\delta_3B_1^{-1}/2, \\ t &= N_g/N_{0g}, & t_0 &= N_{0g}/B_1, & p &= 0.5\delta_3^3\gamma^{-3}B_1^{-1}P,\end{aligned}$$

где G_3 — модуль сдвига легкого заполнителя.

Если второй слой упругий, то в уравнениях (4.2.3) примем $c = 0$, $b = B$, если пластический, то $c = \lambda_0\gamma^{-1}$, $b = B_k$; при этом в обоих случаях

$$\begin{aligned}B &= B_2/B_1, & B_k &= B_{2k}/B_1, & B_{2k} &= 4E_k\delta_2^0/3, \\ & & & & & = (B - B_k)t_0/(1 + B)\end{aligned}$$

Первое уравнение системы (4.2.3) записано в проинтегрированной форме с использованием первого граничного условия из (2.3.13).

Общее решение системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (4.2.3) имеет вид:

$$\begin{aligned}u_1 &= tt_0(\delta_*\gamma\alpha)^{-1}(C_1 \cos \alpha\xi - C_2 \sin \alpha\xi) - \\ &\quad - \frac{[tt_0(tt_0 - \gamma c) - bp\gamma^3\delta_*]\xi}{\gamma tt_0(1 + b)} + C_5; \\ u_2 &= -tt_0(\delta_*\gamma\alpha b)^{-1}(C_1 \cos \alpha\xi - C_2 \sin \alpha\xi) - \\ &\quad - \frac{[tt_0(tt_0 - \gamma c) + p\gamma^3\delta_*]\xi}{\gamma tt_0(1 + b)} + C_5 - \gamma\delta_*C_3; \\ w &= C_1 \sin \alpha\xi + C_2 \cos \alpha\xi + \frac{p\gamma}{2tt_0}\xi^2 + C_3\xi + C_4.\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

Здесь

$$\alpha(t, b) = \sqrt{\frac{Gtt_0(1 + b)}{\gamma^2 b(G\delta_* - 2tt_0)}},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , — постоянные интегрирования. При достаточно малых нагрузках t и p пластинка находится в упругом состоянии, поэтому граничные условия (2.3.13), за исключением первого, с учетом

равенств (2.4.1)-(2.4.3), (2.4.5), (4.2.1), (4.2.2) и симметрии изогнутой пластинки имеют вид:

$$\begin{aligned} u_{1,\xi}(\pi/2) &= -tt_0\gamma^{-1}(1+B)^{-1}; & w_{,\xi}(0) &= w(\pi/2) = \\ &= u_1(0) = u_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Используя общее решение (4.2.4) и определяя постоянные интегрирования из граничных условий (4.2.5), получим,

$$\begin{aligned} C_1 = C_3 = C_5 = 0, & \quad C_2 = \frac{Bp\gamma^3\delta_*^2}{(1+B)t_0^2\cos(\alpha\pi/2)}, \\ C_4 &= -C_2\cos(\alpha\pi/2) - \frac{\pi^2\gamma p}{8tt_0}. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Приравнивая величину интенсивности деформаций во втором слое в середине пластинки к пределу пропорциональности, с помощью равенств (4.2.3) и (4.2.5) получим зависимость между нагрузками $t = t_1$ и $p = p_1\gamma^{-3}$, для которых второй слой впервые переходит в пластическое состояние,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{(1-t_1)t_1t_0^2\cos(\alpha_1\pi/2)}{\delta_*[(1-\cos(\alpha_1\pi/2))]}, \\ (\alpha_1 &= \alpha(t_1, B), \quad t_1 \leq 1). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Дальнейшее возрастание нагрузок предположим изменяющимся пропорционально одному параметру μ , ($\mu \geq 1$):

$$t = \mu t_1, \quad p = \mu p_1 \gamma^{-3}.$$

При $\mu > 1$ во втором слое в области $0 \leq \xi \leq \eta$ реализуется пластическое состояние и в области $\eta \leq \xi \leq \pi/2$ — упругое. Для определения границы η и постоянных интегрирования имеем, кроме граничных условий (4.2.5), следующие условия непрерывности на границе $\xi = \eta$ усилий, моментов и перерезывающих сил:

$$u_j(\eta^-) = u_j(\eta^+); \quad u_{j,\xi}(\eta^-) = u_{j,\xi}(\eta^+); \quad w_{,\xi}(\eta^-) = w_{,\xi}(\eta^+);$$

$$w(\eta^-) = w(\eta^+); \quad (j = 1, 2). \quad (4.2.8)$$

Пользуясь общим решением (4.2.4), граничными условиями (4.2.5) и условиями непрерывности (4.2.8), для постоянных интегрирования в пластической области $0 \leq \xi \leq \eta$, $(C_1^n, C_2^n, C_3^n, C_4^n, C_5^n)$, и в упругой области $\eta \leq \xi \leq \pi/2$, $(C_1^y, C_2^y, C_3^y, C_4^y, C_5^y)$, получим выражения:

$$\begin{aligned} C_1^n &= C_2^n = C_3^n = C_5^y = 0; \\ C_2^n &= \frac{B_k \delta_* [t_0^2 t_* (\mu t_1 - 1) + p_1 \delta_*]}{\mu t_1 t_0^2 t_* (1 + B_k) \cos \alpha_k \eta}; \\ C_1^y &= \frac{\delta_* \cos(\alpha \pi/2)}{\mu t_1 t_0 \sin[\alpha(\pi/2 - \eta)]} \left[\frac{B p_1 \delta_* \cos(\alpha \eta)}{t_1 t_0 (1 + B) \cos(\alpha \pi/2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\delta_*} \mu t_1 t_0 C_2^n \cos \alpha_k \eta - \frac{(B - B_k) p_1 \delta_*}{t_1 t_0 (1 + B)(1 + B_k)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(B - B_k) t_0 (\mu t_1 - 1)}{(1 + B)(1 + B_k)} \right]; \\ C_2^y &= \frac{B p_1 \delta_*^2}{s_0 t_1^2 t_0^2 (1 + B) \cos(\alpha \pi/2)} - C_1^y \operatorname{tg}(\alpha \pi/2); \\ C_4^y &= -C_1^y \sin(\alpha \pi/2) - C_2^y \cos(\alpha \pi/2) - \frac{p_1 \gamma \pi^2}{8 t_1 t_0}; \\ C_4^n &= C_1^y [\sin \alpha \eta - \sin(\alpha \pi/2)] + C_2^y [\cos \alpha \eta - \cos \alpha \pi/2] - \\ &\quad - \frac{p_1 \gamma \pi^2}{8 t_1 t_0} - C_2^n \cos \alpha \eta; \\ C_5^y &= \frac{\mu t_1 t_0 C_2^n \sin \alpha \eta}{\delta_* \gamma \alpha B_k} - \frac{\eta [t_1 t_0 (\mu t_1 t_0 - \lambda_0) - B_k p_1 \gamma^3 \delta_*]}{\gamma t_1 t_0 (1 + B_k)} - \\ &\quad - \frac{\mu t_1 t_0}{\delta_* \gamma \alpha} (C_1^y \cos \alpha \eta - C_2^y \sin \alpha \eta) + \frac{\mu t_1^2 t_0^2 - B p_1 \gamma^3 \delta_*}{\gamma t_1 t_0 (1 + B)}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Здесь

$$\alpha = \alpha(\mu t_1, B); \quad \alpha_k = \alpha(\mu t_1, B_k).$$

Для определения границы η , воспользовавшись равенствами (4.2.4), (4.2.5), (4.2.8), (4.2.9), найдем уравнение:

$$\begin{aligned} & t_1 t_0^2 (\mu t_1 - 1) [\alpha \sin \alpha_k \eta \sin \alpha(\pi/2 - \eta) - \\ & - \alpha_k \cos \alpha_k \eta \cos \alpha(\pi/2 - \eta)] + 2p_1 \delta_* \sin[\alpha(\pi/2 - \eta)/2] \times \\ & \times \{ \alpha_k \sin[\alpha(\pi/2 - \eta)/2] \cos \alpha_k \eta + \\ & + \alpha \sin \alpha_k \eta \cos[\alpha(\pi/2 - \eta)/2] \} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Выражение для интенсивности деформаций e_{i0} в пластической области второго слоя имеет вид:

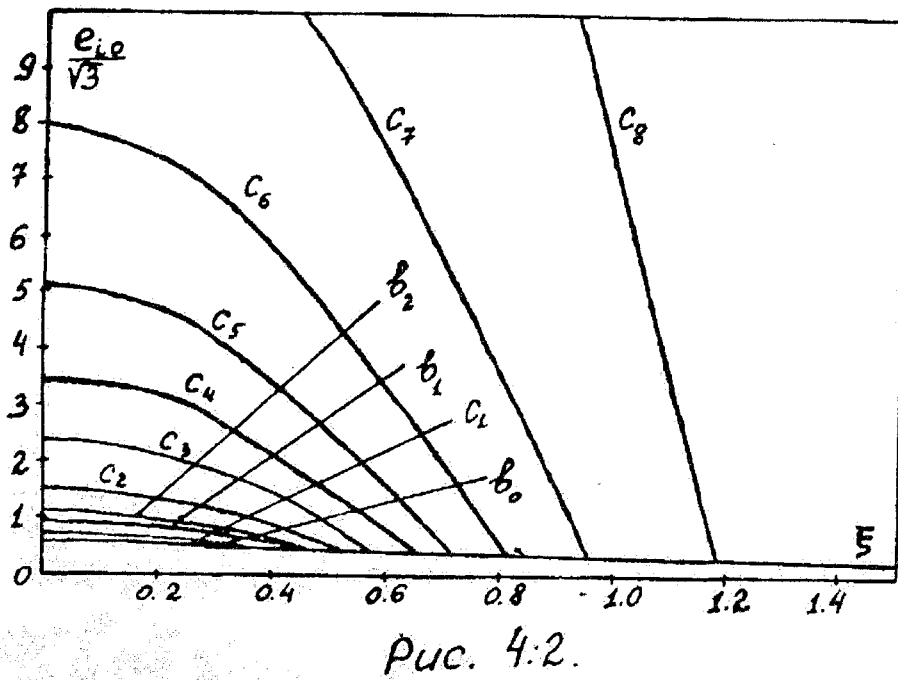
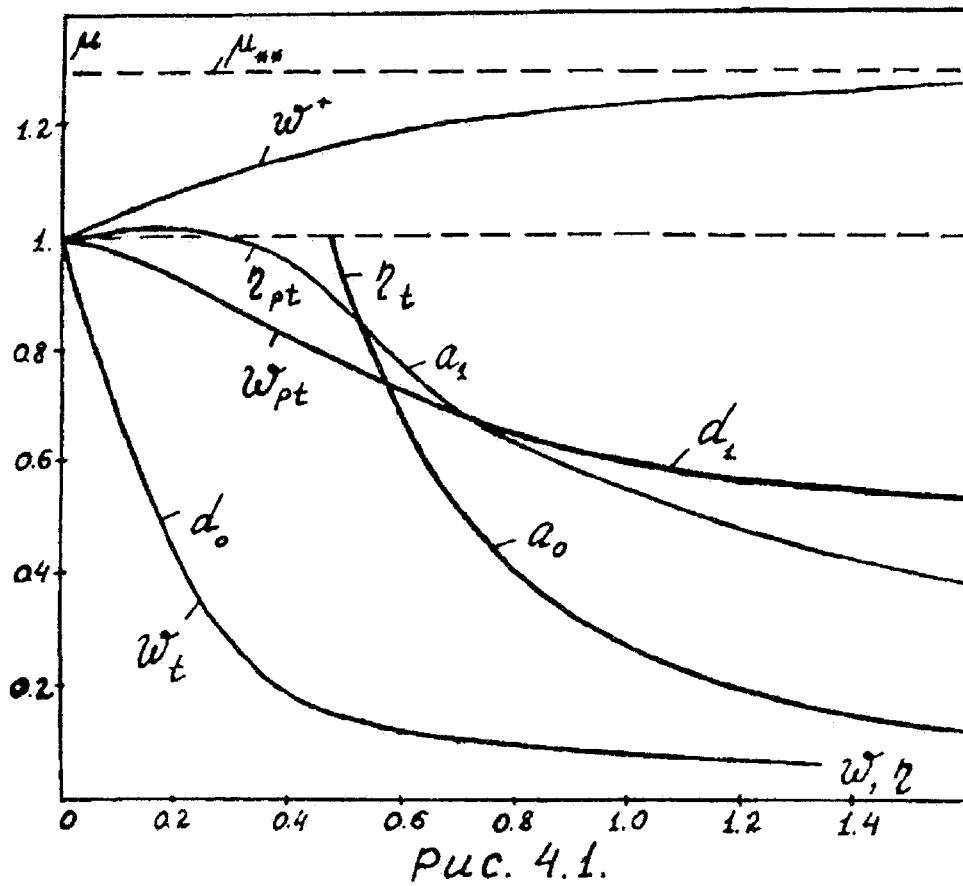
$$\frac{\sqrt{3}}{2} e_{i0} = \frac{(\cos \alpha_k \xi - \cos \alpha_k \eta)}{\cos \alpha_k \eta} \left[t_0 (\mu t_1 - 1) - \frac{p_1 \delta_*}{t_1 t_0} \right] + \frac{t_0}{(1 + B)}. \quad (4.2.11)$$

Зависимости $\mu(\eta)$, полученные из уравнения (4.2.10) для

$$B = 1.5, \quad G = \delta_1 = \delta_2 = 0.1, \quad t_0 = 0.001, \quad B_k = 0.03,$$

$$\gamma = 0.05, \quad t_1 = 1 - 0.05\sigma, \quad (\sigma = 0, 1)$$

изображены кривыми a_σ на рис. 4.1. Зависимости $e_{i0}(\xi)$, определенные из выражения (4.2.11) при тех же параметрах пластинки изображены кривыми b_τ для $\mu = 0.98 - 0.4\tau$, ($\tau = 0, 1, 2$), и кривыми C_ε для $\mu = \mu_* - 0.1\varepsilon$, ($\varepsilon = 1, 2, 3, \dots$) на рис. 4.2; причем μ_* — то значение параметра μ , до которого возможно равновесие пластинки при возрастающих нагрузках. Нагрузки $t = \mu_* t_1$, $p = \mu_* p_1 \gamma^{-3}$ назовем критическими в бифуркационном смысле (первого рода). Зависимости прогиба w в середине пластинки от параметра нагрузки μ изображены кривыми d_σ на рис. 4.1. Полученные зависимости характерны, когда пластинка упругоустойчива до перехода ее в пластическое состояние, ($\alpha(t_1, B) < 1$), и материал второго слоя имеет малое упрочнение, ($\alpha(t_1, B_k) \geq 1$). Если материал второго слоя имеет большое упрочнение, ($\alpha(t_1, B_k) \leq 1$), то при $\mu > \mu(\pi/2) > 1$ весь второй слой деформируется пластически с возрастанием параметра нагрузки.



Соответствующее решение нетрудно получить, воспользовавшись общим решением (4.2.4) при граничных условиях (4.2.5); в таком случае, устремляя прогиб к бесконечности для критической нагрузки (второго рода) получим выражение:

$$t_* = \mu_* t_1 = B_k \gamma^2 G \delta_* / \{t_0 [G(1 + B_k) + 2B_k \gamma^2]\}. \quad (4.2.12)$$

Зависимость $w_0(\mu)$ при $B_k = 1.49$, $p_1 = 0$ и всех остальных ранее принятых параметрах пластинки показана кривой w^+ на рис. 4.1.

В случае пластинки, нагруженной только поперечной нагрузкой p , решение получим из приведенного выше решения при $t_1 \rightarrow 0$. В таком случае $\eta \rightarrow \pi/2$, $w \rightarrow \infty$, если $p \rightarrow \infty$.

Таким образом, несущая способность пластинки под действием сил в ее плоскости и поперечной нагрузки определяется критическими нагрузками первого рода, если материал второго слоя пластинки слабо упрочняющийся, и критической нагрузкой второго рода, если материал второго слоя пластинки сильно упрочняющийся. Несущая способность пластинки под действием только поперечной нагрузки определяется критической нагрузкой второго рода. Несущая способность пластинки под действием только сжимающих сил в ее плоскости в случае малого упрочнения исчерпывается при критической нагрузке первого рода $t_1 = 1$, соответствующей переходу второго слоя в пластическое состояние, а в случае большого упрочнения — при критической нагрузке второго рода t_* .

Проведенный анализ равновесия широкой трехслойной пластинки под действием сжимающих сил в ее плоскости, отстоящей от внутренних поверхностей несущих слоев на расстояниях, определенным равенствами (4.2.2), обеспечивающих безмоментность упругого состояния, показывает, что, в общем случае, выпучивание начинается при нагрузке t_1 , соответствующей переходу одного из слоев в пластическое состояние. Поэтому использование классической теории упруго-пластической устойчивости [1], основанной на предположении о безмоментности основного состояния, для определения критических нагрузок рассматриваемой пластинки является несостоятельным. Однако, определенные методами теории упругопластической устойчивости,

критические нагрузки позволяют косвенно оценить характер истощения ее несущей способности.

Действительно, рассмотрим задачу об устойчивости пластинки за пределом упругости при неизменных внешних силах. При этом, как и ранее, предположим, что второй слой в основном состоянии равновесия пластический и в нем происходит догрузка после потери устойчивости; первый слой всегда считается упругим. Тогда, подставляя в уравнения (4.2.3) и граничные условия (4.2.5) $u_j + \delta u_j$, $w + \delta w$ вместо u_j , w , ($j = 1, 2$), и вычитая из полученных уравнений равновесия и граничных условий уравнения равновесия (4.2.3) и граничные условия (4.2.5), соответственно, получим:

$$\delta u_{1,\xi} + b\delta u_{2,\xi} = 0;$$

$$h_1\delta u_{1,\xi\xi} + bh_2\delta u_{2,\xi\xi} - \frac{G}{\gamma^2}(\delta u_1 - \delta u_2) + \frac{G}{\gamma}\delta_*\delta w_{,\xi} = 0; \quad (4.2.13)$$

$$(h_1^+\delta u_1 - bh_2^+\delta u_2)_{,\xi\xi\xi} + \frac{tt_0}{\gamma}\delta w_{,\xi\xi} = 0;$$

$$\delta u_{1,\xi}(\pi/2) = \delta w_{,\xi}(0) = \delta w(\pi/2) = \delta u_1(0) = \delta u_2(0) = 0. \quad (4.2.14)$$

Нетривиальное решение однородной системы уравнений (4.2.13) при однородных граничных условиях (4.2.14) и $b = B_k$, как нетрудно проверить, имеет место для критической нагрузки Кармана t_* , соответствующей $\alpha_k(t_*) = 1$ и определяемой из выражения (4.2.12).

Заменяя в выражении (4.2.12) B_k на B , получим критическую нагрузку Эйлера рассматриваемой трехслойной пластинки.

Если геометрические и механические характеристики пластинки таковы, что выполняются неравенства, $\alpha_k(t_1) \leq 1$, $\alpha(t_1) < 1$, то нагрузка $t_* > 1$ и она, как было показано, соответствует критической нагрузке второго рода при выпучивании пластинки и является также, если предположить, что выпучивание не сопровождается вторичными пластическими деформациями, верхней оценкой нагрузки истощения несущей способности. Если выполнены неравенства, $\alpha_k(t_1) > 1$, $\alpha(t_1) < 1$, то $t_* < 1$ и нагрузка t_* является нижней оценкой

нагрузки несущей способности пластинки. В таком случае из решения (4.2.10)-(4.2.12) следует, что с уменьшением нагрузки от значения $t = t_1 = 1$, соответствующему переходу второго слоя в пластическое состояние, до значения t_* прогиб в середине пластинки возрастает от нуля до бесконечности.

Таким образом, поведение рассматриваемой сжатой пластинки с мало упрочняющимся вторым несущим слоем, (кривая d_0 на рис. 4.1), и со вторым слоем, имеющим большое упрочнение, (кривая w^+ на рис. 4.1), аналогично, соответственно, поведению рассмотренной в разделе 3.1 элементарной модели стержня с мало упрочняющейся второй полкой, (кривая KM на рис. 3.3), и со второй полкой имеющей большое упрочнение, (кривая KNP на рис. 3.3). Кроме того, критическое состояние малоупрочняющейся пластинки при сжатии характеризуется образованием конечной пластической зоны сразу же после перехода ее в пластическое состояние (кривая a_0 на рис. 4.1)

Если материалы несущих слоев имеют пропорциональные диаграммы, то сжатая трехслойная пластинка сохраняет безмоментное невыпученное состояние и после перехода слоев в пластическое состояние [34]. При этом классическую постановку задачи об устойчивости пластинки за пределом упругости можно сохранить. Критическую нагрузку чистопластической потери устойчивости (нагрузку Шенли) t_{**} получим из (4.2.12)-(4.2.14) после замены в них величины b на $b_1 = B_{1k}/B_{2k}$, причем $B_{1k} = E_{1k}\delta_1^0$, E_{1k} — касательный модуль первого несущего слоя. В этом случае имеем:

$$t_{**} = b_1 \gamma^2 G \delta_* / \{t_0 [G(1 + b_1) + 2b_1 \gamma^2]\}. \quad (4.2.15)$$

4.3. Устойчивость и выпучивание упругопластической прямоугольной трехслойной пластинки с мембранными несущими слоями и легким заполнителем под действием продольных и поперечных нагрузок

Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластинку с легким заполнителем и мембранными несущими слоями под действием равномерно распределенной по поверхности второго слоя поперечной нагруз-

ки P и равномерно распределенных по краям усилий в плоскости, отстоящей от внутренних поверхностей несущих слоев на расстояниях, определенных выражениями (3.6.1). Слой заполнителя считаем всегда упругим, а несущие слои предположим упруго-пластическими с упрочнением. Диаграмма материалов несущих слоев принимается на пластическом участке дробно-линейной, рис. 4.3:

$$e_{i0}^j = \frac{(2\sigma_{sj} - \sigma_{pj})\sigma_{i0}^j - \sigma_{sj}^2}{E_j(\sigma_{i0}^j - \sigma_{pj})},$$

где σ_{sj} и σ_{pj} — пределы текучести и пределы прочности материалов несущих слоев ($j = 1, 2$), e_{i0}^j и σ_{i0}^j — интенсивности деформаций и напряжений. При этом на пределе пропорциональности касательный модуль равен модулю упругости и интенсивность напряжений равна пределу прочности, когда интенсивность деформаций стремится к бесконечности. Предполагаем, что эффект Багшингера отсутствует, хотя учет его не представляет принципиальных затруднений. Принимается, что деформации и напряжения в несущих слоях связаны законом малых упруго-пластических деформаций с учетом разгрузки и вторичных пластических деформаций [20]. Связь между смещениями в слоях пластинки пусть будет задана гипотезой прямых линий, а деформации выражаются через смещения, согласно классической нелинейной теории пластин. В таких предположениях преобразуем уравнения равновесия (2.4.6) пластинки и запишем их в безразмерном виде. Для этого первые четыре уравнения из (2.4.6) разрешим относительно производных от усилий одного направления в каждом слое. Пятое уравнение из (2.4.6) сложим с первым и вторым уравнениями, соответственно, продифференцированными по x_1 , x_2 и умноженными на величины $h_1 + \delta_1/2$, $h_2 + \delta_2/2$. Затем вычтем из получившегося пятого уравнения третье и четвертое из преобразованных уравнений, продифференцированные, соответственно, по x_1 , x_2 и умноженные на величину $[\delta_3 + (\delta_1 + \delta_2)/2]/\delta_3$. В результате получим:

$$u_{1,\xi\xi} + \frac{3}{4}\lambda v_{1,\xi\eta} + \frac{\lambda^2}{4}u_{1,\eta\eta} + G(u_2 - u_1 + \lambda w_{,\xi}) = F_1;$$

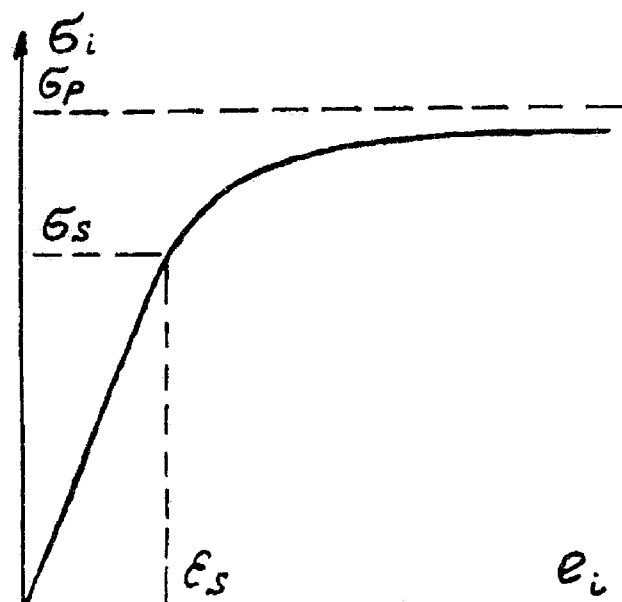


Рис. 4.3.

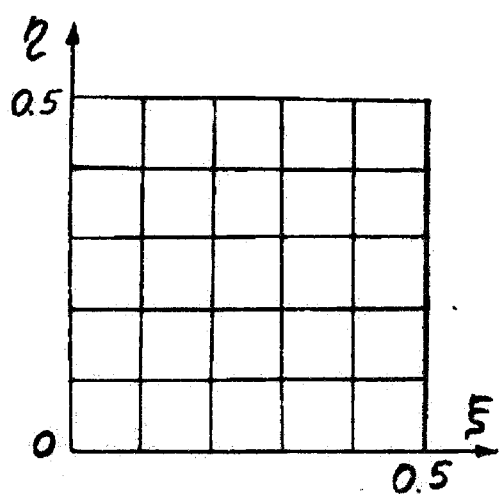


Рис. 4.4.

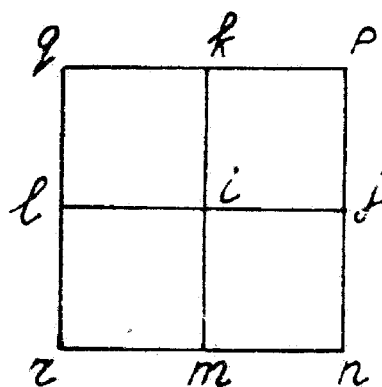


Рис. 4.5.

$$\begin{aligned}
\lambda^2 v_{1,\eta\eta} + \frac{3}{4} \lambda u_{1,\xi\eta} + \frac{1}{4} v_{1,\xi\xi} + G(v_2 - v_1 + \lambda_1 \lambda w_{,\eta}) &= F_2; \\
B(u_{2,\xi\xi} + \frac{3}{4} \lambda v_{2,\xi\eta} + \frac{1}{4} u_{2,\eta\eta}) - G(u_2 - u_1 + \lambda_1 w_{,\xi}) &= F_3; \\
B(\lambda^2 v_{2,\eta\eta} + \frac{3}{4} \lambda u_{2,\xi\eta} + \frac{1}{4} v_{2,\xi\xi}) - G(v_2 - v_1 + \lambda_1 \lambda w_{,\eta}) &= F_4; \\
G\lambda_2[(u_2 - u_1)_{,\xi} + \lambda_1(w_{,\xi\xi} + \lambda^2 w_{,\eta\eta}) + \lambda(v_2 - v_1)_{,\eta}] + & \\
+ \mu w_{,\xi\xi}[u_{1,\xi} + \frac{\lambda}{2} v_{1,\eta} + B(u_{2,\xi} + \frac{\lambda}{2} v_{2,\eta})] + & \\
+ \lambda^2 \mu w_{,\eta\eta}[\lambda v_{1,\eta} + \frac{1}{2} u_{1,\xi} + B(\lambda v_{2,\eta} + \frac{1}{2} u_{2,\xi})] + & \\
+ \frac{\lambda \mu}{2} w_{\xi\eta}[\lambda u_{1,\eta} + v_{1,\xi} + B(\lambda u_{2,\eta} + v_{2,\xi})] + p &= F_5.
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Правые части уравнений (4.3.1) имеют вид:

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_1 - \varphi_1; & F_2 &= f_2 - \varphi_2; & F_3 &= f_3 - \varphi_3; \\
F_4 &= f_4 - \varphi_4; & F_5 &= f_5 - \varphi_5.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
f_1 &= n_{11,\xi}^0 + \lambda t_{1,\eta}^0; & f_2 &= \lambda n_{21,\eta}^0 + t_{1,\xi}^0; \\
f_3 &= B(n_{12,\xi}^0 + \lambda t_{2,\eta}^0); & f_4 &= B(\lambda n_{22,\eta}^0 + t_{2,\xi}^0); \\
f_5 &= \mu[(n_{11}^0 + B n_{12}^0) w_{,\xi\xi} + \lambda^2 (n_{21}^0 + B n_{22}^0) w_{,\eta\eta} + & \\
&+ 2\lambda (t_1^0 + B t_2^0) w_{,\xi\eta}]; & p &= P\mu a/B_1; \\
\varphi_1 &= w_{,\xi} w_{,\xi\xi} + \frac{3}{4} \lambda^2 w_{,\eta} w_{,\xi\eta} + \frac{\lambda^2}{4} w_{,\xi} w_{,\eta\eta}; \\
\varphi_2 &= \lambda^3 w_{,\eta} w_{,\eta\eta} + \frac{3}{4} \lambda w_{,\xi} w_{,\xi\eta} + \frac{\lambda}{4} w_{,\eta} w_{,\xi\xi}; \\
\varphi_3 &= B\varphi_1; & \varphi_4 &= B\varphi_2; \\
\varphi_5 &= (1 + B)\mu\{\frac{1}{2}(w_{,\xi})^2 + \frac{\lambda^2}{4}(w_{,\eta})^2\} w_{,\xi\xi} +
\end{aligned}$$

$$+ \lambda^2 \left[\frac{\lambda^2}{2} (w, \eta)^2 + \frac{1}{4} (w, \xi)^2 \right] w, \eta \eta + \frac{\lambda^2}{2} w, \xi w, \eta \xi \};$$

$$n_{jr}^0 = k_j \omega_0^j (e_{i0}^j) (\varepsilon_r^j + \frac{1}{2} \varepsilon_s^j) + m_j \omega_0^j (e_{i0}^{j*}) (\varepsilon_r^{j*} + \frac{1}{2} \varepsilon_s^{j*}) + n_j \omega_1^j (e_{i1}^j) (\varepsilon_{r1}^j + \frac{1}{2} \varepsilon_{s1}^j);$$

$$t_j^0 = \frac{1}{4} [k_j \omega_0^j (e_{i0}^j) \varepsilon_{12}^j + m_j \omega_0^j (e_{i0}^{j*}) \varepsilon_{12}^{j*} + n_j \omega_1^j (e_{i1}^j) \varepsilon_{121}^j];$$

$$\varepsilon_1^j = u_{j,\xi} + \frac{1}{2} (w, \xi)^2; \quad \varepsilon_2^j = \lambda v_{j,\eta} + \frac{\lambda^2}{2} (w, \eta)^2;$$

$$\varepsilon_{12}^j = \lambda u_{j,\eta} + v_{j,\xi} + \lambda w, \xi w, \eta;$$

$$\varepsilon_{11}^j = \varepsilon_1^j - \varepsilon_1^{j*}; \quad \varepsilon_{21}^j = \varepsilon_2^j - \varepsilon_2^{j*}; \quad \varepsilon_{121}^j = \varepsilon_{12}^j - \varepsilon_{12}^{j*};$$

$$(j, r, s = 1, 2; \quad r \neq s).$$

Интенсивности, e_{i0}^j , e_{i0}^{j*} , e_{i1}^j , и функции пластичности, ω_{i0}^j , ω_1^j , определяются из выражений (1.3.1). В уравнениях (4.3.1) и их правых частях (4.3.2) использованы следующие безразмерные величины:

$$\xi = \frac{x_1}{a}; \quad \eta = \frac{x_2}{b}; \quad u_j = \frac{u_{1j}}{a}; \quad v_j = \frac{u_{2j}}{a}; \quad \lambda = \frac{a}{b}; \quad \lambda_1 = \frac{(h_0 + \delta_3)}{a};$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{h_0}{\delta_3}; \quad h_j = \frac{h_j}{a}; \quad \delta_j = \frac{\delta_j}{a}; \quad G = \frac{4 \mu G_3 a}{3 B_1}; \quad \mu = \frac{a}{\delta_3}; \quad B = \frac{B_2}{B_1};$$

$$p = P \mu a / B_1, \quad (j = 1, 2).$$

Здесь величины a и b — длина и ширина пластинки, обозначения размерных и безразмерных величин h_j и δ_j сохранены одинаковыми.

Граничные условия шарнирно опертой по краям пластинки (2.4.7), разрешенные относительно усилий одного направления, имеют следующий вид.

На краях $\xi = \pm \frac{1}{2}$:

$$u_{1,\xi} + \frac{\lambda}{2} v_{1,\eta} + \frac{1}{2} [(w, \xi)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (w, \eta)^2] = n_{11}^0 + n_{g11};$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{2,\xi} + \frac{\lambda}{2}v_{2,\eta} + \frac{1}{2}[(w_{,\xi})^2 + \frac{\lambda^2}{2}(w_{,\eta})^2] &= n_{12}^0 + n_{g12}/B; \\
\lambda u_{1,\eta} + v_{1,\xi} + \lambda w_{,\xi}w_{,\eta} &= 4t_1^0 + t_{g1}; \\
\lambda u_{2,\eta} + v_{2,\xi} + \lambda w_{,\xi}w_{,\eta} &= 4t_2^0 + t_{g2}/B; \\
w &= 0.
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

На краях $\eta = \pm \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\lambda v_{1,\eta} + \frac{1}{2}u_{1,\xi} + \frac{1}{2}[\lambda^2(w_{,\eta})^2 + \frac{1}{2}(w_{,\xi})^2] &= n_{21}^0 + n_{g21}; \\
\lambda v_{2,\eta} + \frac{1}{2}u_{2,\xi} + \frac{1}{2}[\lambda^2(w_{,\eta})^2 + \frac{1}{2}(w_{,\xi})^2] &= n_{22}^0 + n_{g22}/B; \\
\lambda u_{1,\eta} + v_{1,\xi} + \lambda w_{,\xi}w_{,\eta} &= 4t_1^0 + t_{g1}^1; \\
\lambda u_{2,\eta} + v_{2,\xi} + \lambda w_{,\xi}w_{,\eta} &= 4t_2^0 + t_{g2}^1/B; \\
w &= 0.
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

В выражениях (4.3.3)-(4.3.4) имеем:

$$\begin{aligned}
n_{gjr} &= \frac{N_{gjr}}{B_1}; & t_{gr} &= \frac{T_{gr}}{B_1}; & t_{gr}^1 &= \frac{T_{gr}^1}{B_1}; \\
n_{rj}^0 &= \frac{N_{0rj}}{B_1}; & t_r^0 &= \frac{T_{0r}}{B_1}; & (j, r &= 1, 2).
\end{aligned}$$

Величины, n_{gjr} , t_{gj} , t_{gj}^1 , — усилия на краях несущих слоев, а величины, N_{0rj} , T_{0r} , определены равенствами (2.3.2) с учетом постоянства напряжений по толщине мембранных несущих слоев. В соответствии с предположением о плоскости действия равнодействующих, совпадающей с выбранной отсчетной поверхностью, эти усилия определим из следующих выражений:

$$\begin{aligned}
n_{gjr} &= \frac{h_s^+ n_{gj}}{(h_1^+ + h_2^+)}; & t_{gr} &= \frac{h_s^+ t_g}{(h_1^+ + h_2^+)}; & t_{gr}^1 &= \frac{h_s^+ t_g^1}{(h_1^+ + h_2^+)}; \\
(j, r, s &= 1, 2; \quad r \neq s).
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Здесь

$$h_j^+ = h_j + \frac{\delta_j}{2}, \quad n_{gj} = \frac{N_{gj}}{B_1}, \quad t_g = \frac{T_g}{B_1}, \quad t_g^1 = \frac{T_g^1}{B_1},$$

$$N_{gj} = N_{gj1} + N_{gj2}, \quad T_g = T_{g1} + T_{g2}, \quad T_g^1 = T_{g1}^1 + T_{g2}^1,$$

причем N_{gj} , T_g и T_g^1 – равнодействующие усилий на краях пластинки.

Таким образом, для решения задачи об изгибе и устойчивости рассматриваемой трехслойной пластинки имеем пять геометрически и физически нелинейных дифференциальных уравнений равновесия (4.2.1) с пятью неизвестными смещениями, u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , w , коэффициентами K в каждой точке несущих слоев и пять граничных условий на каждом краю пластинки. Шестое граничное условие (2.4.7) и граничное условие в угловой точке выполняется тождественно при соблюдении граничных условий (4.3.3)–(4.4.4). Такое тождественное выполнение шестого граничного условия и граничного условия в угловой точке отмечено и для трехслойной пластинки симметричного строения с легким заполнителем и мембранными несущими слоями [1].

Методы аналитического решения краевых задач, аналогичных поставленной краевой задаче (4.3.1)–(4.3.4) до настоящего времени разработаны недостаточно [1]. Наиболее широко распространен численный метод конечных разностей, основанный на представлении дифференциальных уравнений и граничных условий краевых задач в конечных разностях и решении соответствующих систем алгебраических и дифференциальных уравнений (см. раздел 4.1) [253, 260].

Для решения поставленной задачи изгиба и выпучивания рассматриваемой оболочки (4.3.1)–(4.3.4) воспользуемся методом конечных разностей в сочетании с методом последовательных приближений. В безразмерных координатах, ξ, η , прямоугольная область пластинки с любым отношением сторон отображается в квадратную со стороной равной единице. Разделим каждую сторону квадрата на N равных частей с шагом сетки $s = 1/N$. Начало координат расположим в середине пластинки. Вследствие симметрии граничных условий относительно осей, ξ, η , изогнутая поверхность пластинки будет симметричной относительно тех же осей. Поэтому достаточно рассмотреть

только $1/4$ часть пластинки, рис. 4.4. Для перехода к конечным разностям воспользуемся центральными операторами и расчетной ячейкой, изображенной на рис. 4.5; при этом имеем:

$$\begin{aligned} f_{,\xi} &= \frac{1}{2s}(f_j - f_l); & f_{,\eta} &= \frac{1}{2s}(f_k - f_m); & f_{,\xi\xi} &= \frac{1}{s^2}(f_j - 2f_i + f_l); \\ f_{,\eta\eta} &= \frac{1}{s^2}(f_k - 2f_i + f_m); & f_{,\xi\eta} &= \frac{1}{s^2}(f_p - f_q + f_r - f_n). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

В выражениях (4.3.6) под функцией f подразумевается любая из функций, u_1, u_2, v_1, v_2, w , имеющая соответствующую производную. Представив дифференциальные уравнения (4.3.1) в конечных разностях, с помощью равенств (4.3.6), разрешим полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно перемещений в центре расчетной ячейки; при этом правые части уравнений, включающие в себя нелинейные члены уравнений, предположим известными. После несложных преобразований для перемещений, $u_{1i}, u_{2i}, v_{1i}, v_{2i}, w_i$, в центре расчетной ячейки получим выражения:

$$\begin{aligned} u_{1i} &= -\frac{1}{\Delta_1}[(2B + \frac{1}{2}\lambda^2 B + Gs^2)\tilde{F}_1 + Gs^2\tilde{F}_3]; \\ u_{2i} &= -\frac{1}{\Delta_1}[(2 + \frac{1}{2}\lambda^2 + Gs^2)\tilde{F}_3 + Gs^2\tilde{F}_1]; \\ v_{1i} &= -\frac{1}{\Delta_2}[(2B\lambda^2 + \frac{1}{2}B + Gs^2)\tilde{F}_2 + Gs^2\tilde{F}_4]; \\ v_{2i} &= -\frac{1}{\Delta_2}[(2\lambda^2 + \frac{1}{2} + Gs^2)\tilde{F}_4 + Gs^2\tilde{F}_2]; \\ w_i &= \tilde{F}_5 = \tilde{R}_1/\tilde{R}_2. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= F_1 s^2 - u_{1j} - u_{1l} - \frac{3}{16}\lambda(v_{1p} - v_{1q} + v_{1r} - v_{1n}) - \\ &\quad - \frac{1}{4}\lambda^2(u_{1k} + u_{1m}) - \frac{1}{2}Gs\lambda_1(w_j - w_l); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_2 = F_2 s^2 - \lambda^2(v_{1k} + v_{1m}) - \frac{3}{16}\lambda(u_{1p} - u_{1q} + u_{1r} - u_{1n}) - \\ - \frac{1}{4}(v_{1j} + v_{1l}) - \frac{1}{2}Gs\lambda_1\lambda(w_k - w_m);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_3 = F_3 s^2 - B[u_{2j} + u_{2l} + \frac{3}{16}\lambda(v_{2p} - v_{2q} + v_{2r} - v_{2n}) + \\ + \frac{1}{4}\lambda^2(u_{2k} + u_{2m})] + \frac{1}{2}Gs\lambda_1(w_j - w_l);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_4 = F_4 s^2 - B[\lambda^2(v_{2k} + v_{2m}) + \frac{3}{16}\lambda(u_{2p} - u_{2q} + u_{2r} - u_{2n}) + \\ + \frac{1}{4}(v_{2j} + v_{2l})] + \frac{1}{2}Gs\lambda_1\lambda(w_k - w_m);\end{aligned}$$

$$\tilde{R}_1 = R_{11} + R_{12};$$

$$\begin{aligned}R_{11} = -G\lambda_2[\frac{s}{2}(u_{2j} - u_{2l} - u_{1j} + u_{1l}) + \\ + \frac{1}{2}\lambda s(v_{2k} - v_{2m} - v_{1k} + v_{1m}) + \lambda_1(w_j + w_l) + \\ + \lambda_1\lambda^2(w_k + w_m)] - \frac{1}{16}\frac{\lambda\mu}{s}(w_p - w_q + w_r - w_n)[\lambda(u_{1k} - u_{1m}) + \\ + u_{1j} - u_{1l} + B\lambda(u_{2k} - u_{2m}) + B(v_{2j} - v_{2l})];\end{aligned}$$

$$R_{12} = -pq_1 s^2 + F_5 s^2;$$

$$\tilde{R}_2 = -2[G\lambda_2\lambda_1(1 + \lambda^2) + \mu n_1 + \mu\lambda^2 n_2];$$

$$\begin{aligned}n_1 = \frac{1}{2s}[u_{1j} - u_{1l} + \frac{1}{2}\lambda(v_{1k} - v_{1m}) + B(u_{2j} - u_{2l}) + \\ + \frac{1}{2}B\lambda(v_{2k} - v_{2m})];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n_2 = \frac{1}{2s}[\lambda(v_{1k} - v_{1m}) + \frac{1}{2}(u_{1j} - u_{1l}) + B\lambda(v_{2k} - v_{2m}) + \\ + \frac{1}{2}B(u_{2j} - u_{2l})];\end{aligned}$$

$$\Delta_1 = (2 + \frac{\lambda^2}{2} + Gs^2)(2B + \frac{\lambda^2 B}{2} + Gs^2) - Gs^2;$$

$$\Delta_2 = (2\lambda^2 + \frac{1}{2} + Gs^2)(2B\lambda^2 + \frac{1}{2} + Gs^2) - Gs^2;$$

где q_1 — параметр нагрузки. Для перехода к конечным разностям в граничных условиях (4.3.3)-(4.3.4) применим левые разностные операторы [253]:

$$f_{,\xi} = \frac{1}{s}(f_i - f_l); \quad f_{,\eta} = \frac{1}{s}(f_i - f_m). \quad (4.3.8)$$

Воспользовавшись выражениями (4.3.8) и представив граничные условия (4.3.3)-(4.3.4) в конечных разностях, разрешим полученные системы линейных алгебраических уравнений (нелинейные слагаемые считаем "известными") относительно перемещений в центре расчетной ячейки. В результате получим следующие соотношения.

На краю $\xi = 1/2$:

$$\begin{aligned} u_{1i} &= u_{1l} - \frac{\lambda}{4}(v_{1k} - v_{1m}) + s\Psi_1; & u_{2i} &= u_{2l} - \frac{\lambda}{4}(v_{2k} - v_{2m}) + s\Psi_2; \\ v_{1i} &= v_{1l} - \frac{\lambda}{2}(u_{1k} - u_{1m}) + s\Psi_3; & v_{2i} &= v_{2l} - \frac{\lambda}{2}(u_{2k} - u_{2m}) + s\Psi_4; \\ w_i &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

На краю $\eta = 1/2$:

$$\begin{aligned} v_{1i} &= v_{1m} - \frac{1}{4\lambda}(u_{1j} - u_{1l}) + \frac{s}{\lambda}\tilde{\Psi}_1; & v_{2i} &= v_{2m} - \frac{1}{4\lambda}(u_{2j} - u_{2l}) + \frac{s}{\lambda}\tilde{\Psi}_2; \\ u_{1i} &= u_{1m} - \frac{1}{2\lambda}(v_{1j} - v_{1l}) + \frac{s}{\lambda}\tilde{\Psi}_3; & u_{2i} &= u_{2m} - \frac{1}{2\lambda}(v_{2j} - v_{2l}) + \frac{s}{\lambda}\tilde{\Psi}_4; \\ w_i &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Здесь в равенствах (4.3.9) и (4.3.10) имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -\frac{1}{2}\alpha_1 + n_{11}^0 + q_1 n_{g11}; & \Psi_2 &= -\frac{1}{2}\alpha_1 + n_{12}^0 + q_1 n_{g12}; \\ \Psi_3 &= -\lambda\alpha_2 + 4t_1^0 + 4q_1 t_{g1}; & \Psi_4 &= -\lambda\alpha_2 + 4t_2^0 + 4q_1 t_{g2}; \\ \tilde{\Psi}_1 &= -\frac{1}{2}\alpha_3 + n_{21}^0 + q_1 n_{g21}; & \tilde{\Psi}_2 &= -\frac{1}{2}\alpha_3 + n_{22}^0 + q_1 n_{g22}; \end{aligned}$$

$$\tilde{\Psi}_3 = -\lambda\alpha_2 + 4t_1^0 + 4q_1 t_{g1}^1; \quad \tilde{\Psi}_4 = -\lambda\alpha_2 + 4t_2^0 + 4q_1 t_{g2}^1;$$

$$\alpha_1 = (w_{,\xi})^2 + \frac{1}{2}\lambda^2(w_{,\eta})^2; \quad \alpha_2 = w_{,\xi}w_{,\eta};$$

$$\alpha_3 = \lambda^2(w_{,\eta})^2 + \frac{1}{2}(w_{,\xi})^2.$$

Для определения смещений в угловой точке потребуем выполнения первых двух граничных условий из (4.3.3) и первых двух граничных условий из (4.3.4), заменяя которые конечно-разностными уравнениями с помощью (4.3.8) и учитывая граничное условие $w = 0$, после некоторых преобразований получим выражения:

$$\begin{aligned} u_{1i} &= u_{1l} + \frac{4}{3}s(\Psi_1 - \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_1); \\ v_{1i} &= v_{1m} + \frac{4}{3\lambda}s(\tilde{\Psi}_1 - \frac{1}{2}\Psi_1); \\ u_{2i} &= u_{2l} + \frac{4}{3}s(\Psi_2 - \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_2); \\ v_{2i} &= u_{2m} + \frac{4}{3\lambda}s(\tilde{\Psi}_2 - \frac{1}{2}\Psi_2); \\ w_i &= 0. \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Вследствие симметрии изогнутой поверхности пластинки относительно осей ξ и η имеем:

при $\xi = 0$ -

$$u_1 = u_2 = 0; \quad v_{1,\xi} = v_{2,\xi} = w_{,\xi} = 0; \tag{4.3.12}$$

при $\eta = 0$ -

$$v_1 = v_2 = 0; \quad u_{1,\eta} = u_{2,\eta} = w_{,\eta} = 0. \tag{4.3.13}$$

Входящие в условия (4.3.12)-(4.3.13) производные заменим правыми разностными операторами:

$$f_{,\xi} = \frac{1}{s}(f_j - f_i); \quad f_{,\eta} = \frac{1}{s}(f_k - f_i). \tag{4.3.14}$$

Используя условия симметрии с помощью разностных операторов (4.3.14) для определения смещений получим выражения:

при $\xi = 0$ -

$$u_{1i} = u_{2i} = 0; \quad v_{1i} = v_{1k}; \quad v_{2i} = v_{2k}; \quad w_i = w_k; \quad (4.3.15)$$

при $\eta = 0$ -

$$v_{1i} = v_{2i} = 0; \quad u_{1i} = u_{1k}; \quad u_{2i} = u_{2k}; \quad w_i = w_k; \quad (4.3.16)$$

Уравнения (4.3.15)-(4.3.16), составленные для узлов на осях ξ и η , уравнения (4.3.9)-(4.3.10), составленные, соответственно, для узлов, лежащих на контуре четверти квадрата, уравнения (4.3.11), составленные для угловой точки, и уравнения (4.3.7), составленные для остальных внутренних узлов четверти квадратной сетки в сумме дают $5(N/2+1)^2$ необходимых алгебраических уравнений для нахождения $5(N/2+1)^2$ неизвестных смещений в узлах и решения задачи о симметричном изгибе и выпучивании трехслойной пластинки с легким заполнителем и мембранными несущими слоями под действием продольных и поперечных нагрузок. Задаваясь начальными значениями смещений в узлах, с помощью приведенных выражений, (4.3.7), (4.3.9)-(4.3.10), (4.3.11), (4.3.15)-(4.3.16), получим первое приближение, используя которое вместо начальных значений, получим новое приближение и т.д., пока процесс последовательных приближений при заданных нагрузках не сойдется с необходимой степенью точности. Процедура такого решения рассматриваемой задачи методом Зейделя в сочетании с методом упругих решений изложена в разделе 4.1.

Численное решение задачи выполнено на ЭВМ БЭСМ-6. Некоторые подробности составления программы вычислений приведены в работе [90] и здесь не излагаются. В программе предусмотрен блок выбора параметров, с которыми не происходит потеря общей и местной устойчивости упругой пластинки. Этот выбор производится известными методами теории устойчивости упругих трехслойных пластин [155,1].

В числовых примерах были рассмотрены пластинки с параметрами: $\lambda_1 = 0.115$; $\mu = 10$; $B = 1$; $\delta_1 = \delta_2 = 0.015$, $h_1 = h_2 = 5$.

Несущие слои изготовлены из одного материала с пределом текучести $\sigma_0 = 0.001 E$. Пределы прочности материала в два раза превышают пределы текучести. Модуль легкого заполнителя равен $G = 1$. Отношение длины пластинки к ширине принято в первом примере $\lambda = 1$, во втором $\lambda = 1.2$ и в третьем $\lambda = 1.5$. Для численного решения четверть пластинки была разбита на 8 равных частей вдоль каждой стороны. Решение алгебраических нелинейных уравнений проведено с относительной погрешностью равной 1% от величины вектора перемещения. Чтобы получить такую точность, требовалось 28–30 итераций в методе Зейделя и 1–10 итераций по методу упругих решений. Параметр нагружения q_1 изменялся малыми приращениями $\delta q_1 = 0.1$. Безразмерные сжимающие усилия, приложенные на краях несущих слоев вдоль короткой стороны пластинки приняты для $q_1 = 1$ равными $n_{g11} = n_{g12} = -0.00005$ и поперечная нагрузка $p = 10^{-3}$, рис 4.6. Решение задачи по одному варианту потребовало 5–6 минут машинного времени на ЭВМ БЭСМ-6.

Результаты численного решения приведены на рис. 4.7–4.10. Переход первой пластинки в пластическое состояние происходит при $q_1 = 9.8$ (рис. 4.7), второй – для $q_1 = 11$ (рис. 4.8) и третьей, когда $q_1 = 12.6$ (рис. 4.9). Пластическое деформирование начинается в центрах пластинок и развивается далее только в одном несущем слое, со стороны приложенной поперечной нагрузки. Развитие пластических зон показано на рис. 4.7–4.9 для четверти каждой пластинки при различных параметрах нагружения. Пластические зоны заключены внутри наименьших замкнутых контуров, содержащих цифру 1. Зоны разгрузки заключены внутри наименьших замкнутых контуров, содержащих цифру 2. Зоны вторичных пластических деформаций отсутствуют.

Значениями параметра нагружения, до которых существуют численные решения данной задачи являются: для первой пластинки $q_{1*} = 10.4$, для второй $q_{1*} = 11.7$, для третьей $q_{1*} = 13.3$. Зависимости прогиба в центрах пластинок от параметра нагружения q_1 приведены на рис. 4.7–4.9. Как следует из этих зависимостей, рост прогибов в центрах пластинок продолжается и при уменьшении параметра нагружения от достигнутых наибольших значений. (Полученные ветви решений с

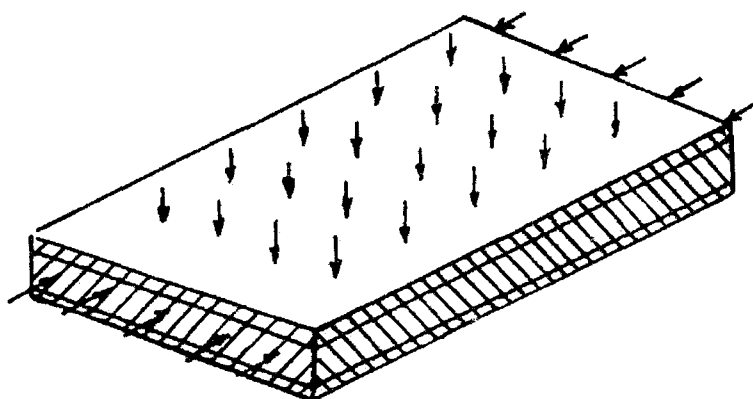


Рис. 4.6.

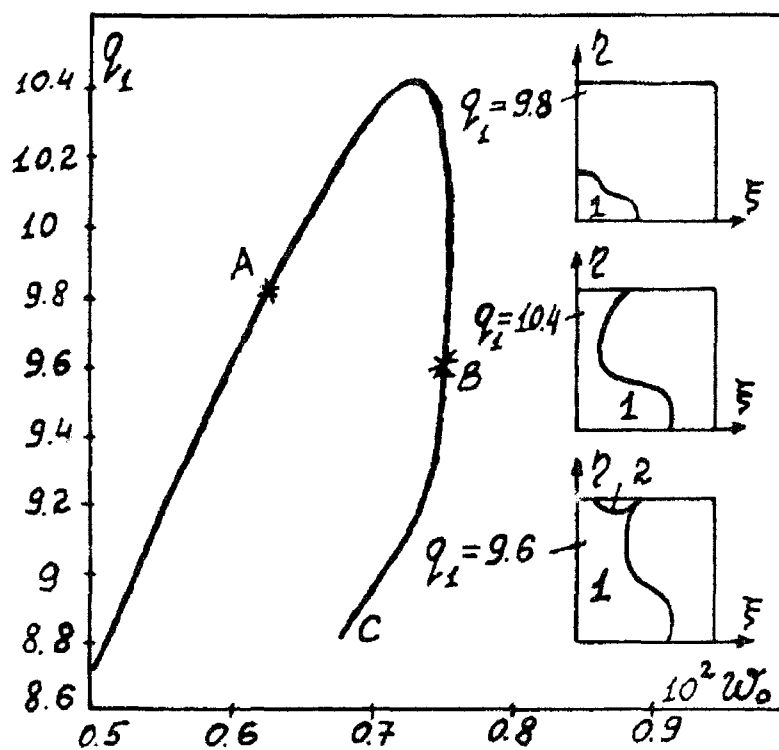


Рис. 4.7.

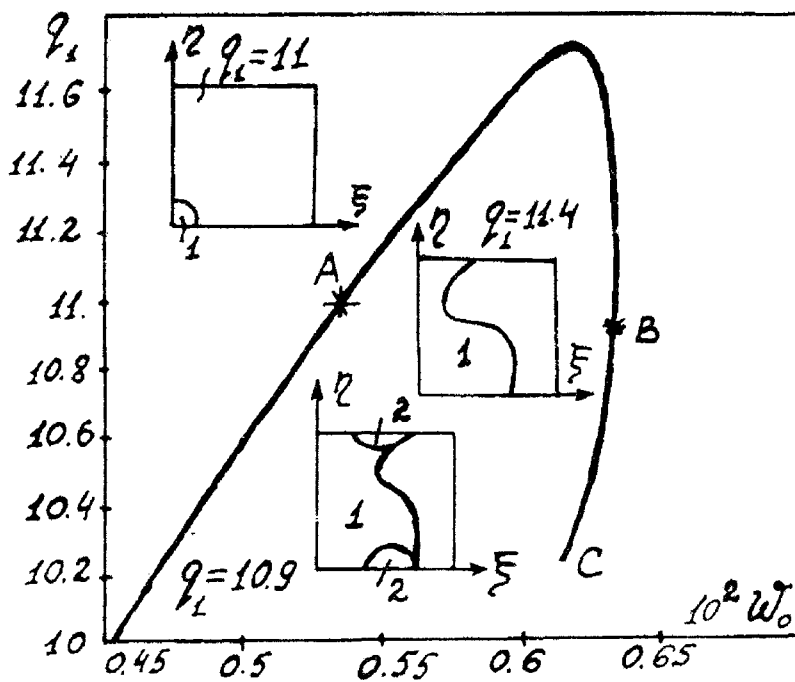


Рис. 4.8.

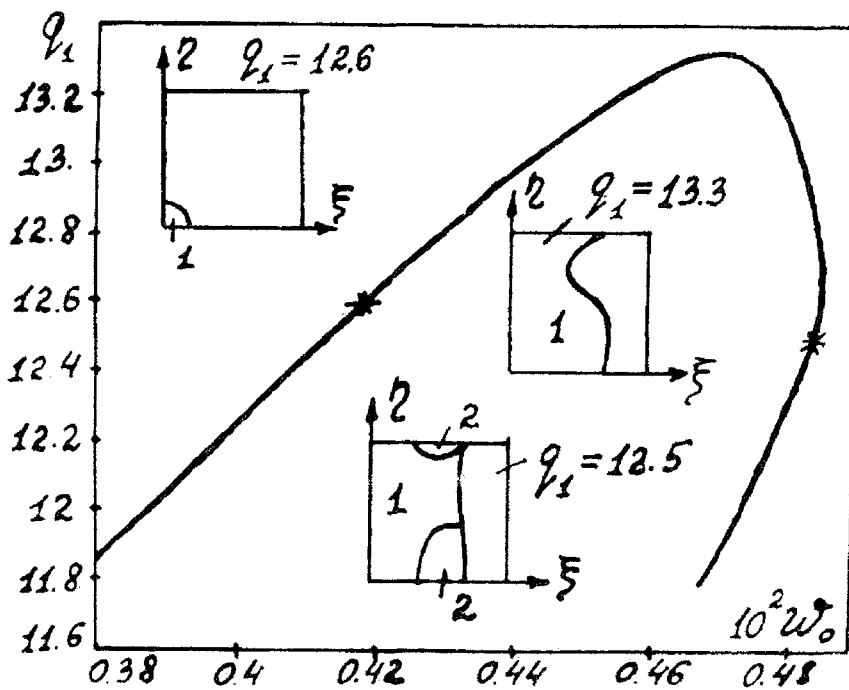


Рис. 4.9.

разгрузкой во всех пластических областях с уменьшением параметра нагрузки на рис. 4.7–4.9 не нанесены). Кроме того, продолжается и развитие пластических зон с уменьшением параметра нагружения от наибольших значений до значений: для первой пластинки $q_1 = 9.6$, для второй $q_1 = 10.9$, для третьей $q_1 = 12.5$. Дальнейшее уменьшение параметра q_1 приводит к разгрузке во всей пластической области, что можно объяснить малой устойчивостью ветви с уменьшающейся нагрузкой в вычислительном смысле.

Факт существования численного решения в определенных интервалах уменьшающегося параметра нагружения с развитием пластических деформаций косвенно указывает на то, что выбранный метод численного решения данной задачи позволяет приближенно определить границу области существования решения краевой задачи об изгибе и устойчивости рассматриваемых трехслойных пластин за пределом упругости по нагрузке. На этом же основании можно заключить, что значения параметра нагружения q_{1*} являются критическими в бифуркационном смысле. Они также определяют и несущую способность пластинок. Зависимость критической нагрузки от отношения длины к ширине пластинки приведена на рис. 4.10. Отметим, что увеличение критической нагрузки с увеличением длины пластинки характерно при определенных геометрических и физических параметрах и для упругих трехслойных пластин [1].

В четвертом числовом примере рассмотрена трехслойная пластинка с параметрами: $\lambda = 1.5$, $\lambda_1 = 0.115$, $\mu = 10$, $G = 1$, $B = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.015$, $h_1 = h_2 = 5$, $E_1 = E_2 = E$, $\sigma_{s1} = 0.0004 E$, $\sigma_{s2} = 0.00044 E$, $\sigma_{p1}/\sigma_{s1} = 1.1$, $\sigma_{p2}/\sigma_{s2} = 1.2$. Следовательно, в данном примере материалы несущих слоев имеют малое упрочнение, по сравнению с материалом в первых трех примерах. Величина продольной нагрузки при значении $q_1 = 1$ принята равной $n_{q1} = n_{q11} + n_{q12} = -0.00005$ и величина внешней поперечной нагрузки $p = 10^{-4}$. Допустимая величина отношения среднеквадратичного отклонения к длине вектора смещения была принята равной 10^{-4} . Параметр нагрузки изменялся при каждом последовательном приращении для упругой пластинки на 1 и для упруго-пластической пластинки на 0.02. Вычислительная сет-

ка (рис. 4.4) для четверти пластинки состояла из 100 узлов, то есть по десять узлов вдоль каждой стороны. Вычисления проводились по той же программе, что и в первых трех примерах. Полученные результаты вычислений приведены на рис. 4.11–4.14. Зависимость прогиба w в середине пластинки от параметра нагрузки q_1 показана на рис. 4.11. Эта же зависимость $w(q_1)$ в окрестности максимума параметра нагрузки q_1 в увеличенном масштабе изображена на рис. 4.12. Штриховыми линиями на рис. 4.11–4.12 показана вторая ветвь решения при уменьшающейся нагрузке с разгрузкой во всех точках пластической области пластинки. Зависимость прогиба w в плоскости $\eta = 0$ от координаты ξ для значения параметра нагружения $q_1 = 6.12$ при возрастающей нагрузке на ветви AB (рис. 4.12) изображена кривой $w_1(\xi)$ и при уменьшающейся нагрузке на ветви BC (рис. 4.12) – кривой $w_2(\xi)$ ($q_1 = 5.98$) на рис. 4.13. Зависимость $w(\eta)$ в плоскости $\xi = 0$ для $q_1 = 6.12$ при возрастающей нагрузке на ветви AB (рис. 4.12) показана кривой $w_1(\eta)$ и с уменьшающейся нагрузкой на ветви BC (рис. 4.12) – кривой $w_2(\eta)$ ($q_1 = 5.98$) на рис. 4.13. Для построения кривых, $w_2(\xi)$, $w_2(\eta)$, использована ветвь решения при уменьшающейся нагрузке без разгрузки во всех точках пластической области пластинки, изображенная сплошными линиями BC на рис. 4.11–4.12.

Из вычислений следует, что с возрастанием параметра нагрузки в пределах $0 \leq q_1 \leq 6,28$ первый слой остается всегда, а второй слой остается упругим до значения параметра нагрузки $q_1 = 6.1$, после которого в нем в середине пластинки возникает пластическая зона. Пластическая зона быстро расширяется и при $q_1 = 6.16$ весь второй слой переходит в пластическое состояние. Упругая (1) и пластическая (2) зоны второго слоя для четверти пластинки при $q_1 = 6.12$ показаны на рис. 4.14. Равновесие пластинки с возрастанием параметра нагрузки возможно до значения $q_1 = q_{1*} = 6.28$, при котором резко возрастает (в 3 раза) число итераций. Производная от прогиба по параметру нагрузки при $q_1 = q_{1*}$ имеет значение меньше, чем 0.001. Далее возможно равновесие пластинки для уменьшающейся нагрузки, причем второй слой остается пластическим с уменьшением параметра нагрузки от значения q_{1*} до значения $q_1 = 5.98$. При дальнейшем уменьшении

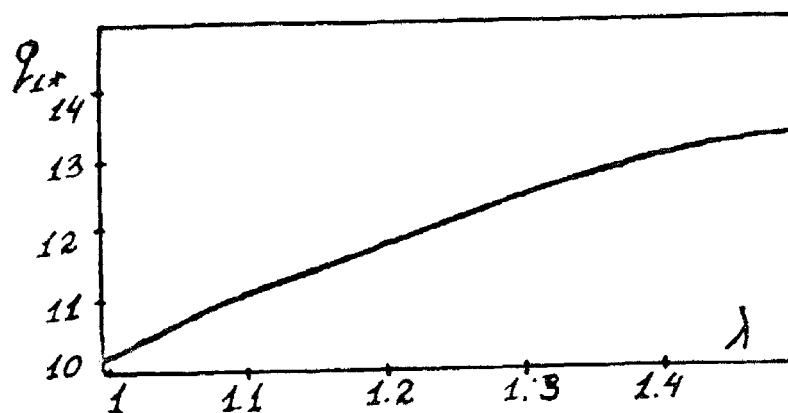


Рис. 4.10.

