

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

С.Я.БЕКШАЕВ, В.М.ФОМИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

учебное пособие для студентов направлений «Строительство», «Гидротехника
(Водные ресурсы)», «Машиностроение»

Одесса 2013

Утверждено решением Ученого совета Одесской государственной академии строительства и архитектуры 27.06.2013 г., протокол №10

Пособие содержит элементарное введение в линейную теорию колебаний. Изложение базируется на немногочисленных общих законах механики и использует минимум сведений из стандартного вузовского курса высшей математики. На основе модели упругого тела и упругой системы определяются их количественные и качественные характеристики, обуславливающие свойства их движений. Рассмотрены свободные и вынужденные колебания систем с одной степенью свободы, в том числе с учетом линейного демпфирования, а также при произвольном и негармоническом периодическом возмущении, свободные и вынужденные движения систем с двумя степенями свободы, дан обзор основных свойств движений систем с произвольным числом степеней свободы. Приводятся примеры, поясняющие и дополняющие теоретические выводы. Освоив материал пособия, читатель будет подготовлен к чтению более полных руководств по теории колебаний и ее применениям и к изучению специальных дисциплин, связанных с проектированием и расчетом инженерных сооружений, работающих в условиях динамических воздействий.

С.Я.Бекшаев – старший преподаватель кафедры теоретической механики Одесской государственной академии строительства и архитектуры

В.М.Фомин – к.т.н. доцент кафедры теоретической механики Одесской государственной академии строительства и архитектуры

Ответственный за выпуск – заведующий кафедрой теоретической механики ОГАСА
д.ф.-м.н. проф. Лещенко Д.Д.

Содержание

Предисловие	5
1. Введение	7
1.1. Динамические модели	7
1.2. Упругое тело и упругая система	9
1.3. Признаки устойчивости и неустойчивости положений равновесия	13
1.4. Консервативность упругих систем. Теорема взаимности	14
1.5. Линейно-упругие системы. Принцип суперпозиции	17
2. Прямолинейные колебания материальной точки	20
2.1. Кинематические характеристики колебаний	20
2.2. Гармонические колебания	21
2.3. Силы, действующие на материальную точку при гармонических колебаниях	23
2.4. Колебания материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы. Свободные колебания	24
2.5. Свободные колебания в среде с сопротивлением. Затухающие колебания	28
2.5.1. Движение при слабом сопротивлении. Затухающие колебания	29
2.5.2. Движение при сильном сопротивлении. Аперiodическое движение	34
2.6. Движение под действием сил, зависящих от времени. Вынужденные колебания ..	35
2.6.1. Постоянная возмущающая сила	36
2.6.2. Внезапно приложенная сила	36
2.6.3. Действие кратковременного импульса	38
2.6.4. Произвольная возмущающая сила. Интеграл Дюамеля	39
2.6.5. Вынужденные колебания под действием гармонической возмущающей силы. Резонанс	41
2.6.6. Действие произвольной периодической возмущающей силы. Резонансы высших порядков	45
2.7. Влияние сопротивления на вынужденные колебания	50
3. Колебания систем с одной степенью свободы	55
3.1. Дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы. Обобщенная координата	55
3.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы. Линеаризация	57
4. Колебания систем с двумя степенями свободы	61
4.1. Свободные колебания плоской одномассовой системы	61
4.1.1. Дифференциальные уравнения движения в плоскости упруго закрепленного точечного груза	61
4.1.2. Некоторые свойства упругого закрепления	63
4.1.3. Решение дифференциальных уравнений. Главные колебания	65
4.1.4. Свойства главных колебаний точечного груза	68
4.1.5. Связь коэффициентов жесткости с главными колебаниями	70
4.1.6. Обратный метод составления уравнений движения	71
4.2. Свободные колебания двухмассовых систем. Обобщения	74
4.2.1. Уравнения свободного движения двухмассовых систем. Главные колебания ..	75
4.2.2. Примеры определения главных колебаний двухмассовых систем	77
4.2.2.1. Исследование поперечных колебаний балки с двумя точечными грузами	78
4.2.2.1.1. Элементы теории изгиба	79
4.2.2.1.2. Собственные частоты и формы колебаний двухмассовой балки	81
4.2.3. Пример свободного движения двухмассовой системы. Биения	82
4.2.4. Свойства главных колебаний. Обобщенная ортогональность	85
4.2.5. Главные координаты	86

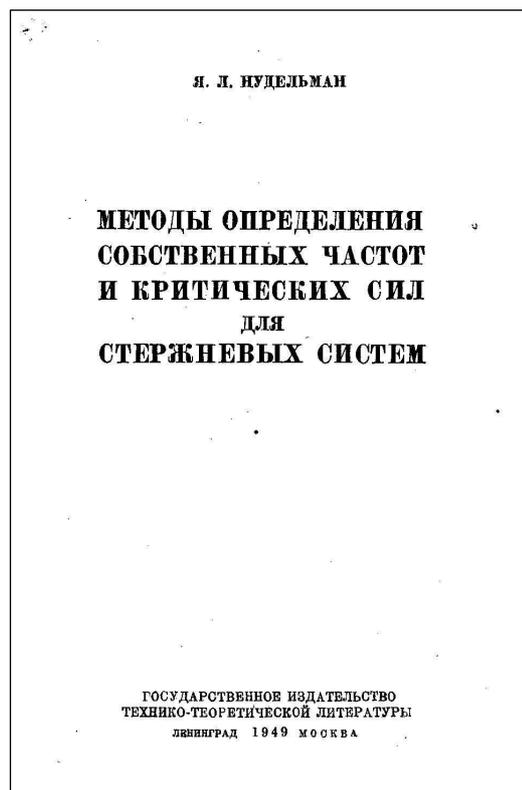
4.2.6. Дифференциальные уравнения свободного движения в главных координатах	88
4.3. Вынужденные движения системы с двумя степенями свободы	88
4.3.1. Дифференциальные уравнения вынужденных движений системы с двумя степенями свободы	88
4.3.2. Равновесие системы с двумя степенями свободы под действием постоянных сил	90
4.3.3. Движение системы с двумя степенями свободы при гармонической возмущающей силе	91
4.3.4. Свойства вынужденных колебаний	92
4.3.5. Модель виброгасителя	93
5. Обзор результатов для систем с произвольным числом степеней свободы	95
Контрольные вопросы.	99
Литература	103

Предисловие

В 2011 году исполнилось 60 лет со дня образования кафедры теоретической механики в Одесском инженерно-строительном институте. С первых дней существования кафедры ее сотрудники проводили исследования в разных областях механики и ее приложений. Одно из самых значительных мест в тематике работ кафедры всегда занимали вопросы теории колебаний, играющей важную роль в проектировании и эксплуатации инженерных сооружений.



Я.Л.Нудельман (1907 –1998)



Первый заведующий кафедрой Яков Львович Нудельман был крупным специалистом в области теории колебаний, автором многочисленных научных работ, оригинальных результатов и эффективных методов, многие из которых отражены в фундаментальной монографии «Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем».

Сменивший его в 1954 году Марк Григорьевич Крейн, выдающийся ученый, один из крупнейших математиков XX века, также посвятил многие свои исследования актуальным вопросам теории колебаний. Им, в частности, (в соавторстве с Ф.Р.Гантмахером) написана замечательная книга «Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем», в которой нашли решение многие интересные и трудные проблемы этой теории.

Как показали прошедшие десятилетия, теория колебаний не утратила и, по-видимому, никогда не утратит актуальности, обогащаясь новыми задачами, новыми интересными направлениями.

Для современных инженерных сооружений характерна повышенная динамическая напряженность, обусловленная многими факторами. Проектирование и безопасная эксплуатация таких объектов требуют от современного инженера фундаментальных знаний в области динамики, в том числе хорошего владения основами теории колебаний.



М.Г.Крейн (1907 –1989)

Ф. Р. ГАНТМАХЕР и М. Г. КРЕЙН

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ
МАТРИЦЫ И ЯДРА
И МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ
МЕХАНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ

ИЗДАНИЕ 2-е,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1980 ЛЕНИНГРАД

Предлагаемое пособие содержит сравнительно элементарное введение в эту теорию, базирующееся на немногочисленных, но хорошо усвоенных основных результатах стандартного вузовского курса теоретической механики. Кроме них от читателя формально требуется знакомство с основами математического анализа и минимум сведений о линейных дифференциальных уравнениях. Главным требованием к читателю является его готовность не пожалеть сил и времени на овладение изложенными результатами. Наградой ему будет достигнутое чувство удовлетворения идейным совершенством теории колебаний и ее практической ценностью.

В пособие включены набранные мелким шрифтом дополнительные сведения. Во-первых, это краткие напоминания математических результатов и идей, важных для теории колебаний. Во-вторых, это некоторые математические доказательства, представляющие определенную дидактическую ценность как демонстрация применения общих результатов механики. В-третьих, это мотивы и комментарии, относящиеся к руководящим идеям курса, призванные более или менее четко обозначить место излагаемых тем на общем физико-математическом фоне (в той его части, которая отражена в стандартных учебных программах и доступна читателям любого уровня).

Авторы выражают надежду, что предлагаемое пособие поможет учащимся приобрести полезные знания и сделать первые шаги на пути в обширную, чрезвычайно интересную, интенсивно развивающуюся область, богатую многочисленными впечатляющими результатами и еще более многочисленными нерешенными проблемами.

1. Введение

1.1. Динамические модели

Разумеется все эти явления не содержат ничего большего, чем комбинации законов Ньютона, однако временами просто трудно поверить, что все это произошло из $F = ma$!

Р.Фейнман

Объекты, с которыми приходится иметь дело современному инженеру, как правило, являются сложными техническими системами, проектирование и эксплуатация которых является сложной задачей. Для того чтобы лучше понять как создавать такие системы, как они устроены и работают, используются их модели.

Определение 1.1. *Модель* какого-либо объекта или явления – другой объект (или явление), который,
во-первых – отражает существенные черты исходного (моделируемого) объекта,
во-вторых – является более простым по сравнению с исходным объектом, т.е. состоит из простых и привычных элементов, свойства и поведение которых изучены и вполне понятны, благодаря чему поведение модели может быть полностью описано и объяснено через эти свойства.

Модели могут быть как материальными, специально изготовленными с целью опытной проверки правильности тех или иных гипотез или технических решений, так и воображаемыми, умозрительными, когда составные элементы моделей и их поведение настолько просты сами по себе, что нет необходимости в их материальной реализации, поскольку все обстоятельства поведения модели могут быть установлены путем логического вывода. Пример такой умозрительной модели дает теоретическая механика, в которой единственным составным элементом является материальная точка, которая полностью характеризуется массой и положением, а любое тело, конструкция или механизм мыслится как совокупность взаимодействующих материальных точек, движение которых определяется в соответствии с известными аксиомами, установленными И.Ньютоном. Такие модели будем называть динамическими.

Определение 1.2. *Динамическая модель* – система материальных точек, в которой положения точек, их массы, а также действующие на них силы подобраны таким образом, чтобы с требуемой точностью отразить поведение моделируемого объекта. При этом выполнены следующие **аксиомы**:

Аксиома ДМ1. Ускорение \vec{a} материальной точки массой m под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ определяется равенством

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Аксиома ДМ2. Две материальные точки действуют друг на друга с прямопротивоположными силами.

Замечания

1. Для характеристики динамической модели полезно следующее представление ее внутренних сил.

Пусть M_i и M_j две какие-либо точки модели, положения которых определяются радиусами-векторами соответственно \vec{r}_i и \vec{r}_j . Обозначим через \vec{F}_{ij} силу, действующую на точку M_i со стороны точки M_j . Поскольку в силу аксиомы ДМ2 определения 1.2 она должна быть направлена вдоль вектора $\overrightarrow{M_j M_i} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, ее можно выразить в виде

$$\vec{F}_{ij} = f_{ij} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{f_{ij}}{l_{ij}} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (1.1)$$

где $l_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ – расстояние между точками, f_{ij} – величина, численно равная модулю силы \vec{F}_{ij} , но имеющая знак + или – в зависимости от того, отталкиваются точки или притягиваются. Как можно заметить, при $f_{ij} > 0$ вектор \vec{F}_{ij} совпадает по направлению с вектором $\overrightarrow{M_j M_i} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, т.е. сила \vec{F}_{ij} является силой отталкивания. Соответственно $f_{ij} < 0$, если точки притягиваются. Различным по характеристикам моделям соответствуют различные наборы f_{ij} .

У п р а ж н е н и е. Докажите, что всегда $f_{ij} = f_{ji}$.

2. В ранний период развития теоретической механики высказывалось предположение, что весь мир можно рассматривать как собрание взаимодействующих частиц. Ньютон, сформулировав основные законы механики и успешно применив их к решению ряда задач, пишет: «Было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы ..., ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обуславливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел, вследствие причин покуда неизвестных, или стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются друг от друга».

В настоящее время механика уже не рассматривается как средство исчерпывающего объяснения всех явлений природы. Реальный мир не может быть достаточно полно отражен динамической моделью в смысле определения 1.2. Но огромное множество природных явлений, в том числе представляющих большой интерес для инженерной практики, допускает адекватные динамические модели. Все эти явления могут быть изучены и объяснены средствами теоретической механики, которая по сути представляет собой математическую теорию динамических моделей.

3. Хотя **предметом** изучения в теоретической механике являются **объекты реального мира, инструментами** этого изучения являются только **динамические модели**. Следует четко сознавать разницу между реальным объектом и его моделью. Представим себе какое-либо реальное инженерное сооружение, например мост или движущийся по нему поезд, и модель моста или поезда, выполненную из деталей детского конструктора. Очевидно, что модель есть самостоятельный объект, который сохранится, даже если мост обрушится, а поезд уйдет. Кроме того, поведение модели, поскольку она собрана из деталей, все свойства которых полностью известны, может быть также полно описано и объяснено (в отличие от реального моста или поезда). Так же обстоит дело и с динамическими моделями. После того как модель полностью определена, т.е. заданы величины масс всех точек, точно описаны все действующие на них силы, она формально может изучаться самостоятельно вне связи с ее реальными источниками. Ее поведение в принципе может быть полностью изучено дедуктивным путем (при помощи математики и логики) на основании аксиом и прочих данных (см. определение 1.2), определяющих динамическую модель. Поэтому все детали поведения модели заложены в ней самой так же, как все теоремы геометрии уже содержатся в ее аксиомах, поскольку вытекают из них с необходимостью.

4. Вообще говоря, модель тем точнее отражает реальность, чем больше точек она содержит, т.к. при большем числе точек проектировщик имеет больше возможностей за счет выбора их положений и масс отразить различные особенности поведения изучаемого объекта. Однако при этом следует иметь в виду, что движение сложных многоточечных моделей описывается большим числом параметров и, как правило, приводит к рассмотрению многочисленных систем дифференциальных уравнений со многими неизвестными. Поэтому иногда более полезными могут оказаться более грубые и простые по структуре модели.

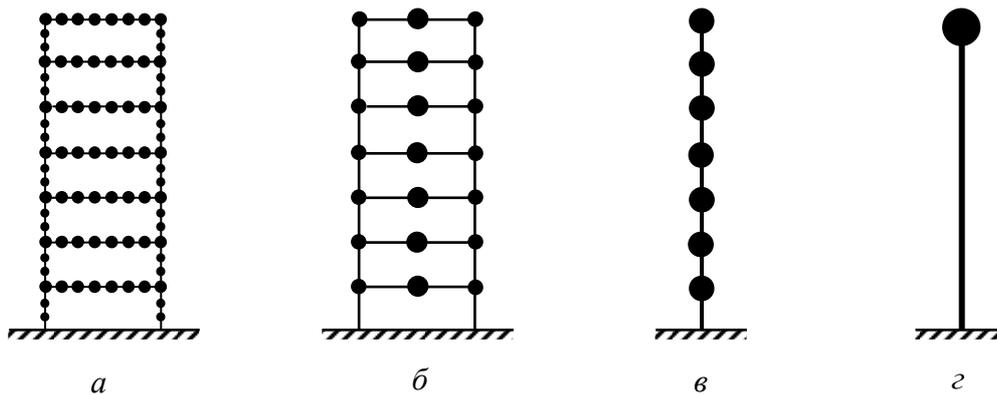


Рис. 1.1

На рис. 1.1 изображены схемы динамических моделей семиэтажного здания, представляющие собой наборы материальных точек, скрепленных с некоторыми упругими каркасами (каркасы тоже являются динамическими моделями, только состоящими из невесомых точек, упруго взаимодействующих между собой). Модель *a* позволяет описать практически любые положения и движения конструкции, но для этого необходимо контролировать положения 84 точек, имеющих 168 независимых координат в плоскости рисунка. Чтобы учесть пространственное движение трехмерной конструкции здания, придется еще значительно увеличить число координат. Для полного описания движения такой модели необходимо рассмотреть систему из 168 или более дифференциальных уравнений, что представляет собой сложную математическую проблему, требующую использования мощных компьютерных средств. В то же время задачи, стоящие перед инженером на разных стадиях проектирования и эксплуатации сооружения часто не требуют точного знания положений всех точек конструкции. Кроме того, не всегда в его распоряжении есть необходимое компьютерное обеспечение и полный набор нужных для него исходных данных. Гораздо важнее бывает знать значения или диапазоны изменения некоторых характерных важных для практики параметров, оценить которые можно, рассмотрев более простые модели *b*, *v* или *z*. При этом, чем проще модель, тем полнее она может быть исследована теоретически. В грубых моделях четче прослеживаются взаимосвязи между различными их характеристиками, знание которых позволяет принимать обоснованные инженерные решения без громоздких вычислений. Задача проектировщика – для решения конкретного вопроса предложить подходящую модель, позволяющую отразить все необходимое для решения именно этого вопроса и отвлечься от множества несущественных деталей.

Значение абстрактных умозрительных моделей и главное их достоинство заключается в том, что в них четко оговорены все принимаемые исходные положения (аксиомы), так что все полученные из них выводы являются достоверными настолько, насколько надежно установлены эти положения. Поскольку справедливость законов Ньютона надежно проверена вековой практикой, принятое нами понятие динамической модели может быть применено к огромному количеству конкретных задач и оказывается, таким образом, практически универсальным.

Приведем еще *примеры динамических моделей*, знакомые читателю. В стандартном курсе теоретической механики систематически используется понятие *твердого тела* – модели, в которой внутренние силы, действующие между точками, таковы, что расстояния между ними не изменяются.

В известном смысле противоположностью твердого тела является *идеальный газ* – модель, в которой точки вообще не действуют друг на друга, т.е. все внутренние силы равны нулю (за исключением моментов столкновений). Нетрудно представить себе ряд промежуточных между твердым телом и идеальным газом моделей, учитывающих разнообразные особенности взаимодействия между их точками. Одним из основных в этом ряду является модель упругого тела, отражающая важные свойства используемых в практике материалов и конструкций.

1.2. Упругое тело и упругая система

Определение 1.3. *Упругое тело* – динамическая модель, для которой выполняются следующие аксиомы:

Аксиома УТ1. Внутренние силы полностью определяются расстояниями между взаимодействующими точками;

Аксиома УТ2. Существует единственное с точностью до перемещения твердого тела положение системы, в котором равнодействующая внутренних сил, действующих на каждую точку, равна нулю; это положение называется положением равновесия или равновесным положением;

Аксиома УТ3. При смещении системы из положения равновесия возникают внутренние силы, которые имеют восстанавливающий характер, т.е. стремятся вернуть ее в это положение.

Аксиома УТ1 математически выражается равенством $f_{ij} = f_{ij}(l_{ij})$, означая, что сила \vec{F}_{ij} , действующая на точку M_i со стороны точки M_j полностью определяется расстоянием между этими точками.

Аксиома УТ3, вполне **понятная физически**, нуждается в уточнении понятия «восстанавливающий характер», которое позволило бы выразить его **математически**.

Воспользовавшись обозначениями и результатами замечания 1 предыдущего раздела, примем вначале, что в положении равновесия все $f_{ij} = 0$, т.е. все внутренние силы равны нулю. Рассмотрим смещение системы из положения равновесия, при котором расстояние l_{ij} получает приращение dl_{ij} , положительное при растяжении отрезка $M_j M_i$ и отрицательное при его сжатии. Естественно принять в качестве основного **характеристического свойства упругого тела**, что при растяжении ($dl_{ij} > 0$) силы, возникающие между точками упругого тела, будут направлены внутрь отрезка $M_j M_i$, т.е. будут силами притяжения ($f_{ij} < 0$), а при сжатии ($dl_{ij} < 0$) – наружу, т.е. будут силами отталкивания ($f_{ij} > 0$). При этом всегда f_{ij} и dl_{ij} имеют разные знаки, т.е. выполняется неравенство

$$f_{ij} \cdot dl_{ij} < 0, \quad (1.2)$$

которое и является **математическим выражением аксиомы УТ3**, т.е. выражением восстанавливающего характера сил упругости.

Единственными перемещениями упругого тела, для которых неравенство (1.2) не выполняется, являются его **перемещения как твердого тела**, при которых все $dl_{ij} = 0$.

Подчеркнем, что величины f_{ij} сил, входящие в (1.2), должны вычисляться не в положении равновесия, а в положении тела, полученном в результате перемещения.

Практическое использование условия (1.2) затруднительно, поскольку оно должно выполняться для всех пар точек упругого тела и выражается, таким образом, системой большого числа неравенств, куда входит большое число неизвестных внутренних сил f_{ij} .

Следующая теорема дает более простое и практически удобное выражение восстанавливающего характера упругих сил. Обозначим через $\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{iN}$ равнодействующую внутренних сил, приложенных к точке M_i упругого тела, N – число точек тела.

Теорема 1.1. При малых смещениях \vec{s}_i точек упругого тела из положения равновесия выполняется соотношение.

$$\sum (\vec{F}_i, \vec{s}_i) < 0, \quad (1.3)$$

где скобки означают скалярное произведение векторов, равное по определению произведению модулей векторов на косинус угла между ними.

Доказательство. Пусть в результате перемещения упругого тела его точки M_i и M_j получают малые перемещения \vec{s}_i и \vec{s}_j , которые можно рассматривать как малые приращения их радиусов-векторов $\vec{s}_i = d\vec{r}_i$, $\vec{s}_j = d\vec{r}_j$. При этом вектор $\overrightarrow{M_j M_i}$ получает геометрическое приращение $d(\overrightarrow{M_j M_i}) = d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = \vec{s}_i - \vec{s}_j$. Составим сумму двух скалярных произведений (при этом силы берутся в конечном положении, после деформации, которую считаем достаточно малой)

$$\begin{aligned} (\vec{F}_{ij}, \vec{s}_i) + (\vec{F}_{ji}, \vec{s}_j) &= (\vec{F}_{ij}, \vec{s}_i) + (-\vec{F}_{ij}, \vec{s}_j) = (\vec{F}_{ij}, \vec{s}_i - \vec{s}_j) = \\ &= \frac{f_{ij}}{l_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{s}_i - \vec{s}_j) = \frac{f_{ij}}{l_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j, d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \frac{f_{ij}}{l_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j, d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)) = \\ &= \frac{f_{ij}}{l_{ij}} \cdot \frac{d(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{r}_i - \vec{r}_j)}{2} = \frac{f_{ij}}{l_{ij}} \cdot \frac{d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2}{2} = \frac{f_{ij}}{l_{ij}} \cdot \frac{dl_{ij}^2}{2} = \frac{f_{ij}}{l_{ij}} \cdot l_{ij} dl_{ij} = f_{ij} dl_{ij}, \end{aligned}$$

откуда в соответствии с (1.2) следует, что для любой пары точек упругого тела при его малой деформации выполняется неравенство

$$(\vec{F}_{ij}, \vec{s}_i) + (\vec{F}_{ji}, \vec{s}_j) < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4)$$

Суммируя по всем номерам i и j (при этом в левой части получатся две одинаковые суммы), придем к (1.3).

Заметим, что выражение dl_{ij} при выводе (1.4) имеет несколько иной смысл, чем в (1.2). В (1.2) оно означает приращение (в принципе произвольное) расстояния l_{ij} , рассматриваемого как функция координат $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$ точек M_i и M_j , а при выводе (1.4) dl_{ij} рассматривается как полный дифференциал этой функции, вычисленный в положении $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$. Как известно из курса математического анализа, при малых приращениях координат (которым отвечают малые перемещения) приращение дифференцируемой функции может быть с любой степенью точности представлено ее полным дифференциалом. Вот почему в (1.4) и в формулировке теоремы 1.1 перемещения \vec{s}_i и \vec{s}_j следует считать малыми. В противном случае, т.е. при произвольных \vec{s}_i и \vec{s}_j , (1.3) может не выполняться.

Перед формулировкой условия (1.2) было сделано предположение, что при равновесии $f_{ij} = 0$, т.е. *все* внутренние силы равны нулю. Это требование не является обязательным, т.к. согласно определению 1.3 (аксиома УТ2) *не каждая* из внутренних сил \vec{F}_{ij} , а только их *равнодействующая* $\vec{F}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{iN}$ для каждой точки должна в положении равновесия равняться нулю. Чтобы снять это ограничение, достаточно вместо силы \vec{F}_{ij} ввести в рассмотрение ее «избыток» по отношению к равновесному значению \vec{F}_{ij0} , равный $\vec{F}'_{ij} = \vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij0}$, вызванный деформацией тела. Соответствующий «избыток» числового значения силы \vec{F}'_{ij} равен $f'_{ij} = f_{ij} - f_{ij0}$. Тогда *смысл аксиомы УТ3* выразится вместо (1.2) видоизмененным неравенством

$$f'_{ij} \cdot dl_{ij} < 0. \quad (1.5)$$

Его физический смысл состоит в том, что если при равновесии между точками M_i и M_j упругого тела существует напряжение сжатия ($f_{ij0} > 0$), то увеличение расстояния ($dl_{ij} > 0$) сопро-

вождается его ослаблением ($f'_{ij} = f_{ij} - f_{ij0} < 0$).

Заменим силы \vec{F}_{ij} их «избытками» $\vec{F}'_{ij} = \vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij0}$ и вычислим сумму двух скалярных произведений

$$\left(\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij0}, \vec{s}_i\right) + \left(\vec{F}_{ji} - \vec{F}_{ji0}, \vec{s}_j\right) = \left(\vec{F}_{ij}, \vec{s}_i\right) + \left(\vec{F}_{ji}, \vec{s}_j\right) - \left(\vec{F}_{ij0}, \vec{s}_i\right) - \left(\vec{F}_{ji0}, \vec{s}_j\right).$$

Используя равенства $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ и рассуждая так же, как при выводе соотношений (1.4), получим

$$\begin{aligned} \left(\vec{F}_{ij}, \vec{s}_i\right) + \left(\vec{F}_{ji}, \vec{s}_j\right) - \left(\vec{F}_{ij0}, \vec{s}_i\right) - \left(\vec{F}_{ji0}, \vec{s}_j\right) &= \left(\vec{F}_{ij}, \vec{s}_i - \vec{s}_j\right) - \left(\vec{F}_{ij0}, \vec{s}_i - \vec{s}_j\right) = \\ &= f_{ij} \cdot dl_{ij} - f_{ij0} \cdot dl_{ij} = (f_{ij} - f_{ij0}) \cdot dl_{ij} = f'_{ij} \cdot dl_{ij}, \end{aligned}$$

откуда, с учетом (1.5), следует обобщение соотношений (1.4)

$$\left(\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij0}, \vec{s}_i\right) + \left(\vec{F}_{ji} - \vec{F}_{ji0}, \vec{s}_j\right) < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4')$$

Снова суммируя по всем номерам i и j , получим

$$\sum \left(\vec{F}_i, \vec{s}_i\right) - \sum \left(\vec{F}_{i0}, \vec{s}_i\right) < 0,$$

где $\vec{F}_{i0} = \vec{F}_{i10} + \vec{F}_{i20} + \dots + \vec{F}_{iN0}$ – равнодействующая внутренних сил, приложенных к точке M_i в положении равновесия. По аксиоме УТ2 для всех i $\vec{F}_{i0} = 0$, откуда снова следует (1.3). Теорема доказана.

Теорема является типичным примером использования динамической модели, когда из простых и естественных свойств сил взаимодействия между точками модели (в данном случае – из **сопротивления изменению расстояний** между точками упругого тела, выражающихся неравенствами (1.2) и (1.5)), выводятся следствия, отражающие характерные свойства модели в целом.

Величины \vec{F}_i , фигурирующие в (1.3), формально являются суммами большого числа внутренних сил \vec{F}_{ij} , которые в большинстве практически важных задач остаются неизвестными. Но чаще всего знать их и не нужно, т.к. в соотношениях, характеризующих существенные для практики свойства упругого тела, как правило, присутствуют именно величины \vec{F}_i , имеющие простой и важный физический смысл. Пусть упругое тело находится в равновесии под действием системы внешних по отношению к телу сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_N$. Вызванная ими деформация тела порождает внутренние силы \vec{F}_{ij} , для которых выполняются известные из курса статики условия равновесия

$$\vec{P}_i + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{iN} = \vec{P}_i + \vec{F}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Отсюда видно, что фигурирующие в (1.3) равнодействующие **внутренних** сил \vec{F}_i в некотором положении тела равны и противоположны **внешним** силам \vec{P}_i , приложенным в точках M_i и **уравновешивающим тело в этом положении**. Это обстоятельство и объясняет удобство условия (1.3) по сравнению с (1.2) или (1.5), т.к. оно выражает упругие свойства тела не через «скрытые» между точками модели и недоступные для прямого определения силы \vec{F}_{ij} , а через величины $\vec{F}_i = -\vec{P}_i$, характеризующие поведение упругого тела при внешних воздействиях и **проявляющиеся в реальных взаи-**

модействиях.

Обобщением понятия упругого тела служит понятие *упругой системы*.

Определение 1.4. *Упругая система* – совокупность упругих и твердых тел, соединенных с помощью идеальных стационарных связей.

Простые примеры упругих систем показаны на рис. 1.2.

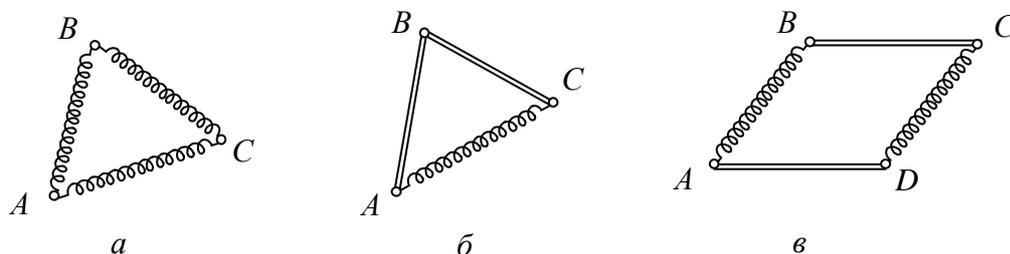


Рис. 1.2

Как видим, в отличие от упругого тела, упругая система может иметь *несколько* и даже бесконечно много *положений равновесия*. При этом внутренние силы, возникающие при смещении из равновесного положения, не всегда имеют восстанавливающий характер. Например в системе *б* возможно равновесие в положении, когда точки *A*, *B* и *C* располагаются на одной прямой. При незначительном смещении системы из этого положения равновесия (нарушении прямолинейности) возникающие внутренние силы не будут его восстанавливать (по крайней мере, если пружина *AC* достаточно короткая), а будут стремиться сообщить системе треугольную конфигурацию. Подобные примеры приводят к необходимости ввести классификацию положений равновесия.

Определение 1.5. *Устойчивым* называется такое положение равновесия системы, незначительное нарушение которого приводит к возникновению внутренних сил, которые стремятся восстановить это положение.

Неустойчивым называется такое положение равновесия системы, при сколь угодно малом нарушении которого могут возникнуть внутренние силы, сообщающие системе движение, при котором ее точки удаляются от своих равновесных положений на конечные расстояния.

Безразличным называется такое положение равновесия системы, в сколь угодно малой окрестности которого существуют другие положения равновесия.

Примером устойчивого положения равновесия может служить треугольная конфигурация системы, изображенной на рис. 1.2 б, когда пружина *AC* не деформирована, если ее свободная длина меньше суммы длин твердых стержней *AB* и *BC*, но больше их разности.

Прямолинейное расположение точек *A*, *B* и *C* той же системы дает пример неустойчивого положения равновесия.

Все положения системы, изображенной на рис. 1.2 в, в которых пружины *AB* и *CD* не деформированы, являются примерами безразличных положений равновесия.

Единственное положение равновесия упругого тела в соответствии с определением 1.3 является устойчивым.

1.3. Признаки устойчивости и неустойчивости положений равновесия

Как следует из определения 1.5, упругая система вблизи устойчивого положения равновесия ведет себя так же, как упругое тело. Поэтому неравенство (1.3), характеризующее *упругое тело*, можно рассматривать как признак устойчивости положения равновесия *упругой системы*. В то же время, если неравенство (1.3) не выполняется, точнее, если существует

сколь угодно малое смещение $\{\vec{s}_i\}$ системы из положения равновесия, при котором возникают внутренние силы, для которых $\sum(\vec{F}_i, \vec{s}_i) > 0$, то такое положение следует считать неустойчивым. Действительно, если бы оно было устойчивым, то выполнялась бы теорема 1.1 с неравенством противоположного смысла. Таким образом, приходим к следующему критерию:

Положение равновесия

устойчиво, если для всех достаточно малых смещений $\{\vec{s}_i\}$ $\sum(\vec{F}_i, \vec{s}_i) < 0$,

неустойчиво, если существует сколь угодно малое смещение $\{\vec{s}_i\}$, для которого $\sum(\vec{F}_i, \vec{s}_i) > 0$.

З а м е ч а н и е. Принятое нами определение устойчивости, математически выраженное неравенством (1.2) или шире (1.5) и отражающее физически понятное свойство системы сопротивляться изменению ее устойчивого положения, не является единственно возможным. Существует более широкое определение устойчивости, данное А.М.Ляпуновым, основанное на свойствах тех движений, которые будет совершать система при незначительных нарушениях равновесия. Теория Ляпунова приводит к другим формам условий устойчивости и неустойчивости (в частности теорема Лагранжа – Дирихле для консервативных систем), которые в большинстве практических задач теории динамических систем эквивалентны неравенствам типа (1.3).

1.4. Консервативность упругих систем. Теорема взаимности

Важное свойство упругих систем устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1.2 *Работа внутренних сил упругой системы при любом ее перемещении полностью определяется начальным и конечным положениями системы.*

Доказательство.

Достаточно доказать теорему для упругого тела, поскольку работа реакций идеальных связей, с помощью которых образована упругая система, так же, как и работа внутренних сил в твердых телах, при любых перемещениях равна нулю.

Рассмотрим какие либо две точки M_1 и M_2 тела. Обозначим $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{l}$, $|\vec{l}| = l$ – расстояние между точками M_1 и M_2 . Тогда в соответствии с (1.1) и с учетом того что внутренние силы в упругом теле *зависят только от расстояний* между взаимодействующими точками, сила, действующая на M_2 со стороны M_1 равна

$$\vec{F}_{21} = \frac{f_{21}}{l} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{f_{21}(l)}{l} \cdot \vec{l} = \frac{f(l)}{l} \cdot \vec{l}.$$

При любом перемещении системы элементарная работа сил \vec{F}_{21} и \vec{F}_{12} составит

$$\begin{aligned} dA(\vec{F}_{21}) + dA(\vec{F}_{12}) &= (\vec{F}_{21}, \overrightarrow{ds_2}) + (\vec{F}_{12}, \overrightarrow{ds_1}) = (\vec{F}_{21}, \overrightarrow{ds_2} - \overrightarrow{ds_1}) = \\ &= (\vec{F}_{21}, d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = (\vec{F}_{21}, d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) = \frac{f(l)}{l} \cdot (\vec{l}, d\vec{l}) = \frac{f(l)}{l} \cdot l \cdot dl = f(l)dl, \end{aligned}$$

откуда на конечном перемещении точек M_1 и M_2

$$A(\vec{F}_{21}) + A(\vec{F}_{12}) = \int_{l_0}^{l_1} f(l) dl = \Phi(l_1) - \Phi(l_0), \quad (1.5)$$

где $\Phi(l)$ – первообразная функции $f(l)$, l_0 и l_1 – соответственно расстояние между точками M_1 и M_2 в начальном и конечном положениях. Полученное соотношение (1.5) показывает, что работа внутренних сил, действующих между любыми двумя точками упругой системы, полностью определяется расстояниями между ними в начальном и конечном положениях, а следовательно и сумма работ всех внутренних сил упругой системы полностью определяется ее начальным и конечным положениями. Теорема доказана.

*Свойство сил, благодаря которому их суммарная работа определяется только начальным и конечным положениями системы, называется **консервативностью**, а механические системы, на которые действуют только такие силы, называются **консервативными**.*

Доказанная теорема означает, что упругая система, поскольку ее поведение определяется внутренними силами, является консервативной.

Свойство консервативности имеет глубокий **физический смысл**. Если система не является консервативной, то работа внутренних сил при ее переходе из начального положения в конечное зависит не только от этих двух положений, но и от промежуточных положений, т.е. от траекторий, по которым движутся точки. Пусть при перемещении по одной траектории из положения Н в положение К внутренние силы совершили работу A_1 , а по другой траектории – работу A_2 , причем $A_1 > A_2$. Тогда на замкнутом перемещении из положения Н в К по первой траектории, а затем из К в Н по второй траектории, проходимой в обратном направлении, работа составит $A_1 - A_2 > 0$. Если, например, движение началось из состояния покоя, то по возвращении в начальное положение в соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии точки системы будут обладать кинетической энергией, равной $A_1 - A_2$, которую можно использовать для совершения полезной работы, после чего точки остановятся, и система вновь окажется в исходном состоянии. Повторяя это замкнутое перемещение сколько угодно раз, можно выполнить любую полезную работу без использования каких-либо источников энергии, т.е. **неконсервативная система становится вечным двигателем**. Все попытки создания такого двигателя до сих пор были безуспешны, что привело к выводу о его принципиальной невозможности. Поэтому и упругие тела как модели реальных инженерных сооружений, поскольку их поведение определяется внутренними силами, являются консервативными.

Следствием консервативности является важное соотношение, частные случаи которого известны в механике как теоремы взаимности.

Для его выражения, как и многих других общих выводов, удобно использовать **обобщенные координаты**.

Напомним, что по определению **обобщенными координатами** называется любая совокупность независимых параметров q_1, q_2, \dots, q_n , полностью определяющих положение системы. Отсюда $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$, \vec{r}_i – радиус-вектор точки M_i относительно какого-либо неподвижного начала. Любую систему сил, как внешних, так и внутренних, приложенных к точкам системы, можно рассматривать как функцию $\vec{p} = \vec{p}(M)$, значение которой в точке M равно силе, приложенной к системе в этой точке. Эту функцию будем называть **нагрузкой** или **нагружением** системы. При каком-либо нагружении всякой обобщенной координате q_i отвечает обобщенная сила Q_i , равная по определению числовому коэффициенту приращении этой координаты в выражении элементарной работы

$$dA = (\vec{F}_1, d\vec{r}_1) + (\vec{F}_2, d\vec{r}_2) + \dots + (\vec{F}_N, d\vec{r}_N) = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \dots + Q_n dq_n, \quad (1.6)$$

которое получается, если элементарные перемещения точек системы выразить через независимые приращения обобщенных координат

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} dq_n \Rightarrow Q_j = \left(\vec{F}_1, \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_j} \right) + \left(\vec{F}_2, \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_j} \right) + \dots + \left(\vec{F}_N, \frac{\partial \vec{r}_N}{\partial q_j} \right). \quad (1.7)$$

Здесь круглые скобки означают скалярное произведение векторов.

