

И. А. СОЛДАТЕНКОВ

ИЗНОСОКОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА

**с приложениями
к инженерному
расчету износа**



**МОСКВА
ФИЗМАТКНИГА
2010**

ББК 29.19+34.41
С60
УДК 539.3/.5+621.891

СОЛДАТЕНКОВ И.А. Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. — М.: Физматкнига, 2010. 160 стр. ISBN 978-5-89155-190-9.

Монография посвящена инженерному расчету износа на основе теории износоконтактного взаимодействия деформируемых твердых тел. Дается обзор результатов теоретических и экспериментальных исследований зависимости скорости износа от контактного давления и скорости скольжения (закона изнашивания) для различных пар трения. Описываются общая постановка и методы решения износоконтактной задачи, а также модели процесса изнашивания типовых подвижных сопряжений. Анализируются особенности протекания этого процесса. Предлагаются алгоритмы упрощенного расчета износа.

Для научных и инженерно-технических работников, занимающихся исследованием и конструированием узлов трения, а также студентов и аспирантов технических вузов и университетов.

Научное издание

Солдатенков Иван Алексеевич

**ИЗНОСОКОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ИНЖЕНЕРНОМУ РАСЧЕТУ ИЗНОСА**

Верстка выполнена в Издательстве «Физматкнига»

Редакторы *Д. А. Свинцов, Р. Ю. Новиков*

Художник *А. В. Колесниченко*

Подписано в печать 03.02.2010. Формат 60×90/16

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,0. Уч.-изд. л. 10,5

Тираж 300 экз. Заказ №

Издательство «Физматкнига»

141700, г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 6б

Тел./факс: (498) 744-63-28

E-mail: publishers@mail.mipt.ru, fizmatkniga@mail.ru

Интернет-магазин литературы по фундаментальным и прикладным наукам

WWW.FIZMATKNIGA.RU

Отпечатано в ППП «Типография «Наука» АИЦ «Наука» РАН

121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-89155-190-9



© И. А. Солдатенков, 2010

© Физматкнига, оформление, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.....	6
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ИЗНОСОКОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ.....	7
§ 1.1. Закон изнашивания как трибологический аспект износоконтактной задачи.....	7
1.1.1 Начало изучения закономерностей изнашивания	8
1.1.2 Теоретические законы изнашивания	11
1.1.3 Экспериментальные законы изнашивания.....	17
§ 1.2. Износоконтактная задача	31
1.2.1 Развитие теории (обзор основных результатов)	31
1.2.2 Постановка износоконтактной задачи.....	32
1.2.3 Основные методы решения износоконтактной задачи.....	38
ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1	41
ГЛАВА 2. ИНЖЕНЕРНЫЙ РАСЧЕТ ИЗНОСА.....	52
§ 2.1. Расчет износа тонкого покрытия	52
2.1.1 Деформационное соотношение для покрытия	53
2.1.2 Особенности процесса изнашивания покрытия.....	55
2.1.3 Изнашивание покрытия на искривленном основании.....	62
2.1.4 Расчет износа упорного подшипника скольжения.....	66
2.1.5 Изнашивание покрытия при фреттинге	69
2.1.6 Расчет износа при изменяющейся области контакта	77
2.1.7 Расчет износа неоднородного по глубине покрытия	86
2.1.8 Изнашивание покрытия сферическим индентором	89
2.1.9 Установившийся режим как основа приближенного расчета износа.....	96

§ 2.2.	Расчет износа при случайном взаимодействии тел	105
2.2.1	Основные положения	105
2.2.2	Изнашивание покрытия в радиальном подшипнике скольжения	106
2.2.3	Расчет износа сферического шарнира	110
2.2.4	Изнашивание основания скользящим индентором	114
2.2.5	Расчет износа ленточного подшипника	118
2.2.6	Расчет износа рельса	124
§ 2.3.	Задачи с усложненными условиями	130
2.3.1	Изнашивание вязкоупругого покрытия	130
2.3.2	Изнашивание волнистой поверхности	140
2.3.3	Расчет износа поршневого кольца	148
ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 2		155
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		159

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория контактного взаимодействия, учитывающая изнашивание контактирующих тел (износоконтактная задача), является эффективным средством расчета износа узлов трения, который во многом определяет их долговечность. К настоящему времени разработан ряд аналитических и численных подходов к решению износоконтактной задачи, которые зачастую привлекают сложный математический аппарат и требуют значительных вычислительных ресурсов.

Рассмотренные в данной книге постановки и методы решения износоконтактной задачи отличаются простотой используемого математического аппарата, допускающего несложную численную реализацию и, в некоторых случаях, аналитическое описание процесса изнашивания. Автор стремился не перегружать книгу строгими математическими выкладками, заменяя их местами физически понятными пояснениями. При всем этом, изложенные методы представляются достаточно универсальными и могут быть использованы для решения износоконтактной задачи в более сложных постановках.

Значительное внимание в книге уделяется эффектам, обусловленным особенностями закона изнашивания. В связи с этим автор счел целесообразным снабдить книгу обзором основных результатов теоретических и экспериментальных исследований закона изнашивания.

Отмеченные обстоятельства дают основания автору надеяться, что материал книги будет полезен для специалистов, занимающихся инженерным расчетом узлов трения на износ.

Изложенные в книге результаты были получены автором во время его работы в Институте проблем механики Российской академии наук имени А. Ю. Ишлинского. Научная деятельность автора в стенах этого института протекала под влиянием и при поддержке со стороны И. Г. Горячевой и М. Н. Добычина, за что им автор выражает свою благодарность. При подготовке материала книги автор пользовался библиотекой И. В. Крагельского, подаренной им лаборатории трибологии ИПМех РАН.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

x — координата;
 t — время;
 p — контактное давление;
 V — скорость скольжения;
 W — износ;
 W_M — максимальный по области контакта износ;
 $F(p, V)$ — функция, определяющая скорость износа;
 g — форма контртела;
 a, b — размеры области контакта;
 δ — внедрение контртела;
 P — нагрузка;
 Q — удельная нагрузка;
 E — модуль Юнга;
 ν — коэффициент Пуассона;
 μ — коэффициент трения;
 l — путь трения;
 h — толщина покрытия;
 h_0 — начальная толщина покрытия;
 $B = (1 - 2\nu)(1 + \nu)[(1 - \nu)E]^{-1}$ — коэффициент податливости покрытия.

Точка над символом функции означает ее частную производную по времени, штрих — частную производную по координате.

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ИЗНОСОКОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Износоконтактная задача (контактная задача с износом) состоит в расчете эволюции износа и контактного давления при изнашивании пары трения. Решение износоконтактной задачи можно рассматривать как решение контактной задачи в каждый момент времени для тел, форма которых изменяется вследствие износа. В качестве эволюционного уравнения здесь выступает закон изнашивания, связывающий скорость износа с контактными характеристиками: контактным давлением, скоростью скольжения и др.

Основу износоконтактной задачи составляют теория контактного взаимодействия деформируемых тел и область трибологии, связанная с теоретико-экспериментальными исследованиями закономерностей изнашивания.

§ 1.1. Закон изнашивания как трибологический аспект износоконтактной задачи

Под изнашиванием обычно понимается процесс постепенного удаления материала с поверхности твердого тела и (или) увеличения его остаточной деформации при механическом воздействии на него другого тела или среды. Изнашивание проявляется в постепенном изменении размеров тела и количественно характеризуется величиной износа W , при этом различают линейный, массовый и объемный износы [56, 80].

Важной характеристикой изнашивания является его интенсивность I , которая определяется как скорость износа по времени: $I_t = \partial W / \partial t$ или пути трения: $I_l = \partial W / \partial l$. В случае чистого скольжения со скоростью V имеет место соотношение $I_t = V I_l$. Скорость износа I_l по пути трения представляет собой естественную характеристику процесса изнашивания и наиболее часто используется для его описания, поэтому в данной главе по умолчанию под I подразумевается именно величина I_l .

Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что скорость износа может зависеть от различных факторов процесса изнашивания, таких как физико-химические свойства материалов взаимодействующих тел, шероховатость их поверхностей, наличие смазки, нагрузочно-скоростной режим, температура и состав окружающей среды и др. [56, 80]. Дальнейшее изложение будет касаться главным образом зависимости скорости износа пары трения скольжения от контактного давления p (далее давления) и скорости сколь-

жения V . Такая зависимость будет называться законом изнашивания и формально записываться как $I = F(p, V)$. В случае постоянной скорости скольжения или давления закон изнашивания будет представляться в форме $I = F(p)$ или $I = F(V)$ соответственно.

Основанием использования давления и скорости скольжения в качестве аргументов закона изнашивания служит то, что в процессе изнашивания, как правило, происходит приработка, и многие его факторы определяются значениями p и V . Например, при заданном нагрузочно-скоростном режиме образуется равновесная шероховатость, формируются определенная структура поверхностного слоя, его температура [45, 56]. Здесь следует отметить, что влияние скорости скольжения на скорость износа зачастую происходит не напрямую, а опосредованно, например, через температуру в зоне трения. Один из возможных механизмов такого влияния описан в работе [167].

Закон изнашивания для конкретной пары трения определяется на основе теоретических и экспериментальных исследований процесса изнашивания. Ниже будет дан обзор таких исследований, при этом главное внимание будет уделяться характерным особенностям зависимости $I = F(p, V)$ (наличие экстремумов, областей возрастания/убывания и т. п.), которые в значительной мере определяют методы и свойства решения износоконтактной задачи. Так, линейная зависимость I от p позволяет получать решения износоконтактной задачи в замкнутом виде [73], а в случае зависимости $I = F(p, V)$ с экстремумами именно количество и тип экстремумов во многом определяют особенности кинетики изнашивания (разделы 2.1.2–2.1.4).

В качестве условий испытаний на износ будут указываться, как правило, только тип изнашиваемого материала и характер трения (наличие или отсутствие смазки). В качестве меры давления p часто будет использоваться контактная нагрузка P , как это делается в ряде работ. Символы c , c_0 , c_1 , ... используются формально для обозначения параметров описываемых моделей, которые в разных случаях могут быть различными. Особое внимание при изложении материала будет уделяться приоритету полученных результатов.

1.1.1. Начало изучения закономерностей изнашивания

О том, что повышение контактной нагрузки и скорости скольжения увеличивает скорость износа, людям было известно давно. Так, еще в древнем Египте сверление твердых пород камня производилось при дополнительной нагрузке на сверло и повышенной скорости его вращения [127].

Словесное описание закона изнашивания вида $I_t = cpV$, устанавливающего пропорциональность износа работе сил трения, встречается в работе швейцарского инженера Рейе (Т. Reye; 1860) [165]. Подобный закон изнашивания Рейе использовал для расчета давления и силы трения в приработанных опорах скольжения.

Первый эмпирический закон изнашивания, по всей видимости, был получен американским исследователем Велчем (A. Welch) в 1881 г. [130]. Используя данные Дудли (C. B. Dudley) об износе рельсов, Велч установил, что при прохождении одинакового тоннажа износ рельса степенным образом зависит от нагрузки P на колесо: $W \sim P^\gamma$, причем $\gamma = 0,6$. Годом позже похожий результат аналогичным образом получил русский ученый Н. П. Петров, при этом показатель степени γ у него оказался равным 0,5 [81]. Исходя из этих результатов, несложно показать, что износ рельса за один проход колеса, который можно интерпретировать как интенсивность изнашивания, зависит от нагрузки на колесо следующим образом:

$$I = cP^{\gamma+1}.$$

Целенаправленное изучение законов изнашивания различных материалов было положено работой Робина (F. Robin; 1910) [173], в которой образцы из различных сортов стали истирались о наждачную бумагу. В результате были получены графические зависимости скорости I износа отдельно от давления p и скорости скольжения V , причем все они были возрастающими, кроме зависимости $I = F(V)$ для отоженной стали, которая имела локальный максимум. Для объяснения возрастания скорости износа с ростом скорости скольжения Робин, по сути, вводит энергетическую концепцию изнашивания, считая, что с ростом V увеличивается кинетическая энергия абразивного зерна и, следовательно, производимая им работа по изнашиванию образца.

В 1917 г. инженер А. П. Малышев проводил испытания на износ металлических образцов (медь, цинк, олово, свинец) о слой песка при различной скорости скольжения V [71]. В процессе изнашивания образца глубина его внедрения в песок поддерживалась неизменной. Полагая, что износ образца связан с некоторой частью работы сил трения, А. П. Малышев теоретически вывел зависимость $I_t = c\mu V^3$ (c — эмпирический коэффициент), которую позже подтвердил экспериментально.

Энергетическая концепция изнашивания проверялась для мягких металлов (медь, свинец, висмут, магний и др.) в паре с чугуном и для углеродистых сталей в паре с корундовым диском в работе Хонды и Ямады (K. Honda, R. Yamada; 1925) [145]. Экспериментально ими была установлена линейная зависимость $I_t = cM$ скорости износа от мощности M силы трения, в которой коэффициент c определяется типом изнашиваемого металла и свойствами трущихся поверхностей. Аналогичная зависимость получена в исследованиях Престона (F. W. Preston; 1927) [164].

Результаты Хонды и Ямады были подвергнуты критике Розенбергом (S. J. Rosenberg; 1925), который в том же журнале опубликовал результаты испытаний стальных образцов на машине трения Амслера [175]. На рис. 1.1 показана зависимость скорости износа I (массовый износ за 10^4 оборотов дискового образца) от нагрузки P , полученная Розенбергом для закаленной стали при сухом трении. Существенно немонотонно

тонный характер этой зависимости противоречит энергетической концепции изнашивания. Примечательно, что резкое падение скорости износа при $P \simeq 60$ кгс здесь впервые объясняется сменой механизмов изнашивания в результате фрикционного разогрева стали.

В 1926 г. В. Д. Кузнецов вывел связь массового износа W с поверхностной энергией σ изнашиваемого материала [61]. Исходя из энергетических соображений, им была получена и подтверждена испытаниями на износ поликристаллов NaCl, KCl и KI зависимость

$$W = \frac{d}{\beta \sigma} F_{\text{тр}} l,$$

в которой $F_{\text{тр}}$ и l обозначают силу и путь трения, d — плотность изнашиваемого материала, а коэффициент β зависит от степени размельчения изнашиваемого материала.

Важной вехой в исследовании закономерностей изнашивания явилась работа Бонди (W. Bondi; 1927) [122]. По результатам испытаний стальных образцов в условиях сухого качения с проскальзыванием им были по-

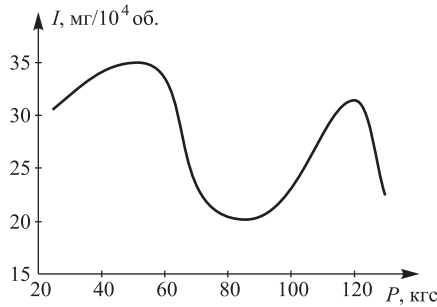


Рис. 1.1. Зависимость скорости I износа закаленной стали от нагрузки P [175]. Изображен график, сглаживающий оригинальную кривую

получены следующие зависимости скорости износа от нагрузки и скорости скольжения:

$$I_t = \begin{cases} c_3 P, & M < M_1, \\ c_4 P^2 + c_5, & M \geq M_1, \end{cases}, \quad I_t = c_1 V^2 + c_2. \quad (1.1)$$

Первое равенство в (1.1) описывает непрерывную зависимость I_t от P с переходом к более интенсивному росту скорости износа после достижения мощности M силы трения критического значения M_1 , которое, как было установлено Бонди, составляет 3,35 кгс·м/с. Исходя из параболических зависимостей скорости износа отдельно от P и V , Бонди вывел следующую формулу для скорости износа зуба шестеренки: $I_t = cP^2V^2$.

Сузуки (М. Suzuki; 1927) испытывал на износ углеродистую сталь при сухом трении, в результате чего им вновь была подтверждена линейная зависимость износа от работы силы трения (т. е. скорости износа от мощности силы трения) и, кроме того, установлена асимптотически монотонно убывающая зависимость износа за единицу этой работы от скорости скольжения [187]. Последний результат может быть представлен соотношением $I = cpf(V)$, где $f(V)$ — убывающая функция.

Изучая закономерности абразивного изнашивания резины, Фогт (W. W. Vogt; 1928) установил, что скорость износа резины I пропорциональна давлению и почти не зависит от скорости скольжения [192]. Заслуживают внимания результаты экспериментов Циммермана (E. Zimmermann; 1931), согласно которым при сухом трении о сталь ($V = 10$ м/с) различных сплавов из меди, цинка и свинца, зависимость скорости их износа от давления достигает максимума при $p = 4$ кгс/см², а затем спадает [195]. Однако если износ происходит в результате отделения мелких частиц, то $I = cp^2$.

Последующие многочисленные теоретические и экспериментальные исследования процесса изнашивания выявили разнообразные формы зависимости $I = F(p, V)$. Особый интерес для постановки и решения износоконтактной задачи представляют аналитические формы закона изнашивания, которые получаются, в частности, путем построения теоретических моделей процесса изнашивания.

1.1.2. Теоретические законы изнашивания

Степенные зависимости. Законы изнашивания со степенными зависимостями $I = F(p, V)$ являются наиболее распространенными, и некоторые из них уже были упомянуты выше. К таким зависимостям приводят многие теории изнашивания.

М. М. Хрущов и М. А. Бабичев (1941) предложили теорию абразивного изнашивания, согласно которой истирание материала производится большим количеством микронеровностей в виде жестких пирамид разной высоты, при этом локальное разрушение материала пропорционально второй степени внедрения каждой микронеровности [110]. Такие представления приводят к следующему линейному закону изнашивания, имеющему многочисленные экспериментальные подтверждения:

$$I = c_1 P/H, \quad (1.2)$$

где H — твердость материала, c_1 — некоторый коэффициент.

Зависимости типа (1.2) выводятся в работах других авторов. Так, согласно теории Хольма (R. Holm; 1946), износ образуется в результате отделения некоторого количества атомов с поверхности трения, причем это количество пропорционально пути трения и площади контакта [144]. В результате для скорости объемного износа получается формула (1.2), в которой коэффициент c_1 представляет собой вероятность отделения атома при его столкновении с другим атомом ($c_1 \simeq 10^{-5}$).

В работе Ханта (F. V. Hunt; 1955) [146] исследован вопрос о том, как связь предела текучести с размером деформированного объема (масштабным фактором) может влиять на скорость износа. В результате установлено, что коэффициент c в линейной зависимости $I = cP$ при малых нагрузках равен $c_1(3Y_\mu)^{-1}$, а при больших — скачкообразно возрастает до величины $c_1(3Y_0)^{-1}A_r/A_a$, где c_1 — вероятностный коэффициент из теории Хольма, Y_μ, Y_0 — пределы микро- и макротекучести материала.

ла ($Y_0 \ll Y_\mu$), A_r и A_a — фактическая и номинальная площади контакта, причем $A_r/A_a \simeq 0,2 \div 0,8$.

Зависимость типа (1.2) с аддитивным отрицательным членом в правой части была получена И. В. Крагельским (1952) в предположении, что критерием разрушения материала является некоторая предельная деформация сжатия [53]. В полученной формуле присутствуют податливость шероховатости и параметры опорной кривой ее профиля.

К линейным законам изнашивания также приводят некоторые модели изнашивания, предполагающие упругий контакт микронеровностей. В предположении, что износ материала происходит в результате растяжения и последующего разрыва его поверхности сферической микронеровностью, Шалламах (A. Schallamach; 1954) получил зависимость

$$I = c_2 P/E, \quad (1.3)$$

где E — модуль упругости материала, а коэффициент c_2 зависит от параметров модели (в частности, c_2 пропорционален радиусу кривизны микронеровности) [179]. Немного позже, Шпур и Ньюкомб (R. T. Spurr, T. P. Newcomb; 1957) пришли к зависимости (1.3), в которой $c_2 = k \operatorname{tg} \theta$, причем угол θ характеризует заостренность микронеровности [182].

Су (N. P. Suh; 1973) была предложена модель изнашивания отслаиванием [185]. Соответствующий закон изнашивания имеет линейный вид $I = c_3 Gp$, причем G — модуль сдвига материала, c_3 — параметр модели, зависящий, в частности, от топографии изнашиваемой поверхности. Примечательно, что здесь, в отличие от (1.3), износ прямо пропорционален модулю сдвига, линейно связанному с модулем упругости E . К линейным зависимостям I от p приводят и теории, основанные на энергетической концепции изнашивания [56, 59, 126].

Зависимость скорости износа от давления изучалась Г. Д. Полосаткиным (1946) на основе представлений об абразивном изнашивании пластически деформируемого материала [84]. Им была установлена степенная зависимость $I = c(\mu P)^\gamma$, в которой μ — коэффициент трения, c и γ — параметры модели, причем на значение c влияют свойства абразива, а показатель степени γ определяется только свойствами изнашиваемого материала. Модель изнашивания свободными частицами абразива, разработанная В. С. Щедровым (1947), также приводит к степенному закону $I = cp^\gamma$, однако здесь показатель γ зависит от свойств абразива [115]. В работе [116] для подвижного контакта шероховатых тел получена зависимость вида $I = cp^\gamma - c_0$ с показателем γ , зависящим от деформационных свойств контакта.

В работе Арчарда (J. F. Archard; 1952) [118] предлагается модель изнашивания пластического материала сферическими микронеровностями при двух механизмах поверхностного разрушения: отделение материала частицами и послойное удаление материала. Для первого механизма объем частиц износа полагается пропорциональным a^3 , тогда как для второго — пропорциональным a^2 , где a — радиус области контак-

та микронеровности. Соответствующие формулы для скорости объемного износа имеют вид: $I = KP/(3p_m)$ и $I = KCP^\gamma$, $\gamma \simeq 0,8$, причем p_m — давление текучести, коэффициент K связан с вероятностью разрушения материала, а коэффициент C зависит от некоторых параметров модели, в том числе от p_m . Позже Арчард развил предложенную модель, приняв во внимание распределение микронеровностей по высоте и допустив для них возможность упругого контакта [119]. В результате была получена формула $I = K(P/C)^\gamma$, $\gamma = (1+q)/(1+r)$, в которой коэффициенты K и C определяются характером разрушения материала, модулем упругости или давлением текучести, а также радиусом микронеровностей и их распределением по высоте, $q = 1$ при отделении материала частицами, $q = 1/2$ при послойном удалении материала, $r = 3/2$ и $r = 1$ для упругого и пластического контакта соответственно.

Существует значительное количество публикаций, в которых приводятся зависимости (1.2), (1.3) с различными выражениями для коэффициентов c_1 , c_2 , отвечающих различным подходам к моделированию изнашивания. Так, в работе [136] вышеупомянутая модель Арчарда обобщается на случай, когда влияние микронеровности на разрушение материала распространяется на расстояние L , превышающее размер области контакта, в результате чего коэффициент c_1 оказывается зависящим от вероятностных характеристик величины L . По результатам работы [139] коэффициенты из (1.2), (1.3) имеют вид $c_{1,2} = \tilde{c}_{1,2} [1 + \alpha^2(\mu - s)^2]^{1/2}$, где \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 , α , s — параметры модели, зависящие, в частности, от деформационных свойств материала (пластических или упругих) и геометрии микронеровностей.

Результаты экспериментов по изнашиванию латуни о сталь (сухое трение) позволили Стейну (R. P. Steijn; 1959) установить следующий полуэмпирический закон изнашивания:

$$I = K\psi(P) \frac{P}{p_m}, \quad \psi(P) = 1 - \exp(-mP^n), \quad (1.4)$$

в котором K и p_m — параметры модели Арчарда, m и n — эмпирические коэффициенты, $n = 4,5 \div 5,9$ [183]. Отклонение зависимости (1.4) от линейной при малых нагрузках объясняется существованием защитных оксидных пленок, которые постепенно разрушаются с ростом нагрузки.

Единый подход к моделированию изнашивания на основе представлений об усталостном разрушении материала, охватывающий случаи пластического и упругого контакта микронеровностей, был предложен И. В. Крагельским с соавторами (1959–1977). В работе [54] выводятся формулы типа (1.2), (1.3) с коэффициентами c_1 , c_2 , зависящими от характеристик шероховатости и механических свойств изнашиваемого материала. Дальнейшее развитие усталостной теории изнашивания позволило получить более общие зависимости для пластического и упругого контактов имеющие, соответственно, вид

$$I = c_1 \left(\frac{p}{H} \right)^{\frac{1+\beta\tau}{1-\beta}}, \quad I = c_2 \left(\frac{p}{E} \right)^{1+\beta\tau}, \quad (1.5)$$

где β — параметр опорной кривой профиля шероховатости, τ — показатель кривой усталости [55, 56, 58]. В частном случае равновесной шероховатости вторая зависимость (1.5) становится линейной [56].

Несколько отличный от (1.5) закон изнашивания вывел М. М. Резниковский (1960). Моделируя усталостное изнашивание резины о волнистую поверхность, он установил, что $I = c(p/E)^{(2+\tau)/3}$ [94]. В работе [134] на основе теории пластической (малоцикловой) усталости моделировалось изнашивание металлов при наличии смазки с абразивом и был получен закон изнашивания $I = c(p/H)^{5/2}$, подтвержденный затем экспериментально.

Модель изнашивания, предполагающая усталостный механизм разрушения материала (в том числе, малоцикловой усталости) и учитывающая вероятностные характеристики шероховатости была разработана Холлингом (J. Halling; 1975) [138]. При гауссовом распределении высот микронеровностей им была получена линейная зависимость типа (1.2), тогда как при кусочно-постоянном распределении — степенная зависимость $I = cP^\gamma$, $\gamma = (4 + y)/(4 + n)$, в которой параметры n и y определяют закон деформирования $\sigma \sim \varepsilon^n$ и размер $d \sim \varepsilon^y$ частиц износа. В своей более поздней работе [140] Холлинг ввел в показатель γ дополнительный параметр усталостного разрушения.

Исследования Соды и Аоки (N. Soda, A. Aoki; 1959) [180] привели к следующей зависимости для скорости объемного износа: $I = cP^\gamma$, $\gamma = ((y - 1)/2 + m)/(m + n)$, при этом параметры m, n , и y определяют число контактов микронеровностей $N \sim \varepsilon^m/h$, закон их деформирования $P \sim \varepsilon^n$, размер частиц износа $d \sim a^y$ (h — расстояние между микронеровностями), ε и a — деформация и радиус области контакта микронеровности). Фреттинг-коррозионные испытания стали, выполненные в этой работе, показали, что $\gamma = 0,7$.

В работе [57] теоретически изучено влияние формы шероховатости контртела на показатель степени в степенном законе изнашивания $I = cP^\gamma$. Оказалось, что при пластическом контакте (микрорезание) $\gamma = 5/4$ — для сферических микронеровностей и $\gamma = 1$ — для клиновидных микронеровностей.

Сложные зависимости. Аппроксимируя результаты испытаний резины на износ о наждачную бумагу рациональной функцией, С. Б. Ратнер (1952) вывел формулу

$$I = c \left(\frac{\mu P + \tau_0}{P + c_0} \right) P,$$

в которой c и c_0 — параметры износостойкости резины, τ_0 — молекулярная (адгезионная) составляющая силы трения [91]. Теория изнашивания резины скатыванием М. М. Резниковского и Г. И. Бродского (1961) приводит к немонотонной зависимости вида $I = P/(c_1 + c_2 P^{4/3})$, в которой c_1 и c_2 — положительные коэффициенты, зависящие от эластичности и прочности резины на разрыв [95].

Предложенная Улигом (Н. Н. Uhlig; 1954) теория изнашивания металлов в условиях фреттинг-коррозии исходит из того, что на следе чистого металла, появляющегося в результате скольжения микронеровности, образуется оксидная пленка, которая затем разрушается следующей микронеровностью [189, 190]. Соответствующее выражение для износа имеет вид

$$W = (c_1 P^{1/2} - c_2 P)n/f + c_3 P A n, \quad (1.6)$$

где n и f — число и частота колебаний контртела, A — амплитуда проскальзывания, c_1, c_2, c_3 — положительные коэффициенты, зависящие от давления текучести металла и параметров процесса его окисления. Первое слагаемое в выражении (1.6) отвечает химическому фактору изнашивания, а второе — механическому. Учитывая, что $n/f = t$, $An = l$, $V = l/t$, формулу Улига можно представить в виде $I = V^{-1}(c_1 P^{1/2} - c_2 P) + c_3 P$. Похожая формула была получена позже авторами работы [68].

Процесс образования и разрушения оксидных пленок часто использовался в качестве основы для построения моделей процесса изнашивания. В работе [194] рассматриваются два механизма изнашивания, первый из которых обусловлен срезом микронеровностей и описывается формулой типа (1.2), тогда как второй связан с образованием и разрушением пленок Fe_2O_3 (умеренные температуры) или пленок Fe_3O_4 (повышенные температуры), и описывается формулой $I = c_1 P^{1/2} - c_2 P$. По мере увеличения нагрузки и скорости скольжения упомянутые механизмы проявляются в различных сочетаниях, что обуславливает существование нескольких экстремумов в теоретических зависимостях $I = F(P, V)$.

Разработанная Куином (Т. F. J. Quinn; 1962) окислительная теория изнашивания металлов также предполагает, что на поверхности трения при контакте микронеровностей образуется защитная оксидная пленка, которая затем разрушается с образованием частиц износа, при этом возможны два механизма образования такой пленки [167]. Она может формироваться целиком при начале контакта двух микронеровностей (механизм 1) или постепенно наращиваться при каждом контакте микронеровностей до некоторой критической толщины (механизм 2). Качественный анализ этих двух механизмов приводит, соответственно, к зависимостям $I_1 \sim \exp(-c_1/T)$ и $I_2 \sim V^{-1} \exp(-c_1/T)$, которые с учетом влияния скорости скольжения V на температуру T поверхности трения принимают у Куина вид

$$I_1 \sim \begin{cases} \exp(-c_2/V), & \text{малые } V, \\ \exp(-c_3/V^{1/2}), & \text{большие } V, \end{cases}$$

$$I_2 \sim \begin{cases} V^{-1} \exp(-c_2/V), & \text{малые } V, \\ V^{-1} \exp(-c_3/V^{1/2}), & \text{большие } V. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что зависимость I_2 от V имеет экстремум в виде локального максимума. Позже, исходя из пропорциональности износа фактической площади контакта (закон Арчарда) и принимая второй механизм образования оксидной пленки, Куин пришел к формуле

$$I = c \frac{P}{V} \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right), \quad (1.7)$$

где Q — энергия активации, определяющая скорость окисления, R — универсальная газовая постоянная, коэффициент c зависит от критической толщины пленки, характерной длины контакта микронеровностей и давления текучести металла [168]. Теория окислительного изнашивания получила дальнейшее развитие и экспериментальное подтверждение в ряде работ, обзор которых содержится в [169, 170].

Анализ влияния теплоты адсорбции на стойкость смазочной пленки позволил Роуву (C. N. Rowe; 1966) получить сходную с (1.7) формулу $I = c_0 (1 + 3\mu^2)^{1/2} PV^{-1} \exp(-Q/(RT))$, в которой Q — теплота адсорбции, а коэффициент c_0 зависит, в частности, от адсорбционных свойств смазки [176]. Эта формула была подтверждена результатами испытаний на износ меди о сталь в смазке н-гексадекана. Позже аналогичная формуле Роува зависимость была установлена и проверена экспериментально [184].

Эксперименты [178] по изнашиванию меди о сталь в условиях граничной смазки выявили существование критического значения давления p_* , ниже которого реализуется гидродинамический режим смазки и износ почти отсутствует:

$$I = \begin{cases} 0, & p < p_*, \\ c(p - p_*), & p \geq p_*, \end{cases}$$

причем $c = c_0 \exp(-c_1 V)$, $p_* = p_*^\infty [1 - \exp(-c_2 V)]$. Последние две зависимости обуславливаются влиянием скорости скольжения V на площадь металлического контакта и адсорбционные свойства смазки.

Экспоненциальный закон изнашивания полимеров

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{u_0 - \lambda \mu p}{RT}\right)$$

был установлен С.Б. Ратнером с соавторами (1966) на основе молекулярно-кинетической концепции разрушения [67, 93]. Здесь u_0 — энергия активации разрушаемых связей, λ — параметр структуры материала, I_0 — параметр модели.

Используя газо-кинетическую аналогию для описания поведения материала вблизи поверхности трения, Л.С. Цеснек (1968) предложил

флуктуационную модель, которая в случае абразивного изнашивания приводит к формуле

$$I = c\mu p \exp\left(-\frac{p}{p_*}\right), \quad (1.8)$$

в которой p_* обозначает критическое давление, характеризующее прочность абразивных частиц, а коэффициент c зависит от размера и формы частиц износа, размера и степени свободы абразивных частиц, поверхностной энергии материала [112, 113]. Экспонента в (1.8) связана с вероятностью разрушения (раздавливания) абразивных частиц, что приводит к снижению скорости износа. Здесь уместно упомянуть об экспериментально установленном эффекте замедления скорости абразивного износа, обусловленным с измельчением абразивных частиц [30, 103].

В работе [157] рассматривается случай изнашивания в результате оплавления поверхности трения и предлагается зависимость $I = c_1 \mu P - c_2/V$, в которой положительные коэффициенты c_1, c_2 определяются теплофизическими и механическими свойствами изнашиваемого материала. При оплавлении оксидной пленки (жесткое окислительное изнашивание) последняя формула принимает более сложный вид $I = \tilde{c}_1 \mu P - \tilde{c}_2 P^{1/2}/V$.

Различные зависимости $I = F(p, V)$ следуют из теории саморегулирования механо-химических процессов разрушения и восстановления вторичных структур [49]. В частности, эта теория приводит к алгебраической зависимости $I = c_1 P + c_2 P^2$, в которой коэффициенты c_1, c_2 определяются свойствами изнашиваемого материала и окружающей среды [47].

1.1.3. Экспериментальные законы изнашивания

Аппроксимации экспериментальных данных приводят к аналитическим представлениям закона изнашивания с эмпирическими коэффициентами. Так, путем обработки результатов испытаний на износ металлической пары колodka — ролик (сухое трение), В. Ф. Лоренц (1937) вывел следующую формулу для скорости суммарного износа пары:

$$I = (5,17p - 0,4V^2 + 4,3V - 10,3) \text{ мг/м},$$

справедливую при $p = 2 \div 5 \text{ кгс/см}^2$, $V = 2,36 \div 9,5 \text{ м/мин}$ [66].

Экспериментальные исследования, выполненные Г. С. Клитеником и С. Б. Ратнером (1958 — 1964), показали, что закономерности изнашивания полимерных материалов (резина, пластмасса) хорошо описываются степенной зависимостью $I = cp^\gamma$, при этом в качестве основных механизмов изнашивания могут выступать абразивный, усталостный и фрикционный (растяжение поверхности с последующим разрывом) [34, 92, 108, 172]. Показатель γ определяется свойствами как самого материала, так и истирающего контртела. Например, в случае изнашивания резины абразивной шкуркой значения γ близки к 1 (аналогично

результату (1.2)), тогда как при использовании в качестве контртела металлической сетки значения γ меняются в диапазоне от 1 до 8, причем повышение жесткости резины и степени гладкости сетки приводит к увеличению γ .

При абразивном изнашивании стали свободным абразивом на показатель степени в зависимости $I = cp^\gamma$ оказывает влияние присутствие смазки: $\gamma \leq 1$ — смазанный контакт, $\gamma > 1$ — сухой контакт [27]. Такой результат, в частности, означает, что в исследуемой паре трения при малых нагрузках использование смазки усиливает износ.

По результатам испытаний на износ протекторной резины о шкурку в работе [8] была получена зависимость $I_t = c(\mu p V)^\gamma$ с показателем γ , принимающим значения из диапазона $0,95 \div 2,16$ в зависимости от типа резины и шкурки. Двучленный закон изнашивания $I_t = c_1 p V + c_2 (p V)^2$ был установлен для бронзофторопластовой композиции в условиях смазанного контакта [70].

Согласно исследованиям [149], закон изнашивания меди о сталь в условиях сухого трения при повышенных скоростях ($V \simeq 100$ м/с, $p/V < 0,37 \cdot 10^4$ Па·с/м) имеет вид равенства $I_t = cp/V$, которое подтверждается анализом тепловых и нагрузочных факторов процесса изнашивания. В работе [161] изучалось трение ряда металлов (медь, цинк, никель и др.) об оружейную сталь при более высоких скоростях скольжения ($V \simeq 300$ м/с). Было установлено, что при мощности трения $\mu p V > 2,5$ ГПа·м/с изнашивание металлов обуславливается их поверхностным оплавлением, и соответствующая скорость износа определяется зависимостью вида $I = Ae^{B/T_m}(\mu p V)^2$, где A и B — постоянные коэффициенты, T_m — абсолютная температура плавления металла.

Более сложная форма закона изнашивания была получена для титанового сплава при трении в различных средах (воздух, морская вода, машинное масло) [19]. Оказалось, что при изменении давления в диапазоне $p = 0,3 \div 3$ МПа и $V = 0,2$ м/с скорость износа меняется линейным образом: $I \sim p$, однако изменение скорости скольжения от 0,2 м/с до 1 м/с при постоянном давлении $p = 1$ МПа приводит к экспоненциальному росту скорости износа: $I \sim \exp(cV)$.

В работе Хольма [144] на основе анализа данных об изнашивании угольных щеток о медь при протекании через контакт электрического тока выводится следующее эмпирическое выражение:

$$I = c_0 \frac{\varphi_1(P)}{\varphi_1(0,5)} \cdot \frac{\varphi_2(\chi)}{\varphi_2(0,5)} \cdot \frac{\varphi_3(V)}{\varphi_3(10)} + c_1 \left(\frac{V}{10}\right)^{-\alpha} \cdot \left(\frac{P}{0,5}\right)^\beta \cdot \left(\frac{i}{10}\right)^\gamma \cdot \frac{\varphi_4(\chi)}{\varphi_4(0,5)},$$

в котором второе слагаемое обусловлено влиянием электрического тока на износ. Здесь i — сила тока в амперах, χ — относительная влажность воздуха, $0 \leq \chi \leq 1$, величины I , P , V имеют размерности см³/км,

кгс, м/с. Для щеток марки E147 Sipla экспериментально установлено, что $c_0 = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3$, $c_1 = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3$, $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0,5$,

$$\begin{aligned}\varphi_1(P) &= P + 0,7P^2, & \varphi_2(\chi) &= 1,05 - \chi^2, \\ \varphi_3(V) &= 1 + 0,25V, & \varphi_4(\chi) &= \sqrt{\chi + 0,05}.\end{aligned}$$

Монотонные зависимости скорости износа от давления и скорости скольжения часто приводились выше как результаты теоретического анализа процесса изнашивания. Укажем некоторые из них, полученные опытным путем.

Проведенные В. Ф. Лоренцем (1937) испытания на износ отожженной стали о сталь в условиях сухого трения выявили монотонно возрастающую зависимость I от приложенной нагрузки P при скорости скольжения $V = 0,165 \text{ м/с}$ [66]. Однако, при $V = 0,5 \text{ м/с}$ оказалось, что величина I практически не изменяется с ростом P .

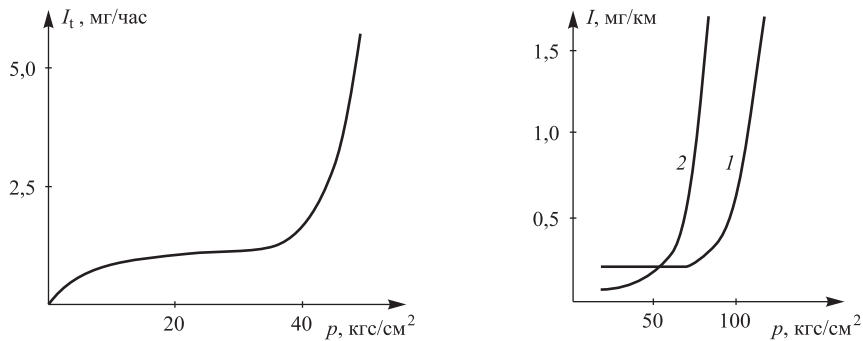


Рис. 1.2. Зависимость скорости износа от давления для графитового материала АУГ-4 (сухое трение по хрому, $V = 0,24 \text{ м/с}$) [82]

Рис. 1.3. Зависимость скорости износа электролитического хрома от давления при различных скоростях скольжения: $1,56 \text{ м/с}$ (1), $9,5 \text{ м/с}$ (2) [85]

Зависимость скорости износа от давления с переменным темпом роста, изображенная на рис. 1.2, была получена Л. А. Плуталовой (1950) для графитовых материалов [82]. Замедление темпа роста кривой $I_t = F(p)$ здесь связано с образованием на поверхностях образца и контртела защитных пленок ориентированного графита, которые при больших давлениях разрушаются, что приводит к резкому увеличению скорости износа.

Закономерности изнашивания электролитического хромового покрытия при сухом трении, представленные на рис. 1.3, также объясняются образованием и разрушением защитных оксидных пленок [85]. Примечательно, что при малых давлениях увеличение скорости скольжения снижает износ, тогда как при больших давлениях — увеличивает его.

Похожие зависимости имеют место при изнашивании ряда других материалов, например, стали 45 о смазанную металлокерамику [9], алюминиевых сплавов о малоуглеродистую сталь (сухое трение) [148].

Исследования, выполненные Барвеллом и Стрэнгом (J. T. Burwell, C. D. Strang; 1952), показали, что изнашивание образца из мягкой стали о закаленную сталь (сухое трение) подчиняется линейному закону $I = c\rho$ для давлений, не превышающих значения $HВ/3$, где $HВ$ — твердость образца [124]. При давлениях $p > HВ/3$ наблюдается перенос материала образца на контртело с образованием термоупрочненных выступов, что приводит к усилению износа образца и резкому росту кривой $I = F(p)$.

Возрастание скорости износа с ростом нагрузки было установлено в случае сухого трения алюминиевого образца по стали при двух скоростях скольжения: 0,18 м/с и 12,5 м/с, при этом оказалось, что более высокая скорость скольжения понижает величину I на несколько порядков [141].

Результаты испытаний на износ инконикеля о закаленную сталь [147] демонстрируют значительное влияние давления на характер зависимости I от V . При нагрузке $P = 0,269$ кгс кривая $I = F(V)$ возрастает,

тогда как при $P = 1,2$ кгс — убывает. По-другому влияет нагрузка на износ стали 45 о твердый сплав ВК6 в присутствии загрязненного масла [10]. Здесь при малой нагрузке ($P = 50$ кгс) кривая $I = F(V)$ убывает, а при большей нагрузке ($P = 75$ кгс) — возрастает, пересекаясь с первой кривой в точке $V \simeq 1$ м/с.

Скорость скольжения может по-разному влиять на скорости взаимного износа элементов пары трения. Так, в условиях сухого трения стали 45 по текстолиту при увеличении V скорость износа текстолита растет, а стали — снижается, что

обуславливается образованием защитной пленки на поверхности стального образца [6].

Представленные на рис. 1.4 результаты работы [65] свидетельствуют о том, что тип окружающей среды может кардинально менять характер зависимости $I_t = F(p)$. Снижение скорости износа с ростом давления (случай 1) здесь обуславливается смазочным действием глинистого раствора и затруднением доступа абразивных частиц в зону трения.

Законы изнашивания с экстремумами. На рис. 1.5 схематично изображены распространенные виды таких законов, установленные экспе-

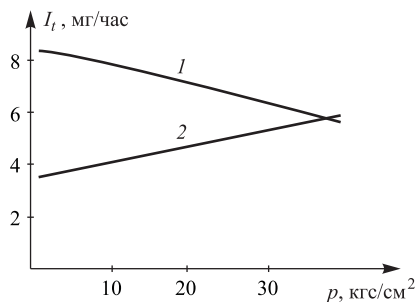


Рис. 1.4. Влияние давления на скорость износа стали 40X о резину в глинистом растворе (1) и в воде (2), содержащих кварцевый песок [65]

риментально для различных материалов и условий трения. Подобные кривые позволяют компактным образом описывать характерные особенности зависимостей $I = F(p, V)$ (количество и тип экстремумов, поведение на бесконечности). В дальнейшем, ссылаясь на кривые типа *a* или *б*, мы будем иметь в виду рис. 1.5.

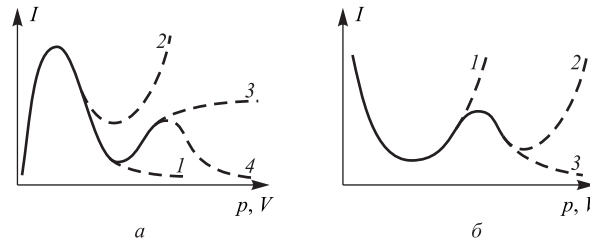


Рис. 1.5. Характерные зависимости скорости износа от давления и скорости скольжения

Снижение и возрастание скорости износа при изменении давления и скорости скольжения в законах изнашивания с экстремумами обуславливаются возникновением благоприятных условий трения (например, упрочнение поверхности, образование защитных пленок) и исчезновением таких условий. Неограниченный рост скорости износа при повышенных значениях p и V (кривые *a2*, *б1*, *б2*) обычно связан с усилением процессов разрушения поверхности в результате ее фрикционного разогрева.

Зависимости $I = F(p)$ типа *a1* встречаются в случае абразивного изнашивания, при этом снижение скорости износа при больших давлениях может быть связано с раздавливанием абразива [30], затруднением его проникновения в зону трения [72], изменением механических свойств изнашиваемого материала [102].

На рис. 1.6 изображена кривая, характеризующая износ холоднокатаной стали в условиях фреттинг-коррозии и демонстрирующая снижение до нуля скорости износа при больших давлениях, что объясняется уменьшением величины проскальзывания в зоне трения [191]. В монографии [18] приводятся кривые $I = F(p)$ типа *a1*, полученные на основе фреттинг-коррозионных испытаний стали 45, а сниже-

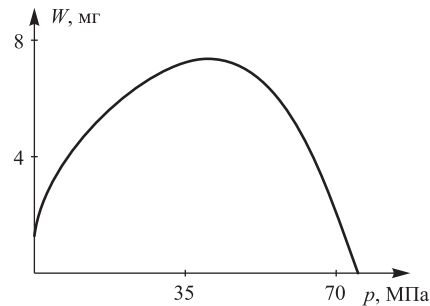


Рис. 1.6. Влияние давления на фреттинг-коррозионный износ холоднокатаной стали за 67800 циклов [191]

ние скорости износа связывается с затруднением доступа окислительной среды в зону трения.

Результаты испытаний на износ, представленные П. К. Топехой в монографии [105], свидетельствуют о наличии зависимостей $I = F(V)$ типа $a1$ и $a2$ для некоторых сортов стали, изнашиваемых в условиях сухого трения. Снижение скорости износа автор объясняет протеканием окислительных процессов на контакте.

Согласно результатам [62], зависимость $I = F(V)$ вида $a1$ имеет место при сухом трении чугуна по стали. Возрастание I при низких скоростях скольжения здесь объясняется образованием на стальной поверхности твердых наростов, выполняющих функцию абразива, которые при высоких скоростях скольжения начинают отслаиваться, что приводит к снижению I .

Зависимости $I = F(p)$ и $I = F(V)$ типа $a2$ были получены в работе [132] для высокоуглеродистой стали при сухом трении, а их поведение, по мнению авторов, связано с холодной закалкой (наклепом) поверхности трения. В работе Диса (K. Dies; 1939) [129] аналогичная зависимость I от p для низкоуглеродистой стали (сухое трение) объяснялась модификацией поверхности трения в результате химических реакций. Изучению влияния химических реакций в зоне трения металлов на характер закона изнашивания посвящено исследование [174], в котором рост скорости износа при малых давлениях связывается с образованием окисла Fe_2O_3 , а последующее снижение скорости износа объясняется образованием защитной пленки окисла Fe_3O_4 .

Испытания на износ, выполненные Келем и Зибелем (B. Kehl, E. Siebel; 1936), выявили зависимость $I = F(p)$ вида $a2$ для чугуна, изнашиваемого в присутствии смазки с абразивом при различных скоростях скольжения [151]. Похожие зависимости были установлены в работе [158], в которой исследовалось изнашивание низкоуглеродистой стали при различных нагрузочно-скоростных режимах. В отличие от вышеупомянутых результатов Келя и Зибеля, здесь значение локального максимума кривой $I = F(p)$ уменьшалось с ростом скорости скольжения, что объяснялось авторами, в частности, снижением степени зацепления между микронеровностями трущихся поверхностей при увеличении скорости скольжения.

Закон изнашивания $I = F(p)$ вида $a2$ был получен при испытаниях на износ алюминиевого образца в емкости с маслом, содержащем абразивные частицы [134]. Выявленное локальное снижение скорости износа авторы работы связывают с вытеснением абразива из зоны трения и прямым соприкосновением контактирующих тел.

Как показали испытания медесодержащих подшипниковых сплавов на износ в смазке, содержащей частицы чугуна, зависимость I от p для таких сплавов имеет вид кривой $a2$ при $V = 1,31$ м/с, однако увеличение скорости скольжения до величины 5,24 м/с приводит к монотонной зависимости I от p [159]. Этот результат свидетельствует о возможно-

сти существенного влияния скорости скольжения на характер закона изнашивания $I = F(p)$.

Исследования сухого трения чугуна приводят к закону изнашивания $I = F(V)$ типа *a2* при различных значениях давления [97]. В работе [162] похожий результат был получен для чугуна, изнашиваемого в присутствии смазки при $p = 0,2$ кгс/мм², в то время как при $p = 0,6$ кгс/мм² зависимость $I = F(V)$ получалась монотонно возрастающей.

Переходя к описанию более сложных законов изнашивания, отметим результат Розенберга для закаленной стали (рис. 1.1), который отвечает зависимости $I = F(p)$ типа *a4*. Зависимости $I = F(p)$ и $I = F(V)$ типа *a3* приводятся в работах [51] и [69], для капрона (изнашивание в вакууме) и армко-железа (сухое трение) соответственно.

Результаты исследований, изложенные в монографиях Б. И. Костецкого [44, 46], свидетельствуют о том, что зависимости $I = F(V)$, имеющие вид кривой *a4*, характерны для различных сортов стали при их изнашивании в условиях сухого трения. Такое поведение скорости износа объясняется Б. И. Костецким чередованием процессов окисления и схватывания, протекающих в зоне трения с ростом скорости скольжения.

В работе [121] для высокоуглеродистой стали (сухое трение) также получена кривая $I = F(V)$ типа *a4*, при этом первое снижение скорости износа здесь увязывается с упрочнением поверхности трения в результате мартенситного превращения на пятнах фактического контакта.

Параболические законы изнашивания $I = F(p)$ вида *b1* характерны для скользящих контактов, проводящих электрический ток [40, 76]. Подобное поведение скорости износа обусловлено наличием электроэрозийного механизма изнашивания, который ослабевает с ростом давления ввиду возрастания степени прилегания контактирующих поверхностей, при этом механическое повреждение поверхности, наоборот, усиливается. Аналогичным образом объясняется существование зависимости $I = F(V)$ вида *b1* при наличии электрического тока [128].

В работе [26] существование кривой $I = F(p)$ вида *b1* для отоженной углеродистой стали объясняется упрочнением (наклепом) и последующим его снятием в результате фрикционного разогрева стали.

Параболические законы изнашивания $I = F(V)$ вида *b1* имеют место для некоторых материалов в условиях сухого трения, при этом уменьшение скорости износа при малых V может обуславливаться вторичной закалкой (сталь 45) [42], образованием защитных оксидных пленок (цинк, никель) [46, 78], снижением интенсивности переноса материала (латунь) [143], уменьшением времени контактирования микронеровностей (электрокорунд) [32]. Результаты испытаний на износ стали 45 (сухое трение) также свидетельствуют о наличии параболической зависимости $I = F(V)$ при давлении 75 кгс/см², однако уменьшение давления в 5 раз приводит к тому, что скорость скольжения практически перестает влиять на скорость износа [17].