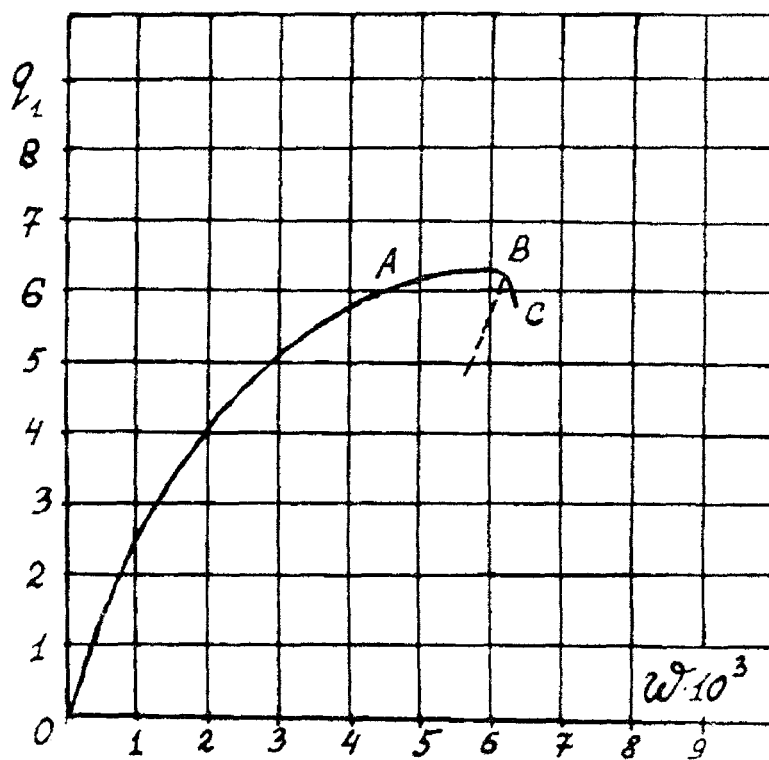


Рис. 4.11.

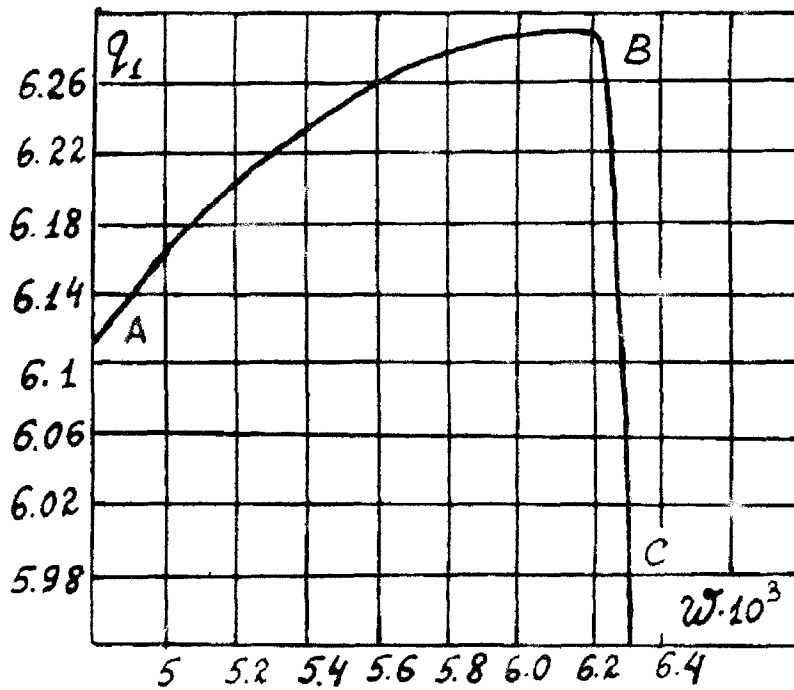


Рис. 4.12

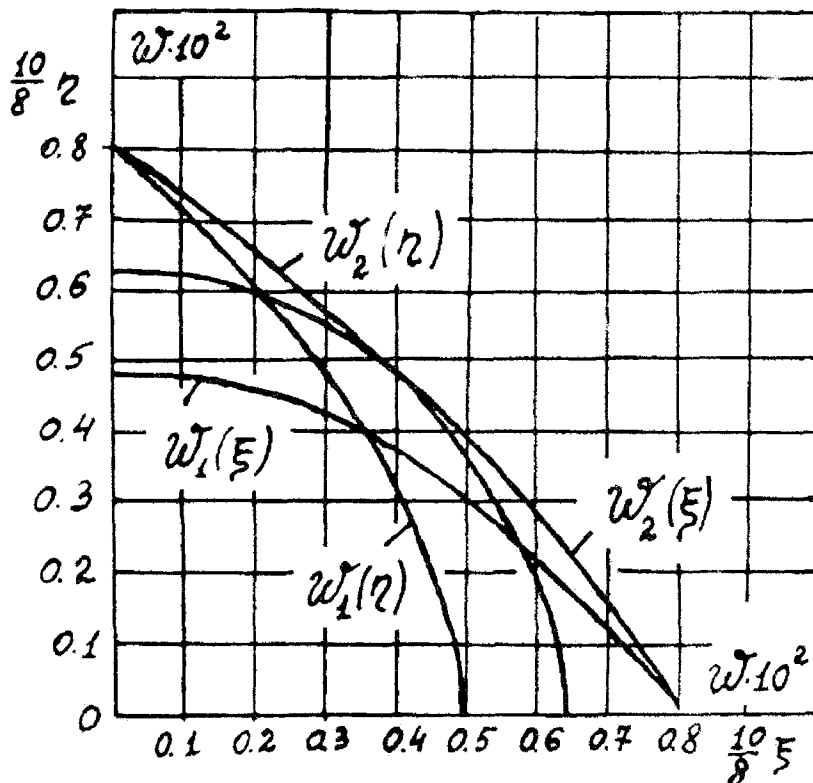


Рис. 4.13.

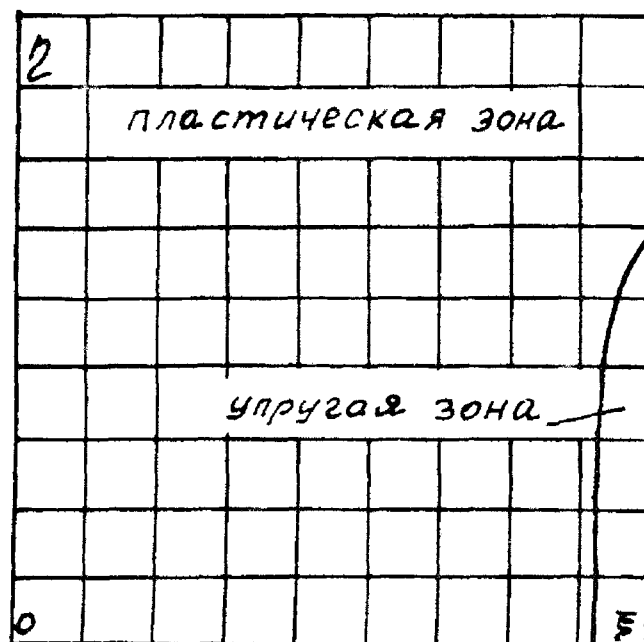


Рис. 4.14.

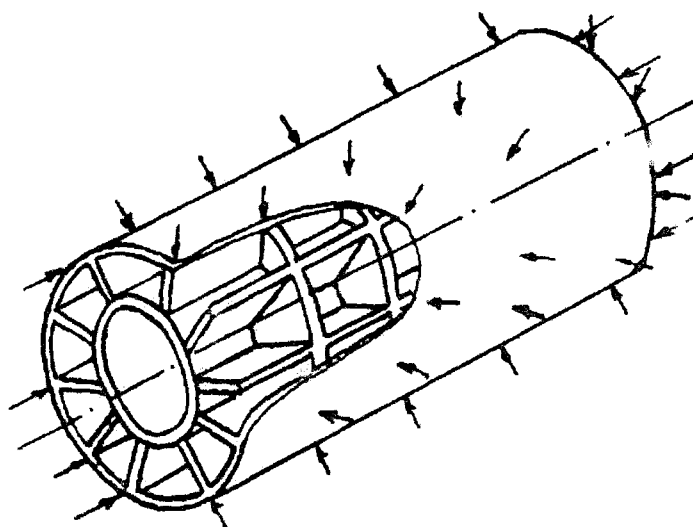


Рис. 4.15.

параметра нагрузки q_1 на краю пластинки возникает зона разгрузки. Последующие вычисления показывают, что ветвь решения без разгрузки во всех точках пластической области пластинки неустойчива в вычислительном смысле, то есть наблюдается тенденция к переходу на устойчивую ветвь решения с разгрузкой.

Таким образом, полученные значения параметра нагрузки q_{1*} являются критическими в бифуркационном смысле. Для определения критической нагрузки рассматриваемой пластинки с точностью 1.5% потребовалось 20 минут машинного времени на БЭСМ-6. Если решение для упругой пластинки известно заранее, то для нахождения критической нагрузки с той же точностью достаточно 6 минут машинного времени.

4.4. Устойчивость и выпучивание упругопластической трехслойной подкрепленной осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки[92]

Рассмотрим цилиндрическую трехслойную подкрепленную оболочку длиной $2l$ с мембранными несущими слоями и подкрепляющим средним слоем, выполненным в виде набора ребер в окружном и продольном направлениях и жестко соединенных между собой в узлах, под действием равномерно распределенных по краям слоев продольных нагрузок, N_{g11} , N_{g12} , N_{g13} , ($N_{g11} + N_{g12} + N_{g13} = -N$), и равномерно распределенного по внешней поверхности цилиндра давления P , рис 4.15. Отсчетную поверхность выберем в середине подкрепляющего слоя, а начало координат – в середине оболочки. Дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия получим из уравнений (2.4.8) и граничных условий (2.4.9), полагая $D_1 = D_2 = 0$. Полученные дифференциальные уравнения запишем в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} (a_{11}u_1 + a_{12}u_2)_{,\xi} + a_{13}w_{,\xi\xi} + a_{14}w &= F_1; \\ (a_{21}u_1 + a_{22}u_2)_{,\xi\xi} + (a_{23}w_{,\xi\xi} + a_{24}w)_{,\xi} - g_{30}(u_2 - u_1) &= F_2; \\ (a_{31}w_{,\xi\xi} + a_{32}w)_{,\xi\xi} + (a_{33}u_1 + a_{34}u_2)_{,\xi\xi\xi} + \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$$+(a_{35}u_1 + a_{36}u_2)_{,\xi} + a_{37}w + p = F_3.$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 &= -a_{15}(w_{,\xi})^2 + \frac{1}{\delta}(\delta_1\sigma_{01}^1 + e_2\delta_2\sigma_{01}^2 + n_{013} - n_g); \\ F_2 &= -a_{25}(w_{,\xi})_{,\xi}^2 + \frac{1}{\delta^2}[\delta(h_2\delta_{20}\sigma_{01}^2 - h_1\delta_1\sigma_{01}^1 + m_{013})_{,\xi} - q_{013}]; \\ F_3 &= -a_{38}(w_{,\xi})_{\xi\xi}^2 - a_{39}(w_{,\xi})^2 - \frac{1}{\delta_1}[\alpha_1\delta_1\sigma_{01}^1 - \alpha_2\delta_{20}\sigma_{01}^2 - m_{013}]_{,\xi\xi} + \\ &\quad + \frac{1}{\delta^2 r_0}(\delta_1\sigma_{02}^1 + \delta_{20}\sigma_{02}^2 + n_{023}); \\ n_g &= n_1 + n_2 + n_3; \quad a_{11} = \delta_1 + a_1\alpha_3; \quad a_{12} = e_2\delta_2 + a_1\alpha_3; \\ a_{13} &= a_1\delta(h + h_0\alpha_4); \quad a_{14} = \frac{1}{2r_0}(\delta_1 + \delta_{20} + 4b_2\alpha_3); \\ a_{15} &= \frac{\delta}{2}(\delta_1 + \delta_{20} + 2a_1\alpha_3); \quad a_{21} = a_1\alpha_5 - h_1\delta_1; \\ a_{22} &= h_2e_2\delta_2 - a_1\alpha_6; \quad a_{23} = \frac{1}{3}a_1\delta(3h\alpha_4 + h_0\alpha_7); \\ a_{24} &= \frac{1}{2r_0}[h_1\delta_1 - h_2\delta_{20} - 2b_2\alpha_8 - g_3r_0(2 + h_0/\alpha_3)]; \\ a_{25} &= \frac{\delta}{2}(h_2\delta_{20} - h_1\delta_1 + a_1\alpha_8); \quad a_{31} = a_1\delta(h\alpha_4 + \frac{1}{3}h_0\alpha_4); \\ a_{32} &= \frac{1}{2r_0}[\delta_1\alpha_1 - \delta_{20}\alpha_2 + 2(h + h_0\alpha_4)b_1 - 2b_2\alpha_8] - \frac{n}{\delta}; \\ a_{33} &= a_1\alpha_5 - \delta_1\alpha_1; \quad a_{34} = \delta_{20}\alpha_2 - a_1\alpha_6; \\ a_{35} &= \frac{1}{2r_0\delta}(\delta_0 + 2b_1\alpha_3); \quad a_{36} = \frac{1}{2r_0\delta}(\delta_{20} + 2b_1\alpha_3); \\ a_{37} &= -\frac{1}{r_0^2\delta}(\delta_1 + \delta_{20} + 2a_2\alpha_3); \quad a_{38} = \frac{\delta}{2}[\delta_{20}\alpha_2 - \\ &\quad - \delta_1\alpha_1 + a_1\alpha_8]; \quad a_{39} = \frac{1}{4r_0}(\delta_1 + \delta_2 + 4b_1\alpha_3); \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= h_k + \frac{\delta_k}{2}; \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2); \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(h_2 - h_1); \\
\alpha_5 &= \frac{1}{6}(h_2^2 - h_1 h_2 - 2h_1^2); \quad \alpha_6 = \frac{1}{6}(h_1^2 - h_1 h_2 - 2h_2^2); \\
\alpha_7 &= h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2; \quad \alpha_8 = \frac{1}{2}(h_2^2 - h_1^2); \quad \delta_{20} = e_2 \delta_2; \\
g_3 &= \frac{2g_{13}^0 \alpha_3}{\delta}; \quad g_{13}^0 = g_{13} + g_{130}; \quad g_{30} = \frac{g_{13}^0}{\delta^2}; \\
a_k &= \frac{\omega_s [\omega_s e_s^3 + (1 - \omega_s) e_0^3]}{e_0^3 e_s^3 \Delta}; \quad b_k = \frac{\omega_1 \omega_2}{2e_0^3 \Delta}; \\
\Delta &= \frac{[\omega_1 e_1^3 + (1 - \omega_1) e_0^3][\omega_2 e_2^3 + (1 - \omega_2) e_0^3]}{(e_0^3)^2 e_1^3 e_2^3} - \frac{\omega_1 \omega_2}{4(t_0^3)^2}; \\
g_{13} &= \frac{e_0^3 e_1^3 \omega_2}{3[\omega_1 e_1^3 + (1 - \omega_1) e_0^3]}; \quad p = \frac{3}{4} \frac{P}{E_1 \delta^3}; \\
n_{0r3} &= \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{0r}^3 dz; \quad m_{013} = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{01}^3 z dz; \quad q_{013} = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{013} dz; \\
h_0 &= \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2); \quad h = \frac{1}{2}(h_1 \delta_2 - h_2 \delta_1); \quad n_j = \frac{3}{4} \frac{N_{gj}}{E_1 \delta^1}; \\
n_{013} &= \frac{3}{4} \frac{N_{013}}{E_1 \delta^1}; \quad m_{013} = \frac{3}{4} \frac{M_{013}}{E_1 (\delta^1)^2}; \\
(j &= 1, 2, 3; \quad k, s = 1, 2; \quad m = 0, 1, 2; \quad k \neq s).
\end{aligned}$$

В уравнениях (4.4.1)-(4.4.2) использованы следующие безразмерные величины.

$$\begin{aligned}
\xi &= x_1/l, \quad z = x_3/\delta^1, \quad h_k = h_k/\delta^1, \quad u_k = u_{1k}/\delta^1, \quad w = w/\delta^1, \\
r_0 &= R_2/l, \quad \delta = \delta^1/l, \quad \delta_k = \delta_k/\delta^1, \quad e_k = E_k/E_1, \quad e_m^3 = \frac{3}{4} \frac{E_{3m}}{E_1}, \\
a_k &= \frac{3}{4} \frac{a_k}{E_1}, \quad b_k = \frac{3}{4} \frac{b_k}{E_1}, \quad g_{13} = \frac{3}{4} \frac{G_{13}}{E_1}, \\
g_{130} &= \frac{3}{4} \frac{G_{130}}{E_1}, \quad \sigma_{0r}^j = \frac{\sigma_{0r}^j}{E_1}, \quad \sigma_{013} = \frac{\sigma_{013}}{E_1}.
\end{aligned}$$

Здесь обозначения размерных и безразмерных величин, h_k , δ_k , w , σ_{0r}^3 , σ_{013} , a_k , b_k , приняты одинаковыми. Размерные величины δ_j и $\delta^1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ — толщины слоев и толщина оболочки, E_{3m} — модули упругости материалов узлов ($m = 0$), продольных ребер ($m = 1$) и кольцевых ребер ($m = 2$), G_{13} — модуль сдвига ортотропного среднего слоя, эквивалентного конструктивно-неоднородному слою, G_{130} — модуль сдвига легкого заполнителя, N_{g1} и N_{g2} — усилия, приложенные на краях несущих слоев, N_{g3} — усилие на краю отсчетной поверхности, приложенные к среднему слою. Выражения для величин σ_{0r}^j и σ_{013} , которые обусловлены пластическими деформациями, (см. раздел 1.3):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{0r}^k &= k_{0k} \omega_0^k (\varepsilon_r^k + \frac{1}{2} \varepsilon_s^k) + k_{1k} \omega_1^k (\varepsilon_{r1} + \frac{1}{2} \varepsilon_{s1}^k) + \\
 &\quad + k_{2k} \omega_2^k (\varepsilon_{r2} + \frac{1}{2} \varepsilon_{s2}^k); \\
 \sigma_{0r3} &= a_r [\omega_r \varepsilon_{0r}^0 + (1 - \omega_r) \varepsilon_{0r}^r] + b_s [\omega_s \varepsilon_{0s}^0 + (1 - \omega_s) \varepsilon_{0s}^s]; \\
 \sigma_{013} &= g_{13} [\omega_1 \varepsilon_{013}^0 + (1 - \omega_1) \varepsilon_{013}^1]; \\
 \varepsilon_{0r}^0 &= \frac{1}{e_0} \left[\bar{a}_0 \left(\frac{\sigma_r^3}{\omega_s} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_s}{\omega_r} \right) + \bar{b}_0 \left(\frac{\sigma_{r1}}{\omega_s} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{s1}}{\omega_r} \right) \right]; \\
 \varepsilon_{0r}^r &= \frac{1}{\omega_s e_r^3} (\bar{a}_r \sigma_r^3 + \bar{b}_r \sigma_{r1}^3); \quad \varepsilon_{013}^m = \frac{3}{\omega_2 e_0^3} (\bar{a}_0 \sigma_{13} + \bar{b}_0 \sigma_{131}); \\
 \varepsilon_{013}^1 &= \frac{3}{\omega_2 e_1^3} (\bar{a}_1 \sigma_{13} + \bar{b}_1 \sigma_{131}); \tag{4.4.3} \\
 \omega_i^k &= \frac{e_k e_{it}^k - \sigma_{it}^k}{e_k^3} e_k e_{it}^k; \quad \bar{a}_m = \frac{k_0^m \omega_{0m} + k_2^m \omega_{2m}}{1 - k_0^m \omega_{0m} - k_2^m \omega_{2m}}; \\
 \bar{b}_m &= \frac{k_1^m \omega_{1m} - k_2^m \omega_{2m}}{(1 - k_1^m \omega_{1m})(1 - k_1^m \omega_{0m} - k_2^m \omega_{2m})}; \\
 \omega_{im} &= \frac{e_m^3 e_{it}^m - \sigma_{it}^m}{e_m^3 e_{it}^m}; \\
 e_{i0}^k &= \frac{2}{\sqrt{3}} [(\varepsilon_1^k)^2 + \varepsilon_1^k + (\varepsilon_2^k)^2];
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{i0}^0 = \left[\left(\frac{\sigma_1^3}{\omega_2} \right) - \frac{\sigma_1^3 \sigma_2^3}{\omega_1 \omega_2} + \left(\frac{\sigma_2^3}{\omega_2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sigma_{13}}{\omega_2} \right)^2 \right]^{1/2};$$

$$\sigma_r^3 = a_r \varepsilon_r^3 + b_s \varepsilon_s^3 - \sigma_{0r}^{3-};$$

$$\sigma_{13} = g_{13} \varepsilon_{13} - \sigma_{013}^-; \quad \sigma_r^j = \frac{3}{4} \frac{\sigma_r^j}{E_1}; \quad \sigma_{13} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_{13}}{E_1};$$

$$\varepsilon_1^j = \delta u_{1,\xi}^j + \frac{1}{2} \delta^2 (w_{,\xi})^2; \quad \varepsilon_2^j = -\frac{\delta w}{r_0};$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2\alpha_3} (u_2 - u_1 + \delta h_0 w_{,\xi}) + \delta w_{,\xi};$$

$$\varepsilon_{r2}^k = \varepsilon_r^k - \varepsilon_{r1}^k; \quad \sigma_{r2}^3 = \sigma_r^4 - \sigma_{r1}^3; \quad \sigma_{132} = \sigma_{13} - \sigma_{131};$$

$$(r, s, k = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \quad m, t = 0, 1, 2; \quad r \neq s).$$

Здесь σ_r^j и σ_{13} — напряжения в слоях. Величины ω_t^k — функции пластичности для материалов несущих слоев, ω_{tm} — функции текучести для материалов узлов ($m = 0$), продольных ($m = 1$) и кольцевых ребер ($m = 2$) при догрузке ($t = 0$), начале разгрузки ($t = 1$) и вторичных пластических деформациях ($t = 2$). Интенсивности деформаций e_{il}^k для несущих слоев в начале разгрузки ($t = 1$) и вторичных пластических деформациях ($t = 2$) получим из выражения интенсивности деформаций при догрузке e_{i0}^k , подставив вместо деформаций ε_r^k деформации в начале разгрузки ε_{r1}^k ($t = 1$) или вторичные пластические деформации ε_{r2}^k ($t = 2$). Интенсивности напряжений σ_{il}^m в продольных ребрах ($m = 1$) и кольцевых ребрах ($m = 2$) в начале разгрузки ($t = 1$) и вторичных пластических деформациях ($t = 2$) получим те выражения для интенсивности напряжения в узле ($m = 0$) при догрузке ($t = 0$) σ_{i0}^0 , полагая, когда $t = 1$, $\sigma_2^3 = 0$ ($m = 1$), $\sigma_1^3 = \sigma_{13} = 0$ ($m = 2$), и подставляя $\sigma_r^3 = \sigma_{r2}^3$, $\sigma_{13} = \sigma_{132}$, если $t = 2$. Целочисленные функции, k_{tk} , k_t^m определим из условий догрузки, разгрузки и вторичных пластических деформаций. Если в каком-либо несущем слое или в каком-либо элементе подкрепляющего слоя происходит догрузка, то $k_{0k} = 1$, $k_{1k} = k_{2k} = 0$ или $k_0^m = 1$, $k_1^m = k_2^m = 0$; если разгрузка,

то $k_{0k} = k_{2k} = 0$, $k_{1k} = 1$ или $k_0^m = k_2^m = 0$, $k_1^m = 1$; если вторичные пластические деформации, то $k_{0k} = 0$, $k_{1k} = k_{2k} = 1$ или $k_0^m = 0$, $k_1^m = k_2^m = 1$. Обозначения целочисленных коэффициентов здесь по сравнению с обозначениями в разделе 1.3 изменены для удобства их записи. При этом $k_{0k} = k_k$, $k_{1k} = m_k$, $k_{2k} = n_k$, $k_0^0 = k_y$, $k_0^k = k_{pk}$, $k_1^0 = m_y$, $k_1^k = m_{pk}$, $k_2^0 = n_y$, $k_2^k = n_{pk}$. По одинаковым индексам в настоящем разделе суммирования нет. Величины σ_{0r}^{3-} , σ_{013}^- — это величины σ_{0r}^3 , σ_{013} в предыдущей итерации. Таким образом, решение рассматриваемой задачи представляется принципиально невозможным без использования метода последовательных приближений.

Аргументами функции пластичности для материалов несущих слоев является интенсивность деформаций. При этом воспользуемся, как и для пластин, дробно-линейной диаграммой:

$$\sigma_{ir}^k = \frac{(\beta_k e_k e_{ir}^k - \varepsilon_{0r}^k) \varepsilon_{0r}^k}{e_k [e_{ir}^k - \varepsilon_{0r}^k (2 - \beta_k)]};$$

$$\varepsilon_{0r}^k = \frac{3 \sigma_{0r}^k}{4 E_1}; \quad \sigma_{ir}^k > \varepsilon_{0r}^k; \quad (k = 1, 2; \quad r = 0, 1, 2).$$

Здесь σ_{0r}^k — пределы текучести материалов несущих слоев при догрузке (или разгрузке) ($r = 0, 1$) и вторичных пластических деформациях ($r = 2$). Согласно принципу Мазинга [140], $\sigma_{02}^k = 2\sigma_{00}^k$, $\sigma_{02}^k = 2\sigma_{01}^k$. Величины β_k показывают во сколько раз пределы прочности материалов несущих слоев больше пределов текучести.

Аргументами функции пластичности для материалов узла и ребер среднего слоя являются интенсивности напряжений. В этом случае также используем дробно-линейную диаграмму:

$$e_{ir}^m = \frac{[(2 - \beta_m) \sigma_{ir}^m - \sigma_{0r}^m] \sigma_{0r}^m}{(\sigma_{ir}^m - \beta_m \sigma_{0r}^m) e_{3m}};$$

$$\sigma_{0r}^m = \frac{3 \sigma_{0r}^m}{4 E_1}; \quad \sigma_{ir}^m > \sigma_{0r}^m; \quad (m, r = 0, 1, 2).$$

Здесь σ_{0r}^m — пределы текучести материалов элементов среднего слоя при догрузке (или разгрузке) ($r = 0, 1$) и вторичных пластических деформациях ($r = 2$), когда $\sigma_{02}^m = 2\sigma_{00}^m$, $\sigma_{02}^m = 2\sigma_{01}^m$.

Дробно-линейная диаграмма аппроксимирует реальную диаграмму так, что на пределе текучести касательный модуль равен модулю Юнга и предел прочности является предельной интенсивностью напряжений при бесконечном возрастании интенсивности деформаций.

Граничные условия для рассматриваемой оболочки с шарнирным опиранием в безразмерных величинах имеют вид:

$$\begin{aligned}(a_{11}u_1 + a_{12}u_2)_{,\xi} + a_{13}w_{,\xi\xi} + a_{14}w &= f_1; \\ (b_{11}u_1 + b_{12}u_2)_{,\xi} + b_{13}w_{,\xi\xi} + b_{14}w &= f_2; \\ (b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}w_{,\xi})_{,\xi} + b_{24}w &= f_3; \\ w &= 0.\end{aligned}\tag{4.4.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}f_1 &= F_1; \\ f_2 &= -b_{15}(w_{,\xi})^2 + \frac{1}{\delta}(h_1\delta_1\sigma_{01}^1 - h_2\delta_{20}\sigma_{01}^2 - m_{013} - h_1n_1 + h_2n_2 - m_g); \\ f_3 &= -b_{25}(w_{,\xi})^2 - \frac{1}{2\delta\alpha_3}[h(n_{013} - n_3) + h_0(m_{013} + m_g)]; \\ b_{11} &= h_1\delta_1 - a_1\alpha_5; \quad b_{12} = -h_2\delta_{20} + a_1\alpha_6; \\ b_{13} &= -\frac{a_1\delta}{3}(3h\alpha_4 + h_0\alpha_7); \\ b_{14} &= \frac{1}{2r}(h_2\delta_{20} - h_1\delta_1 + 2b_2\alpha_8); \\ b_{15} &= \frac{\delta}{2}h_1\delta_1 - h_2\delta_{20} - a_1\alpha_8; \\ b_{21} &= -\frac{a_1}{2\alpha_3}(h\alpha_3 + h_2h_0\alpha_4 - \frac{1}{3}h_0\alpha_7); \\ b_{22} &= -\frac{a_1}{2\alpha_3}(h\alpha_3 + h_0h_1\alpha_4 + \frac{1}{3}h_0\alpha_7); \\ b_{23} &= -\frac{a_1\delta}{2\alpha_3}(h_2 + 2hh_0\alpha_4 + \frac{1}{3}h_0^2\alpha_7);\end{aligned}$$

$$b_{24} = \frac{b_2 c_1}{r_0}; \quad b_{25} = -\frac{a_1 \delta c_1}{2};$$

$$m_g = \frac{3}{4} \frac{M_g}{E_1 (\delta^1)^2}; \quad c_1 = h + h_0 \alpha_4.$$

Величины σ_{0r} , n_{0r3} , m_{013} определены выражениями (4.4.2)-(4.4.3), M_g — внешний момент на краю среднего слоя.

Для решения задачи об изгибе и устойчивости рассматриваемой оболочки необходимо определить три функции смещений, u_1 , u_2 , w , и 15 целочисленных функций, k_{tk} , k_t^m , ($t, m = 0, 1, 2$; $k = 1, 2$), принимающих значения нуль или единица в зависимости от деформированного состояния в ней. При этом имеем систему из трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (4.4.1), четыре граничных условия на каждом краю оболочки (4.4.4) и условия догрузки, разгрузки и вторичных пластических деформаций.

Численное решение поставленной задачи проведем методом конечных разностей в сочетании с методом упругих решений (см. раздел 4.1). Для перехода к конечным разностям разделим оболочку на N равных частей и заменим входящие в дифференциальные уравнения (4.4.1) производные центральными конечно-разностными операторами, имеющими погрешность квадрата шага, при этом имеем:

$$f_{,\xi} = \frac{1}{2s}(f_{i-1} - f_{i+1});$$

$$f_{,\xi\xi} = \frac{1}{s^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1});$$

$$f_{,\xi\xi\xi} = \frac{1}{s^3}(f_{i-2} - 3f_{i-1} + 3f_i - f_{i+1}); \quad (4.4.5)$$

$$f_{,\xi\xi\xi\xi} = \frac{1}{s^4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2});$$

$$s = 1/N.$$

Выражения (4.4.5) используем для перехода к конечным разностям в уравнения (4.4.1) во внутренних узлах. В крайнем узле третьи произ-

водные заменим следующими оператором,

$$f_{,\xi\xi\xi} = \frac{1}{s^3}(f_{i-1} - 3f_i + 3f_{i+1} - f_{i+2}). \quad (4.4.6)$$

Все остальные производные в крайней точке заменим операторами (4.4.5). Представляя уравнения (4.4.1) во внутренних узлах с помощью (4.4.5) в конечных разностях и разрешая их относительно смещений в центральном узле, получим:

$$u_{1i} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad u_{2i} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad w_i = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (4.4.7)$$

Здесь

$$\Delta_1 = \Phi_1(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - \Phi_2(A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32}) + \\ + \Phi_3(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22});$$

$$\Delta_2 = \Phi_1(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) - \Phi_2(A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}) + \\ + \Phi_3(A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21});$$

$$\Delta_3 = \Phi_1(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}) - \Phi_2(A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}) + \\ + \Phi_3(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21});$$

$$\Delta = A_{33}(A_{11}A_{22}A_{12}A_{21}) - A_{23}(A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}) + \\ + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31});$$

$$A_{11} = a_{11}s; \quad A_{12} = a_{12}s; \quad A_{13} = -2a_{13} + a_{14}s^2;$$

$$A_{21} = -2a_{21}s + g_{30}s^2; \quad a_{22} = -2a_{22}s - g_{30}s^3;$$

$$A_{23} = 3a_{23} - a_{24}s^2; \quad A_{31} = -3a_{33}s + a_{35}s^3;$$

$$A_{32} = -3a_{34}s + a_{36}s^3; \quad A_{33} = 6a_{31} + a_{37}s^4 - 2a_{32}s^2;$$

$$\Phi_1 = F_{1i}s^2 - a_{13}(w_{i-1} + w_{i+1}) + a_{11}su_{1i+1} + a_{12}su_{2i+1};$$

$$\Phi_2 = F_{2i}s^2 - a_{21}s(u_{1i-1} + u_{1i+1}) - a_{22}s(u_{2i-1} + u_{2i+1}) - \\ - a_{23}(w_{i-2} - 3w_{i-1} - w_{i+1}) - a_{24}s^2w_{i-1};$$

$$\Phi_3 = F_{3i}s^4 - a_{31}(w_{i-2} - 4w_{i-1} - 4w_{i+1} + w_{i+2}) -$$

$$-a_{32}s^2(w_{i-1} + w_{i+1}) - a_{33}s(u_{1i-1} + 3u_{1i+1} - u_{1i+2}) - \\ -a_{34}s(u_{2i-1} + u_{2i+1} - u_{2i+2}) - a_{35}s^3u_{1i+1} + a_{36}s^3u_{2i+1} - ps^4;$$

Чтобы перейти к конечным разностям в крайнем узле, добавим один законтурный узел для смещения w . Представляя уравнения равновесия (4.4.1) в крайнем узле с помощью равенств (4.4.5)-(4.4.6) в конечных разностях и разрешая их относительно смещения в этом узле, находим:

$$u_{1i} = \frac{\Delta_1^1}{\Delta^1}; \quad u_{2i} = \frac{\Delta_2^1}{\Delta^1}; \quad w_i = \frac{\Delta_3^1}{\Delta^1}. \quad (4.4.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_1^1 &= \Phi_1(A_{22}A_{33} - A_{23}^1A_{32}^1) - \Phi_2^1(A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32}^1) + \\ &\quad + \Phi_3^1(A_{12}A_{23}^1 - A_{13}A_{22}); \\ \Delta_2^1 &= \Phi_1(A_{21}A_{33} - A_{23}^1A_{31}^1) - \Phi_2^1(A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}^1) + \\ &\quad + \Phi_3^1(A_{11}A_{23}^1 - A_{13}A_{21}); \\ \Delta_3^1 &= \Phi_1(A_{21}A_{32}^1 - A_{23}^1A_{31}^1) - \Phi_2^1(A_{11}A_{32}^1 - A_{12}A_{31}^1) + \\ &\quad + \Phi_3^1(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}); \\ \Delta^1 &= A_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) - A_{23}^1(A_{11}A_{32}^1 - A_{12}A_{31}^1) + \\ &\quad + A_{13}(A_{21}A_{32}^1 - A_{22}A_{31}^1); \\ A_{23}^1 &= -3a_{23} - a_{24}s^2; \quad A_{31}^1 = -3a_{33}s - a_{35}s^3; \\ A_{32}^1 &= -3a_{34}s - a_{36}s^3; \\ \Phi_2^1 &= F_2s^3 - a_{21}s(u_{1i-1} + u_{1i+1}) - a_{22}s(u_{2i-1} + u_{2i+1}) - \\ &\quad - a_{23}(w_{i-1} + 3w_{i+1} - w_{i+2}) - a_{24}s^2w_{i-1}; \\ \Phi_3^1 &= F_3s^4 - s^4p - a_{31}(w_{i-2} - 4w_{i-1} - 4w_{i+1} + w_{i+2}) - \\ &\quad - a_{32}s^2(w_{i-1} + w_{i+1}) - a_{33}s(u_{1i-1} + 3u_{1i+1} - u_{1i+2}) - \\ &\quad - a_{34}s(u_{2i-1} + 3u_{2i+1} - u_{2i+2}) - a_{35}s^3u_{1i-1} - a_{36}s^3u_{2i-1}. \end{aligned}$$

Перейдем к конечным разностям в граничных условиях (4.4.4), воспользовавшись левыми разностными операторами для производных от

функций, u_1 , u_2 , и центральными операторами от функции w . Представляя первое и второе из граничных условий (4.4.4) в конечных разностях и разрешая их относительно смещений в контурном узле, с учетом четвертого граничного условия, имеем:

$$\begin{aligned}
 u_{1i} &= u_{1i+1} + \frac{1}{\bar{\Delta}_2}(\bar{B}_1\varphi_1 - \bar{B}_2\varphi_2); \\
 u_{2i} &= u_{2i+1} + \frac{1}{\bar{\Delta}_2}(\bar{B}_3\varphi_2 - \bar{B}_4\varphi_1); \\
 \varphi_1 &= s(f_{1i} - \frac{a_{13}}{b_{23}}f_{3i}); \quad \varphi_2 = s(f_{2i} - \frac{b_{13}}{b_{23}}f_{3i}); \\
 \bar{B}_1 &= b_{12} - \frac{b_{13}}{b_{23}}b_{22}; \quad \bar{B}_2 = a_{12} - \frac{a_{13}}{b_{23}}b_{22}; \\
 \bar{B}_3 &= a_{11} - \frac{a_{13}}{b_{23}}b_{21}; \quad \bar{B}_4 = b_{11} - \frac{b_{13}}{b_{23}}b_{21}; \\
 \bar{\Delta}_2 &= \bar{B}_1\bar{B}_3 - \bar{B}_2\bar{B}_4.
 \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Выражение для смещения w в законтурном узле получим, используя представление в конечных разностях третьего граничного условия,

$$w_i = w_{i+2} - \frac{s}{b_{23}}[b_{21}(u_{1i+1} - u_{1i+2}) + b_{22}(u_{2i+1} - u_{2i+2}) - sf_3]. \tag{4.4.10}$$

В середине оболочки имеем следующие условия симметрии:

$$u_1 = u_2 = 0; \quad w_{,\xi} = 0. \tag{4.4.11}$$

Заменяя входящую в условия (4.4.11) производную правым разностным оператором, для смещений в середине оболочки получим выражения:

$$u_{1i} = u_{2i} = 0; \quad w_i = w_{i-1}. \tag{4.4.12}$$

Уравнения (4.4.8)-(4.4.10), (4.4.12), составленные, соответственно, для всех внутренних узлов, контурного и законтурного узла дают замкнутую систему $3(N/2 + 1) + 1$ алгебраических нелинейных уравнений относительно $3(N/2 + 1) + 1$ неизвестных смещений в узлах. Решение

их проводим при известном распределении пластических зон методом Зейделя, а уточнение областей догрузки, разгрузки и вторичных пластических деформаций – модифицированным методом упругих решений, (см. раздел 4.1).

В числовых примерах рассмотрены три трехслойные подкрепленные продольными (стрингерами) и кольцевыми (шпангоутами) ребрами цилиндрические оболочки без легкого заполнителя. Счет проведен при $N = 40$ и 10-и точках деления по толщине среднего слоя. Допустимая величина относительного среднеквадратичного отклонения была принята равной 0.0001.

В первых двух (коротких) оболочках несущие слои, ребра и узлы изготовлены из одного материала – малоуглеродистой конструкционной стали. Одинаковыми параметрами для обеих оболочек являлись: $h_1 = h_2 = 0.42$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$, $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 0.11$, $\delta = 0.01$, $m_g = 0$. Для первой оболочки $r_0 = 4$ и для второй $r_0 = 6$. Исследовано поведение первой оболочки в одном случае в состоянии сжатия, в другом – при сжатии и радиальном внешнем давлении и второй оболочки – под действием сжимающей осевой силы. Внешние силы изменялись пропорционально одному положительному параметру q , $n_1 = qn_{10}$, $n_2 = qn_{20}$, $n_3 = qn_{30}$, $p = qp_0$, причем $n_{10} = n_{20} = 10^{-4}$, $n_{30} = 10^{-5}$. В случае первой оболочки при гидростатическом давлении $p_0 = 1.025$.

Результаты вычислений приведены для первой оболочки в состоянии сжатия на рис. 4.16–4.17, при радиальном давлении – на рис. 4.19, 4.20 и для второй оболочки – на рис. 4.18. Зависимости прогиба в серединах оболочек $\xi = 0$ от параметра нагрузки q изображены кривыми I, для $\xi = 1/3$ – кривыми II и когда $\xi = 4/9$ – кривыми III. Зависимости прогиба от координаты при различных значениях q для первой оболочки показаны на рис. 4.17, 4.20 с указанием величин параметра нагрузки. Развитие зон пластичности показано на соответствующих рисунках с указанием величин параметра нагрузки. При этом пластические зоны во внешнем несущем слое обозначены 1, во внутреннем несущем слое – 2, в узлах – 3, в узлах и стрингерах – 4, в узлах и ребрах обоих направлений – 5, зона разгрузки во внутреннем несущем слое оболочки при сжатии и радиальном давлении – 6. Зоны с обоз-

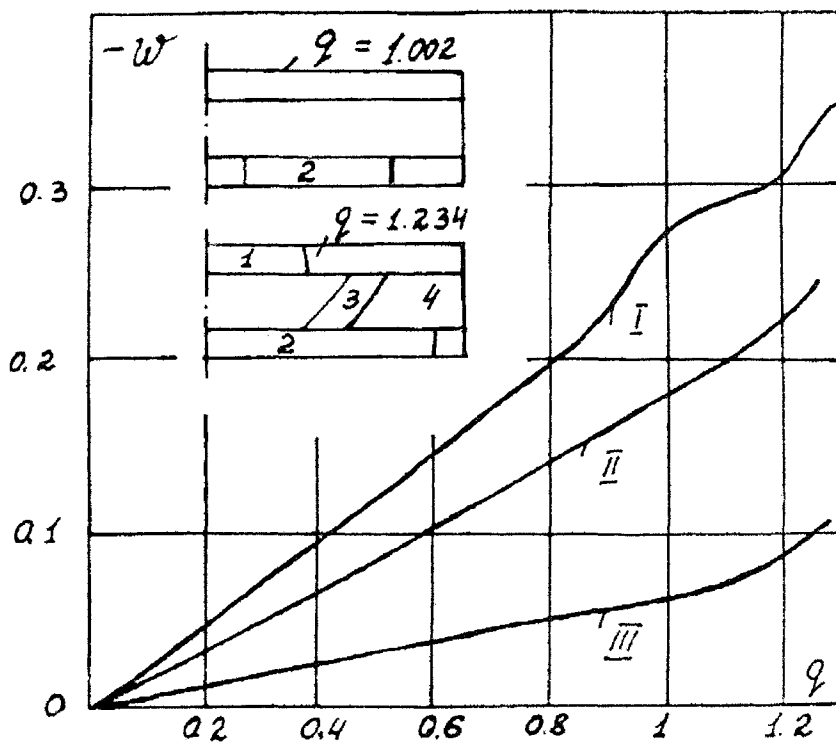


Рис. 4.16.

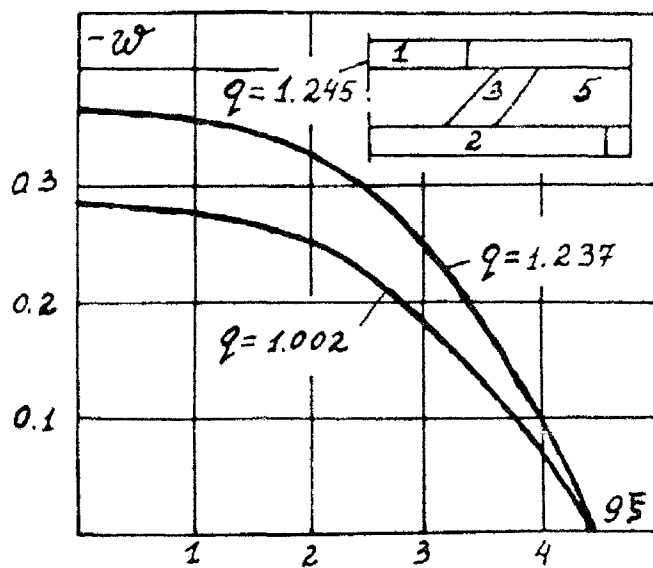


Рис. 4.17.

начениями заключены внутри наименьших замкнутых контуров. Зоны вторичных пластических деформаций отсутствуют.

Из анализа полученных результатов вычислений следует, что после перехода оболочек при $q = q_0$ в пластическое состояние ($q_0 = 0.99$ для первой оболочки при сжатии, $q_0 = 0.501$ – под действием сжимающей осевой силы с радиальным давлением и $q_0 = 0.84$ – для второй оболочки) скорости роста величин прогибов в серединах оболочек сначала уменьшаются, а затем с переходом в пластическое состояние элементов подкрепления возрастают, что можно объяснить перераспределением напряжений в слоях. Для более длинной первой оболочки при сжатии выявлено менее интенсивное развитие пластических зон в среднем слое, особенно в продольных ребрах, чем у второй, что вызвано влиянием перерезывающих сил. Со значениями параметра нагрузки, превышающими $q_* = 1.245$, $q_* = 1.087$, соответственно, для первой и второй оболочки при сжатии, а также $q_* = 0.567$ для первой оболочки под действием осевого сжатия и радиального давления, итерационные процессы с догрузкой расходятся, как с возрастанием так и с уменьшением параметра q . Полученные ветви равновесных форм при уменьшающейся нагрузке с разгрузкой всех элементов оболочки из пластического состояния на рис. 4.16, 4.18 и 4.19 не нанесены. Для обеих оболочек в окрестностях определенных значений параметра нагрузки q_* происходит резкое расширение зон пластических деформаций в каком либо одном или во всех элементах подкрепления. Так, для первой оболочки при сжатии, наряду с расширением пластических зон в несущих слоях, продольных ребрах и узлах резко, с увеличением параметра нагрузки на 0.8%, переходит в пластическое состояние более половины кольцевых ребер. Во второй оболочки при сжатии с изменением нагрузки на 1% в пластическое состояние переходит 33% узлов (причем все узлы деформируются пластически практически по всей высоте среднего слоя) и продольные ребра на 3/4 длины оболочки; внешний несущий слой и кольцевые ребра остаются упругими. В первой оболочке при сжатии и давлении с изменением параметра нагрузки на 0.4% становятся пластическими 22% узлов, продольные ребра на 1/5 длины оболочки и 40% кольцевых ребер.

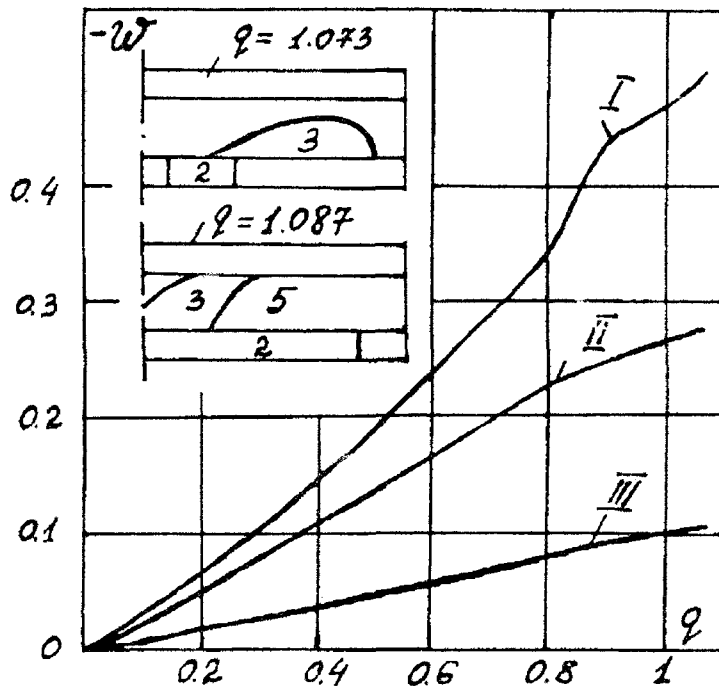


Рис. 4.18.

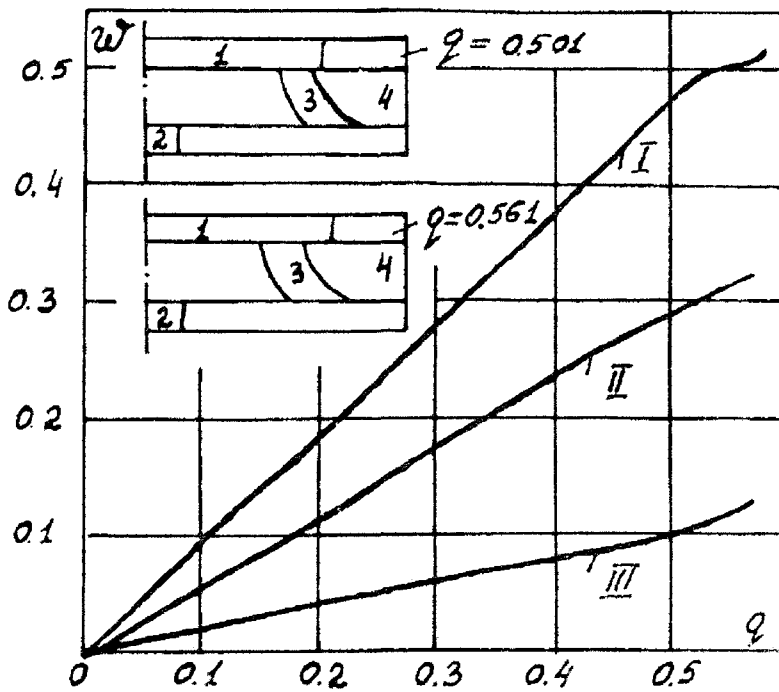


Рис. 4.19.

Можно предположить, что более быстрое развитие зон пластических деформаций в оболочках происходит вследствие того, что значения параметра нагрузки приближаются к критическим значениям бифуркационного типа. Такое явление наблюдается, например, для шарнирно опертых трехслойных пластин с легким заполнителем (разделы 4.2 и 4.3). Поэтому величины q_* можно принять как нижние оценки критических значений параметра нагрузки устойчивости оболочек, полученные на основе деформационной теории. Для проведения вычислений по каждому из трех вариантов потребовалось 12–15 мин. машинного времени на ЭВМ БЭСМ-6.

Параметрами третьей оболочки являлись:

$$\begin{aligned} \sigma_{00}^0 &= 0.0006; \quad \sigma_{00}^1 = 0.0003; \quad \sigma_{00}^2 = 0.00075; \quad h_1 = h_2 = 0.42; \\ \delta_1 &= 0.084; \quad \delta_2 = 0.07; \quad B = 1; \quad e_0^3 = 0.01; \quad e_1^3 = 0.011; \quad e_2^3 = 0.012; \\ e_1 &= e_2 = 1; \quad \omega_1 = 0.1; \quad \omega_2 = 0.11; \quad \delta = 0.0084; \quad r = 0.5. \end{aligned}$$

Следовательно, длина третьей оболочки в 8 и 12 раз больше, соответственно, первой и второй оболочки. Кроме того, принято, что материалы всех элементов оболочки имеют малое упрочнение и отношения пределов их прочности к пределам текучести равно 1.1 (все коэффициенты β_k ; β_m равны 1.1). Величины нагрузок на краях слоев оболочки изменялись пропорционально одному параметру q :

$$n_1 = 0.0011q; \quad n_2 = 0.0011q; \quad n_3 = 0.0001; \quad p = 0.0215q.$$

Параметр q в начале нагружения возрастал с шагом 0.1, а после перехода оболочки в пластическое состояние с шагом 0.002. Счет проведен с 20-ю узлами по длине и 8-ю узлами по толщине среднего слоя оболочки. Допустимая величина относительного среднеквадратичного отклонения вектора перемещения была принята 0.0001.

Результаты вычислений приведены на рис. 4.21 – 4.24. Зависимости прогиба w в середине ($\xi = 0$) и вблизи края ($\xi = 8/9$, $\xi = 17/18$) оболочки от параметра нагрузки q показана на рис. 4.21. Зависимость прогиба w от координаты ξ для $q = 0.506$ и $q = 1.13$ изображена на рис. 4.22. При значении параметра $q = 0.504$ несущие слои, а затем ($q = 0.506$) и продольные ребра оболочки переходят в пластическое состояние. Дальнейшее возрастание параметра нагрузки влечет интен-

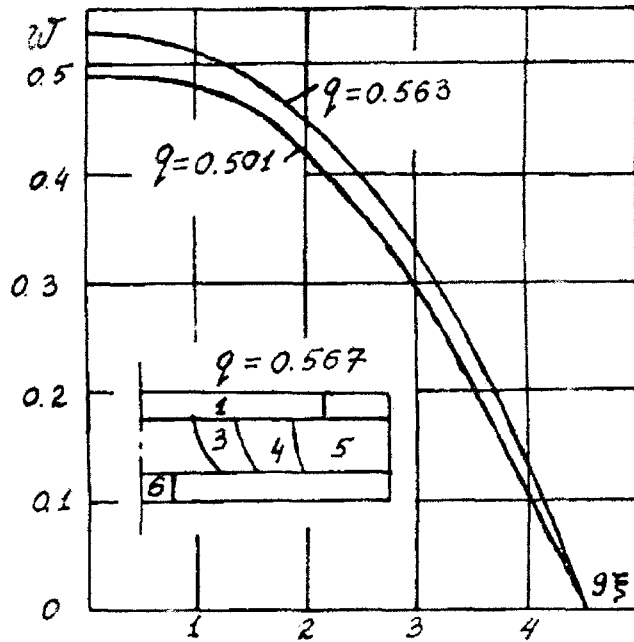


Рис. 4.20.

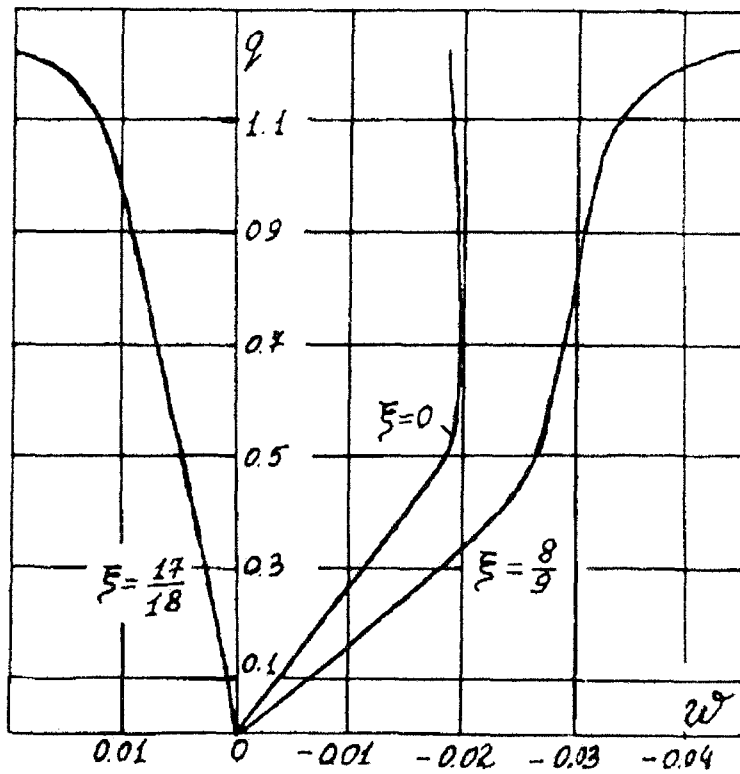


Рис. 4.21.

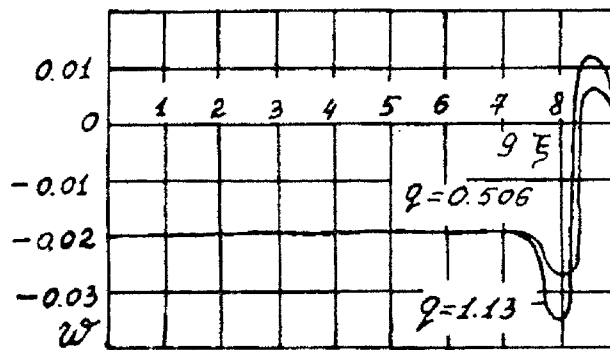


Рис. 4.22.

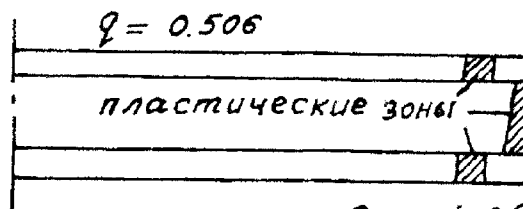


Рис. 4.23.

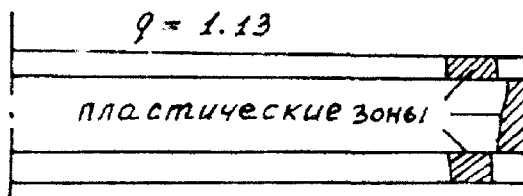


Рис. 4.24.

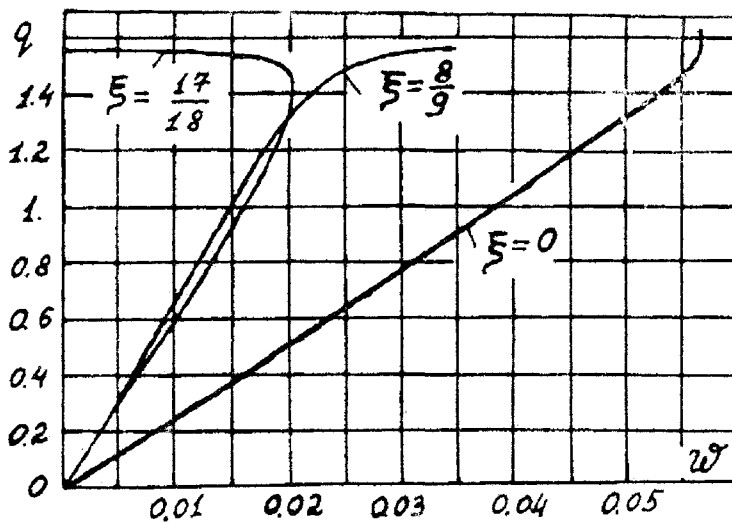


Рис. 4.25.

сивное развитие деформаций (выпучивание) на краю и незначительное изменение величины прогибов в остальной части оболочки (рис. 4.21, 4.22). Пластические зоны локализованы для несущих слоев и продольных ребер в окрестности точки $\xi = 8/9$ (рис. 4.23, 4.24). Узлы и кольцевые ребра в пластическое состояние не переходят. Зоны разгрузки и вторичных пластических деформаций не возникали. Счет выполнен до значения (критического) параметра нагрузки $q = q_* = 1.236$, после которого итерационные процессы расходятся. Для вычислений использовано 5 минут машинного времени на ЭВМ БЭСМ-6.

Таким образом, поведение третьей оболочки характеризуется интенсивным выпучиванием вблизи края оболочки. Форма выпучивания имеет вид внешних и внутренних складок (рис. 4.22). Отметим, что качественно аналогичная картина деформирования получена в экспериментах по устойчивости однородных цилиндрических оболочек за пределом упругости, описанных в работе [229].

4.5. Устойчивость и выпучивание упругопластической трехслойной осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки с легким заполнителем [90]

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку с упругопластическими мембранными несущими слоями и упругим легким заполнителем под действием равномерно распределенных по шарнирно опертым краям несущих слоев продольных сжимающих и равномерно распределенных по внешней поверхности поперечных нагрузок. Уравнения равновесия и граничные условия осесимметричного выпучивания рассматриваемой оболочки получены в разделе 2.4 на основе допущений (2.4.1), (2.4.3)-(2.4.4). В безразмерном виде эти уравнения и граничные условия имеют, соответственно, вид (4.4.1) и (4.4.4), причем коэффициенты и правые части определяются из выражений:

$$F_1 = -a_{15}(w_{,\xi})^2 + \frac{1}{\delta}(\delta_1\sigma_{01}^1 + e_2\delta_2\sigma_{01}^2 - n_g);$$

$$F_2 = -a_{25}(w_{,\xi})_{,\xi}^2 + \frac{1}{\delta^2}[\delta(h_2\delta_{20}\sigma_{01}^2 - h_1\delta_1\sigma_{01}^1)_{,\xi}];$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= -a_{38}(w_{,\xi})_{\xi\xi}^2 - a_{39}(w_{,\xi})^2 - \frac{1}{\delta_1}[\alpha_1\delta_1\sigma_{01}^1 - \alpha_2\delta_{20}\sigma_{01}^2]_{,\xi\xi} + \\
&\quad + \frac{1}{\delta^2 r_0}(\delta_1\sigma_{02}^1 + \delta_{20}\sigma_{02}^2); \\
n_g &= n_1 + n_2; \quad a_{11} = \delta_1; \quad a_{12} = e_2\delta_2; \quad a_{13} = 0; \quad a_{14} = \frac{1}{2r_0}(\delta_1 + \delta_{20}); \\
a_{15} &= \frac{\delta}{2}(\delta_1 + \delta_{20}); \quad a_{21} = -h_1\delta_1; \quad a_{22} = h_2e_2\delta_2; \quad a_{23} = 0; \\
a_{24} &= \frac{1}{2r_0}[h_1\delta_1 - h_2\delta_{20} - g_3r_0(2 + h_0/\alpha_3)]; \quad a_{25} = \frac{\delta}{2}(h_2\delta_{20} - h_1\delta_1); \\
a_{31} &= 0; \quad a_{32} = \frac{1}{2r_0}(\delta_1\alpha_1 - \delta_{20}\alpha_2) - \frac{n}{\delta}; \\
a_{33} &= -\delta_1\alpha_1; \quad a_{34} = \delta_{20}\alpha_2; \tag{4.5.1} \\
a_{35} &= \frac{1}{2r_0\delta}(\delta_0); \quad a_{36} = \frac{1}{2r_0\delta}(\delta_{20}); \quad a_{37} = -\frac{1}{r_0^2\delta}(\delta_1 + \delta_{20}); \\
a_{38} &= \frac{\delta}{2}(\delta_{20}\alpha_2 - \delta_1\alpha_1); \quad a_{39} = \frac{1}{4r_0}(\delta_1 + \delta_2); \\
\sigma_{0r}^k &= k_{0k}\omega_0^k(\varepsilon_r^k + \frac{1}{2}\varepsilon_s^k) + k_{1k}\omega_1^k(\varepsilon_{r1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{s1}^k) + \\
&\quad + k_{2k}\omega_2^k(\varepsilon_{r2}^k + \frac{1}{2}\varepsilon_{s2}^k); \\
\omega_i^k &= \frac{e_k e_{il}^k - \sigma_{il}^k}{e_k^3} e_k e_{il}^k; \\
\varepsilon_{i0}^k &= \frac{2}{\sqrt{3}}[(\varepsilon_1^k)^2 + \varepsilon_1^k + (\varepsilon_2^k)^2]; \\
\sigma_{13} &= g_{13}\varepsilon_{13} - \sigma_{013}^-; \quad \sigma_r^j = \frac{3}{4} \frac{\sigma_r^j}{E_1}; \quad \sigma_{13} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_{13}}{E_1}; \\
\varepsilon_1^j &= \delta u_{1,\xi}^j + \frac{1}{2}\delta^2(w_{,\xi})^2; \quad \varepsilon_2^j = -\frac{\delta w}{r_0}; \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2\alpha_3}(u_2 - u_1 + \delta h_0 w_{,\xi}) + \delta w_{,\xi};
\end{aligned}$$

$$f_1 = F_1; \quad f_2 = -b_{15}(w_{,\xi})^2 + \frac{1}{\delta}(h_1\delta_1\sigma_{01}^1 - h_2\delta_{20}\sigma_{01}^2 - h_1n_1 + h_2n_2);$$

$$f_3 = -b_{25}(w_{,\xi})^2; \quad b_{11} = h_1\delta_1; \quad b_{12} = -h_2\delta_{20}; \quad b_{13} = 0;$$

$$b_{14} = \frac{1}{2r}(h_2\delta_{20} - h_1\delta_1); \quad b_{15} = \frac{\delta}{2}h_1\delta_1 - h_2\delta_{20}; \quad b_{21} = 0;$$

$$b_{22} = 0; \quad b_{23} = 0; \quad b_{24} = 0; \quad b_{25} = 0;$$

$$(r, s, k = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \quad m, t = 0, 1, 2; \quad r \neq s).$$

Следовательно, для трехслойной цилиндрической оболочки с мембранными несущими слоями и легким заполнителем имеем три нелинейных дифференциальных уравнения равновесия (4.4.1) и три граничных условия (4.4.4) на каждом краю. Третье граничное условие (4.4.4) в этом случае выпадает, так как легкий заполнитель не воспринимает продольных напряжений. В соответствии с последним обстоятельством не возникает необходимость введения законтурного узла, что было сделано для перехода к конечным разностям в дифференциальных уравнениях (4.4.1) и граничных условиях (4.4.4) цилиндрической подкрепленной оболочки. Переход к конечным разностям в дифференциальных уравнениях и граничных условиях трехслойной цилиндрической оболочки с легким заполнителем осуществляется аналогично, как и для подкрепленной цилиндрической оболочки. При этом выражения для смещений во внутренних узлах, (в том числе и в крайнем узле), имеют вид (4.4.7), в контурном узле – (4.4.9) и в среднем узле – вид (4.4.12).

