В.Г. Цирулик

ВЫЧИСЛЕНИЯ В КОЛЬЦАХ НЕКОММУТАТИВНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Предисловие

Предлагаемая книга посвящена методу, называемому методом уравнений с некоммутативными коэффициентами. Этот метод применяется нами к исследованию достаточно широкого круга задач из различных разделов математики: дифференциальной и разностной алгебры, теории Пикара – Вессио, математического анализа, алгебраической теории линейных обыкновенных линейных дифференциальных (ОЛДУ) и разностных уравнений (ОЛРУ), функционально – дифференциальных уравнений (ЛФДУ), методов интегрирования ОЛДУ и ОЛРУ.

Рассматриваются следующие задачи: факторизация ОЛДУ, ОЛРУ и обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (ОНДУ), исследование на совместность систем ЛФДУ, отыскание лиувиллевских решений ОЛДУ, вычисление неопределенных интегралов в замкнутом виде, прямая и обратная задачи дифференциальной теории Галуа (построить по данному ОЛДУ его дифференциальную группу Галуа и, соответственно, по дифференциальной группе Галуа построить класс ОЛДУ, допускающий эту группу). Все эти задачи известны и для некоторых из них имеется решение.

Естественно возникает вопрос о причинах побудивших нас обратиться к этим задачам. Во – первых мы даем решение указанных задач, полное или частичное, единым методом, применяя уравнения с коэффициентами в кольцах косых многочленов от одной и двух «переменных», и рассматривая функционально – дифференциальные операторы (ЛФДО) как спецификации косых многочленов, что позволяет получать ряд утверждений, справедливых для многих типов ЛФДО, как следствия теорем для косых многочленов. Во - вторых мы получаем алгоритмы и результаты, отличные от полученных ранее иными методами или ранее неизвестные в этих классических областях математики. Например, такие как теорема о результантной матрице систем косых многочленов, аналог теоремы Кронекера – Капелли для ОЛДУ и ОЛРУ, формулы значений некоторых неопределенных интегралов, обобщение понятия почти алгебраического элемента.

Обратимся к содержанию глав книги.

В первой главе введены понятия косых многочленов от двух «переменных» и сопряженных к косым многочленам от одной и двух «переменных». Найдены общие решения линейных уравнений с коэффициентами в кольцах косых многочленов от одной и двух «переменных». Введено понятие правой и левой результантных матриц системы косых многочленов, элементы которых строятся по коэффициентам указанных уравнений. С помощью теоремы об общем решении линейного уравнения с коэффициентами в кольце косых многочленов доказаны основные теоремы о результантных матрицах обобщающие аналогичные утверждения для результанта обычных многочленов. Алгоритм Евклида деления многочленов с остатком распространен на косые многочлены. Приведен и обоснован неевклидов алгоритм деления.

Специфицируя косые многочлены от одной «переменной» как обыкновенные линейные дифференциальные или разностные операторы, во второй главе строятся общие решения линейных уравнений с коэффициентами в соответствующих кольцах линейных операторов. Находятся результантные матрицы систем линейных операторов и приводятся основные теоремы о результантных матрицах, которые являются следствиями соответствующих утверждений для косых многочленов.

В начале третьей главы доказываются теоремы о совместности систем неоднородных ОЛДУ и ОЛРУ, аналогичные известной теореме Кронекера – Капелли. Далее развивается метод отыскания частных решений неоднородных ОЛДУ с правой частью достаточно общего вида, из которого в частности следует метод неопределенных коэффициентов для отыскания частных решений уравнений с правой частью специального вида. Кроме этого мы получаем метод отыскания частных решений для уравнений с коммутативно факторизуемым оператором и систем таких уравнений. Наконец, выводится оригинальный алгоритм отыскания полиномиальных и рациональных решений однородных и неоднородных ЛДУ. Применяя указанное выше линейное уравнение, получены конечные выражения для некоторых классов неопределенных интегралов таких, как интегралы от рациональных функций, квадратических иррациональностей (которые вычисляются методом неопределенных коэффициентов и методом Остроградского); найдены формулы для неопределенных интегралов от произведения многочлена на экспоненту и тригонометрическую функцию, от биномиального дифференциала.

Рассматриваемое в четвертой главе уравнение с некоммутативными коэффициентами [53], вообще говоря, не является линейным. Показано, что оно порождает группу Галуа дифференциальных автоморфизмов данного ОЛДУ и, таким образом, позволяет подойти к задаче определения дифференциальной группы Галуа данного уравнения с вычислительной точки зрения, поскольку дифференциальные автоморфизмы группы представляются обыкновенными линейными дифференциальными операторами. Получены условия на коэффициенты исследуемого ОЛДУ, при выполнении которых данное обыкновенное линейное дифференциальное уравнение имеет дифференциальную группу Галуа определенного типа, например, тривиальную, треугольную, специальную треугольную и некоторые другие. Построены классы дифференциальных уравнений второго порядка с заданной наперед дифференциальной группой Галуа, то есть получены формулы, связывающие их коэффициенты.

Методу факторизации нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (НОДУ) посвящена пятая глава, поскольку в предыдущей главе показано, что вычисление дифференциальной группы Галуа приводит к нелинейным дифференциальным уравнении. Рассматривается метод факторизации одного класса обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. С помощью метода факторизации, мы получили ранее неизвестные случаи интегрируемости уравнения Риккати, а также интегрируемости уравнений Абеля первого и второго рода. В последнем параграфе главы проинтегрировано нелинейное уравнение, связанное с трехчленным законом сохранения механической энергии.

В шестой главе, специфицируя косые многочлены от двух «переменных» как линейные операторы в частных производных, дифференциально – разностные по разным переменным, дифференциально – разностные по общей переменной или как разностно – разностные по разным переменным, мы строим правые и левые результантные матрицы систем указанных операторов и выводим их основные свойства, из соответствующих свойств результантных матриц систем косых многочленов от двух «переменных». Получены также условия факторизации линейных уравнения в частных производных второго порядка.

В последней главе рассматривается задача отыскания частных решений неоднородных линейных дифференциально – разностных по общей переменной уравнений. В исследованиях автора [96] показано, что решение этой задачи упрощается, если можно использовать понятие алгебраического или почти алгебраического элемента (оператора). В указанных исследованиях рассматривались операторы алгебраические относительно некоторого двустороннего идеала (почти алгебраические). Мы показываем [64], что достаточно требовать почти алгебраичности относительно левого идеала. Таким образом, понятие почти алгебраических операторов распространяется на обыкновенные линейные дифференциальные и разностные операторы, являющиеся решениями уравнения, рассмотренного в четвертой главе.

Все теоретические положения снабжены примерами. В начале каждой главы приводятся библиографические сведения.

Изложенные в книге результаты могут быть использованы в указанных выше областях высшей математики для модернизации соответствующих тем, для ознакомления с вычислениями в кольцах некоммутативных операторов. Могут также послужить отправной точкой для самостоятельных исследований в указанных областях, а также использованы при создании и модернизации алгоритмов в системах компьютерной алгебры таких, например, как Maple, Mathematica.

Замечания и пожелания будут с благодарностью приняты автором по адресам tcrlk@pbox.ttn.ru или tsyrulik2012@yandex.ru.

Глава 1. Линейное уравнение в кольце косых многочленов

В данной главе сообщаются необходимые сведения из алгебры, следуя [12], [29], дифференциальной алгебры — [24, 100] и разностной алгебры — [86, 34]. Понятие косых многочленов от одной «переменной» вводится, следуя, [93, 25]. Мы пользуемся понятием определителя с элементами из некоммутативного кольца, введенном в [94]. Наиболее общая трактовка этого понятия дана в [78].

Вводится понятие косых многочлены от двух коммутирующих «переменных» и понятие сопряженного к косому многочлену от одной и двух «переменных» [52]. Исследуется линейное уравнение с коэффициентами в кольце косых многочленов рассмотренное в [94] и находится его общее решение. Строятся правые и левые результантные матрицы систем косых многочленов, доказывается основная теорема теории результантов. Формулируется алгоритм отыскания правых и левых наибольших общих делителей систем косых многочленов не использующий алгоритма деления Евклида.

1.1. Некоторые сведения из алгебры

Далее, если не сказано иное, $\boldsymbol{K}$ — некоммутативное ассоциативное и дистрибутивное кольцо с единицей $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$, содержащее поле комплексных чисел или другое алгебраически замкнутое поле.

Элемент $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{K}$ называется обратимым слева, если существует элемент, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}$ такой, что $\boldsymbol{ba} = \boldsymbol{\varepsilon}$ и — обратимым справа, если существует элемент $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{K}$ такой, что $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{\varepsilon}$.

Обратимый слева и справа элемент $\boldsymbol{a}$, называется обратимым. Обратный к нему элемент обозначается через $\boldsymbol{a}^{-1}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{aa}^{-1}$.

Если при $\boldsymbol{a} \neq 0$ и $\boldsymbol{b} \neq 0$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}$, имеет место равенство $\boldsymbol{ab} = 0$, то элементы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ называются делителями нуля. Кольца без делителей нуля называются областями или кольцами целостности.

Элемент $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{K}, \boldsymbol{a} \neq 0$, называется неприводимым, если из равенства $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bc}$, где $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{K}$ следует, что $\boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{c}$ — обратимый элемент кольца.

Говорят, что элемент $a \in K$, $a \neq 0$, обладает однозначным разложением на неприводимые множители, если в кольце K существует обратимый элемент u и неприводимые элементы p_i $(i = 1,...,r)$ такие, что

$$a = u\prod_{i=1}^{r} p_i ,$$

причем для двух таких разложений на неприводимые множители

$$a = u\prod_{i=1}^{r} p_i = v\prod_{j=1}^{s} q_j ,$$

мы имеем $r = s$ и после перестановки индексов i $p_i = u_i q_i v_i$, где u_i, v_i — некоторые обратимые элементы из K. В предыдущем равенстве допускается $r = 0$, поскольку мы принимаем соглашение, что всякий обратимый элемент кольца K имеет разложение на неприводимые множители.

Кольцо называется факториальным (кольцом с однозначным разложением на неприводимые множители), если оно целостное и если всякий отличный от нуля элемент имеет однозначное разложение на неприводимые множители.

Говорят, что элемент b делит элемент $a \neq 0$ слева, если существует элемент $c \in K$ такой, что $a = bc$ и — b делит элемент a справа, если существует элемент $d \in K$ такой, что $a = db$.

Элемент $d \in K$, $d \neq 0$, называется левым наибольшим общим делителем (сокращенно ЛНОД) элементов a и b, если d делит слева элементы a и b и, если любой элемент $c \in K$, $c \neq 0$, делящий a и b слева, делит слева и элемент d. Аналогичным образом определяется правый наибольший общий делитель (сокращенно ПНОД).

Совокупность ненулевых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из K называется взаимно простой слева в совокупности, если ЛНОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \varepsilon$ и — взаимно простой справа в совокупности, если ПНОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \varepsilon$.

Левый идеал α кольца K — это подмножество в K, являющееся подгруппой аддитивной группы кольца K и такое, что $K\alpha \subset \alpha$ (и, следовательно, $K\alpha = \alpha$, поскольку K содержит единицу). Идеал называется правым, если $\alpha K \subset \alpha$. Идеал, который является и левым и правым, называется двусторонним.

Идеал $\alpha = Ka$, $a \in K$, является левым идеалом и называется главным идеалом. Элемент a называется образующей идеала α. Главный идеал часто обозначают через (a). Аналогично определяется правый и двусторонний главные идеалы. В коммутативном кольце все идеалы двусторонние.

Кольцо, в котором $\varepsilon \neq 0$ и все левые идеалы главные, называется кольцом левых главных идеалов, а кольцо, в котором все правые идеалы главные, называется кольцом правых главных идеалов.

Известно, что всякое целостное кольцо главных идеалов факториально.

Идеал α называется простым, если из условий $x, y \in K$ и $xy \in \alpha$ следует, что $x \in \alpha$ или $y \in \alpha$.

Если $a \neq 0$ — некоторый элемент из K и левый главный идеал (a) простой, то элемент a неприводим. Действительно, если $a = bc$, то множитель c принадлежит идеалу (a). Тогда $c = da$, где d некоторый элемент из K и, следовательно, $a = bda$ и $(\varepsilon - bd)a = 0$. Поскольку K — область целостности, то $bd = \varepsilon$. Значит, элемент b обратим в K.

Целостное кольцо K называется правым (левым) кольцом Безу, если для любых отличных от нуля элементов $a, b \in K$ можно указать элементы $x, y \in K$ такие, что выполняется тождество $xa + yb = \varepsilon$ ($ax + by = \varepsilon$), называемое тождеством Безу.

Кольцо K называется правым (левым) кольцом Оре, если оно удовлетворяет правому (левому) условию: уравнение $xa + yb = 0$ нетривиально разрешимо относительно x, y в K (уравнение $ax + by = 0$ нетривиально разрешимо относительно x, y в K), где коэффициенты a, b принадлежат мультипликативной полугруппе K^* кольца K. Эти условия называются условиями Оре.

Кольцо, являющееся левым и правым кольцом Оре, называется кольцом Оре.

В кольце Оре справедливо следующее определение. Элемент $k \in K$, $k \neq 0$ называется левым наименьшим общим кратным элементов a и b (сокращенно ЛНОК), если $k = aa_1 = bb_1$ для некоторых элементов $a_1, b_1 \in K$ и ПНОД$(a_1, b_1) = \varepsilon$. Аналогично определяется понятие правого наибольшего общего кратного (сокращенно ПНОК).

Левым наименьшим общим кратным (ЛНОК) совокупности ненулевых элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из K называется элемент $k \in K$, $k \neq 0$ такой, что $k = a_1\tilde{a}_1 = a_2\tilde{a}_2 = \cdots = a_n\tilde{a}_n$ для некоторых элементов $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n \in K$ и ПНОД$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \varepsilon$. Определение ПНОК аналогично.

В кольцах Оре определены левый и правый алгоритмы Евклида.

Мы пользуемся понятиями матрицы, ранга матрицы, определителя с элементами из, вообще говоря, некоммутативного кольца, определенными аналогично тому, как это было сделано в [94]

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений с коэффициентами в кольце Оре. Поскольку коэффициенты системы находятся справа от неизвестных систему будем называть правой.

$$\left.\begin{array}{llllll} x_1a_{11} & + \; x_2a_{12} + & \cdots & + \; x_na_{1n} & = b_1, \\ x_1a_{21} & + \; x_2a_{22} + & \cdots & + \; x_na_{2n} & = b_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1a_{m1} & + \; x_2a_{m2} + & \cdots & + \; x_2a_{m2} & = b_m. \end{array}\right\} \qquad (1.1.1)$$

Отметим, что коэффициенты системы лежат в некоммутативном кольце K. Её решение — вектор $(x_1, \ldots, x_n)$ лежит в $K^n = K \times \cdots \times K$.

Векторы $X_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, $i = \overline{1, n}$, называются линейно независимыми слева над некоторым полем P, если их левая линейная комбинация $\alpha_1 X_1 + \cdots \alpha_n X_n$, где $\alpha_i \in P$, тождественно равна нулю только в том случае, когда все α_i равны нулю. В противном случае векторы называются линенйо зависимыми слева.

Аналогично определяется правая независимость и зависимость векторов.

Метод, которым мы пользуемся для преобразования подобных систем, можно назвать правым (соответственно, левым) методом исключения Гаусса.

Пусть $\boldsymbol{a}_{11} \neq 0$, найдем $\boldsymbol{D}_i = \text{ЛНОК}(\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{i1})$ для всех $\boldsymbol{a}_{i1} \neq 0$ решив уравнения $\boldsymbol{a}_{11}\tilde{\boldsymbol{a}}_{11,i} = \boldsymbol{a}_{i1}\tilde{\boldsymbol{a}}_{i1}$ относительно $\tilde{\boldsymbol{a}}_{11,i}$, $\tilde{\boldsymbol{a}}_{i1}$. Вычитая первую строку, умноженную на $\tilde{\boldsymbol{a}}_{11,i}$ справа из остальных, умноженных на $\tilde{\boldsymbol{a}}_{i1}$ справа, исключим переменную $\boldsymbol{x}_1$ в первом столбце, за исключением первого уравнения. Продолжая поступать так с остальными переменными на последующих шагах, приведем систему к трапециидальному виду. По диагонали матрицы результирующей системы стоят ненулевые элементы.

Левая система записывается аналогично системе (1.1.1) с коэффициентами слева от неизвестных. Она может быть приведена к трапециидальному виду методом исключения Гаусса слева.

Число ненулевых строк результирующей матрицы называется правым строчным и, соответственно, левым строчным рангом матрицы системы (1.1.1). Очевидно, что правый и левый столбцовые ранги матрицы равны соответствующим строчным рангам.

Нам достаточно будет следующего определения детерминанта с элементами из некоммутативного кольца [94]. Пусть

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1.2)$$

квадратная матрица. Применяя метод исключения Гаусса справа, приведем ее к треугольному виду, если необходимо изменяя порядок следования столбцов и строк. Элемент, получившийся на пересечении последней строки и последнего столбца, называется значением правого определителя матрицы. Применяя метод исключения Гаусса слева, можно вычислим левый определитель той же матрицы. Поскольку разрешается произвольным образом переставлять строки и столбцы, то по определению определитель может иметь n^2 значений.

Если правый ранг соответствующей однородной меньше чем n, то она имеет нетривиальные решения, поскольку её коэффициенты принадлежат кольцу Оре.

1.2. Косые многочлены от одной переменной

Один широко используемый класс колец Оре представлен кольцами косых многочленов (некоммутативных многочленов, многочленов Оре), которые можно определить следующим образом.

Пусть $M \not\subset K$ мультипликативная полугруппа символов («переменных») с единицей ε, которые будем считать, вообще говоря, неперестановочными между собой и с элементами из кольца K. Поставим в соответствие элементу $x \in M$ элемент $(\alpha, \beta) \in \Theta$ из множества допустимых пар посредством некоторого отображения множеств $\gamma : M \to \Theta$.

Множество $K[x;\alpha,\beta]$ элементов вида

$$F_n(a;x) = F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i\,, \tag{1.2.1}$$

где $a_i \in K$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, $a_n \neq 0$, можно превратить в кольцо, исходя из единственного требования: степень произведения элементов вида (1.2.1) равна сумме степеней сомножителей.

Определим для любых натуральных r и k умножение одночленов по формуле

$$a\,x^r \cdot b\,x^k = a\,x^{r-1}\alpha(b)\,x^{k+1} + a\,x^{r-1}\beta(b)\,x^k\,. \tag{1.2.2}$$

Это умножение ассоциативно и дистрибутивно с обеих сторон (в частности $x \cdot b = \alpha(b)\,x + \beta(b)$) и распространяется на все элементы из $K[x;\alpha,\beta]$ по линейности. Сложение определяется обычным для многочленов способом.

Полученное таким образом кольцо $K[x;\alpha,\beta]$ называется кольцом левых косых многочленов. Аналогично определяется кольцо правых косых многочленов. В дальнейшем для краткости будем называть косые многочлены просто многочленами и кольцо $K[x;\alpha,\beta]$ обозначать через $K[x]$.

Теорема 1.2.1. [25] Кольцо косых многочленов над правым (левым) кольцом Оре снова является правым (левым) кольцом Оре.

Введем понятие сопряженного к косому многочлену впервые предложенное в [49], затем в [3]. Пусть $x^* \in M$ и $\gamma(x^*)=(\alpha^*,\beta^*)$, $(\alpha^*,\beta^*)\in\Theta$ и $\beta^*(ab)=\alpha^*(a)\beta^*(b)+\beta^*(a)b$, так что β^* является α^* дифференцированием кольца K.

Введем в рассмотрение кольцо $K[x^*;\alpha^*,\beta^*]=K[x^*]$ элементов вида $G_m(b;x)=G_m(x)=\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^{*i}$, где $b_i \in K$ $(i=0,1,\ldots,m)$, с умножением заданным формулой

$$a\,x^{*r}\cdot b\,x^{*k}=a(x^*)^{r-1}\alpha^*(b)(x^*)^{k+1}+a(x^*)^{r-1}\beta^*(b)(x^*)^k$$

аналогичной формуле (1.2.2) (в частности $x^*\cdot b=\alpha^*(b)x^*+\beta^*(b)$.

Пусть $\tau: K\to K$ отображение, являющееся антииволюцией: $\forall a,b\in K$ $\tau(a\cdot b)=\tau(b)\cdot\tau(a)$ и $\tau^2(a)=a$. Определим отображение $^*: K[x]\to K[x^*]$, поставив в соответствие каждому многочлену $F_n(x)\in$ $K[x]$ многочлен $F_n^*(x)\in K[x^*]$ по правилу

$$F_n^*(x)=\sum_{i=0}^{n} x^{*i}(\tau(a_i)\varepsilon), \qquad (1.2.3)$$

где $\varepsilon\in M$: $\gamma(\varepsilon)=(\iota,0)$. То есть $\varepsilon a=\iota(a)\varepsilon=a\varepsilon$.

Очевидно, что $\forall a,b\in K$ выполняется соотношение

i) $(ax+bx)^*=(ax)^*+(bx)^*$.

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

ii) $(ax)^{**}=ax$

и покажем, что тогда будет выполняться соотношение

iii) $(ax\cdot bx)^*=(bx)^*\cdot(ax)^*$.

Имеем

$$(ax)^{**}= ((ax)^*)^* = (x^*a)^* = (\alpha^*\tau(a)x^* + \beta^*\tau(a))^* = (\alpha^*\tau(a)x^*)^* +$$

$$+x(\tau\alpha^*\tau(a)) + \tau\beta^*\tau(a) = \alpha\tau\alpha^*\tau(a)x + \beta\tau\alpha^*\tau(a) + \tau\beta^*\tau(a) = ax.$$

Поэтому должны выполняться условия $\alpha\tau\alpha^*\tau = \iota$, $\tau\beta^*\tau = -\beta\tau\alpha^*\tau$. Отсюда

$$\alpha^* = \tau\alpha^{-1}\tau,\ \beta^* = -\tau\beta\alpha^{-1}\tau \text{ или } \alpha = \tau\alpha^{*-1}\tau,\ \beta = -\tau\beta^*\alpha^{*-1}\tau. \tag{1.2.4}$$

Можно легко проверить, что при выполнении (1.2.4) условие ii) выполняется.

Для проверки тождества iii) вычисляем:

$$(ax\cdot bx)^* = (a\alpha(b)x^2 + a\beta(b)x)^* = \alpha^{*2}\tau\alpha(b)\cdot\alpha^{*2}\tau(a)x^{*2} +$$

$$+\left\{\beta^*[\alpha^*\tau\alpha(b)\cdot\alpha^*\tau(a)] + \alpha^*\beta^*[\tau\alpha(b)\cdot\tau(a)] + \alpha^*\tau\beta(b)\cdot\alpha^*\tau(a)\right\}x +$$

$$+\left\{\beta^{*2}[\tau\alpha(b)\cdot\tau(a)] + \beta^*[\tau\beta(b)\cdot\tau(a)]\right\};$$

$$(bx)^*(ax)^* = (\alpha^*\tau(b)x^* + \beta^*\tau(b))\,(\alpha^*\tau(a)x^* + \beta^*\tau(a)) = \alpha^*\tau(b)\cdot\alpha^{*2}\tau(a)x^{*2} +$$

$$+\left\{\alpha^*\tau(b)\cdot\beta^*\alpha^*\tau(a) + \alpha^*\tau(b)\cdot\alpha^*\beta^*\tau(a) + \beta^*\tau(b)\cdot\alpha^*\tau(a)\right\}x^* +$$

$$+\left\{\alpha^*\tau(b)\cdot\beta^{*2}\tau(a) + \beta^*\tau(b)\cdot\beta^*\tau(a)\right\}.$$

В силу выполнения тождеств (1.2.4) имеем равенство коэффициентов:

$$\alpha^{*2}\tau\alpha(b)\cdot\alpha^{*2}\tau(a) \equiv \alpha^*\tau(b)\cdot\alpha^{*2}\tau(a);$$

$$\beta^*[\alpha^*\tau\alpha(b)\cdot\alpha^*\tau(a)] + \alpha^*\beta^*[\tau\alpha(b)\cdot\tau(a)] + \alpha^*\tau\beta(b)\cdot\alpha^*\tau(a) \equiv$$

$$\equiv \alpha^*\tau(b)\cdot\beta^*\alpha^*\tau(a) + \alpha^*\tau(b)\cdot\alpha^*\beta^*\tau(a) + \beta^*\tau(b)\cdot\alpha^*\tau(a);$$

$$\beta^{*2}[\tau\alpha(b)\cdot\tau(a)] + \beta^*[\tau\beta(b)\cdot\tau(a)] \equiv \alpha^*\tau(b)\cdot\beta^{*2}\tau(a) + \beta^*\tau(b)\cdot\beta^*\tau(a)].$$

Определение 1.2.1. Кольца $K[x]$ и $K[x^*]$ и многочлены $F_n(x)$, $F_n^*(x)$ называются τ - сопряжёнными.

Из приведенных выше выкладок следует

Теорема 1.2.2. Отображение $^*: K[x] \to K[x^*]$ является антиизомофизмом.

Это означает, что $\forall F_n(a;x), G_m(b;x) \in K[x]$ $\quad F_n(a;x)^{**} = F_n(a;x)$ и $(F_n(a;x)G_m(b;x))^* = G_m^*(b;x)F_n^*(a;x)$ и $\forall F_n(a;x^*), G_m(b;x^*) \in K[x^*]$

$F_n(a;x^*)^{**} = F_n(a;x^*)$ и $(F_n(a;x^*)G_m(b;x^*))^* = G_m^*(b;x^*)F_n^*(a;x^*)$.

Доказывается вычислением по индукции. ■

Из (1.2.4) следует

$$(x)^* = x^*,\ (x)^{**} = (x^*)^* = x.$$

Заметим, что если кольцо K коммутативное, то в формулах (1.2.4) можно положить $\tau = \iota$, тогда

$$\alpha^* = \alpha^{-1},\ \beta^* = -\beta\alpha^{-1} \text{ или } \alpha = \alpha^{*-1},\ \beta = -\beta^*\alpha^{*-1}.$$

В дальнейшем нам понадобятся формулы для коэффициентов произведения косых многочленов. Пусть $F_n(a;x),\ G_m(b;x) \in K[x]$. Коэффициенты $c_k(a,b)$ произведения $F_n(a;x)G_m(b;x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k(a,b)x^k$ вычисляются по формулам

$$c_k(a,b) = \sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} \sum_{i=j}^{n} a_i S_{j,i-j}(b_{k-j}), \tag{1.2.5}$$

где $k = \overline{0,n+m}$, а сумма

$$S_{j,i-j}(b) = \beta^{i-j}(\alpha^j(b)) + \ldots + \alpha^j(\beta^{i-j}(b)),\ i \geq j \tag{1.2.6}$$

распространяется на C_j^i элементов, получающихся из элемента b, когда автоморфизм α применяется j раз, а гомоморфизм β применяется $i-j$ раз в произвольном порядке (сравни с [93]).

В частности, при $n=r$, $a_r = 1$, $a_i = 0\ \forall i \neq r$ из (1.2.5) получаем коэффициенты многочлена $x^r G_m(b;x) = \sum_{k=0}^{r+m} c_{r,k}(b)x^k$

$$c_{r,k}(b) = \sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(r,k)} S_{j,r-j}(b_{k-j}),\ k = \overline{0,m+r}, \tag{1.2.7}$$

которые будут использованы при построении результантных матриц систем косых многочленов.

Теорема 1.2.3. Коэффициенты $c_{r,k}(b)$ обладают следующими свойствами:

1) $c_{0,k}(b) = b_k$, $k = \overline{0,m}$;

2) $c_{r-l,r+m-l}(b) = \alpha^{r-l}(b_m)$, $l = \overline{0,r}$, при фиксированных m и r;

3) $c_{r,k}(b) = \alpha(c_{r-1,k-1}(b)) + \beta(c_{r-1,k}(b))$,

где положено $c_{r-1,k-1}(b) = 0$ при $k-1<0$, $c_{r-1,k}(b) = 0$ при $k > r+m-1$.

Доказательство пунктов 1) и 2) сразу же следует из формул (1.2.6) и (1.2.7), для вывода соотношения 3) убедимся, что справедливо тождество

$$S_{t,p}(b) = \alpha S_{t-1,p}(b) + \beta S_{t,p-1}(b) \tag{1.2.8}$$

для $t \geq 1$ и $p \geq 1$. Действительно, в силу тождества $C_t^{t+p} = C_{t-1}^{t+p-1} + C_t^{t+p-1}$ количество слагаемых в правой и левой частях (1.2.8) одинаково. В каждом слагаемом сумм $\alpha S_{t-1,p}(b)$ и $\beta S_{t,p-1}(b)$ автоморфизм α повторяется t раз, а гомоморфизм β — p раз. Таким образом, формула (1.2.8) выполняется. Запишем формулу (1.2.7) в виде

$$c_{r,k}(b) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{r} S_{i,r-i}(b_{k-i}) & \text{при } r \leq k \text{ или } r > k \text{ и } k \leq m; \\ \sum\limits_{i=k-m}^{r} S_{i,r-i}(b_{k-i}) & \text{при } r \leq k \text{ или } r > k \text{ и } k > m. \end{cases} \tag{1.2.9}$$

Проверим, например, первую строку (1.2.9). В силу (1.2.8) имеем

$$S_{i,r-i}(b_{k-i}) = \alpha S_{i-1,r-i}(b_{k-i}) + \beta S_{i,r-i-1}(b_{k-i}) \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{r} S_{i,r-i}(b_{k-i}) = \alpha \sum_{i=1}^{r} S_{i-1,r-i}(b_{k-i}) +$$

$$+\beta \sum_{i=0}^{r-1} S_{i,r-i-1}(b_{k-i}) = \alpha c_{r-1,k-1}(b_{k-i}) + \beta c_{r-1,k}(b_{k-i}).$$

Вторая строка проверяются аналогично. ■

Отметим некоторые типы колец многочленов, возникающих в том случае, когда K коммутативное кольцо:

— $\gamma(x) = (\iota, \beta)$, тогда гомоморфизм β является ι- дифференцированием кольца K, кольцо $K[x]$ изоморфно кольцу $K[\beta]$ и называется кольцом обыкновенных линейных дифференциальных операторов с кольцом сопряженных операторов $K[\beta^*] = K[-\beta]$;

— $\gamma(x)=(\alpha,0)$, кольцо $K[x]$ изоморфно кольцу $K[\alpha]$ обыкновенных линейных разностных операторов с кольцом сопряженных операторов $K[\alpha^*]=K[\alpha^{-1}]$. Примером может служить кольцо $K[\omega_c]$, где K кольцо функций одной вещественной или комплексной переменной z, ω_c автоморфизм, действующий в K по формуле $\omega_c f(z)=f(z+c)$, $f(z)\in K$, элемент $c\in K$ и неподвижен относительно ω_c;

— $\gamma(x)=(\iota,0)$, тогда кольцо $K[x]$ является кольцом обычных многочленов от элемента x с коэффициентами в K. Сопряженное к нему кольцо $K[x^*]=K[-x]$.

В случае некоммутативного кольца K, возможны случаи, аналогичные отмеченным.

1.3. Линейное уравнение в кольце многочленов одной переменной

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} A_{n_j} = 0, \tag{1.3.1}$$

коэффициенты которого $A_{n_j}(a;x)=A_{n_j}=\sum_{i=0}^{n_j} a_{j,i}x^i$, $j=\overline{1,m}$ — многочлены из $K[x]$, n_j — степени этих многочленов, $X_{s_j}=\sum_{i=0}^{s_j} f_{s_j,i}\,x^i$ — неизвестные многочлены степеней s_j, $0\le s_j\le n_1+n_m-n_j-1$, подлежащие определению в $K[x]$, $f_{s_j,i}\in K$. Положим $n_1\ge\cdots\ge n_m$, $n_1=\max(n_j)$, $n_m=\min(n_j)$.

Решением уравнения является вектор $(X_{s_1},\ldots,X_{s_m})$. Множество таких векторов ($s_j\le n_1+n_m-n_j-1$) образует левое над кольцом K линейное пространство P^m.

Векторы $(X_{s_1}^k,\ldots,X_{s_m}^k)$ $(k=\overline{1,n})$ называются линейно независимыми слева над K, если их линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} f_k\cdot(X_{s_1}^k,\ldots,X_{s_m}^k)$ с коэффициентами $f_k \in K$ равна тожественно нулю только когда все $f_k \equiv 0$.

Множество $(X_{s_1}^k, \ldots, X_{s_m}^k)$ $(k = \overline{1, n})$ линейно независимых слева векторов будем называть «правым базисом» пространства P^m над K, если для любого вектора $(\tilde{X}_{s_1}, \ldots, \tilde{X}_{s_m}) \in K$ можно указать такие элементы $f, f_k \in K$, что выполняется $f \cdot (\tilde{X}_{s_1}, \ldots, \tilde{X}_{s_m}) \equiv \sum_{k=1}^{m} f_k \cdot (X_{s_1}^k, \ldots, X_{s_m}^k)$.

Обозначим через $D_{d_{m-1}} = \text{ПНОД}(A_{n_j})$ правый наибольший общий делитель многочленов A_{n_j}, $d_{m-1} = d$ — его порядок.

Опишем пространство P^m, рассмотрев сначала случай $m = 2$.

1. Запишем (1.4.1)

$$X_{s_1} A_{n_1} + X_{s_2} A_{n_2} = 0, \tag{1.3.2}$$

заметив, что оно имеет нетривиальное решение в $K[x]$, поскольку $K[x]$ правое кольцо Оре. Нас интересуют решения, удовлетворяющие условиям $n_2 - d \le s_1 \le n_2 - 1$, $n_1 - d \le s_2 \le n_1 - 1$, где $d =$ПНОД(A_{n_1}, A_{n_2}). Если $d = 0$, то таких решений не существует.

Определение 1.3.1. Элемент $(X_p^0 \ne 0, X_q^0 \ne 0) \in P^2$, называется минимальным решением уравнения (1.4.2) или просто минимальной парой, если его первая компонента X_p^0 имеет наименьший порядок по x среди первых компонент элементов из P^2, а коэффициенты взаимно просты слева в совокупности.

Теорема 1.3.1. Пара (X_p, X_q) минимальна в том и только в том случае, если для любого элемента $g \in K$, $g \ne 0$ многочлены gX_p, gX_q не имеют общих левых делителей, зависящих от x.

Доказательство. Если существует такой элемент $g \in K$, что gX_p, gX_q имеют нетривиальный общий левый делитель, то по определению пара (X_p, X_q) не минимальна.

Обратно, пусть для любого $g \in K$, $g \neq 0$ многочлены gX_p, gX_q не имеют общих левых делителей, но пара $g \in K$, $g \neq 0$ не минимальна. Пусть (X_{p_1}, X_{q_1}) минимальная пара, то есть $p_1 < p$, $q_1 < q$. Элементы $(x^k X_{p_1}, x^k X_{q_1})$, $k = \overline{0, p - p_1}$, удовлетворяют уравнению (1.4.2) и образуют правый «базис» пространства P^2 над K, поэтому существуют элементы f, $f_k \in K$ такие, что $f \cdot (X_p, X_q) = \sum_{k=0}^{p-p_1} f_k \cdot (x^k X_{p_1}, x^k X_{q_1}) = \left(\sum_{k=0}^{p-p_1} f_k x^k \right) (X_{p_1}, X_{q_1})$. Это противоречит взаимной простоте слева многочленов X_p, X_q. ■

Теорема 1.3.2. Уравнение (1.4.2) всегда имеет решение, в котором $s_1 = n_2,\ s_2 = n_1$.

Доказательство. Положим в (1.4.2) $A_{n_1} = \sum_{i=0}^{n_1} b_i x^i$, $A_{n_2} = \sum_{i=0}^{n_2} a_i x^i$, $X_{s_1} = \sum_{i=0}^{n_2} g_i x^i$, $X_{s_2} = \sum_{i=0}^{n_1} f_i x^i$ и, перемножив, запишем уравнение в эквивалентной форме

$$\sum_{l=0}^{n_1+n_2} \left(\sum_{k=\max(0,l-n_1)}^{n_2} g_k c_{k,l}(b) + \sum_{r=\max(0,l-n_2)}^{n_1} f_r c_{r,l}(a) \right) x^l = 0, \qquad (1.3.3)$$

где $c_{i,j}(b)$, $c_{i,j}(a)$ определяются по формуле (1.2.7). Из (1.4.3) получаем однородную линейную систему уравнений относительно g_k, f_r с коэффициентами в K

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k=\max(0,l-n_1)}^{n_2} g_k c_{k,l}(b) + \sum_{r=\max(0,l-n_2)}^{n_1} f_r c_{r,l}(a) = 0, \\ l = n_1 + n_2, n_1 + n_2 - 1, \dots, 1, 0. \end{array} \right\} \qquad (1.3.4)$$

Система (1.4.4) состоит из $n_1 + n_2 + 1$ уравнений с $n_1 + n_2 + 2$ неизвестными, поэтому нетривиально разрешима, поскольку K кольцо Оре. ■

Теорема 1.3.3. Если пара (X_p^0, X_q^0) минимальна, а D_d — ПНОД коэффициентов уравнения (1.4.2), то $p = n_2 - d$, $q = n_1 - d$.

Доказательство. Предположим, что $p > n_2 - d$, $q > n_1 - d$. Тогда получаем

$$X_p^0 A_{n_1-d} + X_q^0 A_{n_2-d} = 0 \tag{1.3.5}$$

где $A_{n_1} = A_{n_1-d} D_d$, $A_{n_2} = A_{n_2-d} D_d$. Согласно теореме 1.3.2 уравнение (1.4.5) имеет решение, в котором $p = n_2 - d$, $q = n_1 - d$. Это же решение должно удовлетворять и уравнению (1.4.2), что противоречит минимальности пары (X_p^0, X_q^0).

Пусть $p < n_2 - d,\ q < n_1 - d$. Перейдем в (1.4.5) к τ - сопряженным многочленам

$$A^*_{n_1-d}\ X_p^{0*} + A^*_{n_2-d}\ X_q^{0*} = 0. \tag{1.3.6}$$

Из минимальности пары (X_p^0, X_q^0) и теоремы 1.3.1 следует, что пара $(A^*_{n_1-d}, A^*_{n_2-d})$ — минимальное решение уравнения (1.4.6) с коэффициентами (X_p^{0*}, X_q^{0*}). Из теоремы 1.3.2 следует $n_1 - d = q$, $n_2 - d = p$. ■

Теорема 1.3.3 фактически утверждает, что уравнение (1.4.2) не имеет нетривиальных решений (X_{s_1}, X_{s_2}), в которых $s_1 < n_2 - d$, $s_2 < n_1 - d$.

Замечание. Уравнение (1.4.2) имеет решения, порядки компонент которых удовлетворяют условиям $s_1 > n_2 - d$, $s_2 > n_1 - d$. Общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид $(Q \cdot X^0_{n_2-d}, Q \cdot X^0_{n_1-d})$, где $Q \in K[x]$ произвольный многочлен

Теорема 1.3.4. Векторы $(x^k X^0_{n_2-d}, x^k X^0_{n_1-d})$, $k = \overline{0, d-1}$, образуют левый над K базис пространства решений уравнения (1.4.2), удовлетворяющих условиям $n_2 - d \le s_1 \le n_2 - 1$, $n_1 - d \le s_2 \le n_1 - 1$, ($\dim P^2 = d$).

Доказательство. Пусть $D_d =$ **ПНОД**(A_{n_1}, A_{n_2}) и $(X^0_{n_2-d}, X^0_{n_1-d})$ минимальное решение уравнения (1.4.2). Образуем элементы $(x^k X^0_{n_2-d}, x^k X^0_{n_1-d})$,

$k=\overline{0,d-1}$. Эти элементы линейно независимы слева над K. Пусть (X_p, X_q) некоторое решение уравнения (1.4.2). Поскольку K кольцо Оре, то найдутся такие элементы $f, f_k \in K$, что $\sum_{k=0}^{d} f_k \cdot (X_{n_2-d+k}, X_{n_1-d+k}) = = f \cdot (X_p, X_q)$. ■

2. Рассмотрим теперь уравнение

$$X_{s_1} A_{n_1} + X_{s_2} A_{n_2} + X_s = 0, \tag{1.3.7}$$

где X_{s_1}, X_{s_2}, X_s неизвестные, как и ранее $D_d =$ **ПНОД**(A_{n_1}, A_{n_2}).

Теорема 1.3.5. Если многочлены $A_{n_1} = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i$, $A_{n_2} = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i$ взаимно просты справа и $A \neq 0$ произвольный фиксированный многочлен, то в кольце K найдутся элементы $f \neq 0$ $X_{s_1} \neq 0$, $X_{s_2} \neq 0$ такие, что выполняется тождество

$$X_{s_1} A_{n_1} + X_{s_2} A_{n_2} \equiv f\varepsilon$$

при $X_{s_1} \neq 0$, $X_{s_2} \neq 0$.

Доказательство. Составляя, как в теореме 1.3.2 систему уравнений относительно коэффициентов многочленов X_{s_1}, X_{s_2} и неизвестного f, получим $n_1 + n_2$ уравнений с $n_1 + n_2 + 1$ неизвестным. Система имеет нетривиальное решение в кольце Оре. Определитель, составленный из коэффициентов уравнения, отличен от нуля, поскольку в противном случае по теореме 1.3.3 у коэффициентов уравнения имелся бы нетривиальный правый делитель. Коэффициент f отличен от нуля и его можно положить равным значению указанного определителя. ■

Теорема 1.3.6. Размерность левого над K пространства P^3 решений уравнения (1.3.7) равна $s+1$.

Доказательство. Так как $D_d =$ **ПНОД**(A_{n_1}, A_{n_2}), то компонента решения X_s должна иметь вид $X_s = X_{s-d} D_d$. Поэтому уравнение (1.3.7) эквивалентно следующему

$$X_{s_1} A_{n_1-d} + X_{s_2} A_{n_2-d} + X_{s-d} = 0, \tag{1.3.8}$$

где $A_{n_1} = A_{n_1-d} D_d$, $A_{n_2} = A_{n_2-d} D_d$. При $X_s = 0$ из пункта 1 следует, что векторы $(x^k X^0_{n_2-d}, x^k X^0_{n_1-d}, 0)$, $k = \overline{0, d-1}$, где $(X^0_{n_2-d}, X^0_{n_1-d})$ минимальное решение уравнения (1.3.8) при $X_{s-d} = 0$, линейно независимы слева. Поскольку многочлены A_{n_1-d}, A_{n_2-d} взаимно просты слева, то по теореме 1.3.5 существуют такие многочлены $\tilde{X}_{r_1}$, $\tilde{X}_{r_2}$ и элемент $f \in K$ выполняется соотношение

$$\tilde{X}_{r_1} A_{n_1-d} + \tilde{X}_{r_2} A_{n_1-d} + f\varepsilon \equiv 0. \qquad (1.3.9)$$

Следовательно, векторы $(x^p \tilde{X}_{r_1}, x^p \tilde{X}_{r_2}, x^p F)$, $p = \overline{0, s-d}$ удовлетворяют (1.3.8) и линейно независимы слева над K. Совокупность векторов

$$\bar{X}_k = \left(x^k X^0_{n_2-d}, x^k X^0_{n_1-d}, 0\right), \; k = \overline{0, d-1}, \qquad (1.3.10)$$

$$\bar{X}_p = \left(x^p \tilde{X}_{r_1}, x^p \tilde{X}_{r_2}, x^p\right), \; p = \overline{0, s-d}, \qquad (1.3.11)$$

также линейно независима слева над K и их всего $s+1$.

Пусть $(X_{q_1}, X_{q_2}, X_{q_3})$ любое решение уравнения (1.3.8). С помощью подходящих элементов g, $g_p \in K$ и векторов (1.3.11) можно исключить компоненту X_{q_3}, оставшиеся компоненты, очевидно, исключаются с помощью подходящих элементов $q_k \in K$ векторов (1.3.10). Таким образом,

$$g \cdot (X_{q_1}, X_{q_2}, X_{q_3}) = \sum_{p=0}^{s-d} g_p \bar{X}_p + \sum_{k=0}^{d-1} q_k \bar{X}_k. \qquad \blacksquare$$

3. Введя обозначения $A_{n_m} = A_{d_0}$, $A_{d_k} = \text{ПНОД}(A_{n_k}, A_{d_{k-1}})$, $k = \overline{1, m-1}$, (очевидно, что $d_0 \ge d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_{m-1} = d$), запишем уравнение (1.4.1) в виде следующей эквивалентной системы

$$\left.\begin{aligned} &X_{s_1} A_{n_1-d_1} + X_{s_m} A_{n_m-d_1} = Y_{s_0-d_1}, \\ &Y_{s_0-d_k} A_{d_k-d_{k+1}} + X_{s_{k+1}} A_{n_{k+1}-d_{k+1}} = Y_{s_0-d_{k+1}}, k = \overline{1, m-3}, \\ &Y_{s_0-d_{m-2}} A_{d_{m-2}-d_{m-1}} + X_{s_{m-1}} A_{n_{m-1}-d_{m-1}} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.12)$$

где обозначено $s_0 = n_1 + n_m - 1$, степени промежуточных многочленов в (1.3.12) лежат в границах $n_k - 2d_k + d_{k+1} \le ord\, Y_{s_0-d_k} \le n_1 + n_m - d_k - 1$,

$k=\overline{1,m-2}$. Если при некотором значении m промежуток $k=\overline{1,m-3}$ пуст, то считается, что соответствующие уравнения отсутствуют.

Теорема 1.3.7. $\dim P^m=(n_1+n_m)(m-2)-\sum_{j=2}^{m-1}n_j+d$.

Доказательство. Найдем все линейно независимые слева решения промежуточных систем, полученных из (1.3.12).

Шаг 1. Сначала находим все решения последнего уравнения

$$Y_{s_0-d_{m-2}}A_{d_{m-2}-d_{m-1}}+X_{s_{m-1}}A_{n_{m-1}-d_{m-1}}=0. \tag{1.3.13}$$

Согласно теореме 1.3.2 совокупность искомых линейно независимых решений имеет вид $(x^{k_1}Y^0_{n_{m-1}-d_{m-1}},\ x^{k_1}X^0_{d_{m-2}-d_{m-1}})$, $k_1=0,1,...,s_0-n_{m-1}-d_{m-2}+d_{m-1}$, где $(Y^0_{n_{m-1}-d_{m-1}},\ X^0_{d_{m-2}-d_{m-1}})$ минимальное решение уравнения (1.3.13). Теперь для каждого k_1 находим решения уравнений

$$Y_{s_0-d_k}A_{d_k-d_{k+1}}+X_{s_{k+1}}A_{n_{k+1}-d_{k+1}}=Y_{s_0-d_{k+1}},\ k=\overline{1,m-3}.$$

полагая $Y_{s_0-d_{k+1}}=f_{k_1}x^{k_1}Y^0_{n_{m-1}-d_{m-1}}$, тогда $X^0_{d_{m-2}-d_{m-1}}=f_{k_1}x^{k_1}X^0_{d_{m-2}-d_{m-1}}$, где f_{k_1} неизвестные элементы из K, при этом решения уравнения (1.3.13) принимают вид $(f_{k_1}x^{k_1}Y^0_{n_{m-1}-d_{m-1}},\ f_{k_1}x^{k_1}X^0_{d_{m-2}-d_{m-1}})$. Согласно теореме 1.3.5 решения предыдущего уравнения существуют — $(Y^{k_1}_{s_0-d_k}\neq 0, X^{k_1}_{s_{k+1}}\neq 0)$, $f_{k_1}\neq 0$.

Наконец найдем решение $(X^{k_1}_{s_1}, X^{k_1}_{s_m})$ первого уравнения $X_{s_1}A_{n_1-d_1}+X_{s_m}A_{n_m-d_1}=Y_{s_0-d_1}$. Собирая все X- компоненты промежуточных решений, получим множество решений исходного уравнения

$$V^{k_1}=(X^{k_1}_{s_1}, X^{k_1}_{s_2},..., X^{k_1}_{s_{m-2}}, f_{k_1}x^{k_1}X^0_{d_{m-2}-d_{m-1}}, X^{k_1}_{s_m}). \tag{1.3.14}$$

Шаг 2. Положив $Y_{s_0-d_{m-2}}=X_{s_{m-1}}=0$, найдем решения уравнения

$$Y_{s_0-d_{m-3}}A_{d_{m-3}-d_{m-2}}+X_{s_{m-2}}A_{n_{m-2}-d_{m-2}}=0, \tag{1.3.15}$$

$(x^{k_2}Y^0_{n_{m-2}-d_{m-2}}, x^{k_2}X^0_{d_{m-3}-d_{m-2}})$, $k_2=\overline{0, s_0-n_{m-2}-d_{m-3}+d_{m-2}}$, обозначив через $(Y^0_{n_{m-2}-d_{m-2}}, X^0_{d_{m-3}-d_{m-2}})$ минимальное решение этого уравнения.

Если $m\geq 4$, то для каждого k_2 находим решения уравнений

$$Y_{s_0-d_k}A_{d_k-d_{k+1}}+X_{s_{k+1}}A_{n_{k+1}-d_{k+1}}=Y_{s_0-d_{k+1}}=f_{k_2}x^{k_2}Y^0_{n_{m-2}-d_{m-2}},\ k=\overline{1,m-4},$$

полагая $Y_{s_0-d_{k+1}}=f_{k_2}\,x^{k_2}Y^0_{n_{m-2}-d_{m-2}}$, тогда $X_{s_{m-2}}=f_{k_2}x^{k_2}X^0_{d_{m-3}-d_{m-2}}$, где f_{k_2} неизвестные элементы из K, при этом решения уравнения (1.3.15) принимают вид $(f_{k_2}x^{k_2}Y^0_{n_{m-2}-d_{m-2}},\ f_{k_2}x^{k_2}X^0_{d_{m-3}-d_{m-2}})$. Согласно теореме 1.3.5 решения предыдущего уравнения существуют — $(Y^{k_1}_{s_0-d_k}\neq 0, X^{k_1}_{s_{k+1}}\neq 0)$, $f_{k_2}\neq 0$.

Наконец отыщем решение $(X^{k_2}_{s_1}, X^{k_2}_{s_m})$ первого уравнения $X_{s_1}A_{n_1-d_1}+X_{s_m}\,A_{n_m-d_1}=Y^{k_2}_{s_0-d_1}$. Собирая все X − компоненты, получим еще один вектор решений исходного уравнения

$$V^{k_2}=(X^{k_2}_{s_1}, X^{k_2}_{s_2},..., X^{k_2}_{s_{m-3}}, f_{k_2}x^{k_2}X^0_{d_{m-3}-d_{m-2}},0,X^{k_2}_{s_m}).\tag{1.3.16}$$

Если $m=4$, переходим к шагу $m-1$, получая очередную серию решений

$$V^{k_3}=(X^{k_3}_{s_1}, X^{k_3}_{s_2},..., X^{k_3}_{s_{m-4}}, f_{k_3}x^{k_3}X^0_{d_{m-4}-d_{m-3}},0,0,X^{k_3}_{s_m}),\tag{1.3.17}$$

$k_3=\overline{0,\ s_0-n_{m-3}-d_{m-4}+d_{m-3}}$.

Продолжая далее выполним предпоследний шаг вычислений.

Шаг $m-2$**.** Положим $Y_{s_0-d_2}=\ X_{s_3}=\cdots=X_{s_{m-1}}=0$ и найдем все решения уравнения

$$Y_{s_0-d_1}A_{d_1-d_2}+X_{s_2}A_{n_2-d_2}=0,\tag{1.3.18}$$

$(x^{k_{m-2}}Y^0_{n_2-d_2},\ x^{k_{m-2}}X^0_{d_1-d_2})$, $k_{m-2}=\overline{0,\ s_0-n_2-d_1+d_2}$, где $(Y^0_{n_2-d_2},X^0_{d_1-d_2})$ минимальное решение этого уравнения. Для каждого k_{m-2} находим решения неоднородных уравнений

$$X_{s_1}A_{n_1-d_1}+X_{s_m}A_{n_m-d_1}=Y_{s_0-d_1},$$

полагая $Y_{s_0-d_{k+1}}=f_{k_{m-2}}\,x^{k_{m-2}}Y^0_{n_2-d_2}$, тогда $X_{s_{m-2}}=f_{k_{m-2}}x^{k_{m-2}}X^0_{d_1-d_2}$, где $f_{k_{m-2}}$ неизвестные элементы из K, при этом решения уравнения (1.3.18) принимают вид $(f_{k_{m-2}}x^{k_{m-2}}Y^0_{n_2-d_2},\ f_{k_{m-2}}x^{k_2}X^0_{d_1-d_2})$. Согласно теореме 1.3.5 решения предыдущего уравнения существуют — $(X^{k_{m-2}}_{s_1}\neq 0,\ X^{k_{m-2}}_{n_m}\neq 0)$, $f_{k_{m-2}}\neq 0$.

Собирая все X - компоненты, получим еще множество решений исходного уравнения

$$V^{k_{m-2}} = (X_{s_1}^{k_{m-2}},\ f_{k_{m-2}} x^{k_{m-2}} X_{d_1-d_2}^0, X_{s_3}^{k_{m-2}} 0, \ldots, 0, X_{s_m}^{k_{m-2}}). \qquad (1.3.19)$$

Шаг $m-1$. Закончим вычисления, отыскав решения уравнения

$$X_{s_1} A_{n_1-d_1} + X_{s_m} A_{n_m-d_1} = 0$$

— $(x^{k_{m-1}} X_{n_m-d_1}^0,\ x^{k_{m-1}} X_{n_1-d_1}^0)$, $k_{m-1} = \overline{0, d_1 - 1}$. Получим вектор

$$V^{k_{m-1}} = (x^{k_{m-1}} X_{n_m-d_1}^0, 0, \ldots, 0, x^{k_{m-1}} X_{n_1-d_1}^0). \qquad (1.3.20)$$

Очевидно, что векторы V^{k_j}, $j = \overline{1, m-1}$ линейно независимы слева над K, их всего $\sum_{j=1}^{m-1} k_j = (n_1 + n_m)(m-2) - \sum_{j=2}^{m-1} n_j + d$.

Пусть $(X_{q_1}, X_{q_2}, \ldots, X_{q_m})$ некоторое решение уравнения, в котором $q_j \le s_j$. Подставим это решение в (1.4.1) и перепишем его в виде (1.3.12). Если компонента $X_{q_{m-1}} \ne 0$, то степень многочлена $X_{q_{m-1}}$ не меньше степени многочлена $X_{d_{m-2}-d_{m-1}}^0$, поэтому многочлен $h_{m-1} X_{q_{m-1}}$, $h_{m-1} \in K$, является линейной комбинацией многочленов $g_{k_1} x^{k_1} X_{d_{m-2}-d_{m-1}}^0$ с коэффициентами $g_{k_1} \in K$. Аналогично $h_j X_{q_j}$, $h_j \in K$, является линейной комбинацией многочленов $g_{k_j} x^{k_j} X_{d_{m-j-1}-d_{m-j}}^0$, $g_{k_j} \in K$. После исключения компонент с номерами $q_2, \ldots, q_{m-1}$ получим вектор $(l\tilde{X}_{q_1}, \ldots, 0, \ldots, 0, l\tilde{X}_{q_m})$, $l \in K$, который, очевидно является линейной комбинацией векторов с индексом k_{m-1}. Таким образом, найдутся такие элементы $a, a_1, \ldots, a_m \in K$ такие, что $a(X_{q_1}, X_{q_2}, \ldots, X_{q_m}) = \sum_{j=1}^{m} a_i V^{k_j}$. По определению векторы V^{k_j} $j = \overline{1, m}$ образуют левый над K «базис» пространства P^m. ■

Замечание. Произвольное решение уравнения (1.4.1) может быть представлено в виде линейной комбинации $\sum_{j=1}^{m-1} Q_j V^{k_j}$, с $Q_j \in K[x]$.

1.4. Результантные матрицы многочленов одной переменной

Заметим, что результантные матрицы систем косых многочленов от одной «переменной» впервые были построены автором в [51]. Получим условия, при выполнении которых косые многочлены A_{n_j} имеют ПНОД или ЛНОД. Перемножив многочлены в уравнении

$$\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} A_{n_j} = 0, \tag{1.4.1}$$

получим, применив теорему 1.2.3,

$$\sum_{l=0}^{n_1+n_m-1} \left(\sum_{k_1=\max(0,l-n_1)}^{s_1} f_{s_1,k_1} c_{k_1,l}\left(a_1\right) + \ldots + \sum_{k_m=\max(0,l-n_m)}^{s_m} f_{s_m,k_m} c_{k_m,l}\left(a_m\right) \right) x^l = 0, \tag{1.4.2}$$

или в виде следующей системы

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k_1=\max(0,l-n_1)}^{s_1} f_{s_1,k_1} c_{k_1,l}\left(a_1\right) + \ldots + \sum_{k_m=\max(0,l-n_m)}^{s_m} f_{s_m,k_m} c_{k_m,l}\left(a_m\right) = 0, \\ l = n_1 + n_m - 1,\ n_1 + n_m + 2,\ \ldots.,\ 1,\ 0. \end{array} \right\} \tag{1.4.3}$$

Определение 1.4.1. Матрица R^m системы (1.4.3) называется правой результантной матрицей косых многочленов $A_{n_j}\left(a_j; x\right)$.

Правую результантную матрицу удобно выписать следующим образом: сопоставим каждому многочлену $A_{n_k}\left(a_k; x\right)$ матрицу размерности $(n_1 + n_m) \times (s_k + 1)$ ($s_k = n_1 + n_m - n_k - 1$)

$$M_k(a_k) = \left(\begin{array}{lllll} c_{s_k,n_1+n_m-1}(a_k) & 0 & \cdots\ 0 & & 0 \\ c_{s_k,n_1+n_m-2}(a_k) & c_{s_k-1,n_1+n_m-2}(a_k) & \ldots\ \ldots & & 0 \\ c_{s_k,n_1+n_m-3}(a_k) & c_{s_k-1,n_1+n_m-3}(a_k) & \ldots & c_{1,n_k+1}(a_k) & \ldots \\ c_{s_k,n_1+n_m-4}(a_k) & c_{s_k-1,n_1+n_m-4}(a_k) & \ldots & c_{1,n_k}(a_k) & c_{0,n_k}(a_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{s_k,1}(a_k) & c_{s_k-1,1}(a_k) & \ldots & c_{1,1}(a_k) & c_{0,1}(a_k) \\ c_{s_k,0}(a_k) & c_{s_k-1,0}(a_k) & \ldots & c_{1,0}(a_k) & c_{0,0}(a_k) \end{array} \right). \tag{1.4.4}$$

Тогда

$$R^m = (M_1, \ldots, M_m) \tag{1.4.5}$$

— правая результантная матрица.

Элементы матрицы (1.4.4) могут быть выписаны следующит образом: крайний правый столбец матрицы заполняеся нулями и коэффициентами многочлена $A_{n_k}\left(a_k;x\right)$, элементы последующих столбцов вычисляются согласно пункту 3) теоремы 1.2.3.

Левая результантная матрица R^{m^*} этих же многочленов определяется либо из рассмотрения первого из ниже следующих уравнений, либо как правая результантная матрица системы уравнений, полученной из второго уравнения для сопряженных многочленов,

$$\sum_{j=1}^{m} A_{n_j} X_{s_j} = 0 \left(\sum_{j=1}^{m} Y_{s_j} A_{n_j}^{*} = 0 \right). \tag{1.4.6}$$

Определение 1.4.2. Правый ранг матрицы (1.4.5) называется рангом правого результанта.

Определение 1.4.3. Левый ранг левой результантной матрицы, построенной по первому уравнению (1.4.6), или правый ранг правой результантной матрицы, построенной по второму уравнению (1.4.6), называется рангом левого результанта.

Для двух косых многочленов правым (левым) результантом удобно называть, как это принято в классическом случае обычных многочленов, правый (левый) определитель соответствующей результантной матрицы. Например, для двух многочленов $F_n(a;x)$, $F_m(b;x)$ имеем

$$|\,R^2\,\|= \left|\begin{matrix} c_{m-1,n+m-1}(a) & c_{m-1,n+m-2}(a) & \ldots & c_{m-1,0}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & c_{0,m}(a) & \ldots & c_{0,0}(a) \\ c_{n-1,n+m-1}(b) & c_{n-1,n+m-2}(b) & \ldots & c_{n-1,0}(b) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & c_{0,n}(b) & \ldots & c_{0,0}(b) \end{matrix}\right\| \tag{1.4.7}$$

— правый результант. Здесь мы записали правый результант так, как это принято в коммутативном случае для обычных многочленов.

Приведем пример левой результантной матрицы этих же многочленов

$$R^{2*}=\left(\begin{pmatrix} c_{m-1,n+m-1}(a^*) & c_{m-1,n+m-2}(a^*) & \dots & c_{m-1,0}(a^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{0,m}(a^*) & \dots & c_{0,0}(a^*) \\ c_{n-1,n+m-1}(b^*) & c_{n-1,n+m-2}(b^*) & \dots & c_{n-1,0}(b^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{0,n}(b^*) & \dots & c_{0,0}(b^*) \end{pmatrix}\right), \qquad (1.4.8)$$

в которой элементы $c_{i,j}(a^*)$, $c_{i,j}(b^*)$ построены по коэффициентам сопряженных многочленов $F_n^*(a;x)$, $F_m^*(b;x)$.

Приведем несколько свойств правого R^m и левого R^{m*} результантов. Обозначим через $r_m = rang\, R^m$ ранг правого результанта, через $r_m^* = rang\, R^{m*}$ ранг левого результанта многочленов $A_{n_j}\left(a_j;x\right)$, $j=\overline{1,m}$. Пусть $d_{m-1}=$ ПНОД($A_{n_j}(a_j;x)$), а $d_{m-1}^* =$ЛНОД($A_{n_j}(a_j;x)$) порядки их правого и левого общих наибольших делителей. Имеет место основная теорема теории результантов косых многочленов.

Теорема 1.4.1. $n_1+n_m=r_m+d_{m-1}=r_m^*+d_{m-1}^*$.

Доказательство. Система (1.4.3) имеет $(n_1+n_m)(m-1)-\sum_{j=2}^{m-1} n_j$ неизвестных и n_1+n_m уравнений, и, следовательно, её пространство решений имеет размерность равную $(n_1+n_m)(m-1)-\sum_{j=2}^{m-1} n_j - r_m$. По теореме 1.4.6 пространство P^m имеет размерность $(n_1+n_m)(m-2)-\sum_{j=2}^{m-1} n_j + d_{m-1}$. Поэтому в силу изоморфизма пространства P^m и пространства решений системы выполняется первое утверждение. Рассмотрев сопряженные косые многочлены $A^*_{n_j}(a_j;x)$, получим вторую часть утверждения. ■

Заметим, что этот результат справедливый и для обычных многочленов отсутствует в фундаментальных монографиях, например, [29], [12].

Следствие 1.4.1. Для того чтобы многочлены $A_{n_j}(a_j;x)$ были взаимно просты справа (слева) в совокупности, необходимо и достаточно, чтобы $r_m = n_1 + n_m$ $(r_m^* = n_1 + n_m)$.

Достаточность. Пусть $r_m = n_1 + n_m$ $(r_m^* = n_1 + n_m)$, тогда по теореме 1.4.1 $d_{m-1} = 0$, аналогично $d_{m-1}^* = 0$.

Необходимость. Если многочлены $A_{n_j}(a_j;x)$ взаимно просты справа (слева) в совокупности, то $d_{m-1} = 0$ $(d_{m-1}^* = 0)$. Следовательно, $r_m = n_1 + n_m$ $(r_m^* = n_1 + n_m)$. ■

Следствие 1.4.2. Для того, чтобы косые многочлены $F_n(a;x)$, $F_m(b;x)$ были взаимно просты справа (слева) необходимо и достаточно $|R^2| \neq 0$ $(|R^{2*}| \neq 0)$.

Пусть ν_m (ν_m^*) порядок правого (левого) наименьшего общего кратного ПНОК (ЛНОК) многочленов $A_{n_j}(a_j;x)$. Из теоремы 1.4.1 сразу же следует.

Следствие 1.4.3. $\nu_m = r_m$ $(\nu_m^* = r_m^*)$.

Доказательство. Действительно, пусть $m = 2$, тогда $L_{\nu_2} = L_{p_1} A_{n_1} = L_{p_2} A_{n_2}$, где $L_{\nu_2} =$ ПНОК(A_{n_1}, A_{n_2}) многочленов A_{n_1}, A_{n_2}, L_{p_1}, L_{p_2} — некоторые многочлены, причем ЛНОД $(L_{p_1}, L_{p_2}) = \varepsilon$. Пусть $D_{d_1} =$ ПНОД(A_{n_1}, A_{n_1}), тогда имеет место тождество $L_{\nu_2 - d} = L_{n_2 - d} A_{n_1 - d} = L_{n_1 - d} A_{n_2 - d}$. Значит $\nu_2 = p_1 + n_1 - d_1 = p_2 + n_2 - d_1$. Поскольку $n_1 + n_2 = r_2 + d_1$, то при $m = 2$ утверждение верно. Вторая часть утверждения доказывается аналогично. ■

Следствие 1.4.4. $\nu_m + d_{m-1} = n_1 + n_m = \nu_m^* + d_{m-1}^*$.

Теорема 1.4.2. Для правой результантной матрицы системы косых многочленов $A_{n_j}(a_j;x)$ имеют место следующие свойства:

1) ранг не меньше n_1, так как матрица имеет, по крайней мере, n_1 строк

линейно независимых справа над $\boldsymbol{K}$;

2) пусть $\lambda \in \boldsymbol{K}_0$, тогда при умножении всех коэффициентов многочлена $A_{n_1}(a_1;x)$ ($A_{n_2}(a_2;x)$) на λ результант $|\boldsymbol{R}^2\|$ умножается на λ^{n_2} (λ^{n_1}). Это следует из свойств коэффициентов $c_{r,l}(a), c_{r,l}(b)$ и вида определителя (1.4.7);

3) если коэффициенты многочленов $A_1(a_1;x)$, $A_2(a_2;x)$ принадлежат $\boldsymbol{K}_0$, то $|\boldsymbol{R}^2\|$ совпадает с результантом обычных многочленов;

Приведем в заключение два простых утверждения о факторизации косых многочленов от одного символа.

Пусть $c_1, c_2 \in \boldsymbol{K}_0$. Правый результант многочленов $F_n(b;x) + c_1\varepsilon$, $F_m(a;x) + c_2\varepsilon$ является многочленом $\Phi(c_1, c_2)$ степени n по c_2 и степени m по c_1 с коэффициентами в $\boldsymbol{K}$. Получаем обобщение результата, известного для коммутативных дифференциальных операторов.

Теорема 1.4.3. Многочлены $F_n(b;x) + c_1\varepsilon$, $F_m(a;x) + c_2\varepsilon$ имеют правые делители в том и только в том случае, если c_1 и c_2 являются корнями уравнения $\Phi(c_1, c_2) = 0$.

Наконец, если в условии теоремы 1.4.3 положить $F_m(a,x) \equiv x, c_1 = 0$, то имеет место следующая теорема.

Теорема 1.4.4. Многочлен $F_n(b;x)$ допускает представление $F_n(b;x) = F_{n-1}(b_1;x)(x + c_2\varepsilon)$ в том и только в том случае, если $\Phi(0, c_2) = 0$.

Пример 1.4.1. Построим правый и левый результанты косых многочленов $F_2(a;x) = \sum_{i=0}^{2} a_i x^i$, $G_2(b;x) = \sum_{i=0}^{2} b_i x^i$ с коэффициентами для простоты вычислений в поле характеристики нуль. Поэтому $\tau = \iota$, $\gamma(x) = (\alpha, \beta)$, $\gamma(x^*) = (\alpha^*, \beta^*)$, $\alpha^* = \alpha^{-1}$, $\beta^* = -\beta\alpha^{-1}$.

Здесь $n = m = 2$ и правый, левый результанты в силу (1.4.7) имеют вид

$$|\boldsymbol{R}^2\|=\left|\begin{matrix} c_{1,3}(\boldsymbol{a}) & c_{1,2}(\boldsymbol{a}) & c_{1,1}(\boldsymbol{a}) & c_{1,0}(\boldsymbol{a}) \\ 0 & c_{0,2}(\boldsymbol{a}) & c_{0,1}(\boldsymbol{a}) & c_{0,0}(\boldsymbol{a}) \\ c_{1,3}(\boldsymbol{b}) & c_{1,2}(\boldsymbol{b}) & c_{1,1}(\boldsymbol{b}) & c_{1,0}(\boldsymbol{b}) \\ 0 & c_{0,2}(\boldsymbol{b}) & c_{0,1}(\boldsymbol{b}) & c_{0,0}(\boldsymbol{b}) \end{matrix}\right\|, \qquad (1.4.9)$$

$$|\boldsymbol{R}^{2*}\|=\left|\begin{matrix} c_{1,3}(\boldsymbol{a}^*) & c_{1,2}(\boldsymbol{a}^*) & c_{1,1}(\boldsymbol{a}^*) & c_{1,0}(\boldsymbol{a}^*) \\ 0 & c_{0,2}(\boldsymbol{a}^*) & c_{0,1}(\boldsymbol{a}^*) & c_{0,0}(\boldsymbol{a}^*) \\ c_{1,3}(\boldsymbol{b}^*) & c_{1,2}(\boldsymbol{b}^*) & c_{1,1}(\boldsymbol{b}^*) & c_{1,0}(\boldsymbol{b}^*) \\ 0 & c_{0,2}(\boldsymbol{b}^*) & c_{0,1}(\boldsymbol{b}^*) & c_{0,0}(\boldsymbol{b}^*) \end{matrix}\right\|. \qquad (1.4.10)$$

Вычисляя элементы определителей по формулам (1.2.7) или (1.2.9) получим

$$|\boldsymbol{R}^2\|=\left|\begin{matrix} \alpha(\boldsymbol{a}_2) & \beta(\boldsymbol{a}_2)+\alpha(\boldsymbol{a}_1) & \beta(\boldsymbol{a}_1)+\alpha(\boldsymbol{a}_0) & \beta(\boldsymbol{a}_0) \\ 0 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_0 \\ \alpha(\boldsymbol{b}_2) & \beta(\boldsymbol{b}_2)+\alpha(\boldsymbol{b}_1) & \beta(\boldsymbol{b}_1)+\alpha(\boldsymbol{b}_0) & \beta(\boldsymbol{b}_0) \\ 0 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_0 \end{matrix}\right\|, \qquad (1.4.11)$$

$$|\boldsymbol{R}^{2*}\|=\left|\begin{matrix} \alpha(\boldsymbol{a}_2^*) & \beta(\boldsymbol{a}_2^*)+\alpha(\boldsymbol{a}_1^*) & \beta(\boldsymbol{a}_1^*)+\alpha(\boldsymbol{a}_0^*) & \beta(\boldsymbol{a}_0^*) \\ 0 & \boldsymbol{a}_2^* & \boldsymbol{a}_1^* & \boldsymbol{a}_0^* \\ \alpha(\boldsymbol{b}_2^*) & \beta(\boldsymbol{b}_2^*)+\alpha(\boldsymbol{b}_1^*) & \beta(\boldsymbol{b}_1^*)+\alpha(\boldsymbol{b}_0^*) & \beta(\boldsymbol{b}_0^*) \\ 0 & \boldsymbol{b}_2^* & \boldsymbol{b}_1^* & \boldsymbol{b}_0^* \end{matrix}\right\|, \qquad (1.4.12)$$

где $\boldsymbol{a}_i^*$, $\boldsymbol{b}_i^*$ $(\boldsymbol{i}=\overline{0,1})$ коэффициенты сопряженных многочленов. Например, $\boldsymbol{a}_2^*=\boldsymbol{\alpha}^{*2}(\boldsymbol{a}_2)$, $\boldsymbol{a}_1^*=\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\beta}^*(\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{a}_1)$, $\boldsymbol{a}_0^*=\boldsymbol{\beta}^{*2}(\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{\beta}^*(\boldsymbol{a}_1)+\boldsymbol{a}_0$, аналогичные формулы имеют место для $\boldsymbol{b}_i^*$.

Опуская выкладки, отметим, что если $\boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^2=4,3,2$, то, соответственно, многочлены не имеют нетривиальных правых делителей, имеют правый делитель первого порядка и отличаются только левым множителем. Если $\boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^{2*}=4,3,2$, то, соответственно, многочлены не имеют нетривиальных левых делителей, имеют левый делитель первого порядка и отличаются только правым множителем.

1.5. Косые многочлены от двух переменных

Кольцо косых многочленов $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ от двух «переменных» $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, над некоторым алгебраически замкнутым полем $\boldsymbol{K}$ нулевой характеристики, построим следующим образом. Пусть $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}]$ — кольцо многочленов от $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{M}$, $\gamma(\boldsymbol{y}) = (\alpha_y, \beta_y)$ и $\beta_y(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \alpha_y(\boldsymbol{a})\beta_y(\boldsymbol{b}) + \beta_y(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}$.

Образуем кольцо $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}][\boldsymbol{x}]$ многочленов $F_{n_x}(A(\boldsymbol{y});\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=0}^{n_x} A^i(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}^i$, $A^i(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}]$, где $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$, $\gamma(\boldsymbol{x}) = (\alpha_x, \beta_x)$ и $\beta_x(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \alpha_x(\boldsymbol{a})\beta_x(\boldsymbol{b}) + \beta_x(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}$. Распространим действие отображений α_x и β_x на кольцо $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}]$ и отображений α_y и β_y на кольцо $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}]$ по формулам

$$\beta_x(\boldsymbol{y}) = \beta_x(\boldsymbol{x}) = \beta_y(\boldsymbol{y}) = \beta_y(\boldsymbol{x}) = 0,$$

$$\alpha_x(\boldsymbol{y}) = \alpha_y(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y},\ \alpha_x(\boldsymbol{x}) = \alpha_y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}. \qquad (1.5.1)$$

Тогда β_x будет α_x дифференцированием кольца $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}]$, а β_y будет α_y дифференцированием на кольца $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}]$. Умножение в кольце $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}][\boldsymbol{x}]$ определим следующим образом

$$\boldsymbol{x} \cdot A_{n_y}(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x}^n = \alpha_x(A_{n_y}(\boldsymbol{y})) \cdot \boldsymbol{x}^{n+1} + \beta_x(A_{n_y}(\boldsymbol{y})) \cdot \boldsymbol{x}^n, \qquad (1.5.2)$$

где $\alpha_x(A_{n_y}(\boldsymbol{y})) = \sum\limits_{j=0}^{n_y} \alpha_x(\boldsymbol{a}_j)\boldsymbol{y}^j$, $\beta_x(A_{n_y}(\boldsymbol{y})) = \sum\limits_{j=0}^{n_y} \beta_x(\boldsymbol{a}_j)\boldsymbol{y}^j$, $\forall A_{n_y}(\boldsymbol{y}) = \sum\limits_{j=0}^{n_y} \boldsymbol{a}_j\boldsymbol{y}^j \in$ $\in \boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}]$, $\boldsymbol{a}_j \in \boldsymbol{K}$.

Можно рассматривать кольцо $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ как кольцо $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}][\boldsymbol{y}]$ с правилом умножения

$$\boldsymbol{y} \cdot A_{n_x}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}^n = \alpha_y(A_{n_x}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{y}^{n+1} + \beta_y(A_{n_x}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{y}^n, \qquad (1.5.3)$$

где $\alpha_y(A_{n_x}(\boldsymbol{x})) = \sum\limits_{j=0}^{n_x} \alpha_y(\boldsymbol{a}_j)\boldsymbol{x}^j$, $\beta_y(A_{n_x}(\boldsymbol{x})) = \sum\limits_{j=0}^{n_x} \beta_y(\boldsymbol{a}_j)\boldsymbol{x}^j$, $\forall A_{n_x}(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{j=0}^{n_x} \boldsymbol{a}_j\boldsymbol{x}^j \in$ $\in \boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}]$, $\boldsymbol{a}_j \in \boldsymbol{K}$.

Согласно теореме 1.2.1 кольца $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}][\boldsymbol{x}]$ и $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}][\boldsymbol{y}]$ и $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ являются правыми и левыми кольцами Оре.

Определение 1.5.1. Скажем, что «переменные» $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ коммутативны, если $\boldsymbol{xy} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{yx} \cdot \boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{K}$.

Теорема 1.5.1. «Переменные» $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ коммутируют в том и только в том случае, когда имеют место равенства

$$[\alpha_x, \alpha_y] = [\alpha_x, \beta_y] = [\beta_x, \alpha_y] = [\beta_x, \beta_y] = 0. \tag{1.5.4}$$

Доказательство. Предположим, что (1.3.4) выполняется. Тогда

$$\boldsymbol{x\,y \cdot a} = \alpha_x(\alpha_y(\boldsymbol{a}))\boldsymbol{yx} + \alpha_x(\beta_y(\boldsymbol{a}))\boldsymbol{x} + \beta_x(\alpha_y(\boldsymbol{a}))\boldsymbol{y} + \beta_x(\beta_y(\boldsymbol{a})),$$

$$\boldsymbol{y\,x \cdot a} = \alpha_y(\alpha_x(\boldsymbol{a}))\boldsymbol{xy} + \beta_y(\alpha_x(\boldsymbol{a}))\boldsymbol{x} + \alpha_y(\beta_x(\boldsymbol{a}))\boldsymbol{y} + \beta_y(\beta_x(\boldsymbol{a})).$$

Отсюда $\boldsymbol{y\,x \cdot a} - \boldsymbol{x\,y \cdot a} = 0 \;\; \forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{K}$, поэтому $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = 0$.

Обратно, если $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = 0$, то $\boldsymbol{y\,x \cdot a} - \boldsymbol{x\,y \cdot a} = ((\alpha_y \alpha_x - \alpha_x \alpha_y)\boldsymbol{a})\boldsymbol{xy} +$ $+ ((\beta_y \alpha_x - \alpha_x \beta_y)\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + ((\alpha_y \beta_x - \beta_x \alpha_y)\boldsymbol{a})\boldsymbol{y} + (\beta_2 \beta_1 - \beta_x \beta_y)\boldsymbol{a} = 0$. Что приводит к (1.3.4). ■

В дальнейшем «переменные» $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ будем считать коммутативными, поэтому $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}][\boldsymbol{y}] \approx \boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}][\boldsymbol{x}] \approx \boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$.

Определение 1.5.2. Множество элементов из $\boldsymbol{K}$, неподвижных относительно автоморфизма α_x образует подполе $\boldsymbol{K}_\alpha^x \subset \boldsymbol{K}$, называемое инвариантным полем автоморфизма α_x, а множество элементов из $\boldsymbol{K}$, неподвижных относительно автоморфизма α_y образует подполе $\boldsymbol{K}_\alpha^y \subset \boldsymbol{K}$, называемое инвариантным полем автоморфизма α_y.

Ядро гомоморфизма β_x образует подполе констант $\boldsymbol{K}_\beta^x \subset \boldsymbol{K}$, а ядро гомоморфизма β_y образует подполе констант $\boldsymbol{K}_\beta^y \subset \boldsymbol{K}$.

Определение 1.5.3. «Переменные» $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{M}$ называются «переменными» одного типа, если $\boldsymbol{K}_\alpha^x = \boldsymbol{K}_\alpha^y$, $\boldsymbol{K}_\beta^x = \boldsymbol{K}_\beta^y$. В противном случае $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — «переменные» разного типа.

Поле констант относительно автоморфизмов α_x, α_y и гомоморфизмов β_x, β_y определяется как $\boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{K}_\alpha^x \cap \boldsymbol{K}_\beta^x \cap \boldsymbol{K}_\alpha^y \cap \boldsymbol{K}_\beta^y$.

Возможны, например, следующие реализации кольца $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]$:

— если $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}]$, $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}]$ кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов и «переменные» $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ разного типа, то кольцо $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]$ изоморфно кольцу обыкновенных линейных дифференциальных операторов в частных производных;

— если $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}]$ кольцо обыкновенных линейных дифференциальных операторов, а $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}]$ кольцо обыкновенных линейных разностных операторов и $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ одного типа (разного типа), то получим кольцо $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]$ дифференциально-разностных операторов по одной «переменной (по разным «переменным»);

— наконец, если $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x}]$, $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}]$ кольца разностных операторов и «переменные» $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ разного типа, то $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]$ будет кольцом разностно-разностных операторов по двум «переменным».

Понятие сопряженного к косому многочлену от двух «переменных» допускает следующие интерпретации:

— многочлен $\boldsymbol{F_m(a;x,y)=\sum_{i=0}^{n_x}\sum_{j=0}^{n_y}a_{ij}x^i y^j}$ степени $\boldsymbol{m}$, где $\boldsymbol{m}$ наибольшая степень монома $\boldsymbol{a_{ij}x^i y^j}$ при $\boldsymbol{a_{ij}}\neq 0$, $\boldsymbol{a_{ij}\in K}$, рассматривается как элемент кольца $\boldsymbol{K[y][x]}$, то есть $\boldsymbol{F_m(a;x,y)=F_{n_x}(A(y);x)=\sum_{i=0}^{n_x}A^i(y)x^i}$, $\boldsymbol{A^i(y)\in K[y]}$. Тогда $\boldsymbol{\tau}$ - сопряженным к нему по «переменной» $\boldsymbol{x}$ естественно считать многочлен из $\boldsymbol{K[y][x^*]}$

$$\boldsymbol{F_{n_x}^{*x}(A(y);x^*)=\sum_{i=0}^{n_x}x^{*i}(\tau_y(A^i(y)\varepsilon))}, \tag{1.5.5}$$

где отображение $\boldsymbol{\tau_y : K[y]\to K[y]}$, является антииволюцией, удовлетворяющей условиям $\boldsymbol{\forall A(y),B(y)\in K[y]}$ $\boldsymbol{\tau_y(A(y)B(y))=\tau_y(B(y))\tau_y(A(y))}$ и $\boldsymbol{\tau_y^2(A(y))=A(y)}$. За $\boldsymbol{\tau_y}$ можно принять операцию сопряжения в кольце $\boldsymbol{K[y]}$ распространив её на поле $\boldsymbol{K}$ тривиальному образом ($\boldsymbol{\tau=\iota}$), тогда $\boldsymbol{\alpha_x^*=\alpha_x^{-1}}$,

$\beta_x^* =-\beta_x\alpha_x^{-1}$;

— многочлен $F_m(a;x,y)=\sum_{i=0}^{n_x}\sum_{j=0}^{n_y}a_{ij}x^i y^j$, $a_{ij}\in K$, рассматривается как элемент кольца $K[x][y]$, то есть $F_m(a;x,y)=F_{n_y}(A(x);y)=\sum_{j=0}^{n_y}A^j(x)y^j$, $A^j(x)\in K[x]$, то τ - сопряженным к нему по «переменной» y естественно считать многочлен из $K[x][y^*]$, $A^j(y)\in K[y]$. Тогда τ - сопряженным по «переменной» y естественно считать многочлен из $K[x][y^*]$

$$F_{n_y}^{*y}(A(x);y^*)=\sum_{j=0}^{n_y}y^{*j}(\tau_x(A^j(x)\varepsilon), \tag{1.5.6}$$

где отображение $\tau_x:K[x]\to K[x]$, является антиивbooлюцией, удовлетворяющей условиям $\forall A(x),B(x)\in K[x]$ $\tau_x(A(x)B(x))=\tau_x(B(x))\tau_x(A(x))$ и $\tau_x{}^2(A(x))=A(x)$. За τ_x можно принять операцию сопряжения в кольце $K[x]$ положив её действие на поле K тривиальным образом, тогда $\alpha_y^*=\alpha_y^{-1}$, $\beta_y^*=-\beta_y\alpha_y^{-1}$;

— наконец, если многочлен $F_m(a;x,y)=\sum_{i=0}^{n_x}\sum_{j=0}^{n_y}a_{ij}x^i y^j$, $a_{ij}\in K$, $a_{ij}\in K$ рассматривается как элемент кольца $K[x,y]$, то τ - сопряженным к нему по обеим «переменным» будем считать многочлен из кольца $K[x^*,y^*]$

$$F_m^*(a;x,y)=F_m^*(a;x^*,y^*)=\sum_{i=0}^{n_x}\sum_{j=0}^{n_y}x^{*i}y^{*j}(\tau(a_{ij}\varepsilon)), \tag{1.5.7}$$

где отображение $\tau:K\to K$ является антиинволюцией, и в силу того, что K поле можно считать $\tau=\iota$. Тогда $\alpha_x^*\alpha_y^*=\alpha_x^{-1}\alpha_y^{-1}$, $\beta_x^*\alpha_y^*=-\beta_x\alpha_x^{-1}\alpha_y^{-1}$, $\beta_y^*\alpha_x^*=-\beta_y\alpha_x^{-1}\alpha_y^{-1}$ и $\beta_x^*\beta_y^*=-\beta_x\beta_y\alpha_x^{-1}\alpha_y^{-1}$.

