

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

ПОЛЕЖАЕВ В.И.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА
ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В ЗАМКНУТОЙ
ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ**

Диссертация на соискание ученой
степени кандидата технических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ
доктор технических наук, профессор
В.Я. ЛИХУШИН

Москва, 1967 г.

АННОТАЦИЯ

Изложен разностный метод решения нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа в замкнутой двумерной области. Приводятся результаты численного исследования устойчивости разностной схемы, сходимости при счете стационарных задач на установление и при уменьшении шагов сетки.

Дается постановка задач, и приводятся результаты расчета одномерных течений сжимаемого совершенного газа с учетом теплопроводности и вязкости (структура фронта одномерной ударной волны, нестационарное течение газа при внезапном нагреве границы).

Дается постановка задачи, и приводятся результаты расчета течения и теплообмена при конвекции газа в замкнутой прямоугольной области под действием внешней массовой силы.

Результаты расчета сопоставляются с имеющимися результатами экспериментальных исследований и расчетов других авторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | Стр. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 5 |
| ГЛАВА I. РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ..... | 19 |
| § I. Основная система дифференциальных уравнений. Общая постановка задачи..... | 19 |
| § 2. Разностная схема для расчета одномерных и двумерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа. Краткое описание программы для вычислительной машины типа М-20 | 24 |
| § 3. Устойчивость разностной схемы. Сходимость при счете на установление..... | 39 |
| Выводы к главе I | 46 |
| ГЛАВА. П. РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ВЯЗКОСТИ..... | 47 |
| Общие замечания..... | 47 |
| § I. Расчет структуры фронта одномерной стационарной ударной волны..... | 48 |
| §2. Нестационарное течение газа при внезапном подогреве границы | 65 |
| Выводы к главе П..... | 82 |
| ГЛАВА Ш. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА ПРИ КОНВЕКЦИИ ГАЗА В ЗАМКНУТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ..... | 85 |
| Общие замечания..... | 85 |
| § I. Постановка задачи. Система определяющих критериев подобия. Условия гидростатического равновесия..... | 86 |
| § 2. Расчет течения и теплообмена в вертикальном слое газа с боковым подогревом. Получение стационарного решения. Влияние параметров сетки на решение..... | 95 |
| § 3. Режимы течения и теплообмена по числам Gr_L . Возникновение и развитие вторичных течений..... | 107 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 4. Влияние на течение и теплообмен физических свойств и сжимаемости газа..... | 128 |
| § 5. Режимы течения и теплообмена по числам $Gr_L, H/L$. | |
| Формулы для расчета теплопередачи через вертикальный слой..... | 148 |
| § 6. Некоторые особенности течения и теплообмена в замкнутой области при различных направлениях внешней силы..... | 168 |
| Выводы к главе III | 182 |
| Заключение | 185 |
| Условные обозначения | 187 |
| ЛИТЕРАТУРА | 189 |

ВВЕДЕНИЕ

Во многих случаях, возникающих при движении с теплообменом сжимаемого вязкого газа, представляется затруднительным разделить течение на внешнее невязкое и вязкое в пограничном слое у стенки, и требуется решение полной системы уравнений Навье-Стокса. Это течения при малых и средних числах Рейнольдса, циркуляционные течения в замкнутых областях и зонах отрыва пограничного слоя, течения на начальных участках при внешнем и внутреннем обтекании различных тел. К этому типу относятся также течения с большими продольными градиентами параметров, которые по порядку величины сравнимы или превышают поперечные градиенты (скачки температур, скачки уплотнения). Имеется и множество других проблем, связанных с описанием течений вязкого газа, имеющих достаточно сложную вихревую структуру (например, описание течений после потери устойчивости и приближающихся, по свойствам к турбулентным), для решения которых непригодны приближенные уравнения и требуется рассмотрение полной системы уравнений Навье-Стокса. В последние годы благодаря развитию вычислительной техники и численных методов появилась возможность численного решения этих уравнений на современных вычислительных машинах.

Цель настоящей работы заключается в построении численного метода решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа для течения и теплообмена в замкнутой двумерной области и исследование с помощью предложенного метода некоторых одномерных и двумерных задач.

С помощью уравнений Навье-Стокса возможно дать более детальное описание структуры течения вязкого газа, чем с помощью известных приближенных уравнений типа пограничного слоя [6], однако численное решение уравнений Навье-Стокса сопряжено со значительными трудностями. Во-первых, в отличие от уравнений пограничного слоя, которые имеют параболический характер по пространственной переменной вдоль потока и

"локализованы" в пределах толщины пограничного слоя у стенки, уравнения Навье-Стокса имеют эллиптический характер. При решении эллиптических систем требуется как значительное количество вычислений, так и большой объем информации – полей искомых функций, необходимый для хранения в памяти вычислительной машины. Кроме того, при больших числах Рейнольдса эта система вырождается ввиду появления малого параметра $\varepsilon = \frac{1}{C_R}$ при старших производных. С физической точки зрения это соответствует появлению в поле течения локальных неоднородностей, масштаб которых значительно меньше масштаба всей рассматриваемой области течения, так что для детального описания течения требуется значительно больший, чем обычно, объем информации. Далее, при увеличении числа Рейнольдса возрастает и время затухания возмущений. Последнее приводит к замедлению сходимости итерационных процессов и увеличению числа операций при расчетах на вычислительных машинах. Эти особенности определяют требования, предъявляемые к численным методам решения уравнений Навье-Стокса, заключающиеся в необходимости достаточно точной аппроксимации решения по пространственным переменным (по крайней мере, не ниже второго порядка точности) и экономичной организации вычислительного процесса. Наиболее эффективными для решения краевых задач на современных вычислительных машинах являются методы конечных разностей (или методы сеток), и преобладающая часть работ выполнена этими методами. В случае несжимаемой жидкости система уравнений Навье-Стокса путем исключения давления приводится к нелинейному уравнению четвертого порядка относительно функции тока ψ либо к двум уравнениям второго порядка относительно функции тока ψ и вихря w .

Первые попытки численного решения стационарных уравнений такого типа восходят к работам Тома с сотрудниками. Обзор этих работ содержится в книге [7]. Первые исследования в Советском Союзе в этом направлении выполнены в ВЦ МГУ [9, 10]. За последние 3-4 года появилось значительное

количество работ, в которых приводятся результаты численного решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости для различных задач (течение в выемке с движущейся границей [8, 11, 14, 15], течение на начальном участке плоского канала [11, 13], в случае естественной конвекции несжимаемой жидкости в замкнутой области [64-66, 86-88], течение между вращающимися цилиндрами [9] и др.).

Система уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа обладает рядом специфических свойств, состоящих в более сложной структуре тензора напряжений, в результате чего в уравнениях количества движения появляются смешанные производные, иной трактовке давления, зависимости физических свойств от температуры и др. В этом случае оказывается целесообразным исходить из записи этой системы непосредственно для составляющих поля скорости u, v плотности ρ и температуры T . В таком виде запись близка к той, которая используется при построении разностных схем для уравнений газовой динамики [20, 21]. Численное решение одномерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа осуществлялось в работах [18, 19, 36 – 39]. В этих работах применялись в основном различные варианты явных разностных схем. Один из вариантов неявной схемы рассмотрен в работе [36].

К началу работы автора над построением численного метода расчета не было известно каких-либо работ, в которых численно решалась система двумерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа (за исключением результатов исследования некоторых типов разностных схем для этой системы [16]). В опубликованных к настоящему моменту работах [17-19] авторы для численного решения системы двумерных уравнений применяют только явные разностные схемы. Преимущество этих схем заключается в простоте записи, минимальном числе операций на слое и минимальном количестве информации, требуемой для промежуточных вычислений, что особенно важно, если учесть как громоздкость исходной системы, так и потребности в оперативной памяти для хранения основной информации - полей вычисляемых величин u, v, ρ, T . Основным недостатком таких схем в применении к уравнениям Навье-Стокса

являются условия на шаг по времени (или итерационный параметр) как по критерию Куранта ($\tau \sim \frac{h}{|u|+1/C_M}$), так и по вязкости ($\tau \sim C_R h^2$) или теплопроводности ($\tau \sim C_R Pr \cdot h^2$), что ограничивает диапазон применения этих схем по указанным критериям подобия и на достаточно подробных сетках. Кроме того, в явных схемах [18 - 19] при аппроксимации пространственных переменных центральными разностями (что обеспечивает второй порядок точности) имеются дополнительные ограничения либо на знаки составляющих скорости u, v , либо на соотношение u/v . В работе [17] построена явная схема, в которой осуществляется пересчет инерционной части уравнений количества движения, что позволяет избежать этой особенности.

Неявные схемы практически не имеют указанных ограничений на шаги сетки, однако требуют значительно большей вычислительной работы на слое и запоминания большого количества промежуточной информации, что затрудняет их применение для решения уравнений Навье-Стокса в сжимаемом газе, в особенности при использовании вычислительных машин с ограниченной оперативной памятью. Разностная схема, которая приводится в гл. I диссертации, является в некотором смысле промежуточной между двумя типами схем - явной и неявной. В основу положен принцип построения разностной схемы для многомерных уравнений из одномерных схем. Методы такого типа, начиная с работ [23-25] широко используются для численного решения практически всех уравнений математической физики. В работах советских математиков [25-31] предложены различные варианты экономичных схем (схемы с разностным оператором, расщепляющемся на верхнем слое [28-29], схемы дробных шагов [26-27] и близкие к ним локально-одномерные [30-31]). Более подробный обзор этих схем содержится в указанных работах и книгах [32-34].

Для двумерных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа нами применяется разностная схема с центральными разностями, в которой осуществляется аппроксимация исходной системы как на целом шаге $n+1$, так

и на вспомогательном $n + 1/2$ по аналогии со схемой переменных направлений [23-24]. В этом случае, как показывают результаты экспериментальных расчетов, решение на стационарном режиме не зависит от шага по времени, и схема пригодна для решения стационарных задач на установление и (при некоторых ограничениях [28] на класс граничных функций) нестационарных задач. Для аппроксимации одномерного оператора применяется схема специального вида, в которой инерционные и вязкостные члены в уравнении количества движения вынесены на верхний, а давление - на нижний слой по времени, и таким образом, решение одномерной системы сводится к последовательному решению прогонкой [40] систем алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами.

Такая структура разностной схемы позволяет построить программу, состоящую из стандартных одномерных подпрограмм [90]; в процессе счета в оперативной памяти находится одна такая подпрограмма, а результаты промежуточных вычислений занимают не более двух строк. Вопрос об условиях устойчивости схемы решался нами в конкретных расчетах в диапазоне всех критериев подобия, и было получено, что в отличие от явных схем, шаг по времени определяется только условиям вида $\tau \sim h \cdot C_M$ (достаточное условие).

В главах II и III диссертации рассматривается постановка конкретных одномерных и двумерных задач для уравнений Навье-Стокса в сжимаемом газе и приводятся результаты их численного решения с помощью предложенной схемы.

Опубликованные к настоящему времени результаты конкретных расчетов уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа имеют, как правило, частный характер и выполнены в диапазоне одного- двух критериев подобия. В работе [36] рассматривается нестационарный процесс формирования одномерной ударной волны из начального изоэнтропического состояния вязкого газа. В работе [39] рассчитывается задача о распространении и отражении от стенки возмущений, образующихся при вдвигании поршня в газ. Рассматривались

случаи сильных и слабых возмущений. В работе Крокко [38] рассматривается одномерное стационарное течение сжимаемого вязкого газа в расширяющемся канале. Схема расчета [38] основана на введении в нестационарный процесс стабилизирующих поправок, которые исчезают при достижении стационарного состояния. В работе [18] рассчитывалось нестационарное одномерное течение вязкого газа в ударной трубе. Авторы этой работы использовали аппроксимацию инерционных членов в направлении движения газа разностями "вперед", что позволяет получить решение при больших отношениях давления на диафрагме, однако, значительно искаженное из-за влияния "вязкости" схемы.

В настоящее время опубликовано сравнительно немного примеров решения двумерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа. В первой из относящихся сюда работ [17] рассчитывалось стационарное течение в выемке с движущейся верхней границей при числах Маха $1/3, 1/2, 1$ и Рейнольдса 100, 500 и 1000. Автором [17] с помощью этого же разностного метода было в дальнейшем получено численное решение задачи обтекания вязким газом внешнего тупого угла при $Re_\delta = 100, 400$, $\theta = 20, 40$, $M = 1.3 \div 6$ и с учетом взаимодействия с внешним потоком невязкого газа. В работе [18] получены результаты расчета двумерного нестационарного течения в ударной трубе и стационарного обтекания плоской пластинки при числах $M = 6, 8$ и 20. В работе [19] даны примеры расчета стационарного обтекания плоской пластинки при числе $M = 2, 0$ и числе Рейнольдса 250 и нестационарного обтекания прямоугольного препятствия при числах $M = 1.1$ и числе Рейнольдса 50.

В работе автора [89] упоминавшаяся разностная схема применена к расчету одномерных стационарных и нестационарных течений сжимаемого вязкого газа. Здесь (гл. II) дается постановка задачи и приводятся результаты расчета двух одномерных задач - о структуре фронта одномерной стационарной ударной волны (§1 гл. II) и нестационарном течении газа при внезапном нагревании границы (§2 гл. II). Первая из этих задач решалась ранее [43-46] путем сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в

плоскости $u-T$. Нами применяется способ расчета, основанный на итерационном процессе установления в плоскости $x-t$ с заданием асимптотических значений для неизвестных u, ρ, T перед фронтом и за фронтом волны. Такой способ счета оказывается весьма эффективным и позволяет получить численное решение в широком диапазоне чисел M и других критериев подобия. Во второй задаче (§ 2 гл. II) рассмотрены три стадии одномерного нестационарного переноса тепла и движения вязкого газа в замкнутой области между двумя стенками после внезапного повышения температуры на одной из них. Для чисел Рейнольдса 30 и 100 и отношения температур $T_{w_2}/T_{w_1} = 10$ получено численное описание последовательности процессов возникновения и развития возмущений, взаимодействия и со стенками до установления состояния покоя. Показано влияние учета движения среды на перенос тепла. Обе эти задачи (§ I, § 2) могут рассматриваться, кроме того, как модельные для более сложной системы двумерных уравнений и фактически иллюстрируют работу одномерного блока двумерной программы.

Основные результаты настоящей работы, относящиеся к численному решению двумерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа изложены в главе III. Здесь рассматривается течение и теплообмен при конвекции газа в замкнутой прямоугольной области с заданным тепловым режимом границ под действием произвольно направленной внешней массовой силы. Подобная задача представляет интерес для многих приложений современной техники: при анализе тепловых режимов отсеков с аппаратурой и баков летательных аппаратов на старте и в полете, для оценки эффективности теплоизолирующих газовых прослоек при хранении низкокипящих жидкостей и потерь тепла через газовые прослойки в различных теплообменных аппаратах, при оценке потерь тепла в бортовых источниках питания и др. Наиболее подробно нами изучался случай течения и передачи тепла в замкнутой области с различными температурами боковых границ и теплоизолированными верхним и нижним основаниями при вертикально направленной силе тяжести [90-91]. Экспериментальное и теоретическое исследование течения и теплопередачи

этого важного для практических приложений случая конвекции осуществлялось во многих работах советских и иностранных авторов [56-73, 78, 79, 81]. В работе Якоба [79] дается обобщение результатов измерений средней теплопередачи, выполненных Нуссельтом, Шмидтом, Бекманом, Муллем и Рейером [81] и предложены эмпирические формулы для расчета средней теплопередачи при ламинарном и турбулентном режимах. В работах Бояринцева [71] и Михеева [72] предложено обобщение результатов измерений средней теплопередачи через плоские, кольцевые и цилиндрические слои, основанное на предположении, что средняя теплопередача определяется одним геометрическим фактором - толщиной слоя L . Полученные ими формулы имеют иную структуру, чем у Якоба [79] и различаются в оценке влияния на теплопередачу числа Грасгофа (или произведения $Gr_L \cdot Pr$), отношения сторон H/L , перехода к турбулентному режиму течения по числу Gr_L (или $Gr_L \cdot Pr$). Большая часть измерений проведена при больших отношениях сторон H/L , и имеющиеся эмпирические формулы требуют уточнения границ применимости как при $H/L \sim 1$, так и в различных режимах по числам Gr_L , H/L . Из-за отсутствия измерений структуры полей скорости и температуры не ясным остается вопрос о наличии в большинстве опытов ламинарного или турбулентного режимов течения.

Сведения о структуре внутреннего течения были получены сравнительно недавно в измерениях [58-61]. Структура поля температуры изучалась с помощью интерферометра в работе Эккерта и Карлсона [58]. Ими выявлены режимы по числам Gr_L , H/L , при которых на стенках образуются температурные пограничные слои и получены эмпирические формулы для расчета средней теплопередачи в режиме теплопроводности и в режиме пограничного слоя. Из результатов этой работы и проведенных нами расчетов [91] следует, что при анализе эмпирических формул [79], [72] и диапазона их применимости важно учитывать режимы теплопередачи по числам Gr_L , H/L . Поле скорости во внутренней части области исследовалось визуально в опытах Элдера [60-61] на парафине и силиконовых маслах и было получено, что вблизи

значения $Gr_L \cdot Pr \sim 10^5$ ($H/L = 10$, $Pr = 1000$) возникают стационарные вторичные течения; при $Gr_L \cdot Pr \sim 10^6$, когда амплитуда вторичных течений возрастает, между ячейками вторичного течения появляется третичное течение с направлением, обратным основному.

В дальнейшем, при $Gr_L \cdot Pr \sim 8 \cdot 10^8$ в течении, поднимающемся вдоль нагретой стенки и опускающемся вдоль холодной, возникают волны, имеющие вначале регулярный характер по времени, а при $Gr_L \cdot Pr \sim 10^{10}$ между стенками и внутренней частью области возникает интенсивное перемешивание, и течение становится полностью турбулентным. Эти результаты, как и результаты измерений конвекции [62] на одиночной пластине, показывают, что развитый турбулентный режим возникает фактически при очень больших числах Грасгофа (или $Gr_H \cdot Pr$), причем до наступления турбулентного режима имеется последовательность довольно сложных течений, имеющих, по-видимому, регулярный и ламинарный характер. Ввиду довольно сложной вихревой структуры внутреннего движения успешное теоретическое исследование подобных задач возможно, по-видимому, только на основе полных уравнений Навье-Стокса.

Известные аналитические методы, основанные на разложении решения в ряд либо на линеаризованных уравнениях в пренебрежении инерционными членами [56, 57], справедливы лишь при малых числах Грасгофа $Gr_L \approx 10^3$ и относятся в основном к режиму течения, при котором вклад конвекции в общий перенос тепла невелик (режим теплопроводности). Другие приближенные схемы [57, 67-68] основаны на гипотезе Бетчелора [57], состоящей в том, что при больших числах Грасгофа на стенках образуются пограничные слои, а внутри области имеется ядро с постоянной температурой и завихренностью. Как недавние измерения структуры внутреннего течения [58 – 61], так и имеющиеся к настоящему времени результаты расчетов полной системы уравнений Навье-Стокса показывают, что течение и поле температур внутри области значительно неоднородны в вертикальном и горизонтальном

направлениях.

Численное исследование течения и переноса тепла при естественной конвекции в замкнутой прямоугольной области с боковым подогревом выполнено к настоящему времени в работах [63 - 66]. Из них к началу работы автора были известны лишь результаты Путса [63]. Авторы указанных работ исходят из уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с линейной зависимостью и плотности от температуры [2, 57], и область применения результатов этих расчетов ограничивается, таким образом, случаями, когда относительная разность температур мала и пренебрежимо мала весовая сжимаемость. Метод Путса [63] основан на разложении решения в ряд по ортогональным полиномам. Им рассчитано течение при $H/L = 1.0$ в диапазоне $5 \cdot 10^2 \leq Gr_L \cdot Pr \leq 10^4$ при линейном распределении температуры на верхнем и нижнем основаниях. В работе Элдера [65] применяется разностный итерационный метод; область сходимости этого метода ограничена, по-видимому, значениями $Gr_L \cdot Pr \sim 5 \cdot 10^4 \div 10^5$, где начинают появляться вторичные течения и числами Прандтля $Pr \sim 0,1$. В работе [64] применяется метод верхней релаксации для системы уравнений $\psi - \omega - T$. Авторы приводят результаты расчета на сетках 10×10 узлов среднего числа Нуссельта при $Gr_L = 2 \cdot 10^4$, $6 \cdot 10^4$ и 10^5 и при $Gr_L = 2 \cdot 10^4$ на сетке 21×21 узлов.

Более подробное численное исследование конвекции в замкнутой области (при линейном распределении температуры на верхнем и нижнем основаниях) выполнено в недавней работе Гершуни, Жуховицкого и Тарунина [66]. В отличие от работ [63 - 65] эти авторы исходят из системы нестационарных уравнений. Применяется простейшая явная схема для системы $\psi - \omega - T$ с итерациями уравнения Пуассона для функций тока по Либману. Получено начало возникновения вторичных течений вплоть до чисел $Gr_L \cdot Pr = 4 \cdot 10^5$ с использованием сетки с числом узлов 15×15 .

Имеющиеся в настоящее время результаты численных решений уравнений Навье-Стокса для случая конвекции в замкнутой области с боковым

подогревом ограничиваются диапазоном чисел $Gr_L \cdot Pr = 4 \cdot 10^5$ и в основном фиксированными критериями $H/L=1$ и $Pr=1,0$ (0,73). В литературе пока не опубликовано результатов расчета при других направлениях внешней силы за исключением случая конвекции при подогреве снизу. Известно, что в последнем случае, в отличие от упоминавшегося случая конвекции при боковом подогреве, движение начинается внезапно при числе Грасгофа, превышающем критическое (причем в общем случае существует последовательность таких критических чисел и соответствующих им движений, возникающих после потери устойчивости). Имеется значительное число работ (подробный обзор можно найти в книге Мони́на и Ягло́ма [82]), в которых эта задача рассматривается с точки зрения линейной теории устойчивости. Анализ нелинейных уравнений, выполненный в работах [83, 85], предсказывает ветвление стационарных решений за порогом устойчивости. Определение течения и переноса тепла при конвекции вдали от порога устойчивости возможно лишь на основе полных уравнений Навье-Стокса. Численное решение такого типа задач для уравнений Навье-Стокса в несжимаемой жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры начато в работах [86 - 88]. В работах [86 - 87] рассматривался случай периодических граничных условий на боковых поверхностях. В работе [88] изучается конвекция в замкнутой области ($H/L=1,0$) при линейном распределении температуры на боковых поверхностях. Соответствующая линейная задача об устойчивости равновесия решена приближенно методом Галеркина. Авторами [88] изучалась при $5 \cdot 10^3 \leq Gr_L \cdot Pr \leq 1,2 \cdot 10^5$ ветвь с одним вихрем, выделенная при повороте замкнутой области. Полученное в расчетах уравнений Навье-Стокса критическое число $(Gr_L \cdot Pr)_{кр}$ для этой ветви оказывается в хорошем соответствии с найденным из решения линейной задачи.

Особенность постановки задачи, принятой в настоящей работе (гл. III § I), в отличие от традиционной постановки задачи для естественной конвекции [2, 57, 63 - 66], состоит в рассмотрении уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа с учетом зависимости коэффициентов теплопроводности и вязкости от

температуры [90, 94]. В этом случае к системе определяющих критериев подобия $Gr_L, Pr, H/L$ добавляется отношение температур T_{w_2}/T_{w_1} нагретой и холодной стенок, критерий весовой сжимаемости C_{FH} , отношение теплоемкостей χ и закон изменения теплопроводности (и вязкости) от температуры. Стационарные решения уравнений Навье-Стокса систематически реализуются как предел решения нестационарных уравнений при $t \rightarrow \infty$. Такой подход оказывается эффективным и позволяет вести расчеты последовательными стационарными состояниями достаточно крупным шагом по числу Грасгофа и всем остальным критериям подобия. Основные расчеты относятся к случаю конвекции в вертикальном слое газа с боковым подогревом и теплоизолированными основаниями (§§ 2, 3, 4, 5). Расчеты выполнены в диапазоне всех определяющих критериев подобия и охватывают основные режимы при ламинарной конвекции по числам Грасгофа и отношения сторон H/L (режим теплопроводности, промежуточный режим, режим пограничного слоя); на сетке с числом узлов 21×21 получена последовательная картина возникновения и развития внутренних вторичных течений вплоть до чисел $Gr_L = 5 \cdot 10^6$; получены результаты расчета в диапазоне чисел Прандтля $0,01 \leq Pr \leq 100$, при слабой и сильной весовой сжимаемости ($C_{FH} = 0,02 \div 0,1$ и $C_{FH} = 0,5 \div 0,1$), при отношении температур $T_{w_2}/T_{w_1} = 1,1 \div 2,0$. Дается анализ физических особенностей циркуляционного течения как по указанным критериям, так и в плоскостях изменения критериев, важнейшими из которых являются $Gr_L, H/L$ и Gr_L, Pr . Результаты расчета теплопередачи даются в критериальном виде, удобном для применения в инженерных расчетах. Для ламинарной конвекции в режиме пограничного слоя на основании результатов расчета получена формула для средней теплопередачи, которая в предельном случае слабой сжимаемости ($\frac{T_{w_2} - T_{w_1}}{T_{w_1}} \sim 0$ и $C_{FH} \sim 0$) сопоставляется с результатами имеющихся эмпирических формул [58, 72, 79] и расчетов других авторов [64, 65]. Помимо физической картины течения и закономерностей

теплопередачи результаты проведенных расчетов иллюстрируют возможности предложенного метода для численного моделирования теплопередачи в широком диапазоне всех критериев подобия. Полученные при расчетах серии полей скорости, плотности и температуры могут использоваться как начальные данные при дальнейших исследованиях этого типа задач.

В § 6 гл. III рассмотрены также некоторые случаи конвекции при произвольном направлении внешней силы. В случае конвекции в замкнутой области ($H/L=1.0$) с теплоизолированными боковыми стенками при подогреве снизу получены две ветви стационарных решений, соответствующих начальному повороту и внезапному приложению внешней силы, получены зависимости средней теплопередачи от числа Грасгофа для обеих ветвей и соответствующие им критические числа Грасгофа.

Настоящая работа выполнялась в течение 1962-1966 г.г. в отделе № 3 лаборатории № 4 Научно-исследовательского института тепловых процессов под руководством доктора технических наук, профессора В.Я. Лихушина. Все расчеты выполнены на вычислительных машинах М-20 и БЭСМ-3М НИИТП. Основные результаты работы докладывались в течение 1963-1966 г.г. на семинарах, проводимых в МГУ и ВЦ МГУ под руководством академика Г.И.Петрова, на конференции по теплопередаче и теплозащите НИИТП (октябрь 1966 г.) и на совещании по численным методам расчета течений вязкой жидкости в Новосибирске (декабрь 1966 г.). В диссертации обобщены результаты работ, выполненных автором в течение 1963-1966 г.г. и опубликованных в научно-технических отчетах [89, 90, 91], трудах НИИТП [94] и в открытой печати [92, 93, 95].

Автор благодарит научного руководителя работы В.Я. Лихушина за внимание к работе и полезные советы при ее выполнении, Г.И. Петрова, В.С. Авдеевского, М.Я. Юделовича и Ю.Д. Поскачеева за внимание к работе и обсуждение результатов работы. Автор благодарен товарищам по работе сотрудникам лаб. 4 Г.С. Глушко, Е.Н.Бондареву, А.В. Иванову, А.Н.Вишнякову, Ю.Н. Дьяконову за дружеское участие, полезные дискуссии и

советы и участникам семинаров, руководимых Г.И. Петровым, в особенности Л.А. Чудову и И. Ю. Брайловской за полезные обсуждения результатов работы и возможностей применения численных методов. Автор благодарен также сотрудницам расчетной группы отд. № 3 лаб. № 4, руководимой А.И. Нойкиной за большую помощь в обработке результатов и оформлении работы и сотрудникам отд. 60 за помощь в проведении расчетов на ЭВМ.

Исследование этого круга задач, по существу только начатое, представляется перспективным для понимания процессов течения и теплообмена вдали от порога устойчивости. Полученные для этого случая результаты имеют частный характер, однако, показывают возможности численного исследования и этого довольно сложного типа задач.

ГЛАВА I

РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

§ 1. Основная система дифференциальных уравнений; общая постановка задачи

Рассматривается система двумерных нестационарных уравнений, описывающих течение и теплообмен однокомпонентного сжимаемого вязкого и теплопроводного газа. Эта система состоит из дифференциальных уравнений количества движения, неразрывности и энергии, которые в декартовой системе координат имеют вид [1-4]:

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} - \rho X \quad (1)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} - \rho Y \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + P_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + P_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + P_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + P_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4)$$

Здесь u, v - соответственно проекции вектора скорости V на оси координат x, y ;

X, Y - соответственно проекции вектора внешних сил F на оси координат x, y ;

ρ - плотность;

T - температура;

e - внутренняя энергия, отнесенная к единице массы;

k - коэффициент теплопроводности;

$P_{xx}, P_{yx}, P_{xy}, P_{yy}$ - компоненты тензора напряжений,

$\frac{d}{dt}$ - полная производная. Два первых уравнения в системе (1-4) определяют изменение количества движения под действием внешних сил и внутренних напряжений, третье уравнение выражает закон сохранения массы (уравнение неразрывности), четвертое - определяет изменение внутренней энергии движущейся среды за счет потока тепла путем теплопроводности и работы внутренних напряжений. Внутренние источники тепла не учитываются.

При феноменологическом выводе выражения для тензора напряжений в вязком газе предполагается [1, 4], что тензор напряжения однороден и изотропен по пространству, причем существует линейная зависимость между тензором напряжений и тензором скоростей деформации, а при отсутствии вязкости тензор напряжений приводится к тензору напряжений в идеальной жидкости. В этих предположениях соотношения для компонентов тензора напряжений имеют следующий вид [1 - 4]:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ P_{yx} &= P_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ P_{yy} &= -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь p - давление, определяемое термодинамическим уравнением состояния

$$p = p(\rho, T) \quad (6)$$

μ - коэффициент динамической вязкости,

λ - коэффициент второй вязкости или $\lambda = -\frac{2}{3}\mu + \mu'$, где

μ' - коэффициент объемной вязкости.

Эффекты, приводящие к появлению объемной вязкости, связаны с резким изменением состояния и возбуждением вращательных и колебательных степеней свободы газа (например, при прохождении газа через ударный фронт или в случае распространения ультразвуковых колебаний). Ниже будут рассматриваться двумерные течения, не содержащие ударных фронтов и предполагается, что $\mu' = 0$ (или $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$). Выражения (5) для компонентов тензора напряжений в этом случае могут быть получены также из молекулярно-кинетических уравнений, если предполагать, что функция распределения не сильно отличается от равновесной (локальное квазиравновесие) [5].

Дальнейшее рассмотрение будет основано на модели совершенного газа с термодинамическим уравнением состояния

$$p = \rho RT \quad (7)$$

где R - газовая постоянная и калорическим уравнением состояния

$$e = \int_0^T c_v dT \quad \text{или} \quad de = c_v dT \quad (8)$$

Кроме того, будет предполагаться, что коэффициенты теплопроводности и вязкости и удельная теплоемкость зависят только от температуры

$$\mu = \mu(T), \quad k = k(T), \quad c_v = c_v(T) \quad (9)$$

Для приведения системы уравнений (1-4, 5, 7-9) к исходному безразмерному виду введем масштабы $Y_1, \rho_1, L, t_1 = L/V_1, \mu_1, k_1, c_{v1}, c_{p1}$ соответственно для скоростей u, v , плотности, температуры, длины, времени, вязкости, теплопроводности, удельных теплоемкостей и определим безразмерные величины следующим образом:

$$\bar{u} = \frac{u}{V_1}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V_1}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_1}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_1} = \frac{tV_1}{L},$$

$$\bar{\mu} = \mu / \mu_1, \quad \bar{k} = k / k_1, \quad \bar{C}_v = C_v / C_{v1}, \quad \bar{C}_p = C_p / C_{p1}$$

Система (1-4, 5, 7-9) после некоторых преобразований примет следующий вид (черта над безразмерными величинами опущена):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\chi \rho C_M^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho C_R} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + C_{F_x} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\chi \rho C_M^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho C_R} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + C_{F_y} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = & \frac{\chi}{\rho C_v C_R Pr} \left(\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{p(\chi-1)}{\rho C_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\mu \chi (\chi-1) C_M^2}{\rho C_v C_R} \Phi \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

$$p = \rho T \quad (14)$$

$$\mu = \mu(T), \quad k = k(T), \quad C_v = C_v(T) \quad (15)$$

Два последних члена в уравнении энергии (13) дают выражение работы внутренних напряжений в виде работы сил сжатия и трения. В системе (10-13) C_R, C_M, C_{F_x} ,

C_{F_y}, χ, Pr - безразмерные комплексы, построенные по параметрам, выбранным

в качестве масштабов

$$C_R = \frac{V_1 L \rho_l}{\mu_1}, \quad C_M = \frac{V_1}{\sqrt{\chi R T_1}}, \quad \chi = \frac{C_{p_1}}{C_{v_1}}, \quad Pr = \frac{\mu_1 C_{p_1}}{k_1} \quad (16)$$

$$C_{F_x} = \frac{XL}{V_1^2}, \quad C_{F_y} = \frac{YL}{V_1^2}.$$

В том случае, когда все введенные масштабы заданы условиями задачи, система безразмерных комплексов (16) вместе с безразмерными параметрами, получающимися из начальных и граничных условий и дополнительных соотношений (15) образует полную систему критериев подобия, характеризующую рассматриваемый процесс. Вопрос о том, какие из указанных безразмерных комплексов входят в полную систему критериев подобия, решается отдельно в каждой конкретной задаче (гл. II, III).

Применительно к указанной системе уравнений (10-16) будет рассматриваться в дальнейшем краевая задача для замкнутой двумерной области с условиями прилипания для поля скорости заданным тепловым режимом на границе области и задача с начальными данными по временной координате. Предполагается, что в начальный момент заданы распределения по пространственным переменным всех искомых функций

$$u^\circ = u(x, y, 0), \quad v^\circ = v(x, y, 0), \quad \rho^\circ = \rho(x, y, 0), \quad T^\circ = T(x, y, 0), \quad (17)$$

а стационарное решение задачи получается при решении нестационарной задачи в результате установления при $t \rightarrow \infty$.

§ 2. Разностная схема для расчета одномерных и двумерных уравнений Навье-Стокса.

Краткое описание программы для ЭВМ.

Разностная схема для системы одномерных уравнений Навье-Стокса.

Запишем систему одномерных уравнений в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_u u + f_u \quad (18)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = L_\rho \rho \quad (19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = L_T T + f_T \quad (20)$$

$$p = \rho T \quad (21)$$

Здесь L_u, L_ρ, L_T - дифференциальные операторы, имеющие следующий вид:

$$L_u u = \frac{4}{3\rho C_R} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (18^1)$$

$$L_\rho \rho = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} \quad (19^1)$$

$$L_T T = \frac{\chi}{\rho C_v C_R Pr} \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} - u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (20^1)$$

Правые части f_u и f_T имеют вид:

$$f_u = - \frac{1}{\chi \rho C_H^2} \frac{\partial P}{\partial x} + C_{F_x}$$

$$f_T = - \frac{P(\chi - 1)}{\rho C_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{4}{3} \mu \frac{\chi(\chi - 1) C_H^2}{\rho C_v C_R} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

Будем считать заданными граничные условия на концах отрезка $0 \leq x \leq 1$ в виде:

$$u(0,t) = u_1, \quad \rho(0,t) = \rho_1, \quad T(0,t) = T_1 \quad (22)$$

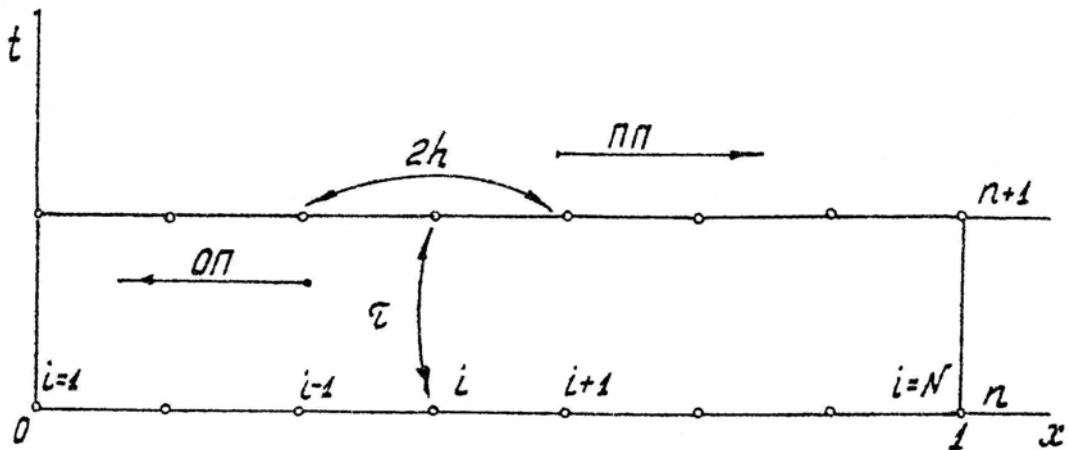
$$u(1,t) = u_N, \quad \rho(1,t) = \rho_N, \quad T(1,t) = T_N$$

и начальные условия внутри этого отрезка при $0 \leq x \leq 1$

$$u(x,0) = u^\circ, \quad \rho(x,0) = \rho^\circ, \quad T(x,0) = T^\circ \quad (23)$$

Решение задачи (18-23) осуществляется разностным методом на пространственно-временной сетке (фиг. 1) с шагом по пространственной координате h ($x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N$) и по времени - τ ($t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, k$). Обозначение функции в узлах сетки:

$$\varphi(x,t) = \varphi(x_i, t_n) = \varphi(ih, n\tau) = \varphi_i^n$$



Фиг. 1. Одномерная схема

Производные по пространственным переменным записываются центральными разностями:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sim \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sim \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2},$$

а производные по времени - разностями вперед: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \sim \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\tau}$

Аппроксимирующая разностная схема для системы одномерных уравнений (18-21) имеет вид:

$$(E - \tau \tilde{L}_u) u^{n+1} = u_i^n + \tau \tilde{f}_u^n \quad (24)$$

$$(E - \tau \tilde{L}_\rho) \rho^{n+1} = \rho_i^n \quad (25)$$

$$(E - \tau \tilde{L}_T) T^{n+1} = T_i^n + \tau \tilde{f}_T^{n+1} \quad (26)$$

Здесь E - единичный оператор, $E\varphi = \varphi$,

$\tilde{L}_u, \tilde{L}_\rho, \tilde{L}_T$ - разностные операторы, аппроксимирующие соответствующие им дифференциальные операторы в виде

$$\begin{aligned} \tilde{L}_u u^{n+1} &= \frac{4}{3\rho_i^n C_R} \frac{\mu_{i+1/2} u_{i+1}^{n+1} - (\mu_{i+1/2} + \mu_{i-1/2}) u_i^{n+1} + \mu_{i-1/2} u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - u_i^n \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \\ \tilde{L}_\rho \rho^{n+1} &= - \frac{u_{i+1}^{n+1} \rho_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} \rho_{i-1}^{n+1}}{2h} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\tilde{L}_T T^{n+1} = \frac{\chi}{\rho_i^{n+1} C_v C_R Pr} \frac{k_{i+1/2} T_{i+1}^{n+1} - (k_{i+1/2} + k_{i-1/2}) T_i^{n+1} + k_{i-1/2} T_{i-1}^{n+1}}{h^2} - u_i^{n+1} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2h}$$

Разностные операторы правых частей \tilde{f}_u, \tilde{f}_T имеют вид:

$$\tilde{f}_u^n = - \frac{1}{\chi \rho C_H^2} \frac{P_{i+1}^n - P_{i-1}^n}{2h} + C_{F_x} \quad (28)$$

$$\tilde{f}_T^{n+1} = - \frac{T_i^n}{C_{v_i}} (\chi - 1) \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) + \frac{\mu_i \chi (\chi - 1) C_H^2}{\rho_i^{n+1} C_{v_i} C_R} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \right)^2$$

Здесь

$$\mu_i = \mu(T_i^n), \quad k_i = k(T_i^n), \quad C_{v_i} = C_v(T_i^n)$$

$$\rho_i^n = \rho_i T_i^n$$

$$\mu_{i+1/2} = \mu(T_{i+1/2}^n), \quad T_{i+1/2} = \frac{T_{i+1} + T_i}{2}$$

$$\mu_{i-1/2} = \mu(T_{i-1/2}^n), \quad T_{i-1/2} = \frac{T_i + T_{i-1}}{2}$$

Аналогично определяются и коэффициенты теплопроводности с дробными индексами $k_{i+1/2}$, $k_{i-1/2}$.

Разностная схема (24-28) аппроксимирует исходную дифференциальную систему уравнений (18-20) на гладких функциях с порядком $O(\tau + h^2)$, а при достижении стационарного режима (в счете на установление) решение не зависит от шага по времени τ и имеет порядок аппроксимации $O(h^2)$. В этой схеме инерционные и вязкостные члены в уравнении количества движения (24) вынесены на верхний, а давление - на нижний слой по времени, что позволяет решать каждое из уравнений (24-26) отдельно. При расчете одного из уравнений (24-26) используются входящие в коэффициенты и правые части величины, рассчитанные в предыдущем уравнении. Системы таких «строчноявных» разностных уравнений имеют стандартный трехдиагональный вид:

$$-a_i \varphi_{i+1} + b_i \varphi_i - c_i \varphi_{i-1} = f_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$\varphi(0) = \varphi_1, \quad \varphi(1) = \varphi_N,$$
(29)

допускающий применение скалярных прогонок [40, 41].

Прямая прогонка (ПП) состоит в переносе граничных условий с левого конца направо (фиг. 1) по рекуррентным формулам

$$A_i = \frac{a_i}{b_i - c_i A_{i-1}}, \quad B_i = \frac{f_i + c_i B_{i-1}}{b_i - c_i A_{i-1}} \quad (30)$$

С учетом граничных условий (22) на левом конце при $i = 1$ имеем:

$$A_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad B_1 = \frac{f_1^*}{b_1}$$

где $f_1^* = f_1 + c_1 \varphi_1$, что дает возможность рассчитать коэффициенты прогонки A_i, B_i по формулам (30) при $i = 2, 3, \dots, N-1$.

Перенос граничных условий с правой границы и вычисление значений искомой функции φ_i в узлах сетки при $i = N-1, \dots, 2$ осуществляется по рекуррентным формулам обратной прогонки (ОП)

$$\varphi_i = A_i \varphi_{i+1} + B_i \quad (31)$$

С учетом граничных условий (22) на правом конце при $i = N$ имеем

$$A_{N-1} = 0, \quad u_{N-1} = B_{N-1}$$

где:

$$B_{N-1} = \frac{f_{N-1}^* + C_{N-1} B_{N-2}}{B_{N-1} - C_{N-1} A_{N-2}}, \quad f_{N-1}^* = f_{N-1} + a_{N-1} \varphi_N$$

Один временной слой для системы одномерных уравнений рассчитан, когда выполнены указанные прогонки последовательно для уравнений (24), (25), (26). На следующем слое по времени эта процедура повторяется и т.д.

Разностная схема для системы двумерных уравнений Навье-Стокса

Для численного решения системы двумерных уравнений (10-17) применяется разностная схема, которая строится по аналогии с известной схемой переменных направлений, предложенной в работах [23, 24] для решения уравнения теплопроводности. В этой схеме решение двумерной системы сводится к последовательному решению одномерных систем. Для двумерного

операторного уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (L_1 + L_2) \varphi + f$$

L_1 и L_2 - одномерные операторы вида, аналогичного (18¹ -20¹), действующие по разным направлениям) эта схема имеет вид (фиг.2)

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \tilde{L}_1 \right) \varphi^{n+1/2} = \left(E + \frac{\tau}{2} \tilde{L}_2 \right) \varphi^n + \tilde{f}^n \quad (32)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \tilde{L}_2 \right) \varphi^{n+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} \tilde{L}_1 \right) \varphi^{n+1/2} + \tilde{f}^n$$

\tilde{L}_1, \tilde{L}_2 - соответствующие разностные одномерные операторы,

E - единичный оператор.

За счет чередования направлений по пространственным переменным в такой схеме для уравнений эллиптического типа нет ограничений на шаг по времени (или итерационный параметр) из условий устойчивости; полуцелый слой $n+1/2$ здесь является вспомогательным.

Эта схема имеет порядок аппроксимации по времени $O(\tau)$, а на установившемся режиме решение не зависит от шага по времени τ . Для аппроксимации одномерных операторов в двумерной схеме используется аналог разностной схемы для системы одномерных уравнений Навье-Стокса, приведенной выше (24 - 28).

Введем двумерную сетку по пространственным переменным x и y (фиг.2) с координатами $x_i, y_j, t_n (x_i = ih, y_j = j\ell, t_n = n\tau)$. Функцию (x, y, t) в узлах сетки будем обозначать $\varphi(x, y, t) = \varphi(ih, j\ell, n\tau) = \varphi_{i,j}^n$. Как и в случае одномерной схемы, производные по обоим пространственным переменным аппроксимируются центральными разностями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sim \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2h}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sim \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sim \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \sim \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{\ell^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \sim \frac{1}{4h\ell} (\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1})$$

Аппроксимирующая разностная схема для системы двумерных уравнений Навье-Стокса (10-17) имеет вид:

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{1u} \right) u^{n+1/2} = \left(E + \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{2u} \right) u^n + \frac{\tau}{2} \tilde{f}_u^{n+1/2} \quad (33)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{1v} \right) v^{n+1/2} = \left(E + \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{2v} \right) v^n + \frac{\tau}{2} \tilde{f}_v^{n+1/2} \quad (34)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{1\rho} \right) \rho^{n+1/2} = \left(E + \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{2\rho} \right) \rho^n \quad (35)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{1T} \right) T^{n+1/2} = \left(E + \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{2T} \right) T^n + \frac{\tau}{2} \tilde{f}_T^{n+1/2} \quad (36)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{2u} \right) u^{n+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{1u} \right) u^{n+1/2} + \frac{\tau}{2} \tilde{f}_u^{n+1} \quad (37)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{2v} \right) v^{n+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{1v} \right) v^{n+1/2} + \frac{\tau}{2} \tilde{f}_v^{n+1} \quad (38)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{2\rho} \right) \rho^{n+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{1\rho} \right) \rho^{n+1/2} \quad (39)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{2T} \right) T^{n+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} \tilde{L}_{1T} \right) T^{n+1/2} + \frac{\tau}{2} \tilde{f}_T^{n+1} \quad (40)$$

Здесь, как и раньше,

E - единичный оператор. Разностные одномерные операторы

$\tilde{L}_{1u}, \tilde{L}_{1v}, \tilde{L}_{1\rho}, \tilde{L}_{1T}, \tilde{L}_{2u}, \tilde{L}_{2v}, \tilde{L}_{2\rho}, \tilde{L}_{2T}$ имеют следующий вид:

$$\tilde{L}_{1u}u^{n+1/2} = \frac{4}{3\rho_{i,j}^n C_R} \frac{\mu_{i+1/2,j}u_{i+1,j}^{n+1/2} - (\mu_{i+1/2,j} + \mu_{i-1/2,j})u_{i,j}^{n+1/2} + \mu_{i-1/2,j}u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} - u_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h} \quad (41)$$

$$\tilde{L}_{1v}v^{n+1/2} = \frac{1}{\rho_{i,j}^n C_R} \frac{\mu_{i+1/2,j}v_{i+1,j}^{n+1/2} - (\mu_{i+1/2,j} + \mu_{i-1/2,j})v_{i,j}^{n+1/2} + \mu_{i-1/2,j}v_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} - v_{i,j}^{n+1/2} \frac{v_{i+1,j}^{n+1/2} - v_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h} \quad (42)$$

$$\tilde{L}_{1\rho}\rho^{n+1/2} = -\frac{u_{i+1,j}^{n+1/2}\rho_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}^{n+1/2}\rho_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h} \quad (43)$$

$$\tilde{L}_{1T}T^{n+1/2} = \frac{\chi}{\rho_{i,j}^{n+1/2}C_{v,i,j}C_RPr} \frac{k_{i+1/2,j}T_{i+1,j}^{n+1/2} - (k_{i+1/2,j} + k_{i-1/2,j})T_{i,j}^{n+1/2} + k_{i-1/2,j}T_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} - u_{i,j}^{n+1/2} \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - T_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h} \quad (44)$$

$$\tilde{L}_{2u}u^{n+1} = \frac{1}{\rho_{i,j}^{n+1/2}C_R} \frac{\mu_{i,j+1/2}u_{i,j+1}^{n+1} - (\mu_{i,j+1/2} + \mu_{i,j-1/2})u_{i,j}^{n+1} + \mu_{i,j-1/2}u_{i,j-1}^{n+1}}{\ell^2} - v_{i,j}^{n+1/2} \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2\ell} \quad (45)$$

$$\tilde{L}_{2v}v^{n+1} = \frac{4}{3\rho_{i,j}^{n+1/2}C_R} \frac{\mu_{i,j+1/2}v_{i,j+1}^{n+1} - (\mu_{i,j+1/2} + \mu_{i,j-1/2})v_{i,j}^{n+1} + \mu_{i,j-1/2}v_{i,j-1}^{n+1}}{\ell^2} - v_{i,j}^{n+1/2} \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2\ell} \quad (46)$$

$$\tilde{L}_{2\rho}\rho^{n+1} = -\frac{v_{i,j+1}^{n+1}\rho_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}\rho_{i,j-1}^{n+1}}{2\ell} \quad (47)$$

$$\tilde{L}_{2T}T^{n+1} = \frac{\chi}{\rho_{i,j}^{n+1}C_{v,i,j}C_RPr} \frac{k_{i,j+1/2}T_{i,j+1}^{n+1} - (k_{i,j+1/2} + k_{i,j-1/2})T_{i,j}^{n+1} + k_{i,j-1/2}T_{i,j-1}^{n+1}}{\ell^2} - v_{i,j}^{n+1} \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{2\ell} \quad (48)$$

(Аналогичный вид имеют $\tilde{L}_{2u}u^n, \tilde{L}_{2v}v^n, \tilde{L}_{2\rho}\rho^n, \tilde{L}_{2T}T^n$).

Разностные операторы правых частей $\tilde{f}_u, \tilde{f}_v, \tilde{f}_T$ имеют вид:

$$f_u^{n+1/2} = -\frac{1}{\chi\rho_{i,j}^n C_H^2} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2h} + \frac{\delta_v^n}{4h\ell\rho_{i,j}^n C_R} + C_{F_x} \quad (49)$$

где:

$$\delta_v^n = \left(\mu_{i,j+1} - \frac{2}{3} \mu_{i+1,j} \right) v_{i+1,j+1}^n + \left(\frac{2}{3} \mu_{i+1,j} - \mu_{i,j-1} \right) v_{i+1,j-1}^n + \left(\frac{2}{3} \mu_{i-1,j} - \mu_{i,j+1} \right) v_{i-1,j+1}^n +$$

$$+ \left(\mu_{i,j-1} - \frac{2}{3} \mu_{i-1,j} \right) v_{i-1,j-1}^n \quad (50)$$

$$f_v^{n+1/2} = -\frac{1}{\chi \rho_{i,j}^n C_H^2} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{2\ell} + \frac{\delta_u^{n+1/2}}{4h\ell \rho_{i,j}^n C_R} + C_{F_y}$$

где:

$$\delta_u^{n+1/2} = \left(\mu_{i+1,j} - \frac{2}{3} \mu_{i,j+1} \right) u_{i+1,j+1}^{n+1/2} + \left(\frac{2}{3} \mu_{i,j-1} - \mu_{i+1,j} \right) u_{i+1,j-1}^{n+1/2} + \left(\frac{2}{3} \mu_{i,j+1} - \mu_{i-1,j} \right) u_{i-1,j+1}^{n+1/2} +$$

$$+ \left(\mu_{i-1,j} - \frac{2}{3} \mu_{i,j-1} \right) u_{i-1,j-1}^{n+1/2} \quad (51)$$

$$f_T^{n+1/2} = \frac{\mu_{i,j} \chi (\chi - 1) C_H^2}{\rho_{i,j}^{n+1/2} C_{v_{i,j}} C_R} \Phi^{n+1/2} - \frac{T_{i,j}^n}{C_{v_{i,j}}} (\chi - 1) \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\ell} \right)^{n+1/2}$$

где

$$\Phi^{n+1/2} = 2 \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\ell} \right)^2 \right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\ell} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\ell} \right)^2 \right]^{n+1}$$

(Аналогичный вид имеют \tilde{f}_u^{n+1} , \tilde{f}_v^{n+1} , \tilde{f}_T^{n+1}).

Здесь

$$p_{i,j}^n = \rho_{i,j}^n \cdot T_{i,j}^n, \quad C_{v_{i,j}} = C_v(T_{i,j}^n), \quad k_{i,j} = k(T_{i,j}^n) \quad (52)$$

$$\mu_{i,j} = \mu(T_{i,j}^n), \quad \mu_{i+1/2} = \mu(T_{i+1/2,j}^n), \quad T_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(T_{i+1,j} + T_{i,j})$$

Аналогично определяются коэффициенты вязкости и теплопроводности с другими дробными индексами.

Разностная схема (33-52) аппроксимирует исходную систему

дифференциальных уравнений Навье-Стокса (10-17) с порядком $0(\tau + h^2 + \ell^2)$, причем на стационарном режиме, как показывают результаты расчетов (гл. III) решение не зависит от шага по времени τ и имеет порядок аппроксимации $0(h^2 + \ell^2)$. Каждое из разностных уравнений (33-40), имеет трехдиагональную матрицу. Системы (33-36) приводятся к стандартному виду

$$-a_{i,j}^{n+1/2} \varphi_{i+1,j} + b_{i,j}^{n+1/2} \varphi_{i,j} - c_{i,j}^{n+1/2} \varphi_{i-1,j} = f_{i,j}^{n+1/2} (i = 2, 3, \dots, M-1) \quad (53)$$

с граничными условиями, заданными на вертикальных линиях $(0, y)$ и $(1, y)$

$$\varphi(0, y) = \varphi_{1,j}, \quad \varphi(1, y) = \varphi_{M,j} \quad (j = 2, 3, \dots, N-1) \quad (53^1)$$

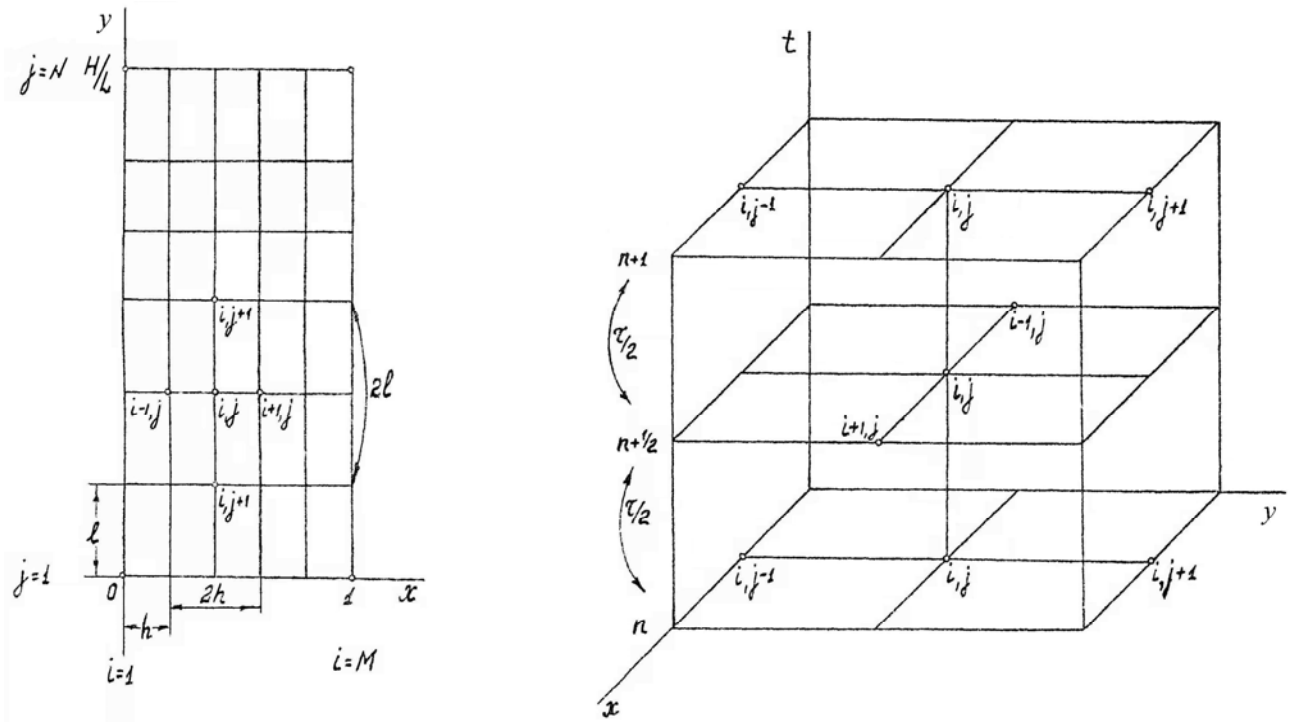
Системы разностных уравнений (53) с указанными граничными условиями (54) решаются методом прогонки по формулам (30), (31) для всех $j = 2, 3, \dots, N-1$ (группа горизонтальных прогонок) (фиг. 3) последовательно для уравнений (33), (34), (35), (36), в результате чего определяются поля $u_{i,j}^{n+1/2}; v_{i,j}^{n+1/2}; \rho_{i,j}^{n+1/2}; T_{i,j}^{n+1/2}$ на полуцелом слое по времени по заданным начальным полям этих величин $u_{i,j}^n; v_{i,j}^n; \rho_{i,j}^n; T_{i,j}^n$.

Системы (37-40) приводятся к стандартному виду

$$-a_{i,j}^{n+1} \varphi_{i,j+1} + b_{i,j}^{n+1} \varphi_{i,j} - c_{i,j}^{n+1} \varphi_{i,j-1} = f_{i,j}^{n+1} (i = 2, 3, \dots, N-1) \quad (54)$$

с граничными условиями, заданными на горизонтальных линиях $(x, 0)$ и $(x, H/L)$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_{i,1}, \quad \varphi(x, H/L) = \varphi_{i,N} \quad (j = 2, 3, \dots, M-1) \quad (55)$$



Фиг. 2. Двумерная схема переменных направлений

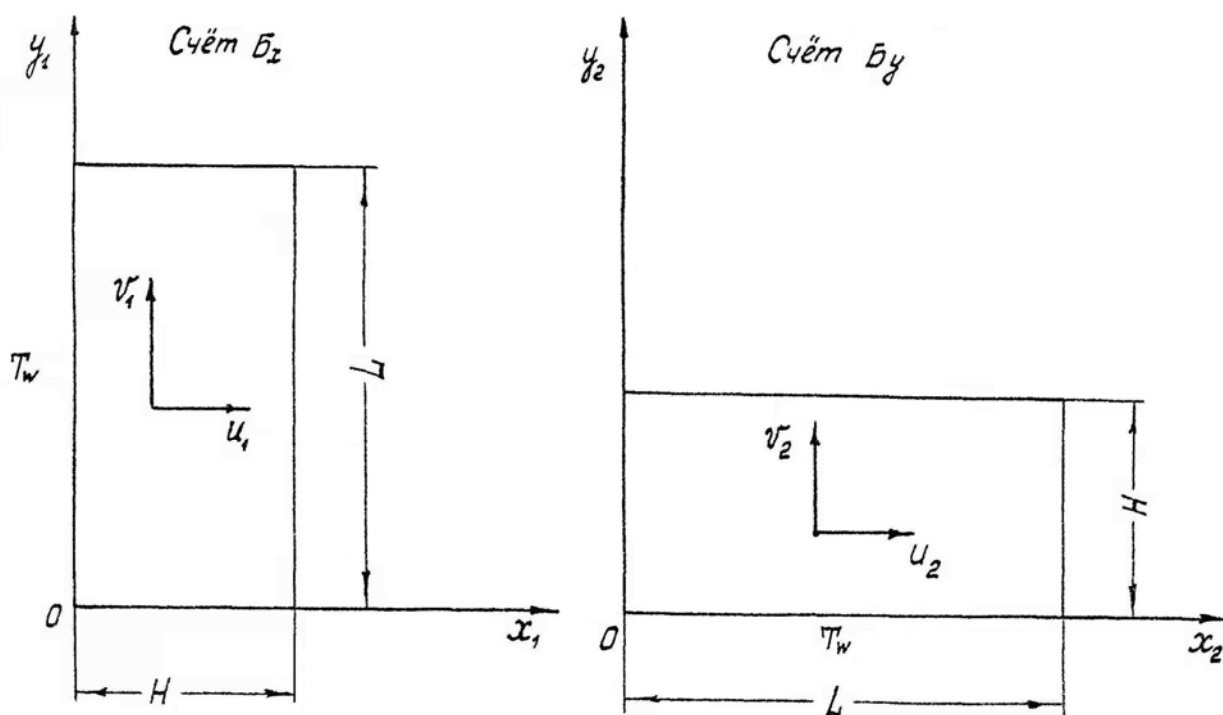
Системы разностных уравнений (54) с граничными условиями (55) решаются методом прогонки по формулам (30), (31) для всех $i = 2, 3, \dots, M - 1$ (группа вертикальных прогонок) (фиг. 3) последовательно для уравнений (37, 38, 39, 40), в результате чего определяются искомые поля составляющих скорости, плотности и температуры на целом слое по времени $u_{i,j}^{n+1}, v_{i,j}^{n+1}, \rho_{i,j}^{n+1}, T_{i,j}^{n+1}$ по заданным полям этих величин $u_{i,j}^{n+1/2}, v_{i,j}^{n+1/2}, \rho_{i,j}^{n+1/2}, T_{i,j}^{n+1/2}$ на вспомогательном слое по времени $n + 1/2$.

На следующем слое по времени указанные системы прогонок снова выполняются в том же порядке, и т.д. Сведения, относящиеся к аппроксимации граничных условий излагаются ниже при формулировке конкретных задач (гл. II, III).

программы ОП, вспомогательных программ ВП₁, ВП₂ и блоков вычисления коэффициентов $\mu, k, C_v(B_\mu)$. Основная программа ОП состоит из оперативных подпрограмм ОП_J, $J=1,2,\dots,9$, каждая из которых имеет длину не более 250_8 - кодов. Подпрограммы хранятся во внешней памяти и циклически вызываются на одно и то же место в оперативной памяти. Подпрограммы № 1, 2, 3, 4 составляют группу горизонтальных прогонок (B_x) и осуществляют решение систем разностных уравнений, соответствующих промежуточному слою по времени $n+1/2$ (33-36) (расчет коэффициентов и правых частей (53), прямая и обратная прогонка по строкам (фиг. 3) с помощью БПП и БОП). Подпрограммы № 5, 6, 7, 8 составляют группу вертикальных прогонок (B_y) и осуществляют решение систем разностных уравнений, соответствующих целому слою по времени $n+1$ (37-40) (расчет коэффициентов и правых частей (54), прямая и обратная прогонки по столбцам (фиг. 3) с помощью тех же блоков БПП и БОП). Подпрограмма ОП следит за прокруткой оперативных подпрограмм № 1-8 и производит необходимые вычисления при переходе от одного временного слоя к другому (в частности, изменение шага по времени τ и других параметров (16) и осуществляет в ряде случаев некоторые интегральные проверки решения). Вспомогательная подпрограмма ВП₁ производит перед началом счета основной программы последовательное формирование всех подпрограмм ОП_J ($J=1,2,\dots,8$) и размещение их в рабочем порядке (фиг. 4) во внешней памяти. Вспомогательная программа ВП₂ рассчитывает числовые комплексы, начальные и граничные условия и производит засылки начальных и граничных условий на рабочие поля вычисляемых величин $u_{i,j}, v_{i,j}, \rho_{i,j}, T_{i,j}$.

Во время счета в оперативной памяти хранится полностью один временный слой $u_{i,j}, v_{i,j}, \rho_{i,j}, T_{i,j}$, а вычисляемый помещается на его место. Максимальная «площадь» поля, помещающегося в оперативной памяти ЭВМ М-20, при такой организации программы составляет $M \times N \approx 900$ узлов на каждый из параметров u, v, ρ, T . Для проведения промежуточных вычислений в оперативной памяти требуется размещать только две вспомогательных строки общей длиной $2 \max\{M, N\}$ узлов. Последнее обстоятельство имеет большое

значение, в особенности для ЭВМ с ограниченной ёмкостью оперативной памяти. В частности, при применении матричных прогонок четвертого порядка вместо скалярных (30), (31) для блоков B_x и B_y потребовалось бы хранение двух матричных строк общей длиной $2:16 \max\{M, N\}$ узлов. Среднее время счета t_{cp} по данной программе на ЭВМ М-20 одного целого слоя по времени (33-57) пропорционально числу узлов разностной сетки и на сетке $M \times N = 11 \times 11$ составляет 0,1 минуты, а на сетке 21×21 около 0,4 минуты.