Если под \vec{F}_i понимать внутренние силы упругой системы, которые согласно определению упругого тела являются функциями положений ее точек $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$, то и соответствующие **внутренние обобщенные силы** являются функциями обобщенных координат $Q_j = Q_j(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Какими бы ни были эти функции, для всех i и j справедливы соотношения (**теорема взаимности**)

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}, \quad (1.8)$$

Для доказательства (1.8) рассмотрим перемещения системы, при которых изменяются только две из координат. Не нарушая общности можно считать, что это q_1 и q_2 , остальные координаты $q_3 = q_4 = \dots = q_n = \text{const}$. Зафиксируем четыре положения системы: начальное $O(q_1, q_2)$, конечное $H(q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2)$ и два промежуточных $E(q_1 + \Delta q_1, q_2)$ и $G(q_1, q_2 + \Delta q_2)$. Вычислим работу внутренних сил \vec{F}_i на перемещении OEH , при котором на переходе из O в E $q_2 = \text{const} \Rightarrow dq_2 = 0$, а на переходе из E в H $q_1 = \text{const} \Rightarrow dq_1 = 0$:

$$\begin{aligned} A_{OEH} &= \int_{OEH} dA = \int_{OEH} Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 = \int_{OE} Q_1(q_1, q_2) dq_1 + \int_{EH} Q_2(q_1 + \Delta q_1, q_2) dq_2 = \\ &= \int_{q_1}^{q_1 + \Delta q_1} Q_1(q_1, q_2) dq_1 + \int_{q_2}^{q_2 + \Delta q_2} Q_2(q_1 + \Delta q_1, q_2) dq_2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

На альтернативном перемещении OGH , при котором на переходе из O в G $q_1 = \text{const} \Rightarrow dq_1 = 0$, а на переходе из G в H $q_2 = \text{const} \Rightarrow dq_2 = 0$, работа тех же сил равна

$$\begin{aligned} A_{OGH} &= \int_{OGH} dA = \int_{OGH} Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 = \int_{OG} Q_2(q_1, q_2) dq_2 + \int_{GH} Q_1(q_1, q_2 + \Delta q_2) dq_1 = \\ &= \int_{q_2}^{q_2 + \Delta q_2} Q_2(q_1, q_2) dq_2 + \int_{q_1}^{q_1 + \Delta q_1} Q_1(q_1, q_2 + \Delta q_2) dq_1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В силу консервативности системы работы A_{OEH} и A_{OGH} равны, т.к. начальное и конечное положения системы в перемещениях OEH и OGH совпадают. Приравнявая (1.9) и (1.10), приходим к равенству

$$\int_{q_1}^{q_1+\Delta q_1} [Q_1(q_1, q_2 + \Delta q_2) - Q_1(q_1, q_2)] dq_1 = \int_{q_2}^{q_2+\Delta q_2} [Q_2(q_1 + \Delta q_1, q_2) - Q_2(q_1, q_2)] dq_2,$$

откуда на основании интегральной «теоремы о среднем» следует соотношение

$$[Q_1(\xi_1, q_2 + \Delta q_2) - Q_1(\xi_1, q_2)] \Delta q_1 = [Q_2(q_1 + \Delta q_1, \eta_2) - Q_2(q_1, \eta_2)] \Delta q_2,$$

где $q_1 < \xi_1 < q_1 + \Delta q_1$, $q_2 < \eta_2 < q_2 + \Delta q_2$. Применяя к его обеим частям теорему Лагранжа о конечных приращениях, получим

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}(\eta_1, \eta_2),$$

где $q_2 < \xi_2 < q_2 + \Delta q_2$, $q_1 < \eta_1 < q_1 + \Delta q_1$. Неограниченно уменьшая Δq_1 и Δq_2 , устанавливаем, что в положении с произвольными значениями координат q_1 и q_2 выполняется равенство $\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}$, что в силу произвольности нумерации координат равносильно (1.8).

1.5. Линейно-упругие системы. Принцип суперпозиции

Существует класс упругих систем, для которых зависимость $Q_j = Q_j(q_1, q_2, \dots, q_n)$ между их положением и возникающими в этом положении внутренними силами имеет наиболее простую форму

Определение 1.6. *Линейно-упругой называется упругая система, для которой можно выбрать такие обобщенные координаты, в которых обобщенные внутренние силы являются линейными функциями координат.*

$$Q_i = -c_{i1}q_1 - c_{i2}q_2 - \dots - c_{in}q_n, \quad (1.11)$$

где c_{ij} – постоянные числа, не зависящие от q_1, q_2, \dots, q_n . Они называются обобщенными коэффициентами жесткости (знак «-» выбран из соображений удобства формулировок ряда важных результатов).

Системы, для которых (1.11) не выполняется, называются **нелинейными**.

З а м е ч а н и е. Как отмечалось в разделе 1.2, при равновесии упругой системы под действием внешнего нагружения $\vec{p} = \vec{p}(M)$ между внутренними и внешними силами выполняется равенство $\vec{F}_i = -\vec{P}_i$, где \vec{F}_i – равнодействующая внутренних сил, приложенных к точке M_i системы, $\vec{P}_i = \vec{p}(M_i)$ – внешняя сила, приложенная к той же точке. Это позволяет, обозначив обобщенную внешнюю силу через $Q_i^{(e)}$, записать уравнение

$$Q_i^{(e)} = c_{i1}q_1 + c_{i2}q_2 + \dots + c_{in}q_n, \quad (1.12)$$

которое называется уравнением равновесия линейно-упругой системы.

Благодаря простоте соотношений (1.11, 1.12) **исследование линейно-упругих систем** может быть проведено гораздо **проще и полнее** по сравнению с нелинейными системами.

Одним из важнейших результатов для линейно-упругих систем, настолько же про-

стым, насколько и плодотворным, является

Теорема 1.3 (Принцип суперпозиции)

Если в равновесии под действием нагружения $\vec{p}_1 = \vec{p}_1(M)$ координаты системы равны $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}$, а под действием нагружения $\vec{p}_2 = \vec{p}_2(M) = q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, \dots, q_n^{(2)}$, то под действием нагружения $a_1\vec{p}_1 + a_2\vec{p}_2 = a_1\vec{p}_1(M) + a_2\vec{p}_2(M)$ они будут равны $a_1q_1^{(1)} + a_2q_1^{(2)}, a_1q_2^{(1)} + a_2q_2^{(2)}, \dots, a_1q_n^{(1)} + a_2q_n^{(2)}$.

Принцип суперпозиции легко вытекает из (1.12), т.к. обобщенные силы согласно (1.7) являются линейными функциями нагружения: $Q_j(a_1\vec{p}_1 + a_2\vec{p}_2) = a_1Q_j(\vec{p}_1) + a_2Q_j(\vec{p}_2)$.

Помимо простоты значение линейно-упругих систем заключается также и в том, что **любую упругую систему** при определенных обстоятельствах **можно рассматривать как линейно-упругую**.

Пусть в положении равновесия значения обобщенных координат равны соответственно $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$. Всегда можно перейти к другим координатам $\tilde{q}_i = q_i - q_{i0}$, в положении равновесия равным нулю. Поэтому будем считать, что этот переход уже выполнен, т.е. $q_{10} = q_{20} = \dots = q_{n0} = 0$.

Ограничимся положениями системы, находящимися вблизи положения равновесия, когда координаты мало отличаются от равновесных значений, т.е. $q_i - q_{i0} = q_i \approx 0$. Поскольку **в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю**, а малые приращения любой дифференцируемой функции могут быть заменены полными дифференциалами, можем записать

$$Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n) - Q_i(0, 0, \dots, 0) = \\ = \frac{\partial Q_i}{\partial q_1}(0, 0, \dots, 0) \cdot q_1 + \frac{\partial Q_i}{\partial q_2}(0, 0, \dots, 0) \cdot q_2 + \dots + \frac{\partial Q_i}{\partial q_n}(0, 0, \dots, 0) \cdot q_n,$$

что совпадает с (1.9), если обозначить $c_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$. Из этого следует, что **при малых**

смещениях от положения равновесия любая упругая система ведет себя, как линейно-упругая.

Теорема взаимности (1.8) для линейно-упругих систем выражается равенствами

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad (1.13)$$

означающими, что обобщенные **коэффициенты жесткости не зависят от порядка индексов**.

Выражение $\sum(\vec{F}_i, \vec{s}_i)$, фигурирующее в формулировке теоремы 1.1, в силу малости перемещений \vec{s}_i можно рассматривать как элементарную работу, которую согласно (1.6) можно выразить через обобщенные координаты

$$\sum(\vec{F}_i, \vec{s}_i) = \sum Q_j q_j = -\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n c_{ji} q_i \right) q_j = -\sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j,$$

откуда следует **условие устойчивости для линейно-упругих систем: при любых дос-**

точно малых q_1, q_2, \dots, q_n

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j > 0. \quad (1.14)$$

Большинство встречающихся в инженерной практике деталей механизмов и элементов конструкций должны по своему назначению сохранять в процессе эксплуатации свою форму и размеры. В то же время, подвергаясь различным механическим воздействиям, они испытывают деформации, как правило, не слишком большие по сравнению с размерами самих тел и исчезающие при прекращении воздействий. Это позволяет изучать такие тела с помощью введенной модели упругого, а часто и линейно-упругого тела. Оказывается, что **все практически важные общие свойства поведения линейно-упругих систем являются следствием принципа суперпозиции (теорема 1.3), консервативности (1.13) и устойчивости (1.14)**. Характерным поведением упругого тела вблизи устойчивого положения равновесия является **колебательное движение**, при котором точки тела движутся около своих равновесных положений, причем характеристикам этих движений свойственна более или менее строгая **повторяемость**. Во многих случаях эти движения происходят по участкам траекторий, которые в силу их малости можно считать прямолинейными. В следующем разделе рассматриваются способы описания, основные характеристики и основные свойства таких движений.

2. Прямолинейные колебания материальной точки

2.1. Кинематические характеристики колебаний

Пусть точка M движется вдоль некоторой прямой. Направим ось x по этой прямой, произвольно выбрав на ней начало отсчета O (см. рис. 2.1).

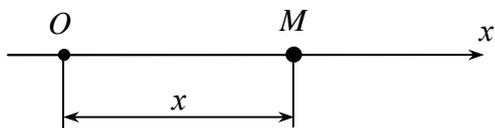


Рис. 2.1

Определение 2.1. *Колебаниями* называется такое движение материальной точки, при котором каждое ее положение повторяется через определенный постоянный промежуток времени, называемый периодом.

Если описывать движение точки уравнением $x = OM = f(t)$, определяющим ее координату x как функцию времени t , то колебательное движение описывается периодической функцией:

$$x(t + \tau) = x(t), \quad (2.1)$$

где $\tau = \text{const.} \neq 0$ – период колебаний.

Замечание. Легко видеть, что если τ – период колебаний, то $2\tau, 3\tau, \dots$ также являются периодами:

$$x(t + 2\tau) = x[(t + \tau) + \tau] = x(t + \tau) = x(t).$$

Поэтому принято периодом называть **наименьшее** из чисел $\tau \neq 0$, удовлетворяющих уравнению (2.1), т.е. принимается следующее

Определение 2.2. *Периодом* колебаний называется наименьший отличный от нуля промежуток времени, по истечении которого каждое положение точки повторяется.

Если движение иллюстрировать графиком, в котором по горизонтали откладывается время t , а по вертикали – координата x , то график колебательного движения имеет характерный вид (см. рис. 2.2): он состоит из повторяющихся одинаковых фрагментов, следующих один за другим по горизонтали. Длина одного такого фрагмента в принятом масштабе равна периоду τ .

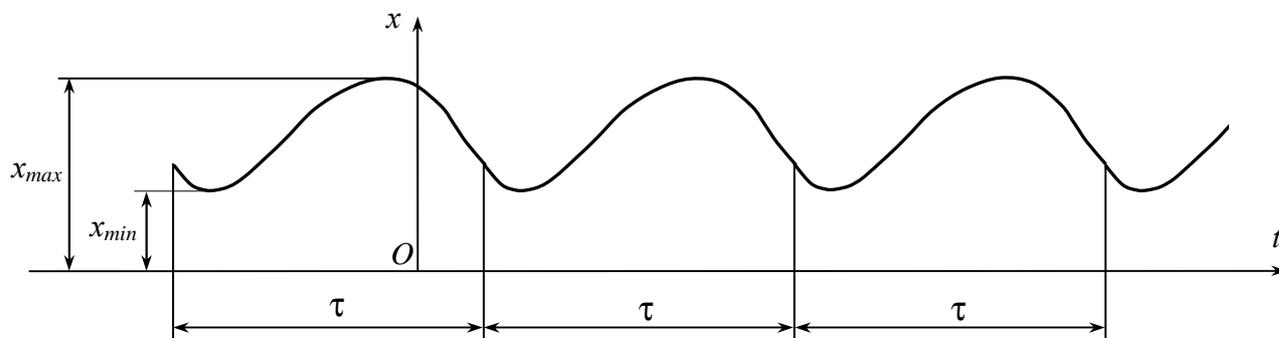


Рис. 2.2

Период является одной из важнейших характеристик колебательных процессов. Наряду

ду с периодом для оценки темпа колебаний используется понятие частоты.

Определение 2.3. *Частотой* колебаний называется количество периодов в одной секунде.

Движение колеблющейся точки в течение одного периода называют **полным колебанием** или **циклом**. Поэтому частоту также можно определить как количество полных колебаний в одной секунде. Частоту принято обозначать греческой буквой ν . В соответствии с определением 2.3 $\nu \cdot \tau = 1$, откуда следует формула, связывающая период и частоту

$$\nu = \frac{1}{\tau}. \quad (2.2)$$

Если период измеряется в секундах, то единицей измерения частоты служит герц (Гц). При колебании с частотой в 1 Гц точка совершает ровно одно полное колебание за одну секунду. Когда струна издает звук Ля первой октавы, ее точки, так же как и точки барабанной перепонки, воспринимающей этот звук, совершают 440 полных колебаний в секунду. Поэтому говорят, что звуку Ля первой октавы соответствует частота 440 Гц.

В теории колебаний и в ее технических применениях наряду с частотой применяется понятие круговой частоты.

Определение 2.4. *Круговой частотой* называется величина, равная частоте, умноженной на 2π .

Круговую частоту принято обозначать греческой буквой ω (как и угловую скорость в кинематике, что не вполне случайно, см. ниже). В соответствии с записанным определением

$$\omega = 2\pi\nu \Leftrightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \tau = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (2.3)$$

Единицей измерения круговой частоты является $\frac{1}{c} = c^{-1}$.

В процессе колебаний точка в определенные моменты достигает своих крайних положений, в которых координата принимает свои наибольшее x_{\max} и наименьшее x_{\min} значения.

Определение 2.5. *Амплитудой* прямолинейных колебаний называется половина расстояния между крайними положениями точки.

Обозначая амплитуду через \mathcal{A} , сформулированное определение выразим формулой

$$\mathcal{A} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \quad (2.4)$$

Удвоенную амплитуду называют *размахом* колебаний.

2.2 Гармонические колебания

Определение 2.6. *Гармоническими* называются колебания, при которых координата точки изменяется по закону

$$x = \mathcal{A} \sin(kt + \alpha) + b, \quad (2.5)$$

где \mathcal{A} , k , b и α – постоянные.

Выражение $kt + \alpha$ называется **фазой** колебаний, α называется **начальной фазой**.

Везде далее принимаем, что $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Установим следующие свойства гармонических колебаний.

1. Период гармонических колебаний равен $\frac{2\pi}{k}$.

Действительно,

$$x\left(t + \frac{2\pi}{k}\right) = a \sin\left[k\left(t + \frac{2\pi}{k}\right) + \alpha\right] + b = a \sin(kt + 2\pi + \alpha) + b = a \sin(kt + \alpha) + b = x(t).$$

Отсюда получаем выражения для частоты и круговой частоты

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{k}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi\nu = k. \quad (2.6)$$

2. Амплитуда гармонических колебаний равна модулю множителя a перед тригонометрическим членом в уравнении (2.5). Действительно, поскольку максимальное и минимальное значения $\sin(kt + \alpha)$ равны соответственно $+1$ и -1 , то

$$x_{\max} = [a \sin(kt + \alpha)]_{\max} + b = |a| + b, \quad x_{\min} = [a \sin(kt + \alpha)]_{\min} + b = -|a| + b,$$

откуда в соответствии с (2.4)

$$A = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{|a| + b - (-|a| + b)}{2} = |a|. \quad (2.7)$$

У п р а ж н е н и е. Выберите из движений, которые описываются следующими уравнениями, те, которые являются колебаниями, а также определите, какие из них будут гармоническими. Найдите также амплитуды, периоды и частоты колебательных движений.

1. $x = \sin(2t^2)$
2. $x = \sin^2(2t)$
3. $x = \pi t + \sin(\pi t)$
4. $x = 2t \sin(2t)$
5. $x = 2 \sin(t) \sin(2t)$
6. $x = \sin(t) + \sin(2t)$
7. $x = \sin^2(t) + \sin(2t)$
8. $x = \cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)$
9. $x = \sin(\pi t) \cos(\pi t)$
10. $x = \sin^2(t) + \sin(t)$

Гармонические колебания допускают наглядное кинематическое представление, раскрывающее их связь с равномерным вращательным движением и объясняющее происхождение термина «**круговая частота**».

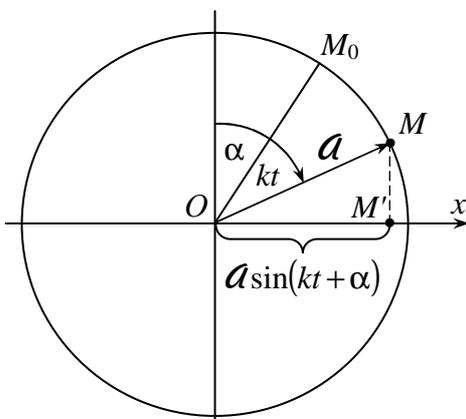


Рис. 2.3

Представим себе отрезок OM длины a (см. Рис. 2.3), равномерно вращающийся по часовой стрелке в плоскости рисунка вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью k . Тогда, как видно из рисунка, его проекция OM' на горизонтальную ось x равна $a \sin(kt + \alpha)$, т.е. точка M' совершает гармонические колебания по оси x по закону

$$x = a \sin(kt + \alpha)$$

Как видим, круговая частота гармонических колебаний – это просто угловая скорость соответствующего вращения, а амплитуда – это длина вращающегося отрезка. Одному полному колебанию точки M' соответствует поворот на 2π радиан отрезка OM , что объясняет коэффициент 2π между частотой в Гц и круговой частотой в обратных секундах (c^{-1}).

2.3. Силы, действующие на материальную точку при гармонических колебаниях

Определение сил, действующих на материальную точку, совершающую заданное известное движение, составляет одну из основных задач динамики (прямую задачу). Ее решение опирается на дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на неподвижные оси

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y, \\ m\ddot{z} &= F_z, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где m – масса точки, F_x , F_y , F_z – проекции на оси x , y , и z равнодействующей приложенных к точке сил. Далее для краткости эту равнодействующую будем называть силой, действующей на точку. Здесь и далее точки над буквами обозначают производные от соответствующих величин по времени, количество точек равно порядку производной.

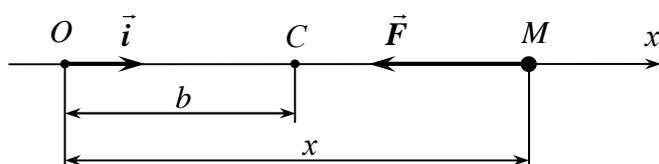


Рис. 2.4

Изобразим на рисунке (см. рис. 2.4) материальную точку M , совершающую гармонические колебания по оси x по закону (2.5). Отметим на оси точку C , координата которой равна b . Поскольку при движении по оси x координаты y и z остаются постоянными, $\ddot{y} = \ddot{z} = 0 \Rightarrow F_x = F_y = 0$,

сила, действующая на движущуюся точку, всегда направлена вдоль оси x и равна

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = F_x \vec{i} = m\ddot{x} \cdot \vec{i} = -mk^2 A \sin(kt + \alpha) \cdot \vec{i}.$$

Здесь \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} – орты (единичные направляющие векторы) осей x , y и z .

Поскольку в соответствии с (2.5) $A \sin(kt + \alpha) = x - b$, выражение для силы можно представить в следующем виде

$$\vec{F} = -mk^2(x - b) \cdot \vec{i} = -mk^2(x \cdot \vec{i} - b \cdot \vec{i}) = -mk^2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}) = -mk^2 \overrightarrow{CM} \quad (2.9)$$

Для того чтобы придать этому результату более отчетливую и наглядную форму, примем следующее определение.

Определение 2.7. *Положением равновесия материальной точки называется такое ее положение, в котором равнодействующая приложенных к ней сил равна нулю.*

Как показывает формула (2.9), в те моменты времени, когда точка M проходит через положение C , действующая на нее сила равна $\vec{F} = -mk^2 \overrightarrow{CC} = 0$, т.е. точка C является положением равновесия для точки M , совершающей гармонические колебания.

Определение 2.8. *Восстанавливающей называется сила, которая направлена к положению равновесия.*

Знак « $-$ » в выражении (2.9) показывает, что вектор \vec{F} силы всегда направлен противоположно радиусу-вектору \overrightarrow{CM} , проведенному из положения равновесия C в точку M , т.е. в направлении от M к положению равновесия C . Тогда результат, содержащийся в формуле (2.9), можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Если материальная точка совершает гармонические колебания, то на нее действует восстанавливающая сила, пропорциональная расстоянию точки от положения равновесия.*

Замечание. Если изобразить зависимость величины восстанавливающей силы от смещения точки от положения равновесия (см. рис. 2.5, где по горизонтали отложено смещение, а по вертикали – модуль восстанавливающей силы), то в рассмотренном случае получит-

ся прямая. Такие зависимости принято называть *линейными*, так же, как и соответствующие восстанавливающие силы. Наряду с линейными в технике встречаются упругие элементы и с «нелинейными» характеристиками, которым соответствуют криволинейные графики (например, такие, как пунктирные кривые на Рис. 2.5). Колебания, которые происходят под действием нелинейных восстанавливающих сил, называются нелинейными.

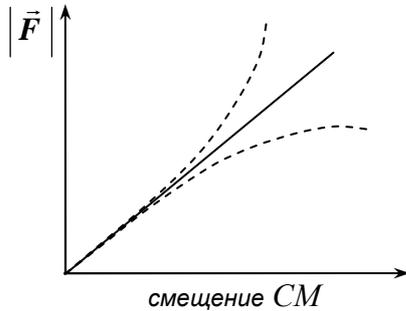


Рис. 2.5

Изучение нелинейных колебаний представляет большой теоретический и практический интерес и приводит к разнообразным и, как правило, довольно сложным задачам, которые в данном пособии не могут быть рассмотрены. В то же время, как видно из Рис. 2.5, если при колебаниях смещения точек от положений равновесия не слишком велики, восстанавливающие силы изменяются в диапазоне, примыкающем к началу координат, где искривленность графиков становится незаметной, т.е. восстанавливающие силы практически можно считать линейными. Это значит, что поведение подавляющего большинства упругих конструкций, по крайней мере, пока их положения не слишком удаляются от положений равновесия, можно изучать, используя предположение о линейном

характере восстанавливающих сил. Далее в настоящем пособии рассматриваются только такие, называемые *линейными*, колебания. Линейные колебания называют также *малыми*, т.к. они происходят, как правило, при относительно малых отклонениях от положений равновесия.

2.4. Колебания материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы. Свободные колебания

Задача, которая решается в этом разделе, относится к классу *обратных* задач динамики, в которых по заданным силам (вообще говоря, как функциям положения точки x , ее скорости \dot{x} и времени t) и начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ требуется определить закон движения $x = f(t)$ точки, позволяющий указать положение точки в произвольный момент времени t .

Представим себе движущуюся материальную точку в виде груза M , прикрепленного к упругой пружине и расположенного на идеально гладкой горизонтальной поверхности (Рис. 2.6). Пружину будем предполагать линейно-упругой, т.е. удлинение (укорочение) пружины численно прямо пропорционально силе, растягивающей (сжимающей) пружину. Обозначим длину недеформированной (не сжатой и не растянутой) пружины через l_0 , а длину пружины в произвольный момент движения — через l . Тогда деформация пружины составит $\Delta l = l - l_0$, а величина силы, вызывающей эту деформацию, $F = c |\Delta l| = c |l - l_0|$, где буквой c обозначен коэффициент жесткости пружины. Для линейно-упругих пружин коэффициент жесткости является постоянной величиной, характеризующей форму, размеры и материал пружины, и не зависит от деформации и состояния движения пружины. Он равен величине силы, которую нужно приложить к пружине, чтобы изменить ее длину на единицу. Он измеряется в H/m и может быть легко измерен, например, в статическом опыте. Достаточно подвесить на пружине груз известного веса P и измерить вызванное этим удлинение Δl (когда установится равновесие). Тогда коэффициент жесткости будет равен $c = P/\Delta l$.

Изобразим на рисунке (Рис. 2.6) действующие на груз силы: силу тяжести \vec{P} , реакцию гладкой поверхности \vec{N} и силу реакции пружины \vec{F} . Направим ось x по горизонтали в сторону удлинения пружины и отметим на ней точку O , находящуюся на расстоянии l_0 длины недеформированной пружины от точки K ее закрепления. Точка O является положением рав-

новесия груза, т.к. в этом положении пружина недеформирована и ее реакция равна нулю.

В произвольном положении груза эта реакция численно равна $F = c|\Delta l| = c|l - l_0| = c|KM - KO| = c \cdot OM$ и направлена противоположно смещению \overrightarrow{OM} груза от положения равновесия. Поместим начало координат на оси x в точку O . Тогда сказанное выше можно выразить векторной формулой

$$\vec{F} = -c \cdot \overrightarrow{OM} = -cx\vec{i}, \quad (2.9a)$$

где \vec{i} – орт оси x ($|\vec{i}| = 1$).

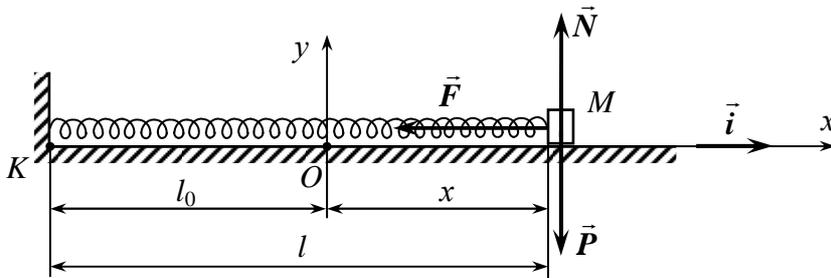


Рис. 2.6

Составим дифференциальное уравнение движения груза M в проекции на ось x .

$$m\ddot{x} = F_x + P_x + N_x$$

Учитывая то обстоятельство, что силы \vec{P} и \vec{N} перпендикулярны оси x (откуда $P_x = N_x = 0$), а сила \vec{F} опре-

деляется соотношением (2.9a), согласно которому она проектируется на ось x в натуральную величину, $F_x = -cx$, получим $m\ddot{x} = -cx$ или, собирая, как принято, члены, содержащие x , в левой части,

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (2.10)$$

Это уравнение описывает такое движение груза, которое он будет совершать, если его каким-либо образом вывести из положения равновесия (сообщив ему некоторые начальные смещение и начальную скорость), а затем освободить от всех воздействий, кроме восстанавливающей силы со стороны пружины.

Определение 2.9. *Свободными колебаниями называются такие колебания, которые совершаются под действием только одной восстанавливающей силы.*

Дифференциальное уравнение (2.10) называется **дифференциальным уравнением свободных колебаний**.

Разделив обе части на m , приведем его к виду

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad (2.11)$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – постоянная величина, имеющая размерность $\sqrt{\frac{\text{сила/длина}}{\text{сила/ускорение}}} = \sqrt{\frac{\text{длина/время}^2}{\text{длина}}} = \frac{1}{\text{время}}$ и зависящая от параметров рассматриваемой механической системы, характеризующих ее упругие и инерционные свойства.

Уравнение (2.11), как и (2.10), относится к классу уравнений, называемых линейными. Его общее решение известно из математики (см. ниже раздел 2.5) и имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2.12)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Общее решение представляет собой семейство функций от времени t , каждая из которых является **частным решением** уравнения (2.11) и получается из (2.12) при конкретном выборе C_1 и C_2 (например, $x_1 = 2,4 \cos kt$, $x_2 = \cos kt - 8 \sin kt$, $x_3 = \pi \sin kt$ и т.п.). При этом **каждое** частное решение «содержится» в выражении (2.12), т.е. **других решений уравнения (2.11), кроме описанных в (2.12), не существует.**

Выбор **единственного** частного решения, удовлетворяющего как дифференциальному уравнению (2.11), так и заданным **начальным условиям**, осуществляется стандартным способом. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ точка занимала положение, которому соответствовала координата x_0 , и имела скорость v_0 (будем считать $v_0 > 0$, если вектор \vec{v}_0 направлен в положительную сторону оси x , и $v_0 < 0$, если в противоположном направлении). Тогда начальные условия выразятся двумя соотношениями

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (2.13)$$

пользуясь которыми можно однозначно определить значения постоянных C_1 и C_2 в (2.12) и тем самым найти искомое частное решение. Для этого продифференцируем (2.12) по времени (считая C_1 и C_2 постоянными), $\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$, затем подставим в полученное соотношение, а также и в (2.12), вместо t его начальное значение $t_0 = 0$ и полученные результаты подставим в равенства (2.13):

$$\begin{aligned} C_1 \cos kt_0 + C_2 \sin kt_0 &= C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = x_0, \\ -kC_1 \sin kt_0 + kC_2 \cos kt_0 &= -kC_1 \sin 0 + kC_2 \cos 0 = v_0. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом того что $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, найдем $C_1 = x_0$, $kC_2 = v_0 \Rightarrow C_2 = v_0/k$. Подставив найденные значения C_1 и C_2 в общее решение (2.12), получим искомый закон свободных колебаний груза

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (2.14)$$

Полученное уравнение описывает колебательное движение (найдите его период) и по своему виду не совпадает с уравнением (2.5) гармонических колебаний. Докажем, что рассмотренные **свободные колебания являются гармоническими**, и найдем их период, частоту и амплитуду.

Для этого заметим, что для любых двух чисел C_1 и C_2 можно подобрать другие два числа $A > 0$ и α такие, что

$$\begin{aligned} C_1 &= A \sin \alpha, \\ C_2 &= A \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Действительно, разделив первое уравнение на второе, найдем, что α определяется из условия

$$\operatorname{tg} \alpha = C_1/C_2, \quad (2.16)$$

причем $0 < \alpha < \pi$, если $C_1 > 0$, и $\pi < \alpha < 2\pi$, если $C_1 < 0$. Затем, возведя обе части каждого из уравнений (2.15) в квадрат и складывая, с учетом того что $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, найдем

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \quad (2.17)$$

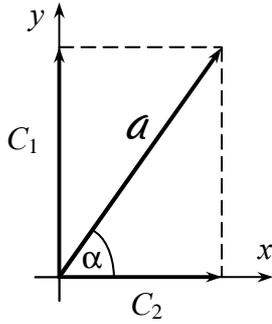


Рис. 2.7

Найти \mathbf{a} и α , удовлетворяющие системе уравнений (2.15), можно также геометрически (см. Рис. 2.7).

Отложим в координатной плоскости xu от начала координат отрезки, численно равные C_1 и C_2 , по осям соответственно x и y (в положительном направлении, если соответствующее число положительно, и наоборот, если отрицательно). На построенных таким образом отрезках построим прямоугольник (см. Рис. 2.7). Тогда его диагональ и угол, образованный этой диагональю с осью x , представят искомые \mathbf{a} и α из уравнений (2.15), так как, как видно из рисунка, C_1 и C_2 как катеты прямоугольного треугольника с острым углом α определяются уравнениями (2.15).

Заменим в (2.12) постоянные C_1 и C_2 их выражениями (2.15):

$$C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = \mathbf{a} \sin \alpha \cos kt + \mathbf{a} \cos \alpha \sin kt = \mathbf{a} \sin(kt + \alpha),$$

где \mathbf{a} и α определяются соотношениями (2.16) и (2.17). Полученный результат показывает, что тригонометрическое выражение $C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ при любых C_1 и C_2 описывает гармонические колебания с амплитудой $\mathbf{a} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Поэтому и уравнению (2.14), описывающему свободные колебания, можно придать соответствующую форму

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \sin(kt + \alpha), \quad (2.18)$$

(где $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{v_0}$), показывающую, что рассматриваемые свободные колебания являются гармоническими. Обратим внимание на то, что амплитуда этих колебаний

$$\mathbf{a} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \quad (2.19)$$

определяется начальными условиями, т.е. начальными значениями смещения x_0 и скорости v_0 . Что же касается частоты и периода свободных колебаний, то, как следует из (2.6), они определяются выражениями

$$\nu = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \tau = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad (2.20)$$

показывающими, что частота ν и период τ свободных колебаний не зависят от начальных условий (x_0 и v_0 не входят в выражения (2.20)), а полностью определяются постоянными c и m , характеризующими упругие и инерционные свойства рассматриваемой механической системы. Можно сказать, что частота и период свободных колебаний являются собственными характеристиками системы, такими же как жесткость и масса груза, не зависящими от состояния движения и от способа возбуждения колебаний. По этой причине частоту и период свободных колебаний называют **собственной частотой** и соответственно периодом, а сами свободные колебания называют **собственными**. Собственная частота имеет определенную величину даже в тех случаях, когда движение системы происходит под действием не только восстанавливающей силы и даже когда система покоится (так же как масса

точки сохраняет свою величину во всевозможных ее движениях и в покое, являясь собственной характеристикой самой точки). Например, камертон, издающий звук «Ля», будет издавать его всегда, когда он будет звучать, независимо от того, каким образом он приведен в движение, и звука другой частоты он издать не сможет, т.к. ему не позволят этого его упруго-инерционные характеристики.

Сделанные выводы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2.2. *Свободные колебания, происходящие под действием линейной восстанавливающей силы, являются гармоническими.*

Амплитуда и начальная фаза свободных колебаний зависят от начального смещения груза из положения равновесия и от его начальной скорости.

Частота и период свободных колебаний не зависят от начального положения и начальной скорости груза, а полностью определяются массой и жесткостью системы.

У п р а ж н е н и я. 1) Докажите, что если начальному моменту времени соответствует значение $t_0 \neq 0$, то закон свободных колебаний вместо (2.14) можно записать в виде

$$x = x_0 \cos k(t - t_0) + \frac{v_0}{k} \sin k(t - t_0). \quad (2.14')$$

Чему в этом случае равна амплитуда колебаний?

2) Будут ли гармоническими колебания, которые описываются уравнениями

$$C_1 \cos(kt + \alpha) + C_2 \sin(kt + \beta)$$

при произвольных постоянных C_1 , C_2 , α и β ? Как найти их амплитуду?

2.5. Свободные колебания в среде с сопротивлением. Затухающие колебания

В реальных условиях движение элементов упругих конструкций помимо восстанавливающих сил сопровождается также действием различных тормозящих факторов. Для учета их влияния на свободные колебания введем в систему, рассмотренную в предыдущем разделе, в дополнение к восстанавливающей силе еще силу \vec{R} *сопротивления* движению, направленную в сторону, противоположную движению, т.е. вектору скорости груза, и численно пропорциональную величине скорости

$$\vec{R} = -\gamma\vec{v}, \quad (2.21)$$

где γ – постоянный коэффициент, учитывающий влияние физических свойств среды, в которой происходит движение, формы и размеров груза, особенностей материала пружины и т.п. На практике он определяется при помощи опытов. Поскольку проекция силы \vec{R} сопротивления движению на ось x равна $R_x = -\gamma\dot{x}$, дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x примет вид

$$m\ddot{x} = -cx - \gamma\dot{x},$$

или после деления обеих частей на m и переноса всех членов в левую часть

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + k^2x = 0, \quad (2.22)$$

где, как и ранее, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – круговая частота собственных колебаний груза в отсутствие сопротивления, $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ – постоянная величина, имеющая размерность $\frac{\text{сила/скорость}}{\text{масса}} = \text{ускорение/скорость} = 1/\text{время}$.

Дифференциальное уравнение (2.22) является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для отыскания его общего решения в математике предлагается следующий прием. Решение ищется в виде показательной функции $x = e^{zt}$, где $e = 2,718\dots$ – основание натуральных логарифмов, а z – постоянное число, для отыскания которого следует подставить «пробную» функцию $x = e^{zt}$ в уравнение (2.22). Тогда оказывается, что функция $x = e^{zt}$ действительно является решением дифференциального уравнения (2.22) в том, и только в том случае, когда z является решением следующего уже не дифференциального, а алгебраического *характеристического* уравнения

$$z^2 + 2\beta z + k^2 = 0. \quad (2.23)$$

Это квадратное уравнение, корни которого, как известно, равны

$$z_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - k^2}, \quad z_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - k^2}. \quad (2.24)$$

Поэтому функции $x_1 = e^{z_1 t}$ и $x_2 = e^{z_2 t}$ являются решениями дифференциального уравнения (2.22), а, в силу линейности этого уравнения, любая *линейная комбинация*

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}, \quad (2.25)$$

как легко проверить ее подстановкой в (2.22), также является его решением при любых произвольных постоянных C_1 и C_2 . В курсе математики доказывается, что других решений уравнения (2.22) не существует, т.е. любое частное его решение получается из (2.25) при некоторых значениях C_1 и C_2 , а само выражение (2.25) является, таким образом, *общим решением* уравнения (2.22).

В зависимости от соотношения между β и k корни (2.24) могут оказаться действительными или мнимыми. Соответственно этому могут представиться различные по своему характеру решения уравнения (2.22), которым отвечают различные по своему характеру движения груза.

2.5.1. Движение при слабом сопротивлении. Затухающие колебания

Вначале рассмотрим случай т.н. малого сопротивления ($\beta < k$), т.к. можно ожидать, что получающееся в этом случае движение вследствие относительной малости сил сопротивления должно сохранять некоторые характерные черты свободных колебаний в отсутствие сопротивления ($\beta = 0$), изученных в разделе 2.4.