Легко проверяется, что так введенное понятие сопряженного (1.2.5), (1.5.6) и (1.4.7) удовлетворяет требованиям i), ii) и iii) приведенным в первом параграфе. Таким образом, возможны следующие варианты: сопряженных колец к кольцу $K[x, y]$: $K[y][x^*]$ — сопряженное по «переменной» x, $K[x][y^*]$ — сопряженное по «переменной» y и $K[x^*, y^*]$ — сопряженное по обеим «переменным». В дальнейшем будем использовать термин «переменная» без кавычек.

1.6. Линейное уравнение в кольце многочленов двух переменных

Обозначим через $\Lambda[x]$ кольцо косых многочленов переменной x с коэффициентами в кольце косых многочленов $\Lambda = K[y]$ переменной y с коэффициентами в некотором поле K, предполагается, что переменные x и y коммутативны. Поскольку Λ является кольцом Оре, то согласно теореме 1.2.1 кольцо $\Lambda[x]$ также является кольцом Оре.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} A_{n_j} = 0, \tag{1.6.1}$$

где многочлены $A_{n_j} = A_{n_j}(A(y);x) = \sum_{i=0}^{n_j} A^i(y)x^i$ из кольца $\Lambda[x]$, n_j — степени этих многочленов по переменной x, коэффициенты $A^i(y)$ — многочлены из Λ степени. Будем считать, что $n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_m$, $n_1 = \max(n_j)$, $n_m = \min(n_j)$. Неизвестные $X_{s_j} = \sum_{i=0}^{s_j} F^i(f;y)x^i$ — многочлены по x степени $0 \le s_j \le n_1 + n_m - n_j - 1$, $F^i(f;y)$ неизвестные многочлены степени с коэффициентами в поле K. Переобозначим $A_{n_m} = D_{d_0}$, тогда $D_{d_k} = \text{ПНОД}(A_{n_k}, D_{d_{k-1}})$, $k = \overline{1, m-1}$, где ПНОД — правый наибольший общий делитель многочленов по x. Следовательно, $n_1 \ge \ldots \ge n_m = d_0 \ge d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_{m-1} = d$.

Опишем правое над кольцом Λ линейное пространство P^m векторов $(X_{s_1}, \ldots, X_{s_m})$, — решений уравнения, применив результаты предыдущих параграфов.

Теорема 1.6.1. Уравнение (1.6.1) всегда имеет решение, в котором

$s_1 = n_2$, $s_2 = n_1$.

Теорема 1.6.2. Если пара (X_p^0, X_q^0) минимальна, то $p = n_2 - d$, $q = n_1 - d$.

Теорема 1.6.2 фактически утверждает, что уравнение (1.6.1) при $m = 2$ не имеет нетривиальных решений (X_{s_1}, X_{s_2}), в которых, $s_1 < n_2 - d$, $s_2 < n_1 - d$.

Переписав уравнение (1.6.1) в виде следующей эквивалентной системы

$$\left.\begin{aligned} & X_{s_1} A_{n_1 - d_1} + X_{s_m} A_{n_m - d_1} = Y_{s_0 - d_1}, \\ & Y_{s_0 - d_k} A_{d_k - d_{k+1}} + X_{s_{k+1}} A_{n_{k+1} - d_{k+1}} = Y_{s_0 - d_{k+1}}, \\ & Y_{s_0 - d_{m-2}} A_{d_{m-2} - d_{m-1}} + X_{s_{m-1}} A_{n_{m-1} - d_{m-1}} = 0, \\ & k = \overline{1, m-3}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6.2}$$

где положено $s_0 = n_1 + n_m - 1$ получим по аналогии с теоремой 1.3.7.

Теорема 1.6.3. $\dim P^m = (n_1 + n_m)(m-2) - \sum_{j=2}^{m-1} n_j + d$.

1.7. Результантные матрицы косых многочленов двух переменных

Построим результантные матрицы системы косых многочленов $A_{n_k} = A_{n_k}(a; x, y) = \sum_{i,j=0}^{p,q} a_{ij}^k x^i y^j$ ($a_{ij}^k \in K$ и n_k, $k = \overline{1, m}$, наибольшая совокупная степень мономов $a_{ij}^k x^i y^j$ при $a_{ij}^k \neq 0$), рассматривая их как элементы кольца $\Lambda[x]$, то есть как многочлены $A_{n_j}(A(y); x) = \sum_{i=0}^{n_j} A^{n_j, i}(y) x^i$ степеней n_j по x с коэффициентами $A^{n_j, i}(y) \in K[y]$. Как и ранее будем считать, что $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m$, $n_1 = \max(n_j)$, $n_m = \min(n_j)$. Обозначим $A_{n_m} = D_{d_0}$, тогда $D_{d_k} = \text{ПНОД}(A_{n_k}, D_{d_{k-1}})$, $k = \overline{1, m-1}$. Следовательно, $n_1 \geq \cdots \geq n_m = d_0 \geq d_1 \geq \cdots \geq d_{m-1} = d$.

Снова рассмотрим уравнение (1.4.1) записав неизвестные в виде

$X_{s_j} = \sum_{i=0}^{s_j} F^{s_j,i}(y) x^i$, $0 \le s_j \le n_1 + n_m - n_j - 1$, $F^{s_j,i}(y)$ — неизвестные коэффициенты из Λ.

Из (1.4.1) получим правую систему уравнений относительно неизвестных $F^{s_j,i}(y)$, аналогичную системе(1.4.2),

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k_1=\max(0,l-n_1)}^{s_1} F^{s_1,k_1}(y) c_{k_1,l}\left(A^{n_1}\right) + \cdots + \sum_{k_m=\max(0,l-n_m)}^{s_m} F^{s_m,k_m}(y) c_{k_m,l}\left(A^{n_m}\right) = 0, \\ &l = n_1 + n_m - 1, n_1 + n_m + 2, \ldots, 1, 0, \end{aligned}\right\} \quad (1.7.1)$$

где коэффициенты $c_{k_1,l}\left(A^{n_j}\right)$ получены из коэффициентов многочлена $A_{n_j}(A(y);x)$ по теореме 1.2.3.

Правую результантную матрицу данной системы многочленов можно выписать поставив в соответствие каждому многочлену $A_{n_j}(A(y);x)$ матрицу размерности $(s_k + 1) \times (n_1 + n_m)$ ($s_k = n_1 + n_m - n_k - 1$), которую удобнее записать так

$$M_k(y) = \left(\left(\begin{matrix} c_{s_k,p_1+p_m-1}(A^{n_k}) & 0 & \cdots & 0 \\ c_{s_k,p_1+p_m-2}(A^{n_k}) & c_{s_k-1,p_1+p_m-2}(A^{n_k}) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{s_k,p_k}(A^{n_k}) & c_{s_k-1,p_k}(A^{n_k}) & \cdots & c_{0,p_k}(A^{n_k}) \\ c_{s_k,p_k-1}(A^{n_k}) & c_{s_k-1,p_k-1}(A^{n_k}) & \cdots & c_{0,p_k-1}(A^{n_k}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{s_k,1}(A^{n_k}) & c_{s_k-1,1}(A^{n_k}) & \cdots & c_{0,1}(A^{n_k}) \\ c_{s_k,0}(A^{n_k}) & c_{s_k-1,0}(A^{n_k}) & \cdots & c_{0,0}(A^{n_k}) \end{matrix}\right)\right). \quad (1.7.2)$$

Матрица

$$R^m(y) = (M_1(y), \ldots, M_m(y)), \quad (1.7.3)$$

называется правай результантной матрицей системы многочленов A_{n_j}.

Левая результантная матрица $R^{m*}(y)$ этих же многочленов определяется по аналогии из рассмотрения следующего уравнения

$$\sum_{j=1}^{m} Y_{s_j} A_{n_j}^{*} = 0. \qquad 1.7.4)$$

Правый строчечный (столбцовый) ранг матрицы (1.7.5) называется рангом правого результанта, правый строчечный (столбцовый) ранг левой результантной матрицы $R^{m^*}(y)$ называется рангом левого результанта.

Аналогично строятся результантные матрицы $R^m(x)$ и $R^{m^*}(x)$ системы многочленов A_{n_j}, рассматриваемых как элементы кольца $K[x][y]$.

Для пары косых многочленов результантная матрица является квадратной, поэтому часто правым (левым) результантом называют правый (левый) определитель соответствующий результантной матрицы. Например,

$$|R^2(y)||= \begin{vmatrix} c_{m-1,n+m-1}(F^n) & \cdots & 0 & c_{n-1,n+m-1}(F^m) & \cdots & 0 \\ c_{m-1,n+m-2}(F^n) & \cdots & c_{0,m}(F^n) & c_{n-1,n+m-2}(F^m) & \cdots & c_{0,n}(F^m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0}(F^n) & \cdots & c_{0,0}(F^n) & c_{n-1,0}(F^m) & \cdots & c_{0,0}(F^m) \end{vmatrix}\Bigg\| \qquad (1.7.5)$$

— правый результант многочленов $F_n(A;x)$, $F_m(B;x)$, построенный по системе (1.7.1), транспонированный по отношению к (1.7.3).

Приведем свойства правого $R^m(y)$ и левого $R^{m^*}(y)$ результантов вполне аналогичные свойствам результантов многочленов одной переменной. Обозначим через $r_m = rang\, R^m(y)$ ранг правого результанта, через $r_m^* = rang\, R^{m^*}(y)$ ранг левого результанта многочленов $A_{n_j}\big(A(y);x\big)$, $j=\overline{1,m}$; $d_{m-1} =$ ПНОД($A_{n_j}(A(y);x)$), $d_{m-1}^* =$ЛНОД($A_{n_j}(A(y);x)$) порядки их правого и левого наибольших общих делителей по переменной x. Имеет место теорема.

Теорема 1.7.1. $n_1 + n_m = r_m + d_{m-1}$ $(n_1 + n_m = r_m^* + d_{m-1}^*)$.

Теорема 1.7.2. Для того чтобы многочлены $A_{n_j}(A(y);x)$ были взаимно просты справа (слева) по x в совокупности, необходимо и достаточно, чтобы $r_m = n_1 + n_m$ $(r_m^* = n_1 + n_m)$.

Следствие. Для того, чтобы многочлены $F_n(A;x)$, $F_m(B;x)$ были взаимно просты справа (слева) по x необходимо и достаточно $|R^2(y)||\neq 0$ $(|R^{2^*}(y)||\neq 0)$.

Пусть ν_m (ν_m^*) порядок правого (левого) наименьшего общего кратного.

Теорема 1.7.3. $\nu_m = r_m$ $(\nu_m^* = r_m^*)$.

Обозначим через K_0 подполе неподвижных элементов относительно автоморфизма α, через K_1 подполе констант относительно дифференцирования β.

Теорема 1.7.4. Для результантной матрицы системы многочленов $A_{n_j}(A(y);x)$ имеют место следующие свойства:

1) ранг правого результанта не меньше n_1, так как результант имеет, по крайней мере, n_1 строк линейно независимых слева над Λ;

2) пусть $\lambda \in K_0 \cap K_1$, тогда при умножении всех коэффициентов многочлена $A_{n_1}(A^1(y);x)$ $(A_{n_2}(A^2(y);x))$ на λ результант $|R^2(y)||$ умножается на λ^{n_2} (λ^{n_1}). Это следует из свойств коэффициентов $c_{r,l}(A^1(y))$, $c_{r,l}(A^2(y))$ и вида определителя (1.7.5);

3) если коэффициенты многочленов $A_{n_1}(A^1(y);x)$, $A_{n_2}(A^2(y);x)$ принадлежат $K_0 \cap K_1$, то $|R^2(y)||$ совпадает с результантом обычных многочленов.

Пусть еще p_i, $i=\overline{1,m}$ степени многочленов $A_{N_i}(a;x,y)$ по переменной y. Принимаем, что $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_m$ и обозначаем $d_x = ord\,\text{ПНОД}(A_{N_i})$ по переменной x, $d_y = ord\,\text{ПНОД}(A_{N_i})$ по переменной y; r_x, r_y — ранг правого результанта по переменным x и y соответственно. Обозначаем $d_x^* = ord\,\text{ЛНОД}(A_{N_i})$ по переменной x, $d_y^* = ord\,\text{ЛНОД}(A_{N_i})$ по переменной

y; r_x^*, r_y^* — ранг левого результанта по переменным x и y соответственно.

Теорема 1.7.5. Для того чтобы система многочленов A_{N_i} обладала правым (левым) наибольшим общим делителем

а) порядка $d_x \neq 0$ и $d_y \neq 0$;

б) порядка $d_x \neq 0$ и $d_y = 0$;

в) порядка $d_x = 0$ и $d_y \neq 0$;

г) порядка $d_x = 0$ и $d_y = 0$,

необходимо и достаточно выполнения условий соответственно

а) $r_x < p_1 + p_m$ и $r_y < n_1 + n_m$;

б) $r_x = p_1 + p_m$ и $r_y < n_1 + n_m$;

в) $r_x < p_1 + p_m$ и $r_y = n_1 + n_m$;

г) $r_x = p_1 + p_m$ и $r_y = n_1 + n_m$.

Достаточность. Из теоремы 1.4.1 следует в первом случае $d_x > 0$ и $d_y > 0$, во втором $d_x = 0$ и $d_y > 0$, в третьем $d_x > 0$ и $d_y = 0$ и в четвертом $d_x = 0$ и $d_y = 0$.

Необходимость. Следует также из теоремы 1.4.1. ■

Пример 1.7.1. Построим правый и левый результанты косых многочленов $F_2(A;x) = \sum_{i=0}^{2} A^i x^i$, $G_2(B;x) = \sum_{i=0}^{2} B^i x^i$ от одной переменной с коэффициентами в поле характеристики нуль. Поэтому $\tau = \varepsilon$, $\gamma(x) = (\alpha, \beta)$, $\gamma(x^*) = (\alpha^*, \beta^*)$, $\alpha^* = \alpha^{-1}$, $\beta^* = -\beta\alpha^{-1})$.

Здесь $n = m = 2$ и правый, левый результанты в силу (1.7.2) имеют вид

$$| R^2 \| = \left| \begin{matrix} c_{1,3}(a) & c_{1,2}(a) & c_{1,1}(a) & c_{1,0}(a) \\ 0 & c_{0,2}(a) & c_{0,1}(a) & c_{0,0}(a) \\ c_{1,3}(b) & c_{1,2}(b) & c_{1,1}(b) & c_{1,0}(b) \\ 0 & c_{0,2}(b) & c_{0,1}(b) & c_{0,0}(b) \end{matrix} \right\|, \tag{1.7.6}$$

$$|\boldsymbol{R}^{2^*}|=\begin{vmatrix} c_{1,3}(\boldsymbol{a}^*) & c_{1,2}(\boldsymbol{a}^*) & c_{1,1}(\boldsymbol{a}^*) & c_{1,0}(\boldsymbol{a}^*) \\ 0 & c_{0,2}(\boldsymbol{a}^*) & c_{0,1}(\boldsymbol{a}^*) & c_{0,0}(\boldsymbol{a}^*) \\ c_{1,3}(\boldsymbol{b}^*) & c_{1,2}(\boldsymbol{b}^*) & c_{1,1}(\boldsymbol{b}^*) & c_{1,0}(\boldsymbol{b}^*) \\ 0 & c_{0,2}(\boldsymbol{b}^*) & c_{0,1}(\boldsymbol{b}^*) & c_{0,0}(\boldsymbol{b}^*) \end{vmatrix}. \qquad (1.7.7)$$

Вычисляя элементы определителей по формулам (1.2.5), (1.2.7) получим

$$|\boldsymbol{R}^2|=\begin{vmatrix} \alpha(\boldsymbol{a}_2) & \beta(\boldsymbol{a}_2)+\alpha(\boldsymbol{a}_1) & \beta(\boldsymbol{a}_1)+\alpha(\boldsymbol{a}_0) & \beta(\boldsymbol{a}_0) \\ 0 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_0 \\ \alpha(\boldsymbol{b}_2) & \beta(\boldsymbol{b}_2)+\alpha(\boldsymbol{b}_1) & \beta(\boldsymbol{b}_1)+\alpha(\boldsymbol{b}_0) & \beta(\boldsymbol{b}_0) \\ 0 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_0 \end{vmatrix}, \qquad (1.7.8)$$

$$|\boldsymbol{R}^{2^*}|=\begin{vmatrix} \alpha(\boldsymbol{a}_2^*) & \beta(\boldsymbol{a}_2^*)+\alpha(\boldsymbol{a}_1^*) & \beta(\boldsymbol{a}_1^*)+\alpha(\boldsymbol{a}_0^*) & \beta(\boldsymbol{a}_0^*) \\ 0 & \boldsymbol{a}_2^* & \boldsymbol{a}_1^* & \boldsymbol{a}_0^* \\ \alpha(\boldsymbol{b}_2^*) & \beta(\boldsymbol{b}_2^*)+\alpha(\boldsymbol{b}_1^*) & \beta(\boldsymbol{b}_1^*)+\alpha(\boldsymbol{b}_0^*) & \beta(\boldsymbol{b}_0^*) \\ 0 & \boldsymbol{b}_2^* & \boldsymbol{b}_1^* & \boldsymbol{b}_0^* \end{vmatrix}, \qquad (1.7.9)$$

где $\boldsymbol{a}_i^*$, $\boldsymbol{b}_i^*$ $(\boldsymbol{i}=\overline{0,1})$ коэффициенты сопряженных многочленов. Например, $\boldsymbol{a}_2^*=\boldsymbol{\alpha}^{*2}(\boldsymbol{a}_2)$, $\boldsymbol{a}_1^*=\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\beta}^*(\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{a}_1)$, $\boldsymbol{a}_0^*=\boldsymbol{\beta}^{*2}(\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{\beta}^*(\boldsymbol{a}_1)+\quad+\boldsymbol{a}_0$, аналогичные формулы имеют место для $\boldsymbol{b}_i^*$.

1.8. Факторизация косых многочленов от двух переменных

Пусть $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\in\boldsymbol{K}_0\cap\boldsymbol{K}_1$. Правый результант многочленов $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{B};\boldsymbol{x})+$ $+\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{x})+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\varepsilon}$ является многочленом $\Phi(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2)$ степени $\boldsymbol{n}$ по $\boldsymbol{c}_2$ и степени $\boldsymbol{m}$ по $\boldsymbol{c}_1$ с коэффициентами в $\boldsymbol{K}$. Получаем обобщение результата, известного [1, 44] для коммутативных дифференциальных операторов.

Теорема 1.8.1. Многочлены $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{B};\boldsymbol{x})+\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{x})+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\varepsilon}$ имеют правые делители в том и только в том случае, если $\boldsymbol{c}_1$ и $\boldsymbol{c}_2$ являются корнями уравнения $\Phi(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2)=0$.

Наконец, если в условии теоремы 1.8.1 положить $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{c}_1=0$, то имеет место следующая теорема.

Теорема 1.8.2. Многочлен $F_n(B;x)$ допускает представление $F_n(B;x) = F_{n-1}(B^1;x)(x + c_2\varepsilon)$ в том и только в том случае, если $\Phi(0,c_2) = 0$.

Кольцо $K[x,y]$ будем рассматривать как кольцо многочленов от y с коэффициентами в $K[x]$.

Пример 1.5.1. Найдем условия, при которых многочлен $F_2(a;x,y) =$
$= \sum\limits_{0\le i+j\le 2} a_{ij}x^i y^j = \sum\limits_{k=0}^{2} A^k(a;x)y^{2-k}$, где $A^k(a;x)$ косые многочлены, допускает отделение справа многочлена $G_1(b;x,y) = \sum\limits_{0\le i+j\le 1} b_{ij}x^i y^j = \sum\limits_{k=0}^{1} B^k(b;x)y^{1-k}$ в предположении, что $b_{01} \ne 0$.

В силу следствия из теоремы 1.7.2 для этого необходимо и достаточно равенство нулю их правого результанта $|\, R^2(x)\,||$

$$|\, R^2(x)\,|| = \begin{vmatrix} A^0(a;x) & A_1(a;x) & A^2(a;x) \\ B^0(\alpha_2(b);x) & B^1(\alpha_2(b);x) + B^0(\beta_2(b);x) & B^1(\beta_2(b);x) \\ 0 & B^0(b;x) & B^1(b;x) \end{vmatrix}\Bigg\|. \qquad (1.8.1)$$

Если найти нетривиальное решение (X^1, X^2, X^3) следующей системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} & B^0(\alpha_2(b);x)\mathrm{X}^1 + (B^1(\alpha_2(b);x) + B^0(\beta_2)(b);x))\mathrm{X}^2 + \\ & + B^1(\beta_2(b);x)\mathrm{X}^3 = 0, \\ & B^0(b;x)\mathrm{X}^2 + B^1(b;x)\mathrm{X}^3 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.8.2)$$

то за значение определителя можно принять

$$|\, R^2(x)\,|| = A^0(a;x)\mathrm{X}^1 + A^1(a;x)\mathrm{X}^2 + A^2(a;x)\mathrm{X}^3. \qquad (1.8.3)$$

Система (1.8.2) решается следующим образом. Из второго уравнения найдем $\mathrm{X}^2 = -b_{01}^{-1}B^1(b;x)\mathrm{X}^3$. Подставляя X^2 в первое уравнение, получим

$$B^0(\alpha_2(b);x)\mathrm{X}^1 + [B^1(\beta_2(b);x) - (B^1(\alpha_2(b);x) +$$
$$+ B^0(\beta_2(b);x))b_{01}^{-1}B^1(b;x)]\mathrm{X}^2 = 0. \qquad (1.8.4)$$

Как легко видеть минимальное решение уравнения (1.8.4) имеет вид

$$\mathrm{X}^{10}=(\alpha_2(b_{01}))^{-1}[B^1(\beta_2(b);x)-(B^1(\alpha_2(b;x)+B^0(\beta_2(b);x))b_{01}^{-1}B_1(b;x)],$$

$$\mathrm{X}^{30}=-\varepsilon\,. \qquad (1.8.5)$$

Отсюда $\mathrm{X}^2=b_{01}^{-1}B^1(b;x)$. Подставляя X^1, X^2, X^3 в (1.8.3) получаем:

$$|\,R^2(x_1)\,||=Y^0(c_2)x^2+Y^1(c_1,c_2)x+Y^2(c_1,c_2)\varepsilon\,, \qquad (1.8.6)$$

где положено $b_{00}\cdot b_{01}^{-1}=c_1$, $b_{10}\cdot b_{01}^{-1}=c_2$, а

$$\begin{aligned}
&Y^0(c_2)=-a_{02}\alpha_2(c_2)\alpha_1(c_1)+a_{11}\alpha_1(c_2)-a_{20},\\
&Y^1(c_1,c_2)=a_{02}(-\alpha_2(c_2)\beta_1(c_2)-\alpha_2(c_2)\alpha_1(c_1)-\alpha_2(c_1)c_2-\beta_2(c))+\\
&+a_{11}(\beta_1(c_2)+\alpha_1(c_1))+a_{01}c_2-a_{10},\\
&Y^2(c_1,c_2)=a_{02}(-\alpha_2(c_2)\beta_1(c_1)-\alpha_2(c_1)c_1))+a_{01}c_1-a_{00}.
\end{aligned}$$

Поскольку равенство $|\,R^2(x)\,||=0$ возможно только лишь в том случае, когда все коэффициенты Y^j $(j=0,1,2)$ равны нулю, то условия, необходимые и достаточные для отделимости справа многочлена первой степени, содержащего переменную x_2, от многочлена $F_2(A(a;x);y)$ имеют вид

$$Y^0(c_2)=0,\ Y^1(c_1,c_2)=0,\ Y^2(c_1,c_2)=0. \qquad (1.8.7)$$

Соотношения (1.8.7) можно рассматривать, как систему уравнений относительно c_1, c_2, решениями которой являются коэффициенты многочлена $G_1(B(b;x);y)$.

Пусть $a_{ij}\in\Pi$, где Π поле констант относительно автоморфизмов α_1, α_2 и гомоморфизмов β_1, β_2, тогда $b_{ij}\in\Pi$ и имеет место случай косых многочленов с «постоянными» коэффициентами. Уравнения (1.8.7) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{02}c_2^2-a_{11}c_2+a_{20}=0,\\
&2a_{02}c_1c_2-a_{11}c_1-a_{01}c_2+a_{10}=0,\\
&a_{02}c_1^2-a_{01}c_1+a_{00}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.8.8)$$

1.9. Алгоритм Евклида в кольце косых многочленов

В кольце косых многочленов $K[x]$ от одной переменной над кольцом Оре K имеет место правый и левый алгоритм деления с остатком «алгоритм Евклида». Назовем его обобщенным.

Условимся записывать многочлены нулевой степени $f\varepsilon$ там, где это не вызывает недоразумений без операторной единицы $\varepsilon = x^0$, f.

Определение 1.9.1. Многочлен $M_d(x)$ называется правым (левым) псевдоделителем многочлена $M_n(x)$, если для некоторых многочленов нулевой степени $f\varepsilon$, $g\varepsilon$ и $M_{n-d}(x) \in K(x)$, ($\tilde{M}_{n-d}(x) \in K[x]$) выполняется тождественно

$$fM_n(x) = M_{n-d}(x)M_d(x) \; (gM_n(x) = M_d(x)\tilde{M}_{n-d}(x)). \quad (1.9.1)$$

Если элементы f, g обратимы в K, то $M_{n-d}(x)$ ($\tilde{M}_{n-d}(x)$) — правый (левый) общие делители.

Определение 1.9.2. Многочлен $M_d(x)$ называется правым (левым) общим псевдоделителем многочленов $M_{n_1}(x)$, $M_{n_2}(x)$, если для некоторых многочленов $f_1\varepsilon$, $f_2\varepsilon$, $g_1\varepsilon$, $g_2\varepsilon$ выполняется

$$f_1M_{n_1}(x) = M_{n_1-d}(x)M_d(x),\; f_2M_{n_2}(x) = M_{n_2-d}(x)M_d(x)$$

$$(g_1M_{n_1}(x) = M_d(x)\tilde{M}_{n_1-d}(x),\; g_2M_{n_2}(x) = M_d(x)\tilde{M}_{n_2-d}(x)).$$

Определение 1.9.3. Многочлен $M_d(x)$ называется правым (левым) наибольшим общим псевдоделителем многочленов $M_{n_1}(x)$, $M_{n_2}(x)$, если любой правый (левый) псевдоделитель многочленов является его правым (левым) общим псевдоделителем.

Лемма 1.9.1. Для многочленов $M_{n_1}(x) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i$, $M_{n_2}(x) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i$ $(n_1 \ge n_2)$ из $K[x]$ можно указать такие многочлены $M_{n_1-n_2}(x) = \sum_{i=0}^{n_1-n_2} s_i x^i$ и $M_k(x) = \sum_{i=0}^{k} r_i x^i$ из $K[x]$ и такой многочлен $F\varepsilon$, что для будет выполняться

$$FM_{n_1}(x) = M_{n_1-n_2}(x)M_{n_2}(x) + M_k(x),\; \left(k < n_2\right). \quad (1.9.2)$$

Доказательство. Действительно, поскольку K правое кольцо Оре, то можно выбрать элементы f_1, $g_1 \in K$ так, чтобы выполнялось тождество $f_1 a_{n_1} = g_1 \alpha^{n_1-n_2}(b_{n_2})$, поэтому $f_1 M_{n_1}(x) = g_1 x^{n_1-n_2} M_{n_2}(x) + M_{k_1}(x)$, где $M_{k_1}(x) = \sum_{i=0}^{k_1} r_{i,k_1} x^i$ многочлен степени $k_1 < n_1$. Если $k_1 \geq n_2$, то можно найти элементы f_2, $g_2 \in K$ так, чтобы $f_2 r_{k_1,k_1} = g_2 \alpha^{k_1-n_2}(b_{n_2})$, поэтому $f_2 M_{k_1}(x) = = g_2 x^{k_1-n_2} M_{n_2}(x) + M_{k_2}(x)$, где $k_2 < k_1 < n_1$. Тогда $f_2 f_1 M_{n_1}(x) = = g_1 x^{n_1-n_2} M_{n_2}(x) + f_2 M_{k_1}(x) = (g_1 x^{n_1-n_2} + g_2 x^{k_1-n_2}) M_{n_2}(x) + M_{k_2}(x)$. Ясно, что продолжая так (1.9.2) придем к , в котором $k < n_2$. ■

Многочлен $M_{n_1-n_2}(x)$ называется правым псевдочастным, а многочлен $M_k(x)$ — правым псевдоостатком от деления многочлена $M_{n_1}(x)$ на многочлен $M_{n_2}(x)$ справа.

Нетрудно убедиться, что имеет место и левый алгоритм деления. Действительно, запишем

$$GM_{n_1}(x) = \tilde{M}_{n_1-n_2}(x) M_{n_2}(x) + \tilde{M}_k(x). \tag{1.9.3}$$

Многочлен $\tilde{M}_{n_1-n_2}(x)$ называется левым псевдочастным, а многочлен $\tilde{M}_k(x)$ — левым псевдоостатком от деления многочлена $M_{n_1}(x)$ на многочлен $M_{n_2}(x)$ слева.

Если в (1.9.2) многочлен $M_k(x) \equiv 0$, то говорят, что многочлен $M_{n_1}(x)$ делится справа на многочлен $M_{n_2}(x)$ (в (1.9.3) при $\tilde{M}_k(x) \equiv 0$, многочлен $M_{n_1}(x)$ делится слева на многочлен $M_{n_2}(x)$) то есть

$$FM_{n_1}(x) = M_{n_1-n_2}(x) M_{n_2}(x) \ \ (GM_{n_1}(x) = M_{n_2}(x) M_{n_1-n_2}(x)). \tag{1.9.4}$$

Теорема 1.9.1. Применяя к многочленам $M_{n_1}(x)$ и $M_{n_2}(x)$ правый (левый) «алгоритм Евклида» можно найти правый (левый) наибольший общий псевдоделитель многочленов или установить его отсутствие.

Доказательство. Пусть $n_1 \geq n_2$. Применяя последовательно лемму, найдем

$$f_1 M_{n_1}(x) = g_1(x) M_{n_2}(x) + M_{n_3}(x),\ n_3 < n_2, \qquad (1)$$

$$f_2 M_{n_2}(x) = g_2(x) M_{n_3}(x) + M_{n_4}(x),\ n_4 < n_3, \qquad (2)$$

....

$$f_k M_{n_k}(x) = g_k(x) M_{n_{k+1}}(x) + M_{n_{k+2}}(x),\ n_{k+2} < n_{k+1}, \qquad (k)$$

....

$$f_{s-2} M_{n_{s-2}}(x) = g_{s-2}(x) M_{n_{s-1}}(x) + M_{n_s}(x),\ n_s < n_{s-1}, \qquad (s\text{-}2)$$

$$f_{s-1} M_{n_{s-1}}(x) = g_{s-1}(x) M_{n_s}(x) + M_{n_{s+1}}(x),\ n_{s+1} < n_s, \qquad (s\text{-}1)$$

$$f_s M_{n_s}(x) = g_s(x) M_{n_{s+1}}(x) + M_{n_{s+2}}(x),\ n_{s+2} < n_{s+1}, \qquad (s)$$

где $M_{n_{s+2}}(x)$ — многочлен нулевой степени.

Если $M_{n_{s+2}}(x) \neq 0$, то многочлены взаимно просты справа. Пусть $M_{n_{s+2}}(x) \neq 0$. Обозначим $f_s = F_s$, $g_s(x) = G_s(x)$ и запишем (s) в виде

$$F_s M_{n_s}(x) = G_s(x) M_{n_{s+1}}(x). \qquad (s)^*$$

Умножим уравнение (s-1) слева на F_s, получим

$$F_s f_{s-1} M_{n_{s-1}}(x) = F_s g_{s-1}(x) M_{n_s}(x) + F_s M_{n_{s+1}}(x).$$

Найдем многочлен $H_{s-1}(x)$ из уравнения

$$F_s g_{s-1}(x) = H_{s-1}(x) F_s. \qquad (1.9.5)$$

Это возможно поскольку $K[x]$ — кольцо Оре. Тогда в силу (1.9.5)

$$F_s f_{s-1} M_{n_{s-1}}(x) = H_{s-1}(x) F_s M_{n_s}(x) + F_s M_{n_{s+1}}(x)$$

или в силу $(s)^*$

$$F_s f_{s-1} M_{n_{s-1}}(x) = [H_{s-1}(x) G_s(x) + F_s] M_{n_{s+1}}(x).$$

Обозначим $F_s f_{s-1} = F_{s-1}$, $H_{s-1}(x) G_s(x) + F_s = G_{s-1}(x)$. Тогда

$$F_{s-1} M_{n_{s-1}}(x) = G_{s-1}(x) M_{n_{s+1}}(x). \qquad (s\text{-}1)^*$$

Далее, умножим уравнение (s-2) слева на F_{s-1}, получим

$$F_{s-1} f_{s-2} M_{n_{s-2}}(x) = F_{s-1} g_{s-2}(x) M_{n_{s-1}}(x) + F_{s-1} M_{n_s}(x).$$

Найдем многочлен $H_{s-2}(x)$ из уравнения

$$F_{s-1}g_{s-2}(x) = H_{s-2}(x)F_{s-1}. \qquad (1.9.6)$$

Тогда в силу (1.9.6)

$$F_{s-1}f_{s-2}M_{n_{s-2}}(x) = H_{s-2}(x)F_{s-1}M_{n_{s-1}}(x) + F_{s-1}M_{n_s}(x)$$

или в силу (s-1)*

$$F_{s-1}f_{s-2}M_{n_{s-2}}(x) = H_{s-2}(x)G_{s-1}(x)M_{n_{s+1}}(x) + F_{s-1}M_{n_s}(x). \qquad (1.9.7)$$

Найдем α_{s-2} и β_{s-2} из уравнения

$$\alpha_{s-2}F_s = \beta_{s-2}F_{s-1}.$$

Умножив соотношение (1.9.7) слева на β_{s-2} и заменив выражение $\beta_{s-2}F_{s-1}$ по предыдущей формуле, получим

$$\beta_{s-2}F_{s-1}f_{s-2}M_{n_{s-2}}(x) = \beta_{s-2}H_{s-2}(x)G_{s-1}(x)M_{n_{s+1}}(x) + \alpha_{s-2}F_sM_{n_s}(x).$$

Учитывая (s)* найдем

$$\beta_{s-2}F_{s-1}f_{s-2}M_{n_{s-2}}(x) = [\beta_{s-2}H_{s-2}(x)G_{s-1}(x) + \alpha_{s-2}F_s]M_{n_{s+1}}(x).$$

Наконец обозначив $\beta_{s-2}F_{s-1}f_{s-2} = F_{s-2}$, $\beta_{s-2}H_{s-2}(x)G_{s-1}(x) + \alpha_{s-2}F_s = G_{s-2}(x)$, запишем окончательно

$$F_{s-2}M_{n_{s-2}}(x) = G_{s-2}(x)M_{n_{s+1}}(x). \qquad (s\text{-}2)^*$$

Предположим, что выполняется соотношения

$$F_{k+2}M_{n_{k+2}}(x) = G_{k+2}(x)M_{n_{s+1}}(x), \qquad (k+2)^*$$

$$F_{k+1}M_{n_{k+1}}(x) = G_{k+1}(x)M_{n_{s+1}}(x). \qquad (k+1)^*$$

Докажем (k)*, умножив соотношение (k)

$$f_kM_{n_k}(x) = g_k(x)M_{n_{k+1}}(x) + M_{n_{k+2}}(x)$$

слева на F_{k+1}.

$$F_{k+1}f_kM_{n_k}(x) = F_{k+1}g_k(x)M_{n_{k+1}}(x) + F_{k+1}M_{n_{k+2}}(x). \qquad (1.9.8)$$

Найдем многочлен $H_k(x)$ из уравнения

$$F_{k+1}g_k(x) = H_k(x)F_{k+1} \qquad (1.9.9)$$

и α_k, $\beta_k \in K$ из соотношения

$$\alpha_kF_{k+1} = \beta_kF_{k+2}. \qquad (1.9.10)$$

Это возможно, поскольку K — кольцо Оре, а соотношение (1.9.10) правое

— наименьшее общее кратное элементов F_{k+1}, F_{k+2}.

Заменим в (1.9.6) выражение $F_{k+1}g_k(x)$ по формуле (1.9.10) и, умножив результат слева на β_k, заменим выражение $\beta_k F_{k+1}$ по формуле (1.9.9), получим

$$\beta_k F_{k+1} f_k M_{n_k}(x) = \beta_k H_{k+1}(x) F_{k+1} M_{n_{k+1}}(x) + \alpha_k F_{k+2} M_{n_{k+2}}(x).$$

Наконец в последнем соотношении произведем замену по формуле (k+2)*. Найдем

$$\beta F_{k+1} f_k M_{n_k}(x) = [\beta H_k(x) F_{k+1} + \alpha G_{k+2}(x)] M_{n_{s+1}}(x).$$

Обозначив $\beta F_{k+1} f_k M_{n_k}(x) = F_k$, $\beta H_k(x) F_{k+1} + \alpha G_{k+2}(x) = G_k(x)$, получим

$$F_k M_{n_k}(x) = G_k(x) M_{n_{s+1}}(x). \qquad (\mathrm{k})^*$$

Таким образом, $M_{n_{s+1}}(x)$ — искомый псевдоделитель. Покажем что он наибольший. ■

Пример 1.9.1. Разделить справа с остатком оператор $\Omega_2 = x^2\omega_{2c} + (x+2)\omega_c + \varepsilon$ на оператор $\Omega_1 = x\omega_c + \varepsilon$.

Решение. Имеем $R_1^1 = \Omega_2 - \dfrac{x^2}{x+c}\omega_c\Omega_1 = x^2\omega_{2c} + (x+2)\omega_c + \varepsilon - \dfrac{x^2}{x+c}\omega_c(x\omega_c + \varepsilon) = \dfrac{(2+c)x+2c}{x+c}\omega_c + \varepsilon$. Деление еще возможно, так как порядок остатка равен порядку делителя. Далее, $R_0^2 = R_1^1 - \dfrac{(2+c)x+2c}{x(x+c)}\Omega_1 = \dfrac{x^2-2x-2c}{x(x+c)}\varepsilon$. Так как порядок остатка $R_0^2 = \dfrac{x^2-2x-2c}{x(x+c)}\varepsilon$ меньше порядка делителя, то дальнейшее деление невозможно. Исключив из полученных соотношений R_1^1, получим $\Omega_2 = \left(\dfrac{x^2}{x+c}\omega_c + \dfrac{(2+c)x+2c}{x(x+c)}\varepsilon\right)\Omega_1 + \dfrac{x^2-2x-2c}{x(x+c)}\varepsilon$.

1.10. Неевклидов алгоритм в кольце косых многочленов

Применим результаты исследования ЛАУ к построению алгоритма вычисления ПНОД (ЛНОД) косых многочленов альтернативного алгоритму Евклида. Заметим, что предлагаемый алгоритм впервые был применен к ОЛДО и опубликован в [63].

Пусть A_{n_1}, $A_{n_2}, \dots,$ A_{n_m} косые многочлены от одной «переменной» из кольца $K[x]$ и A_d (A_{d^*}) их ПНОД (ЛНОД); K — кольцо Оре. Многочлен A_d (A_{d^*}) можно вычислить, выполняя следующую последовательность шагов.

1) Составляем по формулам (1.2.7) и теореме 1.2.3 матрицу R^m (1.4.5) системы (1.4.3), которая по определению является правой результантной матрицей данного множества многочленов. С данной системой многочленов связано уравнение $\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} A_{n_j} = 0$.

2) Приводим полученную матрицу к треугольному виду, применяя метод исключения Гаусса справа, тем самым вычисляя правый ранг правой результантной матрицы. Если ранг $r_m = n_1 + n_m$, то многочлены A_{n_j}, $j = \overline{1,m}$, не имеют нетривиального ПНОД, при $r_m = n_1$, $d = n_m$. В противном случае степень ПНОД равна $d = n_1 + n_m - r_m$.

3) Пусть $n_1 < r_m < n_1 + n_m$. В этом случае делитель можно найти по любым двум многочленам данного множества, пусть это будут многочлены наименьших степеней $A_{n_{m-1}}$, A_{n_m}.

Этой паре многочленов отвечает правая результантная матрица, которая может быть получена из матрицы, построенной в пункте 2, следующим образом: удаляем все столбцы соответствующие коэффициентам неизвестных многочленов X_{s_j}, $j = \overline{1,m-2}$, удаляем столбцы соответствующие старшим коэффициентам многочленов X_{s_m}, $X_{s_{m-1}}$. Полученной матрице соответствует уравнения

$$X_{n_m-d}A_{n_{m-1}}+X_{n_{m-1}-d}A_{n_m}=0\,,$$

которое согласно теореме 1.3.3 имеет решение — ($X^0_{n_m-d}$, $X^0_{n_{m-1}-d}$), то есть $X^0_{n_m-d}A_{n_{m-1}-d}+X^0_{n_{m-1}-d}A_{n_m-d}\equiv 0$.

Найдем далее решение уравнения

$$X^0_{n_m-d}Y_{n_{m-1}-d}+X^0_{n_{m-1}-d}Y_{n_m-d}=0$$

относительно неизвестных $Y_{n_{m-1}-d}$, Y_{n_m-d}. Для упрощения решения перейдем к сопряженным:

$$Y^*_{n_{m-1}-d}X^{0*}_{n_m-d}+Y^*_{n_m-d}X^{0*}_{n_{m-1}-d}=0\,.$$

Найдем коэффициенты многочленов $Y^*_{n_{m-1}-d}$, $Y^*_{n_m-d}$ из соответствующей системы линейных уравнений.

4) ПНОД находим, из любого уравнения $A^*_{n_{m-1}}=A^*_dY^*_{n_{m-1}-d}$, $A^*_{n_m}=A^*_dY^*_{n_m-d}$, составляя систему уравнений относительно коэффициентов многочлена A_{d^*}. Наконец, находим $(A_{d^*})^*=A_d$.

Замечание. Приведенный алгоритм обладает следующими свойствами:

а) на первом же шаге устанавливается степень ПНОД, $0\le d,d^*\le n_m$;

б) таким образом, вычисление ПНОД системы из любого конечного числа многочленов сводится аналогичной задаче для двух многочленов из данной совокупности;

в) вычисление ЛНОД($A_{n_1},\ldots,A_{n_m}$) сводится к вычислению сопряженного к нему ПНОД($A^*_{n_1},\ldots,A^*_{n_m}$).

Пример 1.9.1. Найдем ПНОД многочленов $F_2(a;x)=\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0\varepsilon$, $G_2(b;x)=\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0\varepsilon$ с коэффициентами в поле K.

1) Построим правую результантную матрицу

$$\boldsymbol{R}^2=\begin{pmatrix}\alpha(\alpha_2) & 0 & \alpha(\beta_2) & 0\\ \beta(\alpha_2)+\alpha(\alpha_1) & \alpha_2 & \beta(\beta_2)+\alpha(\beta_1) & \beta_2\\ \beta(\alpha_1)+\alpha(\alpha_0) & \alpha_1 & \beta(\beta_1)+\alpha(\beta_0) & \beta_1\\ \beta(\alpha_0) & \alpha_0 & \beta(\beta_0) & \beta_0\end{pmatrix},$$

столбцы которой являются коэффициентами при неизвестных $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_0$ из уравнения

$$(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{a};\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{b};\boldsymbol{x})=0. \tag{1.10.1}$$

2) Для упрощения вычисления ранга этой матрицы методом Гаусса. транспонируем ее

$$\boldsymbol{R}^{2T}=\begin{pmatrix}\alpha(\alpha_2) & \beta(\alpha_2)+\alpha(\alpha_1) & \beta(\alpha_1)+\alpha(\alpha_0) & \beta(\alpha_0)\\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0\\ \alpha(\beta_2) & \beta(\beta_2)+\alpha(\beta_1) & \beta(\beta_1)+\alpha(\beta_0) & \beta(\beta_0)\\ 0 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0\end{pmatrix}. \tag{1.10.2}$$

Добавив к третьему уравнению первое, умноженное на $-\dfrac{\alpha(\beta_2)}{\alpha(\alpha_2)}$, получим

$$\begin{pmatrix}\alpha(\alpha_2) & \beta(\alpha_2)+\alpha(\alpha_1) & \beta(\alpha_1)+\alpha(\alpha_0) & \beta(\alpha_0)\\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0\\ 0 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0\\ 0 & \Delta_1/\alpha(\alpha_2) & \Delta_2/\alpha(\alpha_2) & \Delta_3/\alpha(\alpha_2)\end{pmatrix},$$

где $\Delta_1=\begin{vmatrix}\alpha(\alpha_2) & \alpha(\alpha_1)+\beta(\alpha_2)\\ \alpha(\beta_2) & \alpha(\beta_1)+\beta(\beta_2)\end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}\alpha(\alpha_2) & \alpha(\alpha_0)+\beta(\alpha_1)\\ \alpha(\beta_2) & \alpha(\beta_0)+\beta(\beta_1)\end{vmatrix}$, $\Delta_3=$ $=\begin{vmatrix}\alpha(\alpha_2) & \beta(\alpha_0)\\ \alpha(\beta_2) & \beta(\beta_0)\end{vmatrix}$ определители с элементами из $\boldsymbol{K}$. Добавим первую строку, умноженную на $-\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$ к третьей и умноженную на $-\dfrac{\Delta_1}{\alpha_2\alpha(\alpha_2)}$ к четвертой, получим

$$R^2 \approx \left(\left(\begin{matrix} \alpha(\alpha_2) & \beta(\alpha_2)+\alpha(\alpha_1) & \beta(\alpha_1)+\alpha(\alpha_0) & \beta(\alpha_0) \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & \Delta_4 & \Delta_5 \\ 0 & 0 & \alpha_2\Delta_2-\alpha_1\Delta_1 & \alpha_2\Delta_3-\alpha_0\Delta_1 \end{matrix}\right)\right)\frac{1}{\alpha_2^2\alpha(\alpha_2)},$$

где $\Delta_4 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix}$, $\Delta_5 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_0 \\ \beta_2 & \beta_0 \end{vmatrix}$, причем либо $\Delta_4 \neq 0$, либо $\Delta_5 \neq 0$. Для определенности пусть $\Delta_4 \neq 0$. Тогда добавив третью строку, умноженную на $-\dfrac{\alpha_2\Delta_2-\alpha_1\Delta_1}{\Delta_4}$, к последней, найдем

$$R^2 \approx \left(\left(\begin{matrix} \alpha(\alpha_2) & \beta(\alpha_2)+\alpha(\alpha_1) & \beta(\alpha_1)+\alpha(\alpha_0) & \beta(\alpha_0) \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & \Delta_4 & \Delta_5 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_6 \end{matrix}\right)\right)\frac{1}{\alpha_2^2\alpha(\alpha_2)\Delta_4}, \quad (1.10.3)$$

где величина $\Delta_6 = \Delta_4(\alpha_2\Delta_3-\alpha_0\Delta_1)-\Delta_5(\alpha_2\Delta_2-\alpha_1\Delta_1)$, вообще говоря, отлична от нуля.

Положим для упрощения дальнейших вычислений

$$\alpha_2 = g_1a_1,\ \alpha_1 = g_0a_1+g_1a_0,\ \alpha_0 = g_0a_0,\ \beta_2 = g_1b_1,$$
$$\beta_1 = g_0b_1+g_1b_0,\ \beta_0 = g_0b_0, \quad (1.10.4)$$

где g_0, $g_1 \in K_0$, а a_0, a_1, b_0, $b_1 \in K$.

Подставляя коэффициенты (1.9.5) в (1.10.3), получим $\Delta_6 = 0$. Поэтому ранг правого результанта равен трем и многочлены в этом случае имеют ПНОД многочлен первой степени.

3) На этом шаге нужно найти минимальное решение уравнения (1.10.1), что приводит к необходимости решить следующую систему с учетом сделанного выбора коэффициентов многочленов (1.10.4)

$$\left.\begin{aligned}
&g_1\alpha(a_1)p_1 + && g_1\alpha(b_1)q_1 && = 0,\\
&[g_1\beta(a_1)+g_0\alpha(a_1)+g_1\alpha(a_0)]p_1 + && g_1a_1p_0 + &&\\
&\qquad +[g_1\beta(b_1)+g_0\alpha(b_1)+g_1\alpha(b_0)]q_1 + && && g_1b_1q_0 = 0,\\
&[g_0\beta(a_1)+g_1\beta(a_0)+g_0\alpha(a_0)]p_1 + [g_0a_1+g_1a_0]p_0 + && &&\\
&\qquad +[g_0\beta(b_1)+g_1\beta(b_0)+g_0\alpha(b_0)]q_1 + [g_0b_1+g_1b_0]q_0 && && = 0,\\
&g_0\beta(a_0)p_1 + && g_0a_0p_0 + &&\\
&\qquad + g_0\beta(b_0)q_1 + && && g_0b_0q_0 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Ранг матрицы системы равен трем. Из первого уравнения находим $p_1 = \tilde{p}_1 = \alpha(b_1)$, $q_1 = \tilde{q}_1 = -\alpha(a_1)$. Подставляя в остальные, получим

$$\left.\begin{aligned}
a_1p_0 + \qquad b_1q_0 &= P_1,\\
[g_0a_1+g_1a_0]p_0 + [g_0b_1+g_1b_0]q_0 &= g_1P_2 + g_0P_1,\\
a_0p_0 + \qquad b_0q_0 &= P_2.
\end{aligned}\right\},$$

где $P_1 = \begin{vmatrix}\alpha(a_1) & \beta(a_1)+\alpha(a_0)\\ \alpha(b_1) & \beta(b_1)+\alpha(b_0)\end{vmatrix}$, $P_2 = \begin{vmatrix}\alpha(a_1) & \beta(a_0)\\ \alpha(b_1) & \beta(b_0)\end{vmatrix}$.

Решение системы из первых двух уравнений таково: $p_0 = \tilde{p}_0 = = \Delta^{-1}(b_0P_1 - b_1P_2)$, $q_0 = \tilde{q}_1 = \Delta^{-1}(a_1P_2 - a_0P_1)$, где $\Delta = \begin{vmatrix}a_1 & a_0\\ b_1 & b_0\end{vmatrix} \neq 0$. Проверка показывает, что третье уравнение удовлетворяется этим решением. Таким образом $p_1x + p_0\varepsilon = \alpha(b_1)x + \Delta^{-1}(b_0P_1 - b_1P_2)\varepsilon$, $q_1x + q_0\varepsilon = -\alpha(a_1)x + +\Delta^{-1}(a_1P_2 - a_0P_1)\varepsilon$ искомое минимальное решение.

Найдем минимальное решение уравнения

$$(\tilde{p}_1x + \tilde{p}_0\varepsilon)(B_1x + B_0\varepsilon) + (\tilde{q}_1x + \tilde{q}_0\varepsilon)(F_1x + F_0\varepsilon) = 0,$$

где B_1, B_0, F_1, F_0 неизвестные коэффициенты. Имеем систему

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(b_1)\alpha(B_1) - \qquad \alpha(a_1)\alpha(F_1) &= 0,\\
\alpha(b_1)(\beta(B_1)+\alpha(B_0)) - \alpha(a_1)(\beta(F_1)+\alpha(F_0)) + \tilde{q}_0F_1 + \tilde{p}_0B_1 &= 0,\\
\alpha(b_1)\beta(B_0) - \qquad \alpha(a_1)\beta(F_0) + \tilde{q}_0F_0 + \tilde{p}_0B_0 &= 0.
\end{aligned}\right\}$$

Применяя к первому уравнению автоморфизм α^{-1}, найдем $B_1 = a_1$, $F_1 = b_1$. Преобразуем систему, подставив известные величины

$$\left.\begin{aligned}&\begin{vmatrix}\alpha(b_1) & \beta(b_1)+\alpha(F_0)\\ \alpha(a_1) & \beta(a_1)+\alpha(B_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha(b_1) & \beta(b_1)+\alpha(b_0)\\ \alpha(a_1) & \beta(a_1)+\alpha(a_0)\end{vmatrix},\\ &\begin{vmatrix}\alpha(b_1) & \beta(F_0)\\ \alpha(a_1) & \beta(B_0)\end{vmatrix}+F_0\Delta^{-1}(a_1P_2-a_0P_1)+B_0\Delta^{-1}(b_0P_1-b_1P_2)=0.\end{aligned}\right\}\tag{1.10.5}$$

Из равенства определителей в первом уравнении и равенства первых столбцов следует, что $\alpha(F_0)=k\alpha(b_1)+\alpha(b_0)$, $\alpha(B_0)=k\alpha(a_1)+\alpha(a_0)$, где k произвольный элемент поля K. Отсюда, $F_0=\alpha^{-1}(k)b_1+b_0$, $B_0=\alpha^{-1}(k)a_1+a_0$.

Подставляя во второе уравнение, получим

$$P_3\beta(\alpha^{-1}(k))+kP_4+\alpha^{-1}(k)P_1=0,\tag{1.10.6}$$

где $P_3=\begin{vmatrix}\alpha(b_1) & b_1\\ \alpha(a_1) & a_1\end{vmatrix}$, $P_4=\begin{vmatrix}\alpha(b_1) & \beta(b_1)\\ \alpha(a_1) & \beta(a_1)\end{vmatrix}$.

Поскольку нас устроит любое нетривиальное решение, то положим $k=0$. Тогда $F_0=b_0$, $B_0=a_0$. Следовательно, многочлен $G_2(b;x)$ делится слева на многочлен $b_1x+b_0\varepsilon$.

4) Значит $G_2(b;x)=g_1b_1x^2+(g_0b_1+g_1b_0)x+g_0b_0\varepsilon=(b_1x+b_0\varepsilon)(h_1x+h_0\varepsilon)$, где h_1, h_0 — неизвестные коэффициенты. Из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x находим $h_1=g_1$, $h_0=g_0$. Таким образом ПНОД$(F_2(a;x),G_2(b;x))=g_1x+g_0\varepsilon$.

Глава 2. Дифференциальные и разностные результантные матрицы

Конструкция результанта двух алгебраических многочленов, восходящая к Дж. Сильвестру, широко применяется в алгебре. Задача о дифференциальном результанте поставленная в работе [95], была решена для линейных функционально — дифференциальных операторов в [52]. В данной главе для конечных множеств обыкновенных линейных дифференциальных операторов и обыкновенных линейных разностных операторов, рассматриваемых как частные случаи косых многочленов от одной «переменной», строятся правые и левые результантные матрицы. Доказывается теорема о связи рангов результантных матриц с порядком правого наибольшего общего делителя (ПНОД) и левого наибольшего общего делителя (ЛНОД), порядком правого наименьшего общего кратного (ПНОК) и левого наименьшего общего кратного (ЛНОК). Дальнейшее развитие теория дифференциального результанта получила в работах [9], [71 – 76], [89 – 92]. Разностный результант впервые был построен в работе [50].

2.1. Сведения из дифференциальной и разностной алгебры

Приведем некоторые понятия из дифференциальной и разностной алгебры. Обозначим через $\boldsymbol{Aut\,K}$ — кольцо всех автоморфизмов кольца $\boldsymbol{K}$, через $\boldsymbol{HomAb\,K}$ — кольцо всех гомоморфизмов кольца $\boldsymbol{K}$, рассматриваемого как абелева группа по сложению, ι — тождественное отображение. Элемент $(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{Aut\,K}\times \boldsymbol{HomAb\,K}$ $(\alpha\in \boldsymbol{Aut\,K}, \beta\in \boldsymbol{HomAb\,K})$ назовём допустимым, если $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{K}$ выполняется условие

$$(1)\ \beta(ab)=\alpha(a)\beta(b)+\beta(a)b,\ (2)\ \beta(ab)=\alpha(a)\beta(b)+\beta(a)\alpha(b); \quad (2.1.1)$$

Θ — множество всех допустимых элементов.

Отображение $\beta:\boldsymbol{K}\to \boldsymbol{K}$, удовлетворяющее условию (1), называется левым α дифференцированием кольца $\boldsymbol{K}$, а удовлетворяющее условию (2) левым α-симметричным дифференцированием кольца $\boldsymbol{K}$

Например, дифференцированиями являются:

— тривиальное дифференцирование $\beta: K \to 0$ ($\alpha = \iota, \beta = 0$);

— обычное дифференцирование $\beta: K \to K$ ($\alpha = \iota$, $\beta = d/dx = D$), если K кольцо дифференцируемых функций одной переменной (это кольцо имеет делители нуля);

— дифференцирование $\beta: K[D] \to K[D]$ по символу D в кольце обыкновенных линейных дифференциальных операторов $K[D]$ ($\alpha = \iota$, $\beta = d/dD$), (см., например, [52]);

— дифференцирование $\beta: K \to K$ в кольце K дифференцируемых функций одной переменной ($\alpha = \iota$, $\beta = x \cdot d/dx$).

Кольцо K, в котором отмечено некоторое дифференцирование, называется дифференциальным кольцом.

Обозначим через $K_\alpha = \{a \in K : \alpha(a) = a\}$, $K_\beta = \{a \in K : \beta(a) = 0\}$ подкольца кольца K. Кольцо $K_0 = K_\alpha \bigcap K_\beta$, назовем кольцом констант кольца K относительно автоморфизма α и гомоморфизма β.

Замечание. В случае некоммутативного кольца K необходимо принять один из возможных вариантов соотношения (2.1.1). В дальнейшем мы следуем указанной в (1) формуле.

В [24] приведена теорема, справедливая для любого ι дифференцирования.

Теорема 2.1.1. Любое дифференцирование в коммутативной области целостности допускает единственное продолжение на соответствующее поле частных.

Согласно этому утверждению дифференцирование в поле частных определяется формулой $\beta(a/b) = \dfrac{\beta(a)b - a\beta(b)}{b^2}$, $b \neq 0$. Эта формула корректна, ибо не меняется при замене a/b на $(c \cdot a)/(c \cdot b)$. Справедливость формул дифференцирования суммы и разности проверяются непосредственно, что легко проверяется вычислением.

Заметим, что это утверждение, вообще говоря, неверно для произвольного α дифференцирования. Для α- симметричного дифференцирования формула продолжения на поле частных имеет вид $\beta(a/b)=$ $=\dfrac{\beta(a)\alpha(b)-\alpha(a)\beta(b)}{\alpha(b)^2}$.

Скажем, что в кольце K отмечен разностный оператор, если в K определено аддитивное отображение $\omega_c : K \to K$, удовлетворяющее условиям: $\omega_c(1)=1$, $\omega_c(a)=0 \leftrightarrow a=0$, $\omega_c(ab)=\omega_c(a)\omega_c(b)=a^c b^c \quad \forall a,b \in K$, где a^c, b^c — образы элементов a, b, а элемент c принадлежит подкольцу K_0 кольца K, образованному элементами неподвижными относительно отображения ω_c. Кольцо K в таком случае называется разностным кольцом, оператор ω_c — разностным оператором, а подкольцо K_0 — подкольцом констант относительно отображения. Оператор ω_c продолжается на поле отношений по формуле $\omega_c(a/b)=\dfrac{\omega_c(a)}{\omega_c(b)}$, $b \neq 0$.

Пусть K — некоторое алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики содержащее поле комплексных чисел $C \subset K$ и $K[x]$ — поле функций вещественной или комплексной переменной x, в котором отмечен оператор ω_c, ставящий в соответствие каждой функции $f(x) \in K[x]$ функцию $\omega_c(f(x)) = f(x+c) \in K[x]$, $c \in C$. Подполе $K_0 \subset K$, образованное элементами $f(x) \in K[x]$: $\omega_c(f(x)) = f(x)$, является подполем констант.

Оператор ω_c — разностный, а поле $K[x]$ с отмеченным разностным оператором — разностное поле (по аналогии с дифференциальным полем). Например, при $c=1$ оператор ω_c рассматривался в [13], разностным кольцам посвящены монографии [81], [86], [109].

Для оператора ω_c и $\forall f(x), g(x) \in K[x]$, $\forall c \in K_0$, очевидно, выполняется:

i) $\omega_c(a)=a$, $\forall a \in K_0$;

ii) $\omega_c(f(x)+g(x)) = \omega_c(f(x)) + \omega_c(g(x)) = f(x+c)+g(x+c)$;

iii) $\omega_c(f(x)g(x)) = \omega_c(f(x))\omega_c(g(x)) = f(x+c)g(x+c)$;

vi) $\omega_0(f(x)) = f(x)$, $\omega_0 = \varepsilon$ — тождественное отображение.

Произведение отображений ω_{c_1}, ω_{c_2} определяется как отображение $\omega_{c_1+c_2}$. Для степени $(\omega_c)^k = \omega_{ck}$, $\omega_{ck}(f(x)) = f(x+ck)$ $\forall k \in N$ будем пользоваться обозначениями $\omega_{ck}(f(x)) = f(x+kc) = f^{[kc]}$.

Обозначим $P = K[x]$, $P[\omega_c]$ — кольцо многочленов от ω_c вида $\Omega_n = \Omega_n(a) = \Omega_n(a;\omega_c) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,\omega_{ic}$ с коэффициентами $a_i(x) \in K[x]$. Коэффициент $a_n \neq 0$, поэтому n — порядок оператора (многочлена) Ω_n. Умножение в кольце $P[\omega_c]$ определяется по правилу $\omega_c(f(x)\cdot\varepsilon) = f(x+c)\omega_c$ $\forall f(x) \in P$. Ясно, что кольцо $P[\omega_c]$ — ассоциативное, но, вообще говоря, некоммутативное.

Отображение, обратное к ω_c, обозначим через ω_{-c}. По определению $\omega_c\,\omega_{-c} = \omega_{-c}\,\omega_c = \omega_0 = \varepsilon$. Сопоставим кольцу $P[\omega_c]$ кольцо $P[\omega_{-c}]$ операторов $\Omega_n^*(a;\omega_{-c}) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,\omega_{-ic}$, $a_i(x) \in P$, положив $(\omega_c)^* = \omega_c^* = \omega_{-c}$. Отображение (*) кольца $P[\omega_c]$ в кольцо $P[\omega_c]$ определяется так: если $\Omega_n(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,\omega_{ic}$, то

$$(\Omega_n(a))^* = \Omega_n^* = \sum_{i=0}^{n} \omega_{ic}^*(a_i\,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \omega_{-ic}(a_i\,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-ic)\omega_{-ic} \in P[\omega_{-c}].$$

Теорема 2.1.2. Отображение $*: P[\omega_c] \to P[\omega_{-c}]$ является изоморфизмом.

Доказательство. Действительно, указанное отображение взаимно однозначно и сюръективно. Легко проверяется, что $(\Omega_n + \Omega_m)^* = \Omega_n^* + \Omega_m^*$, $(\Omega_n\Omega_m)^* = \Omega_m^*\Omega_n^*$ и $(\Omega_n)^* = \Omega_n^*$. Аналогично, отображение $*: P[\omega_{-c}] \to P[\omega_c]$ также взаимно однозначно и сюръективно. ■

Операторы Ω_n, Ω_n^* называются формально взаимно сопряженными.

2.2. Линейное уравнение с коэффициентами в кольце ОЛДО

Как было показано в первой главе кольцо косых многочленов $K[x]$, изоморфно кольцу обыкновенных линейных дифференциальных операторов (ОЛДО) $K[\delta]$ при выборе $\gamma(x)=(\iota,\delta)$, где ι — тождественное отображение, а гомоморфизм δ — ι - дифференцирование поля K.

Возьмем множество операторов $D_{n_j}=D_{n_j}(a_j;\delta)=\sum_{k=0}^{n_j} a_{j,k}\delta^k$, $j=\overline{1,m}$, порядков n_j, из кольца $K[\delta]$. Будем считать, что $n_1 \ge n_2 \ge \dots \ge n_m$, $n_1=\max(n_j)$, $n_m=\min(n_j)$.

Уравнение (1.3.1) примет вид

$$\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} D_{n_j}=0, \qquad (2.2.1)$$

где $X_{s_j}=\sum_{k=0}^{s_j} x_{j,k}\delta^k$ — операторы порядка s_j, $0 \le s_j \le n_1+n_m-n_j-1$, с буквенными коэффициентами, подлежащие определению в кольце $K[\delta]$.

Покажем, что уравнение (2.2.1) связано с отысканием ПНОД его коэффициентов. Перемножив операторы в уравнении (2.2.1), запишем его в эквивалентной форме

$$\sum_{l=0}^{n_1+m_m-1} f_l\delta^l =0, \qquad (2.2.2)$$

где коэффициенты f_l — линейные формы неизвестных $x_{j,k}$ с коэффициентами из K. Для определения $x_{j,k}$ имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$f_l(\dots,x_{j,k},\dots)=0,\ l=\overline{0,n_1+n_m-1},\ j=\overline{1,m}\ ,\ k=\overline{0,s_j}, \qquad (2.2.3)$$

состоящую из n_1+n_m уравнений и $\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)$ неизвестных.

Допустим, что ранг системы (2.2.3) равен r. Без ограничения общности можно считать линейно независимыми формы f_l с номерами

$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - \boldsymbol{r}, ..., \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - 1$.

Для остальных $\boldsymbol{f}_l$, следовательно, имеем

$$\boldsymbol{f}_l = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-1} \boldsymbol{g}_{k,l} \boldsymbol{f}_k, \ \boldsymbol{l} = 0, \ \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - \boldsymbol{r} - 1, \tag{2.2.4}$$

где $\boldsymbol{g}_{k,l}$ зависят только от коэффициентов операторов $\boldsymbol{D}_{n_j}$ и их производных. Подставляя (2.2.4) в (2.2.2), получим

$$\sum_{\boldsymbol{l}=\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-1} \boldsymbol{f}_l \left(\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-\boldsymbol{r}-1} (\boldsymbol{g}_{k,l} \boldsymbol{\delta}^k + \boldsymbol{\delta}^l) \right) = 0. \tag{2.2.5}$$

Обозначив $\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-\boldsymbol{r}-1} (\boldsymbol{g}_{k,l} \boldsymbol{\delta}^k + \boldsymbol{\delta}^l)$ через $\boldsymbol{P}_l$, запишем соотношение (2.2.5)

$$\sum_{\boldsymbol{l}=\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-1} \boldsymbol{f}_l \boldsymbol{P}_l = 0. \tag{2.2.6}$$

Теорема 2.2.1. Оператор $\boldsymbol{P}_{n_1+n_m-r}$ является правым делителем операторов $\boldsymbol{P}_l$.

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{y}_i\}(\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - \boldsymbol{r}})$ — некоторый базис пространства решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$\boldsymbol{P}_{n_1+n_m-r}(\boldsymbol{y}) = 0. \tag{2.2.7}$$

Из (2.2.6) следует

$$\sum_{\boldsymbol{l}=\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-1} \boldsymbol{f}_l \boldsymbol{P}_l(\boldsymbol{y}_i) = 0. \tag{2.2.8}$$

Если не все $\boldsymbol{P}_l(\boldsymbol{y}_i) = 0$, то (2.2.8) указывает на линейную зависимость форм $\boldsymbol{f}_l$, но это противоречит предположению, что ранг системы (2.2.3) равен $\boldsymbol{r}$. Следовательно, $\boldsymbol{P}_l(\boldsymbol{y}_i) = 0$ для всех $\boldsymbol{l}$ и всех $\boldsymbol{i}$ и операторы $\boldsymbol{P}_l$ делятся справа на оператор $\boldsymbol{P}_{n_1+n_m-r}$. ■

Теорема 2.2.2. Операторы $\boldsymbol{D}_{n_j}$ делятся справа на оператор $\boldsymbol{P}_{n_1+n_m-r}$.

Доказательство. Из теоремы 2.2.1 и уравнения (2.2.6) следует, что

$\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} D_{n_j}(y_i) = 0$ для каждого решения уравнения (2.2.7). Обозначив $D_{n_j}(y_i)$ через $h_{j,i}$, последнее равенство запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} \cdot h_{j,i} = \cdots + x_{j,s_j} h_{j,i}^{(s_j)} + x_{j,s_{j-1}} h_{j,i}^{(s_{j-1})} + \cdots + x_{j,0} h_{j,i} + \cdots = 0 .$$

Так как это равенство должно выполняться при произвольных значениях $x_{j,k}$, то $h_{j,i} = 0$. Отсюда $D_{n_j}(y_i) \equiv 0$ для каждого решения уравнения (2.2.7). Поэтому оператор $P_{n_1+n_m-r}$ делит все операторы D_{n_j} справа. ■

Следствие 2.2.1. При $r > 0$ оператор $P_{n_1+n_m-r}$ является ПНОД операторов D_{n_j}.

2.3. Общее решение линейного уравнения в кольце ОЛДО

Опишем правое над полем K пространство P^m решений уравнения (2.2.1), удовлетворяющих условию $0 \le s_j \le n_1 + n_m - n_j - 1$. Задача состоит в отыскании неизвестных ОЛДО $X_{s_j} \in K[\delta]$ — порядков, не превосходящих $0 \le s_j \le n_1 + n_m - n_j - 1$ и таких, что координаты векторов $(X_{s_1}, \ldots, X_{s_b})$ удовлетворяют уравнению и являются линейно независимыми слева над полем K, то есть в построении левого базиса пространства P^m над полем K.

Пусть $D_{d_i} =$ ПНОД$(D_{n_i}, D_{d_{i-1}})$, $i = \overline{1, m-1}$, обозначим $D_{d_0} = D_{n_m}$, таким образом, $n_1 \ge \ldots \ge n_m = d_0 \ge d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_{m-1} = d$.

Записав уравнение (2.2.1) в виде эквивалентной системы

$$\left.\begin{aligned} & X_{s_1} D_{n_1-d_1} + X_{s_m} D_{n_m-d_1} = Y_{s_0-d_1}, \\ & Y_{s_0-d_k} D_{d_k-d_{k+1}} + X_{s_{k+1}} D_{n_{k+1}-d_{k+1}} = Y_{s_0-d_{k+1}}, k = \overline{1, m-3}, \\ & Y_{s_0-d_{m-2}} D_{d_{m-2}-d_{m-1}} + X_{s_{m-1}} D_{n_{m-1}-d_{m-1}} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.3.1}$$

где положено $s_0 = n_1 + n_m - 1$, и вычислив, все линейно независимые слева решения указанного типа, получим частный случай теоремы 1.3.7.

Теорема 2.3.1. $\dim P^m = (n_1 + n_m)(m-2) - \sum_{j=2}^{m-1} n_j + d$.

Левый базис пространства P^m имеет вид:

$$V^{k_1} = (X_{s_1}^{k_1}, X_{s_2}^{k_1}, ..., \delta^{k_1} X_{d_{m-2}-d_{m-1}}^0, X_{s_m}^{k_1}),\ k_1 = \overline{0, s_0 - n_{m-1} - d_{m-2} + d_{m-1}},$$

$$V^{k_2} = (X_{s_1}^{k_2}, X_{s_2}^{k_2}, ..., X_{s_{m-3}}^{k_2}, \delta^{k_2} X_{d_{m-3}-d_{m-2}}^0, 0, X_{s_m}^{k_2}),\ k_2 = \overline{0, s_0 - n_{m-2} - d_{m-3} + d_{m-2}},$$

$$V^{k_3} = (X_{s_1}^{k_3}, X_{s_2}^{k_3}, ..., X_{s_{m-4}}^{k_3}, \delta^{k_3} X_{d_{m-4}-d_{m-3}}^0, 0, 0, X_{s_m}^{k_3}),\ k_3 = \overline{0, s_0 - n_{m-3} - d_{m-4} + d_{m-3}},$$

и т.д.,

$$V^{k_{m-2}} = (X_{s_1}^{k_{m-2}}, \delta^{k_{m-2}} X_{d_1-d_2}^0, 0, ..., 0, X_{s_m}^{k_{m-2}}),\ k_{m-2} = \overline{0, s_0 - n_2 - d_1 + d_2},$$

$$V^{k_{m-1}} = (\delta^{k_{m-1}} X_{n_m-d_1}^0, 0, ..., 0, \delta^{k_{m-1}} X_{n_1-d_1}^0).\ k_{m-1} = \overline{0, d_1 - 1}.$$

Координаты векторов являются решениями соответствующих уравнений. Очевидно, векторы V^{k_j}, $j = \overline{1, m-1}$ линейно независимы слева над K.

Если не налагать ограничений на порядки операторов X_{s_j} то справедливо

Следствие 2.3.1. Общее решение уравнения (2.2.1) над кольцом $K[\delta]$ имеет вид $\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k_j=0}^{q_j} Y_{j,k_j} V^{k_j}$, где q_j — верхние границы пределов изменения переменных k_j, Y_{j,k_j} — произвольные операторы из $K[\delta]$.

2.4. Результантные матрицы системы ОЛДО

Элементы правой и левой результантных матриц вычислим используя выражения для коэффициентов [95, 48] оператора $D_{n+m} = D_n(a;\delta) \cdot D_m(b;\delta) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k(a,b)\delta^k$, которые получим, полагая в формуле (1.2.5) $\alpha = \iota$, $\beta = \delta$,

$$c_\kappa(a,b) = \sum_{s=\max(0,\kappa-n)}^{\min(m,\kappa)} \sum_{i=s}^{n} \binom{i}{s} b_{\kappa-s}^{(i-s)} a_i,\ \kappa = \overline{0, n+m}. \tag{2.4.1}$$

Из (2.4.1) при $n = r$, $a_r = 1$, $a_i = 0$ $\forall i \neq r$ находим выражения для коэффициентов $c_{r,k}(b)$ оператора $\delta^r D_m$

$$c_{r,\kappa}(b) = \sum_{s=\max(0,\kappa-m)}^{\min(r,\kappa)} \binom{r}{s} b_{\kappa-s}^{(r-s)} \text{ , } k = \overline{0, r+m} \,. \tag{2.4.2}$$

Формулу (2.4.2) можно преобразовать к виду

$$c_{r,k}(b) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{r} \binom{r}{i} b_{k-i}^{(r-i)} & \text{при } r \le k \text{ или } r > k \text{ и } k \le m; \\ \sum\limits_{i=k-m}^{r} \binom{r}{i} b_{k-i}^{(r-i)} & \text{при } r \le k \text{ или } r > k \text{ и } k > m. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Имеет место следствие из теоремы 1.2.3 [48].

Теорема 2.4.1. 1) $c_{0,k}(b) = b_k$, $k = \overline{0,m}$;

2) $c_{r-j,\, r+m-j}(b) = b_m$, $j = \overline{1,r}$;

3) $c_{r,k}(b) = c_{r-1,k-1}(b) + \delta\, c_{r-1,k}(b)$.

Перемножив многочлены в уравнении (2.2.1)

$$\sum_{l=0}^{n_1+n_m-1} \left(\sum_{k_1=\max(0,l-n_1)}^{s_1} f_{s_1,k_1} c_{k_1,l}(a_1) + \ldots + \sum_{k_m=\max(0,l-n_m)}^{s_m} f_{s_m,k_m} c_{k_m,l}(a_m) \right) \delta^l = 0 \tag{2.4.4}$$

и приравняв к нулю коэффициенты при степенях δ получим

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{k_1=\max(0,l-n_1)}^{s_1} f_{s_1,k_1} c_{k_1,l}(a_1) + \ldots + \sum_{k_m=\max(0,l-n_m)}^{s_m} f_{s_m,k_m} c_{k_m,l}(a_m) = 0, \\ & l = n_1 + n_m - 1,\ n_1 + n_m + 2,\ \ldots,\ 1,\ 0. \end{aligned} \right\} \tag{2.4.5}$$

Матрица этой системы является правой результантной матрицей данного множества операторов. Её можно построить, не выписывая систему (2.4.5), а сопоставив каждому оператору D_{n_k} матрицу $M_k(a_k)$ размерности $(n_1 + n_m) \times (s_k + 1)$

$$M_k(a_k)=\begin{pmatrix} c_{s_k,n_1+n_m-1}(a_k) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{s_k,n_1+n_m-2}(a_k) & c_{s_k-1,n_1+n_m-2}(a_k) & \dots & \dots & 0 \\ c_{s_k,n_1+n_m-3}(a_k) & c_{s_k-1,n_1+n_m-3}(a_k) & \dots & c_{1,n_k+1}(a_k) & \dots \\ c_{s_k,n_1+n_m-4}(a_k) & c_{s_k-1,n_1+n_m-4}(a_k) & \dots & c_{1,n_k}(a_k) & c_{0,n_k}(a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s_k,1}(a_k) & c_{s_k-1,1}(a_k) & \dots & c_{1,1}(a_k) & c_{0,1}(a_k) \\ c_{s_k,0}(a_k) & c_{s_k-1,0}(a_k) & \dots & c_{1,0}(a_k) & c_{0,0}(a_k) \end{pmatrix}, \quad (2.4.6)$$

элементы которой вычисляются по формулам (2.4.2) или (2.4.3).

По определению правая результантная матрица R^m операторов D_{n_k} имеет вид

$$R^m=(M_1(a_1),...,M_m(a_m)). \quad (2.4.7)$$

Замечание. Каждая из матриц $M_k(a_k)$ может быть легко построена следующим образом: последний столбец матрицы размером $(n_1+n_m)\times(s_k+1)$ заполняется нулями и в конце — коэффициентами оператора D_{n_k}. Следующий столбец получается из предыдущего по формуле 3) теоремы 2.4.1.

Левая результантная матрица R^{m*} операторов D_{n_j} — это правая результантная матрица операторов $D^*_{n_j}$, формально сопряженных к операторам D_{n_j}.

Для правых рангов $r_m = rang\, R^m$ ($r^*_m = rang\, R^{m*}$) правой (левой) результантных матриц и порядков $d_{m-1} = ord$ ПНОД(D_{n_j}) ($d^*_{m-1} = ord$ ЛНОД(D_{n_j})) справедливо следствие из теоремы 1.4.1.

Теорема 2.4.2.

$$n_1+n_m=r_m+d_{m-1}\ (n_1+n_m=r^*_m+d^*_{m-1}). \quad (2.4.8)$$

Пусть ν_m (ν^*_m) порядок правого (левого) наименьшего общего кратного операторов ПНОК (ЛНОК) D_{n_j}, тогда

$$\nu_m = rang\, R^m \ (\nu_m^* = rang\, R^{m*}).$$

Приведенные формулы следует из аналогичных для косых многочленов.

Пример 2.4.1. Построить правую и левую результантные матрицы операторов $D_3 = \delta^3 + x\delta^2 + 3\delta + x\varepsilon$, $D_2^1 = \delta^2 + (x+2)\delta + (1+2x)\varepsilon$, $D_2^2 = x\delta^2 +$ $+(x^2+1)\delta + 2x\varepsilon$, считая, что коэффициенты принадлежат полю рациональных функций. Здесь $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 2$.

Выпишем линейное уравнение

$$(f_1\delta + f_0\varepsilon)D_3 + (g_2\delta^2 + g_1\delta + g_0\varepsilon)D_2^1 + (h_2\delta^2 + h_1\delta + h_0\varepsilon)D_2^2 = 0. \quad (2.4.9)$$

Видим, что правая результантная матрица R^3 имеет размерность 5×8 и является матрицей системы уравнений на неизвестные коэффициенты f_1, f_0, g_2, g_1, g_0, h_2, h_1, h_0. Построим её, используя свойство 3) теоремы 2.4.1,

$$R^3 = \left(\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ x & 1 & x+2 & 1 & 0 & x^2+3 & x & 0 \\ 4 & x & 2x+3 & x+2 & 1 & 6x & x^2+2 & x \\ x & 3 & 4 & 2x+2 & x+2 & 6 & 4x & x^2+1 \\ 1 & x & 0 & 2 & 2x+1 & 0 & 2 & 2x \end{array}\right)\right).$$

Чтобы построить левую результантную матрицу, перейдем к сопряженным операторам: $D_3^* = -\delta^3 + x\delta^2 - \delta + x\varepsilon$, $D_2^{1*} = \delta^2 - (x+2)\delta + 2x\varepsilon$, $D_2^{2*} =$ $= x\delta^2 + (1-x^2)\delta$. Получим

$$R^{3*} = \left(\left(\begin{array}{cccccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ x & -1 & -x-2 & 1 & 0 & -x^2+3 & x & 0 \\ 0 & x & 2x-2 & -x-2 & 1 & -4x & -x^2+2 & x \\ x & -1 & 4 & 2x-1 & -x-2 & -2 & -2x & -x^2+1 \\ 1 & x & 0 & 2 & 2x & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right).$$

Пример 2.4.2. Вычислить ПНОД и ЛНОД операторов из предыдущего примера, применив неевклидов алгоритм.

1) Правая и левая результантные матрицы построены в предыдущем примере.

2) Поскольку коэффициенты операторов принадлежат полю, то для приведения матрицы к треугольному виду применяем обычный метод Гаусса

$$\left(\left(\begin{matrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -3 & -\boldsymbol{x} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -\boldsymbol{x} & 2 & \boldsymbol{x} \\ 0 & 0 & 0 & 8\boldsymbol{x}+8 & -3\boldsymbol{x}+3 & \boldsymbol{x}^2+5\boldsymbol{x}+6 & 2\boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{x}-4 & -3\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}+1 & \begin{matrix} 5\boldsymbol{x}^3+20\boldsymbol{x}^2+ \\ +5\boldsymbol{x}-6 \end{matrix} & \begin{matrix} 2\boldsymbol{x}^3+2\boldsymbol{x}^2+ \\ +8\boldsymbol{x}+12 \end{matrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{x}^3+2\boldsymbol{x}^2+ \\ +5\boldsymbol{x} \end{matrix} \end{matrix}\right)\right),$$

видим, что ранг матрицы $\boldsymbol{R}^{3*}$ равен пяти и по теореме 2.4.1 совокупность операторов не имеет нетривиальных левых делителей.

Приведя матрицу $\boldsymbol{R}^3$ к треугольному виду,

$$\left(\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & \boldsymbol{x} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -\boldsymbol{x} & 2 & \boldsymbol{x} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2\boldsymbol{x}+3 & \boldsymbol{x}+4 & 2\boldsymbol{x}-1 \end{matrix}\right)\right), \qquad (2.4.10)$$

её ранг равен четырем. Следовательно, по теореме 2.4.1 операторы имеют правый делитель первого порядка. Для его вычисления можно взять любые два оператора из предложенных, возмем $\boldsymbol{D}_2^1$, $\boldsymbol{D}_2^2$.