В числовом примере рассмотрена длинная оболочка с мало упрочняющимися несущими слоями и следующими параметрами:

$$g_{130} = 0.001; \quad h_1 = h_2 = 0.42; \quad B = 1; \quad \delta = 0.0084; \quad r_0 = 0.5;$$

$$\varepsilon_{00}^1 = \varepsilon_{00}^2 = 0.0075; \quad \delta_1 = 0.084; \quad \delta_2 = 0.07; \quad \beta_1 = \beta_2 = 1.1.$$

Величины нагрузок на краях несущих слоев и поперечная нагрузка изменялись пропорционально одному параметру q :

$$n_1 = 0.0005q; \quad n_2 = 0.0011q; \quad p = 10^{-2}q.$$

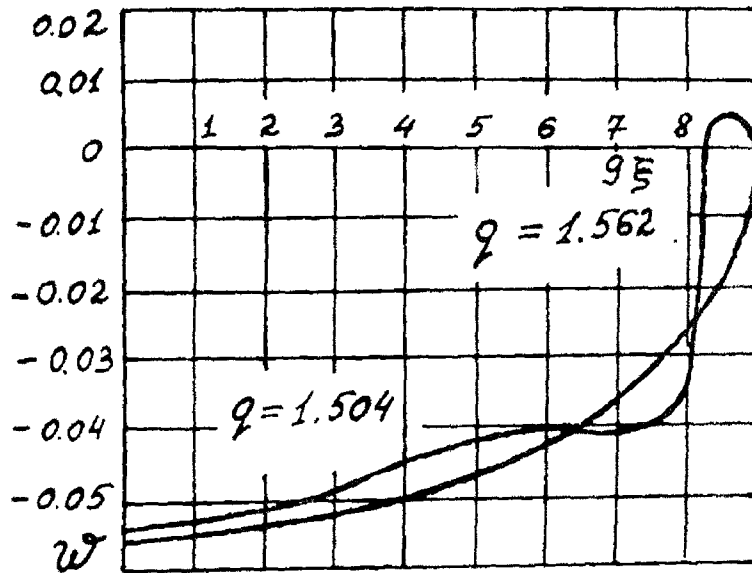


Рис. 4.26.

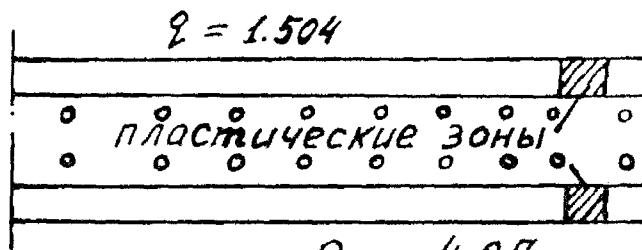


Рис. 4.27.

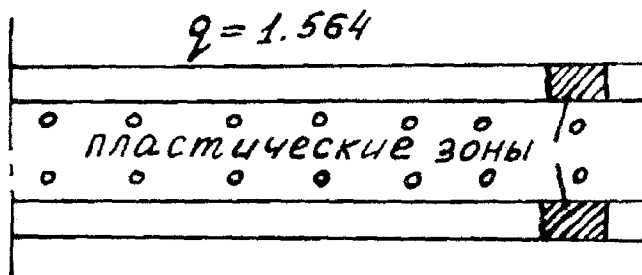


Рис. 4.28.

Параметр нагрузки q в начале нагружения возрастал с шагом 0.1, а после перехода оболочки в пластическое состояние изменялся с шагом 0.002. Счет проведен при разбиении половины длины оболочки с 20-ю узлами. Допустимое среднеквадратичное отклонение принято равным 0.0001.

Результаты вычислений приведены на рис. 4.25 – 4.26, 4.27 – 4.28. Зависимости прогиба $w(q)$ в середине оболочки $\xi = 0$ и в точках, $\xi = 8/9$, $\xi = 17/18$, вблизи края оболочки показаны на рис. 4.25. Зависимости $w(\xi)$ для $q = 1.504$ и $q = 1.562$ изображены на рис. 4.26. При $q = 1.502$ несущие слои вблизи края оболочки переходят в пластическое состояние. Распределение пластических зон для $q = 1.504$ и $q = 1.562$ показано, соответственно, на рис. 4.27 и 4.28. Последующее возрастание параметра нагрузки $q \geq 1.504$ ведет к изменению формы выпучивания. Наиболее интенсивное формоизменение происходит вблизи края приблизительно на $1/9$ половины длины оболочки. В результате интенсивного выпучивания вблизи краев оболочки образуются складки. Счет проведен до значения параметра нагрузки $q = 1.562$, при котором происходит быстрый рост прогиба $w(q)$ в точках $\xi = 8/9$ и $\xi = 17/18$. Для вычислений использовано 4 минуты машинного времени на ЭВМ БЭСМ-6.

4.6. Устойчивость, несущая способность и рациональное проектирование армированных упругопластических пластин[87]

Определение критических нагрузок устойчивости (и несущей способности) конструктивно-неоднородных пластин и оболочек решением краевых задач связано со значительными математическими затруднениями (см. разделы, 4.1, 4.3, 4.4). Основная сложность решения таких задач состоит в прослеживании всего процесса деформирования с учетом активных пластических деформаций, разгрузки и возможных вторичных пластических деформаций с самого начала нагружения. Применение такого метода исследования устойчивости и несущей способности упруго-пластических неоднородных элементов конструкций

более сложной структуры, каковыми являются многослойные армированные пластинки и оболочки, представляется трудноосуществимым в условиях развития современной вычислительной техники. Поэтому имеет смысл определять критические нагрузки устойчивости упруго-пластических армированных пластин решением проблемы собственных значений дифференциальных уравнений без учета моментности основного докритического состояния. Определенные таким способом критические нагрузки элементарной модели стержня (см. главу 3) и широкой трехслойной пластинки (см. раздел 4.2) являются оценками их нагрузок исчерпания несущей способности. Кроме того, подход к решению задач устойчивости упругопластических элементов конструкций, состоящий в определении собственных значений соответствующих дифференциальных операторов на основе предположения о безмоментности основного докритического состояния, продолжает оставаться распространенным в литературе [243-245]. Такой метод определения критических нагрузок также позволяет осуществить рациональный выбор структурных параметров с наименьшими затратами времени на вычисления.

4.6.1. С этой точки зрения рассмотрим многослойную пластинку регулярного строения с жестким на сдвиг заполнителем [87]. Пластика армирована двумя семействами нитей в направлениях осей, x , y , и двумя семействами нитей, расположенных под углами α_k ($k = 1, 2$) к направлению оси x координатной системы xoy в плоскости пластинки. При этом уравнение устойчивости имеет вид [262]:

$$2\delta_1^3[b_{11}w_{,xxxx} + 4b_{13}w_{,xxx} + 2(b_{12} + 2b_{33})w_{,xxyy} + 4b_{23}w_{,xyyy} + b_{22}w_{,yyyy}] - 3(T_1^0 w_{,xx} + 2T_3^0 w_{,xy} + T_2^0 w_{,yy}) = 0. \quad (4.6.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_{ii} &= a_{ii} + \omega_i E_{i2}^{\pm} + \omega_1^1 l_{i1}^4 E_{12}^{1\pm} + \omega_2^1 l_{i2}^4 E_{22}^{1\pm}; \\ b_{12} &= a_{12} + \omega_1^1 l_{11}^2 l_{21}^2 E_{12}^{1\pm} + \omega_2^1 l_{12}^2 l_{22}^2 E_{22}^{1\pm}; \\ b_{i3} &= a_{i3} + \omega_1^1 l_{i1}^3 l_{s1} E_{12}^{1\pm} + \omega_2^1 l_{i2}^3 l_{s2} E_{22}^{1\pm}; \\ b_{33} &= a_{33} + \omega_1^1 l_{11}^2 l_{21}^2 E_{12}^{1\pm} + \omega_2^1 l_{12}^2 l_{22}^2 E_{22}^{1\pm}; \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= \frac{4}{3}E_{01} - \frac{(E_{01} - E_{02})}{\tau^2}\sigma_{ii}^2; & a_{12} &= \frac{2}{3}E_{01} - \frac{(E_{01} - E_{02})}{\tau^2}\sigma_{11}\sigma_{12}; \\
a_{i3} &= -\frac{(E_{01} - E_{02})}{\tau^2}\sigma_{ii}\sigma_{12}; & a_{33} &= \frac{1}{3}E_{01} - \frac{(E_{01} - E_{02})}{\tau^2}\sigma_{12}^2; \\
\tau &= [\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2]^{1/2}; \\
l_{1k} &= \cos \alpha_k; & l_{2k} &= \sin \alpha_k; (i, k, s = 1, 2; i \neq s).
\end{aligned}$$

В уравнении (4.6.1) и выражениях (4.6.2) введены обозначения: $2\delta_1$ – толщина пластинки; $i = 0$ для связующего; $i = 1, 2$ – для нитей в направлениях осей x и y ; $k = 1, 2$ – для нитей в направлениях углового армирования, составляющих с осью x углы α_k ; ω_i и ω_k^1 – удельные плотности армирующих нитей в направлениях, x ($i = 1$), y ($i = 2$), и направлениях углового армирования; σ_{ii} , σ_{12} – напряжения в связующем; E_{im} , $E_{km}^{1\pm}$ – секущие ($m = 1$), касательные модули ($m = 1$) и модули упругости ($m = 3$) материалов связующего и соответствующих элементов армирования при растяжении (+) и сжатии (-); T_j^0 ($j = 1, 2, 3$) – усилия по краям пластинки.

Для определения напряжений и деформаций ε_j в пластинке до потери устойчивости имеем соотношения [261]:

$$\begin{aligned}
t_i &= \sigma_{ii} + \omega_i \sigma_i + \omega_1^1 \sigma_1^1 l_{i1}^2 + \omega_2^1 \sigma_2^1 l_{i2}^2; \\
t_3 &= \sigma_{12} + \omega_1^1 l_{11} l_{21} + \omega_2^1 \sigma_2^1 l_{12} l_{22}; \\
\sigma_{ii} &= \frac{4}{3} \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2} \varepsilon_s \right); & \sigma_{12} &= \frac{E_{01}}{3}; \\
\sigma_i &= E_{i1}^{\pm} \varepsilon_i; & \sigma_k^1 &= E_{k1}^{1\pm} \varepsilon_k^1; \\
\varepsilon_k^1 &= \varepsilon_1 l_{1k}^2 + \varepsilon_2 l_{2k}^2 + \varepsilon_3 l_{1k} l_{2k}; & T_j^0 &= 2\delta_1 t_j,
\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

где σ_i – напряжения в нитях основного армирования, σ_k^1 – напряжения в нитях углового армирования.

4.6.2. Рассмотрим задачу о рациональном проектировании шарнирно опертой по краям пластинки с размерами, a , b , армированной нитями в направлениях, x , y , и сжатой в этих направлениях равномерно распределенными по краям усилиями: $T_1^0 = -p$; $T_2^0 = -q$; $T_3^0 = -t = 0$.

Подставляя выражение прогиба $w = w_0 \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b}$ в уравнение (4.6.1), используя соотношения (4.6.2)-(4.6.3) и учитывая, что в данном случае $\omega_k^1 = \sigma_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$ ($k = 1, 2$), получим уравнение для критической нагрузки,

$$\frac{p}{2\delta_1} = \frac{l}{(\theta^2 + \varphi n^2)} [b_{11}\theta^4 + 2(b_{12} + 2b_{33})n^2\theta^2 + b_{22}n^4], \quad (4.6.4)$$

где

$$l = \frac{\pi^2 \delta_1^2}{3b^2}, \quad q = p\varphi, \quad \theta = \frac{mb}{a}.$$

Наименьшего значения критическая нагрузка достигает, когда

$$n = 1, \quad \theta = \theta_1 = \sqrt{\frac{b_{22}}{b_{11}}}$$

и составляет

$$p_* = 2ld. \quad (4.6.5)$$

Здесь

$$p_* = \frac{p}{\delta_1 E_{03}}; \quad d = \frac{b_{11}\theta_1^4 + 2(b_{12} + 2b_{33})}{E_{03}(\theta_1^2 + \varphi)}.$$

Предполагая, как и в работе [262], что материал элементов пластинки обладает линейным упрочнением, определим значение параметра l при напряжениях в нитях и интенсивности напряжений τ в связующем, равных соответствующим пределам пропорциональности s_i . В результате получим:

$$\begin{aligned} l_0 &= -\frac{2p_1 f_1 + p_2 f_3 + c_0 s_{11}}{2(2f_1 + \varphi f_3)d}; \\ l_1 &= \frac{2c_0 s_1 - \omega_{13}[p_1(4e_1 + 3\omega_{22}) - 2e_1 p_2]}{2\omega_{13}(4e_1 + 3\omega_{23} - 2e_1 \varphi)d}; \\ l_2 &= \frac{2c_0 s_2 - \omega_{23}[p_2(4e_1 + 3\omega_{12}) - e_1 p_1]}{2\omega_{23}[(4e_1 + 3\omega_{12})\varphi - 2e_1]d}. \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 p_i &= \frac{2s_i(\omega_{i2} - \omega_{i3})}{\omega_{i3}}; & d &= \frac{2[b_{22}\sqrt{b_{11}} + (b_{12} + 2b_{33})\sqrt{b_{22}}]}{\sqrt{b_{22}} + \varphi\sqrt{b_{11}}}; \\
 c_0 &= 4e_1(e_1 + \omega_{12} + \omega_{22}) + 3\omega_{12}\omega_{22}; \\
 f_i &= e_1(e_1 + \omega_{i2}); & f_{i+2} &= e_1\omega_{12}; \\
 e_1 &= e_2\tau[\tau - (1 - e_2)s_0]^{-1}; & s_{11} &= F_3 \pm \sqrt{F_3^2 + F_4}; \\
 s_{22} &= F_1 + s_{11}F_2; & \omega_{im} &= \omega_i e_{im}; \\
 F_1 &= \frac{(2p_1f_1 + p_2f_3)(2\varphi f_2 + f_4)}{c_0(2f_1 + \varphi f_3)} - \frac{1}{c_0}(2p_2f_2 + p_1f_4); \\
 F_2 &= \frac{2\varphi f_2 + f_4}{2f_1 + \varphi f_3}; & F_3 &= \frac{F_1}{2F}; \\
 F_4 &= \frac{1}{2F}(\tau^2 - F_1^2); & F &= 1 - F_2 + F_2^2.
 \end{aligned}$$

Все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к модулю упругости материала связующего и обозначены соответствующими малыми буквами. Знаки перед корнем, а так же знаки напряжений s_i следует выбирать так, чтобы величины l_i , отвечающие пределам пропорциональности в нитях ($i = 1, 2$) и в связующем ($i = 0$) были положительными и наименьшими.

Полагая в формулах (4.6.6) секущие и касательные модули равными модулям упругости, для соответствующих элементов получаем один из возможных случаев:

$$l_i = f_{i1} \leq \min(l_\alpha, l_\beta); \quad (i, \alpha, \beta = 0, 1, 2; i \neq \alpha \neq \beta).$$

Пусть $i = 1$. Тогда для значений $0 \leq l \leq f_{11}$ происходит потеря устойчивости пластинки при упругих деформациях всех элементов.

Для $l > f_{11}$ нити первого направления деформируются пластически. Предположим, что связующее и нити второго направления упругие, а нити в первом направлении пластические. Полагая, что в формулах (4.6.6) справедливы равенства $\tau = s_0$, $e_{01} = e_{02} = e_{03}$, $\omega_{12} =$

$\omega_{13}, \omega_{22} = \omega_{23}$, для пластин с параметрами, удовлетворяющими неравенству $l > f_{11}$, получаем один из следующих возможных случаев:

$$I) \quad f_{11} \leq l_{\alpha} = f_{\alpha 2} \leq l_{\beta}; \quad II) \quad l_{\alpha} \leq f_{11} = f_{\alpha 2} \leq l_{\beta};$$

$$III) \quad l_{\alpha} \leq l_{\beta} \leq f_{11} = f_{13}; \quad (\alpha, \beta = 0, 2; \alpha \neq \beta).$$

В случае I) при $f_{11} \leq l \leq f_{\alpha 2}$ происходит упруго-пластическая потеря устойчивости пластинки с пластическими первыми нитями и упругими вторыми нитями и связующим; при $l > f_{\alpha 2}$ α -е элементы деформируются пластически.

Предположим, что первые и α -е элементы пластические, а β -е элементы упругие. Если в формулах (4.6.5) $e_{01} = e_{02} = e_{03}$, $\tau = s_0$ при $\alpha = 2$ и $\omega_{22} = \omega_{23}$, $\tau = s_0$ при $\alpha = 0$, то получим один из вариантов:

$$I_1) \quad f_{11} \leq f_{\alpha 2} \leq l_{\beta} = f_{\beta 3}; \quad I_2) \quad f_{\alpha 2} \geq \max(f_{11}, l_{\beta});$$

$$(\alpha, \beta = 0, 2; \alpha \neq \beta).$$

В случае $I_1)$ при $f_{\alpha 2} \leq l \leq f_{\beta 3}$ происходит потеря устойчивости пластинки с пластическими первыми и α -ми элементами и упругими β -ми элементами; если $l > f_{\beta 3}$, то элементы пластинки деформируются пластически и происходит чисто пластическая потеря устойчивости. В случае $I_2)$ при $l > f_{\alpha 2} = f_{\alpha 3}$ все элементы пластические и происходит чисто пластическая потеря устойчивости.

В случае II), когда $l > f_{11}$, пластинка неустойчива с пластическими первыми и α -ми элементами, а также с упругими β -ми элементами. Полагая в соотношениях (4.6.6) $e_{01} = e_{02} = e_{03}$, $\tau = s_0$ при $\alpha = 2$ и $\omega_{22} = \omega_{23}$, $\tau = s_0$ при $\alpha = 0$, получаем один из следующих случаев:

$$II_1) \quad l_{\alpha} \leq f_{11} \leq l_{\beta} = f_{\beta 3}; \quad II_2) \quad f_{11} \geq \max(l_{\alpha}, l_{\beta});$$

$$(\alpha, \beta = 0, 2; \alpha \neq \beta).$$

В случае $II_1)$ при $f_{11} \leq l \leq f_{\beta 3}$ происходит потеря устойчивости пластинки с пластическими первыми и вторыми нитями и упругим заполнителем, а при $l > f_{\beta 3}$ — чисто пластическая потеря устойчивости. В

случаях II_2) и III) чисто пластическая потеря устойчивости наблюдается при $l > f_{11} = f_{13}$.

Случай, когда $i = 0, 2$, аналогичны приведенным выше.

В качестве примера рассмотрим армированные пластинки с параметрами: $\omega_2 = 0.5\omega_1$; $\omega_{1k} = 0.5\omega_1$; $\omega_{2k} = 0.25\omega_1$; $\varphi = 0.2$; $s_0 = 0.02$; $s_2 = 0.0001\omega_1$; $s_1 = 0.01\omega_1$; $\omega_1 = 1, 2, 3, 4, 5$. Кривые $f_{11}, f_{21}, f_{12}, f_{22}, f_{33}$, разделяющие различные области потери устойчивости пластинки, изображены на рис. 4.29. В области OABCDE потеря устойчивости происходит при всех упругих элементах; в области ABFING – при пластических нитях обоих направлений и упругом заполнителе; в области CFIDC – при пластических нитях в направлении y , упругих нитях в направлении x и упругом заполнителе. В области FBC потеря устойчивости сопровождается пластическим деформированием нитей направления: x при упругом заполнителе и упругих нитях направления y ; для значений l выше кривой GH – пластическим деформированием всех элементов. Значение l на кривой GH, соответствующее максимальной критической нагрузке, можно считать оптимальным, так как при этом потеря устойчивости пластинки сопровождается истощением несущей способности всех ее элементов. Если по каким-либо соображениям переход тех или иных элементов композиции в пластическое состояние недопустим, то рациональными следует считать проекты, соответствующие кривым ABCD или ABFI на рис. 4.29.

4.6.3. Рассмотрим задачу о рациональном выборе параметров углового армирования шарнирно опертой пластинки при сжатии и сдвиге. Аппроксимируем прогиб выражением,

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}. \quad (4.6.7)$$

Применяя метод Бубнова – Галеркина [1] с удержанием четырех членов ряда (4.6.7), когда $m, n = 1, 2$, из уравнений устойчивости (4.6.1) получим,

$$(c_1 c_8 - c_2 c_7)(c_3 c_6 - c_4 c_5) = 0. \quad (4.6.8)$$

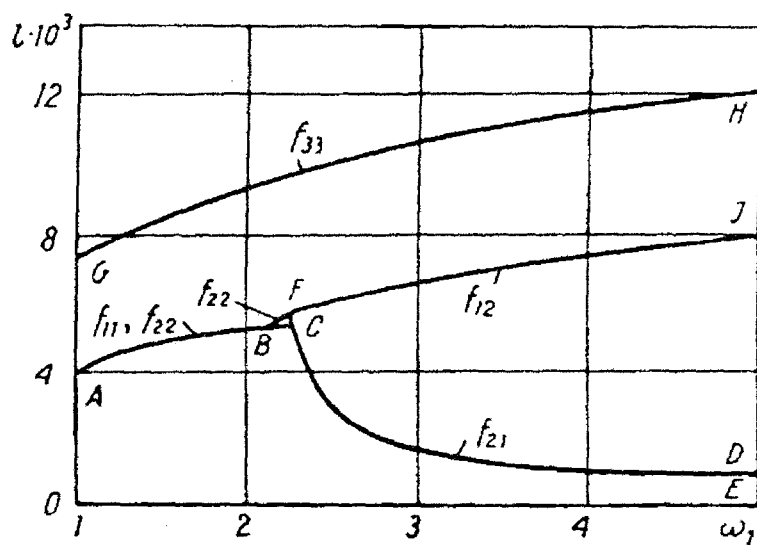


Рис. 4.29.

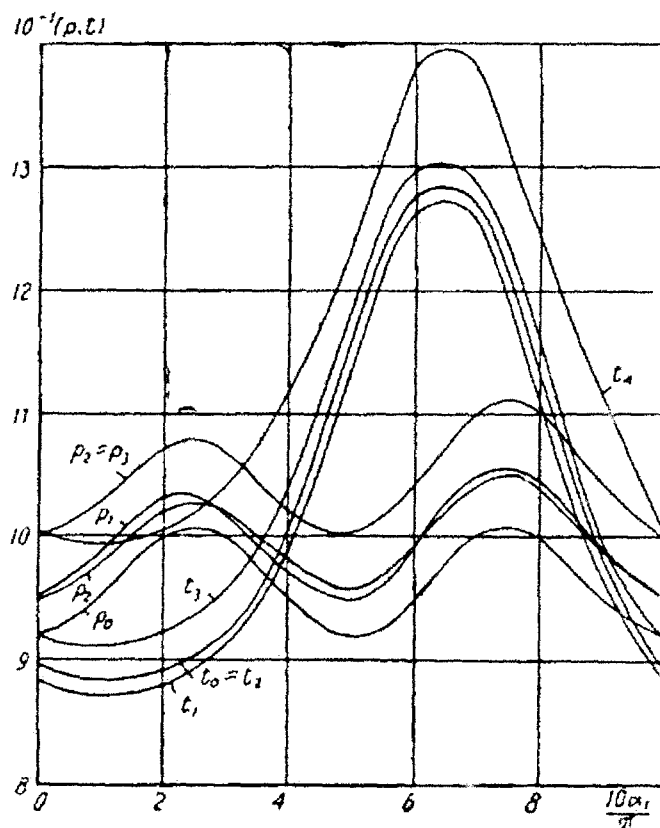


Рис. 4.30.

Здесь

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{1}{4}\pi^2(r - r_1); & c_2 &= r_2 + \frac{32}{9}t_*; \\
 c_3 &= \pi^2 \left[\pi^2 \left(\frac{1}{4}b_{11}\theta^3 + r_3 + 4b_{22}\theta^{-1} \right) - \theta \left(\frac{1}{4}p + q\theta^{-2} \right) \right]; \\
 c_4 &= \frac{1}{9} \left[16\pi^2 \left(2b_{13}\theta^2 + \frac{1}{2}b_{23} \right) - 64t_* \right]; \\
 c_5 &= \frac{1}{9} \left[16\pi^2 \left(\frac{1}{2}b_{13}\theta^2 + b_{23} \right) - 64t_* \right]; \\
 c_6 &= \pi^2 \left[\pi^2 \left(4b_{11}\theta^3 + r_3 + \frac{1}{4}b_{22}\theta^{-1} \right) - \theta \left(p_* + \frac{1}{4}q_*\theta^{-2} \right) \right]; \\
 c_7 &= r_2 + \frac{128}{9}t_*; & c_8 &= \pi^2(4r - r_1); \\
 r &= \pi^2(b_{11}\theta^3 + r_3 + b_{22}\theta^{-1}); & r_1 &= p_*\theta + q_*\theta^{-1}; \\
 r_2 &= -\frac{16^2}{9}\pi^2(b_{13}\theta^2 + b_{23}); & r_3 &= 2(b_{12} + 2b_{33})\theta; \\
 \theta &= \frac{b}{a}; & p_* &= \frac{p}{p_0}; & q_* &= \frac{q}{p_0}; & t_* &= \frac{t}{p_0}; & p_0 &= \frac{2\delta_1^3 E_1}{3b^2}.
 \end{aligned}$$

Предположим, что потеря устойчивости происходит при упругих элементах. Полученные в этом случае из уравнения (4.6.8) зависимости критических нагрузок p_* ($q_* = t_* = 0$) и t_* ($p_* = q_* = 0$) при $\theta = 0.5$, $\omega_{13} = \omega_{23} = \omega_{13}^1 = \omega_{23}^1 = 1$, $\alpha_{2\mu} = 0.1\mu\pi$ ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) от угла армирования α_1 изображены, соответственно, кривыми p_μ , t_μ на рис. 4.30.

Определим напряжения в арматуре и связующем при нагрузках, равных критическим. Пользуясь выражениями (4.6.2)-(4.6.3), получаем:

$$\begin{aligned}
 a_i &\equiv \frac{\pi^2 \omega_i s_i}{l} = \frac{1}{\Delta} \omega_{i3} \Delta_i; \\
 b_i &\equiv \frac{\pi^2 \omega_i^1 s_i^1}{l} = \frac{\omega_{i3}^1}{\Delta} (\Delta_1 l_{11}^2 + \Delta_2 l_{21}^2 + \Delta_3 l_{11} l_{21}); \\
 c &\equiv \frac{\pi^2 s_0}{l} = \frac{4}{3\Delta} [(\Delta_1 + \Delta_2/2)^2 - (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_2 + \Delta_1/2)] +
 \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

$$+(\Delta_2 + \Delta_1/2)^2 + \Delta_3^2/3]^{1/2}.$$

Здесь

$$\Delta = b_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}^2) - b_{12}(b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23}) + b_{13}(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22});$$

$$\Delta_1 = -p_*(b_{22}b_{33} - b_{23}^2) + q_*(b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23}) + t_*(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22});$$

$$\Delta_2 = p_*(b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23}) - q_*(b_{11}b_{33} - b_{13}^2) + t_*(b_{11}b_{23} - b_{12}b_{13});$$

$$\Delta_3 = -p_*(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}) + q_*(b_{11}b_{23} - b_{12}b_{13}) - t_*(b_{13}b_{22} - b_{12}^2);$$

$$\omega_{i3}^1 = \omega_i^1 e_{i3}^1; \quad (i = 1, 2),$$

причем s_i , s_i^1 — безразмерные напряжения в нитях основного и углового армирования; s_0 — безразмерная интенсивность напряжений в связующем.

На рисунках 4.31 — 4.35 показаны зависимости a_i , b_i , c от углов армирования α_k ($k = 1, 2$) при сжатии (кривые $a_{i\mu}^p$, $b_{i\mu}^p$, c_μ^p) и сдвиге (кривые $a_{i\mu}^t$, $b_{i\mu}^t$, c_μ^t). Как видно, для принятых значений параметров армирования критические нагрузки в случае сжатия максимальны при углах армирования приблизительно равных $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$ и $\alpha_1/3 = \alpha_2 = \pi/4$, причем в последнем случае достигается абсолютный максимум.

Критические нагрузки при сдвиге для рассмотренной пластинки достигают максимального значения при значениях α_1 приблизительно равных $2\pi/3$. Величины напряжений в армирующих нитях и связующем увеличиваются при максимальных критических нагрузках, как в случае сжатия, так и в случае сдвига. Отметим, что максимальные значения напряжений и критических нагрузок, как правило, достигаются при различных значениях параметров углового армирования. Выбрав материалы нитей и связующего с пределами пропорциональности, равными соответствующим напряжениям, вычисленным из выражений (4.6.9), получим рациональный проект пластинки, теряющей устойчивость при исчерпании несущей способности. Как и пункте 4.4.2, можно продолжить это решение, допустив до потери устойчивости существование пластических деформаций в некоторых элементах композиции.

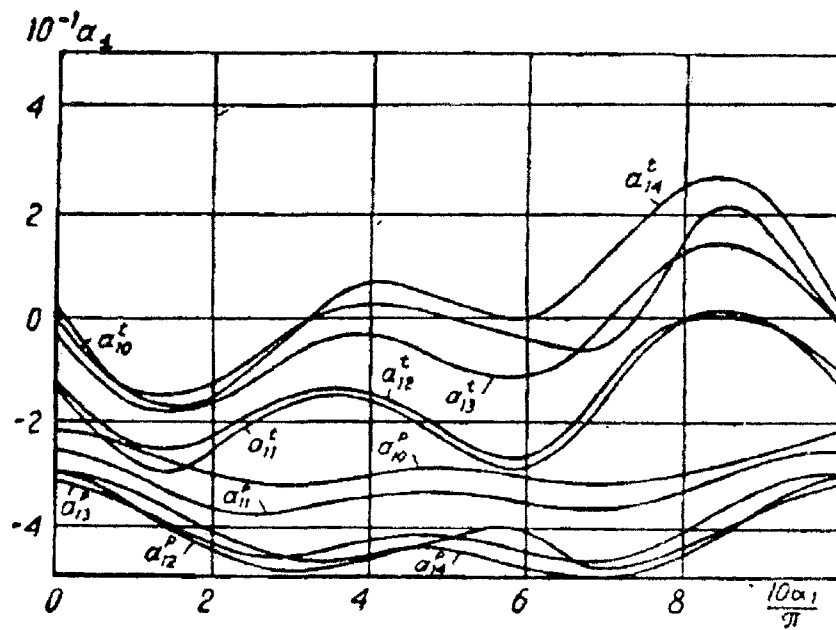


Рис. 4.31.

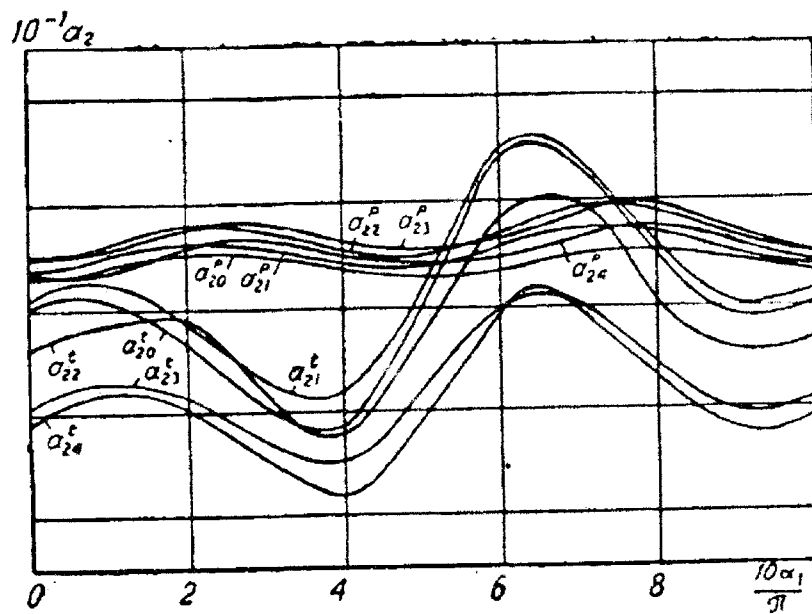


Рис. 4.32.

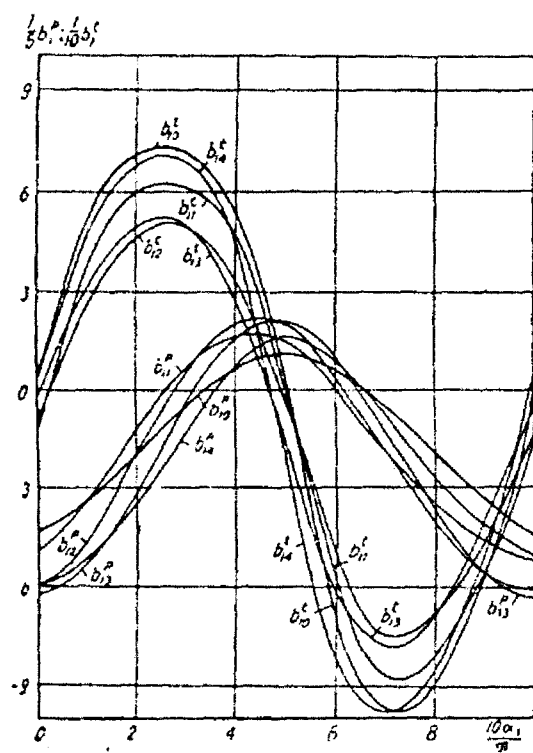


Рис. 4.33.

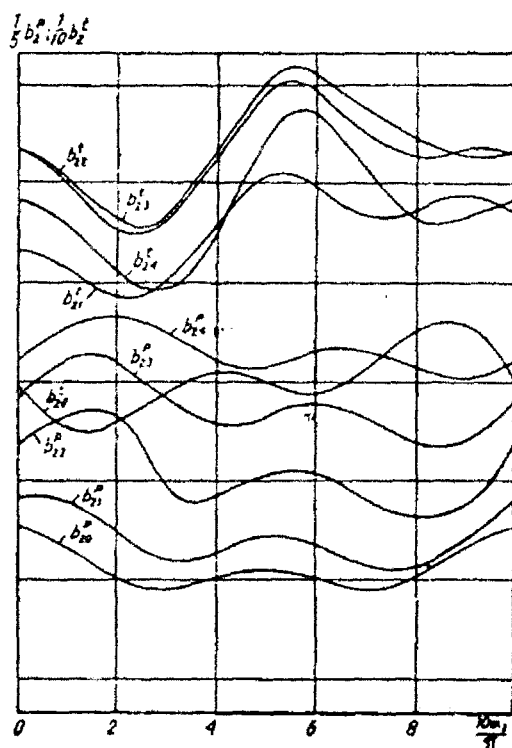


Рис. 4.34.

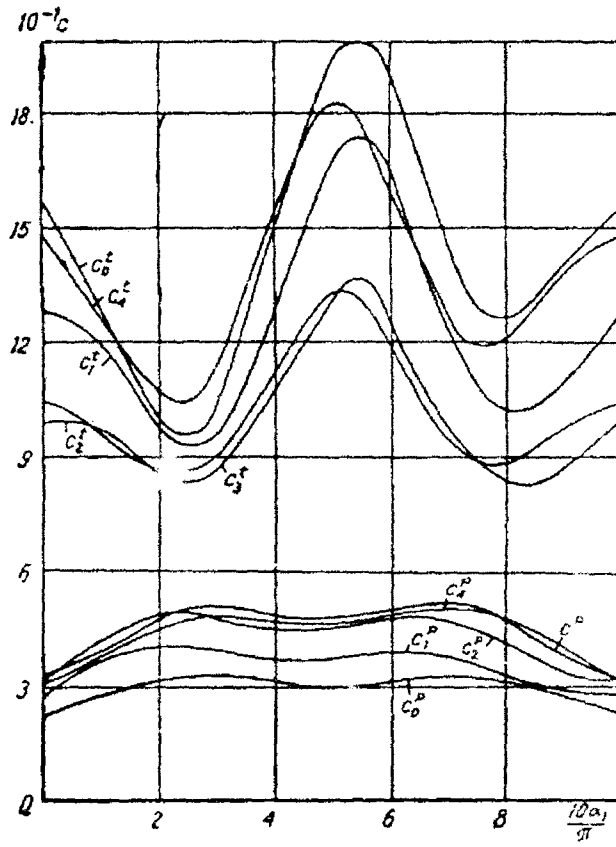


Рис. 4.35.

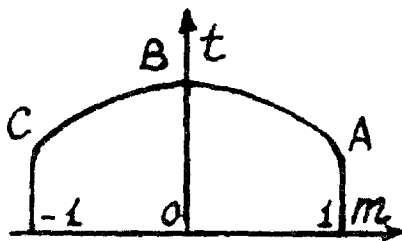


Рис. 4.36.

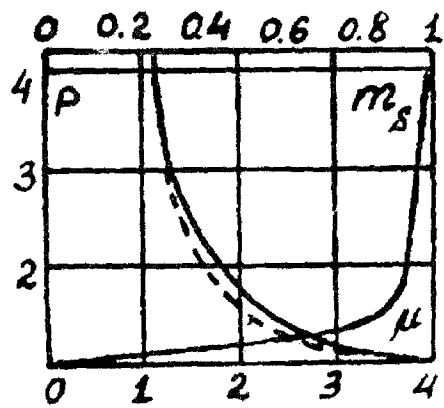


Рис. 4.37.

4.7. Несущая способность гладких и подкрепленных жесткопластических цилиндрических оболочек [83]

Исследования поведения упругопластических элементов конструкций (разделы 4.2 – 4.4) показывают, что перед исчерпанием их несущей способности происходит резкое увеличение областей пластических деформаций. Наиболее заметно такое свойство предельного состояния проявляется, когда материалы конструктивных элементов имеют малое упрочнение. Для широкой трехслойной пластинки с малоупрочняющимся несущим слоем при сжатии конечная пластическая область образуется сразу же после перехода в пластическое состояние. Поэтому для определения несущей способности пластинок или оболочек целесообразно воспользоваться диаграммой жесткопластического материала и теорией идеальной пластичности [20,46-48,136]. В настоящем разделе при помощи концепции жесткого идеально пластического материала, подчиняющегося условию пластичности Треска, получено точное решение задачи о несущей способности защемленных по краям гладких и подкрепленных кольцевыми ребрами цилиндрических оболочек, нагруженных внутренним равномерно распределенным давлением [83]. Вычисленные значения предельной нагрузки сравниваются с решением Ф.Г.Ходжа [47] для двухслойной оболочки.

4.7.1. Уравнения равновесия цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним равномерно распределенным давлением, имеют вид:

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{d^2 m}{dy^2} + t - p = 0; \quad t_1 = 0. \quad (4.7.1)$$

Здесь

$$m = \frac{M}{\sigma_0 H^2}; \quad t = \frac{T}{2\sigma_0 H}; \quad t_1 = \frac{T_1}{2\sigma_0 H}; \quad \mu^2 = \frac{2l^2}{RH};$$

$$p = \frac{PR}{2\sigma_0 H}; \quad y = \frac{x}{l};$$

M – осевой изгибающий момент; T – окружное усилие; T_1 – осевое усилие; σ_0 – предел текучести материала оболочки при растяжении; $2H$, R , $2l$ – соответственно, толщина, радиус срединной поверхности

и длина оболочки; x – осевая координата, причем начало координат расположено в середине оболочки; p – интенсивность равномерно распределенного давления.

Условие пластичности Треска в усилиях и моментах [47] при $t \geq 0$, $t_1 = 0$ (рис. 4.36) сводится к виду:

$$t = 0.5 + 0.5\sqrt{1 \pm m} \quad \text{при} \quad 0.5 \leq t \leq 1, \quad -1 \leq m \leq 1;$$

$$m = \pm 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 0.5. \quad (4.7.2)$$

Связанный с условием пластичности (4.7.2) закон пластического течения можно представить в форме:

$$\varepsilon : \kappa = 4\sqrt{1 \pm m} : \mp 1 \quad \text{при} \quad 0.5 \leq t \leq 1;$$

$$\varepsilon : \kappa = 0 : 1 \quad \text{для} \quad 0 \leq t \leq 0.5, \quad (4.7.3)$$

где

$$\varepsilon = w, \quad \kappa = \frac{1}{\mu^2} \frac{d^2 w}{dy^2}, \quad w = \frac{W}{R},$$

W – скорость прогиба, отсчитываемая по внешней нормали к срединной поверхности оболочки.

Из уравнения равновесия (4.7.1) и закона течения (4.7.3) получаем соотношение

$$\frac{dm}{dy} \frac{dw}{dy} - w \frac{d^2 m}{dy^2} = A. \quad (4.7.4)$$

Здесь A – константа интегрирования, определяемая из граничных условий и неравная нулю, ибо в противном случае из (4.7.4) следует

$$\frac{dm}{dy}(\pm 1) = Cw(\pm 1) = 0$$

и C будет константой интегрирования, что невозможно, так как при наличии защемления на концах перерезывающая сила

$$\frac{dm}{dy}(\pm 1) \neq 0.$$

Из уравнения (4.7.4), как следствие, вытекает, что на краях защемленной оболочки всегда $m(\pm 1) = 1$. Действительно, так как для защемленной оболочки $w(\pm 1) = 0$, то из соотношения (4.7.4) находим

$$\frac{dw}{dy}(\pm 1) = \frac{A}{\frac{dm}{dy}(\pm 1)}.$$

Следовательно, при подходе к заделке со стороны оболочки

$$\frac{dw^-}{dy}(\pm 1) \neq 0,$$

тогда как с другой стороны, вследствие наличия заделки,

$$\frac{dw^+}{dy}(\pm 1) = 0.$$

Если скорость угла наклона прогиба изменяется скачкообразно, то на краях оболочки реализуется пластический шарнир [47]. В этом случае, как следует из закона течения (4.7.3), напряженное состояние в заделке характеризуется точками A или C кривой текучести (рис. 4.36), так как в предельном состоянии $\varepsilon = w \neq 0$. Таким образом одним из граничных условий будет $m(\pm 1) = 1$.

В силу симметрии задачи рассмотрим половину оболочки $0 \leq y \leq 1$. При заданном нагружении скорость изменения кривизны в середине оболочки будет отрицательной, то есть напряженное состояние для $y = 0$ характеризуется в общем случае точкой, лежащей на кривой BC (см. рис. 4.36), так что $m(0) = m_s$, причем значение m_s должно быть определено в ходе решения. При данном типе нагружения изменение момента по длине оболочки $0 \leq y \leq 1$ имеет монотонный характер, поэтому для $0 \leq y \leq y_1$ реализуется состояние BC и при $y_1 \leq y \leq 1$ — состояние AB . Граница раздела $y = y_1$ должна быть определена в ходе решения.

Граничные условия и условия непрерывности на границе раздела $y = y_1$ имеют вид:

$$m(0) = m_s; \quad m(1) = 1; \quad \frac{dm}{dy}(0) = 0; \quad m(y_1^+) = m(y_1^-) = 0;$$

$$\frac{dm}{dy}(y_1^+) = \frac{dm}{dy}(y_1^-); \quad w(0) = w_0; \quad w(1) = 0; \quad (4.7.5)$$

$$w(y_1^+) = w(y_1^-); \quad \frac{dw}{dy}(y_1^+) = \frac{dw}{dy}(y_1^-).$$

Интегрируя уравнения (4.7.1) и (4.7.4) при граничных условиях и условиях непрерывности (4.7.5), получаем:

для интервала $0 \leq y \leq y_1 -$

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dy} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \mu u(z); \quad y = \frac{\sqrt{6}}{\mu} I_1(z_s, z); \quad t = 0.5 + 0.5z; \\ w &= 3w_0(p - 0.5 - 0.5z_s)u(z)[I_4(0, 1) - I_2(z, 1)]; \\ z_s &\leq z \leq 1; \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

для интервала $y_1 \leq y \leq 1 -$

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dy} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \mu v(\xi); \quad y = \frac{\sqrt{6}}{\mu} [I_1(z_s, 1) + I_3(\xi, 1)]; \quad t = 0.5 + 0.5\xi; \\ w &= 3w_0(p - 0.5 - 0.5z_s)v(\xi)[I_4(0, 1) - I_4(\xi, 1)]; \\ 0 &\leq \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

В выражениях (4.7.6)-(4.7.7) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{1+m}; \quad \xi = \sqrt{1-m}; \quad z_s = \sqrt{1+m_s}; \quad a = 3(p-0.5); \\ u(z) &= [a(z^2 - z_s^2) - z^3 + z_s^3]^{1/2}; \quad v(\xi) = [a(2 - z_s^2 - \xi^2) + \xi^3 - 2 + z_s^3]^{1/2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1(z_s, z) &= \int_{z_s}^1 \frac{z dz}{u(z)} = \int_{z_s}^z \frac{z dz}{[(z - z_s)(\alpha_1 - z)(z - \alpha_2)]^{1/2}} = \\ &= 2\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2} E(\gamma_0, r) + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} F(\gamma_0, r) - 2\sqrt{\frac{(z - z_s)(\alpha_1 - z)}{z - \alpha_2}}; \end{aligned}$$

$$I_2(z, 1) = \int_z^1 \frac{z dz}{u^3(z)} = \frac{2}{(2a - 3z)u(z)} - \frac{2}{(2a - 3)u(1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{D} \left\{ \frac{u(1)}{(2a-3)} - \frac{u(z)}{(2a-3z)} - \frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{3} [E(\gamma_1, r) - E(\gamma_0, r)] + \right. \\
& + \frac{2a - 3\alpha_2}{9\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} [F(\gamma_1, r) - F(\gamma_0, r)] + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(1-z_s)(\alpha_1-1)}{(1-\alpha_2)}} - \\
& \left. - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(z-z_s)(\alpha_1-z)}{(z-\alpha_2)}} \right\};
\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}[a - z_s + \sqrt{(a - z_s)(a + 3z_s)}]; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}[a - z_s - \sqrt{(a - z_s)(a + 3z_s)}];$$

$$\gamma_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(z - z_s)(\alpha_1 - \alpha_2)}{(z - \alpha_2)(\alpha_1 - z_s)}}, \quad \gamma_1 = \arcsin \sqrt{\frac{(1 - z_s)(\alpha_1 - \alpha_2)}{(1 - \alpha_2)(\alpha_1 - z_s)}},$$

$$r = \sqrt{\frac{\alpha_1 - z_s}{\alpha_1 - \alpha_2}}; \quad D = \frac{4}{27}a^3 + z_s^3 - az_s^2;$$

$$\begin{aligned}
I_3(\xi, 1) &= \int_{\xi}^1 \frac{\xi d\xi}{v(\xi)} = \int_{\xi}^1 \frac{\xi d\xi}{[(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)]^{1/2}} = \\
&= -2\sqrt{\xi_2 - \xi_0} [E(\eta_1, k) - E(\eta_0, k)] + \frac{2\xi_2}{\sqrt{\xi_2 - \xi_0}} [F(\eta_1, k) - F(\eta_0, k)];
\end{aligned}$$

$$\eta_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \xi_0}{\xi - \xi_0}}; \quad \eta_0 = \arcsin \sqrt{\frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0}}; \quad k = \sqrt{\frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_2 - \xi_0}};$$

Следует отметить, что при выполнении условия

$$q = \frac{1}{2}(2a - az_s^2 - 2 + z_s^3) - \frac{a^3}{27} \geq 0,$$

получим

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{a}{3} - \frac{2}{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{27q}{a^3} \right); \\
\xi_1 &= \frac{a}{3} + \frac{2}{3}a \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \frac{27q}{a^3} \right); \\
\xi_2 &= \frac{a}{3} + \frac{2}{3}a \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \frac{27q}{a^3} \right).
\end{aligned}$$

Если $q \leq 0$, тогда

$$\xi_0 = \frac{a}{3} - \frac{2}{3}a \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \frac{27|q|}{a^3} \right);$$

$$\xi_1 = \frac{a}{3} - \frac{2}{3}a \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \frac{27|q|}{a^3} \right);$$

$$\xi_2 = \frac{a}{3} - \frac{2}{3}a \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{27|q|}{a^3} \right);$$

$$I_4(\xi, 1) = \int_{\xi}^1 \frac{\xi d\xi}{v^3(\xi)} = \frac{2}{v(1)(2a-3)} - \frac{2}{v(\xi)(2a-3)} -$$

$$- \frac{2}{D_1} \left\{ \frac{v(1)}{(2a-3)} - \frac{v(\xi)}{(2a-3\xi)} + \frac{(3\xi_2-2a)}{9\sqrt{\xi_2-\xi_0}} [F(\eta_1, k) - F(\eta_0, k)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\xi_2-\xi_0}}{3} [E(\eta_1, k) - E(\eta_0, k)] \right\};$$

$$D_1 = 2(a-1) - z_s^2(a-z_s) - \frac{4a^3}{27},$$

причем F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно.

Используя граничное условие $m(1) = 1$ или $\xi(1) = 0$, для определения зависимости предельной нагрузки от параметра оболочки μ из соотношений (4.7.7) получаем,

$$\mu = \sqrt{6} [I_1(z_s, 1) + I_3(0, 1)]. \quad (4.7.8)$$

Уравнение (4.7.8) содержит неизвестную величину $z_s = \sqrt{1+m_s}$, которая может быть найдена из условия $dw(0)/dy = 0$, вытекающего из закона течения (4.7.3) и симметрии задачи. Последнее условие при использовании (4.7.6) сводится к уравнению,

$$18I_5(z_s, 1) - \frac{1}{(p-1)v(1)} + 3I_4(0, 1) = 0. \quad (4.7.9).$$

Здесь

$$I_5(z_s, 1) = \int_{z_s}^1 \frac{dz}{(2a - 3z)^2 u(z)} = \frac{1}{3D} \left[\frac{u(1)}{(2a - 3)} - \frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{3} E(\gamma_1, r) + \right. \\ \left. + \frac{2a - 3\alpha_2}{9\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} F(\gamma_1, r) + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(1 - z_s)(\alpha_1 - 1)}{(1 - \alpha_2)}} \right].$$

В равенствах (4.7.8) и (4.7.9) в выражениях для η_0 и γ_1 подразумевается $\xi = 0$ и $z = z_s$, соответственно. Уравнение (4.7.9) дает зависимость p от z_s .

Решая численными методами уравнения (4.7.8) и (4.7.9), получим искомую зависимость величины предельной нагрузки p от параметра оболочки μ . Подставляя соответствующие значения μ , p , z_s в выражения (4.7.6) и (4.7.7), находим статически допустимое поле напряжений и совместное с ним, то есть связанное законом течения (4.7.3), кинематически возможное поле скоростей.

На рис. 4.37 сплошной линией нанесены графики зависимости p от μ , и m_s от p . Пунктирной линией показана зависимость p от $\mu = \sqrt{2} \omega$ [47].

Из закона течения, связанного с рассматриваемой предельной кривой (рис. 4.36) следует, что условие $dw(0)/dy = 0$ и уравнение (4.7.9) должны быть справедливыми для любых малых значений z_s на интервале $0 < z_s \leq 1$. Поэтому из (4.7.9) имеем $p \rightarrow \infty$ при $z_s \rightarrow 0$.

Таким образом, для рассматриваемой задачи при заданной предельной кривой шарнир в середине оболочки возникнуть не может. Проинтегрировав по частям уравнение (4.7.9), получим,

$$18 \int_{z_s}^1 \frac{dz}{(2a - 3z)^2 u(z)} - \frac{1}{2av(0)} - 18 \int_0^1 \frac{d\xi}{(2a - 3\xi)^2 v(\xi)} = 0, \quad (4.7.10)$$

откуда следует, что $p \rightarrow 1$ при $z_s \rightarrow 1$.

Заметим, что хотя шарнир в середине оболочки возникнуть не может, предположение о его существовании оказывает существенную помощь при оценке несущей способности оболочки. В этом случае $z_s = 0$

и, вместо системы уравнений (4.7.8)-(4.7.9), находим зависимость,

$$\mu = \sqrt{6} [I_1(0, 1) + I_3(0, 1)] = 0, \quad (4.7.11)$$

из которой для любого заданного p нетрудно вычислить μ с помощью таблицы эллиптических интегралов или по известным формулам приближенного вычисления интегралов. Такой подход был использован В.Л.Фоминим [263]. Вычисления, выполненные на ЭЦВМ, показывают, что значения предельной нагрузки, соответствующие точным уравнениям (4.7.8)-(4.7.9), превышают не более, чем на 2% значения нагрузки, полученной из (4.7.11). Приведение выражений к эллиптическим интегралам было осуществлено в предположении действительности корней подкоренных полиномов. Вычисления подтвердили правильность такого предположения.

4.7.2 Рассмотрим защемленную по краям цилиндрическую оболочку, подкрепленную часто расположенными на равных расстояниях друг от друга кольцевыми ребрами и нагруженную внутренним равномерно распределенным давлением. Поверхность текучести, которую можно построить для такой оболочки, следуя идеям работы [52], с помощью аффинного преобразования приводится к поверхности текучести для гладкой цилиндрической оболочки. Это аффинное преобразование имеет вид,

$$m^1 = m; \quad t^1 = t; \quad t_1^1 = t. \quad (4.7.12)$$

Здесь m , t , t_1 и m^1 , t^1 , t_1^1 —, соответственно, обобщенные напряжения для гладкой и подкрепленной цилиндрических оболочек; $\omega_1 = d/l_1$; $h_1 = H_1\sigma_0^1/H\sigma_0$; $2H_1$, d — высота и ширина ребер; l_1 — расстояние между ребрами; σ_0^1 — предел текучести материала ребер при растяжении.

Отмеченное свойство поверхности текучести позволяет использовать полученное в п. 4.7.1 решение для определения несущей способности защемленной по краям подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической оболочки. Предельная нагрузка p_1 для подкрепленной оболочки при фиксированном параметре оболочки μ связана с предель-

ной нагрузкой p гладкой оболочки выражением $p_1 = p + \omega_1 h_1$. Величина p_1 определена в предположении весьма частого расположения кольцевых ребер. При недостаточно частом расположении ребер может произойти разрушение оболочки в промежутке между ребрами. Заметим, что в случае местного разрушения обшивка между кольцевыми ребрами работает как защемленная по краям гладкая цилиндрическая оболочка с длиной l_1 . Тогда соответствующее этому случаю решение вытекает из формул (4.7.6)-(4.7.9) и (4.7.11) при $\mu_0 = \mu/(n+1)$, причем $\mu_0^2 = l_1^2/(2RH)$ и $n = (2l - l_1)/l_1$ — число подкрепляющих ребер.

При оптимальном расположении ребер нагрузки смешанного и местного разрушений совпадают, поэтому для определения количества подкрепляющих ребер имеем выражение $p(\mu) + \omega_1 h_1 = p[\mu/(n+1)]$, где значения $p(\mu)$ и $p[\mu/(n+1)]$ должны быть определены из графика на рис. 4.37.

Дробные значения n необходимо округлить до большего целого числа.

ГЛАВА 5. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

Оптимальное проектирование элементов конструкций вызвано насущными требованиями экономии материала и стоимости в промышленном и гражданском строительстве, машиностроении, самолетостроении, кораблестроении и возведении космических объектов. Проведены многочисленные исследования по оптимизации упругих и неупругих стержней, пластин и оболочек [264-266]. Однако, оптимальное проектирование упругопластических элементов конструкций с учетом догрузки, разгрузки и вторичных пластических деформаций практически не представлены в научной литературе, вследствие математической сложности решения таких задач. В то же время, проведенные в главе 4 исследования показывают, что для элементов конструкций, выполненных из малоупрочняющихся материалов, в окрестности нагрузки несущей способности происходит более интенсивное развитие зон пластических деформаций, чем при других ее значениях. Поскольку многие высокопрочные материалы обладают малым упрочнением, важное практическое значение приобретают методы оптимального проектирования конструкций на основе модели жесткопластического материала. Тем более, что увеличение предела прочности вновь создаваемых конструкционных материалов сопровождается сближением последнего с пределом текучести. Сближение предела прочности и предела текучести наблюдается при действии на сталь нейтронного потока, а также под влиянием температуры [179].

В результате более развитым оказалось направление определения проектов минимального объема веса или стоимости неупругих элементов конструкций, основанное на модели жесткопластического материала, особенно, в работах американских [69-74] и советских ученых [75-82]. В этих работах показано, что равнопрочные, то есть во всем объеме пластически – деформируемые, имеют меньший объем, вес и стоимость, чем упругие элементы конструкций. Развита различные методы оптимального проектирования: вариационный метод [267], метод

на основе критериев оптимальности [71,73-79], метод на основе принципа максимума [268], метод на основе допущений геометрического или физического характера [47,83].

В настоящей главе продолжены исследования последнего направления. Для этого кратко представлены основные положения теории идеальной пластичности [48,136]. Решены некоторые задачи проектирования равнопрочных балок минимального объема. Затем получены оценки, сформулирован общий для балок, стержней, пластин и оболочек критерий оптимального проектирования таких жесткопластических элементов конструкций и проиллюстрировано его применение в проектировании однородных балок, арок и балок сложного поперечного сечения минимального объема. Проанализированы возможности использования найденного критерия в случае аппроксимации условий текучести, а также для элементов конструкций из материалов с сингулярными условиями текучести. В последнем разделе рассмотрена проблема устойчивости и связь ее с оптимальным проектированием жесткопластических элементов конструкций. Для иллюстрации полученных теоретических результатов приведено решение задачи об устойчивости оптимальной однородной балки минимального объема.

5.1. Основные теоремы и следствия теории идеальной пластичности

Основными понятиями в теории идеальной пластичности являются: статически возможное поле напряжений, допустимое поле напряжений, статически допустимое поле напряжений, кинематически возможное поле скоростей перемещений, кинематически допустимое поле скоростей перемещений.

Статически возможным называется поле напряжений, удовлетворяющее дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям.

Допустимым называется поле напряжений, соответствующее какой-либо точке внутри или на границе поверхности текучести, выражаемой выбранным условием текучести.

Статически допустимым называется поле, удовлетворяющее условиям статически возможного и допустимого полей напряжений, вместе взятых.

Кинематически возможным называется поле скоростей перемещений, удовлетворяющее граничным условиям и условиям непрерывности.

Кинематически допустимым называется кинематически возможное поле скоростей перемещений, удовлетворяющее закону течения.

Совместными называются поля статически допустимых напряжений и кинематически допустимых скоростей перемещений (деформаций), связанные ассоциированным законом течения и условием текучести.

Решение задачи о предельном состоянии жесткопластического тела называется **точным**, если при заданной нагрузке найдены совместные статически допустимое поле напряжений и кинематически допустимое поле скоростей перемещений в пластических областях тела, а в жестких областях тела поле напряжений является допустимым.

Нагрузка, для которой получено точное решение задачи о предельном состоянии тела называется **предельной** или **нагрузкой несущей способности тела**. Нагрузка несущей способности – это наибольшая нагрузка, которую может выдержать жесткопластическое тело.

Статической оценкой предельной нагрузки называется нагрузка, для которой найдено статически допустимое поле напряжений.

Кинематической оценкой предельной нагрузки называется нагрузка, для которой найдено кинематически допустимое поле скоростей перемещений (деформаций) и связанное с ним ассоциированным законом течения допустимое поле напряжений.

Диссипацией мощности напряжений D_0 называется произведение $D_0 = \sigma_{ij}\epsilon_{ij}$ – где σ_{ij} – допустимое поле напряжений, а ϵ_{ij} – поле скоростей деформаций текучести.

Равнопрочным жесткопластическим называется тело, для которого при заданной предельной нагрузке статически допустимое поле

напряжений совместно с кинематически возможным полем скоростей перемещений (деформаций) и жесткие области отсутствуют.

Для доказательства основных теорем в теории идеальной пластичности часто используется постулат Друкера: мощность дополнительных напряжений на скоростях деформаций текучести неотрицательна, то есть

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\varepsilon_{ij} \geq 0. \quad (5.1.1)$$

Здесь σ_{ij} – поле напряжений, удовлетворяющее условию текучести, σ_{ij}^* – допустимое поле напряжений, ε_{ij} – скорости деформаций текучести, отвечающие напряжениям σ_{ij} .

Предположим, что внешние поверхностные нагрузки \bar{P} , действующие на тело изменяются пропорционально одному параметру p^0 , $\bar{P} = p^0 \bar{p}$, где \bar{p} – базовая нагрузка, а объемные внешние силы отсутствуют. Параметр нагрузки p_0 назовем, для краткости, нагрузкой. Допустим также, что мощность внешних нагрузок на поверхности S_v тела равна нулю. Тогда справедливы следующие теоремы и их следствия.

5.1.1. Теорема о нижней (статической) оценке предельной нагрузки (экстремальный принцип действительных напряжений).

Статическая оценка p_* предельной нагрузки p не больше предельной нагрузки жесткопластического тела, $p^0 = p_* \leq p$.

Доказательство. Воспользуемся вариационным принципом Лагранжа для статически допустимого поля напряжений σ_{ij}^* , отвечающего нагрузке p_* , и поля напряжений σ_{ij} при нагрузке p с кинематически возможным полем скоростей перемещений \bar{u} (деформаций ε_{ij}) текучести, совместным с полем напряжений σ_{ij} :

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = p_* \int_{S_p} \bar{p} \bar{u} dS; \quad (5.1.2)$$

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = p \int_{S_p} \bar{p} \bar{u} dS. \quad (5.1.3)$$

Здесь S_p – поверхность тела, на которой приложена нагрузка $p^0 \bar{p}$.

Вычитая равенство (5.1.2) из равенства (5.1.3), получим

$$\int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij} dV = (p - p_*) \int_{S_p} \bar{p} \bar{u} dS. \quad (5.1.4)$$

На основании постулата Друкера (5.1.1) левая часть равенства (5.1.4) неотрицательна, поэтому

$$(p - p_*) \int_{S_p} \bar{p} \bar{u} dS \geq 0. \quad (5.1.5)$$

Интеграл в левой части неравенства (5.1.5), как мощность внешних сил, всегда положителен, следовательно,

$$p_* \leq p. \quad (5.1.6)$$

Неравенство (5.1.5) выражает известный экстремальный принцип действительных (предельных) напряжений: мощность внешних поверхностных сил достигает наибольшего значения для действительного поля напряжений.

5.1.2. Теорема о верхней (кинематической) оценке предельной нагрузки (экстремальный принцип действительных скоростей перемещений).

Кинематическая оценка p_0 предельной нагрузки p не меньше предельной нагрузки жесткопластического тела, $p^0 = p_0 \geq p$.

Доказательство. Воспользуемся уравнением, выражающим равенство мощности N внешней нагрузки на некотором кинематически допустимом поле скоростей перемещений \bar{u}^0 (скоростей деформаций ε_{ij}^0) и мощности диссипации напряжений σ_{ij}^0 , определенных по этому же полю с помощью ассоциированного закона течения:

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dV = p_0 \int_{S_p} \bar{p} \bar{u}^0 dS. \quad (5.1.7)$$

Используем также вариационное уравнение Лагранжа для действительных (предельных) напряжений σ_{ij} с полями \bar{u}^0 и ε_{ij}^0 :

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^0 dV = p \int_{S_p} \bar{p} \bar{u}^0 dS, \quad (5.1.8)$$

Вычитая из равенства (5.1.7) равенство (5.1.8), получим

$$\int_V (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \varepsilon_{ij}^0 dV = (p_0 - p) \int_{S_p} \bar{p} \bar{u}^0 dS. \quad (5.1.9)$$

Так как левая часть равенства (5.1.9), на основании постулата Друкера (5.1.1), (напряжения σ_{ij}^0 удовлетворяют условию текучести и совместны с полем скоростей деформаций ε_{ij}^0), неотрицательна, то

$$(p_0 - p) \int_{S_p} \bar{p} \bar{u}^0 dS \geq 0. \quad (5.1.10)$$

Отсюда, вследствие положительности интеграла, находим

$$p \leq p_0. \quad (5.1.11)$$

Равенство (5.1.7) служит для определения кинематической оценки предельной нагрузки, а вместе с равенством (5.1.11) выражает экстремальный принцип действительных скоростей перемещений [48,127].

Из теорем (5.1.1) и (5.1.2) вытекают следствия.

Следствие 5.1.1. Добавление (удаление) материала не уменьшает (не увеличивает) предельную нагрузку.

Следствие 5.1.2. Увеличение (уменьшение) предела текучести в некоторых частях тела не уменьшает (не увеличивает) предельную нагрузку.

Следствие 5.1.3. Предельная нагрузка для описанного (вписанного) условия текучести не меньше (не больше) предельной нагрузки для вписанного (описанного) условия текучести.

Следствие 5.1.4. Тело может выдержать внешние нагрузки, если для всех кинематически допустимых полей скоростей перемещений мощность внешних сил меньше мощности диссипации D напряжений, совместных с теми же кинематически допустимыми полями скоростей перемещений (деформаций).

Утверждение следует из равенства (5.1.7) и неравенства (5.1.11), так как

$$D = \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dV = p_0 \int_{S_p} \bar{p} \bar{u}^0 dS > p^0 \int_{S_p} \bar{p} \bar{u}^0 dS = N$$

для всех $p^0 < p_0$.

