

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э. Баумана**

На правах рукописи

Иванова Ольга Алексеевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДА
ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент И.К. Марчевский

Москва — 2013

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Математическое моделирование малых колебаний	
провода	19
1.1. Исходные данные для задачи о моделировании движения провода ЛЭП в воздушном потоке	20
1.2. Математическая модель движения провода ЛЭП	22
1.3. Постановка задачи	27
1.3.1. Уравнения движения провода в безразмерной форме	27
1.3.2. Равновесная форма провода	29
1.3.3. Эквивалентные податливости пружин, моделирую- щих изоляторы и соседние пролеты	34
1.4. Определение собственных частот и форм малых колеба- ний провода ЛЭП	35
1.4.1. Уравнения малых свободных колебаний провода . .	35
1.4.2. Граничные условия	38
1.4.3. Методы определения собственных частот и форм ма- лых колебаний провода	42
1.4.4. Уравнения для определения собственных частот ма- лых колебаний провода	50
1.4.5. Собственные частоты малых колебаний одного про- лета с неподвижно закрепленными концами	55
1.4.6. Частоты колебаний одного пролета с упругозакреп- ленными концами	63
1.4.7. Собственные частоты малых колебаний провода мно- гопролетной линии	64
1.4.8. Собственные частоты малых колебаний провода с точечной массой (гасителем вибрации)	69

	Стр.
1.4.9. Задание эквивалентной жесткости	70
1.5. Выводы	72
Глава 2. Математическое моделирование аэроупругого дви- жения профиля методом вихревых элементов	74
2.1. Постановка задачи	74
2.1.1. Уравнения движения среды	74
2.1.2. Уравнения движения профиля	76
2.2. Описание метода вихревых элементов	77
2.3. Расчетная схема метода вихревых элементов	79
2.4. Программная реализация метода вихревых элементов . .	87
2.5. Верификация метода вихревых элементов	89
2.5.1. Расчет обтекания полукруглого профиля	89
2.5.2. Расчет обтекания профиля обледенелого провода ЛЭП	90
2.5.3. Колебания вращающегося профиля	91
2.5.4. Математическое моделирование явления ветрового резонанса профиля	92
2.6. Выводы	96
Глава 3. Программный комплекс PROVOD для расчета коле- баний провода ЛЭП под действием нестационарных аэро- динамических нагрузок	98
3.1. Математическое моделирование движения провода ЛЭП методом Бубнова — Галеркина	98
3.1.1. Задание вида решения	98
3.1.2. Вычисление аэродинамических нагрузок	100
3.1.3. Переход к системе обыкновенных дифференциаль- ных уравнений	101
3.2. Описание программного комплекса	105
3.2.1. Исходные данные	108
3.2.2. Выходные данные	112

	Стр.
3.2.3. Дополнительные возможности	113
3.2.4. Схема работы программного комплекса	114
3.3. Квазистационарные расчеты	116
3.3.1. Колебания провода с U -образным поперечным сечением	117
3.3.2. Колебания провода с обледенением	119
3.3.3. Колебания провода с близкими собственными частотами вертикальных и крутильных колебаний	122
3.4. Нестационарные расчеты	123
3.4.1. Движение упругозакрепленного профиля	124
3.4.2. Движение провода с обледенением	126
3.5. Выводы	129
Основные результаты и выводы	130
Литература	131

Введение

Актуальность работы. Устойчивый поперечный ветер, действующий на провода воздушных линий электропередачи (ЛЭП), может приводить к пляске (галопированию) проводов — их высокоамплитудным низкочастотным колебаниям, происходящим преимущественно в вертикальной плоскости. Пляска почти всегда вызывается умеренным ветром, действующим на покрытую несимметричной наледью поверхность провода. Высокие динамические нагрузки, действующие на провода, опоры и арматуру ЛЭП при пляске, сокращают срок эксплуатации линии, а в особо неблагоприятной ситуации могут всего за несколько часов привести к значительным повреждениям линии вплоть до ее выхода из строя [58]. Поэтому уже с 1930-х годов, когда стали массово строиться воздушные линии электропередачи и появились первые сообщения о пляске и вызванных ей повреждениях, начались попытки математического описания этого явления и объяснения его причин. В дальнейшем с развитием вычислительной техники все большее внимание стало уделяться численному анализу математических моделей движения проводов воздушных линий, поскольку это позволяет еще на этапе проектирования ЛЭП получить необходимую для разработки оптимальной конфигурации информацию о поведении линии под воздействием ветра.

Наиболее простой моделью провода ЛЭП является жесткий упруго-закрепленный цилиндр, совершающий колебания под воздействием поперечного ветра; движение сечений цилиндра при этом является плоскопараллельным, поэтому математической моделью такой конструкции является профиль, обтекаемый двумерным потоком среды. Главный вектор \mathbf{F} и главный момент M аэродинамических сил, действующих на профиль, в простейшем случае можно считать квазистационарными, т. е. равными

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho_{\text{возд}} d V_{\text{отн}}^2 (\tau_V C_{xa}(\alpha) + \nu_V C_{ya}(\alpha)), \quad M = \frac{1}{2} \rho_{\text{возд}} d^2 V_{\text{отн}}^2 C_m(\alpha),$$

где $\rho_{\text{возд}}$ — плотность воздуха; d — характерный размер (хорда) профиля; $\mathbf{V}_{\text{отн}} = \mathbf{V}_{\infty} - \mathbf{V}_{\text{проф}}$ — относительная скорость ветра, $V_{\text{отн}} = |\mathbf{V}_{\text{отн}}|$ (\mathbf{V}_{∞} — скорость набегающего потока; $\mathbf{V}_{\text{проф}}$ — скорость движения некоторой фиксированной точки профиля); $\boldsymbol{\tau}_V, \boldsymbol{\nu}_V$ — орты, направленные вдоль вектора $\mathbf{V}_{\text{отн}}$ и перпендикулярно ему; $C_{xa}(\alpha), C_{ya}(\alpha), C_m(\alpha)$ — стационарные аэродинамические коэффициенты профиля, зависящие от угла атаки α — угла между вектором $\mathbf{V}_{\text{отн}}$ и хордой профиля. Стационарные аэродинамические коэффициенты профиля определяются путем осреднения по большому промежутку времени полученных в эксперименте или расчете мгновенных значений аэродинамической силы и момента, действующих на неподвижный цилиндр (профиль) при установившемся обтекании.

Исследуя колебания профиля с одной вертикальной степенью свободы, Дж. Ден-Гартог установил [55], что возможной причиной пляски является так называемая аэродинамическая неустойчивость профиля — явление, когда аэродинамическая сила, действующая со стороны потока при малых колебаниях профиля, приводит не к демпфированию этих колебаний, а к нарастанию их амплитуды. Ден-Гартогом было получено необходимое условие неустойчивости

$$G(\alpha) = C_{xa}(\alpha) + C'_{ya}(\alpha) < 0.$$

Это условие носит имя Глауэрта — Ден-Гартога, поскольку ранее оно было получено Глауэртом [60] как необходимое условие аэродинамической неустойчивости при исследовании авторотации — больших крутильных колебаний вокруг продольной оси. Основываясь на соображениях качественного характера, Ден-Гартог сделал вывод, что к неустойчивым сечениям относятся полукруг, поставленный своей плоской стороной навстречу ветру, и сильно вытянутый прямоугольник (рис. 1), причем полукруг является наиболее неустойчивым из известных сечений. В ходе эксперимента в аэродинамической трубе Ден-Гартог наблюдал высокоамплитудные колебания упругозакрепленного цилиндра с сечением в форме полукруга, что подтвердило его теоретические заключения.

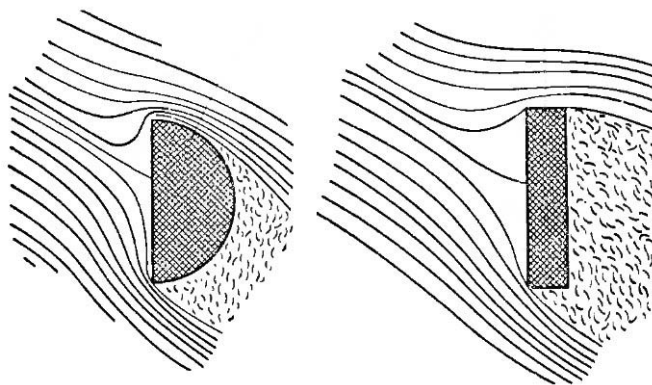


Рис. 1. Воздушный поток вокруг плохообтекаемых тел [55]

Отметим, что в [84] для цилиндра с полукруглым сечением при наличии у него одной вертикальной степени свободы пляски не наблюдалось, что согласуется с другими экспериментальными данными: так, согласно [38, 56] $G(0) > 0$. По-видимому, устойчивость или неустойчивость полукруга объясняется разными режимами обтекания в экспериментах, характеризующимися различными значениями числа Рейнольдса (при высоких числах Рейнольдса лобовое сопротивление заметно снижается).

Исследованиям устойчивости по Ляпунову положения равновесия в потоке профиля, закрепленного с помощью упругих или вязкоупругих связей, в случае большего числа степеней свободы посвящены работы [5, 31]. В [5] рассмотрена модель движения профиля с тремя степенями свободы и в результате получено достаточное условие неустойчивости положений равновесия профиля. В работе [31] для другой схемы закрепления профиля получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости положений равновесия для всех случаев движения профиля (с 1, 2 и 3 степенями свободы) при наличии упругих или вязкоупругих связей.

Эксперименты по исследованию колебаний упругозакрепленных цилиндров с различными поперечными сечениями [45, 46, 51, 81, 83, 84] позволили сделать ряд выводов о причинах возникновения их пляски. Во-первых, в случае, если пляска вызывается аэродинамической неустой-

чивостью, существенную роль играет положение центра масс сечения цилиндра: если он не лежит на оси вращения, взаимное влияние крутильного и поступательного движений может как расширять область неустойчивости, так и сужать ее. Во-вторых, колебания большой амплитуды могут вызываться эффектом сближения собственных частот поступательных и крутильных колебаний; при этом условие Глауэрта — Ден-Гартога может не выполняться [51,81].

Развитие больших колебаний проводов ЛЭП вызывается теми же механизмами, что и развитие колебаний цилиндров, однако для более глубокого понимания данного явления и прогноза количественных характеристик пляски проводов уже в первые годы эксплуатации ЛЭП начались полевые испытания. Для возбуждения пляски на провода опытных линий крепились деревянные, восковые, глиняные или пластиковые насадки, моделирующие обледенение (рис. 2).

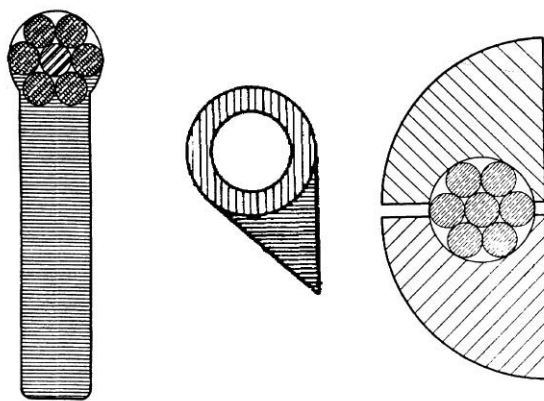


Рис. 2. Имитация обледенения провода [95]

Как указано в [72], впервые пляску опытной линии, к проводу которой был прикреплен восковой выступ в форме вытянутого прямоугольника, удалось наблюдать в 1932 г. на 32-метровом пролете. О пляске провода с полукруглыми деревянными насадками сообщается в работах [7, 57, 58, 87, 95] — оказалось, что провод с таким сечением подвержен пляске, несмотря на «спорность» выполнения условия Глауэрта — Ден-Гартога для полукруга; при этом в эксперименте [57] отмечено, что

для возбуждения пляски провода с полукруглыми насадками потребовалось оборудовать пролет дополнительными массивными рычагами, чтобы сблизить собственные частоты вертикальных и крутильных колебаний. В 1970-х годах возобновились попытки воспроизвести пляску на опытной линии с насадками, более близкими к реальным формам обледенения, чем полукруг или прямоугольник. В 1974 г. удалось провести успешный эксперимент для провода с U -образным пластиковым выступом [52, 82].

Хотя отдельные случаи пляски, полученные на опытных линиях, представляют большой методический интерес, для оптимального проектирования ЛЭП желательно иметь информацию о возможных амплитудах пляски, которые могут возникнуть в данной местности. Оценки амплитуды пляски [47, 73, 88] в зависимости от параметров линии и проводов, полученные на основе большой подборки результатов наблюдений, являются слишком грубыми. Более детальный анализ характеристик колебаний проводов может быть выполнен путем проведения вычислительного эксперимента, очевидными преимуществами которого перед натурным является невысокая стоимость и возможность рассмотрения большого набора различных параметров ЛЭП и форм поперечных сечений проводов. В то же время описанные случаи наблюдения пляски проводов с искусственно сформированным поперечным сечением на опытных линиях представляют большую ценность для верификации численных алгоритмов.

Математическому моделированию аэроупругих колебаний проводов ЛЭП и численному анализу построенных моделей посвящены, например, работы [56, 59, 67, 74, 99], где для моделирования динамики провода применяется метод конечных элементов, работа [37], в которой используется метод конечных разностей, работы [71, 98], где моделирование колебаний проводов производится методом Галеркина. Известны и другие подходы, в частности, в [53, 69] провод моделируется набором последовательно соединенных точечных масс. Однако, несмотря на достаточное число ра-

бот по указанной тематике в них приведено очень ограниченное число тестовых примеров (наиболее распространенными являются всего лишь три), причем для одного и того же тестового примера отличие получаемых разными авторами результатов может быть довольно существенным: так, в эксперименте [52], согласно [67], размах колебаний при пляске составлял около 2.2 м, в расчете [56] получилась величина менее 1.5 м, а в расчете [99] — около 5 м. По этой причине *задача разработки программного комплекса для моделирования аэроупругой динамики проводов ЛЭП не утратила своей актуальности и имеет большое практическое значение.*

На характеристики колебаний конкретного пролета ЛЭП существенно влияет способ закрепления его концов. В простейшем случае они могут быть закреплены неподвижно, однако если линия является многопролетной, между соседними пролетами устанавливаются промежуточные опоры, к которым провод крепится через гирлянду изолирующих подвесок (подвесной изолятор). При этом концы пролета могут совершать перемещения, а низшие собственные частоты провода, в основном определяющие его динамику, могут существенно изменяться по сравнению с собственными частотам провода с неподвижно закрепленными концами. Однако при разработке численного алгоритма для моделирования колебаний провода учет нескольких пролетов может представлять трудности, поэтому нередко используется подход [76, 97], состоящий в исследовании вместо многопролетной ЛЭП одного конкретного ее пролета, концы которого закреплены с помощью линейных пружин некоторых эквивалентных жесткостей. Данный подход существенно упрощает разработку программного комплекса, однако может приводить к получению в результате расчета неверных значений низших собственных частот колебаний провода. Поэтому *актуальной задачей является разработка методики определения эквивалентных жесткостей пружин, моделирующих наличие изоляторов и соседних пролетов у рассматриваемого пролета.*

Ключевой проблемой при численном исследовании аэроупругих колебаний провода является вычисление распределенных аэродинамических нагрузок, действующих на него. В соответствии с общепринятым подходом для их определения принимаются следующие предположения.

- Набегающий поток направлен перпендикулярно плоскости провода и обтекание каждого его сечения является плоскопараллельным. Тогда распределенные аэродинамические нагрузки, действующие на провод, могут быть определены путем интерполяции аэродинамических нагрузок, действующих на отдельные его сечения [8].
- Аэродинамические нагрузки, действующие на сечения провода, являются квазистационарными, т. е. могут быть вычислены по стационарным аэродинамическим коэффициентам профиля сечения провода C_{xa} , C_{ya} , C_m . При этом для качественного исследования характера колебаний провода пригодны приближенные зависимости $C_{xa}(\alpha)$, $C_{ya}(\alpha)$, $C_m(\alpha)$, определенные на основе экспериментальных данных и выраженные простыми тригонометрическими функциями, как это сделано, например, в [71].
- Как правило, дополнительно предполагается, что все сечения провода имеют одинаковую форму. Это может быть полукруг, вытянутый прямоугольник, круг с выступом U -образной формы, как в натурных экспериментах, или какой-либо характерный профиль обледенелого провода ЛЭП [3].

Предположение о плоскопараллельности течений воздуха вокруг сечений провода принимается из-за невозможности отказа от него, поскольку вследствие большой пространственной протяженности провода ЛЭП осуществить трехмерный расчет его обтекания едва ли возможно даже при современном уровне развития вычислительной техники. Гипотеза о квазистационарности аэродинамических нагрузок, действующих

на провод, принимается по той причине, что период колебаний провода при пляске (характерный временной масштаб), как правило, в сотни раз превосходит характерное время процесса обтекания провода потоком — время, за которое частицы воздуха преодолевают расстояние в диаметр провода [49]. В пользу правильности данной гипотезы говорит также хорошее согласие результатов некоторых экспериментов с результатами квазистационарных расчетов. К примеру, в работе [68] был проведен вычислительный эксперимент, повторяющий натурный эксперимент [51] по исследованию колебаний упругозакрепленного цилиндра с тремя степенями свободы. Близость результатов расчета с экспериментальными данными позволила сделать вывод о том, что гипотеза о квазистационарности аэродинамических нагрузок применима для численного моделирования аэроупругих колебаний профилей, а также пространственного движения провода ЛЭП. Однако известны и другие результаты. Так, в работе [100] проведен эксперимент, в котором наблюдалась пляска упругозакрепленной модели четырехпроводной расщепленной фазы длиной 1.27 м с искусственным «обледенением». Там же приведены результаты расчета методом конечных элементов, в котором аэродинамическая нагрузка вычислялась двумя способами: по стационарным коэффициентам неподвижного профиля и с учетом наличия у него угловой скорости на основе данных [85]. В некоторых расчетных случаях оба способа вычисления нагрузок привели к одинаково заниженной амплитуде пляски по сравнению с экспериментом. Результат работы [100] показывает, что гипотеза о квазистационарности аэродинамических нагрузок не всегда позволяет получить в расчете результат, согласующийся с экспериментом. *Таким образом, большую практическую и методическую ценность представляет разработка подходов к исследованию колебаний проводов ЛЭП, основанных на вычислении нестационарных аэродинамических нагрузок.*

Альтернативой квазистационарному подходу к определению аэродинамических нагрузок, действующих на провод, является прямое моделирование его нестационарного обтекания. Для этого требуется численный метод, позволяющий моделировать течение вокруг движущегося тела и определять действующие на него аэродинамические нагрузки с приемлемой точностью и разумными затратами вычислительных ресурсов.

Моделирование нестационарного внешнего обтекания каждого сечения провода воздушным потоком представляет собой плоскую задачу о движении жесткого профиля в среде. Скорость ветра V_∞ , как правило, не превышает 20 м/с, что соответствует числу Маха $M = V_\infty/V_{\text{зв}} \ll 1$ ($V_{\text{зв}} \approx 340$ м/с — скорость звука в воздухе), поэтому среду можно считать несжимаемой [42]. Поскольку задача является плоской, все характеристики течения зависят от двух пространственных координат x , y и не зависят от третьей координаты z . Движение несжимаемой среды характеризуется полем скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ и полем давления $p(\mathbf{r}, t)$, где t — время, $\mathbf{r} = xi + yj$ — радиус-вектор рассматриваемой точки пространства, \mathbf{i} , \mathbf{j} — орты соответствующих координатных осей.

Известно [26, 29, 39], что поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ с помощью закона Био — Савара может быть найдено по распределению завихренности — ротора скорости $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$, в плоском случае фактически представляющему собой скалярное поле: $\boldsymbol{\Omega} \equiv \Omega \mathbf{k}$, $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$. Существуют подходы к моделированию течений несжимаемых сред, в которых первичной искомой величиной является завихренность. Численные методы, реализующие такие подходы, называют вихревыми (лагранжевыми) методами [35, 54]. Методы указанного класса являются бессеточными, что позволяет одинаково эффективно моделировать с их помощью обтекание неподвижных и движущихся тел. Существует большое число вариантов вихревых методов. В данной работе для моделирования обтекания сече-

ний провода ЛЭП предлагается использовать модификацию [78] метода вязких вихревых доменов [1].

Отметим, что моделированию колебаний кабеля в поперечном потоке несжимаемой среды с помощью замены трехмерной задачи его обтекания на набор двумерных задач посвящены работы [80, 101], причем в [101] определение нагрузок, действующих на кабель со стороны потока, производилось именно вихревым методом. Однако известно лишь о единичных работах подобного характера, поэтому *задача разработки программного комплекса для моделирования аэроупругого движения провода ЛЭП с учетом действия на него нестационарных аэродинамических нагрузок является актуальной.*

Отметим, что для сокращения временных затрат на проведение расчетов с использованием вихревых методов могут эффективно применяться параллельные алгоритмы [6].

Цель исследования. Целью настоящей работы является математическое моделирование аэроупругих колебаний провода линии электропередачи с учетом нестационарности аэродинамических нагрузок путем разработки эффективного алгоритма на базе метода вихревых элементов. На основе данного алгоритма необходимо разработать и верифицировать программный комплекс, позволяющий проводить расчеты с использованием различных вычислительных комплексов, включая современные многопроцессорные системы кластерного типа.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач.**

1. Адаптация известных математических моделей к решению задач расчета аэроупругих колебаний провода с учетом нестационарности аэродинамических нагрузок.

2. Разработка алгоритма моделирования аэроупругих колебаний провода, основанного на определении нестационарных аэродинамических нагрузок, а также позволяющего использовать гипотезу об их квазистационарности.
3. Построение методики определения собственных частот и форм малых колебаний провода однопролетной и многопролетной ЛЭП для различных граничных условий.
4. Разработка и верификация алгоритма определения эквивалентной жесткости пружин, моделирующих граничные условия для рассматриваемого пролета многопролетной линии.
5. Программная реализация и верификация метода вихревых элементов для моделирования обтекания движущегося профиля и определения действующих на него аэродинамических нагрузок.
6. Программная реализация и верификация параллельного программного комплекса для расчета аэроупругих колебаний провода.

Методы исследования. При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные классы математических методов: механики гибких стержней и нитей, теории колебаний, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, бессеточных лагранжевых методов вычислительной гидродинамики, вычислительной математики и параллельных вычислений.

Достоверность и обоснованность полученных результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов расчетов с известными точными решениями, экспериментальными данными, а также результатами, полученными ранее другими авторами.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, которые выносятся на защиту.

1. Методика определения собственных частот и форм малых колебаний провода многопролетной ЛЭП, основанная на применении метода передаточной матрицы и метода сагиттарной функции.
2. Характеристические уравнения для приближенного определения собственных частот малых колебаний провода многопролетной ЛЭП.
3. Методика задания эквивалентных жесткостей пружин, моделирующих влияние изоляторов и соседних пролетов на колебания рассматриваемого пролета.
4. Алгоритм моделирования аэроупругих колебаний провода под действием нестационарных аэродинамических нагрузок, основанный на применении метода плоских сечений.
5. Параллельный программный комплекс, реализующий предложенный алгоритм, в котором расчет нестационарного обтекания сечений провода и вычисление аэродинамических нагрузок производятся методом вихревых элементов.

Практическая значимость диссертационной работы связана с ее методологической и прикладной направленностью и состоит в возможности математического моделирования аэроупругих колебаний провода ЛЭП или, в частном случае, упругозакрепленного профиля, как при непосредственном определении нестационарных аэродинамических нагрузок, так и с применением гипотезы об их квазистационарности.

Разработан и зарегистрирован программный комплекс «PROVOD — Численное моделирование движения провода ЛЭП под действием ветра», позволяющий выполнять расчеты на современных многопроцессорных вычислительных комплексах (свидетельство о государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ № 2013617549 от 20.08.2013 г.).

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на VII Международной конференции студентов и молодых ученых «Полет-2007» (г. Киев, 2007 г.), IX Международной конференции по математическому моделированию (г. Феодосия, 2008 г.), XIV, XV и XVI Международных симпозиумах «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (г. Херсон, 2009, 2011 и 2013 гг.), V, VI и VII Всероссийских конференциях «Необратимые процессы в природе и технике» (г. Москва, 2009, 2011 и 2013 гг.), 4-й Международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии» (г. Уфа, 2010 г.), X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Нижний Новгород, 2011 г.), 5-м Международном конгрессе по вихревым течениям и вихревым моделям (ICVFM-2010, г. Казерта, Италия, 2010 г.), XXXVIII Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения» (г. Москва, 2012 г.), 6-м Европейском конгрессе по вычислительным методам в прикладных науках и инженерной деятельности (ECCOMAS-2012, г. Вена, 2012 г.), 41-й Международной летней школе-конференции «Актуальные проблемы механики» (г. Санкт-Петербург, 2013 г.).

Результаты исследований докладывались и обсуждались на Международном авиационно-космическом научно-гуманитарном семинаре им. С.М. Белоцерковского под рук. А.И. Желанникова, В.В. Вышинского (ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, 2010 г.).

Публикации. Основные научные результаты диссертации отражены в 8 научных статьях [11,13,18,20,21,32,63,75], в том числе в 5 статьях в научных журналах и изданиях, которые включены в Перечень российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций [11, 13, 18, 21, 32], 1 статье в зарубежных научных изданиях [75], а также 11 тезисах и докладах международных и всероссийских конференций [10,12,14,15,16,17, 19, 20, 22, 23, 64].

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 142 страницах, содержит 34 иллюстрации и 16 таблиц. Список литературы включает 102 наименования.

1. Математическое моделирование малых колебаний провода

Опишем состав воздушной линии электропередачи (ЛЭП) и приведем используемую терминологию, основываясь на книге [24].

Основными элементами воздушной линии электропередачи (ЛЭП) являются *провода, изоляционные устройства, опоры и основания опор*. Рассмотрим ЛЭП с одиночным проводом (рис. 1.1). В зависимости от способа закрепления провода на опоре различаются два типа изоляционных устройств и два типа опор. На опорах *III* и *IV* провода подвешены к вертикальным изолированным подвескам (изоляторам), называемым *поддерживающими*; опоры, на которых провод подвешен к поддерживающим подвескам, называются *промежуточными*. Поддерживающие изолирующие подвески воспринимают весовую нагрузку провода. На опорах *I*, *II* и *V* провода прикреплены к наклонным изолированным подвескам, являющимся продолжениями провода и называемым *натяжными*. Натяжные изолирующие подвески помимо весовой нагрузки воспринимают также тяжение провода. Опоры с натяжными подвесками называют *анкерными*.

Участок линии, заключенный между двумя соседними опорами, называется *пролетом*. Если опоры одинаковой высоты установлены на ровной местности, то длина пролета равна горизонтальному расстоянию между центрами опор. Если же опоры установлены на разной высоте, то различают *горизонтальный пролет* — горизонтальное расстояние между центрами опор, и *наклонный пролет* — расстояние между точками подвеса провода на опорах. Горизонтальный пролет часто называют просто *пролетом*.

Промежуточные опоры устанавливают на прямолинейных участках трассы, анкерные — в специальных местах, где требуется повышенная надежность работы элементов ЛЭП, например, на переходах через доро-

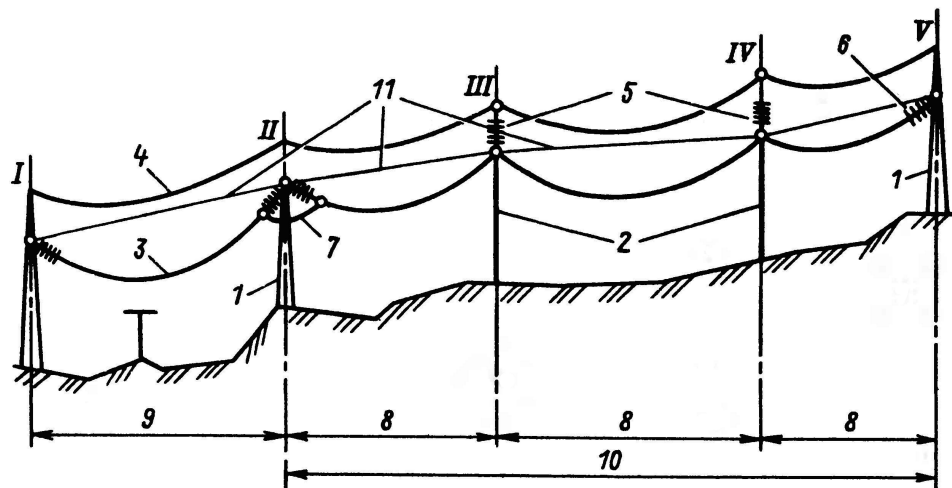


Рис. 1.1. Схема участка ЛЭП [24]: 1 — анкерная опора, 2 — промежуточная опора, 3 — провод, 4 — молниезащитный трос, 5 — поддерживающая подвеска, 6 — натяжная подвеска, 7 — шлейф, 8 — пролет, 9 — анкерный пролет, 10 — анкерный участок, 11 — наклонный пролет

ги, ответственные сооружения, природные препятствия и т. п. В пролетах, примыкающих к анкерной опоре, провод другого смежного пролета не реагирует на изменение тяжения первого, так как точки крепления натяжных подвесок каждого пролета независимы, а сама анкерная опора неподвижна. Пролет, ограниченный двумя анкерными опорами, называется *анкерным*. Часть линии, ограниченная анкерными опорами, между которыми установлены и промежуточные опоры, называется *анкерным участком*.

1.1. Исходные данные для задачи о моделировании движения провода ЛЭП в воздушном потоке

Рассмотрим пролет линии электропередачи, который находится под воздействием воздушного потока (ветра). Задача определения характеристик вызванного ветром движения провода в рассматриваемом пролете имеет следующие входные параметры.

Параметры пролета и арматуры. Следует задать горизонтальную длину пролета и высоты точек подвеса провода, а также типы опор (анкерные или промежуточные). В случае, если опоры промежуточные, должны быть заданы длины и массы поддерживающих изоляторов. Обычно полагается, что в равновесии при отсутствии ветра такие изоляторы находятся в вертикальном положении.

Параметры набегающего потока. Ветер предполагается устойчивым, т. е. имеющим постоянную скорость, поскольку именно устойчивый ветер способствует возникновению пляски [58]. Также будем считать, что ветер направлен перпендикулярно к рассматриваемому пролету. В случае, если это не так, в расчет принимается только поперечная составляющая скорости ветра.

Механические параметры провода. К механическим параметрам провода, необходимым для решения задачи, относятся его погонная масса, момент инерции сечения, жесткость на растяжение и жесткость на кручение.

Форма поперечного сечения провода и его аэродинамические характеристики. Ключевую роль в возникновении пляски играет наличие на проводе гололедного отложения, форма которого определяет аэродинамические нагрузки на провод. На практике форма обледенения, имеющегося на проводе рассматриваемой ЛЭП, во-первых, никогда точно не известна, а во-вторых, меняется вдоль провода. Лишь на полевых испытаниях, когда на провод опытного пролета ЛЭП крепятся специальные насадки [7, 57], придающие ему аэродинамически неустойчивую форму, профиль поперечного сечения провода можно считать заданным. При проведении вычислительных экспериментов помимо профилей, использовавшихся при полевых испытаниях на ЛЭП, нередко используются профили, искусственно созданные в лаборатории (например, [81]), или моделирующие реально встречающиеся характерные обледенения проводов [3]. При дальнейшем моделировании поведения провода форму обледенения будем считать одинаковой вдоль всего пролета. Данное ограни-

чение не является существенным для разработанного в данной диссертации алгоритма моделирования динамики проводов, однако о результатах натурных или вычислительных экспериментов для проводов с изменяющимся вдоль пролета сечением из литературы не известно.

Аэродинамические характеристики профиля сечений провода, т. е. зависимости их стационарных коэффициентов лобового сопротивления, подъемной силы и момента от угла атаки, определяются либо из эксперимента в аэродинамической трубе, либо путем проведения соответствующего вычислительного эксперимента.

1.2. Математическая модель движения провода ЛЭП

Введем декартову прямоугольную систему координат как показано на рис. 1.2. Ускорение свободного падения равно \tilde{g} и направлено противоположно оси Ox_3 (здесь и далее переменная со знаком тильды означает размерную величину).

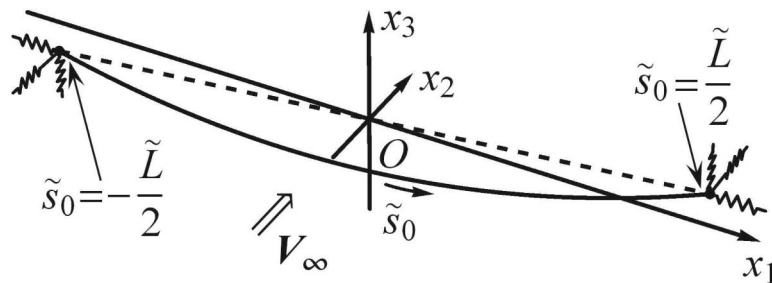


Рис. 1.2. Расчетная схема

Пусть провод в нерастянутом состоянии имеет длину \tilde{L} , точки крепления его концов в положении равновесия имеют координаты

$$(-\tilde{X}_{10}, 0, -\tilde{X}_{30}) \quad \text{и} \quad (\tilde{X}_{10}, 0, \tilde{X}_{30}),$$

т. е. середина отрезка, соединяющего конца провода, совпадает с началом координат. Тогда в положении равновесия под действием силы тяжести провод целиком лежит в плоскости Ox_1x_3 . Зададим на проводе дуговую координату (натуральный параметр) \tilde{s}_0 , которая изменяется в диапазоне от $-\tilde{L}/2$ до $\tilde{L}/2$.

В качестве модели провода воздушной ЛЭП в наиболее общем случае принимается модель гибкого стержня, т. е. тела, у которого размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной и радиусом кривизны осевой линии. Вообще говоря, провод сопротивляется растяжению, изгибу и кручению, однако при исследовании пляски изгибной жесткостью провода, как правило, пренебрегают [56, 67], считая, что провод сопротивляется только растяжению и кручению. Тогда положение провода в момент времени \tilde{t} можно описать функциями $\tilde{x}_1(\tilde{s}_0, \tilde{t})$, $\tilde{x}_2(\tilde{s}_0, \tilde{t})$, $\tilde{x}_3(\tilde{s}_0, \tilde{t})$ — декартовыми координатами его оси, и $\theta(\tilde{s}_0, \tilde{t})$ — углом поворота сечения с координатой \tilde{s}_0 вокруг оси. При этом все сечения провода будем считать перпендикулярными его оси, а положение оси в конкретном сечении обозначим за C . Эта точка является центром провода без обледенения. Положение центра масс G сечения провода с обледенением зададим с помощью расстояния $\tilde{h} = CG$ и угла θ_G , отсчитываемого, как показано на рис. 1.3, где сечение изображено в положении, соответствующем нулевому углу атаки.

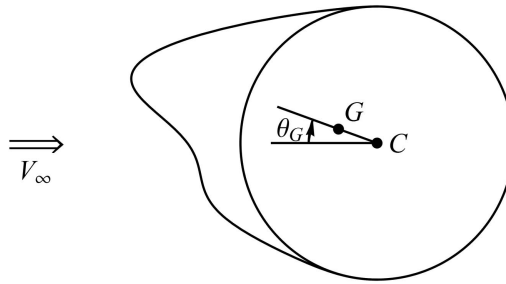


Рис. 1.3. Положение центра масс сечения провода

Обычно диаметр провода составляет величину порядка 30 мм. Характерный размер провода с обледенением может быть в несколько раз больше, однако расстояние \tilde{h} в силу малой плотности льда по сравнению с плотностью провода редко превышает 1–2 миллиметра.