Поскольку $\beta < k$, корни (2.24) характеристического уравнения (2.23) являются мнимыми. Введем обозначение $k_1 = \sqrt{k^2 - \beta^2}$. Тогда эти корни можно записать в виде

$$z_1 = -\beta + k_1 i, \quad z_2 = -\beta - k_1 i$$

($i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица), а соответствующие решения дифференциального уравнения (2.22) выразятся показательными функциями с мнимыми показателями. Как известно из математики,

такие функции могут быть приведены к тригонометрическим при помощи замечательной **формулы Эйлера** $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, и общему решению (2.25) можно придать следующий вид

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} = C_1 e^{-\beta t + ik_1 t} + C_2 e^{-\beta t - ik_1 t} = e^{-\beta t} (C_1 e^{ik_1 t} + C_2 e^{-ik_1 t}) = \\ &= e^{-\beta t} [C_1 (\cos k_1 t + i \sin k_1 t) + C_2 (\cos k_1 t - i \sin k_1 t)] = \\ &= e^{-\beta t} [(C_1 + C_2) \cos k_1 t + i(C_1 - C_2) \sin k_1 t] = e^{-\beta t} (\tilde{C}_1 \cos k_1 t + \tilde{C}_2 \sin k_1 t), \end{aligned}$$

где обозначено $\tilde{C}_1 = C_1 + C_2$, $\tilde{C}_2 = i(C_1 - C_2)$. Поскольку C_1 и C_2 являются совершенно произвольными, их можно подобрать так, чтобы \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 приняли любые наперед заданные значения. Это позволяет переобозначить эти постоянные и представить общее решение уравнения (2.22) в виде

$$x = e^{-\beta t} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \quad (2.25')$$

Рекомендуем читателю проверить подстановкой, что выражение (2.25') действительно является решением уравнения (2.22) при любых постоянных C_1 и C_2 .

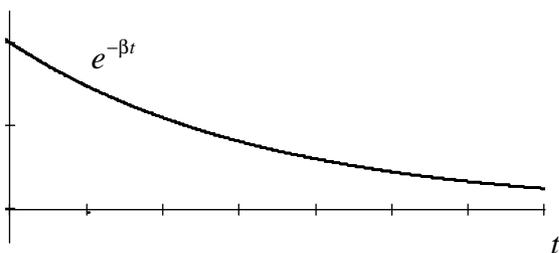


Рис. 2.8

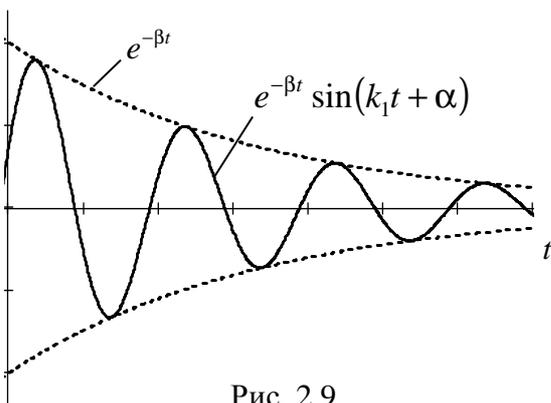


Рис. 2.9

Преобразуя тригонометрическое выражение в (2.25') при помощи равенств (2.15) по аналогии с (2.18) представим это решение в эквивалентном виде

$$x = A e^{-\beta t} \sin(k_1 t + \alpha) \quad (2.25'')$$

Это уравнение описывает движение, которое с одной стороны **сохраняет признаки колебательного движения**, обладая определенной повторяемостью, что отражается «гармоническим» множителем $\sin(k_1 t + \alpha)$ в (2.25''). С другой стороны оно **существенно отличается от колебаний** в строгом смысле (см. определение 2.1) вследствие постоянного ослабления интенсивности движения, что отражается переменным множителем $e^{-\beta t}$, являющимся монотонно и неограниченно убывающей функцией времени (см. Рис. 2.8). Можно сказать, что движение, происходящее по закону (2.25''), является **колебаниями с переменной убывающей амплитудой**. График зависимости координаты x от времени при таком движении имеет характерный вид (см.

рис. 2.9), показывающий, что точка многократно проходит через положение равновесия $x = 0$, двигаясь попеременно в противоположных направлениях, но ее смещения от положения равновесия с течением времени неограниченно уменьшаются и интенсивность движения затухает. Поэтому движение, описываемое уравнением (2.25''), называют **затухающими гармоническими колебаниями**.

Хотя рассматриваемое движение не является строго периодическим, уравнение (2.25'') показывает, что моменты времени, в которые груз проходит через положение равновесия, наступают через один и тот же постоянный промежуток времени, что является харак-

терной чертой чисто периодического движения. Это позволяет ввести следующее определение.

Определение 2.10. *Условным периодом затухающих гармонических колебаний называется промежуток времени, разделяющий моменты, в которые груз находится в положении равновесия, двигаясь в одном и том же направлении.*

Формально условный период можно определить как наименьшую постоянную величину $\tau_1 \neq 0$, удовлетворяющую соотношениям

$$x(t) = 0 \Rightarrow x(t + \tau_1) = 0, \text{ причем } \dot{x}(t) \text{ и } \dot{x}(t + \tau_1) \text{ одного знака} \quad (2.26)$$

Иначе говоря, *условную периодичность* можно назвать периодичностью *положения равновесия*, в то время как *строгая периодичность* имеет место согласно (2.1) для *всех положений* груза.

Как следует из (2.26), *условный период* затухающих колебаний равен величине периода их «тригонометрической составляющей» $\sin(k_1 t + \alpha)$, круговая частота которой определена выше, $k_1 = \sqrt{k^2 - \beta^2}$. Эту частоту, а также и частоту $\nu_1 = k_1/2\pi$ также называют условными. Таким образом, *условные* частота и период затухающих колебаний равны соответственно

$$\nu_1 = \frac{k_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k^2 - \beta^2}, \quad \tau_1 = \frac{1}{\nu_1} = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \beta^2}}. \quad (2.27)$$

Условная периодичность рассматриваемых затухающих колебаний проявляется еще в одном обстоятельстве.

Определение 2.11. *Амплитудным положением затухающих гармонических колебаний называется такое положение точки, в котором ее скорость равна нулю.*

Последовательные амплитудные положения, находящиеся по одну сторону от положения равновесия, при (2.25'') достигаются точкой через одинаковые промежутки времени, равные условному периоду τ_1 .

У п р а ж н е н и я. 1) Докажите утверждения, сформулированные в (2.26) и в предыдущем абзаце, т.е. что если $x(t) = 0$, то и $x(t + \tau_1) = 0$, причем $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t + \tau_1)$ одного знака, а также, если $\dot{x}(t) = 0$, то и $\dot{x}(t + \tau_1) = 0$, причем $x(t)$ и $x(t + \tau_1)$ одного знака.

2) Докажите предыдущие утверждения для более общего класса движений, происходящих по законам

$$x = Ae^{-\beta t} \tilde{x}(t),$$

где $\tilde{x}(t)$ – произвольная периодическая функция времени, $\tilde{x}(t + \tau) = \tilde{x}(t)$, в положении равновесия $\tilde{x}(t) = 0$.

Как показывают соотношения (2.27), $k_1 < k$, $\nu_1 < \nu$, $\tau_1 > \tau$, что означает, что *в условиях сопротивления свободные колебания замедляются* по сравнению с идеальным случаем полного отсутствия сопротивления. В то же время, как и при отсутствии сопротивления, *частота k_1 и период τ_1 этих колебаний остаются постоянными* и определяются постоянными характеристиками системы. Например, звук камертона с течением времени медленно ослабевает, но не меняет своего тона.

Наряду с условной периодичностью, отражающей *колебательные свойства* движения, характерным обстоятельством, обусловленным влиянием сопротивления, является ослабление его интенсивности или *затухание*.

Для количественной оценки быстроты затухания рассмотрим два положения, зани-

маемые точкой в моменты соответственно t и $t + \tau_1$, где τ_1 – условный период, определяемый согласно (2.27) (это могут быть, например, два последовательных амплитудных положения «одного знака»), и вычислим отношение соответствующих координат, равных смещениям точки от положения равновесия,

$$\frac{x(t)}{x(t + \tau_1)} = \frac{Ae^{-\beta t} \sin(k_1 t + \alpha)}{Ae^{-\beta(t + \tau_1)} \sin[k_1(t + \tau_1) + \alpha]} = e^{\beta \tau_1}.$$

Как видим, оно оказалось постоянным, т.е. не зависящим от времени t . Это значит, что смещения точки от положения равновесия $x(t)$, $x(t + \tau_1)$, $x(t + 2\tau_1)$, ... в моменты времени, наступающие через одинаковые промежутки времени, равные периоду τ_1 , в частности амплитудные положения, образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой $e^{\beta \tau_1}$ может служить характеристикой быстроты затухания колебаний. Принято в качестве такой характеристики использовать другую величину.

Определение 2.12. *Логарифмическим декрементом затухающих колебаний называется натуральный логарифм отношения смещения точки в некоторый момент к ее смещению через период.*

Обозначая логарифмический декремент через δ , можем записать

$$\delta = \ln \left[\frac{x(t)}{x(t + \tau_1)} \right] = \beta \tau_1. \quad (2.28)$$

Для выяснения физического смысла величины δ представим себе такие затухающие колебания, в которых для уменьшения амплитуды в e раз (грубо говоря, в три раза, $e = 2,718...$ – основание натуральных логарифмов) проходит n полных циклов суммарной продолжительностью $n\tau_1$. Тогда, как следует из (2.28),

$$\ln \left[\frac{x(t)}{x(t + n\tau_1)} \right] = \ln \left[\frac{x(t)}{x(t + \tau_1)} \right]^n = n \ln \left[\frac{x(t)}{x(t + \tau_1)} \right] = n\delta = n\beta \tau_1 = \ln e = 1,$$

откуда $\delta = 1/n$, т.е. логарифмический декремент равен обратной величине числа полных колебаний, после которых амплитуда будет составлять примерно 1/3 от начальной.

Как отмечалось выше, демпфирование колебаний в реальных конструкциях обусловлено комплексным действием многочисленных факторов как «внешнего», так и «внутреннего» происхождения, что делает практически невозможным точное теоретическое определение коэффициентов γ и β в уравнениях (2.21) и (2.22). Практическое значение декремента затухающих колебаний состоит в том, что он, как и период τ_1 , легко определяется по опытным виброграммам, подобным Рис. 2.9, которые строятся по результатам наблюдений, после чего при помощи соотношения (2.28) находится коэффициент β . Найденное значение затем может быть использовано при изучении различных движений груза, в частности вынужденных колебаний (см. раздел 2.7). Характерные значения декрементов для строительных конструкций приведены в таблице [12]

Материал	Сталь прокатная	Дерево	Кирпичная кладка	Железобетон
δ	0,03 – 0,08	0,09 – 0,15	0,12 – 0,24	0,15 – 0,30

Хороший камертон имеет декремент порядка 0,0001 [8].

У п р а ж н е н и я. 1) За сколько времени звук камертона, настроенного на ноту «Ля» первой октавы, станет слабее в три раза?

2) Изготовьте маятник, состоящий из небольшого груза, привязанного к тонкой нити длиной порядка 1 м. Привяжите свободный конец нити к чему-нибудь неподвижному, например к твердому стержню, который положите горизонтально, оперев его, например на спинки рядом стоящих стульев. Сообщите грузу небольшое движение, которое можно будет считать горизонтальным (точку подвеса маятника желательно зафиксировать). Пользуясь ученической линейкой и секундной стрелкой, найдите приближенные значения периода и декремента происходящих колебаний.

Проведенное в настоящем разделе исследование свободных колебаний в присутствии сопротивления показывает, что **основным результатом** влияния сопротивления являются **два эффекта**. «**Амплитудный**» эффект проявляется в затухании и характеризуется декрементом δ . «**Частотный**» эффект проявляется в замедлении, которое может быть охарактеризовано отношением $v/v_1 = k/k_1$ частоты свободных незатухающих колебаний к частоте демпфированных (заторможенных) колебаний. Связь между этими двумя эффектами может быть выражена аналитически. Из определения условной частоты $k_1 = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ и логарифмического декремента (2.28) следует

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_1^2}, \quad \delta = \beta\tau_1 = \beta \frac{2\pi}{k_1},$$

откуда, исключая β , получим

$$\frac{\delta}{2\pi} = \sqrt{\left(\frac{k}{k_1}\right)^2 - 1} \Rightarrow \frac{k}{k_1} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}}, \quad \frac{\tau_1}{\tau} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}}. \quad (2.29)$$

Изобразив эту связь графически (см. Рис. 2.10), обнаружим важное обстоятельство.

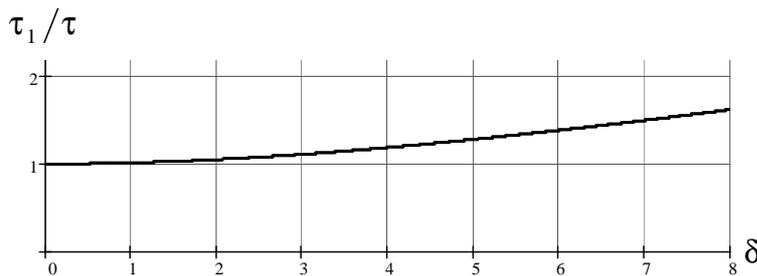


Рис. 2.10

Из рисунка видно, что влияние сопротивления наиболее сильно проявляется в затухании, тогда как период вследствие сопротивления увеличивается незначительно. Например, уже при $\delta=1$ затухание будет значительным, т.к. всего за один цикл амплитуда уменьшится почти в 3 раза. В то же время относительное увеличение периода, как показывает расчет по формуле

(2.29), составит в этом случае $\tau_1/\tau = 1,013$, т.е. немногим более 1%.

Установленные в настоящем разделе результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.3. Свободные колебания, происходящие под действием линейной восстанавливающей силы и слабой силы сопротивления движению, пропорциональной скорости, являются затухающими гармоническими колебаниями.

Смещения точки от равновесного положения с течением времени неограниченно

уменьшаются независимо от начальных условий.

Частота и период затухающих колебаний не зависят от начальных условий и остаются постоянными.

2.5.2. Движение при сильном сопротивлении. Аперриодическое движение

Движение, рассмотренное в предыдущем разделе, происходило при относительно малой силе сопротивления, которой соответствовал коэффициент $\beta = \frac{\gamma}{2m} < k$. При сильном сопротивлении, когда $\beta > k$, характер движения качественно изменяется. Теперь корни (2.24) характеристического уравнения (2.23) становятся действительными, причем меньшими нуля, т.к. больший из них $z_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - k^2} < -\beta + \sqrt{\beta^2} = 0$. Общему решению (2.25) дифференциального уравнения (2.22) движения груза можно придать вид

$$x = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} = e^{z_1 t} [C_1 + C_2 e^{(z_2 - z_1)t}] = e^{z_1 t} (C_1 + C_2 e^{-2\sqrt{\beta^2 - k^2} t}), \quad (2.30)$$

где обе показательные функции являются убывающими. Выражение в скобках представляет собой монотонную функцию времени и может изменить знак (обратиться в нуль) не более одного раза. Во всяком случае оно остается ограниченным. Внешний множитель $e^{z_1 t}$ с течением времени монотонно неограниченно убывает, никогда не обращаясь в нуль (см. рис. 2.9). Таким образом, груз может пересечь положение равновесия не более одного раза, а координата x , начиная с некоторого момента, становится монотонной функцией времени, т.е. движение больше не имеет колебательного характера.

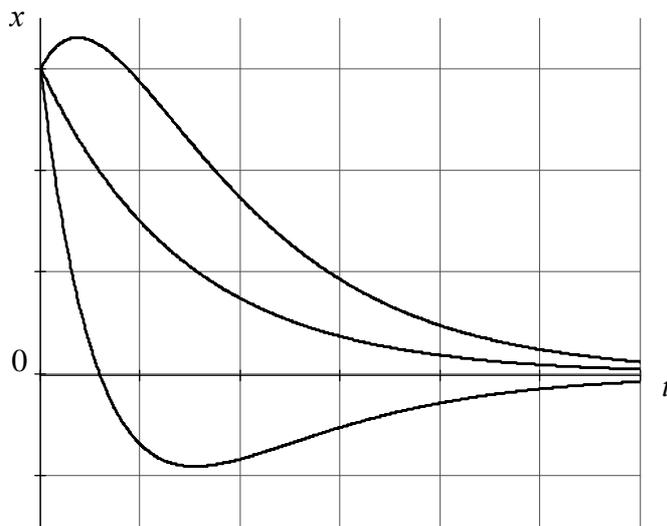


Рис. 2.11

Такого движения называют **аперриодическим**. Чтобы нагляднее представить себе аперриодическое движение, а также разницу между этим движением и колебаниями, можно сравнить движение маятника в воздухе и маятника, погруженного в бочку с медом.

Кривые, изображающие характерные движения в этом случае, показаны на рис. 2.11. В каждом конкретном случае вид кривой и соответственно движение груза определяется значениями постоянных C_1 и C_2 , которые определяются начальным положением и начальной скоростью груза.

У п р а ж н е н и я. 1) Каким условиям должны удовлетворять постоянные C_1 и C_2 в (2.30), чтобы соответствующая кривая на рис.2.11 пересекла ось времени?

2) Каким условиям должны удовлетворять для этого начальное смещение груза от равновесного положения и его начальная скорость?

В особом случае $\beta = k$ характеристическое уравнение (2.23) имеет согласно (2.24) один двукратный действительный корень, равный $-\beta$. В этом случае (2.25) уже не является общим решением дифференциального уравнения (2.22). Как легко проверить подстановкой, выражение

$$x = e^{-\beta t}(C_1 + C_2 t), \quad (2.31)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, является решением уравнения (2.22) при $\beta = k$. В курсах математики доказывается, что (2.31) представляет собой **общее решение** этого уравнения, т.е. **любое частное решение** получается из (2.31) при конкретном выборе C_1 и C_2 . Движение, описываемое уравнением (2.31), качественно не отличается от ранее рассмотренного движения (2.30), т.е. является **апериодическим**. В его отношении остается справедливым все сказанное выше о движении (2.30), в том числе и Рис. 2.11.

В инженерной практике апериодические движения происходят, как правило, когда используются демпферы – специальные устройства для эффективного подавления колебаний. Их действие аналогично действию дверных «доводок», используемых в последние годы в дверях различных помещений и даже в мебели для предотвращения ударов при закрывании.

2.6. Движение под действием сил, зависящих от времени. Вынужденные колебания

Большой интерес представляет изучение поведения упругих конструкций под действием различного рода переменных нагрузок. При этом обнаруживаются интересные и важные в практическом отношении явления, которые могут быть описаны на примере рассматриваемой одномассовой модели.

Введем в схему, изображенную на рис. 2.6, дополнительную силу $\bar{Q} = \bar{Q}(t)$, зависящую от времени и направленную вдоль оси x . Эту силу будем называть **возмущающей**. Тогда дифференциальное уравнение движения груза при отсутствии сопротивления в проекции на ось x будет иметь вид

$$m\ddot{x} + cx = Q(t), \quad (2.32)$$

где $Q(t) = Q_x(t)$ – проекция возмущающей силы на ось x . Разделив обе части на m и обозначив $Q(t)/m = f(t)$, приведем это уравнение к виду

$$\ddot{x} + k^2 x = f(t), \quad (2.33)$$

где k – собственная круговая частота системы.

Различным по характеру возмущающим силам, т.е. различным функциям $f(t)$, отвечают различные движения груза, которые, таким образом, уже не определяются полностью собственными характеристиками системы, а отражают ее реакцию на возмущающую силу. Такие движения называют **вынужденными**. Для их определения следует решить дифференциальное уравнение (2.33), т.е. найти такую функцию $x = x(t)$, которая при подстановке в левую часть (2.33) сделает ее равной $f(t)$.

Уравнение (2.33) является **линейным неоднородным дифференциальным уравнением** второго порядка. Соответствующее **однородное** уравнение, т.е. уравнение без правой части, получается из неоднородного при $f(t) \equiv 0$. Оно уже рассматривалось при изучении свободных колебаний в разделе 2.4 (уравнение (2.11)).

Из курса математики известно, что **общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения**. Другими словами, если $x_0 = x_0(t)$ – общее решение уравнения (2.11), а $x_1 = x_1(t)$ – какое-либо **частное** решение уравнения (2.33), то **общее** решение уравнения (2.33) равно $x = x_0 + x_1$. При этом не важно как именно найдено частное решение x_1 и какое именно (из бесконечного множества решений). Во многих практически важных случа-

ях вид функции $x_1 = x_1(t)$ можно угадать или подобрать его, исходя из практических соображений с учетом вида правой части $f(t)$. Подобранный «пробный» решение следует затем проверить прямой подстановкой в решаемое уравнение.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

2.6.1. Постоянная возмущающая сила

В этом случае $Q(t) = Q = \text{const.} \Rightarrow f(t) = Q/m = h = \text{const.}$ Уравнение (2.33) приобретает вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h \quad (2.34)$$

и, как легко проверить подстановкой, имеет частное решение

$$x_1 = h/k^2 = \text{const.} \quad (2.35)$$

Всякому частному решению дифференциального уравнения движения материальной точки отвечает конкретное движение этой точки. Решению (2.35) отвечает **состояние покоя** в положении, координата которого равна

$$x_1 = h/k^2 = \frac{Q/m}{c/m} = \frac{Q}{c} = \Delta -$$

– деформации пружины под действием постоянной силы, равной Q . Это положение является, таким образом, **положением равновесия** груза.

Поскольку общее решение однородного уравнения (2.11) известно (см. (2.12)), общее решение неоднородного уравнения (2.34) может быть записано в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \Delta = A \sin(kt + \alpha) + \Delta, \quad (2.36)$$

показывающем, что **движение груза в рассматриваемом случае является гармоническими колебаниями, происходящими с частотой $\nu = k/2\pi$, равной частоте собственных колебаний при отсутствии силы Q .**

Подытоживая сказанное, приходим к выводу: **единственным результатом действия постоянной силы на колеблющийся груз является смещение положения равновесия на расстояние $\Delta = Q/c$ в направлении этой силы.**

З а м е ч а н и е. Сформулированный вывод относится только к **поведению груза**. Если интересоваться, например, реакцией пружины, то при колебаниях около «ненапряженного» положения равновесия $x = 0$ она имеет максимальные по модулю значения, равные cA , где A – амплитуда колебаний. При дополнительном действии постоянной силы Q пружина будет испытывать действие силы величиной $Q + cA$, на которую и следует ее рассчитывать.

2.6.2. Внезапно приложенная сила

В этом разделе ищется частное решение уравнений (2.32,33), описывающее поведение груза, находящегося в покое в положении равновесия до некоторого момента $t = t_0$, в который к нему приложили постоянную силу Q . Правая часть уравнения (2.32) как функция времени выглядит следующим образом

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ Q & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

В математике для описания подобных поведений используют функцию $\sigma(t)$, определяемую соотношениями

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Ее график имеет простой вид (см. Рис. 2.12, а).

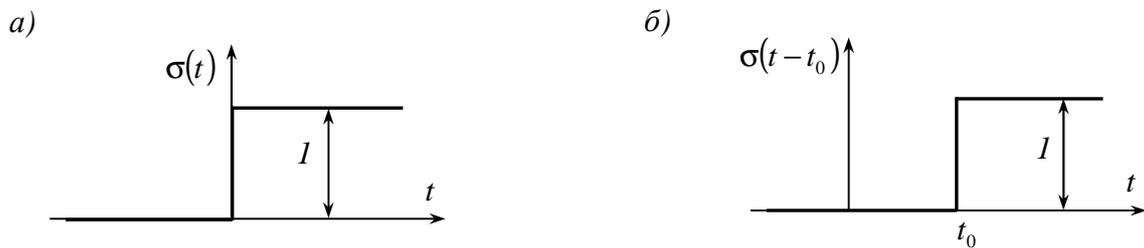


Рис. 2.12

С использованием этой функции внезапно приложенную в момент $t = t_0$ нагрузку можно выразить равенством $Q(t) = Q \cdot \sigma(t - t_0)$. График функции $\sigma(t - t_0)$ получается из графика $\sigma(t)$ сдвигом по оси t на t_0 (см. Рис. 2.12, б).

Дифференциальное уравнение движения груза при такой возмущающей силе имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h \cdot \sigma(t - t_0), \quad h = Q/m. \quad (2.37)$$

Примем вначале $t_0 = 0$. Тогда при $t < 0$ груз остается в покое и $x = 0$. Для описания движения при $t \geq 0$ воспользуемся результатами раздела 2.6.1. Согласно (2.36) искомое решение имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \Delta, \quad (2.38)$$

где $\Delta = Q/c$ – статическая деформация пружины под действием постоянной силы Q , а постоянные C_1 и C_2 определяются начальными условиями, которые в соответствии с принятой постановкой задачи выражаются равенствами

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2.39)$$

Подставляя (2.38) в (2.39), приходим к уравнениям

$$x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \Delta = C_1 + \Delta = 0, \quad \dot{x}(0) = -kC_1 \sin 0 + kC_2 \cos 0 = kC_2 = 0,$$

из которых определим постоянные $C_1 = -\Delta$, $C_2 = 0$. Подставляя их в (2.38), найдем

$$x = -\Delta \cos kt + 0 \cdot \sin kt + \Delta = \Delta(1 - \cos kt) = \frac{Q}{c} (1 - \cos kt).$$

Случай, когда $t_0 \neq 0$, приводится к только что рассмотренному формальной заменой переменной $t' = t - t_0$, означающей сдвиг начала отсчета времени.

В окончательном виде искомое частное решение, выражающее *реакцию упруго закрепленного груза на действие внезапно приложенной силы*, записывается в виде

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \frac{Q}{c} [1 - \cos k(t - t_0)] & \text{при } t \geq t_0. \end{cases} \quad (2.40)$$

У п р а ж н е н и е. Проверьте правильность найденного решения подстановкой функции (2.40) в дифференциальное уравнение (2.37) и в начальные условия (2.39), где вместо нуля следует взять t_0 .

З а м е ч а н и е. Через π/k секунд после начала действия внезапно приложенной силы, равной Q , смещение $x(t)$, равное деформации пружины, составит, согласно (2.40), $2(Q/c) = 2\Delta$, т.е. величину, *вдвое превосходящую* деформацию, вызванную такой же силой, приложенной «статически», т.е. медленно настолько, что груз практически не разгоняется, а медленно переходит из начального положения равновесия $x = 0$ в новое $x = \Delta = Q/c$. Это следует иметь в виду при расчете напряжений в элементах упругих конструкций, предназначенных для «статической» работы. Прежде чем конструкция придет в расчетное эксплуатационное состояние, в процессе нагружения при монтаже, установке оборудования и т.п. могут возникнуть колебания, приводящие к двукратным перегрузкам.

2.6.3. Действие кратковременного импульса

Пусть возмущающая сила, численно равная Q , прикладывается к грузу в момент $t = t_0$ и прекращает действовать в момент $t = t_1$ (см. Рис 2.13).

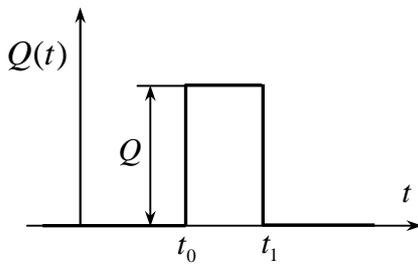


Рис. 2.13

Правая часть уравнения (2.32) может быть представлена в виде $Q_x(t) = Q \cdot [\sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)]$, а дифференциальное уравнение (2.33) движения груза будет иметь вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h \cdot [\sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)], \quad h = Q/m. \quad (2.41)$$

Частное решение этого уравнения можно построить, используя решение (2.40), полученное в предыдущем разделе.

Идея этого построения основана на *принципе суперпозиции*, отражающем *линейность* рассматриваемых *дифференциальных уравнений*, обусловленную *линейностью восстанавливающей силы* реакции упругой пружины (см. замечание в разд. 2.3). Этот принцип заключается в следующем.

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – решения линейных дифференциальных уравнений с одинаковой левой частью, например, как в (2.33), отвечающие правым частям соответственно $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$. Тогда решением уравнения с той же левой частью и правой частью, равной $f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + C_n f_n(t)$, будет функция $x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$. Доказательство этого факта заключается в подстановке $x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$ в левую часть дифференциального уравнения.

Заметив, что правая часть (2.41) представляет собой разность двух функций: $f_1(t) = h \cdot \sigma(t - t_0)$ и $f_2(t) = h \cdot \sigma(t - t_1)$, решение $x(t)$ уравнения (2.41) найдем, *воспользовавшись* его

линейностью, в виде разности $x_1(t) - x_2(t)$, где $x_1(t)$ – решение уравнения (2.37) с правой частью, равной $f_1(t)$ (это решение уже найдено и представляется соотношением (2.40)), а $x_2(t)$ – решение уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = h \cdot \sigma(t - t_1), \quad h = Q/m, \quad (2.37')$$

которое получается из (2.37) заменой правой части $f_1(t)$ на $f_2(t)$. Решение этого уравнения выражается соотношением (2.40), в котором t_0 следует заменить на t_1 :

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1, \\ \frac{Q}{c} [1 - \cos k(t - t_1)] & \text{при } t \geq t_1. \end{cases} \quad (2.40')$$

Поскольку при $t < t_1$ $x_2(t) = 0$, до момента t_1 движение описывается функцией (2.40). Начиная с момента t_1 оно будет определяться разностью (2.40) и (2.40')

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{Q}{c} [1 - \cos k(t - t_0)] - \frac{Q}{c} [1 - \cos k(t - t_1)] = \frac{Q}{c} [\cos k(t - t_1) - \cos k(t - t_0)] = \\ &= \frac{Q(t_1 - t_0)}{c} \frac{\cos k(t - t_1) - \cos k(t - t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{Q(t_1 - t_0)}{c} \left[-\frac{\cos k(t - t_1) - \cos k(t - t_0)}{(t - t_1) - (t - t_0)} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим $S = Q(t_1 - t_0)$ – импульс силы Q за время от t_0 до t_1 . Введем также обозначения $\theta_0 = t - t_0$, $\theta_1 = t - t_1$. Выражение в квадратных скобках принимает вид

$$-\frac{\cos k\theta_1 - \cos k\theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$$

который при близких значениях θ_0 и θ_1 , т.е. при малой продолжительности $t_1 - t_0$ действия силы, представляет взятую со знаком « \leftarrow » производную от $\cos k\theta$ по θ , вычисленную при $\theta = \theta_0$, т.е. в момент $t = t_0$. Как известно, эта производная равна $-k \sin k\theta$, что позволяет записать решение дифференциального уравнения (2.41), описывающее *движение груза, вызванное действием кратковременного ($t_1 \approx t_0$) импульса, т.е. удара*, произведенного в момент $t = t_0$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \frac{S}{c} \cdot k \sin k(t - t_0) & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Поскольку $c/m = k^2$, эту функцию можно представить в виде $\frac{S}{mk} \sin k(t - t_0)$.

2.6.4. Произвольная возмущающая сила. Интеграл Дюамеля

Для того чтобы найти закон движения груза при произвольном законе $Q(t)$ изменения возмущающей силы, применим, как и в предыдущем разделе, принцип суперпозиции в сочетании со следующей простой идеей. Любую функцию, например $f(t)$, график которой изображен на Рис. 2.14, а,

можно представить как сумму двух функций, определенных следующим образом. Разобьем область определения функции $f(t)$ (в рассматриваемом примере – бесконечный интервал $-\infty < t < \infty$) на две части: $-\infty < t < t_1$ и $t_1 \leq t < \infty$. Функцию $f_1(t)$ примем равной $f(t)$ при $-\infty < t < t_1$ и равной нулю при $t_1 \leq t < \infty$ (см. Рис. 2.14, б). Функция $f_2(t)$, наоборот, равна нулю в первом интервале и совпадает с $f(t)$ при всех остальных значениях t (см. Рис. 2.14, в). Тогда, как легко убедиться, $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

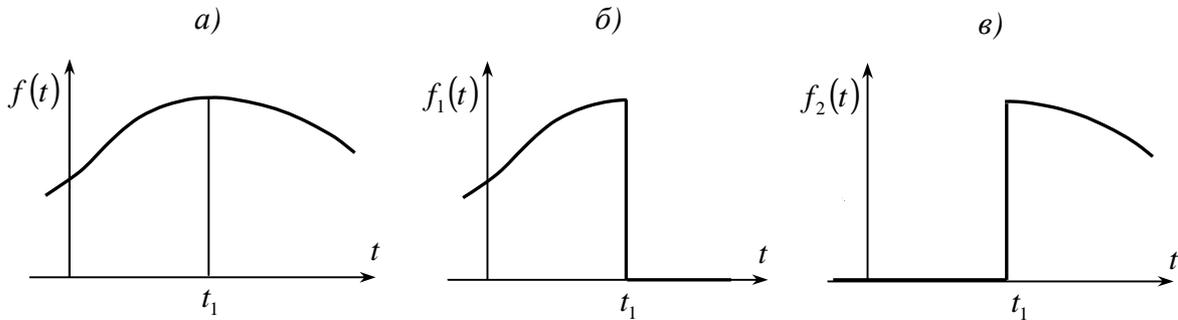


Рис. 2.14

Указанное разложение можно обобщить на произвольное число слагаемых, разбивая область определения $f(t)$ на соответствующее число непересекающихся частей и определяя каждое слагаемое как равное $f(t)$ в одной части и нулю – в остальных.

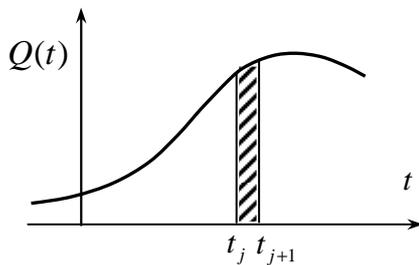


Рис. 2.15

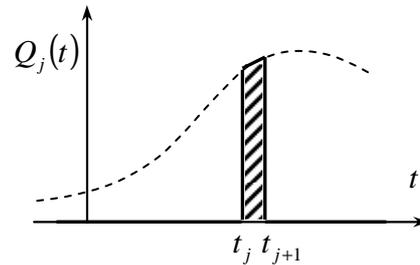


Рис. 2.16

Разложим подобным образом произвольно изменяющуюся возмущающую силу $Q(t)$ (см. рис. 2.15), разбив временную ось на короткие интервалы $t_j \leq t < t_{j+1}$ и определив функции-слагаемые следующими равенствами

$$Q_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_j \text{ и при } t \geq t_{j+1}, \\ Q(t) & \text{при } t_j \leq t < t_{j+1}. \end{cases}$$

График такой функции показан на Рис. 2.16 сплошной линией. Тогда

$$Q(t) = Q_0(t) + Q_1(t) + Q_2(t) + \dots$$

Это разложение означает, что *любую непрерывно действующую силу можно рассматривать как сумму последовательных кратковременных импульсов*. В соответствии с принципом суперпозиции *результат действия такой силы можно найти, суммируя результаты действия каждого из этих импульсов*.

Другими словами, если будет найдена каждая функция $x_j(t)$, описывающая движение груза, вызванное силой $Q_j(t)$, то искомый закон движения выразится суммой

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + \dots$$

Используя результаты раздела 2.6.3 (формула (2.42)), можем записать

$$x_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_j, \\ \frac{Q(t_j) \cdot (t_{j+1} - t_j)}{c} \cdot k \sin k(t - t_j) & \text{при } t \geq t_{j+1}. \end{cases}$$

Строго говоря, это равенство приближенное, т.к. при его выводе отношение конечных приращений было заменено производной, но оно будет тем точнее, чем меньше разность $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, т.е. чем короче будет длительность отдельного j -го импульса. Тогда

$$x(t) = \frac{Q(t_0) \cdot (t_1 - t_0)}{c} \cdot k \sin k(t - t_0) + \frac{Q(t_1) \cdot (t_2 - t_1)}{c} \cdot k \sin k(t - t_1) + \frac{Q(t_2) \cdot (t_3 - t_2)}{c} \cdot k \sin k(t - t_2) + \dots$$

Чтобы получить точный результат, следует в этом выражении перейти к пределу, когда все $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ неограниченно убывают, а количество слагаемых соответственно неограниченно возрастает. При этом сумма перейдет в интеграл, который и представит закон движения груза при произвольном законе изменения возмущающей силы

$$x(t) = \frac{k}{c} \int_{t_0}^t Q(\eta) \sin k(t - \eta) d\eta = \frac{1}{mk} \int_{t_0}^t Q(\eta) \sin k(t - \eta) d\eta. \quad (2.43)$$

Этот интеграл, который называют *интегралом Дюамеля*, выражает частное решение дифференциального уравнения (2.32) движения груза, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0.$$

Чтобы найти решение при других начальных условиях, следует в соответствии с этими условиями подобрать постоянные C_1 и C_2 в общем решении

$$x(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{1}{mk} \int_{t_0}^t Q(\eta) \sin k(t - \eta) d\eta \quad (2.44)$$

У п р а ж н е н и е. Поскольку при выводе соотношения (2.43) не обосновывалась законность предельного перехода, рекомендуем проверить правильность найденного решения подстановкой его в уравнение (2.32).

2.6.5. Вынужденные колебания под действием гармонической возмущающей силы. Резонанс

Для практики большое значение имеют те случаи, когда возмущающая сила является периодической функцией времени, в частности изменяется по гармоническому закону.

Пусть $Q(t) = H \sin pt$, где $p = \text{const.}$ – круговая частота изменения возмущающей

силы, $H = \text{const.}$ – максимальное значение переменной возмущающей силы, которое также называют **амплитудным значением** или просто **амплитудой возмущающей силы**.

Если бы на груз действовала постоянная сила, равная H , он находился бы в равновесии в положении, при котором пружина деформирована на величину $\Delta_{\text{СТ}}$, которая удовлетворяет известному условию равновесия (уравнению проекций на ось x)

$$\sum F_{kx} = H - c \cdot \Delta_{\text{СТ}} = 0,$$

откуда $\Delta_{\text{СТ}} = H/c$. Величину $\Delta_{\text{СТ}}$ называют **статической деформацией** пружины под действием силы H .

З а м е ч а н и е. Как установлено в разделе 2.6.1, под действием постоянной силы груз может вести себя по-разному в зависимости от начальных условий (см. (2.36)). Среди множества его возможных движений одно, а именно, $x = \Delta_{\text{СТ}} = \text{const.}$, является статическим, т.е. **состоянием покоя**, откуда и происходит термин «**статическая деформация**».

Дифференциальное уравнение (2.33) движения груза в рассматриваемом случае имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (2.45)$$

где обозначено $h = H/m$.

Можно найти частное решение этого уравнения, воспользовавшись интегральной формой решения (2.43), но проще это сделать, подобрав подходящую функцию, исходя из следующих соображений. Вполне **естественно ожидать**, что под действием периодически изменяющейся возмущающей силы упругая конструкция будет совершать **колебательное движение**. **Разумно также предположить**, что характер этого движения будет отражать характер изменения возмущающей силы, в частности его **частота будет совпадать с частотой возмущающей силы**. Поэтому первое, что приходит на ум, – это попытаться найти решение уравнения (2.45) в виде функции $x_1 = D \sin pt$, где D – пока неизвестная постоянная величина. В математике это называется «искать решение в виде, подобном правой части». Подставив «пробную» функцию $x_1 = D \sin pt$ в (2.45), с учетом того что $\ddot{x}_1 = -p^2 D \sin pt$, найдем

$$-p^2 D \sin pt + k^2 D \sin pt = h \sin pt \Rightarrow (k^2 - p^2) D \sin pt = h \sin pt.$$

Для того чтобы это равенство выполнялось при любом t , т.е., чтобы $x_1 = D \sin pt$ действительно было решением (2.45), должно выполняться равенство $(k^2 - p^2) D = h$, откуда

да $D = \frac{h}{k^2 - p^2}$. Таким образом, мы прямой подстановкой убедились, что функция

$x_1 = D \sin pt$ является решением уравнения (2.45) только при определенном значении D . Это значение можно представить в наглядном виде, удобном для исследования,

$$D = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{h/k^2}{1 - (p/k)^2} = \frac{(H/m)/(c/m)}{1 - (p/k)^2} = \frac{H/c}{1 - (p/k)^2} = \frac{\Delta_{\text{СТ}}}{1 - (p/k)^2},$$

где $\Delta_{\text{СТ}} = H/c$ – определенная выше статическая деформация. Тогда найденное частное решение запишется в виде

$$x = \frac{\Delta_{\text{СТ}}}{1 - (p/k)^2} \sin pt \quad (2.46)$$

Это решение описывает колебательное движение, которое называют вынужденными колебаниями.