Следствие 5.1.5. Тело может выдержать внешние нагрузки, если для всех статически допустимых полей напряжений мощность диссипации D на действительных скоростях деформаций меньше мощности внешних нагрузок N на действительных скоростях перемещений.

Утверждение следует из равенства (5.1.2) и неравенства (5.1.6), так как

$$D = \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = p_* \int_{\dot{S}_p} \bar{p} \bar{u} dS < p^0 \int_{\dot{S}_p} \bar{p} \bar{u} dS = N$$

для всех $p^0 > p_*$.

Теоремы (5.1.1) и (5.1.2) доказаны без учета массовых сил и разрывов скоростей перемещений. Доказательства этих теорем и следствий (5.1.1)–(5.1.3) в общем виде содержатся в работах [48,136,127]. Следствие (5.1.4) сформулировано в работе [136], без указания связи его с теоремой Шилда [74], гласящей, что тело не может выдержать внешние нагрузки, если мощность внешних сил больше мощности диссипации напряжений при найденном кинематически допустимом поле скоростей перемещений (деформаций). На основе последней теоремы Шилдом разработан критерий оптимального проектирования жесткопластических элементов конструкций [74].

5.2. О проектировании жесткопластических неразрезных равнопрочных и ступенчатых балок[101]

Исчерпание несущей способности жесткопластических балок постоянного сечения происходит в результате образования малых пластических зон – пластических шарниров [269]. Для более рационального использования материала возникает необходимость проектирования равнопрочных балок, полностью деформируемых пластически при потере их несущей способности.

В настоящем разделе получено решение задачи для статически неопределимой равнопрочной балки переменной толщины с учетом диссипации мощности перерезывающих сил на основе допущения, что напряжениями, вызывающими кручение и обжатие балки можно пренебречь.

Рассмотрим однородную балку прямоугольного поперечного сечения толщины $2H$, постоянной ширины b и длины l . Оси координат, x, y, z , с началом на левом конце балки расположим в ее плоскостях симметрии, ось z направим вниз. Количество опор и поперечное нагружение произвольны. Пренебрегая влиянием на несущую способность всех сил и моментов, кроме изгибающего момента M и пререзывающей силы Q , воспользуемся приближенным, с запасом прочности до 9%, условием текучести [96]:

$$F \equiv Q_m + Q_n - 1 = 0. \quad (5.2.1)$$

Здесь

$$Q_m = m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2; \quad Q_n = 3n_{xz}^2; \quad m_x = m/h^2; \\ m_y = 0; \quad m = -M/(\sigma_0 b^3); \quad n = -Q/(2\sigma_0 b^2); \quad h = H/b.$$

Из условия (5.2.1) следует, что под действием поперечных сил пластическое состояние балки постоянной толщины возможно только в одном или нескольких локальных сечениях.

Определим переменную толщину балки так, чтобы в каждом ее сечении имело место пластическое состояние. Из уравнения (5.2.1) получим

$$h = \sqrt{\frac{3}{2}n^2 + \sqrt{\frac{9}{4}n^4 + m^2}}. \quad (5.2.2)$$

Изгибающий момент и пререзывающая сила статически неопределимой балки зависит от неизвестных реакций опор. Чтобы их определить, воспользуемся кинематическими соотношениями [97]. Примем линейную гипотезу для скоростей перемещений, u_x , u_y , а скорость прогиба предположим неизменной по толщине:

$$u_x = a_x(x, y) z; \quad u_y = a_y(x, y) z; \quad u_z = W. \quad (5.2.3)$$

Скорости деформаций, согласно гипотезе (5.2.3), найдем из выражений:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = k_x z; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = k_y z; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = k_{xy} z;$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(a_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right); \quad k_x = 2\kappa_x/H = \frac{\partial a_x}{\partial x}; \quad (5.2.4)$$

$$k_y = 2\kappa_y/H = \frac{\partial a_y}{\partial y}; \quad k_{xy} = 2\kappa_{xy}/H = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

Здесь κ_x , κ_y , κ_{xy} , ε_{xz} — обобщенные скорости деформаций [96].

Из ассоциированного закона течения следует:

$$\kappa_x = \lambda \frac{\partial F}{\partial m_x} = 2\lambda m_x; \quad \kappa_y = \lambda \frac{\partial F}{\partial m_y} = -\lambda m_x; \quad \kappa_{xy} = \lambda \frac{\partial F}{\partial m_{xy}} = 0;$$

$$\varepsilon_{xz} = \lambda \frac{\partial F}{\partial n_{xz}} = 6\lambda n_{xz}; \quad \lambda > 0. \quad (5.2.5)$$

Подставляя выражения (5.2.4) для обобщенных скоростей деформаций в соотношения (5.2.5) получим:

$$\frac{H}{2} \frac{\partial a_x}{\partial x} = 2\lambda m_x; \quad \frac{H}{2} \frac{\partial a_y}{\partial y} = -\lambda m_x; \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0;$$

$$a_x + \frac{\partial W}{\partial x} = 12\lambda n_{xz}. \quad (5.2.6)$$

Исключая m_x во втором и параметр λ в четвертом, с помощью первого из уравнений (5.2.6) найдем:

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial a_y}{\partial y} = 0; \quad a_x + \frac{\partial W}{\partial x} = 3 \frac{H n_{xz}}{m_x} \frac{\partial a_x}{\partial x}. \quad (5.2.7)$$

После исключения a_y в третьем уравнении (5.2.6), посредством первого уравнения (5.2.7), запишем преобразованную систему дифференциальных уравнений (5.2.6) в безразмерных величинах:

$$h\mu \frac{\partial a_x}{\partial \xi} = 4\lambda m_x; \quad \frac{\partial^2 a_x}{\partial \xi^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 a_x}{\partial \eta^2} = 0;$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial \xi} + \frac{2}{\mu} \frac{\partial a_y}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{3\mu h n_{xz}}{m_x} \frac{\partial a_x}{\partial \xi} - a_x \right), \quad (5.2.8)$$

где $\xi = x/l$, $\eta = y/b$, $\mu = b/l$, $w = W/b$, $\alpha^2 = 2\mu^2$.

Частное решение второго уравнения (5.2.8) имеет вид:

$$a_x = (A \sin k\xi + B \cos k\xi) \left(A_1 \sin \frac{k\eta}{\alpha} + B_1 \cos \frac{k\eta}{\alpha} \right) + C_1 \xi + C_2 \eta + C_3, \quad (5.2.9)$$

где $A, B, A_1, B_1, C_1, C_2, C_3$ – константы интегрирования; величина k пока неизвестна и подлежит определению в ходе решения.

Вследствие симметрии $\partial a_x(\xi, \eta)/\partial \eta = 0$, то есть

$$\frac{k}{\alpha} (A \sin k\xi + B \cos k\xi) A_1 + C_2 = 0. \quad (5.2.10)$$

Так как равенство (5.2.10) справедливо при любых ξ , то

$$A_1 = 0, \quad C_2 = 0. \quad (5.2.10')$$

В первом уравнении (5.2.8) знаки и нули изгибающего момента и производной $\partial a_x/\partial \xi$ совпадают. Пусть ξ_m и ξ_{m+1} – соседние нули эпюры моментов, тогда

$$k(A \cos k\xi_m - B \sin k\xi_m) \cos \frac{k\eta}{\alpha} + C_1 = 0,$$

$$k(A \cos k\xi_{m+1} - B \sin k\xi_{m+1}) \cos \frac{k\eta}{\alpha} + C_1 = 0. \quad (5.2.11)$$

Равенства (5.2.11) при любом η возможны, если $A = B = C_1 = 0$, что ведет к решению $a_x = \text{const}$, не позволяющем решить поставленную задачу. Единственное решение, не равное постоянной, найдем за счет выбора величины k , которая будет различной на каждом интервале между соседними нулями момента,

$$k_r = \frac{\pi}{\xi_{r+1} - \xi_r}, \quad r = 1, 2, 3, \dots, s-1, \quad (5.2.12)$$

где s – число нулей эпюры момента.

В результате $C_1 = 0$ и общее решение второго из уравнений (5.2.8) принимает вид:

$$a_{xr} = B_r \cos k_r(\xi - \xi_r) + C_{3r}, \quad (5.2.13)$$

где

$$B_r = A_r \cos \frac{k_r \eta}{\alpha}; \quad \xi_r \leq \xi \leq \xi_{r+1}.$$

Из решения (5.2.13) следует, что в нулях эпюры момента возможно у балки образование шейки, допустимое, например, в теории плоского напряженного состояния [48].

Рассматривая далее изгибание оси балки, полагаем $\eta = 0$, $B_r = A_r$ и в последнем уравнении (5.2.8) под частными производными подразумеваем обыкновенные. Если левый конец балки жестко заделан, то первое уравнение (5.2.11) заменим уравнением $a_x(0) = 0$, выражающем условие заделки и получим решение

$$a_{x0} = A_0 \cos k_0(\xi - \xi_1); \quad k_0 = \pi/(2\xi_1); \quad (0 \leq \xi \leq \xi_1). \quad (5.2.13')$$

Для интервала от последнего нуля момента до заделанного правого конца балки найдем

$$a_{xs} = A_s \cos k_s(\xi - \xi_s); \quad k_s = \frac{\pi}{2(1 - \xi_s)}; \quad (\xi_s \leq \xi \leq 1). \quad (5.2.13'')$$

Решение (5.2.13) содержит две произвольные постоянные на каждом интервале $\xi_s \leq \xi \leq \xi_{r+1}$ и $2(s-1)$ по всей длине балки со свободными или шарнирно опертыми краями; в случае жесткой заделки концов добавляются две константы.

Так как в теории идеальной пластичности скорости перемещений определены с точностью до произвольного положительного множителя, то первую постоянную A_1 или A_0 зададим произвольно, но с соблюдением знаков в первом уравнении (5.2.8). Условия непрерывности скоростей смещений и скоростей деформаций в нулях момента означают:

$$w(\xi_r^+) = w(\xi_r^-); \quad a_{xr}(\xi_r^+) = a_{xr}(\xi_r^-); \quad \frac{dw}{d\xi}(\xi_r^+) = \frac{dw}{d\xi}(\xi_r^-). \quad (5.2.14)$$

Последнее условие (5.2.14) правомерно, если изгибающий момент и перерезывающая сила непрерывны в нулях момента. В противном случае необходимо заменить сосредоточенные силы и моменты, приложенные к балке, статически эквивалентными системами непрерывно распределенных сил и моментов в окрестностях нулей.

Первое слагаемое в последнем из уравнений (5.2.8) имеет в нулях моментов неопределенность $0/0$, раскрывая которую, с учетом уравнения равновесия балки $M' = Q$, получим

$$\frac{dw}{d\xi}(\xi_r) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{3}{2} \mu^2 h^2 \frac{d^2 a_{xr}}{d\xi^2} - a_{xr} \right). \quad (5.2.15)$$

Отсюда, вследствие непрерывности a_{xr} , h , $dw/d\xi$, найдем

$$\frac{d^2 a_{xr+1}}{d\xi^2}(\xi_{r+1}^+) = \frac{d^2 a_{xr}}{d\xi^2}(\xi_{r+1}^-). \quad (5.2.16)$$

Воспользуемся взамен последнего условия (5.2.14) равенством (5.2.16), из которого вместе со вторым условием (5.2.14) следуют соотношения:

$$A_{r+1} = -A_r \frac{k_r^2}{k_{r+1}^2}; \quad C_{3r+1} = C_{3r} - A_r - A_{r+1}. \quad (5.2.17)$$

Равенства (5.2.17) позволяют определить все постоянные, кроме одной C_{31} при шарнирном опирании или со свободными концами. На крайних опорах имеем следующие граничные условия:

$$w(0) = 0; \quad w(1) = 0. \quad (5.2.18)$$

Интегрируя последнее из уравнений (5.2.8) с учетом решения (5.2.13), соотношений (5.2.17), граничных условий (5.2.18) и первого условия непрерывности (5.2.14), получим выражение для скорости прогиба на каждом интервале между нулями $\xi_r \leq \xi \leq \xi_{r+1}$, ($r = i, i+1, i+2, \dots, j$):

$$w = w(\xi_r) + \frac{1}{\mu} \int_{\xi_r}^{\xi} \left(\frac{3h\mu n_{xz}}{m_x} \frac{da_{xr}}{d\xi} - a_{xr} \right) d\xi. \quad (5.2.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w(\xi_i) &= 0; \quad \xi_i = 0; \quad C_{3r} = C_{3i} + D_r; \\ D_r &= D_{r-1} - A_{r-1} - A_r; \quad D_i = 0; \quad C_{30} = 0; \\ C_{31} &= 3\mu \sum_{r=i}^j \int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}} \frac{hn_{xz}}{m_x} \frac{da_{xr}}{d\xi} d\xi - \sum_{r=i+1}^j D_r (\xi_{r+1} - \xi_r). \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы определим по известным правилам в теории балок [269]. Если концы балки шарнирно оперты или свободны, то в равенствах (5.2.20) следует принять $i = 1$, $j = s - 1$, $\xi_s = 1$; если зашкелены, то $i = 0$, $j = s$, $\xi_{s+1} = 1$, и последнее из равенств (5.2.20) не является необходимым. Возникающие неопределенности под интегралами в нулях момента при интегрировании численными методами раскроем, согласно выражению (5.2.15). Полагая в лшних опорах статически неопределимой балки скорость прогиба равной нулю, ($w = 0$), из равенств (5.2.19) методом итераций определим реакции. По найденным реакциям и заданным нагрузкам определим изгибающий момент и перерезывающую силу, а из выражения (5.2.2) — переменную толщину равнопрочной балки.

В качестве примера рассмотрим однажды статически неопределимую балку, нагруженную двумя равными сосредоточенными силами P , как показано на рис. 5.1а. Определив изгибающий момент и перерезывающую силу, для величин m и n получим выражения:

$$m = -\frac{2}{\mu} \left[r_A \xi + p \varphi_1 \left(\xi - \frac{1}{4} \right) - r_C \varphi_1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right) + p \varphi_1 \left(\xi - \frac{2}{3} \right) \right];$$

$$n = -r_A - p \varphi_0 \left(\xi - \frac{1}{4} \right) + r_C \varphi_0 \left(\xi - \frac{1}{2} \right) - p \varphi_0 \left(\xi - \frac{2}{3} \right);$$

$$r_A = \frac{13p}{12} + \frac{r_C}{2}.$$

Здесь

$$p = \frac{P}{N_0}, \quad r_A = \frac{R_A}{N_0}, \quad r_C = \frac{R_C}{N_0}, \quad N_0 = 2\sigma_0 b^2,$$

причем P — модули приложенных сил, R_A и R_C — реакции опор, $p = 0.62 \cdot 10^{-2}$, $\mu = 0.02$.

Эпюры безразмерных перерезывающей силы ($-n$) и изгибающего момента ($-m$), а также зависимости безразмерных толщины h и скорости прогиба w , определенной с точностью до произвольного положительного множителя, от координаты по длине равнопрочной балки приведены на рис. 5.1а, реакция средней опоры равна $1.69p$.

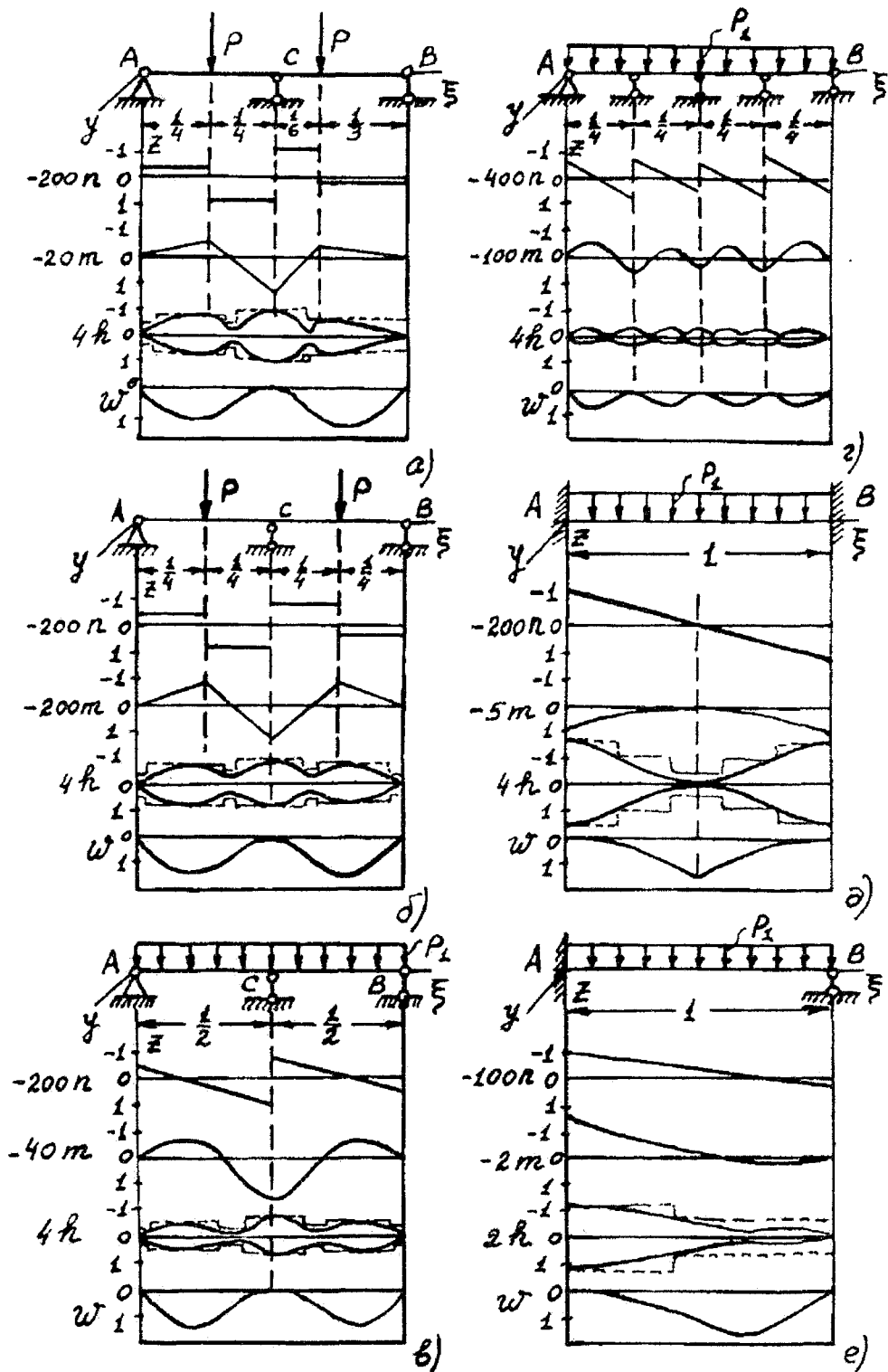


Рис. 5.1.

Из полученного решения следует, что толщина равнопрочной балки зависит, главным образом, от модуля изгибающего момента, в нулях которого она очень мала. Толщина балки постоянного сечения, определенная по схеме с пластическими шарнирами ($r_C = 1.6p$), меньше максимальной толщины равнопрочной балки в окрестности средней опоры на 27%. Проект ступенчатой балки с несущей способностью не меньшей, чем для равнопрочной, получим воспользовавшись правилом, что добавление материала не уменьшает предельную нагрузку (следствие 5.1.1). Для ступенчатой балки, показанной на рис. 5.1а штриховыми линиями, экономия материала составляет 16% по сравнению с балкой постоянной толщины при одинаковой несущей способности, определенной по шарнирно – пластическим схемам.

В проектировании экономичной по расходу материала ступенчатой балки кинематически и статически допустимы многочисленные варианты шарнирно – пластических механизмов разрушения, в том числе со многими степенями свободы. Для показанной на рис. 5.1а штриховыми линиями ступенчатой балки имеет место механизм разрушения с тремя пластическими шарнирами, где модуль изгибающего момента принимает наибольшие значения.

Таким образом предварительный расчет статически неопределимой равнопрочной жесткопластической балки может служить критерием для выбора рационального проекта ступенчатой балки.

На рис. 5.1а – 5.1е приведены результаты расчета для различных нагрузжений и опораний балки. Интенсивность P_1 равномерной нагрузки выбрана так, что ее равнодействующая равна сумме модулей приложенных в первых двух примерах (рис. 5.1а – 5.1б) сосредоточенных сил, то есть $P_1 = 2P/l$. Эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил показывают, что в случаях, 5.1а, 5.1б, 5.1е, равнопрочные балки близки к статически определимым балкам, так как концы их меньше нагружены, чем средние части. В середине жестко заделанной по концам равнопрочной балки (рис. 5.1д) реализуется ненапряженное состояние, означающее, что эту балку можно рассматривать как совокупность двух статически определимых балок, касающихся концами. В процессе вычислений для такой балки образуется малая область, в

которой непрерывны скорость прогиба и его производная.

Увеличение числа связей приводит к уменьшению объема равнопрочной балки. Так объем равнопрочной балки на пяти опорах (рис. 5г) меньше объема балки на трех опорах (рис. 5.1в) в 2.2 раза. Для балки на пяти опорах нет тенденции перехода к статически определимой балке. Можно представить себе равномерно и симметрично нагруженную, как на рис. 5.1г балку со множеством равноотстоящих опор, в которой некрайние пролеты находятся в одинаково напряженном состоянии. Увеличение степени статической неопределимости влечет вычислительные трудности, связанные с плохой сходимостью итераций при определении реакций опор. Для определения реакций лишних связей балки на пяти опорах запрограммирована минимизация суммы квадратов скоростей прогибов над этими лишними опорами. Начальное приближение находилось методом проб. Затем стягивание области проводилось перебором значений неизвестных реакций пошаговым методом.

5.3. О проектировании и оптимизация жесткопластических равнопрочных тонкостенных элементов конструкций[105]

Как показано в разделе 2.5, задача о предельном равновесии жесткопластической оболочки заданной постоянной толщины состоит в решении двадцати уравнений, из которых только два не являются дифференциальными, с двадцатью неизвестными и шестью статическими граничными условиями на каждом из краев. В этой постановке задачи в оболочке возможны жесткие зоны. Следовательно, такая оболочка не является равнопрочной, по определению полностью, во всем объеме деформируемой пластически в предельном состоянии с кинематически и статически допустимыми совместными полями скоростей перемещений и обобщенных усилий и моментов.

Проект равнопрочной оболочки возможно получить, принимая некоторые допущения. Так в предыдущем разделе найден проект равнопрочной балки в предположении, что ее можно считать узкой пластинкой постоянной ширины с двумя плоскостями симметрии и, что в ней можно пренебречь всеми обобщенными усилиями и моментами,

кроме соответствующих изгибающему моменту и перерезывающей силе, но учесть производные по пренебрегаемым усилиям и моментам. В общем случае имеется принципиальная возможность приближенного проектирования равнопрочной оболочки в результате пренебрежения каким-либо одним обобщенным усилием или моментом и включением толщины оболочки в число неизвестных. Причем такое пренебрежение может быть правомерным с классической точки зрения. Например, пренебрежение мощностью перерезывающих сил позволяет найти проект равнопрочной оболочки вращения [47-53,83].

В связи с возможностью постановки, существования и единственности решения задачи проектирования равнопрочной оболочки на основе достаточно негрубых и обоснованных допущений следует ожидать, что такие проекты близки к оптимальным, полученным методами оптимального проектирования. Следует отметить, однако, что обоснование подходящих допущений является затруднительной задачей.

Для проектирования равнопрочной оболочки без каких-либо допущений на усилия и моменты (а возможно и на геометрические характеристики) необходимы дополнительные к двадцати уравнениям соотношения. Целесообразно выбирать эти соотношения так, чтобы одновременно решить задачу оптимизации равнопрочной оболочки, то есть тем самым допустить, что не всякая равнопрочная оболочка является оптимальной. В проектировании оболочки минимального объема (веса) — это или функционал вариационной задачи на условный экстремум этого функционала, зависящего от нескольких функций [267], или уравнения, выражающие принцип максимума в теории оптимального управления [268,271], или критерий оптимального проектирования [270,73,76].

Широкое распространение получил метод, основанный на применении критериев оптимального проектирования, выражающих свойства диссипативной функции [270,73,76]. Наиболее общий критерий оптимального проектирования состоит в том, что частная производная от диссипативной функции D_1 оболочки по ее толщине $2H$ постоянна, то

есть

$$\frac{\partial D_1}{\partial H} = A_1, \quad (5.3.1)$$

причем A_1 – произвольная неотрицательная постоянная. Выражение для функции D_1 имеет вид:

$$D_1 = \int_{-H}^H \sigma_{ij} e_{ij} dz = 2\sigma_0 H (m_{ij} \kappa_{ij} + n_{ij} \varepsilon_{ij}), \quad (5.3.2)$$

где σ_0 – предел текучести, σ_{ij} – напряжения, e_{ij} – скорости деформаций, n_{ij} и m_{ij} – обобщенные безразмерные усилия и моменты, ε_{ij} и κ_{ij} – обобщенные скорости деформаций, определяемые согласно ассоциированному с условием текучести $F = 0$ закону течения [99].

В работе [73] доказано, что для объема оболочки критерий (5.3.1) доставляет относительный минимум. Доказательство основано на следствии (5.1.4), которое запишем в виде:

$$\int_S \left(D_1^0 + \delta H \frac{\partial D_1}{\partial H} \right) dS \geq N^0,$$

где D_1^0 и N^0 – диссипация мощности напряжений и мощность кинематической оценки внешней нагрузки, связанные равенством (5.1.7), совпадающим в предельном состоянии с вариационным уравнением Лагранжа,

$$\int_S D_1^0 dS = N^0.$$

Разность предыдущего и последнего равенства:

$$\int_S \delta H \frac{\partial D_1}{\partial H} dS \geq 0.$$

Отсюда следует критерий (5.3.1). В действительности изменение толщины приводит к изменениям полей скоростей деформаций и обобщенных усилий и моментов. Поэтому в приведенном доказательстве Шилда следовало бы учесть градиенты этих полей. Кроме того, критерий (5.3.1) допускает очевидный интеграл:

$$D_1 = A_1 H + A_2, \quad (5.3.3)$$

где A_2 – произвольная возможная функция обобщенных скоростей деформаций и обобщенных усилий и моментов.

В действительности производная диссипации мощности D_1 по толщине оболочки, в общем случае, не содержит линейного слагаемого и имеет, как нетрудно убедиться, следующее выражение,

$$\frac{\partial D_1}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \int_{-H}^H D_0 dz = D_0(H) + D_0(-H).$$

Далее в настоящем разделе проведем анализ применения равенства (5.3.3), как критерия оптимального проектирования однородной балки.

Примем в равенстве (5.3.3) величину A_2 постоянной, тем самым допуская еще одно ограничение на аргументы диссипативной функции D_1 , кроме толщины оболочки. Постоянная A_2 не может быть отрицательной, так как при $A_1 = 0$ и любом H мощность рассеяния энергии должна быть положительной.

Для однородного условия текучести второго порядка, согласно равенству (5.3.2) и закону течения

$$D_1 = 4\sigma_0 H \lambda, \quad (5.3.4)$$

откуда, с учетом равенства (5.3.3), получим

$$\lambda = \frac{1}{4\sigma_0} \left(A_1 + \frac{A_2}{H} \right). \quad (5.3.5)$$

Таким образом, критерий (5.3.1) с однородным условием текучести накладывает ограничение на положительный множитель λ в законе течения так, что он зависит от двух произвольных положительных постоянных. Так как для жесткопластического тела этот множитель λ определен, в свою очередь, с точностью до произвольного положительного постоянного множителя, то постоянную A_2 можно принять равной единице, $A_2 = 1$, или другой фиксированной неотрицательной постоянной.

Из равенств (5.3.4) и (5.3.5) при $A_1 \neq 0$ и $A_2 = 0$ следует критерий постоянства отношения диссипативной функции к толщине оболочки

[270]. Если $A_1 = 0$ и $A_2 \neq 0$, то диссипативная функция D_1 постоянна по срединной поверхности оболочки. Для безмоментных оболочек, как известно [270], применяется критерий постоянной удельной объемной мощности, $D_v = \sigma_{ij} e_{ij}$, по всему объему. При изгибе критерий постоянства удельной поверхностной мощности D_1 является частным случаем критерия (5.3.1), в доказательстве которого [73] допустимо не только $D_1 = \text{const}$, но и $D_1 = A_0 H^n$, где A_0 соответствующий размерный произвольный положительный коэффициент, $n \geq 1$. В случае $A_1 \neq 0$ и $A_2 \neq 0$ изменением A_1 при фиксированном A_2 можно достичь наименьшего относительного минимума или абсолютного минимума объема.

Рассмотрим статически неопределимую балку раздела 5.2 с теми же допущениями, обозначениями, условием текучести и зависимостью толщины от обобщенных перерезывающей силы и момента,

$$F \equiv m_x^2 + 3n_{xz}^2 - 1 = 0, \quad (5.3.6)$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{2}n^2 + \sqrt{\frac{9}{4}n^4 + m^2}}. \quad (5.3.7)$$

Для определения неизвестных реакций связей, входящих в равенство (5.3.7), воспользуемся кинематическими соотношениями (5.2.6) без учета скоростей деформаций в поперечном направлении:

$$h\mu \frac{da_x}{d\xi} = 4\lambda m_x; \quad \mu \frac{dw}{d\xi} = 12\lambda n_{xz} - a_x. \quad (5.3.8)$$

После интегрирования уравнений (5.3.8) с учетом равенства (5.3.5) получим:

$$\begin{aligned} a_x &= D_{11}\mu \int_{\xi_0}^{\xi} \varphi(\xi) d\xi + C_1, \quad (D_{11} = 0.001); \\ w &= D_{11} \left\{ \int_{\xi_0}^{\xi} \left[\psi(\xi) - \int_{\xi_0}^{\xi} \varphi(\xi) d\xi \right] \right\} - C_1(\xi - \xi_0) + C_2; \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

где

$$\varphi(\xi) = mf(h)/h^4, \quad \psi(\xi) = 3\mu n f(h)/h^2, \quad f(h) = A_1 h + A_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 , а также неизвестные реакции связей статически неопределимой балки определим из условий: $w(\xi_i) = 0$ (шарнирное опирание или жесткая заделка); $a_x(\xi_i) = 0$ (жесткая заделка), ξ_i – координата связи, $i = 1, 2, 3, \dots$.

По известным реакциям связей и заданным нагрузкам определим изгибающий момент и перерезывающую силу, а также, с учетом равенства (5.3.7) минимальный объем V балки, согласно выражению,

$$V = 2b^2lv, \quad v = \int_0^1 h d\xi. \quad (5.3.10)$$

В качестве примера рассмотрим один раз статически неопределимую шарнирно опертую по концам балку, нагруженную двумя равными сосредоточенными силами величиной P каждая, как показано на рис. 5.2 (такая балка рассмотрена в первом примере раздела 5.2). Полагаем $P/N_0 = 0.62 \cdot 10^{-2}$, $\mu = 0.02$, $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$.

Зависимость скорости прогиба в середине балки от реакции в средней опоре, $w_C(r_C)$, приведена на рис. 5.3 кривой 1. Следовательно, когда $r_C = 1.83(3)$, то происходит скачкообразное изменение скорости прогиба с изменением ее знака. При этом реакция правой крайней опоры равна нулю и на участке балки $2/3 \leq \xi \leq 1$ изгибающий момент и перерезывающая сила, а также, согласно равенству (5.3.7), толщина $2h$ балки равна нулю, интегралы в выражениях (5.3.9) становятся расходящимися и система уравнений (5.3.8) в этом случае имеет вырожденное решение. Такое решение для скорости прогиба балки минимального объема нетрудно получить, пренебрегая участком $2/3 \leq \xi \leq 1$. Зависимость $w(\xi)$ для балки минимального объема приведена кривой 1, в случае $r_C = 1.833$ – кривой 2 и при $r_C = 1.834$ – кривой 3, а также зависимость $h(\xi)$ – кривыми 4 на рис. 5.2. Зависимость объема балки от реакции средней опоры $v(r_C)$ показана кривой 2 на рис. 5.3. Из полученного решения следует, что объем оптимальной балки, $v = 0.112$, меньше объема равнопрочной балки, определенного в разделе 5.2 [101] на 12%.

В качестве другого примера рассмотрим ту же балку, но нагруженную симметрично теми же по модулю силами с тем же критерием оптимальности, как в первом примере, рис. 5.4. Зависимость скорости

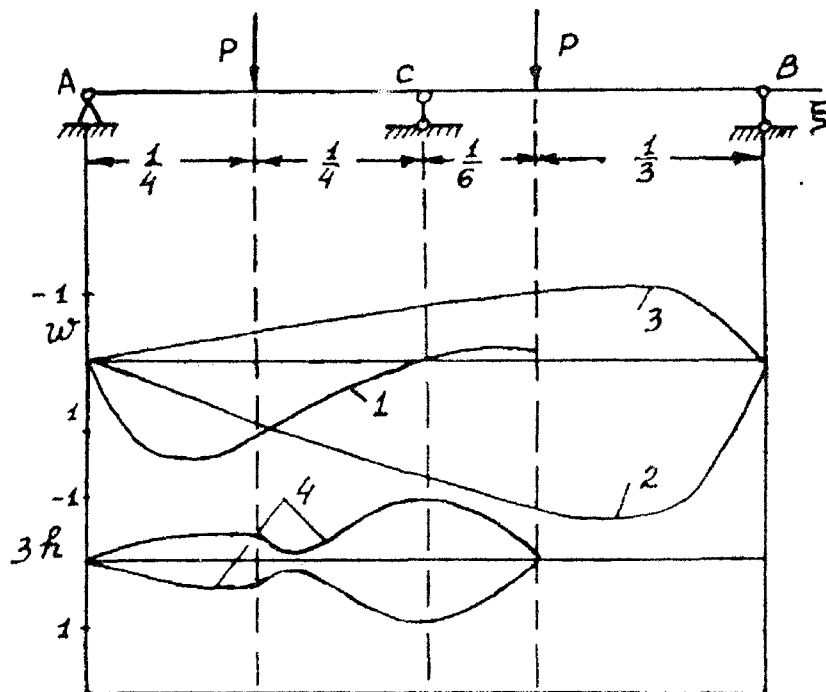


Рис. 5.2.

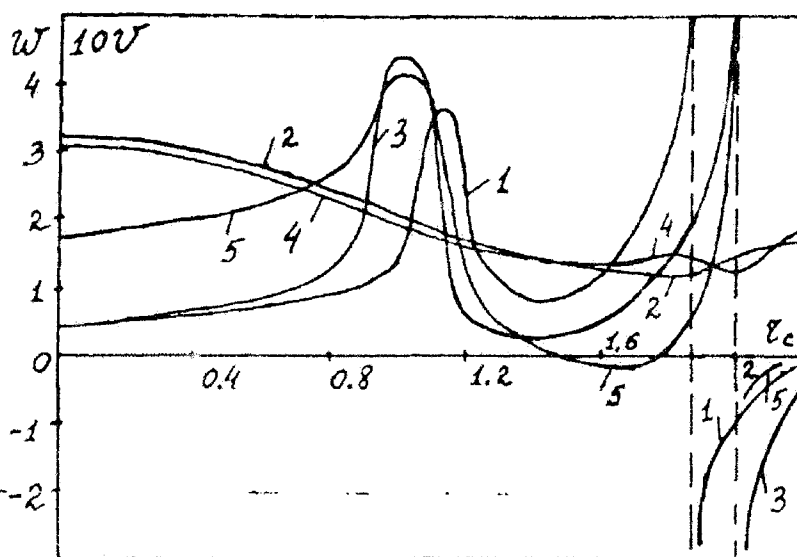


Рис. 5.3.

прогиба в середине балки от реакции средней опоры $w(r_C)$ приведена на рис. 5.3 кривой 3. Откуда следует, что при $r_C = 2$ имеет место скачкообразное изменение скорости прогиба с изменением ее знака, реакции крайних опор равны нулю, на участках балки $0 \leq \xi \leq 0.25$ и $0.75 \leq \xi \leq 1$ изгибающий момент и перерезывающая сила, а также толщина h равны нулю, интегралы в выражениях (5.3.9) расходятся и система уравнений (5.3.8) имеет вырожденное решение. Это решение для скорости прогиба балки минимального объема получим, пренебрегая участками $0 \leq \xi \leq 0.25$ и $0.75 \leq \xi \leq 1$. Зависимость $w(\xi)$ для симметрично нагруженной двумя силами балки минимального объема приведена кривой 1, для этой же балки под действием заданных сил в случае $r_C = 1.99$ кривой 2 и в случае $r_C = 2.01$ – кривой 3, а также переменной толщины $h(\xi)$ – кривыми 4 на рис. 5.4. Зависимость объема балки от реакции средней опоры $v(r_C)$ приведена кривой 4 на рис. 5.3. Отсюда следует, что объем оптимальной симметрично нагруженной балки, $v = 0.131$, меньше объема равнопрочной балки, определенного методом, изложенным в работе [101], на 13%.

Зависимости $w(r_C)$ и $v(r_C)$, определенные, согласно критерию (5.3.5) при $A_1 = 100$, $A_2 = 1$ для симметрично нагруженной балки приведены, соответственно, на рис. 5.3, 5.4 кривыми 5. Из этих зависимостей следует, что по критерию (5.3.5) можно выявить, кроме проекта балки абсолютно минимального объема, проект балки относительного минимального объема. Однако, значение реакции средней опоры для балки относительного минимального объема не совпадает со значением этой реакции, при котором скорость прогиба над средней опорой равна нулю. Следовательно, из решения для поля скоростей можно лишь приближенно определить относительный минимум объема. Подобные зависимости имеют место и при других значениях A_1 , в том числе для $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$. Разброс по величине r_C достигает 3%. При этом ошибка в величине относительного минимума объема составляет доли процента, так как в окрестности этого значения кривая 4 на рис. 5.3 близка к прямолинейному горизонтальному отрезку. Относительный минимальный объем отличается от объема равнопрочной балки (рис. 5.16) на 2%.

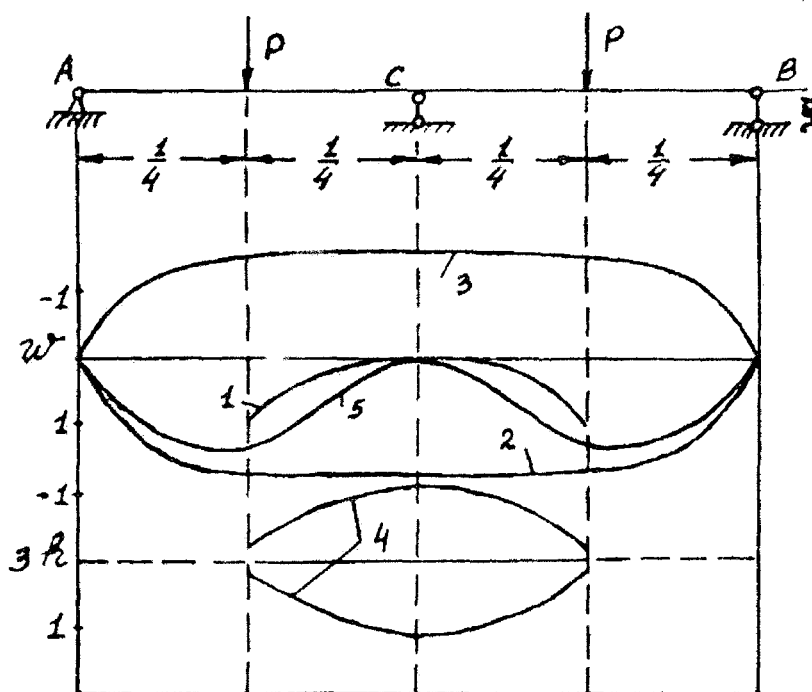


Рис. 5.4.

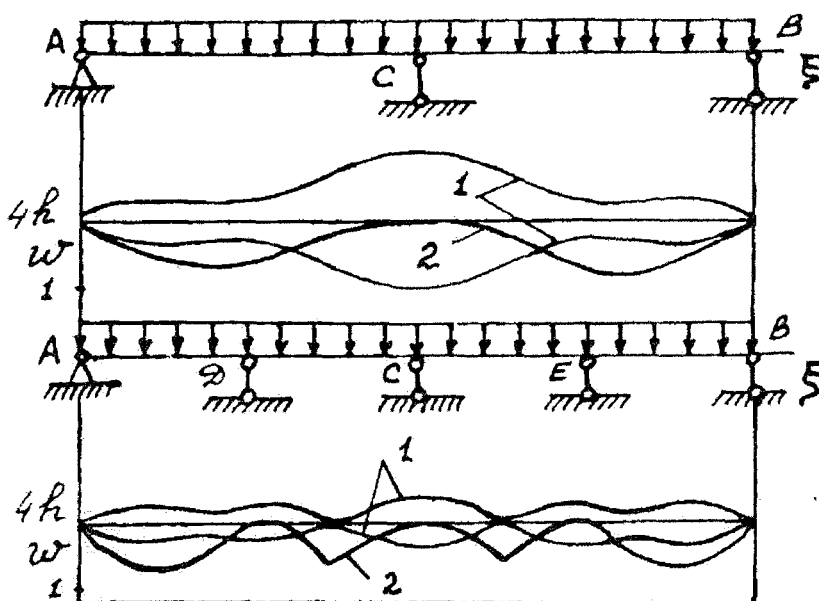


Рис. 5.5.

Для несимметрично нагруженной балки относительного минимума объема, кроме абсолютного, по критерию (5.3.5) не обнаружено, хотя поведение кривой 2 на рис. 5.3 в окрестности объема равнопрочной балки (рис. 5.1a) близко к стационарному. Отметим, что критерий постоянства отношения диссипативной функции к толщине оболочки позволяет определить и относительный максимальный объем симметрично нагруженной балки, как это следует из поведения кривых 4 и 5 при $r_C = 1.69$ на рис. 5.3. Однако, это противоречие можно объяснить, как приближенностью принятого условия текучести (5.3.6) так и несовершенством критерия оптимальности (5.3.5). При этом относительная разность экстремальных объемов незначительна (0.7%).

В третьем примере рассмотрим один раз статически неопределимую балку под действием равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью $q = 2P/l$, рис. 5.5. Минимальные значения объемов v и реакций r_C балки по различным критериям приведены в табл. 5.1.

Зависимости $h(\xi)$ и $w(\xi)$ по критерию $D_1 = h$ приведены на рис. 5.5 кривыми 1 и 2, соответственно. Из таблицы 5.1 следует, что проект рассматриваемой балки абсолютно минимального объема получен по критерию постоянства отношения диссипативной функций к толщине балки. Объем балки, полученный из статического решения (5.3.7) без построения поля скоростей, посредством минимизации интеграла (5.3.10) по неизвестным реакциям, как параметрам, назовем нижней статической оценкой объема, v_{cm} .

Таблица 5.1

D_1	1	h	h^2	h^3	h^{10}
v	0.12153	0.11567	0.11638	0.11734	0.12049
r_C	1.502	1.345	1.293	1.266	1.212

Для рассматриваемой в третьем примере балки нижняя статическая оценка объема равна $v_{cm} = 0.11564$, ($r_C = 1.34$), то есть практически совпадает с объемом оптимального проекта, $v = 0.11567$. Вырожденное решение в данном примере отсутствует.

В четвертом примере рассмотрим трижды статически неопределимую балку под действием равномерно распределенной нагрузки ин-

тенсивности q , рис. 5.5. Особенностью данной задачи с критерием (5.3.5) является наличие значений параметров – реакций, при которых интегралы в равенствах (5.3.9) становятся расходящимися, то есть имеет место вырожденное решение. Этим особым значениям параметров – реакций соответствуют сечения балки, в которых изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю. В результате трижды статически неопределимая балка расчленяется на три статически определимые балки, не связанные между собой, с границами, зависящими от одной неизвестной реакции $r_D = r_E$. Минимизируя интеграл (5.3.10) по параметру – реакции r_D , определим рациональный проект балки объема $v = 0.053873$, ($r_D = 0.591760$, $r_C = 0.461481$). Нижняя статическая оценка объема, найденная минимизацией интеграла (5.3.10) по реакциям r_C и r_D , равна $v_{cm} = 0.052170$, ($r_D = 0.598167$, $r_C = 0.442660$), которая практически не отличается от объема найденного по критерию $D_1 = h$ оптимального проекта (разница $4 \cdot 10^{-3}\%$). Других проектов, следующих из невырожденного решения (5.3.9), как по критерию (5.3.5) так и по иным критериям, указанным в таблице 5.1 не обнаружено. Отметим, что поля скоростей перемещений для статически определимых балок нетрудно получить по любому из критериев таблицы 5.1. Зависимости $h(\xi)$ и $w(\xi)$ показаны кривыми 1 и 2 на рис. 5.5.

Из приведенных решений следует, что в некоторых случаях нагружения и опирания, (примеры второй и третий), существуют разные критерии, (табл. 1), позволяющие определить оптимальные проекты балки с объемами, не различающимися между собой. По критерию постоянства диссипативной функции можно найти только абсолютный минимум объема, (примеры первый и второй). По критерию постоянства отношения диссипативной функции к толщине оболочки определяется не только абсолютный минимум объема, но и относительный, (пример второй). В ряде случаев, (первый, второй и четвертый примеры), оптимальные или рациональные проекты следуют из вырожденных решений дифференциальных уравнений. В результате такого решения статически неопределимая балка представляет собой одну статически определимую, (примеры первый и второй), или несколько не

взаимодействующих статически определимых балок, (четвертый пример). Поля скоростей прогибов в данных примерах с точностью до долей процента не зависят от перерезывающей силы в законе течения. Однако, пренебрежение перерезывающей силой в условии текучести не позволяет определить поле скоростей прогибов. Как и требуется, нижние статические оценки объемов балок в первом и втором примерах не меньше абсолютно минимальных объемов при одной и той же заданной нагрузке. В противном случае получили бы противоречие.

Действительно, если истинная предельная нагрузка балки с объемом равным нижней статической оценке равна заданной нагрузке, то такая балка сама является равнопрочной минимального объема. Если же истинная предельная нагрузка балки с объемом равным нижней статической оценке больше заданной, то удаление материала увеличивает предельную нагрузку, что противоречит экстремальному принципу действительных напряжений, (следствие 5.1.1).

Незначительные численные различия минимальных объемов в третьем и четвертом примерах по сравнению с их нижними статическими оценками происходят из-за несовершенства критериев, приближенности условий текучести и вычислений.

Таким образом, нижняя статическая оценка является абсолютным минимумом объема равнопрочной балки, если для нее существует кинематически допустимое совместное поле скоростей прогибов. В решенных примерах с помощью критериев оптимальности построены кинематически допустимые поля скоростей для равнопрочных балок с минимальными объемами достаточно близкими к нижним статическим оценкам. Последние могут служить также первыми приближениями при построении поля скоростей, экономящими машинное время. Определение же нижней статической оценки даже для балок с высокой степенью статической неопределимости не представляет затруднений и не требует больших затрат машинного времени.

Некоторые сечения или даже участки балки абсолютно минимального объема могут быть нулевой толщины.

Объем равнопрочной балки, определенный на основе допущений [101] незначительно превышает объем оптимальной балки.

Проектирование оптимальных балок приводит к ограничениям на возможные пути нагружения. Поверхность предельных нагрузок, ограничивающая возможные пути нагружения балки нетрудно получить варьированием нагрузок при условии, чтобы толщина соответствующей оптимальной равнопрочной балки не превышала проектной, так как добавление материала не уменьшает предельную нагрузку. Для статически неопределимых балок минимального объема ограничения на пути нагружения могут быть таковы, что возможно только пропорциональное нагружение, (пример второй). Последнее обстоятельство означает, что оптимальная статически неопределимая балка может представлять собой совокупность касающихся, но не взаимодействующих статически определимых балок. Для статически определимой оптимальной балки на двух опорах поле усилий и моментов определяется независимо от поля скоростей и поэтому пропорциональное нагружение не является единственным. Неприемлемость пропорционального (или близкого к нему) нагружения с точки зрения его безопасности приводит к отказу от использования на практике оптимальных балок минимального объема и проектированию балок переменной толщины, в том числе ступенчатых балок [101], в соответствии с правилом, что добавление материала к оптимальной балке не уменьшает ее предельную нагрузку.

5.4. Оценки и критерий оптимального проектирования жесткопластических равнопрочных элементов конструкций минимального объема[111]

Исследования [71-82, 267-268, 271-272] и в разделах 5.2-5.3 по минимизации объема и веса основаны на критериях, которые не приводят к явному общему выражению для положительного множителя в законе течения и, следовательно, не позволяют сформулировать математическую задачу оптимального проектирования произвольных тонких однородных жесткопластических балок, пластин и оболочек.

В настоящем разделе получены кинематическая и статическая оценки минимального объема жесткопластической оболочки. На их

основе сформулирован и доказан критерий оптимального проектирования, составлена полная система уравнений и решены некоторые задачи оптимального проектирования жесткопластических элементов конструкций.

Рассмотрим оболочку толщиной $2h$, выполненную из жесткопластического материала, удовлетворяющего условию текучести Мизеса

$$f \equiv s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2 + 3(s_3^2 + s_4^2 + s_5^2) - \sigma_0^2, \quad (5.4.1)$$

где $s_1 = \sigma_{11} - \sigma_{33}$, $s_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33}$, $s_3 = \sigma_{12}$, $s_4 = \sigma_{23}$, $s_5 = \sigma_{13}$, причем σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — напряжения в системе координат x_i с координатными линиями x_1 и x_2 , расположенными в заданной отсчетной срединной поверхности S оболочки.

Ассоциированный с условием (5.4.1) закон течения:

$$e_\mu = \lambda(2s_\mu - s_\nu); \quad e_t = 6\lambda s_t; \quad \mu, \nu = 1, 2, \mu \neq \nu; \quad t = 3, 4, 5; \quad (5.4.2)$$

где $e_1 = \varepsilon_{11}$, $e_2 = \varepsilon_{22}$, $e_3 = \varepsilon_{12}$, $e_4 = \varepsilon_{23}$, $e_5 = \varepsilon_{13}$ — скорости деформаций.

Предположим, что скорости деформаций изменяются по толщине оболочки согласно линейной гипотезе [96]:

$$e_r = \varepsilon_{0r}(x_1, x_2) + x_3 k_r(x_1, x_2); \quad r = 1, 2, 3, 4, 5; \quad (5.4.3)$$

где ε_{0r} — скорости деформаций срединной поверхности, k_r — параметры, характеризующие изменение скорости деформаций по толщине оболочки.

Из равенств (5.4.1)–(5.4.3) для удельной объемной диссипативной функции D_0 и множителя λ получим выражения:

$$D_0 = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sum s_r e_r = 2\lambda \sigma_0^2; \quad \lambda = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{3}} \sqrt{ax_3^2 + bx_3 + c}. \quad (5.4.4)$$

Здесь

$$a = k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2 + (k_3^2 + k_4^2 + k_5^2)/4,$$

$$b = \varepsilon_{01}(2k_1 + k_2) + \varepsilon_{02}(2k_2 + k_1) + (\varepsilon_{03}k_3 + \varepsilon_{04}k_4 + \varepsilon_{05}k_5)/2,$$

$$c = \varepsilon_{01}^2 + \varepsilon_{01}\varepsilon_{02} + \varepsilon_{02}^2 + (\varepsilon_{03}^2 + \varepsilon_{04}^2 + \varepsilon_{05}^2)/4, \quad D_0 > 0.$$

Определим, с учетом равенств (5.4.3) и (5.4.4), удельную поверхностную диссипативную функцию D_1 в обобщенных усилиях n_r , моментах m_r и обобщенных скоростях деформаций ε_r , κ_r :

$$D_1 = \int_{-h}^h D_0 dx_3 = 2\sigma_0 h \sum (n_r \varepsilon_r + m_r \kappa_r), \quad D_1 > 0, \quad (5.4.5)$$

где

$$n_r = N_r/N_0, \quad m_r = M_r/M_0, \quad n_0 = 2\sigma_0 h, \quad M_0 = \sigma_0 h^2, \\ N_r = \int_{-h}^h s_r dx_3, \quad M_r = \int_{-h}^h s_r x_3 dx_3, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_{0r}, \quad \kappa_r = k_r h/2.$$

Если F – функция текучести, полученная в предположении (5.4.3) и символически записанная равенством [96]

$$F(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = 0, \quad (5.4.6)$$

то ассоциированный с ней закон течения имеет вид:

$$\varepsilon_r = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial n_r}; \quad \kappa_r = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial m_r}; \quad \lambda_1 > 0. \quad (5.4.7)$$

Согласно постановке задачи о несущей способности жесткопластической оболочки (раздел 2.5), при любом заданном $\lambda_1 > 0$. получим проект равнопрочной оболочки.

Уравнение (5.1.7) для определения кинематической оценки нагрузки запишем в виде:

$$N - D = 0. \quad (5.4.8)$$

Здесь

$$N = p_0 N_0, \quad N_0 = \int_{S_F} \bar{p} \bar{u} dS, \quad S_F \subset S, \quad D = \int_V D_0 dV = \int_S D_1 dS, \\ V = \int_S h dS, \quad N > 0, \quad D > 0, \quad (5.4.9)$$

где N – мощность нагрузки на заданной поверхности S_F , D – объемная диссипативная функция, p_0 – положительный параметр пропорционального нагружения, $\bar{p}(x_1, x_2)$ – базовая нагрузка, $\bar{u}(x_1, x_2)$ – кинематически допустимое поле скоростей перемещений, D_0 и D_1 определены по полю \bar{u} с помощью ассоциированного закона течения (5.4.2).

Уравнение (5.4.8) при заданной нагрузке определяет некоторый объем, который назовем **кинематической оценкой объема** V_k .

Теорема 5.4.1. При заданных базовой нагрузке \bar{p} , поверхности S и кинематически допустимом поле скоростей \bar{u} добавление (удаление) материала к объему (из объема) V влечет увеличение (уменьшение) параметра нагрузки p_0 оболочки.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из равенства (5.4.8), так как подинтегральная удельная диссипативная функция D_0 определена заданным полем скоростей и положительна. Это утверждение также следует из равенств (5.4.8) и (5.4.9) при постоянной толщине оболочки, так как после дифференцирования равенства (5.4.8) по параметру p_0 получим

$$\frac{dh}{dp_0} = \frac{N_0}{\int_S E dS} > 0, \quad E = \frac{\partial D_1}{\partial h} = D_0(h) + D_0(-h) > 0. \quad (5.4.10)$$

Пусть V_0 – минимальный объем оптимальной жесткопластической оболочки при заданной нагрузке $p_0\bar{p}$ с совместными статически допустимыми полем напряжений и кинематически допустимым полем скоростей перемещений. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5.4.2. При любом заданном кинематически допустимом поле скоростей перемещений и заданной нагрузке $p_0\bar{p}$ наименьшая кинематическая оценка объема не больше объема оптимального проекта V_0 равнопрочной оболочки.

Доказательство. Допустим противное – что наименьшая кинематическая оценка V_{k1} больше объема оптимального проекта V_0 оболочки под действием одной и той же нагрузки $p_0\bar{p}$, $V_{k1} > V_0$. Определим истинную предельную нагрузку $p_{e1}\bar{p}$ для оболочки объема V_{k1} . Если $p_{e1} < p_0$ (нагрузка $p_0\bar{p}$ является кинематической оценкой нагрузки $p_{e1}\bar{p}$), то удаление материала увеличивает предельную нагрузку, что противоречит экстремальному свойству действительных напряжений (см. следствие 5.1.1). Если $p_{e1} = p_0$, то удалим материал и рассмотрим оболочку объема V_c : $V_0 < V_c < V_{k1}$. Кинематическая нагрузка V_{k1} является наименьшей. Поэтому при любом заданном законе распределения толщины $h(S)$, соответствующем объему V_{k1} , уда-

ление материала из объема V_{k1} ведет, на основании теоремы 5.4.1, к уменьшению кинематической оценки нагрузки, а по ее свойству (см. теорему 5.1.2) – и истинной предельной нагрузки. Тогда для истинной предельной нагрузки $p_{ec}\bar{p}$ оболочки с объемом V_c получим неравенство $p_{ec} < p_{e1} = p_0$, которое снова противоречит тому же экстремальному свойству действительных напряжений.

Таким образом, справедливо неравенство:

$$V_{k1} \leq V_0 \quad (5.4.11)$$

Для каждого статически допустимого поля усилий и моментов существует распределение толщины h и объем оболочки, который назовем **статической оценкой** объема V_{cm} .

Теорема 5.4.3. Статическая оценка объема V_{cm} не меньше минимального объема V_0 при одной и той же нагрузке $p_0\bar{p}$ ($V_{cm} \geq V_0$)[105].

Доказательство. Предположим противное, что $V_{cm} < V_0$. Тогда истинная предельная нагрузка p_{est} по свойству ее статической оценки (5.1.6) для оболочки объема V_{cm} больше или равна заданной нагрузке ($p_{est} \geq p_0$). Строгое неравенство означает: удаление материала увеличивает предельную нагрузку, что противоречит экстремальному свойству действительных напряжений (следствие 5.1.1). Из равенства $p_{est} = p_0$ следует: объем V_{cm} является минимальным, что противоречит определению объема V_0 .

В результате, с учетом неравенств (5.4.11) справедливы оценки объема V_0 :

$$V_{k1} \leq V_0 \leq V_{cm}. \quad (5.4.12)$$

Как следствие неравенств (5.4.11)-(5.4.12), получим, что объем оптимального проекта V_0 равен наибольшей из наименьших кинематических оценок, определенных по всевозможным кинематически допустимым полям скоростей перемещений, и наименьшей из статических оценок, определенных по всевозможным статически допустимым полям напряжений:

$$V_0 = \sup_{\bar{u}} \inf_h V_k = \inf_{\sigma_{ij}} V_{cm}, \quad (5.4.13)$$

В противном случае поле скоростей перемещений оптимального проекта не было бы кинематически допустимым, а поле напряжений – статически допустимым.

Доказанное свойство кинематической оценки объема, выраженное равенством (5.4.13), позволяет сформулировать изопериметрическую вариационную задачу: найти минимум функционала V (5.4.9) при условии (5.4.8). Соответствующая вариационная задача на безусловный минимум состоит в отыскании минимума функционала I ,

$$I = \int_S \Psi(x_1, x_2, h) dS$$

Здесь

$$\Psi(x_1, x_2, h) = \mu_1 h + \mu_2 (p_0 \bar{p} \bar{u} - D_1)$$

где μ_1, μ_2 – постоянные множители Лагранжа, $\mu_1^2 + \mu_2^2 = 1$, h – искомая функция.

Уравнение Эйлера–Остроградского для функционала I имеет вид

$$\mu_1 - \mu_2 \frac{\partial D_1}{\partial h} = 0$$

или

$$\frac{\partial D_1}{\partial h} = E = \text{const} > 0, \quad \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} = \text{const} > 0 \right). \quad (5.4.14)$$

где величина E определена равенством (5.4.10).

Отсюда следует, что критерий Шилда [5] в случае строгого неравенства (5.4.14), $(\partial D_1 / \partial h > 0)$, является критерием относительного минимума кинематической оценки, V_{k1} , объема для произвольного, в том числе оптимального, кинематически допустимого поля скоростей перемещений.

Равенства (5.4.8) и (5.4.14) определяют решение задачи для h, V_{k1} при произвольном заданном кинематически допустимом поле скоростей перемещений. Потребуем, чтобы кинематически допустимое поле скоростей перемещений было совместным со статически допустимым полем напряжений, то есть, чтобы кинематически допустимые обобщенные скорости деформаций были связаны со статически допустимыми обобщенными усилиями и моментами законом течения (5.4.7).

Тогда из равенств (5.4.7), (5.4.10) и (5.4.14) для определения множителя λ_1 в законе течения получим выражение:

$$\lambda_1 = 1/E_1 \quad (\lambda_1 > 0). \quad (5.4.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{4a_1 + 2b_1 + c_1} + \sqrt{4a_1 - 2b_1 + c_1} \\ a_1 &= F_{m_1}^2 + F_{m_1}F_{m_2} + F_{m_2}^2 + (F_{m_3}^2 + F_{m_4}^2 + F_{m_5}^2)/4 \\ b_1 &= F_{n_1}(2F_{m_1} + F_{m_2}) + F_{n_2}(2F_{m_2} + F_{m_1}) + (F_{n_3}F_{m_3} + F_{n_4}F_{m_4} + F_{n_5}F_{m_5})/2 \\ c_1 &= F_{n_1}^2 + F_{n_1}F_{n_2} + F_{n_2}^2 + (F_{n_3}^2 + F_{n_4}^2 + F_{n_5}^2)/4 \end{aligned}$$

где нижние индексы функции текучести F означают ее частные производные по соответствующим обобщенным усилиям и моментам, а также учтено, что обобщенные скорости деформаций определены с точностью до положительного постоянного множителя.

Толщина h в равенстве (5.4.15) для λ_1 подразумевается выраженной через усилия N_{ij} и моменты M_{ij} оболочки из условия текучести (5.4.6), причем

$$\begin{aligned} n_\nu &= n_{\nu\nu} - n_{33}, \quad n_3 = n_{12}, \quad n_4 = n_{23}, \quad n_5 = n_{13}, \quad m_\nu = m_{\nu\nu} - m_{33} \\ m_3 &= m_{12}, \quad m_4 = m_{23}, \quad m_5 = m_{13}, \quad n_{ij} = N_{ij}/N_0, \quad m_{ij} = M_{ij}/M_0 \\ N_{ij} &= \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad (\nu = 1, 2, \quad i, j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Таким образом, задача определения минимального объема, согласно постановке задачи о несущей способности жесткопластической оболочки в разделе 2.5, состоит в решении семи уравнений равновесия, двенадцати уравнений закона течения, условия текучести, уравнения (5.4.15) – всего двадцати одного уравнения. Из этой системы уравнений требуется найти двенадцать усилий и моментов (N_{ij}, M_{ij}) , семь скоростей и параметров скоростей перемещений (v_{i0}, a_i, b_3) , множитель λ_1 и толщину оболочки $h(x_1, x_2)$ – всего двадцать одно неизвестное. Минимальный объем, V_{k1} определим из последнего равенства (5.4.9).

Поскольку поле обобщенных усилий и моментов (N_{ij}, M_{ij}) статически допустимо, то минимальная кинематическая оценка V_{k1} является также и статической оценкой абсолютно минимального объема V_0 . Поэтому из равенств (5.4.13) следует, что полученная в результате решения сформулированной задачи оценка V_{k1} объема оптимального проекта равна наибольшей из наименьших кинематических оценок по всевозможным кинематически допустимым полям скоростей перемещений и равна абсолютно минимальному объему V_0 .

Решение поставленной задачи определения минимального объема V_0 единственно. Действительно, предположим, что при одной и той же нагрузке существует оптимальный проект оболочки с объемом $V_{01} < V_0$. Воспользуемся равенством (5.4.8) для оболочки с объемами V_{01} и V_0 и заданной отсчетной поверхностью S :

$$p_0 \int_{S_F} \bar{p} \bar{u}_0 dS - \int_{V_0} D_{00} dV = 0; \quad (5.4.16)$$

$$p_0 \int_{S_F} \bar{p} \bar{u}_{01} dS - \int_{V_{01}} D_{01} dV = 0; \quad (5.4.17)$$

где \bar{u}_0 , \bar{u}_{01} , D_{00} , D_{01} — кинематически допустимые поля скоростей перемещений и диссипативные функции, соответственно.

Для кинематической оценки p_{1k} предельной нагрузки p_0 , определяемой из равенства (5.4.17), оболочки объема V_{01} по кинематически допустимому полю скоростей \bar{u}_0 получим уравнение:

$$p_{1k} \int_{S_F} \bar{p} \bar{u}_0 dS - \int_{V_{01}} D_{00} dV = 0, \quad (5.4.18)$$

причем по свойству кинематической оценки предельной нагрузки (5.1.11)

$$p_{1k} \geq p_0. \quad (5.4.19)$$

После вычитания равенства (5.4.18) из равенства (5.4.16) получим

$$(p_0 - p_{1k}) \int_{S_F} \bar{p} \bar{u}_0 dS = \int_{\Delta} D_{00} dV. \quad (5.4.20)$$

Так как $\Delta = V_0 - V_{01} > 0$, $D_{00} > 0$ и интегралы в равенстве (20) положительны, то $p_{1k} < p_0$, что противоречит неравенству (5.4.19).

Поэтому $V_{01} = V_0$, если решение задачи оптимального проектирования не является вырожденным (см. примеры 1 и 2 раздела 5.3).

Рассмотрим в качестве примера равномерно нагруженную ($p = 1$) трехслойную балку с легким заполнителем длины l , постоянной ширины b в системе координат с началом на левом конце, осями x и y , расположенными в ее плоскостях симметрии, причем осью x , направленной вдоль балки. В несущих слоях толщиной h каждый пренебрежем всеми напряжениями, кроме напряжений σ_{xx} , которые предположим равномерно распределенными по толщине этих слоев. Срединные плоскости несущих слоев отстоят от плоскости oxy на постоянном расстоянии H , в заполнителе $\sigma_{xx} = 0$. Согласно гипотезе Кирхгофа, для скоростей деформаций ε_{xx} несущих слоев имеем выражение

$$\varepsilon_{xx} = k_{xx}z, \quad k_{xx} = -\frac{d^2W}{dx^2}, \quad (5.4.21)$$

где W — скорость прогиба, $-H - h/2 \leq z \leq -H + h/2$, $H - h/2 \leq z \leq H + h/2$.