Для того, чтобы построить математическую модель провода, возьмем за основу уравнения движения растяжимой нити — абсолютно гибкого стержня, сопротивляющегося только растяжению [36]. Их необходимо

дополнить уравнением для изменения угла поворота сечений θ , а также учесть слагаемые, возникающие вследствие несовпадения центра масс сечения G с центром голого провода C [37, 67]. Будем считать деформацию провода малой, а материал провода — линейно упругим, подчиняющимся закону Гука при растяжении и аналогичному линейному соотношению для кручения. Предположим при этом, что наличие обледенения на проводе не влияет на его сопротивление растяжению и кручению. Примем также, что аэродинамическая нагрузка в направлении оси Ox_1 отсутствует, поскольку ветер считается направленным перпендикулярно плоскости начального провисания провода. Тогда движение провода будет описываться следующей нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{s}_0} \left(\frac{\tilde{Q}}{1 + \tilde{Q}/\widetilde{EF}} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{s}_0} \right) + \tilde{C}_1 - \tilde{\rho} \tilde{g} \frac{\partial^2 \tilde{x}_1}{\partial \tilde{t}^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}_0} \left(\frac{\tilde{Q}}{1 + \tilde{Q}/\widetilde{EF}} \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial \tilde{s}_0} \right) + \tilde{C}_2 + \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\widetilde{EF}} \right) \tilde{q}_2^a - \tilde{\rho} \tilde{g} \frac{\partial^2 \tilde{x}_2}{\partial \tilde{t}^2} - \\ - \tilde{\rho} \tilde{h} \left(\sin(\theta_s + \theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{t}^2} + \cos(\theta_s + \theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} \right)^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}_0} \left(\frac{\tilde{Q}}{1 + \tilde{Q}/\widetilde{EF}} \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial \tilde{s}_0} \right) + \tilde{C}_3 + \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\widetilde{EF}} \right) \tilde{q}_3^a - \tilde{\rho} \tilde{g} - \tilde{\rho} \tilde{g} \frac{\partial^2 \tilde{x}_3}{\partial \tilde{t}^2} - \\ - \tilde{\rho} \tilde{h} \left(\cos(\theta_s + \theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{t}^2} - \sin(\theta_s + \theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} \right)^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{s}_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial \tilde{s}_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial \tilde{s}_0} \right)^2 = \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\widetilde{EF}} \right)^2, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{I} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{t}^2} + \tilde{C}_\theta + \tilde{M}^a + \tilde{GJ} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{s}_0^2} - \\ - \tilde{\rho} \tilde{h} \left(\sin(\theta_s + \theta) \frac{\partial^2 x_2}{\partial \tilde{t}^2} + \cos(\theta_s + \theta) \frac{\partial^2 x_3}{\partial \tilde{t}^2} + \tilde{g} \cos(\theta_s + \theta) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\tilde{Q}(\tilde{s}_0, \tilde{t})$ — тяжение провода, \widetilde{EF} — его жесткость на растяжение, $\tilde{\rho}$ — погонная плотность, \tilde{I} — момент инерции сечения провода относительно центра C , \tilde{GJ} — жесткость на кручение; $\tilde{q}_i^a(\tilde{s}_0, \tilde{t})$, $i = 2, 3$ — аэродинамические силы (в расчете на единицу длины провода), действующие

в направлении соответствующих координатных осей, $\tilde{M}^a(\tilde{s}_0, \tilde{t})$ — аэродинамический момент; $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_\theta$ — функции, определяющие демпфирование; $\theta_s(\tilde{s}_0) = \theta_G + \theta_e(\tilde{s}_0)$, $\theta_e(\tilde{s}_0)$ — угол поворота сечений провода в ненапряженном состоянии.

Определение угла поворота сечений провода $\theta_e(\tilde{s}_0)$ в ненапряженном состоянии не всегда является простой задачей. Как указано в [72], если какие-либо данные на этот счет отсутствуют, следует считать, что $\theta_e(\tilde{s}_0) \equiv \text{const}$.

Предполагается, что в начальный момент времени ветер отсутствует, поэтому начальные условия для системы (1.1)–(1.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(\tilde{s}_0, \tilde{t}_0) &= \tilde{x}_{10}(\tilde{s}_0), & \left. \frac{\partial \tilde{x}_1(\tilde{s}_0, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \right|_{\tilde{t}=\tilde{t}_0} &= 0, \\ \tilde{x}_2(\tilde{s}_0, \tilde{t}_0) &= \tilde{x}_{20}(\tilde{s}_0), & \left. \frac{\partial \tilde{x}_2(\tilde{s}_0, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \right|_{\tilde{t}=\tilde{t}_0} &= 0, \\ \tilde{x}_3(\tilde{s}_0, \tilde{t}_0) &= \tilde{x}_{30}(\tilde{s}_0), & \left. \frac{\partial \tilde{x}_3(\tilde{s}_0, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \right|_{\tilde{t}=\tilde{t}_0} &= 0, \\ \theta(\tilde{s}_0, \tilde{t}_0) &= \theta_0(\tilde{s}_0), & \left. \frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{s}_0, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \right|_{\tilde{t}=\tilde{t}_0} &= 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\tilde{x}_{10}(\tilde{s}_0)$, $\tilde{x}_{20}(\tilde{s}_0)$, $\tilde{x}_{30}(\tilde{s}_0)$, $\theta_0(\tilde{s}_0)$ — равновесная форма провода в отсутствие ветра, которая определяется решением системы (1.1)–(1.5) с исключенными слагаемыми, содержащими производные по времени и ветровые нагрузки.

Возможны два варианта граничных условий. Если пролет ограничен анкерными опорами, то на концах провод закреплен неподвижно и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(\pm \tilde{L}/2, \tilde{t}) &= \tilde{x}_{10}(\pm \tilde{L}/2) = \pm \tilde{X}_{10}, \\ \tilde{x}_2(\pm \tilde{L}/2, \tilde{t}) &= \tilde{x}_{20}(\pm \tilde{L}/2) = 0, \\ \tilde{x}_3(\pm \tilde{L}/2, \tilde{t}) &= \tilde{x}_{30}(\pm \tilde{L}/2) = \pm \tilde{X}_{30}, \\ \theta(\pm \tilde{L}/2, \tilde{t}) &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Второй вариант граничных условий предполагает, что на концах пролета расположены линейные безынерционные пружины податливостей \tilde{S}_i^- и \tilde{S}_i^+ , действующие в направлении i -й координатной оси, $i = 1, 2, 3$, на левом и правом концах провода соответственно. Тогда граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(\pm\tilde{L}/2, \tilde{t}) - \tilde{x}_{i0}(\pm\tilde{L}/2) &= \tilde{S}_i^\pm (\tilde{Q}\mathbf{p}^\pm - \tilde{Q}_0\mathbf{p}_0^\pm) \Big|_{\tilde{s}_0=\pm\tilde{L}/2} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \theta(\pm\tilde{L}/2, \tilde{t}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^\pm &= \mp \frac{1}{1 + \tilde{Q}/\widetilde{EF}} \left(\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{s}_0} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial \tilde{s}_0} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial \tilde{s}_0} \mathbf{e}_3 \right) \Big|_{\tilde{s}_0=\pm\tilde{L}/2}, \\ \mathbf{p}_0^\pm &= \mp \frac{1}{1 + \tilde{Q}_0/\widetilde{EF}} \left(\frac{\partial \tilde{x}_{10}}{\partial \tilde{s}_0} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \tilde{x}_{20}}{\partial \tilde{s}_0} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \tilde{x}_{30}}{\partial \tilde{s}_0} \mathbf{e}_3 \right) \Big|_{\tilde{s}_0=\pm\tilde{L}/2} \end{aligned}$$

— единичные касательные векторы к оси провода на правом и левом концах пролета в моменты времени \tilde{t} и \tilde{t}_0 соответственно, задающие направление тяжения (рис. 1.4), \mathbf{e}_i — орт i -й координатной оси.



Рис. 1.4. Касательные векторы к оси провода

Величины податливостей \tilde{S}_i^\pm желательно задавать так, чтобы динамика одного пролета с упругозакрепленными концами соответствовала динамике данного пролета в составе многопролетной ЛЭП. Общепринятый способ определения податливостей \tilde{S}_i^\pm основан на результатах работ [76, 97] и будет описан после приведения задачи к безразмерному виду. Величины \tilde{S}_3^\pm , как правило, полагаются равными нулю. Отметим, что если в (1.8) положить также $\tilde{S}_1^\pm = \tilde{S}_2^\pm = 0$, получим условия для анкерowanego пролета (1.7).

1.3. Постановка задачи

В данном разделе приведем уравнения движения провода и граничные условия к безразмерному виду; определим и исследуем равновесную форму провода в отсутствие аэродинамических нагрузок. Также будут приведены граничные условия, соответствующие закреплению провода многопролетной ЛЭП в точках его подвеса к изоляторам и закреплению на проводе точечных масс.

1.3.1. Уравнения движения провода в безразмерной форме

Приведем все параметры и уравнения, полученные в предыдущем разделе, к безразмерному виду. Все величины, имеющие размерность длины, отнесем к длине нерастянутого провода \tilde{L} ; величины, имеющие размерность массы, отнесем к массе провода $\tilde{\rho}\tilde{L}$; величины, имеющие размерность силы, отнесем к весу провода $\tilde{\rho}\tilde{g}\tilde{L}$; время отнесем к $\sqrt{\tilde{L}/\tilde{g}}$. Тогда независимыми переменными станут безразмерная дуговая координата на проводе $\xi = \tilde{s}_0/\tilde{L}$, $\xi \in [-1/2; 1/2]$ и безразмерное время $\tau = \tilde{t}/\sqrt{\tilde{L}/\tilde{g}}$; неизвестные функции обозначим следующим образом:

$$x_i(\xi, \tau) = \frac{\tilde{x}_i(\xi \cdot \tilde{L}, \tau \cdot \sqrt{\tilde{L}/\tilde{g}})}{\tilde{L}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad Q(\xi, \tau) = \frac{\tilde{Q}(\xi \cdot \tilde{L}, \tau \cdot \sqrt{\tilde{L}/\tilde{g}})}{\tilde{\rho}\tilde{g}\tilde{L}}.$$

Безразмерные равновесные координаты провода $x_{i0}(\xi)$, $i = 1, 2, 3$, и его тяжение $Q_0(\xi)$ вводятся аналогично. Для остальных параметров получим:

$$\begin{aligned} EF &= \frac{\tilde{E}\tilde{F}}{\tilde{\rho}\tilde{g}\tilde{L}}, & GJ &= \frac{\tilde{G}\tilde{J}}{\tilde{I}\tilde{g}\tilde{L}}, & \beta &= \frac{\tilde{\rho}\tilde{L}^2}{\tilde{I}}, \\ l &= \frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}, & h &= \frac{\tilde{h}}{\tilde{L}}, & X_{10} &= \frac{\tilde{X}_{10}}{\tilde{L}}, & X_{30} &= \frac{\tilde{X}_{30}}{\tilde{L}}, \\ q_i^a &= \frac{\tilde{q}_i^a}{\tilde{\rho}\tilde{g}}, & M^a &= \frac{\tilde{M}^a\tilde{L}}{\tilde{I}\tilde{g}}, & C_i &= \frac{\tilde{C}_i}{\tilde{\rho}\tilde{g}}, & C_\theta &= \frac{\tilde{C}_\theta\tilde{L}}{\tilde{I}\tilde{g}}. \end{aligned}$$

Разделив обе части уравнений (1.1)–(1.3) на $\tilde{\rho}\tilde{g}$, а обе части уравнения (1.5) — на $\tilde{I}\tilde{g}/\tilde{L}$, получим уравнения в безразмерной форме:

$$\left(\frac{Q}{1+Q/EF}x_1'\right)' + C_1 - \ddot{x}_1 = 0, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{1+Q/EF}x_2'\right)' + C_2 + \left(1 + \frac{Q}{EF}\right)q_2^a - \\ - \ddot{x}_2 - h(\sin(\theta_s + \theta)\ddot{\theta} + \cos(\theta_s + \theta)\dot{\theta}^2) = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{1+Q/EF}x_3'\right)' + C_3 + \left(1 + \frac{Q}{EF}\right)q_3^a - 1 - \\ - \ddot{x}_3 - h(\cos(\theta_s + \theta)\ddot{\theta} - \sin(\theta_s + \theta)\dot{\theta}^2) = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$(x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 = \left(1 + \frac{Q}{EF}\right)^2, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} -\ddot{\theta} + C_\theta + M^a + GJ\theta'' - \\ - h\beta(\sin(\theta_s + \theta)\ddot{x}_2 + \cos(\theta_s + \theta)\ddot{x}_3 + \cos(\theta_s + \theta)) = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь и далее производные по безразмерной пространственной координате ξ и безразмерному времени τ обозначены соответственно штрихом и точкой.

Начальные условия (1.6) примут вид

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \tau_0) = x_{10}(\xi), \quad \frac{\partial x_1(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau_0} = 0, \\ x_2(\xi, \tau_0) = x_{20}(\xi), \quad \frac{\partial x_2(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau_0} = 0, \\ x_3(\xi, \tau_0) = x_{30}(\xi), \quad \frac{\partial x_3(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau_0} = 0, \\ \theta(\xi, \tau_0) = \theta_0(\xi), \quad \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau_0} = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $\theta_0(\xi)$ — равновесное распределение угла поворота сечений провода в отсутствие ветра.

Граничные условия (1.7) и (1.8) соответственно примут вид

$$\begin{aligned} x_1(\pm 1/2, \tau) = \pm X_{10}, \quad x_2(\pm 1/2, \tau) = 0, \quad x_3(\pm 1/2, \tau) = \pm X_{30}, \\ \theta(\pm 1/2, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

и

$$\begin{aligned}
& x_i(\pm 1/2, \tau) - x_{i0}(\pm 1/2) = \\
& = \mp S_i^\pm \left(\frac{Qx'_i}{1 + Q/EF} - \frac{Q_0x'_{i0}}{1 + Q_0/EF} \right) \Big|_{\xi=\pm 1/2}, \quad i = 1, 2, 3, \\
& \theta(\pm 1/2, \tau) = 0.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

1.3.2. Равновесная форма провода

Чтобы найти равновесную форму провода, в уравнениях (1.9)–(1.13) надо исключить слагаемые, содержащие производные по τ , а также положить равными нулю функции демпфирования C_1, C_2, C_3, C_θ и аэродинамические нагрузки q_2^a, q_3^a, M^a :

$$\left(\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} x'_{10} \right)' = 0, \tag{1.17}$$

$$\left(\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} x'_{20} \right)' = 0, \tag{1.18}$$

$$\left(\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} x'_{30} \right)' - 1 = 0, \tag{1.19}$$

$$(x'_{10})^2 + (x'_{20})^2 + (x'_{30})^2 = \left(1 + \frac{Q_0}{EF} \right)^2, \tag{1.20}$$

$$GJ\theta''_0 - h\beta \cos(\theta_s + \theta_0) = 0. \tag{1.21}$$

Легко видеть, что данная система распадается на систему уравнений равновесия растяжимой нити (1.17)–(1.20) и отдельное уравнение (1.21). Граничные условия имеют вид (см. (1.15))

$$\begin{aligned}
x_{10}(\pm 1/2) &= \pm X_{10}, \\
x_{20}(\pm 1/2) &= 0, \\
x_{30}(\pm 1/2) &= \pm X_{30}, \\
\theta_0(\pm 1/2) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Равновесная форма растяжимой нити. Проинтегрировав систему (1.17)–(1.20) с учетом граничных условий $x_{20}(\pm 1/2) = 0$, можно получить, что

$$x_{10}(\xi) = \frac{c_1}{EF}\xi + c_1 \ln \left(c_2 + \xi + \sqrt{c_1^2 + (c_2 + \xi)^2} \right) + c_3, \quad (1.23)$$

$$x_{20}(\xi) \equiv 0, \quad (1.24)$$

$$x_{30}(\xi) = \xi \frac{c_2}{EF} + \frac{1}{2EF}\xi^2 + \sqrt{c_1^2 + (c_2 + \xi)^2} + c_4, \quad (1.25)$$

$$Q_0(\xi) = \sqrt{(c_2 + \xi)^2 + c_1^2}, \quad (1.26)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные константы, подлежащие определению из первого и третьего граничных условий (1.22). Константы c_3 и c_4 отвечают за перенос провода как целого в плоскости Ox_1x_3 и могут быть выражены через c_1 и c_2 так, чтобы удовлетворить условиям

$$x_{10}(-1/2) = -x_{10}(1/2), \quad x_{30}(-1/2) = -x_{30}(1/2).$$

Константы c_1, c_2 находятся из оставшихся граничных условий. Эти константы имеют следующий физический смысл:

$$c_1 = Q_0(\xi) \frac{x'_{10}(\xi)}{1 + Q_0(\xi)/EF} \equiv \text{const}$$

— горизонтальная компонента тяжения провода;

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{x'_{30}(0)}{x'_{10}(0)}$$

— тангенс угла наклона провода к горизонтали в точке $\xi = 0$. Также можно показать, что

$$x'_{30}(-c_2) = 0,$$

т. е. $(-c_2)$ — координата той точки провода, в которой касательная к нему горизонтальна.

Поскольку в большинстве случаев наибольшую практическую ценность представляет частный случай провода с концами на одной высоте, которому соответствует $c_2 = 0$, выпишем решение для этого случая отдельно:

$$\begin{aligned}
x_{10}(\xi) &= \frac{c_1}{EF} \xi + c_1 \ln \frac{\xi + \sqrt{c_1^2 + \xi^2}}{c_1}, \\
x_{20}(\xi) &\equiv 0, \\
x_{30}(\xi) &= \frac{4\xi^2 - 1}{8EF} + \sqrt{c_1^2 + \xi^2} - \sqrt{c_1^2 + 1/4}, \\
Q_0(\xi) &= \sqrt{\xi^2 + c_1^2}.
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что в этом случае стрела провеса $w = -x_{30}(0)$ — максимальное вертикальное расстояние между проводом и отрезком, соединяющим его концы, и горизонтальная длина пролета l связаны с параметром c_1 следующим образом:

$$\begin{aligned}
w &= \frac{1}{8EF} + \sqrt{c_1^2 + 1/4} - c_1, \\
l &= c_1 \left(\frac{1}{EF} + \ln \frac{\sqrt{4c_1^2 + 1} + 1}{\sqrt{4c_1^2 + 1} - 1} \right).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Для наглядности на рис. 1.5 приведены зависимости стрелы провеса w от горизонтальной длины пролета l и от горизонтальной компоненты тяжения c_1 при различных значениях параметра EF — жесткости на растяжение.

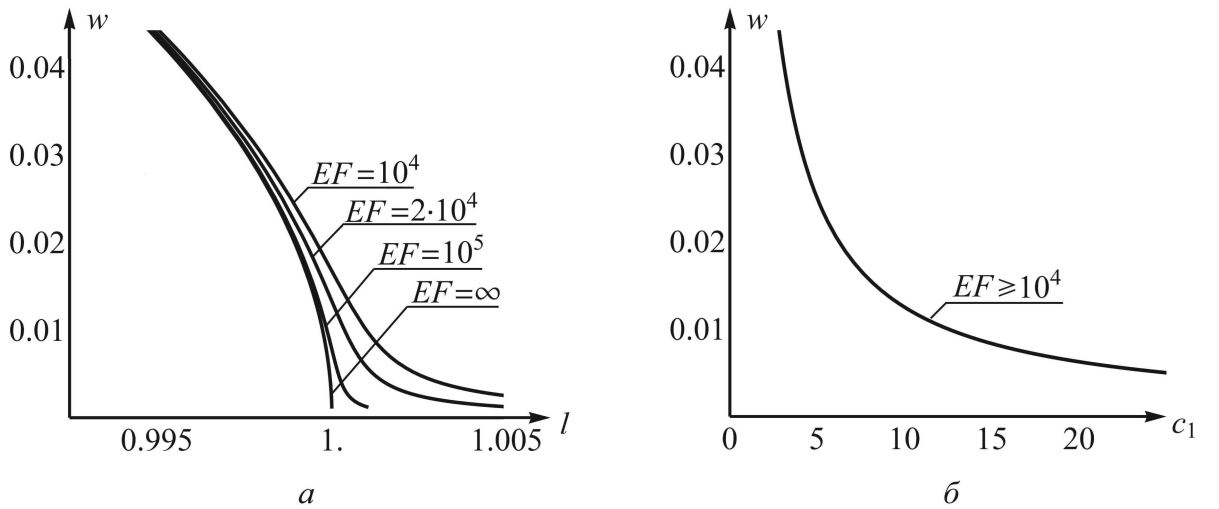


Рис. 1.5. Зависимость стрелы провеса w провода от длины пролета (а) и от горизонтальной компоненты тяжения c_1 (б)

Отметим, что для реальных проводов ЛЭП [58] безразмерная величина жесткости на растяжение EF имеет порядок $10^3 \dots 10^4$, а горизонтальная компонента тяжения c_1 , как правило, лежит в диапазоне от 2 до 10. Отсюда следует, что $c_1/EF \ll 1$, а из (1.27) можно получить, что тяжение и стрела провеса в первом приближении являются обратно пропорциональными:

$$c_1 \approx \frac{1}{8w}.$$

Также можно заключить, что при сделанных предположениях

$$Q_0(\xi) \approx c_1 = \text{const}, \quad x_{10}(\xi) \approx \xi, \quad x_{30}(\xi) \approx w(4\xi^2 - 1). \quad (1.28)$$

Использование таких приближенных выражений при проведении качественного анализа динамики провода является достаточно распространенной практикой [5, 62].

Равновесное распределение угла поворота сечений. Равновесное распределение $\theta_0(\xi)$ угла поворота сечений вокруг оси провода представляет собой решение краевой задачи для уравнения (1.21):

$$GJ\theta_0''(\xi) - h\beta \cos(\theta_s(\xi) + \theta_0(\xi)) = 0, \quad \theta_0(\pm 1/2) = 0. \quad (1.29)$$

Данное уравнение является нелинейным и в общем случае не допускает точного решения, однако может быть легко решено численно; при этом, если угол поворота сечений в ненапряженном состоянии постоянен ($\theta_e(\xi) \equiv \text{const}$), решение имеет форму, близкую к параболической.

Многопролетная линия. Рассмотрим случай моделирования участка ЛЭП из N пролетов, ограниченного анкерными опорами. Пусть концы всех пролетов линии лежат в плоскости Ox_1x_3 . Тогда равновесная форма провода в каждом пролете определяется уравнениями (1.23)–(1.26) с неизвестными константами $c_1^{(k)}$, $c_2^{(k)}$, $c_3^{(k)}$, $c_4^{(k)}$, а на концах пролетов задаются дополнительные условия (верхний индекс (k) задает номер пролета).

Пусть $\xi_0 = -1/2$, $\xi_N = 1/2$, ξ_k , $k = 1, \dots, (N - 1)$ — значения дуговой координаты, соответствующие точкам крепления провода к промежуточным и концевым опорам; $X_{10}^{(k)}$, $X_{30}^{(k)}$, $k = 0, \dots, N$ — декартовы координаты этих точек. Тогда граничные условия для равновесной формы многопролетной линии будут иметь вид

$$x_{10}^{(k)}(\xi_k) = X_{10}^{(k)}, \quad x_{30}^{(k)}(\xi_k) = X_{30}^{(k)}, \quad k = 0, \dots, N. \quad (1.30)$$

При этом, поскольку изоляторы находятся в вертикальном положении, т. е. горизонтальные составляющие тяжения во всех пролетах равны, будет выполнено условие

$$c_1^{(1)} = c_1^{(2)} = \dots = c_1^{(N)}.$$

Отметим, что значения ξ_k , соответствующие точкам подвеса провода к промежуточным опорам, определяются значениями $X_{10}^{(k)}$ и $X_{30}^{(k)}$, $k = 0, \dots, N$, задающими конфигурацию линии.

Провод с точечными массами. Провода ЛЭП могут быть оборудованы специальной арматурой, например, маркерными шарами или гасителями колебаний, размер которых мал по сравнению с длиной провода. Поскольку представляет интерес влияние подобной арматуры на низшие собственные частоты колебаний провода, исследуем данную задачу, считая прикрепленные к проводу детали точечными массами.

Пусть имеется пролет ЛЭП, ограниченный анкерными опорами, на котором присутствует $(N - 1)$ точечная масса. Тогда провод разбивается на N участков, равновесная форма каждого из которых определяется уравнениями (1.23)–(1.26), а на концах и в точках установки точечных масс задаются дополнительные условия для определения констант $c_j^{(k)}$, где верхний индекс (k) задает номер участка.

Пусть $\xi_0 = -1/2$, $\xi_N = 1/2$; ξ_k , $k = 1, \dots, (N - 1)$ — значения дуговой координаты, соответствующие точкам крепления точечных масс m_k ; $X_{10}^{(k)}$, $X_{30}^{(k)}$, $k = 0, N$ — декартовы координаты концов провода. Тогда граничные условия для равновесной формы провода будут иметь вид

$$x_{10}^{(1)}(\xi_0) = X_{10}^{(0)}, \quad x_{30}^{(1)}(\xi_0) = X_{10}^{(0)}, \quad (1.31)$$

$$x_{10}^{(k)}(\xi_k) = x_{10}^{(k+1)}(\xi_k), \quad x_{30}^{(k)}(\xi_k) = x_{30}^{(k+1)}(\xi_k), \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (1.32)$$

$$\left(Q_0^{(k+1)} \frac{x_{30}^{(k+1)'}}{1 + Q_0^{(k+1)}/EF} \right) \Big|_{\xi_{k+1}} - \left(Q_0^{(k)} \frac{x_{30}^{(k)'}}{1 + Q_0^{(k)}/EF} \right) \Big|_{\xi_k} = m_k, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (1.33)$$

$$c_1^{(1)} = c_1^{(2)} = \dots = c_1^{(N)}, \quad (1.34)$$

$$x_{10}^{(N)}(\xi_N) = X_{10}^{(N)}, \quad x_{30}^{(N)}(\xi_N) = X_{10}^{(N)}. \quad (1.35)$$

Заметим, что, в отличие от условий для многопролетной линии (1.30), здесь значения натурального параметра ξ_k в точках стыковки — точках подвеса масс являются известными, а декартовы координаты этих точек определяются путем решения уравнений (1.31)–(1.35).

1.3.3. Эквивалентные податливости пружин, моделирующих изоляторы и соседние пролеты

При определении эквивалентных податливостей пружин S_j^\pm принято предполагать, что пролет находится в составе многопролетной линии из одинаковых пролетов. Тогда, согласно [76, 97],

$$K_1^{\text{экв}} = (S_1^\pm)^{-1} = K^{\text{изол}} + K_1^{\text{пр}}, \quad K_2^{\text{экв}} = (S_2^\pm)^{-1} = K^{\text{изол}} + K_2^{\text{пр}}, \quad (1.36)$$

где

$$K^{\text{изол}} = \left(1 + \frac{m_l}{2}\right) \frac{1}{l_l}, \quad K_1^{\text{пр}} = \left(\frac{1}{EF} + \frac{l^3}{12c_1^3}\right)^{-1}, \quad K_2^{\text{пр}} = \frac{2c_1}{l}.$$

Здесь m_l и l_l — масса и длина изоляторов соответственно. При выводе выражения для $K_2^{\text{экв}}$ использовалось предположение, что отклонение провода в пролете, соседнем с исследуемым, от равновесного положения в направлении оси Ox_2 зависит от координаты ξ линейно. Более детальный анализ колебаний многопролетной линии (см. разд. 1.4.7) показывает, что данное предположение не соответствует действительности.

Эквивалентные податливости пружин S_1^\pm, S_2^\pm целесообразно выбирать так, чтобы низшие собственные частоты колебаний пролета в соответствующих направлениях были равны собственным частотам его колебаний в составе многопролетной линии. Выражения (1.36) не удовлетворяют этим требованиям, поэтому далее в разд. 1.4.9 на основе результатов анализа малых колебаний многопролетной ЛЭП будет предложена методика корректного определения величин S_1^\pm, S_2^\pm .

1.4. Определение собственных частот и форм малых колебаний провода ЛЭП

Исследование собственных частот и форм малых колебаний проводов ЛЭП имеет большое значение для изучения пляски проводов, поскольку пляска, как правило, происходит с частотой, равной одной из низших собственных частот малых колебаний провода и по соответствующей собственной форме [58]. Поскольку пляска — это преимущественно вертикальное движение, особый интерес (но и одновременно наибольшую сложность) представляет определение собственных частот и форм малых колебаний провода в плоскости Ox_1x_3 . Тем не менее, в данной работе будут рассмотрены все возможные виды малых колебаний.

1.4.1. Уравнения малых свободных колебаний провода

Если центр масс сечения провода не лежит на его оси (в формулах (1.9)–(1.13) и далее $h \neq 0$), вообще говоря, система уравнений (1.9)–(1.13) не распадается на независимые подсистемы. Однако, поскольку параметр h мал (для реальных ЛЭП [58] и типичных форм обледенения проводов [3] его величина порядка 10^{-5}), связь между поступательными и крутильными малыми колебаниями учитывать не будем, положив в (1.9)–(1.13)

$$h (\sin(\theta_s + \theta)\ddot{\theta} + \cos(\theta_s + \theta)\dot{\theta}^2) \approx 0,$$

$$h (\cos(\theta_s + \theta)\ddot{\theta} - \sin(\theta_s + \theta)\dot{\theta}^2) \approx 0,$$

$$h\beta (\sin(\theta_s + \theta)\ddot{x}_2 + \cos(\theta_s + \theta)\ddot{x}_3 + \cos(\theta_s + \theta)) \approx h\beta \cos(\theta_s + \theta).$$

Примем также, что демпфирования C_1, C_2, C_3, C_θ и аэродинамические нагрузки q_2^a, q_3^a, M^a отсутствуют.

Запишем уравнения малых свободных колебаний провода, линеаризовав систему (1.9)–(1.13) в окрестности положения равновесия провода. Для этого представим форму и тяжение провода в виде

$$\begin{aligned} x_i(\xi, \tau) &= x_{i0}(\xi) + u_i(\xi, \tau), \quad i = 1, 2, 3, \\ Q(\xi, \tau) &= Q_0(\xi) + \Delta Q(\xi, \tau), \\ \theta(\xi, \tau) &= \theta_0(\xi) + \Delta\theta(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (1.37)$$

После подстановки этих соотношений в систему (1.9)–(1.13) и вычитания из нее соответствующих уравнений равновесия, пренебрегая слагаемыми второго и более высоких порядков малости относительно $u'_1, u'_2, u'_3, \Delta\theta$ и ΔQ , получим уравнения свободных малых колебаний провода:

$$\left(\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} u'_1 + \frac{\Delta Q}{(1 + Q_0/EF)^2} x'_{10} \right)' - \ddot{u}_1 = 0, \quad (1.38)$$

$$\left(\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} u'_2 \right)' - \ddot{u}_2 = 0, \quad (1.39)$$

$$\left(\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} u'_3 + \frac{\Delta Q}{(1 + Q_0/EF)^2} x'_{30} \right)' - \ddot{u}_3 = 0, \quad (1.40)$$

$$x'_{10} u'_1 + x'_{30} u'_3 = \frac{\Delta Q}{EF} \left(1 + \frac{Q_0}{EF} \right), \quad (1.41)$$

$$\Delta\ddot{\theta} - GJ\Delta\theta'' - h\beta \sin(\theta_s + \theta_0)\Delta\theta = 0. \quad (1.42)$$

Отметим, что величины в скобках в уравнениях (1.38)–(1.40) представляют собой линейные части изменения проекций тяжения на соответствующие координатные оси (см. граничные условия (1.16)), т. е.

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= \frac{Qx'_1}{1 + Q/EF} - \frac{Q_0x'_{10}}{1 + Q_0/EF} \stackrel{\text{лин.}}{\approx} \frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} u'_1 + \frac{\Delta Q}{(1 + Q_0/EF)^2} x'_{10}, \\ \Delta Q_2 &= \frac{Qx'_2}{1 + Q/EF} - \frac{Q_0x'_{20}}{1 + Q_0/EF} \stackrel{\text{лин.}}{\approx} \frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} u'_2, \\ \Delta Q_3 &= \frac{Qx'_3}{1 + Q/EF} - \frac{Q_0x'_{30}}{1 + Q_0/EF} \stackrel{\text{лин.}}{\approx} \frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} u'_3 + \frac{\Delta Q}{(1 + Q_0/EF)^2} x'_{30}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Легко видеть, что уравнение (1.39) для перемещения провода u_2 и уравнение (1.42) для изменения угла поворота $\Delta\theta$ являются независимыми от остальных уравнений. Далее, выражая изменение тяжения ΔQ из (1.41) и подставляя его в уравнения (1.38) и (1.40), получаем два уравнения относительно отклонений провода u_1, u_3 от равновесного положения. Таким образом, после линеаризации система (1.38)–(1.42) распадается на три подсистемы, описывающие колебания в направлении оси Ox_2 , колебания в плоскости Ox_1x_3 и крутильные колебания.

Уравнение колебаний в направлении оси Ox_2 . Будем искать решение уравнения (1.39) в виде [41]

$$u_2(\xi, \tau) = U_2(\xi) \exp i\omega\tau, \quad (1.44)$$

где ω — безразмерная собственная частота колебаний в направлении оси Ox_2 , связанная с размерной циклической частотой $\tilde{\omega}$ соотношением $\omega = \tilde{\omega}\sqrt{L/g}$. После подстановки этого представления в уравнение (1.39) и деления на множитель $(\exp i\omega\tau)$ получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(P_2 U_2')' + \omega^2 U_2 = 0, \quad \text{где} \quad P_2(\xi) = \frac{Q_0(\xi)}{1 + Q_0(\xi)/EF}. \quad (1.45)$$

Уравнения колебаний в плоскости Ox_1x_3 . Аналогичным образом будем искать решение уравнений (1.38), (1.40), (1.41) в виде (1.44)

$$u_k(\xi, \tau) = U_k(\xi) \exp i\omega\tau, \quad k = 1, 3,$$

где ω — безразмерная собственная частота колебаний в вертикальной плоскости. После подстановки представлений (1.44) в уравнения (1.38), (1.40), (1.41) и деления на множитель $(\exp i\omega\tau)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(P_{13}\{U_1', U_3'\}^T)' + \omega^2\{U_1, U_3\}^T = 0, \quad (1.46)$$

где

$$P_{13}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{Q_0(\xi)}{1 + \frac{Q_0(\xi)}{EF}} + \frac{EF x'_{10}{}^2(\xi)}{\left(1 + \frac{Q_0(\xi)}{EF}\right)^3} & \frac{EF x'_{10}(\xi) x'_{30}(\xi)}{\left(1 + \frac{Q_0(\xi)}{EF}\right)^3} \\ \frac{EF x'_{10}(\xi) x'_{30}(\xi)}{\left(1 + \frac{Q_0(\xi)}{EF}\right)^3} & \frac{Q_0(\xi)}{1 + \frac{Q_0(\xi)}{EF}} + \frac{EF x'_{30}{}^2(\xi)}{\left(1 + \frac{Q_0(\xi)}{EF}\right)^3} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

— симметричная положительно определенная матрица.

Уравнение крутильных колебаний. Будем искать решение уравнения (1.42) в виде $\Delta\theta(\xi, \tau) = \Delta\Theta(\xi) \exp i\omega\tau$, где ω — безразмерная собственная частота крутильных колебаний. Тогда получим задачу на собственные значения

$$GJ\Delta\Theta'' + (\omega^2 + h\beta \sin(\theta_s(\xi) + \theta_0(\xi)))\Delta\Theta = 0, \quad \Delta\Theta(\pm 1/2) = 0. \quad (1.48)$$

1.4.2. Граничные условия

В данном разделе приведены граничные условия для уравнения малых колебаний в направлении Ox_2 (1.45) и для уравнений малых колебаний в плоскости Ox_1x_3 (1.46) для следующих конфигураций ЛЭП:

- один пролет с неподвижным или упругим закреплением концов;
- многопролетная линия с неподвижным или упругим закреплением концов крайних пролетов;
- один пролет с неподвижным закреплением концов, снабженный точечными массами.