3) Этому выбору соответствует уравнение

$$(\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{g}_0\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{D}_2^1 + (\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{h}_0\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{D}_2^2 = 0. \qquad (2.4.11)$$

Матрицу системы уравнений на коэффициенты $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_0$ получим из матрицы (2.4.10) вычеркивая столбцы, отвечающие переменным $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_0$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{h}_2$ и нулевые строки:

$$\left(\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \boldsymbol{x} & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \boldsymbol{x} \\ 5 & 0 & \boldsymbol{x}+4 & 2\boldsymbol{x}-1 \end{matrix}\right)\right).$$

Или после приведения к треугольному виду

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & -2x+2 & x \\ 0 & 0 & -4x+4 & 2x-1 \end{pmatrix}\right).$$

Отсюда имеем систему уравнений на коэффициенты g_1, g_0, h_1, h_0

$$\left.\begin{array}{llll} g_1 & +xh_1 & & =0, \\ & g_0 \quad +(-2x+2)h_1 & +xh_0 & =0, \\ & (-4x+4)h_1 & +(2x-1)h_0 & =0 \end{array}\right\},$$

из которой находим $g_1 = x - 2x^2$, $g_0 = 2 - 2x$, $h_1 = -1 + 2x$, $h_0 = -4 + 4x$. Поэтому $((x-2x^2)\delta + (2-2x)\varepsilon)\,D_2^1 + ((-1+2x)\delta + (-4+4x)\varepsilon)\,D_2^2 \equiv 0$.

Составляем уравнение

$$((x-2x^2)\delta + (2-2x)\varepsilon)\,Y_1^1 + ((-1+2x)\delta + (-4+4x)\varepsilon)\,Y_1^2 = 0$$

относительно неизвестных операторов Y_1^1, Y_1^2. Перейдем к сопряженному уравнению, сведя задачу отыскания неизвестных коэффициентов к решению системы линейных алгебраических уравнений (в противном случае дифференциальных уравнений)

$$Y_1^{1*}((2x^2 - x)\delta + (1+2x)\varepsilon) + Y_1^{2*}((1-2x)\delta + (4x-6)\varepsilon) = 0,$$

где $Y_1^{1*} = a_1\delta + a_0\varepsilon$, $Y_1^{2*} = b_1\delta + b_0\varepsilon$. Следовательно, неизвестные a_1, a_0, b_1, b_0 удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\left.\begin{array}{rrrrl} (2x^2-x)a_1 + & & (1-2x)b_1 & & =0, \\ 6xa_1 + & (2x^2-x)a_0 + & (4x-8)b_1 + & (1-2x)b_0 & =0, \\ 2a_1 + & (2x+1)a_0 + & 4b_1 + & (4x-6)b_0 & =0, \end{array}\right\}$$

из которой получаем $a_1 = 1$, $a_0 = -2$, $b_1 = x$, $b_0 = 0$. Таким образом $Y_1^{1*} = \delta - 2\varepsilon$, $Y_1^{2*} = x\delta$ или $Y_1^1 = -\delta - 2\varepsilon$, $Y_1^2 = -x\delta - \varepsilon$.

4) Обозначим D_1 =ПНОД(D_2^1, D_2^2), тогда $D_1^* Y_1^{1*} = D_2^{1*}$, $D_1^* Y_1^{2*} = D_2^{2*}$. Поэтому $(f\delta + g\varepsilon)(\delta - 2\varepsilon) = \delta^2 + (-x-2)\delta + 2x\varepsilon$. Отсюда, сравнивая коэффициенты при степенях δ, находим $D_1^* = -\delta + x\varepsilon$. То есть $D_1 = \delta + x\varepsilon$ — искомый правый наибольший общий делитель операторов.

Заметим, что в отличие от алгоритма Евклида процесс обрывается на этапе вычисления ранга результантной матрицы, если установлено, что правый ранг результантной матрицы равен числу её строк. В противном случае процесс продолжается только с двумя операторами наименьшей степени.

Для сравнения предлагаем вычислить наибольший общий делитель методом евклидова деления.

2.5. Линейное уравнение в кольце ОЛРО

Пусть теперь $\boldsymbol{\Omega}_{n_j} = \boldsymbol{\Omega}_{n_j}(\boldsymbol{a}_j;\boldsymbol{\omega}_c) = \sum_{k=0}^{n_j} \boldsymbol{a}_{j,k}\,\boldsymbol{\omega}_{kc}$, $\boldsymbol{j} = \overline{1,\boldsymbol{m}}$, заданные операторы из кольца $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_c]$, где $\boldsymbol{K}$ — поле с разностным оператором $\boldsymbol{\omega}_c$. Положим $\boldsymbol{n}_1 \geq \boldsymbol{n}_2 \geq \cdots \geq \boldsymbol{n}_m$ и $\boldsymbol{n}_1 = \mathbf{max}\left(\boldsymbol{n}_j\right)$, $\boldsymbol{n}_m = \mathbf{min}\left(\boldsymbol{n}_j\right)$. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{X}_{s_j}\,\boldsymbol{\Omega}_{n_j} = 0, \tag{2.5.1}$$

где $\boldsymbol{X}_{s_j} = \sum_{k=0}^{s_j} \boldsymbol{x}_{j,k}\,\boldsymbol{\omega}_{kc}$ операторы порядка $\boldsymbol{s}_j = \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - \boldsymbol{n}_j - 1$ с буквенными коэффициентами, подлежащие определению в кольце $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_c]$.

Перемножив операторы в уравнении (2.5.1), запишем его в эквивалентной форме

$$\sum_{l=0}^{n_1+m_m-1} \boldsymbol{f}_l\boldsymbol{\omega}_{lc} = 0, \tag{2.5.2}$$

где коэффициенты $\boldsymbol{f}_l$ — линейные формы неизвестных $\boldsymbol{x}_{j,k}$ с коэффициентами $\boldsymbol{\Gamma}_{r,k}(\boldsymbol{a}_j)$. Для определения $\boldsymbol{x}_{j,k}$ имеем систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из $\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m$ уравнений и $\sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{s}_j + 1)$ неизвестных:

$$\boldsymbol{f}_l(\ldots,\boldsymbol{x}_{j,k},\ldots) = 0,\ \boldsymbol{l} = \overline{0,\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - 1},\ \boldsymbol{j} = \overline{1,\boldsymbol{m}},\ \boldsymbol{k} = \overline{0,\boldsymbol{s}_j}. \tag{2.5.3}$$

Предположим, что ранг матрицы системы (2.5.3) равен $\boldsymbol{p}$. Без ограничения общности можно считать линейно независимыми формы $\boldsymbol{f}_l$ с номерами $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - \boldsymbol{p},\ldots,\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - 1$.

Для остальных f_l, следовательно, имеем

$$f_l = \sum_{k=n_1+n_m-p}^{n_1+n_m-1} g_{k,l} f_k\,,\ l = 0,\dots,n_1+n_m-p-1\,, \qquad (2.5.4)$$

где $g_{k,l}$ зависят только от коэффициентов операторов Ω_{n_j} и их производных. Подставляя (2.5.4) в (2.5.3), получим

$$\sum_{l=n_1+n_m-p}^{n_1+n_m-1} f_j\Big(\sum_{k=0}^{n_1+n_m-p-1}(g_{k,l}\omega_{kc}+\omega_l)\Big)=0\,. \qquad (2.5.5)$$

Обозначив $\sum\limits_{k=0}^{n_1+n_m-p-1}(g_{k,l}\omega_{kc}+\omega_l)$ через Q_l, соотношение (2.5.5) запишем так:

$$\sum_{l=n_1+n_m-p}^{n_1+n_m-1} f_l Q_l = 0\,. \qquad (2.5.6)$$

Теорема 2.5.1. Оператор $Q_{n_1+n_m-p}$ является правым делителем операторов Q_l.

Доказательство. Пусть $\{y_i\}(i=\overline{n_1+n_m-p})$ — некоторый базис пространства решений обыкновенного линейного разностного уравнения

$$Q_{n_1+n_m-p}(y)=0\,. \qquad (2.5.7)$$

Из (2.5.7) следует

$$\sum_{l=n_1+n_m-p}^{n_1+n_m-1} f_l Q_l(y_i)=0\,. \qquad (2.5.8)$$

Если не все $Q_l(y_i)=0$, то (2.5.8) указывает на линейную зависимость форм f_l, но это противоречит предположению, что ранг системы (2.5.3) равен p. Следовательно, $Q_l(y_i)=0$ для всех l и всех i и операторы Q_l делятся справа на оператор $Q_{n_1+n_m-p}$. ■

Теорема 2.5.2. Операторы Ω_{n_j} делятся справа на оператор $Q_{n_1+n_m-p}$.

Доказательство. Из теоремы 2.5.1 и уравнения (2.5.1) следует, что $\sum\limits_{j=1}^{m} X_{s_j}\Omega_{n_j}(y_i)=0$ для каждого решения уравнения (2.5.7). Обозначив

$\boldsymbol{\Omega}_{n_j}(\boldsymbol{y}_i)$ через $\boldsymbol{h}_{j,l}$, последнее равенство запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{X}_{s_j}\boldsymbol{h}_{j,i}=\ldots+\boldsymbol{x}_{j,s_j}\boldsymbol{h}_{j,i}^{(s_j)}+\boldsymbol{x}_{j,s_{j-1}}\boldsymbol{h}_{j,i}^{(s_{j-1})}+\ldots+\boldsymbol{x}_{j,0}\boldsymbol{h}_{j,i}+\ldots=0.$$

Так как это равенство должно выполняться при произвольных значениях $\boldsymbol{x}_{j,k}$, то $\boldsymbol{h}_{j,i}=0$. Отсюда $\boldsymbol{\Omega}_{n_j}(\boldsymbol{y}_i)\equiv 0$ для каждого решения уравнения (2.5.7) и, следовательно, оператор $\boldsymbol{Q}_{n_1+n_m-p}$ является правым делителем операторов $\boldsymbol{\Omega}_{n_j}$. ■

Вывод. Если ранг матрицы системы (2.5.3) равен $\boldsymbol{p}$, то оператор $\boldsymbol{Q}_{n_1+n_m-p}$ порядка $\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-\boldsymbol{p}>0$ является общим правым делителем операторов $\boldsymbol{\Omega}_{n_j}$.

2.6. Общее решение линейного уравнения в кольце ОЛРО

Опишем левое над $\boldsymbol{K}$ пространство $\boldsymbol{P}^m$ решений уравнения (2.5.1), в котором $\boldsymbol{n}_1\ge\boldsymbol{n}_2\ge\cdots\ge\boldsymbol{n}_m$, $\boldsymbol{n}_1=\mathbf{max}(\boldsymbol{n}_j)$, $\boldsymbol{n}_m=\mathbf{min}(\boldsymbol{n}_j)$, $\boldsymbol{X}_{s_j}=\sum_{k=0}^{s_j}\boldsymbol{x}_{j,k}\,\boldsymbol{\omega}_{kc}$ — операторы порядка $\boldsymbol{s}_j$, $0\le\boldsymbol{s}_j\le\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_m-\boldsymbol{n}_j-1$ с буквенными коэффициентами, подлежащие определению в кольце $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_c]$, коэффициенты $\boldsymbol{\Omega}_{n_j}=$ $=\boldsymbol{\Omega}_{n_j}(\boldsymbol{a}_j;\boldsymbol{\omega}_c)=\sum_{k=0}^{n_j}\boldsymbol{a}_{j,k}\,\boldsymbol{\omega}_{kc}$ ($\boldsymbol{j}=\overline{1,\boldsymbol{m}}$), $\boldsymbol{\Omega}_{d_0}=\boldsymbol{\Omega}_{n_m}$, — заданные операторы из $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_c]$. Пусть $\boldsymbol{\Omega}_{d_i}=\text{ПНОД}(\boldsymbol{\Omega}_{n_i},\boldsymbol{\Omega}_{d_{i-1}})$, $\boldsymbol{i}=\overline{1,\boldsymbol{m}-1}$, таким образом, $\boldsymbol{n}_1\ge\ldots\ge\boldsymbol{n}_m=\boldsymbol{d}_0\ge\ \boldsymbol{d}_1\ge\boldsymbol{d}_2\ge\ldots\ge\boldsymbol{d}_{m-1}=\boldsymbol{d}$.

Найдем все ОЛРО $\boldsymbol{X}_{s_j}\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_c]$ такие, что координаты векторов $(\boldsymbol{X}_{s_1},\ldots,\boldsymbol{X}_{s_b})$ удовлетворяют уравнению и линейно независимых слева над полем $\boldsymbol{K}$.

Воспользуемся тем, что кольцо $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_c]$ изоморфно кольцу косых многочленов. Записав уравнение (2.5.1) в виде следующей эквивалентной системы

$$\left.\begin{aligned}
&X_{s_1}\Omega_{n_1-d_1}+X_{s_m}\Omega_{n_m-d_1} &&=Y_{s_0-d_1},\\
&Y_{s_0-d_k}\Omega_{d_k-d_{k+1}}+X_{s_{k+1}}\Omega_{n_{k+1}-d_{k+1}} &&=Y_{s_0-d_{k+1}},k=\overline{1,\,m-3},\\
&Y_{s_0-d_{m-2}}\Omega_{d_{m-2}-d_{m-1}}+X_{s_{m-1}}\Omega_{n_{m-1}-d_{m-1}} &&=0,
\end{aligned}\right\} \tag{2.6.1}$$

где положено $s_0=n_1+n_m-1$, получим, как и ранее

$$\dim P^m=(n_1+n_m)(m-2)-\sum_{j=2}^{m-1}n_j+d\,.$$

Левый базис пространства P^m имеет вид

$V^{k_1}=(X_{s_1}^{k_1},\,X_{s_2}^{k_1},...,\,\omega_{k_1c}X^0_{d_{m-2}-d_{m-1}},X_{s_m}^{k_1}),\ k_1=0,1,...,s_0-n_{m-1}-d_{m-2}+d_{m-1},$

$V^{k_2}=(X_{s_1}^{k_2},\,X_{s_2}^{k_2},...,\,X_{s_{m-3}}^{k_2},\omega_{k_2c}X^0_{d_{m-3}-d_{m-2}},0,X_{s_m}^{k_2})\ k_2=\overline{0,\,s_0-n_{m-2}-d_{m-3}+d_{m-2}},$

$V^{k_3}=(X_{s_1}^{k_3},\,X_{s_2}^{k_3},...,\,X_{s_{m-4}}^{k_3},\omega_{k_3c}X^0_{d_{m-4}-d_{m-3}},0,0,X_{s_m}^{k_3}),\ k_3=\overline{0,\,s_0-n_{m-3}-d_{m-4}+d_{m-3}}.$

…………………………………………………………………………

$V^{k_{m-2}}=(X_{s_1}^{k_{m-2}},\,\omega_{k_{m-2}c}\,X^0_{d_1-d_2},0,...,\,0,X_{s_m}^{k_{m-2}})\,,\ k_{m-2}=\overline{0,\,s_0-n_2-d_1+d_2}\,.$

$V^{k_{m-1}}=(\omega_{k_{m-1}c}X^0_{n_m-d_1},\,0,...,\,0,\omega_{k_{m-1}c}X^0_{n_1-d_1})\,.$

Координаты векторов базиса удовлетворяют соответствующим уравнениям. Векторы V^{k_j}, $j=\overline{1,\,m-1}$ линейно независимы слева над K, их всего $\sum_{j=1}^{m-1}k_j=(n_1+n_m)(m-2)-\sum_{j=2}^{m-1}n_j+d\,.$

Если не требовать ограничений на порядки координатных операторов, то общему решению уравнения (2.5.1) над кольцом $K[\omega_c]$ можно придать вид $\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k_j=0}^{q_j}Y_{j,k_j}V^{k_j}$, где q_j — верхние границы пределов изменения переменных k_j, Y_{j,k_j} — произвольные операторы из $K[\omega_c]$.

2.7. Результантные матрицы системы ОЛРО

Рассмотрим множество $\Omega_{n_j}=\sum_{k=0}^{n_j}a_{j,k}\,\omega_{kc}$ ($j=\overline{1,m}$) — из $K[\omega_c]$. Коэффициенты произведения операторов $\boldsymbol{\Omega_n(a;\omega_c)\cdot\Omega_m(b;\omega_c)=\sum_{k=0}^{m+n}\Gamma_k(a,b)\omega_{kc}}$ получим из (1.2.7), положив $\alpha=\omega_c$, $\beta=0$. Имеем

$$\boldsymbol{c_k(a,b)}=\sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)}\sum_{i=j}^{\min(n,j)}\boldsymbol{a_i b_{k-j}^{[ic]}},\ \boldsymbol{k}=\overline{0,\boldsymbol{n+m}}\,. \qquad (2.7.1)$$

При $\boldsymbol{n=r}$, $\boldsymbol{a_r}=1$, $\boldsymbol{a_i}=0$ при $\boldsymbol{i}=\overline{0,\boldsymbol{r}-1}$ из (2.7.1) получим коэффициенты оператора $\boldsymbol{\omega_{rc}\cdot\Omega_m(b;\omega_c)=\sum_{k=0}^{m+r}c_{r,k}(b)\omega_{kc}}$.

Отсюда

$$\boldsymbol{c_{r,k}(b)=\omega_{rc}(a_k)=a_k^{[rc]}},\ \boldsymbol{k}=\overline{0,\boldsymbol{m}} \qquad (2.7.2)$$

и

$$\boldsymbol{c_{0,k}(a)=a_k},\ \boldsymbol{c_{r,k}(a)=\omega_c\, c_{r-1,k}(a)},\ \boldsymbol{k}=\overline{0,\boldsymbol{m}}\,.$$

Перемножив операторы в уравнении (2.5.1) и приравняв нулю коэффициенты при степенях $\boldsymbol{\omega_c}$, запишем его в виде системы

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k_1=\max(0,l-n_1)}^{s_1}\boldsymbol{f_{s_1,k_1}c_{k_1,l}\left(a_1\right)+\ldots+}\sum_{k_m=\max(0,l-n_m)}^{s_m}\boldsymbol{f_{s_m,k_m}c_{k_m,l}\left(a_m\right)}=0,\\ \boldsymbol{l=n_1+n_m-1,\ n_1+n_m+2,\ \ldots,}\ 1,\ 0.\end{array}\right\} \qquad (2.7.3)$$

Матрица $\boldsymbol{R^m}$ этой системы является по определению правой результантной матрицей операторов $\boldsymbol{\Omega_{n_j}}$.

Замечание. Эту матрицу можно построить следующим образом: поставим в соответствие каждому оператору $\boldsymbol{\Omega_{n_k}}$ матрицу $\boldsymbol{M_k}$ размерности $\boldsymbol{(n_1+n_m)\times(s_k+1)}$

$$
\boldsymbol{M}_k(\boldsymbol{a}_k)=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{a}_{k,n_k}^{[s_k c]} & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\boldsymbol{a}_{k,n_k-1}^{[s_k c]} & \boldsymbol{a}_{k,n_k}^{[(s_k-1)c]} & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\boldsymbol{a}_{k,n_k-j}^{[s_k c]} & \boldsymbol{a}_{k,n_k-j}^{[(s_k-1)c]} & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{a}_{k,n_k}^{[c]} & 0\\
\boldsymbol{a}_{k,0}^{[s_k c]} & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k,n_k-1}^{[c]} & \boldsymbol{a}_{k,n_k}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k,1}^{[c]} & \boldsymbol{a}_{k,2}\\
0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k,0}^{[c]} & \boldsymbol{a}_{k,1}\\
0 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{a}_{k,0}
\end{pmatrix}\Bigg), \qquad (2.7.4)
$$

Записав в последнем столбце последовательность нулей и в конце коэффициенты оператора $\boldsymbol{\Omega}_{n_j}$, затем применить формулу 3) из теоремы 1.2.3. Таким образом, правая результантная матрица совокупности операторов $\boldsymbol{\Omega}_{n_k}$, $\boldsymbol{k}=\overline{1,\boldsymbol{m}}$ имеет вид

$$
\boldsymbol{R}^m=\big(\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{a}_1),\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{a}_2),\ldots,\boldsymbol{M}_m(\boldsymbol{a}_m))\big). \qquad (2.7.5)
$$

Например, правая результантная матрица операторов $\boldsymbol{\Omega}_n(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{\Omega}_m(\boldsymbol{b})$ такова

$$
\boldsymbol{R}^2=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{b}_{n_2}^{[c(n_1-1)]} & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{a}_{n_1}^{[c(n_2-1)]} & 0 & \cdots & 0\\
\boldsymbol{b}_{n_2-1}^{[c(n_1-1)]} & \boldsymbol{a}_{n_2}^{[c(n_1-2)]} & \cdots & 0 & \boldsymbol{a}_{n_1-1}^{[c(n_2-1)]} & \boldsymbol{a}_{n_1}^{[c(n_2-2)]} & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\boldsymbol{b}_0^{[c(n_1-1)]} & \boldsymbol{a}_1^{[c(n_1-2)]} & \cdots & \boldsymbol{b}_{n_2} & \boldsymbol{a}_0^{[c(n_2-1)]} & \boldsymbol{a}_1^{[c(n_2-2)]} & \cdots & \boldsymbol{a}_{n_1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{b}_0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_0
\end{pmatrix}\Bigg). \qquad (2.7.6)
$$

Аналогично из рассмотрения уравнения

$$
\boldsymbol{\Omega}_{n_1}\boldsymbol{X}_{s_1}+\cdots+\boldsymbol{\Omega}_{n_m}\boldsymbol{X}_{s_m}=0 \text{ или } (\boldsymbol{Y}_{s_1}\boldsymbol{\Omega}_{n_1}^{*}+\cdots+\boldsymbol{Y}_{s_m}\boldsymbol{\Omega}_{n_m}^{*}=0) \qquad (2.7.7)
$$

может быть получена левая результантная матрица из первого уравнения или как правая результантная матрица из второго уравнения, обозначается $\boldsymbol{R}^{m*}$.

В случае двух операторов часто предпочтительнее говорить о правом

$|\,\boldsymbol{R}^2\,\|$ и левом $|\,\boldsymbol{R}^{2*}\,\|$ результантах как об определителях соответствующих матриц, например,

$$|\,\boldsymbol{R}^2\,\|=\left|\begin{matrix} \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}_2}^{[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}_1-1)]} & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}_1}^{[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}_2-1)]} & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}_2-1}^{[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}_1-1)]} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}_2}^{[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}_1-2)]} & \cdots & 0 & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}_1-1}^{[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}_2-1)]} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}_1}^{[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}_2-2)]} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{b}_0^{[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}_1-1)]} & \boldsymbol{a}_1^{[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}_1-2)]} & \cdots & \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}_2} & \boldsymbol{a}_0^{[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}_2-1)]} & \boldsymbol{a}_1^{[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{n}_2-2)]} & \cdots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{b}_0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_0 \end{matrix}\right\|. \qquad (2.7.8)$$

Определения ранга результантных матриц, ПНОД, ПНОК, ЛНОД и ЛНОК аналогичны тем, которые даны для ОЛДО. Приведём несколько свойств правого результанта ОЛРО, обозначив, как и ранее $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{m}-1}=\text{ПНОД}(\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{n}_j})$, $\boldsymbol{d}^*_{\boldsymbol{m}-1}=\text{ПНОД}(\boldsymbol{\Omega}^*_{\boldsymbol{n}_j})$, $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{rangR}^{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{r}^*_{\boldsymbol{m}}=\ \boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}*}$:

1) $\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{m}}+\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{m}-1}\,(\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{r}^*_{\boldsymbol{m}}+\boldsymbol{d}^*_{\boldsymbol{m}-1})$.

Пусть $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{m}}$ $(\boldsymbol{\nu}^*_{\boldsymbol{m}})$ — порядок правого (левого) наименьшего общего кратного ПНОК (ЛНОК) операторов $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{n}_j}$.

2) $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}$ $(\boldsymbol{\nu}^*_{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}*})$.

Преложение 2.7.1. Для того чтобы операторы $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{n}_j}$ были взаимно просты справа (слева) в совокупности, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}=\ \boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{m}}$ $(\boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}*}=\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{m}})$.

Следствие 2.7.1. Для того чтобы операторы $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{m}}$ были взаимно просты справа (слева), необходимо и достаточно $|\,\boldsymbol{R}^2\,\|\neq 0$ $(|\,\boldsymbol{R}^{2*}\,\|\neq 0)$.

Предложение 2.7.2. Правая результантная матрица $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}$ множества ОЛРО $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{n}_j}$ $(\boldsymbol{j}=\overline{1,\boldsymbol{m}})$ обладает следующими свойствами:

1) $\boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}\geq\boldsymbol{n}_1$;

2) През$(\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{n}_1}(\lambda\boldsymbol{a}_1;\omega_{\boldsymbol{c}}),\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{n}2}(\boldsymbol{a}_2;\omega_{\boldsymbol{c}}))=\lambda^{\boldsymbol{n}_2}\,|\,\boldsymbol{R}^2\,\|$,

През$(\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{n}_1}(\boldsymbol{a}_1;\omega_{\boldsymbol{c}}),\,\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{n}2}(\lambda\boldsymbol{a}_2;\omega_{\boldsymbol{c}}))\ =\lambda^{\boldsymbol{n}_1}\,|\,\boldsymbol{R}^2\,\|$, $\lambda\in\boldsymbol{K}_0$;

3) если коэффициенты операторов $\boldsymbol{\Omega}_n$, $\boldsymbol{\Omega}_m$ принадлежат подполю $\boldsymbol{K}_0 \subset \boldsymbol{K}$, то $|\boldsymbol{R}^2\|$ совпадает с результантом обычных многочленов;

4) $\boldsymbol{a}|\boldsymbol{R}^2\| = \boldsymbol{\Omega}_r(\boldsymbol{b}_1;\boldsymbol{\omega}_c)\boldsymbol{\Omega}_{n_1}(\boldsymbol{a}_1;\boldsymbol{\omega}_c) + \boldsymbol{\Omega}_s(\boldsymbol{b}_2;\boldsymbol{\omega}_c)\boldsymbol{\Omega}_{n_2}(\boldsymbol{a}_2;\boldsymbol{\omega}_c)$, где $\boldsymbol{\Omega}_r(\boldsymbol{b}_1;\boldsymbol{\omega}_c)$ и $\boldsymbol{\Omega}_s(\boldsymbol{b}_2;\boldsymbol{\omega}_c)$ — некоторые операторы из кольца $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_c]$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{K}$.

Аналогичными свойствами обладают левые результантные матрицы.

Предложение 2.7.3. Операторы $\boldsymbol{\Omega}_n - \lambda\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\Omega}_m - \mu\boldsymbol{\varepsilon}$, где $\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}_0$ имеют общий правый нетривиальный делитель в том и только в том случае, когда $\Phi(\lambda, \mu) = 0$.

В частности, полагая $\lambda = 0$, $\boldsymbol{\Omega}_m = \boldsymbol{\omega}_c$, получим.

Следствие 2.7.2. Оператор $\boldsymbol{\Omega}_n$ допускает представление в виде $\boldsymbol{\Omega}_n = {}$ $= \boldsymbol{\Omega}_{n-1}(\boldsymbol{\omega}_c - \mu\boldsymbol{\varepsilon})$ в том и только в том случае, если константа μ является корнем уравнения $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \alpha_i{}^i \mu^i$.

Доказательство следует из рассмотрения результанта операторов $\boldsymbol{\Omega}_n$ и $\boldsymbol{\omega}_c - \mu\boldsymbol{\varepsilon}$. ■

Пример 2.7.1. Найти ПНОД операторов $\boldsymbol{\Omega}_3^1 = \boldsymbol{\omega}_{3c} + (\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{c})\boldsymbol{\omega}_{2c}$, $\boldsymbol{\Omega}_2^1 = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_{2c} + \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c})\boldsymbol{\omega}_c$, $\boldsymbol{\Omega}_2^2 = \boldsymbol{\omega}_{2c} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} + 2)\boldsymbol{\omega}_c + 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon}$, где коэффициенты принадлежат полю рациональных функций от $\boldsymbol{x}$, замкнутому относительно оператора $\boldsymbol{\omega}_c$, $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{K}_0$.

Здесь $\boldsymbol{n}_1 = 3$, $\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}_3 = 2$ и $\boldsymbol{s}_1 = 1$, $\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{s}_3 = 2$. Применим неевклидов алгоритм.

1) Запишем уравнение

$$(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{\omega}_c + \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\Omega}_3^1 + (\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{\omega}_{2c} + \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{\omega}_c + \boldsymbol{q}_0\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\Omega}_2^1 + (\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{\omega}_{2c} + \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{\omega}_c + \boldsymbol{r}_0\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\Omega}_2^2 = 0, \quad (2.7.9)$$

и составим правую результантную матрицу $\boldsymbol{R}^3$ размерности 5×8, которая является матрицей системы уравнений на неизвестные коэффициенты $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_0$. Построим её, используя свойство 3) теоремы 1.2.3

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & x+2c & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x+3c & 1 & x^2+5cx+6c^2 & x+c & 0 & x+3c+2 & 1 & 0 \\ 0 & x+2c & 0 & x^2+3cx+2c^2 & x & 2x+4c & x+2c+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^2+cx & 0 & 2x+2c & x+c+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x \end{pmatrix}\right)$$

2) После приведения к треугольному виду без изменения порядка следования столбцов получим

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & x+2c & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x+c & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Видим, что её ранг равен четырем. По теореме 1.4.1 операторы имеют правый наибольший общий делитель первого порядка. Для его вычисления удобно взять операторы Ω_2^1, Ω_2^2.

3) Удалим из последней матрицы столбцы, отвечающие коэффициентам p_1, p_0, q_2, r_2 и нулевые строки. Получим систему

$$\left.\begin{array}{cccc} (x+c)q_1 & & +r_1 & =0, \\ & xq_0 & +2r_1 \quad +r_0 & =0, \\ 0 & 0 & 0 \quad 2xr_0 & =0, \end{array}\right\}$$

из которой находим $q_1=-1$, $q_0=2+c/x$, $r_1=x+c$, $r_0=0$.

Составляем уравнение

$$(-\omega_c+(2+c/x)\varepsilon)Y_1^1+(x+c)\omega_c Y_1^2=0,$$

где $Y_1^1=a_1\omega_c+a_0\varepsilon$, $Y_1^2=b_1\omega_c+b_0\varepsilon$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ω_c получим систему

$$\left.\begin{array}{ccccc} -a_1^{[c]} & & +(x+c)b_1^{[c]} & & =0, \\ (2+c/x)a_1 & -a_0^{[c]} & & +(x+2)b_0^{[c]} & =0, \\ 0 \quad (2+2/x)a_0 & & & & =0, \end{array}\right\}$$

из которой находим $a_0=0$, $a_1=x(x+c)$, $b_0=-2x+c$, $b_1=x+c$. Заметим, что нам пришлось найти решение системы разностных уравнений, чтобы этого избежать можно было перейти к сопряженным.

Итак $\boldsymbol{Y}_1^1 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}}$, $\boldsymbol{Y}_1^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}} + (-2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{\varepsilon}$.

4) Обозначим $\boldsymbol{\Omega}_1 = \text{ПНОД}(\boldsymbol{\Omega}_2^1, \boldsymbol{\Omega}_2^2)$, тогда $\boldsymbol{\Omega}_2^1 = \boldsymbol{Y}_1^1\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{\Omega}_1$, $\boldsymbol{\Omega}_2^2 = \boldsymbol{Y}_1^2\boldsymbol{\Omega}_1 = [(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}} + (-2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{\varepsilon}]\boldsymbol{\Omega}_1$. Положив $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{d}_1\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{d}_0\boldsymbol{\varepsilon}$, коэффициенты правого наибольшего общего делителя найдем из первого или второго тождества: $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon}$.

Глава 3. Применение линейных уравнений к дифференциальным уравнениям и интегрированию

Теория интегрирования в конечном виде лежит на стыке дифференциальной и компьютерной алгебры [5, 37]. Основы этой теории были заложены Дж. Лиувиллем в серии статей, опубликованных в период 1833 — 1841 гг. В дальнейшем она развивалась различными математиками, среди которых следует выделить Мордухай — Болтовского и Островского. Полное представление о состоянии этой теории на тот момент дает монография Ритта [99], вышедшая в 1948 году, в которой можно найти все существенные результаты этой теории, полученные к тому времени и подробную библиографию. Новый всплеск активности в этой области возник в конце 60-х годов, когда вышли две работы Розенлихта, содержащие простое чисто алгебраическое доказательство теоремы Лиувилля о функциях с элементарными интегралами, и работы Риша, открывшие дорогу этой тематике в компьютерную алгебру и явившиеся краеугольным камнем для дальнейшего развития этой теории.

3.1. Дифференциальный и разностный аналоги теоремы Кронекера-Капелли

Рассмотрим неоднородную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (ОЛДУ), коэффициенты и правые части которой принадлежат дифференциальному полю $\boldsymbol{K}$ характеристики нуль с дифференцированием $\boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{D}_{n_i}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}_i,\ \boldsymbol{i}=\overline{1,\boldsymbol{m}}, \tag{3.1.1}$$

где ОЛДО $\boldsymbol{D}_{n_i}=\sum_{k=0}^{n_i}\boldsymbol{a}_{i,k}\boldsymbol{\delta}^k\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\delta}]$ и $\boldsymbol{n}_1\ge\boldsymbol{n}_2\ge\cdots\ge\boldsymbol{n}_m$, $\boldsymbol{r}_m$ — правый ранг правой результантной матрицы операторов. Получим критерий совместности таких систем представленный в [9].

Без ограничения общности будем считать, что в системе (3.1.1) только одно $\boldsymbol{f}_i\ne 0$. В противном случае приведем ее к такому виду, вычитая одно из уравнений с ненулевой правой частью, умноженное на подходящие элементы из $\boldsymbol{K}$ из остальных. Умножив далее это единственное уравнение на оператор $\boldsymbol{f_i\delta - f_i'\varepsilon}$ слева, получим однородную систему

$$\boldsymbol{D_{\bar{n}_i} y} = 0\,,\ \boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{m}}\,. \tag{3.1.2}$$

Пусть $\boldsymbol{\bar{r}_m}$ — ранг правой результантной матрицы операторов $\boldsymbol{D_{\bar{n}_i}}$, $\boldsymbol{\bar{n}_1} = \mathbf{max}(\boldsymbol{\bar{n}_i})$, $\boldsymbol{\bar{n}_m} = \mathbf{min}(\boldsymbol{\bar{n}_j})$, $\boldsymbol{\bar{d}_{m-1}} = \boldsymbol{ord}\,\text{ПНОД}(\boldsymbol{D_{\bar{n}_i}})$.

Решим вопрос о совместимости системы (3.1.1). Для этого рассмотрим сначала однородную систему

$$\boldsymbol{D_{n_i} y} = 0\,,\ \boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{m}}\,. \tag{3.1.3}$$

Множеству всех нетривиальных решений системы (3.1.3) соответствует общий правый делитель операторов $\boldsymbol{D_{n_i}}$ и наоборот, поэтому вопрос об их существовании решает следующая теорема.

Теорема 3.1.1. Система (3.1.3) имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда $\boldsymbol{r_m} < \boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_m}$.

Доказательство. Предположим, что система (3.1.2) имеет нетривиальное решение, то есть операторы $\boldsymbol{D_{n_i}}$ имеют ПНОД порядка $\boldsymbol{d_{m-1}} > 0$. Тогда согласно теореме 2.3.1 $\boldsymbol{r_m} < \boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_m}$.

Обратно, если $\boldsymbol{r_m} < \boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_m}$, то опять на основании указанной теоремы операторы $\boldsymbol{D_{n_i}}$ обладают ПНОД порядка $\boldsymbol{d_{m-1}} > 0$. ■

Теорема 3.1.2. Система (3.1.1) совместна в том и только в том случае, когда $\boldsymbol{\bar{n}_1} + \boldsymbol{\bar{n}_m} - \boldsymbol{\bar{r}_m} > \boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_m} - \boldsymbol{r_m}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\bar{d}_{m-1}} = \boldsymbol{ord}\,\text{ПНОД}(\boldsymbol{D_{\bar{n}_i}})$. Предположим, что система совместна. Тогда размерность пространства $\boldsymbol{N_{\bar{a}}}$ решений системы (3.1.2) строго больше размерности пространства $\boldsymbol{N_a}$ решений системы (3.1.2). Это приводит к неравенству $\boldsymbol{\bar{d}_{m-1}} > \boldsymbol{d_{m-1}}$, из которого следует $\boldsymbol{\bar{n}_1} + \boldsymbol{\bar{n}_m} - \boldsymbol{\bar{r}_m} > \boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_m} - \boldsymbol{r_m}$.

Обратно, пусть выполняется неравенство из условия теоремы, тогда выполняется и неравенство $\overline{d}_{m-1} > d_{m-1}$. Последнее означает, что пространство $N_{\bar a}$ имеет большую размерность, чем пространство N_a. Поэтому существует такое $g \neq 0$, $g \in N_{\bar a}$, $g \notin N_a$, что $D_{\bar n_i} g = 0$, $i = \overline{1, m}$. Поскольку в системе (3.1.1) только одно $f_i \neq 0$, то интегрируя это уравнение, получим $D_{n_i} g = c_i f_i$, где c_i некоторая постоянная. Если $c_i \neq 1$, то системе (3.1.1) удовлетворяет функция $(1/c_i)g$. ■

Теорему 3.1.2 можно рассматривать как дифференциальный аналог алгебраической теоремы Кронекера — Капелли.

Пример 3.1.1. Пусть, например поле K — поле функций вещественной переменной x, $\delta = d/dx$. Исследуем на совместность систему уравнений

$$x^2 y'' + xy' - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) y = 0,\ y' - y = a x^{\frac{-3}{2}} e^x . \qquad (3.1.4)$$

Умножив второе уравнение системы слева на оператор $2x\delta + (3 - 2x)\varepsilon$, получим однородную систему

$$x^2 y'' + xy' - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) y = 0,\ 2xy'' + (3 - 4x)y' + (2x - 3)\, y = 0. \qquad (3.1.5)$$

Составим правые результанты R^2 для соответствующей однородной системы и $\overline{R}^2$ для системы (3.1.5)

$$R^2 = \begin{pmatrix} x^2 & x & -x^2 - 1/4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \overline{R}^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 3x & -x^2 + 3/4 & -2x \\ 0 & x^2 & x & -x^2 - 1/4 \\ 2x & 5 - 4x & 2x - 7 & 2 \\ 0 & 2x & 3 - 4x & 2x - 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисления показывают, что $rang\, R^2 = 3 = rang\, \overline{R}^2$. Следовательно, система (3.1.4) совместна. Её совместным решением является функция $y^* = 2a\, x^{-1/2} e^x$, которую можно найти различными способами. Применяя, например, неевклидов алгоритм или дифференциальный аналог алгоритма Евклида к операторам $L_2 = x^2\delta^2 + x\delta - (x^2 + 1/4)\varepsilon$, $\overline{L}_2 = 2x\delta^2 + (3 - 4x)\delta +$

$+(2x-3)\varepsilon$, находим ПНОД$(L_2, \overline{L}_2) = 2x\delta + (1-2x)\varepsilon$.

Рассмотрим неоднородную систему обыкновенных линейных разностных уравнений (ОЛРУ), коэффициенты и правые части которой принадлежат разностному полю K характеристики нуль с разностным оператором ω_c

$$\Omega_{n_i}(y) = f_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{3.1.6}$$

где по крайней мере, один элемент $f_i \neq 0$, ЛОРО $\Omega_{n_i} = \sum_{k=0}^{n_i} a_{i,k}\omega_{kc} \in K[\omega_c]$

Без ограничения общности будем считать, что в системе (3.1.6) только одно $f_i \neq 0$. В противном случае приведем ее к такому виду, вычитая одно из уравнений с ненулевой правой частью, умноженное на подходящие элементы из K из остальных. Умножив далее это единственное уравнение на оператор $f_i\omega_c - f_i^{[c]}\varepsilon$ слева, получим однородную систему

$$\Omega_{\overline{n}_i} y = 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{3.1.7}$$

Пусть $\overline{r}_m$ — ранг правого результанта операторов $\Omega_{\overline{n}_i}$, $\overline{d}_{m-1} =$ $= ord$ ПНОД$(\Omega_{\overline{n}_i})$, $\overline{n}_1 = \max(\overline{n}_i)$, $\overline{n}_m = \min(\overline{n}_j)$.

Решим вопрос о совместимости системы (3.1.6). Для этого рассмотрим сначала однородную систему

$$\Omega_{n_i} y = 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{3.1.8}$$

Множеству всех нетривиальных решений системы (3.1.7) соответствует общий правый делитель операторов Ω_{n_i} и наоборот, поэтому вопрос об их существовании решает следующая теорема [65].

Теорема 3.1.3. Система (3.1.7) имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда $r_m < n_1 + n_m$.

Доказательство. Предположим, что система (3.1.7) имеет нетривиальное решение, то есть операторы Ω_{n_i} имеют ПНОД порядка $d_{m-1} > 0$. Тогда $r_m < n_1 + n_m$.

Обратно, если $r_m < n_1 + n_m$, то операторы Ω_{n_i} обладают ПНОД порядка

$\boldsymbol{d}_{m-1} > 0$. ■

Теорема 3.1.4. Система (3.1.6) совместна в том и только в том случае, когда $\bar{\boldsymbol{n}}_1 + \bar{\boldsymbol{n}}_m - \bar{\boldsymbol{r}}_m > \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - \boldsymbol{r}_m$.

Доказательство. Пусть $\bar{\boldsymbol{d}}_{m-1} = \boldsymbol{ord}\,\textbf{ПНОД}(\boldsymbol{\Omega}_{\bar{n}_i})$. Предположим, что система совместна. Тогда размерность пространства $\boldsymbol{N}_{\bar{a}}$ решений системы (3.1.7) строго больше размерности пространства $\boldsymbol{N}_a$ решений системы (3.1.8). Это приводит к неравенству $\bar{\boldsymbol{d}}_{m-1} > \boldsymbol{d}_{m-1}$, из которого следует $\bar{\boldsymbol{n}}_1 + \bar{\boldsymbol{n}}_m - \bar{\boldsymbol{r}}_m > \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - \boldsymbol{r}_m$.

Обратно, пусть выполняется неравенство из условия теоремы, тогда выполняется и неравенство $\bar{\boldsymbol{d}}_{m-1} > \boldsymbol{d}_{m-1}$. Последнее означает, что пространство $\boldsymbol{N}_{\bar{a}}$ имеет большую размерность, чем пространство $\boldsymbol{N}_a$. Поэтому существует такое $\boldsymbol{g} \neq 0$, $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{N}_{\bar{a}}$, $\boldsymbol{g} \notin \boldsymbol{N}_a$, что $\boldsymbol{\Omega}_{\bar{n}_i}\boldsymbol{g} = 0$, $\boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{m}}$. Поскольку в системе (3.1.6) только одно $\boldsymbol{f}_i \neq 0$, то решая это уравнение, получим $\boldsymbol{\Omega}_{n_i}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{c}_i\,\boldsymbol{f}_i$, где $\boldsymbol{c}_i$ некоторая постоянная (функция периода $\boldsymbol{c}_i$, см. [33]). Если $\boldsymbol{c}_i \neq 1$, то системе (3.1.6) удовлетворяет функция $(1/\boldsymbol{c}_i)\boldsymbol{g}$. ■

Теорему 3.1.4 можно рассматривать как аналог теоремы Кронекера — Капелли для систем линейных алгебраических уравнений.

Пример 3.1.2. Положив $\boldsymbol{c} = 1$, рассмотрим неоднородную систему

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{xy}(\boldsymbol{x}+2) + (1-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+1) - \boldsymbol{xy}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x},\\ &\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+2) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+1) - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = 0,\\ &\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+2) - \boldsymbol{xy}(\boldsymbol{x}+1) - \boldsymbol{xy}(\boldsymbol{x}) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Здесь $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}_3 = 2$. Исследуем сначала соответствующую однородную систему, сопоставив каждому оператору соответствующую матрицу:

$$\boldsymbol{M}_1 = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}+1 & 1-(\boldsymbol{x}+1)-(\boldsymbol{x}+1)^2 & -\boldsymbol{x}-1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{x} & 1-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2 & -\boldsymbol{x} \end{pmatrix}\right),$$

$$\boldsymbol{M}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -(\boldsymbol{x}+1)^2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \boldsymbol{x}^2 \end{pmatrix}\right),\ \boldsymbol{M}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & -(\boldsymbol{x}+1) & -(\boldsymbol{x}+1) & 0\\ 0 & 1 & -\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{x} \end{pmatrix}\right).$$

Правая результантная матрица (2.7.5) имеет вид $\boldsymbol{R}^3 = \left(\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\right)\Big)^{\boldsymbol{T}}$, её ранг равен $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{rank}\,\boldsymbol{R}^3 = 3$, поэтому операторы однородной системы имеют правым делителем оператор порядка $\boldsymbol{d} = 2 + 2 - 3 = 1$. Вычислить правый делитель можно на основании теоремы 1.3.5 из следующего уравнения

$$\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_2 + (1 - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{\varepsilon},$$

найдя его решение $\boldsymbol{f}_0 \neq 0$, $\boldsymbol{g}_0 \neq 0$, $\boldsymbol{h}_0 \neq 0$. Из системы

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{g}_0 + \boldsymbol{h}_0 = 0, (1 - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{f}_0 - \boldsymbol{g}_0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{h}_0 = 1, - \boldsymbol{x}\boldsymbol{f}_0 - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{g}_0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{h}_0 = \boldsymbol{a}_0,\}$$

находим $\boldsymbol{a}_0 = -\boldsymbol{x}$. Таким образом, ПНОД таков $\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon}$.

Составим систему

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+3) + (\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+1) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+1)^2)\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+2) - \\ - (\boldsymbol{x}+1)(1-\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+1) + \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = 0, \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+2) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+1) - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = 0, \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+2) - \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+1) - \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = 0, \end{aligned}\right\}$$

умножив слева первое уравнение на оператор $\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_1 - (\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{\varepsilon}$.

Составив, как и ранее матрицы: $\bar{\boldsymbol{M}}_1 =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2+3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2 & -7-13\boldsymbol{x}-7\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^3 & 2\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}^3 & 2+3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2 & -2\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^3 & -1-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}^3 & \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2 \end{pmatrix}\right),$$

$$\bar{\boldsymbol{M}}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2-\boldsymbol{x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1-\boldsymbol{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\boldsymbol{x} \end{pmatrix}\right), \bar{\boldsymbol{M}}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2-\boldsymbol{x} & -2-\boldsymbol{x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\boldsymbol{x} & -1-\boldsymbol{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{x} \end{pmatrix}\right).$$

Вычислим ранг правой результантной матрицы $\bar{\boldsymbol{R}}^3 = \left(\bar{\boldsymbol{M}}_1, \bar{\boldsymbol{M}}_2, \bar{\boldsymbol{M}}_3\right)\Big)^{\boldsymbol{T}}$, $\bar{\boldsymbol{r}}_3 = \boldsymbol{rank}\,\bar{\boldsymbol{R}}^3 = 5$. Поскольку $\bar{\boldsymbol{n}}_1 = 3$, $\bar{\boldsymbol{n}}_2 = \bar{\boldsymbol{n}}_3 = 2$, то по теореме 3.1.4 неоднородная система несовместна. Заметим, что применяя метод исключения, этот вывод мы бы сделали только в конце вычислений.

3.2. Общий метод отыскание частных решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений

Покажем, что известный метод отыскания частных решений неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является частным случаем общего метода, применимого к отысканию частных решений ОЛДУ с переменными коэффициентами и с правой частью произвольного вида [56, 58, 110],

$$L_n(y) = f(x), \tag{3.2.1}$$

частным случаем которого является метод неопределенных коэффициентов.

Пусть $L_n = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\delta^i$ — ОЛДО из кольца $K[\delta]$, $\delta = d/dx$, коэффициенты которого $a_i(x)$ и правая часть $f(x)$ являются функциями, достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми в некотором интервале (a, b), причем $a_n(x) \neq 0$ тождественно.

Лемма 3.2.1. Для любых взаимно простых справа операторов L_n и Y_r найдутся ОЛДО X_r и M_n , удовлетворяющие тождеству

$$X_r L_n = M_n Y_r . \tag{3.2.2}$$

Доказательство. Действительно, коэффициенты операторов X_r и M_n принадлежат полю K и удовлетворяют однородной системе $n+r+1$ линейных алгебраических уравнений с $n+r+2$ неизвестными, ранг матрицы которой равен $n+r$ согласно теореме о дифференциальном результанте. ■

Лемма 3.2.2. Для того чтобы операторы L_n и L_m имели ПНОД оператор D_k, $0 < k \leq \mathbf{min}(n, m)$ необходимо и достаточно выполнения тождества

$$X_{m-k-1} L_n + X_{n-k-1} L_m = D_k , \tag{3.2.3}$$

где X_{m-k-1} и X_{n-k-1} некоторые ОЛДО порядков $m-k-1$ и $n-k-1$ причем эти порядки нельзя уменьшить.

Достаточность. Если D_k — ПНОД операторов L_n и L_m, то операторы L_{n-k} и L_{m-k}, полученные делением справа на D_k, взаимно просты справа. Поэтому выполняется тождество $X_{m-k-1} L_{n-k} + X_{n-k-1} L_{m-k} = \varepsilon$ для некоторых операторов X_{m-k-1}, X_{n-k-1}. Умножая тождество справа на D_k, получим (3.2.2). Если операторы L_n и L_m взаимно просты справа ($k = 0$), то $D_0 = \varepsilon$.

Необходимость. Пусть выполняется (3.2.2), где $0<k\le\min(n,m)$, и порядки операторов X_{m-k-1}, X_{n-k-1} нельзя уменьшить. Допустим, что ПНОД$(L_n,L_m)=\varepsilon$, тогда $X_{m-1}L_n+X_{n-1}L_m=\varepsilon$ для некоторых операторов найдутся такие операторы X_{m-1}, X_{n-1}. Отсюда $D_k=D_kX_{m-1}L_n+D_kX_{n-1}L_m$. Вычитая из (3.2.2), получим $(X_{m-k-1}-D_kX_{m-1})L_n+(X_{n-k-1}-D_kX_{n-1})L_m=0$. С другой стороны должно выполняться тождество $X_m^0L_n+X_n^0L_m=0$, где (X_m^0,X_n^0) — минимальное решение (см. гл. 2 п. 3; гл. 1, п. 3). Поэтому в силу минимальности порядков операторов должны выполняться неверные тождества $f\,X_{m-1}^0\equiv X_{m-k-1}-D_kX_{m-1}$, $g\,X_{n-1}^0\equiv X_{n-k-1}-D_kX_{n-1}$, $f,g\in K$. ■

Пусть $M_n=\sum\limits_{i=0}^{n}b_i(x)\delta^i$, $L_1=f(x)\delta-f'(x)\varepsilon$ и $\tilde{L}_1=g(x)\delta-g'(x)\varepsilon$, где ($'$) означает применение операции дифференцирования.

Лемма 3.2.3. Операторы L_n, L_1, M_n и $\tilde{L}_1$ удовлетворяют тождеству

$$L_1L_n=M_n\tilde{L}_1 \tag{3.2.4}$$

в том и только в том случае, когда их коэффициенты удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=\max(0,k-1)}^{n}b_i(x)\left(\sum_{s=\max(0,k-1)}^{\min(i,k)}\binom{i}{k}g_{k-s}^{(i-s)}(x)\right)=\\&\qquad=(a_{k-1}(x)+a_k'(x))f(x)-a_k(x)f'(x),\ k=\overline{0,\,n+1},\end{aligned}\right\}\tag{3.2.5}$$

где положено $a_{-1}(x)\equiv0,\ a_{n+1}(x)\equiv0$.

Доказательство. Вычисляем

$$L_1L_n=\sum_{k=0}^{n+1}[(a_{k-1}(x)+a_k'(x))f(x)-a_k(x)f'(x)]\delta^k \tag{3.2.6}$$

и

$$M_n\tilde{L}_1=\sum_{k=0}^{n+1}\left(\sum_{s=\max(0,k-1)}^{\min(n,k)}\sum_{i=s}^{n}\binom{i}{s}b_i(x)g_{k-s}^{(i-s)}(x)\right)\delta^k\ . \tag{3.2.7}$$

Поскольку

$$\sum_{s=\max(0,k-1)}^{\min(n,k)} \sum_{i=s}^{n} \binom{i}{s} b_i(x) g_{k-s}^{(i-s)}(x) = \sum_{i=\max(0,k-1)}^{n} b_i(x) \sum_{s=\max(0,k-1)}^{\min(i,k)} \binom{i}{s} g_{k-s}^{(i-s)}(x), \quad (3.2.8)$$

то приходим к системе соотношений (3.2.5). Обратное утверждение вполне очевидно. ■

Теорема 3.2.1. Если:

1) правая часть уравнения (3.3.1) может быть представлена в виде $f(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i u_i(x)$, где хотя бы одно из чисел $c_i \neq 0$ и функции $u_i(x)$ ($i = \overline{1, r}$) образуют фундаментальную систему решений (ФСР) ОЛДУ $X_r(y) = 0$;

2) оператор $X_r L_n$, допускает факторизацию

$$X_r L_n = M_{n+r-q} Y_q, \quad (3.2.9)$$

в которой операторы L_n и Y_q $(0 < q)$ взаимно просты справа, то при $q = r$ частное решение является линейной комбинацией ФСР уравнения $Y_q(y) = 0$. Если же $q < r$, то, возможно, имеет указанный вид.

Доказательство. Представим правую часть уравнения в виде линейной комбинации $f(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i u_i(x)$ и построим уравнение $X_r(y) = 0$, для которого функции $u_i(x)$ образуют ФСР. Пусть имеет место факторизация (3.2.9) с нетривиальным оператором Y_q и $\tilde{y}(x) = \sum_{j=1}^{q} d_j v_j(x)$ общее решение уравнения $Y_q(y) = 0$. Из тождества (3.2.9) следует, что $X_r L_n(\tilde{y}) = 0$ и, в силу произвольности d_j, $X_r L_n(v_j) = 0$ при $j = \overline{1, q}$. Поскольку по предположению операторы L_n и Y_q взаимно просты справа, то функции $L_n(v_j)$ линейно независимы. Отсюда следует, что $0 < q \leq r$.

Разложим функции $L_n(v_j)$ по ФСР уравнения $X_r(y) = 0$

$$L_i(v_i) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_{ij} u_i, \; j = \overline{1, q}. \quad (3.2.10)$$

Из (3.3.1) и (3.2.10) следует

$$\sum_{j=1}^{q} d_j \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} u = \sum_{i=1}^{r} u_i \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} d_i \right) \sum_{i=1}^{r} c_i u_i \,. \tag{3.2.11}$$

То есть, произвольные постоянные d_j должны удовлетворять системе уравнений $\sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} d_j = c_i \quad i = \overline{1, r}$. При $q = r$ эта система совместна и однозначно определяет d_j, если же $0 < q < r$, то система может быть несовместной. ■

Определение 3.2.1. Назовем оператор Y_q оператором частного решения для уравнения (3.3.1).

Сформулируем условия, которым он должен удовлетворять при $\mathbf{q} = \mathbf{r}$.

Теорем 3.2.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.3.1 и, кроме того, частное решение $\tilde{y}(x) = \sum_{j=1}^{q} d_j u_j(x)$ уравнения (3.3.1) является линейной комбинацией ФСР ОЛДУ $Y_q(y) = 0$. Тогда операторы L_n, X_r и Y_r удовлетворяют системе операторных тождеств

$$X_r L_n = M_n Y_r \,, \; A_{r-1} L_n + B_{n-1} Y_r = \varepsilon \,, \tag{3.2.12}$$

где A_{r-1}, B_{n-1} и M_{n-1} некоторые ОЛДО.

Доказательство. Так как $Y_r(\tilde{y}) = 0$ и $X_r L_n(\tilde{y}) = 0$, то оператор $X_r L_n$ делится справа на оператор Y_r , что и доказывает первое тождество. В силу известного принципа для линейных неоднородных уравнений, частное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (3.3.1) может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений $v_i(x)$ уравнений $L_n(v_i) = c_i \, u_i(x)$, $i = \overline{1, r}$. Если допустить, что операторы L_n и Y_r имеют нетривиальный правый делитель, то при некоторых i должно быть $L_n(v_i) = 0$. Но это невозможно в силу предположения $c_i \neq 0$ при $i = \overline{1, r}$, поэтому второе тождество вытекает из леммы 3.2.2 в силу взаимной простоты справа операторов Y_r и L_n. ■

Следующее утверждение показывает, что при определении вида частного решения уравнения (3.3.1) операторы X_r и Y_q можно выбирать первого порядка.

Следствие 3.2.1. Для того чтобы функция $g(x)$ была частным решением уравнения (3.3.1) необходимо, а при выполнении условия $L_n(g(x)) \neq 0$ и достаточно, чтобы оператор $L_1 L_n$ допускал факторизацию

$$L_1 L_n = M_n \tilde{L}_1. \qquad (3.2.13)$$

Доказательство. Для доказательства достаточно в теореме 3.2.1 заменить оператор Y_q на $\tilde{L}_1$, а оператор X_r на L_1. Коэффициенты операторов в (3.2.13) можно определить из системы соотношений (3.2.5). ■

Таким образом, вопрос о виде частного решения неоднородного уравнения сводится к факторизации оператора $X_r L_n$. Как известно, факторизация ОЛДО связана с задачей определения дифференциальной группы Галуа соответствующего уравнения, которая с применением операторных тождеств рассматривалась, например, в [52, 10].

Если оператор частного решения построен, то частное решение может быть найдено на основании следующего утверждения.

Теорема 3.2.3. Если частное решение уравнения (3.3.1) удовлетворяет ещё и уравнению

$$L_m(y) = 0, \qquad (3.2.14)$$

то оно является либо решением уравнения меньшего порядка

$$D_k(y) = X_{m-k-1}(f(x)), \qquad (3.2.15)$$

где ОЛДО D_k и X_{m-k-1} определены в лемме 3.2.2, а натуральное число $0 < k \leq \min(m, n)$, либо при $k = 0$ находится без квадратур в виде

$$\tilde{y}(x) = X_{m-r-1}(f(x)). \qquad (3.2.16)$$

Либо, если известен оператор Y_r из теоремы 3.2.2, то частное решение уравнения (3.3.1) находится без квадратур по формуле

$$\tilde{y} = A_{r-1}(f(x)). \qquad (3.2.17)$$

Доказательство. Действительно, в силу тождества (3.2.2) формулы

(3.2.16) и (3.2.17) справедливы. При известном операторе Y_r формула (3.2.15) имеет место в силу второго тождества (3.2.12). ■

Заметим, что известный метод неопределенных коэффициентов для уравнения (3.3.1) с постоянными коэффициентами и правой частью в виде многочлена степени m соответствует выбору оператора частного решения в виде δ^{m+k+1}, где k — номер первого отличного от нуля коэффициента оператора L_n такого, что при $0 \le q < k$ все остальные коэффициенты равны нулю.

Другой способ отыскания частного решения, основанный на применении правого алгоритма Евклида в кольце ОЛДО, содержит следующее утверждение.

Теорема 3.2.4. Если частное решение уравнения (3.2.1) удовлетворяет и однородному уравнению $L_m(y) = 0$, где L_m — оператор наименьшего порядка $m > 0$, то при условии взаимной простоты справа операторов L_n и L_m это частное решение может быть найдено из системы линейных алгебраических уравнений относительно искомого решения и его производных, полученных дифференцированием уравнения (3.2.1) и приведением по модулю уравнения $L_m(y) = 0$.

Доказательство. Если $n \ge m$, то разделив оператор L_n на оператор L_m справа с остатком, получим

$$L_n = P_{n-m} L_m + R_{n_1}, \tag{3.2.18}$$

где P_{n-m} и R_{n_1} некоторые ОЛДО. Если же $n < m$, то выполним эту операцию с оператором $\delta^{m-n} L_n$, $\delta^{m-n} L_n = P_0 L_m + R_{\tilde{n}_1}$, где $P_0 \in K$.

В том случае, когда оператор R_{n_1} ($R_{\tilde{n}_1}$) является оператором умножения $R_{n_1} = h(x)\varepsilon$ ($R_{\tilde{n}_1} = h(x)\varepsilon$), частное решение уравнения (3.2.1) имеет вид $\tilde{y} =$ $= f(x)/h(x)$ ($\tilde{y} = f^{(m-n)}(x)/h(x)$.

В противном случае $0 < n_1 < m$ ($0 < \tilde{n}_1 < m$) и частное решение удовлетворяет уравнению

$$R_{n_1}(y) = f(x) \ \ (R_{n_1}(y) = f^{(n-m)}(x)). \qquad (3.2.19)$$

Рассмотрим, например, случай, когда выполнено соотношение (3.2.18), второй рассматривается аналогично. Применив процесс деления к оператору $\delta^{m-n_1} R_{n_1}$, получим $\delta^{m-n_1} R_{n_1} = P_0^1 L_m + \ \ R_{n_2}$.

Если $R_{n_2} = h(x)\varepsilon$, то $\tilde{y} = f^{(m-n_1)}(x) / h(x)$ — частное решение. Иначе $R_{n_1}(\tilde{y}) = f(x)$ и к уравнению (3.2.1) нужно присоединить еще одно уравнение $R_{n_2}(y) = f^{(m-n_1)}(x)$.

Продолжая этот процесс мы, либо найдем частное решение, либо получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного частного решения и его производных. Очевидно, что можно ограничиться числом уравнений этой системы, не превосходящим m

$$R_{n_i}(\tilde{y}) = f^{(m_i)}(x), \ 0 \le i < m, \qquad (3.2.20)$$

где положено $R_{n_0} \equiv L_n$, $m_0 = 0$ По построению эта система совместна, что позволяем найти частное решение. ■

Заметим, что условию теоремы удовлетворяет оператор частного решения Y_r. Теперь покажем, как из теорем 3.2.1 — 3.2.4 следует известный метод неопределённых коэффициентов.

Теорема 3.2.5. Пусть $L_n = \sum\limits_{i=s}^{n} a_i \, \delta^i$ — оператор с постоянными коэффициентами $a_n \ne 0$, $a_s \ne 0$, $0 \le s \le n$, $f(x) = p_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} b_i x^i$ — многочлен степени k. Рассмотрим уравнение

$$L_n(y) = p_k(x). \qquad (3.2.21)$$

При $s = 0$ частное решение уравнения (3.2.21) имеет вид

$$y = A_k(p_k(x)), \qquad (3.2.22)$$

а при $s \ne 0$

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{s \ раз} A_k(p_k(x))\, dx \ldots dx, \qquad (3.2.23)$$

где A_k некоторый ОЛДО.

Доказательство. Заметим, что правая часть уравнения (3.2.21) является линейной комбинацией ФСР уравнения $X_{k+1}(y)=\delta^{k+1}(y)=0$. При $s=0$ в силу очевидного тождества $X_{k+1}L_n = L_n X_{k+1}$ можно положить $Y_{k+1} = X_{k+1}$. Так как операторы L_n и Y_{k+1} взаимно просты справа, то для них выполняется тождество (3.2.2) при $k=0$. Следовательно, существует такой ОЛДО A_k, что имеет место формула (3.2.22).

Если $0<s<n$, то, выполнив в уравнении (3.2.21) замену $y^{(s)} = z$, придем к предыдущему случаю относительно уравнения $L_{n-s}(z) = p_k(x)$. Проинтегрировав уравнение $z = A_k(p_k(x))$ s раз, получим формулу (3.2.23). ■

Из этой теоремы сразу же вытекает метод неопределенных коэффициентов для уравнения (3.2.21).

Следствие 3.2.2. Частное решение уравнения (3.2.21) имеет вид $x^s Q_k(x)$, где $Q_k(x)$ многочлен степени k с буквенными коэффициентами, а s — кратность числа $\lambda = 0$, как корня характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения.

Таким образом, для отыскания частного решения уравнения (3.2.21) можно либо найти коэффициенты частного решения, подставив его в дифференциальное уравнение, либо, найдя оператор A_k, воспользоваться формулами (3.2.22), (3.2.23). Еще один способ отыскания частного решения даёт следующая теорема.

Теорема 3.2.6. Частное решение уравнения (3.2.21) ($s=0$) или его производная порядка $s>0$ удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\tilde{y}^{(s)}, \tilde{y}^{(s+1)}, ..., \tilde{y}^{(s+k)}$.

Доказательство. Действительно, дифференцируя уравнение (3.2.21) последовательно k раз и учитывая тождество $\delta^{k+s+1}(\tilde{y}) \equiv 0$, получим систему (3.2.20) в виде

$$L_{n_i}(\tilde{y}) = p_k^{(i)}(x), \ i=\overline{0,k+1}, \tag{3.2.24}$$

где порядки n_i операторов L_{n_i} зависят, вообще говоря, от i. Разрешая её, найдем $\tilde{y}$ или $\tilde{y}^{(s)}$. ■

Замечание. Случай, когда правая часть уравнения (3.3.1) имеет специальный вид $p_k(x)e^{ax}\begin{Bmatrix}\cos(bx)\\ \sin(bx)\end{Bmatrix}$ сводится к предыдущему следующим образом. Перейдем к комплексному уравнению

$$L_n(u) = p_k(x)e^{\lambda x}, \tag{3.2.25}$$

где $\lambda = a + ib$, $u(x) = v(x) + i\,z(x)$. Сделав в уравнении (3.2.25) замену $u = t(x)e^{\lambda x}$, приведем его к виду (3.2.21)

$$\tilde{L}_n(t) = p_k(x), \tag{3.2.26}$$

где оператор $\tilde{L}_n$, вообще говоря, имеет комплексные коэффициенты. Найдем частное решение уравнения (3.2.26), а в качестве частного решения исходного уравнения возьмем вещественную или мнимую части функции $u(x)$.

Если правая часть уравнения (3.2.25) является суммой слагаемых вида $p_s(x)\cos(bx)$ и $p_t(x)\sin(bx)$, то нужно найти частные решения для каждого слагаемого или воспользоваться предыдущим замечанием.

Поясним изложенное на нескольких примерах.

Пример 3.2.1. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' - 3y = 2x^2 + x + 1$.

Имеем $s = 0$, $k = 2$. Поэтому по теореме 3.2.1 частное решение удовлетворяет уравнению $y''' = 0$. Применяя теорему 3.2.6, получим

$$\left.y'' + 2y' - 3y = 2x^2 + x + 1,\ 2y'' - 3y' = 4x + 1, -3y'' = 4,\right\}$$

отсюда $y = -2x^2/3 - 11x/9 - 43/27$.

Пример 3.2.2. Найти частное решение уравнения с переменными коэффициентами $x\,y'' - x^2\,y' + y = -2x^3 + 3x$.

Здесь оператор $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{x\delta}^2 - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, а правая часть является линейной комбинацией ФСР уравнения $\boldsymbol{X}_4(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\delta}^4(\boldsymbol{y}) = 0$. Легко проверяется, что $\boldsymbol{\delta}^4(\boldsymbol{x\delta}^2 - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = (\boldsymbol{x\delta}^3 + (4 - \boldsymbol{x}^2)\,\boldsymbol{\delta}^2 + (1 - 8\boldsymbol{x})\boldsymbol{\delta} - 12\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\delta}^3$. Поэтому $\boldsymbol{Y}_3 = \boldsymbol{\delta}^3$ и, следовательно, частное решение, возможно, является многочленом второй степени. Дифференцируя уравнение трижды с учетом тождества $\boldsymbol{y}''' = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}'' - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{x}^3 + 3\boldsymbol{x}, (1 - \boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{y}'' + (1 - 2\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}' = -6\boldsymbol{x}^2 + 3,\\ &(1 - 4\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}'' - 2\boldsymbol{y}' = -12\boldsymbol{x},\ -6\boldsymbol{y}'' = -12. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}$. Подстановкой в уравнение убеждаемся, что найдено частное решение.

Пример 3.2.3. Найти частное решение уравнения $\boldsymbol{y}'' + 4\boldsymbol{y} = = 1 + \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$.

В данном случае оператор $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{\delta}^2 + 4\boldsymbol{\varepsilon}$, а правая часть уравнения является линейной комбинацией ФСР уравнения $\boldsymbol{X}_4(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{\delta}^2 + \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\delta}^2 - \boldsymbol{\delta})(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{\delta}^4 - \boldsymbol{\delta}^3 + \boldsymbol{\delta}^2 - \boldsymbol{\delta})(\boldsymbol{y}) = 0$. Тождество (3.2.9) имеет вид $(\boldsymbol{\delta}^2 + 4\boldsymbol{\varepsilon})\cdot(\boldsymbol{\delta}^4 - \boldsymbol{\delta}^3 + \boldsymbol{\delta}^2 - \boldsymbol{\delta}) = (\boldsymbol{\delta}^4 - \boldsymbol{\delta}^3 + \boldsymbol{\delta}^2 - \boldsymbol{\delta})\cdot(\boldsymbol{\delta}^2 + 4\boldsymbol{\varepsilon})$ = в силу коммутативности операторов $\boldsymbol{L}_2$ и $\boldsymbol{X}_4$. Так как эти операторы взаимно просты справа, то можно положить $\boldsymbol{Y}_4 = \boldsymbol{X}_4$. Поэтому искомое частное решение должно быть линейной комбинацией ФСР уравнения $\boldsymbol{Y}_4(\boldsymbol{y}) = 0$. Дифференцируя исходное уравнение и приводя по модулю уравнения $\boldsymbol{Y}_4(\boldsymbol{y}) = 0$, получим систему

$$\left.\begin{array}{lllll} & \boldsymbol{y}'' & & +4\boldsymbol{y} & = 1 + \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{cos}(\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{y}''' & & +4\boldsymbol{y}' & & = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{sin}(\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{y}''' & +3\boldsymbol{y}'' & +\boldsymbol{y}' & & = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{cos}(\boldsymbol{x}),\\ 4\boldsymbol{y}''' & & +\boldsymbol{y}' & & = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{sin}(\boldsymbol{x}), \end{array}\right\}$$

из которой найдем частное решение $\boldsymbol{y} = 1/4 + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}/5 + (\mathbf{cos}\ \boldsymbol{x})/3$.

Следующий пример показывает, что факторизация оператора $\boldsymbol{X}_r\boldsymbol{L}_n$ не всегда очевидна.

Пример 3.2.4. Найти частное решение уравнения $y'' + y = \cos x$.

В данном случае $L_2 = X_2 = \delta^2 + \varepsilon$ и нельзя положить $Y_2 = X_2$, так как операторы L_2 и X_2 не являются взаимно простыми справа. Но имеет место следующее тождество (3.2.9), $(\delta^2 + \varepsilon)^2 = (x^{-2}\delta^2 - 2x^{-3}\delta + x^{-2}\varepsilon)\cdot$ $(x^2\delta^2 - 2x\delta + (x^2 + 2)\varepsilon)$, в котором операторы L_2 и $Y_2 = x^2\delta^2 -$ $-2x\delta + (x^2 + 2)\varepsilon$ взаимно просты справа. Поэтому искомое частное решение нужно искать в виде линейной комбинации ФСР однородного уравнения $Y_2(y) = 0$. Дифференцируя исходное уравнение и приводя по модулю уравнения $Y_2(y) = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} y'' \qquad\qquad &+ y = \cos x, \\ 2xy' \qquad &- 2y = x^2 \cos x, \\ 4xy' - 2(x^2+2)&y = 2x^2 \cos x - x^3 \sin x, \end{aligned}\right\}$$

откуда $y = x \sin(x)/2$ — частное решение.

3.3. Частные решения коммутативно - факторизуемых неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем

Распространим метод, изложенный в предыдущем параграфе, на один класс неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений с правой частью специального вида и с переменными коэффициентами [57].

1. Частные решения коммутативно факторизуемых уравнений.

Заметим, что в [47] была доказана эквивалентность свойств коммутативной факторизуемости и приводимости обыкновенных линейных дифференциальных операторов к операторам с постоянными коэффициентами. Некоторые свойства коммутативных ОЛДО рассмотрены в [67].

Пусть $\omega(x)$ — достаточное число раз дифференцируемая вещественная функция. Обозначим через $\boldsymbol{\Omega} = \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{\omega(x)}}$ любую первообразную, а через $\boldsymbol{S_q(\Omega)} = \sum_{i=0}^{q} \boldsymbol{s_i \Omega^i}$ — многочлен от $\boldsymbol{\Omega}$, вообще говоря, с комплексными коэффициентами. Через $\boldsymbol{\omega(x)\delta}$ обозначим оператор дифференцирования с умножением на функцию $\boldsymbol{\omega(x)}$ слева, то есть оператор $\boldsymbol{\omega(x)\frac{d}{dx}}$, тогда $\boldsymbol{(\omega\delta)^i}$ — его $\boldsymbol{i}$-степень.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\boldsymbol{L_m(y)} = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a_i(\omega\delta)^i y} = \boldsymbol{S_q(\Omega)}, \tag{3.3.1}$$

где $\boldsymbol{a_i}$ — комплексные числа. В частности, при $\boldsymbol{\omega(x)} = 1$ уравнение (3.3.1) с постоянными коэффициентами, при $\boldsymbol{\omega(x) = x}$ — уравнение Эйлера и т.д. Убедимся, что многочлены от $\boldsymbol{\Omega}$ относительно дифференцирования $\boldsymbol{\omega(x)\delta}$ обладают такими же свойствами, как обычные многочлены относительно производной.

Лемма 3.3.1. Если $\boldsymbol{S_q(\Omega)}$ — многочлен степени $\boldsymbol{q}$, то $\boldsymbol{(\omega\delta)^q S_q(\Omega)} \neq 0$ и $\boldsymbol{(\omega\delta)^{q+j} S_q(\Omega)} = 0$ при $0 < \boldsymbol{j}$.

Доказательство. Действительно, $\boldsymbol{\omega\delta\Omega} = 1$, $\boldsymbol{(\omega\delta)^2\Omega^2} = 2!$. Пусть $\boldsymbol{(\omega\delta)^{q-1}\Omega^{q-1}} = \boldsymbol{(q}-1\boldsymbol{)!}$. Тогда $\boldsymbol{(\omega\delta)^q\Omega^q} = \boldsymbol{(\omega\delta)^{q-1}(\omega\delta\Omega^q)} = \boldsymbol{q(\omega\delta)^{q-1}\Omega^{q-1}} = \boldsymbol{q!}$. ■

Многочлены $\boldsymbol{H_m(\lambda)} = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a_i \lambda_i}$ назовем характеристическим многочленом однородного уравнения $\boldsymbol{L_m(y)} = 0$.

Лемма 3.3.2. Справедливо тождество

$$\boldsymbol{L_m(ue^{\lambda_0\Omega})} = \boldsymbol{e^{\lambda_0\Omega}} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\boldsymbol{i!}} \boldsymbol{H_m^{(i)}(\lambda_0)(\omega\delta)^i u}, \tag{3.3.2}$$

где $\boldsymbol{H_m^{(i)}(\lambda_0)} = \boldsymbol{\delta^i(H_m(\lambda))}|_{\lambda=\lambda_0}$ — значения производных характеристического многочлена при $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda_0}$.

Применив теорему 3.3.1 в том случае, когда правая часть уравнения (3.3.1) является многочленом степени q от Ω, а $L_m=\sum_{i=0}^{m} a_i(\omega\delta)^i$. В этом случае можно положить $X_{q+1}=(\omega\delta)^{q+1}$, и тождество (3.2.9) превратится в условие коммутирования операторов. Приведем теорему, дающую новый метод отыскания частного решения,

Теорема 3.3.1. Дифференциальное уравнение (3.3.1), где $a_i\in C$, $i=\overline{0,m}$, $a_0\neq 0$ и $a_m\neq 0$, имеет частным решением многочлен $U_q(\Omega)$ степени q, удовлетворяющий треугольной системе уравнений

$$(\omega\delta)^i L_m(y)=(\omega\delta)^i S_q(\Omega),\ i=\overline{0,q}, \tag{3.3.3}$$

рассматриваемой как алгебраическая относительно переменных y, $\omega\delta\, y$, …, $(\omega\delta)^q y$.

Доказательство. Проведем индукцию по степени многочлена $S_q(\Omega)$. При $q=0$ утверждение очевидно. При $q=1$ искомое частное решение можно определить согласно лемме 3.3.1 из алгебраической относительно переменных y, $\omega\delta\, y$ системы $a_1\omega\delta\, y+a_0 y=S_1(\Omega)$, $a_0\omega\delta\, y=\ \omega\delta\ S_1(\Omega)$.

Допустим, что утверждение справедливо при $q=k$, то есть система

$$(\omega\delta)^i L_m(y)=(\omega\delta)^i S_q(\Omega),\ i=\overline{0,k}, \tag{3.3.4}$$

как алгебраическая относительно переменных y, $\omega\delta\, y$, …, $(\omega\delta)^k y$ определяет многочлен степени k и его производные до k порядка включительно. Положим $q=k+1$ и рассмотрим уравнение

$$L_m(y)=S_{k+1}(\Omega). \tag{3.3.5}$$

Применив к этому уравнению оператор $\omega\delta$, получим по лемме 3.3.1

$$L_m(\omega\delta\, y)=S_k(\Omega). \tag{3.3.6}$$

Согласно предположению индукции, уравнение (3.4.5) имеет частным решением многочлен $\omega\delta\, y=y_k$ степени k, удовлетворяющий вместе с «производными» системе (3.4.3). Обозначим $(\omega\delta)^2 y=y_k^{(1)}$, …, $(\omega\delta)^{k+1} y=y_k^k$. Из уравнения (3.4.4) $y=\frac{1}{a_0}S_{k+1}(\Omega)-a_1y_k-\cdots\ -a_m(\omega\delta)^m y$. Если заменить в этом выражении производную $(\omega\delta)^i y$ на $(\omega\delta)^{i-1}y_k$, $i=\overline{1,m}$, то полученный многочлен $y=\frac{1}{a_0}S_{k+1}(\Omega)-a_1y_k-\cdots\ -a_m(\omega\delta)^{m-1}y_k$ степени $k+1$ должен удовлетворять уравнению (3.3.5) по построению, при этом многочлен $y_{k+1}=\frac{1}{a_0}S_{k+1}(\Omega)-a_1y\ -\ \cdots-a_m(\omega\delta)^m y$ удовлетворяет алгебраической системе $(\omega\delta)^i L_n(y)=(\omega\delta)^i S_{k+1}(\Omega)$, $i=\overline{0,k+1}$. ■

Замечание. Теорема 3.4.1 дает следующий способ отыскания полиномиального частного решения в рассматриваемом случае: применяя к исходному уравнению, оператор $\omega\delta$ с учетом тождества $(\omega\delta)^j y=0$, $j>q$, составим и решим систему линейных уравнений (3.4.2) как алгебраическую относительно переменных y, $\omega\delta\, y$, …, $(\omega\delta)^q y$. Очевидно, что эта неоднородная система всегда является треугольной с отличными от нуля элементами на диагонали.

Следствие 3.3.1. Дифференциальное уравнение $L_m(y)=\sum_{i=r}^{m}a_i(\omega\delta)^i y=$ $=P_s(\Omega)$, где $0\le r\le m$, $a_r\ne 0$, а $P_s(\Omega)$ — многочлен степени s, вообще говоря, с комплексными коэффициентами, имеет частным решением многочлен $y=\Omega^r Q_s(\Omega)$ степени $s+r$, где $Q_s(\Omega)$ многочлен степени s.

Доказательство. Данное уравнение заменой $(\omega\delta)^r y=w$ сводится к уравнению (3.3.1) с отличным от нуля младшим коэффициентом. ■

Рассмотрим теперь уравнение с правой частью специального вида

$$L_m(y)=e^{a\Omega}(P_n(\Omega)\cos(b\Omega)+Q_k(\Omega)\sin(b\Omega)), \tag{3.3.7}$$

где a и b — вещественные числа, $P_n(\Omega)$, $Q_k(\Omega)$ — многочлены с вещественными коэффициентами степени n и k соответственно.

Для отыскания частного решения уравнения (3.3.7) заменим его комплексифицированным уравнением, введя для этого новую неизвестную комплекснозначную функцию вещественного аргумента $z = y + iv$, где y, v — вещественные функции вещественного аргумента x, $i^2 = -1$.

Уравнение

$$L_m(z) = e^{\lambda_0 \Omega}(P_n(\Omega) - iQ_k(\Omega)), \qquad (3.3.8)$$

где $\lambda_0 = a + ib$ называется комплексификацией уравнения (3.4.6). Отделяя в уравнении (3.3.8) вещественную и мнимую части, легко убедиться, что его вещественная часть равносильна исходному вещественному уравнению.

Теорема 3.3.2. Уравнение (3.4.6) имеет частное решение вида

$$y = \Omega^r \exp(a\Omega)(\mathrm{Re}(U_s(\Omega)\cos(b\Omega) - \mathrm{Im}(U_s(\Omega)\sin(b\Omega)), \qquad (3.3.9)$$

где r — кратность числа $\lambda_0 = a + ib$ как корня характеристического многочлена оператора L_m, $U_s(\Omega)$ — многочлен степени $s = \max(n, k)$ с комплексными коэффициентами, который при $r > 0$ совпадает с многочленом $Q_s(\Omega)$ из следствия 3.3.1; $\mathrm{Re}(U_s(\Omega))$, $\mathrm{Im}(U_s(\Omega))$ — вещественная и мнимая части многочлена $U_s(x)$.

Доказательство. Выполнив комплексификацию исходного уравнения получим $L_m(z) = P_n(\Omega) - iQ_k(\Omega)$. В этом уравнении замену переменной

$$z = ue^{\lambda_0 \Omega} \qquad (3.3.10)$$

и воспользовавшись тождеством (3.4.1), приведем его к виду $\tilde{L}_m(u) = \sum_{i=r}^{m} \frac{1}{i!} H_m^{(i)}(\lambda_0)(\omega\delta)^i u = T_s(\Omega)$, где коэффициенты $H_m^{(i)}(\lambda_0)$, вообще говоря, комплексные числа, $T_s(\Omega) = P_n(\Omega) - iQ_k(\Omega)$.

Если в последнем уравнении $r \neq 0$, то сделав еще одну замену $(\omega\delta)^r u = w$, получим $\tilde{L}_{m-r}(w) = \sum_{i=0}^{m-r} B^i(\lambda_0)(\omega\delta)^r w = T_s(\Omega)$, где $B^0(\lambda_0) \neq 0$. По теореме 3.3.1 последнее уравнение имеет частным решением многочлен $w = W_s(\Omega)$. Интегрируя при $r > 0$ дифференциальное уравнение $(\omega\delta)^r u = W_s(\Omega)$ при нулевых произвольных постоянных, получим

$u = U_s(\Omega)$. В силу подстановки (3.3.10) частное комплексное решение исходного уравнения имеет вид $z = \Omega^r U_s(\Omega)\exp(\lambda_0\Omega)$. Вещественное частное решение исходного уравнения находится по формуле $y = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$. ■

Пример 3.4.1. Найти частное решение уравнения $x^2 y'' + 4xy' + 2y =$ $= x^{-1}[(\ln^2 x + 1)\cos(\ln x) + (\ln x - 2)\sin(\ln x)]$.

Решение. Переписав уравнение в виде $(x\delta)^2 y + 3(x\delta)y + 2y =$ $= \exp(-\ln x)[(\ln^2 x + 1)\cos(\ln x) + (\ln x - 2)\sin(\ln x)]$, видим, что $\omega(x) = x$, $\Omega = \ln x$. Комплексифицировав последнее уравнение, получим $(x\delta)^2 z + 3x\delta z + 2z = \exp(\lambda_0 \ln x)(\ln^2 x - i\ln x + 1 + 2i)$, где $\lambda_0 = -1 + i$. Выполнив замену переменной $z = u\exp(\lambda_0 \ln x)$, найдем $(x\delta)^2 u +$ $+(1+2i)(x\delta)u + (-1+i)u = \ln^2 x - i\ln x + 1 + 2i$. Частным решением последнего уравнения является многочлен второй степени относительно $\ln x$. Поэтому, действуя на это уравнение слева оператором $x\delta$ с учетом условия $(x\delta)^j u = 0$ при $j > 2$, составим систему

$$\left.\begin{array}{llll}
(x\delta)^2 u & +(1+2i)(x\delta)u & +(-1+i)u & = \ln^2 x - i\ln x + 1 + 2i, \\
(1+2i)(x\delta)^2 u & +(-1+i)(x\delta)u & & = 2\ln x - i, \\
(-1+i)(x\delta)^2 u & & & = 2,
\end{array}\right\}$$

из которой найдем $u = \frac{1}{2}\left(-\ln^2 x + 3\ln x + 1\right) + \frac{1}{2}\left(-\ln^2 x - \ln x\right)i$. Поэтому по формуле (3.3.9) вещественное частное решение исходного уравнения имеет вид $y = \frac{1}{2}x^{-1}\left(\left(-\ln^2 x + 3\ln x + 1\right)\cos(\ln x) + \left(\ln^2 x + \ln x\right)\sin(\ln x)\right)$. Нетрудно убедиться, что применение известных методов к отысканию даже частного решения рассмотренного, уравнения, приводит к существенно большему объему вычислений.