Равенства (5.4.1)-(5.4.2), (5.4.4)-(5.4.9), (5.4.14)-(5.4.15) в таком случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_0^2; \quad D_0 = \sigma_0 |\varepsilon_{xx}|; \quad D_1 = 2\sigma_0 h m_1 \kappa, \quad F \equiv m_1^2 - 1 = 0; \\ \kappa_1 &= 2\lambda_1 m_1; \quad V = V_e v; \quad v = \int_0^1 h_1 d\xi; \quad V_e = 2b^2 l; \\ \int_0^1 \left(\frac{2p_1}{\mu} w - H_1 h_1 \left| \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right| \right) d\xi &= 0; \\ \mu_1 - \mu_2 H_1 \left| \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right| &= 0; \quad \lambda_1 = 1, \quad h_1 = \frac{|m|}{2H_1}; \quad m_1 = \frac{M_x x}{2\sigma_0 H h} = -\frac{m}{2H_1 h_1}; \\ \kappa_1 = H k_{xx} &= -H_1 \mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2}; \quad m = \frac{M}{M_{10}}; \quad M_{xx} = \int_{-H-h/2}^{H+h/2} \sigma_{xx} z dz; \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

где

$$h_1 = h/b, \quad H_1 = H/b, \quad \xi = x/l, \quad w = W/b, \quad p_0 = 2P/l, \quad p_1 = P/N_{10};$$

$$N_{10} = 2\sigma_0 b^2; \quad M_{10} = \sigma_0 b^3;$$

причем p_0 — погонная интенсивность равномерно распределенной нагрузки, выраженная через величину P размерности погонной силы.

В приведенных ниже численных решениях $H_1 = 1$, $\mu = 0.02$, $p_1 = 0.62 \cdot 10^{-2}$. Изгибающий момент и внутренний момент M_{xx} связаны соотношением $M = -bM_{xx}$, поэтому из равенства (5.4.22) для изогнутой оси балки получим уравнение:

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = k_1, \quad (5.4.23)$$

где $k = \text{sign}(M)$ и учтено, что скорость прогиба определена с точностью до постоянного положительного множителя.

Рассмотрим некоторые случаи опирания балки.

1. Жестко заделанные концы. Для изгибающего момента получим выражение:

$$m = m_A - \frac{2\tau_A \xi}{\mu} + \frac{2p_1}{mu} \xi^2; \quad (5.4.24)$$

$$m_A = M_A/M_{10}; \quad |m| = 2H_1 h_1; \quad \tau_A = R_A/N_{10} = p_1.$$

Здесь M_A и R_A — реакции в левой жесткой заделке.

Определим из равенств (5.2.24) координаты нулей изгибающего момента ξ_1 и ξ_2 , а также его знаки:

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\mu m_A}{2p_1}}; \quad (5.4.25)$$

$$k_1 = 1, \quad (0 \leq \xi \leq \xi_1, \quad \xi_2 \leq \xi \leq 1); \quad k_1 = -1, \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2).$$

Решение уравнения (5.4.24), удовлетворяющее условиям в жесткой заделке, непрерывности скоростей прогибов и их производных в нулях момента, имеет вид:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\xi^2}{2}, \quad (0 \leq \xi \leq \xi_1); \quad w = -\frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{1}{16}; \quad (\xi_1 \leq \xi_2); \\ w &= \frac{\xi^2}{2} - \xi + \frac{1}{2}; \quad (\xi_2 \leq \xi \leq 1) \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{4}; \quad \xi_2 = \frac{3}{4}; \quad m_A = \frac{3p_1}{8\mu}.$$

Из равенств (5.4.22), (5.4.24), (5.4.26) определим толщину h_1 и минимальный объем v_0 оптимального проекта балки:

$$h_1 = \frac{|m|}{2H_1} = \frac{p_1}{H_1\mu} \left| \frac{3}{16} - \xi + \xi^2 \right|;$$

$$v_0 = \int_0^1 h_1 d\xi = \frac{p_1}{16H_1\mu}, \quad v_0 = \frac{V_0}{V_e}. \quad (5.4.27)$$

Воспользовавшись уравнением (5.4.22) и равенством (5.4.27) для кинематической оценки объема V_k с полем скоростей прогибов (5.4.26), получим выражение:

$$v_{k1} = \frac{2p_1}{\mu} \int_0^1 w d\xi = v_0, \quad v_{k1} = \frac{V_{k1}}{V_e}. \quad (5.4.28)$$

Определим, с учетом равенств (5.4.22), (5.4.24) и (5.4.25), статическую оценку объема V_{cm} при произвольном $m_A \leq p_1/(2\mu)$, то есть действительных корнях ξ_1 и ξ_2 :

$$v_{cm} = \int_0^1 h_1 d\xi = \frac{1}{2H_1} \int_0^1 |m| d\xi = \frac{1}{2H_1} \{ m_A [1 + 2(\xi_1 - \xi_2)] -$$

$$- \frac{p_1}{\mu} [1 + 2(\xi_1^2 - \xi_2^2)] + \frac{2p_1}{3\mu} [1 + 2(\xi_1^3 - \xi_2^3)] \}; \quad (5.4.29)$$

$$v_{cm} = \frac{V_{cm}}{V_e}.$$

Условие минимума статической оценки объема (5.4.29):

$$\frac{dv_{cm}}{dm_A} = 1 + 2(\xi_1 - \xi_2) +$$

$$+ \frac{2}{(\xi_2 - \xi_1)} \left(\frac{\mu m_A}{p_1} - \xi_1 - \xi_2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 \right) = 0. \quad (5.4.30)$$

Из уравнений (5.4.29) и (5.4.30) получим:

$$m_A = \frac{3p_1}{8\mu}; \quad \xi_1 = \frac{1}{4}; \quad \xi_2 = \frac{3}{4}; \quad v_{cm1} = \min v_{cm} = v_0. \quad (5.4.31)$$

На основании равенств (5.4.27), (5.4.28) и (5.4.31) минимальный объем равен кинематической и минимальной статической его оценкам.

Воспользуемся полем скоростей прогибов, эквивалентным полю прогибов упругой балки постоянной толщины:

$$w = \xi^2(1 - \xi^2). \quad (5.4.32)$$

Применение метода Ритца с последовательностями h_{1j} ,

$$h_{1j} = A_0 + \sum_{k=1}^j (A_k \cos 2k\pi\xi + A_{k+j} \sin 2k\pi\xi), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (5.4.33)$$

приводит вариационную задачу (5.4.22) определения наименьшей кинематической оценки объема, с учетом равенств (5.4.32)-(5.4.33), к задаче линейного программирования с дополнительными ограничениями $h_{1j} \geq 0$, причем ее численное решение имеет вид:

$$v_{k1} = A_0 = 0.87v_0 < v_0, \quad A_1 = 0.016, \quad A_2 = 0.014, \quad A_3 = 0.012,$$

$$A_4 = 0.011, \quad A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0.$$

Объем балки с постоянной толщиной несущих слоев, определенной по шарнирнопластической схеме, в рассматриваемом случае нагружения и опирания в два раза больше объема оптимального проекта.

Отметим, что максимальный прогиб упругой балки с полученным оптимальным распределением толщины на 31% меньше, чем максимальный прогиб такой же балки с постоянной толщиной несущих слоев при одинаковых объемах, условиях нагружения и опирания.

2. Шарнирное опирание на концах и в середине C балки. Для изгибающего момента получим выражения:

$$m = -\frac{2}{\mu}(r_A - p_1\xi)\xi, \quad (0 \leq \xi \leq 0.5);$$

$$m = -\frac{2}{\mu}[r_A\xi - p_1\xi^2 + r_C(\xi - 0.5)], \quad (0.5 \leq \xi \leq 1); \quad (5.4.34)$$

$$r_A = p_1 - \frac{r_C}{2}; \quad r_A = \frac{R_A}{N_{10}}, \quad r_C = \frac{R_C}{N_{10}};$$

где R_A и R_C – реакции левой и средней опоры.

Координаты нулей и знаки изгибающего момента:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{r_A}{p_1}, \quad \xi_3 = 1 - \xi_2, \quad \xi_4 = 0;$$

$$k_1 = -1, \quad (0 \leq \xi \leq \xi_2, \quad \xi_3 \leq \xi \leq 1); \quad (5.4.35)$$

$$k_1 = 1, \quad (\xi_2 \leq \xi \leq \xi_3)$$

Решение уравнения (5.4.23), с учетом равенств (5.4.34)-(5.4.35), удовлетворяющее условиям опирания, непрерывности скоростей прогибов и их производных в нулях момента, а также минимальный объем v_0 :

$$w = -\frac{1}{2}\xi^2 - 2\left(\xi_2^2 - \xi_2 + \frac{1}{8}\right)\xi, \quad (0 \leq \xi \leq \xi_2);$$

$$w = \frac{1}{2}\xi^2 - 2\left(\xi_2^2 + \frac{1}{8}\right)\xi + \xi_2^2, \quad (\xi_2 \leq \xi \leq \xi_3);$$

$$w = -\frac{1}{2}\xi^2 + 2\left(\xi_3 - \xi_2^2 - \frac{1}{8}\right)\xi + \xi_2^2 - \xi_3^2, \quad (\xi_3 \leq \xi \leq 1); \quad (5.4.36)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad r_A = p_1\xi_2, \quad r_C = 2p_1(1 - \xi_2);$$

$$v_0 = \int_0^1 h_1 d\xi = \frac{1}{2H_1} \int_0^1 |m| d\xi = \frac{p_1}{6H_1\mu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{8}}\right).$$

Кинематическая оценка v_{k1} минимального объема с полем скоростей (5.4.36), согласно равенству (5.4.22), равна:

$$v_{k1} = \frac{2p_1}{H_1\mu} \int_0^1 w d\xi = v_0.$$

Статическая оценка v_{cm} минимального объема при произвольном r_A , $p_1/2 \geq r_A \geq 0$, когда имеют место нули момента между опорами,

$$v_{cm} = \int_0^1 h_1 d\xi = \frac{1}{2H_1} \int_0^1 |m| d\xi = \frac{p_1}{H_1\mu} \left(\frac{2}{3}\xi_2^2 - \frac{1}{4}\xi_2 + \frac{1}{12} \right). \quad (5.4.37)$$

Определяя минимальную статическую оценку v_{cm} из уравнения (5.4.37) при условии $dv_{cm}/dr_A = 0$, получим $v_{cm} = v_0 = v_{k1}$.

Решение задачи линейного программирования с последовательностями (5.4.33) дает:

$$v_{k1} = A_0 = 0.96v_0 < v_0; \quad A_1 = -0.006; \quad A_2 = 0.048; \quad A_3 = -0.006; \\ A_4 = 0.0036; \quad A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0.$$

Воспользуемся для определения наименьшей кинематической оценки объема полем скоростей $w = 1 - \cos 4\pi\xi$ и распределением толщины

$$h_{1k} = A_0[\delta(\xi - 0.25) + \delta(\xi - 0.5) + \delta(\xi - 0.75)],$$

где $\delta(\xi - \eta)$ — функция Дирака. В результате из уравнения (5.4.22) получим $v_{k1} = 0.52v_0 < v_0$.

Объем балки постоянной толщины несущих слоев, определенной по шарнирнопластической схеме, на 75% больше объема оптимальной балки с одинаковыми опиранием и нагружением. Максимальный прогиб упругой балки с толщиной оптимальной балки на 26% меньше максимального прогиба упругой балки постоянной толщины и того же объема.

3. Статически определяемая балка с жестко заделанным концом.

$$m = \frac{2p_1}{\mu}(1 - \xi)^2, \quad w = \frac{1}{2}\xi^2, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (5.4.38)$$

В этом случае краевая задача определения минимального объема не может быть поставлена. Кинематическую оценку минимального объема с полем скоростей (5.4.38) получим из уравнения (5.4.22):

$$v_{k1} = \frac{2p_1}{H_1\mu} \int_0^1 w d\xi = \frac{p_1}{3H_1\mu}.$$

Статическая оценка с учетом равенства (5.4.38):

$$v_{cm} = \int_0^1 h_1 d\xi = \frac{p_1}{H_1 \mu} \int_0^1 |m| d\xi = v_{k1}.$$

Следовательно, на основании неравенств (5.4.12), $v_0 = v_{cm} = v_{k1}$.

Воспользуемся для определения кинематической оценки v_{k1} объема полем скоростей прогибов, эквивалентным полю прогибов упругой балки постоянной толщины:

$$w = \frac{1}{12}[(\xi - 1)^4 + 4\xi - 1], \quad h_{1k} = A_0(\xi - 1)^{2n}.$$

При этом из уравнения (5.4.22) получим:

$$v_k = \frac{p_1(2n + 3)}{5\mu H_1(2n + 1)}; \quad v_{k1} = v_k(n = \infty) = \frac{p_1}{5\mu H_1};$$

$$v_{k1} \leq v_0.$$

Объем балки постоянной толщины, определенной по шарнирнопластической схеме, в три раза больше объема оптимальной балки. Максимальный прогиб упругой балки с переменной толщиной оптимальной балки на 50% меньше максимального прогиба балки постоянной толщины с тем же объемом и нагружением. Последний вывод, как и в случаях 1 и 2, справедлив для конструкций, работающих в рамках упругого деформирования.

В качестве другого примера рассмотрим однородную балку прямоугольного сечения длины l , толщины $2h$, постоянной ширины b под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности p_0 . Пренебрежем всеми напряжениями, кроме σ_{xx} , σ_{xz} , и воспользуемся гипотезой (5.4.3) для скоростей деформаций. Тогда равенства (5.4.1)-(5.4.9), (5.4.14)-(5.4.15) примут вид:

$$\sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xz}^2 = \sigma_0^2; \quad \varepsilon_{xx} = 2\lambda\sigma_{xx}; \quad \varepsilon_{xz} = 6\lambda\sigma_{xz}; \quad \lambda = \frac{1}{2\sigma_0} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \frac{\varepsilon_{xz}^2}{3}};$$

$$D_0 = \sigma_0 \tilde{D}_0; \quad D_1 = \sigma_0 b \int_{-h}^h \tilde{D}_0 d\zeta; \quad F \equiv m_1^2 + 3n_5^2 - 1 = 0;$$

$$\kappa_1 = 2\lambda_1 m_1; \quad \varepsilon_5 = 6\lambda_1 n_5; \quad \zeta = \frac{z}{b};$$

$$J = \int_0^1 \left(-h_1 X - \frac{\varepsilon_5 h_1}{12\kappa_1} \ln \frac{2\kappa_1 + X}{X - 2\kappa_1} \right) d\xi = 0; \quad (5.4.39)$$

$$\mu_1 - \mu_2 X = 0; \quad \lambda_1 = \frac{1}{8} \frac{h_1^2}{\sqrt{m^2 + (3n^2 h_1^2)/4}}; \quad v = \int_0^1 h_1 d\xi;$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{3}{2}n^2 + \sqrt{\frac{9}{4}n^4 + m^2}}.$$

Здесь

$$m_1 = -\frac{m}{h_1^2}; \quad n_5 = -\frac{n}{h_1}; \quad \kappa_1 = \frac{\mu h_1}{2} \frac{da_x}{d\xi}; \quad \varepsilon_5 = \frac{1}{2} \left(a_x + \mu \frac{dw}{d\xi} \right);$$

$$m = \frac{M}{M_{10}}; \quad n = \frac{Q}{N_{10}}; \quad M = -bM_{xx}; \quad Q = -bN_{xz}; \quad (5.4.40)$$

$$X = \sqrt{4\kappa_1^2 + \frac{\varepsilon_5^2}{3}}; \quad M_{xx} = \int_0^1 \sigma_{xx} z dz; \quad N_{xz} = \int_0^1 \sigma_{xz} dz;$$

причем a_x – угловая скорость поворота сечения, F – приближенная с запасом прочности до 9% функция текучести, Q – перерезывающая сила; остальные обозначения и численные значения приняты такими же, как в первом примере и разделе 1.5.

Из закона течения (5.4.39) получим:

$$\frac{\mu h_1}{2} \frac{da_x}{d\xi} = -\frac{2\lambda_1}{h_1^2} m; \quad \frac{1}{2} \left(a_x + \frac{dw}{d\xi} \right) = -\frac{6\lambda_1}{h_1} n. \quad (5.4.41)$$

Для шарнирно опертой по концам и в середине C балки изгибающий момент определен равенством (5.4.34), а перерезывающую силу – выражением $n = (dm/d\xi)\mu/2$. После интегрирования уравнения (5.4.41),

с учетом граничных условий $w(0) = w(1) = 0$, найдем:

$$w = \frac{4}{\mu} [I_2(\xi) - I_2(1)], \quad (5.4.42)$$

где

$$I_2(\xi) = \int_0^\xi \left(\frac{1}{\mu} \int_0^\xi \frac{\lambda_1 m}{h_1^3} d\xi - \frac{3\lambda_1 n}{h_1} \right) d\xi.$$

Реакцию средней опоры определим из условия $w(0.5) = 0$, то есть

$$I_2(0.5) - \frac{1}{2} I_2(1) = 0. \quad (5.4.43)$$

По известным реакциям из равенства (5.4.34), (5.4.39) найдем изгибающий момент, перерезывающую силу, толщину h_1 и минимальный объем V_0 .

Наименьшую статическую оценку v_{cm} получим, минимизируя объем v , с учетом равенств (5.4.39)–(5.4.40), по неизвестной реакции средней опоры. Найденные зависимости $v_0(\mu)$ и $v_{cm1}(\mu)$ показаны на рис. 5.6 одной линией, так как отличие этих объемов – порядка погрешности численного решения уравнения (5.4.43).

Наименьшую кинематическую оценку v_{k1} минимального объема получим по эквивалентному полю скоростей упругой балки под действием заданной нагрузки, удовлетворяющему гипотезе Кирхгофа, при этом $\varepsilon_5 = n_5 = 0$. В результате имеем задачу нелинейного программирования с функционалом v , последовательностями (5.4.33), ограничениями $J = 0$, $h_1(\xi) \geq 0$, $D_s \geq 0$, где D_s – дискриминант квадратного уравнения $A_0^2 + 2BA_0 + C = 0$, причем

$$B = \frac{B_1}{C_0}, \quad C = \frac{(B_2 - G)}{C_0}, \quad B_1 = \sum_{i=1}^{2k} A_i G_{1i}, \quad B_2 = \sum_{i=1}^{2k} \sum_{j=1}^{2k} A_i A_j G_{2ij},$$

$$G_{1i} = \int_0^1 f_i(\xi) \left| \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right| d\xi, \quad G_{2ij} = \int_0^1 f_i(\xi) f_j(\xi) \left| \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right| d\xi,$$

$$f_i(\xi) = \cos 2i\pi\xi, \quad (i \leq k), \quad f_i(\xi) = \sin 2(i - k)\pi\xi, \quad (i > k),$$

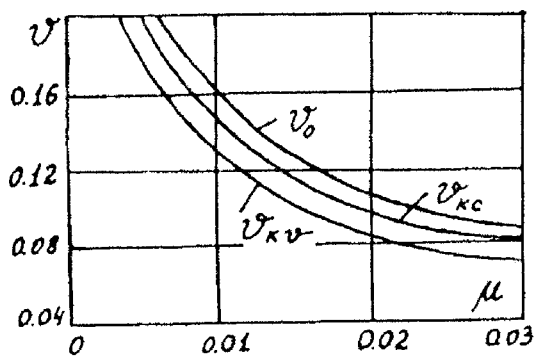


Рис. 5.6.

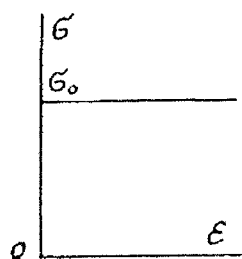


Рис. 5.7.

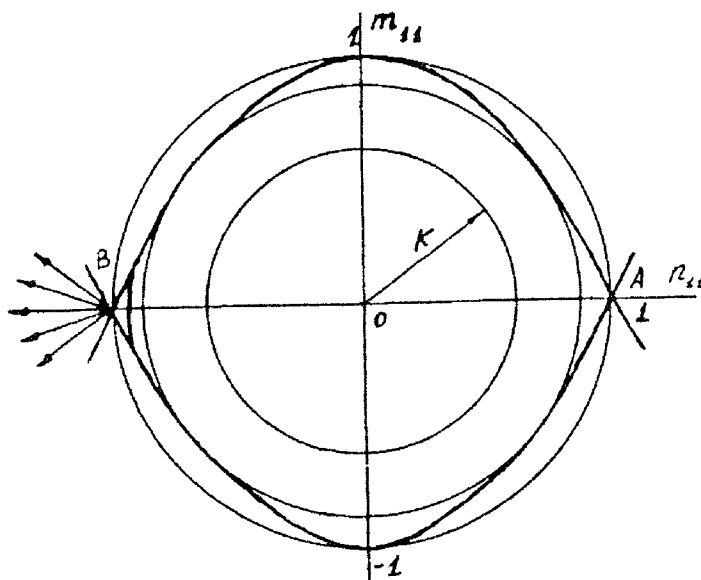


Рис. 5.8.

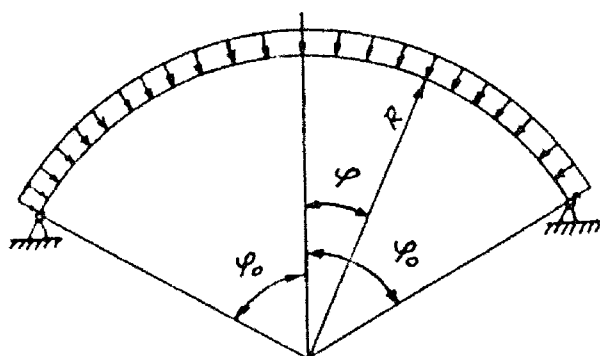


Рис. 5.9.

$$G = \frac{4p_1}{\mu} \int_0^1 w d\xi, \quad C_0 = \int_0^1 \left| \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right| d\xi, \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Решение для поля скоростей прогибов здесь не приводим. Вариацией постоянных A_i , с учетом отмеченных ограничений, получим искомую оценку объема. Зависимости $v_{k1}(\mu)$, найденные по эквивалентным полям прогибов упругой балки постоянной толщины и упругой балки переменной толщины оптимального проекта показаны на рис. 5.6 кривыми v_{kc} и v_{kv} , соответственно.

Таким образом, приведенные решения показывают правомерность полученных оценок (5.4.11)-(5.4.12) минимального объема и постановки задачи оптимального проектирования жесткопластических элементов конструкций.

5.5. Аппроксимация условия текучести и критерий оптимального проектирования[108]

Сложность общего условия текучести оболочки в обобщенных усилиях и моментах (см. разделы 1.4–1.6) затрудняет оптимальное проектирование и вызывает в ряде задач необходимость его аппроксимации. Проблеме аппроксимации условий текучести в теории предельного равновесия пластин и оболочек посвящены многие работы [47,54,61]. В теории оптимального проектирования жесткопластических элементов конструкций появляются дополнительные особенности в вопросе об аппроксимации условий текучести (как гладких, типа условия текучести Мизеса, так и сингулярных, типа условия текучести Треска), связанные с определением множителя в законе течения на основе критерия оптимальности. Предложенный в разделе 5.4 метод вывода множителя λ_1 в законе течения предполагает знание условия текучести, как в напряжениях так и в обобщенных усилиях и моментах. Для аппроксимирующего условия текучести в обобщенных усилиях и моментах задача определения условия текучести в напряжениях является весьма трудной из-за необходимости определить анизотропию материала. Аппроксимация условия текучести в обобщенных усилиях и моментах равносильна замене изотропного материала анизотропным.

В настоящем разделе на примере условия текучести для арки проиллюстрированы особенности и на основе критерия оптимальности предложен метод вывода множителя в законе течения без определения соответствующего условия текучести в напряжениях. Определен множитель в законе течения с аппроксимирующим условием текучести однородной балки. На основе критерия Шилда с полученными множителями в законах течения, соответствующими аппроксимирующим условиям текучести, решены задачи оптимального проектирования статически неопределимых арок, рам и балок.

При оптимальном проектировании арки воспользуемся следующей теоремой, справедливой и в общем случае для оболочек.

Теорема 5.5.1. Минимальный объем V_{on} оболочки с описанным условием текучести не больше минимального объема V_{en} оболочки с вписанным условием текучести, $V_{on} \leq V_{en}$, при одной и той же предельной нагрузке p_0 .

Доказательство. Если для объема V_{en} предельная нагрузка p_{on}^1 , определенная по описанному условию текучести, больше, согласно следствию (5.1.3), заданной предельной нагрузки p_0 , то уменьшение нагрузки p_{on}^1 до $p_{on} = p_0$, в соответствии с теоремами (5.1.2) и (5.4.1), возможно только за счет удаления материала, то есть $V_{on} < V_{en}$. Если же для объема V_{en} имеем $p_{on} = p_0$, то рассмотрим объем, соответствующий этой нагрузке p_0 при условии текучести, заключенном между вписанным и описанным условиями текучести, так что $\sigma_{ij}^1 = c\sigma_{ij}$, $\sigma_0^1 = c\sigma_0$, $c = const > 1$. Тогда при таком условии текучести поле напряжений σ_{ij}^1 является статически допустимым со статической оценкой нагрузки $p_{cm}^1 = cp_{en} > p_{en}$ и с действительной нагрузкой p^1 , $p^1 \geq p_{cm}^1 > p_{en} = p_0$. Следовательно, по следствию (5.1.3) $p_{on} \geq p^1 > p_{en} = p_0$, и, согласно предыдущему рассуждению, снова $V_{on} < V_{en}$. Равенство $V_{on} = V_{en}$ возможно, когда вписанная и описанная поверхности текучести имеют точки касания.

Условие текучести (6) для криволинейных стержней с диаграммой жесткопластического материала (рис. 5.7) и учетом только напряже-

ний растяжения-сжатия имеет вид (см. раздел 1.4), рис. 5.8:

$$F = |m_{11}| + n_{11}^2 = 1. \quad (5.5.1)$$

Рассмотрим круговую арку радиуса R , толщины $2h$, постоянной ширины b , с раствором $2\varphi_0$ под действием равномерно распределенной нагрузки p , рис. 5.9. Система дифференциальных уравнений, включающая уравнения равновесия и кинематические соотношения, разрешенных относительно производных (см. раздел 2.5):

$$dn/d\varphi = q; \quad dq/d\varphi = -n - p_0; \quad dm/d\varphi = 2q/\mu; \quad (5.5.2)$$

$$dv_1/d\varphi = F_1 + v_3; \quad dv_3/d\varphi = -(a_1 + \mu v_1)/\mu; \quad da_1/d\varphi = F_2. \quad (5.5.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 &= 2\lambda_1 n/(\mu h_1), & F_2 &= 2\lambda_1 \text{sign}(m)/(\mu h_1), \\ q &= N_{13}/N_{10}, & m &= M_{11}/M_{10}, & N_{10} &= 2\sigma_0 b^2, & M_{10} &= \sigma_0^2, \\ v_1 &= v_{10}/b, & v_3 &= v_{30}/b, & \mu &= b/R, & p_0 &= p/(2\mu\sigma_0), & h_1 &= h/b \\ & & n_{11} &= n/h_1, & m_{11} &= m/h_1^2. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Из равенств (5.5.1) и (5.5.4) имеем

$$h_1 = \sqrt{|m| + n^2}. \quad (5.5.5)$$

Для множителя λ_1 согласно равенству (5.4.15) и условию текучести (5.5.1) получим выражение:

$$\lambda_1 = \frac{2h_1}{|h_1 + n \text{sign}(m)| + |h_1 - n \text{sign}(m)|} = 1. \quad (5.5.6)$$

Здесь учтено также, что $h_1 \geq |n|$ (см. уравнение (5.5.5)). Это выражение справедливо, если в арке реализуется напряженное состояние, соответствующее дуге параболы (5.5.1). В случае, когда на конечном интервале изменения угла φ в арке имеет место напряженное состояние, отвечающее сингулярной точке В, рис. 5.8, следует воспользоваться теорией обобщенного пластического потенциала Койтера [272]. Тогда закон течения для арки имеет вид:

$$\varepsilon_1 = \lambda_{11} \partial F_{11} / \partial n_{11} + \lambda_{12} \partial F_{12} / \partial n_{11},$$

$$\kappa_1 = \lambda_{11} \partial F_{11} / \partial m_{11} + \lambda_{12} \partial F_{12} / \partial m_{11} \quad (5.5.7)$$

где

$$F_{11} = m_{11} + n_{11}^2 - 1 = 0, \quad F_{12} = -m_{11} + n_{11}^2 - 1 = 0,$$

причем $\lambda_{11}, \lambda_{12}$ — положительные множители. В таком случае ($m_{11} = m = 0, \quad n_{11} = -1$) для диссипативной функции получим равенство,

$$D_1 = -2bh_1\sigma_0\varepsilon_1 \quad (5.5.8).$$

Воспользовавшись равенством (5.5.8), критерием (5.4.14) и законом течения (5.5.7), имеем

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} = \text{const} = c > 0. \quad (5.5.9)$$

С учетом равенств (5.5.7) и (5.5.9) выражения для функций F_1 и F_2 в уравнениях (5.5.3) принимают вид:

$$F_1 = -2c/\mu, \quad F_2 = 2A/(\mu h_1), \quad A = \lambda_{11} - \lambda_{12} = c - 2\lambda_{12}. \quad (5.5.10)$$

Если в арке имеют место режимы напряженного состояния, отвечающие как дугам парабол так и сингулярным точкам, А или В, то возникает необходимость определения границ областей, соответствующих этим режимам. Определение таких границ сопряжено со значительными трудностями, что является существенным недостатком нелинейных сингулярных условий текучести. Поэтому на практике сингулярное условие текучести целесообразно заменить некоторыми гладкими условиями.

Для этого воспользуемся теоремой (5.5.1) и аппроксимируем сингулярное условие текучести (5.5.1) окружностями или дугами окружностей радиуса K , рис. 5.8.

$$m_{11}^2 + n_{11}^2 = K^2. \quad (5.5.11)$$

При $K = 1$ окружность является описанной и вписанной, если $K \leq \sqrt{3}/2$. Однако, если в ходе решения задачи найдено, что напряженное состояние соответствует точкам на дуге окружности радиусом $\sqrt{3}/2 <$

$K < 1$, то такую дугу также можно принять в качестве вписанного условия текучести. С учетом равенств (5.5.4) и (5.5.11) для толщины h_1 арки получаем:

$$h_1 = \frac{1}{K\sqrt{2}} \sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 4K^2 m^2}}. \quad (5.5.12)$$

При этом объемы, согласно вписанному условию текучести ($K < 1$, $h_i = h_1(K < 1)$, $V_i = V(h_i)$), описанному условию текучести ($K > 1$, $h_e = h_1(K > 1)$, $V_e = V(h_e)$) и условию текучести (5.5.1) V_p , связаны оценками:

$$V_e \leq V_p \leq V_i, \quad (5.5.13)$$

где

$$V = 2Rbv, \quad v = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} h_1 d\varphi.$$

Если напряженное состояние близко к безмоментному, то из равенства (5.5.12) и неравенств (5.5.13) следуют более близкие оценки:

$$V_e \leq V_p \leq V_e/K, \quad (5.5.14)$$

где V_e отвечает касательному описанному условию текучести.

Отсюда следует, что при наибольшем радиусе вписанной окружности объемы оптимальных проектов, определенные по вписанному условию текучести отличаются от объема V_p не более, чем на 15%. Для напряженных состояний близких к безмоментному радиус вписанной дуги окружности можно принять близким к единице и получить оценки значительно ближе, чем на 15%.

Применение выражения (5.4.15) для λ_1 в случае аппроксимирующего условия (5.5.11), как было отмечено, неправомерно.

Закон течения с условием текучести (5.5.11) имеет вид:

$$\varepsilon_{11} = 2\lambda_1 n_{11}, \quad \kappa_{11} = 2\lambda_1 m_{11}, \quad (\lambda_1 > 0). \quad (5.5.15)$$

Найдем m_{11} и n_{11} из равенств (5.5.15) и подставим их в условие (5.5.11), в результате получим

$$\lambda_1 = \frac{1}{2K} \sqrt{\kappa_{11}^2 + \varepsilon_{11}^2}. \quad (5.5.17)$$

Диссипативная функция, согласно равенствам (5.5.5), (5.5.15) - (5.5.16) имеет вид:

$$D_1 = 2\sigma_0 K h_1 b \sqrt{\kappa_{11}^2 + \varepsilon_{11}^2}, \quad (5.5.18)$$

Представим диссипативную функцию (5.5.18) в ином виде, вводя новые обобщенные скорости деформаций, $\tilde{\kappa}_{11}$ и $\tilde{\varepsilon}_{11}$, не зависящие явно от толщины h_1 арки, $\kappa_{11} = h_1 \tilde{\kappa}_{11}$, $\varepsilon_{11} = \tilde{\varepsilon}_{11}$,

$$D_1 = 2\sigma_0 K h_1 b \sqrt{h_1^2 \tilde{\kappa}_{11}^2 + \tilde{\varepsilon}_{11}^2}, \quad (5.5.19)$$

где $\tilde{k}_{11} = k_{11} b/2$.

Применим критерий Шилда (5.4.14), с учетом равенства (5.5.19),

$$\frac{\partial D_1}{\partial h_1} = 2\sigma_0 K b \left(\sqrt{h_1^2 \tilde{\kappa}_{11}^2 + \tilde{\varepsilon}_{11}^2} + \frac{h_1^2 \tilde{\kappa}_{11}^2}{\sqrt{h_1^2 \tilde{\kappa}_{11}^2 + \tilde{\varepsilon}_{11}^2}} \right) = \text{const} > 0. \quad (5.5.20)$$

Возвратимся в равенстве (5.5.20) к прежним обобщенным скоростям деформаций κ_{11} и ε_{11} :

$$\frac{\partial D_1}{\partial h_1} = 2\sigma_0 K b \left(\sqrt{\kappa_{11}^2 + \varepsilon_{11}^2} + \frac{\kappa_{11}^2}{\sqrt{\kappa_{11}^2 + \varepsilon_{11}^2}} \right) = \text{const} > 0. \quad (5.5.21)$$

Воспользуемся в равенстве (5.5.21) законом течения (5.5.15) и условием текучести (5.5.11):

$$\frac{\partial D_1}{\partial h_1} = 2\sigma_0 K b \lambda_1 \left(K + \frac{m_{11}^2}{K} \right) = \text{const} > 0. \quad (5.5.22)$$

Из равенства (5.5.22), с учетом соотношения (5.5.4), $m_{11} = m/h_1^2$, получим:

$$\lambda_1 = \frac{h_1^4}{K^2 h_1^4 + m^2}. \quad (5.5.23)$$

Аналогичная процедура определения множителя $\lambda_{1\sigma}$ в законе течения с аппроксимирующим условием текучести (5.3.6) однородной балки (см. разделы 5.2 и 5.3) приводит к следующему выражению:

$$\lambda_{1\sigma} = \frac{h^4}{m^2 + h^4}, \quad (5.5.23')$$

где h определено равенством (5.3.7)

Выражения для функций F_1 и F_2 при условии текучести (5.5.11) имеют вид:

$$F_1 = \frac{2\lambda_1 n}{\mu h_1}; \quad F_2 = \frac{4\lambda_1 m}{\mu h_1^3}. \quad (5.5.24)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (5.5.2)-(5.5.3) шестого порядка:

$$\begin{aligned} m &= C_1 + C_2 \cos \varphi + C_3 \sin \varphi \\ n &= \mu(C_2 \cos \varphi + C_3 \sin \varphi)/2 - p_0 \\ q &= \mu(-C_2 \sin \varphi + C_3 \cos \varphi)/2 \\ v_3 &= C_4 \sin \varphi + C_5 \cos \varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi} F_2(\psi) \sin(\varphi - \psi) d\psi \\ v_1 &= C_6 - C_4 \cos \varphi + C_5 \sin \varphi + \int_{-\varphi_0}^{\varphi} F_1(\varphi) d\varphi + \\ &+ \int_{-\varphi_0}^{\varphi} \int_{-\varphi_0}^{\varphi} F_2(\psi) \sin(\varphi - \psi) d\psi d\varphi \\ a_1 &= \mu \left[C_4 \cos \varphi - C_5 \sin \varphi - v_1 - \int_{-\varphi_0}^{\varphi} F_2(\psi) \cos(\varphi - \psi) d\psi \right] \end{aligned} \quad (5.5.25)$$

Рассмотрим два частных случая опирания арки, приняв в числовых примерах $\mu = 0.02$, $p_0 = 0.025$.

а) Шарнирно опертые края. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} m(-\varphi_0) &= m(\varphi_0) = 0, \quad v_1(-\varphi_0) = v_1(\varphi_0) = 0, \\ v_3(-\varphi_0) &= v_3(\varphi_0) = 0 \end{aligned} \quad (5.5.26)$$

Численные расчеты показывают, что напряженно-деформированное состояние, отвечающее дугам парабол (5.5.1) в данном случае не реализуется, так как действительных постоянных $C_1 - C_6$, удовлетворяющих граничным условиям (5.5.26) не существует. Предположим, что напряженно-деформированное состояние соответствует сингулярной точке B . Допустим, кроме того, что множители λ_{11} и λ_{12} постоянны

($A = \text{const}$). Тогда, решая систему уравнений (5.5.2)-(5.5.3), с учетом равенств (5.5.5), (5.5.9)-(5.5.10) и граничных условий (5.5.26) получим:

$$\begin{aligned} m = q = 0, \quad n = -p_0, \quad h_1 = p_0, \quad v = 2\varphi_0 p_0, \\ v_3 = \frac{2}{\mu} \left(\frac{A}{\mu p_0} - c \right) \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} - 1 \right), \\ v_1 = -\frac{2c}{\mu} (\varphi + \varphi_0) + \frac{2}{\mu} \left(\frac{A}{\mu p_0} - c \right) \left(\frac{\sin \varphi + \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} - \varphi - \varphi_0 \right), \\ a_1 = -\mu \left[v_1 - \frac{2}{\mu} \left(\frac{A}{\mu p_0} - c \right) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0} \right], \end{aligned} \quad (5.5.27)$$

где

$$\begin{aligned} A = \frac{c\mu p_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_0 - \varphi_0} > 0, \quad \lambda_{11} = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{\mu p_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_0 - \varphi_0} \right), \\ \lambda_{12} = \frac{1}{2} c \left(1 - \frac{\mu p_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_0 - \varphi_0} \right) \end{aligned}$$

Решение (5.5.27) показывает, что проект арки с безмоментным напряженным состоянием является оптимальным минимального объема, если $\lambda_{12} > 0$. Для арок в реальных условиях эксплуатации произведение μp_0 мало и угол раствора $2\varphi_0$, при котором возможно $\lambda_{12} < 0$, достаточно мал. Например, в арках из стали при интенсивности нагрузки типа снеговой (СНиП 2.01.07.85) этот угол не превышает одного градуса. Кроме того, выбор $A = \text{const}$ определяет, согласно теории Койтера, только один из множества пластических механизмов разрушения арки с безмоментным состоянием. Функциональным варьированием переменной A , при условии выполнения неравенств, $\lambda_{11} > 0$ и $\lambda_{12} > 0$, можно расширить достаточно широкую для практики проектирования область применения решений с сингулярной точкой.

Решение системы уравнений (5.5.2)-(5.5.3) с граничными условиями (5.5.26) при аппроксимирующем условии текучести (5.5.11)

$$\begin{aligned} m = C_1 \left(1 - \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \right), \quad n = -\frac{\mu C_1}{2} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} - p_0, \quad q = \frac{\mu C_1}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0}, \\ v_3 = -\frac{v_{3r}(\varphi_0)}{2} \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} + \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \right) + v_{3r}(\varphi), \end{aligned} \quad (5.5.28)$$

$$v_1 = \int_{-\varphi_0}^{\varphi} (F_1(\varphi) + v_{3r}(\varphi)) d\varphi - \frac{v_{3r}(\varphi_0)}{2} \left(\frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\sin \varphi_0} + \frac{\sin \varphi + \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} \right),$$

$$a_1 = \mu \left[\frac{v_{3r}(\varphi_0)}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi_0} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0} \right) - v_1(\varphi) - \int_{-\varphi_0}^{\varphi} F_2(\psi) \cos(\varphi - \psi) d\psi \right],$$

где

$$v_{3r}(\varphi) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi} F_2(\psi) \sin(\varphi - \psi) d\psi$$

Для определения постоянной C_1 в решении (32) служит граничное условие $v_1(\varphi_0) = 0$, то есть следующее уравнение,

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (F_1(\varphi) + v_{3r}(\varphi)) d\varphi - v_{3r}(\varphi_0) \sin \varphi_0 = 0. \quad (5.5.29)$$

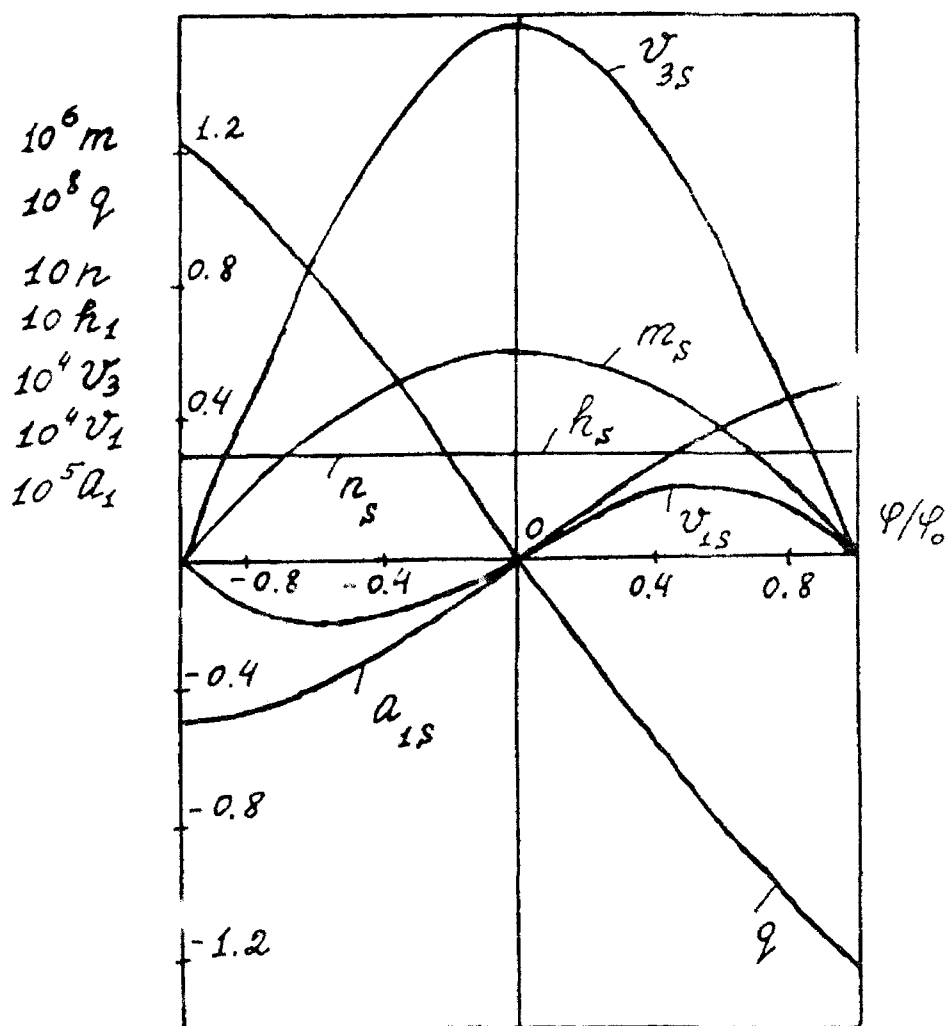
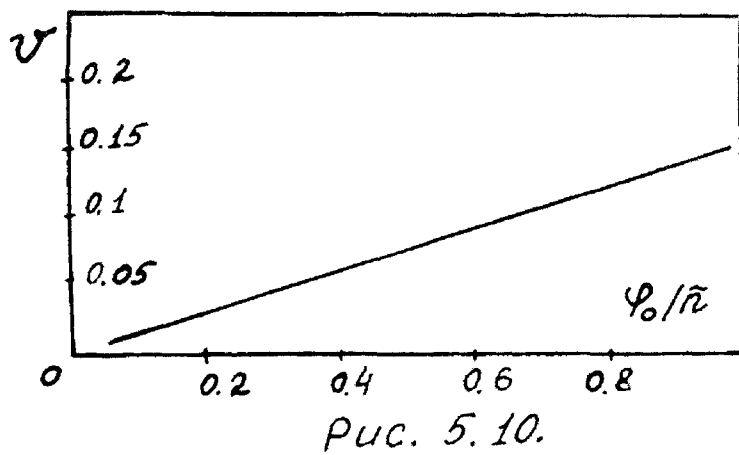
Определив из уравнения (5.5.29) постоянную C_1 с помощью равенств (5.5.28), (5.5.12)-(5.5.13) найдем зависимости $m(\varphi)$, $n(\varphi)$, $h_1(\varphi)$ и минимальный объем v арки.

Численное решение задачи выполнялось с удвоенной точностью. Интегралы вычислены по формуле Симпсона. Численное решение тестировалось с помощью пакета программ *COLSYS* решения систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полученная зависимость $v(\varphi_0)$ показана на рис. 5.10. Зависимости

$$h_1(\varphi), m(\varphi), n(\varphi), v_3(\varphi), v_1(\varphi), a_1(\varphi)$$

при $\varphi_0 = \pi/3$ и $K = 0.9995$ показаны кривыми $h_s, m_s, n_s, v_{3s}, v_{1s}, a_{1s}$, соответственно, на рис. 5.11. Во всех числовых примерах определена наименьшая статическая оценка минимального объема арки. Наименьшая статическая оценка совпадает с минимальным объемом оптимального проекта с точностью до 12 десятичных знаков или $10^{-9}\%$. Как показывает анализ численных расчетов изгибающий момент m в арке более чем в 10^5 раз меньше сжимающего усилия n . При таком соотношении величин m и n дуга окружности радиуса $K = 0.9995$ является вписанной между параболой и поэтому справедливы оценки (5.5.14). Следовательно, минимальный объем, определенный по вписанному условию, меньше минимального объема, определенного по точному условию текучести (5.5.1) не более чем на 0.05%, что и подтверждает сравнение с безмоментным решением (5.5.27).



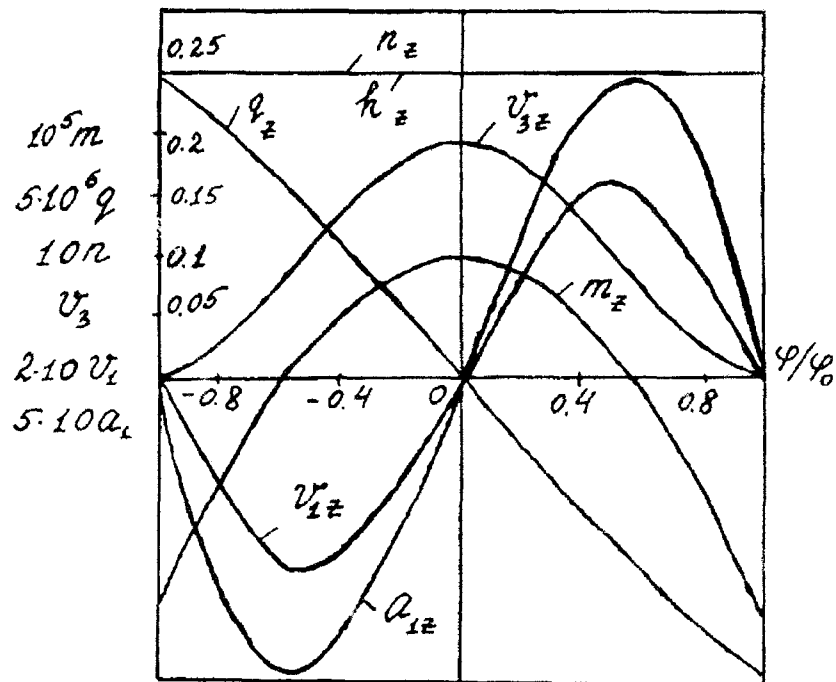


Рис. 5.12.

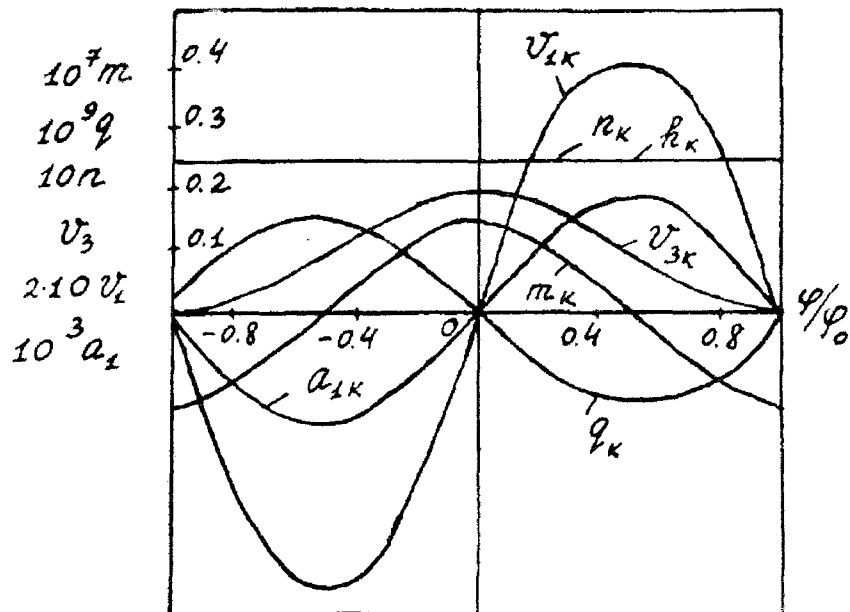


Рис. 5.13.

б) Арка с жестко заделанными краями. Граничные условия в этом случае:

$$v_1(-\varphi_0) = v_1(\varphi_0) = v_3(-\varphi_0) = v_3(\varphi_0) = a_1(-\varphi_0) = a_1(\varphi) = 0.$$

Решение для усилий и моментов имеет вид (5.5.25), выражения для скоростей перемещений такие же как в (5.5.28). Решение получено также с помощью пакета программ COLSYS. Зависимость $v(\varphi_0)$ показана кривой на рис. 5.10, а функциям

$$h_z(\varphi), m_z(\varphi), n_z(\varphi), v_{3z}(\varphi), v_{1z}(\varphi), a_{1z}(\varphi)$$

при $\varphi_0 = \pi/3$ и $K = 0.995$ соответствуют кривые $h_z, m_z, n_z, v_{3z}, v_{1z}, a_{1z}$ на рис. 5.12. В заключение приведем решение для кольца, защемленного в одном сечении. Графики толщины h_1 , усилия n , момента m и скоростей перемещений в таком случае показаны на рис. 5.13 ($h_k, m_k, n_k, v_{3k}, v_{1k}, a_{1k}$). Для каждой арки определена наименьшая статическая оценка минимального объема, различие которой с минимальным объемом всегда не превышало $10^{-9}\%$. В случае жесткой заделки краев величины m также более чем в 10^4 раз превышают величины n . Поэтому дуга окружности радиуса $K \leq 0.995$ является аппроксимирующим условием текучести и минимальный объем, определенный по вписанному условию текучести отличается от объема оптимального проекта, согласно оценкам (5.5.26), не более чем на 0.5% .

Приведем результаты оптимального проектирования балки, рассмотренной в четвертом примере раздела 5.3, на основе множителя (5.5.23') закона течения с аппроксимирующим условием текучести (5.3.6), полученные методом, изложенным в разделе 5.3, с удвоенной точностью —

$$v = 0.052172, \quad (r_D = 0.589061, \quad r_C = 0.454005)$$

Отсюда и из результата раздела 5.3 следует, что различие объема v оптимального проекта и наименьшей статической его оценки составляет $3.8 \cdot 10^{-3}\%$. Такой же порядок различия результатов оптимального проектирования имеет место и в других примерах, рассмотренных в разделе 5.3.

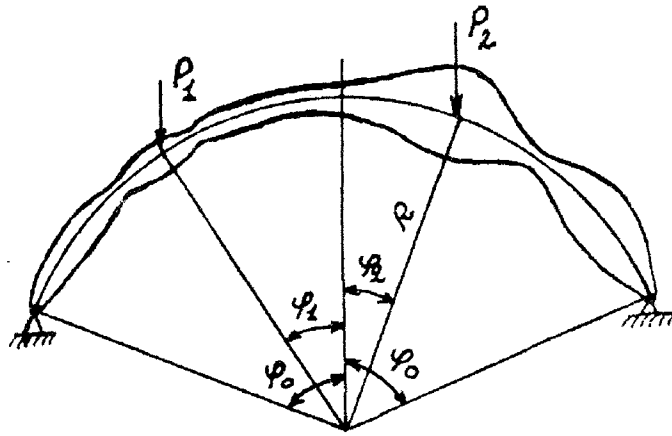


Рис. 5.14.

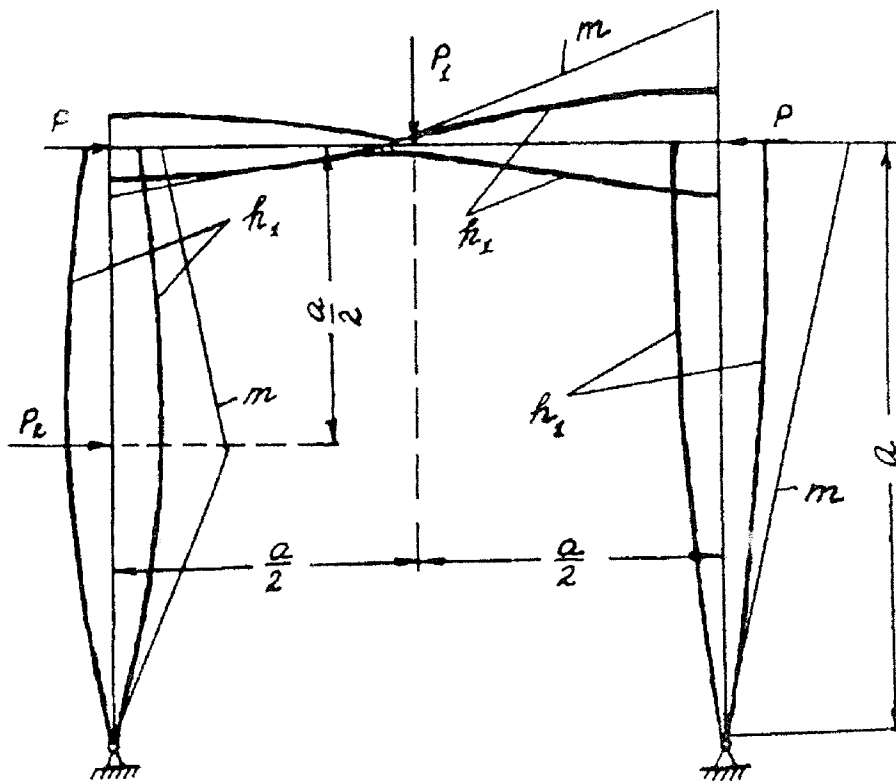


Рис. 5.15.

Отметим, что даже расчеты с удвоенной точностью на ЭВМ не позволяют получить, вследствие негладкости эпюр моментов и разрывов эпюр перерезывающих сил, совпадение минимальных объемов и наименьших статических оценок с такой же точностью, как для арок.

Проведенные расчеты подтверждают вывод о том, что минимальный объем элементов конструкций (балок, арок, рам) с невысокой степенью статической неопределимости (≤ 3) может быть найден при наименьших затратах машинного времени с помощью теоремы (5.4.3) и следствия о наименьшей статической оценке. На рис. 5.14 показано распределение толщины оптимальной арки ($\varphi_0 = \pi/3$) минимального объема ($v = 0.562$) под действием сосредоточенных сил ($p_1/N_0 = 0.02$, $p_2/N_0 = 0.03$, $\varphi_1 = \pi/6$, $\varphi_2 = \pi/12$). На рис. 5.15 приведены распределение толщины h_1 и эпюра изгибающего момента m для рамы ($b/(3a) = 0.02$) минимального объема, $v = 0.544$, под действием сосредоточенных сил ($p/N_{10} = 0.021$, $p_1/N_{10} = 0.02$, $p_2/N_{10} = 0.06$).

Проведены также вычисления минимального объема арки, рассмотренной в работе [80], которые показывают, что приведенное в указанной работе значение минимального объема меньше объема оптимального проекта, полученного по изложенному выше методу на 11%. Такое расхождение в результатах оптимального проектирования вызвано неточным заданием поля весовых коэффициентов и представлением целевой функции.

5.6. Оптимальное проектирование жесткопластических балок сложного поперечного сечения [110]

В практике строительства сооружений широко применяются балки постоянного сложного поперечного сечения, обеспечивающие значительную экономию материала при одинаковой несущей способности, по сравнению с однородными балками постоянного прямоугольного сечения.

В настоящем разделе рассмотрены балки сложного поперечного сечения: двутавровые, коробчатые, трубчатые и трехслойные с легким заполнителем. Установлены условия текучести рассмотренных моделей балок. Численными методами получены оптимальные проекты

минимального объема таких моделей при заданных геометрии, нагружении и опирании. Проведено сравнение объемов оптимальных проектов различных моделей балки при одних и тех же условиях нагружения, а также сравнение жесткостей упругой балки переменного сложного сечения и упругой балки постоянного сечения с одним и тем же объемом. Показано, что проектирование балок минимального объема сложного переменного поперечного сечения выявляет дополнительные резервы снижения материалоемкости элементов конструкций.

Введем допущения, определяющие модели рассматриваемых балок, в той же системе координат, как и в предыдущих разделах.

Двутавровая балка представляет собой жесткую конструкцию, состоящую из двух полок ширины b , толщины h и стенки толщины δ , жестко соединенной с полками в середине, рис. 5.16. Для модели двутавровой балки примем следующие допущения.

1) Можно пренебречь влиянием на несущую способность тонкой балки всех напряжений, кроме напряжений σ_{xx} и σ_{xz} , вызванных изгибающим моментом и перерезывающей силой Q .

2) Напряжения σ_{xx} и σ_{xz} распределены равномерно по ширине балки.

3) Балка выполнена из однородного жесткопластического материала, удовлетворяющего условию текучести Мизеса,

$$f \equiv \sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xz}^2 - \sigma_0^2 = 0. \quad (5.6.1)$$

4) Элементы балки не теряют как местной так и общей упругой и упругопластической устойчивости до перехода ее в предельное состояние, определяемое согласно традиционно принятым в теории предельного равовесия допущениям [47-54].

5) Для скоростей перемещений балки справедлива линейная гипотеза [96-97] и, в частности, гипотеза Кирхгофа:

$$u_x = a_x(x)z, \quad W = W(x), \quad (5.6.2)$$

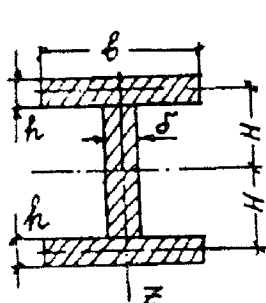


Рис. 5.16.

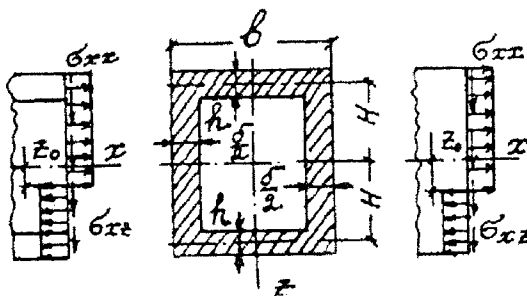


Рис. 5.17.

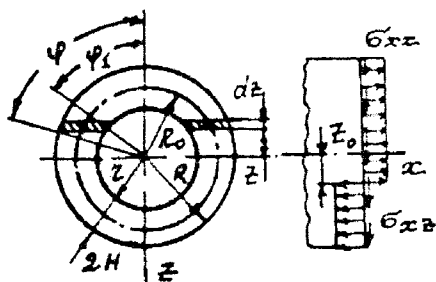


Рис. 5.18.

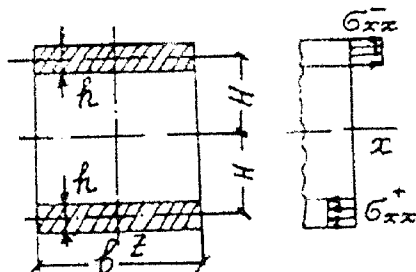


Рис. 5.19.

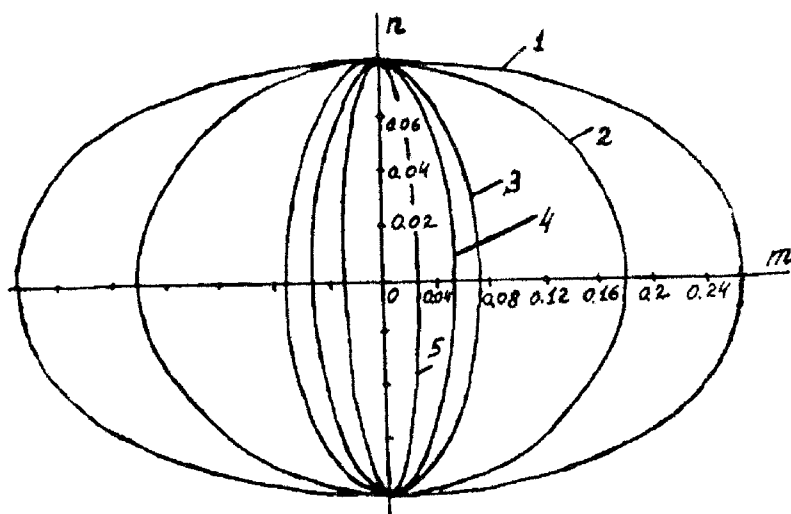


Рис. 5.20.

где u_x – продольные скорости перемещений, a_x – угловая скорость сечения, W – скорость прогиба балки.

6) Скорости деформаций определены по скоростям перемещений (5.6.2) из соотношений Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{da_x}{dx} z = k_{11} z, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dx} + a_x \right).\end{aligned}\quad (5.6.3)$$

7) Скорости деформаций и напряжения связаны ассоциированным законом течения:

$$\varepsilon_{xx} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} = 2\lambda \sigma_{xx}, \quad \varepsilon_{xz} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xz}} = 6\lambda \sigma_{xz}, \quad \lambda > 0. \quad (5.6.4)$$

Балка коробчатого сечения представляет собой жесткую конструкцию, состоящую из двух полок постоянной ширины b переменной толщины h и двух стенок переменной толщины $\delta/2$ каждая, соединенных с краями полок под прямыми углами, рис. 5.17. Для модели балки коробчатого сечения также примем допущения 1)–7).

Сечения трубчатой балки образованы концентрическими окружностями радиусов r и R , $r < R$, с цилиндрической срединной поверхностью радиуса $R_0 = (R + r)/2$, рис. 5.18. Для этой модели будем предполагать допущения 1)–3), 5)–7) и, кроме того, будем считать, что полый цилиндр не теряет упругой и упругопластической устойчивости при изгибе до перехода в предельное состояние.

Модель трехслойной балки представляет собой набор двух несущих слоев (полок) постоянной ширины b , переменной толщины h и среднего слоя (заполнителя), препятствующего сближению полок, расстояние между срединными плоскостями которых равно $2H$, рис. 5.19. Для такой модели, кроме допущений 1)–7), примем: а) напряжения, σ_{xx} , σ_{xz} , в полках распределены равномерно, как по ширине так и по толщине; б) влиянием заполнителя на несущую способность можно пренебречь.

С учетом принятых допущений и закона течения (5.6.4), удельная объемная диссипативная функция D_0 указанных моделей имеет вид:

$$D_0 = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} = 2\sigma_0^2 \lambda, \quad (5.6.5)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma_0} \sqrt{k_{11}^2 z^2 + \frac{\varepsilon_{xz}^2}{3}}. \quad (5.6.6)$$

В оптимальном проектировании балок сложного поперечного сечения воспользуемся безразмерными обобщенным усилием n и моментом m , образованными с помощью постоянных параметров. Тогда для погонной диссипативной функции D_1 , с учетом равенств (5.6.3)–(5.6.5), получим выражение:

$$D_1 = \int_S D_0 dS = 2\sigma_0 b_0^2 (m\kappa + n\varepsilon), \quad (5.6.7)$$

где $S = s_0 b_0^2$, S и s_0 – площадь и относительная площадь поперечного сечения балки, κ и ε – обобщенные скорости деформаций, b_0 – постоянный заданный параметр размерности длины, причем

$$\begin{aligned} m &= \frac{M_{xx}}{N_{10}}, & n &= \frac{N_{xz}}{N_{10}}, & \kappa &= \frac{k_{11}b_0}{2}, \\ \varepsilon &= \varepsilon_{xz}, & M_{10} &= \sigma_0 b_0^3, & N_{10} &= 2\sigma_0 b_0^2, \\ M_{xx} &= \int_S \sigma_{xx} z dS, & N_{xz} &= \int_S \sigma_{xz} dS, & \kappa &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial m}, \\ \varepsilon &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial n}, & \lambda_1 &> 0, \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

где функция текучести $F_1(m, n)$ подлежит определению для каждой модели балки, λ_1 – произвольный положительный множитель.