В каждом пролете многопролетной ЛЭП или на каждом участке пролета с точечными массами малые колебания описываются уравнениями (1.45) и (1.46); при этом равновесная форма провода, вообще говоря, на каждом участке своя.

Один пролет. Если концы пролета закреплены неподвижно, граничные условия (1.15) примут вид

$$U_k(\pm 1/2) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Пусть теперь концы пролета закреплены упруго. Линеаризуем граничные условия (1.16) с учетом представлений (1.38)–(1.41), (1.43) и разделим обе части условий на множитель $(\exp i\omega\tau)$. В результате получим для уравнения колебаний в направлении оси Ox_2 (1.45) два скалярных граничных условия

$$U_2(\pm 1/2) = \mp S_2^\pm P_2(\pm 1/2) U_2'(\pm 1/2), \quad (1.49)$$

а для уравнений колебаний в плоскости Ox_1x_3 (1.46) — два векторных граничных условия

$$\begin{aligned} \{U_1(\pm 1/2), U_3(\pm 1/2)\}^T &= \\ &= \mp \begin{pmatrix} S_1^\pm & 0 \\ 0 & S_3^\pm \end{pmatrix} P_{13}(\pm 1/2) \{U_1'(\pm 1/2), U_3'(\pm 1/2)\}^T, \end{aligned} \quad (1.50)$$

где P_{13} — матрица, определяемая формулой (1.47). Можно убедиться, что обе задачи на собственные значения ((1.45) с граничными условиями (1.49) и (1.46) с граничными условиями (1.50)) являются самосопряженными.

Многопролетная линия. Выпишем граничные условия для уравнений малых колебаний многопролетной ЛЭП. Будем считать поддерживающие изоляторы жесткими однородными стержнями массой m_l и длиной l_l , тогда момент инерции каждого изолятора относительно его верхней точки будет равен $I_l = m_l l_l^2/3$.

Запишем граничные условия в точке ξ_k крепления проводов k -го и $(k+1)$ -го пролетов к изолятору, $k = 1, \dots, (N-1)$. Поскольку уравнения малых колебаний распадаются на две подсистемы, граничные условия тоже желательно разделить на 2 группы — содержащие перемещения U_1, U_3 и содержащие только U_2 .

В точке подвеса провода к k -му изолятору выполнены условия

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k+1)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$(u_1^{(k)})^2 + (u_2^{(k)})^2 + (l_I - u_3^{(k)})^2 = l_I^2,$$

$$I_I \ddot{\mu}^{(k)} = -m_I \frac{l_I \sin \mu^{(k)}}{2} + (Q_3^{(k+1)} - Q_3^{(k)}) l_I \sin \mu^{(k)} + (Q_1^{(k+1)} - Q_1^{(k)}) l_I \cos \mu^{(k)},$$

$$I_I \ddot{\sigma}^{(k)} = -m_I \frac{l_I \sin \sigma^{(k)}}{2} + (Q_3^{(k+1)} - Q_3^{(k)}) l_I \sin \sigma^{(k)} + (Q_2^{(k+1)} - Q_2^{(k)}) l_I \cos \sigma^{(k)}.$$

где $\mu^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ — углы между осью Ox_3 и проекцией положения изолятора на плоскости Ox_1x_3 и Ox_2x_3 соответственно; $Q_j^{(s)}$, $j = 1, 2, 3$, $s = k, k+1$, — проекции тяжения провода в s -ом пролете в точке подвеса на ось Ox_j (рис. 1.6). Вектор тяжения всегда условно считается направленным в сторону возрастания координаты ξ .

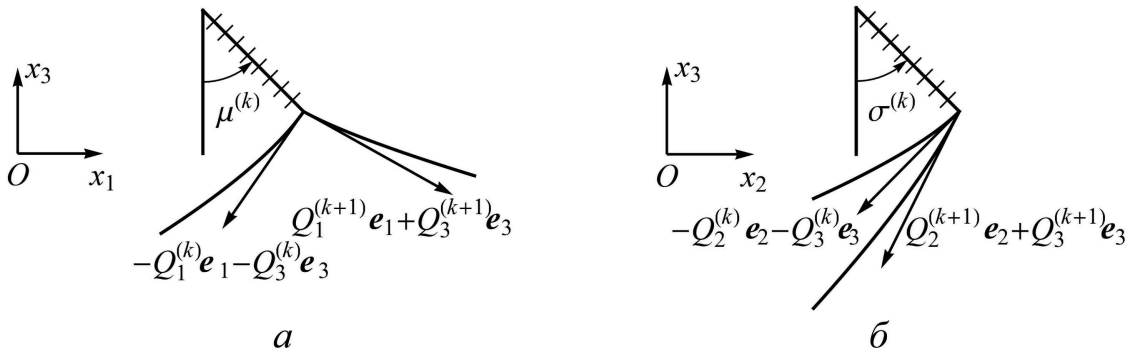


Рис. 1.6. Силы, действующие в точке подвеса к промежуточной опоре (проекции на плоскость Ox_1x_3 (а) и на плоскость Ox_2x_3 (б))

После линеаризации данных условий с учетом того, что в положении равновесия $\mu^{(k)} = 0$ и $\sigma^{(k)} = 0$, подстановки в них решения в виде

$$u_j^{(k)}(\xi, \tau) = U_j^{(k)}(\xi) \exp i\omega\tau, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\mu^{(k)} \approx u_1^{(k)}(\xi_k, \tau)/l_I, \quad \sigma^{(k)} \approx u_2^{(k)}(\xi_k, \tau)/l_I,$$

и деления обеих частей уравнений на множитель $(\exp i\omega\tau)$ получаем

$$U_1^{(k)} = U_1^{(k+1)}, \quad (1.51)$$

$$U_2^{(k)} = U_2^{(k+1)}, \quad (1.52)$$

$$U_3^{(k)} = U_3^{(k+1)} = 0, \quad (1.53)$$

$$-I_I \omega^2 \frac{U_1^{(k)}}{l_I} = -m_I \frac{U_1^{(k)}}{2} + (Q_3^{(k+1)} - Q_3^{(k)}) U_1^{(k)} + (\Delta Q_1^{(k+1)} - \Delta Q_1^{(k)}) l_I, \quad (1.54)$$

$$-I_I \omega^2 \frac{U_2^{(k)}}{l_I} = -m_I \frac{U_2^{(k)}}{2} + (Q_3^{(k+1)} - Q_3^{(k)}) U_2^{(k)} + (\Delta Q_2^{(k+1)} - \Delta Q_2^{(k)}) l_I. \quad (1.55)$$

Здесь

$$Q_3^{(s)} = \frac{Q_0^{(s)} x_{30}^{(s)'}}{1 + Q_0^{(s)}/EF}, \quad s = k, k+1,$$

$$\Delta Q_1^{(s)} = (P_{13}^{(s)})_{11} U_1^{(s)'} + (P_{13}^{(s)})_{12} U_3^{(s)'}, \quad s = k, k+1,$$

$$\Delta Q_2^{(s)} = P_2^{(s)} U_2^{(s)'}, \quad s = k, k+1,$$

где $(P_{13}^{(s)})_{mn}$ — элемент m -й строки и n -го столбца матрицы $P_{13}^{(s)}$ — матрицы P_{13} (1.47) для s -го пролета. Легко видеть, что условия (1.51), (1.53), (1.54) относятся к системе уравнений (1.46), а условия (1.52), (1.55) — к системе уравнений (1.45). Отметим также, что величина

$$T_k = -Q_3^{(k)} + Q_3^{(k+1)}$$

представляет собой вес провода, воспринимаемый k -м изолятором; так, например, для линии из N одинаковых пролетов с концами, расположенными на одной высоте, $T_k = 1/N$.

На концах рассматриваемого участка ЛЭП выполнены граничные условия неподвижного закрепления

$$U_k^{(1)}(-1/2) = 0, \quad U_k^{(N)}(1/2) = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

или условия упругого закрепления, аналогичные (1.50) и (1.49).

Провод с точечными массами. Выпишем граничные условия для уравнений малых колебаний одного пролета с неподвижно закрепленными концами при наличии на нем точечных масс. В точке ξ_k крепления

к проводу точечной массы m_k будут выполнены условия

$$\begin{aligned}x_j^{(k)} &= x_j^{(k+1)}, \quad j = 1, 2, 3, \\m_k \ddot{x}_1^{(k)} &= Q_1^{(k+1)} - Q_1^{(k)}, \\m_k \ddot{x}_2^{(k)} &= Q_2^{(k+1)} - Q_2^{(k)}, \\m_k \ddot{x}_3^{(k)} &= Q_3^{(k+1)} - Q_3^{(k)} - m_k,\end{aligned}$$

где $Q_j^{(s)}$, $j = 1, 2, 3$, $s = k, k+1$, — проекция на ось Ox_j тяжения провода s -го участка в точке крепления точечной массы. В данном случае, как и ранее, вектор тяжения всегда условно считается направленным в сторону возрастания координаты ξ . Линеаризуя данные условия с учетом того, что в положении равновесия $Q_1^{(k+1)} - Q_1^{(k)} = 0$, $Q_2^{(k+1)} - Q_2^{(k)} = 0$, $Q_3^{(k+1)} - Q_3^{(k)} = m_k$, подставляя в них решение в виде $u_k(\xi, \tau) = U_k(\xi) \exp i\omega\tau$, $k = 1, 2, 3$, и деля обе части на множитель $(\exp i\omega\tau)$, получаем

$$\begin{aligned}U_j^{(k)} &= U_j^{(k+1)}, \quad j = 1, 2, 3, \\-m_k \omega^2 U_1^{(k)} &= \Delta Q_1^{(k+1)} - \Delta Q_1^{(k)}, \quad j = 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{1.56}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta Q_1^{(s)} &= (P_{13}^{(s)})_{11} U_1^{(s)'} + (P_{13}^{(s)})_{12} U_3^{(s)'}, \quad s = k, k+1, \\ \Delta Q_2^{(s)} &= P_2^{(s)} U_2^{(s)'}, \quad s = k, k+1, \\ \Delta Q_3^{(s)} &= (P_{13}^{(s)})_{21} U_1^{(s)'} + (P_{13}^{(s)})_{22} U_3^{(s)'}, \quad s = k, k+1.\end{aligned}$$

1.4.3. Методы определения собственных частот и форм малых колебаний провода

Собственные частоты и формы малых колебаний растяжимой нити с неподвижно закрепленными концами в плоскости начального провисания хорошо исследованы аналитически, экспериментально и численно [62, 89, 94, 96]; показано [62, 94], что при большой жесткости на растяжение и малой стреле провеса собственные частоты приближенно удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$\sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \left(-\frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \left(1 - \frac{c_1^2 \omega^2}{EF} \right) \cos \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} + \sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \right) = 0. \tag{1.57}$$

В [94] также приведены аналогичные по структуре уравнения для различных видов граничных условий на концах пролета. Так, если в направлении Ox_1 провод закреплен на концах с помощью пружин с податливостями $S_1^+ = S_1^- = S_1$, а его вертикальные перемещения равны нулю, то его собственные частоты приближенно удовлетворяют уравнению

$$\sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \left(\sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} - \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \left(1 - c_1^2 \omega^2 \left(\frac{1}{EF} + 2S_1 \right) \right) \cos \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \right) = 0. \quad (1.58)$$

Для определения собственных частот малых колебаний многопролетной ЛЭП могут быть использованы следующие численные методы.

- *Метод передаточной матрицы* (метод Хольцера — Миклестада) [25], примененный в [94].
- Метод, основанный на представлении собственных форм в виде линейных комбинаций тригонометрических функций, примененный в [50].
- *Метод конечных элементов*, примененный к данной задаче, например, в [67, 89].
- *Метод сагиттарной функции* [44], или метод пристрелки, позволяющий найти собственные значения и собственные формы с любой наперед заданной точностью и не требующий априорного задания вида собственных форм.

В данном разделе на основе метода передаточной матрицы и метода сагиттарной функции будет разработан численный алгоритм нахождения собственных частот для всех перечисленных в предыдущем разделе вариантов граничных условий. Также на основе метода передаточной матрицы и приближенного аналитического метода определения собственных частот колебаний нерастяжимой нити, предложенного в [93], будут получены алгебраические уравнения, по своей структуре аналогичные (1.57) и (1.58), для многопролетной линии.

Далее для определенности будем рассматривать колебания в плоскости начального провисания, однако все описанные подходы применимы и для исследования колебаний в направлении оси Ox_2 . Напомним, что малые колебания провода в плоскости Ox_1x_3 описываются системой уравнений (1.46)

$$(P_{13} \cdot \{U'_1, U'_3\}^T)' + \omega^2 \{U_1, U_3\}^T = 0$$

с матрицей P_{13} , определяемой формулой (1.47). Заметим, что данную систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка можно записать в виде системы из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\{U'_1, U'_3\}^T = P_{13}^{-1} \{\Delta Q_1, \Delta Q_3\}^T, \quad \{\Delta Q'_1, \Delta Q'_3\}^T = -\omega^2 \{U_1, U_3\}^T. \quad (1.59)$$

Метод передаточной матрицы. Данный метод удобен для исследования динамики конструкций, состоящих из ряда последовательно соединенных звеньев (для рассматриваемой задачи звенья представляют собой пролеты ЛЭП и подвесные изоляторы). Его суть состоит в том, что силы и перемещения для одного звена конструкции с помощью матрицы, называемой передаточной, выражаются через соответствующие силы и перемещения для смежного звена [25]. Таким образом, путем последовательного перемножения передаточных матриц можно получить связь между силами и перемещениями в крайних точках конструкции (на крайних концах ЛЭП).

Пусть известно общее решение системы уравнений малых колебаний провода (1.59):

$$\bar{U} = \{U_1, U_3, \Delta Q_1, \Delta Q_3\}^T = a_1 \bar{W}_1 + a_2 \bar{W}_2 + a_3 \bar{W}_3 + a_4 \bar{W}_4, \quad (1.60)$$

где вектор-функции $\bar{W}_1, \bar{W}_2, \bar{W}_3, \bar{W}_4$ образуют фундаментальную систему решений уравнений (1.59), а a_1, a_2, a_3, a_4 — произвольные постоянные. Тогда значения вектор-функции \bar{U} на левом и правом концах k -го

пролета равны

$$\bar{U}^{(k)}(\xi_{k-1}) = M_L^{(k)} \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^T, \quad \bar{U}^{(k)}(\xi_k) = M_R^{(k)} \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^T,$$

где $M_L^{(k)}$, $M_R^{(k)}$ — матрицы 4-го порядка, j -е столбцы которых — это значения \bar{W}_j в точке ξ_{k-1} или ξ_k соответственно. Решение на правом конце пролета можно выразить через решение на левом конце:

$$\bar{U}^{(k)}(\xi_k) = M_R^{(k)} M_L^{(k)-1} \bar{U}^{(k)}(\xi_{k-1}) = M_{\text{пр}}^{(k)} \bar{U}^{(k)}(\xi_{k-1}). \quad (1.61)$$

Граничные условия (1.51)–(1.54) для колебаний в плоскости Ox_1x_3 перепишем в виде

$$\begin{aligned} U_1^{(k)}(\xi_1) &= U_1^{(k+1)}(\xi_1), \quad U_3^{(k)}(\xi_1) = U_3^{(k+1)}(\xi_1), \\ S_1^{(k)} \left(-\Delta Q_1^{(k)}(\xi_1) + \Delta Q_1^{(k+1)}(\xi_1) \right) - U_1^{(k)}(\xi_1) &= 0, \\ S_3^{(k)} \left(-\Delta Q_3^{(k)}(\xi_1) + \Delta Q_3^{(k+1)}(\xi_1) \right) - U_3^{(k)}(\xi_1) &= 0, \end{aligned} \quad (1.62)$$

где

$$S_1^{(k)} = \left[\left(T_k + \frac{m_I}{2} - \frac{I_I \omega^2}{3l_I} \right) \frac{1}{l_I} \right]^{-1}$$

(см. (1.36)), $S_3^{(k)}$ — «фиктивная» податливость вертикальной пружины, в условиях (1.53) равная нулю. Условия (1.62) можно записать в виде

$$\bar{U}^{(k+1)}(\xi_k) = M_I^{(k)} \bar{U}^{(k)}(\xi_k), \quad (1.63)$$

где матрица

$$M_I^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/S_1^{(k)} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/S_3^{(k)} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что без введения ненулевой податливости S_3 записать граничные условия (1.51)–(1.54) в матричном виде (1.63) было бы невозможно.

Последовательно «переходя» с левого конца крайнего левого пролета (решение $U^{(1)}(-1/2)$) вперед по линии, с помощью соотношений

(1.61) и (1.63) можно получить, что решение на правом конце крайнего правого пролета $U^{(N)}(1/2)$ выражается через $U^{(1)}(-1/2)$ следующим образом:

$$\bar{U}^{(N)}(1/2) = M_{\text{пр}}^{(N)} M_I^{(N-1)} \dots M_I^{(1)} M_{\text{пр}}^{(1)} \bar{U}^{(1)}(-1/2) = M \bar{U}^{(1)}(-1/2). \quad (1.64)$$

Здесь M — матрица 4-го порядка, зависящая от конфигурации линии (тяжения и высот точек подвеса), длин и масс изоляторов и искомой собственной частоты ω .

Чтобы получить уравнение для определения собственной частоты ω , необходимо использовать граничные условия на концах участка. Они имеют вид

$$B_{\text{лев}} \bar{U}^{(1)}(-1/2) = \{0, 0\}^T, \quad B_{\text{прав}} \bar{U}^{(N)}(1/2) = \{0, 0\}^T, \quad (1.65)$$

где $B_{\text{лев}}$, $B_{\text{прав}}$ — постоянные матрицы размера 2×4 . Например, для условий неподвижного закрепления

$$B_{\text{лев}} = B_{\text{прав}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Системы уравнений (1.65) являются однородными. Поскольку граничные условия на каждом конце независимы, матрицы $B_{\text{лев}}$ и $B_{\text{прав}}$ имеют максимальный ранг, т. е. ранг 2. Пусть пары матриц-столбцов размера 4×1

$$\bar{D}_{\text{лев}}^1 \quad \text{и} \quad \bar{D}_{\text{лев}}^2, \quad \bar{D}_{\text{прав}}^1 \quad \text{и} \quad \bar{D}_{\text{прав}}^2$$

представляют собой фундаментальные системы решений уравнений (1.65). Тогда, применяя условия (1.65) к (1.64), получим

$$a_1 \bar{D}_{\text{прав}}^1 + a_2 \bar{D}_{\text{прав}}^2 = M(a_3 \bar{D}_{\text{лев}}^1 + a_4 \bar{D}_{\text{лев}}^2) \quad (1.66)$$

— однородную систему из 4 линейных уравнений относительно произвольных постоянных a_1, a_2, a_3, a_4 . Для существования ее нетривиального решения необходимо и достаточно, чтобы определитель ее матрицы равнялся нулю:

$$S(\omega) = \det D = 0, \quad (1.67)$$

где

$$D = \{\bar{D}_{\text{прав}}^1 \quad \bar{D}_{\text{прав}}^2 \quad -M\bar{D}_{\text{лев}}^1 \quad -M\bar{D}_{\text{лев}}^2\}.$$

Например, для неподвижного закрепления концов провода имеем

$$\bar{D}_{\text{лев}}^1 = \bar{D}_{\text{прав}}^1 = \{0, 0, 1, 0\}^T, \quad \bar{D}_{\text{лев}}^2 = \bar{D}_{\text{прав}}^2 = \{0, 0, 0, 1\}^T,$$

откуда

$$S(\omega) = \det D = \det \begin{pmatrix} M_{13} & M_{14} \\ M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.68)$$

Здесь M_{ij} — элемент матрицы M , стоящий в i -й строке и j -м столбце.

Пусть найдена собственная частота ω и соответствующее ей нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (1.66) $a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*$. Тогда, интегрируя для 1-го пролета систему уравнений малых колебаний (1.46) с граничными (начальными) условиями на левом конце

$$\bar{U}^{(1)}(-1/2) = a_3^* \bar{D}_{\text{лев}}^1 + a_4^* \bar{D}_{\text{лев}}^2,$$

получаем собственную форму колебаний на этом пролете. Для 2-го пролета собственная форма определяется аналогично для граничных (начальных) условий

$$\bar{U}^{(2)}(\xi_1) = M_I^{(1)} M_{\text{пр}}^{(1)} \bar{U}^{(1)}(-1/2),$$

и так далее для остальных пролетов.

Общее решение системы уравнений малых колебаний (1.60) может быть найдено приближенно аналитически, как в [94]. В этом случае можно найти явную зависимость $S(\omega)$, что и было сделано в [94] для одного пролета с различными видами граничных условий. После некоторых упрощений полученные уравнения были преобразованы к виду (1.57) для неподвижного закрепления концов провода и (1.58) для упругого закрепления в горизонтальном направлении. Для многопролетной ЛЭП выражение $S(\omega)$ чрезвычайно громоздко и едва ли могло быть,

даже с некоторыми упрощениями, получено в 1966 году без применения систем компьютерной алгебры. Поэтому уравнение (1.68) решалось в [94] для тестового примера численно. В данной работе с помощью системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* получено приближенное аналитическое решение U для метода передаточной матрицы, которое будет приведено ниже (см. раздел 1.4.4), что дает возможность вывести уравнения для оценки собственных частот колебаний многопролетной линии в плоскости начального провисания.

Метод сагиттарной функции. Пусть задача определения собственных частот и форм малых колебаний имеет вид

$$\begin{aligned} (P\bar{X}')' + (E\omega^2 - R)\bar{X} &= 0, \\ \bar{X}(\pm 1/2) &= 0, \end{aligned} \tag{1.69}$$

где $P(\xi)$, $R(\xi)$ — матрицы порядка K , E — единичная матрица порядка K , $\bar{X}(\xi)$ — неизвестная векторная функция, $\xi \in [-1/2; 1/2]$. Собственное значение, которому отвечает ровно одна собственная функция (собственная форма), называется простым, в противном случае — кратным. Предположим, что задача (1.69) имеет только простые собственные значения.

В задаче (1.69) K однородных граничных условий задано на левом конце интервала изменения независимой переменной, оставшиеся K условий — на правом. Для того, чтобы поставить задачу Коши, необходимо дополнительно задать K условий на левом конце (при $\xi = -1/2$). Идея метода сагиттарной функции состоит в том, чтобы построить K решений задач Коши, задав K независимых недостающих начальных условий, и затем сконструировать из этих решений общее решение с помощью набора произвольных постоянных. Для этого общего решения набор исходных однородных граничных условий на правом конце интервала (при $\xi = 1/2$) формально можно записать в виде однородной системы линейных алгебраических уравнений относительно K произвольных постоянных. Тогда собственными значениями ω^2 задачи (1.69) будут те

значения величины ω^2 , при которых определитель указанной системы будет обращаться в нуль [44].

Положим, что величина ω^2 в (1.69) известна, и построим систему K линейно независимых векторных функций $\overline{W}_i(\xi, \omega^2)$, являющихся решениями задач Коши

$$\left(P\overline{W}'_i\right)' + (E\omega^2 - R)\overline{W}_i = 0, \quad -1/2 \leq \xi \leq 1/2, \quad (1.70)$$

$$\overline{W}_i(-1/2) = 0, \quad \overline{W}'_i(-1/2) = \overline{E}_i,$$

где \overline{E}_i — вектор размерности K , у которого i -я компонента равна единице, а остальные — нулю. В силу линейности дифференциального уравнения (1.70) все его решения $\overline{V}(\xi, \omega^2)$, для которых $\overline{V}(-1/2, \omega^2) = 0$, имеют вид $\overline{V}(\xi, \omega^2) = W(\xi, \omega^2)\overline{c}$, где $W(\xi, \omega^2)$ — матрица, образованная столбцами решений \overline{W}_i , \overline{c} — постоянный вектор размерности K . Необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения $\overline{V}(\xi, \omega^2)$, для которого $\overline{V}(1/2, \omega^2) = 0$, может быть записано в виде

$$S(\xi, \omega^2)|_{\xi=1/2} = \det W(\xi, \omega^2)|_{\xi=1/2} = 0.$$

Функция $S(\xi, \omega^2)$ называется сагиттарной функцией [44].

Пусть известно собственное значение ω_*^2 . Поскольку все собственные значения являются простыми, $\text{Rg}[W(1/2, \omega_*^2)] = K - 1$. Это означает, что система линейных алгебраических уравнений $W(1/2, \omega_*^2) = 0$ имеет единственное (с точностью до множителя) нетривиальное решение $\overline{C}(\omega_*^2)$, а собственная форма колебаний равна $\overline{V}(\xi, \omega_*^2) = W(\xi, \omega_*^2)\overline{C}(\omega_*^2)$.

Для самосопряженной задачи на собственные значения (задача (1.69) является таковой, если матрица P симметричная и положительно определенная) разработан алгоритм ускоренной сходимости [44].

В случае многопролетной ЛЭП и провода с закрепленной на нем арматурой, моделируемой точечными массами, как было показано в разделах 1.4.2, задача на собственные значения имеет вид, отличный от (1.69), и, вообще говоря, не является самосопряженной. В этом случае

можно использовать идею метода сагиттарной функции и численно построить с его помощью общее решение системы уравнений малых колебаний провода (1.60), необходимое для применения метода передаточной матрицы, применение которого, в свою очередь, позволит найти собственные частоты и собственные формы колебаний провода. При этом требуется численно решить для каждого пролета или участка провода $2K$ задач Коши с независимыми начальными условиями типа (1.70). Однако поскольку матрицы $M_{\text{пр}}^{(k)}$ (см. (1.61)) определяются независимо друг от друга, то если среди пролетов ЛЭП есть одинаковые, их матрицы равны и повторного численного интегрирования уравнений малых колебаний для этих пролетов не требуется. «Фиктивную» податливость вертикальных пружин S_3 в расчетах следует положить равной некоторой малой величине.

Таким образом, задача определения собственных частот малых колебаний провода (не важно — однопролетной или многопролетной линии) в любом случае сводится к решению алгебраического уравнения

$$S(\omega) = 0,$$

которое находится каким-либо стандартным методом решения нелинейных уравнений, например, методом бисекции. В следующем разделе будет получено приближенное аналитическое выражение для функции $S(\omega)$ для многопролетной линии.

1.4.4. Уравнения для определения собственных частот малых колебаний провода

Для локализации корней уравнения $S(\omega) = 0$ метод бисекции требует вычисления значений левой его части для большого набора значений ω ; кроме того, есть риск «потерять» кратные корни. Задача упростилась бы при наличии какой-либо априорной информации о количестве и расположении корней, а также об их кратности. Для одного пролета

с неподвижно или упруго закрепленными концами такую информацию дают уравнения (1.57) и (1.58). В данном разделе будут получены аналогичные уравнения для приближенного определения собственных частот малых колебаний провода многопролетной линии.

Колебания в направлении оси Ox_2 (перпендикулярном плоскости начального провисания). Уравнение малых колебаний в направлении оси Ox_2 (1.45) можно приближенно записать в виде

$$c_1 U_2'' + \omega^2 U_2 = 0,$$

тогда его общее решение имеет вид

$$U_2 = a_1 \sin \frac{\omega}{\sqrt{c_1}} + a_2 \cos \frac{\omega}{\sqrt{c_1}}.$$

К данному общему решению можно применить метод передаточной матрицы. В случае, если рассматривается один пролет с концами, закрепленными с помощью пружин с податливостями S_2^- и S_2^+ , собственные частоты малых колебаний удовлетворяют уравнению

$$(S_2^- + S_2^+) \omega \sqrt{c_1} \cos \frac{\omega}{\sqrt{c_1}} + (1 - c_1 \omega^2 S_2^- S_2^+) \sin \frac{\omega}{\sqrt{c_1}} = 0. \quad (1.71)$$

Колебания в плоскости $Ox_1 x_3$ (в плоскости начального провисания провода). Воспользуемся идеей работы [93], в которой рассматривается нерастяжимая нить с закрепленными концами. Малые свободные колебания нерастяжимой нити в плоскости начального провисания описываются системой уравнений (1.38), (1.40), (1.41) при $EF \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} (Q_0 U_1' + \Delta Q x_{10}')' + \omega^2 U_1 &= 0, \\ (Q_0 U_3' + \Delta Q x_{30}')' + \omega^2 U_3 &= 0, \\ x_{10}' U_1' + x_{30}' U_3' &= 0. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Далее в [93] вводится подстановка

$$\begin{aligned} U_1(\xi) &= \frac{\xi}{c_1} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + c_1^2}} W(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + c_1^2}} V(\xi), \\ U_3(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + c_1^2}} W(\xi) + \frac{\xi}{c_1} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + c_1^2}} V(\xi), \end{aligned}$$

тогда третье уравнение (1.72) с учетом равновесной формы (1.23)–(1.26) принимает вид

$$W(\xi) + (\xi^2 + c_1^2)V'(\xi) = 0.$$

Отсюда функция W выражается через V' и подставляется в первые два уравнения (1.72). После этого из уравнений исключается изменение тяжения ΔQ , и в результате остается одно дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно V . Отметим, что при $c_1 \gg 1$

$$U_1(\xi) \approx \frac{1}{c_1}V(\xi), \quad U_3(\xi) \approx c_1V'(\xi).$$

В настоящей работе с помощью системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* аналогичные преобразования были проведены для системы (1.38), (1.40), (1.41), описывающей колебания растяжимой нити при конечных значениях жесткости на растяжение EF . В результате также получено дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно V , не приведенное здесь в связи с чрезвычайно громоздкими выражениями для его коэффициентов. Можно, однако, воспользоваться следующими упрощающими предположениями:

- 1) жесткость провода на растяжение велика по сравнению с тяжением, т. е. $EF \gg c_1$;
- 2) стрелу провеса будем считать малой, поэтому безразмерное тяжение $c_1 \gg 1$;
- 3) из результатов работы [93] следует, что при больших значениях c_1 квадрат собственной частоты ω^2 — величина, пропорциональная c_1 .

Тогда можно максимально упростить уравнение для V и получить

$$\omega^2 V'' + c_1 V^{(IV)} = 0, \tag{1.73}$$

причем

$$U_1(\xi) \approx \frac{1}{c_1}V(\xi), \quad U_3(\xi) \approx c_1 \left(\frac{1}{1 - c_1^2 \omega^2 / EF} V'(\xi) + \frac{c_1^3 / EF}{1 - c_1^2 \omega^2 / EF} V'''(\xi) \right).$$

Уравнение (1.73) имеет общее решение

$$V = a_1 + a_2 \xi + a_3 \sin \frac{\omega \xi}{\sqrt{c_1}} + a_4 \cos \frac{\omega \xi}{\sqrt{c_1}}, \quad (1.74)$$

где a_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — произвольные постоянные. Накладывая на (1.74) граничные условия жесткого закрепления

$$U_1(\pm 1/2) = 0, \quad U_3(\pm 1/2) = 0,$$

и приравнивая определитель получившейся однородной системы линейных алгебраических уравнений относительно констант a_j к нулю, приходим к характеристическому уравнению

$$\sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \left(-\frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \left(1 - \frac{c_1^2 \omega^2}{EF} \right) \cos \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} + \sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \right) = 0. \quad (1.75)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (1.57).

В случае наличия на концах провода пружин податливостей S_1^- и S_1^+ в направлении оси Ox_1 и пружин податливостей S_3 в направлении оси Ox_3 , полагая (как это следует из (1.47) при $EF \gg c_1$) $\Delta Q_1 \approx EF U_1'$, $\Delta Q_3 \approx c_1 U_3'$, применяя необходимые граничные условия и задавая в конце $S_3 = 0$, получаем уравнение

$$\sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \left(\sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} - \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \left(1 - c_1^2 \omega^2 \left(\frac{1}{EF} + S_1^- + S_1^+ \right) \right) \cos \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \right) = 0. \quad (1.76)$$

Отметим, что при $S_1^- = S_1^+$ данное уравнение переходит в уравнение (1.58), ранее полученное в [94]. Однако в [94] для получения (1.58) потребовалось дополнительно упрощать алгебраическое уравнение, здесь же уравнение (1.76) получилось без дополнительных упрощений.

Рассмотрим двухпролетную линию. Положим сначала, что граничные условия в точке подвеса провода к изолятору имеют вид (см. (1.62))

$$\begin{aligned} U_1^{(k)}(\xi_1) &= U_1^{(k+1)}(\xi_1), \quad U_3^{(k)}(\xi_1) = U_3^{(k+1)}(\xi_1), \\ -\Delta Q_1^{(k)}(\xi_1) + \Delta Q_1^{(k+1)}(\xi_1) &= 0, \\ -\Delta Q_3^{(k)}(\xi_1) + \Delta Q_3^{(k+1)}(\xi_1) &= 0, \end{aligned}$$

тогда передаточная матрица для изолятора будет единичной: $M_I^{(1)} = E$.
Применив метод передаточной матрицы, получаем уравнение для определения собственных частот

$$S(\omega) = \Psi_0^{(2)}(\omega) = \sin \frac{\omega l_1}{2\sqrt{c_1}} \sin \frac{\omega l_2}{2\sqrt{c_1}} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} - \frac{\omega}{4\sqrt{c_1}} \left(1 - \frac{c_1^2 \omega^2}{EF} \right) \cos \frac{\omega l_1}{2\sqrt{c_1}} \cos \frac{\omega l_2}{2\sqrt{c_1}} \right) = 0, \quad (1.77)$$

где $l_1 = \xi_1 - \xi_0$, $l_2 = \xi_2 - \xi_1$, или, если пролеты имеют равную длину ($l_1 = l_2 = 1/2$), то

$$\sin^2 \frac{\omega}{4\sqrt{c_1}} \cos \frac{\omega}{4\sqrt{c_1}} \left(-\frac{\omega}{4\sqrt{c_1}} \left(1 - \frac{c_1^2 \omega^2}{EF} \right) \cos \frac{\omega}{4\sqrt{c_1}} + \sin \frac{\omega}{4\sqrt{c_1}} \right) = 0.$$

Таким же образом можно получить характеристическое уравнение для собственных частот линии с бóльшим числом пролетов:

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(N)}(\omega) = & \left[\prod_{j=1}^N \sin \frac{l_j \omega}{2\sqrt{c_1}} \right] \times \\ & \times \left[\frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \left(1 - \frac{c_1^2 \omega^2}{EF} \right) \sum_{k=0}^N \sum \cos \left(\frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \underbrace{(\pm l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_N)}_{\text{знак «минус» } k \text{ раз}} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=0}^N (N - 2k) \sum \sin \left(\frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} \underbrace{(\pm l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_N)}_{\text{знак «минус» } k \text{ раз}} \right) \right] = 0, \quad (1.78) \end{aligned}$$

где $l_i = \xi_i - \xi_{i-1}$. Если все пролеты имеют одинаковую длину, то собственные частоты линии удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} & \sin^N \frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}} \cos^{N-1} \frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}} \times \\ & \times \left(-\frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}} \left(1 - \frac{c_1^2 \omega^2}{EF} \right) \cos \frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}} + \sin \frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}} \right) = 0. \quad (1.79) \end{aligned}$$

Для граничных условий (1.62) получающееся в результате применения метода передаточной матрицы уравнение

$$\Psi^{(N)}(\omega) = 0 \quad (1.80)$$

имеет слишком сложный вид, чтобы выписать его; тем не менее, использование указанной методики для получения этого уравнения в каком-либо пакете компьютерной алгебры не представляет трудностей.

Полученное выше приближенное общее решение (1.60) уравнения (1.73), через которое выражается общее решение уравнений малых колебаний провода в плоскости Ox_1x_3 , имеет более простой и наглядный вид по сравнению с приведенным в работе [94]. Далее будет показано, что метод передаточной матрицы для данного общего решения приводит к получению достаточно точных приближений к собственным частотам малых колебаний провода.

1.4.5. Собственные частоты малых колебаний одного пролета с неподвижно закрепленными концами

В данном разделе будут определены собственные частоты и формы малых колебаний провода, концы которого неподвижно закреплены.

