

**МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО МАШИНОСТРОЕНИЯ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ОРДЕНА КРАСНОЙ ЗВЕЗДЫ
ИНСТИТУТ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

Полежаев В.И.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТЕЙ И
ГАЗОВ ПРИ НОРМАЛЬНОЙ И ПОНИЖЕННОЙ ГРАВИТАЦИИ**

**Диссертация, представленная на соискание
ученой степени доктора физико-
математических наук**

Москва, 1972 г.

АННОТАЦИЯ

Изложены разностные методы решения нелинейных уравнений гидродинамики и переноса тепла вязких жидкостей и газов в однородных и пористых средах при наличии внешних массовых сил. Даны приложения разработанных методов к исследованию процессов конвективного теплообмена.

Рассматривается конвективный перенос в плоских слоях тепловой изоляции с однородным газовым и пористым наполнителем. Обобщены характеристики локального и среднего теплообмена.

Изучаются нестационарные и квазистационарные режимы конвективного теплообмена при длительном хранении топлив в баках двигательных установок в условиях пониженной гравитации. Исследуется влияние перегрузки, степени заполнения, градиентов поля массовой силы, теплопритоков к боковой, свободной поверхностям и дну. Обобщены характеристики теплоотдачи и температурного расслоения. Изучается перенос тепла в условиях невесомости с учетом термокапиллярной конвекции и при совместном действии естественной и термокапиллярной конвекции.

Изучаются особенности естественной конвекции в сжимаемом газе и приводятся результаты исследования проникающих конвективных движений в моделях атмосфер, имеющих глубокую конвективную зону.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	8
ГЛАВА I. РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ	
УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ.....	14
ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ.....	14
§ I. Уравнения естественной конвекции газов и жидкостей.....	16
1. Система нестационарных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа.	
Модель естественной конвекции сжимаемого газа.....	16
2. Уравнения конвекции жидкостей в приближении	
Буссинеска. Термокапиллярные эффекты.....	22
3. Уравнения конвекции в проницаемой мелкодисперсной	
пористой среде. Приближение Дарси.....	27
§ 2. Разностная схема для решения нестационарных уравнений	
Навье-Стокса сжимаемого газа.....	30
1. Одномерные уравнения.....	32
2. Двумерные уравнения.....	36
3. Методические эксперименты. Расчет стационарных и	
нестационарных режимов.....	40
§ 3. Разностная схема для решения уравнений конвекции в	
приближении Буссинеска.....	44
1. Нестационарные уравнения Буссинеска.....	45
2. Методические эксперименты. Особенности расчета нестационарных	
и квазистационарных режимов при больших числах Релея.....	52
3. Стационарные уравнения конвекции в пористой среде.....	56
Выводы к главе I.....	59
ГЛАВА II. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ЕСТЕСТВЕННОЙ	
КОНВЕКЦИИ В ПЛОСКИХ СЛОЯХ ЖИДКОСТИ И ГАЗА.....	60
ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ.....	60
§ I. Вертикальные слои газа при боковом подогреве.....	63

1. Численная реализация стационарных режимов.....	64
2. Режимы течения и теплообмена при изменении числа Грасгофа. Местные потоки тепла и вертикальный градиент температуры. Механизм вторичных движений при больших числах Грасгофа.....	67
3. Режимы течения и теплообмена в диапазоне чисел $Gr_L, H/L$. Влияние относительного удлинения слоя. Режимы по числам Ra, Pr . Формула для расчета средней теплопередачи и сопоставление с данными других авторов.....	75
4. Квазистационарный режим вертикального слоя при боковом подводе тепла. Локальный перегрев стенки. Связь между теплоотдачей и температурным расслоением.....	83
§ 2. Горизонтальные слои, подогреваемые снизу; конвекция в замкнутой области и периодическая конвекция за порогом устойчивости равновесия.....	90
1. Подходы к численной реализации решений уравнений Навье-Стокса за порогом устойчивости равновесия; ветви стационарных решений.....	91
2. Режимы течения и теплообмена в замкнутых областях за порогом устойчивости. Влияние чисел Грасгофа, Прандтля и геометрии. Формула для расчета средней теплопередачи.....	101
3. Периодическая конвекция в горизонтальном слое. Сопоставление результатов расчета с опытными данными. Влияние длины волны конвективных движений. Локальные эффекты.....	105
4. Особенности течения и теплообмена при других углах наклона.....	114
§ 3. Теплопередача через плоские слои пористых материалов. 117	
1. Горизонтальные слои. Влияние на теплопередачу числа Ra_* и длины волны. Локальные эффекты. Сопоставление с опытными данными.....	118
2. Вертикальные и наклоненные под углом φ слои пористого материала. Влияние числа Ra_* и удлинения слоя. Неравномерность местных потоков тепла. Сопоставление с опытными данными. Влияние угла наклона.....	124

§ 4. Некоторые общие свойства ламинарной естественной конвекции в замкнутых, областях.....	132
Выводы в главе II.....	134
ГЛАВА III. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ТОПЛИВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ С ЧАСТИЧНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ ПРИ ЗАДАННОМ ПОДВОДЕ ТЕПЛА.....	
	135
ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ.....	135
§ I. Конвекция в сосуде при боковом подводе тепла.....	141
1. Характерные режимы во времени. Структура полей течения и температур при слабой конвекции.....	141
2. Структура нестационарной конвекции при больших числах Релея.....	147
3. Обобщение результатов расчета. Границы характерных временных режимов в диапазоне чисел Ra^* , F_0 Теплоотдача и температурное расслоение.....	161
4. Динамический и тепловой режим свободной поверхности. Вклад конвекции в увеличение локальных и средних температур.....	167
5. Особенности нестационарной конвекции при наличии градиента гравитации.....	175
§ 2. Прогрев топлива при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям.....	181
1. Структура переходного режима. Влияние потока тепла, подводимого сверху».....	181
2. Вклад конвекции в увеличение температуры свободной поверхности...	188
§ 3. Общий случай прогрева: схема конвективного взаимодействия при подводе тепла к боковой, свободной поверхностям и дну.....	191
1. Тепловая неустойчивость и конвективное взаимодействие. Глубина проникновения конвекции.....	191
2. Влияние конвекции на распределение температур нагреваемых поверхностей. Тепловой режим свободной поверхности.	198

3. Влияние степени заполнения сосуда и числа Релея.....	201
4. Обобщение результатов расчета.....	207
§ 4. Приближенная методика расчета средней температуры свободной поверхности.....	210
§ 5. Некоторые общие свойства нестационарной естественной конвекции в сосудах и приложение к анализу эффективности режимов длительного хранения топлива в условиях пониженной гравитации.....	211
Выводы к главе III.....	215
ГЛАВА IV. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ И СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ.....	217
ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ.....	217
§ I. Термокапиллярная и естественная конвекция в цилиндрическом сосуде, частично заполненном жидкостью.....	223
1. Термокапиллярная конвекция при боковом подводе тепла. Влияние подвода тепла к поверхности жидкости.....	224
2. Термокапиллярная конвекция, возникающая при подводе тепла по нормали к свободной поверхности (неустойчивость Марангони)....	233
3. Совместное действие естественной и термокапиллярной конвекции....	236
§ 2. Прогрев жидкости в сферическом сосуде, содержащем газовый пузырь.....	240
1. Постановка задачи.....	240
2. Термокапиллярная конвекция вокруг пузыря в условиях невесомости.....	243
3. Совместное действие естественной и термокапиллярной конвекции...	248
Выводы к главе IV.....	255
ГЛАВА V. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ СЖИМАЕМОГО ГАЗА.....	257
ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ.....	257

§ 1. Эффекты сжимаемости при естественной конвекции в замкнутых конвективных ячейках с линейным начальным профилем температур.....	260
1. Критерии конвекции в сжимаемом вязком газе. Влияние сжимаемости на возникновение конвекции в вязком и теплопроводном газе.....	260
2. Конвекция сжимаемого газа за порогом устойчивости равновесия. Режимы конвекции в диапазоне чисел Gr, K	268
3. Температурное расслоение в сжимаемом газе при боковом подводе тепла.....	271
§ 2. Модель проникающей конвекции сжимаемого газа в глубокой атмосфере.....	276
§ 3. Результаты исследования структуры стационарной проникающей конвекции.....	282
1. Нижний слой атмосферы при наличии у поверхности зоны инверсии плотности.....	283
2. Подобие начального распределения температуры при уменьшенном вертикальном масштабе атмосферы. Влияние закона изменения вязкости.....	290
3. Влияние параметра сжимаемости C_{FH}	293
Выводы к главе V.....	295
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	296
ЛИТЕРАТУРА.....	299
УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.....	317

ВВЕДЕНИЕ

Движения и перенос тепла неравномерно нагретых жидкостей или газов, происходящие под действием подъемных сил при наличии гравитационного поля или под действием градиентов сил поверхностного натяжения на свободной поверхности, играют важную роль в рабочих процессах, протекающих в системах современных космических аппаратов и широко распространены в окружающей нас среде.

Еще в начале века Нуссельтом и в предвоенные годы Муллем, Рейером, Крауссольдом, а затем Михеевым [1, 2] изучалась задача об эффективности тепловой изоляции в связи с влиянием естественной конвекции в однородной газовой среде. В последние годы для теплозащиты элементов конструкции, длительно работающих в области высоких температур и давлений (в частности, в атмосфере Венеры) находят применение проницаемые пористые материалы, эффективность которых в этих условиях во многом зависит от вклада в перенос тепла конвективной составляющей.

Вклад естественной конвекции играет важную роль в процессах тепло- и массообмена, протекающих в баках двигательных установок ракет на жидком топливе. Наличие естественной конвекции в баках приводит с одной стороны, к отводу тепла от нагреваемых поверхностей внутрь массива топлива; с другой стороны, имеет место вертикальное расслоение компонентов топлива по температуре и увеличение температуры поверхности топлива, что приводит при длительном хранении топлива к увеличению давления в газовой подушке и увеличению толщины оболочки бака, либо связано с потерями компонента для дренажа. Наличие прогретого слоя вблизи свободной поверхности приводит к увеличению остатков "теплового незабора" ввиду возможной кавитации при подаче топлива в двигатель. В связи с внедрением в космическую технику криогенных компонентов топлива (жидкий кислород и в особенности жидкий водород) требования к точности предсказания характеристик прогрева топлива значительно возрастают. Однако, в понимании механизма температурного

расслоения, вызываемого конвекцией, и количественного вклада конвекции в увеличение температуры поверхности топлива еще нет полной ясности.

В последние годы все большую актуальность приобретает проблема длительного хранения больших объемов топлива в космическом пространстве в условиях ослабленного гравитационного поля и невесомости, возникающая при осуществлении дальних перелетов в космосе [3-9]. Исследование и рациональное использование капиллярных и термокапиллярных эффектов, играющих большую роль в этих условиях, важно для создания оптимальных систем и выбора оптимальных режимов хранения топлив. Проблема переноса тепла в невесомости тесно примыкает и к более общей проблеме изучения физических и биологических эффектов невесомости.

Развитие исследований в области естественной конвекции газовой среды стимулируется потребностями геофизики, физики планет и астрофизики в связи с изучением локальных атмосферных явлений и построением моделей атмосфер, имеющих конвективные зоны. Эти области науки, тесно связанные сегодня с развитием космической техники, в последние годы обогатились большим количеством наблюдательной информации в связи с измерением параметров атмосферы Земли с помощью метеорологических спутников и непосредственным зондированием атмосфер Венеры и Марса. Для интерпретации этой информации важно развитие представлений о структуре сложных конвективных образований (см., например, [10,11]) и о количественном вкладе конвекции в тепловой режим.

Естественная конвекция отличается сложностью и разнообразием внутренней структуры и изменчивостью ввиду существенной взаимной зависимости полей течения и температур и влияния большого числа факторов. Поэтому изучение переноса тепла развитыми конвективными движениями в упоминавшихся приложениях представляет самостоятельную и весьма трудную проблему. Отметим, что возможности использования традиционного аппарата пограничного слоя или линейной теории [1, 12-17] для решения этой проблемы ограничены. Менее эффективны и приближенные методы расчета,

использующие представления о структуре движений, полученные в измерениях (такие методы получили распространение в ряде других областей конвективного теплообмена).

Значительное расширение исследований по естественной конвекции и углубление этих исследований в область практических приложений в последние годы связано с новыми средствами исследования - численными методами решения нелинейных уравнений гидродинамики и переноса тепла в вязких жидкостях и газах. Эта область вычислительной математики, находящаяся сегодня на стыке с механикой и физикой, особенно интенсивно развивалась в последние десять лет [18-22].

Первые численные решения нелинейных уравнений естественной конвекции выполнены сравнительно недавно (1964-1966 гг.) и относились лишь к простейшим задачам в замкнутых двумерных областях (уравнения Буссинеска в работах Дирдорфа, Фрома, Бараката и Кларка, Гершуни, Жуховицкого и Тарунина [23-26] и уравнения сжимаемого газа в работе авторе [27]); однако уже в этих работах были выявлены большие возможности численных методов в систематическом изучении и предсказании новых закономерностей конвективного теплообмена. В предлагаемой работе обобщены результаты исследований автора в области развития численных методов решения нелинейных задач естественной конвекции и результаты применения этих методов к узловым проблемам теории естественной конвекции, имеющим непосредственное практическое приложение.

Численное решение нелинейных уравнений гидродинамики вязких жидкостей и газов даже при использовании наиболее быстродействующих ЭВМ представляет весьма трудную задачу и требует напряженной методической работы, в особенности при больших числах Рейнольдса (или Релея). Результаты этой работы представлены в главе I. Диапазон чисел Релея, реализованный в расчетах, охватывает практически всю область ламинарных режимов, имеющих широкое распространение при пониженной гравитации и

вплотную примыкает к режиму перехода из ламинарного течения в турбулентное.

Для того, чтобы расширить круг приложений, численные методы применены к описанию движений в плоских и осесимметричных областях и в различных средах (жидкость, газ, пористая среда). В схемы расчета включены новые и малоизученные эффекты, такие, как термокапиллярные эффекты, переменность поля массовых сил, нестационарность.

Продвижение в область приложений потребовало перехода от простых расчетных схем (замкнутая двумерная область, стационарный режим) к расчетным схемам, более трудным в реализации и анализе, но более полно учитывающим реальные физические эффекты (конвективное взаимодействие в цилиндрическом сосуде при комбинированном подводе тепла (глава III), взаимодействие естественной и термокапиллярной конвекции (глава IV), проникающая конвекция сжимаемого газа (глава V)) и развития техники анализа и обобщения результатов численных решений. Ключом к построению характерных режимов и обобщению характеристик теплообмена, представляющих непосредственный интерес на практике, является изучение особенностей внутренней структуры наиболее детальное в главах II и III.

Одним из основных результатов глав II, III является обобщение характеристик температурного расслоения, вызываемого ламинарной конвекцией в замкнутых областях. В основе этого обобщения лежит обнаруженный автором в 1968 - 1969 гг. принцип максимальной неравномерности распределения местного потока тепла (или максимального температурного расслоения при слабой конвекции в замкнутых областях при заданном потоке тепла). Дальнейшие исследования показали, что принцип максимального температурного расслоения распространяется на воздействие различной природы, приводящие к ослаблению конвекции. Применение этого принципа позволяет избежать неблагоприятного воздействия естественной конвекции на поле температур в важнейших практических ситуациях (локальный перегрев конструкции, защищенной теплоизоляцией, увеличение

давления в газовой подушке при длительном хранении топлива в баках). В главе IV изучаются тепловые и гидродинамические эффекты невесомости, представляющие значительные трудности при постановке лабораторных измерений в земных условиях. Эта новая область конвективного теплообмена еще только выходит из стадии лабораторных опытов и изучения на относительно простых моделях основных эффектов в стадию практических приложений к задачам о прогреве топлива в баках.

Изучение естественной конвекции сжимаемого газа, предпринимаемое в главе V, с одной стороны, обслуживает “внутренние потребности” теории естественной конвекции, позволяя уточнить условия, когда следует применять широко распространенное приближение Буссинеска. С другой стороны, эффекты сжимаемости сами по себе еще мало изучены и также, как эффекты невесомости, не поддаются пока экспериментальному моделированию в лабораторных условиях. Основным результатом главы V является разработка схемы проникающей конвекции в парниковой модели атмосферы Венеры, где сжимаемость существенна в связи с большой глубиной атмосферы этой планеты.

Численные методы, без сомнения, найдут еще более широкое применение в ближайшие годы в связи с предстоящим внедрением ЭВМ нового поколения, для которых будет достижимо комплексное моделирование процессов тепло- и массообмена, в ряде случаев превосходящее лабораторное моделирование. Наиболее сложную и трудоемкую часть при таком комплексном численном моделировании составляют гидродинамические процессы, описываемые нелинейными уравнениями. С этой точки зрения представляется своевременным подведение некоторых итогов изучения этих процессов численными методами.

Обзор результатов работ других авторов, относящихся к содержанию глав I, II, дан в тексте этих глав. Современное состояние работ, относящихся к тематике глав III, IV и V, дано в "Общих замечаниях" к этим главам. Нумерация формул - отдельная в каждой из глав.

Представленная работа выполнялась в лаборатории № 4 НИИТП. Основные результаты работы содержатся в препринтах и отчетах [70, 72, 97, 104, 106, 140, 169, 211, 107] и опубликованы в печати [48, 49, 71, 77, 98, 105, 108, 141, 170, 210, 222, 229].

Отдельные результаты докладывались на НТС лаборатории № 4, на семинарах, руководимых академиком Петровым Г.И. в МГУ и ВЦМГУ, на ряде семинаров Института Прикладной Математики и в Институте Проблем Механики, а также на Всесоюзных семинарах по численным методам в механике вязкой жидкости (1966 г., Новосибирск, 1968 г., Канев, 1970 г. Алма-Ата), на II-м Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Москва, 1968), Всесоюзных Совещаниях по тепло- и массообмену (Минск, 1968, 1972 г.), на II-й Конференции по проблемам гидродинамики и тепломассообмену в условиях слабых силовых полей (Москва, 1969 г.), на I-м Всесоюзном Совещании по современным проблемам тепловой гравитационной конвекции (Минск, 1971). Результаты работы по моделям конвекции сжимаемого газа докладывались на Всесоюзной конференции по физике Луны и планет (Киев, 1968) и на международных конференциях и семинарах (Туссон, США, Герцег-Нови, Югославия).

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность академику Г.И. Петрову, профессорам В.С. Авдеевскому и Д.А. Мельникову за внимание к работе и полезные советы. Автор благодарит В.М. Миронова за полезные замечания в ходе выполнения работы. Особую благодарность автор выражает Ю.В. Вальциферову, М.П. Власюку, Т.В. Кусковой, Т.В. Волокитиной, помогавшим в выполнении отдельных этапов работы и Т.Д. Пирумовой за большую помощь в обработке обширных результатов и оформлении работы.

ГЛАВА I. РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Данная глава содержит описание математического аппарата, развитого для исследования нелинейных задач конвекции. Для рассматриваемых двумерных ламинарных движений однокомпонентных сред используются три классических системы уравнений: уравнения Навье-Стокса сжимаемого газа, уравнения Буссинеска и уравнения конвекции для пористой среды. Эти уравнения содержат малый параметр при старшей производной, что составляет наряду с нелинейностью уравнений основную трудность при численной реализации. Специфической особенностью уравнений естественной конвекции является взаимная зависимость полей движения и полей температур, приводящая к сложным структурам движения.

Традиционная математическая модель естественной конвекции - уравнения Буссинеска. Использование уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа расширяет область приложений теории естественной конвекции, но представляет большие технические трудности.

Для численного решения всех трех систем применяется метод установления, получивший широкое распространение в последние годы. Основу вычислительных алгоритмов составляет неявная разностная схема, разработанная автором в 1965-1966 гг. для уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа. Разностные схемы, аппроксимирующие системы нестационарных уравнений, могут применяться для решения как стационарных, так и нестационарных задач. Такой подход для большинства задач естественной конвекции наиболее приемлем, так как стационарное решение в ряде случаев не существует или не является единственным. Для аппроксимации пространственных производных используются формулы второго порядка точности, что существенно для задач естественной конвекции, в которых

предметом изучения являются эффекты теплопроводности и вязкости. Усовершенствование разностных схем для решения нелинейных уравнений во многом имеет эвристический характер, поэтому в §§ 2, 3 содержится описание методических экспериментов, предпринятых при практической отработке схем.. Схемы реализованы в виде программ в кодах, автокодах и алгоритмических языках Алгол и Фортран и прошли проверку в большом числе расчетов, выполненных на ЭВМ БЭСМ-4 и ЭВМ БЭСМ-6.

Для преодоления вычислительных трудностей, возникающих при больших числах Релея, предпринимаются разнообразные меры: повышение экономичности схем, введение более подробных и неравномерных сеток, введение временных и пространственных регуляризаторов, дифференцированное описание стационарных (квазистационарных) и нестационарных режимов (§3). Этой цели по сути дела служит, с одной стороны, применение уравнений снимаемого газа для расчета слабосжимаемых течений, с другой стороны – «отфильтровывание» деталей, несущественных для конкретной задачи, фактически осуществляемое при использовании моделей конвекции в приближениях Буссинеска и Дарси. Используя все эти меры, в настоящее время удается охватить практически весь диапазон чисел Релея, соответствующий ламинарному режиму конвекции ($Ra \sim 10^6 - 10^7$ для заданной температуры и $Ra^* \sim 10^9 - 10^{10}$ для заданного потока тепла). Дальнейшее продвижение в область больших чисел Релея с помощью численных методов (не используя полуэмпирических приемов), по-видимому, потребует расширения физической постановки задачи для учета трехмерных эффектов. Это связано со значительными техническими трудностями и будет возможным лишь при использовании более мощных ЭВМ.

§ 1. Уравнения естественной конвекции газов и жидкостей.

1. Система нестационарных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа.

Модель естественной конвекции сжимаемого газа.

Система двумерных нестационарных уравнений, описывающих конвекцию однокомпонентного сжимаемого вязкого газа, состоит из дифференциальных уравнений количества движения, неразрывности и энергии, которые в декартовой системе координат имеют вид

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} - \rho X \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} - \rho Y \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) \quad (1.3)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial T}{\partial y} + P_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + P_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + P_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + P_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.4)$$

Здесь u, v - соответственно проекции вектора скорости на оси координат x, y ; X, Y - проекции вектора внешних сил на оси координат x, y ; ρ - плотность, T - температура, K - коэффициент теплопроводности, e - внутренняя энергия, отнесенная к единице массы, $P_{xx}, P_{yx}, P_{xy}, P_{yy}$ - компоненты тензора напряжений. При феноменологическом выводе выражения для тензора напряжений в вязком газе обычно предполагается, что тензор напряжений однороден и изотропен по пространству, причем имеет место линейная зависимость между тензором напряжений и тензором скоростей деформации; при отсутствии вязкости тензор напряжений приводится к тензору напряжений в идеальной жидкости. При этих предположениях выражения для компонент

тензора напряжений имеют вид [28, 29]

$$\begin{aligned}
 P_{xx} &= -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
 P_{yx} &= P_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 P_{yy} &= -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь p - давление, определяемое термодинамическим уравнением состояния

$$p = p(\rho, T)$$

μ - коэффициент динамической вязкости, λ - коэффициент второй вязкости или $\lambda = -2/3\mu + \mu'$, где μ' - коэффициент объемной вязкости. Объемная вязкость проявляется при резких изменениях термодинамических параметров, сопровождающихся возбуждением вращательных и колебательных степеней свободы молекул газа (например, при прохождении газа через фронт ударной волны или при ультразвуковых колебаниях). В дальнейшем будут рассматриваться конвективные движения, не содержащие таких особенностей, поэтому предполагается $\mu' = 0$ (или $\lambda = -2/3\mu$). Далее будет рассматриваться модель совершенного газа с термодинамическим уравнением состояния

$$p = \rho RT, \tag{1.7}$$

где R - газовая постоянная, и калорическим уравнением состояния

$$e = \int_0^T C_v dT, \quad \text{или} \quad de = C_v dT \tag{1.8}$$

Кроме того, предполагается, что коэффициенты теплопроводности, вязкости и удельная теплоемкость зависят только от температуры

$$\mu = \mu(T), \quad K = K(T), \quad C_v = C_v(T) \quad (1.9)$$

Исходный безразмерный вид уравнений конвекции сжимаемого газа может быть получен путем введения масштабов $V_1, \rho_1, T_1, t_1 = L/V_1, L, \mu_1, K, C_v, C_p$ и соответствующих безразмерных величин $\bar{\varphi} = \varphi/\varphi_1$ (где $\bar{\varphi}_1$ - безразмерная, φ - безразмерная величины, φ_1 - масштаб). Тогда система уравнений (1.1-1.9) после некоторых преобразований примет следующий безразмерный вид (черта над безразмерными величинами в дальнейшем опущена)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\chi \rho C_M^2} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho C_R} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - C_{Fx} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\chi \rho C_M^2} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho C_R} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - C_{Fy} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = & \frac{\chi}{\rho C_v C_R Pr} \left(\frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{P}{\rho C_v} (\chi - 1) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ & + \mu \frac{\chi(\chi - 1)}{\rho C_v C_R} \Phi, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \text{диссипативная функция,}$$

$$P = \rho T \quad (1.14)$$

$$\mu = \mu(T), \quad K = K(T), \quad C_v = C_v(T) \quad (1.15)$$

В системе (1.10-1.13) $C_R, C_M, C_{Fx}, C_{Fy}, Pr, \chi$ - безразмерные масштабные комплексы, построенные по параметрам, выбранным в качестве масштабов

$$C_R = \frac{V_1 L \rho_1}{\mu_1}, \quad C_M = \frac{V_1}{\sqrt{\chi R T_1}}, \quad C_{Fx} = \frac{XL}{V_1^2}, \quad C_{Fy} = \frac{YL}{V_1^2}, \quad \chi = \frac{C_{p1}}{C_{v1}}, \quad Pr = \frac{\mu_1 C_{p1}}{K_1} \quad (1.16)$$

Применительно к системе уравнений (1.10-1.13) рассматривается краевая задача для прямоугольной области с граничными условиями следующих видов:

а) твердая поверхность: заданы условия прилипания $u=v=0$ для составляющих скорости; задана температура стенки $T = T_w$ (граничное условие первого рода) или поток тепла на стенке $q_w = -K \frac{\partial T}{\partial n}$ (граничное условие второго рода);

б) условия на линии симметрии; например, для оси

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 ;$$

в) асимптотические условия на бесконечности, например,

$$u \rightarrow u_\infty, \quad v \rightarrow v_\infty, \quad \rho \rightarrow \rho_\infty, \quad T \rightarrow T_\infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty$$

При $t=0$ задаются начальные данные в виде полей искомых функций

$$u^0 = u(x, y, 0), \quad v^0 = v(x, y, 0), \quad \rho^0 = \rho(x, y, 0), \quad T^0 = T(x, y, 0) \quad (1.17)$$

Критерии подобия, определяющие конвекцию сжимаемого газа, найдем, полагая в системе (1.16) масштаб скорости в виде $V_1 = C_1$ (где C_1 - масштаб скорости звука)

$$Gr, Pr, C_F, T_2/T_1, \chi \quad (1.18)$$

Здесь $Gr = \frac{g\beta L^3}{v_1^2}(T_2 - T_1)$ - число Грасгофа - основной критерий подобия для задач естественной конвекции. Система (1.18) должна быть дополнена параметром, учитывающим угол наклона внешней силы φ , который связывает проекции C_{Fx} и C_{Fy} следующим образом

$$C_{Fx} = C_F \cdot \sin \varphi, \quad C_{Fy} = C_F \cdot \cos \varphi$$

Число Райнольдса для задач естественной конвекции, очевидно, не является определяющим критерием подобия, так как характерная скорость не задана условиями задачи. Отнесенное к масштабу скорости звука число Рейнольдса

$C_R = \frac{C_1 L}{\mu_1} \rho_1$ может быть выражено через критерии (1.18) в виде

$$C_R = \sqrt{\frac{Gr}{C_F(T_2/T_1)}} \quad (1.19)$$

Сжимаемость газа характеризуется тремя критериями, отличающими систему (1.18) от аналогичной ей системы для “жидкости Буссинеска”. Это отношение температур T_2/T_1 , критерий $C_F = gL/C_1^2$ и отношение теплоемкостей χ . Критерий C_F определяет сжимаемость газа под действием внешних сил в соответствии с уравнением гидростатики (весовая или гидростатическая сжимаемость). Он равен отношению квадрата скорости \sqrt{gL} , которую имеет частица, падающая с высоты H , к квадрату скорости звука. Эффекты гидростатической сжимаемости могут быть значительны при больших характерных размерах области L , и ускорениях g , создаваемых внешней силой,

а также при малых значениях скорости звука. Может быть дана другая интерпретация этого критерия, если ввести масштаб высоты

$$H_0 = \frac{RT_1}{g}$$

(величина H_0 обычно используется в геофизике как вертикальный масштаб атмосферы).

Тогда $C_F = \frac{H}{\chi H_0}$ - величина, пропорциональная отношению данной высоты к вертикальному масштабу атмосферы.

Отношение температур T_2/T_1 определяет температурную сжимаемость газа в соответствии с зависимостью физических свойств от температуры. Этот эффект уже частично учтен в критерии Грасгофа (линейное изменение плотности в зависимости от температуры в виде множителя $\beta\Delta T$). В некоторых случаях сжимаемость может быть учтена с помощью одного комплекса

$$K = \frac{(\chi - 1)C_F}{T_2/T_1 - 1} = \frac{gL}{C_F(T_2 - T_1)}, \quad (1.20)$$

который представляет отношение так называемого адиабатического градиента температур в сжимаемом совершенном газе g/C_p [29] к заданному градиенту температур $T_2 - T_1/L$. Более обстоятельно физический смысл новых критериев сжимаемого газа будет выяснен при рассмотрении некоторых результатов в главе V. Нестационарные процессы сжимаемого газа специально не рассматриваются в данной работе, однако с ними всегда приходится иметь дело при расчетах стационарных задач методами установления. Безразмерное время $\left(\bar{t} = \frac{C_1 t}{L}\right)$ в системе (1.10-1.13) связано с типичным безразмерным временем для

процессов теплопроводности - числом Фурье $\left(F_0 = \frac{at}{L^2}\right)$ соотношением

$\bar{t} = F_0 C_R Pr$. Система (1.10-1.15) применяется ниже (гл. II) также для изучения конвекции при слабой сжимаемости. Численное изучение конвекции несжимаемой вязкой жидкости путем перехода к моделям со слабой сжимаемостью предпринималось также в работах [30, 31].

2. Уравнения конвекции в приближении Буссинеска.

Термокапиллярные эффекты.

Для исследования конвекции в жидкостях удобнее использовать уравнения, в которых "отфильтрованы" эффекты гидростатической сжимаемости. Эти уравнения могут быть получены из полной системы (1.10-1.13), если положить значения плотности и давления равными

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad \rho' \ll \rho_0, \quad p' \ll p_0,$$

где ρ_0, p_0 удовлетворяют уравнениям гидростатики

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} = -g,$$

ρ', p' - отклонения от равновесия. Величина градиента давления в правой части уравнений (1.10-1.11) может быть представлена (с точностью до малых второго порядка) в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} \rho' = -g + \beta g T' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (1.21)$$

где $\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ - коэффициент температурного расширения, $T' = T - T_0$, T_0 -

некоторая средняя температура, от которой отсчитывается температура жидкости, причем $T' \ll T_0$. Жидкость будет несжимаемой в том смысле, что в уравнениях конвекции плотность считается постоянной всюду, за исключением величины подъемной силы в уравнении количества движения (в соответствии с

(1.21)). Кроме того, предполагаются постоянными и другие физические свойства жидкости - коэффициенты вязкости, теплопроводности и удельной теплоемкости. При написании уравнения энергии пренебрегается выделением тепла за счет работы сил сжатия и вязкой диссипации.

В соответствии с приложениями к расчету конвективных процессов в осесимметричных сосудах (гл. III, IV) запишем эту систему в цилиндрических координатах r, z

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \nabla^2 u \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \nabla^2 v + g\beta T' \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0 \quad (1.24)$$

$$\rho_0 C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \nabla^2 T \quad (1.25)$$

Система (1.22-1.25) получена Буссинеском (см. [12, 29]). В отличие от полной системы уравнений сжимаемого газа (1.10-1.13) эта система уравнений "в отклонениях", что составляет одну из ее особенностей, важную при построении численных методов и при численном исследовании.

Промежуточной между (1.10-1.13) и (1.22-1.25) является модель, в которой учитываются эффекты температурной сжимаемости (зависимость физических свойств от температур и диссипативная функция (см., например, [32])). Вопросы построения промежуточных моделей по параметру гидростатической сжимаемости рассматривались в работе [33]). При использовании системы (1.22-1.25) для изучения нестационарной конвекции в жидкостях (гл. III, IV) важно, что побочные эффекты, связанные с распространением звуковых волн, "отфильтрованы".

Применительно к системе (1.22-1.25) в дальнейшем (гл. III, IV)

рассматривается краевая задача в цилиндрической или сферической области при наличии осевой симметрии и свободной поверхности жидкости и при заданных извне потоках тепла. Граничные условия на оси симметрии имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial p'}{\partial r} = u = 0, \quad (1.26)$$

условия прилипания на твердых поверхностях

$$u = v = 0 \quad (1.27)$$

и условия второго рода по температуре

$$q = -K \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.28)$$

Остановимся на описании эффектов, имеющих место на поверхности раздела двух сред при наличии сил поверхностного натяжения.

Общее граничное условие на поверхности раздела двух сред имеет вид [29, 34]

$$\left[p_1 - p_2 - \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_i = (p_{ik}^{(1)} - p_{ik}^{(2)}) n_k + \frac{\partial \sigma}{\partial S}, \quad (1.29)$$

где p_1 и p_2 - давления в первой и второй средах, R_1 и R_2 - главные радиусы кривизны, p_{ik} - компоненты тензора напряжений, σ - поверхностное натяжение, n - единичный вектор нормали, направленный внутрь первой среды, S - координата вдоль поверхности. В дальнейшем будем предполагать, что поверхность раздела недеформируема и имеет равновесную форму. Это значит, что левая часть уравнения удовлетворяется тождественно. Далее будем предполагать, что одна из сред - это газ, трением которого о другую среду (жидкость) можно пренебречь. Тогда граничные условия на плоской поверхности раздела применительно к системе (1.22-1.25), имеют вид

$$v = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \quad (1.30)$$

Второе из этих условий определяет механизм движения вязкой жидкости, обусловленный градиентом сил поверхностного натяжения. Этот механизм движения определяется силами молекулярного взаимодействия и не зависит от наличия массовых сил, поэтому его роль особенно велика в условиях невесомости. Если поверхностное натяжение σ зависит от температуры ($\sigma = \sigma_0(1 - \beta_\sigma \Delta T)$), то второе из граничных условий имеет вид

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = -\sigma_0 \beta_0 \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (1.31)$$

определяя так называемое термокапиллярное движение в неизотермической жидкости. Наличие свободной поверхности в условиях естественной конвекции и без учета термокапиллярных эффектов само по себе вносит ряд новых эффектов по сравнению с твердой поверхностью в связи с тем, что на поверхности имеются конвективные движения, допускаемые условием

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

При рассмотрении нестационарного прогрева жидкости будем предполагать, что начальное поле температуры однородно и конвективные движения жидкости отсутствуют

$$T(r, z, 0) = T^0, \quad u(r, z, 0) = v(r, z, 0) = 0 \quad (1.32)$$

Безразмерный вид системы (1.22-1.25) в соответствии с начальными и граничными условиями (1.26-1.32) может быть получен с помощью введения масштаба длины R , скорости $V_1 = v/R$, времени $t_1 = R^2/\nu$, давления $p_1 = \rho V_1^2$ и температуры $T_1 = q R/k$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{r^2} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nabla^2 u \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + Gr_R^* \theta \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0 \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial r} + v \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.36)$$

Естественная конвекция в приближении Буссинеска определяется критериями Грасгофа и Прандтля

$$Gr_R^* = \frac{g\beta R^4 q}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{a} \quad (1.37)$$

Число Грасгофа здесь определено иначе, чем в (1.18), так как рассматривается задача при заданном потоке тепла q (так называемое модифицированное число Грасгофа).

Приведение к безразмерному виду условия (1.31)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = Mn^* \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (1.38)$$

дает еще один критерий - так называемое число Марангони [35]

$$Mn^* = \frac{\sigma_0 \beta_\sigma R^2}{\rho \nu^2} q,$$

которое определяет интенсивность термокапиллярной конвекции и в этом смысле аналогично числу Грасгофа для процессов естественной конвекции. Совместное действие естественной и термокапиллярной конвекции характеризуется числами Грасгофа, Марангони и Прандтля.

Безразмерное время $\nu t/R^2$, участвующее в описании нестационарного

процесса конвекции, связано с числом Фурье at/R^2 очевидным соотношением $vt/R^2 = F_0/Pr$. В ряде стационарных режимов естественной конвекции (см. ниже, гл. II, § I) влияние числа Прандтля можно учесть в произведении $Gr \cdot Pr$. Аналогичное обстоятельство имеет место и для термокапиллярной конвекции.

3. Уравнения конвекции в мелкодисперсной пористой среде.

Приближение Дарси.

В мелкодисперсных пористых материалах с сообщающимися порами при определенных условиях имеет место крупномасштабная (по отношению к размерам пор) естественная конвекция. Построение модели конвекции в пористой среде в отличие от моделей, рассмотренных в пп.1,2, связано с приближенным учетом эффектов вязкости. Пористая среда состоит из так называемого “скелета” с порами различной конфигурации и наполнителя в виде жидкой или газовой среды,двигающейся через поры. Это движение в “малом”, связанное с обтеканием локальных неоднородности, имеет весьма сложный характер, и описание его с помощью рассмотренных выше уравнений при детализации локальной структуры в масштабе пор не представляется возможным. Эта проблема по сложности и трудоемкости аналогична проблеме расчета с помощью уравнений гидродинамики турбулентных движений.

В рассматриваемой модели конвекции осуществляется описание некоторого осредненного конвективного движения в пористой среде. Пористая среда предполагается мелкодисперсной, так что элементарная «частица» содержит большое количество пор; кроме того, пористая среда предполагается однородной и изотропной (последнее предположение не является принципиальным и сделано лишь для упрощения описания модели). Для описания осредненного движения вводится скорость фильтрации, определяемая в случае простого плоскопараллельного движения линейным законом Дарси

$$u = -\frac{K}{\mu} \text{grad } p \quad (1.39)$$

где K - коэффициент проницаемости пористой среды. Эмпирический закон (1.39) определяет характер осреднения движения. В его основе лежит представление об объемном действии сил вязкого сопротивления при движении жидкости в пористой среде. В отношении переноса тепла предполагается, что пористая среда с наполнителем эквивалентна некоторой гомогенной среде; коэффициент теплопроводности этой среды в случае, когда конвекция отсутствует, будем обозначать λ^* . Для описания конвекции используется приближение Буссинеска, рассмотренное в п. 2 § 1 данной главы, причем действие вязких поверхностных сил заменяется в соответствии с законом Дарси, эквивалентным объемным сопротивлением пористой среды. Для стационарных плоских двумерных движений эти уравнения имеют вид [38, 39]

$$\frac{\mu u}{K} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \rho_0 g_x \beta T' \quad (1.40)$$

$$\frac{\mu v}{K} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \rho_0 g_y \beta T' \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.42)$$

$$\rho_0 C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda^* \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1.43)$$

Здесь u, v - компоненты скорости фильтраций, p' - отклонение давления от статического; физические свойства μ, ρ_0, C_p относятся к движущейся среде. Пористую среду характеризуют коэффициенты проницаемости K и теплопроводность λ^* . Эти величины могут быть довольно сложными функциями структуры и физических свойств пористого материала и предполагаются известными. В ряде простых структур (засыпка из сферических частиц) возможно рассчитать значения K и λ^* (см., например, [36, 37]), однако, для большинства пористых материалов с неупорядоченной структурой для определения величин K и λ^* требуются специальные измерения. Безразмерный вид системы (1.40-1.43) может быть получен при введении масштабов длины L , скорости a^*/L , температуры (или разности температур) $\Delta T = T_2 - T_1$, давления

$\rho_0 \nu a^* / K$, где $a^* = \lambda^* / \rho_0 C_p$ - температуропроводность. Тогда система (1.40-1.43) после простых преобразований примет вид (черта над безразмерными величинами, как обычно, опущена)

$$u = -\frac{\partial p}{\partial x} + GrPr^* Da \theta \sin \varphi \quad (1.44)$$

$$v = -\frac{\partial p}{\partial y} + GrPr^* Da \theta \cos \varphi \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.46)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (1.47)$$

Здесь $\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$ - безразмерная температура, $Gr = g\beta L^3 / \nu^2 (T_2 - T_1)$ - число

Грасгофа, отнесенное к параметрам жидкой среды, $Pr^* = \mu C_p / \lambda^*$ - число Прандтля, отнесенное к теплопроводности пористой среды λ^* и значениям μ, C_p жидкой среды, $Da = K / L^2$ - критерий Дарси.

Единственным критерием подобия, определяющим интенсивность естественной конвекции в рамках данной модели, является критерий Релея для пористой среды, получающийся путем перемножения чисел Gr, Pr^*, Da

$$Ra_* = GrPr^* Da = \frac{g\beta L K \rho^2 C_p}{\mu \lambda^*} \Delta T$$

Основное ограничение диапазона Ra_* при использовании системы (1.40 - 1.43) связано с линейным законом Дарси (1.39), который справедлив лишь для довольно медленных течений, характеризующихся значениями локального числа Рейнольдса $Re \leq 1$, где $Re = \frac{u\sqrt{K}\rho}{\mu} = \tilde{u}Da$, $\tilde{u} = \frac{uL}{\nu} = f(Ra_*)$. Поэтому

диапазон применимости данной модели зависит не только от значений числа Релея, но и от числа Дарси и при увеличении числа Ra_* смещается в сторону меньших чисел Дарси (т.е. для более мелкодисперсных сред). В дальнейшем применительно к системе (1.40 – 1.43) рассматривается краевая задача в замкнутой плоской области с заданными условиями для температур.

По сравнению с уравнениями конвекции, рассмотренными в п. 2, уравнения (1.40 - 1.43) обладают двумя основными особенностями. Первая особенность заключается в понижении порядка системы в связи с введением закона Дарси. Поэтому, в отличие от уравнений Навье-Стокса, на твердой границе вместо граничных условий прилипания для двух компонент скорости ставится одно граничное условие для нормальной составляющей скорости (условие непротекания). Вторая особенность состоит в том, что в уравнениях количества движения отсутствуют нелинейные инерционные члены. Благодаря этим особенностям численная реализация задачи конвекции несколько облегчается; однако, все еще остаются трудности, связанные с взаимодействием полей течения, температур, нелинейным характером системы в целом и необходимостью достаточно подробной дискретизации полей, присущие этому классу задач.

§ 2. Разностная схема для решения нестационарных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа.

В случае несжимаемой жидкости система уравнений Навье-Стокса путем исключения давления может быть приведена к нелинейному уравнению четвертого порядка относительно функции тока ψ , либо к двум уравнениям второго порядка относительно функции тока ψ и вихря w . Такой подход применяется и для уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска (библиографию работ см. в § 3 гл.1). Система уравнений Навье-Стокса (1.10-1.15) для сжимаемого газа обладает рядом специфических свойств, отличающих ее от уравнений несжимаемой жидкости. В этом случае при построении численных методов оказывается целесообразным исходить

непосредственно из уравнений для составляющих поля скорости, плотности и температуры.

В работах [40-47] для численного решения уравнений (1.10-1.15) применяются явные разностные схемы. Преимущества этих схем заключаются в простоте записи, минимальном числе операций на слое и минимальном количестве информации, требуемой для промежуточных вычислений. Основным недостатком таких схем в применении к уравнениям Навье-Стокса являются ограничения на шаг по времени как по критерию Куранта типа $\tau \leq h/u + \frac{1}{C_M}$, так и по вязкостному критерию типа $\tau \leq \rho C_R h^2$ или теплопроводностному типа $\tau \leq \rho C_R Pr h^2$, что ограничивает диапазон применения этих схем при малых числах Рейнольдса и Прандтля, в областях с сильно изменяющейся плотностью и при использовании достаточно подробных сеток. Неявные схемы, в которых на верхний слой по времени выносятся все неизвестные функции, а решение систем разностных уравнений осуществляется векторной прогонкой, практически свободны от этих ограничений, однако, при их применении возникают трудности (в особенности для ЭВМ с небольшой оперативной памятью), связанные с необходимостью частого обращения матриц и хранения большого количества промежуточной информации в оперативной памяти вычислительной машины. Разностная схема, которая предложена в работах [27, 48, 49] и рассматривается ниже, является в некотором смысле промежуточной между этими двумя типами схем – явной и неявной. ^{x)}

В основу положен принцип построения разностной схемы для многомерных уравнений из одномерных схем, методы такого типа в настоящее

^{x)} Следует отметить промежуточную систему уравнений, в которой учитывается лишь температурная сжимаемость (плотность зависит от температуры, но не зависит от давления) и зависимость от температуры теплопроводности и вязкости. Для численного решения этой системы в работе [32] используются переменные u, v, w .

время широко используются для численного решения практически всех уравнений математической физики. В работах советских математиков предложены различные варианты экономичных схем (схемы дробных шагов и близкие к ним локально-одномерные схемы, схемы с разностным оператором, расщепляющимся на верхнем слое и др.). Обзор различных вариантов этих схем приведен в книге [50].

В данной работе исходная система двумерных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа аппроксимируется как на целом временном слое, так и на вспомогательном (схема "полной аппроксимации", по терминологии [50]. Общая структура расщепления двумерной системы в этом смысле аналогична известной схеме переменных направлений, предложенной в работах [51, 52]. Решение двумерной системы таким путем сводится к решению одномерных систем. Возможные варианты схем этого класса различаются способом аппроксимации одномерной системы.

Для аппроксимации системы одномерных уравнений применяется схема второго порядка точности (по пространственной координате), в которой инерционные и вязкостные члены в уравнении количества движения вынесены на верхний, а давление - на нижний слой по времени. Это позволяет свести решение одномерной системы к последовательному решению систем алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Ниже дается описание этой схемы для одномерных и двумерных уравнений.

1. Одномерные уравнения.

Запишем систему одномерных уравнений в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_u u + f_u, \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = L_\rho \rho, \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = L_T T + f_T \quad (1.50)$$

$$P = \rho T \quad (1.51)$$

Здесь L_u, L_ρ, L_T - дифференциальные операторы, имеющие вид:

$$L_u = \frac{4}{3\rho C_R} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$L_\rho \rho = -\frac{\partial \rho u}{\partial x},$$

$$L_T T = \frac{\chi}{\rho C_v C_R Pr} \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial T}{\partial x} - u \frac{\partial T}{\partial x}$$

Правые части f_u и f_T имеют вид:

$$f_u = -\frac{1}{\chi \rho C_M^2} \frac{\partial P}{\partial x} - C_{Fx}$$

$$f_T = -\frac{T(\chi-1)}{C_v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\chi(\chi-1)}{\rho C_v C_R} C_M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

Будем считать, что на концах отрезка $0 \leq x \leq 1$, заданы граничные условия вида:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_1, & \rho(0,t) &= \rho_1, & T(0,t) &= T_1; \\ u(1,t) &= u_N, & \rho(1,t) &= \rho_N, & T(1,t) &= T_N \end{aligned} \quad (1.52)$$

и начальные условия внутри этого отрезка при $t=0$

$$u(x,0) = u^0, \quad v(x,0) = v^0, \quad T(x,0) = T^0 \quad (1.53)$$

Введем пространственно-временную сетку с шагом по времени $(t_n = \tau_n, n = 0, 1, \dots, K)$ и по пространству h ($x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N$).

Введем обозначение

$$\varphi(x, t) = \varphi(x_i, t_n) = \varphi(ih, \tau_n) = \varphi_i^n$$

Производные по пространственным переменным запишем центральными разностями в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sim \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sim \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} \quad (1.54)$$

а производные по времени - разностями вперед:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \sim \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{2h}$$

Разностная схема, аппроксимирующая одномерные уравнения (1.48-1.50) имеет вид:

$$(E - \tau \tilde{L}_u) u^{n+1} = u_i^n + \tau \tilde{f}_u^n, \quad (1.55)$$

$$(E - \tau \tilde{L}_\rho) \rho^{n+1} = \rho_i^n, \quad (1.56)$$

$$(E - \tau \tilde{L}_T) T^{n+1} = T_i^n + \tau \tilde{f}_T^{n+1} \quad (1.57)$$

Здесь E - единичный оператор, $\tilde{L}_u, \tilde{L}_\rho, \tilde{L}_T$ - разностные операторы, аппроксимирующие соответствующие им дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_u u^{n+1} = & \frac{4}{3\rho_i^n C_R} \frac{\mu_{i+1/2} u_{i+1}^{n+1} - (\mu_{i+1/2} + \mu_{i-1/2}) u_i^{n+1} + \mu_{i-1/2} u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \\ & - u_i^n \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\tilde{L}_\rho \rho^{n+1} = - \frac{u_{i+1}^{n+1} \rho_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} \rho_{i-1}^{n+1}}{2h} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_T T^{n+1} = & \frac{\chi}{\rho_i^{n+1} C_v C_R Pr} \frac{K_{i+1/2} T_{i+1}^{n+1} - (K_{i+1/2} + K_{i-1/2}) T_i^{n+1} + K_{i-1/2} T_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \\ & - u_i^{n+1} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2h} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Правые части \tilde{f}_u, \tilde{f}_T имеют вид:

$$\tilde{f}_u^n = \frac{1}{\chi \rho_i^n C_M^2} \frac{P_{i+1}^n - P_{i-1}^n}{2h} - C_{Fx}$$

$$\tilde{f}_T^{n+1} = \frac{T_i^n}{C_{vi}} (\chi - 1) \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) + \frac{\mu_i \chi (\chi - 1) C_M^2}{\rho_i^{n+1} C_v R_v} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \right)^2 \quad (1.61)$$

Здесь

$$\mu_i = \mu(T_i^n), \quad K_i = K(T_i^n), \quad C_{vi} = C_{vi}(T_i^n),$$

$$P_i^n = \rho_i^n T_i^n$$

$$\mu_{i+1/2} = \mu(T_{i+1/2}^n), \quad T_{i+1/2} = \frac{T_{i+1} + T_i}{2},$$

$$\mu_{i-1/2} = \mu(T_{i-1/2}^n), \quad T_{i-1/2} = \frac{T_i + T_{i-1}}{2} \quad (1.62)$$

Аналогично определяются и коэффициенты теплопроводности $K_{i+1/2}, K_{i-1/2}$.

Разностная схема (1.55-1.62) аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений на гладких функциях с порядком $O(\tau+h^2)$. При достижении стационарного режима (в счете на установление) решение не зависит от шага по времени τ и порядок аппроксимации $O(h^2)$. В этой схеме инерционные и вязкостные члены в уравнении количества движения (1.48) относятся к верхнему, а давление относится к нижнему слою по времени; это позволяет решать каждое из уравнений (1.55-1.57) отдельно. При решении одного из этих уравнений используются входящие в коэффициенты и правые части величины, рассчитанные в предыдущем уравнении. Системы таких разностных уравнений неявных относительно "своих" неизвестных функций, имеют стандартный трехдиагональный вид:

$$-a_i \varphi_{i+1} + b_i \varphi_i - C_i \varphi_{i-1} = f_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$\varphi(0) = \varphi_1, \quad \varphi(1) = \varphi_N, \quad (1.63)$$

Их решение можно получить с помощью скалярных прогонок [53]. Один временной слой рассчитан, когда выполнены прогоны последовательно для уравнений (1.55, 1.56, 1.57).

2. Двумерные уравнения.

Рассмотрим двумерное операторное уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (L_1 + L_2)\varphi + f \quad (1.64)$$

Здесь L_1 и L_2 - одномерные операторы, действующие по разным направлениям. Общая структура разностной схемы для двумерных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} (E - \tau/2 \tilde{L}_1)\varphi^{n+1/2} &= (E + \tau/2 \tilde{L}_2)\varphi^n + \tilde{f}^n, \\ (E - \tau/2 \tilde{L}_2)\varphi^{n+1} &= (E + \tau/2 \tilde{L}_1)\varphi^{n+1/2} + \tilde{f}^n \end{aligned} \quad (1.65)$$

\tilde{L}_1, \tilde{L}_2 - соответствующие разностные одномерные операторы, E - единичный оператор. Эта схема имеет первый порядок точности по временной координате, причем на установившемся режиме решение не зависит от шага по времени. При построении разностной схемы для двумерных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа одномерные операторы \tilde{L}_1 и \tilde{L}_2 - строятся по аналогии с (1.58-1.60).

Введем пространственно-временную сетку с координатами узлов

$$x_i = ih, \quad y_j = jl, \quad t_n = \tau n \quad (i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots, K)$$

Здесь h, l - шаги сетки по координатам x, y соответственно, τ - шаг по времени.

Введем обозначение

$$\varphi(x, y, t) = \varphi(ih, jl, \tau n) = \varphi_{ij}^n$$

Разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений (1.10-1.13), имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(E - \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{1u} \right) u^{n+1/2} &= \left(E + \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{2u} \right) u^n + \frac{1}{2} \tau \tilde{f}_u^{n+1/2}, \\ \left(E - \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{1v} \right) v^{n+1/2} &= \left(E + \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{2v} \right) v^n + \frac{1}{2} \tau \tilde{f}_v^{n+1/2}, \\ \left(E - \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{1\rho} \right) \rho^{n+1/2} &= \left(E + \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{2\rho} \right) \rho^n, \\ \left(E - \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{1T} \right) T^{n+1/2} &= \left(E + \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{2T} \right) T^n + \frac{1}{2} \tau \tilde{f}_T^{n+1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(E - \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{2u} \right) u^{n+1} &= \left(E + \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{1u} \right) u^{n+1/2} + \frac{1}{2} \tau \tilde{f}_u^{n+1}, \\ \left(E - \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{2v} \right) v^{n+1} &= \left(E + \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{1v} \right) v^{n+1/2} + \frac{1}{2} \tau \tilde{f}_v^{n+1}, \\ \left(E - \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{2\rho} \right) \rho^{n+1} &= \left(E + \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{1\rho} \right) \rho^{n+1/2}, \\ \left(E - \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{2T} \right) T^{n+1} &= \left(E + \frac{1}{2} \tau \tilde{L}_{1T} \right) T^{n+1/2} + \frac{1}{2} \tau \tilde{f}_T^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Здесь $\tilde{L}_{1u}, \tilde{L}_{2u}, \tilde{L}_{1v}, \tilde{L}_{2v}, \tilde{L}_{1\rho}, \tilde{L}_{2\rho}, \tilde{L}_{1T}, \tilde{L}_{2T}$ - одномерные разностные операторы.

Их структура аналогична структуре разностных операторов для одномерной системы. Приведем вид одного из операторов на временном слое $n + 1/2$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{1u} u^{n+1/2} &= \frac{4}{3\rho_{ij}^n C_R} \frac{\mu_{i+1/2,j} u_{i+1,j}^{n+1/2} - (\mu_{i+1/2,j} + \mu_{i-1/2,j}) u_{i,j}^{n+1/2} + \mu_{i-1/2,j} u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} \\ &\quad - u_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h} \end{aligned}$$

Подробная запись остальных разностных операторов и правых частей приведена в работе [49]. Данная разностная схема аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений (1.10 - 1.13) с порядком $O(\tau + h^2 + l^2)$.

Уравнения (1.66) и (1.67) имеют трехдиагональные матрицы. Уравнения (1.66) составляют блок горизонтальных прогонок и могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 -a_{i,j}\varphi_{i+1,j} + b_{i,j}\varphi_{i,j} - C_{i,j}\varphi_{i-1,j} &= f_{i,j}, \\
 \varphi(1,y) &= \varphi_{1,j}, \quad \varphi(M,y) = \varphi_{M,j}, \quad j = 2 \dots N-1
 \end{aligned}
 \tag{1.68}$$

В результате последовательного решения разностных уравнений (1.66) определяются поля составляющих скорости, плотности и температуры на полуцелом слое по времени $n + 1/2$ (по заданным начальным полям этих величин в момент времени n).

Блок вертикальных прогонок объединяет разностные уравнения (1.67), каждое из которых записывается в виде

$$\begin{aligned}
 -\tilde{a}_{i,j}\varphi_{i,j+1} + \tilde{b}_{i,j}\varphi_{i,j} - C_{i,j}\varphi_{i,j-1} &= \tilde{f}_{i,j}, \\
 \varphi(x,1) &= \varphi_{i,1}, \quad \varphi(x,N) = \varphi_{i,N}, \quad i = 2 \dots M-1
 \end{aligned}
 \tag{1.69}$$

Решение этих трехдиагональных систем осуществляется, как и в одномерной задаче, методом прогонки.

В результате решения разностных уравнений (1.67) определяются искомые поля составляющих скорости, плотности и температуры в момент времени $n+1$ по заданным полям этих величин на вспомогательном слое по времени $n+1/2$. На следующем слое по времени указанные прогонки выполняются в том же порядке и т.д.

Описанный выше вариант схемы использовался в случае, когда изменение плотности в зависимости от давления не слишком велико. При значительных изменениях плотности в поле течения (см. ниже, гл. V) расчеты проводились в переменных $p^* = \ln p$, $\rho^* = \ln \rho$.

Поле функции тока, в отличие от некоторых вариантов расчета для несжимаемой жидкости, здесь не вычисляется непосредственно; оно может быть найдено на стационарном режиме при известных значениях u , v , ρ из

уравнений, определяющих функцию тока

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u \quad (1.70)$$

Практически удобным является также следующий способ расчета: дифференцируем первое из уравнений (1.41) по x , второе – по y и складывая, получаем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega^*, \quad \left(\omega^* = \frac{\partial \rho u}{\partial y} - \frac{\partial \rho v}{\partial x} \right) \quad (1.71)$$

Решение этого уравнения (при надлежащих граничных условиях) может быть осуществлено по стандартной схеме (1.65).

Аппроксимация граничных условий.

Плотность на твердой поверхности не задана и находится из уравнений неразрывности с учетом условий прилипания для скорости; например, при $y=0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho v}{\partial y} = -\rho \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.72)$$

или

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.73)$$

Вторая производная на границе в этом граничном условии и в граничных условиях второго рода аппроксимируется по трехточечной формуле второго порядка точности ^{x)}, например,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_1 - 3\varphi_2 + L\varphi_3}{2l} \quad (1.74)$$

Граничные условия первого рода не требуют пояснений.

^{x)} В расчетах [48] производная в правой части уравнения (1.72) аппроксимировалась по формуле первого порядка точности.

3. Методические эксперименты. Расчет стационарных и нестационарных режимов.

Разностная схема (1.55-1.60) применялась для расчета структуры стационарных и нестационарных одномерных течений вязкого газа [48]. Сходимость схемы проверялась путем сопоставления численных решений с точными и путем уменьшения пространственных и временных шагов сетки. Дополнительным контролем точности служили проверки выполнения интегральных балансов расхода, количества движения и энергии, не являющиеся следствием разностных уравнений. Результаты этих расчетов приведены в работе [48].