Зависимость I от V с локальным минимумом типа $b1$ при наличии монотонно возрастающей зависимости I от p была установлена для баббита и бронзы, изнашиваемых о сталь в присутствии смазки [25]. Согласно результатам, изложенным в монографии [17], изнашивание стали 45 в атмосфере кислорода (сухое трение) при $p = 75 \text{ кгс/см}^2$ сопровождается переходом от окислительного механизма разрушения поверхности к тепловому по мере возрастания скорости скольжения, вследствие чего зависимость $I = F(V)$ имеет вид кривой $b1$. Однако при пониженных контактных давлениях (5 кгс/см^2) износ стали 45 целиком обуславливается протеканием окислительных процессов на контакте и зависимость $I = F(V)$ принимает вид кривой $a1$.

Зависимостями $I = F(V)$ типа $b2$ и $b3$ характеризуется изнашивание покрытия из хрома в условиях сухого трения, случаю $p = 70 \text{ кгс/см}^2$ отвечает кривая $b2$, а случаю $p = 15 \text{ кгс/см}^2$ — кривая $b3$ [64]. Аналогичные законы $I = F(V)$ обнаружены при абразивном изнашивании резины [137], сухом трении бронзы [154] и стали [177].

Законы изнашивания со скачками. Резкое изменение скорости износа при некоторых значениях p и V (в критических точках) обычно связано со сменой механизмов изнашивания: с разрушением или образованием защитных пленок, переходом от упругого к пластическому деформированию поверхности трения и т.п. [56].

Наличие критического давления, при котором скорость износа скачкообразно возрастает, установлено для различных материалов. Например, исследования смены механизма изнашивания, приводящей к резкому повышению скорости износа с ростом давления для ряда сортов стали и чугуна, были выполнены Д. В. Конвисаровым (1938) [39]. Положительный скачок зависимости $I = F(p)$ был обнаружен Хёрстом и Ланкастером (W. Hirst, J. K. Lancaster; 1956) в ходе испытаний на износ латуни в присутствии смазки [142]. Резкое усиление износа авторы связывают с разрушением защитных пленок. Согласно результатам [155], пропускание электрического тока через скользящий контакт графита с медью устраняет скачок зависимости $I = F(p)$ для графита.

В экспериментах [121] резкий рост скорости износа наблюдался для полиэтилена вследствие его разогрева и размягчения по мере возрастания давления. Результаты работ [89, 150] свидетельствуют о том, что положительные скачки скорости износа дисульфида молибдена и закаленной стали (сухое трение) могут обуславливаться соответственно процессами окисления и эффектом отпускной хрупкости, тогда как резкое усиление износа резины при достижении некоторого давления может быть связано с переходом от усталостного разрушения поверхности трения резины к ее истиранию скатыванием [24].

Для определения критического давления, при котором происходит переход от пластического оттеснения материала на контакте к микро-

резанию, И. В. Крагельский (1968) вывел формулу [55]

$$p_c = \frac{c\sigma_s b}{2^{\nu+1}} \left[\frac{r}{h_{\max}} \left(1 - \frac{2\tau}{\sigma_s} \right) \right]^{\nu},$$

где c — коэффициент изменения эффективного значения предела текучести σ_s , $c \simeq 3$ [56], τ — прочность на срез адгезионной связи, r — радиус кривизны микронеровностей, h_{\max} , ν , b — прочие геометрические характеристики шероховатости. В монографии [56] условия смены режимов деформирования материала на контакте сформулированы в виде соотношений между величиной δ/r (δ — деформационное сближение поверхностей) и различными комбинациями упругих, пластических и тренияльных характеристик материала.

О существовании критического давления с резким падением скорости износа свидетельствуют представленные выше результаты Розенберга (рис. 1.1). Отрицательный скачок зависимости $I = F(p)$ также обнаружен при изнашивании латуни в вазелиновом масле [188]. Резкое падение скорости износа здесь объясняется намазыванием латуни на стальное контртело, что приводит к потере абразивной способности последнего.

Ряд исследований свидетельствует о возможности существования нескольких критических значений давления. В классических опытах Велша (N. C. Welsh; 1958) с высокоуглеродистой сталью (сухое трение) по мере увеличения давления вначале наблюдался положительный скачок скорости износа на два порядка, а затем — отрицательный, при этом скачкообразное снижение скорости износа обуславливалось термоупрочнением поверхности трения [120, 193]. Исследования [171, 186] выявили чередование положительных и отрицательных скачков зависимости $I = F(p)$ в связи с изменением характера окислительных процессов в зоне трения (поочередное образование оксидных пленок FeO и Fe₃O₄).

Существование критической скорости скольжения, при которой скорость износа резко возрастает, установлено в ходе испытаний на износ чугуна с использованием воды в качестве смазки [181]. Похожее поведение зависимости $I = F(V)$ было обнаружено для бронзы (сухое трение) в связи с переходом от мягкого режима изнашивания (наличие защитных оксидных пленок) к жесткому (металлический контакт, перенос материала) [154].

Отрицательный скачок зависимости $I = F(V)$ наблюдался в экспериментах Келя и Зибеля над чугуном (сухое трение) [151], а также в опытах И. В. Крагельского и Е. М. Швецовой по изнашиванию стали У8 [60]. Снижение износа здесь объясняется образованием защитных оксидных пленок и локализацией деформации в поверхностном слое.

Факторы процесса изнашивания. На характер закона изнашивания значительное влияние оказывают различные внешние факторы: струк-

тура и твердость материала, смазка, абразив, окружающая среда, температура, контртело, характер и направление скольжения. Ниже приводятся примеры такого влияния.

Структура и твердость материала. Влияние структуры материала на износ находит свое отражение в теоретических (например, формула (1.2)) и экспериментальных [111] результатах о зависимости скорости абразивного износа от твердости изнашиваемого материала. В цитированной выше работе [158] опубликованы результаты испытаний на износ высокоуглеродистой стали различной твердости (182 НВ и 230 НВ) и получены зависимости $I = F(p)$ типа $a1$, при этом оказалось, что повышение твердости приводит к снижению скорости износа при низких давлениях ($p < 20$ кгс/см²) и к ее увеличению при высоких давлениях.

Изменение твердости материала может оказывать существенное влияние на характер закона изнашивания, о чем свидетельствуют данные, представленные в табл. 1.1.

Т а б л и ц а 1.1. Влияние твердости некоторых сортов стали на характер их изнашивания (сухое трение, $V = 1,5$ м/с) [88]

Материал	Сталь 45X		Сталь 12ХН3А	
Твердость, HRC	15	55	~ 15	~ 55
Зависимость $I = F(p)$	$a1$ (рис. 1.5)	возрастающая	убывающая	$a1$ (рис. 1.5)

Согласно результатам работы [52], предварительное деформирование стали 1Х18Н9Т на 60% меняет характер ее изнашивания так, что первоначально монотонно возрастающая зависимость $I = F(V)$ переходит в кривую типа $a2$. Такая же операция в отношении алюминия А2, наоборот, переводит зависимость $I = F(V)$ типа $a2$ в монотонно возрастающую. Подобные трансформации закона изнашивания объясняются процессами механохимического окисления и схватывания в зоне трения.

Существенное влияние на износостойкость металла оказывает присутствие водорода в поверхностном слое. Исследования [1] показали, что при низком содержании водорода в нормализованной стали 45 зависимость $I = F(p)$ для нее в условиях трения со смазкой является убывающей. Повышение концентрации водорода снижает (увеличивает) износ в области малых (больших) давлений, при этом зависимость $I = F(p)$ становится возрастающей.

Смазка, абразив. Хорошо известно, что использование смазки приводит к снижению износа. Смазка также может влиять на характер закона изнашивания. Например, согласно результатам [50], изнашивание стали в вазелиновом масле описывается монотонной зависимостью $I = F(p)$, однако добавка в масло 0,2% олеиновой кислоты меняет эту

зависимость, и у нее появляются локальные экстремумы. Как показали исследования [163], при сухом трении по чугуноу скорость износа сплава Al–4,3% Cu падает с ростом давления. Использовании смазки снижает износ этого сплава на 2 порядка, но при этом наблюдается резкое возрастание кривой $I = F(p)$ в области высоких давлений, что объясняется разрывом смазочной пленки.

Характер зависимости скорости износа от скорости скольжения также подвержен влиянию смазки. Так, в случае изнашивания стали 10 в условиях сухого трения зависимость $I = F(V)$ имеет вид кривой *a4* с ярко выраженным первым локальным максимумом, тогда как при использовании смазки влияние скорости скольжения на скорость износа практически незаметно [46].

Влияние твердости абразивных частиц, присутствующих в смазке, на характер закона изнашивания изучался в работе [159] для медесодержащего сплава. Было установлено, что в случае мягких частиц чугуна зависимость $I = F(p)$ имеет вид кривой *a2*, а в случае твердых частиц Cr_2O_3 эта зависимость является монотонно возрастающей. Основываясь на концепции усталостного разрушения поверхности трения, авторы работы [133] выполнили расчет износа стали в присутствии смазки с абразивом и получили зависимость

$$I = \begin{cases} c_1, & n < n_*, \\ c_2 p, & n \geq n_*, \end{cases}$$

где n — концентрация абразивных частиц, n_* — некоторое критическое значение n . Справедливость полученной зависимости также была подтверждена экспериментально.

Окружающая среда. Влияние окружающей газовой среды на закон изнашивания впервые исследовал Дис (K. Dies; 1939) [129]. Оказалось, что при изнашивании низкоуглеродистой стали в условиях сухого трения на воздухе зависимость $I = F(p)$ имеет вид кривой *a2*, тогда как при изнашивании в атмосфере кислорода она становится монотонно возрастающей. Подобный эффект Дис объясняет протеканием химических реакций с образованием защитных пленок и механическим разрушением материала в зоне трения. В более поздней работе [158] похожие эффекты были обнаружены для азота и воздуха, имеющих различную влажность.

Закон изнашивания $I = F(p)$ типа *a1* встречается при фреттинг-коррозионном изнашивании стали в атмосфере различных газов (азот, кислород, воздух) [18]. Снижение износа при больших давлениях здесь объясняется затруднением доступа газовой среды в зону трения. В результате испытаний на износ отожженной стали (сухое трение) в разреженном воздухе (10^{-3} мм рт. ст.) было установлено существование критического давления, ниже которого износ отсутствует, при этом в обычной атмосфере износ имеет место при любых давлениях [152].

Экспериментальные исследования [77, 78], выполненные И.Г. Носовским (1956), свидетельствуют о значительном влиянии газовой среды на зависимость $I = F(V)$ для различных металлов, что объясняется образованием и разрушением защитных пленок. Например, при изнашивании на воздухе пары трения из стали 45 (сухое трение) эта зависимость имеет вид кривой aI , однако для атмосферы аргона или двуокиси углерода кривая $I = F(V)$ вначале монотонно возрастает, после чего значения I почти не изменяются. Согласно результатам [79], тип газовой среды существенно влияет на характер изнашивания висмута: на воздухе зависимость $I = F(V)$ имеет локальный максимум, а в атмосфере аргона — локальный минимум.

Испытания на износ стали 45 в атмосфере разряженного воздуха (10^{-5} мм рт. ст., $V < 0,4$ м/с) [78] приводят к закону изнашивания $I = F(V)$ вида bI , тогда как при нормальных условиях скорость износа почти не изменяется с ростом V . Результаты исследований закона изнашивания металлов при атмосферных давлениях вплоть до 10^{-9} мм рт. ст. представлены в монографии [57].

Температура. Влияние температуры на скорость износа носит неоднозначный характер. Об этом, например, свидетельствуют немонотонные зависимости скорости износа от температуры поверхности трения, полученные для различных материалов [80, 114].

Согласно результатам работы [158], при изнашивании мягкого железа искусственное охлаждение пары трения увеличивает (уменьшает) скорость износа при малых (больших) давлениях. Исследования [153] показали, что изнашивание латуни об инструментальную сталь (сухое трение) при температурах 20°C и 350°C описывается непрерывными кривыми $I = F(p)$, тогда как при промежуточных температурах (200°C и 300°C) имеет место скачкообразное увеличение скорости износа.

В работе [74] изучалось сухое трение капрона о сталь со скоростью скольжения 13,2 м/мин, при этом проводились дополнительные испытания с искусственным охлаждением пары трения водой. На рис.1.7 представлены полученные результаты, которые говорят о значительном влиянии фактора охлаждения на износ капрона.

Как показывают результаты, изложенные в монографии [78], изнашивание нормализованной стали в условиях сухого трения при комнатной температуре описывается законом $I = F(V)$ типа $b3$, который с повышением температуры до 150°C трансформируется в более простой закон изнашивания типа aI со слабой вариацией величины I . Подобное поведение скорости износа объясняется образованием и разрушением защитных поверхностных пленок.

Контртело. Влияние контртела на закон изнашивания прежде всего проявляется в зависимости скорости износа от шероховатости контртела, что учитывается в ряде теорий изнашивания (например [56, 57, 119, 139]). Согласно результатам [181], при сухом трении

чугуна по чугуну $I = cr^2$, тогда как при использовании стального контртела скорость износа чугуна зависит от давления линейным образом. Линейная зависимость I от p характерна для изнашивания резины абразивной шкуркой, в то время как при трении резины по резине имеет место изнашивание скатыванием и кривая $I = F(p)$ принимает вид параболы [96].

Влияние контртела на процесс изнашивания может обуславливаться теплопроводящими свойствами материала контртела, что продемонстрировано в работе [135]. Согласно полученным результатам, скорость износа полиацетала о стекло описывается монотонно возрастающей зависимостью $I = F(V)$, но при использовании стального контртела с большей теплопроводностью эта зависимость становится немонотонной и имеет вид *a2*. Результаты работы [156] свидетельствуют о влиянии типа контртела на критическое значение скорости скольжения, при котором наблюдается скачкообразное увеличение скорости износа электрографита.

Геометрия контртела влияет на размер области контакта, который, в свою очередь, оказывает влияние на температуру в зоне трения и, следовательно, на износ. Это было установлено в работе [43] для образцов цилиндрической формы из стали 10, изнашиваемых торцами о стальной диск в условиях сухого трения при одинаковом давлении. Оказалось, что изменение диаметра образца с 2 мм до 4 мм приводит к падению скорости износа примерно в 3 раза, при этом зависимость $I = F(V)$ меняет свой вид с *a2* на *a4*. Увеличение размера области контакта повышает критическое значение скорости скольжения, при котором наблюдается резкий рост скорости износа стали 60 [48]. Влияние размера области контакта на скорость износа также изучалось в работах [17, 46, 117].

Характер и направление скольжения. Кинематика элементов пары трения является одним из факторов температурного режима и, соответственно, влияет на закон изнашивания. О таком влиянии свидетельствуют различные кривые $I = F(p)$, полученные в работе [158] для мягкого железа в зависимости от того, изнашивается оно о вращающийся диск или о пластину, совершающую возвратно-поступательное движение с той же средней скоростью. Иной механизм влияния характера движения на износ описан в работе [123] при испытаниях ультравысокомолекулярного полиэтилена. Здесь повышение износа при переходе

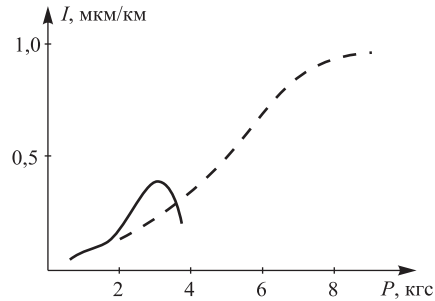


Рис. 1.7. Зависимости скорости износа капрона от нагрузки [74]. Штриховая линия отвечает испытаниям с искусственным охлаждением

от однонаправленного скольжения к разнонаправленному объясняется интенсивным образованием частиц износа.

В качестве причины зависимости износа тел от направления их относительного движения может выступать анизотропия свойств поверхности трения, что впервые было обнаружено при испытаниях на износ графита [125]. Как показали исследования [131], изменение направления скольжения сапфира при его трении о сталь может изменить характер зависимости $I = F(V)$ с возрастающего на убывающий. Подобный эффект обуславливается слоистой структурой сапфира, ориентация которой относительно направления скольжения оказывает влияние на механизм его поверхностного разрушения.

Согласно результатам работы [90], массовый износ диска из стали 45 о бронзовый палец примерно в 2 раза превышает массовый износ пальца из той же стали о бронзовый диск. Столь значительное изменение износа объясняется авторами дополнительным фактором усталостного разрушения поверхности диска вследствие циклического характера воздействия на нее пальца.

Различный массовый износ элементов пары трения палец–диск, изготовленных из одинакового материала (бронза, сталь, чугун), но изнашиваемых при разных скоростных режимах может быть объяснен различием температуры пальца и диска, влияющей на процессы схватывания и переноса материала в зоне трения [31]. В работе [33] для бронзовых пальца и диска были получены линейные зависимости $I = F(p)$ и зависимости $I = F(V)$ типа aI , при том, что массовый износ диска в несколько раз превышал износ пальца. Согласно экспериментальным данным [32], два одинаковых ролика, контактирующих друг с другом и вращающихся с разной скоростью, изнашиваются по-разному, что также объясняется разностью их температур. Например, при использовании бронзы в качестве материала роликов, для медленно вращающегося ролика получена зависимость $I = F(V)$ с локальным максимумом, тогда как для ролика с большей скоростью вращения и более высокой температурой эта зависимость имеет локальный минимум.

Дальнейшее изложение будет посвящено износоконтактной задаче, которая использует закон изнашивания $I = F(p, V)$ в качестве эволюционного уравнения. Закон изнашивания, различные формы которого описаны выше, представляет собой трибологический аспект износоконтактной задачи, объединяя в себе (с той или иной степенью достоверности) все многообразие физико-химических процессов, протекающих в зоне трения изнашиваемых тел.

§ 1.2. Износоконтактная задача

1.2.1. Развитие теории (обзор основных результатов)

Ниже будет дан краткий обзор основных результатов, связанных с развитием и становлением теории контактного взаимодействия при наличии износа. Более подробный обзор различных постановок и результатов решения износоконтактной задачи можно найти, например, в монографии [73].

Классическая износоконтактная задача состоит в расчете износа и давления в процессе изнашивания пары трения на основе закона $\partial W/\partial t = F(p, V)$, при этом в каждый момент времени давление p находится из решения соответствующей контактной задачи, а скорость скольжения V определяется кинематикой пары трения. Первые методики расчета износа с привлечением давления не учитывали деформирования изнашиваемых тел, и решение контактной задачи в них не использовалось. По сути, эти методики были основаны на модели изнашивания жестких тел, в которой давление и соответствующая скорость износа абсолютно жестких тел находятся из условия их конформного (приработанного) контакта. В 1860 году Рейе (Т. Reye) [165], исходя из такого условия, проанализировал изнашивание конического упорного подшипника скольжения и установил, что давление p в нем на расстоянии r от оси вращения удовлетворяет равенству $pr/\sin\theta = \text{const}$, где θ обозначает угол наклона поверхности трения к оси вращения. Этот результат был подтвержден более поздними расчетами в работе [38], в которой также была определена эпюра давления при изнашивании радиального подшипника скольжения: $p(x) = p_0 \cos x$ (x — угловая координата). Общая модель изнашивания жестких тел, допускающая износ обоих трущихся тел при нелинейном законе изнашивания была построена А. С. Прониковым (1956) [86].

В вышеупомянутой работе [165] встречаются рассуждения о взаимном влиянии износа и давления применительно к упорному подшипнику, на основе которых Рейе делает вывод о снижении давления в местах области контакта с повышенным износом. Похожие рассуждения содержатся в монографии А. И. Сидорова (1929) [98], где словесно описывается процесс перераспределения («саморегулирования») давления в упорном подшипнике, в результате чего первоначально неравномерное распределение скорости износа по области контакта становится равномерным. В этой же монографии приводится интегральное выражение для износа вида

$$W(t) = \int_0^t V F(p(\tau)) d\tau,$$

при этом допускается произвольный закон изнашивания $I = F(p)$.

Первой строгой постановкой контактной задачи с износом следует считать рассмотренную Б. Я. Гинцбургом (1945) задачу об изнашивании поршневого кольца [16]. Упругое деформирование кольца им описывалось дифференциальным уравнением изгиба кривого бруса, а для решения полученного уравнения кинетики изнашивания был предложен численный разностный метод. Были рассмотрены случаи линейного ($I = c_1 p$) и параболического ($I = c_2 p^2$) законов изнашивания.

Значительный шаг в развитии теории износоконтактной задачи был сделан в связи с использованием для описания деформационных свойств изнашиваемых тел модели Винклера, которая устанавливает линейную зависимость деформационного перемещения (осадки) поверхности от приложенного давления. В работе [87] эта модель применялась для расчета кинетики обоюдного изнашивания двух дисков (плоской пары) при линейном законе $I = cpV$. Более детально такая постановка износоконтактной задачи исследовалась в [23]. В работе [28] для постановки износоконтактной задачи использовалась модель Винклера с нелинейной зависимостью осадки от давления.

Здесь уместно упомянуть о результате Миндта (W. Mindt; 1923) [160], который задолго до вышеуказанных работ неявно использовал модель Винклера, предложив для описания кинетики шлифования следующее уравнение: $dW(t)/dt = \alpha(W_* - W(t))$, где W_* — предельная величина сошлифованного материала. При фиксированном расстоянии шлифовального инструмента от обрабатываемой детали и линейном законе изнашивания, правую часть этого уравнения можно интерпретировать как осадку поверхности детали, линейно связанную с контактным давлением. В качестве решения предложенного уравнения Миндт приводит выражение $W(t) = W_*(1 - e^{-\alpha t})$.

Износоконтактная задача для упругих тел сводится к более сложным интегральным уравнениям, и впервые такую задачу для упругого полупространства при линейном законе изнашивания поставил М. В. Коровчинский (1971) [41]. Для решения интегрального уравнения кинетики изнашивания он предложил использовать преобразование Лапласа, заменяющее в этом уравнении оператор Вольтерра алгебраическим выражением.

Систематическое исследование различных постановок износоконтактной задачи с использованием методов математического анализа было положено работами Л. А. Галина, рассмотревшего ряд задач для балки, слоя, полупространства (осесимметричный случай) и предложившего для их решения эффективные методы (например, метод разделения переменных) [13, 14].

1.2.2. Постановка износоконтактной задачи

Поясним основные аспекты постановки износоконтактной задачи на примере изнашивания деформируемого тела скользящим по нему контр-

телом, которое считается абсолютно жестким и неизнашиваемым. Такое контртело будет далее называться индентором.

Будем считать, что внедрение индентора в деформируемое тело происходит плоскопараллельно, без перекосов и поворотов. Начало системы координат xuz свяжем с некоторой точкой тела, направив ось y по нормали к его поверхности, находящейся в контакте с индентором. Для определенности, в качестве деформируемого тела возьмем композицию основания с тонким упругим слоем (покрытием), который изнашивается цилиндрическим индентором, скользящим вдоль своей образующей (направляющая скольжения). Если координатную ось z расположить вдоль образующей индентора, то область контакта можно представить отрезком $[-a, b]$ оси x (рис. 1.8).

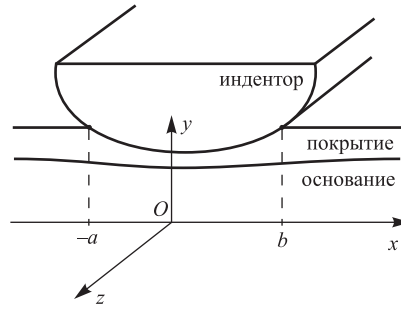


Рис. 1.8. Взаимодействие индентора с изнашиваемым телом (композиция покрытие—основание)

В процессе изнашивания происходит изменение формы контактирующих тел, а следовательно, и характеристик износоконтактного взаимодействия: давления, площади контакта и самого износа. Решение износоконтактной задачи состоит в определении эволюции этих характеристик. Соответствующая система уравнений включает в себя закон изнашивания, условия контакта и равновесия, а также деформационное соотношение.

Закон изнашивания устанавливает связь интенсивности I изнашивания с давлением p и скоростью V скольжения индентора для каждой точки x поверхности трения. Если в качестве I использовать скорость роста линейного износа W во времени, то закон изнашивания примет вид

$$\dot{W}(x, t) \equiv \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = F(p(x, t), V), \quad (2.1)$$

причем $F(p, V)$ — положительная функция. Здесь и далее аргументом t обозначается время, при этом момент $t = 0$ принимается за начало изнашивания, так что $W(x, 0) \equiv 0$. В случае искривленной поверхности трения под \dot{W} понимается составляющая скорости износа, нормальная к поверхности. В общем случае скорость V скольжения в законе изнашивания (2.1) может зависеть от координаты x и времени t .

Форма закона изнашивания (2.1) не является единственно возможной при постановке износоконтактной задачи. Согласно экспериментальным данным [83, 166], в некоторых случаях правая часть (2.1) может явно зависеть от времени, так что $\dot{W} = F(p, V, t)$. Подобные законы изнашивания также используются в контактной задаче с износом, вызванным локальным оплавлением [2]. Отметим, что учесть явную зависимость скорости износа от времени при численном решении задачи не

составляет труда. В работе [36] рассматривается постановка износоконтактной задачи с законом изнашивания, учитывающим прямое влияние температуры T поверхности трения на скорость износа: $\dot{W} = F(p, V, T)$.

Некоторые постановки износоконтактной задачи используют законы изнашивания наследственного типа [11, 35, 63]:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \int_0^t K(t - \tau) p^\gamma(x, \tau) d\tau, \\ W(x, t) &= \int_0^t K_1(\tau) K_2(t - \tau) p(x, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.2)$$

в которых функции $K(s)$, $K_1(s)$, $K_2(s)$ определяются износостойкими свойствами материала. Обоснованием наследственной формы закона изнашивания служат общие представления о закономерностях процесса изнашивания [7, 80], однако четких экспериментальных подтверждений существования зависимостей (2.2) для конкретных материалов в литературе не встречается.

Условие контакта связывает перемещение v поверхности тела вдоль оси y в пределах области контакта с геометрией контактирующих тел в каждый момент изнашивания. Выведем это условие для рассматриваемой композиции покрытие—основание, изнашиваемой цилиндрическим индентором. Толщину покрытия обозначим через $h(x, t)$. Форму индентора опишем уравнением $y = g(x) + \text{const}$, где $g(x)$ — известная функция, а значение константы, определяемое произвольным смещением индентора вдоль оси y , является несущественным.

Возьмем две точки A и B на поверхности покрытия, находящиеся в контакте с индентором и имеющие координаты x_0 и x соответственно. Обозначим через A_s и B_s точки на поверхности индентора, с которыми совмещаются точки A и B при контакте (рис. 1.9).

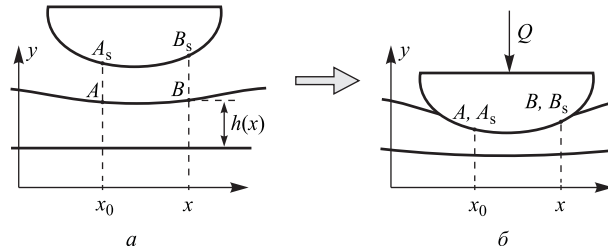


Рис. 1.9. Переход композиции покрытие—основание из свободного состояния (а) в деформированное (б)

В произвольный момент времени t мысленно переместим индентор вдоль оси y в положение, при котором отсутствует его контакт с покрытием и композиция покрытие—основание находится в недеформированном состоянии (рис. 1.9а).

Соответствующие ординаты точек A, A_s, B, B_s обозначим через $y(x_0, t), y_s(x_0, t), y(x, t), y_s(x, t)$ и заметим, что по определению функций $h(x, t)$ и $g(x)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} y(x, t) - y(x_0, t) &= h(x, t) - h(x_0, t), \\ y_s(x, t) - y_s(x_0, t) &= g(x) - g(x_0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если вернуть композицию покрытие—основание обратно в деформированное состояние (рис. 1.9б), придав границам индентора и покрытия некоторые перемещения v_s и v , то ординаты точек A, A_s, B, B_s примут значения $y(x_0, t) + v(x_0, t), y_s(x_0, t) + v_s(x_0, t), y(x, t) + v(x, t), y_s(x, t) + v_s(x, t)$.

В деформированном состоянии точки A и B совпадают с точками A_s и B_s , что означает равенство разностей их ординат:

$$\begin{aligned} y(x, t) + v(x, t) - (y(x_0, t) + v(x_0, t)) &= \\ &= y_s(x, t) + v_s(x, t) - (y_s(x_0, t) + v_s(x_0, t)). \end{aligned}$$

Исключим из последнего равенства разности координат y и y_s с помощью (2.3) и учтем, что для абсолютно жесткого индентора: $v_s(x, t) = v_s(x_0, t)$. В результате можно прийти к условию контакта

$$v(x, t) - v(x_0, t) + h(x, t) - h(x_0, t) = g(x) - g(x_0). \quad (2.4)$$

Если теперь координату x_0 считать фиксированной, а x — переменной и учесть, что толщина h покрытия связана с его износом W равенством: $h(x, t) = h_0 - W(x, t)$, где h_0 — начальная толщина покрытия, то условию контакта (2.4) можно придать более лаконичный вид:

$$-v(x, t) + W(x, t) = \delta(t) - g(x), \quad x \in [-a(t), b(t)], \quad (2.5)$$

в котором величина δ характеризует внедрение индентора.

Фигурирующее в (2.5) перемещение v по определению представляет собой перемещение границы покрытия вдоль оси y . В дальнейшем перемещение v будет отождествляться с нормальным перемещением границы покрытия, что допустимо, если последняя искривлена незначительно, т. е.

$$|g'(x)| \ll 1, \quad |W'(x, t)| \ll 1. \quad (2.6)$$

Условие равновесия индентора связывает приложенную к индентору нагрузку с распределением давления. В рассматриваемом случае, когда геометрия индентора не меняется вдоль его длины, а поверхность контакта является номинально плоской условие равновесия имеет вид:

$$Q(t) = \int_{-a}^b p(x, t) dx, \quad (2.7)$$

причем под Q здесь подразумевается нормальная к поверхности контактной нагрузка, приходящаяся на единицу длины индентора вдоль оси z .

Полная система уравнений равновесия индентора включает в себя (кроме условия (2.7)) также равенство между моментами от контактного давления и внешних сил [14]. Однако по условию внедрения индентора в изнашиваемое тело происходит без поворота, а это предполагает наличие внешнего момента, обеспечивающего такой характер внедрения и совпадающего с моментом от контактного давления. Таким образом, условие равенства моментов автоматически выполняется и необходимость в его рассмотрении отпадает.

Деформационное соотношение устанавливает связь нормального граничного перемещения v с контактными напряжениями. В случае, когда деформирование тел описывается линейной теорией упругости, то, пренебрегая касательным контактным напряжением или считая его пропорциональным давлению (кулоново трение), связь перемещения v с давлением p можно символически представить в виде [14, 73]

$$v(x, t) = (\mathcal{A}p)(x, t), \quad (2.8)$$

где \mathcal{A} — оператор, действующий на $p(x, t)$ как функцию переменной x .

Для рассматриваемого цилиндрического индентора, движущегося вдоль или перпендикулярно своей образующей, оператор \mathcal{A} определяется на основе двумерной постановки контактной задачи вне зависимости от наличия или отсутствия трения. Действительно, при движении индентора перпендикулярно своей образующей (вдоль оси x , рис. 1.8) композиция покрытие—основание находится в плоском (xy) деформированном состоянии. Если же индентор движется вдоль своей образующей (вдоль оси z , рис. 1.8), то напряженно-деформированное состояние композиции расщепляется на две составляющие (системы), одна из которых отвечает плоскому состоянию и определяет оператор \mathcal{A} . Поясним это обстоятельство подробнее.

Введем обозначение q_{tz} для контактного касательного напряжения вдоль оси z , тогда как касательное и нормальное контактные напряжения в плоскости xy будем обозначать через q_t и q_n , причем $q_n \equiv -p$. Упругие перемещения точек композиции покрытие—основание вдоль координатных осей x, y, z обозначим здесь через u, v, w . Оговоренные выше условия контактного взаимодействия обеспечивают неизменность перемещений u, v, w по координате z , вследствие чего система основ-

ных уравнений теории упругости в перемещениях принимает вид [109]

$$\begin{aligned}(1-2\nu)\Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0, \\ (1-2\nu)\Delta v + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0, \\ \Delta w &= 0,\end{aligned}\tag{2.9}$$

при этом коэффициент Пуассона ν может различаться для покрытия и основания, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа.

Первые два уравнения (2.9) описывают плоское деформированное состояние и полностью независимы от третьего уравнения. Ввиду отсутствия зависимости перемещений u , v , w от координаты z , внутренние напряжения σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} зависят по закону Гука только от перемещений u , v , а напряжения τ_{xz} , τ_{yz} — только от перемещений w , при этом, согласно формулам Коши [109]:

$$\begin{aligned}q_t &= (n_y^2 - n_x^2)\tau_{xy} + n_x n_y (\sigma_x - \sigma_y), \\ q_n &= n_x^2 \sigma_x + 2n_x n_y \tau_{xy} + n_y^2 \sigma_y, \\ q_{tz} &= n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz},\end{aligned}$$

где $\vec{n} = (n_x, n_y, 0)$ — нормаль к поверхности контакта. Другими словами, в композиции покрытие—основание существуют две независимые системы упругих перемещений и напряжений. Первая система отвечает плоскому деформированному состоянию, включает перемещения u , v , напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , q_t , $q_n = -p$ и, поэтому определяет оператор \mathcal{A} в (2.8). Вторая система представляет собой антиплоскую деформацию (сдвиг), описывается перемещением w и напряжениями τ_{xz} , τ_{yz} , q_{tz} и не влияет на вид оператора \mathcal{A} .

Отметим, что расщепление напряженно-деформированного состояния имеет место в случае осесимметричного контакта при наличии вращения с трением [14].

Износоконтактная задача состоит в определении неизвестных функций $W(x, t)$ и $p(x, t)$ на основе уравнений (2.1), (2.5), (2.7), (2.8) с начальными условиями

$$W(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = p_0(x),$$

при этом распределение $p_0(x)$ находится из решения контактной задачи для неизношенных тел. Постановка износоконтактной задачи предполагает, что одна из функций $Q(t)$ или $\delta(t)$ задана. В рассматриваемых далее постановках нагрузка $Q(t)$ считается заданной, тогда как внедрение $\delta(t)$ подлежит определению.

Изменение формы изнашиваемого деформируемого тела приводит к изменению граничных условий для него, что учитывается условием контакта (2.5). Кроме этого, изменение формы тела влияет и на оператор \mathcal{A} в деформационном соотношении (2.8). В общем случае учесть изменение оператора \mathcal{A} не представляется возможным ввиду отсутствия его выражения для тела произвольной формы. Зачастую в таком учете нет необходимости — например, при изнашивании полупространства или толстой полосы, когда износ мал по сравнению с размерами изнашиваемого тела [14]. Однако в случае изнашивания тонкого покрытия учёт влияния изменения формы контактирующих тел на связь давления с граничными перемещениями представляется существенным, т. к. здесь величины линейного износа могут достигать значений, сравнимых с толщиной покрытия. Для описания упругих свойств покрытия в этом случае следует пользоваться деформационным соотношением, учитывающим текущую толщину изношенного покрытия (см. далее раздел 2.1.1).

1.2.3. Основные методы решения износоконтактной задачи

В общем случае система уравнений (2.1), (2.5), (2.7), (2.8) износоконтактной задачи является нелинейной. Это обуславливается:

- а) возможной нелинейностью правой части закона изнашивания (2.1);
- б) возможной нелинейностью относительно искомым функций оператора \mathcal{A} из деформационного соотношения (2.8) (например, для сильноизношенного покрытия (раздел 2.1.1));
- в) изменением размера области контакта, что приводит к появлению неизвестных функций $a(t)$, $b(t)$, определяющих границы справедливости условия контакта (2.5) и пределы интегрирования в (2.7).

В частном случае линейной постановки износоконтактной задачи (например, при линейном законе изнашивания и неизменной области контакта) для построения ее решения широко используется метод разделения переменных (метод Фурье) [75].

Использование этого метода позволяет получать точные решения следующего вида:

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) e^{-\lambda_n t},$$

где λ_n и $p_n(x)$ — собственные числа и функции оператора, описывающего контактное деформирование тел [3, 13, 15, 20].

Нелинейные постановки износоконтактной задачи с растущей областью контакта в предположении, что упругие свойства контактирующих тел описываются моделью Винклера, а закон изнашивания является линейным по давлению, также допускают точные решения [5, 12, 21]. Существенным моментом таких постановок является то, что по мере изменения области контакта разные участки поверхности трения находятся в контакте и, соответственно, изнашиваются разное время. Это обстоятельство должно учитываться при интегрировании закона изнашивания (2.1) по времени.

Решение нелинейной износоконтактной задачи при более общих условиях возможно только в приближенном виде, и одним из эффективных средств для этого служит метод последовательных приближений [37]. В задаче об изнашивании тонкой полосы, связанной с упругой полуплоскостью при растущей области контакта [100], этот метод использовался как для определения давления из линейного уравнения, так и для решения нелинейного уравнения относительно скорости роста области контакта. В качестве малого параметра здесь выступает величина $\varepsilon \sim E_1 a_*/(E_2 h)$, где E_1 и E_2 — модули упругости полосы и полуплоскости, h — ширина полосы, a_* — заданный максимальный размер области контакта. Применение метода последовательных приближений для решения износоконтактной задачи с нелинейным законом изнашивания и растущей областью контакта продемонстрировано в [101].

Для решения нелинейной износоконтактной задачи находят применение асимптотические методы. Описанный в [4, 35] подход к решению задачи с нелинейным законом изнашивания и растущей областью контакта использует для давления асимптотическое разложение вида

$$p(x, t) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x, t), \quad \frac{p_{k+j}(x, t)}{p_k(x, t)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Неизвестные слагаемые в (2.10) находятся по рекуррентному алгоритму, в результате чего для слагаемого $p_k(x, t)$ получается последовательность уравнений, линейных относительно $p_k(x, t)$, но нелинейных относительно уже найденных функций $p_i(x, t)$, $i < k$. В работе [35] с помощью разложения типа (2.10) получено приближенное решение износоконтактной задачи для радиального подшипника скольжения на начальной стадии его изнашивания:

$$p(x, t) = p_0(x) + (A_0 \varepsilon)^{-1} \{[p_0(x)]^\gamma - 4\delta_1 \cos x\} t^\gamma, \\ p_0(x) = \frac{4\Delta}{A_0 \varepsilon} \left(1 - \frac{\cos x}{\cos a}\right),$$

где A_0 , ε , δ_1 , Δ — известные параметры, γ — показатель степени в законе изнашивания $I = c p^\gamma$.

Замена контактного давления его средним значением $Q/(2a)$ в слагаемых, содержащих малую величину p/E , позволяет произвести линеаризацию исходных уравнений с нелинейным законом изнашивания [5].

В процессе изнашивания упругие перемещения контактирующих поверхностей обычно остаются ограниченными, тогда как износ монотонно возрастает. Это обстоятельство дает возможность при достаточно развитом износе пренебречь в условии контакта (2.5) упругими перемещениями и тем самым перейти к модели изнашивания жестких тел [86]. Использование такого приближения позволяет получить ряд аналитических результатов относительно кинетики изнашивания. Например, в работе [106] получено следующее выражение для суммарного износа радиального подшипника скольжения: $S = 2R\Delta(\operatorname{tg} a - a)$, где R и Δ — радиус и зазор подшипника, a — половина угла контакта.

При решении нелинейной износоконтактной задачи широко используются численные подходы, основанные как на традиционных методах, так и на использовании специфических процедур.

Левая часть закона изнашивания (2.1) представляет собой дифференциальный оператор по времени, тогда как правая зависит от решения контактной задачи в соответствующий момент времени. Одним из традиционных подходов к численному решению подобного рода эволюционных задач, в том числе, с нелинейной правой частью, является пошаговый метод, в основе которого лежит дискретизация времени и использование конечно-разностного представления дифференциального оператора [29]. Применительно к нелинейным износоконтактным задачам пошаговый метод использовался в работах [22, 104, 106].

Эффективным приемом при решении износоконтактной задачи с изменяющейся областью контакта является отображение последней на область фиксированного размера [107]. А именно, если x — координата, $[-a(t), a(t)]$ — симметричная область контакта, $\Upsilon(t) = da(t)/dt$ — скорость роста области контакта, то, определяя безразмерную координату $X = x/a$ и соответствующие распределения износа $\tilde{W}(X, t) = W(x, t)$ и контактного давления $\tilde{p}(X, t) = p(x, t)$, закон изнашивания (2.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial \tilde{W}(X, t)}{\partial t} - \Upsilon(t) \frac{X}{a(t)} \frac{\partial \tilde{W}(X, t)}{\partial X} = F(\tilde{p}(X, t), V), \quad (2.11)$$

в котором координата X принадлежит фиксированной области $[-1, 1]$. Левая часть равенства (2.11), в отличие от (2.1), содержит дополнительную производную по X , однако, несмотря на это, переход к фиксированной области контакта упрощает процедуру численного решения износоконтактной задачи, т.к. при этом можно использовать неизменную координатную сетку узлов, и отпадает необходимость в разработке алгоритма учета новых точек, входящих в контакт.

Еще один прием, позволяющий упростить решение задачи с износом при растущей области контакта заключается в использовании размера a области контакта в качестве временного параметра задачи [99]. Замена t на a придает закону изнашивания (2.1) следующий вид:

$$\frac{\partial W(x, a)}{\partial a} = \frac{1}{\Upsilon(a)} F(p(x, a), V).$$

При том, что в правой части последнего равенства появляется дополнительный множитель $\Upsilon^{-1}(a)$, использование размера a в качестве временного параметра позволяет избавиться в уравнениях износоконтактной задачи от неизвестной функции $a(t)$, что упрощает их решение. Так, например, при замене t на a равенство (2.11) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{W}(X, a)}{\partial a} - \frac{X}{a} \frac{\partial \tilde{W}(X, a)}{\partial X} = \frac{1}{\Upsilon(a)} F(\tilde{p}(X, t), V), \quad (2.12)$$

и его интегрирование просто осуществляется по известным характеристикам дифференциального оператора в левой части (2.12) [99].

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1. Антошко В. Я. Влияние водорода на некоторые физико-механические свойства электролитического железа // Исследование водородного износа. — М.: Наука, 1977. С. 64–67.
2. Александров В. М. Контактная задача с учетом износа, вызванного локальным оплавлением // Физико-химическая механика материалов. 1986. № 1. С. 116–124.
3. Александров В. М., Галин Л. А., Пириев Н. П. Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 4. С. 60–67.
4. Александров В. М., Коваленко Е. В. К вопросу об изнашивании сопряжения вал—втулка // Трение и износ. 1982. Т. 3, № 6. С. 1016–1025.
5. Александров В. М., Коваленко Е. В. Аналитическое решение контактной задачи об изнашивании сопряжения вал—втулка // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 6. С. 985–995.
6. Билик Ш. М. Пары трения металл—пластмасса в машинах и механизмах. — М.: Машиностроение, 1966. 311 с.
7. Блюмен А. В. К вопросу о кинетике процессов трения и изнашивания и методах ее аналитического описания // Расчетно-экспериментальные методы оценки трения и износа. — М.: Наука, 1980. С. 27–34.
8. Бродский Г. И., Резниковский М. М., Сизиков Н. Н. Оценка износостойкости протектора шин по данным лабораторных испытаний резин // Резина — конструкционный материал современного машиностроения. — М.: Химия, 1967. С. 118–124.
9. Волков Ю. В. Моделирование контурного контакта при граничном трении применительно к разработке способов расчета износостойкости деталей машин // Моделирование трения и износа. — М.: НИИМАШ, 1970. С. 226–232.
10. Волков Ю. В., Волкова З. А., Кайгородцев Л. М. Долговечность машин, работающих в абразивной среде. — М.: Машиностроение, 1964. 116 с.
11. Гавриков М. В., Мазинг Р. И. Наследственно-стареющая модель изнашивания и ее применение к задачам с монотонно растущей зоной контакта // Трение и износ. 1988. Т. 9. № 2. С. 274–279.
12. Галахов М. А., Усов П. П. О расчете износа и толщины смазочного слоя в подшипниках скольжения с тонким вкладышем // Трение и износ. 1984. Т. 5. № 2. С. 239–250.
13. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 981–989.
14. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, 1980. 303 с.
15. Галин Л. А., Горячева И. Г. Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 807–812.
16. Гинцбург Б. Я. Теория и расчет поршневых колец. — М.: Машгиз, 1945. 123 с.

17. *Голего Н. Л.* Технологические мероприятия по борьбе с износом в машинах. — М.-Киев: Машгиз, 1961. 193 с.
18. *Голего Н. Л., Алябьев А. Я., Шевеля В. В.* Фреттинг-коррозия металлов. — Киев: Техніка, 1974. 270 с.
19. *Гольдфайн В. И., Зуев А. М., Клабуков А. Г., Лукина В. П.* Влияние окисления и наводороживания на трение и износ титановых сплавов // Исследование водородного износа. — М.: Наука, 1977. С. 71–80.
20. *Горячева И. Г.* Контактная задача при наличии износа для кольца, вложенного в цилиндр // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 363–367
21. *Горячева И. Г., Добычин М. Н.* Контактные задачи в трибологии. — М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
22. *Горячева И. Г., Солдатенков И. А.* Теоретическое исследование приработки и установившегося режима изнашивания твердых смазочных покрытий // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 3. С. 420–431.
23. *Данов Г.* Влияние износа и контактной эластичности на распределение давлений в дисковом контакте // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. — М.: Наука, 1971. С. 84–89.
24. *Евстратов В. Ф., Буйко Г. Н., Арензон Н. М., Смирнова Л. А., Сахновский Н. Л., Григоровская В. А., Шварц А. Г.* Зависимость износостойкости протекторных резин от типа полимера // Фрикционный износ резин. — М.-Л.: Химия, 1964. С. 141–161.
25. *Елин Л. В.* Некоторые характеристики трения металлов в условиях граничной смазки // Трение и износ в машинах. Всесоюзная конференция по трению и износу в машинах. Доклады. Т. 1. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1939. С. 277–287.
26. *Зайцев А. К.* Связь износа с наклепом // Трение и износ в машинах. Всесоюзная конференция по трению и износу в машинах. Доклады. Т. 1. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1939. С. 346–350.
27. *Ивашков И. И.* Экспериментальное исследование износа деталей шарниров цепей в условиях абразивного загрязнения // Трение и износ в машинах. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. Сб. 16. С. 51–80.
28. *Илиев Х.* Определяне формата на износената повърхнина // Годишник на ВУЗ. Техническа механика. 1979. Т. 14. Книга 3. С. 89–97.
29. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978. 512 с.
30. *Качалов Н. Н.* Основы процессов шлифовки и полировки стекла. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 275 с.
31. *Кащеев В. Н.* Износ при взаимном трении одноименных металлов // Физика металлов и металловедение. 1956. Т. 3. Вып. 2. С. 369–373.
32. *Кащеев В. Н.* Процессы в зоне фрикционного контакта металлов. — М.: Машиностроение, 1978. 213 с.
33. *Кащеев В. Н., Ткаченко Н. Я.* Трение бронзы по бронзе при различных скоростях и нагрузках // Известия ВУЗов. Физика. 1958. № 2. С. 171–173.
34. *Клитеник Г. С., Ратнер С. Б.* Изучение износостойкости резины при помощи металлической сетки // Каучук и резина. 1960. № 3. С. 19–25.

35. Коваленко Е. В. К расчету изнашивания сопряжения вал—втулка // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 66–72.
36. Коваленко Е. В., Евтушенко А. А. Износ подшипника скольжения с учетом тепловыделения от трения // Трение и износ. 1993. Т. 14. № 2. С. 259–269.
37. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. 543 с.
38. Колчин Н. И. Механика машин. Ч. 4. Трение в машинах. — М.-Л.: Машгиз, 1950. 192 с.
39. Конвисаров Д. В. Износ металлов. — М.-Л.: ГОНТИ НКТП СССР, 1938. 304 с.
40. Кончиц В. В., Мешков В. В., Мышкин Н. К. Триботехника электрических контактов. — Минск: Наука и техника, 1986. 256 с.
41. Коровчинский М. В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. — М.: Наука, 1971. С. 130–140.
42. Костецкий Б. И. Износостойкость деталей машин. — Киев-М.: Машгиз, 1950. 168 с.
43. Костецкий Б. И. Знос металів і масштабний ефект // Докл. АН УССР. 1951. № 2. С. 107–111.
44. Костецкий Б. И. Основные вопросы теории трения и изнашивания деталей машин. — Киев-М.: Машгиз, 1955. 52 с.
45. Костецкий Б. И. Основные положения теории изнашивания деталей машин. — Киев: КИГВФ, 1958. 31 с.
46. Костецкий Б. И. Сопротивление изнашиванию деталей машин. — М.-Киев: Машгиз, 1959. 479 с.
47. Костецкий Б. И. Трение, смазка и износ в машинах. — Киев: Техніка, 1970. 395 с.
48. Костецкий Б. И., Залецкий Г. И. О влиянии размера образцов на результаты испытания на износ // Заводская лаборатория. 1953. № 3. С. 348–352.
49. Костецкий Б. И., Натансон М. Э., Бершадский Л. И. Механо-химические процессы при граничном трении. — М.: Наука, 1972. 170 с.
50. Костецкий Б. И., Носовский И. Г., Бершадский Л. И., Караулов А. К. Надежность и долговечность машин. — Киев: Техніка, 1975. 405 с.
51. Костецкий Б. И., Носовский И. Г., Караулов А. К., Бершадский Л. И., Костецкая Н. Б., Ляшко В. А., Сагач М. Ф. Поверхностная прочность материалов при трении. — Киев: Техніка, 1976. 296 с.
52. Костецкий Б. И., Протопопов Б. В., Павлов Ю. В. Исследование трения и износа наклепанных металлов // Бурение нефтяных и газовых скважин. — М.: Недра, 1973. С. 41–51.
53. Крагельский И. В. О расчете интенсивности изнашивания трущихся поверхностей // ЖТФ. 1952. Т. 22. Вып. 1. С. 44–54.