Внутренние изгибающий момент M_{xx} и перерезывающая сила N_{xz} связаны с внешними изгибающим моментом M и перерезывающей силой Q , которые определяются из уравнений равновесия:

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = q, \quad M = -M_{xx}, \quad Q = -N_{xz}, \quad (5.6.9)$$

где q – нагрузка.

Определим условия текучести в обобщенных усилиях и моментах для каждой из указанных моделей балки.

Для двутавровой балки из уравнений (5.6.1), (5.6.3)-(5.6.8) находим (схема на рис. 5.16):

$$\begin{aligned}
 |m| &= H_1^2 \{ I_1 [(-1 - t/2), (-1 + t/2)] + \omega I_1 [(-1 + t/2), (1 - t/2)] + \\
 &\quad + I_1 [(1 - t/2), (1 + t/2)] \}; \\
 2|n|\sqrt{3} &= H_1 \{ I_2 [(-1 - t/2), (-1 + t/2)] + \omega I_2 [(-1 + t/2), (1 - t/2)] + \\
 &\quad + I_2 [(1 - t/2), (1 + t/2)] \}; \quad (5.6.10)
 \end{aligned}$$

где

$$I_1(A_1, A_2) = \frac{1}{2}(A_2\sqrt{A_2^2 + a^2} - A_1\sqrt{A_1^2 + a^2}) - \frac{a^2}{2} \ln B,$$

$$I_2(A_1, A_2) = a \int_{A_1}^{A_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + a^2}} = a \ln B,$$

$$B = \frac{(A_2 + \sqrt{A_2^2 + a^2})}{(A_1 + \sqrt{A_1^2 + a^2})}, \quad \zeta = \frac{z}{H}, \quad a = \left| \frac{\varepsilon}{2\kappa\sqrt{3}} \right|,$$

$$H_1 = \frac{H}{b_0}, \quad h_1 = \frac{h}{b_0}, \quad t = \frac{h_1}{H_1},$$

$$\omega = \frac{\delta}{b_0}, \quad b_0 = b, \quad 0 \leq a \leq \infty.$$

Из уравнений (5.6.10) следуют предельные случаи: если $n = 0$, то $a = 0$, $|m| = H_1^2[2t + \omega(1 - t/2)^2]$; если $m = 0$, то $a = \infty$, $|n| = H_1[2t + \omega(2 - t)]/(2\sqrt{3})$. Эти предельные случаи нетрудно получить, минуя интегрирование.

Условие текучести коробчатой балки (схема на рис. 5.17) имеет такой же вид (5.6.10). Разница состоит только в том, что материал стенки толщиной δ двутавровой балки распределен на две стенки толщиной $\delta/2$ каждая балки коробчатого сечения.

Уравнения (5.6.10) неудобны для численного построения кривой текучести, так как параметр a изменяется в пределах $0 \leq a \leq \infty$. Этого

затруднения можно избежать, если отобразить интервал $a[0, \infty)$ на интервал с помощью функции $\beta[0, 1)$,

$$a = \frac{2(1 - t/2)\sqrt{\beta}}{(1 - \beta)}.$$

Кривые текучести (5.6.10), построенные при различных параметрах, H_1 , h_1 , ω , с одной и той же относительной площадью сечения $s_0 = 0.14$, показаны на рис. 5.20: 1($H_1 = 1.24$, $h_1 = 0.08$, $\omega = 0.05$); 2($H_1 = 0.79$, $h_1 = 0.08$, $\omega = 0.08$); 3($H_1 = 0.265$, $h_1 = 0.13$, $\omega = 0.05$); 4($H_1 = 0.19$, $h_1 = 0.13$, $\omega = 0.08$); 5($H_1 = 0.14$, $h_1 = 0$, $\omega = 1$). Кривая 5, выражающая условие текучести однородной балки прямоугольного сечения толщиной $2H_1$ практически сливается с аппроксимирующей кривой текучести, использованной в разделе 5.5, (5.4.39).

Условие текучести балки трубчатого сечения (схема на рис. 5.18) в обобщенных усилиях и моментах получается аналогично и имеет вид:

$$\begin{aligned} |m| &= 2R_1^3[J_1(-1, 1) - J_2(-\beta_1, \beta_1)]; \\ |n|\sqrt{3} &= R_1^2[J_3(-1, 1) - J_4(-\beta_1, \beta_1)]; \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

где

$$J_1(A_1, A_2) = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\zeta^2 \psi_1}{\psi_3} d\zeta, \quad J_2(A_1, A_2) = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\zeta^2 \psi_2}{\psi_3} d\zeta,$$

$$J_3(A_1, A_2) = a_1 \int_{A_1}^{A_2} \frac{\psi_1}{\psi_3} d\zeta, \quad J_4(A_1, A_2) = a_1 \int_{A_1}^{A_2} \frac{\psi_2}{\psi_3} d\zeta,$$

$$R_1 = \frac{R}{b_0}, \quad \beta_1 = \frac{r}{R}, \quad h = \frac{(R - r)}{2b_0}, \quad r_0 = \frac{R_0}{b_0}, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad b_0 = R_0,$$

$$a_1 = \left| \frac{\varepsilon}{2\kappa R_1 \sqrt{3}} \right|, \quad \psi_1 = \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \psi_2 = \sqrt{\beta_1^2 - \zeta^2}, \quad \psi_3 = \sqrt{\zeta^2 + a_1^2}.$$

Уравнения (5.6.11) являются параметрическими уравнениями в эллиптических интегралах кривой текучести балки трубчатого сечения в зависимости от параметра a_1 , $0 \leq a_1 \leq \infty$.

Кривые текучести с различными параметрами трубчатого сечения приведены на рис. 5.21: 1($r_0 = 1$, $h = 0.5$); 2($r_0 = 0.5$, $h = 0.5$); 3($r_0 = 1$, $h = 0.1$); 4($r_0 = 0.5$, $h = 0.1$). Кривая текучести 2 на рис. 5.21 получена для стержня круглого сечения, при этом: если $a_1 = 0$, то $|m| = 4/3$, $n = 0$; если $a_1 = \infty$, то $m = 0$, $|n| = 0.9$.

Наконец, приведем условие текучести трехслойной балки (схема на рис. 5.19):

$$\frac{m^2}{4H_1^2 h_1^2} + 3\frac{n^2}{h_1^2} - 1 = 0, \quad (5.6.12)$$

где

$$H_1 = H/b_0, \quad h_1 = h/b_0, \quad b_0 = b.$$

Если перейти к другим обобщенным усилию $n_{xx} = n/h_1$ и моменту $m_{xx} = m/(2H_1 h_1)$, то условие текучести (5.6.12) упрощается:

$$m_{xx}^2 + 3n_{xx}^2 = 1, \quad (5.6.13)$$

причем для обобщенных скоростей деформаций, κ_1 , ε_1 , согласно равенствам (5.6.5)-(5.6.8), имеем

$$\kappa_1 = Hk_{11}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}. \quad (5.6.14)$$

Выбор обобщенных переменных, например, (5.6.8) или (5.6.13)-(5.6.14) не влияет на результаты оптимального проектирования, но может, однако, привести к более простым методам исследования.

Полученные кривые текучести (5.6.10)-(5.6.12) позволяют определить минимальные объемы балок сложного поперечного сечения. При этом критерий Шилда (5.4.14) правомерен, если минимизация объема производится по одному параметру сечения. В случае дополнительных соотношений между параметрами сложного поперечного сечения (например, конструктивного или технологического характера), приходим, на основании равенств (5.4.13), к известным задачам (Лагранжа, Майера, Больца) вариационного исчисления на условный экстремум [273]. В следующих ниже примерах критерий Шилда применен только для минимизации объема трехслойной балки с учетом перерезывающих сил. В каждом примере оптимальный проект балки определен,

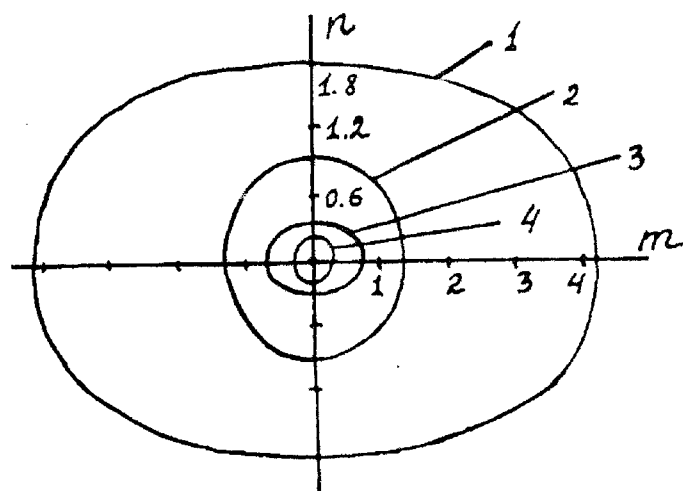


Рис. 5.21.

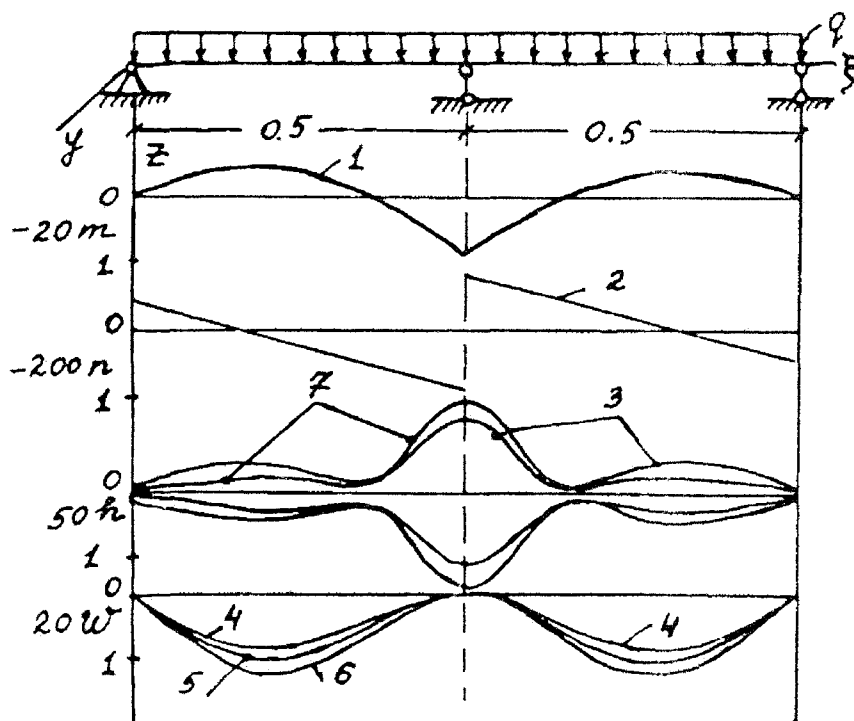


Рис. 5.22.

на основании равенств (5.4.13), как наименьшая статическая оценка объема V ,

$$V = 2b_0^2lv, \quad v = \int_0^1 s_0 d\xi, \quad \xi = x/l. \quad (5.6.15)$$

Из уравнений (5.6.9), с учетом равенств (5.6.8), определим функции $m(\xi)$ и $n(\xi)$ по известным правилам сопротивления материалов с точностью до неизвестных лишних реакций связей статически неопределимой балки. С помощью условий текучести (5.6.10), (5.6.11) или (5.6.12) найдем зависимость оптимизируемого параметра сечения, следовательно, и площади поперечного сечения s_0 , от неизвестных лишних реакций связей. Минимальный объем получим из равенства (5.6.15) в результате решения задачи определения минимума интеграла, зависящего от параметров – неизвестных реакций лишних связей.

Приведем результаты оптимального проектирования различных моделей один раз статически неопределимой двухпролетной балки под действием равномерно распределенной нагрузки погонной интенсивности $q = \sigma_0 b_0 \tilde{q}$, $\tilde{q} = 4\mu p_1$, $p_1 = 0.62 \cdot 10^{-2}$, $\mu = b_0/l = 0.02$.

а) Трехслойная балка. Оптимальный объем v_0 , определенный по критерию Шилда (5.4.14) с условием текучести (5.6.12) равен нижней статической его оценке $v_{ст}$,

$v_{опт} = v_{ст} = 0.00851$, то есть в 13.5 раз меньше объема оптимальной однородной балки прямоугольного сечения, найденного в разделе 5.3 при одинаковых нагружении и опирании, ($\mu = 0.02$, $H_1 = 1$). Зависимости $m(\xi)$, $n(\xi)$, $h_1(\xi)$, $w(\xi)$ показаны на рис. 5.22 кривыми 1,2,3,4, соответственно. Посчитаны также зависимость $w(\xi)$ упругой балки с переменной толщиной слоев, как у оптимальной, (кривая 5 на рис. 5.22), и зависимость $w(\xi)$, (кривая 6 на рис. 5.22), для упругой балки с постоянной толщиной слоев, но тем же объемом, как у оптимальной, с одинаковыми модулями упругости, при одной и той же нагрузке. Определено отношение η , $\eta = w_c/w_v$, где w_c – максимальный прогиб упругой балки постоянного сечения, w_v – максимальный прогиб оптимальной балки переменного сечения в упругом состоянии. Для рассматриваемой трехслойной балки $\eta = 1.26$. Следовательно оптимальная

жесткопластическая балка в упругом состоянии более жесткая, чем балка постоянного сечения при одинаковых объеме и нагружении. Получена наименьшая кинематическая оценка минимального объема балки методом Ритца с последовательностями (5.4.33), $v_{k1} = 0.0073385$, которая меньше оптимального объема на 14%. Зависимости толщины $h_1(\xi)$ несущих слоев балки, при которой кинематическая оценка минимальна, показана кривой 7 на рис. 5.22. Зависимости оптимального объема $v_{ст(опт)}$, в наименьшей кинематической оценки $v_{нст}^k$, полученной на основе поля скоростей упругой балки постоянной толщины, и наименьшей кинематической оценки $v_{пер}^k$, полученной с помощью эквивалентного поля скоростей упругой балки переменной толщины, равной толщине оптимальной балки, от параметра μ показаны кривыми $v_{ст(опт)}$, $v_{нст}^k$ и $v_{пер}^k$ на рис. 5.23. Анализ кривых на этом рисунке показывает, что наименьшие кинематические оценки, определенные по указанным полям скоростей различаются не более, чем на 2% в данной области изменения параметра μ и при $\mu = 0.01$ наименьшая кинематическая оценка меньше оптимального объема на 5%. Учет перерезывающей силы, как следует из сравнения объема $v_{ст(опт)}$ с объемом v_0 (5.4.36), приводит к уменьшению оптимального объема на 8%.

б) Двутавровая балка. Нахождение кинематической оценки балки двутаврового или коробчатого сечения требует большего времени счета на ЭВМ. Поэтому для таких балок определены только наименьшие статические оценки объемов, которые, согласно теореме (5.4.3), равны оптимальным объемам. Геометрические размеры и параметры нагружения приняты такими же, что и для описанной уже трехслойной балки.

В первом варианте на основе условия текучести (5.6.10) рассчитан оптимальный объем $v_{опт1}$ и оптимальное распределение толщины $h_1(\xi)$ полки, толщины $\omega(\xi)$ стенки с отношением $\omega/h_1 = 0.6$ и расстоянием между срединными плоскостями полок $H_1 = 1$. Система нелинейных уравнений (5.6.10) решалась методом Ньютона для каждого значения вектора (m, n) в зависимости от реакции в средней опоре, по которой проводилась минимизация относительного объема v . В результате получены зависимости, $m(\xi)$, $n(\xi)$, $h_1(\xi)$, прогиба упругой

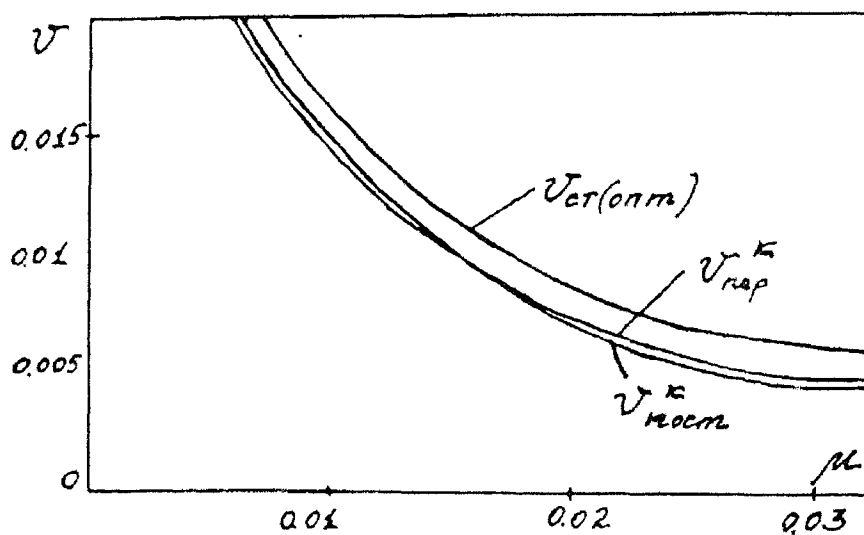


Рис. 5.23.

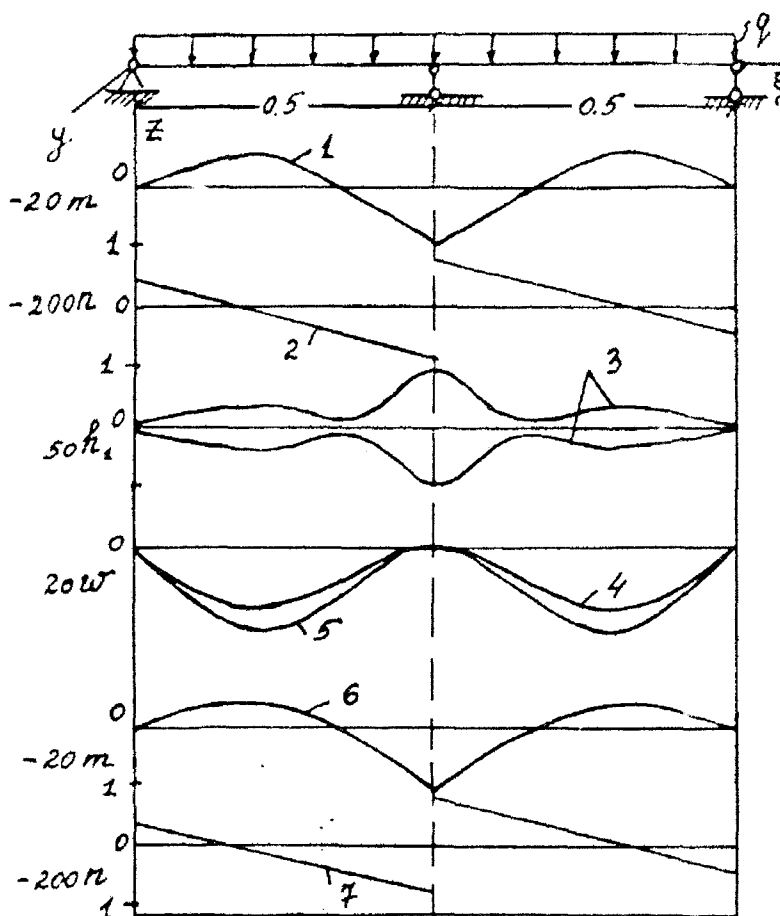


Рис. 5.24.

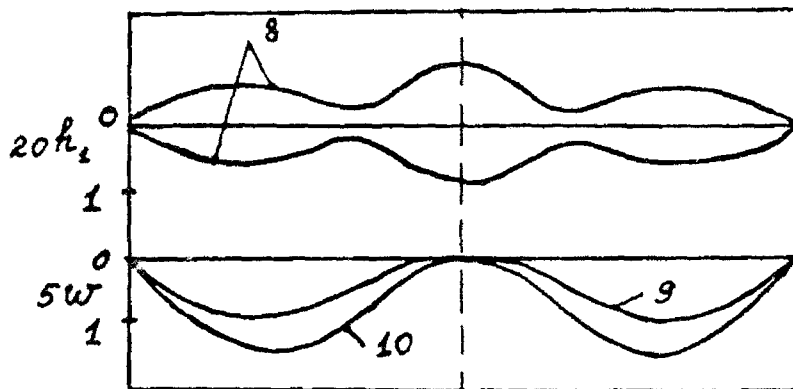


Рис. 5.25.

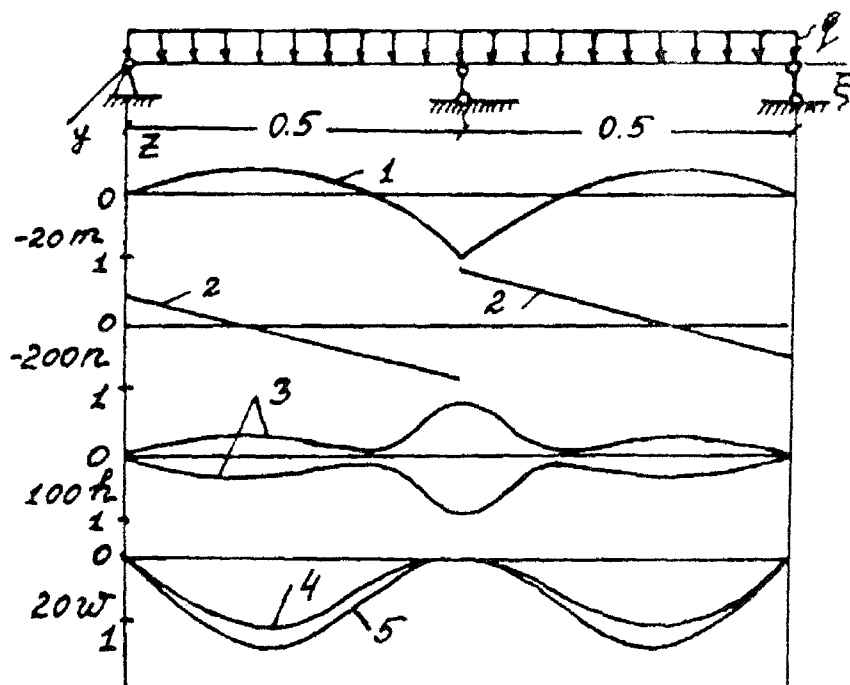


Рис. 5.26.

балки $w_{пер}(\xi)$ с переменной толщиной полки $h_1(\xi)$, толщиной стенки $\omega = 0.6h_1$, расстоянием $H_1 = 1$ и прогиба упругой балки $w_{пост}(\xi)$ с постоянной толщиной h_1 ($\omega = 0.6h_1$) и с тем же объемом, которые показаны кривыми 1,2,3,4,5, соответственно, на рис. 5.24. Оптимальный объем равен $v = 0.009887$, то есть в 1.16 раза больше оптимального объема трехслойной балки и в 11.7 раза меньше оптимального объема однородной балки прямоугольного сечения. Упругая двутавровая балка с переменным сечением оптимального проекта более жесткая по сравнению с двутавровой балкой постоянного сечения того же объема, так как в этом случае отношение $\eta = 1.29$.

Во втором варианте проведена оптимизация балки с переменной толщиной полки $h_1(\xi)$, переменной толщиной стенки $\omega = 0.6h_1$ и переменным расстоянием между срединными плоскостями полок $H_1 = 10h_1$. Полученные зависимости, $m(\xi)$, $n(\xi)$, $h_1(\xi)$, $w_{пер}(\xi)$, $w_{пост}(\xi)$, приведены кривыми, 6,7,8,9,10, соответственно, на рис. 5.24–5.25. В этом случае минимальный объем равен $v_0 = 0.02891$, то есть в 3.4 раза больше, чем для трехслойной, и в 4 раза меньше, чем для однородной балки прямоугольного сечения. Максимальный прогиб упругой балки с переменным сечением оптимальной балки на 54% меньше максимального прогиба упругой балки постоянного сечения с теми же объемами и отношениями толщины стенки, расстояния между срединными плоскостями полок к толщине полки, которые соответствуют нормам ГОСТа 8239–56 14–18 номеров профилей двутавровых балок.

в) Трубчатая балка. Для такой балки получена наименьшая статическая оценка объема, равная оптимальному объему $v_0 = 0.030686$. Зависимости, $m(\xi)$, $n(\xi)$, $h(\xi)$, $w_{пер}(\xi)$, $w_{пост}(\xi)$, показаны кривыми, 1,2,3,4,5, соответственно, на рис. 5.26. Следовательно, как и ранее, упругая балка с переменным сечением оптимальной балки более жесткая, чем та же балка постоянного сечения с тем же объемом при одинаковом нагружении ($\eta = 1.29$).

Кривые текучести (5.6.10)–(5.6.12) позволяют найти рациональные проекты балок постоянного сечения. Например, для двутавровых балок, согласно известным положениям теории жесткопластического тела (следствие 5.1.3, теорема 5.4.2), $p_{01} \geq p_{02} \geq p_{03} \geq p_{04} \geq p_{05}$, $V_1 \leq$

$V_2 \leq V_3 \leq V_4 \leq V_5$, где первая группа неравенств справедлива для балок с одинаковыми неизменными объемами, а другая – для балок при одинаковом нагружении. При этом p_{0i} – параметры пропорциональности предельной нагрузки, V_i – объемы балок, соответствующие кривым с номером i на рис. 5.20. Из уравнений (5.6.10)–(5.6.12) следует, что кривые текучести с геометрически подобными сечениями одинаковы. Однако, площади поперечного сечения, объемы и предельные нагрузки различны. Нетрудно провести перерасчет и определить, например, экономию материала, если заменить балку с кривой текучести 5 балкой с кривой текучести 1 на рис. 5.20. Предположим, что балки изготовлены из одного материала, одинаковой длины и перерезывающими силами можно пренебречь, как принято в расчетах по шарнирнопластическим схемам. Обобщенные моменты связаны тогда соотношением $m_1 = 10.8m_5$. Предельные изгибающие моменты балок под действием одинаковых нагрузок должны быть равны, то есть, согласно равенствам (5.6.8) $b_5^3 m_5 = b_1^3 m_1$ или $b_5 = (10.8)^{1/3} b_1$. Отсюда, с учетом равенств (5.6.15) при одинаковой относительной площади s_0 получим $s_1 = s_5 / (10.8)^{2/3} = 0.205s_5$, $V_1 = 0.205V_5$. Следовательно, объем балки с кривой текучести 1 почти в 5 раз меньше объема такой же балки при одинаковой нагрузке, но с кривой текучести 5. Если воспользоваться одной кривой текучести, например, 1 и увеличить (уменьшить) коэффициент подобия сечения в γ раз, то нетрудно установить из аналогичного перерасчета, что объем балки увеличится (уменьшится) в γ^2 раз, а погонная интенсивность равномерно распределенной нагрузки в γ^3 раз.

Таким образом, рассмотренные методы расчета балок позволяют выявить значительные резервы экономии материала. Причинами снижения материалоемкости являются – перераспределение материала в зависимости от напряженного состояния и разнесение материала балки от ее срединной поверхности, широко применяемый способ увеличения жесткости изгибаемых элементов конструкций. Однако, при последнем способе существует опасность создания проектов балок, элементы которых (полки, стенки) неустойчивы уже в упругом состоянии. Вопросы местной устойчивости этих элементов упругих балок могут

быть решены известными методами и в настоящей работе не рассматриваются.

5.7. Устойчивость и оптимальное проектирование жесткопластических элементов конструкций

В разделе 2.5 сделан вывод, что традиционная постановка задачи несущей способности [47-52,83] невозможна, если учесть геометрически нелинейные слагаемые в уравнениях равновесия оболочки. Это вызвано тем обстоятельством, что геометрически нелинейные слагаемые содержат произвольный постоянный положительный множитель c_0 , с точностью до которого определены скорости перемещений и деформаций, а в геометрически линейных слагаемых уравнений равновесия такой множитель отсутствует. Такой множитель содержат и уравнения в геометрически нелинейной постановке задачи оптимального проектирования жесткопластических оболочек.

Условие текучести (5.4.6), записанное в символической форме:

$$F(n, m) = 0, \quad (5.7.1)$$

где $n(n_{ij})$, $m(m_{ij})$ — векторы обобщенных усилий и моментов.

Закон течения (5.4.7) запишем в виде:

$$\varepsilon_{ij}^0 = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial n_{ij}}, \quad k_{ij}^0 = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial m_{ij}}, \quad (5.7.2)$$

Множитель в законе течения (5.7.2), согласно критерию оптимальности (5.4.14) есть известная функция (5.4.15) обобщенных усилий и моментов, толщины оболочки и произвольного положительного постоянного коэффициента C ,

$$\lambda_1 = C f(n, m, h_1), \quad (5.7.3)$$

В результате, решение задачи оптимального проектирования жесткопластических оболочек в геометрически нелинейной постановке состоит, в отличие от задачи в геометрически линейной постановке (раздел 5.4), в определении двадцати двух неизвестных из системы двадцати одного уравнения. Эту систему уравнений обозначим одним

оператором L , а граничные условия – оператором l над неизвестными обобщенными усилиями и моментами, обобщенными скоростями перемещений, толщиной оболочки и коэффициентом C в множителе закона течения,

$$L(n, m, v, C) = 0, \quad l(n, m, v, C) = 0, \quad (5.7.4)$$

где $v(v_1^0, v_2^0, v_3^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, b_3^0)$ – вектор обобщенных скоростей перемещений, $l(n, m, v, C)$ – оператор граничных (статических и геометрических) условий.

Задача (5.7.4) является недоопределенной. Поэтому для нахождения лишнего одного неизвестного (C) потребуем, чтобы оптимальный объем был критическим в бифуркационном смысле. Это требование означает, что при заданном нагружении оптимальная оболочка минимального объема теряет устойчивость с образованием как смежных форм равновесия так и смежных объемных конфигураций. Основным свойством жесткопластической оболочки является ее недеформативность, жесткость до перехода в пластическое состояние. Кроме того, начальное разрушение, главным образом интересующее проектировщика, происходит при ненулевых скоростях перемещений, но при нулевых перемещениях. Поэтому критерий оптимальности (5.4.14) остается справедливым и при исследовании устойчивости жесткопластической оболочки.

Операторы устойчивости L_1 и l_1 определим известным способом,

$$\begin{aligned} L_1(n, m, v, \delta n, \delta m, \delta v, C) &= L(n + \delta n, m + \delta m, v + \delta v, C) \\ &\quad - L(n, m, v, C) = 0, \\ l_1(n, m, v, \delta n, \delta m, \delta v, C) &= l(n + \delta n, m + \delta m, v + \delta v, C) \\ &\quad - l(n, m, v, C) = 0, \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

где сохранены вариации $\delta n, \delta m, \delta v$ только в первой степени.

В силу указанного свойства жесткопластической оболочки ее докритическое состояние под действием заданных нагрузок найдем по геометрически линейной теории оптимального проектирования (см. раздел 5.4). Следовательно, докритический объем не зависит от коэффициента C множителя закона течения. Коэффициент C при известном докритическом состоянии определим из условия нетривиальности решения

краевой задачи (5.7.5). Поэтому минимальный объем оптимального проекта оболочки, определенный по геометрически линейной теории, является критическим в бифуркационном смысле, согласно геометрически нелинейной теории оптимального проектирования.

В качестве примера рассмотрим балку длиной l , толщиной $2h$, постоянной шириной b в условиях продольно-поперечного изгиба. Для исследования жесткопластической устойчивости балки воспользуемся аппроксимирующим условием текучести (см. раздел 5.5),

$$F = m_{11}^2 + n_{11}^2 = K^2, \quad (5.7.6)$$

и соответствующим (5.7.6) выражением для множителя в законе течения (критерия оптимальности),

$$\lambda_1 = \frac{Ch_1^4}{K^2 h_1^4 + m^2}, \quad (5.7.7)$$

где

$$h_1 = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{n^2}{2} + \sqrt{\frac{n^4}{4} + m^2 K^2}}$$

Тогда геометрически нелинейное уравнение предельного равновесия (2.5.16)-(2.5.18) и закон течения балки (5.7.2) в обозначениях раздела 5.5 примут вид:

$$\frac{d^2 m}{d\xi^2} + \frac{8Cnmh_1}{\mu^2 B} = q_1, \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \frac{4Cmh_1}{\mu^2 B}, \quad (5.7.8)$$

$$(B = K^2 h_1^4 + m^2),$$

где $n = N/(2\sigma_0 b^2) = n_{11} h_1$, $q_1 = q/(\sigma \mu^2 b)$, причем N — сжимающие усилия на концах балки, q — равномерная поперечная нагрузка.

Не имея целью исследование закритического поведения балки, примем $N = \text{const.}$ Уравнения устойчивости балки (5.7.5) в этом случае имеют вид:

$$\frac{d^2 \delta m}{d\xi^2} + \frac{8CA n}{\mu^2} \delta m = 0, \quad (5.7.9)$$

$$\frac{d^2 \delta w}{d\xi^2} - \frac{4CA}{\mu^2} \delta m = 0, \quad (5.7.10)$$

где

$$A = [(h_1 + \mu \frac{dh_1}{dm})B - mh_1(4K^2 h_1^3 \frac{dh_1}{dm} + 2m)]/B^2$$

После исключения δm из уравнений (5.7.9)–(5.7.10) получим разрешающее уравнение устойчивости:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{A} \frac{d^2 \delta w}{d\xi^2} \right) + \frac{8Cn}{\mu^2} \frac{d^2 \delta w}{d\xi^2} = 0 \quad (5.7.11)$$

Рассмотрим два случая нагружения шарнирно опертой по концам балки ($q_1 = 0$).

а) Действие только сжимающего усилия N , ($n = \text{const}$). Тогда докритическое состояние, определенное по геометрически линейной теории оптимального проектирования (раздел 5.4), является безмоментным ($m = 0$), толщина оптимальной балки постоянна ($h_1 = n/K$, $A = 1/(K_2 h_1^3) = \text{const} > 0$) и уравнение (5.7.11) имеет вид,

$$\frac{d^4 \delta w}{d\xi^4} + \rho^2 \frac{d^2 \delta w}{d\xi^2} = 0, \quad (5.7.12)$$

где $\rho^2 = 8CK/(\mu^2 n^2)$.

Общее решение уравнения (5.7.12):

$$\delta w = C_1 + C_2 \xi + C_3 \cos \rho \xi + C_4 \sin \rho \xi.$$

Так как балка шарнирно оперта, то имеем следующие граничные условия:

$$\delta w(0) = \delta w(1) = \delta m(0) = \delta m(1) = 0, \quad (5.7.13)$$

где

$$\delta m = \frac{\mu^2}{4CA} \frac{d^2 \delta w}{d\xi^2}$$

Отсюда получим условие нетривиальности решения однородной задачи (5.7.12)–(5.7.13),

$$\sin \rho = 0,$$

или, с учетом равенства (5.7.12),

$$C = \pi\mu^2/(8An) \quad (5.7.14)$$

Отметим, что такое же выражение для коэффициента C получим и из условия нетривиальности решения уравнения (5.7.9) с граничными условиями $\delta m(0) = \delta m(1) = 0$.

б) Балка (стержень) под действием сжимающих усилий N и равных по модулю, но противоположных по направлению моментов пар сил на ее концах. В этом случае докритическое состояние по геометрически линейной теории оптимального проектирования является моментным ($n = \text{const}, m = \text{const} \neq 0$), толщина оптимальной балки постоянна, (5.7.7), знак постоянного коэффициента A зависит от знака величины A_1 ,

$$A_1 = K^2 h_1^5 - m^2 h_1 + m^3 \frac{dh_1}{dm} - 3K^2 m h_1^4 \frac{dh_1}{dm}. \quad (5.7.15)$$

Если $A_1 > 0$, что имеет место при достаточно малых m , то объем оптимальной балки является, как и в случае а), критическим в бифуркационном смысле с выражением (5.7.14) для коэффициента C . Если же $A_1 < 0$, то общее решение уравнения (5.7.12) имеет вид:

$$\delta w = C_1 + C_2 \xi + C_3 \sinh \rho \xi + C_4 \cosh \rho \xi. \quad (5.7.16)$$

Из условия нетривиальности решения (5.7.16) с граничными условиями (5.7.13) получим $C = 0$. Но при таком значении коэффициента C неправомерна процедура вывода разрешающего уравнения (5.7.12) и система уравнений устойчивости (5.7.9)-(5.7.10) распадается. В результате решения распавшейся системы уравнений (5.7.9)-(5.7.10) получим, что смежные формы равновесия для δm , δw состоят из множества кусочнолинейных непрерывных функций и соответствующих объемных конфигураций.

Таким образом, в обоих случаях, а) и б), объем балки, определенный по геометрически линейной теории оптимального проектирования является критическим в бифуркационном смысле.

В более сложных условиях нагружения и опирания коэффициент A может быть переменным, а решение уравнений (5.7.9)-(5.7.11) возмож-

но получить только численными методами. После перехода в уравнениях (5.7.9)-(5.7.11), например, к их конечноразностным аналогам коэффициент C находится из равенства нулю определителя из элементов матрицы дискретных неизвестных $\delta t, \delta w$. При этом вывод, аналогичный полученному в случаях а) и б) сохраняется.

Важным подтверждением вывода о равенстве оптимального и критического объемов служат исследования закритического поведения жесткопластических цилиндрических оболочек [274]. Эти исследования показывают, что в послекритической стадии деформирование происходит при уменьшающейся нагрузке. Поэтому проекты элементов конструкций минимального объема, определенные по критерию оптимального проектирования (5.4.14) получают еще большее практическое значение.

ГЛАВА 6. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАВНОПРОЧНЫХ УПРУГИХ БАЛОК

Проблема оптимального проектирования балок и балочных систем многогранна и для случая однородных конструкций получила широкую известность. Первые исследования относятся еще к началу века и касаются проектирования однородных равнопрочных упругих балок [275]. В последующем эти исследования активно развивались в направлении учета свойств материалов, форм сечений, типов нагрузок и условий эксплуатации [264-265, 276-278, 110]. Известно, что переход конструкции в пластическое состояние еще не означает исчерпания ее несущей способности. Известно также, что допущение пластических деформаций часто значительно увеличивает несущую способность. Количественная оценка этого эффекта продолжает оставаться определяемой только в конкретных примерах. Отсюда важность решения задач предельного состояния неупругих конструкций, класс которых очень широк. Все конструкции, не теряющие упругой устойчивости до перехода в пластическое состояние, относятся к такому классу. Между тем, у практиков-строителей и инженеров-проектировщиков всегда оставались возражения к достоверности результатов проектирования неупругих элементов конструкций из-за несовершенства моделей строительных материалов (упругопластических, жесткопластических и др.). В то же время обостряется проблема снижения материалоемкости и стоимости сооружений, а существующие подходы ее решения по упругому состоянию непригодны в случаях несимметричных по высоте форм сечений, разномодульных материалов, слоистых и при продольно-поперечном изгибе наиболее распространенных элементов конструкций стройиндустрии (балок, арок, рам). В статье [82] разработан подход свободный от этих недостатков, стоящий на грани методов оптимального проектирования элементов конструкций (биметаллических, слоистых, сталебетонных, деревопластмассовых и других) по упругому и неупругому состояниям.

В настоящей главе изложены основные положения работы [82] и решен ряд задач оптимального проектирования слоистых равнопрочных

упругих балок при номинальной температуре (20°) и с учетом повышенных (до 420°) температур в условиях равномерного по их объему нагрева.

6.1. Условие равнопрочности и основные уравнения оптимального проектирования слоистых упругих балок

Рассмотрим балку длиной L , выполненную из трех слоев различных заданных материалов – внутреннего, с неизменяемой по длине высотой $2\bar{H}$ и толщиной $2\bar{b}$, двух наружных с неизменяемыми по длине высотами H_i , ($i = 1, 2$), и переменными по высоте и длине толщинами \bar{b}_i . Согласно гипотезе о прямых нормалях без учета поперечного обжатия для безразмерного усилия n и изгибающего момента m имеем [82]:

$$\begin{aligned} n &= \varepsilon_0 \varphi_{11} + \kappa \varphi_{12} - t \varphi_{13}, \\ m &= \varepsilon_0 \varphi_{12} + \kappa \varphi_{22} - t \varphi_{23}, \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= 2b_0 h_0 e_0 + e_1 a_{11} + e_2 a_{12}, \\ \varphi_{12} &= e_1 a_{13} + e_2 a_{23}, \\ \varphi_{13} &= 2b_0 h_0 e_0 \alpha_0 + e_1 \alpha_1 a_{11} + e_2 \alpha_2 a_{12}, \\ \varphi_{22} &= \frac{2}{3} b_0 e_1 h_0^3 + e_1 a_{14} + e_2 a_{24}, \\ \varphi_{23} &= e_1 \alpha_1 a_{13} + e_2 \alpha_2 a_{23}, \\ a_{11} &= \int_{-(h_0+h_1)}^{-h_0} b_1(x, \zeta) d\zeta, \quad a_{12} = \int_{h_0}^{h_0+h_2} b_2(x, \zeta) d\zeta, \\ a_{13} &= \int_{-(h_0+h_1)}^{h_0} b_1(x, \zeta) \zeta d\zeta, \quad a_{23} = \int_{h_0}^{h_0+h_2} b_2(x, \zeta) \zeta d\zeta, \\ a_{14} &= \int_{-(h_0+h_1)}^{-h_0} b_1(x, \zeta) \zeta^2 d\zeta, \quad a_{24} = \int_{h_0}^{h_0+h_2} b_2(x, \zeta) \zeta^2 d\zeta, \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{\bar{b}}{b^0}, \quad h_0 = \frac{\bar{H}}{H_0}, \quad b_i = \frac{\bar{b}_i}{b^0}, \quad h_i = \frac{H_i}{H_0}, \quad t = \frac{\Delta T}{T_0}, \\
e_0 &= \frac{\bar{E}_0}{E_0}, \quad e_i = \frac{E_i}{E_0}, \quad \alpha_i = \bar{\alpha}_i T^0, \quad \alpha_0 = \bar{\alpha}_0 T^0, \quad \kappa = H_0 \bar{\kappa}, \\
n &= \frac{N}{E_0 F_0}, \quad m = \frac{M}{E_0 F_0 H_0}, \quad F_0 = 2b^0 H_0, \quad x = \frac{x_1}{L}, \quad \zeta = \frac{z}{H_0}, \\
N &= \int_{-(\bar{H}+H_1)}^{\bar{H}+H_2} \sigma b(z) dz, \quad M = \int_{-(\bar{H}+H_1)}^{\bar{H}+H_2} \sigma b(z) z dz.
\end{aligned}$$

Здесь σ — напряжение, \bar{E}_0 , E_i и $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\alpha}_i$ — модули упругости и коэффициенты линейного расширения соответствующих материалов, T и T^0 — текущая и характерная температуры, $T = T^0 + \Delta T$, ΔT — приращение температуры, $2b^0$ и $2H_0$ — постоянные по длине L толщина и высота сечения эталонной балки из материала с модулем упругости E_0 , b — толщина, равная $2\bar{b}$, $2\bar{b}_1$ или $2\bar{b}_2$ для соответствующих слоев, ε_0 — деформация отсчетной поверхности, κ — кривизна, x_1 — координата по длине, z — координата по высоте балки. Модули упругости и пределы упругости, в общем случае, различные при растяжении и сжатии, материалов трехслойной балки предположим изменяющимися в зависимости от температуры.

Уравнения равновесия балки:

$$\frac{dn}{dx} = 0, \quad \frac{dq}{dx} + q_3 = 0, \quad \frac{dm}{dx} + m_1 = \gamma q, \quad (6.1.3)$$

где

$$q_1 = \frac{q_\tau L}{E_0 F_0}, \quad q_3 = \frac{q_n L}{E_0 F_0}, \quad q = \frac{Q}{E_0 F_0}, \quad m_1 = \frac{\bar{m}_1 L}{E_0 F_0 H_0}, \quad \gamma = \frac{L}{H_0}.$$

причем q_τ и q_n — касательная и нормальная составляющая поверхностной нагрузки, \bar{m}_1 — внешний распределенный момент, Q — перерезывающая сила.

Деформацию ε_0 и безразмерную кривизну κ определим из выражений:

$$\varepsilon_0 = \frac{du}{dx}, \quad \vartheta = \frac{dw}{dx}, \quad \kappa = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\vartheta}{dx}, \quad (6.1.4)$$

где $u = U/L$, $w = W/L$, причем U – продольное смещение, W – прогиб.

Граничные условия при $x = 0, 1$:

$$\begin{aligned}(u - u^*)(n - n^*) &= 0, & (w - w^*)(q_3 - q_3^*) &= 0, \\ (\vartheta - \vartheta^*)(m - m^*) &= 0,\end{aligned}\tag{6.1.5}$$

где величины со звездочками заданы.

Условие равнопрочности, состоящее в том, что на внешних фибрах балки напряжения достигают предела упругости, эквивалентно выполнению равенств:

$$\varepsilon_0 - (h_0 + h_1)\kappa = K_1^\pm, \quad \varepsilon_0 + (h_0 + h_2)\kappa = K_2^\pm, \tag{6.1.6}$$

где

$$K_i^\pm = \frac{\sigma_i^\pm}{E_1} + \alpha_i t, \quad (i = 1, 2),$$

причем σ_i^\pm – пределы текучести (со знаком) i – го материала при растяжении (+) или сжатии (-).

Из (6.1.6) будем иметь:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \frac{1}{h_3} [K_2^\pm(h_0 + h_1) + K_1^\pm(h_0 + h_2)], \\ \kappa &= \frac{1}{h_3} (K_2^\pm - K_1^\pm), \quad h_3 = 2h_0 + h_1 + h_2.\end{aligned}\tag{6.1.7}$$

Предположим, что боковая поверхность балки изменяется по законам:

$$\begin{aligned}b_1(x, \zeta) &= b_0 + d_1(x)(-\zeta - h_0)^{\nu_1}, \quad -(h_0 + h_1) \leq \zeta \leq -h_0, \\ b_2(x, \zeta) &= b_0 + d_2(x)(\zeta - h_0)^{\nu_2}, \quad h_0 \leq \zeta \leq h_0 + h_2,\end{aligned}\tag{6.1.8}$$

где ν_i – варьируемые параметры, $d_i(x)$ – искомые функции.

Тогда для коэффициентов a_{km} из (6.1.2) получим выражения:

$$\begin{aligned}a_{11} &= b_0 h_1 + a_{11}^0 d_1(x), \quad a_{12} = b_0 h_2 + a_{12}^0 d_2(x), \\ a_{13} &= -\frac{1}{2} b_0 h_1 (2h_0 + h_1) + a_{13}^0 d_1(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{23} &= -\frac{1}{2}b_0h_2(2h_0 + h_2) + a_{23}^0d_2(x), \\
 a_{14} &= \frac{1}{3}b_0h_1(3h_0^2 + 3h_0h_1 + h_1^2) + a_{14}^0d_1(x), \\
 a_{24} &= \frac{1}{3}b_0h_2(3h_0^2 + 3h_0h_2 + h_2^2) + a_{24}^0d_2(x),
 \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11}^0 &= \int_{h_0}^{h_0+h_1} (\zeta - h_0)^{\nu_1} d\zeta, & a_{12}^0 &= \int_{h_0}^{h_0+h_2} (\zeta - h_0)^{\nu_2} d\zeta, \\
 a_{13}^0 &= - \int_{h_0}^{h_0+h_1} (\zeta - h_0)^{\nu_1} \zeta d\zeta, & a_{23}^0 &= \int_{h_0}^{h_0+h_1} (\zeta - h_0)^{\nu_2} \zeta d\zeta, \\
 a_{14}^0 &= \int_{h_0}^{h_0+h_1} (\zeta - h_0)^{\nu_1} \zeta^2 d\zeta, & a_{24}^0 &= \int_{h_0}^{h_0+h_1} (\zeta - h_0)^{\nu_2} \zeta^2 d\zeta.
 \end{aligned}$$

Из равенств (6.1.1) и (6.1.9) выразим $d_i(x)$ через усилие n , момент m , деформацию ε_0 и кривизну κ :

$$\begin{aligned}
 d_1(x) &= \frac{1}{\Delta} [A_{22}(n - A_{13}) - A_{12}(m - A_{23})], \\
 d_2(x) &= \frac{1}{\Delta} [A_{11}(m - A_{23}) - A_{21}(n - A_{13})],
 \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}, & A_{11} &= e_1[a_{11}^0(\varepsilon_0 - \alpha_1 t) + a_{13}^0\kappa], \\
 & & A_{12} &= e_2[a_{12}^0(\varepsilon_0 - \alpha_2 t) + a_{23}^0\kappa], \\
 A_{13} &= b_0\{\varepsilon_0(2h_0e_0 + h_1e_1 + h_2e_2) + \frac{\kappa}{2}[h_2e_2(2h_0 + h_2) - \\
 & \quad - h_1e_1(2h_0 + h_1)] - t(2h_0e_0\alpha_0 + h_1e_1\alpha_1 + h_2e_2\alpha_2)\}, \\
 A_{21} &= e_1[a_{13}^0(\varepsilon_0 - \alpha_1 t) + a_{14}^0\kappa], \\
 A_{22} &= e_2[a_{23}^0(\varepsilon_0 - \alpha_2 t) + a_{24}^0\kappa], \\
 A_{23} &= \frac{b_0}{6}\{3\varepsilon_0[h_0e_2(2h_0 + h_2) - h_1e_1(2h_0 + h_1)] +
 \end{aligned}$$

$$+2\kappa[2e_0h_0^3 + e_1h_1(3h_0^2 + 3h_0h_1 + h_1^2) + e_2h_2(3h_0^2 + 3h_0h_2 + h_2^2)] - 3t[h_2e_2\alpha_2(2h_0 + h_2) - h_1e_1\alpha_1(2h_0 + h_1)]\}.$$

В равенствах (6.1.10) деформации ε_0 и кривизна κ определены выражениями (6.1.7) из условия равнопрочности (6.1.6), если распределение поверхностных зон растяжения или сжатия внешних фибр на пределе упругости задано или известно. Усилие n и момент m определены из решения краевой задачи (6.1.3) и (6.1.5) с точностью до лишних неизвестных реакций связей статически неопределимой балки.

В общем случае τ — выполнение условия равнопрочности по всей длине балки в рамках принятых предположений (6.1.8) при произвольном нагружении невозможно. Поэтому при решении задачи оптимального проектирования равнопрочной балки в некоторых ее интервалах возможны отрицательные значения d_i , (6.1.10), и b_i , (6.1.8). Отрицательность положительных по смыслу толщин (b_1 или b_2) означает, что в таких интервалах внешние фибры остаются упругими. В интервалах упругости, где одно из $b_i \geq 0$, соответствующие функции d_i определим из равенств (6.1.10), а в интервалах упругости, где $b_i < 0$, величины d_i определим из условия $b_i = 0$, то есть, согласно равенствам (6.1.8) на внешних фибрах,

$$d_i = -b_0/h_i^{\nu_i}. \quad (6.1.11)$$

Интервал упругости состоит из точек на линии отсчета, в которых выполняется хотя бы одно из равенств (6.1.11). В результате по длине балки образуется, в общем случае, несколько интервалов: интервалы равнопрочности ($b_1 > 0$, $b_2 > 0$); интервалы упругости, где $b_1 = 0$ и $b_2 > 0$ или $b_1 > 0$ и $b_2 = 0$ или $b_1 = b_2 = 0$. В интервалах упругости деформацию ε_0 и кривизну κ определим из равенств (6.1.1), с учетом выражений (6.1.9)-(6.1.11):

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{\Delta_1} [\varphi_{22}(n + t\varphi_{13}) - \varphi_{12}(m + t\varphi_{23})], \\ \kappa &= \frac{1}{\Delta_1} [\varphi_{11}(m + t\varphi_{23}) - \varphi_{12}(n + t\varphi_{13})], \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

где

$$\Delta_1 = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2.$$

По известным ε_0 и κ , (6.1.7), (6.1.12), из краевой задачи (6.1.4)-(6.1.5) найдем лишние неизвестные реакции, а затем из равенств (6.1.8), с учетом выражений (6.1.10) в интервалах равнопрочности и выражений (6.1.10)-(6.1.11) в интервалах упругости, — толщины $b_i(x)$ или форму боковой поверхности балки.

Для определения относительного веса v и стоимости c получим выражения:

$$v = \frac{1}{2} [b_0(2\rho_0 h_0 + \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) + \rho_1 a_{11}^0 \int_0^1 d_1(x) dx + \rho_2 a_{12}^0 \int_0^1 d_2(x) dx], \quad (6.1.13)$$

$$c = \frac{1}{2} [b_0(2c_0 \rho_0 + c_1 \rho_1 h_1 + c_2 \rho_2 h_2) + c_1 \rho_1 a_{11}^0 \int_0^1 d_1(x) dx + c_2 \rho_2 a_{12}^0 \int_0^1 d_2(x) dx]. \quad (6.1.14)$$

Здесь

$$\rho_0 = \frac{\bar{\rho}_0}{\rho^0}, \quad \rho_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\rho^0}, \quad c_0 = \frac{\bar{c}_0}{C^0}, \quad c_i = \frac{\bar{c}_i}{C^0},$$

$$v = \frac{V}{V_0}, \quad c = \frac{C}{C_0}, \quad V_0 = 4H_0 b^0 \rho^0 L, \quad C_0 = 4H_0 b^0 \rho_0 c^0 L,$$

где ρ^0 и c^0 — удельные плотность и стоимость материала эталонной балки, $\bar{\rho}_i$ и \bar{c}_i — удельные плотность и стоимость материалов внешних слоев, $\bar{\rho}_0$ и \bar{c}_0 — удельные плотность и стоимость материала внутреннего слоя, V и C — вес и стоимость равнопрочной балки, V_0 и C_0 — вес и стоимость эталонной балки.

На варьируемые параметры, $(b_0, h_0, h_1, h_2, \nu_1, \nu_2)$, наложим ограничения, чтобы в интервалах упругости напряжения в наружных фибрах внешних слоев и по всей длине балки напряжения во внешних

фибрах внутреннего слоя не превосходили соответствующие пределы упругости,

$$\begin{aligned} |\varepsilon_0 + (h_0 + h_1)\kappa| &\leq |K_1^\pm|, & |\varepsilon_0 - (h_0 + h_2)\kappa| &\leq |K_2^\pm|, \\ |\varepsilon_0 + h_0\kappa| &\leq |K_0^\pm|, & |\varepsilon_0 - h_0\kappa| &\leq |K_0^\pm|, \\ K_0^\pm &= \frac{\sigma_0^\pm}{E_0} + \alpha_0 t, \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

причем σ_0^\pm — пределы упругости (со знаком) материала внутреннего слоя при растяжении (+) или сжатии (-).

Таким образом, задача оптимального проектирования равнопрочной статически неопределимой трехслойной балки состоит в нахождении минимума функции (6.1.13) или (6.1.14) указанных варьируемых параметров с ограничениями на них (6.1.15). Для решения такой задачи определения относительного минимума веса или стоимости необходимо предварительно задать или определить распределение поверхностных зон растяжения или сжатия наружных фибр внешних слоев на пределах упругости (текучести).

Порядок оптимального проектирования может быть следующий.

1) Определим параметр нагружения или зависимость одного из параметров нагружения через другие параметры нагружения расчетом эталонной балки по допускаемым напряжениям. Для этого решим краевую задачу (6.1.3) и (6.1.5), найдем зависимость усилия n и момента m , а с помощью равенств (6.1.12) при $h_i = 0$, $b_0 = h_0 = 1$, $t = 0$ деформацию ε_0 и кривизну κ от координаты x и лишних реакций связей. Затем решим краевую задачу (6.1.4)-(6.1.5) и определим лишние реакции связей, а также поле перемещений. По найденным деформации ε_0 и кривизне κ определим деформации ε_1 и ε_2 во внешних фибрах эталонной балки из выражений:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \kappa, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \kappa. \quad (6.1.16)$$

Приравнивая наибольшие по длине балки деформации ε_1 и ε_2 к предельным деформациям $K_e^\pm = \sigma_e^\pm / E_0$, (где σ_e^\pm — пределы текучести материала эталонной балки при растяжении или сжатии) найдем искомую зависимость между параметрами нагружения.

2) Оптимальное проектирование равнопрочной балки проводим при тех же параметрах нагружения, что и для эталонной балки.

3) Знаки пределов текучести σ_1^\pm и σ_2^\pm в наружных фибрах внешних слоев равнопрочной балки примем одинаковыми со знаками деформаций ε_1 и ε_2 эталонной балки, соответственно, при всех значениях координаты x . В результате определим предварительное распределение поверхностных зон растяжения или сжатия наружных фибр внешних слоев, а из равенств (6.1.7) найдем деформацию $\varepsilon_0(x)$ и кривизну $\kappa(x)$ равнопрочной балки.

4) Далее воспользуемся изложенной последовательностью оптимального проектирования, согласно равенствам (6.1.8)-(6.1.14) и неравенствам (6.1.15).

Определение минимального веса или стоимости состоит в нахождении варьируемых параметров из системы, в общем случае, трансцендентных уравнений и возможно только численными методами. Для решения поставленной задачи составлена вычислительная программа на языке FORTRAN-90.

6.2. Оптимальное проектирование равнопрочных слоистых статически неопределимых упругих балок при номинальной температуре (20°C) [112]

В рассмотренных ниже примерах трехслойная балка выполнена из материалов: внутренний слой – сталь СТОС ($e_0 = 1$, $\rho_0 = 1$, $\alpha_0 = 24 \cdot 10^{-5}$, $c_0 = 1$, $\sigma_0^+/E_0 = -\sigma_0^-/E_0 = 0.1 \cdot 10^{-3}$); первый слой ($i = 1$) – дюралюминий Д1Л ($e_1 = 0.36$, $\rho_1 = 0.338$, $\alpha_1 = 44 \cdot 10^{-5}$, $c_1 = 7.5$, $\sigma_1^+/E_1 = -\sigma_1^-/E_1 = 4.85 \cdot 10^{-3}$); второй слой ($i = 2$) – титановый сплав ВТЗ ($e_2 = 0.55$, $\rho_2 = 0.575$, $\alpha_2 = 17.2 \cdot 10^{-5}$, $c_2 = 1.88$, $\sigma_2^+/E_2 = -\sigma_2^-/E_2 = 7.4 \cdot 10^{-3}$). Эталонную балку предполагаем выполненной из материала внутреннего слоя, предварительно разгруженного из пластического состояния при растяжении с идеальным эффектом Баушингера ($\sigma_e^+/E_0 = 1.24 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_e^-/E_0 = -0.76 \cdot 10^{-3}$). Механические характеристики материалов слоев соответствуют справочным данным при характерной (номинальной) температуре $T^0 = 20^\circ\text{C}$ [274].

В первом примере рассмотрим жестко заделанную одним концом ($x = 0$) и шарнирно опертую на другом конце балку под действием равномерно распределенной нагрузки q_n и растягивающего усилия N_0 ($n_0 = 0.5 \cdot 10^{-4}$, $q_1 = m_1 = 0$) [279].

Решение краевой задачи (6.1.3) и (6.1.5):

$$m = m_A + \gamma \left(R_A x - \frac{1}{2} q_3 x^2 \right), \quad n = n_0, \quad (6.2.1)$$

$$R_A = \frac{1}{2} q_3 - \frac{1}{\gamma} m_A,$$

где m_A — лишняя реакция жесткой заделки.

Из равенств (6.1.12) и (6.1.1) при $h_i = 0$, $h_0 = e_0 = b_0 = 1$, $t = 0$ найдем деформацию ε_0 и кривизну κ :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} n_0, \quad \kappa = \frac{3}{2} m. \quad (6.2.2)$$

С учетом равенств (6.2.2) общее решение краевой задачи (6.1.4) имеет вид:

$$u = \frac{1}{2} n_0 x + C_1, \\ w = C_2 + C_3 x + \frac{1}{2} m_A x^2 + \frac{\gamma}{6} \left(R_A x^3 - \frac{1}{4} q_3 x^4 \right). \quad (6.2.3)$$

С помощью граничных условий (6.1.5),

$$w(0) = w(1) = u(0) = \frac{dw}{dx}(0) = 0,$$

равенств (6.2.3) и (6.2.1) получим:

$$m = -\frac{1}{2} \gamma q_3 \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + x^2 \right), \quad n = n_0, \\ w = -\frac{1}{8} \gamma q_3 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{6} x^3 + \frac{1}{3} x^4 \right), \quad u = \frac{1}{2} n_0 x. \quad (6.2.4)$$

Для деформаций ε_1 и ε_2 , согласно равенствам (6.2.2) и (6.2.4) получим выражения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}n_0 - \frac{3}{4}\gamma q_3 \left(x - \frac{1}{4}\right)(1-x), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2}n_0 + \frac{3}{4}\gamma q_3 \left(x - \frac{1}{4}\right)(1-x).\end{aligned}\quad (6.2.5)$$

Отсюда следует, что наибольшие деформации ε_1 и ε_2 возникают в заделке и с начала нагружения впервые достигают предела текучести напряжения во внешних фибрах дюралюминиевого слоя при сжатии. Тогда из равенства (6.2.5) при $\varepsilon_1 = \sigma_e^-$ получим предельную нагрузку q_3 эталонной балки по допускаемым напряжениям:

$$q_3 = \frac{16}{3\gamma} \left(\frac{\sigma_e^-}{E_0} - \frac{1}{2}n_0 \right). \quad (6.2.6)$$

Подставляя выражение (6.2.6) для предельной нагрузки в равенства (6.2.1), получим:

$$n = n_0, \quad m = \left[m_A + \frac{8}{3} \left(\frac{\sigma_e^-}{E_0} - \frac{1}{2}n_0 \right) x \right] (1-x). \quad (6.2.7)$$

На основании равенств (6.2.7) последующая процедура оптимального проектирования и, следовательно, минимальный вес или стоимость равнопрочной трехслойной балки не зависят от параметра γ .

Решение краевой задачи (6.1.4)-(6.1.5) для трехслойной равнопрочной балки имеет вид:

$$\begin{aligned}u &= \int_0^1 \varepsilon_0(x) dx, \\ w &= -\gamma \left\{ \int_0^x \left[\int_0^x \kappa(x) dx \right] dx - x \int_0^1 \left[\int_0^x \kappa(x) dx \right] dx \right\}.\end{aligned}\quad (6.2.8)$$

Реакцию жесткой заделки m_A определим с помощью условия $dw(0)/dx = 0$, то есть, с учетом равенства (6.2.8), из уравнения:

$$\int_0^1 \left[\int_0^x \kappa(x) dx \right] dx = 0.$$

Здесь и в равенствах (6.2.8) $\varepsilon_0(x)$ и $\kappa(x)$ определены выражениями (6.1.7) в интервалах равнопрочности, выражениями (6.1.12), (6.1.1), (6.1.9)-(6.1.11) – в интервалах упругости балки.

После определения реакции m_A все функции для вычисления веса (6.1.13) или стоимости (6.1.14) становятся известными, чтобы численно решить задачу оптимального проектирования. Применен метод сканирования по трехмерной сетке параметров h_0, h_1, h_2 при $b_0 = 0.15, \nu_1 = \nu_2 = 3$ с последующим введением новой меньшей сетки, включающей полученное приближение. Численное решение получено с точностью $0.625 \cdot 10^{-3}$ для высот, веса и стоимости. Зависимость $q_3(\gamma)$ показана кривой 1 на рис. 6.1, $\nu = 0.06256, c = 0.1592$. На рис. 6.2 показаны вид оптимальной равнопрочной трехслойной балки минимального веса ($\gamma = 40$) со стороны титанового слоя и границы слоев b_0, b_1, b_2 (невидимые – штрихами), причем там, где b_1 или b_2 равны нулю (гребни) балка находится в упругом состоянии. Из результатов вычислений следует, что в оптимальных равнопрочных проектах высота внутреннего, как наименее прочного слоя, мала ($h_{v0} = 0.6 \cdot 10^{-3}$) по сравнению с высотами внешних слоев. Кроме того, в проекте минимального веса высота титанового слоя, как наиболее плотного слоя, значительно меньше высоты дюралюминиевого слоя ($h_{v1} = 1.506, h_{v2} = 0.0688$), а в проекте минимальной стоимости, наоборот, высота дюралюминиевого, наиболее дорогого слоя значительно меньше высоты титанового слоя ($h_{c1} = 0.0625, h_{c2} = 2.231$).

Для сравнения с оптимальной равнопрочной балкой определены минимальные вес Dv и стоимость Dc той же трехслойной балкой с постоянными толщинами без внутреннего слоя ($b_1 = b_2 = b_0, h_0 = 0$) по методу допускаемых напряжений на пределе текучести в одной точке внешних фибр, а также вес vr и стоимость cr после профилирования, согласно равенствам (6.1.8)-(6.1.11), проектов, полученных методом допускаемых напряжений.