Фиг. 5. Проверки блоков подпрограмм расчета горизонтальной и вертикальной компонент скорости

Из основной программы ОП для полной системы двумерных уравнений Навье-Стокса легко выделяются блоки для решения системы одномерных уравнений Навье-Стокса по разностной схеме (24-31) и других частных случаев полной системы, а также некоторых приближений к полной системе и, кроме того, некоторые другие разностные схемы, аппроксимирующие исходную систему.

Отладка оперативных подпрограмм ОП_л производилась отдельно. При

окончательной проверке после стыковки подпрограмм рассчитывалось несколько шагов нестационарной задачи о движении газа в плоском канале под действием градиентов температуры на одной из границ (фиг. 5) отдельно блоком подпрограмм, осуществляющих горизонтальные прогонки B_x (№ 1, 2, 3, 4) и блоком подпрограмм, осуществляющих вертикальные прогонки B_y (№ 5, 6, 7, 8). Ввиду симметрии оператора Навье-Стокса в этой задаче (фиг. 5) должно быть при $y_1 = x_2$, $x_1 = y_2$.

$$u_1(x_1, y_1) = v_2(x_2, y_2); \quad v_1(x_1, y_1) = u_2(x_2, y_2); \quad (58)$$

$$T_1(x_1, y_1) = T_2(x_2, y_2); \quad \rho_1(x_1, y_1) = \rho_2(x_2, y_2);$$

Соотношения (58) выполнялись с 8-9 значащими цифрами.

Для построения картины линий тока на стационарном режиме с помощью специальной подпрограммы рассчитывается поле функции тока $\psi(x, y)$, которая задается системой уравнений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u \quad (59)$$

Дифференцируя первое из уравнений (59) по x , второе по y и складывая, получаем краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = w^* \quad \left(w^* = \frac{\partial \rho u}{\partial y} - \frac{\partial \rho v}{\partial x} \right) \quad (60)$$

На контуре задано ψ_Γ , значение w^* известно. Задача (60) решается методом переменных направлений (32) с использованием структуры оперативных подпрограмм № 4, 8. По полю функции тока выстраиваются линии тока $\psi = const$, направление на которых определяется построением полного вектора скорости V .

§ 3. Устойчивость разностной схемы. Сходимость при счете на установление

Разностные схемы для одномерных и двумерных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа применялись в работах [17-19, 36-39]. Очевидные трудности в численной реализации полной системы уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа (даже в случае двух измерений), связанные с ее громоздкостью и присущей системе уравнений эллиптического типа необходимостью хранения большого количества информации (полей всех рассчитываемых величин), заставляет большинство авторов искать простых схем, в которых затраты в оперативной памяти для промежуточных вычислений были бы наименьшими. Другой тенденцией в построении разностной схемы для этой системы является стремление к повышенной аппроксимации схемы по пространственным переменным - не ниже $O(h^2 + \ell^2)$, чтобы избежать влияния "вязкости" схемы. Остановимся вначале на системе одномерных уравнений. Явные схемы для этой системы при аппроксимации производных центральными разностями неустойчивы [16, 18-19]. В работе [17] предложена явная схема с пересчетом инерционных членов в уравнении количества движения, что дает устойчивость при условии:

$$\tau \leq \min \left\{ \frac{h}{|u| + \frac{1}{C_M}}, \quad \frac{1}{8} C_R h^2 \right\} \quad (61)$$

Здесь и далее используются безразмерные значения τ, h в нормировке, введенной в § 1; C_M, C_R - масштабные комплексы вида (16). Близкие к этим ограничения на устойчивость имеют и другие явные схемы, например, предложенная в работе [37] схема типа Лакса-Вендроффа

$$\tau \leq \min \left\{ \frac{h}{|u| + \frac{1}{C_M}}, \frac{3}{16} \rho C_R h^2 \right\} \quad (62)$$

Неявные схемы, в которых на верхний слой по времени в системе (18-20) вынесены все неизвестные функции, а решение системы разностных уравнений осуществляется матричной прогонкой (с матрицами третьего порядка) лишены ограничений на параметры сетки (61-62) и для системы одномерных уравнений, по-видимому, являются наилучшими, однако в применении к системе двумерных уравнений (10-13), где требуется хранение в оперативной памяти полей вычисляемых величин u, v, ρ, T , а порядок матриц увеличивается до 4-х, возникают трудности, связанные с необходимостью частого обращения матриц и хранения большого количества промежуточной информации в оперативной памяти вычислительной машины. Аналогичные трудности возникают и при решении одномерных систем, когда число уравнений велико.

Разностная схема, приведенная выше в § 2, является промежуточной между двумя этими типами схем - явными и неявными - как по затратам оперативной памяти ЭВМ и времени на решение систем разностных уравнений на временном слое (скалярные прогонки вместо матричных), так и (что будет видно из дальнейшего) по диапазону изменения параметров сетки.

Исследование устойчивости разностных схем такого типа путем анализа собственных значений матрицы перехода от одного временного слоя к другому для линеаризованной системы с "замороженными" коэффициентами [16, 41] представляет известные технические трудности, т.к. эти схемы не моделируются, как однотипные явные или неявные одним уравнением, и требуется рассмотрение собственных чисел матрицы перехода всей системы. Для системы одномерных уравнений газовой динамики без учета теплопроводности и вязкости разностная схема аналогичного вида рассматривалась в работе [37] и было получено, что схема абсолютно устойчива в сверхзвуковом течении и неустойчива в дозвуковом.

Устойчивость разностной схемы (24-28) для системы одномерных уравнений Навье-Стокса исследовалась в численных экспериментах автора [89, 92] при расчетах различных стационарных и нестационарных одномерных течений сжимаемого вязкого газа (расчеты структуры фронта одномерной стационарной ударной волны, нестационарного течения газа под действием внезапного нагрева на одной из границ и на обеих границах в поле внешних сил и при отсутствии внешних сил, расчетах структуры распада начального разрыва).

В этих расчетах изменялись как шаги сетки по пространственной и временной координатах, так и масштабные комплексы C_R, C_M, C_F , и получено достаточное условие устойчивости схем (24 - 28) для системы одномерных уравнений в виде:

$$\tau \leq h \cdot C_M \quad (64)$$

Ограничение (64) на параметры сетки вызвано тем, что давление в схеме (24-28), вынесено на нижний слой по времени. С другой стороны, так как вязкие и инерционные члены в уравнении количества движения вынесены на верхний слой, нет ограничений типа $\tau \sim C_R \cdot h^2$ или $\tau \sim C_R Pr \cdot h^2$, имеющих у явных схем; это расширяет диапазон применимости схемы по числам C_R (или $C_R \cdot Pr$). При малых числах C_R более близким к необходимому, будет условие

$$\tau \leq f(C_R) \cdot h \cdot C_M \quad (64^1)$$

где функция $f(C_R)$ больше единицы и растет при уменьшении C_R , а при $C_R \rightarrow 0$ схема, по-видимому, абсолютно устойчива. Существенны ограничения по нижнему диапазону чисел C_M ; в частности, при $C_M \sim 0.01$ схема неустойчива даже при выполнении условия (64). Рассматривались и другие варианты схемы (24-28), заключающиеся в изменении при переходе от слоя n к слою $n+1$ порядка просчитываемых оперативных подпрограмм, например, (№ 1, 2, 3, 3, 2, 1, 1...)

$$u^n, \rho^n, T^n, T^{n+1}, \rho^{n+1}, u^{n+1}, u^{n+2} \dots \quad (65)$$

Расчет по такой схеме дает практически те же результаты, что по основной схеме (24-28).

Для системы двумерных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа сейчас известно сравнительно мало работ [17-19, 90-91]. В работах [17-19] использовались явные разностные схемы. В явной схеме [17] с пересчетом инерционных членов условие устойчивости имеет вид

$$\tau \leq \min \left\{ \frac{h}{|u| + |v| + \frac{\sqrt{2}}{C_M}}, \frac{1}{8} C_R h^2 \right\} \quad (66)$$

В явной схеме [18] при аппроксимации производных центральными разностями условие устойчивости имеет вид:

$$\tau \leq \min \{a, b\} \quad (67)$$

где

$$a = \frac{1}{\frac{u}{h} + \frac{v}{\ell} + \frac{2\chi}{C_R Pr} \left(1 + \frac{h^2}{\ell^2} \right)}; \quad b = \frac{\frac{u}{h} + \frac{v}{\ell}}{\left(\frac{u}{h} + \frac{v}{\ell} + \frac{1}{h \cdot C_M} \sqrt{1 + \frac{h^2}{\ell^2}} \right)^2}$$

Здесь учтено еще влияние чисел χ, Pr , которые в оценках авторов [16, 17, 37] фиксированы. В схеме [18], кроме того, имеются ограничения на соотношения продольной и поперечной составляющих скорости u/v . Близкие к этим условия устойчивости получаются и в явной схеме работы [19], где центральные разности для конвективных членов рассчитываются из полущелых узлов нижнего слоя по времени.

Исследование устойчивости разностной схемы для двумерных уравнений (33-52) осуществлялось в экспериментальных расчетах [90-91] для случая течения и теплопередачи при стационарной конвекции в замкнутой области под действием внешней силы. В этих расчетах, проведенных при различных

соотношениях шагов сетки τ, h, ℓ и в широком диапазоне всех масштабных комплексов (16), получено достаточное условие устойчивости разностной схемы в виде

$$\tau \leq \min\{h, \ell\} \cdot C_M \quad (68)$$

Здесь, как и в одномерном случае (64¹), шаг сетки по времени не зависит от масштабных комплексов C_R, Pr и других комплексов (16). Для системы двумерных уравнений достаточное условие (68), по-видимому, довольно близко к необходимому.

Влияние конечной величины шагов сетки исследовались путем сравнения результатов, полученных при различных τ, h, ℓ . Дополнительный контроль решения осуществляется путем расчета интегральных балансов количества движения, расхода и энергии, которые не являются следствием разностной схемы (24-28) и (33-52).

Имитация нестационарного процесса для получения стационарного решения (если оно существует) позволяет начинать счет из состояния, имеющего вполне определенный физический смысл, и является наиболее надежным способом получения решения. Начальное поле при этом выбирается так, чтобы исключить возможность распространения, развития и взаимодействия возмущений, не существенных для искомого стационарного решения. Кроме того, при больших числах Рейнольдса наличие устойчивого стационарного решения далеко не очевидно и нужно исходить из системы нестационарных уравнений.

Характерной особенностью течений при больших числах Рейнольдса является значительное увеличение "времени установления" процесса, приводящее к увеличению затрат, времени на ЭВМ. Эффективным способом расчета в этом случае является введение числа Рейнольдса как итерационного параметра и счет по этому параметру "последовательными стационарными состояниями". Относящиеся сюда конкретные результаты расчета приведены в § 2 гл. III.

При счете на установление существенно отсутствие зависимости

разностного решения на стационарном режиме от шага по времени τ . Для доказательства этого факта в методе переменных направлений [23, 24] требуется, чтобы одномерные операторы коммутировали: $L_1 L_2 = L_2 L_1$, что в общем случае для схемы (33-52) не выполняется. Результаты расчетов, проведенных по схеме (33-52) показывают, однако, что на стационарном режиме решение не зависит от τ с погрешностью, намного меньшей, чем погрешность, вызванная конечной величиной шагов сетки по пространственным координатам h, ℓ . Последняя на стационарном режиме является основной. Эта основная погрешность имеет систематический характер, аналогичный искажению решения дополнительной "вязкостью" схемы и в значительной степени определяется гладкостью решения, различной в разных задачах и, при различных значениях масштабных комплексов (16); из них наиболее важны число Рейнольдса C_R для уравнения количества движения и произведение $C_R \cdot Pr$ для уравнения энергии. Применительно к задаче устойчивости течения Пуазейля в трубе оценки числа узлов сетки, необходимого для получения решения с заданной точностью на модельных уравнениях для несжимаемой жидкости получены в работе [10]. При увеличении числа Рейнольдса существенное изменение решения сосредотачивается, как правило, в области, близкой к стенке или в поле течения, где параметры изменяются наиболее интенсивно. В разностной схеме это соответствует появлению малого параметра $\varepsilon = \frac{1}{C_R}$ (или $\varepsilon_1 = \frac{1}{C_R Pr}$) при диссипативных членах, и, если шаг сетки недостаточно мал, к "биениям", характерным для симметричных разностных схем [20]. При больших значениях C_R на грубой сетке счет становится неустойчивым. Для случая стационарного течения газа в замкнутой двумерной области под действием внешних сил в расчетах получены оценки числа узлов сетки, необходимого для устойчивого счета (на грубой сетке) при увеличении C_R (гл. II, III).

В процессе отработки схемы в двумерном случае рассматривались другие варианты схемы (33-52), близкие к локальноодномерным [30-31] и схемы с

расщеплением на четыре дробных шага, близкие к схемам [31, 35]. При счете на установление в этих вариантах отмечалась значительная зависимость решения от шага по времени τ . В экспериментальных расчетах рассматривалась также последовательность счета оперативных программ ОП_l в виде:

$$u^{n+1/2} \rightarrow u^{n+1}, \quad v^{n+1/2} \rightarrow v^{n+1}, \quad \rho^{n+1/2} \rightarrow \rho^{n+1}, \quad T^{n+1/2} \rightarrow T^{n+1}$$

Результаты счета и условия устойчивости практически не отличались от основного варианта (33-52). Рассматривался вопрос об усилении сходимости итерационного процесса на установление посредством введения различных шагов по времени и отдельных итераций количества движения (10, 11), расхода (12) и температуры (13). Так как разностная схема (33-52) - неявная относительно неизвестных в каждом из этих уравнений в отдельности, то при отдельных итерациях нет ограничений типа (68) на шаг по времени τ . Недостаток таких итерационных схем состоит в том, что процесс сходимости к стационарному решению неравномерный: если "перекрутить" внутренние итерации, то возможен уход от стационарного решения; количественный анализ числа внутренних итераций затруднителен.

Из этого класса итерационных схем пригодной оказалась схема, в которой итерации количества движения и расхода $\{1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 6, 3 \rightarrow 7\}$ осуществляются отдельно с итерациями поля температур $\{4 \rightarrow 8\}$. В этом случае при счете $\{1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 6, 3 \rightarrow 7\}$ остаются ограничения (68) на шаг по времени τ , а при итерациях $\{4 \rightarrow 8\}$ их нет. Такой способ оказался эффективным, в особенности в конце временного отрезка установления. При этом уже не моделируется действительный нестационарный процесс, и возможно решение только тех задач, в которых стационарный режим существует. Другие способы усиления сходимости итерационного процесса на установление рассмотрены в работе автора [91].

Выводы к главе I

1. Разработан разностный метод расчета одномерных и двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа с переменными коэффициентами теплопроводности и вязкости. Метод применим для расчета нестационарных задач и стационарных задач на установление при $t \rightarrow \infty$. Разностная схема расчета является промежуточной между неявными и явными типами схем и сводит решение системы двумерных уравнений, по аналогии со схемой переменных направлений, к решению систем алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h^2 + \ell^2)$. На стационарном режиме решение не зависит от шага по времени τ и имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + \ell^2)$.

2. Разработана программа расчета на вычислительной машине типа М-20 уравнений Навье-Стокса для течения и теплообмена в замкнутой двумерной области.

3. В численных экспериментах получено достаточное условие устойчивости разностной схемы в виде

$$\tau \leq \min\{h, \ell\} \cdot C_M$$

Показана сходимость решения в счете на установление при $t \rightarrow \infty$ и при уменьшении шагов разностной сетки τ, h, ℓ .

Глава II

РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ВЯЗКОСТИ

Общие замечания

В современной газовой динамике имеется довольно широкий круг задач, где требуется учитывать влияние диссипативных процессов - теплопроводности и вязкости в направлении движения газа. Сюда относятся течения с большими продольными градиентами параметров (сильные возмущения), которые по порядку величины сравнимы или превышают поперечные градиенты (скачки температур, скачки уплотнения, резкие развороты потока). В задачах, обычно рассматриваемых в идеальной газовой динамике, масштаб действия диссипативных факторов мал и слабо влияет на общую картину течения. Известное свойство диссипативных процессов, заключающееся в "размазывании" ударных фронтов, используется в этом случае при построении численных схем с "искусственной вязкостью" [41-42]. В ряде случаев, например, в течениях при низкой плотности газа, масштаб диссипативных процессов становится значительным, что приводит к необходимости рассматривать структуру течения в области больших градиентов. Для правильного учета действительной теплопроводности и вязкости при численном решении одномерных уравнений Навье-Стокса в этом случае требуется применение разностных схем с порядком аппроксимации не ниже второго и достаточно подробных сеток.

Имеется и другой круг задач, связанных с распространением слабых возмущений (нелинейная акустика), в которых требуется учитывать влияние эффектов теплопроводности и вязкости на распространение, взаимодействие и затухание волн. Исследование таких одномерных течений ранее осуществлялось в линеаризованной постановке или путем разложения решения в ряд при малых значениях времени t [55].

Ниже приводится постановка и численное решение с помощью разностной схемы (24-28) двух задач: задачи о структуре фронта одномерной стационарной ударной волны и задачи о нестационарном течении газа при внезапном нагреве границы.

Численное решение одномерных уравнений Навье-Стокса представляет, кроме того, самостоятельный интерес при построении разностных схем и анализе точности и устойчивости схем для двумерных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа. В § 2 рассматривается одномерная задача, которая моделирует некоторые детали процесса установления для более сложных двумерных задач гл. III

§ I. Расчет структуры фронта одномерной стационарной ударной волны

Метод расчета

Пусть параметры газа перед волной имеют асимптотические значения V_1, ρ_1, T_1 , а за волной V_2, ρ_2, T_2 . Параметры перед ударным фронтом и за ним в совершенном газе связаны известными соотношениями [1, 4]

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\chi - 1)(\chi M_1^2 + 1)}{(\chi + 1)^2 M_1^2} (M_1^2 - 1) \quad (69)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\chi - 1)M_1^2 + 2}{(\chi + 1)M_1^2} \quad (70)$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \rho u \quad (71)$$

Здесь $\chi = \frac{C_{p1}}{C_{v1}}$, $M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\chi R T_1}}$

Для системы стационарных одномерных уравнений Навье-Стокса в работах Джилбарга и Паолуччио [43] и Мизеса [44] использовался метод расчета структуры фронта, основанный на решении системы обыкновенных

дифференциальных уравнений в плоскости $u-T$. Здесь для решения этой задачи применяется метод установления в плоскости $x-t$ с заданием асимптотических значений параметров газа перед волной и за волной на отрезке конечной длины. Близкая к рассматриваемой здесь постановка задачи осуществляется также в работе Крокко [38] для одномерного течения в расширяющемся сопле.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициент вязкости зависит от температуры по формуле Сатерленда:

$$\tilde{\mu} = T^{3/2} \frac{1 - \bar{C}}{T + \bar{C}} \quad (72)$$

причем при $\mu' = 0$ $\tilde{\mu} = \frac{4}{3}\mu$. В формуле (72) $\bar{C} = \frac{C}{T_1}$, где C - константа Сатерленда. Далее, при $Pr = \mu C_p / k = const$ и $C_p = const$ зависимость вида (72) справедлива и для коэффициента теплопроводности $k(T)$. В качестве масштабов для неизвестных функций u, ρ, T и коэффициентов μ, k, C_v возьмем их значения в набегающем потоке. Полная система определяющих критериев подобия в такой постановке задачи состоит из чисел $M_1, \chi, Pr, C/T_1$.

Начало отсчета и масштаб длины L не заданы условиями задачи, поэтому число Рейнольдса C_R не является определяющим критерием подобия. Воспользуемся этим обстоятельством и введем отрезок длины L , внутри которого помещается весь ударный фронт (фиг. 6) так, чтобы значения искомых функций вблизи границы отличались от заданных асимптотических значений на заданную величину ε . Если принять этот отрезок L за масштаб длины, то тем самым в схеме (24-28) вводится масштабный параметр

$$C_R = \frac{V_1 L \rho_1}{\mu_1} - \text{число Рейнольдса, отнесенное к масштабу длины } L \text{ и параметрам}$$

в набегающем потоке.

Примем определение толщины волны по Прандтлю [43]

$$\Delta_s = \frac{V_1 - V_2}{(du/dx)_{\max}} \quad (73)$$

Из расчетов непосредственно определяется толщина фронта Δ_s , отнесенная к выбранному масштабу L (в нашей нормировке)

$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{1-u_2}{\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)_{\max}}, \quad i=1,2,\dots,N, \quad u_2 = \frac{V_2}{V_1} \quad (73^1)$$

Задавая длину свободного пробега в набегающем потоке в виде:

$$L_s = \frac{\mu_1}{0.499\rho_1\sqrt{\frac{8RT_1}{\pi}}}, \text{ получим } \frac{L}{L_s} = 0.499\sqrt{\frac{8}{\chi\pi}} \frac{C_R}{M_1}, \frac{\Delta_s}{L_s} = \frac{\Delta_s}{L} \cdot \frac{L}{L_s}$$

Все расчеты проводились по разностной схеме для системы одномерных уравнений Навье-Стокса (24-28) ($C_{F_x} = 0$, $C_M = M_1$), причем уравнение неразрывности (25) бралось в стационарном виде (71).

Начальные данные при расчете на установление задавались в виде ступеньки:

$$\begin{aligned} u^o &= 1.0, \quad T^o = 1.0 \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ u^o &= u_2 = \frac{V_2}{V_1}, \quad T^o = \frac{T_2}{T_1} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{aligned} \quad (74)$$

При таких начальных данных, задаваемых на сетке так, что ширина ступеньки, равная шагу сетки h намного меньше толщины волны, фронт волны в процессе итераций перемещается в сторону набегающего потока и "размазывается" на сетке, что приводит к установлению характерного профиля (фиг. 6). На сетке с числом узлов $N=100$, $h = \frac{1}{99}$, $\tau = 10h$ установление стационарного решения достигалось, как правило, за 40-60 итераций, причем на границах сетки всегда выполнялось условие:

$$|\varphi_m - \varphi_{m-1}| < \varepsilon, \quad (m=1, N) \quad (75)$$

где $\varepsilon = 10^{-4}$ для профиля температуры и $\varepsilon = 10^{-5}$ для профиля скорости. Контроль точности осуществлялся сопоставлением разностного решения с точным. При числе $Pr = 0.75$ система стационарных уравнений имеет интеграл энергии [1]:

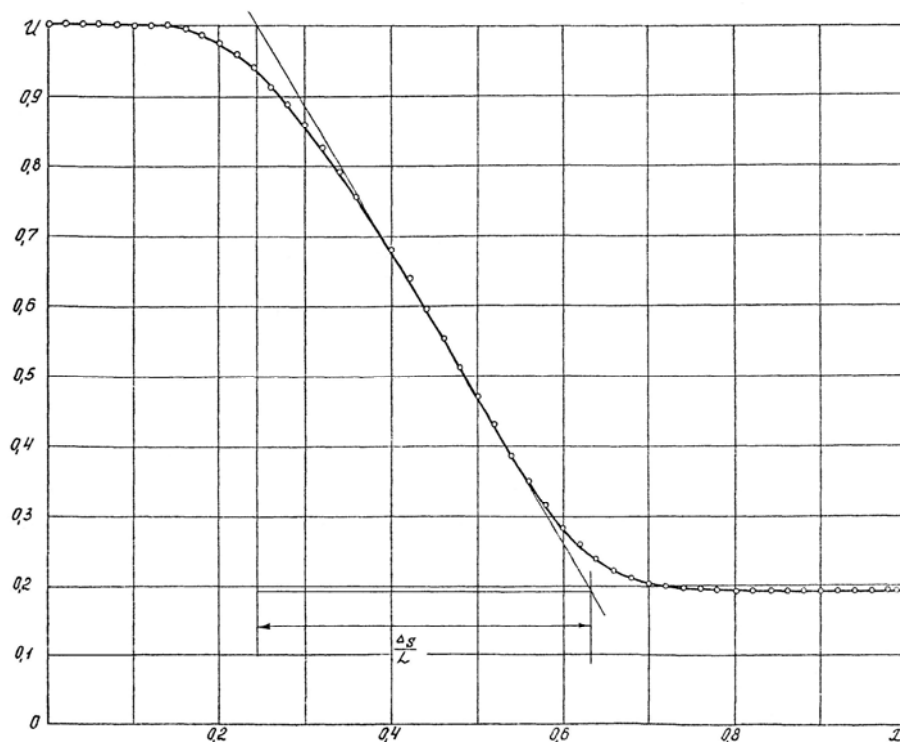
$$\frac{u_i^2}{2} + \frac{1}{(\chi - 1)M_1^2} T_i = const \quad (76)$$

Определяя константу в правой части по параметрам набегающего потока, получим нормированное соотношение:

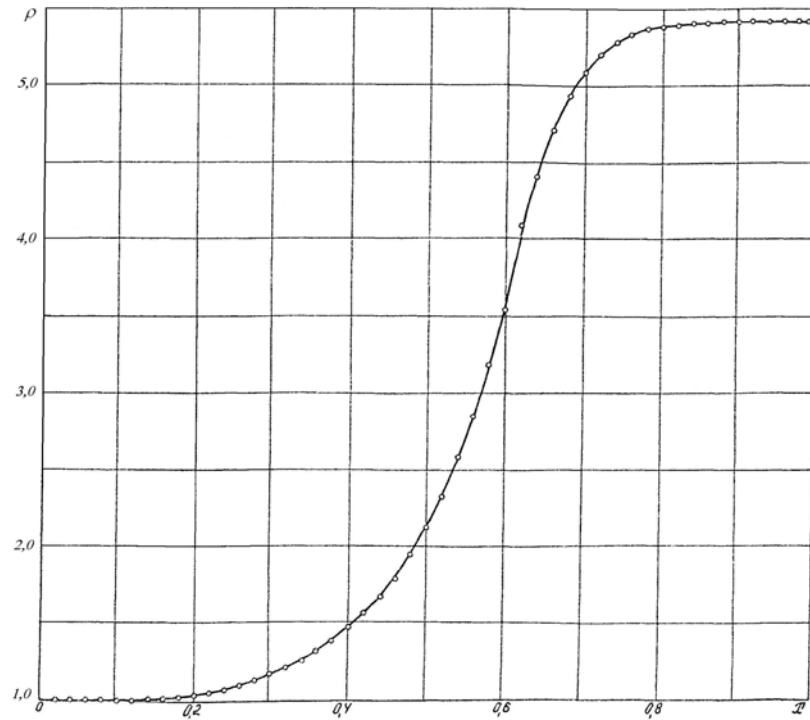
$$B(x) = \left(0.5 + \frac{1}{(\chi - 1)M_1^2} \right)^{-1} \left[\frac{u_i^2}{2} + \frac{T_i}{(\chi - 1)M_1^2} \right] = 1.0 \quad (76^1)$$

Наибольшее отклонение величины $B(x)$ от единицы в узлах разностной сетки составляло не более 0,1%.

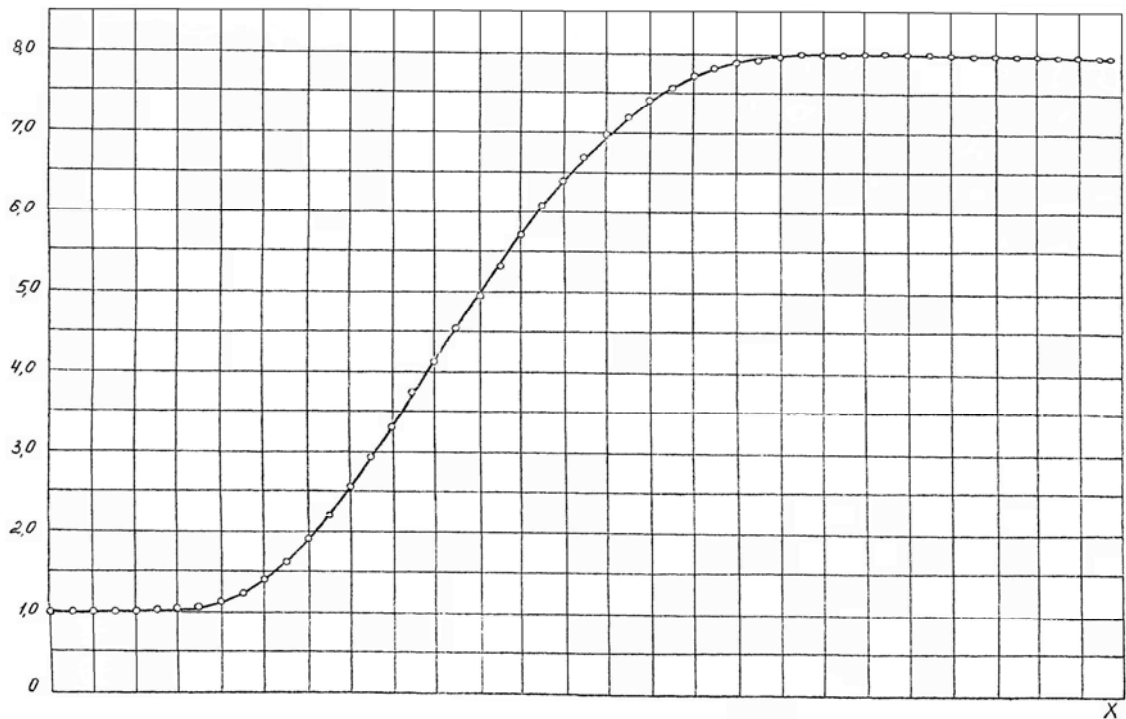
Такой способ расчета структуры фронта прост и удобен и, как показывают приводимые ниже результаты, применим в широком диапазоне чисел $M_1, \chi, Pr, C/T_1$. Расчет одного варианта на сетке $N = 100$ на ЭВМ М-20 составляет 2-3 мин.



Фиг. 6. Распределение скорости в ударной волне.

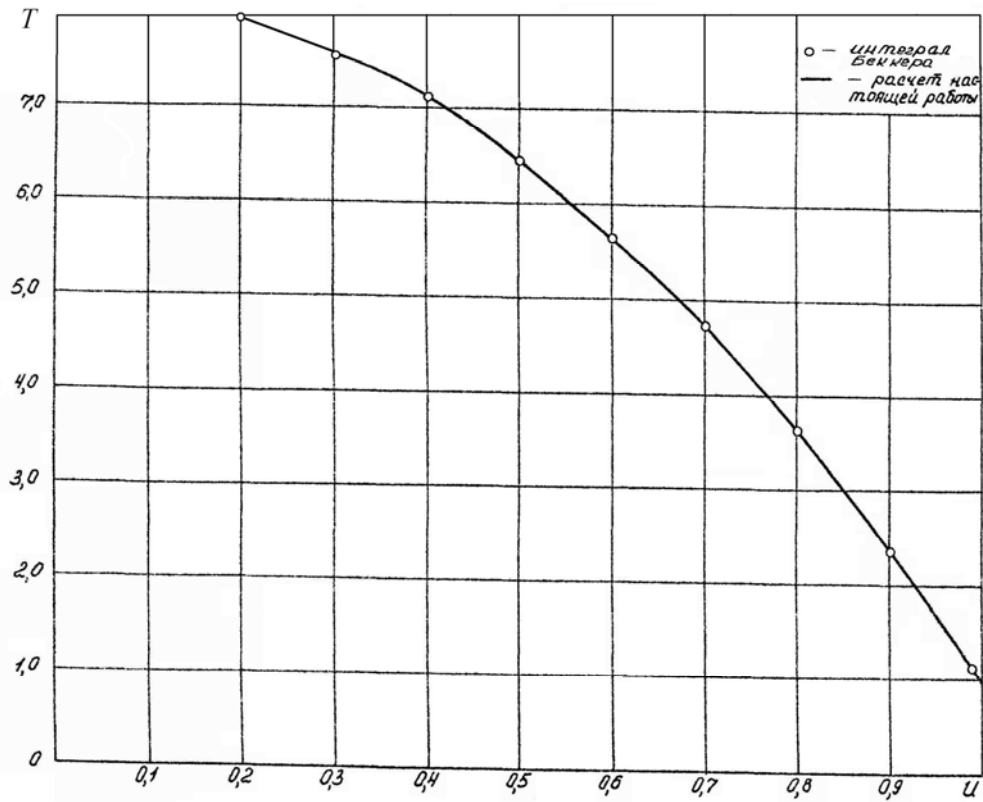


Фиг. 7. Распределение плотности в ударной волне.



Фиг. 8. Распределение температуры в ударной волне

Пример расчета распределения скорости, плотности и температуры поперек ударного фронта приведен на фиг. 6-8 ($M_1 = 6$, $\chi = 1,405$, $Pr = 0,75$). (На всех этих графиках расчетные точки показаны через одну).



Фиг. 9. Сопоставление численного решения с точным

На фиг. 9 дается сравнение численного решения при $Pr = 0,75$ с точным (76).

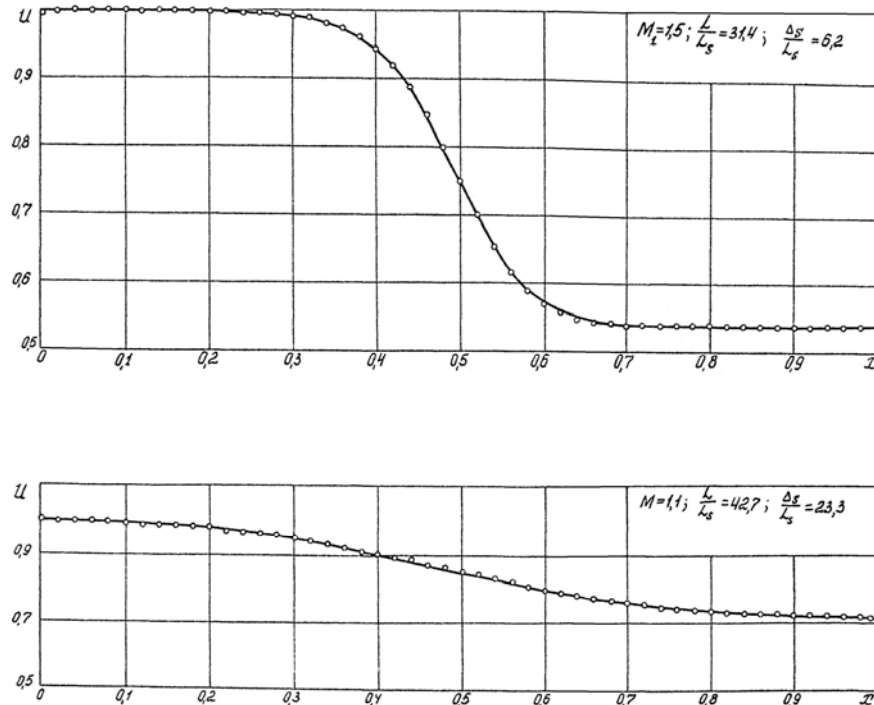
Масштабный параметр C_R в этом примере равен 70, $\frac{L}{L_s} = 7,84$, $\frac{\Delta_s}{L} = 0,382$ и

$\frac{\Delta_s}{L_s} = 2,99$. Выбор рационального значения масштабного параметра C_R при

такой постановке задачи представляется очень важным. Если C_R слишком велико, то фронт волны сужается на сетке, и в область наибольшего изменения параметров попадает малое число узлов, что приводит к потере точности, а при числе узлов сетки 1-2 внутри фронта и к расхождению решения. Наоборот, при слишком большом значении C_R фронт волны "размазывается" на сетке так, что асимптотические условия (75) не выполняются. Наилучшая аппроксимация решения в рассмотренном случае (фиг. 6-8) на сетке $N=100$ достигается в том случае, когда толщина фронта волны, определяемая по соотношению (73¹) в 2-2,5 раза меньше всего рассматриваемого отрезка.

Результаты расчета

В серии расчетов, выполненных изложенным здесь методом, исследовалось влияние отдельных параметров $M_1, \chi, Pr, C/T_1$ на структуру

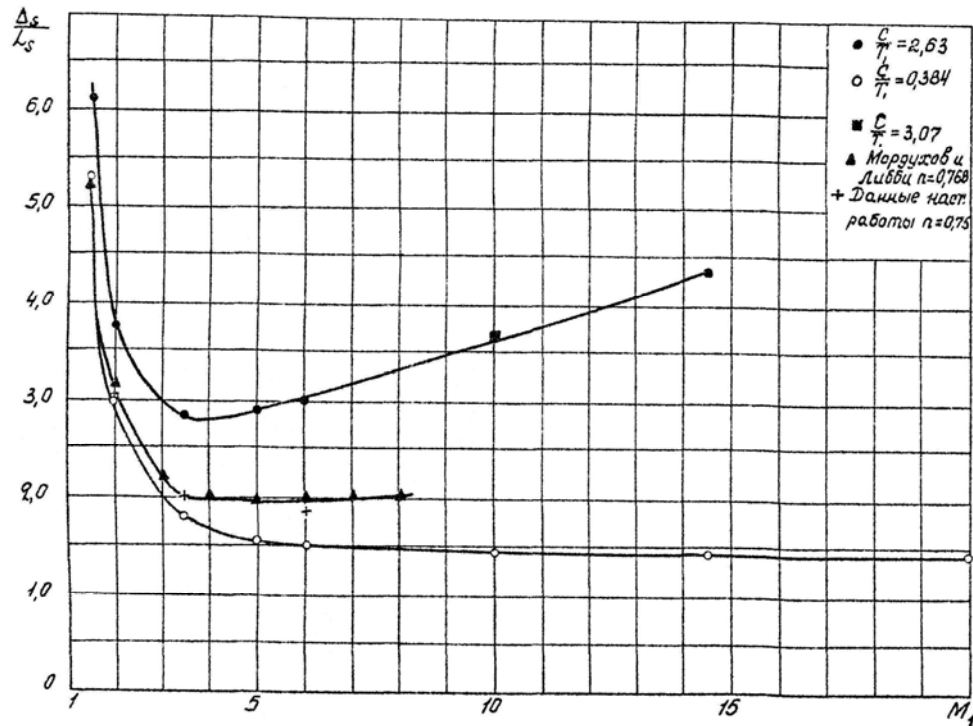


Фиг. 10. Распределение скорости в ударной волне при числах
 $(M_1 = 1.1 \text{ и } 1.5, \chi = 1.405, C/T_1 = 3.07)$

фронта стационарной ударной волны в совершенном газе с коэффициентами теплопроводности и вязкости, зависящими от температуры по закону Сатерленда (72) в диапазоне чисел:

$$M_1 = 1.1 - 20, \quad \chi = 1.33 - 1.66, \quad Pr = 0.5 - 1, \quad C/T_1 = 0 - 10.$$

Результаты этих расчетов приводятся на фиг. 10-16.



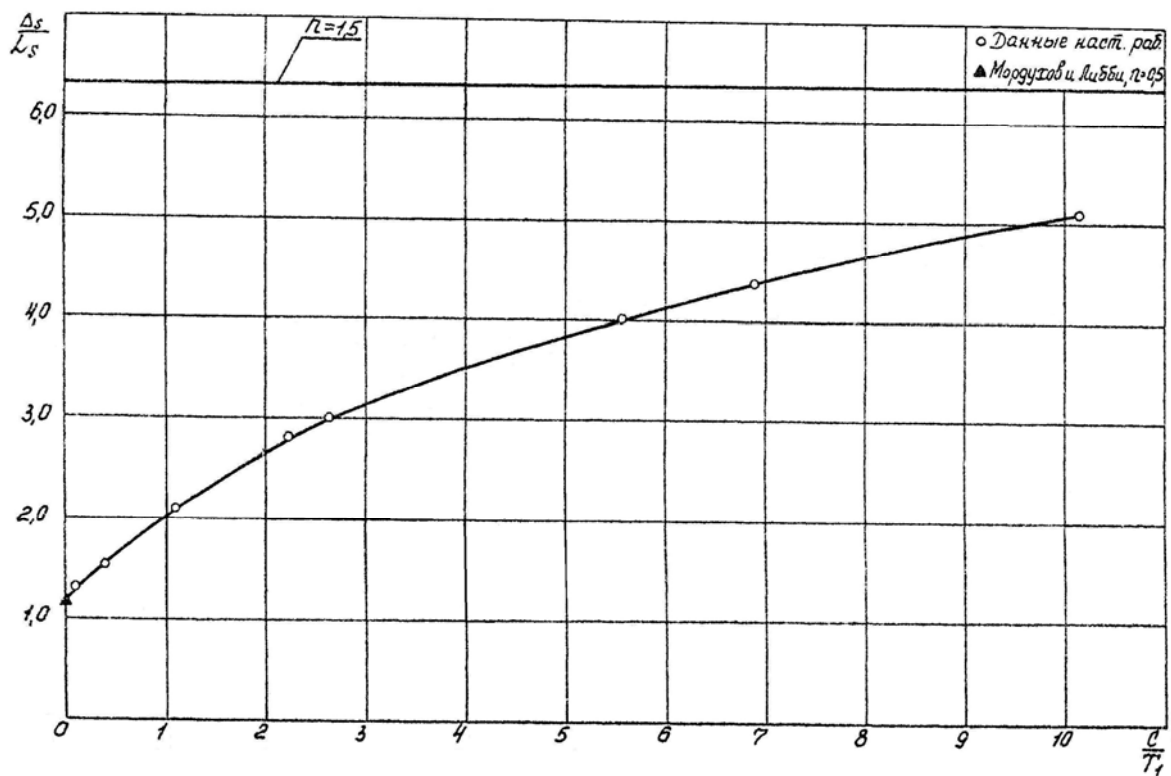
Фиг. 11. Влияние числа M на относительную толщину фронта ударной волны при различных отношениях константы Сатерленда к температуре набегающего потока

При уменьшении числа M_1 в набегающем потоке толщина волны при всех значениях C/T_1 возрастает. Профили скорости $u(x)$, соответствующие числам $M_1 = 1,5$ и $1,1$, вычисленные при одном и том же масштабном параметре $C_R = 70$, показаны на фиг. 10. При увеличении числа M_1 зависимость Δ_s/L_s существенно различна при различных значениях C/T_1 (что при фиксированном значении константы Сатерленда C определяется различными значениями температуры T_1 в набегающем потоке). При $C/T_1 = 0,384$ (что соответствует для воздуха при $C = 110,4$ °К значению $T_1 = 288$ °К, относительная толщина волны Δ_s/L_s монотонно уменьшается до значения $\Delta_s/L_s = 1,4$ при $M_1 = 10 - 20$. Отметим, что при $\mu, k = const$ оценки толщины фронта [52] дают $\Delta_s/L_s \rightarrow 0$ при $M_1 \rightarrow \infty$.

При $C/T_1 = 2,63$ (что соответствует для воздуха значению $T_1 = 42$ °К) на кривой $\Delta_s/L_s(M_1)$ имеется четко выраженный минимум (фиг. 11) с существенным возрастанием относительной толщины волны при дальнейшем

увеличении M_1 . При промежуточных значениях $\frac{C}{T_1}$ минимум смещен в сторону больших чисел M_1 .

В результатах расчета Мордухова и Либби [45], где использовались степенные законы, при $n = 0,768$ в зависимости $\Delta_s / L_s(M_1)$ имеется минимум при $M_1 = 5 \div 6$ со слабым ростом относительной толщины волны при дальнейшем увеличении M_1 (фиг. 11). (Результаты настоящей работы при $n = 0,75$ лежат несколько ниже, что соответствует некоторому различию в показателе степени). Влияние параметра $\frac{C}{T_1}$ на толщину фронта волны Δ_s / L_s более подробно исследовалось при числе $M_1 = 6$ (фиг. 12).

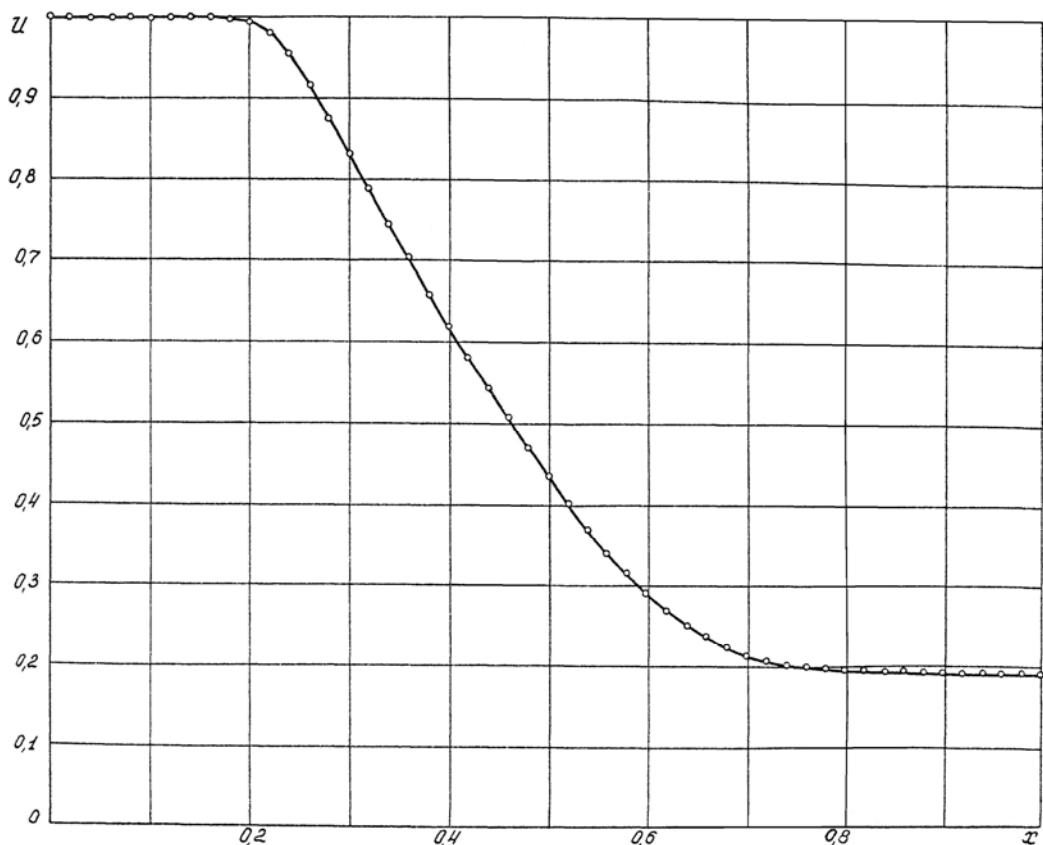


Фиг. 12. Влияние отношения C/T_1 на толщину фронта ударной волны ($M_1 = 6.0$, $\chi = 1.405$, $Pr = 0.75$)

Изменение параметра $\frac{C}{T_1}$ в законе вязкости (72) соответствует изменению

показателя степени n в степенном законе. При $\frac{C}{T_1} = 0$ из закона Сатерленда (72)

следует степенная зависимость $\mu = T^{1/2}$ (на фиг. 12 показано значение Δ_s / L_s при этой зависимости, полученное в работе [45], которое согласуется с результатами расчета настоящей работы). При $\frac{C}{T_1} \rightarrow \infty$ толщина фронта волны асимптотически стремится к значению (фиг. 12), соответствующему степенному закону $\mu = T^{3/2}$. Во всем диапазоне $\frac{C}{T_1} = 0 \div \infty$ при числе $M = 6,0$ относительная толщина волны увеличивается примерно в 6 раз, причем, как видно из фиг. 11, зависимость $\frac{\Delta_s}{L_s} \left(\frac{C}{T_1} \right)$ значительно различается при различных числах M_1 . Эти результаты указывают на существенную роль закона изменения вязкости и теплопроводности поперек фронта ударной волны.

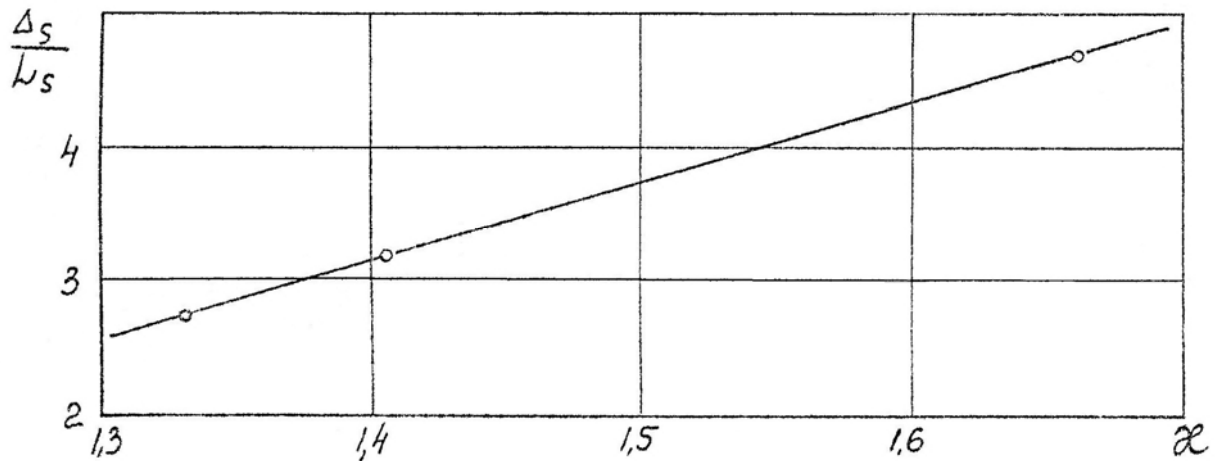


Фиг. 13. Распределение скорости в ударной волне при $\frac{C}{T_1} \rightarrow \infty$,

$$M_1 = 6.0, \quad \chi = 1.405, \quad Pr = 0.75, \quad L/L_s = 16.8$$

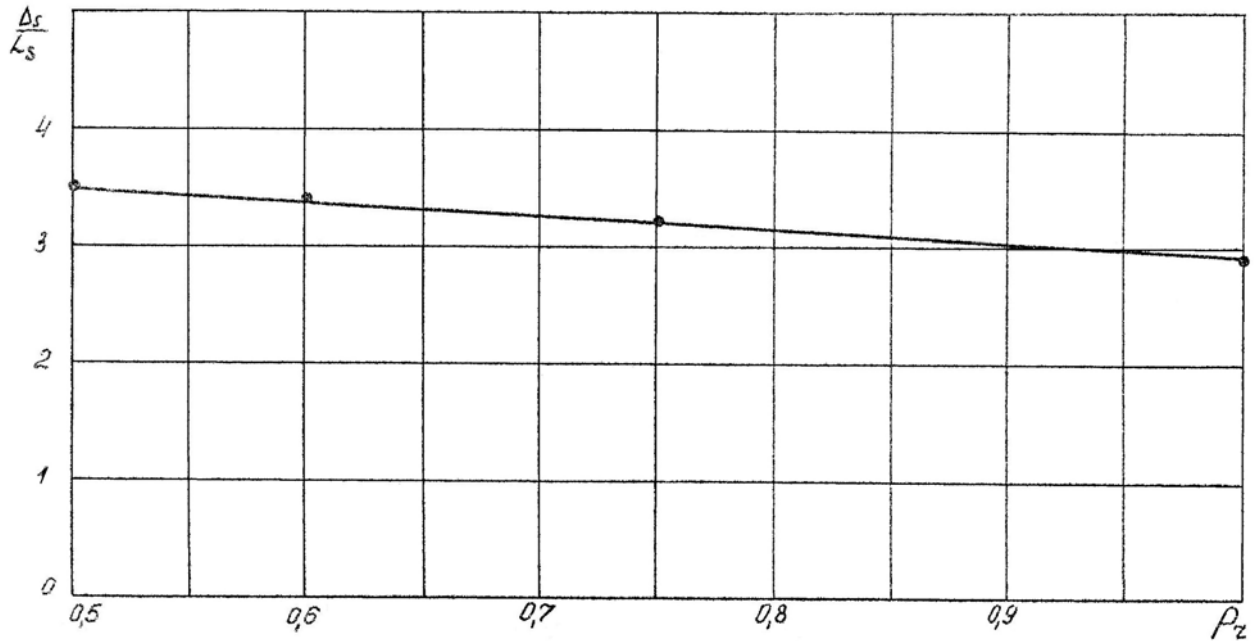
При $\frac{C}{T_1} \rightarrow \infty$ распределение скорости поперек ударного фронта (фиг. 13) имеет особенность, состоящую в том, что точка, соответствующая значению $(du/dx)_{\max}$ заметно перемещается в сторону набегающего потока. Этот результат ранее получен в оценках работы [47].

Влияние показателя адиабаты χ на толщину фронта показано на фиг. 14 ($M = 6$, $\frac{C}{T_1} = 3,07$, $Pr = 0,75$). При увеличении χ от 1,33 (многоатомный газ) до 1,66 (одноатомный газ) толщина волны увеличивается примерно вдвое.



Фиг. 14. Влияние отношения теплоемкостей χ на толщину фронта ударной волны ($M_1 = 6,0$, $Pr = 0,75$, $C/T_1 = 3,07$)

Число Прандтля сравнительно слабо влияет на толщину фронта. Этот факт отмечался ранее в работе [44].



Фиг. 15. Влияние числа Прандтля на толщину фронта ударной волны

$$(M_1 = 6.0, \quad \chi = 1.405, \quad C/T_1 = 3.07)$$

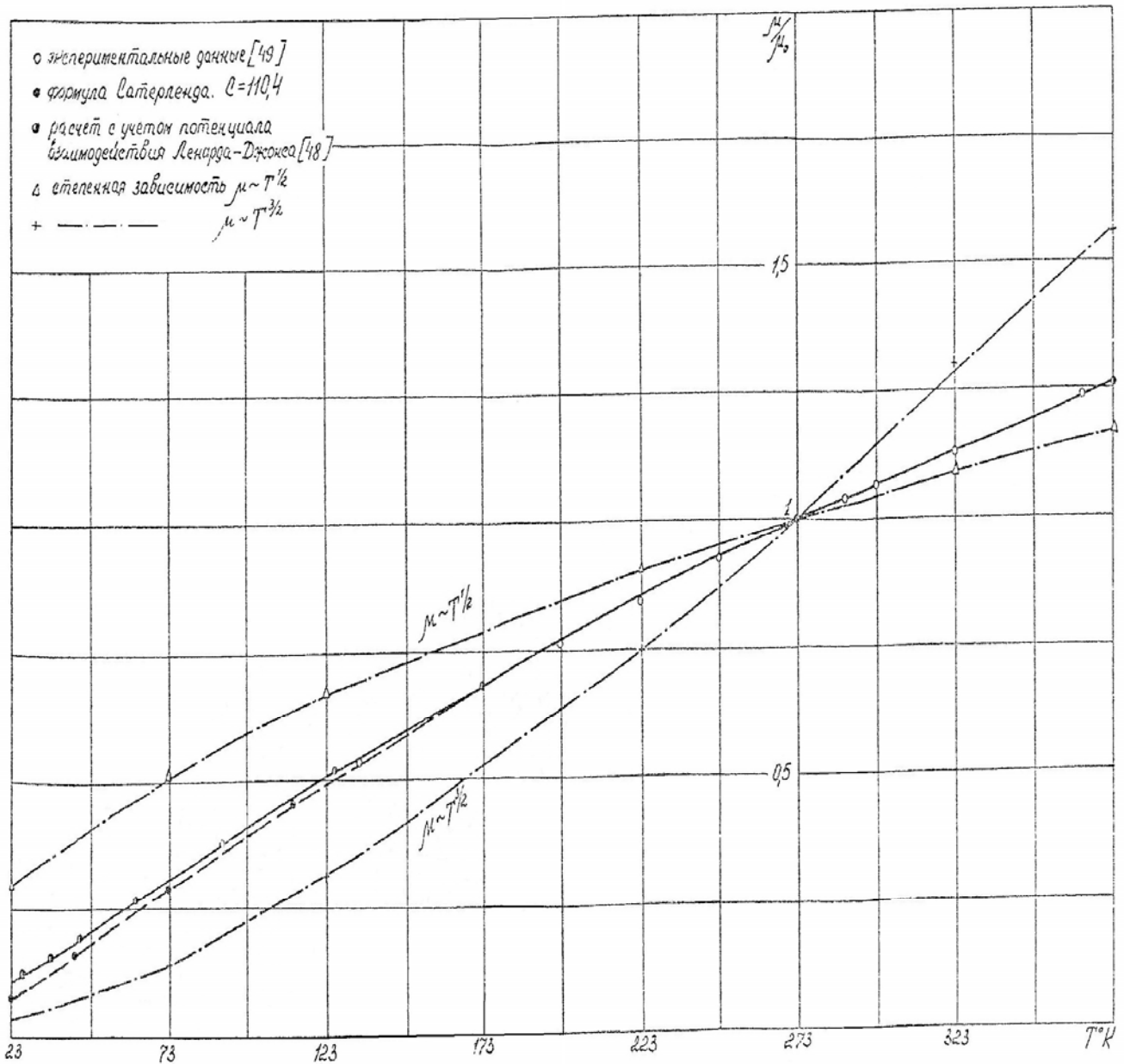
Результаты, представленные на фиг. 15 ($M_1 = 6$, $\chi = 1,405$, $\frac{C}{T_1} = 3,07$), показывают, что толщина фронта уменьшается с ростом числа Прандтля примерно по линейному закону, и в диапазоне $0,5 \leq Pr \leq 1,0$ уменьшение толщины составляет около 20%.

Полученные здесь результаты расчета структуры фронта одномерной стационарной волны в совершенном газе согласуются с имеющимися данными [43 - 47] и выполнены в более широком диапазоне определяющих критериев.

Сопоставление с результатами эксперимента

Сопоставление с результатами измерений толщины волны, выполненное в основном для одноатомных газов [46] дает удовлетворительное согласование с вычисленными по модели Навье-Стокса только для слабых волн $M_1 = 1,7 \div 2$, а при больших числах M_1 вычисленная толщина волны оказывается заниженной.

Вопрос о том, возможно ли описание структуры фронта путем более детального учета коэффициентов переноса исходя из модели Навье-Стокса для волн большей интенсивности, в настоящее время окончательно не решен. Имеющиеся экспериментально данные в основном дают сведения о толщине ударной волны, измеренной по плотности. Мы приведем ниже сопоставление результатов расчета структуры ударного фронта с профилем плотности, полученным в экспериментах А.В. Иванова [50 - 51] при числах $M = 2,6, 3,8, 6$ для воздуха. В этих экспериментах температура набегающего потока была равна соответственно $T_1 = 124^\circ\text{K}, 75^\circ\text{K}, 36,7^\circ\text{K}$. Для сопоставления с результатами расчета взяты распределения плотности, измеренные вдоль оси симметрии ударной волны, возникающей перед сферой и диском [50 - 51]. Для получения изолированной ударной волны перед телом осуществлялись такие условия обтекания, при которых фронт волны располагался на достаточном удалении от тела, так что можно было пренебречь влиянием пограничного слоя на теле [50].

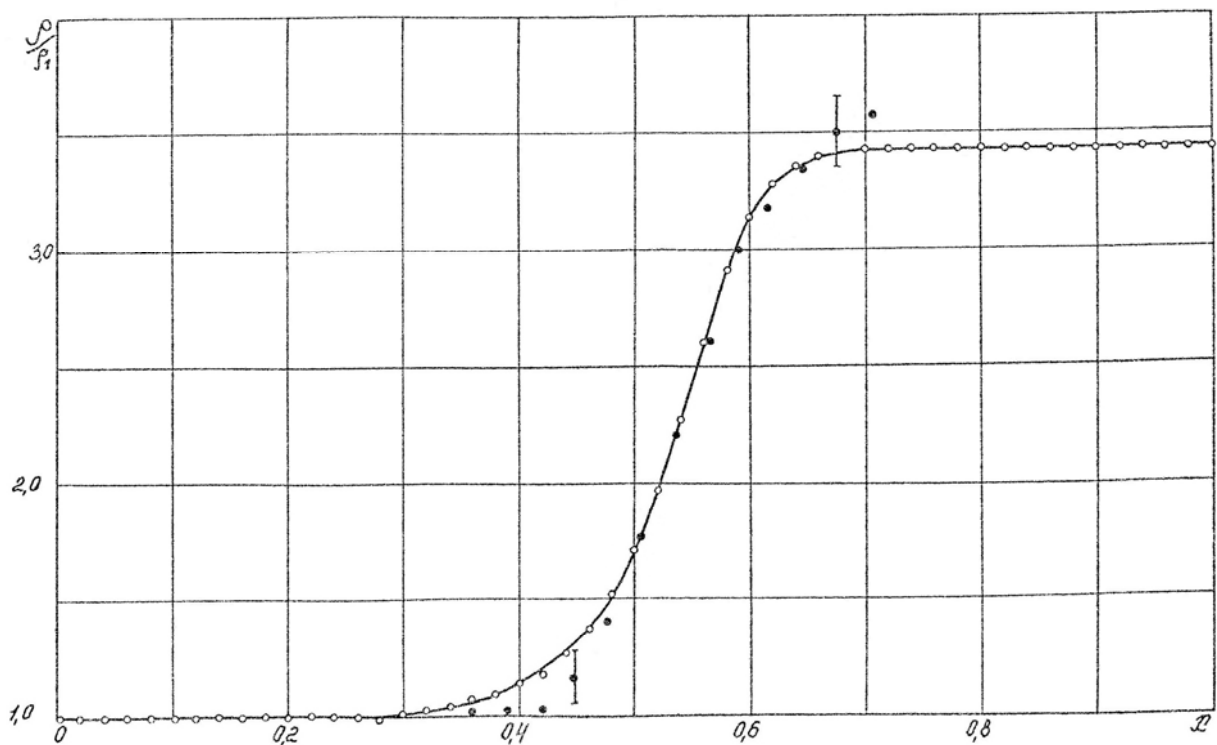


Фиг. 16. Зависимость вязкости воздуха от температуры

Зависимости вязкости и теплопроводности $\mu(T), k(T)$ в указанном интервале температур удовлетворительно аппроксимируются формулой Сатерленда с константой $C = 110,4$. Сопоставление значений вязкости, вычисленных по этой формуле с экспериментальными данными [49] приводится на фиг. 16. Здесь же приведены значения вязкости, вычисленные с учетом потенциала взаимодействия Леннарда-Джонса [48].

Сопоставление результатов расчета с коэффициентом вязкости $\tilde{\mu} = \frac{4}{3} \mu$ с

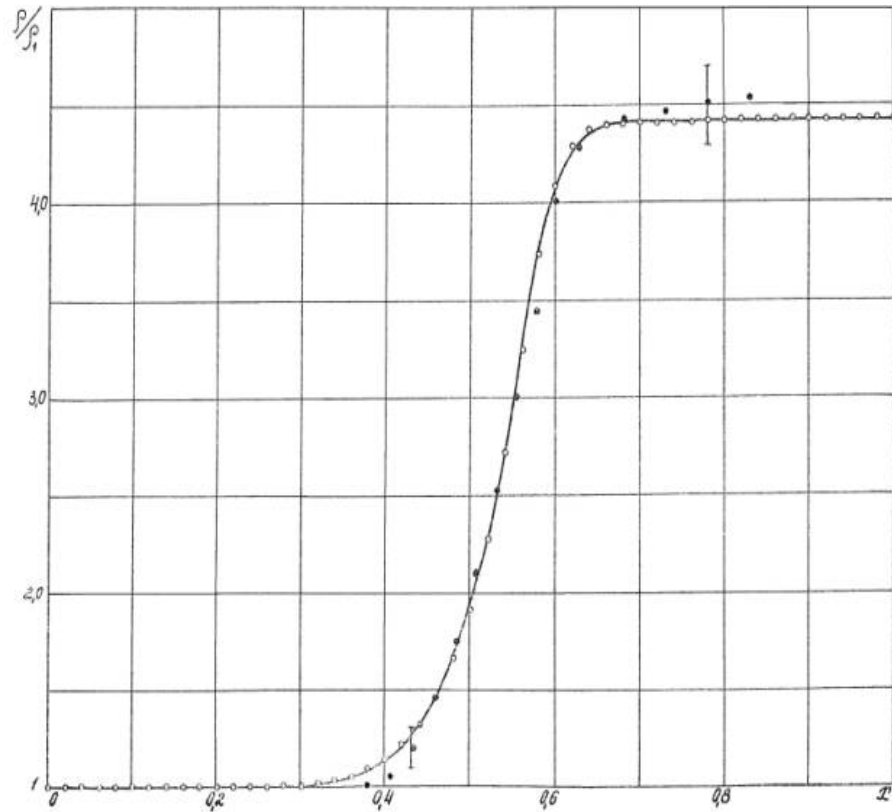
указанными экспериментальными данными показывает, что рассчитанная толщина волны занижена примерно вдвое. Последнее можно объяснить тем, что не учитывается объемная вязкость μ' , соответствующая релаксации внутренних степеней свободы во фронте волны. В настоящее время какие-либо данные относительно зависимости μ' от термодинамических величин отсутствуют. Мы предположим, что объемная вязкость зависит от температуры $\mu'(T)$ по такому же закону (72) как и сдвиговая вязкость $\mu(T)$ и попытаемся найти ее значение, добиваясь совпадения измеренных и рассчитанных профилей плотности.