54. Крагельский И. В. Износ как результат повторной деформации поверхностных слоев (частный случай контактирования деформируемой поверхности с абсолютно жесткой, шероховатой) // Известия вузов. Физика. 1959. № 5. С. 119–127.
55. Крагельский И. В. Трение и износ. — М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
56. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. — М.: Машиностроение, 1977. 513 с.
57. Крагельский И. В., Любарский И. М., Гусляков А. А., Трояновская Г. И., Удовенко В. Ф. Трение и износ в вакууме. — М.: Машиностроение, 1973. 216 с.
58. Крагельский И. В., Непомнящий Е. Ф. Об усталостном механизме износа при упругом контакте // Изв. АН СССР, Механика и машиностроение. 1963. № 5. С. 190–195.
59. Крагельский И. В., Фляйшер Г., Комбалов В. С., Тум Х. Расчет трения, износа и долговечности с позиций молекулярно-механической, усталостной и энергетической теорий // Проблемы машиностроения и автоматизации. 1986. № 12. С. 13–24.
60. Крагельский И. В., Швецова Е. М. Влияние скорости скольжения на изнашивание одноименных металлов // Трение и износ в машинах. — М.: Изд-во АН СССР, 1955. Сб. 10. С. 5–34.
61. Кузнецов В. Д. Механизм внешнего трения с точки зрения поверхностной энергии // V съезд Русских физиков. Перечень докладов. — М.-Л.: Гос. изд-во, 1926. С. 30–31.
62. Кузнецов В. Д. Наросты при резании и трении. — М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. 284 с.
63. Кузьменко А. Г. Контактные задачи с учетом износа для цилиндрических опор скольжения // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 3. С. 502–512.
64. Лазаренко В. К., Прейс Г. А. Износостойкость металлов. — М.-Киев: Машгиз, 1960. 220 с.
65. Ломакин В. С. Исследование износа втулок и поршневых колец грязевых насосов // Трение и износ в машинах. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. Сб. 11. С. 47–80.
66. Лоренц В. Ф. Износ металлов // Исследование напряжений и износа материалов в сельскохозяйственных машинах. Научные труды ВИСХОМ, вып. 4. — М.-Л.: ОНТИ, 1937. С. 217–286.
67. Лурье Е. Г., Ратнер С. Б., Барштейн Р. С. Проявление механизма пластификации при истирании поливинилхлорида // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169. № 6. С. 1370–1372.
68. Лысенко Л. И., Каденаций Л. А. Расчет интенсивности окислительного износа в условиях сухого трения // Технология и организация производства. 1973. № 3. С. 84–87.
69. Лысенко Л. И., Каденаций Л. А. Влияние изменения тонкой кристаллической структуры в процессе трения металлов на развитие различных видов изнашивания // Проблемы трения и изнашивания. — Киев: Техніка, 1975. Вып. 8. С. 80–82.

70. *Майорова Э. А., Левин А. Л., Лебусев В. М., Кутаренко В. С.* Металлофторопластовые подшипники скольжения (МФПС) в агрегатных станках // *Металлорежущие станки и автоматические линии*. 1973. № 5. С. 28–31.
71. *Малышев А. П.* Изнашиваемость металлов от трения // *Вестник Общества Сибирских Инженеров*. 1917. № 5-6. С. 17–34.
72. *Мархасин Э. Л.* Исследования абразивного изнашивания деталей глубинных нефтяных насосов // *Трение и износ в машинах*. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. Сб. 5. С. 42–66.
73. *Механика контактных взаимодействий* // Под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова. — М.: Физматлит, 2001. 670 с.
74. *Митрович В. П.* Поведение полиамидов при трении без смазки по данным лабораторных испытаний // *Пластмассы как антифрикционные материалы*. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 43–52.
75. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. — М.: Наука, 1968. 575 с.
76. *Нейкирхен И.* Угольные щетки и причины непостоянства условий коммутации машин постоянного тока. — М.-Л.: ОНТИ, 1937. 183 с.
77. *Носовский И. Г.* Исследование изнашивания металлов в различных газовых средах // *Тр. 1-й научно-технической конференции «Трение и износ деталей машин»*. — М.: Редакционно-издательский отдел АЭРОФЛОТА, 1956. С. 187–207.
78. *Носовский И. Г.* Влияние газовой среды на износ металлов. — Киев: Техніка, 1968. 180 с.
79. *Носовский И. Г., Соха А. Е.* Влияние внешних механических воздействий и газовой среды на процесс износа сурьмы и висмута // *Проблемы трения и изнашивания*. — Киев: Техніка, 1974. Вып. 5. С. 64–68.
80. *Основы трибологии (трение, износ, смазка)* // Под ред. А. В. Чичинадзе. — М.: Центр «Наука и техника», 1995. 778 с.
81. *Петров Н.* Об изнашиваемости железных рельсов на Николаевской и СПб-Варшавской железных дорогах. — С.-Петербург: 1882. 21 с.
82. *Плуталова Л. А.* Исследование изнашивания графитовых антифрикционных материалов // *Кислород*. 1950. № 4. С. 12–22.
83. *Погосян А. К.* Трение и износ наполненных полимерных материалов. — М.: Наука, 1977. 139 с.
84. *Полосаткин Г. Д.* Материалы по физике износа и трения // *ЖТФ*. 1946. Т. 16. Вып. 12. С. 1427–1440.
85. *Прейс Г. А., Нелидов В. Н.* Исследование износоустойчивости электролитических хромовых покрытий // *Тр. 1-й научно-технической конференции «Трение и износ деталей машин»*. — М.: Редакционно-издательский отдел АЭРОФЛОТА, 1956. С. 330–347.
86. *Проников А. С.* Классификация и расчет сопряжений деталей машин на изнашивание // *Трение и износ в машинах*. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. Сб. 11. С. 121–181.
87. *Проников А. С.* Контактная задача для сопряженных поверхностей деталей машин // *Трение и износ в машинах*. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. Сб. 15. С. 375–391.

88. *Просви́рин В. И.* Самонаклеп при сухом трении и его роль в износе // Теория трения и износа. — М.: Наука, 1965. С. 171–175.
89. *Пугина Л. И., Синявская М. Д., Максимчук И. М.* Дисульфид молибдена, его свойства и применение. — Киев: Наукова думка, 1968. 50 с.
90. *Радчик В. С., Радчик А. С.* Об одной особенности испытания металлов на износ // Заводская лаборатория. 1954. № 2. С. 229–231.
91. *Ратнер С. Б.* О показателе истирания резины и его связи с коэффициентом трения // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87. № 5. С. 743–746.
92. *Ратнер С. Б.* О роли усталостных процессов при истирании (износе) полимерных материалов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 4. С. 848–851.
93. *Ратнер С. Б., Лурье Е. Г.* Истирание полимеров как кинетический термоактивационный процесс // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 4. С. 909–912.
94. *Резниковский М. М.* О связи между износостойкостью и другими механическими свойствами резины // Каучук и резина. 1960. № 9. С. 33–37.
95. *Резниковский М. М., Бродский Г. И.* К вопросу об истирании резины при трении по относительно гладким поверхностям // Каучук и резина. 1961. № 7. С. 18–23.
96. *Резниковский М. М., Бродский Г. И.* Особенности механизма истирания высокоэластических материалов // Фрикционный износ резин. — М.-Л.: Химия, 1964. С. 21–30.
97. *Розенберг Е. М.* Об износоустойчивости чугуна при возвратнопоступательном движении // Вестник металлопромышленности. 1939. № 7. С. 32–38.
98. *Сидоров А. И.* Основные принципы проектирования и конструирования машин. — М.: МАКИЗ, 1929. 427 с.
99. *Солдатенков И. А.* Изнашивание тонкого упругого покрытия при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. 1985. Т. 6. № 2. С. 247–254.
100. *Солдатенков И. А.* Решение контактной задачи для композиции полоса-полуплоскость при наличии изнашивания с изменяющейся областью контакта // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 78–88.
101. *Солдатенков И. А.* Нелинейная износоконтактная задача для основания Винклера с растущей областью контакта // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 110–121.
102. *Тененбаум М. М.* Сопротивление абразивному изнашиванию. — М.: Машиностроение, 1976. 272 с.
103. *Тененбаум М. М., Гутерман В. М.* Исследование износостойкости стали в абразивной среде // Вестник машиностроения. 1956. № 12. С. 25–29.
104. *Теплый М. И.* Определение износа в паре трения вал—втулка // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 2. С. 249–257.
105. *Топеха П. К.* Основные виды износа металлов. — М.-Киев: Машгиз, 1952. 120 с.

106. Усов П. П. Внутренний контакт цилиндрических тел близких радиусов при изнашивании их поверхностей // Трение и износ. 1985. Т. 6, № 3. С. 404–414.
107. Усов П. П., Дроздов Ю. Н., Николашев Ю. Н. Теоретическое исследование напряженного состояния пары вал — втулка с учетом износа // Машиноведение. 1979. № 2. С. 80–87.
108. Фрикционный износ резин // Под ред. В. Ф. Евстратова. — М.-Л.: Химия, 1964. 272 с.
109. Хан Х. Теория упругости. — М.: Мир, 1988. 344 с.
110. Хрущов М. М., Бабичев М. А. Испытание на изнашивание чистых металлов и антифрикционных сплавов при трении об абразивную поверхность // Трение и износ в машинах. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1941. Сб. 1. С. 89–98.
111. Хрущов М. М., Бабичев М. А. Исследования изнашивания металлов. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. 352 с.
112. Цеснек Л. С. Физико-статистическая интерпретация абразивного изнашивания твердых тел // Износ и антифрикционные свойства материалов (Трение и износ в машинах). — М.: Наука, 1968. Сб. 20. С. 5–47.
113. Цеснек Л. С. Статистическая интерпретация механического изнашивания трущихся тел // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. — М.: Наука, 1971. С. 176–190.
114. Чичинадзе А. В., Матвеевский Р. М., Браун Э. Д. Материалы в триботехнике нестационарных процессов. — М.: Наука, 1986. 248 с.
115. Щедров В. С. Абразивное изнашивание поверхности // ЖТФ. 1947. Т. 17. Вып. 9. С. 1019–1026.
116. Щедров В. С. К теории абразивного изнашивания металлов // Трение и износ в машинах. Труды II Всесоюзной конференции по трению и износу в машинах. Т. 3. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949. С. 184–189.
117. Щедров В. С., Чичинадзе А. В. О коэффициенте взаимного перекрытия // Повышение эффективности тормозных устройств. Свойства фрикционных материалов. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 180–183.
118. Archard J. F. Theory of mechanical wear // Research. 1952. V. 5. No 8. P. 395–396.
119. Archard J. F. Contact and rubbing of flat surfaces // J. of Applied Physics. 1953. V. 24. No 8. P. 981–988.
120. Archard J. F. The wear of metals // Scientific Lubrication. 1958. V. 10. No 11. P. 16–21.
121. Archard J. F. Temperature of rubbing surfaces // Wear. 1958/59. V. 2. No 6. P. 438–455.
122. Bondi W. Beiträge zum Abnutzungs-Problem mit besonderer Berücksichtigung der Abnutzung von Zahnrädern. — Berlin: VDI-Verlag GmbH, 1927. 137 s.
123. Bragdon C. R., O'Connor D. O., Lowenstein J. D., Jasty M., Syniuta W. D. The importance of multidirectional motion on the wear of polyethylene // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Part H. Journal of Engineering in Medicine. 1996. V. 210. No 3. P. 157–165.

124. *Burwell J. T., Strang C. D.* Metallic wear // *Proc. Roy. Soc.* 1952. Ser. A. V. 212. No 1111. P. 470–477.
125. *Campbell W. E., Kozak R.* Studies in boundary lubrication — III The wear of carbon brushes in dry atmospheres // *Trans. ASME.* 1948. V. 70. No 5. P. 491–498.
126. *Chenea P. F., Roach A. E.* A mass and energy balance for the wear process // *Lubrication Engineering.* 1956. V. 12. No 2. P. 123–125.
127. *Clarke S., Engelbach R.* Ancient Egyptian construction and architecture. — New York: Dover Publications, Inc., 1990. 242 p.
128. *Diehl M. G.* Wear of electrical contacts // *Wear.* 1957/58. V. 1. No 5. P. 367–376.
129. *Dies K.* Die Vorgänge beim Verschleiß bei rein gleitender trockener Reibung // *Zeitschrift des VDI.* 1939. Bd. 83. Nr. 10. S. 307–314.
130. Discussion on steel rails // *Trans. of the American Institute of Mining Engineers.* May 1880 – Feb. 1881. V. 9. P. 529–608.
131. *Duwell E. J.* The effect of sliding speed on the rate of wear of sapphire on steel // *Wear.* 1966. V. 9. No 5. P. 363–368.
132. *Eilender W., Oertel W., Schmalz H.* Grundsätzliche Untersuchungen des Verschleißes auf der Spindel-Maschine // *Archiv für das Eisenhüttenwesen.* 1934. H. 2. S. 61–65.
133. *Endo K., Fukuda Y., Kudo T.* Wear of steel in the lubricating oil containing abrasive particles // *Bulletin of the JSME.* 1966. V. 9. No 36. P. 785–792.
134. *Endo K., Fukuda Y., Kinoshita T.* Wear of metals in the lubricating oil containing solid particles (effects of diameter of particles and contact pressure) // *Bulletin of the JSME.* 1972. V. 15. No 90. P. 1625–1631.
135. *Evans D. C., Lancaster J. K.* The wear of polymers // *Treatise on Materials Science and Technology.* Wear. V. 13. Academic Press: N.-Y., San Francisco, London, 1979. P. 85–139.
136. *Finkin E. F.* Speculations on the theory of adhesive wear // *Wear.* 1972. V. 21. No 1. P. 103–114.
137. *Grosch K. A., Schallamach A.* Relation between abrasion and strength of rubber // *Rubber Chemistry and Technology.* 1966. V. 39. No 2. P. 287–305.
138. *Halling J.* Contribution to the theory of mechanical wear // *Wear.* 1975. V. 34. No 3. P. 239–249.
139. *Halling J.* A contribution to the theory of friction and wear and relationship between them // *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers.* 1976. V. 190. No 43. P. 477–488.
140. *Halling J.* Toward a mechanical wear equation // *Trans. ASME.* 1983. V. 105. No 2. P. 212–220.
141. *Hirst W.* Wear of unlubricated metals // *Conf. on Lubrication and Wear.* The Institution of Mechanical Engineers. 1957. P. 674–681.
142. *Hirst W., Lancaster J. K.* Surface film formation and metallic wear // *J. of Applied Physics.* 1956. V. 27. No 9. P. 1057–1065.
143. *Hirst W., Lancaster J. K.* The influence of speed on metallic wear // *Proc. Roy. Soc.* 1960. Ser. A. V. 259. No 1297. P. 228–241.

144. *Holm R.* Electric contacts. — Stockholm: Hugo Gebers Förlag, 1946. 398 p.
145. *Honda K., Yamada R.* Some experiments on the abrasion of metals // The Journal of the Institute of Metals. 1925. V. 33. No 1. P. 49–68.
146. *Hunt F. V.* Elastic-plastic instability caused by the size effect and its influence on rubbing wear // J. of Applied Physics. 1955. V. 26. No 7. P. 850–856.
147. *Johnson R. L., Swikert M. A., Bisson E. E.* Effects of sliding velocity and temperature on wear and friction of several materials // Lubrication Engineering. 1955. V. 11. No 3. P. 164–170.
148. *Kayaba T.* A study of the wear and friction of some bearing materials // Wear. 1962. V. 5. No 3. P. 173–181.
149. *Kadhim M. J., Earles S. W. E.* Unlubricated sliding at high speeds between copper and steel surfaces // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. 1966–67. V. 181. Part 30. P. 25–30.
150. *Kauzlarich J. J., Hagglund R. R., Modrak J. P.* Effect of temper brittleness on dry friction wear of a martensitic steel // Transactions Quarterly. ASM. 1961. V. 54. No 3. P. 276–285.
151. *Kehl B., Siebel E.* Untersuchungen über das Verschleißverhalten der Metalle bei gleitender Reibung // Archiv für das Eisenhüttenwesen. 1936. H. 11. S. 563–570.
152. *Kerridge M.* Metal transfer and the wear process // Proc. Phys. Soc. 1955. Sec. B. V. 68. Pt. 7. No 427. P. 400–407.
153. *Lancaster J. K.* The influence of temperature on metallic wear // Proc. Phys. Soc. 1957. Sec. B. V. 70. Pt. 1. No 445. P. 112–118.
154. *Lancaster J. K.* The formation of surface films at the transition between mild and severe metallic wear // Proc. Roy. Soc. 1963. Ser. A. V. 273. No 1355. P. 466–483.
155. *Lancaster J. K.* The influence of arcing on the wear of carbon brushes on copper // Wear. 1963. V. 6. No 5. P. 341–352.
156. *Lancaster J. K.* Instabilities in the frictional behaviour of carbons and graphites // Wear. 1975. V. 34. No 3. P. 275–290.
157. *Lim S. C., Ashby M. F.* Wear-mechanism maps // Acta Metall. 1987. V. 35. No 1. P. 1–24.
158. *Mailänder R., Dies K.* Beitrag zur Erforschung der Vorgänge beim Verschleiß // Archiv für das Eisenhüttenwesen. 1943. H. 10. S. 385–398.
159. *Matsuyama T., Kayaba T.* A study on the characteristics of bearing alloys // Trans. of the JSME. 1962. V. 28. No 193. P. 1175–1184.
160. *Mindt W.* Härtebestimmung von Schleifmaterialien // Werkstattstechnik. 1923. H. 12. S. 321–326.
161. *Montgomery R. S.* Friction and wear at high sliding speeds // Wear. 1976. V. 36. No 3. P. 275–298.
162. *Öi T., Sasada T., Egawa K.* Wear characteristics of some materials for rolling contact bearing cages // Journal of the JSME. 1959. V. 62. No 482. P. 418–424.
163. *Perrin C., Rainforth W. M.* The effect of alumina fiber reinforcement on the wear of Al-4.3%Cu alloy // Wear. 1995. V. 181–183. No 1. P. 312–324.

164. *Preston F. W.* The theory and design of plate glass polishing machines // *Journal of the Society of Glass Technology*. 1927. V. 11. P. 214–256.
165. *Reye T.* Zur Theorie der Zapfenreibung // *Der Civilingenieur*. 1860. H. 4. S. 235–255.
166. *Rhee S. K.* Wear equation for polymers sliding against metal surfaces // *Wear*. 1970. V. 16. No 6. P. 431–445.
167. *Quinn T. F. J.* Role of oxidation in the mild wear of steel // *British J. of Applied Physics*. 1962. V. 13. No 1. P. 33–37.
168. *Quinn T. F. J.* The effect of “hot-spot” temperatures on the unlubricated wear of steel // *ASLE Transactions*. 1967. V. 10. No 2. P. 158–168.
169. *Quinn T. F. J.* Review of oxidational wear. Part I: The origins of oxidational wear // *Tribology International*. 1983. V. 16. No 5. P. 257–271.
170. *Quinn T. F. J.* Review of oxidational wear. Part II: Recent developments and future trends in oxidational wear research // *Tribology International*. 1983. V. 16. No 6. P. 305–315.
171. *Quinn T. F. J., Rowson D. M., Sullivan J. L.* Application of the oxidational theory of mild wear to the sliding wear of low alloy steel // *Wear*. 1980. V. 65. No 1. P. 1–20.
172. *Ratner S. B., Gool V. E., Klitenick G. S.* On the abrasion of vulcanized rubber against wire gauze // *Wear*. 1958/59. V. 2. No 2. P. 127–132.
173. *Robin F.* Report on the wear of steels and on their resistance to crushing // *The Iron and Steel Institute. Carnegie Scholarship Memoirs*. 1910. V. 2. P. 1–270.
174. *Roll F.* Über den Einfluß chemischer Reaktionen auf den Verschleiß von Eisen // *Zeitschrift für anorganische und allgemeine Chemie*. 1935. Bd. 224. H. 3. S. 322–324.
175. *Rosenberg S. J.* Correspondence on Honda and Yamada’s paper // *The Journal of the Institute of Metals*. 1925. V. 33. No 1. P. 69–72.
176. *Rowe C. N.* Some aspects of the heat of adsorption in the friction of a boundary lubricant // *ASLE Transactions*. 1966. V. 9. No 1. P. 100–111.
177. *Saka N., Eleiche A. M., Suh N. P.* Wear of metals at high sliding speeds // *Wear*. 1977. V. 44. No 1. P. 109–125.
178. *Sakurai T., Okabe H., Matsumura I.* Wear rate of copper under boundary lubrication // *ASLE Transactions*. 1971. V. 14. No 3. P. 221–225.
179. *Schallamach A.* On the abrasion of rubber // *The Proceedings of the Physical Society, Sec. B*. 1954. V. 67. No 420B. P. 883–891.
180. *Soda N., Aoki A.* On fretting corrosion (Part 1: Nature of fretting corrosion. Part 2: Analysis of the mechanism of wear) // *Trans. of the JSME*. 1959. V. 25. No 158. P. 995–1010.
181. *Söhnchen E., Piwowarsky E.* Die Abnutzung des Gußeisens bei gleitendem Verschleiß // *Die Giesserei*. 1936. H. 19. S. 489–491.
182. *Spurr R. T., Newcomb T. P.* Friction and wear of various materials sliding against unlubricated surfaces of different types and degrees of roughness // *Conf. on Lubrication and Wear. The Institution of Mechanical Engineers*. 1957. P. 269–275.
183. *Steijn R. P.* An investigation of dry adhesive wear // *Trans. ASME. Ser. D: J. of Basic Engineering*. 1959. V. 81. No 1. P. 56–66.

-
184. *Stolarski T. A.* Adhesive wear of lubricated contacts // *Tribology International*. 1979. V. 12. No 4. P. 169–179.
 185. *Suh N. P.* The delamination theory of wear // *Wear*. 1973. V. 25, No 1. P. 111–124.
 186. *Sullivan J. L., Quinn T. F. J., Rowson D. M.* Developments in the oxidational theory of mild wear // *Tribology International*. 1980. V. 13. No 4. P. 153–158.
 187. *Suzuki M.* An investigation of abrasion in carbon steels // *J. of JSME*. 1927. V. 30. No 128. P. 559–623.
 188. *Thomson A. S. T., Logan R.* Wear phenomena in lubricated metal surfaces // *The Engineer*. Sept. 27, 1940. V. 170. P. 200–201.
 189. *Uhlig H. H.* Mechanism of fretting corrosion // *J. of Applied Mechanics*. 1954. V. 21. No 4. P. 401–407.
 190. *Uhlig H. H., Revie R. W.* Corrosion and corrosion control. An introduction to corrosion science and engineering. 3-rd edition. — N.-Y.: John Wiley & Sons. 1985. 441 p.
 191. *Uhlig H. H., Tierney W. D., McClellan A.* Test equipment for evaluating fretting corrosion // *ASTM*. 1953. Special Technical Publication No 144. P. 71–78.
 192. *Vogt W. W.* Analysis of a typical angle abrasion machine // *Industrial and Engineering Chemistry*. 1928. V. 20. No 3. P. 302–306.
 193. *Welsh N. C.* The dry wear of steels // *Phil. Trans. Roy. Soc. of London. Ser. A*. 1965. V. 257. No 1077. P. 31–70.
 194. *Yoshimoto G., Tsukizoe T.* On the mechanism of wear between metal surfaces // *Wear*. 1957/58. V. 1. No 6. P. 472–490.
 195. *Zimmerman E.* Friction and wear tests on solid dry bodies // *Metals and Alloys*. 1931. V. 2. No 2. P. 95–96.

ИНЖЕНЕРНЫЙ РАСЧЕТ ИЗНОСА

В данной главе рассматриваются некоторые постановки износоконтактной задачи, которые не привлекают сложного математического аппарата и поэтому могут быть использованы для инженерного расчета износа. Основные уравнения износоконтактной задачи (закон изнашивания (2.1), условие контакта (2.5), условие равновесия (2.7), деформационное соотношение (2.8)), записанные в общем виде в разделе 1.2.2 предыдущей главы, ниже конкретизируются для каждой из рассматриваемых задач.

Закон изнашивания будет использоваться из соображений удобства в одной из следующих эквивалентных форм: $dW/dl = F(p, V)$ (dW/dl — скорость износа по пути трения) или $dW/dt = F(p, V)$ (dW/dt — скорость износа по времени), при этом $dW/dt = V dW/dl$. Многие из рассматриваемых ниже задач предполагают постоянную скорость V скольжения. Для таких задач правая часть закона изнашивания будет записываться в виде $F(p)$ без аргумента V .

За начало изнашивания принимается момент $t = 0$. Коэффициент трения изнашиваемых тел считается незначительным, поэтому в деформационном соотношении трение не учитывается. В результате решения некоторых задач будет определяться эволюция контактного давления (далее давления). В связи с этим отметим, что закон изнашивания позволяет по известному давлению вычислить износ и наоборот.

§ 2.1. Расчет износа тонкого покрытия

Одним из эффективных способов предотвращения преждевременного износа узлов трения является использование в них антифрикционных покрытий. Применение покрытий позволяет уменьшить или совсем исключить использование жидкой смазки, что особенно важно для узлов, в которых процесс смазывания представляет трудоемкую операцию или требует сложных и дорогостоящих систем смазки. Кроме того, использование покрытий существенно расширяет режимы эксплуатации и область применения узлов трения: высокие и низкие температуры, тяжело нагруженные узлы, работа в вакууме и в условиях стерильного производства. Представленные ниже постановки и решения износоконтактной задачи позволяют анализировать процесс изнашивания покрытия и прогнозировать его долговечность.

Связь износа W с текущей толщиной h покрытия имеет вид $W(x, t) = h_0 - h(x, t)$, где h_0 — толщина неизношенного покрытия,

при этом $\partial W(x, t)/\partial t = -\partial h(x, t)/\partial t$. Процесс изнашивания покрытия ограничивается временем t_* его полного изнашивания в некоторой точке, поэтому всегда $h(x, t) > 0$.

2.1.1. Деформационное соотношение для покрытия

Ниже будет рассматриваться износостойкая задача для тонкого упругого покрытия (слоя), связанного с жестким основанием. Известно [31], что при малой толщине h слой ведет себя подобно телу Винклера, поэтому связь нормального перемещения v поверхности покрытия с давлением p (деформационное соотношение) имеет вид $v(x) = -Bhp(x)$, причем $B = (1 - 2\nu)(1 + \nu)[(1 - \nu)E]^{-1}$ — коэффициент податливости покрытия, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала покрытия. Малость толщины слоя здесь и далее означает, что она мала по сравнению с характерным размером области изменения давления, в качестве которого можно использовать минимальный размер области контакта.

Применительно к износостойкой задаче известно использование модели Винклера в виде [31]

$$v(x, t) = -Bh_0p(x, t), \quad (1.1)$$

предполагающем неизменность толщины h_0 покрытия, что допустимо только на начальной стадии изнашивания, когда $W \ll h = h_0 - W$. В общем случае и, в особенности, когда износ становится соизмерим с толщиной покрытия, в этом соотношении следует учитывать изменение толщины покрытия в результате изнашивания. Предполагая, что $|g'(x)| \ll 1$, $|W'(x, t)| \ll 1$ (условие (2.6) главы 1), это можно сделать, представив (1.1) в виде [16]

$$v(x, t) = -Bh(x, t)p(x, t), \quad (1.2)$$

где $h(x, t)$ — распределение толщины изношенного покрытия. Обоснование соотношения (1.2) для двумерного случая можно найти в [48].

Деформационное соотношение (1.2) обладает одним недостатком — при $p(x, a) > B^{-1}$ оно дает физически бессмысленный результат $|v(x, a)| > h(x, a)$. Во избежание подобной ситуации далее наряду с (1.2) будет использоваться нелинейная модель Винклера вида

$$v(x, t) = -h(x, t)\Pi(p(x, t)), \quad (1.3)$$

при этом, исходя из общих физических представлений, на функцию $\Pi(p)$ следует наложить ограничения:

$$\Pi(p) \sim Bp \text{ при } Bp \ll 1, \quad 0 \leq \Pi(p) < 1, \quad \Pi'(p) > 0, \quad (1.4)$$

причем $\Pi'(p) = d\Pi(p)/dp$. Учитывая, что напряженно-деформированное состояние тонкого покрытия при условии (2.6) главы 1 близко к одноосному сжатию по нормали [31], и кратность изменения объема при

таком сжатии есть $|v|/h$, функцию $\Pi(p)$ можно определить, например, из закона Мурнагана [54]:

$$\Pi(p) = 1 - (1 + mBp)^{-1/m}, \quad (1.5)$$

где m — безразмерная характеристика материала покрытия.

Пример. Покажем, что учет изменения толщины покрытия в деформационном соотношении при изнашивании может быть существенным. Для этого сравним между собой решения износостатической задачи для покрытия при использовании соотношений (1.1) и (1.2). Будем считать размеры a, b области контакта и внедрение индентора δ неизменными, а закон изнашивания — линейным: $\partial h(x, t)/\partial t = -\alpha p(x, t)$. Соответствующее условие контакта имеет вид (равенство (2.5) предыдущей главы)

$$B\hat{h}(x, t)p(x, t) + h_0 - h(x, t) = \delta - g(x) \equiv d(x), \quad x \in [-a, b], \quad (1.6)$$

причем $\hat{h}(x, t) = h_0$ в случае (1.1) и $\hat{h}(x, t) = h(x, t)$ в случае (1.2). Исключая из (1.6) с помощью закона изнашивания функцию $p(x, t) = -\alpha^{-1}\partial h(x, t)/\partial t$, получим дифференциальное уравнение кинетики изнашивания

$$\frac{B}{\alpha} \hat{h}(x, t) \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + h(x, t) = h_0 - d(x), \quad h(x, 0) = h_0. \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) в случае $\hat{h}(x, t) = h_0$ находится элементарно:

$$h(x, t) = h_0 - d(x) + d(x) \exp\left(-\frac{\alpha}{Bh_0}t\right), \quad (1.8),$$

тогда как в случае $\hat{h}(x, t) = h(x, t)$ уравнение (1.7) является нелинейным и его решение для каждого $x \in [-a, b]$ может быть получено в неявном виде [21]:

$$\frac{\alpha}{B}t = h_0 - h(x, t) - (h_0 - d(x)) \ln \left| 1 - \frac{h_0 - h(x, t)}{d(x)} \right|. \quad (1.9)$$

На рис. 2.1 показаны зависимости безразмерного давления $\tilde{p} = Bp$ от безразмерного времени $\tilde{t} = t\alpha/(Bh_0)$, построенные на основе равенств (1.6), (1.8) и (1.9) при $\delta/h_0 = 0,5$ и $g(x) \equiv 0$ (плоский индентор). Отметим, что для такого индентора давление $p(x, t)$ и толщина $h(x, t)$ зависят только от времени t , являясь постоянными в пределах области контакта. Видно, что использование соотношения (1.2) вместо (1.1) приводит к заметному изменению поведения давления, особенно на заключительной стадии изнашивания.

Замечание. Модель Винклера $v = -Ap$ можно использовать для описания деформирования различного рода поверхностных структур, встречающихся в узлах трения. К числу таковых, кроме покрытий, относится поверхностная шероховатость тел [28]. Соответствующая континуальная модель шероховатого слоя устанавливает функциональную зависимость между осадкой шероховатости v и давлением p . Наиболее распространенной является степенная форма зависимости v от p , однако в некоторых случаях эта зависимость близка к линейной или имеет достаточно протяженный линейный участок [36, 55]. Другими словами, деформирование поверхностной шероховатости может быть описано нелинейной моделью Винклера (1.3), а в некоторых случаях — линейной моделью с аддитивным членом вида $v = -(Ap + c_0)$. Модель Винклера также может быть использована для приближенного описания деформационных свойств упругого тела, если по некоторому критерию установить соответствие коэффициента A с упругими постоянными E и ν [14].

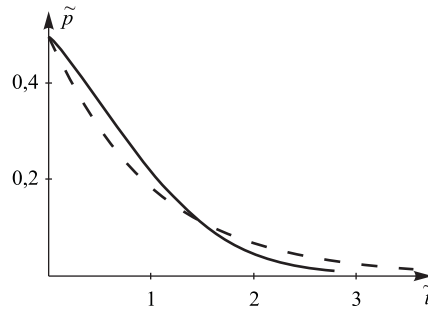


Рис. 2.1. Зависимость давления от времени в случае соотношения (1.1) (штриховая линия) и соотношения (1.2) (сплошная линия)

2.1.2. Особенности процесса изнашивания покрытия

Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим покрытие, сцепленное с абсолютно жестким основанием и изнашиваемое индентором ширины $2a$, который представляет собой цилиндрическое тело. Начало системы координат $Oxyz$ расположим посередине области контакта, направив ось x вдоль неизношенной поверхности покрытия (рис. 2.2). Область контакта индентора с покрытием будем считать неизменной и представлять отрезком $[-a, a]$ оси x . Форму индентора в выбранной системе координат зададим уравнением $y = g(x)$. Движение индентора происхо-

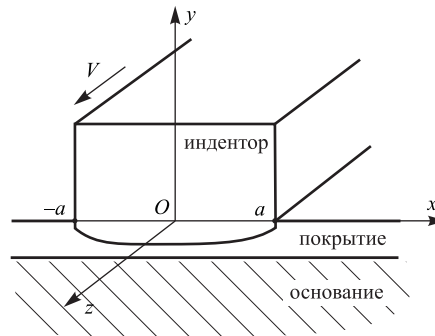


Рис. 2.2. Изнашивание покрытия индентором при постоянной области контакта

дит вдоль его образующей с постоянной по величине скоростью V под действием постоянной внешней нагрузки Q , которая направлена вдоль оси y и считается известной.

Закон изнашивания покрытия примем в виде

$$\dot{W}(x, t) \equiv \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = F(p(x, t)), \quad W(x, 0) \equiv 0, \quad (1.10)$$

и, пользуясь моделью (1.3), запишем условие контакта индентора с покрытием:

$$h(x, t)\Pi(p(x, t)) + W(x, t) = \delta(t) - g(x), \quad x \in [-a, a], \quad (1.11)$$

при этом условия (2.6) предыдущей главы $|g'(x)| \ll 1$, $|W'(x, t)| \ll 1$ считаются выполненными.

Выпишем также условие равновесия:

$$\int_{-a}^a p(x, t) dx = Q = \text{const}. \quad (1.12)$$

Получим ряд соотношений, необходимых для дальнейшего анализа. Продифференцируем уравнение (1.11) по времени t с учетом закона изнашивания (1.10) и выразим производную \dot{p} из полученного равенства. В результате придем к уравнению

$$\dot{p}(x, t) = \frac{1}{h(x, t)\Pi'(p(x, t))} [\dot{\delta}(t) - \varphi(p(x, t))], \quad (1.13)$$

где $\varphi(p) \equiv F(p)(1 - \Pi(p))$.

Далее подставим выражение (1.13) для \dot{p} в продифференцированное по t условие равновесия (1.12) и получим следующее выражение для скорости внедрения $\dot{\delta}$:

$$\dot{\delta}(t) = \left[\int_{-a}^a \frac{dx}{h(x, t)\Pi'(p(x, t))} \right]^{-1} \int_{-a}^a \frac{\varphi(p(x, t)) dx}{h(x, t)\Pi'(p(x, t))}. \quad (1.14)$$

Дифференциальное уравнение (1.13) совместно с выражением (1.14) и начальным условием $p(x, 0) = p_0(x)$ позволяют рассчитать эволюцию давления при изнашивании покрытия. Начальное распределение $p_0(x)$ находится с помощью условия контакта (1.11) с нулевым износом W .

Качественный анализ решения. Учитывая последнее неравенство (1.4), применим теорему о среднем [22] к второму интегралу в выражении (1.14). В результате можно получить

$$\dot{\delta}(t) = \varphi(p(\bar{x}, t)) \equiv \bar{\varphi}(t), \quad (1.15)$$

причем \bar{x} — некоторое зависящее от t значение из $[-a, a]$. С учетом выражения (1.15) уравнению (1.13) можно придать вид

$$\dot{p}(x, t) = \frac{1}{h(x, t)\Pi'(p(x, t))} [\bar{\varphi}(t) - \varphi(p(x, t))]. \quad (1.16)$$

По определению (1.15), величина $\bar{\varphi}(t)$ совпадает с некоторым значением функции $\varphi(p(x, t))$. В силу уравнения (1.16) и при наличии последнего неравенства (1.4), эта величина определяет знак производной $\dot{p}(x, t)$ следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{p}(x, t) < 0 & \text{при } \varphi(p(x, t)) > \bar{\varphi}(t), \\ \dot{p}(x, t) = 0 & \text{при } \varphi(p(x, t)) = \bar{\varphi}(t), \\ \dot{p}(x, t) > 0 & \text{при } \varphi(p(x, t)) < \bar{\varphi}(t). \end{cases} \quad (1.17)$$

Другими словами, в точках $x \in [-a, a]$ области контакта, где $\varphi(p(x, t)) > \bar{\varphi}(t)$ или $\varphi(p(x, t)) = \bar{\varphi}(t)$ или $\varphi(p(x, t)) < \bar{\varphi}(t)$, давление $p(x, t)$ при изменении t , соответственно, уменьшается или не изменяется или увеличивается. Этому свойству можно дать следующую наглядную интерпретацию.

Построим кривую функции $\varphi = \varphi(p)$ и обозначим через $\omega_j(t)$ точки этой кривой, имеющие в текущий момент времени t ординату $\bar{\varphi}(t)$ (рис. 2.3). В случае немонотонной функции $\varphi(p)$ таких точек может быть несколько, что учитывается индексом $j = 1, 2, \dots$

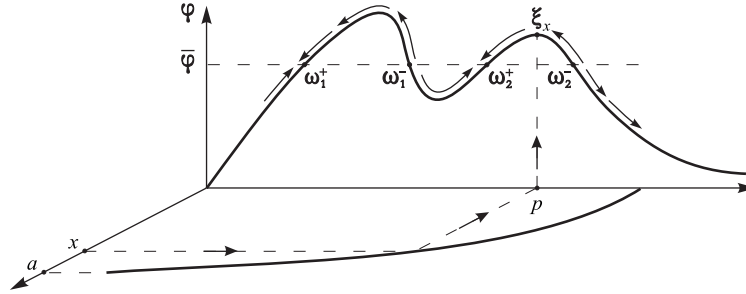


Рис. 2.3. Схема перемещения образов $\xi_x(t)$ по кривой $\varphi(p)$. Для простоты изображена половина области контакта

Среди точек $\omega_j(t)$ выделим те, в которых функция $\varphi(p)$ строго возрастает. Обозначим эти точки через $\omega_j^+(t)$ и назовем аттракторами. Точки $\omega_j(t)$, в которых функция $\varphi(p)$ строго убывает, обозначим через $\omega_j^-(t)$ и назовем дистракторами. По определению, абсциссы $p_j^\pm(t)$ точек

$\omega_j^\pm(t)$ удовлетворяют соотношениям:

$$\varphi(p_j^\pm(t)) = \bar{\varphi}(t), \quad \varphi'(p_j^+(t)) > 0, \quad \varphi'(p_j^-(t)) < 0. \quad (1.18)$$

Отметим, что возможны также случаи касания кривой $\varphi(p)$ уровня $\bar{\varphi}(t)$ (локальные экстремумы $\varphi(p)$ в точках $\omega_j(t)$). Но при изменяющейся величине $\bar{\varphi}(t)$ такая ситуация возникает только в отдельные моменты времени и в дальнейшем не будет приниматься во внимание.

Далее, каждой точке $x \in [-a, a]$ области контакта в момент t поставим в соответствие точку $\xi_x(t)$ на кривой $\varphi(p)$ с координатой $p = p(x, t)$ и ординатой $\varphi = \varphi(p(x, t))$ (рис. 2.3). Такую точку $\xi_x(t)$ будем называть образом точки x . Отметим, что в любом случае часть образов $\xi_x(t)$ лежит на кривой $\varphi(p)$ выше уровня $\bar{\varphi}(t)$, а часть — ниже него, т.к. величина $\bar{\varphi}(t)$ определяется равенством (1.15) как среднее значений $\varphi(p(x, t))$. Исключением из этого правила является случай постоянной функции $\varphi(p)$, когда все образы $\xi_x(t)$ расположены на одном уровне $\bar{\varphi}(t)$.

При изменении времени t давление $p(x, t)$ изменяется и соответствующие точкам x образы $\xi_x(t)$ движутся по кривой $\varphi(p)$. Согласно соотношениям (1.17), образы $\xi_x(t)$ расположенные выше (ниже) уровня $\bar{\varphi}(t)$ движутся влево (вправо) с уменьшением (увеличением) соответствующего давления $p(x, t)$ (это обозначено стрелками вдоль кривой $\varphi(p)$ на рис. 2.3). Глядя на рис. 2.3, нетрудно понять, что при таком движении образы $\xi_x(t)$ стремятся удалиться от дистракторов $\omega_j^-(t)$ и приблизиться к аттракторам $\omega_j^+(t)$, причем величина скорости движения образов пропорциональна их расстоянию до уровня $\bar{\varphi}(t)$. В частности, образы $\xi_x(t)$, лежащие на уровне $\bar{\varphi}(t)$ и совпадающие с одной из точек $\omega_j(t)$, остаются неподвижными.

Подобное описание позволяет сразу выявить некоторые тенденции в поведении давления. Действительно, приближение образов $\xi_x(t)$ к аттракторам $\omega_j^+(t)$ означает стремление давления $p(x, t)$ принять значения $p_j^+(t)$ в соответствующих точках x области контакта. В результате на этих участках области контакта может сформироваться эпюра давления, близкая к кусочно-постоянной. Напротив, на некоторых участках области контакта с течением времени возможен неограниченный рост давления $p(x, t)$. Это происходит, если крайнее правое положение на уровне $\bar{\varphi}(t)$ занимает дистрактор, и часть образов $\xi_x(t)$ находится правее него (как это показано на рис. 2.3). Располагаясь ниже уровня $\bar{\varphi}(t)$, эти образы движутся вправо по кривой $\varphi(p)$, что выражается в неограниченном росте давления в соответствующих точках x области контакта [39].

Вышесказанное означает, что процесс изнашивания покрытия может выходить на стадию установившегося режима, когда все образы ξ_x концентрируются вблизи аттракторов ω_j^+ . Величины $\varphi(p(x, t))$ и $\bar{\varphi}(t)$ задают ординаты образов $\xi_x(t)$ и аттракторов $\omega_j^+(t)$, поэтому степень

близости первых ко вторым (точность установившегося режима) можно характеризовать величиной

$$\chi(t) = \frac{1}{2a\bar{\varphi}(t)} \int_{-a}^a |\varphi(p(x, t)) - \bar{\varphi}(t)| dx \quad (1.19)$$

и говорить, что процесс изнашивания выходит на установившийся режим, если $\chi(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Соответствующее предельное (установившееся) распределение давления обозначим через $p_s(x)$. Ниже будут приведены примеры процесса изнашивания покрытия с различными распределениями $p_s(x)$.

Численный анализ. Эволюция давления при изнашивании покрытия исследовалась путем численного решения уравнений (1.10), (1.11), (1.12) в случае симметричного индентора: $g(x) = x^2/(2R)$, $R = 0,25$ м и следующих значений параметров: $B = 10^{-8}$ 1/Па, $a = 10$ мм, $h_0 = 2$ мм. Функция $\Pi(p)$ определялась выражением (1.5) при $m = 10$. Правая часть $F(p)$ закона изнашивания бралась с участками увеличения и последующего уменьшения и имела вид кривой $a4$ на рис. 1.5 главы 1. Это приводило к зависимости $\varphi(p)$, качественно совпадающей с изображенной на рис. 2.3.

Для представления полученных результатов ниже используются безразмерные давление $\tilde{p} = Bp$ и время $t_z = h_0/F(p_z)$, $p_z = 1/B$. Степень износа покрытия характеризуется отношением $W_M(t)/h_0$, где $W_M(t) = \max_{x \in [-a, a]} W(x, t)$ — максимальный по области контакта износ.

На рис. 2.4 показана эволюция давления при сравнительно небольшой нагрузке Q , когда все образы $\xi_x(0)$, определяемые начальным распределением давления, лежат на возрастающей ветви кривой $\varphi(p)$ и по мере изнашивания двужутся к аттрактору $\omega_1^+(t)$ с абсциссой $p^+(t)$. Этим обстоятельством объясняется выход процесса изнашивания на установившийся режим с постоянной величиной давления, значение которой определяется из условия равновесия (1.12), так что

$$p(x, t) \rightarrow p_s(x) = \frac{Q}{2a}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

Выход процесса изнашивания на установившийся режим иллюстрируется на рис. 2.5. Отметим, что выравнивание давления по области контакта будет происходить всегда, если функция $\varphi(p)$ является монотонно возрастающей.

Увеличение нагрузки Q приводит к тому, что образы $\xi_x(0)$ перемещаются на участки поочередного возрастания и убывания кривой $\varphi(p)$. В этом случае движение образов может происходить в направлении двух аттракторов $\omega_1^+(t)$ и $\omega_2^+(t)$. В результате опять наступает установившийся режим, но давление уже стремится принять кусочно-постоянное распределение с предельными значениями

p_{js}^+ абсцисс этих аттракторов, причем $\varphi(p_{1s}^+) = \varphi(p_{2s}^+)$, $\varphi'(p_{1s}^+) > 0$, $\varphi'(p_{2s}^+) < 0$. Сказанное подтверждается результатами расчетов, представленных на рис. 2.6. Понятно, что при наличии на кривой $\varphi(p)$ нескольких аттракторов $\omega_j^+(t)$, $j = 1, 2, \dots, N$, возможно существование предельного кусочно-постоянного распределения $p_s(x)$ давления, имеющего до N различных значений.

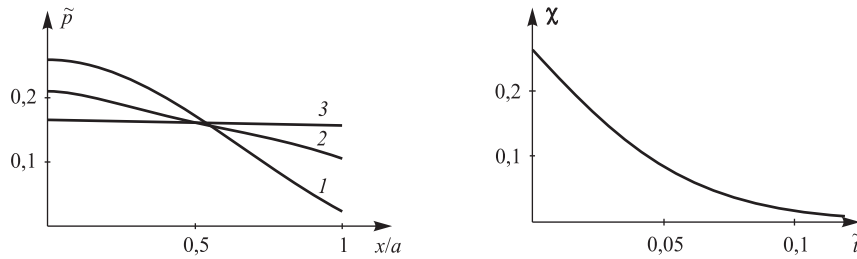


Рис. 2.4. Эпюры давления при $Q = 3,22 \cdot 10^5$ Н/м в различные моменты изнашивания: $W_M/h_0 = 0$ (1); 0,112 (2); 0,302 (3). Выход на установившийся режим

Рис. 2.5. Зависимость точности χ установившегося режима от времени. Значение $\chi = 0,05$ отвечает износу $W_M/h_0 \simeq 0,2$

При дальнейшем увеличении нагрузки Q часть образов $\xi_x(0)$ начинает располагаться на спадающей ветви кривой $\varphi(p)$ правее крайнего дистрактора (рис. 2.3), поэтому с течением времени такие образы будут двигаться вправо по кривой $\varphi(p)$, вызывая неограниченный рост давления на соответствующем участке области контакта. Пример подобного поведения представлен на рис. 2.7.

Изображенное на рис. 2.3 поведение функции $\varphi(p)$ при больших p может иметь место как для возрастающей (например, при абразивном изнашивании), так и для убывающей (например, при фреттинг-коррозионном изнашивании) зависимости $F(p)$. В первом случае вышеупомянутый неограниченный рост давления p приводит к катастрофическому росту износа, так как скорость изнашивания $\dot{W} = F(p)$ увеличивается с ростом p . В случае же убывающей зависимости $F(p)$ рост давления p приводит к затуханию скорости \dot{W} , и катастрофического роста износа не происходит.

В связи с этим отметим, что неограниченное возрастание функции $\varphi(p)$ при больших p препятствует неограниченному росту давления. Поэтому, так как $\varphi(p) = F(p)(1 - \Pi(p))$, то достаточно крутой рост зависимости $F(p)$ скорости изнашивания от давления предотвращает развитие режима катастрофического роста износа.

Представленные на рис. 2.4–2.7 результаты свидетельствуют о том, что эволюция давления может быть различной в зависимости от вели-

чины нагрузки Q и формы $g(x)$ индентора, определяющих начальное распределение давления.

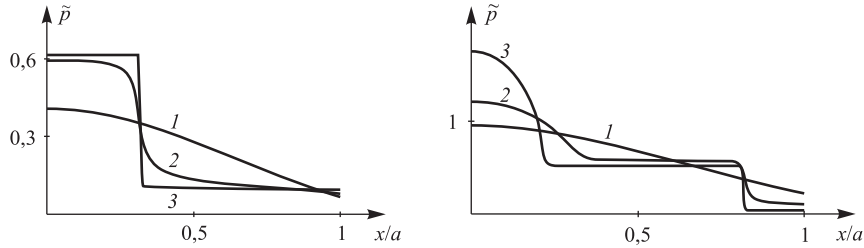


Рис. 2.6. Эпюры давления при $Q = 5,32 \cdot 10^5$ Н/м в различные моменты изнашивания: $W_M/h_0 = 0$ (1); 0,104 (2); 0,260 (3). Выход на установившийся режим

Рис. 2.7. Эпюры давления при $Q = 12,9 \cdot 10^5$ Н/м в различные моменты изнашивания: $W_M/h_0 = 0$ (1); 0,102 (2); 0,209 (3). Неограниченный рост давления

Замечание. Если вместо модели (1.3) воспользоваться моделью упругой полосы постоянной ширины (1.1), не учитывающей изменение ее упругой податливости в процессе изнашивания, то, используя закон изнашивания, условия контакта и равновесия, можно прийти к следующему уравнению (вместо (1.16)):

$$\dot{p}(x, t) = \frac{1}{Bh_0} [\bar{F}(t) - F(p(x, t))], \quad (1.21)$$

в котором $\bar{F}(t)$ определяется как среднее от $F(p(x, t))$ (аналогично (1.15)). Сравнение равенств (1.21) и (1.16) позволяет сделать вывод о возможности существенно различного поведения давления в зависимости от того, какое соотношение используется — (1.1) или (1.3). Например, при $F(p) = \alpha p$, согласно соотношению (1.21), давление всегда стремится к постоянному распределению, тогда как, согласно соотношению (1.16), оно может неограниченно возрастать, когда функция $\varphi(p) = \alpha p(1 - \Pi(p))$ убывает до нуля на бесконечности.

Выполненный теоретический анализ показывает, что при изнашивании тонкого упругого покрытия в условиях неизменного нагрузочно-скоростного режима характер поведения давления (наличие установившегося режима с кусочно-постоянным распределением $p_s(x)$ или неограниченный рост) определяется видом функции $\varphi(p)$ и начальным распределением $p_0(x)$ давления. Соответствующий подбор функции $\varphi(p)$ позволяет управлять поведением давления, например, предотвращать развитие режима катастрофического роста износа.

2.1.3. Изнашивание покрытия на искривленном основании

Постановка задачи и основные уравнения. Воспользуемся постановкой износоконтактной задачи из предыдущего пункта, но теперь допустим, что граница основания искривлена и описывается уравнением $y = g_1(x)$ (рис. 2.8). Форму индентора зададим уравнением $y = g_2(x)$ и вместо первого соотношения (2.6) главы 1 положим, что $|g'_2(x) - g'_1(x)| \ll 1$. Закон изнашивания примем в прежнем виде (1.10).

Наложим дополнительные ограничения вида

$$|g'_1(x)W'(x,t)| \ll 1,$$

$$|g'_1(x)/R_1(x)|h(x,t) \ll 1,$$

где R_1 — радиус кривизны границы основания, и проведем

выкладки раздела 1.2.2 главы 1 по выводу условия контакта для случая искривленного основания. В результате, с учетом деформационного соотношения (1.3), можно получить следующее условие:

$$h(x,t)\Pi(p(x,t)) + W(x,t) = [\delta(t) - (g_2(x) - g_1(x))]\cos\tau(x) + h_0(1 - \cos\tau(x)), \quad x \in [-a, a], \quad (1.22)$$

в котором δ является характеристикой внедрения индентора, τ — угол наклона границы основания к оси x , так что

$$\cos\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [g'_1(x)]^2}}.$$

Условие равновесия индентора здесь имеет прежний вид (1.12), т.к. проекция на ось y силы реакции элемента ds поверхности покрытия есть $pds\cos\tau = pdx$.