Колебания в направлении оси Ox_2 . Задача на собственные значения для колебаний в направлении оси Ox_2 имеет вид (см. (1.45))

$$\left(\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} U_2' \right)' + \omega^2 U_2 = 0,$$

$$U_2(\pm 1/2) = 0.$$

Если положить

$$\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} \approx c_1,$$

то получим

$$\omega_k = \pi k \sqrt{c_1}, \quad U_{2,k} = \sqrt{2} \sin(\pi k(\xi + 1/2)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.81)$$

В таблице 1 приведены значения первых четырех собственных частот, вычисленные методом ускоренной сходимости для задачи (1.45), а также величин ω_k , рассчитанных по формуле (1.81), для значений жесткости на растяжение $EF = 10\,000$, стрелы провеса $w = 0.01 \dots 0.05$, угла наклона прямой, соединяющей концы провода, $\gamma = 0^\circ$.

Таблица 1

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$w = 0.01$					$w = 0.03$				
(1.45)	11.11	22.23	33.34	44.45	(1.45)	6.41	12.82	19.23	25.64
(1.81)	11.11	22.22	33.34	44.45	(1.81)	6.40	12.81	19.21	25.61
$w = 0.02$					$w = 0.05$				
(1.45)	7.86	15.71	23.56	31.42	(1.45)	4.97	9.92	14.88	19.84
(1.81)	7.85	15.70	23.55	31.40	(1.81)	4.94	9.89	14.83	19.77

В случае, если концы провода закреплены на разной высоте, положим

$$\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} \approx Q_0(0) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},$$

тогда получим, что

$$\omega_k = \pi k \sqrt[4]{c_1^2 + c_2^2}, \quad U_{2,k} = \sqrt{2} \sin(\pi k(\xi + 1/2)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.82)$$

В таблице 2 приведены значения первых четырех собственных частот, вычисленные методом ускоренной сходимости для задачи (1.45), а также величины ω_k (1.82) для значений жесткости на растяжение $EF = 10\,000$, стрелы провеса $w = 0.01 \dots 0.05$, угла наклона $\gamma = 30^\circ$.

Таблица 2

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$w = 0.01$					$w = 0.03$				
(1.45)	11.12	22.23	33.34	44.45	(1.45)	6.41	12.82	19.23	25.64
(1.82)	11.12	22.22	33.34	44.45	(1.82)	6.40	12.81	19.21	25.61
$w = 0.02$					$w = 0.05$				
(1.45)	7.86	15.71	23.57	31.42	(1.45)	4.97	9.93	14.89	19.85
(1.82)	7.85	15.71	23.56	31.41	(1.82)	4.96	9.91	14.87	19.82

Видно, что в обоих случаях частоты малых колебаний в направлении оси Ox_2 , вычисляемые методом ускоренной сходимости и по формулам (1.81) и (1.82), практически совпадают.

Колебания в плоскости Ox_1x_3 . Для колебаний в плоскости Ox_1x_3 имеем задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} (P_{13} \cdot \{U'_1, U'_3\}^T)' + \omega^2 \{U_1, U_3\}^T &= 0, \\ U_1(\pm 1/2) &= U_3(\pm 1/2) = 0. \end{aligned} \quad (1.83)$$

где матрица P_{13} определяется выражением (1.47).

В таблице 3 приведены значения первых четырех собственных частот малых колебаний провода, вычисленные методом ускоренной сходимости для задачи (1.46), а также собственные частоты ω^0 , найденные из уравнения (1.57), для значений жесткости на растяжение $EF = 10\,000$, стрелы провеса $w = 0.01 \dots 0.05$, угла наклона $\gamma = 0^\circ$. Из таблицы видно, что отличие численного и аналитического решений не превышает десятых долей процента.

Таблица 3

$w = 0.01$					$w = 0.03$				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
(1.47)	13.23	22.22	33.43	44.45	(1.47)	12.78	17.37	24.53	25.62
(1.57)	13.22	22.22	33.43	44.45	(1.57)	12.81	17.35	24.58	25.61
$w = 0.02$					$w = 0.05$				
(1.47)	15.68	15.91	31.41	24.33	(1.47)	9.83	14.08	19.79	24.16
(1.57)	15.70	15.91	31.40	24.33	(1.57)	9.89	14.04	19.77	24.09

В таблице 4 приведены значения первых четырех собственных частот малых колебаний провода, вычисленные методом ускоренной сходимости для задачи (1.46), при условии, что угол наклона прямой, соединяющей концы провода, к горизонтали составляет $\gamma = 30^\circ$; прочие параметры те же, что и в предыдущем расчете. Также в таблице для сравнения приведены значения ω_0 собственных частот малых колебаний линии с концами, расположенными на одной высоте, найденные из уравнения (1.57).

Таблица 4

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$w = 0.01$					$w = 0.03$				
(1.47)	12.74	22.22	33.41	44.45	(1.47)	12.77	16.77	22.54	25.64
(1.57)	13.24	20.68	31.16	41.36	(1.57)	11.92	16.59	23.84	26.26
$w = 0.02$					$w = 0.05$				
(1.47)	14.44	15.72	31.41	24.07	(1.47)	9.82	14.04	19.79	24.03
(1.57)	14.61	17.00	29.23	23.40	(1.57)	9.89	14.04	19.77	24.09

Из таблицы 4 видно, что даже при большом угле наклона $\gamma = 30^\circ$ отличие численного решения для наклонного пролета и аналитического решения для горизонтального пролета не превышает 5–7 %. Из этого можно сделать вывод, что для оценки собственных частот малых колебаний провода с концами, расположенными на разной высоте, может быть использовано уравнение (1.57).

На рис. 1.7 показаны собственные формы колебаний при значениях жесткости на растяжение $EF = 10\,000$, угла наклона линии $\gamma = 0^\circ$, стрелы провеса $w = 0.010, 0.020, 0.025, 0.030, 0.035$ (сверху вниз); горизонтальная компонента перемещения U_1 для наглядности увеличена в 5 раз. На рис. 1.8 показаны собственные формы малых колебаний линии, расположенной под углом $\gamma = 30^\circ$, при тех же значениях EF и w .

Из рис. 1.7 видно, что в случае провода с концами, закрепленными на одной высоте, вертикальная компонента собственной формы $U_3(\xi)$, отвечающей простому собственному значению, является либо четной функцией ξ (симметричная форма колебаний), либо нечетной функцией ξ (антисимметричная форма колебаний). Этот факт можно доказать, опираясь на то, что диагональные элементы матрицы P_{13} — четные функции от ξ , а внедиагональные элементы — нечетные функции. Также из рис. 1.7 видно, что в то время как антисимметричная форма колебаний остается неизменной при увеличении стрелы провеса, симметричная форма меняет свой вид, постепенно переходя от первой формы колебаний натянутой струны ($w = 0.01$) к первой симметричной форме колебаний нерастяжимой нити [93].

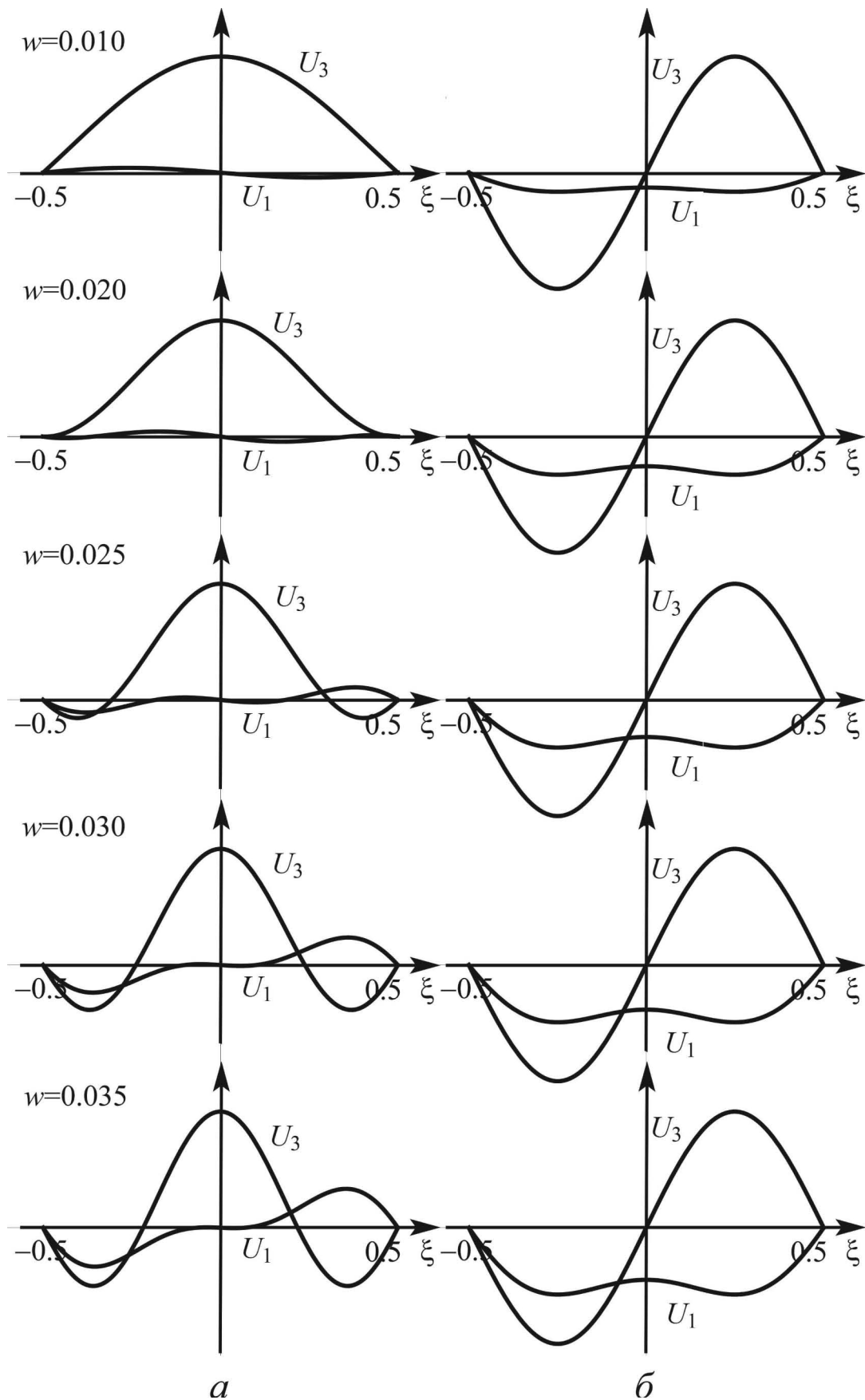


Рис. 1.7. Собственные формы колебаний: первая симметричная форма (*a*), первая антисимметричная форма (*б*) для значений параметров $EF = 10000$, $\gamma = 0^\circ$

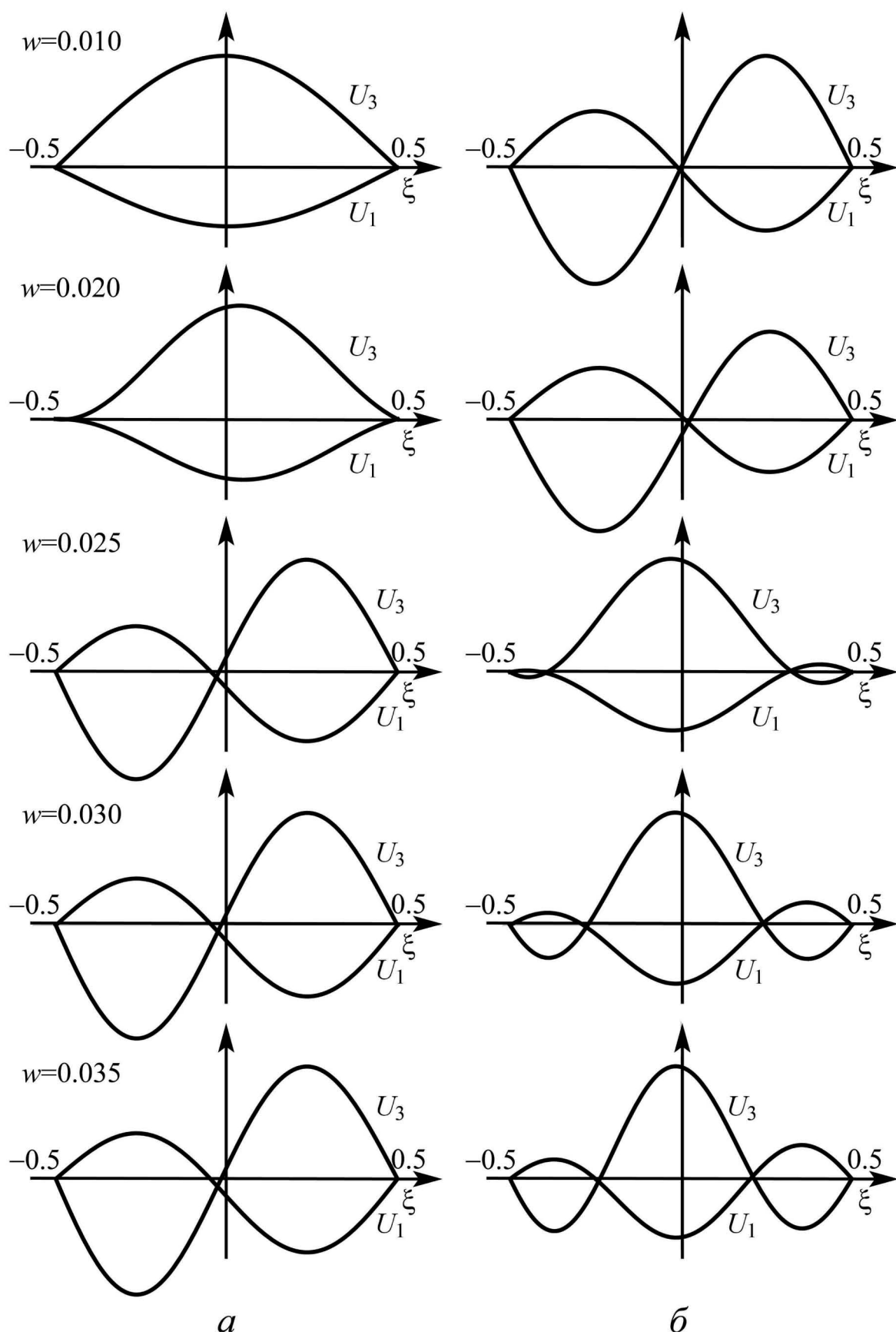


Рис. 1.8. Собственные формы колебаний: первая форма (а), вторая форма (б) для значений параметров $EF = 10\,000$, $\gamma = 30^\circ$

Из рис. 1.8 видно, что в случае провода с концами, закрепленными на разной высоте, собственные формы колебаний не являются ни строго симметричными, ни антисимметричными, хотя при некоторых значениях стрелы провеса асимметрия невелика. В то же время при увеличении стрелы провеса «почти симметричная» первая собственная форма колебаний становится «почти антисимметричной», и наоборот, «почти антисимметричная» вторая собственная форма колебаний становится «почти симметричной». На рис. 1.9, *а*, *б* приведены соответственно зависимости квадратов первых четырех собственных частот, отнесенных к горизонтальной составляющей тяжения c_1 , от стрелы провеса для случаев $\gamma = 0^\circ$ и $\gamma = 30^\circ$.

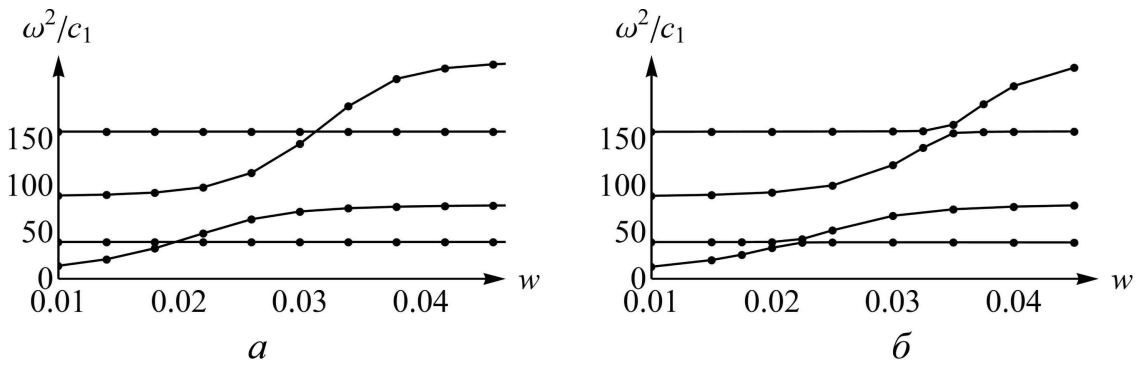


Рис. 1.9. Зависимости ω^2/c_1 от стрелы провеса w при $\gamma = 0^\circ$ (*а*) и $\gamma = 30^\circ$ (*б*)

Как следует из уравнения (1.57) и рис. 1.9, *а*, в случае провода с концами на одной высоте при одновременном выполнении равенств

$$1 - \frac{c_1^2 \omega^2}{EF} = 0, \quad \sin \frac{\omega}{2\sqrt{c_1}} = 0$$

одна из собственных частот колебаний становится двукратной. В случае, когда концы провода расположены на разной высоте, кратные собственные частоты колебаний у него отсутствуют; при этом зависимости ω_k^2/c_1 для обоих случаев очень близки между собой, различаясь лишь в окрестности точек совпадения (сближения) собственных частот.

Отметим, что представленные результаты подтверждают, что квадраты собственных частот оказываются пропорциональными тяжению, как это предполагалось при получении приближенных уравнений.

Приведенные результаты показывают, что уравнение (1.57) и формула (1.81) позволяют получить величины собственных частот малых колебаний провода с неподвижно закрепленными на одной высоте концами с погрешностью, не превышающей доли процента. Для провода, концы которого расположены на разной высоте, уравнение (1.82) также позволяет определить собственные частоты колебаний в направлении оси Ox_2 , а для колебаний в плоскости начального провисания Ox_1x_3 можно получить оценку собственных частот с погрешностью 5–7 % из уравнения (1.57).

Уравнение крутильных колебаний. Задача на собственные значения для крутильных колебаний (1.48)

$$\omega^2 \Delta \Theta + GJ \Delta \Theta'' + h\beta \sin(\theta_s(\xi) + \theta_0(\xi)) \Delta \Theta = 0, \quad \Delta \Theta(\pm 1/2) = 0$$

при $h = 0$ имеет аналитическое решение

$$\omega_k^\theta = \sqrt{GJ} \pi k, \quad \Delta \Theta_k(\xi) = \sin(\pi k(\xi + 1/2)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.84)$$

При $h \neq 0$ задача (1.48) в общем случае не допускает аналитического решения, но может быть решена численно, например, методом ускоренной сходимости. Расчеты показывают, что при $\theta_s(\xi) \equiv \text{const}$ собственные формы крутильных колебаний очень близки к формам (1.84), а собственные частоты достаточно точно оцениваются выражением

$$\omega_k = \sqrt{GJ(\pi k)^2 - H}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{где } H = h\beta \sin(\theta_s + \theta_0(0)). \quad (1.85)$$

1.4.6. Частоты колебаний одного пролета с упругозакрепленными концами

В данном разделе будут определены собственные частоты и формы малых колебаний провода, концы которого закреплены упруго.

Колебания в направлении оси Ox_2 . Задача на собственные значения имеет вид

$$\left(\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} U_2' \right)' + \omega^2 U_2 = 0,$$

$$U_2(\pm 1/2) = \mp S_2^\pm \frac{Q_0(\pm 1/2)}{1 + Q_0(\pm 1/2)/EF} U_2'(\pm 1/2).$$

Если положить

$$\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} \approx c_1,$$

то получим для собственных частот уравнение (1.71)

$$(S_2^+ + S_2^-) c_1 \frac{\omega}{\sqrt{c_1}} \cos \frac{\omega}{\sqrt{c_1}} + (1 - S_2^+ S_2^- c_1 \omega^2) \sin \frac{\omega}{\sqrt{c_1}} = 0.$$

В таблице 5 приведены значения первых четырех собственных частот при $\gamma = 0^\circ$, $EF = 10\,000$, $\omega = 0.01$ и $\omega = 0.03$, $S_2^\pm = 0.005$, вычисленные методом ускоренной сходимости для уравнения (1.45), а также корни уравнения (1.71).

Таблица 5

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\omega = 0.01$					$\omega = 0.03$				
(1.45)	9.89	19.84	29.90	40.09	(1.45)	6.16	12.32	18.48	24.64
(1.71)	9.89	19.84	29.90	40.09	(1.71)	6.14	12.30	18.45	24.61

Колебания в плоскости Ox_1x_3 . Для провода с упругозакрепленными концами задача на собственные значения (1.46), (1.50) имеет вид

$$(P_{13} \{U_1', U_3'\}^T)' + \omega^2 \{U_1, U_3\}^T = 0,$$

$$\{U_1(\pm 1/2), U_3(\pm 1/2)\}^T = \mp \begin{pmatrix} S_1^\pm & 0 \\ 0 & S_3^\pm \end{pmatrix} P_{13}(\pm 1/2) \{U_1'(\pm 1/2), U_3'(\pm 1/2)\}^T.$$

В таблице 6 приведены значения первых четырех собственных частот при $\gamma = 0^\circ$, $EF = 10\,000$, $S_1^+ = S_1^- = 0.0001$, $S_3^+ = S_3^- = 0$, $w = 0.01$ и $w = 0.03$, вычисленные методом ускоренной сходимости для задачи (1.46), а также корни уравнения (1.76).

Таблица 6

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$w = 0.01$					$w = 0.03$,				
(1.46)	11.86	22.22	33.37	44.45	(1.46)	13.52	12.78	19.99	25.62
(1.76)	11.86	22.22	33.37	44.45	(1.76)	13.52	12.81	19.98	25.61

Приведенные результаты показывают, что уравнения (1.76) и (1.71) позволяют получить значения собственных частот колебаний провода с упругозакрепленными концами с погрешностью, не превышающей доли процента. На рис. 1.10 приведены собственные формы колебаний при значениях стрелы провеса $w = 0.010, 0.020, 0.025, 0.030, 0.035$ (сверху вниз); горизонтальная компонента перемещения U_1 для наглядности увеличена в 5 раз.

Расчеты при различных значениях податливостей пружин на концах пролета $S_1^+ \neq S_1^-$, $S_2^+ \neq S_2^-$ показывают, что для первых форм малых колебаний провода в плоскости Ox_1x_3 и в направлении оси Ox_2 выполнены условия

$$\frac{U_1(1/2)}{U_1(-1/2)} \approx \frac{S_1^+}{S_1^-}, \quad \frac{U_2(1/2)}{U_2(-1/2)} \approx \frac{S_2^+}{S_2^-}. \quad (1.86)$$

Этот факт далее будет использован при определении эквивалентных податливостей пружин на концах пролета.

1.4.7. Собственные частоты малых колебаний провода многопролетной линии

Данный раздел посвящен определению собственных частот и форм малых колебаний провода многопролетной ЛЭП с помощью метода передаточной матрицы при аналитическом и численном построении общего решения уравнений малых колебаний, как описано в разделах 1.4.3 и 1.4.4.

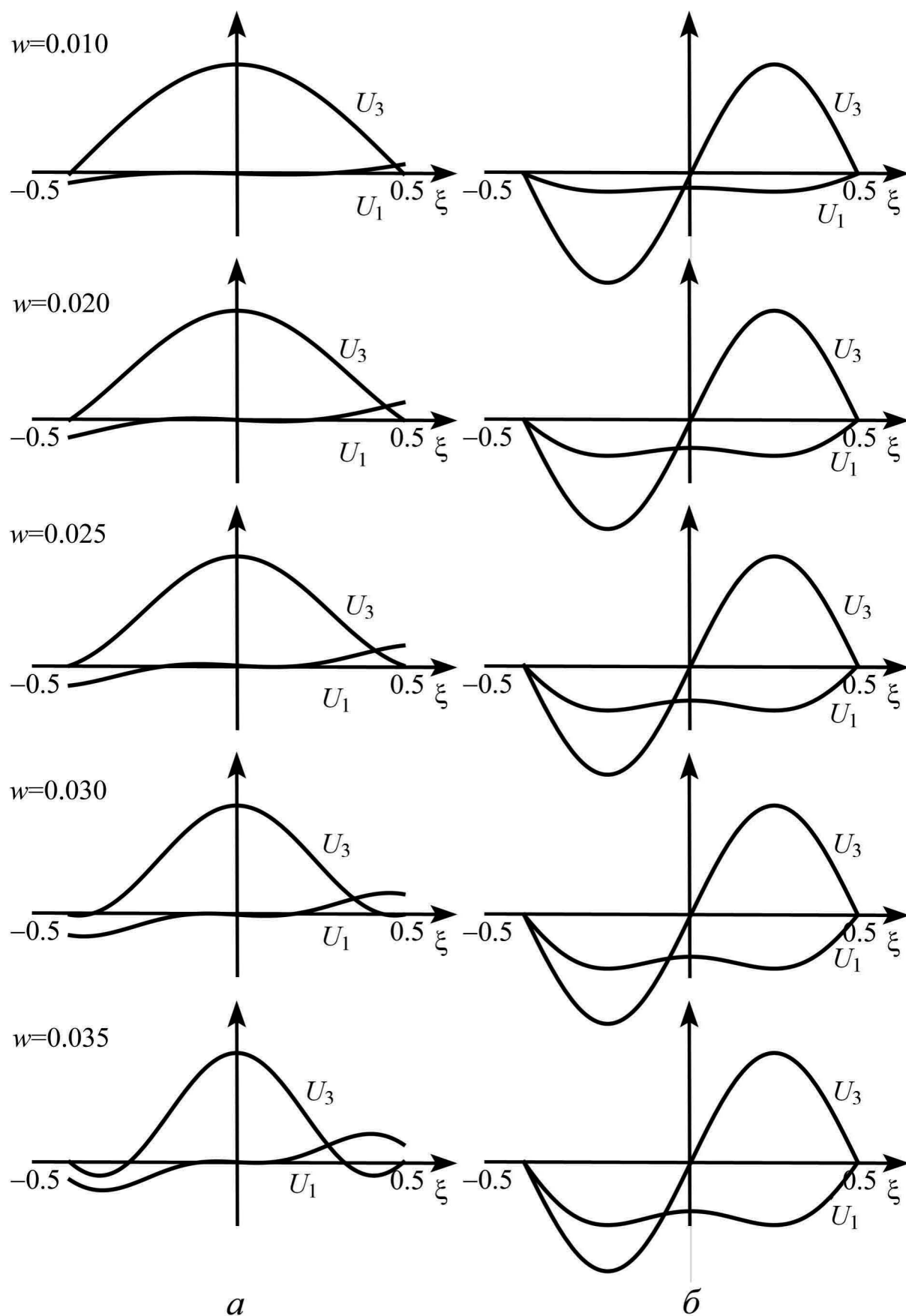


Рис. 1.10. Собственные формы колебаний: первая форма (а), вторая форма (б). $EF = 10\,000$, $\gamma = 0^\circ$, $S_1^\pm = 0.0001$

Колебания в плоскости Ox_1x_3 . Анализ уравнения (1.79)

$$\left(\sin \frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}}\right)^N \left(\cos \frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}}\right)^{N-1} \times \\ \times \left(-\frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}} \left(1 - \frac{c_1^2 \omega^2}{EF}\right) \cos \frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}} + \sin \frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}}\right) = 0$$

показывает, что первый его корень будет корнем уравнения

$$\cos \frac{\omega}{2N\sqrt{c_1}} = 0, \quad \text{откуда} \quad \omega_1 = \pi N \sqrt{c_1}. \quad (1.87)$$

Заметим, что эта собственная частота имеет кратность $(N - 1)$; соответствующие ей собственные формы являются линейными комбинациями $(N - 1)$ элементарных собственных форм, соответствующих колебаниям только двух пролетов, как показано на рис. 1.11 (приведен пример для $N = 5$; на рисунке показаны только вертикальные компоненты собственных форм $U_3^{(k)}$; штриховые линии показывают границы пролетов, прямые черточки сверху схематично показывают отклонения изоляторов).

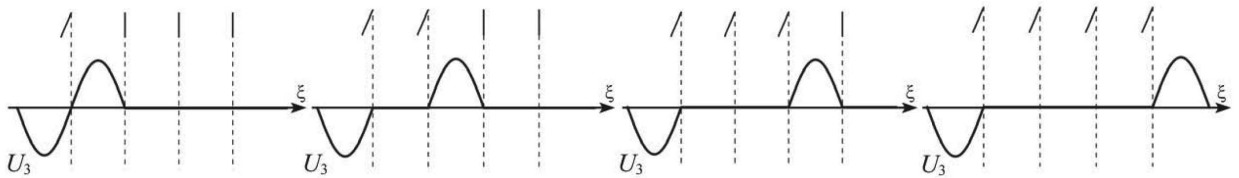


Рис. 1.11. Собственные формы малых вертикальных колебаний линии, состоящей из пяти одинаковых пролетов, соответствующие одной собственной частоте

В [90] методом Линштедта — Пуанкаре исследованы собственные частоты нелинейных колебаний линии, состоящей из N одинаковых пролетов. Там приведен пример расчета собственных частот двухпролетной линии со следующими размерными параметрами: погонная масса провода 1 кг/м, жесткость на растяжение $2.156 \cdot 10^7$ Н, горизонтальная длина каждого пролета 320 м. Было проведено два расчета при значениях стрелы провеса в пролетах 10 м и 7.61 м. Полученные значения первой собственной частоты составили соответственно 0.175 Гц и 0.200 Гц. После

приведения к размерному виду величины ω_1 , рассчитанной по формуле (1.87), получим значения 0.175 Гц и 0.201 Гц. Данный результат подтверждает качественно верный характер уравнения (1.79).

В работе [50] был проведен эксперимент по определению собственных частот и форм колебаний пятипролетной линии (рис. 1.12) с размерными параметрами $\tilde{m}_l = 453$ кг, $\tilde{l}_l = 3.05$ м, $\tilde{\rho} = 6.00$ кг/м; длины пролетов и стрела провеса в одном из них указаны на рис. 1.12. Этим параметрам соответствуют безразмерные параметры $m_l = 0.058$, $l_l = 0.00235$, $l_1 = 0.11$, $l_2 = 0.24$, $l_3 = 0.28$, $l_4 = 0.25$, $l_5 = 0.12$, $c_1 = 1.12$. Значение жесткости на растяжение в [50] не приведено, поэтому положим $EF \approx 7000$, что соответствует параметрам стандартных проводов.

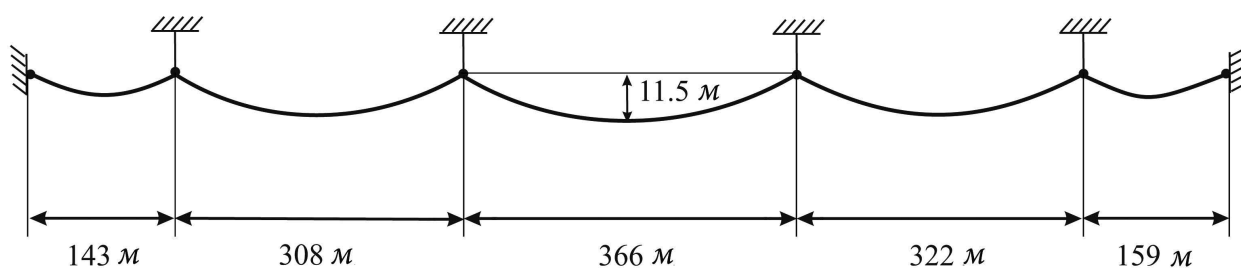


Рис. 1.12. Пятипролетная линия [50]

В таблице 7 приведены периоды собственных колебаний линии, с: во второй строке — полученные в эксперименте [50], в третьей строке — полученные в результате расчета, в четвертой и пятой строках — полученные путем решения аналитических уравнений (1.80) и (1.78) (если положить передаточные матрицы изоляторов $M_l^{(k)} = E$) соответственно. Верхний индекс «*» означает, что данному периоду отвечает антисимметричная форма колебаний одного из пролетов.

Таблица 7

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Эксп. [50]	5.55	5.00	3.03	2.85	—	—	2.38	2.00	1.78	1.72
Расчет	5.65	5.090	3.08*	2.90	2.70*	2.59*	2.49	2.07	1.82	1.74
(1.80)	5.76	5.13	3.05*	2.89	2.71*	2.58*	2.49	2.07	1.83	1.75
(1.78)	5.87	4.92	3.07*	2.70*	2.66	2.58*	2.57	2.08	1.83	1.74

Из таблицы видно, что погрешность расчета по сравнению с экспериментом составляет 2–5 %, что вполне приемлемо для практических целей; при этом результаты данной работы, полученные аналитически и численно, хорошо согласуются между собой. Применение упрощенной методики, приводящей к уравнению (1.78), позволяет получить качественно верный вид собственных форм и найти оценку собственных частот с погрешностью около 6–8 %.

Колебания в направлении Ox_2 . В таблице 8 приведены периоды собственных колебаний линии, с, рассмотренной в [50], в направлении оси Ox_2 : во втором столбце — полученные в расчете [50], в третьем столбце — полученные в результате расчета данной работы, в четвертом столбце — полученные в данной работе путем решения аналитических уравнений.

Таблица 8

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Расчет [50]	6.44	5.66	5.45	3.23	3.01	2.86	2.66	2.48	2.13
Расчет данной работы	6.61	5.81	5.59	3.32	3.10	2.95	2.73	2.55	2.19
Аналитические уравнения	6.59	5.86	5.65	3.31	3.09	2.96	2.72	2.56	2.19

Из таблицы 8 видно, что различие периодов собственных колебаний, полученных в [50] и в данной работе, не превышает 3 %. При этом результаты, полученные с помощью аналитического и численного методов передаточной матрицы, хорошо согласуются между собой. Различие между результатами данной работы и результатами расчета [50] может быть вызвано различной трактовкой исходных данных.

На рис. 1.13 и 1.14 приведены первые четыре собственные формы колебаний рассмотренной линии в плоскости Ox_1x_3 и в направлении оси Ox_2 . Полученные собственные формы качественно соответствуют приведенным в [50].

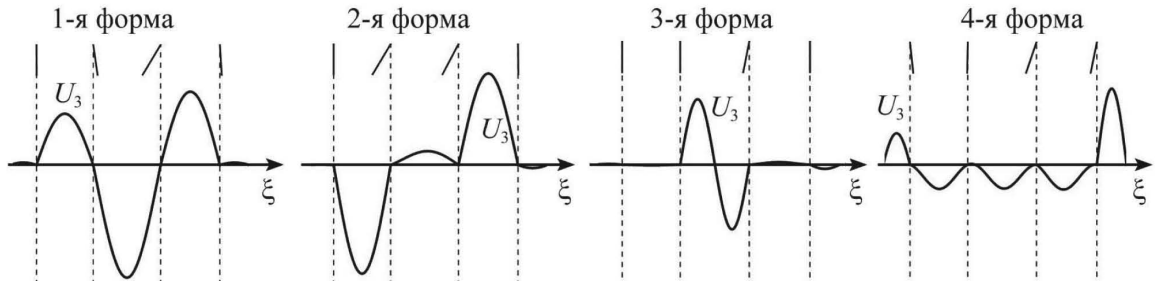


Рис. 1.13. Собственные формы малых колебаний линии [50] в плоскости Ox_1x_3 (показана только вертикальная компонента перемещения провода)

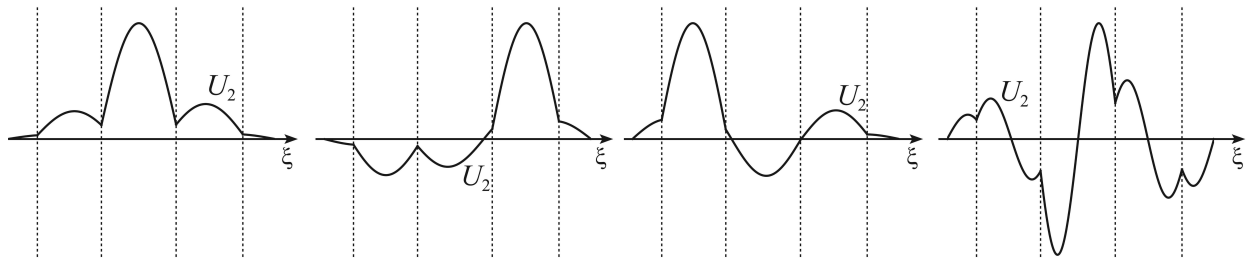


Рис. 1.14. Собственные формы малых колебаний линии [50] в направлении оси Ox_2

1.4.8. Собственные частоты малых колебаний провода с точечной массой (гасителем вибрации)

Рассмотрим провод, на котором присутствует одна точечная масса $m_1 = 1/30$, что примерно соответствует наличию на пролете длиной 200 м гасителя вибрации Стокбриджа массой 10 кг при плотности провода 1.5 кг/м [58]. В таблице 9 приведены значения первых четырех собственных частот малых колебаний такого провода, вычисленных методом сагиттарной функции при значении жесткости провода на растяжение $EF = 10\,000$, положении точечной массы $\xi_1 = 0.25$ и двух значениях стрелы провеса (до подвешивания массы) $w = 0.015$ и $w = 0.025$. Также в таблице 9 для сравнения приведены значения собственных частот малых колебаний провода без гасителя, полученные путем решения алгебраического уравнения (1.57).