Фиг. 17. Сопоставление результатов расчета профиля плотности в ударной волне с экспериментальными данными [51] для воздуха

$$M_1 = 2.6, \quad T_1 = 124^\circ \text{K}, \quad \chi = 1.405, \quad Pr = 0.71,$$

$$C = 110.4 \quad (L/2L_s = 12.25, \quad \mu' = 4/3\mu)$$



Фиг. 18. Сопоставление результатов расчета профиля плотности в ударной волне с экспериментальными данными [51] для воздуха

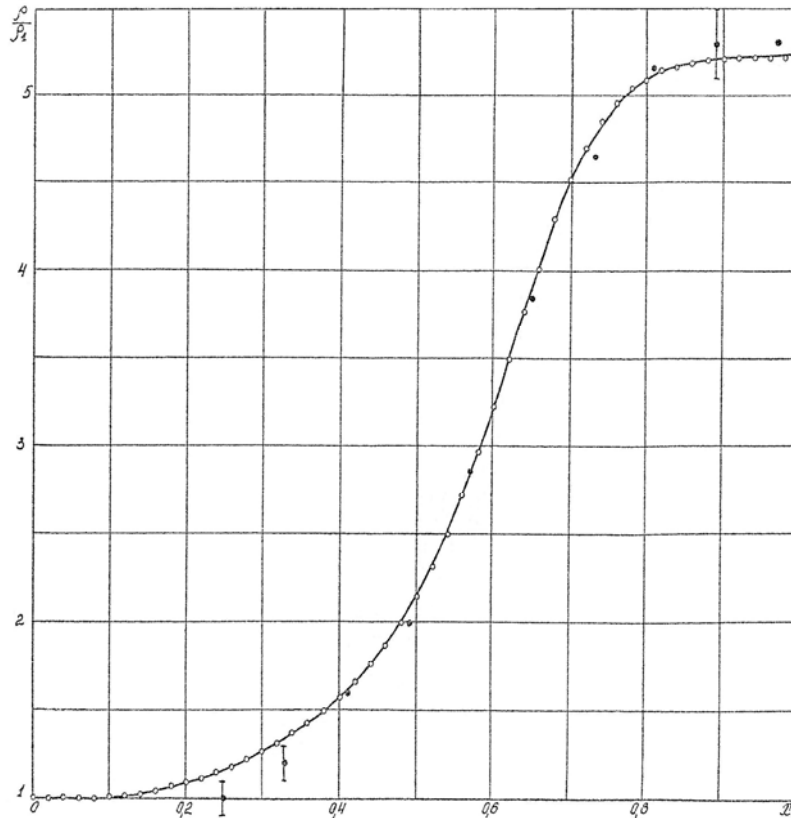
$$M_1 = 3.8, \quad T_1 = 75^\circ \text{K}, \quad \chi = 1.405, \quad Pr = 0.71,$$

$$C = 110.4 \quad (L/2L_S = 12.4, \quad \mu' = 4/3\mu)$$

Результаты такого сопоставления при значении $\mu' = \frac{4}{3}\mu$ для чисел $M = 2.6; 3.8; 6$ показаны на фиг.17-19. При наложении измеренных и рассчитанных профилей плотности за опорную была взята точка на ударной волне, в которой плотность примерно равна полусумме плотностей перед фронтом ударной волны и за ним.

Из фиг. 16-18 следует, что измеренные и рассчитанные в предположении $\tilde{\mu} = \frac{4}{3}\mu + \mu', \quad \mu' = \frac{4}{3}\mu$ профили плотности в пределах точности измерений удовлетворительно согласуются при всех указанных выше числах M_1 . Некоторое завышение экспериментальных точек над расчетными за фронтом

волны связано с влиянием тела, так что значения плотности здесь несколько выше асимптотических значений для прямого скачка при данном числе M_1 . Характерным при всех числах M является некоторое превышение расчетных значений над измеренными в передней части волны.



Фиг. 19. Сопоставление результатов расчета профиля плотности в ударной волне с экспериментальными данными [51] для воздуха

$$M_1 = 6.0, \quad T_1 = 36^\circ K, \quad \chi = 1.405, \quad Pr = 0.71,$$

$$C = 110.4 (L/2L_S = 6.75, \quad \mu' = 4/3\mu)$$

Эти результаты показывают, что в рассмотренном диапазоне чисел M и температур набегающего потока T_1 структура фронта по плотности может быть приближенно рассчитана исходя из системы уравнений Навье-Стокса с введением объемной вязкости μ' . При отсутствии независимых данных относительно μ' такой способ является лишь полуэмпирическим. Область применения его пока недостаточно ясна из-за ограниченности экспериментальных данных по распределению всех параметров во фронте

волны. Более точный учет релаксации во фронте волны был бы возможен путем введения описания релаксационных процессов в явном виде [53]. В этом случае требуются независимые данные о времени релаксации внутренних степеней свободы.

§ 2. Нестационарное течение газа при внезапном подогреве границы

Постановка задачи

Пусть газ с постоянной начальной плотностью ρ^0 и температурой $T^0 = T_{w_1}$ заключен в замкнутую область между двумя стенками, одна из которых внезапно нагревается до температуры T_{w_2} и в дальнейшем не изменяется во времени. Определим распространение тепла и движение газа в последующие моменты времени.

Будем рассматривать совершенный газ с коэффициентами теплопроводности и вязкости, зависящими от температуры по формуле (72). Движение газа и перенос тепла в газе, заключенном в области длины L , определяется следующими размерными величинами

$$x, t, \mu, k, C_v, R, \rho^0, T^0 = T_{w_1}, T_{w_2}, L, C, \quad (77)$$

где независимыми являются четыре размерности: длины, времени, массы и температуры. Из перечисленных (77) 11 размерных величин, согласно π -теореме теории размерностей, можно составить 7 независимых безразмерных комбинаций, которые выберем в виде

$$\frac{T_{w_2}}{T_{w_1}}, C_R, \chi, Pr, \bar{C}, \bar{x}, \bar{t} \quad (77^1)$$

где

$$C_R = \frac{\sqrt{\chi RT_1} L}{\mu_1} \rho_1, \quad Pr = \frac{\mu C_p}{k}, \quad \bar{C} = \frac{C}{T_{w_1}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t \sqrt{\chi RT_{w_1}}}{L}$$

В разностной схеме для системы одномерных уравнений (24-28) эти безразмерные комбинации будут соответствовать масштабным комплексам (16), если взять за масштабы значения параметров при температуре $T_{w_1} = T^\circ$, $\rho_1 = \rho^\circ$, а за масштаб скорости - скорость звука при температуре $T_{w_1} = T^\circ$. (Тогда $C_M = 1$; кроме того, предполагается $C_{F_x} = 0$). Сюда добавляются также критерии $\frac{T_{w_2}}{T_{w_1}}$ и $\frac{C}{T_{w_1}}$, появляющиеся при рассмотрении граничных условий и закона изменения вязкости и теплопроводности от температуры.

Весь процесс распространения тепла и движения газа в замкнутой области между двумя стенками вплоть до полного установления начальных возмущений можно представить в виде последовательности трех процессов:

1. Развитие и распространение волн температуры, скорости, плотности и давления до момента столкновения их с противоположной стенкой. Этот процесс можно, рассматривать отдельно как процесс распространения в полубесконечную среду волн, локализованных на некотором характерном расстоянии $x(t)$ от стенки. В этом случае, как и в § I, характерная длина L не задана условиями задачи и C_R есть масштабный параметр, который можно исключить из системы (24 - 28) путем перехода к координатам:

$$x^* = \bar{x} C_R = \frac{x \sqrt{\chi RT_{w_1}}}{\mu_1} \rho_1, \quad t^* = \bar{t} C_R = \frac{t \chi RT_{w_1} \rho_1}{\mu_1}$$

2. Взаимодействие волн со стенками определяется полной системой критериев (77).

3. Стационарное состояние, при котором газ неподвижен, давление и поток тепла между стенками постоянны, а плотность обратно пропорциональна температуре:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (78)$$

$$p = \rho T, \quad \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad T(0) = \frac{T_{w2}}{T_{w1}}, \quad T(1) = 1$$

Нетрудно видеть, что стационарное состояние газа (78) определяется только перепадом на стенках $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$ и зависимостью коэффициента теплопроводности $k(T)$ от температуры.

В расчетах этой задачи применялись разностные схемы (24-28) для системы одномерных уравнений. Граничные условия записываются в виде:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad T(0,t) = \frac{T_{w2}}{T_{w1}}, \quad T(1,t) = T^\circ = 1.0 \quad (79)$$

Начальные условия

$$u^\circ = u(x,0) = 0, \quad \rho^\circ = \rho(x,0) = 1.0, \quad T^\circ = T(x,0) = 1.0 \quad (80)$$

$$T(0,0) = \frac{T_{w2}}{T_{w1}}$$

Плотность газа на границе рассчитывалась из уравнения неразрывности по формуле первого порядка, например, при $i = 1$

$$\rho_1^{n+1} = \rho_1^n - \frac{\tau}{h} \rho_1^n u_2^{n+1} \quad (81)$$

Для контроля точности в процессе счета проверялись интегральные соотношения импульса, расхода и энергии, которые получаются из системы дифференциальных уравнений (18-20) интегрированием по всему отрезку:

$$\int_1^2 \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} - \rho C_{F_x} \right) dx + \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 + \frac{1}{\chi C_M^2} (P_2 - P_1) = \frac{1}{C_R} (\tau_{w_2} - \tau_{w_1}) \quad (82)$$

$$\int_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + \rho_2 u_2 - \rho_1 u_1 = 0 \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left[\frac{\partial \rho e}{\partial t} + p(\chi - 1) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\mu \chi (\chi - 1)}{C_R} C_M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \rho_2 u_2 e_2 - \rho_1 u_1 e_1 = \\ = \chi \frac{1}{C_R Pr} (q_{w_2} - q_{w_1}) \end{aligned} \quad (84)$$

где

$$e = \int_0^T C_v dT, \quad \tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w, \quad q_w = k_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w$$

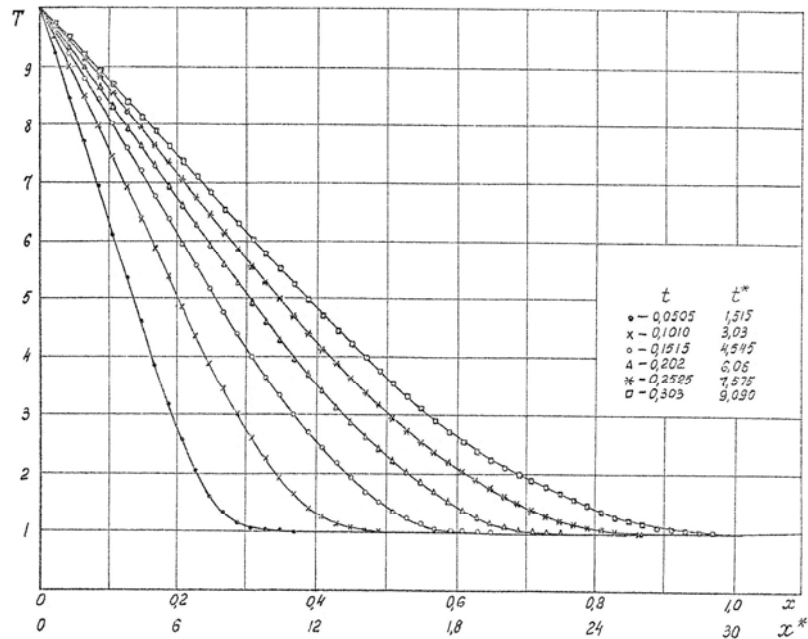
Результаты расчета

1. Развитие и перемещение волн температуры, скорости, плотности и давления до момента столкновения с противоположной стенкой показаны на фиг. 20 - 23 в зависимости от безразмерной координаты x^* при различных значениях t^* . Значения критериев подобия (77^1) в этом случае равны:

$$\frac{T_{w_2}}{T_{w_1}} = 10, \quad \chi = 1,405, \quad Pr = 0,75 \quad \frac{C}{T_1} = 0,385$$

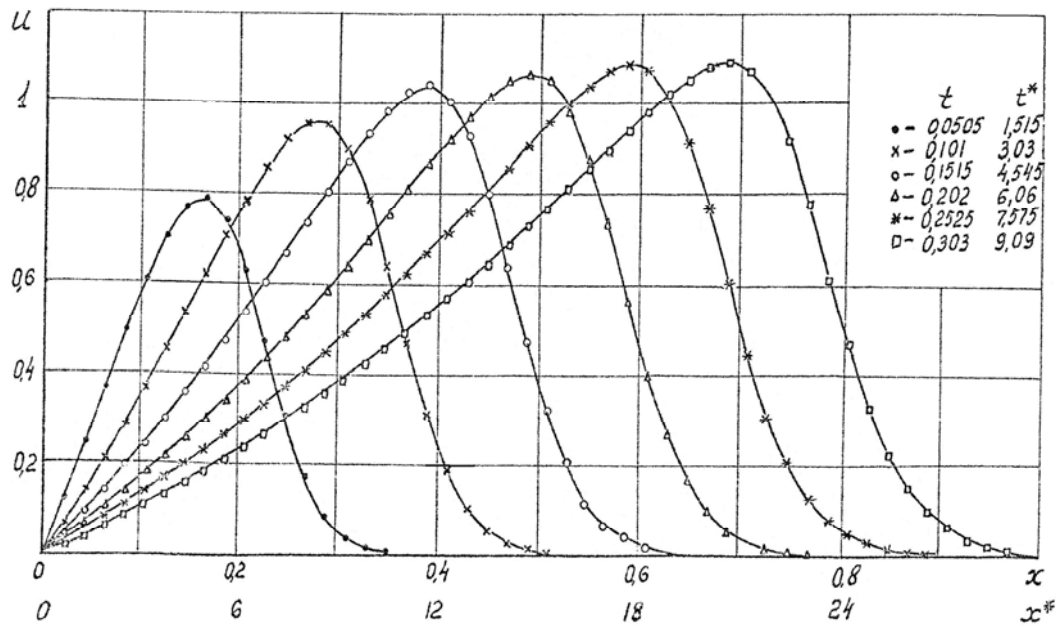
Масштабный параметр C_R был равен 30; параметры сетки:

$$N = 100, \quad h = 199, \quad \tau = 0,1h.$$

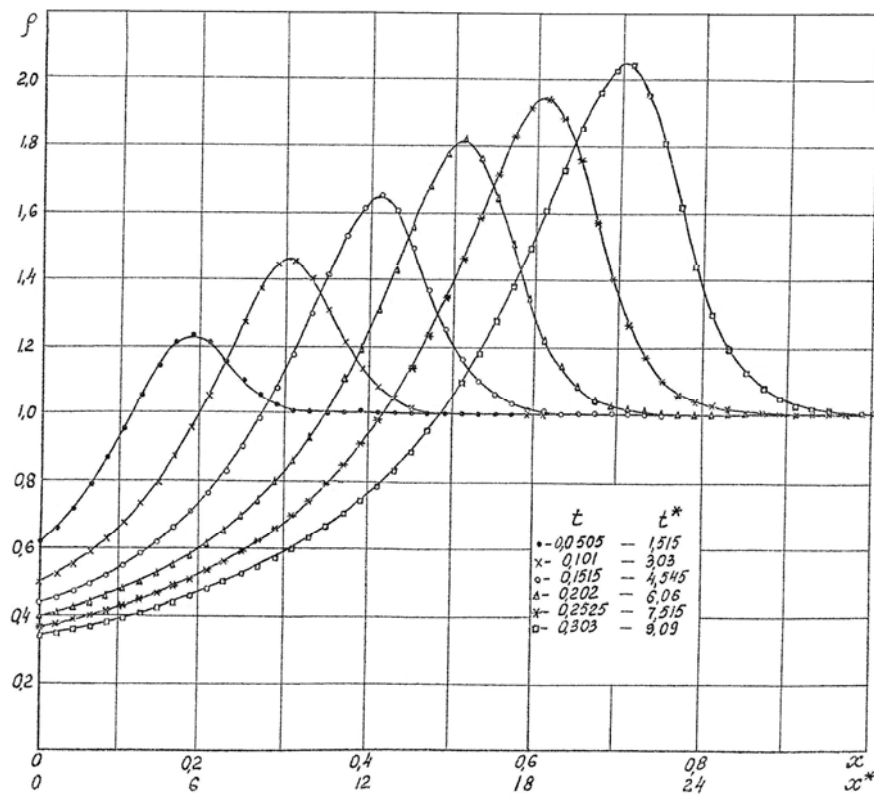


Фиг. 20. Распространение температурной волны

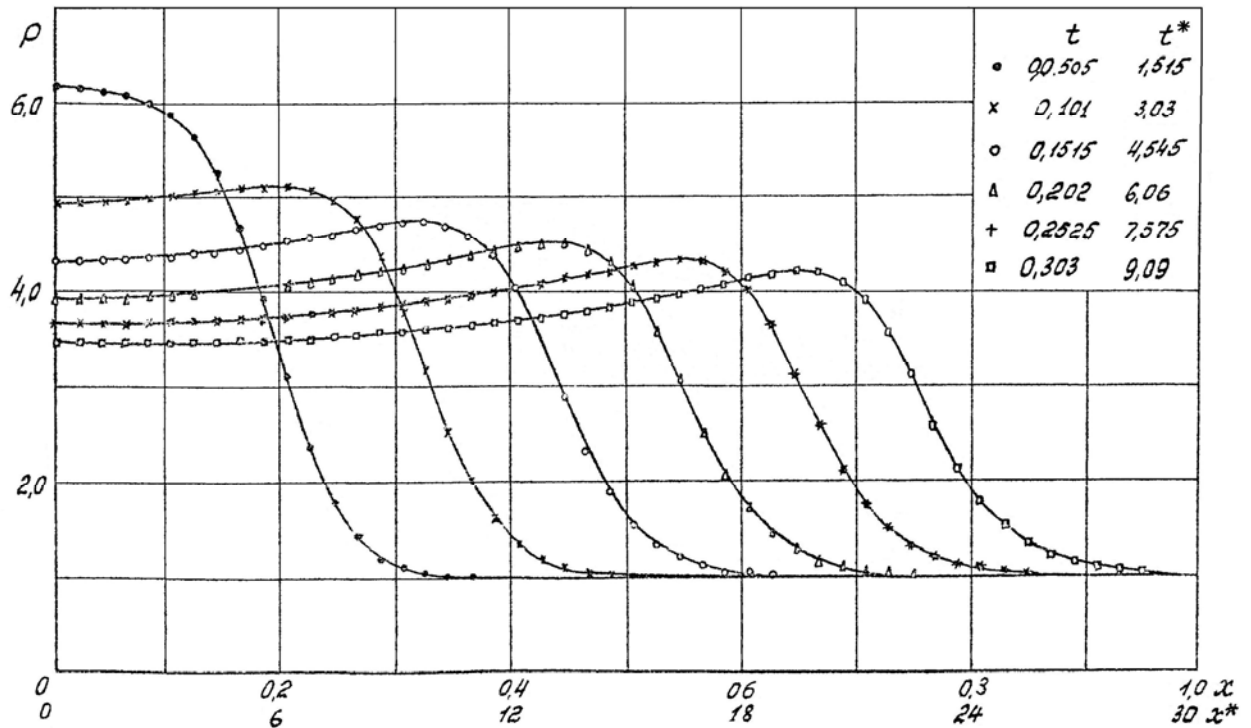
Результаты расчета, показанные на фиг. 20-23, дают представление о характере течения в начальные моменты времени в непосредственной близости от внезапно нагретой стенки и влияние движения среды на процесс переноса тепла. (Безразмерная координата x^* есть местное число Рейнольдса, отнесенное к скорости звука и параметрам невозмущенного газа. Можно дать, как и в § I, определение этой величины через длину свободного пробега в невозмущенном газе. Если $L_s \sim \frac{\mu_1}{\rho_1 \sqrt{\chi R T_{w1}}}$, то $x^* \sim \frac{x}{L_s}$, где L_s - длина пробега в невозмущенном потоке). При $t^* \ll 1$ в окрестности нагретой стенки имеются значительные градиенты температуры и давления, что вызывает рост возмущений скорости и плотности газа.



Фиг. 21. Распространение возмущений скорости



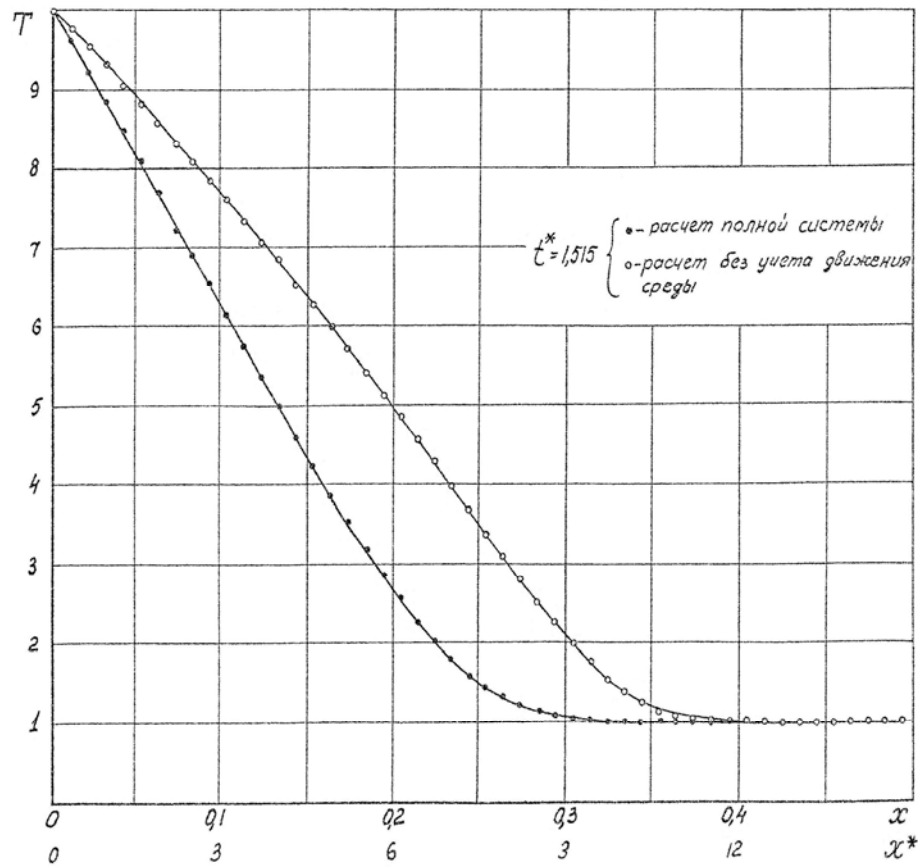
Фиг. 22. Распространение возмущений плотности



Фиг. 23. Распространение волны давления

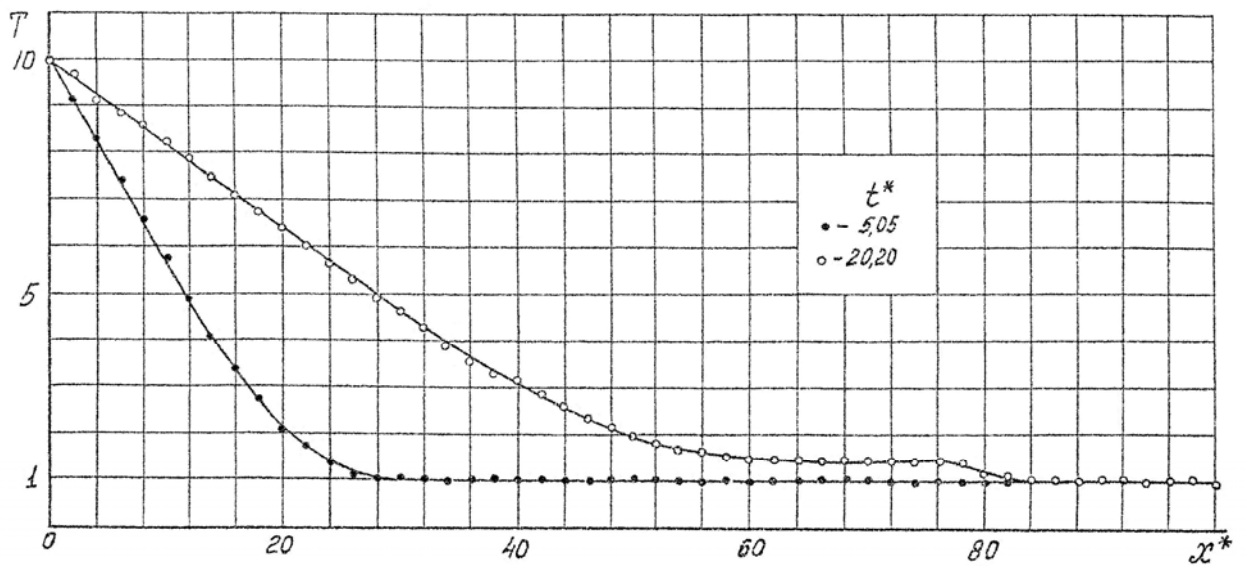
При $t^* \sim 1$ фронт волны давления отходит от стенки, и при $t^* \sim 1,5-3$ давление у стенки выравнивается с образованием области пониженной плотности на расстоянии $x^* \sim 0 \div 6$ от стенки. Профили скорости, плотности и давления (фиг. 21 - 23) иллюстрируют структуру и масштаб области сжатия и разрежения. Ширина переднего фронта волны Δx^* в диапазоне $t^* = 1-10$ равна $\Delta x^* = 5-7$ и в дальнейшем сравнительно мало меняется в диапазоне $t^* = 30-40$, в то время как ширина области разрежения постоянно возрастает при удалении фронта волны от стенки.

Сравнение профиля температурной волны $T(x)$ в движущемся газе и неподвижном при $t^* = 1,515$ приведено на фиг. 24а. Распространение температурных волн без учета движения среды рассматривалось в работах [52, 54]. (Профиль температуры в неподвижном газе (фиг. 24а) получен с помощью



Фиг. 24а. Влияние движения газа на распространение температурной волны

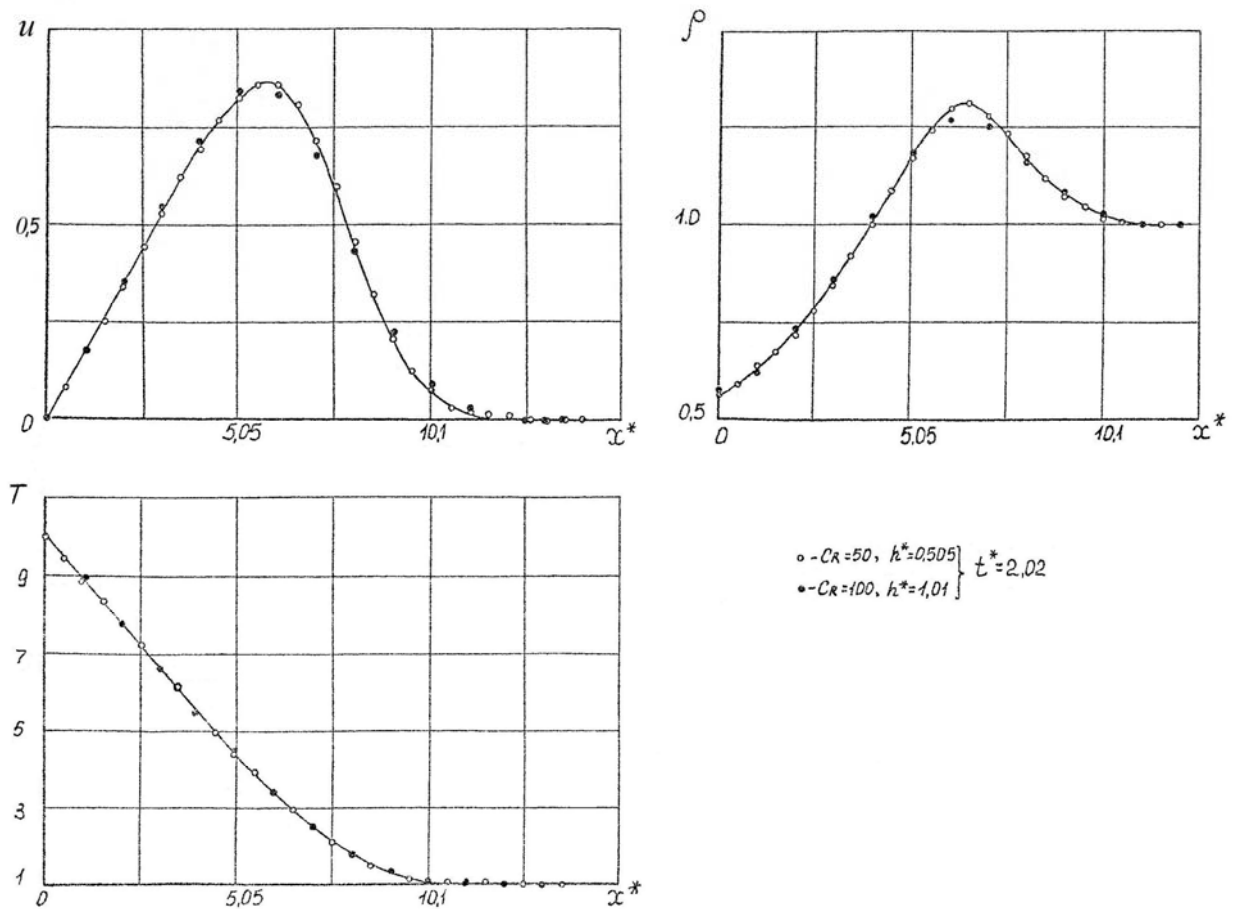
блока основной программы, реализующего счет только уравнения энергии при $\rho = \rho^0 = 1$, $u = 0$ на всем отрезке). Из-за пониженной плотности в области



Фиг. 24б. Профили температурной волны в различные моменты времени

сильных градиентов температуры у стенки профиль температуры в движущемся газе отстает от профиля температуры в неподвижном газе, и тепловой поток на нагретой стенке в движущемся газе выше, чем в неподвижном. Другая особенность профиля температуры в движущемся газе заключается в повышении температуры и образовании характерного "плато" на "хвосте" температурной волны из-за выделения тепла за счет трения и сжатия газа (фиг. 24б). (Этот эффект не заметен из-за значительных градиентов температуры и преимущественного влияния переноса тепла путем теплопроводности на "хвосте" температурной волны при малых t^*).

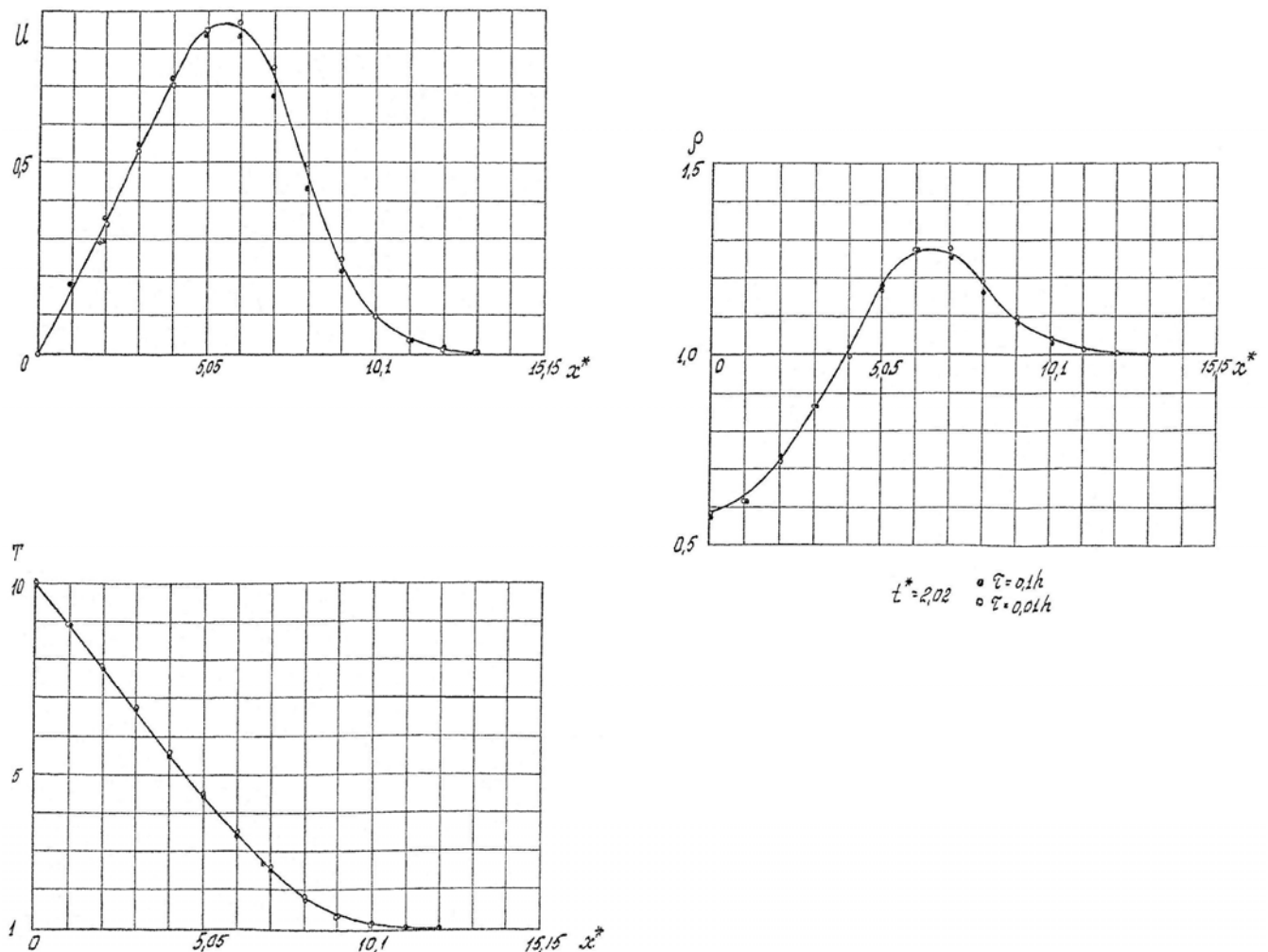
Точность расчетов контролировалась как путем сопоставления результатов расчета с различными шагами по времени τ и координате h , так и путем оценки невязок интегральных балансов (82-84).



Фиг. 25. Сопоставление результатов расчета при удвоении числа узлов сетки

На фиг. 25 показано сравнение профилей скорости, плотности и температуры при $t^* = 2,02$ в случае, когда число точек изменено вдвое. Это достигалось путем изменения в два раза масштабного параметра C_R ($C_R = 50$ и $C_R = 100$).

Сопоставление результатов расчета профилей скорости, плотности и температуры при $t^* = 2,02$ и шаге по времени τ , уменьшенном в 10 раз, дано на фиг. 26. Эти результаты показывают удовлетворительную аппроксимацию решения на сетке при указанных масштабных параметрах. В момент времени $t^* = 10,1$ невязки разностных аналогов интегральных соотношений импульса (82), расхода (83) и энергии (84) по отношению к суммарному импульсу $\sum_{i=1}^N \rho_i u_i$, суммарной массе $\sum_{i=1}^N \rho_i$, суммарной энергии $\sum_{i=1}^N \rho_i e_i$ равны соответственно 0,3%, 0,4%, 0,1%.

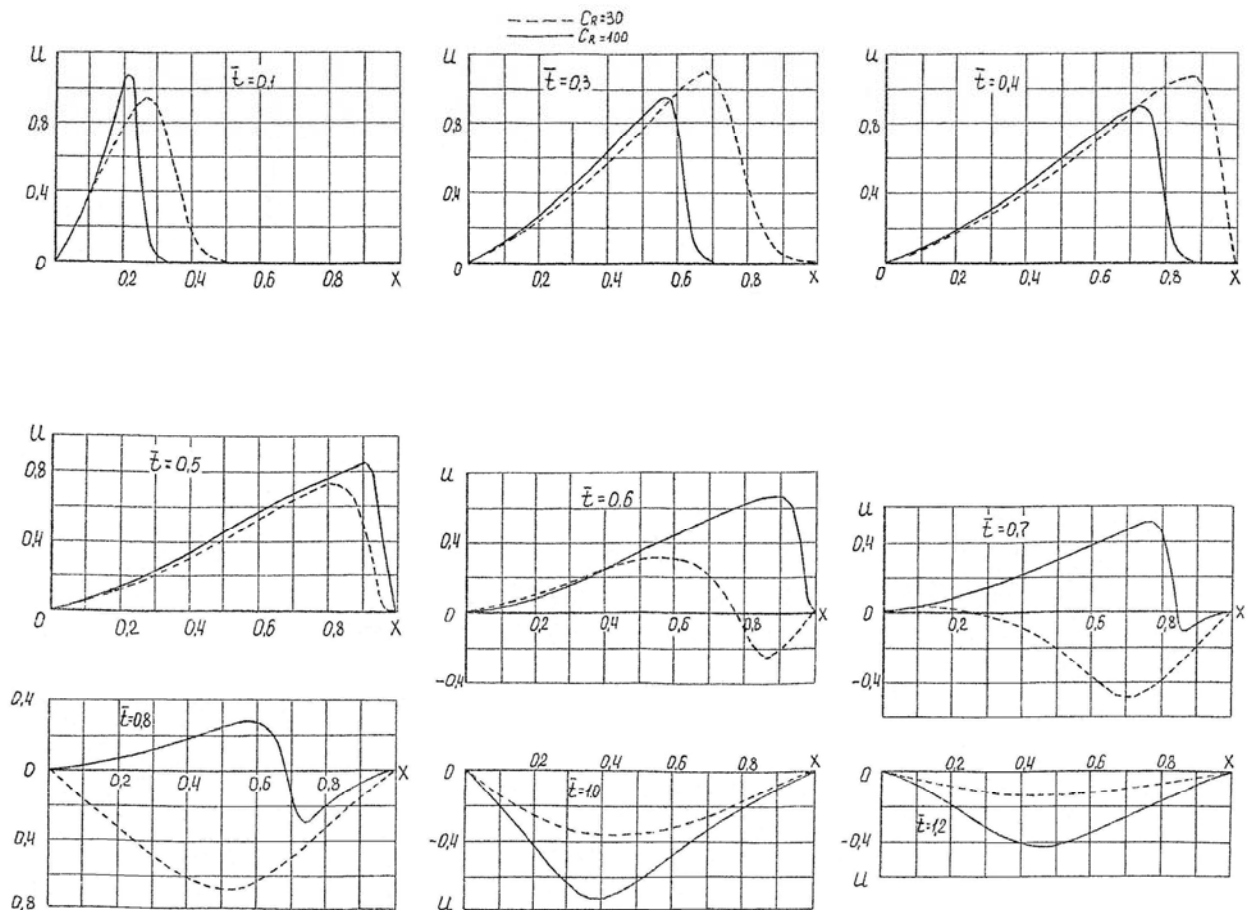


Фиг. 26. Сопоставление результатов расчета с различными шагами по времени

Эти результаты показывают, что на достаточно гладких функциях разностная схема (24-28), не являющаяся дивергентной, тем не менее достаточно хорошо удовлетворяет законам сохранения.

2. Процесс взаимодействия возмущений со стенками показан на фиг. 27-29. В соответствии с рассмотренными выше особенностями процесса развития и распространения возмущений от нагретой стенки существенно, в какой стадии развития (т.е. при каких x^* , t^* фиг. 20 - 23) поток встречает противоположную стенку и характерным является число Рейнольдса,

отнесенное к расстоянию L между стенками $\left(C_R \frac{\sqrt{\chi R T_{w_1} L}}{\mu_1} \rho_1 \right)$, а весь процесс

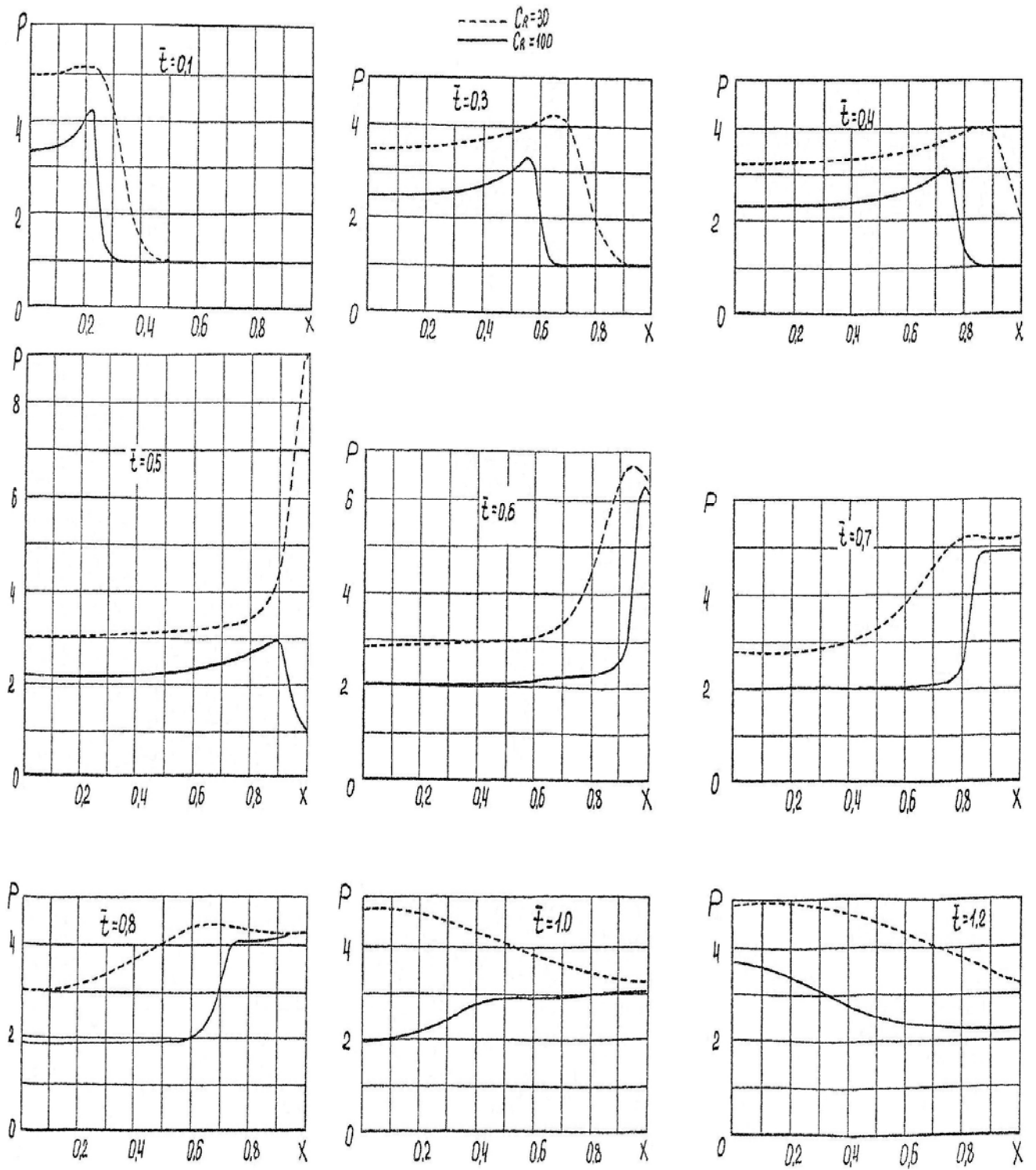


Фиг. 27. Распределение скорости в различные моменты времени

должен теперь рассматриваться в координатах \bar{x}, \bar{t} (фиг. 27-29). При меньших числах Рейнольдса, (чему может соответствовать, например, малое расстояние L между стенками, низкая начальная плотность $\rho_1 = \rho^\circ$, температура $T_{w_1} = T^\circ$ или большая динамическая вязкость μ_1 газа) возмущения раньше достигает противоположной стенки (фиг. 27-29) и при взаимодействии с противоположной стенкой давление на ней выше, чем при больших числах C_R . На фиг. (27 - 29) дано сопоставление результатов расчета при двух значениях $C_R = 30$ и 100.

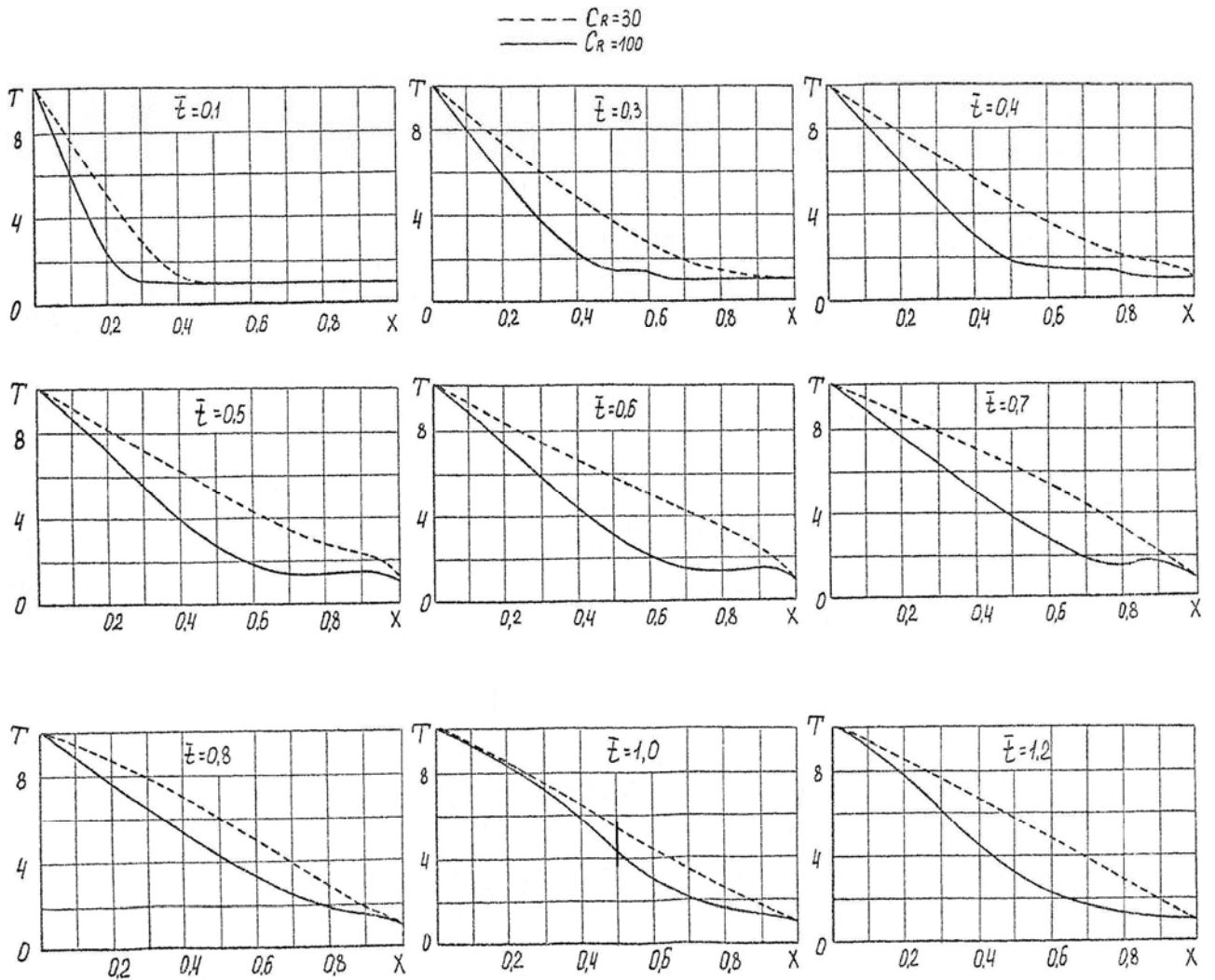
В результате сжатия при столкновении газа с противоположной стенкой (фиг. 28) давление на ней в некоторый момент времени $\bar{t} = 0,5 - 0,6$ становится выше, чем в стационарном состоянии. В дальнейшем при развитии возвратного движения давление на стенке падает, отраженная волна перемещается к нагретой стенке ($\bar{t} = 0,7 - 0,8$) и, отразившись от нее, снова перемещается к холодной стенке ($\bar{t} = 1,2$) и т.д. Процесс изменения давления P_{w_1} на холодной стенке вплоть до достижения стационарного состояния показан на фиг. 30 ($C_R=30$).

Учет движения газа приводит к некоторым новым эффектам теплообмена на противоположной стенке по сравнению со случаем распространения температурной волны без учета движения среды.



Фиг. 28. Распределение давления в различные моменты времени.

$C_R = 30$ - - - - - , $C_R = 100$ —————



Фиг. 29. Распределение температуры в различные моменты времени.

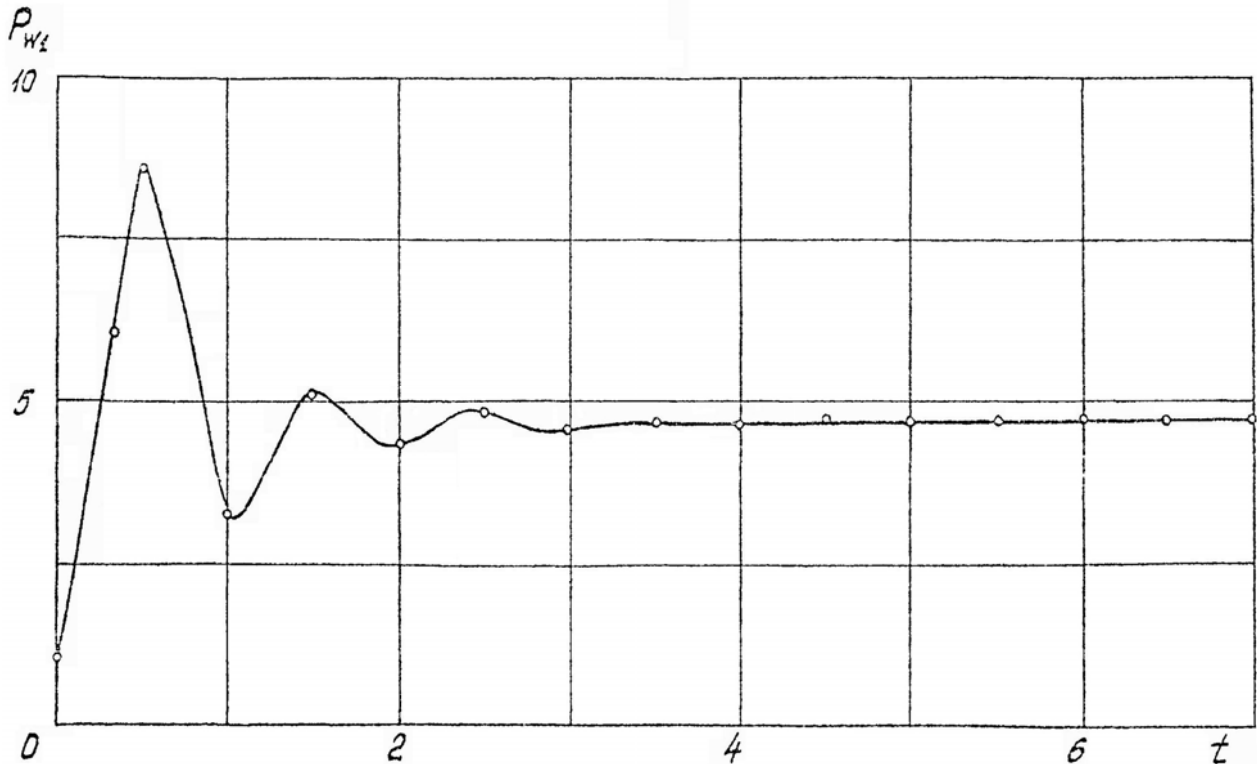
$$C_R = 30 \quad \text{-----}, \quad C_R = 100 \quad \text{—————}$$

В результате некоторого подогрева газа на "хвосте" температурной волны (фиг. 29) и дополнительного сжатия газа при столкновении со стенкой, тепловой поток принимает в некоторый момент времени ($\bar{t} = 0,5 - 0,6$) большее значение, чем в стационарном состоянии.

В дальнейшем при падении давления на стенке и образовании возвратного течения тепловой поток на стенке падает, становится ниже стационарного и выходит на стационарный режим с уменьшением амплитуды колебания по мере затухания колебаний газа между стенками (фиг. 27).

3. Результаты расчета стационарного режима (78) показаны на фиг.31-33. Эти расчеты выполнены с шагом по времени $\tau = h$ (при этом детали

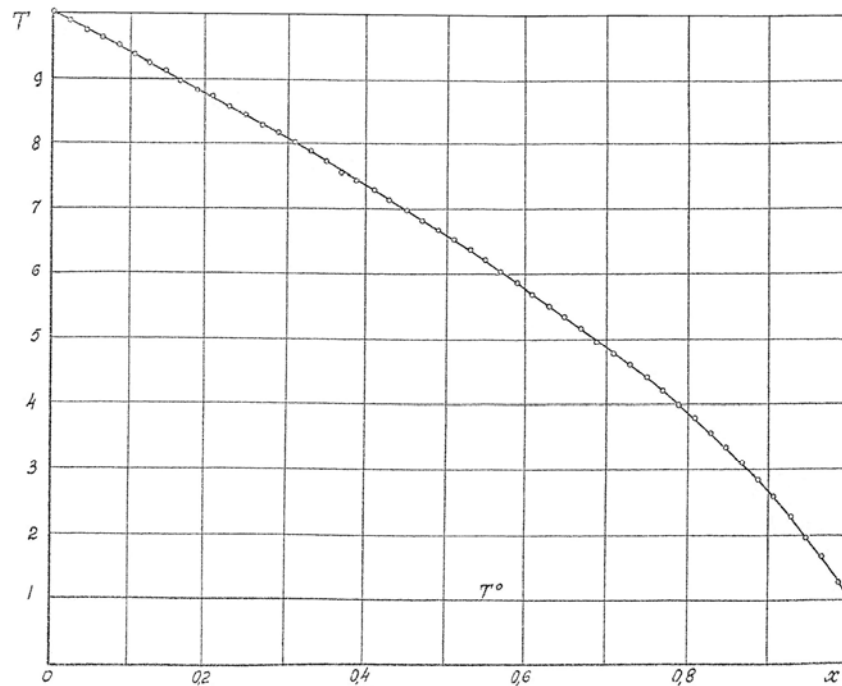
нестационарного течения ухватываются значительно грубее). При $C_R = 30$, $\tau = h = \frac{1}{99}$ установление стационарного состояния с точностью 0,1% по давлению и плотности и 0,01-0,02% по температуре при начальном перепаде температур $\frac{T_{w2}}{T_{w1}} = 10$ достигалось после 650-700 шагов по времени.



Фиг. 30. Установление давления на холодной стенке ($C_R = 30$)

Характер установления давления на холодной стенке показан на фиг. 30. В процессе установления стационарного состояния скорость колебания возле стационарного значения $u = 0$, меняя знак; при $\bar{t} = 6,5-7$ максимальное значение амплитуды скорости составляет $|u_{\max}| = 2 \cdot 10^{-4}$. Заметим, что основное формирование стационарного режима с точностью 1-2% по температуре и давлению наступает значительно раньше, после 300-350 шагов по времени. Некоторый разброс точек на графике $P(x)$ (фиг. 33) в области у холодной стенки вызван большими градиентами плотности (фиг. 31) и ухудшением

аппроксимации решения по пространственной, переменной. В остальной части области постоянство давления сохраняется с точностью 0,1%.



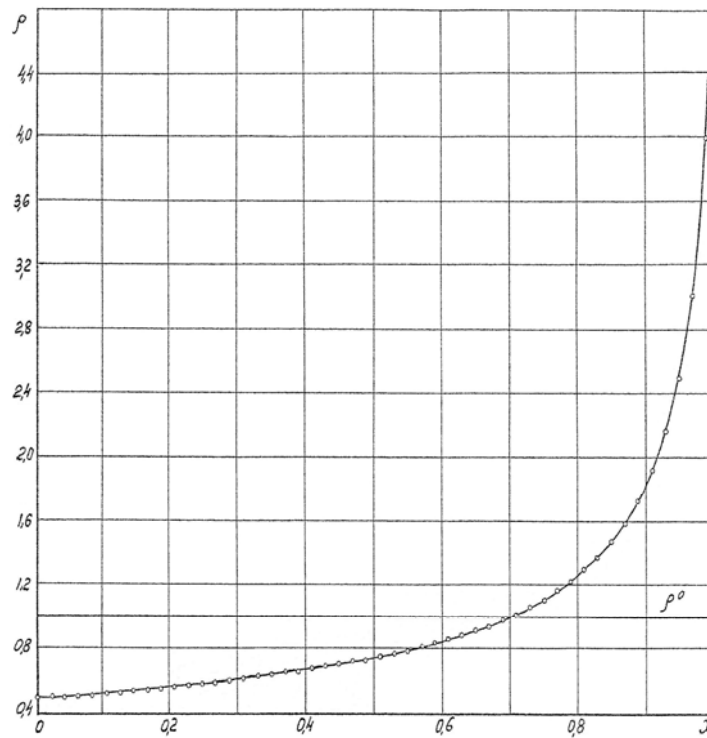
Фиг. 31. Профиль температуры в стационарном состоянии

Качество разностного решения на фиксированной равномерной сетке зависит от значений критериев подобия (77) из которых наиболее существенны

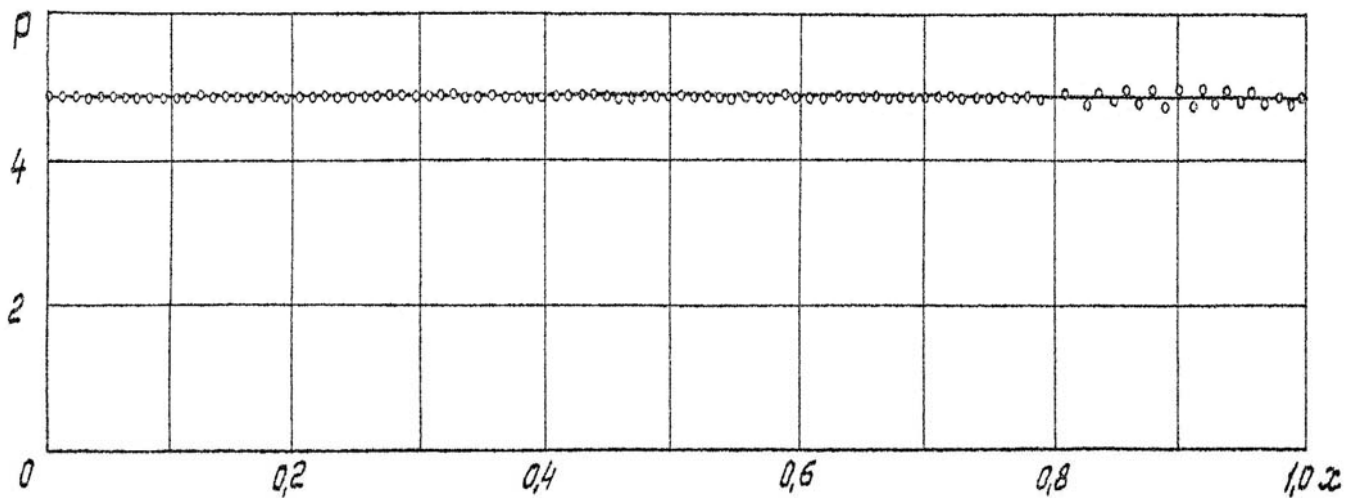
отношение температур $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$, и число Рейнольдса C_R . С увеличением перепада

температур $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$ в поле течения возникают значительные градиенты, область

изменения которых при увеличении числа Рейнольдса сужается (фиг. 27 - 29), и разностное решение становится негладким.



Фиг. 32. Профиль плотности в стационарном состоянии



Фиг. 33. Распределение давления в стационарном состоянии

Применяемая здесь разностная схема с симметричной аппроксимацией дает на негладких функциях биения, поэтому для проведения расчетов в этом случае требуется более мелкая сетка. Для разностного решения в этом смысле характерным является локальное число Рейнольдса, отнесенное к максимальной разности скоростей в соседних узлах сетки и шагу сетки

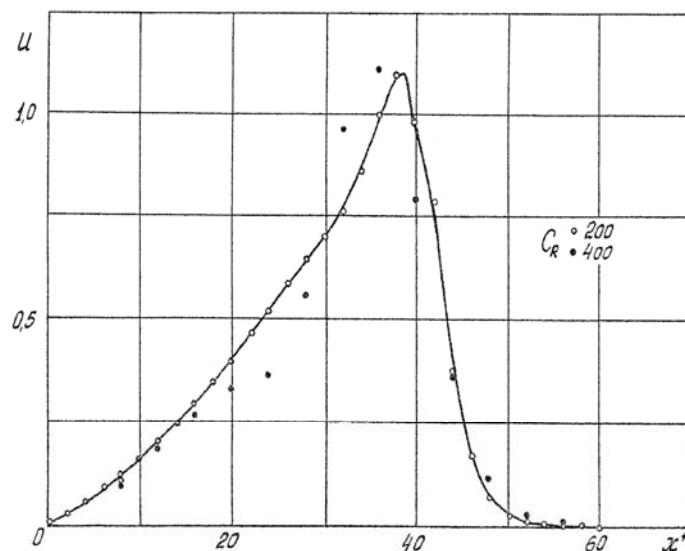
$$C_{R_i}^* = C_R (\Delta u_i)_{\max} \cdot h \quad (85)$$

Здесь $C_R = \frac{V_1 L \rho_1}{\mu_1}$ - число Рейнольдса, отнесенное к масштабу длины L и скорости V_1 (в данном случае $V_1 = \sqrt{\chi R T_{w_1}}$)

$$(\Delta u_i)_{\max} = (u_{i+1} - u_i)_{\max} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$\Delta u_i, h$ - безразмерные величины, отнесенные соответственно к масштабам скорости и длины. В расчетах структуры ударного фронта выполненных в §I (фиг. 6) и рассмотренных выше (фиг. 21, 27), величина C_{R_i} равнялась, как правило 0,2 - 0,3. В дополнительной серии расчетов, проведенных для задачи распространения волн в полубесконечную среду при внезапном подогреве границы в более широком диапазоне чисел $1,1 \leq \frac{T_{w_2}}{T_{w_1}} \leq 3 \cdot 10^2$ и $10 \leq C_R \leq 10^3$ на сетке $N = 100$ монотонность разностного решения сохранялась, как правило, при условии:

$$C_{R_i}^* \leq 1 \quad (86)$$



Фиг. 34 Профиль скорости при $\frac{T_{w_2}}{T_{w_1}} = 10$ и $C_R = 200$ ($C_{R_i} = 1,6$)

Пример расчета профиля скорости при $T_{w_2}/T_{w_1} = 10$ и $C_R = 200$ ($C_{R_i}^* = 0,8$) и $C_R = 400$ ($C_{R_i}^* = 1,6$) показан на фиг. 34.

Помимо задач, рассмотренных в этой главе (§ I, § 2), программа для расчета системы одномерных уравнений использовалась при расчете других задач - о течении и переносе тепла при внезапном нагреве двух границ, течении в окрестности распада начального разрыва [89, 91] и течении в поле силы тяжести. Во всех этих расчетах выполнялось условие устойчивости ($64 - 64^1$), приведенное в главе I.

Выводы к главе II

1. Предложен способ расчета структуры фронта одномерной стационарной ударной волны, основанный на методе, установления с заданием асимптотических значений для равномерного потока перед фронтом и за фронтом волны. Получено численное решение задачи и рассмотрены особенности структуры фронта в совершенном газе с коэффициентами теплопроводности и вязкости, зависящими от температуры по формуле Сатерленда в диапазоне критериев подобия

$$M_1 = 1.1 \div 20; \quad Pr = 0.5 \div 1.0; \quad \chi = 1.33 \div 1.66; \quad \frac{C}{T_1} = 0 \div 10.0$$

Сопоставление с результатами измерений плотности во фронте при низких температурах набегающего потока показывает, что в диапазоне чисел $M_1 = 2.6 \div 6$ и $T_1 = 124^\circ\text{K} \div 37^\circ\text{K}$ структура фронта удовлетворительно описывается решением уравнений Навье-Стокса с введением объемной вязкости $\mu'(T) = \frac{4}{3}\mu(T)$.

2. Дано численное описание нестационарного одномерного течения вязкого газа и распространения тепла в газе, заключенном в замкнутой области между стенками при внезапном подогреве одной из стенок при отношении

температур 10 и числах Рейнольдса 30 и 100. Приведены распределения скорости, плотности, температуры и давления в различные моменты времени и показаны стадии развития и распространения волн, взаимодействия их со стенками вплоть до установления состояния покоя. Показаны особенности распространения тепла в газе при учете движения газа. Показано, что при принятых критериях подобия и шагах разностной сетки численное решение удовлетворяет интегральным законам сохранения. Для одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа, включающих ударные волны и другие сильные возмущения на основании результатов расчетов, проведенных в §§ 1 и 2, получено достаточное условие локальной монотонности разностного решения (с использованием симметричной аппроксимации), связывающее число Рейнольдса по масштабу области и масштабу скорости, локальную разность скоростей и шаг сетки в виде $C_R(\Delta u_i)_{\max} h \leq 1$

ГЛАВА III

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА ПРИ КОНВЕКЦИИ ГАЗА В ЗАМКНУТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

Общие замечания

В этой главе приводятся основные результаты расчета течения и теплообмена при конвекции газа под действием внешней массовой силы в замкнутой прямоугольной области с заданным тепловым режимом границы применительно к полной системе двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса (гл. I § I) с использованием разностной схемы (33-52), приведенной в § 2 гл. I.

Постановка задачи отличается от традиционной постановки задачи о естественной конвекции в несжимаемой жидкости [2, 57], справедливой в случае, когда разность температур на границах области и весовая сжимаемость малы (что соответствует отношению температур $\frac{T_{w_2}}{T_{w_1}} \rightarrow 1$ и $C_{FH} \rightarrow 1$).