Ограничения на параметры сеток при использовании этой схемы связаны с вычислительной устойчивостью метода решения разностных уравнений (прогонки) и устойчивостью самой разностной схемы. Помимо этого следует учитывать возможные эффекты немонотонности разностной схемы, проявляющиеся при расчете негладких решений на грубых сетках.

Необходимое условие устойчивости прогонки

$$|A_i| < 1,$$

где $|A_i|$ - коэффициент прогонки в рекуррентной формуле

$$\varphi_{i+1} = A_i \varphi_i + B_i,$$

приводит для разностных уравнений (1.55-1.57) к ограничению на шаги сетки.

$$\frac{u\tau}{2h} \leq 1 \quad (1.75)$$

Достаточные условия устойчивости прогонки (см., например, [53]) имеют вид

$$a_i > 0, \quad C_i > 0, \quad (1.76a)$$

$$b_i > 0, \quad a_i + C_i < b_i \quad (1.76b)$$

Последнее из этих условий (1.76б) выполняется для всех разностных уравнений. Условия (1.76а) для разностных уравнений количества движения и энергии приводят к ограничению на пространственный шаг сетки такого вида

$$Re_h < 1, \quad Re_h Pr < 1, \quad (1.77)$$

где $Re_h = uC_R h$ - "разностное" число Рейнольдса, отнесенное к величине скорости и пространственному шагу сетки. Для разностного уравнения неразрывности условия (1.76а) обычно не выполняются; условия (1.77) также обычно выполняются лишь с точностью до постоянной в правой части. Это, однако, не приводит к неустойчивости счета, если выполнены необходимые условия и решение достаточно гладкое. В практических расчетах было получено достаточное условие устойчивости схемы в виде:

$$\tau \leq 2hC_M \quad (1.78)$$

При малых числах Рейнольдса C_R , более близким к необходимому было условие

$$\tau \leq f(C_R)hC_M \quad (1.78)$$

где функция $f(C_R)$ больше единицы и увеличивается при уменьшении C_R .

Ограничение на шаг по времени (1.78) совпадает с известным условием Куранта для уравнений без вязкости; по-видимому, оно является следствием того, что давление в уравнении количества движения отнесено к нижнему слою по времени.

Условие устойчивости явных разностных схем [41-43] содержит еще ограничения на шаг по времени типа $\tau \leq \rho C_R h^2$ или $\tau \leq \rho C_R Pr h^2$, например, для схемы [40]

$$\tau \leq \min \left\{ \frac{h}{\left[|u| + |v|\sqrt{2} \right] / C_M}, \quad \frac{1}{8} \rho C_R h^2 \right\} \quad (1.79)$$

Таким образом, разностная схема (1.55 - 1.57) является в некотором смысле промежуточной между явными и неявными схемами; она имеет больший по сравнению с явными схемами диапазон применимости на подробных сетках, при расчете течений с малыми числами Рейнольдса и Прандтля и течений с сильно изменяющейся плотностью.

Условие монотонности разностной схемы, полученное в практических расчетах, имеет вид

$$Re_h^* \leq const \quad (1.80)$$

где $Re_h^* = \frac{\Delta u_i h_i}{\nu}$ - локальное число Рейнольдса, отнесенное к разности скоростей в соседних точках и локальному шагу сетки. Значение константы больше единицы и оказывается различным в разных задачах. При расчетах структуры ударных волн величина константы была около единицы. В задачах о естественной конвекции она достигла 10.

Биения, возникающие при расчете негладких решений можно практически устранять, применяя сглаживание (см., например, [45]) или несколько иную аппроксимацию конвективных членов. Однако, условие (1.80) во многих задачах является естественным с точки зрения требуемой точности для аккуратного учета эффектов вязкости.

В численных экспериментах проверялись некоторые другие схемы, отличающиеся последовательностью расчета уравнений (1.55-1.57) на временном слое. Это не приводило к заметному изменению результатов и условий устойчивости схемы.

Методические эксперименты с разностной схемой для двумерных уравнений (1.66 - 1.67) выполнялись в задаче о движении газа в замкнутой области в поле силы тяжести (фиг. 1). Эта задача подробнее рассматривается в гл.1 § 1,2. Практическое условие устойчивости этой схемы, выполнявшееся в многочисленных расчетах двумерных задач этого типа имеет вид

$$\tau \leq 2 \min\{h, l\} C_M \quad (1.81)$$

Это условие является обобщением на двумерный случай условия устойчивости (1.78) схемы для одномерных уравнений. Все отмечавшиеся выше особенности, связанные с решением одномерных уравнений, очевидно, имеют место и в данном случае. Это относится, в частности, к условию монотонности разностной схемы (1.80), нарушение которого на слишком грубых сетках может приводить к неустойчивости даже при выполнении условия (1.81).

При практической отработке схемы для двумерных уравнений особое внимание обращалось на ускорение сходимости к стационарному решению. Схема (1.66-1.67), в которой стационарное решение не зависит от шага по времени τ , была выбрана после проверки ряда других схем, например, с расщеплением на четыре дробных шага. В этих схемах отмечалась довольно медленная сходимость и существенная зависимость стационарного решения от временного шага.

Рассматривались также некоторые варианты двумерной схемы, отличающиеся иной последовательностью расчета разностных уравнений, например,

$$u^{n+1/2}, u^{n+1}, v^{n+1/2}, v^{n+1}, \rho^{n+1/2}, \rho^{n+1}, T^{n+1/2}, T^{n+1}$$

Результаты расчета по такой схеме практически не отличались от результатов расчета по основной схеме. Для ускорения сходимости итераций в счете на установление в ряде случаев применялся такой вариант основной схемы

$$u^{n+1/2,S}, u^{n+1,S}, v^{n+1/2,S}, v^{n+1,S}, \rho^{n+1/2,S}, T^{n+1/2}, T^{n+1}$$

Здесь уравнения количества движения и неразрывности объединены в отдельный итерационный цикл (S - итерационный индекс).

При расчетах на установление важную роль играет рациональный выбор начальных данных, в которых были бы "отфильтрованы" возмущения типа звуковых и гравитационных волн, не существенные для искомого стационарного решения. Эти возмущения могут подавляться также при расчетах с постепенно уменьшающейся вязкостью (что соответствует

увеличению числа Рейнольдса для вынужденных течений или числа Релея для естественной конвекции). В ряде случаев оказывается целесообразным переход от одного стационарного режима к другому и при изменении других критериев подобия, например, числа Прандтля, параметра сжимаемости, геометрического фактора и т.д. Численными экспериментами подтверждается, что стационарное решение практически не зависит от величины τ .

Установление стационарного режима, реализуемого с помощью схемы (1.66-1.67) в задачах естественной конвекции сжимаемого газа, оказывается значительно более быстрым, чем при расчетах по явной разностей схеме [46]. Это отмечено также в расчетах внешнего обтекания затупленных тел сверхзвуковым потоком вязкого газа, выполненных с помощью данной схемы в работе [54].

Погрешность при расчете конкретных задач с помощью данной схемы определяется в основном величиной пространственных шагов разностной сетки h , l . Величина этой погрешности и зависимость разностного решения от пространственных шагов сетки определялась в специальных расчетах. В качестве дополнительного критерия точности использовались, как и в одномерном случае, проверки интегральных законов сохранения расхода и энергии (подробнее см. гл. II, § 1,2).

§ 3. Разностная схема для решения уравнений конвекции в приближении Буссинеска.

Для численного решения уравнений (1.33-1.36) могут быть применены практически все те подходы, которые разработаны и для решения уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Обзор работ этого направления, выполненных вплоть до 1967 г., дан в [18]. В последние годы выполнен еще ряд работ [55-69], в которых, как и ранее использованы различные формы записи исходных уравнений: в исходном виде (1.33-1.36) (система u , v , ρ), в переменных (u, v, ω) , (ω, ψ) и в виде одного уравнения четвертого порядка для

функции тока. Использовались различные виды схем и аппроксимаций (явные и неявные схемы, схемы первого и второго порядка точности). Разнообразие подходов связано с попытками преодолеть вычислительные трудности, приводящие к ограничениям на параметры сеток при больших числах Рейнольдса (или Релея).

Несмотря на большое число работ, выполненных к настоящему времени, трудно отдать предпочтение какой-либо одной схеме.

Численное решение уравнений Буссинеска по сравнению с уравнениями вязкой несжимаемой жидкости связано с дополнительными трудностями, заключающимися в большей сложности самой исходной системы уравнений и взаимной зависимостью полей течения и полей температуры. Кроме того, особую специфику вносит расчет нестационарного процесса.

Для решения нестационарных уравнений Буссинеска здесь (см. также [70-72]) используется неявная разностная схема с пространственной аппроксимацией второго порядка точности, близкая по структуре к схеме для сжимаемого газа, использующая общую идею метода переменных направлений. Для уравнений Навье-Стокса несжимаемой изотермической жидкости (уравнение для вихря ω и функции тока ψ) такая схема применялась в ряде работ Кусковой [60] и работе [61]. Неявные разностные схемы для уравнений несжимаемой жидкости применялись также в работах [32, 62, 63]. Для задач нестационарной естественной конвекции ранее использовались явные разностные схемы на равномерных сетках [26, 64]. Обзор некоторых других разностных схем, применявшихся для численного решения стационарных задач конвекции, дан в работах [67, 69].

1. Нестационарные уравнения Буссинеска.

Для построения разностной схемы систему уравнений конвекции в приближении Буссинеска (1.33-1.36) преобразуем, исключив давление и переходя к функции тока и вихрю, определяемых с помощью соотношений

$$u = -\frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad v = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.82)$$

$$\omega = -\frac{1}{r^\alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.83)$$

Здесь в целях большей общности, введен параметр α так, что при $\alpha = 1$ имеем случай осевой симметрии, α при $\alpha = 0$ - плоский случай. Тогда система (1.33-1.36) будет иметь вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial r} Gr_R^* + 4 \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - r^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{3}{r^\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \quad (1.84)$$

$$r^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \omega r^{2\alpha} \quad (1.85)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{Pr} \left[2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - r^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] \quad (1.86)$$

Начальные условия имеют вид

$$\theta(r, z, 0) = \psi(r, z, 0) = \omega(r, z, 0) = 0 \quad (1.87)$$

Для температуры θ справедливы граничные условия вида (1.28). Граничные условия для функции тока могут быть получены из определения функции тока (1.82), граничных условий (1.26), (1.27), (1.29) для составляющих скорости u , v и имеют вид

а) на твердой боковой поверхности сосуда

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (1.88)$$

б) на свободной поверхности

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \quad (1.89)$$

при учете термокапиллярных движений

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = Mn^* \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (1.90)$$

в) на оси

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.91)$$

г) на дне сосуда

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (1.92)$$

Граничные условия для вихря получаются с использованием граничных условий для функции тока и связи между функцией тока и вихрем (1.85):

на стенке ($r=1$)

$$\omega(1, z, t) = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (1.93)$$

на дне ($z=0$)

$$\omega(r, 0, t) = \frac{1}{r^{2\alpha}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (1.94)$$

На свободной поверхности в случае, когда термокапиллярные движения отсутствуют

$$\omega = 0; \quad (1.95)$$

при наличии термокапиллярных движений

$$\omega = Mn^* \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (1.96)$$

Граничное условия для вихря на оси симметрии будет иметь вид

$$\omega = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^{2\alpha}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (1.97)$$

при $\alpha = 1$ это выражение для вихря на оси симметрии $r=0$ имеет особенность, которая легко раскрывается, если учесть, что $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi}{r} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$,
 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$, $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$ и т.д.

В работах [26, 70-72] значение вихря на оси принималось равным нулю, что соответствует переносу граничных условий на как угодно малую, но конечную величину Δr от оси; при разностной реализации это вносит погрешность порядка шага сетки (последнее проверено в специальных расчетах). Условие $\omega=0$ будет строго выполняться при $\frac{\partial \omega'}{\partial r} = 0$, где $\omega' = \omega r$, т.е. при достаточной гладкости вихря ω' в окрестности $r=0$.

При больших числах Релея и малых числах Фурье толщина пограничного слоя у стенки может быть соизмеримой с шагом пространственной сетки, поэтому сетку целесообразно сгустить так, чтобы у стенки и у свободной поверхности пространственные шаги были меньше, чем в основном ядре. Это достигалось путем замены переменных

$$r = \frac{1}{n_1} \ln \left[1 + (l^{m_1} - 1) \tilde{r} \right] \quad (1.98)$$

$$z = \frac{H}{m_1} \ln \left[1 + \frac{l^{m_1} - 1}{H} z \right]$$

Степень сгущения сетки регулируется параметрами m_1 и n_1 .

В переменных \tilde{r}, \tilde{z} разностная схема строится на равномерной сетке с пространственными координатами $r_i = ih$, $z_j = jl$ ($i = 1, 2, \dots, N+1$, $j = 1, 2, \dots, M+1$),

$$h = \frac{1}{N}, \quad l = \frac{1}{M} \text{ и временной координатой } t_n = n\tau \text{ (} n = 0, 1, 2, \dots, K_1 \text{)}$$

Введем обозначение

$$f(r_i, z_j, t_n) = f_{ij}^n$$

Производные по времени аппроксимируются разностями вперед

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau}$$

Пространственные производные первого порядка в основной разностной схеме, как и в схеме (1.66 - 1.67), аппроксимируются центральными разностями, например

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} \quad (1.99)$$

Производные второго порядка аппроксимируются трехточечными формулами вида (1.54). В некоторых вариантах этой схемы использовалась иная аппроксимация нелинейных конвективных членов, которую можно пояснить на модельном уравнении

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \quad (1.100)$$

Эта аппроксимация имеет вид

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\tau} + ai \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2h} = K \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{h^2}, \quad (1.101)$$

где

$$K = \frac{a_i h}{2} \frac{\frac{a_i h}{l^2} + l \frac{-a_i h}{2}}{\frac{a_i h}{l^2} + l \frac{-a_i h}{2}} = \frac{a_i h}{2} \xi$$

При $K = 1$ имеем симметричную аппроксимацию. Аппроксимация (1.101) предложена в работах Дэвиса, Аллека и Саусвелла (см. [18]) и более подробно исследована в работе [63]. При не слишком больших значениях разностного числа Рейнольдса $\frac{a_i h}{2}$ эта схема имеет второй порядок точности. Ее достоинствами являются монотонность разностного решения при значениях $\frac{a_i h}{2}$, превышающего единицу, и абсолютная устойчивость прогонок. Недостатком, типичным для монотонных схем, является снижение точности при увеличении $\frac{a_i h}{2}$ (при $\frac{a_i h}{2} \rightarrow \infty \quad \xi \rightarrow 1$) и некоторая сложность конструкции схемы. Аппроксимация (1.101) применялась для верхнего временного слоя, т.е. в схеме переменных направлений осуществлялось чередование симметричной схемы и схемы (1.101).

Вторая производная функции тока в граничном условии для вихря на твердых поверхностях (1.93-1.94) аппроксимируется по формуле (см., например, [73])

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{r f_{N-1,j} - 8 f_{N,j} + f_{N+1,j}}{2h^2} + \frac{3}{h} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (1.102)$$

Первая производная на границе аппроксимируется внутрь области по трехточечной формуле второго порядка (см. (1.74)).

Общая структура разностной схемы для системы уравнений (3.3-3.5) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^{n+1/2} - \omega^n}{\tau} + L_{1\omega} \omega^{n+1/2} + L_{2\omega} \omega^n &= f_\omega \\ \frac{\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}}{\tau} + L_{1\omega} \omega^{n+1/2} + L_{2\omega} \omega^{n+1} &= f_\omega \end{aligned} \right\} \quad (1.103)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Psi^{s+1/2,n+1} - \Psi^{s,n+1}}{\sigma} + L_{1\Psi} \Psi^{s+1/2,n+1} + L_{2\Psi} \Psi^{s,n+1} &= f_{\Psi} \\ \frac{\Psi^{s+1,n+1} - \Psi^{s+1/2,n+1}}{\sigma} + L_{1\Psi} \Psi^{s+1/2,n+1} + L_{2\Psi} \Psi^{s+1,n+1} &= f_{\Psi} \end{aligned} \right\} \quad (1.104)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta^{n+1/2} - \theta^n}{\tau} + L_{1\theta} \theta^{n+1/2} + L_{2\theta} \theta^n &= f_{\theta} \\ \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau} + L_{1\theta} \theta^{n+1/2} + L_{2\theta} \theta^{n+1} &= f_{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (1.105)$$

Здесь τ - шаг по времени, σ - итерационный параметр, L_1 и L_2 - разностные одномерные операторы, действующие в направлении \tilde{r}, \tilde{z} соответственно, f - соответствующие правые части. Схема аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений на гладких функциях с порядком $O(\tau + h^2 + l^2)$. Каждое из разностных уравнений (1.103 - 1.105) имеет стандартный трехдиагональный вид и решается методом прогонки. Эта схема близка по структуре и способу аппроксимации к схеме для уравнений сжимаемого газа (1.66 - 1.67); основное различие заключается в том, что схема (1.103 - 1.105) включает внутренний итерационный цикл для решения на каждом временном слое стационарного уравнения для функции тока (S - итерационный индекс). Обычно при решении нестационарной задачи для решения этого стационарного уравнения применяется метод установления. Выход из внутреннего цикла в основной схеме осуществляется при выполнении интегрального критерия точности.

$$\frac{lh}{H} \frac{\left| \sum_{ij}^{N+1,M+1} |\Psi_{ij}^{S+1,n+1}| - \sum_{ij}^{N+1,M+1} |\Psi_{ij}^{S,n+1}| \right|}{\sum_{ij}^{N+1,M+1} \Psi_{ij}} < \varepsilon, \quad (1.106)$$

Рассматривались и некоторые другие критерии выхода из внутреннего цикла (см. ниже, п.2 § 3).

2. Методические эксперименты. Особенности расчета нестационарных и квазистационарных режимов при больших числах Релея.

Разностная схема (1.103 - 1.105) применялась для исследования нестационарных и квазистационарных режимов прогрева жидкостей в сосудах при заданном потоке тепла (подробнее см. гл. III, IV) в широком диапазоне чисел Релея и Фурье. Для этого круга задач выполнен также ряд методических расчетов, направленных на определение влияния на решение параметров сеток практических условий устойчивости, сходимости, и на сокращение времени расчета, в особенности при больших числах Релея (вплоть до значений $Ra_R^* \sim 10^{10}$)^{х)}. Расчеты при таких больших числах Релея ведутся на пределе имеющейся вычислительной техники (ЭВМ типа БЭСМ-6) и требуют соответствующей методической подготовки. Структура нестационарных и стационарных режимов значительно различается, поэтому требуется дифференцированный подход к этим режимам.

Наибольшей спецификой при численной реализации обладает нестационарный процесс ввиду наличия внутреннего итерационного цикла. Число итераций во внутреннем цикле зависит от критерия выхода из цикла, итерационного параметра σ , параметра ε (и, кроме того, от шага по времени τ во внешнем цикле). Наиболее строгим является локальный относительный критерий выхода из внутреннего цикла

$$\frac{\max \left\{ \left| \psi_{ij} \right|^{S+1} - \left| \psi_{ij}^S \right| \right\}}{\max \left| \psi_{ij}^S \right|} < \varepsilon_2. \quad (1.107)$$

однако его использование приводит к неоправданному увеличению итераций во внутреннем цикле (до 30-40). По видимому более "правильно" отражает момент

^{х)} Это значение числа Релея примерно на один - два порядка ниже, чем число Релея перехода от ламинарного режима к турбулентному.

выхода из внутреннего цикла относительный интегральный критерий (1.106). Использование этого критерия позволяет сократить число итераций до 3-4 при сохранении примерно той же точности, что и при (1.107). В ряде расчетов подбирались значения ε и σ , обеспечивающие требуемую точность расчета нестационарного процесса при наименьшем числе итераций S . Получено, в частности, что при увеличении σ от 0.05 до 0.5 число S уменьшается примерно вдвое.

Влияние параметров ε , σ на скорость сходимости значительно уменьшается при приближении к стационарному (или квазистационарному режиму). Расчеты этих режимов рационально вести, осуществляя всего лишь одну итерацию уравнения для функции тока; таким образом, счет на установление ведется поочередно для уравнений (1.103-1.105), (как и для разностной схемы сжимаемого газа). Такой способ дает удовлетворительную точность расчета квазистационарных режимов естественной конвекции (для расчета стационарных режимов вязкой несжимаемой изотермической жидкости этот способ использовался в работе [60]). В наших расчетах получено, что при этом на нестационарном режиме осуществляется сглаживание временных колебаний, т.е. этот способ итераций соответствует некоторому регуляризатору с временной "вязкостью", исчезающей при установлении квазистационарного режима. Этот прием эффективен при больших числах Релея, когда переходный процесс сложен и весьма нерегулярен.

Симметричная разностная аппроксимация при значениях разностного числа Рейнольдса, значительно превышающего единицу, становится немонотонной и дает пространственные биения. При числах Релея $Ra_R^* \sim 10^9 - 10^{10}$ максимальное значение безразмерной скорости $\frac{uR}{\nu}$ имеет порядок не ниже 10^3 , поэтому из условия монотонности симметричной разностной схемы ($\frac{uh}{2} \leq 1$) требуется локальная величина шага сетки $h_i \sim 0.001$. Применение весьма подробной сетки и значительное сгущение ее в области

локальных градиентов, повидимому необходимо, если ставить целью достаточно точный расчет локальных эффектов с учетом вязкости. Условие $Re_h \sim 1$ при этом представляется естественным. Однако, оно может быть несколько ослаблено с помощью монотонных аппроксимаций, типа (1.101). Другой способ предложен Самарским [74]. В методических расчетах получено удовлетворительное согласование результатов расчета симметричной схемы и схемы (1.101). С помощью аппроксимации (1.101) удается получить монотонные решения на сетках 41×41 и при значениях $Ra_R^* \sim 10^9 - 10^{10}$ (что соответствует значениям $Re_h \sim 20 - 60$); однако, порядок аппроксимации при этом снижается до первого. Проблема построения монотонных разностных схем, имеющих высокую точность при больших числах Релея, является весьма актуальной. По-видимому, целесообразным является применение схем более высокого порядка точности, чем второй и применение пространственных регуляризаторов, задаваемых в явном виде.

Для получения практических условий устойчивости разностной схемы были проведены расчеты при различных числах Релея и на различных сетках. Величина шага по времени, требуемая для аппроксимации нестационарного процесса от начала его развития до установления квазистационарного режима, существенно зависит от числа Релея, так как длительность переходного режима определяется зависимостью (см. гл. III)

$$F_0 \sim \frac{const}{(Ra^*)^{0,4}} \quad (1.108)$$

Поэтому величина шага по времени должна уменьшаться при увеличении Ra^* . в таблице 1 приведены значения временных шагов, при которых обеспечивается устойчивый счет при различных значениях Ra^* и h_{\min}^* .

Таблица 1

τ	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$
Ra_H^*	$1.6 \cdot 10^6$	$1.6 \cdot 10^4$	$1.6 \cdot 10^7$	$1.6 \cdot 10^7$	$1.6 \cdot 10^7$	$1.6 \cdot 10^7$
h_{\min}	0.44	0.08	0.044	0.029	0.022	0.022
сетка	21x21	11x11	21x21	31x31	41x41	41x41

Для явной схемы второго порядка точности, которая применялась в работе [64], предельный по устойчивости шаг τ при числе $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^8$ равен $\sim 1.5 \cdot 10^{-5}$, т.е. приблизительно в 10 раз меньше, чем для данной схемы.

Для оценки погрешности численного решения была проведена серия расчетов при $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$ на сетках 21x21, 31x31, 41x41. В таблице 2 приведены зависимости числа Нуссельта ($\bar{Nu} = \frac{qR}{k(T_w - T_m)} = \frac{1}{\overline{Q_w - Q_m}}$; $T_w - T_m$ - средняя разность температур между стенкой и осью) и среднемассовой температуры $\bar{\theta} = \int_{\Omega} \bar{\theta} d\Omega$ (где Ω - объем области). Точное значение величины $\bar{\theta}$ в данном случае равно $2F_0$. Параметры расчета

$$Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7, Pr = 1, H/R = 2, m_1 = n_1 = 0.3$$

Таблица 2^{x)}

F_0	\bar{Nu}			$\bar{\theta} \cdot 10^3$		
	21x21	31x31	41x41	21x21	31x31	41x41
0.01	8.8	8.78	8.77	8.8	9.4	9.7
0.02	12.40	11.43	11.14	35.0	35.6	36.2
0.03	14.22	13.17	12.80	52.0	54.0	54.7
0.04	10.56	10.33	10.17	64.0	67.3	68.8
0.05	15.48	14.94	14.75	90.0	93.6	95.5

^{x)} Здесь $\varepsilon = 10^{-3}$, $m_1 = n_1 = 0.3$, $Ra_H^* = \frac{g\beta H^4 q}{\nu \alpha k}$, $Pr = 1$, $H/R = 2$.

Из этой таблицы видно, что значения \bar{Nu} и $\bar{\theta}$ на сетках 31x31 и 41x41 различаются не более, чем на 2-3%. Дополнительные сопоставления локальных температур на стенке и оси сосуда и горизонтальной составляющей скорости на свободной поверхности, вычисленных на различных сетках, приведены в главе III. При расчете нестационарной задачи в начальные моменты времени погрешность может быть значительной из-за больших градиентов температур у стенки и малых абсолютных значений температур. Это видно из таблицы 2 при $F_0 = 0.01$. При еще меньших значениях числа Фурье ($F_0 \sim 10^{-3}$) удовлетворительные результаты удастся получить лишь на сетках с большим числом узлов или на крупных сетках, но с сильным сгущением у стенки ($n_1 = 5$). Однако при больших числах Фурье относительная погрешность уменьшается и не сказывается сколько-нибудь заметно на значениях температур.

3. Стационарные уравнения конвекции в пористой среде.

Уравнения (1.44 - 1.47) преобразуются к двум уравнениям

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = Ra_* \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \varphi \right) \quad (1.109)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \quad (1.110)$$

где функция ψ определена соотношением (1.82) при $\alpha=0$.

Для этой системы рассматривается краевая задача с граничным условием для функции тока $\psi_r = 0$ (это означает, что граница непроницаема и является функцией тока). Для температуры граничные условия имеет вид

$$x=1, \quad 0 \leq y \leq \frac{H}{L}, \quad \theta=1$$

$$x=0, \quad 0 \leq y \leq \frac{H}{L}, \quad \theta=0 \quad (1.111)$$

$$y=0, \frac{H}{L} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Численное решение уравнений конвекции (1.109 - 1.110) осуществлялось в работах [75,76]. Ниже дается описание схемы, использованной нами в работе [77].

Стационарное решение системы (1.109 - 1.110) ищется с помощью итераций по некоторым параметрам, аналогичным времени; итерации ведутся поочередно для функции тока и температуры. Каждое из уравнений (1.109 - 1.110) аппроксимируется по неявной разностной схеме; аппроксимации первых и вторых производных пишутся по аналогии с (1.54). Для счета итераций используется, как и ранее, итерационная схема метода переменных направлений. Разностная схема имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Psi_{ij}^{n+1/2} - \Psi_{ij}^n}{\tau_1} &= L_{1\Psi} \Psi^{n+1/2} + L_{2\Psi} \Psi^n - f_\Psi \\ \frac{\theta_{ij}^{n+1/2} - \theta_{ij}^n}{\tau_2} &= L_{1\theta} \theta^{n+1/2} + L_{2\theta} \theta^n \end{aligned} \right\} \quad (1.112)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Psi_{ij}^{n+1} - \Psi_{ij}^{n+1/2}}{\tau_1} &= L_{1\Psi} \Psi^{n+1/2} + L_{2\Psi} \Psi^{n+1} - f_\Psi \\ \frac{\theta_{ij}^{n+1} - \theta_{ij}^{n+1/2}}{\tau_2} &= L_{1\theta} \theta^{n+1/2} + L_{2\theta} \theta^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (1.113)$$

где $L_{1\Psi}, L_{2\Psi}, L_{1\theta}, L_{2\theta}$ - соответствующие разностные одномерные операторы,

f_ψ - разностная аппроксимация правой части уравнения (1.109). Решение систем трехдиагональных уравнений (1.112 - 1.113) осуществлялось, как и ранее (§§2,3), методом прогонки. Итерации заканчиваются при выполнении условия

$$\frac{\xi^{n+p} - \xi^n}{\xi^n} \leq \delta \quad (1.114)$$

где

$$\xi = \frac{\sqrt{\left[\left(\sum \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{x=1} - \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{x=0} \right]^2}}{\left(\sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{x=0} \right)^2}, \quad p=20 \div 100$$

Численное решение и этой системы при увеличении числа Релея Ra_* ($Ra_* \sim 10^3$) также затруднительно в связи с появлением пространственных «биений», нестационарных колебаний и т.д. В зависимости от значений критериев подобия и требуемой точности использовались разностные сетки с числом узлов 11x11, 21x21, 41x41, 21x51 и 21x101 (две последние - при больших значениях геометрического параметра H/L). Контроль точности численных решений помимо обычных сопоставлений результатов расчета на различных сетках, включая также систематическую проверку интегральных балансов тепла на нагретой и холодной стенках. Относительная невязка в этом балансе $\delta_q = \frac{\bar{q}_2 - \bar{q}_1}{q_1}$ не превышала 0,1 %. В основных расчетах итерационные параметры для уравнений (1.112) и (1.113) выбирались одинаковыми ($\tau_1 = \tau_2 = \tau$). Величина τ определена в численных экспериментах. Некоторые результаты сопоставления численных решений числа Нуссельта на сетках с различными параметрами при $H/L = 1$ приведены в таблице 3. Более детальные сведения содержатся в [77].

Таблица 3.

Ra_*	10	20	30	40	50	100	150	200	300
11x11, $\tau=0.005$	1.08	1.29	1.56	1.85	2.15	3.56	4.72		
21x21, $\tau=0.005$					2.07	3.46			
41x41, $\tau=0.001$	1.08	1.27	1.51	1.76	2.01	3.26	4.43	5.53	7.41

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ I

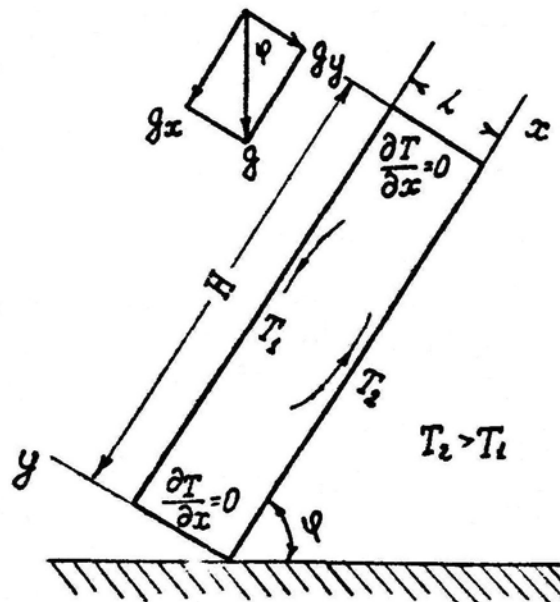
1. Разработаны неявные разностные схемы для решения нелинейных дифференциальных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа, уравнений Буссинеска и уравнений конвекции в пористой среде.

2. Класс нелинейных задач естественной конвекции в замкнутых плоских и осесимметричных областях, рассматриваемых с помощью численных методов, расширен на случаи, когда имеют место эффекты температурной и гидростатической сжимаемости в газах, нестационарности, влияния свободной поверхности и термокапиллярных эффектов в жидкостях и движения в пористых средах.

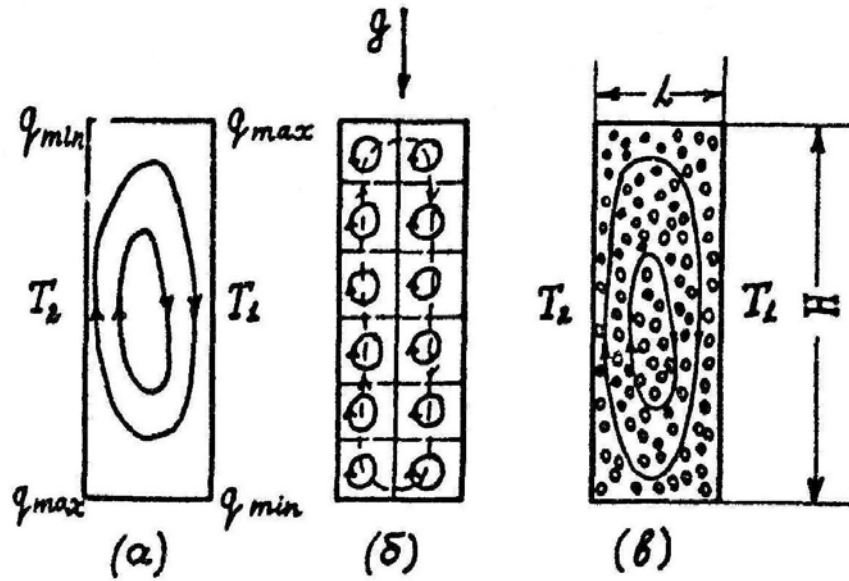
ГЛАВА II. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПЛОСКИХ СЛОЯХ ЖИДКОСТИ И ГАЗА.

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Расчётные схемы конвективного теплообмена в плоских слоях даны на фиг. 1 А,Б. Две боковые поверхности слоя поддерживаются при постоянных и равномерных вдоль поверхности слоя температурах T_2 и T_1 ($T_2 > T_1$), две другие поверхности теплоизолированы. Таким образом, при отсутствии конвекции ($g = 0$), поле температур в слое одномерно. Рассматривается также случай, когда на поверхности задан поток тепла q_w (§ 1, п. 4). Нагреваемые поверхности в общем случае расположены под некоторым углом φ к направлению внешней силы, как показано на фиг. 1 А. Внутри слоя находится либо газ, либо пористая среда, заполненная жидкостью или газом.



Фиг. 1А. Схема расчета переноса тепла в плоских слоях жидкости и газа



Фиг. 1Б. Схемы конвективных движений в однородных и пористых средах

Рассматриваемые расчетные схемы обслуживают разнообразный круг практических приложений (тепловая изоляция, температурный режим отсеков или камер с боковым подогревом для перемешивания вещества, подогреваемые снизу вертикальные слои в шахтах и т.д.). Основной характеристикой является средняя теплопередача через слой или эквивалентная теплопроводность слоя

$K_{\text{экв}} = \frac{q}{T_2 - T_1}$, где q - поток тепла при наличии конвекции. Безразмерная

величина $\frac{K_{\text{экв}}}{K} = \bar{Nu}$ для однородной среды в общем случае выражается

критериальной формулой

$$\bar{Nu} = f_1 \left(Gr_L, Pr, \frac{H}{L}, \cos \varphi, T_2 / T_1, \chi, C_F \right) \quad (2.1)$$

Для модели пористой среды

$$\bar{Nu} = f_2 \left(Ra, \frac{H}{L}, \cos \varphi \right) \quad (2.2)$$

На практике встречаются различные геометрические размеры слоев $\frac{H}{L}$,

ориентированные или подогреваемые различным образом, различные среды и т.д.

Характерные режимы конвекции существенно различаются при изменении угла φ (§§ 1,2). В стационарном тепловом поле неподвижного газа гидростатическое равновесие при $\varphi \neq 0, \pi$ нарушается, и конвекция имеет место при любых числах Грасгофа. При $\varphi = 0, \pi$ равновесие возможно, причем при $\varphi = \pi$ равновесие абсолютно устойчиво, а при $\varphi = 0$ конвективное движение возникает после потери устойчивости равновесия при некотором числе Грасгофа (или числе Релея), превышающем критическое. Этот случай наиболее сложен для исследования ввиду неединственности стационарных режимов.

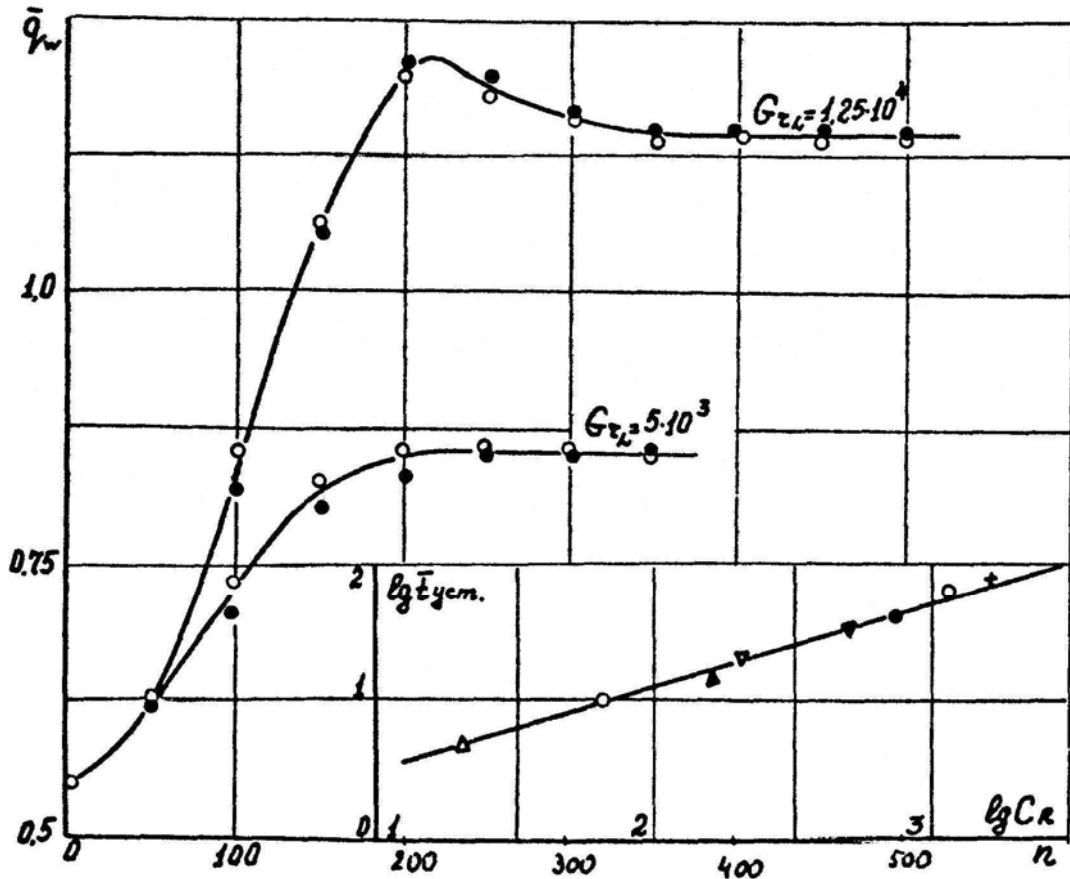
Характерной особенностью этого класса задач является сложная внутренняя структура движения и поля температур: при развитой конвекции на внутренних поверхностях имеются пограничные слои, подвергающиеся ограничивающему воздействию границ и взаимодействующие друг с другом и с ядром и т.д. Предпринимаемый подход к анализу состоит в предварительном изучении структуры, затем выявляются режимы конвекции, определяются границы режимов, исследуются и обобщаются характеристики теплопередачи. Особое внимание уделяется локальным характеристикам теплообмена (температурное расслоение, локальный перегрев), не нашедшим еще подробного освещения в литературе, и сопоставлению результатов расчета с опытными данными. Содержание главы довольно разнообразно: рассматриваются и методические вопросы, встречающиеся при изучении численными методами данного класса задач, и новые результаты по структуре конвекции и характеристикам теплопередачи, полученные при использовании этих методов. В связи с существующей детализацией рассматриваемых частных задач обзор литературы дан непосредственно в §§ 1,2,3. Основные результаты, изложенные в этой главе, опубликованы в работах [49, 77, 97, 98, 104-108, 139, 140].

§ 1. Вертикальные слои газа при боковом подогреве ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Средняя теплопередача через вертикальные слои жидкости и газа исследовалась экспериментально в работах [79-80, 90-95]. Первые сведения о структуре получены в опытах [79-80]. Имеющиеся эмпирические формулы для расчета теплопередачи относятся в основном к слоям с большим отношением сторон $\frac{H}{L} \sim 10 - 20$, и требуется уточнение диапазона их применимости при различных числах Грасгофа и $\frac{H}{L}$. Ввиду широкого диапазона возможных режимов при изменении числа Релея и отношения сторон $\frac{H}{L}$, встречающихся на практике, публикации в этой области продолжают. Качественные представления о режимах конвекции в вертикальном слое были сформулированы в работе Бетчелора [78], которая дала начало новому подходу к исследованию этого круга задач, в особенности развитому, благодаря применению численных методов. Первые численные решения задачи о конвекции в вертикальном слое, исходя из нелинейных уравнений Буссинеска, получены в работах [25, 89, 91]. Автором в работах [49, 27] развивалась методика исследования, исходя из уравнений сжимаемости газа при слабой сжимаемости. В последнее время опубликован еще ряд работ [81, 86]. В данном параграфе обобщены результаты расчетов [49, 77, 97, 98], полученных с помощью разностной схемы для уравнений сжимаемого газа при слабой гидростатической и температурной сжимаемости ($C_F = 0.05$, $\chi = 1.4$, $T_2/T_1 = 1.5$). Используется закон Сатерленда для зависимостей $\mu(T), k(T)$. Роль еще мало изученных локальных эффектов выявляется наиболее отчетливо при сопоставлении случаев с заданной температурой и заданным потоком тепла.

1. Численная реализация стационарных режимов.

Процесс численного установления конвективного режима из произвольного начального поля p^0, ρ^0, T^0 неподвижного газа состоит из довольно сложной последовательности процессов распространения температурных и гравитационных волн, взаимодействия их друг с другом и со стенками. Для более быстрого выхода на стационарный режим целесообразно исключить из рассмотрения часть из этих процессов за счет выбора начального поля, в котором имеется частичное равновесие. Для задачи с заданными температурами границ таким начальным полем можно выбирать поле неподвижного газа, находящегося в тепловом и гидростатическом равновесии при отсутствии силы тяжести ($u^0 = 0, v^0 = 0, p^0 = const, \rho^0 = \frac{p^0}{T^0}$). При этом движение начинается из состояния равновесия при внезапном приложении гравитационной нагрузки. Пример установления среднего потока тепла на нагретой и холодной стенках ($\bar{q}_w = \frac{1}{H} \int_0^{H/L} q_w(y) dy, q_w = k_w \frac{\partial T}{\partial y} / w$ при значениях $Gr_L = 5 \cdot 10^3$ и $1.25 \cdot 10^4$ дан на фиг.2. Здесь $\frac{H}{L} = 1, Pr = 0.71, \chi = 1.4, C_F = 0.05, T_2 / T_1 = 1.5$, сетка 11×11 . По оси ординат отложено число итераций n . Развитие движения после внезапного приложения силы сопровождается увеличением среднего потока тепла, который при увеличении числа Грасгофа в некоторый момент времени имеет характерный максимум. Интегральный баланс тепла на нагретой и холодной стенках на стационарном режиме удовлетворяется с точностью не менее 1%.



Фиг. 2. Установление среднего потока тепла при боковом подогреве

Безразмерное время установления стационарного режима конвекции в таких расчетах существенно зависит от параметра $C_R = \sqrt{\frac{GrH/L}{(T_2/T_1)C_F}}$. Зависимость $t_{уст.}(C_R)$, полученная в серии методических расчетов при различных значениях $T_2/T_1, C_F, Gr$ приведена в нижнем правом углу на фиг.2. При $T_2/T_1 \rightarrow 1$ и $C_F \rightarrow 0$ численная реализация решения затрудняется ввиду того, что параметр $1/C_R$ при старших производных мал.

Однако, при значениях $T_2/T_1 = 1.5$ и $C_F = 0.05$, соответствующих условиям слабой сжимаемости, численное моделирование оказывается эффективным. Вычислительные трудности при увеличении числа Gr также связаны с наличием малого параметра при старшей производной и увеличением $\bar{t}_{уст.}$. Поэтому расчет стационарных режимов при больших числах Грасгофа

оказывается целесообразно вести путем последовательного перехода от одного режима по числу Gr к другому, используя значения полей u, v, ρ, T , найденные при меньшем значении Gr . Такой прием использовался также в расчетах при изменении всех других критериев подобия ($Pr, H/L, C_F, \chi, T_2/T_1$).

Изменение величины шага по времени τ в диапазоне, допускаемом условиями устойчивости разностной схемы, не влияет на стационарное решение, поэтому основная погрешность расчета связана с конечной величиной пространственного шага разностной сетки. В серии расчетов, выполненных на сетках с числом узлов $7 \times 7, 9 \times 9, 11 \times 11, 15 \times 15, 21 \times 21$ получено, что сеточная погрешность приводит к систематическому завышению среднего потока тепла и среднего числа Нуссельта и уменьшается при уменьшении шага сетки. Например, при $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$ погрешность в значении числа Нуссельта на сетке 21×21 составляет около 1%, на сетке 11×11 около 5%. Невязка в интегральных балансах тепла на стационарном режиме на сетке 21×21 составляет около 0.86%. Невязка в балансе расхода по сравнению с расходом в восходящем сечении на сетке 21×21 составляет около 0.1%. При больших числах Грасгофа $Gr = 10^6 - 5 \cdot 10^6$ качество разностного решения ухудшалось из-за значительных негладкостей в поле течения, однако, устойчивость счета сохранялась вплоть до значений $Gr_L = 10^7$. Для получения сходящегося решения, начиная с сетки 6×6 и числа $Gr \sim 10^6$, при увеличении числа Грасгофа на полтора - два порядка, шаг сетки требуется уменьшить примерно вдвое.

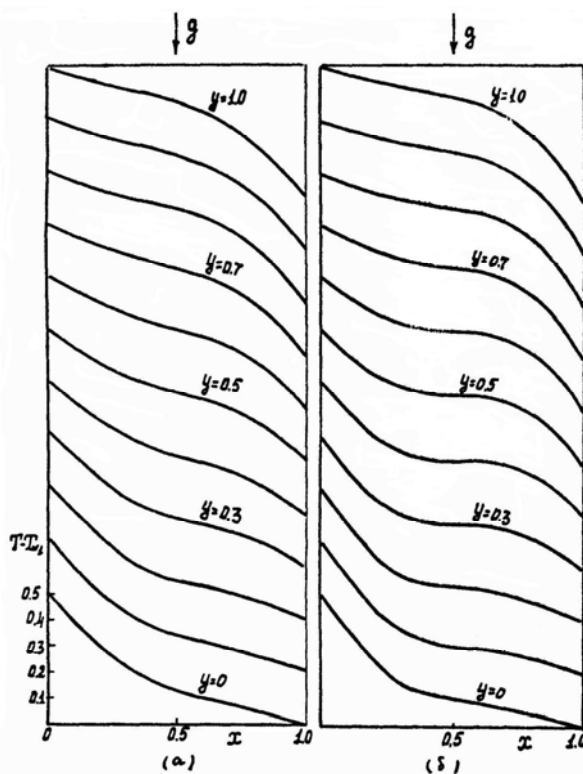
Особенность методики численного решения системы уравнений сжимаемого газа состоит в том, что при некотором значении параметров, близких к условиям слабой сжимаемости, удается, при прочих равных условиях, достигнуть бóльших значений чисел Грасгофа (однако, при этом требуется дополнительное исследование влияния параметров сжимаемости).

2. Режимы течения и теплообмена при изменении числа Грасгофа.

Местные потоки тепла и вертикальный градиент температуры.

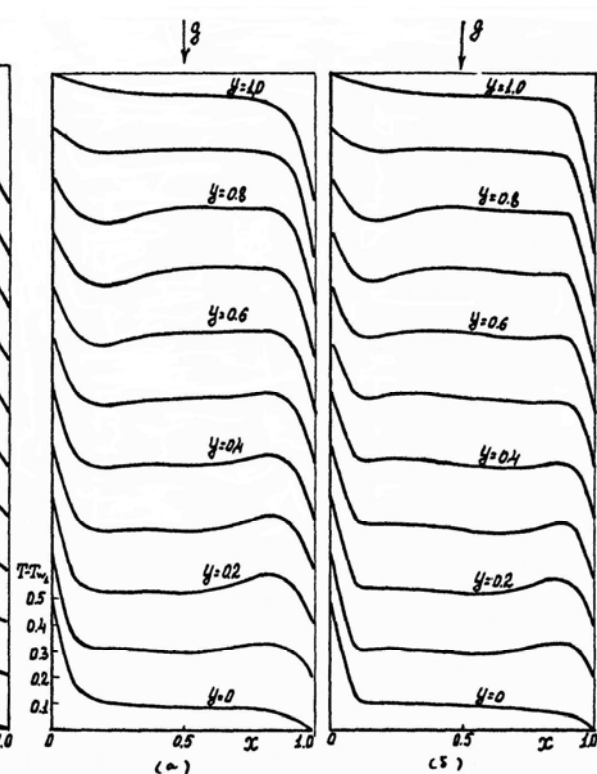
Механизм вторичных движений при больших числах Грасгофа.

Режимом течения и теплообмена будем называть тепловое и динамическое состояние жидкости (или газа), обладающее определенными общими свойствами. В диапазоне критериев подобия, соответствующих данному режиму, оказывается возможным достаточно простое обобщение результатов численных расчетов и экспериментальных данных. Такой подход к задачам с большим числом определяющих критериев подобия представляется наиболее рациональным для изучения характеристик течения и теплообмена. Структуры полей течения и температур и основные характеристики конвекции при различных числах Грасгофа и фиксированных других параметрах ($\frac{H}{L} = 1, Pr = 0.71, \chi = 1.4, C_F = 0.05, T_2/T_1 = 0.5$) приведены на фиг. 3-9.



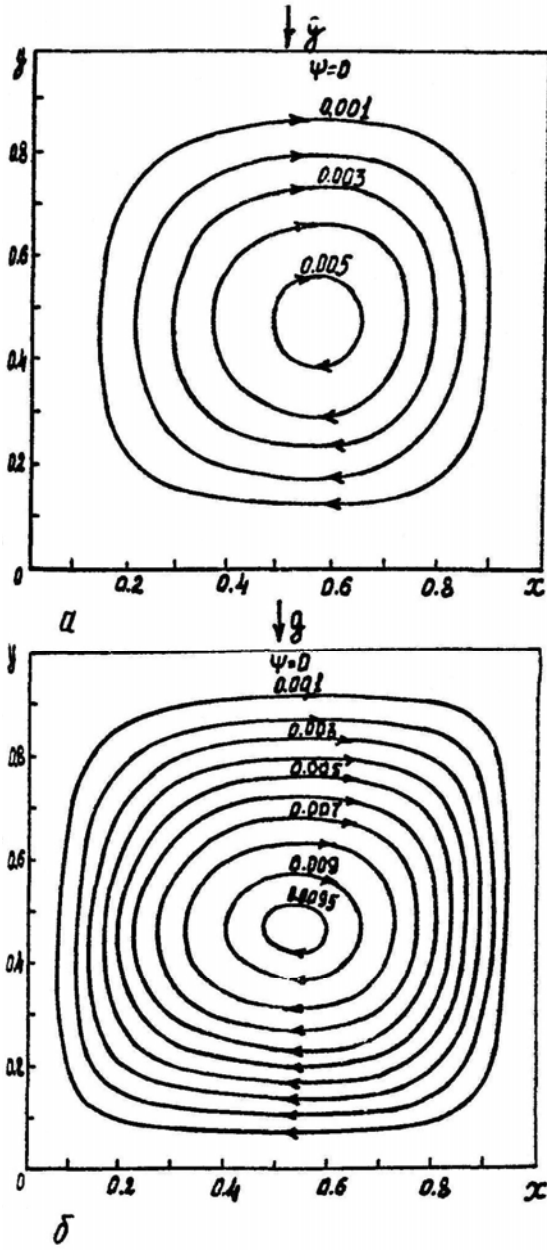
Фиг. 3. Поле температур на стационарном режиме, $H/L = 1$

- а) промежуточный режим, $Gr_L = 5 \cdot 10^3$;
- б) режим пограничного слоя, $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$



Фиг. 4. Поле температур, $H/L = 1$

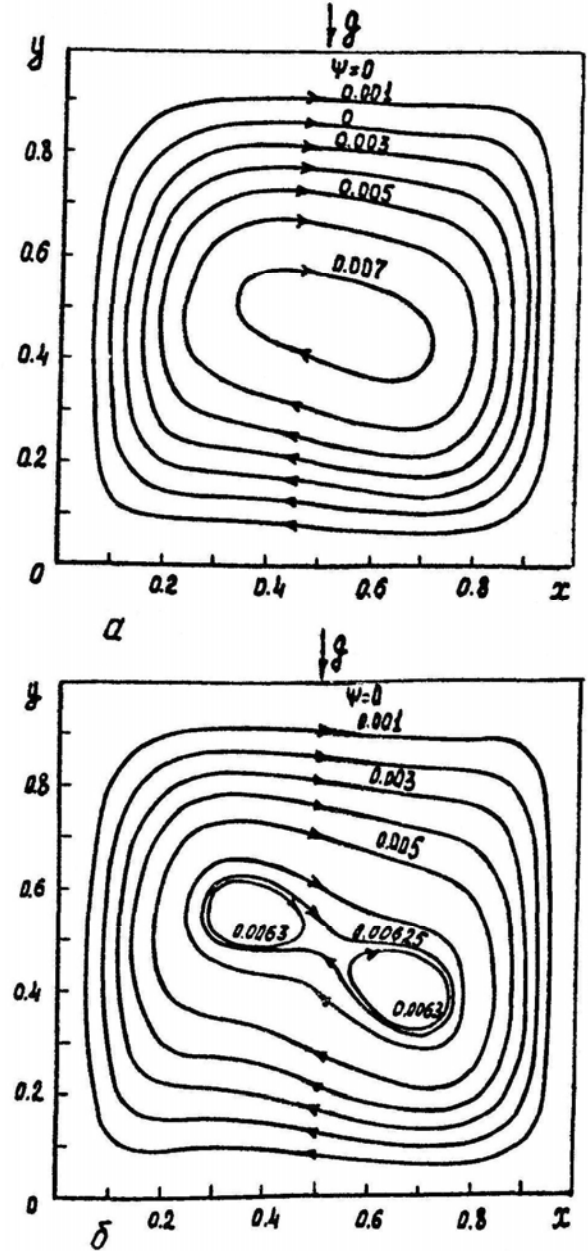
- а) $Gr_L = 5 \cdot 10^5$;
- б) $Gr_L = 10^6$



Фиг. 5. Линии тока на стационарном

режиме, $\frac{H}{L} = 1$

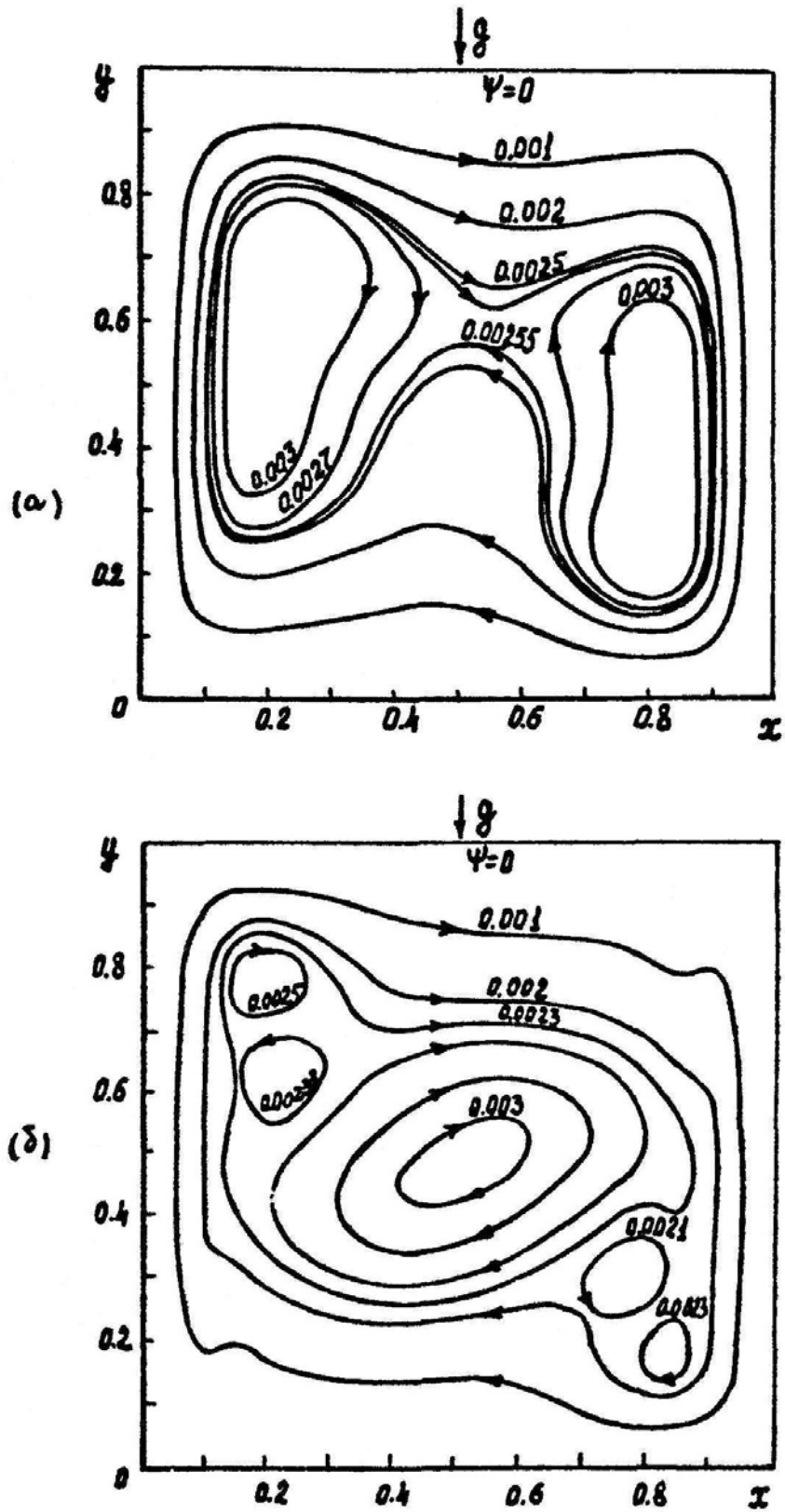
а) $Gr_L = 1.25 \cdot 10^3$, б) $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$



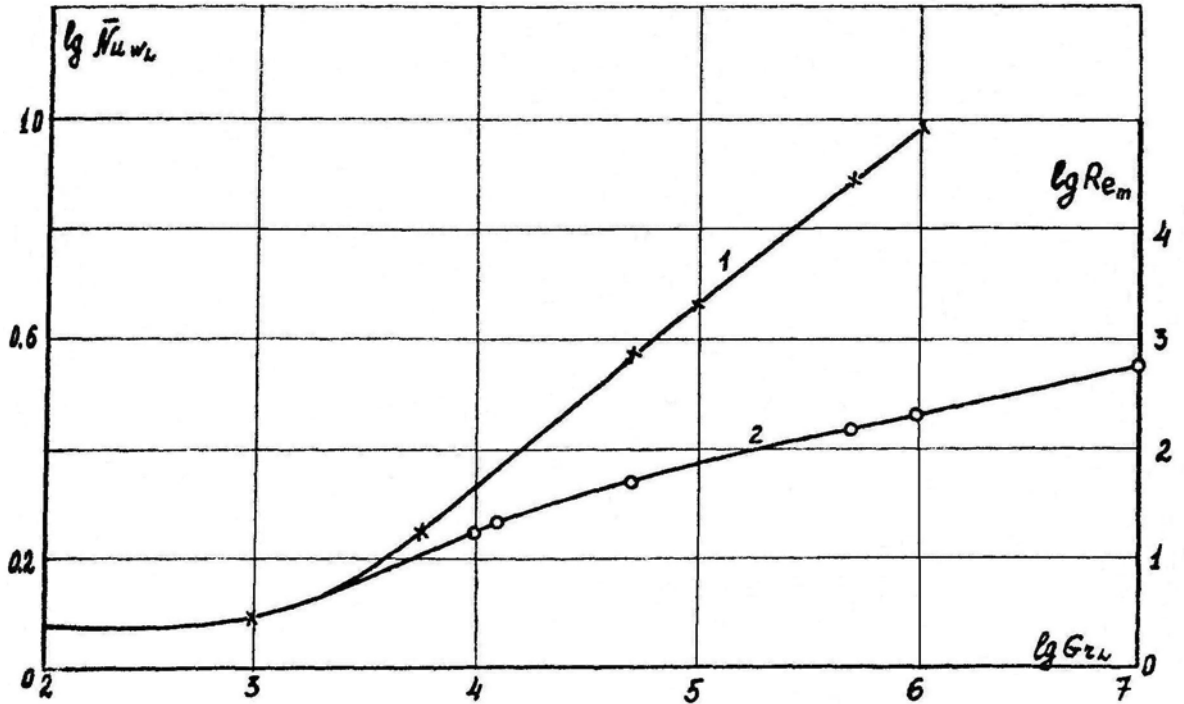
Фиг. 6. Линии тока на стационарном

режиме, $\frac{H}{L} = 1$

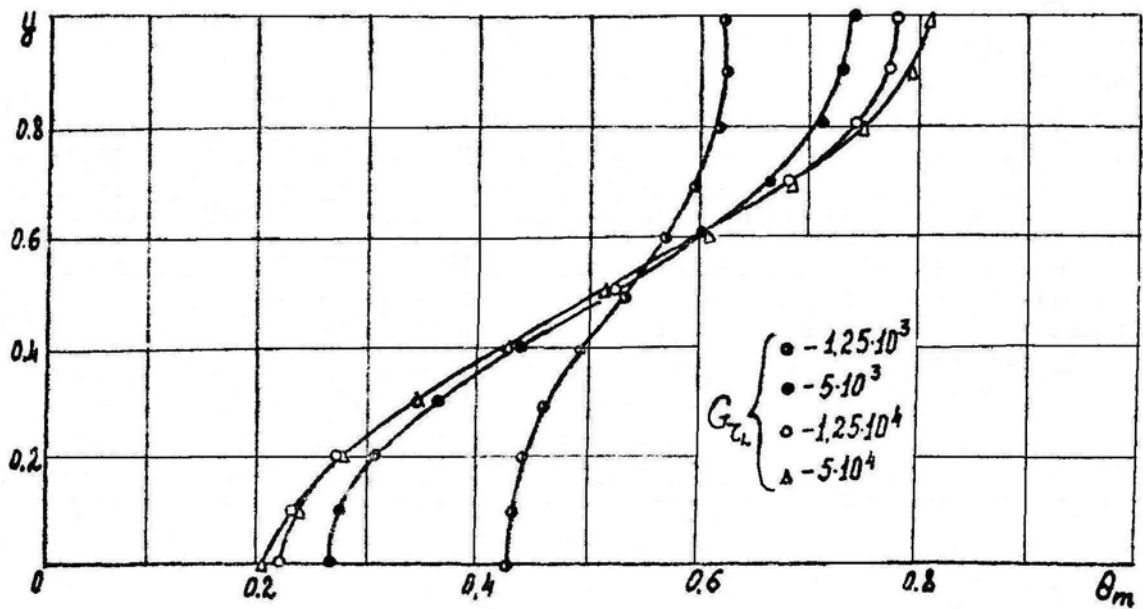
а) $Gr_L = 5 \cdot 10^4$, б) $Gr_L = 10^5$



Фиг. 7. Линии тока на стационарном режиме
 а) $Gr_L = 5 \cdot 10^5$, б) $Gr_L = 5 \cdot 10^6$



Фиг. 8. Зависимость от числа Грасгофа среднего числа Нуссельта (1)
и максимальной интенсивности восходящих токов (2)



Фиг. 9. Распределение температуры в центральном сечении вертикального
слоя в различных режимах по числу Грасгофа

В зависимости от числа Грасгофа при ламинарной конвекции в замкнутой области можно выделить три характерных режима течения и теплообмена: режим теплопроводности или режим малых чисел Грасгофа, промежуточный режим (средние числа Грасгофа) и режим пограничного слоя при достаточно больших числах Грасгофа. При малых числах Грасгофа ($Gr_L \leq 10^3$) максимальная интенсивность конвекции (выражаемая числом Рейнольдса, отнесенным к максимальной скорости восходящего или нисходящего движений $Re_m = \frac{V_m L}{\nu}$) соответствует $Re_m \leq 10$, а средний поток тепла, передаваемый от нагретой стенки к холодной, близок к потоку тепла, передаваемому путем теплопроводности ($\bar{Nu} \sim 1,0 \div 1,2$, фиг. 8). Циркулирующая в области жидкость в среднем переносит незначительное количество тепла, но влияние конвекции на поле температуры заметно и связано с перераспределением тепла вдоль нагретой и холодной стенок; в верхней части слоя температура увеличивается (фиг. 9), а поток тепла от нагретой стенки внутрь области в верхней части уменьшается. Качественной характеристикой поля температуры в этом режиме является линейный профиль температуры по горизонтали в центральном сечении слоя при $y=0.5$ (фиг. 3а). Условной границей режима теплопроводности при $\frac{H}{L} = 1$ можно считать значение $Gr_L \sim 10^3$; это значение существенно зависит от относительного удлинения слоя.