Таблица 9

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$w = 0.015$					$w = 0.025$				
Расчет	13.89	18.33	27.77	36.68	Расчет	14.26	17.29	23.23	28.53
(1.57)	13.98	18.34	27.78	36.68	(1.57)	14.26	17.43	23.41	28.53

На рис. 1.15 приведены зависимости первой и второй собственных частот малых колебаний провода от положения точечной массы ξ_1 при $EF = 10000$, $w = 0.015$.

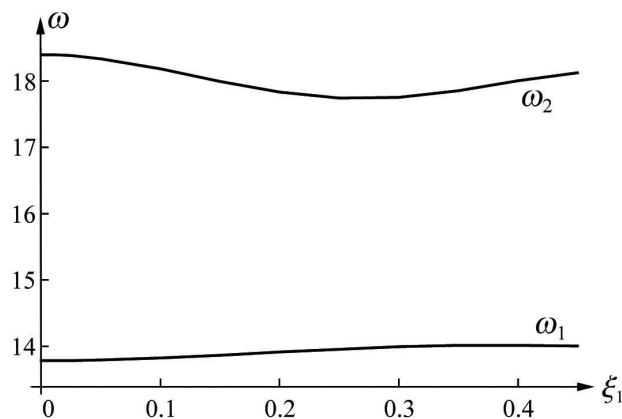


Рис. 1.15. Зависимости собственных частот малых колебаний провода ω_1 , ω_2 от положения точечной массы

На основании проведенных расчетов можно сделать вывод, что, поскольку учет точечной массы в точке $\xi_1 = 0.25$ приводит к изменению низших собственных частот колебаний провода не более чем на 1–3 %, а на практике гасители крепятся ближе к концам пролета, где их влияние на собственные частоты провода существенно слабее, при моделировании пляски наличие на проводе гасителей вибрации, сигнальных шаров и иной подобной арматуры можно не учитывать.

1.4.9. Задание эквивалентной жесткости

Как было указано выше, при получении выражений для эквивалентной податливости S_2^\pm пружин на концах рассматриваемого пролета

ЛЭП используется предположение, что в соседних пролетах горизонтальное перемещение U_2 зависит от координаты ξ линейно, тогда $U'_2 \approx U_2/L$. Однако из рис. 1.14 видно, что это предположение не соответствует действительности. В данной работе предлагается другой подход к определению эквивалентных податливостей пружин S_j^\pm , S_j^\pm , $j = 1, 2$.

Пусть имеется многопролетная ЛЭП и рассматривается некоторый ее пролет. Требуется закрепить концы этого пролета с помощью пружин так, чтобы первые собственные частоты его малых колебаний совпадали с частотами его колебаний в составе многопролетной ЛЭП. Предлагается для каждого вида колебаний (в плоскости Ox_1x_3 и в направлении оси Ox_2) использовать следующую методику.

1. Определить собственные частоты и формы малых колебаний многопролетной ЛЭП, используя изложенные выше методы и подходы.
2. Выявить основную форму колебаний для рассматриваемого пролета, и определить соответствующую ей собственную частоту ω^* и отношение перемещений концов пролета $U_j(\xi_{k+1})/U_j(\xi_k)$, где $j = 1, 2$.
3. Определить податливости пружин S_j^\pm из уравнений (1.76), (1.71) так, чтобы один рассматриваемый пролет с данными пружинами имел первую собственную частоту колебаний ω^* , а для первой собственной формы колебаний было выполнено условие (1.86)

$$\frac{U_j(1/2)}{U_j(-1/2)} \approx \frac{S_j^+}{S_j^-}, \quad j = 1, 2.$$

В качестве примера рассмотрим ЛЭП из трех равных пролетов со следующими параметрами: общая длина провода $\tilde{L} = 600$ м, погонная плотность $\tilde{\rho} = 1.5$ кг/м, жесткость на растяжение $\widetilde{EF} = 2.646 \cdot 10^7$ Н, масса изолятора $\tilde{m}_I = 30$ кг, длина изолятора $\tilde{l}_I = 2$ м. Данной линии соответствуют следующие безразмерные параметры: $EF = 3000$, $\xi_0 = -1/2$, $\xi_1 = -1/6$, $\xi_2 = 1/6$, $\xi_3 = 1/2$, $m_I = 0.033$, $l_I = 0.0033$. Концы крайних пролетов закреплены неподвижно.

В таблице 10 приведены первые собственные частоты малых колебаний в плоскости Ox_1x_3 ($\omega_1^{(3)}$) и в направлении оси Ox_2 ($\omega_1^{(2)}$), вычисленные напрямую для трехпролетной линии и в соответствии с общепринятой методикой (по формулам (1.36)). Из таблицы видно, что погрешность определения низших собственных частот может быть значительной, что может приводить к существенным ошибкам при проведении расчетов. В двух последних столбцах таблицы приведены значения эквивалентных податливостей пружин, определенные по предложенной методике.

Таблица 10

ω	Трехпролетная линия		Один пролет (ф-лы (1.36))		Погрешность		Экв. податливости	
	$\omega_1^{(3)}$	$\omega_1^{(2)}$	$\omega_1^{(3)}$	$\omega_1^{(2)}$	$\omega_1^{(3)}$	$\omega_1^{(2)}$	S_1^{\pm}	S_2^{\pm}
0.010	11.12	6.37	11.66	9.35	5 %	46 %	0.0159	0.0352
0.015	9.10	5.77	10.07	7.99	10 %	38 %	0.0103	0.0386
0.025	7.11	5.08	8.36	6.46	18 %	27 %	0.0125	0.0408

1.5. Выводы

В главе 1 поставлена и решена задача об определении собственных частот и форм малых колебаний провода линий электропередачи различных конфигураций: однопролетной линии с неподвижными или упругозакрепленными концами, однопролетной линии при наличии на проводе точечных масс, многопролетной линии. Показано, что собственные частоты колебаний пролета, на концах которого расположены пружины, моделирующие наличие у пролета соседних пролетов и подвесной арматуры, могут существенно отличаться от собственных частот малых колебаний данного пролета в составе многопролетной линии в том случае, когда жесткости пружин определяются по общепринятой методике.

В главе 1 получены следующие основные результаты.

1. Разработан алгоритм приближенного аналитического определения собственных частот малых колебаний провода методом передаточной матрицы. Полученное приближенное общее решение уравнения малых колебаний провода в плоскости Ox_1x_3 имеет более простой вид по сравнению с известным в литературе и позволяет получить аналитические уравнения для оценки собственных частот колебаний многопролетной ЛЭП. В частном случае одного пролета предложенная методика приводит к известным аналитическим уравнениям.
2. Предложена модификация метода передаточной матрицы, основанная на численном построении общего решения уравнений малых колебаний провода с использованием идей метода сагиттарной функции.
3. Предложена методика определения эквивалентных податливостей линейных пружин, моделирующих влияние изоляторов и соседних пролетов на малые колебания пролета ЛЭП.

Основные результаты главы 1 опубликованы в работах автора [12,13,63].

2. Математическое моделирование аэроупругого движения профиля методом вихревых элементов

Алгоритм моделирования движения провода ЛЭП, разработанный в данной диссертации, основан на определении нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на заданный набор сечений провода. Поскольку сечения провода являются подвижными, что приводит к изменению области течения на каждом шаге расчета, для моделирования обтекания каждого сечения целесообразно применить бессеточный (вихревой) метод. Вихревые методы позволяют определять аэродинамические нагрузки, действующие на помещенные в поток вязкой несжимаемой среды тела, с приемлемой точностью и относительно небольшими затратами вычислительных ресурсов. В данной работе предлагается использовать метод вязких вихревых доменов [1], а выполнение граничного условия прилипания на профиле обеспечивать из условия равенства касательных компонент скорости среды и профиля по аналогии с работой [78].

2.1. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача об обтекании подвижного жесткого телесного профиля произвольной формы вязкой несжимаемой средой. Все характеристики течения зависят от времени и декартовых координат x_2 , x_3 и не зависят от x_1 .

2.1.1. Уравнения движения среды

Пусть все пространство вокруг профиля K заполнено вязкой однородной (с плотностью $\bar{\rho}_{\text{ср}} = \text{const}$) несжимаемой средой [29]. Движение среды в предположении об отсутствии массовых сил описывается уравнением неразрывности

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} = 0$$

и уравнениями Навье — Стокса

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \tilde{\mathbf{V}} = -\nabla \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}_{\text{cp}}} + \frac{\tilde{\mathbf{V}}^2}{2} \right) + \tilde{\nu} \nabla^2 \tilde{\mathbf{V}},$$

где $\tilde{\mathbf{V}}$ — скорость среды; $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\Omega} \mathbf{e}_1$ — завихренность, \mathbf{e}_1 — орт координатной оси Ox_1 ; \tilde{p} — давление; $\tilde{\nu}$ — кинематическая вязкость; \tilde{t} — время; ∇ — оператор дифференцирования по пространственным переменным \tilde{x}_2 и \tilde{x}_3 . На границе профиля ∂K выполнено условие прилипания

$$\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \tilde{\mathbf{V}}_K(\tilde{\mathbf{r}}), \quad \tilde{\mathbf{r}} \in \partial K, \quad (2.1)$$

где $\tilde{\mathbf{V}}_K(\tilde{\mathbf{r}})$ — скорость движения точки профиля с радиус-вектором $\tilde{\mathbf{r}}$. На бесконечности (т. е. при $|\tilde{\mathbf{r}}| \rightarrow \infty$) задаются граничные условия затухания возмущений

$$\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{r}}) \rightarrow \tilde{\mathbf{V}}_{\infty} = \text{const}, \quad \tilde{p}(\tilde{\mathbf{r}}) \rightarrow \tilde{p}_{\infty} = \text{const}.$$

Приведем вышеперечисленные уравнения к безразмерной форме. Для этого величины, имеющие размерность длины, отнесем к характерному размеру (хорде) профиля \tilde{d} ; величины, имеющие размерность скорости, отнесем к скорости набегающего потока $\tilde{V}_{\infty} = |\tilde{\mathbf{V}}_{\infty}|$; время отнесем к $\tilde{d}/\tilde{V}_{\infty}$, давление — к $\tilde{\rho}_{\text{cp}} \tilde{V}_{\infty}^2$. Введем для безразмерных переменных и параметров следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{d}}, \quad \tau = \frac{\tilde{t} \tilde{V}_{\infty}}{\tilde{d}}, \\ \mathbf{V} &= \frac{\tilde{\mathbf{V}}}{\tilde{V}_{\infty}}, \quad \mathbf{V}_{\infty} = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{\infty}}{\tilde{V}_{\infty}}, \quad \mathbf{V}_K = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_K}{\tilde{V}_{\infty}}, \\ p &= \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}_{\text{cp}} \tilde{V}_{\infty}^2}, \quad p_{\infty} = \frac{\tilde{p}_{\infty}}{\tilde{\rho}_{\text{cp}} \tilde{V}_{\infty}^2}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \tilde{d}}{\tilde{V}_{\infty}}, \quad \mathbf{r}_C = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_C}{\tilde{d}}, \quad \omega = \frac{\tilde{\omega} \tilde{d}}{\tilde{V}_{\infty}}. \end{aligned}$$

Уравнения неразрывности и Навье — Стокса в безразмерной форме принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} &= -\nabla \left(p + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\text{Re} = \frac{\tilde{V}_\infty \tilde{d}}{\tilde{\nu}}$$

— число Рейнольдса; ∇ — в данном случае означает дифференцирование по безразмерным пространственным координатам x_2 и x_3 . Граничные условия в безразмерной форме принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \in \partial K; \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}) &= \mathbf{V}_K(\mathbf{r}); \\ |\mathbf{r}| \rightarrow \infty : \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}) &\rightarrow \mathbf{V}_\infty = \text{const}, \quad p(\mathbf{r}) \rightarrow p_\infty = \text{const}. \end{aligned}$$

2.1.2. Уравнения движения профиля

Для описания движения жесткого профиля выберем на нем точку C с радиус-вектором $\mathbf{r}_C(\tau) = x_2(\tau)\mathbf{e}_2 + x_3(\tau)\mathbf{e}_3$, тогда положение профиля характеризуется вектором \mathbf{r}_C и углом поворота $\theta(\tau)$ профиля вокруг точки C , отсчитываемым по часовой стрелке. Скорость произвольной точки \mathbf{r} профиля равна

$$\mathbf{V}_K(\mathbf{r}, \tau) = \mathbf{V}_C(\tau) + \boldsymbol{\omega}(\tau) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C),$$

где $\mathbf{V}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = d\mathbf{r}_C/d\tau$ — скорость выделенной точки C , $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_1$, $\omega = -\dot{\theta}$. Движение профиля может либо осуществляться по заданному закону, либо определяться наложенными на профиль связями и нагрузками, действующими на него со стороны среды.

Уравнения движения профиля, закрепленного упруго-вязкими связями в точке C , имеют вид (ср. с системой уравнений (1.9)–(1.13))

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 - \delta_2 \dot{x}_2 + q_2^a - h (\sin(\theta_s + \theta)\ddot{\theta} + \cos(\theta_s + \theta)\dot{\theta}^2), \\ \ddot{x}_3 &= -k_3 x_3 - \delta_3 \dot{x}_3 + q_3^a - 1 - h (\cos(\theta_s + \theta)\ddot{\theta} - \sin(\theta_s + \theta)\dot{\theta}^2), \\ \ddot{\theta} &= -k_\theta \theta - \delta_\theta \dot{\theta} + M^a - h\beta (\sin(\theta_s + \theta)\ddot{x}_2 + \cos(\theta_s + \theta)\ddot{x}_3 + \cos(\theta_s + \theta)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Величины, имеющие размерность длины, отнесены здесь к характерному размеру (хорде) профиля \tilde{d} , величины, имеющие размерность массы, — к массе профиля \tilde{m} .

Для уравнений (2.3) задаются начальные условия:

$$\begin{aligned} x_2(\tau_0) &= x_{20}, & \left. \frac{\partial x_2(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau_0} &= v_{20}, \\ x_3(\tau_0) &= x_{30}, & \left. \frac{\partial x_3(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau_0} &= v_{30}, \\ \theta(\tau_0) &= \theta_0, & \left. \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau_0} &= \omega_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2. Описание метода вихревых элементов

Для моделирования обтекания движущегося профиля и определения действующих на него аэродинамических нагрузок в данной работе используется лагранжев метод вихревых элементов [1]. Этот метод не требует построения сетки в области течения, что особенно удобно для исследования аэродинамики подвижных профилей.

Основной принцип вихревых методов состоит в описании движения среды и находящихся в ней профилей через завихренность, «реальную» (Ω) в области среды и сопряженную (Ω_{in}) в области, занятой профилями.

В однородной среде завихренность Ω может генерироваться только на границах области течения, т. е. на границе профиля. Уничтожение завихренности происходит вследствие взаимной диффузии завихренности противоположного знака и имеет место внутри вязкой среды [79]. Закон эволюции Ω является следствием уравнений Навье — Стокса: вихревая линия движется со скоростью, складывающейся из скорости среды \mathbf{V} (конвективной скорости) и диффузионной скорости \mathbf{V}_d , пропорциональной вязкости среды [1]. В частности, в идеальной среде вихревые линии постоянно связаны с одними и теми же элементами среды [29].

Распределение и скорость движения сопряженной завихренности Ω_{in} в области, занятой профилем, могут быть заданы бесконечным множеством способов [39]; при этом должна правильно моделироваться скорость движения границы профиля, а генерация завихренности должна также происходить лишь на границе профиля. Заметим, что конкретный

вариант перераспределения сопряженной завихренности внутри профиля и на его границе не будет влиять на внешнее течение среды и гидродинамические нагрузки [1]. В данной работе будем моделировать профиль равномерно распределенной сопряженной завихренностью интенсивности $\mathbf{\Omega}_{in} = \nabla \times \mathbf{V}_K = 2\boldsymbol{\omega} = 2\omega \mathbf{e}_1$.

Из уравнений Навье — Стокса (2.2) в плоском случае следует уравнение [1]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\Omega(\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)) = 0, \quad (2.5)$$

имеющее вид закона сохранения субстанции плотности Ω , движущейся со скоростью $(\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)$, где

$$\mathbf{V}_d = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\nabla \Omega}{\Omega} \quad (2.6)$$

— диффузионная скорость движения завихренности.

Эволюция сопряженной завихренности должна подчиняться уравнению, аналогичному (2.5):

$$\frac{\partial \Omega_{in}}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\Omega_{in} \mathbf{V}_{in}) = 0. \quad (2.7)$$

Можно показать, что скорость движения сопряженной завихренности может быть представлена в виде

$$\mathbf{V}_{in} = \mathbf{V}_K - \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C). \quad (2.8)$$

Из [26] известно, что связь между плоским непрерывным соленоидальным векторным полем \mathbf{V} , удовлетворяющим условию $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_\infty$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, и его ротором $\mathbf{\Omega}$ выражается законом Био — Савара

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \iint_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{K}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})) dS_{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{V}_\infty, \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{K}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2}.$$

Под полями \mathbf{V} и $\mathbf{\Omega}$ здесь понимаются поля $\mathbf{V} \cup \mathbf{V}_K$ и $\mathbf{\Omega} \cup \mathbf{\Omega}_{in}$.

Для наглядности разобьем интеграл в (2.9) на 2 части:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}) &= \mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_f(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_\infty = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus K} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}) dS_\xi + \iint_K (\boldsymbol{\Omega}_{in} \times \mathbf{K}) dS_\xi + \mathbf{V}_\infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В [1] получены формулы для вычисления давления в произвольной точке среды, а также формулы для вычисления действующей на профиль гидродинамической силы и момента гидродинамических сил относительно фиксированной точки C :

$$\mathbf{F} = S\dot{\mathbf{V}}_Z + 2S\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_Z + \mathbf{e}_1 \times \oint_{\partial K} J(\mathbf{r})\mathbf{r}dl_r, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 \oint_{\partial K} J_\Omega(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C)^2 dl_r + 2\dot{\boldsymbol{\omega}} I_C \mathbf{e}_1 + (\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_C) \times \dot{\mathbf{V}}_C S, \quad (2.12)$$

где

$$I_C = \iint_K (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C)^2 dS$$

— геометрический момент инерции профиля относительно точки C ; \mathbf{r}_Z и \mathbf{V}_Z — соответственно положение и скорость геометрического центра Z профиля; S — площадь профиля; J_Ω — плотность потока завихренности в рассматриваемый момент времени с границы профиля. Отметим, что в выражениях (2.11) и (2.12) не учитываются силы вязкого трения и создаваемый ими момент.

Поток завихренности $J_\Omega(\mathbf{r})$ определяет скорость генерации на границе профиля завихренности, которая затем становится свободной и образует вихревой след вблизи обтекаемого профиля и позади него.

2.3. Расчетная схема метода вихревых элементов

Дискретизация поля завихренности. При проведении расчетов непрерывное поле завихренности заменяется набором из $N_{ВЭ}$ вихревых эле-

ментов — вихревых нитей, характеризуемых положениями \mathbf{r}_i и циркуляциями Γ_i :

$$\hat{\Omega}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{ВЭ}}} \Gamma_i \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (2.13)$$

Здесь $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ — двумерная дельта-функция.

Дискретизация профиля. Граница обтекаемого профиля аппроксимируется ломаной, состоящей из M отрезков-панелей. Для каждой панели задаются положения ее начала и конца, длина Δl_k , координаты единичных касательного $\boldsymbol{\tau}_k$ и внешнего нормального \mathbf{n}_k векторов, а также контрольная точка с радиус-вектором \mathbf{P}_k и точка рождения вихря с радиус-вектором \mathbf{C}_k (рис. 2.1). Направления касательных векторов соответствует обходу контура против часовой стрелки. В данной работе контрольная точка располагается в середине панели, а точка рождения вихря — на конце.

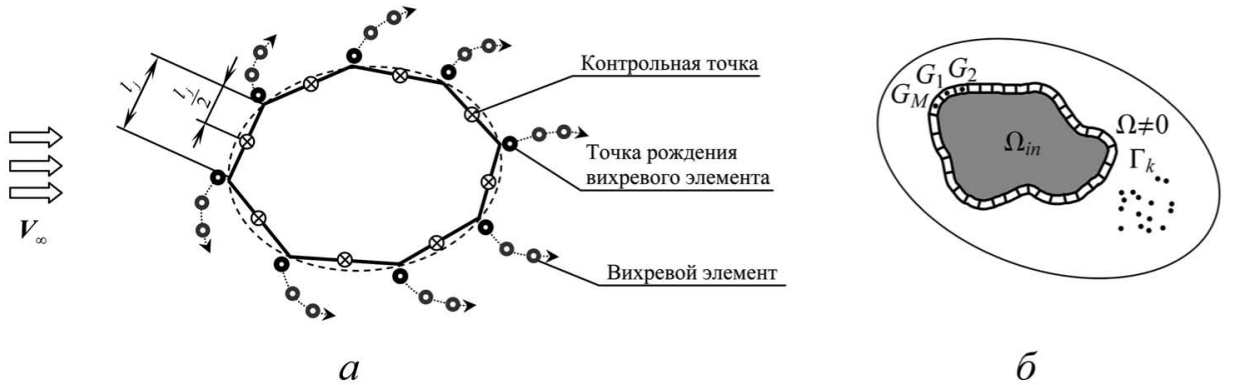


Рис. 2.1. Дискретизация профиля (а) и поля завихренности (б)

Вычисление скоростей среды и вихревых элементов. Подставляя (2.13) в (2.10), получим

$$\mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{ВЭ}}} \mathbf{V}_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{ВЭ}}} \Gamma_i (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)) = \sum_{i=1}^{N_{\text{ВЭ}}} \Gamma_i \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

При приближении к вихревому элементу скорость, индуцируемая им, неограниченно возрастает. Чтобы избежать этого при вычислениях, вводят некоторый малый радиус вихревых элементов ε (радиус дискретности),

и вычисляют влияние i -го вихревого элемента \mathbf{V}_i по формуле

$$\mathbf{V}_i(\mathbf{r}) = \Gamma_i \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \mathbf{e}_1 \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\max\{\varepsilon^2, |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2\}}.$$

Составляющая \mathbf{V}_f скорости среды в точке \mathbf{r} , вызванная вращением профиля, вычисляется с помощью преобразования интеграла по площади в контурный интеграл [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_f(\mathbf{r}) &= \iint_K (\boldsymbol{\Omega}_{in} \times \mathbf{K}) dS_\xi = -\frac{2\omega}{2\pi} \times \iint_K \nabla_\xi \ln |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| dS_\xi = \\ &= \frac{\omega}{\pi} \times \oint_{\partial K} \mathbf{n} \ln |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| dl \approx \frac{\omega}{\pi} \sum_{k=1}^M \tau_k \ln |\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_k| \Delta l_k, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\hat{\mathbf{r}}_k$ — середина k -й панели.

Для вычисления диффузионной скорости \mathbf{V}_d могут использоваться формулы, основанные на интегральном представлении функции Ω [1]:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{r}) &= \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \frac{I_1}{I_0}, \quad \nabla \Omega(\mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{I}_2}{I_0} - \frac{I_1 \mathbf{I}_3}{I_0^2} \right), \\ I_1(\mathbf{r}) &= \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus K} \Omega(\boldsymbol{\xi}) \exp \left(-\frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|}{\varepsilon^*} \right) dS_\xi, \quad I_0(\mathbf{r}) = \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus K} \exp \left(-\frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|}{\varepsilon^*} \right) dS_\xi, \\ \mathbf{I}_2(\mathbf{r}) &= \nabla I_1(\mathbf{r}) = - \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus K} \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| \varepsilon^*} \Omega(\boldsymbol{\xi}) \exp \left(-\frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|}{\varepsilon^*} \right) dS_\xi, \\ \mathbf{I}_3(\mathbf{r}) &= \nabla I_0(\mathbf{r}) = - \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus K} \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| \varepsilon^*} \exp \left(-\frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|}{\varepsilon^*} \right) dS_\xi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Тогда получаем для диффузионной скорости \mathbf{V}_d выражение

$$\mathbf{V}_d = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\nabla \Omega}{\Omega} = \frac{1}{\text{Re}} \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left(-\frac{\mathbf{I}_2}{I_1} + \frac{\mathbf{I}_3}{I_0} \right). \quad (2.16)$$

Отметим, что первое слагаемое в скобках в (2.16) отвечает за диффузию завихренности, а второе слагаемое является следствием наличия профиля и носит характер отталкивания от него.

Расчетные формулы для \mathbf{V}_d приведены в [1] и представляют собой дискретный аналог интегралов (2.15); малый параметр ε^* должен,

с одной стороны, быть меньше расстояния, на котором происходит существенное изменение значения Ω , а с другой стороны, превышать характерное расстояние между вихревыми элементами [1]. Значение ε^* определяется для каждого вихревого элемента как среднеквадратичное расстояние до трех ближайших к нему вихревых элементов.

Генерация завихренности. Можно показать [28], что если на границе профиля отсутствует присоединенная завихренность, то условие прилипания (2.1)

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_K(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial K$$

эквивалентно условию непротекания

$$(\mathbf{V}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_K(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial K. \quad (2.17)$$

За малый временной шаг $\Delta\tau$ вблизи контура образуется тонкий слой завихренности. Пренебрегая толщиной этого слоя, будем приближенно считать его сосредоточенным на ∂K . Его поверхностная завихренность $\gamma(\mathbf{r}) \approx J_\Omega(\mathbf{r})\Delta\tau$ может быть найдена путем решения сингулярного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \oint_{\partial K} \gamma(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \\ = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \left(\mathbf{V}_K(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_f(\mathbf{r}) \right), \quad \mathbf{r} \in \partial K. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Решение данного уравнения существует, но неединственно [28], поэтому требуется учет дополнительного условия [1]

$$\oint_{\partial K} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = -2S\Delta\omega + \Delta G, \quad (2.19)$$

где $\Delta\omega$ — приращение угловой скорости профиля за шаг по времени $\Delta\tau$, а величина ΔG не несет физического смысла, однако вызвана необходимостью коррекции вычислительных ошибок и будет определена ниже.

Интегральное уравнение (2.18) и условие (2.19) аппроксимируются системой линейных алгебраических уравнений: в контрольных точках записывается условие непротекания, а в точках рождения находятся произведения значений неизвестной функции (интенсивности вихревого слоя) на длину соответствующей панели $\gamma_k \cdot \Delta l_k$, т. е. циркуляции новых вихревых элементов, обозначаемые за G_k . Чтобы избежать необходимости решения системы из $(M+1)$ уравнения относительно M неизвестных циркуляций, которая, вообще говоря, несовместна, вводится дополнительная регуляризирующая переменная R [28]. Тогда система будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_k \cdot \left(\sum_{j=1}^M (G_j \mathbf{Q}(\mathbf{P}_k - \mathbf{C}_j)) \right) + R = \\ \quad = \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{V}_K(\mathbf{P}_k) - \mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_f(\mathbf{P}_k) - \mathbf{V}_\Omega(\mathbf{P}_k)), k = 1, \dots, M, \\ \sum_{j=1}^M G_j = -2S\Delta\omega + \Delta G. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Все рожденные на текущем шаге вихревые элементы становятся частью вихревого следа.

Систематические расчеты показывают, что такой способ определения циркуляций генерируемых вихревых элементов в случае сравнительно малого количества панелей на профиле приводит к существенным погрешностям. Кроме того, наблюдаются значительные осцилляции аэродинамических нагрузок от шага к шагу, амплитуда которых может быть сравнима, а в ряде случаев даже превышать величину самих нагрузок. Это не является критичным при моделировании обтекания неподвижного профиля, когда требуется определить величины стационарных (т. е. осредненных по большому временному промежутку) аэродинамических нагрузок. Однако при решении сопряженных задач осцилляции нагрузок нежелательны, поскольку могут приводить к сложностям вычислительного характера.

Для решения данной проблемы может использоваться иной подход [66], который предполагает выполнение условия равенства касательных компонент предельного значения скорости среды со стороны профиля и поверхности профиля. Можно показать, что условие прилипания (2.1) эквивалентно условию

$$(\mathbf{V}_-(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_K(\mathbf{r})) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial K, \quad (2.21)$$

где $\mathbf{V}_-(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) - \gamma(\mathbf{r})\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})/2$. Условие (2.21) приводит к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода относительно интенсивности вихревого слоя на профиле:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot \oint_{\partial K} \gamma(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \frac{\gamma(\mathbf{r})}{2} = \\ = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{V}_K(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_f(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \partial K. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ядро этого интегрального уравнения ограничено величиной $\kappa^*/(4\pi)$, где κ^* — наибольшая кривизна профиля. Решение данного уравнения также не является единственным, поэтому, как и в классической расчетной схеме, задается дополнительное условие (2.19) и вводится регуляризирующая переменная.

Дискретный аналог уравнения (2.22) может быть построен по аналогии с описанной выше процедурой: граничное условие выполняется в контрольных точках, а вихревые элементы помещаются в точки рождения. Такой подход позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений с хорошо обусловленной матрицей по сравнению с классическим подходом. Однако точность решения уравнения (2.22) может быть существенно повышена, если потребовать выполнения граничного условия на касательные компоненты скорости не в отдельных контрольных точках, а в среднем по панелям; при этом вихревой слой (кусочно-постоянной интенсивности) можно считать распределенным вдоль панелей, а не «стянутым» в отдельные вихревые элементы. Расчетные формулы для вычисления коэффициентов матрицы системы линейных уравнений и правых частей приведены в [34].

Расчеты показывают [78], что использование такого подхода позволяет существенно повысить точность определения циркуляций вихревых элементов, сходящих в поток, а также значительно уменьшить осцилляции аэродинамических нагрузок.

Движение завихренности. Эволюция поля завихренности моделируется перемещением вихревых элементов в соответствии с уравнениями

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{V}_d(\mathbf{r}_i), \quad i = 1, \dots, N_{\text{ВЭ}}, \quad (2.23)$$

которые решаются явным методом Эйлера. Для неподвижного профиля или системы неподвижных профилей в статье [33] разработана схема 2-го порядка точности.

Вследствие дискретности расчетной схемы и конечности шага по времени некоторые вихревые элементы после перемещения могут оказаться внутри профиля. Чтобы этого избежать, на каждом шаге проводится проверка и все вихри, оказавшиеся внутри, удаляются. При этом запоминаются циркуляции G_j^d вихревых элементов, траектории которых пересекли j -ю панель. Суммарная циркуляция ΔG вихревых элементов, попавших внутрь профиля, на следующем шаге расчета добавляется в правую часть системы (2.20).

Также на каждом шаге производится объединение («коллапс») вихревых элементов в один, если расстояние между ними меньше некоторого малого параметра ε_{col} . Это позволяет моделировать аннигиляцию вихрей разного знака, а также уменьшить количество вихрей в следе и тем самым сократить время расчета. Кроме того, из вихревого следа исключаются вихревые элементы, удалившиеся от профиля на расстояние, превышающее границу моделирования вихревого следа L_{far} (в расчетах, как правило, принимается $L_{far}/d = 8 \dots 20$, где d — хорда профиля), поскольку влиянием таких вихревых элементов на течение вблизи профиля и действующие на него аэродинамические нагрузки можно пренебречь.

Вычисление аэродинамических нагрузок. Формулы (2.11) и (2.12) в дискретном варианте имеют вид

$$\mathbf{F} \approx S\dot{\mathbf{V}}_Z + 2S\dot{\omega}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_Z + \mathbf{e}_1 \times \sum_{i=1}^M \frac{G_i - G_i^d}{\Delta t} \mathbf{P}_i. \quad (2.24)$$

и

$$\mathbf{M} \approx \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 \sum_{i=1}^M \frac{G_i - G_i^d}{\Delta t} (\mathbf{P}_i - \mathbf{r}_C)^2 dl + 2\dot{\omega}I_C \mathbf{e}_1 + (\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_C) \times \dot{\mathbf{V}}_C S. \quad (2.25)$$

Движение профиля. Движение профиля может либо осуществляться по заданному закону, либо определяться наложенными на профиль связями и нагрузками, действующими на него со стороны среды. В последнем случае задача является связанной (сопряженной).

Задача о математическом моделировании движения профиля в потоке среды может быть решена с использованием схемы расщепления, когда на каждом шаге расчета задача гидродинамики (расчет эволюции завихренности и вычисление действующих на профиль нагрузок) и задача динамики (определение перемещения обтекаемого профиля) решаются поочередно. Однако расчеты показывают, что в случае, когда плотность профиля не слишком сильно превышает плотность среды, при использовании описанной схемы расщепления возможно развитие вычислительной неустойчивости [10]. Данная проблема может быть решена следующим образом: если профиль совершает поступательное или вращательное движение, то и уравнения движения профиля (2.3), и выражения для аэродинамической силы (2.24) или момента аэродинамических сил (2.25), и правые части системы линейных уравнений для определения циркуляций вихревых элементов G_k (2.20) являются линейными относительно G_k и временных производных неизвестных величин x_2 и x_3 или θ соответственно. На этом основании в [1] предложена «связанная» численная схема расчета динамики профиля.

2.4. Программная реализация метода вихревых элементов

Реализация метода вихревых элементов для решения сопряженной задачи обтекания профиля предполагает выполнение на каждом временном шаге расчета следующих операций.

1. Определение циркуляций вихревых элементов, рожденных на границе профиля, путем решения соответствующей СЛАУ, и вычисление аэродинамических нагрузок, действующих на профиль.
2. Нахождение нового положения профиля путем решения уравнений (2.3), (2.4) или по заданному закону движения.
3. Вычисление новых положений вихревых элементов путем интегрирования уравнений их движения (2.23) методом Эйлера.
4. Проверка попадания вихревых элементов внутрь профиля и объединение близкорасположенных вихрей; удаление «дального» следа.

Если реализуется «связанная» численная схема моделирования аэроупругой динамики профиля [1], этапы 1 и 2 данного алгоритма объединяются в один этап.

Исходными данными являются следующие параметры: скорость набегающего потока, плотность и вязкость среды; форма, характерный размер, плотность и момент инерции профиля, положение его центра масс; также должны быть заданы параметры расчетной схемы (число панелей M на профиле, временной шаг $\Delta\tau$, радиус дискретности вихревого элемента ε , радиус коллапса ε_{col} , граница моделирования вихревого следа L_{far} и др.).