Более детально рассмотрены течение и теплообмен в вертикальном слое газа с боковым подогревом ($\theta = 0$). В этом случае равновесие в начальном поле неподвижного газа отсутствует, и в широком диапазоне чисел Грасгофа существует устойчивое стационарное решение, не зависящее от начальных условий.

Результаты проведенных расчетов (§§ 2-5), помимо выяснения физических особенностей течения и передачи тепла при циркуляционном течении в различных режимах по определяющим критериям подобия, иллюстрируют возможности применения предложенного численного метода в широком диапазоне этих критериев.

При обработке результатов расчетов в критериальном виде получена формула для расчета средней теплопередачи через вертикальный слой, которая

в случае, когда весовая и температурная сжимаемость малы, сопоставляется с результатами измерений и расчетов других авторов.

Рассмотрены также случаи, когда внешняя сила направлена произвольно (§ 6). Здесь особо выделяется случай неустойчивого расслоения плотности при подогреве снизу $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, когда равновесие в начальном поле неподвижного газа возможно, но неустойчиво. Полученные здесь результаты имеют менее общий характер, однако, показывают возможности эффективного исследования численным методом и этого типа задач.

§ I. Постановка задачи. Система определяющих критериев подобия.

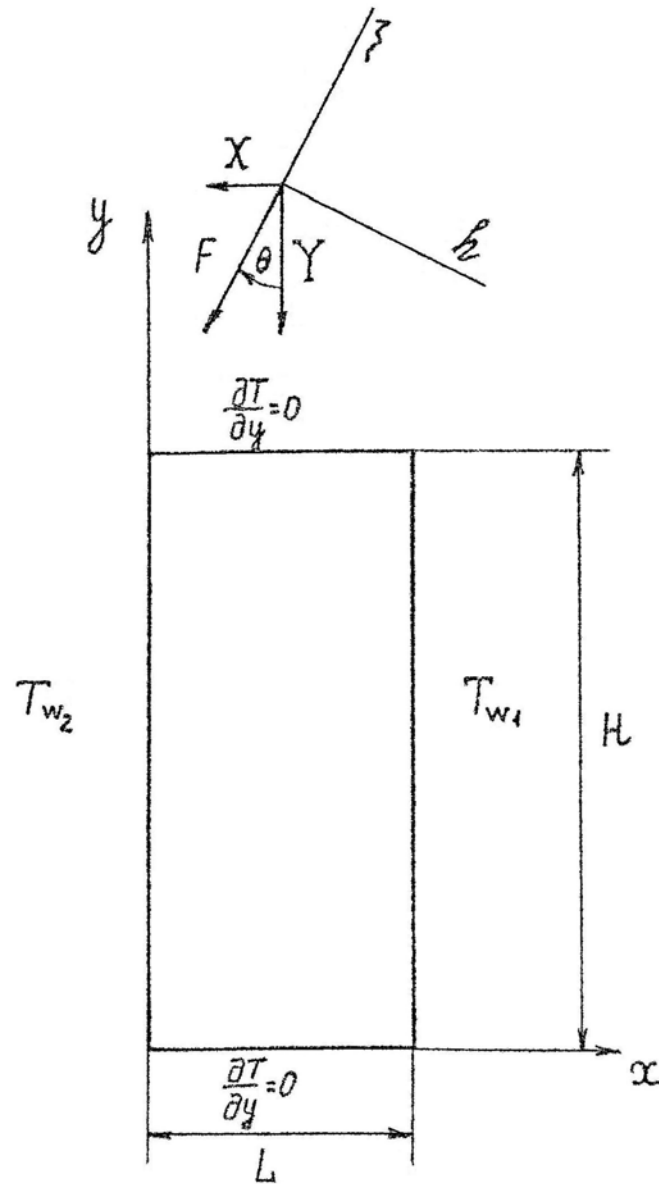
Условия гидростатического равновесия.

Рассматривается течение и теплообмен сжимаемого вязкого теплопроводного газа, заключенного в замкнутой прямоугольной области (фиг.35) с заданным тепловым режимом границы и находящегося в поле внешней массовой силы F .

В дальнейшем будем предполагать, что направление и величина внешней силы F не зависит от координат x , y и времени t , а тепловой режим границы следующий: верхнее и нижнее основания области теплоизолированы, правая граница поддерживается при постоянной по длине и времени температуре T_{w_1} , левая граница - при T_{w_2} ($T_{w_2} > T_{w_1}$). Газ предполагается совершенным, удельные теплоемкости и число Прандтля постоянны, коэффициенты теплопроводности и вязкости зависят от температуры по формуле Сатерленда (72).

Для численного решения задачи определим систему критериев подобия и установим соответствие их масштабным комплексам (16) для полной системы уравнений Навье-Стокса. Масштаб скорости V_1 не задан условиями задачи и всюду в дальнейшем принимается равным скорости звука на холодной стенке

$$V_1 = \sqrt{\chi R T_{w_1}}$$



Фиг. 35. Общая схема расчета

За масштаб температуры примем температуру на холодной стенке: $T_1 = T_{w_1}$ и, таким образом, коэффициенты теплопроводности и вязкости будут отнесены к своим масштабам на холодной стенке $k_1 = k_{w_1}$, $\mu_1 = \mu_{w_1}$. За масштаб плотности принимается плотность на нагретой стенке $\rho_1 = \rho_{w_2}$. Масштабом длины будет ширина прямоугольной области L .

Тогда в системе масштабных комплексов (16) имеем

$$C_M = 1.0, \quad C_R = \frac{\sqrt{\chi R T_{w_1}} L \rho_{w_2}}{\mu_{w_1}}, \quad C_{F_x} = \frac{XL}{\chi R T_{w_1}}, \quad C_{F_y} = \frac{YL}{\chi R T_{w_1}} \quad (87)$$

(нетрудно видеть, что комплексы аналогичного вида также получаются, если положить в системе (16) $V_1 = \sqrt{gL}$ или $V_1 = \frac{\mu_1}{\rho_1} L$; способ введения масштаба скорости, принятый здесь, оказывается удобным для проведения вычислений по схеме (33-52). Комплексы C_{F_x} и C_{F_y} можно записать также иначе, если ввести модуль внешней силы $|F| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ и угол наклона направления действия силы к вертикали θ (фиг. 35),

$$C_{F_x} = C_F \sin \theta, \quad C_{F_y} = C_F \cos \theta \quad (88)$$

где $C_F = \frac{|F|L}{\chi RT_1}$.

В дальнейшем для определенности будем считать, что внешняя сила есть сила тяжести: $|F| = g$; положительное направление отсчета угла θ указано на фиг.35.

Так как характерная скорость не задана условиями задачи, то и число Рейнольдса не является определяющим. Его можно будет исключить, перейдя к критерию Галилея:

$$G_a = C_R^2 C_F$$

Для данного теплового режима (фиг. 35) более удобным является критерий Грасгофа, включающий безразмерную разность температур

$$Gr_L = C_R^2 C_F \frac{T_{w_2} - T_{w_1}}{T_{w_1}}$$

Полная система безразмерных критериев подобия, определяющая течение и теплопередачу газа в замкнутой прямоугольной области под действием внешней силы при сформулированных выше предположениях имеет вид

$$Gr_L, \quad \frac{H}{L}, \quad Pr, \quad \chi, \quad \frac{C}{T_{w_1}}, \quad C_{F_x}, \quad C_{F_y} \quad (89)$$

Здесь число Грасгофа Gr_L определяет отношение подъемных сил и сил инерции к силам вязкости, т.е. интенсивность конвекции. Отношение сторон

$\frac{H}{L}$ учитывает влияние геометрии прямоугольной области, числа $\chi, Pr, \frac{C}{T_{w_1}}$

учитывают влияние физических свойств газа; отношение температур $\frac{T_{w_2}}{T_{w_1}}$

учитывает влияние температурной сжимаемости, а критерии внешних сил C_{F_x} ,

C_{F_y} учитывают ориентацию внешней силы относительно замкнутой области и

влияние весовой сжимаемости (88). Критерием весовой сжимаемости является

комплекс $C_F = \frac{|F|L}{\chi L T_{w_1}} = \frac{gL}{\chi R T_{w_1}}$. Для вертикальных слоев при $\frac{H}{L} \geq 1$

характерным является комплекс $C_{FH} = \frac{gH}{\chi R T_{w_1}}$, равный произведению $C_F = \frac{H}{L}$.

Нетрудно показать, исходя и непосредственно из теории размерностей, что система критериев подобия (89) полна. Дальнейшее численное исследование поставленной задачи будет осуществляться в этой системе критериев.

Расчет теплопередачи

Местные потоки тепла на нагретой (q_{w_2}) и холодной (q_{w_1}) стенках рассчитываются по формуле

$$q_w(y) = k_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \quad (90)$$

Первая производная здесь записывается по трехточечной формуле второго порядка.

Средний поток тепла на нагретой (\bar{q}_{w_2}) и холодной (\bar{q}_{w_1}) стенках вычисляются по формуле:

$$\bar{q}_w = \frac{1}{H/L} \int_0^{n/L} q_w(y) dy \quad (91)$$

Последний интеграл вычисляется по формуле трапеций

$$\bar{q}_w = \frac{\ell}{H/L} \left(\frac{q_w(1) + q_w(N)}{2} + \sum_{j=2}^{N-1} q_w(j) \right) = \frac{\frac{q_w(1) + q_w(N)}{2} + \sum_{j=2}^{N-1} q_w(j)}{N-1} \quad (92)$$

На установившемся режиме средние потоки тепла на нагретой и холодной стенках равны:

$$\bar{q}_{w_1} = \bar{q}_{w_2}, \quad (93)$$

и невязка $\delta \bar{q}_{w_2} = \frac{\bar{q}_{w_2} - \bar{q}_{w_1}}{\bar{q}_{w_2}}$ служит дополнительной интегральной проверкой

качества разностного решения. Эта невязка учитывает потери в потоке тепла, поступающем от нагретой стенки к холодной в результате погрешностей вычисления. Кроме того, на стационарном режиме осуществляется контроль балансов расхода через горизонтальные и вертикальные сечения слоя:

$$\int_0^{H/L} \rho u \, dy = 0, \quad \int_0^1 \rho v \, dx = 0 \quad (94)$$

Результаты интегральных проверок разностного решения приводятся ниже в §2.

Среднее число Нуссельта рассчитывается по формуле

$$\bar{Nu}_{wL} = \frac{\bar{q}_w L}{k_w (T_{w_2} - T_{w_1})} \quad (95)$$

В расчетах, результаты которых излагаются ниже, как правило, употребляется значение $\bar{Nu}_{w,L}$, где коэффициент теплопроводности отнесен к холодной стенке. В принятом здесь безразмерном виде число Нуссельта рассчитывается по формуле:

$$\bar{Nu}_{wL} \approx \frac{\bar{q}_w}{T_{w_2}/T_{w_1} - 1}$$

Отметим, что $\bar{Nu}_{wL} \rightarrow 1$ при $Gr_L \rightarrow 0$ только в том случае, если $k_w = const$.

Нетрудно видеть, что

$$\overline{Nu}_{wL} = \frac{k_{\text{экв}}}{k} = \varepsilon$$

где

$k_{\text{экв}}$ - эквивалентный коэффициент теплопередачи через слой, определяемый в виде

$$\bar{q}_w = \frac{k_{\text{экв}}}{D} (T_{w_2} - T_{w_1})$$

Целью дальнейших расчетов теплопередачи является установление зависимости \overline{Nu}_{wL} от критериев подобия (89).

Аппроксимация граничных условий

Система граничных условий записывается в виде (фиг. 35)

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{H}{L} \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad T = \frac{T_{w_2}}{T_{w_1}} \\ x = 1,0 \quad 0 \leq y \leq \frac{H}{L} \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad T = 1,0 \\ y = 0, \quad 0 < x < 1,0 \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \\ y = \frac{H}{L}, \quad 0 < x < 1,0 \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=\frac{H}{L}} = 0 \end{aligned} \quad (96)$$

Плотность газа на границе не задана условиями задачи и вычисляется из уравнения неразрывности (12) с учётом граничных условий (96) для составляющих скорости на границе. Например, для левой границы $\left(x = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{H}{L} \right)$ из (12) и (96) следует:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (97)$$

Последнее соотношение аппроксимируется по формуле первого порядка:

$$\frac{\rho_{1,j}^{n+1/2} - \rho_{1,j}^n}{\tau/2} = -\rho_{1,j}^n \frac{u_{2,j}^{n+1/2}}{h} \quad \text{или} \quad \rho_{1,j}^{n+1/2} = \rho_{1,j}^n \left(1 - \frac{u_{2,j}^{n+1/2} \tau}{2h} \right) \quad (98)$$

и включается в систему горизонтальных прогонок для уравнения неразрывности (35). Аналогично аппроксимируются соотношения для вычисления плотности на правой границе, верхнем и нижнем основаниях. Условие равенства нулю потока тепла на верхнем и нижнем основаниях (96) аппроксимируются по трехточечной формуле второго порядка, например, при $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\frac{3T_{i,1} - 4T_{i,2} + T_{i,3}}{2\ell} = 0, \quad (99)$$

что оказывается существенным для исключения утечек тепла через контур. Коэффициенты прогонок $A_{i,1}$, $B_{i,1}$ в рекуррентных соотношениях (30) в этом случае имеют вид

$$A_{i,1} = \frac{a_{i,1}^*}{b_{i,1}^*}, \quad B_{i,1} = \frac{f_{i,1}^*}{b_{i,1}^*}$$

где

$$a_{i,1}^* = a_{i,1} + \frac{1}{3}c_{i,1}, \quad b_{i,1}^* = b_{i,1} + \frac{4}{3}c_{i,1}, \quad f_{i,1}^* = f_{i,1}$$

Условия гидростатического равновесия

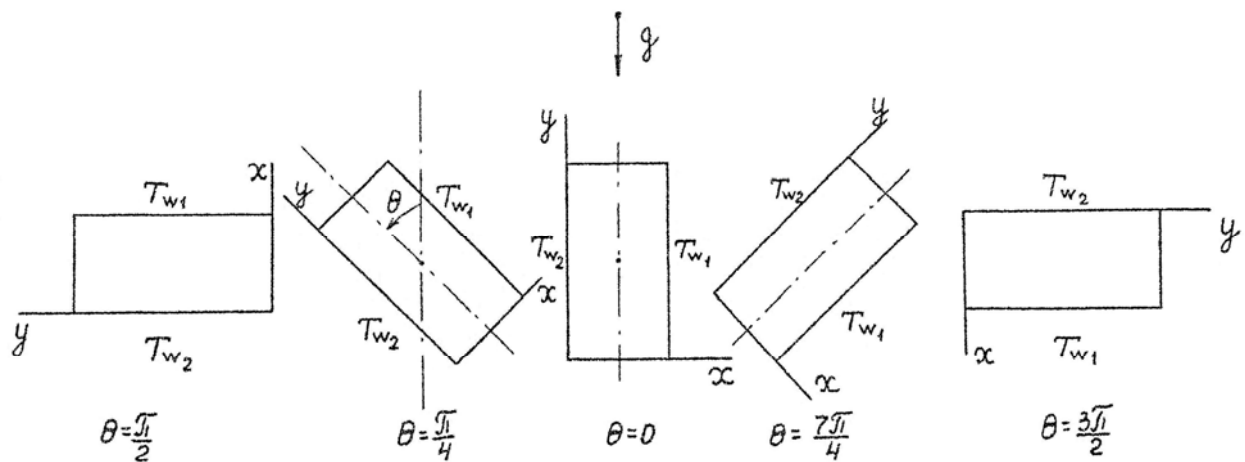
Введем ортогональную систему координат ξ, η , связанную с направлением внешней силы F (фиг. 35) и рассмотрим условия равновесия в начальном поле неподвижного газа с заданным стационарным тепловым режимом (фиг. 35) при различной ориентации внешней силы F . Эти условия в системе координат ξ, η имеют вид [2]:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\chi \rho C_F \quad (100)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (101)$$

$$p = \rho T \quad (102)$$

При фиксированном тепловом режиме границы $T_f(\xi, \eta)$ эти условия будут выполняться только в том случае, когда давление, плотность и температура газа зависят от одной координаты ξ . Действительно, из (101) следует, что $p = p(\xi)$, из (100), тогда $\rho = \rho(\xi)$ и из (102) $T = T(\xi)$.



Фиг. 36

Так как при рассматриваемом поле температур изотермы в координатах y, x - прямые вертикальные линии, то указанные условия будут выполнены лишь в случае, когда внешняя сила F направлена горизонтально ($\xi = \pm x$, $\eta = \pm y$), т.е.

при $\theta = \frac{\pi}{2}$ или $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (отметим, что поворот внешней силы относительно

замкнутой области аналогичен повороту области относительно силы с фиксированным направлением (фиг. 36)). При $\theta = \frac{\pi}{2}$ равновесие может быть

неустойчиво, т.к. холодный газ находится выше нагретого. При $\theta = \frac{3\pi}{2}$ картина

противоположна, и равновесие абсолютно устойчиво. В остальных случаях гидростатическое равновесие в начальном поле неподвижного газа невозможно, и должно начаться движение газа, приводящее к установлению

гидродинамического равновесия.

Разработанная в гл. I программа для численного решения уравнений Навье-Стокса в замкнутой прямоугольной области позволяет осуществить численное моделирование течения и теплопередачи во всех рассмотренных выше случаях в диапазоне определяющих критериев подобия (89). Отметим, что введенные в начале параграфа предположения о тепловом режиме границы, теплофизических свойств среды и независимости внешней силы F от координат и времени для рассматриваемого численного метода и программы (гл. I) не существенны.

Сделаем некоторые замечания относительно выбора начального поля. Процесс установления гидродинамического и теплового равновесия из произвольного начального поля $p^\circ, \rho^\circ, T^\circ$ неподвижного газа состоит из довольно сложной последовательности процессов распространения температурных и гравитационных волн, взаимодействия их друг с другом и со стенками. Некоторые из этих процессов в одномерной постановке рассмотрены выше (§ 2 гл. II, фиг. 27-29). Для более быстрого выхода на стационарный режим (если он существует) желательно исключить из рассмотрения часть из этих процессов путем выбора начального поля, в котором имеется частичное равновесие. Приведем два типичных примера для рассматриваемой задачи.

1. Начальное поле - неподвижный газ в тепловом и гидростатическом равновесии при отсутствии силы тяжести.

$$u^\circ = 0, \quad v^\circ = 0, \quad p^\circ = \text{const}, \quad \rho^\circ = \frac{p^\circ}{T^\circ} \quad (103)$$

Здесь T° - решение уравнения теплопроводности с граничными условиями (96). Движение начинается из состояния равновесия при внезапно приложенной силе тяжести. Такой способ оказывается эффективным и систематически применялся в случае, когда отсутствовала какая-либо дополнительная информация о свойствах искомого стационарного решения. Дальнейшие расчеты стационарных задач осуществлялись, как правило, последовательными

стационарными состояниями по критериям подобия (89).

2. Начальное поле неподвижного газа при наличии силы тяжести имеет равновесие в направлении действия силы

$$u^\circ = 0, \quad v^\circ = 0, \quad \frac{\partial p^\circ}{\partial \xi} = -\chi \rho C_F, \quad \rho^\circ = \frac{p^\circ}{T^\circ} \quad (104)$$

Здесь T° , как и ранее - решение уравнения теплопроводности с граничными условиями (96). Движение вызывается перепадом давления в направлении η , перпендикулярном направлению силы. В случае, когда направление силы горизонтально $\left(\theta = 0, \frac{3\pi}{2}\right)$ условия (104) соответствуют гидростатическому равновесию, и для возбуждения движения (при неустойчивом равновесии) требуется внести дополнительное возмущение. Эти случаи рассматриваются в §6.

Нами более подробно изучены течение и теплообмен в вертикальном слое газа в случае, когда внешняя сила направлена вниз (§§ 2, 3, 4, 5, 6).

§ 2. Расчет течения и теплообмена в вертикальном слое газа с боковым подогревом. Получение стационарного решения. Влияние параметров сетки на решение

При вертикальном направлении внешней силы в системе критериев (89)

$C_{F_x} = 0$, $C_{F_y} = C_F = \frac{gL}{\chi R T_{w_1}}$. Мы будем в дальнейшем использовать вместо

этого критерия несколько иной: $C_{F_H} = C_{F_y} \frac{H}{L}$. В этом случае в критерии учитывается еще влияние высоты H на изменение плотности. Численное исследование осуществляется, таким образом, в системе критериев

$$Gr_L, \quad \frac{H}{L}, \quad Pr, \quad \chi, \quad \frac{C}{T_{w_1}}, \quad \frac{T_{w_2}}{T_{w_1}}, \quad C_{F_H} \quad (105)$$

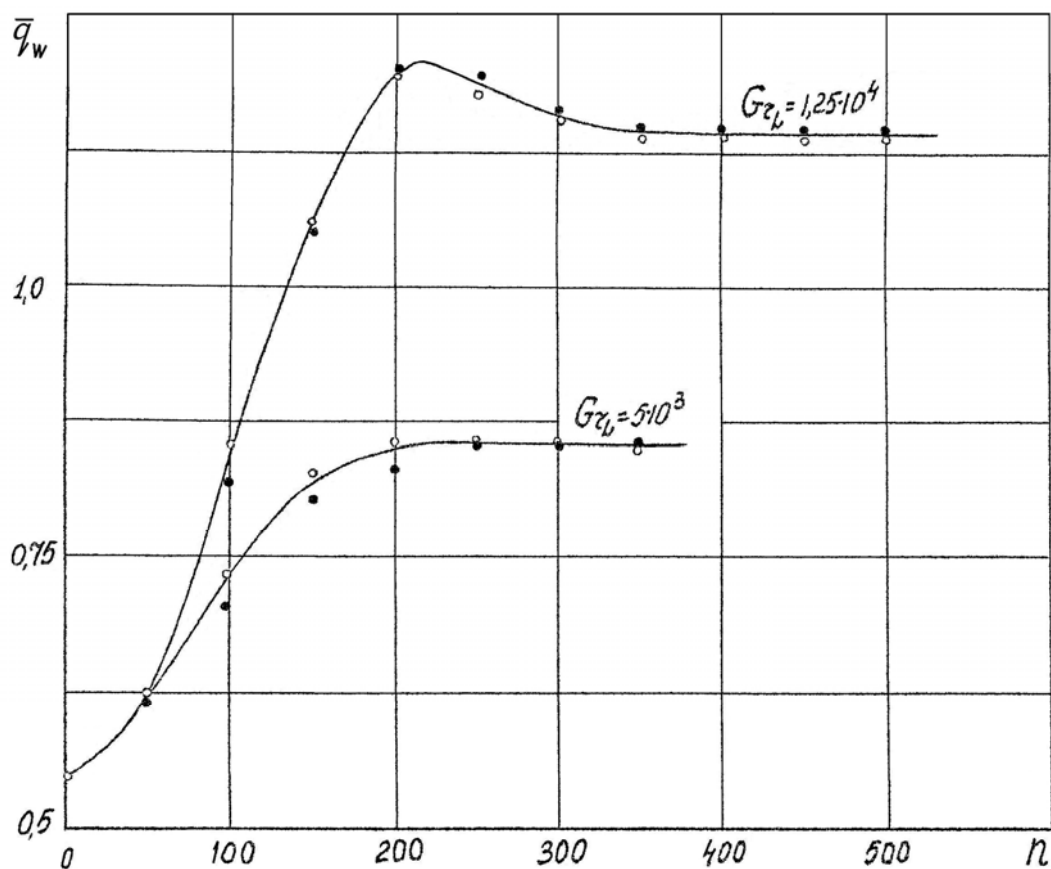
В этом параграфе будут рассмотрены вопросы, относящиеся к численной

реализации задачи и влияние параметров сетки на решение.

Результаты расчета одного из вариантов этой задачи из состояния равновесия (103) при внезапном приложении внешней силы, соотношениях шагов сетки $\tau = h = \ell = 0.1$ и значениях критериев подобия (105), равных

$$Gr_L = 1,25 \cdot 10^4, \frac{H}{L} = 1,0, Pr = 0,71, \chi = 1,405, \frac{C}{T_{w1}} = 0,37, \frac{T_{w2}}{T_{w1}} = 1,5, C_{FH} = 0,05, \quad (106)$$

иллюстрируются на фиг. 37, 38, 42-47.



Фиг. 37. Установление среднего стационарного потока тепла на стенке

На фиг. 37 показан процесс установления среднего потока тепла по времени $t = n\tau$ на холодной и нагретой стенках (о - холодная, • - нагретая стенка) при числах $Gr_L = 5 \cdot 10^3$ и $1,25 \cdot 10^4$ и остальных критериях, соответствующих (106). Интересно отметить, что при внезапном возмущении системы (при $Gr_L = 1,25 \cdot 10^4$) средний поток тепла на стенке в некоторый момент времени

несколько превышает свое значение в стационарном течении. Проверка точности расчета нестационарного процесса (фиг. 37) с шагом τ уменьшенным вдвое, дает согласование в пределах 0,5%. В приводимой ниже таблице 1 дается сопоставление результатов расчета местных потоков тепла $q_w(y)$ на нагретой стенке на стационарном режиме при $\tau = 0,1$ и $\tau = 0,05$ для варианта, определяемого критериями (105).

Таблица № 1

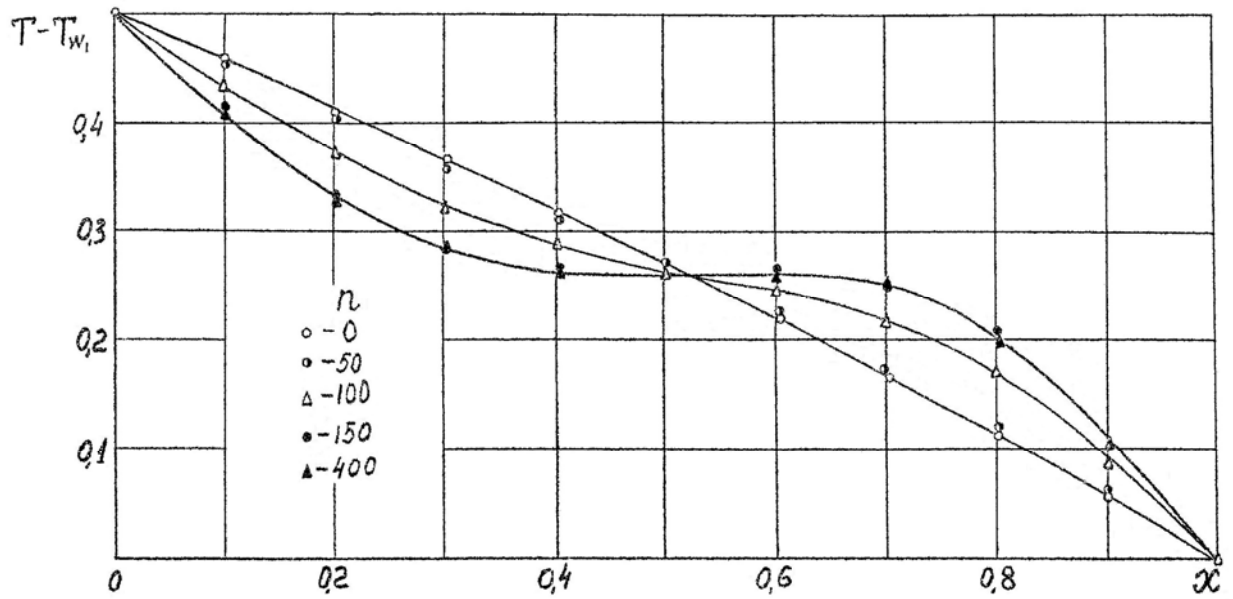
| τ/y | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|---------|---------|
| 0,1 | 1,7180 | 1,6937 | 1,6030 | 1,4503 | 1,2440 | 1,0102 | 0,707086 | 0,57288 | 0,44357 |
| 0,05 | 1,7184 | 1,6939 | 1,6032 | 1,4504 | 1,2439 | 1,0102 | 0,70706 | 0,57277 | 0,44323 |

В таблице № 2 приведено сопоставление результатов расчета на стационарном режиме для этого варианта профилей вертикальной составляющей скорости $V(x)$ и температуры $T(x)$ в сечении $y = 0,5$ при $\tau = 0,1$ и $\tau = 0,05$.

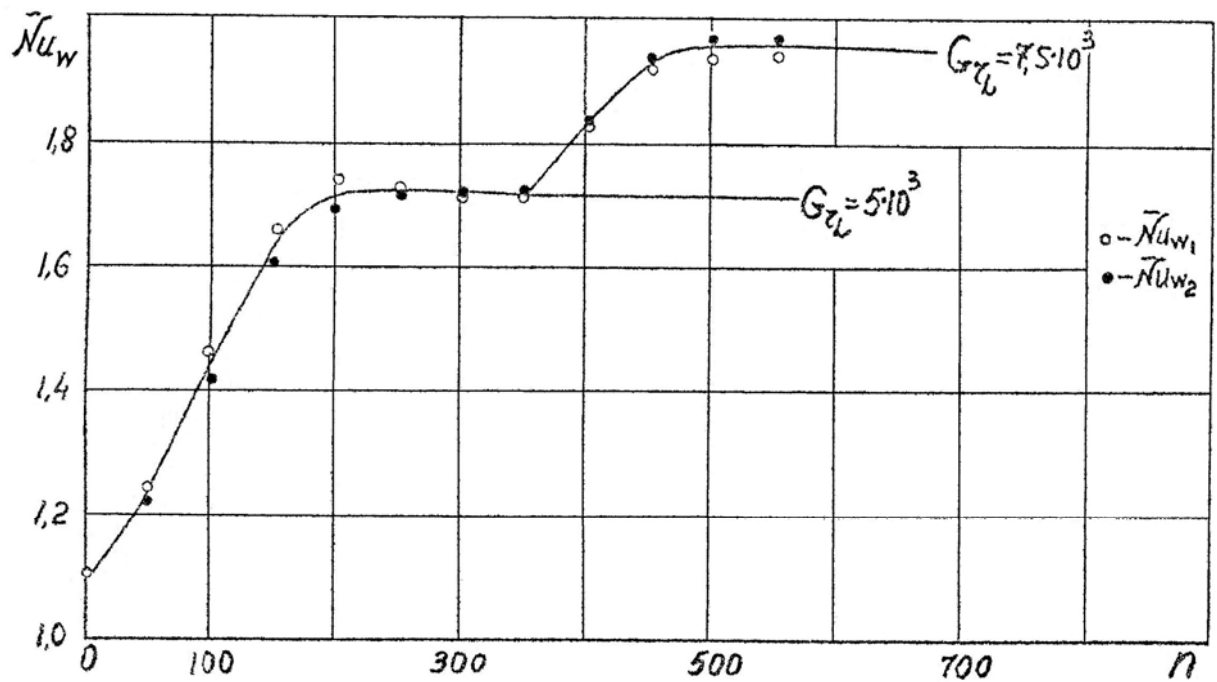
Таблица № 2

| τ/x | | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|--------------|------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|-----------|----------|
| $V \cdot 10$ | 0,1 | 0,21342 | 0,26557 | 0,15698 | 0,08472 | 0,022499 | -0,05518 | -0,10604 | -0,266399 | -0,22889 |
| | 0,05 | 0,21343 | 0,26553 | 0,15697 | 0,08469 | 0,022497 | -0,05516 | -0,10602 | -0,26636 | -0,22890 |
| T | 0,1 | 1,41247 | 1,33474 | 1,28728 | 1,2648 | 1,25710 | 1,25320 | 1,23765 | 1,19994 | 1,11146 |
| | 0,05 | 1,41246 | 1,33470 | 1,2873 | 1,2648 | 1,257107 | 1,25321 | 1,23766 | 1,19996 | 1,11146 |

Эти результаты показывают, что решение на стационарном режиме практически не зависит от величины шага по времени τ .



Фиг. 38 Установление стационарного профиля температуры в центральном сечении слоя



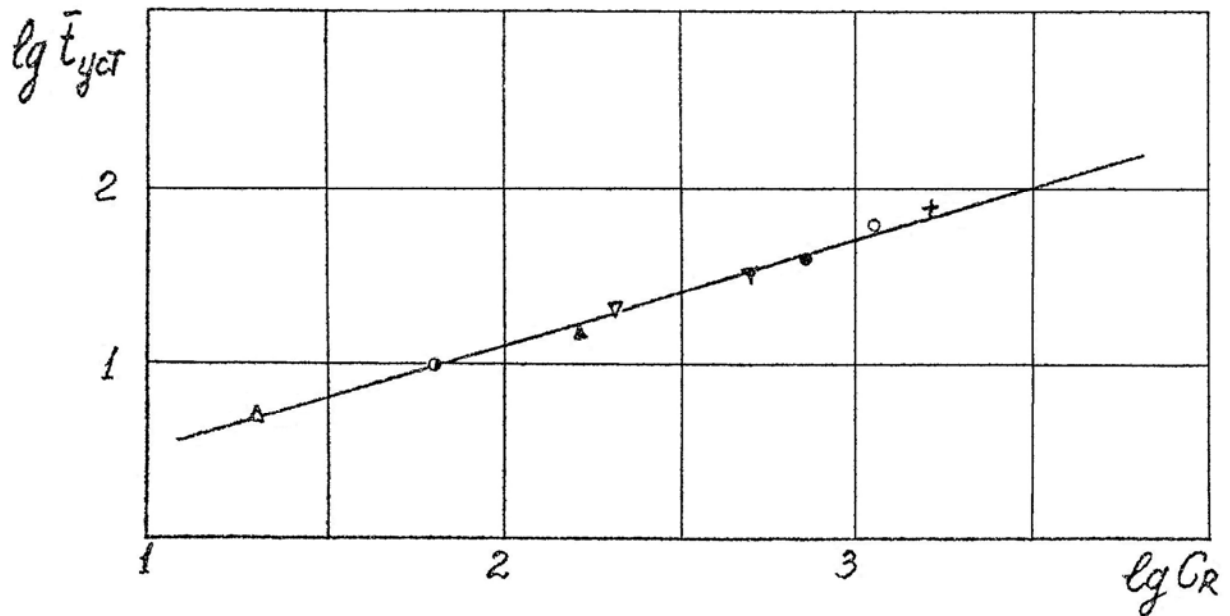
Фиг. 39. Расчет последовательных стационарных состояний

Профили температуры в центральном сечении слоя (фиг. 38) иллюстрируют последовательный переход по времени от режима теплопроводности к промежуточному режиму и формирование пограничного слоя у стенок. Эти же

режимы, как будет видно из дальнейшего (§ 3), характерны и для стационарного состояния при различных числах Грасгофа, поэтому при увеличении числа Грасгофа целесообразно вести счет последовательно от одного стационарного состояния к другому, используя уже полученные поля u, v, ρ, T в качестве начальных данных. Пример такого расчета показан на фиг.39 для двух последовательных стационарных состояний $Gr_L = 5 \cdot 10^3$ и $Gr_L = 7,5 \cdot 10^3$. Переход к последовательным стационарным состояниям оказывается эффективным и систематически использовался в расчетах по всем критериям подобия (105). Это дает возможность существенно сократить время счета по сравнению с расчетом из состояния неподвижного газа (фиг. 37). Моделирование нестационарного процесса, развивающегося из состояния неподвижного газа становится затруднительным при больших числах $Gr_L, \frac{H}{L}$ и малых значениях C_{FH} и $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$ из-за значительного увеличения времени установления $\bar{t}_{уст}$ процесса (под $\bar{t}_{уст}$ понимается время, по достижении которого изменение среднего потока тепла \bar{q}_w на стенке в течение $\Delta t = 50\tau$ не превосходит 0,5 - 1%). Для времени установления процесса из состояния неподвижного газа характерным оказывается число Рейнольдса

$$C_R = \sqrt{\frac{Gr_L \cdot \frac{H}{L}}{C_{FH} \left(\frac{T_{w2}}{T_{w1}} - 1 \right)}}, \quad (107)$$

которое определяет соотношение между инерционными и вязкостными членами исходной системы (10 - 12) и обратно пропорционально малому параметру при старших производных.

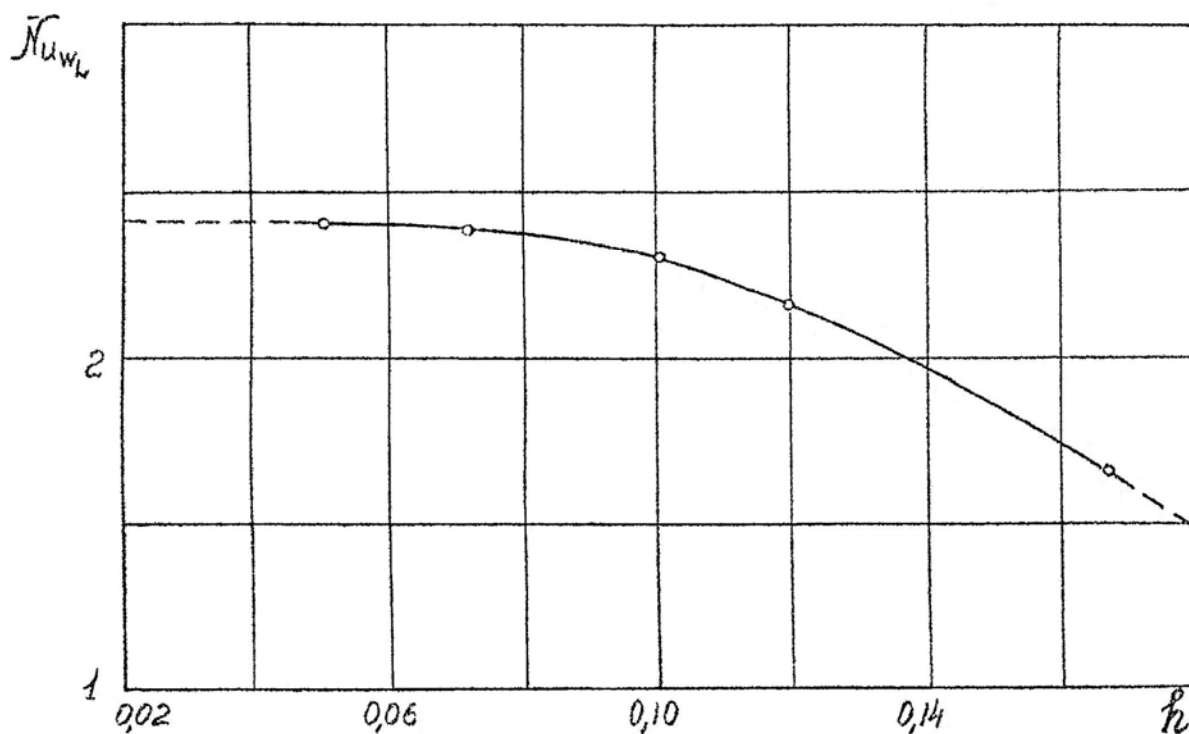


Фиг. 40. Зависимость $\bar{t}_{ycm}(C_R)$

| | | | | | | | |
|----------|----------------|-------------------------|-----------------|---------------|----------------|--------|---------------|
| C_{FH} | $\circ - 0.02$ | $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$ | $\bullet - 1.5$ | $\frac{H}{L}$ | $\Delta - 1.0$ | Gr_L | $\Delta 10$ |
| | $\Delta - 1.0$ | | $\nabla - 2$ | | $+ - 5.0$ | | $\circ 10^2$ |
| | | | | | | | $\nabla 10^3$ |

Зависимость $\bar{t}_{ycm}(C_R)$, полученная в расчетах нестационарного процесса из состояния неподвижного газа (103) при различных значениях $Gr_L, \frac{H}{L}, C_{FH}, \frac{T_{w2}}{T_{w1}}$, показана на фиг. 40 и удовлетворительно укладывается в логарифмических координатах на одну прямую, соответствующую $\bar{t}_{ycm} \sim C_R^{0.6}$

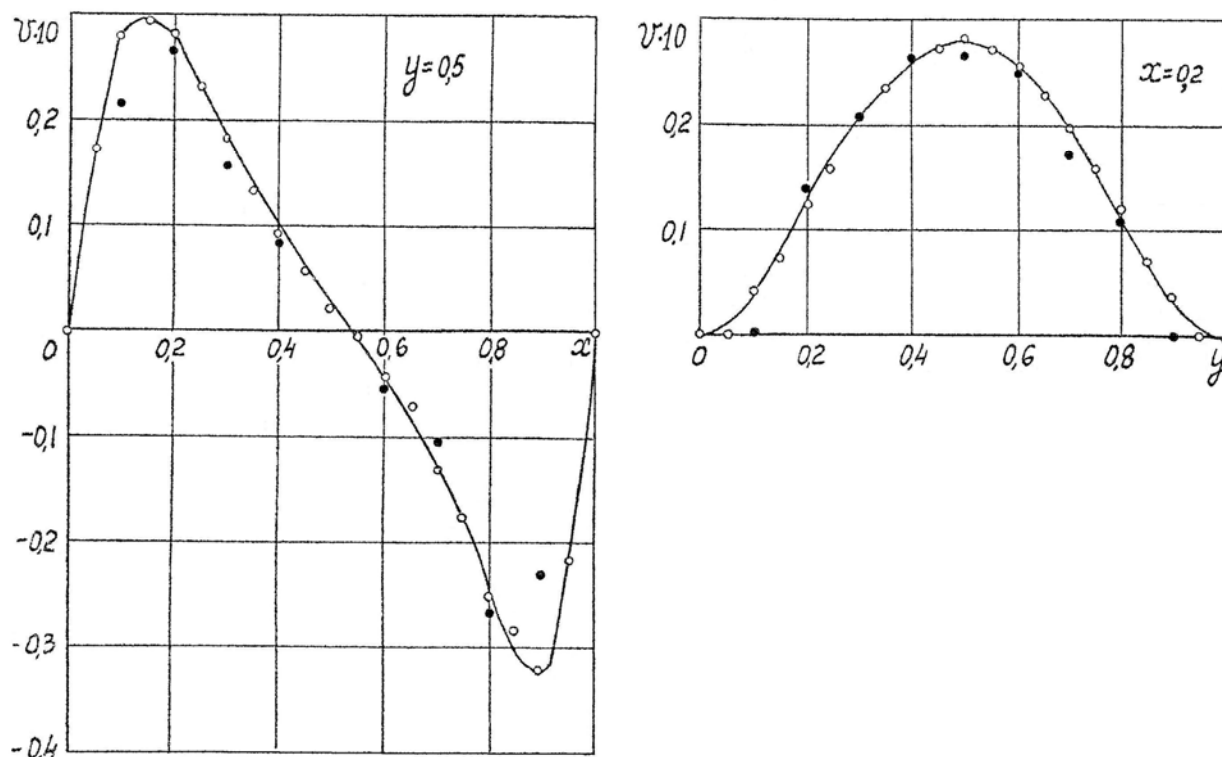
Основная погрешность вычислений на стационарном режиме связана с конечной величиной шага разностной сетки по пространственной координате $h(\ell)$. Для варианта со значениями критериев (106) характер влияния шага сетки исследован на сетках с числом узлов $7 \times 7, 9 \times 9, 11 \times 11, 15 \times 15, 21 \times 21$.



Фиг. 41. Влияние изменения числа узлов сетки на среднее число Нуссельта

На фиг. 41 показана зависимость среднего числа Нуссельта от шага сетки h . Как видно из этой зависимости, погрешность, вызванная конечной величиной шага сетки h , падает при $h \rightarrow 0$, что подтверждает сходимость решения при измельчении сетки. Ожидаемая величина погрешности в числе \bar{Nu}_{wL} на самой мелкой из рассматриваемых сеток с числом узлов 21×21 , по-видимому, не превосходит 1%, а на сетке с числом узлов 11×11 составляет около 5%. На самой крупной из этих сеток с числом узлов 7×7 погрешность составляет уже около 30%, а при дальнейшем увеличении шага $h > 0,2$ итерационный процесс на установление не сходится. Отметим, что увеличение шага сетки всегда приводит к систематическому занижению средней теплопередачи.

Сопоставление результатов расчета распределения местных значений вычисляемых величин u, v, ρ, T, q_w на сетках с числом узлов 21×21 и 11×11 приведены на фиг. 42 - 47. Здесь следует отметить удовлетворительное согласование результатов по распределению плотности и температуры (фиг.44-46)

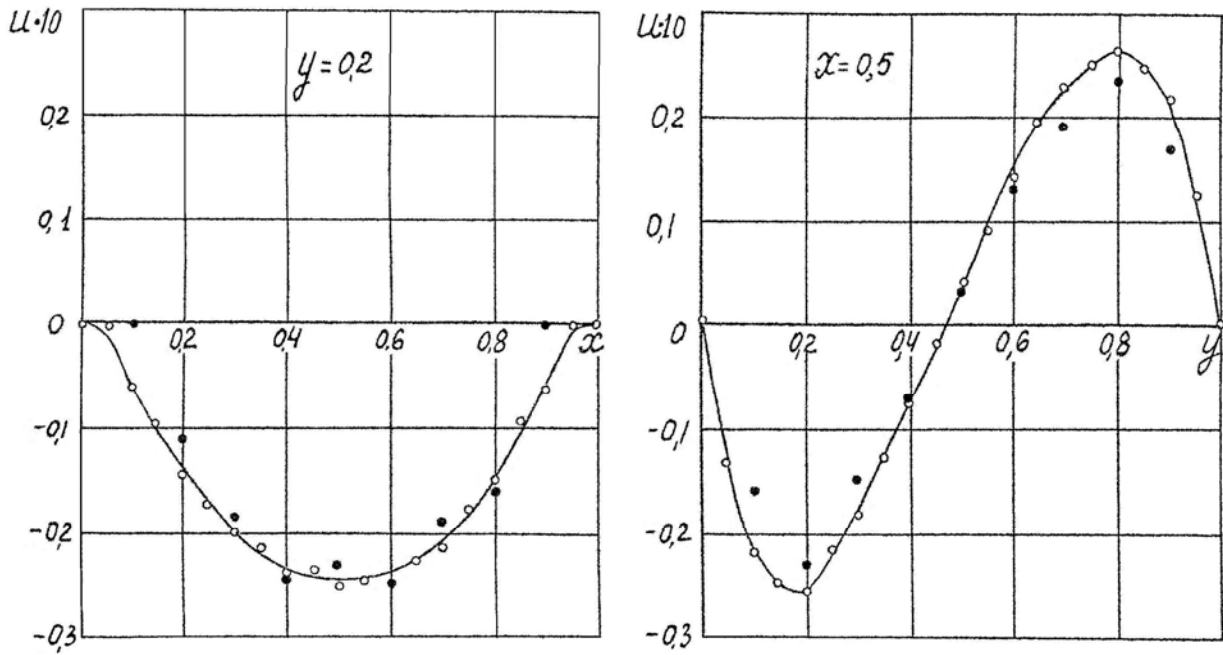


Фиг. 42. Профили вертикальной составляющей скорости

○ – сетка 21 x 21

● – сетка 11 x 11

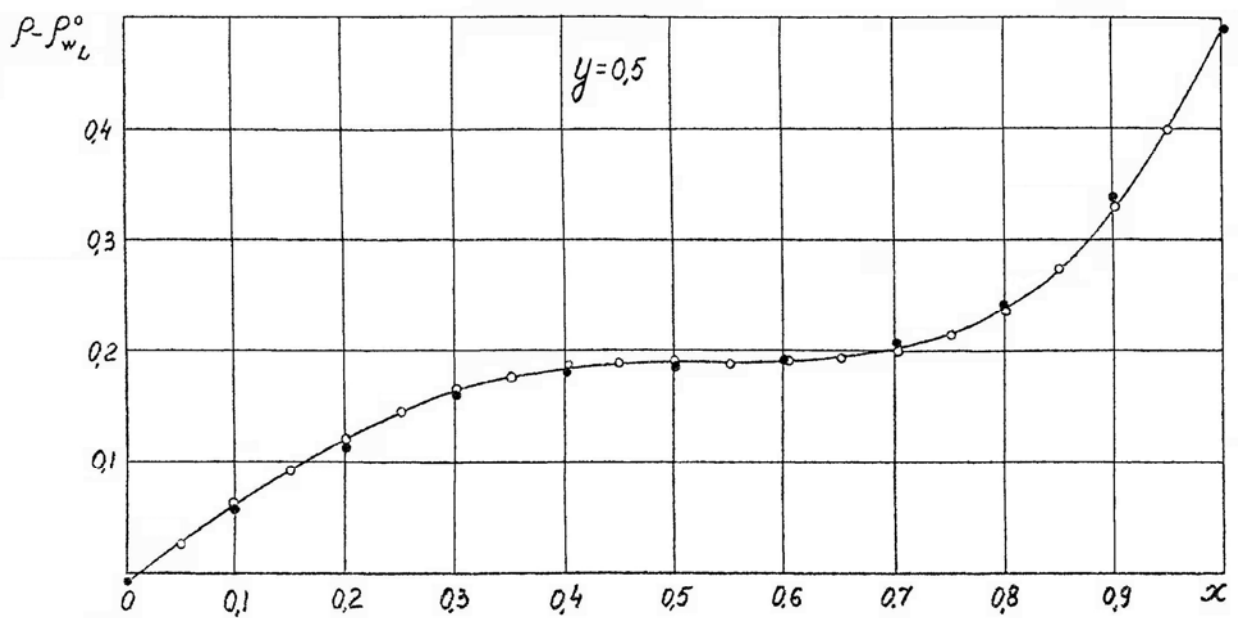
и несколько худшее - по распределению скорости (фиг.42, 43). Влияние аппроксимации первого порядка по плотности на границе (98) заметно лишь на составляющих скорости, нормальных стенке $v(y)$ (фиг. 42) и $u(x)$ (фиг. 43) на сетках 11x11 и вовсе не сказывается на значениях плотности (фиг. 44) на границе ввиду малых значений указанных составляющих скорости вблизи стенки. На стационарном режиме невязки в интегральных балансах тепла (93) по отношению к потоку тепла на нагретой стенке и расхода (94) через горизонтальное сечение при $y = 0,5$ по отношению к расходу $(\rho v)^+$ восходящего потока на сетке с числом узлов 21x21 равны соответственно 0,86 и 0,1%.



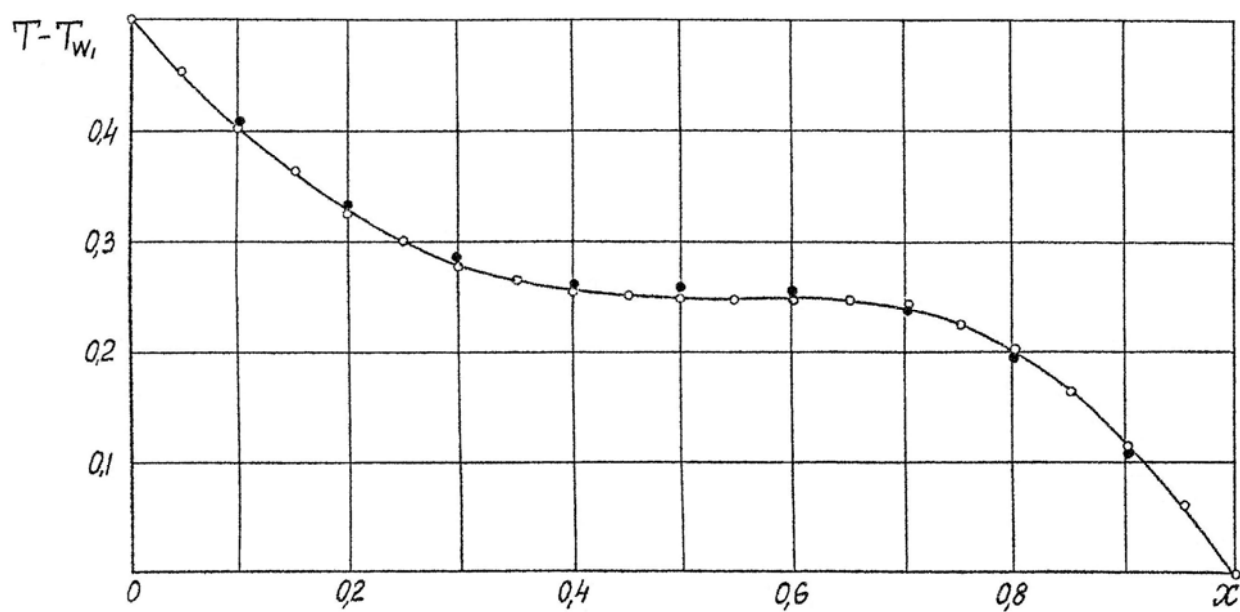
Фиг. 43. Профили продольной составляющей скорости.

○ – сетка 21×21 , $h=l=0,05$

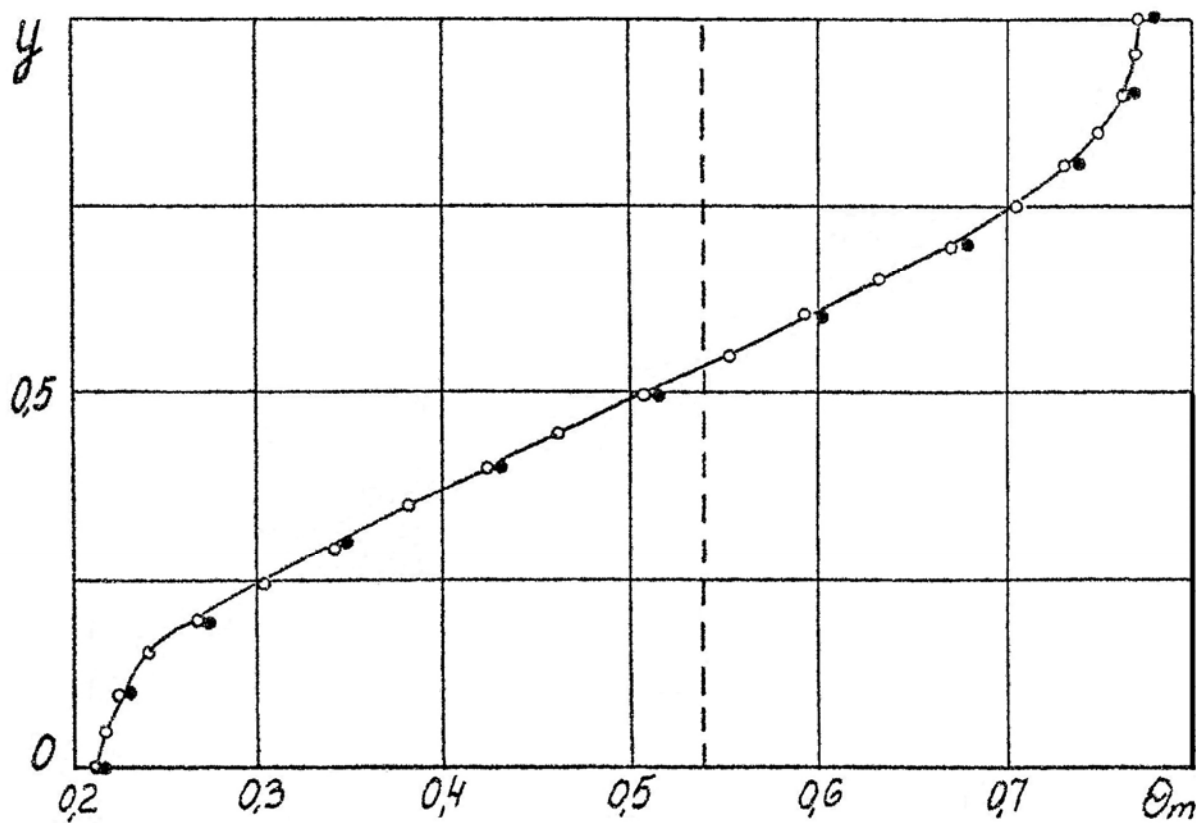
● – сетка 11×11 , $h=l=0,1$



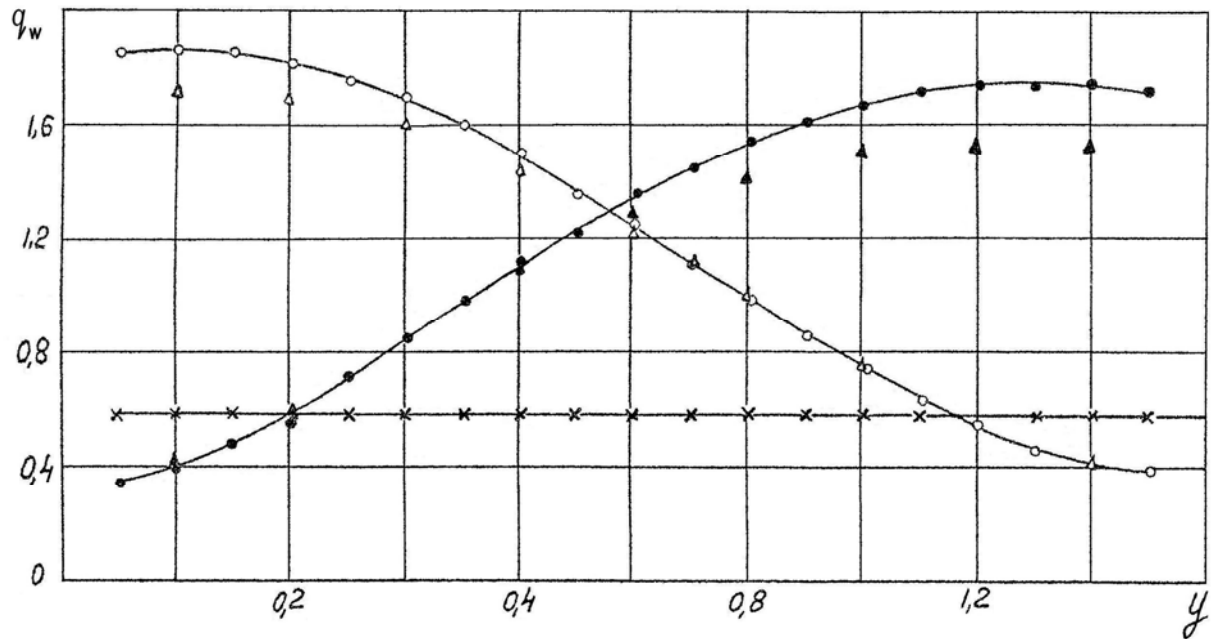
Фиг. 44. Профиль плотности по оси x в центральном сечении $y=0,5$



Фиг. 45. Профиль температуры по оси x в центральном сечении $y = 0,5$



Фиг. 46. Распределение температуры по оси y в центральном сечении при $x = 0,5$



Фиг. 47. Распределение местных тепловых потоков по боковым стенкам в режиме пограничного слоя.

○ – q_{w_2} сетка 21x21 ● – q_{w_1} сетка 21x21
 △ – q_{w_2} сетка 11x11 ▲ – q_{w_1} сетка 11x11

Во всех расчетах, результаты которых приводятся ниже в §3-6, достаточным для устойчивого счета было условие на параметры сетки (68), сформулированное в главе I. Это условие проверено в широком диапазоне всех критериев подобия (105), а именно

$$10 \leq Gr_L \leq 10^7, \quad 0,7 \leq \frac{H}{L} \leq 50, \quad 1 \leq \chi \leq 2, \quad 0,02 \leq C_{FH} \leq 1.0 \quad (108)$$

$$1.1 \leq \frac{T_{w_2}}{T_{w_1}} \leq 2.0$$

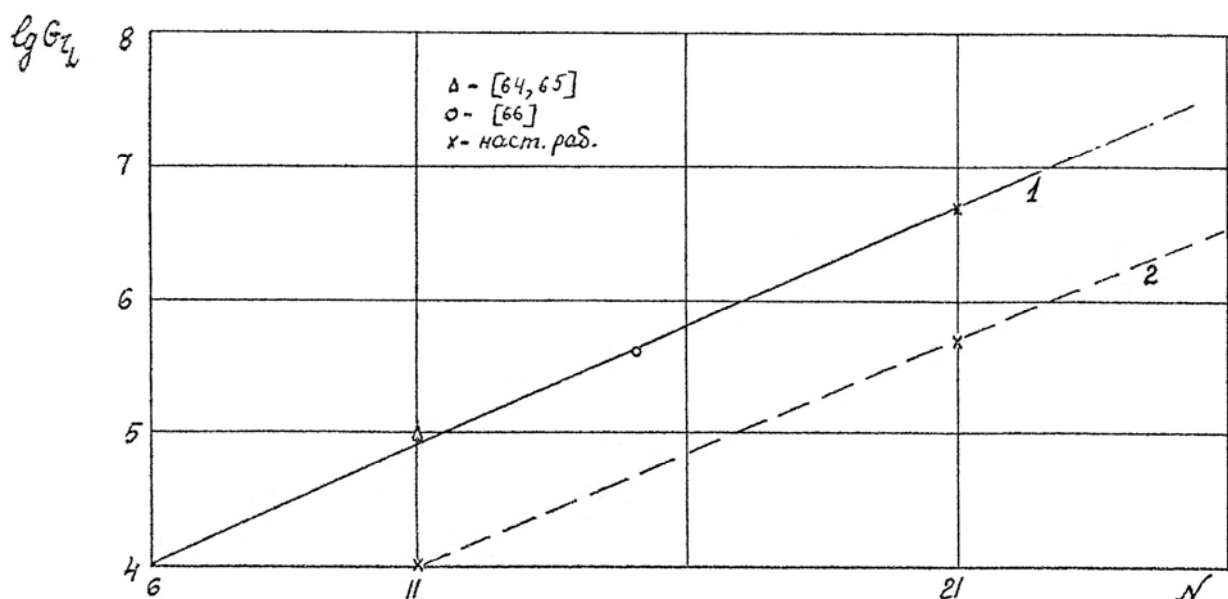
(остальные критерии соответствуют (106)) и

$$0.01 \leq Pr \leq 100 \quad \text{при} \quad Gr_L \cdot Pr = 1.25 \cdot 10^4 \quad (109)$$

$$1 \leq \frac{H}{L} \leq 20 \quad \text{при} \quad 10^2 \leq Gr_L \leq 10^5$$

при различных соотношениях шагов $h \geq \ell$ и $h \leq \ell$ и на различных сетках. Во всех расчетах схема была устойчива и при $\tau = \min\{h, \ell\}$, что соответствует верхнему пределу (68).

При увеличении чисел $Gr_L, C_{FH}, \frac{T_{w2}}{T_{w1}}, Pr$ градиенты в поле течения возрастают, и для получения сходящегося решения, требуется достаточно мелкая сетка. Диапазон значений критериев подобия (108, 109), указанный выше, ограничивается в основном сетками с числом узлов 11×11 и 21×21 . В экспериментальных расчетах, проведенных при различных числах Gr_L и шагах сетки (значения остальных критериев соответствуют (106)) получено, что, начиная с сетки 6×6 и числа $Gr_L \sim 10^4$, при увеличении Gr_L на полтора-два порядка для сходимости численного решения в рассматриваемой задаче шаг сетки требуется уменьшать примерно вдвое. Ориентировочная граница сходимости 1 при увеличении шага сетки h и числа Gr_L показана на фиг. 48. На ней нанесены также предельные значения по числу и числу узлов сетки N , полученные при расчетах этой задачи в работах [64 - 66]. Нижняя граница 2 примерно соответствует тем числам Gr_L и числу узлов сетки N , при которых погрешность в среднем потоке тепла в наших расчетах составляет около 5%.



Фиг. 48. Диапазон сходимости при изменении числа Грасгофа и числа узлов сетки

§ 3. Режимы течения и теплообмена по числам Gr_L .

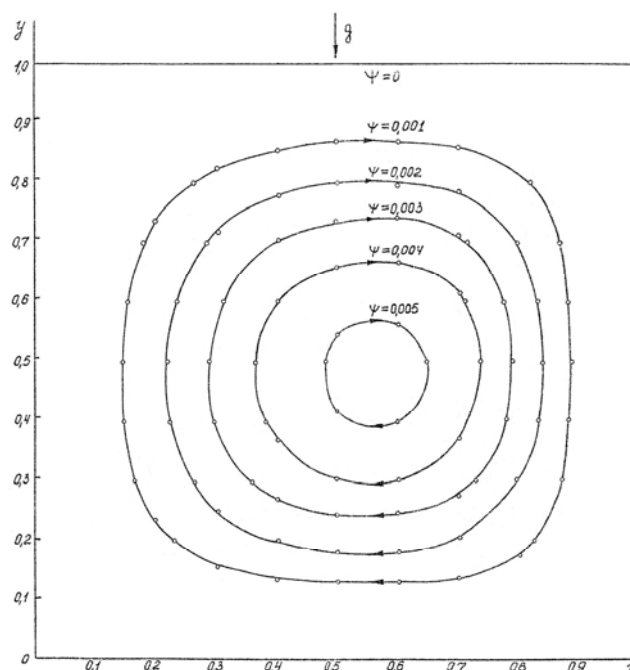
Возникновение и развитие вторичных течений

Здесь мы рассмотрим основные результаты серии расчетов (фиг. 42 - 76), выполненных на стационарном режиме при различных числах Грасгофа и фиксированных остальных критериях подобия, числовые значения которых соответствовали (106). При $Gr_L > 1.25 \cdot 10^4$ за начальное приближение в каждом из последующих вариантов этой серии выбиралось стационарное поле предыдущего варианта. Результаты расчета иллюстрируются картинками линий тока $\psi = const$ (фиг. 49 - 55), полей температуры (фиг. 56 - 62), профилей скорости $v(x)$ в центральном сечении слоя при $y = 0,5$ (фиг. 70-74) (значения скоростей (фиг. 70 - 74) даются через интервал $\Delta t = 50\tau$ в конце временного отрезка установления, $(0 - t, \Delta - t + \Delta t)$).