При увеличении числа Грасгофа интенсивность конвекции и среднее число Нуссельта возрастают; начиная с некоторого значения $Gr_L \sim 10^4$, зависимости $\lg Re_m(\lg Gr)$, $\lg \bar{Nu}(\lg Gr_L)$ становятся близкими к прямолинейным (фиг. 8). При этом поле температур внутри области отчетливо разделяется на пристеночную область (пограничный слой), где преобладают эффекты вязкости и теплопроводности и конвективное ядро, где при $y=0.5$ устанавливается равномерный профиль температуры по горизонтали. Этот режим будем называть режимом пограничного слоя. Между режимами теплопроводности и режимом пограничного слоя располагается промежуточный режим, в котором

температурные пограничные слои на стенках сливаются (фиг. 3б), а логарифмические зависимости числа Рейнольдса и числа Нуссельта от числа Грасгофа (фиг. 8) не прямолинейны. В режиме пограничного слоя изменение числа Нуссельта от числа Грасгофа аппроксимируется степенной формулой

$$\bar{Nu} = c Gr_L^n,$$

где показатель степени n и константа c не зависят от числа Грасгофа. При $\frac{H}{L} = 1$, $Pr = 0.71$ получено $c=0.115$, $n=0.32$.

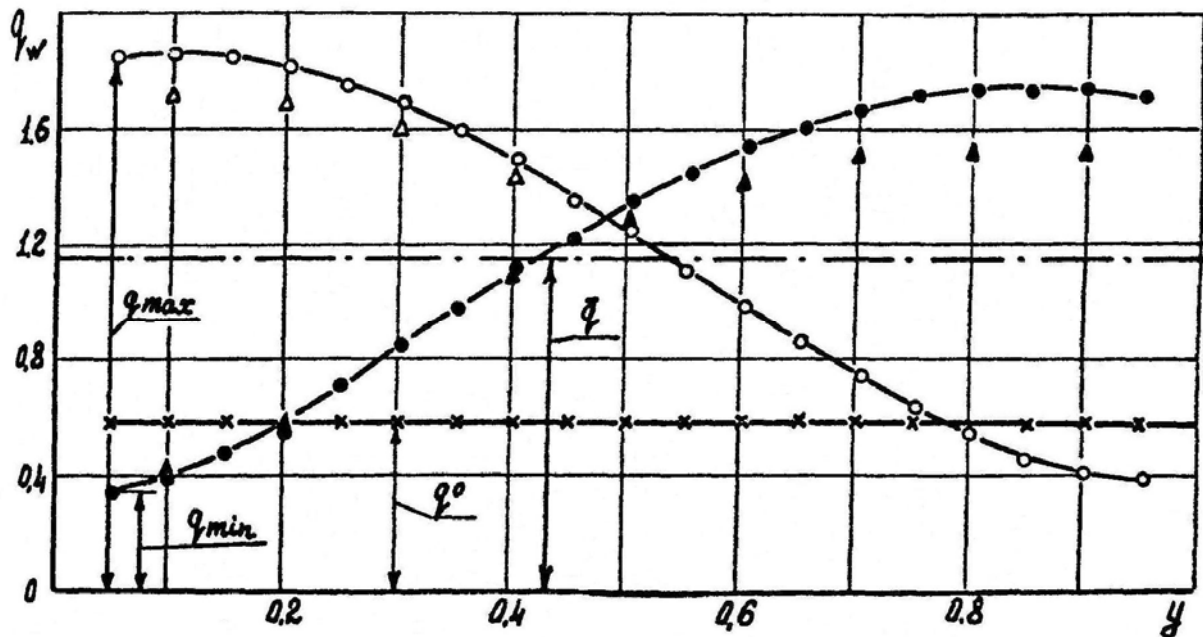
Понятие о трех режимах конвекции в замкнутой области впервые было введено на основе качественной модели Бетчелором [78]. У Бетчелора предполагалось, что в режиме пограничного слоя конвективное ядро изотермично и обладает постоянной завихренностью. В результате численного исследования удается уточнить структуру полей течения и температур в замкнутой области. Оказывается, что в замкнутой области поле температур по вертикали обладает значительной неравномерностью; изотермическое (по Бетчелору) ядро температуры отсутствует, устанавливается вертикальный градиент температуры, который в режиме пограничного слоя остается примерно постоянным. Вблизи верхнего и нижнего оснований происходит более резкое изменение температуры, имеющее характер "пограничного слоя" на теплоизолированной поверхности (фиг. 9). Пограничный слой, развивающийся на стенках, подвергается действию внешнего неизотермического течения и ограничивающему действию стенок. Поэтому распределение местных потоков тепла также обладает значительной неравномерностью; поток тепла падает по направлению движения струек тока, омывающих соответственно нагретую и холодную стенки, причем в верхней части нагретой стенки и в нижней части холодной стенки местный поток тепла ниже, чем при переносе тепла путем только теплопроводности (фиг. 10). Степень неравномерности количественно характеризуется отношением местного потока тепла к среднему $\xi_1 = \frac{q(y)}{q}$ или к потоку тепла, переносимому

путем только теплопроводности $\xi_2 = \frac{q(y)}{q^0}$ (характерные значения q_{\max} , q_{\min} , \bar{q} и q^0 отмечены на фиг. 10). Наличие зоны, где $\xi_2 < 1$, т.е. стенка отводит меньше тепла, чем при чистой теплопроводности, характеризует неполноту смешения в замкнутой области.

Другим новым эффектом, обнаруженным при численном исследовании структуры конвекции в замкнутой области, является (в отличие от анализа Бетчелора) неравномерная завихренность конвективного ядра и образование внутри ядра сложной структуры вторичных и третичных движений. Причиной образования вторичных движений в ядре является появление неоднородностей поля температуры по горизонтали при наличии обратной связи между полем температуры и полем скорости. В связи с увеличением интенсивности конвекции с ростом Gr_L происходит "заброс" нагретой жидкости во внешнюю часть пограничного слоя у холодной стенки в среднем сечении $y=0.5$ (и соответственно - "заброс" холодной жидкости во внешнюю часть пограничного слоя у нагретой стенки). В связи с этим температура у нагретой стенки становится ниже, а у холодной стенки - выше, чем в основном ядре (фиг. 4). Это создает подъемные силы, которые должны вызывать движение в направлении, обратном направлению основного движения. В результате при $Gr_L \approx 10^5$ в ядре возникают вторичные течения с замкнутыми линиями тока, образующие в центре области особенность типа "седла" (фиг.6б)^{x)}. При росте Gr_L размеры вторичных вихрей возрастают, между линиями тока основного течения, примыкающими друг к другу сверху и снизу "седла", возникают градиенты скорости (фиг.7а); при дальнейшем увеличении числа Gr_L такая картина течения перестраивается: внутри области образуется система замкнутых движений, направление которых совпадает с основным. В левом и правом углах имеется по два вихря; направление внешнего вихря совпадает с

^{x)} Похожий механизм образования вторичных токов обнаружен также при нестационарной конвекции в сосуде (глава III).

направлением основного движения, а направление внутреннего вихря противоположно направлению основного движения (фиг. 7б).



Фиг. 10. Распределение местных потоков тепла на нагретой (q_{w_2})

и холодной (q_{w_1}) стенках. Режим пограничного слоя

○ - q_{w_2} сетка 21x21

● - q_{w_1} сетка 21x21

△ - q_{w_2} сетка 11x11

▲ - q_{w_1} сетка 11x11

x – без движения среды

Основные представления о структуре поля температуры в различных режимах по числу Грасгофа, полученные в численных расчетах, хорошо согласуются с результатами интерферометрических измерений, выполненных Эккертом и Карлсоном [79]. В этих измерениях обнаружены вертикальный градиент температуры и горизонтальная неравномерность поля температуры при больших числах Грасгофа. Наличие вторичных и третичных образований внутри ядра найдено в опытах Элдера [80]. В замкнутой области с линейным распределением температуры на верхнем и нижнем основаниях слоя качественно близкие результаты были получены также в работе [25]. Основные выводы о структуре и режимах естественной конвекции в вертикальных слоях подтверждены и в ряде других работ [81-86]. Авторы работы [86] выполнили подробное сопоставление результатов своих расчетов с нашими данными,

опубликованными в [49], получив хорошее согласование результатов этих расчетов.

3. Режимы течения и теплообмена в диапазоне чисел $Gr, H/L$.

Влияние относительного удлинения слоя. Режимы по числам Ra, Pr . Формула для расчета средней теплопередачи и сопоставление с данными других авторов.

В плоскости двух критериев границы характерных режимов выражаются некоторыми линиями. Определение этих границ очень важно для систематизации опытных и расчетных данных и для выбора направления дальнейших исследований. Большой разброс в данных различных авторов при рассмотрении диапазона двух критериев подобия обычно связан с тем, что эти данные относятся к различным режимам.

Ориентировочные границы режимов при изменении числа Грасгофа и относительного удлинения слоя $\frac{H}{L}$, построенные по результатам наших расчетов и результатам экспериментов [79,80,87], даны на фиг. 11. Белые и черные кружки соответствуют значениям $Gr_L, \frac{H}{L}$, при которых выполнены расчеты, причем черными кружками отмечены те случаи, когда внутри области имелись вторичные течения. Белым кружкам с боковой отметкой соответствуют варианты расчетов, выполненных на довольно грубых сетках (11x11) для качественной оценки структуры течения и выявления границ режимов. Остальные расчеты выполнены на сетках 21x21 ($\frac{H}{L}=1,2,5$) и 11x41 ($\frac{H}{L}=5$). Крестиками отмечены те значения Gr_L и $\frac{H}{L}$, при которых проводились измерения Эккерта и Карлсона [78]; два черных квадратика соответствуют опытам Элдера [87].

Граница 1 на фиг. 11 отделяет режим теплопроводности от промежуточного режима; расположение этой границы согласуется с тем,

которое получено в работе [79]. Граница 2 отделяет промежуточный режим от режима пограничного слоя. Ее расположение определялось из условия, что в режиме пограничного слоя зависимости $\lg \bar{Nu}_L(\lg Gr_L)$ при различных $\frac{H}{L}$ - параллельные прямые; это допускает построение эмпирической формулы в виде

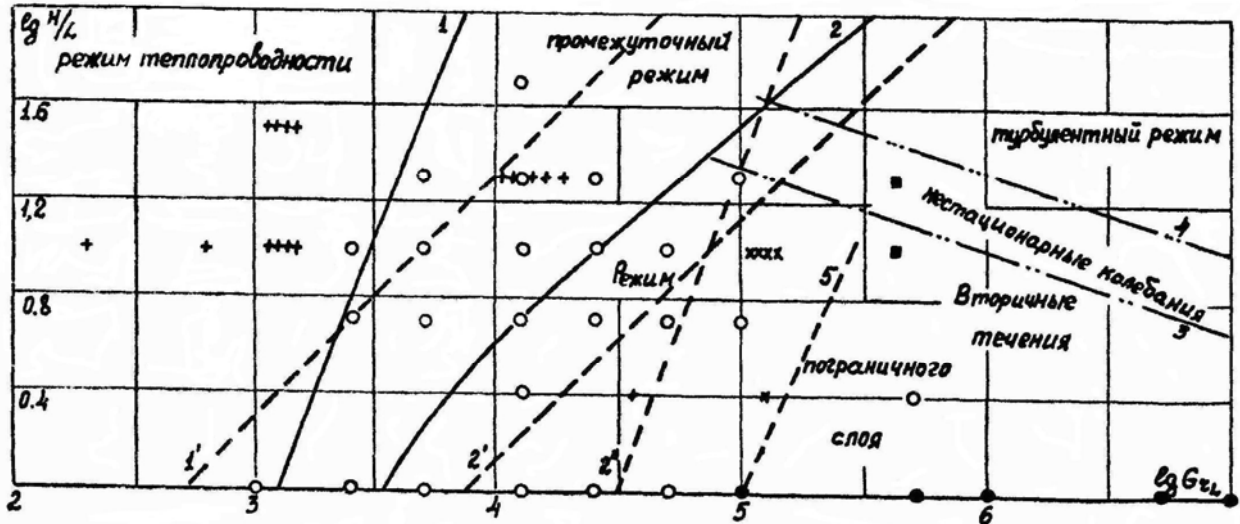
$$\bar{Nu}_L = cGr_L^n \varphi\left(\frac{H}{L}\right) \quad (2.4)$$

где c и n - постоянные.

Оценка границы режима пограничного слоя, полученная из условия слияния температурных пограничных слоев на нагретой и холодной стенках в работе [79], дана на фиг. 11 пунктирной линией 2. Штрих-пунктирной линией 3 показана ориентировочная граница появления нестационарных колебаний, соответствующая, по данным работы [87], значению $Gr_H Pr \cong 8 \cdot 10^8$. Выше штрих-пунктирной линии 4, соответствующей (по данным работы [87]) значению $Gr_H Pr \cong 10^{10}$, течение в слое, по-видимому, полностью турбулентно. Пунктирная линия 5 дает предполагаемую границу появления в слое внутренних вторичных течений по результатам расчетов. Область режима пограничного слоя при ламинарной конвекции, в которой должна быть справедлива обработка данных по средней теплопередаче в виде (2.4), ограничивается, таким образом, линиями 2, 3, 5 и осью абсцисс (последняя граница, по-видимому, может быть несколько сдвинута в сторону значений $\frac{H}{L} < 1$. В этом режиме механизм передачи тепла определяется развитием и взаимодействием пограничных слоев на нагретой и холодной стенках.

Рассмотрим влияние на перенос тепла удлинения слоя $\frac{H}{L}$. При фиксированном числе Gr_L и $\frac{H}{L} \rightarrow \infty$ температурные пограничные слои сливаются, и средняя теплоотдача должна уменьшаться, приближаясь к

передаче тепла теплопроводностью. С другой стороны, при $\frac{H}{L} \rightarrow 0$ на развитие пограничных слоев существенно влияют верхнее и нижнее основания, и



Фиг. 11. Режимы течения и теплообмена в вертикальном слое по числам

$$Gr_L, \frac{H}{L}$$

- +x - опыты Эккерта
- - расчет, вторичные течения
- - расчет, вторичных течений нет
- - вторичные течения в опытах Элдера

средняя теплопередача также должна уменьшаться. Поэтому в диапазоне

$0 < \frac{H}{L} < \infty$ зависимость $\bar{Nu}\left(\frac{H}{L}\right)$ должна иметь максимальное значение. Эта

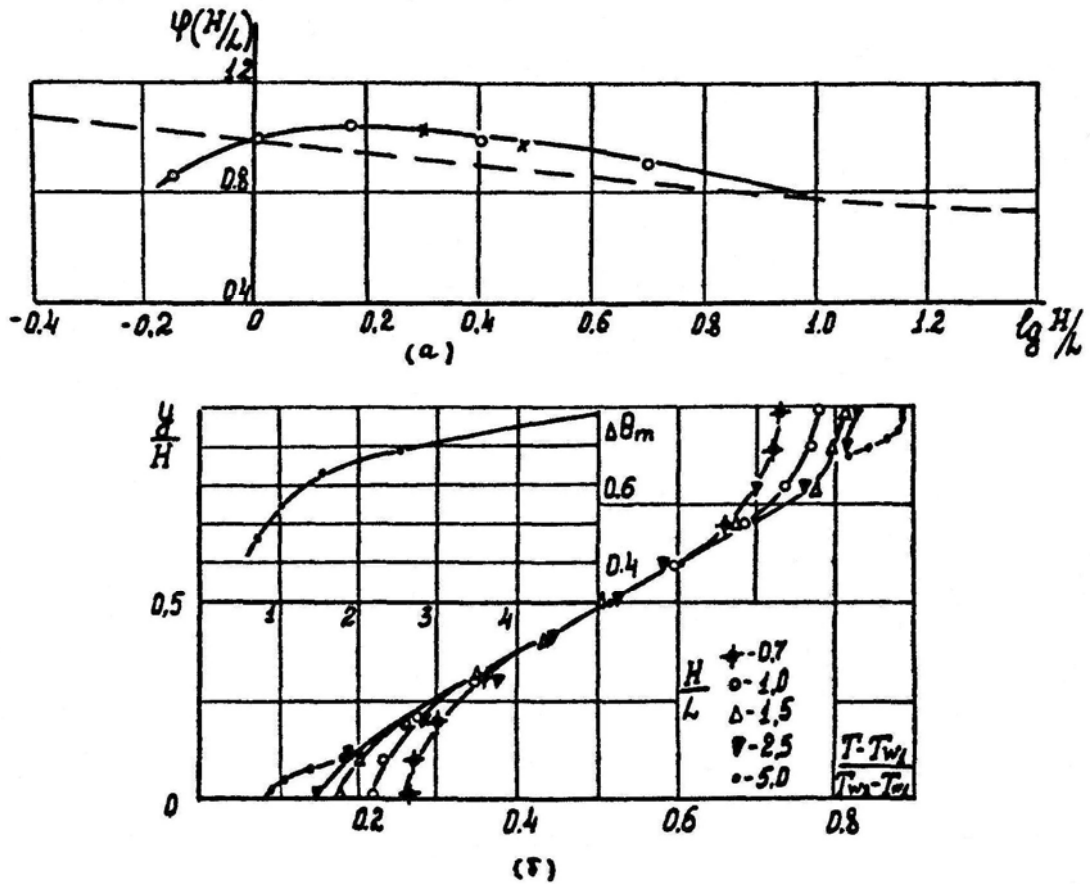
зависимость в режиме пограничного слоя, полученная в результате расчетов,

дана в фиг.12а. Здесь $\varphi\left(\frac{H}{L}\right) = \frac{\bar{Nu}\left(\frac{H}{L}\right)}{\bar{Nu}\left(\frac{H}{L}=1\right)}$. Пунктирной линией на

фиг.12а дана зависимость $\varphi\left(\frac{H}{L}\right) = \left(\frac{H}{L}\right)^{-0.1}$, рекомендуемая в работе [79];

близкая к ней зависимость $\varphi\left(\frac{H}{L}\right) = \left(\frac{H}{L}\right)^{-1/9}$ дается также в работе Якоба [88].

На фиг. 12а крестиками показаны также значения $\varphi\left(\frac{H}{L}\right)$, полученные при



Фиг. 12. Влияние отношения сторон $\frac{H}{L}$ вертикального слоя на среднюю теплопередачу (а) и на температурное расслоение (б)

$\frac{H}{L} = 2$ и 3 по результатам работы [89]. Как видно на фиг.12а, средняя теплопередача достигает максимального значения при $\frac{H}{L} = 1.5$. Этот результат имеет важное практическое значение для определения наилучшего секционирования теплоизолирующих слоев. Например, в опытах Шмидта [90] было обнаружено, что при разделении длинного вертикального слоя перегородками с отношением $\frac{H}{L} \sim 1$, средний поток тепла увеличился примерно на 50%, что объясняется зависимостью фиг.12а. Зависимость фиг.12а

получена о помощью численного метода также в работах [84, 91]; в работе [91] наличие максимального значения \bar{Nu} при $\frac{H}{L} = 1.5$ подтверждено экспериментально (в работе [84] приводится несколько иное, но близкое значение $\frac{H}{L} \approx 1.3$). Ввиду общего ослабления конвекции при увеличении относительного удлинения слоя $\frac{H}{L}$ роль локальных эффектов, которые проявляются в верхней и нижней частях слоя, возрастает. Распределение температуры вдоль центральной линии ($x = 0.5$) при значениях $\frac{H}{L} = 0.7-5.0$, $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$ дано на фиг.12б. Отсюда видно, что в средней по высоте части слоя при увеличении $\frac{H}{L}$ вертикальный градиент температуры в ядре уменьшится пропорционально $\frac{H}{L}$, однако температура верхнего основания заметно увеличивается, а нижнего - уменьшается. Таким образом, происходит вертикальное перераспределение потока тепла. Разность температур по вертикали при этом возрастает, как показано на графике в левом углу фиг.12б. При увеличении вертикального размера в 10 раз эта разность температур увеличивается примерно вдвое. Так как в среднем конвекция ослабляется при увеличении $\frac{H}{L}$ и неравномерность поля температур по горизонтали уменьшается, то граница 2, разделяющая режим теплопроводности и промежуточный режим и граница 5, отмечающая появление вторичных движений, смещаются при увеличении числа Грасгофа в сторону бóльших чисел Gr_L .

Рассмотрим кратко влияние числа Прандтля. В большинстве стационарных режимов ламинарной конвекции результаты расчетов по средней теплопередаче удастся с удовлетворительной точностью представить в виде $\bar{Nu} = f(GrPr)$, т.е. учесть влияние числа Прандтля в произведении $Gr Pr$,

которое называется числом Релея. Обработка результатов расчета числа Нуссельта для трех режимов конвекции дана на фиг.13. В дополнительной серии расчетов, выполненной при $Ra_L = 1.25 \cdot 10^4$ в диапазоне $0.01 \leq Pr \leq 100$, получено, что расслоение зависимости $\bar{Nu}(Ra_L)$ по числу Прандтля начинается лишь при очень малых значениях $Pr < 0.01$ (что соответствует, например, жидким металлам). При $Pr = 0.01$ погрешность при использовании обработки по числу Ra_L составляет около 5%. На графике в левом углу фиг.13 дана ориентировочная граница режимов по числу Ra_L и Pr , построенная по результатам расчетов и данным других авторов [92].

Результаты расчетов средней теплопередачи при ламинарной конвекции в режиме пограничного слоя представляются в виде [77]

$$\bar{Nu}_L = 0.115 (Gr_L Pr)^{0.32} \varphi \left(\frac{H}{L} \right) \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{0.085} f(\chi, C_{FH}) \quad (2.5)$$

Здесь $f(\chi, C_{FH}) = \chi^{0.13} (1 + C_{FH})$; зависимость $\varphi \left(\frac{H}{L} \right)$ дана на фиг. 12а.

Степенные зависимости, учитывающие влияние $T_2/T_1, \chi, C_{FH}$ получены при $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$ в диапазоне $1.1 = T_2/T_1 \leq 2$; $1 \leq \chi \leq 2$; $0.02 = C_{FH} = 1$.

Для воздуха при $Pr = 0.71$, $\chi = 1.4$ в случае, когда сжимаемость пренебрежимо мала, формула (2.5) имеет вид

$$\bar{Nu}_L = 0.108 Gr_L^{0.32} \varphi \left(\frac{H}{L} \right) \quad (2.6)$$

При $\varphi \left(\frac{H}{L} \right) = 1$ в диапазоне $5 \cdot 10^3 \leq Gr_L \leq 10^6$ значения \bar{Nu} , получающиеся по этой формуле, удовлетворительно согласуются со значениями, вычисленными по эмпирической формуле Эккерта и Карлсона

$$\bar{Nu} = 0.119 Gr_L^{0.3} \left(\frac{H}{L} \right)^{-0.1} \quad (2.7)$$

Отличие составляет не более 5-10%, причем результаты (2.6) лежат систематически выше. Эккертом и Карлсоном [79] дается и другая формула, эквивалентная [2.7]

$$\bar{Nu}_H = 0.119 Gr_H^{0.3} \quad (2.8)$$

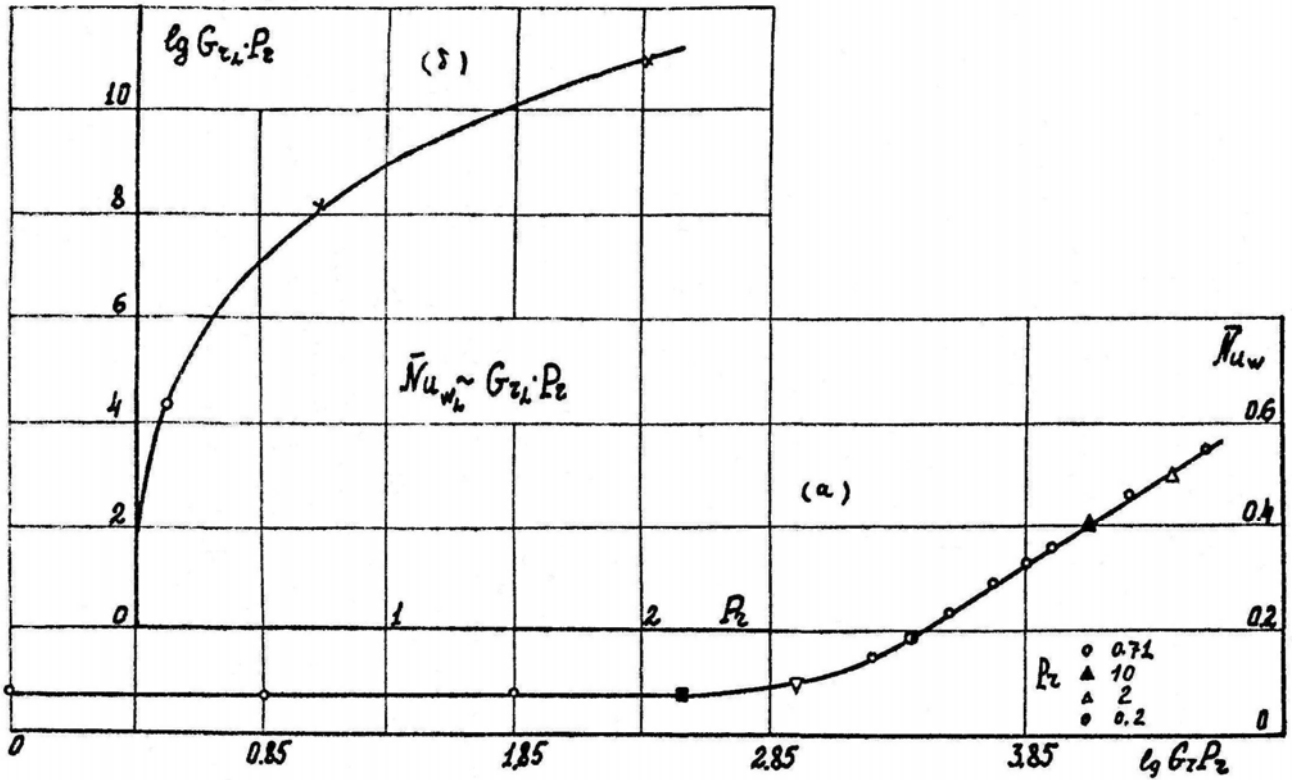
Зависимость $\bar{Nu}_H(Gr_H)$, осредненная по результатам наших расчетов с различными отношениями сторон и чисел Грасгофа, показана на фиг. 14 и практически совпадает с эмпирической формулой (2.8). Зависимость $\bar{Nu}_H = (Gr_H)$, однако, нивелирует некоторые индивидуальные свойства слоев, особенно коротких, и должна рассматриваться, как некоторая средняя зависимость для всего класса слоев с различным отношением сторон.

Зависимость (2.8) предпочтительнее для не слишком длинных слоев при $\frac{H}{L} \leq 5$.

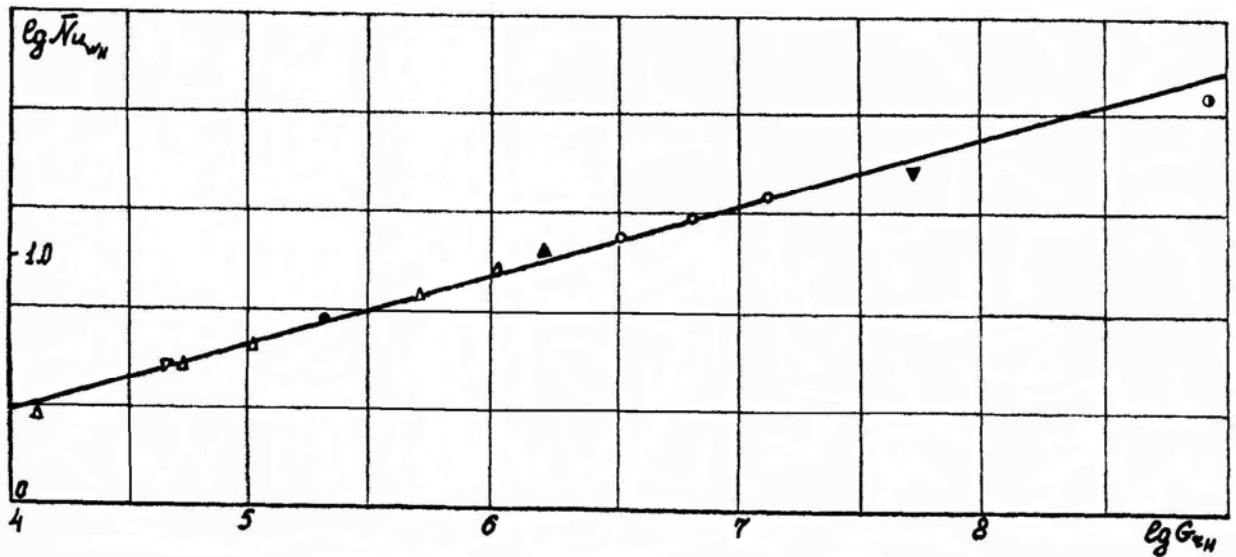
Значения \bar{Nu}_L , получающиеся по известной формуле Якоба [88] для ламинарной конвекции

$$\bar{Nu}_L = 0.18 Gr_L^{0.25} \left(\frac{H}{L} \right)^{\frac{1}{9}} \quad (2.9)$$

лежат на 25-30% ниже тех, которые получаются по (2.6). Формула (2.9) получена Якобом при обобщении опытных данных Мулля и Рейера [92] при $\frac{H}{L} = 10, 20, 40$ в диапазоне $2 \cdot 10^4 < Gr_L < 2 \cdot 10^5$, которые, согласно графику режимов (фиг. 11), относятся не к режиму пограничного слоя, а к промежуточному режиму.



Фиг. 13. Зависимость числа Нуссельта от числа Релея (а) и границы режимов по числу Релея и Прандтля (б)



Фиг. 14. Обобщение данных по средней теплопередаче через вертикальный слой: ————— формула Эккерта

$\frac{H}{L}$	Δ 1,0	\bullet 2,5	∇ 10
	∇ 1,5	\circ 5,0	\bullet 20

В монографии Михеева [2] рекомендуется эмпирическая формула

$$\bar{Nu}_L = 0,105(Gr_L \cdot Pr)^{0,3} \quad (10^3 \leq Gr_L \cdot Pr \leq 10^6) \quad (2.10)$$

Эта формула получена при обработке различных опытных данных [93, 94] в предположении, что средний коэффициент теплопередачи определяется одним геометрическим размером - толщиной прослойки L . При этом в неявном виде предполагается, что границы режимов (фиг. II) есть линии $GrPr = const$. При $\varphi\left(\frac{H}{L}\right)=1$ формула (2.10) дает значения \bar{Nu}_L , заниженные на 40-50% по сравнению с (2.5). С другой стороны, в опытах Беркенгейма [95], выполненных при длинных цилиндрических слоях, получены значения \bar{Nu} значительно ниже, чем по (2.10). Поэтому рекомендуемая в монографии [2] формула (2.10) справедлива лишь в узком диапазоне $\frac{H}{L} = 10 - 20$ в режиме пограничного слоя (именно к этому диапазону и относятся положенные в основу формулы (2.10) опытные данные [93, 94]).

4. Квазистационарный режим вертикального слоя при заданном боковом потоке тепла. Локальный перегрев стенки.

Связь между теплоотдачей и температурным расслоением.

При заданном постоянном потоке тепла к боковым поверхностям в слое с течением времени устанавливается так называемый квазистационарный режим прогрева, при котором разности температур в различных точках слоя не изменяются во времени, а интенсивность конвекции постоянна. Так как характерная температура не задана условиями задачи, определяющим критерием подобия здесь будет модифицированное число Релея, отнесенное к заданному потоку тепла [96].

$$Ra^* = \frac{g\beta L^4 q}{\nu \alpha k}$$

Оставляя в стороне переходные режимы, которые подробно изучаются в

главе II, исследуем средние и локальные характеристики поля температур для сопоставления с рассмотренным выше стационарным режимом вертикального слоя при заданных температурах.

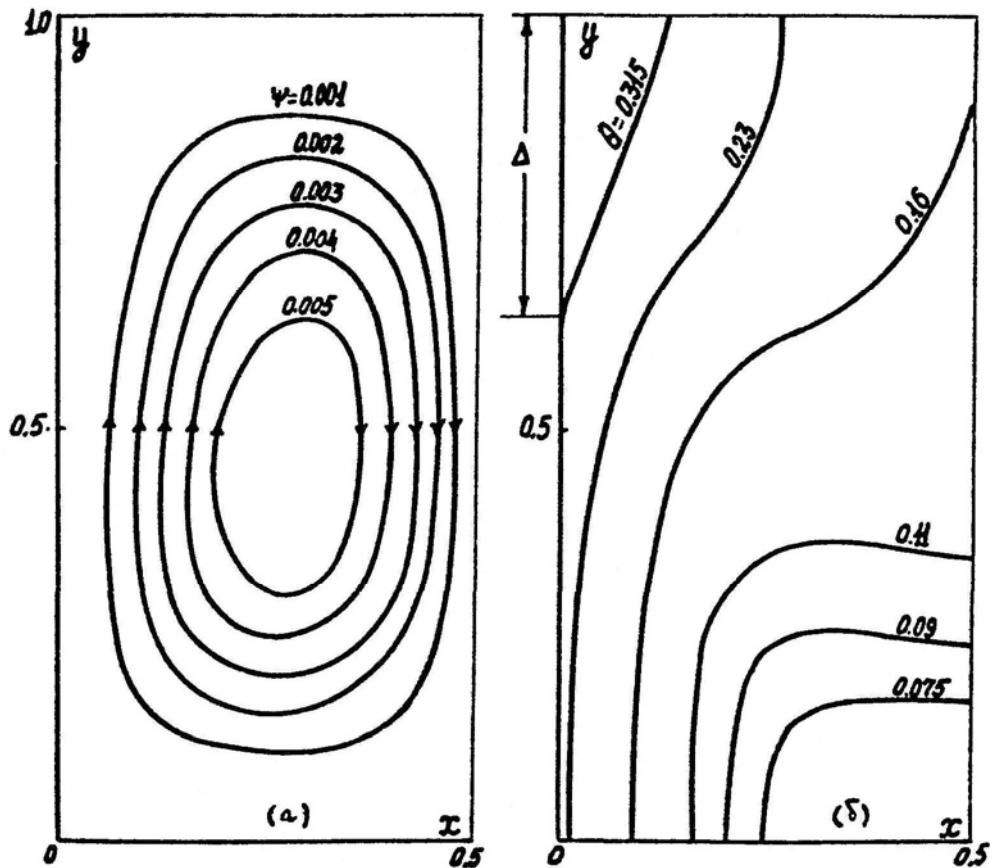
На фиг.15 даны картина линий тока и изотермы поля безразмерной температуры $\theta = \frac{T - T^0}{qL} \kappa$ для условий прогрева, близких к квазистационарным

$$\left(Ra_L^* = 10^5, Pr = 1, \frac{H}{L} = 1 \right)^{x)}.$$

Ввиду симметрии полей течения и температур показана лишь одна из половин слоя. Ввиду накопления нагретой жидкости в верхней части у стенки, ее температура в некоторых режимах конвекции оказывается выше, чем в том случае, когда конвекция полностью отсутствует. Этот участок нагретой стенки протяженностью Δ отмечен на фиг.15б. Такой эффект локального влияния естественной конвекции будем называть локальным перегревом нагретой стенки. Наличие локального перегрева означает, что действие конвекции на поле температур неблагоприятно, поэтому определение протяженности и условий появления зон локального перегрева имеет практическое значение. При заданной температуре поверхности зоне локального перегрева будет соответствовать тот участок поверхности, где поток тепла, поступающий внутрь, меньше, чем при отсутствии конвекции, т.е. $q_{\min} / q^0 < 1$. На фиг.16 представлены распределения некоторой температуры $\theta_w = \frac{(T_2 - T_1)\kappa}{q_w(y)L}$ для рассматривавшегося в п.2,3 случая заданной температуры (температура θ_w построена по аналогии с безразмерной температурой θ в случае заданного потока тепла, число Релея отнесено к среднему потоку тепла \bar{q} , $Ra_L^* = \frac{g\beta L^4}{\nu \alpha \kappa} \bar{q}$). Пунктирной линией дана безразмерная температура при отсутствии конвекции;

^{x)} Роль температурного фактора здесь играет параметр $q_w^* = q_w L / \kappa T^0 = 5$, $\chi = 1.4$, $C_F = 0.05$

пересечение этой линии со сплошными линиями при различных Ra^* определяет протяженность зоны локального перегрева Δ/L , которая уменьшается с ростом Ra^* в соответствии с зависимостью, показанной в левом углу фиг.16. Величина локального перегрева имеет максимальное значение при некотором промежуточном числе Рейля.



Фиг. 15. Линии тока (а) и изотермы поля температуры в слое ($H/L = 1$)

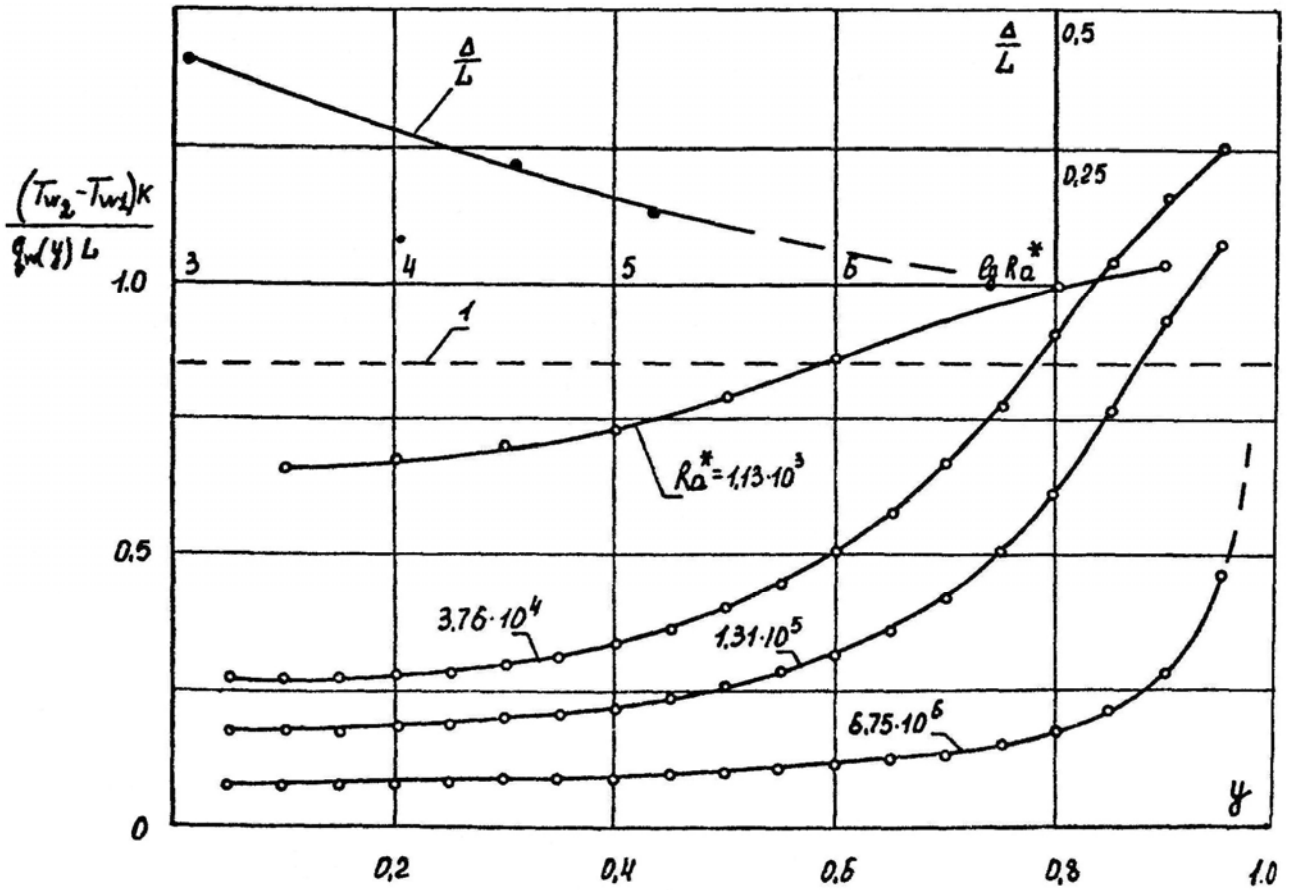
при заданном боковом потоке тепла ($Ra_L^* = 10^5$, $F_0 = 0.5$)

На фиг. 17 показана зависимость числа Нуссельта $\bar{Nu} = \frac{q_w L}{k \Delta \bar{T}}$ от числа Ra^* (здесь $\Delta \bar{T}$ - средняя разность температур между стенкой и осью замкнутой области). Линией I показана зависимость

$$\bar{Nu} = 0.55(Ra^*)^{0.2}, \quad (2.11)$$

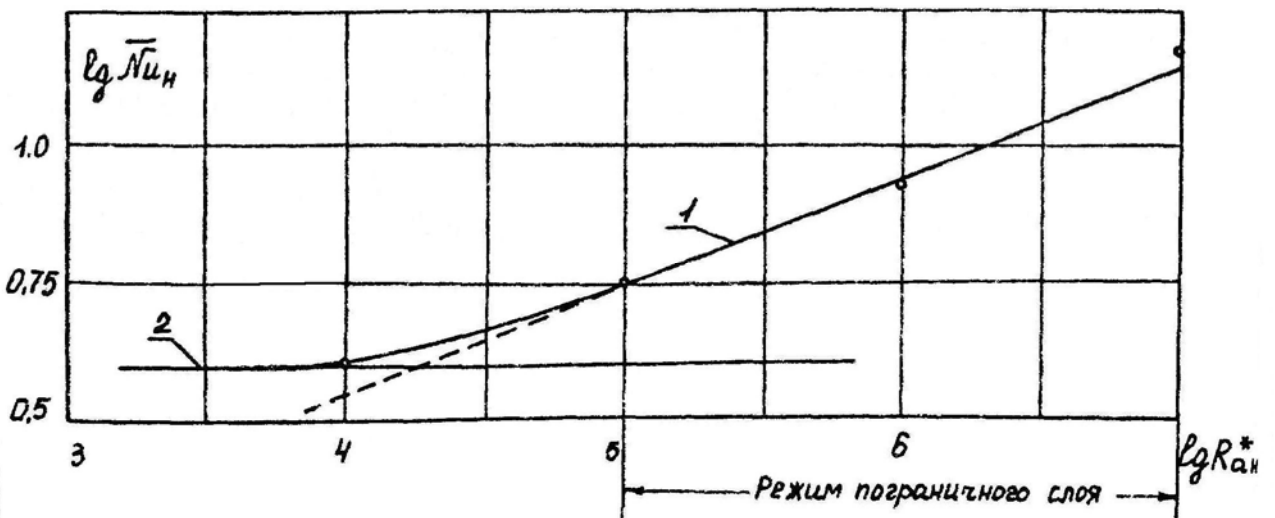
которая соответствует стационарному режиму конвекции на бесконечной вертикальной пластине при заданном потоке тепла [96] для значения $Pr = 1$ (в последнем случае $\Delta \bar{T}$ - средняя разность температур между стенкой и окружающей средой). При $Ra^* > 10^5$ результаты расчетов (белые кружки) удовлетворительно аппроксимируются этой зависимостью. При уменьшении числа Релея, начиная от значения $Ra^* = 10^5$, зависимость $\bar{Nu}(Ra^*)$ отклоняется от степенной (2.11) и стремится к постоянной величине (линия 2), соответствующей квазистационарному режиму теплопроводности неподвижной жидкости.

Разности температур по вертикали, характеризующие температурное расслоение, даны на фиг. 18. В зависимости от числа Релея эти разности вначале возрастают, достигая максимального значения при $Ra^* = 10^5$, а затем начинают уменьшаться. Этот результат, установленный впервые в работах [97, 98], связан с переходом при числе $Ra^* = 10^5$ от режима слабой конвекции, при котором преобладает температурное расслоение, к режиму пограничного слоя развитой конвекции, при котором с увеличением Ra^* перемешивание преобладает над расслоением. Именно в этом диапазоне Ra^* температура стенки оказывается выше, чем температура неподвижной жидкости. В пределе при дальнейшем увеличении числа Ra^* (в случае заданного потока тепла) конвекция стремится перемешать жидкость так, чтобы в ней установилась равномерная температура по времени.



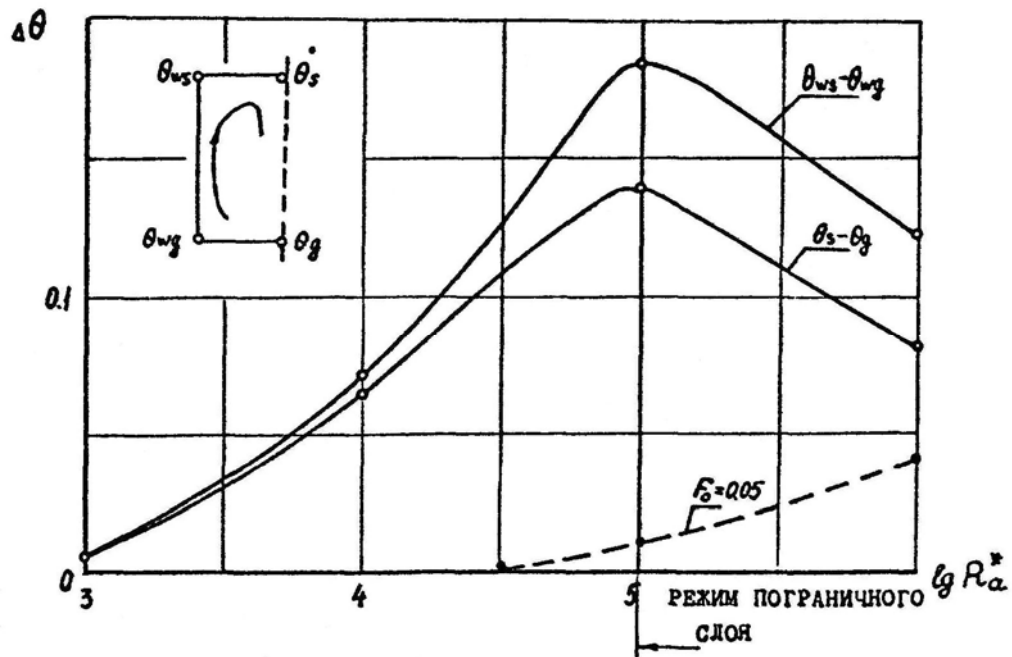
Фиг. 16. Распределение на нагретой стенке безразмерной температуры

$\frac{T_2 - T_1}{q_w(y)L} k$ и изменение зоны локального перегрева $\left(\frac{\Delta}{L}\right)$ от числа Релея



Фиг. 17. Средняя теплопередача в зависимости от числа Релея при

заданном потоке тепла



Фиг. 18. Зависимости от числа Релея вертикальных разностей

Аналогичный результат можно получить и для случая, когда заданы температуры стенок (п. 2,3). Вычислим разность температур по вертикали, отнесенную к среднему потоку тепла

$$\Delta\theta = \frac{T_B - T_H}{\bar{q}L} \kappa = \frac{T_B - T_H}{T_2 - T_1} \cdot \frac{1}{\bar{Nu}}$$

Безразмерная разность температур $\Delta\theta$ представляется как отношение функции температурного расслоения $\frac{T_B - T_H}{T_2 - T_1}$ к функции теплоотдачи $\bar{Nu} = \frac{\bar{q}L}{\kappa(T_2 - T_1)}$.

Эти функции показаны на фиг.19а. Разность температур $\Delta\theta$ в зависимости от модифицированного числа Грасгофа

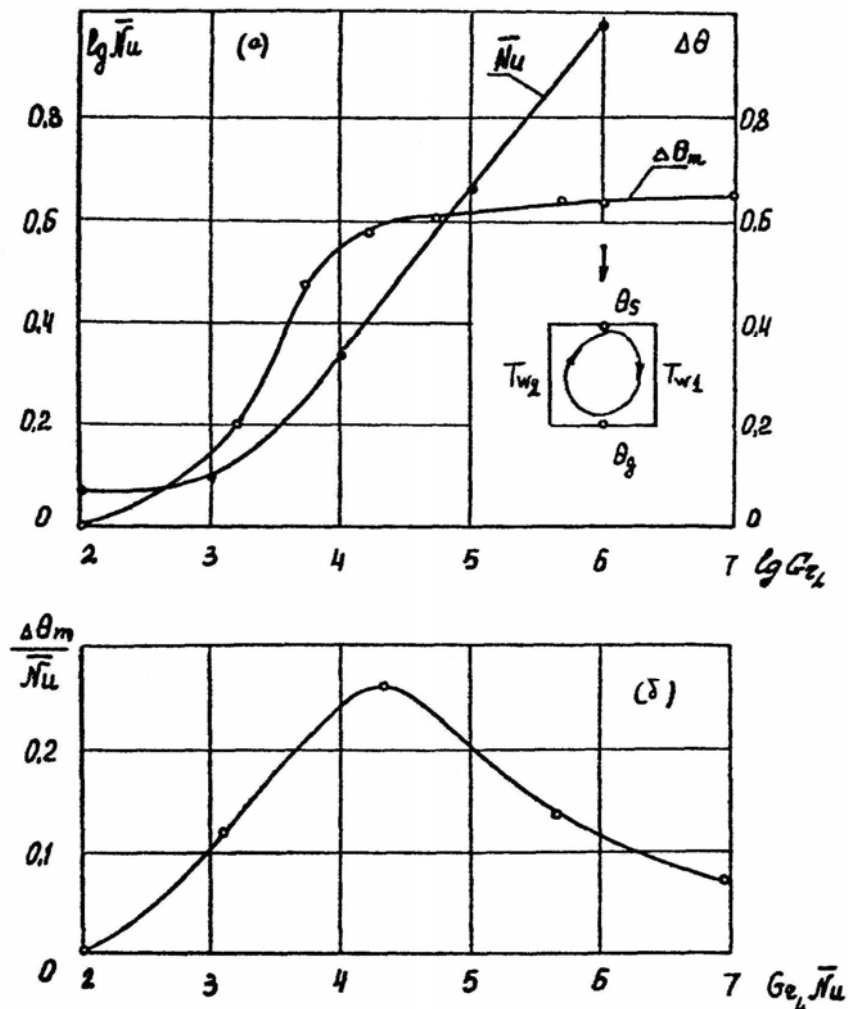
$$Gr^* = Gr \bar{Nu} = \frac{\beta g L^4}{\nu^2 \kappa} \bar{q}$$

дана на фиг. 19б и имеет максимальное значение при формировании режима пограничного слоя, причем максимальное значение локального перегрева стенки, отмечавшееся на фиг.16, достигается при числе Релея, которому

соответствует максимальное значение вертикального расслоения по температуре. Температурное расслоение в замкнутой конвективной ячейке при боковом подогреве можно характеризовать также отношением вертикальной разности температур к средней по высоте горизонтальной разности температур

$$\xi = \frac{\theta_B - \theta_H}{\theta_w - \theta_m}. \text{ Эта величина дает отношение количества тепла, подводимого к}$$

боковой поверхности, к количеству тепла, идущему на вертикальное температурное расслоение. При заданных температурах T_2, T_1 на стационарном режиме эта величина в диапазоне $Gr_L = 10^5 - 10^7$ равна около 0.6 - 0.65. При заданном потоке тепла на стенке эта величина на квазистационарном режиме при $Gr_L^* \sim 10^5$ достигает большего значения $\xi = 0.9$.



Фиг. 19. Функции теплоотдачи и расслоения (а) и разность температур по вертикали, отнесенная к потоку тепла (б) для слоя с заданными температурами

**§ 2. Горизонтальные слои, подогреваемые снизу ($\varphi = 0$);
конвекция в замкнутой области и периодическая
конвекция за порогом устойчивости равновесия.**

Возникновение конвекции в подогреваемых снизу слоях было обнаружено впервые в опытах Бенара [99]. В последующих работах выполнены многочисленные экспериментальные исследования по определению условий возникновения конвекции (т.е. критических чисел Релея), структуры движения и теплопередачи через горизонтальные слои при развитой конвекции за порогом устойчивости равновесия. Направление теоретических работ, начиная с первой работы Релея [100], связано в основном с решением линеаризованных уравнений Буссинеска и вычислением критических чисел Релея в зависимости от формы задаваемых возмущений. Обзоры работ этого направления и результатов экспериментальных исследований содержатся в книгах и статьях [12, 14, 16, 17]. Линейная теория дает значения критических чисел Релея и возможные формы движений при потере устойчивости равновесия (причем значения критического числа Релея хорошо согласуются с результатами измерений), однако, ответы на такие вопросы, как определение форм движений, их амплитуда и теплопередача в нелинейной области за порогом устойчивости не следует из этой теории. Анализ нелинейных стационарных уравнений конвекции [101] предсказывает ветвление стационарных решений и позволяет расширить область теории на некоторую окрестность точки потери устойчивости. Полное исследование структуры полей течения и температуры развитой конвекции вдали от порога устойчивости возможно лишь путем численного решения нелинейных уравнений. Первые численные решения двумерных уравнений Буссинеска для этого случая получены в работах [23, 24, 102, 103]; автором развита методика исследования, исходя из уравнений сжимаемого газа [104, 105].