Следуя выкладкам предыдущего раздела, продифференцируем условие контакта (1.22) по t с учетом закона изнашивания (1.10) и выразим производную \dot{p} из полученного равенства. В результате придем к уравнению

$$\dot{p}(x,t) = \frac{\cos\tau(x)}{h(x,t)\Pi'(p(x,t))} [\dot{\delta}(t) - \varphi(x, p(x,t))], \quad (1.23)$$

где $\varphi(x, p) \equiv F(p)(1 - \Pi(p)) / \cos\tau(x)$.

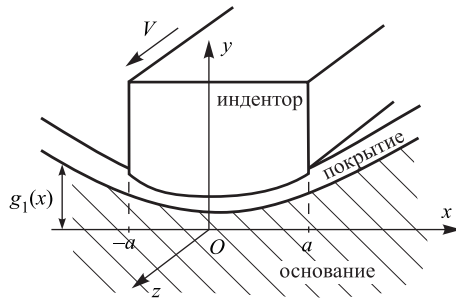


Рис. 2.8. Изнашивание покрытия на искривленном основании

Далее подставим выражение (1.23) для \dot{p} в продифференцированное по t условие равновесия (1.12) и придем к следующему выражению для производной $\dot{\delta}$:

$$\dot{\delta}(t) = \left[\int_{-a}^a \frac{\cos \tau(x) dx}{h(x,t)\Pi'(p(x,t))} \right]^{-1} \int_{-a}^a \frac{\varphi(p(x,t) \cos \tau(x)) dx}{h(x,t)\Pi'(p(x,t))}. \quad (1.24)$$

Дифференциальное уравнение (1.23) совместно с выражением (1.24) и начальным условием $p(x,0) = p_0(x)$ определяют эволюцию давления при изнашивании покрытия. Начальное распределение $p_0(x)$ находится с помощью условия контакта (1.22) с нулевым износом W .

Качественный анализ решения. С помощью теоремы о среднем из выражения (1.24) вытекает равенство

$$\dot{\delta}(t) = \varphi(\bar{x}, p(\bar{x}, t)) \equiv \bar{\varphi}(t), \quad \bar{x} \in [-a, a], \quad (1.25)$$

на основе которого уравнению (1.23) можно придать вид

$$\dot{p}(x,t) = \frac{\cos \tau(x)}{h(x,t)\Pi'(p(x,t))} [\bar{\varphi}(t) - \varphi(x, p(x,t))]. \quad (1.26)$$

Согласно (1.25), величина $\bar{\varphi}(t)$ совпадает с некоторым значением функции $\varphi(x, p(x,t))$, поэтому, в силу уравнения (1.26) и последнего неравенства (1.4), она определяет знак производной $\dot{p}(x,t)$ следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{p}(x,t) < 0 & \text{при } \varphi(x, p(x,t)) > \bar{\varphi}(t), \\ \dot{p}(x,t) = 0 & \text{при } \varphi(x, p(x,t)) = \bar{\varphi}(t), \\ \dot{p}(x,t) > 0 & \text{при } \varphi(x, p(x,t)) < \bar{\varphi}(t). \end{cases} \quad (1.27)$$

Другими словами, в точках $x \in [-a, a]$ области контакта, где $\varphi(x, p(x,t)) > \bar{\varphi}(t)$ или $\varphi(x, p(x,t)) = \bar{\varphi}(t)$ или $\varphi(x, p(x,t)) < \bar{\varphi}(t)$ давление $p(x,t)$ при изменении t уменьшается или не изменяется или увеличивается соответственно.

Для наглядной интерпретации этого свойства введем в рассмотрение пространство переменных x, p, φ и определим в нем поверхность Σ уравнением $\varphi = \varphi(x, p)$ (рис. 2.9). Каждой точке $x \in [-a, a]$ области контакта в текущий момент времени t поставим в соответствие точку $\xi_x(t)$ на этой поверхности с координатами x и $p = p(x,t)$. Как и в предыдущем разделе, точку $\xi_x(t)$ будем называть образом точки x . Отметим, что часть образов $\xi_x(t)$ лежит на поверхности Σ выше уровня $\bar{\varphi}(t)$, а часть — ниже него.

С течением времени давление $p(x, t)$ изменяется, и соответствующие точкам x образы $\xi_x(t)$ движутся по поверхности Σ , причем, согласно соотношениям (1.27), образы $\xi_x(t)$ расположенные выше (ниже) уровня $\bar{\varphi}(t)$ движутся с уменьшением (увеличением) соответствующего давления $p(x, t)$.

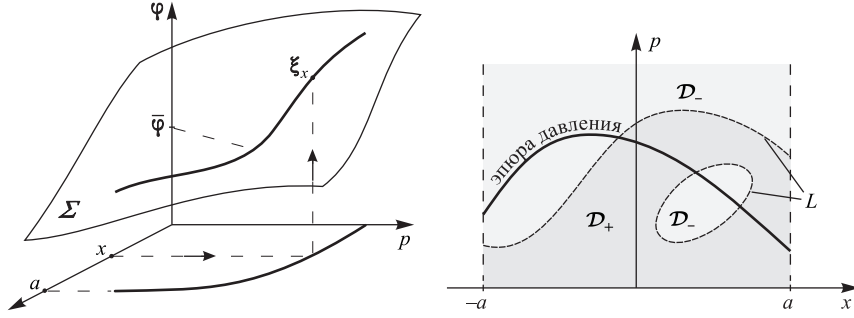


Рис. 2.9. Схема расположения образов $\xi_x(t)$ на поверхности Σ : $\varphi = \varphi(x, p)$. Для простоты изображена половина области контакта

Рис. 2.10. Изолиния L уровня $\bar{\varphi}$, ограничивающая области \mathcal{D}_- и \mathcal{D}_+

В качестве аттракторов и дистракторов для образов $\xi_x(t)$ здесь выступают различные участки линии уровня $\bar{\varphi}(t)$ поверхности Σ . Действительно, рассмотрим проекцию $L(t)$ этой линии на плоскость x, p , которая представляет собой изолинию уровня $\bar{\varphi}(t)$ и задается уравнением $\varphi(x, p) = \bar{\varphi}(t)$. Изолиния $L(t)$ разбивает плоскость x, p на области $\mathcal{D}_-(t)$ и $\mathcal{D}_+(t)$, в которых $\varphi(x, p) > \bar{\varphi}(t)$ и $\varphi(x, p) < \bar{\varphi}(t)$ соответственно, причем эпюра давления $p(x, t)$ лежит частично в $\mathcal{D}_-(t)$ и $\mathcal{D}_+(t)$ (рис. 2.10).

В зависимости от того, в какой области ($\mathcal{D}_-(t)$ или $\mathcal{D}_+(t)$) лежит тот или иной участок эпюры давления, он либо приближается, либо удаляется от ближайшего участка изолинии $L(t)$, подчиняясь соотношениям

$$\begin{cases} \dot{p}(x, t) < 0 & \text{при } (x, p(x, t)) \in \mathcal{D}_-(t), \\ \dot{p}(x, t) = 0 & \text{при } (x, p(x, t)) \in L(t), \\ \dot{p}(x, t) > 0 & \text{при } (x, p(x, t)) \in \mathcal{D}_+(t), \end{cases} \quad (1.28)$$

которые следуют из (1.27).

В частности, если $\varphi(x, p)$ представляет собой возрастающую по аргументу p функцию, то области $\mathcal{D}_\pm(t)$ являются односвязными и эпюра давления стремится принять форму изолинии $L(t)$ (ср. с поведением давления на рис. 2.4).

Сказанное означает, что процесс изнашивания покрытия может выходить на установившийся режим, когда все образы ξ_x приближаются к линии уровня $\bar{\varphi}(t)$ поверхности Σ . Степень этой близости можно характеризовать величиной (ср. с (1.19))

$$\chi(t) = \frac{1}{2a\bar{\varphi}(t)} \int_{-a}^a |\varphi(x, p(x, t)) - \bar{\varphi}(t)| dx \quad (1.29)$$

и говорить, что процесс изнашивания выходит на установившийся режим, если $\chi(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Соответствующее предельное (установившееся) распределение давления будем по-прежнему обозначать через $p_s(x)$.

Пример. Пусть основание имеет форму окружности радиуса r :

$$g_1(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \cos \tau(x) = \sqrt{1 - (x/r)^2}, \quad (1.30)$$

а давление мало, так что $\Pi(p) \ll 1$. При таких условиях, согласно вышеизложенному, процесс изнашивания выходит на установившийся режим с распределением $p_s(x)$, удовлетворяющим уравнению

$$F(p_s(x)) = \bar{\varphi}_s \cos \tau(x), \quad (1.31)$$

при этом неизвестная постоянная $\bar{\varphi}_s$ находится с помощью условия равновесия (1.12). Так, в случае линейного закона изнашивания $F(p) = \alpha p$ можно получить

$$p_s(x) = \frac{Q \cos \tau(x)}{r(\hat{a} + \sin \hat{a} \cos \hat{a})}, \quad (1.32)$$

где $\hat{a} = \tau(a)$ — угловой размер области контакта.

Численный анализ. Эволюция давления при изнашивании покрытия исследовалась путем численного решения уравнений (1.10), (1.12), (1.22) для параболически искривленного основания: $g_1(x) = x^2/(2R_1)$ и индентора: $g_2(x) = x^2/(2R_2)$. Закон изнашивания принимался линейным: $F(p) = \alpha p$, а функция $\Pi(p)$ определялась выражением (1.5) при $m = 10$. Использовались следующие значения параметров: $B = 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$, $a = 10 \text{ мм}$, $h_0 = 2 \text{ мм}$, $R_1 = 5,7 \text{ мм}$, $R_2 = 5 \text{ мм}$, $Q = 2,38 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$, $\alpha = 10^{-10} \text{ м/с} \cdot \text{Па}$.

Как и прежде, для описания численных результатов используется безразмерное давление $\tilde{p} = Bp$, а степень износа покрытия характеризуется отношением $W_M(t)/h_0$.

На рис. 2.11 показана эволюция давления при наличии установившегося режима. В соответствии с вышесказанным, эпюра установившегося

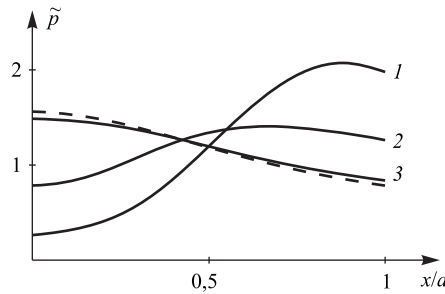


Рис. 2.11. Эпюры давления в различные моменты изнашивания: $W_M/h_0 = 0$ (1); 0,113 (2); 0,274 (3). Штриховой линией изображено установившееся распределение $p_s(x)$

распределения $p_s(x)$ здесь совпадает с изолинией уровня $\bar{\varphi}(t)|_{t \rightarrow \infty}$. Как показывают расчеты, точность $\chi(t)$ установившегося режима в момент $W_M/h_0 = 0,274$ составляет 0,05, при этом $\chi(0) \simeq 0,5$.

2.1.4. Расчет износа упорного подшипника скольжения

Упорный подшипник скольжения является предметом большого количества теоретических исследований. Первая попытка расчета износа такого подшипника, по всей видимости, была предпринята на основе концепции изнашивания жестких тел в

работе [65]. Позже были выполнены расчеты упорного подшипника при линейном законе изнашивания с учетом деформирования его элементов [18, 35]. Эти расчеты, в частности, свидетельствовали о наличии установившегося режима с определенным распределением давления [18].

Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим покрытие, сцепленное с абсолютно жестким основанием упорного подшипника и изнашиваемое вращающейся пятой. Угловая скорость ω вращения пяты и нормальная нагрузка P на нее считаются неизменными во времени. Пользуясь осевой симметрией задачи, расположим начало O системы координат посередине кольцевой области контакта, при этом совместим координатную ось x с неизношенной поверхностью покрытия, направив ее вдоль некоторого радиуса пяты (рис. 2.12). Область контакта пяты с покрытием будем считать неизменной и представлять отрезком $[-a, a]$ оси x . Форму подошвы пяты в выбранной системе координат зададим уравнением $y = g(x)$.

Элементарный закон изнашивания покрытия примем в форме $dW/dl = F(p, V)$. Если обозначить через $V(x)$ скорость скольжения пяты, то выбранному закону изнашивания можно придать вид

$$\dot{W}(x, t) = V(x)F(p(x, t), V(x)), \quad (1.33)$$

причем $V(x) = (r_0 + x)\omega$.

Деформационные свойства покрытия будем описывать нелинейной моделью Винклера (1.3), поэтому условие контакта пяты с покрытием

имеет прежний вид

$$h(x, t)\Pi(p(x, t)) + W(x, t) = \delta(t) - g(x), \quad x \in [-a, a]. \quad (1.34)$$

Однако условию равновесия отвечает равенство

$$2\pi \int_{-a}^a (r_0 + x)p(x, t) dx = P = \text{const}. \quad (1.35)$$

Как и прежде, продифференцируем условие контакта (1.34) по t с учетом закона изнашивания (1.33) и выразим производную \dot{p} из полученного равенства:

$$\dot{p}(x, t) = \frac{1}{h(x, t)\Pi'(p(x, t))} [\dot{\delta}(t) - \varphi(x, p(x, t))], \quad (1.36)$$

где $\varphi(x, p) \equiv V(x)F(p, V(x))(1 - \Pi(p))$.

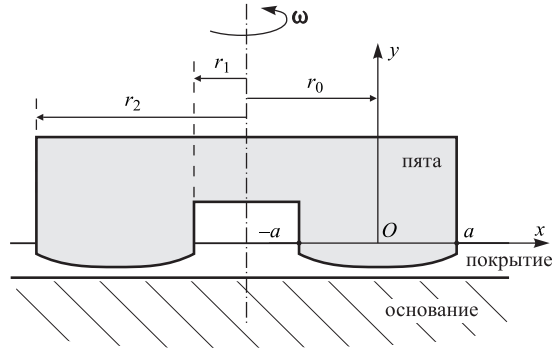


Рис. 2.12. Изнашивание покрытия пятой в упорном подшипнике скольжения

Далее подставим полученное выражение для \dot{p} в продифференцированное по t условие равновесия (1.35) и придем к следующему выражению для производной $\dot{\delta}$:

$$\dot{\delta}(t) = \left[\int_{-a}^a \frac{(r_0 + x)dx}{h(x, t)\Pi'(p(x, t))} \right]^{-1} \int_{-a}^a \frac{(r_0 + x)\varphi(x, p(x, t)) dx}{h(x, t)\Pi'(p(x, t))}. \quad (1.37)$$

Дифференциальное уравнение (1.36) совместно с выражением (1.37) и начальным условием $p(x, 0) = p_0(x)$ позволяют рассчитать эволюцию давления при изнашивании покрытия. Начальное распределение $p_0(x)$ находится с помощью условия контакта (1.34) с нулевым износом W .

Качественный анализ решения. С помощью теоремы о среднем выражение (1.37) упрощается и принимает вид равенства (1.25), которое позволяет записать уравнение (1.36) следующим образом:

$$\dot{p}(x, t) = \frac{1}{h(x, t)\Pi'(p(x, t))} [\bar{\varphi}(t) - \varphi(x, p(x, t))]. \quad (1.38)$$

Согласно равенству (1.25), величина $\bar{\varphi}(t)$ совпадает с некоторым значением функции $\varphi(x, p(x, t))$, поэтому, в силу уравнения (1.38) и последнего неравенства (1.4), она определяет знак производной $\dot{p}(x, t)$ согласно соотношениям (1.27). Дальнейший качественный анализ решения здесь совпадает с изложенным в предыдущем разделе. В частности, процесс изнашивания покрытия может выходить на стадию установившегося режима с распределением $p_s(x)$, которое определяется формой изолинии L уровня $\bar{\varphi}$ поверхности Σ (рис. 2.9). Точность установившегося режима, как и прежде, можно характеризовать величиной χ вида (1.29).

Пример. Воспользуемся вместо модели (1.3) моделью (1.1) упругой полосы постоянной ширины, не учитывающей изменение ее упругой податливости в процессе изнашивания, и возьмем в качестве правой части закона изнашивания (1.33) функцию $F(p, V) = \alpha p V^{-1}$. Тогда, повторяя предыдущие выкладки, вместо (1.36) и (1.37) можно получить равенства

$$\dot{p}(x, t) = \frac{1}{Bh_0} [\dot{\delta}(t) - \alpha p(x, t)], \quad \dot{\delta}(t) = \alpha c P, \quad c = \frac{1}{4\pi a r_0},$$

из которых следует аналитическое решение задачи

$$p(x, t) = cP + [p_0(x) - cP] \exp\left(-\frac{\alpha}{Bh_0} t\right),$$

свидетельствующее о том, что $p(x, t) \rightarrow p_s(x) = cP$ при $t \rightarrow \infty$.

Численный анализ. Эволюция давления при изнашивании покрытия в упорном подшипнике исследовалась путем численного решения уравнений (1.33)–(1.35) для случая плоской пяты $g(x) \equiv 0$ и следующих значений параметров: $B = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ Па}^{-1}$, $r_1 = 2 \text{ мм}$, $r_2 = 22 \text{ мм}$, $h_0 = 2 \text{ мм}$, $P = 2,6 \cdot 10^3 \text{ Н}$. Как и прежде, функция $\Pi(p)$ определялась выражением (1.5) при $m = 10$. Правая часть $F(p, V)$ закона изнашивания бралась в виде

$$F(p, V) = \alpha p_w (p/p_w)^\gamma F_2(V),$$

причем $\alpha = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, $p_w = 1 \text{ ГПа}$, $\gamma = 2$, а функция $F_2(V)$ имела вид кривой *a4* на рис. 1.5 главы 1 с участками увеличения и последующего уменьшения скорости износа. Для представления численных результатов используется безразмерное давление $\bar{p} = Bp$, а степень износа покрытия характеризуется отношением $W_M(t)/h_0$.

На рис. 2.13 показана эволюция первоначально равномерного давления при наличии установившегося режима. В соответствии с вышесказанным, эпюра установившегося распределения $p_s(x)$ здесь совпадает с изолинией уровня $\bar{\varphi}(t)|_{t \rightarrow \infty}$, о чем свидетельствует представленная на рис. 2.14 спадающая зависимость $\chi(\tilde{t})$, при этом $\tilde{t} = t/t_z$, $t_z = h_0/F(p_z, V_z)$, $p_z = 1/B$, $V_z = \omega r_0$.

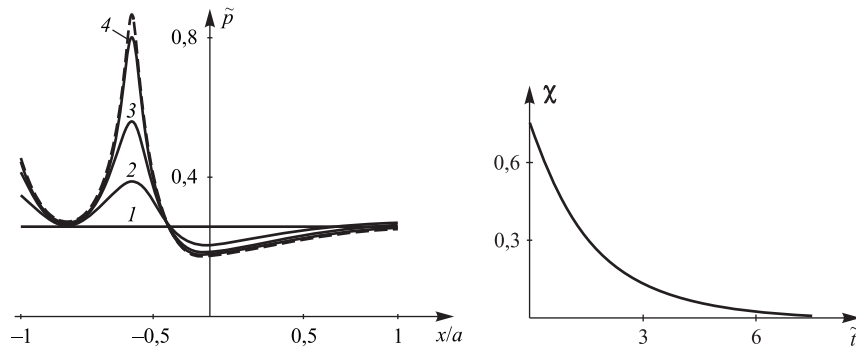


Рис. 2.13. Эпюры давления в различные моменты изнашивания: $W_M/h_0 = 0$ (1); 0,05 (2); 0,1 (3); 0,18 (4). Штриховой линией изображено установившееся распределение $p_s(x)$

Рис. 2.14. Зависимость точности χ установившегося режима от времени. Значение $\chi = 0,05$ отвечает износу $W_M/h_0 \simeq 0,18$

По сравнению с известными результатами [18], полученная эпюра $p_s(x)$ имеет более сложную форму. Распределение давления здесь обладает особенностями, принимая повышенные значения на некоторых участках области контакта, что обусловлено наличием экстремумов у функции $F_2(V)$ в законе изнашивания.

2.1.5. Изнашивание покрытия при фреттинге

Изложенный в предыдущих разделах подход к анализу решения износосеконтактной задачи будет использован ниже для расчета процесса изнашивания покрытия при фреттинге. Элементарный закон изнашивания здесь берется в виде $dW/dl = F(p)$. В пользу такого допущения свидетельствуют известные результаты о линейной зависимости износа при фреттинге от величины проскальзывания на контакте [67] и зависимости его скорости от нагрузки при условии постоянства величины проскальзывания [50, 58].

Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим сцепленное с абсолютно жестким основанием покрытие, в которое под действием нормальной нагрузки Q внедряется цилиндрический индентор ширины $2a$ (рис. 2.15). Как и прежде, начало системы координат $Oxyz$ располо-

жим посередине области контакта, направив ось x вдоль неизношенной поверхности покрытия, а ось z — вдоль образующей индентора. Форма индентора описывается уравнением $y = g(x)$.

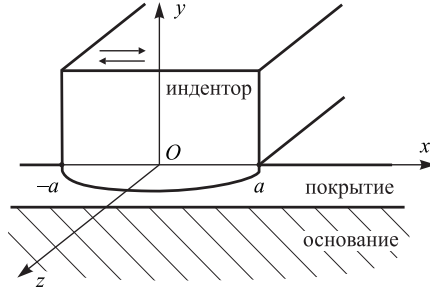


Рис. 2.15. Взаимодействие индентора с покрытием

Будучи внедренным в покрытие, индентор совершает колебательное движение с амплитудой L и периодом T , причем направление колебаний может совпадать с осью x или с осью z . В дальнейшем для определенности рассматривается случай колебаний вдоль оси x , причем $L \ll 2a$. Это условие позволяет считать область контакта индентора с покрытием неизменной и представлять ее отрезком $[-a, a]$ оси x .

Взаимодействие индентора с покрытием сопровождается их относительным проскальзыванием, в результате чего покрытие изнашивается согласно закону $dW/dl = F(p)$.

Считая покрытие тонким ($h(x, t) \ll 2a$), воспользуемся для определения перемещения его поверхности вдоль оси y моделью Винклера (1.2), а касательный сдвиг покрытия будем описывать соотношением [31]

$$u(x, t) = \frac{1}{G} h(x, t) q_1(x, t), \quad (1.39)$$

где u — перемещение границы покрытия вдоль оси x , $q_1 = \tau_{xy}$ — касательное контактное напряжение, $G = E/[2(1 + \nu)]$ — модуль сдвига материала покрытия.

Перемещение v границы покрытия вдоль оси y связано с формой индентора и износом покрытия W условием контакта, которое имеет вид (ср. с (1.2))

$$Bh(x, t)p(x, t) + W(x, t) = \delta(t) - g(x), \quad x \in [-a, a]. \quad (1.40)$$

Также имеет место условие равновесия индентора

$$Q = \int_{-a}^a p(x, t) dx, \quad (1.41)$$

при этом нагрузка Q считается постоянной.

Для вывода уравнения кинетики изнашивания покрытия следует рассчитать величину проскальзывания индентора по покрытию. Фрикционное взаимодействие между ними будем описывать законом трения

Кулона, считая коэффициенты трения покоя и скольжения одинаковыми и равными μ [27].

При колебаниях индентора на различных участках области контакта реализуются условия полного сцепления или частичного проскальзывания. Это связано с тем, что колебания индентора вызывают колебания касательного напряжения q_1 , и если периодически изменяющееся значение $|q_1|$ не превышает предельной силы трения μp , то в соответствующей точке области контакта, согласно закону Кулона, имеет место полное сцепление индентора с покрытием. Если же значение $|q_1|$ достигает величины μp , то происходит частичное локальное проскальзывание индентора по покрытию. Получим соответствующие условия полного сцепления и частичного проскальзывания.

Дальнейшие рассуждения будем строить из предположения, что за один цикл колебаний давление и толщина покрытия меняются пренебрежимо мало. Кроме того, в случае колебаний индентора вдоль оси x положим, что в пределах амплитуды L давление также меняется незначительно. При таких предположениях введем в рассмотрение максимальные значения перемещения u и напряжения q_1 :

$$u_m(x, t) = \max_{\tau \in [t, t+T]} |u(x, \tau)|, \quad q_{1m}(x, t) = \max_{\tau \in [t, t+T]} |q_1(x, \tau)|,$$

которые, в силу (1.39), связаны между собой равенством

$$u_m(x, t) = \frac{1}{G} h(x, t) q_{1m}(x, t). \quad (1.42)$$

Условием отсутствия проскальзывания (полного сцепления) индентора и покрытия в точке x будет неравенство $q_{1m}(x, t) \leq \mu p(x, t)$. Если исключить из него величину q_{1m} с помощью равенства (1.42) и учесть, что при сцеплении индентора с покрытием $u_m(x, t) = L$, то можно прийти к следующему условию сцепления

$$p(x, t) \geq p_+(x, t) \equiv \frac{GL}{\mu h(x, t)}. \quad (1.43)$$

На участке с частичным проскальзыванием индентора по покрытию, согласно закону Кулона, должно выполняться равенство

$$q_{1m}(x, t) = \mu p(x, t). \quad (1.44)$$

Как и прежде, исключая из этого равенства величину q_{1m} с помощью (1.42) и учитывая, что при проскальзывании $u_m(x, t) < L$, получим соответствующее условие

$$p(x, t) < p_+(x, t). \quad (1.45)$$

Для определения величины l_1 проскальзывания за один цикл рассмотрим перемещение индентора из крайнего левого положения в край-

нее правое. В начале такого перемещения индентор, будучи сцепленным с покрытием, смещается на расстояние $2u_m(x, t)$. При дальнейшем перемещении на расстояние $l_{1/2} = 2L - 2u_m(x, t)$ происходит проскальзывание индентора по покрытию. Учитывая, что при обратном перемещении (справа налево) имеет место такое же проскальзывание $l_{1/2}$, получим

$$l_1(x, t) = 2l_{1/2} = 4[L - u_m(x, t)]. \quad (1.46)$$

Сводя вместе соотношения (1.42) – (1.46), можно записать окончательно

$$l_1(x, t) = 4L\theta\left(1 - \frac{p(x, t)}{p_+(x, t)}\right), \quad (1.47)$$

где

$$\theta(X) = \begin{cases} 0, & X \leq 0, \\ X, & X > 0. \end{cases}$$

Переходя к определению износа покрытия, заметим, что закон изнашивания $dW/dl = F(p)$ позволяет представить износ за $\Delta N = T^{-1}\Delta t$ циклов колебаний в виде $\Delta W(x, t) = F(p(x, t))l_1(x, t)T^{-1}\Delta t$, откуда с помощью формального перехода $\Delta t \rightarrow 0$ и выражения (1.47) для $l_1(x, t)$ можно получить уравнение кинетики изнашивания покрытия

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, t) &\equiv -\dot{h}(x, t) = \Phi(p(x, t), h(x, t)) \equiv \\ &\equiv \frac{4L}{T} \theta\left(1 - \frac{p(x, t)}{p_+(x, t)}\right) F(p(x, t)) \end{aligned} \quad (1.48)$$

с начальным условием $W(x, 0) = 0$ или $h(x, 0) = h_0$. Выражение для $\Phi(p(x, t), h(x, t))$ в этом уравнении получается, если учесть определение (1.43) функции $p_+(x, t)$. Равенства (1.40) и (1.48) совместно с условием равновесия (1.41) образуют систему уравнений процесса изнашивания покрытия при фреттинге.

Эти уравнения позволяют получить и уравнение эволюции давления. Действительно, следуя процедуре вывода соотношения (1.16), продифференцируем условие контакта (1.40) по t , принимая во внимание уравнение (1.48), после чего проинтегрируем полученное равенство по $x \in [-a, a]$ с учетом условия равновесия (1.41) при $Q = \text{const}$. В результате можно прийти к уравнению эволюции давления

$$\dot{p}(x, t) = \frac{1}{Bh(x, t)} \left[\bar{\varphi}(t) - \varphi(p(x, t), h(x, t)) \right], \quad (1.49)$$

в котором $\varphi(p, h) = \Phi(p, h)(1 - Bp)$, $\bar{\varphi}(t) = \varphi(p(\bar{x}, t), h(\bar{x}, t))$, $\bar{x} \in [-a, a]$. Уравнение (1.49) позволяет выполнить качественный анализ процесса изнашивания покрытия так же, как это было сделано в разделах 2.1.2, 2.1.3 на основе уравнений (1.16), (1.26).

Условие контакта (1.40) при $W(x, 0) = 0$ дает следующее выражение для начального распределения давления: $p_0(x) \equiv p(x, 0) = (Bh_0)^{-1}[\delta(0) - g(x)]$. Исключая с помощью условия равновесия (1.41) из последнего равенства величину $\delta(0)$, получим выражение

$$p_0(x) = \bar{p} + \frac{1}{Bh_0}[\bar{g} - g(x)], \quad (1.50)$$

причем

$$\bar{p} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a p_0(x) dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a p(x, t) dx = \frac{Q}{2a}, \quad \bar{g} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a g(x) dx.$$

Пример. В случае плоского индентора ($g(x) \equiv 0$) функции $W(x, t)$, $h(x, t)$, $p(x, t)$ от x не зависят, поэтому условие равновесия (1.41) сразу дает $p(x, t) = \bar{p}$. Для обеспечения условия (1.45) проскальзывания индентора по покрытию при $t = 0$ положим $\bar{p} < p_+(0) = GL/(\mu h_0)$. Тогда по мере уменьшения толщины покрытия h условие (1.45) будет оставаться справедливым, обеспечивая следующий вид уравнения (1.48) кинетики изнашивания покрытия:

$$\dot{W}(t) = \frac{4L}{T} F(\bar{p}) \left[1 - \frac{\mu \bar{p}}{GL} (h_0 - W(t)) \right].$$

Его решение экспоненциально зависит от времени:

$$W(t) = h_0 \left(\frac{GL}{\mu \bar{p} h_0} - 1 \right) (e^{\lambda t} - 1), \quad \lambda = \frac{4L \mu \bar{p} F(\bar{p})}{GLT}. \quad (1.51)$$

Проскальзывание за один цикл, согласно (1.47), определяется формулой

$$l_1(x, t) = 4L \left[1 - \frac{\mu \bar{p}}{GL} (h_0 - W(t)) \right]. \quad (1.52)$$

Если вместо деформационного соотношения (1.2) использовать соотношение (1.1), не учитывающее износное изменение толщины покрытия, то в рассматриваемом случае плоского индентора можно прийти к следующему уравнению кинетики изнашивания покрытия

$$\dot{W}(t) = \frac{4L}{T} F(\bar{p}) \left[1 - \frac{\mu \bar{p} h_0}{GL} \right].$$

Его решение линейно по времени:

$$W(t) = h_0 \left(\frac{GL}{\mu \bar{p} h_0} - 1 \right) \lambda t. \quad (1.53)$$

Зависимости (1.51) и (1.53) близки друг к другу на начальном этапе изнашивания, когда $\lambda t \ll 1$, после чего их различие становится значительным. Это обстоятельство свидетельствует о важности учета износного изменения толщины покрытия в модели Винклера (1.2).

Численный анализ. Введем в рассмотрение объемную скорость износа \dot{S} и среднее проскальзывание \bar{l}_1 за цикл:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= \int_{-a}^a \dot{W}(x, t) dx = \int_{-a}^a \Phi(p(x, t), h(x, t)) dx, \\ \bar{l}_1(t) &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a l_1(x, t) dx.\end{aligned}\quad (1.54)$$

При записи второго равенства в (1.54) было принято во внимание уравнение (1.48). Для характеристики степени износа, как и прежде, будем использовать отношение $W_M(t)/h_0$.

Численное решение уравнений (1.40), (1.41), (1.48) строилось на основе явной численной схемы для симметричного параболического индентора ($g(x) = kx^2$) и линейного закона изнашивания $F(p) = \alpha p$, при этом полагалось: $a = 1$ см, $h = 1$ мм, $G = 1$ ГПа, $T = 1$ с, $\mu = 0,1$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-13}$ Па $^{-1}$. Если специально не оговорено, то $ak = 0,714 \cdot 10^{-2}$.

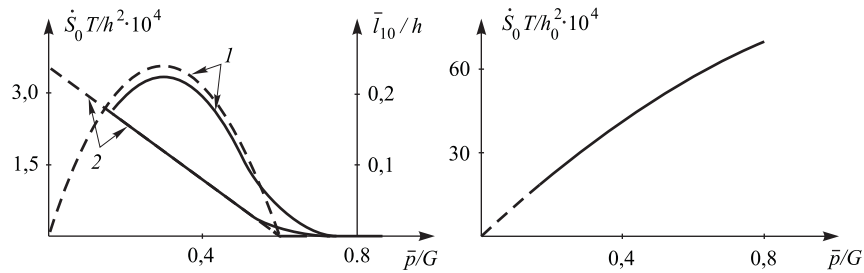


Рис. 2.16. Зависимости начальной объемной скорости износа \dot{S}_0 (1) и начального среднего проскальзывания за цикл \bar{l}_{10} (2) от среднего давления. Штриховые линии соответствуют случаю первоначально плоского индентора

Рис. 2.17. Зависимость начальной объемной скорости износа от среднего давления при повышенной амплитуде колебаний индентора

На рис. 2.16 изображены расчетные зависимости величин $\dot{S}_0 = \dot{S}(0)$ и $\bar{l}_{10} = \bar{l}_1(0)$ от среднего давления \bar{p} при $L/h_0 = 0,06$, тогда как рис. 2.17 представляет зависимость \dot{S}_0 от \bar{p} при более высокой амплитуде колебаний индентора $L/h_0 = 0,3$. Штриховые линии на рисунках соответствуют случаю первоначально плоского индентора ($g(x) \equiv 0$) и рассчитаны по формулам (1.51), (1.52). Отметим, что на рис. 2.16 и рис. 2.17 сплошные кривые начинаются только со значений $\bar{p}/G = 0,167$, т.к. при более

низких удельных нагрузках контакт выпуклого индентора с покрытием нарушается в окрестностях концов области контакта.

Уменьшение проскальзывания с ростом давления, показанное на рис. 2.16, определяется формулой (1.47) и объясняется соответствующим возрастанием доли упругого смещения поверхности покрытия в амплитуде L кинематического смещения индентора. Согласно уравнению (1.48), немонотонный характер зависимости \dot{S}_0 от \bar{p} (рис. 2.16) связан со снижением скорости износа при достаточно больших значениях \bar{p} , и это также связано с вышеупомянутым уменьшением проскальзывания на контакте. Монотонный же характер кривой на рис. 2.17 объясняется смещением максимума зависимости \dot{S}_0 от \bar{p} за пределы рассматриваемого диапазона средних давлений при больших значениях L .

Немонотонная зависимость скорости износа от нагрузки (удельного давления), аналогичная изображенной на рис. 2.16, подтверждается экспериментами [50, 67]. В работе [67] также было экспериментально установлено существование линейно убывающей зависимости проскальзывания от нагрузки, причем соответствующий график пересекает ось абсцисс вблизи второго нуля зависимости скорости износа от нагрузки (ср. с рис. 2.16). Подобные экспериментальные результаты связываются в [67] с уменьшением проскальзывания при больших нагрузках. В свою очередь, уменьшение проскальзывания объясняется эффектом поглощения кинематического движения элементов исследуемой системы их упругими деформациями, что вполне соответствует полученным выше теоретическим результатам.

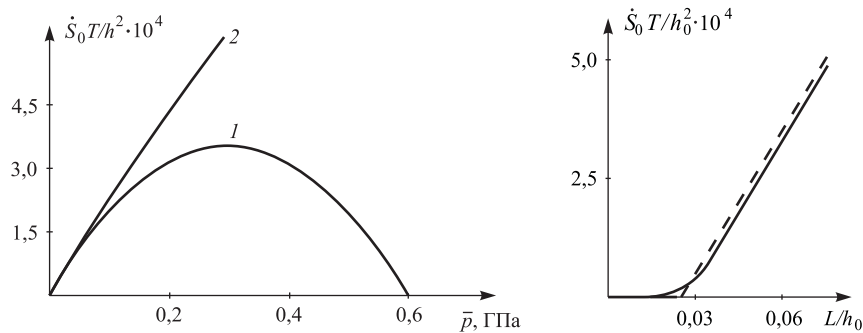


Рис. 2.18. Зависимость начальной объемной скорости износа от среднего давления при различной жесткости покрытия (первоначально плоский индентор): $G = 1$ ГПа (1), $G = 4$ ГПа (2)

Рис. 2.19. Зависимости начальной объемной скорости износа от амплитуды колебаний индентора

Смещение максимума зависимости \dot{S}_0 от \bar{p} за пределы рассматриваемого диапазона средних давлений имеет место также при увеличении

модуля сдвига G , о чем свидетельствуют результаты расчетов, представленные на рис. 2.18. Подобное изменение зависимости скорости износа от давления было обнаружено экспериментально для стали при увеличении ее твердости [64].

На рис. 2.19 изображены расчетные зависимости начального значения объемной скорости износа \dot{S}_0 от амплитуды L колебаний индентора при $\bar{p}/G = 0,253$, причем штриховые линии, как и прежде, соответствуют случаю первоначально плоского индентора. Нулевые значения \dot{S}_0 при малых амплитудах L имеют место здесь в силу уравнения (1.48), правая часть которого при условии $L \cdot G/(\mu h) \equiv p_+ < p$ равна нулю. При таких значениях L , согласно (1.47), имеет место чисто упругое (без проскальзывания) касательное перемещение поверхности покрытия. Отсутствие износа для малых амплитуд колебаний установлено экспериментально [50, 60], причем в работе [50] подобное поведение износа объясняется наличием чисто упругого деформирования трущихся элементов при малых амплитудах их колебаний.

Расчет эволюции давления и износа проводился при двух значениях начальной кривизны индентора: $ak = 1,357 \cdot 10^{-2}$ — большая кривизна и $ak = 0,286 \cdot 10^{-2}$ — малая кривизна. Рис. 2.20 и рис. 2.21 демонстрируют изменение во времени давления и износа при одинаковых среднем давлении $\bar{p} = 0,329 G$ и амплитуде $L = 0,07 h_0$ (в силу симметрии задачи изображены только половины эпюр).

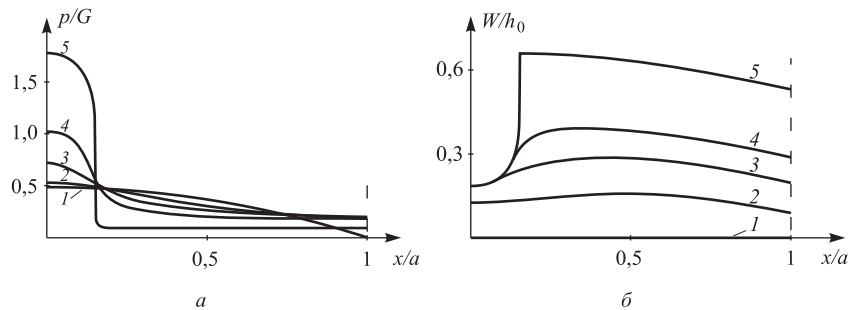


Рис. 2.20. Эпюры давления (а) и износа (б) в различные моменты изнашивания: $W_M/h_0 = 0$ (1); 0,156 (2); 0,286 (3); 0,391 (4); 0,660 (5). Случай большой кривизны индентора

Показанный на рис. 2.20 характер изменения эпюры давления во времени объясняется на основе уравнения (1.49) тем, что при немонотонной зависимости $\Phi(p, h)$ от p на участках области контакта с высокими значениями давления оказывается возможным его неограниченный рост (раздел 2.1.2). При таком росте превышение давлением $p(x, t)$ значения

$p_+(x, t)$ приводит, согласно (1.48), к прекращению износа в соответствующем месте (в центре) области контакта, что отражается в поведении износа, показаном на рис.2.20. В случае малой кривизны индентора и, соответственно, умеренных значений давления (при том же среднем давлении \bar{p}), имеет место установившийся режим, при котором эпюра давления с течением времени выравнивается:

$$p(x, t) \rightarrow p_s(x) = \frac{Q}{2a}, \quad t \rightarrow \infty,$$

а износ монотонно возрастает по всей области контакта (рис. 2.21).

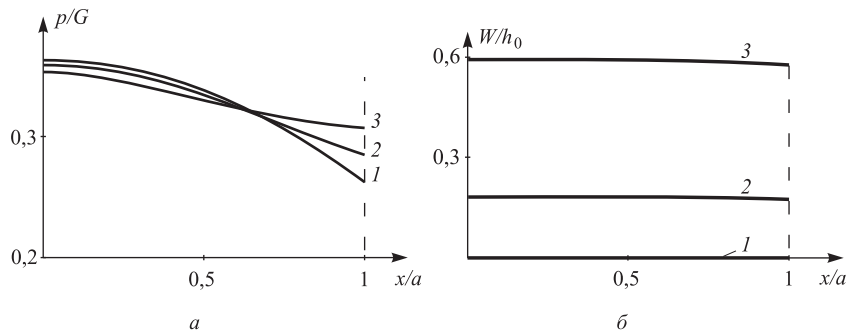


Рис. 2.21. Эпюры давления (а) и износа (б) в различные моменты изнашивания: $W_M/h_0 = 0$ (1); 0,181 (2); 0,594 (3). Случай малой кривизны индентора

Представленные результаты свидетельствуют о существенном влиянии величины нагрузки и геометрии индентора на кинетику изнашивания покрытия при фреттинге.

2.1.6. Расчет износа при изменяющейся области контакта

В работе [6] предложен метод расчета износа покрытия при изменяющейся области контакта, который допускает произвольный закон изнашивания, но предполагает, что профиль изношенной поверхности описывается дугой окружности. Использование асимптотических методов позволяет рассчитать начальную стадию процесса изнашивания покрытия в радиальном подшипнике скольжения в случае степенной зависимости скорости износа от давления [25]. При линейном законе изнашивания решение задачи для покрытия с изменяющейся областью контакта может быть получено в аналитическом виде [10].

Ниже описывается метод расчета процесса изнашивания покрытия в направляющей скольжения с изменяющейся областью контакта и радиальном подшипнике скольжения. Данный метод позволяет использовать произвольный закон изнашивания и допускает эффективную численную реализацию.

Основание с прямолинейной границей (направляющая скольжения). Рассмотрим изнашивание гладким цилиндрическим индентором симметричной формы тонкого упругого покрытия, сцепленного с жестким основанием (рис. 2.22) [37]. Движение индентора происходит вдоль его образующей с постоянной по величине скоростью V под действием нагрузки Q , которая направлена вдоль оси y и может зависеть от времени.

Систему координат расположим так, как это показано на рис. 2.22, направив ось x перпендикулярно образующей индентора вдоль поверхности покрытия. Форма индентора описывается уравнением $y = g(x)$, в котором заданная функция $g(x)$ является четной и монотонно возрастающей при $x > 0$. Область контакта, как и прежде, представим отрезком $x \in [-a, a]$ оси x . Связь перемещения v поверхности покрытия вдоль оси y с давлением p зададим равенством (1.2), а закон изнашивания примем в виде (1.10).

В процессе изнашивания наряду с изменением толщины покрытия будет происходить изменение размера $a(t)$ области контакта с некоторой

скоростью $\Upsilon(t) = da(t)/dt$. Принимая во внимание наложенные на форму индентора ограничения, можно считать, что область контакта монотонно растет от некоторого начального значения $a_0 = a(0)$ до предельного $a_* = a(t_*)$, где t_* — время полного изнашивания покрытия в некоторой точке. Тогда, в силу монотонности функции $a(t)$, существует обратная к ней функция $t(a)$, а также справедливы равенства $W(\pm a(t), t) = 0$, $h(\pm a(t), t) = h_0$. Наличие одно-

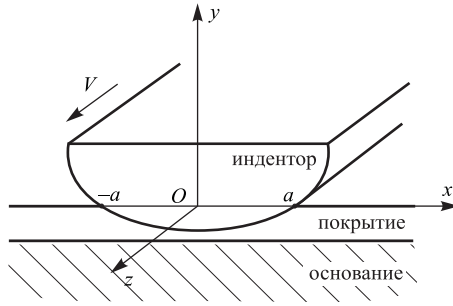


Рис. 2.22. Взаимодействие индентора с покрытием

значной функции $t(a)$ позволяет использовать величину a в качестве временного параметра. Целесообразность перехода от реального времени t к величине a будет пояснена ниже.

При замене $t \rightarrow a$ имеем: $\partial W(x, t)/\partial t = \Upsilon(a) \partial W(x, a)/\partial a$, поэтому, используя в равенствах (1.2), (1.10) для обозначения функций прежние символы, получим:

$$v(x, a) = -Bh(x, a)p(x, a), \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial W(x, a)}{\partial a} \equiv -\frac{\partial h(x, a)}{\partial a} = \frac{1}{\Upsilon(a)} F(p(x, a)), \quad (1.56)$$

$$h(x, a_0) = h_0, \quad h(\pm a, a) = h_0,$$

при этом реальное время определяется выражением

$$t(a) = \int_{a_0}^a \frac{db}{\Upsilon(b)}. \quad (1.57)$$

Отметим, что в случае возрастающей области контакта закону изнашивания можно придать интегральный вид

$$W(x, a) = h_0 - h(x, a) = \int_{\psi(x)}^a F(p(x, b)) \frac{db}{\Upsilon(b)}, \quad x \in [-a, a], \quad (1.58)$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} -x, & x < -a_0, \\ a_0, & x \in [-a_0, a_0], \\ x, & x > a_0. \end{cases}$$

К соотношениям (1.55), (1.56) следует добавить условия контакта и равновесия:

$$-v(x, a) + W(x, a) = \delta(a) - g(x), \quad x \in [-a, a], \quad (1.59)$$

$$Q(t(a)) = \int_{-a}^a p(x, a) dx, \quad (1.60)$$

причем $Q(t)$ — известная зависимость внешней нагрузки от времени. Функция $\delta(a)$ характеризует внедрение индентора.

Для гладкого индентора и возрастающей области контакта $v(\pm a, a) = W(\pm a, a) = 0$, поэтому из (1.59) следует равенство $\delta(a) = g(a)$, при этом само условие контакта (1.59) принимает вид

$$-v(x, a) + W(x, a) = g(a) - g(x) \equiv d(x, a), \quad x \in [-a, a]. \quad (1.61)$$

Если заменить перемещение $v(x, a)$ в условии контакта (1.61) правой частью (1.55), то можно прийти к следующему выражению для давления:

$$p(x, a) = \frac{h(x, a) - h_0 + d(x, a)}{Bh(x, a)}, \quad x \in [-a, a], \quad (1.62)$$

при котором условие равновесия (1.60) принимает вид равенства

$$Q(t(a)) = \frac{1}{B} \int_{-a}^a \frac{h(x, a) - h_0 + d(x, a)}{h(x, a)} dx. \quad (1.63)$$

Равенство (1.63) позволяет найти выражение для скорости роста размера области контакта Υ . Для этого продифференцируем (1.63) по a и заменим производную $-\partial h(x, a)/\partial a$ правой частью закона изнашивания (1.56). В результате можно получить искомое выражение

$$\Upsilon(a) = \frac{J_1(a)}{J_2(a)}, \quad (1.64)$$

в котором

$$J_1(a) = \int_{-a}^a \frac{F(p(x, a))}{h(x, a)} [1 - Bp(x, a)] dx + B\dot{Q}(t(a)),$$

$$J_2(a) = g'(a) \int_{-a}^a \frac{dx}{h(x, a)},$$

$\dot{Q}(t) = dQ(t)/dt$ — скорость изменения нагрузки.

Замечание 1. При условии монотонного возрастания размера области контакта a скорость $\Upsilon(a)$ должна быть положительной, поэтому положительным должен быть и второй сомножитель в правой части (1.64). Это требование накладывает ограничения на скорость изменения нагрузки $\dot{Q}(t)$. В частности, оно выполняется, если нагрузка растет со временем: $\dot{Q}(t) > 0$.

Равенства (1.56), (1.57), (1.62), (1.64) образуют систему уравнений для нахождения неизвестных функций $h(x, a)$, $p(x, a)$, $\Upsilon(a)$, $t(a)$, описывающих процесс изнашивания покрытия.

Определим начальный размер $a_0 = a(0)$ области контакта, положив в равенстве (1.63) $a = a_0$, $h(x, a_0) = h_0$, $Q_0 = Q(0)$. В результате получим следующее уравнение для a_0 :

$$BQ_0h_0 = 2a_0g(a_0) - \int_{-a_0}^{a_0} g(x) dx. \quad (1.65)$$

Для нахождения предельного размера a_* области контакта заметим, что полное изнашивание покрытия при наложенных на функцию $g(x)$ ограничениях может произойти только в точке $x = 0$. Действительно, если в некоторой точке \tilde{x} покрытие полностью изнашивалось, то $v(\tilde{x}, a_*) = 0$, $W(\tilde{x}, a_*) = h_0$, и из условия контакта (1.61) вытекает равенство $h_0 = g(a_*) - g(\tilde{x})$. Если в этом равенстве $\tilde{x} \neq 0$, то для четной и монотонно возрастающей по $x > 0$ функции $g(x)$ имеем: $h_0 < g(a_*) - g(0)$, что противоречит условию контакта индентора с покрытием. Таким образом, значение a_* размера области контакта при полном изнашивании

покрытия удовлетворяет уравнению

$$g(a_*) - g(0) = h_0. \quad (1.66)$$

Опишем в общих чертах метод численного решения системы уравнений (1.56), (1.57), (1.62), (1.64). Перейдем к безразмерной координате $X=x/a$ и соответствующим ей функциям $H(X, a) = h(Xa, a)$, $P(X, a) = p(Xa, a)$. Тогда левая часть закона изнашивания (1.56) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x, a)}{\partial a} &= \left. \frac{dh(x, a)}{da} \right|_{x=\text{const}} = \left. \frac{d}{da} H(x/a, a) \right|_{x=\text{const}} = \\ &= \frac{\partial H(X, a)}{\partial a} - \frac{X}{a} \frac{\partial H(X, a)}{\partial X}, \end{aligned}$$

а само уравнение (1.56) можно записать в виде

$$\frac{\partial H(X, a)}{\partial a} - \frac{X}{a} \frac{\partial H(X, a)}{\partial X} = -\frac{1}{\Upsilon(a)} F(P(X, a)) \quad (1.67)$$

с начальными и граничными условиями $H(X, a_0) = h_0$, $H(\pm 1, a) = h_0$. Схема расчетов основана на интегрировании данного уравнения в частных производных методом пошагового движения вдоль характеристик с учетом начальных и граничных условий [24], а также соотношений (1.57), (1.62), (1.64). А именно, по известным (на первом шаге — из начальных условий) значениям a , t , $H(X, a)$, $P(X, a)$ и заданному приращению da аргумента a правая часть уравнения (1.67) определяет приращение значения функции $H(X, a)$ вдоль характеристик данного уравнения, которые представляют собой семейство гипербол $a = c/X$ (c — параметр семейства). Согласно соотношению (1.57) определяется приращение времени dt , а с помощью выражения (1.62) находят новые значения давления $P(X, a + da)$. Значения $a + da$, $t + dt$, $H(X, a + da)$, $P(X, a + da)$ служат исходными данными для следующего шага по параметру a .

Пример 1. Численные расчеты были проведены для случая параболического индентора, постоянной нагрузки и линейного закона изнашивания: $g(x) = x^2/(2R)$, $Q(t) = \text{const}$, $F(p) = \alpha p$. Были приняты следующие значения параметров задачи: $h_0 = 3$ мм, $B = 10^{-9}$ Па $^{-1}$, $R = 0,5$ м, $Q = 4,4 \cdot 10^5$ Н/м, $\alpha = 10^{-15}$ м/(Па · с).