Ускорение вычислений. Отметим, что вычисление правых частей системы (2.23) — наиболее трудоемкая операция алгоритма, требующая выполнения $O(N_{в\bar{\varepsilon}}^2)$ операций. Известны приближенные быстрые алгоритмы вычисления влияния вихрей друг на друга, например, мульти-

польное разложение [9], позволяющее найти скорости вихрей за $\mathcal{O}(N_{\text{ВЭ}} \log N_{\text{ВЭ}})$ операций, однако данный метод эффективен, когда количество вихревых элементов в области течения является величиной порядка десятков тысяч. В расчетах, проведенных в данной работе, количество вихревых элементов не превышает нескольких тысяч, поэтому использование быстрого алгоритма вычисления вихревого влияния является нецелесообразным.

Также время расчета может быть сокращено путем использования параллельных вычислительных технологий [6], например, с помощью технологии MPI. В этом случае моделирование обтекания профиля осуществляется параллельно m процессорами, из которых один является головным. Этот процессор производит расчет обтекания профиля в соответствии с вышеуказанным алгоритмом, управляя при выполнении п. 3 распараллеливанием вычислений по следующей схеме:

- 1) головной процессор пересылает остальным (подчиненным) процессорам массив вихревых элементов и равномерно распределяет между ними вихревые элементы, для которых необходимо определить конвективную \mathbf{V} и диффузионную \mathbf{V}_d скорости;
- 2) все процессоры вычисляют скорости вихревых элементов;
- 3) скорости вихревых элементов пересылаются на головной процессор, который затем вычисляет их новые положения.

Распараллеливание операции реструктуризации вихревого следа (п. 4 алгоритма) производится аналогично.

Алгоритм расчета обтекания профиля по схеме расщепления встроен в программный комплекс PROVOD, подробная схема работы которого приведена в главе 3. «Связанная» схема расчета была реализована в исследовательских целях отдельно; сравнение работы обеих схем будет описано ниже в разделе 2.5.3.

2.5. Верификация метода вихревых элементов

В данном разделе приведены результаты решения модельных задач, позволяющие сделать вывод о возможности использования метода вихревых элементов для решения рассматриваемых в рамках данной работы задач. Расчеты проводились на кластере МВС-100К Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН и на Учебно-экспериментальном кластере кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

2.5.1. Расчет обтекания полукруглого профиля

Профиль полукруглой формы часто используется для моделирования провода линии электропередачи с гололедным отложением [58, 87, 95]. Поэтому в целях верификации расчетной схемы метода вихревых элементов был проведен вычислительный эксперимент по определению стационарных аэродинамических коэффициентов такого профиля. Безразмерные параметры расчета выбирались следующим образом: $\Delta\tau = 0.004$, $\varepsilon = 0.008$, $\varepsilon_{col} = 0.002$, $\rho_{cp} = 1.0$, $V_{\infty} = 1.0$, $Re = 10^3$; профиль аппроксимировался $M = 164$ панелями.

На рис. 2.2 приведены зависимости стационарных аэродинамических характеристик полукруглого профиля, полученные путем осреднения мгновенных значений силы лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента по 30 000 шагам расчета, в сравнении с экспериментальными данными [38]. Расчет выполнялся для углов атаки в диапазоне от 0° до 180° с шагом в 4° .

Видно, что значения коэффициента подъемной силы хорошо согласуются с экспериментом при углах атаки $\alpha \leq 110^\circ$, на бóльших углах атаки имеется существенное различие. Коэффициент лобового сопротивления вычисляется качественно правильно, однако результаты расчета несколько завышены. Это можно объяснить бóльшим значением числа Рейнольдса Re , характеризующим условия эксперимента по сравнению

с расчетом, поскольку известно, что при увеличении числа Рейнольдса коэффициент лобового сопротивления снижается.

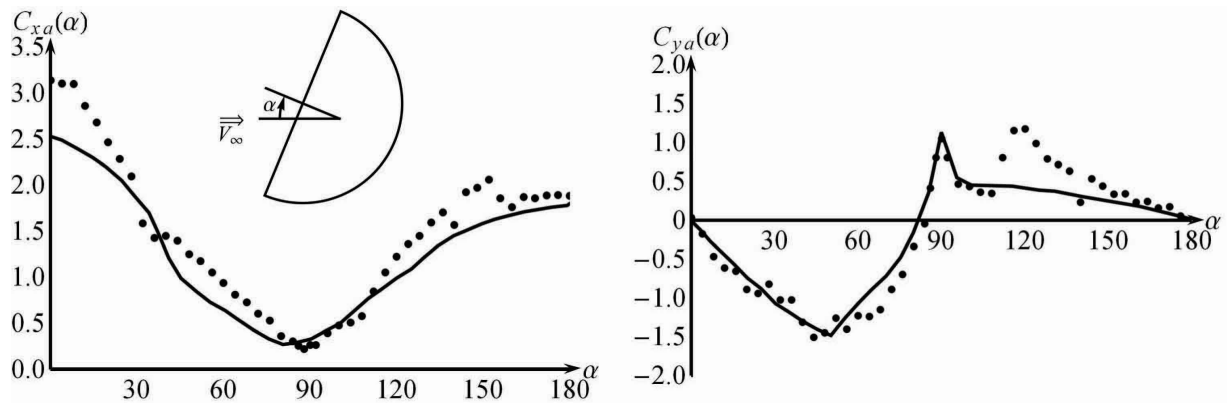


Рис. 2.2. Зависимости стационарных коэффициентов C_{xa} , C_{ya} полукруглого профиля от угла атаки: точки — расчет данной работы, сплошная линия — экспериментальные данные [38]

Отметим, что анализ аппроксимированных гладкими кривыми зависимостей $C_{xa}(\alpha)$, $C_{ya}(\alpha)$, $C_m(\alpha)$ показывает, что условие аэродинамической неустойчивости Глауэрта — Ден-Гартога

$$G(\alpha) = C_{xa}(\alpha) + \frac{dC_{ya}(\alpha)}{d\alpha} < 0$$

для полукруглого профиля в окрестности нулевого угла атаки не выполнено. Данный вывод согласуется с результатами работ [58, 84].

2.5.2. Расчет обтекания профиля обледенелого провода ЛЭП

Поскольку пласке чаще всего подвержены провода ЛЭП с несимметричным обледенением, был проведен расчет стационарных аэродинамических коэффициентов профиля обледенелого провода, рассмотренного в [30,31] (рис. 2.3). Безразмерные параметры расчета выбирались такими же, как в предыдущем случае. На рис. 2.3 приведены зависимости стационарных аэродинамических характеристик для данного профиля, полученные путем осреднения мгновенных значений силы лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента по 7000 шагам расчета. Расчет выполнялся для углов атаки в диапазоне от -40° до 50° с шагом в 4° .

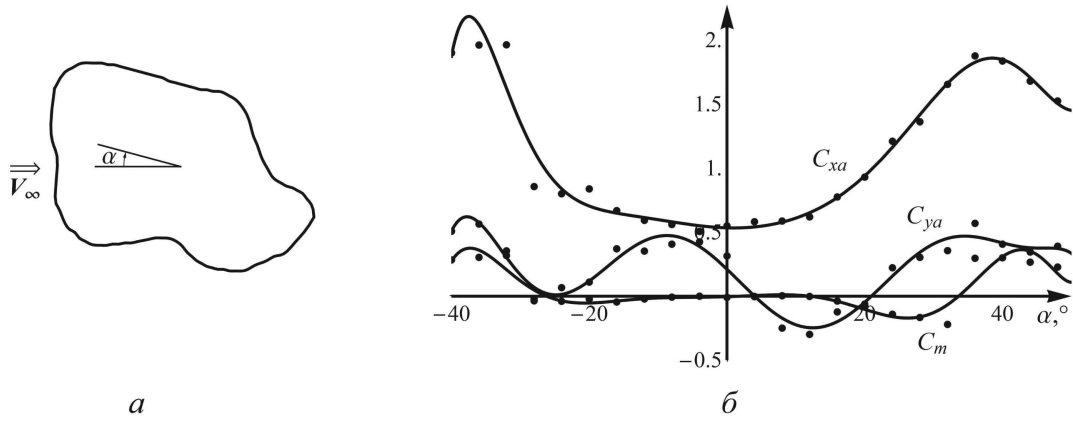


Рис. 2.3. Профиль обледенелого провода ЛЭП (а) и его стационарные аэродинамические характеристики (б): точки — расчет, сплошная линия — аппроксимирующие кривые

Анализ аппроксимированных гладкими кривыми зависимостей $C_{xa}(\alpha)$, $C_{ya}(\alpha)$, $C_m(\alpha)$ показывает, что для данного профиля в диапазоне $\alpha \in [-7^\circ; 11^\circ]$ выполнено условие аэродинамической неустойчивости Глауэрта — Ден-Гартога.

Данный профиль и полученные для него зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов от угла атаки будут использованы далее в главе 3 при моделировании колебаний упругозакрепленного профиля и провода ЛЭП целиком.

2.5.3. Колебания вращающегося профиля

Для исследования устойчивости схемы с расщеплением при решении сопряженных аэроупругих задач моделирования движения профиля в среде была рассмотрена следующая задача. Маятник в форме эллипса с полуосями $a = 0.15625$ и $b = 0.5$, помещенный в безграничный объем несжимаемой среды, был закреплен в верхней точке, отклонен в начальный момент времени на угол $\theta = 1$ рад и отпущен без начальной скорости. Безразмерные параметры расчета выбирались следующим образом:

$$\Delta\tau = 0.005, \quad \varepsilon = 0.01, \quad \varepsilon_{col} = 0.005, \quad \rho_{cp} = 1.0.$$

Была проведена серия расчетов для различных значений плотности профиля $\rho_{\text{проф}}$ с использованием «связанной» численной схемы и схемы с расщеплением. Результаты расчетов показали, что в данной задаче при плотности профиля, меньшей 3.5, расчет по схеме с расщеплением (кривая 1 на рис. 2.4) неустойчив, тогда как при использовании «связанной» схемы (кривая 2 на рис. 2.4) неустойчивости не наблюдается.

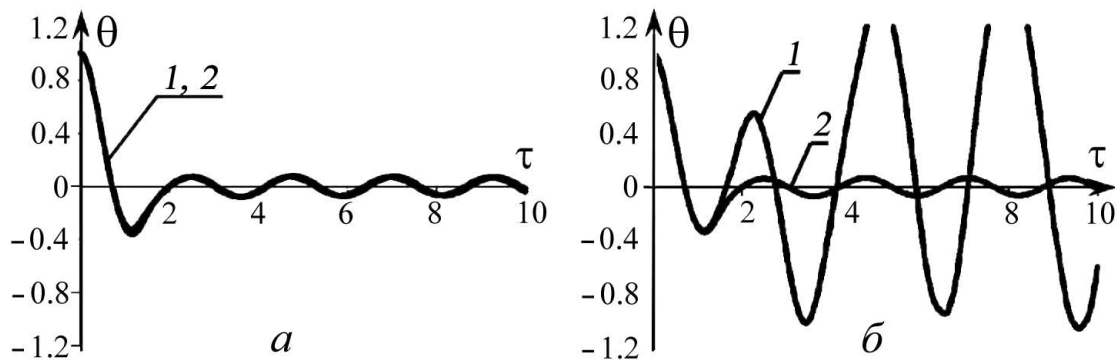


Рис. 2.4. Зависимость угла отклонения профиля от времени: $\rho_{\text{проф}} = 3.5$ (а); $\rho_{\text{проф}} = 3.4$ (б)

Полученный результат позволяет в расчетах обтекания провода ЛЭП использовать более простую схему с расщеплением, поскольку плотность материала провода превосходит плотность воздуха не менее чем на три порядка (в несколько тысяч раз).

2.5.4. Математическое моделирование явления ветрового резонанса профиля

Для исследования возможности применения метода вихревых элементов для решения сопряженной задачи аэроупругости и сравнения динамических характеристик колеблющегося в потоке профиля с известными экспериментальными и расчетными данными была рассмотрена задача о моделировании движения кругового профиля с одной вертикальной степенью свободы. Профиль был закреплен при помощи линейной упруго-вязкой связи и мог совершать колебания поперек потока

под действием силы реакции связи и аэродинамической силы. Расчетная схема для этого случая представлена на рис 2.5.

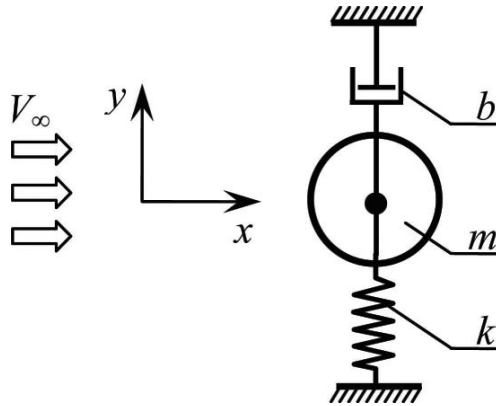


Рис. 2.5. Расчетная схема

Движение профиля в этом случае описывается уравнением

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = Y,$$

где m — масса профиля; b — коэффициент демпфирования; k — жесткость связи; Y — подъемная сила; y — отклонение профиля от положения равновесия.

Сначала производился расчет обтекания неподвижного кругового профиля. Безразмерные параметры расчета выбирались следующим образом: скорость набегающего потока $V_\infty = 1.0$, плотность среды $\rho_{\text{ср}} = 1.0$, число Рейнольдса $Re = 10^3$, профиль диаметром $d = 1.0$ моделировался при помощи $M = 200$ отрезков-панелей. Шаг по времени $\Delta\tau = 0.03$, радиус вихревого элемента полагался равным $\varepsilon = 0.008$, радиус коллапса вихревых элементов $\varepsilon_{\text{col}} = 0.004$. Безразмерный стационарный коэффициент лобового сопротивления C_{xa} , найденный в ходе численного моделирования путем осреднения мгновенных значений силы лобового сопротивления по большому числу шагов расчета, составляет 1.17 и отличается от экспериментально установленного значения не более, чем на 5 – 6 % [43, 102]. Число Струхала $Sh = fd/V_\infty$, вычисленное по частоте f схода вихрей с профиля, в ходе расчета составило 0.204; разница с экспериментально установленным значением не превышает 2 % [91].

При моделировании явления ветрового резонанса изображенной на рис. 2.5 конструкции использовались те же безразмерные параметры расчета, что и для случая неподвижного профиля; при этом масса профиля полагалась равной $m = 39.75$, коэффициент демпфирования $b = 0.731$. Изменение жесткости связи, при помощи которой закреплялся профиль, позволяло задавать различную частоту собственных колебаний системы $\omega \approx \sqrt{k/m}$. Отметим, что при расчете собственной частоты влиянием демпфирования и присоединенной массы среды пренебрегается, поскольку их учет вызывает изменение собственной частоты менее, чем на 1 %.

Явление ветрового резонанса наблюдается, когда число Струхала

$$\text{Sh}_\omega = \frac{\omega d}{2\pi V_\infty},$$

вычисленное по частоте собственных колебаний, близко к числу Струхала Sh , вычисленному по частоте схода вихрей, определяющей частоту пульсаций аэродинамической силы.

Динамика профиля моделировалась в течение промежутка безразмерного времени $0 \leq \tau \leq 250$; в начальный момент профиль находился в положении равновесия, его начальная скорость полагалась равной нулю. На рис. 2.6 представлены зависимости амплитуды колебаний профиля от времени для значений числа Струхала $\text{Sh}_\omega = 0.13$ и $\text{Sh}_\omega = 0.22$.

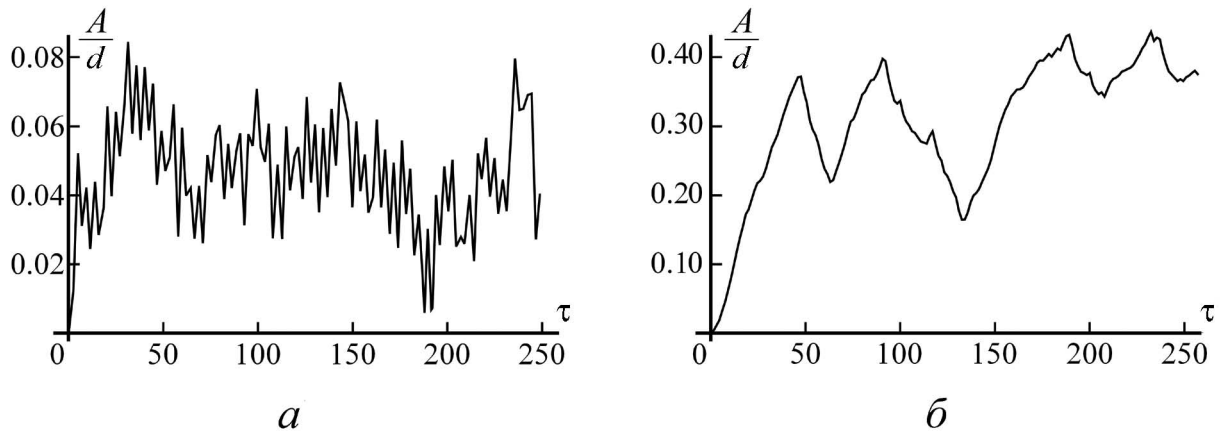


Рис. 2.6. Зависимость амплитуды колебаний от времени при различных значениях числа Струхала Sh_ω : $\text{Sh}_\omega = 0.13$ (а), $\text{Sh}_\omega = 0.22$ (б)

Видно, что характер движения профиля может быть качественно различным: когда Sh_ω значительно отличается от Sh (рис. 2.6, *а*) амплитуда колебаний профиля от периода к периоду меняется сильно и хаотическим образом, максимальное отклонение профиля от положения равновесия невелико и в данном случае не превышает 8 % диаметра. В случае, когда Sh_ω близко к Sh (рис. 2.6, *б*), амплитуда колебаний профиля меняется плавно и «квазипериодически». Максимальное отклонение от положения равновесия в этом случае достаточно велико и составляет более 40 % диаметра профиля. На рис. 2.7 представлена полученная в результате расчетов зависимость максимальной безразмерной амплитуды колебаний профиля от числа Струхала Sh_ω , рассчитанного по собственной частоте колебаний системы.

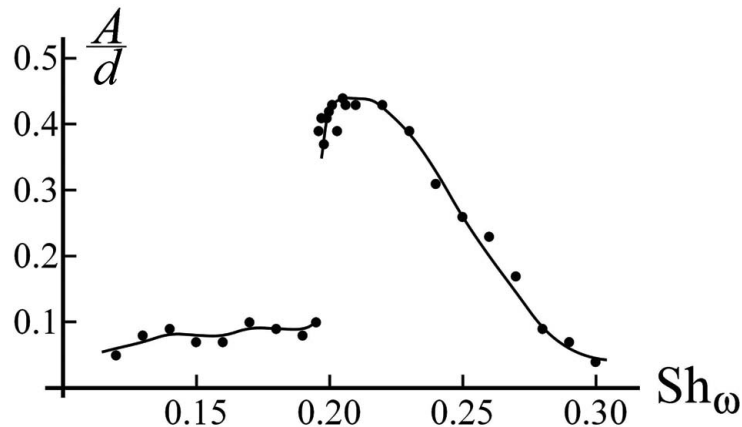


Рис. 2.7. Зависимость максимальной амплитуды колебаний от числа Струхала Sh_ω (точки — результаты расчета, сплошная линия — аппроксимирующая кривая)

Видно, что при $Sh_\omega = 0.18 \dots 0.27$, т. е. когда собственная частота колебаний профиля близка к частоте схода вихрей с неподвижного профиля и несколько превышает ее, возбуждаются колебания профиля с достаточно большой амплитудой (превышающей 10 % диаметра) — это явление в литературе называется ветровым резонансом. При выбранных параметрах расчетной схемы максимальная амплитуда колебаний профиля составила 0.44 его диаметра, данный эффект наблюдался при

значении $Sh_\omega = 0.205$, чрезвычайно близком к $Sh_\omega = 0.204$, полученному при расчете обтекания неподвижного профиля. В [70] указано, что экспериментально установленный максимум амплитуды колебаний профиля в подобных условиях составляет около половины его диаметра; таким образом, результаты численного моделирования ветрового резонанса методом вихревых элементов хорошо согласуются с экспериментальными данными. Отметим, что в известной литературе [27, 61, 70, 77, 86, 92] экспериментальные данные и результаты расчетов других авторов представлены со значительным разбросом, поэтому можно сделать вывод о том, что достигнутая точность является вполне приемлемой. Таким образом, метод вихревых элементов позволяет эффективно решать сопряженные задачи аэроупругой динамики профиля в потоке.

2.6. Выводы

В данной главе рассмотрен, реализован и верифицирован метод вихревых элементов для моделирования обтекания профиля потоком вязкой несжимаемой среды. Реализована численная схема моделирования аэроупругой динамики профиля с расщеплением, а также «связанная» численная схема. Приведены результаты решения модельных задач, демонстрирующие адекватность и эффективность реализованного метода. На примере задачи о ветровом резонансе профиля показано, что метод вихревых элементов позволяет качественно и количественно правильно моделировать аэроупругую динамику профиля.

В главе 2 получены следующие основные результаты.

1. Показано, что если плотность профиля в несколько раз превышает плотность среды, схема с расщеплением является устойчивой, а полученное с ее помощью решение практически не отличается от решения, полученного с использованием «связанной» схемы.

2. Разработан и реализован в виде программного модуля алгоритм метода вихревых элементов для расчета обтекания профиля и определения нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на него.
3. Получены зависимости стационарных аэродинамических характеристик для характерной формы профиля с обледенением, которые будут использованы далее для исследования пляски провода ЛЭП.

Основные результаты главы 2 опубликованы в работах автора [10, 18, 19, 20, 32, 75].

3. Программный комплекс *PROVOD* для расчета колебаний провода ЛЭП под действием нестационарных аэродинамических нагрузок

Данная глава посвящена программному комплексу PROVOD, реализующему разработанный в данной диссертации алгоритм математического моделирования нестационарных колебаний провода линии электропередачи.

3.1. Математическое моделирование движения провода ЛЭП методом Бубнова — Галеркина

Для моделирования движения провода предлагается применить метод Бубнова — Галеркина с разложением решения по базисным функциям — собственным формам малых колебаний, поскольку именно такой метод позволит верно описать динамику провода с помощью небольшого числа базисных функций.

3.1.1. Задание вида решения

Для наглядности повторим здесь систему уравнений движения провода (1.9)–(1.13), обозначив для краткости за

$$I_2 = I_2(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = -h (\sin(\theta_s + \theta)\ddot{\theta} + \cos(\theta_s + \theta)\dot{\theta}^2),$$

$$I_3 = I_3(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = -h (\cos(\theta_s + \theta)\ddot{\theta} - \sin(\theta_s + \theta)\dot{\theta}^2),$$

$$I_\theta = I_\theta(\theta, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) = -h\beta(\sin(\theta_s + \theta)\ddot{x}_2 + \cos(\theta_s + \theta)\ddot{x}_3 + \cos(\theta_s + \theta))$$

слагаемые, пропорциональные коэффициенту h и отвечающие за связь поступательных и крутильных колебаний:

$$\left(\frac{Q}{1 + Q/EF} x_1' \right)' + C_1 - \ddot{x}_1 = 0, \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{Q}{1 + Q/EF} x_2' \right)' + C_2 + \left(1 + \frac{Q}{EF} \right) q_2^a - \ddot{x}_2 + I_2 = 0, \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{Q}{1 + Q/EF} x_3' \right)' + C_3 + \left(1 + \frac{Q}{EF} \right) q_3^a - 1 - \ddot{x}_3 + I_3 = 0, \quad (3.3)$$

$$(x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 = \left(1 + \frac{Q}{EF} \right)^2, \quad (3.4)$$

$$GJ\theta'' + C_\theta + M^a - \ddot{\theta} + I_\theta = 0. \quad (3.5)$$

В соответствии с методом Бубнова — Галеркина неизвестные функции x_1 , x_2 , x_3 , Q и θ , зависящие от ξ и τ , представляются в виде суммы соответствующих равновесных положений и линейных комбинаций базисных функций, зависящих от ξ , с коэффициентами, зависящими от τ :

$$\begin{aligned} x_j(\xi, \tau) &= x_{j0}(\xi) + \sum_{k=1}^{S_j} a_k^{(j)}(\tau) \varphi_k^{(j)}(\xi), \quad j = 1, 2, 3, \\ Q(\xi, \tau) &= Q_0(\xi) + \sum_{k=1}^{S_Q} a_k^{(Q)}(\tau) \varphi_k^{(Q)}(\xi), \\ \theta(\xi, \tau) &= \theta_0(\xi) + \sum_{k=1}^{S_\theta} a_k^{(\theta)}(\tau) \varphi_k^{(\theta)}(\xi), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $x_{10}(\xi)$, $x_{20}(\xi)$, $x_{30}(\xi)$, $Q_0(\xi)$, $\theta_0(\xi)$ — равновесные форма, тяжение и угол закручивания провода, а $\varphi_k^{(*)}$, $k = 1, \dots, S_*$ (символ «*» заменяет индекс 1, 2, 3, Q или θ) — базисные функции.

В качестве базисных функций $\varphi_k^{(*)}$ можно выбирать несколько первых функций какой-либо ортонормированной системы. Однако поскольку динамика конструкции в основном определяется собственными формами ее малых колебаний, в качестве базисных функций целесообразно выбрать именно их. Заметим, что, поскольку граничные условия упругого закрепления (1.16) в общем случае являются нелинейными, то в качестве базисных функций для координат x_j предлагается взять $(S_j - 2)$ собственные формы и две дополнительные функции, например, получающиеся в результате процесса ортогонализации с $(S_j - 2)$ собственными формами функций

$$\hat{\varphi}_{S_j-1}^{(j)} = \xi, \quad \hat{\varphi}_{S_j}^{(j)} \equiv 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

В противном случае, т. е. если все базисные функции будут собственными формами малых колебаний провода, будут автоматически выполнены линейные граничные условия, противоречащие условиям (1.16). В качестве базисных функций для угла поворота $\varphi_k^{(\theta)}(\xi)$ выбираются тригонометрические функции $\sqrt{2} \sin \pi k(\xi + 1/2)$, поскольку расчет методом ускоренной сходимости показывает, что они очень близки к собственным формам малых крутильных колебаний; при этом граничные условия $\theta(\pm 1/2, \tau) = 0$ выполняются автоматически.

Функции $C_j(\xi, \tau)$, $j = 1, 2, 3$, $C_\theta(\xi, \tau)$, определяющие демпфирование, зададим в виде [25] (модальное демпфирование)

$$C_j(\xi, \tau) = -2\zeta^{(j)} \sum_{k=1}^{S_j} \omega_k^{(j)} \frac{da_k^{(j)}(\tau)}{d\tau} \varphi_k^{(j)}(\xi), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$C_\theta(\xi, \tau) = -2\zeta^{(\theta)} \sum_{k=1}^{S_\theta} \delta_k^{(\theta)} \frac{da_k^{(\theta)}(\tau)}{d\tau} \varphi_k^{(\theta)}(\xi),$$

где $\omega_k^{(j)}$ — k -я собственная частота малых колебаний по соответствующему направлению, $\zeta^{(j)}$, $\zeta^{(\theta)}$ — постоянные коэффициенты критического демпфирования, т. е. такого демпфирования, которое побуждает систему вернуться в положение равновесия без колебаний.

3.1.2. Вычисление аэродинамических нагрузок

Принято считать, что воздушный поток направлен перпендикулярно плоскости начального провисания провода, и обтекание сечений провода является плоскопараллельным. Распределенные аэродинамические нагрузки, действующие на провод, определяются путем кусочно-линейной интерполяции аэродинамических нагрузок, действующих на отдельные сечения.

Во всех известных работах, посвященных расчету колебаний проводов ЛЭП, аэродинамические нагрузки, действующие на сечения провода, определяются по их стационарным аэродинамическим коэффициентам. В данной работе предлагается определять аэродинамические нагрузки

в ходе прямого численного моделирования нестационарного обтекания сечений провода методом вихревых элементов, описанным в главе 2.

3.1.3. Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Прежде всего вычтем из уравнений (3.1)–(3.5) соответствующие уравнения равновесия (1.17)–(1.21). Далее, поскольку величина $Q_0(\xi)/EF$ имеет порядок 10^{-3} , естественно предположить, что такой же порядок имеет и величина $Q(\xi, \tau)/EF$. Тогда положим для простоты, что

$$\frac{Q}{1 + Q/EF} \approx \frac{Q}{1 + Q_0/EF}, \quad \left(1 + \frac{Q}{EF}\right) q_2^a \approx q_2^a, \quad \left(1 + \frac{Q}{EF}\right) q_3^a \approx q_3^a,$$

$$\left(1 + \frac{Q}{EF}\right)^2 \approx \left(1 + \frac{Q_0}{EF}\right)^2 + 2 \left(1 + \frac{Q_0}{EF}\right) \frac{\Delta Q}{EF}.$$

Здесь $\Delta Q(\xi, \tau) = Q(\xi, \tau) - Q_0(\xi)$ — отклонение тяжения провода от равновесного тяжения. С учетом сделанных упрощений система уравнений движения провода принимает вид

$$\ddot{x}_1 = \left(\frac{Q}{1 + Q_0/EF} x_1' \right)' + C_1 - \left(\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} x_{10}' \right)', \quad (3.7)$$

$$\ddot{x}_2 = \left(\frac{Q}{1 + Q_0/EF} x_2' \right)' + q_2^a + C_2 + I_2, \quad (3.8)$$

$$\ddot{x}_3 = \left(\frac{Q}{1 + Q_0/EF} x_3' \right)' + q_3^a + C_3 + I_3 - \left(\frac{Q_0}{1 + Q_0/EF} x_{30}' \right)', \quad (3.9)$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_{10}'^2 - x_{20}'^2 - x_{30}'^2 = 2 \left(1 + \frac{Q_0}{EF} \right) \frac{\Delta Q}{EF}, \quad (3.10)$$

$$\ddot{\theta} = C_\theta + M^a + GJ\theta'' + I_\theta. \quad (3.11)$$

Подстановка представления (3.6) в уравнения системы (3.7)–(3.11) приводит к невязке, которая должна быть ортогональна базисным функциям. Для обеспечения выполнения этого условия скалярно умножим

невязку на базисные функции и получим систему обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений; под скалярным произведением функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ понимается интеграл

$$(f_1, f_2) = \int_{-1/2}^{1/2} f_1(\xi) f_2(\xi) d\xi$$

(здесь и далее все функции предполагаются принадлежащими классу $L_2[-1/2, 1/2]$).

Умножив невязку уравнений (3.7), (3.8), (3.9) поочередно на базисные функции $\varphi_k^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, (S_j - 2)$, получим по $(S_j - 2)$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $a_k^{(j)}$, содержащих переменные $a_k^{(Q)}$, а в случае $h \neq 0$ — также первые и вторые производные $a_k^{(\theta)}$; граничные условия (1.15) или (1.16) дают еще по два алгебраических уравнения. Аналогично, умножая (3.10) на $\varphi_k^{(Q)}$, $k = 1, \dots, S_Q$, получаем S_Q алгебраических уравнений. Из (3.11) получается S_θ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $a_k^{(Q)}$. В итоге получается система из $(S_1 + S_2 + S_3 + S_\theta - 6)$ обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и $(S_Q + 6)$ алгебраических уравнений.

Сведем дифференциальные уравнения полученной системы к уравнениям первого порядка, введя новые переменные

$$v_k^{(j)} = \dot{a}_k^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, \dots, S_j, \quad v_k^{(\theta)} = \dot{a}_k^{(\theta)}, \quad k = 1, \dots, S_\theta.$$

Считая формально равновесную форму провода нулевой базисной функцией, а коэффициент при ней тождественно равным единице, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(j)}(\xi) &= x_{j0}(\xi), \quad j = 1, 2, 3, \quad \varphi_0^{(Q)}(\xi) = Q_0(\xi), \quad \varphi_0^{(\theta)}(\xi) = \theta_0(\xi), \\ a_0^{(j)} &\equiv 1, \quad j = 1, 2, 3, \quad a_0^{(Q)} \equiv 1, \quad a_0^{(\theta)} \equiv 1, \end{aligned}$$

запишем систему дифференциально-алгебраических уравнений в виде

$$\begin{aligned}
0 &= v_0^{(1)}, \\
\dot{a}_k^{(1)} &= v_k^{(1)}, \quad k = 1, \dots, S_1, \\
0 &= a_0^{(1)} - 1, \\
\dot{v}_k^{(1)} &= \sum_{i=0}^{S_1} \sum_{j=0}^{S_Q} A_{ijk}^{(1)} a_i^{(1)} a_j^{(Q)} - A_{00k}^{(1)} \left(a_k^{(1)}\right)^2 - \delta_k^{(1)} v_k^{(1)}, \quad k = 1, \dots, (S_1 - 2), \\
0 &= G_1^+(a_i^{(k)}, a_j^{(Q)}), \quad (\text{г.у. на правом конце в направлении } Ox_1), \\
0 &= G_1^-(a_i^{(k)}, a_j^{(Q)}), \quad (\text{г.у. на левом конце в направлении } Ox_1), \\
0 &= v_0^{(2)}, \\
\dot{a}_k^{(2)} &= v_k^{(2)}, \quad k = 1, \dots, S_2, \\
0 &= a_0^{(2)} - 1, \\
\dot{v}_k^{(2)} &= \sum_{i=0}^{S_2} \sum_{j=0}^{S_Q} A_{ijk}^{(2)} a_i^{(2)} a_j^{(Q)} - A_{00k}^{(2)} \left(a_k^{(2)}\right)^2 - \delta_k^{(2)} v_k^{(2)} + I_{2k} + L_{2k}, \\
&\hspace{25em} k = 1, \dots, (S_2 - 2), \\
0 &= G_2^+(a_i^{(k)}, a_j^{(Q)}), \quad (\text{г.у. на правом конце в направлении } Ox_2), \\
0 &= G_2^-(a_i^{(k)}, a_j^{(Q)}), \quad (\text{г.у. на левом конце в направлении } Ox_2), \\
0 &= v_0^{(3)}, \\
\dot{a}_k^{(3)} &= v_k^{(3)}, \quad k = 1, \dots, S_3, \\
0 &= a_0^{(3)} - 1, \\
\dot{v}_k^{(3)} &= \sum_{i=0}^{S_3} \sum_{j=0}^{S_Q} A_{ijk}^{(3)} a_i^{(3)} a_j^{(Q)} - A_{00k}^{(3)} \left(a_k^{(3)}\right)^2 - \delta_k^{(3)} v_k^{(3)} + I_{3k} + L_{3k}, \\
&\hspace{25em} k = 1, \dots, (S_3 - 2), \\
0 &= G_3^+(a_i^{(k)}, a_j^{(Q)}), \quad (\text{г.у. на правом конце в направлении } Ox_3), \\
0 &= G_3^-(a_i^{(k)}, a_j^{(Q)}), \quad (\text{г.у. на левом конце в направлении } Ox_3), \\
0 &= a_0^{(Q)} - 1, \\
0 &= \sum_{i=0}^{S_1} \sum_{i=0}^{S_1} B_{ijk}^{(1)} a_i^{(1)} a_j^{(1)} + \sum_{i=0}^{S_2} \sum_{i=0}^{S_2} B_{ijk}^{(2)} a_i^{(2)} a_j^{(2)} + \sum_{i=0}^{S_3} \sum_{i=0}^{S_3} B_{ijk}^{(3)} a_i^{(3)} a_j^{(3)} - \\
&\quad - B_{00k}^{(1)} \left(a_0^{(1)}\right)^2 - B_{00k}^{(2)} \left(a_0^{(2)}\right)^2 - B_{00k}^{(3)} \left(a_0^{(3)}\right)^2 - 2D_k \frac{a_k^{(Q)}}{EF}, \quad k = 1, \dots, S_Q, \\
\dot{a}_k^{(\theta)} &= v_k^{(\theta)}, \quad k = 1, \dots, S_\theta, \\
\dot{v}_k^{(\theta)} &= -\delta_k^{(\theta)} v_k^{(\theta)} + GJ \sum_{i=1}^{S_\theta} F_{ik} a_i^{(\theta)} + I_{\theta k} + L_{\theta k}, \quad k = 1, \dots, S_\theta.
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_k^{(j)} = 2\zeta_j \omega_k^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, $\delta_k^{(\theta)} = 2\zeta_\theta \omega_k^{(\theta)}$, и введены следующие обозначения:

$$A_{ijk}^{(m)} = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\varphi_j^{(Q)} \varphi_i^{(m)'} \right)' \varphi_k^{(m)} d\xi, \quad m = 1, 2, 3, \quad i = 0, \dots, S_m, \\ j = 0, \dots, S_Q, \quad k = 1, \dots, (S_m - 2),$$

$$B_{ijk}^{(m)} = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_i^{(m)'} \varphi_j^{(m)'} \varphi_k^{(Q)} d\xi, \quad m = 1, 2, 3, \quad i = 0, \dots, S_m, \\ j = 0, \dots, S_m, \quad k = 1, \dots, S_Q,$$

$$D_k = \int_{-1/2}^{1/2} \left(1 + \frac{Q_0}{EF} \right) \varphi_k^{(Q)} d\xi, \quad k = 1, \dots, S_Q,$$

$$F_{ik} = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_i^{(\theta)''} \varphi_k^{(\theta)} d\xi, \quad i = 1, \dots, S_\theta, \quad k = 1, \dots, S_\theta,$$

$$I_{mk} = \int_{-1/2}^{1/2} I_m \varphi_k^{(m)} d\xi, \quad m = 2, 3, \quad k = 1, \dots, (S_m - 2),$$

$$I_{\theta k} = \int_{-1/2}^{1/2} I_\theta \varphi_k^{(\theta)} d\xi, \quad k = 1, \dots, S_\theta,$$

$$L_{mk} = \int_{-1/2}^{1/2} q_m^a \varphi_k^{(m)} d\xi, \quad m = 2, 3, \quad k = 1, \dots, (S_m - 2),$$

$$L_{\theta k} = \int_{-1/2}^{1/2} M^a \varphi_k^{(\theta)} d\xi, \quad k = 1, \dots, S_\theta.$$

Обозначим столбец неизвестных, входящих в систему уравнений под знаком производной по времени, за \bar{X}_d , а столбец неизвестных, входящих в систему алгебраически, за \bar{X}_a . Тогда получившуюся систему дифференциально-алгебраических уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\bar{X}}_d &= \bar{F}_1(\bar{X}_d, \bar{X}_a) + \bar{F}_2(\bar{X}_d, \bar{X}_a, \tau), \\ 0 &= \bar{F}_3(\bar{X}_d, \bar{X}_a),\end{aligned}$$

где \bar{F}_3 — столбец правых частей алгебраических уравнений, $\bar{F}_2(\bar{X}_d, \bar{X}_a, \tau)$ — вектор, содержащий слагаемые I_{mk} , $I_{\theta k}$, L_{mk} , $L_{\theta k}$ соответствующих дифференциальных уравнений, \bar{F}_1 — вектор, содержащий остальные слагаемые дифференциальных уравнений (линейные и квадратичные).