1. Подходы к численной реализации решений уравнений Навье-Стокса за порогом устойчивости равновесия; ветви стационарных решений.

Стационарное решение нелинейных уравнений Навье-Стокса за порогом устойчивости равновесия не является единственным: оно зависит от вида начальных возмущений, выводящих систему из равновесия. Поэтому для численного исследования конвекции за порогом устойчивости требуется некоторый предварительный анализ возможности реализации ветвей стационарных решений при различных видах начальных возмущений на сетках с конечным числом узлов. Для расчета конвекции в длинном горизонтальном слое возможно два подхода. Первый, наиболее общий, но и наиболее трудоемкий подход связан с рассмотрением всех возможных ветвей при различных видах начальных возмущений. Так как число возможных ветвей с различными длинами волн при удлинении слоя возрастает, то возрастает и трудоемкость численной реализации и обработки информации. Однако, на этом пути возможно получение весьма интересных и качественно новых результатов, касающихся имущественного выбора длин волн, влияния начальных данных, что представляет большой интерес и примыкает к проблеме расчета с помощью численных методов турбулентных движений.

Второй подход является более практичным, но и более узким. Он связан с изучением одной ячейки периодической структуры конвекции при заданной в виде параметра длине волны. Нами использовались оба эти подхода, первый в работах [104, 105], а второй – в работах [106-108].

Наиболее естественной является попытка возбудить движения за порогом устойчивости равновесия (при $Ra > Ra_{кр}$), исходя из начального поля неподвижного газа, находящегося в условиях гидростатического равновесия в стационарных температурных условиях (начальный профиль температуры - линейный). Критические числа Релея, полученные для этого случая при решении линеаризованных уравнений Буссинеска для областей с различным, но

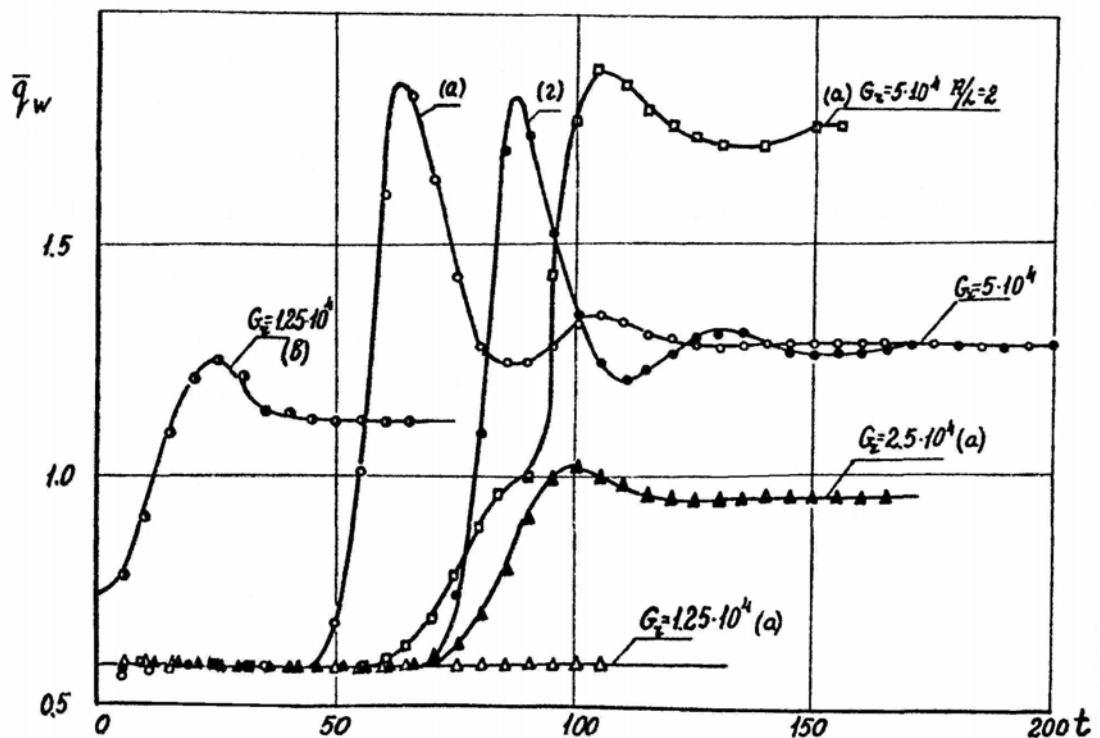
конечным отношением сторон [109], даны в таблице 4

Таблица 4

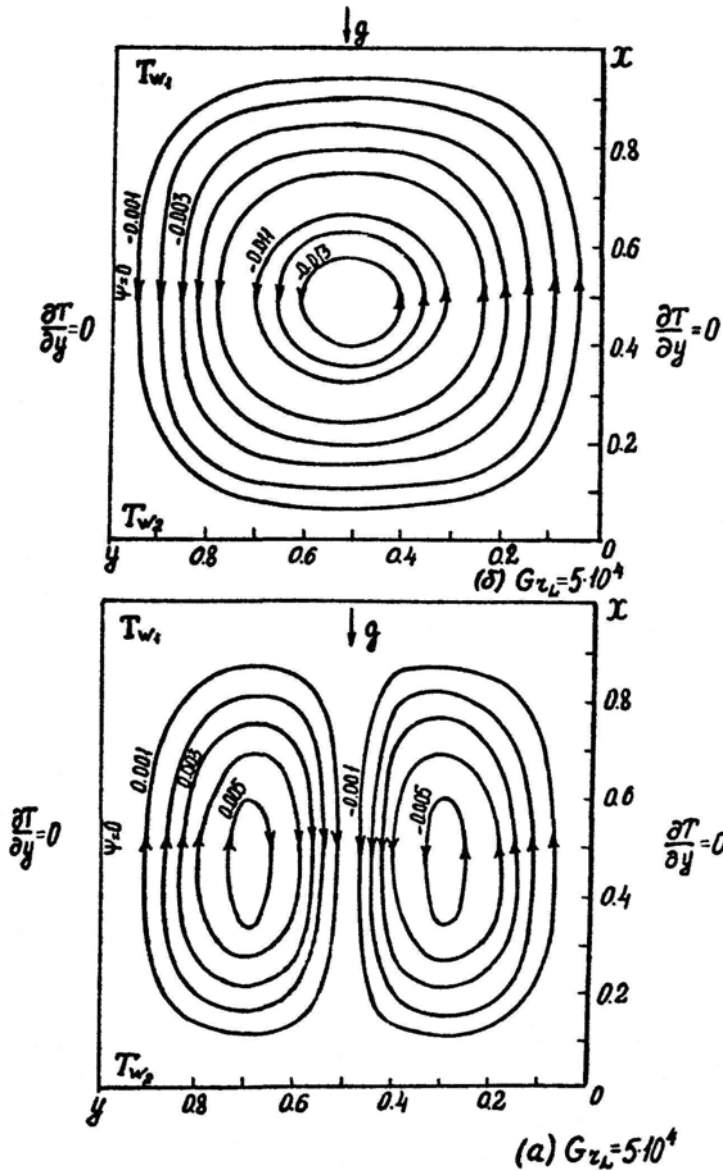
$\frac{L}{H}$	8	4	2	1	0.5	0.25	0.2
$Ra_{кр}$	494742	50410	8980	3357.9	2285.7	2037.2	2007.8

Для бесконечно длинного слоя ($L/H \rightarrow 0$) значение $Ra_{кр} \approx 1.708$ вычислено в работе [110]. Этому значению $Ra_{кр}$ соответствует длина волны $l/H \sim 1.008$. Однако, без внесения дополнительных возмущений (помимо ошибок округления, неизбежно имеющихся при решении систем разностных уравнений) конвективное движение за порогом устойчивости при $Ra > Ra_{кр}$ возбудить не удастся. Это может быть связано как с конечностью пространственного шага, так и со значительной длительностью развития возмущений очень малой амплитуды. Кроме того, амплитуда и спектр ошибок округления могут не соответствовать неустойчивым (по линейной теории) гармоникам. Для возбуждения конвективного движения за порогом устойчивости в начальное поле газа вносились конечные возмущения. Основное движение для области с отношением сторон $H/L = 1$ имеет один вихрь. Это движение возбуждается при несимметричных возмущениях, связанных, например, с поворотом внешней силы на угол $\Delta\varphi$: при этом развивается движение, которое при возвращении силы в исходное положение $\varphi = 0$, срывает равновесие. В ряде случаев в качестве начального поля использовалось поле функций тока и температур, полученное при боковом подогреве. Развитие возмущений такого вида и установление стационарного режима основного движения за порогом устойчивости при $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$ показано на графике среднего потока тепла (фиг.20, кривая (в)). Картина линий тока этого движения дана при $Gr_L = 5 \cdot 10^4$ на фиг.21б. Здесь вихрь вращается против часовой стрелки, однако, существует и легко реализуется численно второе решение, симметричное первому, но с вращением по часовой стрелке.

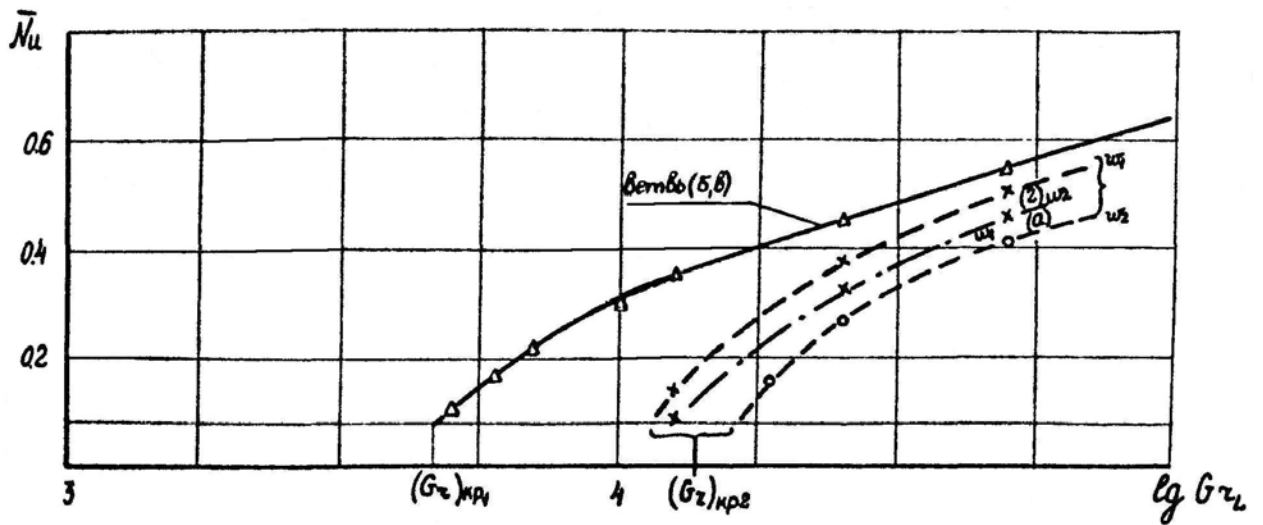
Средние потоки тепла в этих двух движениях совпадают, однако местные потоки тепла отличается (симметричны), что может иметь значение на практике. Какое из этих двух движений будет реализовано, зависит от начальных возмущений, которые обладают некоторой «областью притяжения». Отметим, что обе эти ветви удастся реализовать и в опытах [111]. Дальнейшее изучение стационарных режимов конвекции за порогом устойчивости удобно вести, изменяя число Грасгофа и используя полученные решения в качестве начальных данных. Результаты расчета среднего числа Нуссельта в зависимости от числа Грасгофа при $\frac{H}{L} = 1$, выполненные таким образом, даны на фиг.22. Рассматриваемой основной ветви с одним вихрем здесь соответствует кривая (6,б). Точка пересечения этой кривой с линией $\bar{Nu} = const$, соответствующей переносу тепла путем только теплопроводности, дает значение критического числа Грасгофа. Это значение $Gr_{кр}$ согласуется с вычисленным исходя из линейной теории.



Фиг. 20. Развитие во времени возмущений в замкнутой области, подогреваемой снизу, за порогом устойчивости равновесия



Фиг. 21. Линии тока для основной (б) и побочной (а) ветвей; $Gr_L = 5 \cdot 10^4$



Фиг. 22. Зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа на стационарном режиме для основной и побочных ветвей

Получение численных результатов в непосредственной близости от порога устойчивости при $Gr \sim (Gr)_{кр}$ затруднительно в связи с замедлением процесса установления. Это отличает конвективные движения, возникающие после потери устойчивости, от рассмотренных в § I движений, в которых гидростатическое равновесие в начальном поле отсутствует; движения обладают как бы большими "степенями свободы", так как отсутствует стабилизирующее действие градиента температуры, нормального к направлению силы.

Помимо основной ветви (точнее двух симметричных ветвей), которой соответствует минимальное критическое число Грасгофа, существуют и другие побочные ветви, критические числа Грасгофа которых выше. В замкнутой области с отношением сторон $\frac{H}{L} = 1$ ближайшей (по числу Грасгофа) является ветвь (точнее две ветви) с двумя вихрями. Эта ветвь реализуется при симметричных начальных возмущениях, таких, например, как внезапное приложение внешней силы в неподвижном газе, предварительно находившемся в равновесии при отсутствии силы или ступенчатое повышение (или понижение) температуры стенки. Механизм возбуждения движения в этих случаях связан с распространением гравитационных или температурных волн, увлекающих основное движение в центре области в ту или иную сторону. Структура одномерных волн такого типа рассматривалась автором ранее в специальных расчетах [48]. Картина линий тока стационарного движения, возникающего при внезапном приложении силы или охлаждении нагретой стенки ($Gr_L = 5 \cdot 10^4$) дана на фиг. 21а. Здесь газ опускается в центре области и поднимается на периферии. Переходные режимы в обоих указанных случаях задания начальных возмущений различаются (фиг.20, кривые а,г), однако, стационарный режим у них одинаков. Другая побочная ветвь с двумя вихрями противоположного вращения (газ поднимается в центре области) реализуется при внезапном увеличении температуры стенки. Эти две побочных ветви для "жидкости Буссинеска" являются полностью симметричными, однако, для

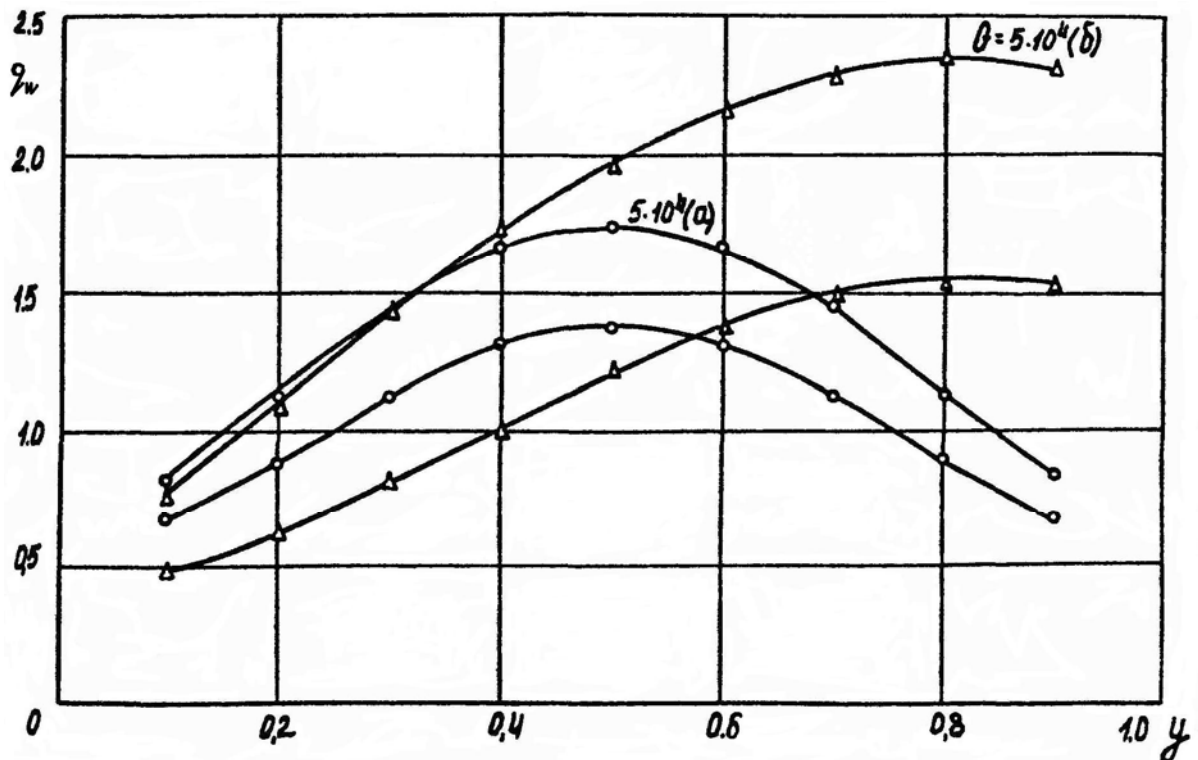
сжимаемого газа они, строго говоря, различаются, что можно видеть из зависимостей среднего числа Нуссельта от числа Грасгофа (фиг.22). Это различие будет увеличиваться с увеличением параметра сжимаемости C_F .

Выделение устойчивых побочных решений допускают не все разностные схемы. При наличии погрешностей несимметричного типа побочные решения симметричного вида (такие, как рассмотренные выше) оказываются метастабильными. В частности, в работе [112] устойчивые побочные ветви удавалось получить лишь при дополнительных условиях симметрии. В рассматриваемых здесь решениях симметрия вычисляемых значений скорости, плотности и температур сохранялась всегда с точностью до 8-9 знаков. Кроме того, в специальных расчетах на стационарное симметричное решение (фиг.21а) накладывалось несимметричное возмущение (внезапный кратковременный отвод тепла с боковой поверхности величиной $\Delta q \cong 0.1\bar{q}$); при этом с течением времени после некоторого переходного периода устанавливалась прежняя двухвихревая структура. Таким образом, побочные ветви в данном случае обладают некоторым "запасом устойчивости", и, по-видимому, имеют некоторую "область притяжения" в спектре начальных возмущений. Эта особенность требует проведения определенной предварительной работы при численном исследовании тепловой устойчивости.

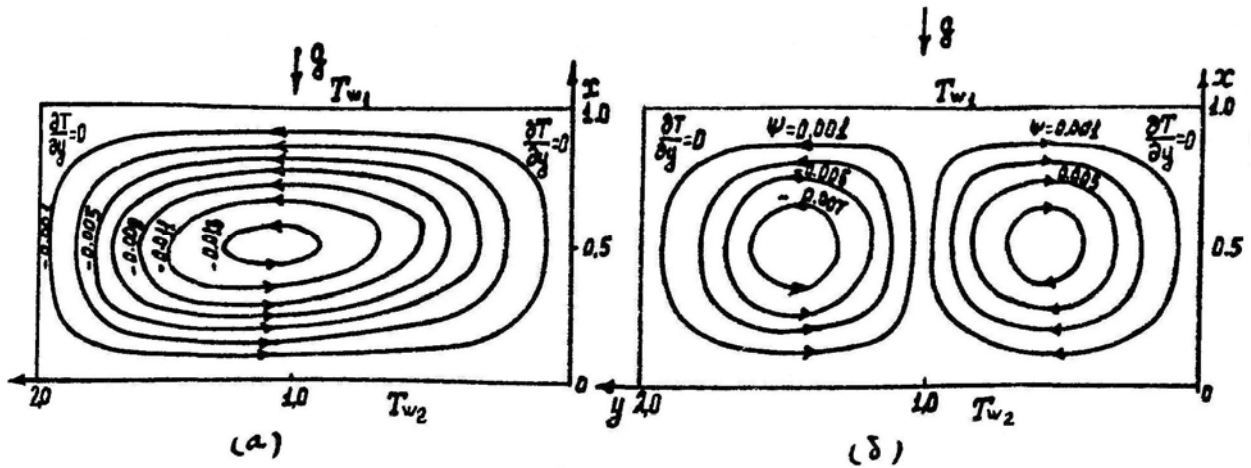
На фиг. 23 даны распределения местных потоков тепла на нагретой стенке для двух ветвей (а, б). Для ветви с двумя вихрями фиг. 21а характерно наличие максимального потока тепла в месте разветвления линий тока. Отсюда видно, что характер распределения местных потоков тепла для различных ветвей существенно различается, что может иметь значение в ряде практических ситуаций.

Не останавливаясь на особенностях структуры полей течения и температуры в ячейках (подробнее см. [104, 105], рассмотрим некоторые результаты численных экспериментов при других значениях $\frac{H}{L}$. При $\frac{H}{L} = 2$ основным, согласно линейной теории [109], является симметричное движение с

двумя вихрями (фиг.24б), которое реализуется, например, при внезапном приложении внешней силы. Отличием от случая $\frac{H}{L}=1$ (фиг.21б) является направление движения; газ поднимается в центре области и опускается на периферии. Развитие нестационарного процесса в этом случае (фиг.20) состоит из двух участков: медленного и быстрого развития возмущений с точкой излома, соответствующей перестройке течения от вида, аналогичного фиг.21а, когда газ опускается в центре области к окончательной структуре (фиг. 24б), когда газ в центре области поднимается. Одновихревая структура (фиг.24 а), являющаяся при $\frac{H}{L}=2$ побочной, получается, если вести расчеты по параметру $\frac{H}{L}$, используя начальное поле (фиг. 21б) при $\frac{H}{L}=1$.

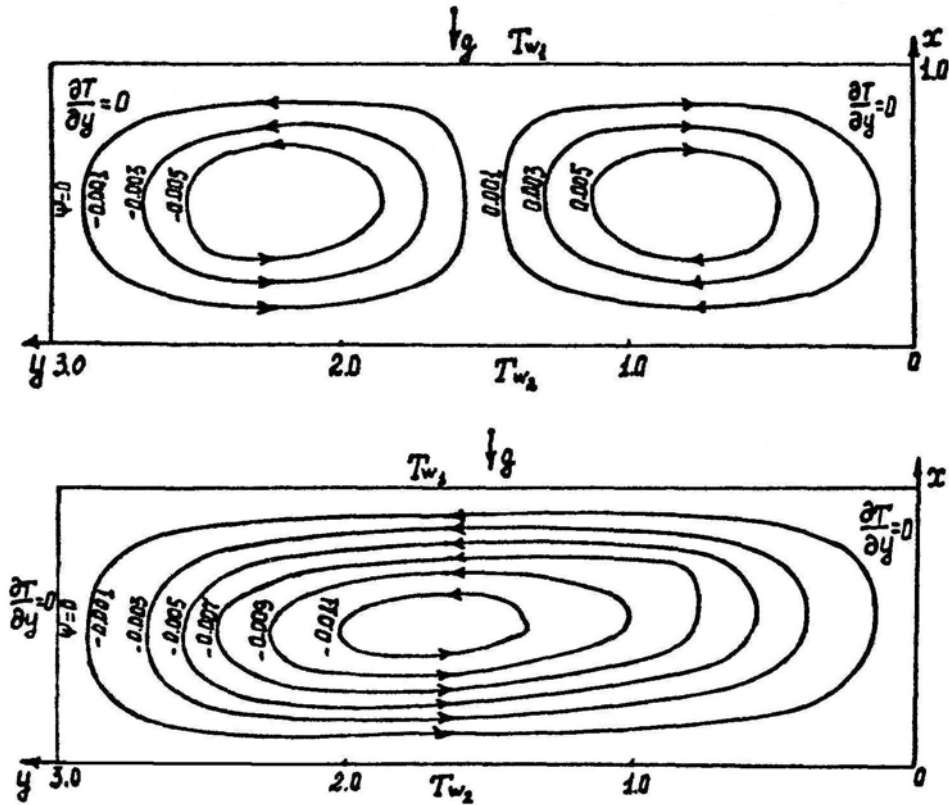


Фиг. 23. Распределения местных потоков тепла на нагретой стенке для основной и побочной ветвей

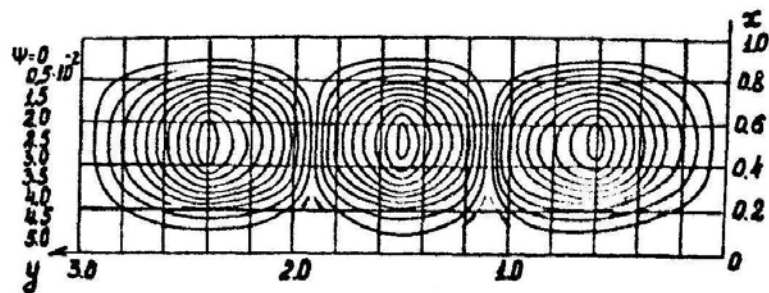


Фиг. 24. Линии тока в области с отношением сторон $\frac{H}{L} = 2$ для основной (б) и
 побочной (а) ветвей; $Gr_L = 5 \cdot 10^4$

При дальнейшем удлинении слоя ($\frac{H}{L} = 3$) удастся выделить стационарные решения с одним, двумя и тремя вихрями (фиг. 25, 26) (причем каждому из этих решений соответствуют и симметричные решения, отличающиеся направлением вращения). Техника выделения этих ветвей аналогична прежней; для реализации основной (по линейной теории) трехвихревой структуры (фиг.26) вносилось соответствующее периодическое возмущение вертикальной составляющей скорости. Таким образом, при удлинении горизонтального слоя количество стационарных ветвей, которые можно реализовать численно, значительно возрастает, и полный анализ требует больших затрат времени на ЭВМ. Вместе с тем при удлинении слоя влияние боковых границ становится несущественным, поэтому рациональна постановка задачи о периодической конвекции.



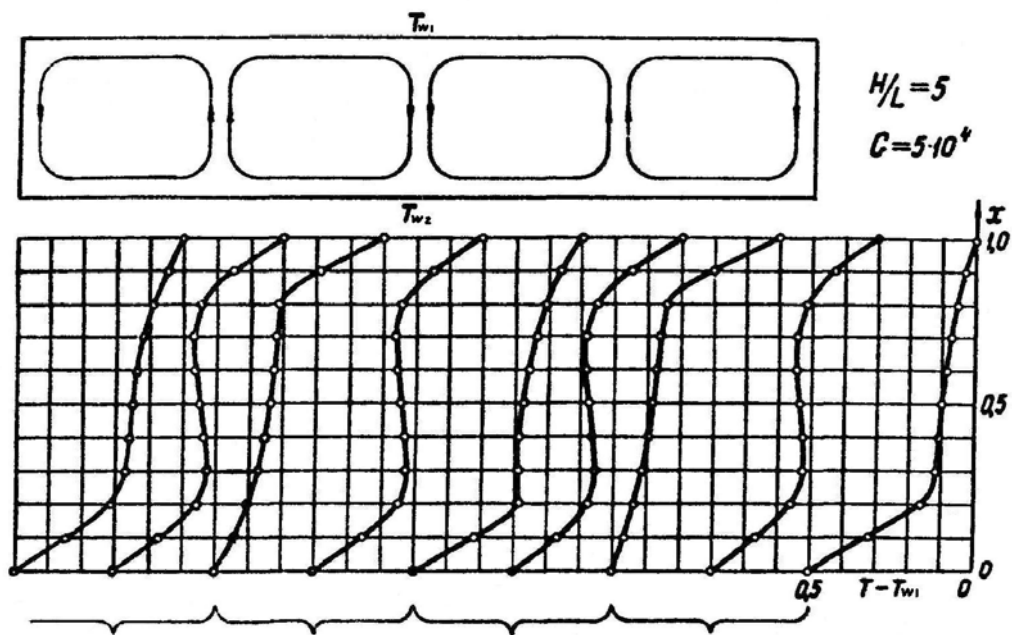
Фиг. 25. Линии тока в области с отношением сторон $\frac{H}{L} = 3$ для двух побочных ветвей; $Gr_L = 5 \cdot 10^4$



Фиг. 26. Линии тока в области с отношением сторон $\frac{H}{L} = 3$ для основной ветви; $Gr_L = 5 \cdot 10^4$

Из всех возможных движений наибольший интерес представляют те, которым соответствует наименьшее критическое число Грасгофа (или Релея). Именно эти движения должны реализоваться в эксперименте, где возмущения, как правило, носят случайный характер. В первом приближении длину волны (или период) таких движений можно найти из линейной теории. Однако, далеко

за порогом устойчивости длина волны может изменяться, поэтому возникает задача о преимущественном выборе длин волн при больших числах Релея. На фиг.27 показан результат одного из расчетов при больших отношениях сторон $\frac{H}{L} = 5$, $Gr_L = 5 \cdot 10^4$, откуда видно, что длина волны основного движения далеко за порогом устойчивости возрастает по сравнению с предсказываемой из линейной теории.



Фиг. 27. Линии тока и профили температур для горизонтального слоя с отношением сторон $H/L = 5$

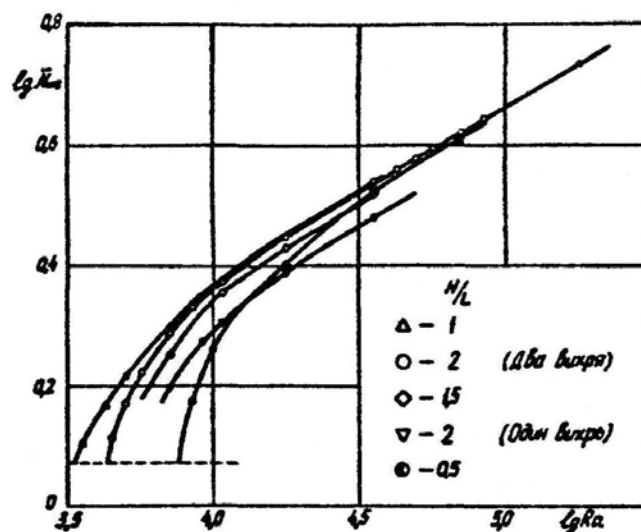
Таким образом, численное исследование конвективных движений, возникающих после потери устойчивости равновесия, представляется целесообразным вести в направлении исследования в области конечных размеров, исследования периодических структур применительно к бесконечно длинным слоям при заданной длине волны и исследования преимущественного выбора длин волн за порогом устойчивости в длинных слоях без фиксирования длины волны. Последнее направление весьма трудоемко и будет эффективным лишь при значительном повышении быстродействия ЭВМ и автоматизации обработки результатов. В последнее время интерес к этому направлению возрастает (см., например, [113]). Ниже, в пп. 2,3 данного параграфа приводятся

результаты работ в первых двух направлениях.

2. Режимы течения и теплообмена в замкнутых ячейках за порогом устойчивости. Влияние чисел Грасгофа, Прандтля и геометрии.

Формула для расчета средней теплопередачи.

Рассмотрим результаты расчета стационарных режимов по числу Релея и влияние различных факторов на теплопередачу за порогом устойчивости в замкнутых конвективных ячейках различной геометрии. На фиг. 28 дана зависимость среднего числа Нуссельта от числа Релея на стационарном режиме для различных удлинений. Для каждой геометрии взяты основные ветви, однако, для $\frac{H}{L} = 2$ приведена для сопоставления и побочная ветвь.



Фиг. 28. Ветви стационарных решений $\bar{Nu}(Ra)$ для прямоугольных областей различной геометрии

Отсюда видно, что влияние геометрии замкнутой конвективной ячейки существенно сказывается лишь в некотором диапазоне числа Релея за порогом устойчивости. При увеличении числа Релея, по-видимому, существует некоторый асимптотический режим, характеризующийся относительно слабым влиянием геометрии. Физически это объясняется уменьшением роли боковых

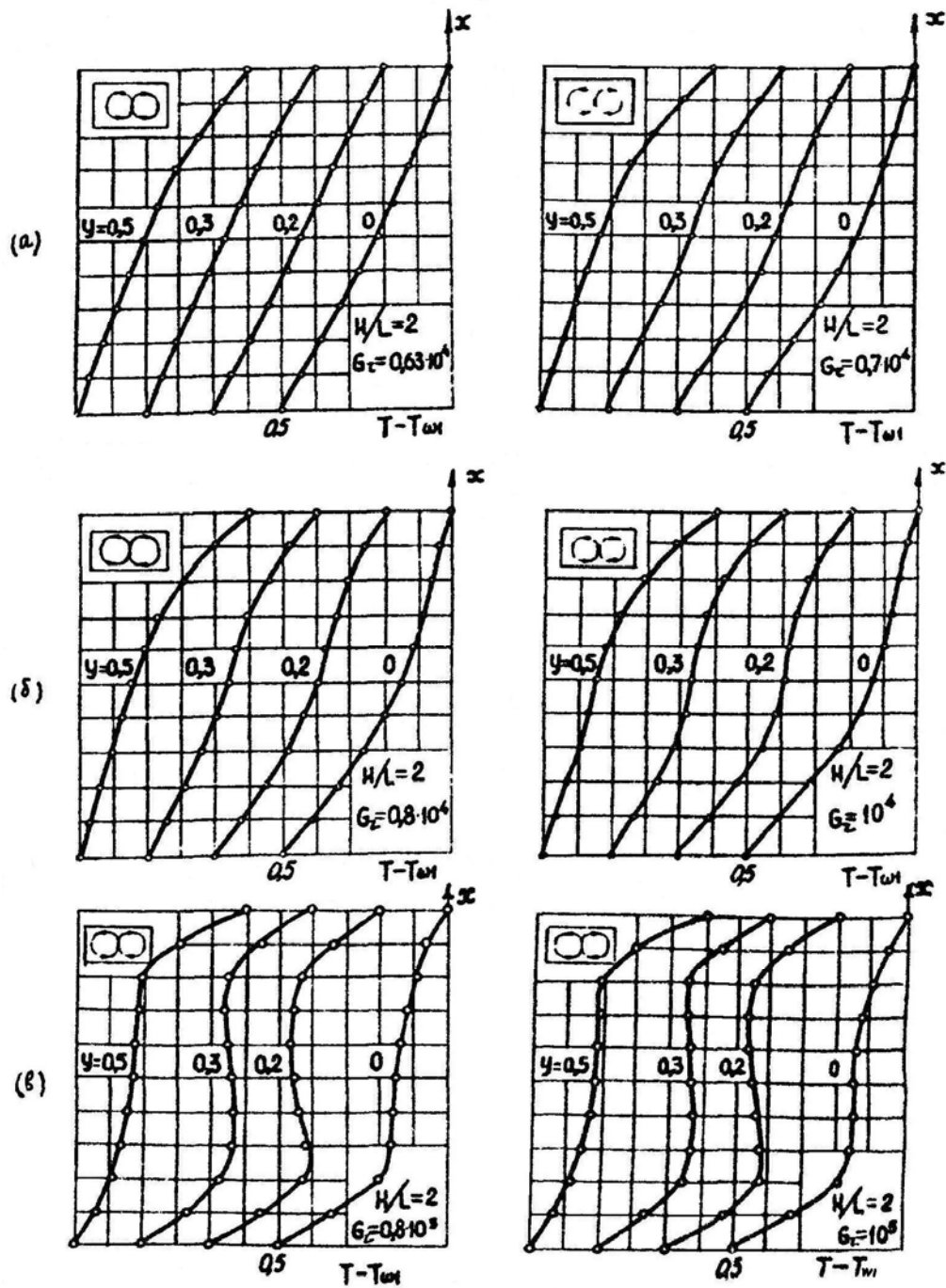
поверхностей при увеличении числа Релея (т.е. уменьшении вязкости). При малых числах Релея влияние геометрии сказывается прежде всего на условиях равновесия (см. зависимость $Ra_{кр} \left(\frac{H}{L} \right)$, таблица 5).

На фиг. 29 приведены вертикальные профили температуры в характерных сечениях конвективной ячейки для основной ветви некоторой типичной геометрии $\frac{H}{L} = 2$ при различных числах Релея за порогом устойчивости. Как и в рассмотренном ранее случае бокового подогрева вертикального слоя (§ 1), можно выделить три характерных режима конвекции по числу Релея: 1) режим теплопроводности в окрестности $Ra \sim Ra_{кр}$, профили температуры по вертикали в этом режиме практически линейны (фиг. 29а), 2) промежуточный режим, характеризующийся заметным влиянием конвекции, но без образования "конвективного ядра" (фиг. 29б); пограничные слои на нагретой и холодной стенках в этом режиме сливаются; 3) режим развитой конвекции или режим пограничного слоя (фиг. 29в); в этом режиме заметно четкое разделение поля температуры по вертикали на ядро, пограничные слои у нагретой и холодной стенок. Режим пограничного слоя, как можно видеть из фиг. 28, характеризуется степенной зависимостью среднего числа Нуссельта от числа Грасгофа по аналогии с режимом пограничного слоя при боковом подогреве. В непосредственной близости от порога устойчивости оказывается справедливым следующий закон теплопередачи

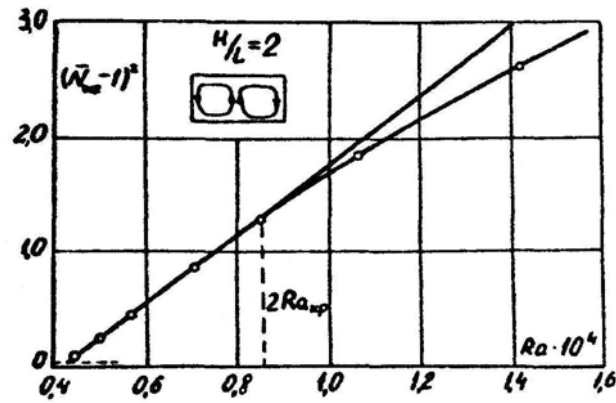
$$(Nu - 1)^2 = C(Ra - Ra_{кр}) \quad (2.12)$$

Существование такого закона при $Ra \leq 2Ra_{кр}$ следует из фиг. 30. Этот закон для замкнутых областей был установлен аналитически в работе [114] и подтвержден экспериментально как для основной, так и для побочной ветвей в работе [115]. В наших расчетах при $\frac{H}{L} = 1$ зависимость (2.12) также имеет место как для основной, так и для вторичной ветвей.

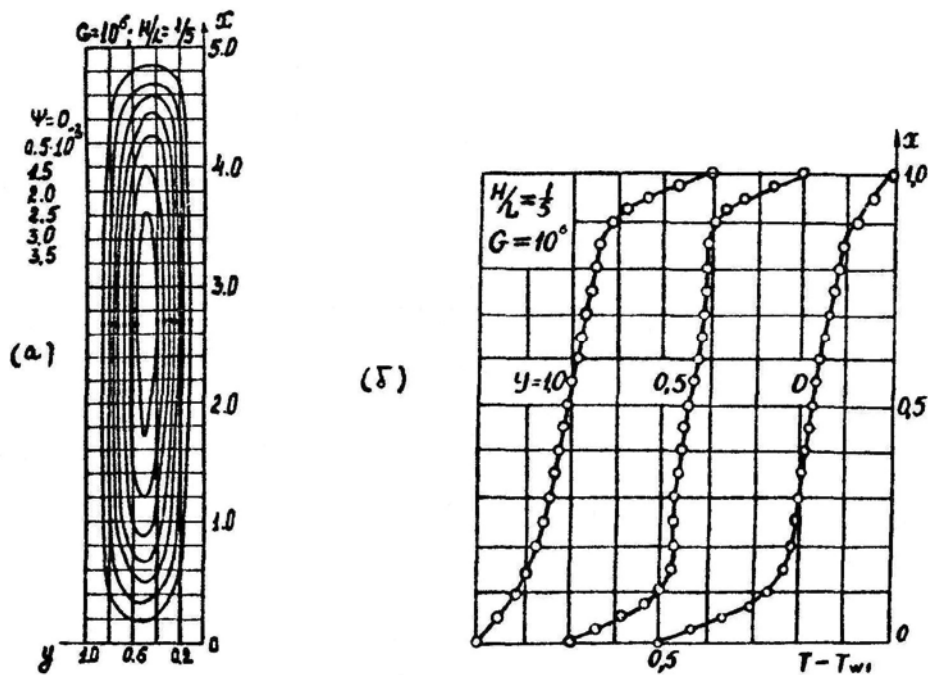
Рассматривались стационарные режимы конвекции в плоских вертикальных слоях, подогреваемых снизу ($\frac{H}{L} = 0.5, 0.2$). Практический интерес к такого рода задачам связан с теплообменом в вертикальных шахтах в зимних условиях (охлаждение сверху).



Фиг. 29. Профили температур в вертикальных сечениях для различных режимов по числу Грасгофа



Фиг. 30. Зависимость $(\bar{Nu} - 1)^2$ от числа Релея за порогом устойчивости в области $\frac{H}{L} = 2$ (основная ветвь)



Фиг. 31. Линии тока (а) и профили температур (б) в длинном вертикальной слое, подогреваемом снизу, $Gr_L = 10^6$

На фиг. 31а,б показаны соответственно линии тока и вертикальные профили температур при $\frac{H}{L} = 2$, $Gr = 10^6$. В конвективном ядре такой вытянутой ячейки существует вертикальный градиент температур. Рассматривалось влияние на теплообмен числа Прандтля в диапазоне $5 \cdot 10^{-2} \leq Pr \leq 10^5$. Влияние числа Прандтля на среднюю теплопередачу в этом

диапазоне с удовлетворительной точностью ($\sim 5\%$) можно учесть в виде произведения $GrPr$. Результаты расчетов средней теплопередачи обобщаются в виде

$$\bar{Nu} = C_1 Ra^{0,272} (1 - K)^m (T_2 / T_1)^{0,17} \left(\frac{C_2}{T_1} \right)^{0,012} \quad (2.13)$$

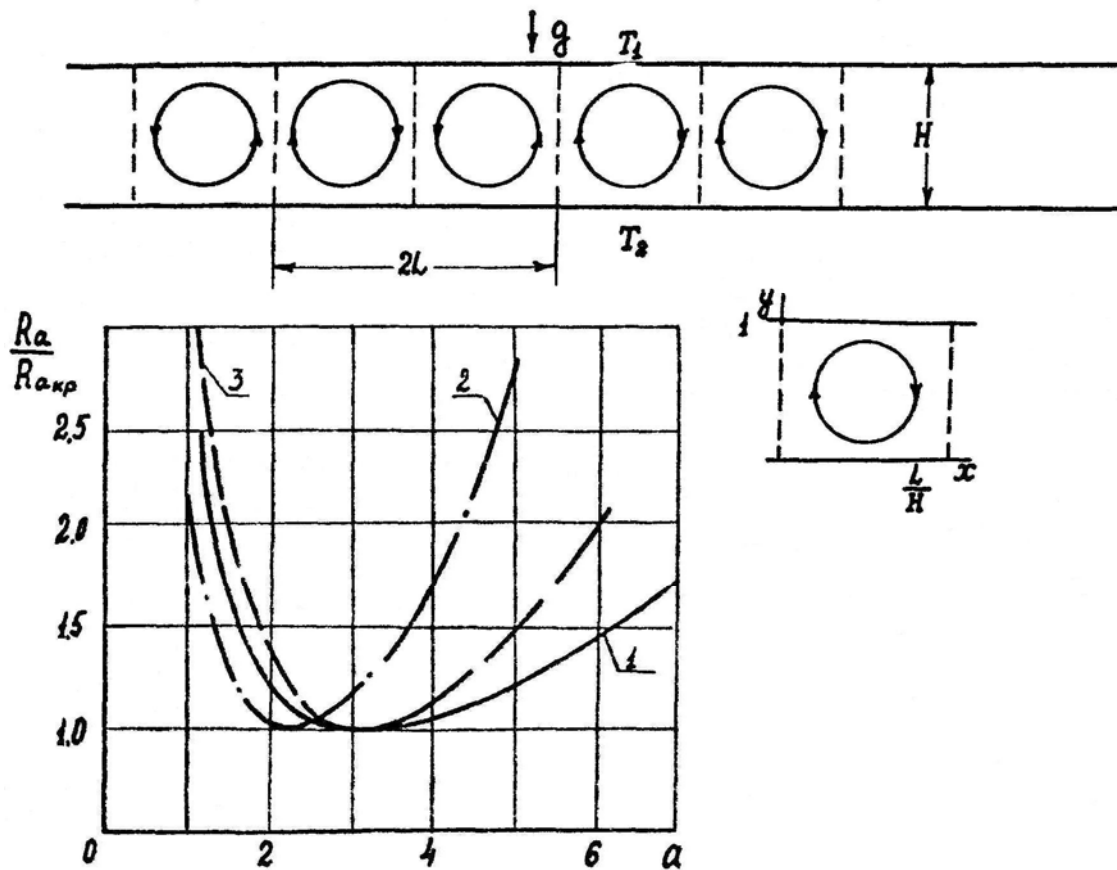
Для рассматриваемого случая слабо сжимаемого газа ($K \rightarrow 0; T_2 / T_1 \sim 1,5; C_2 / T_1 \sim 0,37$), при значении $\frac{H}{L} = 2$ эта формула имеет вид

$$\bar{Nu} = 0.2 Ra^{0,272}$$

Результаты большого числа расчетов структуры полей температур в замкнутых двумерных областях различной конфигурации, подогреваемых снизу, более подробно изложены в работе [106].

3. Периодическая конвекция в горизонтальном слое. Сопоставление результатов расчета с опытными данными. Влияние длины волны конвективных движений. Локальные эффекты.

Нейтральная кривая для случая периодической конвекции в слое газа между двумя твердыми поверхностями с заданными температурами (см., например, [110]) приведена фиг.32 (линия 3). Значению критического числа Релея $Ra \cong 1708$ в двумерном случае соответствует длина волны конвективного движения $\frac{L}{H} \cong 1.008$. Двумерная валиковая структура в некотором диапазоне чисел Ra наблюдается обычно в слоях жидкости и газа, заключенных между



Фиг. 32. Нейтральные кривые для трех моделей периодической конвекции

$\left(a = \frac{\pi H}{L}\right)$: 1 – пористый слой, $(Ra_*)_{кр} = 40$; 2 – обе поверхности свободные, $(Ra)_{кр} = 657$; 3 – обе поверхности твердые, $(Ra)_{кр} = 1708$

твердыми цилиндрическими дисками из хорошо проводящего материала [116]. Наиболее тщательные измерения среднего числа Нуссельта в таких условиях выполнены в работах [117-119]. Цель численного исследования - изучение особенностей структуры конвекции за порогом устойчивости и сопоставление основных характеристик с опытными данными, что позволяет выяснить вопрос о диапазоне применимости двумерной (валиковой) модели конвекции.

В расчетах фиксирован горизонтальный масштаб $\frac{L}{H}$; изучаются движения, которым соответствует наименьшее критическое число Релея. Техника реализации стационарных решений аналогична рассмотренной выше для замкнутой области, однако, класс рассматриваемых движений здесь более узок: изучаются лишь ячейки с одним вихрем в полупериоде (фиг. 32); на границах

ячейки задаются условия симметрии. Движения возбуждаются путем внесения в начальное поле несимметричных возмущений, связанных с поворотом внешней силы. Использовались, как правило, сетки с числом узлов 21×21 . Для контроля точности отдельные расчеты выполнены также на сетке 31×31 . Изотермы поля температур и линии тока для стационарного конвективного движения при числе $Ra = 10^4$ даны на фиг. 33а,б. Здесь $Ra_V = \frac{V_m L}{\nu}$ - число Рейнольдса, отнесенное к максимальной скорости восходящих движений. Сопоставление результатов расчета зависимости среднего числа Нуссельта от числа Релея с результатами измерений [117, 119] в непосредственной близости и вдали от порога устойчивости дано, соответственно, на фиг. 34, 35. Как видно из фиг.34, результаты расчетов средней теплопередачи вблизи порога устойчивости ($Ra < 5 \cdot 10^3$) хорошо согласуются с результатами измерений. Начало возникновения конвекции, т.е. значение критического числа Релея хорошо согласуется со значением, которое определяется путем пересечения осредненной опытной зависимости $\bar{Nu}(Ra)$ с линией $\bar{Nu} = 1$ при переносе тепла путем теплопроводности. Это значение $Ra_{кр}$ близко и к вычисленному из линейной теории [110]. Вблизи порога устойчивости $Ra / Ra_{кр} \leq 2$ для периодической конвекции имеет место следующая зависимость числа Нуссельта от числа Релея

$$Nu - 1 = C(Ra - Ra_{кр}) \quad (2.15)$$

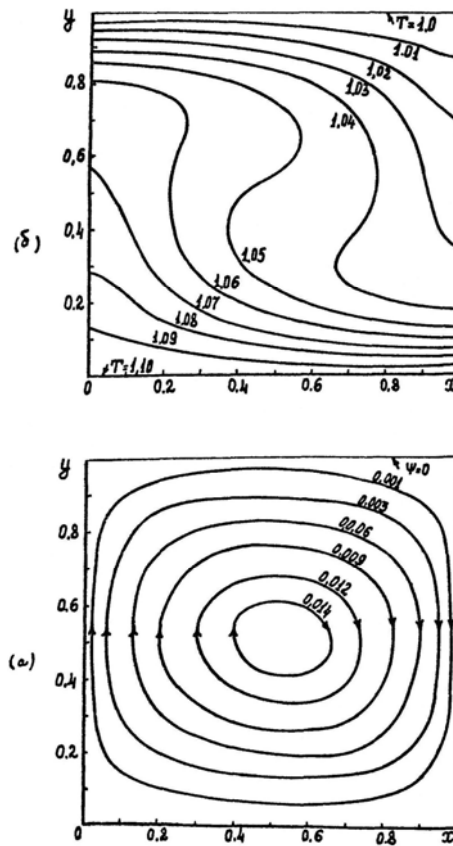
где $C \cong 0.5 \cdot 10^{-3}$. Эта зависимость отличается от аналогичной зависимости (2.12) для замкнутой двумерной области.

При удалении от порога устойчивости результаты расчета систематически выше значений \bar{Nu} , осредненных по различным опытным данным (фиг. 35). Отклонение при числе $Ra = 10^5$ составляет около 15%. Аналогичный результат получен также в работах [120, 121] при сопоставлении результатов численных

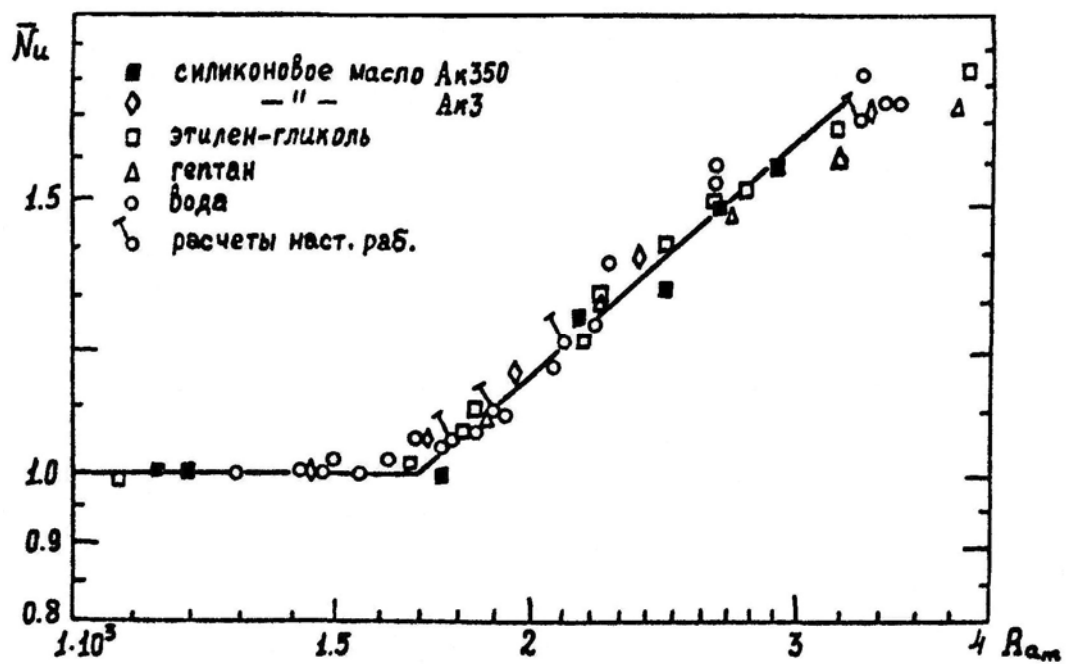
решений уравнений Буссинеска для ячейки $\frac{H}{L}=1$ с данными Россби [119].

Наиболее вероятной причиной отклонения вычисленных данных от измеренных является, по-видимому, нарушение (при увеличении числа Релея) валиковой структуры движения и переход к более сложной трехмерной структуре, а затем и к турбулентному режиму, который в этом случае осуществляется через серию промежуточных дискретных переходов, связанных со все меньшей упорядоченностью структуры движения. Ряд авторов считает, что уже при значениях $Ra \sim 5 \cdot 10^4 - 10^5$ течение турбулентно (судя по опытным данным фиг.35, именно в этом диапазоне числа Релея происходит некоторое изменение наклона осредненной зависимости $\bar{Nu}(Ra)$). Однако, и при числах $Ra \sim 10^4$ в поле течения и температур наблюдаются колебания [122, 123]. Интересно, что численные расчеты формально позволяют в этом случае "проникнуть" в турбулентную область. В области больших чисел Релея в расчетах наблюдаются затухающие колебания в среднем числе Нуссельта, частота которых при увеличении числа Релея увеличивается.

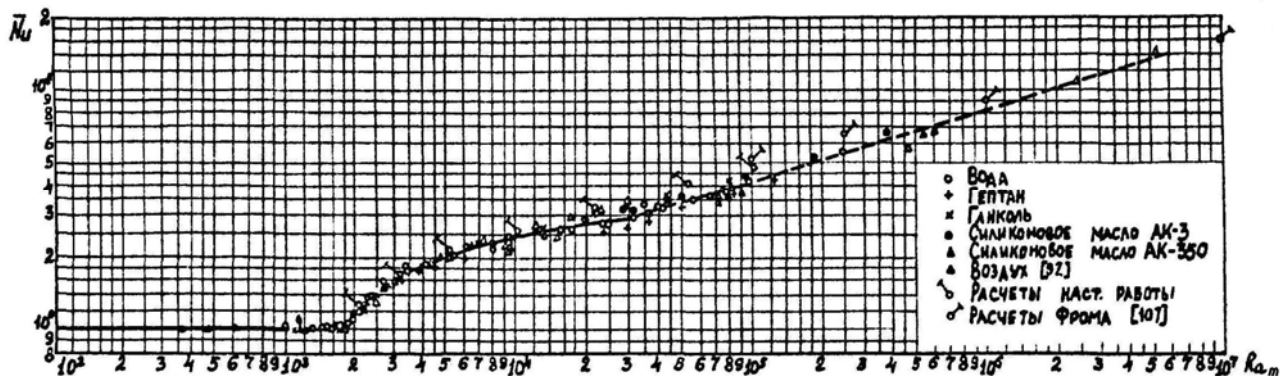
Несмотря на ограниченность двумерной модели, основные особенности структуры поля температуры с помощью этой модели ухватываются. На фиг.36а приведены вертикальные профили температур в средней части ячейки ($x=0.5$), на которых обнаруживается так называемый "обратный градиент" температуры в конвективном ядре. На фиг.36б показан результат измерения с помощью интерферометра [124] профиля температуры с обратным градиентом в ядре. Решение трехмерных уравнений конвекции, представлявшее для современных ЭВМ весьма трудоемкую задачу, начато в работах [125, 126].