В других примерах вычисления проведены при тех же значениях параметров (b_0, ν_1, ν_2) в оптимальных равнопрочных проектах и параметров (b_0, b_1, b_2, h_0) в оптимальных проектах по допускаемым напряжениям, как и в первом примере. Результаты сведены в таблице

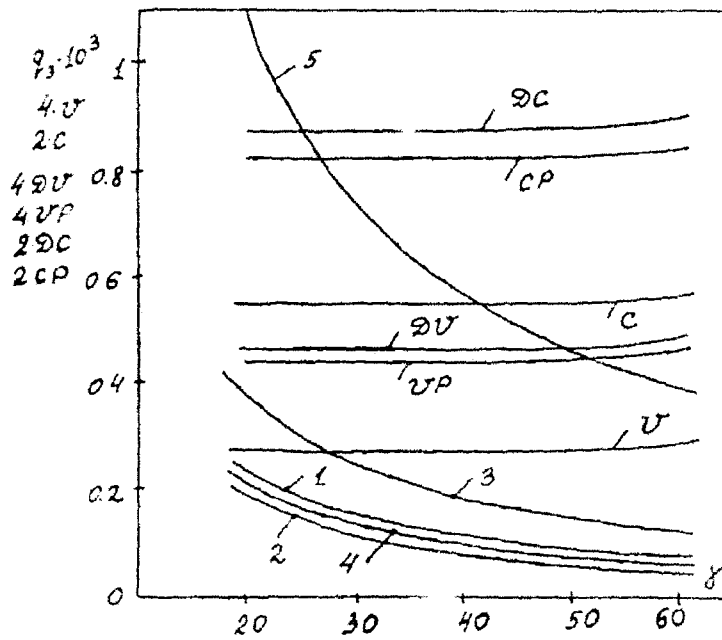


Рис. 6.1.

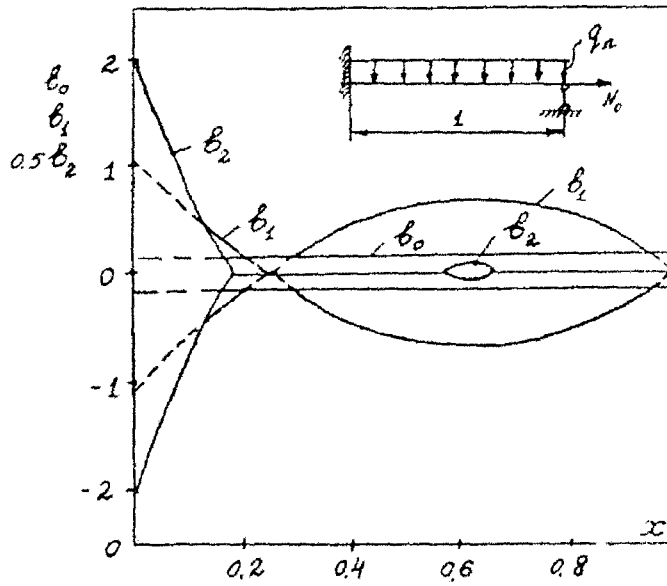


Рис. 6.2.

6.1, причем буквами v и c отмечены высоты слоев оптимальных равнопрочных проектов минимального веса или стоимости, а буквами D и p – вес и стоимость оптимальных проектов, полученных по методу допускаемых напряжений и после профилирования, соответственно.

Таблица 6.1

№. примера	1	2	3	4	5
v	0.0626	0.0624	0.0565	0.0597	0.0682
c	0.1592	0.2557	0.2288	0.2446	0.2767
Dv	0.1091	0.1075	0.1017	0.2028	0.0888
vp	0.0940	0.0923	0.0864	0.1604	0.0852
Dc	0.2792	0.4495	0.4288	0.8163	0.4366
cp	0.2316	0.4042	0.3887	0.6158	0.4077
$hv0$	0.0006	0.0006	0.0000	0.0006	0.0006
$hc0$	0.0000	0.0559	0.0275	0.0537	0.0578
$hv1$	1.5063	0.6625	0.6750	0.6188	0.7062
$hc1$	0.0625	0.5562	0.5062	0.5125	0.5875
$hv2$	0.0688	0.7625	0.7875	0.7125	0.8125
$hc2$	2.231	1.0625	1.0125	0.9750	1.1250

Во втором примере рассмотрена та же балка, как в первом примере, но без растягивающего усилия ($n_0 = 0$). В третьем примере – такая же балка под действием треугольной нагрузки с наибольшей интенсивностью у заделки. В четвертом примере – защемленная одним концом подвижно опертая в середине консольная балка под действием равномерно распределенной нагрузки. В пятом примере – шарнирно опертая на концах и в середине балка под действием равномерно распределенной нагрузки в одном пролете и сосредоточенной силы ($q^* = -0.5 \cdot 10^{-4}$) в середине другого пролета. Зависимости предельной нагрузки $q_3(\gamma)$ в каждом из примеров 2–5 показаны кривыми 2–5, соответственно, на рис. 6.1. Виды оптимальных равнопрочных балок минимального веса

в примерах 2-5 ($\gamma = 40$) со стороны титанового слоя показаны на рис. 6.3-6.6, соответственно. Во всех примерах, кроме пятого, минимальный вес и стоимость не зависят от параметра γ . В пятом примере выявлена слабая зависимость минимальных веса и стоимости от параметра γ . Зависимости $v(\gamma)$, $c(\gamma)$, $Dv(\gamma)$, $vp(\gamma)$, $Dc(\gamma)$, $cp(\gamma)$ в пятом примере показаны на рис. 6.1, а в таблице приведены значения соответствующих величин при $\gamma = 40$. Зависимости $m(x)$, $w(x)$, $u(x)$ в примерах 1-5 показаны на рис. 6.7-6.11.

Полученные результаты оптимального проектирования позволяют сделать следующие выводы.

1) Вес оптимальных равнопрочных балок не менее, чем в 14.7 раза, а стоимость не менее, чем в 3.63 раза меньше веса и стоимости эталонной балки ($v = 1$).

2) Вес оптимальных равнопрочных балок на 31% (5-й пример) - 230% (4-й пример), а стоимость на 56% - 235% меньше, чем вес и стоимость оптимальных проектов с постоянными по длине и высоте параметрами, полученных методом допускаемых напряжений.

3) Профилирование оптимальных проектов, полученных методом допускаемых напряжений, малоэффективно по сравнению с оптимальным проектированием равнопрочных балок - уменьшение веса на 2% - 26% и стоимости на 8% - 33%.

4) Оптимальное проектирование равнопрочных балок в условиях продольно-поперечного изгиба ведет к "вытеснению" (уменьшению высоты) наиболее плотного материала в проектах минимального веса и "вытеснению" более дорогого материала в проектах минимальной стоимости, а также к исчезновению внутреннего, наименее прочного слоя.

5) Оптимальное проектирование равнопрочных балок в условиях поперечного изгиба приводит практически к удалению внутреннего, наименее прочного слоя, достаточно плотного слоя в проекте минимального веса. Однако, в проекте минимальной стоимости необходим тонкий внутренний слой из стали, значительно уменьшающий толщины (ширины) наружных поверхностей из фибр.

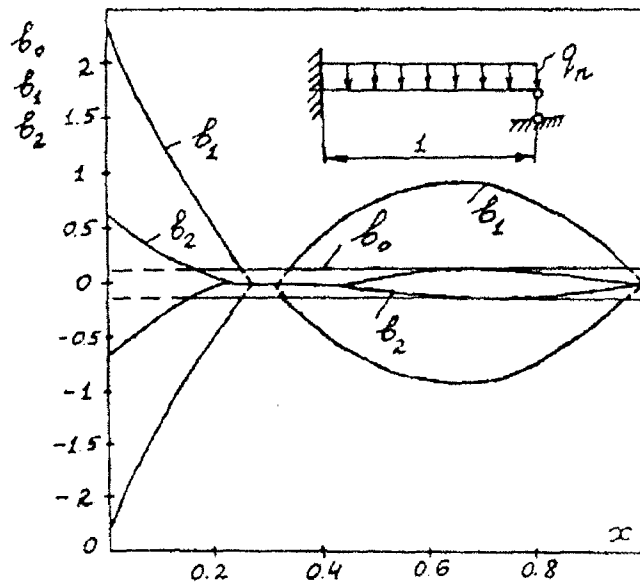


Рис. 6.3.

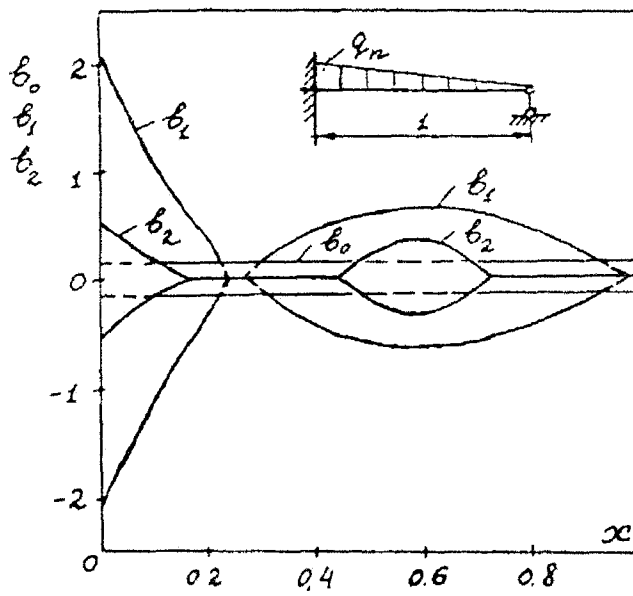


Рис. 6.4.

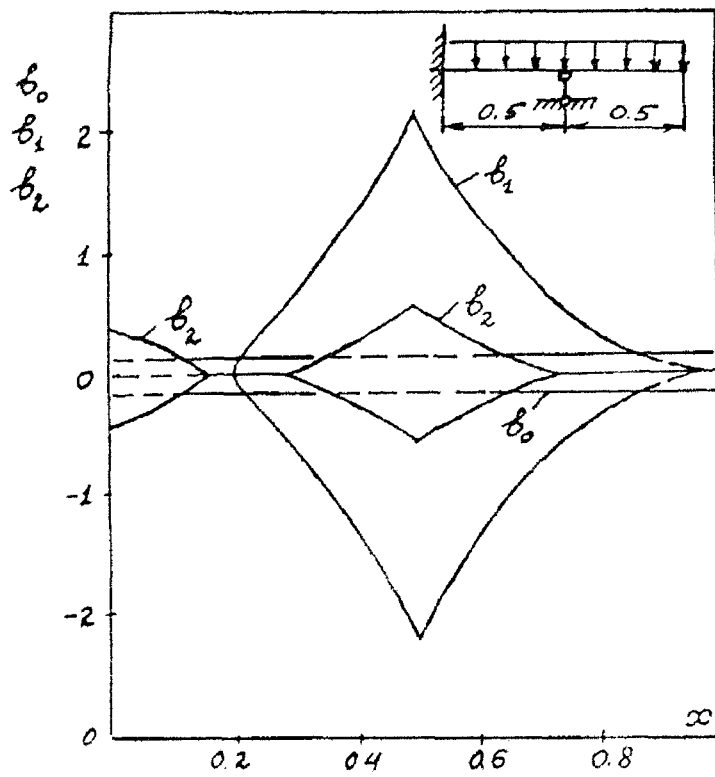


Рис. 6.5.

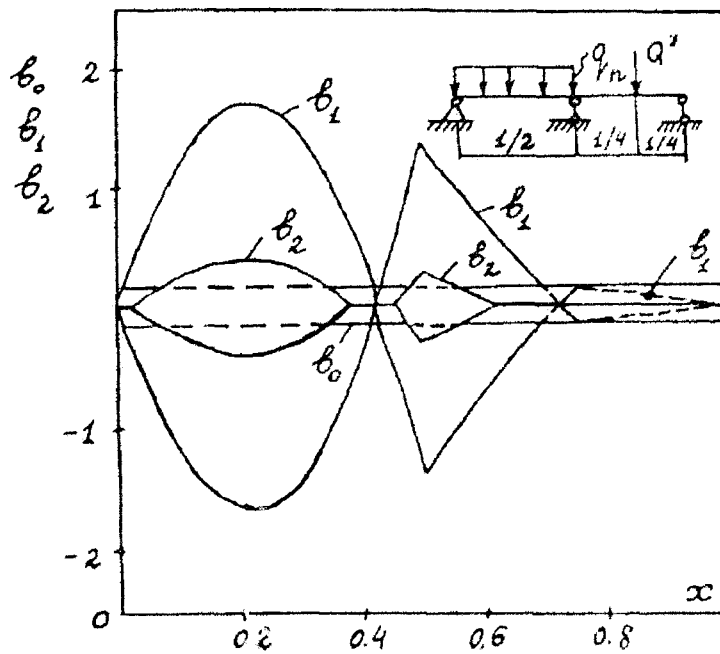


Рис. 6.6.

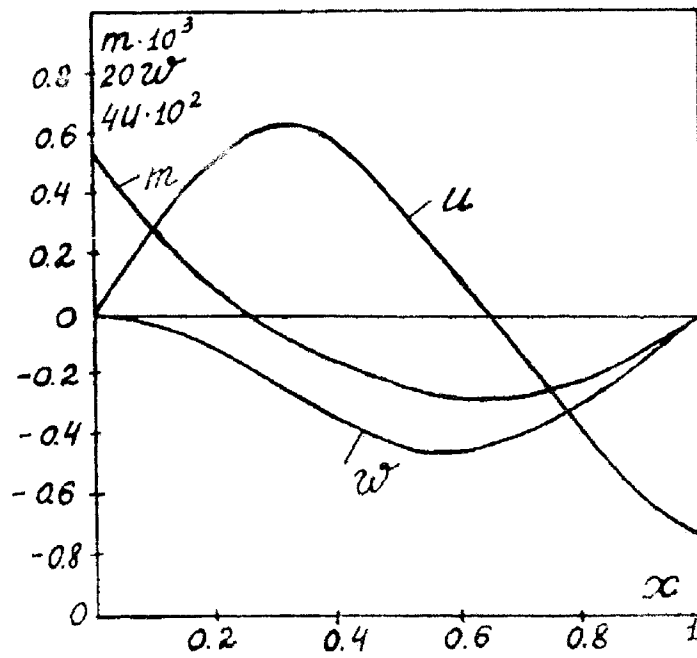


Рис. 6.7.

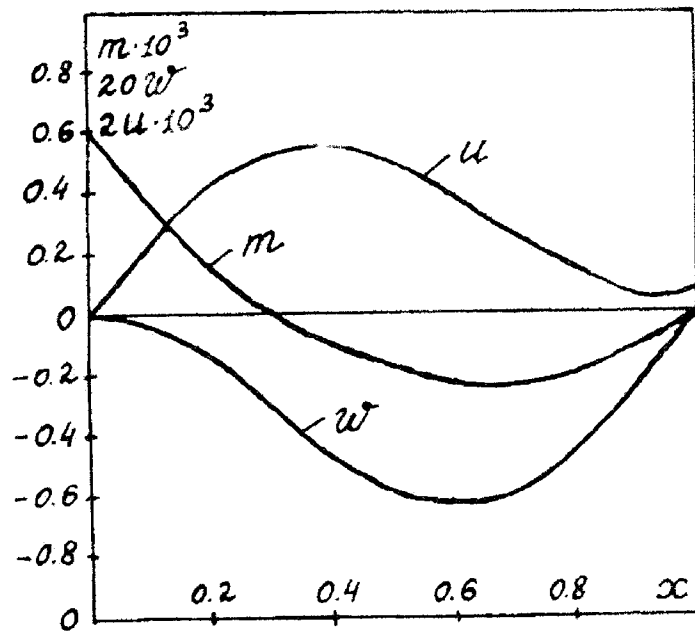


Рис. 6.8.

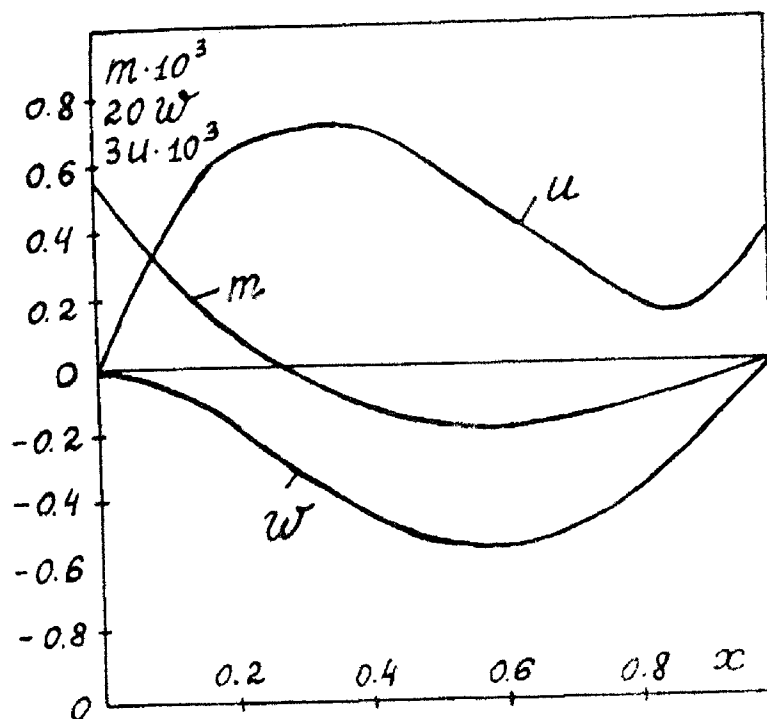


Рис. 6.9.

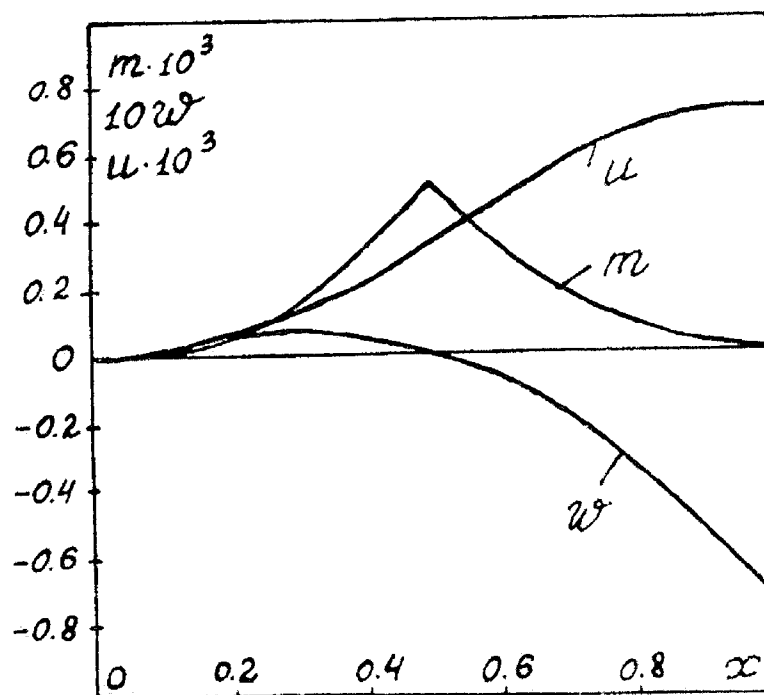


Рис. 6.10.

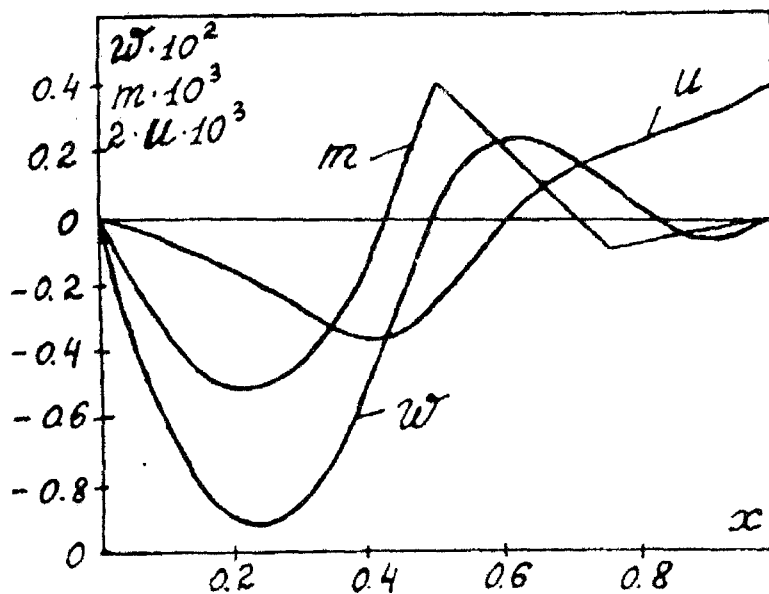


Рис. 6.11.

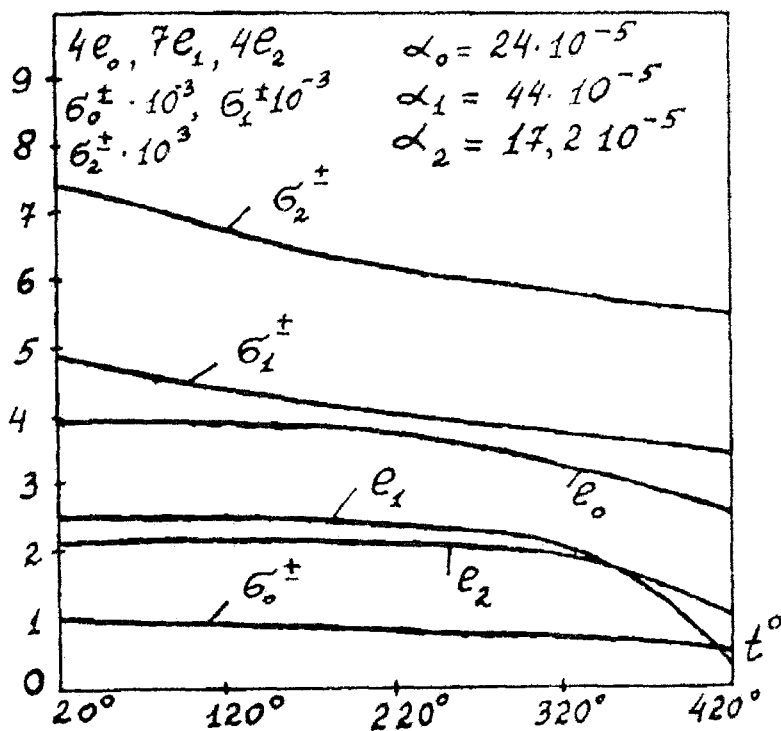


Рис. 6.12.

6.3. Оптимальное проектирование равнопрочных слоистых статически неопределимых упругих балок при повышенных температурах

Под действием температуры происходит изменение механических характеристик строительных материалов. Тем не менее, методика оптимального проектирования балок, изложенная в разделе 6.1 не изменяется, за исключением системы неравенств (6.1.15). К этим неравенствам (6.1.15) следует добавить неравенства, выражающие недопустимость в интервалах упругости перехода за пределы текучести фибр на внутренних поверхностях внешних слоев, соприкасающихся с наружными поверхностями среднего внутреннего слоя:

$$|\varepsilon_0 + h_0 \kappa| \leq |K_1^\pm|, \quad |\varepsilon_0 - h_0 \kappa| \leq |K_2^\pm|. \quad (6.3.1)$$

Кроме того, необходимо выполнение неравенств (6.1.15) и (6.3.1) во всем интервале изменения температуры вплоть до заданного ее значения. Поэтому для численного решения задачи оптимального проектирования требуется значительно больше машинного времени.

В решенных ниже задачах оптимального проектирования материалы балок при номинальной температуре выбраны такими же, как в разделе 6.2. Зависимости механических характеристик материалов, $e_j(t)$, σ_j^\pm , ($j = 0, 1, 2$), от температуры показаны соответствующими кривыми на рис. 6.12.

В первом примере рассмотрена шарнирно опертая по концам и в середине балка под действием равномерно распределенной нагрузки с параметром $\gamma = 40$. Полученные зависимости $v(t)$, $c(t)$, $Dv(t)$, $Dc(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, в обозначениях раздела 6.2, показаны на рис. 6.13. Виды балки со стороны титанового слоя при различных температурах показаны на рис. 6.14–6.15, причем толщинам b_{ki} отвечают температуры $T_i = 20^\circ + 200^\circ(i-1)$, ($k = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$). Не варьируемые значения толщины среднего слоя и параметров, ν_1 , ν_2 , такие же, как в разделе 6.2, ($b_0 = 0.15$, $\nu_1 = \nu_2 = 3$).

Анализ зависимостей от температуры на рис. 6.13 приводит к выводу, что нагрев балки оказывает большое влияние на вес и стоимость

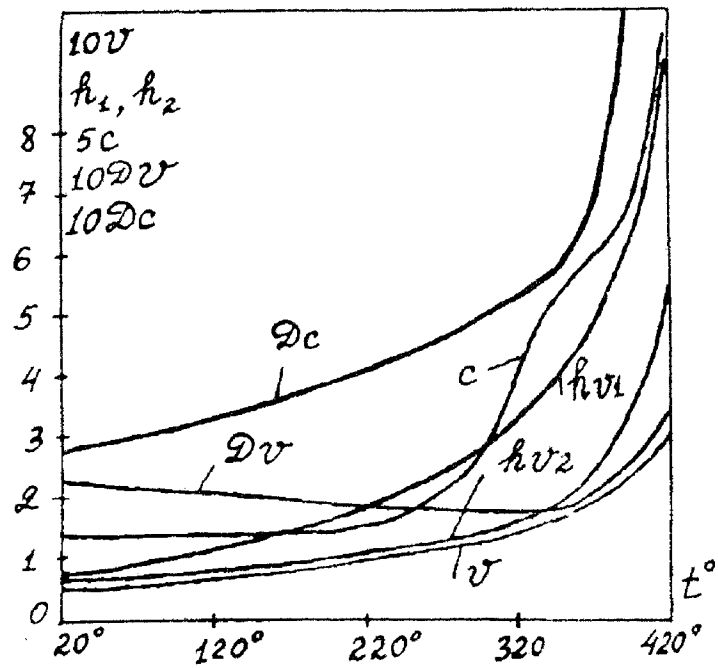


Рис. 6.13.

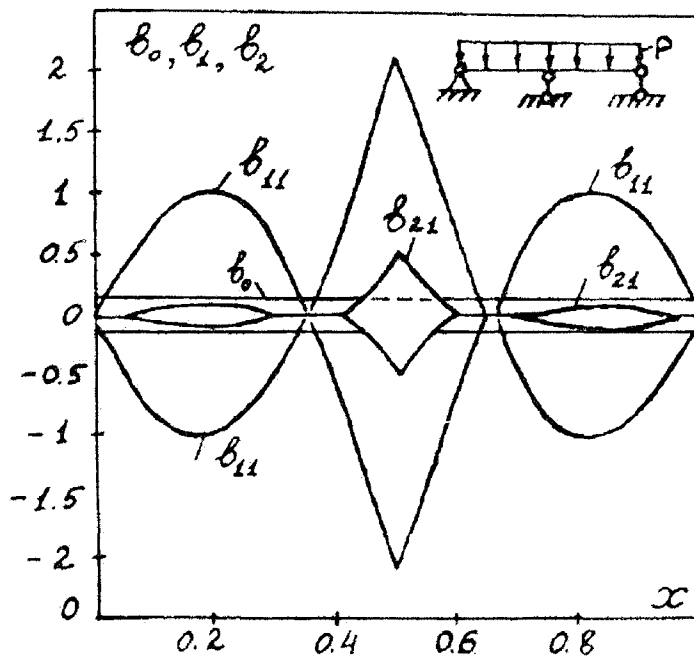


Рис. 6.14.

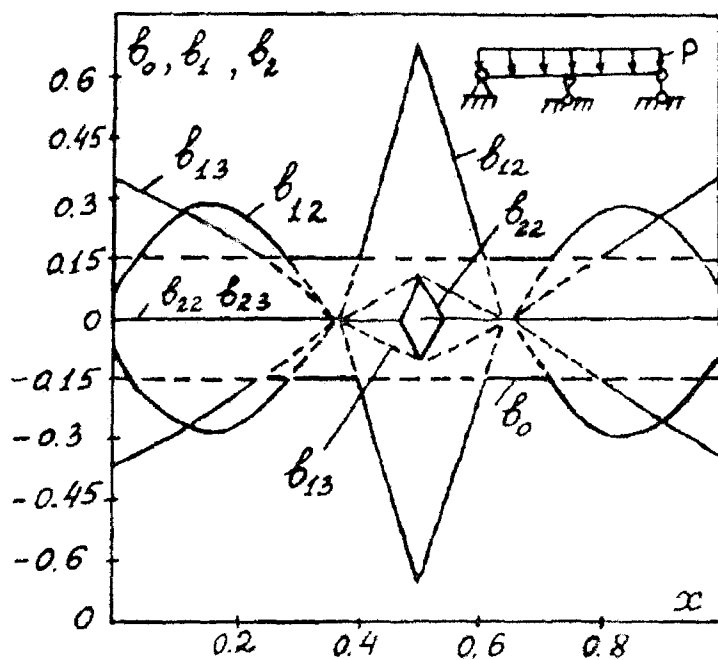


Рис. 6.15

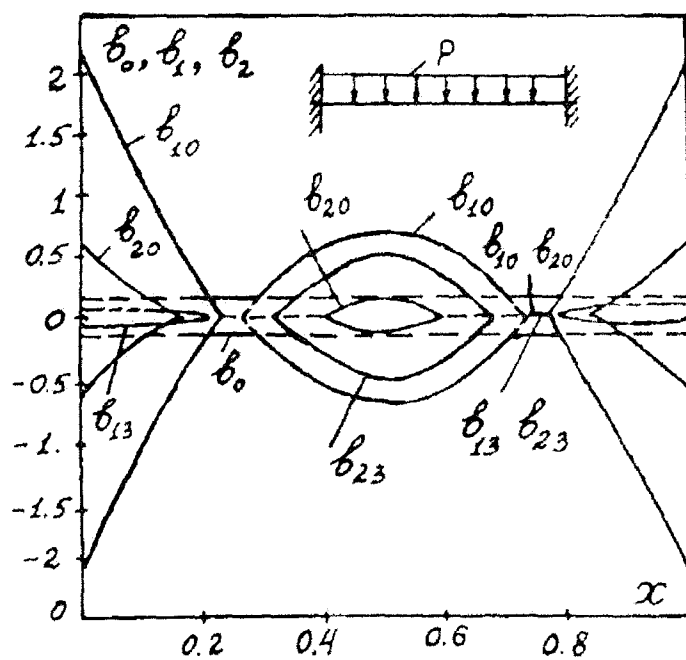


Рис. 6.16.

оптимального проекта. Различный характер зависимостей механических характеристик материалов слоев от температуры (например модулей упругости e_1 и e_2) может привести к немонотонности зависимости веса или стоимости от температуры (кривая c на рис. 6.13). Для оптимальных проектов рассматриваемой балки высота внутреннего слоя оказалась практически равной нулю, за исключением ее значений при номинальной температуре, когда она равна $h_0 = 0.312 \cdot 10^{-2}$ в проекте минимального веса и $h_0 = 0.575 \cdot 10^{-1}$ – в проекте минимальной стоимости. Интересно отметить, что минимальный вес равнопрочной балки и минимальный вес по допускаемым напряжениям при температуре $T = 340^\circ$ практически равны между собой (кривые v и Dv на рис. 6.13). С повышением температуры толщина дюралюминиевого слоя на краю балки возрастает, как будто там возникает заделка. В титановом слое с повышением температуры происходит гребнеобразование.

В другом примере рассмотрена защемленная по концам трехслойная балка под действием равномерно распределенной нагрузки. Виды оптимальных проектов балки при температурах 20° и 420° со стороны титанового слоя показаны на рис. 6.16. Отсюда следует, что высота дюралюминиевого слоя в заделке уменьшается интенсивнее с повышением температуры, чем высота титанового слоя. В последнем около заделки при всех температурах сохраняется гребнеобразная форма, а толщина средней части увеличивается с повышением температуры. Для температуры 420° весь дюралюминиевый слой имеет гребнеобразную форму.

Разработанную методику нетрудно применить и в оптимальном проектировании балок с учетом градиентов температуры. Дополнительное снижение веса и стоимости возможно достигнуть варьированием высот слоев, как показано в работе [82].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложим кратко основное содержание исследований предельных состояний (упругопластической устойчивости, упругопластической несущей способности, жесткопластической несущей способности, жесткопластической устойчивости, упругой несущей способности по допускаемым напряжениям и по критерию равнопрочности) стержней, балок, арок, рам, пластин и оболочек, выполненных в настоящей работе. Приведем также результаты этих исследований, в частности, связанных с проблемой рационального и оптимального проектирования упругих и неупругих, изотропных и анизотропных, однородных и конструктивно-неоднородных элементов конструкций при номинальной и повышенной температурах.

В первой главе выполнен анализ кинематических и физических соотношений, применяемых в известных теориях пластин и оболочек, а также использованных в настоящей работе.

Проанализирована наиболее общая кинематическая гипотеза Васидзу, из которой в частных случаях следуют гипотезы Кирхгофа-Лява, Тимошенко, Рейснера, Нагди, Доннела, Амбарцумяна, Немировского и других ученых.

За основу построения теории неоднородных изотропных пластин и оболочек принята смешанная гипотеза (типа гипотезы Нагди): параллельно перенесенные в базис на отсчетной поверхности оболочки касательные перемещения (скорости перемещений) есть линейные функции, а нормальные перемещения (скорости перемещения) являются квадратичными функциями нормальной координаты. Использование такой гипотезы в теории оболочек предполагает предварительный параллельный перенос перемещений в переменный базис по толщине оболочки, последующее ковариантное дифференцирование и параллельный перенос полученных деформаций (скоростей деформаций) в базис на отсчетной поверхности.

В качестве физических соотношений приняты законы Гука, малых упругопластических деформаций Ильюшина, течения Сен-Венана — Мизеса идеальнопластического материала с гладкими или сингуляр-

ными условиями течения.

Законы малых упругопластических деформаций представлены в единой форме для использования метода упругих решений задач теории пластичности. Для этого введены три целочисленные функции, принимающие значения нуль или единица в зависимости от реализации состояний упругости, активных пластических деформаций (догрузки), разгрузки и вторичных пластических деформаций. Приведены выражения законов малых упругопластических деформаций однородных изотропных оболочек с традиционными допущениями на деформации и напряжения.

Рассмотрена конструктивно-неоднородная трехслойная оболочка, состоящая из двух внешних несущих слоев и среднего слоя, представляющего собой набор ребер, направленных вдоль линий главных кривизн и соединенных в узлах, причем несущие слои, ребра и узлы изготовлены из различных упругопластических упрочняющихся материалов.

В предположении, что ребра расположены достаточно часто, получены зависимости между деформациями ребер и узла с деформациями однородного анизотропного материала среднего слоя, эквивалентного конструктивно-ортотропному неоднородному среднему слою оболочки. Показаны предельные переходы от полученных зависимостей к соотношениям между деформациями эквивалентного однородного среднего слоя с деформациями ребер, не соединенных в узлах и к соотношениям изотропного однородного слоя из материала одного из элементов конструктивно неоднородного среднего слоя (ребра или узла). На основе закона малых упругопластических деформаций, определен закон деформирования эквивалентного однородного анизотропного среднего слоя, зависящий, в общем случае, от пятнадцати целочисленных функций, принимающих значения нуль или единица, в зависимости от состояния догрузки, разгрузки или вторичных пластических деформаций в ребрах и узле. Полученные соотношения между напряжениями и деформациями эквивалентного материала среднего слоя содержат предельный переход к идеальнопластическому материалу (с диаграммой Прандтля).

На основе линейной гипотезы для скоростей деформаций (в частности, гипотезы Кирхгофа), ассоциированного закона с условием текучести Мизеса, диссипативной функции в обобщенных усилиях, моментах и скоростях деформаций получено дифференциальное уравнение поверхности текучести Мизеса для осесимметрично нагруженных тонких оболочек вращения в пространстве обобщенных усилий и моментов. Найдена начальная поверхность Коши для такого дифференциального уравнения и получено координатное уравнение поверхности текучести (условия текучести Мизеса) оболочек вращения в пространстве обобщенных усилий и моментов, а так же в пространстве их квадратичных форм. Условие текучести оболочек вращения в координатной форме содержит функцию, которая является корнем уравнения четвертой степени с коэффициентами, зависящими от обобщенных усилий и моментов. Численно выявлено, что параметрические конечное соотношение Ильюшина и условие текучести Ходжа выражают найденное условие текучести оболочек вращения в координатной форме. Как частные случаи условия текучести Мизеса для оболочек вращения, получены координатные условия текучести цилиндрической оболочки, криволинейных стержней (балок), безмоментного и чисто моментного состояний осесимметричных оболочек и пластин.

На основе линейной гипотезы для всех компонент тензора скоростей деформаций, условия текучести оболочек вращения, анализа параметрических зависимостей обобщенных усилий и моментов определено координатное условие текучести произвольных тонких пластин и оболочек, как в пространстве обобщенных усилий и моментов так и в пространстве их квадратичных форм. Найдена система из четырех линейных дифференциальных уравнений первого порядка такой поверхности текучести. Получена инволюционная система из семи дифференциальных уравнений, соответствующая системе четырех дифференциальных уравнений поверхности текучести. Инволюционная (якобиева) система проинтегрирована методом Майера. Показано, что для определения поверхности текучести (условия текучести) произвольных пластин и оболочек необходимо и достаточно знать поверхность Коши решения дифференциального уравнения поверхности

текучести осесимметрично нагруженных оболочек вращения. Координатное условие текучести произвольных пластин и оболочек имеет в пространстве квадратичных форм такой же вид, как и для оболочек вращения, причем квадратичные формы составлены из всех компонент тензоров обобщенных усилий и моментов. Выявлено, что пренебрежение какой-либо обобщенной скоростью деформаций приводит к противоречию с ассоциированными законами течения в напряжениях или в обобщенных усилиях и моментах.

Предложено аппроксимирующее условие текучести в напряжениях анизотропного однородного деформируемого твердого тела, совпадающее при исчезающей анизотропии с условием текучести Мизеса.

На основе предложенного аппроксимирующего условия текучести в напряжениях и условия текучести Мизеса произвольных тонких пластин и оболочек получено аппроксимирующее условие текучести анизотропных однородных пластин и оболочек, как в пространстве обобщенных усилий и моментов так и в пространстве их квадратичных форм. Условие текучести анизотропных пластин и оболочек в пространстве квадратичных форм совпадает с условием текучести Мизеса произвольных изотропных однородных пластин и оболочек (и оболочек вращения). При этом переменные квадратичных форм в аппроксимирующем условии текучести анизотропных пластин и оболочек определены линейными выражениями через обобщенные усилия и моменты.

Во второй главе получены основные уравнения предельных состояний неоднородных и конструктивно-неоднородных пластин и оболочек.

Условие текучести пластин и оболочек не зависит от геометрии оболочки и содержит все компоненты тензоров обобщенных усилий и моментов. Поэтому получены геометрически линейные и геометрически нелинейные основные уравнения оболочек, учитывающие все обобщенные усилия и моменты. Для этого проведен параллельный перенос тензоров напряжений и скоростей деформаций, вектора скорости перемещения в базис на отсчетной срединной поверхности с координатными линиями, направленными вдоль ее линий главных кривизн. При этом тензор скоростей деформаций определен на основе смешанной ги-

потезы для вектора скорости перемещения. Затем тензор скоростей деформаций линеаризирован и получены соотношения между скоростями деформаций оболочки и скоростями деформаций и кривизн отсчетной поверхности, выражающие линейную гипотезу для скоростей деформаций оболочки, записанную в пространственном базисе на отсчетной поверхности. На основе удельной объемной диссипативной функции в напряжениях и скоростях деформаций оболочки определена удельная поверхностная диссипативная функция в размерных обобщенных усилиях, моментах и скоростях деформаций. Уравнения равновесия и граничные условия оболочки получены на основе вариационного принципа Лагранжа. Система уравнений равновесия состоит из семи уравнений. Показано, что найденные пять геометрически линейных уравнений равновесия в физических составляющих совпадают с точностью порядка квадрата толщины оболочки с уравнениями равновесия оболочек Ван-Цзи-Де, если пренебречь обобщенными усилием N_0^{33} и моментами M_0^{i3} , влиянием кривизн оболочки на компоненты главного момента и учесть формулы Кодацци. Шестое геометрически линейное уравнение равновесия отличается от классического, а седьмое уравнение и обобщенные усилие N_0^{33} и моменты M_0^{i3} ($i = 1, 2, 3$) являются дополнительными, вследствие принятой смешанной гипотезы о непостоянстве нормальных скоростей перемещений по толщине оболочки. Геометрически линейные уравнения равновесия не содержат скорости перемещений и их производные. Геометрически нелинейные уравнения равновесия отличаются от геометрически линейных, как и в классической теории устойчивости оболочек, наличием нелинейных слагаемых, содержащих скорости перемещений и их производные.

На основе удельной поверхностной диссипативной функции определены выражения для размерных обобщенных скоростей деформаций.

Полученные уравнения равновесия справедливы для оболочек из любого материала, в том числе для конструктивно-неоднородных оболочек. Однако, в последнем случае сохранен традиционный подход, основанный на гипотезе ломаной нормали.

С помощью принципа Лагранжа, на основе закона малых упруго-пластических деформаций и гипотезы ломаной нормали получены диф-

ференциальные уравнения равновесия и граничные условия краевой задачи об изгибе и выпучивании конструктивно-неоднородной оболочки за пределом упругости. Показаны предельные переходы к частным видам уравнений и граничных условий для слоистых, подкрепленных, биметаллических и других пластин и оболочек. Уравнения и граничные условия записаны в виде, предназначенном для решения их методом последовательных приближений, аналогичным методу упругих решений при каждом малом приращении параметра нагрузки, пропорционально которому изменяются все действующие на оболочку нагрузки. Решение задачи изгиба и выпучивания конструктивно-неоднородной оболочки состоит в определении при каждом значении параметра нагружения пяти функций смещений, шести целочисленных функции для несущих слоев и девяти целочисленных функций для ребер и узла среднего слоя. При этом целочисленные функции принимают значения нуль или единица в каждой точке оболочки в зависимости от деформированного состояния в ней. Для определения неизвестных служат пять геометрически – и физически – нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в смещениях, шесть граничных условий на каждом краю оболочки и условия догрузки, разгрузки и вторичных пластических деформаций. Такая постановка задачи служит для определения наибольшего параметра нагружения, при котором возможна единственная форма изгиба или выпучивания оболочки.

Поставлена геометрически линейная задача несущей способности жесткопластических пластин и оболочек на основе условия текучести в обобщенных усилиях и моментах, смешанной гипотезы для скоростей перемещений и линейной гипотезы для скоростей деформаций. Система уравнений для решения задачи предельного равновесия оболочки (в общем случае анизотропной) содержит условие текучести в обобщенных усилиях и моментах, двенадцать уравнений закона течения, семь геометрически линейных уравнений равновесия – всего двадцать уравнений. Из этих уравнений требуется найти двенадцать обобщенных усилий и моментов, семь скоростей перемещений и параметров скоростей перемещений, а также множитель в законе течения – всего двадцать неизвестных. Предельная нагрузка определяется с помо-

щью одного из геометрических или статических граничных условий. При этом в предельном состоянии в оболочке возможны жесткие зоны. Показано, что постановка задачи несущей способности на основе геометрически нелинейных уравнений равновесия оболочки невозможна, так как слагаемые в этих уравнениях равновесия, содержащие скорости перемещений определены, согласно теории идеальной пластичности, с точностью до произвольного постоянного положительного множителя. При этом слагаемые этих же уравнений, содержащие только обобщенные усилия и моменты, удовлетворяющие конечному соотношению (условию текучести), не могут быть произвольными.

В третьей главе проведен анализ предельного состояния сжатых неоднородных стержней за пределом упругости.

На элементарной модели неоднородного стержня, являющейся обобщением элементарной модели однородного стержня Шенли, выявлены основные особенности поведения неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости. Элементы модели предположены изготовленными из различных материалов с изотропным упрочнением. Выполнен анализ статического равновесия сжатой элементарной модели неоднородного стержня за пределом упругости, причем линия действия сжимающего усилия и параметры модели выбраны так, чтобы в упругом состоянии стержень оставался прямым.

На основе линейного уравнения совместности деформаций и в предположении, что материал элементов модели линейно-упрочняющийся, выяснено, что в общем случае выпучивание неоднородного стержня происходит при нагрузке t_1 (первая критическая нагрузка), соответствующей переходу одной из полок в пластическое состояние (раздел 3.1). Поведение за пределом упругости зависит от параметров стержня, причем реализуется одна из трех критических нагрузок – первая, вторая или третья критическая нагрузка.

Поскольку реальные диаграммы не имеют угловых точек, то для подтверждения правомерности предположения о кусочнолинейности диаграмм в линейном анализе выполнен физически нелинейный анализ выпучивания рассматриваемой модели стержня на основе линейного уравнения совместности деформаций в предположении гладкости

диаграмм в окрестности предела упругости (текучести).

В случае пропорциональных диаграмм материалов элементов стержень остается прямым и после перехода в пластическое состояние. Поэтому выполнен анализ выпучивания неоднородного стержня с пропорциональными диаграммами на основе линейного уравнения совместности деформаций в предположении, как линейности так и криволинейности диаграмм.

Анализ выпучивания стержня с пропорциональными диаграммами методом "проб", основанным на линейном уравнении совместности деформаций не является достаточно строгим. Поэтому с помощью диаграммы Ньютона выполнен более строгий анализ условий ветвления от прямолинейного состояния стержня с пропорциональными диаграммами на основе нелинейного уравнения совместности деформаций в предположении кусочнолинейности диаграмм материалов элементов модели.

Выполнен линейный анализ поведения стержня при циклических нагружениях, имеющих место в реальных условиях эксплуатации конструкций.

Выявлены следующие особенности поведения неоднородного стержня.

Если материал полки, первой перешедшей в пластическое состояние, имеет достаточно малое упрочнение, то статическое равновесие при нагрузках больших ее невозможно, а с уменьшением нагрузки от значения t_1 возможны две ветви равновесных форм (бифуркация). Такой вывод подтверждается и анализом с учетом физической нелинейности и гладкости диаграммы (раздел 3.3). Критическая нагрузка t_1 является нагрузкой исчерпания несущей способности.

Если упрочнение материала полки, первой перешедшей в пластическое состояние, достаточно большое, то выпучивание стержня сначала происходит при возрастающей нагрузке, а затем, в зависимости от его физических и геометрических характеристик, могут реализоваться два возможных случая. В первом случае возрастание прогиба возможно только с возрастанием нагрузки, причем касательно-модульная нагрузка (вторая критическая нагрузка) t_{**} , является критической в

том смысле, что с возрастанием нагрузки до такого значения прогиб увеличивается до бесконечности. Во втором случае равновесие стержня с возрастанием нагрузки возможно только до некоторого ее критического значения (третья критическая нагрузка, t_{10}^+ , t_{10}^- , t_{11}^+ , t_{11}^- , или t_2), которое в одних подслучаях равно значению нагрузки, соответствующей переходу одной из полков в пластическое состояние при растяжении после разгрузки (вторичные пластические деформации), а в других – значению нагрузки, соответствующей переходу первой полки в пластическое состояние при сжатии. Дальнейшее возрастание прогиба возможно только при уменьшающейся нагрузке. Третья критическая нагрузка является критической в том смысле, что последующее уменьшение нагрузки влечет разветвление равновесных форм (бифуркация). Величина третьей критической нагрузки зависит от всех геометрических и физических характеристик стержня. Во всех случаях, с изменением нагрузки до критического ее значения, имеют место различные пути деформирования полков. В случае первой критической нагрузки в обеих полках происходит упругая догрузка. В случае второй критической нагрузки в каждой из полков могут иметь место или только пластическая догрузка или последовательно пластическая догрузка, разгрузка и вторичные пластические деформации. Такой же вывод следует и в случае третьей критической нагрузки. Прогиб с изменением нагрузки до второго или третьего критического ее значения может как возрастать так и уменьшаться, (выпрямление, раздел 3.1, кривые FUG и FT на рис. 3.5).

В случае пропорциональных диаграмм материалов полков упруго-устойчивый стержень остается прямым и после перехода в пластическое состояние. Прямолинейная форма равновесия стержня с пропорциональными диаграммами, перешедшего в пластическое состояние, устойчива при нагрузках меньших касательно модульной нагрузки t_{**} в том смысле, что малое поперечное вынуждающее возмущение с продолжающимся продольным нагружением (сжатием) не приводит к большим отклонениям стержня от прямолинейного состояния, происходит выпрямление стержня; при сжатии нагрузкой меньшей, чем касательно-модульная нагрузка, прямолинейная форма равнове-

сия является единственной, (разделы 3.2 и 3.3).

Если сжимающая нагрузка равна касательно-модульной нагрузке, то с продолжающимся нагружением (сжатием) происходит разветвление форм равновесия; при этом устойчивой является отклоненная форма равновесия в том смысле, что малое вынуждающее поперечное возмущение ведет к малым изменениям отклоненной формы равновесия, (разделы 3.2 и 3.3). Разветвление форм равновесия может произойти при любой нагрузке большей касательно-модульной нагрузки, но меньшей нагрузки Эйлера, если до того, как она была достигнута, стержень оставался прямым. Если сжимающая нагрузка прямолинейного стержня, перешедшего в пластическое состояние больше касательно-модульной нагрузки и меньше критической нагрузки Кармана, то реализуются отклоненные формы равновесия с возрастающей нагрузкой. Увеличение сжимающей нагрузки в этом случае возможно до третьей критической нагрузки, соответствующей возникновению в одной из полок вторичных пластических деформаций с первичной пластической догрузкой в другой полке. Третья критическая нагрузка здесь также имеет бифуркационный смысл и для $t^+ = t_{**}$ определяет несущую способность стержня. Если же выпучивание начинается с нагрузки большей нагрузки Кармана и меньшей нагрузки Эйлера, то реализуются отклоненные формы равновесия с уменьшающейся нагрузкой. Таким образом, приведенно-модульная нагрузка является верхней оценкой несущей способности стержня. Закритическое выпучивание происходит с различными путями деформирования полок. В стержнях с одной областью физических и геометрических параметров имеет место необратимый переход от первичной пластической догрузки к разгрузке, а с другой областью изменения тех же параметров – обратный переход от разгрузки к первичной пластической догрузке в одной и той же полке. Последующее увеличение прогиба с уменьшением сжимающей нагрузки происходит с пластической догрузкой в одной полке и вторичными пластическими деформациями – в другой полке, (раздел 3.2). В случае, когда сжимающая нагрузка превышает значение нагрузки Эйлера, отклоненные статически равновесные формы стержня не существуют или имеют место только при удерживающем

поперечном возмущении, (раздел 3.3).

Полученные на основе линейной теории, выводы относительно условий выпучивания и равновесных форм стержня остаются верными и с точки зрения геометрически нелинейной теории.

Проведенный в разделе 3.4 анализ показывает, что выводы относительно условий выпучивания сжатого стержня остаются верными и с точки зрения физически-нелинейной теории с учетом гладкости диаграмм.

В случае гладких нелинейных пропорциональных диаграмм материалов полка величина касательно-модульной критической нагрузки зависит от величины нагрузки t_1 , соответствующей переходу полки в пластическое состояние. При этом всегда $t_{**} \geq t_1$, что не всегда выполняется при использовании кусочно-линейной теории. Если радиус закругления r_i кусочно-линейной диаграммы мал и величина касательного модуля линейного участка диаграммы равна нулю, то касательно-модульная нагрузка практически совпадает с нагрузкой t_1 , а в пределе $t_{**} \rightarrow t_1$ при $r_i \rightarrow 0$. Закритическое выпучивание с уменьшающейся нагрузкой происходит за счет уменьшения касательного модуля в догружаемой полке и без вторичных пластических деформаций в разгружаемой полке.

Исследование устойчивости сжатого однородного стержня при циклическом нагружении показывает, что стержень может приспособиться и увеличить свою несущую способность вплоть до нагрузки Кармана без применения поддерживающих связей и до нагрузки Эйлера с применением таких связей. В общем случае эксплуатационных нагрузок приспособляемость стержня возможна, если справедлив принцип Мазинга. Иначе, стержень становится неоднородным и для определения его несущей способности необходим анализ, проведенный в разделе 3.1.

В четвертой главе решены некоторые задачи предельного состояния неупругих конструктивно-неоднородных пластин и оболочек.

Выявлены характерные особенности методов решения задач устойчивости и выпучивания рассматриваемых оболочек по сравнению с упругими. Показано, что, в общем случае, решение таких задач прин-

ципально невозможно без метода последовательных приближений.

Сущность предложенного на основе метода упругих решений общего метода решения краевой задачи об изгибе и выпучивании конструктивно-неоднородной оболочки за пределом упругости состоит в следующем. Предположим, что метод решения геометрически и физически нелинейной задачи об изгибе и выпучивании упругой конструктивно-неоднородной оболочки известен. При каждом последующем малом приращении параметра нагрузки с известными целочисленными функциями решаем задачу для упругой оболочки, определяем смещения, деформации, интенсивности деформаций в несущих слоях и интенсивности напряжений в ребрах и узле. Сравнивая интенсивности деформаций и напряжений с соответствующими величинами этих интенсивностей перед последним приращением параметра нагрузки, уточняем значения целочисленных функций. Снова при известных значениях целочисленных функций и неизменном значении параметра нагрузки воспользуемся решением задачи для упругой оболочки и, сравнивая полученные интенсивности деформаций и напряжений с соответствующими величинами этих интенсивностей перед последним приращением параметра нагрузки, уточняем значения целочисленных функций. Уточнение целочисленных функций повторяем, пока полученные величины смещений в оболочке не будут достаточно близки к величинам смещений в предыдущей итерации при одной и той же нагрузке. Затем придаем параметру нагрузки следующее малое приращение и производим определение целочисленных функций тем же итерационным методом, как при предшествующем приращении того же параметра нагрузки. Подобный процесс используем и при уменьшающемся параметре нагрузки. Критические нагрузки определяем в одних случаях в смысле бифуркации, когда равновесие оболочки или пластинки при дальнейшем возрастании параметра нагрузки невозможно и имеет место раздвоение форм равновесия с уменьшающимся параметром нагрузки (первые критические нагрузки, как для элементарной модели стержня). В других случаях – в смысле неограниченного возрастания характерных прогибов с увеличением параметра нагрузки до его критического значения (вторые критические нагрузки, имеющие

место также для элементарной модели стержня). Аналитические решения таких задач крайне редки. В числовых примерах использованы дробно-линейные диаграммы материалов, гладко сопряженные с диаграммами соответствующих упругих материалов на пределах текучести.

Получено аналитическое решение задачи о цилиндрическом изгибе и устойчивости шарнирно опертой по концам упругопластической трехслойной пластинки с легким заполнителем и мембранными несущими слоями под действием поперечного равномерно распределенного давления и сжимающих усилий в ее плоскости. Причем плоскость действия сжимающих равномерно распределенных по краям сил (отсчетная плоскость) и параметры пластинки выбраны так, чтобы до перехода несущих слоев в пластическое состояние в ней сохранялось безмоментное состояние и она не теряла упругой устойчивости. Кроме того, принято, что с начала пропорционального нагружения первым переходит в пластическое состояние второй слой, а первый остается всегда упругим. Зависимости параметра пропорционального нагружения μ , ($\mu \geq 1$) от координаты η , определяющей границу между областями упругих и пластических деформаций, изображены кривыми a_σ на рис. 4.1, причем $\sigma = 0$ для пластинки под действием только сжимающих усилий и $\sigma = 1$ — для пластинки при сжатии и давлении. Зависимости интенсивности деформаций $e_{10}(\xi)$ от координаты ξ по длине пластинки показаны кривыми b_τ при сжатии и давлении ($\mu = 0.98 - 0.04\tau$, $\tau = 0, 1, 2$) и кривыми C_ε только под действием сжимающих усилий ($\mu = \mu_* - 0.1\varepsilon$, $\varepsilon = 1, 2, 3, \dots$) на рис. 4.2. Величина μ_* — это значение параметра μ , до которого возможно равновесие пластинки с возрастанием этого параметра. В случае только сжатия $\mu_* = 1$ и в случае сжатия совместно с давлением $\mu_* = 1.015$. Переход второго слоя в пластическое состояние начинается, когда $\mu = 1$. Зависимости прогиба w_0 в середине пластинки от параметра нагрузки μ изображены кривыми d_σ на рис. 4.1. Полученные зависимости, a_σ , b_τ , C_ε , d_σ , характерны, когда пластинка упругоустойчива до перехода ее в пластическое состояние и материал второго слоя имеет малое упрочнение.

Следовательно, в пластинке с малоупрочняющимся вторым слоем при сжатии после достижения предела текучести (пропорциональности) сразу образуется конечная область пластических деформаций, активно расширяющаяся с последующим уменьшением параметра нагрузки. Соответствующее значение параметра нагрузки $\mu = \mu_* = 1$ носит характер первой критической нагрузки для элементарной модели стержня, и определяет несущую способность пластинки. В случае совместного сжатия и давления изгиб пластинки начинается с самого начала нагружения, при значении $\mu = 1$ зарождается пластическая область, активно расширяющаяся затем с возрастанием параметра нагрузки до критического значения μ_* . Эта пластическая область продолжает активно расширяться и с уменьшением параметра нагрузки. В таком случае критическое значение параметра нагрузки μ_* носит характер третьей критической для элементарной модели стержня и определяет несущую способность пластинки. Значение параметра μ_* является критическим в бифуркационном смысле, как и для элементарной модели стержня. Если материал второго слоя обладает достаточно большим упрочнением, то для $\mu > \mu(\pi/2) > 1$ весь второй слой деформируется пластически и $w_0 \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \mu_{**}$. Зависимость $w_0(\mu)$ в случае большого упрочнения материала второго слоя пластинки под действием только сжимающих усилий приведена кривой w^+ на рис. 4.1. Критическое значение параметра нагружения μ_{**} имеет характер второй критической нагрузки для элементарной модели стержня и может служить верхней оценкой несущей способности пластинки. Параметр нагрузки μ_{**} соответствует приведенномодульной критической нагрузке t_* , (нагрузке Кармана), определенной из решения задачи на собственные значения уравнений устойчивости пластинки. В случае малоупрочняющегося материала второго слоя, при $t_* < 1$ нагрузка t_* может служить нижней оценкой несущей способности пластинки. Проведенный анализ равновесия пластинки под действием только сжимающих сил в ее плоскости показывает, что в общем случае выпучивание начинается при нагрузке, соответствующей переходу одного из слоев в пластическое состояние. Поэтому использование классических теорий упругопластической или чистопластиче-

ской устойчивости, основанных на безмоментности основного состояния, для определения критических нагрузок рассмотренной пластинки является несостоятельным. Если материалы слоев имеют пропорциональные диаграммы, то классическую постановку задачи об устойчивости пластинки можно сохранить только при достаточно большом упрочнении, как и для элементарной модели стержня.

Получено численное решение задачи об устойчивости и выпучивании упругопластической шарнирно опертой по краям прямоугольной трехслойной пластинки с мембранными несущими слоями и легким заполнителем под действием продольных и поперечных нагрузок с параметром пропорционального нагружения q_1 . Несущие слои выполнены из одного материала.

В первых трех числовых примерах были рассмотрены пластинки, материалы несущих слоев которых имели достаточно большое упрочнение (пределы прочности в два раза превышали пределы текучести). Отношение λ длины пластинки к ширине принято в первом примере $\lambda = 1$, во втором $\lambda = 1.2$ и в третьем $\lambda = 1.5$. Результаты численного решения приведены на рис. 4.7–4.10. Переход первой пластинки в пластическое состояние происходит при $q_1 = 9.8$, второй — для $q_1 = 11$ и третьей, когда $q_1 = 12.6$. Пластическое деформирование начинается в центрах пластинок и развивается далее только в одном несущем слое, со стороны приложенной поперечной нагрузки. Развитие пластических зон показано на рис. 4.7–4.9 для четверти каждой пластинки при различных параметрах нагружения. Пластические зоны заключены внутри наименьших замкнутых контуров, содержащих цифру 1. Зоны разгрузки заключены внутри наименьших замкнутых контуров, содержащих цифру 2. Зоны вторичных пластических деформаций отсутствуют. Значениями параметра нагружения, до которых существуют численные решения данной задачи являются: для первой пластинки $q_{1*} = 10.4$, для второй $q_{1*} = 11.7$, для третьей $q_{1*} = 13.3$. Зависимости прогиба в центрах пластинок от параметра нагружения q_1 приведены на рис. 4.7–4.9. Как следует из этих зависимостей, рост прогибов в центрах пластинок продолжается и при уменьшении параметра нагружения от достигнутых наибольших значений. Кроме

того, продолжается и развитие пластических зон с уменьшением параметра нагружения от наибольших значений до значений: для первой пластинки $q_1 = 9.6$, для второй $q_1 = 10.9$, для третьей $q_1 = 12.5$. Дальнейшее уменьшение параметра q_1 приводит к разгрузке во всей пластической области, что можно объяснить малой устойчивостью ветви с уменьшающейся нагрузкой в вычислительном смысле. Факт существования численного решения в определенных интервалах уменьшающегося параметра нагружения с развитием пластических деформаций косвенно указывает на то, что выбранный метод численного решения данной задачи позволяет приближенно определить границу области существования решения краевой задачи об изгибе и устойчивости рассматриваемых трехслойных пластин за пределом упругости по нагрузке. На этом же основании можно заключить, что значения параметра нагружения q_{1*} являются критическими в бифуркационном смысле. Они также определяют и несущую способность пластинок. Зависимость критической нагрузки от отношения длины к ширине пластинки приведена на рис. 4.10. Отметим, что увеличение критической нагрузки с увеличением длины пластинки характерно при определенных геометрических и физических параметрах и для упругих трехслойных пластин [1].

В четвертом числовом примере рассмотрена трехслойная пластинка, материалы несущих слоев которой имеют малое упрочнение, по сравнению с материалами в первых трех примерах. Полученные результаты вычислений приведены на рис. 4.11–4.14. Зависимость прогиба w в середине пластинки от параметра нагрузки q_1 показана на рис. 4.11. Эта же зависимость $w(q_1)$ в окрестности максимума параметра нагрузки q_1 в увеличенном масштабе изображена на рис. 4.12. Штриховыми линиями на рис. 4.11–4.12 показана вторая ветвь решения при уменьшающейся нагрузке с разгрузкой во всех точках пластической области пластинки. Зависимость прогиба w в плоскости $\eta = 0$ от координаты ξ для значения параметра нагружения $q_1 = 6.12$ при возрастающей нагрузке на ветви AB (рис. 4.12) изображена кривой $w_1(\xi)$ и при уменьшающейся нагрузке на ветви BC (рис. 4.12) – кривой $w_2(\xi)$ ($q_1 = 5.98$) на рис. 4.13. Зависимость $w(\eta)$ в плоскости $\xi = 0$

для $q_1 = 6.12$ при возрастающей нагрузке на ветви AB (рис. 4.12) показана кривой $w_1(\eta)$ и с уменьшающейся нагрузкой на ветви BC (рис. 4.12) – кривой $w_2(\eta)$ ($q_1 = 5.98$) на рис. 4.13. Для построения кривых, $w_2(\xi)$, $w_2(\eta)$, использована ветвь решения при уменьшающейся нагрузке без разгрузки во всех точках пластической области пластинки, изображенная сплошными линиями BC на рис. 4.11–4.12.

Из вычислений следует, что с возрастанием параметра нагрузки в пределах $0 \leq q_1 \leq 6,28$ первый слой остается всегда, а второй слой остается упругим до значения параметра нагрузки $q_1 = 6.1$, после которого в нем в середине пластинки возникает пластическая зона. Пластическая зона быстро расширяется и при $q_1 = 6.16$ (с изменением параметра нагрузки на 1%) весь второй слой переходит в пластическое состояние. Упругая (1) и пластическая (2) зоны второго слоя для четверти пластинки при $q_1 = 6.12$ показаны на рис. 4.14. Равновесие пластинки с возрастанием параметра нагрузки возможно до значения $q_1 = q_{1*} = 6.28$, при котором резко возрастает (в 3 раза) число итераций. Производная от прогиба по параметру нагрузки при $q_1 = q_{1*}$ имеет значение меньше, чем 0.001. Далее возможно равновесие пластинки для уменьшающейся нагрузки, причем второй слой остается пластическим с уменьшением параметра нагрузки от значения q_{1*} до значения $q_1 = 5.98$. При дальнейшем уменьшении параметра нагрузки q_1 на краю пластинки возникает зона разгрузки. Последующие вычисления показывают, что ветвь решения без разгрузки во всех точках пластической области пластинки неустойчива в вычислительном смысле, то есть наблюдается тенденция к переходу на устойчивую ветвь решения с разгрузкой.

Полученные значения параметра нагрузки q_{1*} во всех четырех примерах являются критическими в бифуркационном смысле. Поведение прямоугольной пластинки с малым и большим упрочнением имеет такой же характер, как в случае цилиндрического выпучивания пластинки и элементарной модели стержня.