Для решения данной системы воспользуемся следующей полунеявной численной схемой:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{X}_d^{n+1} - \bar{X}_d^n}{\Delta\tau} &= \frac{\bar{F}_1(\bar{X}_d^{n+1}, \bar{X}_a^{n+1}) + \bar{F}_1(\bar{X}_d^n, \bar{X}_a^n)}{2} + \bar{F}_2(\bar{X}_d^n, \bar{X}_a^n, \tau_n), \\ 0 &= \bar{F}_3(\bar{X}_d^{n+1}, \bar{X}_a^{n+1}).\end{aligned}\quad (3.12)$$

Здесь $\tau_n = \tau_0 + n\Delta\tau$ — текущий момент времени, соответствующий n -му шагу расчета, $\Delta\tau$ — шаг расчета по времени, верхний индекс означает номер шага. Отметим, что аэродинамические нагрузки, входящие в \bar{F}_2 , всегда известны лишь приближенно, а слагаемые I_{2k} , I_{3k} , $I_{\theta k}$, пропорциональные h , малы по сравнению с остальными слагаемыми. По этой причине для упрощения расчетов вектор \bar{F}_2 вычисляется по значениям переменных, взятым с предыдущего временного шага. Если же $\bar{F}_2 = 0$, схема (3.12) обладает вторым порядком точности.

Нелинейная система алгебраических уравнений относительно \bar{X}_d^{n+1} , \bar{X}_a^{n+1} , которая соответствует схеме (3.12), решается методом Ньютона. Поскольку величина шага $\Delta\tau$ достаточно мала, в практических расчетах решение нелинейной системы требует выполнения не более 1–2 итераций.

3.2. Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс PROVOD позволяет моделировать движение провода ЛЭП, находящегося под воздействием ветра. Нестационарные аэродинамические нагрузки, действующие на сечения провода, определяются методом вихревых элементов, описанным в главе 2.

Предусмотрено также использование известного квазистационарного подхода, в соответствии с которым аэродинамические нагрузки пропорциональны стационарным аэродинамическим коэффициентам сечений провода. Программный комплекс дополнительно предусматривает возможности моделирования движения одного упругозакрепленного профиля и моделирования обтекания набора неподвижных одинаковых профилей, расположенных под разными углами атаки (см. далее в разд. 3.2.3).

Поскольку проведение нестационарного расчета с применением метода вихревых элементов требует значительных вычислительных затрат, а для развития пляски провода ЛЭП и достижения им периодической траектории иногда необходимо длительное время (порядка сотен секунд), предлагается проводить расчет в несколько стадий.

1. *Построение зависимостей стационарных аэродинамических характеристик профиля сечения провода от угла атаки.* Как следует из приведенных в [57] зависимостей местных углов атаки сечений провода от времени при пляске, диапазон достигаемых углов атаки, как правило, охватывает $50\text{--}80^\circ$, а иногда и больше. Поэтому для определения зависимостей $C_{xa}(\alpha)$, $C_{ya}(\alpha)$, $C_m(\alpha)$ требуется провести расчет обтекания неподвижных профилей под углами атаки α_i , охватывающими диапазон шириной не менее 80° с достаточно мелким шагом ($2\text{--}4^\circ$). Расчет необходимо проводить до достижения квазипериодического режима обтекания. Затем нестационарные зависимости лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента от времени осредняются по достаточно большому временному промежутку. На основе полученных таким образом зависимостей $C_{xa}(\alpha_i)$, $C_{ya}(\alpha_i)$, $C_m(\alpha_i)$ необходимо построить гладкие функции. Методические исследования показывают, что это целесообразно делать с помощью полиномов Чебышева, причем число полиномов следует выбирать равным примерно одной трети от числа расчетных точек [31].

Данный этап исследования является трудоемким с вычислительной точки зрения, поэтому целесообразно проводить его на многопроцессорной ЭВМ.

2. *Проведение расчета движения провода ЛЭП по квазистационарным нагрузкам до достижения проводом периодической траектории движения.* Отметим, что расчет по квазистационарным характеристикам не является трудоемким и занимает на персональной ЭВМ время порядка нескольких минут. Поэтому на данном этапе возможно проведение нескольких расчетов с целью подбора оптимальных расчетных параметров (например, шага по времени) и определения времени, необходимого для установления периодического движения.
3. *Проведение расчета, в котором провод движется по заданной траектории, но происходит генерация вихревых элементов и моделирование эволюции завихренности.* Данный этап необходим для формирования за сечениями провода развитого вихревого следа и для избежания резкого изменения нагрузки, действующей на провод, в результате эффекта типа гидроудара. В качестве траектории движения провода предлагается задавать участок цикла колебаний, достигнутого в квазистационарном расчете.
4. *Проведение расчета по нестационарным нагрузкам до заданного конечного момента времени.* Время выполнения данного этапа определяется пользователем, однако может ограничиваться возможностями имеющейся в наличии вычислительной техники, поскольку данный этап является наиболее трудоемким.

Поскольку проведение расчетов с использованием метода вихревых элементов сопряжено со значительными вычислительными затратами, в программном комплексе PROVOD предусмотрена возможность распараллеливания вычислений с помощью библиотеки MPI [6]. Параллельный

расчет проводится $(N \cdot m)$ параллельными процессорами, где N — заданное число сечений на проводе, m — число процессоров, моделирующих обтекание каждого сечения в соответствии с алгоритмом, изложенным в разд. 2.4. В простейшем случае $m = 1$.

Все запущенные параллельные процессоры делятся на N подгрупп, в каждой из которых выделяется «локальный» головной процессор. Также выделяется один «глобальный» головной процессор, являющийся одновременно «локальным» головным процессором первой группы. Этот процессор считывает из текстовых файлов исходные данные и рассылает их по всем процессорам, обеспечивает синхронизацию расчетов, пересылку данных между ними, а также производит расчет динамики провода.

3.2.1. Исходные данные

Для проведения расчета необходимы следующие исходные данные.

- Параметры расчета динамики провода:
 - длина пролета и стрела провеса провода;
 - погонная плотность провода и диаметр (характерный размер) его сечения;
 - момент инерции поперечного сечения провода и положение центра масс;
 - жесткости провода на растяжение и кручение;
 - жесткости эквивалентных пружин на концах пролета, вычисленные на основе известных длин и масс подвесных изоляторов (как указано в разд. 1.4.9);
 - коэффициенты демпфирования провода $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_\theta$;
 - зависимости стационарных аэродинамических характеристик сечения от угла атаки, скорость набегающего потока, плотность среды.

- Параметры расчета обтекания профиля:
 - скорость набегающего потока, плотность среды;
 - геометрия (форма) профиля;
 - хорда, плотность и момент инерции профиля, положение центра масс (если решается связанная задача о моделировании колебаний упругозакрепленного профиля).
- Технические параметры:
 - число m параллельных процессоров, моделирующих обтекание каждого сечения;
 - число базисных функций $S_1, S_2, S_3, S_Q, S_\theta$ и число N рассматриваемых сечений на проводе;
 - шаг расчета по времени $\Delta\tau$;
 - радиус дискретности вихревого элемента ε ;
 - радиус коллапса ε_{col} ;
 - граница моделирования вихревого следа L_{far} ;
 - параметры сохранения результатов в файлы.

Исходные данные загружаются из следующих текстовых файлов.

1. Файл «PassProvod.txt», содержащий параметры для расчета обтекания профилей, имя файла с геометрией профиля, имя файла со стационарными аэродинамическими характеристиками профиля и название каталога с файлами исходных данных для провода «parameters.txt», «basisK₁K₂K_Q.txt», «coeffK₁K₂K₃.txt», «coeff_momK_θ.txt» (см. далее).
2. Файл «parameters.txt», содержащий числа $K_1 = S_1 + 1$, $K_2 = S_2 + 1$, $K_3 = S_3 + 1$, $K_Q = S_Q + 1$, $K_\theta = S_\theta + 1$ — общее число базисных функций, включая равновесную форму, по соответствующей переменной, и параметры провода.

3. Файл «basisK₁K₂K_Q.txt», содержащий вычисленные интегралы $A_{ijk}^{(m)}$, $B_{ijk}^{(m)}$, D_k , F_{ik} , а также значения базисных функций и их производных в точках $\xi = -1/2$ и $\xi = 1/2$.
4. Файлы «coeffK₁K₂K₃.txt» и «coeff_momK_θ.txt», содержащие значения базисных функций для координат и для угла поворота соответственно в точках ξ_k для нескольких различных значений N — количества выделенных сечений на проводе.
5. Файл геометрии профиля, содержащий число панелей, координаты начал и концов панелей, координаты касательных и нормальных векторов к панелям, координаты контрольных точек, координаты точек рождения вихревых элементов, длины панелей, а также координаты геометрического центра, площадь и геометрический момент инерции профиля. Если проводится расчет только по стационарным характеристикам и задание формы профиля не требуется, исходные данные о профиле задаются из файла «no_profile.txt», в котором установлено нулевое число панелей.
6. Файл, содержащий зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов профиля от угла атаки, приведенные для углов атаки в диапазоне от 0° до 360° с некоторым шагом (как правило, 2° или 5°). Для расчета колебаний провода, вызванных, например, каким-либо начальным возмущением, без учета аэродинамических нагрузок, из файла «polara_zero.txt» задаются нулевые стационарные аэродинамические коэффициенты.

Числа K_1 , K_2 , K_3 , K_Q , K_θ в названиях файлов исходных данных записываются в двузначном формате. Содержимое этих файлов определяется с помощью системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*, как описано ниже.

Задание базисных функций для координат. Сначала методом ускоренной сходимости [44] находится необходимое число собственных форм малых колебаний провода, затем к ним добавляются функции 1 и ξ , и полученная система преобразуется в ортонормированную с помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта [40]. Отметим, что собственные формы колебаний в направлении оси Ox_2 $\{\varphi_k^{(2)}\}_{k=1}^{S_2-2}$ уже являются попарно ортогональными [41]. Собственные формы колебаний в плоскости Ox_1x_3 также являются попарно ортогональными с учетом того, что они являются вектор-функциями:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_k^{(1,3)} &= \{\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(3)}\}, \\ \overline{\varphi}_k^{(1,3)} \cdot \overline{\varphi}_j^{(1,3)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\varphi_k^{(1)} \varphi_j^{(1)} + \varphi_k^{(3)} \varphi_j^{(3)} \right) d\xi = 0, \quad k \neq j.\end{aligned}$$

Поскольку при пляске провода его отклонения от положения равновесия не являются малыми, представляется целесообразным «развязать» горизонтальную и вертикальную компоненты собственных форм $\varphi_k^{(1)}$, $\varphi_k^{(3)}$ и ортогонализировать по отдельности каждую систему функций $\{\varphi_k^{(1)}\}_{k=1}^{S_1}$, $\{\varphi_k^{(3)}\}_{k=1}^{S_3}$. В программном комплексе PROVOD реализованы оба варианта, при этом считается, что $S_1 = S_3$. Методические эксперименты показывают, что число базисных функций по всем направлениям целесообразно задавать одинаковым: $S_1 = S_2 = S_3$.

Задание базисных функций для угла. В качестве базисных функций для угла закрутки провода выбираются тригонометрические функции, близкие к собственным формам малых крутильных колебаний (см. (1.84))

$$\varphi_k^{(\theta)} = \sqrt{2} \sin(\pi k(\xi + 1/2)).$$

Задание базисных функций для тяжения. В качестве базисных функций для тяжения задаются $(S_Q - 2)$ функций (см. (1.41))

$$\varphi_k^{(Q)} = EF(x'_{10}\varphi_k^{(1)'} + x'_{30}\varphi_k^{(3)'})', \quad k = 1, \dots, (S_Q - 2),$$

и две дополнительные функции 1 и ξ (это необходимо делать по причине возможной неустойчивости при выполнении граничных условий, см. разд. 3.1.1); полученная система затем преобразуется в ортонормированную с помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта.

Вычисление интегралов. Интегралы $A_{ijk}^{(m)}$, $B_{ijk}^{(m)}$, D_k , F_{ik} в разд. 3.1.3, задаваемые из текстовых файлов, вычисляются в системе *Wolfram Mathematica* с помощью квадратурной формулы трапеций по $M = 5000$ точкам:

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x) dx = \sum_{j=1}^M a_j f(\xi_j) \Delta \xi, \quad (3.13)$$

где

$$\Delta \xi = \frac{1}{M-1}, \quad \xi_j = -\frac{1}{2} + \frac{1}{M-1}(j-1), \quad j = 1, \dots, M,$$

$$a_1 = a_M = \frac{1}{2(M-1)}, \quad a_j = \frac{1}{M-1}, \quad j = 2, \dots, (M-1),$$

— коэффициенты и узлы квадратурной формулы.

Интегралы I_{mk} , $I_{\theta k}$, L_{mk} , $L_{\theta k}$ вычисляются на каждом шаге расчета с помощью квадратурной формулы трапеций по N точкам (N — заданное число сечений на проводе).

3.2.2. Выходные данные

Выходные данные записываются в следующие текстовые файлы.

1. В файл «statistics.txt» каждые N_τ временных шагов записываются безразмерные аэродинамические нагрузки, действующие на каждый из моделируемых профилей.
2. В файл «coord.txt» каждые N_τ временных шагов записываются положения трех заданных пользователем сечений провода, а также положение центральной точки провода (если на центральную точку провода моделируемые сечения не попадают).

3. В файл «PROVOD_LOG.txt» записываются сообщения об ошибках при загрузке исходных данных, если таковые возникли. Далее в этот файл раз в N_τ временных шагов записываются значения коэффициентов $a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, a_k^{(3)}, a_k^{(Q)}, a_k^{(\theta)}$ при базисных функциях и их производные по времени $v_k^{(1)}, v_k^{(2)}, v_k^{(3)}, v_k^{(\theta)}$. По окончании расчета в файл записывается время, которое потребовалось для выполнения данного расчета, а также справочная информация о проведенном расчете: максимальное потребовавшееся число итераций в методе Ньютона и диапазон изменения углов атаки сечений провода.

Обработка выходных данных осуществляется с помощью системы *Wolfram Mathematica*.

3.2.3. Дополнительные возможности

Задание специальных файлов с исходными данными позволяет проводить с помощью программного комплекса PROVOD следующие расчеты.

- Моделирование обтекания неподвижного профиля под различными углами атаки. Для проведения такого расчета следует задать $S_1 = S_2 = S_3 = S_Q = S_\theta = 0$. При этом углы поворота сечений задаются функцией $\theta_0(\xi)$. Например, для моделирования обтекания профиля под N различными углами атаки от θ_L до θ_R с шагом в $\Delta\theta = (\theta_R - \theta_L)/(N - 1)$ следует задать

$$\theta_0(\xi) = \theta_L + \xi(\theta_R - \theta_L).$$

Данная возможность программного комплекса используется для подготовки зависимостей стационарных аэродинамических коэффициентов сечений провода от угла атаки, необходимых для проведения нестационарного расчета (см. разд. 2.5.2).

- Моделирование обтекания упругозакрепленного профиля методом вихревых элементов. Для проведения такого моделирования следует задать число сечений $N = 1$, а число базисных функций $S_1 = S_Q = 0$. Значения S_2, S_3, S_θ задаются равными 0 или 1 в случае отсутствия или наличия соответствующей степени свободы.

- Моделирование движения профиля или провода по заданному закону. Данная возможность необходима для формирования за профилями развитого вихревого следа. Для этого требуется дополнительный файл исходных данных «trinput.txt», содержащий значения $a_k^{(*)}$, $v_k^{(*)}$ на всех временных шагах. Когда число шагов, для которых задано положение провода, исчерпывается, возможно продолжение решения задачи в нестационарной аэроупругой постановке.

3.2.4. Схема работы программного комплекса

На рис. 3.1 приведена схема работы программного комплекса.



Рис. 3.1. Схема работы программного комплекса

Блок 1. В блоке 1 главный головной процессор (ГПП) осуществляет загрузку из текстовых файлов, перечисленных в предыдущем разделе, всех необходимых исходных данных для расчета.

Пересылка 1. ГПП пересылает всем локальным головным процессорам (ЛГП) необходимые им параметры расчета, загруженные из текстовых файлов.

Блок 2. В блоке 2 происходит подготовка расчетных схем на профилях: с учетом начального положения сечений определяются координаты контрольных точек и точек рождения вихрей, а также касательных и нормальных векторов к панелям.

Блок 3. В блоке 3 каждым ЛГП определяются циркуляции вихревых элементов (ВЭ), образующихся на «своем» профиле на данном шаге расчета по времени. Этим обеспечивается выполнение граничных условий на профилях, поэтому на следующем этапе расчета могут быть корректно вычислены аэродинамические нагрузки, действующие на профили.

Блок 4. В блоке 4 происходит вычисление аэродинамических нагрузок на каждое сечение (рис. 3.2). Затем аэродинамические нагрузки приводятся к безразмерному виду.

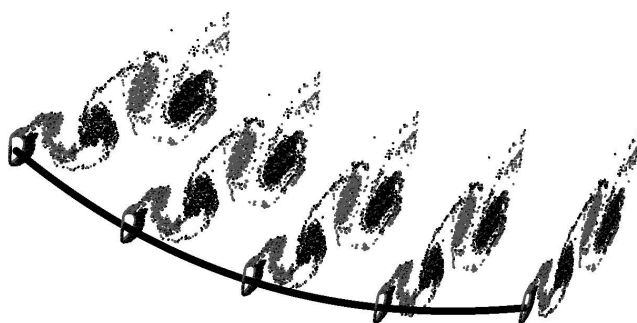


Рис. 3.2. Иллюстрация метода определения нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на провод

Блок 5. В блоке 5 происходит вычисление скоростей ВЭ. Этот блок распараллеливается, тогда все ЛГП производят пересылку вихревой пелены всем процессорам своей подгруппы и распределяют между ними ВЭ, скорости которых должны вычислять подчиненные процессоры. Затем производится интегрирование уравнений движения ВЭ методом Эйлера на одном шаге расчета по времени.

Пересылка 2. Все ЛГП пересылают безразмерные аэродинамические нагрузки на ГГП.

Блок 6. В блоке 6 ГГП приводит аэродинамические нагрузки к безразмерному виду, как это требуется для решения уравнений движения провода и интерполирует их. Далее производится решение системы (3.12) методом Ньютона.

Пересылка 3. ГГП пересылает всем ЛГП значения переменных $a_k^{(*)}$, $v_k^{(*)}$ в следующий момент времени (символ «*» здесь заменяет индекс 1, 2, 3, Q или θ).

Блок 7. В блоке 7 ЛГП производят вычисления положений сечений на новом шаге расчета по времени и перестроение расчетных схем на профилях.

Блок 8. В блоке 8 ЛГП производят перемещение ВЭ, попавших внутрь профиля, за его пределы и коллапс ВЭ.

Затем происходит переход на новый шаг расчета по времени и возврат к Блоку 3.

Если производится квазистационарный расчет, то блоки 3, 5, 7 и 8 не выполняются, а в блоке 4 аэродинамическая нагрузка определяется путем интерполяции стационарных аэродинамических коэффициентов.

3.3. Квазистационарные расчеты

В данном разделе приведены результаты расчетов, проведенных с помощью программного комплекса PROVOD, и их сравнение с известными результатами. Рассмотренные примеры включают в себя пляску проводов ЛЭП с неподвижно и упруго закрепленными концами, вызванную аэродинамической неустойчивостью сечений провода, и пляску, возникающую вследствие близости собственных частот вертикальных и крутильных колебаний провода.

3.3.1. Колебания провода с U-образным поперечным сечением

В [52] описаны результаты наблюдения пляски центрального пролета экспериментальной трехпролетной ЛЭП. На центральном пролете имелась насадка U-образной формы, обладающая небольшой асимметрией. Стационарные аэродинамические характеристики данного профиля, приведенные в [56], показаны на рис. 3.3. Анализ данных характеристик показывает, что для данного профиля условие неустойчивости Глауэрта — Ден-Гартога выполнено для углов атаки $\alpha \in [17^\circ; 90^\circ]$, $\alpha \in [152^\circ; 204^\circ]$, $\alpha \in [261^\circ; 327^\circ]$.

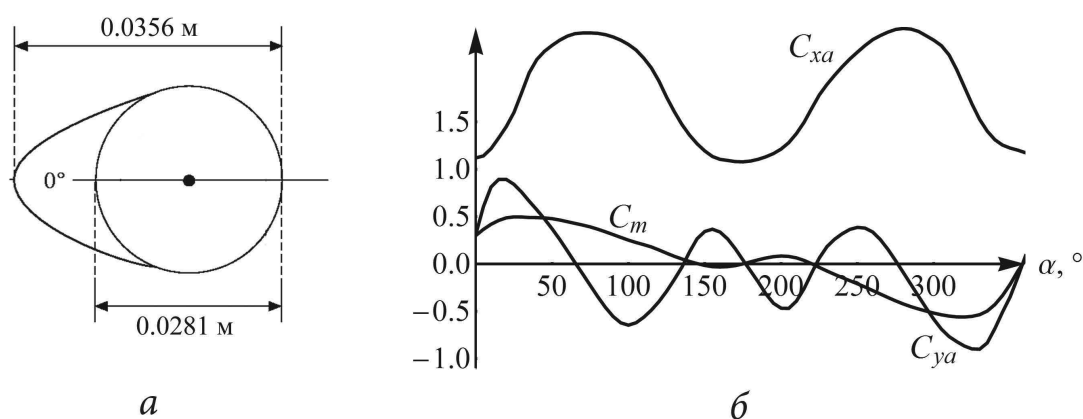


Рис. 3.3. Профиль сечения провода (а) и зависимости его стационарных аэродинамических коэффициентов от угла атаки [56] (б)

Размерные параметры провода центрального пролета [67, 99] приведены в таблице 11.

Таблица 11

Параметр	Обозн.	Ед. измерения	Значение
Длина пролета	\tilde{L}	м	243.8
Жесткость на растяжение	\widetilde{EF}	10^6 Н	29.7
Жесткость на кручение	\widetilde{GJ}	Н·м ² /рад	300
Гориз. комп-та тяжения	$\tilde{Q}_0(0)$	10^3 Н	32.0
Диаметр голого провода	\tilde{d}	10^{-3} м	28.1
Коэффициент демпфирования	$\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3$	10^{-2}	0.44

Таблица 11. Продолжение

Параметр	Обозн.	Ед. измерения	Значение
Коэффициент демпфирования	ζ_θ	10^{-2}	1.42
Погонная масса провода	$\tilde{\rho}$	кг/м	1.8
Погонный момент инерции	\tilde{I}	10^{-4} кг·м	1.69
Расстояние CG	\tilde{h}	м	0.00159
Угол θ_G	θ_G	°	0

Скорость набегающего потока составляет 9 м/с, соседние пролеты имеют те же параметры, что и центральный пролет без обледенения. Изоляторы имели длину 2 м и массу 38.9 кг.

Данным параметрам соответствуют следующие безразмерные параметры: $EF = 6909$, $GJ = 742.5$, $h = 6.5 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 6.3 \cdot 10^8$, горизонтальная компонента тяжения $c_1 = 7.44$, стрела провеса $w = 0.0168$.

Угол поворота сечений провода в ненапряженном состоянии составлял $\theta_e = 141^\circ$, что с учетом действия силы тяжести приводит к ориентации центрального сечения в положении равновесия под углом

$$\theta_s(0) = \theta_e + \theta_0(0) \approx 180^\circ,$$

лежащим в неустойчивой по критерию Глауэрта — Ден-Гартога области.

Безразмерные эквивалентные податливости пружин для центрального пролета данной линии были определены по методике, предложенной в разд. 1.4.9, так чтобы первые собственные частоты колебаний этого пролета с упругим закреплением в плоскости Ox_1x_3 и в направлении оси Ox_2 были равны собственным частотам его колебаний в составе линии (0.29 Гц и 0.24 Гц соответственно): $S_1^\pm \approx 0.00073$, $S_2^\pm \approx 0.0095$.

Вычислительный эксперимент по моделированию пляски упругозакрепленного пролета с вышеперечисленными параметрами показал, что размах колебаний составляет около 2.3 м. На рис. 3.4 приведены вертикальное и угловое отклонение центральной точки пролета от положения

равновесия в зависимости от времени. Видно, что результаты, полученные в данной работе, хорошо согласуются с расчетом [67] и удовлетворительно согласуются с экспериментом [52].

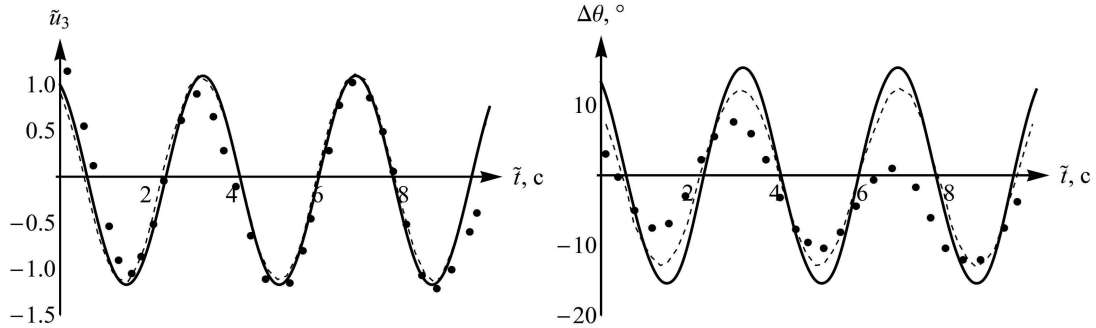


Рис. 3.4. Зависимости вертикального \tilde{y}_3 и углового $\Delta\theta$ перемещений центра пролета от времени: точки — эксперимент [52], пунктир — расчет [67], сплошная линия — расчет данной работы

В таблице 12 приведены размахи \tilde{A} и частоты $\tilde{\omega}$ установившихся вертикальных колебаний провода в зависимости от числа базисных функций ($S_\theta = S$, $S_1 = S_2 = S_3 = S_Q = S + 2$). Из таблицы видно, что в данном примере характеристики колебаний при увеличении числа базисных функций практически не меняются, т. е. для получения верного результата достаточно включить в базис лишь по одной собственной форме малых колебаний по каждому направлению.

Таблица 12

	$S = 1$	$S = 2$	$S = 4$	$S = 6$
\tilde{A} , м	2.27	2.27	2.26	2.26
$\tilde{\omega}$, рад/с	1.74	1.74	1.74	1.74

3.3.2. Колебания провода с обледенением

В [56, 74] описаны результаты вычислительного эксперимента по исследованию пляски пролета с несимметричным обледенением, форма и стационарные аэродинамические коэффициенты которого приведены на рис. 3.5. Анализ аэродинамических коэффициентов показывает, что

для данного профиля условие неустойчивости Глауэрта — Ден-Гартога выполнено в диапазонах углов атаки $\alpha \in [30^\circ; 52^\circ]$ и $\alpha \in [167^\circ; 202^\circ]$.

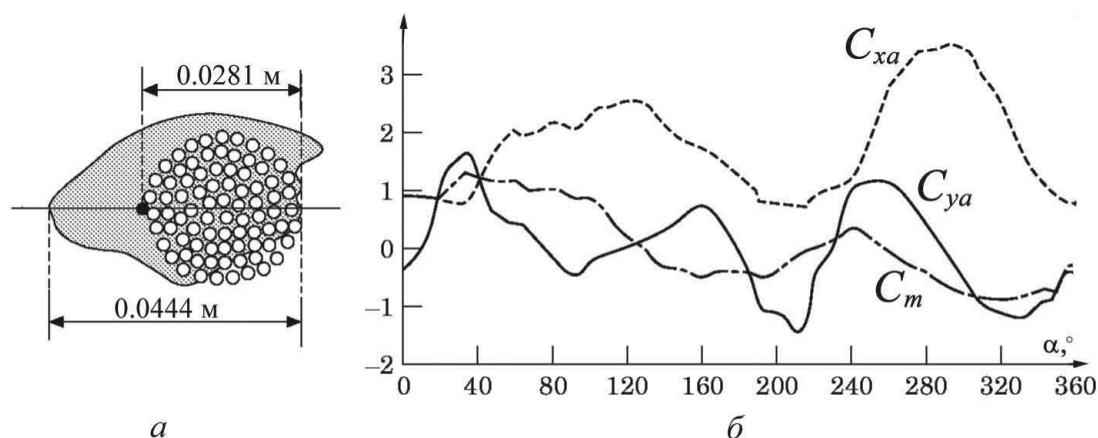


Рис. 3.5. Профиль сечения провода [56, 74] (а) и зависимости его стационарных аэродинамических коэффициентов от угла атаки (б)

Размерные параметры провода приведены в таблице 13.

Таблица 13

Параметр	Обозн.	Ед. измерения	Значение
Длина пролета	\tilde{L}	м	125.0
Жесткость на растяжение	\widetilde{EF}	10^6 Н	25.53
Жесткость на кручение	\widetilde{GJ}	Н · м ² /рад	153
Гориз. комп-та тяжения	$\tilde{Q}_0(0)$	10^3 Н	15.0
Диаметр голого провода	\tilde{d}	10^{-3} м	23.5
Коэффициент демпфирования	$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3$	10^{-2}	1.60
Коэффициент демпфирования	ζ_θ	10^{-2}	5.70
Погонная масса провода	$\tilde{\rho}$	кг/м	1.66
Погонный момент инерции	\tilde{I}	10^{-4} кг·м	1.56
Расстояние CG	\tilde{h}	м	0.0017
Угол θ_G	θ_G	°	17

Данным параметрам соответствуют безразмерные параметры $EF = 12\,254$, $c_1 = 7.42$. Концы провода были закреплены неподвижно.

Из [74] неясно, каким образом задавался начальный угол поворота сечений провода. Зададим $\theta_e = 170^\circ$. На рис. 3.6 приведена траектория движения центрального сечения провода, полученная в результате расчета с $S_1 = S_2 = S_3 = S_Q = 3$. Увеличение числа базисных функций не приводит к изменению характеристик пляски.

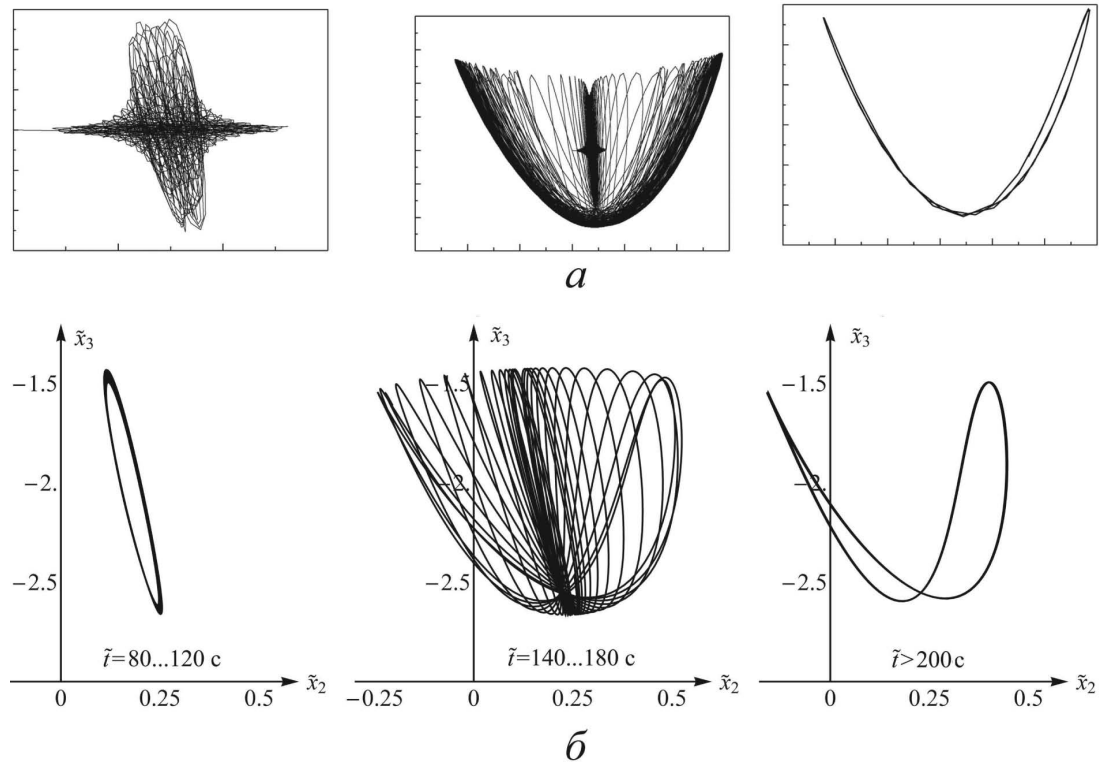


Рис. 3.6. Развитие колебаний: результаты расчета [74] (а), результаты расчета данной работы (б)

Как следует из рис. 3.6, размах вертикальных колебаний центральной точки провода составляет около 1.1 м, что хорошо согласуется с результатом расчета [74]. Траектория движения этой точки имеет, как и в расчете [74], подковообразную форму, что объясняется величинами собственных частот малых колебаний рассматриваемого провода: первая частота его колебаний в вертикальной плоскости составляет 0.70 Гц, а в направлении оси Ox_2 — 0.38 Гц; их отношение близко к 2.