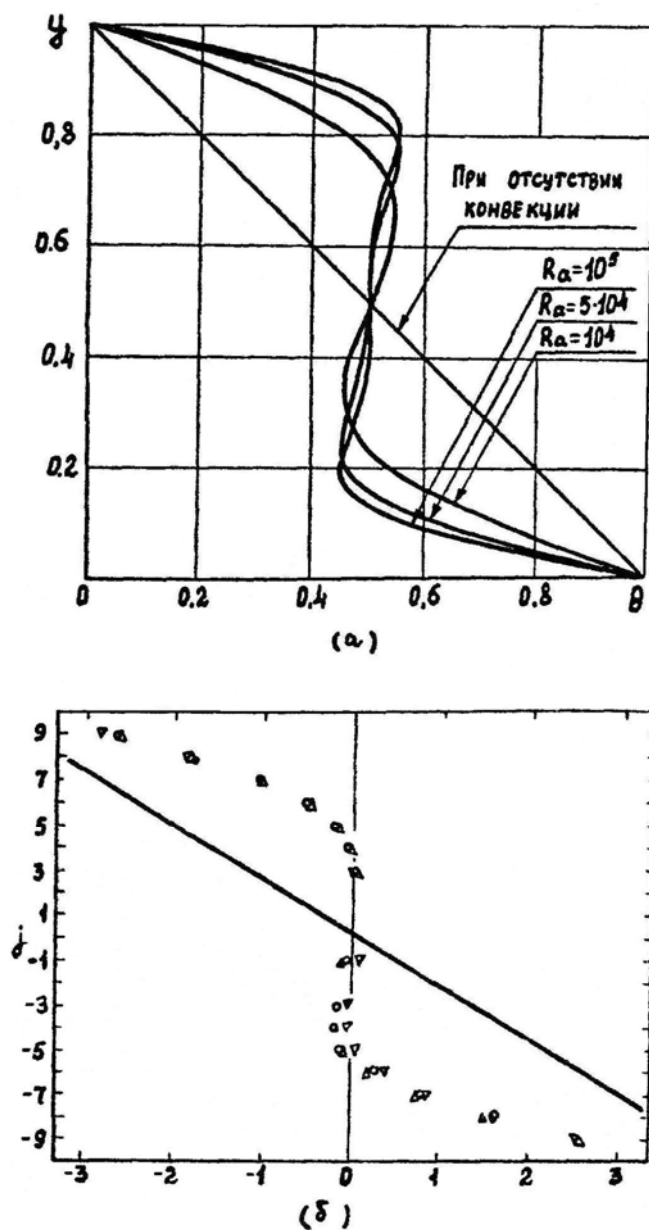
Фиг. 33. Линии тока (а) и изотермы поля температур (б) в полупериоде конвективной ячейки ($Ra = 10^4$, $Pr = 1$, $\chi = 1.4$, $C_F = 0.05$, $T_2 / T_1 = 1.1$)



Фиг. 34. Сопоставление результатов расчета теплопередачи с опытными данными [63] вблизи порога устойчивости

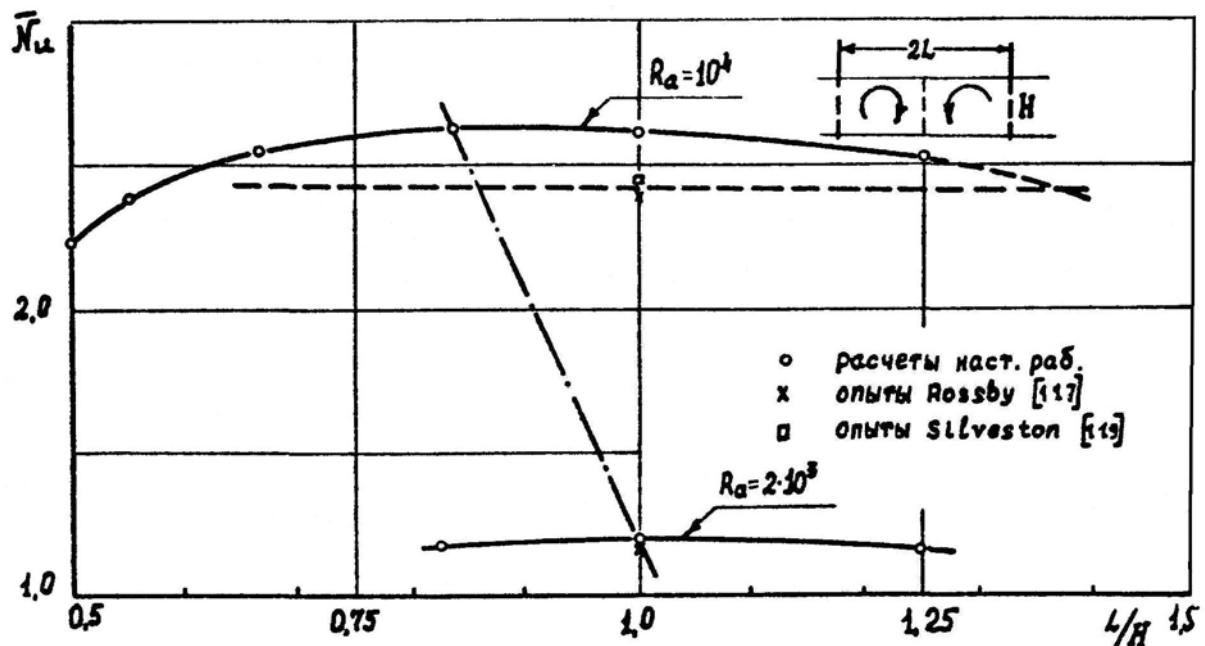


Фиг. 35. Зависимость $\bar{Nu}(Ra)$ по результатам расчетов и измерений за порогом устойчивости



Фиг. 36. Обратный градиент температуры поперек горизонтального слоя по результатам расчетов (а) и результат измерений в опытах Гилле [124] (б)

При согласовании результатов измерений и расчетов весьма важен вопрос о преимущественном выборе длины волны или горизонтального масштаба конвекции $\frac{L}{H}$. Вообще говоря, нет особых оснований полагать, что горизонтальный масштаб движений не будет изменяться при удалении от порога устойчивости. Применяемый здесь подход не может дать прямого ответа на этот вопрос, однако, позволяет определить количественное влияние длины волны. Зависимость среднего числа Нуссельта от длины волны при различных числах Релея дана на фиг. 37. Пунктирными линиями отмечены значения числа \bar{Nu} , соответствующие опытным данным, приведенным на фиг.35. Отсюда видно, что вблизи порога устойчивости влияние на теплопередачу длины волны незначительно. Можно видеть, что максимальное значение числа \bar{Nu} находится вблизи значения $\frac{L}{H} \sim 1$, соответствующего длинам волн, при которых происходит потеря устойчивости равновесия. При увеличении числа Релея максимальное значение числа Нуссельта смещается в сторону более коротких длин волн. Этот важный результат был получен также в работе [127]. Ряд авторов [127, 128] отмечает, что в опытах длина волны за порогом устойчивости увеличивается, т.е. реализуются ячейки с отношением $\frac{L}{H} > 1$ (причем величина $\frac{L}{H}$ монотонно растет с увеличением числа Релея). Такой же результат был получен нами и в расчетах длинного горизонтального слоя (фиг. 27). Этот факт получил объяснение в работах [129, 130], где анализировалась гидродинамическая устойчивость стационарных движений за порогом устойчивости и было доказано, что движения, которым соответствует значение \bar{Nu}_{\max} , неустойчивы.



Фиг. 37. Влияние на среднее число Нуссельта горизонтальной длины волны

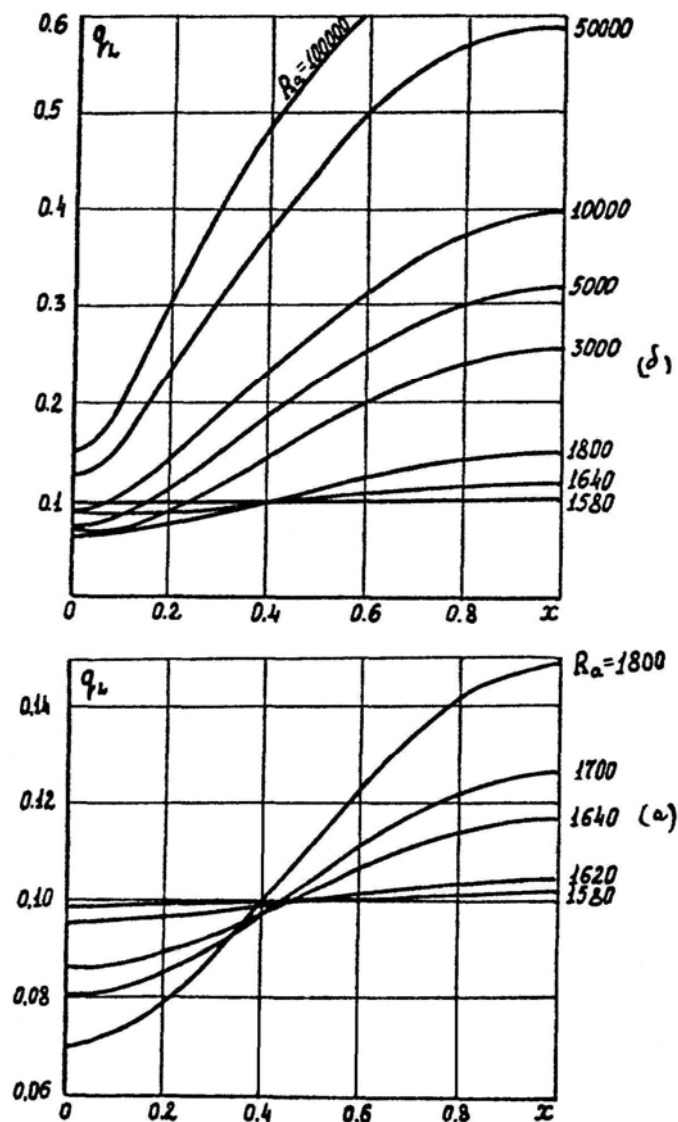
Из фиг. 37 видно, что в области больших длин волн значения Nu ниже, чем при $\frac{L}{H} \sim 1$. Это позволяет уточнить приведенное на фиг.35 согласование результатов расчета с опытными данными: с поправкой на длину волны значения \bar{Nu} хорошо согласуются с измеренными вплоть до значений $Ra \sim 5 \cdot 10^4$. При бóльших числах Релея, несмотря на имеющиеся расхождения с опытными данными, точность расчета числа Нуссельта для практических целей удовлетворительна.

Численные расчеты дают возможность установить новые эффекты локального распределения потока тепла за порогом устойчивости (фиг. 38), которые не были обнаружены ранее в упоминавшихся опытах и в работах других авторов. Вблизи порога устойчивости при числах $Ra - Ra_{кр}$ тепловой поток от нагретой стенки на ее начальном участке вдоль течения выше, а вниз по течению ниже, чем в том случае, когда конвекция полностью отсутствует. Таким образом, при слабой конвекции имеет место "горизонтальное расслоение" по температуре, приводящее к локальному перегреву стенки. Превышение потока тепла от нагретой стенки по всей ее поверхности над

потоком тепла в том случае, когда конвекция отсутствует, имеет место вдали от порога устойчивости, при числе Релея около $5 \cdot 10^4$, т.е. вблизи области перехода к турбулентному режиму.

Таким образом, "неполнота смешения" является общим свойством слабых конвективных движений жидкостей и газов в замкнутых областях, подогреваемых как снизу (§ 1), так и сбоку.

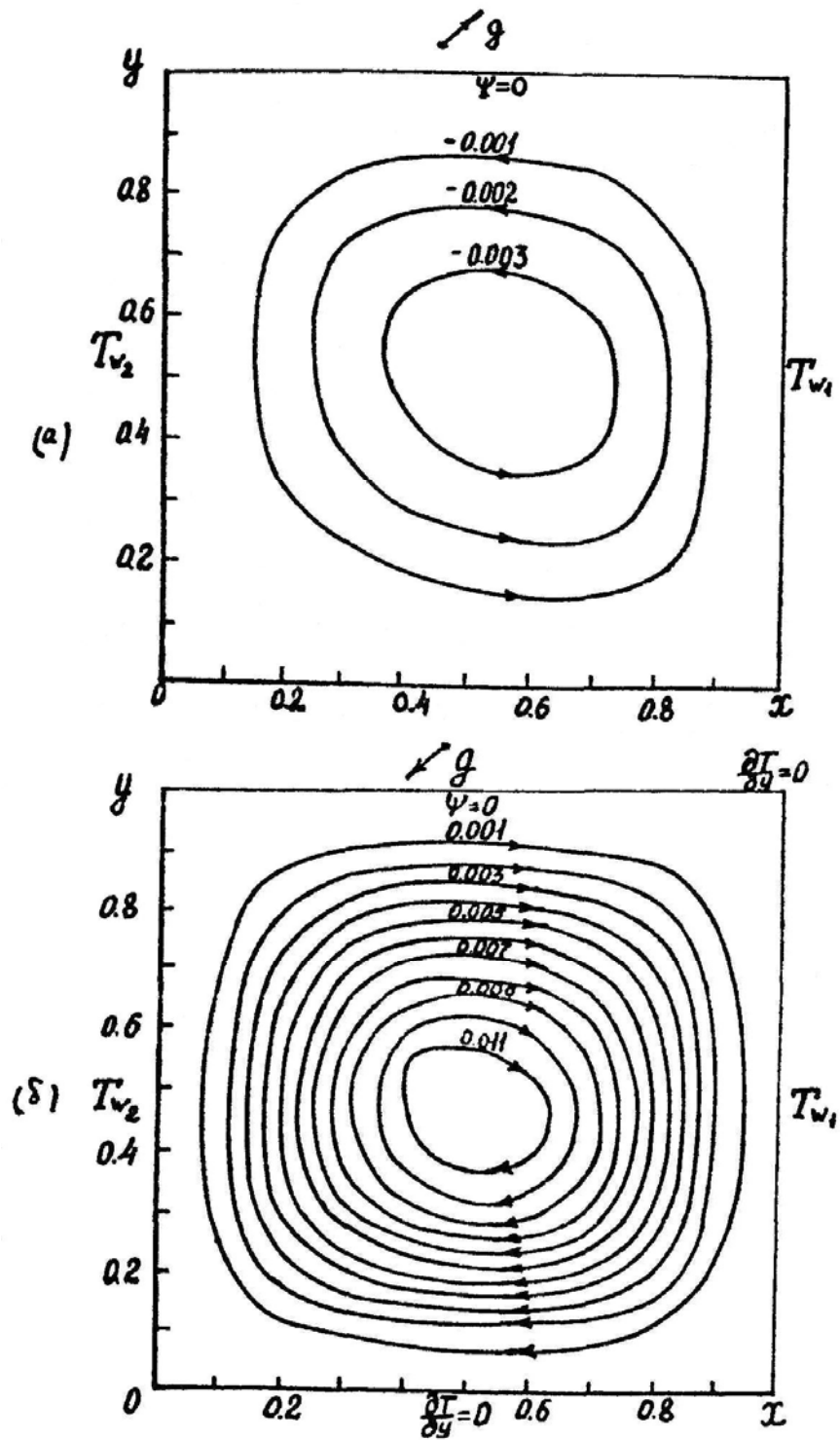
Сложная структура конвекции за порогом устойчивости привлекает внимание исследователей, и в последние годы публикации в этом направлении продолжаются [131-133].



Фиг. 38. Распределение местного потока тепла на нагретой стенке вблизи порога устойчивости (а) и за порогом устойчивости (б)

4. Особенности течения и теплообмена при других углах наклона

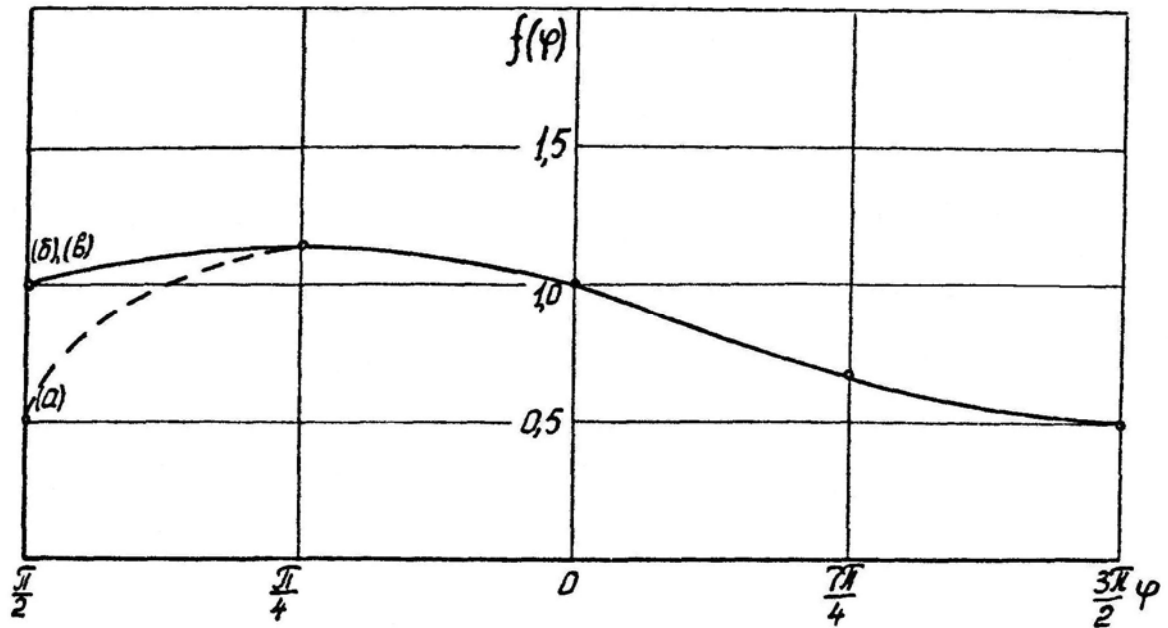
Ранее рассматривались два типичных направления $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, характерный случай $\varphi = \pi$ (фиг 1А) не требует специального рассмотрения: так как равновесие абсолютно устойчиво, то на стационарном режиме движение отсутствует, и перенос тепла осуществляется путем теплопроводности. Поэтому в том случае, когда внешняя сила ориентирована в направлении $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, интенсивность конвекции будет ниже, чем при ориентации силы в противоположном направлении $\frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Направлениям $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ будут соответствовать симметричные поля течения и температур и одинаковые интегральные характеристики. Картина линий тока при направлении силы $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ ($Gr = 1.25 \cdot 10^4$) приведена на фиг.39а. На фиг.39б дана картина линий тока при противоположном направлении $\varphi = \frac{\pi}{4}$. В последнем случае, когда внешняя сила занимает промежуточное положение между двумя рассмотренными ранее ($\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$), интенсивность конвекции и теплопередача оказываются наибольшими. Это объясняется взаимным влиянием двух основных механизмов конвекции (нарушение равновесия и потеря устойчивости равновесия). Зависимость средней теплопередачи от угла поворота в виде функции $f(\varphi) = \frac{\bar{Nu}(\varphi)}{\bar{Nu}(\varphi = 0)}$ при значениях $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$, $\frac{H}{L} = 1$, $Pr = 0.71$ дана на фиг. 40. Этот результат получен впервые в работе [105]. Наличие максимального значения теплопередачи при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ подтверждено также в расчетах при $\frac{H}{L} = 2$, выполненных в работе [106].



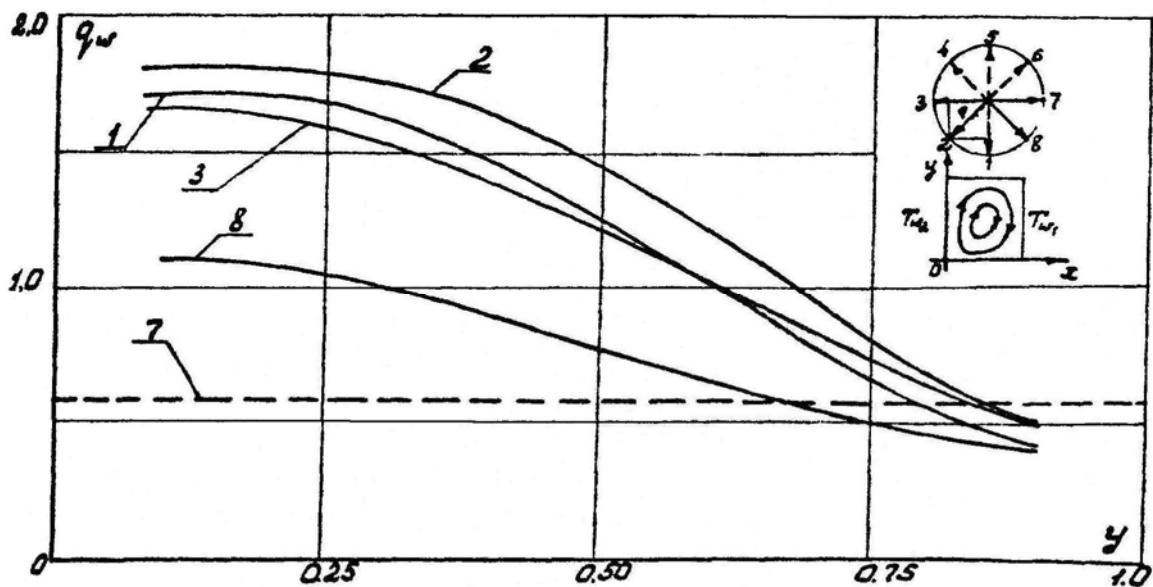
Фиг. 39. Линии тока в ячейке при различной ориентации внешней силы

при $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$, $Pr = 1$

а) $\varphi = \frac{5\pi}{4}$; б) $\varphi = \frac{\pi}{4}$



Фиг. 40. Коэффициент распределения средней теплопередачи по углу поворота внешней силы, $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$



Фиг. 41. Местные потоки тепла на нагретой стенке при различных направлениях внешней силы, $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$

Распределение местных потоков тепла (фиг.41) обнаруживает зону локального перегрева, протяженность которой увеличивается при ослаблении конвекции, т.е. при $\varphi \rightarrow \pi$.

§ 3. Теплопередача через плоские слои проницаемых пористых материалов.

Пористый наполнитель применяется для подавления конвективной составляющей в слоях тепловой изоляции компрессионных печей, в слоях теплозащиты космических аппаратов, совершающих посадку на поверхность Венеры, где температура достигает 800 °К, а давление - 100 атм. При высоких давлениях обычно используется пористая изоляция с сообщающимися порами. В крупнодисперсной пористой изоляции (или при секционировании слоя), как показано на фиг. 1Б (б), существует конвективное движение внутри пор и глобальное во всем слое в связи с перетоками между порами. При уменьшении размеров пор локальное движение подавляется, и основную роль играют крупномасштабные движения (фиг.1Б (в)), которые похожи на движения в однородной среде (фиг. 1Б (а)). В таблице 5 даны оценки чисел Релея в слое проницаемого пористого материала, используемого для теплоизоляции аппарата "Венера" в этих условиях. Коэффициент проницаемости $K = 3 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$, $\lambda^* = 0.1$ ккал/м час град., толщина $L = 0.03$ м, температуры на поверхностях $T_2 = 623$ °К, $T_1 = 398$ °К, наполнитель CO_2 , $\lambda_0 = 0.025$ ккал/м час град.

.....

Таблица 5

$P_{ата}$	1	10	50	100	150	200
Ra_*	$0.75 \cdot 10^{-2}$	0.75	18.7	7.5	170	300

Число Релея для пористого слоя увеличивается пропорционально квадрату давления $\left(Ra_* = \frac{g\beta L k C_p \Delta T}{\mu \lambda^* R^2 T^2} p^2 \right)$, поэтому при давлении $p \sim 100$ атм. вклад составляющей должен быть ощутим. Значительное ухудшение теплоизолирующих свойств проницаемых пористых материалов этого типа при высоких давлениях было отмечено в работе [139].

В сравнении с естественной конвекцией в однородных газовых или

жидкостных средах, исследования естественной конвекции в пористых средах начаты сравнительно недавно и менее детализированы. В первых работах [38, 39] изучались лишь условия возникновения конвекции в пористой среде (т.е. критические числа Ra_*). В последующие годы в этом направлении выполнен ряд работ [134-136]. Ряд аналитических решений для сферической пористой прослойки получен в работе [137]. Численные расчеты, исходя из нелинейных уравнений конвекции, начатые в работах [75, 76], относятся в основном к горизонтальному слою. Для вертикальных слоев в численных расчетах [138] использовались уравнения вязкой жидкости с тензором вязкости Навье-Стокса при наличии в уравнении количества движения составляющей, описывающей закон сопротивления Дарси. Сведения о распределении местных потоков тепла в пористых изоляциях, а также систематические данные о влиянии угла наклона силы в указанных работах отсутствуют. В известных справочниках и монографиях [1, 2, 143-145] отсутствуют данные даже о средней теплопередаче через пористые слои. Ниже изложены результаты исследования, выполненного в работах [140-141]. Используется модель конвекции в мелкодисперсной пористой среде (гл. I, §1, п.3) и численный метод, развитый в гл. I, §3, п.3.

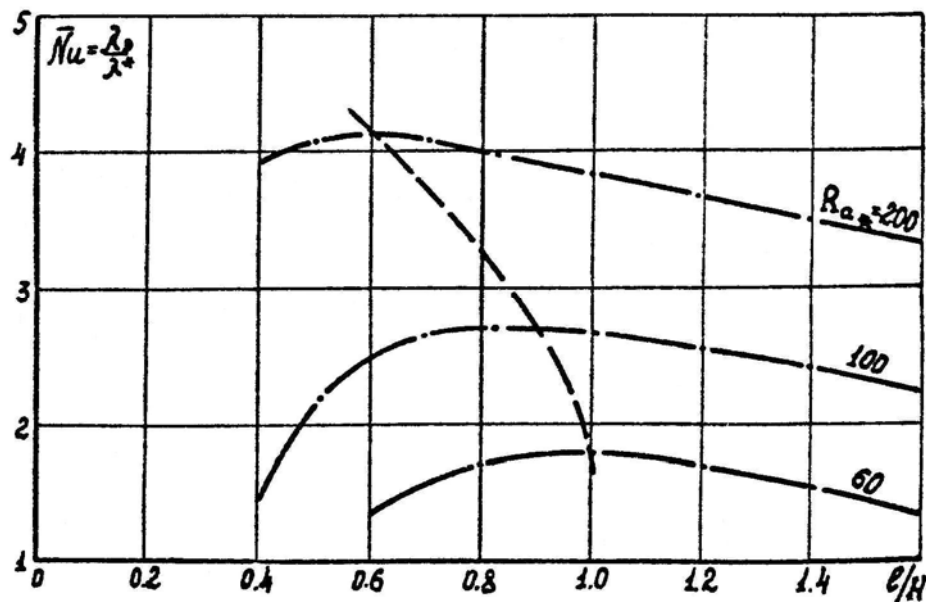
1. Горизонтальные слои. Влияние на теплопередачу числа Ra_* и длины волны. Локальные эффекты. Сопоставление с опытными данными.

Расчеты теплопередачи через горизонтальный слой выполнены в предположении периодической структуры конвекции. Методика получения численных решений за порогом устойчивости сходна с развитой выше в §2 данной главы. Нейтральная кривая для конвекции в пористом слое согласно [136] приведена на фиг. 32. Линиями 1,3 даны нейтральные кривые для однородных слоев соответственно с твердыми и свободными границами. Модель конвекции в пористом слое является в некотором смысле промежуточной между двумя последними: по граничным условиям она близка к 3, однако, ее нейтральная кривая ближе к 1. Критическому числу Релея

$$(Ra_*)_{кр} = 4\pi^2 \cong 40$$

соответствует в двумерном случае волновое число $a = \pi$ или длина волны за порогом устойчивости $\frac{L}{H} = 1$. Однако, вдали от порога устойчивости, длина волны не определена, поэтому для выявления предельных значений числа Нуссельта был охвачен диапазон длин волн $\frac{l}{H}$ при выполнении условия $\frac{l}{H} = \frac{L}{H}$ (т.е. одна конвективная ячейка в расчетной области).

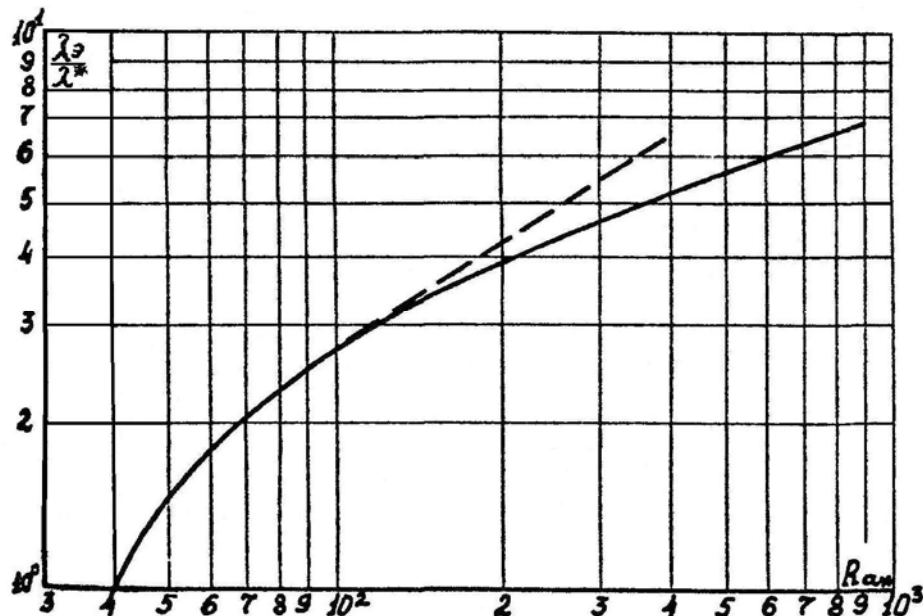
Зависимости среднего числа Нуссельта от длины волны при различных числах Релея Ra_* за порогом устойчивости равновесия даны на фиг. 42. Отсюда видно, что для каждого из значений Ra_* число Нуссельта достигает максимума при определенной длине волны. При удалении от порога устойчивости максимальное значение числа Нуссельта (как и для однородной среды, фиг. 37) смещено в сторону более коротких длин волн.



Фиг. 42. Средняя теплопередача через горизонтальный слой пористого материала при различных длинах волн и числах Релея

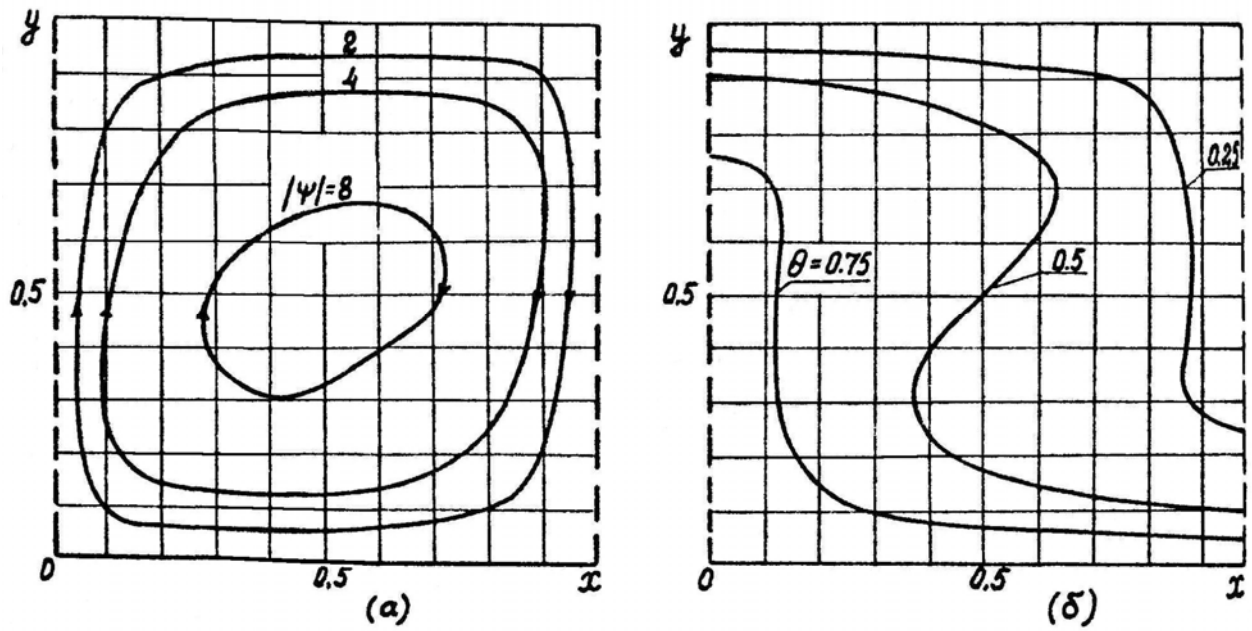
Особенностью конвекции в пористом слое является более сильная зависимость числа Нуссельта от длины волны и более резкое смещение по числу Релея

значения длины волны, соответствующей максимальной теплопередаче. Эта особенность может приводить к большему разбросу данных в опытах с различающимся спектром начальных возмущений. На фиг.43 приведена зависимость числа Нуссельта от числа Рейля для двух характерных длин волн; при $Ra_* \rightarrow 40$ эта зависимость дает значение $Nu \rightarrow 1$ в соответствии с линейной теорией. При $Ra_* \cong 350$ значение \bar{Nu} составляет 5-6, что означает значительное ухудшение теплоизолирующих свойств пористого слоя. Характерные для режима развитой конвекции картины линий тока и изотермы поля температур ($Ra_* = 100$, $\frac{l}{H} = 1$) приведены на фиг. 44. Особенностью конвекции в проницаемых пористых материалах является неравномерное распределение местных потоков тепла (фиг.45). При $\frac{Ra_*}{Ra_{кр}} \cong 6$ отношение $\frac{q_{max}}{q}$ составляет около 1.6, в однородных средах (фиг. 38) при том же значении $\frac{Ra}{Ra_{кр}}$ не более 1.35.

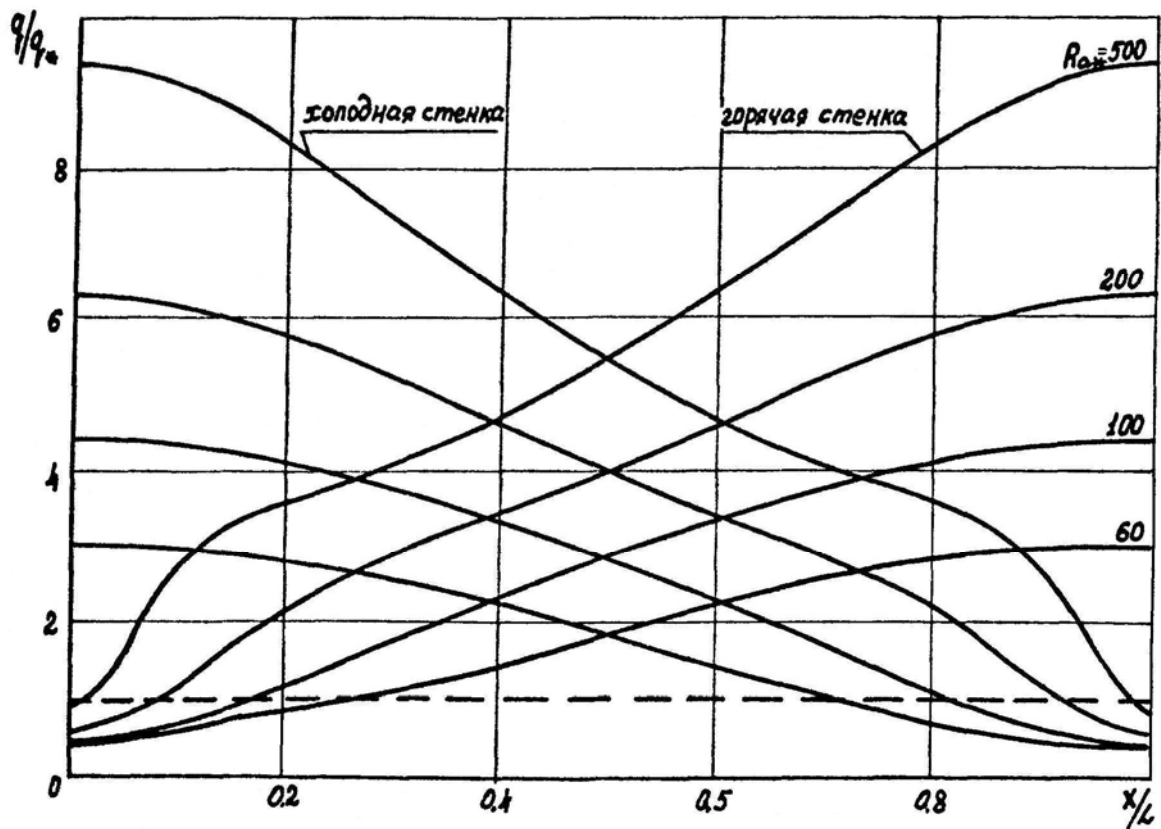


Фиг. 43. Средняя теплопередача через горизонтальный слой пористого материала в зависимости от числа Ra_*

— $L/H = 1$, --- $(L/H)_m$



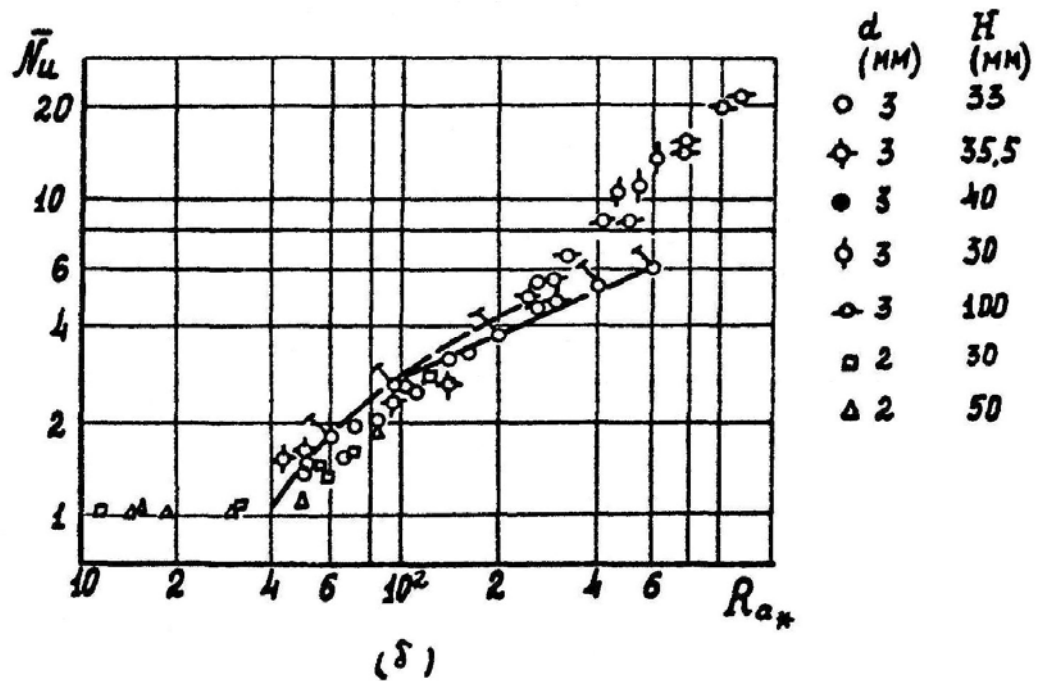
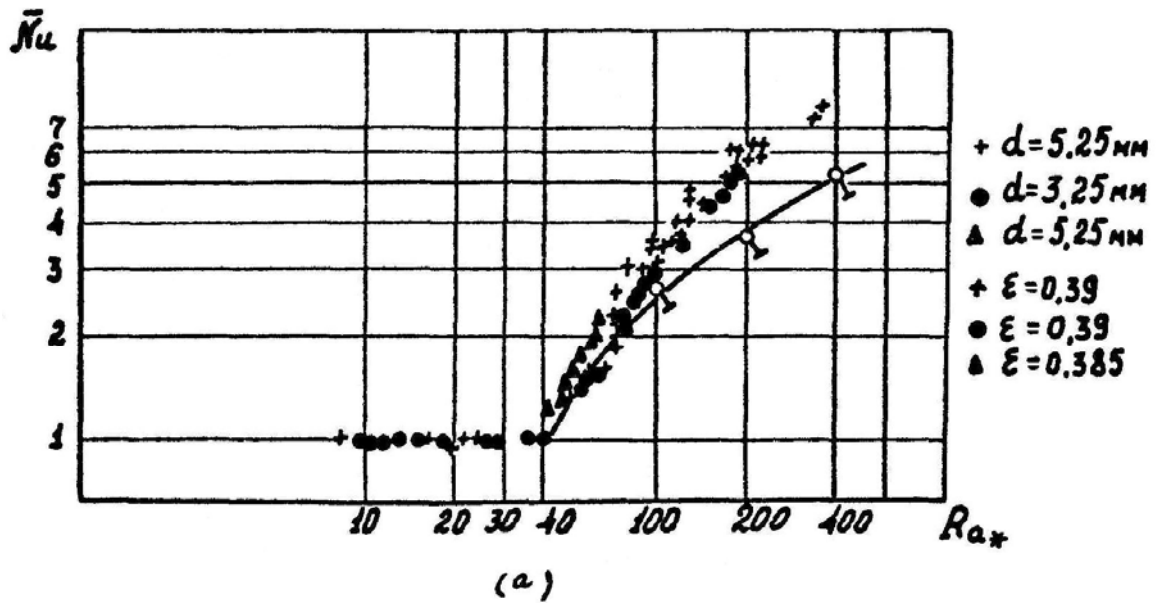
Фиг. 44. Линии тока (а) и изотермы поля температур (б) для одного полупериода в горизонтальном пористом слое $Ra_* = 200$



Фиг.45. Местные потоки тепла в горизонтальном пористом слое (один полупериод) при различных числах Релея

Рассмотрим результаты расчетов других авторов и опытные данные, относящиеся к горизонтальному пористому слою. При расчетах теплопередачи в работе [75] не локализовалась отдельная ячейка; рассматривались длинные слои при $\frac{L}{H} \gg 1$. Как следует из результатов (§2, п.1 данной главы) при таком подходе необходимы сведения о длинах волн элементарных ячеек, которые в работе [75] не приводятся. В диапазоне $Ra_* \leq 100$, где влияние величины $\frac{l}{H}$ незначительно, приведенные в работе [75] результаты расчетов на подробных сетках 41x41 удовлетворительно согласуются с нашими результатами. В работе [76], как и в данной работе, предпринято параметрическое исследование зависимости числа Нуссельта от длины волны и также получен результат о смещении максимума теплопередачи в сторону коротких длин волн. Однако, численные значения \bar{Nu} ниже значений, полученных здесь (при $Ra_* = 200$ отличие составляет около 10%), что, по-видимому объясняется влиянием шага сетки (в работе [76] использовались лишь сетки 21x21). Данных о локальном распределении потоков тепла в работах [75,76] не приводится. На фиг. 46а дано сопоставление зависимости среднего числа Нуссельта от числа Релея с опытными данными Мацуока [136], полученными для пористого слоя, состоящего из сферических частиц (размеры частиц и глубины слоя даны справа на фиг.46а). Результаты расчета взяты для длин волн, соответствующих максимальному значению числа Нуссельта и для длины волны $\frac{L}{H} = 1$. Подтверждается установленное ранее в работах [134-136] значение критического числа Релея $Ra_* \cong 40$. За порогом устойчивости результаты расчета удовлетворительно согласуются с опытными данными вплоть до значений $Ra_* \cong 200 - 300$, однако, при дальнейшем увеличении числа Релея результаты расчета систематически ниже опытных данных; в этой области чисел Ra_* , по-видимому, требуется уточнение принятой модели конвекции. Результаты опытов [135], приведенные на фиг. 46б, превышают результаты

расчетов, начиная от значений числа Релея $Ra_* \sim 100$.



Фиг. 46. Сопоставление результатов расчета с опытными данными по средней теплопередаче через горизонтальный пористый слой

а) ϑ - данные расчета при $L/H = 1$, +, ●, ▲ - опытные данные [136]

б) ϑ - данные расчета при $L/H = 1$, --- $(L/H)_m$

○, ◇, ●, ⊕ - опытные данные [135]

2. Вертикальные и наклонные под углом φ слои пористого материала. Влияние на теплопередачу числа Ra_* и удлинения. Неравномерность местных потоков тепла. Сопоставление с опытными данными. Влияние угла наклона.

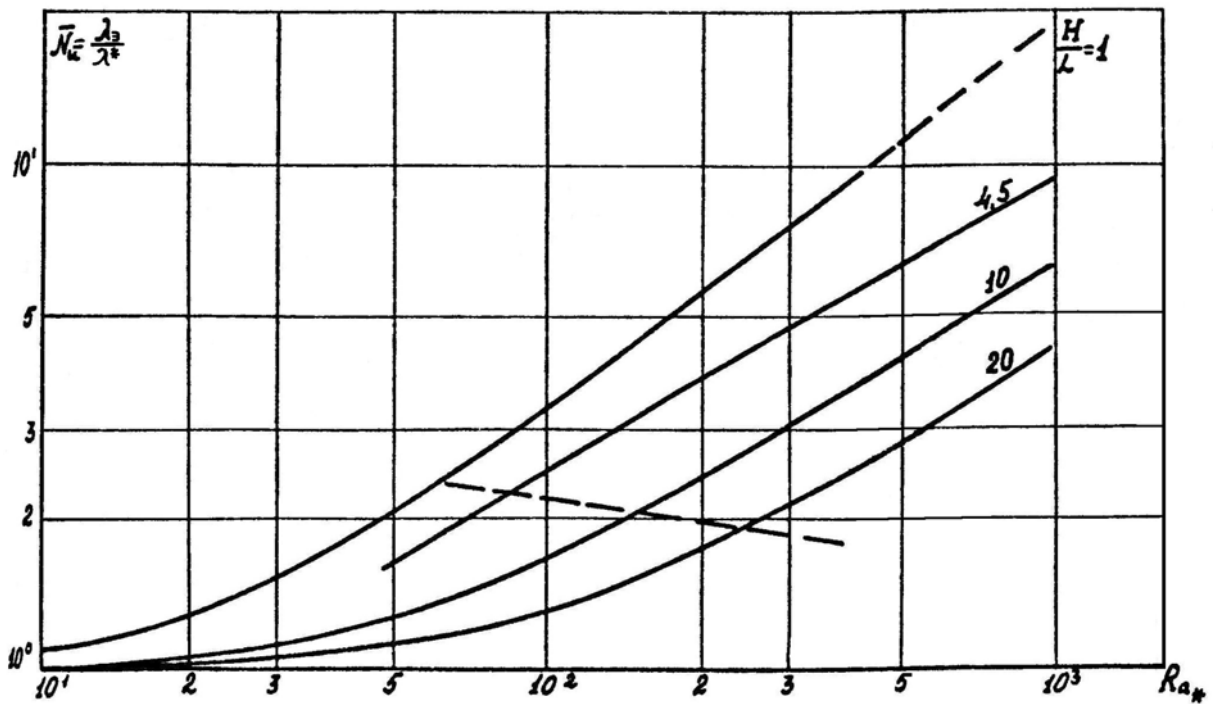
Зависимости среднего числа Нуссельта от числа Релея при различных удлинениях вертикального пористого слоя приведены на фиг.47^{x)}. Общим свойством этих зависимостей, как и в случае бокового подогрева однородного слоя, является наличие трех характерных режимов по числу Ra_* : режима теплопроводности при малых Ra_* , промежуточного режима и режима пограничного слоя. В последнем режиме в конвективном ядре устанавливается постоянный вертикальный градиент температуры, имеющий такое же значение, как и для однородной среды. Зависимость числа Нуссельта от числа Релея в этом режиме – степенная

$$\bar{Nu} = C(Ra_*)^n, \quad (2.16)$$

где величины C и n при данном значении $\frac{H}{L}$ не зависят от числа Ra_* . Граница этого режима (отмеченная на фиг.47 пунктирной линией), как и в случае однородного слоя, при увеличении $\frac{H}{L}$ смещена в сторону бóльших чисел Ra_* .

В работах [138, 141] предложены конкретные степенные зависимости, имеющие вид (2.16); значение показателя степени согласно [141] равно 0.5; в работе [138] оно равно 0.7. Как следует из результатов, представленных на фиг.47, значение n в действительности существенно зависит от отношения сторон и в рассмотренном диапазоне $1 \leq \frac{H}{L} \leq 20$ изменяется от 0,5 до 0.875.

^{x)} При $H/L=1$ расчеты выполнены на сетке 21x21 ($Ra_* < 100$) и 41x41 ($Ra_* > 100$); при $H/L=10, 20$ использовались соответственно сетки 51x21 и 101x21

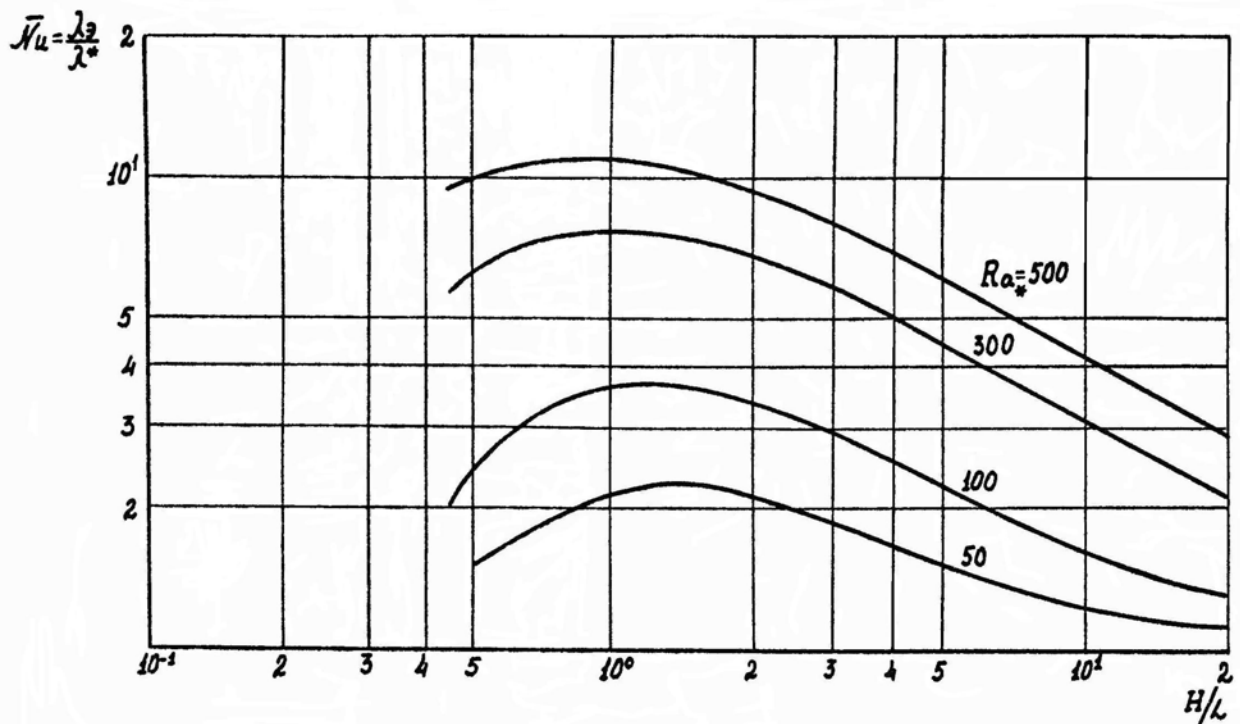


Фиг. 47. Средняя теплопередача в вертикальном слое пористого материала, подогреваемом сбоку

$$H/L = 1 \quad 41 \times 41$$

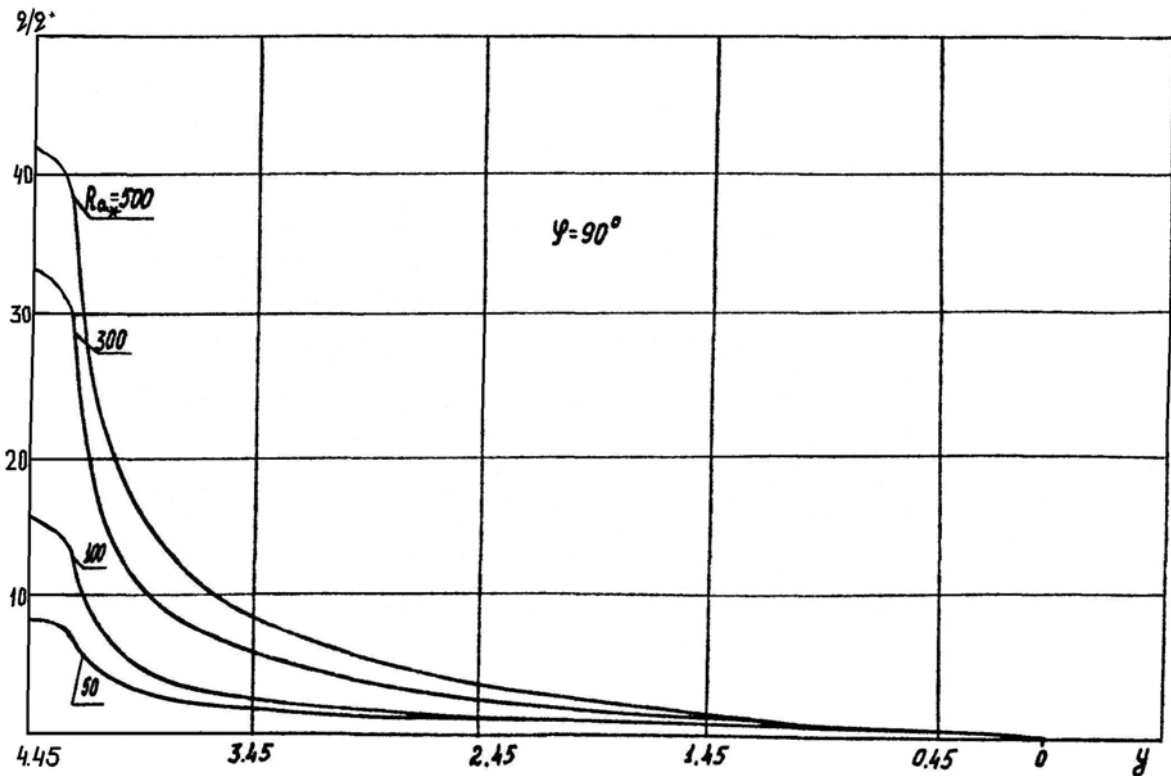
$$\text{сетка: } H/L = 10 \quad 51 \times 21$$

$$H/L = 20 \quad 101 \times 21$$



Фиг. 48. Зависимость средней теплопередачи через вертикальный слой пористого материала от удлинения слоя H/L

Рассмотрим влияние на теплопередачу удлинения слоя. Представленные на фиг.48 зависимости $Nu\left(\frac{H}{L}\right)$ при фиксированных значениях чисел Ra^* обнаруживают наличие максимального значения числа Нуссельта при величине $\left(\frac{H}{L}\right) \approx 1.2 - 1.4$. Физический механизм максимального переноса тепла, как и в случае однородной среды (фиг.12а), связан с тем, что конвекция подавляется при $\frac{H}{L} \rightarrow 0$ за счет влияния верхнего и нижнего оснований слоя и ослабляется в связи со слиянием пограничных слоев и переходом в промежуточный режим (или режим теплопроводности) при $\frac{H}{L} \rightarrow \infty$. Отличие от однородных слоев жидкости или газа состоит в количественном влиянии удлинения: в диапазоне $1.5 \leq \frac{H}{L} \leq 20$ средняя теплопередача в однородных слоях уменьшается примерно на 30-40% (фиг.12а), в то время как для пористых слоев, например, при числе $Ra^* = 300$ число \bar{Nu} в том же диапазоне $\frac{H}{L}$ уменьшается примерно в 3.5 раза. Физический механизм столь большого уменьшения средней теплопередачи связан с дополнительным сопротивлением, которое оказывает пористый материал по сравнению с однородной средой. Этот результат имеет значение при выборе оптимальных размеров теплоизолирующих секций из пористого материала. При этом следует учитывать локальные эффекты, которые в вертикальных слоях пористого материала оказываются значительными. На фиг.49 дано распределение местного потока тепла вдоль стенки с низкой температурой при различных числах Ra^* для пористого слоя с отношением сторон $\frac{H}{L} = 4.45$ (картина линий тока в этом слое при числе $Ra^* = 650$ дана на фиг. 50). Из фиг. 49 видно, что распределение местного



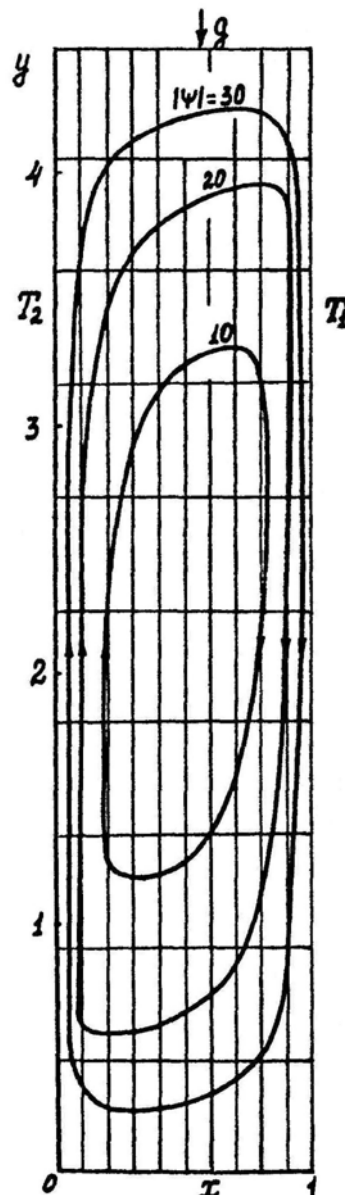
Фиг. 49. Распределение местного потока тепла вдоль стенки с низкой температурой $H/L = 4.45$

потока тепла весьма неравномерно: в верхней части стенки с низкой температурой (и соответственно - в нижней части стенки с высокой температурой) имеется значительная концентрация тепловых потоков, причем этот эффект выражен здесь в значительно большей мере, чем для однородных сред. На фиг.51 приведена количественная характеристика степени

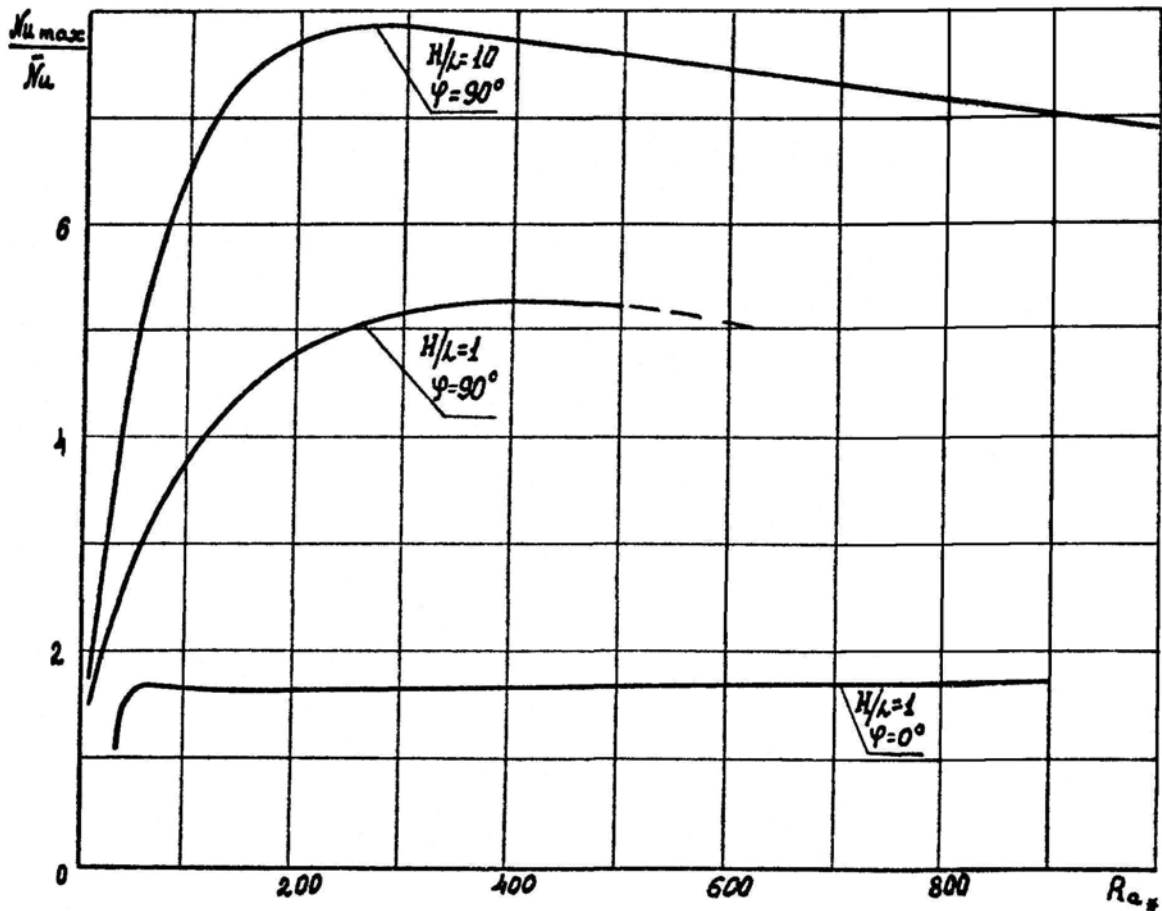
неравномерности потока тепла $\frac{Nu_{\max}}{\bar{Nu}}$ или $\frac{q_{\max}}{\bar{q}}$ в зависимости от числа Релея

для значений $L/H = 1$ и 10 , откуда видно, что отношение максимального потока тепла к среднему может достигать значений $5-8$. Таким образом, сведения о средней теплопередаче (или используемой в инженерных расчетах эквивалентной теплопроводности) для расчета нагрева конструкций недостаточны. Такая большая неравномерность в распределении местных потоков тепла в вертикальных слоях обнаружена впервые в работах [139,140]. Ее можно объяснить двумя причинами. Первая - это неполнота смешения, присущая ослабленным конвективным движениям и проявляющаяся в том, что

конвекция более эффективна в расслоении по температуре, чем в перемешивании жидкости. Это свойство слабой конвекции однородной среды в замкнутых областях уже обсуждалось в § 1, п.4 данной главы. Вторая причина связана со специфическими свойствами пористой среды (описываемой в данном случае законом сопротивления Дарси); пористая среда препятствует перемешиванию и усиливает эффект температурного расслоения по сравнению с конвекцией в однородной среде. В горизонтальном слое за порогом устойчивости неравномерность распределения потоков тепла на стенках значительно ниже; как видно из фиг.51, отношение $\frac{Nu_{max}}{\bar{N}}$ не превосходит двух.