Определение 2.13. *Вынужденными колебаниями называются колебания, которые вызываются периодической возмущающей силой и имеют период, равный периоду этой силы.*

Движение (2.46) как соответствующее **частному** решению уравнения (2.45) будет происходить лишь при определенных начальных условиях. В общем случае закон движения следует искать в виде суммы

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{\Delta_{\text{СТ}}}{1 - (p/k)^2} \sin pt, \quad (2.47)$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются в соответствии с начальными условиями. Здесь первые два слагаемых описывают гармонические колебания, происходящие *с собственной частотой* k . Третье слагаемое описывает вынужденные колебания, происходящие с частотой p вынуждающей силы.

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 2.4. *Под действием гармонической возмущающей силы движение груза является наложением (суперпозицией) двух гармонических колебаний.*

Одно из них происходит с частотой собственных колебаний; его амплитуда и начальная фаза зависят от начальных условий.

Второе происходит с частотой возмущающей силы; его амплитуда не зависит от начальных условий, а определяется амплитудой возмущающей силы и отношением частот вынужденных и собственных колебаний.

Как будет показано позднее, в реальных движениях первая, «собственная» составляющая движения оказывается затухающей вследствие разного рода сопротивлений. Поэтому с течением времени главное значение в (2.47) приобретает последнее слагаемое. Это значит, что независимо от начальных условий устанавливается движение, представляющее собой вынужденные колебания (2.46).

Главной особенностью вынужденных колебаний является то обстоятельство, что их амплитуда не определяется одной лишь амплитудой возмущающей силы и **может значительно превосходить статическое смещение груза**, которое имело бы место, если бы возмущающая сила постоянно сохраняла свое максимальное значение. Оказывается, что небольшая по модулю сила может вызвать весьма интенсивные колебания, если частота изменения этой силы приближается к частоте собственных колебаний.

Представим амплитуду вынужденных колебаний в виде

$$|D| = \left| \frac{\Delta_{\text{СТ}}}{1 - (p/k)^2} \right| = \mu |\Delta_{\text{СТ}}|,$$

где буквой μ обозначен безразмерный **коэффициент динамичности**, равный

$$\mu = \left| \frac{D}{\Delta_{\text{СТ}}} \right| = \left| \frac{x_{\text{max}}}{\Delta_{\text{СТ}}} \right| = \frac{1}{|1 - (p/k)^2|}. \quad (2.48)$$

Этот коэффициент показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний превосходит статическое смещение при одной и той же максимальной возмущающей силе.

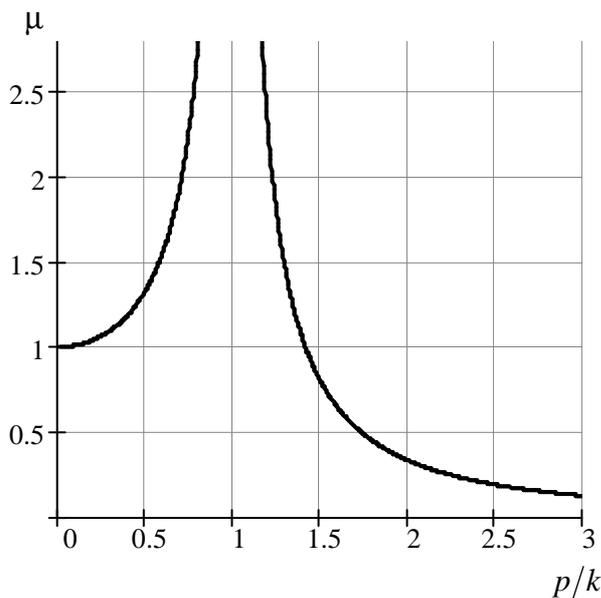


Рис. 2.17

Как видим, он зависит от отношения p/k частоты этой силы к собственной частоте. График этой зависимости имеет характерный вид (см. Рис. 2.17), показывающий, что действительные динамические смещения груза будут близки к $\Delta_{CT} = H/c$ лишь при малых величинах p/k . При увеличении этого отношения амплитуда колебаний довольно резко возрастает и становится бесконечно большой при $p/k \rightarrow 1$. Движение упругой конструкции под действием возмущающей силы, частота которой равна собственной частоте конструкции, называется **резонансом**. При дальнейшем, «зарезонансном», росте частоты возмущения амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает, становясь сколь угодно малой при $p/k \rightarrow \infty$.

У п р а ж н е н и е. Докажите, что в (2.45) и в (2.46) одновременно можно $\sin pt$ заменить на $\sin(pt + \alpha)$, где α – произвольная константа, одинаковая для (2.45) и (2.46).

Закон движения (2.46) в резонансном случае $p = k$ непригоден. Для его определения в этом случае можно было бы воспользоваться интегралом Дюамеля (2.43). Но можно найти решение при помощи следующих рассуждений.

Среди решений (2.47) уравнения (2.45) есть частное решение вида

$$x = \frac{\Delta_{CT}}{1 - (p/k)^2} (\sin pt - \sin kt) = h \cdot \frac{\sin pt - \sin kt}{k^2 - p^2} = -\frac{h}{p+k} \cdot \frac{\sin pt - \sin kt}{p-k},$$

которое получается из (2.47) при $C_1 = 0$ и $C_2 = -\frac{\Delta_{CT}}{1 - (p/k)^2}$. При приближении к резонансу, когда $p \rightarrow k$, это решение стремится к пределу

$$\lim_{p \rightarrow k} \left(-\frac{h}{p+k} \cdot \frac{\sin pt - \sin kt}{p-k} \right) = -\frac{h}{2k} \cdot \lim_{p \rightarrow k} \left(\frac{\sin pt - \sin kt}{p-k} \right) = -\frac{h}{2k} \cdot \frac{d}{dp} (\sin pt) \Big|_{p=k},$$

который и даст искомое **резонансное решение**

$$x = -\frac{h}{2k} t \cdot \cos kt. \quad (2.49)$$

У п р а ж н е н и я. 1) Проверьте правильность решения (2.49) подстановкой его в уравнение

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin kt, \quad (2.50)$$

которое получается из (2.44) при $p = k$.

2) Найдите частное решение уравнения (2.50), вычислив интеграл Дюамеля (2.43), ко-

торый в данном случае приобретает вид

$$x(t) = \frac{1}{mk} \int_{t_0}^t H \sin k\eta \sin k(t - \eta) d\eta.$$

Сравните его с решением (2.49). Как объяснить разницу в результатах?

Решение (2.49) представлено графически на Рис. 2.18, где также для сопоставления показан график возмущающей силы $Q(t)$.

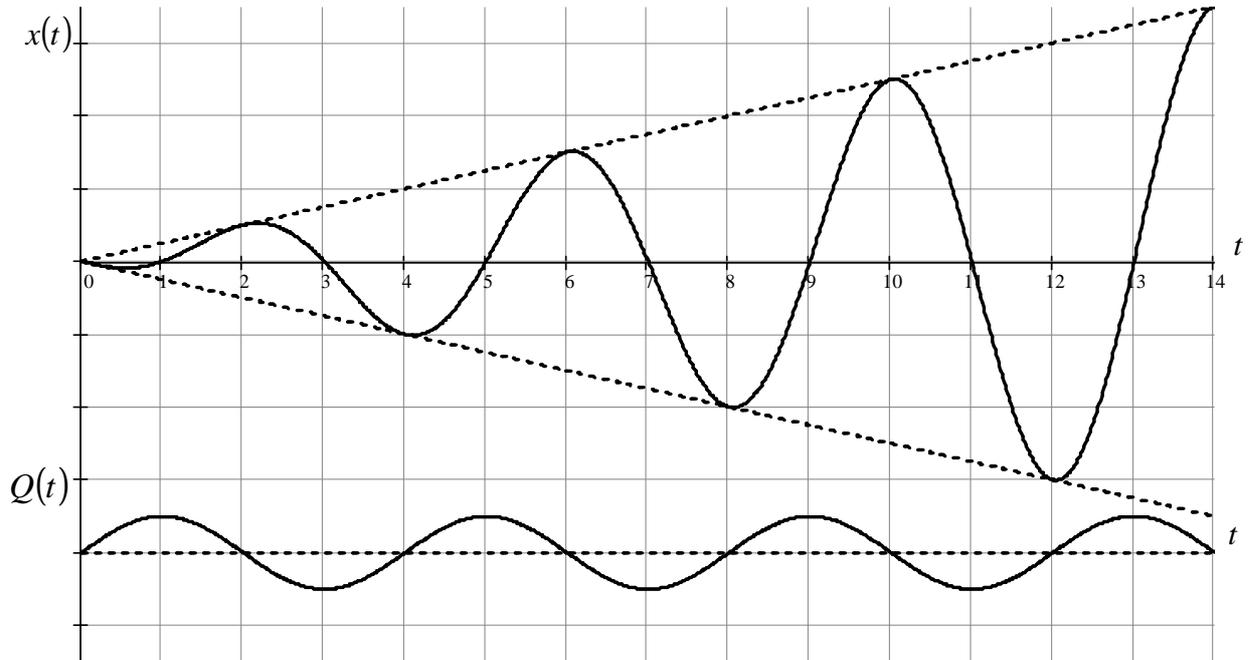


Рис. 2.18

Обращает на себя внимание сдвиг по оси времени максимумов перемещения $x(t)$ относительно максимумов силы $Q(t)$ примерно на четверть периода вправо, т.е. в «более позднюю сторону». Это приводит к тому, что интервалы знакопостоянства функции $Q(t)$ практически совпадают с интервалами возрастания или убывания функции $x(t)$, причем верхние полуволны нижнего графика, которым соответствует возмущающая сила, действующая в сторону роста x , соответствуют участкам возрастания $x(t)$ на верхнем графике, т.е. движения в сторону силы, а нижние полуволны – участкам убывания $x(t)$, т.е. опять в сторону силы. Это означает, что **возмущающая сила при резонансе** практически всегда **действует в направлении движения** груза. В этом заключается физическое объяснение резонанса: **ограниченная по модулю возмущающая сила**, действующая в направлении движения, за достаточно продолжительное время **может совершить сколь угодно большую работу**, что при отсутствии сопротивлений приводит к неограниченному росту интенсивности движения груза.

2.6.6. Действие произвольной периодической возмущающей силы. Резонансы высших порядков

Из математики известно, что любую периодическую функцию с периодом $\tau = 2\pi/p$ можно разложить в ряд Фурье по гармоническим функциям («гармоникам») вида $\sin(jpt + \alpha_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$ В частности, произвольную периодическую возмущающую силу $Q(t)$ можно представить в виде ряда

$$Q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} H_j \sin(jpt + \alpha_j).$$

В соответствии с этим дифференциальное уравнение (2.33) вынужденных колебаний примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \sin(jpt + \alpha_j), \quad (2.51)$$

и его решение может быть найдено на основании **принципа суперпозиции** (см. раздел 2.6.3) как **сумма решений**, отвечающих каждому отдельному слагаемому в правой части. Каждое такое решение уже известно (см. 2.6.5) и определяется соотношением (2.46), где pt нужно заменить на $pt + \alpha$. Поэтому решением уравнения (2.51) является функция

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_j}{k^2 - (jp)^2} \sin(jpt + \alpha_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta_{jCT}}{1 - (jp/k)^2} \sin(jpt + \alpha_j), \quad (2.52)$$

где $\Delta_{jCT} = \frac{H_j}{c}$ – статическое смещение груза под действием постоянной силы, равной

H_j . Найденное решение представляет **периодическую функцию, период которой равен периоду $\tau = 2\pi/p$ возмущающей силы**. Оно описывает **установившиеся вынужденные колебания груза, не зависящие от начальных условий** (общее решение получается прибавлением к (2.52) общего решения (2.12) однородного уравнения (2.11)).

Важной особенностью вынужденных колебаний является зависимость их амплитуды от частоты p возмущающей силы, точнее, от положения собственной частоты k в ряду чисел $p, 2p, \dots, jp, \dots$, являющихся частотами гармоник возмущающей силы $Q(t)$. При приближении собственной частоты к одному из чисел этого ряда амплитуда $\frac{h_j}{k^2 - (jp)^2}$ одного из слагаемых в (2.52) может стать сколь угодно большой, т.е. наступает резонанс. Таким образом, в отличие от чисто гармонического, произвольное периодическое возмущение частоты p может вызвать резонансные колебания с какой-либо из кратных частот $p, 2p, \dots, jp, \dots$. Резонанс с частотой jp , вызванный возмущением с частотой p , называют **резонансом j -го порядка**.

Представление уравнения движения груза в виде ряда (2.52) позволяет установить некоторые общие свойства движения, но неудобно для вычислений (например, амплитуды). В таких случаях можно исследовать **периодические** вынужденные движения без разложения в ряд.

Для этого можно воспользоваться общей формой (2.44) решения уравнения (2.32), определив в ней постоянные C_1 и C_2 из условий периодичности: $x(t) = x(t - T)$, $\dot{x}(t) = \dot{x}(t - T)$, где $T = 2\pi/p$ – период возмущающей силы, $Q(t) = Q(t - T)$. С деталями этого приема можно ознакомиться в книгах [1, 11, 12]. В нижеследующем примере его применение несколько упрощается благодаря особенностям характера изменения возмущающей силы и некоторым свойствам дифференциального уравнения (2.32).

Свойство 1. Если $x(t)$ – решение уравнения $m\ddot{x} + cx = Q(t)$, то $Cx(t)$ – решение уравнения $m\ddot{x} + cx = CQ(t)$, где C – произвольная постоянная величина.

Свойство 2. Если $x(t)$ – решение уравнения $m\ddot{x} + cx = Q(t)$, то $x(t - \theta)$ – решение уравнения $m\ddot{x} + cx = Q(t - \theta)$, где θ – произвольная постоянная величина. Этим доказывает-

ся, независимо от ряда (2.52), периодичность движения, вызванного периодической возмущающей силой. Действительно, если сила периодическая, $Q(t) = Q(t - \theta)$, уравнения $m\ddot{x} + cx = Q(t)$ и $m\ddot{x} + cx = Q(t - \theta)$ совпадают. Следовательно, совпадают и их решения: $x(t) = x(t - \theta)$.

Свойство 3. Если $x(t)$ – решение уравнения $m\ddot{x} + cx = Q(t)$, то $x(-t)$ – решение уравнения $m\ddot{x} + cx = Q(-t)$.

Эти свойства доказываются прямой подстановкой функций $Cx(t)$, $x(t - \theta)$ и $x(-t)$ в уравнение (2.32).

Пример. Найти закон движения и амплитуду установившихся вынужденных колебаний груза под действием периодической кусочно-постоянной возмущающей силы

$$Q(t) = \begin{cases} Q & \text{при } 0 < t < T/2, \\ -Q & \text{при } T/2 < t < T, \end{cases}$$

график зависимости которой от времени показан на рис. 2.19.

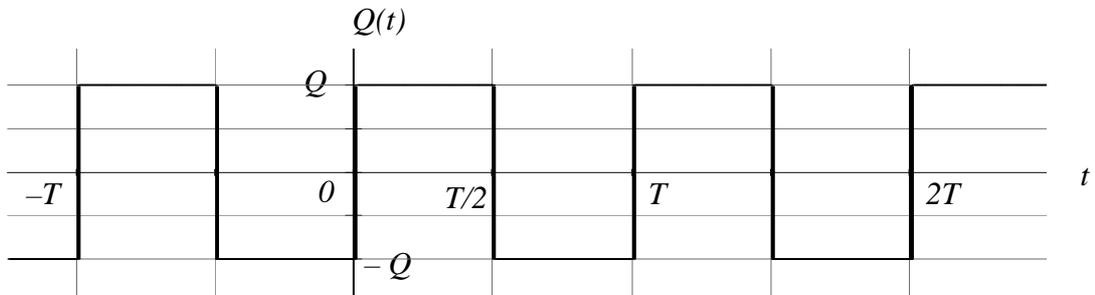


Рис. 2.19

Движение в течение промежутка $0 < t < T/2$, на котором возмущающая сила постоянна, может быть описано уравнением (2.36)

$$x = \Delta + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2.53)$$

где $\Delta = Q/c$ – статическое смещение груза под действием постоянной силы Q , C_1 и C_2 – постоянные, которые подбираются на основании следующих соображений.

Как видно из графика, помимо периодичности, функция $Q(t)$ удовлетворяет условиям

$$Q(t) = -Q(t - T/2), \quad Q(-t) = -Q(t), \quad (2.54)$$

откуда на основании сформулированных выше свойств 1 – 3 следуют соответствующие свойства уравнения движения

$$x(t) = -x(t - T/2), \quad x(-t) = -x(t). \quad (2.55)$$

Второе из равенств (2.55) приводит к равенству $x(0) = 0$, откуда, подставляя в (2.53) $t = 0$, найдем $x(0) = \Delta + C_1 \Rightarrow C_1 = -\Delta$. Первое из равенств (2.55) в сочетании с (2.53) при $t = T/2$ дает $x(T/2) = x(0)$, откуда

$$-\Delta \cos \frac{kT}{2} + C_2 \sin \frac{kT}{2} = -\Delta \Rightarrow C_2 = -\Delta \cdot \frac{1 - \cos \frac{kT}{2}}{\sin \frac{kT}{2}} = -\Delta \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{kT}{4}}{2 \sin \frac{kT}{4} \cos \frac{kT}{4}} = -\Delta \cdot \operatorname{tg} \frac{kT}{4}.$$

Подставляя этот результат в (2.53), получим

$$x = \Delta \left(1 - \cos kt - \operatorname{tg} \frac{kT}{4} \sin kt \right) = \Delta \left(1 - \frac{\cos \frac{kT}{4} \cos kt + \sin \frac{kT}{4} \sin kt}{\cos \frac{kT}{4}} \right) = \Delta \left(1 - \frac{\cos k \left(t - \frac{T}{4} \right)}{\cos \frac{kT}{4}} \right),$$

откуда, с учетом (2.55), найдем закон периодического движения груза

$$x = \begin{cases} \Delta \left(1 - \frac{1}{\cos \frac{kT}{4}} \cdot \cos k \left(t - \frac{T}{4} \right) \right) & \text{при } 0 < t < T/2, \\ -\Delta \left(1 - \frac{1}{\cos \frac{kT}{4}} \cdot \cos k \left(t - \frac{3T}{4} \right) \right) & \text{при } T/2 < t < T. \end{cases} \quad (2.56)$$

График функции $x(t)$ для случая $T = 3,5\tau$, где $\tau = 2\pi/k$ – период собственных колебаний, показан на рис. 2.20.

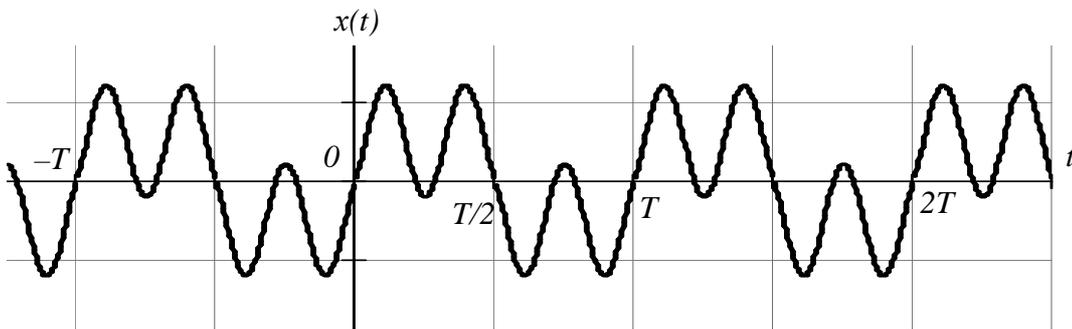


Рис. 2.20

Он состоит из фрагментов синусоид, описывающих собственные колебания около «смещенных» положений равновесия $x = \Delta$ и $x = -\Delta$, которые сменяют друг друга каждые $T/2$ секунд. Если ту же силу приложить к системе, собственная частота которой ниже частоты возмущения, при этом $T < \tau$, график примет более регулярный вид, напоминающий синусоиду (см. сплошную линию на рис. 2.21, отвечающем случаю $T = 0,5\tau$). В действительности повторяющиеся дуговые фрагменты не являются целыми полуволнами синусоиды, а представляют собой отрезанные от них «горбушки». Сама синусоида намечена пунктиром, так же как и соответствующее «временное» положение равновесия $x = \Delta$.

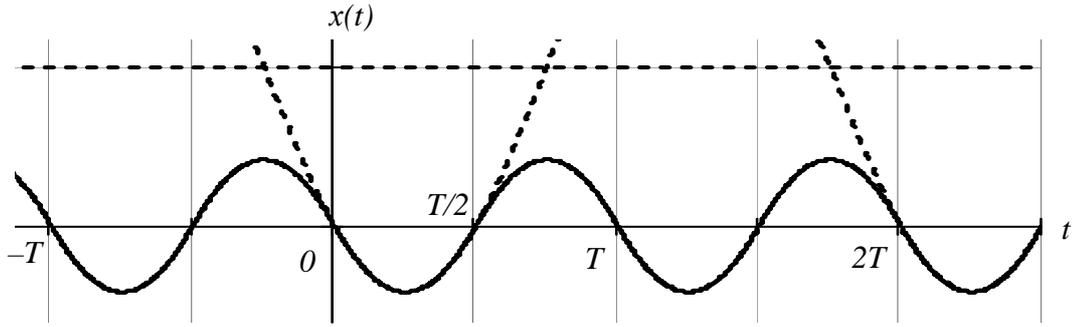


Рис. 2.21

Для вычисления амплитуды рассмотрим отдельно случаи $T > \tau$ и $T < \tau$. Поскольку $\tau = 2\pi/k$, эти неравенства можно переписать в виде $kT/4 > \pi/2$ и $kT/4 < \pi/2$

Когда $\pi/2 < kT/4 < \pi$, $\cos \frac{kT}{4} < 0$. В момент $t = T/4$ $\cos k\left(t - \frac{T}{4}\right) = \cos 0 = 1$. Поэтому максимальное расстояние груза от равновесного положения $x = 0$ согласно (2.56) составит $\Delta \left(1 + \left|\cos \frac{kT}{4}\right|^{-1}\right)$. Когда $kT/4 > \pi$, при изменении t в диапазоне от 0 до $t = T/2$ фаза $k(t - T/4)$ тригонометрической составляющей в (2.56) изменяется в интервале от $-kT/4$ до $kT/4$ шириной $kT/2 > 2\pi$ и, следовательно, $\cos k(t - T/4)$ принимает в этом интервале все свои значения, включая $+1$ и -1 . При одном из них снова $x = x_{\max} = \Delta \left(1 + \left|\cos \frac{kT}{4}\right|^{-1}\right)$, откуда следует, что всегда при $kT/4 > \pi/2$, или, что то же, при $T > \tau$ или $p < k$, амплитуда вынужденных колебаний равна $\Delta \left(1 + \left|\cos \frac{kT}{4}\right|^{-1}\right)$.

Если $kT/4 < \pi/2$ ($T < \tau$, $p > k$), $\cos \frac{kT}{4} > 0$. Тогда при всех t из интервала $0 < t < \frac{T}{2}$ $-kT/4 < k(t - T/4) < kT/4 \Rightarrow |k(t - T/4)| < kT/4 \Rightarrow \cos k(t - T/4) = \cos |k(t - T/4)| > \cos kT/4$, откуда $|x|_{\max} = \Delta \left|1 - \left(\cos \frac{kT}{4}\right)^{-1}\right| = \Delta \left(\left(\cos \frac{kT}{4}\right)^{-1} - 1\right)$. Таким образом амплитуда \mathcal{A} рассматриваемых вынужденных колебаний равна

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \Delta \left(\left|\cos \frac{kT}{4}\right|^{-1} + 1 \right) & \text{при } T > \tau \quad (p < k), \\ \Delta \left(\left(\cos \frac{kT}{4}\right)^{-1} - 1 \right) & \text{при } T < \tau \quad (p > k). \end{cases}$$

Выражения $\mu = \left| \cos \frac{kT}{4} \right|^{-1} \pm 1$ представляют собой коэффициент динамичности, показывающий, во сколько раз амплитуда больше статического смещения $\Delta = Q/c$, вызванного постоянной силой Q . График зависимости коэффициента динамичности от безразмерного отношения $p/k = \tau/T = 2\pi/kT$ представлен на рис. 2.22

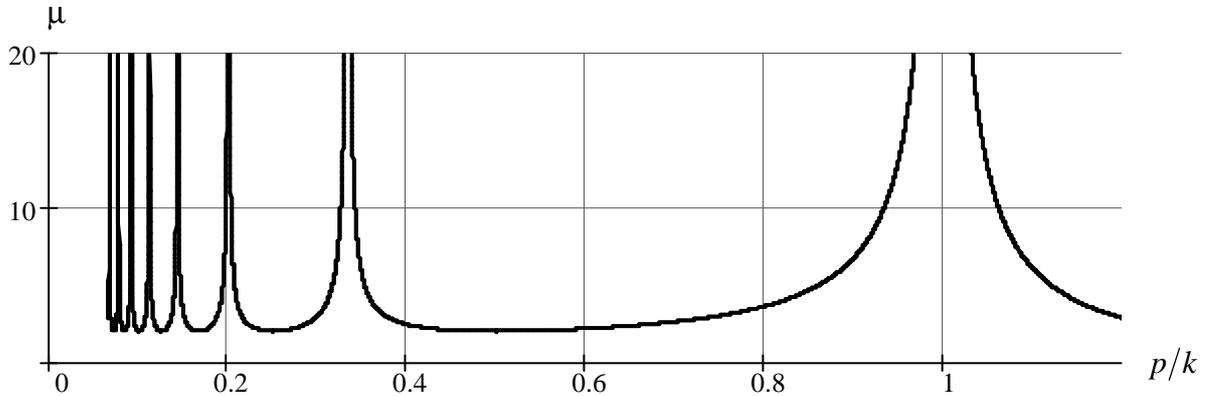


Рис. 2.22

Множество бесконечных разрывов отражает множество резонансов различных порядков, которые наступают при $\cos \frac{kT}{4} = 0$, т.е. при $\frac{kT}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{(2j-1)\pi}{2}$, или иначе при $p = 2\pi/T = k/(2j-1)$, $j = 1, 2, 3, \dots$, т.е. при $p = k$ (основной резонанс), а также при $p = k/3, k/5, k/7$, и т.д. (резонансы высших порядков).

2.7. Влияние сопротивления на вынужденные колебания

Введем в систему, изображенную на рис. 2.6, кроме возмущающей силы $\vec{Q} = \vec{Q}(t)$ еще силу \vec{R} сопротивления движению, равную $\vec{R} = -\gamma\vec{v}$ (см. (2.21), раздел 2.5). Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x будет иметь вид (ср. (2.32))

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + cx = Q(t). \quad (2.57)$$

Для него как для любого линейного уравнения справедлив математический результат, отмеченный в разделе 2.6, согласно которому его общее решение равно сумме общего решения (2.25') соответствующего **однородного** уравнения (2.22) (без правой части, т.е. при $Q(t) \equiv 0$) и какого-либо частного решения (2.57). Это частное решение может быть найдено в виде **интеграла Дюамеля** как результат суммирования влияний последовательности малых кратковременных импульсов, как это было сделано в разделе 2.6.4. Не приводя вывода, запишем выражение этого решения

$$x(t) = \frac{1}{mk_1} \int_{t_0}^t Q(\eta) e^{-\beta(t-\eta)} \sin k_1(t-\eta) d\eta, \quad (2.58)$$

где, как и выше (раздел 2.5), $\beta = \gamma/2m$, $k_1 = \sqrt{k^2 - \beta^2}$, $e = 2,718\dots$ – основание нату-

ральных логарифмов. При $\beta = 0$ это выражение переходит в (2.43).

В случае представляющего наибольший практический интерес гармонического возмущения $Q(t) = H \sin pt$ решение уравнения (2.57) можно найти, не пользуясь интегралом Дюамеля, с помощью его представления в комплексной форме. Этот вывод представляет полезный пример техники работы с комплексными числами.

Наряду с уравнением

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + k^2x = h \sin pt, \quad (2.59)$$

полученным из (2.57) делением на m (ср. (2.22)), где $h = H/m$, рассмотрим уравнение

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + k^2z = h e^{ipt}, \quad (2.60)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, решение которого $z(t)$ является *комплекснозначной* функцией времени. Поскольку $e^{ipt} = \cos pt + i \sin pt$, это уравнение *в силу его линейности* эквивалентно двум действительным уравнениям, в правых частях которых стоят $\cos pt$ и $\sin pt$, решениями которых будут соответственно действительная и мнимая части функции $z(t)$, причем для уравнения (2.59) решением является *мнимая часть*.

Будем искать решение уравнения (2.60) в виде показательной функции с мнимым показателем таким же, как у правой части, $z(t) = D e^{ipt}$, где D – постоянная, вообще говоря, комплексная величина. Подставляя $z(t) = D e^{ipt}$ в уравнение (2.60), с учетом того что $\dot{z}(t) = ip D e^{ipt}$, $\ddot{z}(t) = -p^2 D e^{ipt}$, после сокращения на e^{ipt} придем к алгебраическому уравнению

$$(-p^2 + 2ip\beta + k^2)D = h. \quad (2.61)$$

Любое комплексное число $a + ib$ можно записать в тригонометрической форме

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = |a + ib| (\cos \alpha + i \sin \alpha) = |a + ib| e^{i\alpha},$$

где $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа, α – его аргумент, «обобщающий» угол в прямоугольном треугольнике с катетами a и b , лежащий напротив катета b (вспомним рис. 2.8, с помощью которого произвольную пару чисел C_1 и C_2 удалось выразить через положительное число $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и угол α).

Придадим соответствующую форму выражению в скобках в (2.61)

$$-p^2 + 2ip\beta + k^2 = k^2 - p^2 + i2p\beta = \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2\beta^2} \cdot e^{i\alpha},$$

где

$$\cos \alpha = \frac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2\beta^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{2p\beta}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2\beta^2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2p\beta}{k^2 - p^2}. \quad (2.62)$$

Тогда, деля обе части (2.61) на $\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2\beta^2} \cdot e^{i\alpha}$, находим

$$D = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2\beta^2}} \cdot e^{-i\alpha} \Rightarrow z = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2\beta^2}} \cdot e^{i(pt-\alpha)}.$$

Найденная функция $z(t)$ является частным решением комплексного уравнения (2.60), а ее мнимая часть $\text{Im}[z(t)]$ – частным решением x действительного уравнения (2.59)

$$x = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2\beta^2}} \cdot \sin(pt - \alpha). \quad (2.63)$$

Его общим решением будет функция

$$x = e^{-\beta t} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2\beta^2}} \cdot \sin(pt - \alpha), \quad (2.64)$$

которая описывает движение, являющееся **суперпозицией затухающих собственных колебаний и установившихся вынужденных колебаний**. Собственные колебания зависят от начальных условий (через которые определяются постоянные C_1 и C_2) и, какими бы ни были эти условия, через определенное время благодаря множителю $e^{-\beta t}$ становятся сколь угодно слабыми (см. рис. 2.9). Вынужденные колебания (2.63) являются гармоническими с частотой, равной частоте возмущающей силы. Их амплитуда **не зависит от начальных условий**, а определяется постоянными характеристиками заданной упругой системы и частотой p возмущающей силы. Характерные кривые, отражающие изменение координаты груза в зависимости от времени, представлены на рис. 2.23 и 2.24. На первом рисунке собственная частота в 6 раз выше частоты возмущения, на втором – в 6 раз ниже. На обоих рисунках хорошо видно, как по мере затухания собственных колебаний устанавливаются вынужденные гармонические колебания с частотой возмущающей силы.

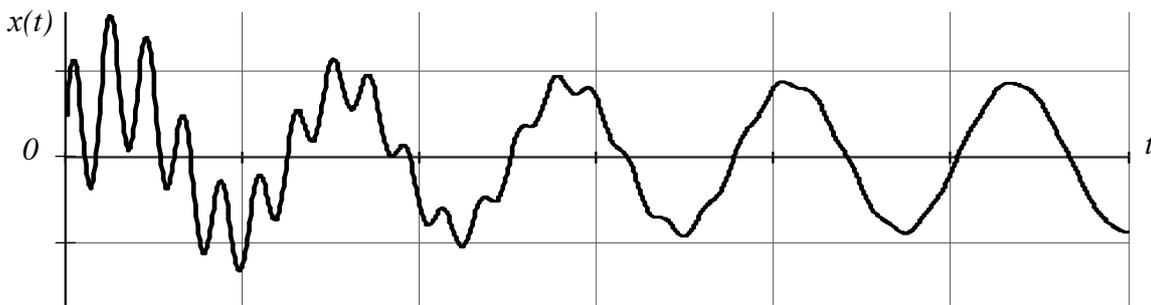


Рис. 2.23

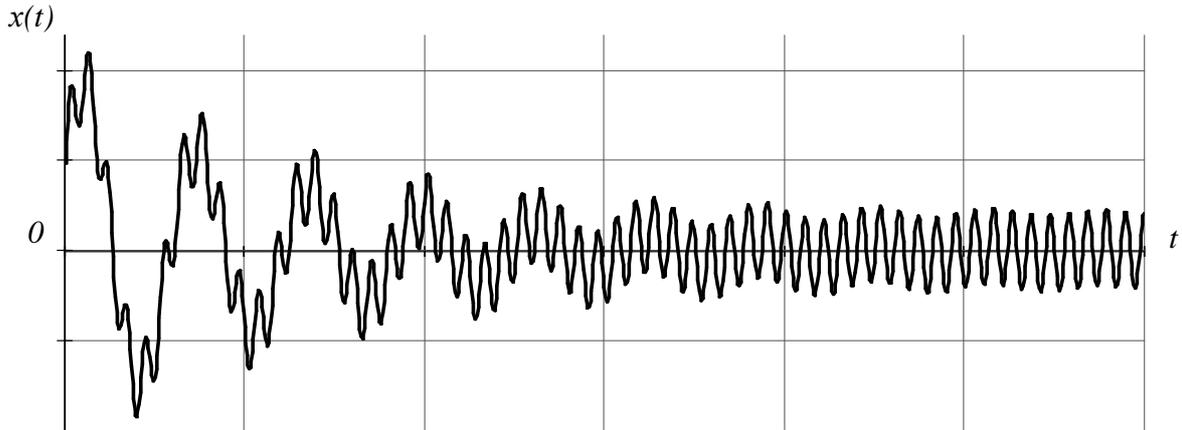


Рис. 2.24

Как и в разделе 2.6.5, разделив числитель и знаменатель (2.63) на $k^2 = c/m$, представим амплитуду вынужденных колебаний в виде $\mu |\Delta_{CT}|$, где μ – коэффициент динамичности, равный (ср. (2.48))

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - (p/k)^2)^2 + 4(p/k)^2(\beta/k)^2}} \quad (2.65)$$

и показывающий во сколько раз максимальное смещение груза, вызванное переменной силой $Q_x(t) = H \sin pt$, больше смещения $\Delta_{CT} = H/c$, вызванного постоянной силой, равной H . Графики зависимости μ от отношения p/k частоты возмущающей силы к собственной частоте представлены на рис. 2.25.

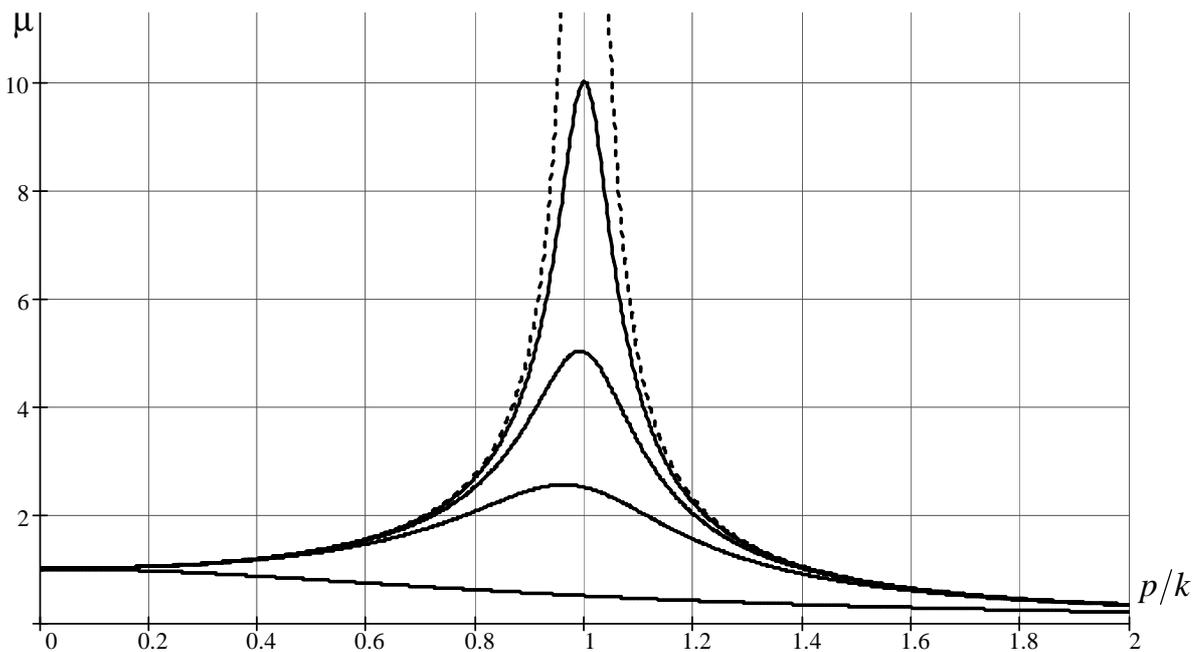


Рис. 2.25

На нем сплошными линиями показаны кривые, соответствующие (сверху вниз) значениям β/k , равным соответственно 0,05, 0,1, 0,2, 1. Для сопоставления пунктиром показана кривая, отвечающая отсутствию сопротивления ($\beta = 0$). Как видим, вследствие наличия сопротивления ($\beta \neq 0$) амплитуда вынужденных колебаний всегда остается конечной. Резонансный пик выражен тем сильнее, чем меньше сопротивление. Нижняя кривая, для которой $\beta/k = 1$, вовсе не имеет резонансного «горба». Заметим, что для этого случая затухающее собственное движение является аperiodическим (см. раздел 2.5.2).

Исследуя μ как функцию безразмерного отношения p/k , установим, что ее максимум достигается не при $p/k = 1$, а при меньшем значении $p/k = \sqrt{1 - 2(\beta/k)^2}$. Этот максимум равен $\mu_{\max} = \frac{1}{2(\beta/k)\sqrt{1 - (\beta/k)^2}}$, что больше значения μ при $p/k = 1$, равного

$\mu(1) = \frac{1}{2(\beta/k)}$. При слабом сопротивлении ($\beta/k \ll 1$) значения μ_{\max} и $\mu(1)$ практически совпадают. Отметим, что при слабом сопротивлении все кривые за исключением резонансной области ($0,8 < p/k < 1,2$) практически сливаются, что позволяет при вычислении амплитуды пользоваться выражением (2.48).