На рис. 2.23 представлены расчетные эпюры давления в различные моменты изнашивания покрытия, при этом время его полного изнашивания составляет $t_* \simeq 4,9 \cdot 10^5$ с. Как видно из этого рисунка, в течение промежутка времени, достаточно малого по сравнению с t_* , происходит

выравнивание эпюры давления, поэтому с учетом условия равновесия (1.60) можно записать

$$p(x, a) \rightarrow \frac{Q}{2a}, \quad t \rightarrow \infty, \quad x \in (-a, a). \quad (1.68)$$

Отметим, что в последнем соотношении исключаются концы области контакта, где давление $p(x, a)$ принимает нулевые значения.

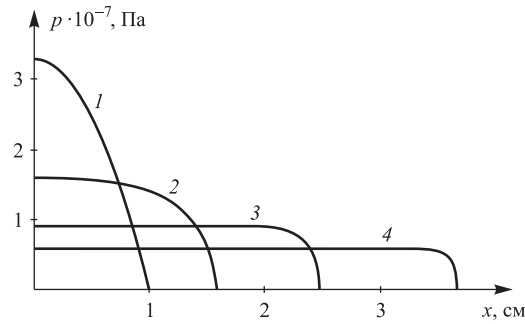


Рис. 2.23. Эпюры давления для направляющей скольжения в различные моменты изнашивания: $\tilde{t} \equiv t/t_* = 0$ (1); 0,018 (2); 0,088 (3); 0,3 (4). В силу симметрии задачи изображены половины кривых

Замечание 2. В процессе изнашивания покрытия должно выполняться неравенство $v(x, a) < h(x, a)$, которое при используемом деформационном соотношении (1.55) эквивалентно следующему: $p(x, a) < B^{-1}$. Выполнение одного из указанных неравенств должно контролироваться при решении износоконтактной задачи. Но если допустить, что $\max_{x,a} p(x, a) = p(0, a_0)$ (это видно из указанных на рис. 2.23 эпюр давления), то с помощью выражения (1.62) можно получить ограничение на значения h_0 и a_0 в виде неравенства $g(a_0) - g(0) < h_0$, обеспечивающего справедливость неравенства $p(x, a) < B^{-1}$.

Пример 2. Пусть, как и прежде, индентор имеет параболическую форму. Рассмотрим закон изнашивания, отвечающий смазанному контакту, когда существует критическое значение p_* такое, что при $p < p_*$ износ почти отсутствует ($F(p) \sim 0$ — жидкостное трение), а при $p \geq p_*$ функция $F(p)$ монотонно возрастает (смешанное трение) [52]. Для сравнения рассмотрим также закон изнашивания с функцией $F_1(p) = \alpha p$, которая при соответствующем подборе параметра α представляет собой линейную аппроксимацию описанной выше функции $F(p)$. Для обоих законов производился расчет процесса изнашивания покрытия при двух значениях нагрузки Q : $2,17 \cdot 10^4$ Н/м и $3,26 \cdot 10^4$ Н/м.

На рис. 2.24 представлены расчетные зависимости скорости внедрения индентора $\dot{\delta}$ от среднего давления $\bar{p} = Q/(2a)$, убывающего в процессе изнашивания. Сплошные кривые на этом рисунке отвечают случаю смазанного контакта при $p_* = 50$ МПа, тогда как штриховой отрезок прямой отмечает участок расположения зависимостей $\dot{\delta}(\bar{p})$ в случае линейного закона изнашивания, причем этот участок одинаков для различных Q . Представленные на рис. 2.24 результаты свидетельствуют о важности учета существующих особенностей закона изнашивания при расчете контактных характеристик изнашиваемого сопряжения. Отметим, что сплошные кривые на этом рисунке качественно совпадают с экспериментальными данными, полученными в работе [52].

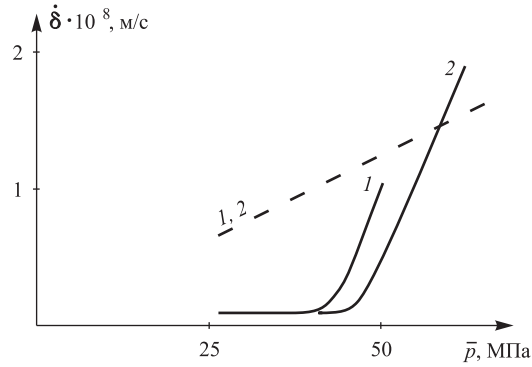


Рис. 2.24. Зависимости скорости внедрения от среднего давления в случае смазанного контакта (сплошные кривые) и при использовании линейной аппроксимации соответствующего закона изнашивания (штриховая линия): $Q = 2,17 \cdot 10^4$ Н/м (1), $Q = 3,26 \cdot 10^4$ Н/м (2)

Укажем теперь на преимущества, которые дает сделанный выше переход от реального времени t к временному параметру a . Прежде всего, использование переменной a вместо t позволяет избавиться от неизвестной функции $a(t)$, определяющей область справедливости условия контакта (1.62) и пределы интегрирования в условии равновесия (1.63). Это существенно упрощает решение износоконтактной задачи. Кроме того, при использовании реального времени t введение безразмерной координаты $X = x/a(t)$ преобразует закон изнашивания (1.56) в уравнение вида

$$\frac{\partial H(X,t)}{\partial t} - \Upsilon(t) \frac{X}{a(t)} \frac{\partial H(X,t)}{\partial X} = -F(P(X,t)).$$

Равенство $dt = -a(t)[X\Upsilon(t)]^{-1}dX$, определяющее характеристики этого уравнения, содержит неизвестные функции $a(t)$, $\Upsilon(t)$, в то время

как при использовании временной переменной a семейство характеристик аналогичного уравнения (1.67) имеет вид $a = c/X$, что упрощает процедуру интегрирования закона изнашивания.

Радиальный подшипник скольжения. Рассмотрим жесткое цилиндрическое основание (обойма подшипника), на поверхность которого нанесено тонкое покрытие. Пусть жесткий неизнашиваемый вал, совершающий вращение, прижимается к покрытию, вследствие чего оно изнашивается (рис. 2.25). Нагрузку на вал, приходящуюся на единицу его длины, обозначим через Q . Положение точек на поверхности покрытия будем задавать с помощью угловой координаты x , отсчитываемой от направления действия нагрузки Q .

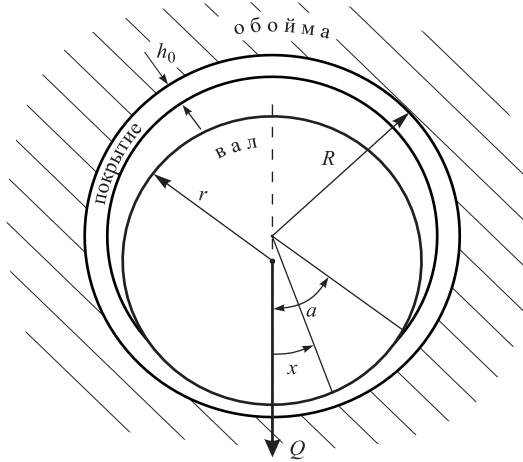


Рис. 2.25. Взаимодействие вала с покрытием в радиальном подшипнике скольжения

Радиальное перемещение v поверхности покрытия определим с помощью зависимости (1.2). В качестве закона изнашивания возьмем равенство (1.10) и предположим монотонное возрастание углового размера a области контакта, что позволит перейти от реального времени t к величине a . Тогда соотношения (1.55), (1.56), (1.57) остаются в силе, за исключением того, что теперь под a понимается угол контакта, x есть угловая координата, а W — линейный износ в радиальном направлении.

Для подшипника скольжения имеют место следующие условия контакта и равновесия [37]:

$$-v(x, a) + W(x, a) = (\Delta + \delta(a)) \cos x - \Delta, \quad x \in [-a, a], \quad (1.69)$$

$$Q(t(a)) = r \int_{-a}^a p(x, a) \cos x dx. \quad (1.70)$$

В данных выражениях $\Delta = R - r$ — радиальный зазор в подшипнике, δ — внедрение вала, $Q(t)$ — известная зависимость внешней нагрузки от времени. Учитывая, что $v(\pm a, a) = W(\pm a, a) = 0$, получим из (1.69) равенство $\delta(a) = \Delta / \cos a - \Delta$, которое позволяет представить условие контакта (1.69) в виде

$$-v(x, a) + W(x, a) = \Delta \left(\frac{\cos x}{\cos a} - 1 \right) \equiv d(x, a), \quad x \in [-a, a]. \quad (1.71)$$

Замена перемещения $v(x, a)$ в условии контакта (1.71) правой частью (1.55) дает следующее выражение для давления:

$$p(x, a) = \frac{h(x, a) - h_0 + d(x, a)}{Bh(x, a)}, \quad x \in [-a, a], \quad (1.72)$$

с использованием которого условие (1.70) можно записать так:

$$Q(t(a)) = \frac{r}{B} \int_{-a}^a \frac{h(x, a) - h_0 + d(x, a)}{h(x, a)} \cos x dx. \quad (1.73)$$

Посредством дифференцирования равенства (1.73) можно, как и прежде, получить выражение для скорости $\Upsilon = da/dt$ роста углового размера области контакта. Не ограничивая общности, ввиду отсутствия принципиального отличия рассматриваемой задачи от предыдущей, положим нагрузку Q постоянной. В этом случае выражение для Υ будет следующим:

$$\Upsilon(a) = \frac{J_1(a)}{J_2(a)}, \quad (1.74)$$

причем

$$J_1(a) = \int_{-a}^a \frac{F(p(x, a))}{h(x, a)} (1 - Bp(x, a)) \cos x dx,$$

$$J_2(a) = \Delta \frac{\sin a}{\cos^2 a} \int_{-a}^a \frac{\cos^2 x}{h(x, a)} dx.$$

Равенства (1.56), (1.72), (1.74) образуют систему уравнений для нахождения неизвестных функций $h(x, a)$, $p(x, a)$, $\Upsilon(a)$. Время t определяется по формуле (1.57), причем в равенства (1.56), (1.72), (1.74) оно не входит. Последнее обстоятельство позволяет для рассматриваемого случая $Q = \text{const}$ описывать протекание процесса изнашивания покрытия с помощью переменной a автономно от реального времени.

Начальный размер области контакта a_0 находится из уравнения

$$\frac{Bh_0Q_0}{r\Delta} = \frac{a_0}{\cos a_0} - \sin a_0, \quad (1.75)$$

которое получается, если в (1.73) положить $a=a_0$, $h(x, a_0)=h_0$. Заметим, что из условия $v(x, a) < h(x, a)$, аналогично случаю направляющей скольжения, можно получить неравенство $\Delta/(h_0+\Delta) < \cos a_0$, которое накладывает ограничение на выбор начальных значений a_0 и h_0 .

Полагая в (1.71) $v(0, a_*) = 0$, $W(0, a_*) = h_0$, придем к следующему выражению для предельного размера области контакта:

$$a_* = \arccos \frac{\Delta}{\Delta + h_0}. \quad (1.76)$$

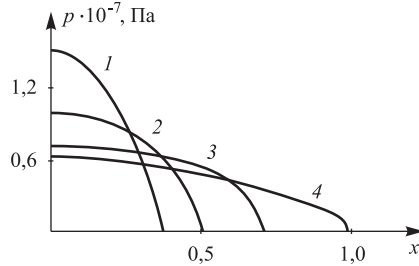


Рис. 2.26. Эпюры давления для радиального подшипника скольжения в различные моменты изнашивания: $\tilde{t} \equiv t/t_* = 0$ (1); 0,013 (2); 0,057 (3); 0,37 (4)

Как и прежде, метод численного решения системы уравнений (1.56), (1.72), (1.74) основывается на переходе к безразмерной координате $X = x/a$. Получаемое в результате дифференциальное уравнение в частных производных совпадает с уравнением (1.67). Схема численного решения этого и других уравнений задачи не имеет принципиальных отличий от схемы, рассмотренной выше для направляющей скольжения.

результате дифференциальное уравнение в частных производных совпадает с уравнением (1.67). Схема численного решения этого и других уравнений задачи не имеет принципиальных отличий от схемы, рассмотренной выше для направляющей скольжения.

Пример. Расчеты проводились для линейного закона изнашивания $F(p) = \alpha p$ и следующих значений параметров: $h_0 = 3$ мм, $B = 10^{-9}$ Па $^{-1}$, $r = 60$ мм, $\Delta = 0,3$ мм, $Q = 6 \cdot 10^5$ Н/м, $\alpha = 10^{-15}$ м/(Па · с).

На рис. 2.26 представлены расчетные эпюры давления в различные моменты изнашивания покрытия, при этом время его полного изнашивания составляет $t_* \simeq 4,6 \cdot 10^5$ с. Здесь, в отличие от направляющей скольжения, имеющей основание с прямолинейной границей, эпюра давления со временем не выравнивается, а принимает вид косинусоиды (за исключением концов области контакта), так что с учетом условия равновесия (1.70)

$$p(x, a) \rightarrow \frac{Q \cos x}{r(a + \sin a \cos a)}, \quad t \rightarrow \infty, \quad x \in (-a, a). \quad (1.77)$$

Подобное поведение давления будет объяснено ниже в разделе 2.1.9.

2.1.7. Расчет износа неоднородного по глубине покрытия

Неоднородные покрытия, в частности, многослойные, широко используются в современной технике для эффективного снижения трения и защиты поверхностей деталей от износа. При расчете износа неоднородного покрытия необходимо принимать во внимание изменение его трибомеханических свойств по глубине.

Постановка задачи и основные уравнения. Допустим, что в постановке задачи первого пункта раздела 2.1.6 покрытие является неоднородным по глубине (рис. 2.27). В частности, это означает, что упругие характеристики покрытия E , ν могут изменяться по глубине. Опишем упрощенную процедуру нахождения деформационного соотношения, связывающего давление p с перемещением v поверхности покрытия [42].

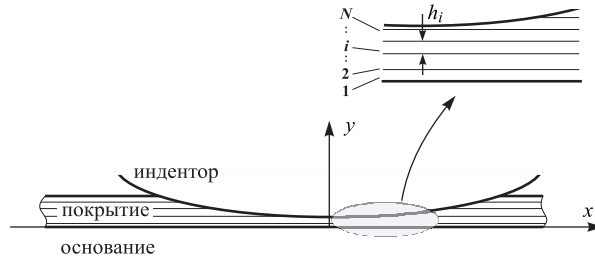


Рис. 2.27. Взаимодействие индентора с многослойным покрытием

Разобьем рассматриваемое покрытие на тонкие слои, в пределах каждого из которых можно пренебречь изменением упругих характеристик (рис. 2.27). Если пронумеровать эти слои, начиная от основания, и обозначить через h_i толщину i -го слоя, $i = 1, \dots, N$, а через v_i и v_{i+1} — нормальные перемещения его нижней и верхней границ, то [3]

$$v_{i+1}(x) - v_i(x) = B_i h_i \sigma_{yi}(x), \quad (1.78)$$

где $B_i = (1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)[(1 - \nu_i)E_i]^{-1}$, E_i и ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона i -го слоя, σ_{yi} — неизменное по глубине нормальное напряжение в нем. Учитывая отсутствие скачков напряжения на границах раздела слоев, можно положить $\sigma_{yi}(x) = -p(x)$. Кроме того, имеют место равенства $v_0(x) \equiv 0$ и $v_N(x) = v(x)$, первое из которых обусловлено абсолютной жесткостью основания, а второе является следствием сделанных определений. Суммирование соотношений (1.78) по $i = 1, \dots, N$ с учетом трех последних равенств дает

$$v(x) = -\bar{B}(x)h(x)p(x), \quad \bar{B}(x) = \frac{1}{h(x)} \sum_{i=1}^N B_i h_i. \quad (1.79)$$

Выполняя в (1.79) предельный переход $N \rightarrow \infty$ и допуская возможность изменения толщины покрытия h , приходим к следующему деформационному соотношению для неоднородного покрытия:

$$v(x, t) = -\bar{B}(x, t)h(x, t)p(x, t), \quad \bar{B}(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_0^{h(x, t)} B(y) dy, \quad (1.80)$$

в которых функция $B(y)$ определяет значение величины $B = (1 - 2\nu)(1 + \nu)[(1 - \nu)E]^{-1}$ для материала покрытия на расстоянии y от основания. Отметим, что функция $\bar{B}(x, t)$ имеет смысл приведенной податливости многослойного покрытия [2].

Как и прежде, предполагается, что характер изменения во времени нагрузки Q на индентор обеспечивает монотонное увеличение размера области контакта a , что позволяет выполнить переход от реального времени t к величине a текущего размера области контакта. Однако закон изнашивания, в отличие от (1.56), следует здесь представить в виде

$$\frac{\partial W(x, a)}{\partial a} \equiv -\frac{\partial h(x, a)}{\partial a} = \frac{1}{\Upsilon(a)} F(p(x, a); h(x, a)), \quad (1.81)$$

$$h(x, a_0) = h_0, \quad h(\pm a, a) = h_0,$$

при этом дополнительный аргумент h функции F учитывает изменение износостойких свойств покрытия по глубине.

При деформационном соотношении (1.80) условие контакта примет вид

$$\bar{B}(x, a)h(x, a)p(x, a) + W(x, a) = g(a) - g(x), \quad x \in [-a, a], \quad (1.82)$$

тогда как условие равновесия сохраняет прежний вид (1.60).

Равенства (1.60), (1.81), (1.82) позволяют установить выражение для скорости $\Upsilon(a)$ роста области контакта через текущие распределения $h(x, a)$ и $p(x, a)$. Для этого продифференцируем условие контакта (1.82) по a , заменим в полученном равенстве производную $-\dot{h}(x, a)$ правой частью (1.81), разрешим его относительно производной $\dot{p}(x, a)$ и проинтегрируем результат по x от $-a$ до a . Согласно условию равновесия (1.60), в полученном таким образом равенстве интеграл от $\dot{p}(x, a)$ равен $\dot{Q}(t(a))/\Upsilon(a)$ (т.к. $p(\pm a, a) = 0$), с учетом чего можно получить искомую зависимость:

$$\Upsilon(a) = \frac{J_1(a)}{J_2(a)}, \quad (1.83)$$

в которой

$$J_1(a) = \int_{-a}^a \frac{F(p(x, a); h(x, a))}{\bar{B}(x, a)h(x, a)} [1 - B(h(x, a))p(x, a)] dx + \dot{Q}(t(a)),$$

$$J_2(a) = g'(a) \int_{-a}^a \frac{dx}{\bar{B}(x, a)h(x, a)}.$$

Подобные рассуждения по сути совпадают с выкладкам, проделанными при выводе выражения (1.64) для скорости $\Upsilon(a)$ в случае однородного

покрытия. Отметим, что для однородного покрытия полученное выражение (1.83) совпадает с (1.64).

Равенства (1.81) — (1.83) образуют систему основных уравнений относительно неизвестных функций $h(x, a)$, $p(x, a)$, $\Upsilon(a)$. После их решения может быть осуществлен переход от a к реальному времени t согласно выражению (1.57).

Начальный размер a_0 области контакта определялся по формуле

$$a_0 = \left(\frac{3}{2} QR \int_0^{h_0} B(y) dy \right)^{1/3},$$

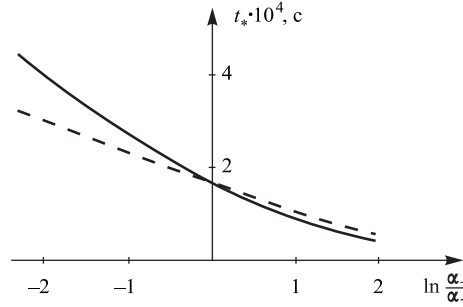


Рис. 2.28. Зависимость долговечности неоднородного покрытия от характера изменения его износостойкости по глубине

которую несложно получить для неизношенного покрытия из условий контакта и равновесия.

Из физических соображений $|v| < h$, поэтому использование соотношения (1.80) допустимо при условии $B(x, a)p(x, a) < 1$.

Численный анализ. Расчет процесса изнашивания неоднородного покрытия был выполнен для параболического штампа: $g(x) = x^2/(2R)$ с использованием явной разностной схемы [24] при следующих исходных данных: $h_0 = 3$ мм, $R = 5$ м, $Q = 10^7$ Н/м, $F(p; h) = \alpha(h)p_w(p/p_w)^\gamma$, $\gamma = 2$, $p_w = 1$ ГПа. Зависимости $B(y)$ и $\alpha(y)$ принимались линейными:

$$B(y) = (B_+ - B_-) \frac{y}{h_0} + B_-, \quad \alpha(y) = (\alpha_+ - \alpha_-) \frac{y}{h_0} + \alpha_-,$$

где $B_- = B(0)$, $B_+ = B(h_0)$, $\alpha_- = \alpha(0)$, $\alpha_+ = \alpha(h_0)$ — граничные значения функций $B(y)$ и $\alpha(y)$.

На рис. 2.28 сплошная линия соответствует зависимости времени полного изнашивания t_* (долговечности) покрытия от параметра α_+ при $B_+ = 5 \cdot 10^{-10}$ Па $^{-1}$, $B_- = 10^{-10}$ Па $^{-1}$, $\alpha_- = 10^{-13}$ м/(Па · с). Пунктирная линия отвечает долговечности покрытия, если поменять порядок изменения свойств покрытия по глубине на обратный, т.е. произвести замену $B_- \leftrightarrow B_+$ и $\alpha_- \leftrightarrow \alpha_+$. Этот результат свидетельствует о заметном влиянии на долговечность неоднородного покрытия порядка расположения в нем слоев с различными износостойкими и упругими свойствами.

2.1.8. Изнашивание покрытия сферическим индентором

Подвижный контакт сферического индентора с плоским основанием часто встречается в установках для трибоиспытаний материалов. Расчет

процесса изнашивания такого сопряжения и, в частности, расчет эволюции давления, имеет значение для корректной интерпретации результатов испытаний на износ.

Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим процесс изнашивания упругого покрытия, связанного с жестким прямолинейным основанием, жестким сферическим индентором радиуса R (рис. 2.29) [43]. Индентор скользит по покрытию без отклонения от заданной траектории, совершая возвратно-поступательное движение с постоянной по величине скоростью V (скольжение по «старому следу»). Систему координат x, y, z свяжем с индентором, как это показано на (рис. 2.29). Нормальная нагрузка P на индентор полагается постоянной, что позволяет считать размер $a(t)$ области контакта вдоль оси x возрастающим во времени.

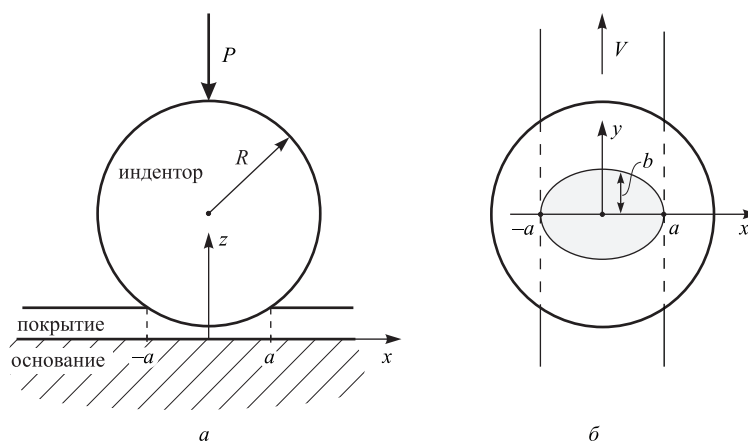


Рис. 2.29. Взаимодействие индентора с покрытием: a — вид по направлению движения индентора; b — вид сверху

Предположим, что процесс изнашивания покрытия описывается законом (1.10) и носит медленный характер, т. е. износ за один проход индентора пренебрежимо мал по сравнению с толщиной покрытия. Учитывая это, будем представлять изношенный участок покрытия цилиндрической канавкой ширины $a(t)$, профиль которой определяется функцией $z = h(x, t) = h_0 - W(x, t)$, при этом аргумент t приписывается началу прохода индентора. Обозначим через $p(x, y, t)$ распределение давления по области контакта, размер которой в направлении скольжения индентора (вдоль оси y) обозначим через $b(x, t)$ (рис. 2.29). Тогда, согласно закону изнашивания (1.10), приращение износа покрытия от участка эпюры давления длины dy есть $dW = F(p)dt = F(p)dy/V$, поэтому

износ δW за один проход индентора составит

$$\delta W(x, t) = \frac{1}{V} \int_{-b(x, t)}^{b(x, t)} F(p(x, y, t)) dy \equiv \mathcal{F}(x, t). \quad (1.84)$$

Величина δW может интерпретироваться как скорость износа по числу проходов индентора, поэтому при условии что δW много меньше суммарного износа, можно записать $n_0 \cdot \delta W = \partial W / \partial t$, где n_0 — частота проходов индентора по покрытию.

С учетом последнего равенства, из соотношения (1.84) следует уравнение кинетики изнашивания:

$$\dot{W}(x, t) = n_0 \mathcal{F}(x, t). \quad (1.85)$$

Аппроксимация поверхности индентора параболоидом вращения $z = k(x^2 + y^2)$, $k = (2R)^{-1}$ позволяет прийти к следующему выражению для перемещения v поверхности покрытия вдоль оси z :

$$v(x, y, t) = -k(b^2(x, t) - y^2), \quad (1.86)$$

причем

$$b(x, t) = \sqrt{a^2(t) - x^2 - k^{-1}W(x, t)}. \quad (1.87)$$

Для определения давления воспользуемся деформационным соотношением (1.2). Подстановка выражения (1.86) в это соотношение позволяет записать равенство

$$p(x, y, t) = \frac{k(b^2(x, t) - y^2)}{Bh(x, t)}. \quad (1.88)$$

Имеет место также условие равновесия индентора

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} dx \int_{-b(x, t)}^{b(x, t)} p(x, y, t) dy, \quad (1.89)$$

которое с учетом выражения (1.88) для давления принимает вид

$$P = \frac{8k}{3B} \int_0^{a(t)} \frac{b^3(x, t)}{h(x, t)} dx = \frac{8}{3} \int_0^{a(t)} b(x, t) p(x, 0, t) dx. \quad (1.90)$$

Определим скорость $\dot{\gamma}$ роста размера a области контакта. Для этого, принимая во внимание выражение (1.87) для b и постоянство нагрузки

P , продифференцируем первое равенство (1.90) по t . Из полученного таким образом равенства вытекает следующее выражение:

$$\Upsilon(t) = \frac{J_1(t)}{J_2(t)}, \quad (1.91)$$

в котором

$$J_1(t) = \int_0^{a(t)} \dot{W}(x,t) \frac{b(x,t)}{h(x,t)} \left[1 - \frac{2}{3} B p(x,0,t) \right] dx,$$

$$J_2(t) = 2ka(t) \int_0^{a(t)} \frac{b(x,t)}{h(x,t)} dx,$$

производная \dot{W} определяется согласно (1.85).

Равенства (1.85), (1.87), (1.88), (1.91), совместно с начальными и граничными условиями $h(x,0) = h(\pm a(t),t) = h_0$ описывают процесс изнашивания покрытия сферическим индентором.

Если в условии равновесия (1.90) взять следующие значения величин b и h в начальный момент времени: $b(x,0) = \sqrt{a_0^2 - x^2}$, $h(x,0) = h_0$, то для начального значения размера области контакта a_0 можно получить формулу

$$a_0 = \left(\frac{2PBh_0}{\pi k} \right)^{1/4}. \quad (1.92)$$

В случае линейного закона изнашивания $F(p) = \alpha p$ уравнение (1.85) существенно упрощается. Действительно, подстановка выражения для давления (1.88) в правую часть (1.85) и взятие соответствующего интеграла при линейной функции $F(p)$ дает следующий результат:

$$\dot{W}(x,t) = \alpha_1 b(x,t) p(x,0,t), \quad \alpha_1 = \frac{4\alpha n_0}{3V}. \quad (1.93)$$

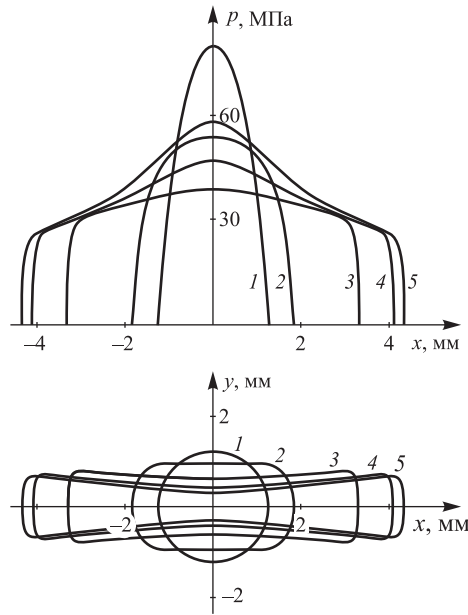


Рис. 2.30. Эпюры давления (сверху) и формы области контакта (снизу) в различные моменты изнашивания: $t = 0$ с (1); $0,16 \cdot 10^5$ с (2); $1,5 \cdot 10^5$ с (3); $2,95 \cdot 10^5$ с (4); $3,45 \cdot 10^5$ с (5)

Численный анализ. Процесс изнашивания покрытия рассчитывался при линейном законе изнашивания $F(p) = \alpha p$ путем численного решения уравнений (1.87), (1.88), (1.91), (1.93) с использованием явной разностной схемы [24]. Были приняты следующие значения параметров задачи: $h_0 = 1$ мм, $R = 1$ см, $P = 200$ Н, $B = 10^{-9}$ Па $^{-1}$, $\alpha_1 = 10^{-13}$ (Па·с) $^{-1}$.

На рис. 2.30 представлены расчетные эпюры давления в сечении $y = 0$ и формы области контакта в различные моменты времени. Обращает на себя внимание тот факт, что, начиная с некоторого момента времени, уменьшение максимального давления сменяется его возрастанием. Объяснение подобному поведению давления, как и представленным на рис. 2.30 формам области контакта, будет дано ниже.

Расчеты показывают, что скорость износа покрытия выравнивается по координате x (за исключением концов $x = \pm a$):

$$\dot{W}(x, t) \rightarrow I_s(t), \quad t \rightarrow \infty, \quad x \in (-a(t), a(t)), \quad (1.94)$$

где $I_s(t)$ — некоторая функция. Об этом свидетельствует представленная на рис. 2.31 расчетная зависимость от времени величины χ , определяющей степень равномерности распределения скорости износа по координате x :

$$\chi(t) = \frac{1}{2a(t)I(t)} \int_{-a(t)}^{a(t)} |\dot{W}(x, t) - I(t)| dx, \quad (1.95)$$

$$I(t) = \frac{1}{2a(t)} \int_{-a(t)}^{a(t)} \dot{W}(x, t) dx.$$

Следуя использованной выше терминологии, стадия изнашивания с малыми значениями величины χ будет называться установившимся режимом, а сама величина χ будет использоваться в качестве характеристики точности установившегося режима.

Расчет изнашивания на стадии установившегося режима. Принимая во внимание достаточно быстрый выход процесса изнашивания на стадию установившегося режима (рис. 2.31), положим вместо (1.94)

$$\dot{W}_s(x, t) = I_s(t), \quad t \geq 0, \quad x \in (-a(t), a(t)). \quad (1.96)$$

Это позволит получить приближенное аналитическое описание процесса изнашивания покрытия. Здесь и далее индексом s отмечаются величины, соответствующие такому описанию.

Сравнение правых частей (1.93) и (1.96) позволяет получить равенство

$$I_s(t) = \alpha_1 b(x, t) p(x, 0, t), \quad (1.97)$$

интегрируя которое по x от 0 до $a(t)$ с учетом условия равновесия (1.90), можно прийти к следующему уравнению кинетики изнашивания покрытия при установившемся режиме:

$$\dot{W}_s(x, t) = \frac{3\alpha_1 P}{8a(t)}, \quad x \in (-a(t), a(t)), \quad t \geq 0. \quad (1.98)$$

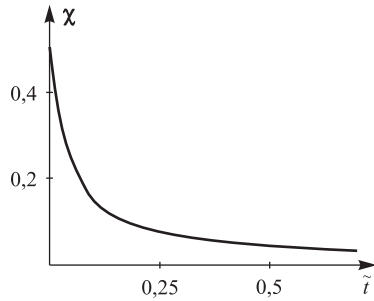
Отметим, что независимость правой части (1.98) от x не означает постоянства износа $W_s(x, t)$ на стадии установившегося режима, т. к. размер области контакта $a(t)$ возрастает. Приравнявая правые части равенств (1.97) и (1.98), получим еще одну формулу:

$$p_s(x, 0, t) = \frac{3P}{8a(t)b(x, t)}. \quad (1.99)$$

Дальнейшее изложение будем вести, считая давление малым, т. е. $Bp \ll 1$. В этом случае замена производной \dot{W} в выражении (1.91) правой частью (1.98) позволяет получить следующее выражение для скорости роста размера a области контакта при установившемся режиме:

$$\Upsilon_s(t) = \frac{3\alpha_1 P}{16ka^2(t)}, \quad (1.100)$$

интегрирование по времени дает



$$a_s(t) = a_0 \left(1 + \frac{9\alpha_1 P}{16ka_0^3} t \right)^{1/3}. \quad (1.101)$$

Рис. 2.31. Зависимость точности χ установившегося режима от времени $\tilde{t} = t/t_*$ (t_* — время полного изнашивания покрытия)

Найдем теперь приближение $b_s(x, t)$ для размера $b(x, t)$ области контакта. С этой целью исключим из правой части выражения (1.88) с помощью соотношения (1.87) функцию $h(x, t) = h_0 - W(x, t)$ и приравняем полученное выражение для давления правой части (1.99). Полагая затем $b(x, t) = b_s(x, t)$, придем к кубическому уравнению для $b_s(x, t)$ следующего вида:

$$b_s^3(x, t) + \lambda_1(t)b_s^2(x, t) + \lambda_2(x, t) = 0,$$

где

$$\lambda_1(t) = -3BP(8a(t))^{-1},$$

$$\lambda_2(x, t) = -3BP(8ka(t))^{-1} [h_0 - k(a^2(t) - x^2)].$$

Данное уравнение имеет единственный действительный корень [7]

$$b_s(x, t) = \left(-\frac{1}{2} q(x, t) + \sqrt{D(x, t)} \right)^{1/3} + \left(-\frac{1}{2} q(x, t) - \sqrt{D(x, t)} \right)^{1/3} + \frac{BP}{8a(t)}, \quad (1.102)$$

причем

$$q(x, t) = \frac{2}{27} \lambda_1^3(t) + \lambda_2(x, t),$$

$$D(x, t) = \frac{1}{27k} [h_0 - k(a^2(t) - x^2)] \lambda_1^4(t) + \frac{1}{4} \lambda_2^2(x, t).$$

Из определений функций λ_1 , λ_2 , q , D и выражения (1.102) следует, что зависимость величины b_s от времени t целиком определяется размером $a(t)$ области контакта. Это позволяет непосредственно сравнить величину b_s с графиками на рис. 2.30 и убедиться в том, что выражение (1.102) достаточно хорошо описывает размер области контакта b на стадии установившегося режима (за исключением концов $x = \pm a(t)$).

Равенства (1.98) – (1.102) позволяют получить выражение для износа $W_s(x, t)$. Например, полагая

$$W_M(t) \equiv \max_{x \in [-a(t), a(t)]} W(x, t) = W(0, t)$$

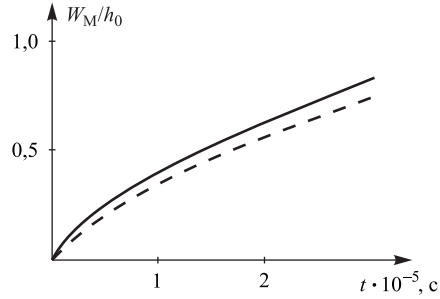


Рис. 2.32. Изменение максимального износа W_{Ms} во времени t согласно расчету (сплошная линия) и по формуле (1.103) (штриховая линия)

и интегрируя (1.98) с учетом (1.101), можно получить следующую формулу:

$$W_{Ms}(t) = ka_0^2 \left[\left(1 + \frac{9\alpha_1 P}{16ka_0^3} t \right)^{2/3} - 1 \right]. \quad (1.103)$$

Рис. 2.32, на котором изображено изменение во времени максимального по области контакта износа, свидетельствует о хорошей точности формулы (1.103).

Для нахождения распределения износа $W_s(x, t)$ на стадии установившегося режима следует взять размер области контакта a в качестве

временного параметра и воспользоваться интегральной формой (1.58) закона изнашивания, положив в ней $F(p(x, a)) = I_s(a)$ и $\Upsilon(a) = \Upsilon_s(a)$.

Замечание. Прделанные выкладки касались случая прямолинейного движения индентора. Однако все вышеизложенное непосредственно переносится на случай движения индентора по окружности, если радиус последней намного превосходит размеры области контакта.

2.1.9. Установившийся режим как основа приближенного расчета износа

В предыдущих разделах процесс изнашивания покрытия рассчитывался путем непосредственного решения основных уравнений износоконтактной задачи. Было обнаружено свойство этого процесса при определенных условиях выходить на установившийся режим, когда давление стремится принять установившееся распределение. В техническом аспекте установившийся режим можно интерпретировать как макроприработку (притирку) подвижного контакта [56].

Зная установившееся распределение, можно дать приближенное описание процесса изнашивания без непосредственного решения основных уравнений задачи. В частности, может быть определено время полного изнашивания (долговечности) покрытия. Пример такого описания приведен в разделе 2.1.8 применительно к изнашиванию покрытия сферическим индентором. Ниже, в предположении существования установившегося режима, будет выполнен приближенный расчет изнашивания покрытия в направляющей скольжения и радиальном подшипнике скольжения.

Общие положения. Согласно полученным выше результатам (разделы 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, 2.1.6), при определенных условиях процесс изнашивания покрытия выходит на установившийся режим, и давление стремится принять известное распределение $p_s(x, t)$. Примерами такого поведения давления служат соотношения (1.20), (1.68), (1.77):

$$p(x, t) \rightarrow \frac{Q}{2a} \equiv \bar{p} = \text{const}, \quad p(x, t) \rightarrow \frac{Q}{2a(t)} \equiv \bar{p}(t),$$

$$p(x, t) \rightarrow \frac{Q \cos x}{r[a(t) + \sin a(t) \cos a(t)]}, \quad (1.104)$$

иллюстрируемые рисунками рис. 2.4, рис. 2.23, рис. 2.26. Здесь и далее запись $p(x, t) \rightarrow p_s(x, t)$ для функций $p(x, t)$ и $p_s(x, t)$, определенных при $x \in [-a(t), a(t)]$, означает, что для каждого фиксированного $x \in (-a(t), a(t))$ происходит сближение значений $p(x, t)$ и $p_s(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Следуя принятой выше терминологии, распределение $p_s(x, t)$ будет называться установившимся.

Для описания точности χ установившегося режима выше использовались различные определения (формулы (1.19), (1.29), (1.95)). В допол-

нение к ним можно использовать величину

$$\chi(t) = \frac{1}{Q} \int_{-a(t)}^{a(t)} |p(x, t) - p_s(x, t)| dx, \quad (1.105)$$

характеризующую интегральную близость функций $p(x, t)$ и $p_s(x, t)$. На рис. 2.33 в качестве примера показана зависимость такой величины от времени для случая, представленного на рис. 2.4 (направляющая скольжения), при этом в качестве безразмерного времени выступает величина $\tilde{t} = t/t_*$, где t_* — время полного изнашивания покрытия. Обращает на себя внимание резкое уменьшение величины χ в процессе изнашивания — например, значение $\chi = 0,05$ достигается уже при времени $t \approx 0,2 t_*$.

Формально можно считать, что процесс изнашивания покрытия находится на стадии установившегося режима, если величина χ типа (1.105) оказывается меньше некоторого наперед заданного малого значения χ_s .

Сформулируем правила нахождения установившегося распределения $p_s(x, t)$ при изнашивании покрытия симметричным цилиндрическим индентором под действием постоянной нагрузки Q . Примером такого подвижного сопряжения является рассмотренная в разделе 2.1.6 направляющая скольжения.

Если область контакта не изменяется, то установившееся распределение давления является стационарным: $p(x, t) \rightarrow p_s(x)$ (например, первое соотношение (1.104)). Подобное поведение давления присуще различным постановкам износоконтактной задачи с постоянной областью контакта [31], и для случая изнашиваемого покрытия было продемонстрировано в разделах 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4. Установившееся распределение $p_s(x)$ при постоянной области контакта, если таковое существует, определяется по следующему правилу.

Правило А. В законе изнашивания, условиях контакта и равновесия заменить $p(x, t)$ на $p_s(x)$, затем продифференцировать условие контакта по t и заменить производную $\dot{W}(x, t) = -\dot{h}(x, t)$ правой частью закона изнашивания. Из полученного таким образом равенства выразить $p_s(x)$, определив при необходимости неизвестные величины с помощью условия равновесия.

В случае возрастающей области контакта и постоянной внешней нагрузки Q давление не может иметь стационарного распределения, и

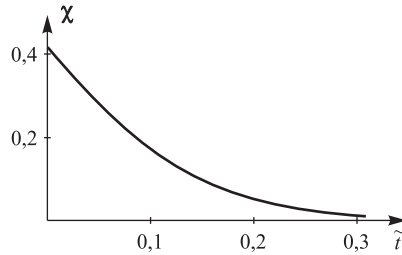


Рис. 2.33. Зависимость точности χ установившегося режима от времени

поэтому установившееся распределение зависит от времени. Для нахождения такого распределения $p_s(x, t)$ в каждый момент изнашивания поставим в соответствие рассматриваемому сопряжению, имеющему размер области контакта $a(t)$ (рис. 2.34а), сопряжение с постоянным размером области контакта $a = a(t)$ (рис. 2.34б), идентичное рассматриваемому сопряжению на участке $x \in [-a, a]$. На рис. 2.34 это сделано для основания с прямолинейной границей. Назовем сопряжение (б) соответствующим рассматриваемому сопряжению (а).

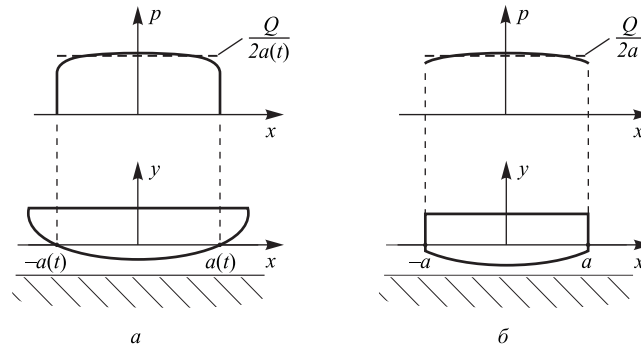


Рис. 2.34. Исходное сопряжение (а) и соответствующее ему сопряжение (б)

Принимая во внимание полученные выше зависимости $\chi(t)$ (рис. 2.5, рис. 2.14, рис. 2.33), допустим, что для сопряжения (б) давление $p(x, t)$ достаточно быстро принимает установившееся распределение $p_s(x)$. Тогда можно ожидать, что для сопряжения (а) при каждом новом значении размера $a(t)$ давление $p(x, t)$ успевает принять установившееся распределение, отвечающее сопряжению (б) (исключение составляют концы области контакта $\pm a$, где давление равно нулю). Другими словами: $p(x, t) \rightarrow p_s(x, t) = p_s(x)|_{a=a(t)}$.

Таким образом, для нахождения установившегося распределения при возрастающей области контакта имеем следующее

Правило Б. Следуя Правилу А, определить установившееся распределение $p_s(x)$ для сопряжения с постоянной областью контакта, которое соответствует рассматриваемому сопряжению (рис. 2.34). В найденном выражении для $p_s(x)$ положить размер области контакта a равным текущему значению $a(t)$, в результате чего будет получено искомое выражение для $p_s(x, t)$.

Предполагаемая малость величины χ на стадии установившегося режима и быстрота его наступления позволяют пренебречь стадией изнашивания, предшествующей установившемуся режиму и произвести замену $p(x, t)$ на $p_s(x, t)$ на всем промежутке времени изнашивания покрытия. Подобное допущение существенно упрощает задачу и будет

использовано ниже как основа приближенного расчета процесса изнашивания покрытия.

Направляющая скольжения. Рассмотрим изнашивание покрытия в постановке первого пункта раздела 2.1.6. Соответствующая система основных уравнений состоит из равенств (1.55), (1.56), (1.59) и (1.60).

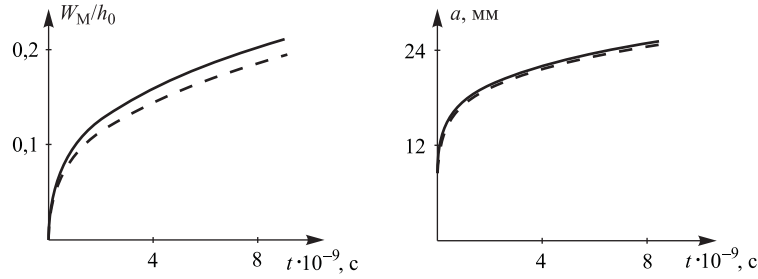


Рис. 2.35. Зависимости отношения W_M/h_0 и размера a области контакта от времени

Свяжем с рассматриваемым сопряжением соответствующее ему сопряжение (рис. 2.34). В качестве такового возьмем сопряжение из раздела 2.1.2, изнашивание которого описывается равенствами (1.10), (1.11), (1.12). Согласно Правилу А, установившееся распределение $p_s(x)$ для такого сопряжения удовлетворяет уравнению

$$F(p_s(x)) [1 - Bp_s(x)] = \dot{\delta}_s(t), \quad (1.106)$$

решениями которого в общем случае являются кусочно-непрерывные функции $p_s(x)$, обеспечивающие постоянство левой части (1.106) (ср. с разделом 2.1.2). Предполагая в дальнейшем использовать возрастающие зависимости $F(p)$ и ограничиваясь случаем малых давлений: $Bp(x, t) \ll 1$, возьмем в качестве $p_s(x)$ постоянное распределение и сразу определим его значение из условия равновесия (1.60): $p_s(x) = Q/(2a)$, $a = \text{const}$. Следуя затем Правилу Б, для рассматриваемого сопряжения с возрастающей областью контакта получим выражение: $p_s(x, t) = Q/(2a(t))$, согласующееся со вторым соотношением (1.104). Используя a в качестве временного параметра, полученному выражению можно придать вид

$$p_s(x, a) = Q/(2a) \equiv \bar{p}(a), \quad (1.107)$$

причем $\dot{\delta}_s(a) = F(\bar{p}(a))$. Производя замену $p(x, a)$ на $p_s(x, a)$ в выражении (1.64) для скорости роста области контакта получим формулу

$$\Upsilon_s(a) = F(\bar{p}(a))/g'(a). \quad (1.108)$$

Здесь, как и прежде, индексом s отмечаются величины, отвечающие приближенному описанию процесса изнашивания на стадии установившегося режима.

Соотношения (1.107), (1.108) совместно с законом изнашивания (1.56) и выражением (1.57) для реального времени $t(a)$ дают приближенное описание процесса изнашивания покрытия при установившемся режиме. В предположении быстрого наступления установившегося режима, т.е. полагая $p(x, a) = p_s(x, a)$ в течении всего процесса изнашивания, эти соотношения позволяют приближенно описывать процесс изнашивания покрытия на всем его протяжении. А именно, если воспользоваться интегральным представлением (1.58) закона изнашивания и положить в нем $p_s(x, a) = \bar{p}(a)$, заменив скорость $\Upsilon(a)$ правой частью (1.108), то можно прийти к следующему выражению для износа:

$$W_s(x, a) = \int_{\psi(x)}^a F(\bar{p}(b)) \frac{db}{\Upsilon_s(b)} = [g(a) - g(\psi(x))], \quad x \in [-a, a]. \quad (1.109)$$

Пример 1. Пусть $F(p) = \beta p^\gamma$, $g(x) = x^2/(2R)$, так что из (1.65) и (1.66) имеем следующие выражения для начального a_0 и конечного a_* размеров области контакта:

$$a_0 = \left(\frac{3}{2} RBQh_0 \right)^{1/3}, \quad a_* = (2Rh_0)^{1/2}. \quad (1.110)$$

Зависимость размера a области контакта от времени t в случае быстрого наступления установившегося режима может быть найдена с помощью выражения (1.57) при использовании (1.108):

$$a_s(t) = \left[a_0^{\gamma+2} + (\gamma+2)Kt \right]^{1/(\gamma+2)}, \quad K = \beta R(Q/2)^\gamma. \quad (1.111)$$

Учитывая, что $a(t_*) = a_*$, из (1.110) и (1.111) можно получить следующую формулу для времени t_* полного изнашивания покрытия в точке $x = 0$:

$$t_* = \frac{1}{(\gamma+2)K} \left[(\sqrt{2Rh_0})^{\gamma+2} - a_0^{\gamma+2} \right].$$

На рис. 2.35 показан характер изменения во времени максимального по области контакта износа W_M и размера a области контакта (сплошные кривые), полученные путем численного решения системы (1.56), (1.57), (1.62), (1.64), и зависимости $W_{Ms}(t)$, $a_s(t)$ (штриховые кривые), построенные на основе равенств (1.109), (1.111). Расчеты проводились при следующих параметрах: $F(p) = \alpha p_w(p/p_w)^\gamma$, $E = 2$ ГПа, $\gamma = 0,3$, $h_0 = 0,3$ мм, $R = 5$ м, $\gamma = 4$, $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-14}$ м/(Па·с), $p_w = 1$ ГПа, $Q = 3 \cdot 10^5$ Н/м. Представленные кривые свидетельствуют о хорошей точности результатов приближенного расчета процесса изнашивания на основе замены $p(x, a)$ на $p_s(x, a)$.

Радиальный подшипник скольжения. Рассмотрим изнашивание покрытия в постановке второго пункта раздела 2.1.6. Соответствующая система основных уравнений состоит из равенств (1.55), (1.56), (1.70), (1.71).

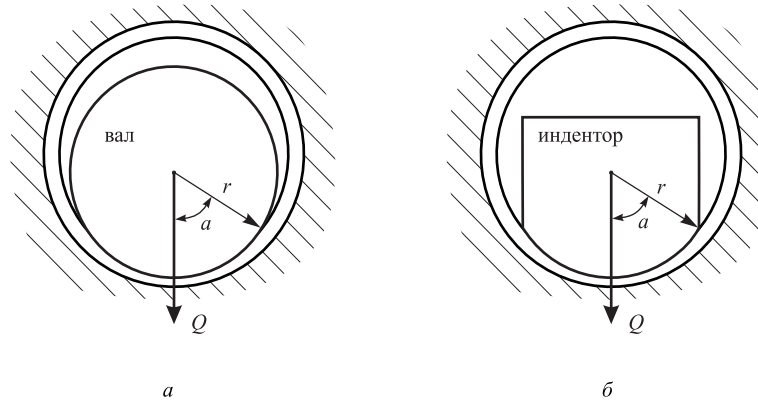


Рис. 2.36. Подшипник скольжения (а) и соответствующее ему сопряжение (б). Движение индентора в соответствующем сопряжении происходит перпендикулярно плоскости рисунка

При замене вращения вала на поступательное движение вдоль его оси эта система уравнений не изменяется, поэтому в качестве соответствующего сопряжения для радиального подшипника скольжения можно взять направляющую скольжения с искривленным основанием, изображенную на рис. 2.36б. Изнашивание такой направляющей описывается уравнениями (1.10), (1.12), (1.22) при форме основания, задаваемой (1.30), или уравнениями (1.55), (1.56), (1.69), (1.70) при $a = \text{const}$. Согласно Правилу А, установившееся распределение $p_s(x)$ для соответствующего сопряжения удовлетворяет равенству (ср. с (1.31))

$$F(p_s(x)) [1 - Bp_s(x)] = \dot{\delta}_s(a) \cos x. \quad (1.112)$$

В отличие от предыдущего пункта, здесь не удастся сразу определить распределение $p_s(x)$. Поэтому, считая зависимость $F(p)$ возрастающей и рассматривая далее случай малых давлений $Bp(x, t) \ll 1$, выразим $p_s(x)$ из (1.112) с помощью функции F^{-1} , обратной к F . После этого, пользуясь Правилу Б, получим следующее установившееся распределение для радиального подшипника скольжения:

$$p_s(x, a) = F^{-1}(\dot{\delta}_s(a) \cos x), \quad (1.113)$$

при этом неизвестная величина $\dot{\delta}_s(a)$ находится подстановкой выражения (1.113) в условие равновесия (1.70).