2. Отыскание частных решений неоднородных систем

Покажем, что предложенный в предыдущем пункте метод отыскания частных решений применим к некоторому достаточно часто встречающемуся на практике классу неоднородных систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим системы вида

$$\boldsymbol{L_m(\overline{y}) = \sum_{i=0}^{m} A^i(\omega\delta)^i \overline{y} = \overline{S_q(\Omega)}}, \tag{3.3.11}$$

где $\boldsymbol{A_i}$ — $\boldsymbol{n \times n}$ матрицы с комплексными элементами, $\boldsymbol{\overline{y} = (y_1(x),...,y_n(x))}$ — столбец неизвестных, $\boldsymbol{\overline{S_q(\Omega)} = (S_{q_1}(\Omega),\dots,S_{q_n}(\Omega))}$ — столбец правых частей, в котором $\boldsymbol{S_{q_k}(\Omega)}$ — заданные многочлены степени $\boldsymbol{q_k}$. Число $\boldsymbol{q = \max(q_1,...,q_n)}$ назовем весом вектора $\boldsymbol{\overline{S_q(\Omega)}}$.

Матричный многочлен $\boldsymbol{H_m(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} A^i \lambda^i}$ назовем характеристическим многочленом системы (3.3.11).

Лемма 3.3.3. Если $\boldsymbol{\overline{S_q(\Omega)}}$ — столбец веса $\boldsymbol{q}$, то $\boldsymbol{(\omega\delta)^q \overline{S_q(\Omega)} = \overline{s}} \neq 0$, где $\boldsymbol{\overline{s}}$ — постоянный вектор, $\boldsymbol{(\omega\delta)^{q+j} \overline{S_q(\Omega)} = \overline{s}} = 0$ при $\boldsymbol{j > q}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.3.1.

Теорема 3.3.3. Если система дифференциальных уравнений (3.3.11) совместна, а матрица A_0 обратима, то система имеет частным решением столбец

$$\boldsymbol{\overline{\Phi_q(\Omega)} = (\Phi_{p_1}(\Omega),...,\Phi_{p_0}(\Omega))} \tag{3.3.12}$$

веса $\boldsymbol{q}$, удовлетворяющий треугольной системе матричных уравнений

$$\boldsymbol{(\omega\delta)^i L_m(\tilde{y}) = (\omega\delta)^i \overline{S_q(\Omega)}}\ ,\ \boldsymbol{i} = \overline{0,\boldsymbol{q}}, \tag{3.3.13}$$

рассматриваемой как алгебраическая относительно неизвестных $\boldsymbol{\overline{y}}$, $\boldsymbol{\omega\delta\,\overline{y}}$, ..., $\boldsymbol{(\omega\delta)^q\,\overline{y}}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.5.1.

Пример 3.3.2. Найти частное решение системы $\boldsymbol{A^3\,\overline{y}''' + A^2\,\overline{y}'' + A^1\,\overline{y}' + A^0\overline{y} = \overline{S_2(x)}}$, где $\boldsymbol{A^3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A^1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \ \overline{\boldsymbol{S}_2(\boldsymbol{x})} = (2\boldsymbol{x}+1, \boldsymbol{x}^2-2)^{\boldsymbol{T}}.$$

Согласно теореме 3.4.3 данная система имеет частным решением столбец веса два. Поэтому дифференцируя дважды исходную систему, получим следующую алгебраическую систему для отыскания частного решения

$$\left.\boldsymbol{A}^2\overline{\boldsymbol{y}}'' + \boldsymbol{A}^1\overline{\boldsymbol{y}}' + \boldsymbol{A}^0\overline{\boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{S}_2(\Omega)}, \boldsymbol{A}^1\overline{\boldsymbol{y}}'' + \boldsymbol{A}^0\overline{\boldsymbol{y}}' = \boldsymbol{\delta}\overline{\boldsymbol{S}_2(\Omega)}, \boldsymbol{A}^0\overline{\boldsymbol{y}}'' = \boldsymbol{\delta}^2\overline{\boldsymbol{S}_2(\Omega)}\right\}.$$

Найденное отсюда решение таково $\overline{\boldsymbol{y}} = \left(-\boldsymbol{x}^2/3 + 14\boldsymbol{x}/3 - 13/9, \ \boldsymbol{x}^2/3 - 2\boldsymbol{x} + 10/9\right)^{\boldsymbol{T}}$.

Следствие 3.3.2. Если система

$$\boldsymbol{L_m}(\overline{\boldsymbol{y}}) = \sum_{i=r}^{m} \boldsymbol{A}^i(\boldsymbol{\omega\delta})^i\overline{\boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{S}_q(\Omega)}, \tag{3.3.14}$$

где $0 \le \boldsymbol{r} < \boldsymbol{m}$, $\overline{\boldsymbol{S}_q(\Omega)}$ — столбец веса $\boldsymbol{q}$, а матрица $\boldsymbol{A}^r$ обратима, система имеет частное решение вида

$$\overline{\boldsymbol{y}} = \Omega^r\overline{\Phi_q(\Omega)}, \tag{3.3.15}$$

где $\overline{\Phi_q(\Omega)}$ — столбец веса $\boldsymbol{q}$.

Доказательство утверждения состоит в приведении системы (3.3.14) заменой $(\boldsymbol{\omega\delta})^r\overline{\boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{v}}$ к виду (3.3.11) с последующим применением теоремы 3.3.3 и интегрированием системы $(\boldsymbol{\omega\delta})^r\overline{\boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{v}}$ при нулевых произвольных постоянных.

Рассмотрим теперь систему более общего вида

$$\boldsymbol{L_m}(\overline{\boldsymbol{y}}) = \exp(\boldsymbol{a}\Omega)[\overline{\boldsymbol{S}_q(\Omega)}\cos(\boldsymbol{b}\Omega) + \overline{\boldsymbol{R}_k(\Omega)}\sin(\boldsymbol{b}\Omega)], \tag{3.3.16}$$

в которой коэффициенты оператора $\boldsymbol{L}$ являются вещественными $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ матрицами, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — вещественные числа, $\overline{\boldsymbol{S}_q(\Omega)}$ и $\overline{\boldsymbol{R}_k(\Omega)}$ — столбцы многочленов с вещественными коэффициентами веса $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{k}$ соответственно.

Назовем комплексификацией системы (3.3.16) следующую систему

$$\boldsymbol{L_m}(\overline{\boldsymbol{z}}) = \exp(\boldsymbol{\lambda}_0\Omega)[\overline{\boldsymbol{S}_q(\Omega)} - \boldsymbol{i}\,\overline{\boldsymbol{R}_k(\Omega)}], \tag{3.3.17}$$

где $\overline{z} = \overline{y} + i\overline{v}$ — новая неизвестная вектор-функция, $\overline{y}$ и $\overline{v}$ — вещественные вектор − функции вещественного аргумента x, $\lambda_0 = a + ib$. Вещественная часть последней системы совпадает с системой (3.3.16).

Теорема 3.3.4. Если система (3.3.16) совместна и при $\lambda_0 = a + ib$ матрицы $H_m^{(i)}(\lambda_0)$, $i = \overline{0, r-1}$, ненулевые, а матрица $H_m^{(r)}(\lambda_0)$ обратима, то система имеет частное решение вида

$$\overline{y} = \Omega^r \exp(a\Omega)[\,\mathrm{Re}(\overline{U_s(\Omega)})\cos(b\Omega) - \mathrm{Im}(\overline{U_s(\Omega)})\sin(b\Omega)], \tag{3.3.18}$$

где $\overline{U_s(\Omega)}$ — столбец веса $s = \max(q, k)$, который при $r = 0$ находится из системы вида (3.3.13), а при $r = 0$ совпадает со столбцом $\overline{\Phi_q(\Omega)}$, отыскиваемым, как и в следствии; $\mathrm{Re}(\overline{U_s(\Omega)})$ и $\mathrm{Im}(\overline{U_s(\Omega)})$ — вещественная и мнимая части столбца $\overline{U_s(\Omega)}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.3.2. Именно, комплексифицировав систему (3.3.16), выполним в ней замену переменной $\overline{z} = \overline{u}\exp(\lambda_0\Omega)$, приведя к виду

$$L_m(\overline{u}) = \sum_{i=r}^{m} \frac{1}{i!} H_m^{(i)}(\lambda_0)(\omega\delta)^i \overline{u} = \overline{T_s(\Omega)}, \tag{3.3.19}$$

где коэффициенты $H_m^{(i)}(\lambda_0)$, вообще говоря, комплексные матрицы, $\overline{T_s(\Omega)} = \overline{S_q(\Omega)} - i\,\overline{R_k(\Omega)}$.

Если в последней системе $r \neq 0$, то, сделав еще одну замену $(\omega\delta)^r \overline{u} = \overline{w}$, приведем ее к виду $L_{m-r}(\overline{u}) = \sum_{i=0}^{m-r} B^i(\lambda_0)(\omega\delta)^i \overline{w} = \overline{T_s(\Omega)}$, где матрица $B^0(\lambda_0)$ обратима по предположению, Далее по теореме 3.3.3 или по следствию получим требуемое.

3.4. Полиномиальные решения неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Получим условия существования полиномиальных решений у неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка и метод их отыскания [62], который нам понадобится в параграфе 3.5.

Теорема 3.4.1. Если дифференциальное уравнение

$$p(x)z'(x)+q(x)z(x)+\lambda r(x)=t(x), \tag{3.4.1}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $t(x)$ — достаточное число раз дифференцируемые функции, имеет при некотором значении числового параметра λ частным решением многочлен $z=z_n(x)$ степени n, то это решение может быть найдено из системы уравнений, полученной из уравнения (4.1.1) дифференцированием с условием $z_n^{(k)}(x)\equiv 0$ при $k>n$, рассматриваемой как алгебраическая относительно неизвестных $z_n^{(k)}(x)$, $k=0,1,...,n$.

Доказательство. Дифференцируя уравнение (4.1.1) при условии $z^{(k)}(x)=z_n^{(k)}(x)=0$, $k>n$, составим систему

$$\left.\begin{aligned}
&q(x)z_n+p(x)z_n'+\lambda r(x) = t(x),\\
&q'(x)z_n+(q(x)+p'(x))z_n'+p(x)z_n''+\lambda r'(x)=t'(x),\\
&q''(x)z_n+(2q'(x)+p''(x))z_n'+(q(x)+2p'(x))z_n''+\\
&\qquad\qquad +p(x)z_n'''+\lambda r''(x)=t''(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&q^{(n)}(x)z_n+(nq^{(n-1)}(x)+p^{(n)}(x))z_n'+\cdots+p(x)z_n^{(n)}(x)+\\
&\qquad\qquad +\lambda r^{(n)}(x)=t^{(n)}(x).
\end{aligned}\right\} \tag{3.4.2}$$

Согласно предположению эта система совместна и её решение может быть найдено известными методами.

Если система квадратная и её определитель не равен нулю, то

$$z_n(x)=\frac{\Delta_z}{\Delta},\ \lambda=\frac{\Delta_\lambda}{\Delta}, \tag{3.4.3}$$

где Δ — определитель системы, Δ_z, Δ_λ — определители, полученные из определителя системы заменой первого и последнего столбцов столбцом свободных членов, соответственно. ■

Теорема 3.4.2. Пусть в уравнении

$$p_{n_1}(x)z'(x)+q_{n_2}(x)z(x)+\lambda r_{n_3}(x)=t_{n_4}(x). \qquad (3.4.4)$$

коэффициенты $p_{n_1}(x)$, $q_{n_2}(x)$, $r_{n_3}(x)$, $t_{n_4}(x)$ — многочлены степени n_1, n_2, n_3, n_4, обозначим $N=\max(n_3, n_4)$. Для того чтобы уравнение (3.4.4) имело полиномиальное решение $z(x)=z_n(x)$ степени n необходимо, выполнение одного из условий:

а) $n_1+n-1=n_2+n=N$; б) $n_1+n-1=n_2+n>N$;

в) $n_1+n-1=N>n_2+n$; г) $n_2+n=N>n_1+n-1$.

При выполнении одного из необходимых условий для существования указанного решения достаточно чтобы система уравнений (3.4.2), полученная дифференцированием уравнения (3.4.4) с условием $z_n^{(k)}(x)\equiv 0$ для достаточно больших k, не содержала противоречивых уравнений.

Доказательство. Необходимость условий а) — г) вытекает из сравнения степеней многочленов в правой и левой частях уравнения (3.4.4).

Если одно из условий а) — г) выполняется, то указанное частное решение может быть найдено из системы уравнений (3.4.2), при условии что в ней нет противоречивых уравнений.

Например, условие а) может иметь место только при $n=N$, $n_1=1$, $n_2=0$. В этом случае уравнение (3.4.4) принимает вид

$$(a_1x+a_0)z_N'(x)+b_0z_N(x)+\lambda r_N(x)=t_N(x). \qquad ■(3.4.5)$$

Теорема 3.4.3. Если $|a_1|+|a_0|\neq 0$, $b_0\neq 0$ и $b_0+ka_1\neq 0$ при $k=1,2,\ldots,N$, то существует полиномиальное частное решение $z=z_N(x)$ уравнения (5) при любом значении параметра λ.

Доказательство. Действительно, в этом случае система (3.4.2) приобретает почти треугольный вид

$$\left.\begin{array}{l}
b_0 z_N + (a_1 x + a_0) z_N' \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \lambda r_N(x) = t_N(x),\\
\qquad (b_0 + a_1) z_N' + (a_1 x + a_0) z_N'' \qquad\qquad\qquad + \lambda r_N'(x) = t_N'(x),\\
\qquad\qquad (b_0 + 2a_1) z_N'' + (a_1 x + a_0) z_n''' \qquad + \lambda r_N''(x) = t_N''(x),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad (b_0 + N a_1) z_N^{(N)}(x) + \lambda r_N^{(N)}(x) = t^{(N)}(x),
\end{array}\right\}$$

из которой находим

$$z_N(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{(a_1 x + a_0)^k}{b_0 (b_0 + a_1) \cdots (b_0 + k a_1)} \left(t_N(x) - \lambda r_N(x) \right)^{(k)}. \qquad (3.4.6)$$

Если $b_0 = 0$, но $|a_1| + |a_0| \neq 0$, то полиномиальное решение существует, если результант $\mathbf{Re}\, z(a_1 x + a_0, t_N(x) - \lambda r_N(x)) = 0$. ■

3.5. Рациональные решения однородных линейных дифференциальных уравнений

По-видимому, впервые задача об отыскании рациональных решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений была рассмотрена Ж. Лиувиллем [87]. Впоследствии ею занимались и российские математики В.Г. Имшенецкий [22], П.А. Некрасов, К.А. Андреев [2], советские математики, например, [28]. В конце 20 и начале 21 века в связи с развитием систем компьютерной алгебры (СКА) этой задаче посвятили свои работы многие математики, например, [4, 69, 104, 105, 107]. Эффективный алгоритм отыскания рациональных решений уравнений второго порядка с рациональными коэффициентами предложен в [85]. Мы предлагаем метод отыскания рациональных решений, названный методом Д-преобразования [59], в некотором смысле предпочтительный предложенных ранее.

Задача отыскания рациональных решений НОЛДУ является частной по отношению к общей задаче отыскания лиувиллевых решений. В одной из работ [70] французского математика Арбогаста предложен метод отыскания частных полиномиальных решений ОЛДУ, названный им методом «деривации». Впоследствии этот метод был применен Н.В. Бугаевым [11] для решения некоторого круга задач математического анализа. Рассмотрим ОЛДУ

$$a_m(x)y^{(m)}+a_{m-1}(x)y^{(m-1)}+...+a_1(x)y'+a_0(x)y=0, \qquad (3.5.1)$$

где $a_i(x),\ i=\overline{0,m}$ — рациональные функции над полем комплексных чисел. Без ограничения общности можно считать, что $a_i(x)$ — многочлены, причём взаимно простые в совокупности, $(a_m, a_{m-1},\dots, a_0)=1$.

Известно [23], что корни ξ_j знаменателей рациональных решений уравнения (3.5.1) являются корнями уравнения $a_m(x)=0$, а показатели степеней r_j двучленов $x-\xi_j$ совпадают с модулями отрицательных корней определяющего уравнения. Например, если уравнение (3.5.1) можно записать в виде $\sum_{i=0}^{m}(x-\xi_j)^i h_i(x)y^{(i)}=0$, где $a_i(x)=h_i(x)(x-\xi_j)^i$, причем $h_m(\xi_j)\neq 0$, то определяющее уравнение будет иметь вид

$$F(r)=\sum_{i=0}^{m}C_r^i i!\,h_i(\xi_j)=0. \qquad (3.5.2)$$

В более общем случае определяющее уравнение получается приравниванием к нули коэффициента при младшей степени двучлена $x-\xi_j$ в выражении $\sum_{\nu}C_r^{\nu}\nu!h_\nu(\xi)(x-\xi)^{\alpha_\nu-\nu}$, где $a_\nu(x)=h_\nu(x)(x-\xi)^{\alpha_\nu}$. В качестве верхних значений r_j можно взять модули наименьших неположительных корней определяющего уравнения. Пусть $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ те из корней уравнения $a_m(x)=0$, для которых соответствующие определяющие уравнения имеют натуральные неположительные корни, и пусть $r_1,r_2,...,r_n$ модули наименьших из них, соответственно.

Выполнив в уравнении (3.5.1) замену

$$y = u(x-\xi_1)^{-r_1}(x-\xi_2)^{-r_2}\cdots(x-\xi_n)^{-r_n}, \qquad (3.5.3)$$

получим уравнение

$$b_{m,0}(x)u^{(m)} + b_{m-1,0}(x)u^{(m-1)} + ... + b_{1,0}(x)u' + b_{0,0}(x)u = 0, \qquad (3.5.4)$$

коэффициенты которого можно считать многочленами взаимно простыми в совокупности.

Теорема 3.5.1. Уравнение (3.5.1) имеет рациональные решения в том и только в том случае, когда уравнение (3.5.4) имеет полиномиальные решения. Размерность подпространства рациональных решений уравнения (3.5.1) совпадает с размерностью подпространства полиномиальных решений уравнения (3.5.4). ■

Подставим полином $q(x) = x^{\lambda} +$ (члены меньшей степени) в (3.5.4) и обозначим через $\Phi(\lambda)$ коэффициент при старшей степени переменной x. Уравнение $\Phi(\lambda) = 0$ назовём разрешающим уравнением для уравнения (3.5.4). Если $\Phi(\lambda)$ не зависит от λ (разрешающее уравнение не существует), то уравнение (3.5.4) не имеет полиномиальных решений. Если же разрешающее уравнение существует, то решениями уравнения (3.5.4) могут быть полиномы степеней λ_i, где λ_i — натуральные корни разрешающего уравнения.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ — различные натуральные корни разрешающего уравнения, через $R^2 = \text{През}(D_m, \delta^k)$ — правый дифференциальный результат операторов $D_m = \sum_{i=0}^{m} b_{i,0}(x)\delta^i$ и δ^k, где обозначено $\delta = \dfrac{d}{dx}$.

Теорема 3.5.2. Для того чтобы уравнение (3.5.4) имело нетривиальное полиномиальное решение необходимо и достаточно выполнение условий:

а) уравнение $\Phi(\lambda) = 0$ существует и имеет, по крайней мере, один натуральный корень;

б) для $\lambda_l = \max\limits_{1 \le i \le l} \lambda_i$ $\text{През}(D_m, \delta^{\lambda_l + 1}) \equiv 0$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (3.5.4) имеет полиномиальное решение $u = q(x)$, $\deg q(x) = \lambda_0$. Тогда $\Phi(\lambda_0) = 0$, а поскольку

$\delta^{\lambda_0+1}q(x)=0$, то равен нулю и През$(D_m,\delta^{\lambda_l+1})\equiv 0$. Из того, что $\lambda_l\ge\lambda_0$ следует През$(D_m,\delta^{\lambda_l+1})\equiv 0$.

Обратно, пусть выполняются условия а), б) теоремы и λ_0 наименьший из натуральных корней разрешающего уравнения, для которого През$(D_m,\delta^{\lambda_l+1})\equiv 0$. Тогда по свойству правого дифференциального результанта уравнения $D_m u=0$ и $\delta^{\lambda_0+1}u\equiv 0$ имеют общее нетривиальное решение, которое, очевидно, должно быть полиномом. ■

Теорема 3.5.2 даёт критерий существования полиномиальных решений уравнения (3.5.4), а, значит, и рациональных решений уравнения (3.5.1), но она не позволяет вычислить размерность подпространства таких решений.

Рассмотрим одно преобразование, которое позволит это сделать.

Пусть в уравнении (3.5.4) $b_{0,0}=b_{1,0}=\dots=b_{k-1,0}=0$, $b_{k,0}\ne 0$. Обозначим $u^{(k)}=Q_k$, разделим (3.5.4) на $b_{k,0}$ и продифференцируем, получим

$$\frac{b_{m,0}}{b_{k,0}}Q_k^{(m-k+1)}+\left[\left(\frac{b_{m,0}}{b_{k,0}}\right)'+\frac{b_{m-1,0}}{b_{k,0}}\right]Q_k^{(m-k)}+\left[\left(\frac{b_{m-1,0}}{b_{k,0}}\right)'+\frac{b_{m-2,0}}{b_{k,0}}\right]Q_k^{(m-k-1)}+$$
$$\dots+\left[\left(\frac{b_{k+2,0}}{b_{k,0}}\right)'+\frac{b_{k+1,0}}{b_{k,0}}\right]Q_k''+\left[\left(\frac{b_{k+1,0}}{b_{k,0}}\right)'+1\right]Q_k'=0\,. \quad (3.5.5)$$

Умножим (3.5.5) на $b_{k,0}^2$ и, обозначив $Q_k'=Q_{k+1}$, получим

$$b_{k,0}b_{m,0}Q_{k+1}^{(m-k)}+\left[b_{m,0}'b_{k,0}-b_{m,0}b_{k,0}'+b_{m-1,0}b_{k,0}\right]Q_{k+1}^{(m-k-1)}+\dots$$
$$+\left[b_{k+2,0}'b_{k,0}-b_{k+2,0}b_{k,0}'+b_{k+1,0}b_{k,0}\right]Q_{k+1}'+$$
$$+\left[b_{k+1,0}'b_{k,0}-b_{k+1,0}b_{k,0}'+b_{k,0}^2\right]Q_{k+1}=0. \quad (3.5.6)$$

Обозначим коэффициенты уравнения (3.5.6) через $b_{i,1}$, где

$$b_{m,1}=b_{k,0}b_{m,0},\ b_{i,1}=b_{i+1,0}'b_{k,0}-b_{i+1,0}b_{k,0}'+b_{i,0}b_{k,0},\ i=\overline{k,m-1}\,. \quad (3.5.7)$$

Если в уравнение (3.5.6) $b_{k,1}=b_{k+1,1}=b_{k+p-1,1}=0$, $b_{k+p,1}\ne 0$, то, обозначив $Q_{k+1}^{(p)}=Q_{k+p+1}$, получим

$$b_{m,1}Q_{k+1+p}^{(m-k-p)}+b_{m-1,1}Q_{k+1+p}^{(m-k-p-1)}+\ldots+b_{k+p,1}Q_{k+1+p}=0. \qquad (3.5.8)$$

Определение 3.5.1. Переход от уравнения (3.5.4) к уравнению (3.5.8) по формулам (3.5.5) с последующей заменой $Q_{k+1}^{(p)}=Q_{k+p+1}$ назовём Д—преобразованием уравнения (3.5.4).

Таким образом **Д :** $D_m\,u=0\to D_m^1 Q_{k+p+1}=0$, где D_m^1 — преобразованный оператор. Обозначим через $p(i)$ — число младших коэффициентов уравнения (3.5.4), обратившихся в нуль на i-ом шаге применения Д—преобразования, тогда $p(0)=k$ и, например, для $i=1$ будет $b_{p(0),1}=b_{p(0),1}=\ldots$ $=b_{p(0)+p(1)-1,1}=0$, $b_{p(0)+p(1),1}\neq 0$.

Положим $\mu(i)=p(0)+p(1)+\ldots+p(i)$. Пусть в уравнении (3.5.4) $\mu(0)=k\geq 0$. Применим к уравнению

$$b_{m,0}u^{(m)}+b_{m-1,0}u^{(m-1)}+\ldots+b_{\mu(0),0}u^{(\mu(0))}=0 \qquad (3.5.9)$$

Д—преобразование λ раз, получим уравнение

$$b_{m,\lambda}\,Q_{\mu(\lambda)+\lambda}^{(m-\mu(\lambda))}+b_{m-1,\lambda}Q_{\mu(\lambda)+\lambda}^{(m-\mu(\lambda)-1)}+\ldots+b_{\mu(\lambda),\lambda}Q_{\mu(\lambda)+\lambda}=0, \qquad (3.5.10)$$

в котором по определению Д—преобразования $b_{\mu(\lambda),\lambda}\neq 0$.

Лемма 3.5.1. Для любого натурального λ производная порядка $\mu(\lambda)+\lambda$ от любого решения уравнения (3.5.9) является решением уравнения (3.5.10). Если решением уравнения (3.5.10) является полином степени r, то в числе решений уравнения (3.5.9) имеется полином степени $\mu(\lambda)+\lambda+r$.

Лемма очевидна, так как $Q_{\mu(\lambda)+\lambda}=u^{(\mu(\lambda)+\lambda)}$. ■

Лемма 3.5.2. Положим $\lambda=1$ и пусть $Q_{\mu(1)+1}$ произвольное частное решение уравнения (3.5.10). Представим неопределённый $\mu(1)+1$ — кратный интеграл в виде $f(x)=\int\limits_{\mu(1)+1} Q_{\mu(1)+1}\,dx=F(x)+\sum\limits_{i=0}^{\mu(1)}c_i\,x^i$, где функция $F(x)$ не зависит от произвольных постоянных c_i. Найдутся такие числа a_j $j=\mu(0)$, $\mu(0)+1,\ldots,$ $\mu(1)$, что функция $\varphi(x)=f(x)-c_{\mu(0)}\,x^{\mu(0)}-$

$-(\mu(0)!)^{-1}(a_{\mu(0)}c_{\mu(0)+1}+...+a_{\mu(1)-1}c_{\mu(1)}+a_{\mu(1)})x^{\mu(0)}$ будет решением уравнения (3.5.9) при любых значениях произвольных постоянных $c_0, c_1, ..., c_{\mu(0)-1}$, $c_{\mu(0)+1}, c_{\mu(1)}$

Доказательство. По определению Д—преобразования дифференциальный оператор D_m, отвечающий уравнению (3.5.9), преобразуется по формуле

$$b^2_{\mu(0),0}\,\delta\,(b^{-1}_{\mu(0),0}\,D_m)=D_{m-\mu(1)-1}\,\delta^{\mu(1)+1}, \tag{3.5.11}$$

где $D_{m-\mu(1)-1}$ — оператор, отвечающий уравнению (3.5.10). Подставляя функцию $f(x)$ в тождество (3.5.11), получим $b^2_{\mu(0),0}\,\delta\,(b^{-1}_{\mu(0),0}\,D_m(f(x)))=$ $=D_{m-\mu(1)-1}\,\delta^{\mu(1)+1}(f(x))=D_{m-\mu(1)-1}\,\delta^{\mu(1)+1}(Q_{\mu(1)+1})=0$. Отсюда следует, что $b^{-1}_{\mu(0),0}\,D_m(f(x))$ не зависит от переменной x. Поэтому $D_m(f(x))=c\,b_{\mu(0),0}$, где c — вообще говоря, зависит от произвольных постоянных $c_{\mu(0)}$, $c_{\mu(0)+1}$, $...,c_{\mu(1)}$. Найдём форму этой зависимости.

Имеем $D_m(F(x))+c_{\mu(1)}D_m(x^{\mu(1)})+...+c_{\mu(0)+1}D_m(x^{\mu(0)+1})+c_{\mu(0)}D_m(x^{\mu(0)})=$ $=c\,b_{\mu(0),0}$. Дифференцируя последнее соотношение по $c_{\mu(0)}$, находим $D_m(x^{\mu(0)})=c'b_{\mu(0),0}$ или $\mu(0)!b_{\mu(0),0}=c'b_{\mu(0),0}$, $c'=\mu(0)!$. То есть $c=\mu(0)!c_{\mu(0)}+\alpha_{\mu(0)}$, где $\alpha_{\mu(0)}$ — произвольная постоянная. Подставив это выражение для c в (*), получим $D_m(F(x))+c_{\mu(1)}D_m(x^{\mu(1)})+$ $+c_{\mu(1)-1}D_m(x^{\mu(1)-1})+\cdots+c_{\mu(0)+1}D_m(x^{\mu(0)+1})=\alpha_{\mu(0)}b_{\mu(0),0}$. (**) Дифференцируя последнее соотношение по $c_{\mu(0)+1}$, найдём $D_m(x^{\mu(0)+1})=\alpha'_{\mu(0)}\,b_{\mu(0),0}$. То есть $\alpha'_{\mu(0)}=b^{-1}_{\mu(0),0}D_m(x^{\mu(0)+1})$. Если $\alpha'_{\mu(0)}=0$, то $D_m(x^{\mu(0)+1})=0$ и постоянную $c_{\mu(0)+1}$ можно выбрать произвольно. Если $\alpha'_{\mu(0)}\neq 0$, то поскольку $\alpha_{\mu(0)}$ не зависит от x, а $b^{-1}_{\mu(0),0}D_m(x^{\mu(0)+1})$ не зависит от произвольных постоянных c_i, получим, что $\alpha'_{\mu(0)}=b^{-1}_{\mu(0),0}D_m(x^{\mu(0)+1})=a_{\mu(0)}$ — числовая константа. Отсюда

$\alpha_{\mu(0)} = c_{\mu(0)+1}\, a_{\mu(0)} + \alpha_{\mu(0)+1}$. Подставляя выражение для $\alpha_{\mu(0)}$ в (**), получим $D_m(F(x)) + c_{\mu(1)} D_m(x^{\mu(1)}) + ... + c_{\mu(0)+2} D_m(x^{\mu(0)+2}) = \alpha_{\mu(0)+1} b_{\mu(0),0}$. Дифференцируя последнее соотношение по $c_{\mu(0)+2}$ и рассуждая аналогично, найдём $\alpha_{\mu(0)+1} = c_{\mu(0)+2}\, a_{\mu(0)+1} + \alpha_{\mu(0)+2}$. Продолжая так, установим, что $\alpha_j = c_{j+1}\, a_j + \alpha_{j+1}$, $j = \mu(0), \mu(0)+1, ...,\ \mu(1)-1$, где $a_j = b^{-1}_{\mu(0),0} D_m(x^{j+1})$. Обозначив $a_{\mu(1)} = \alpha_{\mu(1)} b^{-1}_{\mu(0),0} D_m(F(x))$, получим $c = \mu(0)!\, c_{\mu(0)} + c_{\mu(0)+1} a_{\mu(0)} + ... + c_{\mu(1)}\, a_{\mu(0)-1} + \alpha_{\mu(1)}$. Подставляя выражение для c в соотношение $D_m(f(x)) = c\, b_{\mu(0),0}$, и учитывая, что $b_{\mu(0),0} = (\mu(0)!)^{-1} D_m(x^{\mu(0)})$, найдём $D_m(f(x) - c_{\mu(0)} x^{\mu(0)} - (\mu(0)!)^{-1}(c_{\mu(0)+1}\, a_{\mu(0)} + ... + c_{\mu(1)}\, a_{\mu(1)-1} + a_{\mu(1)}) x^{\mu(0)}) = 0$. ■

Замечание. Положим $Q_{\mu(1)+1} \equiv 0$ и $F(x) \equiv 0$, тогда при $\mu(1) > \mu(0) > 0$ из леммы 3.5.2 следует, что уравнение (3.5.9) имеет полиномиальные решения степеней $0, 1, \ldots, \mu(0)-1, \mu(0)+1, \mu(0)+2, \ldots, \mu(1)$, при $\mu(1) = \mu(0) > 0$ — степеней $0, 1, \ldots, \mu(0)-1$, при $\mu(1) > \mu(0) = 0$ — степеней $1, 2, \ldots, \mu(1)$.

Лемма 3.5.3. Если при применении к уравнению (3.5.9) Д—преобразования λ раз $\mu(0) = \mu(1) = \cdots = \mu(\lambda-1), \mu(\lambda) > \mu(0)$, то в числе его решений имеются полиномы степеней $\mu(\lambda) - 1 + \lambda, \mu(\lambda) - 2 + \lambda, \ldots$ $\mu(0) + \lambda, \mu(0) - 1, \ldots, 1, 0$.

Доказательство. Выпишем уравнения, получающиеся при применении к уравнению (3.5.9) Д—преобразования λ раз.

$$(j):\, b_{m,j} Q^{(m-\mu(0))}_{\mu(0)+j} + \ldots + b_{\mu(0),j} Q_{\mu(0)+j} = 0,\ j = \overline{0, \lambda-1},$$

$$(\lambda):\, b_{m,\lambda} Q^{(m-\mu(\lambda))}_{\mu(0)+\lambda} + \ldots + b_{\mu(\lambda),\lambda} Q_{\mu(\lambda)+\lambda} = 0.$$

Согласно замечанию к лемме 3.5.2, применённому к уравнению $j = \lambda - 1$, в числе его решений имеются полиномы степеней $p(\lambda), p(\lambda) - 1, \ldots, 1$. Так как по лемме 3.5.1 $Q_{\mu(0)+\lambda-1} = u^{(\mu(0)+\lambda-1)}$ $(\mu(\lambda-1) = \mu(0))$, то уравнение (3.5.9) имеет полиномиальные решения степеней $\mu(0)+p(\lambda)-1+\lambda, \mu(0)+p(\lambda)-2+\lambda$, $\ldots, \mu(0)+\lambda$.

Поскольку $\mu(0)+p(\lambda)=\mu(\lambda)$, то получена часть степеней полиномиальных решений. Наличие полиномиальных решений степеней $\mu(0)-1$, $\ldots,1, 0$ очевидно, причём, при $\mu(0)=0$ это — тривиальное решение. ■

Лемма 3.5.4. При $\lambda=1$ коэффициент $b_{\mu(0),1}\equiv 0$ в том и только в том случае, когда уравнение (3.5.9) имеет полиномиальное решение степени $\mu(0)+1$.

Доказательство. Предположим, что некоторый полином степени $\mu(0)+1$ является решением уравнения (3.5.9), но $b_{\mu(0),1}\neq 0$. Преобразованное уравнение имеет вид $b_{m,1}Q_{\mu(0)+1}^{(m-\mu(0))}+\ldots+b_{\mu(0),1}Q_{\mu(0)+1}=0$. Согласно лемме 3.5.1 одним из его решений должна быть ненулевая константа, что противоречит предположению.

Обратно, пусть $b_{\mu(0),1}\equiv 0$, то есть $\mu(1)>\mu(0)$. По лемме 3.5.3 в числе решений уравнения (3.5.9) имеется полином степени $\mu(0)+1$. ■

Теорема 3.5.3. Уравнение (3.5.9) для произвольных натуральных λ и $m_1>\mu(0)$ не имеет полиномиальных решений степеней $\mu(0)$, $\mu(0)+1$, , $\ldots,\mu(0)+\lambda-1$, $m_1+\lambda$ и в числе решений этого уравнения имеются полиномы степеней $\mu(0)+\lambda, \mu(0)+1+\lambda, \ldots, m_1-1+\lambda$ в том и только в том случае, когда при применении к уравнению (3.5.9) λ раз Д—преобразования выполняются условия

$$\mu(0)=\mu(1)=\cdots=\mu(\lambda-1), \tag{3.5.12}$$

$$\mu(0)\neq\mu(\lambda)=m_1. \tag{3.5.13}$$

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы относительно степеней полиномиальных решений. Так как уравнение (3.5.9) не имеет полиномиальных решений степени $\mu(0)$, то, очевидно, $b_{\mu(0),0}\neq 0$. Применяя к (3.5.9) Д—преобразование один раз, получим

$$b_{m,1}Q_{\mu(1)+1}^{(m-\mu(1))}+\ldots+b_{\mu(1),1}Q_{\mu(1)+1}=0. \tag{3.5.14}$$

Так как уравнение (3.5.9) не имеет полиномиальных решений степени $\mu(0)+1$, то по лемме 3.5.4 $b_{\mu(0),1} \neq 0$ и $\mu(1)=\mu(0)$. Пусть уже установлено, что $\mu(0)=\mu(1)=\dots=\mu(\lambda-2)$. Рассмотрим уравнения

$$b_{m,\lambda-2}Q^{(m-\mu(0))}_{\mu(0)+\lambda-2}+\ldots+b_{\mu(0),\lambda-2}Q_{\mu(0)+\lambda-2}=0, \qquad (3.5.15)$$

$$b_{m,\lambda-1}Q^{(m-\mu(\lambda-1))}_{\mu(\lambda-1)+\lambda-1}+\ldots+b_{\mu(\lambda-1),\lambda-1}Q_{\mu(\lambda-1)+\lambda-1}=0. \qquad (3.5.16)$$

Уравнение (3.5.15) не имеет полиномиальных решений степени единица. В противном случае по лемме 3.5.1 уравнение (3.5.9) имело бы полиномиальные решения степени $\mu(0)+\lambda-1$. Поэтому по лемме 3.5.4 $b_{\mu(\lambda-1),\lambda-1} \neq 0$, то есть $\mu(\lambda-1)=\mu(0)$.

Чтобы установить (3.5.13), Рассмотрим ещё уравнения

$$b_{m,\lambda-1}Q^{(m-\mu(0))}_{\mu(0)+\lambda-1}+\ldots+b_{\mu(0),\lambda-1}Q_{\mu(0)+\lambda-1}=0, \qquad (3.5.17)$$

$$b_{m,\lambda}Q^{(m-\mu(\lambda))}_{\mu(\lambda)+\lambda}+\ldots+b_{\mu(\lambda),\lambda}Q_{\mu(\lambda)+\lambda}=0. \qquad (3.5.18)$$

Предположим, что $\mu(\lambda)=\mu(0)$. Поскольку уравнение (3.5.9) имеет полиномиальное решение степени $\mu(0)+\lambda$, то по лемме 3.5.1 при $\mu(\lambda)=\mu(0)$ уравнение (3.5.18) должно иметь решением нулевую константу. Но тождество $b_{\mu(\lambda),\lambda} \equiv 0$ противоречит предположению, значит $\mu(\lambda)>\mu(0)$. Остаётся показать, что $\mu(\lambda)=m_1$. Пусть $\mu(\lambda)<m_1$, например, $\mu(\lambda)+1=m_1$. По условию теоремы уравнение (3.5.9) имеет решением полином степени $m_1-1+\lambda=\mu(\lambda)+\lambda$. Тогда по лемме 3.5.1 уравнение (3.5.18) имеет решением ненулевую константу, следовательно, $b_{\mu(\lambda),\lambda} \equiv 0$, что противоречит определению $\mu(\lambda)$. Пусть $\mu(\lambda)+1<m_1$. Так как в числе решений уравнения (3.5.9) имеются полиномы степеней $\mu(0)+\lambda, \mu(0)+1+\lambda, \ldots, m_1-1+\lambda$, то, согласно лемме 3.5.1 и допущению, в числе решений уравнения (3.5.18) должны быть полиномы степеней $0,1,\ldots,m_1-\mu(\lambda)-1$, но $b_{\mu(\lambda),\lambda} \neq 0$ и ненулевая константа не может быть решением уравнения (3.5.18).

Допустим $\mu(\lambda)>m_1$. Уравнению (3.5.9) по условию теоремы удовлетворяют полиномы степеней $\mu(0)+\lambda, \mu(0)+\lambda+1, \ldots, m_1+\lambda-1$. Если применить лемму 3.5.3 к уравнению (3.5.18), то получим, что ему удовлетворяют полиномы степеней $1, 2, \ldots, p(\lambda)$. Тогда по лемме 3.5.3 уравнению (3.5.18) удовлетворяют полиномы степеней $\mu(0)+\lambda, \mu(0)+\lambda+1, \ldots,$ $\mu(0)+p(\lambda)+\lambda-1=\mu(\lambda)+\lambda-1$. Так как по допущению $\mu(\lambda)>m_1$, то уравнению (3.5.9) должны удовлетворять и полиномы степеней $m_1+\lambda,$ $m_1+\lambda+2, \ldots, \mu(\lambda)+\lambda-1$, что противоречит условию теоремы.

Обратно, пусть выполняются условия (3.5.12), (3.5.13). Рассмотрим уравнения

$$b_{m,j}Q_{\mu(0)+j}^{(m-\mu(0))}+\ldots+b_{\mu(0),j}Q_{\mu(0)+j}=0, \ j=\overline{0,\lambda-1}. \tag{3.5.19}$$

Если бы уравнение (3.5.9) имело полиномиальные решения степеней $\mu(0), \mu(0)+1, \ldots, \mu(0)+\lambda-1$ и $m_1+\mu(\lambda)$, то каждое из уравнений (3.5.19) и (3.5.18) соответственно, по лемме 3.5.1 имело бы в числе решений ненулевую константу. Значит $b_{\mu(0),j}\neq 0$ для $j=\overline{0,\lambda-1}$, то есть $\mu(0)<\mu(1)<\cdots<\mu(\lambda-1)$, что противоречит (3.5.12). Согласно лемме 3.5.3 уравнение (3.5.9) имеет полиномиальные решения степеней $\mu(0)+\lambda, \mu(0)+1+\lambda, \ldots, \mu(\lambda)-1+\lambda$. ■

Для доказательства основной теоремы 3.5.4 предположим, что разрешающее уравнение уравнения (3.5.9) имеет r различных целых неотрицательных корней. Расположим их по возрастанию, обозначив наименьший корень через n_0. Получим β групп корней по k_i корней в каждой

$$n_i,\ n_i+1, \ldots,\ n_i+k_i-1,\ \ i=\overline{0,\beta-1}, \tag{3.5.20}$$

где $n_{i+1}-n_i-k_i+1>1$, для $i=\overline{0,\beta-2}$ и $k_0+k_1+\ldots+k_{\beta-1}=r$.

Теорема 3.5.4. Для того чтобы размерность подпространства полиномиальных решений уравнения (3.5.9) равнялось s $(0\le s\le m)$ необходимо и достаточно, чтобы

а) разрешающее уравнение имело не менее s различных целых неотрицательных корней;

б) существовало такое целое неотрицательное число N, что

$\mu(N)=s, \mu(N-1)<\mu(N), \mu(\lambda)=\mu(N), \lambda>N$.

Необходимость. Пусть $q_1(x), q_2(x),\dots,q_s(x),$ — все линейно независимые полиномиальные рушения уравнения (3.5.9). Степени n_i этих полиномов, очевидно, являются корнями разрешающего уравнения. Расположим их в соответствии с (3.5.20). Если среди полиномов $q_i(x)$ имеется нетривиальный степени $n_0=0$ и полиномы степеней $1,2,\dots,k_0-1$ и ни один полином степени k_0 не принадлежит этому множеству, то $b_{0,0}=b_{1,0}=\dots=b_{k_0-1,0}=0$, $b_{k_0,0}\neq 0$, то есть $\mu(0)=k_0$.

Если же $n_0>0$, то пусть среди полиномов $q_i(x)$ имеются полиномы степеней n_0, $n_0+1,\dots,n_0+k_0-1$, и нет полиномов степени n_0+k_0. Применим к (3.5.9) Д—преобразование n_0 раз. По теореме 3.5.3 при $n_0=\lambda$, $\mu(0)=0$, $m_1=k_0$ получим, что $\mu(0)=\mu(1)=\dots=\mu(n_0-1)=0,$ $\mu(n_0)=k_0$. То есть $b_{0,n_0}=b_{1,n_0}=\dots=b_{k_0-1,n_0}=0$, $b_{k_0,n_0}\neq 0$. Преобразованное уравнение имеет вид

$$b_{m,n_0}Q^{(m-k_0)}_{n_0+k_0}+\dots+b_{n_0,k_0}Q_{n_0+k_0}=0. \tag{3.5.21}$$

Согласно лемме 3.5.1 из (3.5.20) следует, что в числе решений уравнения (3.5.21) имеются полиномы степеней

$$n_1-n_0-k_0,\ n_1-n_0-k_0+1,\dots,\ n_1-n_0-k_0+k_1-1$$

и нет полиномов степени $n_1-n_0-k_0+k_1$. Применим к уравнению (3.5.21) Д—преобразование $n_1-n_0-k_0$ раз. По теореме 3.5.3 при $\lambda=n_1-n_0-k_0$, $\mu(0)=0$ (так как $b_{k_0,n_0}\neq 0$), $m_1=k_1$ получим, что $\mu(n_1-n_0-k_0)=k_1$ $\mu(0)=\mu(1)=\dots=\mu(n_1-n_0-k_0-1)=0$, $\mu(n_1-n_0-k_0)=k_1$. То есть $n_1-n_0-k_0$ шагов применения к уравнению (3.5.21) Д—преобразования обратились в ноль коэффициенты

$$b_{k_0,n_1-k_0}=b_{k_0+1,n_1-k_0}=\dots=b_{k_0-k_1-1,n_1-k_0}=0,\ b_{k_0+k_1,n_1-k_0}\neq 0.$$

Таким образом, за $n_0+(n_1-n_0-k_0)=n_1-k_0$ шагов применения к уравнению (3.5.9) Д—преобразования обратились в ноль $\mu(n_1-k_0)=k_1+k_0$ коэффициентов. Допустим по индукции, что за $n_{j-1}-\sum\limits_{i=0}^{j-2}k_i$ шагов, где положено

$k_{-1}=k_{-2}=0$, применения Д—преобразования обратились в ноль $h=\sum_{i=0}^{j-1}k_i=$ $=\mu(n_{j-1}-\sum_{i=0}^{j-2}k_i)$ коэффициентов уравнения (3.5.9). Имеем уравнение

$$b_{m,n_{j-1}-h+k_{j-1}}Q_{n_{j-1}+k_{j-1}}^{(m-h)}+\ldots+b_{h,n_{j-1}-h+k_{j-1}}Q_{n_{j-1}+k_{j-1}}=0. \qquad (3.5.22)$$

Согласно лемме 3.5.1 и из (3.5.20) следует, что в числе решений уравнения (3.5.22) имеются полиномы степеней

$$n_j-n_{j-1}-k_{j-1},\ n_j-n_{j-1}-k_{j-1}+1,\ldots,\ n_j-n_{j-1}-k_{j-1}+k_j-1$$

и нет полиномов степеней $n_j-n_{j-1}-k_{j-1}+k_j$. Применяя к уравнению (3.5.22) Д—преобразование $n_j-n_{j-1}-k_{j-1}$ раз, получим по теореме 3.5.3 при $\lambda=n_j-n_{j-1}-k_{j-1}$, $\mu(0)=0$, $m_1=k_j$, что $\mu(n_j-n_{j-1}-k_{j-1}-1)=\cdots=\mu(1)=$ $=\mu(0)=0$, $\mu(n_j-n_{j-1}-k_{j-1})=k_j$. То есть за $n_j-n_{j-1}-k_{j-1}$ шагов применения к уравнению (3.5.22) Д—преобразования обратились в ноль коэффициенты $b_{h,n_j-h}=b_{h+1,n_j-h}=\ldots=b_{h+k_j-1,n_j-h}=0$, причём $b_{h+k_j,n_j-h}\neq0$. Таким образом, за $n_j-n_{j-1}-k_{j-1}$ шагов применения к уравнению (3.5.9) Д—преобразования обратились в ноль $\mu(n_j-h)=k_0+k_1+\ldots+k_j$ коэффициентов. Полагая $j=\beta-1$, получим, что за $n_{\beta-1}-\sum_{i=0}^{\beta-2}k_i$ шагов обратятся в ноль $\mu(n_{\beta-1}-\sum_{i=0}^{\beta-2}k_i)=\sum_{i=0}^{\beta-1}k_i$ коэффициентов. Поскольку $\sum_{i=0}^{\beta-1}k_i=s$ по предположению, то $N=n_{\beta-1}-\sum_{i=0}^{\beta-2}k_i$ и $\mu(N)=s$. Ясно, что $\mu(N-1)<s$ и $\mu(N-1)<s$.

Покажем, что для любого $\lambda>N$ $\mu(\lambda)=\mu(N)$. Рассмотрим уравнение, полученное за N шагов Д—преобразования

$$b_{m,N}Q_{N+s}^{(m-s)}+\ldots+b_{s,N-h+k_{j-1}}Q_{N+s}=0. \qquad (3.5.23)$$

Поскольку $N+s=n_{\beta-1}-k_{\beta-1}$, то по лемме 3.5.1 с учётом (3.5.20) получаем, что уравнение (3.5.23) не имеет нетривиальных полиномиальных решений. Поэтому согласно лемме 3.5.4 последовательное применение к этому уравнению Д—преобразования не приведёт к тождеству $b_{s,\lambda}=0$ для $\lambda > N$, что и доказывает равенство $\mu(\lambda)=\mu(N)$.

Достаточность. Предположим, что выполняются условия а) и б) теоремы. Пусть ε_j $j=\overline{0,l}$ наименьшее из различных целых неотрицательных чисел такие, что $\varepsilon_0<\varepsilon_1<...<\varepsilon_l=N$, для которых выполняются соотношения

$$(\varepsilon_0)\ \ b_{0,\varepsilon_0}=b_{1,\varepsilon_0}=...=b_{\sigma_0-1,\varepsilon_0}=0;\ b_{\sigma_0,i}\neq 0,\ i=\overline{\varepsilon_0,\varepsilon_1-1};$$

$$(\varepsilon_1)\ \ b_{\sigma_0,\varepsilon_1}=b_{\sigma_0+1,\varepsilon_1}=...=b_{\sigma_1+1,\varepsilon_1}=0;\ b_{\sigma_1,i}\neq 0,\ i=\overline{\varepsilon_1,\varepsilon_2-1};$$

....

$$(\varepsilon_j)\ \ b_{\sigma_{j-1},\varepsilon_j}=b_{\sigma_{j-1}+1,\varepsilon_j}=...=b_{\sigma_j-1,\varepsilon_j}=0;\ b_{\sigma_j,i}\neq 0,\ i=\overline{\varepsilon_j,\varepsilon_{j+1}-1};$$

....

$$(\varepsilon_l)\ \ b_{\sigma_{l-1},\varepsilon_l}=b_{\sigma_{l-1}+1,\varepsilon_l}=...=b_{\sigma_l-1,\varepsilon_l}=0;\ b_{\sigma_l,i}\neq 0,\ i\geq \varepsilon_l=n.$$

По условию теоремы $\mu(N)=s=\sigma_0+(\sigma_1-\sigma_0)+...+(\sigma_l-\sigma_{l-1})=\sigma$. Если в уравнении (3.5.9) $\mu(0)\neq 0$, то, очевидно, что $\varepsilon_0=0$ и из соотношений (ε_0) следует существование у уравнения (3.5.9) полиномиальных решений степеней $0,1,...,\sigma_0-1$. Если же $\mu(0)=0$, то $\varepsilon_0\neq 0$ и из соотношений (ε_0) и теоремы 3.5.3 при $\lambda=\varepsilon_0$ и $m_1=\sigma_0$ следует существование у уравнения (3.5.9) полиномиальных решений степеней $\varepsilon_0,\varepsilon_0+1,...,\varepsilon_0+\sigma_0-1$. Далее, из соотношений (ε_1) и теоремы 3.5.3 при $\lambda=\varepsilon_1-\varepsilon_0$, $\mu(0)=0$, $m_1=\sigma_1-\sigma_0$ следует существование у уравнения, полученного на шаге ε_0 применения Д—преобразования, полиномиальных решений степеней $\varepsilon_1-\varepsilon_0$, $\varepsilon_1-\varepsilon_0+1,...,\varepsilon_1-\varepsilon_0+\sigma_1-\sigma_0-1$.

Вообще, из соотношений ε_1 и теоремы 3.5.3 при $\lambda=\varepsilon_j-\varepsilon_{j-1}$, $\mu(0)=0,\ m_1=\sigma_j-\sigma_{j-1}$ следует существование у уравнения, полученного на шаге ε_{j-1} применения Д—преобразования, полиномиальных решений степеней

$$\varepsilon_j-\varepsilon_{j-1},\ \varepsilon_j-\varepsilon_{j-1}+1,...,\ \varepsilon_j-\varepsilon_{j-1}+\sigma_j-\sigma_{j-1}-1.$$

Выпишем эти степени

$(0)\ \boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0+1,..., \boldsymbol{\varepsilon}_0+\boldsymbol{\sigma}_0-1;$

$(1)\ \boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_0+1,..., \boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_0+\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_0-1;$

$(2)\ \boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_1+1,..., \boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\sigma}_2-\boldsymbol{\sigma}_1-1;$

……………………………………………………

$(\boldsymbol{j}-1)\ \boldsymbol{\varepsilon}_j-\boldsymbol{\varepsilon}_{j-1}, \boldsymbol{\varepsilon}_j-\boldsymbol{\varepsilon}_{j-1}+1,..., \boldsymbol{\varepsilon}_j-\boldsymbol{\varepsilon}_{j-1}+\boldsymbol{\sigma}_j-\boldsymbol{\sigma}_{j-1}-1;$

……………………………………………………..

$(\boldsymbol{l})\ \boldsymbol{\varepsilon}_l-\boldsymbol{\varepsilon}_{l-1}, \boldsymbol{\varepsilon}_l-\boldsymbol{\varepsilon}_{l-1}+1,..., \boldsymbol{\varepsilon}_l-\boldsymbol{\varepsilon}_{l-1}+\boldsymbol{\sigma}_l-\boldsymbol{\sigma}_{l-1}-1.$

Мы уже установили, что уравнение (3.5.9) имеет полиномиальное решение степеней $\boldsymbol{\varepsilon}_0,\boldsymbol{\varepsilon}_0+1,...,\boldsymbol{\varepsilon}_0+\boldsymbol{\sigma}_0-1$. Рассмотрим уравнения, отвечающие наборам коэффициентов $(\boldsymbol{\varepsilon}_1)$,…, $(\boldsymbol{\varepsilon}_l)$

$$\boldsymbol{b}_{m,\varepsilon_j}\boldsymbol{Q}^{(m-\sigma_j)}_{\varepsilon_j+\sigma_j}+\ldots+\boldsymbol{b}_{\sigma_j,\varepsilon_j}\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_j+\sigma_j}=0. \tag{3.5.24}$$

Каждое из уравнений (3.5.24) имеет по доказанному в числе решений полиномы степеней $(\boldsymbol{j})$. По лемме 3.5.1 для каждого $\boldsymbol{j}$ решения уравнений (3.5.24) связаны с решениями уравнения (3.5.9) по формуле $\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_j+\sigma_j}=\boldsymbol{u}^{(\varepsilon_j+\sigma_j)}$. Отсюда и из $(1)-(\boldsymbol{l})$ следует, что уравнение (3.5.9) имеет полиномиальные решения степеней $\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}+\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}+\boldsymbol{\sigma}_j+1,...,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}+\boldsymbol{\sigma}_{j+1}-1, \boldsymbol{j}=\overline{0,\boldsymbol{l}-1}$. Ясно, что их всего $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\sigma}_0+(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_0)+...+(\boldsymbol{\sigma}_l-\boldsymbol{\sigma}_{l-1})=\boldsymbol{\sigma}_l$ и их степени являются корнями разрешающего уравнения.

Покажем, наконец, что полиномами указанных степеней исчерпываются все полиномиальные решения уравнения (3.5.9). Допустим, имеется ещё полиномиальное решение, степень которого $\boldsymbol{t}$ отлична от перечисленных.

Если $\boldsymbol{\mu}(0)\neq 0$, то $\boldsymbol{\varepsilon}_0=0$ и неравенство $\boldsymbol{t}<\boldsymbol{\varepsilon}_0$ невозможно. Если $\boldsymbol{\mu}(0)=0$, то $\boldsymbol{\varepsilon}_0\neq 0$ и пусть $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}_1<\boldsymbol{\varepsilon}_0$ наименьшая из степеней нетривиальных полиномиальных решений уравнения (3.5.9). Пусть далее $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_1+1,...,\boldsymbol{t}_1+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{t}_2$ ряд последовательных степеней полиномиальных решений и $\boldsymbol{t}_2$ наибольшая из них. Положим $\boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{t}_2-\boldsymbol{t}_1$, если $\boldsymbol{t}_2+1\neq\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и $\boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{\sigma}_0$, если $t_2 + 1 = \varepsilon_0$, $\lambda = t_1$. По теореме 3.5.3 получим $\mu(0) = \mu(1) = \cdots$ $= \mu(t_1 - 1), \mu(0) \neq \mu(t_1) = m_1$.

Это значит, что $b_{0,t_1} = b_{1,t_1} = ... = b_{\mu(t_1-1),t_1} = 0; b_{\mu(t_1),t_1} \neq 0$. Так как $t_1 < \varepsilon_0$ и ε_0 по условию теоремы есть наименьшее из чисел, для которых выполняются соотношения (ε_0), то неравенство $t_1 < \varepsilon_0$ невозможно. Аналогично доказывается невозможность неравенств $\varepsilon_j + \sigma_j \leq t \leq \varepsilon_{j+1} + \sigma_j - 1$, $j = \overline{0, l-1}$.

Предположим, наконец, что $t \geq \varepsilon_l + \sigma_l = N + \sigma_l$ и пусть $t = t_0$ наименьшая из степеней полиномиальных решений, удовлетворяющая этому неравенству. Тогда в числе решений уравнения

$$b_{m,N} Q_{N+\sigma_j}^{(m-\sigma_j)} + \ldots + b_{\sigma_j,N} Q_{N+\sigma_j} = 0. \tag{3.5.25}$$

имеется полином степени $t_0 - N - \sigma_l \geq 0$. Согласно (ε_l) последнее неравенство строгое. Применив к уравнению (3.5.25) Д—преобразование $t_0 - N - \sigma_l$ раз, получим уравнение, в числе решений которого имеется ненулевая константа. Поэтому должно быть $b_{\sigma_l, t_0 - \sigma_l} = 0$. Но это невозможно, поскольку $t_0 - \sigma_l > N$ и по условию теоремы $\mu(\lambda) = \mu(N)$ для $\lambda > N$. ■

Пример 3.5.1. Вычислить размерность подпространства полиномиальных решений и найти базис этого подпространства для уравнения

$$(x^3 - 3x^2 + 2x)y^{(3)} + (-2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 8x - 4)y'' +$$
$$+(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 4)y' + (-4x^3 + 6x^2 - 8x + 8)y = 0.$$

Подставив в уравнение $y = x^\lambda$, найдем разрешающее уравнение $4 - 2\lambda = 0$. Согласно теореме 3.5.4 рассматриваемое уравнение может иметь в качестве полиномиального решения только многочлен второго порядка. Поэтому при дифференцировании уравнения можно полагать $y^{(k)} = 0$ при $k \geq 3$. Применяя к уравнению Д-преобразование, видим, что в нуль обращается единственный коэффициент при $y(x)$. Следовательно, уравнение имеет одномерное пространство полиномиальных решений, состоящее из многочленов второй степени. С учетом последнего условия для искомого решения

$y(x) = x^2 + bx + c$ получим систему: $(-2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 8x - 4)y'' + $ $+(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 4)y' + (-4x^3 + 6x^2 - 8x + 8)y = 0$, $xy''(x) - y'(x) = 0$. Из последнего уравнения находим $b = 0$. Подставляя в первое, получим $c = 1$, таким образом, $y(x) = x^2 + 1$ искомое решение.

3.6. Интегрирование рациональных функций

В классическом методе вычисления неопределенных интегралов от рациональных функций с помощью выделения рациональной части, предложенном М.В. Остроградским [36], и в методе интегрирования функций с квадратичной иррациональностью с помощью выделения алгебраической части, задача интегрирования сводится к отысканию некоторых многочленов [45].

В настоящей статье показывается, что вычисление многих других классов неопределенных интегралов, например, интегралов от произведения многочлена на тригонометрическую и экспоненциальную функции, интегралов от дифференциального бинома, исследованных П.Л. Чебышевым [66], тоже может быть сведено к отысканию многочленов. При этом для отыскания этих многочленов применяется частный случай метода [56], исключающий применение метода неопределенных коэффициентов, некоторая модификация которого представлена в [58]. Предлагаемый метод, являясь, менее обременительным в смысле сложности вычислений, позволяет не только вычислять единообразно достаточно широкий класс неопределенных интегралов, но для некоторых из них вместо рекуррентных формул получить выражения в замкнутой форме, отсутствующие, например, в фундаментальных справочниках типа [42].

Согласно методу М.В. Остроградского значение интеграла I_m следует искать в виде $I_m = \dfrac{R(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + л\int \dfrac{dx}{x^2 + px + q}$.

Продифференцируем I_m и, сделав очевидные упрощения, получим дифференциальное уравнение

$$(m-1)(2x+p)R(x)-(x^2+px+q)R'(x)-\lambda(x^2+px+q)^{m-1}=-Mx-N.$$

Очевидно, что многочлен $R(x)$ имеет степень $2m-3$. Продифференцировав уравнение $2m-2$ раза с учетом тождества $R^{(k)}(x)\equiv 0$ при $k>2m-3$, получим систему уравнений относительно неизвестного многочлена $R(x)$, его производных $R^{(k)}(x)$ ($k=1,2,\ldots,2m$-3) и параметра λ, рассматриваемую как алгебраическая. Очевидно, эта системы совместна и имеет единственное решение, которое можно найти согласно (3.4.3) $R(x)=\dfrac{\Delta_R}{\Delta}$, $\lambda=\dfrac{\Delta_\lambda}{\Delta}$.

Получили выражение интеграла в замкнутой форме

$$I_m=\frac{\Delta_R}{(x^2+px+q)^{m-1}\Delta}+\frac{\Delta_\lambda}{\Delta}\int\frac{dx}{x^2+px+q},\ m\ge 2. \qquad (3.6.1)$$

Пример 3.6.1. Выделить рациональную часть интеграла $I_2=\int\dfrac{2x+3}{(x^2+x+3)^2}dx$ и найти значение параметра λ.

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид $(2x+1)R(x)-(x^2+x+3)R'(x)-\lambda(x^2+x+3)=-2x-3$. Дифференцируя его дважды, получим систему (3.4.2), из которой находим $\Delta=-22$, $\Delta_R=-8x+18$, $\Delta_\lambda=-8$. Поэтому рациональная часть интеграла — $\dfrac{4x-9}{11(x^2+x+3)}$, параметр $\lambda=\dfrac{4}{11}$.

3.7. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Рассмотрим теперь вычисление интегралов $J_n=\int\dfrac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Известно [45], что

$$J_n=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Алгебраическая часть интеграла будет определена, если будет найден многочлен $Q_{n-1}(x)$. Очевидно, этот многочлен удовлетворяет уравнению

$$(2ax+b)Q_{n-1}(x)+2(ax^2+bx+c)Q'_{n-1}(x)+2\lambda=2P_n(x). \qquad (3.7.1)$$

Поступая, как и в предыдущем пункте, получим формулу

$$J_n=\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{\Delta_Q}{\Delta}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{\Delta_\lambda}{\Delta}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ n\ge 2. \qquad (3.7.2)$$

Пример 3.7.1. Выделить алгебраическую часть интеграла $J_2=\int\frac{2x^2-3x+5}{\sqrt{3x^2+2x+2}}dx$ и определить параметр λ.

Дифференциальное уравнение имеет вид $(6x+2)Q_1(x)+$ $+(6x^2+4x+4)Q_1'(x)+2\lambda=4x^2-6x+10$. Продифференцировав его два раза с условием $Q_1^{(k)}(x)\equiv 0$ при $k>1$, получим систему

$$\left.\begin{array}{rrrr}(6x+2)Q_1(x) & +(6x^2+4x+4)Q_1'(x) & +2\lambda & =4x^2-6x+10,\\ 6Q_1(x) & +(18x+6)Q_1'(x) & & =8x-6,\\ & 24Q_1'(x) & & =8.\end{array}\right\}$$

Из системы найдем $\Delta=\begin{vmatrix}6x+2 & 6x^2+4x+4 & 2\\ 2 & 18x+6 & 0\\ 0 & 24 & 0\end{vmatrix}=3\cdot 2^5$, $\Delta_Q=2^5(x-4)$, $\Delta_\lambda=2^5\cdot 51$. Таким образом, $\frac{1}{3}(x-4)\sqrt{3x^2+2x+2}$ — алгебраическая часть интеграла, а параметр $\lambda=\frac{\Delta_\lambda}{\Delta}=\frac{17}{3}$.

3.8. Интегрирование экспоненциально — тригонометрических функций

Рассмотрим сначала интеграл $y(x)=\int P_n(x)\exp(a\,x)dx$. Продифференцировав и выполнив замену $y=u(x)\exp(a\,x)$, получим уравнение (3.4.1) в виде $u'(x)+au(x)=P_n(x)$, в котором $a_1=0$, $a_0=1$, $\lambda=0$, $b_0=a$, $N=n$, $r_N(x)\equiv 0$, $t_N(x)=P_n(x)$. Система (3.4.2) в этом случае совместна и по формуле (3.4.6) $u(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{-k-1}P_n^{(k)}(x)$.

Таким образом,

$$y(x) = \exp(ax)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{-k-1}P_n^{(k)}(x) \tag{3.8.1}$$

выражение первообразной при любом $n \geq 0$.

Пример 3.8.1. Вычислить интеграл $y(x) = \int (4x^3 - 2x^2 + 5x - 9)\exp(-2x)dx$. Здесь $n = 3$, $a = -2$, $P_3(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 9$. Поэтому по предыдущей формуле $z_3(x) = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k(-2)^{-1-k}P_3^{(k)} = -2x^3 - 2x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{4}$. Тогда в силу замены $y(x) = \left(-2x^3 - 2x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{4}\right)\exp(-2x) + C$, C — произвольная постоянная.

Заметим, что другие методы вычисления подобных интегралов приводят к более обширным вычислениям.

Применим теперь наш метод к вычислению интегралов вида

$$\int g_n(x)\exp(ax)\cos(bx)dx, \int h_m(x)\exp(ax)\sin(bx)dx, \tag{3.8.2}$$

где a, b — вещественные числа, $g_n(x)$, $h_m(x)$ — многочлены степени n, m и найдем для них выражения через элементарные функции.

Записав первый из интегралов в виде $y'(x) = g_n(x)\exp(ax)\cos(bx)$, перейдем к комплексному уравнению $z'(x) = g_n(x)\exp(\lambda_0 x)$, где $z(x) = y(x) + iv(x)$. Сделав в последнем уравнении замену переменной $z(x) = \exp(\lambda_0 x)u(x)$, где $\lambda_0 = a + ib$, получим $u'(x) + \lambda_0 u(x) = g_n(x)$.

Согласно теореме 3.4.2 последнее уравнение имеет полиномиальное решение $u = u_n(x)$, вообще говоря, с комплексными коэффициентами. Таким образом $z(x) = \exp(\lambda_0 x)u_n(x)$. Выделяя вещественную часть, найдем значение неопределенного интеграла

$$y(x) = Re(z(x)) = \exp(ax)[Re(u_n(x))\cos(bx) + Im(u_n(x))\sin(bx)]. \tag{3.8.3}$$

Запишем

$$\lambda_0^n = (a+ib)^n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j} a^{n-2j} b^{2j} + i \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j+1} a^{n-2j-1} b^{2j+1}, \qquad (3.8.4)$$

$$\overline{\lambda}_0^n = (a-ib)^n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j} a^{n-2j} b^{2j} - i \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j+1} a^{n-2j-1} b^{2j+1}, \qquad (3.8.5)$$

где положено $C_n^k = 0$, при $k > n$.

Обозначим

$$\Phi(n;a,b) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j} a^{n-2j} b^{2j}, \; F(n;a,b) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j+1} a^{n-2j-1} b^{2j+1}. \qquad (3.8.6)$$

Тогда

$\lambda_0^n = (a+ib)^n = \Phi(n;a,b) + iF(n;a,b)$,и $\overline{\lambda}_0^n = (a-ib)^n = \Phi(n;a,b) - iF(n;a,b)$.

Вычисляя, получим

$$u_n(x) = \frac{1}{(a^2+b^2)^{n+1}} \left\{ \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \left[\Phi(n+1;a,b)\Phi(n-l;a,b) + F(n+1;a,b)F(n-l;a,b) \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot g_n^{(l)}(x) + i \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \left[\Phi(n+1;a,b)F(n-l;a,b) - F(n+1;a,b)\Phi(n-l;a,b) \right] g_n^{(l)}(x) \right\}.$$

(3.8.7)

Теперь искомый интеграл запишется по формуле (3.8.3) в виде

$$y(x) = \frac{\exp(ax)}{(a^2+b^2)^{n+1}} \left\{ \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \left[\Phi(n+1;a,b)\Phi(n-l;a,b) + F(n+1;a,b)F(n-l;a,b) \right] \cdot \right.$$

$$g_n^{(l)}(x)\cos(bx) +$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \left[\Phi(n+1;a,b)F(n-l;a,b) - F(n+1;a,b)\Phi(n-l;a,b) \right] g_n^{(l)}(x)\sin(bx) \right\}.$$

(3.8.8)

Пример 3.8.2. Вычислить интеграл

$$y(x) = \int (4x^3 - 2x^2 + 5x - 9)\exp(-2x)\cos(3x)dx.$$

Здесь $n = 3, a = -2, b = 3$, $g_3(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 9$. Поэтому по формуле (3.8.7) $u_n(x)=\sum_{l=0}^{3}(-1)^l(-2+3i)^{-1-l}g_3^{(l)}$. Имеем далее: $\Phi(4;-2,3)=$

$=\sum_{j=0}^{2}(-1)^j C_4^{2j}(-2)^{4-2j}3^{2j}=-119$, $\quad F(4;a,b)=\sum_{j=0}^{2}(-1)^j C_4^{2j+1}(-2)^{4-2j-1}3^{2j+1}=120$.

Аналогично: $\Phi(3;-2,3)=46$, $\Phi(2;-2,3)=-5$, $\Phi(1;-2,3)=-2$, $\Phi(0;-2,3)=1$; $F(3;-2,3)=9$, $F(2;-2,3)=-12$, $F(1;-2,3)=3$, $F(0;-2,3)=0$.

Подставляя найденные значения в формулу (3.8.8), получим

$$y(x)=\left(-\frac{8}{13}x^3+\frac{112}{169}x^2-\frac{846}{2197}x+\frac{44235}{28561}\right)e^{-2x}\cos(3x)+$$
$$+\left(\frac{12}{13}x^3+\frac{66}{169}x^2+\frac{2127}{2197}x-\frac{52527}{28561}\right)e^{-2x}\sin(3x).$$

Чтобы найти выражение в элементарных функциях для интеграла $y(x)=\int g_n(x)\exp(ax)\sin(bx)dx$ заметим, что $\sin(bx)=\cos\left(b\left(x+\frac{\pi}{2b}\right)\right)$. Поэтому, заменяя по формуле $x=t-\frac{\pi}{2b}$, получим $y(t-\pi 2^{-1}b^{-1})=$

$$=\int g_n(t-\pi 2^{-1}b^{-1})\exp(a(t-\pi 2^{-1}b^{-1}))\cos(bt)dt=$$
$$=\exp(-\pi a 2^{-1}b^{-1})\int g_n(t-\pi 2^{-1}b^{-1})\exp(at)\cos(bt)dt.$$

Применив к последнему интегралу формулу (4.4.8), найдем

$$y(t-\pi 2^{-1}b^{-1})=\frac{\exp(at-\pi a 2^{-1}b^{-1})}{(a^2+b^2)^{n+1}}\left\{\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\begin{bmatrix}\Phi(n+1;a,b)\Phi(n-l;a,b)+\\+F(n+1;a,b)F(n-l;a,b)\end{bmatrix}\cdot\right.$$
$$\cdot g_n^{(l)}(t-\pi 2^{-1}b^{-1})\cos(bt)-$$
$$-\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\left[\Phi(n+1;a,b)F(n-l;a,b)-F(n+1;a,b)\Phi(n-l;a,b)\right]\cdot$$
$$\left.\cdot g_n^{(l)}(t-\pi 2^{-1}b^{-1})\sin(bt)\right\}.$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно получим

$$y(x)=\frac{\exp(ax)}{(a^2+b^2)^{n+1}}\left\{\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\begin{bmatrix}\Phi(n+1;a,b)\Phi(n-l;a,b)+\\+F(n+1;a,b)F(n-l;a,b)\end{bmatrix}g_n^{(l)}(x)\sin(bx)+\right.$$

$$\left.\begin{aligned}-\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}\left[\Phi(n+1;a,b)F(n-l;a,b)-F(n+1;a,b)\Phi(n-l;a,b)\right]\cdot\\ \cdot g_n^{(l)}(x)\cos(bx)\end{aligned}\right\}. \quad (3.8.9)$$

Пример 3.8.3. Вычислить $\int(4x^3-2x^2+5x-9)\exp(-2x)\sin(3x)dx$.

Используя результаты предыдущего примера и формулу (4.4.9) найдем

$$y(x)=\left(-\frac{12}{13}x^3-\frac{66}{169}x^2-\frac{2127}{2197}x+\frac{52527}{28561}\right)e^{-2x}\cos(3x)+$$

$$+\left(-\frac{8}{13}x^3+\frac{112}{169}x^2-\frac{846}{2197}x+\frac{44235}{28561}\right)e^{-2x}\sin(3x).$$

3.9. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Применим наш метод к интегралам от биномиального дифференциала, случаи интегрируемости которых были известны еще И. Ньютону. Однако только в середине 19 века П.Л. Чебышев установил тот факт, что других случаев интегрируемости в конечном виде для биномиальных дифференциалов нет, поэтому соответствующие подстановки называют *подстановками Чебышева*.

Как было показано П.Л. Чебышевым [66] интегралы вида $B_{m,n,p}=\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где a и b — постоянные величины, а m,n,p — рациональные числа сводятся к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях: n, либо $\frac{m+1}{n}$, либо $\frac{m+1}{n}+p$ — целые числа.

Рассмотрим интеграл от биномиального дифференциала $B_{m,n,p}=\int x^{\frac{m_1}{m_2}}(a+bx^{\frac{n_1}{n_2}})^{\frac{p_1}{p_2}}dx$, где m_1,m_2,n_1,n_2,p_1,p_2 — целые числа. Продифференцируем интеграл, обозначив производную через $y'(x)=x^{\frac{m_1}{m_2}}(a+bx^{\frac{n_1}{n_2}})^{\frac{p_1}{p_2}}$.

Теперь выполнив подстановку, $y=u(x)x^{\frac{m_1}{m_2}}$ получим уравнение

$u' + \frac{m_1}{m_2} x^{-1} u = (a + b x^{\frac{n_1}{n_2}})^{\frac{p_1}{p_2}}$. Подстановка $u(x) = v(x)\left(a + b x^{\frac{n_1}{n_2}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}$ преобразует последнее уравнение к виду $x\left(a + b x^{\frac{n_1}{n_2}}\right) v' + \left(b \frac{p_1 n_1}{p_2 n_2} x^{\frac{n_1}{n_2}} + b \frac{m_1}{m_2} x^{\frac{n_1}{n_2}} + a \frac{m_1}{m_2}\right) v = {}$ $= x\left(a + b x^{\frac{n_1}{n_2}}\right)$. Наконец с помощью подстановки $x = t^{n_2}$ перейдем к новой независимой переменной

$$\frac{1}{n_2}\left(at + bt^{n_1}\right) v_t' + \left(b \frac{p_1}{p_2} \frac{n_1}{n_2} t^{n_1} + b \frac{m_1}{m_2} t^{n_1} + a \frac{m_1}{m_2}\right) v = t^{n_2}\left(a + bt^{n_1}\right). \tag{3.9.1}$$

Таким образом, если известно частное решение уравнения (3.9.1), то интеграл выражается через него следующим образом

$$y(x) = x^{\frac{m_1}{m_2}} (a + b x^{\frac{n_1}{n_2}})^{\frac{p_1}{p_2}} v(x^{\frac{1}{n_2}}). \tag{3.9.2}$$

Например, если уравнение (3.9.1) имеет полиномиальное решение, то предлагаемым методом значение интеграла выражается в элементарных функциях.

Пример 3.9.1. Вычислить интеграл $\mathrm{B}_{m,n,p} = \int x^{\frac{-1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx$. Здесь $m_1 = -1$, $m_2 = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$. Уравнение (3.9.1) в этом случае имеет вид $\left(t + t^2\right) v_t' + \left(\frac{-5}{3} t - 2\right) v = 4t^5 + 4t^4$ и может иметь, очевидно, частным решением многочлен четвертой степени. Для его отыскания продифференцируем это уравнение пять раз с условием $v^{(k)} \equiv 0$ при $k > 4$. Получим систему

$$\left.\begin{array}{llllll}
-\frac{5}{3}v & +\left(-1+\frac{1}{3}t\right)v' & +(t^2+t)v'' & & & =20t^4+16t^3, \\
 & \frac{-4}{3}v' & +\frac{7}{3}tv'' & +(t^2+t)v''' & & =80t^3+48t^2, \\
 & & v'' & +\left(\frac{13}{3}t+1\right)v''' & +(t^2+t)v^{(4)} & =240t^2+96t, \\
 & & & \frac{16}{3}v''' & +\left(\frac{19}{3}t+2\right)v^{(4)} & =480t+96, \\
 & & & & \frac{35}{3}v^{(4)} & =480,
\end{array}\right\}$$

из которой легко находим $v(t)=\frac{12}{7}t^4+\frac{3}{7}t^3-\frac{9}{7}t^2$. Подставляя в формулу (3.9.2), получим значение первообразной $y(x)=x^{\frac{-1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}v(x^{\frac{1}{4}})$.

Глава 4. Уравнение в кольце ОЛДО и теория Пикара — Вессио

Дифференциальная теория Галуа для расширений обыкновенных дифференциальных полей, задаваемых однородными линейными дифференциальными уравнениями, была разработана Колчиным [80] в 40-х годах и получила название теории Пикара–Вессио, поскольку работы этих математиков послужили отправными точками для развития этой теории. С современным состоянием исследований в этой области можно познакомиться по монографии [109]. Топологический подход к теории Галуа предложен в [46].

Рассматриваемое нами уравнение с некоммутативными коэффициентами [53] порождает дифференциальную группу Галуа данного ОЛДУ и позволяет подойти к задаче определения дифференциальной группы Галуа данного уравнения с вычислительной точки зрения, поскольку дифференциальные автоморфизмы группы представляются обыкновенными линейными дифференциальными операторами — решениями указанного уравнения. Это позволяет условия на коэффициенты уравнения, при выполнении которых данное ОЛДУ имеет дифференциальную группу Галуа определенного типа.

4.1. Уравнение дифференциальной группы Галуа

Рассмотрим уравнение

$$\boldsymbol{X}_{s_1}\boldsymbol{D}_n = \boldsymbol{D}_n\boldsymbol{Y}_{s_2}, \qquad (4.1.1)$$

где $\boldsymbol{D}_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{\delta}^i$ — ОЛДО из кольца $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\delta}]$ с коэффициентами $\boldsymbol{a}_i$ из дифференциального поля $\boldsymbol{K}$ нулевой характеристики, $\boldsymbol{a}_n = 1$, $\boldsymbol{\delta}$ — дифференцирование в этом поле, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{ord}\,\boldsymbol{D}_n$ — порядок оператора $\boldsymbol{D}_n$, $\boldsymbol{X}_{s_1}$, $\boldsymbol{Y}_{s_2}$ — неизвестные операторы, подлежащие определению в кольце $\tilde{\boldsymbol{K}}[\boldsymbol{\delta}]$, где $\tilde{\boldsymbol{K}}$ — некоторое расширение поля $\boldsymbol{K}$.

Пусть $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{P}$ — расширение Пикара–Вессио, полученное присоединением всех решений уравнения $\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{y}) = 0$, $\boldsymbol{K}_0$ — алгебраически замкнутое поле констант поля $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{K}[\delta]$ — кольцо ОЛДО.

Решением уравнения (4.1.1) назовем любую пару операторов $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ из $\boldsymbol{K}[\delta]\times\boldsymbol{K}[\delta]$ обращающую уравнение в тождество. Множество решений этого уравнения не пусто, поскольку в нем содержатся элементы централизатора оператора $\boldsymbol{D}_n$ в $\boldsymbol{K}[\delta]$. Через $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{D}}$, $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$, соответственно, обозначим множество $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ - компонент решений уравнения (4.1.1).

Теорема 4.1.1. Множества $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{D}}$, $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ являются изоморфными $\boldsymbol{K}_0$ — алгебрами.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{Y}^1$, $\boldsymbol{Y}^2\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ и $\boldsymbol{X}^1$, $\boldsymbol{X}^2$ — соответствующие им $\boldsymbol{X}$ - компоненты, $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\in\boldsymbol{K}_0$. Очевидно, $\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{Y}^1+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{Y}^2\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$. Покажем, что $\boldsymbol{Y}^1\boldsymbol{Y}^2$ — решение уравнения (4.1.1). Имеем $\boldsymbol{D}_n\boldsymbol{Y}^1\boldsymbol{Y}^2=\boldsymbol{X}^1\boldsymbol{D}_n\boldsymbol{Y}^2=\boldsymbol{X}^1\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{D}_n$. Аналогично, $\boldsymbol{Y}^2\boldsymbol{Y}^1$ — решение уравнения (4.1.1). Каждой $\boldsymbol{Y}$ - компоненте поставим в соответствие ее $\boldsymbol{X}$ - компоненту, это соответствие взаимно однозначно и является изоморфизмом. ■

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только алгебры $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$, а ее элементы для краткости будем называть решениями уравнения (4.1.1).

Элементы алгебры $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ обладают следующим свойством: пусть $\boldsymbol{N}$ — пространство решений уравнения $\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{y})=0$, тогда элемент $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ является гомоморфизмом $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$.

Обозначим через $\boldsymbol{M}_n$ алгебру всех $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ матриц, определенных над полем $\boldsymbol{K}_0$. Каждому элементу $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ поставим в соответствие матрицу $((\boldsymbol{c}_{ij}))\in\boldsymbol{M}_n$ по правилу: зафиксируем базис $\{\boldsymbol{u}_k\}_1^n$ в пространстве $\boldsymbol{N}$. Тогда матрица $((\boldsymbol{c}_{ij}))$ является матрицей следующей системы:

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u}_k)=\boldsymbol{c}_{k1}\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{c}_{k2}\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{c}_{kn}\boldsymbol{u}_n,\ \boldsymbol{k}=\overline{1,\boldsymbol{n}}. \tag{4.1.2}$$

Матрицу $((\boldsymbol{c}_{ij}))$ назовем матрицей оператора $\boldsymbol{Y}$. Характеристический многочлен $\chi(\lambda)$, минимальный многочлен **м(л)** матрицы $((\boldsymbol{c}_{ij}))$ назовем характеристическим, минимальным многочленом оператора $\boldsymbol{Y}$.

Корни характеристического многочлена назовем характеристическими корнями оператора $\boldsymbol{Y}$ или собственными числами.