3. Колебания систем с одной степенью свободы

3.1. Дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы. Обобщенная координата

Рассмотренные прямолинейные колебания точечного груза, хотя и являются довольно узким частным случаем, представляют собой модель поведения широкого класса механических систем с одной степенью свободы, имеющих устойчивое положение равновесия.

Определение 3.1. Говорят, что система имеет одну степень свободы, если положение каждой ее точки полностью определяется значением одного параметра, который называется обобщенной координатой.

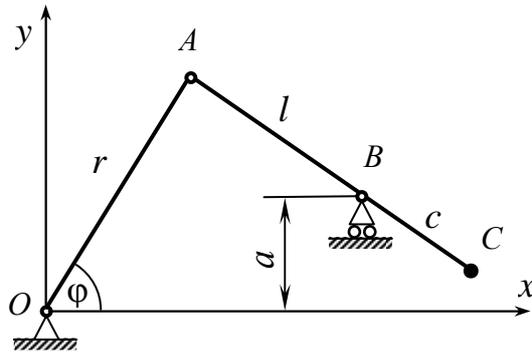


Рис. 3.1

Например, в системе, изображенной на рис. 3.1, положение каждой точки определяется величиной угла φ . Действительно, обозначив $OA = r$, $AB = l$, $BC = c$, можем координаты всех точек выразить через φ :

$$x_A = r \cos \varphi, \quad y_A = r \sin \varphi,$$

$$x_B = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - (r \sin \varphi - a)^2},$$

$$x_C = r \cos \varphi + \frac{l+c}{l} \sqrt{l^2 - (r \sin \varphi - a)^2}, \quad y_C = a - \frac{c}{l} (r \sin \varphi - a).$$

В общем случае, обозначая обобщенную координату через q , радиус-вектор каждой точки системы будем рассматривать как функцию q :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q).$$

Движение системы будет задано, если координата q будет задана как функция времени $q = q(t)$. Разыскание этой функции представляет собой задачу, аналогичную обратной задаче динамики материальной точки, в которой координаты точки определяются интегрированием известной системы дифференциальных уравнений (2.8).

Дифференциальное уравнение, определяющее изменение обобщенной координаты q , можно составить, используя теорему об изменении кинетической энергии.

Элементарное перемещение любой точки системы может быть выражено через дифференциал обобщенной координаты $\vec{ds}_i = d\vec{r}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dq} dq$. При перемещении системы из положения, определяемого значением координаты q_0 , в положение, отвечающее значению q , сумма работ сил, приложенных к системе, составит

$$A = \sum \int_{q_0}^q (\vec{F}_i, \vec{ds}_i) = \sum \int_{q_0}^q \left(\vec{F}_i, \frac{d\vec{r}_i}{dq} \right) dq = \int_{q_0}^q \sum \left(\vec{F}_i, \frac{d\vec{r}_i}{dq} \right) dq = \int_{q_0}^q Q dq,$$

где скалярная величина $Q = \sum \left(\vec{F}_i, \frac{d\vec{r}_i}{dq} \right)$ называется обобщенной силой, соответствующей обобщенной координате q .

Кинетическая энергия системы также может быть выражена через координату q и ее производную по времени \dot{q} . Поскольку скорость произвольной точки равна

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dq} \cdot \dot{q},$$

кинетическая энергия всей системы равна

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} M(q) \dot{q}^2,$$

где $M(q) = \sum m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq} \right)^2$ – скалярная величина, называемая приведенной или обобщенной

массой системы. В простых механизмах обобщенная масса является постоянной, зависящей от распределения масс и геометрических характеристик их элементов. В общем случае она является функцией координаты q , т.е. зависит от положения системы.

Согласно теореме об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = A \Rightarrow \frac{1}{2} M(q) \dot{q}^2 - T_0 = \int_{q_0}^q Q dq.$$

Продифференцируем обе части по времени (при этом q_0 и T_0 – постоянные). Производная левой части равна

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} M(q) \dot{q}^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [M(q)] \dot{q}^2 + \frac{1}{2} M(q) \frac{d}{dt} (\dot{q}^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dq} [M(q)] \dot{q}^3 + M(q) \dot{q} \ddot{q}.$$

Производная правой части

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{q_0}^q Q dq \right) = \frac{d}{dq} \left(\int_{q_0}^q Q dq \right) \cdot \dot{q} = Q \dot{q}.$$

Приравняв производные обеих частей и деля на \dot{q} , приходим к уравнению

$$\frac{1}{2} M'(q) \dot{q}^2 + M(q) \ddot{q} = Q, \quad (3.1)$$

где штрихом обозначена производная по q , которое является обобщением дифференциального уравнения движения материальной точки $m\ddot{x} = F_x$ и играет ту же роль в задаче определения движения механической системы, что и последнее уравнение для точки.

З а м е ч а н и е. Существует предложенная Лагранжем общая схема составления дифференциальных уравнений движения механических систем (с произвольным числом степеней свободы, подчиненных идеальному стационарному геометрическому связям), согласно которой дифференциальное уравнение, соответствующее координате q , имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

где $T = T(q, \dot{q})$ – кинетическая энергия системы, выраженная через координату q и ее производную по времени \dot{q} .

У п р а ж н е н и е. Убедитесь, что схема Лагранжа в случае одной степени свободы также приводит к уравнению (3.1).

3.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы. Линеаризация

Предположим, что система имеет положение равновесия, в котором $q = \text{const} \Rightarrow \dot{q} = 0$. Тогда, как видно из (3.1), в этом положении $Q = 0$.

Ограничимся рассмотрением случая свободного движения системы, в котором на нее действуют силы, зависящие только от ее положения. В этом случае обобщенная сила является функцией только координаты q : $Q = Q(q)$, причем, поскольку всегда можно выбрать координату так, чтобы в положении равновесия она равнялась нулю, будем считать $Q(0) = 0$. Будем рассматривать движение, при котором система находится вблизи положения равновесия, т.е. $q \approx 0$. Тогда в силу непрерывности примем в первом приближении $M(q) = M(0) = M = \text{const.}$, $Q = Q(q) - Q(0) = Q'(0)q = -cq$, где $c = -Q'(0) = \text{const.}$ – величина, которую называют обобщенной жесткостью. При этом (3.1) перейдет в приближенное дифференциальное уравнение $M(0)\ddot{q} = -cq$ или

$$M\ddot{q} + cq = 0, \quad (3.2)$$

которое является линейным уравнением того же вида, что уравнение (2.10) свободных колебаний груза, рассмотренное в разделе 2.4.

Замена точного дифференциального уравнения приближенным линейным дифференциальным уравнением называется *линеаризацией*. Линеаризация оправдана, когда движение системы ограничено незначительными изменениями координаты q . В противном случае приближенное «линеаризованное» уравнение может описывать движение исследуемой системы лишь в течение более или менее короткого промежутка времени, пока координата не получает значительных изменений.

Если движение системы было вызвано *незначительным нарушением устойчивого положения равновесия*, естественно ожидать, что ее движение будет происходить вблизи равновесного положения при ограниченном изменении координаты, и для описания такого движения можно пользоваться уравнением (3.2). Отсюда следует, что свободное движение практически любой механической системы с одной степенью свободы вблизи устойчивого положения равновесия будет гармоническими колебаниями. Для определения частоты и периода этих свободных колебаний нет необходимости интегрировать уравнение (3.2) (общее решение которого, впрочем, известно, см. (2.12), (2.14), (2.18)). Их можно определить при помощи формул (2.20) раздела 2.4

$$k = \sqrt{\frac{c}{M}} = \sqrt{\frac{-Q'(0)}{M(0)}}, \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{M(0)}{-Q'(0)}}. \quad (3.3)$$

Таким образом, для вычисления частоты свободных *малых* колебаний системы с одной степенью свободы следует

- 1) найти положения равновесия системы, в которых $Q = 0$;

- 2) вычислить в этих положениях производную Q' и выбрать из них устойчивые, т.е. те, в которых $c = -Q' > 0$;
- 3) вычислить кинетическую энергию системы и выразить ее через обобщенную координату q и обобщенную скорость \dot{q} , т.е. в виде $0,5 \cdot M(q)\dot{q}^2$;
- 4) определить обобщенную массу M , отвечающую устойчивым положениям равновесия;
- 5) подставить вычисленные значения $c = -Q' > 0$ и M в (3.3).

При этом обобщенную силу удобно вычислять не по формуле $Q = \sum \left(\vec{F}_i, \frac{d\vec{r}_i}{dq} \right)$, а по следующему правилу. Сообщают системе малое перемещение, при котором обобщенная координата получает приращение dq и вычисляют сумму работ всех приложенных к системе сил на этом перемещении. Во всех слагаемых этой суммы присутствует общий множитель dq , который можно вынести, придя к выражению $dA = Qdq$. Коэффициент при dq и будет искомой обобщенной силой, т.е. обобщенная сила равна дроби

$$Q = \frac{dA}{dq}. \quad (3.4)$$

Изложенное поясним на примерах.

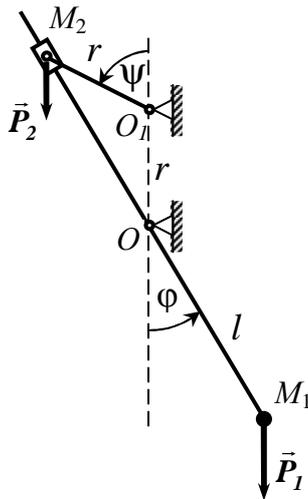


Рис. 3.2

Пример 1. Определить частоту собственных колебаний около устойчивых положений равновесия системы, изображенной на рис. 3.2. Стержни невесомы, массы груза M_1 и ползуна M_2 равны соответственно m_1 и m_2 , расстояния $OM_1 = l$, $O_1M_2 = O_1O = r$. Связи идеальны. Активными силами являются только силы тяжести груза M_1 и ползуна M_2 .

Решение. 1) Примем в качестве обобщенной координаты радианную меру φ угла, образованного стержнем OM_1 с вертикалью. Для определения обобщенной силы, соответствующей координате φ , сообщим системе малое перемещение, при котором координата увеличится на $d\varphi$, и вычислим элементарную работу сил тяжести на этом перемещении.

$$dA = dA(\vec{P}_1) + dA(\vec{P}_2) = -P_1 l \sin \varphi \cdot d\varphi + P_2 r \sin \psi \cdot d\psi. \quad (3.5)$$

Угол ψ является внешним углом для треугольника OO_1M_2 и равен сумме его двух внутренних углов, не смежных с ним. Поскольку треугольник OO_1M_2 равнобедренный, эти внутренние углы равны, откуда $\psi = 2\varphi$. Подставив этот результат в (3.4), получим

$$dA = -P_1 l \sin \varphi \cdot d\varphi + P_2 r \sin 2\varphi \cdot d(2\varphi) = -g(m_1 l - 4m_2 r \cos \varphi) \sin \varphi \cdot d\varphi,$$

откуда найдем обобщенную силу $Q = -g(m_1 l - 4m_2 r \cos \varphi) \sin \varphi$. Приравняв ее к нулю, найдем те значения φ , при которых система будет в равновесии. Одно из них равно нулю $\varphi_1 = 0$,

при этом стержни вертикальны. Кроме этого очевидного положения равновесия при определенных обстоятельствах может существовать еще одно, в котором обращается в нуль не $\sin \varphi$, а выражение $m_1 l - 4m_2 r \cos \varphi$. Обозначая соответствующее этому положению значение координаты через φ_2 , будем иметь

$$m_1 l - 4m_2 r \cos \varphi_2 = 0 \Rightarrow \cos \varphi_2 = \frac{m_1 l}{4m_2 r}.$$

Второе положение равновесия будет существовать только при $m_1 l \leq 4m_2 r$, т.к. косинус не может быть больше единицы. В вертикальном положении $Q'(\varphi_1) = Q'(0) = -g(m_1 l - 4m_2 r)$, откуда $c = -Q'(0) = g(m_1 l - 4m_2 r)$. Это положение будет устойчивым, если оно единственно, т.е. при $m_1 l > 4m_2 r$, и неустойчивым при $m_1 l < 4m_2 r$. Второе, наклонное положение равновесия появляется только в случае неустойчивости вертикального положения. При этом обобщенную силу удобно представить в виде $Q = -4m_2 g r (\cos \varphi_2 - \cos \varphi) \sin \varphi$. Тогда $Q'(\varphi_2) = -4m_2 g r \sin^2 \varphi_2$, откуда следует, что это положение всегда устойчиво и $c = -Q'(\varphi_2) = 4m_2 g r \sin^2 \varphi_2$.

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 (l\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{m_2 (r\dot{\psi})^2}{2} = \frac{m_1 l^2 + 4m_2 r^2}{2} \dot{\varphi}^2,$$

откуда обобщенная масса $M = m_1 l^2 + 4m_2 r^2$. Подставляя найденные значения Q' и M в (3.3), находим

1) частота колебаний около вертикального положения равновесия (когда оно устойчиво) равна

$$k = \sqrt{\frac{c}{M}} = \sqrt{\frac{-Q'(0)}{M}} = \sqrt{\frac{g(m_1 l - 4m_2 r)}{m_1 l^2 + 4m_2 r^2}}$$

2) частота колебаний около наклонного положения (когда вертикальное неустойчиво)

$$k = \sqrt{\frac{-Q'(\varphi_2)}{M}} = \sqrt{\frac{4m_2 g r \sin^2 \varphi_2}{m_1 l^2 + 4m_2 r^2}} = \sqrt{g \frac{(4m_2 r)^2 - (m_1 l)^2}{4m_2 r (m_1 l^2 + 4m_2 r^2)}}.$$

Пример 2. Механическая система (см. рис. 3.3) состоит из двух невесомых твердых тел, одно из которых представляет собой Т-образную раму $M_1 ADC$ (слева), а второе – прямолинейный стержень CM_2 , соединенных с помощью шарнира C , несущих две материальные точки M_1 и M_2 массами соответственно m_1 и m_2 . Стержни могут вращаться вокруг неподвижных осей, перпендикулярных плоскости рисунка и проходящих через точки A и B соответственно. Кроме шарниров в точках A и B конструкция подкреплена также двумя линейно-упругими пружинами с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 . В положении равновесия пружины недеформированы, точки M_1, A, C, B лежат на одной горизонтальной прямой. Пренебрегая силами тяжести, трением в шарнирах и считая известными расстояния a, b, d и h , **определить частоту собственных колебаний** около положения равновесия.

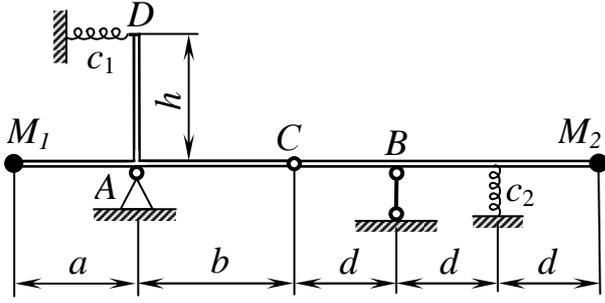


Рис.3.3

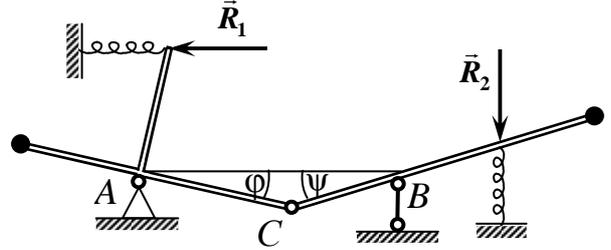


Рис.3.4

Решение. 1) Примем в качестве обобщенной координаты радианную меру угла φ , показанного на рис. 3.4 (в положении равновесия $\varphi = 0$). Для определения обобщенной силы, соответствующей координате φ , сообщим системе, находящейся в произвольном положении ($\varphi \neq 0$), малое перемещение, при котором координата увеличится на $d\varphi$, и вычислим элементарную работу реакций \vec{R}_1 и \vec{R}_2 упругих пружин на этом перемещении. Учитывая, что при заданном перемещении левое тело поворачивается на угол $d\varphi$ по часовой стрелке, а правое – на угол $d\psi$ против часовой стрелки, найдем

$$dA = dA(\vec{R}_1) + dA(\vec{R}_2) = -m_{zA}(\vec{R}_1) \cdot d\varphi + m_{zB}(\vec{R}_2) \cdot d\psi, \quad (3.6)$$

где $m_{zA}(\vec{R}_1)$ и $m_{zB}(\vec{R}_2)$ – моменты реакций \vec{R}_1 и \vec{R}_2 относительно осей вращения соответствующих тел (направленных к читателю). Выражая деформации пружин через углы φ и ψ , получим $R_1 = c_1 h \varphi$, $R_2 = c_2 d \cdot \psi$, $m_{zA}(\vec{R}_1) = R_1 h = c_1 h^2 \varphi$, $m_{zB}(\vec{R}_2) = -R_2 d = -c_2 d^2 \psi$. Выразим вертикальное перемещение шарнира C вначале через угол φ поворота левого тела, а затем – через угол ψ поворота правого тела: $b \cdot \varphi = d \cdot \psi \Rightarrow b \cdot d\varphi = d \cdot d\psi$ (углы φ и ψ считаются малыми). Подставляя установленные соотношения в (3.6), найдем

$$dA = -c_1 h^2 \varphi \cdot d\varphi + (-c_2 d^2 \psi) \cdot d\psi = -c_1 h^2 \varphi \cdot d\varphi - c_2 d\psi \cdot d \cdot d\psi = -(c_1 h^2 + c_2 b^2) \varphi \cdot d\varphi,$$

откуда обобщенная сила $Q = -(c_1 h^2 + c_2 b^2) \varphi$, $c = Q'_\varphi = -(c_1 h^2 + c_2 b^2)$.

2) Кинетическая энергия системы равна (поскольку $b \cdot \dot{\varphi} = d \cdot \dot{\psi}$)

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 (a\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{m_2 (2d\dot{\psi})^2}{2} = \frac{m_1 (a\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{4m_2 (b\dot{\varphi})^2}{2} = \frac{m_1 a^2 + 4m_2 b^2}{2} \dot{\varphi}^2,$$

откуда обобщенная масса $M = m_1 a^2 + 4m_2 b^2$. Подставляя найденные значения $c = Q'_\varphi$ и M в (3.3), находим искомую круговую частоту

$$k = \sqrt{\frac{c}{M}} = \sqrt{\frac{c_1 h^2 + c_2 b^2}{m_1 a^2 + 4m_2 b^2}}.$$

4. Колебания систем с двумя степенями свободы

4.1. Свободные колебания плоской одномассовой системы

4.1.1. Дифференциальные уравнения движения в плоскости упруго закрепленного точечного груза

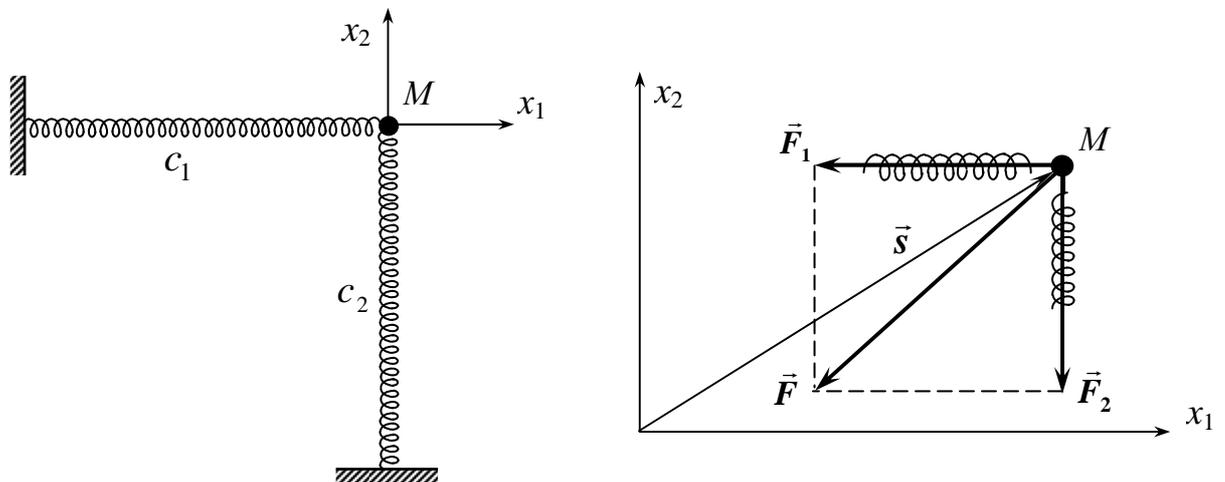


Рис. 4.1

Рассмотрим вначале случай, когда груз массы m закреплен на двух перпендикулярно расположенных пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 . Считая груз материальной точкой, обозначим его декартовы координаты x_1 и x_2 . Поместим начало координат в положение равновесия груза, в котором пружины недеформированы, и направим оси вдоль пружин (см. Рис. 4.1). В произвольном положении груза (x_1, x_2) , полученном в результате смещения \vec{s} (см. рис. 4.1 справа) на него действуют реакции \vec{F}_1 и \vec{F}_2 пружин, пропорциональные их удлинением. При этом *перемещение груза в направлении, перпендикулярном к пружине, в первом приближении не вызывает ее удлинения*. Кроме того смещения x_1 и x_2 предполагаются малыми по сравнению с длинами пружин, что позволяет пренебрегать их поворотами и считать их реакции направленными вдоль координатных осей.

Дифференциальные уравнения движения груза в плоскости $x_1 x_2$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -c_1 x_1, \\ m\ddot{x}_2 &= -c_2 x_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Каждое из уравнений этой системы может быть проинтегрировано независимо от другого, как в разделе 2.4, и уравнениями движения груза в плоскости будут

$$x_1 = a_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad x_2 = a_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad (4.2)$$

где постоянные $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ определяются начальными условиями, т.е. начальным положением и начальной скоростью груза, которые определяются значениями $x_1(t_0), \dot{x}_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_2(t_0)$. Уравнения (4.2) показывают, что движение груза является суперпозицией (наложением) двух гармонических колебаний, происходящих в направлениях перпендикулярных

осей x_1 и x_2 . При этом *при определенных начальных условиях* может реализовываться какое-либо одно из этих движений, т.е. *могут происходить прямолинейные гармонические колебания* вдоль одной из координатных осей. Круговые частоты этих колебаний не зависят от начальных условий, а определяются массой груза и жесткостями пружин

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}. \quad (4.3)$$

В более общем случае, когда пружины, удерживающие груз, расположены под произвольными углами к осям x_1 и x_2 и когда число пружин произвольно, дифференциальные уравнения движения груза усложняются.

Для определения проекций сил реакции пружин рассмотрим вначале одну пружину с коэффициентом жесткости c , расположенную под углом θ к оси x_1 . Ее реакция на смещение груза (конца пружины) на величину x_1 по горизонтали и x_2 по вертикали может быть вычислена при помощи *принципа суперпозиции* как сумма реакций на горизонтальное смещение x_1 и на вертикальное смещение x_2 . При этом, как и ранее, смещения считаем малыми настолько, что пружина не поворачивается, т.е. угол θ не изменяется. Горизонтальное смещение x_1 разложим на составляющие $x_1 \cos \theta$ вдоль пружины и $x_1 \sin \theta$ – перпендикулярно к пружине. Последнее перемещение пружину не удлиняет и реакции не вызывает. Поэтому реакция пружины обусловлена только продольной составляющей перемещения и равна $c \cdot x_1 \cos \theta$, а ее проекции на оси x_1 и x_2 соответственно равны $-c \cdot x_1 \cos^2 \theta$ и $-c \cdot x_1 \cos \theta \sin \theta$. Рассуждая аналогично, найдем проекции на оси x_1 и x_2 реакции, обусловленной вертикальным перемещением x_2 . При этом величина самой реакции равна $c \cdot x_2 \sin \theta$, а ее проекции на оси x_1 и x_2 соответственно равны $-c \cdot x_2 \cos \theta \sin \theta$ и $-c \cdot x_2 \sin^2 \theta$. Складывая полученные результаты, найдем проекции на оси x_1 и x_2 реакции, вызванной произвольным перемещением

$$\begin{aligned} F_1 &= -c \cdot x_1 \cos^2 \theta - c \cdot x_2 \cos \theta \sin \theta, \\ F_2 &= -c \cdot x_1 \cos \theta \sin \theta - c \cdot x_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

При произвольном числе пружин сила, действующая на груз, равна сумме реакций всех пружин, откуда

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(-\sum c_i \cos^2 \theta_i \right) \cdot x_1 - \left(\sum c_i \cos \theta_i \sin \theta_i \right) \cdot x_2, \\ F_2 &= \left(-\sum c_i \cos \theta_i \sin \theta_i \right) \cdot x_1 - \left(\sum c_i \sin^2 \theta_i \right) \cdot x_2. \end{aligned}$$

Тогда дифференциальные уравнения движения груза в проекциях на оси x_1 и x_2 можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -c_{11}x_1 - c_{12}x_2, \\ m\ddot{x}_2 &= -c_{21}x_1 - c_{22}x_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

где обозначено $c_{11} = \sum c_i \cos^2 \theta_i$, $c_{12} = c_{21} = \sum c_i \cos \theta_i \sin \theta_i$, $c_{22} = \sum c_i \sin^2 \theta_i$.

Упругое закрепление может быть реализовано разными способами. Вместо системы пружин можно прикрепить груз к конструкции, образованной из упругих стержней, например,

изображенной на рис. 4.2. При смещениях груза M в плоскости $x_1 x_2$ из равновесного по-

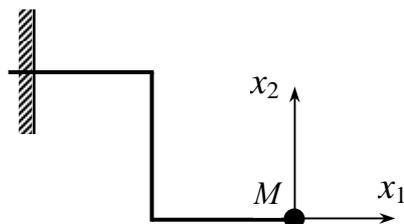


Рис. 4.2

ложения на него со стороны деформированной конструкции будет действовать реакция, проекции которой на оси x_1 и x_2 являются функциями координат x_1 и x_2 груза, которые **при малых смещениях** можно считать линейными

$$F_1 = -c_{11}x_1 - c_{12}x_2, \quad F_2 = -c_{21}x_1 - c_{22}x_2,$$

откуда следует, что **дифференциальные уравнения движения груза при всевозможных способах закрепления сохраняют вид** (4.4).

Коэффициенты c_{ij} зависят от формы конструкции, а также от размеров и упругих характеристик ее элементов и называются **коэффициентами жесткости** упругого закрепления груза. Они могут определяться расчетом методами, которые изучаются в курсе сопротивления материалов, либо экспериментально в статических опытах. Независимо от способа реализации упругого закрепления набор коэффициентов жесткости любого из них удовлетворяет некоторым соотношениям, которые следует учитывать при решении системы (4.4).

4.1.2. Некоторые свойства упругого закрепления

1. Конструкция, удерживающая груз, как всякая упругая система, является **консервативной** (см. раздел 1.4). Это значит, что работа ее суммарной реакции \vec{F} при любом перемещении груза полностью определяется его начальным и конечным положениями.

Зафиксируем четыре положения груза: начальное $O(0,0)$, конечное $H(x_1, x_2)$ и два промежуточных $E(x_1, 0)$ и $G(0, x_2)$. Вычислим работу силы \vec{F} на перемещении OEH , при котором на переходе из O в E $x_2 = 0 \Rightarrow dx_2 = 0$, а на переходе из E в H $x_1 = \text{const.} \Rightarrow dx_1 = 0$,

$$\begin{aligned} A_{OEH} &= \int_{OEH} dA = \int_{OEH} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 = \int_{OE} F_1(x_1, 0) dx_1 + \int_{EH} F_2(x_1, x_2) dx_2 = \\ &= \int_0^{x_1} -c_{11}x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} (-c_{21}x_1 - c_{22}x_2) dx_2 = -\left(c_{11} \frac{x_1^2}{2} + c_{21}x_1x_2 + c_{22} \frac{x_2^2}{2} \right). \end{aligned}$$

На альтернативном перемещении OGH , при котором на переходе из O в G $x_1 = 0 \Rightarrow dx_1 = 0$, а на переходе из G в H $x_2 = \text{const.} \Rightarrow dx_2 = 0$, работа этой силы равна

$$\begin{aligned} A_{OGH} &= \int_{OGH} dA = \int_{OGH} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 = \int_{OG} F_2(0, x_2) dx_2 + \int_{GH} F_1(x_1, x_2) dx_1 = \\ &= \int_0^{x_2} -c_{22}x_2 dx_2 + \int_0^{x_1} (-c_{11}x_1 - c_{12}x_2) dx_1 = -\left(c_{22} \frac{x_2^2}{2} + c_{12}x_2x_1 + c_{11} \frac{x_1^2}{2} \right). \end{aligned}$$

В силу консервативности системы работы A_{OEH} и A_{OGH} равны, т.к. начальное и ко-

нечное положения системы в перемещениях OEH и OGH совпадают. Приравнивая A_{OEH} и A_{OGH} , приходим к равенству $c_{21} = c_{12}$, выражающему известную **теорему взаимности** (см. разделы 1.4, 1.5).

2. Заметим, что в системе, изображенной на рис. 4.1, реакции \vec{F}_1 и \vec{F}_2 пружин, действующие на груз, порождают равнодействующую \vec{F} , которая, вообще говоря, **не противоположна смещению \vec{s}** , т.е. **не направлена прямо к положению равновесия**. Однако ее направление, которое зависит не только от положения груза, но и от отношения коэффициентов c_1 и c_2 жесткости пружин, должно удовлетворять некоторым естественным ограничениям. **Восстанавливающее действие** пружин выражается в том, что при смещении \vec{s} , лежащем в первой четверти, равнодействующая \vec{F} располагается в третьей четверти, а при смещении во вторую четверть она направлена в четвертую и т.д. Во всяком случае **вектор смещения \vec{s} и вектор восстанавливающей силы \vec{F} образуют тупой угол**, откуда следует, что их скалярное произведение отрицательно, $(\vec{F}, \vec{s}) < 0$. Это неравенство примем как **условие восстанавливающего действия в случае произвольного упругого закрепления груза** в плоскости.

В оправдание этого допустим, что в некотором положении \vec{s}_0 выполняется противоположное неравенство $(\vec{F}, \vec{s}_0) > 0$. В произвольном положении \vec{s} с координатами x_1 и x_2 скалярное произведение (\vec{F}, \vec{s}) равно $F_1x_1 + F_2x_2 = -(c_{11}x_1 + c_{12}x_2)x_1 - (c_{21}x_1 + c_{22}x_2)x_2 = -(c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2)$ – удвоенной работе силы \vec{F} при перемещении груза из положения $O(0,0)$ в положение $H(x_1, x_2)$ (см. выше выражение $A_{OEH} = A_{OGH}$). Поместим груз в положение \vec{s}_0 и отпустим без начальной скорости, предоставив его действию силы \vec{F} . Поскольку исходное положение груза не является положением равновесия ($(\vec{F}, \vec{s}_0) > 0$), он придет в движение и через некоторое время окажется в некотором положении \vec{s} с координатами x_1 и x_2 . Работа силы \vec{F} при перемещении груза из положения \vec{s}_0 в положение \vec{s} не зависит от траектории и равна $A_{\vec{s}_0-\vec{s}} = A_{\vec{s}_0-0-\vec{s}} = A_{\vec{s}_0-0} + A_{0-\vec{s}} = A_{0-\vec{s}} - A_{0-\vec{s}_0} = 1/2[(\vec{F}, \vec{s}) - (\vec{F}, \vec{s}_0)] = (1/2)mv^2 \geq 0$. Тогда в любой момент $(\vec{F}, \vec{s}) = (\vec{F}, \vec{s}_0) + [(\vec{F}, \vec{s}) - (\vec{F}, \vec{s}_0)] = (\vec{F}, \vec{s}_0) + mv^2 \geq (\vec{F}, \vec{s}_0) > 0$. Вычислим теперь производную от квадрата расстояния груза от положения равновесия $\frac{d}{dt}(s^2) = \frac{d}{dt}(\vec{s}, \vec{s}) = 2(\vec{s}, \frac{d\vec{s}}{dt}) = 2(\vec{s}, \vec{v})$. В начальный момент она равна нулю,

т.к. $\vec{v} = 0$. В последующие моменты она положительна, поскольку ее производная $\frac{d}{dt}(\vec{s}, \vec{v}) = (\frac{d\vec{s}}{dt}, \vec{v}) + (\vec{s}, \frac{d\vec{v}}{dt}) = (\vec{v}, \vec{v}) + (\vec{s}, \vec{a}) = v^2 + \frac{1}{m}(\vec{F}, \vec{s}) > 0$. Таким образом, всегда $\frac{d}{dt}(s^2) > 0$, откуда следует, что в рассматриваемом движении расстояние s постоянно увеличивается, т.е. груз удаляется от положения равновесия, что **несовместимо с предположением о восстанавливающем свойстве упругого закрепления**. Поэтому будем предполагать, что при любом способе упругого закрепления груза во всех положениях выполняется неравенство $(\vec{F}, \vec{s}) < 0$ (которое является частным случаем общего условия (1.3), см. также (1.14)).

В рассматриваемом нами случае оно приобретает вид

$$c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 > 0 \quad (4.5)$$

во всех положениях груза, т.е. **при любых x_1 и x_2** .

Подставляя в (4.5) сначала $x_1 = 1, x_2 = 0$, а затем $x_1 = 0, x_2 = 1$, получим два необхо-

димых (но не достаточных) условия устойчивости

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0. \quad (4.6)$$

В положении $x_1 = c_{22}$, $x_2 = -c_{12}$ квадратичное выражение в (4.5) равно

$$c_{11}c_{22}^2 - 2c_{12}^2c_{22} + c_{22}c_{12}^2 = c_{22}(c_{11}c_{22} - c_{12}^2),$$

откуда, с учетом (4.6), получим

$$c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (4.7)$$

У п р а ж н е н и е. Неравенства (4.6) и (4.7) получены нами как необходимые условия устойчивости, т.е. как следствия неравенства (4.5). Докажите, что условие (4.7) вместе с одним из условий (4.6) являются достаточными условиями устойчивости равновесного положения груза, т.е. что из этих условий следует выполнение неравенства (4.5) *при любых* x_1 и x_2 .

4.1.3. Решение дифференциальных уравнений. Главные колебания

Решением системы (4.4) является пара функций $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$, которые при подстановке в уравнения (4.4), обращают их в тождества. Характерной чертой дифференциальных уравнений является существование не одного, а бесконечного множества решений. При этом для *линейных однородных* систем, к которым принадлежит и (4.4), справедлив **принцип суперпозиции**:

Если две пары функций $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ и $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ являются решениями системы, то и линейная комбинация этих решений, т.е. пара функций

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1x_1^{(1)} + C_2x_1^{(2)}, \\ x_2 &= C_1x_2^{(1)} + C_2x_2^{(2)} \end{aligned}$$

при любых постоянных C_1 и C_2 также является решением этой системы.

Справедливость этого утверждения легко проверяется подстановкой записанных выражений в (4.4).

Принцип суперпозиции позволяет, найдя какие-либо частные решения, построить из них бесконечное множество решений в виде линейных комбинаций найденных решений. Частные же решения можно найти, отправляясь от уже рассмотренного движения груза на двух пружинах (Рис. 4.1). Как установлено в разделе 4.1.1, такой груз может совершать **прямолинейные гармонические колебания** в двух перпендикулярных направлениях с, вообще говоря, разными частотами (уравнения (4.2), (4.3)). Естественно попытаться и в случае произвольного закрепления, которому отвечает система (4.4), найти особые движения, при которых точка будет двигаться **прямолинейно**. Исходя из сказанного, будем искать решение системы (4.4) в виде функций

$$x_1 = B_1 \sin(kt + \alpha), \quad x_2 = B_2 \sin(kt + \alpha), \quad (4.8)$$

отношение которых $x_2/x_1 = B_2/B_1$ **не зависит от времени** (B_1 и B_2 постоянны).

Определение 4.1. *Главными колебаниями называется такое движение груза, при котором отношение его координат не зависит от времени.*

Для того чтобы убедиться в существовании главных колебаний, т.е., что действительно существует решение системы (4.4) вида (4.8), подставим пробные функции (4.8) в уравнения (4.4). С учетом того что $\ddot{x}_1 = -k^2 x_1$, $\ddot{x}_2 = -k^2 x_2$, получим

$$-mk^2 B_1 = -c_{11} B_1 - c_{12} B_2, \quad -mk^2 B_2 = -c_{21} B_1 - c_{22} B_2,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} mk^2 B_1 &= c_{11} B_1 + c_{12} B_2, \\ mk^2 B_2 &= c_{21} B_1 + c_{22} B_2, \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} (c_{11} - mk^2) B_1 + c_{12} B_2 &= 0, \\ c_{21} B_1 + (c_{22} - mk^2) B_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Если будут найдены значения k , B_1 и B_2 , удовлетворяющие алгебраической системе (4.9), причем хотя бы одно из B_1 и B_2 отлично от нуля, будет доказано, что при этих k , B_1 и B_2 функции (4.8) действительно являются решением дифференциальной системы (4.4), которое описывает **прямолинейные колебания** упруго закрепленного груза.

Система линейных однородных уравнений (4.9) всегда имеет «тривиальное» решение $B_1 = B_2 = 0$. При произвольно взятом значении k других решений система, вообще говоря, не имеет. Но можно подобрать такие значения k , при которых два уравнения системы (4.9) будут по сути представлять одно, т.е. одно из уравнений получается из другого умножением на какое-либо число. Для разыскания этих значений введем обозначение $mk^2 = \lambda$ и перепишем систему (4.9) в виде

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - \lambda) B_1 + c_{12} B_2 &= 0, \\ c_{21} B_1 + (c_{22} - \lambda) B_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Выразим отношение $r = B_2/B_1$ вначале из первого, а затем из второго уравнений:

$$r = \frac{B_2}{B_1} = \frac{\lambda - c_{11}}{c_{12}} = \frac{c_{12}}{\lambda - c_{22}}, \quad (4.11)$$

откуда придем к квадратному уравнению

$$(\lambda - c_{11})(\lambda - c_{22}) - c_{12}^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (c_{11} + c_{22})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0, \quad (4.12)$$

имеющему два корня, которые, как известно, определяются формулами

$$\lambda_1 = \frac{c_{11} + c_{22} - \sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}}{2} = \frac{c_{11} + c_{22} - \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}^2}}{2}, \quad (4.13)$$

$$\lambda_2 = \frac{c_{11} + c_{22} + \sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}}{2} = \frac{c_{11} + c_{22} + \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}^2}}{2}.$$

Числа λ_1 и λ_2 принято нумеровать **в порядке возрастания**, т.е. **всегда** $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Таким образом, оказывается, что система (4.10) имеет **нетривиальное решение** лишь в двух случаях, когда λ становится равным одному из найденных чисел λ_1 или λ_2 . Само

это решение, т.е. пара чисел B_1 и B_2 определяется из (4.11), причем лишь с точностью до постоянного множителя, т.к. легко видеть, что если числа B_1 и B_2 – решение системы (4.10), то и bB_1 и bB_2 при любом b – тоже решение этой системы. Поэтому обычно все бесконечное множество пар bB_1 , bB_2 рассматривают как одно решение системы. Как правило, из этого бесконечного множества выбирают одно нормированное решение.