Производя замену $p(x, a)$ на $p_s(x, a)$ в выражении (1.74) для скорости роста области контакта, получим

$$\Upsilon_s(a) = \frac{\dot{\delta}_s(a) \cos^2 a}{\Delta \sin a}. \quad (1.114)$$

Соотношения (1.113), (1.114) совместно с законом изнашивания (1.56), условием равновесия (1.70), а также соотношением (1.57) для реального времени $t(a)$ дают приближенное описание процесса изнашивания покрытия при установившемся режиме.

В предположении быстрого наступления установившегося режима, сделаем замену $p(x, a) \rightarrow p_s(x, a)$ в течении всего процесса изнашивания. Это позволяет воспользоваться выражениями (1.113) и (1.114) в интегральном представлении закона изнашивания (1.58) и прийти к следующему выражению для износа:

$$\begin{aligned} W_s(x, a) &= \int_{\psi(x)}^a F(p_s(x, b)) \frac{db}{\Upsilon_s(b)} = \\ &= \Delta \cos x \left(\frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\cos \psi(x)} \right), \quad x \in [-a, a]. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Пример 2. Пусть $F(p) = \beta p^\gamma$. Тогда выражение (1.113) примет вид

$$p_s(x, a) = \left(\beta^{-1} \dot{\delta}_s(a) \cos x \right)^{1/\gamma}. \quad (1.116)$$

Если (1.116) подставить в условие равновесия (1.70), то можно определить $\dot{\delta}_s(a)$:

$$\dot{\delta}_s(a) = \beta \left(\frac{Q}{rC_\gamma(a)} \right)^\gamma, \quad C_\gamma(a) \equiv \int_{-a}^a \cos^{(1+\gamma)/\gamma} x \, dx, \quad (1.117)$$

после чего само выражение (1.116) примет вид

$$p_s(x, a) = \frac{Q}{rC_\gamma(a)} \cos^{1/\gamma} x. \quad (1.118)$$

В частном случае линейного закона изнашивания это выражение согласуется с результатами (1.32) и (1.77).

Кроме того, из равенств (1.114) и (1.117) вытекает следующая формула для $\Upsilon_s(a)$:

$$\Upsilon_s(a) = \frac{\beta}{\Delta} \left(\frac{Q}{rC_\gamma(a)} \right)^\gamma \frac{\cos^2 a}{\sin a}, \quad (1.119)$$

подстановка которой в выражение (1.57) для времени t позволяет записать:

$$t_s(a) = \frac{\Delta}{\beta} \left(\frac{r}{Q} \right)^\gamma \int_{a_0}^a [C_\gamma(b)]^\gamma \frac{\sin b}{\cos^2 b} db. \quad (1.120)$$

На рис. 2.37 показана зависимость $W_M(t)/h_0$, полученная путем численного решения системы (1.56), (1.57), (1.72), (1.74) при $F(p) = \alpha p_w (p/p_w)^\gamma$, $E = 2$ ГПа, $\nu = 0,3$, $h_0 = 0,3$ мм, $r = 1$ см, $\Delta = 0,3$ мм, $\alpha = 0,19 \cdot 10^{-14}$ м/(Па·с), $p_w = 1$ ГПа, $\gamma = 4$, $Q = 10^5$ Н/м. Штриховая кривая отвечает зависимости $W_{Ms}(t)/h_0$, построенной на основе равенств (1.115) и (1.120) при тех же параметрах задачи, что и для сплошной кривой.

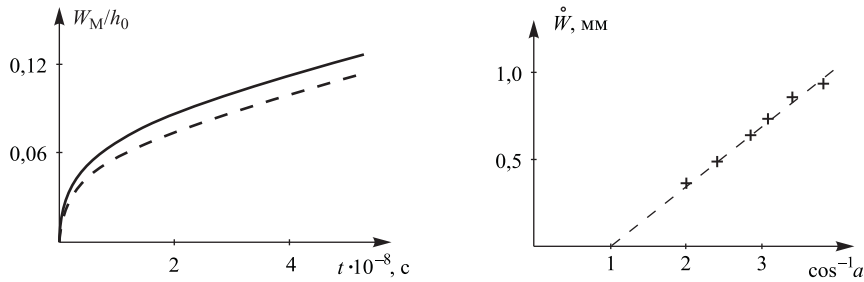


Рис. 2.37. Зависимость максимального износа W_M от времени t

Рис. 2.38. Зависимость износа $\dot{W} \equiv W(0, a)$ в центре подшипника скольжения от величины $\cos^{-1} a$: результаты испытаний — маркеры +, теоретическая зависимость (1.115) — штриховая линия

Представленные зависимости свидетельствуют о быстром наступлении установившегося режима в подшипнике скольжения. Это обуславливает хорошее совпадение результатов приближенного расчета процесса изнашивания покрытия, использующего замену $p(x, a)$ на $p_s(x, a)$, с результатами непосредственного решения уравнений задачи.

Полученные теоретические результаты согласуются с испытаниями на износ капролонового вкладыша (покрытия) в стальной обойме подшипника скольжения. Толщина вкладыша, радиус вала, радиальный зазор, нагрузка на вал составляли соответственно: $h_0 \simeq 2$ мм, $r \simeq 13$ мм, $\Delta \simeq 0,5$ мм, $Q \simeq 6 \cdot 10^4$ Н/м. В ходе испытаний измерялись значения износа $W(0, a)$ в центре подшипника и угловой размер области контакта a . Рис. 2.38, на котором представлены результаты испытаний, свидетельствует о хорошем совпадении экспериментальной зависимости $W(0, a)$ с теоретической вида (1.115): $W_s(0, a) = \Delta(1/\cos a - 1/\cos a_0)$.

Замечание. Существование установившегося режима при изнашивании покрытия не является обязательным — выполненный выше ана-

лиз процесса изнашивания (раздел 2.1.2) свидетельствует о возможности неограниченного локального роста давления или существования кусочно-постоянного предельного распределения давления, отличного от полученных здесь распределений $p_s(x)$. Наличие стадии установившегося режима определяется износостойкими и деформационными свойствами покрытия, геометрией сопряжения и его нагруженностью. В частности, такая стадия имеет место для возрастающей функции $F(p)$ в законе изнашивания и при условии $Bp(x, 0) \ll 1$ (раздел 2.1.2). Анализ влияния свойств покрытия на скорость выхода процесса изнашивания на установившийся режим содержится в [38].

Установившийся режим и модель изнашивания жестких тел. Основным уравнением модели изнашивания жестких тел, пренебрегающей контактными деформациями, является кинематическое условие конформного касания жестких тел [34]. Возьмем в качестве примера радиальный подшипник скольжения, для которого это условие имеет вид

$$\dot{W}(x, a) = \dot{\delta}(a) \cos x. \quad (1.121)$$

Равенство (1.121) дополняется законом изнашивания (1.56) и условием равновесия (1.70).

При определенных условиях процесс изнашивания на стадии установившегося режима отвечает модели изнашивания жестких тел. Так, при сравнительно низких давлениях, когда $Bp(x, a) \ll 1$, равенство (1.112) совпадает с равенством (1.121), если в последнем заменить производную \dot{W} правой частью закона изнашивания. Это означает, что установившееся распределение $p_s(x, a)$ имеет такой же вид (1.118), как и в модели изнашивания жестких тел.

В общем же случае нельзя отождествлять установившийся режим с моделью изнашивания жестких тел. Это связано с тем, что формирование установившегося распределения $p_s(x, a)$ происходит в результате износного формоизменения деформируемого сопряжения. В частности, здесь возможен случай кусочно-постоянной эпюры $p_s(x, a)$ (см. рис. 2.6), который отсутствует в модели изнашивания жестких тел. Кроме того, согласно (1.112), установившееся распределение зависит от деформационных свойств сопряжения.

Здесь важно отметить еще один момент. При изнашивании деформируемого сопряжения его износ W растет, тогда как упругие перемещения v остаются ограниченными, т.е. со временем оказывается, что $|v| \ll W$. Последнее соотношение позволяет пренебречь в условии контакта типа (1.71) упругими перемещениями и прийти к условию контакта жестких тел. Однако, этого все равно недостаточно для получения равенства (1.121) из условия контакта (1.71) — необходимо еще выполнение соотношения $|\dot{v}| \ll \dot{W}$, что требует отдельного обоснования.

§ 2.2. Расчет износа при случайном взаимодействии тел

2.2.1. Основные положения

Рассмотренные выше постановки износоконтактной задачи предполагали, что ее параметры точно заданы или изменяются в процессе изнашивания определенным образом. Однако такое положение часто не выполняется на практике вследствие наличия неизбежных погрешностей в задании движения и режима нагружения реальных подвижных сопряжений (допуски при сборке, вибрация и деформация крепежных элементов и т. п.). Ниже описывается подход к расчету изнашивания, предполагающий случайный характер взаимодействия контактирующих тел.

Общая идея такого подхода состоит в том, что скорость $\partial W/\partial t$ износа в каждый момент t взаимодействия тел в произвольной точке x поверхности трения определяется соответствующими значениями давления p и скорости скольжения V согласно закону изнашивания:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = F(p(x,t), V(x,t)). \quad (2.1)$$

При взаимодействии тел область контакта с соответствующими эпюрами давления $p(x,t)$ и скорости скольжения $V(x,t)$ случайным образом перемещается по поверхности изнашиваемого тела, поэтому, согласно (2.1), скорость износа, а следовательно, и сам износ тела являются случайными функциями времени. Учитывая это обстоятельство, будем описывать кинетику изнашивания в терминах средних значений \overline{W} износа.

Введем в рассмотрение набор X случайных параметров, определяющих контактное взаимодействие в рассматриваемом сопряжении. В качестве таких параметров могут выступать внешняя нагрузка (ее величина и направление), трибомеханические и геометрические характеристики контртела, параметры относительного движения тел и т. п. Будем считать, что стохастические свойства параметров X описываются известной функцией плотности вероятности $\rho(X,t)$.

Фигурирующие в законе изнашивания (2.1) давление и скорость скольжения зависят от параметров X , поэтому имеется детерминированная связь скорости износа с этими параметрами: $\partial W(x,t)/\partial t = F(p(x,t;X), V(x,t;X))$. Усредняя правую часть последнего равенства по ансамблю $\{X\}$ значений величин X , получим в его левой части среднюю скорость износа $\overline{\partial W/\partial t}$. Следуя результатам [8], полученную скорость можно заменить на $\partial \overline{W}/\partial t$ и в результате прийти к следую-

щему уравнению кинетики изнашивания в терминах средних значений:

$$\frac{\partial \bar{W}(x, t)}{\partial t} = \int_{\{X\}} F(p(x, t; X), V(x, t; X)) \rho(X, t) dX. \quad (2.2)$$

Начальное условие при этом имеет вид $\bar{W}(x, 0) \equiv 0$. Полученное уравнение (2.2) является аналогом закона изнашивания (2.1), справедливым при случайном взаимодействии контактирующих тел.

Давление $p(x, t; X)$ и скорость скольжения $V(x, t; X)$, присутствующие в (2.2), находятся из решений контактной и кинематической задач, при этом форма тела определяется через среднестатистический износ $\bar{W}(x, t)$. Последнее допустимо, если случайное отклонение δW износа (как реализации случайного процесса) от его среднего значения \bar{W} мало по сравнению с \bar{W} и некоторыми характерными размерами изнашиваемого сопряжения. Проверка соотношения $|\delta W| \ll \bar{W}$ представляет собой достаточно трудоемкую процедуру, и в дальнейшем выполняться не будет. Отметим только, что такая проверка проводилась в [41] для радиального подшипника скольжения.

При достаточно большой дисперсии параметров набора X , на поверхности изнашиваемого тела отсутствует приработанная к форме контртела лунка износа, имеющая место при детерминированной постановке износоконтактной задачи. Вместо этого износ распределяется достаточно равномерно по поверхности тел, и это позволяет использовать простые решения контактной задачи для тел гладкой формы (например, решение Герца [19]). Последнее обстоятельство делает в ряде случаев расчет износа в стохастической постановке на основе интегрального соотношения (2.2) более простым, чем при детерминированной постановке, использующей функциональную форму закона изнашивания (2.1).

2.2.2. Изнашивание покрытия в радиальном подшипнике скольжения

В разделе 2.1.6 рассматривалось изнашивание радиального подшипника скольжения в предположении, что внешняя нагрузка сохраняет свое направление. Однако на практике такое допущение зачастую нарушается. Например, это происходит, когда подшипник связан с подвижным основанием, а нагрузка на вал обусловлена силой тяжести. Ниже описывается подход к расчету изнашивания радиального подшипника скольжения при случайном изменении направления внешней нагрузки.

Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим процесс изнашивания жестким валом тонкого упругого покрытия, расположенного в жесткой обойме подшипника (рис. 2.39). Взаимодействие вала с покрытием характеризуется углом $\xi \in [-\pi, \pi]$ приложения нагрузки \mathbf{Q} , который отсчитывается от вертикали (рис. 2.39) и принимает случайные значения. Величина ξ здесь является единственным элементом набо-

ра X случайных параметров, введенного выше. Зависимость величины нагрузки Q от аргументов ξ и t считается детерминированной.

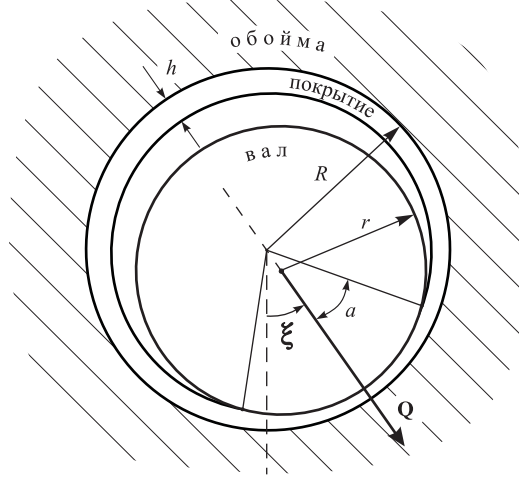


Рис. 2.39. Взаимодействие покрытия с валом в радиальном подшипнике скольжения

Закон изнашивания (2.1) в предположении постоянства скорости вращения вала представим в виде

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = F(p(x, t; \xi)), \quad (2.3)$$

где $p(x, t; \xi)$ — распределение давления, отвечающее направлению ξ , действия внешней нагрузки, x — угловая координата, отсчитываемая, как и ξ , от вертикали.

Пусть в некоторый момент времени t распределение толщины покрытия по координате x описывается функцией $h(x, t)$, так что $\Delta(x, t) = R - r - h(x, t)$ — радиальный зазор подшипника. Введем в рассмотрение вариацию толщины покрытия

$$k_v(t) = \max_{x_1, x_2 \in [-\pi, \pi]} |h(x_1, t) - h(x_2, t)| \quad (2.4)$$

и величину $A(x, t) = Bh(x, t)Q(x, t)[r\Delta(x, t)]^{-1}$. В предположении малости значений k_v , т.е.

$$k_v(t) \ll \Delta(x, t), \quad k_v(t) \ll h(x, t), \quad (2.5)$$

$$k_v(t) \ll \Delta(x, t)[A(x, t)]^{2/3}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

распределение давления можно считать симметричным по x относительно направления ξ [41]. В этом случае условие контакта вала с изношен-

ным покрытием имеет вид (ср. с (1.71), раздел 2.1.6)

$$Bh(\xi, t)p(x, t; \xi) = \Delta(\xi, t) \left(\frac{\cos(x - \xi)}{\cos a(\xi, t)} - 1 \right), \quad (2.6)$$

$$x \in [\xi - a(\xi, t), \xi + a(\xi, t)],$$

где $a(\xi, t)$ — угловой размер области контакта, отвечающий направлению ξ .

Условие равновесия, связывающее нагрузку Q с давлением $p(x, t; \xi)$, представляется равенством

$$Q(\xi, t) = r \int_{\xi - a(\xi, t)}^{\xi + a(\xi, t)} p(x, t; \xi) \cos(x - \xi) dx.$$

Подстановка в правую часть этого равенства выражения (2.6) для $p(x, t; \xi)$ позволяет прийти к следующему соотношению (ср. с (1.75)):

$$\frac{Bh(\xi, t)Q(\xi, t)}{r\Delta(\xi, t)} = \frac{a(\xi, t)}{\cos a(\xi, t)} - \sin a(\xi, t) \equiv \mathcal{R}(a(\xi, t)). \quad (2.7)$$

По заданной нагрузке $Q(\xi, t)$ равенства (2.6) и (2.7) позволяют найти распределение давления $p(x, t; \xi)$ и размер области контакта $a(\xi, t)$, если известна толщина покрытия $h(x, t)$. Однако в силу случайного характера взаимодействия вала с покрытием, толщину $h(x, t)$ следует рассматривать как реализацию случайного процесса изнашивания покрытия. Таковой же следует считать и функцию $p(x, t; \xi)$, определяемую через $h(x, t)$ согласно (2.6). Для устранения неопределенностей давления и размера области контакта, связанной со случайностью толщины $h(x, t)$ покрытия, заменим ее в равенствах (2.6), (2.7) средним (по ансамблю реализаций) значением $\bar{h}(x, t)$ так, что

$$p(x, t; \xi) = \frac{\bar{\Delta}(\xi, t)}{B\bar{h}(\xi, t)} \left(\frac{\cos(x - \xi)}{\cos a(\xi, t)} - 1 \right), \quad (2.8)$$

$$x \in [\xi - a(\xi, t), \xi + a(\xi, t)],$$

$$\frac{B\bar{h}(\xi, t)Q(\xi, t)}{r\bar{\Delta}(\xi, t)} = \mathcal{R}(a(\xi, t)),$$

причем функция \mathcal{R} определяется правой частью (2.7).

Выполненная замена допустима, если предположить, что случайное отклонение $\delta h(x, t)$ толщины $h(x, t)$ от ее среднего значения $\bar{h}(x, t)$ мало

по сравнению с $\bar{h}(x, t)$ и средним значением $\bar{\Delta}(x, t) = R - r - \bar{h}(x, t)$ радиального зазора:

$$|\delta h(x, t)| \ll \bar{h}(x, t), \quad |\delta h(x, t)| \ll \bar{\Delta}(x, t), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (2.9)$$

Для частных случаев (например, когда ξ представляет стационарный случайный процесс с конечным значением максимального интервала корреляции) могут быть получены условия выполнения соотношений (2.5) и (2.9) в терминах средних значений [41].

Расчет процесса изнашивания. Вернемся теперь к закону изнашивания (2.3) и, следуя общему подходу к расчету изнашивания при случайном взаимодействии, усредним его правую часть по ансамблю значений $\xi \in [-\pi, \pi]$ с плотностью вероятности $\rho(\xi, t)$. В результате, учитывая равенство $\bar{h} = h_0 - \bar{W}$, получим уравнение кинетики изнашивания покрытия в терминах средних значений

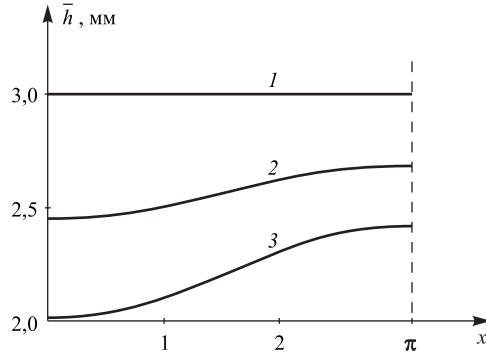


Рис. 2.40. Средняя статистическая толщина $\bar{h}(x, t)$ покрытия в различные моменты изнашивания: $t = 0$ с (1); $8,4 \cdot 10^4$ с (2); $14,5 \cdot 10^4$ с (3). В силу симметрии задачи изображены половины кривых

$$\frac{\partial \bar{h}(x, t)}{\partial t} = - \int_{-\pi}^{\pi} F(p(x, t; \xi)) \rho(\xi, t) d\xi \quad (2.10)$$

с начальным условием $\bar{h}(x, 0) = h_0$.

Совместно с равенствами (2.8) уравнение (2.10) позволяет рассчитать средний статистический износ покрытия в рассматриваемом подшипнике скольжения. Соответствующие расчеты были выполнены при $r = 50$ мм, $R = 56$ мм, $h_0 = 3$ мм, $E = 2$ ГПа, $\nu = 0,3$, $Q(\xi, t) = \text{const} = 5 \cdot 10^6$ Н/м, $\rho(\xi, t) = (8\pi)^{-1} \cos \xi + (2\pi)^{-1}$; $F(p) = \alpha p_w (p/p_w)^\gamma$, $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-15}$ м/(Па · с), $p_w = 1$ ГПа, $\gamma = 2$.

На рис. 2.40 представлены расчетные распределения средней толщины покрытия в различные моменты времени. Как и следовало ожидать, наибольший износ покрытия имеет место в точке $x = 0$, отвечающей наиболее вероятному направлению действия нагрузки \mathbf{Q} при заданной функции $\rho(\xi, t)$.

2.2.3. Расчет износа сферического шарнира

Практика использования сферических опор скольжения (шарниров) часто предполагает, что внешняя нагрузка на шарнир претерпевает изменения. Примером этому служат условия работы протеза тазобедренного сустава.

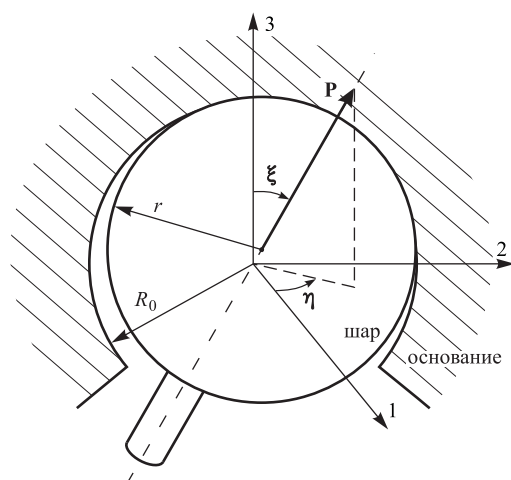


Рис. 2.41. Взаимодействие шара с основанием в сферическом шарнире

Для таких условий нагружения известные подходы [20, 51] к расчету износа сферических шарниров оказываются неприменимыми. Однако использование стохастического подхода позволяет выполнить такой расчет.

Постановка задачи. Рассмотрим сферический шарнир, состоящий из шара радиуса r и основания с шаровой выточкой (рис. 2.41), причем основание может быть как однородным, так и нести покрытие на своей поверхности [44]. Свяжем с основанием декартову систему координат $1, 2, 3$, совместив ее начало с центром шаровой выточки, и обозначим через x и y отсчитанные от осей 3 и 1 сферические координаты (полярный и азимутальный углы соответственно). Направление действия нагрузки \mathbf{P} на шар будем характеризовать сферическими координатами ξ, η (рис. 2.41), которые считаются случайными и образуют набор X случайных параметров, определяющих контактное взаимодействие шара с основанием. Величина нагрузки P полагается зависящей от этих параметров детерминированным образом: $P = P(\xi, \eta, t)$. Стохастические свойства величин ξ, η определяются известной функцией плотности вероятности $\rho(\xi, \eta, t) \equiv \rho(X, t)$.

При взаимодействии с основанием шар совершает вращение. Компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответствующей угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в системе координат $1, 2, 3$ полагаются заданными как функции направления действия нагрузки и времени: $\omega_i = \omega_i(\xi, \eta, t)$. В результате взаимодействия с шаром основание изнашивается согласно закону (2.1), при этом сам шар считается неизнашиваемым. Обозначим через $R(x, y, t)$ радиальную координату поверхности изношенного основания, так что $W(x, y, t) = R(x, y, t) - R_0$, R_0 — радиус неизношенного основания. Введем так-

же в рассмотрение радиальный зазор $\Delta(x, y, t) = R(x, y, t) - r$ и будем считать, что $\Delta \ll r$.

Контактно-кинематические соотношения. При заданной нагрузке P давление p в некоторой точке x, y поверхности основания определяется из решения контактной задачи для шара и основания. Если, в предположении малости износа в пределах области контакта по сравнению с зазором Δ , аппроксимировать изношенную поверхность основания сферой радиуса $R(\xi, \eta, t) = R_0 + W(\xi, \eta, t)$, то можно воспользоваться постановками контактной задачи, допускающими решение в явном виде.

Так, в случае, когда шар и основание являются упругими, а угловой размер a области их контакта мал, можно воспользоваться классическим решением Герца [19]. Для этого введем в рассмотрение угол $\varphi = \varphi(x, y; \xi, \eta)$ между направлениями x, y и ξ, η и примем во внимание, что расстояние точки x, y области контакта от ее центра ξ, η можно заменить на $r \sin \varphi$, а радиус области контакта — на $r \sin a$, где a — угловой размер области контакта. С учетом этого, решение Герца для рассматриваемого сопряжения дает следующие формулы:

$$p(x, y, t; X) = \frac{3P}{2\pi r^2 \sin^2 a} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \varphi}{\sin a} \right)^2}, \quad \varphi \leq a, \quad (2.11)$$

$$\sin a(\xi, \eta, t) = \frac{1}{r} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \frac{Pr^2}{\Delta} \right]^{1/3}, \quad (2.12)$$

причем $\cos \varphi = \sin x \sin \xi \cos(y - \eta) + \cos x \cos \xi$, E_1, E_2 и ν_1, ν_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона шара и основания соответственно. Здесь и далее, где это не может вызвать недоразумений, аргументы в записях некоторых функций опускаются.

Если же основание состоит из тонкого упругого покрытия, связанного ободкой в виде шаровой выточки, причем ободка и шар являются абсолютно жесткими, то по аналогии с (2.8) можно записать

$$p(x, y, t; X) = \frac{\Delta}{Bh} \left(\frac{\cos \varphi}{\cos a} - 1 \right), \quad \varphi \leq a, \quad (2.13)$$

где $h(\xi, \eta, t)$ — толщина изношенного покрытия в направлении ξ, η , B — коэффициент податливости покрытия, определенный выше (раздел 2.1.1). Подстановка полученного выражения для давления в условие равновесия шара в направлении ξ, η позволяет прийти к следующему уравнению относительно углового размера $a(\xi, \eta, t)$ области контакта:

$$\frac{3BhP}{\pi r^2 \Delta} = \frac{2}{\cos a} + \cos^2 a - 3. \quad (2.14)$$

Величина скорости скольжения V шара по основанию определяется угловой скоростью его вращения $\omega(\xi, \eta, t)$. Принимая во внимание

условие $\Delta \ll r$, будем считать, что неподвижная точка шара совпадает с началом системы координат $1, 2, 3$. Тогда скорость скольжения в произвольной точке поверхности основания с координатами x, y может быть найдена по известной формуле теоретической механики [1]

$$V(x, y; X) = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = [(\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1)^2 + (\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2)^2 + (\omega_3 r_1 - \omega_1 r_3)^2]^{1/2}, \quad (2.15)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки x, y , компоненты которого в системе $1, 2, 3$ задаются выражениями $r_1 = r \sin x \cos y$, $r_2 = r \sin x \sin y$, $r_3 = r \cos x$. Присутствие аргумента X в левой части (2.15) обуславливается зависимостью компонент ω_i от направления ξ, η .

Расчет процесса изнашивания. Давление p и скорость скольжения шара V определяют посредством закона изнашивания (2.1) скорость износа $\partial W / \partial t$ основания в произвольной точке x, y его поверхности в зависимости от направления ξ, η действия нагрузки \mathbf{P} . Учитывая случайный характер величин ξ, η , воспользуемся уравнением (2.2) кинетики изнашивания в терминах средних значений, которое рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial \overline{W}(x, y, t)}{\partial t} = \int_{\{X\}} F(p(x, y, t; X), V(x, y, t; X)) \rho(X, t) dX, \quad (2.16)$$

$$\overline{W}(x, y, 0) \equiv 0,$$

при этом $\{X\} = \{\xi, \eta : \xi \in [0, \pi], \eta \in [-\pi, \pi]\}$. Фигурирующие в (2.16) функции $p(x, y, t; X)$, $V(x, y, t; X)$ определяются соотношениями (2.11)–(2.15) при использовании в них средних значений износа \overline{W} .

Система уравнений (2.11)–(2.16) допускает несложную численную реализацию с использованием явной схемы [24]. При расчетах величина внешней нагрузки бралась одинаковой для всех ее направлений ($P(\xi, \eta, t) = \text{const}$) и рассматривались два случая зависимости угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ от ξ, η :

$$\begin{aligned} \omega_1(\xi, \eta, t) &= \omega \sin \xi \cos \eta, \quad \omega_2(\xi, \eta, t) = \omega \sin \xi \sin \eta, \\ \omega_3(\xi, \eta, t) &= \omega \cos \xi; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\omega_1(\xi, \eta, t) = \omega \sin \eta, \quad \omega_2(\xi, \eta, t) = -\omega \cos \eta, \quad \omega_3(\xi, \eta, t) = 0, \quad (2.18)$$

причем $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$.

В случае скоростного режима (2.17) шар вращается относительно оси, совпадающей с направлением ξ, η , тогда как в случае (2.18) — относительно оси, перпендикулярной направлению ξ, η и лежащей в плоскости $1, 2$ системы координат $1, 2, 3$. Другими словами, если нагрузка \mathbf{P} передается на шарнир вдоль стержневого держателя шара (рис. 2.41),

то в первом случае при любом направлении нагрузки **P** шар вращается относительно оси держателя, а во втором случае — так, что держатель разворачивается в направлении координатной оси *z*. Абсолютная скорость вращения в том и в другом случае составляет ω .

Функция плотности вероятности бралась в виде

$$\rho(\xi, \eta, t) = \begin{cases} [2\pi(1 - \cos \xi_+)]^{-1} \sin \xi, & \xi \in [0, \xi_+], \\ 0, & \xi \in (\xi_+, \pi], \end{cases} \quad (2.19)$$

где ξ_+ — заданный параметр, $\xi_+ \in (0, \pi]$. Такая функция отвечает случаю, когда направление нагрузки **P** на шар с равной вероятностью распределяется в шаровом сегменте $\xi \in [0, \xi_+]$.

Расчеты проводились при линейном законе изнашивания вида $F(p, V) = \alpha p V$ и следующих параметрах: $r = 20$ мм, $R_0 = 21$ мм, $E_1 = 100$ ГПа, $E_2 = 1$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\omega = 1$ с⁻¹, $P = 10^3$ Н, $\alpha = 10^{-13}$ Па⁻¹, $\xi_+ = \pi/4$. В случае основания в виде обоймы с покрытием (формула (2.13)) значения E_2 , ν_2 отвечают упругим свойствам покрытия, начальная толщина h_0 которого принималась равной 1 мм.

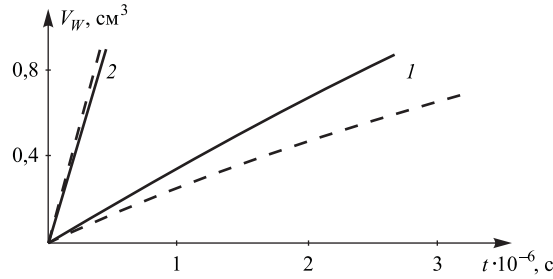


Рис. 2.42. Зависимости объемного износа V_W от времени t для скоростных режимов (2.17) (1) и (2.18) (2). Сплошные линии соответствуют однородному основанию, штриховые линии — обойме с покрытием

На рис. 2.42 изображены зависимости от времени объемного износа основания шарнира, определяемого по формуле

$$V_W(t) = R_0^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \overline{W}(x, y, t) \sin x \, dx \, dy$$

для обоих скоростных режимов (2.17), (2.18) и двух типов основания: однородное (2.11) и обойма с покрытием (2.13). Согласно представленным данным, при скоростном режиме (2.17) изнашивание основания идет менее интенсивно по сравнению со скоростным режимом (2.18),

что объясняется более низким уровнем скоростей скольжения. Также обращает на себя внимание зависимость интенсивности изнашивания основания от его деформационных свойств. Так, в случае режима (2.17) большую долговечность по износу обеспечивает основание с покрытием, а в случае режима (2.18) — однородное основание.

Замечание. Описанный выше стохастический подход может быть использован для расчета износа протеза тазобедренного сустава при его испытаниях на симуляторе, воспроизводящим нагрузочно-скоростной режим сустава при ходьбе. Соответствующий режим является детерминированным и описывается периодическими функциями $\xi(t), \eta(t)$ и зависимостью $P(\xi, \eta)$ [17]. В этом случае можно формально ввести функцию $\rho(\xi, \eta)$ плотности вероятности, если считать, что вероятность $\rho(\xi, \eta)d\xi d\eta$ попадания вектора \mathbf{P} в сегмент $d\xi d\eta$ пропорциональна общей продолжительности dt нахождения \mathbf{P} в этом сегменте, а именно: $\rho(\xi, \eta)d\xi d\eta = dt/T$, где T — период изменения направления $\xi(t), \eta(t)$. Время dt несложно вычислить, имея в распоряжении функции $\xi(t), \eta(t)$. Кроме того, эти функции позволяют построить выражения для компонент $\omega_i(\xi, \eta)$ угловой скорости. Расчеты, выполненные на основе указанных построений, дают распределения износа $\bar{W}(x, y, t)$ искусственного сустава, близкие к результатам испытаний на симуляторе.

2.2.4. Изнашивание основания скользящим индентором

В разделе 2.1.8 рассматривалось изнашивание скользящим индентором основания с покрытием при неизменных нагрузке и траектории движения индентора. В рассматриваемой ниже постановке допускаются случайные изменения нагрузки и отклонения индентора от заданной траектории.

Постановка задачи. Рассмотрим процесс изнашивания основания сферическим индентором радиуса R , скользящим возвратно-поступательно с постоянной по величине скоростью V вдоль заданной траектории при наличии случайных отклонений центра индентора от этой траектории (поперечная вибрация) [47]. Величина нормальной нагрузки P на индентор также изменяется случайным образом.

Введем в рассмотрение систему координат x, y, z , плоскость x, y которой совместим с поверхностью основания в неизношенном состоянии, направив ось y вдоль траектории индентора (рис. 2.43). Случайные отклонения индентора вдоль оси x будем характеризовать координатой его центра s и считать, что линия действия нагрузки P на индентор проходит через центр индентора параллельно оси z . Величины s и P образуют набор X случайных параметров, определяющих контактное взаимодействие индентора с основанием. Стохастические свойства этих параметров определяются известной функцией плотности вероятности $\rho(s, P, t) \equiv \rho(X, t)$.

В результате взаимодействия с индентором основание изнашивается согласно закону (2.1), причем сам индентор предполагается неизнашиваемым. В каждый момент времени форму поверхности изношенного основания будем считать гладкой и цилиндрической с образующей, параллельной оси y . Подобное допущение можно сделать, если изнашивание основания протекает достаточно медленно, т. е. когда износ за один проход индентора меняет форму поверхности основания пренебрежимо мало. Введем в рассмотрение линейный износ основания $W(x, t)$, так что равенство $z = -W(x, t)$ представляет собой уравнение изношенной поверхности в системе координат x, y, z .

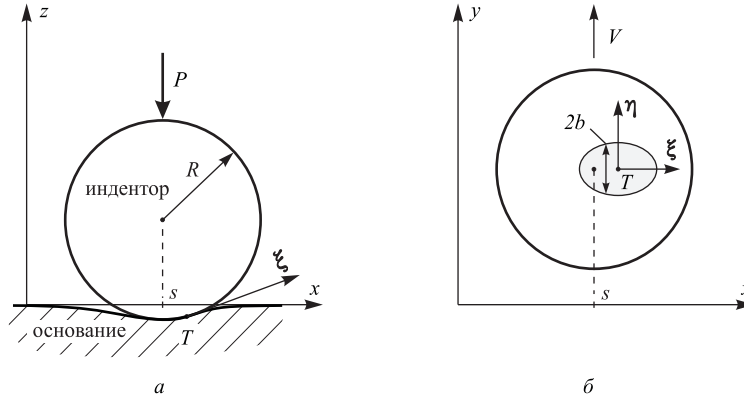


Рис. 2.43. Взаимодействие индентора с основанием: a — вид по направлению скольжения индентора; b — вид сверху (против оси z)

Далее будет рассматриваться случай малого износа, когда

$$|W'(x, t)| \ll 1, \quad |W''(x, t)| \ll R^{-1}. \quad (2.20)$$

Определение давления. Второе ограничение (2.20) означает отсутствие приработанного контакта и обеспечивает первоначальное касание индентора с основанием в единственной точке T с координатой x_T . Это обстоятельство позволяет использовать решение Герца для определения давления, при этом индентор и основание считаются упругими с модулями Юнга E_1, E_2 и коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 , соответственно.

Свяжем с точкой T подвижную систему координат ξ, η так, что соответствующая координатная плоскость является касательной к поверхностям индентора и основания, а проекция оси ξ на плоскость x, y параллельна оси x (рис. 2.43). Тогда, если $p(\xi, \eta, t)$ — распределение давления в системе ξ, η , а $b(\xi, t)$ — размер области контакта вдоль оси η ,

то решение Герца дает следующие выражения [19]:

$$p(\xi, \eta, t) = \frac{3P}{2\pi a_0 b_0^2} \sqrt{b^2(\xi, t) - \eta^2}, \quad |\eta| \leq b(\xi, t),$$

$$b(\xi, t) = \begin{cases} b_0 \sqrt{1 - \xi^2/a_0^2}, & |\xi| \leq a_0, \\ 0, & |\xi| > a_0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Здесь

$$a_0 = m \left(\frac{3\beta_0}{2\kappa} P \right)^{1/3}, \quad b_0 = \frac{n}{m} a_0, \quad m = \left(\frac{2E(k)}{\pi(1-k^2)} \right)^{1/3}, \quad n = m \sqrt{1-k^2},$$

$\beta_0 = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$, $\kappa = 2/R + W''(x_T, t)$, a_0 , b_0 — полуоси эллиптической области контакта, k — корень уравнения

$$\frac{2}{k^2} \left[1 - \frac{F(k)}{E(k)} \right] + 2 \frac{F(k)}{E(k)} - 1 = \kappa^{-1} |W''(x_T, t)|,$$

в котором $F(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Величину x_T можно найти из условия касания индентора и основания, которое при условиях (2.20) имеет вид

$$x_T - s = -RW'(x_T, t). \quad (2.22)$$

Расчет процесса изнашивания. В результате прохода индентора с соответствующей эпюрой давления по поверхности основания последнее изнашивается. Предполагая, что составляющая скорости индентора вдоль оси x мала по сравнению со скоростью V его основного движения, будем использовать в законе изнашивания (2.1) величину V в качестве скорости скольжения. Тогда, согласно (2.1), приращение износа от участка эпюры давления длины $d\eta$ есть $dW = F(p, V)dt = F(p, V)d\eta/V$, поэтому износ δW за один проход индентора составит

$$\delta W(x, t) = \frac{1}{V} \int_{-b(\xi, t)}^{b(\xi, t)} F(p(\xi, \eta, t), V) d\eta \equiv \mathcal{F}(x, t; X), \quad (2.23)$$

причем $\xi = x - x_T$, а функции $p(\xi, \eta, t)$, $b(\xi, t)$ определяются согласно (2.21) и (2.22).

Величина δW может интерпретироваться как скорость износа по числу проходов индентора по основанию, поэтому, при условии, что δW

много меньше суммарного износа, можно записать $n_0 \cdot \delta W = \partial W / \partial t$, где n_0 — частота проходов индентора. Последняя запись позволяет на основе (2.23) прийти к следующему равенству для скорости износа:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = n_0 \mathcal{F}(x, t; X).$$

Усредняя это равенство по ансамблю $\{X\}$ значений набора X случайных параметров контактного взаимодействия, получим следующее уравнение кинетики изнашивания основания в терминах средних значений:

$$\frac{\partial \overline{W}(x, t)}{\partial t} = n_0 \int_{\{X\}} \mathcal{F}(x, t; X) \rho(X, t) dX, \quad \overline{W}(x, 0) \equiv 0, \quad (2.24)$$

в котором функция \mathcal{F} имеет вид (2.23) и определяется с помощью равенств (2.21), (2.22) при использовании в них средних значений износа.

Пример. В случае степенного по p закона изнашивания: $F(p, V) = \alpha(V) p_w (p/p_w)^\gamma$, согласно определению (2.23), функция \mathcal{F} имеет вид

$$\mathcal{F}(x, t; X) = \sqrt{\pi} \Gamma \left(\frac{3+\gamma}{2} \right) \frac{\alpha(V)}{V} p_w^{1-\gamma} \left(\frac{3P}{2\pi a_0 b_0^2} \right)^\gamma b^{\gamma+1} (x - x_T, t),$$

где Γ обозначает гамма-функцию [7], $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} u^{z-1} e^{-u} du$.

Численный анализ уравнений (2.21), (2.22), (2.24) задачи был выполнен для случая вышеуказанного степенного закона изнашивания. Функция плотности вероятности величин s, P , которые считались независимыми, представлялась в виде произведения

$$\rho(s, P, t) = \rho_1(s) \rho_2(P), \quad (2.25)$$

в котором $\rho_1(s)$ — нормальное (гауссово) распределение со средним значением \bar{s} и средним квадратическим отклонением σ_s , $\rho_2(P)$ — равномерное распределение вида

$$\rho_2(P) = \begin{cases} (P_2 - P_1)^{-1}, & P \in [P_1, P_2], \\ 0, & P \notin [P_1, P_2]. \end{cases} \quad (2.26)$$

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $R = 1$ см, $E_1 = E_2 = 100$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $V = 1$ м/с, $n_0 = 1$ Гц, $\bar{s} = 0$, $P_1 = 400$ Н, $P_2 = 600$ Н, $\alpha(V) = 10^{-14}$ м/(Па · с), $p_w = 1$ ГПа, $\gamma = 2$.

Рисунок 2.44 иллюстрирует протекание процесса изнашивания основания при двух значениях σ_s . Как и следовало ожидать, увеличение среднего квадратического отклонения центра индентора от основной траектории приводит к размытию эпюры износа и уменьшению его максимального износа, при этом объемный износ почти не меняется.

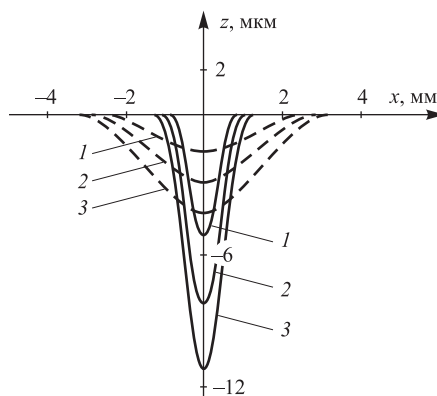


Рис. 2.44. Профили изношенного основания для $\sigma_s = 0,2$ мм (сплошные линии) и $\sigma_s = 1$ мм (штриховые линии) в различные моменты времени: $t = 450$ с (1); 900 с (2); 1350 с (3)

Замечание 1. Прделанные выкладки касались случая прямолинейного движения индентора. Однако все изложенное выше непосредственно переносится на случай движения индентора по окружности, если радиус последней намного превосходит размер области контакта.

Замечание 2. Шаровая форма индентора не существенна — она может быть произвольной, однако для эффективной реализации изложенной методики важно, чтобы форма индентора допускала решение контактной задачи в замкнутом виде. Более того, можно принять во внимание и возможный износ индентора, если составить уравнение его изнашивания типа (2.24) и учесть в равенствах (2.21), (2.22) изменение кривизны индентора R^{-1} вследствие износа.

2.2.5. Расчет износа ленточного подшипника

В технике встречаются пары трения, одним из элементов которых является гибкое тело. В качестве примера такого сопряжения можно привести контакт нитепроводника с нитью [53]. Ниже рассматривается случай изнашивания ленточного подшипника [32].

Постановка задачи. Рассмотрим ленточный подшипник, состоящий из стержня, который огибает тонкая лента ширины L , движущаяся с постоянной скоростью V (рис. 2.45). В результате фрикционного взаимо-

действия с лентой стержень изнашивается, причем в неизношенном состоянии (при $t = 0$) он имеет цилиндрическую форму.

Свяжем со стержнем цилиндрическую систему координат r, φ, z , ось z которой разместим внутри стержня параллельно образующей его поверхности так, что середина ленты располагается в перпендикулярной оси z плоскости. Положение ленты на стержне будем задавать углами a и b ($a < b$), которые образуют, соответственно, набегающая и сбегающая ветви ленты с плоскостью нулевого меридиана ($\varphi = 0$) (рис. 2.45). Величины a, b считаются случайными с известной функцией плотности вероятности $\rho(a, b, t)$, при этом положение ленты вдоль оси z , а также натяжение T в набегающей на стержень ветви ленты предполагаются заданными и неизменными. Величины a, b образуют набор X случайных параметров контактного взаимодействия.

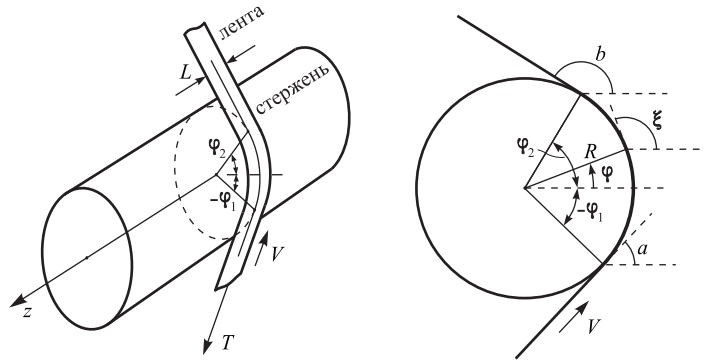


Рис. 2.45. Взаимодействие ленты со стержнем

Изношенную поверхность стержня будем считать цилиндрической, что предполагает равномерное вдоль оси z распределение давления p ленты на стержень. В соответствие с этим, форма изношенного стержня будет описываться функцией $r = R(\varphi, t)$.

Определение давления ленты. Допустим, что лента не имеет изгибной жесткости и нерастяжима в продольном направлении. Воспользуемся для расчета сил взаимодействия ленты со стержнем уравнениями равновесия гибкой нити [30]. Касательная P_1 и нормальная P_2 составляющие силы, действующей на ленту и распределенной по ее длине, связаны с давлением p равенствами $P_1 = \mu Lp$, $P_2 = Lp$, поэтому эти уравнения можно представить в виде

$$d\tau/ds = \mu Lp, \quad \kappa\tau = Lp, \quad (2.27)$$

где τ — натяжение ленты, μ — коэффициент трения скольжения, s — дуговая координата точек ленты,

$$\kappa(\varphi, t) = \frac{R^2(\varphi, t) + 2R'(\varphi, t) - R(\varphi, t)R''(\varphi, t)}{[R^2(\varphi, t) + R'^2(\varphi, t)]^{3/2}}, \quad (2.28)$$

где $\kappa(\varphi, t)$ — кривизна ленты, совпадающая с кривизной поверхности изношенного стержня в плоскости $z = \text{const}$.

Если обозначить через ξ угол между касательной к ленте в точке φ и плоскостью нулевого меридиана и учесть, что интеграл от кривизны κ по дуге ленты дает приращение на этой дуге угла ξ [7, 30], то, интегрируя уравнения (2.27), можно получить:

$$p(\varphi, t) = \begin{cases} TL^{-1}\kappa(\varphi, t)\exp[\mu(\xi(\varphi, t) - a)], & \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2], \\ 0, & \varphi \notin [\varphi_1, \varphi_2], \end{cases} \quad (2.29)$$

где φ_1, φ_2 — угловые координаты концов дуги охвата стержня лентой, связанные с величинами a, b равенствами

$$\xi(\varphi_1) = a, \quad \xi(\varphi_2) = b. \quad (2.30)$$

Функция $\xi(\varphi, t)$ в каждый момент времени определяется формой стержня и, как нетрудно установить, имеет место соотношение

$$\operatorname{tg} \xi(\varphi, t) = \frac{R'(\varphi, t) \sin \varphi + R(\varphi, t) \cos \varphi}{R'(\varphi, t) \cos \varphi - R(\varphi, t) \sin \varphi}. \quad (2.31)$$

При дальнейшем рассмотрении износоконтактного взаимодействия ленты со стержнем будем считать его поверхность выпуклой, для чего наложим требование положительности кривизны κ . Тогда давление p будет принимать неотрицательные значения, что означает наличие касания ленты с поверхностью стержня по всей дуге охвата $[\varphi_1, \varphi_2]$. Кроме того, в этом случае функция $\xi(\varphi, t)$, связанная с $\kappa(\varphi, t)$ равенством $d\xi/ds = \kappa$, является монотонно возрастающей, и поэтому равенства (2.30) определяют углы φ_1, φ_2 однозначно.

Равенства (2.28) — (2.31) позволяют найти распределение по координате φ давления ленты на стержень при заданных параметрах a, b, T, μ .

Уравнение кинетики изнашивания стержня в терминах средних значений имеет общий вид (2.2). Учитывая, что эволюция среднестатистического профиля стержня \bar{R} связана с его износом \bar{W} равенством

$$\frac{\partial \bar{R}(\varphi, t)}{\partial t} = -\cos \beta(\varphi, t)^{-1} \frac{\partial \bar{W}(\varphi, t)}{\partial t},$$

а скорость скольжения ленты постоянна и равна V , получим из (2.2) следующее уравнение кинетики изнашивания:

$$\frac{\partial \bar{R}(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\cos \beta(\varphi, t)} \int_{\{X\}} F(p(\varphi, t; X), V) \rho(X, t) dX, \quad (2.32)$$

$$\bar{R}(\varphi, 0) = R_0(\varphi).$$

Здесь $R_0(\varphi)$ — профиль неизношенного стержня, $\beta = \varphi - \xi + \pi/2$ — угол между нормалью к поверхности стержня и соответствующим полярным лучом, так что множитель $\cos^{-1} \beta$ в (2.32) связывает приращение износа, направленное по нормали к профилю стержня, со смещением этого профиля вдоль полярного луча. Давление p определяется выражением (2.29), а дополнительным аргументом X отмечена зависимость p от случайных величин a, b . Использование формулы (2.32) предполагает, что правые части выражений (2.28), (2.29), (2.31) определяются через среднестатистический профиль $\bar{R}(\varphi, t)$ стержня.