Теорема 4.1.2. Если $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$, $\boldsymbol{ord}\,\boldsymbol{Y} \ge \boldsymbol{n}$ и $((\boldsymbol{c}_{ij}))$ — матрица оператора $\boldsymbol{Y}$, то существует элемент $\boldsymbol{Y}^1 \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ с той же самой матрицей и $\boldsymbol{ord}\,\boldsymbol{Y}^1 < \boldsymbol{n}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{ord}\,\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{p} \ge \boldsymbol{n}$. Представим оператор $\boldsymbol{Y}$ в виде $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{Y}^1$ разделив его на оператор $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}}$ справа, тогда $\boldsymbol{ord}\,\boldsymbol{Y}^1 < \boldsymbol{n}$. Из этого представления оператора $\boldsymbol{Y}$ следует, что $\boldsymbol{Y}^1$ — решение уравнения (4.1.1), а матрица оператора $\boldsymbol{Y}^1$ совпадает с матрицей оператора $\boldsymbol{Y}$. ■

Теорема 4.1.2 показывает, что можно ограничиться рассмотрением решений уравнений (4.1.1), порядок которых меньше $\boldsymbol{n}$.

Теорема 4.1.3. Для того чтобы оператор $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ с матрицей $((\boldsymbol{c}_{ij}))$ не имел нетривиальных нулей в пространстве $\boldsymbol{N}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{det}((\boldsymbol{c}_{ij})) \ne 0$.

Доказательство. Пусть оператор $\boldsymbol{Y}$ не имеет нетривиальных нулей в пространстве $\boldsymbol{N}$, но $\mathbf{det}((\boldsymbol{c}_{ij})) = 0$. Тогда приходим к противоречию: с одной стороны элементы $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u}_k)$ должны быть линейно независимыми, а с другой в силу равенства нулю детерминанта найдутся такие $\boldsymbol{b}_k \in \boldsymbol{K}_0$ не все равные нулю, что $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{k=1, k \ne i}^{n} \boldsymbol{b}_k \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u}_k)$. Предположение: $\mathbf{det}((\boldsymbol{c}_{ij})) \ne 0$, а оператор $\boldsymbol{Y}$ имеет нетривиальные нули в пространстве $\boldsymbol{N}$, также приводит к противоречию. ■

Определение 4.1.1. Оператор $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ называется обратимым в $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$, если существует оператор $\boldsymbol{Y}^1 \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ такой, что $\boldsymbol{Y}^1\boldsymbol{Y} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{D})$, $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^1 \equiv \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{D})$ в смысле правого сравнения.

Теорема 4.1.4. Оператор $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ обратим в $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ в том и только в том случае, если он не имеет нетривиальных нулей в пространстве $\boldsymbol{N}$.

Доказательство. Пусть оператор $\boldsymbol{Y}$ обратим в $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ и существует такое $\boldsymbol{u} \ne 0$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{N}$, что $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u}) = 0$. По определению 4.1.1 имеем $\boldsymbol{Y}^1\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} +$

$+\boldsymbol{QD}_n(\boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{Q}$ — некоторый оператор. Следовательно, $\boldsymbol{u}=0$.

Обратно, если оператор $\boldsymbol{Y}$ не имеет нетривиальных нулей в пространстве $\boldsymbol{N}$, то операторы $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{D}_n$ взаимно просты справа. Поэтому уравнение $\boldsymbol{Y}^1\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}^1\boldsymbol{D}_n=\boldsymbol{\varepsilon}$ разрешимо относительно $\boldsymbol{Y}^1$ и $\boldsymbol{X}^1$ в кольце $\boldsymbol{K}[\delta]$. Покажем, что $\boldsymbol{Y}^1\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$. Действительно, из последнего тождества следует $\boldsymbol{Y}^1\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}$ $\forall\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{N}$. Так как $\boldsymbol{Y}$ — автоморфизм пространства $\boldsymbol{N}$, то отображение $\boldsymbol{Y}^1:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ — эпиморфизм. Значит $\boldsymbol{D}_n\boldsymbol{Y}^1(\boldsymbol{u})=0$ $\forall\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{N}$ и оператор $\boldsymbol{D}_n\boldsymbol{Y}^1$ делится справа на оператор $\boldsymbol{D}_n$, то есть $\boldsymbol{X}^1\boldsymbol{D}_n=\boldsymbol{D}_n\boldsymbol{Y}^1$. По определению алгебры $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ оператор $\boldsymbol{Y}^1\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$. Из тождества $\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}^1\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}$ вытекает сравнение $\boldsymbol{Y}^1\boldsymbol{Y}\equiv\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{D})$. Далее, пусть, $\{\boldsymbol{u}_k\}_1^{\boldsymbol{n}}$ — базис в пространстве $\boldsymbol{N}$. Тогда $\{\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u}_i)\}_1^{\boldsymbol{n}}$ также базис в $\boldsymbol{N}$, причем $\boldsymbol{Y}^1(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{u}_i$, поэтому $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^1(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{v}_i$ $(\boldsymbol{i}=1,\boldsymbol{n})$ и $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^1\equiv\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{D})$. ■

Обозначим через $\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{D}}$ двусторонний идеал алгебры $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$, образованный операторами, аннулирующими пространство $\boldsymbol{N}$. Фактор - алгебру $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}/\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{D}}$ (см. [68] назовем правой инвариантной алгеброй оператора $\boldsymbol{D}_n$ и обозначим $\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{D}}$. Элементами алгебры $\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{D}}$ являются классы эквивалентности $\overline{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{D}}$. В силу теоремы 5.1.2 представитель $\boldsymbol{Y}$ класса $\overline{\boldsymbol{Y}}$ можно выбрать так, чтобы $\boldsymbol{ord}\,\boldsymbol{Y}<\boldsymbol{n}$. Матрицу оператора $\boldsymbol{Y}$ будем называть матрицей элемента $\overline{\boldsymbol{Y}}$. Элемент $\overline{\boldsymbol{Y}}$ обратим в $\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{D}}$ если его представитель $\boldsymbol{Y}$ обратим в $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$.

Теорема 4.1.5. $\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{D}}\approx\boldsymbol{M}_n$.

Доказательство. Каждому оператору $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{D}}$ в силу (4.1.2) соответствует некоторая матрица из $\boldsymbol{M}_n$, а любой матрице из $\boldsymbol{M}_n$ отвечает вполне определенный оператор $\boldsymbol{Y}=\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{y}_i\delta^{\boldsymbol{i}}$, коэффициенты которого $\boldsymbol{y}_i$ однозначно определяются из следующей системы алгебраических уравнений с коэффициентами в поле $\boldsymbol{K}_0$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i u_k^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} c_{k,i} u_i\,,\ k = \overline{1,n}. \tag{4.1.3}$$

Система (5.1.3) имеет единственное решение в поле P, так как ее определитель является вронскианом линейно независимых элементов u_j. Сюръективное отображение $\varphi : Y^D \to M_n$ является гомоморфизмом, ядро которого $\ker\varphi = I^D$. ■

Обозначим через J^{D*}, M_n^* мультипликативные группы алгебр J^D, M_n соответственно. Если группа Галуа G уравнения $D_n(y)=0$ полна (содержит все невырожденные матрицы из M_n), то из предыдущей теоремы следует изоморфизм $J^{D*} \approx M_n$. В общем случае группа G изоморфна некоторой подгруппе $\tilde{J}^{D*}$ группы J^{D*}.

Определение 4.1.2. В дальнейшем элементы группы J^{D*} и их представители будут называться регулярными решениями уравнения (4.1.1).

Пусть $|R^2\|$ — правый результант [48] операторов D_n и $Y-\lambda\varepsilon$, λ — параметр такой, что $\delta(\lambda)=0$, $\chi(\lambda)$ — характеристический многочлен оператора Y.

Теорема 5.1.6. Уравнения $|R^2\|=0$ и $\chi(\lambda)=0$ имеют одинаковые корни.

Доказательство. Пусть λ_1 — корень уравнения $|R^2\|=0$. Так как уравнения $D_n(y)=0$ и $(Y-\lambda_1\varepsilon)\,y=0$ имеют общее нетривиальное решение, то $\chi(\lambda_1)=0$.

Обратно, предположим, что $\chi(\lambda_1)=0$. Тогда оператор $Y-\lambda_1\varepsilon$ имеет нетривиальный ноль в пространстве N, поэтому λ_1 является корнем уравнения $|R^2\|=0$. ■

4.2. Определение типа дифференциальной группы Галуа обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

Рассматривается задача определения дифференциальной группы Галуа по заданному ОЛДУ Некоторые частные случаи этой задачи рассмотрены, например, в [101]. Для её решения используется уравнение с некоммутативными коэффициентами, рассмотренное в п. 4.1.

Определение 4.2.1. Скажем, что элемент $\boldsymbol{q} \neq 0$, $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{K}$ — многочлен степени $\boldsymbol{k}-1$, если $\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{q}=0$, $\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{k}-1}\boldsymbol{q} \neq 0$ для некоторого натурального $\boldsymbol{k}$.

Пусть $\boldsymbol{Y}$ — регулярное решение уравнения (4.1.1). Через $\tilde{N}$ обозначим подпространство пространства $\boldsymbol{N}$, порожденное элементами $\boldsymbol{u}$, обладающими тем свойством, что $\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{k}_r}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u})=0$ для некоторого натурального $\boldsymbol{k}_r$, и, если $\boldsymbol{i}<\boldsymbol{k}_r$, то $\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u}) \neq 0$. Пусть $\{\boldsymbol{u}_j\}_1^{\boldsymbol{l}}$ — базис в $\tilde{N}$ и $\boldsymbol{N}_q$ — образ пространства $\tilde{N}$ при отображении $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{k}=\mathbf{max}(\boldsymbol{k}_r)$.

Лемма 4.2.1. Элементы $\{\boldsymbol{u}_j\}_1^{\boldsymbol{l}}$ пространства $\tilde{N}$ являются многочленами степени, не превосходящей $\boldsymbol{k}$.

Доказательство. По определению $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u}_j)=\boldsymbol{q}_j$ — многочлены степени, не превосходящей $\boldsymbol{k}$. В силу регулярности оператора $\boldsymbol{Y}$ они образуют базис пространства $\boldsymbol{N}_q$, следовательно, $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{N}_q=\mathbf{dim}\,\tilde{N}$. Пусть $\boldsymbol{D}^1$ — правый делитель наименьшего порядка оператора $\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{k}+1}\boldsymbol{Y}$, аннулирующий пространство $\boldsymbol{N}_q$, тогда $\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{k}+1}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^1$. Поэтому $\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{k}+1}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q}_i)=0$ $\quad(\boldsymbol{j}=\overline{1,\boldsymbol{l}})$ и $\boldsymbol{N}_q \subset \tilde{N}$. В силу равенства размерностей заключаем $\boldsymbol{N}_q=\tilde{N}$. ■

Лемма 4.2.2. Если $\boldsymbol{Y}$ регулярное решение уравнения (4.1.1), то сравнение

$$\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{k}} \equiv 0\left(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{D}_n\right) \tag{4.2.1}$$

разрешимо относительно $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{k}=0,1$.

Доказательство. При $\boldsymbol{k}=0$ положим $\boldsymbol{Y}^0=\boldsymbol{Y}$. Построим оператор $\boldsymbol{Y}^1$.

Пусть $\{v_i\}_1^n$ — базис пространства N, тогда на элементах базиса сравнение (5.2.1) равносильно тождествам $\delta Y(v_i) = Y^1\delta(v_i)$. Среди элементов δv_i должно быть не менее $l \geq n-1$ линейно независимых над K_0. Действительно в противном случае были бы линейно зависимы, например, элементы δv_{n-1}, δv_n, а остальные линейно независимы. Тогда из равенства $\delta v_\alpha = c_{1\alpha}\delta v_1 + ... + c_{n-2\alpha}\delta v_{n-2}$, где $c_{i\alpha} \in K_0$ для $\alpha = n-1$, $\alpha = n$ следовало бы равенство $v_\alpha = c_{1\alpha} v_1 + ... + c_{n-2\alpha} v_{n-2} + p_\alpha$, где p_α — многочлены нулевой степени. Но это противоречит базисности элементов v_i. Если имеет место случай $l = n-1$, то оператор Y^1 ищем в виде $Y^1 = \sum_{j=0}^{n-2} f_j\delta^j$, в случае $l = n$ оператор Y^1 ищем в виде $Y^1 = \sum_{j=0}^{n-1} f_j\delta^j$. В обоих случаях относительно коэффициентов f_j получаем систему $\delta Y(v_i) = Y^1(v_i)$, $i = \overline{1, l}$, которая имеет единственное решение. Действительно, ее определитель — вронскиан элементов δv_i отличен от нуля, а среди элементов $\delta Y(v_i)$ не все равны нулю. Значит, при $l = n$ сравнение выполняется на элементах $\{v_i\}_1^n$. При $l = n-1$ имеем $v_n = c_{1n} v_1 + ... + c_{n-1n} v_{n-1} + p_n$, где $p_n \in K_0$. Поэтому $\delta Y(p_n) = Y^1\delta(p_n) = 0$, то есть во всех случаях сравнение $\delta Y - Y^1\delta \equiv 0 (\mathbf{mod}\, D_n)$ выполняется на всем пространстве N. ■

Лемма 4.2.3. При любом натуральном $k \geq 2$ разрешимо сравнение

$$\delta^k Y - Y^k\delta^k \equiv 0 (\mathbf{mod}\, D_n). \tag{4.2.2}$$

Доказательство. Действительно, перепишем сравнение (5.2.2) в виде $\delta^k Y(v_i) - Y^k\delta^{k-1}(\delta v_i) \equiv 0$ $(i = \overline{1, n})$. Операторы $Y^k\delta^{k-1} = \sum_{j=0}^{l} f_{jk}\delta^{j+k-1}$ для $k \geq 2$ при $l = n-2$ или $l = n-1$ определяются однозначно, как и в предыдущем утверждении. Следовательно, на пространстве N справедливо (5.2.2). ■

Обозначим через $S = \{a_i\}$ — наименьшее подмножество множества коэффициентов оператора $\boldsymbol{D}_n = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{\delta}^i$ с $\boldsymbol{a}_n = 1$. Известно, что элементы $\boldsymbol{a}_i$ являются рациональными функциями элементов базиса $\{\boldsymbol{v}_j\}_1^n$ пространства $\boldsymbol{N}$ и их производных, $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{v}_j)$. Обозначим через $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{v}_j))$ выражение, полученное в результате применения к $\boldsymbol{v}_j$ оператора $\boldsymbol{Y}$, а к производным $\boldsymbol{v}_j^{(k)}$ — оператора $\boldsymbol{Y}^k$. Далее под $\boldsymbol{K}$ понимаем дифференциальное поле, порожденное множеством $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{P}$ — расширение Пикара — Вессио, $\boldsymbol{K}_0$ — алгебраически замкнутое поле констант. Пусть $\boldsymbol{G}$ дифференциальная группа Галуа этого расширения.

Теорема 4.2.1. Для того чтобы регулярному решению $\boldsymbol{Y}$ уравнения (4.1.1) отвечал дифференциальный автоморфизм $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{G}$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $\boldsymbol{\delta Y} - \boldsymbol{Y}^1\boldsymbol{\delta} \equiv 0(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{D}_n)$;

2) если $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{v}_i)$, то $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{v}_j))$, $\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{S}$.

Необходимость. Пусть регулярному элементу $\boldsymbol{Y}$ отвечает автоморфизм $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{G}$. Условия $\boldsymbol{\sigma\delta}^k(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{\delta}^k\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_j)$ выполняются на элементах базиса пространства $\boldsymbol{N}$. Отсюда по лемме 4.2.3 получаем $\boldsymbol{Y}^k\boldsymbol{\delta}^k(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{\delta}^k\boldsymbol{Y\delta}(\boldsymbol{v}_j)$ и $\boldsymbol{\delta Y} - \boldsymbol{Y}^1\boldsymbol{\delta} \equiv 0(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{D}_n)$. Если $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{v}_j)$ $\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{S}$, то $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_j)) = \boldsymbol{a}_i$, поэтому $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{v}_j))$.

Достаточность. Построим автоморфизм $\boldsymbol{\sigma}$, соответствующий некоторому регулярному элементу $\boldsymbol{Y}$, удовлетворяющему условиям теоремы. На элементах $\boldsymbol{v}$ пространства $\boldsymbol{N}$ положим $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{v})$. На производных от элементов пространства $\boldsymbol{N}$ отображение $\boldsymbol{\sigma}$ определим так $\boldsymbol{\sigma\delta}^k(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{Y}_k\boldsymbol{\delta}^k(\boldsymbol{v})$. На поле $\boldsymbol{P}$ отображение $\boldsymbol{\sigma}$ распространим, положив $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})$, $\forall \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{P}$. Построенное отображение $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}$ является дифференциальным автоморфизмом поля $\boldsymbol{P}$. По условию 2) теоремы коэффициенты оператора $\boldsymbol{D}_n$ остаются неподвижными при отображении $\boldsymbol{\sigma}$. ■

Рассмотрим теперь связь между решениями уравнения (4.1.1) и некоторыми типами алгебраических матричных групп уравнения $\boldsymbol{D_n(y)}=0$.

Обозначим через $\boldsymbol{K}_0^*$ мультипликативную группу поля $\boldsymbol{K}_0$.

Теорема 4.2.2. Группа $\boldsymbol{G}$ изоморфна некоторой подгруппе группы $(\boldsymbol{K}_0^*)^{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{K}_0^*\times\cdots\times\boldsymbol{K}_0^*$ в том и только в том случае, когда уравнение (4.1.1) имеет регулярное нетривиальное решение с коэффициентами в поле $\boldsymbol{K}_0$, характеристические корни которого попарно различны.

Действительно, существование изоморфизма, указанного в теореме, означает существование в пространства $\boldsymbol{N}$ такого базиса $\{\boldsymbol{v}_i\}_1^{\boldsymbol{n}}$, что каждый элемент $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{G}$ имеет в этом базисе диагональную матрицу. То есть $\boldsymbol{\sigma(v_j)=c_j v_j}$, $\boldsymbol{j}=\overline{1,\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{c_j}\in\boldsymbol{K}_0$, $\boldsymbol{c_j}\neq 0$ — собственные числа матрицы автоморфизмы $\boldsymbol{\sigma}$. Коэффициенты оператора $\boldsymbol{Y}=\sum_{\boldsymbol{i}=0}^{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{y_i\delta^i}$, отвечающего автоморфизму $\boldsymbol{\sigma}$ можно определить из соотношений $\boldsymbol{Y(v_j)=c_j v_j}$, $\boldsymbol{j}=\overline{1,\boldsymbol{n}}$, приводящих к системе (4.1.2) алгебраических уравнений относительно $\boldsymbol{y_i}$. Поэтому $\boldsymbol{y_i}=\Delta_{\boldsymbol{i}}/\Delta$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix}\boldsymbol{v}_1^{(\boldsymbol{n}-1)} & \dots & \boldsymbol{v}_1\\ \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{n}-1)} & \dots & \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}\end{vmatrix},\Delta_{\boldsymbol{i}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{v}_1^{(\boldsymbol{n}-1)} & \dots & \boldsymbol{v}_1^{(\boldsymbol{i}+1)} & \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_1^{(\boldsymbol{i}-1)} & \dots & \boldsymbol{v}_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{n}-1)} & \dots & \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{i}+1)} & \boldsymbol{c_n v_n} & \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{i}-1)} & \dots & \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}\end{vmatrix}. \tag{4.2.3}$$

Для любого $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{G}$ имеем $\boldsymbol{\sigma(y_i)=\sigma}(\Delta_{\boldsymbol{i}})/\boldsymbol{\sigma}(\Delta)=\boldsymbol{c}\Delta_{\boldsymbol{i}}/\boldsymbol{c}\Delta=\boldsymbol{y_i}$, где $\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{\sigma}|$, $|\boldsymbol{\sigma}|$ — определитель матрицы автоморфизма $\boldsymbol{\sigma}$. Следовательно, $\boldsymbol{y_i}\in\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{i}=\overline{0,\boldsymbol{n}-1}$. По построению оператор $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{Y^D}$.

Обратно, пусть $\boldsymbol{Y}=\sum_{\boldsymbol{i}=0}^{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y_i\delta^i}$ решение уравнения (4.1.1) удовлетворяющее условиям теоремы и $\boldsymbol{\lambda_j}$, ($\boldsymbol{j}=\overline{1,\boldsymbol{n}}$) — его попарно различные собственные числа. Операторы $\boldsymbol{Y^j}=$ ПНОД$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\lambda_j\varepsilon},\boldsymbol{D_n})$ имеют первым порядок, поскольку решения уравнений $\boldsymbol{Y^j(y)}=\boldsymbol{f_j y'}+\boldsymbol{g_j y}=0$ линейно независимы и образуют базис пространства $N=\overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}}N_j$, где N_j — одномерные пространства решений уравнений $Y^j(y)=0$. Для любого автоморфизма $\sigma\in G$ $f_j(\sigma y)'+$ $+g_j(\sigma y)=0$, поэтому в выбранном базисе пространства все матрицы группы G имеют диагональный вид. ■

Обозначим через $T(n;K_0)$ алгебраическую матричную группу верхних треугольных матриц с равными элементами на главной диагонали.

Теорема 4.2.3. Для того чтобы в некотором базисе пространства N группа G была изоморфна группе $T(n;K_0)$ необходимо и достаточно:

1) уравнение (4.1.1) имело нетривиальное регулярное решение Y порядка $n-1$ с коэффициентами в поле K и единственным n-кратным собственным числом $c\in K_0$;

2) ord ПНОД$(D_n, Y-c\varepsilon)=n-1$;

3) группа Галуа оператора $Y-c\varepsilon$ была изоморфна $T(n-1;K_0)$.

Необходимость. Пусть $G\approx T(n;K_0)$ в некотором базисе $\{v_j\}_1^n$ пространства N. Возьмем матрицу $((c_{ij}))$, в которой $c_{ii}=c\neq 0$, $i=\overline{1,n}$, $c_{1n}=1$, остальные элементы равны нулю. Найдем решение $Y=\sum\limits_{i=0}^{n-1}y_i\delta^i$ уравнения (4.1.1), отвечающее матрице $((c_{ij}))$. Коэффициенты y_i оператора Y определим из системы (4.1.2) по формулам $y_i=\Delta_i/\Delta$, где Δ как в (5.2.3), Δ_i получается из Δ заменой i-го столбца столбцом $(cv_1+v_n,\ldots,cv_n)$.

Пусть $\tau\in G$ любой автоморфизм с матрицей $((a_{ij}))$, в которой $a_{jj}=a\neq 0$, $j=\overline{1,n}$. Имеем

$$\tau(\Delta_j)=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}v_i^{(n-1)} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}v_i^{(j+1)} & c\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}v_i+av_n & \sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}v_i^{(j-1)} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}v_i \\ \sum\limits_{i=2}^{n}a_{2i}v_i^{(n-1)} & \cdots & \sum\limits_{i=2}^{n}a_{2i}v_i^{(j+1)} & c\sum\limits_{i=2}^{n}a_{2i}v_i & \sum\limits_{i=2}^{n}a_{2i}v_i^{(j-1)} & \ldots & \sum\limits_{i=2}^{n}a_{2i}v_i \\ \ldots & \cdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ av_n^{(n-1)} & \cdots & av_n^{(j+1)} & cav_n & av_n^{(j-1)} & \ldots & av_n \end{vmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $\tau(\Delta_j) = a^n \Delta_j$, $\tau(\Delta) = a^n \Delta$. Поэтому $\tau(y_j) = y_j$ $\forall \tau \in G$ и $j = \overline{1, n}$. Далее, из вида матрицы $((c_{ij}))$ следует, что ord ПНОД$(D_n, Y - c\varepsilon) = n - 1$. Отсюда и из изоморфизма $G \approx T(n; K_0)$ вытекает изоморфизм группы Галуа уравнения $(Y - c\varepsilon)y = 0$ группе $T(n-1; K_0)$.

Достаточность. Пусть Y — решение уравнения (4.1.1), удовлетворяющее условиям теоремы, и c — его собственное число кратности *n*. Так как ord ПНОД$(D_n, Y - c\varepsilon) = n - 1$, то $D_n = (f\delta + g\varepsilon)(Y - \lambda c\varepsilon)$. Уравнение $D_n(z) = 0$ эквивалентно системе двух уравнений: $fy' + gy = 0$ и $(Y - c\varepsilon)z = y$. Пусть $\{u_j\}_2^n$ — базис пространства $\tilde{N}$ решений уравнения $(Y - \lambda_0\varepsilon)z = 0$, в котором по условию теоремы дифференциальная группа Галуа этого уравнения изоморфна $T(n-1; K_0)$. Выберем базис пространства N, положив $v_j = u_j$ для $j = \overline{2, n}$. В качестве v_1 возьмем любое решение уравнения $(Y - \lambda_0\varepsilon)z = y$, где y — решение уравнения $fy' + gy = 0$. В построенном базисе пространства N любой автоморфизм из группы G имеет треугольную матрицу. Действительно, пусть $\sigma \in G$ и $B = ((b_{ij}))$ его матрица. Так как $\sigma(Y(v_j)) = Y(\sigma(v_j))$, то

$$AB = BA, \tag{4.2.4}$$

где A, B — матрицы оператора Y и автоморфизма σ в базисе $\{v_j\}_1^n$. В силу выбора базиса и условия 3) теоремы $b_{22} = \ldots = b_{nn} = b$. Сравнивая в (4.2.4) элементы, стоящие выше главной диагонали, получаем $b_{11} = b$. Таким образом, матрица B — верхняя треугольная с равными элементами на главной диагонали. ■

Теорема 4.2.4. Для того чтобы в некотором базисе пространства N группа G была изоморфна группе $ST(n; K_0)$, необходимо и достаточно:

1) уравнение (4.1.1) имело нетривиальное регулярное решение Y порядка $n - 1$ с коэффициентами в поле K и n-кратным собственным числом равным единице;

2) ord **ПНОД**$(D_n, Y - c\varepsilon) = n-1$;

3) группа Галуа оператора $Y-\varepsilon$ была изоморфна $ST(n-1;K_0)$.

Доказательство с очевидными изменениями следует из теоремы 5.2.3. ■

Обозначим через G_a аддитивную группу поля K_0. Пусть $T_c(n;K_0)$ — алгебраическая матричная группа, изоморфная прямому произведению $n-1$ экземпляра группы v_1.

Теорема 4.2.5. Для того чтобы в некотором базисе пространства N группа G была изоморфна некоторой подгруппе $T_c(n-1;K_0)$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) существовало нетривиальное регулярное решение Y уравнения (4.1.1) с коэффициентами в поле K и n- кратным собственным числом равным единице такое, что $D = (f\delta + g\varepsilon)(Y-\varepsilon)$;

2) решение уравнения $fy' + gy = 0$ принадлежало полю K, а решение уравнения $(Y-\varepsilon)v = y$ не принадлежало полю K;

3) группа Галуа уравнения $(Y-\varepsilon)v = 0$ была тривиальна.

Необходимость. По условию в некотором базисе $\{v_j\}_1^n$ пространства N группа G изоморфна некоторой подгруппе группы $T_c(n;K_0)$ матриц вида

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4.2.5)$$

то есть $\forall\sigma\in G$ $\sigma(v_1)=v_1+c_1v_2+\dots+c_{n-1}v_n$, $\sigma(v_j)=v_j$, $j=\overline{2,n}$. Найдем решение $Y=\sum_{i=0}^{n-1} y_i\delta^i$ уравнения (4.1.1), отвечающее матрице A_c, в которой хотя бы одно $c_i\neq 0$, и покажем, что оператор Y удовлетворяет условиям 1) — 3). Как и в теореме 4.2.3 $\forall\sigma\in G$ находим $\sigma(\Delta_j)=\Delta_j$, $\sigma(\Delta)=\Delta$. Поэтому $y_i=\Delta_i/\Delta\in K$ для $j=\overline{0,n-1}$. Коэффициент $y_{n-1}\neq 0$ так как в противном случае элементы v_i, $j=\overline{2,n}$ были бы линейно зависимы над K_0. По построению единица является n- кратным собственным числом оператора Y. Из вида матрицы A_c следует факторизация $D_n=(f\delta+g\varepsilon)(Y-\varepsilon)$. Покажем, что решения системы уравнений $fy'+gy=0$, $(Y-\varepsilon)v=y$ удовлетворяют условию 2) теоремы.

Допустим, что $y\overline{\in}K$. Значит, найдется такое $\sigma\in G$, что $\sigma(y)\neq y$. Так как $v\in N$, то $v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$, что дает $(Y-\varepsilon)(a_1v_1)=y$. Из того что $\sigma(v)\in N$, следует равенство $\sigma(v)=a_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n$. Поскольку $(Y-\varepsilon)(\sigma v)=\sigma(y)$, $(Y-\varepsilon)(a_1v_1)=\sigma(y)$, то, сравнивая последнее и предыдущее соотношения, приходим к противоречию $\sigma(y)=y$. Если вместе с y полю K принадлежит и v, очевидно группа G тривиальна. Пусть $\tilde{N}$ — множество решений уравнения $(Y-\varepsilon)z=y$. Так как $\tilde{N}\subset N$ и любой дифференциальный автоморфизм расширения $K<\tilde{N}>$, продолженный до дифференциального автоморфизма расширения $K\subset K<N>$, должен иметь в базисе $\{v_j\}_1^n$ матрицу (4.2.5), то группа Галуа уравнения $(Y-\varepsilon)z=0$ тривиальна.

Достаточность. Предположим, что уравнение (4.1.1) имеет решение Y, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть N_1 — $n-1$- мерное пространство поучаем $\sigma(v_j)=v_j$, $j=\overline{2,n}$, $\sigma(v_1)=v_1+b_1v_2+\cdots+b_{n-1}v_n$. ■

Теорема 4.2.6. Для того чтобы группа G была тривиальна, необходимо и достаточно, чтобы:

1) существовало нетривиальное регулярное решение Y уравнения (4.1.1) с коэффициентами в поле K и n- кратным собственным числом равным единице такое, что $D=(f\delta+g\varepsilon)(Y-\varepsilon)$;

2) решения системы уравнений $fy'+gy=0$, $(Y-\varepsilon)v=y$ принадлежало полю K;

3) группа Галуа уравнения $(Y-\varepsilon)v=0$ была тривиальна.

Следствие теоремы 4.2.5. ■

Обозначим через $\boldsymbol{G}_{p_i}$ группу корней степени $\boldsymbol{p}_i$ из единицы.

Теорема 4.2.7. Для того чтобы в некотором базисе пространства $\boldsymbol{N}$ группа $\boldsymbol{G}$ была изоморфна прямому произведению $\boldsymbol{G}_{p_1}\times\boldsymbol{G}_{p_2}\times\cdots\times\boldsymbol{G}_{p_n}$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) существовало нетривиальное регулярное решение $\boldsymbol{Y}$ уравнения (4.1.1), с коэффициентами в поле $\boldsymbol{K}$ и попарно различными собственными числами;

2) группы Галуа уравнений $\boldsymbol{Y}^{j}(\boldsymbol{y})=0$ были изоморфны $\boldsymbol{G}_{p_i}$, где $\boldsymbol{Y}^{j}=\text{ПНОД}(\boldsymbol{D}_n,\boldsymbol{Y}-\lambda_j\boldsymbol{\varepsilon})$.

Группа $\boldsymbol{G}_{p_1}\times\boldsymbol{G}_{p_2}\times\cdots\times\boldsymbol{G}_{p_n}$ является подгруппой группы $(\boldsymbol{K}_0^*)^{\boldsymbol{n}}$, поэтому справедливость утверждения следует из теоремы 4.2.2. ■

4.3. Примеры вычисления дифференциальной группы Галуа

Применим результаты предыдущих параграфов к определению дифференциальной группы Галуа. Рассмотрим случай оператор второго порядка.

Пусть $\boldsymbol{D}_2=\sum_{i=0}^{2}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{\delta}^{i}$ — оператор, группу Галуа которого нужно определить. Без ограничения общности можно считать $\boldsymbol{a}_2\equiv1$. Дифференциальное поле $\boldsymbol{K}$ порождено коэффициентами $\boldsymbol{a}_i$, поле констант $\boldsymbol{K}_0$, $\boldsymbol{K}_0\subset\boldsymbol{K}$, предполагается алгебраически замкнутым. В данном случае уравнение (4.1.1) имеет вид

$$\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{Y}_1, \tag{4.3.1}$$

где $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{\varepsilon}$. Коэффициенты $\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i$, $\boldsymbol{i}=0,1$ необходимо определить в поле $\boldsymbol{K}$. Из (4.3.1) получаем систему относительно $\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i$:

$$\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}_1,\\ \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_0=2\boldsymbol{y}_1'+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_0,\\ (\boldsymbol{a}_1'+\boldsymbol{a}_0)\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}_1''+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_1'+\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{y}_1+2\boldsymbol{y}_0'+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_0,\\ \boldsymbol{a}_0'\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}_0''+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_0'+\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{y}_0.\end{array}\right\} \tag{4.3.2}$$

Из (4.3.2) последовательно находим $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{x}_0=2\boldsymbol{y}_1'+\boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{y}_0=$

$=\frac{1}{2}a_1y_1-\frac{1}{2}y_1'+c_1$ где c_1 — произвольная постоянная. Подставляя x_1, x_0, y_0 в последнее уравнение системы (4.3.2), получаем

$$y_1'''+4q\,y_1'+2q'\,y_1=0, \tag{4.3.3}$$

где $q=a_0-\frac{1}{2}a_1'-\frac{1}{4}a_1^2$.

Собственные числа оператора Y определяем, составляя правый результант $|R^2|$ операторов D_2, $Y-\lambda\varepsilon$. Находим

$$\begin{gathered}|R^2|=\lambda^2-[y_1'+2y_0-a_1y_1]\lambda+\\+[(y_1'+y_0)y_0-y_0'y_1-a_1y_1y_0-a_0y_1^2]=0\end{gathered}. \tag{4.3.4}$$

Из приведенных выше выкладок ясно, что уравнение (4.3.1) имеет нетривиальное решение с коэффициентами в поле K в том и только в том случае, когда уравнение (4.3.4) разрешимо в поле K. Если это так, то для группы Галуа оператора D_2, в частности, возможны случаи, описанные в теоремах 4.2.2 — 4.2.7.

Пример 4.3.1. Определить тип дифференциальной группы Галуа G уравнения $L_2(y)=(\delta^2+3\delta+2\varepsilon)y=0$.

1) Найдем нетривиальные регулярные решения уравнения $(x_1\delta+x_0\varepsilon)L_2=L_2(y_1\delta+y_0\varepsilon)$.

Составляя и решая систему (4.3.2) найдем $x_0=2y_1'+y_0$, $y_0=$ $=\frac{3}{2}y_1-\frac{1}{2}y_1'+c_1$ где c_1 — произвольная постоянная. Подставляя x_0, y_0 в последнее уравнение системы, получаем $y_1'''-y_1'=0$. Таким образом, $y_{1(1)}=C_1$, $y_{1(2)}=C_2\exp(x)$, $b_{1(3)}=C_3\exp(-x)$. Поскольку искомое решение должно иметь все коэффициенты в поле комплексных чисел, то полагаем $y_1=y_{1(1)}=C_1$. Тогда $y_0=C_4$, где $C_4=\frac{3}{2}C_1-c_1$. Имеем общее решение $Y=y_1\delta+y_0\varepsilon=C_1\delta+C_4\varepsilon$ и можно положить $Y=\delta+c\varepsilon$.

2) Выясним при каких условиях найденное решение будет регулярным.

Вычислив правый результант През$(\boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{Y})$, найдем, что решение будет регулярным при $\boldsymbol{c} \neq 1$ и $\boldsymbol{c} \neq 2$. Полагаем нетривиальное регулярное решение равным $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\delta}$. Из уравнения През$(\boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\lambda\varepsilon}) = 0$, найдем характеристические корни этого решения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. Они различные, поэтому согласно теореме 4.2.2 дифференциальная группа Галуа изоморфна диагональной матричной группе, а уравнение разрешимо через экспоненты интегралов (см., например, [80]). Проверка показывает, что оператор $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{c\varepsilon}$ при $\boldsymbol{c} \neq 1$, $\boldsymbol{c} \neq 2$ действует на элементах базиса пространства решений дифференциального уравнения, так как нужно.

Рассмотрим аналогичную задачу для оператора $\boldsymbol{D}_3$. Среди решений уравнения

$$\boldsymbol{X}_p \boldsymbol{D}_3 = \boldsymbol{D}_3 \boldsymbol{Y}_p \tag{4.3.5}$$

могут быть как операторы первого порядка, так и операторы второго порядка, то есть $0 \leq \boldsymbol{p} \leq 2$. Первый случай приводит к следующей системе:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1, \\
&\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_0 = 3\boldsymbol{y}_1' + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_0, \\
&(\boldsymbol{a}_2' + \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}_0 = 3\boldsymbol{y}_1'' + 2\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_1' + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{y}_0' + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_0, \\
&(\boldsymbol{a}_1' + \boldsymbol{a}_0)\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_0 = \\
&\qquad = \boldsymbol{y}_1''' + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_1'' + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_1' + \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{y}_0'' + 2\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_0' + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_0, \\
&\boldsymbol{a}_0'\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0''' + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_0'' + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_0'' + \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{y}_0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.3.6}$$

Из системы (4.3.6) последовательно находим $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{x}_0 = 3\boldsymbol{y}_1' + \boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_1 / 3 - \boldsymbol{y}_1' + \boldsymbol{c}_1$, где $\boldsymbol{c}_1$ — произвольная постоянная. Для определения $\boldsymbol{y}_1$ имеем систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}_1''' + (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2' - \boldsymbol{a}_2^2 / 3)\boldsymbol{y}_1' + (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2' - \boldsymbol{a}_2^2 / 3)'\boldsymbol{y}_1 / 2 = 0, \\
&\boldsymbol{y}_1^{(4)} + 2\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_1''' / 3(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2' - \boldsymbol{a}_2^2 / 3)\boldsymbol{y}_1'' + (3\boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{a}_2'' - 2\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2' / 3 - \\
&-\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 / 3)\boldsymbol{y}_1' + (\boldsymbol{a}_0' - \boldsymbol{a}_2''' / 3 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2'' / 3 - \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2' / 3)\boldsymbol{y}_1 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.3.7}$$

Обозначим через $\tilde{\boldsymbol{D}}_3$, $\tilde{\boldsymbol{D}}_4$ операторы правых частей системы (4.3.7) и пусть $|\boldsymbol{R}^2\|$ их правый результант. Ранг правого результанта $|\boldsymbol{R}^2\|$ может принимает только значения 4, 5, 6, 7. Поэтому порядок правого наибольшего общего делителя операторов $\tilde{D}_3$, $\tilde{D}_4$ может принимать значения 3, 2, 1, 0 соответственно. В последнем из указанных случаев уравнение (4.3.5) не имеет в качестве решений операторов первого порядка с коэффициентами в поле K, во втором случае может быть только одно такое решение, в третьем — два, в последнем — три.

В зависимости от корней уравнения $\text{През}(D_3, Y - \lambda\varepsilon) = 0$ для группы Галуа рассматриваемого оператора возможны случаи, описанные в теоремах 4.2.2 — 4.2.7.

Перейдем к определению решений второго порядка уравнения (4.3.5).

Пусть $X_2 = \sum_{i=0}^{2} x_i \delta^i$, $Y_2 = \sum_{i=0}^{2} y_i \delta^i$, $x_2, y_2 \neq 0$. Для определения коэффициентов x_i, y_i получаем следующую систему

$$\left.\begin{aligned}
&x_2 = y_2,\\
&a_2 x_2 + x_1 = 3y_2' + a_2 y_2 + y_1,\\
&(2a_2' + a_1)x_2 + a_2 x_1 + x_0 = 3y_2'' + 2a_2 y_2' + a_1 y_2 + a_2 y_1 + 3y_1',\\
&(a_2'' + 2a_1' + a_0)x_2 + (a_2' + 2a_1)x_1 + a_2 x_0 = y_2''' + a_2 y_2'' + a_1 y_2' +\\
&+a_0 y_2 + 3y_1'' + 2a_2 y_1' + a_1 y_1 + 3y_0' + a_2 y_0,\\
&(a_1'' + 2a_0')x_2 + (a_1' + a_0)x_1 + a_1 x_0 = y_1''' + a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 +\\
&\qquad + 3y_0'' + 2a_2 y_0' + a_1 y_0,\\
&a_0'' x_2 + a_0' x_1 + a_0 x_0 = y_0''' + a_2 y_0'' + a_1 y_0' + a_0 y_0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.8)$$

Из первых трех уравнений последовательно находим $x_2 = y_2$, $x_1 = 3y_2' + y_1$, $x_0 = 3y_2'' - a_2 y_2' - 2a_2' y_2 + y_0$. Из четвертого получаем $y_0 = \frac{1}{3}(-y_2'' + 2a_2 y_2' + (2a_1 - a_2' - a_2^2) y_2 - 3y_1' + y_0) + c_1$, где c_1 — произвольная постоянная. Наконец, оставшиеся два уравнения дают систему для определения коэффициентов y_1 и y_2

$$\left.\begin{aligned}
&2y_1''' + A_2 y_1'' + A_1 y_1' + A_0 y_1 + B_3 y_2''' + B_2 y_2'' + B_1 y_2' + B_0 y_2 = 0,\\
&y_1^{(4)} + D_3 y_1''' + D_2 y_1'' + D_1 y_1' + D_0 y_1 - \frac{1}{3} y_2^{(5)} + \mathrm{E}_4 y_2^{(4)} +\\
&\qquad + \mathrm{E}_3 y_2''' + \mathrm{E}_2 y_2'' + \mathrm{E}_1 y_2' + \mathrm{E}_0 y_2 = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.9)$$

где коэффициенты A_i, B_j, D_k, E_l рационально выражаются через a_i и производные от них.

Несложными преобразованиями из системы (4.3.9) получаем

$$y_1 = \sum_{i=0}^{7} F_i\, y_2^{(i)},\ \sum_{i=0}^{7} G_i\, y_2^{(i)}, \tag{4.3.10}$$

где коэффициенты F_i, G_j — рациональные функции от a_i и производных от них.

Из (4.3.10) следует, что среди решений уравнения (4.3.5) встречаются операторы второго порядка в том и только в том случае, когда уравнение (4.3.5) имеет решение в поле K. Если это так, то могут представиться возможности, описанные в теоремах 4.2.2 — 4.2.7.

Пример 4.3.2. Определить тип дифференциальной группы Галуа G уравнения $L_3(y) = (\delta^3 + x^{-2}\delta - x^{-3}\varepsilon)y = 0$.

Найдем решение первого порядка уравнения

$$X\, L_3 = L_3\, Y \tag{4.3.11}$$

в виде $X = X_1 = x_1\delta + x_0 e$, $Y = Y_1 = y_1\delta + y_0 e$.

Так как $a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = x^{-2}$, $a_3 = -x^{-3}$, то система (4.3.6) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ y_0 &= 3y_1' + y_0, \\ x^{-2}x_1 &= 3y_1'' + x^{-2}y_1 + 3y_0', \\ -3x^{-3}x_1 + x^{-2}x_0 &= y_1''' + x^{-2}y_1' - x^{-3}y_1 + 3y_0'' + x^{-2}y_0, \\ 3x^{-4}x_1 - x^{-3}x_0 &= y_0''' + x^{-2}y_0'' - x^{-3}y_0. \end{aligned}\right\}$$

Находим $y_1 = c_2 x$, $y_0 = -c_2 + c_1$, $x_1 = c_2 x$, $x_0 = 2c_2 + c_1$, где c_1, c_2 постоянные интегрирования. Оператор $Y_1 = c_2 x\delta + (c_1 - c_2)\varepsilon$, его можно взять в виде $Y_1 = x\delta - c\varepsilon$, где обозначено $c = (c_2 - c_1)/c_2$. Собственные числа оператора Y_1 найдем из уравнении През$(L_3, Y_1) = (1-c)^2 = 0$. Видим, что оператор имеет единственное трехкратное собственное число $c = 1$ и при $c \neq 1$ является регулярным. Уравнение (4.3.11) по теореме 4.2.1 имеет в числе решений оператор второго порядка $\boldsymbol{Y}_2 = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\varepsilon})^2 - \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{\delta}^2 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}$, который является регулярным решением поскольку Презр$(\boldsymbol{L}_3, \boldsymbol{Y}_2) \neq 0$. Трехкратное собственное число $\boldsymbol{\lambda} = -1$ оператора $\boldsymbol{Y}_2$ определяется из уравнения През$(\boldsymbol{L}_3, \boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{\lambda}) = 0$. Находим ПНОД$(\boldsymbol{L}_3, \boldsymbol{Y}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{\delta}^2 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Устанавливаем, что дифференциальная группа Галуа треугольная. Следовательно, по теореме 4.2.3 группа уравнения $\boldsymbol{L}_3(\boldsymbol{y}) = 0$ треугольная.

Пример 4.3.3. Определить тип дифференциальной группы Галуа $\boldsymbol{G}$ уравнения $\tilde{\boldsymbol{L}}_2(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{\delta}^2 - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{y} = 0$.

Запишем $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{\delta}^2 - 2\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{x}^{-2}\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{y} = 0$ и найдем решение уравнения $(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{\varepsilon})$. Так как $\boldsymbol{q} = 0$, то уравнение (5.3.3) имеет вид $\boldsymbol{y}_1''' = 0$. Его общее решение $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0$ и $\boldsymbol{y}_0 = -2\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0\boldsymbol{x}^{-1} - 3\boldsymbol{c}_1/2 + \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ произвольная постоянная. Поэтому $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0)\boldsymbol{\delta} +$ $+(-2\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0\boldsymbol{x}^{-1} - 3\boldsymbol{c}_1/2 + \boldsymbol{c})\boldsymbol{\varepsilon}$. Обозначим $\tilde{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0)\boldsymbol{\delta} +$ $+(-2\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0\boldsymbol{x}^{-1} - 3\boldsymbol{c}_1/2)\boldsymbol{\varepsilon}$ $+(-2\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0\boldsymbol{x}^{-1} - 3\boldsymbol{c}_1/2)\boldsymbol{\varepsilon}$. Собственные числа этого оператора найдем из уравнения През$(\boldsymbol{L}_2, \tilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}) =$

$$= \left| \begin{matrix} 1 & -2\boldsymbol{x}^{-1} & 2\boldsymbol{x}^{-2} \\ \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0 & -\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{x}^{-1} - \boldsymbol{c}_1/2 - \boldsymbol{\lambda} & -2\boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{c}_0\boldsymbol{x}^{-2} \\ 0 & \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0 & -2\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0\boldsymbol{x}^{-1} - 3\boldsymbol{c}_1/2 - \boldsymbol{\lambda} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Вычисляя определитель, получим, $\boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{c}_1^2/4 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_0 = 0$, то есть $\boldsymbol{\lambda}_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{c}_1^2 - 4\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_0}$. Тогда по построению операторы $\boldsymbol{Y}_{\pm} =$ $= (\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0)\boldsymbol{\delta} + (-2\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0\boldsymbol{x}^{-1} - 3\boldsymbol{c}_1/2 \pm \sqrt{\boldsymbol{c}_1^2 - 4\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_0}\,)\boldsymbol{\varepsilon}$ имеют нетривиальные нули совместно с исследуемым. Положив для упрощения вычислений $\boldsymbol{c}_0 = 0$, убедимся, что эти решения принадлежат полю рациональных функций и, следовательно, по теореме 4.2.6 группа уравнения тривиальная.

4.4. Построение классов дифференциальных уравнений с заданной дифференциальной группой Галуа

Задача, которую мы здесь рассматриваем, состоит в следующем: по данной алгебраической матричной группе $\boldsymbol{G}$ и алгебраически замкнутому полю констант $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}$ — поле комплексных чисел, построить класс всех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений $\boldsymbol{n}$-го порядка $\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{n})}+\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{n}-1)}+\cdots+\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{y}=0$ таких, что группа $\boldsymbol{G}$ является дифференциальной группой Галуа для уравнений этого класса.

Сформулированная выше задача является модификацией известной обратной задачи теории Галуа дифференциальных полей, последняя в наиболее общей формулировке рассматривалась в [83]. В классической постановке обратная задача рассмотрена в [108]. В случае $\boldsymbol{n}=2$ классификация дифференциальных расширений поля формальных степенных рядов получена в [16].

Укажем также на работы [80], [101], в которых дано решение прямой задачи для отдельных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Мы ограничимся рассмотрением сформулированной выше задачи для случая $\boldsymbol{n}=2$ и следующих групп: $\boldsymbol{E}$ — тривиальная, $\boldsymbol{C}^*$, $\boldsymbol{D}$ — диагональная, $\boldsymbol{ST}$ — специальная треугольная, $\boldsymbol{T}$ — треугольная, $\boldsymbol{SO}$ — специальная ортогональная (не алгебраическая) [60].

Пусть

$$\boldsymbol{y}''+\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{q}\boldsymbol{y}=0 \qquad (4.4.1)$$

заданное уравнение, где $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ — дифференцируемые функции. Дифференциальное поле $\boldsymbol{K}_0$, порожденное этими функциями, называется основным, поле $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$, полученное из основного присоединением фундаментальной системы решений $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ уравнения — расширением Пикара — Вессио. Будем считать, что поле комплексных чисел $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{K}_0$. Вместе с дифференциальным уравнением (4.4.1) рассмотрим операторное уравнение

$$\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{Y}_1, \qquad (4.4.2)$$

где $L_2 = \delta^2 + p\delta + q\varepsilon$, $Y_1 = y_1\delta + y_0\varepsilon$, $X_1 = x_1\delta + x_0\varepsilon$ — операторы, подлежащие определению, $\delta = \dfrac{d}{dx}$.

Теорема 4.4.1. Если оператор $Y_1 = y_1\delta + y_0\varepsilon$ является решением уравнения (4.4.2), то функция y_1 является решением дифференциального уравнения

$$y_1''' + 4\left(q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2\right)y_1' + 2\left(q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2\right)' y_1 = 0. \qquad (4.4.3)$$

Доказательство. Перемножив операторы в (4.4.2), и, сравнив коэффициенты при одинаковых степенях δ, получим систему

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = y_1, \\ &px_1 + x_0 = 2y_1' + py_1, \\ &(p' + q)x_1 + px_0 = y_1'' + py_1' + qy_1 + 2y_0' + py_0, \\ &q'x_1 + qx_0 = y_0'' + py_0' + qy_0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.4)$$

Отсюда легко находим $x_1 = y_1$, $x_0 = 2y_1' + y_0$, $y_0 = \dfrac{1}{2}\left(py_1 - y_1' + c_1\right)$, где c_1 — постоянная интегрирования. Подставляя x_1, x_0, y_0 в последнее уравнение системы (4.4.4), получим уравнение (4.4.3). ■

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Действительно, известно [23], что базис пространства решений уравнения (4.4.3) составляют функции $y_{11} = v_1^2$, $y_{12} = v_1 v_2$, $y_{13} = v_2^2$, где v_1, v_2 — фундаментальная система решений уравнения

$$v'' + \left(q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2\right)v = 0. \qquad (4.4.5)$$

Пусть $\eta = a_1u_1 + a_2u_2$ — общее решение уравнения (4.4.1) и $\xi = c_1v_1^2 + c_2v_1v_2 + c_3v_2^2$ — общее решение уравнения (4.4.3). Построим оператор $Y_1 = \xi\delta + \left(\dfrac{1}{2}(p\xi - \xi' + c_0)\right)\varepsilon$. Вычислив, $Y_1(\eta) = \xi\eta' +$

$+\left(\frac{1}{2}(p\xi-\xi'+c_0)\right)\eta=\frac{1}{2}\eta+c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+c_3\varphi_3$, где φ_1, φ_2, φ_3 — нелинейные функции от u_1, u_2, видим, что, элемент $Y_1\,(\eta)$ для некоторых η не принадлежит пространству N, то есть не является гомоморфизмом пространства.

Построим оператор $Y_1\ : N\to N$ иначе. Пусть σ — линейное преобразование пространства N с невырожденной матрицей $A=(a_{ij})$ в базисе u_1, u_2. Коэффициенты дифференциального оператора $Y_1=y_1\delta+y_0\varepsilon$ удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} y_0u_1+y_1u_1'=a_{11}u_1+a_{12}u_2,\\ y_0u_2+y_1u_2'=a_{21}u_1+a_{22}u_2.\end{aligned}\right\} \tag{4.4.6}$$

Из (4.4.6) находим

$$y_1=((a_{22}-a_{11})u_1u_2-a_{21}u_1^2-a_{12}u_2^2)W^{-1}, \tag{4.4.7}$$

$$y_0=(a_{11}u_1u_2'-a_{22}u_1'u_2-a_{21}u_1\,u_1'+a_{12}u_2u_2'\ )W^{-1}, \tag{4.4.8}$$

где $W=u_1u_2'-u_1'u_2$.

Перепишем систему (4.4.6) так

$$\left.\begin{aligned} y_1u_1'+(y_0-a_{11})u_1=a_{12}u_2,\\ y_1u_2'+(y_0-a_{22})u_2=a_{21}u_1.\end{aligned}\right\} \tag{4.4.9}$$

Обозначив $\tilde{Y}_1\ =y_1\delta+y_0\varepsilon$, $Y_1^1=\tilde{Y}_1-a_{11}\varepsilon$, $Y_1^2=\tilde{Y}_1-a_{22}\varepsilon$, получим $Y_1^1(u_1)=a_{12}u_2$, $Y_1^2(u_2)=a_{21}u_1$. Отсюда $(Y_1^1Y_1^2-a_{12}a_{21}\varepsilon)y=(Y_1^2Y_1^1-a_{12}a_{21}\varepsilon)y=0$ и функции u_1, u_2 являются решениями последнего уравнения.

При $a_{21}=0$ оператор $\tilde{Y}_1\ =y_1\delta+y_0\varepsilon$ является автоморфизмом пространства N с верхней треугольной матрицей. Операторы Y_1^1, Y_1^2 коммутируют и для любого решения уравнения (4.4.1)

$$Y_1^1Y_1^2(y)=Y_1^2Y_1^1(y)=0. \tag{4.4.10}$$

Теорема 4.4.2. Для уравнения (4.4.1) следующие утверждения эквивалентны:

1) дифференциальная группа Галуа уравнения изоморфна подгруппе

группы $\boldsymbol{T}$;

2) уравнение факторизуемо над $\boldsymbol{K}_0$: $\boldsymbol{y''+py'+qy=(\delta-(\alpha-\beta)\varepsilon)}\times$ $\times\boldsymbol{(\delta-\beta\varepsilon)y}=0$;

3) $\exists\boldsymbol{\alpha,\beta}\in\boldsymbol{K}_0$: $\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{q}=-\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\alpha\beta}$;

4) уравнение Риккати $\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{pu}+\boldsymbol{q}=0$ имеет нетривиальное решение в основном поле $\boldsymbol{K}_0$.

Доказательство. 1) → 2). Если в базисе $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ пространства $\boldsymbol{N}$ группа Галуа уравнения изоморфна подгруппе группы $\boldsymbol{T}$, то каждый дифференциальный автоморфизм $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{G}$ действует на элементах базиса по формулам

$$\boldsymbol{\sigma(u_1)=a_{11}u_1+a_{12}u_2},\ \boldsymbol{\sigma(u_2)=a_{22}u_2}, \tag{4.4.11}$$

где $\boldsymbol{a}_{11}$, $\boldsymbol{a}_{12}$, $\boldsymbol{a}_{22}$ — некоторые числа.

Согласно (4.4.10) дифференциальный оператор второго порядка, имеющий нулями функции $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, имеет вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{W}^{-1}\Big(((\boldsymbol{a}_{22}-\boldsymbol{a}_{11})\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{u}_2^2)\boldsymbol{\delta}+((\boldsymbol{a}_{11}-\boldsymbol{a}_{22})\boldsymbol{u}_1'\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2')\boldsymbol{\varepsilon}\Big)\times\\ \times\boldsymbol{W}^{-1}\Big(((\boldsymbol{a}_{22}-\boldsymbol{a}_{11})\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{u}_2^2)\boldsymbol{\delta}+((\boldsymbol{a}_{11}-\boldsymbol{a}_{22})\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2'+\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2')\boldsymbol{\varepsilon}\Big).\end{gathered} \tag{4.4.12}$$

Запишем этот оператор через коэффициенты $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_0$:

$$(\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{\delta}+(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{a}_{11})\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{\delta}+(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{a}_{22})\boldsymbol{\varepsilon})=\boldsymbol{y}_1^2\left(\boldsymbol{\delta}+\left(\frac{\boldsymbol{y}_1'}{\boldsymbol{y}_1}+\frac{\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{a}_{11}}{\boldsymbol{y}_1}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left(\boldsymbol{\delta}+\frac{\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{a}_{22}}{\boldsymbol{y}_1}\boldsymbol{\varepsilon}\right).$$

Упрощая, получим

$$\frac{\boldsymbol{y}_1'}{\boldsymbol{y}_1}+\frac{\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{a}_{11}}{\boldsymbol{y}_1}=\frac{\boldsymbol{u}_2'}{\boldsymbol{u}_2}-\frac{\boldsymbol{W}'}{\boldsymbol{W}},\ \frac{\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{a}_{11}}{\boldsymbol{y}_1}=-\frac{\boldsymbol{u}_2'}{\boldsymbol{u}_2}.$$

Функции $\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\boldsymbol{W}'}{\boldsymbol{W}}$, $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\boldsymbol{u}_2'}{\boldsymbol{u}_2}$ остаются неподвижными относительно любого дифференциального автоморфизма с верхней треугольной матрицей. Поэтому $\boldsymbol{L}_2=\big(\boldsymbol{\delta}-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\varepsilon}\big)\big(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\beta\varepsilon}\big)$ над $\boldsymbol{K}_0$.

2) → 3). Перемножив операторы, получим $\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{\delta}^2-\boldsymbol{\alpha\delta}+$ $+(-\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{\varepsilon}$, то есть $\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{q}=-\boldsymbol{\beta}'+\boldsymbol{\alpha\beta}$.

3) → 4). Поскольку $-\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{p}$, то $\boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{\beta}^2 + \boldsymbol{p}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{q} = 0$.

4) → 1). Предположим, что в поле $\boldsymbol{K}_0$ существует функция $\boldsymbol{\beta}$ удовлетворяющая уравнению Риккати $\boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{\beta}^2 + \boldsymbol{p}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{q} = 0$, где $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{K}_0$. Замена $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\boldsymbol{y}'}{\boldsymbol{y}}$ приводит к уравнению $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{q}\boldsymbol{y} = 0$, интегралом которого является функция $\boldsymbol{u}_2 = \mathbf{exp}\left(\int \boldsymbol{\beta}\, \boldsymbol{dx}\right)$, удовлетворяющая уравнению первого порядка $\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{y} = 0$. Поэтому имеет место факторизация $\boldsymbol{L}_2 = (\boldsymbol{\delta} - (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\varepsilon})$. Вторым интегралом уравнения (5.4.1) линено независимым с первым будет $\boldsymbol{u}_1 = \mathbf{exp}\left(\int \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{dx}\right) \int \mathbf{exp}\left(\int (\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{dx}\right)\boldsymbol{dx}$. Пусть $\boldsymbol{\sigma}$ дифференциальный автоморфизм уравнения и $((\boldsymbol{a}_{ij}))$ его матрица в базисе $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, причем $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{u}_2$.

Поскольку $\boldsymbol{u}_2$ является решением уравнения первого порядка $\boldsymbol{u}_2' - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{u}_2 = 0$ с коэффициентами в поле $\boldsymbol{K}_0$, то должно быть $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{u}_2$. Поэтому $\boldsymbol{a}_{21} = 0$. ■

В качестве следствия из теоремы 4.4.2 получаем следующую теорему.

Теорема 4.4.3. Группа Галуа уравнения (4.4.1) изоморфна диагональной подгруппе группы $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{diag}(\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{22})$ ($\boldsymbol{a}_{11} \neq \boldsymbol{a}_{22}$) в том и только в том случае, если в поле $\boldsymbol{K}_0$ существуют такие функции $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, что

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\alpha}} - 2\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}},\ \boldsymbol{q} = -\frac{\boldsymbol{\beta}'}{\boldsymbol{\alpha}} + \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}^2}. \tag{4.4.13}$$

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ базис пространства решений уравнения (4.4.1) и группа Галуа этого уравнения в данном базисе изоморфна некоторой подгруппе группы $\boldsymbol{D}$.

Согласно (4.4.10) имеем

$$\boldsymbol{Y}_1^1\boldsymbol{Y}_1^2(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Y}_1^2\boldsymbol{Y}_1^1(\boldsymbol{y}) = 0, \tag{4.4.14}$$

где

$$\boldsymbol{Y}_1^1 = (\boldsymbol{a}_{22} - \boldsymbol{a}_{11})\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{\delta} - (\boldsymbol{a}_{22} - \boldsymbol{a}_{11})\boldsymbol{u}_1'\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon},$$

$$Y_1^2 = (a_{22} - a_{11})u_1u_2W^{-1}\delta - (a_{22} - a_{11})u_1u_2'W^{-1}\varepsilon. \qquad (4.4.15)$$

Уравнение (4.4.14) имеет те же решения, что и уравнение (4.4.1).

Обозначим $\alpha = u_1u_2W^{-1}$, $\beta = u_1'u_2W^{-1}$, тогда $u_1u_2'W^{-1} = 1 + \beta$. Функции α и β, очевидно, неподвижны относительно автоморфизмов диагональной группы. Уравнение $y'' + \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - 2\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)y' + \left(-\frac{\beta'}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}\right)y = 0$ равносильно уравнению (4.4.1), поэтому условия (4.4.13) выполняются.

Обратно, предположим, что условия (4.4.13) выполняются. В этом случае уравнение (5.4.1) имеет вид

$$y'' + \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - 2\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)y' + \left(-\frac{\beta'}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}\right)y = 0. \qquad (4.4.16)$$

Перепишем его в виде $(\alpha^2\delta^2 + (\alpha\alpha' - 2\alpha\beta - \alpha)\delta + (-\alpha\beta' + \beta^2 + \beta)\varepsilon)y = 0$. Разделив оператор $\alpha^2\delta^2 + (\alpha\alpha' - 2\alpha\beta - \alpha)\delta + (-\alpha\beta' + \beta^2 + \beta)\varepsilon$ справа на оператор $\alpha\delta + g\varepsilon$, где g — пока неизвестная функция, получим остаток $(-\alpha\beta' + \beta^2 + \beta - \alpha g' + 2\beta g + g + g^2)\varepsilon$, который тождественно равен нулю при $g = -\beta$. Имеет место коммутативная факторизация $\alpha^2\delta^2 + {}$ $+(\alpha\alpha' - 2\alpha\beta - \alpha)\delta + (-\alpha\beta' + \beta^2 + \beta)\varepsilon = (\alpha\delta - (\beta + 1)\varepsilon)(\alpha\delta - \beta\varepsilon)$. Следовательно, уравнение (4.4.20) равносильно системе независимых дифференциальных уравнений $u_1' - \frac{\beta + 1}{\alpha}u_1 = 0$, $u_2' - \frac{\beta}{\alpha}u_2 = 0$, решения которых имеют вид

$$u_1 = \exp\left(\int \frac{\beta + 1}{\alpha}dx\right),\ u_2 = \exp\left(\int \frac{\beta}{\alpha}dx\right). \qquad (4.4.17)$$

Каждый дифференциальный автоморфизм σ уравнения (4.4.20) действует на элементы u_1 и u_2 по формулам $\sigma(u_1) = \lambda_1(\sigma)u_1$, $\sigma(u_2) = \lambda_2(\sigma)u_2$, где $\lambda_1(\sigma)$ и $\lambda_2(\sigma)$ константы. ■

Найдем условия, при выполнении которых, группа Галуа уравнения (4.4.1) изоморфна тривиальной группе E.

Теорема 4.4.4. Группа Галуа уравнения (4.4.1) тривиальна в том и только в том случае, когда в поле $\boldsymbol{K}_0$ существуют такие функции α, β, что

$$p = -\frac{\beta''}{\beta'} - 2\frac{\alpha'}{\alpha},\ q = 2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\beta''}{\beta'} - \frac{\alpha''}{\alpha},\ \beta \neq const. \qquad (4.4.18)$$

Доказательство. Предположим, что группа уравнения (4.4.1) тривиальна. Тогда, согласно теореме 4.4.3, в поле $\boldsymbol{K}_0$ существуют функции α, β, такие, что выполняются соотношения (4.4.13). В качестве базиса пространства решений уравнения (4.4.1) возьмем функции (4.4.17). В силу тривиальности группы $R = \exp\left(\int \frac{\beta}{\alpha} dx\right) \in \boldsymbol{K}_0$ и $S = \exp\left(\int \frac{dx}{\alpha}\right) \in \boldsymbol{K}_0$. Отсюда находим $\alpha = \frac{S}{S'}$, $\beta = \frac{R'}{R}\frac{S}{S'}$. Подставляя эти выражения для α и β в (4.4.13), получим (4.4.18), в которых обозначено: $S = \beta$, $R = \alpha$.

Обратно, предположим, что в поле $\boldsymbol{K}_0$ существуют функции α и β такие, что выполняются условия (4.4.18). Тогда уравнение (4.4.1) принимает вид $y'' - \left(\frac{\beta''}{\beta'} + 2\frac{\alpha'}{\alpha}\right)y' + \left(2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha'}{\alpha}\cdot\frac{\beta''}{\beta'} - \frac{\alpha''}{\alpha}\right)y = 0$. Переписав это уравнение в виде $(\alpha\alpha' y - \alpha^2 y')\beta'' + (\alpha^2 y'' - 2\alpha\alpha' y' + 2\alpha'^2 y - \alpha\alpha'' y)\beta' = 0$ находим одно очевидное решение $u_1 = \alpha$. Второе получим, факторизовав оператор $\alpha^2\delta^2 + (\alpha\alpha' - 2\alpha\beta - \alpha)\delta + (-\alpha\beta' + \beta^2 + \beta)\varepsilon$, разделив его справа на оператор $\alpha\delta - \alpha'\varepsilon$: $L_2^1 = (\alpha\beta'\delta - (\alpha\beta'' + 2\alpha'\beta')\varepsilon)(\alpha\delta - \alpha'\varepsilon)$. Решив факторизованное уравнение $L_2^1(y) = 0$, найдем второе $u_2 = \alpha\beta$, $\beta \neq const$, линейно независимое с первым. ■

Условия, при выполнении которых, группа Галуа уравнения (4.4.1) изоморфна подгруппе группы C^* даются следующим утверждением.

Теорема 4.4.5. Группа Галуа уравнения (4.4.1) изоморфна некоторой подгруппе группы C^* в том и только в том случае, если в поле $\boldsymbol{K}_0$ найдутся такие функции α и β, что

$$p = -\frac{\alpha''}{\alpha'} - 2\beta\frac{\alpha'}{\alpha},\; q = -\beta'\frac{\alpha'}{\alpha} + (\beta^2+\beta)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2,\; \beta \neq \frac{1}{k}\frac{Q'}{Q}\frac{\alpha}{\alpha'}, \qquad (4.4.19)$$

где $\alpha \neq const$, $Q \in K_0$, k — рациональное число.

Доказательство. Если группа уравнения (4.4.1) изоморфна некоторой подгруппе группы $C^* \subset D$, то в поле K_0 существуют функции α и β, удовлетворяющие соотношениям (4.4.13). В качестве базиса пространства решений уравнения (4.4.1) снова возьмем функции (4.4.17).

Так как по предположению матрицы группы имеют вид $diag(\lambda,\lambda)$ ($\lambda \neq 0$), то $\sigma(u_2) = \sigma\left(\exp\left(\int\frac{dx}{\alpha}\right)\right) = \lambda\exp\left(\int\frac{dx}{\alpha}\right)$, $\sigma(u_1) = \sigma\left(\exp\left(\int\frac{\beta}{\alpha}dx\right)\right)\times$ $\times\sigma\left(\exp\left(\int\frac{dx}{\alpha}\right)\right) = \lambda\exp\left(\int\frac{\beta}{\alpha}dx\right)\sigma\left(\exp\left(\int\frac{dx}{\alpha}\right)\right)$. Отсюда следует, что $S = \exp\left(\int\frac{dx}{\alpha}\right) \in K_0$, а $\exp\left(\int\frac{\beta}{\alpha}dx\right) \notin K_0$ и не является алгебраической функцией. Поэтому $\alpha = \frac{S}{S'}$, $\beta \neq \frac{1}{k}\frac{Q'}{Q}\frac{\alpha}{\alpha'}$, где $Q \in K_0$, k — рациональное число. Подставляя выражение для α в (4.4.13), и, обозначая после преобразований S через α, получим (4.4.19).

Обратно, пусть для некоторых функций α и β из поля K_0 выполняются условия (4.4.19), тогда уравнение имеет вид $L_2(y) =$ $= y'' + \left(-\frac{\alpha''}{\alpha'} - 2\beta\frac{\alpha'}{\alpha}\right)y' + \left(-\beta'\frac{\alpha'}{\alpha} + (\beta^2+\beta)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right)y = 0$. Перепишем его в виде $L_2(y) = \alpha^2\alpha' y'' + (-\alpha^2\alpha'' - 2\alpha\alpha'^2\beta)y' + (-\alpha\alpha'^2\beta' + (\beta^2+\beta)\alpha'^3)y = 0$. Факторизовав оператор $L_2 = (\alpha\alpha'\delta - (\alpha\alpha'' + \alpha'^2\beta + \alpha'^2)\varepsilon)(\alpha\delta - \alpha'\beta\varepsilon)$, легко найдем линейно независимые решения: $u_1 = \exp\left(\int\frac{\beta\alpha'}{\alpha}dx\right)$, $u_2 = \alpha\exp\left(\int\frac{\beta\alpha'}{\alpha}dx\right)$. Так как $\alpha \in K_0$, а $\beta \neq \frac{1}{k}\frac{Q'}{Q}\frac{\alpha}{\alpha'}$, то элемент $\exp\left(\int\frac{\beta\alpha'}{\alpha}dx\right)$ трансцендентен над полем K_0. ■

Теорема 4.4.6. Группа Галуа уравнения (4.4.1) изоморфна некоторой подгруппе группы $\boldsymbol{ST}$ в том и только в том случае, если в поле $\boldsymbol{K}_0$ существуют такие функции α и β, что

$$p = -\frac{\beta'}{\beta}\,,\ q = -\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}\,. \tag{4.4.20}$$

Доказательство. Если в базисе $\{u_1, u_2\}$ пространства решений уравнения (4.4.1) группа Галуа изоморфна некоторой подгруппе группы $\boldsymbol{ST}$, то $\tau(u_1) = u_1 + a_{12}u_2\ (a_{12} \neq 0),\ \ \tau(u_2) = u_2\ \ \forall \tau \in \boldsymbol{ST}$. Согласно (4.4.10)

$$Y_1^1 Y_1^2(y) = Y_1^2 Y_1^1(y) = 0\,, \tag{4.4.21}$$

где положено

$$Y_1^1 = Y_1^2 = W^{-1}(u_2^2\delta - u_2 u_2'\varepsilon)\,. \tag{4.4.22}$$

Уравнение (4.4.21) имеет те же решения, что и уравнение (4.4.1). Обозначим $\alpha = u_2$ и $\beta = W$, эти функции по предположению принадлежат $\boldsymbol{K}_0$. Тогда из уравнения

$$\tilde{L}_2(y) = \left(\frac{\alpha^2}{\beta}\delta - \frac{\alpha\alpha'}{\beta}\varepsilon\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\delta - \frac{\alpha\alpha'}{\beta}\varepsilon\right)y = 0\,, \tag{4.4.23}$$

перемножив опeратры, и умножив слева результат на функцию $\alpha^{-4}\beta$, получим соотношения (4.4.20).

Обратно, предположим, что в поле $\boldsymbol{K}_0$ существуют такие функции α, β, что условия (4.4.20) выполняются. В этом случае уравнение (4.4.1) имеет вид

$$y'' + \left(-\frac{\beta'}{\beta}\right)y' + \left(-\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}\right)y = 0\,. \tag{4.4.24}$$

Базис пространства решений можно выбрать так

$$u_1 = \alpha \exp\left(\int \frac{\beta}{\alpha^2}\right),\ u_2 = \alpha\,. \tag{4.4.25}$$

Элемент u_1 является решением уравнения $u_1' - \dfrac{\alpha'}{\alpha}u_1 = \dfrac{\beta}{\alpha}$, но и уравнению $\tau(u_1)' - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\tau(u_1) = \dfrac{\beta}{\alpha}$, для любого дифференциального автоморфизма τ. Вычитая из второго уравнения первое, получим $(\tau(u_1) - u_1)' - \dfrac{\alpha'}{\alpha}(\tau(u_1) - u_1) = 0$. Откуда находим $\tau(u_1) = u_1 + a_{12}\alpha$, а $\alpha = u_2$. Следовательно, каждый автоморфизм $\tau \in G$ в указанном базисе имеет верхнюю треугольную матрицу с единицами на диагонали. ■

Замечание. Если к условиям теоремы присоединить еще одно $\int \dfrac{\beta}{\alpha^2} dx \in K_0$, то группа Галуа уравнения (4.4.1) будет тривиальна. Учитывая, что группа ST не имеет других алгебраических подгрупп, кроме тривиальной, приходим к выводу, что условия (4.4.20) вместе с условием $\int \dfrac{\beta}{\alpha^2} dx \in K_0$ являются необходимыми и достаточными для изоморфизма $G \approx ST$.

В следующей теореме группа Галуа не является алгебраической.

Теорема 4.4.7. Группа Галуа уравнения (4.4.1) изоморфна некоторой подгруппе группы SO в том и только в том случае, если в поле K_0 существуют такие функции α и β, что

$$p = -\frac{\beta'}{\beta},\quad q = -\frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha'}{\beta}\right)' + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2. \tag{4.4.26}$$

Доказательство. Предположим, что группа Галуа уравнения (4.4.1) изоморфна в базисе $\{u_1, u_2\}$ некоторой подгруппе группы SO. Каждый автоморфизм $\tau \in G$ действует на элементы базиса по формулам $\tau(u_1) = \cos\varphi\, u_1 - \sin\varphi\, u_2$, $\tau(u_2) = \sin\varphi\, u_1 + \cos\varphi\, u_2$.

Согласно (4.4.10) имеем

$$Y_1^1 Y_1^2(y) = Y_1^2 Y_{1\,1}^1(y) = 0, \tag{4.4.27}$$

где

$$Y_1^1 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{W}\delta + \left(-\frac{u_1u_1' + u_2u_2'}{W} + i\right)\varepsilon,\quad Y_1^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{W}\delta + \left(-\frac{u_1u_1' + u_2u_2'}{W} - i\right)\varepsilon,$$

$$\boldsymbol{i}^2 = -1. \tag{4.4.28}$$

Уравнение (4.4.27) имеет те же решения, что и уравнение (4.4.1). Обозначив $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{u}_1^2 + \boldsymbol{u}_2^2$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{W}$, убедимся, что функции $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ остаются неподвижными относительно всех автоморфизмов группы $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{SO}$. Перемножив операторы в (4.4.27), и, сравнив коэффициенты полученного уравнения с коэффициентами уравнения (4.4.1), прийдем к соотношениям (4.4.26).

Обратно, предположим, что в поле $\boldsymbol{K}_0$ существуют функции $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ такие, что выполняются соотношения (4.4.26). В этом случае уравнению (5.4.1) принимает вид

$$\boldsymbol{y}'' - \frac{\boldsymbol{\beta}'}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{y}' + \left(-\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\alpha}}\right)' + \frac{1}{4}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^2 \right)\boldsymbol{y} = 0.$$

Преобразуем его умножив на $\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta}^{-2}$

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_2(\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\boldsymbol{\beta}^2}\boldsymbol{\delta}^2 - \frac{\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta}'}{\boldsymbol{\beta}^3}\boldsymbol{\delta} + \left(-\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}''}{\boldsymbol{\beta}^2} + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}'}{\boldsymbol{\beta}^3} + \frac{1}{4}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\beta}^2}\right)^2 + 1 \right)\boldsymbol{y} = 0.$$

Факторизуем оператор $\tilde{\boldsymbol{L}}_2$, разделив его справа на оператор $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{-1}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{g}\boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{g}$ пока не определенная функция. Получим $\tilde{\boldsymbol{L}}_2 = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\delta} + \left(-\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{g}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right)$ $\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{g}\boldsymbol{\varepsilon}\right)$ и остаток $\left(-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2\boldsymbol{\beta}}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\beta}}\right)' - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{g}' + \frac{\boldsymbol{\alpha}'^2}{4\boldsymbol{\beta}^2} + 1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}^2\right)\boldsymbol{\varepsilon}$. Для обращения остатка в нуль потребуем $\frac{\boldsymbol{\alpha}'^2}{4\boldsymbol{\beta}^2} + 1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}^2 = 0$, что дает $\boldsymbol{g}_{1,2} = \pm\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{2\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{i}$. Таким образом имеем факторизованное уравнение $\tilde{\boldsymbol{L}}_2(\boldsymbol{y}) = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\delta} + \left(-\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{2\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right)$ $\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\delta} + \left(-\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{2\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right)\boldsymbol{y} = 0$. Базис пространства решений этого уравнения можно выбрать так

$$u_1 = \sqrt{\alpha}\cos\left(\int \frac{\beta}{\alpha}dx\right),\ u_2 = \sqrt{\alpha}\sin\left(\int \frac{\beta}{\alpha}dx\right). \tag{4.4.29}$$

Пусть τ дифференциальный автоморфизм из группы Галуа уравнения (4.4.1): $\tau(u_1) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2$, $\tau(u_2) = a_{21}u_1 + a_{22}u_2$. Так как $u_1^2 + u_2^2 = \alpha \in K_0$, то $\left(a_{11}u_1 + a_{12}u_2\right)^2 + (a_{21}u_1 + a_{22}u_2)^2 = (a_{11}^2 + a_{21}^2)u_1^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})u_1u_2 +$ $+(a_{12}^2 + a_{22}^2)u_2^2 = u_1^2 + u_2^2$. Учитывая, что функции u_1^2, u_1u_2, u_2^2 линейно независимы, как решения дифференциального уравнения третьего порядка [23, пример 3.26], получаем $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$, $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$, $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$. Наконец, $\tau(\beta) = |\tau|\beta$, где $|\tau|$ — определитель матрицы автоморфизма τ. Так как по, условию $\beta \in K_0$, то $|\tau| = 1$. Из системы $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$, $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$, $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$ находим: $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = \pm\sqrt{1 - a_{22}^2}$, $a_{21} = \mp\sqrt{1 - a_{22}^2}$. Следовательно, группа Галуа уравнения (5.4.1) является некоторой подгруппой группы SO. ■

Соберем условия, сформулированные в теоремах 4.4.2 — 4.4.8, в следующую таблицу.

Тип группы G	Коэффициент p	Коэффициент q
E	$-\frac{\beta''}{\beta'} - 2\frac{\alpha'}{\alpha}$	$2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\beta''}{\beta'} - \frac{\alpha''}{\alpha}, \beta \neq const$
C^*	$-\frac{\alpha''}{\alpha'} - 2\beta\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\alpha \neq const$	$-\beta'\frac{\alpha'}{\alpha} + (\beta^2 + \beta)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2$, $\beta \neq \frac{1}{k}\frac{Q'}{Q}\frac{\alpha}{\alpha'}, Q \in K_0$, k-рациональное число
D	$\frac{\alpha'}{\alpha} - 2\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$	$-\frac{\beta'}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\beta}{\alpha^2}$
ST	$-\frac{\beta'}{\beta}$	$-\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}$

T	$-\alpha-\beta$	$-\beta'+\alpha\beta$
SO	$-\dfrac{\beta'}{\beta}$	$-\dfrac{1}{2}\dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha'}{\beta}\right)'+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$

Пусть α и β произвольные дифференцируемые функции и $\boldsymbol{K}_1$ ими порожденное дифференциальное расширение поля $\boldsymbol{K}_0$. То справедлива теорема.

Теорема 4.4.8. Группа Галуа уравнения (4.4.1) коэффициенты которого построены по формулам $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ таблицы, изоморфна над полем $\boldsymbol{K}_1$ некоторой подгруппе соответствующей группы $\boldsymbol{G}$.

Глава 5. Факторизация нелинейных дифференциальных уравнений

Одним из основных математических инструментов исследования явлений мира являются обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения (ОНДУ). В главе 4 такие уравнения появляются, например, при определении дифференциальной группы Галуа ОЛДУ. Разработаны методы интегрирования таких уравнений, отраженные в обширных справочниках [23], [20].

Один из возможных методов интегрирования уравнений вида $\boldsymbol{\Phi}(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ с коэффициентами в дифференциальном поле $\boldsymbol{K}$ нулевой характеристики является метод факторизации. Можно выделить следующие виды факторизации: алгебраическую [98], когда дифференциальное уравнение рассматривается как многочлен от искомой функции и ее производных, дифференциально–алгебраическую, когда уравнение представляется в виде композиции алгебраических выражений и дифференциальных операторов [10]. В первом случае дифференциальный многочлен $\boldsymbol{\Phi}(x, y, y', ..., y^{(n)})$ представляется в виде произведения многочленов $\boldsymbol{\Phi}(x, y, y', ..., y^{(n)}) =$ $= \prod_{k=1}^{m} \boldsymbol{\Phi}_k(x, y, ..., y^{(m_k)})$, где $n = \max_k(m_k)$, во втором случае $\boldsymbol{\Phi}(x, y, y', ..., y^{(n)}) =$ $= \prod_{k=1}^{m} L_{m_k}(x; y) \boldsymbol{\Phi}_k(x, y, y', ..., y^{(n_k)})$, $L_{m_k} = \sum_{j=0}^{m_k} a_j(x, y) \delta^j$ — линейные дифференциальные операторы, $\delta = d / dx$; $\boldsymbol{\Phi}_k(x, y, y', ..., y^{(n_k)})$ — дифференциальные многочлены. Рассмотрим дифференциально–алгебраическую факторизацию одного класса уравнений первого порядка.

5.1. Определение факторизации и некоторые её свойства

Рассмотрим ОНДУ $\boldsymbol{\Phi}(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ с коэффициентами в дифференциальном поле $\boldsymbol{K}$ функций переменной x с полем комплексных чисел в качестве констант. Это поле в дальнейшем будем называть основным.

Определение 5.1.1. Скажем, что уравнение $\boldsymbol{\Phi}(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ факторизуем над полем K, если его можно представить в виде

$$\frac{F_1(x,y,...,y^{(m_1)})}{F_2(x,y,...,y^{(m_2)})}\exp\left(-\int\frac{B_1(x,y,...,y^{(n_1)})}{B_2(x,y,...,y^{(n_2)})}dx\right)\times$$

$$\times\frac{d^s}{dx^s}\left[\frac{A_1(x,y,...,y^{(m_3)})}{A_2(x,y,...,y^{(m_4)})}\exp\left(-\int\frac{B_1(x,y,...,y^{(n_1)})}{B_2(x,y,...,y^{(n_2)})}dx\right)\right]=0, \qquad (5.1.1)$$

где F_i, A_i, B_i $(i=1,2)$ — некоторые дифференциальные выражения с коэффициентами из поля K или короче, если выполняется тождество

$$\Phi(x,y,y',...,y^{(n)})=\frac{F_1}{F_2}\exp\left(-\int\frac{B_1}{B_2}dx\right)\frac{d^s}{dx^s}\left[\frac{A_1}{A_2}\exp\left(-\int\frac{B_1}{B_2}dx\right)\right] \qquad (5.1.2)$$

по переменным $x, y, y',..., y^{(n)}$ с коэффициентами из поля K.

Очевидно утверждение.

Теорема 5.1.1. Функция $y=\varphi(x)$, являющаяся решением уравнения $A_1(x,y,y',...,y^{(m_3)})=0$ и такая, что выполняются неравенства $A_2(x,\varphi,...,\varphi^{(m_4)})\neq 0$, $B_2(x,\varphi,...,\varphi^{(n_2)})\neq 0$, $F_2(x,y,...,y^{(m_2)})\neq 0$, является решением уравнения $\Phi(x,y,y'',...,y^{(n)})=0$.