Определение 4.2. *Нормированным* называется такое решение однородной линейной системы (4.10), которое удовлетворяет соотношению $B_1^2 + B_2^2 = 1$.

Чтобы из какого-либо решения B_1 , B_2 построить нормированное, достаточно умножить каждое из чисел B_1 и B_2 на $b = 1/\sqrt{B_1^2 + B_2^2}$. Если решение задается отношением $r = B_2/B_1$, то нормированным решением будет пара $B_1 = 1/\sqrt{1+r^2}$, $B_2 = r/\sqrt{1+r^2}$.

В дальнейшем всюду предполагается, что все рассматриваемые решения однородных линейных систем нормированы.

Подставляя λ_1 и λ_2 в (4.11), найдем два различных отношения координат

$$r_1 = \frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} = \frac{\lambda_1 - c_{11}}{c_{12}}, \quad r_2 = \frac{B_2^{(2)}}{B_1^{(2)}} = \frac{\lambda_2 - c_{11}}{c_{12}}. \quad (4.14)$$

Это значит, что существует два различных нетривиальных решения $(B_1^{(1)}, B_2^{(1)})$ и $(B_1^{(2)}, B_2^{(2)})$ системы (4.10), которым отвечают два прямолинейных движения груза, являющихся главными колебаниями.

Установленные в разделе 4.1.2 неравенства (4.6) и (4.7) позволяют утверждать, что числа λ_1 и λ_2 положительны, т.к. радикал в числителях (4.13) неотрицателен и меньше $c_{11} + c_{22}$. Тогда существуют и числа

$$k_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{m}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{m}}, \quad (4.15)$$

которые представляют собой круговые частоты различных главных колебаний. **Наименьшую** из них k_1 называют **основной** частотой, а соответствующие ей главные колебания – **основными главными колебаниями** (иногда основным главным колебанием).

Главные колебания представляют собой частные решения системы (4.4), которые позволяют, используя принцип суперпозиции, построить бесконечное множество ее решений в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 B_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2 B_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ x_2 &= C_1 B_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2 B_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где четыре произвольных постоянных C_1 , C_2 , α_1 , α_2 можно подобрать так, чтобы получить частное решение, удовлетворяющее произвольным начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad \dot{x}_1(t_0) = v_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad \dot{x}_2(t_0) = v_{20}. \quad (4.17)$$

То, что других решений, кроме (4.16), система (4.4) не имеет, доказывается в курсах математики.

Числа B_1 и B_2 можно рассматривать как проекции вектора \bar{B} на оси x_1 и x_2 . Тогда

нетривиальным решениям системы (4.10), отвечающим различным λ_1 и λ_2 , соответствуют векторы \bar{B}_1 и \bar{B}_2 , имеющие направления прямых, по которым могут происходить главные колебания. Используя эти векторы, можно описать главные колебания **векторным способом**. При этом вместо уравнений (4.8), задающих движение груза **координатным способом**, будем иметь соответственно для первого и второго главных колебаний

$$\vec{r} = \bar{B}_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad \vec{r} = \bar{B}_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad (4.18)$$

а вместо (4.16) – уравнение

$$\vec{r} = C_1 \bar{B}_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2 \bar{B}_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \quad (4.19)$$

4.1.4. Свойства главных колебаний точечного груза

Как следует из определения 4.1, при главных колебаниях отношение координат груза $x_2/x_1 = B_2/B_1 = r$ постоянно. Это значит, что его движение происходит вдоль прямой $x_2 = r x_1$. Результаты предыдущего раздела показывают, что, вообще говоря, существуют всего две различные прямые, вдоль которых могут происходить главные колебания, откуда следует

Свойство 1. Существуют две различные прямые, по которым могут происходить главные колебания.

Уравнения этих прямых имеют вид

$$x_2 = r_1 x_1, \quad x_2 = r_2 x_1,$$

где r_1 и r_2 определяются соотношениями (4.14). Соотношения (4.8) показывают, что главные колебания являются гармоническими. Частоты главных колебаний определяются равенствами (4.15). Обратим внимание на то, что и (4.14), и (4.15) получены из системы (4.9), в которую входят только **постоянные характеристики** рассматриваемой **механической системы**: масса груза и коэффициенты жесткости упругого закрепления. Отсюда следует

Свойство 2. Направления и частоты главных колебаний не зависят от начальных условий, а определяются упруго-инерционными характеристиками системы.

По этой причине частоты главных колебаний называют также **собственными** частотами.

Установим некоторые свойства чисел λ_1 и λ_2 (см. (4.13)), являющихся корнями уравнения (4.12).

Вычислив их сумму из (4.13), придем к результату

$$\lambda_1 + \lambda_2 = c_{11} + c_{22}. \quad (4.20)$$

Подставим в уравнение (4.12) (правая форма) один из его корней, например λ_1 , и перепишем его в виде

$$\lambda_1 [\lambda_1 - (c_{11} + c_{22})] + c_{11} c_{22} - c_{12}^2 = 0,$$

что, с учетом (4.20), позволяет записать $-\lambda_1 \lambda_2 + c_{11} c_{22} - c_{12}^2 = 0$, откуда

$$\lambda_1 \lambda_2 = c_{11} c_{22} - c_{12}^2. \quad (4.21)$$

Установленные соотношения (4.20) и (4.21) позволяют сформулировать

Свойство 3. Частоты главных колебаний удовлетворяют соотношениям

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{c_{11} + c_{22}}{m}, \quad k_1^2 \cdot k_2^2 = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{m^2}.$$

Отметим попутно полезные оценки для чисел λ_1 и λ_2 . Из (4.20) следует, что $\lambda_1 - c_{22} = c_{11} - \lambda_2$. Тогда из уравнения (4.12) (левая форма)

$$(\lambda_1 - c_{11})(\lambda_1 - c_{22}) - c_{12}^2 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - c_{11})(\lambda_2 - c_{11}) = -c_{12}^2 \leq 0,$$

т.е. $(\lambda_1 - c_{11})$ и $(\lambda_2 - c_{11})$ имеют разные знаки, откуда следует первое из следующих неравенств

$$\lambda_1 \leq c_{11} \leq \lambda_2, \quad \lambda_1 \leq c_{22} \leq \lambda_2. \quad (4.22)$$

Второе устанавливается аналогично.

Следующее свойство главных колебаний касается взаимной ориентации их направлений. Подставим в систему (4.9) одно из ее нетривиальных решений $(B_1^{(1)}, B_2^{(1)})$ и запишем ее в виде

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 B_1^{(1)} &= c_{11} B_1^{(1)} + c_{12} B_2^{(1)}, \\ \lambda_1 B_2^{(1)} &= c_{21} B_1^{(1)} + c_{22} B_2^{(1)}, \end{aligned} \right\} \begin{cases} B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \end{cases} \quad (4.23)$$

Умножив первое уравнение на $B_1^{(2)}$, второе – на $B_2^{(2)}$, где $(B_1^{(2)}, B_2^{(2)})$ – второе нетривиальное решение, отвечающее λ_2 , и сложив, получим

$$\lambda_1 (B_1^{(1)} B_1^{(2)} + B_2^{(1)} B_2^{(2)}) = c_{11} B_1^{(1)} B_1^{(2)} + c_{12} (B_2^{(1)} B_1^{(2)} + B_1^{(1)} B_2^{(2)}) + c_{22} B_2^{(1)} B_2^{(2)}.$$

Если теперь повторить все эти действия, поменяв ролями решения $(B_1^{(1)}, B_2^{(1)})$ и $(B_1^{(2)}, B_2^{(2)})$ и соответственно λ_1 и λ_2 , придем к аналогичному соотношению

$$\lambda_2 (B_1^{(2)} B_1^{(1)} + B_2^{(2)} B_2^{(1)}) = c_{11} B_1^{(2)} B_1^{(1)} + c_{12} (B_2^{(2)} B_1^{(1)} + B_1^{(2)} B_2^{(1)}) + c_{22} B_2^{(2)} B_2^{(1)}.$$

Вычитая из этого уравнения предыдущее и замечая, что правые части обоих уравнений одинаковы (благодаря взаимности $c_{12} = c_{21}$), придем к равенству

$$(\lambda_2 - \lambda_1) (B_1^{(2)} B_1^{(1)} + B_2^{(2)} B_2^{(1)}) = 0 \Rightarrow B_1^{(2)} B_1^{(1)} + B_2^{(2)} B_2^{(1)} = 0, \quad (4.24)$$

поскольку λ_1 и λ_2 , вообще говоря, различны (см. (4.13)). Полученный результат имеет простой геометрический смысл. Рассматривая B_1 и B_2 как проекции вектора \bar{B} на оси x_1 и x_2 , нетривиальные решения системы (4.10), отвечающие различным λ_1 и λ_2 , будем толковать как векторы \bar{B}_1 и \bar{B}_2 , имеющие направления прямых, по которым могут происходить главные колебания. Тогда равенство (4.24) означает, что скалярное произведение (\bar{B}_1, \bar{B}_2) этих векторов равно нулю, т.е. они перпендикулярны. Таким образом, установлено

Свойство 4. Теорема ортогональности: *Направления главных колебаний, соответствующих различным собственным частотам, ортогональны.*

Ранее это свойство было отмечено в частном случае рис. 4.1. Теперь оно установлено для произвольного способа упругого закрепления груза в плоскости.

Обозначим через φ **острый** (точнее, не тупой) угол, образованный направлением первого главного колебания с осью x_1 (см. рис. 4.3).

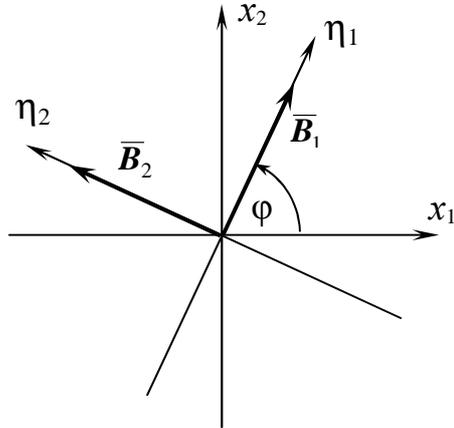


Рис. 4.3

Тогда проекции **нормированного** вектора \bar{B}_1 на оси x_1 и x_2 соответственно равны $B_1^{(1)} = \cos \varphi$, $B_2^{(1)} = \sin \varphi$. Вектор \bar{B}_2 выберем так, чтобы поворот на прямой угол от \bar{B}_1 к \bar{B}_2 происходил против часовой стрелки (как от оси x_1 к оси x_2). Тогда его проекции на оси x_1 и x_2 соответственно будут равны $B_1^{(2)} = \cos(\varphi + \pi/2) = -\sin \varphi$, $B_2^{(2)} = \sin(\varphi + \pi/2) = \cos \varphi$. Таким образом, направления обоих главных колебаний полностью определяются одним числом φ . Чтобы построить эти направления, следует вычислить φ и повернуть оси x_1 и x_2 на угол $|\varphi|$ про-

тив часовой стрелки, если $\varphi > 0$, и по часовой – если $\varphi < 0$. Проще всего вычислить φ из левого соотношения (4.14):

$$\frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_1 - c_{11}}{c_{12}}. \quad (4.25)$$

4.1.5. Связь коэффициентов жесткости с главными колебаниями

Коэффициенты жесткости c_{ij} упругого закрепления груза зависят не только от механических характеристик подкрепляющей конструкции, но и от выбранной системы координат. Зная направления главных колебаний (угол φ) и соответствующие им числа λ_1 и λ_2 , можно вычислить эти коэффициенты. Подставим в первое из уравнений (4.10) поочередно первое $B_1^{(1)} = \cos \varphi$, $B_2^{(1)} = \sin \varphi$ и второе $B_1^{(2)} = -\sin \varphi$, $B_2^{(2)} = \cos \varphi$ ее нетривиальные решения

$$\begin{cases} c_{11} \cos \varphi + c_{12} \sin \varphi = \lambda_1 \cos \varphi, \\ c_{11} (-\sin \varphi) + c_{12} \cos \varphi = \lambda_2 (-\sin \varphi). \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Умножая первое уравнение на $\cos \varphi$, второе – на $-\sin \varphi$ и складывая, приходим к первому из соотношений (4.26). Умножая первое уравнение на $\sin \varphi$, второе – на $\cos \varphi$ и складывая, приходим к третьему из соотношений (4.26). Второе получается из первого при помощи (4.20) $c_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 - c_{11}$.

$$\begin{aligned} c_{11} &= \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi, & c_{22} &= \lambda_1 \sin^2 \varphi + \lambda_2 \cos^2 \varphi, \\ c_{12} &= (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \varphi \cos \varphi = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Одной из основных задач динамики инженерных сооружений является определение собственных частот и **форм** их главных колебаний по заданным упругим и инерционным характеристикам (понятие формы собственных колебаний является обобщением направления главных колебаний на случай многоточечных и континуальных упругих систем и будет рассмотрено ниже). Применительно к плоской одномассовой системе эта задача решена в разделах 4.1.3 и 4.1.4. Соотношения (4.26) решают в известном смысле **обратную задачу**: по заданным собственным частотам главных колебаний (λ_1 и λ_2) и их направлениям (φ) определить характеристики жесткости упругого закрепления груза.

При **заданной** конструкции, т.е. при фиксированных значениях λ_1 и λ_2 и соответствующих им неизменных направлениях главных колебаний изменение угла φ можно толковать как поворот осей x_1 и x_2 . Тогда соотношения (4.26) устанавливают зависимость коэффициентов жесткости заданного упругого закрепления от ориентации осей. При этом изменение этих коэффициентов связано не с какими-либо изменениями в самой конструкции, а только с переходом к другим координатам.

Проведем оси η_1 и η_2 в направлениях главных колебаний, которые указываются ортами \bar{B}_1 и \bar{B}_2 , построенными выше (см. рис. 4.3). Как следует из (4.26), если оси x_1 и x_2 совместить с этими направлениями, так чтобы ось x_1 соответствовала движению с частотой $k_1 = \sqrt{\lambda_1/m}$, при этом $\varphi = 0$, то в такой системе координат будет $c_{12} = 0$, $c_{11} = \lambda_1$, $c_{22} = \lambda_2$, т.е. система (4.4) распадется на независимые уравнения и примет вид (4.1):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\eta}_1 &= -c_{11}\eta_1 - c_{12}\eta_2 = -\lambda_1\eta_1, \\ m\ddot{\eta}_2 &= -c_{21}\eta_1 - c_{22}\eta_2 = -\lambda_2\eta_2, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m\ddot{\eta}_1 + \lambda_1\eta_1 &= 0, \\ m\ddot{\eta}_2 + \lambda_2\eta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

В этих уравнениях η_1 и η_2 – координаты груза относительно осей η_1 и η_2 .

Оси, имеющие направления главных колебаний, называют **главными осями**, а координаты груза относительно этих осей – **главными координатами**. Связь между исходными координатами x_1 и x_2 и главными координатами η_1 и η_2 выражается известными из аналитической геометрии соотношениями (см. рис. 4.3)

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ \eta_2 &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= \eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi, \\ x_2 &= \eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

4.1.6. Обратный метод составления уравнений движения

Прием, с помощью которого в разделе 4.1.1 были составлены дифференциальные уравнения (4.4) движения груза, можно назвать прямым, поскольку он основан на стандартной форме дифференциальных уравнений движения материальной точки. В некоторых случаях бывает удобнее пользоваться другим приемом. Наряду с силой \vec{F} реакции, действующей на груз со стороны упругого закрепления, рассмотрим противоположную силу $\vec{P} = -\vec{F}$, с которой груз действует на поддерживающую упругую конструкцию. Тогда справедливы уравнения

$$\begin{aligned} P_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\ P_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где P_1 и P_2 – проекции силы \vec{P} на оси x_1 и x_2 , c_{ij} – коэффициенты жесткости закрепления из раздела 4.1.1.

Уравнения (4.29) показывают какую силу нужно приложить к конструкции в точке крепления груза, чтобы переместить эту точку из положения равновесия в положение с координатами x_1 и x_2 . Систему (4.29) можно разрешить относительно координат x_1 и x_2

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2, \\ x_2 &= \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Система (4.30) показывает, каким будет *статическое* перемещение точки крепления груза, если приложить к ней силу \vec{P} . Коэффициенты δ_{ij} этой системы называются *коэффициентами податливости* или *коэффициентами влияния* закрепления. Они, как и коэффициенты жесткости c_{ij} , определяются формой опорной конструкции, а также упруго-геометрическими характеристиками ее элементов. Заметим, что два набора коэффициентов δ_{ij} и c_{ij} аналитически (и даже рационально) выражаются один через другой, а системы (4.29) и (4.30) математически эквивалентны, т.е. любая из них может быть получена из другой.

Для коэффициентов податливости δ_{ij} справедливы все соотношения, установленные в разделе 4.1.2 для коэффициентов жесткости c_{ij} .

1. Независимость от порядка индексов: $\delta_{21} = \delta_{12}$. Для читателей, знакомых с линейной алгеброй, этот факт известен как свойство матрицы, обратной к симметричной. В рассматриваемом случае его можно доказать следующими рассуждениями.

Приложим к точке единичную вертикальную силу $P_1 = 0$, $P_2 = 1$. При этом, как следует из (4.30), проекции ее перемещения составят $x_1 = \delta_{12}$, $x_2 = \delta_{22}$. Подставляя их в первую строку (4.29), найдем $P_1 = c_{11}\delta_{12} + c_{12}\delta_{22} = 0$. Теперь сообщим грузу перемещение, при котором $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Для этого, как следует из (4.29), к нему нужно приложить силу, проекции которой равны $P_1 = c_{11}$, $P_2 = c_{21}$. Подставляя их во вторую строку (4.30), найдем $x_2 = \delta_{21}c_{11} + \delta_{22}c_{21} = 0$. Сопоставляя полученные результаты, получим $\delta_{21} = \delta_{12}$.

2. Условие устойчивости (4.5) может быть преобразовано

$$\begin{aligned} c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 &= (c_{11}x_1 + c_{12}x_2)x_1 + (c_{12}x_1 + c_{22}x_2)x_2 = P_1x_1 + P_2x_2 = \\ &= (\delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2)P_1 + (\delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2)P_2 = \delta_{11}P_1^2 + 2\delta_{12}P_1P_2 + \delta_{22}P_2^2 > 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

откуда, как в разделе 4.1.2, выводятся неравенства

$$\delta_{11} > 0, \quad \delta_{22} > 0, \quad \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2 > 0. \quad (4.32)$$

Поскольку проекции на оси x_1 и x_2 силы, действующей на груз, равны соответственно $m\ddot{x}_1$ и $m\ddot{x}_2$, то $P_1 = -m\ddot{x}_1$ и $P_2 = -m\ddot{x}_2$ и на основании (4.30) получим

$$\begin{aligned} x_1 &= -\delta_{11}m\ddot{x}_1 - \delta_{12}m\ddot{x}_2, \\ x_2 &= -\delta_{21}m\ddot{x}_1 - \delta_{22}m\ddot{x}_2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Эта система эквивалентна системе (4.4) и наравне с ней может служить для определения координат x_1 и x_2 как функций времени. Какую из систем использовать, зависит от того, какую из них легче составить и решить. Например, для закрепления в виде системы пружин легче вычислить коэффициенты жесткости c_{ij} (см. раздел 4.1.1), а для рамной конструкции типа рис. 4.2 удобнее использовать податливости δ_{ij} .

Поведение груза не зависит от способа его описания. Поэтому и системы (4.4) и (4.33) имеют одни и те же решения, которые можно найти из любой из них. Чтобы решить систему (4.33), поступим, как и в разделе 4.1.3, т.е. найдем вначале главные колебания, подставляя соответствующие уравнения (4.8) в (4.33). Получим алгебраическую систему

$$\begin{aligned} B_1 &= \delta_{11}mk^2 B_1 + \delta_{12}mk^2 B_2, & \delta_{11}B_1 + \delta_{12}B_2 &= \mu B_1, \\ B_2 &= \delta_{21}mk^2 B_1 + \delta_{22}mk^2 B_2. & \Leftrightarrow \delta_{21}B_1 + \delta_{22}B_2 &= \mu B_2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где обозначено $\mu = 1/mk^2$. Главным колебаниям отвечают нетривиальные (ненулевые) решения B_1, B_2 этой системы, которые существуют только при значениях μ , удовлетворяющих соотношению

$$r = \frac{B_2}{B_1} = \frac{\mu - \delta_{11}}{\delta_{12}} = \frac{\delta_{12}}{\mu - \delta_{22}} \quad (4.35)$$

и соответственно

$$(\mu - \delta_{11})(\mu - \delta_{22}) - \delta_{12}^2 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - (\delta_{11} + \delta_{22})\mu + \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2 = 0. \quad (4.36)$$

Существует два таких значения, которые равны

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\delta_{11} + \delta_{22} + \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2} = \frac{\delta_{11} + \delta_{22} + \sqrt{(\delta_{11} - \delta_{22})^2 + 4\delta_{12}^2}}{2}, \\ \mu_2 &= \frac{\delta_{11} + \delta_{22} - \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2} = \frac{\delta_{11} + \delta_{22} - \sqrt{(\delta_{11} - \delta_{22})^2 + 4\delta_{12}^2}}{2}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Им отвечают прямолинейные колебания двух направлений

$$r_1 = \frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} = \frac{\mu_1 - \delta_{11}}{\delta_{12}}, \quad r_2 = \frac{B_2^{(2)}}{B_1^{(2)}} = \frac{\mu_2 - \delta_{11}}{\delta_{12}} \quad (4.38)$$

с частотами соответственно

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{m\mu_1}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{1}{m\mu_2}}. \quad (4.39)$$

Все свойства колебаний, установленные ранее (см. раздел 4.1.4), можно было бы вывести и из обратной формы уравнений. Отметим лишь ряд соотношений, которым удовлетворяют числа $\mu_1 = 1/mk_1^2$ и $\mu_2 = 1/mk_2^2$:

$$\mu_1 + \mu_2 = \delta_{11} + \delta_{22}, \quad \mu_1 \mu_2 = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2, \quad \mu_2 \leq \delta_{11}, \delta_{22} \leq \mu_1. \quad (4.40)$$

Справедливы также соотношения – аналоги (4.26)

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \mu_1 \cos^2 \varphi + \mu_2 \sin^2 \varphi, & \delta_{22} &= \mu_1 \sin^2 \varphi + \mu_2 \cos^2 \varphi, \\ \delta_{12} &= (\mu_1 - \mu_2) \sin \varphi \cos \varphi = \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (4.41)$$

4.2. Свободные колебания двухмассовых систем. Обобщения

Существует большое разнообразие упругих систем с двумя степенями свободы. Примеры таких систем показаны на Рис. 4.4 и 4.5. Положение каждой из этих систем определяется двумя координатами, в качестве которых для левой системы принимаются горизонтальные смещения x_1 и x_2 грузов M_1 и M_2 от их равновесных положений соответственно O_1 и O_2 , а для правой – вертикальные прогибы y_1 и y_2 упругой балки, несущей сосредоточенные грузы M_1 и M_2 .

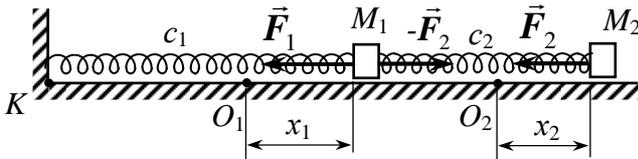


Рис. 4.4

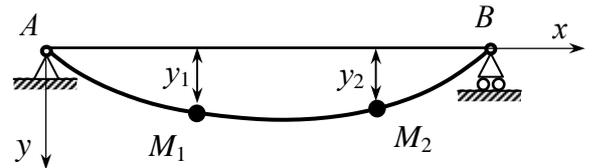


Рис. 4.5

Чтобы вывести систему из положения равновесия, необходимо некоторое возмущающее воздействие, которое сообщает ее точкам некоторые смещения и некоторые начальные скорости. Если после этого освободить систему от возмущающего воздействия, то она будет совершать движение, называемое свободным.

Определение 4.3. *Свободным* называется такое движение упругой системы, которое происходит под действием только восстанавливающих сил.

Составим дифференциальные уравнения свободного движения предложенных двухмассовых систем.

Для системы на рис. 4.4 удлинение первой пружины равно x_1 , а удлинение второй пружины, обусловленное перемещениями обоих грузов, равно $x_2 - x_1$. Считая реакции пружин \vec{F}_1 и \vec{F}_2 пропорциональными их удлинениям и обозначая коэффициенты жесткости пружин соответственно через c_1 и c_2 , запишем дифференциальные уравнения движения грузов в проекции на горизонтальные оси x_1 и x_2 :

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -c_2 (x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -(c_1 + c_2) x_1 + c_2 x_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= c_2 x_1 - c_2 x_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

где m_1 и m_2 – массы грузов M_1 и M_2 соответственно.

В системе, изображенной на рис. 4.5, сила реакции упругой балки, приложенная к каждому из грузов, является линейной функцией перемещений y_1 и y_2 грузов из их положе-

ний равновесия, что позволяет записать

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -c_{11}y_1 - c_{12}y_2, \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -c_{21}y_1 - c_{22}y_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Можно, как было сделано в разделе 4.1.6, составить уравнения движения грузов обратным способом

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -\delta_{11}m_1\ddot{y}_1 - \delta_{12}m_2\ddot{y}_2, \\ y_2 &= -\delta_{21}m_1\ddot{y}_1 - \delta_{22}m_2\ddot{y}_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Здесь коэффициент влияния δ_{ij} равен прогибу балки в точке размещения i -го груза от единичной вертикальной силы, приложенной в точке размещения j -го груза.

При решении конкретных задач использование одной из систем (4.43) или (4.44) может дать существенное упрощение по сравнению с другой. Однако, поскольку движение механической системы не зависит от способа его описания, общие свойства движения двухмассовых систем можно установить, пользуясь какой-либо одной из них, например (4.43).

Сравнивая системы (4.42) и (4.43), можно обнаружить их сходство. В математическом отношении система (4.42) является частным случаем (4.43). Поэтому (4.43) можно рассматривать как общий вид уравнений движения широкого класса двухмассовых упругих систем. Желая исследовать общие свойства движений таких систем, обозначим, как принято в аналитической механике, координаты грузов через q_1 и q_2 . При этом включаются в рассмотрение и рис. 4.4, где $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, и рис. 4.5, где $q_1 = y_1$, $q_2 = y_2$, и многие другие подобные системы, движение которых описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 &= -c_{11}q_1 - c_{12}q_2, \\ m_2 \ddot{q}_2 &= -c_{21}q_1 - c_{22}q_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

в которых в силу консервативности и устойчивости равновесного положения выполняются соотношения $c_{21} = c_{12}$, $c_{11} > 0$, $c_{22} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$.

4.2.1. Уравнения свободного движения двухмассовых систем. Главные колебания

Поскольку (4.45) лишь незначительно отличается от уже рассмотренной системы (4.4), ее решение будем искать по образцу решения этой системы в разделе 4.1.3.

Вначале ищутся частные решения в виде *главных колебаний*.

Определение 4.4. *Главными колебаниями называется такое движение системы, при котором отношение ее координат не зависит от времени.*

Как и в разделе 4.1.3, уравнения главных колебаний разыскиваем в виде функций

$$q_1 = B_1 \sin(kt + \alpha), \quad q_2 = B_2 \sin(kt + \alpha), \quad (4.46)$$

при которых каждый груз совершает гармонические колебания с одинаковой фазой $kt + \alpha$, одновременно проходя через положение равновесия и одновременно достигая крайних положений.

Подставляя (4.46) в (4.45), приходим к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} m_1 k^2 B_1 &= c_{11} B_1 + c_{12} B_2, \\ m_2 k^2 B_2 &= c_{21} B_1 + c_{22} B_2, \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} (c_{11} - m_1 k^2) B_1 + c_{12} B_2 &= 0, \\ c_{21} B_1 + (c_{22} - m_2 k^2) B_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

Как и в разделе 4.1.3, найдем нетривиальные решения этой системы, выразив отношения координат из каждого уравнения и приравняв их (см. (4.11))

$$r = \frac{B_2}{B_1} = \frac{m_1 k^2 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{c_{12}}{m_2 k^2 - c_{22}}, \quad (4.48)$$

откуда придем к квадратному уравнению относительно квадрата частоты k^2

$$(m_1 k^2 - c_{11})(m_2 k^2 - c_{22}) - c_{12}^2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 k^4 - (c_{11} m_2 + c_{22} m_1) k^2 + c_{11} c_{22} - c_{12}^2 = 0. \quad (4.49)$$

Уравнение (4.49), полученное как *необходимое и достаточное условие существования ненулевых решений* системы (4.47) и определяющее частоты соответствующих движений, называется *уравнением частот* или *частотным уравнением*.

Корни этого уравнения

$$k_1^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_{11}}{m_1} + \frac{c_{22}}{m_2} \right) - \sqrt{\left(\frac{c_{11}}{m_1} + \frac{c_{22}}{m_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{c_{11}}{m_1} \cdot \frac{c_{22}}{m_2} - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} \right)} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_{11}}{m_1} + \frac{c_{22}}{m_2} \right) - \sqrt{\left(\frac{c_{11}}{m_1} - \frac{c_{22}}{m_2} \right)^2 + \frac{4c_{12}^2}{m_1 m_2}} \right]$$

и

$$k_2^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_{11}}{m_1} + \frac{c_{22}}{m_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{c_{11}}{m_1} + \frac{c_{22}}{m_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{c_{11}}{m_1} \cdot \frac{c_{22}}{m_2} - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} \right)} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_{11}}{m_1} + \frac{c_{22}}{m_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{c_{11}}{m_1} - \frac{c_{22}}{m_2} \right)^2 + \frac{4c_{12}^2}{m_1 m_2}} \right]$$

определяют круговые частоты главных колебаний (собственные частоты), а соответствующие отношения координат (не зависящие от времени)

$$r_1 = \frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} = \frac{m_1 k_1^2 - c_{11}}{c_{12}}, \quad r_2 = \frac{B_2^{(2)}}{B_1^{(2)}} = \frac{m_1 k_2^2 - c_{11}}{c_{12}} - \quad (4.50)$$

– формы главных колебаний (собственные формы).

Определение 4.5. *Формой* главных колебаний или *собственной формой упругой системы, соответствующей некоторой собственной частоте, называется такое положение системы, в котором ее координаты находятся в тех же отношениях, что и при соответствующих главных колебаниях.*

При этом предполагается, что координаты выбраны так, что дифференциальные уравнения движения системы являются линейными, т.е. имеют вид (4.45).

Часто не делают различия между положением системы и набором значений координат, определяющим это положение. Поэтому под формой иногда понимают не само положение системы, а соответствующую занумерованную совокупность чисел – координат этого положения.

Форма определяется неоднозначно. Если некоторое положение с координатами q_1 и q_2 представляет собой собственную форму, то и положение с координатами bq_1 и bq_2 при любом b также является собственной формой, соответствующей той же частоте.

Например, в случае плоской одномассовой системы формами являются положения

груза, расположенные на прямых $b_1\bar{B}_1$ и $b_2\bar{B}_2$ (рис. 4.3), т.е. формы можно отождествить с направлениями главных колебаний. В общем случае, когда q_1 и q_2 не являются декартовыми координатами, например как на рис. 4.4, 4.5, их отношение может не иметь никакого геометрического смысла и не связано с каким-либо направлением в пространстве.

Отметим **важное обстоятельство**: частоты и формы главных колебаний полностью определяются системой (4.47), куда входят **только постоянные коэффициенты жесткости и массы грузов**.

Чтобы окончательно убедиться в **возможности** главных колебаний, т.е. в существовании частных решений вида (4.46) системы (4.45), следует убедиться в том, что частоты k_1 и k_2 предполагаемых колебаний **вещественны**, т.е., что их квадраты k_1^2 и k_2^2 , являющиеся корнями квадратного уравнения (4.49), положительны. Это легко доказать на основании неравенств $c_{11} > 0$, $c_{22} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$, как и в разделе 4.1.3 при установлении положительности чисел λ_1 и λ_2 .

Таким образом, нами найдено два различных частных решения системы (4.45), которые описывают главные колебания с частотами k_1 и k_2 . Принцип суперпозиции позволяет теперь утверждать, что пара функций

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 B_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2 B_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= C_1 B_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2 B_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (4.51)$$

при любых значениях постоянных C_1 , C_2 , α_1 , α_2 также является решением этой системы. В курсах математики доказывается, что функции (4.51) представляют собой **общее решение** системы (4.45), т.е. что любое ее частное решение содержится в (4.51) при некоторых значениях указанных четырех постоянных. Эти значения в конкретном движении определяются четырьмя начальными условиями

$$q_1(t_0) = q_{10}, \quad \dot{q}_1(t_0) = v_{10}, \quad q_2(t_0) = q_{20}, \quad \dot{q}_2(t_0) = v_{20}, \quad (4.52)$$

где q_{10} и q_{20} – значения обобщенных координат в начальный момент t_0 , v_{10} и v_{20} – значения их производных по времени («обобщенных скоростей») в тот же момент. В частности, при некоторых начальных значениях q_{10} , q_{20} , v_{10} и v_{20} может оказаться $C_2 = 0$ ($C_1 = 0$). Тогда движение системы будет главными колебаниями с частотой k_1 (k_2). В общем случае движение, описываемое уравнениями (4.51), не является в точном смысле колебаниями, но эти уравнения устанавливают следующую теорему.

Теорема 4.1. *Свободное движение линейно-упругой двухмассовой системы является наложением (суперпозицией) двух движений, являющихся главными колебаниями, амплитуды и начальные фазы которых определяются начальными условиями.*

Частоты и формы главных колебаний не зависят от начальных условий, а определяются постоянными характеристиками системы, определяющими ее упругие и инерционные свойства.

4.2.2. Примеры определения главных колебаний двухмассовых систем

Пример 1. Определить собственные частоты и формы колебаний системы, изображенной на Рис. 4.4, приняв $c_1 = c_2 = c$, $m_2 = m$, $m_1 = 2m$.

Системы (4.42) и (4.47) в этом случае принимают вид

$$\left. \begin{aligned} 2m\ddot{x}_1 &= -2cx_1 + cx_2, \\ m\ddot{x}_2 &= cx_1 - cx_2 \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} (2c - 2mk^2)B_1 - cB_2 &= 0 \\ -cB_1 + (c - mk^2)B_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

а уравнение (4.49)

$$2(mk^2 - c)^2 - c^2 = 0, \quad (4.54)$$

откуда находим два значения для квадратов собственных частот

$$k_1^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c}{m}, \quad k_2^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c}{m},$$

а сами частоты равны $k_1 = 0,541\sqrt{c/m}$ и $k_2 = 1,307\sqrt{c/m}$. Формы главных колебаний определяются из соотношений (4.50), которые с учетом (4.54) приводят к результатам

$$r_1 = \frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} = \frac{2(mk_1^2 - c)}{-c} = \sqrt{2} = 1,414, \quad r_2 = \frac{B_2^{(2)}}{B_1^{(2)}} = \frac{2(mk_2^2 - c)}{-c} = -\sqrt{2} = -1,414.$$

Эти формы показаны на рис. 4.6

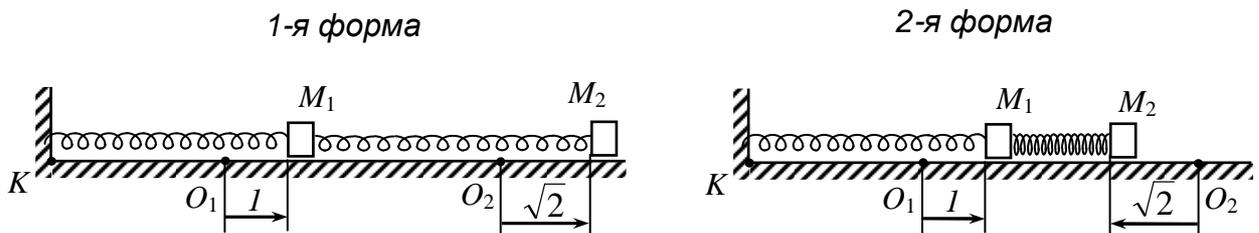


Рис. 4.6

При колебаниях по первой форме с частотой $k_1 = 0,541\sqrt{c/m}$ направления смещений обоих грузов совпадают. При колебаниях по второй форме с высшей частотой $k_2 = 1,307\sqrt{c/m}$ смещения грузов имеют противоположные направления.

4.2.2.1. Исследование поперечных колебаний балки с двумя точечными грузами

Пример 2. Определить собственные частоты и формы поперечных колебаний балки, изображенной на рис. 4.5. Предполагается, что балка свободно оперта, имеет постоянное сечение, грузы располагаются симметрично на расстоянии одной трети длины балки, $m_1 = 13m$, $m_2 = 4m$.

При исследовании поперечных колебаний балок удобно использовать обратную форму уравнений движения, поскольку в этом случае проще вычислить коэффициенты влияния, чем коэффициенты жесткости. Это вычисление выполняется методами сопротивления материалов, однако, не зная сопромата, опираясь на принцип суперпозиции и используя симметрию системы, можно определить соотношения между коэффициентами влияния, входящими в уравнения (4.44). Интересующиеся исключительно вопросами теории колебаний следующий раздел могут пропустить и считать коэффициенты уравнений заданными (например, определенными из опытов). Однако использованные в нем соображения могут оказаться поучи-

тельными как пример работы с моделью упругого тела.

4.2.2.1.1. Элементы теории изгиба

Рассмотрим тонкий упругий стержень, который изгибается двумя парами с моментом M , приложенными к его концевым сечениям (рис. 4. 7).

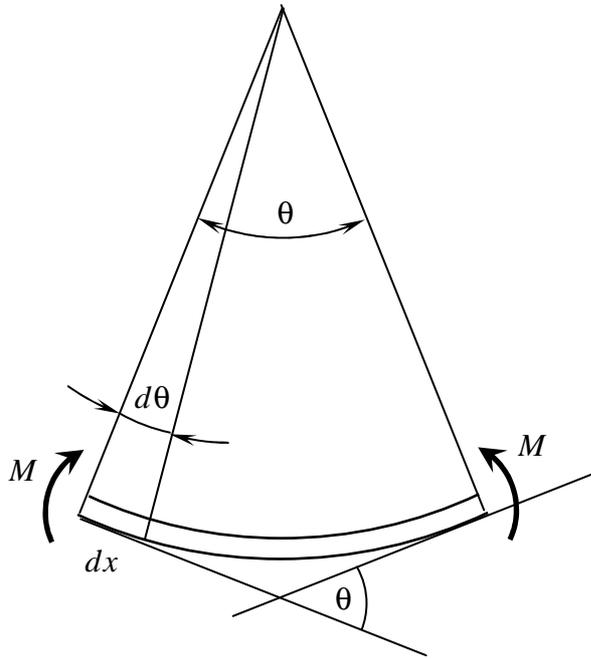


Рис. 4.7

Предполагая стержень линейно-упругим, считаем, что *при равновесии* угол θ , на который поворачивается изогнутая ось стержня в результате действия пар, пропорционален величине момента M , а следовательно и отношение θ/l , где l – длина стержня, также пропорционально M

$$\frac{\theta}{l} = \kappa M,$$

где κ – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств материала стержня, формы и размеров его поперечного сечения (которое предполагается постоянным по длине) и не зависящий от величины M момента. Он также не зависит и от длины l . Чтобы в этом убедиться, мысленно разрежем стержень на n одинаковых участков длиной dx каждый, так что $l = ndx$. Каждый из участков, испытывая

действие пар с моментом M , изогнется на угол $d\theta$, причем полный угол θ складывается из одинаковых поворотов отдельных элементов и составляет $\theta = nd\theta$.