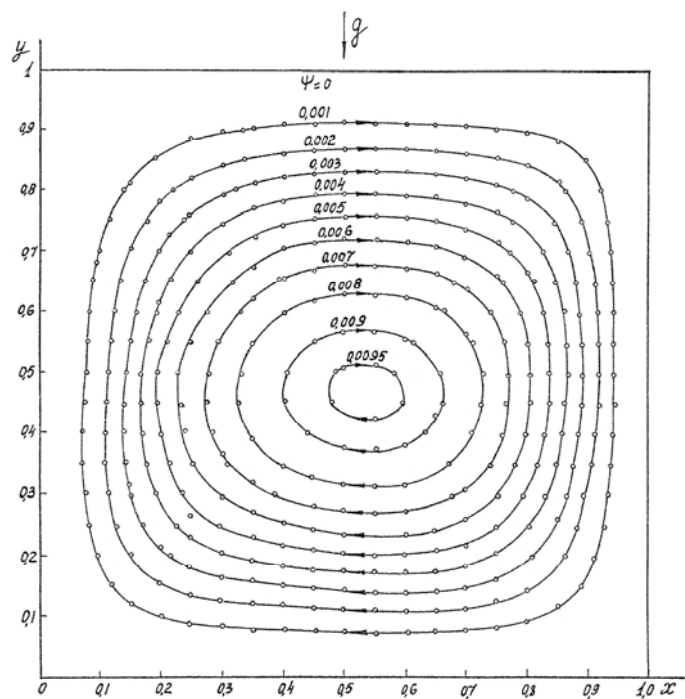
Структура одновихревого циркуляционного движения

В состоянии гидродинамического равновесия конвективный перенос тепла осуществляется газом, циркулирующим по замкнутым траекториям (фиг.49). Движение газа вызывается неравномерным распределением плотностей (и подъемных сил). Плотность газа у нагретой стенки меньше, чем у холодной (фиг.44), и газ у нагретой стенки поднимается вверх, а у холодной - опускается вниз (фиг. 49, 70). В центральной части скорости циркулирующего газа малы, и температура газа в центре незначительно отличается от температуры в том случае, когда движение газа отсутствует. Профили скорости (фиг. 70) и картины линий тока (фиг. 70) в сжимаемом газе не симметричны; из-за пониженной плотности на нагретой стенке и верхнем основании и повышенной плотности на холодной стенке и нижнем основании, согласно балансам расхода в сжимаемом газе (94), профили скорости и центр вихря смещены в сторону холодной стенки и нижнего основания. Отметим, что в модели несжимаемой жидкости с линейной зависимостью плотности от

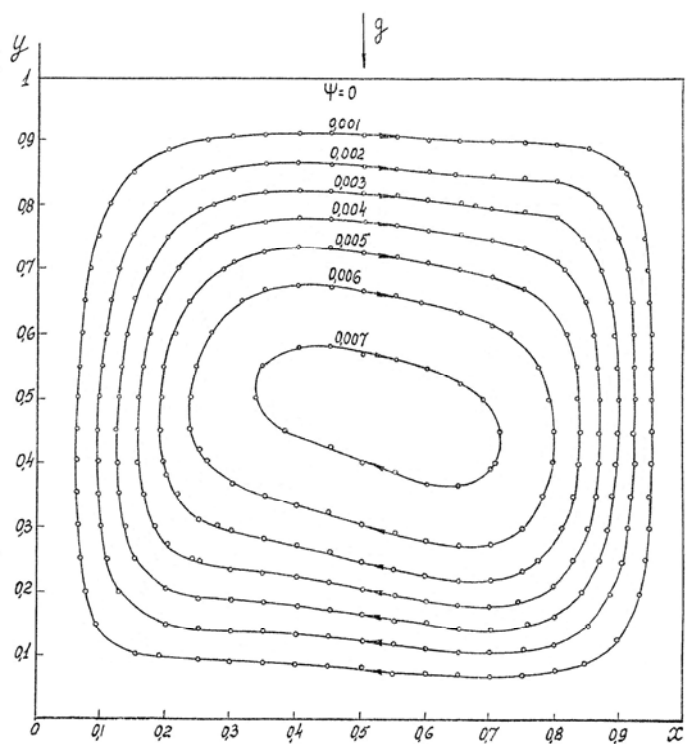
температуры [63 – 66] баланс расхода не связан с изменением плотности и тем самым не учитывается влияние переменной плотности на поле скорости. Распределение давления в сечениях $x = 0,5$ и $y = 0,5$ при числе $Gr_L = 1,25 \cdot 10^4$ показано на фиг. 64, 65. В вертикальном направлении (фиг. 64) давление падает примерно по линейному закону, а в горизонтальном направлении (фиг. 65) - постоянно, поэтому изменение плотности (и подъемной силы) поперек слоя обратно пропорционально изменению температуры; это обстоятельство и дает возможность проводить исследования поля температуры с помощью интерферометра [58 - 59].



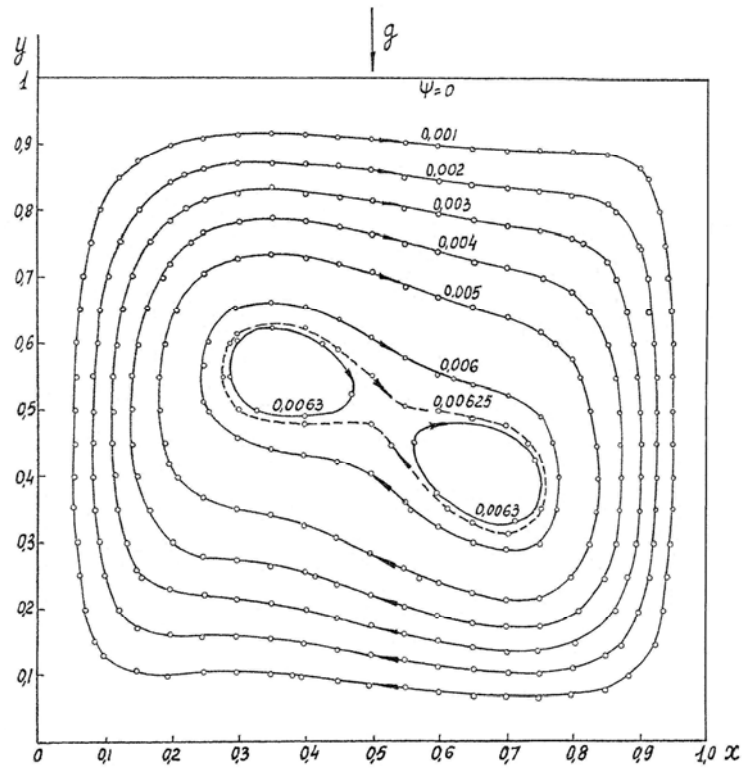
Фиг. 49. Линии тока $Gr_L = 1.25 \cdot 10^3$, $\frac{H}{L} = 1.0$



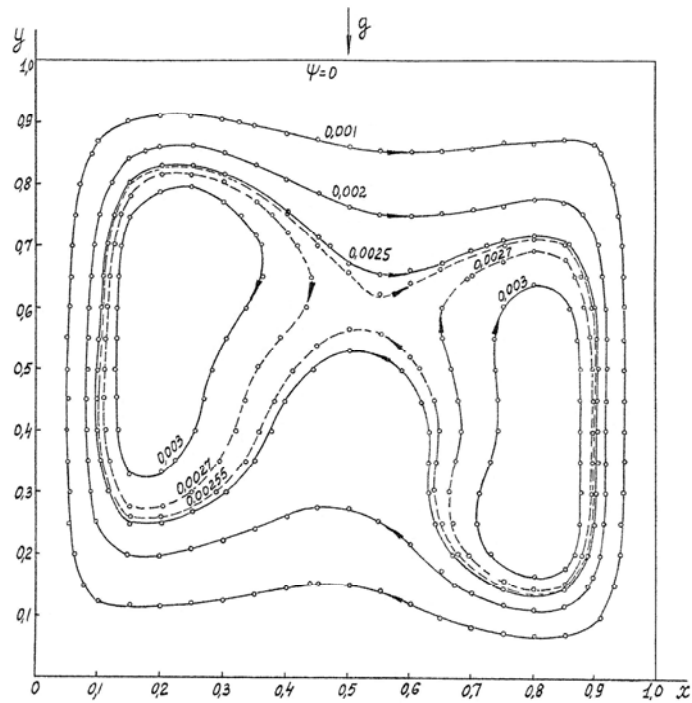
Фиг. 50. Линии тока $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$, $\frac{H}{L} = 1.0$



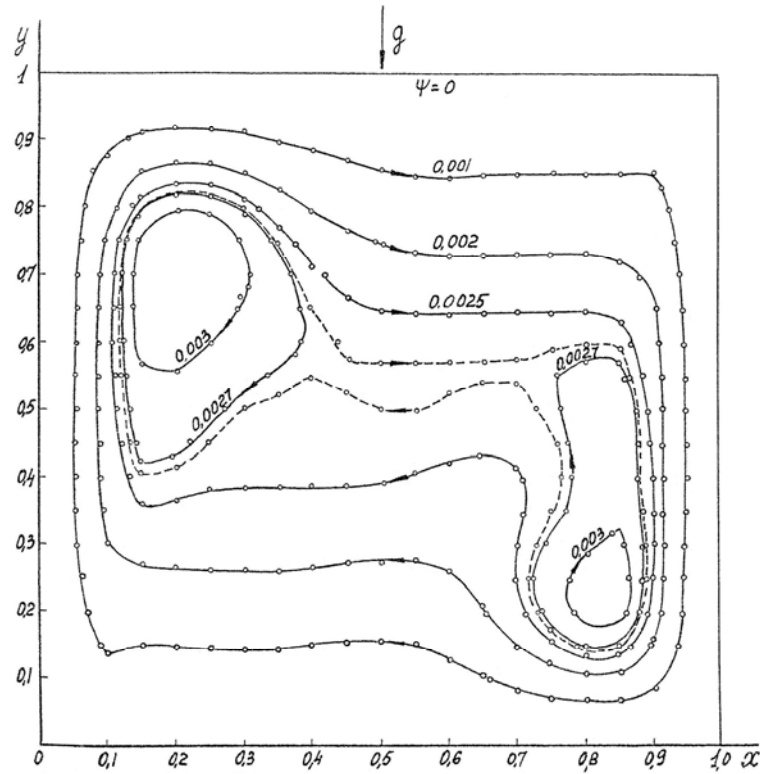
Фиг. 51. Линии тока $Gr_L = 5 \cdot 10^4$, $\frac{H}{L} = 1.0$



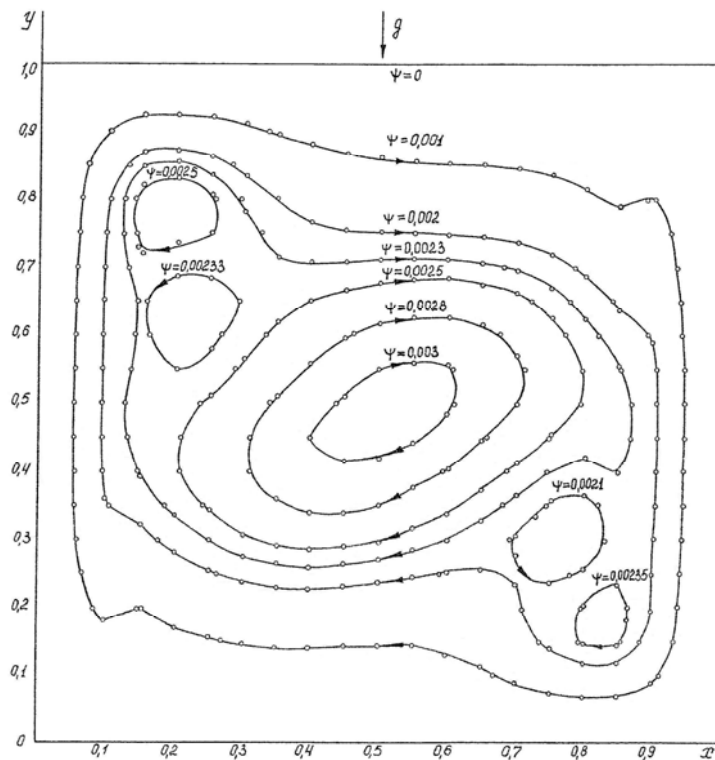
Фиг. 52. Линии тока $Gr_L = 10^5$, $\frac{H}{L} = 1.0$



Фиг. 53. Линии тока $Gr_L = 5 \cdot 10^5$, $\frac{H}{L} = 1.0$



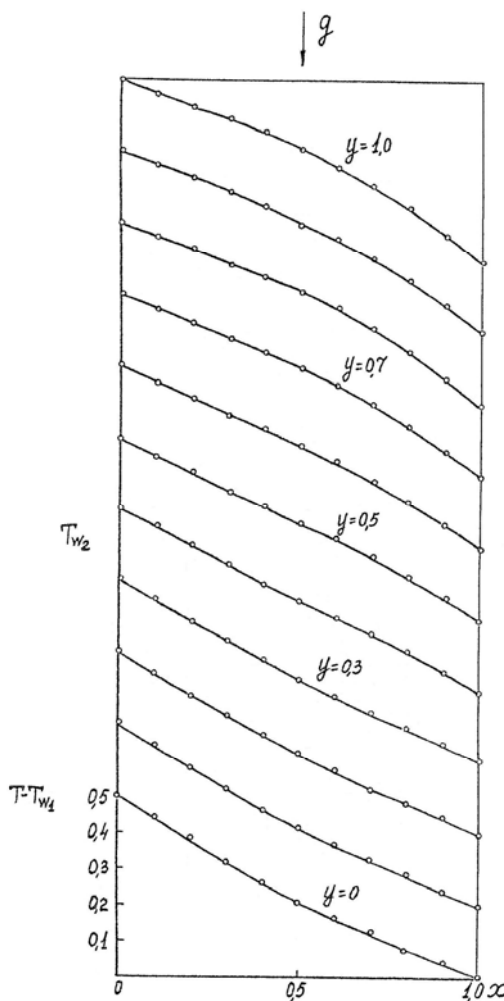
Фиг. 54. Линии тока $Gr_L = 10^6$, $\frac{H}{L} = 1.0$



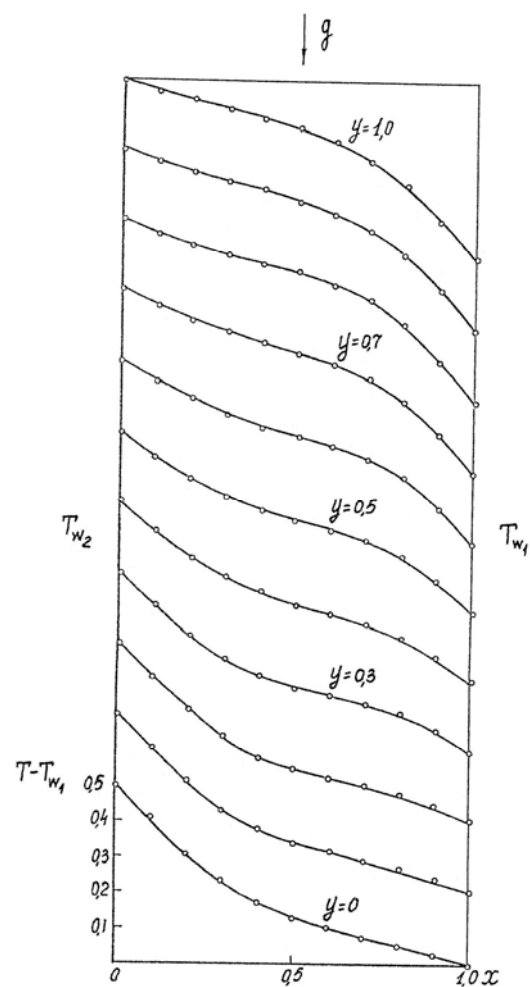
Фиг. 55. Линии тока $Gr_L = 5 \cdot 10^6$, $\frac{H}{L} = 1.0$

В зависимости от числа Грасгофа можно выделить три характерных режима течения и теплообмена. При малых числах Грасгофа циркуляционное движение

(фиг. 49, 70) слабо влияет на поле температур в слое, и профили температуры в центральной части слоя близки к тем, которые имеются при отсутствии движения среды (фиг. 56). Влияние конвенции заметно лишь у оснований слоя (фиг. 56, 67), где струйки тока, притекающие от холодной стенки понижают температуру у нижнего основания, а притекающие от нагретой стенки - повышают температуру у верхнего основания. Местные потоки тепла (фиг. 66) в левом нижнем и правом верхнем углах выше, чем в центральной части слоя. Эти углы соответствуют начальным участкам струек тока, обтекающих нагретую и холодную стенки. В левом верхнем и правом нижнем углах, соответствующих конечным участкам струек тока, обтекающих стенки, тепловой поток ниже, чем в центральной части слоя. Этот режим изучался ранее в работах [57, 58] и назван режимом теплопроводности.

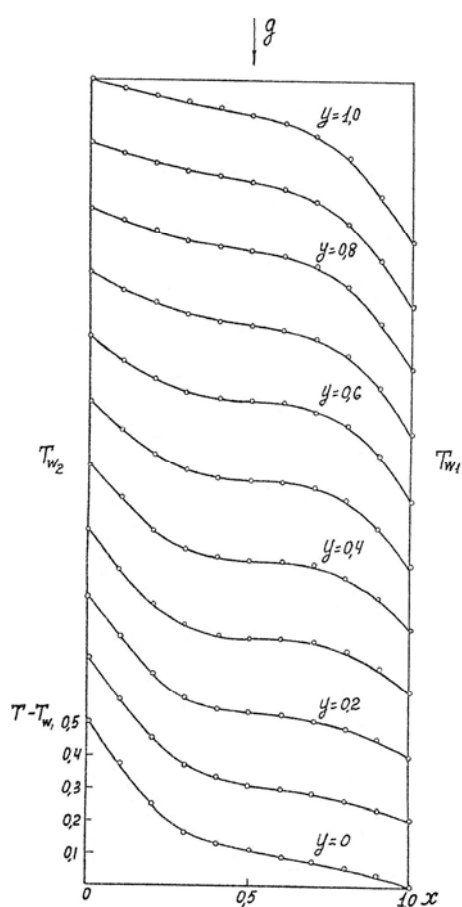


Фиг. 56. Поле температуры в режиме теплопроводности
 $Gr_L = 1.26 \cdot 10^2$

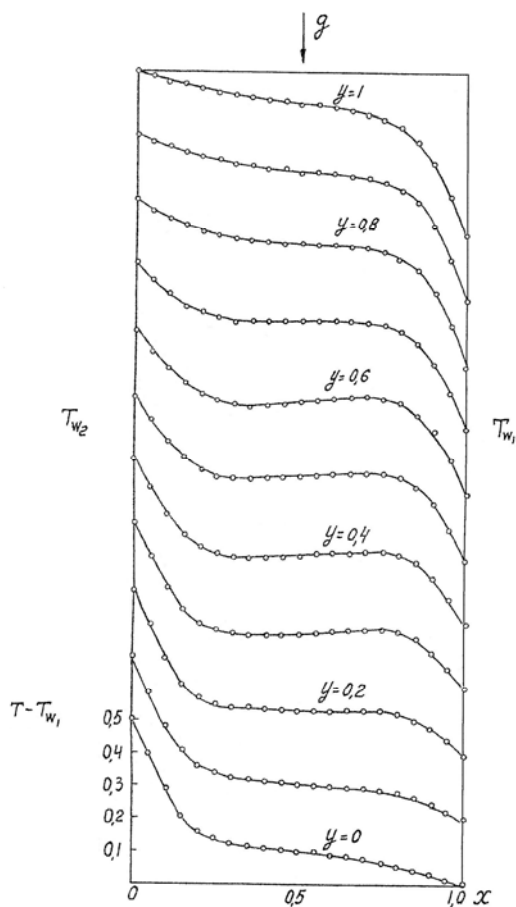


Фиг. 57. Поле температур в промежуточном режиме
 $Gr_L = 5 \cdot 10^3$

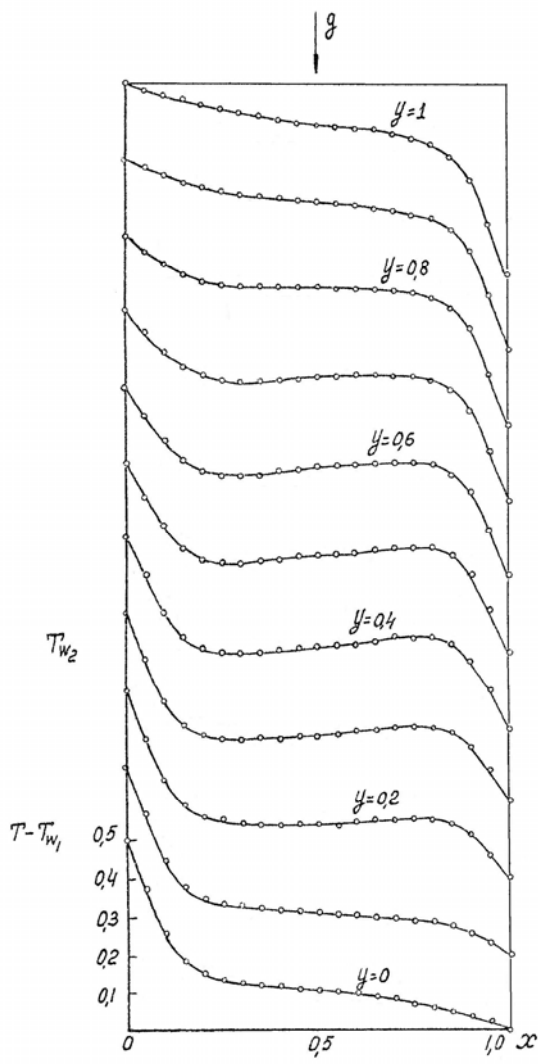
Качественно иной режим имеется при числе Грасгофа $Gr_L = 1,25 \cdot 10^4$ (фиг. 42-47, 50, 58). Здесь развитое циркуляционное движение значительно изменяет поле температур по сравнению с полем температур в режиме теплопроводности. Влияние вязкости и теплопроводности сосредоточено ближе к стенкам; на нагретой и холодной стенках образуются температурные пограничные слои, в которых сосредоточено основное изменение температуры в горизонтальном направлении, а в центральной части области образуется ядро с равномерной температурой поперек слоя (фиг. 58). Этот режим называется режимом пограничного слоя [57, 58]. При уменьшении числа Грасгофа температурные пограничные слои сливаются, и ядро с равномерной температурой в горизонтальном направлении исчезает (фиг. 57). Этот режим является промежуточным между режимом пограничного слоя и режимом теплопроводности. Качественное различие трех основных режимов показано также на интерферограммах Эккерта и Карлсона (фиг. 63).



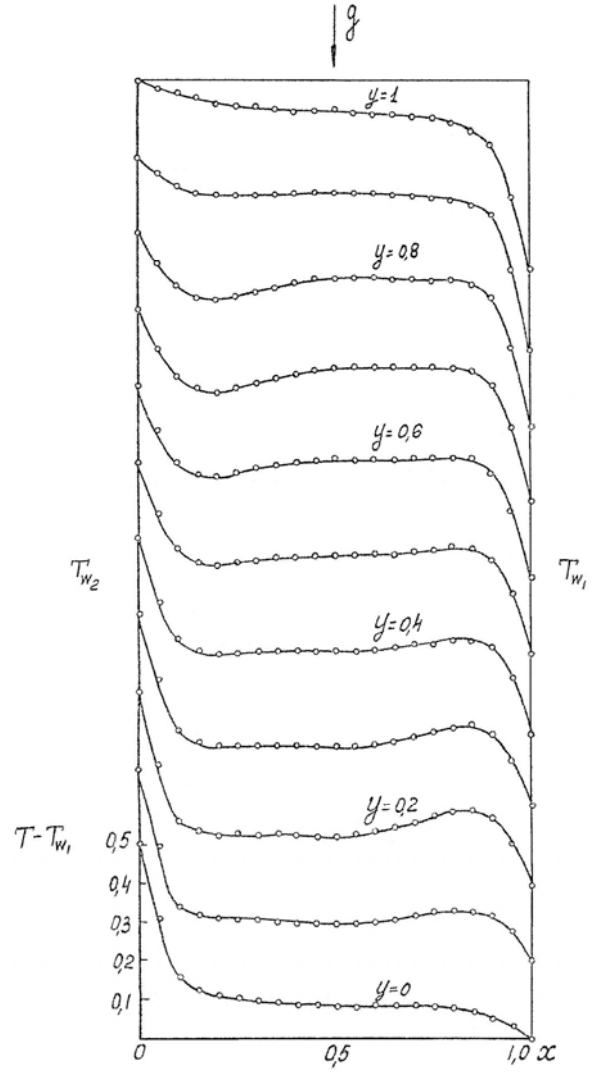
Фиг. 58. Поле температуры в режиме пограничного слоя $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$



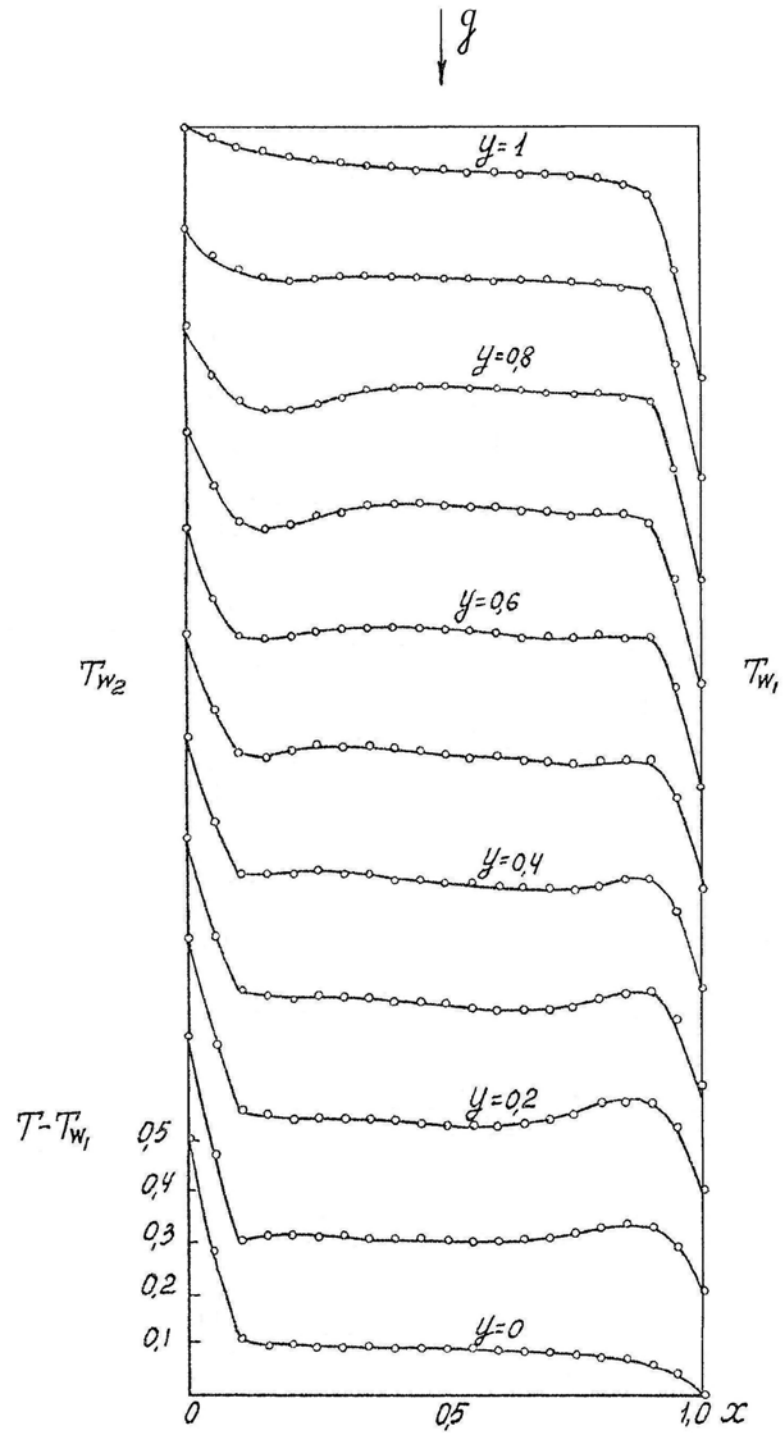
Фиг. 59. Поле температуры $Gr_L = 5 \cdot 10^4$



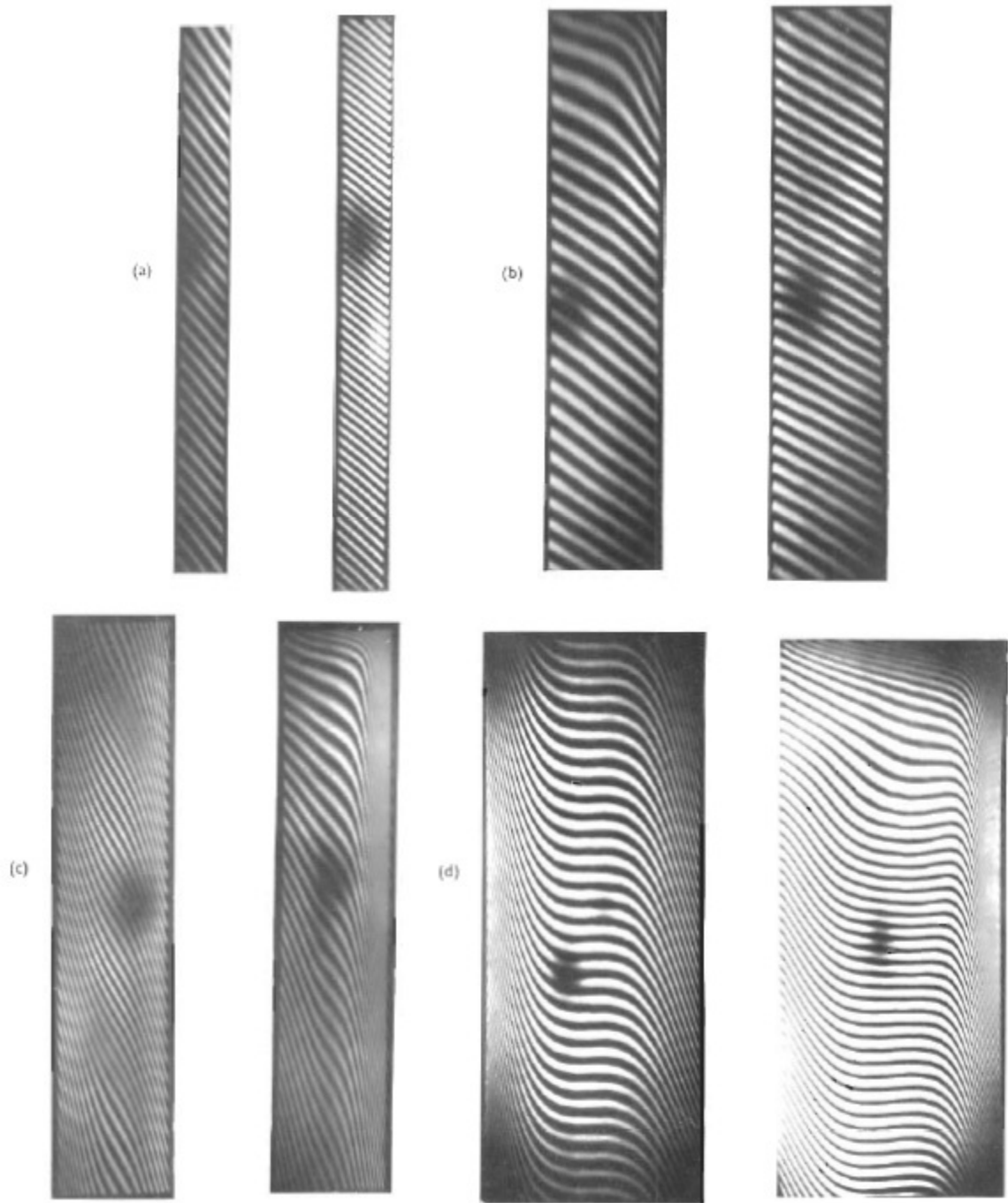
Фиг. 60. Поле температуры
 $Gr_L = 10^5$



Фиг. 61. Поле температуры
 $Gr_L = 5 \cdot 10^5$



Фиг. 62. Поле температуры $Gr_L = 10^6$



Фиг. 63. Интерферограммы экспериментов [58]

$$(a) \quad H = 14 \text{ in.}, \quad L = 0.3 \text{ in.}, \quad T_H - T_C = 10^\circ F$$

$$(b) \quad H = 14 \text{ in.}, \quad L = 0.7 \text{ in.}, \quad T_H - T_C = 10^\circ F$$

$$(c) \quad H = 14 \text{ in.}, \quad L = 0.7 \text{ in.}, \quad T_H - T_C = 60^\circ F$$

$$(d) \quad H = 14 \text{ in.}, \quad L = 1.4 \text{ in.}, \quad T_H - T_C = 60^\circ F$$

Представленные на фиг. 63 двумя четвертями всего воздушного пространства слоя (первая и вторая, если отсчитывать его сверху)

интерферограммы экспериментов [58] подтверждают наличие обсуждавшихся выше режимов. Режимы выявляются также из рассмотрения переноса тепла вдоль средней вертикальной линии между холодной и нагретой стенками. Относящиеся сюда результаты показаны на фиг. 67- 68 в виде зависимости $\theta_m(y)$, где $\theta_m = \frac{T_m - T_{w_1}}{T_{w_2} - T_{w_1}}$, T_m - температура вдоль средней линии. С ростом числа Грасгофа (фиг. 67) температура T_m перемещается в верхней части слоя к температуре нагретой стенки T_{w_2} , а в нижней части слоя - к температуре холодной стенки T_{w_1} . В режиме пограничного слоя распределение $\theta_m(y)$ линейно в центральной части области, и наклон прямой $\theta_m(y)$ практически не зависит от числа Грасгофа (фиг. 67, 68). Характерным для режима пограничного слоя является также степенная зависимость среднего числа Нуссельта от числа Грасгофа: $\bar{Nu}_{wL} \sim Gr_L^n$ с постоянным показателем степени n (фиг. 76). Местные потоки тепла $q_w(y)$ на нагретой и холодной стенках в режиме пограничного слоя показаны на фиг. 47. Как и на отдельной пластине, толщина температурного пограничного слоя растет, а местный поток тепла падает в направлении движения газа (вверх по нагретой и вниз по холодной стенке). В отличие от одиночной пластины у верхнего и нижнего основания области в соответствии с условиями тепловой изоляции (96) падение местного потока тепла замедляется. Другим отличием в поле температуры от одиночной пластины является переменная по вертикали температура T_m на "внешней границе", которая вырабатывается в результате взаимодействия двух пограничных слоев на нагретой и холодной стенках.

Все рассмотренные выше особенности структуры поля температуры, полученные в расчетах уравнений Навье-Стокса, хорошо согласуются с результатами интерферометрических измерений Эккерта и Карлсона [58]. Отметим некоторые особенности поля температур, которые не выявляются из результатов эксперимента [58] и относятся в основном к распределению температуры вблизи верхнего и нижнего оснований. Здесь имеется свой

температурный пограничный слой, где изменение температуры по вертикали нелинейно (фиг. 67). Ввиду большого разброса точек в опытах [58], этот эффект не заметен, и авторы аппроксимируют распределение $\theta_m(y)$ прямой линией по всей длине слоя (что указывает на возможные утечки тепла через верхнее и нижнее основания, в особенности на относительно коротких моделях).

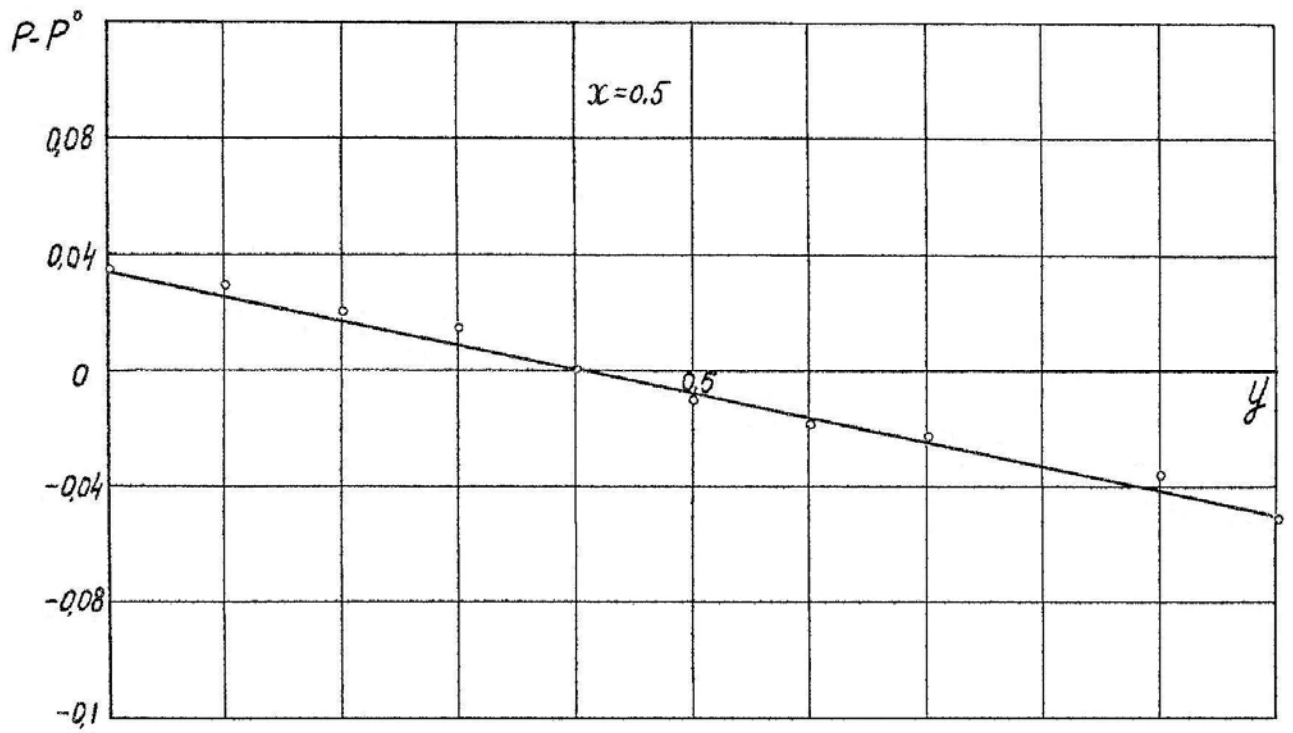
Возникновение и развитие вторичных течений

При дальнейшем увеличении числа Грасгофа ($Gr_L = 5 \cdot 10^4, 10^5$) изменение скорости сосредотачивается во все более узкой области у стенки (фиг. 72, 73), скорости внутри слоя становятся очень малыми, замкнутые линии тока внутри области вытягиваются и смещаются по отношению к основным линиям тока у стенок (фиг. 51). Струйки тока, притекающие от холодной стенки теперь охлаждают газ во внешней части температурного слоя у нагретой стенки (т. С), а струйки тока, притекающие от нагретой стенки, нагревают газ во внешней части температурного слоя у холодной стенки (т. Д) (фиг. 69), что приводит к появлению обратных перетоков тепла в центре. Этот эффект наблюдался также в опытах [59, 60] и заметен на интерферограммах Эккерта и Карлсона (фиг. 63). Теперь плотность газа в т. С выше, чем в т. Д и газ в т. С должен был бы опускаться по отношению к газу в т. Д (фиг. 69). Это направление движения противоположно основному, в котором газ поднимается у нагретой стенки (т. А) и опускается у холодной (т. В). В результате при числе Грасгофа $Gr_L \cong 10^5$ внутри области образуются вторичные течения с замкнутыми линиями тока и направлением, совпадающим с направлением основного течения (фиг. 52). Линии тока основного и вторичного течения образуют внутри области особенность типа "седла".

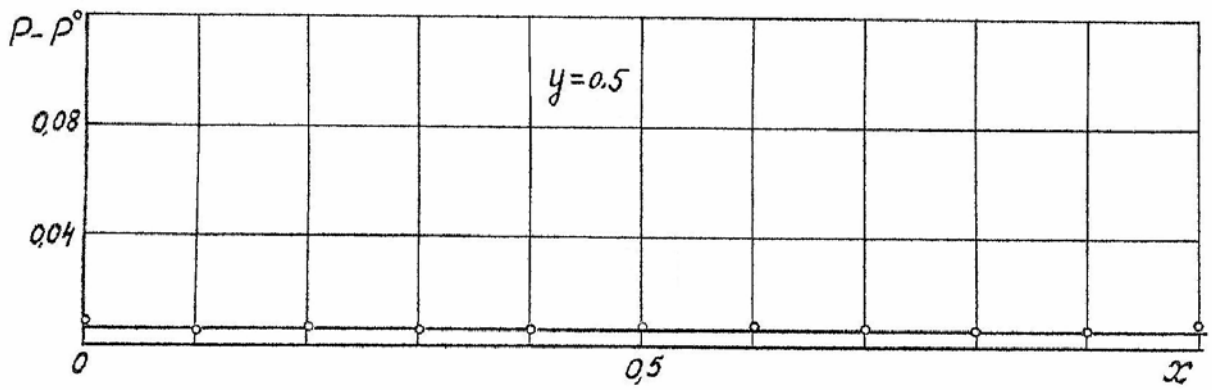
Нами рассматривался также вопрос о наличии гистерезиса при возникновении вторичных течений. Для этого расчеты, которые ранее проводились в направлении от $Gr_L = 5 \cdot 10^4$ до $Gr_L = 10^5$, теперь велись в обратном направлении от $Gr_L = 10^5$ до $Gr_L = 5 \cdot 10^4$. При таком изменении

направления счета течение из стационарного состояния при $Gr_L = 10^5$ со вторичными линиями тока переходило в исходное, и линии тока вторичного течения исчезали. Для случая несжимаемой жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры близкая к рассмотренной (фиг. 52) картина вторичных течений получена также в работе [66].

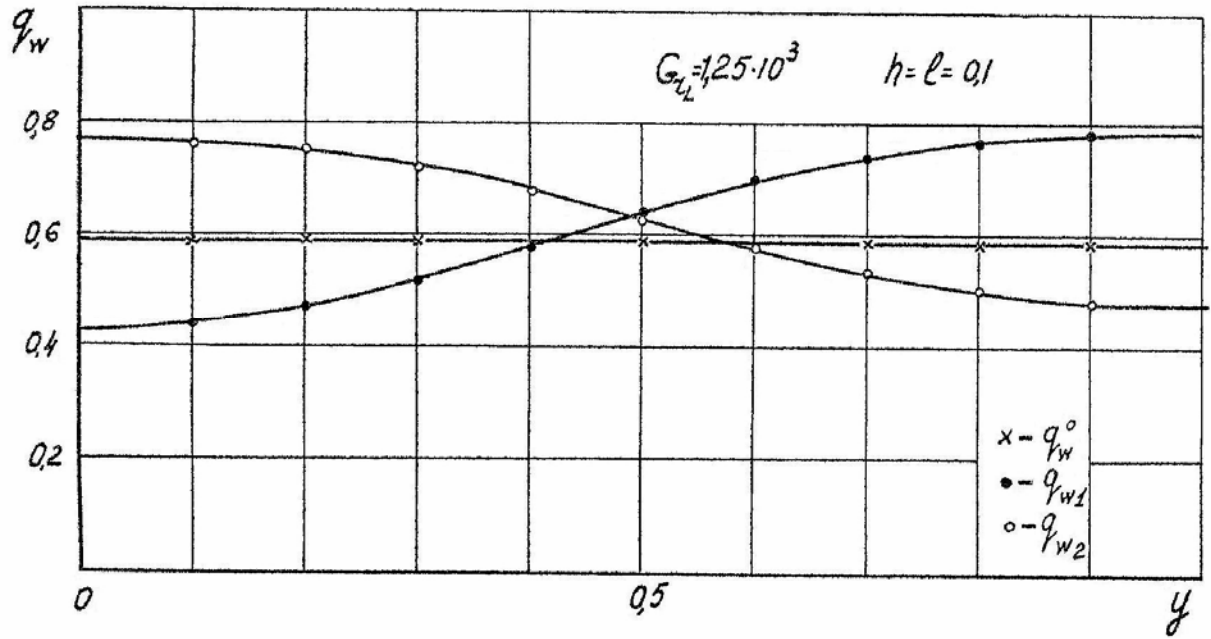
В дальнейшем при росте числа Грасгофа ($Gr_L = 5 \cdot 10^5$) линии тока основного течения значительно искривляются (фиг. 53), а амплитуда вихрей вторичного течения возрастает; в образовании внутренних вторичных течений теперь принимают участие линии тока, находящиеся ближе к основным линиям тока у стенки. Особенность рассматриваемой картины течения состоит в наличии значительных градиентов скорости между линиями тока основного течения, примыкающими друг к другу сверху и снизу "седла". При росте числа Грасгофа эта картина течения значительно перестраивается (фиг. 55): внутри области появляется система замкнутых линий тока с направлением, совпадающим с направлением основного течения и образующих внутри области особенность типа "центра". В левом и правом углах имеется по два вихря; направление внешнего вихря совпадает с направлением основного течения, а внутреннего - противоположно ему. Такая перестройка картины вторичных течений качественно согласуется с опытами Элдера [60] при визуальном наблюдении естественной конвекции на парафине и силиконовых маслах при числе $Gr_L \cdot Pr \cong 10^6$. Нужно отметить, что при числе Грасгофа $Gr_L = 10^6 - 5 \cdot 10^6$ качество разностного решения на сетке с числом узлов 21×21 ухудшается из-за значительных негладкостей в поле течения. Как отмечалось ранее, симметричная разностная аппроксимация (42-48) дает при этих числах Грасгофа пространственные "биения", которые затруднительно отделить от действительно имеющих градиентов в поле течения (фиг. 75). На более крупных сетках с числом узлов 11×11 и 15×15 аналогичные эффекты наблюдались в работах [64 - 66] при меньших числах Грасгофа $Gr_L = 10^5 - 4 \cdot 10^5$ (фиг. 48).



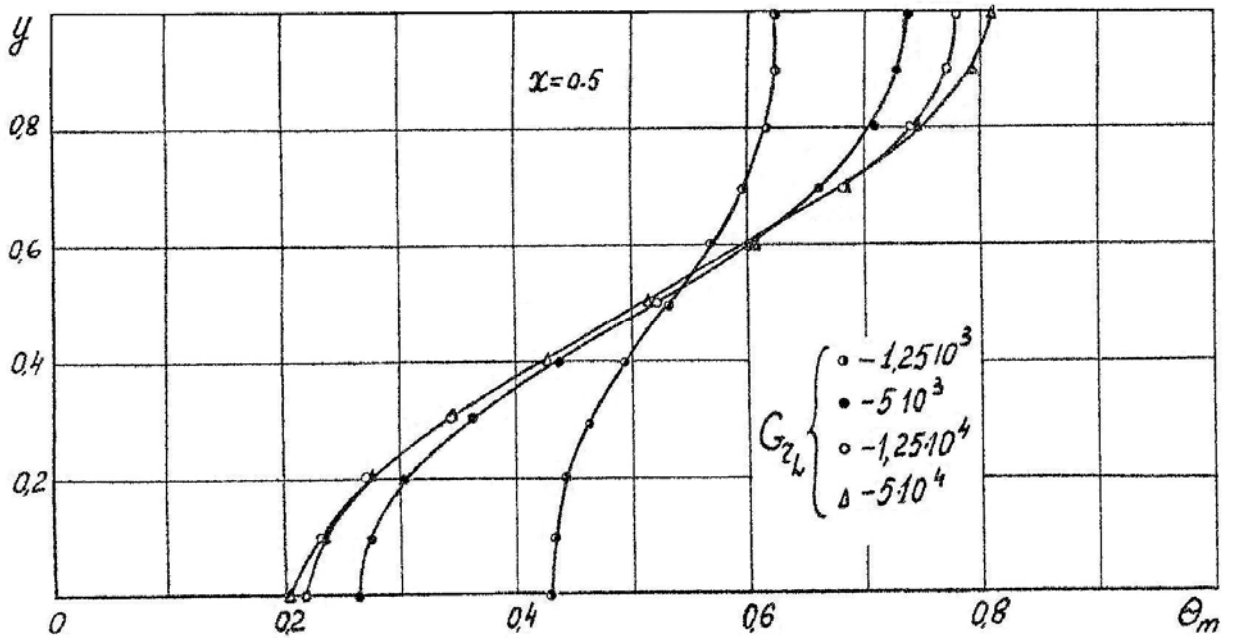
Фиг. 64. Распределение давления по оси y . $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$



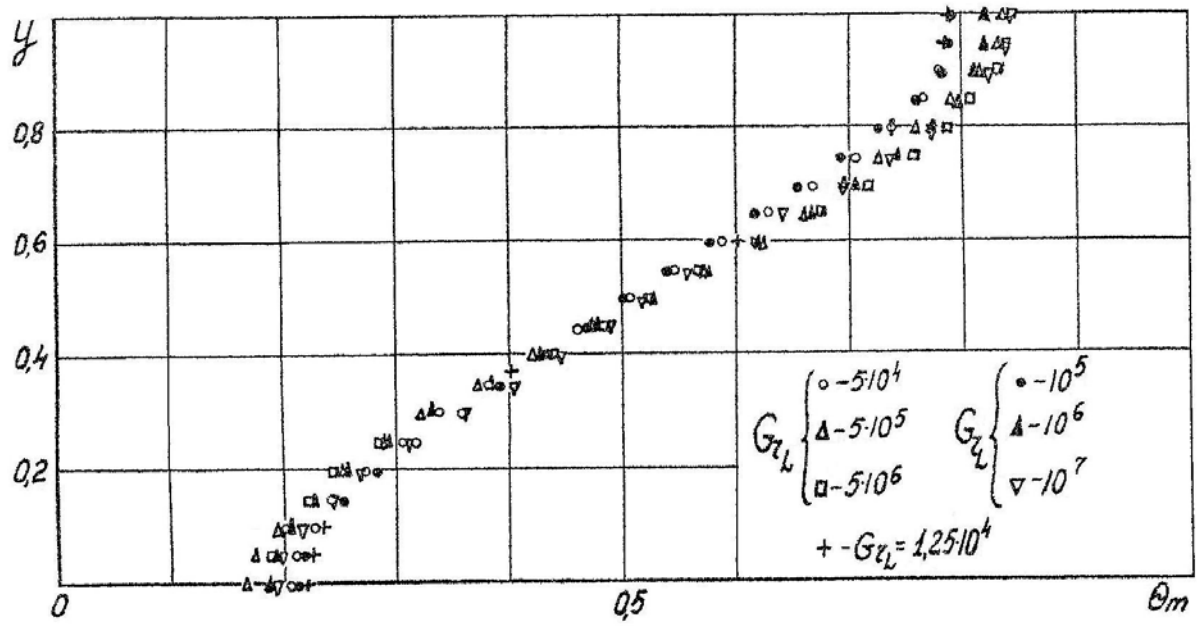
Фиг. 65. Распределение давления по оси x . $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$



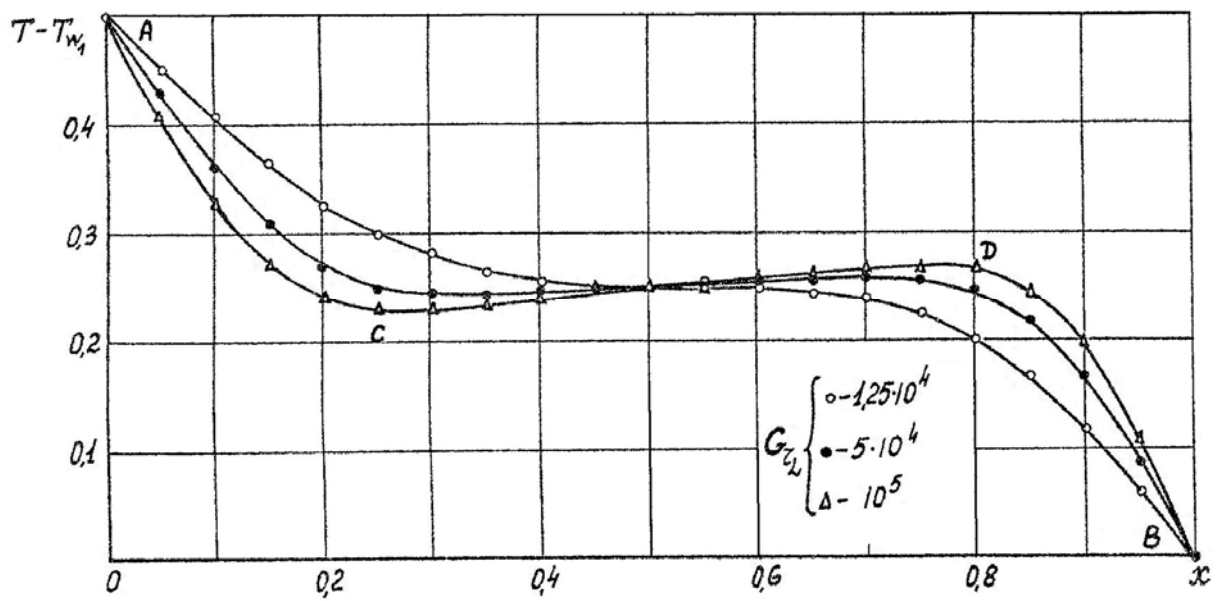
Фиг. 66. Распределение местных тепловых потоков по стенкам в режиме теплопроводности



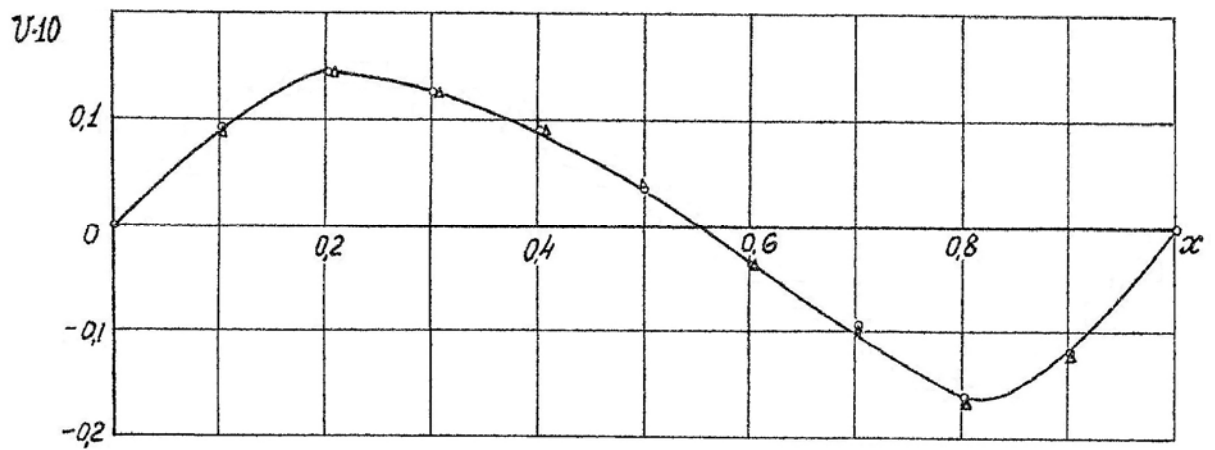
Фиг. 67. Распределение температуры в центральном сечении по вертикали в различных режимах по числу Грасгофа



Фиг. 68. Распределение температуры по вертикали в центральном сечении ($x = 0.5$) при различных числах Грасгофа

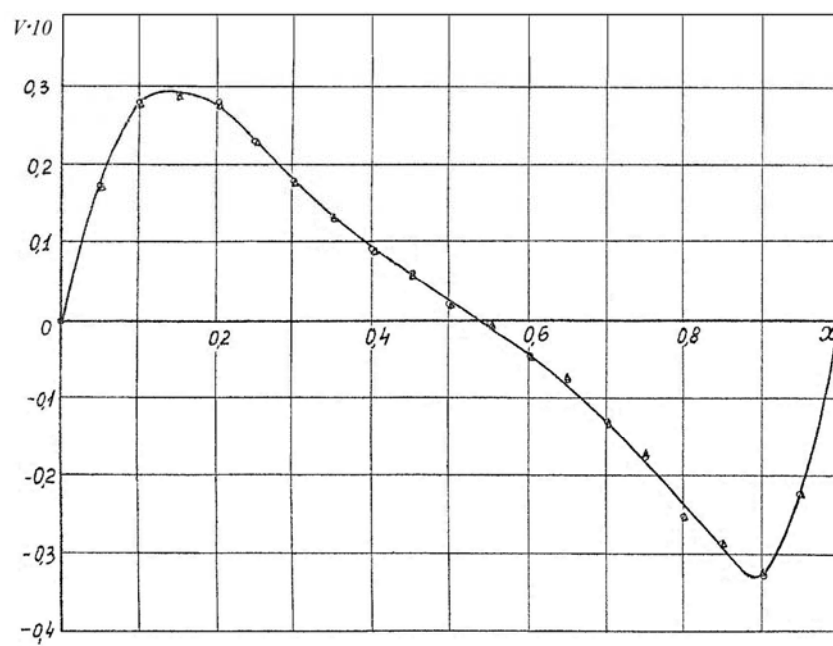


Фиг. 69. Профиль температуры в сечении $y = 0.5$ при различных числах Грасгофа



Фиг. 70. Профиль вертикальной составляющей скорости

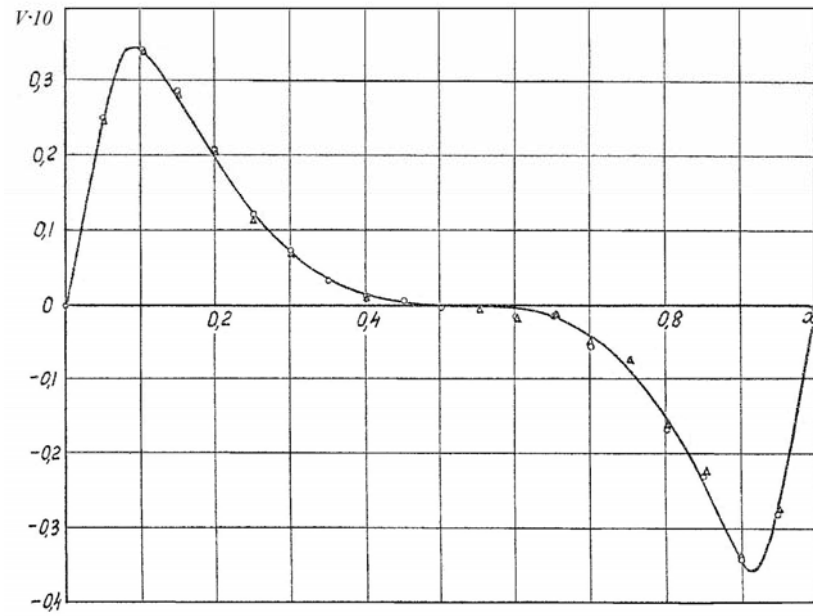
$$y = 0.5, \quad Gr_L = 1.25 \cdot 10^3, \quad \Delta - n, \quad \circ - n+50$$



Фиг. 71. Профиль вертикальной составляющей скорости

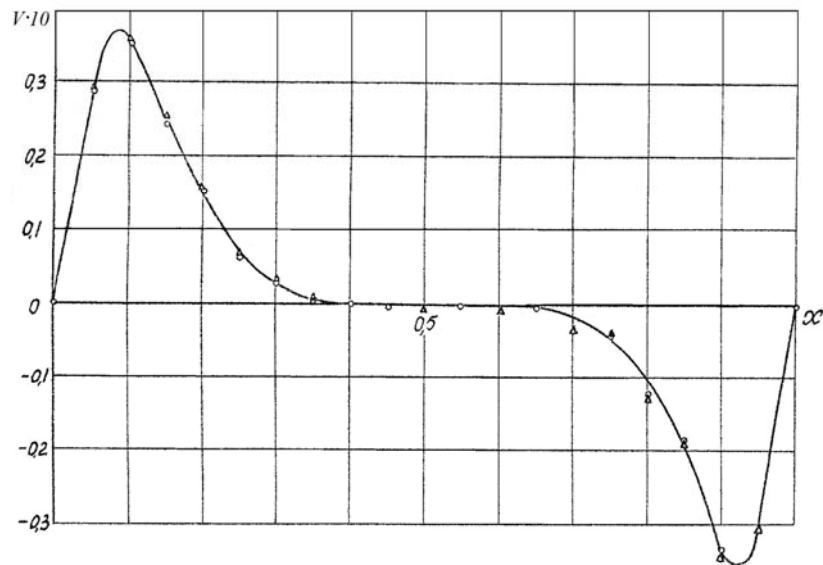
$$y = 0.5, \quad Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$$

$$\Delta - n, \quad \circ - n+50$$



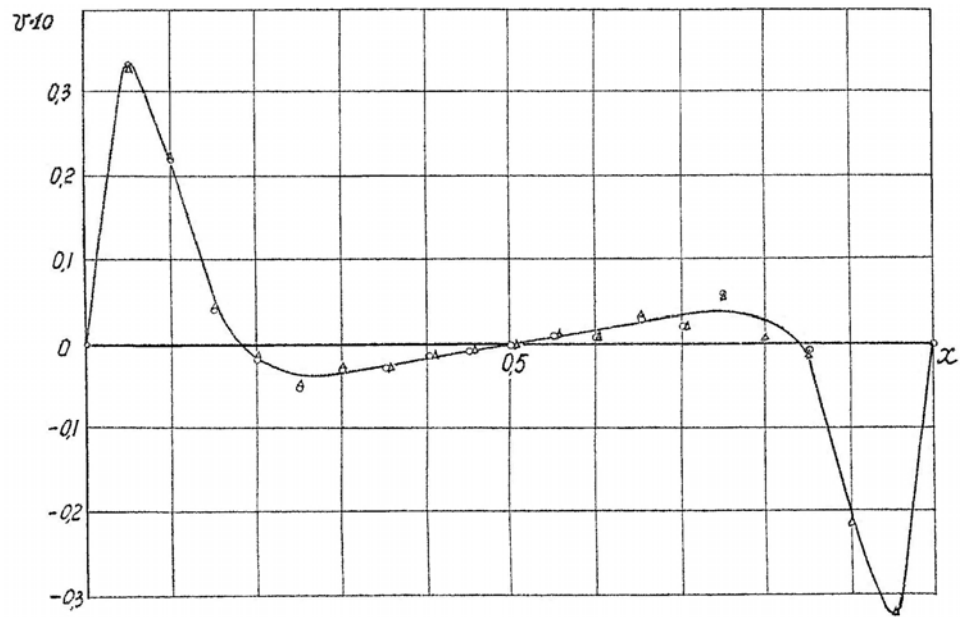
Фиг. 72. Профиль вертикальной составляющей скорости $y = 0.5$, $Gr_L = 5 \cdot 10^4$

$\circ - n, \quad \Delta - n+50$



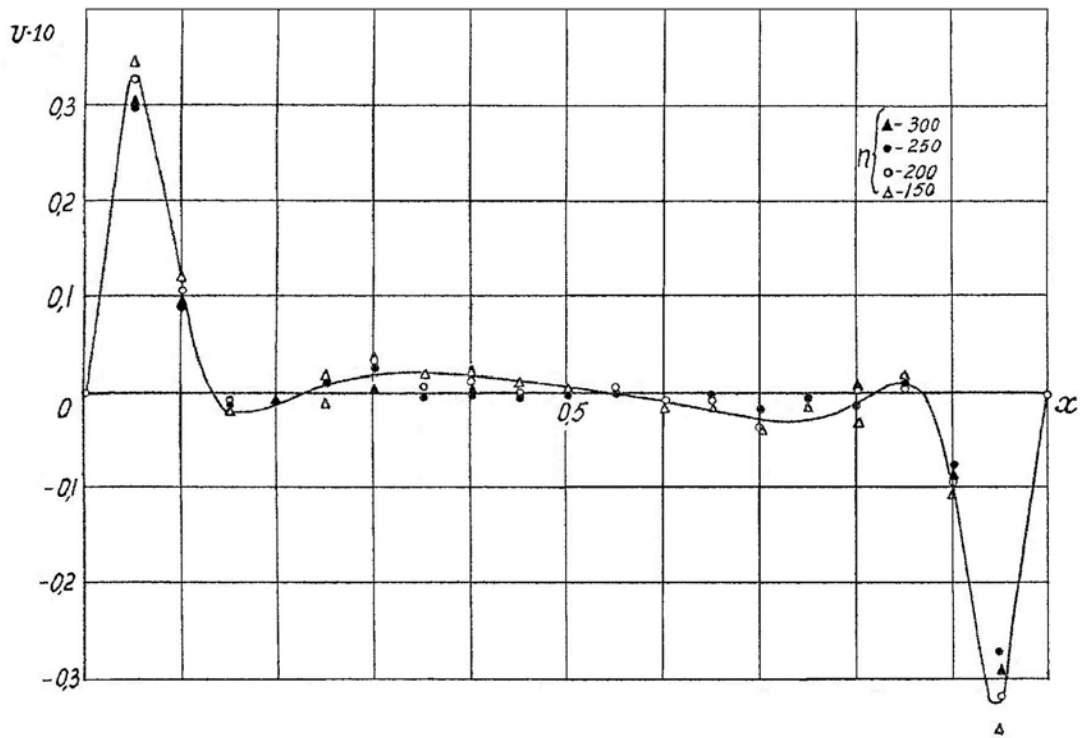
Фиг. 73. Профиль вертикальной составляющей скорости $y = 0.5$, $Gr_L = 10^5$

$\Delta - n, \quad \circ - n+50$



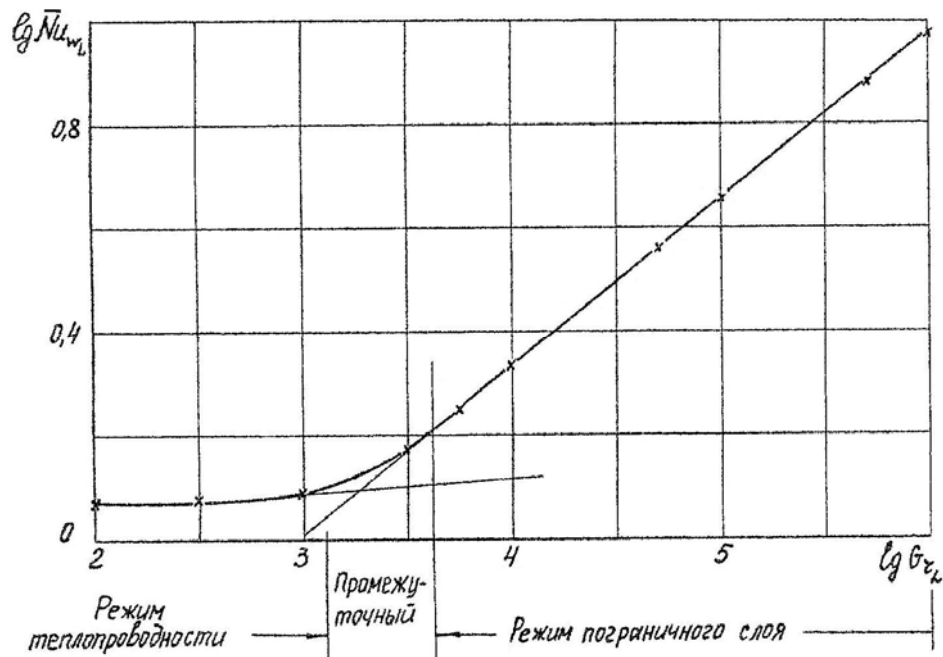
Фиг. 74. Профиль вертикальной составляющей скорости $y = 0.5$, $Gr_L = 5 \cdot 10^5$

$\Delta - n$, $\circ - n+50$

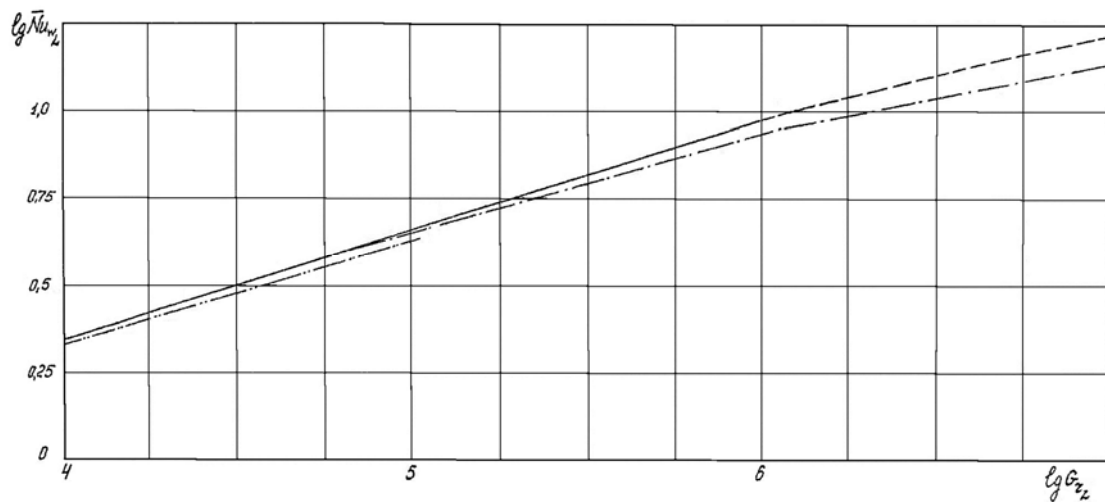


Фиг. 75. Профиль вертикальной составляющей скорости

$y = 0.5$, $Gr_L = 5 \cdot 10^6$



Фиг. 76. Зависимость среднего числа \bar{Nu}_{wL} от числа Грасгофа



Фиг. 77. Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Грасгофа

————— нагр. стенка } сетка 21x21
 - - - - - хол. стенка }
 - · - · - сетка 11x11

Средний поток тепла на стенке устанавливался, однако, и при этих числах Грасгофа по времени с точностью 0,5-1%. Невязка в интегральном балансе тепла (93) на стационарном режиме увеличивается при $Gr_L = 10^6 - 5 \cdot 10^6$ до 12-18%, причем средний поток тепла на нагретой стенке

больше, чем на холодной. В этом случае, учитывая, что погрешность, вызванная конечной величиной шага сетки, занижает средний поток тепла (фиг.41), среднее число Нуссельта вычислялось по значению потока тепла \bar{q}_{w_2} на нагретой стенке. Зависимость среднего числа Нуссельта \bar{Nu}_{wL} от числа Грасгофа для рассмотренных выше трех режимов теплообмена в диапазоне $10^2 \leq Gr_L \leq 10^6$ и значениях остальных критериев, соответствующих (106) приводится на фиг. 76. В режиме пограничного слоя при $5 \cdot 10^3 \leq Gr_L \leq 10^6$ эта зависимость аппроксимируется формулой

$$\bar{Nu}_{wL} = 0,115 Gr_L^{0.32} \quad (110)$$

Здесь

$$\bar{Nu}_{wL} = \frac{\bar{q}_w L}{k_{w_1} (T_{w_2} - T_{w_1})}, \quad Gr_L = \frac{gL^3 \rho_{w_2}^2}{\mu_{w_1}^2} \cdot \frac{T_{w_2} - T_{w_1}}{T_{w_1}}$$

Увеличение интенсивности теплопередачи с ростом числа Грасгофа по сравнению со случаем ламинарной конвекции на одиночной пластине, где имеется зависимость $\bar{Nu}_{wL} \sim Gr_L^{0.25}$ [73], объясняется здесь наличием развитого вихревого течения.