Рассмотрим уравнение

$$y'+f_r(x)y^r+...+f_1(x)y+f_0(x)=0 \quad (r\geq 2) \qquad (5.1.3)$$

и его факторизацию в указанном виде.

В соответствии с определением 5.1.1 скажем, что уравнение (5.1.3) допускает факторизацию над полем K, если его можно представить в виде

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}A_n(x,y)\right)^{-1}\exp\left(-\int B_m(x,y)dx\right)\times$$
$$\times\frac{d}{dx}\left[A_n(x,y)\exp\left(\int B_m(x,y)dx\right)\right]=0, \qquad (5.1.4)$$

где $A_n(x,y)$, $B_m(x,y)$ — многочлены по переменной y степени n и m соответственно с коэффициентами из поля K.

Кратко факторизацию (5.1.4) будем записывать так:

$$\frac{d}{dx}\left[A_n(x,y)\exp\left(\int B_m(x,y)dx\right)\right]=0, \qquad (5.1.5)$$

Число m полностью определяется числом r. Действительно, если уравнение допускает факторизацию (5.1.5), то должно выполняться тождество

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}A_n(x,y)\right)^{-1}\left[\frac{d}{dx}A_n(x,y)+A_n(x,y)B_m(x,y)\right]= \\ = f_r(x)y^r+...+f_0(x). \tag{5.1.6}$$

Отсюда следует для степеней m, r соотношение $m=r-1$; n — натуральное число.

Найдем условия, при выполнении которых уравнение (5.1.3) допускает факторизацию (5.1.5).

Теорема 5.1.2. Для того, чтобы уравнение (5.1.3) допускало факторизацию (5.1.5), необходимо и достаточно, чтобы существовали многочлены $A_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)y^i$, $B_{r-1}(x,y)=\sum_{j=0}^{r-1}b_j(x)y^j$ степени $n\geq 1$ и $r-1$, с коэффициентами в поле K, удовлетворяющими системе

$$\left.\begin{aligned} &d_s(a_i,b_j;x)=f_s(x),\ \ s=\overline{0,r}, \\ &g_t(a_i,b_j;x)=0,\ \ t=\overline{0,p},\ \ (p<n-1), \end{aligned}\right\} \tag{5.1.7}$$

где $\sum_{s=0}^{r}d_s(a_i,b_j;x)y^s$ частное, а $\sum_{t=0}^{p}g_t(a_i,b_j;x)y^t$ $(p<n-1)$ остаток от деления многочлена $\dfrac{\partial A_n(x,y)}{\partial x}+A_n(x,y)B_{r-1}(x,y)=0$ на многочлен $\dfrac{\partial A_n(x,y)}{\partial y}$.

Необходимость. Пусть имеет место факторизация (5.1.5) уравнения (5.1.3), тогда система уравнений (5.1.7), полученная указанным в формулировке теоремы способом совместна.

Достаточность. Если существуют многочлены $A_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)y^i$, $B_{r-1}(x,y)=\sum_{j=0}^{r-1}b_j(x)y^j$ такие, что система уравнений, полученная делением с остатком многочлена $\dfrac{\partial A_n(x,y)}{\partial x}+A_n(x,y)B_{r-1}(x,y)$ на многочлен $\dfrac{\partial A_n(x,y)}{\partial y}$, совместна, для некоторого набора функций $f_r(x)$, $...f_1(x)$, $f_0(x)$ из поля K, то это приводит, очевидно, к факторизации уравнения $y' + f_r(x)y^r + ... + f_1(x)y + f_0(x) = 0$. ■

Установим теперь некоторые свойства факторизации.

Теорема 5.1.3. Для любого решения $\varphi(x)$ уравнения (5.1.3) имеет место факторизация

$$\frac{d}{dx}\left[(y-\varphi(x))\exp\left(\int B_{r-1}(x,y)dx\right)\right] = 0. \tag{5.1.8}$$

Доказательство. Продифференцировав получим $y' + b_{r-1}y^r +$ $+(b_{r-2} - b_{r-1}\varphi)y^{r-1} + \cdots + (b_1 - b_1\varphi)y^2 + (-\varphi' - b_1\varphi) = 0$. Сравнивая коэффициенты этого уравнения с коэффициентами уравнения (5.1.3), найдем

$$b_{r-1} = f_r,\ b_{r-2} - b_{r-1}\varphi = f_{r-1},\ \ldots,\ b_0 - b_1\varphi = f_1,\ \varphi' + b_0\varphi = -f_0. \tag{5.1.9}$$

Отсюда для коэффициентов b_k, получаем

$$b_k = \sum_{j=k+1}^{r} f_j \varphi^{j-k-1},\ k = \overline{0, r-1}. \tag{5.1.10}$$

При этом $b_0 = f_1 + f_2\varphi + \cdots + f_r\varphi^{r-1}$ удовлетворяется тождественно. ■

Теорема 5.1.4. Если $\varphi_i(x)$ — n различных решений уравнения (5.1.3), то

$$\frac{d}{dx}\left[(y-\varphi_1)(y-\varphi_2)...(y-\varphi_n)\exp\left(\int \sum_{j=1}^{n} B_{r-1,j}(x,y)dx\right)\right] = 0\ , \tag{5.1.11}$$

где $\dfrac{d}{dx}\left[(y-\varphi_j)\exp\left(\int B_{r-1,j}(x,y)dx\right)\right] = 0$ ($j = \overline{1,n}$) — факторизации уравнения (5.1.3), является его факторизацией.

Доказательство. Для $k = 2$ справедливость утверждения устанавливается вычислением с помощью формул (5.1.10). Пусть утверждение справедливо при $k = n-1 > 2$, то есть $\dfrac{d}{dx}\left[\Phi_{n-1}\exp\left(\int \sum_{j=1}^{n-1} B_{r-1,j}(x,y)dx\right)\right] = 0$ — факторизация уравнения (5.1.3), где $\Phi_{n-1} = (y-\varphi_1)\ldots(y-\varphi_{n-1})$. Проинтегрировав эту факторизацию и факторизацию $\dfrac{d}{dx}\left[(y-\varphi_n)\exp\left(\int B_{r-1,n}(x,y)dx\right)\right]=0$, и перемножив результаты, получим

$$(y-\varphi_n)\Phi_{n-1}\exp\left(\int\left(B_{r-1,n}+\sum_{j=1}^{n-1}B_{r-1,j}(x,y)\right)dx\right)=c,$$

где c — произвольная постоянная. Продифференцировав последнее соотношение, запишем его в виде

$$\Phi_{n-1}(x,y)[y'+yB_{r-1,n}(x,y)-\varphi_nB_{r-1,n}(x,y)-\varphi_n']+$$
$$+(y-\varphi_n)\left[\frac{\partial\Phi_{n-1}(x,y)}{\partial y}y'+\Phi_{n-1}(x,y)\sum_{j=1}^{n-1}B_{r-1,j}(x,y)+\frac{\partial\Phi_{n-1}(x,y)}{\partial x}\right]=0.$$

В силу предположения индукции, имеем $\left[\Phi_{n-1}(x,y)+(y-\varphi_n)\dfrac{\partial\Phi_{n-1}(x,y)}{\partial y}\right]\times$ $\times(y'+f_ry^r+\dots+f_0)=0$,что и доказывает утверждение. ■

Следствие 5.1.1. Если $\varphi(x)$ — решение уравнения (5.1.3) и $a\neq 0$ число, то $\dfrac{d}{dx}\left[(y-\varphi)^a\exp\left(a\int B_{r-1}dx\right)\right]=0$ факторизация уравнения (5.1.3).

Доказательство. Из (5.1.8) после интегрирования и возведения в степень a следует равенство $(y-\varphi)^a\exp\left(a\int B_{r-1}dx\right)=c$, где c — постоянная интегрирования. Дифференцируя по x, получим искомую факторизацию. ■

Следствие 5.1.2. Если $\varphi_i(x)$ $(i=\overline{1,q})$ — q различных решений уравнения (5.1.3), то имеет место факторизация

$$\frac{d}{dx}\left[(y-\varphi_1)^{n_1}(y-\varphi_2)^{n_2}\dots(y-\varphi_q)^{n_q}\exp\left(\int B_{r-1}dx\right)\right]=0, \qquad (5.1.12)$$

где n_i — числа, $\dfrac{d}{dx}\left[(y-\varphi_i)\exp\left(\int B_{r-1,i}dx\right)\right]=0$ — факторизация уравнения (5.1.3), где $B_{r-1}=n_1B_{r-1,1}+\dots+n_qB_{r-1,q}$. Вытекает из следствия 5.1.1. ■

Как показывают предыдущие рассуждения, уравнение (5.1.3) имеет, вообще говоря, бесконечно много факторизаций.

Предположим теперь, что для уравнения (5.1.3) выполнены условия

(5.1.7). Исследуем, какими свойствами обладает факторизация (5.1.5).

Теорема 5.1.5. Если уравнение (5.1.3) допускает факторизацию (5.1.5), то каждое решение $\boldsymbol{\varphi(x) \neq const}$ уравнения $\boldsymbol{A_n(x,\, y)} = 0$, удовлетворяющее условиям $\left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{A_n(x,y)}\right|_{y=\varphi(x)} \neq 0$, $\left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{A_n(x,y)}\right|_{y=\varphi(x)} \neq 0$, является решением этого же уравнения (5.1.3).

Доказательство. Так как по предположению $\boldsymbol{A_n(x,\varphi(x))} \equiv 0$, то

$$\boldsymbol{\varphi'(x)} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{A_n(x,y)} \,/\, \left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{A_n(x,y)}\right|_{y=\varphi(x)}. \qquad (5.1.13)$$

Обозначив $\boldsymbol{F_r(x,y) = f_r y^r + f_{r-1} y^{r-1} + \ldots + f_1 y + f_0}$ и вычислив (5.1.5) при $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$, найдем

$$\boldsymbol{F_r(x,\, \varphi(x))} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{A_n(x,y)} \,/\, \left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{A_n(x,y)}\right|_{y=\varphi(x)}. \qquad (5.1.14)$$

Из (5.1.13) и (5.1.14) следует, что $\left.\boldsymbol{(y' + F_r(x,y))}\right|_{y=\varphi(x)} \equiv 0$. ■

Теорема 5.1.6. Если уравнение (5.1.3) допускает факторизацию (5.1.5) и для некоторой константы $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ система

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A_n(x,y) + \lambda} = 0, \\ &\boldsymbol{B_{r-1}(x,y)} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.1.15)$$

совместна, то любое ее решение — решение уравнения (5.1.3).

Доказательство. Следствие теоремы 5.1.5. ■

Теоремы 5.1.5 и 5.1.6 позволяют высказать следующее утверждение.

Теорема 5.1.7. Все решения $\boldsymbol{\varphi(x)}$ уравнения (5.1.3) по отношению к произвольной факторизации распадаются на следующие три типа:

а) $\boldsymbol{A_n(x,\varphi(x))} = 0$;

б) $\exists \lambda \neq 0$ такое, что $\boldsymbol{A_n(x,\varphi(x)) + \lambda} = 0$, $\boldsymbol{B_{r-1}(x,\varphi(x))} = 0$;

в) $\boldsymbol{A_n(x,\varphi(x)) = f(x)}$ и $\boldsymbol{\exp\left(\int B_{r-1} dx\right) = f(x)^{-1}}$.

Доказательство. Справедливость следует из рассмотрения факторизации (5.1.4) уравнения (5.1.3) и теорем 5.1.5 и 5.1.6. ■

Теорема 5.1.8. Если уравнение (5.1.3) допускает факторизацию (5.1.5) и $A_n(x,y) = v_1(x,y)v_2(x,y)...v_l(x,y)$ — какое-либо разложение на множители, то имеют место следующие факторизации уравнения (5.1.3):

$$\frac{d}{dx}\left[v_i(x,y)\exp\left(\int B_{r-1,i}(x,y)dx\right)\right] = 0,\ i = \overline{1,l}\ . \qquad (5.1.16)$$

Доказательство. Пусть $v_i(x,y) = (y-\varphi_1)^{n_1}...(y-\varphi_s)^{n_s}$ — разложение на множители, где $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,s}$, попарно различны. Согласно теореме 5.1.5, каждое $\varphi_i(x)$ является решением уравнения (5.1.3), поэтому по следствию 5.1.2 имеют место факторизации (5.1.16) уравнения (5.1.3). ■

Теорема 5.1.9. Если уравнение (5.1.3) допускает факторизацию (5.1.5) над полем K, то можно построить его факторизацию над тем же полем, в которой полином по y $A_n(x,y)$ не будет иметь кратных корней.

Доказательство. Согласно предположению, уравнение (5.1.3) представимо в виде $\frac{d}{dx}\left[A_n(x,y)\exp\left(\int B_{r-1}(x,y)dx\right)\right] = 0$. Обозначим $\Phi(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}A_n(x,y)$, $P(x,y) = \text{НОД}(A_n, \Phi)$ (НОД — наибольший общий делитель по переменной y) и $A_n(x,y) = Q(x,y)P(x,y)$. Многочлен $Q(x,y)$, очевидно, имеет попарно различные корни. По теореме 5.1.8 имеют место факторизации уравнения (5.1.3) $\frac{d}{dx}\left[Q(x,y)\exp\left(\int B_{r-1,1}(x,y)dx\right)\right] = 0$, $\frac{d}{dx}\left[P(x,y)\exp\left(\int B_{r-1,2}(x,y)dx\right)\right] = 0$. ■

5.2. Свойства решений нелинейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим теперь несколько свойств решений уравнения (5.1.3) алгебраических над полем K рациональных функций или некоторым его расширением.

Напомним, что минимальным многочленом функции $\varphi(x)$ над полем

$\boldsymbol{K}$ называется неприводимый над $\boldsymbol{K}$ многочлен $\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in \boldsymbol{K}[\boldsymbol{y}]$, такой, что $\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\equiv 0$.

Теорема 5.2.1. Если $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ является решением уравнения (5.1.3) и корнем неприводимого над полем $\boldsymbol{K}$ многочлена $\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, то:

а) все корни уравнения $\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ удовлетворяют уравнению (5.1.3);

б) уравнение (5.1.3) допускает факторизацию с $\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\equiv\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

Доказательство. а) Согласно условию теоремы функция $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет следующей системе

$$\left.\begin{aligned} &y'+f_r(x)y^r+f_{r-1}(x)y^{r-1}+\ldots+f_1(x)y+f_0(x)=0,\\ &\Pi(x,y)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.1)$$

где $\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=0}^{m}\boldsymbol{p}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^j$, $\boldsymbol{p}_j(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{K}$.

Вычтем из первого уравнения, умноженного на $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, полную производную по $\boldsymbol{x}$ от $\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Поскольку $\left.\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\Pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right|_{y=\varphi(x)}\neq 0$, то полученная система уравнений, эквивалентна исходной, :

$$\left.\begin{aligned} &y'+f_r(x)y^r+f_{r-1}(x)y^{r-1}+\ldots+f_1(x)y+f_0(x)=0,\\ &\qquad (f_r(x)y^r+f_{r-1}(x)y^{r-1}+\ldots+f_1(x)y+f_0(x))\times\\ &\qquad\quad \times(m\,p_m(x)y^{m-1}+\ldots+2p_2(x)y+p_1(x))-\\ &\qquad\quad -(p'_m(x)y^m+\ldots+p'_1(x)y+p'_0(x))=0,\\ &\sum_{j=0}^{m}p_j(x)y^j=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.2)$$

Запишем (5.2.2) кратко

$$\left.\begin{aligned} &L(y)=0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial y}\Pi(x,y)\right)L(y)-\frac{d}{dx}\Pi(x,y)=0,\\ &\Pi(x,y)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.3)$$

где $L(y) = y' + f_r(x)y^r + ... + f_0(x)$.

Разделив левую часть второго уравнения системы (5.2.3) на $\Pi(x,y)$ получим $Q_{r-1}\Pi(x,y) + R_k$. Из неприводимости многочлена $\Pi(x,y)$ следует, что $R_k \equiv 0$. Тогда $\forall\varphi(x)$ таких, что $\Pi(x,\varphi(x)) \equiv 0$, но $\left.\frac{\partial}{\partial y}\Pi(x,y)\right|_{y=\varphi(x)} \neq 0$, $\left.\frac{d}{dx}\Pi(x,y)\right|_{y=\varphi(x)} = 0$, поэтому $L(\varphi(x)) \equiv 0$.

б) Второе утверждение следует из теоремы 5.1.4. ■

Приведем два примера, показывающие полезность результата.

Пример 5.2.1. Согласно [23, пример 1.163], уравнение $2x^2y' - 2y^2 - xy + 2a^2x = 0$ имеет решение $y = \varphi(x) = a\sqrt{x}$. Его минимальный многочлен над полем рациональных функций — $\Pi(x,y) = y^2 - a^2x$. Следовательно, по теореме 5.2.1 функция $-a\sqrt{x}$ — также решение этого уравнения.

Пример 5.2.2. Согласно [23, пример 1.164], уравнение $2x^2y' - -2y^2 - 3xy + 2a^2x = 0$ имеет решение $y = \varphi(x) = a\sqrt{x} - 0{,}5\,x$. Минимальный многочлен этого решения при $a \neq 0$ над полем рациональных функций — $\Pi(x,y) = y^2 + xy - a^2x + (1/4)x^2$, поэтому $\varphi(x) = -a\sqrt{x} - 0{,}5x$ — еще одно решение данного уравнения.

Проинтегрируем (5.1.5):

$$A_n(x,y)\exp\left(\int B_{r-1}(x,y)dx\right) = c, \tag{5.2.4}$$

где c — постоянная интегрирования.

Теорема 5.2.2. Если функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет при некотором c уравнению (5.2.4), то она является частным решением уравнения (5.1.3).

Доказательство. Если некоторая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет при некотором значении константы c соотношению (5.2.4), то $\frac{d}{dx}\left[A_n(x,\varphi(x))\exp\left(\int B_{r-1}(x,\varphi(x))dx\right)\right] \equiv 0$ и из факторизуемости уравнения

(5.1.3) следует, что функция $\varphi(x)$ является его решением. ■

Получим два соотношения, предварительно представив (5.2.4) с помощью теоремы 5.1.3 в виде $A_n(x,y)= c\exp\left(-\int\left(\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i=k+1}^{r} f_j\varphi^{i-k-1}y^k\right)dx\right)$ и заметив, что для двух различных решений φ_{p_1}, φ_{q_1} уравнения (5.1.3), не равных тождественно нулю, выполняется

$$\varphi_{p_1}-\varphi_{q_1}=c\exp\left(-\int\left(\sum_{k=1}^{r} f_k\sum_{i=1}^{k}\varphi_{p_1}^{k-i}\varphi_{q_1}^{i-1}\right)dx\right). \qquad (5.2.5)$$

Следствие 5.2.1. Пусть φ_p, φ_q, φ_t, φ_s — различные решения уравнения (5.1.3). тогда

$$\frac{\varphi_p-\varphi_q}{\varphi_p-\varphi_t}\frac{\varphi_s-\varphi_t}{\varphi_s-\varphi_q}=c\exp\left(-\int\sum_{k=3}^{r} f_k\sum_{i=2}^{k-1}(\varphi_p^{k-i}-\varphi_s^{k-i})(\varphi_q^{i-1}-\varphi_t^{i-1})dx\right), \qquad (5.2.6)$$

где сумма по k в правой части, полагается равной нулю при $r=2$.

Действительно, придавая один раз индексам p_1, q_1 значения p и q, p и t соответственно, второй раз — s и q, s и t соответственно и выполняя очевидные действия, получим (5.2.6). ■

Заметим, что при $r=2$ из (5.2.6) получается известное свойство постоянства ангармонического отношения решений уравнения Риккати [14, 23], а при $r=3$ — свойство четырех различных ненулевых решений уравнение Абеля первого рода

$$\frac{\varphi_p-\varphi_q}{\varphi_p-\varphi_t}\frac{\varphi_s-\varphi_t}{\varphi_s-\varphi_q}=c\exp\left(-\int f_3(\varphi_p-\varphi_s)(\varphi_q-\varphi_t)dx\right). \qquad (5.2.7)$$

Еще одно соотношение получим так: пусть φ_0, $\varphi_1,\ldots,$ φ_{r+1} — $r+2$ различных ненулевых решения уравнения (5.2.1) и α_1, $\alpha_2,\ldots,$ α_{r+1} — отличные от нуля числа. Из формулы (5.2.5) и следствия 5.1.2 из теоремы 5.1.4 нетрудно записать соотношение

$$\prod_{j=1}^{r+1}(\varphi_0-\varphi_j)^{\alpha_j}=c\exp\left(-\int\left(\sum_{k=1}^{r} f_k\sum_{i=1}^{k}\varphi_0^{k-i}\left(\sum_{j=1}^{r+1}\alpha_j\varphi_j^{i-1}\right)\right)dx\right). \qquad (5.2.8)$$

5.3. Некоторые свойства факторизации и уравнения Риккати

Уравнение Риккати известно с начала XVIII века, его исследованию посвящена обширная литература, например, монографии [19, 97]. Известно большое число условий разрешимости в квадратурах уравнения Риккати и их количество продолжает увеличиваться [20]. Но условия разрешимости рассматриваемого нами вида, по-видимому, найдены впервые [55]. Рассмотрим уравнение Риккати с коэффициентами в дифференциальном поле $\boldsymbol{K}$ (пусть поле рациональных функций).

$$y' + f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x) = 0. \tag{5.3.1}$$

Теорема 5.3.1. Для того чтобы уравнение (5.3.1) допускало над полем $\boldsymbol{K}$ факторизацию

$$\frac{d}{dx}\Big[(\alpha_n(x)y^n + \alpha_{n-2}(x)y^{n-2} + \ldots + \alpha_1(x)y + \alpha_0)\exp\Big(\int(b_1y + b_0)dx\Big)\Big] = 0 \tag{5.3.2}$$

с $n \ge 2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$Y'_{n-2} + nf_1Y_{n-2} + \frac{n}{n-1}f_0Y_{n-3} = 0 \tag{5.3.3}$$

где $Y_{-1} \equiv 0$, $Y_0 = f_0f_2^{-1}$,

$$Y_{j-1} = f_2^{-1}\left(\frac{1}{j}Y'_{j-2} + f_1Y_{j-2} + \frac{n-j+1}{j-1}f_0Y_{j-3}\right),\ j = 2,\ldots,n-1, \tag{5.3.4}$$

причем

$$\alpha_{n-j-1} = \frac{(-1)^{j+1}n}{(j+1)}f_2^{-1}\left(\frac{1}{j}Y'_{j-2} + f_1Y_{j-2} + \frac{n-j+1}{j-1}f_0Y_{j-3}\right)\alpha_n, \tag{5.3.5}$$

$$b_1 = nf_2,\ b_0 = nf_1 - \alpha'_n\alpha_n^{-1},\ \alpha_{n-2} = \frac{1}{2}nY_0\alpha_n. \tag{5.3.6}$$

Необходимость. Пусть уравнение (5.3.1) допускает факторизацию (5.3.2). Продифференцировав и сократив на экспоненту, получим $\left(\sum_{j=1}^{n} j\alpha_j y^{j-1}\right)y' + \sum_{j=0}^{n}\alpha'_j y^j + \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y^j\right)(b_1y + b_0) = 0$, $\alpha_{n-1} \equiv 0$. Проведя упрощения, найдем

$$\left(\sum_{j=1}^{n} j\alpha_j y^{j-1}\right)y' + b_1\alpha_n y^{n+1} + \sum_{j=0}^{n}(b_1\alpha_{n-j-1} + b_0\alpha_{n-j} + \alpha'_{n-j})y^{n-j} = 0\,. \qquad (5.3.7)$$

Разделив (5.3.7) на коэффициент при производной, получим в частном уравнение Риккати

$$y' + \frac{1}{n}b_1 y^2 + \frac{1}{n}\alpha_n^{-1}(b_0\alpha_n + \alpha'_n)y + \frac{2}{n^2}\alpha_{n-2}\alpha_n^{-1}b_1 = 0, \qquad (5.3.8)$$

которое по определению факторизации должно совпадать с данным, и остаток, тождественно равный нулю:

$$\left(\sum_{j=2}^{n} b_1\frac{j+1}{n}\alpha_{n-j-1} - b_1\frac{2(n-j+1)}{n^2}\alpha_{n-j+1}\alpha_{n-2}\alpha_n^{-1} + \frac{j}{n}b_0\alpha_{n-j} - \right.$$
$$\left. - \frac{n-j}{n}\alpha_{n-j}\alpha'_n\alpha_n^{-1} + \alpha'_{n-j}\right)y^{n-j} \equiv 0. \qquad (5.3.9)$$

Поэтому (5.3.8) и (5.3.9) приводят к системе

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{n}b_1 = f_2,\ \frac{1}{n\alpha_n}(b_0\alpha_n + \alpha'_n) = f_1,\ \frac{2}{n^2}\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}b_1 = f_0,\\
&b_1\frac{j+1}{n}\alpha_{n-j-1} - b_1\frac{2(n-j+1)\alpha_{n-j+1}\alpha_{n-2}}{n^2\alpha_n} + \\
&\qquad + \frac{j}{n}b_0\alpha_{n-j} - \frac{n-j}{n}\alpha_{n-j}\frac{\alpha'_n}{\alpha_n} + \alpha'_{n-j} = 0,\\
&j = 2,3,\ldots,n,\ n>1;\alpha_{-1}\equiv 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.10)$$

Выразив из (5.3.10) b_1, b_0, α_{n-2}, $(j \neq n)$ получим соотношения (5.3.6). Из последнего соотношения (5.3.10) найдем

$$\alpha_{n-j-1} = \frac{1}{(j+1)}f_2^{-1}\left(\alpha_{n-j}\alpha'_n\alpha_n^{-1} - \alpha'_{n-j} - j f_1\alpha_{n-j} + (n-j+1)f_0\alpha_{n-j+1}\right),$$
$$j = 2,3,\ldots,n-1. \qquad (5.3.11)$$

Соотношение (5.3.3) установим следующим образом. Сначала найдем $\alpha_{n-2} = \frac{1}{2}Y_0\alpha_n$, где $Y_0 = f_0 f_2^{-1}$. Затем из (5.3.10) получим $\alpha_{n-3} = -\frac{n}{3}Y_1\alpha_n$, где $Y_1 = f_2^{-1}\left(\frac{1}{2}Y'_0 + f_1 Y_0\right)$. Положив по индукции $\alpha_{n-j} = (-1)^j nj^{-1}Y_{j-2}\alpha_n$, найдем

$\alpha_{n-j-1} = \dfrac{(-1)^{j+1} n}{(j+1)} f_2^{-1} \left(\dfrac{1}{j} Y'_{j-2} + f_1 Y_{j-2} + \dfrac{n-j+1}{j-1} f_0 Y_{j-3} \right) \alpha_n$. Или $\alpha_{n-j-1} =$ $= \dfrac{(-1)^{j+1} n}{j+1} Y_{j-1} \alpha_n$, где $Y_{j-1} = \dfrac{1}{f_2} \left(\dfrac{1}{j} Y'_{j-2} + f_1 Y_{j-2} + \dfrac{n-j+1}{j-1} f_0 Y_{j-3} \right) \alpha_n$. Соотношение (5.3.4) получим, положив в последнем соотношении (5.3.10) $j = n$ $\alpha_0 \alpha'_n \alpha_n^{-1} - \alpha'_0 - n f_1 \alpha_0 + f_0 \alpha_1 = 0$ и подставив сюда выражения для α_0 и α_1.

Достаточность. Пусть для уравнения (5.3.1) при некотором $n \geq 2$ выполняется условие (5.3.3). Возьмем произвольное дифференцируемое $\alpha_n \in K$, $\alpha_n \neq 0$ и по формулам (5.3.4), (5.3.5), (5.3.6) вычислим коэффициенты b_1, b_0, α_j, $0 \leq j \leq n-2$. Составим уравнение (5.3.2). Выполнив необходимые преобразования, получим уравнение (5.3.8), совпадающее с уравнением (5.3.1), и остаток (5.3.9), тождественно равный нулю в силу выбора коэффициентов. ■

Обозначим через A множество всех корней алгебраического уравнения

$$\alpha_n y^n + \alpha_{n-2} y^{n-2} + \cdots + \alpha_1 y + \alpha_0 = 0, \tag{5.3.12}$$

где $\alpha_j \in K$, α_n и α_0 не равны тождественно нулю, $n \geq 2$.

Теорема 5.3.2. Для того чтобы уравнение (5.3.1) имело, по крайней мере $n \geq 2$ решений в A, необходимо и достаточно, чтобы при указанном n выполнялось условие (5.3.4).

Необходимость. Если уравнение (5.3.1) имеет $n \geq 2$ решений в A, то все они являются корнями уравнения (5.3.12). Согласно теоремам 5.1.2 и 5.1.3, уравнение (5.3.1) допускает факторизацию (5.3.2) и, следовательно, условие (5.3.4) при данном n выполняется.

Достаточность. Пусть при $n \geq 2$ условие (5.3.4) выполняется, тогда по теореме 5.3.1 имеет место факторизация (5.3.2) и все решения уравнения (5.3.12) будут решениями уравнения (5.3.2). ■

Теорема 5.3.3. Если для уравнения (5.3.1) условие (5.3.4) не выполняется над полем K ни при каком натуральном $n \geq 2$, то для уравнения возможны только следующие случаи:

1) нет алгебраических решений;

2) имеет единственное алгебраическое решение;

3) имеет алгебраические решения, удовлетворяющие алгебраическому уравнению $\alpha_n y^n + \alpha_{n-1} y^{n-1} + \alpha_{n-2} y^{n-2} + \cdots + \alpha_1 y + \alpha_0 = 0$, где $\alpha_{n-1} \neq 0$ тождественно. ■

Рассмотрим применение полученных условий на примерах.

Пример 5.3.1. Уравнение $y' + (x^3+1)^{-1} y^2 - x^2 (x^3+1)^{-1} y + {}$ $+2x(x^3+1)^{-1} = 0$ допускает факторизацию $\dfrac{d}{dx}[(y^3 + 3xy + x^3 - 1) \times$ $\times \exp\Big(\int (3y - 3x^2)(x^3+1)^{-1} dx\Big)] = 0$. Следовательно, все решения уравнения $y^3 + 3xy + x^3 - 1 = 0$ являются решениями уравнения Риккати. Решения кубического уравнения следующие: $y_1 = 1 - x$, $y_{2,3} = 0{,}5(x-1) \pm 0{,}5\sqrt{3}\, i\, |x+1|$.

Пример 5.3.2. В [23, пример 1. 168] сказано, что все решения алгебраического уравнения $y^4 - 6y^2 - 4xy - 3 = 0$ являются решениями уравнения Риккати $3(x^2-4)y' + y^2 - xy - 3 = 0$. Проверим это утверждение, применив теорему 5.3.1. В нашем случае $n = 4$ и условие (5.3.4) имеет вид $A_2' + 4 f_1 A_2 + \dfrac{4}{3} f_0 A_1 = 0$. Так как $f_2 = 3^{-1}(x^2-4)^{-1}$, $f_1 = -3^{-1}(x^2-4)^{-1} x$, $f_0 = -(x^2-4)$, то $A_0 = f_0 f_2^{-1} = -3$, $A_1 = f_2^{-1}(0.5A_0' + f_1\, A_0) = 3x$, $A_2 =$ $= f_2^{-1}(\dfrac{1}{3} A_1' + f_1 A_1 + f_0 A_0) = -3$. Подставляя в формулу, находим $(-3)' +$ $+4x(x^2-4)^{-1} - 4x(x^2-4)^{-1} \equiv 0$.

Используя теорему 5.3.1, можно получить простые достаточные условия алгебраичности решений уравнения Риккати.

Теорема 5.3.4. Для того чтобы все решения уравнения (5.3.1) были алгебраическими над полем K и не принадлежали полю K, достаточно, чтобы при $n = 3$ выполнялось условие (5.3.3) и алгебраическое уравнение

$$2 f_2^3 y^3 + 3 f_0 f_2^2 y - \left(f_0' f_2 - f_0 f_2' + 2 f_0 f_1 f_2 \right) = 0 \qquad (5.3.13)$$

было неприводимо над полем K (например, по критерию Эйзенштейна [84]).

При выполнении этих условий три различных корня уравнения (5.3.13) являются решениями уравнения (5.3.1).

Доказательство. При выполнении условия (5.3.3) уравнение (5.3.1) факторизуемо в виде $\frac{d}{dx}\left[\left(\alpha_3 y^3+\alpha_1 y+\alpha_0\right)\exp\left(\int\left(b_1 y+b_0\right)dx\right)\right]=0$, где коэффициенты факторизации, вычислены по теореме 5.3.1: $\alpha_1=\frac{3f_0}{2f_2}\alpha_3$, $\alpha_0=-\frac{1}{2f_2}\left(\left(\frac{f_0}{f_2}\right)'+2f_1\frac{f_0}{f_2}\right)\alpha_3$. Так как многочлен $\alpha_3 y^3+\alpha_1 y+\alpha_0$ неприводим над полем K, то он не имеет кратных корней и, как следует из теоремы 5.1.5, все корни уравнения $\alpha_3 y^3+\alpha_1 y+\alpha_0=0$ являются решениями уравнения (5.3.1). ■

Покажем, как, используя метод факторизации, строить уравнения Риккати, разрешимые в квадратурах и, в частности, получить соответствующие условия. Рассмотрим снова уравнение (5.3.1).

1) Для факторизации уравнения (5.3.1) в виде

$$\frac{d}{dx}\left[(\alpha_1 y+\alpha_0)\exp\left(\int(b_1 y+b_0)dx\right)\right]=0 \tag{5.3.14}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$(\alpha_0\alpha_1^{-1})'-f_2(\alpha_0\alpha_1^{-1})^2+f_1\alpha_0\alpha_1^{-1}-f_0=0. \tag{5.3.15}$$

В частности это выполняется, если $\alpha_0\alpha_1^{-1}=const$. При $\alpha_0=const$ и $\alpha_1=const$ ($|\lambda_1|+|\lambda_2|\neq 0$) приходим к условию $f_2a_0^2-f_1a_0a_1+f_0a_1^2=0$ [23, (а) и (б), с. 43].

2) Уравнение (5.3.1) возможно факторизовать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\exp\left(\int(b_1 y+b_0)dx\right)\right]=0. \tag{5.3.16}$$

Выполнив очевидные выкладки, найдем $b_1=f_2$, $b_0=\frac{1}{2}(f_1-f_2'f_2^{-1})$ и условие

$$f_0 = \frac{1}{f_2}\left(\frac{1}{2}f_1' - \frac{1}{2}\left(\frac{f_2'}{f_2}\right)' + \frac{1}{4}\left(f_1 - \frac{f_2'}{f_2}\right)^2\right), \tag{5.3.17}$$

при котором возможна такая факторизация. В этом случае уравнение Риккати имеет решение $y = f_2^{-1}\left(c_1(c_1 x + c_0)^{-1} - \frac{1}{2}\left(f_1 - f_2 f_2'\right)\right)$.

3) Рассмотрим еще возможность факторизации уравнения $y' + p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x) = 0$ в виде

$$\frac{d}{dx}\left[(h_2 y^2 + h_1 y + h_0)\exp\left(\int (g_1 y + g_0)dx\right)\right] = 0, \tag{5.3.18}$$

то есть когда h_1 не равно нулю тождественно. Теорема 5.3.1 здесь неприменима, но задача сводится к известному случаю с помощью замены переменной $y = z - h_1 / 2h_2$. Уравнение (5.3.1) и его факторизация (5.3.18) принимают вид:

$$z' + p_2(x)z^2 + \left(p_1 - p_2\frac{h_1}{h_2}\right)z + \left(p_2\frac{h_1^2}{4h_2^2} - p_1\frac{h_1}{2h_2} + p_0 - \left(\frac{h_1}{2h_2}\right)'\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(h_2 z^2 - \frac{h_1^2}{4h_2} + h_0\right)\exp\left(\int\left(g_1 y + g_0 - \frac{g_1 h_1}{2h_2}\right)dx\right)\right] = 0$$

Применив теорему 5.3.1, получим выражения для коэффициентов факторизации через коэффициент h_2: $g_1 = 2p_2$, $g_0 = -p_2\frac{h_1}{h_2} + 2p_1 + \frac{h_1^2}{4h_2^2} - \frac{h_0}{h_2}$, $h_0 = \frac{h_1^2}{2h_2} - \frac{p_1 h_1}{2p_2} + \frac{p_0 h_2}{p_2} - \frac{1}{2p_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)' h_2$ и $\tilde{Y}_0 = \frac{1}{p_2}\left(p_2\frac{h_1^2}{4h_2^2} - p_1\frac{h_1}{2h_2} + p_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)'\right)$ при выполнении условия $\left(\tilde{Y}_0\right)' + (p_1 - p_2 h_1 h_2^{-1})\tilde{Y}_0 = 0$.

5.4. Уравнение Абеля первого рода

Наряду с уравнением Риккати большой интерес представляет уравнение Абеля первого рода

$$y' + f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y + f_0 = 0 \qquad (5.4.1)$$

Некоторую библиографическую информацию по этому уравнению можно найти в [15, 39, 79]. Рассмотрим его с точки зрения представимости в виде факторизации (5.1.5). Покажем сначала, что уравнение не обладает свойством постоянства ангармонического отношения решений уравнения Риккати.

Теорема 5.4.1. Если, уравнение (5.4.1) имеет шесть различных не равных тождественно нулю решений и четыре из них связаны соотношением,

$$\varphi_p - \varphi_s + \varphi_\beta - \varphi_\alpha = 0\,, \qquad (5.4.2)$$

то отношение двух двойных отношений, составленное из всех шести решений, есть величина постоянная

$$\frac{\varphi_p - \varphi_q}{\varphi_p - \varphi_t}\frac{\varphi_s - \varphi_t}{\varphi_s - \varphi_q}\frac{\varphi_\alpha - \varphi_t}{\varphi_\alpha - \varphi_q}\frac{\varphi_\beta - \varphi_q}{\varphi_\beta - \varphi_t} = c\,. \qquad (5.4.3)$$

Доказательство. Пусть φ_i, $i = \overline{1,n}$ — попарно различные решения уравнения. Тогда по формуле (5.2.6) для любых четырех ненулевых имеем

$$\frac{\varphi_p - \varphi_q}{\varphi_p - \varphi_t}\frac{\varphi_s - \varphi_t}{\varphi_s - \varphi_q} = c_1 \exp\left(-\int f_3(\varphi_p - \varphi_s)(\varphi_q - \varphi_t)dx\right). \qquad (5.4.4)$$

Пусть φ_α, φ_β — еще различные решения уравнения, можно снова записать

$$\frac{\varphi_\alpha - \varphi_q}{\varphi_\alpha - \varphi_t}\frac{\varphi_\beta - \varphi_t}{\varphi_\beta - \varphi_q} = c_2 \exp\left(-\int f_3(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)(\varphi_q - \varphi_t)dx\right). \qquad (5.4.5)$$

Поделив (5.4.4) на (5.4.5) почленно, получим

$$\frac{\varphi_p - \varphi_q}{\varphi_p - \varphi_t}\frac{\varphi_s - \varphi_t}{\varphi_s - \varphi_q}\frac{\varphi_\alpha - \varphi_t}{\varphi_\alpha - \varphi_q}\frac{\varphi_\beta - \varphi_q}{\varphi_\beta - \varphi_t} =$$

$$= c \exp\left(-\int f_3(\varphi_q - \varphi_t)(\varphi_p - \varphi_s + \varphi_\beta - \varphi_\alpha)dx\right). \qquad (5.4.6)$$

Из (5.4.6) следует свойство решений уравнения Абеля, напоминающее свойство решений уравнения Риккати. ■

Соотношение (5.4.5) указывает на то, что никакие четыре попарно различных решения уравнения (5.4.1) не обладают ранее отмеченным свойством решений уравнения Риккати.

Следствие 5.4.1. Если уравнение (5.4.1) имеет шесть различных решений пять из которых алгебраические над полем $\boldsymbol{K}$, а четыре из шести связаны соотношением (5.4.3), то все решения уравнения Абеля — алгебраические.

Следствие 5.4.2. Из теоремы 5.4.1 следует, что при выполнении условия (5.4.3) всякое решение уравнения (5.4.1), не принадлежащее многообразию (5.4.3) выражается в виде

$$\varphi_t = \Phi(c;\varphi_q,\varphi_\alpha,\varphi_s,\varphi_\beta), \tag{5.4.7}$$

где φ_q — не принадлежит многообразию (5.4.3), а φ_α, φ_s, φ_β — различные решения уравнения (5.4.1) из указанного многообразия, c — произвольная постоянная.

Рассмотрим возможность факторизации уравнения Абеля в виде $\dfrac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{3}\alpha_k y^k\cdot\exp\left(\int\sum_{k=0}^{2}b_k y^k dx\right)\right)$, где $\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 0$ тождественно. По теореме 5.1.2 получим $b_2 = 3f_3$, $b_1 = 3f_2$, $b_0 = 3f_1 - 2f_3\alpha_1$. Для определения α_1 и α_0 имеем систему

$$\left.\begin{aligned} f_3\alpha_0 + \frac{2}{3}f_2\alpha_1 \qquad\quad &= f_0,\\ \alpha_1' - 2f_3\alpha_1^2 + 2f_1\alpha_1 + 3f_2\alpha_0 &= 0,\\ \alpha_0' + 3f_1\alpha_0 - 3f_3\alpha_1\alpha_0 - \frac{2}{3}f_2\alpha_1^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.4.8}$$

Выразив из первого уравнения $\alpha_0 = \dfrac{f_0}{f_3} - \dfrac{2}{3}\dfrac{f_2}{f_3}\alpha_1$ и подставив в оставшиеся, получим

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 - 2f_3\alpha_1^2 + 2\left(f_1 - \frac{f_2^2}{f_3}\right)\alpha_1 + 3\frac{f_2 f_0}{f_3} = 0,\\
&\frac{2}{3}\frac{f_2}{f_3}\alpha_1' + \frac{4}{3}f_2\alpha_1^2 + \left(3f_0 + \frac{2f_1f_2}{f_3} + \frac{2f_2'}{f_3} - \frac{2f_2f_3'}{3f_3^2}\right)\alpha_1 -\\
&\qquad - \frac{3f_0f_1}{f_3} - \frac{f_0'}{f_3} + \frac{f_0f_3'}{f_3^2} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.9)$$

Рассмотрим два случая системы (5.4.9): $f_2 \equiv 0$ и $f_2 \neq 0$ тождественно.

I. Случай $f_2 \equiv 0$. Коэффициент $\alpha_0 = \dfrac{f_0}{f_3}$ и система принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 - 2f_3\alpha_1^2 + 2f_1\alpha_1 = 0,\\
&3f_0\alpha_1 - \frac{3f_0f_1}{f_3} - \frac{f_0'}{f_3} + \frac{f_0f_3'}{f_3^2} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.10)$$

а) $f_0 = f_1 \equiv 0$. Поскольку $\alpha_0 = 0$, то система сводится к уравнению $\alpha_1' - 2f_3\alpha_1^2 = 0$. Факторизация над расширением основного поля, полученным присоединением элемента $\int f_3 dx$ легко выписывается. Полином факторизации — $y^3 - 2\left(\left(\int f_3 dx + c\right)^{-1}\right)y$ и все решения алгебраического уравнения $y^3 - 2\left(\left(\int f_3 dx + c\right)^{-1}\right)y = 0$ являются решениями уравнения Абеля $y' + f_3 y^3 = 0$.

б) $f_1 \equiv 0$, $f_0 \neq 0$ тождественно. В этом случае $b_2 = 3f_3$, $b_1 = 0$, $b_0 = -2f_3\alpha_1$, $\alpha_0 = f_0 f_3^{-1}$. Система (5.4.9) принимает вид: $\alpha_1' - 2f_3\alpha_1^2 = 0$, $\alpha_0' - 3f_3\alpha_1\alpha_0 = 0$. Из первого уравнения находим $\alpha_1 = -(c_1 + 2\int f_3 dx)^{-1}$. Подставляя в последнее уравнение, получим условие

$$\left(\frac{f_0}{f_3}\right)' + 3\frac{f_0}{c_1 + 2\int f_3 dx} = 0, \qquad (5.4.11)$$

при выполнении которого возможна факторизация. Из этого условия находим $f_0 = c_2 f_3 (c_1 + 2\int f_3 dx)^{-3/2}$ ($c_2 \neq 0$). Таким образом, при выполнении условия (5.4.11) три корня алгебраического уравнения $y^3-(c_1+2\int f_3\,dx)^{-1}y+$ $+c_2(c_1+2\int f_3dx)^{-3/2}=0$ являются решениями уравнения Абеля $y'+f_3y^3+$ $+c_2f_3(c_1+2\int f_3dx)^{-3/2}=0$.

Пусть, например, $f_3=1$, тогда из (5.4.11) находим $f_0=c_2(c_1+2x)^{-3/2}$. Соответствующее алгебраическое уравнение при $c_1=c_2=0$ имеет вид $y^3-(2x)^{-1}y+(2x)^{-3/2}=0$. Все его корни являются решениями уравнения Абеля $y'+y^3+(2x)^{-3/2}=0$. Приведем одно из них: $y_1(x)=$ $=\dfrac{2\cdot 3^{2/3}+6^{1/6}\left(-9+\sqrt{69}\right)^{2/3}}{6\cdot 2^{1/6}\left(-9+\sqrt{69}\right)^{1/3}}x^{-1/2}$.

в) $f_0\equiv 0$, $f_1\neq 0$. В этом случае $b_2=3f_3$, $b_1=0$, $b_0=3f_1-2f_3\alpha_1$, $\alpha_0=0$. Третье уравнение удовлетворяется тождественно, для α_1 имеем интегрируемое уравнение Риккати $\alpha_1'-2f_3\alpha_1^2+2f_1\alpha_1=0$. Его общее решение $\alpha_1=\mathbf{exp}\left(-2\int f_1(x)dx\right)\left(c_1-2\int f_3(x)\mathbf{exp}(-2\int f_1(x)dx)dx\right)^{-1}$. Все корни алгебраического уравнения $y^3+\alpha_1 y=0$ являются решениями уравнения Абеля $y'+f_3y^3+f_1y=0$. Например, одно из них $y(x)_1=\mathbf{exp}\left(-\int f_1(x)dx\right)\times$ $\times\left(c_1-2\int f_3(x)\mathbf{exp}\left(-2\int f_1(x)dx\right)dx\right)^{-1/2}$.

г) $f_1\neq 0, f_0\neq 0$. Здесь $b_2=3f_3$, $b_1=3f_2=0$, $b_0=3f_1-2f_3\alpha_1$. Из первого уравнения $\alpha_0=f_0f_3^{-1}$. Для отыскания α_1 получим два уравнения: $\alpha_1'-2f_3\alpha_1^2+2f_1\alpha_1=0$, $\left(\dfrac{f_0}{f_3}\right)'+3f_1\left(\dfrac{f_0}{f_3}\right)-3f_0\alpha_1=0$. Проинтегрировав первое уравнение Риккати, и приравняв результат значению, полученному из второго, получим условие факторизации

$$\frac{1}{3f_0}\left(\frac{f_0}{f_3}\right)'+\frac{f_1}{f_3}=\mathbf{exp}\left(-2\int f_1dx\right)\left(c_1-2\int f_3\,\mathbf{exp}\left(-2\int f_1dx\right)dx\right)^{-1}. \qquad (5.4.12)$$

Для коэффициента f_0 из условия (5.4.12) найдем

$$f_0 = c_2 f_3 \exp\left(-3\int f_1 dx\right)\left(c_1 - 2\int f_3 \exp\left(-2\int f_1 dx\right)dx\right)^{-3/2}, \qquad (5.4.13)$$

где $c_2 \neq 0$ — постоянная интегрирования. Таким образом, все корни уравнения $y^3 + \left(\frac{1}{3f_0}\left(\frac{f_0}{f_3}\right)' + \frac{f_1}{f_3}\right)y + \frac{f_0}{f_3} = 0$ являются решениями уравнения Абеля $y' + f_3 y^3 + f_1 y + f_0 = 0$, где коэффициент f_0 имеет вид (5.4.13).

Например, в случае когда $f_3 = x^2$, $f_1 = x^{-1}$ коэффициент $f_0 = -x^{-5/2}$, где положено $c_2 = i2^{3/2}$, $c_1 = 0$. Имеем $\alpha_0 = -x^{-9/2}$, $\alpha_1 = -2^{-1}x^{-3}$, поэтому все корни алгебраического уравнения $y^3 - 2^{-1}x^{-3}y - x^{-9/2} = 0$, являются решениями уравнения Абеля $y' + x^2y^3 + x^{-1}y - x^{-5/2} = 0$. Вычисления дают одно из них $y_1 = 6^{-2/3}\left(\sqrt[3]{18-\sqrt{318}} + \sqrt[3]{18+\sqrt{318}}\right)x^{-3/2}$. Таким образом, факторизация имеет место над полем, полученным из основного, присоединением квадратичной иррациональности.

II. Случай $f_2 \neq 0$ тождественно. Коэффициент $\alpha_0 = \frac{f_0}{f_3} - \frac{2f_2}{3f_3}\alpha_1$ и система (5.4.9) после деления последнего уравнения на $-\frac{2f_2}{f_3}$ принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1' - 2f_3\alpha_1^2 + 2\left(f_1 - \frac{f_2^2}{f_3}\right)\alpha_1 + 3\frac{f_2 f_0}{f_3} = 0, \\ \alpha_1' - 2f_3\alpha_1^2 + \left(3f_1 + \frac{9}{2}\frac{f_0 f_3}{f_2} + \frac{f_2'}{f_2} - \frac{f_3'}{f_3}\right)\alpha_1 + \frac{3f_0 f_3'}{2f_2 f_3} - \frac{3f_0'}{2f_2} - \frac{9f_0 f_1}{2f_2} = 0. \end{aligned}\right\} (5.4.14)$$

а) При $f_0 = f_1 \equiv 0$, получим $b_2 = 3f_3$, $b_1 = 3f_2$, $b_0 = -2f_3\alpha_1$, $\alpha_0 = -\frac{2}{3}\frac{f_2}{f_3}\alpha_1$. Для α_1 имеем систему уравнений: $\alpha_1' - 2f_3\alpha_1^2 - 2\frac{f_2^2}{f_3}\alpha_1 = 0$, $\alpha_1' - 2f_3\alpha_1^2 + \left(\frac{f_2'}{f_2} - \frac{f_3'}{f_3}\right)\alpha_1 = 0$.

Вычтя из первого уравнения второе и учитывая, что $\alpha_1 \neq 0$, получим условие

$$-2\frac{f_2^2}{f_3}\alpha_1 - \frac{f_2'}{f_2} + \frac{f_3'}{f_3} = 0 \qquad (5.4.15)$$

при выполнении которого оба уравнения совпадают. Из него найдем $f_3 = f_2\left(c_1 + 3\int f_2 dx\right)$. Уравнение для α_1 примет вид $\alpha_1' - 2f_2(c_1 + 2\int f_2 dx)\alpha_1^2 - -2f_2\left(c_1 + 2\int f_2 dx\right)^{-1}\alpha_1 = 0$. Проинтегрировав, получим $\alpha_1 = -3\left(c_1 + 3\int f_2 dx\right)\times \times\left(-3c_1 + 6c_1^2\int f_2 dx + 12c_1\left(\int f_2 dx\right)^2 + 8\left(\int f_2 dx\right)^3\right)^{-1}$. При таком выборе коэффициента α_1 корни алгебраического уравнения $y^3 + \alpha_1 y - \frac{2}{3}\frac{f_2}{c_1 + 2\int f_2 dx}\alpha_1 = 0$ являются решениями уравнения Абеля $y' + f_2(c_1 + 2\int f_2 dx)y^3 + f_2 y^2 = 0$.

б) $f_2 \neq 0$, $f_1 \neq 0, f_0 \equiv 0$. Здесь $b_2 = 3f_3$, $b_1 = 3f_2$, $b_0 = 3f_1 - 2f_3\alpha_1$. Имеем $\alpha_0 = -\frac{2}{3}f_2 f_3^{-1}\alpha_1$ и систему уравнений для α_1

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1' - 2f_3\alpha_1^2 + 2(f_1 - f_2^2 f_3^{-1})\alpha_1 = 0, \\ &\alpha_1' - 2f_3\alpha_1^2 + (3f_1 + f_2' f_2 - f_3' f_3)\alpha_1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим алгебраическое уравнение $\alpha_1\,(2f_2^3 + f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3 - f_2 f_3')=0$. При $\alpha_1 = 0$ тождественно $\alpha_0 = 0$ и $y^3 = 0$ — тривиальное алгебраическое уравнение. Итак $\alpha_1 \neq 0$ тождественно, тогда

$$2f_2^3 + f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3 - f_2 f_3' = 0 \qquad (5.4.16)$$

— условие факторизуемости. Выразив отсюда $f_1 = \frac{-2f_2^3 - f_3 f_2' + f_2 f_3'}{f_2 f_3}$, и подставив в первое уравнение, получим уравнение для α_1: $\alpha_1' - 2f_3\alpha_1^2 + +\frac{-4f_2^3 - 2f_3 f_2' + 2f_2 f_3' - 2f_2^3}{f_2 f_3}\alpha_1 = 0$.

Например, при $f_3=1$, $f_2=x$ — $f_1=-\dfrac{2x^3+1}{x}$, $\alpha_1=\dfrac{-3x^2\exp(2x^3)}{\exp(2x^3)-3c_1}$. В этом случае алгебраическое уравнение имеет вид $y^3+\dfrac{-3x^2\exp(2x^3)}{\exp(2x^3)-3c_1}y+2\dfrac{x^3\exp(2x^3)}{\exp(2x^3)-3c_1}=0$. Все его корни, которые мы не приводим в ввиду громоздкости, удовлетворяют уравнению Абеля $y'+y^3+xy^2-\dfrac{2x^3+1}{x}y=0$. Таким образом, факторизация возможна над полем, полученным из основного присоединением экспоненты $\exp(2x^3)$.

в) $f_2\neq 0$, $f_1\equiv 0, f_0\neq 0$. Здесь $b_2=3f_3$, $b_1=3f_2$, $b_0=-2f_3\alpha_1$. Имеем систему уравнений для α_0, α_1: $f_3\alpha_0+\dfrac{2}{3}f_2\alpha_1=f_0$, $\alpha_1'-2f_3\alpha_1^2+3f_2\alpha_0=0$, $\alpha_0'-3f_3\alpha_1\alpha_0-\dfrac{2}{3}f_2\alpha_1^2=0$. Из первого находим $\alpha_0=f_0f_3^{-1}-\dfrac{2}{3}f_2f_3^{-1}\alpha_1$. Подставляя в оставшиеся два, получим

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1'-f_3\alpha_1^2-2f_2^2f_3^{-1}\alpha_1+3f_0f_2\,f_3^{-1}=0,\\&\alpha_1'-f_3\alpha_1^2+\left(\frac{9f_0f_3}{2f_2}+\frac{f_2'}{f_2}-\frac{f_3'}{f_3}\right)\alpha_1+\frac{3}{2}\left(-\frac{f_0'}{f_2}+\frac{f_0f_3'}{f_2f_3}\right)=0.\end{aligned}\right\}\tag{5.4.17}$$

Вычитая из второго уравнения первое, найдем для α_1 алгебраическое уравнение

$$(4f_2^3+9f_0f_3^2+2f_3f_2'-2f_0f_3')\alpha_1-3(2f_0f_2^2+f_0'f_3-f_0f_3')=0.\tag{5.4.18}$$

Обозначим $a=4f_2^3+9f_0f_3^2+2f_3f_2'-2f_0f_3'$, $b=6f_0f_2^2+2f_0'f_3-2f_0f_3'$ и рассмотрим различные случаи:

при $b=0$, $a\neq 0$ должно быть $\alpha_1=0$ и это приводит к противоречию в системе (5.4.17);

при $b\neq 0$, $a=0$ система (5.4.17) несовместна;

случай $b=0$, $a=0$, приводит к системе $4f_2^3+9f_0f_3^2+2f_3f_2'-$ $-2f_0f_3'=0$, $6f_0f_2^2+2f_0'f_3-2f_0f_3'=0$, исследование которой приводит к специальным функциям;

при $b \neq 0$, $a \neq 0$ подстановка $\alpha_1 = \dfrac{6 f_0 f_2^2 + 2 f_0' f_3 - 2 f_0 f_3'}{4 f_2^3 + 9 f_0 f_3^2 + 2 f_3 f_2' - 2 f_2 f_3'}$ в систему (5.4.17) приводит к сложной системе, совместность которой гарантирует возможность факторизации уравнения Абеля.

5.5. Уравнение Абеля второго рода

Особый интерес в приложениях представляет уравнение Абеля второго рода [39]

$$(f_1 y + f_0) y' + g_2 y^2 + g_1 y + g_0 = 0. \qquad (5.5.1)$$

Оно приводится к уравнению Абеля первого рода [23]. Рассмотрим кратко факторизацию этого уравнения.

Теорема 5.5.1. Для любого решения $\varphi(x)$ уравнения (5.5.1) имеет место факторизация

$$\left[(y - \varphi(x)) \exp\left(\int (b_1 y + b_0)(c_1 y + c_0)^{-1} dx \right) \right]'_x = 0, \qquad (5.5.2)$$

где

$$c_1 = f_1 \neq 0,\ c_0 = f_0,\ b_1 = g_2,\ b_0 = g_1 + g_2 \varphi + f_1 \varphi'. \qquad (5.5.3)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.1.3. ■

Если известно некоторое решение $\varphi(x)$ уравнения (5.5.1), то это уравнение можно представить в виде (5.5.2) или в следующей эквивалентной форме:

$$(y - \varphi) = c \exp\left(-\int (b_1 y + b_0)(c_1 y + c_0)^{-1} dx \right), \qquad (5.5.4)$$

где c — произвольная постоянная, равная нулю, только в случае $y = \varphi$, b_1, b_0, c_1, c_0 определяются по формулам (5.5.3).

Нетрудно убедиться в том, что для уравнения (5.5.1) справедливы с соответствующими изменениями теоремы, аналогичные теоремам 5.1.4 — 5.1.8.

Докажем только следующий результат.

Теорема 5.5.2. Ангармоническое отношение

$$\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\varphi_1-\varphi_3}\frac{\varphi_4-\varphi_3}{\varphi_4-\varphi_2}=c, \tag{5.5.5}$$

составленное из четырех различных ненулевых решений уравнения (5.5.1) постоянно, если два из четырех решений связаны соотношением $\varphi_2-\varphi_3=$ $=c\exp\left(-\int g_2 f_1^{-1}dx\right)$.

Доказательство. Пусть φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 — различные решения уравнения (5.5.1). Поскольку это уравнение равносильно уравнению (5.5.4), то в силу соотношений (5.5.3) можно записать

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi_i-\varphi_2}{\varphi_i-\varphi_3}=c_i\exp(-\int(g_2(\varphi_2-\varphi_3)+(\varphi_2-\varphi_3)')(f_1\varphi_i+f_0)^{-1}dx)\\&i=1,4.\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

Из (5.5.6) получаем

$$\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\varphi_1-\varphi_3}\frac{\varphi_4-\varphi_3}{\varphi_4-\varphi_2}=c\exp\left(-\int\frac{\left[g_2(\varphi_2-\varphi_3)+f_1(\varphi_2-\varphi_3)'\right]f_1(\varphi_4-\varphi_1)}{\left(f_1\varphi_1+f_0\right)\left(f_1\varphi_4+f_0\right)}dx\right).$$

Отсюда при $\varphi_2-\varphi_3=c\exp\left(-\int g_2 f_1^{-1}dx\right)$ следует утверждение теоремы. ■

Теорема 5.5.3. Если уравнение (5.5.1) допускает факторизацию (5.5.2) и имеет, по крайней мере, два решения таких, что $\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2\equiv 0$, где α_1, α_2 — не равные нулю числа и $\alpha_1+\alpha_2=0$, то любое его ненулевое решение удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\left(y-\varphi_1\right)^{\alpha_1}\left(y-\varphi_2\right)^{\alpha_2}=c, \tag{5.5.7}$$

при некотором значении произвольной постоянной c.

Действительно, (5.5.7) следует из (5.5.3) и (5.5.4). ■

В заключение приведем условия, при выполнении которых уравнение (5.5.1) допускает факторизацию.

Теорема 5.5.4. Уравнение (5.5.1) ($f_0\not\equiv 0$) допускает факторизацию

$$\frac{d}{dx}\left[\left(y^2+\alpha_0\right)\exp\left(\int\frac{b_1y+b_0}{c_1y+c_0}dx\right)\right]=0, \tag{5.5.8}$$

где $c_0 = 2^{-1} f_0$, $c_1 = 2^{-1} f_1$, $b_0 = g_1$, $b_1 = g_2$, $\alpha_0 = c\exp\left(-2\int (g_1 f_1^{-1}) dx\right)$, c — постоянная интегрирования в том и только в том случае, когда выполняется условие

$$g_2 = \frac{g_1 f_1}{f_0} + c^{-1}\exp\left(2\int \frac{g_1}{f_0} dx\right). \tag{5.5.9}$$

Доказательство. Убедиться в справедливости утверждения можно раскрыв соотношение (5.5.8) и приравняв коэффициенты полученного уравнения к соответствующим коэффициентам уравнения (5.5.1). ■

Пример. 5.5.1. Применим теорему к уравнению из [23, 1.236]: $(xf_1 + 4x)y' - y^2 - 2y - 2x = 0$. Здесь $f_1 = x$, $f_0 = 4x$, $g_2 = -1$, $g_1 = -2$, $g_0 = -2x$.

Условие (5.5.9) выполняется при $c = 1/4$, следовательно, при $c_0 = 2x$, $c_1 = x/2$, $b_0 = -2$, $b_1 = -2$, $\alpha_0 = 4x$. Факторизация имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left[\left(y^2 + 4x\right)\exp\left(-2\int \frac{y+2}{xy+4x} dx\right)\right] = 0.$$

Следовательно, корни алгебраического уравнения $y^2 + 4x = 0$ являются решениями уравнения Абеля второго рода.

5.6. Интегрирование нелинейного уравнения

Закон сохранения в применении к механике означает следующее: ***в замкнутой механической системе сумма механических видов энергии (потенциальной и кинетической энергии, включая энергию вращательного движения) остается неизменной:*** $W_{vr} + W_k + W_p = const$

где W_{vr} — энергия вращения тела, W_k — кинетическая энергия тела, W_p — потенциальная энергия тела [27].

Математическую модель закона сохранения можно записать так

$$a(y'')^2 + b(y')^2 + c(y)^2 = d, \tag{5.6.1}$$

в том случае, когда a, b, c, d — вещественные числа, $d \neq 0$. Это уравнение связано с динамикой движения материального тела. Пусть $a/d>0$, $b/d>0$, и $c/d>0$. Проинтегрируем это уравнения, поскольку мы не нашли в литературе его решения.

Обозначив $\alpha=\sqrt{a/d}$, $\beta=\sqrt{b/d}$ и $\gamma=\sqrt{c/d}$, перепишем уравнение так

$$(\alpha y'')^2+(\beta y')^2+(\gamma y)^2=1. \tag{5.6.2}$$

Разрешив относительно старшей производной, получим уравнение $y''=\pm\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{1-(\gamma y)^2-(\beta y')^2}$, относящееся к типу [23, п. 15.3; 6.68] при $a=0$. Будем искать такие решения уравнения (6.6.1), для которых $1-(\gamma y)^2-(\beta y')^2\neq 0$. Ищем их в параметрической форме:

$$y=\gamma^{-1}\cos\theta(t),\, y'=\beta^{-1}\sin\theta(t)\sin\varphi(t),\; y''=\alpha^{-1}\sin\theta(t)\cos\varphi(t), \tag{5.6.3}$$

где $\theta=\theta(t)$, $\varphi=\varphi(t)$ — неизвестные дифференцируемые функции. Любыми такими функциями уравнение (5.6.2) очевидно удовлетворяется. Из (5.6.3) дифференцируя, получим систему

$$\left.\begin{aligned}&-\beta\sin\theta(t)\theta'(t)=\gamma\sin\theta(t)\sin\varphi(t),\\&\alpha\sin\varphi(t)\cos\theta(t)\theta'(t)+\cos\varphi(t)\sin\theta(t)\varphi'(t)=\beta\sin\theta(t)\cos\varphi(t).\end{aligned}\right\} \tag{5.6.4}$$

Уравнения (5.6.4) удовлетворяются, когда $\theta(t)=k\pi$, где k — произвольные целые числа, а $\varphi(t)$ — произвольная дифференцируемая функция. В этом случае $y(t)=\pm\gamma^{-1}$ — решение уравнения (6.6.1). Пусть далее $\theta\neq k\pi$. В дальнейшем, где это не будет вызывать недоразумений, аргументы функций будем опускать. Преобразуем последнюю систему

$$\left.\begin{aligned}&\theta'(t)=-\gamma\,\beta^{-1}\sin\varphi(t),\\&\varphi'(t)=\beta\,\alpha^{-1}+\gamma\,\beta^{-1}\,ctg\,\theta(t)\frac{\sin^2\varphi(t)}{\cos\varphi(t)}.\end{aligned}\right\} \tag{5.6.5}$$

Поделим второе уравнение на первое

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=-N\sin\varphi-ctg\,\theta\,tg\,\varphi, \tag{5.6.6}$$

где $N=\beta^2\alpha^{-1}\gamma^{-1}>0$. Сделаем в нем замену $z=\cos\varphi$. Тогда

$\varphi = \arccos z$, $\dfrac{d\varphi}{d\theta} = -\, z'_\theta\,(1-z^2)^{\frac{-1}{2}}$, $tg\;\varphi = \pm\, z^{-1}\sqrt{1-z^2}$ и приходим к уравнению Абеля второго рода

$$z\,z'_\theta\; = -ctg\,\theta \cdot z^2 + N\,z + ctg\,\theta\,. \tag{5.6.7}$$

Выполнив в (5.6.7) подстановку $z = -\,u^{-1}$, получим уравнение Абеля первого рода

$$u'_\theta\; = -ctg\,\theta \cdot u^3 + N\,u^2 + ctg\,\theta \cdot u\,. \tag{5.6.8}$$

Упростим его, выполнив замену переменных, $u = h(\xi)\sin(\theta)$, $\xi = -\cos(\theta)$

$$h'_\xi = \xi\, h^3 + N\,h^2\,. \tag{5.6.9}$$

Выполнив, наконец, замену $h(\xi) = g(\xi)\xi^{-1}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$g'_\xi = (g^3 + N\,g^2 + g)\xi^{-1}\,. \tag{5.6.10}$$

а) При $N = 2$ имеем разложение, $\dfrac{1}{g^3 + 2\,g^2 + g} = \dfrac{1}{g} - \dfrac{1}{1+g} - \dfrac{1}{(1+g)^2}$ и искомая функция получается в неявном виде

$$\frac{g(\xi)}{1+g(\xi)}\exp\left(\frac{1}{1+g(\xi)}\right) = C\,\xi\,, \tag{5.6.11}$$

где C — постоянная интегрирования. Искомое решение выражается через W - функцию Ламберта в виде

$$g(\xi) = -\frac{W(-C\,\xi\,/\,e)}{1+W(-C\,\xi\,/\,e)}\,, \tag{5.6.12}$$

где e — основание натурального логарифма.

б) При $N < 2$ из уравнения (5.6.10) находим

$$\frac{N}{\sqrt{4-N^2}} \cdot arctg\left(\frac{2\,g(\xi) + N}{\sqrt{4-N^2}}\right) = \ln\left(\frac{g(\xi)\sqrt{4-N^2}}{2C\,\xi\sqrt{1+Ng(\xi)+g(\xi)^2}}\right). \tag{5.6.13}$$

Явное выражение для функции $g(\xi)$ нам неизвестно.

в) При $N > 2$ интегрирование уравнения (5.6.10) приводит к уравнению

$$\frac{g(\xi)}{\sqrt{1+Ng(\xi)+g(\xi)^2}}\left(\frac{g(\xi)-g_1}{g(\xi)-g_2}\right)^{\frac{N}{2\sqrt{N^2-4}}}=C\xi\,, \qquad (5.6.14)$$

где $g_1=\dfrac{-N-\sqrt{N^2-4}}{2}$, $g_2=\dfrac{-N+\sqrt{N^2-4}}{2}$ — корни многочлена $g(\xi)^2+$ $+Ng(\xi)+1$. Общее решение этого уравнения нам неизвестно. При $N=N_k=$ $=\dfrac{4k-2}{\sqrt{(2k-1)^2-1}}$, где $k=2,3,...$, уравнение (5.6.14) принимает более простой вид $\dfrac{g(\xi)\left(2g(\xi)+N+\sqrt{N^2-4}\right)^{k-1}}{\left(2g(\xi)+N-\sqrt{N^2-4}\right)^{k}}=C\xi$ или выразив через k:

$$\frac{g(\xi)\left(g(\xi)+\sqrt{k/(k-1)}\right)^{k-1}}{\left(g(\xi)+\sqrt{(k-1)/k}\right)^{k}}=C\xi\,. \qquad (5.6.15)$$

Последнее уравнение также имеет сложное решение.

Рассмотрим последний случай, положив $k=2$ ($N=N_2=3/\sqrt{2}$), тогда $\dfrac{g(\xi)\left(g(\xi)+\sqrt{2}\right)}{\left(g(\xi)+\sqrt{1/2}\right)^2}=C\xi$ и $g(\xi)^2+\sqrt{2}\,g(\xi)+C\xi/2(1-C\xi)=0$. Имеем корни $g_{1,2}(\xi)=\dfrac{-\sqrt{1-C\xi}\pm 1}{\sqrt{2}\sqrt{1-C\xi}}$. Возьмем $g_1(\xi)=\dfrac{-\sqrt{1-C\xi}-1}{\sqrt{2}\sqrt{1-C\xi}}$. В силу цепочки замен найдем общее решение уравнения (5.6.6)

$$\varphi(\theta)=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}\cos(\theta)\sqrt{1+C\cos(\theta)}}{\sin(\theta)(\sqrt{1+C\cos(\theta)}+1)}\right). \qquad (5.6.16)$$

Подставляя (5.6.16) в первое уравнение системы (5.6.5) для отыскания функции $\theta(t)$, получим

$$\int\frac{\sin(\theta)(1+\sqrt{1+C\cos(\theta)})}{\sqrt{\sin(\theta)^2\left(1+\sqrt{1+C\cos(\theta)}\right)^2-2\cos(\theta)^2(1+C\cos(\theta))}}d\theta=\frac{-1}{\sqrt{3}}t+C_1.$$

Не будем приводить здесь вычисление интеграла, выражающегося через эллиптические функции [31, 6]. Упростим вычисления, положив $\boldsymbol{C}=0$. Тогда $\boldsymbol{\varphi(\theta)}=\mathbf{arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{ctg(\theta)}\right)$, а из предыдущего интеграла $\boldsymbol{\theta(t)}=$ $=\mathbf{arccos}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\sqrt{2}}-\boldsymbol{C}_1\sqrt{3}\right)\right)$. Имеем $\boldsymbol{\theta(t)}=\mathbf{arccos}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\sqrt{2}}-\boldsymbol{C}_1\sqrt{3}\right)\right)$, $\boldsymbol{\varphi(t)}=\mathbf{arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{ctg}\left(\mathbf{arccos}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\sqrt{2}}-\boldsymbol{C}_1\sqrt{3}\right)\right)\right)\right)$ или после упрощения

$$\boldsymbol{\theta(t)}=\mathbf{arccos}\left(\sqrt{2/3}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{\tau})\right),\ \boldsymbol{\varphi(t)}=\mathbf{arccos}\left(-\frac{\mathbf{sin}(\boldsymbol{\tau})}{\sqrt{1+2\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\tau})^2}}\right), \tag{5.6.17}$$

где $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{t}/\sqrt{2}-\boldsymbol{C}_1\sqrt{3}$, дают серию решений системы (5.6.5) при $\boldsymbol{C}=0$ и $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}_2=3/\sqrt{2}$; $\boldsymbol{\alpha}=\sqrt{2}$, $\boldsymbol{\beta}=\sqrt{3}$, $\boldsymbol{\gamma}=1$. Соответствующая серия решений уравнения (5.6.2) такова:

$$\boldsymbol{y(t)}=\sqrt{2/3}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{\tau}). \tag{5.6.18}$$

Нетрудно проверить, что соотношения (5.6.3) выполняются.

Глава 6. Результантные матрицы функционально-дифференциальных операторов

В этой главе отправляясь от результантных матриц систем косых многочленов от двух коммутирующих «переменных» [52], мы построим результантные матрицы систем линейных функционально−дифференциальных операторов различных типов. Иной подход к построению результантных матриц операторов от двух частных производных предложен в [73]. Дальнейшее развитие понятие результанта ЛФДО получило, например, в работах [102, 103].

Согласимся использовать верхний индекс не элементарного оператор $\boldsymbol{A_m^k}$ для обозначения его номера, целые степени операторов обозначать как $(\boldsymbol{A_m^k})^s = \underbrace{\boldsymbol{A_m^k} \times \cdots \times \boldsymbol{A_m^k}}_{s-\text{раз}}$, $\boldsymbol{s}$ — степень оператора $\boldsymbol{A_m^k}$ порядка $\boldsymbol{m}$ с номером $\boldsymbol{k}$.

6.1. Кольцо линейных операторов в частных производных

Определим $\boldsymbol{K}$ как поле функций двух вещественных или комплексных переменных $\boldsymbol{f(x,y)}$, $\boldsymbol{\delta_x}$, $\boldsymbol{\delta_y}$ — дифференцирования поля $\boldsymbol{K}$ по переменным $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, соответственно. В поле $\boldsymbol{K}$ определены частные производные $\boldsymbol{\delta_x^i \delta_y^j f = \delta_y^j \delta_x^i f = \dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial^i x \partial^j y}}$, $\forall \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{K}$ и $\forall \boldsymbol{i,j} \in N$.

Кольцо косых многочленов $\boldsymbol{K[u,v]}$ при $\boldsymbol{\alpha_u = \iota}$, $\boldsymbol{\alpha_v = \iota}$, $\boldsymbol{\beta_u = \delta_x} = \partial / \partial \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\beta_v = \delta_y} = \partial / \partial \boldsymbol{y}$ изоморфно кольцу $\boldsymbol{K[\delta_x,\delta_y]}$ обыкновенных линейных операторов в частных производных (ЛОЧП). В кольце $\boldsymbol{K[\delta_x,\delta_y]}$ определены операции перехода к формально сопряженным операторам, индуцированные соответствующими операциями в кольце косых многочленов $\boldsymbol{K[u,v]}$:

— в кольце $\boldsymbol{K[\delta_x,\delta_y]}$ по формуле

$$\boldsymbol{A_m^*(a;\delta_x,\delta_y)} = \sum_{\boldsymbol{i}=0}^{\boldsymbol{p}} \sum_{\boldsymbol{j}=0}^{\boldsymbol{q}} (-1)^{i+j} \boldsymbol{\delta_x^i \delta_y^j (a_{ij} \varepsilon)}; \tag{6.1.1}$$

— в кольце $\boldsymbol{K[\delta_y][\delta_x]}$ сопряженный оператор определяется в соответствии с формулой

$$L_p^{*x}(A(\delta_y);\delta_x)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\delta_x^i(\tau_y(A_{t_i}(a;\delta_y)\varepsilon)),\qquad(6.1.2)$$

где символ L_p^{*x} означает сопряженный по δ_x оператор, а τ_y — операция сопряжения в кольце $K[\delta_y]$; поэтому оператор L_p^{*x} называется τ_y-сопряженным;

— в кольце $K[\delta_x][\delta_y]$ сопряженный оператор определяется в соответствии с формулой

$$L_q^{*y}(A(\delta_x);\delta_y)=\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\delta_y^j(\tau_x(B_{r_j}(a;\delta_x)\varepsilon)),\qquad(6.1.3)$$

где символ L_q^{*y} означает сопряженный по δ_y оператор, а τ_x — операция сопряжения в кольце $K[\delta_x]$; поэтому оператор L_q^{*y} называется τ_x- сопряженным.

Пример 6.1.1. Найти сопряженные операторы A_2^*, L_2^{*x} к оператору $A_2=a_{11}\delta_x\delta_y+a_{20}\delta_x^2+a_{01}\delta_y+a_{00}\varepsilon$. Проверить тождество $L_2^{*x*x}=A_2$.

Оператор, A_2^* сопряженный по обоим аргументам δ_x, δ_y к оператору A_2 согласно (6.1.1) имеет вид

$$\begin{aligned}A_2^*=a_{11}\delta_x\delta_y+a_{20}\delta_x^2+(a_{11y}{}'+2a_{20x}{}')\delta_x+(a_{11x}{}'-a_{01})\delta_y+\\+(a_{11xy}{}''+a_{20xx}{}''-a_{01y}{}'+a_{00})\varepsilon\end{aligned}.\qquad(6.1.4)$$

Вычислим оператор, L_2^{*x} сопряженный по переменной x к оператору A_2, для этого запишем $A_2=L_2=a_{21}\delta_x^2+(a_{11}\delta_y)\delta_x+(a_{01}\delta_y+a_{00}\varepsilon)$. Согласно (6.1.2) имеем

$$L_2^{*x}=\delta_x^2(\tau_y(a_{21}\varepsilon))-\delta_x(\tau_y(a_{11}\delta_y))+\tau_y(a_{11}\delta_y)+\tau_y(a_{00}\varepsilon).$$

Вычисляя, найдем

$$\begin{aligned}L_2^{*x}=\tau_y(a_{21}\varepsilon)\delta_x^2+\{2(\tau_y(a_{11}\varepsilon))'_x-(\tau_y(a_{11}\delta_y))\}\delta_x+\\+\{(\tau_y(a_{21}\varepsilon))''_{xx}-(\tau_y(a_{11}\delta_y))'_x+\tau_y(a_{01}\delta_y)+\tau_y(a_{00}\varepsilon)\}.\end{aligned}$$

Легко проверяются тождества $A_2^{**}=A_2$, $(L_2^{*x})^{*x}=L_2$.

Для коэффициентов произведения $L_{p_1}(B(b;\delta_y);\delta_x)\,L_{p_2}(C(c;\delta_y);\delta_x)=$ $=L_{p_1+p_2}(A(a;\delta_y);\delta_x)=\sum\limits_{k=0}^{p_1+p_2}A^k(a;\,\delta_y)\delta_x^k$ найдем формулу, аналогичную (1.2.5)

$$A^k(a;\delta_y)=\sum_{s=\max(0,k-p_2)}^{\min(p_1,k)}\sum_{i=s}^{p_1}\tbinom{i}{s}B^i(b;\delta_y)C^{k-s}(\delta_x^{i-s}c;\delta_y)\,, \tag{6.1.5}$$

где символом $C^{k-s}(\delta_x^{i-s}c;\delta_y)$ обозначен результат применения $i-s$ раз оператора δ_x к коэффициентам оператора $C^{k-s}(c;\delta_y)$.

Отсюда при $p_1=r$, $B^r(b;\delta_y)=\varepsilon$, $B^i(b;\delta_y)=0$ $\forall i\neq r$ получим коэффициенты оператора $\delta_x^r L_{p_2}(C(c;\delta_y);\delta_x)=\sum\limits_{k=0}^{r+p_2}A^k(C(a;\,\delta_y))\delta_x^k$

$$A^{r,k}(C(c;\delta_y))=\sum_{s=\max(0,k-p_2)}^{\min(r,k)}\tbinom{r}{s}C^{k-s}(\delta_x^{r-s}c;\delta_y)\,,\; k=\overline{0,\,p_2+r}\,. \tag{6.1.6}$$

Формулу (6.1.6) можно записать в виде

$$A^{r,k}(\delta_y)=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{r}\tbinom{r}{i}C^{k-i)}(\delta_x^{r-i}c;\delta_y), & (r\leq k)\vee(r>k)\wedge(k\leq p_2),\\ \sum\limits_{i=k-p_1}^{r}\tbinom{r}{i}C^{k-i}(\delta_x^{r-i}c;\delta_y), & (r\leq k)\vee(r>k)\wedge(k>p_2).\end{cases} \tag{6.1.7}$$

Теорема 6.1.1. Коэффициенты $A^{r,k}(\delta_y)$ обладают следующими свойствами:

1) $A^{0,k}(C(c;\delta_y))=C^k(c;\delta_y)$, $k=\overline{0,p_2}$;

2) $A^{r-j,r+p_2-j}(C(c;\delta_y))=C^{p_2}(c;\delta_y)$, $j=\overline{1,r}$;

3) $A^{r,k}(C(c;\delta_y))=$ $A^{r-1,k-1}(C(c;\delta_y))+A^{r-1,k}(C(\delta_x c;\delta_y))$.

Свойства 1, 2 и 3 аналогичны свойствам из теоремы 1.2.3 при $\alpha=\varepsilon$ и $\beta=\delta_x$. ■

Рассматривая операторы как элементы кольца $K[\delta_x][\delta_y]$, для коэффициентов $A^k(a;\delta_x)$ произведения $L_{q_1+q_2}(A(a;\delta_x);\delta_y)=\sum_{k=0}^{q_1+q_2}A^k(a;\delta_x)\delta_y^k$ операторов $L_{q_1}(B(\delta_x);\delta_y)$, $L_{q_2}(C(\delta_x);\delta_y)$ получим

$$A^k(a;\delta_x)=\sum_{s=\max(0,k-q_2)}^{\min(q_1,k)}\sum_{i=s}^{q_1}\binom{i}{s}B^i(b;\delta_x)C^{k-s}(\delta_y^{i-s}c;\delta_x), \qquad (6.1.8)$$

Отсюда при $q_1=r$, $B^r(b;\delta_y)=\varepsilon$, $B^i(b;\delta_y)=0$, $\forall i\neq r$, аналогично (6.1.6), получим коэффициенты оператора $\delta_y^r L_{q_2}(C(c;\delta_x);\delta_y)$

$$A^{r,k}(C(c;\delta_x))=\sum_{i=\max(0,k-q_2)}^{\min(r,k)}\binom{r}{s}C^{k-s}(\delta_y^{r-s}c;\delta_x),\ k=\overline{0,q_2+r}. \qquad (6.1.9)$$

где символ $C^{k-s}(\delta_y^{r-s}c;\delta_x)$ означает, что к коэффициентам оператора $C^{k-s}(c;\delta_x)$ применена $r-s$ степень оператора δ_y.

Иначе коэффициенты $A^{r,k}(C(c;\delta_x))$ записываются так

$$A^{r,k}(\delta_x)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}C^{k-i)}(\delta_y^{r-i}c;\delta_x), & (r\le k)\vee(r>k)\wedge(k\le q_2),\\ \sum_{i=k-p_1}^{r}\binom{r}{i}C^{k-i}(\delta_y^{r-i}c;\delta_x), & (r\le k)\vee(r>k)\wedge(k>q_2).\end{cases} \qquad (6.1.10)$$

Коэффициенты $A^{r,k}(C(c;\delta_x))$ обладают свойствами, которые получаются из теоремы 6.1.1 заменой δ_y на δ_x, δ_x на δ_y и p_2 на q_2.

Пример 6.1.2. Найти коэффициенты произведения операторов $L_1^1=b_{10}\delta_x+b_{01}\delta_y+b_{00}\varepsilon$, $L_1^2=c_{10}\delta_x+c_{01}\delta_y+c_{00}\varepsilon$, рассматривая их как элементы кольца $K[\delta_y][\delta_x]$. Имеем $L_1^1=(b_{10}\varepsilon)\delta_x+(b_{01}\delta_y+b_{00}\varepsilon)=B^1(\delta_y)\delta_x+B^0(\delta_y)$, $L_1^2=(c_{10}\varepsilon)\delta_x+(c_{01}\delta_y+c_{00}\varepsilon)=C^1(\delta_y)\delta_x+C^0(\delta_y)$. Коэффициенты произведения $L_1^1L_1^2=\sum_{k=0}^{2}A^k\delta_x^k$ находим по формуле (6.1.5): $A^0=B^1C^1(\delta_x b;\delta_y)+$ $+B^0C^0(c;\delta_y)$, $A^1=B^0C^1(c;\delta_y)+B^1C^1(\delta_x c;\delta_y)+B^1C^0(c;\delta_y)$, $A^2=B^1C^1$.