Фиг. 50. Линии тока в вертикальном пористом слое, $H/L = 4.45$, $Ra_* = 200$

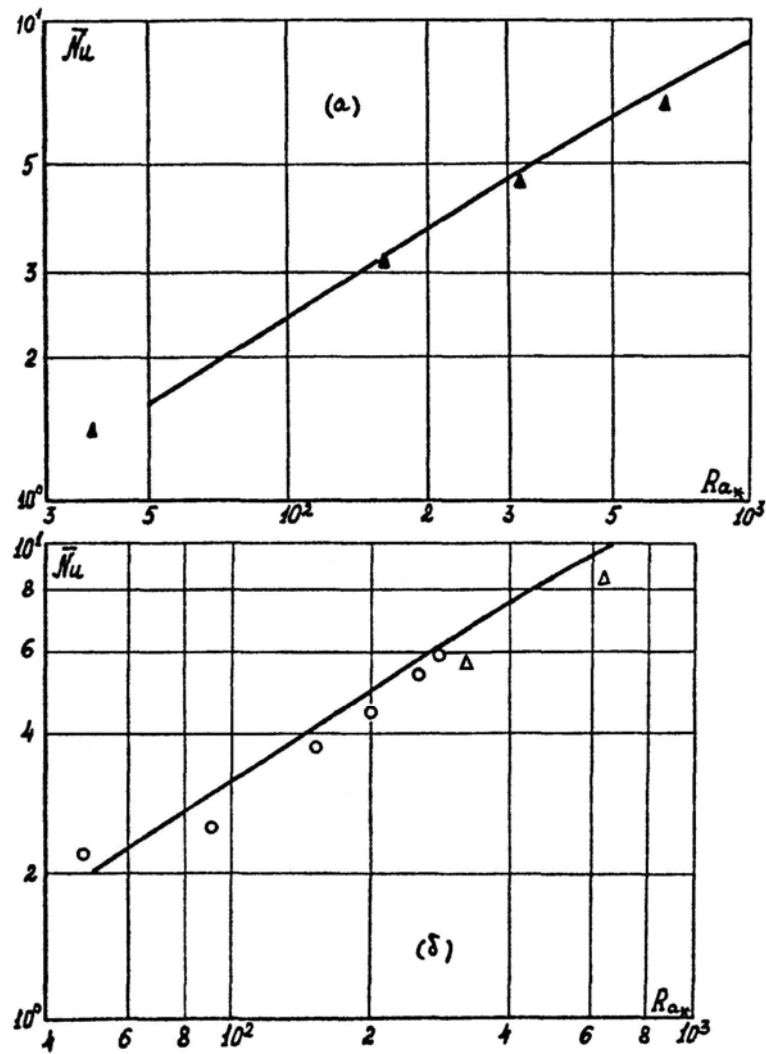


Фиг. 51. Степень неравномерности местного потока тепла в слоях пористого материала при различных числах Релея

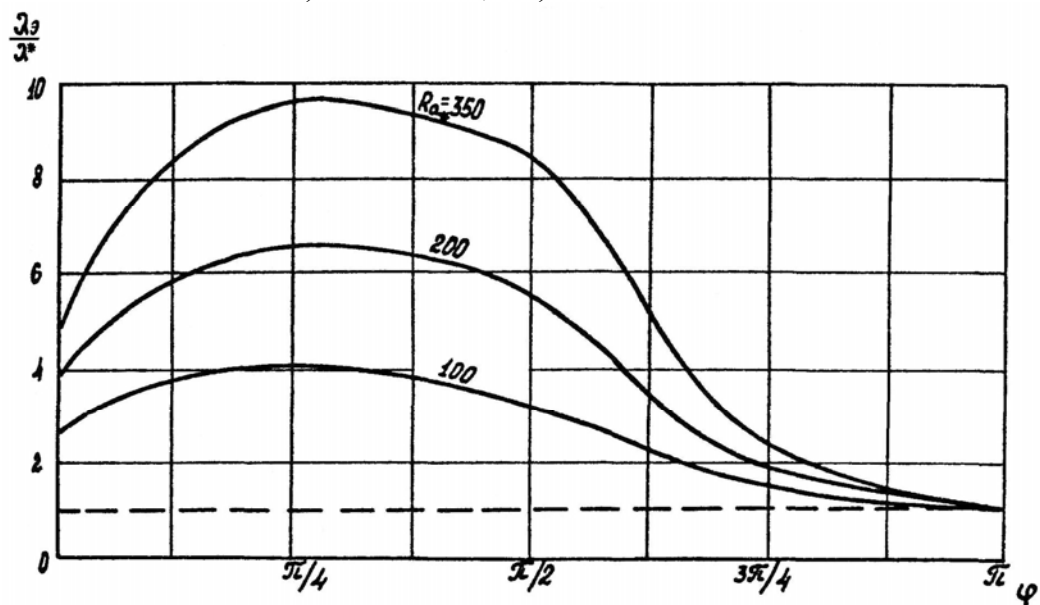
В работе [142] приведены средние коэффициенты теплопередачи через вертикальные слои пронизаемого пористого материала (типа стекловолкна с коэффициентом пронизаемости $k \sim 10^{-10} \text{ м}^2$ при значениях $\frac{H}{L} = 2.25$ и 4.45 . Эти данные, как видно из фиг. 52, хорошо согласуются с результатами расчетов вплоть до чисел $Ra_* \sim 600$. Отметим, что условие применимости линейного закона Дарси, приведенное в главе I $\left(\frac{uL}{v} Da \leq 1\right)$, для этих условий заведомо выполнено. Оно выполняется также и для условий опытов с горизонтальными слоями (фиг. 46а,б). Поэтому отмечавшееся отклонение численных значений от опытных данных для горизонтальных слоев связано со спецификой тепловой неустойчивости в пористых материалах.

Рассмотрим особенности теплопередачи в пористых материалах при различных углах φ (фиг. 53). Средняя теплопередача для всех рассмотренных чисел Релея имеет максимальное значение при промежуточном угле $\varphi = \frac{\pi}{4}$; этот результат, который уже упоминался в случае однородных слоев, объясняется взаимным влиянием двух основных механизмов естественной конвекции (нарушение равновесия при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и тепловая неустойчивость при $\varphi = 0$). Особенностью теплопередачи в пористой среде является значительно более сильная зависимость от угла φ . Например, при $Ra_* = 350$ максимальная теплопередача (при $\varphi \sim \frac{\pi}{4}$) примерно вдвое выше, чем теплопередача при $\varphi = 0$. Этот эффект также имеет большое значение для оценки эффективности пористой теплоизоляции.

Таким образом, особенность естественной конвекции в мелкодисперсных пористых материалах при действии закона сопротивления Дарси (по сравнению с конвекцией в однородных средах, подчиняющихся закону трения Ньютона) состоит в более сильной зависимости теплопередачи от удлинения и угла наклона слоя, а также в значительной неравномерности распределения локальных потоков тепла, связанной с неполнотой смешения, присущей естественной конвекции в пористой среде.



Фиг. 52. Сопоставление результатов расчета средней теплопередачи в вертикальном слое пористого материала с опытными данными [142]
а) $H/L=4.5$; б) $H/L=2.25$

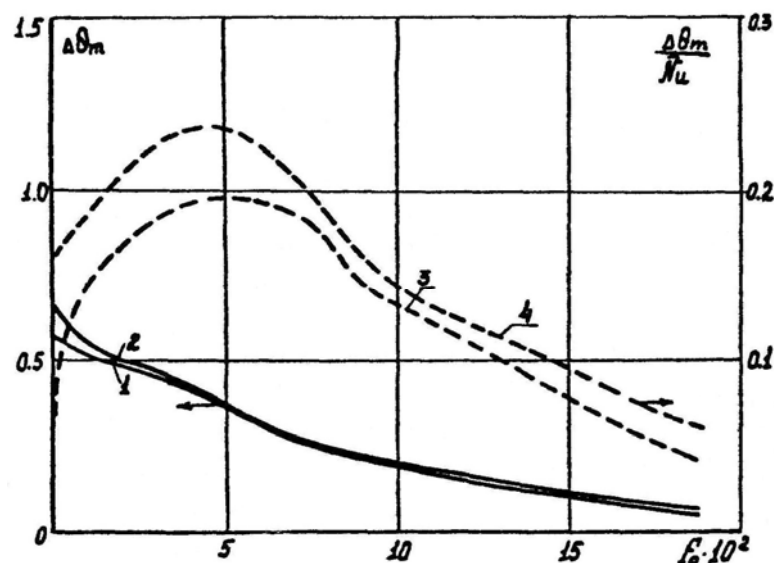


Фиг. 53. Влияние на среднюю теплопередачу в слое пористого материала угла наклона φ , $L/H = 1$

§ 4. Некоторые общие свойства ламинарной естественной конвекции в замкнутых областях.

Одно из важных общих свойств ламинарной естественной конвекции в замкнутой области состоит в неполноте смешения и связанных с ней эффектах температурного расслоения, неравномерного распределения местных потоков тепла и локального перегрева стенки. Неполнота смешения проявляется и во внутренней структуре конвекции (образование обратных градиентов температур, вторичных движений). Физическая причина этих эффектов - относительно малая скорость движения, замкнутость области и наличие обратной связи между полем течения и полем температур. Действие этих факторов различно в зависимости от расположения нагреваемых поверхностей относительно направления внешней силы. Наиболее выражены локальные эффекты в вертикальных слоях, подогреваемых сбоку или наклоненных в сторону устойчивого расслоения плотности, когда конвективные токи получают энергию в результате нарушения гидростатического равновесия. Конвекция этого вида представляет в некотором смысле преобразователь горизонтальной неоднородности поля температур в вертикальную. Неравномерность поля температуры по вертикали оказывается наибольшей в определенном диапазоне чисел Релея, который соответствует переходу от промежуточного режима к режиму пограничного слоя. Это наиболее отчетливо проявляется в случае, когда задан поток тепла на стенке (§ 1, п. 4). Значение числа Релея, при котором разности температур по вертикали максимальны ($Ra_L^* = 10^5$), разделяет два характерных режима: а) режим, в котором преобладает температурное расслоение (конвекция мало эффективна в перемешивании и отводе тепла, и ее влияние связано в основном с растеканием тепла вдоль нагреваемых поверхностей) и б) режим, в котором формируются пограничные слои, и перемешивание начинает преобладать над температурным расслоением. Выделение этих двух режимов является новым по сравнению с классическим делением режимов ламинарной конвекции (режим

теплопроводности, промежуточный и режим пограничного слоя) и позволяет детализировать свойства конвекции, связанные с температурным расслоением. Эти свойства могут проявляться, например, в условиях ослабленного поля массовых сил. При сравнительно небольших характерных размерах $L \sim 0.3$ м, значение числа Релея при заданном потоке тепла ($q \cong 3 \text{ ккал/м}^2 \text{ час}$) и при постоянно действующих перегрузках $g/g_0 = 10^{-2} - 10^{-5}$ имеет порядок $Ra^* \sim 10^3 - 10^6$, включая зону максимального температурного расслоения. Если снижение перегрузки g/g_0 происходит внезапно, то в переходном режиме затухания конвекции вертикальные разности температур могут достигать в некоторый момент времени максимального значения. Этот эффект, обнаруженный нами в работе [97], показан на фиг. 54. В данной главе (§ 1, 2) были приведены и другие примеры воздействий, приводящих к ослаблению конвекции и увеличению неравномерности местных потоков тепла. Это удлинение вертикального слоя и поворот внешней силы на угол $\Delta\varphi$ в сторону устойчивого расслоения плотности. Наконец, применение пористого наполнителя, подавляющего конвекцию, также приводит к увеличению роли локальных эффектов, которые могут быть опасными при работе пористой изоляции в условиях высоких температур и давлений.



Фиг. 54. Изменение во времени разностей температур в вертикальном слое после сброса гравитационной нагрузки

$$\Delta\theta_m = T_e - T_m / T_2 - T_1, \quad 1,3 - Ra = 3.55 \cdot 10^4, \quad 2,4 - Ra = 7.1 \cdot 10^5$$

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ II.

1. Разработана методика численного исследования стационарных задач естественной конвекции жидкостей и газов в замкнутых областях с однородным и пористым наполнителем (включая случаи неединственности решений за порогом устойчивости равновесия).

2. Выполнено систематическое исследование переноса тепла через плоские слои с однородным и пористым наполнителем в зависимости от чисел Релея, Прандтля, геометрии угла наклона. Выявлены геометрические размеры и ориентация конвективных контуров, которым соответствует максимальная средняя теплопередача. Показаны возможности существенного уменьшения среднего потока тепла через слои проницаемой пористой изоляции.

3. Показано существенное влияние локальных эффектов при естественной конвекции в замкнутых областях. Найдены условия образования и протяженность зон локального перегрева и степень неравномерности распределения местных потоков тепла. Показано, что максимальная неравномерность в распределении местного потока тепла (или максимальное температурное расслоение) имеют место при переходе от промежуточного режима слабой конвекции к режиму пограничного слоя развитой конвекции (в случае вертикального слоя при заданном потоке тепла при числе Релея $Ra_L^* = 10^5$). Переход к режиму максимального температурного расслоения возможен при различных воздействиях, приводящих к ослаблению конвекции (уменьшение перегрузки, изменение геометрии, изменение ориентации внешних массовых сил, переходный процесс после сброса перегрузки, введение пористого наполнителя и т.д.).

ГЛАВА III. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ТОПЛИВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ С ЧАСТИЧНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ ПРИ ЗАДАННОМ ПОДВОДЕ ТЕПЛА

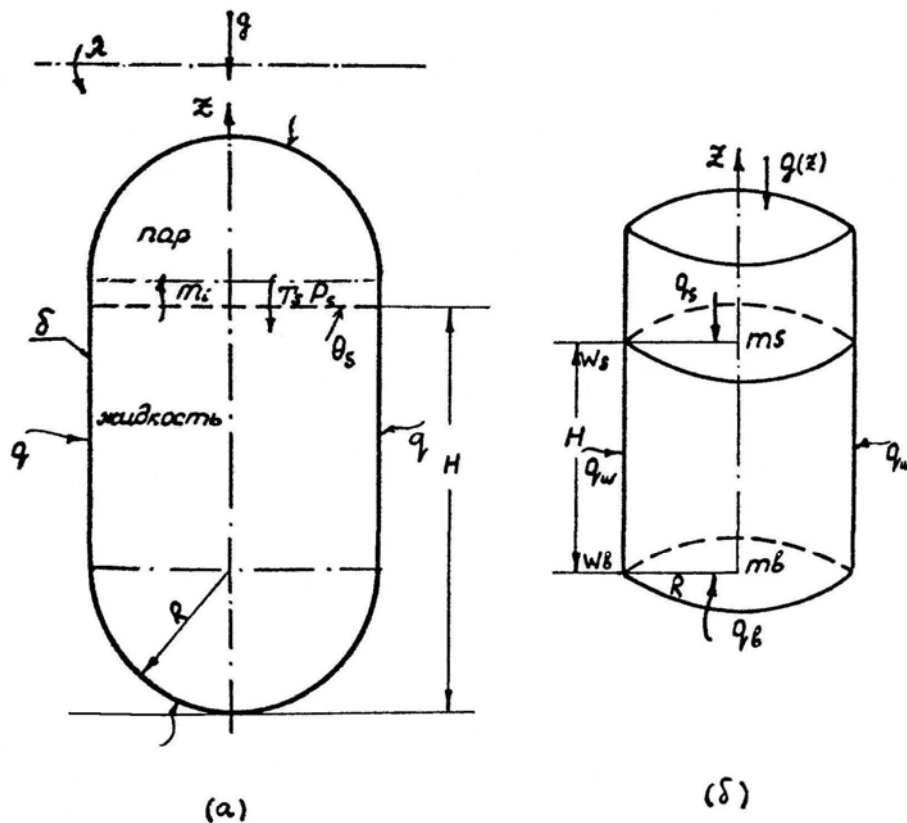
ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной главе изучаются процессы конвективного теплообмена при так называемой пассивной схеме хранения жидкостей в баках в условиях пониженной гравитации. Типичная схема приведена на фиг. 55а. Бак частично заполнен жидкостью и находится в поле слабых гравитационных сил, создаваемых силами аэродинамического торможения на орбите ИСЗ, либо центробежными силами при вращении аппарата вокруг центра масс. Поверхность раздела газ-жидкость в этом случае близка к прямолинейной при больших числах Бонда $\left(B_0 = \frac{\rho g R^2}{\sigma} > 100 \right)$. Благодаря большой теплоемкости массива жидкости при наличии вакуумной теплоизоляции длительность хранения низкокипящей жидкости в сосуде может достигать от нескольких суток до нескольких месяцев, причем в связи с большим тепловым сопротивлением изоляции и относительно малым тепловым сопротивлением жидкости у стенки поток тепла, поступающий в жидкость, смачивающую стенку, можно считать заданным. Аналогичная схема, отличающаяся лишь величиной перегрузки (или числом Релея), величиной и распределением потоков тепла и длительностью, имеет место в ряде других случаев (стоянка на стартовой позиции, активный участок траектории и т.д.).

Основным техническим требованием при длительном хранении жидкостей является поддержание на заданном уровне давления в газовой подушке. В однокомпонентной среде при самонаддуве бака давление находится в равновесии с температурой поверхности жидкости, поэтому определение увеличения этой температуры в процессе прогрева является одной из основных задач. Кроме того, важными характеристиками являются вертикальное

распределение температуры жидкости или температурное расслоение, определяющее так называемые «остатки теплового незабора» в связи с ограничениями по величине температуры при подаче топлива в двигатель и теплоотдача от стенки в жидкость, определяющая рост температуры стенки. Эти характеристики существенно зависят от режима конвективного перемешивания.

Рассматриваемая математическая модель предназначена для описания конвективных процессов, протекающих в жидкости. Расчетная схема дана на фиг.55б. Предполагается, что в жидкости, частично заполняющей сосуд, подводятся равномерно распределенные потоки тепла к боковой (q_w) и свободной (q_s) поверхностям и дну (q_b). Сосуд с жидкостью находится в поле массовой силы, изменяющейся вдоль оси Oz . Предполагается, что поля течения и температуры имеют осевую симметрию; процесс прогрева начинается, исходя из начального поля неподвижной жидкости, имеющей равномерную температуру T^0 . Для описания этого процесса используются уравнения конвекции жидкости в приближении Буссинеска (гл.1 § 1, п.2) и разностная схема для численного решения, приведенная в гл.1 § 3.



Фиг. 55. Общая схема расчета конвективного теплообмена в баке

Искомое безразмерное поле температур жидкости в сосуде в соответствии с принятой моделью определяется следующей системой критериев подобия:

$$\theta = f\left(r, z, F_0, Ra_R^*, H/R, Pr, \gamma_s, \gamma_b, \frac{b}{H}\right) \quad (3.1)$$

где $\theta = \frac{T - T^0}{qR} k$ - безразмерная температура;

$$F_0 = \frac{at}{R^2} - \text{число Фурье};$$

Ra_R^* - число Релея, отнесенное к боковому потоку тепла;

$$\gamma_s = \frac{q_s}{q_w}, \gamma_b = \frac{q_b}{q_w} - \text{безразмерные значения теплопритоков, поступающих к}$$

свободной поверхности и дну ($\gamma_w = 1$), $\frac{H}{R}$ - степень заполнения сосуда

жидкостью, $\frac{b}{H}$ - безразмерная величина расстояния от оси вращения сосуда до

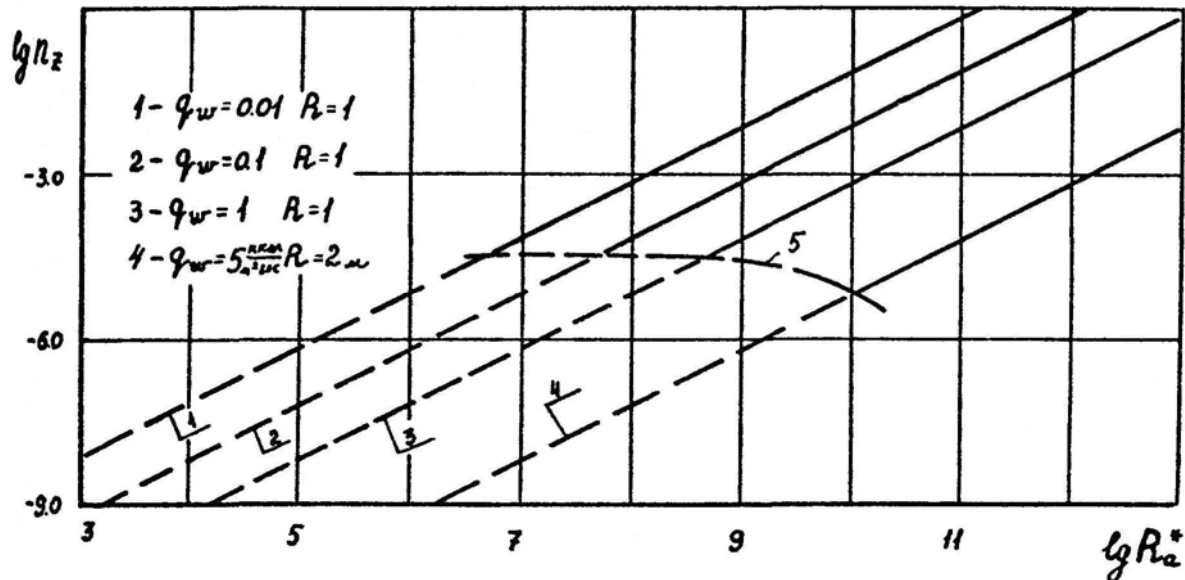
поверхности раздела газ-жидкость.

Диапазон числа Релея, отнесенного к потоку тепла, для сосудов радиуса $R = 1 \div 2$ м при потоках тепла $q = 0.01 \div 5$ ккал/м²час в условиях пониженной гравитации ($g/g_0 \sim 10^{-7} \div 10^{-4}$, см. фиг. 56) охватывает режимы ламинарной конвекции $Ra_R^* < 10^{11}$, переходный и турбулентный режимы^{х)}.

Нестационарность процесса прогрева в общем случае существенна и определяется, с одной стороны, широким диапазоном числа Фурье $\left(\frac{at}{R^2} \cong 10^{-5} \div 1\right)$, а с другой стороны инерционностью конвекции при

^{х)} Числа Релея снизу ограничены условиями применимости расчетной схемы с прямолинейной поверхностью условием $Ra_R^* \geq 100qk^2 \frac{\rho\sigma}{\mu\alpha k}$. Эта граница дана на фиг. 56 пунктирной линией 5.

пониженной гравитации. Степень заполнения $\frac{H}{R}$ изменяется в зависимости от программы полета.



Фиг. 56. Диапазон чисел Рейля в зависимости от перегрузки, величины потока тепла и характерного размера

Конвективное движение жидкости в сосуде имеет сложную пространственно-временную структуру и зависит от характера подводимых потоков тепла.

Основной причиной движения и температурного расслоения, вызываемого конвекцией, является поток тепла, подводимый к боковой поверхности (q_w). Развитие во времени естественной конвекции при боковом подводе тепла наиболее подробно изучено в настоящее время лишь в простейшем случае вертикальной плоской пластины при ступенчатом повышении температуры или потока тепла [146-147]. Обзор исследований последних лет содержится в статье Ида [15]. В работе [146] определены основные режимы развития нестационарного пограничного слоя на вертикальной пластине: начальный режим теплопроводности, переходный и стационарный режимы. Экспериментальное исследование перехода из ламинарного режима в турбулентный и турбулентного режима в стационарных условиях при заданном потоке тепла выполнено в работе [148]. В замкнутой области картина движения

сложнее, так как пограничный слой развивается на пластине конечной длины и «сливается» в верхнюю часть области, затем развивается циркуляционное движение и т.д. Экспериментальное исследование естественной конвекции в сосудах при боковом потоке при больших числах Релея выполнено в ряде работ [149-151]. Для кратковременных режимов при турбулентной конвекции построены приближенные полуэмпирические методы расчета [152, 153] (см. также обзор в работе [5]), основанные на выделении тонкого пограничного слоя у стенки, верхнего прогретого слоя и ядра. При пониженной гравитации взаимодействие элементов расслоенной жидкости существенно и более широк диапазон чисел Фурье. Численное решение, исходя из нелинейных уравнений конвекции, предпринималось в работах [26, 154-156]. В работе [26] рассматривался случай бокового подвода тепла при наличии свободной поверхности, в работе [155] верхняя поверхность принималась твердой (полностью заполненный жидкостью сосуд). В работе [156] постановка задачи при боковом потоке [26] дополнена учетом переноса концентрации. Во всех цитированных работах рассматривался лишь случай постоянной вдоль оси сосуда массовой силы. Анализ численных решений нестационарной конвекции даже в случае бокового потока тепла представляет значительные трудности и в упоминавшихся работах выполнен далеко не полно. Автором задача о нестационарной конвекции при боковом потоке рассматривалась для замкнутой плоской области в работе [97, 98], и для цилиндрического сосуда в работах [70-72].

Поток тепла, подводимый к свободной поверхности сверху, сам по себе не вызывает движения, но существенно влияет на движение, вызываемое боковым потоком тепла. Физические особенности процессов конвективного взаимодействия в этом случае изучены недостаточно. В работе [157] выполнены измерения поля температуры по вертикали сосуда при горении жидкости на поверхности. Причиной движения (которая, однако, не указывается автором этой работы) являлся переток тепла по металлической стенке сосуда, создававший поток тепла в жидкость также и со стороны

боковой поверхности. Вертикальные профили температур аппроксимировались решениями нестационарного уравнения теплопроводности при введении некоторого "эффективного" коэффициента теплопроводности.

Общий случай прогрева при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям и дну реализуется обычно в экспериментах [158-166] (частично заполненные жидкостью сферические сосуды, цилиндрические сосуды с эллиптическими или полусферическими днищами). При этом подвод тепла к жидкости обычно имеет сложный характер. В работах [158÷166] содержится, как правило, информация лишь о вертикальных профилях температур и увеличении во времени давления в емкости. Сведения о механизме движения, взаимном влиянии полей температур и полей движения и о вкладе отдельных конвективных составляющих немногочисленны. Диапазон чисел Релея, реализованный в опытах, в большинстве случаев относится к переходному или турбулентному режимам. Измерения при ламинарном режиме конвекции выполнены с жидкостями, имеющими большие числа Прандтля ($Pr > 1$), влияние которого в процессе нестационарного прогрева существенно. Более полная информация получена в опытах с полностью заполненной сферой [165]. Из работ, в которых рассматриваются методы расчета общего случая прогрева, следует отметить работу [166], в которой для расчета конвекции в частично заполненной сфере используются уравнения пограничного слоя; в ядре предполагается полное перемешивание. Эта полуэмпирическая методика содержит предположения, характерные для развитого турбулентного режима и имеет существенные ограничения по величине степени заполнения сосуда жидкостью. Численное исследование общего случая прогрева, исходя из нелинейных уравнений конвекции, выполнено в настоящее время для условий, далеких от сформулированных выше. Рассмотрены замкнутые области, не имеющие свободной поверхности (плоская область, сфера, горизонтальный цилиндр) при граничных условиях первого или третьего рода [64, 167, 168]. Температурное поле в этих случаях стремится к равновесию с окружающей средой. Диапазон чисел Релея ограничен значениями $10^5 - 10^6$, причем анализ

рабочих характеристик, представляющих интерес для упоминавшихся приложений, не является полным. Ввиду сложности и малой изученности общей задачи о прогреве в предшествующих работах не был выяснен один из основных вопросов - о вкладе конвекции в увеличение температуры поверхности при длительном хранении жидкости в условиях пониженной гравитации. Оказывается, что ответ на этот основной вопрос не является простым и зависит от режимов конвекции в диапазоне чисел Релея, Фурье и характера теплоподвода, что требует систематического исследования сформулированной общей задачи о прогреве.

В данной главе изложены результаты численного исследования этой задачи, выполненного в работах [70-72, 97, 98, 169, 170]. В § 1 подробно изучается прогрев при боковом подводе тепла. В § 2 рассмотрено действие потока тепла, подводимого сверху, и в § 3 обобщены результаты исследования при комбинированном подводе тепла. Основные расчеты выполнены при числе $Pr = 1$, что соответствует жидкому водороду. Решение задачи о вкладе конвекции позволяет построить приближенную методику расчета средней температуры свободной поверхности (§ 4), которая применима и в более сложных случаях теплоподвода, имеющего место в реальных сосудах. Метод анализа нестационарных режимов естественной конвекции в сосудах, развитый в этой главе, представляет, по-видимому, и самостоятельный интерес.

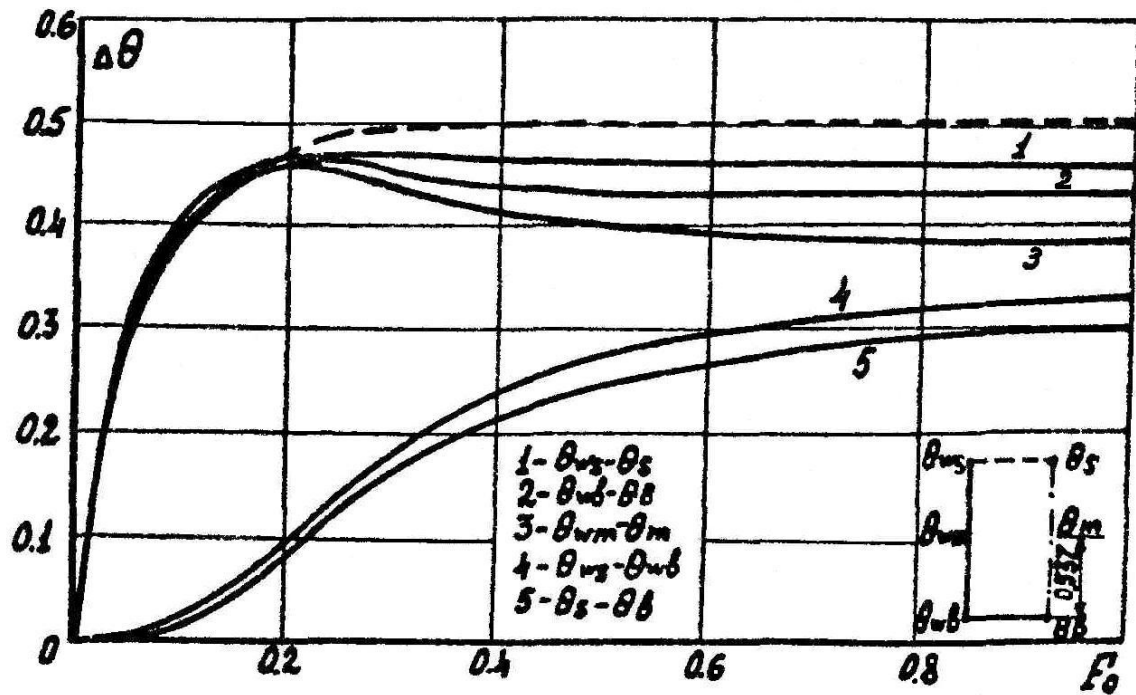
§ 1. Конвекция в сосуде при боковом подводе тепла ($\gamma_w = 1, \gamma_s = \gamma_b = 0$)

1. Характерные режимы во времени. Структура полей течения и температур при слабой конвекции ($Ra_R^* = 10^2 - 10^6$)

Конвекция в этом диапазоне чисел Релея для сосудов больших размеров (порядка метра), как видно из фиг. 56, может иметь место лишь при наличии весьма совершенной изоляции ($q_w < 0.01$ ккал/м² час) или при практически

полной невесомости ($g/g_0 = 10^{-6} - 10^{-9}$). Определим характерные режимы развития конвекции во времени и рассмотрим некоторые свойства слабой конвекции.

Результаты расчета для типичного значения числа Релея $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4$ ($Pr = 1, \frac{H}{R} = 2$) даны на фиг. 57-60. Влияние конвекции на поле температуры в различные моменты времени можно проследить по изменению характерных разностей температуры (фиг. 57) (в соответствии со схемой в правом нижнем углу, приведенной на фиг. 57). Разности температур по горизонтали между стенкой и осью на различных уровнях характеризуют местную теплоотдачу от стенки к жидкости, а вертикальные разности температур на стенке и оси - температурное расслоение. Пунктирной линией дано изменение разности температур по горизонтали при переносе тепла теплопроводностью в соответствии с аналитическим решением [171]. В этом случае задача одномерна: разности температур по горизонтали на всех уровнях одинаковы, разности температур по вертикали равны нулю. Таким образом, величина разности температур по вертикали определяет температурное расслоение, вызываемое конвекцией. Начало влияния конвекции на поле температур обнаруживается по разветвлению разностей температур по горизонтали на различных уровнях (что означает изменение теплоотдачи вдоль стенки) и по появлению разностей температур по вертикали сначала на стенке, а затем на оси сосуда.

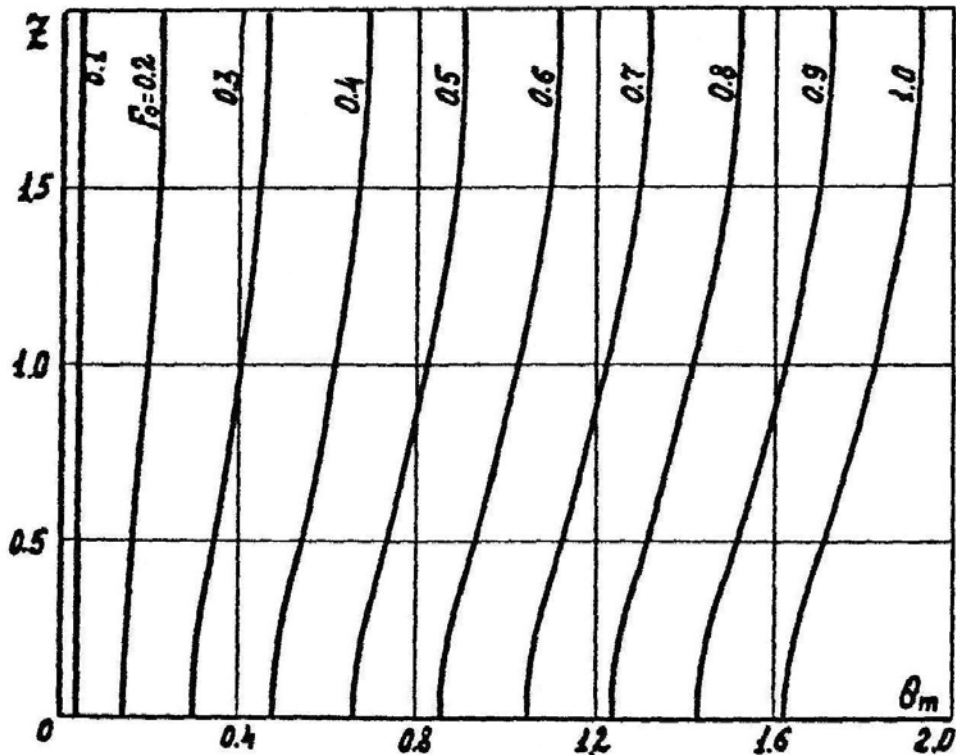


Фиг. 57. Изменение во времени разностей температур в сосуде с жидкостью при боковом подводе тепла. Слабая конвекция ($Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4$)

С течением времени все разности температур (фиг. 57) стремятся к постоянным величинам, что означает установление квазистационарного режима. Динамика прогрева жидкости, характер установления квазистационарного режима видны на фиг. 58, где приведены вертикальные профили температур вдоль оси в различные моменты времени; на квазистационарном режиме жидкость прогревается практически как единое целое.

На фиг. 59а приведено изменение во времени среднего числа Нуссельта

$$\bar{Nu}_H = \frac{q_w H}{k(\bar{T}_w - \bar{T}_m)} = \frac{H/R}{\Delta\theta} = \bar{Nu}_R \frac{H}{R} \quad (3.2)$$



Фиг. 58. Распределение температур вдоль оси сосуда в процессе прогрева

$$Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4$$

Пунктирной линией дано изменение числа Нуссельта при переносе тепла путем теплопроводности. Конвекция заметно влияет на среднюю теплоотдачу примерно при $F_0 \cong 0.2$, т.е. значительно позже по сравнению с ее локальным влиянием. Это значит, что границы характерных временных режимов имеют условный характер. Среднее число Нуссельта (или разность температур) на квазистационарном режиме (фиг. 59а) зависит только от числа Релея

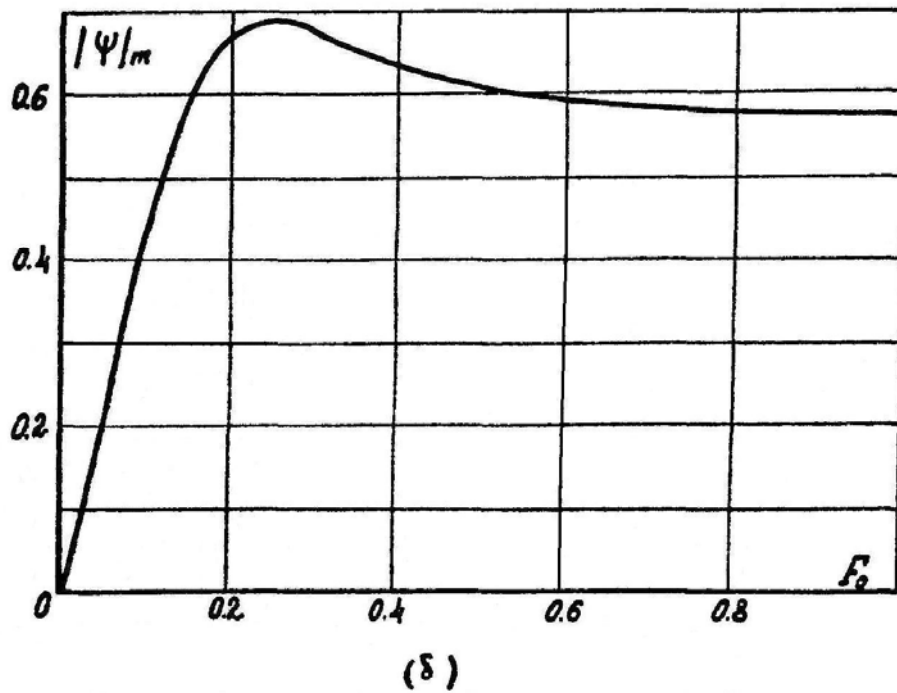
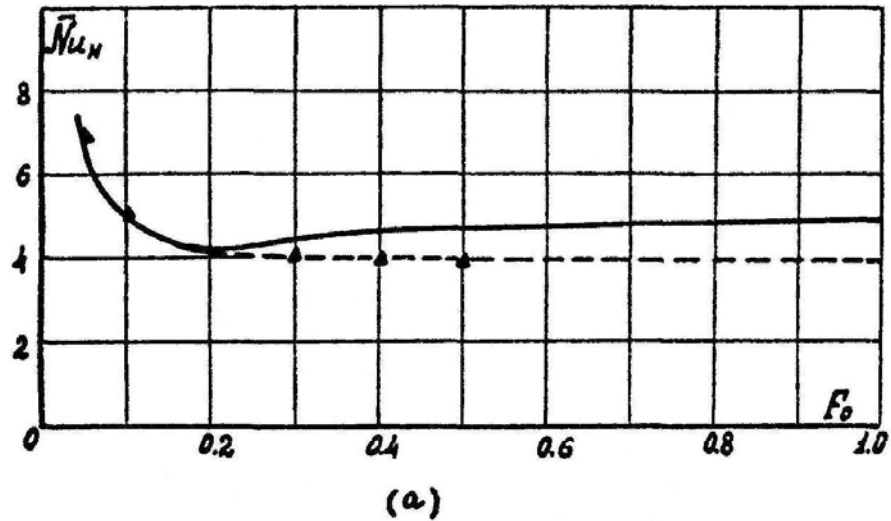
$$\bar{Nu} = f(Ra^*) \quad (3.3)$$

На фиг. 59б дана зависимость от числа Фурье максимального значения функции тока $|\Psi|_{\max}$, которая характеризует интенсивность конвекции в различных режимах по числу Фурье. Квазистационарному режиму поля температур соответствует стационарный режим движения жидкости. Картина

линий тока на квазистационарном режиме дана на фиг. 60а. Время установления квазистационарного режима соответствует примерно однократному прохождению частицей своего циркуляционного контура.

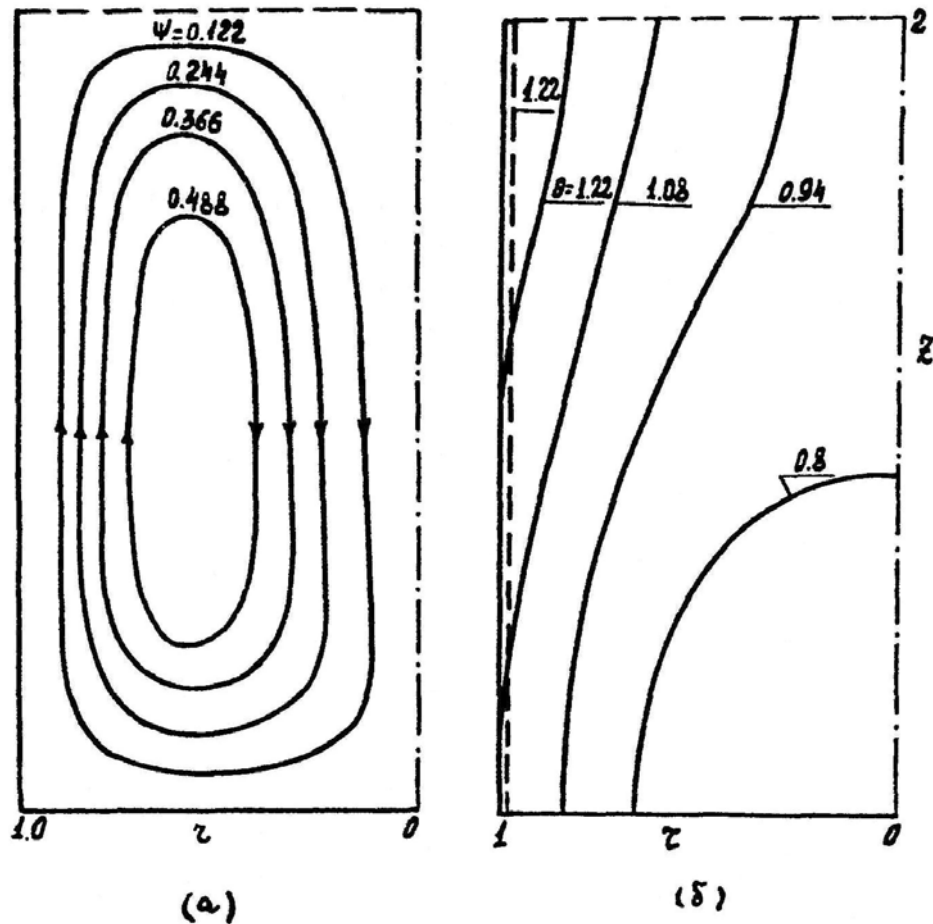
Влияние конвекции на поле температур на картине изотерм (фиг. 60б) можно видеть по их отклонению от вертикальных прямых линий, соответствующих переносу тепла путем теплопроводности. Сопоставление расположения изотерм, соответствующих $\theta=1.22$ (фиг. 60б) при наличии конвекции и при переносе тепла теплопроводностью (пунктирная линия), обнаруживает зону локального перегрева у стенки и свободной поверхности.

Таким образом, локальное влияние слабой конвекции на поле температур жидкости при достаточно больших числах Фурье существенно и неблагоприятно для температурного режима жидкости в верхней части стенки и у свободной поверхности. В то же время в среднем тепло отводится от стенки к жидкости. Важная особенность слабой конвекции - инерционность: появление температурного расслоения заметно, когда жидкость уже в значительной мере прогрета путем теплопроводности ($F_0 \sim 0.1$), а развитый режим конвекции наступает при $F_0 \sim 0.5 \div 1.0$. Для сосудов размером порядка 1 м, содержащих жидкость с температуропроводностью $a \sim 10^{-4}$ м²/час, длительность установления квазистационарного режима при числе $Ra_H \sim 10^4$ будет иметь порядок от тысячи до десяти тысяч часов при скорости движения частиц $U \sim 0.5 \div 1$ мм/час.



Фиг. 59. Изменение во времени среднего числа Нуссельта (а) и максимальной функции тока (б) при слабой конвекции ($Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4$)

Структура течения и поля температур при еще меньших числах Релея ($Ra_H^* \leq 10^4$) качественно ничем не отличается от рассмотренной выше; в этом диапазоне чисел Релея уменьшается влияние конвекции и увеличивается ее инерционность.



Фиг. 60. Линии тока (а) и изотермы поля температур при слабой конвекции ($Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4$). Квазистационарный режим прогрева

2. Структура нестационарной конвекции при больших числах Релея

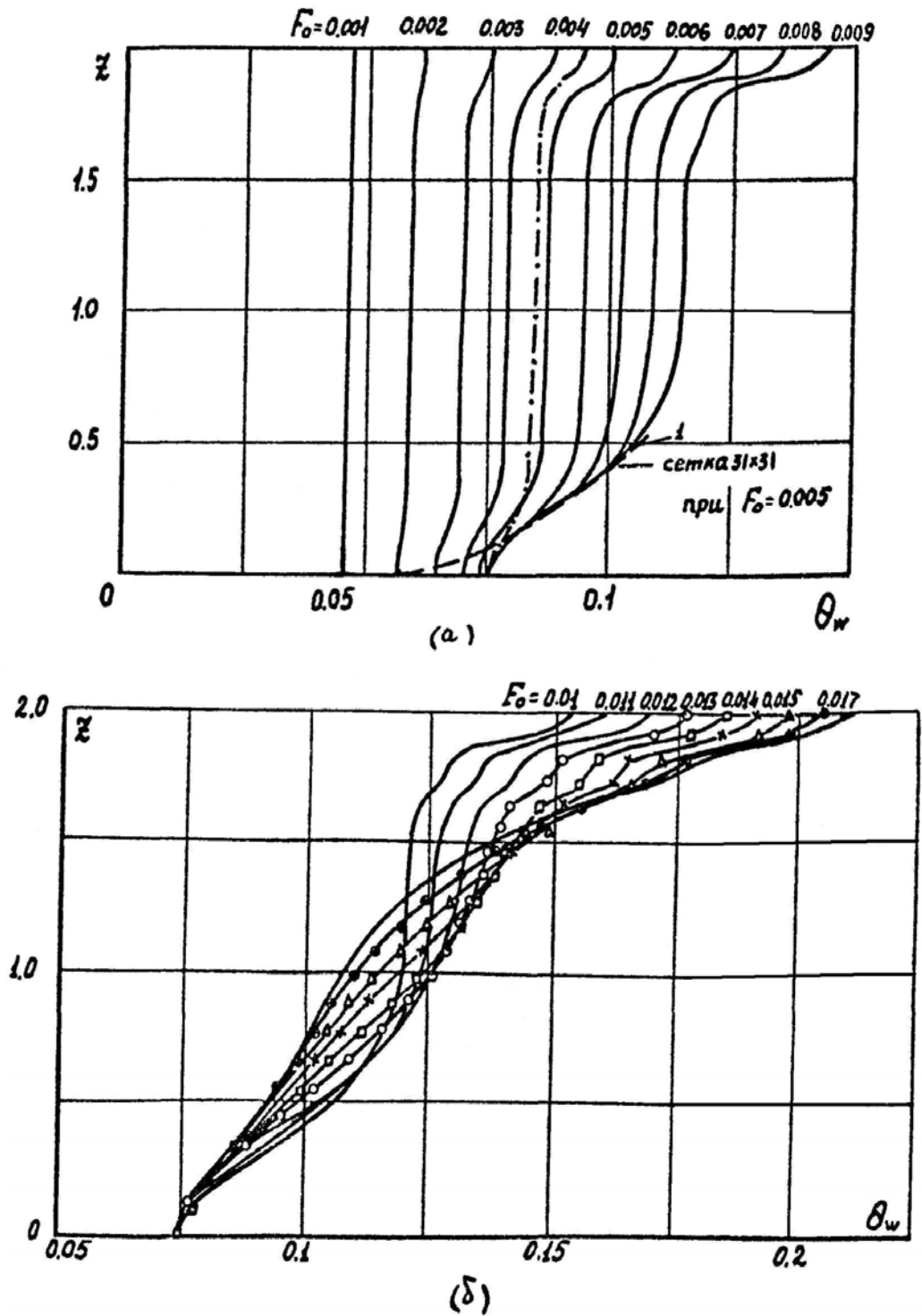
При больших числах Релея временные масштабы характерных режимов значительно уменьшаются, структура конвекция становится сложной и менее регулярной. В особенности усложняется переходный режим, который разделяется на несколько этапов: развитие нестационарного пограничного слоя, слив его в верхнюю часть области, образование прогретого верхнего слоя и развитие циркуляционного движения, приводящее (после опускания верхнего прогретого слоя на дно) к установлению квазистационарного режима прогрева. При слабой конвекции эти режимы как бы "размазаны" во времени.

Практический интерес к изучению начальных режимов конвекции связан с часто встречающимися случаями кратковременного действия больших потоков

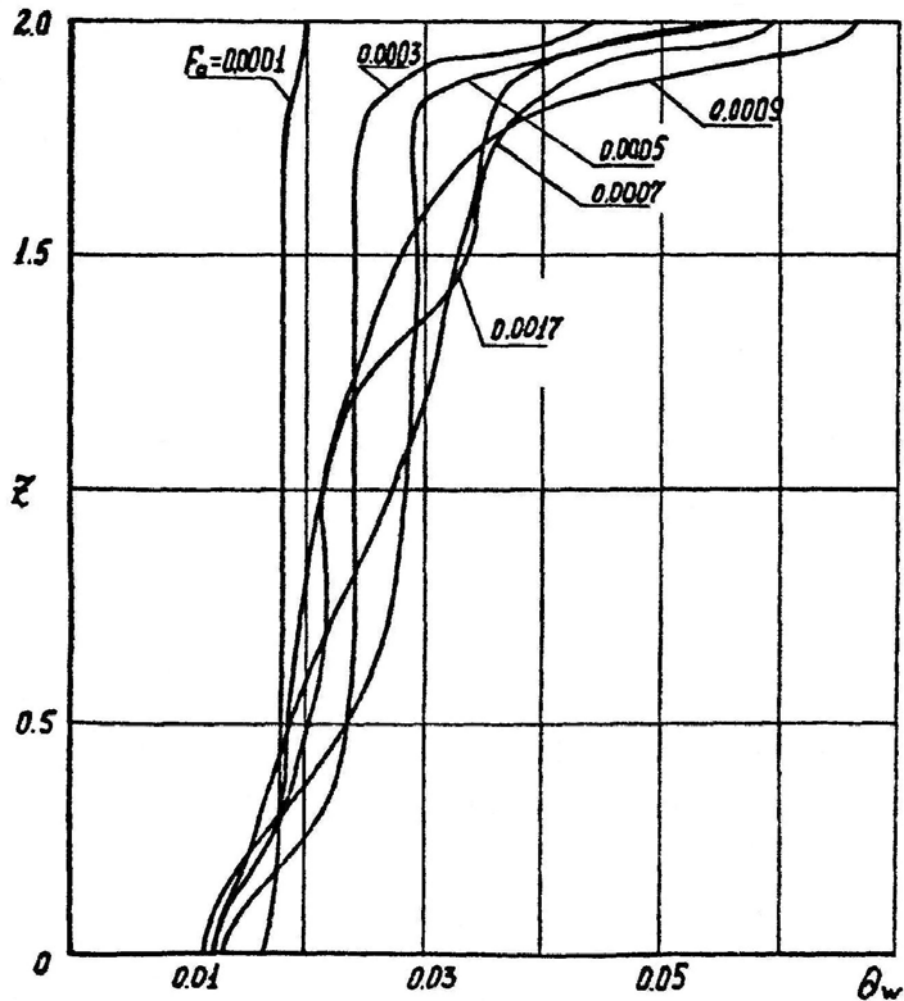
тепла (тепловой удар), поступающих к боковой поверхности сосуда. При этом важно знать степень нагрева стенки и количество прогретой жидкости, вынесенной вверх к свободной поверхности. Основные детали течения и поля температур рассматриваются в основном при $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$, $Pr = 1$, $\frac{H}{R} = 2$.

**а) Режим "натекания" и развитие нестационарного пограничного слоя;
образование верхнего прогретого слоя.**

Профили температур на стенке при числах $F_0 = 0.001 \div 0.009$ даны на фиг.61а. Вплоть до чисел $F_0 = 0.001 \div 0.002$ при данном числе Релея прогрев осуществляется практически путем только теплопроводности. При дальнейшем прогреве влияние конвекции обнаруживается вначале лишь у дна (т.е. на начальном участке восходящего потока) и у свободной поверхности. Траектория перемещения частицы двигающейся от дна вдоль стенки, вычисленная для бесконечной пластины с помощью приближенного метода [172], приведена на фиг. 61а пунктирной линией 1 и довольно близко описывает изменение профиля температуры в нижней части сосуда. Новым эффектом, связанным со спецификой замкнутой области, является «натекание» нагретой жидкости вверх, которое создает у свободной поверхности зону локального перегрева. При числе Релея $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^{10} \left(\frac{H}{R} = 2, Pr = 1 \right)$ время начала влияния конвекции на поле температур уменьшается до $F_0 = 0.0001$, а относительная величина локального перегрева жидкости $\frac{\theta_{w_{\max}}}{\theta_w}$ увеличивается до значений, равных 2 при $F_0 = 0.003 \div 0.005$ (фиг.62).



Фиг. 61. а) Профили температур вдоль боковой стенки при малых числах Фурье ($Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$)
 б) Формирование пограничного слоя на боковой поверхности при $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$



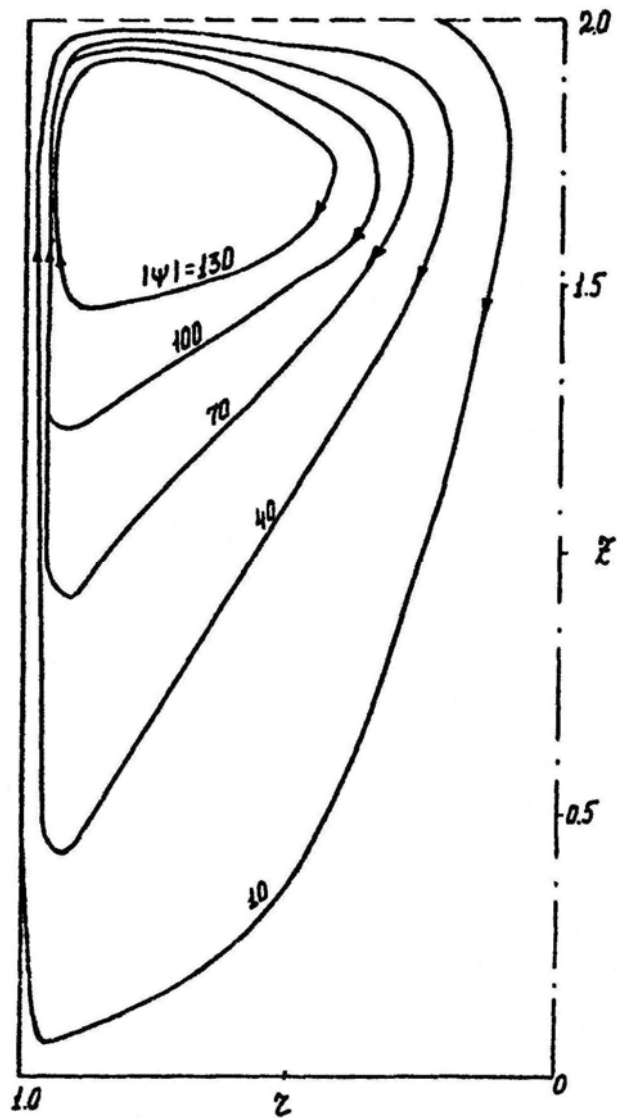
Фиг. 62. Начальный период развития конвекции при числе Релея $Ra_R^* = 10^9$.

Профили температур на боковой поверхности

Мгновенная картина линий тока в «режиме натекания» при $F_0 = 0.0001$ дана на фиг.63.

Температурный пограничный слой на нагретой стенке образуется в тот момент времени, когда частица, двигаясь вверх, проходит путь, примерно равный высоте сосуда. При числе $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$ это время соответствует числу Фурье $F_0 = 0.014$. Профили температур вдоль стенки сосуда при формирований пограничного слоя показаны на фиг.61б. Отметим, что этапы формирования пограничного слоя и верхнего прогретого слоя не рассматриваются в упоминавшихся приближенных методиках [152, 153]: предполагается, что пограничный слой уже сформирован. Эти методики не позволяют определить и

локальный перегрев жидкости у стенки, так как предполагают полное перемешивание жидкости по радиусу сосуда.

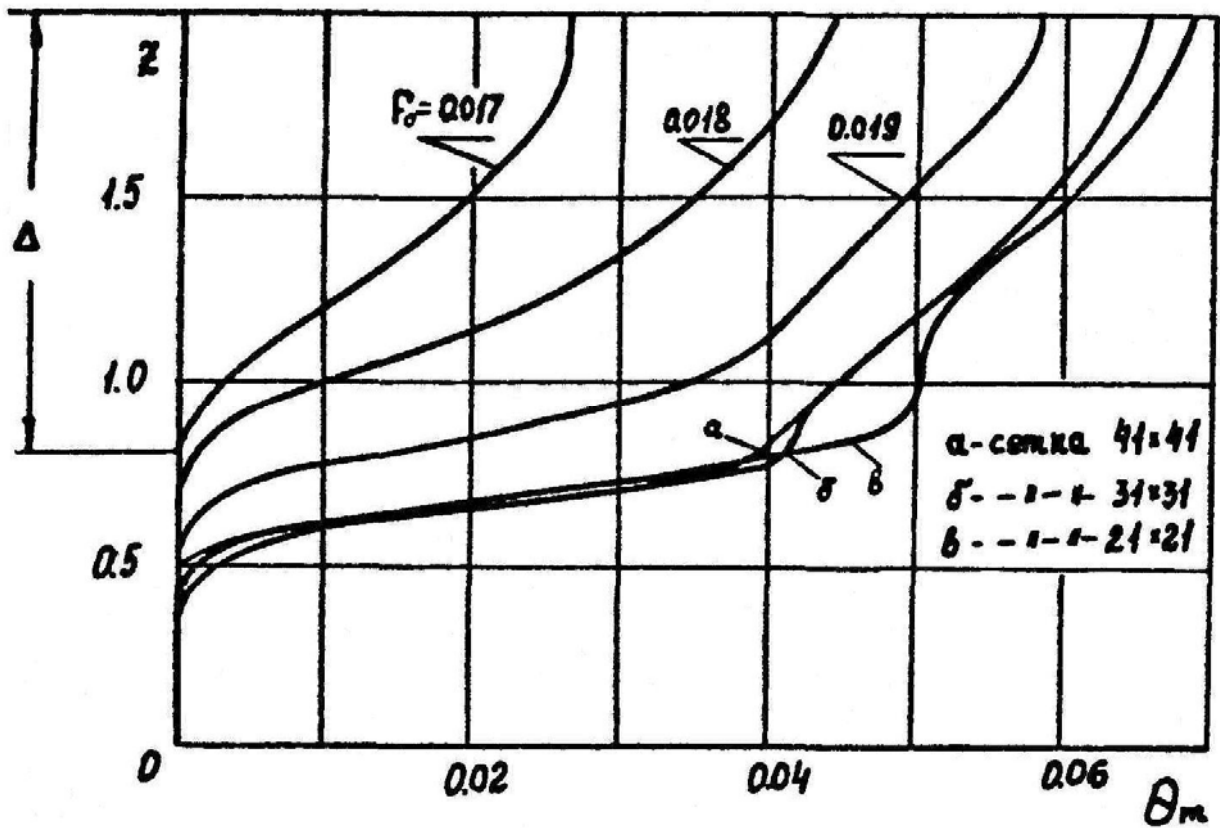


Фиг. 63. Линии тока в начальном режиме, $Ra_R^* = 10^9$, $F_0 = 10^{-3}$

При $F_0 > 0.014(Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7)$ на оси сосуда нагретая жидкость образует фронт, перемещающийся постепенно вниз (фиг. 64). Начало образования этого фронта и скорость его движения существенно зависят от числа Релея (фиг. 65).