На фиг. 77 отдельно приведена зависимость среднего числа Нуссельта от числа Грасгофа, полученная в серии расчетов на сетке 21x21 в диапазоне $10^4 \leq Gr_L \leq 10^7$ (штрих-пунктирной линией показано значение \bar{Nu}_{wL} , вычисленное по среднему потоку тепла \bar{q}_{w_1} , на холодной стенке; кроме того, штрих-пунктирной линией с двумя точками показаны значения \bar{Nu}_{wL} , полученные на сетке 11x11). В диапазоне $10^6 \leq Gr_L \leq 10^7$ зависимость $\bar{Nu}_{wL}(Gr_L)$ аппроксимируется формулой:

$$\bar{Nu}_{wL} = 0.35 Gr_L^{0.24} \quad (110')$$

Снижение интенсивности теплопередачи в зависимости от числа Грасгофа в этом диапазоне объясняется, по-видимому, наличием развитых вторичных течений, которые препятствуют переносу тепла от нагретой стенки к холодной. Подтверждение этого факта имеется лишь в опытах на кольцевых моделях [70-72]. Ввиду отмечавшегося низкого качества разностного решения при этих числах Грасгофа зависимость (110') является ориентировочной.

Предлагавшиеся ранее приближенные схемы для построения картины течения во внутренней части области при больших числах Грасгофа [67 - 68], основаны в большей части на гипотезе Бетчелора [57], состоящей в том, что при больших числах Грасгофа на стенках образуются пограничные слои, а внутри области имеется ядро с постоянной температурой и завихренностью. Как экспериментальные данные [58 - 60], так и результаты расчетов уравнений Навье-Стокса, представленные выше, показывают, что поле температуры и течение внутри области при больших числах Грасгофа имеют значительно более сложную структуру и неоднородны как в вертикальном, так и горизонтальном направлении. Однако, вплоть до чисел $Gr_L \sim 5 \cdot 10^6$ течение имеет ламинарный характер и, по-видимому, стационарно.

§ 4. Влияние на течение и теплообмен физических свойств и сжимаемости газа

Здесь, как и выше (§ 2, 3), рассматривается течение и теплообмен в замкнутой области с боковым подогревом и вертикальным направлением внешней силы.

В системе определяющих критериев подобия (105) влияние физических свойств газа учитывается критерием Прандтля Pr , отношением теплоемкостей

$$\chi = \frac{C_p}{C_v} \text{ и отношением константы Сатерленда к масштабу температуры } \frac{C}{T_{w1}},$$

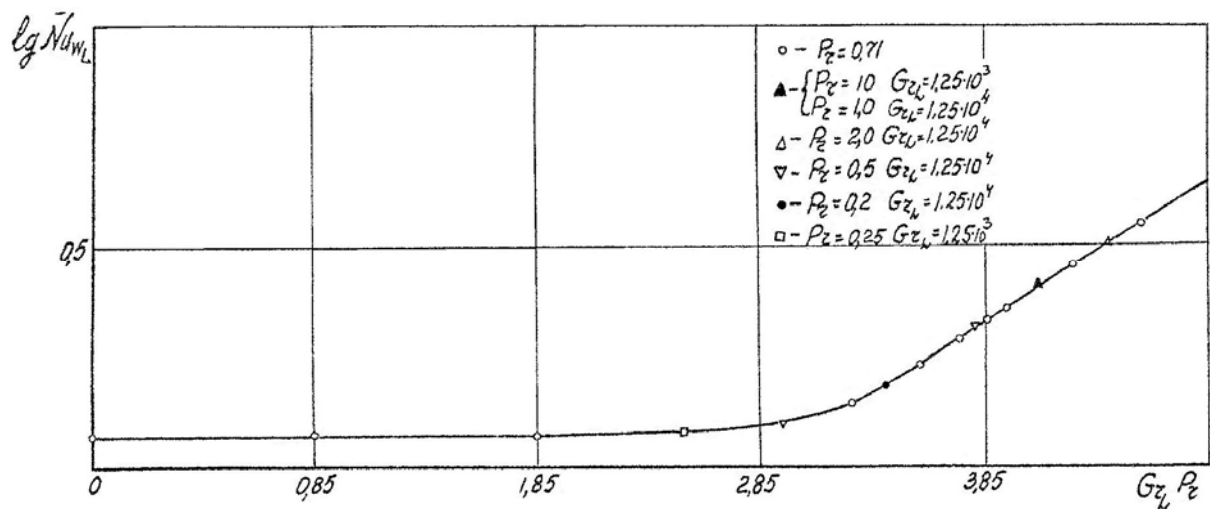
которое входит в закон изменения вязкости и теплопроводности с температурой

(72). Значения чисел $Pr, \chi, \frac{C}{T_{w1}}$ для типичных газов [5, 74, 75] приведены в таблице 3 ($T_{w1} = 300^\circ K$).

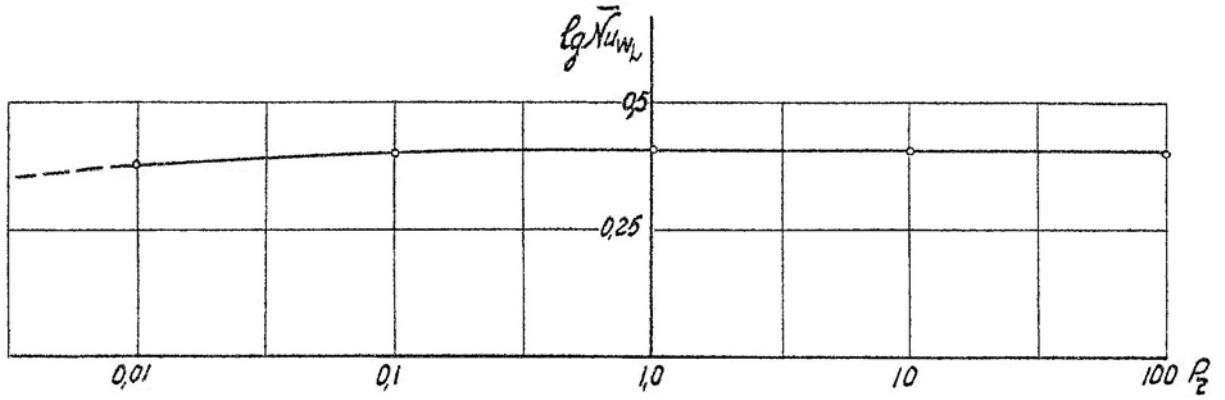
Таблица № 3

| | Воздух | O_2 | H_2 | N_2 | He | Ar | CO_2 |
|--------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| Pr | 0,71 | 0,720 | 0,688 | 0,705 | 0,684 | 0,663 | 0,780 |
| χ | 1,405 | 1,40 | 1,407 | 1,401 | 1,63 | 1,667 | 1.2÷1,3 |
| $\frac{C}{T_{w1}}$ | 0,37 | 0,46 | 0,275 | 0,33 | 0,27 | 0,565 | 0,39 |

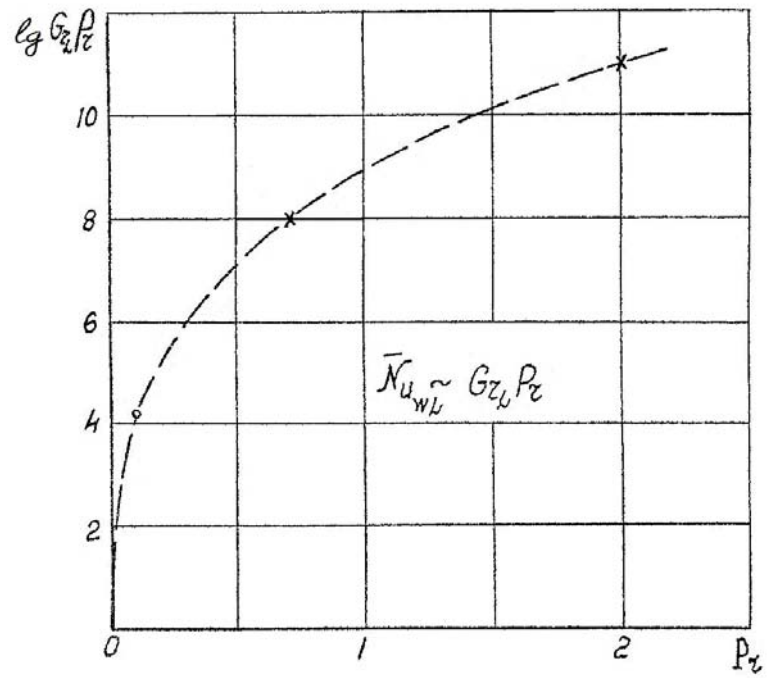
Исследование влияния физических свойств газа проводилось при остальных фиксированных критериях подобия, числовые значения которых

Фиг. 78. Зависимость среднего числа Нуссельта от произведения $Gr_L Pr$

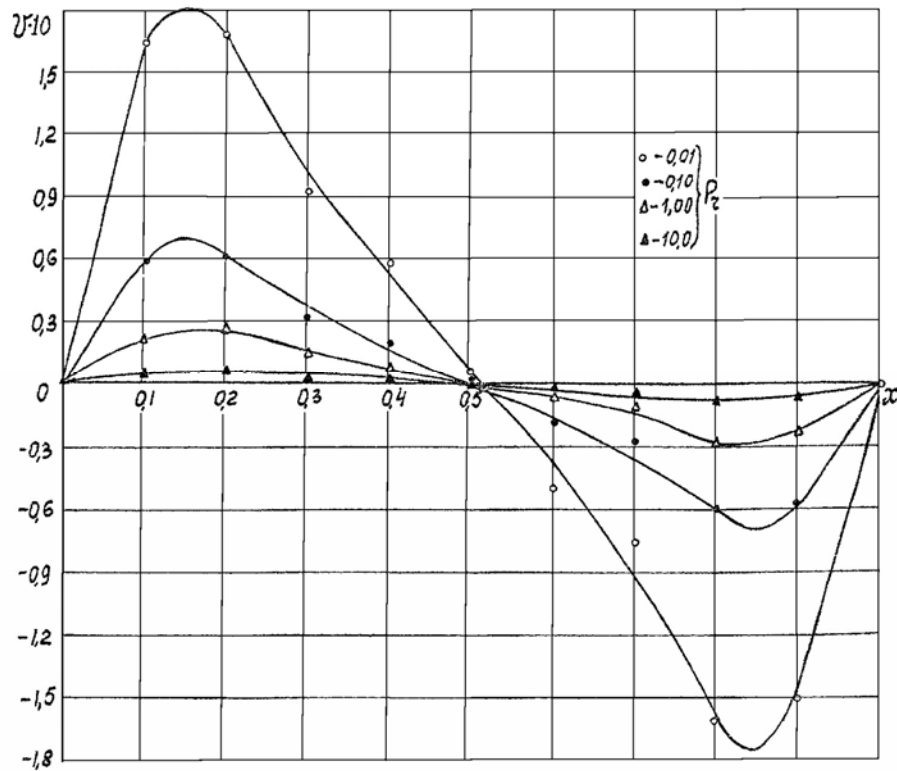
соответствовали (106). В этих расчетах, как правило, использовалась сетка, имеющая 11x11 узлов.



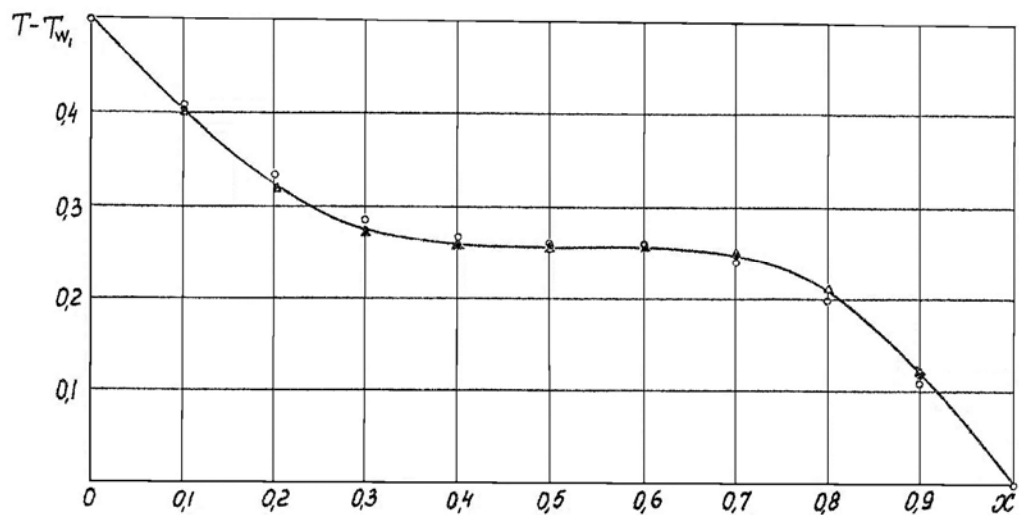
Фиг. 79. Влияние числа Прандтля при постоянном $Gr_L \cdot Pr = 1.25 \cdot 10^4$



Фиг. 80. Ориентировочная граница режимов по числам $Gr_L Pr, Pr$



Фиг. 81. Влияние числа Pr на профиль вертикальной составляющей скорости в сечении $y = 0.5$ при постоянном $Gr_L \cdot Pr = 1.25 \cdot 10^4$



Фиг. 82. Профили температуры ($y = 0.5$) при различных числах Прандтля ($Gr_L \cdot Pr = 1.25 \cdot 10^4$)

$$\left. \begin{array}{l} \circ - 0.01 \\ \bullet - 0.1 \\ \Delta - 10 \end{array} \right\} Pr$$

Влияние числа Прандтля

В зависимости от соотношения сил инерции и вязкости имеются два предельных режима течения и теплообмена при естественной конвекции - режим, в котором определяющим является произведение $Gr_L \cdot Pr$ и режим, в котором определяющим является произведение $Gr_L \cdot Pr^2$ [72, 76]. Достаточные условия для осуществления этих режимов можно получить и исходя из рассматриваемой здесь системы уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа, если пренебречь в уравнении энергии выделением тепла за счет трения $\frac{\mu\chi(\chi-1)}{C_R}\Phi$. Тогда получим [91] при

$$J_u \ll \frac{1}{C_R} D_1 u, \quad J_v \ll \frac{1}{C_R} D_2 v \quad (111)$$

$$\bar{Nu}_{wL} = \varphi_1(Gr_L \cdot Pr)$$

Здесь J_u, J_v - соответственно - инерционные члены в уравнениях количества движения (10, 11).

$D_1 u, D_2 v$ - соответственно - вязкостные члены в уравнениях количества движения (10, 11)

при

$$J_u \gg \frac{1}{C_R} D_1 u, \quad J_v \gg \frac{1}{C_R} D_2 v \quad (112)$$

$$\bar{Nu}_{wL} = \varphi_2(Gr_L \cdot Pr^2)$$

Остальные критерии подобия, кроме Gr_L и Pr , в соотношениях (111) и (112) фиксированы.

Для исследования влияния числа Прандтля на течение и теплообмен проведены две серии расчетов. В первой из них изменялись числа Gr_L и Pr и произведение $Gr_L \cdot Pr$ таким образом, чтобы охватить все три режима теплообмена, рассмотренные в § 3. Значения чисел Pr , Gr_L и $Gr_L \cdot Pr$ указаны

в приводимой ниже таблице

Таблица № 4

| Pr | 10 | 2.0 | 1.0 | 0.5 | 0.25 | 0.2 |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| Gr_L | $1,25 \cdot 10^3$ | $1,25 \cdot 10^4$ | $1,25 \cdot 10^4$ | $1,25 \cdot 10^4$ | $1,25 \cdot 10^3$ | $1,25 \cdot 10^4$ |
| $Gr_L \cdot Pr$ | $1,25 \cdot 10^4$ | $2,5 \cdot 10^4$ | $1,25 \cdot 10^4$ | $6,25 \cdot 10^3$ | $3,125 \cdot 10^3$ | $2,5 \cdot 10^3$ |

Зависимость $\bar{Nu}_{wL} = (Gr_L \cdot Pr)$, полученная в этих расчетах, вместе с зависимостью, полученной ранее (§ 1) при фиксированном числе $Pr = 0,71$, приведена на фиг. 78. Отсюда видно, что в рассмотренном диапазоне чисел $Gr_L \cdot Pr$ и чисел Pr средняя теплопередача практически определяется произведением $Gr_L \cdot Pr$ и не расслаивается по числу Прандтля.

Вторая серия расчетов выполнена при постоянном значении произведения $Gr_L \cdot Pr = 1,25 \cdot 10^4$, но в значительно более широком диапазоне чисел Прандтля $0,01 \leq Pr \leq 100$ с целью выявить тот диапазон изменения числа Pr , в котором справедлива зависимость $\bar{Nu}_{wL}(Gr_L \cdot Pr)$. Результаты этих расчетов даны на фиг. 79 и показывают, что расслоение зависимости $\bar{Nu}_{wL}(Gr_L \cdot Pr)$ по числу Прандтля имеется лишь при малых значениях Pr . В диапазоне $Pr = 0,1 \div 0,01$ отклонение зависимости $\bar{Nu}_{wL}(Pr)$ от постоянной при $Gr_L \cdot Pr = 1,24 \cdot 10^4$ составляет 2-6 %. В сторону больших чисел Pr вплоть до $Pr = 100$ расслоения зависимости $\bar{Nu}_{wL}(Gr_L \cdot Pr)$ по числу Pr не обнаружено. Эти результаты получены для совершенного газа, но, по-видимому, справедливы и для жидкостей при малых перепадах температур $\frac{T_{w2}}{T_{w1}} \rightarrow 1$, так как в этом случае зависимость $\rho \sim \frac{1}{T}$ близка к линейной. Число

Прандтля для жидкостей изменяется в широком диапазоне - от 0,01 до 10^5 [74].

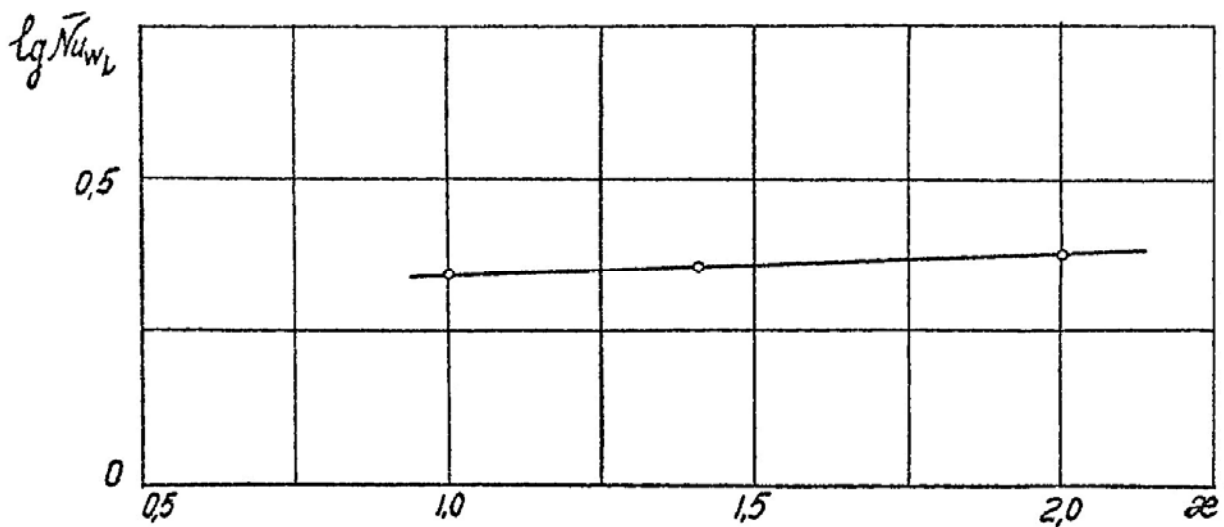
Спирты имеют значение $Pr \cong 0,6 \div 0,9$, близкое к газам, у воды $Pr = 7,1$, у

масел $Pr = 10 \div 10^5$. Жидкие металлы (Na, k , эвтектика $Na - k$) имеют значения $Pr = 0,02 \div 0,1$ и, таким образом, отклонение от зависимости $\bar{Nu}_{wL}(Gr_L \cdot Pr)$ при указанном значении произведения $Gr_L \cdot Pr$ возможно лишь у жидких металлов. При числе $Gr_L \cdot Pr = 2 \cdot 10^3$ в диапазоне $0,1 < Pr \leq 10^3$ для уравнений Навье-Стокса в несжимаемой жидкости аналогичный результат получен в работе [65].

Второй предельный режим (112), в котором вязкость не влияет на поле температуры, в проведенных расчетах не реализовался. Так как неравенство (112) не выполняется вблизи стенки, то этот режим реализуется в виде [77].

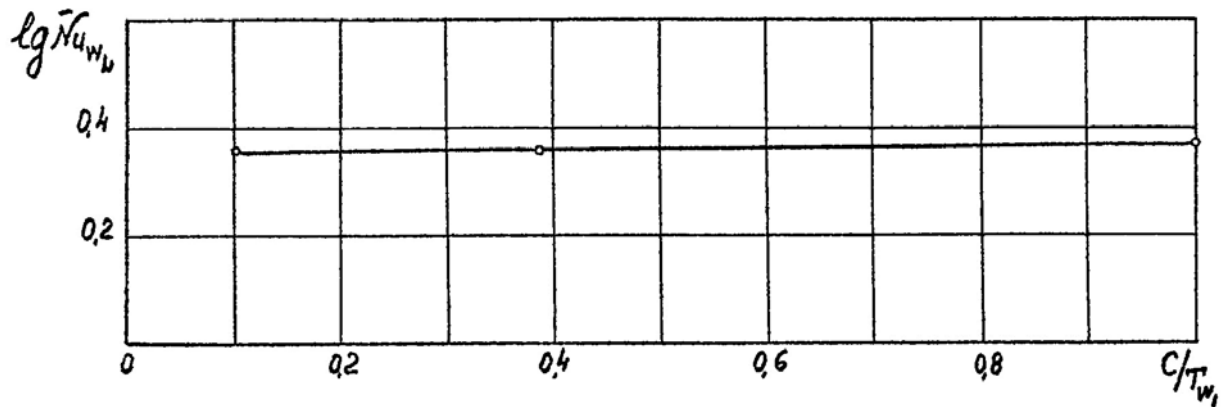
$$\bar{Nu}_{wL} = \varphi_3(Gr_L \cdot Pr^m), \quad (113)$$

где $m < 2$.



Фиг. 83. Влияние показателя адиабаты $\chi = \frac{C_p}{C_v}$ на среднее число Нуссельта

$$(Gr_L = 1,25 \cdot 10^4)$$



Фиг. 84. Влияние параметра C/T_{w1} на среднее число Нуссельта

$$Gr_L = 1.25 \cdot 10^4, T_{w2}/T_{w1} = 1.5$$

Этот режим следует ожидать при очень малых числах Прандтля и больших числах Грасгофа, при которых течение в слое, по-видимому, уже турбулентно. Ориентировочная граница двух этих режимов, построенная по полученным здесь результатам и результатам экспериментов [70, 77], приведена на фиг. 80.

Изменение местных значений скорости и температуры при различных числах Прандтля и постоянном произведении $Gr_L \cdot Pr = 1,25 \cdot 10^4$ показано на фиг. 81, 82. При уменьшении числа Прандтля (что соответствует также увеличению числа Грасгофа при $Gr_L \cdot Pr = const$) абсолютные значения скорости циркулирующего газа возрастают (фиг. 81). Это приводит к значительному увеличению переноса тепла конвекцией, но почти не изменяет поток тепла на стенке (фиг. 82) из-за увеличения теплопроводности газа. При $Pr = 0,01$ преобладающее влияние теплопроводности газа приводит к некоторому падению потока тепла на стенке и среднего числа Нуссельта (фиг. 82, 79).

Влияние на среднее число Нуссельта изменения отношения теплоемкостей χ показано на фиг. 83. В диапазоне $1.0 \leq \chi \leq 2,0$ изменение \bar{Nu}_{wL} составляет около 10 % и может быть учтено зависимостью:

$$\frac{\bar{Nu}_{wL}(\chi)}{\bar{Nu}_{wL}(\chi=1.0)} = \chi^{0.13} \quad (114)$$

Влияние на число \bar{Nu}_{wL} изменения отношения $\frac{C}{T_{w1}}$ исследовано при $\frac{T_{w2}}{T_{w1}} = 1,5$ и в диапазоне $0,1 \leq \frac{C}{T_{w1}} \leq 1,0$. Этот результат приведен на фиг. 84 и показывает довольно слабую зависимость $\bar{Nu}_{wL} \left(\frac{C}{T_{w1}} \right)$ при указанных выше значениях $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$ и $\frac{C}{T_{w1}}$.

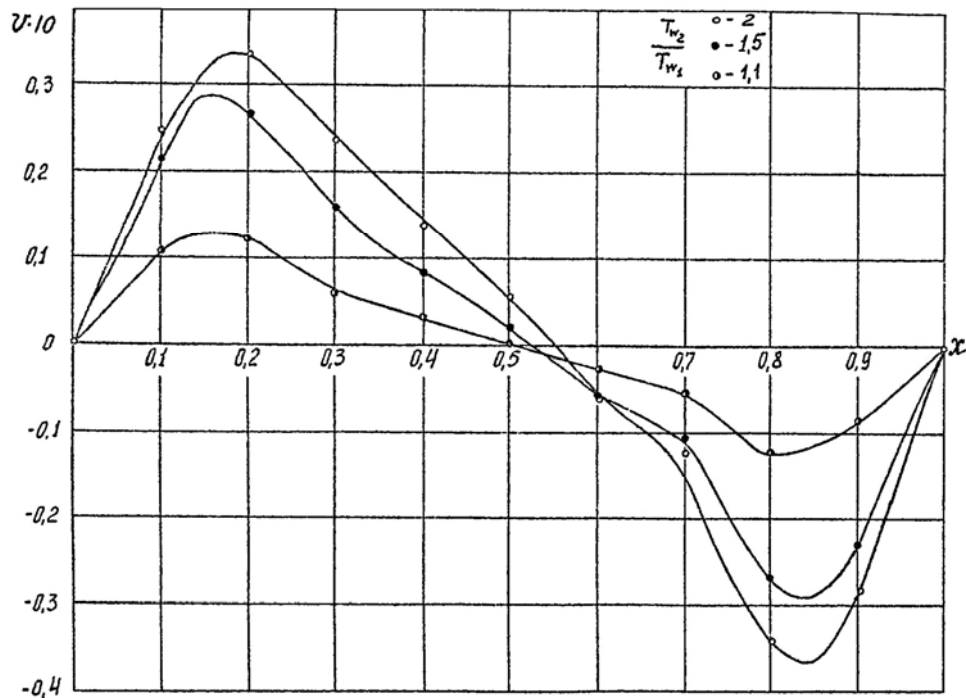
Влияние на течение и теплообмен сжимаемости газа

Температурная сжимаемость

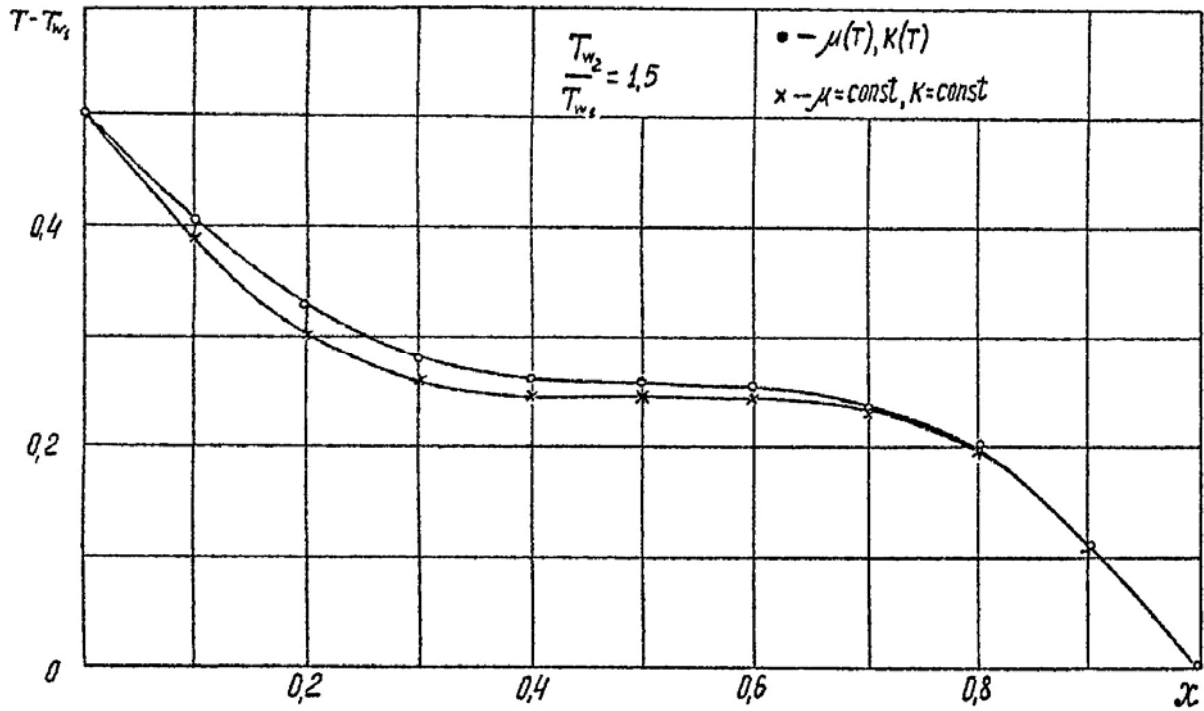
Отношение температур $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$ в системе критериев подобия (105) учитывает влияние изменения с температурой теплопроводности и вязкости газа и частично изменение с температурой плотности. Основное изменение плотности газа учтено в критерии Грасгофа, который является комбинацией числа Галилея и отношения температур: $Gr_L = Ga \cdot \left(\frac{T_{w2}}{T_{w1}} - 1 \right)$. Результаты серии расчетов, проведенных в диапазоне $1,1 \leq \frac{T_{w2}}{T_{w1}} \leq 2,0$ и значениях остальных критериев подобия, соответствующих (106), показаны на фиг. 85 — 89.

При увеличении отношения температур $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$ скорости циркулирующего газа возрастают (фиг. 85) ввиду увеличения неравномерности плотностей (и подъемных сил) поперек слоя. Качественное отличие в профилях скорости (упоминавшееся ранее в § I) состоит в смещении центра вихря в сторону

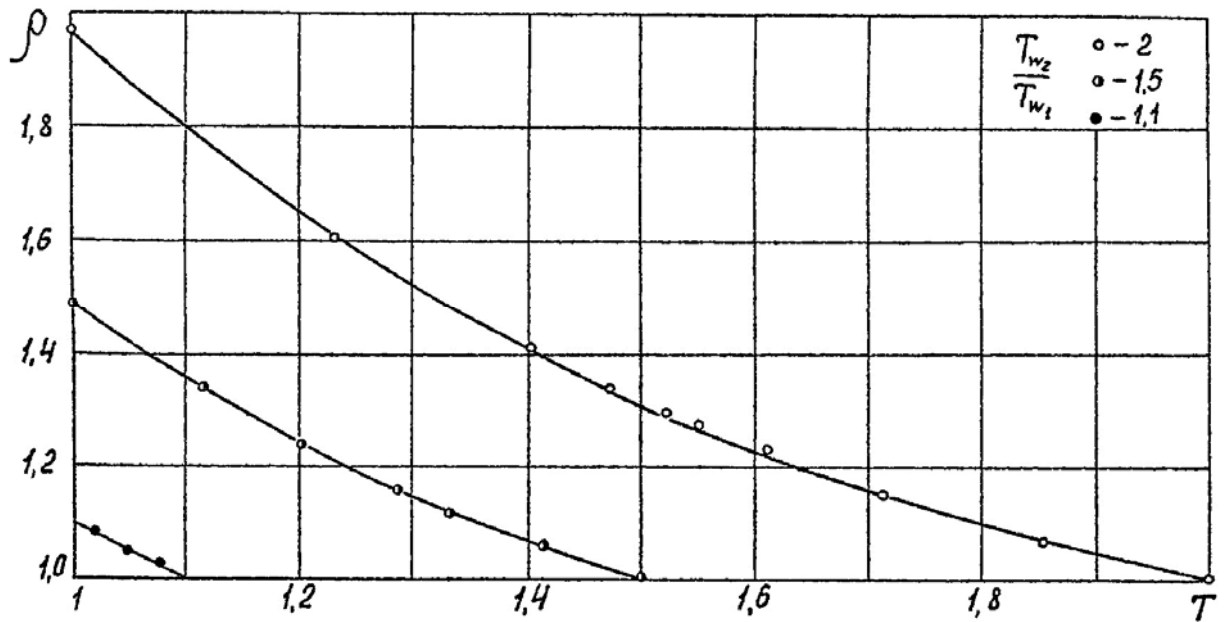
холодной стенки (фиг. 85) при увеличении $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$. Напротив, при малом отношении температур $\frac{T_{w2}}{T_{w1}} = 1,1$ профиль скорости почти симметричен и напоминает профиль скорости в несжимаемой жидкости. Ввиду изменения коэффициента теплопроводности с температурой профиль температуры поперек слоя также несимметричен (фиг. 86) и заметно отличается от профиля температуры в несжимаемой жидкости, в особенности ближе к нагретой стенке.



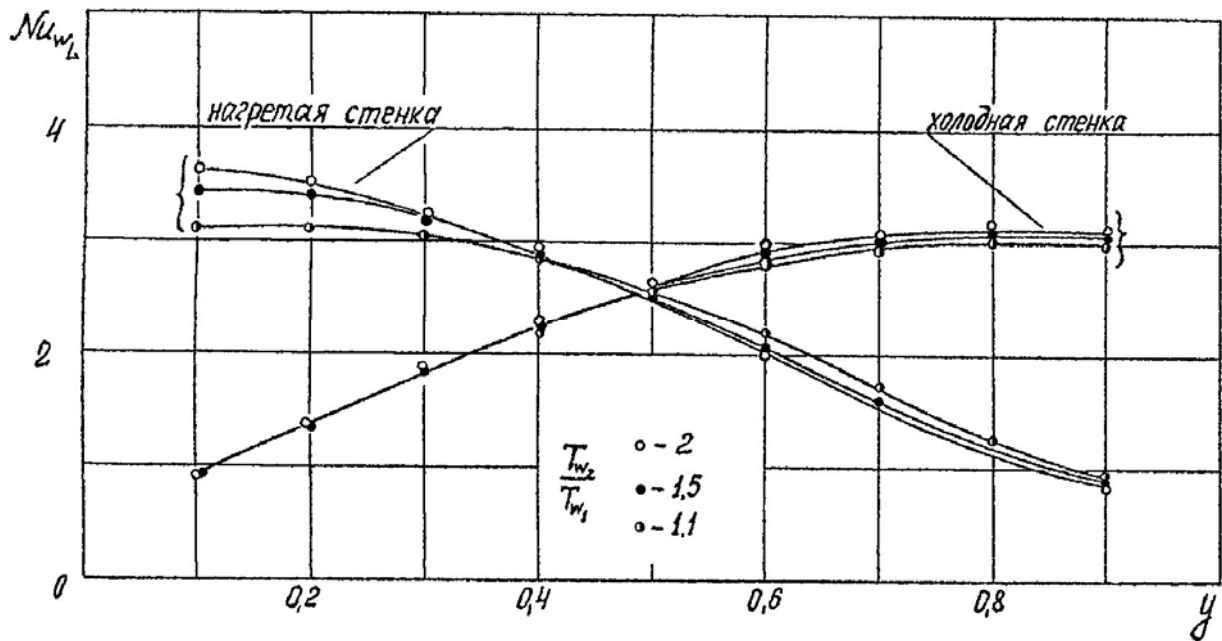
Фиг. 85. Профили вертикальной составляющей скорости $V(x)$ в сечении $y = 0.5$ при различных отношениях температур



Фиг. 86. Сопоставление профилей температуры при постоянных и переменных физических свойствах газа



Фиг. 87. Изменение плотности от температуры в сечении $y = 0.5$

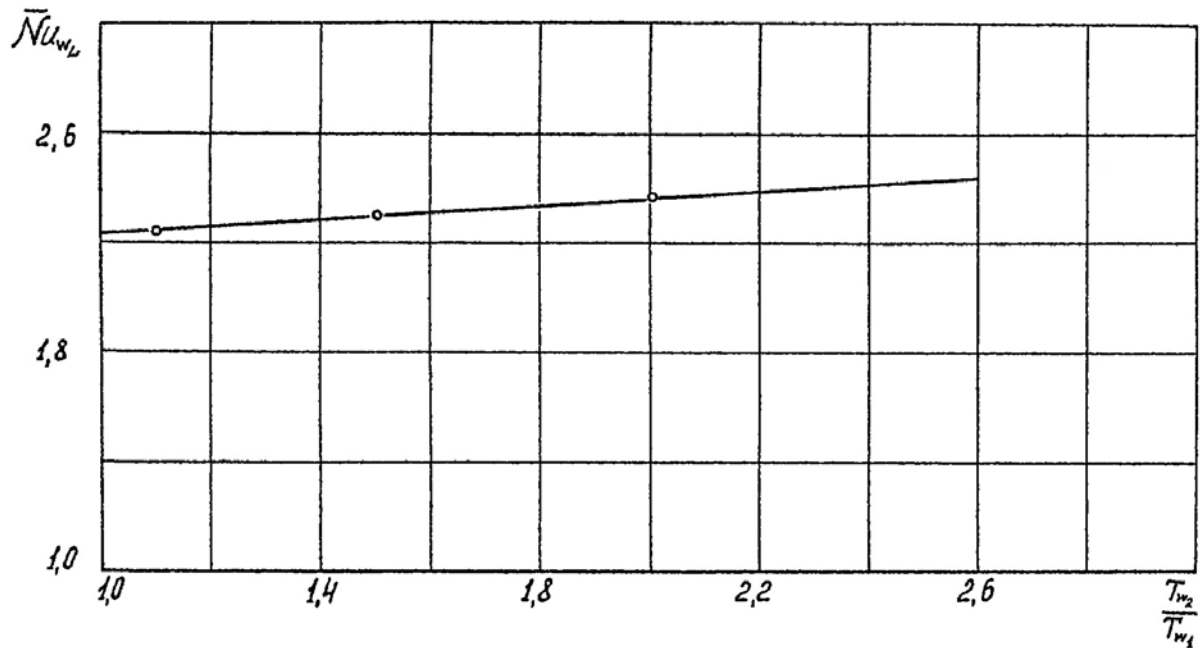


Фиг. 88. Местные числа Нуссельта на нагретой и холодной стенках при различных отношениях температур

Это относится и к распределению потоков тепла на нагретой и холодной стенках (фиг. 88). С ростом отношения температур $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$ увеличивается и отклонение от линейной зависимости плотности от температуры (фиг. 87). В рассмотренном диапазоне отношений температур $1.1 \leq \frac{T_{w2}}{T_{w1}} \leq 2.0$ основной эффект в изменении местных потоков тепла на стенках и средней передачи тепла вносит переменность физических свойств. На фиг. 88 крестиками показаны значения местного числа Нуссельта, вычисленные при $\frac{T_{w2}}{T_{w1}} = 1.5$ и $\mu, k = const$, которые близки к значениям Nu_w при $\frac{T_{w2}}{T_{w1}} = 1.1$ и $\mu(T), k(T)$.

Несмотря на значительное увеличение скорости циркулирующего газа, при увеличении отношения температур значения местного и среднего числа Нуссельта изменяются не столь существенно, так как одновременно возрастает

и перенос тепла через слой путем теплопроводности.



Фиг. 89. Влияние на среднее число Нуссельта отношения температур $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$

Зависимость среднего числа Нуссельта от отношения температур приведена на фиг. 89 и в диапазоне $1,1 \leq \frac{T_{w2}}{T_{w1}} \leq 2,0$ оказывается близкой к линейной, что позволяет с достаточной точностью экстраполировать ее до значения $\frac{T_{w2}}{T_{w1}} \rightarrow 1$. Влияние $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$ на среднюю теплопередачу в этом диапазоне можно учесть зависимостью (фиг. 89)

$$\frac{\bar{Nu}_{wL}\left(\frac{T_{w2}}{T_{w1}}\right)}{\bar{Nu}_{wL}\left(\frac{T_{w2}}{T_{w1}} \rightarrow 1\right)} = \left(\frac{T_{w2}}{T_{w1}}\right)^{0.085} \quad (115)$$

Отметим, что эта зависимость получена при постоянных других критериях (106), из которых особенно важен критерий Грасгофа, принимаемый нами в

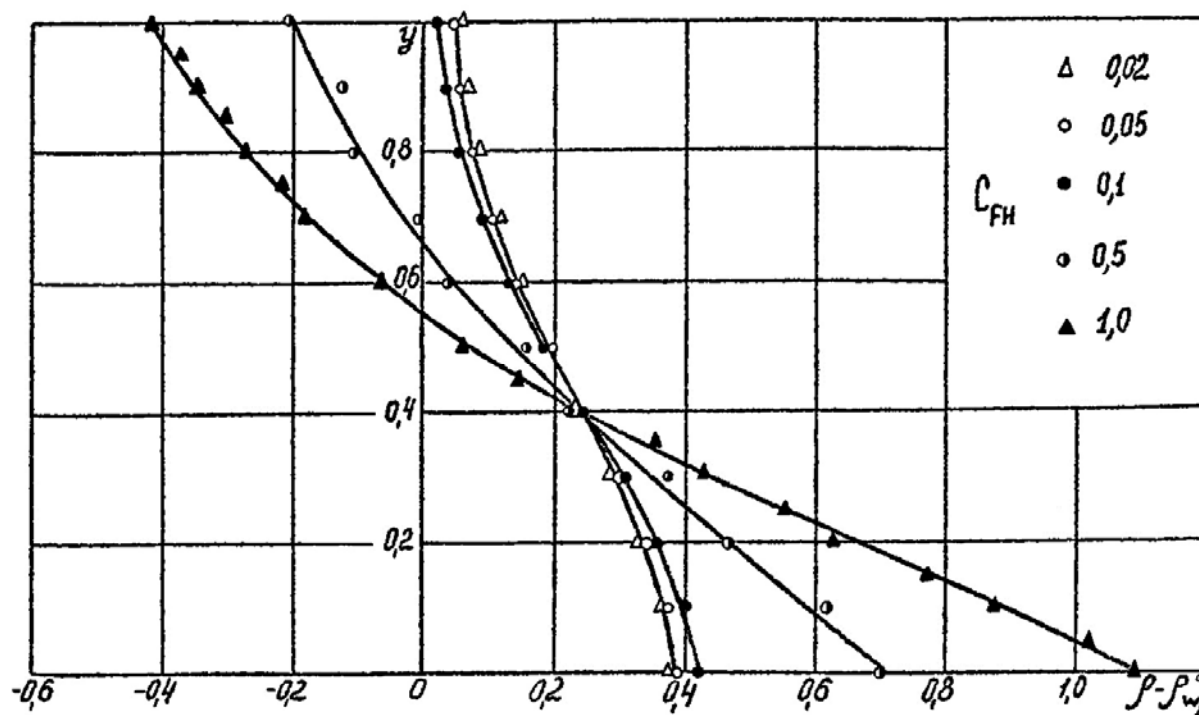
$$\text{виде } Gr_L = \frac{gL^3 \rho_{w_2}^2}{\mu_{w_1}^2} \cdot \frac{T_{w_2} - T_{w_1}}{T_{w_1}}.$$

Гидростатическая сжимаемость

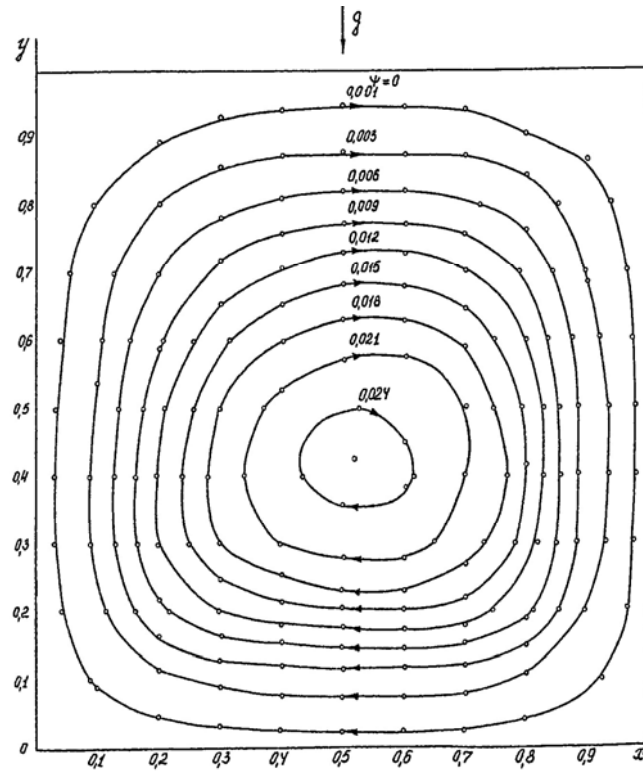
Влияние изменения плотности газа, вызванной изменением давления, учитывается в системе критериев подобия (106) критерием весовой (гидростатической) сжимаемости $C_{FH} = \frac{gH}{\chi R T_{w_1}}$. Большие значения этого критерия соответствуют большим значениям ускорения, вызываемого внешней силой (большие перегрузки в поле силы тяжести Земли или процессы в поле тяготения небесных тел, у которых масса намного превышает земную), либо областям большой протяженности H . Кроме того C_{FH} велико при низкой температуре стенки T_{w_1} . При естественной конвекции в земных условиях, встречающихся обычно в технических приложениях, значение этого критерия очень мало (например, при $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, $H = 1 \text{ м}$, $T_{w_1} = 300^\circ \text{К}$, $C_{FH} \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$), и его влиянием на течение и теплообмен можно пренебречь. Однако, вычисления при столь малых значениях C_{FH} затруднительны (см. § 2) и для расчета несжимаемых течений (в смысле малости C_{FH}) требуется оценить верхний предел значений, при которых влияние этого критерия мало.

Влияние критерия на течение и теплообмен исследовалось в серии расчетов в диапазоне $0,02 \leq C_{FH} \leq 1,0$ при значениях остальных критериев, соответствующих (106). Основные расчеты выполнены на сетке 11×11 . При $C_{FH} = 1,0$ использовалась также более мелкая сетка, имеющая число узлов 21×21 . Результаты расчетов приведены на фиг. 90-98.

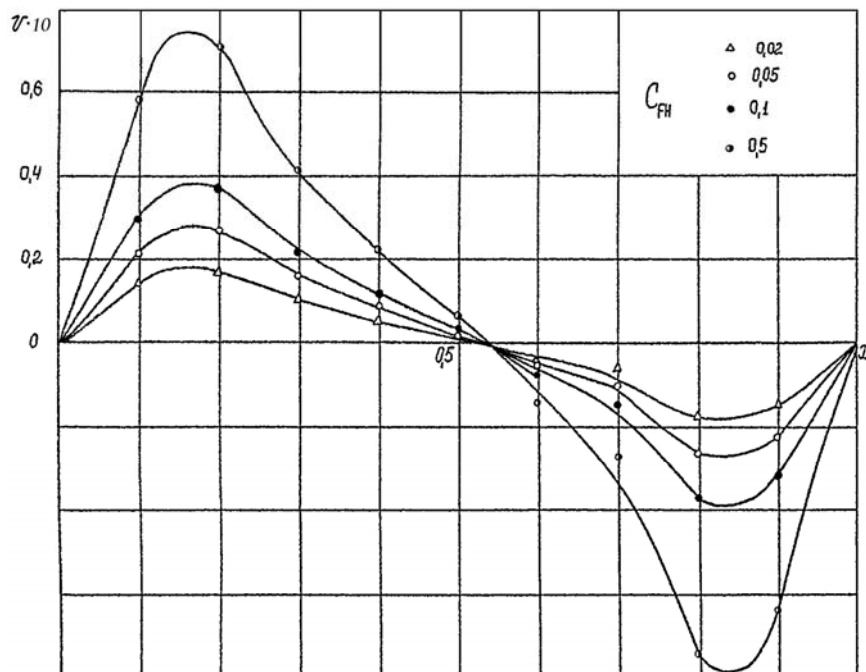
При увеличении C_{FH} плотность возрастает у нижнего и уменьшается у верхнего основания (фиг. 90). Можно выделить два основных режима течения и теплообмена в диапазоне изменения C_{FH} - режим сильного влияния весовой сжимаемости ($C_{FH} \geq 0,5 \div 1,0$) и режим слабого влияния весовой сжимаемости ($C_{FH} \leq 0,1$). Изменение плотности по вертикали велико при больших значениях $C_{FH} \geq 0,5 \div 1,0$. При малых $C_{FH} = 0,02 \div 1,0$ относительное изменение плотности невелико (фиг. 90), и при $C_{FH} \geq 0,02 \div 0,05$ профиль плотности $\rho(y)$, по-видимому, практически не отличается от профиля плотности при $C_{FH} \rightarrow 0$.



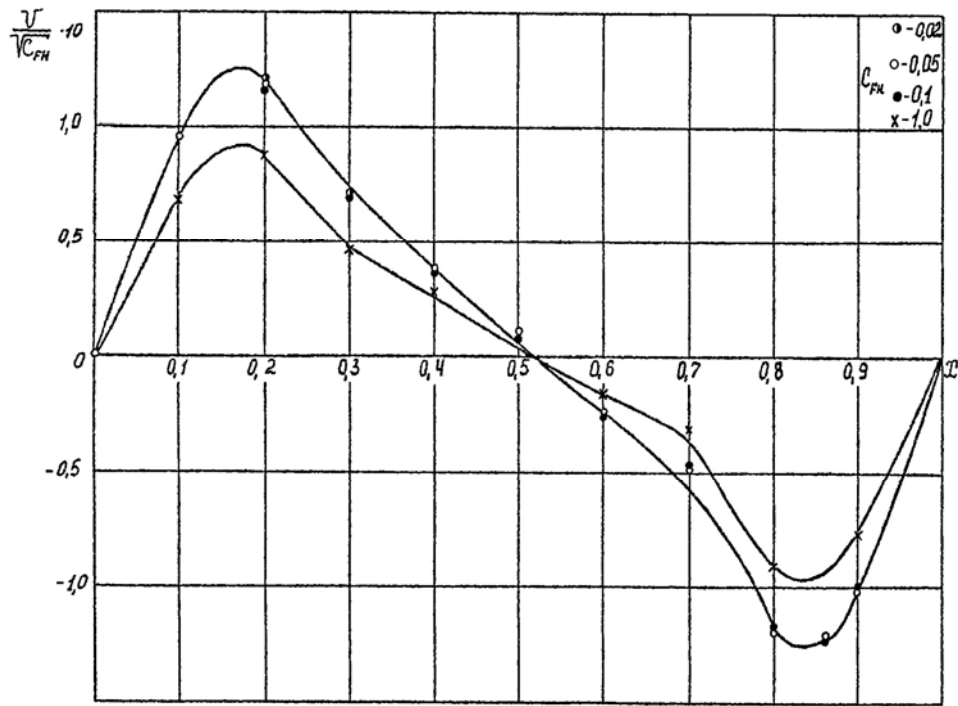
Фиг. 90. Профили плотности $\rho(y)$ ($x = 0.5$) при различных C_{FH}



Фиг. 91. Линии тока $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$, $C_{FH} = 1.0$



Фиг. 92. Профили скорости $V(x)$, $y = 0.5$ при различных C_{FH}



Фиг. 93. Профиль вертикальной составляющей скорости при различных C_{FH}

Значительное изменение плотности при больших значениях C_{FH} приводит, согласно балансу расхода (94), к вертикальной несимметрии течения (фиг. 95). Линии тока (фиг. 91) при $C_{FH} = 1,0$ заметно смещены и сгущаются в сторону нижнего основания. Профили вертикальной составляющей скорости $V(x)$ в сечении $y = 0,5$ при различных C_{FH} показаны на фиг. 92, 93. Отметим, что заметное увеличение абсолютных значений безразмерной скорости

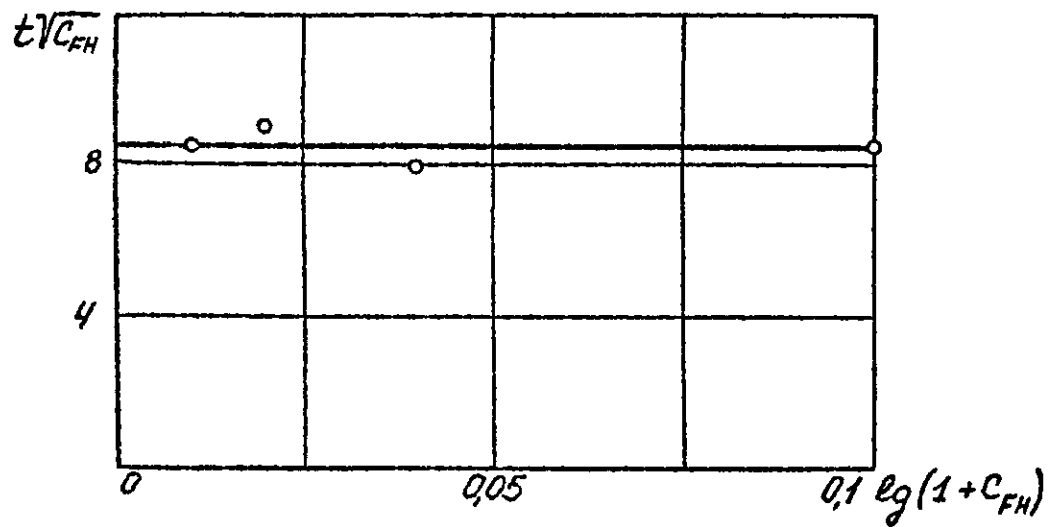
$\frac{V}{\sqrt{\chi R T_{w_1}}}$ даже при малых значениях $C_{FH} = 0.02 \div 0.1$ в данном случае не характеризует интенсивности теплообмена, ибо моделирование осуществляется

при постоянном числе Грасгофа $Gr_L = \frac{gL^3 \rho_{w_2}^2}{\mu_{w_1}^2} \frac{T_{w_2} - T_{w_1}}{T_{w_1}}$. При этом, если C_{FH}

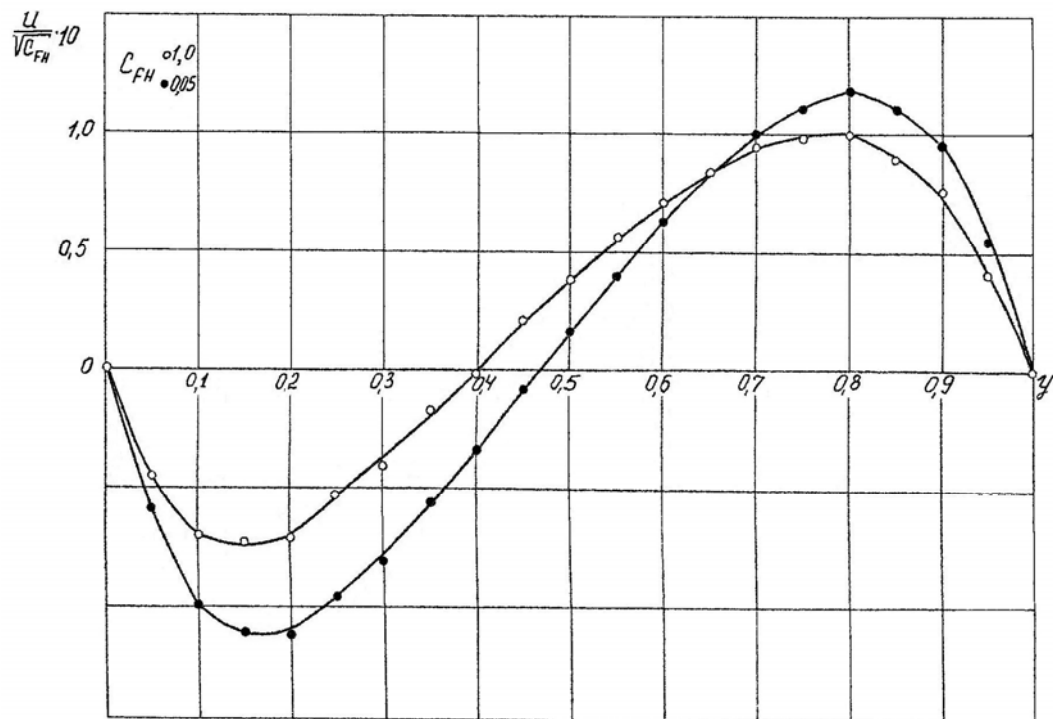
растет (например, из-за увеличения линейного размера или значения ускорения силы тяжести g), то для выполнения условия $Gr_L = const$ требуется уменьшить масштаб плотности (давления). При малых $C_{FH} = 0.02 \div 0.1$ расслоение значений скорости по этому критерию отсутствует в профилях

$\frac{V}{\sqrt{gH}} = \frac{V}{\sqrt{\chi RT_{w1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_{FH}}}$. Этот результат показан на фиг. 93. Аналогичный

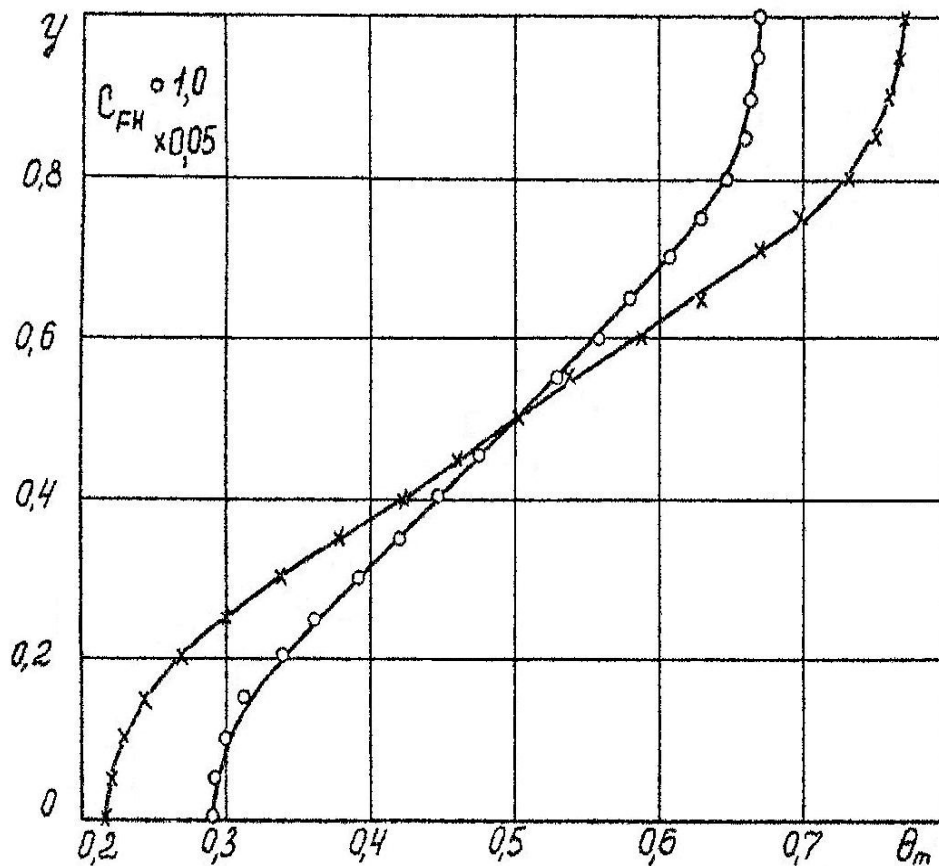
результат получается и для времени установления $\bar{t}_{уст.}$ (фиг. 94).