Аналитические оценки износа. Введем в рассмотрение ступенчатую функцию

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

и представим выражение (2.29) для давления в более компактном виде:

$$p(\varphi, t) = TL^{-1} \kappa(\varphi, t) \exp[\mu(\xi(\varphi, t) - a)] \times \\ \times \vartheta(\xi(\varphi, t) - a) \vartheta(b - \xi(\varphi, t)). \quad (2.33)$$

Рассмотрим случай линейного закона изнашивания: $F(p, V) = \alpha p V$ и для определенности положим, что $a \in [0, \pi]$, $b \in [0, \pi]$, причем, как и прежде, $a < b$. Тогда выражение (2.33) позволяет придать уравнению кинетики изнашивания (2.32) следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{R}(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\alpha V T}{L \cos \beta(\varphi, t)} \kappa(\varphi, t) \exp[\mu \xi(\varphi, t)] U(\xi(\varphi, t), t), \quad (2.34)$$

$$\bar{R}(\varphi, 0) = R_0(\varphi),$$

в котором

$$U(\xi, t) \equiv \int_0^\pi \int_0^\pi \vartheta(\xi - a) \vartheta(b - \xi) e^{-\mu a} \rho(a, b, t) da db. \quad (2.35)$$

Уравнение в частных производных (2.34) относительно функции $\bar{R}(\varphi, t)$ является нелинейным, и его решение требует привлечения численных методов. Однако если $R_0(\varphi)$ и $\rho(a, b, t)$ выражаются через элементарные функции, то правая часть (2.34) при $t = 0$ имеет простой вид, что позволяет получить ряд аналитических оценок износа.

Например, пусть $R_0(\varphi) = R_0 = \text{const}$ и

$$\rho(a, b, t) = -\sin 2a \sin 2b, \quad a \in [0, \pi/2], \quad b \in [\pi/2, \pi]. \quad (2.36)$$

Тогда, полагая в (2.34) $\bar{R} = R_0$ и выполняя интегрирование в (2.35), нетрудно получить следующую формулу:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{R}(\varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= - \frac{\alpha VT}{(4 + \mu^2)LR_0} \times \\ &\times \begin{cases} 2e^{\mu(\pi/2+\varphi)} + \mu \sin 2\varphi + 2\cos 2\varphi, & \varphi \in [-\pi/2, 0], \\ 2(e^{\mu\pi/2} + 1)e^{\mu\varphi} \cos^2 \varphi, & \varphi \in [0, \pi/2] \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Если ввести в рассмотрение объемный износ V_w , который определяется равенством

$$V_w(t) = \frac{L}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [R_0^2(\varphi) - \bar{R}^2(\varphi, t)] d\varphi, \quad (2.38)$$

то из выражения (2.37) следует, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_w(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \frac{\alpha VT}{(4 + \mu^2)} \times \\ &\times \left[\frac{2}{\mu} (e^{\mu\pi/2} - 1) - \mu \right] \left[1 + \frac{2(e^{\mu\pi/2} + 1)}{(4 + \mu^2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Формулы (2.37) и (2.39) для производных $\partial \bar{R}/\partial t$ и dV_w/dt при $t = 0$ позволяют получить следующие оценки величин \bar{R} и V_w при $t > 0$ [7, 24]:

$$\begin{aligned} \bar{R}(\varphi, t) &\simeq R^e(\varphi, t) \equiv R_0(\varphi) + \left. \frac{\partial \bar{R}(\varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \cdot t, \\ V_w(t) &\simeq V_w^e(t) \equiv \left. \frac{dV_w(t)}{dt} \right|_{t=0} \cdot t. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Численный анализ процесса изнашивания был выполнен для функции ρ вида (2.36) при линейном законе изнашивания $F(p, V) = \alpha pV$. Для построения решения уравнения (2.34) использовалась явная разностная схема [24], в соответствии с которой было введено дискретное

время и организован пошаговый процесс вычисления значений функции $\bar{R}(\varphi, t)$ в моменты этого времени.

Вычисления проводились при следующих значениях параметров (кроме специально оговоренных ниже): $R_0(\varphi) = 0,5$ см, $V = 1$ м/с, $T = 0,1$ Н, $L = 1$ см, $\alpha = 10^{-13}$ Па $^{-1}$.

На рис. 2.46 изображены расчетные значения функции $\bar{R}(\varphi, t)$, а на рис. 2.47 показан характер зависимости объемного износа V_w от коэффициента трения μ .

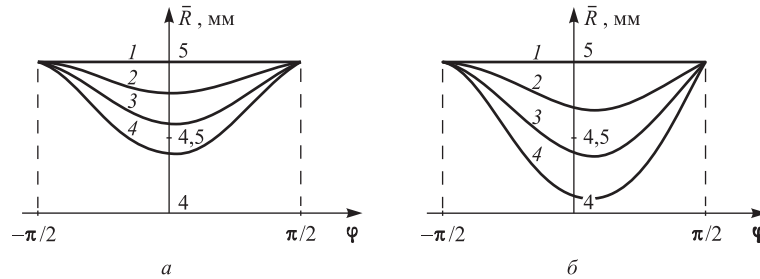


Рис. 2.46. Профиль изношенного стержня в различные моменты времени для $\mu = 0,05$ (а) и $\mu = 0,5$ (б): $t = 0$ с (1); 10^6 с (2); $2 \cdot 10^6$ с (3); $3 \cdot 10^6$ с (4)

Представленные результаты свидетельствуют о значительном влиянии на износ стержня величины коэффициента трения μ (при неизменном коэффициенте износостойкости α). Увеличение μ приводит к росту износа $\bar{W} = R_0 - \bar{R}$, при этом имеет место его перераспределение в направлении сбегающей ветви ленты (в сторону положительных значений φ). Проведенный численный анализ процесса изнашивания подтверждает возможность использования на начальной стадии изнашивания оценок (2.40) для \bar{R} и V_w . Так, расхождение расчетных значений износа \bar{W} со значениями $W^e = R_0 - R^e$ не превышает 7% в диапазоне $\mu = 0 \div 1$ вплоть до момента времени, когда $\bar{W} = 0,1R_0$. Близость численных результатов для V_w к значениям V_w^e иллюстрирует рис. 2.47.

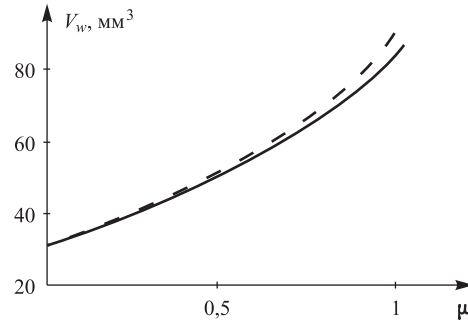


Рис. 2.47. Зависимость объемного износа от коэффициента трения в момент времени $t = 2 \cdot 10^6$ с. Штриховая линия соответствует оценке (2.40)

Выполненное здесь варьирование значения коэффициента трения μ при постоянном значении коэффициента износостойкости α представляется с точки зрения практической трибологии не вполне корректным, т. к. эти коэффициенты обычно связаны друг с другом [27]. Однако если функция плотности вероятности ρ от времени не зависит (например, имеет вид (2.36)), то учет какой-либо связи α с μ сводится к тривиальному пересчету результатов полученных для некоторого значения α . Действительно, в этом случае зависимость правой части уравнения (2.34) от времени t обуславливается только функцией $\bar{R}(\varphi, t)$ (т. е. оно является автономным), при этом коэффициент износостойкости α выступает в качестве множителя в правой части (2.34). Подобные свойства уравнения кинетики изнашивания означают, что увеличение значения α в k раз ($\alpha \rightarrow k\alpha$) эквивалентно соответствующему уменьшению времени ($t \rightarrow k^{-1}t$) в полученных результатах.

Замечание 1. Случайный характер значений углов a и b является необходимым условием корректности вышеизложенной методики расчета износа стержня. Действительно, согласно выражению (2.29), распределение давления по углу φ терпит разрывы при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$. Отсюда, на основе уравнения (2.32), следует, что в случае неизменных значений a, b и, соответственно, φ_1 и φ_2 , распределение износа по φ также будет разрывным в точках φ_1 и φ_2 , а это, очевидно, вступает в противоречие с условием контакта ленты с поверхностью стержня.

Замечание 2. Аналогичное (2.34) уравнение получается, если рассмотреть изнашивание стержня (нитепроводника) тонкой нитью, скользящей по нему и занимающей с равной вероятностью положение вдоль оси z в пределах отрезка $z \in [-L/2, L/2]$ [46].

2.2.6. Расчет износа рельса

Фактор износа во многом определяет долговечность железнодорожных колес и рельсов. В работе [26] предложен статистический подход к расчету объемного износа рельса в местах искривления пути, где износ особенно велик. Используемый ниже метод также основан на статистическом усреднении, но позволяет находить распределение линейного износа по поверхности рельса и, соответственно, более детально описывать процесс его изнашивания.

Общая постановка задачи. Исследуем процесс изнашивания рельса на кривом участке пути проходящими по нему колесами. Как известно, в этом случае важную роль играет контактное взаимодействие боковой поверхности головки рельса с гребнем колеса [29]. Вследствие интенсивного трения скольжения, на боковой поверхности головки рельса наблюдается повышенный износ, который и будет предметом дальнейшего исследования. Износ же на поверхности катания рельса не будет приниматься во внимание.

Контакт колеса с боковой поверхностью рельса описывается углом набегания θ , нормальной контактной нагрузкой P , профилями колеса и рельса (рис. 2.48). Считается, что профиль $g(s)$ каждого проходящего по рельсу колеса может быть задан с помощью некоторых параметров g_1, g_2, \dots, g_m , тогда как профиль $r(x, t)$ изнашиваемого рельса меняется во времени и подлежит определению.

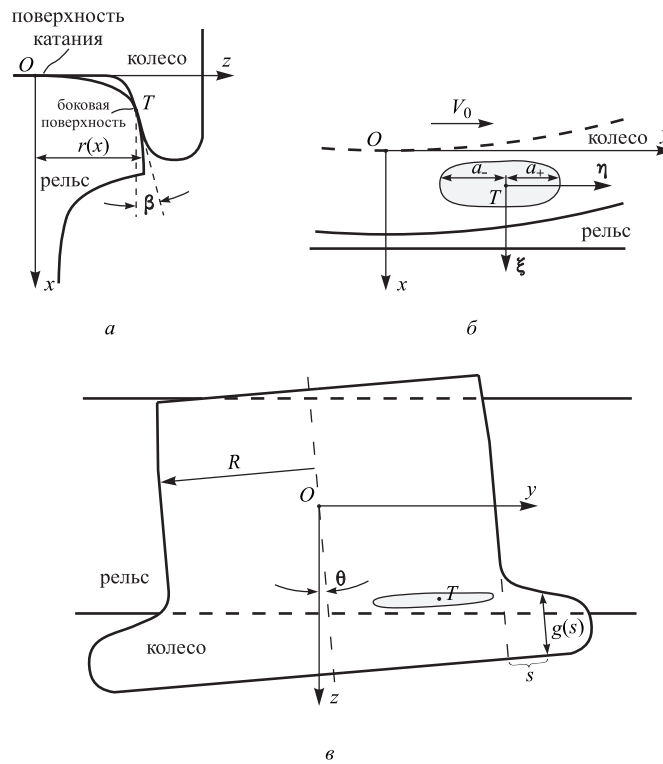


Рис. 2.48. Взаимодействие колеса и рельса: а — вид вдоль рельса; б — вид сбоку; в — вид сверху

Будем предполагать, что в течение каждого прохода колеса по исследуемому участку рельса угол набегания θ , контактная нагрузка P и профиль колеса (параметры g_1, g_2, \dots, g_m) не изменяются, а профиль рельса вследствие износа меняется незначительно.

Вследствие случайного характера взаимодействия колеса с рельсом, при том, что форма проходящего колеса также является случайной, величины $\theta, P, g_1, g_2, \dots, g_m$ образуют набор X случайных параметров, определяющих контактное взаимодействие колеса с рельсом. Если, как и прежде, стохастические свойства этих парамет-

ров задавать с помощью известной функции плотности вероятности $\rho(\theta, P, g_1, g_2, \dots, g_m, t) \equiv \rho(X, t)$, то процесс изнашивания рельса в терминах средних значений износа \overline{W} может быть в общем виде описан уравнением (2.2). В ходе дальнейших выкладок будет построена правая часть уравнения (2.2) для рассматриваемого взаимодействия колеса с рельсом.

Контактно-кинематические соотношения. Свяжем с колесом, проходящим по исследуемому участку рельса, прямоугольную систему координат $Oxyz$, расположив ее начало O на поверхности катания рельса, ось x — перпендикулярно этой поверхности, а ось y — вдоль рельса по направлению движения колеса (рис. 2.48). Угол θ набегания далее считается малым: $|\theta| \ll 1$, что вполне отвечает реальным условиям эксплуатации пары колесо — рельс.

Введем в рассмотрение точку T первоначального касания колеса с боковой поверхностью рельса. По мере продвижения колеса эта точка перемещается вдоль рельса, при этом ее координаты x_T, y_T в подвижной системе $Oxyz$ определяются углом θ набегания, а также профилями колеса и рельса:

$$x_T = \mathcal{T}_1(\theta, g_1, g_2, \dots, g_m, t), \quad y_T = \mathcal{T}_2(\theta, g_1, g_2, \dots, g_m, t). \quad (2.41)$$

Здесь $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ — некоторые функции, аргумент t у которых отражает зависимость величин x_T, y_T от текущего профиля $r(x, t)$ рельса. В случае, когда точка T располагается на передней части колеса ($\theta \geq 0$, рис. 2.48), имеют место следующие уравнения, определяющие соотношения (2.41):

$$f_x(x_T, y_T) = r'(x_T, t) / \cos \theta, \quad f_y(x_T, y_T) = \operatorname{tg} \theta,$$

где $f_x = \partial f / \partial x$, $f_y = \partial f / \partial y$, $f(x, y) = -g \left(\sqrt{(R+x)^2 + y^2} - R \right)$, R — радиус поверхности катания колеса.

Перейдем теперь к описанию контакта колеса с боковой поверхностью рельса. Для этого свяжем с точкой T локальную систему координат $T\xi\eta$, расположив оси ξ, η в касательной к поверхностям колеса и рельса плоскости. Такие координаты связаны с введенными выше координатами x, y равенствами

$$x = x_T + \xi \cos \beta_T, \quad y = y_T + \eta, \quad (2.42)$$

причем $\beta_T = \beta(x_T, t)$, $\beta(x, t)$ — угол наклона координатной плоскости $\xi\eta$ к оси x , так что $\operatorname{tg} \beta(x, t) = r'(x, t)$.

Предположим, что форма области контакта колеса с боковой поверхностью головки рельса в системе координат $T\xi\eta$ может быть задана размерами $a_{\pm}(\xi)$ вдоль оси η (рис. 2.48). Эти размеры, равно как сама эпюра давления, зависят от параметров $\theta, P, g_1, g_2, \dots, g_m$, что можно

выразить равенствами

$$a_{\pm}(\xi) = \mathcal{A}_{\pm}(\xi; X, t), \quad p(\xi, \eta) = \mathcal{P}(\xi, \eta; X, t). \quad (2.43)$$

Правые части равенств (2.43) находятся из решения соответствующей контактной задачи, так что функции $\mathcal{A}_{\pm}, \mathcal{P}$ зависят еще от деформационных характеристик сопряжения. Символ времени t в (2.43), как и прежде, отражает зависимость функций от текущего профиля $r(x, t)$ изнашиваемого рельса.

Контактное взаимодействие колеса с рельсом было и остается предметом многих теоретических исследований (см., например, монографию Калкера (J. J. Kalker) [62]). Давление $p(\xi, \eta)$ может быть найдено с помощью решения Герца, подобно тому, как это делалось в разделе 2.2.4, или на основе других подходов к расчету контакта тел, в том числе тел с конформными поверхностями [62, 63].

Для нахождения скорости изнашивания также требуется знание скорости $V(\xi, \eta)$ скольжения в каждой точке ξ, η области контакта. В предположении, что мгновенная ось вращения катящегося по рельсу колеса совпадает с координатной осью z , имеет место выражение

$$V(\xi, \eta) = \frac{V_0}{R} \sqrt{(x_T + \xi \cos \beta_T)^2 + (y_T + \eta)^2}, \quad (2.44)$$

где V_0 — скорость поступательного перемещения колеса, так что отношение V_0/R дает угловую скорость его вращения.

Уравнение кинетики изнашивания. Проход эпюр давления $p(\xi, \eta)$ и скорости скольжения $V(\xi, \eta)$ по боковой поверхности рельса приводит к его износу. Согласно закону изнашивания (2.1), приращение износа от участка этих эпюр длины $d\eta$ есть $dW = F(p, V)dt = F(p, V)d\eta/V_0$, поэтому износ δW рельса за один проход колеса составит

$$\delta W(x, t) = \frac{1}{V_0} \int_{-a_-(\xi)}^{a_+(\xi)} F(p(\xi, \eta), V(\xi, \eta)) d\eta \equiv \mathcal{F}(x, t; X), \quad (2.45)$$

причем координаты x и ξ связаны равенством (2.42), а функция \mathcal{F} определяется на основе равенств (2.41), (2.43) и (2.44).

Величина δW может интерпретироваться как скорость износа, отнесенная к числу проходов колес по исследуемому участку рельса, поэтому можно записать $n_0 \cdot \delta W = \partial W / \partial t$, где n_0 — частота прохода колес. Последнее равенство позволяет на основе (2.45) прийти к следующей зависимости скорости износа от набора X случайных параметров контактного взаимодействия:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = n_0 \mathcal{F}(x, t; X). \quad (2.46)$$

Следуя теперь общему подходу к расчету изнашивания при случайном взаимодействии, усредним (2.46) по ансамблю $\{X\}$ значений набора X и получим уравнение кинетики изнашивания рельса в терминах средних значений:

$$\frac{\partial \overline{W}(x, t)}{\partial t} = n_0 \int_{\{X\}} \mathcal{F}(x, t; X) \rho(X, t) dX, \quad \overline{W}(x, 0) \equiv 0. \quad (2.47)$$

Рассчитанный с помощью (2.47) износ \overline{W} определяет эволюцию среднестатистического профиля \overline{r} боковой поверхности рельса следующим образом:

$$\frac{\partial \overline{r}(x, t)}{\partial t} = -\cos \beta(x, t)^{-1} \frac{\partial \overline{W}(x, t)}{\partial t}, \quad \overline{r}(x, 0) = r_0(x), \quad (2.48)$$

где $r_0(x)$ — профиль неизношенного рельса, а множитель $\cos^{-1} \beta$ связывает приращение износа, направленное по нормали к профилю рельса, со смещением этого профиля вдоль оси z . Использование формулы (2.48) предполагает, что правые части равенств (2.41), (2.43), (2.44), а следовательно и (2.47) определяются через среднестатистический профиль рельса $\overline{r}(x, t)$.

Численный анализ уравнений (2.41), (2.43), (2.44), (2.47) задачи был выполнен для случая степенного закона изнашивания $F(p, V) = \alpha p_w (p/p_w)^\gamma V$ при $\alpha = 10^{-14} \text{ Па}^{-1}$, $p_w = 1 \text{ ГПа}$, $\gamma = 1, 5$.

Профили колес описывались синусоидой вида

$$g(s) = g_* + D \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \left(2 \frac{s}{s_*} - 1 \right) \right], \quad (2.49)$$

$$D = (g_1 - g_*) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \left(2 \frac{s_1}{s_*} - 1 \right) \right]^{-1},$$

где $s \in [0, s_*]$, параметры s_1 , s_* , g_* задаются детерминированно, тогда как g_1 — случайный параметр профиля колеса, $g_* = g(s_*)$, $g_1 = g(s_1)$ (рис. 2.48б). Отметим, что s_* представляет собой высоту гребня колеса.

Параметры задачи θ , P , g_1 как случайные величины считались независимыми и функция плотности их вероятности представлялась в виде произведения

$$\rho(X, t) \equiv \rho(\theta, P, g_1, t) = \rho_1(\theta) \rho_2(P) \rho_3(g_1). \quad (2.50)$$

В качестве $\rho_1(\theta)$, $\rho_2(P)$ использовались усеченные по отрицательным значениям θ , P нормальные распределения со средними значениями $\overline{\theta}$, \overline{P} и средними квадратическими отклонениями σ_θ , σ_P , соответственно.

Распределение $\rho_3(g_1)$ бралось параболическим с нормирующим множителем k :

$$\rho_3(g_1) = k(g_1 - g_{11})(g_{12} - g_1), \quad g_1 \in [g_{11}, g_{12}]. \quad (2.51)$$

Целью расчетов было установление характера влияния угла набегания на износ, поэтому для упрощения расчетов давление $p(\xi, \eta)$ бралось в виде сильно локализованного (δ -образного) распределения. Подобная аппроксимация выглядит приемлемой, если статистический разброс координат центра области контакта x_T, y_T намного превышает некоторый характерный размер области контакта, что может иметь место, например, на начальной стадии изнашивания, когда форма боковой поверхности рельса является выпуклой.

Были приняты следующие значения параметров задачи (кроме специально оговоренных): $x_* = 25$ мм, $x_1 = 7$ мм, $g_{11} = g_* = 13$ мм, $g_{12} = 30$ мм, $\bar{P} = 4 \cdot 10^4$ Н, $\sigma_P = 10^4$ Н, $R = 45$ см, $V_0 = 50$ м/с.

Рисунок 2.49 иллюстрирует протекание процесса изнашивания рельса при малых (а) и больших (б) углах набегания θ . Видно, что значения этого угла оказывают заметное влияние на износ рельса — увеличение θ приводит к формированию более крутого профиля боковой поверхности изношенного рельса с повышенным максимальным износом, что согласуется с экспериментальными данными [61].

Полученные расчетные профили также качественно согласуются с характером изнашивания рельса, бывшего в эксплуатации (рис. 2.50).

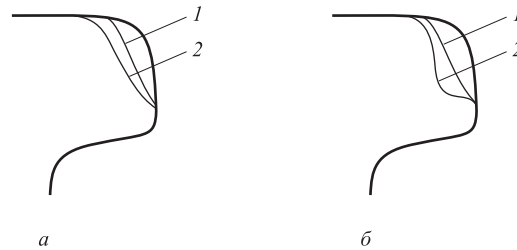


Рис. 2.49. Профили изношенного рельса при различных углах набегания: а — $\bar{\theta} = 6 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_{\theta} = 3 \cdot 10^{-4}$; б — $\bar{\theta} = 6 \cdot 10^{-2}$, $\sigma_{\theta} = 3 \cdot 10^{-3}$; кривая 1 — $3,68 \cdot 10^6$ проходов колеса, кривая 2 — $7,35 \cdot 10^6$ проходов колеса



Рис. 2.50. Поперечное сечение бывшего в эксплуатации рельса

§ 2.3. Задачи с усложненными условиями

Задачи, рассмотренные в предыдущих разделах, были связаны с изучением влияния износа на контактное взаимодействие тел и сводились к уравнениям с дифференциальными операторами первого порядка. Ниже рассматриваются постановки износоконтактной задачи с усложненными условиями (вязкость и динамика контакта, сложное внешнее нагружение), для которых уравнение кинетики изнашивания содержит производные более высоких порядков.

2.3.1. Изнашивание вязкоупругого покрытия

В разделе 2.1.8 была рассмотрена задача об изнашивании тонкого покрытия сферическим индентором, при условии многократного прохождения им заданной траектории (скольжение по «старому следу»). Такое движение индентора приводит к постепенному накоплению износа вдоль соответствующей траектории и, как следствие, к приработке подвижного контакта, выражающейся в наличии стадии установившегося режима изнашивания. Ниже рассматривается постановка износоконтактной задачи, предполагающая скольжение индентора по неизношенным участкам покрытия, при этом износ образуется в результате единичного прохода индентора.

Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим композицию «вязкоупругое покрытие—основание», по поверхности которой с постоянной скоростью V скользит абсолютно жесткий, гладкий и выпуклый индентор, нагрузка P на который считается постоянной (рис. 2.51) [49]. Деформационные свойства покрытия будем описывать упрощенной вязкоупругой моделью Фойгта, тогда как деформационные свойства основания — моделью Винклера:

$$\eta \frac{du_{\xi}(t)}{dt} + \kappa u_{\xi}(t) = p_{\xi}(t), \quad v_{\xi}(t) = -Ap_{\xi}(t), \quad (3.1)$$

где u_{ξ} — величина поперечного сжатия покрытия в некоторой точке ξ его поверхности при действии давления p_{ξ} , v_{ξ} — соответствующее перемещение границы основания, η , κ — коэффициент вязкости демпфера и жесткость пружины элемента Фойгта [5], A — параметр упругой податливости основания (ср. с формулой (1.1)).

В результате взаимодействия со скользящим индентором покрытие изнашивается. Соответствующий закон изнашивания примем линейным по давлению:

$$\frac{dW_{\xi}(t)}{dt} = \alpha p_{\xi}(t), \quad (3.2)$$

где W_{ξ} — износ покрытия в точке ξ , α — коэффициент износостойкости, который может зависеть от скорости скольжения: $\alpha = \alpha(V)$.

Свяжем с движущимся индентором систему координат $Oxyz$, при этом плоскость Oxy совместим с плоскостью недеформированного по-

крытия, а ось x направим против движения индентора (рис. 2.51). Уравнение поверхности индентора в выбранной системе координат имеет вид

$$z = g(x, y) - \delta, \quad (3.3)$$

причем $g(x, y)$ — некоторая известная функция, описывающая форму индентора, δ — величина, характеризующая его внедрение в покрытие. Следуя [23], будем считать движение среды покрытия и основания установившимся в системе $Oxyz$.

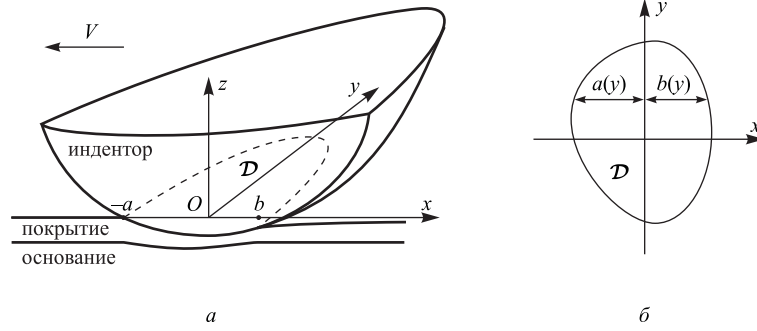


Рис. 2.51. Взаимодействие скользящего индентора с композицией покрытие—основание (а); область \mathcal{D} контакта индентора с покрытием (б)

Обозначим через \mathcal{D} область контакта индентора с покрытием (рис. 2.51). Для описания формы области \mathcal{D} введем в рассмотрение функции $a(y)$ и $b(y)$, определяющие ее границы по переднему и заднему фронту взаимодействия индентора с покрытием так, что

$$\mathcal{D} = \{x, y : x \in [-a(y), b(y)], y \in [y_{\min}, y_{\max}]\},$$

где y_{\min} , y_{\max} обозначают пределы области контакта вдоль оси y .

Точки поверхности покрытия, прилегающие к области контакта по ее передней границе, не испытывают перемещения, что является следствием использования для описания деформационных свойств покрытия и основания моделей (3.1), исключающих влияние давления на соседние точки поверхности. Таким образом, при $x = -a(y)$ точки поверхности покрытия, соприкасающиеся с индентором, имеют координату $z = 0$. Отсюда, с учетом (3.3), следует, что функция $a(y)$ должна удовлетворять равенству

$$g(-a(y), y) = \delta, \quad (3.4)$$

которое, кроме $a(y)$, определяет и величины y_{\min} , y_{\max} . Отметим, что сказанное не относится к функции $b(y)$, описывающей заднюю границу области контакта, т.к. в соответствующих ей точках имеют место смещения поверхности покрытия за счет его износа и вязкоупругого

деформирования. Уравнение для $b(y)$ будет получено ниже из дополнительного условия.

Обозначим через $u(x, y)$, $v(x, y)$, $W(x, y)$, $p(x, y)$ распределения по области контакта в подвижной системе координат $Oxyz$ вязкоупругого сжатия покрытия, перемещения границы основания, износа покрытия и давления соответственно. Эти распределения связаны с введенными выше величинами $u_\xi(t)$, $v_\xi(t)$, $W_\xi(t)$, $p_\xi(t)$. Действительно, фиксируем точку ξ на поверхности покрытия и примем за начало отсчета времени t момент начала взаимодействия этой точки с индентором. Обозначим через $t_x = (a(y) + x)/V$ момент времени, при котором точка ξ имеет координату x в системе $Oxyz$, причем $x \in [-a(y), b(y)]$, y — ордината точки ξ . Данные определения позволяют записать искомые соотношения:

$$\begin{aligned} u_\xi(t_x) &= u(x, y), \quad v_\xi(t_x) = v(x, y), \\ W_\xi(t_x) &= W(x, y), \quad p_\xi(t_x) = p(x, y). \end{aligned} \quad (3.5)$$

С помощью соотношений (3.5) равенствам (3.1) и (3.2) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta V u'(x, y) + \kappa u(x, y) &= p(x, y), \quad v(x, y) = -A p(x, y), \\ W'(x, y) &= \frac{\alpha}{V} p(x, y), \end{aligned} \quad (3.6)$$

при этом перемещения u, v и износ W связаны с формой индентора условием контакта (ср. с равенством (2.5) главы 1):

$$u(x, y) - v(x, y) + W(x, y) = \delta - g(x, y), \quad x, y \in \mathcal{D}. \quad (3.7)$$

Здесь и далее штрих над символом функции означает дифференцирование по x .

С помощью равенств (3.6) и (3.7) можно получить уравнение относительно давления $p(x, y)$. Для этого продифференцируем (3.7) по x , заменим полученные производные их выражениями через $u(x, y)$, $p(x, y)$, $p'(x, y)$ согласно (3.6) и затем, с использованием исходного равенства (3.7), исключим из полученного равенства функцию $u(x, y)$. Таким образом, придем к следующему промежуточному результату:

$$\begin{aligned} \eta V A p'(x, y) + \theta p(x, y) + \kappa W(x, y) &= \\ &= \kappa[\delta - g(x, y)] - \eta V g'(x, y), \quad x, y \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\theta = 1 + \omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 = \kappa A$, $\omega_2 = \beta \eta V$, $\beta = \alpha/V$. Повторное дифференцирование равенства (3.8) по x с последующим исключением из него функции $W'(x, y)$ при помощи третьего соотношения (3.6) дает искомое уравнение:

$$\eta V A p''(x, y) + \theta p'(x, y) + \beta \kappa p(x, y) = \varphi(x, y), \quad x, y \in \mathcal{D}, \quad (3.9)$$

причем $\varphi(x, y) = -\kappa g'(x, y) - \eta V g''(x, y)$.

Для уравнения (3.9) имеют место следующие начальные условия:

$$p(-a(y), y) = 0, \quad p'(-a(y), y) = -\frac{1}{A} g'(-a(y), y). \quad (3.10)$$

Первое условие (3.10) получается, если в (3.7) положить $x = -a(y)$ и принять во внимание равенства (3.4) и $W(-a(y), y) = u(-a(y), y) = 0$, $v(-a(y), y) = -Ap(-a(y), y)$. Второе условие (3.10) следует из равенства (3.8) при $p(-a(y), y) = 0$.

Выпишем еще два условия:

$$p(b(y), y) = 0, \quad P = \int_{\mathcal{D}} p(x, y) dx dy = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left[\int_{-a(y)}^{b(y)} p(x, y) dx \right] dy, \quad (3.11)$$

первое из которых отвечает требованию равенства нулю давления в точке разъединения поверхностей индентора и покрытия, а второе представляет собой условие равновесия индентора.

Далее будем считать нагрузку P известной и поставим задачу: найти распределение давления $p(x, y)$ и функции $a(y)$, $b(y)$, характеризующие форму области контакта и ее расположение по отношению к индентору. Система равенств (3.4), (3.9)–(3.11) позволяет решить такую задачу.

Действительно, зададимся некоторой величиной внедрения индентора δ , определим из (3.4) величины y_{\min} , y_{\max} и функцию $a(y)$, после чего решим уравнение (3.9) относительно давления $p(x, y)$ совместно с начальными условиями (3.10). Затем воспользуемся первым условием (3.11) и определим из него по найденному давлению функцию $b(y)$. Полученные таким образом функции $p(x, y)$, $a(y)$, $b(y)$ оказываются зависящими от единственной контактной характеристики — внедрения δ , которое может быть найдено из условия равновесия (3.11) по известной нагрузке P . Таким образом, поставленная выше задача оказывается решенной. В дальнейшем описанный алгоритм будет реализован для случаев цилиндрического и сферического индентора. При известном давлении распределение износа по области контакта определяется по формуле

$$W(x, y) = \beta \int_{-a(y)}^x p(s, y) ds, \quad (3.12)$$

которая непосредственно следует из третьего равенства (3.6)

Замечание 1. Рассматриваемая композиция вязкоупругого покрытия и основания Винклера математически эквивалентна модели стандартного вязкоупругого основания, которое представляется последовательно соединенными элементом Фойгта и пружиной [5].

Замечание 2. Величина A , характеризующая податливость основания покрытия, прежде считалась положительной. В случае $A = 0$, т.е. при абсолютно жестком основании, порядок дифференциального уравнения (3.9) для давления понижается на единицу и, как нетрудно установить из (3.8), вместо двух условий (3.10) имеет место одно условие следующего вида: $p(-a(y), y) = -\eta V(1 + \omega_2)^{-1} g'(-a(y), y)$. Таким образом, если $A = 0$, то на передней границе взаимодействия индентора с покрытием давление принимает значения, отличные от нуля, тогда как при $A > 0$ эти значения всегда равны нулю. Сказанное свидетельствует об отсутствии на передней границе области контакта предельного перехода функции $p(x, y)$ для модели с податливым основанием ($A > 0$) в функцию $p(x, y)$ для абсолютно жесткого основания ($A = 0$) при $A \rightarrow 0$. Однако, как показывает специальный анализ, упомянутый предельный переход имеет место для внутренних точек области контакта.

Цилиндрический индентор. Пусть в качестве индентора выступает цилиндр радиуса R , скользящий по покрытию в перпендикулярном своей оси направлении, при этом на единицу длины цилиндра приходится нагрузка Q . Считая внедрение цилиндра малым ($\delta \ll R$), аппроксимируем его форму параболой и выберем систему координат $Oxyz$ так, что $g(x, y) = kx^2$, $k = (2R)^{-1}$. Тогда равенство (3.4) принимает вид $ka^2(y) = \delta$, откуда

$$a(y) = a = \sqrt{\delta/k}, \quad y_{\min} = -\infty, \quad y_{\max} = \infty. \quad (3.13)$$

Решение уравнения (3.9) при начальных условиях (3.10) для рассматриваемого случая имеет вид

$$p(x, y) = p(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\left(1 - e^{\lambda_1(a+x)} \right) (X_1 a + Y_1) + \left(1 - e^{\lambda_2(a+x)} \right) (X_2 a + Y_2) \right] - \frac{2k}{\beta} (a + x). \quad (3.14)$$

Коэффициенты уравнения определяются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{D_0 - \theta}{2\eta AV}, \quad \lambda_2 = \frac{-D_0 - \theta}{2\eta AV}, \quad D_0 = \sqrt{\theta^2 - 4\omega_1\omega_2}, \\ X_1 &= \frac{2k}{A} \left[\frac{D_0 + \theta}{2\omega_2} - 1 \right], \quad Y_1 = \frac{2k}{\beta} \left[\frac{D_0 + \theta}{2\omega_1\omega_2} (1 + \omega_1) - 1 \right], \\ X_2 &= \frac{2k}{A} \left[\frac{D_0 - \theta}{2\omega_2} + 1 \right], \quad Y_2 = \frac{2k}{\beta} \left[\frac{D_0 - \theta}{2\omega_1\omega_2} (1 + \omega_1) + 1 \right]. \end{aligned}$$

Подстановка выражения (3.14) в первое условие (3.11) дает следующее уравнение для размера области контакта b :

$$p(b) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [(1 - e^{\lambda_1 d})(X_1 a + Y_1) + (1 - e^{\lambda_2 d})(X_2 a + Y_2)] - \frac{2k}{\beta} d = 0, \quad (3.15)$$

в котором $d = a + b$, величина a определяется по формуле (3.13).

Уравнение (3.15) при любом $a > 0$ однозначно разрешимо относительно b , причем всегда $b > 0$. Действительно, несложный анализ показывает, что функция $p(x)$ вида (3.14) обладает следующими свойствами: $\lim_{x \rightarrow \infty} p'(x) = -2k/\beta < 0$, $p''(x) < 0$, $p(0) > 0$, первые два из которых (совместно с условиями (3.10)) обеспечивают единственность решения уравнения $p(b) = 0$, а третье — положительность соответствующего корня b . Этот корень, согласно (3.15), определяется величиной $a = \sqrt{\delta/k}$ и, следовательно, подобно a , зависит от единственной контактной характеристики — внедрения δ .

Подстановка выражения (3.14) для давления $p(x)$ во второе условие (3.11) позволяет получить уравнение

$$Q = \int_{-a}^b p(x) dx = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1 + \lambda_1 d - e^{\lambda_1 d}}{\lambda_1} (X_1 a + Y_1) + \frac{1 + \lambda_2 d - e^{\lambda_2 d}}{\lambda_2} (X_2 a + Y_2) \right] - \frac{k}{\beta} d^2, \quad (3.16)$$

решение которого определяет внедрение δ по известной нагрузке Q , т. к. величины a и b в нем зависят только от δ .

Выражение (3.14) для давления, дополненное равенствами (3.13), (3.15) и (3.16), позволяет построить численное решение поставленной выше задачи для цилиндрического индентора. Соответствующие результаты будут представлены ниже.

Сферический индентор. Пусть по покрытию скользит сферический индентор (шар) радиуса R . Как и прежде, считая $\delta \ll R$, положим $g(x, y) = k(x^2 + y^2)$, $k = (2R)^{-1}$ и на основе (3.4) получим:

$$a(y) = \sqrt{a_0^2 - y^2}, \quad a_0 = \sqrt{\delta/k}, \quad y_{\min} = -a_0, \quad y_{\max} = a_0. \quad (3.17)$$

В этом случае решение уравнения (3.9) при условиях (3.10) имеет вид:

$$p(x, y) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\left(1 - e^{\lambda_1(a(y)+x)} \right) (X_1 a(y) + Y_1) + \right. \\ \left. + \left(1 - e^{\lambda_2(a(y)+x)} \right) (X_2 a(y) + Y_2) \right] - \frac{2k}{\beta} (a(y) + x), \quad (3.18)$$

при этом условия (3.11) дают еще два равенства:

$$p(b(y), y) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\left(1 - e^{\lambda_1 d(y)} \right) (X_1 a(y) + Y_1) + \right. \\ \left. + \left(1 - e^{\lambda_2 d(y)} \right) (X_2 a(y) + Y_2) \right] - \frac{2k}{\beta} d(y) = 0, \quad (3.19)$$

$$P = \int_{-a_0}^{a_0} \left\{ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1 + \lambda_1 d(y) - e^{\lambda_1 d(y)}}{\lambda_1} (X_1 a(y) + Y_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1 + \lambda_2 d(y) - e^{\lambda_2 d(y)}}{\lambda_2} (X_2 a(y) + Y_2) \right] - \frac{k}{\beta} d^2(y) \right\} dy. \quad (3.20)$$

Равенство (3.19) совместно с (3.17) определяет функцию $b(y)$ через неизвестное внедрение δ , которое затем находится из уравнения (3.20) по известной нагрузке P . После этого с помощью выражения (3.18) можно вычислить распределение давления.

Численный анализ. Представленные ниже результаты были получены при линейной зависимости α от V (т. е. при $\beta = \alpha(V)/V = \text{const}$) путем численного решения уравнений (3.13)–(3.16) для цилиндра или (3.17)–(3.20) для шара, согласно алгоритму, описанному в конце первого пункта.

В рассматриваемом случае $\beta = \text{const}$ уравнения, описывающие контактное взаимодействие цилиндра или шара с покрытием обладают следующим свойством: если в них перейти к безразмерным величинам

$$\tilde{x} = \frac{x}{R}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{R}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{R}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{R}, \quad \tilde{\delta} = \frac{\delta}{R}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\kappa R}, \quad (3.21)$$

то окажется, что параметры A , η , κ , β , R , V , а также Q или P входят в данные уравнения в виде безразмерных комбинаций:

$$z_0 = \omega_1, \quad z_1 = \frac{\eta V}{\kappa R}, \quad z_2 = \beta \kappa R, \quad \tilde{Q} = \frac{Q}{\kappa R^2}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{\kappa R^3}.$$

Это означает, что неизвестные функции $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{a}(\tilde{y})$, $\tilde{b}(\tilde{y})$, которые находятся из вышеупомянутых уравнений и описывают контактное взаимодействие покрытия с индентором в безразмерных переменных (3.21),

зависят только от z_0 , z_1 , z_2 и \tilde{Q} (в случае цилиндра) или \tilde{P} (в случае шара). Данное свойство позволяет более компактно описывать влияние на решения рассматриваемых задач параметров A , η , \varkappa , β , R , V путем использования вместо них параметров z_0 , z_1 , z_2 .

Кроме введенных выше безразмерных величин $z_{0,1,2}$, для задания условий контактного взаимодействия индентора с покрытием в дальнейшем будет использоваться еще одна безразмерная величина $\tilde{\delta}_r = \delta_r/R$, где δ_r — внедрение покоящегося индентора ($V = 0$). При заданных нагрузках Q и P имеют место выражения

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_r &\equiv \left. \frac{ka^2}{R} \right|_{V=0} = \frac{1}{R} \left(\frac{9Q^2}{32\varkappa^2 R} \right)^{1/3} = \left(\frac{9}{32} \tilde{Q}^2 \right)^{1/3} \quad \text{— для цилиндра,} \\ \tilde{\delta}_r &\equiv \left. \frac{ka^2(0)}{R} \right|_{V=0} = \frac{1}{R} \left(\frac{P}{\pi \varkappa R} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\pi} \tilde{P} \right)^{1/2} \quad \text{— для шара,}\end{aligned}\tag{3.22}$$

согласно которым величина $\tilde{\delta}_r$ зависит только от \tilde{Q} (для цилиндра) или \tilde{P} (для шара).

Степень износа покрытия можно характеризовать величиной W_M максимального износа за один проход индентора. В предположении, что максимальное давление имеет место в сечении $y = 0$, выражение (3.12) позволяет записать:

$$W_M = \beta \int_{-a(0)}^{b(0)} p(s, 0) ds,$$

причем для цилиндра, в силу условия равновесия (3.11), последнее выражение имеет вид $W_M = \beta Q$. Для представления численных результатов будет использоваться безразмерная величина $\tilde{W}_M = W_M/R$.

На рис. 2.52 и рис. 2.53 представлены зависимости величин $\tilde{\delta}$ и \tilde{W}_M от отношения z_1 для цилиндра и шара, полученные при двух различных значениях z_2 . Величина внедрения покоящегося индентора (штриховая линия на графиках) бралась одинаковой для цилиндра и шара.

Сравнение рис. 2.52 и рис. 2.53 свидетельствует о возможности значительного влияния степени износа покрытия на зависимости контактных характеристик от скорости скольжения индентора и вязкости покрытия. В частности, обращает на себя внимание отсутствие предельного перехода $\delta \rightarrow \delta_r \equiv \delta|_{V=0}$ при $V \rightarrow 0$ (рис. 2.52а и рис. 2.53а). Это объясняется наличием конечного износа при сколь угодно малой скорости скольжения V (рис. 2.52б и рис. 2.53б), что, в свою очередь, связано с предполагаемой пропорциональностью между износом и путем трения (равенство (3.12) при $\beta = \text{const}$).

Также рис. 2.52 и рис. 2.53 свидетельствуют о том, что зависимости ряда контактных характеристик от скорости скольжения индентора

и вязкости покрытия могут существенно различаться для цилиндрического и сферического инденторов, причем это различие возрастает с увеличением интенсивности изнашивания покрытия.

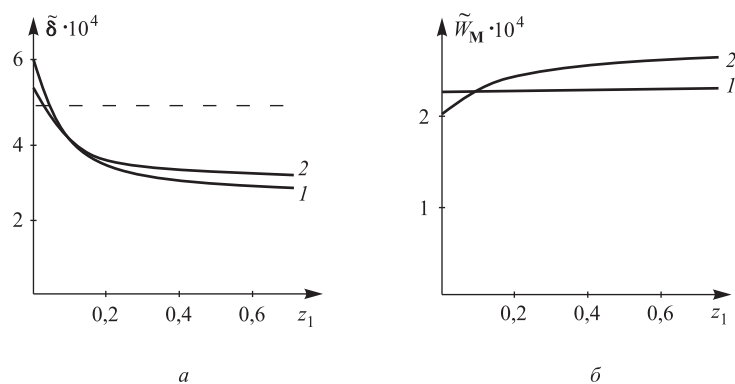


Рис. 2.52. Зависимости безразмерных внедрения $\tilde{\delta}$ (а) и максимального износа \tilde{W}_M (б) от z_1 для цилиндра (1) и шара (2) при $\tilde{\delta}_r = 5 \cdot 10^{-4}$, $z_0 = 0,1$, $z_2 = 11,9$

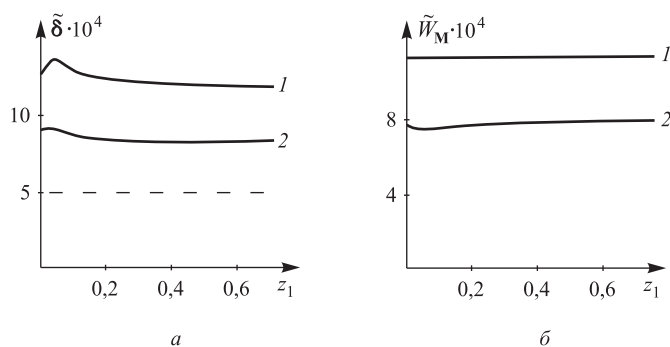


Рис. 2.53. То же, что и на рис. 2.52, но при $z_2 = 59,3$

Рис. 2.54 и рис. 2.55 показывают характер изменения распределения давления и формы области контакта для шара при различных значениях z_1 и z_2 . Примечательно, что при возрастании как z_1 , так и z_2 область контакта смещается в направлении движения шара. Однако, если при возрастании z_1 размер области контакта вдоль оси y уменьшается (рис. 2.54), то при возрастании z_2 этот размер увеличивается (рис. 2.55), вследствие чего максимальное давление уменьшается.

Формы области контакта, аналогичные изображенным на рис. 2.54, были получены экспериментально при качении стеклянного шара с различными скоростями по пластине из эпоксидной смолы [59].

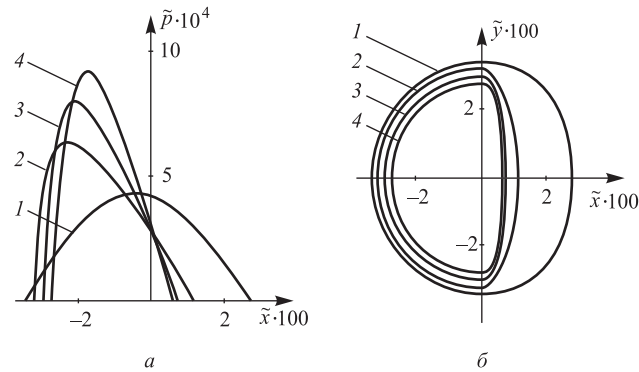


Рис. 2.54. Распределения безразмерного давления в сечении $y = 0$ (а) и формы области контакта \mathcal{D} (б) в случае сферического индентора при $\tilde{\delta}_r = 5 \cdot 10^{-4}$, $z_0 = 0,1$, $z_2 = 11,9$ и различных значениях z_1 : 0 (1); 0,03 (2); 0,06 (3); 0,13 (4)

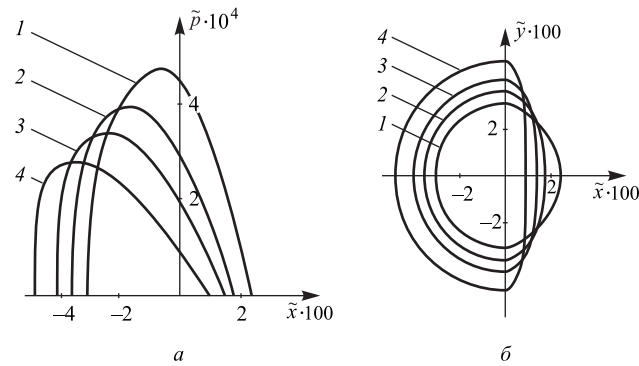


Рис. 2.55. То же, что и на рис. 2.54, но при $\tilde{\delta}_r = 5 \cdot 10^{-4}$, $z_0 = 0,1$, $z_1 = 8 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях z_2 : 0 (1); 23,7 (2); 47,4 (3); 94,9 (4)

Полученные результаты численного анализа позволяют сделать вывод о возможности существенного влияния фактора изнашивания на характер контактного взаимодействия индентора с вязкоупругим покрытием.

2.3.2. Изнашивание волнистой поверхности

Процесс образования и развития волнистости на поверхности трения исследовался теоретически на основе различных представлений о природе подобного явления: потеря упругой устойчивости поверхностного слоя [33], неоднородность механических и геометрических параметров поверхности [57], упругое отеснение материала на поверхности с последующим его надрывом [66]. Ниже эволюция волнистости поверхности тела рассматривается как результат его изнашивания.

Постановка задачи. Рассмотрим деформируемое тело, поверхность которого имеет форму одномерной (цилиндрической) волнистости и деформируемый цилиндрический индентор, сориентированный так, что его образующая параллельна образующей волнистости поверхности тела (рис. 2.56). Индентор крепится вязкоупругой связью к подвижной каретке, которая перемещается с постоянной по величине скоростью V_0 по неподвижной относительно тела направляющей, в результате чего индентор скользит по телу в направлении, перпендикулярном своей образующей. Для определенности положим, что индентор имеет форму цилиндра радиуса R , причем R не превосходит абсолютного значения радиуса ρ кривизны поверхности тела.

Введем в рассмотрение неподвижную относительно тела систему координат Oxy , плоскость xy которой расположим перпендикулярно к оси индентора, а ось x — параллельно направлению движения каретки (рис. 2.56). Координаты центра индентора в этой системе обозначим через X, Y . Будем считать, что связь индентора с кареткой об-

ладает единственной степенью свободы в направлении оси y , в силу чего его скорость вдоль оси x совпадает со скоростью V_0 каретки.

Далее будет рассматриваться циклическое движение индентора трех типов: проход в направлении оси x с холостым возвратом против оси x — тип M_+ ; проход против оси x с холостым возвратом в направлении оси x — тип M_- ; возвратно-поступательное (без холостых возвратов) — тип M_0 . Положительное значение V_0 отвечает движению каретки в направлении оси x .

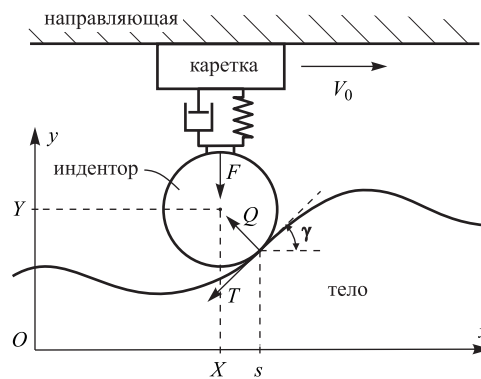


Рис. 2.56. Взаимодействие изнашиваемого тела с цилиндрическим массивным индентором

Для описания вязкоупругих деформационных свойств связи индентора с кареткой воспользуемся упрощенной моделью демпфера и пружины, соединенных, например, параллельно (элемент Фойгта [5]). Кон-

тактными деформациями тела и индентора будем пренебрегать, считая при этом длину $2a$ области контакта индентора с телом (в плоскости xy) пренебрежимо малой по сравнению с радиусами кривизны их поверхностей:

$$a \ll R < |\rho|. \quad (3.23)$$

В результате взаимодействия со скользящим индентором возникает износ тела, приводящий к изменению формы его поверхности. Скорость нормального к поверхности тела линейного износа W примем пропорциональной давлению p и скорости скольжения V :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha p V, \quad (3.24)$$

причем скорость скольжения V при постоянной скорости V_0 является переменной и зависит от формы волнистости. Предполагая, что износ за один проход индентора пренебрежимо мало меняет форму волнистости, будем ее описывать функцией $\varphi(x, t)$, определяющей ординату профиля поверхности тела в системе Oxy . Как и прежде, за начало изнашивания принимается момент $t = 0$.