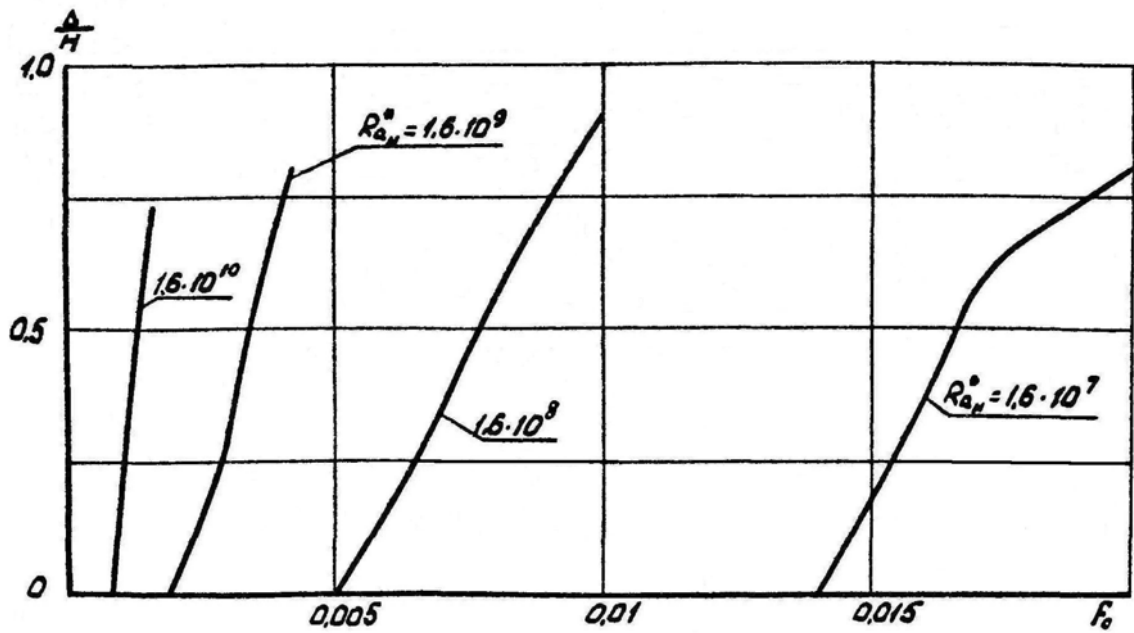
При глубине прогретого слоя $\Delta > H/L$ его фронт становится более крутым; достигая дна при $F_0 \sim 0.03$ (фиг. 66) прогретый слой как бы "всплывает" вверх. После ряда колебаний при $F_0 \geq 0.07$ на оси сосуда

формируется профиль, типичный для квазистационарного режима прогрева. Эффект "всплывания" прогретого слоя наблюдался также в плоской области. Дальнейшие этапы прогрева, иллюстрирующие наличие квазистационарного режима при больших числах Релея, даны на фиг. 67^{x)}.

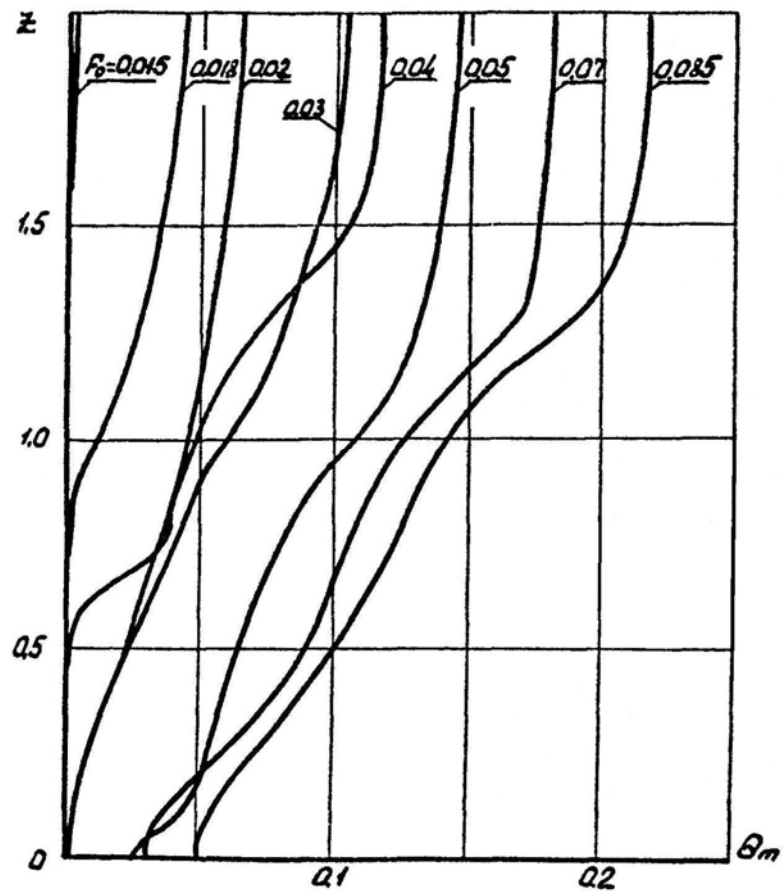


Фиг. 64. Формирование верхнего прогретого слоя на оси сосуда при боковом подводе тепла, $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$

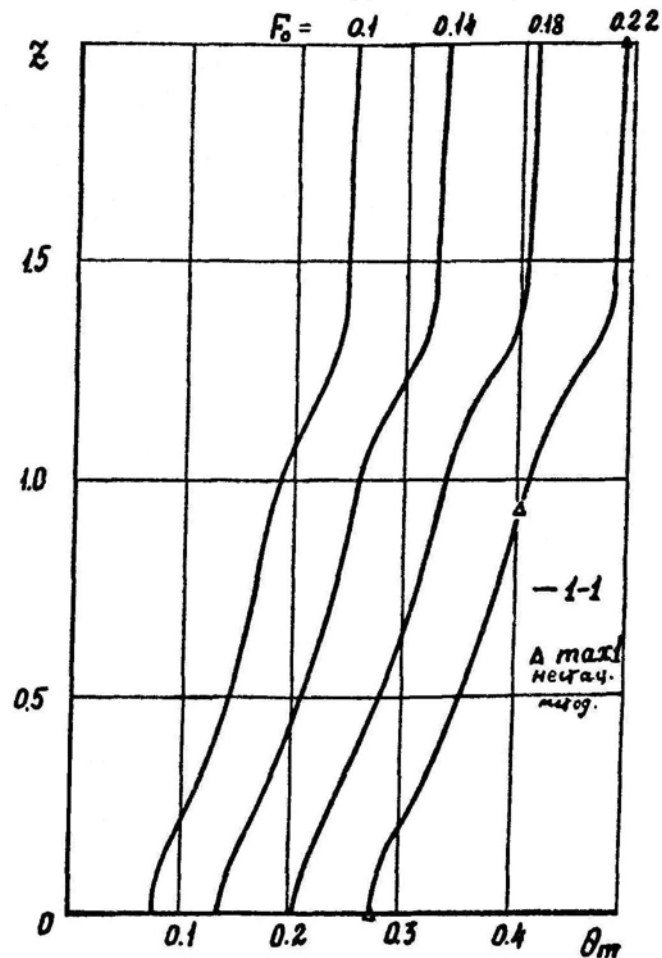
^{x)} Показаны результаты, полученные по стационарной методике и по точной нестационарной методике (см.гл.1 § 3).



Фиг. 65. Изменение во времени глубины верхнего прогретого слоя Δ/H при различных числах Релея



Фиг. 66. Переходный режим перемещения прогретого слоя
($Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$, $Pr = 1$)

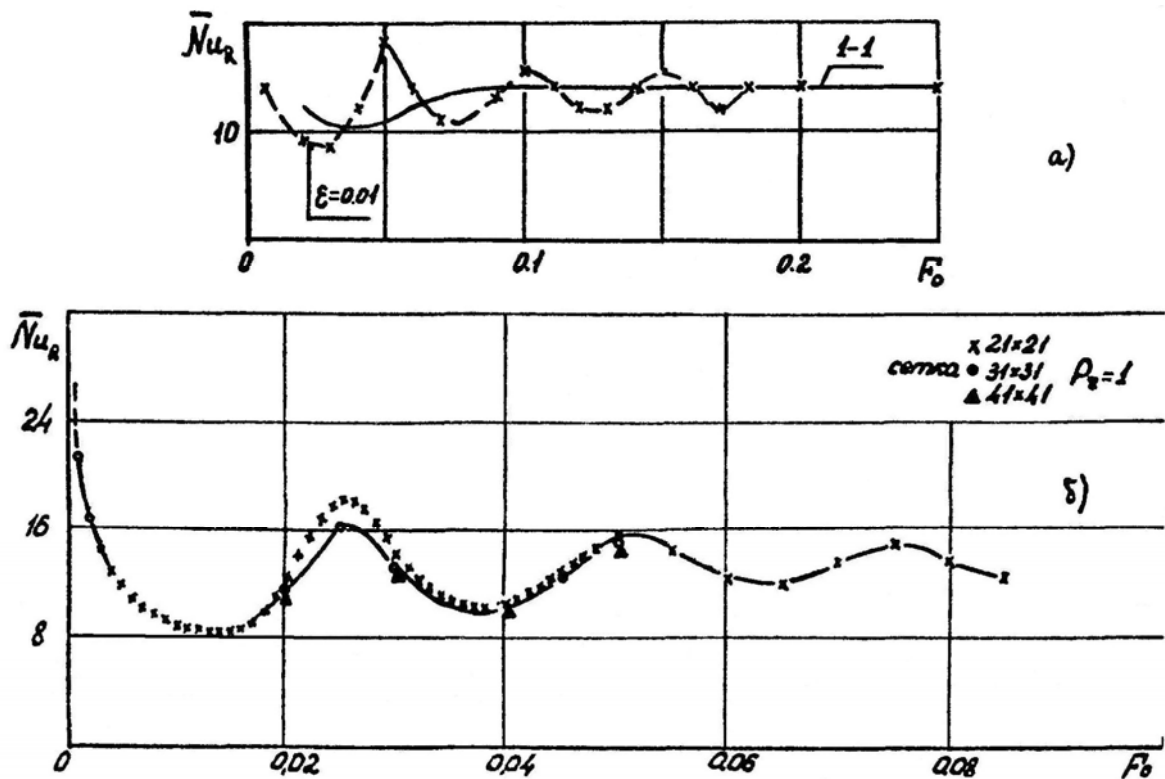


Фиг. 67. Квазистационарный режим прогрева $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$.

Вертикальные профили температур вдоль оси сосуда

б) Развитие циркуляционного движения; вторичные течения и механизм колебаний.

Особенностью нестационарных режимов конвекции при больших числах Релея являются колебания в полях течения и температур. Характер колебаний наиболее отчетливо проявляется на средней характеристике теплоотдачи - числе Нуссельта (фиг. 68а, б). Основные эффекты режима колебаний получены на различных сетках; соответствующие результаты даны на фиг. 68б. Стационарная методика (без итераций во внутреннем цикле, см. гл.1, § 3) действует в этом случае как некоторый регуляризатор с "временной вязкостью" (фиг. 68а): она дает правильное значение числа \bar{Nu} на квазистационарном режиме, но сглаживает колебания.



Фиг. 68. Изменение во времени среднего числа Нуссельта при числе Рейля

$$Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$$

а) при различных способах итераций,

б) сопоставление результатов расчета на различных сетках

Упомянутый эффект "всплывания" прогретой жидкости на оси сосуда и колебания связаны между собой и объясняются появлением вторичных токов при опускании нагретой жидкости вдоль оси. Вторичные токи выносят тепло вверх и взаимодействуют с основным циркуляционным движением (фиг.69, 70). При числе $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$ вторичные движения появляются примерно при $F_0 \sim 0.025$ (фиг. 69б). Причина образования этих движений состоит в том, что жидкость на оси сосуда в начальный момент перегрета по сравнению с массивом жидкости между стенкой и осью, в результате чего частицы жидкости на оси всплывают вверх^{х)}. Профили температуры по радиусу сосуда на различных вертикальных уровнях z , иллюстрирующие характерное

^{х)} Аналогичный механизм появления вторичных токов уже отмечался в плоском слое (гл. II, § 1, фиг.6, 7).

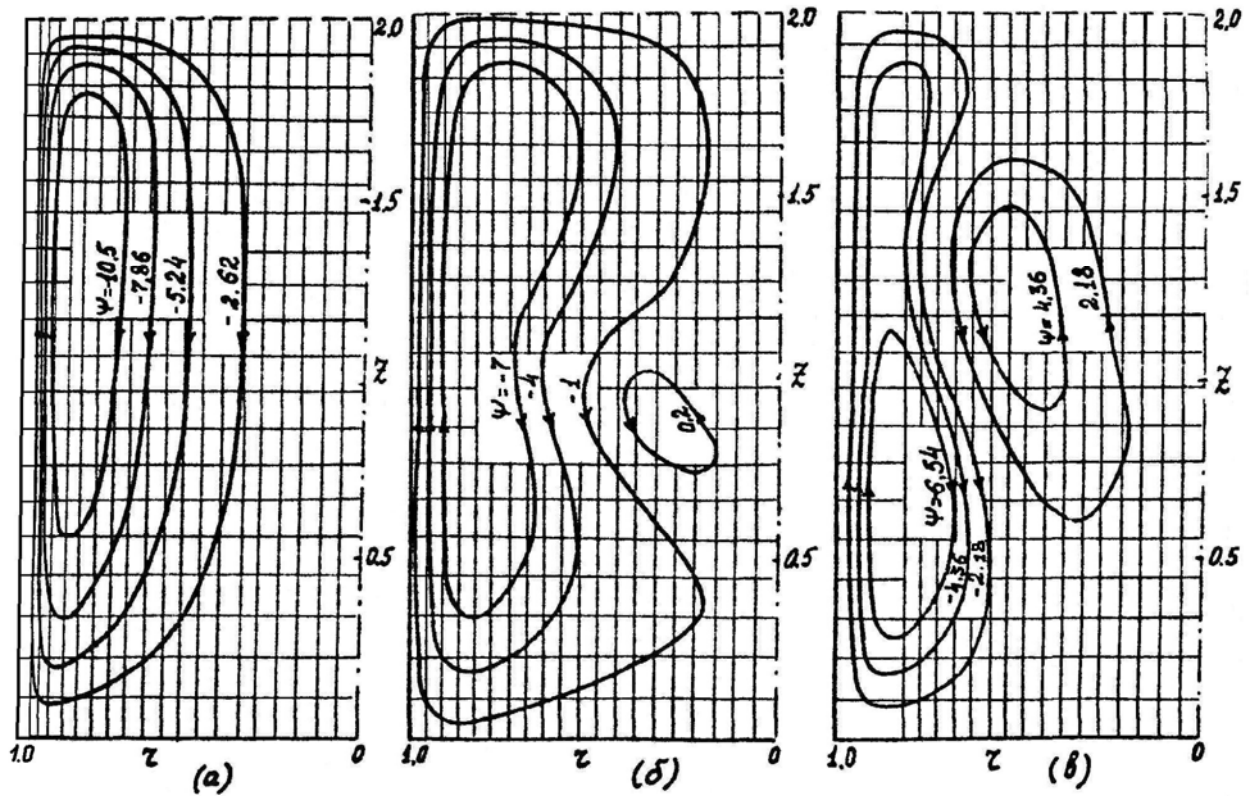
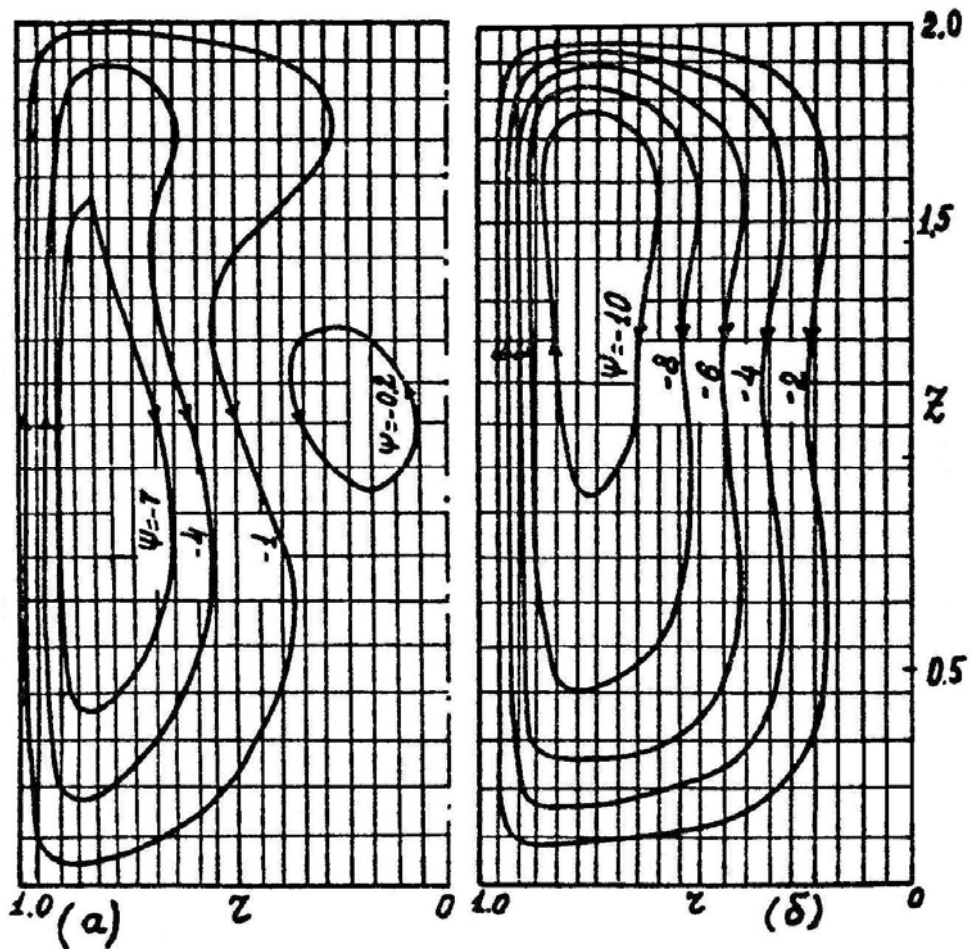


Рис. 69. Линии тока в различные моменты времени при боковом подводе тепла $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$. Развитие вторичных движений
 (а) $F_0 = 0.01$, (б) - $F_0 = 0.025$, (в) - $F_0 = 0.03$

увеличение температуры на оси, приведены на фиг.71а,б. При $F_0 = 0.03$ (фиг.69в) вторичное движение занимает значительную часть области, оттесняя основное движение к периферии. Примерно в этот момент времени наблюдается упоминавшееся "всплывание" прогретого слоя (фиг.66), в результате чего температура в верхней части области увеличивается. Развитое вторичное движение как бы "запирает" основное движение, поэтому среднее число Нуссельта падает (фиг.68б). В дальнейшем действует механизм "обратной связи": в результате всплывания прогретого слоя и уменьшения температуры на оси сосуда температура по горизонтали выравнивается, что приводит к ослаблению вторичных токов (фиг. 70а). При $F_0 = 0.045$ (фиг.70б) поступающая от нагретой стенки новая порция жидкости преодолевает действие затухающих вторичных токов; основное движение восстанавливается, и средняя теплоотдача вновь возрастает, достигая максимального значения при

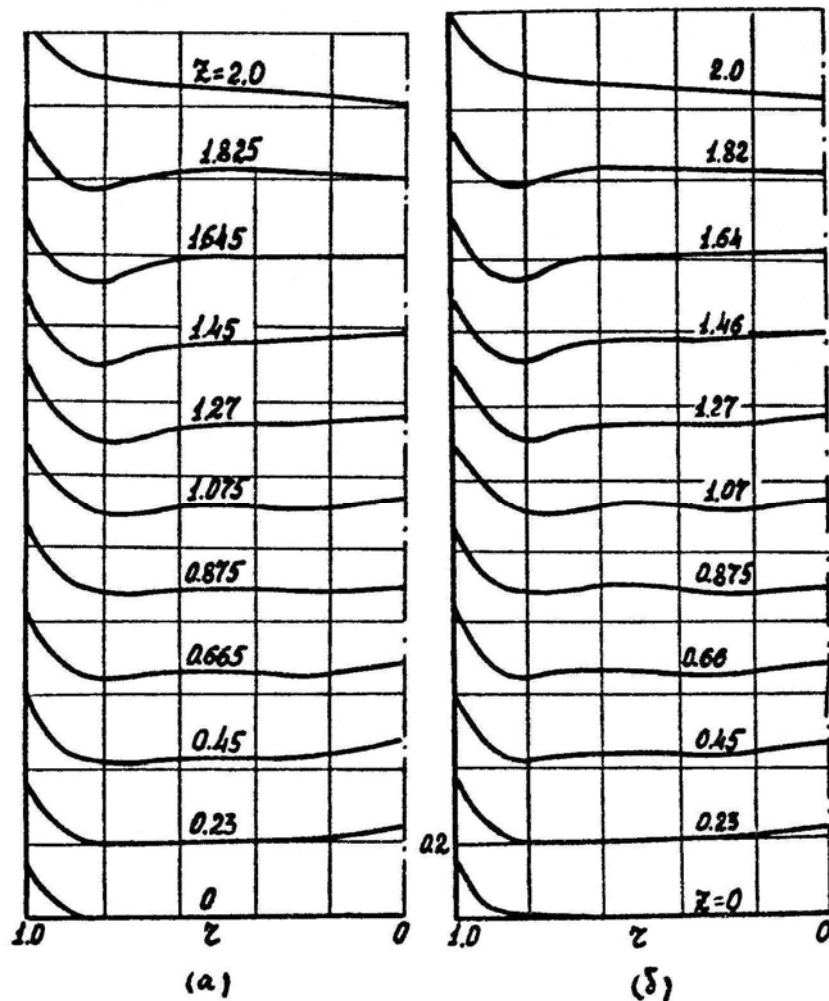
$F_0 \cong 0.05$ (фиг. 68б). Такова структура нестационарной конвекции для одного периода колебаний в средней теплоотдаче. За этот период колебаний полной циркуляции жидкости, как в основном, так и во вторичном движениях не происходит, так как максимальное расстояние, которое проходит частица в основном движении, имеет порядок высоты сосуда H , а во вторичном - $0.5H$ ^{х)}.



Фиг. 70. Линии тока при боковом подводе тепла.

Затухание вторичных движений $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$

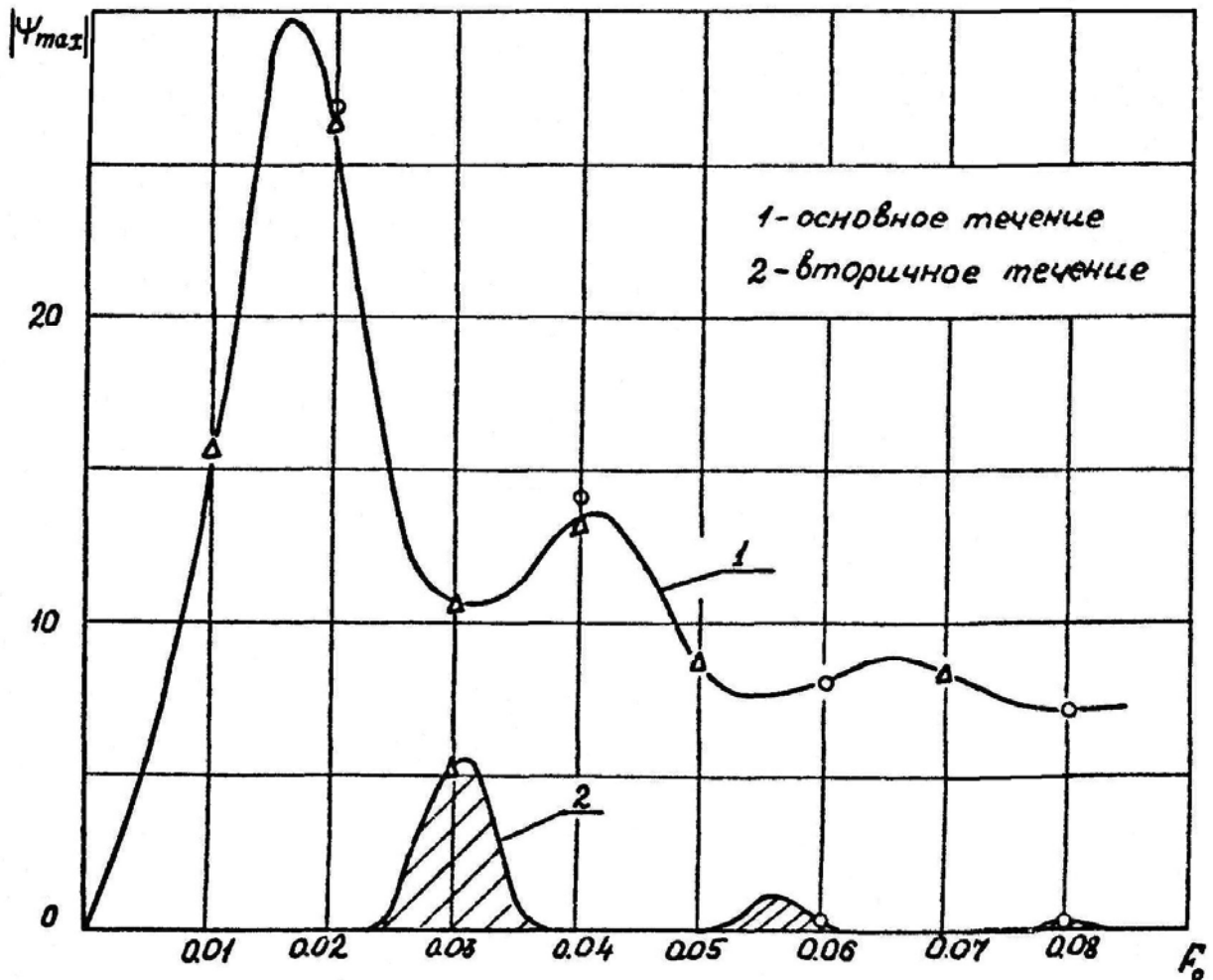
^{х)} Отметим существенное влияние числа Прандтля, при увеличении которого амплитуда колебаний заметно уменьшается



Фиг. 71. Распределение температуры по радиусу сосуда в различных сечениях по высоте $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$

а) $F_0 = 0.025$; б) $F_0 = 0.031$

В течение первого периода колебаний в основном заканчивается "проталкивание" нагретой жидкости вдоль оси сосуда. В дальнейшем аналогичная картина движения повторяется, но с меньшей интенсивностью вторичных токов и с меньшей длительностью их действия, как видно из графика изменения максимального значения абсолютной величины функции тока основных и вторичных движений (фиг.72). Ввиду уменьшения неравномерности в распределении температур на оси и в основной массе жидкости, вторичные течения при больших числах Фурье полностью затухают.

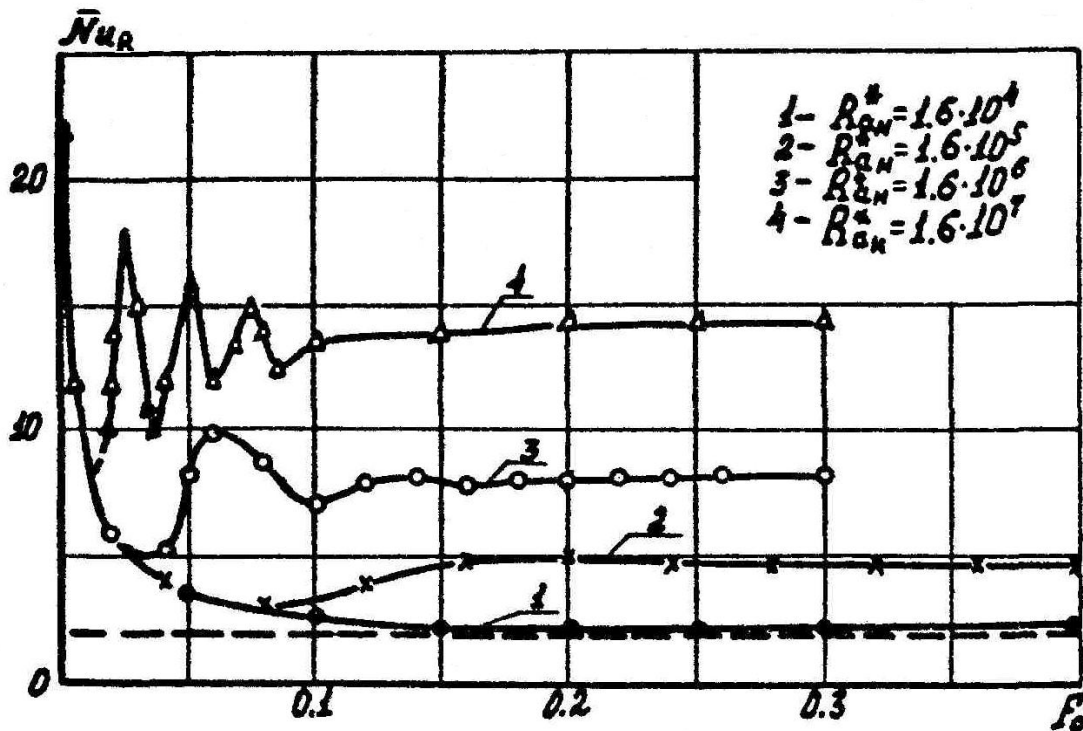


Фиг. 72. Изменение во времени амплитуды основного и вторичного движения,

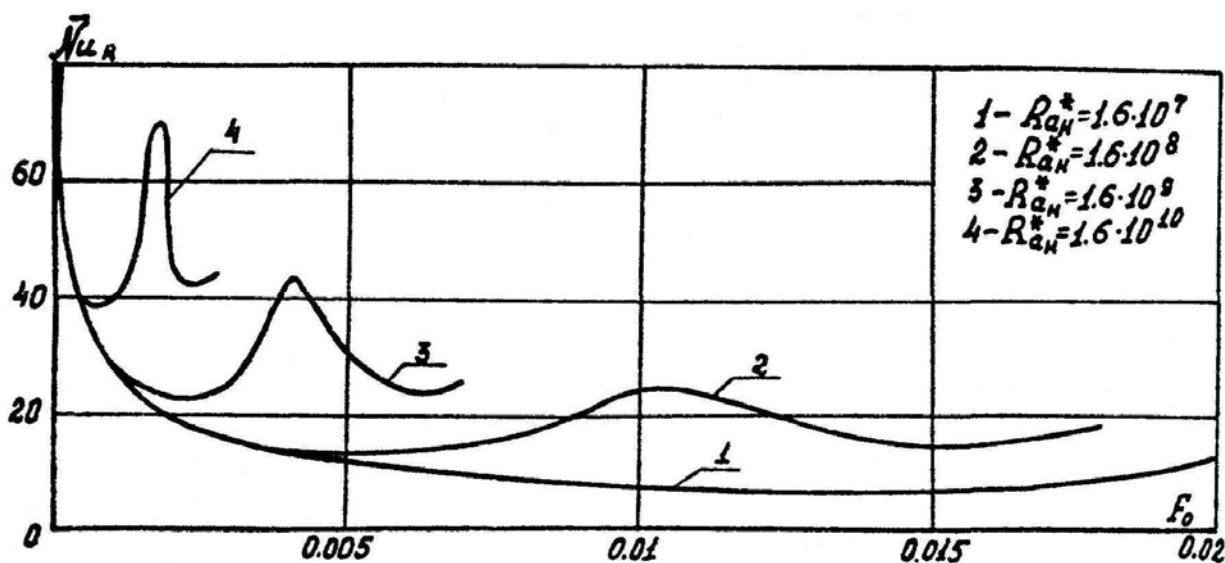
$$Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$$

Рассмотренные эффекты являются общими для режимов ламинарной конвекции при больших числах Релея. На фиг. 73, 74 приведены зависимости $\bar{Nu}(F_0)$ для двух групп чисел Релея $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4 - 1.6 \cdot 10^7$ и $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7 - 1.6 \cdot 10^{10}$, откуда отчетливо видно значительное уменьшение характерного временного масштаба (периода колебаний или времени установления квазистационарного режима) при увеличении числа Релея. Для слабой конвекции $Ra_H^* \leq 10^6$ временной масштаб $F_0 \cong 0.1 \div 1.0$, и в этом масштабе зависимость $\bar{Nu}(F_0)$ при $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$ имеет отчетливо выраженный колебательный характер (фиг. 73). Для чисел

$Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7 - 1.6 \cdot 10^{10}$ характерный масштаб $F_0 = 0.01 - 0.1$; в этом масштабе эта же зависимость при $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$ имеет довольно плавный характер (фиг.74). Уменьшение временного масштаба при увеличении числа Релея создает большие вычислительные трудности.



Фиг. 73. Изменение среднего числа Нуссельта во времени в диапазоне чисел Релея $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4 - 1.6 \cdot 10^7$



Фиг. 74. Изменение среднего числа Нуссельта во времени в диапазоне чисел Релея $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7 - 1.6 \cdot 10^{10}$

3. Обобщение результатов. Границы характерных временных режимов в диапазоне чисел Ra^* , F_0 . Теплоотдача и температурное расслоение.

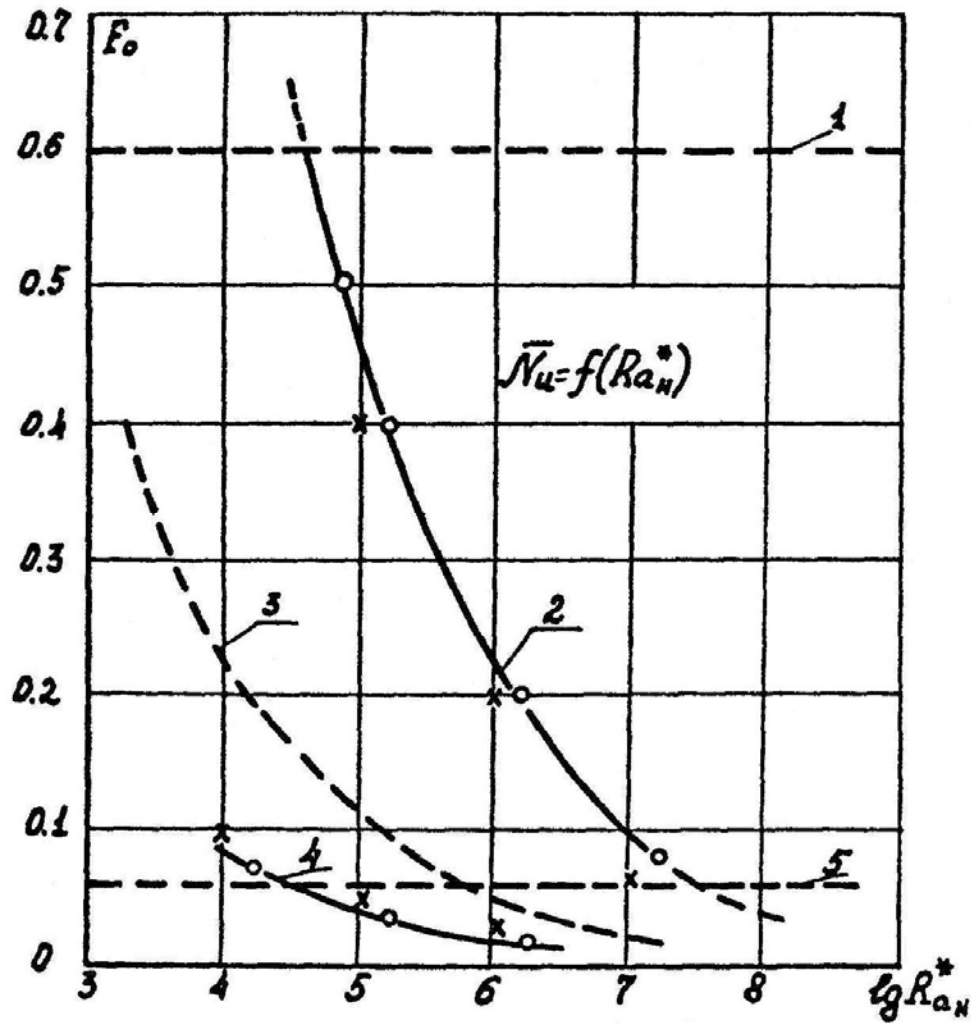
Результаты по структуре конвекции помогают выделить и характерные режимы. Для группы чисел Релея $Ra_H^* = 10^3 - 10^7$ ориентировочные границы 2, 3, 4 характерных режимов конвекции даны на фиг. 75. Здесь же горизонтальными пунктирными линиями показаны для сопоставления границы (1, 5) режимов теплопроводности (1 – квазистационарный режим, 5 – момент слияния температурных волн у оси сосуда).

Сплошная линия 2 соответствует границе установления квазистационарного режима конвекции в цилиндрическом сосуде. Крестиками отмечены результаты определения этой границы для замкнутой плоской области. При числе $Ra_H^* \geq 10^5$ граница 2 аппроксимируется приближенной зависимостью

$$F_0 = \frac{C}{(Ra_H^*)^{0.4}}, \quad (3.4)$$

где $C \cong 45$ при числе $Pr = 1$ и $\frac{H}{R} = 2$ ^{х)}.

^{х)} Для плоской области при этих условиях $C \cong 40$.

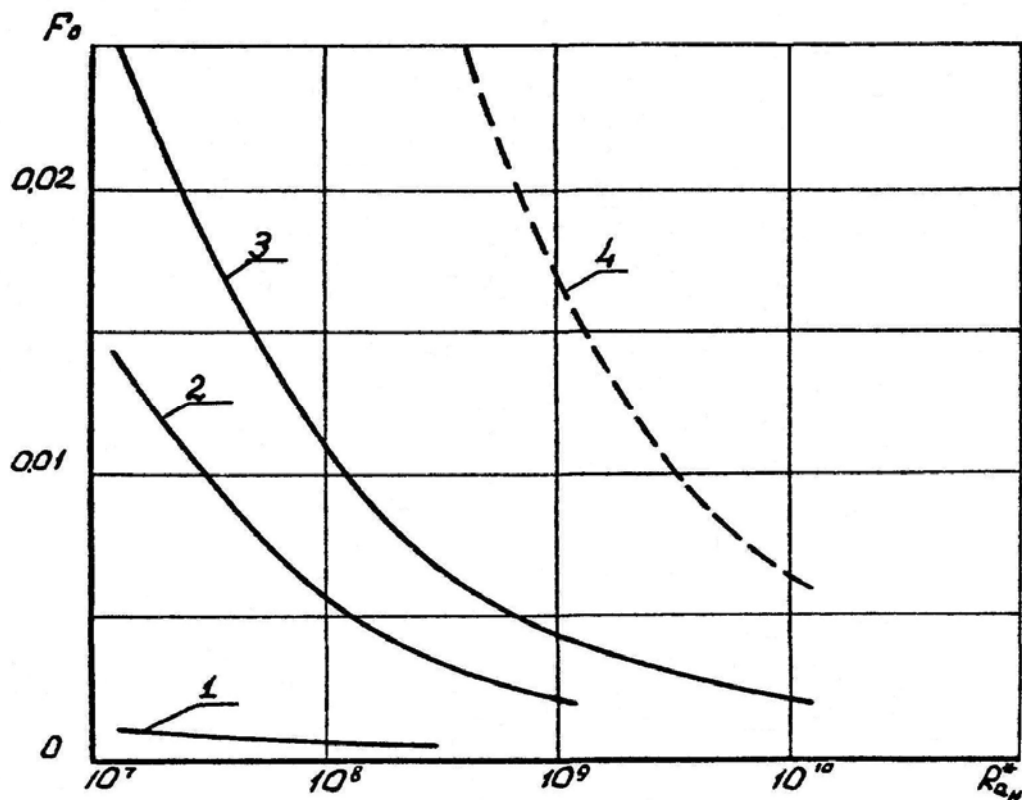


Фиг. 75. Границы характерных режимов прогрева в диапазоне Ra^* , F_0

Пунктирная линия 3 соответствует максимальному значению функции тока (или максимальной интенсивности конвекции), которое достигается в переходном режиме. Наконец, линией 4 показана граница, соответствующая появлению нагретой жидкости на оси сосуда (начало образования прогретого слоя). Можно видеть, что при числе $Ra_H^* < 10^7$ граница 2 квазистационарного режима конвекции находится выше границы 5. Это значит, что температурные волны в процессе прогрева успевают достигнуть оси сосуда. При больших числах Релея режим развитой конвекции устанавливается раньше. На фиг.76 приведена более детализированная граница характерных режимов конвекции, соответствующая группе режимов при $Ra_H^* > 10^7$. Здесь 1 - граница начала

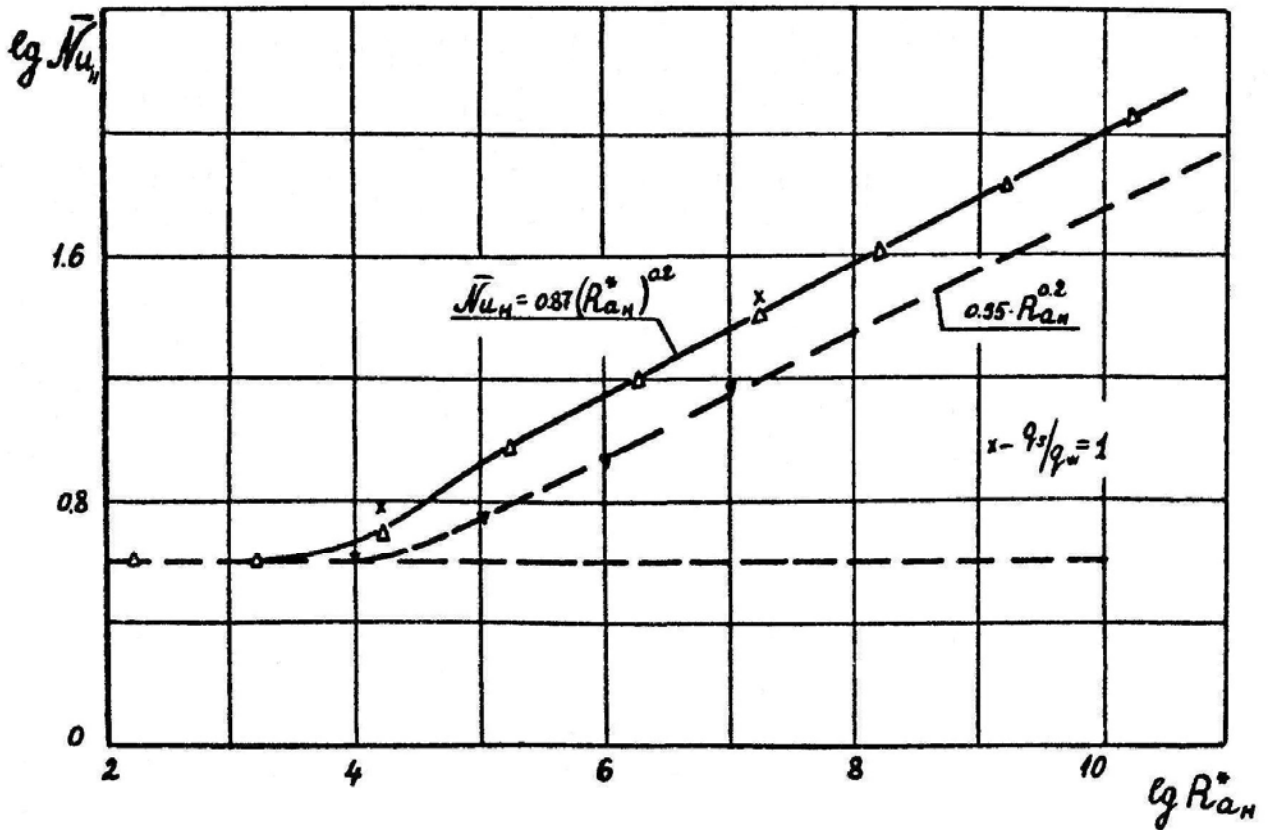
режима натекания, 2 - появление нагретой жидкости на оси и 3 - появление первого максимума на графике среднего числа Нуссельта. Пунктирной линией 4 дана граница квазистационарного режима, экстраполированная по формуле (3.4).

Построенные границы дают возможность систематизировать результаты расчетов. Наиболее просто могут быть обобщены результаты расчетов квазистационарного режима. На фиг.77 приведена зависимость среднего числа Нуссельта от числа Релея ^{x)}).



Фиг. 76. Границы характерных режимов при больших числах Релея

^{x)} При наличии колебаний ($Ra_H^* = 10^8 - 10^{10}$) вычислялось среднее по времени число Нуссельта.



Фиг. 77. Средняя теплопередача при боковом подогреве сосуда.

Квазистационарный режим ($H/R = 2, Pr = 1$)

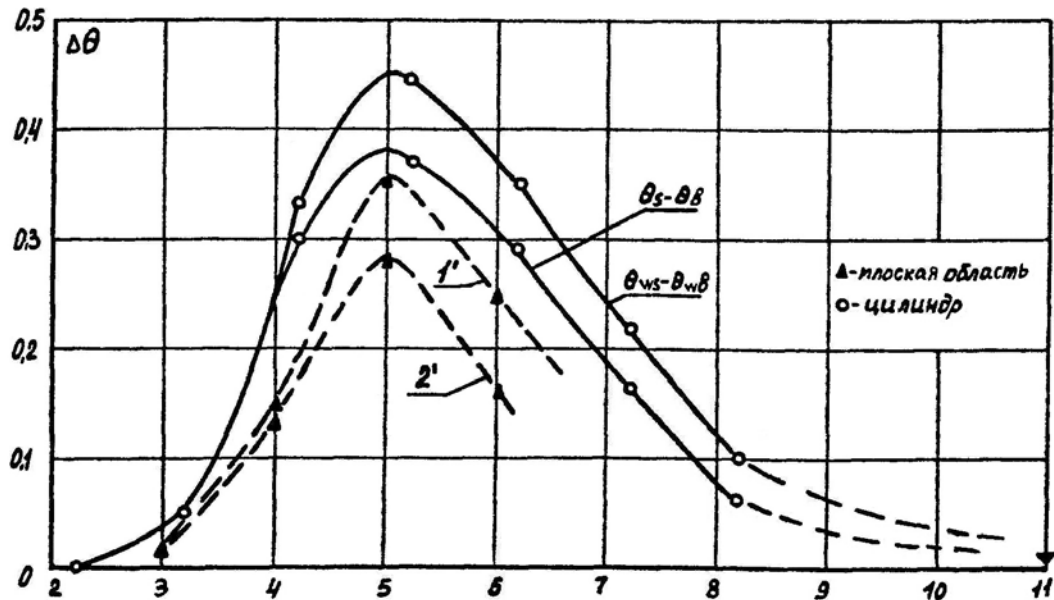
В рассматриваемом диапазоне $Ra_H^* = 10 \div 10^{10}$ можно выделить три характерных режима по числу Релея: режим теплопроводности ($Ra_H < 2 \cdot 10^3$), в котором среднее число Нуссельта равно среднему числу Нуссельта при переносе тепла теплопроводностью

$$\bar{Nu}_R = 2, \quad \bar{Nu}_H = 4,$$

промежуточный режим ($2 \cdot 10^3 < Ra_H^* < 10^5$) и режим пограничного слоя развитой конвекции ($Ra_H^* > 10^5$); в последнем режиме зависимость $\bar{Nu}_H(Ra_H^*)$ - степенная

$$\bar{Nu}_H = C(Ra_H^*)^{0.2} \quad (3.5)$$

Для цилиндрического сосуда получено $C \cong 0.87$. Пунктирной линией приведена для сопоставления полученная ранее (гл. II, § I, фиг. 22) зависимость \bar{Nu} для плоской области, отличающаяся при $Ra_H^* \geq 10^5$ значением постоянной $C \approx 0.55$.

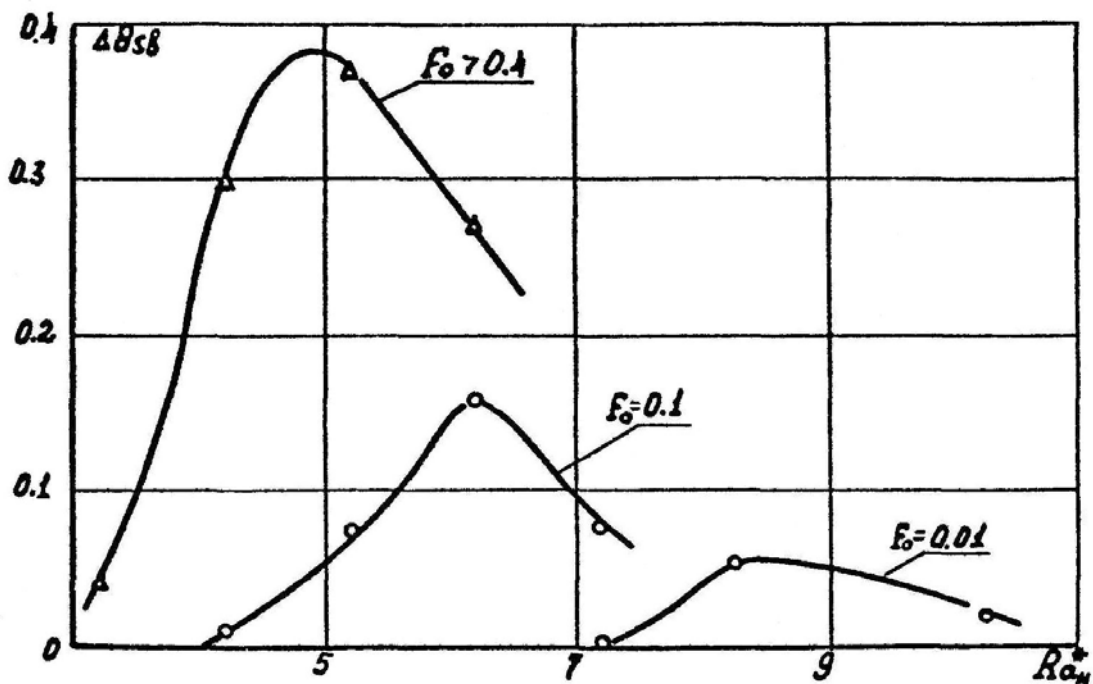


Фиг. 78. Предельная зависимость разностей температур по вертикали от числа Релея. Квазистационарный режим.

▼ - данные измерений [149]

Вертикальные разности температур при различных числах Релея даны на фиг.78. Можно видеть, что и в данном случае имеет место установленный ранее (гл. II § 2) эффект максимального температурного расслоения при числе Релея $Ra_H^* \cong 10^5$. Это значение числа Релея разделяет весь диапазон ламинарной конвекции на два режима: режим слабой конвекции, в котором перемешивание мало и преобладает температурное расслоение ($Ra_H^* \leq 10^5$) и режим сильной конвекции, в котором перемешивание преобладает над температурным расслоением ($Ra_H^* > 10^5$). Именно начиная со значения $Ra_H^* = 10^5$ зависимость средней теплоотдачи от числа Релея (фиг.77) приобретает типичный степенной вид (3.5). Из фиг. 78 видно, что в цилиндрическом сосуде вертикальные

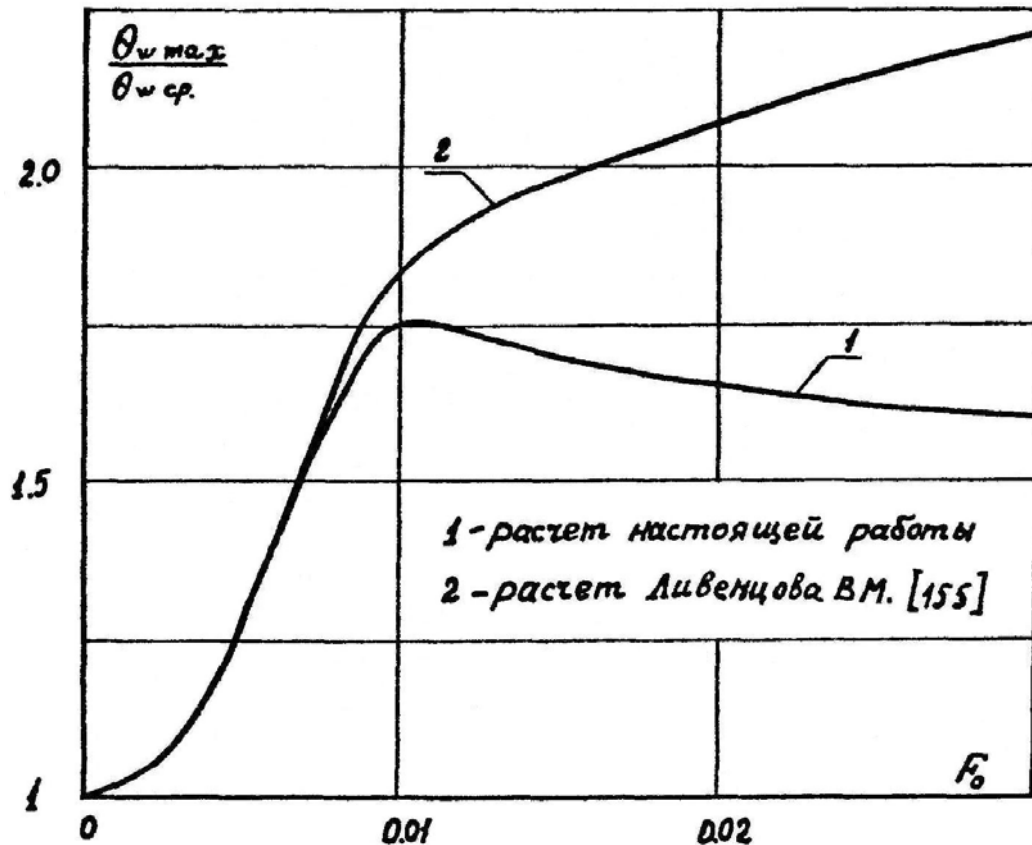
разности температур систематически выше, чем в плоской области. Зависимость $\Delta\theta(Ra_H^*)$ (фиг.78) строго справедлива лишь на квазистационарном режиме и является предельной характеристикой температурного расслоения, вызываемого конвекцией при боковом подводе тепла. В переходном режиме прогрева для различных значений числа Фурье аналогичные зависимости даны на фиг. 79. При уменьшении числа Фурье температурное расслоение уменьшается по сравнению с предельной характеристикой, причем максимальное значение разности температур по вертикали смещено в сторону бóльших чисел Релея. Значения вертикальной разности, измеренные на квазистационарном режиме в опытах [149, 150] при числах Релея $Ra_H^* = 10^{10} - 10^{11}$ весьма малы: $\Delta\theta \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$. На фиг. 78 дана экстраполяция результатов расчета к указанным опытным данным, позволяющая охватить практически весь диапазон ламинарной конвекции.



Фиг. 79. Изменение вертикальных разностей температур от числа Релея в различные моменты времени

4. Динамический и тепловой режим свободной поверхности жидкости.