Фиг. 94. Время установления $t\sqrt{C_{FH}}$ при различных C_{FH}



Фиг. 95. Профиль горизонтальной составляющей скорости в режиме сильной и слабой гидростатической сжимаемости

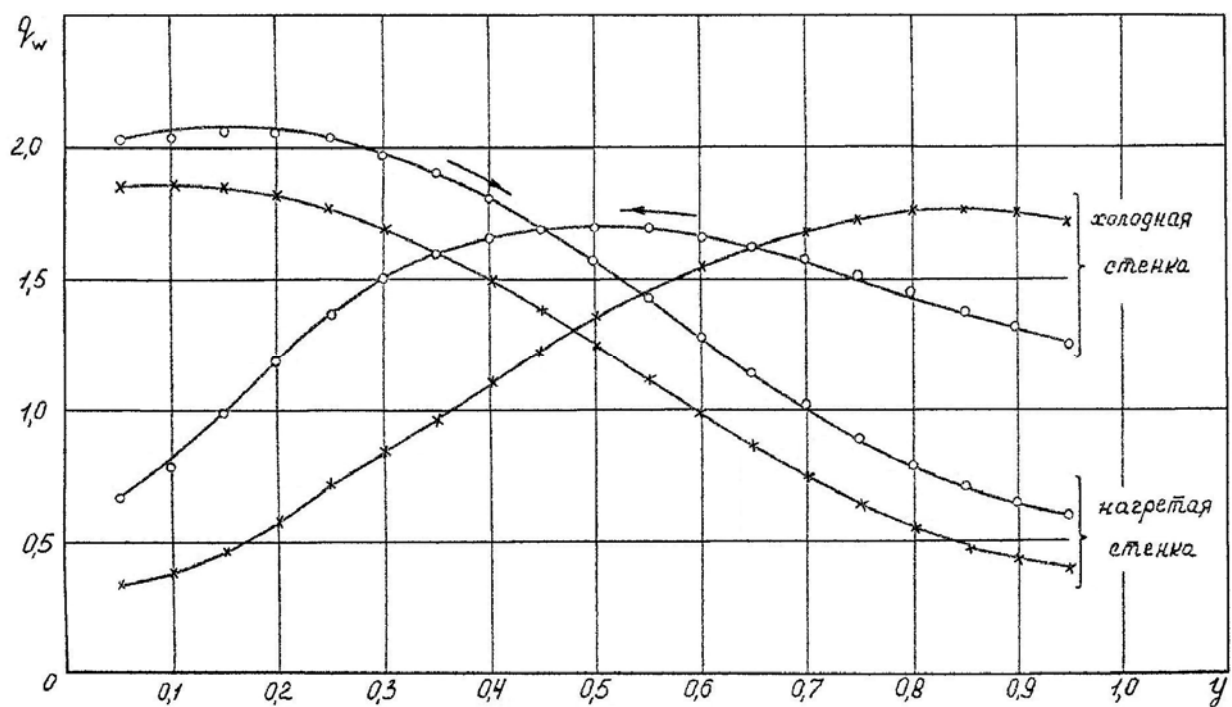


Фиг. 96. Распределение температуры в центральном сечении $x = 0,5$ в режиме сильной и слабой гидростатической сжимаемости

Таким образом, в режиме слабого влияния гидростатической сжимаемости значения скоростей $\frac{\bar{V}}{\sqrt{C_{FH}}}$, $\frac{\bar{U}}{\sqrt{C_{FH}}}$ и времени установления $\bar{t}\sqrt{C_{FH}}$ практически не зависят от C_{FH} , что и позволяет найти эти значения при $C_{FH} \rightarrow 0$. Наоборот, в режиме сильного влияния сжимаемости при $C_{FH} \geq 0.5 \div 1.0$ профили скорости и в указанных выше переменных расслаиваются по критерию C_{FH} .

Ввиду пониженной плотности у верхнего основания при больших C_{FH} температура газа там ниже, чем при малых (фиг. 96). Наоборот, температура газа у нижнего основания при больших C_{FH} выше, чем при малых (фиг. 96), причем снижение температуры на верхнем основании больше, чем повышение температуры на нижнем. Это обстоятельство вместе с указанной выше

вертикальной несимметрией течения приводит к значительному перераспределению местных потоков тепла на нагретой и холодной стенках (фиг. 97). На холодной стенке местный поток тепла при $C_{FH} = 1.0$ вначале возрастает в направлении движения газа примерно до высоты $y = 0.5$, а затем падает (направление движения газа на стенках показано на фиг. 97 стрелками). У верхнего основания местный поток тепла при $C_{FH} = 1.0$ оказывается заметно ниже, чем при $C_{FH} = 0.05$. На нагретой же стенке местный поток тепла при $C_{FH} = 1.0$ всюду выше, чем при $C_{FH} = 0.05$. Средние потоки тепла на нагретой и холодной стенках равны: $\bar{q}_{w1} = \bar{q}_{w2}$, и невязка (на сетке 21×21) составляет здесь не более 1% по отношению к среднему потоку тепла на нагретой стенке.



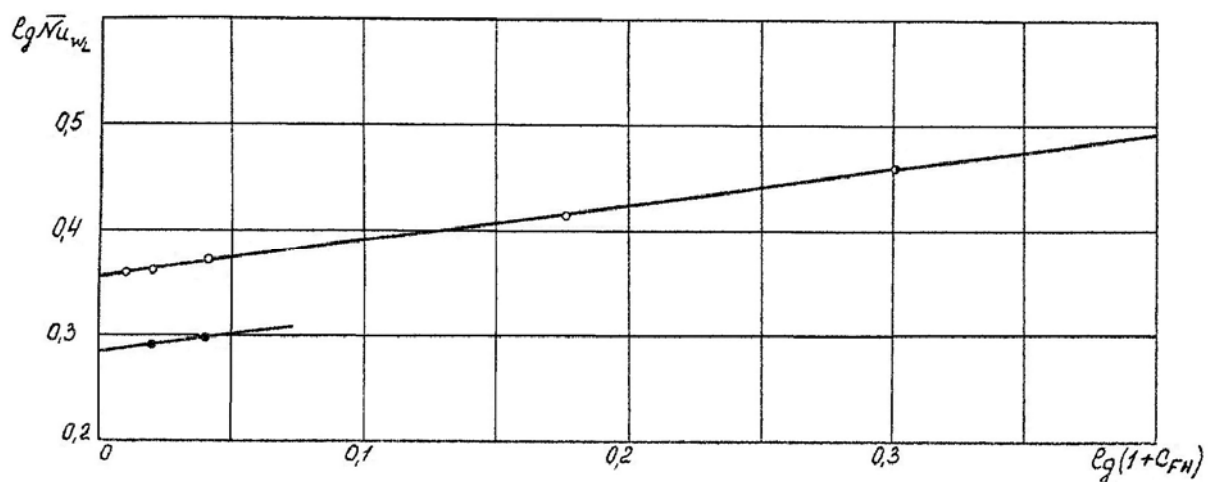
Фиг. 97. Распределение местных потоков тепла на стенках при различных C_{FH}

$$\left. \begin{array}{l} \circ - 1.0 \\ \times - 0.05 \end{array} \right\} C_{FH}$$

Средняя передача тепла от нагретой стенки к холодной при увеличении C_{FH} возрастает. Зависимость $\bar{Nu}_{wL}(C_{FH})$ в диапазоне $0.02 \leq C_{FH} \leq 1.0$ показана на фиг. 98 и может быть представлена в виде

$$\frac{\overline{Nu}_{wL}(C_{FH})}{\overline{Nu}_{wL}(C_{FH} \rightarrow 0)} = (1 + C_{FH})^{0.35}$$

Отсюда видно, что поправка на среднее число Нуссельта при значении $C_{FH} = 0.05$ по сравнению со значением $C_{FH} = 10^{-3} \div 10^{-4}$, которое было бы в условиях, когда весовая сжимаемость пренебрежимо мала, составляет около 2%. В режиме сильного влияния весовой сжимаемости при $C_{FH} = 1.0$ средняя передача тепла увеличивается примерно на 30%.



Фиг. 98. Влияние критерия C_{FH} на среднее число Нуссельта

$$\circ - Gr_L = 1.25 \cdot 10^4, \quad \frac{H}{L} = 10$$

$$\bullet - Gr_L = 5 \cdot 10^4, \quad \frac{H}{L} = 20$$

§ 5. Режимы течения и теплообмена по числам $Gr_L, H/L$. Формулы для расчета теплопередачи через вертикальный слой

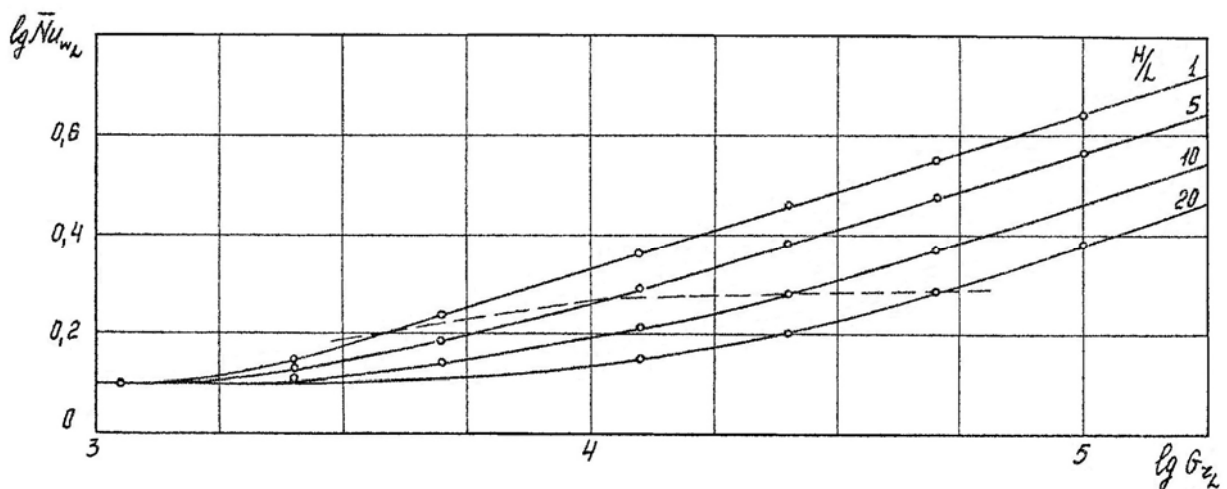
Рассмотренные в § 3 характерные режимы течения и теплообмена по числу Грасгофа (при $H/L = 1$) имеются и при других отношениях сторон H/L . Практически очень важным является вопрос о границах этих режимов при различных числах Gr_L и $\frac{H}{L}$. Ввиду очевидных трудностей расчета при

больших значениях отношений сторон $\frac{H}{L}$, связанных с увеличением времени установления (фиг. 40), эти расчеты проведены, как правило на грубых сетках 11×11 и предназначены для качественного исследования общей картины течения и теплопередачи. В серии расчетов предпринято качественное рассмотрение режимов по числам $Gr_L, \frac{H}{L}$ и в частности, определение границ режима при ламинарном течении, в котором среднее число Нуссельта изменяется в зависимости от числа Грасгофа по степенному закону

$$\bar{Nu}_{wL} \sim Gr_L^n \varphi\left(\frac{H}{L}\right) \quad (117)$$

с показателем n , не зависящим от чисел $Gr_L, \frac{H}{L}$. Такой режим будем в дальнейшем называть режимом пограничного слоя.

В работе [58] режим пограничного слоя определяется по формированию горизонтального плато на профиле $T(x)$ в центральном сечении слоя $y = 0,5$. Принятое нами определение режима пограничного слоя, по-видимому, более удобно для построения эмпирических формул. Результаты расчета средней теплопередачи при отношениях сторон $H/L = 1; 5; 10; 20$ в диапазоне чисел

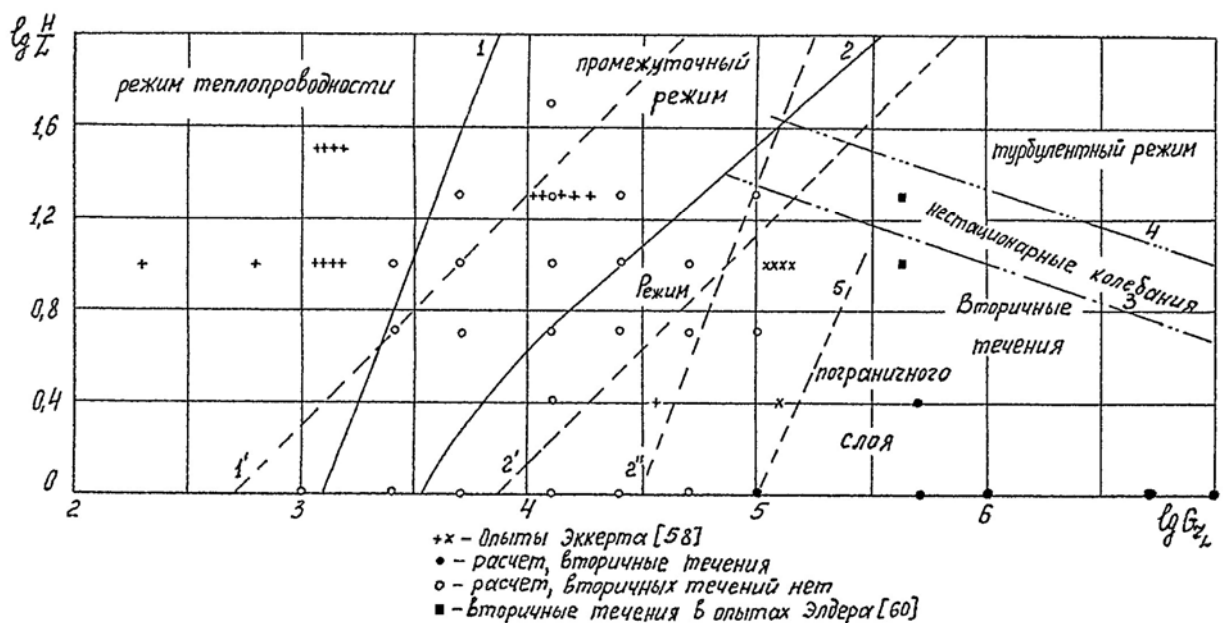


Фиг. 99. Определение границ режимов теплопередачи на основе зависимости

$$\bar{Nu}_w(Gr_L) \text{ при различных } \frac{H}{L}$$

Грасгофа $10^3 \leq Gr_L \leq 10^5$ и значениях остальных критериев, соответствующих (106), показаны на фиг. 99. Пунктирной линией на фиг. 99 показана нижняя граница, в котором зависимости $\lg \bar{Nu}_{wL}(\lg Gr_L)$ при различных отношениях сторон H/L - параллельные прямые, что соответствует режиму пограничного слоя (117). Ниже пунктирной линии (фиг. 99) зависимости $\lg \bar{Nu}_{wL}(\lg Gr_L)$ при различных H/L уже криволинейны, откуда следует, что зависимость типа (117) для всего диапазона не справедлива. Это - промежуточный режим. Отметим, что граница, разделяющая промежуточный режим и режим пограничного слоя (фиг. 99) при больших отношениях сторон H/L значительно сдвинута в область больших чисел Грасгофа. Граница, разделяющая промежуточный режим и режим теплопроводности, выражена менее четко и, по-видимому, близка к нижней огибающей (фиг. 99).

Сводка результатов, относящихся к различным режимам течения и теплопередачи в координатах $\lg H/L$, $\lg Gr_L$, дается на фиг. 100. Здесь черным и белым кружкам соответствуют варианты расчетов, выполненных в настоящей работе. Черными кружками отмечены случаи, когда наблюдались вторичные



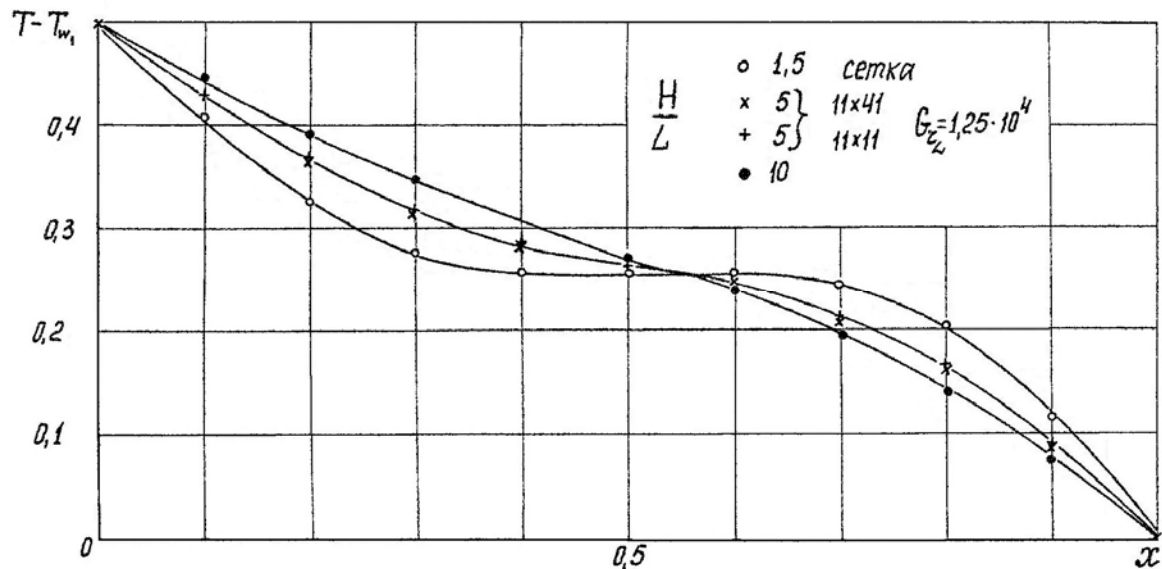
Фиг. 100. Режимы течения и теплообмена по числам Gr_L , $\frac{H}{L}$

течения. Крестиками показаны режимы, которые реализованы в опытах Эккерта и Карлсона [58], черными прямоугольниками отмечены опыты Элдера, взятые при произведении $Gr_L \cdot Pr$, соответствующем нашим расчетам и экспериментам [60], в которых наблюдались вторичные течения. Сплошной линией 1 показана граница, разделяющая режим теплопроводности и промежуточный режим по данным работы [58]. Оценки, полученные в расчетах настоящей работы для этой границы (фиг. 99), практически совпадают с линией 1. Пунктирной линией 1' показана оценка для этой границы, полученная Бэтчелором [57]. Сплошной линией 2 показана граница, разделяющая режим пограничного слоя и промежуточный режим по данным настоящей работы (фиг. 99). Для значений $H/L > 20$ границы 2 экстраполирована. Пунктирными линиями 2' и 2'' показаны оценки для этой границы, полученные в работе [58]. Первая из них (2') получена в предположении, что границы пограничных слоев на нагретой и холодной стенках сливаются. Принятое выше определение режима пограничного слоя (фиг. 99) несколько расширяет его диапазон.

Штрих-пунктирной линией 3 показана граница начала регулярных нестационарных колебаний по данным Элдера [61]. Для этой границы характерным является число Грасгофа, отнесенное к высоте слоя Gr_H . В работе [61] для этой границы получено $Gr_H \sim 8 \cdot 10^8$. Выше границы 4, определяемой по числу $Gr_H \sim 10^{10}$ [61] течение в слое, по-видимому, полностью турбулентно. Границы 3 и 4 имеют весьма приближенный характер. Неясно, в частности, продолжаются ли они в область режимов теплопроводности и промежуточного режима (фиг. 100).

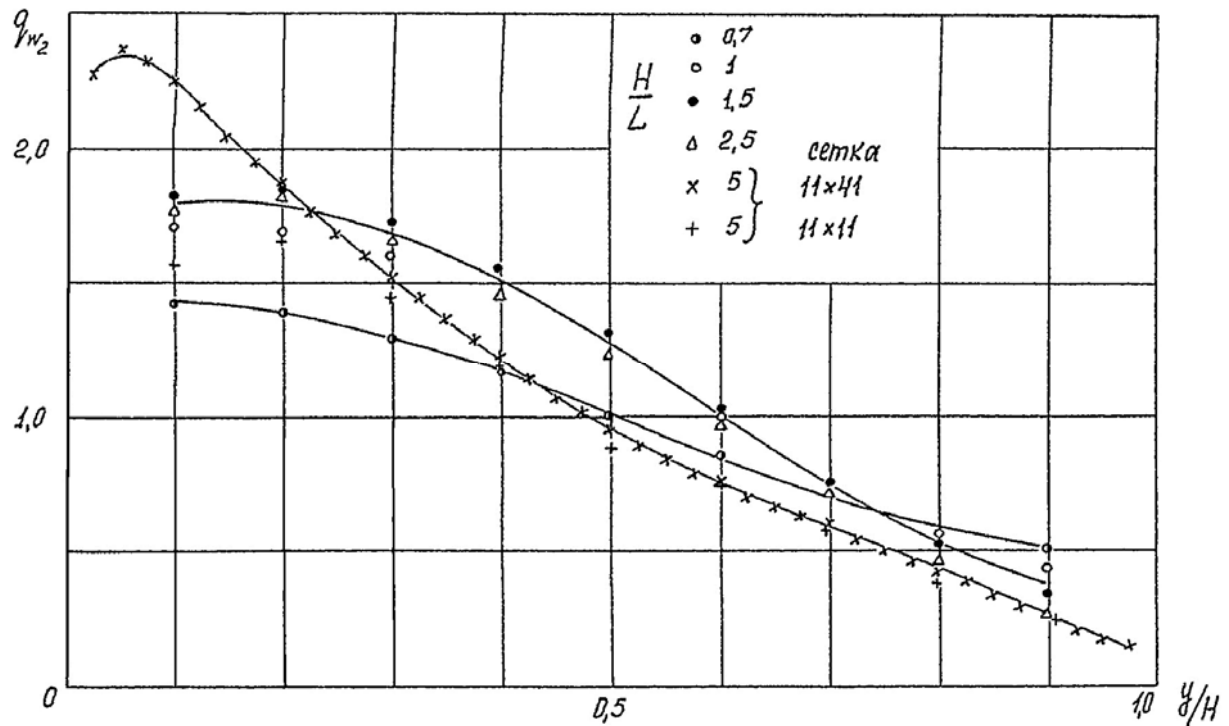
Область режима пограничного слоя ограничивается, таким образом, линиями 2, 3, осью абсцисс (последнее ограничение, по-видимому, снимается, по крайней мере до значений $\frac{H}{L} \geq 0,7$). Правая граница, судя по результатам § 3 (фиг. 77) и работы [60] находится вблизи линии $Gr_H \sim 10^6$, где имеются развитые вторичные течения, и механизм передачи тепла становится иным (фиг. 55).

Некоторые особенности в структуре течения и переноса тепла при различных отношениях сторон $\frac{H}{L}$ показаны на фиг. 101-106.



Фиг. 101. Профиль температуры в сечении $\frac{y}{H} = 0.5$ при различных отношениях сторон ($Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$)

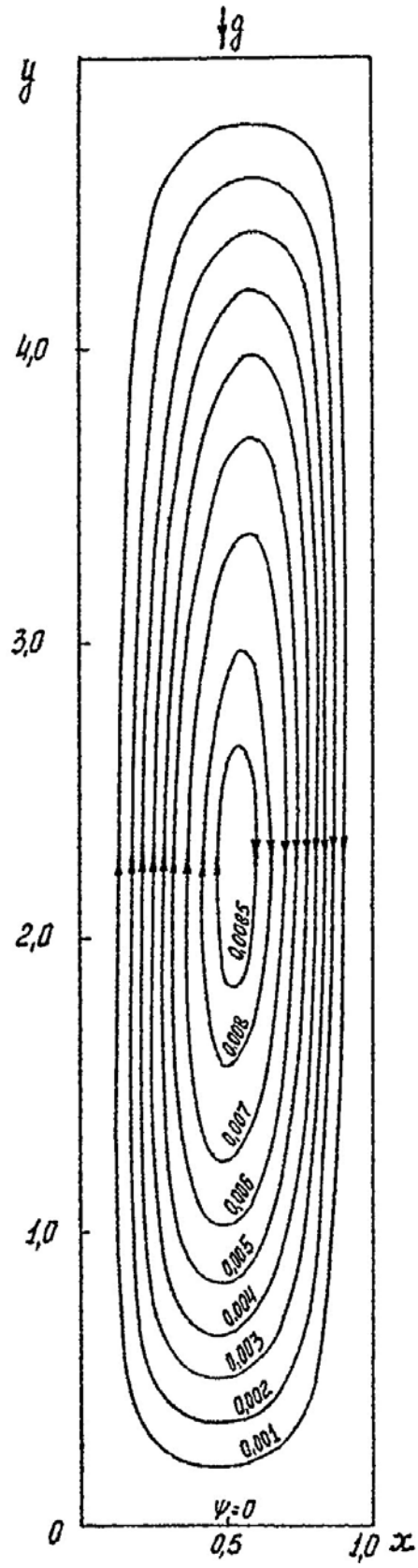
При увеличении $\frac{H}{L}$ и фиксированном числе Грасгофа (и других критериях подобия (106)) толщина температурного слоя в центральном сечении ($\frac{y}{H} = 0.5$) растет, и при $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$ и $\frac{H}{L} > 5$ температурные пограничные слои сливаются (фиг. 101).



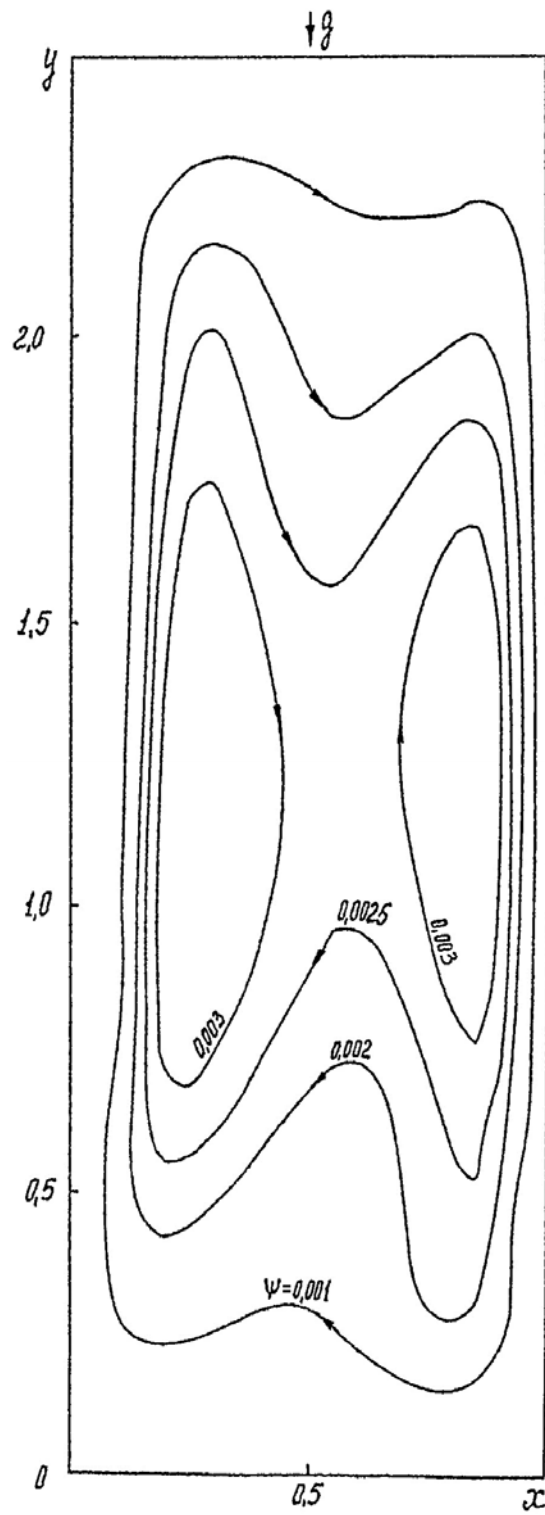
Фиг. 102. Местный поток тепла на нагретой стенке при различных

отношениях сторон $\frac{H}{L}$

При числе $Gr_L = 10^5$ температурные слои сливаются при большем отношении сторон, соответствующем $\frac{H}{L} > 20$ (фиг. 105). Выглаживание поля температур (и подъемных сил) в направлении оси x при $Gr_L = const$ и увеличении $\frac{H}{L}$ оказывается весьма важным для формирования циркуляционного течения. Типичная картина линий тока при $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$ и $\frac{H}{L} = 5$ показана на фиг. 103. При этом числе Грасгофа в диапазоне $0.7 \leq \frac{H}{L} \leq 20$ реализуется циркуляционное течение с одним вихрем.

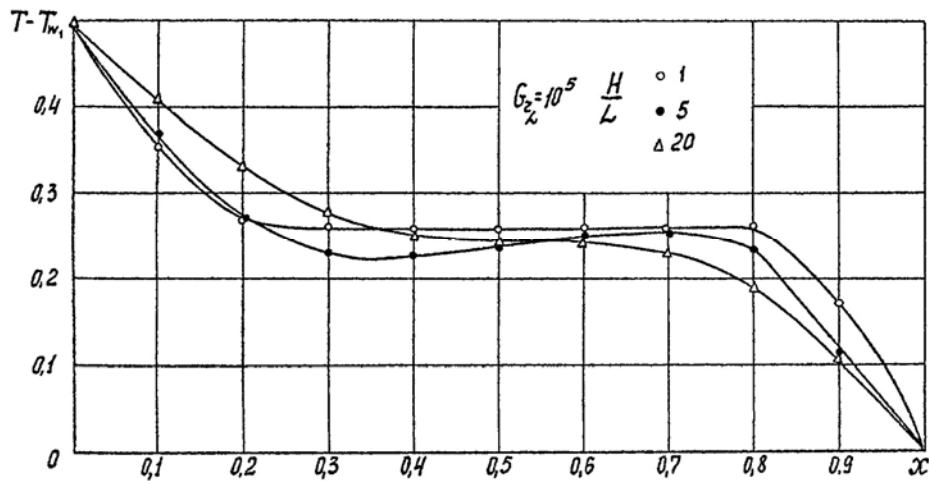


Фиг. 103. Линии тока $H/L = 5.0$, $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$



Фиг. 104. Линии тока $H/L = 2.5$, $Gr_L = 5 \cdot 10^5$

Картина вторичных течений при числе $Gr_L = 5 \cdot 10^5$ и $\frac{H}{L} = 2.5$ показана на фиг. 104 .



Фиг. 105. Профиль температуры в сечении $y = 0,5$ при различных отношениях сторон. $Gr_L = 10^5$

В этих расчетах не было обнаружено дробления вихря в вертикальном направлении, которое наблюдается [60] при больших числах Грасгофа и отношениях сторон $\frac{H}{L} \cong 10 \div 20$ (см. также профили температур на фиг. 105). Расчеты (фиг. 103, 104) выполнены на сетках 21×21 .

Изменение местного потока тепла на нагретой стенке при различных отношениях сторон $\frac{H}{L}$ и числе $Gr_L = 1,25 \cdot 10^4$ показано на фиг. 102. Расчеты при $\frac{H}{L} = 5.0$ выполнены на двух сетках: 11×11 и 11×41 и иллюстрируют погрешности, вносимые сеткой при увеличении шага сетки по оси y . Как и в других случаях (фиг. 41), увеличение шага сетки приводит к систематическому занижению местного и среднего потока тепла, наиболее заметному на начальном участке (фиг. 102). Интересно отметить, что относительная невязка в балансе тепла на контуре (93) в этом случае находилась в пределах $0,95 \div 4\%$, однако, она не отражает в данном случае действительные потери тепла, проходящего от нагретой стенки к холодной, так как средние потоки тепла на нагретой и холодной стенках оказываются заниженными примерно одинаково. Отмеченный ранее факт выглаживания решения в направлении оси x при

увеличении $\frac{H}{L}$ (при $Gr_L = const$) оказывается весьма существенным для получения сходящегося решения на грубых сетках.

При ламинарной конвекции в режиме пограничного слоя (фиг. 100) при постоянном числе Грасгофа $Gr_L = const$ и изменении отношения сторон $\frac{H}{L}$ имеются два предельных состояния: $\frac{H}{L} \rightarrow 0$ и $\frac{H}{L} \rightarrow \infty$ при которых средняя передача тепла через слой приближается к передаче тепла чистой теплопроводностью (фиг. 106). Максимальное значение \bar{Nu}_{wL} реализуется при $\frac{H}{L} = 1.5$. При увеличении отношения сторон $\frac{H}{L}$, начиная от этого значения, средняя теплопередача падает из-за роста температурного пограничного слоя. При больших $\frac{H}{L}$ осуществляется переход в промежуточный режим, в котором передача тепла ниже, чем в режиме пограничного слоя (фиг. 99). Наоборот, при уменьшении отношения сторон $\frac{H}{L}$, начиная от значения $\frac{H}{L} = 1.5$, развитие температурного пограничного слоя на стенках ограничивается верхним и нижним основаниями (фиг. 102), и средняя теплопередача падает. Заметный эффект увеличения средней теплопередачи при разбиении вертикального слоя с отношением сторон $\frac{H}{L} = 5 \div 6$ секциями $\frac{H}{L} \sim 1.0$ обнаружен впервые в опытах Шмидта [78] и подтверждается результатами других авторов [58, 79]; однако, наименьшее отношение сторон $\frac{H}{L}$ в опытах [58, 79] было 2.5-3.0.

Полученные здесь результаты важны для оценки эффекта секционирования вертикальных газовых слоев. Отметим, что изменение средней теплопередачи при секционировании будет более интенсивным, если при изменении $\frac{H}{L}$ пересекаются границы режимов (фиг. 100). Влияние отношения сторон на теплопередачу в режиме пограничного слоя учитывается

функцией

$$\varphi\left(\frac{H}{L}\right) = \frac{\bar{Nu}_{wL}\left(\frac{H}{L}\right)}{\bar{Nu}_{wL}\left(\frac{H}{L}=1.0\right)} \quad (118)$$

Зависимость $\varphi\left(\frac{H}{L}\right)$ показана на фиг. 106. Расчеты при $0.7 \leq \frac{H}{L} \leq 2.5$ проведены на сетке 11x11. При $\frac{H}{L}=5$ использовалась сетка 11x41. Штрих пунктирной линией на фиг. 106 показаны значения $\varphi\left(\frac{H}{L}\right)$, полученные при $\frac{H}{L} \geq 5$ на сетке 11x11, которые дают значительное занижение результатов.

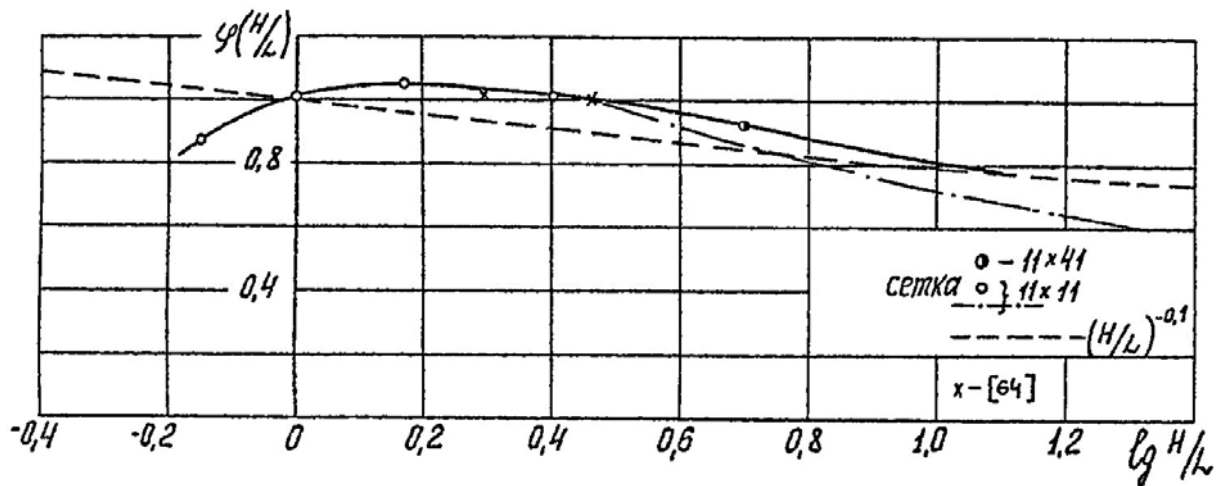
Пунктирной линией на фиг. 106 показаны значения функции $\varphi\left(\frac{H}{L}\right) = \left(\frac{H}{L}\right)^{-0.1}$, полученные в экспериментах [58] в режиме пограничного слоя на моделях $\frac{H}{L} > 5$. Близкая к этой зависимость дается в работе [79]. Мы будем в дальнейшем предполагать, что при $\frac{H}{L} > 5$ в этом режиме $\varphi\left(\frac{H}{L}\right) = \left(\frac{H}{L}\right)^{-0.1}$.

Кроме того, на фиг. 106 приведены результаты, полученные в работе [64] при $\frac{H}{L} = 2$ и 3, которые согласуются с результатами, полученными в настоящей работе.

В режиме пограничного слоя при $\frac{H}{L} \geq 1.0$ функцию $\varphi\left(\frac{H}{L}\right)$ можно представить в виде:

$$\varphi\left(\frac{H}{L}\right) = \left(\frac{H}{L}\right)^{-0.1} \xi_k \quad (119)$$

где ξ_k - поправка при $\frac{H}{L} \leq 5$.



Фиг. 106. Функция $\varphi(H/L)$ в режиме пограничного слоя.

Значения ξ_k приведены в таблице:

| | | | | | | | |
|----------------|-----|------|------|------|------|-----|------|
| $\varphi(H/L)$ | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 4.0 | 5.0 |
| ξ_k | 1.0 | 1.09 | 1.11 | 1.13 | 1.13 | 1.1 | 1.04 |

При $\frac{H}{L} \rightarrow 0$ $\varphi\left(\frac{H}{L}\right) \rightarrow \varphi_0$, где $\varphi_0 = \frac{1}{\bar{Nu}_{wL}\left(\frac{H}{L}=1\right)}$, и функция (фиг. 106)

расходится со степенной зависимостью $\left(\frac{H}{L}\right)^{-0.1}$. В диапазоне $0 \leq \frac{H}{L} \leq 1.0$ в

первом приближении можно рекомендовать линейную зависимость

$$\varphi\left(\frac{H}{L}\right) = \varphi_0 + \frac{H}{L}(1 - \varphi_0) \quad (120)$$

Формула для расчета средней теплопередачи через вертикальный слой

Результаты расчета средней теплопередачи через слой в диапазоне определяющих критериев подобия (105) (§ 3-5) при ламинарной естественной конвекции в режиме пограничного слоя представляются следующей приближенной зависимостью:

$$\bar{Nu}_{wL} = 0,115 (Gr_L \cdot Pr)^{0.32} (1 + C_{FH})^{0.35} \left(\frac{T_{w2}}{T_{w1}} \right)^{0.085} \chi^{0.13} \varphi \left(\frac{H}{L} \right) \quad (121)$$

Здесь

$$\bar{Nu}_{wL} = \frac{\bar{q}_w L}{k_{w1} (T_{w2} - T_{w1})}, \quad Gr_L = \frac{gL^3 \rho_{w2}^2}{\mu_{w1}^2} \frac{T_{w2} - T_{w1}}{T_{w1}}$$

$$\bar{q}_w = \frac{1}{H} \int_0^H q_w(y) dy, \quad q_w = k_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w$$

или

$$\bar{q}_w = \bar{\alpha}_k (T_{w2} - T_{w1}), \quad \text{где } \bar{\alpha}_k - \text{средний коэффициент теплоотдачи}$$

$$C_{FH} = \frac{gH}{\chi R T_{w1}}, \quad \varphi \left(\frac{H}{L} \right) = \frac{\bar{Nu}_{wL} \left(\frac{H}{L} \right)}{\bar{Nu}_{wL} \left(\frac{H}{L} = 1.0 \right)}$$

$$\chi = \frac{C_p}{C_v}, \quad Pr = \frac{\mu C_p}{k}$$

Формула (121) справедлива в режиме пограничного слоя для различных газов, теплопроводность и вязкость которых зависят от температуры по формуле Сатерленда (72). Величины χ, C_p, Pr предполагаются не зависящими от температуры. Границами режима пограничного слоя являются ось абсцисс, линии 2, 3 и линия $Gr_L \cong 10^6$ на диаграмме $\frac{H}{L} - Gr_L$ (фиг. 100). Функция

$\varphi\left(\frac{H}{L}\right)$ в этом режиме определена выше (119). Ориентировочная граница режима, при котором зависимость $\bar{Nu}_{wL}(Gr_L \cdot Pr)$ не расслаивается по числу Pr приведена на фиг. 80 (§ 4). Диапазон изменения отношения температур $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$, критерия весовой сжимаемости C_{FH} и отношения теплоемкостей ограничивается проведенными расчетами (§ 4)

Для воздуха при $Pr = 0.71$, $\chi = 1.405$ формула (121) имеет вид:

$$\bar{Nu}_{wL} = 0,108 Gr_L^{0.32} (1 + C_{FH})^{0.35} \left(\frac{T_{w2}}{T_{w1}}\right)^{0.085} \varphi\left(\frac{H}{L}\right), \quad (122)$$

и в случае, когда весовая и температурная сжимаемость пренебрежимо малы,

$$\bar{Nu}_L = 0,108 Gr_L^{0.32} \varphi\left(\frac{H}{L}\right) \quad (123)$$

Для несжимаемой жидкости с коэффициентами теплопроводности и вязкости, не зависящими от температуры, формула (121) имеет вид:

$$\bar{Nu}_L = 0,115 (Gr_L \cdot Pr)^{0.32} \varphi\left(\frac{H}{L}\right) \quad (124)$$

Сопоставление с формулами других авторов

Имеющиеся в настоящее время формулы для расчета средней теплопередачи через вертикальный слой при ламинарной конвекции [58, 65, 67, 70-72, 79] относятся к случаю, когда весовая и температурная сжимаемость малы (формулы (123), (124)). Более детальный обзор данных различных авторов и их обсуждение приведены в работе автора [91].

Сопоставление результатов расчета зависимости $\bar{Nu}_L(Gr_L)$ для воздуха по формуле (123) с результатами, полученными по эмпирической формуле

Эккерта и Карлсона [58] для ламинарной конвекции в режиме пограничного слоя:

$$\bar{Nu}_L = 0,119 Gr_L^{0,3} \left(\frac{H}{L} \right)^{-0.1} \quad (125)$$

приведено на фиг. 107. В диапазоне $5 \cdot 10^3 \leq Gr_L \leq 10^6$ значения \bar{Nu}_L , полученные по формуле (123), согласуются с результатами Эккерта и Карлсона с точностью 5-10%, причем данные (123) лежат систематически выше, чем данные (125). Причиной такого расхождения могут быть утечки тепла через верхнее и нижнее основания модели, которые занижают измеренное значение \bar{Nu}_L . Невязка в балансе тепла на контуре в экспериментах [58] составляла около 10%. Возможно также влияние трехмерности течения и поля температур, приводящее к такому же эффекту. Отметим некоторые особенности в обработке результатов здесь и в работе [58]. Метод обработки результатов в экспериментах [58] заключается в построении зависимости средней теплопередачи по высоте слоя $\bar{Nu}_L(Gr_H)$ путем интегрирования зависимости местной теплопередачи $Nu'_y(Gr'_y)$, где

$$Nu'_y = \frac{q_w y}{k(T_w - T_m)}, \quad Gr'_y = \frac{g \beta y^3}{\nu^2} (T_w - T_m),$$

причем температура центральной линии $\theta_m(y)$ аппроксимируется линейной функцией по y и принята одинаковой для моделей различной длины. Такой способ обработки, по-видимому, верно передает средние закономерности теплопередачи для всего класса моделей с различным отношением сторон, но недостаточно точно учитывает влияние концов модели, так как распределение температуры $\theta(y)$ не является линейной, а зависимость $\bar{Nu}'_{wy}(Gr'_y)$ отклоняется от степенной вблизи концов. Эти особенности, однако, трудно было учесть в обработке [58] из-за разброса точек. Средняя зависимость теплопередачи по длине $\bar{Nu}'_H(Gr'_H)$ нивелирует особенности теплопередачи у концов модели, в

особенности для коротких моделей. Средняя зависимость по длине $\bar{Nu}_H(Gr_H)$, полученная в расчетах настоящей работы при различных отношениях сторон

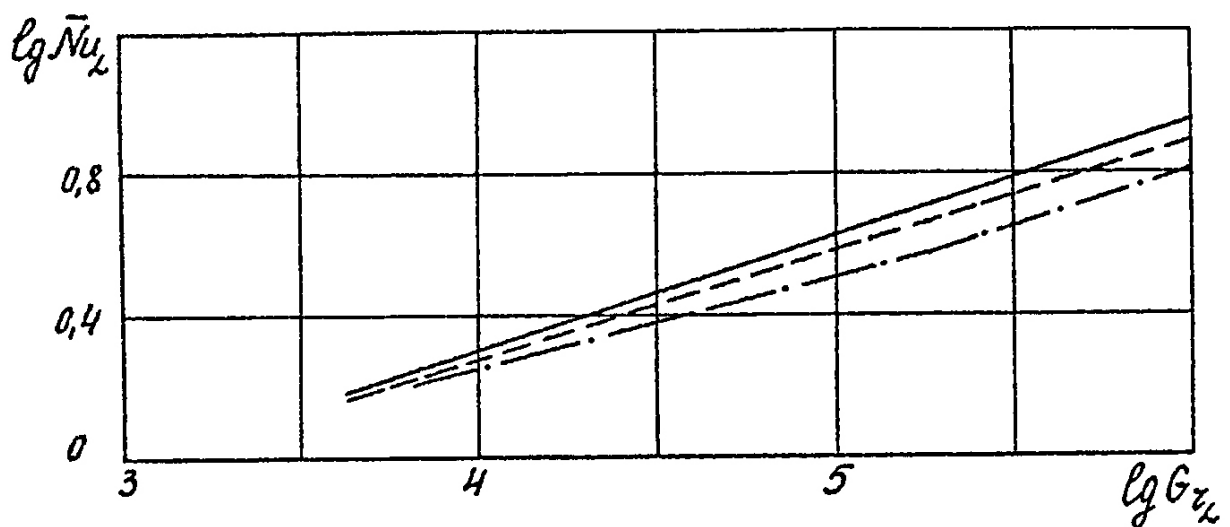
$\frac{H}{L}$, показана на фиг. 108 $\left(C_{FH} = 0.05, \frac{T_{w2}}{T_{w1}} = 1.5 \right)$ и аппроксимируется в виде

$\bar{Nu}_H = 0.13 Gr_H^{0.3}$ или, с учетом поправок на весовую и температурную сжимаемость, при $C_{FH} \rightarrow 0$ и $\frac{T_{w2}}{T_{w1}} \rightarrow 1$

$$\bar{Nu}_H = 0,12 Gr_H^{0.3}, \quad (126)$$

что практически совпадает с формулой Эккерта и Карлсона. Эту зависимость можно рассматривать, таким образом, как среднюю для моделей с различным отношением сторон $\frac{H}{L}$. Формула (123) получена в предположении, что в

режиме пограничного слоя показатель степени при числе Грасгофа постоянный во всем диапазоне Gr_L , $\frac{H}{L}$ и предпочтительнее для коротких моделей с отношением сторон $1 \leq \frac{H}{L} \leq 5$.



Фиг. 107. Зависимость $\bar{Nu}_L(Gr_L)$ для воздуха по данным различных авторов

————— Данные настоящей работы, — — — — Эккерт, Карлсон /58/,

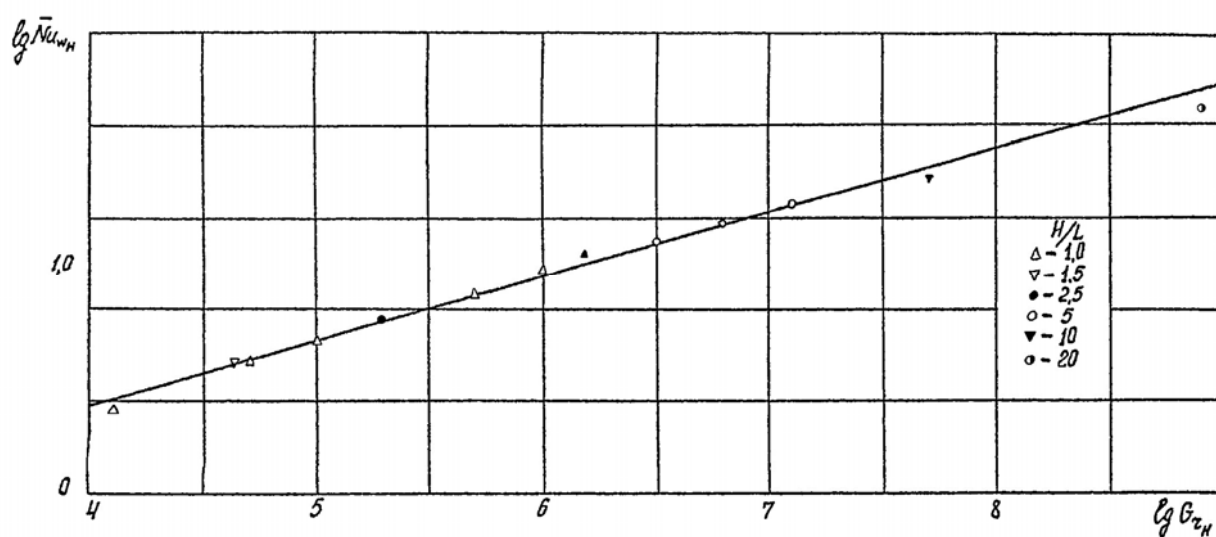
— · — · — Якоб /79/

В целом, учитывая погрешности измерений и расчетов и особенности обработки результатов измерений [58], согласование формул (123) и (125) в режиме пограничного слоя следует признать удовлетворительной. Значения \bar{Nu}_L , получающиеся по формулам Якоба [79]

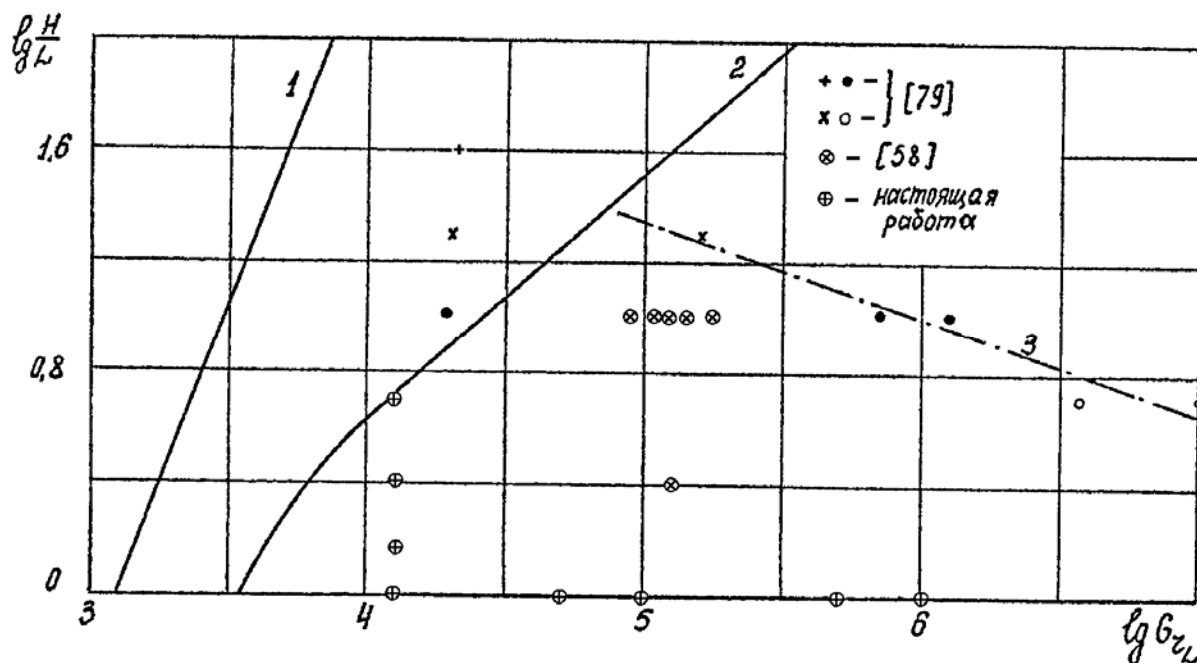
$$\bar{Nu}_L = 0,18 Gr_H^{0,25} \left(\frac{H}{L} \right)^{-1/9}, \quad 2 \cdot 10^4 \leq Gr_L \leq 2 \cdot 10^5 \quad (127)$$

$$\bar{Nu}_L = 0.065 Gr_L^{1/3} \left(\frac{H}{L} \right)^{-1/9}, \quad 2 \cdot 10^5 \leq Gr_L \leq 10^7 \quad (128)$$

лежат систематически ниже значений, получающихся по формулам Эккерта и Карлсона (125) и настоящей работы (123) (фиг. 107). При числе Грасгофа $Gr_L = 2 \cdot 10^5$ различие в значениях (123), (125) и (127) составляет около 25 ÷ 35%. На фиг. 109 показано расположение на диаграмме $\frac{H}{L}$, Gr_L опытных точек Нуссельта, Мулля, Рейхера и Шмидта, по которым Якобом [79] построены формулы (127-128) и опытных точек Эккерта-Карлсона [58] и основных расчетов настоящей работы для режима пограничного слоя.



Фиг. 108. Представление теплопередачи в виде зависимости среднего числа Нуссельта по высоте слоя в зависимости от числа Грасгофа по высоте слоя



Фиг. 109. Расположение опытных точек различных авторов на диаграмме

$$\frac{H}{L}, Gr_L$$

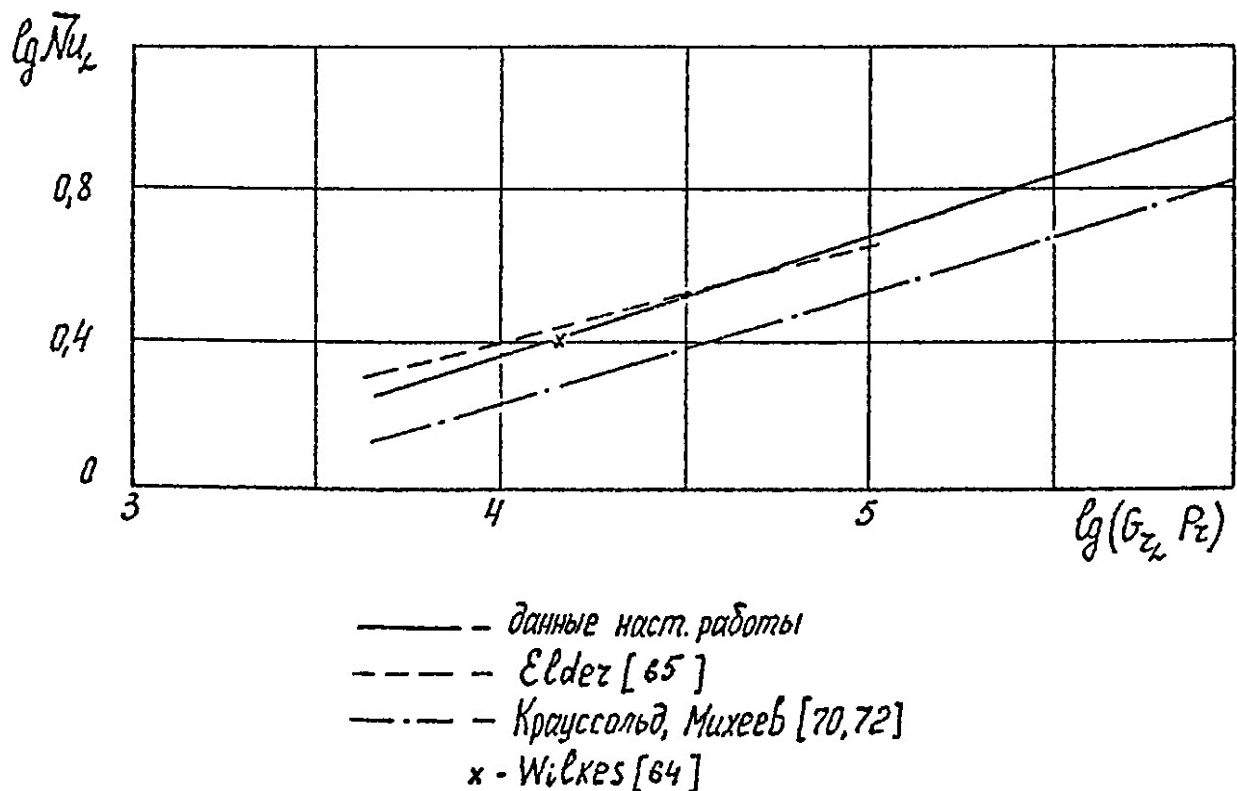
Из сопоставления результатов (фиг. 109) видно, что опытные данные, по которым построена формула (127), относятся к промежуточному режиму, где теплопередача ниже, чем в режиме пограничного слоя, что и объясняет занижение значений \bar{Nu}_L (127) по сравнению с (123) и (125). В промежуточном режиме показатель степени n зависит от числа Грасгофа и отношения сторон, поэтому формула (127) справедлива лишь в том диапазоне $Gr_L, \frac{H}{L}$, который определен опытными данными (фиг. 109). Опытные данные, по которым построена формула (128), находятся вблизи границы 3 (фиг. 109), соответствующей, согласно [61], появлению регулярных нестационарных колебаний. Закономерности теплопередачи в этой области изучены еще недостаточно, однако имеющиеся данные [70 - 72] свидетельствуют о возможном снижении интенсивности теплопередачи в этом случае по сравнению с режимом пограничного слоя.

В работах Крауссольтда [70], Бояринцева [71], Михеева [72] предполагается, что средняя теплопередача через плоские, кольцевые и

цилиндрические прослойки при естественной конвекции определяется одним геометрическим размером - толщиной прослойки L , что приводит к формуле вида [72]:

$$\bar{Nu} = 0.105 (Gr_L \cdot Pr)^{0.3}, \quad (10^3 \leq Gr_L \cdot Pr \leq 10^6) \quad (I29)$$

Здесь, в отличие от рассмотренных выше формул, не учтено влияние на теплопередачу отношения сторон $\frac{H}{L}$. Кроме того, фактически предполагается, что граница промежуточного режима - линия $Gr_L \cdot Pr = const$.



Фиг. 110. Зависимость $\bar{Nu}_L(Gr_L Pr)$ по данным различных авторов при

$$\varphi(H/L) = 1$$

Из сопоставления с результатами (124) фиг. 110 следует, что при $\varphi\left(\frac{H}{L}\right) = 1.0$ формула (129) дает заниженные значения средней теплопередачи. Для вертикальных слоев она, по-видимому, справедлива в режиме

пограничного слоя (фиг. 100) в довольно узком диапазоне отношений сторон при $\frac{H}{L} \cong 10-20$. Учет режимов теплопередачи по числам $Gr_L, \frac{H}{L}$ оказывается важным и для прослоек кольцевой и цилиндрической формы, где помимо толщины прослойки $\delta = \frac{D_2 - D_1}{2}$ средняя теплопередача зависит от отношения диаметров $\frac{D_2}{D_1}$ (кольцевая прослойка) и отношения $\frac{\delta}{H}$ (цилиндрическая прослойка). Формула (129) в применении к таким прослойкам получена [70-71] при обработке результатов экспериментов с $\frac{D_2}{D_1} = 2 \div 8$. В недавних опытах Беркенгейма [81], проведенных при $\frac{D_2}{D_1} \sim (30 \div 130)$ в диапазоне $10^3 \leq Gr_L \cdot Pr \leq 10^5$ и относящихся, по-видимому, к промежуточному режиму (фиг. 100), получены значения средней теплопередачи, которые лежат значительно ниже, чем получающиеся по формуле (129). Указанные обстоятельства ограничивают область применения этой формулы по сравнению с приведенным в работе [72] диапазоном.

На фиг. 110 приводится также сопоставление формулы (124) с результатом расчета Элдера. [65] для естественной конвекции в несжимаемой жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры при $\frac{H}{L} = 1.0$

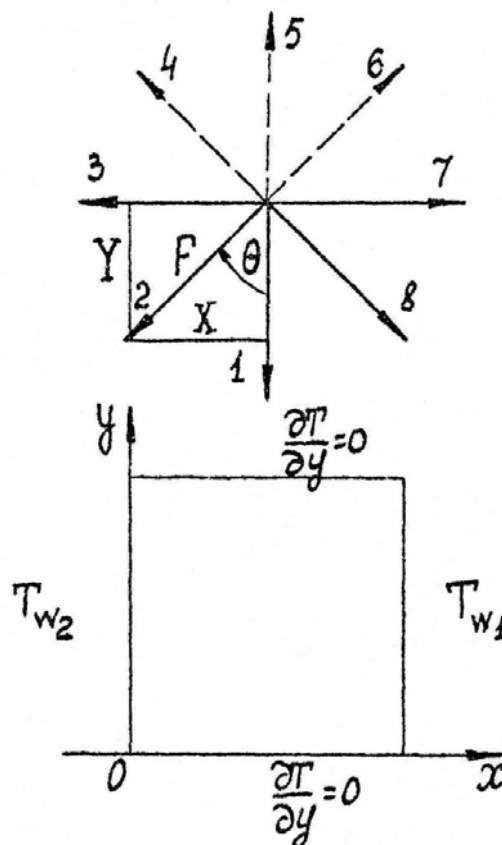
$$\bar{Nu}_L = 0.25 (Gr_L \cdot Pr)^{0.25}, \quad (4 \cdot 10^3 \leq Gr_L \cdot Pr \leq 5 \cdot 10^4) \quad (130)$$

Эта зависимость пересекается с той, которая получается по формуле (124) и в диапазоне (130) согласуется с ней с точностью 5÷10%, однако, различие в показателях степени может привести к занижению (130) при больших числах Gr_L . Последнее обстоятельство, возможно, вызвано погрешностями сетки [65], связанными с величиной шага, которые (фиг. 77) занижают значение \bar{Nu}_L . На фиг. 110 нанесено также значение \bar{Nu} , полученное на сетке 21x21 узлов в

работе [64] при $Gr_L = 2 \cdot 10^4$ и $Pr = 0.733$, которое практически совпадает с результатами, полученными нами на такой же сетке. В целом формулы (123), (124) удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов [58] и расчетов [64, 65] для режима пограничного слоя в случаях, когда весовая и температурная сжимаемость мала. Для случая, описываемого более общей формулой (122), пока не известно каких-либо опытных данных.

§ 6. Некоторые особенности течения и теплообмена в замкнутой области при различных направлениях внешней силы

Выше (§§ 2-5) рассматривались течение и теплообмен в замкнутой области при вертикальном направлении внешней силы ($\theta = 0$). Здесь мы рассмотрим случаи, когда направление внешней силы изменяется в диапазоне $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (фиг. 111). Из показанных на фиг. 111 восьми основных направлений симметричными являются 2, 4 $\left(\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$; 1, 5 ($\theta = 0, \pi$); 6, 8 $\left(\theta = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.



Фиг. 111. Общая схема расчета при различных направлениях внешней силы

Возникающее движение в указанных парах направлений будет отличаться лишь направлением линий тока и соответствующим распределением местных характеристик теплообмена. Абсолютные значения скоростей и средние потоки тепла на стенках в указанных парах направлений внешней силы (фиг. 111) будут одинаковы. (Для случаев 1,5 это проверено непосредственно в расчетах).