Подставляя $\theta = nd\theta$ и $l = ndx$ в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{d\theta}{dx} = \kappa M. \quad (4.55)$$

Это уравнение показывает, что малый элемент изогнутого стержня имеет кривизну, пропорциональную величине изгибающего момента в данном месте стержня. Если момент не остается постоянным по длине стержня, то и кривизна его оси будет функцией положения элемента.

Если использовать систему координат x, y рис. 4.5 и рассматривать малые смещения $y(x)$ точек стержня от их равновесных положений на оси x , то радианную величину угла наклона оси стержня от горизонтали можно считать равной тангенсу этого угла $y'(x) = dy/dx$. Тогда угол изгиба участка от опоры A до точки с координатой x равен $\theta = y'(x) - y'(0)$, и (4.55) примет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''(x) = \kappa M(x). \quad (4.56)$$

Примем в качестве координаты точки стержня безразмерную величину $\xi = x/l$. Тогда $y'(x) = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l} \cdot y'_\xi$ и $y''(x) = \frac{1}{l^2} \cdot y''_\xi$. Если свободно опертый стержень нагружается системой сосредоточенных сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$, приложенных в точках с координатами ξ_1, ξ_2, \dots , то изгибающий момент в сечении ξ определяется выражением вида

$$M(x) = R_A \cdot x - P_1 \cdot (x - x_1) - \dots = l \cdot (R_A \cdot \xi - P_1 \cdot (\xi - \xi_1) - \dots) = l \cdot m(\xi),$$

где $m(\xi)$ – выражение, которое при заданном нагружении зависит только от ξ . Тогда (4.56)

примет вид $\frac{1}{l^2} \cdot y_{\xi}'' = \kappa l \cdot m(\xi)$, откуда

$$y_{\xi}'' = \kappa l^3 \cdot m(\xi). \quad (4.57)$$

Рассмотрим ряд балок, имеющих одинаковые поперечные сечения и выполненных из одного материала (для них коэффициент κ будет общим), но разной длины. Нагружения этих балок будем называть *подобными*, если они состоят из одних и тех же сил \vec{P}_i , приложенных в точках с одинаковыми безразмерными координатами ξ_i . Всем подобным нагружениям отвечает одна функция $m(\xi)$ в уравнении (4.57). Обозначим через $u(\xi)$ решение дифференциального уравнения $u_{\xi}'' = \kappa m(\xi)$, которое получается из (4.57) при $l = 1$, удовлетворяющее условиям на опорах $u(0) = u(1) = 0$ при некотором нагружении. Тогда, как легко убедиться подстановкой в (4.57), форма изогнутой оси балки произвольной длины l при подобном нагружении будет описываться функцией $y(\xi) = l^3 u(\xi)$. Отсюда следует, что *смещения* (прогибы) различных балок *в точках, имеющих общую безразмерную координату ξ* , при подобных нагружениях *пропорциональны третьей степени длины балки*.

Пусть, например, единичная сила приложена к балке половинной длины на расстоянии $1/3$ ее длины от опоры (рис. 4.8 слева), т.е. в точке, для которой $\xi = 1/3$, и вызывает в этой точке прогиб δ . Тогда такая же сила, приложенная к правой балке, которая вдвое длиннее левой при том же поперечном сечении, вызовет в соответствующей точке ($\xi = 1/3$) прогиб, равный $\Delta = 2^3 \delta = 8\delta$.

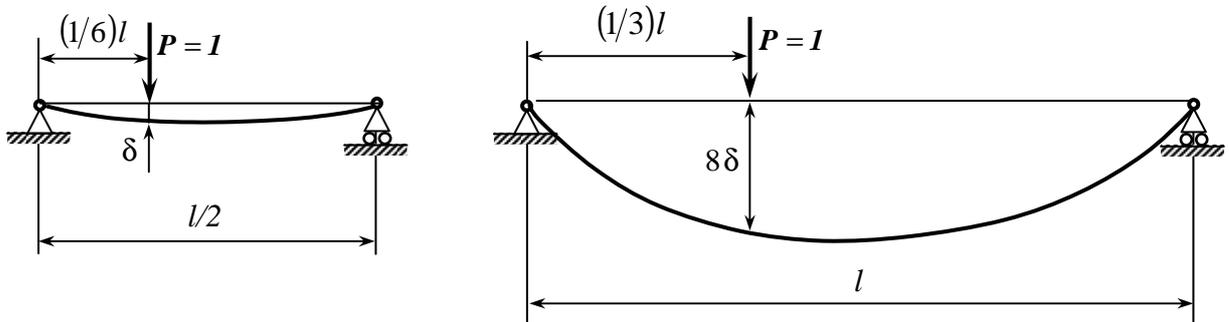


Рис. 4.8

Для решения задачи, поставленной в начале раздела 4.2.1.1, необходимо определить коэффициенты влияния δ_{ij} балки, изображенной на рис. 4.8 справа, соответствующие точкам $\xi_1 = 1/3$ и $\xi_2 = 2/3$. В обозначениях Рис. 4.8 благодаря симметрии балки $\delta_{11} = \delta_{22} = 8\delta$. Для определения $\delta_{12} = \delta_{21}$ загрузим балку двумя единичными противоположно направленными силами в точках

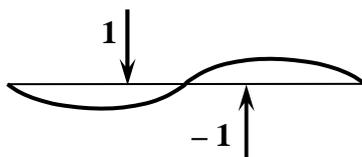


Рис. 4.9

$\xi_1 = 1/3$ и $\xi_2 = 2/3$ (см. рис. 4.9). При этом перемещение левого груза составит $\delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 = \delta_{11} \cdot 1 + \delta_{12} \cdot (-1) = \delta_{11} - \delta_{12}$. В то же время, как видно из рис. 4.9, при данном нагружении ось балки принимает кососимметричную форму, причем каждую ее половину можно рассматривать как отдельную свободно опертую балку, такую, как на рис. рис. 4.8 слева, вследствие чего то же перемещение равно δ . Приравнявая $\delta_{11} - \delta_{12}$ и δ , найдем $\delta_{12} = \delta_{11} - \delta = 8\delta - \delta = 7\delta$.

4.2.2.1.2. Собственные частоты и формы колебаний двухмассовой балки

Дифференциальные уравнения (4.44) движения системы в рассматриваемом примере принимают вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -8\delta \cdot 13m\ddot{y}_1 - 7\delta \cdot 4m\ddot{y}_2, \\ y_2 &= -7\delta \cdot 13m\ddot{y}_1 - 8\delta \cdot 4m\ddot{y}_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

Как и в предыдущем примере, разыскиваем *главные колебания* в виде функций (4.46), подстановка которых в (4.58) приводит к алгебраической системе

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= 104\delta mk^2 B_1 + 28\delta mk^2 B_2, \\ B_2 &= 91\delta mk^2 B_1 + 32\delta mk^2 B_2. \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 104B_1 + 28B_2 &= \mu B_1, \\ 91B_1 + 32B_2 &= \mu B_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

где обозначено $\mu = 1/\delta mk^2$. Как и выше, условием существования нетривиальных решений системы (4.59) служит равенство

$$\frac{\mu - 104}{28} = \frac{91}{\mu - 32},$$

равносильное уравнению

$$(\mu - 104)(\mu - 32) - 28 \cdot 91 = 0 \Rightarrow \mu^2 - 136\mu + 780 = 0,$$

корни которого равны соответственно

$$\mu_{1,2} = \frac{136 \pm \sqrt{136^2 - 4 \cdot 780}}{2} = \frac{136 \pm \sqrt{15376}}{2} = \frac{136 \pm 124}{2},$$

т.е. $\mu_1 = 130$, $\mu_2 = 6$. Им отвечают круговые частоты

$$k_1 = 1/\sqrt{\delta m \mu_1} = 0,088/\sqrt{\delta m}, \quad k_2 = 1/\sqrt{\delta m \mu_2} = 0,408/\sqrt{\delta m}$$

и формы, которые характеризуются отношениями координат

$$r_1 = \frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} = \frac{\mu_1 - 104}{28} = \frac{130 - 104}{28} = 0,929, \quad r_2 = \frac{B_2^{(2)}}{B_1^{(2)}} = \frac{\mu_2 - 104}{28} = \frac{6 - 104}{28} = -3,5.$$

Они изображены на рис. 4.10.

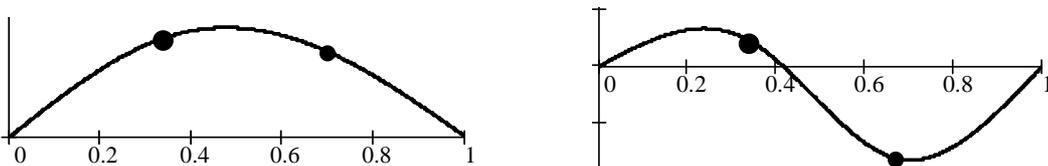


Рис. 4.10

4.2.3. Пример свободного движения двухмассовой системы. Биения

Главные колебания являются *особыми движениями*, которые могут происходить при специально подобранных начальных условиях. При произвольных начальных условиях движение системы представляет собой суперпозицию главных колебаний, которая определяется соотношениями (4.51) и (4.52), и может сопровождаться любопытными эффектами, один из которых рассмотрен в нижеследующем примере.

Пример. Найти уравнения движения системы, состоящей из двух равных грузов, подвешенных на одинаковых вертикальных симметрично расположенных пружинах, прикрепленных к симметричной горизонтальной балке (рис. 4.11), Коэффициент жесткости пружин равен C , масса грузов равна m .

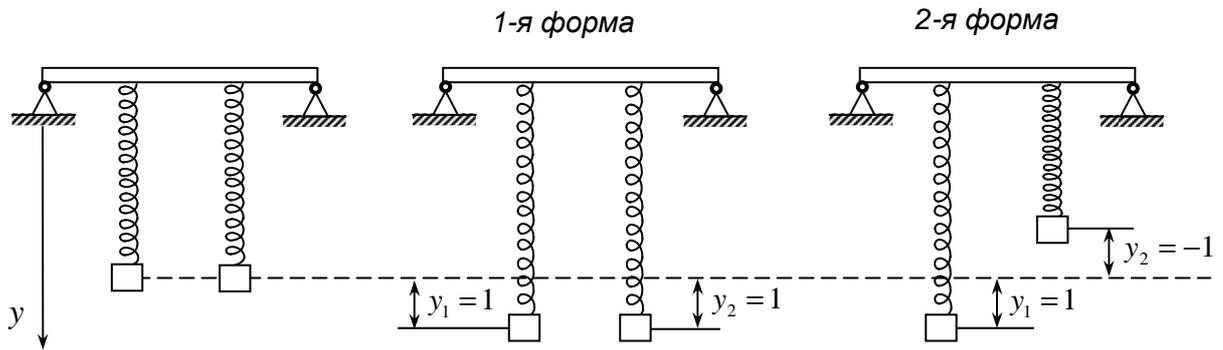


Рис. 4.11

Коэффициенты влияния *балки* в точках присоединения пружин равны δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$ и δ_{22} (напомним, что коэффициент влияния δ_{ij} равен прогибу балки в точке присоединения i -й пружины от единичной вертикальной силы, приложенной в точке присоединения j -й пружины), причем в силу симметрии системы $\delta_{11} = \delta_{22}$. Если единичную силу прикладывать не к балке, а к подвешенному грузу, его вертикальное перемещение будет складываться из соответствующего прогиба δ_{11} балки и деформации пружины, равной $1/c$. При этом перемещение второго груза будет обусловлено лишь прогибом точки подвеса его пружины и попрежнему будет равно $\delta_{12} = \delta_{21}$. Обозначая для сокращения записей

$$\Delta = \delta_{11} + 1/c, \quad \delta = \delta_{12},$$

приведем систему (4.44) к виду

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -\Delta m \ddot{y}_1 - \delta m \ddot{y}_2, \\ y_2 &= -\delta m \ddot{y}_1 - \Delta m \ddot{y}_2. \end{aligned} \right\}$$

Подстановка $y_1 = B_1 \sin(kt + \alpha)$, $y_2 = B_2 \sin(kt + \alpha)$ приводит к алгебраической системе

$$\left. \begin{aligned} (\Delta - \mu) B_1 + \delta B_2 &= 0, \\ \delta B_1 + (\Delta - \mu) B_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где $\mu = 1/mk^2$. Частотное уравнение имеет вид

$$(\Delta - \mu)^2 - \delta^2 = 0$$

и корни $\mu_1 = \Delta + \delta$, $\mu_2 = \Delta - \delta$, которым отвечают частоты

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{m\mu_1}} = \sqrt{\frac{1}{m(\Delta + \delta)}} \quad \text{и} \quad k_2 = \sqrt{\frac{1}{m\mu_2}} = \sqrt{\frac{1}{m(\Delta - \delta)}}$$

и формы

$$\frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} = \frac{\mu_1 - \Delta}{\delta} = \frac{\delta}{\delta} = 1, \quad \frac{B_2^{(2)}}{B_1^{(2)}} = \frac{\mu_2 - \Delta}{\delta} = \frac{-\delta}{\delta} = -1,$$

так что первая форма, отвечающая низшей частоте k_1 , является симметричной, а вторая – кососимметричной, и можно принять $B_2^{(1)} = B_1^{(1)} = 1$, $B_1^{(2)} = 1$, $B_2^{(2)} = -1$ (рис. 4.11). Произвольное движение описывается уравнениями (4.51) и может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ y_2 &= C_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) - C_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Как видим, в общем случае, в отличие от главных колебаний, движение каждого из грузов уже не будет гармоническим и может даже не быть периодическим, т.е. не быть колебаниями в строгом смысле (определение 2.1). Однако движение (4.60) при определенных обстоятельствах обнаруживает особую периодичность, для эффектной демонстрации которой следует подобрать характеристики системы и начальные условия.

Если бы балка была абсолютно жесткой (при этом $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{12} = 0$), мы имели бы две независимые одинаковые системы с одной степенью свободы, движение которых описывалось бы системой (4.1) при $c_1 = c_2 = c$. Каждый груз совершал бы свои собственные колебания с частотой $k = \sqrt{c/m}$, одинаковой для обоих грузов. Предположим теперь, что балка обладает не абсолютной жесткостью, но достаточно высокой по сравнению с жесткостью пружин c , т.е. $\delta_{11}, \delta_{12} \ll 1/c \Rightarrow \Delta \approx 1/c$. Тогда грузы уже не полностью изолированы от взаимного влияния ($\delta = \delta_{12} \neq 0$), частоты главных колебаний в силу малости δ **мало отличаются друг от друга** и практически равны друг другу

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{m(\Delta + \delta)}} \approx k_2 = \sqrt{\frac{1}{m(\Delta - \delta)}} \approx \sqrt{\frac{1}{m\Delta}} = k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

а их разность **намного меньше** k : $\Delta k = k_2 - k_1 \ll k$.

Пусть начальные условия выбраны так, что постоянные C_1 и C_2 в (4.60) равны: $C_1 = C_2 = C$. Тогда, воспользовавшись известными тригонометрическими тождествами $\sin \varphi + \sin \theta = 2 \sin\left(\frac{\varphi + \theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi - \theta}{2}\right)$, $\sin \varphi - \sin \theta = 2 \sin\left(\frac{\varphi - \theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi + \theta}{2}\right)$, уравнения движения (4.60) можно привести к виду

$$y_1 = 2C \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2}t + \alpha\right) \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}t + \beta\right) \approx 2C \cos\left(\frac{\Delta k}{2}t + \alpha\right) \sin(kt + \beta), \quad (4.61)$$

$$y_2 = -2C \sin\left(\frac{k_2 - k_1}{2}t + \alpha\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}t + \beta\right) \approx -2C \sin\left(\frac{\Delta k}{2}t + \alpha\right) \cos(kt + \beta),$$

где $\alpha = (\alpha_2 - \alpha_1)/2$, $\beta = (\alpha_2 + \alpha_1)/2$.

Функции (4.61) можно выразить в виде $y_1 = \mathbf{a}_1(t)\sin(kt + \beta)$, $y_2 = \mathbf{a}_2(t)\cos(kt + \beta)$, напоминая выражение гармонических колебаний, с той разницей, что в них «амплитуды» $\mathbf{a}_1(t)$ и $\mathbf{a}_2(t)$ уже не остаются постоянными, а сами являются периодическими функциями времени $\mathbf{a}_1 = 2C \cos\left(\frac{\Delta k}{2}t + \alpha\right)$, $\mathbf{a}_2 = -2C \sin\left(\frac{\Delta k}{2}t + \alpha\right)$, период которых равен $4\pi/\Delta k$, что в силу малости Δk гораздо больше периодов собственных колебаний, равных приблизительно $2\pi/k$. Колебательное движение, амплитуда которого является периодической функцией времени, называется *биениями*. График зависимости координаты груза от времени при биениях имеет характерный вид (см. рис. 4.12), показывающий периодическое нарастание интенсивности колебаний грузов, которое сменяется периодическим ее ослаблением, при котором наступают моменты, когда движение одного из грузов практически прекращается. Сопоставление графиков движения обоих грузов обнаруживает любопытное обстоятельство: в те моменты, когда один из грузов останавливается, второй груз движется с максимальной интенсивностью. Затем временно остановившийся груз постепенно разгоняется, а движение второго при этом постепенно затухает и полностью прекращается в тот момент, когда размахи колебаний первого груза достигают максимума. После этого картина движения повторяется, только грузы меняются ролями.

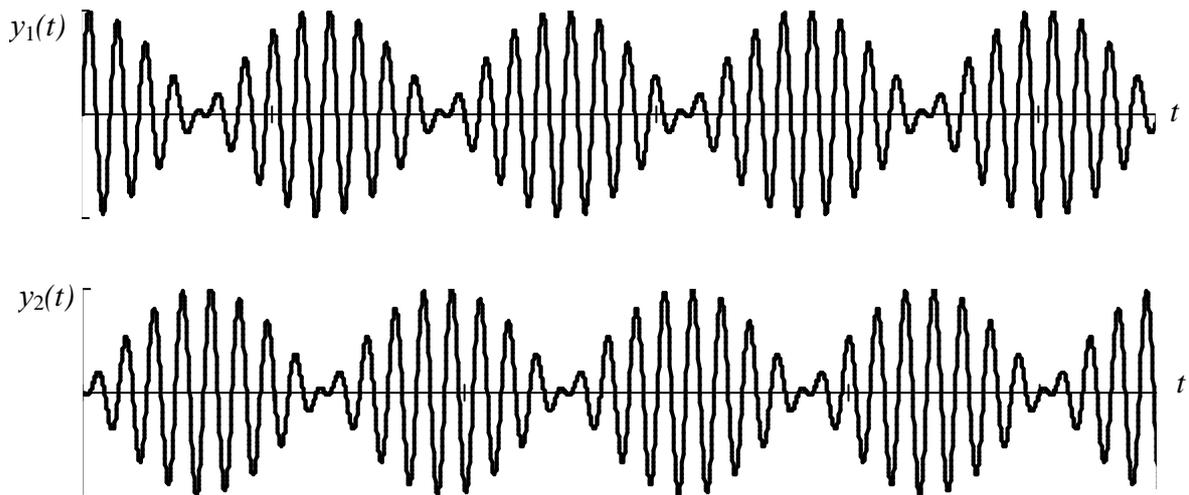


Рис. 4.12

Описанное движение легко осуществить в домашних условиях. При этом вместо грузов на вертикальных пружинах удобнее использовать небольшие грузы, подвешенные на нитях, т.е. маятники, а вместо горизонтальной балки можно просто натянуть веревку. Изменяя длины нитей, массы грузов, натяжение веревки, можно добиться максимально выраженного

эффекта биений и описанной выше «перепасовки» колебаний между грузами. Колебания маятников более устойчивы, чем вертикальные колебания подвешенных на пружинах грузов (которые не всегда «хотят» оставаться вертикальными), и относительно медленно затухают, что позволяет наслаждаться наблюдением эффектной картины биений в течение нескольких минут, пока движение не прекратится вследствие сопротивлений.

4.2.4. Свойства главных колебаний. Обобщенная ортогональность

Свойства главных колебаний точечного груза, установленные в разделе 4.1.4, допускают обобщение на широкий класс рассматриваемых двухмассовых систем. Первые два из нижеследующих свойств почти дословно повторяют свойства 1 и 2 из раздела 4.1.4 и уже частично отражены в теореме 4.1.

Свойство 1. Существует два различных свободных движения, которые являются главными колебаниями.

Свойство 2. Частоты и формы главных колебаний не зависят от начальных условий, а определяются постоянными упруго-инерционными характеристиками системы.

В выводах раздела 4.1.4 важную роль играла симметрия $c_{21} = c_{12}$ коэффициентов в уравнении (4.9). В случае, когда массы грузов равны, $m_1 = m_2 = m$, система (4.47) совпадает с системой (4.9). При различных массах грузов, $m_1 \neq m_2$, систему (4.47) можно привести к виду (4.9), введя новые переменные

$$\tilde{B}_1 = \sqrt{m_1} B_1, \quad \tilde{B}_2 = \sqrt{m_2} B_2 \quad (4.62)$$

Тогда (4.47) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{m_1} k^2 \sqrt{m_1} B_1 &= \frac{c_{11}}{\sqrt{m_1}} \sqrt{m_1} B_1 + \frac{c_{12}}{\sqrt{m_2}} \sqrt{m_2} B_2 \\ \sqrt{m_2} k^2 \sqrt{m_2} B_2 &= \frac{c_{21}}{\sqrt{m_1}} \sqrt{m_1} B_1 + \frac{c_{22}}{\sqrt{m_2}} \sqrt{m_2} B_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} k^2 \tilde{B}_1 &= \frac{c_{11}}{m_1} \tilde{B}_1 + \frac{c_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} \tilde{B}_2 \\ k^2 \tilde{B}_2 &= \frac{c_{21}}{\sqrt{m_1 m_2}} \tilde{B}_1 + \frac{c_{22}}{m_2} \tilde{B}_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

т.е. системы (4.47) при $m = 1$, $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} / \sqrt{m_i m_j}$. Это позволяет сразу сформулировать

Свойство 3. Частоты главных колебаний удовлетворяют соотношениям

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{c_{11}}{m_1} + \frac{c_{22}}{m_2}, \quad k_1^2 \cdot k_2^2 = \frac{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}{m_1 m_2}, \quad (4.64)$$

которые являются прямыми аналогами соотношений (4.20) и (4.21).

Соотношения (4.22) обобщаются в виде

$$k_1^2 \leq \frac{c_{11}}{m_1} \leq k_2^2, \quad k_1^2 \leq \frac{c_{22}}{m_2} \leq k_2^2. \quad (4.65)$$

Теорема ортогональности (свойство 4 из 4.1.4) для системы (4.63) выражается равенством $\tilde{B}_1^{(2)} \tilde{B}_1^{(1)} + \tilde{B}_2^{(2)} \tilde{B}_2^{(1)} = 0$, которое с учетом (4.62) можно переписать в следующем виде,

выражающем

Свойство 4. Обобщенная теорема ортогональности: *Формы главных колебаний, соответствующие различным собственным частотам, удовлетворяют соотношению*

$$m_1 B_1^{(2)} B_1^{(1)} + m_2 B_2^{(2)} B_2^{(1)} = 0, \quad (4.66)$$

которое служит обобщением равенства (4.24), устанавливающего ортогональность направлений главных колебаний точечного груза. Поэтому *свойство 4 и равенство (4.66) называют обобщенной ортогональностью или m -ортогональностью*. и говорят, что

Формы главных колебаний, соответствующие различным собственным частотам, обобщенно-ортогональны (m -ортогональны).

У п р а ж н е н и е. Проверьте справедливость свойства 3 в примерах, рассмотренных в разделе 4.2.2.

4.2.5. Главные координаты

В разделе 4.1.5 было показано, что при описании плоского движения упруго закрепленного груза можно найти такие координатные оси, которые позволяют сделать это описание наиболее простым, введя соответствующие *главные координаты* η_1 и η_2 (см. (4.27)). При этом, если груз совершает главные колебания с частотой k_1 (k_2), изменяется только одна из главных координат η_1 (соответственно η_2). Подобные обобщенные координаты можно ввести для произвольной двухмассовой системы.

Определение 4.6. *Главными называются координаты, выбранные так, чтобы при главных колебаниях изменялась только одна из них.*

Связь между исходными координатами q_1, q_2 и главными координатами η_1, η_2 будем искать в виде *линейных* соотношений

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2, \\ q_2 &= b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

В противном случае дифференциальные уравнения (4.45) движения системы при переходе к новым координатам, задаваемым нелинейными уравнениями $q_1 = q_1(\eta_1, \eta_2)$, $q_2 = q_2(\eta_1, \eta_2)$, стали бы тоже нелинейными. Для вычисления коэффициентов b_{ij} преобразования (4.67) допустим, что при главных колебаниях с частотой k_1 изменяется только координата η_1 , а вторая координата остается равной нулю, $\eta_2 = 0$. Тогда, согласно определению главных колебаний отношение q_2/q_1 постоянно и равно $B_2^{(1)}/B_1^{(1)}$. С другой стороны из (4.67) это отношение равно

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2}{b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2} = \frac{b_{21}\eta_1 + b_{22} \cdot 0}{b_{11}\eta_1 + b_{12} \cdot 0} = \frac{b_{21}\eta_1}{b_{11}\eta_1} = \frac{b_{21}}{b_{11}},$$

откуда $b_{21}/b_{11} = B_2^{(1)}/B_1^{(1)}$, т.е. $b_{21} = bB_2^{(1)}$, $b_{11} = bB_1^{(1)}$ при каком угодно числе b . Как уже было сказано в разделе 4.2.1, пары чисел $(B_1^{(1)}, B_2^{(1)})$ и $(bB_1^{(1)}, bB_2^{(1)})$ определяют одну и ту же форму главных колебаний. Это позволяет из бесконечного множества пар $(bB_1^{(1)}, bB_2^{(1)})$

выбрать любую и обозначить составляющие ее числа $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}$. Аналогичное замечание справедливо и в отношении главных координат: из определения 4.6 следует, что если η_1 и η_2 – главные координаты, то и $b_1\eta_1$ и $b_2\eta_2$ при любых ненулевых b_1 и b_2 – тоже главные координаты. Поэтому, найдя какую-либо пару $(B_1^{(1)}, B_2^{(1)})$, определяющую форму главных колебаний, можно положить $b_{21} = B_2^{(1)}$, $b_{11} = B_1^{(1)}$. Аналогично обосновываются равенства $b_{22} = B_2^{(2)}$, $b_{12} = B_1^{(2)}$. Тогда уравнения (4.67), которыми вводятся главные координаты, можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= B_1^{(1)}\eta_1 + B_1^{(2)}\eta_2, \\ q_2 &= B_2^{(1)}\eta_1 + B_2^{(2)}\eta_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

Из бесконечного множества пар $(bB_1^{(1)}, bB_2^{(1)})$, определяющих форму, обычно выбирают одну **нормированную**. Например, в случае точечного груза (см. раздел 4.1.3) нормированная форма подчинялась условию $B_1^2 + B_2^2 = 1$ (см. определение 4.2). Геометрически это условие означает, что среди всех векторов, определяющих направление главных колебаний груза, выбирается вектор **единичной длины** (орт). В более общих задачах, когда формы не связываются больше с каким-либо направлением в пространстве, это геометрическое значение нормировки также утрачивается. Замена переменных (4.62) позволяет любой двухмассовой системе сопоставить упруго закрепленный точечный груз при тех же собственных частотах и $m = 1$ (ср. (4.63) и (4.47)). Тогда, если для этого фиктивного груза принять «геометрическую» нормировку $\tilde{B}_1^2 + \tilde{B}_2^2 = 1$, то соответствующая форма реальной двухмассовой системы с учетом (4.62) удовлетворяет условию

$$m_1 B_1^2 + m_2 B_2^2 = 1. \quad (4.69)$$

Определение 4.7. *m -нормой* **какого-либо положения** (q_1, q_2) *двухмассовой упругой системы называется положительное число, равное* $\sqrt{m_1 q_1^2 + m_2 q_2^2}$.

m -нормированной называется такая собственная форма двухмассовой упругой системы, для которой m -норма равна 1, т.е. которая удовлетворяет соотношению (4.69).

(!) Везде далее принимается, что все формы двухмассовых систем m -нормированы. В частности, коэффициенты в уравнениях (4.68) образованы из m -нормированных собственных форм.

Умножив обе части первого из уравнений (4.68) на $m_1 B_1^{(1)}$, а второго – на $m_2 B_2^{(1)}$ и сложив оба уравнения, получим

$$m_1 B_1^{(1)} q_1 + m_2 B_2^{(1)} q_2 = \left(m_1 B_1^{(1)2} + m_2 B_2^{(1)2} \right) \eta_1 + \left(m_1 B_1^{(1)} B_1^{(2)} + m_2 B_2^{(1)} B_2^{(2)} \right) \eta_2,$$

откуда с учетом нормировки (4.69) и ортогональности (4.66) придем к первому из следующих равенств

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= m_1 B_1^{(1)} q_1 + m_2 B_2^{(1)} q_2, \\ \eta_2 &= m_1 B_1^{(2)} q_1 + m_2 B_2^{(2)} q_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

Второе устанавливается аналогично.

Уравнения (4.70) наряду с (4.68) задают переход от координат (q_1, q_2) к главным координатам (η_1, η_2) и обратно.

4.2.6. Дифференциальные уравнения свободного движения в главных координатах

Если дважды продифференцировать обе части уравнений (4.70) по времени, получим

$$\ddot{\eta}_1 = m_1 B_1^{(1)} \ddot{q}_1 + m_2 B_2^{(1)} \ddot{q}_2, \quad \ddot{\eta}_2 = m_1 B_1^{(2)} \ddot{q}_1 + m_2 B_2^{(2)} \ddot{q}_2. \quad (4.71)$$

Подставим сюда выражения $m_1 \ddot{q}_1 = -c_{11} q_1 - c_{12} q_2$ и $m_2 \ddot{q}_2 = -c_{21} q_1 - c_{22} q_2$ из (4.45)

$$\ddot{\eta}_1 = -B_1^{(1)}(c_{11} q_1 + c_{12} q_2) - B_2^{(1)}(c_{21} q_1 + c_{22} q_2) = -(c_{11} B_1^{(1)} + c_{21} B_2^{(1)}) q_1 - (c_{12} B_1^{(1)} + c_{22} B_2^{(1)}) q_2,$$

$$\ddot{\eta}_2 = -B_1^{(2)}(c_{11} q_1 + c_{12} q_2) - B_2^{(2)}(c_{21} q_1 + c_{22} q_2) = -(c_{11} B_1^{(2)} + c_{21} B_2^{(2)}) q_1 - (c_{12} B_1^{(2)} + c_{22} B_2^{(2)}) q_2.$$

Выражения в скобках заменим согласно (4.47)

$$\ddot{\eta}_1 = -k_1^2 m_1 B_1^{(1)} q_1 - k_1^2 m_2 B_2^{(1)} q_2 = -k_1^2 (m_1 B_1^{(1)} q_1 + m_2 B_2^{(1)} q_2),$$

$$\ddot{\eta}_2 = -k_2^2 m_1 B_1^{(2)} q_1 - k_2^2 m_2 B_2^{(2)} q_2 = -k_2^2 (m_1 B_1^{(2)} q_1 + m_2 B_2^{(2)} q_2),$$

откуда с учетом (4.70) придем к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + k_1^2 \eta_1 &= 0, \\ \ddot{\eta}_2 + k_2^2 \eta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

Полученные уравнения (4.72) показывают, что система дифференциальных уравнений свободного движения упругой системы выглядит наиболее *просто и распадается на независимые уравнения*, если в качестве координат принять *главные координаты* (ср. (4.27)).

4.3. Вынужденные движения системы с двумя степенями свободы

Как и в разделе 2.6, *вынужденным* называется движение упругой системы, которое происходит под действием не только восстанавливающих упругих реакций, но и переменных возмущающих сил.

Определение 4.8. *Возмущающей силой* называется сила, приложенная к точке упругой системы и являющаяся заданной функцией времени.

Определение 4.9. *Возмущающей нагрузкой* называется совокупность возмущающих сил, приложенных к точкам системы.

4.3.1. Дифференциальные уравнения вынужденных движений системы с двумя степенями свободы

Пусть в системе, изображенной на рис. 4.5, грузы M_1 и M_2 помимо упругих реакций деформированной балки подвергаются действию вертикальных сил $\vec{Q}_1(t)$ и $\vec{Q}_2(t)$, зависящих

от времени. Тогда дифференциальные уравнения движения этих грузов в проекции на ось y будут иметь вид (ср. (4.43))

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -c_{11}y_1 - c_{12}y_2 + Q_1(t), \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -c_{21}y_1 - c_{22}y_2 + Q_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

где $Q_1 = Q_1(t)$ и $Q_2 = Q_2(t)$ – проекции сил $\vec{Q}_1(t)$ и $\vec{Q}_2(t)$ на ось y .

Аналогичную форму имели бы уравнения плоского движения упруго закрепленного груза в присутствии возмущающей силы $\vec{Q}(t)$, лежащей в заданной плоскости, или системы, изображенной на рис. 4.4, если бы к грузам M_1 и M_2 были приложены кроме реакций пружин еще силы $\vec{Q}_1(t)$ и $\vec{Q}_2(t)$, направленные по горизонтали.

Отправляясь от этих частных случаев, рассмотрим вынужденное движение произвольной упругой системы с двумя степенями свободы при произвольной возмущающей нагрузке, дифференциальные уравнения движения которой в некоторой системе обобщенных координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 &= -c_{11}q_1 - c_{12}q_2 + Q_1(t), \\ m_2 \ddot{q}_2 &= -c_{21}q_1 - c_{22}q_2 + Q_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

где q_1 и q_2 – обобщенные координаты, $Q_1 = Q_1(t)$ и $Q_2 = Q_2(t)$ – соответствующие им обобщенные возмущающие силы, являющиеся заданными функциями времени.

Для определения интересующего нас вынужденного движения следует проинтегрировать систему (4.74), т.е. найти координаты q_1 и q_2 как функции времени, удовлетворяющие заданным начальным условиям. Можно было бы воспользоваться разработанными в математике формальными процедурами интегрирования линейных систем, но тогда и результаты будут иметь формальный характер, затрудняющий понимание характерных черт рассматриваемых движений и решение важных практических задач.

В разделе 4.2.5 было установлено, что уравнения свободного движения принимают наиболее простой вид и допускают простое гармоническое решение, если в качестве обобщенных координат использовать главные координаты. Покажем, что и в случае вынужденных движений *переход к главным координатам упрощает систему* (4.74) и приводит ее к независимым уравнениям, которые уже встречались и исследовались при описании движения точечного груза, имеющего одну степень свободы.

Умножим первое из уравнений (4.74) на $B_1^{(1)}$, второе – на $B_2^{(1)}$ и сложим

$$m_1 B_1^{(1)} \ddot{q}_1 + m_2 B_2^{(1)} \ddot{q}_2 = -\left(c_{11} B_1^{(1)} + c_{21} B_2^{(1)}\right) q_1 - \left(c_{12} B_1^{(1)} + c_{22} B_2^{(1)}\right) q_2 + Q_1 B_1^{(1)} + Q_2 B_2^{(1)}. \quad (4.75)$$

Обозначая $Q_{\eta 1} = Q_{\eta 1}(t) = Q_1 B_1^{(1)} + Q_2 B_2^{(1)}$ и преобразуя это равенство с учетом (4.71), (4.47), (4.68) и взаимности $c_{21} = c_{12}$ по следующей схеме

$$\begin{array}{c}
\underbrace{m_1 B_1^{(1)} \ddot{q}_1 + m_2 B_2^{(1)} \ddot{q}_2}_{(4.71)} = - \underbrace{(c_{11} B_1^{(1)} + c_{21} B_2^{(1)})}_{(4.47)} q_1 - \underbrace{(c_{12} B_1^{(1)} + c_{22} B_2^{(1)})}_{(4.47)} q_2 + Q_{\eta_1}(t). \\
\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
\ddot{\eta}_1 \qquad \qquad \qquad \underbrace{k_1^2 m_1 B_1^{(1)} \qquad k_1^2 m_2 B_2^{(1)}}_{(4.70)} \\
\downarrow \\
-k_1^2 (m_1 B_1^{(1)} q_1 + m_2 B_2^{(1)} q_2) = -k_1^2 \eta_1,
\end{array}$$

придем к первому из уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\eta}_1 + k_1^2 \eta_1 = Q_{\eta_1}(t), \\ \ddot{\eta}_2 + k_2^2 \eta_2 = Q_{\eta_2}(t). \end{array} \right\} \quad (4.76)$$

Второе получается аналогично, если вместо координат $B_1^{(1)}$ и $B_2^{(1)}$ первой формы, отвечающей частоте k_1 , взять координаты $B_1^{(2)}$ и $B_2^{(2)}$ второй формы, отвечающей частоте k_2 . Уравнения (4.76) не зависят одно от другого, каждое из них по виду совпадает с уравнением (2.33), рассмотренным ранее (см. раздел 2.6) при изучении вынужденных движений системы с одной степенью свободы. Для решения каждого из уравнений (4.76) применимы все изложенные в разделе 2.6 соображения, в частности интеграл Дюамеля (2.43).

Величины $Q_{\eta_1} = Q_1 B_1^{(1)} + Q_2 B_2^{(1)}$ и $Q_{\eta_2} = Q_1 B_1^{(2)} + Q_2 B_2^{(2)}$, входящие в уравнения (4.76), являются не чем иным, как *обобщенными силами*, соответствующими главным координатам η_1 и η_2 . Действительно, если сообщить упругой системе возможное перемещение, при котором первая координата получает приращение $\delta\eta_1 \neq 0$, а вторая остается постоянной, $\delta\eta_2 = 0$, то в соответствии с (4.68) приращения координат q_1 и q_2 составят $\delta q_1 = B_1^{(1)} \delta\eta_1 + B_1^{(2)} \delta\eta_2 = B_1^{(1)} \delta\eta_1 + B_1^{(2)} \cdot 0 = B_1^{(1)} \delta\eta_1$, $\delta q_2 = B_2^{(1)} \delta\eta_1$. Работа заданных возмущающих сил Q_1 и Q_2 на этом перемещении равна $Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 = Q_1 B_1^{(1)} \delta\eta_1 + Q_2 B_2^{(1)} \delta\eta_1 = Q_{\eta_1} \delta\eta_1$, откуда и следует справедливость настоящего замечания.

Как видим, обобщенная сила Q_{η_j} , соответствующая координате η_j , равна работе сил Q_1 и Q_2 на перемещении, совпадающем с j -й формой главных колебаний.

Определение 4.10. *Говорят, что система сил, приложенных к упругой системе, ортогональна к некоторому ее перемещению, если сумма работ всех сил этой системы на этом перемещении равна нулю.*

Если возмущающая нагрузка ортогональна j -й собственной форме, то соответствующая обобщенная сила $Q_{\eta_j} = 0$.