6.2. Линейные операторы в частных производных

Рассмотрим задачу отыскания ПНОД множества операторов

$A_{n_k}(a_k;\delta_x,\delta_y)\in K[\delta_x,\delta_y]$, $k=\overline{1,m}$. Для определенности считаем, что операторы являются элементами кольца $K[\delta_y][\delta_x]$, то есть $A_{n_k}=A_{p_k}(A(\delta_y);\delta_x)=$ $=\sum_{i=0}^{p_k}A_{t_i}^k(a;\delta_y)\delta_x^i$, где $A_{t_i}^k(a;\delta_y)$ операторы некоторых порядков t_i. Положим $p_1=\max\limits_{1\le k\le m}(p_k)$, $p_m=\min\limits_{1\le k\le m}(p_k)=d_0$, $A_{d_j}=\text{ПНОД}(A_{d_{j-1}},A_{p_j})$, где d_j порядок оператора по δ_x, $j=\overline{1,m-1}$, $p_1\ge\cdots\ge p_m=d_0\ge d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_{m-1}=d$.

Сопоставим множеству операторов уравнение

$$\sum_{k=1}^{m}X_{s_k}(X(f_k;\delta_y);\delta_x)L_{p_k}(A(a;\delta_y);\delta_x)=0, \qquad (6.2.1)$$

где $s_k=p_1+p_m-p_k-1$, $X(f_k;\delta_y)$ неизвестные коэффициенты подлежащие определению в кольце $K[\delta_y]$.

Исходя из уравнения (6.2.1) и свойства 3) теоремы 6.1.1 построим правую результатную матрицу $R^m(\delta_y)$. Эта матрица, имеет вид (1.7.3) и размерность $\left(\sum_{k=1}^{m}(s_k+1)\right)(p_1+p_m)$. Она составлена из подматриц

$$M_k(\delta_y)=\left(\begin{matrix} A^{s_k,p_1+p_m-1}(a;\delta_y) & 0 & \cdots & 0\\ A^{s_k,p_1+p_m-2}(a;\delta_y) & A^{s_k-1,p_1+p_m-2}(a;\delta_y) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A^{s_k,p_k}(a;\delta_y) & A^{s_k-1,p_k}(a;\delta_y) & \cdots & A^{0,p_k}(a;\delta_y)\\ A^{s_k,p_k-1}(a;\delta_y) & A^{s_k-1,p_k-1}(a;\delta_y) & \cdots & A^{0,p_k-1}(a;\delta_y)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A^{s_k,1}(a;\delta_y) & A^{s_k-1,1}(a;\delta_y) & \cdots & A^{0,1}(a;\delta_y)\\ A^{s_k,0}(a;\delta_y) & A^{s_k-1,0}(a;\delta_y) & \cdots & A^{0,0}(a;\delta_y) \end{matrix}\right)\Bigg), \qquad (6.2.2)$$

имеющих вид (1.7.2) и размерность $(s_k+1)(p_1+p_m)$, отвечающих операторам $A_{n_k}(a;\delta_x,\delta_y)=L_{p_k}(A(a;\delta_y);\delta_x)=\sum_{j=0}^{p_k}A_{t_j}(a;\delta_y)\delta_x^j$, соответственно.

Расположив операторы по степеням δ_y, $A_{n_k}(a;\delta_x,\delta_y)=$

$= L_{q_k}(B\ (b;\delta_x);\ \delta_y) = \sum_{j=0}^{q_k} B_{r_j}(b;\delta_x)\delta_y^j$, построим правую результатную матрицу $R^m(\delta_x)$. Положим $q_1 = \max\limits_{1\le k\le m}(q_k)$, $q_m = \min\limits_{1\le k\le m}(q_k) = \tilde{d}_0$, $A_{\tilde{d}_j} = \text{ПНОД}(A_{\tilde{d}_{j-1}}, A_{q_j})$, где $\tilde{d}_j$ порядки операторов по δ_y, $j = \overline{1, m-1}$, $q_1 \ge \cdots \ge q_m = \tilde{d}_0 \ge \ge \tilde{d}_1 \ge \tilde{d}_2 \ge \cdots \ge \tilde{d}_{m-1} = \tilde{d}$.

Соответствующее уравнение теперь имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} X_{\tilde{s}_k}(X(f_k;\delta_x);\ \delta_y)A_{q_k}(A(\delta_x);\delta_y) = 0, \qquad (6.2.3)$$

где $\tilde{s}_k = q_1 + q_m - q_k - 1$, $X(f_k;\delta_x) = \sum_{i=0}^{\tilde{s}_k} f_{k,i}\delta_x^i$ неизвестные коэффициенты подлежащие определению в кольце $K[\delta_x]$, $f_{k,i} \in K$.

Правая результатная матрица $R^m(\delta_x)$ размерности, $\left(\sum_{k=1}^{m}(\tilde{s}_k + 1)\right)(q_1 + q_m)$, где $\tilde{s}_k = q_1 + q_m - q_k - 1$ составлена из подматриц

$$M_k(\delta_x) = \left(\begin{pmatrix} A^{\tilde{s}_k, q_1+q_m-1}(\delta_x) & A^{\tilde{s}_k, q_1+q_m-2}(\delta_x) & \cdots\cdots A^{\tilde{s}_k,0}(\delta_x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad \cdots 0 \quad A^{0,q_k}(\delta_x) & A^{0,q_k-1}(\delta_x) & \cdots A^{0,0}(\delta_x) \end{pmatrix}\right)^T \qquad (6.2.4)$$

размерности $(\tilde{s}_k + 1) \times (q_1 + q_m)$, отвечающих операторам $A_{n_k} = = L_{q_k}(C(a;\delta_x);\delta_y)$.

Здесь и далее такая запись результантных матриц используется в целях экономии места.

Из рассмотрения уравнения $\sum_{j=0}^{m} Y_{\tilde{s}_j} A^*_{n_j}(a;\delta_x,\delta_y) = 0$ определяются левые результантные матрицы $R^{*m}(\delta_y) = (M_1^*(\delta_y), ..., M_m^*(\delta_y))^T$, $R^{*m}(\delta_x) = = (M_1^*(\delta_x), ..., M_m^*(\delta_x))^T$, составленные из подматриц

$$M_k^*(\delta_y) = \left(\begin{pmatrix} A^{*s_k, p_1+p_m-1}(\delta_y) \; A^{*s_k, p_1+p_m-2}(\delta_y) \cdots A^{*s_k,0}(\delta_y) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad \cdots 0 \; A^{*0,p_k}(\delta_y) \; A^{*0,p_k-1}(\delta_y) \cdots \; A^{*0,0}(\delta_y) \end{pmatrix}\right)^T . \qquad (6.2.5)$$

Аналогично

$$M_k^*(\delta_x) = \left(\begin{pmatrix} A^{*\tilde{s}_k, q_1+q_m-1}(\delta_x) \; A^{*\tilde{s}_k, q_1+q_m-2}(\delta_x) \; \cdots \; A^{*\tilde{s}_k,0}(\delta_x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad \cdots 0 \; A^{*0,q_k}(\delta_x) \; A^{*0,q_k-1}(\delta_x) \; \cdots \; A^{*0,0}(\delta_x) \end{pmatrix}\right)^T . \qquad (6.2.6)$$

Пример 6.2.1. Написать правую результантную матрицу операторов относительно δ_x: $L_2(C(c;\delta_y);\delta_x) = C^2(c;\delta_y)\delta_x^2 + C^1(c;\delta_y)\delta_x + C^0(c;\delta_y)\varepsilon$, $M_3(E(e;\delta_y);\delta_x) = E^3(e;\delta_y)\delta_x^3 + E^2(e;\delta_y)\delta_x^2 + E^1(e;\delta_y)\delta_x + E^0(e;\delta_y)\varepsilon$.

Здесь $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $s_1 = 2$, $s_2 = 1$. Поэтому оператору $L_2(C(c;\delta_y);\delta_x)$ отвечает матрица размерности 5×3

$$M_1(\delta_y) = \left(\begin{pmatrix} C^2(c;\delta_y) & 0 & 0 \\ C^1(c;\delta_y) + 2C^2(\delta_x c;\delta_y) & C^2(c;\delta_y) & 0 \\ \begin{array}{l} C^0(c;\delta_y) + 2C^1(\delta_x c;\delta_y) + \\ \qquad + C^2(\delta_x^2 c;\delta_y) \end{array} & C^1(c;\delta_y) + C^2(\delta_x c;\delta_y) & C^2(c;\delta_y) \\ 2C^0(\delta_x c;\delta_y) + C^1(\delta_x^2 c;\delta_y) & C^0(c;\delta_y) + C^1(\delta_x c;\delta_y) & C^1(c;\delta_y) \\ C^0(\delta_x^2 c;\delta_y) & C^0(\delta_x c;\delta_y) & C^0(c;\delta_y) \end{pmatrix}\right),$$

а оператору $M_3(E(e;\delta_y);\delta_x)$ матрица размерности 5×2

$$M_2(\delta_y) = \left(\begin{pmatrix} E^3(e;\delta_y) & 0 \\ E^2(e;\delta_y) + E^3(\delta_x e;\delta_y) & E^3(e;\delta_y) \\ E^1(e;\delta_y) + E^2(\delta_x e;\delta_y) & E^2(e;\delta_y) \\ E^0(e;\delta_y) + E^1(\delta_x e;\delta_y) & E^1(e;\delta_y) \\ E^0(\delta_x e;\delta_y) & E^0(e;\delta_y) \end{pmatrix}\right),$$

элементы которых вычисляются по теореме 6.1.1. Таким образом, правая результантная матрица операторов $L_2(C(c;\delta_y);\delta_x)$, $M_3(E(e;\delta_y);\delta_x)$ является конкатенацией этих матриц $M^2(\delta_y) = (M_1(\delta_y), M_2(\delta_y)))$.

Обозначим через d_x^* порядок ЛНОД по δ_x, d_y^* — порядок ЛНОД по δ_y, $r_x^* = rang\, R^{*m}(\delta_y)$, $r_y^* = rang\, R^{*m}(\delta_x)$ левые ранги левых результантных матриц множества операторов.

Имеет место теорема, являющаяся следствием теоремы 1.4.1.

Теорема 6.2.1. Справедливы соотношения:

$r_x + d_x = p_1 + p_m$, $r_y + d_y = q_1 + q_m$;

$r_x^* + d_x^* = p_1 + p_m$; $r_y^* + d_y^* = q_1 + q_m$.

Приведем несколько следствий.

Следствие 6.2.1. Справедливы соотношения:

$r_x - r_x^* = d_x^* - d_x$; $r_y - r_y^* = d_y^* - d_y$.

Следствие 6.2.2. Для того чтобы операторы $A_{n_i}(a_i;\delta_x,\delta_y)$ были взаимно просты в совокупности справа (слева) необходимо и достаточно выполнение условий:

$$r_x = p_1 + p_m,\ r_y = q_1 + q_m,\ (r_x^* = p_1 + p_m,\ r_x^* = q_1 + q_m).$$

Следствие 6.2.3.. Для того чтобы операторы $A_{n_i}(a_i;\delta_x,\delta_y)$ имели правый (левый) наибольший общий делитель порядка:

1) $d_x \neq 0$ по δ_x, $d_y \neq 0$ по δ_y ($d_x^* \neq 0$ по δ_x, $d_y^* \neq 0$ по δ_y);

2) $d_x = 0$, $d_y \neq 0$, ($d_x^* = 0, d_y^* \neq 0$);

3) $d_x \neq 0$, $d_y = 0$, ($d_x^* \neq 0$, $d_y^* = 0$);

4) $d_x = 0$, $d_y = 0$, ($d_x^* = 0$, $d_y^* = 0$),

необходимо и достаточно выполнение следующих условий, соответственно:

1) $r_x < p_1 + p_m$, $r_y < q_1 + q_m$, ($r_x^* < p_1 + p_m$, $r_y^* < q_1 + q_m$);

2) $r_x = p_1 + p_m$, $r_y < q_1 + q_m$, ($r_x^* = p_1 + p_m$, $r_y^* < q_1 + q_m$);

3) $r_x < p_1 + p_m$, $r_y = q_1 + q_m$, ($r_x^* < p_1 + p_m$, $r_y^* = q_1 + q_m$);

4) $r_x = p_1 + p_m$, $r_y = q_1 + q_m$, ($r_x^* = p_1 + p_m$, $r_y^* = q_1 + q_m$).

Доказательство. Следует из теоремы 1.7.5.

В приводимых ниже примерах для отыскания ПНОД будем пользоваться модификацией алгоритма приведенного в пункте 1.10.

Пример 6.2.2. Вычислить ПНОД операторов $\boldsymbol{L}_3^1 = \boldsymbol{\delta}_y\boldsymbol{\delta}_x^2 + \boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y\boldsymbol{\delta}_x + \boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{L}_3^2 = \boldsymbol{\delta}_y^2\boldsymbol{\delta}_x + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y\boldsymbol{\delta}_x$.

Решение. А) Сначала запишем операторы как элементы кольца $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\delta}_y][\boldsymbol{\delta}_x]$, расположив их по убыванию степеней $\boldsymbol{\delta}_x$: $\boldsymbol{L}_3^1 = \boldsymbol{\delta}_y\boldsymbol{\delta}_x^2 + (\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{L}_3^2 = (\boldsymbol{\delta}_y^2 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y)\boldsymbol{\delta}_x$. Найдем минимальное решение уравнения

$$(\boldsymbol{a}_1)\,(\boldsymbol{\delta}_y\boldsymbol{\delta}_x^2 + (\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\delta}_x) + (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\delta}_x + \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{\varepsilon})((\boldsymbol{\delta}_y^2 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y)\boldsymbol{\delta}_x) = 0, \qquad (6.2.7)$$

коэффициенты, которого принадлежат кольцу $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\delta}_y]$. Приравнивая коэффициента при одинаковых степенях $\boldsymbol{\delta}_x$ нулю, получим систему

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{\delta}_y^2 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y) = 0, \\ \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{b}_0(\boldsymbol{\delta}_y^2 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y) = 0. \end{array}\right\} \qquad (6.2.8)$$

Приведем систему к треугольному виду. Для этого вычислим левое наименьшее общее кратное коэффициентов при $\boldsymbol{a}_1$ — ЛНОК($\boldsymbol{\delta}_y, \boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{\varepsilon}$)= $= \boldsymbol{\delta}_y(\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon}) = (\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{\varepsilon})$ и вычтем из второго уравнения, умноженного справа на $\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{\varepsilon}$, первое, умноженное справа на $\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon}$, получим

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{\delta}_y^2 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y) = 0, \\ \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{\delta}_y^2 + \boldsymbol{\delta}_y - (\boldsymbol{\delta}_y^2 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y)(\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon})) + \boldsymbol{b}_0(\boldsymbol{\delta}_y^2 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y)(\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{\varepsilon}) = 0. \end{array}\right\}$$

Видим, что правый ранг правой результантной матрицы равен двум, следовательно, операторы имеют ПНОД первого порядка по $\boldsymbol{\delta}_x$. После деления первого уравнения справа на $\boldsymbol{\delta}_y$, а второго уравнения справа на $\boldsymbol{\delta}_y^2 + (1 + \boldsymbol{x})\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon}$, получим

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \\ \boldsymbol{b}_1(-\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y - \boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{\delta}_y = 0. \end{array}\right\}$$

Из первого уравнения системы $\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon})$. Минимальное решение второго $b_1 = \delta_y$, $b_0 = y\delta_y + 2\varepsilon$. Таким образом, минимальное решение уравнения (6.2.7) таково $a_1 = -\delta_y(\delta_y + x\varepsilon)$, $b_1\delta_x + b_0\varepsilon = \delta_y\delta_x + y\delta_y + 2\varepsilon$.

Найдем теперь минимальное решение уравнения $-\delta_y(\delta_y + x\varepsilon)X + {}$ $+(\delta_y\delta_x + y\delta_y + 2\varepsilon)Y = 0$. Чтобы избежать решения дифференциальных уравнений перейдем к сопряженным операторам $X^*(-\delta_y^2 + x\delta_y) + {}$ $+Y^*(\delta_y\delta_x - y\delta_y + \varepsilon) = 0$. Подставив $X^* = f_1\delta_x + f_0\varepsilon$, $Y^* = g_1$, где $f_1, f_0, g_1 \in K[\delta_y]$, в уравнение, и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях δ_x, найдем $f_1 = \delta_y$, $f_0 = -y\delta_y$, $g_1 = -\delta_y^2 + x\delta_y$. Таким образом, $X^* = \delta_x\delta_y - y\delta_y$, $Y^* = -\delta_y^2 + x\delta_y$ или, переходя к сопряженным, $X = \delta_x\delta_y + y\delta_y + \varepsilon$, $Y = -\delta_y^2 - x\delta_y$. Поэтому из минимальности найденного решения $L_3^1 = (\delta_x\delta_y + y\delta_y + \varepsilon)(f\delta_x + g)$, $L_3^2 = (\delta_y^2 + x\delta_y)(f\delta_x + g)$, где $f, g \in K[\delta_y]$. Разрешив любое из этих уравнений относительно f, g, получим ПНОД$(L_3^1, L_3^2) = \delta_x$.

Б) Поступим иначе, расположив операторы по убыванию степеней δ_y как элементы кольца $K[\delta_x][\delta_y]$. Имеем, $L_3^1 = (\delta_x^2 + y\delta_x)\delta_y + \delta_x$, $L_3^2 = {}$ $= \delta_x\delta_y^2 + x\delta_x\delta_y$. Найдем минимальное решение уравнения

$$(a_1\delta_y + a_0\varepsilon)((\delta_x^2 + y\delta_x)\delta_y + \delta_x) + b_0(\delta_x\delta_y^2 + x\delta_x\delta_y) = 0, \qquad (6.2.9)$$

коэффициенты которого теперь элементы кольца $K[\delta_x]$. Приравнивая коэффициента при одинаковых степенях δ_y нулю, получим систему

$$\left.\begin{aligned} &a_1(\delta_x^2 + y\delta_x) + \qquad\qquad b_0\delta_x &= 0,\\ &a_1(2\delta_x) + a_0(\delta_x^2 + y\delta_x) + b_0x\delta_x) &= 0,\\ &a_0\delta_x &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что ранг правой результантной матрицы операторов в этом случае равен трем, поэтому операторы не имеют общих правых делителей, зависящих от δ_y.

Пример 6.2.3. $L_2^1 = \delta_x^2 + \delta_y\delta_x + y\delta_x + y\delta_y$, $L_2^2 = \delta_y\delta_x + x\delta_x + \delta_y^2 + x\delta_y$. Коэффициенты операторов принадлежат кольцу $K[\delta_y]$. Составим уравнение

$$(a_0\varepsilon)(\delta_x^2 + (\delta_y + y\varepsilon)\delta_x + y\delta_y) + (b_1\delta_x + b_0\varepsilon)((\delta_y + x\varepsilon)\delta_x + \delta_y^2 + x\delta_y) = 0.$$

Составим систему

$$\left.\begin{array}{llll} a_0\varepsilon + & b_1(\delta_y + x\varepsilon) & & = 0, \\ a_0(\delta_y + y\varepsilon) + & b_1(\delta_y^2 + x\delta_y + \varepsilon) + & b_0(\delta_y + x\varepsilon) & = 0, \\ a_0 y\delta_y + & b_1\delta_y + & b_0(\delta_y^2 + x\delta_y) & = 0. \end{array}\right\}$$

Приводя её к диагональному виду и сокращая, правые делители коэффициентов, получим

$$\left. a_0\varepsilon + b_1(\delta_y + x\varepsilon) = 0,\ b_1(-y\varepsilon) + b_0\varepsilon = 0. \right\}$$

Правый ранг правой результантной матрицы операторов равен двум, следовательно, имеется ПНОД первого порядка по δ_x.

Простейшее решение последней системы таково $a_0 = -\delta_y - x\varepsilon$, $b_1 = \varepsilon$, $b_0 = y\varepsilon$. Следовательно, минимальное решение уравнения таково $a_0 = -\delta_y - x\varepsilon$, $b_1\delta_x + b_0\varepsilon = \delta_x + y\varepsilon$. Из любого уравнения $L_2^1 = (\delta_x + y\varepsilon)\times$ $\times(f\delta_x + g)$, $L_2^2 = (\delta_y + x\varepsilon)(f\delta_x + g)$, где $f, g \in K[\delta_y]$ найдем ПНОД$(L_2^1, L_2^2) =$ $= \delta_x + \delta_y$.

Пример 6.2.4. Вычислить ПНОД операторов $L_3^1 = \delta_x^3 + x\delta_y\delta_x + y\delta_x +$ $+ \delta_y$, $L_3^2 = \delta_y\delta_x^2 + x\delta_y^2 + y\delta_y + \varepsilon$.

Коэффициенты операторов принадлежат кольцу $K[\delta_y]$. Имеем уравнение

$$(a_1\delta_x + a_0\varepsilon)\ (\delta_x^3 + (x\delta_y + y\varepsilon)\delta_x + \delta_y) + (b_2\delta_x^2 + b_1\delta_x + b_0\varepsilon)\times$$

$$\times(\delta_y\delta_x^2 + x\delta_y^2 + y\delta_y + \varepsilon) = 0. \quad (6.2.10)$$

Записываем систему для коэффициентов

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\varepsilon}+\quad \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{\delta}_y &&=0,\\
&\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{\varepsilon}+\quad \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\delta}_y &&=0,\\
&\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon})+\quad \boldsymbol{b}_2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y^2+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{\varepsilon})+\quad \boldsymbol{b}_0(\boldsymbol{\delta}_y^2+\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y) &&=0,\\
&\boldsymbol{a}_1(2\boldsymbol{\delta}_y)+\boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon})+\boldsymbol{b}_2(2\boldsymbol{\delta}_y^2)+\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y^2+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{\varepsilon}) &&=0,\\
&\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{\delta}_y+\quad \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\delta}_y^2+\quad \boldsymbol{b}_0(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y^2+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{\varepsilon}) &&=0.
\end{aligned}\right\}$$

Исключим неизвестные, умножая справа уравнения на подходящие операторы, и вычитая их из остальных уравнений. Получим

$$\left.\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\varepsilon}+\quad \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{\delta}_y=0,\ \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{\varepsilon}+\quad \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\delta}_y=0,\ \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{\delta}_y=0.\right\}$$

Видим, что ранг правой результантной матрицы равен трем, следовательно, операторы имеют ПНОД первого порядка по $\boldsymbol{\delta}_x$.

Вычеркивая по одной строке и одному столбцу, в которых стоят старшие коэффициенты искомых операторов, получим

$$\left.\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{\varepsilon}+\ \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\delta}_y=0,\ \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{\delta}_y=0.\right\}$$

Обнулим вычеркнутые коэффициенты $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_2=0$ и, решив последнюю систему, получим $\boldsymbol{a}_0=-\boldsymbol{\delta}_y$, $\boldsymbol{b}_0=0$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{\varepsilon}$. Минимальное решение уравнения (6.2.10) имеет вид $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{a}_0=-\boldsymbol{\delta}_y$, $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\delta}_x+\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\delta}_x$.

Наконец, решим уравнение $-\boldsymbol{\delta}_y\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{\delta}_x\boldsymbol{Y}_2=0$. Из которого находим $\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{\delta}_y$. Поэтому ПНОД$(\boldsymbol{L}_3^1,\boldsymbol{L}_3^2)=\boldsymbol{\delta}_x^2+\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon}$.

Пример 6.2.5. Решим предыдущий пример иначе, расположив операторы по степеням $\boldsymbol{\delta}_y$, $\boldsymbol{L}_3^1=\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_x\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{\delta}_x^3+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{L}_3^2=\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y^2+(\boldsymbol{\delta}_x^2+\boldsymbol{y})\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{\varepsilon}$. Коэффициенты операторов принадлежат кольцу $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\delta}_x]$. Имеем уравнение

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{\varepsilon})\,((\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_x+\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{\delta}_x^3+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_x)+\boldsymbol{b}_0\,(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_y^2+(\boldsymbol{\delta}_x^2+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\delta}_y+\boldsymbol{\varepsilon})=0\,. \quad (6.2.11)$$

Система для коэффициентов имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_x+\boldsymbol{\varepsilon})+\quad \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon} &&=0,\\
&\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{\delta}_x^3+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}_x)+\boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}_x+\boldsymbol{\varepsilon})+\boldsymbol{b}_0(\boldsymbol{\delta}_x^2+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon}) &&=0,\\
&\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\delta}_x+\quad \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{\varepsilon} &&=0.
\end{aligned}\right\}$$

Исключив неизвестные, получим

$$a_1\delta_x + b_0\varepsilon = 0, \; a_0(x\delta_x + \varepsilon) = 0.\}$$

Ранг правого результанта равен трем, следовательно, операторы имеют правый делитель первого порядка по δ_x. Простейшее решение предыдущей системы, отвечающее минимальному решению уравнения (6.2.11) таково $a_1\delta_y + a_0\varepsilon = \delta_y$, $b_0 = -\delta_x$, $a_0 = 0$. Таким образом, имеем уравнение $\delta_y Y_1 + {}$ $+(-\delta_x)Y_2 = 0$, то есть $Y_1 = \delta_x$, $Y_2 = \delta_y$. Поэтому ПНОД$(L_3^1, L_3^2) =$ $= \delta_x^2 + x\delta_y + y\varepsilon$.

6.3. Совместность линейных уравнений и факторизация операторов в частных производных

Линейные уравнения с некоммутативными коэффициентами применяются не только к отысканию общих делителей ЛОЧП, но и к исследованию линейных систем ЛУЧП на совместность и к факторизации ЛОЧП. Заметим, что отсутствие общих правых делителей у ЛОЧП не означает отсутствия нетривиальных решений у системы ЛУЧП.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией $z(x, y)$

$$A_{n_j}(a;\delta_x,\delta_y)z = 0, \; j = 1, 2, ..., m. \tag{6.3.1}$$

Теорема 6.3.1. Для того чтобы система (6.3.1) была только тривиально совместна достаточно, чтобы уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} A_{n_j}(a;\delta_x,\delta_y) = \varepsilon, \tag{6.3.2}$$

где $0 \le s_j \le n_1 + n_m - n_j - 1$, имело решение в кольце $K[\delta_x, \delta_y]$.

Достаточность. Предположение о разрешимости уравнения (6.3.2) и нетривиальной совместности системы (6.3.1) приводит к противоречию $\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} A_{n_j}(a;\delta_x,\delta_y)u(x,y) \equiv 0 = u(x,y)$ при $u(x,y) \ne 0$. ■

Пример 6.3.1. Рассмотрим систему уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

$$\left.\begin{aligned}(2\delta_x^2+\delta_x\delta_y-\delta_x-\delta_y-\varepsilon)z=0,\\ (\delta_x+\delta_y-2\varepsilon)z=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.3.3}$$

Умножим второе уравнение слева на $2\delta_x-\delta_y+3\varepsilon$ и вычтем из первого, получим эквивалентную систему

$$\left.\begin{aligned}(\delta_y^2-6\delta_y+5\varepsilon)z=0,\\ (\delta_x+\delta_y-2\varepsilon)z=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.3.4}$$

Очевидно, что операторы системы (6.3.3) не имеют правых общих делителей. Из (6.3.4) легко получаем общее решение системы $z=C_1\exp(-3x+5y)+C_2\exp(x+y)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Поэтому, хотя $\left|R(\delta_x)\right\|=-\delta_x^2-2\delta_x+3\varepsilon$, $\left|R(\delta_y)\right\|=\delta_y^2-6\delta_y+5\varepsilon$ не равны тождественно нулю, система совместна.

Установим, что уравнение (6.3.2) не разрешимо. Перепишем операторы системы в виде $L_1^1=(\delta_x-\varepsilon)\delta_y+2\delta_x^2-\delta_x-\varepsilon$, $L_1^2=\delta_y+\delta_x-2\varepsilon$. Здесь $q_1=q_2=1$, поэтому $s_1=s_2=0$ и уравнение (6.3.2) приобретает вид $X_0[(\delta_x-\varepsilon)\delta_y+2\delta_x^2-\delta_x-\varepsilon]+Y_0[\delta_y+\delta_x-2\varepsilon]=\varepsilon$.

Следовательно, должно быть $X_0(\delta_x-y)+Y_0\varepsilon=0$, $X_0(2\delta_x^2-\delta_x-\varepsilon)+$ $+Y_0(\delta_x-2\varepsilon)=\varepsilon$. Подставляя Y_0 из первого уравнения во второе, получим противоречивое соотношение $X_0(2\delta_x^2+\delta_x-3\varepsilon)=\varepsilon$.

Получим условия факторизуемости оператора $L_2(a;\delta_y,\delta_x)$.

Теорема 6.3.2. Для того чтобы оператор $L_2(a;\delta_y,\delta_x)$ делился справа на оператор $L(b;\delta_y,\delta_x)\ =b_{10}\delta_x+b_{01}\delta_y+b_{00}\varepsilon$ необходимо и достаточно при $b_{10}\neq 0$ выполнение условий

$$\left.\begin{aligned}a_{20}u^2-a_{11}u+a_{02}=0,\\ a_{20}[u_x'-uu_y'-2uv]+a_{11}[u_y'+v]+a_{10}u-a_{01}=0,\\ a_{20}[v_x'-uv_y'-v^2]+a_{11}+a_{10}-a_{00}=0,\end{aligned}\right\} \tag{6.3.5}$$

где $u=b_{01}/b_{10}$, $v=b_{00}/b_{10}$;

при $b_{01} \neq 0$ выполнения условий

$$\left.\begin{aligned} a_{02}u_1^2 - a_{11}u_1 + a_{20} = 0, \\ a_{02}[u_{1y}' - uu_{1x}' - 2u_1 v_1] + a_{11}[u_{1x}' + v_1] + a_{01}u_1 - a_{10} = 0, \\ a_{02}[v_{1y}' - u_1 v_{1x}' - v_1^2] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.3.6)$$

где $u_1 = b_{10} / b_{01}$, $v_1 = b_{00} / b_{01}$.

Если выполняются условия (6.3.5), а условия (6.3.6) не выполняются, то $b_{01} = 0$. При выполнении условий (6.3.6) и невыполнении условий (6.3.5) $b_{10} = 0$.

Доказательство. Расположим операторы $L_2(a;\delta_y,\delta_x) = \sum\limits_{0 \le i+j \le 2} a_{ij}\delta_x^i\delta_y^j$, $L(b;\delta_x,\delta_y) = \sum\limits_{0 \le i+j \le 1} b_{ij}\delta_x^i\delta_y^j$ сначала по степеням δ_x потом по степеням δ_y и составим правые результанты $\left|R(\delta_x)\right\|$, $\left|R(\delta_y)\right\|$. Получим

$$\left|R(\delta_y)\right\| = \left|\begin{matrix} a_{20}\varepsilon & a_{11}\delta_y + a_{10}\varepsilon & a_{02}\delta_y^2 + a_{01}\delta_y + a_{00}\varepsilon \\ b_{10}\varepsilon & b_{01}\delta_y + (b_{00} + b_{10x}')\varepsilon & b_{01x}'\delta_y + b_{00x}'\varepsilon \\ 0 & b_{10}\varepsilon & b_{01}\delta_y + b_{00}\varepsilon \end{matrix}\right\|, \qquad (6.3.7)$$

$$\left|R(\delta_x)\right\| = \left|\begin{matrix} a_{02}\varepsilon & a_{11}\delta_x + a_{01}\varepsilon & a_{20}\delta_x^2 + a_{10}\delta_x + a_{00}\varepsilon \\ b_{01}\varepsilon & b_{10}\delta_x + (b_{00} + b_{01y}')\varepsilon & b_{10y}'\delta_x + b_{00y}'\varepsilon \\ 0 & b_{01}\varepsilon & b_{10}\delta_x + b_{00}\varepsilon \end{matrix}\right\|, \qquad (6.3.8)$$

где |*|| знак правого определителя.

В силу следствия 6.2.3 равенство нулю обоих результантов является необходимым и достаточным условием существования у оператора $L_2(a;\delta_y,\delta_x)$ делителя, содержащего δ_x и δ_y. Если $\left|R(\delta_y)\right\| = 0$, $\left|R(\delta_x)\right\| \neq 0$, то делитель содержит только δ_x. Если же $\left|R(\delta_y)\right\| \neq 0$, но $\left|R(\delta_x)\right\| = 0$, то делитель содержит только δ_y. Получим условия (6.3.5), условия (6.3.6) находятся аналогично. Для вычисления определителя (6.3.7) имеем

$$\left|R(\delta_y)\right\| = a_{20}X_1 + (a_{11}\delta_y + a_{10}\varepsilon)X_2 + (a_{02}\delta_y^2 + a_{01}\delta_y + a_{00}\varepsilon)X_3, \qquad (6.3.9)$$

где $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$, являются отличным от нуля решением системы

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{X}_1 + \quad [\boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{\delta}_y + (\boldsymbol{b}_{00} + \boldsymbol{b}'_{10x})\boldsymbol{\varepsilon}]\boldsymbol{X}_2 + \quad [\boldsymbol{b}'_{01x}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{b}'_{00x}\boldsymbol{\varepsilon}]\boldsymbol{X}_3 = 0,\\ \boldsymbol{b}_{10}\boldsymbol{X}_2 \qquad\qquad\qquad + [\boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{b}_{00}\boldsymbol{\varepsilon}]\boldsymbol{X}_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.10}$$

Систему (6.3.10) решаем так: из второго уравнения находим $\boldsymbol{X}_2 = -[\boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{b}_{10}{}^{-1}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{b}_{00}\boldsymbol{b}_{10}{}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}]\boldsymbol{X}_3$. Подставляя в первое уравнение, получим

$$\boldsymbol{b}_{10}\boldsymbol{X}_1 + [\boldsymbol{b}'_{01x}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{b}'_{00x}\boldsymbol{\varepsilon} - (\boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{\delta}_y + (\boldsymbol{b}_{00} + \boldsymbol{b}'_{10x})\boldsymbol{\varepsilon})\times$$

$$\times(\boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{b}_{10}{}^{-1}\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{b}_{00}\boldsymbol{b}_{10}{}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})]\boldsymbol{X}_3 = 0.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{X}_1 = [-\boldsymbol{b}_{01}^2\boldsymbol{b}_{10}^{-2}\boldsymbol{\delta}_y^2 + \{\boldsymbol{b}'_{01x}\boldsymbol{b}_{10}^{-1} - \boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{b}_{10}^{-1}(\boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{b}_{10}^{-1})'_y - \boldsymbol{b}_{00}\boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{b}_{10}^{-2} -$$

$$-\boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{b}_{10}^{-2}(\boldsymbol{b}_{00} + \boldsymbol{b}'_{10x})\}\boldsymbol{\delta}_y + \{\boldsymbol{b}'_{00x}\boldsymbol{b}_{10}^{-1} - \boldsymbol{b}_{01}\boldsymbol{b}_{10}^{-1}(\boldsymbol{b}_{00}\boldsymbol{b}_{10}^{-1})'_y -$$

$$-(\boldsymbol{b}_{00} + \boldsymbol{b}'_{10x})\boldsymbol{b}_{00}\boldsymbol{b}_{10}^{-2}\}\boldsymbol{\varepsilon}], \tag{6.3.11}$$

где положено $\boldsymbol{X}_3 = -\boldsymbol{\varepsilon}$. Подставляя теперь $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$, в (6.3.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\boldsymbol{\delta}_y$, приходим к (6.3.5). ■

Если оператор $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{a};\boldsymbol{\delta}_y,\boldsymbol{\delta}_x)$ приведен к каноническому виду, то условия (6.3.5), (6.3.6) принимают особенно простой вид. Оставим для коэффициентов оператора, записанного в канонической форме, старые обозначения.

1. $\boldsymbol{a}_{11}^2 - 4\boldsymbol{a}_{20}\boldsymbol{a}_{02} > 0$.В канонической форме $\boldsymbol{a}_{20} = \boldsymbol{a}_{02} = 0$, $\boldsymbol{a}_{11} = 1$.

Имеем

$$\boldsymbol{u} = 0,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_{01},\ (\boldsymbol{a}_{01})'_y + \boldsymbol{a}_{10}\boldsymbol{a}_{01} - \boldsymbol{a}_{00} = 0, \tag{6.3.12}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = 0,\ \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_{10},\ (\boldsymbol{a}_{10})'_x + \boldsymbol{a}_{10}\boldsymbol{a}_{01} - \boldsymbol{a}_{00} = 0. \tag{6.3.13}$$

2. $\boldsymbol{a}_{11}^2 - 4\boldsymbol{a}_{20}\boldsymbol{a}_{02} = 0$.В канонической форме $\boldsymbol{a}_{20} = 1$, $\boldsymbol{a}_{02} = \boldsymbol{a}_{11} = 0$. Имеем

$$\boldsymbol{u} = 0,\ \boldsymbol{a}_{01} = 0,\ \boldsymbol{v}'_x + \boldsymbol{a}_{10}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{a}_{00} = 0. \tag{6.3.14}$$

В этом случае условия (5.2.6) не выполняются.

3. $\boldsymbol{a}_{11}^2 - 4\boldsymbol{a}_{20}\boldsymbol{a}_{02} < 0$. В канонической $\boldsymbol{a}_{02} = \boldsymbol{a}_{20} = 1$, $\boldsymbol{a}_{11} = 0$. Имеем

$$\left.\begin{aligned} u^2+1=0,\\ (u_x^{'}-uu_y^{'}-2uv)+a_{10}u-a_{01}=0,\\ (v_x^{'}-uv_y^{'}-v^2)+a_{10}v-a_{00}=0. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.15}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1^2+1=0,\\ (u_1)_y^{'}-u_1(u_1)_x^{'}-2u_1v_1+a_{01}u_1-a_{10}=0,\\ (v_1)_y^{'}-u_1(v_1)_x^{'}-v_1^2+a_{01}v_1-a_{00}=0. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.16}$$

Пример 6.3.1. Найти решение задачи Коши

$$x^2\delta_x^2(z)-y^2\delta_y^2=0,\ z|_{y=1}=f(x),\ \delta_y(z)\big|_{y=1}=F(x). \tag{6.3.17}$$

Из (6.3.5) находим $u=yx^{-1}$, $v=-x^{-1}$. Следовательно, имеет место факторизация

$$(x^2\delta_x-xy\delta_y+x\varepsilon)(\delta_x+xy^{-1}\delta_y-x^{-1}\varepsilon)z=0.$$

Отсюда получаем систему

$$\left.\begin{aligned} \left(x^2\delta_x-xy\delta_y+x\varepsilon\right)w=0,\\ \left(\delta_x+yx^{-1}\delta_y-x^{-1}\varepsilon\right)z=w. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.18}$$

Решая последовательно уравнения первого порядка из системы (6.3.18), находим общий вид решения уравнения (6.3.17)

$$z(x,y)=y\varphi\left(xy^{-1}\right)+\psi(xy). \tag{6.3.19}$$

Получили решение задачи Коши $z(x,y)=2^{-1}(f(x,y)+f(x\,y^{-1}))+$

$$+4^{-1}\sqrt{xy}\int_{xy}^{xy^{-1}}\alpha^{-3/2}f(\alpha)d\alpha+2^{-1}\sqrt{xy}\int_{xy}^{xy^{-1}}\alpha^{-3/2}F(\alpha)d\alpha.$$

6.4. Линейные дифференциально−разностные операторы по разным переменным

Кольцо косых многочленов $K[u,v]$ при $\alpha_u=\iota$, $\alpha_v=\omega_v$ — некоторый автоморфизм поля K, β_u — некоторый гомоморфизм поля K, $\beta_v=0$, изоморфно кольцу $K[\beta_u,\omega_v]$. Пусть K — поле функций $f(x,y)$ вещественных или комплексных переменных. Определим гомоморфизм β_u как дифференцирование поля K по переменной x — $\beta_u = \delta_x = \partial / \partial x$. В качестве автоморфизма ω_v возьмем отображение, действующее в K по правилу $\omega_y^c f(x,y) = f(x, y+c)$, $\forall c \in C$. В поле K определены выражения $\delta_x^i \omega_y^{kc} f = \omega_y^{kc} \delta_x^i f$, $\forall f \in K$ и $\forall i, j \in N$. Условимся в верхнем индексе элемента $f \in K$ обозначать производную i- го порядка по переменной x через (i), а через $[k\,c]$, $k \in Z$, — результат применения разностного оператора k раз, например, $\delta_x^i \omega_y^{jc} a = a^{(i)[jc]}$.

Рассмотрим кольцо $K[\delta_x, \omega_y^c]$ операторов (многочленов) от элементарных операторов δ_x, ω_y^c — кольцо линейных дифференциально-разностных по разным переменным операторов (ЛДРО) вида $A_m(a; \delta_x, \omega_y^c) = \sum\limits_{0 \le i+j \le m} a_{ij} \delta_x^i \omega_y^{jc}$; наибольшая степень $m = i + j$ монома $\delta_x^i \omega_y^{cj}$, входящего в оператор A_m, называется порядком оператора A_m.

Ясно, что операторы $A_m(a; \delta_x, \omega_y^c)$ могут рассматриваться как элементы кольца $K[\delta_x, \omega_y^c]$, либо как элементы кольца $K[\omega_y^c][\delta_x]$, либо как элементы кольца $K[\delta_x][\omega_y^c]$. Соответственно будем писать:

— $A_m(a; \delta_x, \omega_y^c) = \sum\limits_{i=0}^{p} \sum\limits_{j=0}^{q} a_{ij} \delta_x^i \omega_y^{jc}$, $a_{ij} \in K$, где m порядок оператора, p порядок по δ_x, q порядок по ω_y^c;

— $A_m = L_p(A(\omega_y^c); \delta_x) = \sum\limits_{i=0}^{p} A_{t_i}(a_j; \omega_y^c) \delta_x^i$, $A_{t_i}(a_j; \omega_y^c) \in K[\omega_y^c]$ операторы некоторых порядков t_i;

— $A_m = L_q(B(\delta_x); \omega_y^c) = \sum\limits_{j=0}^{q} B_{r_j}(a_i; \delta_x) \omega_y^{jc}$, $B_{r_j}(a_i; \delta_x) \in K[\delta_x]$ операторы некоторых порядков r_j.

В кольце ЛДРО определены операции перехода к формально сопряженным операторам, индуцированные соответствующими операциями в кольце косых многочленов $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$:

— в кольце $\boldsymbol{K}[\delta_x,\omega_y^c]$ сопряженный вычисляется по формуле

$$A_m^*(a;\delta_x,\omega_y^c)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}(-1)^i\delta_x^i\omega_y^{-jc}(a_{ij}\varepsilon);\tag{6.4.1}$$

— в кольце $\boldsymbol{K}[\omega_y^c][\delta_x]$ сопряженный оператор определяется в соответствии с формулой

$$A_m^{*x}=L_p^{*x}(A(\omega_y^c);\delta_x)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\delta_x^i(\tau_y(A_{t_i}(a_j;\omega_y^c)\varepsilon)),\tag{6.4.2}$$

где символ L_p^{*x} означает сопряженный по δ_x, а τ_y — операция сопряжения в кольце $\boldsymbol{K}[\omega_y^c]$;

— в кольце $\boldsymbol{K}[\delta_x][\omega_y^c]$ сопряженный оператор определяется в соответствии с формулой

$$A_m^{*y}=L_q^{*y}(A(\delta_x);\omega_y^c)=\sum_{j=0}^{q}\omega_y^{-jc}(\tau_x(B_{r_j}(a_i;\delta_x)\varepsilon)),\tag{6.4.3}$$

где L_q^{*y} означает сопряженный по ω_y^c, а τ_x — операция сопряжения в кольце $\boldsymbol{K}[\delta_x]$.

Пример 6.4.1. Найти сопряженные операторы A_2^*, A_2^{*y} к оператору A_2 $=a_{11}\delta_x\omega_y^c+a_{10}\delta_x+a_{01}\omega_y^c+a_{00}\varepsilon$. Проверить тождество $A_2^{*y*y}=A_2$.

Оператор A_2^*, сопряженный по обеим переменным к оператору A_2, согласно (6.4.1) имеет вид

$$A_2^*=-\delta_x\omega_y^{-c}(a_{11}\varepsilon)-\delta_x(a_{10}\varepsilon)+\omega_y^{-c}(a_{01}\varepsilon)+a_{00}\varepsilon\tag{6.4.4}$$

или

$A_2^*=-a_{11}^{[-c]}\delta_x\omega_y^{-c}-(a_{01}^{[-c]}+a_{11}^{[-c](1)})\omega_y^{-c}-a_{10}\delta_x-a_{10}^{(1)}\varepsilon+a_{00}\varepsilon$. Нетрудно проверить тождество $A_2^{**}=A_2$.

Оператор A_2^{*y}, сопряженный по переменной y к оператору A_2, найдем, записав его в виде $A_2=(a_{11}\delta_x+a_{01}\varepsilon)\omega_y^c+a_{01}\omega_y^c+a_{00}\varepsilon$. Согласно (6.4.3)

$$A_2^{*y} = \omega_y^{-c}(\tau_x(a_{11}\delta_x + a_{01}\varepsilon)) + \tau_x(a_{20}\delta_x) + \tau_x(a_{00}\varepsilon) =$$

$$= (\tau_x(a_{11}^{[-c]}\delta_x + a_{01}^{[-c]}\varepsilon)\omega_x^{-c} + \tau_x(a_{20}\delta_x + a_{00}\varepsilon).$$

Далее находим

$A_2^{*y*y} = \omega_y^{c}((\tau_x\tau_x(a_{11}^{[-c]}\delta_x + a^{[-c]}_{01}{}_{01}\varepsilon)) + \tau_x\tau_x(a_{20})\delta_x + \tau_x\tau_x(a_{00}\varepsilon)$. Учитывая, что $(\tau_y)^2 = \varepsilon$, получим $A_2^{*y*y} = a_{11}\delta_x\omega_y^c + a_{01}\omega_y^c + a_{20}\delta_x + a_{00}\varepsilon = A_2$.

Рассмотрим в этом случае задачу отыскания ПНОД множества ЛДРО $A_{n_k}(a;\delta_x,\omega_y^c) \in K[\delta_x,\omega_y^c]$, $k = \overline{1,m}$, n_k — порядок оператора A_{n_k}, считая сначала операторы элементами кольца $K[\delta_x][\omega_y^c]$, то есть $A_{n_k}(a;\,\delta_x,\omega_y^c) = = A_{q_k}(A(a;\delta_x);\,\omega_y^c) = A_{q_k}(A(\delta_x);\omega_y^c) = \sum\limits_{i=0}^{q_k} A_{r_i}(a;\delta_x)\omega_y^{ic}$, где коэффициенты $A_{t_i}(a;\delta_x)$ операторы некоторых порядков t_i. Положим $q_1 = \max\limits_{1\le k\le m}(q_k)$, $q_m = \min\limits_{1\le k\le m}(q_k) = \tilde{d}_0$, $A_{\tilde{d}_j} = \text{ПНОД}(A_{\tilde{d}_{j-1}}, A_{q_j})$, где $\tilde{d}_j$ порядок соответствующего оператора по ω_y^c, $j = \overline{1,m-1}$, $q_1 \ge \cdots \ge q_m = \tilde{d}_0 \ge \tilde{d}_1 \ge \tilde{d}_2 \ge \cdots \ge \tilde{d}_{m-1} = \tilde{d}$.

Результантные матрицы операторов строим с помощью уравнения

$$\sum_{k=1}^{m} X_{\tilde{s}_k}(X(f_k;\delta_x);\,\omega_y^c)A_{q_k}(A(\delta_x);\omega_y^c) = 0, \tag{6.4.5}$$

где $\tilde{s}_k = q_1 + q_m - q_k - 1$, $X(f_k;\delta_x)$ — неизвестные коэффициенты подлежащие определению в кольце $K[\delta_x]$. Выражения для коэффициентов оператора $L_{q_1+q_2}(A(a;\delta_x);\omega_y^c) = L_{q_1}(B(b;\delta_x);\omega_y^c) \times L_{q_2}(G(g;\delta_x);\omega_y^c)$, где q_1 и q_2 порядки операторов относительно ω_y^c найдем, записав $L_{q_1+q_2}(A(a;\delta_x);\omega_y^c) = = \sum\limits_{k=0}^{q_1+q_2} A^k(a;\,\delta_x)\omega_y^{kc}$. Получим аналог формулы (6.1.5) для $k = \overline{0,q_1+q_2}$

$$A^k(a;\delta_x) = \sum_{s=\max(0,k-q_2)}^{\min(q_1,k)} \sum_{i=s}^{\min(q_1,s)} B^i(b;\delta_x)G^{k-s}(g_y^{[ic]};\delta_x). \tag{6.4.6}$$

Отсюда при $p_1 = r$, $B^r(b;\delta_x) = \varepsilon$, $B^i(b;\delta_x) = 0$ $\forall i \ne r$ найдем коэффициенты оператора $\omega_y^{rc}L_{q_2}(G(g;\delta_x);\omega_y^c)$

$$A^{r,k}(G(g;\delta_x)) = G^k(g_y^{[rc]};\delta_x),\ k=\overline{0,q_2}, \qquad (6.4.7)$$

где символом $G^k(g_y^{[rc]};\delta_x)$ обозначен результат применения r раз оператора ω_y^c к коэффициентам оператора $G^k(g;\delta_x)$.

Правая результатная матрица $R^m(\delta_x)$ имеет размерность $\sum_{k=1}^{m}(\tilde{s}_k+1)\times(q_1+q_m)$ и составлена из подматриц $M_k(\delta_x)$ размерности $(\tilde{s}_k+1)\times(q_1+q_m)$, составленных из коэффициентов (6.4.7)

$$M_k(\delta_x) = \left(\begin{pmatrix} A^{\tilde{s}_k,q_1+q_m-1}(\delta_x) & A^{\tilde{s}_k,q_1+q_m-2}(\delta_x) & \cdots & A^{\tilde{s}_k,0}(\delta_x) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 \ \cdots\ 0 \quad A^{0,q_k}(\delta_x) & A^{0,q_k-1}(\delta_x) & \cdots & A^{0,0}(\delta_x) \end{pmatrix}\right)^T. \qquad (6.4.8)$$

Рассмотрим теперь операторы $A_{n_k}(a;\,\delta_x,\omega_y^c)$ как элементы кольца $K[\omega_y^c][\delta_x]$, то есть $A_{n_k}(a_k;\,\delta_x,\omega_y^c) = A_{p_k}(A(a_k;\omega_y^c);\,\delta_x) = A_{p_k}(A(\omega_y^c);\delta_x) = \\ = \sum_{j=0}^{p_k} A_{t_j}^k(a_i;\omega_y^c)\delta_x^j$ с коэффициентами $A_{t_j}(a;\omega_y^c)$, положим $p_1 = \max\limits_{1\le k\le m}(p_k)$, $p_m = \min\limits_{1\le k\le m}(p_k) = d_0$, $A_{d_j} = \text{ПНОД}(A_{d_{j-1}}, A_{p_j})$, где d_j порядки операторов по δ_x, $j=\overline{1,m-1}$, $p_1 \ge \cdots \ge p_m = d_0 \ge d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_{m-1} = d$.

Соответствующее уравнение теперь имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} X_{s_k}(X(f_k;\omega_y^c);\,\delta_x)A_{p_k}(A(\omega_y^c);\delta_x) = 0, \qquad (6.4.9)$$

где $s_k = p_1 + p_m - p_k - 1$, $X(f_k;\omega_y^c)$ неизвестные коэффициенты подлежащие определению в кольце $K[\omega_y^c]$.

Коэффициенты произведения $L_{p_1+p_2}(A(a;\omega_y^c);\delta_x) = \sum_{k=0}^{p_1+p_2} A^k(a;\,\omega_y^c)\delta_x^k$ операторов $L_{p_1}(B(b;\omega_y^c);\delta_x)$, $L_{p_2}(G(g;\omega_y^c);\delta_x)$) имеют вид

$$A^k(a;\omega_y^c) = \sum_{i=\max(0,k-p_2)}^{\min(p_1,k)} \sum_{i=s}^{p_1} \binom{j}{s} B^{k-s}(b;\omega_y^c)G^i(\delta_x^{i-s}g;\omega_y^c),\ k=\overline{0,\,p_1+p_2}. \qquad (6.4.10)$$

Отсюда при $q_1 = r$, $B^r(b;\omega_y^c) = \varepsilon$, $B^i(b;\omega_y^c) = 0$, $\forall i \neq r$ получаем коэффициенты оператора $\delta_x^r L_{p_2}(G(g;\omega_y^c);\delta_x)$

$$A^{r,k}(G(g;\omega_y^c)) = \sum_{i=\max(0,k-p_2)}^{\min(r,k)} \binom{r}{s} G^{k-s}(\delta_x^{r-s} g;\omega_y^c),\ k = \overline{0,\ p_2 + r}, \tag{6.4.11}$$

где через $G^{k-s}(\delta_x^{r-s} g;\omega_y^c)$ обозначено применение к коэффициентам оператора $G^{k-s}(g;\omega_y^c)$ $r-s$ - ой степень оператора δ_x.

Для коэффициентов $A^{r,k}(G(g;\omega_y^c))$ имеем

$$A^{r,k}(\omega_y^c) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} G^{k-i)}(\delta_x^{r-i} g;\omega_y^c), \quad (r \le k) \vee (r > k) \wedge (k \le p_2), \\ \sum_{i=k-p_1}^{r} \binom{r}{i} G^{k-i}(\delta_x^{r-i} g;\omega_y^c), (r \le k) \vee (r > k) \wedge (k > p_2). \end{cases} \tag{6.4.12}$$

Коэффициенты $A^{r,k}(\omega_y^c)$ обладают следующими свойствами.

Теорема 6.4.1. 1) $A^{0,k}(G(g;\omega_y^c)) = G^k(g;\omega_y^c)$, $k = \overline{0, p_2}$;

2) $A^{r-j,r+p_2-j}(G(g;\omega_y^c)) = G^{p_2}(g;\omega_y^c)$, $j = \overline{1, r}$;

3) $A^{r,k}(G(g;\omega_y^c)) = A^{r-1,k-1}(G(g;\omega_y^c)) + A^{r-1,k}(G(\delta_x g;\omega_y^c))$.

Правая результантная матрица $R^m(\omega_x^c)$ имеет размерность $\sum_{k=1}^{m}(s_k + 1) \times (p_1 + p_m)$, где $s_k = p_1 + p_m - p_k - 1$, и составлена из подматриц $M_k(\omega_y^c)$ размерности $(s_k + 1) \times (p_1 + p_m)$, отвечающих, соответственно, операторам $A_{n_k}(a;\delta_x,\delta_y) = L_{p_k}(B(a;\omega_y^c);\delta_x)$, имеет вид

$$M_k(\omega_y^c) = \left(\begin{pmatrix} A^{s_k,p_1+p_m-1}(\omega_y^c) & A^{s_k,p_1+p_m-2}(\omega_y^c) & \cdots & A^{s_k,0}(\omega_y^c) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 \ \cdots\ 0 & A^{0,p_k}(\omega_y^c) & A^{0,p_k-1}(\omega_y^c) & \cdots A^{0,0}(\omega_y^c) \end{pmatrix} \right)^T. \tag{6.4.13}$$

Из рассмотрения уравнения $\sum_{j=0}^{m} Y_{\tilde{s}_j} A_{n_j}^*(a;\delta_x,\delta_y) = 0$ определяются левые результантные матрицы $R^{*m}(\delta_x) = (M_1^*(\delta_x),...,M_m^*(\delta_x))^T$, $R^{*m}(\omega_y^c) =$

$= (\boldsymbol{M}_1^*(\boldsymbol{\omega}_y^c),...,\boldsymbol{M}_m^*(\boldsymbol{\omega}_y^c))^{\boldsymbol{T}}$, составленные, соответственно, из подматриц

$$\boldsymbol{M}_k^*(\boldsymbol{\omega}_y^c) = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{*s_k, p_1+p_m-1}(\boldsymbol{\omega}_y^c) \ \boldsymbol{A}^{*s_k, p_1+p_m-2}(\boldsymbol{\omega}_y^c) \cdots \boldsymbol{A}^{*s_k,0}(\boldsymbol{\omega}_y^c) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \ \cdots \ 0 \ \boldsymbol{A}^{*0,p_k}(\boldsymbol{\omega}_y^c)\boldsymbol{A}^{*0,p_k-1}(\boldsymbol{\omega}_y^c) \ \cdots \ \boldsymbol{A}^{*0,0}(\boldsymbol{\omega}_y^c) \end{pmatrix} \right)^{\boldsymbol{T}}, \quad (6.4.14)$$

$$\boldsymbol{M}_k^*(\boldsymbol{\delta}_x) = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{*\tilde{s}_k, q_1+q_m-1}(\boldsymbol{\delta}_x) \ \boldsymbol{A}^{*\tilde{s}_k, q_1+q_m-2}(\boldsymbol{\delta}_x) \ \cdots \boldsymbol{A}^{*\tilde{s}_k,0}(\boldsymbol{\delta}_x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \ \cdots \ 0 \ \boldsymbol{A}^{*0,q_k}(\boldsymbol{\delta}_x) \ \boldsymbol{A}^{*0,q_k-1}(\boldsymbol{\delta}_x) \cdots \boldsymbol{A}^{*0,0}(\boldsymbol{\delta}_x) \end{pmatrix} \right)^{\boldsymbol{T}}. \quad (6.4.15)$$

Обозначим через $\boldsymbol{d}_\delta^*$ порядок ЛНОД по $\boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{d}_\omega^*$ порядок ЛНОД по $\boldsymbol{\omega}_y^c$, $\boldsymbol{r}_\omega^* = \boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^{*m}(\boldsymbol{\delta}_x)$, $\boldsymbol{r}_\delta^* = \boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^{*m}(\boldsymbol{\omega}_y^c)$ левые ранги левых результантных матриц множества операторов.

Имеет место утверждение

Теорема 6.4.2. Справедливы соотношения:

$\boldsymbol{r}_\omega + \boldsymbol{d}_\omega = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\delta + \boldsymbol{d}_\delta = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$;

$\boldsymbol{r}_\omega^* + \boldsymbol{d}_\omega^* = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$; $\boldsymbol{r}_\delta^* + \boldsymbol{d}_\delta^* = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$.

Доказательство с соответствующими изменениями аналогично доказательству теоремы 1.7.5.

Приведем несколько следствий.

Следствие 6.4.1. Справедливы соотношения:

$\boldsymbol{r}_\delta - \boldsymbol{r}_\delta^* = \boldsymbol{d}_\delta^* - \boldsymbol{d}_\delta$, $\boldsymbol{r}_\omega - \boldsymbol{r}_\omega^* = \boldsymbol{d}_\omega^* - \boldsymbol{d}_\omega$.

Следствие 6.4.2. Для того чтобы операторы $\boldsymbol{A}_{n_i}(\boldsymbol{a}_i;\boldsymbol{\delta}_x,\boldsymbol{\omega}_y^c)$ были взаимно просты в совокупности справа (слева) необходимо и достаточно выполнение условий:

$\boldsymbol{r}_\delta = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\omega = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$,

($\boldsymbol{r}_\delta^* = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\omega^* = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$).

Следствие 6.4.3. Для того чтобы операторы $\boldsymbol{A}_{n_i}(\boldsymbol{a}_i;\boldsymbol{\delta}_x,\boldsymbol{\omega}_y^c)$ имели правый (левый) наибольший общий делитель порядка:

1) $\boldsymbol{d}_\delta \neq 0$ по $\boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{d}_\omega \neq 0$ по $\boldsymbol{\omega}_y^c$ ($\boldsymbol{d}_\delta^* \neq 0$ по $\boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{d}_\omega^* \neq 0$ по $\boldsymbol{\omega}_y^c$);

2) $\boldsymbol{d}_\delta = 0$, $\boldsymbol{d}_\omega \neq 0$, ($\boldsymbol{d}_\delta^* = 0, \boldsymbol{d}_\omega^* \neq 0$);

3) $\boldsymbol{d}_\delta \neq 0$, $\boldsymbol{d}_\omega = 0$, ($\boldsymbol{d}_\delta^* \neq 0$, $\boldsymbol{d}_\omega^* = 0$);

4) $\boldsymbol{d}_\delta = 0$, $\boldsymbol{d}_\omega = 0$, ($\boldsymbol{d}_\delta^* = 0$, $\boldsymbol{d}_\omega^* = 0$),

необходимо и достаточно выполнение следующих условий, соответственно:

1) $\boldsymbol{r}_\delta < \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\omega < \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$, ($\boldsymbol{r}_\delta^* < \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\omega^* < \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$);

2) $\boldsymbol{r}_\delta = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\omega < \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$), ($\boldsymbol{r}_\delta^* = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\omega^* < \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$;

3) $\boldsymbol{r}_\delta < \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\omega = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$), ($\boldsymbol{r}_\delta^* < \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\omega^* = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$);

4) $\boldsymbol{r}_\delta = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\omega = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$, ($\boldsymbol{r}_\delta^* = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{r}_\omega^* = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_m$).

Рассмотрим систему ОЛДРУ с одной неизвестной функцией $\boldsymbol{z(x,y)}$

$$\boldsymbol{A}_{n_j}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{\delta}_x,\boldsymbol{\omega}_y^c)\boldsymbol{z} = 0,\ \boldsymbol{j} = 1, 2, ..., \boldsymbol{m}\,. \tag{6.4.16}$$

Теорема 6.4.3. Для того чтобы система (6.4.16) была только тривиально совместна достаточно, чтобы уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{X}_{s_j} \boldsymbol{A}_{n_j}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{\delta}_x,\boldsymbol{\omega}_y^c) = \boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{6.4.17}$$

где $0 \le \boldsymbol{s}_j \le \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_m - \boldsymbol{n}_j - 1$, имело решение в кольце $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\delta}_x,\boldsymbol{\omega}_y^c]$.

Достаточность. Предположение о разрешимости уравнения (6.4.17) и нетривиальной совместности системы (6.4.16) приводит к противоречию: $\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{X}_{s_j} \boldsymbol{A}_{n_j}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{\delta}_x,\boldsymbol{\omega}_y^c)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv 0 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ при $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq 0$. ■

6.5. Линейные операторы в частных разностях

Пусть в поле $\boldsymbol{K}$ функций $\boldsymbol{f(x,y)}$ определены операторы взятия разностей $\boldsymbol{\omega}_x^{c1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}1,\boldsymbol{y})$ $\forall \boldsymbol{c}1 \in \boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{\omega}_y^{c2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{c}2)$ $\forall \boldsymbol{c}2 \in \boldsymbol{C}$, причем $\boldsymbol{\omega}_x^{c1}\boldsymbol{\omega}_y^{c2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\omega}_y^{c2}\boldsymbol{\omega}_x^{c1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}1,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{c}2)$. Кольцо косых многочленов $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ над полем $\boldsymbol{K}$ изоморфно кольцу $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_x^{c1},\boldsymbol{\omega}_y^{c2}]$ линейных операторов в частных разностях (ЛОЧР), если выбрать $\boldsymbol{\alpha}_u = \boldsymbol{\omega}_x^{c1}$, $\boldsymbol{\alpha}_v = \boldsymbol{\omega}_y^{c2}$ и

$\beta_u = 0$, $\beta_v = 0$.

Условимся далее элементы $\omega_y^{c2}\omega_x^{c1} f(x,y)$ обозначаются через $f_{x,y}^{[ic1,jc2]}(x,y)$, или короче $f_{x,y}^{[ic1,jc2]} = f_{y,x}^{[jc2,ic1]}$, где $i, j \in Z$ степени разностных операторов ω_x^{c1}, ω_y^{c2}.

Элементы кольца $K[\omega_x^{c1}, \omega_y^{c2}]$ — многочлены вида $A_m(f;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2}) = = \sum\limits_{0\le i+j\le m} a_{ij}\omega_x^{ic1}\omega_y^{jc2}$, где $m = i + j$ наибольшая степень монома $\omega_x^{ic1}\omega_y^{jc2}$, входящего в оператор A_m, называется порядком оператора.

Операторы $A_m(a;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2})$ можно рассматриваться как элементы колец $K[\omega_x^{c1},\omega_y^{c2}]$, $K[\omega_y^{c2}][\omega_x^{c1}]$, $K[\omega_x^{c1}][\omega_y^{c2}]$ и в соответствии с этим писать $A_m(a;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2}) = \sum\limits_{i=0}^{p}\sum\limits_{j=0}^{q} a_{ij}\omega_x^{ic1}\omega_y^{jc2}$, где $a_{ij} \in K$, m порядок оператора, p порядок по ω_x^{c1}, q порядок по ω_y^{c2}; $A_m = L_p(B(\omega_y^{c2});\omega_x^{c1}) = \sum\limits_{i=0}^{p} B_{t_i}(b;\omega_y^{c2})\omega_x^{c1}$, коэффициенты $B_{t_i}(b;\omega_y^{c2}) \in K[\omega_y^{c2}]$ операторы некоторых порядков t_i; $A_m = L_q(G(\omega_x^{c1});\omega_y^{c2}) = \sum\limits_{j=0}^{q} G_{r_j}(g;\, \omega_x^{ic1})\omega_y^{jc2}$, коэффициенты $G_{r_j}(g;\, \omega_x^{c1}) \in K[\omega_x^{c1}]$ операторы некоторых порядков r_j.

Формально сопряженные операторы определяются следующим образом:

— в кольце $K[\omega_x^{c1},\omega_y^{c2}]$ сопряженный оператор определяется по формуле

$$A_m^*(a;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2}) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \omega_x^{-ic1}\omega_y^{-jc2}(a_{ij}\varepsilon); \tag{6.5.1}$$

— в кольце $K[\omega_y^{c2}][\omega_x^{c1}]$ τ_y -сопряженный оператор

$$A_m^{*x} = L_p^{*x}(B(\omega_y^{c2});\, \omega_x^{c1}) = \sum_{i=0}^{p} \omega_x^{c1}(\tau_y(B_{t_i}(a_j;\, \omega_y^{c2})\varepsilon)), \tag{6.5.2}$$

где символ $\boldsymbol{L}_p^{*x}$ означает сопряженный по $\boldsymbol{\omega}_x^{c1}$, а $\boldsymbol{\tau}_y$ — операция сопряжения в кольце $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_y^{c2}]$;

— в кольце $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_x^{c1}][\boldsymbol{\omega}_y^{c2}]$ $\boldsymbol{\tau}_x$ -сопряженный оператор

$$\boldsymbol{A}_m^{*y} = \boldsymbol{L}_q^{*y}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}_x^{c1}); \boldsymbol{\omega}_y^{c2}) = \sum_{j=0}^{q} \boldsymbol{\omega}_y^{-jc2}(\boldsymbol{\tau}_x(\boldsymbol{G}_{r_j}(\boldsymbol{g}; \boldsymbol{\omega}_x^{c1})\boldsymbol{e})), \qquad (6.5.3)$$

где символ $\boldsymbol{L}_q^{*y}$ означает сопряженный по $\boldsymbol{\omega}_y^{c2}$, а $\boldsymbol{\tau}_x$ — операция сопряжения в кольце $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_x^{c1}]$.

Пример 6.5.1. Найти операторы $\boldsymbol{A}_2^*$, $\boldsymbol{L}_1^{*x}$ сопряженные к оператору $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{\omega}_x^{c1}\boldsymbol{\omega}_y^{c2} + \boldsymbol{a}_{10}\boldsymbol{\omega}_x^{c1} + \boldsymbol{a}_{01}\boldsymbol{\omega}_y^{c2} + \boldsymbol{a}_{00}\boldsymbol{\varepsilon}$. Проверить тождество $\boldsymbol{L}_1^{*x*x} = \boldsymbol{A}_2$.

Оператор $\boldsymbol{A}_2^*$, сопряженный по обоим элементарным операторам к оператору $\boldsymbol{A}_2$, согласно (6.5.1) имеет вид

$$\boldsymbol{A}_2^* = \boldsymbol{\omega}_x^{-c1}\boldsymbol{\omega}_y^{-c2}(\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\omega}_x^{-c1}(\boldsymbol{a}_{10}\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\omega}_y^{-c2}(\boldsymbol{a}_{01}\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{a}_{00}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (6.5.4)$$

или

$\boldsymbol{A}_2^* = \boldsymbol{a}_{11x,y}^{[-c1,-c2]}\boldsymbol{\omega}_x^{-c1}\boldsymbol{\omega}_y^{-c2} + \boldsymbol{a}_{10x}^{[-c1]}\boldsymbol{\omega}_x^{-c1} + \boldsymbol{a}_{01}^{[-c2]}\boldsymbol{\omega}_y^{-c2} + \boldsymbol{a}_{00}\boldsymbol{\varepsilon}$. Нетрудно проверить, что $\boldsymbol{A}_2^{**} = \boldsymbol{A}_2$.

Оператор $\boldsymbol{A}_2^{*x} = \boldsymbol{L}_1^{*x}$, сопряженный по «переменной» $\boldsymbol{x}$ к оператору $\boldsymbol{A}_2$, найдем, записав $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{L}_1 = (\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{\omega}_y^{c2} + \boldsymbol{a}_{10}\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\omega}_x^{c1} + \boldsymbol{a}_{01}\boldsymbol{\omega}_y^{c2} + \boldsymbol{a}_{00}\boldsymbol{\varepsilon}$. Согласно (6.5.2) находим

$$\boldsymbol{L}_1^{*x} = \boldsymbol{\omega}_x^{-c1}(\boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{\omega}_y^{c2} + \boldsymbol{a}_{10}\boldsymbol{\varepsilon})) + \boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{01}\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) + \boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{00}\boldsymbol{\varepsilon}) =$$

$$= \boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{11x}^{[-c1]})\boldsymbol{\omega}_x^{-c1}\boldsymbol{\omega}_y^{c2} + \boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{01x}^{[-c1]})\boldsymbol{\omega}_x^{-c1} + \boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{01})\boldsymbol{\omega}_y^{c2} + \boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{00})\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Далее находим:

$\boldsymbol{L}_1^{*x*x} = \boldsymbol{\omega}_x^{c1}[\boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{11x}^{[-c1]}))\boldsymbol{\omega}_y^{c2} + \boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{01x}^{[-c1]})\boldsymbol{\varepsilon}] + \boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{01}))\boldsymbol{\omega}_y^{c2} + \boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{\tau}_y(\boldsymbol{a}_{00}))\boldsymbol{\varepsilon}$. Так как $(\boldsymbol{\tau}_y)^2 = \boldsymbol{\varepsilon}$, то $\boldsymbol{A}_2^{*y*y} = \boldsymbol{A}_2$.

Рассмотрим задачу отыскания ПНОД и ЛНОД множества ЛОЧП $\boldsymbol{A}_{n_k}(\boldsymbol{a}_k; \boldsymbol{\omega}_x^{c1}, \boldsymbol{\omega}_y^{c2})$, $\boldsymbol{k} = \overline{1, \boldsymbol{m}}$, считая сначала их элементами кольца $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_x^{c1}][\boldsymbol{\omega}_y^{c2}]$, то есть $A_{n_k}(a_k;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2}) = L_{q_k}(G(g;\omega_x^{c1});\omega_y^{c2})$. Положим $q_1 = \max\limits_{1\le k\le m}(q_k)$, $q_m = \min\limits_{1\le k\le m}(q_k) = \tilde{d}_0$, $A_{\tilde{d}_j} = \text{ПНОД}(A_{\tilde{d}_{j-1}}, A_{q_j})$, где $\tilde{d}_j$ порядок соответствующего оператора по ω_y^{c2}, $j = \overline{1, m-1}$, $q_1 \ge \cdots \ge q_m = \tilde{d}_0 \ge \tilde{d}_1 \ge \tilde{d}_2 \ge \cdots \ge \tilde{d}_{m-1} = \tilde{d}$.

Для этого с помощью уравнения

$$\sum_{k=1}^{m} X_{\tilde{s}_k}(X(f_k;\omega_x^{c1});\omega_y^{c2}) A_{q_k}(A(\omega_x^{c1});\omega_y^{c2}) = 0, \qquad (6.5.5)$$

где $\tilde{s}_k = q_1 + q_m - q_k - 1$, $X(f_k;\omega_x^{c1})$ неизвестные коэффициенты подлежащие определению в кольце $K[\omega_x^{c1}]$, построим результантные матрицы. Найдем выражения для коэффициентов оператора $L_{q_1+q_2}(A(a;\omega_x^{c1});\omega_y^{c2}) = L_{q_1}(B(b;\omega_x^{c1});\omega_y^{c2})\, L_{q_2}(G(g;\omega_x^{c1});\omega_y^{c2})$, где q_1 и q_2 порядки операторов относительно ω_y^{c2}. Записав $L_{q_1+q_2}(A(a;\omega_x^{c1});\omega_y^{c2}) = \sum\limits_{k=0}^{q_1+q_2} A^k(a;\omega_x^{c1})\omega_y^{kc2}$, получим по аналогии с предыдущим,

$$A^k(a;\omega_x^{c1}) = \sum_{s=\max(0,k-q_2)}^{\min(q_1,k)} \sum_{i=s}^{\min(q_1,s)} B^i(b;\omega_x^{c1}) G^{k-s}(g_y^{[ic2]};\omega_x^{c1}),\ k = \overline{0, q_1+q_2}. \qquad (6.5.6)$$

Отсюда при $q_1 = r$, $B^r(b;\omega_x^{c1}) = \varepsilon$, $B^i(b;\omega_x^{c1}) = 0\ \ \forall i \ne r$, найдем коэффициенты оператора $\omega_y^{rc2} L_{q_2}(G(g;\omega_x^{c1});\omega_y^{c2})$

$$A^{r,k}(G(g;\omega_x^{c1})) = G^k(g_y^{[rc2]};\omega_x^{c1}),\ k = \overline{0, q_2}, \qquad (6.5.7)$$

где символом $G^k(g_y^{[rc2]};\omega_x^{c1})$ обозначен результат применения r раз оператора ω_y^{c2} к коэффициентам оператора $G^k(g;\omega_x^{c1})$.

Теорема 6.5.1. 1) $A^{0,k}(G(g;\omega_x^{c1})) = G^k(g;\omega_x^{c1})$, $k = \overline{0, q_2}$;

2) $A^{r-j,r+q_2-j}(G(g;\omega_x^{c1})) = G^{q_2}(g;\omega_x^{c1})$, $j = \overline{1, r}$;

3) $A^{r,k}(G(g;\omega_x^{c1})) = A^{r-1,k-1}(G(g;\omega_x^{c1})) + A^{r-1,k}(G(g_y^{[c2]};\omega_x^{c1}))$.

Из (6.5.5) следует, что правая результатная матрица $R^m(\omega_x^{c1})$ имеет размерность $\sum_{k=1}^{m}(\tilde{s}_k+1)\times(q_1+q_m)$ и составлена из подматриц $M(\omega_x^{c1})$ размерности $(\tilde{s}_k+1)\times(q_1+q_m)$, составленных из коэффициентов (6.5.7)

$$M_k(\omega_x^{c1})=\left(\begin{pmatrix} A^{\tilde{s}_k,q_1+q_m-1}(\omega_x^{c1}) \; A^{\tilde{s}_k,q_1+q_m-2}(\omega_x^{c1}) \cdots A^{\tilde{s}_k,0}(\omega_x^{c1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad \cdots 0 \quad A^{0,q_k}(\omega_x^{c1}) \; A^{0,q_k-1}(\omega_x^{c1}) \cdots A^{0,0}(\omega_x^{c1}) \end{pmatrix}\right)^T. \qquad (6.5.8)$$

Теперь рассмотрим операторы $A_{n_k}(a;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2})$ как элементы кольца $K[\omega_y^{c2}][\omega_x^{c1}]$, то есть $A_{n_k}(a_k;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2})=\ A_{p_k}(A(\omega_y^{c2});\omega_x^{c1})=\sum_{j=0}^{p_k}A_{t_j}(\omega_y^{c2})\omega_x^{jc1}$ с коэффициентами $A_{t_j}(\omega_y^{c2})$, обозначив $p_1=\max_{1\le k\le m}(p_k)$, $p_m=\min_{1\le k\le m}(p_k)=d_0$, $A_{d_j}=$ =ПНОД$(A_{d_{j-1}},A_{p_j})$, где d_j порядки операторов по ω_x^{c1}, $j=\overline{1,m-1}$, $p_1\ge\cdots\ge p_m=d_0\ge d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_{m-1}=d$.

Соответствующее уравнение теперь имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m}X_{s_k}(X(f_k;\omega_y^{c2});\omega_x^{c1})A_{p_k}(A^k(\omega_y^{c2});\omega_x^{c1})=0, \qquad (6.5.9)$$

где $s_k=p_1+p_m-p_k-1$, $X(f_k;\omega_y^{c2})$ неизвестные коэффициенты подлежащие определению в кольце $K[\omega_y^{c2}]$.

Коэффициенты $A^k(a;\omega_y^{c2})$ произведения $L_{p_1+p_2}(A(a;\omega_y^{c2});\omega_x^{c1})=$ $=\sum_{k=0}^{p_1+p_2}A^k(a;\omega_y^{c2})\omega_x^{kc1}$ операторов $L_{p_1}(B(b;\omega_y^{c2});\omega_x^{c1})$, $L_{p_2}(G(g;\omega_y^{c2});\omega_x^{c1})$ имеют вид

$$A^k(a;\omega_y^{c2})=\sum_{s=\max(0,k-p_2)}^{\min(p_1,k)}\ \sum_{i=s}^{\min(p_1,s)}B^i(b;\omega_y^{c2})G^{k-s}(g^{[ic1]};\omega_y^{c2}),\ k=\overline{0,\ p_1+p_2}, \qquad (6.5.10)$$

Отсюда при $q_1=r$, $B^r(b;\omega_y^{c2})=\varepsilon$, $B^i(b;\omega_y^{c2})=0\quad \forall i\ne r$ получаем коэффициенты оператора $\omega_x^{rc1}L_{p_2}(G(g;\omega_y^{c2});\omega_x^{c1})$

$$A^{r,k}(G(g;\omega_y^{2}))=G^k(g_x^{[rc1]};\omega_y^{c2}),\ k=\overline{0,\ p_2+r}. \qquad (6.5.11)$$

где символ $\boldsymbol{G}^k(\boldsymbol{g}_x^{[rc1]};\boldsymbol{\omega}_y^{c2})$ означает, что к коэффициентам оператора $\boldsymbol{G}^k(\boldsymbol{g};\boldsymbol{\omega}_y^{c2})$ применена $\boldsymbol{r}$ степень оператора $\boldsymbol{\omega}_x^{c1}$.

Коэффициенты $\boldsymbol{A}^{r,k}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{g};\boldsymbol{\omega}_y^{2}))$ обладают свойствами, указанными в теореме 10.5.1.

Аналогично, правая результантная матрица $\boldsymbol{R}^m(\boldsymbol{\omega}_y^{c2})$ размерности $\left(\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{s}_k+1)\right)(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_m)$, где $\boldsymbol{s}_k=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_m-\boldsymbol{p}_k-1$, составлена из подматриц $\boldsymbol{M}_k(\boldsymbol{\omega}_y^{c2})$ размерности $(\boldsymbol{s}_k+1)\,(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_m)$, отвечающих, соответственно, операторам $\boldsymbol{A}_{n_k}(\boldsymbol{a}_k;\boldsymbol{\omega}_x^{c1},\boldsymbol{\omega}_y^{c2})=\boldsymbol{L}_{p_k}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{\omega}_y^{2c});\boldsymbol{\omega}_x^{c1})$, имеет вид

$$\boldsymbol{M}_k(\boldsymbol{\omega}_y^{c2})=\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{s_k,p_1+p_m-1}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) & \boldsymbol{A}^{s_k,p_1+p_m-2}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) & \cdots & \boldsymbol{A}^{s_k,0}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ \cdots \ 0 \ \ \boldsymbol{A}^{0,p_k}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) & \boldsymbol{A}^{0,p_k-1}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) & \cdots & \boldsymbol{A}^{0,0}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) \end{pmatrix}\right)^{\boldsymbol{T}}. \qquad (6.5.12)$$

Из рассмотрения уравнения $\sum_{j=0}^{m}\boldsymbol{Y}_{\tilde{s}_j}\boldsymbol{A}_{n_j}^*(\boldsymbol{a};\boldsymbol{\delta}_x,\boldsymbol{\delta}_y)=0$ определяются левые результантные матрицы $\boldsymbol{R}^{*m}(\boldsymbol{\delta}_x)=(\boldsymbol{M}_1^*(\boldsymbol{\delta}_x),...,\boldsymbol{M}_m^*(\boldsymbol{\delta}_x))^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{R}^{*m}(\boldsymbol{\omega}_y^{c})=$ $=(\boldsymbol{M}_1^*(\boldsymbol{\omega}_y^{c}),...,\boldsymbol{M}_m^*(\boldsymbol{\omega}_y^{c}))^{\boldsymbol{T}}$, составленные из подматриц

$$\boldsymbol{M}_k^*(\boldsymbol{\omega}_y^{c2})=\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{*s_k,p_1+p_m-1}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) & \boldsymbol{A}^{*s_k,p_1+p_m-2}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) & \cdots & \boldsymbol{A}^{*s_k,0}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ \cdots \ 0 \ \ \boldsymbol{A}^{*0,p_k}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) & \boldsymbol{A}^{*0,p_k-1}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) & \cdots & \boldsymbol{A}^{*0,0}(\boldsymbol{\omega}_y^{c2}) \end{pmatrix}\right)^{\boldsymbol{T}}. \qquad (6.5.13)$$

Аналогично

$$\boldsymbol{M}_k^*(\boldsymbol{\omega}_x^{c1})=\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{*\tilde{s}_k,q_1+q_m-1}(\boldsymbol{\omega}_x^{c1}) & \boldsymbol{A}^{*\tilde{s}_k,q_1+q_m-2}(\boldsymbol{\omega}_x^{c1}) & \cdots & \boldsymbol{A}^{*\tilde{s}_k,0}(\boldsymbol{\omega}_x^{c1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ \cdots \ 0 \ \ \boldsymbol{A}^{*0,q_k}(\boldsymbol{\omega}_x^{c1}) & \boldsymbol{A}^{*0,q_k-1}(\boldsymbol{\omega}_x^{c1}) & \cdots & \boldsymbol{A}^{*0,0}(\boldsymbol{\omega}_x^{c1}) \end{pmatrix}\right)^{\boldsymbol{T}}. \qquad (6.5.14)$$

Обозначим порядок ЛНОД по $\boldsymbol{\omega}_x^{c1}$ сопряженных операторов через $\boldsymbol{d}_x^*$, порядок ЛНОД по $\boldsymbol{\omega}_y^{c2}$ сопряженных операторов через $\boldsymbol{d}_y^*$, $\boldsymbol{r}_y^*=\boldsymbol{rang}\,\boldsymbol{R}^{*m}(\boldsymbol{\omega}_x^{c1})$,

$r_x^* = rang\, R^{*m}(\omega_y^{c2})$ левые ранги левых результантных матриц множества операторов.

Имеет место

Теорема 6.5.2. Справедливы соотношения:

$r_x + d_x = p_1 + p_m$, $r_y + d_y = q_1 + q_m$;

$r_x^* + d_x^* = p_1 + p_m$; $r_y^* + d_y^* = q_1 + q_m$.

Приведем несколько следствий.

Следствие 6.5.1. Справедливы соотношения:

$r_x - r_x^* = d_x^* - d_x$, $r_y - r_y^* = d_y^* - d_y$.