Численно решена задача об устойчивости и выпучивании упруго-пластической шарнирно опертой по краям трехслойной подкрепленной осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки.

В числовых примерах рассмотрены три трехслойные подкрепленные продольными (стрингерами) и кольцевыми (шпангоутами) ребрами цилиндрические оболочки без легкого заполнителя.

В первых двух (коротких) оболочках несущие слои, ребра и узлы изготовлены из одного материала с достаточно большим упрочнением (малоуглеродистой конструкционной стали). Для первой оболочки отношение r_0 радиуса к длине оболочки $r_0 = 4$ и для второй $r_0 = 6$, при остальных одинаковых параметрах. Исследовано поведение первой оболочки в одном случае в состоянии сжатия, в другом – при сжатии и радиальном внешнем давлении и второй оболочки – под действием сжимающей осевой силы. Внешние силы изменялись пропорционально одному положительному параметру q .

Результаты вычислений приведены для первой оболочки в состоянии сжатия на рис. 4.16–4.17, при радиальном давлении – на рис. 4.19, 4.20 и для второй оболочки – на рис. 4.18. Зависимости прогиба в серединах оболочек $\xi = 0$ от параметра нагрузки q изображены кривыми I, для $\xi = 1/3$ – кривыми II и когда $\xi = 4/9$ – кривыми III. Зависимости прогиба от координаты при различных значениях q для первой оболочки показаны на рис. 4.17, 4.20 с указанием величин параметра нагрузки. Развитие зон пластичности показано на соответствующих рисунках с указанием величин параметра нагрузки. При этом пластические зоны во внешнем несущем слое обозначены 1, во внутреннем несущем слое – 2, в узлах – 3, в узлах и ребрах обоих направлений – 5, зона разгрузки во внутреннем несущем слое оболочки при сжатии и радиальном давлении – 6. Зоны с обозначениями заключены внутри наименьших замкнутых контуров. Зоны вторичных пластических деформаций отсутствуют.

Из анализа полученных результатов вычислений следует, что после перехода оболочек при $q = q_0$ в пластическое состояние ($q_0 = 0.99$ для первой оболочки при сжатии, $q_0 = 0.501$ – под действием сжимающей осевой силы с радиальным давлением и $q_0 = 0.84$ – для второй оболочки) скорости роста величин прогибов в серединах оболочек сначала уменьшаются, а затем с переходом в пластическое состояние элементов подкрепления возрастают, что можно объяснить перерас-

пределением напряжений в слоях. Для более длинной первой оболочки при сжатии выявлено менее интенсивное развитие пластических зон в среднем слое, особенно в продольных ребрах, чем у второй, что вызвано влиянием перерезывающих сил. Со значениями параметра нагрузки, превышающими $q_* = 1.245$, $q_* = 1.087$, соответственно, для первой и второй оболочки при сжатии, а также $q_* = 0.567$ для первой оболочки под действием осевого сжатия и радиального давления, итерационные процессы с догрузкой расходятся, как с возрастанием так и с уменьшением параметра q . Полученные ветви равновесных форм при уменьшающейся нагрузке с разгрузкой всех элементов оболочки из пластического состояния на рис. 4.16, 4.18 и 4.19 не нанесены. Для обеих оболочек в окрестностях определенных значений параметра нагрузки q_* происходит резкое расширение зон пластических деформаций в каком-либо одном или во всех элементах подкрепления. Так, для первой оболочки при сжатии, наряду с расширением пластических зон в несущих слоях, продольных ребрах и узлах резко, с увеличением параметра нагрузки на 0.8%, переходит в пластическое состояние более половины кольцевых ребер. Во второй оболочке при сжатии с изменением нагрузки на 1% в пластическое состояние переходит 33% узлов (причем все узлы деформируются пластически практически по всей высоте среднего слоя) и продольные ребра на $3/4$ длины оболочки; внешний несущий слой и кольцевые ребра остаются упругими. В первой оболочке при сжатии и давлении с изменением параметра нагрузки на 0.4% становятся пластическими 22% узлов, продольные ребра на $1/5$ длины оболочки и 40% кольцевых ребер.

Можно предположить, что более быстрое развитие зон пластических деформаций в оболочках происходит вследствие того, что значения параметра нагрузки приближаются к критическим значениям бифуркационного типа. Такое явление наблюдается, например, для шарнирно опертых трехслойных пластин с легким заполнителем (разделы 4.2 и 4.3). Поэтому величины q_* можно принять как нижние оценки критических значений параметра нагрузки устойчивости оболочек, полученные на основе деформационной теории.

Длина третьей оболочки (при сжатии и внешнем давлении) в 8 и 12

раз, больше, соответственно, длин первой и второй оболочки. Кроме того, принято, что материалы всех элементов оболочки имеют малое упрочнение и отношения пределов их прочности к пределам текучести равно 1.1. Остальные параметры приняты такими же, как для первых двух оболочек.

Результаты вычислений приведены на рис. 4.21 – 4.24. Зависимости прогиба w в середине ($\xi = 0$) и вблизи края ($\xi = 8/9$, $\xi = 17/18$) оболочки от параметра нагрузки q показана на рис. 4.21. Зависимости прогиба w от координаты ξ для $q = 0.506$ и $q = 1.13$ изображены на рис. 4.22. При значении параметра $q = 0.504$ несущие слои, а затем ($q = 0.506$) и продольные ребра оболочки переходят в пластическое состояние. Дальнейшее возрастание параметра нагрузки влечет интенсивное развитие деформаций (выпучивание) на краю и незначительное изменение величины прогибов в остальной части оболочки (рис. 4.21, 4.22). Пластические зоны локализованы для несущих слоев и продольных ребер в окрестности точки $\xi = 8/9$ (рис. 4.23, 4.24). Узлы и кольцевые ребра в пластическое состояние не переходят. Зоны разгрузки и вторичных пластических деформаций не возникали. Счет выполнен до значения (критического) параметра нагрузки $q = q_* = 1.236$, после которого итерационные процессы расходятся.

Таким образом, поведение третьей оболочки характеризуется интенсивным выпучиванием вблизи края оболочки. Форма выпучивания имеет вид внешних и внутренних складок (рис. 4.22). Отметим, что качественно аналогичная картина деформирования получена в экспериментах по устойчивости однородных цилиндрических оболочек за пределом упругости, описанных в работе [229].

Получено решение задачи об устойчивости и выпучивании шарнирно опертой упругопластической трехслойной осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки с легким упругим заполнителем под действием сжатия и внешнего давления пропорционально параметру q .

В числовом примере рассмотрена длинная оболочка с мало упрочняющимися несущими слоями. Результаты вычислений приведены на рис. 4.25 – 4.28. Зависимости прогиба $w(q)$ в середине оболочки $\xi = 0$

и в точках, $\xi = 8/9$, $\xi = 17/18$, вблизи края оболочки показаны на рис. 4.25. Зависимости $w(\xi)$ для $q = 1.504$ и $q = 1.562$ изображены на рис. 4.26. При $q = 1.502$ несущие слои вблизи края оболочки переходят в пластическое состояние. Распределение пластических зон для $q = 1.504$ и $q = 1.562$ показано, соответственно, на рис. 4.27 и 4.28. Последующее возрастание параметра нагрузки $q \geq 1.504$ ведет к изменению формы выпучивания. Наиболее интенсивное формоизменение происходит вблизи края приблизительно на $1/8$ половины длины оболочки. В результате интенсивного выпучивания вблизи краев оболочки образуются складки. Счет проведен до значения параметра нагрузки $q = 1.562$, при котором происходит быстрый рост прогиба $w(q)$ в точках $\xi = 8/9$ и $\xi = 17/18$.

Задача о рациональном армировании пластин решена на основе критерия устойчивости и несущей способности. В числовых примерах разработанный метод рационального проектирования проиллюстрирован для шарнирно опертой по краям прямоугольной трехслойной пластинки с легким заполнителем и несущими армированными слоями. В первом примере пластинка армирована и сжата в направлениях осей x и y вдоль ее сторон. Полученные кривые, f_{11} , f_{21} , f_{12} , f_{22} , f_{33} , разделяющие различные области потери устойчивости пластинки, изображены на рис. 4.29. В области OABCDE потеря устойчивости происходит при всех упругих элементах; в области ABFING – при пластических нитях обоих направлений и упругом заполнителе; в области CFIDC – при пластических нитях в направлении y , упругих нитях в направлении x и упругом заполнителе. В области FBC потеря устойчивости сопровождается пластическим деформированием нитей направления x при упругом заполнителе и упругих нитях направления y ; для значений l выше кривой GH – пластическим деформированием всех элементов. Значение l на кривой GH, соответствующее максимальной критической нагрузке, можно считать оптимальным, так как при этом потеря устойчивости пластинки сопровождается исчерпанием несущей способности всех ее элементов. Если по каким-либо соображениям переход тех или иных элементов композиции в пластическое состояние недопустим, то рациональными следует считать про-

екты, соответствующие кривым ABCD или ABFI на рис. 4.29.

В другом примере рациональное проектирование проведено для пластинки, армированной нитями в направлениях x и y , а также нитями, составляющими углы α_k ($k = 1, 2$) с направлением x , при сжатии или сдвиге в предположении, что потеря устойчивости происходит с упругими элементами. Полученные в этом случае зависимости критических нагрузок сжатия p_* или сдвига t_* при $\alpha_{2\mu} = 0.1\mu\pi$ ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) от угла армирования α_1 изображены, соответственно, кривыми p_μ , t_μ на рис. 4.30. На рисунках 4.31 – 4.35 показаны зависимости напряжений в нитях основного армирования a_i (вдоль осей x и y), нитях углового армирования b_i , интенсивности напряжений в связующем c , от углов армирования α_k ($k = 1, 2$) при сжатии (кривые $a_{i\mu}^p$, $b_{i\mu}^p$, c_μ^p) и сдвиге (кривые $a_{i\mu}^t$, $b_{i\mu}^t$, c_μ^t). Как видно, для принятых значений параметров армирования критические нагрузки в случае сжатия максимальны при углах армирования приблизительно равных $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$ и $\alpha_1/3 = \alpha_2 = \pi/4$, причем в последнем случае достигается абсолютный максимум.

Критические нагрузки при сдвиге для рассмотренной пластинки достигают максимального значения при значениях α_1 приблизительно равных $2\pi/3$. Величины напряжений в армирующих нитях и связующем увеличиваются при максимальных критических нагрузках, как в случае сжатия, так и в случае сдвига. Отметим, что максимальные значения напряжений и критических нагрузок, как правило, достигаются при различных значениях параметров углового армирования. Выбрав материалы нитей и связующего с пределами пропорциональности, равными соответствующим напряжениям, вычисленным из выражений (4.6.9), получим рациональный проект пластинки, теряющий устойчивость при исчерпании несущей способности. Как и в первом примере, можно продолжить это решение, допустив до потери устойчивости существование пластических деформаций в некоторых элементах композиции.

Проведенные исследования устойчивости и выпучивания неупругих пластин и оболочек свидетельствуют о решающей роли пластических деформаций в определении их предельных состояний. Причем, чем

меньше упрочнение материалов элементов конструкций тем эта роль пластических деформаций становится более определяющей их несущую способность. Поэтому для определения нагрузок исчерпания несущей способности пластин и оболочек естественно обратиться к модели идеальнопластического материала.

Получено точное решение задачи о несущей способности гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек из идеальнопластического материала, подчиняющегося условию текучести Треска. Приведено сравнение полученного решения с известными приближенными решениями этой задачи Ходжем и Фоминым. Для подкрепленной цилиндрической оболочки предельная нагрузка общего разрушения определена с учетом условия недопустимости местного разрушения между подкрепляющими ребрами.

В пятой главе разработан метод оптимального проектирования жесткопластических элементов конструкций минимального объема.

Предварительно кратко изложены основные определения, теоремы и следствия теории идеальной пластичности, использованные в разработке метода оптимального проектирования. Показано, что теорема Шилда о верхнем пределе нагрузки является альтернативной формулировкой теоремы о кинематической оценке предельной нагрузки жесткопластического тела.

На основе допущения о пренебрежимости касательных напряжений, вызывающих кручение, и напряжениями растяжения-сжатия в направлениях перпендикулярных к оси балки, получено аналитическое решение задачи проектирования равнопрочной балки с учетом перерезывающей силы. При этом использовано аппроксимированное с запасом прочности до 9% условие текучести Мизеса в обобщенных усилиях и моментах.

Из полученного решения следует, что толщина равнопрочной балки зависит, главным образом, от модуля изгибающего момента, в нулях которого она очень мала. Толщина балки постоянного сечения, определенная по схеме с пластическими шарнирами ($r_C = 1.6p$), меньше максимальной толщины равнопрочной балки (рис. 5.1а) в окрестности средней опоры на 27%. Проект ступенчатой балки с несущей способ-

ностью не меньшей, чем для равнопрочной, найден по правилу, что добавление материала не уменьшает предельную нагрузку (следствие 5.1.1). Для ступенчатой балки, показанной на рис. 5.1а штриховыми линиями, экономия материала составляет 16% по сравнению с балкой постоянной толщины при одинаковой несущей способности, определенной по шарнирно – пластическим схемам. На рис. 5.1а – 5.1е приведены результаты расчета (эпюры безразмерных перерезывающей силы ($-n$) и изгибающего момента ($-m$), а также зависимости безразмерных толщины $h(\xi)$ и скорости прогиба $w(\xi)$, определенной с точностью до произвольного положительного множителя) для различных опорных и нагружений балки.

Проведен анализ методов оптимального проектирования. Подробно проанализирован метод оптимального проектирования оболочек минимального объема, основанный на критерии Шилда. Из полученных решений следует, что в некоторых случаях существуют разные критерии, позволяющие определить оптимальные проекты балки с объемами, не различающимися между собой. В ряде случаев оптимальные проекты следуют из вырожденных решений дифференциальных уравнений. В результате такого решения статически неопределимая балка представляет собою одну статически определимую или несколько не взаимодействующих статически определимых балок. Численно подтверждено, что наименьшие объемы, полученные на основе статически допустимых полей обобщенных усилий и моментов, равны абсолютно минимальным объемам балок. Выполненные исследования по оптимальному проектированию балок минимального объема привели к выводу, что критерий Шилда требует дальнейшего изучения.

Поэтому сформулированы и доказаны следующие теоремы об оценках минимального объема произвольной тонкой оболочки.

Теорема 5.4.1. При заданных базовой нагрузке \bar{p} , поверхности S и кинематически допустимом поле скоростей \dot{u} добавление (удаление) материала к объему (из объема) V влечет увеличение (уменьшение) параметра нагрузки p_0 оболочки.

Теорема 5.4.2. При любом заданном кинематически допустимом поле скоростей перемещений и заданной нагрузке $p_0\bar{p}$ наименьшая ки-

нематическая оценка объема не больше объема оптимального проекта V_0 .

Теорема 5.4.3. Статическая оценка объема $V_{ст}$ не меньше минимального объема V_0 при одной и той же нагрузке $p_0 \bar{p}$ ($V_{ст} \geq V_0$)[105].

Как следствие теорем получено, что объем оптимального проекта V_0 равен наибольшей из наименьших кинематических оценок, определенных по всевозможным кинематически допустимым полям скоростей перемещений, и наименьшей из статических оценок, определенных по всевозможным статически допустимым полям напряжений.

Доказанное свойство кинематической оценки объема, позволяет сформулировать изопериметрическую вариационную задачу: найти минимум функционала V (5.4.9) при условии (5.4.8). Решение такой вариационной задачи выражает критерий: частная производная удельной поверхностной диссипативной функции D_1 по толщине оболочки равна произвольной положительной постоянной. Отсюда следует, что критерий Шилда [5] в случае строгого неравенства (5.4.14), является критерием относительного минимума кинематической оценки, V_{k1} , объема для произвольного, в том числе оптимального, кинематически допустимого поля скоростей перемещений.

Равенства (5.4.8) и (5.4.14) определяют решение задачи для толщины h , наименьшей кинематической оценки V_{k1} при произвольном заданном кинематически допустимом поле скоростей перемещений. Из требования, чтобы кинематически допустимое поле скоростей перемещений было совместным со статически допустимым полем напряжений получено выражение для определения множителя λ_1 в законе течения, ассоциированном с условием текучести Мизеса для произвольных тонких оболочек в обобщенных усилиях и моментах.

В результате поставлена задача определения минимального объема, согласно постановке задачи о несущей способности жесткопластической оболочки в разделе 2.5, состоящая в решении двадцати одного уравнения (из них восемнадцать уравнений являются дифференциальными) с двадцатью одним неизвестным. Поскольку поле обобщенных усилий и моментов (N_{ij}, M_{ij}) статически допустимо, то минимальная кинематическая оценка V_{k1} является также и статической оцен-

кой абсолютно минимального объема V_0 . Поэтому из равенств (5.4.13) следует, что полученная в результате решения сформулированной задачи оценка V_{k1} объема оптимального проекта равна наибольшей из наименьших кинематических оценок по всевозможным кинематически допустимым полям скоростей перемещений и равна абсолютно минимальному объему V_0 . Показано, что решение поставленной задачи определения минимального объема V_0 единственно.

В качестве первого примера рассмотрена задача оптимального проектирования трехслойной балки с мембранными несущими слоями и легким заполнителем под действием равномерного поперечного давления без учета перерезывающих сил. Для скоростей перемещений использована гипотеза Кирхгофа. Оптимизация объема проведена для трех случаев опирания: жестко заделанные концы, шарнирное опирание на концах и в середине, жесткая заделка на одном конце балки. Во всех случаях определенные по критерию оптимальности минимальные объемы в точности совпали с их статическими оценками. Наименьшие кинематические оценки, найденные для различных кинематически допустимых полей скоростей, во всех примерах меньше соответствующих объемов оптимальных проектов.

В другом примере проведена минимизация объема шарнирно опертой на концах и в середине однородной балки под действием равномерно распределенного давления. Используются аппроксимированное с запасом прочности до 9% условие текучести Мизеса, с учетом перерезывающих сил, и линейная гипотеза для скоростей перемещений и деформаций. Найденные зависимости безразмерных величин минимального объема v_0 от параметра μ , равного отношению ширины балки к ее длине, $v_0(\mu)$ и наименьшей статической оценки v_{cm} от того же параметра $v_{cm1}(\mu)$ показаны на рис. 5.6 одной линией, так как отличие этих объемов — порядка погрешности численного решения уравнения (5.4.43). Зависимости наименьших кинематических оценок $v_{k1}(\mu)$, найденные по эквивалентным полям прогибов упругой балки постоянной толщины и упругой балки переменной толщины оптимального проекта показаны на рис. 5.6 кривыми v_{kc} и v_{kv} , соответственно. Приведенные решения свидетельствуют о правомерности полученных оценок и

критерия оптимального проектирования.

Выявлено, что в рамках упругого деформирования при любом варианте нагружения и опирания максимальный прогиб упругой балки с переменной толщиной оптимальной балки на 26% — 50% меньше максимального прогиба балки постоянной толщины с тем же объемом, опиранием и нагружением.

Получено выражение для множителя в законе течения с аппроксимирующим условием текучести (рис. 5.8) без определения соответствующего условия текучести в напряжениях для арки. На основе аппроксимирующего условия текучести численно решены задачи оптимального проектирования арок с шарнирно опертыми и защемленными краями под действием гидростатического давления, а также арки и рамы с шарнирно опертыми краями под действием сосредоточенных сил (рис. 5.14–5.15). Показано, что в оптимальных проектах арок, полученных на основе аппроксимирующего условия текучести, под действием гидростатического давления реализуется напряженное состояние, близкое к безмоментному. Применение точного сингулярного условия текучести для шарнирно опертой по краям арки приводит, на основании теории Койтера, к чисто безмоментному состоянию. Определены наименьшие статические оценки минимальных объемов, близость (до $10^{-10}\%$) которых к объемам оптимальных проектов подтверждает правомерность критерия Шилда и выражения для множителя в законе течения.

Определены условия текучести балок сложного поперечного сечения (трехслойных, двутавровых, коробчатых и трубчатых) с учетом перерезывающих сил. С помощью полученных условий текучести разработан метод оптимального проектирования рассматриваемых балок минимального объема, как нижней статической его оценки. Предложена также методика рационального выбора таких балок постоянного сложного сечения. Для иллюстрации метода оптимального проектирования численно определены проекты минимального объема один раз статически неопределимой балки с двумя равными пролетами под действием равномерно распределенной нагрузки. В рассмотренных примерах проведено сравнение жесткостей оптимальных балок в упругом

состоянии и упругих балок постоянного сечения при одинаковых объемах, опираниях и нагрузениях.

Показано, что произвольная положительная постоянная в критерии Шилда является собственным значением системы однородных дифференциальных уравнений устойчивости жесткопластической оболочки. В результате сделан вывод, что минимальный объем такой оболочки, определенный по критерию Шилда в геометрически линейной постановке, является критическим в бифуркационном смысле. Правомочность такого вывода проиллюстрирована на примере однородной статически определимой балки (стержня) под действием сжимающих усилий и пар сил на ее концах.

В шестой главе решены некоторые задачи оптимального проектирования равнопрочных статически неопределимых трехслойных упругих балок минимального веса или стоимости. Слои выполнены из различных материалов с механическими характеристиками, в общем случае, зависящими от температуры. Использован критерий равнопрочности, выдвинутый Ю.В.Немировским и состоящий в том, что на внешних поверхностях напряжения достигают предела текучести. Предположено, что боковая поверхность наружных слоев изменяется по заданному закону с варьируемыми параметрами. Задача оптимального проектирования заключается в нахождении минимума функции веса ν или стоимости с шести варьируемых параметров: толщины b_0 и высоты h_0 среднего слоя, высот первого h_1 и второго h_2 наружных слоев, а также параметров, ν_1 и ν_2 , характеризующих форму боковой поверхности балки. Для решения такой задачи определения относительного минимума веса или стоимости необходимо предварительно знать распределение поверхностных зон растяжения или сжатия наружных фибр внешних слоев на пределах текучести. Определение этих поверхностных зон осуществлено с помощью расчета эталонной балки, выполненной из материала среднего слоя. В примерах рассмотрены балки с внутренним слоем из стали СТ0С, первым наружным слоем – из дюралюминия Д1Л и второго наружного слоя – из титанового сплава ВТ3. Найдены оптимальные проекты минимального веса и стоимости следующих равнопрочных слоистых балок при номинальной

температуре (20°C): 1) жестко заделанная одним концом и шарнирно опертая на другом конце балка под действием равномерно распределенной нагрузки и растягивающего усилия; 2) такая же балка, как в первом примере, но без растягивающего усилия; 3) такая же балка, как в первом примере, но под действием треугольной нагрузки с наибольшей интенсивностью у заделки; 4) защемленная одним концом подвижно опертая в середине консольная балка под действием равномерно распределенной нагрузки; 5) шарнирно опертая на концах и в середине балка под действием равномерно распределенной нагрузки в одном пролете и сосредоточенной силы в середине другого пролета. Зависимости предельной нагрузки q_3 от отношения длины к половине высоты эталонной балки γ , $q_3(\gamma)$, в каждом из примеров 1–5 показаны кривыми 2–5, соответственно на рис. 6.1. Виды оптимальных равнопрочных балок минимального веса в примерах 1–5 ($\gamma = 40$) со стороны титанового слоя показаны на рис. 6.2–6.6, соответственно. В пятом примере зависимости веса $v(\gamma)$ и стоимости $c(\gamma)$ оптимальной равнопрочной балки, веса $Dv(\gamma)$ и стоимости $Dc(\gamma)$, определенные оптимизацией балки постоянной толщины по допускаемым напряжениям, веса $vp(\gamma)$ и стоимости $cp(\gamma)$, полученные после профилирования оптимального проекта по допускаемым напряжениям приведены на рис. 6.1.

Полученные результаты оптимального проектирования при номинальной температуре позволяют сделать следующие выводы:

1) Вес оптимальных равнопрочных балок не менее, чем в 14.7 раза, а стоимость не менее, чем в 3.63 раза меньше веса и стоимости эталонной балки ($v = 1$).

2) Вес оптимальных равнопрочных балок на 31% (5-й пример) – 230% (4-й пример), а стоимость на 56% – 235% меньше, чем вес и стоимость оптимальных проектов с постоянными по длине и высоте параметрами, полученных методом допускаемых напряжений.

3) Профилирование оптимальных проектов, полученных методом допускаемых напряжений, малоэффективно по сравнению с оптимальным проектированием равнопрочных балок – уменьшение веса на 2% – 26% и стоимости на 8% – 33%.

4) Оптимальное проектирование равнопрочных балок в условиях продольно-поперечного изгиба приводит к "вытеснению" (уменьшению высоты) наиболее плотного материала в проектах минимального веса и "вытеснению" более дорогого материала в проектах минимальной стоимости, а также к исчезновению внутреннего, как наименее прочного слоя.

Оптимальное проектирование равнопрочных слоистых балок в условиях повышенной температуры производится, в основном, по той же методике, как и при номинальной температуре. Вводятся только дополнительные неравенства и все неравенства при должны выполняться во всем диапазоне температур, включающем расчетную температуру.

В решенных ниже задачах оптимального проектирования материалы балок при номинальной температуре выбраны такими же, как в первых пяти примерах. Зависимости механических характеристик материалов, модулей упругости $e_j(t)$, пределов текучести σ_j^\pm , ($j = 0, 1, 2$), от температуры показаны соответствующими кривыми на рис. 6.12.

В первом примере рассмотрена шарнирно опертая по концам и в середине балка под действием равномерно распределенной нагрузки с параметром $\gamma = 40$. Полученные зависимости $v(t)$, $c(t)$, $Dv(t)$, $Dc(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, в обозначениях раздела 6.2, показаны на рис. 6.13. Виды балки со стороны титанового слоя при различных температурах показаны на рис. 6.14–6.15, причем толщинам b_{ki} отвечают температуры $T_i = 20^\circ + 200^\circ(i-1)$, ($k = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$). Не варьируемые значения толщины среднего слоя и параметров, ν_1 , ν_2 , такие же, как в разделе 6.2, ($b_0 = 0.15$, $\nu_1 = \nu_2 = 3$).

Анализ зависимостей от температуры на рис. 6.13 приводит к выводу, что нагрев балки оказывает большое влияние на объем и стоимость оптимального проекта. Различный характер зависимостей механических характеристик материалов слоев от температуры (например модулей упругости e_1 и e_2) может привести к немонотонности зависимости объема или стоимости от температуры (кривая c на рис. 6.13). Для оптимальных проектов рассматриваемой балки высота внутрен-

него слоя оказалась практически равной нулю, за исключением ее значений при номинальной температуре, когда она равна $h_0 = 0.312 \cdot 10^{-2}$ в проекте минимального объема и $h_0 = 0.575 \cdot 10^{-1}$ – в проекте минимальной стоимости. Интересно отметить, что минимальный объем равнопрочной балки и минимальный объем по допускаемым напряжениям при температуре $T = 340^\circ$ практически равны между собой (кривые v и Dv на рис. 6.13). С повышением температуры толщина дюралюминиевого слоя на краю балки возрастает, как будто там возникает заделка. В титановом слое с повышением температуры происходит гребнеобразование.

В другом примере рассмотрена заземленная по концам трехслойная балка под действием равномерно распределенной нагрузки. Виды оптимальных проектов балки при температурах 20° и 420° со стороны титанового слоя показаны на рис. 6.16. Отсюда следует, что высота дюралюминиевого слоя в заделке уменьшается интенсивнее с повышением температуры, чем высота титанового слоя. В последнем около заделки при всех температурах сохраняется гребнеобразная форма, а толщина средней части увеличивается с повышением температуры. Для температуры 420° весь дюралюминиевый слой имеет гребнеобразную форму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Физматгиз. 1969.
2. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Сер. "Классики естествознания". Прилож. 1. "Об упругих кривых". М.-Л.: Гостехиздат. 1934.
3. Упругие оболочки. М.: ИЛ. 1962.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Ф.-М. 1967.
5. Almorth B.O. Influence of edge conditions on the stability of axially compressed cylindrical shells. AIAA Journal. 1966. vol. 4. No. 1.
(Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика. 1966. No. 1.).
6. Fisher G. Influence of boundary conditions on stability of thinwalled cylindrical shells under axial load and internal pressure. AIAA Journal. 1965. vol. 3. No. 4.
(Русский перевод: Ракетная техника и космонавтика. 1965. No. 4.)
7. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. Изд. 2. М.: Гостехиздат. 1955.
8. Циглер Г. Об устойчивости упругих систем. Сб. "Проблемы механики". Вып. II. М.: 1959.
9. Reiss E.L., Greenberg H.J., Keller H.B. Nonlinear deflections of shallow spherical shells. J. Aeronaut. Sci. 1957. 24. No. 7.
10. Weinitschke H.G. Finite bending and buckling of shallow spherical shells. Machine Methods of Computation Project. Techn. Rep. No. 8, ONR Contract No. 5 ori 60. Massachusetts Institute of Technology. 1957.
11. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат. 1956.
12. Jerard G. Handbook of structural stability supplement part III. Buckling of curved plates and shells. New York University. NACA Contract No. NAW -6482. 1957.

13. Механика деформируемых тел. Сер. "Итоги науки". Механика. М.: 1969.
14. Engesser F. Über die Knickfestigkeit gerande stäbe. Z. Arch.-und Ing.-Vereins zu Hannover. 1889. 35. No. 4.
15. Euler L. Sur la force des colonnes. Mém. Acad. Sci end betters-letters de Berlin. 1759. 13.
16. Engesser F. Über Knickfragen. schweiz. Bauzeitung. 1895. 26. No.4.
17. Iasinski F. Sihweizezishe Bauzeitung. XXVI. 24. No.4. 1895.
18. Karman T. Untersuchungen über Knickfestigkeit. No.81. 1910
19. Ильюшин А.А. Устойчивость пластин и оболочек за пределом упругости. Приклад. матем. и мех. 1944. 8. No.5.
20. Ильюшин А.А. Пластичность. Гостехиздат. 1948.
21. Толоконников Л.А. О влиянии сжимаемости материала на упругопластическую устойчивость пластин и оболочек. Вестник Москов. гос. ун-та. Сер. Физ. мат. и естеств. н. Вып. 4. 1949. No.6.
22. Shanley F.R. The column paradox. J.Aeronaut. Sci. 1946. 13. No.12.
23. Shanley F.R. Inelastic column theory. J. Aeronaut. Sci. 1947. 14. No.5.
24. Bijlaard P.P. On the plastic stability of thin plates and shells. Proc. Koninkl. nederl. akad. Wet. Amsterdam. 1947. 50. No.7.
25. Gerard G. Plastic stability of thin shells. J.Aeronaut. Sci. 1957. 24. No.4.
26. Григолюк Э.И. О выпучивании тонких оболочек за пределом упругости. Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1957. No. 10. Р.ж. Мех. 1959. No.4. 4254.
27. Григолюк Э.И. Чистопластическая потеря устойчивости тонких оболочек. Прикл. матем. и мех. 1957. 21. No. 6. Р.ж. Мех. 1959. No.2. 1778.
28. Григолюк Э.И. Устойчивость упругопластических неоднородных оболочек. Докл. АН. СССР. 1958. 119. No. 4. Р.ж. Мех. 1959. No. 7. 8028.

29. Королев В.И., Смирнов И.Г., Стомма Р.П. Исследование устойчивости биметаллических оболочек при осевом сжатии за пределами упругости. Инж. журн. 1962. т. 2. No. 1.

30. Кабанов В.В. Устойчивость пластических конструктивно-анизотропных оболочек. V Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек. М.: 1965.

31. Кабанов В.В. Уравнения устойчивости тонких конструктивно-анизотропных упругопластических оболочек. VI Научное совещание по тепловым напряжениям в элементах конструкций. Киев. 1964.

32. Gerard G. Plastic stability Theory of stiffened Cylinders Under Hydrostatic Pressures. Ship. Res. 1962. vol. 6. No.2.

33. Упругость и пластичность. Серия. Итоги науки. 1966.

34. Немировский Ю.В. Об устойчивости за пределом упругости слоистых оболочек несимметричного строения. Механика твердого тела. 1966. No. 6.

35. Лепик Ю.Р., Сакков Э.Э. Исследования закритической стадии пластин, потерявших устойчивость за пределом упругости. Механика полимеров. 1968. No. 5.

36. Wilson L.B. The plastic deformation of a circular cylindrical shells supported by identical equally spaced circular ring frames under uniform external pressure. Transt. Royal inst. of naval architects. 1968. vol. 110. No. 1.

37. Волчков Ю.М., Павлов Ф.В. Упругопластическое деформирование цилиндрической оболочки с поперечными ребрами под действием гидростатического давления. VII Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластин. Днепропетровск. 1969.

38. Божинский А.Н., Вольмир А.С. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек за пределами упругости. ДАН СССР. 1962. 142. N. 2

39. Лепик Ю.Р. Одна возможность решения задачи об устойчивости упруго-пластических пластинок в точной постановке. Изв. АН СССР. ОТН. 1957. N. 8.

40. Ingereslew Age. On en elementar Beregningsmetode of krydsarmere Plader. Ingeniören. 1921. v. 30. No. 69.

41. Гвоздев А.А. Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем. Проект и стандарт. 1934. No. 8.
42. Гвоздев А.А. Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации. В кн.: Труды конференции по пластическим деформациям. АН СССР. 1938.
43. Марков А.А. О вариационных принципах в теории пластичности. Прикладная математика и механика. 1947. т. 11. Вып. 3.
44. Работнов Ю.Н. Приближенная техническая теория упругопластических оболочек. Прикладная математика и механика. 1951. No. 2.
45. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford. 1950.
46. Prager W., Hodge P.G. Theory of perfectly plastic solids. New York. London. 1951.
47. Ходж Ф.Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. Перевод с англ. М.: ИЛ. 1962.
48. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат. 1956.
49. Hodge P.G. The Mises yield conditions for rotationally symmetric shells. Quart. Appl. Math. 1961. No. 4.
50. Hodge P.G. The rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells. J. Appl. Mech. 1954. 21.
51. Onat E.T. The plastic collapse of cylindrical shells under axially symmetrical loading. Quart. Appl. Math. 1955. 13.
52. Немировский Ю.В., Работнов Ю.Н. Предельное равновесие подкрепленных цилиндрических оболочек. Изв. АН СССР. ОТИ. 1963. No. 3.
53. Немировский Ю.В. Предельное равновесие многослойных армированных осесимметричных оболочек. Изв. АН СССР. МТТ. 1969. No. 6.
54. Прагер В. Проблемы теории пластичности. Пер. с нем. М.: Ф.-М. 1958.
55. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций. М.:

Стройиздат. 1949.

56. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. Пер. с англ. М.: 1961.

57. Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластин и оболочек. М.: Наука. 1983.

58. Дубинский А.М. Расчет несущей способности железобетонных плит. Киев. Госстройиздат. УССР. 1961.

59. Рассказов А.О., Дехтярь А.С. Предельное равновесие оболочек. Киев. Вища школа. 1978.

60. Дехтярь А.С., Рассказов А.О. Несущая способность тонкостенных конструкций. Киев. Будівельник. 1990.

61. Савчук А.О. О пластическом анализе оболочек. Механика деформируемых твердых тел. Направления развития. М.: Мир. 1983.

62. Bach C, Graf O. Versuche mit allseitig aufliegenden, quadratischen und rechteckigen Eisenbetonpalatten. « Deutsche Bauzeitung » . Н. 3. V. 13. Berlin. 1916.

63. Morsch E. Versuche mit allseitig aufliegenden quadratischen und rechteckigen Eisenbetonplatten. « Deutsche Bauzeitung ». Н. 3. Berlin. 1916.

64. Graf O. Versuche mit allseitig aufliegenden rechteckigen Eisenbetonplatten und gleichmassig verteilter Belastung. « Deutscher Ausschuss Ausschuss für Eisenbeton ». Н. 56. Berlin. 1926.

65. Gehler W., Amos H, Versuche mit kreuzweise bewehrten Platten. « Deutscher Ausschuss für Eisenbeton ». Н. 70. 1932.

66. Гвоздев А.А. Обоснование §33 норм проектирования железобетонных конструкций. Строительная промышленность. 1939. No. 3.

67. Дубинский А.М. Исаенко А.Т. Экспериментально-теоретическое исследование несущей способности выпуклых оболочек при действии односторонней нагрузки. В кн. Оболочки в строительстве. Киев.: Будівельник. 1973.

68. Дехтярь А.С. Об учете геометрической нелинейности в расчетах несущей способности плоских оболочек. Изв. вузов. Строительство. 1993. N. 6.

69. Гопкинс (Hopkins H.G.), Прагер (Prager W.). Пределы экономии материала в пластинках. *Механика. Сб. переводов.* 1956. No. 6.
70. Прагер (Prager W.). Проектирование пластинок наименьшего веса. *Механика. Сб. переводов.* 1956. No.6.
71. Drucker D.C., Shield R.T. Design for minimum weight. In: *Actes IX Congress International de mecanique applique.* 5. Bruxelles. Univ.Bruxelles. 1957.
72. Freiburger W., Tekinalp B. Minimum weight design of circular plates. *J. Mech. Phus. Solids.* 1956. v. 4. No. 4.
73. Shield R.T. On the optimum design of shells. *J. Appl. Mech.* 1960. No. 27.
74. Шилд (Shield R.T.). Методы оптимального проектирования конструкций. *Механика. Сб. переводов.* 1962. No. 2
75. Микеладзе М.Ш. О равнопрочных пластичных оболочках. *Собщ. АН Груз. ССР.* 1960. т. 25. No. 4.
76. Немировский Ю.В. Об оценках веса пластических оптимальных конструкций. *Инженерный журнал. Механика твердого тела.* 1968. No. 4.
77. Nemirowsky Yu.V. Influence of shear forces on optimum design of beams and plates. In: *Optimisation in structural design. IUTAM Symposium. Warshawa.* 1973. (англ.).
78. Чирас А.А. Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела. Вильнюс. Минитис. 1971.
79. Чирас А.А., Боркаускас А.Э. Двойственные задачи оптимизации в теории предельного равновесия сплошной среды. *Строительная механика и расчет сооружений.* 1969. No. 4.
80. Вебра Р.В., Чирас А.А. Поверочная задача расчета арок по состоянию предельного равновесия. *Литовский механический сборник.* Вильнюс. 1969. No.2 (5).
81. Вебра Р.В., Чирас А.А. Оптимальное проектирование арок по предельному равновесию. *Литовский механический сборник.* Вильнюс. 1970. No. 1 (6).
82. Немировский Ю.В. Равнопрочные слоистые упругие арки и балки. *Изв. вузов. Строительство.* 1996. No. 8.

83. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Несущая способность гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек. АН УССР. Прикладная механика. Т. 3. Вып. 16. 1967.

84. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Об устойчивости и выпучивании стержней за пределом упругости. АН СССР. Журнал прикладной механики и технической физики. 1969. No. 2.

85. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Уравнения изгиба и выпучивания конструктивно-неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости. Материалы к VII Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Днепропетровск. 1969.

86. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Об устойчивости упруго-пластического стержня при циклическом нагружении. Новосибирск. СО АН СССР. Динамика сплошной среды. 1970. Вып. VI.

87. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. О рациональном армировании пластин, теряющих устойчивость. АН УССР. Прикладная механика. 1971. Т. 7. Вып. 11.

88. Вохмянин И.Т. Об оптимальном проектировании армированных пластин. Новосибирск. НИСИ. Краткое содержание докладов XXVII научно-технической конференции. 1971.

89. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Изгиб и выпучивание конструктивно-неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1971. No. 2.

90. Вохмянин И.Т. Изгиб и выпучивание конструктивно-неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Новосибирск. 1971.

91. Вохмянин И.Т. Изгиб и выпучивание конструктивно-неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-матем. наук. Новосибирск. 1972.

92. Вохмянин И.Т. Об изгибе и устойчивости трехслойных подкрепленных цилиндрических оболочек за пределом упругости. АН УССР. Прикладная механика. 1978. Т. 14. Вып. 6.

93. Вохмянин И.Т. К условию текучести Мизеса для тонких обо-

лочек вращения. Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1983. No. 7.

94. Вохмянин И.Т. Уравнения предельного равновесия пластин. Пути снижения материалоемкости строительных конструкций и интенсификация строительного производства. Тезисы докладов научно-технической конференции. Новосибирск. НИСИ. 1983.

95. Вохмянин И.Т. Уравнения предельного равновесия оболочек. Пути экономии ресурсов в строительстве в условиях Сибири. Тезисы докладов областной научно-технической конференции. Новосибирск. НИСИ. 1984.

96. Вохмянин И.Т. Условие текучести Мизеса для произвольных тонких пластин и оболочек. Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1985. No. 2.

97. Вохмянин И.Т. Уравнения предельного равновесия тонких оболочек и пластин. Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1987. No. 7.

98. Вохмянин И.Т. Об оптимальном проектировании пластин и оболочек. Тезисы докладов научно-технической конференции. Новосибирск. НИСИ. 1990.

99. Вохмянин И.Т. Об одном условии текучести и предельном равновесии анизотропных пластин и оболочек. Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1991. No. 3.

100. Вохмянин И.Т. О проектировании равнопрочных балок и рам. Архитектура и строительные конструкции. Тезисы докладов научно-технической конференции. Новосибирск. НИСИ. 1991.

101. Вохмянин И.Т. О проектировании идеальных жесткопластических неразрезных равнопрочных и ступенчатых балок. Изв. вузов. Строительство. 1992. No. 5-6

102. Вохмянин И.Т. О критериях оптимального проектирования жестко-пластических элементов конструкций. Архитектура и строительные конструкции. Тезисы докладов научно-технической конференции. Новосибирск. НИСИ. 1992.

103. Вохмянин И.Т. Определение безопасных путей нагружения идеально-пластических равнопрочных и ступенчатых балок при попе-

речном изгибе. Сборник тезисов докладов научно-технической конференции. Новосибирск. 1993.

104. Вохмянин И.Т. Об оценках объема оптимальных идеальных жесткопластических элементов конструкций. Сборник тезисов докладов научно-технической конференции. Новосибирск. НГАС. 1994.

105. Вохмянин И.Т. Некоторые вопросы проектирования и оптимизации идеально пластических равнопрочных тонкостенных элементов конструкций. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы 13-й Всесоюзной конференции. Новосибирск. 1994.

106. Вохмянин И.Т. Об одном критерии и постановке задачи проектирования жесткопластических элементов конструкций минимального объема. Расчетные методы механики деформируемого твердого тела. Тезисы докладов научно-технической конференции. Новосибирск. СГАПС. 1995.

107. Вохмянин И.Т. Условия текучести и оптимальное проектирование жестко-пластических балок сложного поперечного сечения минимального объема. Строительные конструкции и расчет сооружений. Сборник тезисов докладов научно-технической конференции (часть 1). Новосибирск. НГАС. 1995.

108. Вохмянин И.Т. Аппроксимация условия текучести и критерий оптимального проектирования арок и рам. Строительные конструкции и расчет сооружений. Сборник тезисов докладов научно-технической конференции (часть 1). Новосибирск. НГАС. 1996.

109. Вохмянин И.Т. Аппроксимация условия текучести и критерий оптимального проектирования жесткопластических арок и рам. Проблемы оптимального проектирования сооружений. Доклады 1-го межрегионального семинара. Новосибирск. НГАС. 1996.

110. Вохмянин И.Т. Оптимальное проектирование жестко-пластических балок сложного поперечного сечения. Проблемы оптимального проектирования сооружений. Доклады 1-го межрегионального семинара. Новосибирск. НГАС. 1996.

111. Немировский Ю.В., Вохмянин И.Т. Оценки и критерий оптимального проектирования жесткопластических элементов конструк-

ций минимального объема. Изв. вузов. Строительство. 1996. No. 3.

112. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Оптимальное проектирование равнопрочных слоистых статически неопределимых упругих балок. Изв. вузов. Строительство. 1996. No. 12.

113. Вохмянин И.Т. Разработка численных методов решения задач изгиба и устойчивости конструктивно-неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости. НИСИ. Новосибирск. Деп. в ВНИИЦ 12.03.74. N. 74010735.

114. Вохмянин И.Т. Уравнения предельного равновесия тонких оболочек и пластин. Вопросы динамической прочности строительных конструкций и оборудования. НИСИ. Новосибирск. Деп. в ВНИИЦ 14.01.88. N. 2880016155.

115. Вохмянин И.Т. Оптимальное проектирование идеальных жесткопластических равнопрочных балок //Александров П.В, Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В., Мезенцев С.Г., Рудяк В.Я. Разработка метода расчета и исследование напряженно-деформированного состояния изотропных и композитных линейчатых оболочек и балок. НГАС. Новосибирск. Деп. в ВНИИЦ 18.10.94. N.01940009350.

116. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. 1966.

117. Лэв А. Математическая теория упругости. Пер. с англ. М.-Л.: ОНТИ. 1935.

118. Работнов Ю.Н. Основные уравнения теории оболочек. ДАН СССР. 1945. Т. 47. No. 2.

119. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1,2. М.: Наука. 1970.

120. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.-Л.: ГИТТЛ. 1949.

121. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань. Таткнигоиздат. Ред. научно-технической литературы. 1957.

122. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 1962.

123. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Л.: Издательство ЛГУ. Часть 1. 1962. Часть 2. 1964.
124. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки. Пер. с англ. М.: Ф.-М. 1963.
125. Абарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974.
126. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука. 1982.
127. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир. 1987.
128. Naghdi P.M. On the theory of thin elastic shells. Quarterly of Applied Mathematics 1957. V. 14. No. 4.
129. Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск.: Наука. 1986.
130. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука. 1979.
131. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука. 1977.
132. Huber M.T. Czasopismo tech. 1904. T. 22.
133. Mises R. Nachr. d. Gessel. d. Wiss. zu. Gottingen. Math. Pys. Klasse. 1913.
134. Hencky H.Z. S.V.D.T. 1925. T. 69.
135. Saint – Venant B.I.d. Math. pures et appl. ser. II. T. 16. 1871
136. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука. 1966.
137. Hencky H. Zeits. ang. Math. Mech. 1924. T. 4.
138. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: АН СССР. 1963.
139. Ильюшин А.А., Огибалов П.М. Упруго-пластические деформации полых цилиндров. М.: Изд. МГУ. 1960.
140. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагрузках. Изд. Моск. ун-та. 1965.
141. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа. 1990.

142. Чаплинский И.А. К определению величины предела текучести металлов. Изв. вузов. Строительство. 1996. No. 1.

143. Ашкенази Е.К. Анизотропия пластических материалов. Л.: Машиностроение. 1969.

144. Ву Э.М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. В кн.: Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов. Под ред. Дж. Сендепки. М.: Мир. 1978.

145. Голденблат И.И., Койнов В.В. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение. 1968.

146. Малмейстер А.К. Геометрия теорий прочности. Механика полимеров. 1966. No. 4.

147. Болотин И.И. Дефекты типа расслоения в конструкциях из композитных материалов. Механика композитных материалов. 1984. No. 2.

148. Ли Т., Салианас Д., Ито У. Начальная поверхность текучести однонаправленного композита. Тр. Амер. об-ва инж. мех. Сер. Е. Прикладная механика. Пер. с англ. 1972. Т. 39. No. 2.

149. Мельбардис Ю.Г., Крегерс А.Ф. Аппроксимация поверхностей прочности трансверсально-изотропного материала. Механика композитных материалов. 1980. No. 3.

150. Немировский Ю.В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя. Журнал прикл. механики и техн. физики. 1969. No. 5.

151. Немировский Ю.В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя. Журнал прикл. механики и техн. физики. 1969. No. 6.

152. Timoshenko C.P. Analysis of bi-metall thermostats. Journal of the optical Society of America and Review Scientific Instruments, 1925. Vol. 11. No. 3.

153. Gough, Elam and de Bruyne. The stabilisation of a thin sheet by a continuous supporting Medium. The Journal of the Royal Aeronautical Society. 1940. Vol. XLIV. No.349.

154. Hoff and Motner. The buckling of sandwich type panels. J.A.S. 1945. Vol. 12. No. 3.

155. Рабинович А.Л. Устойчивость обшивки с заполнителем. Оборонгиз. 1946.

156. Прусаков А.П. Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 1.

157. Reissner E. Finite deflection of sandwich plates. Journal of the Aeronautical Sciences. 1948. Vol. 15. No. 7.

158. Wang Chi-Teh. Principle and applications of complementary energy method of thin homogeneous and Sandwich plates and shells with finite deflections. NASA. Technical Note. 1952. No. 2620. 39. p.p.

159. Григолюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем. Изв. АН СССР. ОН. 1957. No. 1.

160. Амбарцумян С.А. Расчет симметрично нагруженной круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами. ДАН Арм. ССР. 1955. Т. XXI. В. 1.

161. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. М.: Госстройиздат. 1958.

162. Заруцкий В.А. К расчету ребристых цилиндрических оболочек. Прикладная механика. 1965. Т.1. В. 11.

163. Заруцкий В.А. К расчету ребристых цилиндрических оболочек, подверженных действию произвольных нагрузок. Прикладная механика. 1966. Т.11. В. 4.

164. Libove C., Battdorf S.B. A general Small Deflections Theory of Flat Sandwich plates. Nat. Adv. Commn. Aero. Techn. Note. 1948. No. 1526. пер. 899.

165. Григолюк Э.И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем. Изв. АН СССР. ОН. 1958. No. 1.

166. Александров А.Я., Куршин Л.М. Трехслойные пластинки и оболочки. Прочность, устойчивость, колебания. Машиностроение. 1968.

167. Александров А.Я. Об определении приведенных упругих параметров сотовых заполнителей. Расчеты элементов авиационных конструкций. Вып. 3. 1965.

168. Немировский Ю.В. Изгиб подкрепленных цилиндрических

оболочек в условиях ползучести. VII Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек. Днепропетровск. 1969.

169. Theocares P.S., Hill P.W. Inelastic buckling of rib cord sandwich cylinders under external hydrostatic pressure. *Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME. Series E. Vol. 33. Number 3.* 1966.

170. Hopkins H.G., Prager W. The load carrying capacities of circular plates. *J. Mech. Solids.* 1953. 2.

171. Гудьер Дж.Н., Ходж Ф.Г. Упругость и пластичность. М.: Мир. 1960.

172. Savczuk A., Rychlewski J. On yield surfaces for plastic shells. *Arg. mech. stoswaney.* 1960. 12. No. 1.

173. Розенблюм В.И. Об условии пластичности для тонкостенных оболочек. *Прикл. мат. и мех.* 1960. 24. No. 2.

174. Шапиро Г.С. О поверхностях текучести для идеально-пластических оболочек. *Проблемы механики сплошной среды.* М.: АН СССР. 1961.

175. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука. 1966.

176. Горбачев В.И., Победра Б.Е. О некоторых критериях разрушения композитов. *Изв. АН Армянской ССР. Механика.* Т. 38. No. 4.

177. Микеладзе М.Ш. Введение в техническую теорию идеально-пластических тонких оболочек. Тбилиси. Мецниереба. 1969.

178. Исупов Л.П., Работнов Ю.Н. О законе пластичности для композитной среды. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1985. No. 1.

179. Олышак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир. 1964.

180. Ильюшин А.А., Ленский В.С. О прочности оболочек толстостенного цилиндра и полого шара, подверженных облучению. *Инженерный сб.* 1960. 28.

181. Wilson J.C., Berggren R.G. Effects of neutron irradiation of stel. *Proc. ASTM.* 1955. 55.

182. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. М.:

Физматгиз. 1959.

183. Ужик Г.В. Прочность и пластичность металлов при высоких температурах. М.: Изд. АН СССР. 1957.

184. Treska H. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1867. Т. 64.

185. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз. 1963.

186. Ван-Цзи-де. Прикладная теория упругости. М.: ГИФМЛ. 1959.

187. Biezeno C.B., Hencky H. On the general theory of elastic stability. Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam. 31(1928). 32(1929).

188. Болотин В.В. Вопросы общей теории упругой устойчивости. Прикладная мат. и мех. 1956. 20. No. 5.

189. Работнов Ю.Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности. Инж. сборник. 1952. Т. XI.

190. Пановко Я.Г. О критической силе сжатого стержня в неупругой области. Инж. сборник. 1954. Т. XX.

191. Ключников В.Д. Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука. 1980. 240 с.

192. Зубчанинов В.Г. К проблеме устойчивости упруго-пластических систем. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. No. 2.

193. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решения нелинейных уравнений. М.: ФМ. 1969.

194. Шенли Ф.Р. Анализ веса и прочности самолетных конструкций. М.: Оборонгиз. 1964.

195. Neut A. Die stabilität geschichteter streifen. Netherlands Nat. Luchtvaarlaber. Amsterdam Berict. 1943. No. 284.

196. Wang Chi-Teh. General theory of the buckling of sandwich cylinders. N.Y. Univ. Sch. aero. publ. Acad. 1949. 25.

197. Wang Chi-Teh., Rao G.V.R. A slutdy of analogous model diving the nonlinear characteristics in the buckling theory of sandwich cylinders. Jourral of the Aeronautical Sciences. 1952. Vol. 19. No. 2

198. Караванов В.Ф. Уравнения пологих трехслойных оболочек с легким заполнителем. Изв. вузов. Авиационная техника. 1958. No. 1

199. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.В. Пластинки и оболочки. М.: Ф.М. 1963.

200. Брюккер Л.Е., Куршин Л.М. О выводе статическим путем уравнений изгиба трехслойной пластины с жестким заполнителем. Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. No. 3. 1959.

201. Тамуров Н.Г. Изгиб трехслойных анизотропных пластин с легким заполнителем. Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1958. No. 7.

202. Муштари Х.М. К общей теории пологих оболочек с заполнителем. Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. 1961. No. 2.

203. Болотин В.В. К теории слоистых плит. Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. 1963. No. 3.

204. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1967.

205. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974.

206. Болотин В.В. Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. No. 1.

207. Григолюк Э.И., Чулков П.П. К расчету трехслойных пластин с жестким заполнителем. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. No. 1.

208. Александров А.Я. Об определении приведенных упругих параметров ребристых заполнителей. Расчеты элементов авиационных конструкций. 1965. Вып. 3.

209. Брюккер Л.Э. Некоторые варианты упрощения уравнений изгиба трехслойных пластин. Расчеты элементов авиационных конструкций. 1965. Вып. 3.

210. Куршин Л.М. Уравнения трехслойных цилиндрических оболочек. Изв. АН СССР. ОН. 1958. No. 3.

211. Куршин Л.М. Большие прогибы трехслойной полой цилиндрической оболочки при сжатии. Сб. статей. Вопросы расчета элементов авиационных конструкций. Оборонгиз. 1959.

212. Куршин Л.М. Устойчивость трехслойных цилиндрических

оболочек при сжатии, давлении и совместном действии давления и сжатия. Расчеты элементов авиационных конструкций. Вып. 3. 1965.

213. Куршин Л.М. Об устойчивости трехслойной пологой цилиндрической оболочки при сжатии. Изв. АН СССР. ОН. 1958. No. 8.

214. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким наполнителем. Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. 1965. No. 5.

215. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Общая теория упругих трехслойных оболочек большого прогиба. Сб. Динамика и прочность машин. Рига. 1963. Вып. 10.

216. Прусаков А.П., Растеряев Ю.К. Изгиб, устойчивость и колебания многослойных пластин несимметричного строения. В кн. Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука. 1970.

217. Амензаде Ю.А. Теория упругости. Баку. Маариф. 1968.

218. Григолюк Э.И., Корнев В.Н. Анализ уравнений трехслойных оболочек несимметричной структуры с жестким наполнителем. Прикладная механика. 1968. No. 3.

219. Корнев В.Н. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним поперечным давлением с учетом краевого эффекта. МТТ. 1967. No. 3.

220. Александров А.Я. Расчет наполнителя трехслойных пластин с учетом отрыва. Вопросы расчета элементов авиационных конструкций. 1959. No. 1.

221. Александров А.Я., Вольперт В.С., Наумова М.П., Таланова Г.И., Трофимова Э.П. Некоторые задачи расчета трехслойных панелей с наполнителями типа плотно упакованных конических оболочек и сот. Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука. 1970.

222. Прусаков А.П. К теории расчета ортотропных трехслойных пластин с жестким наполнителем. Расчеты элементов авиационных конструкций. 1965. Вып. 3.

223. Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куршин Л.М. Расчет трехслойных пластин. Оборонгиз. 1960.

224. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Нелинейные уравнения пологих многослойных оболочек регулярного строения. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1967. No. 1.

225. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Полубезмоментная теория трехслойных цилиндрических оболочек несимметричного строения с жестким сжимаемым заполнителем. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1972. No. 5.

226. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение. 1973.

227. Куршин Л.М. Об устойчивости трехслойных пластин при изгибе. Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1959. No. 9.

228. Прусаков А.П., Растеряев Ю.К. Изгиб пологих многослойных оболочек в поле высоких температур. В сб. Теория оболочек и пластин. М.: Наука. 1973.

229. Королев В.И., Смирнов И.Г., Соколов В.Н. Исследование устойчивости цилиндрической оболочки за пределом упругости. Вопросы механики. М.: Изд. Моск. университета. 1961. Вып. 193.

230. Королев В.И., Смирнов И.Г., Стомма Р.Г. Исследование устойчивости биметаллических цилиндрических оболочек при осевом сжатии за пределами упругости. Инж. журнал. 1962. Т.2. No. 1.

231. Кабанов В.В. Устойчивость пластических конструктивно-анизотропных оболочек. V Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек. М.: Наука. 1965.

232. Кабанов В.В. Уравнения устойчивости тонких конструктивно-анизотропных упруго-пластических оболочек. VI Научное совещание по тепловым напряжениям в элементах конструкций. Киев. 1964.

233. Куршин Л.М., Лампер Р.Е., Липовцев Ю.В. К расчету на устойчивость трехслойных пластин за пределом пропорциональности. Расчеты элементов авиационных конструкций. 1965. Вып. 3.

234. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость двухслойных оболочек за пределом упругости. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1966. No. 4.

235. Куршин Л.М. Уравнения трехслойных непологих и пологих оболочек. Расчеты элементов авиационных конструкций. 1965. Вып. 3.
236. Королев В.И. Упругопластические деформации оболочек. М.: Машиностроение. 1971.
237. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение. 1982.
238. Расчет элементов конструкций летательных аппаратов. Под ред. Кабанова В.В. М.: Машиностроение. 1982.
239. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука. 1978.
240. Расчет на прочность элементов авиационных конструкций. Под ред. Кабанова В.В. Б.М. 1990. Вып. 1.
241. Потеря устойчивости и выпучивание конструкций. Пер с англ. Под ред. Григолюка Э.И. М.: Наука. 1991.
242. Вознатов А.Н. Об устойчивости изгибного равновесия оболочек за пределом упругости. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1973. No. 2.
243. Шевелев Л.П. Основы теории устойчивости оболочек за пределом упругости. Л. ЛГУ. 1982.
244. Гудрамович В.С. Устойчивость упруго-пластических оболочек. Киев. Наукова думка. 1984.
245. Расчет элементов конструкций летательных аппаратов. Под ред. Кабанова В.В. М.: Машиностроение, 1990.
246. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа. 1990.
247. Джон Ч., Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. О решении задачи бифуркации цилиндрической оболочки при сложном докритическом деформировании. Устойчивость и пластичность при сложном нагружении. Межвузовский сборник научных трудов. Тверь: Тве ГТУ. 1994.
248. Зубчанинов В.Г. Устойчивость тонкостенных элементов конструкций за пределом упругости с учетом сложного нагружения. Изв. вузов. Строительство. 1995. No. 11.

249. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек. Автореферат на соискание ученой степени доктора ф.-м.н. Л. 1958.

250. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и методы их решения. М.: Наука. 1964.

251. Шилькрут Д.И. Некоторые задачи нелинейной теории оболочек и пластин и их реализация на ЭВМ. Кишинев. 1967.

252. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунтцкий Я.Б., Степенко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука. 1969.

253. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Наука. 1966.

254. Панферов В.М. О сходимости метода упругих решений для задачи упруго-пластического изгиба пластин. Прикладная математика и механика. 1952. Том XVI. Вып. 2.

255. Матощко С.И. Упруго-пластический изгиб пластин при поперечной нагрузке. Прикладная механика. 1969. Том 1. Вып. 9.

256. Стрельбицкая А.И., Колгадин В.А., Матощко С.И. Изгиб прямоугольных пластин за пределом упругости. Киев. Наукова думка. 1971.

257. Кузнецов В.Н. Численный метод решения задач теории пластичности. Упругость и неупругость. М.: Изд. МГУ. 1975. Вып. 4.

258. Быков Д.Л. О некоторых методах решения задач теории пластичности. Упругость и неупругость. М.: Изд. МГУ. 1975. Вып. 4.

259. Биркган А.Ю., Вольмир А.С. Применение электронных цифровых машин к задаче о динамической устойчивости оболочек. ДАН СССР. 1960. 135. No. 5.

260. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука. 1967.

261. Немировский Ю.В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя. ПМТФ. 1969. No. 6.

262. Немировский Ю.В. Об устойчивости армированных оболочек

и пластин за пределом упругости. Изв. АН СССР. 1970. No. 2.

263. Фомин В.Л. О предельном равновесии круговой цилиндрической оболочки. Строительная механика и расчет сооружений. 1963. No. 2.

264. Немировский Ю.В., Мазалов В.Н. Оптимальное проектирование конструкций. Библиографический указатель. Новосибирск. СО АН СССР. Институт гидродинамики. Часть I. Часть II. 1975.

265. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука. 1981.

266. Гребенюк Г.И., Бирюлев В.В. Оптимизация узлов и соединений строительных конструкций. Изв. вузов. Строительство. 1994. No. 11.

267. Фрайбергер В. (Freiberger W.). О проектировании цилиндрических оболочек минимального веса. Механика. Сб. переводов. 1958. No. 3.

268. Lepik Ü. Application of Pontryagin's maximum principle for minimum weight design of rigid-plastic circular plates. Intern. J. Solids and Structures. 1972. v. 7. No. 4.

269. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз. 1962.

270. Друккер (Drucker D.C), Шилд (Shield R.T.). Границы проектирования конструкций минимального веса. Механика. Сб. переводов. 1958. No.3.

271. Леллеп Я.А. Оптимальное проектирование кусочно-однородных жесткопластических балок. Прикладная механика. 1989. No. 3.

272. Койтер В.Т. Соотношения между напряжениями и деформациями, вариационные теоремы и теорема единственности для упруго-пластических материалов с сингулярной поверхностью текучести. Сб. Механика. 2(60). 1960.

273. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука. 1970.

274. Лепик Ю.Р. Исследование послекритической стадии жестко-пластических цилиндрических оболочек. Прикладная механика. 1989. Т. 25. No.12.

275. Тимошенко С.П. Курс сопротивления материалов. ГНТИ. М.-Л. 1931.
276. Рейтман М.И., Шапиро Г.С. Оптимальное проектирование деформируемых твердых тел. Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М. НИИТИ. 1978. Т. 12.
277. Немировский Ю.В. Резников Б.С. Об оптимальном по условиям эксплуатации проектировании балок, подверженных ползучести. Машиноведение. 1969. No. 3.
278. Справочник машиностроителя. М. 1979. Т. 1.
279. Вохмянин И.Т. Немировский Ю.В. Несущая способность подкрепленных и армированных цилиндрических оболочек. Отчет ЦНИИ 1 ВМФ. Институт гидродинамики СО АН СССР. 1967. 113 с.
280. Вохмянин И.Т. Устойчивость и оптимальное проектирование жесткопластических элементов конструкций. Проблемы оптимального проектирования сооружений. Доклады Всероссийского семинара в двух частях. Часть 1. Новосибирск. НГАС. 1997. С. 59-67.
281. Немировский Ю.В., Вохмянин И.Т. О проектировании равнопрочных слоистых упругих балок минимального веса и стоимости с учетом температуры. Проблемы оптимального проектирования сооружений. Доклады Всероссийского семинара в двух частях. Часть 2. Новосибирск. НГАС. 1997. С. 39-47.
282. Вохмянин И.Т. Об устойчивости неоднородных стержней с пропорциональными диаграммами. Сборник тезисов докладов научно-технической конференции (часть 1). Новосибирск. НГАС. 1997. С. 63-64.
283. Вохмянин И.Т. О краевом эффекте упруго-пластической трехслойной цилиндрической оболочки. Расчет и конструирование сооружений, автомобильных дорог, технология и материалы, экологические проблемы региона. Тезисы докладов XV межрегиональной конференции. Красноярск. 1997. С. 23.
284. Вохмянин И.Т. О численных методах решения задач изгиба и выпучивания конструктивно-неоднородных упруго-пластических пластин и оболочек. Программа 15 Межреспубликанской конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности.

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН. 1997. С. 6.

285. Вохмянин И.Т. Несущая способность и устойчивость конструктивно-неоднородных пластин и оболочек за пределом упругости. Материалы научно-технической конференции "Проблемы прочности и усталостной долговечности материалов и конструкций". СИБНИА. Новосибирск. 1997.

286. Вохмянин И.Т. Устойчивость и выпучивание упругопластических прямоугольных трехслойных пластинок. Изв. вузов. Строительство. 1997. No. 9. С. 112-127.