Ставится задача определения эволюции волнистости поверхности тела в результате изнашивания, т. е. функции $\varphi(x, t)$, при условии, что известна начальная форма волнистости $\varphi_0(x)$. Решение этой задачи начнем с рассмотрения силового аспекта подвижного контакта индентора с телом.

Анализ сил контактного взаимодействия. Учитывая сделанное выше предположение о малости износа за один проход индентора, рассмотрим перемещение индентора по волнистой поверхности неизменной формы $\varphi(x)$. Течение времени в ходе такого перемещения будем характеризовать величиной τ . Для определенности положим, что в момент $\tau = 0$ центр индентора имеет координату $X = 0$.

Соотношение (3.23) позволяет считать контакт индентора с телом точечным, координату которого в системе Oxy обозначим через s . Отметим, что координаты s и X зависят от времени τ , причем по условию задачи $X = V_0 \tau$, $|V_0| = \text{const}$. В дальнейшем для упрощения записи аргумент τ у функций будет опускаться.

Условие касания цилиндрического индентора с волнистой поверхностью представляется равенством углов наклона профилей индентора и поверхности в точке s :

$$\frac{s - X}{R} = \frac{\varphi'(s)}{\sqrt{1 + \varphi'^2(s)}}. \quad (3.25)$$

Кроме того, имеет место следующее геометрическое соотношение между координатами X , Y и s (см. рис. 2.56):

$$Y = \varphi(s) + \sqrt{R^2 - (s - X)^2}. \quad (3.26)$$

Определим нормальную составляющую контактной нагрузки Q . Для этого рассмотрим уравнение динамики индентора [1]:

$$m \frac{d^2 Y}{d\tau^2} = -F - mg - \text{sign } V_0 |T| \sin \gamma + Q \cos \gamma, \quad (3.27)$$

где m — масса индентора, mg — его вес, F — сила реакции вязкоупругой связи, T — сила трения, γ — угол наклона профиля поверхности в точке контакта, $\gamma(s) = \arctg \varphi'(s)$ (рис. 2.56). Отметим, что под m , F , Q , T здесь понимаются величины, приходящиеся на единицу длины индентора вдоль его оси. Раскроем члены уравнения (3.27).

Обозначим через η , \varkappa коэффициент вязкости демпфера и жесткость пружины элемента Фойгта, а через Y_0 — ординату центра индентора при недеформированной пружине. Силу трения между индентором и телом будем считать пропорциональной нормальной нагрузке (закон Кулона) с коэффициентом трения μ . Все это позволяет записать следующие равенства [5, 27]:

$$F = \eta \frac{dY}{d\tau} + \varkappa(Y - Y_0), \quad |T| = \mu Q. \quad (3.28)$$

Для определения производных $dY/d\tau$ и $d^2Y/d\tau^2$ дважды продифференцируем по τ равенство (3.26), примем во внимание соотношение (3.25) и то, что $dX/d\tau = V_0$. В результате можно получить выражения

$$\frac{dY}{d\tau} = V_0 \varphi'(s), \quad \frac{d^2Y}{d\tau^2} = V_0^2 \theta(s) \varphi''(s), \quad (3.29)$$

где $\rho(s) = [1 + \varphi'^2(s)]^{3/2} / \varphi''(s)$ — радиус кривизны профиля поверхности в плоскости x, y , $\theta(s) = [1 - R/\rho(s)]^{-1}$.

Подставляя выражения (3.25), (3.26), (3.28), (3.29) в (3.27) и разрешая полученное уравнение относительно Q , получим выражение:

$$Q(s) = \Pi(s, \varphi(s), \varphi'(s), \varphi''(s)) \equiv \frac{mV_0^2 \theta(s) \varphi''(s) + F(s) + mg}{\cos \gamma(s) - \text{sign } V_0 \mu \sin \gamma(s)}, \quad (3.30)$$

при этом имеет место равенство

$$F(s) = \eta V_0 \varphi'(s) + \varkappa [\varphi(s) + R(1 + \varphi'^2(s))^{-1/2} - Y_0]. \quad (3.31)$$

Характерной особенностью равенств (3.30), (3.31) является то, что фигурирующие в них функции в качестве аргумента содержат только величину s . Это позволяет считать равенства (3.30), (3.31) справедливыми при произвольном s и для удобства заменить в них s на x .

Уравнение кинетики изнашивания. Возьмем произвольную точку с абсциссой x на поверхности тела и определим величину $\delta W(x)$ нормальной к поверхности линейного износа в этой точке при проходе через

нее индентора. Пользуясь малостью размера области контакта $a(x)$ (соотношение (3.23)), представим проход индентора через точку x как прохождение по ней неизменной эпюры давления $p(\xi)$, $\xi \in [-a(x), a(x)]$ со скоростью $V(x) = V_0/\cos\gamma(x)$ при наличии скольжения с той же скоростью. Повторяя тогда рассуждения раздела 2.1.8 и учитывая линейный характер закона изнашивания (3.24), можно записать:

$$\delta W(x) = \alpha(x) \int_{-a(x)}^{a(x)} p(\xi) d\xi = \alpha(x) Q(x), \quad (3.32)$$

при этом допускается зависимость параметра износостойкости α от координаты x , а последнее равенство отражает очевидную связь нормальной составляющей Q контактной нагрузки с распределением давления.

Величина Q в соотношении (3.32) определяется согласно выражению (3.30), что позволяет (с учетом предполагаемых типов циклического движения индентора) представить это соотношение в виде равенства

$$\delta W_\sigma(x) = \alpha(x) \Pi_\sigma(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)), \quad (3.33)$$

в котором под σ подразумевается один из символов $+$, $-$ или 0 , причем δW_+ и Π_+ (δW_- и Π_-) обозначают износ за один проход и правую часть равенства (3.30) при движении индентора типа M_+ (M_-), тогда как $2\delta W_0$ — износ за два прохода (вдоль и против оси x) при движении индентора типа M_0 , $\Pi_0 \equiv (\Pi_+ + \Pi_-)/2$.

Будем интерпретировать величину δW как скорость износа по числу проходов индентора и запишем $n_0 \cdot \delta W = \partial W / \partial t$, где n_0 — частота проходов индентора. При том, что приращение износа вдоль оси y равно $\delta W / \cos\gamma$, последнее равенство позволяет с учетом (3.30) и (3.33) записать искомое уравнение кинетики изнашивания:

$$-\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{n_0 \alpha(x)}{\cos\gamma(x, t)} \Pi_\sigma(x, \varphi(x, t), \varphi'(x, t), \varphi''(x, t)), \quad (3.34)$$

где

$$\Pi_\pm = (q_1 \pm q_2)/(r_1 \mp r_2), \quad \Pi_0 = (q_1 r_1 + q_2 r_2)/(r_1^2 - r_2^2),$$

$$q_1 = mV_0^2 \theta(x, t) \varphi''(x, t) + \kappa [\varphi(x, t) + R(1 + \varphi'^2(x, t))^{-1/2} - Y_0] + mg,$$

$$q_2 = \eta |V_0| \varphi'(x, t), \quad r_1 = \cos\gamma(x, t), \quad r_2 = \mu \sin\gamma(x, t).$$

Проведенные выкладки предполагают наличие неразрывного контакта индентора с телом, что обеспечивается положительными значениями нагрузки Q . Учитывая это и пользуясь выражением (3.30), наложим следующее ограничение на форму волнистости:

$$0 < \Pi_\sigma(x, \varphi(x, t), \varphi'(x, t), \varphi''(x, t)). \quad (3.35)$$

Уравнение (3.34) представляет собой нелинейное уравнение в частных производных второго порядка. При начальном условии $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$ и соблюдении неравенства (3.35) оно определяет эволюцию волнистости поверхности тела в процессе его изнашивания.

Численный анализ. Уравнение (3.34) решалось численно с использованием явной разностной схемы [24]. Рассматривались два случая начальной формы волнистости:

$$\varphi_0(x) = D \exp(-x^2/l^2) \quad \text{— единичная неровность,} \quad (3.36)$$

$$\varphi_0(x) = D \cos(\pi x/l) \quad \text{— гармоническая волна.} \quad (3.37)$$

Параметр износостойкости α принимался неизменным вдоль пути трения индентора. В ходе вычислений контролировалось выполнение

неравенства (3.35), обеспечивающего неразрывность контакта индентора с телом. Если для некоторых x, t это условие нарушалось (например, при достаточно большой скорости V_0), то расчет прерывался.

На рис. 2.57 показана эволюция формы единичной неровности (3.36), а на рис. 2.58 и рис. 2.59 — гармонической волны (3.37). Расчеты были выполнены для движения индентора типа M_+ (в направлении оси x) при следующих значениях параметров: $m = 1$ кг/м, $R = 5$ мм, $V_0 = 0,2$ м/с, $n_0 = 10$ Гц, $Y_0 = -15$ мм, $\mu = 0,05$, $\alpha = 5 \times 10^{-12}$ Па $^{-1}$, $D = 3$ мм. Отдельно полагалось: $l = 1$ см, $\varkappa = 10^4$ Па, $\eta = 10^3$ Па \cdot с — для рис. 2.57; $l = 10$ см, $\varkappa = 10^4$ Па, $\eta = 10^3$ Па \cdot с — для рис. 2.58; $l = 10$ см, $\varkappa = 0$, $\eta = 0,4 \cdot 10^3$ Па \cdot с — для рис. 2.59.

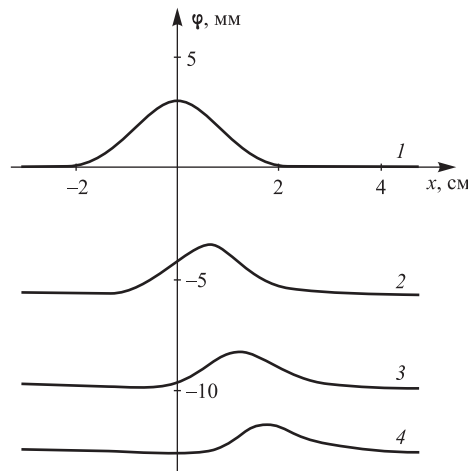


Рис. 2.57. Форма единичной неровности в различные моменты изнашивания: $t = 0$ с (1); $0,63 \cdot 10^6$ с (2); $1,26 \cdot 10^6$ с (3); $1,87 \cdot 10^6$ с (4)

$\eta = 10^3$ Па \cdot с — для рис. 2.58; $l = 10$ см, $\varkappa = 10^4$ Па, $\eta = 10^3$ Па \cdot с — для рис. 2.59.

Представленные результаты расчетов свидетельствуют о том, что наряду с общим проседанием изнашиваемой поверхности, эволюция волнистости качественно сводится к двум главным тенденциям: смещению волнистости вдоль оси x и изменению ее высоты (амплитуды), причем в зависимости от выбора параметров задачи эти тенденции могут проявляться в разной степени (рис. 2.58 и рис. 2.59). При движении индентора типа M_+ или M_- смещение волнистости происходит в направлении движения индентора. В случае движения типа M_0 смещения

волнистости не происходит, и это объясняется соответствующей симметрией правой части уравнения (3.34). Обращает на себя внимание, что в зависимости от упругих свойств связи индентора с кареткой амплитуда волнистости может со временем уменьшаться (волнистость выглаживается) (рис. 2.58) или увеличиваться (рис. 2.59), при этом длина волны профиля поверхности не претерпевает заметных изменений.

Линеаризованное уравнение кинетики изнашивания. Допустим, что

$$|\varphi'(x, t)| \ll 1, \quad R \ll |\rho(x, t)|, \quad \mu \ll 1. \quad (3.38)$$

Первые два условия (3.38) означают, что волнистость является полой и радиус ее кривизны намного превосходит радиус R индентора.

Приняв условия (3.38), пренебрежем в уравнении (3.34) членами, содержащими степени φ' выше первой и произведения $\mu \varphi'$, $R\rho^{-1}$.

В результате приходим к следующему линейному дифференциальному уравнению кинетики изнашивания:

$$-\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = z_2(x) \varphi''(x, t) + z_1(x) \varphi'(x, t) + z_0(x) \varphi(x, t) + z_*(x), \quad (3.39)$$

где

$$z_0(x) = n_0 \kappa \alpha(x), \quad z_1(x) = \begin{cases} \pm n_0 \alpha(x) \eta |V_0|, & \text{при } M_{\pm}, \\ 0, & \text{при } M_0, \end{cases}$$

$$z_2(x) = n_0 \alpha(x) m V_0^2, \quad z_*(x) = n_0 (mg - \kappa C) \alpha(x), \quad C = Y_0 - R.$$

Далее рассмотрим решение уравнения (3.39) для некоторых частных случаев.

Пример 1. Пусть $\alpha(x) = \text{const}$, и коэффициенты z_0, z_1, z_2, z_* в уравнении (3.39) постоянны. Начальную функцию $\varphi_0(x)$ возьмем непрерывной и периодической с периодом $2l$. Считая решение $\varphi(x, t)$ также непрерывным с периодом $2l$, представим его в виде ряда Фурье [45]:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2} a_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(t) \cos \omega_k x + b_k(t) \sin \omega_k x], \quad (3.40)$$

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l}.$$

Коэффициенты ряда определяются выражениями

$$a_{00} \equiv a_0(0) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi_0(x) dx, \quad a_{k0} \equiv a_k(0) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi_0(x) \cos \omega_k x dx,$$

$$b_{k0} \equiv b_k(0) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi_0(x) \sin \omega_k x dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если подставить выражение (3.40) в уравнение (3.39) и сгруппировать в полученном равенстве члены с множителями $\cos \omega_k x$, $\sin \omega_k x$ и свободные от них члены, то можно прийти к системе дифференциальных уравнений относительно $a_0(t)$, $a_k(t)$, $b_k(t)$. Решение этой системы с начальными значениями a_{00} , a_{k0} , b_{k0} находится без труда, и после его подстановки в правую часть равенства (3.40) можно прийти к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & \frac{1}{2} a_{00} e^{-z_0 t} - \frac{z_*}{z_0} (1 - e^{-z_0 t}) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\nu_k t} [a_{k0} \cos \omega_k (z_1 t - x) - b_{k0} \sin \omega_k (z_1 t - x)], \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $\nu_k = z_2 \omega_k^2 - z_0$. В частности, если начальный профиль $\varphi_0(x)$ поверхности имеет вид гармонической волны (3.37), то $a_{00} = a_{k0} = b_{k0} = 0$, кроме $a_{10} = D$, и выражение (3.41) принимает вид

$$\varphi(x, t) = -\frac{z_*}{z_0} (1 - e^{-z_0 t}) + D e^{\nu_1 t} \cos \omega_1 (z_1 t - x). \quad (3.42)$$

Первый член в выражении (3.41) для $\varphi(x, t)$ соответствует общему проседанию изнашиваемой поверхности параллельно оси y , а каждое слагаемое бесконечной суммы представляет собой бегущую вдоль оси x со скоростью z_1 волну, амплитуда которой экспоненциально изменяется со временем. Подобное изменение формы волнистости согласуется с представленными выше результатами расчетов. Например, нетрудно проверить, что для рис. 2.58 (рис. 2.59) величина ν_1 имеет отрицательное (положительное) значение, поэтому, согласно выражению (3.42), и в полном соответствии с рис. 2.58 (рис. 2.59), амплитуда волны уменьшается (увеличивается) при сохранении ее длины. Также можно установить, что скорость смещения волнистости вдоль оси x на рис. 2.59 с высокой степенью точности (ошибка менее 2.5%) совпадает со значением z_1 .

Пример 2. Пусть легкий индентор ($m = 0$) совершает движение типа M_0 . Тогда правая часть уравнения (3.39) содержит только два последних слагаемых, и решение такого уравнения имеет вид

$$\varphi(x, t) = (\varphi_0(x) - C) e^{-z_0(x)t} + C. \quad (3.43)$$

Выражение (3.43) позволяет, в частности, исследовать характер изменения амплитуды волнистости $A(t)$ во времени. Например, при отсутствии начальной волнистости ($\varphi_0(x) = \varphi_0 = \text{const}$) имеем из (3.43):

$$A(t) \equiv \max_x \varphi(x, t) - \min_x \varphi(x, t) = (\varphi_0 - C) (e^{-z_{01} t} - e^{-z_{02} t}), \quad (3.44)$$

где

$$z_{01} \equiv \min_x z_0(x) = n_0 \alpha_1, \quad z_{02} \equiv \max_x z_0(x) = n_0 \alpha_2,$$

α_1 , α_2 — минимальное и максимальное значения параметра износостойкости $\alpha(x)$. Интересной особенностью зависимости (3.44) является то, что с течением времени амплитуда волнистости вначале возрастает до величины $A_m = A(t_m)$, а затем экспоненциально уменьшается до нуля, при этом величины t_m и A_m определяются следующим образом:

$$t_m = \frac{\ln r}{(r-1)z_{01}}, \quad A_m = (\varphi_0 - C)r^{-r/(r-1)}(r-1), \quad r = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Кроме того, амплитуда волнистости увеличивается при возрастании степени нагруженности контакта. Это, например, следует из равенства (3.44), в котором множитель $(\varphi_0 - C)$ определяет упругое сжатие пружины. Аналогичные результаты были установлены экспериментально в работе [4].

Полученные в примерах 1 и 2 аналитические решения справедливы при выполнении неравенства (3.35), которое применительно к уравнению (3.39) равносильно требованию неотрицательности его правой части. Проверка этого требования в отношении решений (3.42) и (3.43) не составляет труда.

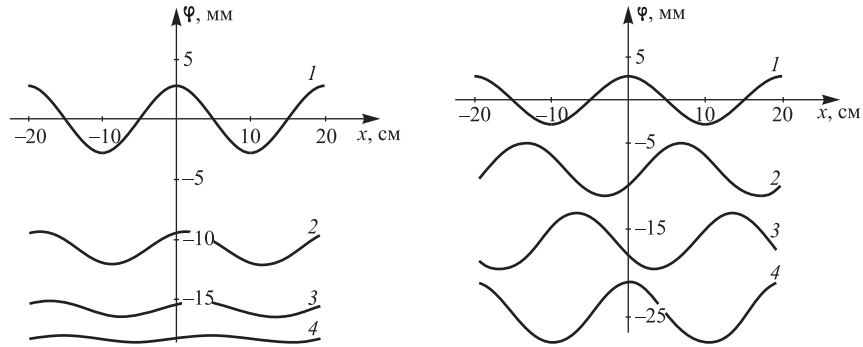


Рис. 2.58. Форма волнистости в различные моменты изнашивания при наличии упругой составляющей связи индентора с кареткой ($\varkappa \neq 0$): $t = 0$ с (1); $1,46 \cdot 10^6$ с (2); $2,93 \cdot 10^6$ с (3); $4,41 \cdot 10^6$ с (4)

Рис. 2.59. Форма волнистости в различные моменты изнашивания без упругой составляющей связи индентора с кареткой ($\varkappa = 0$): $t = 0$ с (1); $16,7 \cdot 10^6$ с (2); $33,7 \cdot 10^6$ с (3); $50,5 \cdot 10^6$ с (4)

Замечание. Все сделанные выше выкладки и расчеты могут быть выполнены и в том случае, когда цилиндрический индентор дополнительно вращается относительно своей оси, что имеет место, например, при шлифовании волнистой поверхности абразивным кругом. В этом случае выражение (3.32) для износа δW следует заменить следующим [40]: $\delta W(x) = \alpha(x)|1 + \Omega R/V(x)|Q(x)$, где Ω — угловая скорость

вращения индентора, положительное значение которой соответствует вращению против часовой стрелки на рис. 2.56. Такая замена требует соответствующих изменений правой части уравнения (3.34), которые несложно выполнить.

2.3.3. Расчет износа поршневого кольца

Впервые износоконтактная задача для поршневого кольца была поставлена и численно решена в работе [12]. Позже был предложен подход к решению износоконтактных задач для упругих систем балочного типа, основанный на методе разделения переменных [11, 15]. Ниже с использованием этого подхода дается решение контактной задачи при наличии износа для поршневого кольца с упругим расширителем (экспандером) при одновременном воздействии на кольцо давления газа. Полученное решение учитывает изменение во времени указанных воздействий.

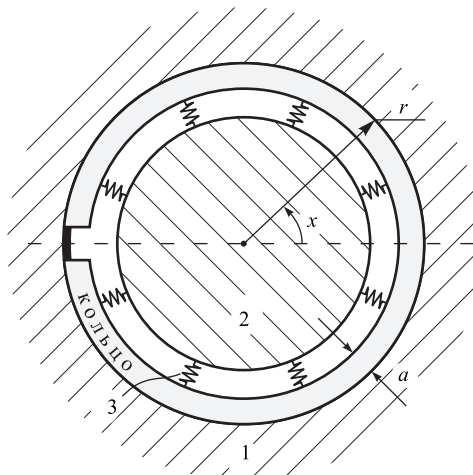


Рис. 2.60. Взаимодействие кольца с цилиндром 1 (поперечное сечение). Расширитель схематично изображен в виде пружин 3, расположенных между дном канавки поршня 2 и внутренней гранью кольца

Постановка задачи. Рассмотрим разрезное поршневое кольцо, контактирующее с внутренней поверхностью абсолютно жесткого цилиндра радиуса r (рис. 2.60). Упругую составляющую q давления кольца на цилиндр будем определять на основе задачи об изгибе бруса малой кривизны. Обозначая через u упругое радиальное перемещение (к центру цилиндра) осевой линии кольца и считая его концы ($x = \pm\pi$) свободны-

ми от внешних усилий (изгибающего момента и растягивающей силы), запишем [13]:

$$\Phi[u(x)] \equiv u^{IV}(x) + 2u''(x) + u(x) = \frac{br^4}{EJ} q(x) \equiv \frac{12r^4}{Ea^3} q(x), \quad (3.45)$$

где E — модуль Юнга материала кольца, $J = a^3b/12$ — момент инерции поперечного сечения кольца, a, b — его поперечные размеры (радиальная толщина и толщина вдоль образующей цилиндра). Штрих над функцией означает дифференцирование по угловой координате x .

На внутреннюю грань кольца действуют также давление газа φ и сила упругости расширителя. Заменяем действие расширителя на кольцо дополнительным давлением ψ на его внутреннюю грань [13] и будем считать, что

$$\psi(x) = \varkappa s(x), \quad (3.46)$$

где s — сжатие расширителя, \varkappa — коэффициент его жесткости.

Контактное давление p кольца на цилиндр при сделанных допущениях представляется суммой [13]

$$p(x) = q(x) + \varphi(x) + \psi(x). \quad (3.47)$$

Допустим теперь, что кольцо, двигаясь вдоль своей образующей, изнашивается по контактирующей с цилиндром поверхности. Обозначим через W соответствующий износ и примем линейный закон изнашивания $\dot{W} \equiv \partial W / \partial t = \alpha p$. Тогда, с учетом (3.47), можно записать соотношение

$$\dot{W}(x, t) = \alpha[q(x, t) + \varphi(x, t) + \psi(x, t)]. \quad (3.48)$$

Здесь и далее аргументом t учитывается изменение величин в результате износа, при этом начальные значения величин, как и прежде, будут отмечаться нижним индексом 0. Износ W считается малым по сравнению с величиной a радиальной толщины кольца, что позволяет пренебречь ее изменением в равенстве (3.45). Условие контакта кольца и цилиндра имеет вид

$$u_0(x) - u(x, t) = W(x, t). \quad (3.49)$$

На основании записанных соотношений выведем уравнение кинетики изнашивания кольца. Для этого продифференцируем условие контакта (3.49) по t , в полученном равенстве заменим \dot{W} правой частью (3.48) и выразим давления $q(x, t)$ и $\psi(x, t)$ через перемещения $u(x, t)$ и $s(x, t) = s_0(x) - W(x, t) = s_0(x) - u_0(x) + u(x, t)$ с помощью равенств (3.45) и (3.46) соответственно. В результате придем к следующему уравнению кинетики изнашивания кольца:

$$A\dot{u}(x, t) + \Phi[u(x, t)] + \omega u(x, t) = Q(x, t), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (3.50)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 12r^4/(\alpha E a^3), \quad \omega = \alpha \varkappa A, \\ Q(x, t) &= -\alpha A[\varphi(x, t) + \varkappa(s_0(x) - u_0(x))]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

В качестве начальных и граничных условий возьмем [13]:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.52)$$

$$u(\pm\pi, t) + u''(\pm\pi, t) = 0, \quad u'(\pm\pi, t) + u'''(\pm\pi, t) = 0. \quad (3.53)$$

Равенства (3.53) обусловлены отсутствием изгибающего момента и перерезывающей силы на концах кольца. Нетрудно убедиться, что при их выполнении условия равновесия кольца также выполняются. Действительно, составляющие φ и ψ контактного давления p уравновешиваются при каждом x внешним давлением φ и давлением ψ расширителя, а для упругой составляющей q (с учетом равенства (3.45)) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} q(x, t) \begin{Bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{\alpha A} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi[u(x, t)] \begin{Bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} dx = 0,$$

причем последнее равенство выполняется в силу граничных условий (3.53).

Располагая решением $u(x, t)$ уравнения (3.50), можно определить износ $W(x, t)$ и контактное давление $p(x, t)$ простым вычислением, если воспользоваться равенствами (3.48), (3.49).

Аналитическое решение задачи. Построим решение уравнения (3.50) при условиях (3.52), (3.53) и при заданных функциях $u_0(x)$, $s_0(x)$, $\varphi(x, t)$. Следуя методу разделения переменных [9], будем искать это решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N T_n(t) U_n(x), \quad (3.54)$$

где функции $U_n(x)$ являются решениями задачи на собственные значения λ_n вида

$$\Phi[U_n(x)] + \omega U_n(x) = \lambda_n U_n(x), \quad (3.55)$$

$$U_n(\pm\pi) + U_n''(\pm\pi) = 0, \quad U_n'(\pm\pi) + U_n'''(\pm\pi) = 0, \quad (3.56)$$

причем выбор значения $N = \max n \geq 1$ будет оговорен ниже.

Будем считать, что известные функции $u_0(x)$, $s_0(x)$, $\varphi(x, t)$ также можно представить в виде разложений

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{n=1}^N u_{0n} U_n(x), & s_0(x) &= \sum_{n=1}^N s_{0n} U_n(x), \\ \varphi(x, t) &= \sum_{n=1}^N \varphi_n(t) U_n(x). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Выражение в правой части (3.54) удовлетворяет граничным условиям (3.53) в силу равенств (3.56). Подберем функции $T_n(t)$ так, чтобы это выражение удовлетворяло еще уравнению кинетики изнашивания (3.50)

и начальному условию (3.52). Для этого подставим (3.54) в уравнение (3.50), примем во внимание равенство (3.55), а также представления (3.57). В результате получим равенство

$$\sum_{n=1}^N [A\dot{T}_n(t) + \lambda_n T_n(t)] U_n(x) = \sum_{n=1}^N Q_n(t) U_n(x),$$

в котором $Q_n(t) = -\alpha A[\varphi_n(t) + \varkappa(s_{0n} - u_{0n})]$, и которое выполняется, если

$$A\dot{T}_n(t) + \lambda_n T_n(t) = Q_n(t)$$

или

$$T_n(t) = \left[c_n + \frac{1}{A} \int_0^t Q_n(\tau) \exp\left(\frac{\lambda_n \tau}{A}\right) d\tau \right] \exp\left(-\frac{\lambda_n t}{A}\right). \quad (3.58)$$

Здесь c_n — некоторые константы, причем $T_n(0) = c_n$. С другой стороны, из представления (3.54) и первого равенства (3.57) имеем $T_n(0) = u_{0n}$. Следовательно, правая часть (3.54) будет удовлетворять начальному условию (3.52), если $c_n = u_{0n}$. Подставляя теперь выражение (3.58) в (3.54), получим искомое решение уравнения (3.50):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \left[u_{0n} \exp\left(-\frac{\lambda_n t}{A}\right) + I_n(t) \right] U_n(x), \quad (3.59)$$

где

$$I_n(t) = \frac{1}{A} \int_0^t Q_n(\tau) \exp\left(-\frac{\lambda_n}{A}(t - \tau)\right) d\tau.$$

Значения λ_n находятся из условия существования нетривиального (отличного от нуля) решения линейного дифференциального уравнения (3.55) с постоянными коэффициентами при условиях (3.56). В результате нетрудно установить, что:

а) при $\lambda_n - \omega < 0$ и $\lambda_n - \omega = 1$ уравнение (3.55) с условиями (3.56) имеет только тривиальное решение $U_n(x) \equiv 0$;

б) при $0 < \lambda_n - \omega < 1$ и $L_n^\pm = (1 \pm \sqrt{\lambda_n - \omega})^{1/2}$, если λ_n удовлетворяет уравнению

$$L_n^- \sin L_n^- \pi \cos L_n^+ \pi - L_n^+ \sin L_n^+ \pi \cos L_n^- \pi = 0,$$

решение нетривиально и имеет вид

$$U_n(x) = \frac{\cos L_n^+ \pi}{\cos L_n^- \pi} \cos L_n^- x + \cos L_n^+ x,$$

а если λ_n удовлетворяет уравнению

$$L_n^+ \sin L_n^- \pi \cos L_n^+ \pi - L_n^- \sin L_n^+ \pi \cos L_n^- \pi = 0,$$

то нетривиальное решение имеет вид

$$U_n(x) = \frac{\sin L_n^+ \pi}{\sin L_n^- \pi} \sin L_n^- x + \sin L_n^+ x;$$

в) при $1 < \lambda_n - \omega$ и $\Lambda_n^\pm = (\sqrt{\lambda_n - \omega} \pm 1)^{1/2}$, если λ_n удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_n^+ \operatorname{ch} \Lambda_n^- \pi \sin \Lambda_n^+ \pi + \Lambda_n^- \operatorname{sh} \Lambda_n^- \pi \cos \Lambda_n^+ \pi = 0,$$

то решение имеет вид

$$U_n(x) = \frac{\cos \Lambda_n^+ \pi}{\operatorname{ch} \Lambda_n^- \pi} \operatorname{ch} \Lambda_n^- x + \cos \Lambda_n^+ x,$$

а если λ_n удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_n^+ \operatorname{sh} \Lambda_n^- \pi \cos \Lambda_n^+ \pi - \Lambda_n^- \operatorname{ch} \Lambda_n^- \pi \sin \Lambda_n^+ \pi = 0,$$

то

$$U_n(x) = \frac{\sin \Lambda_n^+ \pi}{\operatorname{sh} \Lambda_n^- \pi} \operatorname{sh} \Lambda_n^- x + \sin \Lambda_n^+ x;$$

г) при $\lambda_n = \lambda_1 = \omega$:

$$U_1(x) = D_1 \cos x + D_2 \sin x, \quad D_{1,2} - \text{произвольные постоянные.}$$

Решение (3.59) позволяет с помощью условия контакта (3.49) определить износ W . Кроме того, подставляя это решение в равенство (3.45), можно найти величину упругого давления q , а также, с учетом (3.57), выражение для давления $q_e = q + \psi$ кольца на цилиндр при отсутствии давления газа:

$$q_e(x, t) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\lambda_n}{\alpha A} \left(u_{0n} \exp \left(-\frac{\lambda_n t}{A} \right) + I_n(t) \right) + \right. \\ \left. + \chi(s_{0n} - u_{0n}) \right] U_n(x). \quad (3.60)$$

Замечание 1. В классическом варианте метода разделения переменных искомое решение представляется в виде бесконечной суммы (3.54) ($N \rightarrow \infty$) [9], что требует доказательства полноты системы функций $U_n(x)$ в пространстве решения $u(x, t)$. Используемое выше представление (3.54) решения $u(x, t)$ в виде конечной суммы не требует подобных доказательств и позволяет построить точное решение задачи, но только при наличии представлений (3.57), которые означают,

что функции $u_0(x)$, $s_0(x)$, $\varphi(x, t)$, вообще говоря, не могут быть произвольными. Однако, как показывают расчеты, с помощью разложений (3.57) при достаточно большом N оказывается возможным построить достаточно хорошее приближение к наперед заданным функциям $\bar{u}_0(x)$, $\bar{s}_0(x)$, $\bar{\varphi}(x, t)$. Другими словами, выражение (3.59) дает точное решение рассматриваемой износоконтактной задачи с начальными распределениями $u_0(x)$, $s_0(x)$ и давлением газа $\varphi(x, t)$, которые незначительно отличаются от заданных функций $\bar{u}_0(x)$, $\bar{s}_0(x)$, $\bar{\varphi}(x, t)$.

Замечание 2. Как указывалось выше, равенство (3.45) имеет место в предположении отсутствия внешних усилий на концах (торцах) кольца. При воздействии давления газа φ на кольцо это допущение нарушается, так как давление газа воздействует и на торцы кольца, создавая нормальную к ним сжимающую силу $R = ab\varphi$. Однако учет такой силы не приводит к существенным изменениям уравнения кинетики изнашивания кольца (3.50). Действительно, согласно результатам работы [13], при действии на торцы кольца силы R правая часть (3.45) будет иметь вид $br^4(EJ)^{-1}(q - \varphi a/r)$, вследствие чего в квадратных скобках выражения (3.51) для Q появится дополнительное слагаемое $\varphi a/r$. Ввиду малости отношения a/r этим слагаемым можно пренебречь по сравнению с φ , так что уравнение кинетики изнашивания будет иметь прежний вид (3.50).

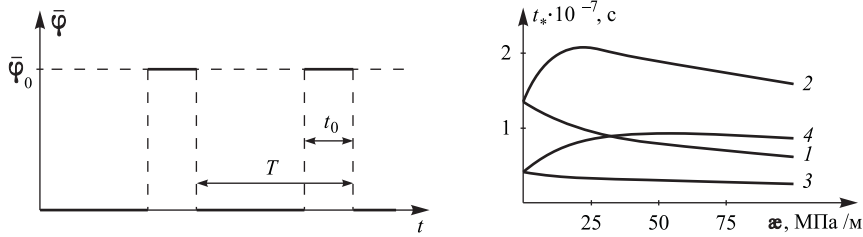


Рис. 2.61. Изменение во времени давления газа

Рис. 2.62. Зависимость долговечности t_* поршневого кольца от жесткости κ расширителя для различных \bar{s}_0 и $\bar{\varphi}_0$: 1 мм и 0,5 МПа (1); 9 мм и 0,5 МПа (2); 1 мм и 1,5 МПа (3); 9 мм и 1,5 МПа (4)

Численный анализ. На основе полученного решения (3.59) был выполнен анализ процесса изнашивания кольца. В качестве $u_0(x)$, $s_0(x)$, $\varphi(x, t)$ брались функции, близкие к функциям

$$\bar{u}_0(x) = \alpha A \bar{q}_0 (1 + 0,5x \sin x), \quad \bar{s}_0(x) = \text{const}, \quad \bar{\varphi}(x, t) = \bar{\varphi}(t), \quad (3.61)$$

причем $\bar{\varphi}(t)$ — периодическая функция, характер изменения которой показан на рис. 2.61 (T , t_0 — продолжительности цикла и рабочего такта). Выражение (3.61) для $\bar{u}_0(x)$ отвечает постоянному начальному упругому давлению кольца величины \bar{q}_0 .

Число N принималось равным 10, что обеспечивало отклонение функций $q_0(x) = (\alpha A)^{-1} \Phi[u_0(x)]$, $s_0(x)$, $\varphi(x, t)$, определяемых представлениями (3.57), от заданных значений \bar{q}_0 , \bar{s}_0 , $\bar{\varphi}(t)$ не более, чем на 0,6 %. Значения остальных параметров, если специально не оговорено, принимались следующими: $r = 70$ мм, $a = 4$ мм, $E = 160$ ГПа, $\alpha = 10^{-15}$ м/(Па · с), $\varkappa = 50$ МПа/м, $\bar{q}_0 = 0,1$ МПа, $\bar{s}_0 = 2$ мм, $\bar{\varphi}_0 = 2$ МПа, $T = 1$ с, $t_0 = T/4$. Отметим, что толщина кольца b не фигурирует в уравнении кинетики изнашивания (3.50) и его решение (3.59) от b не зависит.

В ходе вычислений определялась долговечность кольца t_* при различных параметрах задачи, причем за t_* принимался момент времени начала отхода кольца от цилиндра при отсутствии давления газа, т.е. момент времени, при котором давление q_e , определяемое выражением (3.60), становится равным нулю для некоторого x [13].

Т а б л и ц а 2.1. Оптимальные значения \varkappa при различных \bar{s}_0 и $\bar{\varphi}_0$

$\bar{\varphi}_0$, МПа	\bar{s}_0 , мм				
	1	3	5	7	9
0	0	0	0	0	0
0,5	0	0	18,35	22,53	23,53
1,0	0	28,59	42,58	43,11	42,59
1,5	0	50,74	61,06	59,26	56,00
2,0	0	69,05	76,57	72,84	68,22

На рис.2.62 представлена расчетная зависимость долговечности t_* от коэффициента жесткости расширителя \varkappa для различных значений начального сжатия расширителя \bar{s}_0 и давления газа $\bar{\varphi}_0$. Из рисунка видно, что характер зависимости t_* от \varkappa (наличие экстремумов, их положение) различен для разных \bar{s}_0 и $\bar{\varphi}_0$. В частности, от \bar{s}_0 и $\bar{\varphi}_0$ зависит оптимальное (обеспечивающее наибольшее t_*) значение коэффициента жесткости расширителя \varkappa . Соответствующие значения \varkappa представлены в табл. 2.1.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 2

1. Айзерман М. А. Классическая механика. — М.: Наука, 1980. 367 с.
2. Аксельрад Э. Л. К теории неоднородных изотропных оболочек // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 6. С. 73–76.
3. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. — М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Билик Ш. М. Образование поперечных периодических неровностей на поверхностях твердых тел в процессе трения // Трение и износ в машинах. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. Сб. 17. С. 71–79.
5. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. — М.: Мир, 1965. 199 с.
6. Богатин О. Б., Каниболотский М. А. Исследование и идентификация процесса изнашивания втулки подшипника скольжения // Трение и износ. 1980. Т. 1. № 3. С. 533–542.
7. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1986. 544 с.
8. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — М.: Наука, 1991. 383 с.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. 512 с.
10. Галахов М. А., Усов П. П. О расчете износа и толщины смазочного слоя в подшипниках скольжения с тонким вкладышем // Трение и износ. 1984. Т. 5. № 2. С. 239–250.
11. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, 1980. 303 с.
12. Гинцбург Б. Я. Теория и расчет поршневых колец. — М.: Машгиз, 1945. 123 с.
13. Гинцбург Б. Я. Теория поршневого кольца. — М.: Машиностроение, 1979. 271 с.
14. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А. Расчет конструкций на упругом основании. — М.: Стройиздат, 1973. 627 с.
15. Горячева И. Г. Контактная задача при наличии износа для кольца, вложенного в цилиндр // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 363–367.
16. Горячева И. Г., Солдатенков И. А. Теоретическое исследование приработки и установившегося режима изнашивания твердых смазочных покрытий // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 3. С. 420–431.
17. Гуревич Д. А., Духовской Е. А., Имамалиев А. С., Ройтберг Г. И., Силин А. А. Исследование процесса трения в эндопротезе тазобедренного сустава // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 2. С. 281–285.
18. Данов Г. Влияние износа и контактной эластичности на распределение давлений в дисковом контакте // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. — М.: Наука, 1971. С. 84–89.
19. Демидов С. П. Теория упругости. — М.: Высшая школа, 1979. 432 с.

20. Дроздов Ю. Н., Артамонов В. Н. Основы расчета сферических шарнирных подшипников по критерию износа // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 4. С. 597–604.
21. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997. 512 с.
22. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. — М.: Наука. Ч. 1, 1971. 599 с.; Ч. 2, 1973. 447 с.
23. Ишлинский А. Ю. Трение качения // ПММ. 1938. Т. 2. Вып. 2. С. 245–260.
24. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. 512 с.
25. Коваленко Е. В. К расчету изнашивания сопряжения вал – втулка // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 66–72.
26. Коган А. Я. Оценка износа рельсов и бондажей колесных пар при движении подвижного состава в кривых участках пути // Вестник ВНИИЖТ. 1990. № 2. С. 36–40.
27. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ — М.: Машиностроение, 1977. 513 с.
28. Левина З. М., Решетов Д. Н. Контактная жесткость машин. — М.: Машиностроение, 1971. 264 с.
29. Лысюк В. С. Причины и механизм схода колеса с рельса. Проблема износа колес и рельсов. — М.: Транспорт, 2002. 215 с.
30. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. — М.: Наука, 1980. 240 с.
31. Механика контактных взаимодействий // Под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова. — М.: Физматлит, 2001. 670 с.
32. Мур Д. Основы и применения трибоники. — М.: Мир, 1978. 487 с.
33. Нудельман Я. Л., Эрлих Л. Б. Волнообразования на поверхности некоторых деталей машин // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85. № 5. С. 971–974.
34. Проников А. С. Классификация и расчет сопряжений деталей машин на изнашивание // Трение и износ в машинах. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. Сб. 11. С. 121–181.
35. Проников А. С. Контактная задача для сопряженных поверхностей деталей машин // Трение и износ в машинах. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. Сб. 15. С. 375–391.
36. Соколовский А. П. Жесткость в технологии машиностроения. — М.-Л.: Машгиз, 1946. 208 с.
37. Солдатенков И. А. Изнашивание тонкого упругого покрытия при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. 1985. Т. 6. № 2. С. 247–254.
38. Солдатенков И. А. Установившийся режим при изнашивании тонкого упругого покрытия в радиальном подшипнике скольжения // Трение и износ. 1986. Т. 7. № 4. С. 452–459.
39. Солдатенков И. А. О неустойчивом режиме при изнашивании тонкого покрытия // Трение и износ. 1988. Т. 9. № 1. С. 106–110.
40. Солдатенков И. А. Задача об изнашивании полуплоскости дисковым контртелом // Изв. АН СССР, МТТ. 1989. № 6. С. 107–110.

41. *Солдатенков И. А.* Расчет изнашивания покрытия в подшипнике скольжения при случайном нагружении // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 4. С. 615–621.
42. *Солдатенков И. А.* К анализу процесса изнашивания многослойного покрытия // Трение и износ. 1991. Т. 12. № 2. С. 204–209.
43. *Солдатенков И. А.* Теоретическое исследование процесса изнашивания покрытия скользящим индентором // Трение и износ. 1991. Т. 12. № 4. С. 645–652.
44. *Солдатенков И. А.* К расчету на износ сферического шарнира при случайном нагружении // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 2. С. 265–270.
45. *Солдатенков И. А.* Теоретический анализ изнашивания волнистой поверхности цилиндрическим контртелом // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 3. С. 421–430.
46. *Солдатенков И. А.* К расчету износа нитепроводника при случайном взаимодействии с ним нити // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 4. С. 601–610.
47. *Солдатенков И. А.* Расчет износа плоской поверхности при случайном взаимодействии с ней сферического индентора // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 6. С. 965–972.
48. *Солдатенков И. А.* Асимптотический анализ решения задачи теории упругости для полосы переменной ширины // Изв.РАН, МТТ. 1994. № 6. С. 57–73.
49. *Солдатенков И. А.* Теоретический анализ изнашивания вязкоупругого покрытия винклеровского типа // Трение и износ. 1996. Т. 17. № 3. С. 331–339.
50. *Уотерхауз Р. Б.* Фреттинг–коррозия. — Л.: Машиностроение, 1976. 271 с.
51. *Усов П. П., Галахов М. А.* Контактные задачи с учетом износа для сферического и цилиндрического подшипников скольжения с тонким вкладышем // Машиноведение. 1986. № 3. С. 81–88.
52. *Хрущев М. М.* Исследования приработки подшипниковых сплавов и цапф. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 160 с.
53. *Худых М. И.* Эксплуатационная надежность и долговечность оборудования текстильных предприятий. — М.: Легкая индустрия, 1980. 334 с.
54. *Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н.* Теория больших упругих деформаций. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1988. 254 с.
55. *Чихладзе Г. Е.* Контактная жесткость и стыковое сближение деталей станков. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1986. 232 с.
56. *Шульц В. В.* Форма естественного износа деталей машин и инструмента. — Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990. 206 с.
57. *Эрлих Л. Б., Кособудский В. А., Вершин Л. И.* Волнообразование на обкатываемых поверхностях. — М.: Наука, 1973. 51 с.
58. *Feng I-M., Uhlig H. H.* Fretting corrosion of mild steel in air and in nitrogen // J. of Applied Mechanics. 1954. V. 21. No 4. P. 395–400.

-
59. *Halaunbrenner J., Kubisz A.* Contact region of a hard ball rolling on a viscoelastic plate // Trans. ASME, Ser.F. Journal of Lubrication Technology. 1968. V. 90. No 1. P. 101–105.
 60. *Halliday J. S.* Experimental investigation of some processes involved in fretting corrosion // Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear. Inst. Mech. Engrs., Oct. 1–3, 1957. Paper 39. P. 640–646.
 61. *Jin Xueyan, Wang Xiaqiu.* Influence of angle of attack and lateral force between wheel and rail on wear of rail — a laboratory study // Journal of Southwest Jiaotong University. 2000. V. 8. No 1. P. 85–91.
 62. *Kalker J. J.* Three-dimensional elastic bodies in rolling contact. — Dordrecht: Kluwer, 1990. 314 p.
 63. *Kalker J. J.* Wheel-rail rolling contact theory // Wear. 1991. V. 144. No 1. P. 243–261.
 64. *McMath R. R.* An experimental study of fretting wear in gear tooth flexible couplings // ASLE Transactions. 1961. V. 4. No 2. P. 197–212.
 65. *Reye T.* Zur Theorie der Zapfenreibung // Der Civilingenieur. 1860. H. 4. S. 235–255.
 66. *Schallamach A.* Friction and abrasion of rubber // Wear. 1957/58. V. 1. No 5. P. 384–417.
 67. *Uhlig H. H., Tierney W. D., McClellan A.* Test equipment for evaluating fretting corrosion // ASTM. Special Technical Publication. No 144. 1953. P. 71–78.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изнашивание материалов является следствием различных физико-химических процессов (механизмов износа) в зоне трения тел, вызывающих разрушение трущихся поверхностей. В свою очередь, протекание этих процессов обуславливается внешними факторами, такими, как контактное давление p , скорость скольжения V , температура и состав окружающей среды, твердость изнашиваемого материала, шероховатость поверхности трения контртела и др. Описанию влияния подобных факторов на изнашивание посвящена глава 1.

Моделирование процесса изнашивания на основе решения износоконтактной задачи предполагает феноменологическое описание механизмов износа, в рамках которого все многообразие внешних факторов учитывается функцией $F(p, V)$ в законе изнашивания (2.1) (глава 1). Подобное описание не является универсальным и, с точки зрения трибологии, его применимость для каждого конкретного случая требует обоснования.

Но даже при использовании закона изнашивания с двумя переменными p и V износоконтактная задача представляет собой многофакторную задачу. Это выражается в существовании различных зависимостей $F(p, V)$, моделей контактного деформирования, нагрузочно-скоростных режимов, характеристик геометрии изнашиваемого сопряжения. Как при всяком моделировании, ключевым моментом здесь является адекватный выбор приоритетных факторов задачи так, чтобы, с одной стороны, учесть специфику процесса изнашивания и корректно рассчитать износ, а с другой стороны — получить максимально простую математическую модель, допускающую эффективную реализацию в виде аналитического решения или несложного численного алгоритма. Рассмотренные в главе 2 постановки износоконтактной задачи демонстрируют различные варианты такого выбора. Например, в задачах разделов 2.1.2–2.1.4 основное внимание уделяется фактору нелинейности функции $F(p, V)$ в законе изнашивания; в разделе 2.2.4 показана важность учета поперечной вибрации индентора; в разделе 2.3.2 одним из основных является фактор инерционности индентора.

Особая роль при постановке износоконтактной задачи отводится выбору модели контактного деформирования изнашиваемых тел. В главе 2, в основном, рассматривались две такие модели — модель Винклера (для приработанного конформного контакта) и решение Герца (для неприработанного контакта при случайном взаимодействии тел). Обе эти модели представляются алгебраическими соотношениями, что позволяет достаточно просто рассчитывать процесс изнашивания, в том числе в случае нелинейного закона изнашивания. При использовании более точных и, соответственно, более сложных моделей контактного деформирования построение относительно простых моделей процесса изнашивания

возможно только в случае линейного закона изнашивания — примером тому служит расчет износа поршневого кольца (раздел 2.3.3).

Здесь следует отметить, что линейная аппроксимация закона изнашивания (например, полученного Велшем, (раздел 1.1.3) может давать ошибки в несколько порядков, тогда как использование простой модели Винклера, при правильной интерпретации коэффициента податливости, приводит к погрешностям всего в десятки процентов (подобные оценки содержатся, например, в монографии*). Таким образом, с точки зрения инженерного расчета износа представляется целесообразным упростить модель контактного деформирования, но учесть нелинейные особенности закона изнашивания.

В ряде случаев можно вообще обойтись без модели контактного деформирования. Примерами тому служат выполненные в разделах 2.2.6 и 2.3.2 расчеты на износ рельса и волнистой поверхности. Это также демонстрирует подход к расчету износа на стадии установившегося режима или использование модели изнашивания жестких тел (раздел 2.1.9).

Безусловно, рассмотренные выше постановки износоконтактной задачи не учитывают всех возможных для них факторов. Так, анализ эволюции контактного давления при изнашивании покрытия (раздел 2.1.2) проводился без учета деформирования основания, а при расчете износа рельса (раздел 2.2.6) не учитывались такие факторы, как конусность поверхности катания колеса и износ поверхности катания рельса. Однако при необходимости эти и многие другие факторы могут быть включены в соответствующие постановки износоконтактной задачи (см., например, работы**),***). Следует также отметить, что часть рассмотренных выше факторов может быть использована в других постановках износоконтактной задачи. Например, задачу об изнашивании покрытия сферическим индентором (раздел 2.1.8) можно рассмотреть для неоднородного по глубине покрытия (раздел 2.1.7); при расчете износа ленточного подшипника (раздел 2.2.5) можно учесть поперечные смещения ленты подобно тому, как это делалось для скользящего индентора (раздел 2.2.4).

Главная цель книги состоит в том, чтобы продемонстрировать возможные варианты постановок износоконтактной задачи, пригодных для инженерного расчета износа.

*) Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А. Расчет конструкций на упругом основании. — М.: Стройиздат, 1973. 627 с.

**) Солдатенков И. А. Изнашивание покрытий в упругих сопряжениях при изменяющейся площадке контакта //Трение и износ. 1987. Т. 8. № 2. С. 206–213.

***) Богданов В. М., Горячев А. П., Горячева И. Г., Добычин М. Н., Захаров С. М., Кривоногов В. Г., Солдатенков И. А., Чекина О. Г. Моделирование процессов контактирования, изнашивания и накопления повреждений в сопряжении колесо-рельс //Трение и износ. 1996. Т. 17. № 1. С. 12–26.