Следствие 6.5.2. Для того чтобы операторы $A_{n_i}(a_i;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2})$ были взаимно просты в совокупности справа (слева) необходимо и достаточно выполнение условий:

$r_x = p_1 + p_m$, $r_y = q_1 + q_m$,

($r_x^* = p_1 + p_m$, $r_y^* = q_1 + q_m$).

Следствие 6.5.3. Для того чтобы операторы $A_{n_i}(a_i;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2})$ имели правый (левый) наибольший общий делитель порядка:

1) $d_x \neq 0$ по ω_x^{c1}, $d_y \neq 0$ по ω_y^{c2} ($d_x^* \neq 0$ по ω_x^{c1}, $d_y^* \neq 0$ по ω_y^{c2});

2) $d_x = 0$, $d_y \neq 0$, ($d_x^* = 0, d_y^* \neq 0$);

3) $d_x \neq 0$, $d_y = 0$, ($d_x^* \neq 0$, $d_y^* = 0$);

4) $d_x = 0$, $d_y = 0$, ($d_x^* = 0$, $d_y^* = 0$),

необходимо и достаточно выполнение следующих условий, соответственно:

1) $r_x < p_1 + p_m$, $r_y < q_1 + q_m$, ($r_x^* < p_1 + p_m$, $r_y^* < q_1 + q_m$);

2) $r_x = p_1 + p_m$, $r_y < q_1 + q_m$, ($r_x^* = p_1 + p_m$, $r_y^* < q_1 + q_m$);

3) $r_x < p_1 + p_m$, $r_y = q_1 + q_m$), ($r_x^* < p_1 + p_m$, $r_y^* = q_1 + q_m$);

4) $r_x = p_1 + p_m$, $r_y = q_1 + q_m$, ($r_x^* = p_1 + p_m$, $r_y^* = q_1 + q_m$).

Рассмотрим систему обыкновенных линейных уравнений в частных разностях (ОЛУЧР) с одной неизвестной функцией $z(x,y)$

$$A_{n_j}(a;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2})z=0\,,\ j=1,2,...,m\,. \tag{6.5.15}$$

Теорема 6.5.3. Для того чтобы система (6.5.15) была только тривиально совместна достаточно, чтобы уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} A_{n_j}(a;\omega_x^{c1},\omega_y^{c2})=\varepsilon\,, \tag{6.5.16}$$

имело решение в кольце $K[\omega_x^{c1},\omega_y^{c2}]$.

Достаточность. Предположение о разрешимости уравнения (6.5.16) и нетривиальной совместности системы (6.5.15) приводит к противоречию $\sum_{j=1}^{m} X_{s_j} A_{n_j}(a;\delta_x,\omega_y^{c})u(x,y)\equiv 0=u(x,y)$ при $u(x,y)\neq 0$. ■

В приводимых ниже примерах для отыскания ПНОД будем пользоваться модификацией алгоритма вычисления ПНОД.

Пример 6.5.2. Построить правые и левые результантные матрицы операторов $A_3^1=\omega_x^{2c1}\omega_y^{-c2}+y\omega_x^{c1}+x\omega_y^{-c2}+\varepsilon$, $A_2^2=x\omega_x^{c1}\omega_y^{-c2}+(x+y)\omega_y^{-c2}+2\varepsilon$, $A_2^3=\omega_x^{c1}+x\omega_y^{-2c2}+\varepsilon$. Для упрощения будем считать, что $c1=1$, $c2=-1$.

Напишем правую результантную матрицу $R^3(\omega_x^1)$, расположив операторы по степеням ω_y^{-1}: $L_1^1=(\omega_x^2+x\varepsilon)\omega_y^{-1}+y\omega_x^1+\varepsilon$, $L_1^2=$ $=(x\omega_x^1+(x+y)\varepsilon)\omega_y^{-1}+2\varepsilon$, $L_2^3=x\omega_y^{-2}+\omega_x^1+\varepsilon$. Здесь $q_1=q_2=1$, $q_3=2$, поэтому $\tilde{s}_1=\tilde{s}_2=1$, $\tilde{s}_3=0$. Следовательно, результантная матрица будет составлена из подматриц

$$M_1(\omega_x^1)=\left(\begin{pmatrix} \omega_x^2+x\varepsilon & (y-1)\omega_x^1+\varepsilon & 0 \\ 0 & \omega_x^2+x\varepsilon & y\omega_x^1+\varepsilon \end{pmatrix}\right),$$

$$M_2(\omega_x^1)=\left(\begin{pmatrix} x\omega_x^1+(x+y-1)\varepsilon & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & x\omega_x^1+(x+y)\varepsilon & 2\varepsilon \end{pmatrix}\right),$$

$$M_3(\omega_x^1)=\left(\begin{pmatrix} x\varepsilon & 0 & \omega_x^1+\varepsilon \end{pmatrix}\right),$$

расположенных в произвольном порядке, например, $\boldsymbol{R}^3(\boldsymbol{\omega}_x^1) = (\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{\omega}_x^1),$ $\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{\omega}_x^1), \boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{\omega}_x^1))^T$.

Расположив операторы по степеням $\boldsymbol{\omega}_x^1$, составим правую результантную матрицу $\boldsymbol{R}^3(\boldsymbol{\omega}_y^{-1})$. Имеем: $\boldsymbol{L}_2^1 = \boldsymbol{\omega}_y^{-1}\boldsymbol{\omega}_x^2 + \boldsymbol{y}\boldsymbol{\omega}_x^1 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{L}_1^2 =$ $= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-1}\boldsymbol{\omega}_x^1 + (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{\omega}_y^{-1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{L}_1^3 = \boldsymbol{\omega}_x^1 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-2} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Здесь $\boldsymbol{p}_1 = 2$, $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 = 1$, поэтому $\boldsymbol{s}_1 = 0$, $\boldsymbol{s}_2 = 1, \boldsymbol{s}_3 = 1$. Следовательно, результантная матрица будет составлена из подматриц

$$\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{\omega}_y^{-1}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_y^{-1} & \boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{\omega}_y^{-1}) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{\omega}_y^{-1} & (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{\omega}_y^{-1} + 2\boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-1} & (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{\omega}_y^{-1} + 2\boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{\omega}_y^{-1}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} & (\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{\omega}_y^{-2} + \boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-2} + \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

расположенных в произвольном порядке, например, $\boldsymbol{R}^3(\boldsymbol{\omega}_y^{-1}) = (\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{\omega}_y^{-1}),$ $\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{\omega}_y^{-1}), \boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{\omega}_y^{-1}))^T$.

Левые результантные матрицы можно построить, например, перейдя к сопряженным операторам. Тогда левые делители станут правыми делителями и для их выявления нужно исследовать правые результантные матрицы. Имеем: $\boldsymbol{A}_3^{1*} = \boldsymbol{\omega}_x^{-2}\boldsymbol{\omega}_y^1 + \boldsymbol{y}\boldsymbol{\omega}_x^{-1} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^1 + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{A}_2^{2*} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_x^{-1}\boldsymbol{\omega}_y^1 + (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{\omega}_y^1 + 2\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{A}_2^{3*} =$ $= \boldsymbol{\omega}_x^{-1} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^2 + \boldsymbol{\varepsilon}$. Матрицу $\boldsymbol{R}^{3*}(\boldsymbol{\omega}_x^{-1})$ построим, записав, $\boldsymbol{L}_1^{1*} =$ $= (\boldsymbol{\omega}_x^{-2} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\omega}_y^1 + \boldsymbol{y}\boldsymbol{\omega}_x^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{L}_1^{2*} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_x^{-1} + (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\omega}_y^1 + 2\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{L}_2^3 =$ $= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^2 + \boldsymbol{\omega}_x^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\boldsymbol{M}_3^*(\boldsymbol{\omega}_x^{-1}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon} & 0 & \boldsymbol{\omega}_x^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_x^{-1} + (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+2)\boldsymbol{\varepsilon} & 2\boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_x^{-1} + (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{\varepsilon} & 2\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\omega}_x^{-2} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon} & (\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{\omega}_x^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\omega}_x^{-2} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{y}\boldsymbol{\omega}_x^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно записать матрицу $\boldsymbol{R}^{3*}(\boldsymbol{\omega}_y^1)$.

Пример 6.5.3. Вычисляя правые ранги матриц $\boldsymbol{R}^3(\boldsymbol{\omega}_x^1)$, $\boldsymbol{R}^3(\boldsymbol{\omega}_y^{-1})$, $\boldsymbol{R}^{3*}(\boldsymbol{\omega}_x^{-1})$, $\boldsymbol{R}^{3*}(\boldsymbol{\omega}_y^1)$ убедимся, что операторы из предыдущего примера не имеют ПНОД и ЛНОД. Вычислим, например, правый ранг $\boldsymbol{R}^3(\boldsymbol{\omega}_y^{-1})$. Имеем

$$\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{\omega}_y^{-1}) = \left(\begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} & (\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{\omega}_y^{-2}+\boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-2}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ (\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{\omega}_y^{-1} & (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{\omega}_y^{-1}+2\boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-1} & (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{\omega}_y^{-1}+2\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\omega}_y^{-1} & \boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-1}+\boldsymbol{\varepsilon} \end{matrix}\right)\!\!\Bigg).$$

Умножая справа первую строку на $(\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{\omega}_y^{-1}$, $\boldsymbol{\omega}_y^{-1}$ и вычитая соответственно из третьей и пятой, получим

$$\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{\omega}_y^{-1}) \approx \left(\begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} & (\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{\omega}_y^{-2}+\boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-2}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 & -(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2\boldsymbol{\omega}_y^{-3}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\omega}_y^{-1}+2\boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-1} & (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{\omega}_y^{-1}+2\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 & -(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{\omega}_y^{-3}-\boldsymbol{\omega}_y^{-1}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-1}+\boldsymbol{\varepsilon} \end{matrix}\right)\!\!\Bigg).$$

Выполняя далее очевидные преобразования строк справа, найдем

$$\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{\omega}_y^{-1}) \approx \left(\begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} & (\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{\omega}_y^{-2}+\boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-2}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{m}_{33} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{m}_{43} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{m}_{53} \end{matrix}\right)\!\!\Bigg),$$

где обозначено $\boldsymbol{m}_{33} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-2)^2\boldsymbol{\omega}_y^{-5} + (\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}_y^{-3} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}_y^{-2} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{\omega}_y^{-1} - 2\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{m}_{53} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-2)\boldsymbol{\omega}_y^{-15} + (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{\omega}_y^{-3} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}-2)\boldsymbol{\omega}_y^{-2} + \boldsymbol{\omega}_y^{-1} + (1-\boldsymbol{y})\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{m}_{53} == -\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{\omega}_y^{-2} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{\omega}_y^{-1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}$. Видим, что правый ранг равен трем и, следовательно, операторы не имеют делителей содержащих $\boldsymbol{\omega}_x^1$. Рассматривая аналогично остальные случаи, убеждаемся в том, что операторы не имеют общих

ПНОД и ЛНОД.

Пример 6.5.4. Найти ЛНОД операторов $A_3^1 = y\delta_y\omega_x^2 + \omega_x^2 + $ $+ y\omega_x^1 + y^2\omega_x^1\delta_y$, $A_3^2 = (x+1)\delta_y^2\omega_x^1 + xy\delta_y^2$.

Запишем уравнение $A_3^1X^1 + A_3^2X^2 = 0$, где X^1, X^2 неизвестные операторы. Очевидно, что для отыскания коэффициентов этих операторов придется решать систему уравнений с неизвестными под знаками операторов ω_x^1, δ_y. Чтобы этого не делать перейдем к сопряженным, расположив операторы по степеням ω_x^{-1}: $A_3^{1*} = -y\delta_y\omega_x^{-2} - (y^2\delta_y + y\varepsilon)\omega_x^{-1}$, $A_3^{2*} = x\delta_y^2\omega_x^{-1} + xy\delta_y^2 + 2x\delta_y$. Таким образом, задача сведется к нахождению ПНОД сопряженного к ЛНОД, а уравнение примет вид $f_0\{-y\delta_y\omega_x^{-2} - (y^2\delta_y + y\varepsilon)\omega_x^{-1}\} +$ $+(g_1\omega_x^{-1} + g_0\varepsilon)\{x\delta_y^2\omega_x^{-1} + xy\delta_y^2 + 2x\delta_y\} = 0$ с коэффициентами в кольце $K[\delta_y]$. Для их определения имеем систему

$$\left.\begin{aligned} f_0(-y\delta_y) + \quad g_1((x-1)\delta_y^2) \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0,\\ f_0(-y^2\delta_y - y\varepsilon) + g_1((x-1)y\delta_y^2 + 2(x-1)\delta_y) + g_0(x\delta_y^2) &= 0,\\ g_0(xy\delta_y^2 + 2x\varepsilon) &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Применим для упрощения системы метод Гаусса исключения справа. Вычтя из второго уравнения первое умноженное справа на $y\varepsilon$, получим

$$\left.\begin{aligned} f_0(-y\delta_y) + g_1((x-1)\delta_y^2) &= 0,\\ g_0(x\delta_y^2) &= 0,\\ g_0(xy\delta_y^2 + 2x\varepsilon) &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Видим что правый ранг правой результантной матрицы системы, совпадающей с транспонированной правой результантной матрицей сопряженных операторов, равен единице. Следовательно, сопряженные операторы имеют ПНОД второго порядка. Из системы находим $g_0 = 0$, $f_0 = -(x-1)y\delta_y + (x-1)\varepsilon$, $g_1 = -y^2\varepsilon$. Минимальное решение сопряженного уравнения имеет вид $f_0 = -(x-1)y\delta_y + (x-1)\varepsilon$, $g_1\omega_x^{-1} + g_0\varepsilon = -y^2\omega_x^{-1}$. Теперь необходимо найти решение уравнения $(-(x-1)y\delta_y+(x-1)\varepsilon)Y_1^1+$ $+(-y^2\omega_x^{-1})Y_0^2=0$ относительно операторов Y_1^1, Y_0^2. Снова для упрощения вычислений перейдем к сопряженному уравнению $Y_1^{1*}((x-1)y\delta_y+2(x-1)\varepsilon)-$ $-Y_0^{2*}(y^2\omega_x^1)=0$. Решение этого уравнения ищем в виде $Y_1^{1*}=h_1\omega_x^1+h_0\varepsilon$, $Y_0^{2*}=k_0$. Подставляя в уравнение и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ω_x^1, получим систему $h_1\,(xy\delta_y+2x\varepsilon)-k_0(y^2\varepsilon)=0$, $h_0=0$. Из которой получаем $h_1=y\varepsilon$, $k_0=x\delta_y$. Поэтому $Y_1^{1*}=y\omega_x^1$, $Y_0^{2*}=x\delta_y$. Следовательно, $A_3^1=D_2Y_1^{1*}$, $A_3^2=D_2Y_0^{2*}$. Выполнив деление слева, найдем ЛНОД $D_2=\omega_x^1\delta_y+y\delta_y$.

6.6. Дифференциально–разностные по общей переменной операторы

Пусть кольцо косых многочленов $K[u,v]$ рассматривается над полем K функций $f(x)$ и замкнуто относительно дифференциального $\delta_x=d/dx$ и разностного $\omega_x^c f(x)=f(x+c)$ $\forall c\in C$ операторов. Выберем автоморфизм и гомоморфизм поля K, положив $\alpha_u=\omega_x^c$, $\alpha_v=\iota$, $\beta_u=0$, $\beta_v=\delta_x$. Тогда кольцо косых многочленов изоморфно кольцу $K[\delta_x,\omega_x^c]$ дифференциально-разностных по общей переменной операторов.

Построим результантные матрицы множества операторов $A_{n_k}(a;\delta_x,\omega_x^c)\in K[\delta_x,\omega_x^c]$, $k=\overline{1,m}$. Сначала считаем, что операторы являются элементами кольца $K[\omega_x^c][\delta_x]$, то есть $A_{n_k}=A_{p_k}(A(\omega_x^c);\delta_x)=$ $=\sum\limits_{i=0}^{p_k}A_{t_i}(a;\omega_x^c)\delta_x^i$, где $A_{t_i}(a;\omega_x^c)$ операторы некоторых порядков t_i. Положим $p_1=\max\limits_{1\le k\le m}(p_k)$, $p_m=\min\limits_{1\le k\le m}(p_k)=d_0$, $A_{d_j}=\text{ПНОД}(A_{d_{j-1}},A_{p_j})$, где d_j порядок оператора по δ_x, $j=\overline{1,m-1}$, $p_1\ge\cdots\ge p_m=d_0\ge d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_{m-1}=d$.

Сопоставим множеству операторов уравнение

$$\sum_{k=1}^{m} X_{s_k}(X(f_k;\omega_x^c);\delta_x)L_{p_k}(A(a;\omega_x^c);\delta_x)=0, \qquad (6.6.1)$$

где $s_k = p_1 + p_m - p_k - 1$, $X^k(f_k;\omega_x^c)$ неизвестные коэффициенты подлежащие определению в кольце $K[\omega_x^c]$.

Исходя из уравнения (6.6.1) и свойства 3) теоремы 6.1.1 построим правую результатную матрицу $R^m(\omega_x^c)$. Эта матрица, имеет вид (1.7.3) и размерность $\left(\sum_{k=1}^{m}(s_k+1)\right)(p_1+p_m)$. Она составлена из подматриц

$$M_k(\omega_x^c)=\left(\begin{matrix} A^{s_k,p_1+p_m-1}(a;\omega_x^c) & 0 & \cdots & 0 \\ A^{s_k,p_1+p_m-2}(a;\omega_x^c) & A^{s_k-1,p_1+p_m-2}(a;\omega_x^c) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{s_k,p_k}(a;\omega_x^c) & A^{s_k-1,p_k}(a;\omega_x^c) & \cdots & A^{0,p_k}(a;\omega_x^c) \\ A^{s_k,p_k-1}(a;\omega_x^c) & A^{s_k-1,p_k-1}(a;\omega_x^c) & \cdots & A^{0,p_k-1}(a;\omega_x^c) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{s_k,1}(a;\omega_x^c) & A^{s_k-1,1}(a;\omega_x^c) & \cdots & A^{0,1}(a;\omega_x^c) \\ A^{s_k,0}(a;\omega_x^c) & A^{s_k-1,0}(a;\omega_x^c) & \cdots & A^{0,0}(a;\omega_x^c) \end{matrix}\right) \qquad (6.6.2)$$

имеющих вид (1.7.2) и размерность $(s_k+1)(p_1+p_m)$, отвечающих операторам $A_{n_k}(a;\delta_x,\omega_x^c)=L_{p_k}(A(a;\omega_x^c);\delta_x)=\sum_{j=0}^{p_k}A_{t_j}(a;\omega_x^c)\delta_x^j$, соответственно.

Расположив операторы по степеням ω_x^c, $A_{n_k}(a;\delta_x,\omega_x^c)=$ $=L_{q_k}(B\ (b;\delta_x);\ \omega_x^c)=\sum_{j=0}^{q_k}B_{r_j}(b;\delta_x)\omega_x^{jc}$, построим правую результатную матрицу $R^m(\delta_x)$. Пусть $q_1=\max\limits_{1\le k\le m}(q_k)$, $q_m=\min\limits_{1\le k\le m}(q_k)=\tilde{d}_0$, $A_{\tilde{d}_j}=$ПНОД$(A_{\tilde{d}_{j-1}},A_{q_j})$, где $\tilde{d}_j$ порядки операторов по ω_x^c, $j=\overline{1,m-1}$, $q_1\ge\cdots\ \ge q_m=\tilde{d}_0\ge\tilde{d}_1\ge\tilde{d}_2\ge\cdots$ $\ge\tilde{d}_{m-1}=\tilde{d}$.

Соответствующее уравнение теперь имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} X_{\tilde{s}_k}(X(f_k;\delta_x);\ \omega_x^c)A_{q_k}(A(\delta_x);\omega_x^c)=0, \qquad (6.6.3)$$

где $\tilde{s}_k = q_1 + q_m - q_k - 1$, $X(f_k;\delta_x) = \sum_{i=0}^{\tilde{s}_k} f_{k,i}\delta_x^i$ неизвестные коэффициенты подлежащие определению в кольце $K[\delta_x]$, $f_{k,i} \in K$.

Правая результатная матрица $R^m(\delta_x)$ размерности, $\left(\sum_{k=1}^{m}(\tilde{s}_k + 1)\right)(q_1 + q_m)$, где $\tilde{s}_k = q_1 + q_m - q_k - 1$ составлена из подматриц

$$M_k(\delta_x) = \left(\begin{pmatrix} A^{\tilde{s}_k, q_1+q_m-1}(\delta_x) \ A^{\tilde{s}_k, q_1+q_m-2}(\delta_x) \ \cdots\cdots A^{\tilde{s}_k, 0}(\delta_x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad \cdots 0 \qquad A^{0,q_k}(\delta_x) \ A^{0,q_k-1}(\delta_x) \ \cdots A^{0,0}(\delta_x) \end{pmatrix}\right)^T \qquad (6.6.4)$$

размерности $(\tilde{s}_k + 1) \times (q_1 + q_m)$, отвечающих операторам $A_{n_k} = L_{q_k}(C(a;\delta_x);\omega_x^c)$.

Здесь и далее такая запись результантных матриц используется в целях экономии места.

Из рассмотрения уравнения $\sum_{j=0}^{m} Y_{\tilde{s}_j} A_{n_j}^*(a;\delta_x,\omega_x^c) = 0$ определяются левые результантные матрицы $R^{*m}(\omega_x^c) = (M_1^*(\omega_x^c),...,M_m^*(\omega_x^c))^T$, $R^{*m}(\delta_x) = (M_1^*(\delta_x),...,M_m^*(\delta_x))^T$, составленные из подматриц

$$M_k^*(\omega_x^c) = \left(\begin{pmatrix} A^{*s_k, p_1+p_m-1}(\omega_x^c) \ A^{*s_k, p_1+p_m-2}(\omega_x^c) \cdots A^{*s_k, 0}(\omega_x^c) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad \cdots 0 \ A^{*0,p_k}(\omega_x^c) \ A^{*0,p_k-1}(\omega_x^c) \cdots \ A^{*0,0}(\omega_x^c) \end{pmatrix}\right)^T. \qquad (6.6.5)$$

Аналогично

$$M_k^*(\delta_x) = \left(\begin{pmatrix} A^{*\tilde{s}_k, q_1+q_m-1}(\delta_x) \ A^{*\tilde{s}_k, q_1+q_m-2}(\delta_x) \ \cdots \ A^{*\tilde{s}_k, 0}(\delta_x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad \cdots 0 \ A^{*0,q_k}(\delta_x) \ A^{*0,q_k-1}(\delta_x) \ \cdots \ A^{*0,0}(\delta_x) \end{pmatrix}\right)^T. \qquad (6.6.6)$$

Пример 6.6.1. Написать правую результантную матрицу операторов относительно δ_x: $L_2(C(c;\omega_x^c);\delta_x) = C^2(c;\omega_x^c)\delta_x^2 + C^1(c;\omega_x^c)\delta_x + C^0(c;\omega_x^c)\varepsilon$, $L_3(E(e;\omega_x^c);\delta_x) = E^3(e;\omega_x^c)\delta_x^3 + E^2(e;\omega_x^c)\delta_x^2 + E^1(e;\omega_x^c)\delta_x + E^0(e;\omega_x^c)\varepsilon$.

Здесь $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $s_1 = 2$, $s_2 = 1$. Поэтому оператору $L_2(C(c;\omega_x^c);\delta_x)$ отвечает матрица размерности 5×3

$$M_1(\omega_x^c) = \left(\begin{pmatrix} C^2(c;\omega_x^c) & 0 & 0 \\ C^1(c;\omega_x^c) + 2C^2(\delta_x c;\omega_x^c) & C^2(c;\omega_x^c) & 0 \\ \begin{matrix} C^0(c;\omega_x^c) + 2C^1(\delta_x c;\omega_x^c) + \\ + C^2(\delta_x^2 c;\omega_x^c) \end{matrix} & C^1(c;\omega_x^c) + C^2(\delta_x c;\omega_x^c) & C^2(c;\omega_x^c) \\ 2C^0(\delta_x c;\omega_x^c) + C^1(\delta_x^2 c;\omega_x^c) & C^0(c;\omega_x^c) + C^1(\delta_x c;\omega_x^c) & C^1(c;\omega_x^c) \\ C^0(\delta_x^2 c;\omega_x^c) & C^0(\delta_x c;\omega_x^c) & C^0(c;\omega_x^c) \end{pmatrix}\right),$$

а оператору $M_3(E(e;\omega_x^c);\delta_x)$ матрица размерности 5×2

$$M_2(\omega_x^c) = \left(\begin{pmatrix} E^3(e;\omega_x^c) & 0 \\ E^2(e;\omega_x^c) + E^3(\delta_x e;\omega_x^c) & E^3(e;\omega_x^c) \\ E^1(e;\omega_x^c) + E^2(\delta_x e;\omega_x^c) & E^2(e;\omega_x^c) \\ E^0(e;\omega_x^c) + E^1(\delta_x e;\omega_x^c) & E^1(e;\omega_x^c) \\ E^0(\delta_x e;\omega_x^c) & E^0(e;\omega_x^c) \end{pmatrix}\right),$$

элементы которых вычисляются по теореме 6.1.1. Таким образом, правая результантная матрица операторов $L_2(C(c;\omega_x^c);\delta_x)$, $L_3(E(e;\omega_x^c);\delta_x)$ является конкатенацией этих матриц: $R^2(\omega_x^c) = (M_1(\omega_x^c), M_2(\omega_x^c)))$.

Обозначим через d_δ^* порядок ЛНОД операторов, сопряженных по δ_x, d_ω^* — порядок ЛНОД, операторов, сопряженных по ω_x^c, $r_\delta^* = rang\, R^{*m}(\omega_x^c)$, $r_\omega^* = rang\, R^{*m}(\delta_x)$ правые ранги левых результантных матриц множества операторов.

Имеет место теорема, являющаяся следствием теоремы 1.4.1.

Теорема 6.6.1. Справедливы соотношения:

$r_\delta + d_\delta = p_1 + p_m$, $r_\omega + d_\omega = q_1 + q_m$;

$r_\delta^* + d_\delta^* = p_1 + p_m$; $r_\omega^* + d_\omega^* = q_1 + q_m$.

Приведем несколько следствий.

Следствие 6.6.1. Справедливы соотношения:

$r_\delta - r_\delta^* = d_\delta^* - d_\delta$; $r_\omega - r_\omega^* = d_\omega^* - d_\omega$.

Следствие 6.6.2. Для того чтобы операторы $A_{n_i}(a;\delta_x,\omega_x)$ были взаимно просты в совокупности справа (слева) необходимо и достаточно выполнение условий:

$$r_\delta = p_1 + p_m,\ r_\omega = q_1 + q_m,\ (r_\delta^* = p_1 + p_m,\ r_\omega^* = q_1 + q_m).$$

Следствие 6.6.3.. Для того чтобы операторы $A_{n_i}(a;\delta_x,\omega_x)$ имели правый (левый) наибольший общий делитель порядка:

1) $d_\delta \neq 0$ по δ_x, $d_\omega \neq 0$ по ω_x ($d_\delta^* \neq 0$ по δ_x, $d_\omega^* \neq 0$ по ω_x);

2) $d_\delta = 0$, $d_\omega \neq 0$, ($d_\delta^* = 0, d_\omega^* \neq 0$);

3) $d_\delta \neq 0$, $d_\omega = 0$, ($d_\delta^* \neq 0$, $d_\omega^* = 0$);

4) $d_\delta = 0$, $d_\omega = 0$, ($d_\delta^* = 0$, $d_\omega^* = 0$),

необходимо и достаточно выполнение следующих условий, соответственно:

1) $r_\delta < p_1 + p_m$, $r_\omega < q_1 + q_m$, ($r_\delta^* < p_1 + p_m$, $r_\omega^* < q_1 + q_m$);

2) $r_\delta = p_1 + p_m$, $r_\omega < q_1 + q_m$, ($r_\delta^* = p_1 + p_m$, $r_\omega^* < q_1 + q_m$);

3) $r_\delta < p_1 + p_m$, $r_\omega = q_1 + q_m$, ($r_\delta^* < p_1 + p_m$, $r_\omega^* = q_1 + q_m$);

4) $r_\delta = p_1 + p_m$, $r_\omega = q_1 + q_m$, ($r_\delta^* = p_1 + p_m$, $r_\omega^* = q_1 + q_m$).

Доказательство. Следует из теоремы 1.7.5.

Пример 6.6.1. Выяснить наличие ПНОД у операторов $L_3^1 = \omega_x^c\delta_x^2 + {}$ $+x\omega_x^c\delta_x + \delta_x$, $L_3^2 = \omega_x^{2c}\delta_x + x\omega_x^c\delta_x$.

Решение. Сначала выясним наличие ПНОД, содержащего оператор ω_x^c. Расположив операторы по убыванию степеней ω_x^c: $L_3^1 = (\delta_x^2 + x\delta_x)\omega_x^c + \delta_x$, $L_3^2 = \delta_x\omega_x^{2c} + x\delta_x\omega_x^c$, составим уравнение

$$(f_1\omega_x^c + f_0\varepsilon)((\delta_x^2 + x\delta_x)\omega_x^c + \delta_x) + g_0(\delta_x\omega_x^{2c} + x\delta_x\omega_x^{2c}) = 0, \qquad (6.6.7)$$

где $X = f_1\omega_x^c + f_0\varepsilon$, $Y = g_0$ его минимальное решение, коэффициенты которого $f_1, f_0, g_0 \in K[\delta_x]$. Приравнивая коэффициента при одинаковых степенях ω_x^c нулю, получим систему

$$\left.\begin{array}{lll} f_1(\delta_x^2+(x+c)\delta_x)+ & g_0\delta_x & =0, \\ f_1\delta_x+ & f_0(\delta_x^2+x\varepsilon)+g_0x\delta_x & =0, \\ & f_0\delta_x & =0. \end{array}\right\}$$

Очевидно, что правый ранг правой результантной матрицы операторов равен трем, поэтому по теореме 6.6.1 операторы не имеют общих правых делителей, зависящих от δ_x.

Запишем теперь операторы, расположив их как элементы кольца $K[\omega_x^c][\delta_x]$ по убыванию степеней δ_x: $L_3^1=\omega_x^c\delta_x^2+(x\omega_x^c+\varepsilon)\delta_x$, $L_3^2=(\omega_x^{2c}+x\omega_x^c)\delta_x$. Найдем минимальное решение уравнения

$$(a_1\varepsilon)\,(\omega_x^c\delta_x^2+(x\omega_x^c+\varepsilon)\delta_x)+(b_1\delta_x+b_0\varepsilon)((\omega_x^{2c}+x\omega_x^c)\delta_x)=0, \qquad (6.6.8)$$

коэффициенты, которого принадлежат кольцу $K[\omega_x^c]$. Приравнивая коэффициента при одинаковых степенях δ_x нулю, получим систему

$$\left.\begin{array}{llll} a_1\omega_x^c & +b_1(\omega_x^{2c}+x\omega_x^c) & & =0, \\ a_1(x\omega_x^c+\varepsilon)+b_1\omega_x^c & & +b_0(\omega_x^{2c}+x\omega_x^c) & =0. \end{array}\right\} \qquad (6.6.9)$$

Вычислим ранг правой результантной матрицы операторов, приведя систему (6.6.9) к треугольному виду. Поскольку коэффициенты при неизвестном a_1 некоммутативны, то найдем ЛНОК($\omega_x^c, x\omega_x^c+\varepsilon$)$=(x\omega_x^c+\varepsilon)\omega_x^c=$ $=\omega_x^c((x-c)\omega_x^c+\varepsilon)$. Вычитая из второго уравнения, умноженного справа на оператор ω_x^c, первое, умноженное справа на оператор $(x-c)\omega_x^c+\varepsilon$ получим

$$\left.\begin{array}{ll} a_1\omega_x^c+b_1(\omega_x^{2c}+x\omega_x^c) & =0, \\ b_1(-(x+c)\omega_x^{3c}-x^2\omega_x^c-x\varepsilon)+b_0(\omega_x^{3c}+x\omega_x^{2c}) & =0. \end{array}\right\}$$

Видим, что правый ранг правой результантной матрицы равен двум, следовательно, по теореме 6.6.1 операторы имеют ПНОД первого порядка по δ_x, который, впрочем, очевиден.

Глава 7. Уравнения с почти алгебраическими операторами

7.1. Почти алгебраические линейные операторы

Задача отыскания частных решений неоднородных линейных дифференциально-разностных уравнений имеет не только теоретическое, но и прикладное значение. Дифференциально-разностные уравнения рассматривались с различных точек зрения в разное время и разными авторами, например, [8, 35, 38]. Общая теория линейных уравнений в банаховом пространстве дана в [26].

Решение этой задачи можно упростить, если удается использовать понятие алгебраического или почти алгебраического элемента (оператора). В исследованиях автора [96] рассматривались операторы алгебраические относительно некоторого двустороннего идеала (почти алгебраические). Алгебраическим оператором является, например, инволюция некоторого порядка. Мы распространяем понятие почти алгебраических операторов на ОЛДО и ОЛРО с помощью уравнений с коэффициентами из соответствующих колец, рассмотренных в [64].

Пусть $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M}$ $(\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{M})$ — линейные пространства над полем комплексных чисел $\boldsymbol{C}$, причем пространство $\boldsymbol{N}$ — конечномерное. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра линейных операторов, действующих из $\boldsymbol{M}$ в $\boldsymbol{N}$ и $\mathcal{A}_0$ — её подалгебра, порожденная операторами $\boldsymbol{A}_i$, действующими в пространстве $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{I}$ — левый главный идеал алгебры $\mathcal{A}_0$, образованный операторами, аннулирующими пространство $\boldsymbol{N}$, с образующей $\boldsymbol{A}_0$.

Далее через $\boldsymbol{a}\equiv\boldsymbol{b}(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{I})$ обозначается сравнение по модулю левого идеала $\boldsymbol{I}$.

Операторы из $\mathcal{A}_0$ называются проекторами пространства $\boldsymbol{N}$. Из всего множества проекторов выделим те, которые удовлетворяют следующему определению.

Определение 7.1.1. Пусть $2\le \boldsymbol{s}\le\mathbf{dim}\,\boldsymbol{N}$. Множество $\Pi_{\boldsymbol{s}}$ операторов

$P_i \in \mathcal{A}_0$, называется оптимальным множеством разделенных проекторов мощности s, связанных с пространством N, если выполняются условия:

$$P_1 + \cdots + P_s \equiv \varepsilon(\mathrm{mod}\, I) \tag{7.1.1}$$

$$P_i(N) \bigcap P_j(N) = 0 ,\ i \neq j, \tag{7.1.2}$$

где ε — тождественное отображение.

Определение 7.1.2. Проекторы, удовлетворяющие дополнительно условию

$$P_j P_k \equiv \begin{cases} P_j\,(\mathrm{mod}\, I), k = j, \\ 0\ (\mathrm{mod}\, I), k \neq j, \end{cases} \tag{7.1.3}$$

называются идемпотентными.

Определение 7.1.3. Оператор $A \in \mathcal{A}$ называется алгебраическим степени $m \geq 2$ относительно левого идеала I (почти алгебраическим), если существует ненулевой многочлен $\nu(t)$ с коэффициентами в поле C такой, что $\nu(A) \in I$. Если это так, то многочлен $\nu_m(t)$ наименьшей степени m называется характеристическим многочленом оператора A, а его корни называются характеристическими корнями оператора A.

Сравни с [96], где идеал I двусторонний. Алгебраическим оператором является инволюция некоторого порядка. Почти алгебраические операторы возникают, например как решения уравнения $XD = DY$, рассматривавшегося в [53, 61], где D — заданный оператор, X, Y — операторы, подлежащие определению, Y — компонента решения является почти алгебраическим оператором.

Удобно считать старшие коэффициенты многочленов равными единице.

Лемма 7.1.1. (Ш. Эрмит) Для произвольного многочлена $\nu_m(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - t_i)^{r_i}$, построенного по множеству пар $(t_i; r_i)$, $i = \overline{1,s}$, $s \geq 2$, где t_i — попарно различные комплексные числа, называемые узлами, r_i — натуральные числа, называемые кратностями узлов, $r_1 + \cdots + r_s = m$, справедливо тождество

$$1 \equiv \sum_{i=0}^{s} p_i(t), \qquad (7.1.4)$$

где

$$p_i(t) = q_i(t) \prod_{j=1;\, j\neq i}^{s} (t - t_j)^{r_j}, \qquad (7.1.5)$$

причем $q_i(t) = \sum_{k=0}^{r_i - 1} \frac{(t - t_i)^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{(t - t_i)^{r_i}}{\nu_m(t)} \right]_{t = t_i}$.

Тождество (7.1.5) называется разбиением единицы.

Построим по формулам (7.1.5) операторы $P_i = p_i(A)$, где A — почти алгебраический оператор с характеристическим многочленом $\nu_m(t) = \prod_{i=1}^{s}(t - t_i)^{r_i}$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, $r_1 + \cdots + r_s = m$. По построению операторы P_j являются проекторами пространства N.

Лемма 7.1.2. Проекторы P_j обладают свойством

$$(A - t_j\varepsilon)^{r_j} P_j \equiv 0(\mathbf{mod}\, I),\ \forall j = \overline{1, s}. \qquad (7.1.6)$$

Доказательство. Действительно

$(A - t_j\varepsilon)^{r_j} P_j = (A - t_j\varepsilon) q_j(A) \prod_{i=1;\, i\neq j}^{s} (A - t_i\varepsilon)^{r_i} = q_j(A)\nu_m(A) \in I$, $\forall j = 1, \cdots, s$. ■

Лемма 7.1.3. Операторы $P_i = p_i(A)$ являются разделенными идемпотентными проекторами.

Доказательство. Свойство (7.1.1) следует из (7.1.5). Обозначим $N_j = P_j(N)$. Согласно (7.1.6) $(A - t_j\varepsilon)^{r_j} P_j x = 0$ $\forall x \in N$. А поскольку уравнения $(A - t_j\varepsilon)^{r_j} y = 0$, $(A - t_i\varepsilon)^{r_i} y = 0$ при $i \neq j$ не имеют общих нетривиальных решений, то $P_j(N) \bigcap P_i(N) = 0$ при $i \neq j$.

Идемпотентность. По построению операторы P_j коммутативные, поэтому при $j \neq k$ получим:

$$P_jP_k = p_j(A)p_k(A) = q_j(A)q_k(A)\prod_{i=1;i\neq j}^{s}(A-t_i\varepsilon)^{r_i}\prod_{i=1;i\neq k}^{s}(A-t_i\varepsilon)^{r_i} =$$

$$= q_j(A)q_k(A)\prod_{i=1;i\neq j;i\neq k}^{s}(A-t_i\varepsilon)^{r_i}\nu_m(A)\in I.$$

При $j=k$ имеем:

$$P_j^2 - P_j = \sum_{i=1;i\neq j}^{s} P_jP_i \in I,$$

то есть $P_j^2 \equiv P_j(\mathbf{mod}\, I)$. ■

Теорема 7.1.1. Следующие утверждения равносильны:

а) оператор $A\in\mathcal{A}$ является почти алгебраическим относительно левого идеала I с характеристическим многочленом $\nu_m(t)=\prod_{i=0}^{s}(t-t_i)^{r_i}$;

б) существуют разделенные идемпотентные проекторы $P_j\in\mathcal{A}_0$, $j=\overline{1,s}$;

в) пространство N является прямой суммой своих подпространств: $N=\bigoplus_{j=1}^{s}N_j$, $N_j=P_j(N)$.

Доказательство. а) $\to$ б). Положим $P_j=p_j(A)$, где $p_j(t)$ определяются по формуле (7.1.5), поэтому утверждение следует из леммы 7.1.3.

б) $\to$ в). Следует из б).

в) $\to$ а). Пусть N является прямой суммой подпространств $N_j=ker(A-t_j\varepsilon)^{r_j}$. Обозначим $\nu_m(A)=\prod_{j=1}^{s}(A-t_j\varepsilon)^{r_j}$. Согласно предположению $\forall x\in N$ имеем $x=\sum_{j=1}^{s}x_j$. Отсюда

$$\nu_m(A)x=\nu_m(A)\sum_{j=1}^{s}x_j=\sum_{j=1}^{s}\left[\prod_{k=1;k\neq j}^{s}(A-t_k\varepsilon)^{r_k}\right](A-t_j\varepsilon)^{r_j}x_j=0.$$

Следовательно, оператор A почти алгебраический степени $r_1+\cdots+r_s=m$. ■

Теорема 7.1.2. Если характеристический многочлен оператора A не имеет кратных корней, то

$$A^k \equiv \sum_{j=1}^{s} t_j^k P_j (\mathbf{mod}\, I),\ k = 1,2,\ldots \tag{7.1.7}$$

Доказательство. Так как все собственные числа оператора простые, то из (7.1.6) следует $AP_j \equiv t_j P_j (\mathbf{mod}\, I)$. Складывая эти сравнения, получим в силу (7.1.5)

$$A \equiv \prod_{j=1}^{s} t_j P_j (\mathbf{mod}\, I). \tag{7.1.8}$$

Применяя далее индукцию по k, находим

$$A^k \equiv \sum_{j=1}^{s} t_j^k P_j (\mathbf{mod}\, I). \qquad \blacksquare \tag{7.1.9}$$

Пусть K — некоторое поле, замкнутое относительно операторов $A, B \in \mathcal{A}$ и содержащее поле комплексных чисел C. Оператор (многочлен от A, B) $A_r = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} a_{ij} A^i B^j$, $a_{ij} \in K$, где $r = \max(p, q, p+q)$ — совокупный порядок оператора, можно рассматривать как многочлен от A с коэффициентами, зависящими от оператора B, и записывать его как $A_r = \sum_{i=0}^{p} a_i(B) A^i$, либо как многочлен от оператора B с коэффициентами, зависящими от оператора A, и записывать его $A_r = \sum_{j=0}^{q} b_j(A) B^j$; $\varepsilon = A^0 = B^0$ — единица алгебры.

Рассмотрим уравнение

$$L(A, B)u = f, \tag{7.1.10}$$

где элемент f принадлежит некоторому конечномерному линейному пространству N над K, $L(A,B) = \sum_{i=0}^{q} b_i(A) B^i$, коэффициенты $A, B, L(A,B) \in \mathcal{A}_0$. Пусть I — левый главный идеал алгебры $\mathcal{A}_0$ операторов, аннулирующих пространство N, B — оператор, алгебраический относительно идеала I, с характеристическим многочленом $\nu_m(t)$ и простыми характеристическими числами t_j, $j=\overline{1,m}$; P_j — проекторы пространства N, $f_j = P_j(f)$.

Теорема 7.1.3. Если операторы $L(A,t_j)$, полученные из оператора $L(A,B)$ подстановкой чисел t_j^i, $i=\overline{0,q}$, вместо операторов B^i, действуют в пространстве N, то частное решение уравнения (7.1.10) может быть вычислено как сумма честных решений системы независимых уравнений

$$L(A,t_j)u_j = f_j,\ i=\overline{1,m}, \tag{7.1.11}$$

где $u_i = P_i u$, $f_i = P_i f$.

Доказательство. Поскольку операторы A, B, $L(A,B)$ действуют в пространстве N, то искомое решение существует. Заменив степени B^i в силу теоремы 7.1.2, получим $\sum_{i=0}^{q} b_i(A)\sum_{j=1}^{m} t_j^i P_j u = f$. Меняя порядок суммирования и учитывая, что $f \in N$ получим $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{q} b_i(A)t_j^i P_j u = \sum_{j=1}^{m} P_j f$ или $\sum_{j=1}^{m}(L(A,t_j)P_j u - P_j f) = 0$. Поскольку частное решение ищется в пространстве N, которое является прямой суммой своих подпространств $N_j = P_j(N)$, то приходим к (7.1.11). ■

7.2. Почти алгебраические дифференциальные операторы

Пусть K — дифференциальное поле нулевой характеристики с дифференцированием $\delta = d/dx$ (элементами поля K являются функции $f(x)$ вещественной или комплексной переменной x). Предполагается, что поле K содержит подполе комплексных чисел C или другое алгебраически замкнутое поле.

Обозначим через $K[\delta]$ кольцо обыкновенных линейных дифференциальных операторов (ОЛДО), то есть многочленов вида $D_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta^i$, $a_i \in K$, $a_n \neq 0$, n — порядок оператора, $\delta^0 = \varepsilon$ — единица кольца.

Как отмечалось, ранее почти алгебраические ОЛДО возникают, например, при рассмотрении уравнения [53]

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}_n = \boldsymbol{D}_n\boldsymbol{Y}, \tag{7.2.1}$$

где $\boldsymbol{D}_n \in \boldsymbol{K}[\delta]$ — заданный оператор, а $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ — операторы, подлежащие определению. Коэффициентами этих операторов, вообще говоря, принадлежат некоторому расширению $\boldsymbol{P} \supset \boldsymbol{K}$.

Определение 7.2.1. Решением уравнения (7.2.1) называется любая пара операторов $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ из $\boldsymbol{P}[\delta]\times \boldsymbol{P}[\delta]$ обращающая уравнение в тождество.

Множество решений этого уравнения не пусто, поскольку в нем содержатся элементы централизатора оператора $\boldsymbol{D}_n$ в $\boldsymbol{P}[\delta]$. Множества $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ компонент решений уравнения (7.2.1) являются изоморфными $\boldsymbol{C}$-алгебрами, поэтому ограничимся рассмотрением алгебры $\boldsymbol{Y}$, а её элементы будем называть решениями этого уравнения.

Обозначим через $\boldsymbol{N}$ пространство решений уравнения $\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{y}) = 0$. Из рассмотрения уравнения (7.2.1) следует, что операторы $\boldsymbol{Y}$ являются гомоморфизмами пространства $\boldsymbol{N}$. Множество операторов из $\boldsymbol{Y}$, аннулирующих пространство $\boldsymbol{N}$, является левым идеалом в кольце $\boldsymbol{K}[\delta]$, обозначается $\boldsymbol{I}$. Этот идеал является главным, с образующей $\boldsymbol{D}_n$, $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{D}_n)$.

Теорема 7.2.1. Каждая $\boldsymbol{Y}$ компонента решения уравнения (7.2.1) является почти алгебраическим оператором относительно идеала $\boldsymbol{I}$.

Доказательство. Оператор $\boldsymbol{Y}$ действует на пространстве $\boldsymbol{N}$ посредством матрицы определенной в некотором базисе. Пусть $\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{t})$ — характеристический многочлен матрицы. Для каждого его корня $\boldsymbol{t}_i$ кратности $\boldsymbol{r}_i$ оператор $(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{t}_i\boldsymbol{\varepsilon})^{r_i}$ имеет ровно $\boldsymbol{r}_i$ линейно независимых в пространстве $\boldsymbol{N}$ решений ($\boldsymbol{r}_1 + \cdots + \boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{n}$), а произведение этих операторов аннулирует пространство $\boldsymbol{N}$. Значит $\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{Y}) \in \boldsymbol{I}$. ■

Пусть оператор $\boldsymbol{D}_n$ допускает представление $\boldsymbol{D}_n = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{D}_q^i$, $\boldsymbol{c}_i \in \boldsymbol{C}$,

$n = mq$. Тогда оператор D_q почти алгебраический с характеристическим многочленом $\nu_m(t) = \prod_{i=0}^{s}(t - t_i)^{r_i}$, где $t_1,\ t_2, \cdots,\ t_s$ — различные характеристические числа оператора D_q, $r_1, \cdots,\ r_s$, соответственно, их кратности, $r_1 + \cdots + r_s = m$, $m \geq 2$, $n = mq$.

Теорема 7.2.2. Следующие условия эквивалентны:

а) D_q — почти алгебраический оператор с характеристическим многочленом $\nu_m(t)$;

б) существует s линейных операторов $P_j \in C[\delta]$ таких, что:

$$\sum_{j=1}^{s} P_j \equiv \varepsilon(\operatorname{mod} I), \tag{7.2.2}$$

$$P_j P_k \equiv \begin{cases} P_j(\operatorname{mod} I), k = j, \\ 0\ (\operatorname{mod} I), k \neq j. \end{cases} \tag{7.2.3}$$

$$(D_q - t_j\varepsilon)^{r_j} P_j \equiv 0(\operatorname{mod} I). \tag{7.2.4}$$

в) пространство N является прямой суммой своих подпространств $N_j = \ker(D_q - t_j\varepsilon)^{r_j}$, $N = \bigoplus_{j=1}^{s} N_j$, где $r_1 + \cdots + r_s = m$.

Утверждение является следствием теоремы 7.1.1.

7.3. Почти алгебраические разностные операторы

Пусть K — поле нулевой характеристики функций $f(x)$ вещественной или комплексной переменной x, содержащего поле комплексных чисел C, и замкнутое относительно «разностного» оператора ω_c, действующего по формуле $\omega_c(f(x)) = f(x + c)$, $\forall f(x) \in K$, $c \in C$.

Обозначим через $K[\omega_c]$ кольцо обыкновенных линейных разностных операторов (ОЛРО), то есть многочленов вида $\Omega_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \omega_{ic}$, $a_i \in K$, $a_n \neq 0$, n — порядок оператора, $\omega_{ic}(f(x)) = f(x + ic)$, $\omega_0 = \varepsilon$ — единица кольца.

Почти алгебраические ОЛРО возникают при рассмотрении уравнения

[61]

$$\boldsymbol{X\Omega_n} = \boldsymbol{\Omega_n Y}, \tag{7.3.1}$$

где $\boldsymbol{\Omega_n} \in \boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}^c]$ — заданный оператор, а $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ — операторы, подлежащие определению. Коэффициентами этих операторов, вообще говоря, принадлежат некоторому расширению $\boldsymbol{P} \supset \boldsymbol{K}$.

Определение 7.3.1. Решением уравнения (7.3.1) называется любая пара операторов $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ из $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{\omega}_c] \times \boldsymbol{P}[\boldsymbol{\omega}_c]$ обращающая уравнение в тождество.

Множество решений этого уравнения не пусто, поскольку в нем содержатся элементы централизатора оператора $\boldsymbol{\Omega_n}$ в $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{\omega}_c]$. Поскольку множества $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ компонент решений уравнения (7.3.1) являются изоморфными $\boldsymbol{C}$-алгебрами, то ограничимся рассмотрением алгебры $\boldsymbol{Y}$, а её элементы будем называть решениями уравнения (7.3.1).

Обозначим через $\boldsymbol{N}$ пространство решений уравнения $\boldsymbol{\Omega_n}(\boldsymbol{y}) = 0$. Из рассмотрения уравнения (7.3.1) следует, что операторы $\boldsymbol{Y}$ являются гомоморфизмами пространства $\boldsymbol{N}$. Множество операторов из $\boldsymbol{Y}$, аннулирующих пространство $\boldsymbol{N}$, является левым идеалом в кольце $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}_c]$, обозначается $\boldsymbol{I}$. Этот идеал является главным, с образующей $\boldsymbol{\Omega_n}$, $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{\Omega_n})$.

Теорема 7.3.1. Каждая $\boldsymbol{Y}$ компонента решения уравнения (7.3.1) является почти алгебраическим оператором относительно идеала $\boldsymbol{I}$.

Доказательство. Оператор $\boldsymbol{Y}$ действует на пространстве $\boldsymbol{N}$ посредством матрицы определенной в некотором базисе. Пусть $\boldsymbol{\nu_n}(\boldsymbol{t})$ — характеристический многочлен. Для каждого его корня $\boldsymbol{t_i}$ кратности $\boldsymbol{r_i}$ оператор $(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{t_i}\boldsymbol{\varepsilon})^{r_i}$ имеет ровно $\boldsymbol{r_i}$ линейно независимых решений в пространстве $\boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{i} = 1, \cdots, \boldsymbol{s}$, а произведение этих операторов аннулирует пространство $\boldsymbol{N}$. Значит $\boldsymbol{\nu_n}(\boldsymbol{Y}) \in \boldsymbol{I}$. ■

Пусть оператор $\boldsymbol{\Omega_n}$ допускает представление $\boldsymbol{\Omega_n} = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{c_i}\boldsymbol{\Omega}_q^i$, $\boldsymbol{c_i} \in \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{mq}$. Тогда оператор $\boldsymbol{\Omega_q}$ почти алгебраический с характеристическим многочленом $\boldsymbol{v_m(t)} = \prod_{i=0}^{s} (\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t_i})^{r_i}$, где $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2, \cdots, \boldsymbol{t}_s$ — различные характеристические числа оператора $\boldsymbol{\Omega}_q$, $\boldsymbol{r}_1, \cdots,$ $\boldsymbol{r}_s$, соответственно, их кратности, $\boldsymbol{r}_1 + \cdots + \boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m} \geq 2$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{mq}$.

Теорема 7.3.2. Следующие условия эквивалентны:

а) $\boldsymbol{\Omega}_q$ — почти алгебраический оператор с характеристическим многочленом $\boldsymbol{v_m(t)}$;

б) существует $\boldsymbol{s}$ линейных операторов $\boldsymbol{P}_j \in \boldsymbol{C}[\boldsymbol{\omega}_c]$ таких, что:

$$\sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{P}_j \equiv \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{I}), \tag{7.3.2}$$

$$\boldsymbol{P}_j \boldsymbol{P}_k \equiv \begin{cases} \boldsymbol{P}_j & (\mathbf{mod}\,\boldsymbol{I}), \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}, \\ 0 & (\mathbf{mod}\,\boldsymbol{I}), \boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{j}, \end{cases} \tag{7.3.3}$$

$$(\boldsymbol{\Omega}_q - \boldsymbol{t}_j \boldsymbol{\varepsilon})^{r_j} \boldsymbol{P}_j \equiv 0(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{I}). \tag{7.3.4}$$

в) пространство $\boldsymbol{N}$ является прямой суммой своих подпространств $\boldsymbol{N}_j = \mathbf{ker}(\boldsymbol{\Omega}_q - \boldsymbol{t}_j \epsilon)^{r_j}$, $\boldsymbol{N} = \bigoplus_{j=1}^{s} \boldsymbol{N}_j$, где $\boldsymbol{r}_1 + \cdots + \boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{m}$.

Утверждение является следствием теоремы 7.1.1.

7.4. Дифференциально-разностные уравнения

Применим понятие почти алгебраического элемента (оператора) к дифференциально–разностным уравнениям. Пусть поле $\boldsymbol{K}$ содержит поле комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ и замкнуто относительно «разностного» $\boldsymbol{\omega}$ и дифференциального $\boldsymbol{\delta}$ операторов и операторов $\boldsymbol{\Omega}_p = \sum_{i=0}^{p} \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{\omega}^i \in \boldsymbol{K}[\boldsymbol{\omega}]$, $\boldsymbol{b}_i \in \boldsymbol{K}$; $\boldsymbol{D}_q = \sum_{i=0}^{q} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{\delta}^i \in \boldsymbol{K}[\boldsymbol{\delta}]$, $\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{K}$. Операторы $\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{a}; \Omega_p, \boldsymbol{D}_q) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{\Omega}_p^i \boldsymbol{D}_q^j$, $\boldsymbol{a}_{ij} \in \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{m} = \mathbf{max}(\boldsymbol{rp}, \boldsymbol{sq}, \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{sq})$ — совокупный порядок оператора, можно рассматривать как алгебру $\mathcal{A}[\boldsymbol{\Omega}_p]$ многочленов от $\boldsymbol{\Omega}_p$ с коэффициентами, зависящими от оператора D_q, и записывать её элементы как $A_m = \sum_{i=0}^{r} a_i(D_q)\Omega_p^i$, либо как алгебру $\mathcal{A}[D_q]$ многочленов от оператора D_q с коэффициентами, зависящими от оператора Ω_p, и записывать её элементы как $A_m = \sum_{j=0}^{s} b_j(\Omega_p)D_q^j$; $\varepsilon = \omega^0 = \delta^0$ — единица алгебры.

Рассмотрим уравнение

$$A_r(\Omega_p, D_q)u = f \tag{7.4.1}$$

с оператором $A_r(\Omega_p, D_q) \in \mathcal{A}$ и функцией $f(x)$ принадлежащей пространству N решений некоторого дифференциального уравнения $D_n(y) = 0$, $D_n \in K[\delta]$, M — область определения оператора A_m, а областью его значений будем считать пространство N и полагать, что $N \subset M$.

Пусть $I = I(D_n)$ — левый главный идеал алгебры $\mathcal{A}_0$ с образующей $D_n \in K[\delta]$, то есть $D_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \delta^j$, $a_j \in K$, где $K[\delta] \subset \mathcal{A}_0$ — подалгебра многочленов от δ с коэффициентами в K.

Если оператор D_n может быть представлен в виде $D_n = \sum_{j=0}^{k} c_j D_q^j$, $c_j \in C$, $n = kq$, то оператор D_q является алгебраическим относительно идеала I с характеристическим многочленом $v_k(t) = \sum_{i=0}^{s} (t - t_i)^{r_i}$, $r_1 + \dots + r_s = n$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$.

Теорема 7.4.1. Если $L(\Omega_p, t_j)$, полученные из оператора $L(\Omega_p, D_q)$ подстановкой чисел t_j^i, $i = \overline{0, s}$, вместо операторов D_q^i, действуют в пространстве N, то частное решение уравнения (7.4.1) может быть вычислено как сумма частных решений системы независимых уравнений

$$A_m(\Omega_p, t_j)u_j = f_j,\ j = \overline{1, s}, \tag{7.4.2}$$

где $f_j = P_j(N)$, P_j — проекторы.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 7.1.3 при замене операторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ на операторы $\boldsymbol{\Omega}_p$, $\boldsymbol{D}_q$, соответственно. ∎

Заметим, что методы решения однородных и неоднородных обыкновенных линейных разностных уравнений даны в [32, 33].

7.5. Пример дифференциально-разностного уравнения

Вычислим частное решение уравнения

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+1)^{(4)}_{\boldsymbol{xx}}-2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+1)^{(4)}_{\boldsymbol{xx}}+2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+1)^{(2)}_{\boldsymbol{xx}}-4\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})^{(2)}_{\boldsymbol{xx}}+2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+1)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad (7.5.1)$$

для правой части $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{exp}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{2}}\right)+\boldsymbol{cos}\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\boldsymbol{x}\right)$.

Перепишем уравнение в операторной форме

$$\boldsymbol{A}_5(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{\omega}-2\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\delta}^4+2\boldsymbol{\delta}^2+\boldsymbol{\varepsilon})+\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\varepsilon})]\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \quad (7.5.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\delta}$ — оператор дифференцирования по переменной $\boldsymbol{x}$, оператор $\boldsymbol{\omega}$ действует на функцию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ по формуле $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+1)$. Приведем три варианта решения, выбирая образом почти алгебраический элемент.

Вариант 1. Оператор можно представить в виде $\boldsymbol{A}_5(\boldsymbol{u})=$ $=((\boldsymbol{\omega}-2\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\delta}^2+\boldsymbol{\varepsilon})^2+\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\varepsilon})$. Правая часть уравнения принадлежит пространству решений дифференциального уравнения $\boldsymbol{D}_4(\boldsymbol{u})=$ $=\left((\boldsymbol{\delta}^2+\boldsymbol{\varepsilon})^2-\dfrac{9}{4}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\boldsymbol{u}=0$, которое принимаем в качестве пространства $\boldsymbol{N}$. Таким образом, оператор $\boldsymbol{\delta}^2+\boldsymbol{\varepsilon}$ — алгебраический относительно левого главного идеала $\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{D}_4)$ с характеристическим многочленом $\boldsymbol{\nu}_2(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{t}^2-\dfrac{9}{4}$ и простыми характеристическими числами $\boldsymbol{t}_1=-\dfrac{3}{2},\boldsymbol{t}_2=\dfrac{3}{2}$.

Построим проекторы по формулам (7.1.5), которые в силу простых корней имеют вид

$$\boldsymbol{P}_1=-\frac{1}{6}(2\boldsymbol{\delta}^2-\boldsymbol{\varepsilon}),\boldsymbol{P}_2=\frac{1}{6}(2\boldsymbol{\delta}^2+5\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (7.5.3)$$

тогда $P_1(f(x)) = f_1(x) = cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right), P_2(f(x)) = f_2(x) = exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Согласно теореме 7.4.1 для вычисления частного решения имеем систему независимых уравнений

$$A_5(t_1)u_1 = cos((5/2)^{1/2}x), A_5(t_2)u_2 = exp(2^{-1/2}x). \qquad (7.5.4)$$

Найдем частные решения этих уравнений, построив левые регуляризаторы операторов в их левых частях по формулам

$$R^j_{m_1}A_5(t_j) + B^j_{m_2}\Omega^j_1 = \varepsilon, \; j = 1,2, \qquad (7.5.5)$$

которые рассматриваются как уравнения относительно неизвестных операторов $R^j_{m_1}$ и $B^j_{m_2}$. Операторы $R^j_{m_1}$ называются левыми регуляризаторами операторов $A_5(t_j)$, операторы Ω^j_1 аннулируют функции $f_j(x) = P_j(f(x))$. В каждом случае ищем минимальное решение уравнения (7.5.5).

Для $j = 1$ имеем $A_5(t_1) = A_5(t_1) = \frac{13}{4}\omega - \frac{7}{2}\varepsilon$, $\Omega^1_2 = \omega^2 - 2cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\omega + \varepsilon$ поэтому минимальное решение уравнения (7.5.5) нужно искать в виде $R^1_1 = a_1\omega + b_1\varepsilon$, $B^1_0 = c_1\varepsilon$. Составляя и решая систему относительно a_1, b_1, c_1, получим $a_1 = \frac{52}{365 - 364cos(\sqrt{5/2})}$, $b_1 = -\frac{2}{7} + \frac{338}{7(365 - 364cos(\sqrt{5/2}))}$, $c_1 = = \frac{169}{365 - 364cos(\sqrt{5/2})}$, следовательно, $u_1(x) = R^1_1(f_1(x)) = = \frac{52cos(\sqrt{5/2}(x-1))}{365 - 364cos(\sqrt{5/2})} - \frac{56cos(\sqrt{5/2}x)}{365 - 364cos(\sqrt{5/2})}$.

Для $j = 1$ имеем $\Omega^2_1 = \omega - exp(2^{-1/2})\varepsilon$, поэтому решение уравнения (7.5.5) ищем в виде $R^2_0 = a_2\varepsilon$, $B^2_0 = b_2\varepsilon$. Получаем $a_2 = \frac{4}{-14 + 13exp(2^{-1/2})}$, следовательно, $u_2(x) = \frac{4exp(2^{-1/2}x)}{-14 + 13exp(2^{-1/2})}$.

Таким образом, искомое частное решение таково

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{52\boldsymbol{cos}(\sqrt{5/2}(\boldsymbol{x}-1)) - 56\boldsymbol{cos}(\sqrt{5/2}\,\boldsymbol{x})}{365 - 364\boldsymbol{cos}(\sqrt{5/2})} + \frac{4\boldsymbol{exp}(2^{-1/2}\boldsymbol{x})}{-14 + 13\boldsymbol{exp}(2^{-1/2})}$$

Вариант 2. Строим оператор $\boldsymbol{D}_3 = (\boldsymbol{\delta} - 2^{-1/2}\boldsymbol{\varepsilon})\,(\boldsymbol{\delta}^2 + 5\cdot 2^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$, ядру $\boldsymbol{N}$ которого принадлежит правая часть уравнения. Оператор дифференцирования $\boldsymbol{\delta}$ является алгебраическим относительно левого идеала $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{D}_3)$ с характеристическим многочленом третьей степени и простыми характеристическими числами $\boldsymbol{t}_1 = 2^{-1/2}$, $\boldsymbol{t}_2 = 5\cdot 2^{-1/2}\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{t}_3 = -5\cdot 2^{-1/2}\boldsymbol{i}$. В этом случае имеются три проектора $\boldsymbol{P}_1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\delta}^2 + \frac{5}{2}\boldsymbol{\varepsilon})$, $\boldsymbol{P}_2 = \frac{-\boldsymbol{i}}{5\boldsymbol{i}+\sqrt{5}}\boldsymbol{\delta}^2 + {}$ $+\frac{\boldsymbol{i}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}(5\boldsymbol{i}+\sqrt{5})}\boldsymbol{\delta} + \frac{\sqrt{5}}{2(5\boldsymbol{i}+\sqrt{5})}\boldsymbol{\varepsilon}$, и $\boldsymbol{P}_3 = \frac{\boldsymbol{i}}{-5\boldsymbol{i}+\sqrt{5}}\boldsymbol{\delta}^2 - \frac{\boldsymbol{i}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}(-5\boldsymbol{i}+\sqrt{5})}\boldsymbol{\delta} + {}$ $+\frac{\sqrt{5}}{2(-5\boldsymbol{i}+\sqrt{5})}\boldsymbol{\varepsilon}$, применение которых к правой части уравнения приводит к следующей системе, $\left(\frac{13}{4}\boldsymbol{\omega} - \frac{7}{2}\right)\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{exp}(2^{-1/2}\boldsymbol{x})$, $\left(\frac{13}{4}\boldsymbol{\omega} - \frac{7}{2}\right)\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}) = {}$ $= \frac{1}{2}(\boldsymbol{exp}\left(-\boldsymbol{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\boldsymbol{x}\right)$, $\left(\frac{13}{4}\boldsymbol{\omega} - \frac{7}{2}\right)\boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{exp}\left(\boldsymbol{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\boldsymbol{x}\right)$. Вычисляя левые регуляризаторы операторов уравнений и применяя их к уравнениям, получим, вообще говоря, комплексные решения: $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) = 4\boldsymbol{exp}(2^{-1/2}\boldsymbol{x})(-14 + 13\boldsymbol{exp}(2^{-1/2}))^{-1}$, $\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{exp}\left(-\boldsymbol{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\boldsymbol{x}\right)\times$ $\times\left((-14 + 13\boldsymbol{exp}\left(-\boldsymbol{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right)^{-1}$, $\boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{exp}\left(\boldsymbol{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\boldsymbol{x}\right)\left(-14 + 13\boldsymbol{exp}\left(\boldsymbol{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right)^{-1}$.

Сложив и выделив вещественную часть, прийдем к решению, полученному ранее.

Вариант 3. Рассмотрим кратко случай, когда почти алгебраическим элементом выбирается оператор $\boldsymbol{\omega}$. Перепишем оператор уравнения в виде

$A_5(\boldsymbol{u}) = (\delta^4 + 2\delta^2 + 2\varepsilon)\omega + (\delta^4 + 2\delta^2 - \varepsilon)\varepsilon$. В качестве образующей левого главного идеала выбираем разностный оператор $\boldsymbol{\Omega}_3$, аннулирующий пространство $\boldsymbol{N}$, с базисом из функций $\mathbf{exp}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{cos}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\boldsymbol{x}\right)$, $\mathbf{sin}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\boldsymbol{x}\right)$. Теперь оператор ω является алгебраическим относительно идеала $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{\Omega}_3)$ с простыми характеристическими числами $\boldsymbol{k}_1 = \mathbf{exp}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{k}_2 = \mathbf{exp}\left(-\boldsymbol{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $\boldsymbol{k}_2 = \mathbf{exp}\left(\boldsymbol{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$. Проекторы $\boldsymbol{P}_i$, $\boldsymbol{i} = \overline{1,3}$, зависят от оператора ω, что приводит к трем независимым уравнениям $((\boldsymbol{t}_i - 1)\delta^4 + 2(\boldsymbol{t}_i - 1)\delta^2 + (2\boldsymbol{t}_i - 1)\varepsilon)\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$. Частные решения этих уравнений вычислим, построив с помощью уравнений (7.5.5) левые регуляризаторы операторов в левых частях.

Литература

1. Айнс Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. —Харьков: ДГНТИ, 1939. — 719 с. Перевод с английского под ред. А.М. Эфроса.
2. Андреев К.А. О разыскании рациональных частных интегралов линейных дифференциальных уравнений при помощи интегрирующего множителя// Сообщ. Харьк. матем. об-ва. — 1894. — Серия 2, т.4. — С.1 — 31.
3. Абрамов С.А., ЛЕ Х.К., ЛИ З. Кольца многочленов Оре одной переменной в компьютерной алгебре// Современная математика и ее приложения. — 2004. — Т. 13. — С. 24 — 39.
4. Абрамов С.А.Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами// ЖВМ и МФ. — 1989. — Т. 29. — № 11. — С. 1611 — 1620.
5. Акритас А. Основы компьютерной алгебры с приложениями. — М.: Мир, 1994. — 544 с.
6. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических фукций. — М:.Наука, 1970. — 304 с.
7. Бекбаев У.Д. Об эквивалентности и инвариантах линейных дифференциальных уравнений в частных производных// Изв. Вуз. Матеем. — 1999, № 11 (450). — С. 3—10.
8. Беллман Р., Кук К. Дифференциально - разностные уравнения. — М.: 1967. — 548 с.
9. Беркович Л.М., Цирулик В.Г. Дифференциальный результант и некоторые его применения// Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22. — С. 750 — 757.
10. Беркович Л.М. Факторизация и преобразование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Научн. изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 463 с.
11. Бугаев Н.В. Начало наибольших и наименьших показателей в теории дифференциальных уравнений. Целые частные интегралы// Матем.

сборник. —1891. — Т.16:1. — С. 39 — 80.

12. Ван-дер-Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1968. — 648 с.

13. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. — М.:Наука, 1967. — 376 с.

14. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. — 436 с.

15. Горбузов В.Н., Самодуров А.А. Уравнения Риккати и Абеля. — Гродно: изд-во Гродненск. ун-та, 1986. — 99 с.

16. Григоренко Н.Г. Две задачи теории Галуа дифференциальных полей для поля формальных степенных рядов// Мат.сб. —1979. —Т. 109(I5I), № 3(7). С. 355 — 364.

17. Демидов С.С. К истории линейных дифференциальных уравнений// Историко — математические исследования. — 1985. — №11. — С. 78 — 98.

18. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. — М.: Физматлит, 2005. — 384 с.

19. Егоров А.И. Уравнение Риккати. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.

20. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.

21. Инфельд Л., Халл Т.Е. Метод факторизации// Математика, период. сборн. переводов иностр. статей. — 1966. — Т. 10. — № 3. — С. 39 — 125.

22. Имшенецкий В.Г. Распространение на линейные уравнения вообще способа Эйлера для исследования всех случаев интегрируемости одного частного вида линейных уравнений второго порядка// Зап. Имп. Акад. наук. — Спб. — 1882. — Т. 42. — С. 1 — 21.

23. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

24. Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. — М.: ИЛ, 1959. — 85 с.

25. Кон. П. Свободные кольца и их связи. — М.: Мир, 1975. — 422 с.

26. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. —104 с.

27. Кухлинг Х. Справочник по физике. — М.: Мир, 1983. — 519 с.

28. Латышева К.Я., Терещенко Н.И. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложение. — Киев: Изд-во ин-та математики АН УССР, 1970. — 231 с.

29. Ленг С. Алгебра. — М.: Наука, 1968. — 564 с.

30. Мантусов А.Б. Образовательные технологии в оптимизации учебно воспитательного процесса в вузе (на материалах экономических специальностей): Дис….канд. пед. Наук: 13.00.08. Москва, 2004, 164 с. РГБ ОД, 61:04-13/ 2554.

31. Маркушевич А.И. Замечательные синусы. — М.: Наука, 1974. — 95 с.

32. Миролюбов А.А., Солдатов М.А. Линейные однородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1981. — 204 с.

33. Миролюбов А.А., Солдатов М.А. Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 128 с.

34. Михалев А.В., Панкратьев Е.В. Дифференциальная и разностная алгебра. / Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 25. — М.: ВИНИТИ, 1987. — С. 67 — 139.

35. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. —М.: Наука, 1972. — 352 с.

36. Остроградский М.В. Избранные труды / Под ред. акад. В.И. Смирнова. — Изд — во Акад. Наук СССР, 1958. — 586 с.

37. Панкратьев Е.В. Элементы компьютерной алгебры. — МГУ: 1994. — 226 с.

38. Пини Э. Обыкновенные дифференциально - разностные уравнения. — М.: ИИЛ, 1961. — 248 с.

39. Полянин А.Д. Уравнения Абеля и связанные с ними уравнения не-

линейной механики, интегрируемые в квадратурах. — Москва, 1986. (Препринт Ин—т проблем механики АН СССР; № 271.)

40. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965. — 331 с.
41. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. — М.: Физматлит, 2008. — 536 с.
42. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. — Т. 1. — 801 с.
43. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М:. ИЛ, 1953. — Т1. — 346 с.
44. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М:. ИЛ, — 1954. — Т2. — 376 с.
45. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М:. Наука, 1966. — Т. 2. — 800 с.
46. Хованский А.Г. Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. — М.: Изд-во МЦНМО, 2008. — 296 с.
47. Цирулик В. Г., Брусенцев Ф.А. Об эквивалентности свойств коммутативной факторизуемости и приводимости линейных дифференциальных операторов// Изв. вузов. Математика. — 1976. — № 8. — С. 81 — 84.
48. Цирулик В.Г. Результант обыкновенных линейных дифференциальных операторов/ Таганрогский радиотехнический институт, 1979. Деп. в ВИНИТИ № 1876-79. — 17 с.
49. Цирулик В.Г. Результант косых многочленов/ Таганрогский радиотехнический институт, 1979. Деп. в ВИНИТИ. № 2442-79. — 18 с.
50. Цирулик В.Г. Результант обыкновенных линейных разностных операторов// Изв. вузов. Математика. — 1980. — № 10. — С. 85 — 87.
51. Цирулик В.Г. Результант косых многочленов и факторизация. Рязань: Дифференциальные уравнения. Сб. трудов математических ка-

федр пединститутов РСФСР — 1981. — С. 133 — 140.

52. Цирулик В.Г. О факторизуемости и интегрируемости некоторых классов линейных функционально − дифференциальных уравнений: Дис. канд. физ.−мат. наук. — Таганрог, 1983. — 149 с.

53. Цирулик В. Г. Применение уравнения Оре-Новикова к определению дифференциальной группы Галуа// Математические исследования. В книге «Динамические системы и уравнения математической физики». Кишинев: Штиинца. — 1988. — Вып. 99. — С. 135 — 148.

54. Цирулик В.Г. Об определении размерности подпространства рациональных решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений/ Таганрогский радиотехнический институт имени В.Д. Калмыкова. 1989. Деп. в ВИНИТИ, № 2229-В89. — 15 с.

55. Цирулик В.Г. Об условиях существования алгебраических решений для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка// Дифференц. уравнения. — 1993. —Т. 29. — № 6. — С. 976 — 981.

56. Цирулик В.Г. О методе неопределенных коэффициентов для неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 11. — С. 1571 — 1573.

57. Цирулик В.Г., Цирулик Д.В. О частных решениях неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и их систем// Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. — 2005. — № 5 (39) 4. — С. 91 — 99.

58. Цирулик В.Г., Цирулик Д.В. Альтернативный метод отыскания частного решения неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами// Изв. Вузов. Сев.- кавк. Регион. Естественные науки. Приложение. —2005. — № 9 (33). — С. 107 — 112.

59. Цирулик В.Г., Цирулик Д.В. Алгоритм отыскания рациональных решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с ра-

циональными коэффициентами// Конгресс по интеллектуальным системам и информационным технологиям, Дивноморское, 3 — 10 сент. 2009 г. : Труды конгресса. — М:. Физматлит, 2009. — Т. 2. — С. 26 — 31.

60. Цирулик В.Г. Классы обыкновенных линейных дифферен-циальных уравнений второго порядка с заданными типами групп Галуа// Высокие технологии и фундаментальные исследования. Сборник трудов десятой международной научно — практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности»/ под редакцией А.П. Кудинова. —Санкт-Петербург: Издат. Политехнич. Университета, 2010. — Т.1. — С. 204 — 208.

61. Цирулик В.Г. Некоторые приложения уравнений с некоммутативными коэффициентами в теории и практике линейных функционально-дифференциальных уравнений. Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2012. — 198 с.

62. Цирулик В.Г. Некоторые новые классы неопределенных интегралов, выражаемых в замкнутой форме. Сборник научных трудов SWorld. — 2013. — Одесса: Куприенко С.В. — Выпуск 4. — Т. 4. —С. 86 — 89.

63. Цирулик В.Г. Неевклидов алгоритм отыскания наибольших общих делителей систем многочленов. Сборник научных трудов SWorld. — 2014. — Одесса: Куприенко С.В. — Выпуск 1. — Т. 29. —С. 89 — 91.

64. Цирулик В.Г. Об отыскании частных решений неоднородных линейных уравнений с почти алгебраическим разностным или дифференциальным оператором. Случай простых корней характеристического уравнения. Сборник научных трудов SWorld. — 2014. —Одесса: Куприенко С.В. — Выпуск 3 (36). — Т. 27. —С. 64 — 70.

65. Цирулик В.Г. Критерий совместности систем обыкновенных неоднородных линейных разностных уравнений с одной неизвестной функцией. Сборник научных трудов SWorld. .— 2014. — Одесса: Куприенко С.В. — Выпуск 4 (37). — Т. 29. —С. 61 — 64.

66. Чебышев П.Л. Избранные труды / Под. Ред. акад. И.М. Виноградова. Изд - во Акад. Наук СССР, 1955. — 929 с.

67. Amitsur S. Commutative linear differential operators // Pacific J. Math. — 1958. — P.1 — 10.

68. Amitsur S.A. Differential polynomials and division algebras// Ann. of Math. — 1954. — 59. — P. 245 — 278.

69. Abramov S.A., Li Z. OreTools a computer algebra library for univariate Ore polynomial rings// Journ. of Math. Sciences. — 2005. — Vol. 133. — № 5. — P. 5885 — 5903.

70. Arbogast L.F.A. Du calcul des derivations. — 1800. —Strasbourg: Levrault. — 427 p.

71. Carra`Ferro G. Ordinary Algebraic Differential Equations// Lecture Notes in Computer Sciens. — 1997. — V. 1255/1997. — P. 55 — 65.

72. Cara`Ferro G. The Differential resultant of Linear Algebraic Partial Differential Equations// Lie Groups and their Applications. — 1994. — № 1. — P. 47 — 55.

73. Cara`Ferro G. A Resultant Theory for Linear Partial Differential Equations. Lie Groups and their applications. — 1994. — V.1, № 1. — P. 47 — 55.

74. Cara`Ferro G. A Resultant Theory for The Systems of Two Ordinary Algebraic Differential Equations// Lie Groups and their applications. — 1997. — AAECC. — 8. — P. 539 — 560.

75. Cara`Ferro G. Triangular matrices, differential resultants and systems of linear homogenejus PDE`s// Math. And Comp. in Simulation. — 1998. — 45. — P. 511 — 518.

76. Cara`Ferro G. A Resultant Theory for Ordinary Algebraic Differential Equations// Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Lecture Notes in Computer Science. —. 1997. — V. 1255. — PP. 55 — 65.

77. [1 Cohn] Cohn R.M. Difference Algebra. — 1965. — New York: Inter-

cience. — 355 p.

78. Gelfand I., Gelfand S., Retak V., Lee R.W. Quasideterminants// Adv. Math. — 2005. — № 1. — 193. — P. 56 — 141.

79. Hill J.M. Abel's differential equation// Math. Sci. — 1982. — T.7. — № 2. — P. 115 — 125.

80. Kolchin E.R. Algebraic matrix groups and Picard — Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations// Ann. of Math. — 1948. — Vol.49. — P.1 — 42.

81. Kolchin E.R. Difference Algebra and Algebraic groups. —1973. — ACADEMIC PRESS, New York — London. — 446 p.

82. Cohn R.M. Difference Algebra. New York: Intercience. — 1965. — 355 p.

83. Kovacic J. The inverse problem in the Galois theory of differential fields// Ann. of Math. — 1969. — Vol. 89. — P. 583 — 608.

84. Kovacic J.J. A Eisenstein criterion for for noncommutative polynomials// Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 34. — № 1. — P. 25 — 29.

85. Kovacic J.J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations// J. Symb. Comp. — 1986. — V. 2. — P. 3 — 43.

86. Levin A. Differential Algebra. — Springer Science. 2008. —532 p.

87. Liouville G. Sur la determination des integrales don`t valeur est algebriue// J. de l`Ecole Polytechnique. — 1833. — T. XIV. — 22 cahier. — P. 153 — 183.

88. Libri G. Mémouare sur la resolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné, et sur integration des equations différentiels linéaires dont les intégrales particuliérs peuvent s`exprimer les unes par autres// J. Rein. und Angev. Math. — 1833. — T. 10. — P. 167 — 194.

89. Li Z., B.S., M.S. A Subresultant Theory for Linear Differential, Linear Difference and Ore Polynomials, with Applications. (Doctor ….Dissertation). Kepler Universitat. — Februar 1996. — 80 p.

90. Li Z. A subresultant theory for linear differential, linear difference and Ore polynomials, with applications. — 1996.

91. Li Z. A Subresultant Theory for Ore Polynomials, with Applications. — Beijing. — MM Research Preprints, № 17. — 1998. — PP. 91 — 108.

92. Li Z. Lecture Notes on Hyperexponential Solutions of Linear Homogeneous Ode`s. — Beijing. — MM Reasearch Preprints № 19. — 2000. — PP. 120 — 140.

93. Ore O. Theory of Non-Commutative Polynomials// Ann. of Math. — 1933. — V. 34. — Ser. 2. — P. 480 — 508.

94. Ore O. Linear equations in Non-commutative fields// Ann. of Math. — 1931. — V. 32. — P. 463 — 477.

95. Ore O. Formale Theory der linearen Differentialgleichungen// J. Reine Angew. Math. — 1932. —V. 167. P. 221 — 234.

96. Przeworska-Rolewicz D. Equation which transformed argument an algebraic approch. —Warszawa, 1973. — 200 p.

97. Reid W.T. Riccati differential equations. — New-York —London: Acad. press, 1972. — 216 p.

98. Ritt J.F. Differential equations from the algebraic standpoint. — New-York: Amer. Math. Soc., 1932. — 173 p.

99. Ritt J.F. Integration in finite terms. Liouville`s theory elementary methods. — New-York: Amer. Math. Soc., 1948. — 100 p.

100. Ritt J.F. Differential Algebra. — New-York: Dover Publications, 1950. — 184 p.

101. Rhem H.P. Galois groups and elementary solutions of some linear differential equations// J. Reine und Angew. Math. — 1979. — V.307 — 308. P. 1 — 7.

102. Rueda S. L, Sandra J.F. Implicitization of Linear DPPE`s by Differential Resultants. — arXiv: 0712.0785v1[math.CA]. — 2007. — 18 pp.

103. Rueda S. L., Sandra J.F. Linear Complete Differential Resultants and the Implicitization. Of Linear DPPEs. — arXiv: 0712.0785v2 [math.CA]. —

2008. — 26 pp.

104. Singer M.F. Liouvillian solutions of n order homogeneous linear equations// Amer. J. Math. — 1981. — T. 103. — P. 661 — 681.

105. Singer M.F. Algebraic solutions of n-th order linear differential equations// Queens Pap. pur and Appl. Math. — 1980. — V. 54. — P. 379 — 420.

106. Singer M. F. Formal solutions of differential equations // J. Symbolic comput. — 1990. — Vol. 10. — P. 59 – 94

107. Sperber S. On solutions of differential equations which satisfy sertain algebraic relations// Pasific J. of Math. — 1986. — T. 124, — № 1. — P. 249 — 256.

108. Tretkoff C., Tretkoff M. Solution of the inverse problem of differential Galois theory in the classical case// Amer. J. Math. — 1979. — 101, 6. — P. 1327 — 1332.

109. Van der Put M., Singer M.F. Galois theory of difference equations. Springer Verlag Berlin — Heidelberg. — 1999. — 181 p.

110. Tsirulik V.G. On the Method Indeterminate Coefficients for Non-homogeneous Linear Ordinary Differential Equations// Translated from Differential`nye Uravneniya. — 2003. — V. 39. — № 11. — P 1571 — 1573.

111. Zwillinger D. Handbook of Differential Eq1uations 3rd edition. Academic Press, 1997.