3.3.3. Колебания провода с близкими собственными частотами вертикальных и крутильных колебаний

В данном разделе рассмотрен случай возбуждения высокоамплитудных колебаний провода, первые собственные частоты вертикальных и крутильных колебаний которого близки между собой. Параметры провода приведены в таблице 14.

Таблица 14

Параметр	Обозн.	Ед. измерения	Значение
Длина пролета	\tilde{L}	м	125.9
Жесткость на растяжение	\widetilde{EF}	10^6 Н	13.3
Жесткость на кручение	\widetilde{GJ}	Н·м ² /рад	101
Гориз. комп-та тяжения	$\tilde{Q}_0(0)$	10^3 Н	21.73
Диаметр провода	\tilde{d}	10^{-3} м	63.5
Коэффициент демпфирования	$\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3$	10^{-2}	0.08
Коэффициент демпфирования	ζ_θ	10^{-2}	0.1
Погонная масса провода	$\tilde{\rho}$	кг/м	1.53
Погонный момент инерции	\tilde{I}	10^{-4} кг·м	57.02
Расстояние CG	\tilde{h}	м	0.00031
Угол θ_G	θ_G	°	72

Податливости пружин на концах пролета были равны $S_1^\pm = 0.00019$, $S_2^\pm = 0.011$. Зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов от угла атаки приведены на рис. 3.7, а. Значение начального угла поворота равно $\theta_e = 10^\circ$, тогда угол поворота центрального сечения провода в положении равновесия с учетом действием силы тяжести составляет 9° . В окрестности этого угла атаки условие Глауэрта — Ден-Гартога не выполняется, однако близость собственных частот вертикальных и крутильных колебаний данного провода — они составляют 3.13 рад/с и 3.20 рад/с соответственно — приводит к его пляске (рис. 3.7, б).

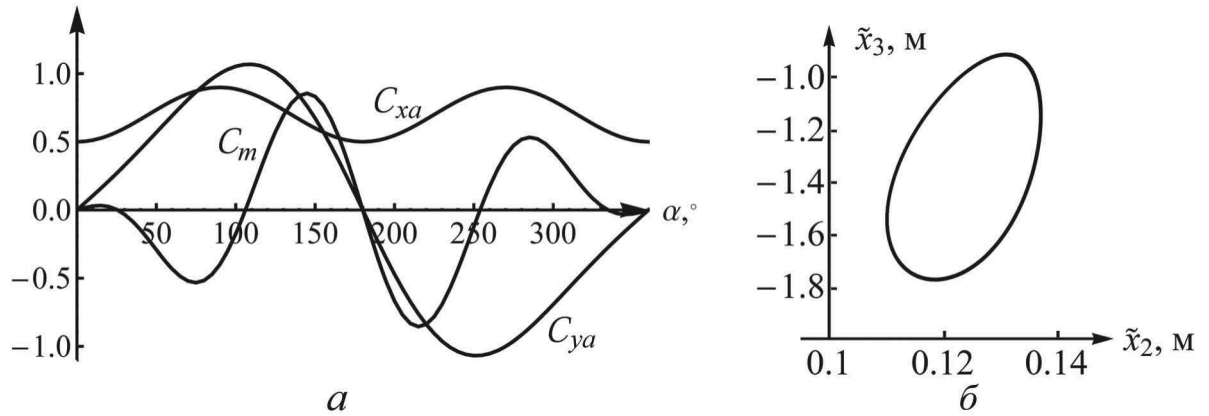


Рис. 3.7. Зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов от угла атаки (а) и траектория движения центрального сечения провода (б)

3.4. Нестационарные расчеты

В данном разделе приведены результаты моделирования нестационарных аэроупругих колебаний профиля и провода ЛЭП. Отметим, что при приведении задач о моделировании динамики провода и о моделировании течения среды к безразмерному виду использовались разные масштабы длины, времени и массы, что необходимо учитывать при проведении расчетов. Так, соотношения между безразмерным временем в задаче о моделировании динамики провода $\tau_{\text{пр}}$, безразмерным временем в задаче о моделировании течения среды $\tau_{\text{ср}}$ и размерным временем \tilde{t} имеют вид

$$\tau_{\text{пр}} = \frac{\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{L}/\tilde{g}}}, \quad \tau_{\text{ср}} = \frac{\tilde{t}\tilde{V}_{\infty}}{\tilde{d}},$$

где \tilde{L} — длина провода в нерастянутом состоянии, \tilde{g} — ускорение свободного падения, \tilde{V}_{∞} — скорость набегающего потока, \tilde{d} — характерный размер профиля (знак «тильда» означает, что соответствующая величина является размерной). Из вышеуказанных соотношений можно получить, что

$$\tau_{\text{пр}} = \tau_{\text{ср}} \frac{\tilde{d}}{\tilde{V}_{\infty} \sqrt{\tilde{L}/\tilde{g}}}.$$

Этому соотношению должны подчиняться шаги расчета по времени в задаче динамики провода и задачах аэродинамики.

При вычислении аэродинамических нагрузок методом вихревых элементов исходные данные задаются так, что хорда профиля d , плотность среды $\rho_{\text{ср}}$ и скорость набегающего потока V_{∞} равны единице. Тогда по аэродинамическим силам q_2 , q_3 и моменту аэродинамических сил q_m , вычисленным на данном шаге расчета методом вихревых элементов, должны быть определены мгновенные значения аэродинамических коэффициентов \bar{q}_2 , \bar{q}_3 , \bar{q}_m , получаемые из q_2 , q_3 , q_m путем деления соответственно на $\rho_{\text{ср}} d V_{\infty}^2 / 2 = 0.5$ или $\rho_{\text{ср}} d^2 V_{\infty}^2 / 2 = 0.5$. Затем по полученным значениям \bar{q}_2 , \bar{q}_3 , \bar{q}_m вычисляются размерные распределенные аэродинамические нагрузки

$$\tilde{q}_2^a = \frac{1}{2} \tilde{\rho}_{\text{ср}} \tilde{d} \tilde{V}_{\infty}^2 \bar{q}_2, \quad \tilde{q}_3^a = \frac{1}{2} \tilde{\rho}_{\text{ср}} \tilde{d} \tilde{V}_{\infty}^2 \bar{q}_3, \quad \tilde{M}^a = \frac{1}{2} \tilde{\rho}_{\text{ср}} \tilde{d}^2 \tilde{V}_{\infty}^2 \bar{q}_m,$$

которые после этого приводятся к безразмерному виду для решения задачи динамики провода, как это указано в разд. 1.3.1.

3.4.1. Движение упругозакрепленного профиля

С целью верификации программного комплекса и реализованных в нем алгоритмов было проведено моделирование пляски упругозакрепленного профиля обледенелого провода ЛЭП, стационарные аэродинамические характеристики которого были определены методом вихревых элементов в разд. 2.5.2. Безразмерные параметры расчета динамики профиля выбирались следующими: жесткости пружин $k_2 = 0.0116$, $k_3 = 0.0169$, $k_{\theta} = 2.06$, коэффициенты демпфирования $\zeta_2 = \zeta_3 = 0.001$, $\zeta_{\theta} = 0.01$. Положение центра масс профиля задавалось расстоянием $h = CG = 0.0054$ и углом $\theta_G = 27^\circ$.

Сначала был проведен квазистационарный расчет (по стационарным аэродинамическим характеристикам), в результате которого была

получена периодическая траектория движения профиля, характеризующая амплитудой вертикальных колебаний около 0.9 м. Далее как продолжение квазистационарного расчета был проведен нестационарный расчет со следующими параметрами: радиус дискретности вихревого элемента $\varepsilon = 0.008$, радиус коллапса $\varepsilon_{col} = 0.002$, скорость набегающего потока $V_\infty = 1$, шаг расчета $\Delta\tau_{cp} = 0.004$, число Рейнольдса $Re = 1000$.

Профиль моделировался с помощью 245 отрезков-панелей. Расчет производился на Учебно-экспериментальном вычислительном кластере кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

На рис. 3.8 показаны траектория нестационарного движения профиля и периодическая траектория, полученная в ходе проведения квазистационарного расчета.

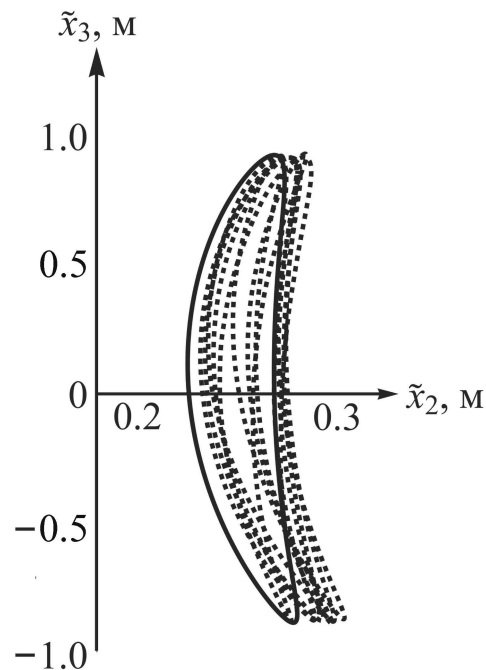


Рис. 3.8. Траектория движения центрального сечения провода: сплошная линия — результат квазистационарного расчета, пунктир — результат нестационарного расчета

Из рис. 3.8 видно, что траектории движения профиля при использовании двух рассмотренных подходов к вычислению действующих на него аэродинамических нагрузок, практически не различаются.

В таблице 15 приведена зависимость ускорения времени расчета — отношения времени расчета t_1 на одном процессоре к времени параллельного расчета с использованием m процессоров t_m — от числа задействованных процессоров m . Из таблицы видно, что использование 8 процессоров позволяет получить ускорение до 5 раз, что является хорошим показателем.

Таблица 15

Число процессоров m	1	2	4	8
Ускорение t_1/t_m	1	1.78	3.07	4.78

3.4.2. Движение провода с обледенением

В данном разделе приведены результаты моделирования нестационарного движения провода ЛЭП с поперечным сечением, рассмотренным в разд. 2.5.2, по алгоритму, изложенному в разд. 3.2. Размерные параметры провода приведены в таблице 16.

Таблица 16

Параметр	Обозн.	Ед. измерения	Значение
Длина пролета	\tilde{L}	м	243.8
Жесткость на растяжение	$\tilde{E}F$	10^6 Н	29.7
Жесткость на кручение	$\tilde{G}J$	Н·м ² /рад	200
Гориз. комп-та тяжения	$\tilde{Q}_0(0)$	10^3 Н	32.0
Диаметр голого провода	\tilde{d}	10^{-3} м	50.0
Коэффициент демпфирования	$\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3$	10^{-2}	0.44
Коэффициент демпфирования	ζ_θ	10^{-2}	3.42
Погонная масса провода	$\tilde{\rho}$	кг/м	1.8
Погонный момент инерции	\tilde{I}	10^{-4} кг·м	2.5
Расстояние CG	\tilde{h}	м	0.0015
Угол θ_G	θ_G	°	198

Данным параметрам соответствуют безразмерные параметры $EF = 6\,906$, $c_1 = 7.44$. Угол поворота сечений провода в ненапряженном состоянии выбирался равным $\theta_e = -46^\circ$, тогда в результате действия силы тяжести угол поворота центрального сечения в положении равновесия был близок к 7° . Податливости пружин на концах провода составляли $S_1^\pm = 0.00096$, $S_2^\pm = 0.0085$. В базис включалось по одной собственной форме малых колебаний по каждому направлению, поскольку расчеты по стационарным нагрузкам показали, что увеличение числа базисных функций не приводит к изменению характеристик движения провода.

Сначала был проведен расчет по стационарным аэродинамическим нагрузкам до момента времени $\tilde{t}^* = 180$ с, затем в продолжение этого расчета был проведен расчет с вычислением нестационарных аэродинамических нагрузок методом вихревых элементов. Число сечений на проводе было выбрано равным $N = 16$, обтекание каждого из них моделировалось в параллельном режиме с помощью $m = 8$ процессоров. Таким образом, нестационарный расчет потребовал использования 128 вычислительных ядер кластера МВС-100К и занял около 5 суток.

На рис. 3.9 приведена зависимость вертикальной координаты \tilde{x}_3 центральной точки пролета от времени, на рис. 3.10 — зависимость от времени угла поворота θ рассматриваемой точки. Видно, что амплитуда вертикальных колебаний провода, полученная в результате нестационарного расчета, снижается на 12% по сравнению с квазистационарным расчетом и составляет в итоге 0.65 м. Амплитуда угловых колебаний остается практически неизменной и составляет около 9° . При этом можно отметить, что на угловые колебания, согласованные с вертикальным движением провода, накладываются его собственные крутильные колебания с высокой частотой.

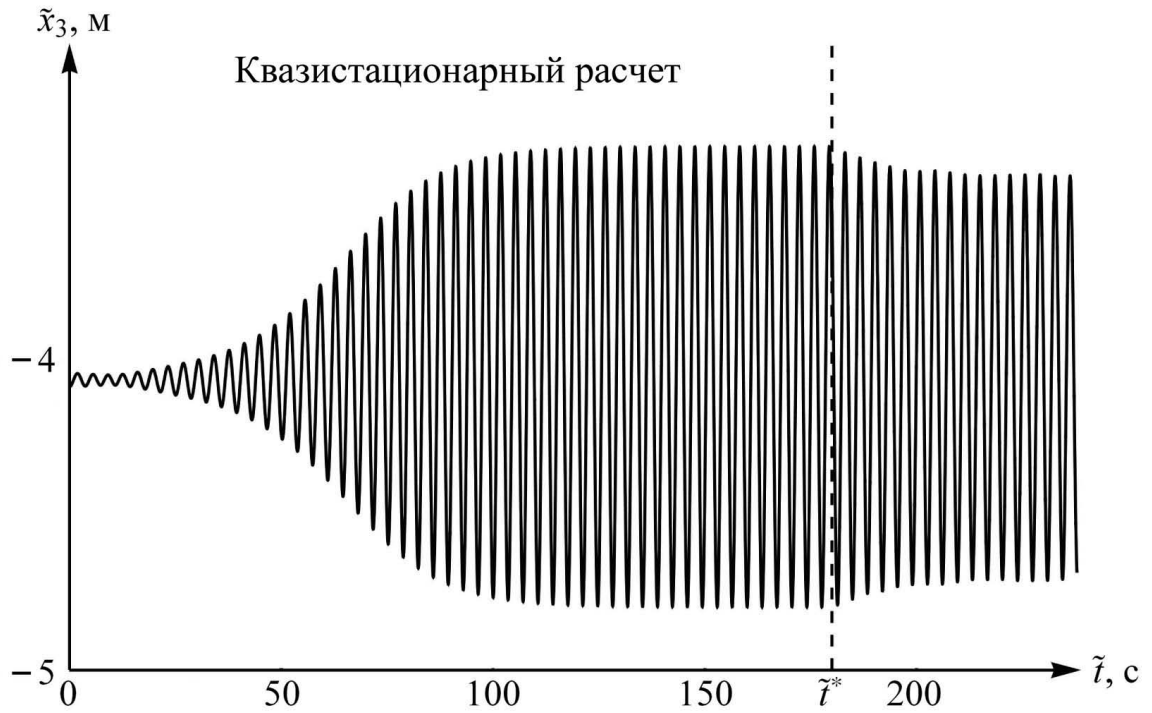


Рис. 3.9. Зависимость вертикальной координаты \tilde{x}_3 центрального сечения провода от времени

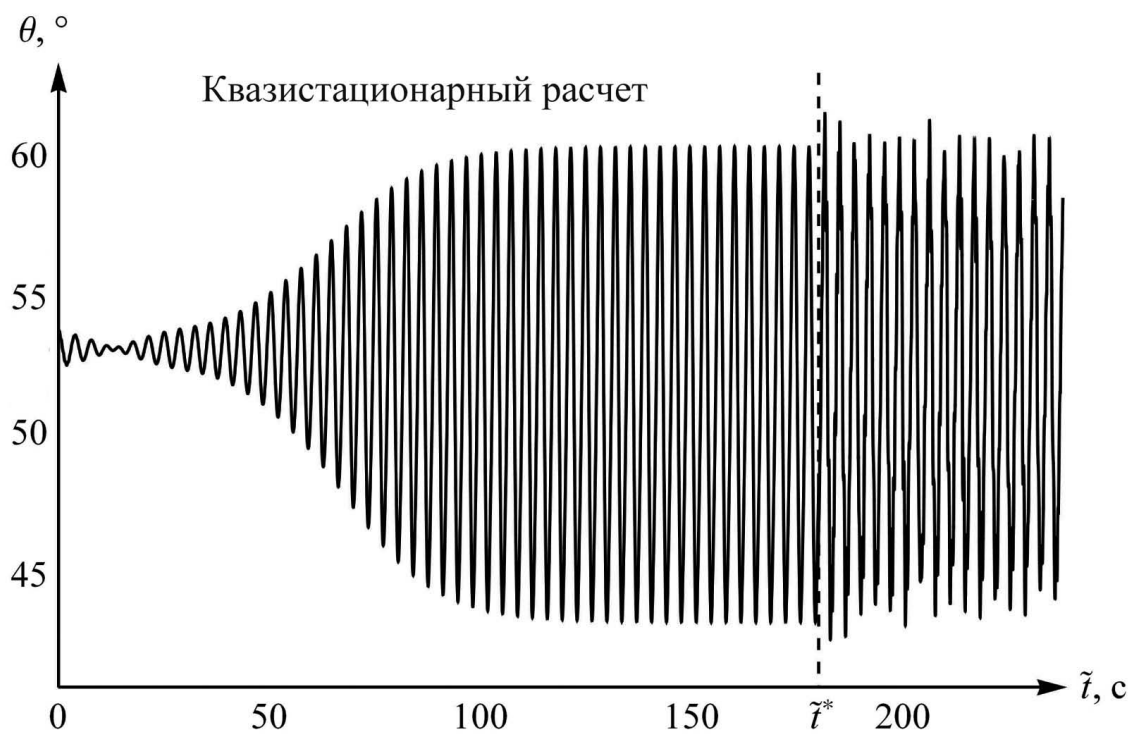


Рис. 3.10. Зависимость угла поворота θ центрального сечения провода от времени

3.5. Выводы

В данной главе реализован и верифицирован алгоритм моделирования колебаний провода ЛЭП, вызванных стационарными аэродинамическими нагрузками. Предложен алгоритм моделирования нестационарного движения провода, основанный на вычислении аэродинамических нагрузок, действующих на сечения провода, методом вихревых элементов. Приведены результаты решения тестовых примеров, демонстрирующие применимость реализованного алгоритма. Разработанный алгоритм моделирования движения провода основан на разложении его перемещений по собственным формам малых колебаний и является эффективным, поскольку для получения верного результата, как правило, достаточно учета лишь одной собственной формы по каждому направлению.

В главе 3 получены следующие основные результаты.

1. Предложен алгоритм математического моделирования аэроупругих колебаний одиночного провода ЛЭП, основанный на вычислении нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на сечения провода, методом вихревых элементов.
2. Разработан параллельный программный комплекс, реализующий предложенный алгоритм, и предусматривающий также возможность задания квазистационарных аэродинамических нагрузок.
3. Проведено математическое моделирование развития пляски упруго-закрепленного профиля.
4. Проведено математическое моделирование пляски провода ЛЭП.

Основные результаты главы 3 опубликованы в работах автора [11, 18, 21, 22, 23, 64, 65].

Основные результаты и выводы

В диссертационной работе рассмотрена задача о математическом моделировании аэроупругих колебаний провода ЛЭП с вычислением нестационарных аэродинамических нагрузок методом вихревых элементов. Для моделирования движения провода применен метод Бубнова — Галеркина с представлением решения в виде разложения по собственным формам малых колебаний провода. По результатам проведенных исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Разработана и верифицирована методика определения собственных частот и форм малых колебаний провода многопролетной ЛЭП, основанная на применении метода передаточной матрицы и метода сагиттарной функции и получены характеристические уравнения для приближенного определения собственных частот малых колебаний провода многопролетной ЛЭП.
2. Разработана и верифицирована методика задания эквивалентных жесткостей пружин, моделирующих влияние изоляторов и соседних пролетов на колебания рассматриваемого пролета.
3. Предложен алгоритм моделирования аэроупругих колебаний провода под действием нестационарных аэродинамических нагрузок. На его основе разработан параллельный программный комплекс PROVOD, в котором расчет нестационарного обтекания сечений провода и вычисление аэродинамических нагрузок производятся методом вихревых элементов.
4. Разработанные модели, алгоритмы и программы могут использоваться при исследовании движения провода в существенно нестационарных условиях.

Литература

1. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Издательство Моск. ун-та, 2006. 184 с.
2. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.
3. Бучинский В.Е. Атлас обледенения проводов. Л.: Гидрометеиздат, 1966. 114 с.
4. Ванько В.И. Математическая модель пляски провода ЛЭП // Изв. вузов. Энергетика. 1991. № 11. С. 36–42.
5. Ванько В.И. Колебания проводов расщепленной фазы воздушных ЛЭП: линейная теория, эксперимент: дис. ... д-ра техн. наук. М., 1993. 267 с.
6. Гергель В.П. Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем. М.: Издательство Моск. ун-та, 2010. 567 с.
7. Глазунов А.А. Основы механической части воздушных линий электропередачи. М.: Госэнергоиздат, 1959. 191 с.
8. Девнин С.И. Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций. Л.: Судостроение, 1983. 331 с.
9. Дынникова Г.Я. Использование быстрого метода решения «задачи N тел» при вихревом моделировании течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1458–1465.

10. Иванова О.А. Исследование колебаний эллиптического профиля в жидкости методом вихревых элементов // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XIV Международного симпозиума. Харьков-Херсон, 2009. С. 306–309.
11. Иванова О.А. О выборе базиса для моделирования движения провода ЛЭП методом Галеркина // Наука и образование. Электронный журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 9. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/602290.html>.
12. Иванова О.А. Определение собственных частот колебаний одиночного провода ЛЭП // Необратимые процессы в природе и технике: труды VI Всероссийской конференции. М., 2011. Ч. 2. С. 247–250.
13. Иванова О.А. Приближенные методы определения собственных частот колебаний проводов многопролетных линий электропередачи // Вестник Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2011. Спец. выпуск «Прикладная математика». С. 34–44.
14. Иванова О.А. Численное и аналитическое определение собственных частот колебаний многопролетной ЛЭП // XXXVIII Гагаринские чтения: сб. докладов Международной молодежной научной конференции. М., 2012. Т. 5. С. 63–65.
15. Иванова О.А. Численное моделирование движения провода ЛЭП с учетом ветровых нагрузок // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2010): труды международной научной конференции. Челябинск, 2010. С. 662.
16. Иванова О.А. Численное моделирование захвата частоты схода вихрей с вибрирующего профиля // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XV Международного симпозиума. Харьков-Херсон, 2011. С. 193–196.

17. Иванова О.А., Марчевский И.К. Численное моделирование вращательного движения профиля в жидкости вихревым методом // Необратимые процессы в природе и технике: труды V Всероссийской конференции. М., 2009. Ч. 2. С. 102–105.
18. Исследование аэроупругих колебаний провода, вызываемых отрывным вихревым обтеканием / О.А. Иванова [и др.] // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Ч. 2. № 4. С. 157–159.
19. Иванова О.А., Махов И.А., Морева В.С. О численном моделировании обтекания и исследовании устойчивости по Ляпунову положения равновесия профиля в потоке // Полет-2007: сб. трудов VII Международной научной конференции студентов и молодых ученых. Киев, 2007. С. 90.
20. Иванова О.А., Морева В.С. Численное определение аэродинамических коэффициентов профиля методом вихревых элементов // Вестник Херсонского национального технического университета. 2008. Вып. 2. С. 207–211.
21. Иванова О.А. Численное моделирование движения провода ЛЭП под воздействием ветра // Вестник Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2012. Спец. выпуск № 2 «Математическое моделирование в технике». С. 67–74.
22. Иванова О.А. Численное моделирование аэроупругого движения провода ЛЭП с использованием метода плоских сечений // Необратимые процессы в природе и технике: труды VII Всероссийской конференции. М., 2013. Ч. 2. С. 115–118.
23. Иванова О.А. Расчет аэроупругих колебаний провода ЛЭП с использованием метода вихревых элементов // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XVI Международного симпозиума. Харьков-Херсон, 2013. С. 185–188.

24. Кесельман Л.М. Основы механики воздушных линий электропередачи. М.: Энергоатомиздат, 1992. 352 с.
25. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
26. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.
27. Кудинов П.И., Еричева В.А. Численное исследование резонансных режимов аэроупругих колебаний кругового цилиндра // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка. 2004. Вип. 8. Т. 1. С. 43–50.
28. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
29. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 240 с.
30. Лукьянова В.Н. Разработка методов расчета абсолютно гибких стержней (проводов) при обледенении и нестационарных колебаниях: дис. ... канд. техн. наук. М., 1987. 240 с.
31. Марчевский И.К. Математическое моделирование обтекания профиля и исследование его устойчивости в потоке по Ляпунову: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2008. 119 с.
32. Марчевский И.К., Иванова О.А. Численное моделирование ветрового резонанса кругового профиля методом вихревых элементов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 5. С. 8–12.

33. Марчевский И.К., Морева В.С. Численное моделирование обтекания системы профилей методом вихревых элементов // Вестник Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2010. № 1. С. 12–20.
34. Морева В.С. Вычисление вихревого влияния в модифицированной численной схеме метода вихревых элементов // Вестник Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2012. Спец. выпуск № 2 «Математическое моделирование в технике». С. 137–144.
35. Сарпкая Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Современное машиностроение. Сер. А. 1989. № 10. С. 1–60.
36. Светлицкий В.А. Механика абсолютно гибких стержней / Под ред. А.Ю. Ишлинского. М.: Изд-во МАИ, 2001. 432 с.
37. Сергей И.И., Виноградов А.А. Численное моделирование эксплуатационных статических и динамических режимов проводов ВЛ и кабелей // Электрические станции. 1998. №1. С. 41–49.
38. Случановская З.П. Распределение давления на поверхности прямоугольного, трехгранного и полукруглого цилиндров и их аэродинамические коэффициенты // Труды института механики Моск. ун-та. 1973. № 24. С. 52–60.
39. Сэффмен Ф.Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000. 375 с.
40. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра: учебное пособие. М.: Физматлит, 2007. 477 с.
41. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

42. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
43. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
44. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-precision methods in eigenvalue problems and their applications. Boca Raton: CRC Press, 2004. 235 p.
45. Alonso G., Meseguer J., Perez-Grande I. Galloping oscillations of two-dimensional triangular cross-sectional bodies // *Experimental Fluids*. 2005. V. 38. P. 789–795.
46. On the galloping instability of two-dimensional bodies having elliptical cross-sections / G. Alonso [et al.] // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2010. V. 98. P. 438–448.
47. Dynamic loads on transmission line structures due to galloping conductors / M.A. Baenziger [et al.] // *IEEE Transactions on Power Delivery*. 1994. N 9. P. 40–49.
48. Barbieri R., Barbieri N., Souza Junior O.H. Dynamical analysis of transmission line cables. Part 3: Nonlinear theory // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2008. N 22. P. 992–1007.
49. Blevins R.D. Flow-induced vibration. New York: Van Nostrand reinhold, 1990. 451 p.
50. Borgohain M.C., Done G.T.S. Prediction of normal modes of multi-span transmission lines by the assumed modes technique // *Journal of Sound and Vibration*. 1973. V. 29, N 1. P. 77–92.
51. Chabart O., Lilien J.L. Galloping of electrical lines in wind tunnel facilities // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1998. N 74–76. P. 967–976.
52. Chan J.K. Modelling of single conductor galloping // *Canadian Electrical Association Report 321-T-672A*. Montreal, 1992. 180 p.

53. Choi Y.S., Her H.O., McKenna P.J. Galloping: nonlinear oscillation in a periodically forced loaded hanging cable // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1994. N 52. P. 23–34.
54. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. *Vortex methods: theory and practice*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 328 p.
55. Den-Hartog J.P. Transmission line's vibrations due to sleet // *Transactions AIEE*. 1932. V. 51. P. 1074–1076.
56. Perturbation-based finite element analyses of transmission line galloping / Y.M. Desai [et al.] // *Journal of Sound and Vibration*. 1996. V. 191, N 4. P. 469–489.
57. Edwards A.T., Madeyski A. Progress report on the investigation of galloping of transmission line conductors // *AIEE Transaction Distribution, Winter Meeting*. New York, 1956. P. 666–686.
58. EPRI. *Transmission line reference book: wind-induced conductor motion*. Palo Alto (California): Electrical Power Research Institute, 1979. 255 p.
59. Simulations of the controlling effect of interphase spacers on conductor galloping / G. Fu [et al.] // *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*. 2012. V. 19, N 4. P. 1325–1334.
60. Glauert H. The rotation of an aerofoil about a fixed axis // *Reports & Memoranda / Great Britain Advisory Committee for Aeronautics (GBACA)*. 1919. N 595. 8 p.
61. Govardhan R.N., Williamson C.H.K. Defining the 'modified Griffin plot' in vortex-induced vibration: revealing the effect of Reynolds number using controlled damping // *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. V. 561. P. 147–180.

62. Irvine H.M., Caughey T.K. The linear theory of free vibrations of a suspended cable // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. 1974. N 341. P. 299–315.
63. Ivanova O.A. Numerical and analytical determination of multispan cable eigenfrequencies // The 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering: book of proceedings. Vienna, 2012. 9 p.
64. Ivanova O.A. Numerical simulation of wind induced conductor motion // The 5th International Conference on Vortex Flows and Vortex Models: book of proceedings. Caserta (Italy), 2010. 6 p.
65. Ivanova O.A. On numerical simulation of conductor galloping using vortex element method // Advanced Problems in Mechanics: proceedings of the XLI summer school-conference. St. Petersburg: IPME RAS, 2013. P. 268–274.
66. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations / S.N. Kempka [et al.] // SANDIA Report SAND96-0583 UC-700. Albuquerque, 1996. 50 p.
67. Keutgen R. Galloping phenomena: a finite element approach: Ph.D. Thesis. Liege (Belgium), 1998. 202 p.
68. Keutgen R., Lilien J.-L. Benchmark cases for galloping with results obtained from wind tunnel facilities — validation of a finite element model // IEEE Transactions On Power Delivery. 2000. Vol. 15, N 1. P. 367–374.
69. Kim H.-S., Byun G.-S. A study on the analysis of galloping for power transmission line // The IEEE International Symposium on Industrial Electronics: book of proceedings. 2001. V. 2. P. 973–978.

70. Klammo J.T., Leonard A., Roshko A. On the maximum amplitude for a freely vibrating cylinder in cross-flow // *Journal of Fluids and Structures*. 2005. V. 21 P. 429–434.
71. Lilien J.L., Dubois H. Overhead line vertical galloping on bundle configurations: stability criteria and amplitude prediction // *The International Conference on Overhead Line Design and Construction: Theory and Practice: book of proceedings*. London, 1988. P. 65–69.
72. State of the art of conductor galloping / J.L Lilien [et al.]. CIGRE Technical Brochure N 322. Paris, 2007. 146 p.
73. Lilien J.L., Havard D. Galloping data base on single and bundle conductors prediction of maximum amplitudes // *IEEE Transactions on Power Delivery*. 2000. V. 15, N 2. P. 670–674.
74. Nonlinear numerical simulation method for galloping of iced conductor / Liu X. [et al.] // *Applied Mathematics and Mechanics* (English Edition). 2009. V. 30, N 4. P. 489–501.
75. Marchevskii I.K., Ivanova O.A. Numerical simulation of wind resonance of a circular profile by means of the vortex element method // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2009. V. 38, N 5. P. 420–424.
76. Dynamics of a guyed transmission tower system / R.K. Mathur [et al.] // *IEEE Trans. Power Delivery*. 1987. Vol. 2, N 3. P. 908–916.
77. Mital S., Kumar V. Flow-induced vibrations of a light circular cylinder at Reynolds numbers 10^3 to 10^4 // *Journal of Sound and Vibration*. 2001. V. 254, N 5. P. 923–946.
78. Moreva V.S., Marchevsky I.K. Vortex element method for 2D flow simulation with tangent velocity components on airfoil surface // *The 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering: book of proceedings*. Vienna, 2012. 14 p.

79. Morton B.R. The generation and decay of vorticity // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. 1984. V. 28. P. 277–308.
80. Newman D.J., Karniadakis G.E. A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable // *Journal of Fluid Mechanics*. 1997. V. 344. P. 95–136.
81. Nigol O., Buchan P.G. Conductor galloping // *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*. 1981. V. PAS-100, N 2. P. 699–720.
82. Nigol O., Clarke G.J. Conductor galloping and its control based on torsional mechanism // *Ontario Hydro Research Quarterly*. 1974. V. 26, N 2. P. 31–41.
83. Novak M. Galloping oscillations of prismatic structures // *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 1972. V. 98, N EMI. P. 27–46.
84. Parkinson G.V., Brooks N.P.H. On the aeroelastic instability of bluff cylinders // *Journal of Applied Mechanics*. 1961. V. 28, N 2. P. 252–258.
85. Phuc P.V., Ishihara T., Shimizu M. A wind tunnel study on unsteady forces of ice-accreted transmission lines // *The 5th International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics & Applications: book of proceedings*. Ottawa-Ontario, 2004. P. 373–376.
86. Placzek A., Sigrist J.-F., Hamdouni A. Numerical simulation of an oscillating cylinder in a cross-flow at low Reynolds number: forced and free oscillations // *Computers & Fluids*. 2009. N 38. P. 80–100.
87. Ratkowski J. Experiments with galloping spans // *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*. 1963. V. 82, N 68. P. 661–669.

88. Rawlins C.B. Analysis of conductor galloping field observations — single conductors // IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. 1981. Vol. 100, N 8. P. 3744–3753.
89. Rega G., Srinil N., Alaggio R. Experimental and numerical studies of inclined cables: free and parametrically-forced vibrations. // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2008. V. 46, N 3. P. 621–640.
90. Rienstra S.W. Nonlinear free vibration of coupled spans of overhead transmission lines // Journal of Engineering Mathematics. 2005. V. 53. P. 337–348.
91. Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets // NACA Report. 1954. N 1191. 25 p.
92. Sarpkaya T. A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations // Journal of Fluids and Structures. 2004. N 19. P. 389–447.
93. Saxon D.S., Cahn A.S. Modes of vibration of a suspended chain // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1953. V. 6/3. P. 273–280.
94. Simpson A. Determination of the in-plane natural frequencies of multi-span transmission lines by a transfer matrix method // Proceedings of the Institution of Electrical Engineers. 1966. N 113. P. 870–878.
95. Tornquist E.L., Becker C. Galloping conductors and a method for studying them // Transactions of the AIEE. 1947. V. 66, N 1. P. 1154–1164.
96. Triantafyllou M.S. The dynamics of taut inclined cables // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1984. V. 37, N 3. P. 421–440.

97. Veletsos A.S., Darbre G.R. Dynamic stiffness of parabolic cables // International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1983. V. 11, N 3. P. 67–401.
98. Wang L., Lilien J.-L. Overhead electrical transmission line galloping // IEEE Transactions on Power Delivery. 1998. V. 13, N 3. P. 909–916.
99. Wang X., Lou W.-J. Numerical approach to galloping of conductor // The 7th Asia-Pacific Conference on Wind Engineering: book of proceedings. Taipei (Taiwan), 2009. 8 p.
100. Waris M.B., Ishihara T., Sarwar M.W. Galloping response prediction of ice-accreted transmission lines // The 4th International Conference on Advances in Wind and Structures: book of proceedings. Jeju (Korea), 2008. P. 876–885.
101. Numerical simulation of vortex-induced vibration of flexible cylinders / Yamamoto C.T. [et al.] // Journal of Fluids and Structures. 2004. V. 19. P. 467–489.
102. Zahm A.F. Flow and drag formulas for simple quadrics // NACA Technical Report. 1927. N 253. 23 p.