4.3.2. Равновесие системы с двумя степенями свободы под действием постоянных сил

Если возмущающие силы, приложенные к упругой системе постоянны, то и соответствующие обобщенные силы Q_{η_1} и Q_{η_2} постоянны. Тогда дифференциальные уравнения (4.76) имеют *частное решение*

$$\eta_1 = Q_{\eta_1} / k_1^2, \quad \eta_2 = Q_{\eta_2} / k_2^2, \quad (4.77)$$

в котором *координаты также постоянны* и определяют положение системы, в котором она *будет находиться в покое* под действием этих сил.

Если постоянная нагрузка ортогональна какой-либо из собственных форм, то в положении равновесия, вызванном этой нагрузкой, соответствующая главная координата равна нулю. При этом положение равновесия является другой собственной формой.

Этот же вывод можно выразить иначе: Если постоянная нагрузка ортогональна какой-либо из собственных форм, то положение равновесия, определяемое этой нагрузкой, *m*-ортогонально к этой форме. Последняя формулировка остается справедливой и для систем с произвольным числом степеней свободы.

4.3.3. Движение системы с двумя степенями свободы при гармонической возмущающей силе

Основной интерес представляют вынужденные движения, которые вызываются периодическими возмущающими нагрузками, в частности изменяющимися по гармоническому закону $Q_1(t) = H_1 \sin pt$, $Q_2(t) = H_2 \sin pt$, где H_1 и H_2 – амплитудные значения обобщенных возмущающих сил, не зависящие от времени. В главных координатах дифференциальные уравнения движения системы в соответствии с (4.76) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + k_1^2 \eta_1 &= h_1 \sin pt, \\ \ddot{\eta}_2 + k_2^2 \eta_2 &= h_2 \sin pt, \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

где k_1 и k_2 – круговые частоты главных колебаний системы (собственные частоты), $h_1 = H_1 B_1^{(1)} + H_2 B_2^{(1)}$, $h_2 = H_1 B_1^{(2)} + H_2 B_2^{(2)}$, причем формы главных колебаний $(B_1^{(1)}, B_2^{(1)})$ и $(B_1^{(2)}, B_2^{(2)})$ *m*-нормированы, т.е. для них выполнено условие (4.67).

В соответствии с результатами раздела 2.6.5 (см. (2.46, 47)), общим решением системы (4.78) является пара функций

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= C_1^{(1)} \cos k_1 t + C_2^{(1)} \sin k_1 t + \frac{\Delta_{1CT}}{1 - (p/k_1)^2} \sin pt, \\ \eta_2 &= C_1^{(2)} \cos k_2 t + C_2^{(2)} \sin k_2 t + \frac{\Delta_{2CT}}{1 - (p/k_2)^2} \sin pt, \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

где Δ_{1CT} и Δ_{2CT} – статические значения обобщенных координат η_1 и η_2 соответственно, которые определяют равновесное положение системы под действием постоянной нагрузки H_1 , H_2 ; $C_i^{(j)}$ – произвольные постоянные, которые в конкретном движении определяются значениями $\eta_1(t_0)$, $\dot{\eta}_1(t_0)$, $\eta_2(t_0)$, $\dot{\eta}_2(t_0)$ в начальный момент t_0 . В соответствии с (4.77) $\Delta_{1CT} = h_1/k_1^2$, $\Delta_{2CT} = h_2/k_2^2$.

Уравнения (4.79) выражают следующую теорему (обобщающую теорему 2.4 раздела 2.6.5)

Теорема 4.2. *Под действием гармонической возмущающей нагрузки движение упругой системы представляет собой суперпозицию двух движений; одно из них является комбинацией главных колебаний, происходящих с собственными частотами, не зависящими от начальных условий и возмущающих сил, а опре-*

деляемых упруго-инерционными характеристиками системы; амплитуды и начальные фазы главных колебаний определяются начальными условиями; второе является **периодическим движением**, при котором каждая из координат изменяется по гармоническому закону с частотой, равной **частоте возмущающей силы**.

Как отмечалось в разделе 2.6.5, на практике вследствие влияния разного рода сопротивлений первая составляющая движения оказывается затухающей. Поэтому через некоторое время после начала движения независимо от начальных условий устанавливается движение, никак с этими условиями не связанное, которое называют вынужденными колебаниями.

Определение 4.11. *Вынужденными колебаниями называются колебания, которые вызываются периодической возмущающей нагрузкой и имеют период, равный периоду этой нагрузки.*

Как следует из (4.79), вынужденные колебания описываются уравнениями

$$\eta_1 = \frac{\Delta_{1CT}}{1 - (p/k_1)^2} \sin pt, \quad \eta_2 = \frac{\Delta_{2CT}}{1 - (p/k_2)^2} \sin pt, \quad (4.80)$$

4.3.4. Свойства вынужденных колебаний

Используя (4.68), найдем уравнения вынужденных колебаний в исходных координатах

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \left(\frac{B_1^{(1)} \Delta_{1CT}}{1 - (p/k_1)^2} + \frac{B_1^{(2)} \Delta_{2CT}}{1 - (p/k_2)^2} \right) \sin pt, \\ q_2 &= \left(\frac{B_2^{(1)} \Delta_{1CT}}{1 - (p/k_1)^2} + \frac{B_2^{(2)} \Delta_{2CT}}{1 - (p/k_2)^2} \right) \sin pt. \end{aligned} \right\} \quad (4.81)$$

Рассмотрение этих уравнений позволяет сформулировать следующие свойства вынужденных колебаний.

1. При гармоническом возбуждении вынужденные колебания также являются гармоническими, имеющими ту же частоту, что и возмущающая нагрузка.

2. **Амплитудная конфигурация** системы представляет собой линейную комбинацию собственных форм, коэффициенты которой *не зависят от начальных условий*, а определяются интенсивностью и **пространственным распределением** возмущающей нагрузки, а также **отношениями частоты возмущения к собственным частотам**.

3. Если **возмущающая нагрузка ортогональна к одной из собственных форм**, то соответствующий коэффициент в линейной комбинации равен нулю. В таком случае говорят, что при данной возмущающей нагрузке **соответствующая форма не возбуждается**. Пусть, например, нагрузка (H_1, H_2) ортогональна к форме $(B_1^{(2)}, B_2^{(2)})$. Тогда $h_2 = H_1 B_1^{(2)} + H_2 B_2^{(2)} = 0$, откуда $\Delta_{2CT} = h_2 / k_2^2 = 0$ и в уравнениях (4.81) сохраняются только первые слагаемые, определяющие первую собственную форму $(B_1^{(1)}, B_2^{(1)})$. К этому же выводу можно прийти прямо из уравнений (4.78).

4. Если частота возмущающей нагрузки приближается к какой-либо из собственных частот, $p \rightarrow k_1$ либо $p \rightarrow k_2$, амплитудные значения каждой координаты, вообще говоря, неограниченно возрастают. Это явление называется **резонансом** и уже рассматривалось в раз-

деле 2.6.5 при изучении вынужденных колебаний в системе с одной степенью свободы. Таким образом, **в системе с двумя степенями свободы резонанс может наступить при двух значениях частоты возмущающей силы.**

5. Если возмущающая нагрузка **ортогональна** к одной из собственных форм, то **резонанс не наступит**, даже если ее частота совпадает с соответствующей собственной частотой.

Зависимость амплитудных значений координат от частоты возмущающей нагрузки при вынужденных колебаниях имеет ряд характерных особенностей, которые могут быть рассмотрены в частном случае системы, изображенной на рис.4.4., Примем, что возмущающая нагрузка состоит из единственной горизонтальной силы, приложенной к грузу M_1 , проекция которой на горизонтальную ось x_1 равна $H_1 \sin pt = 1 \cdot \sin pt$, т.е. $H_1 = 1$, $H_2 = 0$. Отложим по горизонтали безразмерную величину $p\sqrt{m/c}$, а по вертикали – безразмерную амплитуду вынужденных колебаний груза M_1 , равную согласно (4.81) отношению величины $\left| \frac{B_1^{(1)}\Delta_{1CT}}{1-(p/k_1)^2} + \frac{B_1^{(2)}\Delta_{2CT}}{1-(p/k_2)^2} \right|$ к величине статического смещения $q_{1CT} = H_1/c = 1/c$ груза M_1 под действием постоянной силы, равной 1, и вычисленную при условиях примера 1 из раздела 4.2.2. Соответствующий график изображен на рис. 4.13. Рядом на рис. 4.14 для сопоставления приведен аналогичный график для амплитуды второго груза.

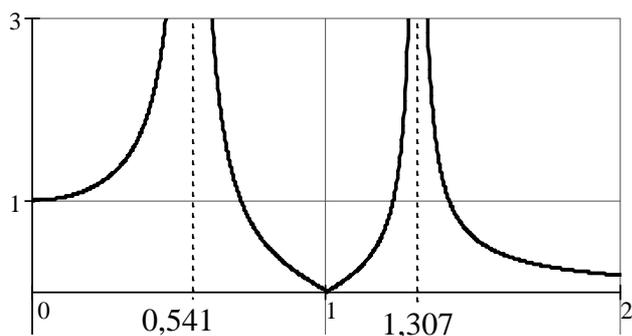


Рис. 4.13

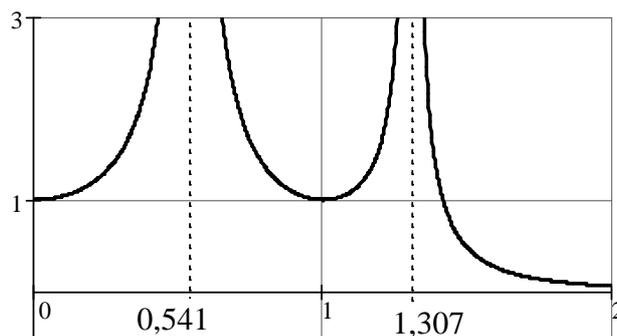


Рис. 4.14

Обратим внимание на характерные резонансные «всплески» при значениях возмущающей частоты, равных $k_1 = 0,541\sqrt{c/m}$ и $k_2 = 1,307\sqrt{c/m}$. Аналогичную особенность имела кривая на рис. 2.18 для системы с одной степенью свободы. Отметим также, что наряду с резонансами, которые сопровождаются ростом амплитуды, в системах с двумя степенями свободы может наблюдаться обратный эффект: при определенной частоте возмущающей нагрузки амплитуды колебаний не увеличиваются, а становятся малыми и даже обращаются в нуль. Это явление называется **антирезонансом**. Рис. 4.13 показывает, что в рассмотренном примере антирезонанс наступает при $p = \sqrt{c/m}$, т.е. при действии гармонической силы $H_1 \sin \sqrt{c/m} \cdot t$ на груз M_1 он остается неподвижным.

4.3.5. Модель виброгасителя

Эффект антирезонанса подсказывает идею устройства, обеспечивающего виброзащиту конструкции, подвергающейся действию периодического возмущения. Пусть, например, требуется сделать как можно меньшей амплитуду колебаний груза M , закрепленного на пружине и испытывающего действие гармонической силы $H \sin pt$ (см. рис. 4.15).

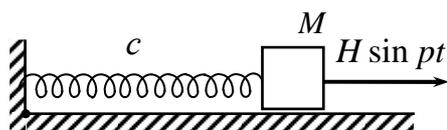


Рис. 4.15

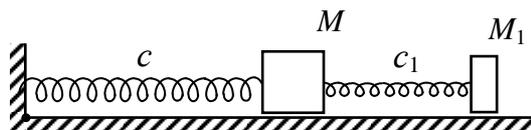


Рис. 4.16

Оставаясь в рамках модели с одной степенью свободы, этого можно достичь, изменяя массу m груза и жесткость c пружины так, чтобы отдалить собственную частоту $\sqrt{c/m}$ от частоты возмущения p (см. рис. 2.18). Если условия не позволяют проектировщику свободно распоряжаться массой груза, жесткостью пружины и частотой возмущения, возможности такого «одномассового» подхода оказываются ограниченными. В таком случае можно пойти по пути увеличения числа степеней свободы, введя дополнительный упруго прикрепленный груз M_1 (см. рис. 4.16) и подобрав его массу m_1 и жесткость c_1 дополнительной пружины так, чтобы при заданной частоте p груз M оказался в условиях антирезонанса.

Идея расчета характеристик присоединенной упругой системы заключается в следующем. Закрепим основной груз M с помощью воображаемой неподвижной опоры и рассмотрим свободные колебания образованной системы с одной степенью свободы, происходящие с частотой $k_1 = \sqrt{c_1/m_1}$. При этом *реакция* введенной *опоры* будет изменяться по гармоническому закону с частотой k_1 и *может рассматриваться как гармоническая возмущающая сила*, обеспечивающая грузу M *антирезонансный режим*. Если требуется, чтобы этот режим наступил при заданной частоте p , достаточно, чтобы выполнялось равенство $k_1 = p$, т.е. чтобы масса и жесткость присоединенной системы удовлетворяли условию $c_1 = m_1 p^2$.

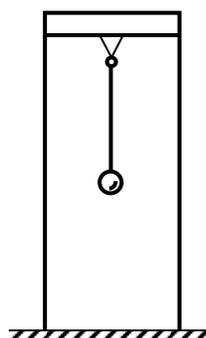


Рис. 4.17

Основанные на описанном принципе устройства, называемые *динамическими гасителями* колебаний или *виброгасителями*, используются в различных инженерных сооружениях, работающих в условиях периодических динамических нагрузений. В частности в знаменитом небоскребе «Тайбэй 101» (2004 г., Тайвань, 101 этаж, высота более 500 м.) наряду с множеством оригинальных инженерных решений установлен виброгаситель в виде 660-тонного маятника, подвешенного на 92-м этаже (см. схему на рис. 4.17) для уменьшения горизонтальных колебаний основной конструкции. Конструкторы рассчитывают, что здание способно противостоять ураганам и землетрясениям (которые на Тайване не редкость) в течение 2500 лет.

5. Обзор результатов для систем с произвольным числом степеней свободы

Результаты, полученные в разделе 4, обобщаются на упругие системы с произвольным числом степеней свободы. В качестве типичного примера такой системы рассмотрим невесомую прямолинейную балку, как-либо закрепленную по концам, несущую произвольное число N точечных грузов M_1, M_2, \dots, M_N массами соответственно m_1, m_2, \dots, m_N (рис. 5.1). В качестве обобщенных координат примем вертикальные перемещения y_1, y_2, \dots, y_N грузов.

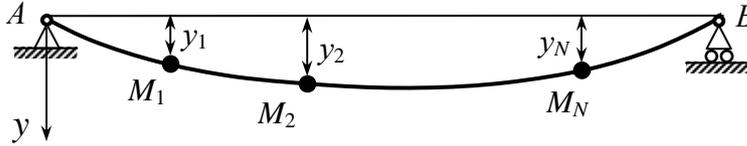


Рис. 5.1

Введем в рассмотрение набор коэффициентов влияния $\{\delta_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Как и в разделе 4.2, коэффициент влияния $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ равен прогибу балки в точке размещения i -го груза от единичной вертикальной силы, приложенной в точке размещения j -го груза.

Дифференциальные уравнения движения этой системы можно записать в виде (ср. с (4.44))

$$\begin{aligned} y_1 &= -\delta_{11}m_1\ddot{y}_1 - \delta_{12}m_2\ddot{y}_2 - \dots - \delta_{1N}m_N\ddot{y}_N, \\ y_2 &= -\delta_{21}m_1\ddot{y}_1 - \delta_{22}m_2\ddot{y}_2 - \dots - \delta_{2N}m_N\ddot{y}_N. \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ y_N &= -\delta_{N1}m_1\ddot{y}_1 - \delta_{N2}m_2\ddot{y}_2 - \dots - \delta_{NN}m_N\ddot{y}_N \end{aligned} \quad (5.1)$$

Разыскивая решение этих уравнений в виде функций

$$y_1 = B_1 \sin(kt + \alpha), \quad y_2 = B_2 \sin(kt + \alpha), \quad \dots, \quad y_N = B_N \sin(kt + \alpha), \quad (5.2)$$

(B_1, B_2, \dots, B_N постоянны), описывающих *главные колебания*, при которых все грузы совершают гармонические колебания с одинаковой фазой $kt + \alpha$, одновременно проходя через положение равновесия и одновременно достигая крайних положений, придем к алгебраической системе

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \delta_{11}m_1k^2B_1 + \delta_{12}m_2k^2B_2 + \dots + \delta_{1N}m_Nk^2B_N, \\ B_2 &= \delta_{21}m_1k^2B_1 + \delta_{22}m_2k^2B_2 + \dots + \delta_{2N}m_Nk^2B_N, \\ &\dots\dots\dots \\ B_N &= \delta_{N1}m_1k^2B_1 + \delta_{N2}m_2k^2B_2 + \dots + \delta_{NN}m_Nk^2B_N, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

которую можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} (\delta_{11}m_1 - 1/k^2)B_1 + \delta_{12}m_2B_2 + \dots + \delta_{1N}m_NB_N &= 0, \\ \delta_{21}m_1B_1 + (\delta_{22}m_2 - 1/k^2)B_2 + \dots + \delta_{2N}m_NB_N &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{N1}m_1B_1 + \delta_{N2}m_2B_2 + \dots + (\delta_{NN}m_N - 1/k^2)B_N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Условием существования нетривиального (ненулевого) решения B_1, B_2, \dots, B_N этой системы является, как известно из алгебры, равенство нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - 1/k^2 & \delta_{12}m_2 & \dots & \delta_{1N}m_N \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - 1/k^2 & \dots & \delta_{2N}m_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{N1}m_1 & \delta_{N2}m_2 & \dots & \delta_{NN}m_N - 1/k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) называется уравнением частот или частотным уравнением (ср. (4.36)), поскольку корни этого уравнения определяют частоты искомых главных колебаний. Оно является алгебраическим уравнением степени N относительно величины $1/k^2$, в чем можно убедиться, развернув определитель. Заметим, что при $N > 2$ это развертывание и последующее решение частотного уравнения является, вообще говоря, довольно трудоемкой задачей и требует использования компьютера.

Алгебраическое исследование системы (5.4) и уравнения (5.5) позволяет сформулировать следующие свойства главных колебаний (ср. 4.2.4):

Свойство 1. Для системы с N степенями свободы существует N различных главных колебаний, которым отвечают N различных собственных форм $(B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, \dots, B_N^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, N$. Эти формы можно выбрать m -нормированными, т.е. удовлетворяющими равенствам $m_1 B_1^{(j)2} + m_2 B_2^{(j)2} + \dots + m_N B_N^{(j)2} = 1$ для всех j .

Свойство 2. Частоты и формы главных колебаний не зависят от начальных условий, а определяются постоянными упруго-инерционными характеристиками системы.

Свойство 3. Частоты главных колебаний удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \dots + \frac{1}{k_N^2} = m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + \dots + m_N \delta_{NN}, \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{k_1^2} \cdot \frac{1}{k_2^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{k_N^2} = \begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 & \delta_{12}m_2 & \dots & \delta_{1N}m_N \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 & \dots & \delta_{2N}m_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{N1}m_1 & \delta_{N2}m_2 & \dots & \delta_{NN}m_N \end{vmatrix}. \quad (5.7)$$

Свойство 4. Обобщенная теорема ортогональности: *Формы главных колебаний, соответствующие различным собственным частотам, удовлетворяют условию ортогональности* (ср. (4.66)): при $i \neq j$

$$m_1 B_1^{(i)} B_1^{(j)} + m_2 B_2^{(i)} B_2^{(j)} + \dots + m_N B_N^{(i)} B_N^{(j)} = 0. \quad (5.8)$$

Простые соотношения, определяющие частоты и формы главных колебаний, вроде (4.37), (4.38), вообще говоря, могут быть записаны лишь для $N \leq 2$. Поэтому для систем с большим числом степеней свободы уравнения (5.4), (5.5) приходится решать численными методами. Однако существуют некоторые классы систем с произвольным числом N степеней свободы, для которых известны явные выражения, определяющие их собственные частоты и формы. Замечательным примером такой системы является балка постоянного попереч-

ного сечения, свободно опертая по концам, с N точечными грузами при условии равенства их масс $m_1 = m_2 = \dots = m_N = m$ и расстояний между ними $AM_1 = M_1M_2 = \dots = M_NB = l$ (Это регулярный вариант системы, изображенной на рис. 5.1. Признаемся, что определение частот и форм прямо из (5.4), (5.5) было бы чрезвычайно громоздко. Задача сильно упрощается, если использовать «теорему о трех моментах» Клапейрона). Опуская вычисления, приведем результат:

Квадраты собственных частот в порядке возрастания номера j определяются формулой

$$k_j^2 = \frac{12EI}{ml^3} \cdot \frac{\left(1 - \cos \frac{j\pi}{N+1}\right)^2}{2 + \cos \frac{j\pi}{N+1}}, \quad (5.9)$$

где E – модуль упругости материала, I – момент инерции поперечного сечения балки, постоянные по длине балки,

а соответствующие им формы – равенствами $B_i^{(j)} = C \sin \frac{ij\pi}{N+1}$, $j = 1, 2, \dots, N$.

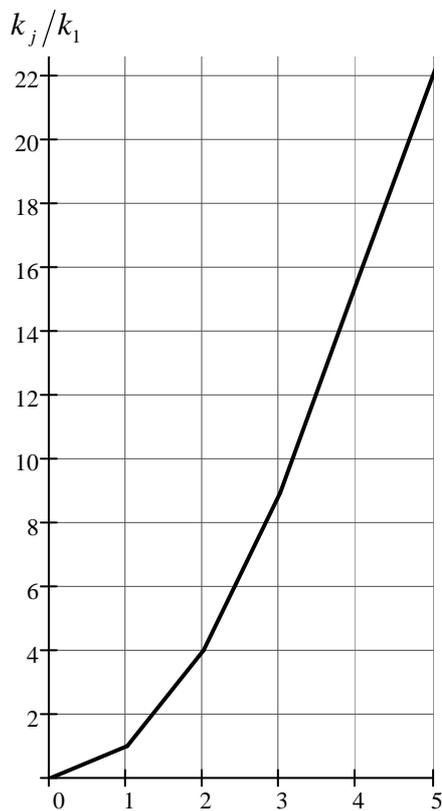


Рис. 5.2

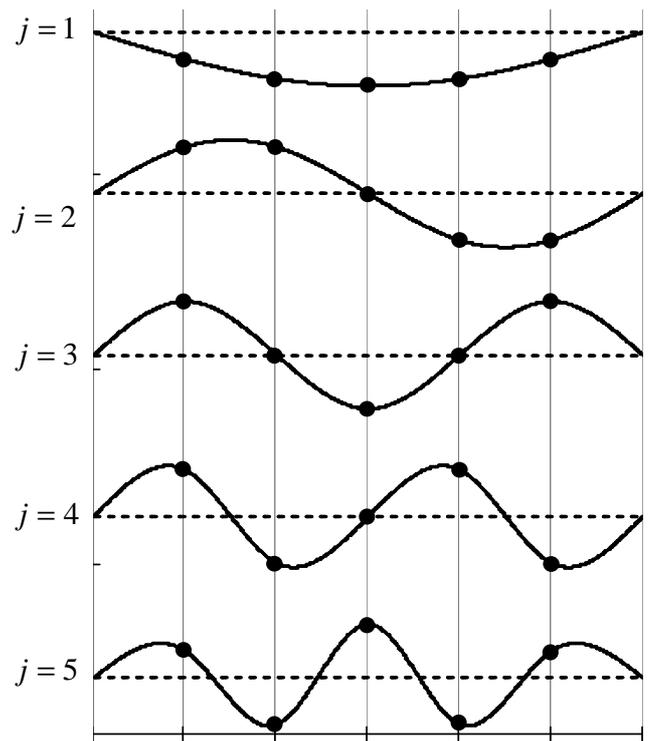


Рис. 5.3

На рис. 5.2 показан график зависимости относительной собственной частоты k_j/k_1 от ее номера j для случая $N = 5$. Как видим, низкие частоты ($j \leq 3$) довольно точно укладываются на параболу. Справа на рис. 5.3 показаны соответствующие собственные формы.

Как и в разделе 4.2.4, в общем случае можно ввести **главные координаты** $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$ согласно равенствам (ср. (4.68), (4.70))

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= B_1^{(1)}\eta_1 + B_1^{(2)}\eta_2 + \dots + B_1^{(N)}\eta_N \\ y_2 &= B_2^{(1)}\eta_1 + B_2^{(2)}\eta_2 + \dots + B_2^{(N)}\eta_N \\ &\dots \\ y_N &= B_N^{(1)}\eta_1 + B_N^{(2)}\eta_2 + \dots + B_N^{(N)}\eta_N \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \eta_1 &= m_1 B_1^{(1)} y_1 + m_2 B_2^{(1)} y_2 + \dots + m_N B_N^{(1)} y_N \\ \eta_2 &= m_1 B_2^{(2)} y_1 + m_2 B_2^{(2)} y_2 + \dots + m_N B_N^{(2)} y_N \\ &\dots \\ \eta_N &= m_1 B_N^{(N)} y_1 + m_2 B_2^{(N)} y_2 + \dots + m_N B_N^{(N)} y_N \end{aligned} \right\}.$$

В главных координатах уравнения свободных и вынужденных колебаний системы соответственно принимают вид (ср. (4.72), (4.76))

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + k_1^2 \eta_1 &= 0 \\ \ddot{\eta}_2 + k_2^2 \eta_2 &= 0 \\ &\dots \\ \ddot{\eta}_N + k_N^2 \eta_N &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + k_1^2 \eta_1 &= Q_{\eta_1}(t) \\ \ddot{\eta}_2 + k_2^2 \eta_2 &= Q_{\eta_2}(t) \\ &\dots \\ \ddot{\eta}_N + k_N^2 \eta_N &= Q_{\eta_N}(t) \end{aligned} \right\}, \quad (5.10)$$

где $Q_{\eta_j}(t) = Q_1 B_1^{(j)} + Q_2 B_2^{(j)} + \dots + Q_N B_N^{(j)}$ – обобщенная возмущающая сила, соответствующая главной координате η_j , $Q_j = Q_j(t)$ – сосредоточенная возмущающая сила, приложенная к грузу M_j .

В случае гармонического возмущения $Q_j = H_j \sin pt$ остается справедливым все сказанное в разделе 4.2.6.3. В частности, сохраняют силу уравнения (4.79) (для всех η_j) и теорема 4.2. Свойства 1 – 5 вынужденных колебаний, установленные в разделе 4.2.6.4, могут быть повторены почти дословно (с надлежащими изменениями) и для системы с произвольным числом N степеней свободы. Особо отметим, что, поскольку система с N степенями свободы обладает, вообще говоря, спектром из N собственных частот, то и резонанс может наступить при N значениях частоты p возмущающей силы. Например, амплитуда колебаний груза M_1 от сосредоточенной гармонической возмущающей силы, приложенной в точке

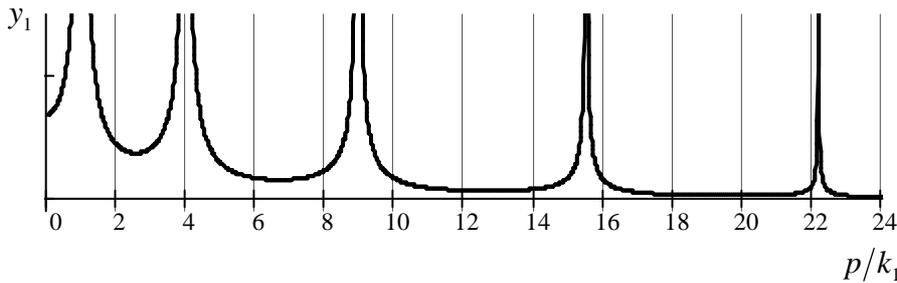


Рис. 5.4

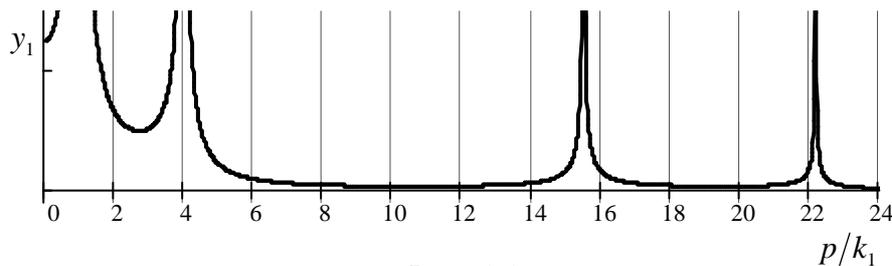


Рис. 5.5

M_5 балки, рассмотренной выше (рис. 5.3), резко возрастает при пяти значениях частоты этой силы (см. рис. 5.4). Если такую же силу приложить к точке M_4 , зависимость амплитуды груза M_1 от частоты возмущения несколько изменится (см. рис. 5.5). В частности, «пропал» резонанс при $p/k_1 = 9$. Подумайте, как это объяснить.

Контрольные вопросы

К разделу 1

1. Что называется упругим телом?
2. Как математически выражается восстанавливающий характер сил упругости?
3. Что называется упругой системой?
4. Какое положение равновесия называется устойчивым?
5. Какое положение равновесия называется неустойчивым?
6. Как математически выражается признак устойчивости положения равновесия упругой системы?
7. В чем заключается консервативность упругой системы?
8. Какие упругие системы называются линейно-упругими?
9. В чем заключается принцип суперпозиции?
10. Как выражается признак устойчивости равновесия линейно-упругой системы?
11. В чем заключается теорема взаимности для линейно-упругой системы?

К разделам 2.1, 2.2

1. Что называется колебаниями?
2. Что называется периодом колебаний?
3. Что называется частотой колебаний? Что такое круговая частота?
4. Как выражается связь между периодом и частотой?
5. Что называется амплитудой колебаний?
6. Какие колебания называются гармоническими?
7. Как по уравнению гармонических колебаний определить их период, частоту, круговую частоту?
8. Как по уравнению гармонических колебаний определить их амплитуду?

К разделам 2.3, 2.4

1. Что называется положением равновесия?
2. Что называется восстанавливающей силой?
3. Как определяется сила, действующая на материальную точку, совершающую прямолинейные гармонические колебания?
4. Что называется коэффициентом жесткости линейно-упругой пружины?
5. Что такое статическая деформация пружины?
6. Что называется собственными колебаниями упругой системы?
7. Как выглядит дифференциальное уравнение свободных прямолинейных колебаний материальной точки массы m , прикрепленной к упругой пружине с коэффициентом жесткости c ?
8. Как определяется частота собственных колебаний материальной точки массы m , прикрепленной к упругой пружине с коэффициентом жесткости c ?
9. Как зависит частота собственных колебаний от смещения точки от положения равновесия и от скорости точки в начальный момент?
10. Как зависит амплитуда собственных колебаний от смещения точки от положения равновесия и от скорости точки в начальный момент?
11. Как выглядит уравнение свободных прямолинейных колебаний материальной точки массы m , прикрепленной к упругой пружине с коэффициентом жесткости c , если в начальный момент $t = 0$ точка была смещена из положения равновесия на расстояние x_0 и имела скорость v_0 ?

К разделу 2.5

1. Как выглядит дифференциальное уравнение свободных прямолинейных колебаний материальной точки массы m , прикрепленной к упругой пружине с коэффициентом жесткости c при действии силы сопротивления, пропорциональной скорости $\vec{R} = -\gamma\vec{v}$?
2. Каким будет характер движения при слабом сопротивлении?
3. Что называется затухающими гармоническими колебаниями?
4. Что называется условным периодом затухающих гармонических колебаний?
5. Что называется логарифмическим декрементом затухающих гармонических колебаний?
6. Как зависит условный период затухающих гармонических колебаний от начального положения и начальной скорости точки?
7. Что такое апериодическое движение? При каких условиях движение материальной точки, прикрепленной к упругой пружине, в среде с сопротивлением будет апериодическим?

К разделу 2.6,

1. Что называется возмущающей силой?
2. Как выглядит дифференциальное уравнение движения материальной точки массы m , прикрепленной к упругой пружине с коэффициентом жесткости c при действии возмущающей силы, изменяющейся по закону $Q(t)$?
3. Каким будет движение материальной точки массы m , прикрепленной к упругой пружине с коэффициентом жесткости c при действии постоянной возмущающей силы?
4. Что называется вынужденными колебаниями при действии периодической возмущающей силы?
5. Как определяется частота вынужденных колебаний материальной точки массы m , прикрепленной к упругой пружине с коэффициентом жесткости c при действии периодической возмущающей силы, изменяющейся по закону $H \sin pt$?
6. Как определяется амплитуда вынужденных колебаний материальной точки массы m , прикрепленной к упругой пружине с коэффициентом жесткости c при действии периодической возмущающей силы, изменяющейся по закону $H \sin pt$?
7. Что называется резонансом? Как изменяется расстояние от колеблющейся точки до положения равновесия при резонансе?
8. Какой вид имеет уравнение движения материальной точки массы m , прикрепленной к упругой пружине с коэффициентом жесткости c при действии возмущающей силы, изменяющейся по закону $Q(t)$, если в момент $t = 0$ точка находилась в положении равновесия и имела нулевую скорость (интеграл Дюамеля)?
9. Каким будет характер движения груза при действии негармонической периодической возмущающей силы?
10. Что называется резонансом j -го порядка?

К разделу 2.7

1. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вынужденного движения груза в присутствии силы сопротивления, пропорционального скорости?
2. Какой вид имеет общее решение этого уравнения в случае гармонической возмущающей силы?
3. Зависят ли амплитуда и частота вынужденных колебаний от начального положения и начальной скорости груза?
4. От чего зависит амплитуда гармонических вынужденных колебаний?
5. Как отражается наличие сопротивления на поведении груза при резонансе?

К разделу 3

1. Что называется **обобщенными координатами** механической системы?
2. Что называется механической системой с одной степенью свободы?
3. Как выражается **кинетическая энергия** механической системой с одной степенью свободы через обобщенную координату и ее производную по времени?
4. Что называется **обобщенной силой**, соответствующей некоторой обобщенной координате?
5. Какой вид имеет дифференциальное уравнение движения механической системы с одной степенью свободы?
6. Чему равна обобщенная сила **в положении равновесия** механической системы с одной степенью свободы?
7. Что понимается под **линеаризацией** дифференциального уравнения?
8. Какой вид имеет линеаризованное дифференциальное уравнение движения механической системы с одной степенью свободы вблизи положения равновесия?

К разделу 4.1

1. Чему равна сила, действующая на материальную точку, упруго закрепленную в плоскости, со стороны упругого закрепления (восстанавливающая сила) при малом смещении из положения равновесия? Какими соотношениями выражаются проекции этой силы на координатные оси через координаты точки?
2. Когда упругое закрепление называется **консервативным**?
3. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты жесткости консервативного закрепления?
4. Какой угол образует реакция упругого закрепления с вектором смещения груза из положения равновесия, если эта реакция имеет **восстанавливающий характер**? Как аналитически отражается восстанавливающий (а не опрокидывающий) характер реакции закрепления?
5. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты жесткости **восстанавливающего** (устойчивого) консервативного закрепления?
6. Что называется **свободным движением** упругой системы?
7. Какой вид имеют **дифференциальные уравнения свободного движения** в плоскости упруго закрепленной материальной точки?
8. Какое движение точечного груза, упруго закрепленного в плоскости, называется **главными колебаниями**?
9. Как изменяются координаты груза с течением времени при главных колебаниях?
10. Как определяются частоты и направления главных колебаний (**собственные частоты и формы**)?
11. Как зависят собственные частоты и формы от положения и скорости груза в начальный момент времени?
12. Сколько главных направлений (собственных форм) и соответствующих им собственных частот существует для материальной точки, упруго закрепленной в плоскости?
13. Какой угол образуют **направления главных колебаний** точечного груза, упруго закрепленного в плоскости, **соответствующие различным собственным частотам**?
14. Как выражаются коэффициенты жесткости упругого закрепления через собственные частоты и формы главных колебаний (через частоты и направления главных колебаний)?
15. Как выглядит зависимость от времени координат упруго закрепленного груза **в общем случае его свободного движения** (при произвольных начальных условиях)?

К разделу 4.2

1. Какой вид имеют дифференциальные уравнения движения системы двух точечных грузов, закрепленных на упругой балке?
2. Что представляют собой главные колебания такой системы?
3. Как выглядит уравнение, из которого определяются собственные частоты (уравнение частот, частотное уравнение)?
4. Сколько различных главных колебаний может совершать система с двумя степенями свободы?
5. Что называется формой главных колебаний?
6. Каким соотношениям удовлетворяют частоты различных главных колебаний?
7. В чем заключается обобщенная ортогональность (*m*-ортогональность) собственных форм?
8. Что называется *главными (нормальными) координатами* упругой механической системы?
9. Какой вид имеют дифференциальные уравнения свободного движения упругой системы с двумя степенями свободы в главных координатах?
10. Как выглядит зависимость от времени *главных координат в общем случае свободного движения* упругой системы с двумя степенями свободы (при произвольных начальных условиях)?
11. Как изменяются координаты двухмассовой системы при главных колебаниях и в произвольном свободном движении?
12. Что такое биения? При каком соотношении между частотами главных колебаний могут возникнуть биения?

К разделу 4.3

1. Что называется *возмущающей силой* и *возмущающей нагрузкой*?
2. Что называется *вынужденным движением* упругой системы?
3. Какой вид имеют дифференциальные уравнения вынужденного движения упругой системы?
4. Что называется *вынужденными колебаниями* упругой системы?
5. Какой вид имеют дифференциальные уравнения *вынужденного движения упругой системы в главных координатах*?
6. Как вычисляются *обобщенные возмущающие силы, соответствующие главным координатам*?
7. В чем заключается *ортогональность возмущающей нагрузки какой-либо из собственных форм*?
8. Как изменяются с течением времени главные координаты упругой системы при установившихся вынужденных колебаниях, вызываемых *гармонической возмущающей нагрузкой*?
9. Что называется *резонансом*? При каких значениях частоты возмущающей нагрузки может наступить резонанс?
10. При каких условиях гармоническая возмущающая нагрузка, действующая с частотой, равной одной из собственных частот упругой системы, *не вызывает резонанса*?

Литература

1. В.Л.Бидерман. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980, 408 с.
2. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960, 580 с.
3. Р.Клаф, Дж. Пензиен. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979, 320 с.
4. Коваленко К.Р., Косицин А.Ю., Макаров О.Ф. Методические указания по изучению теории колебаний в курсе теоретической механики. Одесса.: ОИСИ, 1982, 48 с.
5. Коваленко К.Р., Косицин А.Ю., Макаров О.Ф. Методические указания по изучению курса теоретической механики «Динамика точки» для иностранных учащихся. Одесса.: ОИСИ, 1986, 46 с.
6. Крылов А.Н. Вибрация судов. Собрание трудов, т. X, М.-Л.: АН СССР, 1948, 402 с.
7. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т.2. М.: Наука 1984, 640 с.
8. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972, 470 с.
9. Николаи Е.Л. Теоретическая механика. Часть 2. М.: 1956, 484 с. и последующие издания.
10. Павловський М.А. Теоретична механіка. Київ.: «Техніка» 2002, 512 с.
11. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука 1980, 272 с.
12. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Политехника, 1989, 272 с.
13. Рэлей (Дж. В. Стретт) Теория звука, т.1. М.: ГТТИ, 1955, 504 с.
14. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
15. В.М.Фомин, С.Я.Бекшаев, И.П.Фомина. Динамические модели в инженерных задачах. Учебное пособие. Одесса.: ОГАСА, 2012, 94 с.
16. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний М.: Высшая школа, 1975, 248 с.