Как показано выше (§ 1), при заданном тепловом режиме границы (фиг. III) гидростатическое равновесие в начальном поле неподвижного газа возможно только при двух направлениях внешней силы: $\theta = \frac{3\pi}{2}$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$. Эти направления существенно различаются: первому из них соответствует абсолютно устойчивое расслоение плотности (подогрев сверху), второму – неустойчивое расслоение плотности (подогрев снизу). Отметим, что для сжимаемого газа расслоение плотности в последнем случае неустойчиво лишь при определенных значениях градиента температуры $\frac{dT}{dx}$ и критерия весовой сжимаемости C_F . Действительно, в то время как увеличение градиента температуры приводит к уменьшению плотности в направлении действия внешней силы, при больших значениях C_F за счет влияния весовой сжимаемости плотность в направлении внешней силы увеличивается; последнее обстоятельство может привести к устойчивому расслоению плотности. Необходимое условие возникновения конвекции может быть получено [2, 84] в предположении, что элемент жидкости, адиабатически смещенный из состояния равновесия, не возвращается обратно. Это приводит к соотношению [2]

$$\frac{dT}{dx} > \frac{g}{C_p} \quad \text{или в нашей нормировке} \quad \frac{dT}{dx} > (\chi - 1)C_F.$$

Последнее условие удобнее выразить через перепад температуры $\frac{T_{w2}}{T_{w1}}$.

$$\frac{T_{w2}}{T_{w1}} > 1 + (\chi - 1) C_F \quad (131)$$

Таким образом, в случае, когда весовая сжимаемость мала и $C_F \ll 1$, равновесие 3 $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ будет неустойчиво. Именно, этот случай и будет рассматриваться в дальнейшем. В этом случае существует критическое число Грасгофа $Gr_{кр}$ (или последовательность критических чисел $Gr_{кр}$), при достижении которого внезапно начинается конвективное движение.

В выполненной серии расчетов в системе критериев подобия (89) изменялись значения чисел Gr_L, C_{Fx}, C_{Fy} (причем $C_F = \sqrt{C_{Fx}^2 + C_{Fy}^2} = 0.05$; $C_{Fx} = C_F \sin \theta$, $C_{Fy} = C_F \cos \theta$). Остальные критерии подобия в системе (89) были фиксированы и имели следующие значения

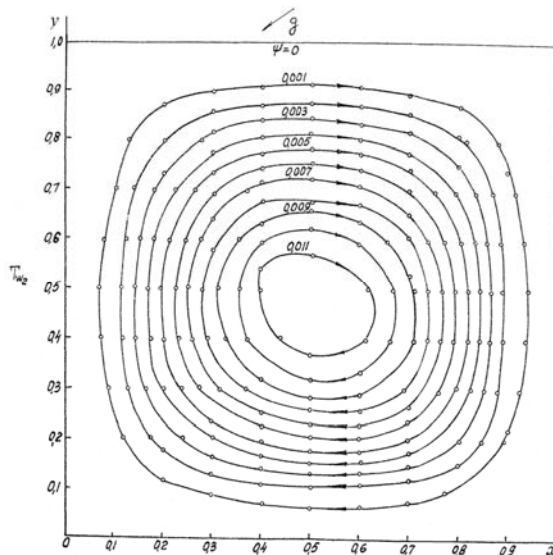
$$\frac{H}{L} = 1.0, \quad Pr = 0.71, \quad \chi = 1.405, \quad \frac{T_{w2}}{T_{w1}} = 1.5, \quad \frac{C}{T_{w1}} = 0.37. \quad (132)$$

Во всех расчетах сетка была фиксированной и содержала 11x11 узлов; шаг по времени равнялся $h(\tau = h = 0.1)$.

Результаты расчетов

На фиг. 112-115 показаны картины линий тока и поля температуры в стационарных состояниях при числе $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$ и $\theta = \frac{\pi}{4}$ (2) и $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (6). Эти расчеты выполнены из начального состояния неподвижного газа (103) при внезапно приложенной внешней силе. При $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (7) в счете из указанного начального поля движение газа, возмущенное внезапным приложением внешней силы, затухает. В расчетных случаях при числах Грасгофа $Gr_L = 10^4 - 5 \cdot 10^4$ максимальное значение амплитуды скорости составляет

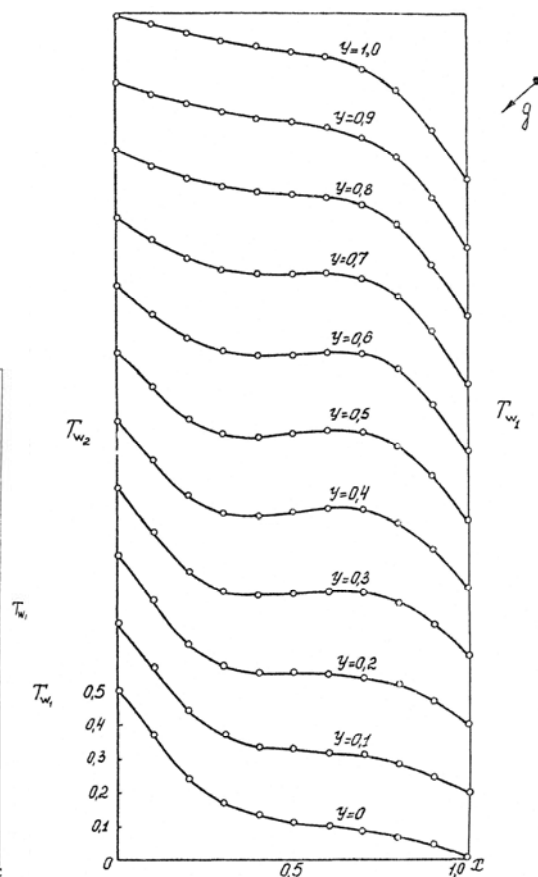
$\max\{|u|, |v|\} \sim 10^6$ при $t = 50 \div 70$, а поле температуры соответствует переносу тепла только теплопроводностью. Поле плотности соответствует гидростатическому равновесию (104). При $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (6) (фиг. 114-115) реализуется стационарное движение, которое, однако, менее интенсивно, чем рассмотренное ранее при $\theta = 0$ (фиг. 50). Это объясняется стабилизирующим действием холодного газа, находящегося у основания. При $\theta = \frac{\pi}{4}$ (2), (фиг. 112-113), наоборот, движение более интенсивно, из-за дополнительного



Фиг. 112. Линии тока

$$C_{Fx} = -0.3535 \quad Gr_L = -1.35 \cdot 10^4$$

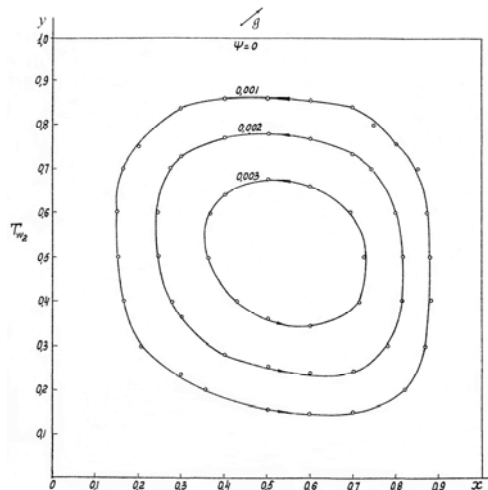
$$C_{Fy} = -0.3556$$



Фиг. 113. Поле температуры

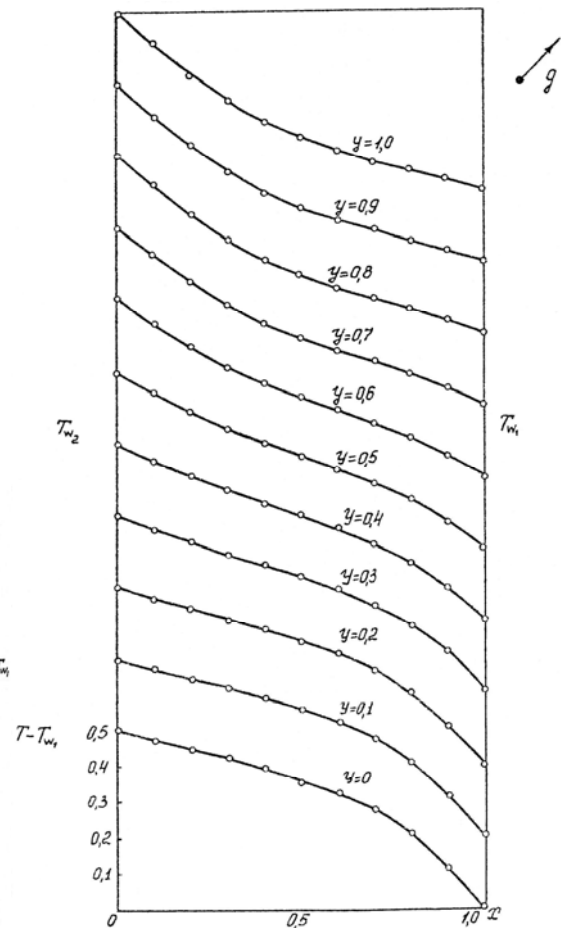
$$C_{Fx} = -0.3535 \quad Gr_L = -1.25 \cdot 10^4$$

$$C_{Fy} = -0.3535$$



Фиг. 114. Линии тока

$$\begin{aligned} C_{Fx} &= 0.2535 \\ C_{Fy} &= 0.3535 \end{aligned} \quad Gr_L = 1.23 \cdot 10^4$$

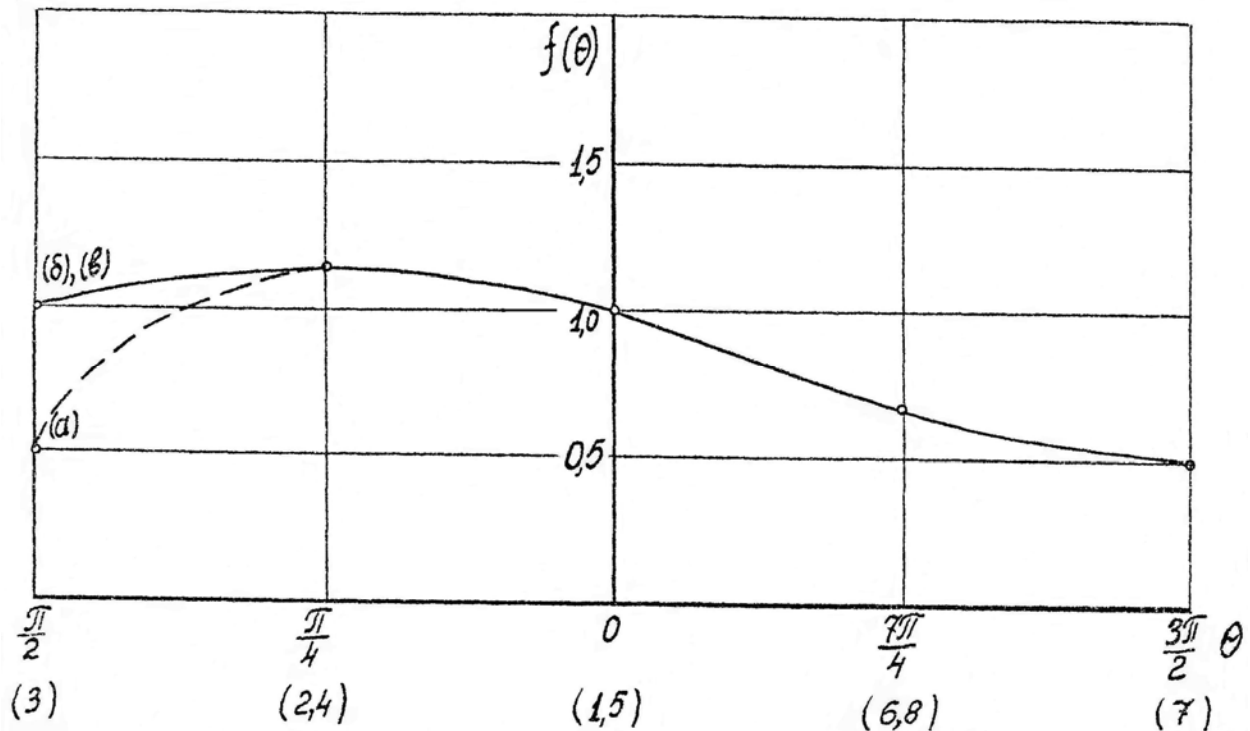


Фиг. 115. Поле температуры

$$\begin{aligned} C_{Fx} &= 0.3535 \\ C_{Fy} &= 0.3535 \end{aligned} \quad Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$$

перемешивания, вызванного перемещением нагретого газа в направлении, обратном направлению действия внешней силы. Сопоставление средней теплопередачи для рассмотренных направлений внешней силы при числе $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$ показано на фиг. 116, в виде зависимости $f(\theta)$, где коэффициент распределения средней теплопередачи по углу поворота внешней силы определяется так

$$f(\theta) = \frac{\bar{Nu}_{WL}(\theta)}{\bar{Nu}_{WL}(\theta = 0)} \quad (133)$$



Фиг. 116. Коэффициент распределения средней теплопередачи по углу поворота внешней силы $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$

Значению $\theta = \frac{\pi}{2}$ (3) соответствует два значения $f(\theta)$ для двух ветвей (а) и (б,в), о которых будет сказано ниже. В целом направлениям $0 \leq \theta \leq \pi$ (2-4) соответствует более интенсивная теплопередача по сравнению с направлениями $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ (6-8), причем различие в теплопередаче для этих направлений растет с увеличением числа Грасгофа.

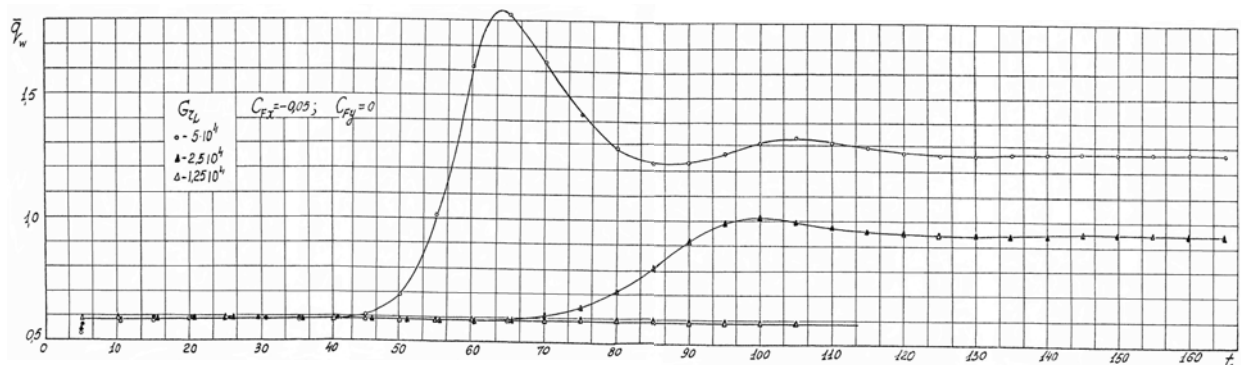
Течение и теплообмен при подогреве снизу $\theta = \frac{\pi}{2}$ (3)

Этот случай рассматривается отдельно ввиду зависимости решения от начального поля u^0, v^0, ρ^0, T^0 (появление различных ветвей у стационарных решений следует, по-видимому, ожидать и при направлениях внешней силы, близких к рассматриваемому, т.е. при $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \Delta\theta$). Рассматривались следующие

системы начальных данных.

1. Условия гидростатического равновесия в поле внешней силы (104). В этом случае, согласно линейной теории устойчивости [6, 82], при $Gr > Gr_{кр}$ движение должно начаться при бесконечно-малых возмущениях, какими могут быть, например, ошибки округления. Однако, при расчетах из этого состояния ошибки округления не выводят разностное решение из состояния равновесия (это проверялось при числах $Gr_L = 5 \cdot 10^4$ и 10^5 , заведомо больших, чем критические). Последнее обстоятельство, возможно, связано либо с конечностью размеров сетки (довольно грубой в этих расчетах), либо с тем, что амплитуда и спектр ошибок округления не соответствует неустойчивым гармоникам.

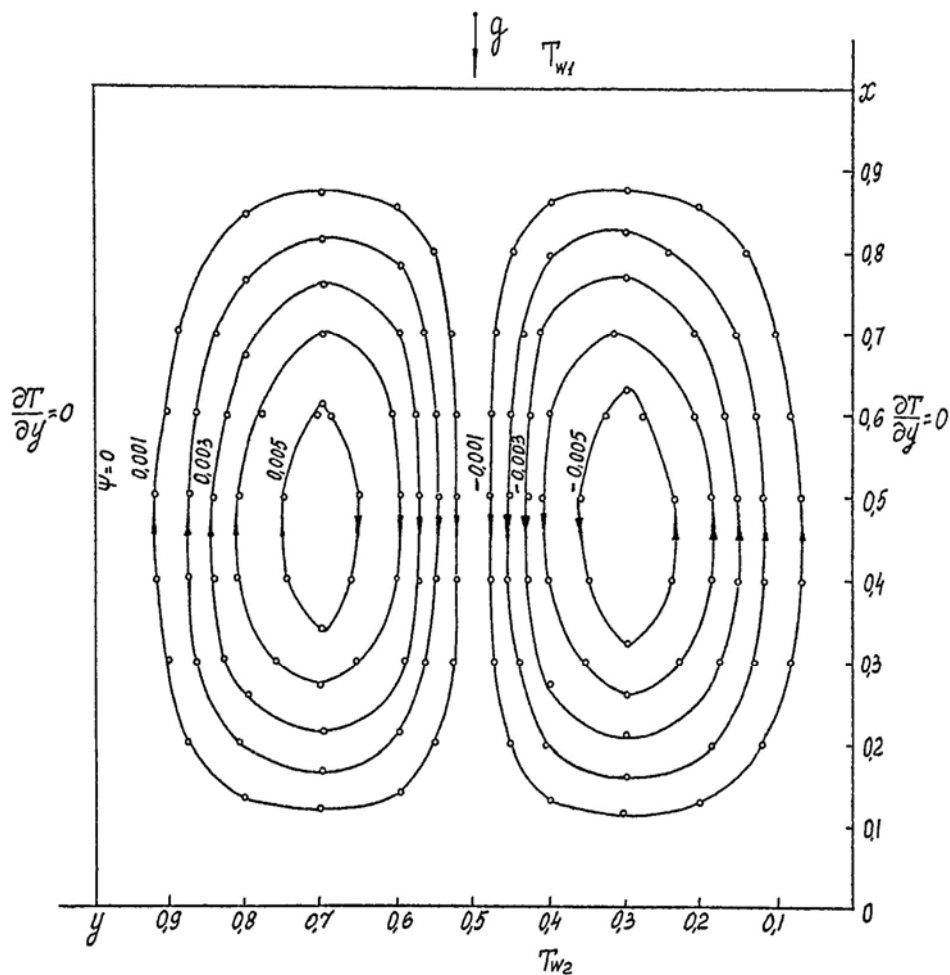
2. Основные способы вывода системы на стационарный режим состояли (а) во внезапном приложении внешней силы в газе, находящемся в состоянии гидростатического равновесия при отсутствии внешней силы (103) и в повороте внешней силы из рассчитанных ранее стационарного состояния (б) при $\theta = \frac{\pi}{4}$ (2) до $\theta = \frac{\pi}{2}$ (3) и (в) при $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (7) до $\theta = \frac{\pi}{2}$ (3).



Фиг. 117. Установление среднего потока тепла на стенке. Начальное поле (а).
Подогрев снизу

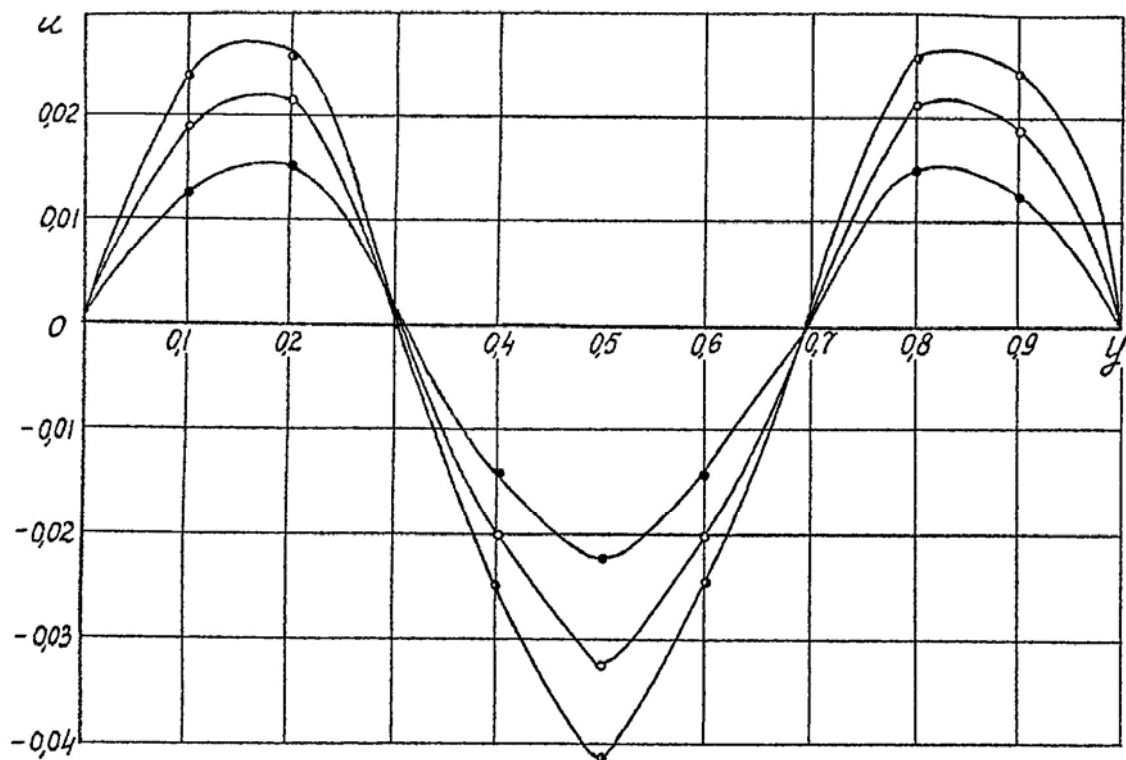
Процесс выхода системы из состояния равновесия (103) при различных числах Грасгофа показан на фиг. 117 в виде зависимости среднего потока тепла на стенке \bar{q}_w по времени. Отметим резкое возрастание возмущений

(экспоненциальное согласно линейной теории) и увеличение времени затухания возмущений при увеличении числа Грасгофа ($Gr_L = 5 \cdot 10^4$). При числе $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$ система переходит из состояния (103) в стационарное состояние, соответствующее (104) при $u, (x, y) = 0$ и $v, (x, y) = 0$. Это показывает, что критическое число Грасгофа Gr_{kp} для рассматриваемого вида возмущений больше, чем $1.25 \cdot 10^4$. Дальнейшие расчеты по числу Gr_L этой ветви осуществлялись последовательными стационарными состояниями (фиг. 123), начиная от полученных (фиг. 117).



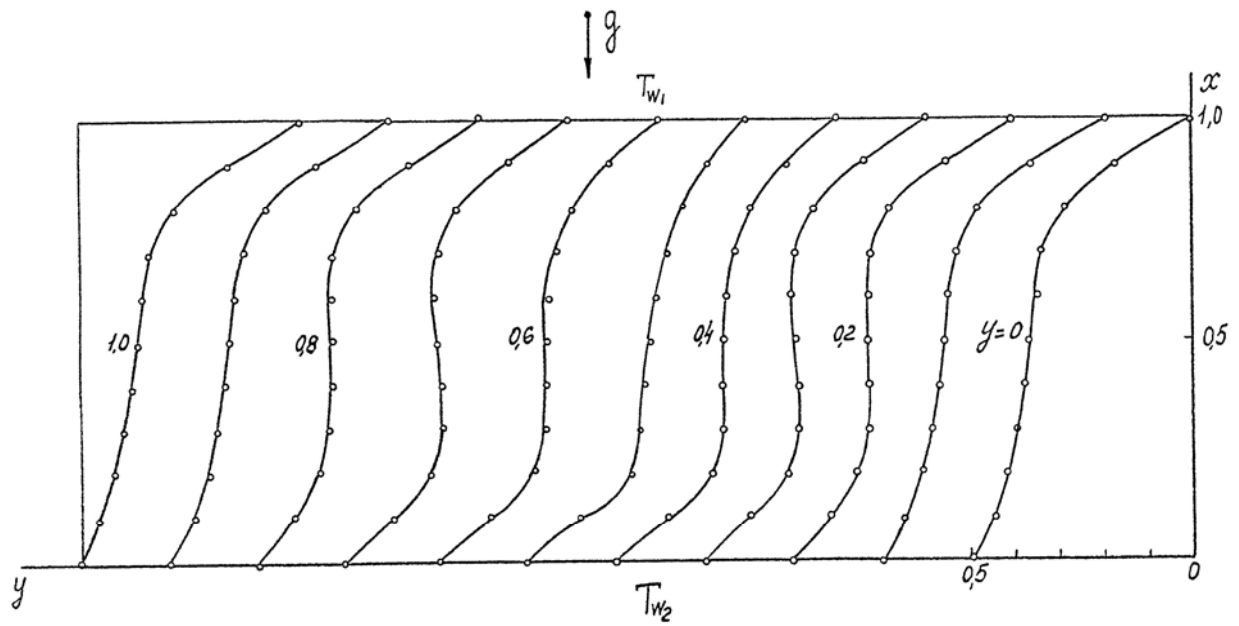
Фиг. 118а. Линии тока (а) $Gr_L = 5 \cdot 10^4$, $C_{Fx} = -0.05$, $C_{Fy} = 0$

В ветви (а) реализуется стационарное циркуляционное движение с двумя симметричными вихрями (фиг. 118А, б), причем газ опускается в центре и поднимается на периферии. Поле температуры симметрично относительно линии $x = 0.5$ (фиг.119). Характерно для такой структуры вихревого течения наличие максимума местного потока тепла на нижней поверхности (фиг.120) при $x = 0.5$, куда притекают струйки тока от холодной стенки.

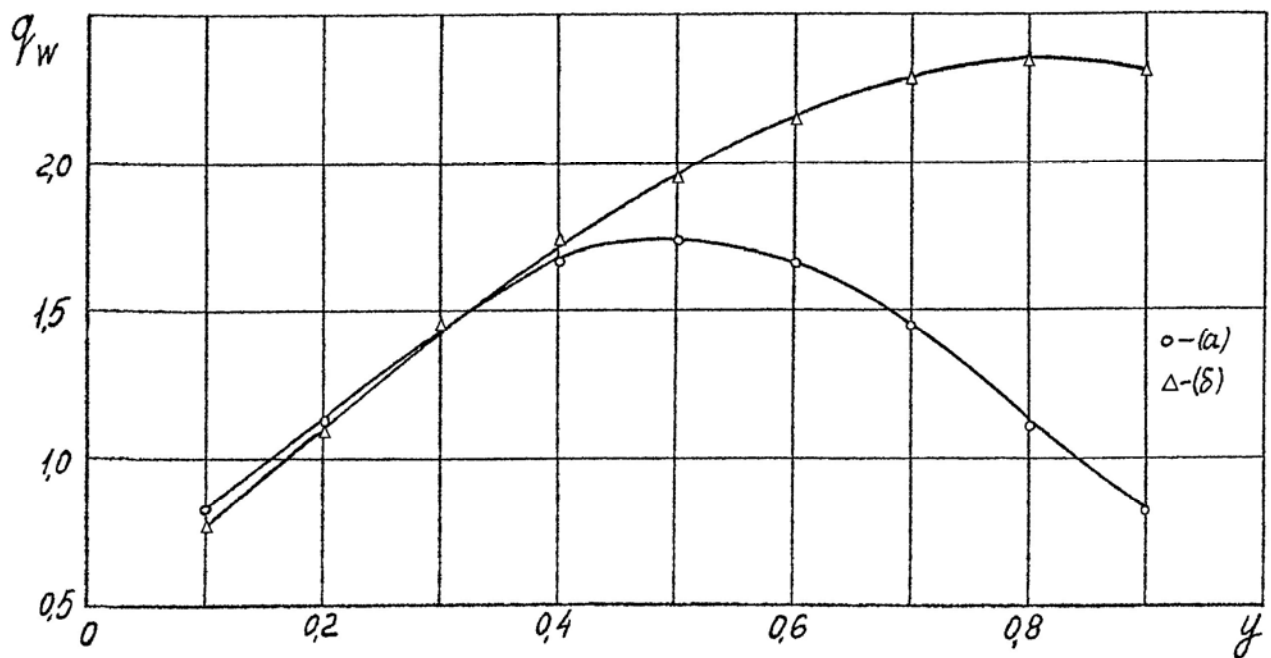


Фиг. 118б. Профиль скорости $u(y)$ при $x = 0.5$ (ветвь (а))

$$\left. \begin{array}{l} \bullet - 1,8 \cdot 10^4 \\ \circ - 2,5 \cdot 10^4 \\ \circ - 5,0 \cdot 10^4 \end{array} \right\} Gr_L$$

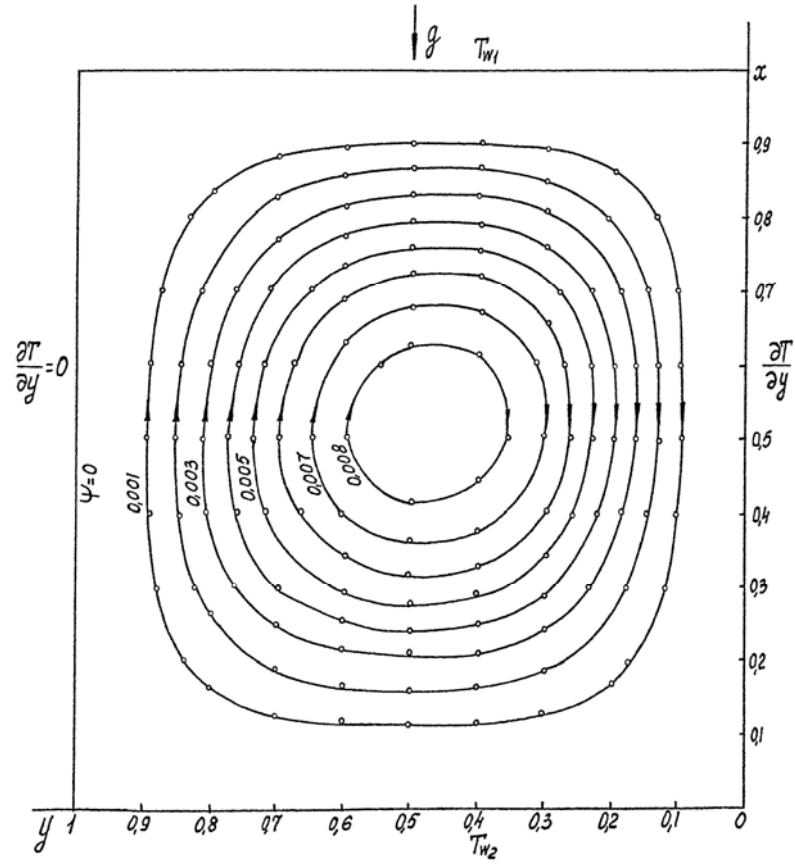


Фиг. 119. Поле температуры (а) $C_{Fx} = -0.05$, $C_{Fy} = 0$, $Gr_L = 5 \cdot 10^4$

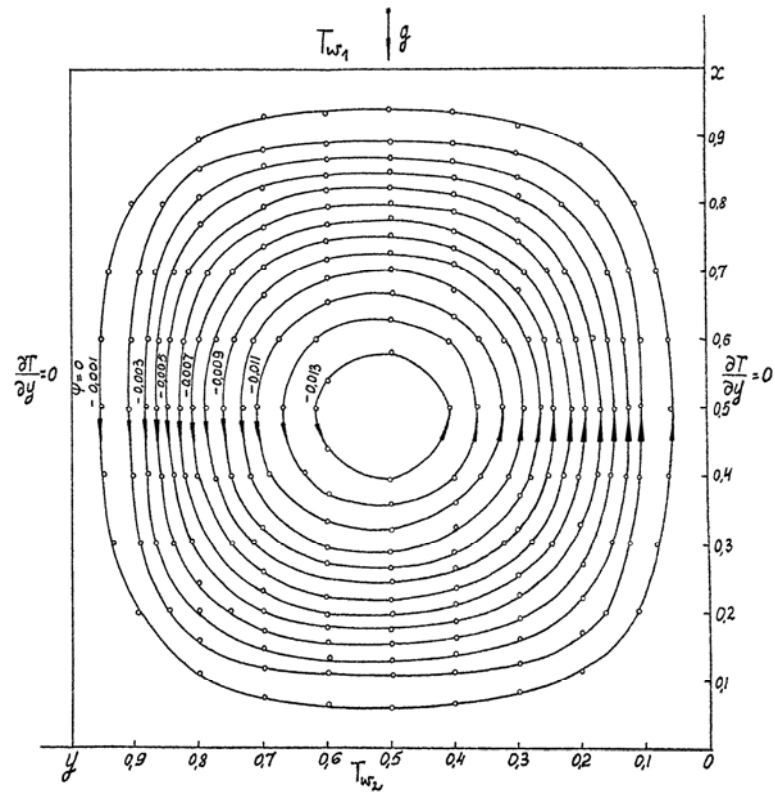


Фиг. 120. Распределение местного потока тепла на нижней стенке

$$Gr_L = 5 \cdot 10^4 \quad C_{Fx} = -0.05 \quad C_{Fy} = 0$$



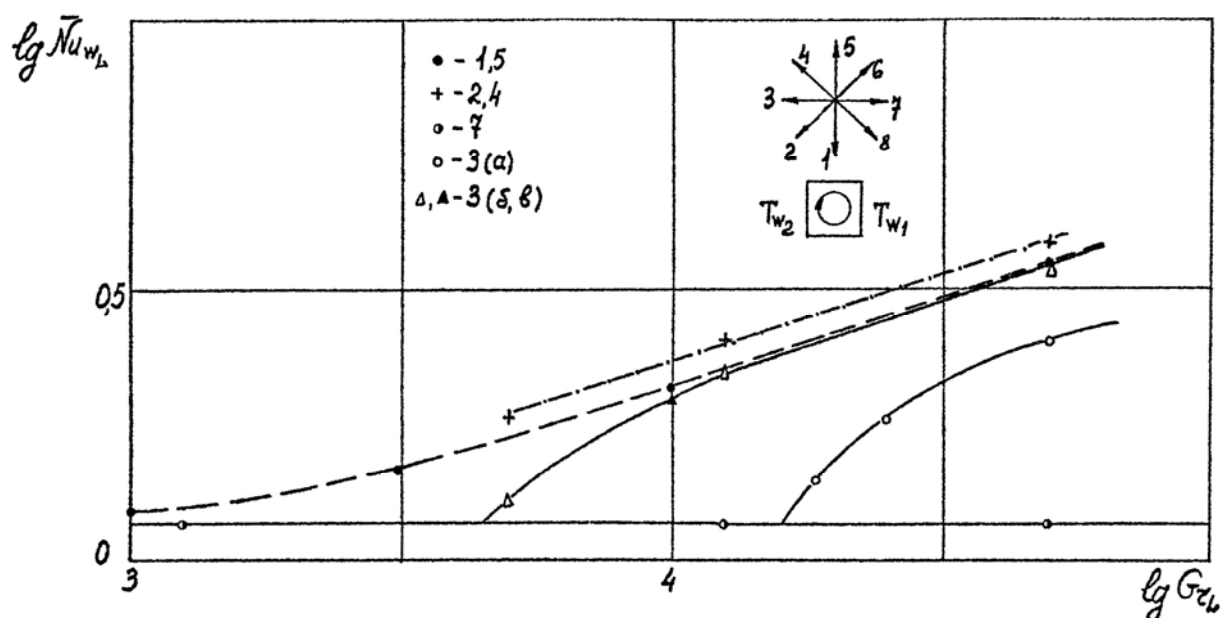
Фиг. 121. Линии тока (б) $C_{Fx} = -0.05$ $C_{Fy} = 0$ $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$



Фиг. 122. Линии тока (в) $Gr_L = 5 \cdot 10^4$

В случае поворота внешней силы (б, в) реализуются стационарные решения с одним вихрем, причем в случае (б) вихрь имеет вращение по часовой стрелке (фиг. 121), а в случае (в) - против часовой стрелки (фиг. 122). Эти два решения симметричны, отличаются лишь направлением линий тока и соответствующим распределением температуры. Средние потоки тепла в этих решениях одинаковы. Распределение местных потоков тепла на стенке (фиг. 120) и средние потоки тепла в решениях (а) и (б, в) значительно различаются. Средняя передача тепла в ветвях (б, в) всегда выше, чем в ветви (а).

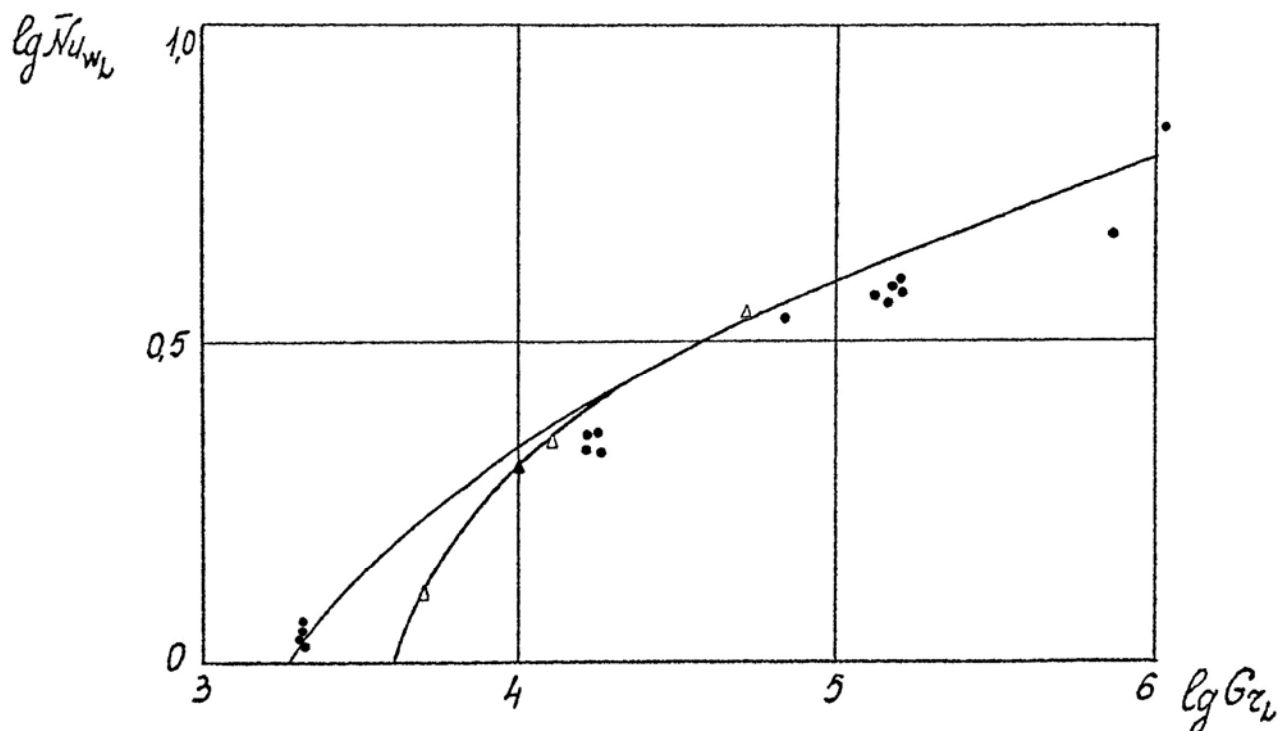
Зависимость средней теплопередачи от числа Грасгофа при подогреве снизу для ветвей (а) и (б, в), при $10^3 \leq Gr_L \leq 10^5$ показана на фиг. 123. Критические числа Грасгофа для этих ветвей оказывается возможным найти, проводя расчеты последовательными стационарными состояниями вниз по числу Gr_L . Для ветвей (б, в) $Gr_{кр} \sim 4,5 \cdot 10^3$, для ветви (а) $Gr_{кр} \sim 1,6 \cdot 10^4$ (фиг.123).



Фиг. 123. Средняя теплопередача в зависимости от числа Грасгофа при различных направлениях внешней силы.

Отметим, что нижнее критическое число Грасгофа для замкнутой области $H/L = 1.0$ $Gr_{кр} \sim 4,5 \cdot 10^3$, полученное здесь (и в работе [88]), превышает критическое число Грасгофа для длинных горизонтальных слоев [82] $Gr_{кр} \sim 1700$. Характерной особенностью зависимости $\bar{Nu}_{wL}(Gr_L)$ при подогреве снизу (фиг. 123) для обеих ветвей (а) и (б, в) является внезапный рост при числе $Gr_L > Gr_{кр}$. После некоторого переходного участка зависимость $\bar{Nu}_{wL}(Gr_L)$ становится степенной (для обеих ветвей (а) и (б, в)) с постоянным показателем степени $n \cong 0.3$. Для ветви (а) с двумя вихрями средняя передача тепла через слой систематически ниже, чем для одновихревой ветви (б, в). На фиг. 123 дается также сопоставление средней теплопередачи для других направлений внешней силы. Для случая $\theta = 0$ (боковой подогрев) конвективное движение начинается уже при очень малых числах Грасгофа, и средняя передача тепла в диапазоне $0 \leq Gr_L \leq 10^4$ (режим теплопроводности, промежуточный режим) в этом случае выше. В диапазоне $1.1 \cdot 10^4 \leq Gr_L \leq 10^5$ (режим пограничного слоя) средняя передача тепла через слой при подогреве снизу $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ (ветви б, в) и боковом подогреве примерно одинакова. Несколько более высокий уровень средней теплопередачи отмечается при направлении внешней силы, промежуточном между указанными случаями $\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$.

Вопрос о том, какая из ветвей (а, б, в) реализуется в действительности, должен решаться путем сопоставления с экспериментом. Возможно, что при различных начальных условиях будут выделены обе ветви. Следует отметить, что для случая подогрева снизу, по-видимому, значительный вклад вносят трехмерные эффекты, и рассмотрение задачи только в двух измерениях может оказаться недостаточным. К сожалению, в настоящее время нет экспериментальных данных, относящихся к областям прямоугольной формы при $H/L = 1$.



Фиг. 124. Сопоставление результатов расчета (ветвь (б, в)) с результатами эксперимента [81]

• - эксперимент [81], Δ , \blacktriangle - расчет - ветвь (б, в)

На фиг. 124 приведено сопоставление зависимости $\bar{Nu}_L(Gr_L)$ для воздуха с результатами измерений [81] для длинного горизонтального слоя. Это сопоставление показывает, что в экспериментах [81] реализован режим, по-видимому, близкий к рассчитанному в ветви (б, в) (с учетом того, что в этих экспериментах использовались модели с большим отношением сторон H/L).

В работе [88] авторы приводят результаты расчета конвекции в замкнутой области при подогреве снизу для модели несжимаемой жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры. Отличием от постановки задачи, принятой здесь, помимо исходной системы дифференциальных уравнений, является принятое в [88] линейное распределение температуры на боковых поверхностях (вместо условий теплоизоляции, принятых здесь). Авторы выделили и изучили закономерности теплопередачи для ветви, аналогичной (в). Вместо ветви (а) рассматривалась другая ветвь, отличающаяся

от нее обратным вращением вихрей и оказавшаяся стабильной лишь в узком диапазоне $1.4 \cdot 10^4 \leq Gr_L \leq 2.8 \cdot 10^4$. Для этого решения средняя теплопередача оказалась ниже, чем, для решения типа (в), что аналогично результату, полученному здесь. Полученные здесь данные далеко не являются исчерпывающими и показывают лишь те возможности, которые открывает применение разработанного численного метода для исследования течения и передачи тепла после потери устойчивости.

Выводы к главе III

1. Приведена постановка задачи о течении и теплообмене газа, находящегося в замкнутой прямоугольной области с заданным тепловым режимом границы под действием произвольно направленной внешней массовой силы применительно к полной системе уравнений Навье-Стокса. Даны оценки точности численного решения на сетках с числом узлов 21×21 , 15×15 , 11×11 , 9×9 , 7×7 ; получено, что увеличение шага сеток приводит к систематическому занижению средней теплопередачи. Показан диапазон сходимости численного решения при различных числах Грасгофа на разностной сетке с различным числом узлов.

2. В расчетах, проведенных в диапазоне чисел Грасгофа $10^2 \leq Gr_L \leq 5 \cdot 10^6$, получены картины линий тока, профили скорости, поля температуры и характеристики теплообмена в основных режимах (режим теплопроводности, промежуточный режим, режим пограничного слоя). Показано, что при больших числах Грасгофа внутри области возникают вторичные течения. Получена последовательная картина возникновения и развития внутренних вторичных течений при увеличении числа Грасгофа.

3. Рассмотрено влияние на течение и теплообмен изменения числа Прандтля в диапазоне $0.01 \leq Pr \leq 100$. Показано, что при ламинарной конвекции в режимах теплопроводности, промежуточном и режиме пограничного слоя средняя передача тепла определяется произведением $Gr_L \cdot Pr$. Расслоение

зависимости $\bar{Nu}_{wL}(Gr_L \cdot Pr)$ по числу Прандтля имеется лишь при малых числах $Pr \leq 0.1$. При обобщении результатов расчета и измерений других авторов дана ориентировочная оценка границы режима по числам $Gr_L \cdot Pr, Pr$, в котором средняя теплопередача через слой определяется произведением $Gr_L \cdot Pr$. Показано, что с увеличением отношения температур T_{w_2}/T_{w_1} и критерия весовой сжимаемости C_{FH} средняя теплопередача через слой возрастает; при $C_{FH} = 0,02 \div 0,05$ и $T_{w_2}/T_{w_1} = 1,1 \div 1,5$ (слабая сжимаемость) влияние этих параметров на теплопередачу составляет 1-2%. В режиме сильной весовой сжимаемости ($C_{FH} \sim 1,0$) увеличение теплопередачи составляет около 30%.

4. Рассмотрены режимы течения и теплопередачи в плоскости изменения числа Грасгофа и отношение сторон H/L ; при увеличении отношения сторон границы режимов теплопроводности, промежуточного режима и границы возникновения вторичных течений смещены в сторону больших чисел Грасгофа.

В режиме пограничного слоя при ламинарной конвекции в вертикальном слое получена формула для расчета теплопередачи в виде

$$\bar{Nu}_{wL} = 0.115 (Gr_L \cdot Pr)^{0.32} (1 + C_{FH})^{0.35} \left(\frac{T_{w_2}}{T_{w_1}} \right)^{0.085} \chi^{0.13} \varphi \left(\frac{H}{L} \right),$$

где

$$\bar{Nu}_{wL} = \frac{\bar{q}_w L}{k_{w_1} (T_{w_2} - T_{w_1})}, \quad Gr_L = \frac{gL^3 \rho_{wL}^2}{\mu_{w_1}^2} \cdot \frac{T_{w_2} - T_{w_1}}{T_{w_1}}$$

$$C_{FH} = \frac{gH}{\chi R T_{w_1}}, \quad \varphi \left(\frac{H}{L} \right) = \frac{\bar{Nu}_{wL} \left(\frac{H}{L} \right)}{\bar{Nu}_{wL} \left(\frac{H}{L} = 1 \right)}$$

Функция $\varphi \left(\frac{H}{L} \right)$ имеет максимум при $\left(\frac{H}{L} \right) = 1,5$.

При $\frac{H}{L} \geq 5$ $\varphi \left(\frac{H}{L} \right) = \left(\frac{H}{L} \right)^{-0.1}$.

Сопоставление результатов расчета (при $C_{FH} \approx 0$, $\frac{T_{w2}}{T_{w1}} \approx 1$) с результатами имеющихся эмпирических формул Якоба, Крауссольтда-Михеева, Эккерта и Карлсона при ламинарной конвекции показывает, что формула Якоба для ламинарной конвекции справедлива только в промежуточном режиме $\left(\frac{H}{L} = 10 \div 40, \quad Gr_L = 10^3 \div 10^5\right)$. В режиме пограничного слоя эта формула дает занижение средней теплопередачи на 25÷30%. Формула Крауссольтда-Михеева не учитывает влияния отношения сторон $\frac{H}{L}$ на теплопередачу и может применяться в режиме пограничного слоя в диапазоне $\frac{H}{L} \approx 10 \div 20$. Результаты расчета по формуле, предложенной в настоящей работе в диапазоне $5 \cdot 10^3 \leq Gr_L \leq 10^6$ для воздуха ($\chi = 1,4$, $Pr = 0,71$) с точностью 5÷10% согласуются с результатами Эккерта и Карлсона и лежат систематически выше их.

5. Показано влияние угла поворота $\left(\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$ внешней силы на характеристики течения и теплопередачи в замкнутой области $\left(\frac{H}{L} = 1,0, \quad Gr_L = 1,25 \cdot 10^4\right)$. Получено, что при $Gr_L = 1,25 \cdot 10^4$ максимальная теплопередача через слой имеется при $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Для случая конвекции при подогреве снизу $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ выделены две ветви стационарных решений, соответствующих (а) внезапному приложению внешней силы в неподвижном газе, находящемся в состоянии гидростатического равновесия и (б, в) внезапному повороту внешней силы из состояния гидродинамического равновесия при $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Получено, что в ветви (а) реализуется циркуляционное движение с двумя вихрями и критическим числом $(Gr_L)_{kp} \cong 1,6 \cdot 10^4$; в ветвях (б, в) - движение с одним вихрем, критическим

числом $(Gr_L)_{kp} \sim 4,5 \cdot 10^3$ и более интенсивной средней теплопередачей, чем в (а). Получены зависимости $\bar{Nu}_{WL}(Gr_L)$ для указанных ветвей при $(Gr_{kp}) \leq Gr_L \leq 5 \cdot 10^4$.

Заключение

В диссертации разработан разностный метод расчета нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа. Предложенным методом возможно решение как нестационарных задач, так и стационарных задач на установление при $t \rightarrow \infty$. Разработана программа для расчета течения и теплообмена в замкнутой двумерной области применительно к вычислительной машине типа М-20. Численный метод проверен в расчетах одномерных и двумерных течений с теплообменом сжимаемого вязкого газа. В численных экспериментах показана сходимость разностного решения при уменьшении шагов сетки, получены достаточные условия устойчивости.

Дано численное решение одномерных задач о структуре фронта стационарной ударной волны, нестационарном течении газа и переносе тепла в газе при внезапном подогреве границы. Рассмотрено влияние числа Рейнольдса и других критериев подобия на структуру и масштаб одномерных течений сжимаемого вязкого газа, получены оценки монотонности разностного решения в зависимости от числа Рейнольдса и величины шага сетки на пространственной координате.

Дано численное решение задачи о течении и теплообмене при ламинарной конвекции газа, находящегося в замкнутой двумерной области под действием внешней силы. Для случая конвекции в вертикальном слое с боковым подогревом в расчетах, проведенных при различных числах Грасгофа, получены характеристики течения и теплопередачи в режимах теплопроводности, промежуточном, пограничного слоя; показано возникновение и развитие внутренних вторичных течений при больших числах

Грасгофа. Показано влияние на теплопередачу отношения сторон $\frac{H}{L}$, рассмотрены режимы течения и теплообмена в плоскости изменения $Gr_L, \frac{H}{L}$.

Показано влияние на течение и перенос тепла при конвекции в режиме пограничного слоя весовой сжимаемости, отношения температур, физических свойств газа. На основании результатов проведенных расчетов получена формула для расчета средней теплопередачи через вертикальный слой при ламинарной конвекции в режиме пограничного слоя в зависимости от критериев подобия $Gr_L \cdot Pr, \frac{H}{L}, \frac{T_{w_2}}{T_{w_1}}, C_{FH}, \chi$. Дано сопоставление результатов

расчета теплопередачи с имеющимися результатами измерений и расчетов других авторов, в результате чего выяснен диапазон применимости эмпирических формул для расчета теплопередачи при ламинарной конвекции в вертикальном слое с боковым перегревом. Рассмотрены особенности течения и теплопередачи при других направлениях внешней силы. Показано, что в случае неустойчивого расслоения плотности стационарное решение при $Gr_L > (Gr_L)_{кр}$ зависит от начальных условий, найдены две ветви стационарных решений, получены зависимости теплопередачи от числа Грасгофа для этих ветвей и даны оценки соответствующих им критических чисел Грасгофа.

Полученные в работе результаты позволяют уточнить физическую картину вихревого течения и закономерности теплопередачи при ламинарной конвекции в замкнутой области и могут использоваться в конкретных инженерных расчетах.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

u - проекция вектора скорости на ось x

v - проекция вектора скорости на ось y

ρ - плотность

T - температура

p - давление

t - время

μ - коэффициент динамической вязкости

μ' - коэффициент объемной вязкости

k - коэффициент теплопроводности

C_v - удельная теплоемкость при постоянном объеме

C_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении

ψ - функция тока

g - ускорение силы тяжести

C - константа Сатерленда

R - газовая постоянная

L - масштаб длины; ширина прямоугольной области

H - высота прямоугольной области

e - внутренняя энергия

P_{xx}, P_{yx}, \dots - компоненты тензора напряжений

X, Y - проекции внешней силы F на оси x, y

$\tilde{L}_u, \tilde{L}_v, \dots$ - разностные одномерные операторы

E - единичный оператор

h, ℓ - шаги сетки по пространственным координатам

τ - шаг сетки по времени

M, N - числа узлов сетки по осям x, y

Δ_s - толщина фронта ударной волны

L_s - длина свободного пробега в набегающем потоке

θ - угол наклона внешней силы F к оси y

q_w - местный поток тепла на стенке

\bar{q}_w - средний поток тепла

\bar{Nu}_{wL} - среднее число Нуссельта

Gr_L - число Грасгофа

Pr - число Прандтля

C_{FH} - критерий весовой сжимаемости

χ - отношение теплоемкостей

C_R - число Рейнольдса

Индексы:

1 - значения при характерных условиях; масштабы

w - значения на стенке; w_1 - холодная, w_2 - нагретая стенка

i - индекс сетки по координате

j - индекс сетки по координате

Верхние индексы:

o - начальные условия

- - безразмерные величины

n - индекс сетки по времени

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кочин Н.Е.,
Кибель И.А., Розе И.В. Теоретическая гидромеханика, ч. II
Физматгиз, 1963 г.
2. Ландау Л.Д.,
Лифшиц И.М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1953.
3. Цянь Сюэ Сень Уравнения газовой динамики. Сб. Основы
газовой динамики (под ред. Эммонса).
Изд. ин. лит-ры, 1963 г.
4. Серрин Дж. Математические основы классической
механики жидкостей. Изд. ин. лит-ры,
1963.
5. Чепмен С.,
Каулинг Т. Математическая теория неоднородных
газов. Изд. Ин. лит-ры. 1960.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. ин. лит-
ры, 1956 г.
7. Том А.,
Эйплт Т К. Числовые расчеты полей в физике и
технике. "Энергия", 1964 г.
8. Kawaguti M. Numerical solution of the Navier-Stokes
equations for the flow in two dimensional
cavity. Phys Soc. Japan 16. № 12, 1961
9. Жидков Н.П.
Корнейчук А.А.
Крылов А.Л.
Мостинская С.Б. Плоскопараллельное движение вязкой
жидкости между вращающимися
цилиндрами. Сб. Вычисл. методы и прогр.
изд. МГУ 1962 г.
10. Чудов Л.А.
Кускова Т. В. О применении разностных схем к расчету
нестационарных течений вязкой
несжимаемой жидкости. Сб. численные
методы в газовой динамике. Изд. МГУ,
1963 г.
11. СИМУНИ Л.М. Численное решение некоторых задач
движения вязкой жидкости.
Инженерный журнал 4; вып. 3, 1964.

12. Fromm J.E. A method for computing nonsteady incompressible fluid flow. Los Alamos Sci. Lab. LA-2910, 1963.
13. Булеев Н.И., Тимухин Г.И. Течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском зазоре на входном участке ФЭИ 1965 г.
14. Pearson C. A computational method for viscous flow problems. Journal of Fluid Mech. V.21, pt 4, 1965.
15. Burggraf O.R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. Journal of Fluid Mech. V.21, pt 1, 1966.
16. Браиловская И.Ю. Постановка задачи и исследование разностных схем для расчета течения при взаимодействии ударной волны с пограничным слоем. Отч. ВЦ МГУ, 1962 г.
17. Браиловская И.Ю. Разностная схема для численного решения двумерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа. ДАН СССР. 1965 г. т.160 № 5.
18. Kurzrock J.W., Mates R.E. Exact numerical solutions of the time dependent compressible Navier-Stokes. AIAA paper № 66-33, 1966.
19. Thommen H.V. Numerical integration of the Navier-Stokes Equations. ZAMP. V.17, № 3, 1966.
20. Годунов С.К. Разностные методы решения уравнений газовой динамики, изд. НГУ, 1962 г.
21. Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопьев Г.П. Разностная схема для двухмерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. выч. матем. и математич. физ. т.9 № 6, 1961 г.
22. Годунов С.К. Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, 1962 г.

23. Peaceman D.W. The numerical solutions of parabolic and elliptic differential equations. Journal Soc. Industr. and Appl. Math. V.3, № 1, 1955.
24. Douglas J. On the numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ by implicit methods. Journal Soc. Industr. and Appl. Math. V.3, № 1, 1955
25. Багриновский И.А., Годунов С.К. Разностные методы для многомерных задач. ДАН, т.115, № 3, 1957 г.
26. Яненко Н.Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. ДАН, т.125, № 6, 1959
27. Яненко Н.Н. О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности. Изв. высш. учебн.завед.сер.матем. № 4, 1961 г.
28. Дьяконов Е.Г. О некоторых разностных схемах для решения краевых задач. Журн. выч. матем. и математич. физ. т.2, № 1, 1962 г.
29. Дьяконов Б.Г. О некоторых итерационных методах решения систем разностных уравнений, возникающих при решении методом сеток уравнений в частных производных эллиптического типа. Сб. Вычисл. методы и прогр. изд. МГУ, вып. IV, 1965 г.
30. Самарский А.А. Об одном экономичном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Журнал вычислит. матем. и математич. физ.2, № 5, 1962 г.
31. Самарский А.А. Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений. Журн. выч. матем. и матем. физ. Т.4, № 3, 1964 г.
32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. Наука 1966 г. (дополнение I)

33. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов. Изд. НГУ, 1966 г.
34. Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Сб. статей под ред. Марчука. Изд. НГУ, 1966 г.
35. МАРЧУК Г.И. Численный алгоритм решения уравнений прогноза погоды. ДАН СССР, т.156, № 2, сер. геофизическая
36. Filler L., Ludloff H. Stability analysis and integration of viscous equation of motion. Math. Comput. V.15, №75, 1961.
37. Gary J. On certain finite difference schemes for hyperbolic systems. Math. Comput. V.18, №85, 1964.
38. Crocco L. A suggestion for the numerical solution of the steady Navier-Stokes equations. AIAA Journal. V.9, №10, 1965.
39. Scala S.M., Gordon P. Reflection of a shock wave at a surface. Phys. Of Fluids. V. 9, № 6, 1966.
40. Гельфанд И.М., Локуцкий О.В. Метод прогонки для решения разностных уравнений (приложение II к книге [22])
41. Рихтмайер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач. Изд. ин. лит-ры. 1960 г.
42. Нейман Дж., Рихтмайер Р. Метод численного расчета гидродинамических скачков. Сб. пер. Механика, изд. ин. лит-ры, 1951 г.
43. Gilbarg D., Paoluccio D. The structure of shock wave in continuum theory of fluids. Journ. Rat. Mech. And Analysis, 2, 617, 1953.
44. МИЗЕС Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. Изд. ин. лит-ры 1961 г.
45. Мордухов М., Либби И П. О полном решении уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного сжимаемого газа. Сб. пер. Механика, вып. I, 1950 г.

46. Сычев В.В. О гиперзвуковых течениях вязкого теплопроводного газа. ПММ, т. XXXV, №4, 1961 г.
47. Гиршфельдер Дж. Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория жидкостей и газов. Изд. ин. лит-ры, 1961г.
48. Филипова Г.П., Шикин И.П. Вязкость воздуха и аргона при температурах от 0 –183 °С и давлениях от 1 до 150 ата Кислород, № 2, 1959 г.
51. Иванов А.В. Структура фронта ударной волны в воздухе при числах М от 2,6 до 6. ВЗв. АН СССР, МЖГ, № 1, 1967 г.
52. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1965 г.
53. Scala S.M., Talbat L. Shock wave structure with rotational and vibrational relaxation. Rarefied Gas Dynamics. 3-rd Symposium
54. САМАРСКИЙ А.А. СОБОЛЬ И.М. Примеры численного расчета температурных волн. Журнал вычислит. матем. и матем.физ. ТЗ № 4, 1963 г.
55. Демьянов Ю.А., Киреев В.Т. К анализу одномерных нестационарных течений газа с учетом теплопроводности и вязкости. Изв.АН СССР, Механика № 2, 1965 г.
56. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. ГИТТЛ, 1952 г.
57. Batchelor G.K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. Quartly of Applied Math. V. XII, № 3, 1954
58. Eckert E., Carlson W. Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures. Intern. Journ. Of heat and mass transf. V.2. № 1 / 2, 1961

59. Mordchelles-Regnier G., Kaplan C. Visualisation of natural convection on a plane wall and in a vertical gap by differential interferometry. Proceedings 1963 Heat Transf. And fluid Mech. Institute.
60. Elder J.W. Laminar free convection in vertical slot. Journ. of Fluid Mech. V. 23, pt 1, 1965.
61. Elder J.W. Turbulent free convection in vertical slot. Journ. of Fluid Mech. V. 23, pt 1, 1965.
62. Эккерт Е., Зенген Е., Шнайдер П. Изучение перехода ламинарного движения в турбулентное при свободной конвекции на вертикальной пластине. Сб. Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи. ГЭИ, 1960 г.
63. Poots G. Heat transfer by laminar free convection in enclosed plane gas layers. Quartly Journ. of Mech. and Appl. Math., v. XI, pt 3, 1958.
64. Wilkes J.O., Churchill S.W. The finite difference computation of natural convection in a rectangular enclosure. AICh Eng. J. 12. № 1. 1966.
65. Elder J.W. Numerical experiments with free convection in a vertical slot. Journ. of Fluid Mech. V. 24, pt 4, 1966.
66. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Тарунин Е.Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 1966 г.
67. Emery A., Chu N. Heat transfer aeross vertical layers. Trans. ASME. Ser. C, v. 87, № 1, 1965
68. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., О теплопередаче через вертикальную щель прямоугольного сечения при сильной конвекции. Инж.-физ. журн. Т.3 № 12, 1960 г.
69. Gill A.E. The boundary-layer regime for convection in a rectangular cavity. Journ. Fluid Mech. V.26, pt 3. 1966.

70. Kraussold H. Wärmeabgabe von zylindrischen Flüssigkeitsschichten by natürlich Konvection. Forchung S Band, Heft 4, 1934.
71. Бояринцев Д.И. Теплопередача через жидкостные и газовые прослойки. ЖТФ т. 20, № 9. 1950 г.
72. Михеев М.А. Основы теплопередачи. Госэнергоиздат, 1956 г.
73. Schmidt E., Beckman W. Das Temperatur - und Geschwindigkeits – feld von einer senerechte platte nei natürlicher Konvection. Techn. Mech. und Therm. Band 1, s. 1-24. 1930.
74. ЧИРКИН В.С. Теплофизические свойства материалов Физматгиз, 1959 г.
75. КЭЙ Д. ЛЭБИ Т.Л. Таблицы физических и химических постоянных. Физматгиз, 1962 г.
76. Гребер С., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. Изд. ин. лит-ры; 1958 г.
77. Toulukian Y.S., Hawkins G.A., Jakob M. Heat transfer by free convection heated vertical surfaces to liquids. Trans. ASME ser. C, v. 70, № 1, 1948.
78. Schmidt E. Versuche zum Wärmlübergang bei naturlicher Konvection. Chemie – Ing. – Techn. 28, 1956, № 3.
79. Jakob M. Free heat convection through enclosed plane gas layers. Trans. ASME ser. C, v. 6, № 3, 1946.
80. Беркенгейм А.А. Исследование естественной конвенции в цилиндрических слоях жидкости. Инж.- физ. журнал, т. X, №4, 1966 г.
81. Mull W., Reiher H. Warmeschuchte durch Luftschichten Gesund heits. – Ing., Beihefte 28, Reihe 1, 1930.

82. Монин А.С.
Яглом А.М. Статистическая гидромеханика ч. I, изд. Наука, 1965 г.
83. Сорокин В.С. О стационарных движениях жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, т. 17, № I, 1953 г.
84. Сорокин В.С. Об устойчивости неравномерно нагретого газа в поле силы тяжести. ПММ, т. 17, №2, 1953 г.
85. Malkus W.,
Veronis G. Finite amplitude cellular convection. Journ. Fluid Mech. 4, pt 3, 1958.
86. Deardorff W.A. A numerical study of two dimensional parallel plate convection. Journ. Atmosph. Sci. V. 21, № 4, 1964.
87. Fromm J.E. Numerical solution of the nonlinear equations for a heated fluid layer. Phys. of Fluids. V. 8, № 10, 1965.
88. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Тарунин Е.Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу. Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, 1966 г.
89. Полежаев В.И. Расчет одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Научно-технический отчет НИИ-1 № 3623, июль, 1965 г.
90. Полежаев В.И. Расчет течения и теплообмена сжимаемого вязкого газа в замкнутой области. Научно-технический отчет №3801 НИИ-1, февраль, 1966 г.
92. Полежаев В.И. Численное решение системы одномерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, 1966.
93. Полежаев В.И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 1967 г.
94. Полежаев В.И. Численное решение системы двумерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. Сборник докладов Совещания по численным методам расчета течений вязкой жидкости. Новосибирск (в печати).