Вклад конвекции в увеличение локальных и средних температур

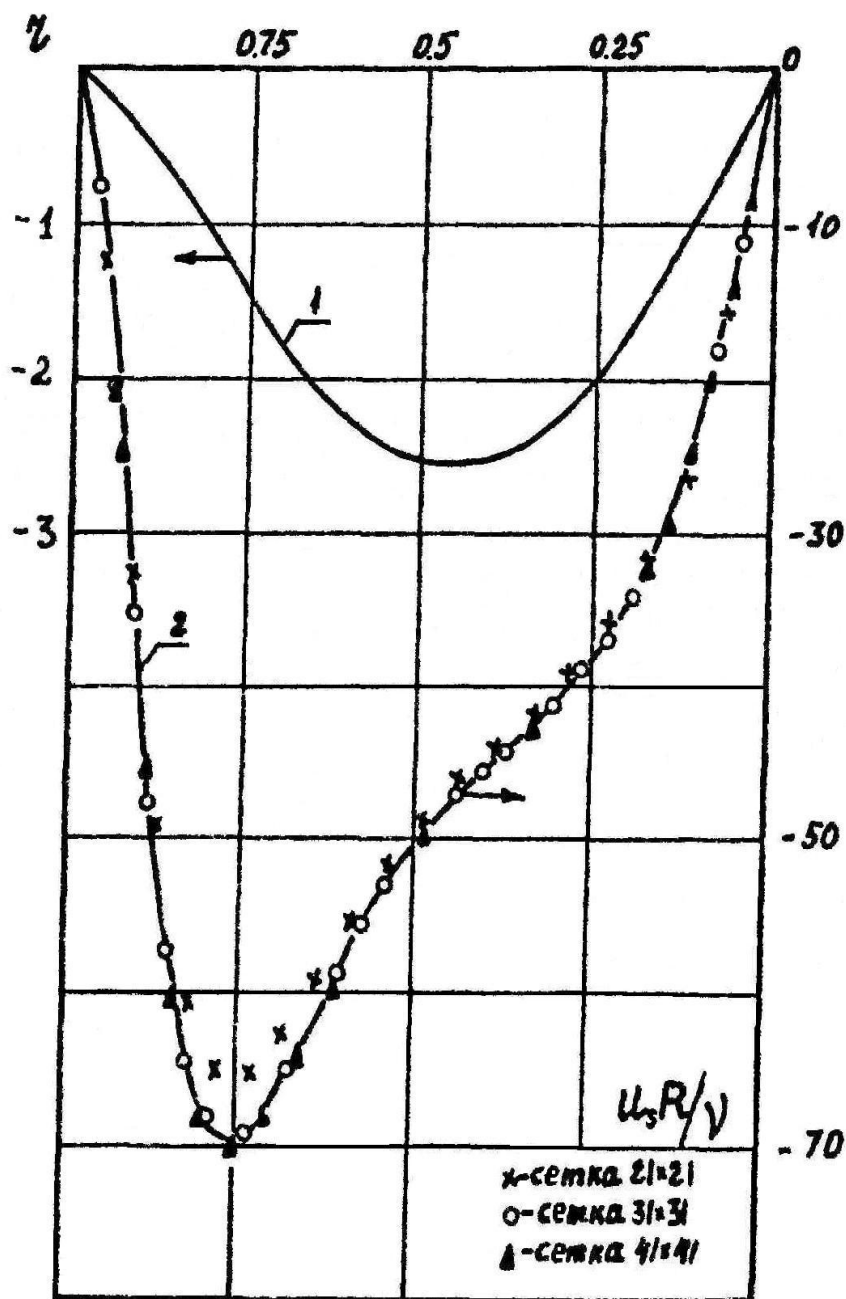


Фиг. 80. Сопоставление зависимости $\theta_{w_{max}} / \theta_{w_{cp}}(F_0)$, полученной в данной работе и работе [155]

На фиг.80 дано сопоставление относительной максимальной температуры свободной поверхности, рассчитанной в данной работе и в работе [155], где верхняя поверхность была твердой ($Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$, $Pr = 2$, $\frac{H}{R} = 2$). Влияние движений на поверхности начинается с некоторого момента времени и приводит к заметному уменьшению относительной максимальной температуры. На фиг. 81 даны профили горизонтальной составляющей скорости вдоль свободной поверхности при числах Релея $1.6 \cdot 10^4$ и $1.6 \cdot 10^7$ (показаны результаты расчета на различных сетках). При увеличении числа

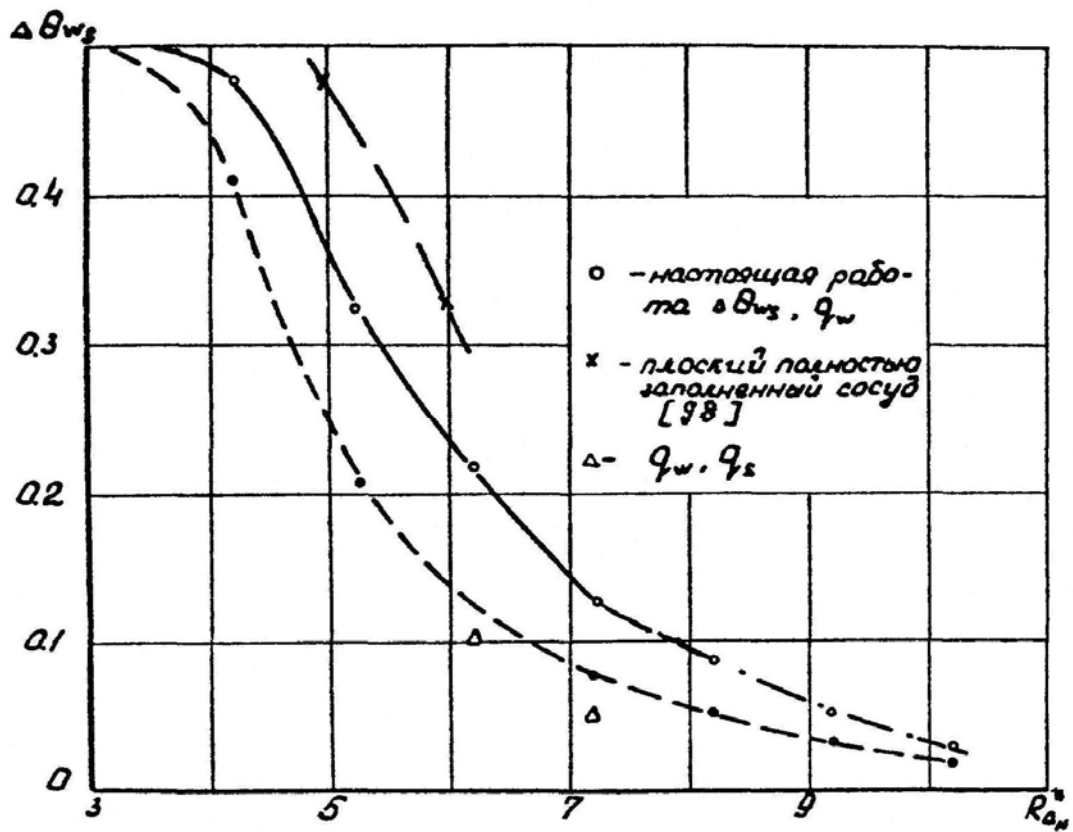
Релея до 10^{10} максимальная скорость движений на поверхности увеличивается до значений $Ra_s = \frac{u_s R}{\nu}$ порядка 10^3 ; положение максимума смещается ближе к стенке. Эти движения выравнивают температуру свободной поверхности, поэтому разности температур вдоль поверхности уменьшаются (фиг.82). Движения вблизи свободной поверхности выносят тепло от нагретой стенки к оси, в результате чего температура оси и средняя температура свободной поверхности увеличиваются.

Влияние конвекции на максимальную температуру свободной поверхности θ_{ws} видно из фиг.83, 84. При числах Релея $Ra_H^* \leq 10^7$ эта температура при наличии конвекции всегда выше, чем при переносе тепла путем теплопроводности, т.е. имеет место локальный перегрев свободной поверхности у стенки. При больших числах Релея ситуация оказывается не столь простой: начиная со значений числа $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^8$ при достаточно больших числах Фурье тепло отводится от поверхности жидкости у стенки и температура θ_{ws} становится меньше теплопроводностной (фиг.84). Однако, в начальные моменты времени для каждого из чисел Релея ($Ra_H^* > 10^8$) существует интервал времени, внутри которого температура свободной поверхности у стенки в связи с эффектами "натекания" выше теплопроводностной. Граница режимов локального перегрева дана на фиг. 85.

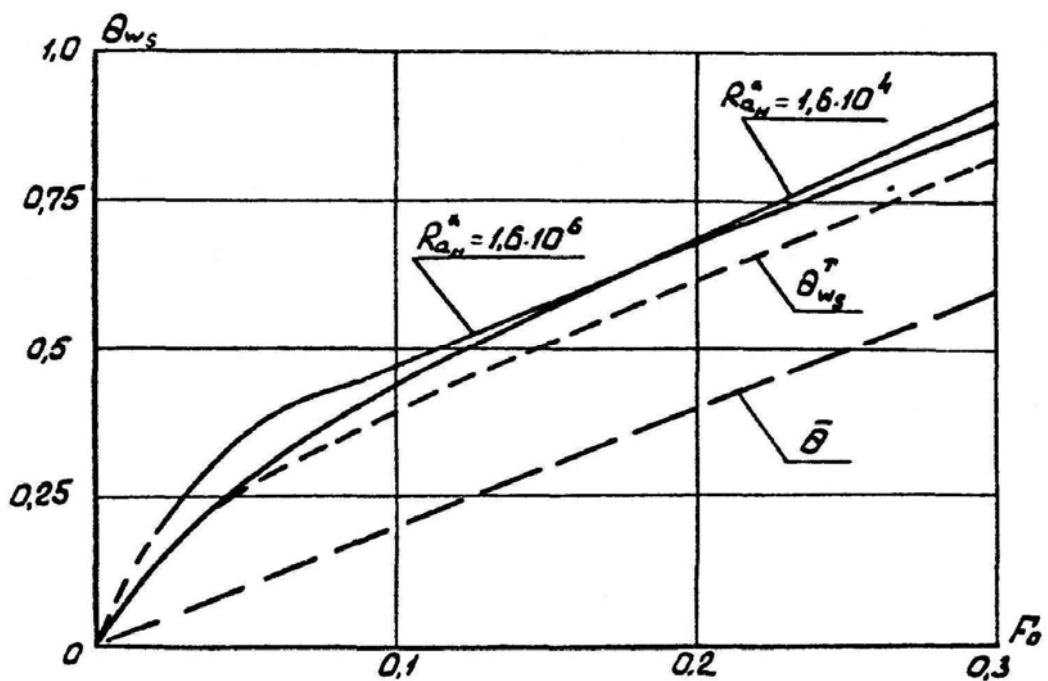


Фиг. 81. Изменение скорости горизонтальных движений на свободной поверхности

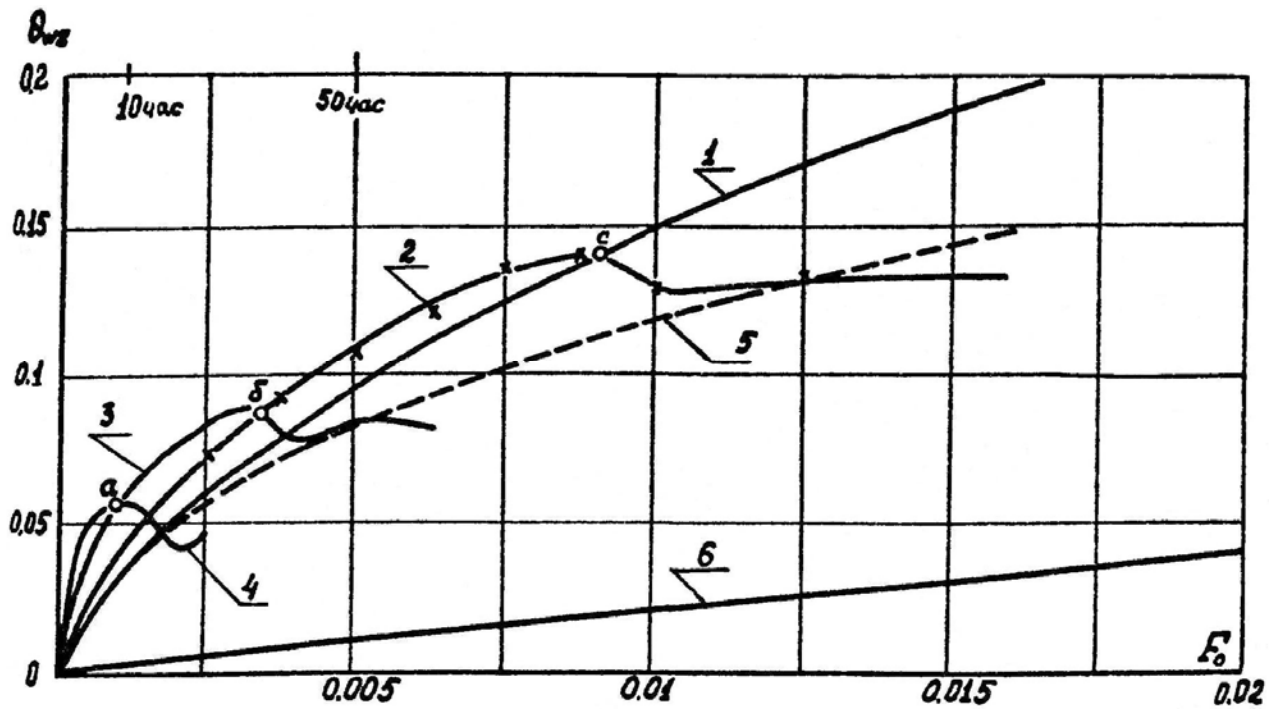
$$1 - Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4, \quad 2 - Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$$



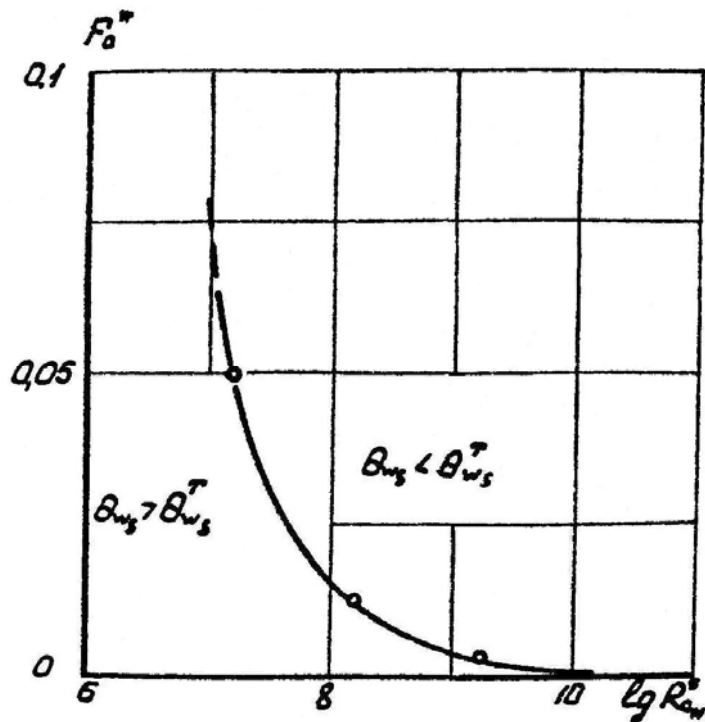
Фиг. 82. Разности температур вдоль свободной поверхности жидкости в зависимости от числа Релея. Квазистационарный режим.



Фиг. 83. Изменение во времени температуры свободной поверхности у стенки при $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4, 1.6 \cdot 10^6$

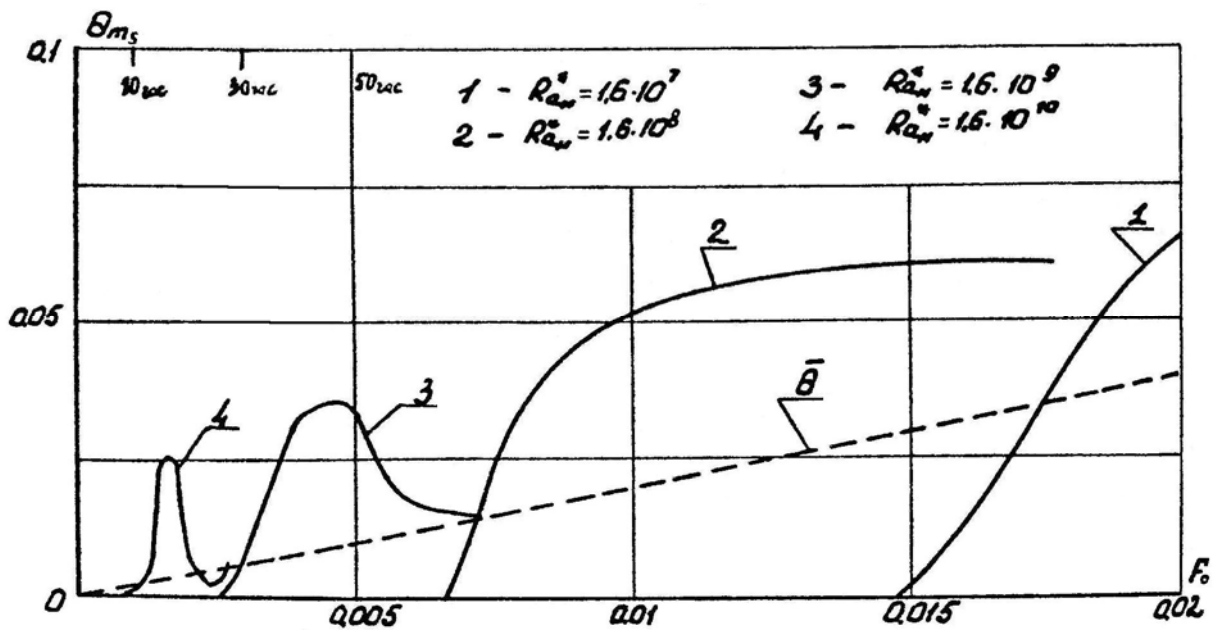


Фиг. 84. Изменение во времени температуры свободной поверхности у стенки Ra_H^* 1– $1.6 \cdot 10^7$, 2– $1.6 \cdot 10^8$, 3– $1.6 \cdot 10^9$, 4– $1.6 \cdot 10^{10}$, 5 – теплопроводность, 6 – среднemasовая температура жидкости



Фиг. 85. Граница режима локального перегрева свободной поверхности у боковой стенки

Температура свободной поверхности у оси ведет себя иначе (фиг.86). Конвекция всегда приводит к увеличению этой температуры по сравнению со случаем теплопроводности, в связи с выносом тепла к поверхности из основной массы жидкости и дополнительным переносом тепла конвекции вдоль свободной поверхности. Примеры распределения температуры вдоль всей свободной поверхности можно видеть на фиг.71а, б.



Фиг.86. Температура свободной поверхности у оси при различных числах Релея

Наиболее важной величиной для расчета увеличения давления в сосудах при длительном прогреве является средняя температура свободной поверхности. Изменение во времени этой величины при различных числах Релея дано на фиг. 87. Пунктирной линией дано изменение во времени этой температуры ($\bar{\theta}_{s_0}$) при переносе тепла путем теплопроводности (для рассматриваемого здесь случая бокового подвода тепла эта температура равна среднemasсовой температуре жидкости $\bar{\theta}$). Основной вывод из результатов фиг.87 таков: влияние конвекции всегда приводит к увеличению средней температуры свободной поверхности по сравнению со случаем, когда конвекция отсутствует. Это значит, что изменение во времени средней

температуры свободной поверхности при наличии конвекции можно представить в виде:

$$\bar{\theta}_s = \bar{\theta}_{s_0} + \Delta\theta, \quad \Delta\theta > 0 \quad (3.6)$$

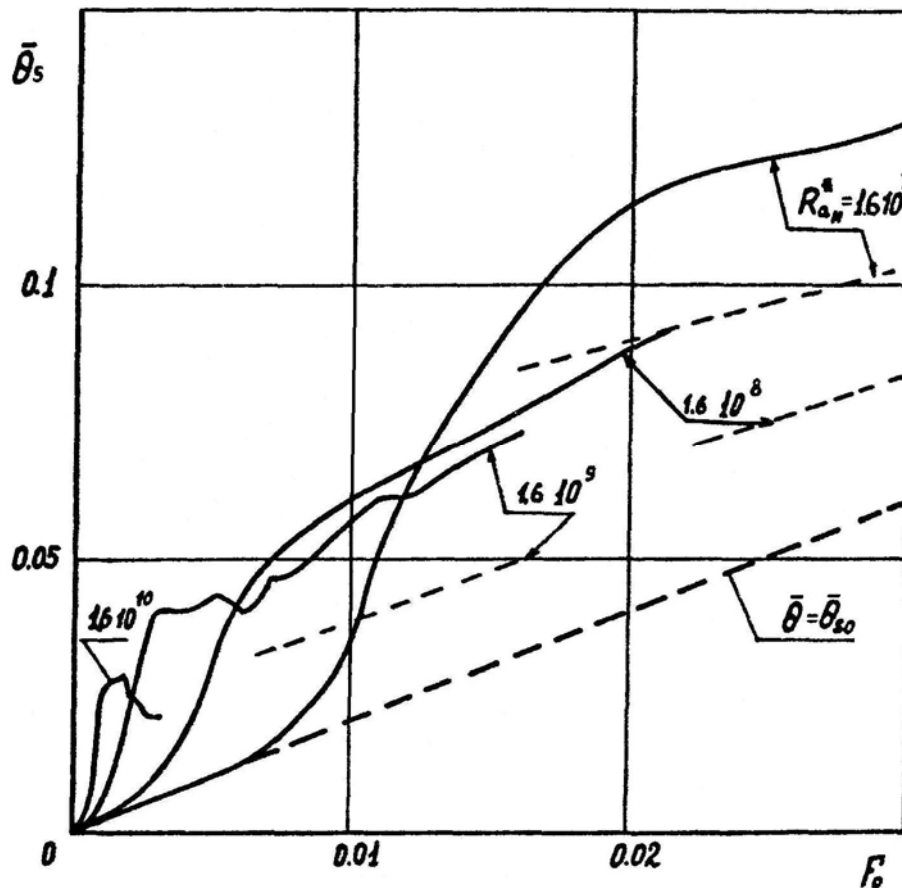
где $\bar{\theta}_{s_0}$ - изменение во времени средней температуры свободной поверхности при переносе тепла теплопроводностью

$$\bar{\theta}_{s_0} = f(F_0), \quad (3.7)$$

где $\Delta\theta$ - увеличение температуры свободной поверхности за счет конвекции. Величина $\Delta\theta$ является довольно сложной функцией чисел Фурье, Релея, Прандтля и геометрии

$$\Delta\theta = \varphi(F_0, Ra^*, Pr, H/R) \quad (3.8)$$

На квазистационарном режиме прогрева влияние числа Фурье и числа Прандтля на величину $\Delta\theta$ отсутствует, причем величина $\Delta\theta$ имеет максимальное значение при числе $Ra_H^* = 10^5$. Число Релея, соответствующее максимальной величине $\Delta\theta$ при уменьшении расчетной длительности прогрева увеличивается. Этот результат является новым в сравнении с приближенной методикой расчета [152], согласно которой величина $\bar{\theta}_s$ монотонно уменьшается при увеличении числа Релея во всем диапазоне чисел Фурье. Данные по $\bar{\theta}_s$ для ламинарного режима, рассчитанные по методике [152], показаны на фиг. 87 пунктирными линиями.



Фиг. 87. Изменение во времени средней температуры свободной поверхности при различных числах Релея

Влияние конвекции на увеличение средней температуры свободной поверхности при боковом подводе тепла может быть велико: для представляющих интерес на практике значений числа Фурье $F_0 \leq 0.01$ отношение $\frac{\Delta\theta}{\bar{\theta}_{s0}}$ при больших числах Релея, согласно фиг. 87, составляет несколько единиц. Вместе с тем можно отметить, что ввиду инерционности конвекции при числах Релея $Ra_H^* < 10^7$ и $F_0 \leq 0.005$ влиянием конвекции на величину θ_s можно пренебречь.

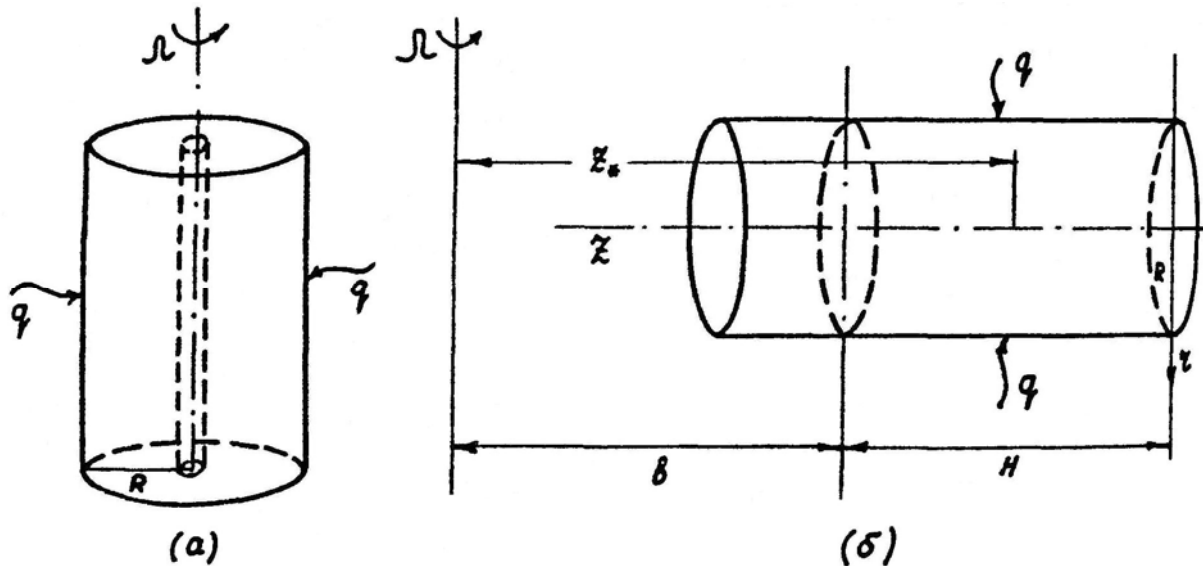
Для квазистационарных режимов при большой длительности прогрева увеличение давления в связи с влиянием конвекции должно быть максимальным при числах Релея $Ra_H^* \approx 10^5 - 10^6$. Поэтому для режимов

практической невесомости ($Ra_H^* \approx 0$) при $Ra_H^* < 10^5$ увеличение перегрузки должно приводить к увеличению $\Delta\theta$ и к росту давления. Для режимов пониженной гравитации при $Ra_H^* > 10^6$ увеличение перегрузки должно приводить к уменьшению величины $\Delta\theta$ и к понижению давления. Последний результат подтверждается в лабораторных измерениях [162, 164].

5. Особенности нестационарной естественной конвекции при наличии «градиента гравитации»

«Градиент гравитации» возникает при создании искусственного гравитационного поля путем вращения аппарата вокруг центра масс (либо при каких-либо других программных разворотах аппарата). Вращение может осуществляться как вокруг продольной оси сосуда Oz , так и вокруг оси, перпендикулярной оси Oz (фиг.88), либо вокруг некоторой произвольной оси. При подводе тепла к вращающемуся сосуду с жидкостью возникает довольно сложное конвективное движение, имеющее в общем случае трехмерный характер в связи с совместным действием центробежных сил и сил Кориолиса. Одним из основных эффектов вращения является изменение центробежной силы поперек оси вращения. Обычно при лабораторном моделировании или численном изучении конвективного теплообмена переменная массовая сила заменяется эквивалентной ей в среднем силой тяжести.

В схеме (а), показанной на фиг. 88, когда сосуд подогревается со стороны боковой поверхности и вращается вокруг продольной оси, основной механизм движения связан с потерей устойчивости равновесия. Условия возникновения конвекции в этом случае (зависимость критического числа Релея от числа Тейлора $T = 4 \frac{\Omega^2 R^4}{\nu^2}$) рассматривались в работе [173]. Применительно к рассматриваемой схеме (б) (фиг.88) исследовалась лишь стационарная задача о естественной конвекции на вертикальной пластине в рамках пограничного слоя [174].



Фиг. 88. Расчетные схемы конвективного теплообмена во вращающихся сосудах

Предпринимаемый нами подход связан с решением нестационарных уравнений Буссинеска в предположении осевой симметрии течения. При наличии переменной силы $g(z) \sim \Omega^2 z$ за масштаб принимается ускорение, отнесенное к средней точке жидкости $g_* = \Omega^2 \left(b + \frac{H}{2} \right) = \Omega^2 z_*$. Число Грасгофа в исходной системе уравнений Буссинеска будет равно

$$Gr_R^* = \frac{g\beta R^4}{\nu^2} q = \frac{g_*\beta R^4}{\nu^2} \cdot q \cdot \frac{g}{g_*} = Gr_R^{**} \cdot \frac{g}{g_*}, \quad (3.9)$$

где g - местное ускорение в данной точке

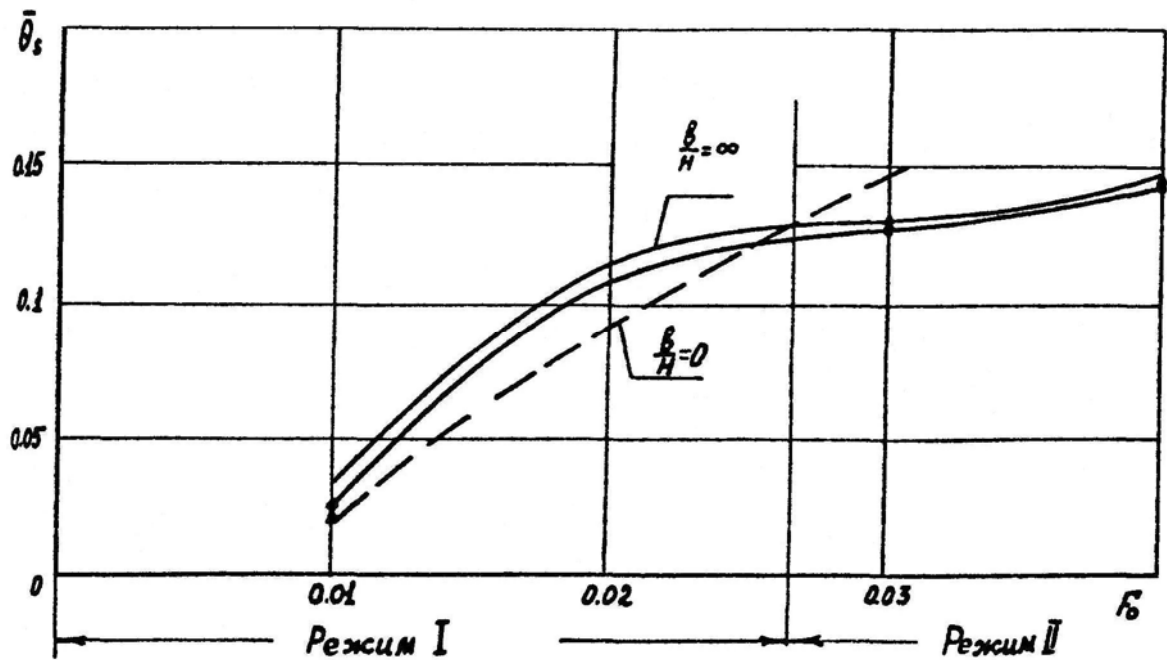
$$g = \Omega^2 (b + H - z)$$

Функция $\frac{g}{g_*} = f(z)$, учитывающая изменение ускорения вдоль оси, имеет вид

$$\frac{g}{g_*} = \frac{b + H - z}{b + H/2} = \frac{1 + \frac{b}{H} - \frac{z}{H}}{\frac{1}{2} + b/H}, \quad (3.10)$$

причем при $z = \frac{H}{2}$ имеем $g/g_* = 1$. При $\frac{b}{H} \rightarrow \infty$ имеем $Gr_R^* = Gr_R^{**}$ - случай постоянной массовой силы, при $\frac{b}{H} = 0$ ось вращения расположена на свободной поверхности жидкости; относительная величина ускорения $\frac{g}{g_*}$ изменяется от нуля на свободной поверхности до двух на дне сосуда.

Основной результат - влияние параметра $\frac{b}{H}$ на изменение во времени средней температуры свободной поверхности при $Ra_R^* = 1.6 \cdot 10^7$ ($b = 0, 0.5, 1.0, \infty$) - приведен на фиг.89. "Градиент гравитации" приводит к уменьшению средней температуры свободной поверхности в начальном режиме по времени (режим I); при больших значениях числа Фурье (режим II) температура свободной поверхности при наличии "градиента гравитации" увеличивается. Для объяснения этих результатов обратимся к рассмотрению локальных эффектов конвекции при $\frac{b}{H} = 0$. В этом случае местные числа Релея вдоль оси сосуда изменяются от нуля на свободной поверхности до величины $3.2 \cdot 10^7$ у дна; таким образом, имеется спектр конвективных движений с различными числами Релея, временные масштабы которых определяются диаграммой Ra^*, F_0 (фиг.75).

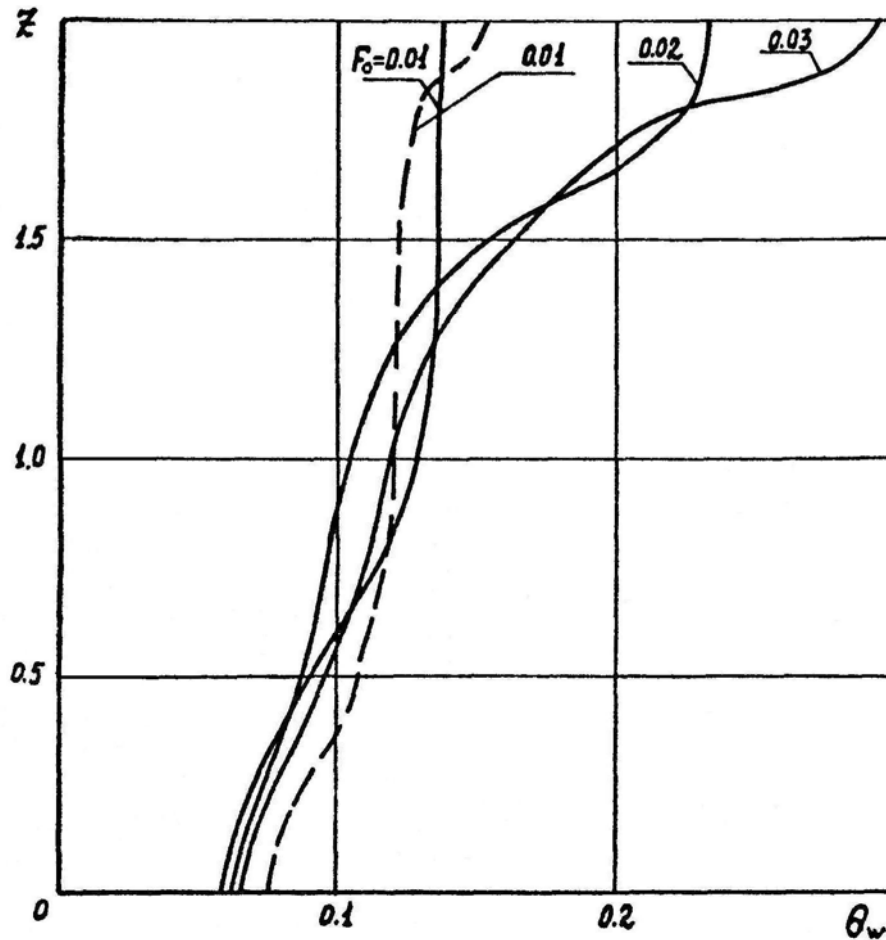


Фиг. 89. Увеличение средней температуры свободной поверхности при различном расположении оси вращения

$$\frac{b}{H} \begin{cases} \text{---} & 0 \\ \text{---} \circ \text{---} & 0,5 \\ \text{---} \triangle \text{---} & 1,0 \\ \text{---} \bullet \text{---} & \infty \end{cases}$$

Жидкость вблизи свободной поверхности при $\frac{b}{H} = 0$ находится практически в «условиях невесомости». Это значит, что переходный режим развития конвекции непосредственно вблизи свободной поверхности велик; поэтому на начальном участке по времени наличие "градиента гравитации" приводит к уменьшению температурного расслоения. Это можно видеть из фиг. 90, где даны вертикальные профили температур вдоль стенки и оси сосуда. В частности, при $\frac{b}{H} = 0$ в связи с подавлением конвекции у свободной поверхности, отсутствует характерный в начальные периоды времени "режим натекания" (этот режим реализуется со значительным опозданием по отношению к рассмотренному ранее случаю $\frac{b}{H} = \infty$). Прогретый слой на оси также появляется значительно позже и несет намного меньший запас тепла

(фиг.91). Поэтому в режиме I температура свободной поверхности при наличии градиента гравитации ниже.

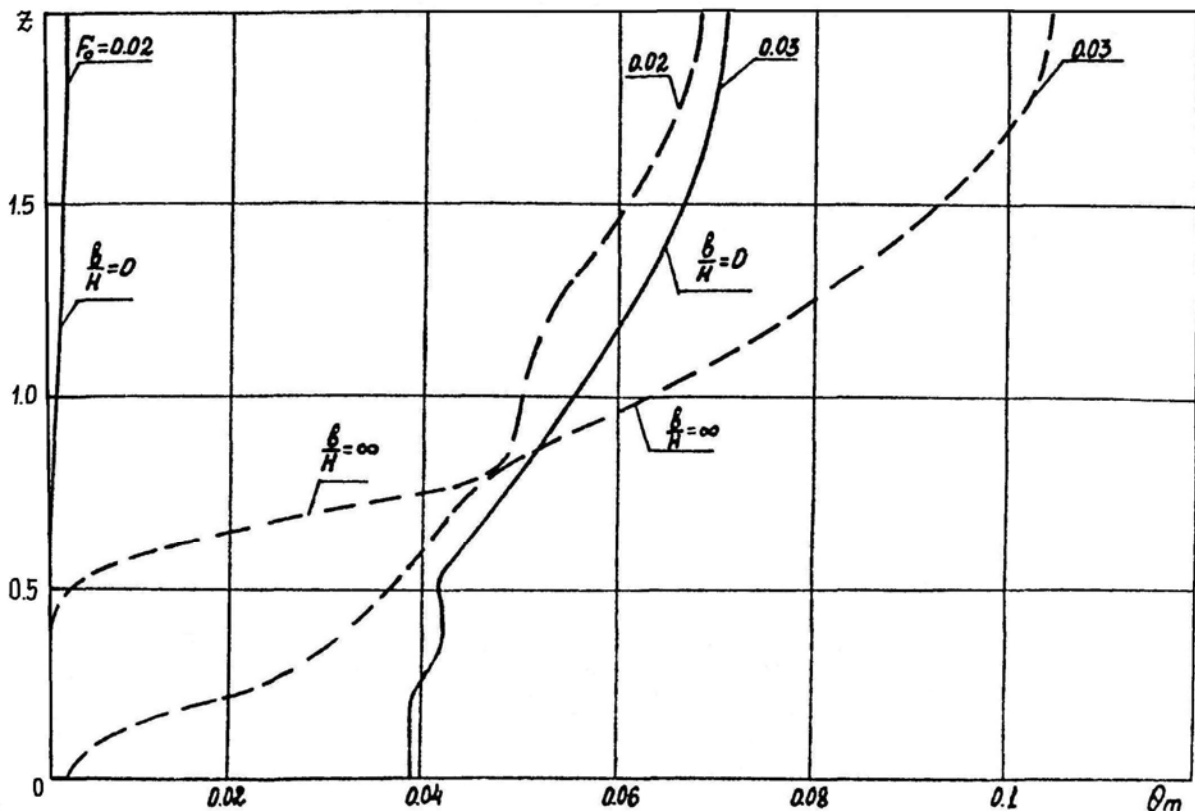


Фиг. 90. Вертикальные профили температур на боковой поверхности сосуда $Ra_H^{**} = 1.6 \cdot 10^7$

— $b/H = 0$
 --- $b/H = \infty$

При больших числах Фурье уже сформировавшаяся конвекция при $\frac{b}{H} = \infty$ отводит тепло от нагретой стенки, а конвекция при $\frac{b}{H} = 0$ только начинает развиваться, в связи с чем имеет место «натекание» нагретой жидкости и резкое увеличение температуры свободной поверхности у стенки (фиг. 90). Это и приводит к более быстрому увеличению температуры $\bar{\theta}_s$ в режиме II (фиг. 89).

Рассмотрим условия, при которых можно использовать осреднение массовой силы. Из фиг.89 видно, что основное влияние параметра $\frac{b}{H}$ сосредоточено между предельной величиной $\frac{b}{H} = 0$ и значениями $\frac{b}{H} = 0.5 \div 1$, причем величина $\bar{\theta}_s$ при изменении $\frac{b}{H}$ в диапазоне $\frac{b}{H} = 1 \div \infty$ различается слабо. Таким образом, при наличии «градиента гравитации» приближением эквивалентной в среднем массовой силы наверняка можно пользоваться, если ось вращения расположена от поверхности на расстоянии около одного или половины калибра массива жидкости. При увеличении числа Релея этот вывод имеет большую силу, так как протяженность "зоны невесомости" у свободной поверхности уменьшается.



Фиг. 91. Вертикальные профили температур на оси сосуда $Ra_H^{**} = 1.6 \cdot 10^7$

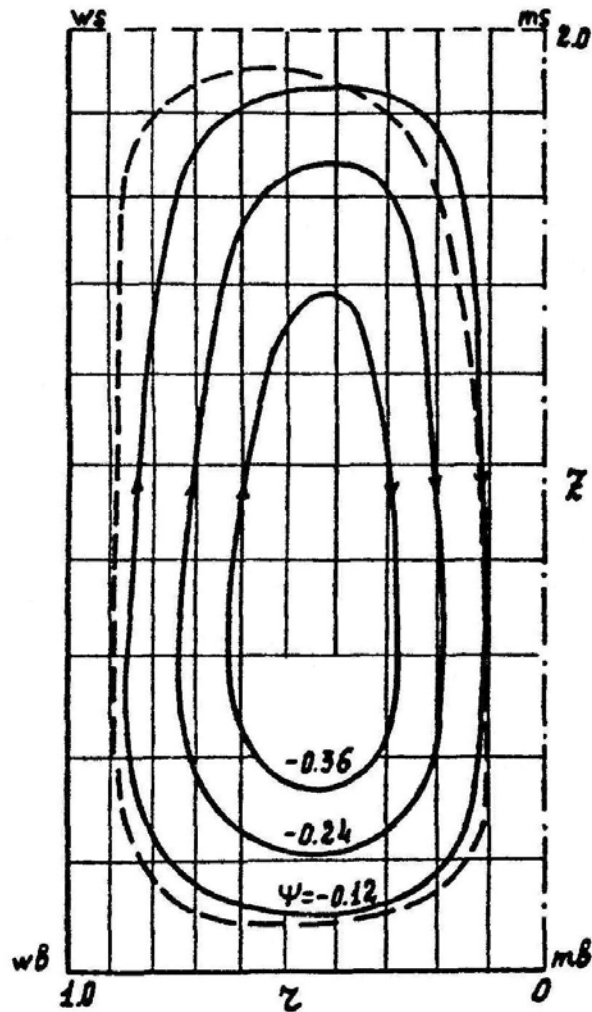
§ 2. Прогрев топлива при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям ($\gamma_s = \gamma_w = 1, \gamma_b = 0$)

1. Структура переходного режима. Влияние потока тепла, подводимого сверху

Не останавливаясь подробнее на режимах слабой конвекции, рассмотрим режимы прогрева при числе Релея $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$ (фиг. 93-100).

Переходный режим в данном случае нужно разделить на два режима, которые назовем условно внутренним и внешним ^{х)}. Во внутреннем переходном режиме на боковой поверхности формируется пограничный слой; нагретая жидкость поднимается вверх и (вместе с жидкостью, прогретой вблизи свободной поверхности путем теплопроводности) образует верхний прогретый слой, который перемещается вниз (фиг. 93). Из сопоставления этих профилей с профилями при боковом подводе тепла (фиг. 66) можно видеть, что характерные режимы конвекции и их длительность остаются примерно теми же; они и образуют внутренний переходный режим. В частности, из фиг. 93 можно видеть, что при $F_0 < 0.01$ конвекция слабо влияет на поле температур. Нерегулярный временной ход температурных профилей на начальном участке по времени связан с периодическим образованием вторичных токов, структура которых обсуждается несколько ниже. Внутренний переходный режим заканчивается, когда прогретый слой, образованный конвекцией, достигает дна ($F_0 \cong 0.05$, фиг. 93) и сопровождается формированием конвективного ядра. Границей внутреннего переходного режима в диапазоне чисел Релея и Фурье в первом приближении может служить зависимость (3.4).

^{х)} Это деление переходного режима связано с наличием двух характерных масштабов времени τ_{q_w} (конвективного) и τ_{q_s} (теплопроводностного), причем $\tau_{q_w} < \tau_{q_s}$.

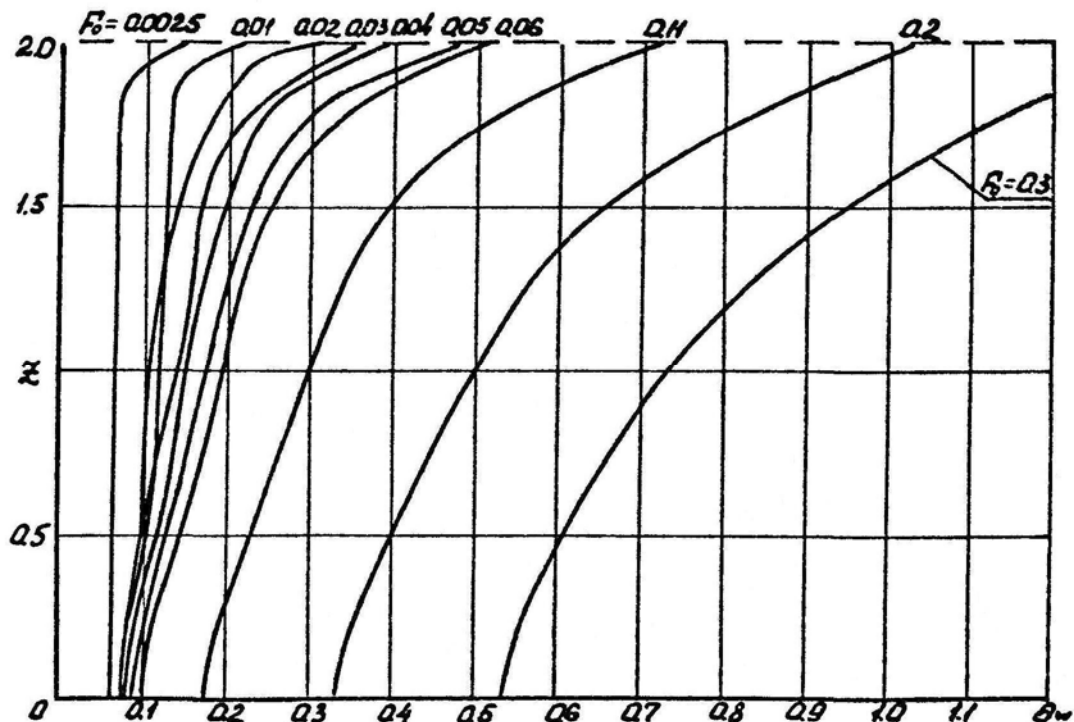


Фиг. 92. Отклонение линий тока основного движения при подводе тепла к свободной поверхности сверху ($Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4$, $F_0 = 0.5$)

Вертикальная структура поля температур в конце этого режима условно разделяется на две зоны: 1) верхний слой, прогреваемый со свободной поверхности; вертикальный градиент температуры в этом слое создает устойчивое расслоение плотности и значительно ослабляет конвекцию, поэтому вклад молекулярной теплопроводности здесь велик; 2) конвективное ядро с профилем температуры, близким к линейному. Условная граница этих зон по мере продвижения вниз прогретого слоя, оттесняющего конвекцию, смещается ко дну сосуда.

Внешний переходный режим связан со взаимодействием прогретого слоя и основного конвективного движения; его длительность пропорциональна

времени прогрева жидкости по вертикали путем теплопроводности. Из анализа фиг.93 следует, что описание вертикальных профилей путем введения эффективного коэффициента теплопроводности подобно тому, как это выполнено в работе [157] и ряде других работ, возможно лишь в самом начальном режиме прогрева.

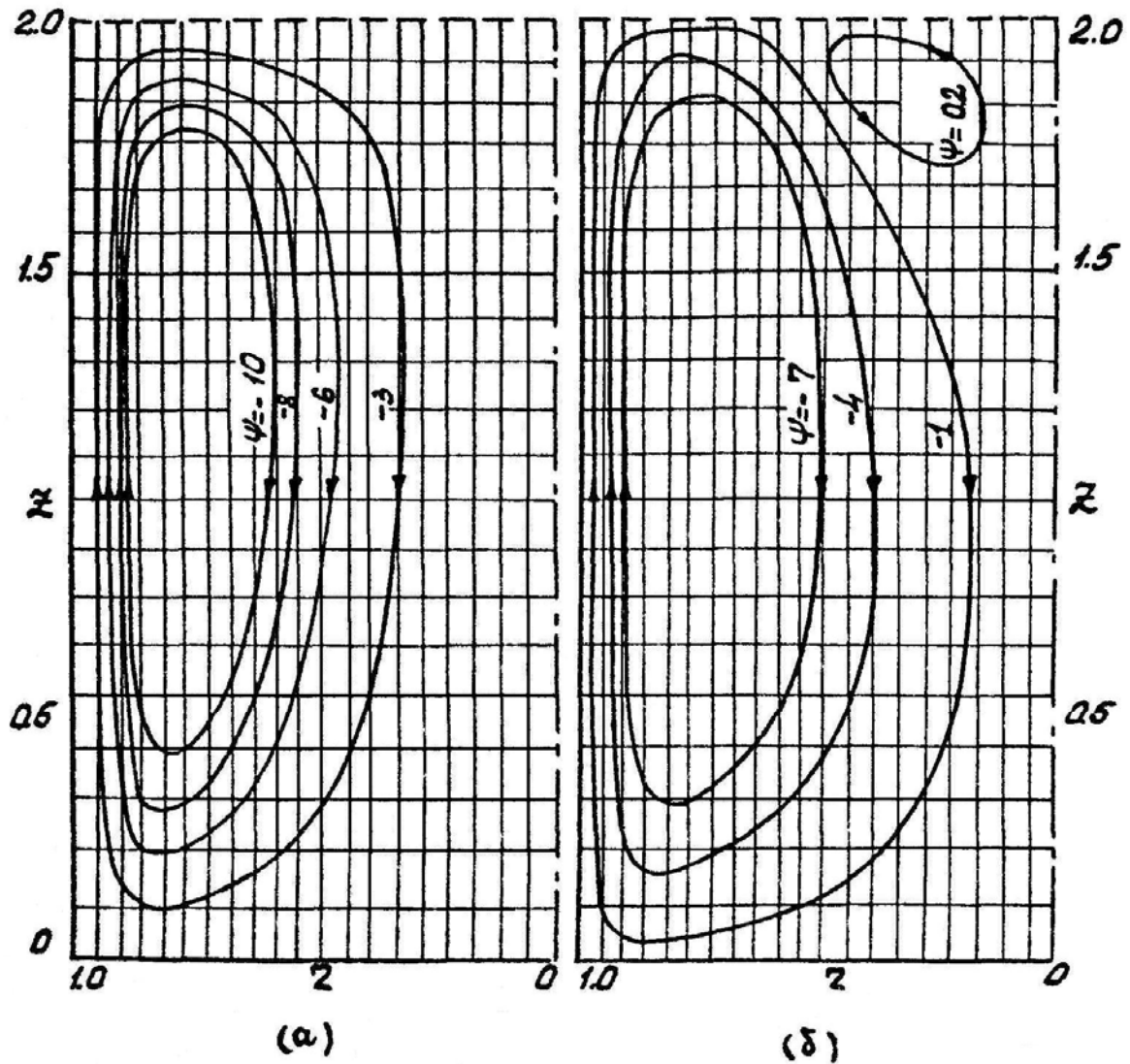


Фиг. 93. Вертикальные профили температур на стенке при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$

Рассмотрим особенности структуры движения. Прогрев жидкости во внутреннем переходном режиме сопровождается колебаниями разностей температуры по горизонтали и по вертикали, которые связаны с периодическим образованием вблизи свободной поверхности вторичных движений. Картины линий тока в начальный момент развития конвекции и образование вторичных движений показаны на фиг.94а,б. В начальном режиме формирования пограничного слоя влияние вертикального градиента температур, связанного с подводом тепла к свободной поверхности сверху, сводится к отклонению линий

тока основного движения к оси сосуда. Для режима слабой конвекции (фиг.92) этот эффект является основным. Ввиду отклонения линий тока от боковой поверхности подвод тепла непосредственно к угловой точке уменьшается: основной конвективный поток направлен теперь в некоторую зону свободной поверхности между стенкой и осью. Это вызывает местное увеличение температуры свободной поверхности и вблизи нее, как показано на фиг.95а. Появление вторичных движений связано с отрывом от свободной поверхности пограничного слоя, который формируется у боковой стенки и сливается вверх. Отрыв возникает периодически в результате тормозящего действия обратного градиента температур в тот момент, когда интенсивность основного конвективного движения достигает максимального значения ^{х)}. Обратный градиент температуры действует при этом аналогично обратному градиенту давления, вызывающему отрыв пограничного слоя при вынужденном движении на плоской пластине; однако здесь этот эффект имеет более сложный характер ввиду изменения во времени интенсивности конвекции, вертикального градиента температуры и т.д. Последовательные этапы дальнейшего развития движения во времени для первого периода колебаний приведены на фиг. 96, 97 (числа Фурье $F_0 = 0.025, 0.03, 0.035$ соответственно), Максимальной интенсивности вторичные движения достигает при $F_0 = 0.025$ (фиг. 96 а).

^{х)} Этот механизм образования вторичных движений отличается от рассмотренного выше в § 1 данной главы.

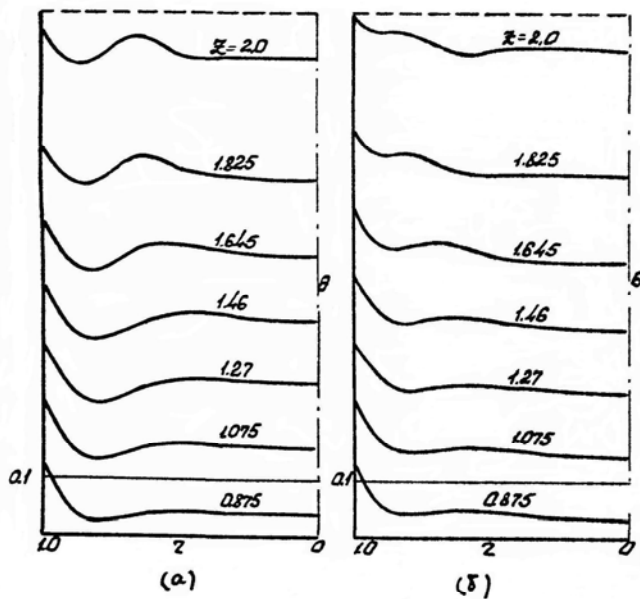


Фиг. 94. Развитие движения в сосуде при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$

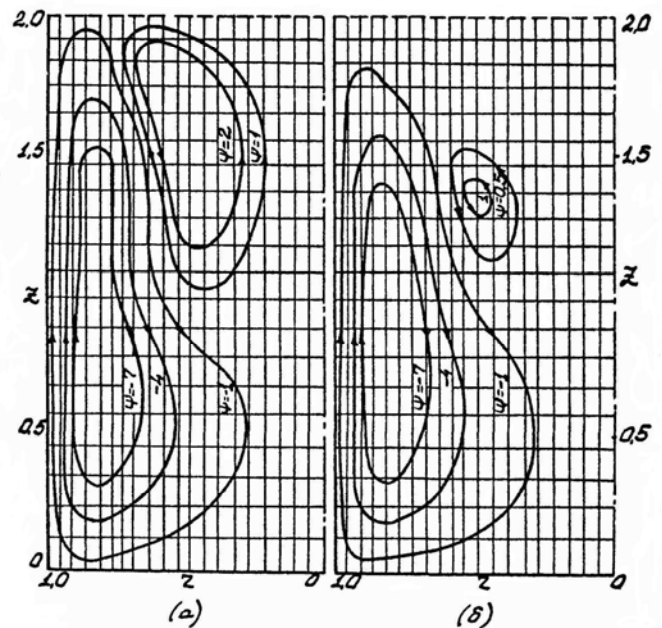
(а) $F_0 = 0.01$, (б) $F_0 = 0.02$

Уменьшение интенсивности основного движения и наличие на свободной поверхности градиентов температур, создающих подъемные силы, которые действуют против направления вторичных токов, приводят в дальнейшем к затуханию последних (фиг. 96 б, $F_0 = 0.03$); горизонтальные профили температур в этот момент времени даны на фиг. 95 б. Так как при $F_0 = 0.035$ вторичные движения отсутствуют (фиг. 97), то основное движение снова ускоряется; начинается новый период колебаний, но с меньшей амплитудой.

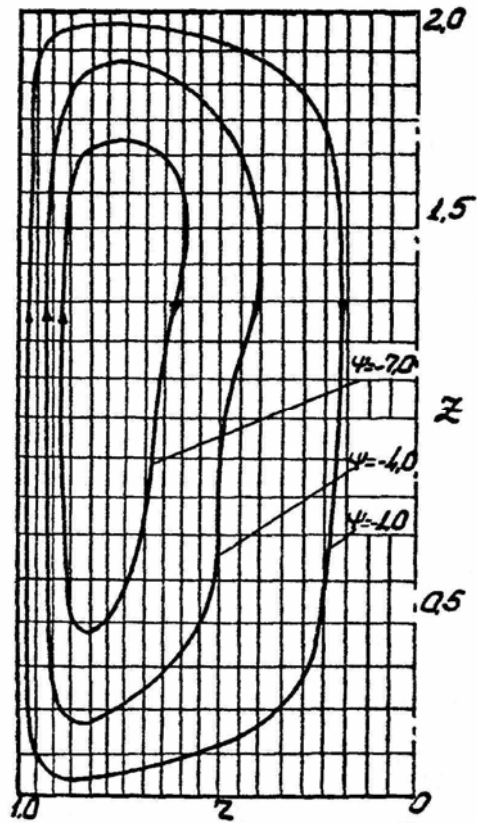
Наиболее наглядно вся картина развития и затухания вторичных движений видна на графике изменения во времени максимального значения модуля функции тока (фиг. 98). Интенсивность основного движения дана кривой 1, вторичного – кривой 2. Зависимость $|\Psi|_m(F_0)$ для рассмотренного ранее случая $\gamma_s = 0$ дана на фиг. 98 пунктирной линией 3. Заметное ослабление интенсивности конвенции в данном случае связано с двумя основными эффектами. Первый - это стабилизирующее действие подвода тепла сверху. Второй эффект - перераспределение тепла, поступающего от боковой поверхности и уменьшение разностей температур по горизонтали (т.е. уменьшение подъемных сил). Этот эффект является следствием отклонения линий тока от боковой поверхности сосуда.



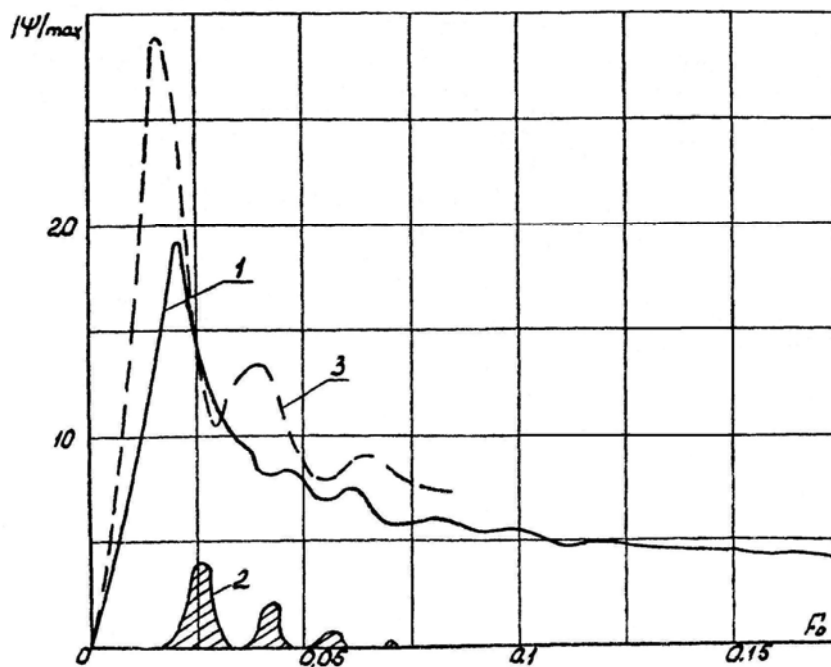
Фиг. 95. Профили температур по радиусу сосуда при наличии подвода тепла к свободной поверхности $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$



Фиг. 96. Линии тока. Затухание вторичных движений у свободной поверхности



Фиг. 97. Линия тока $F_0 = 0.03$, $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$



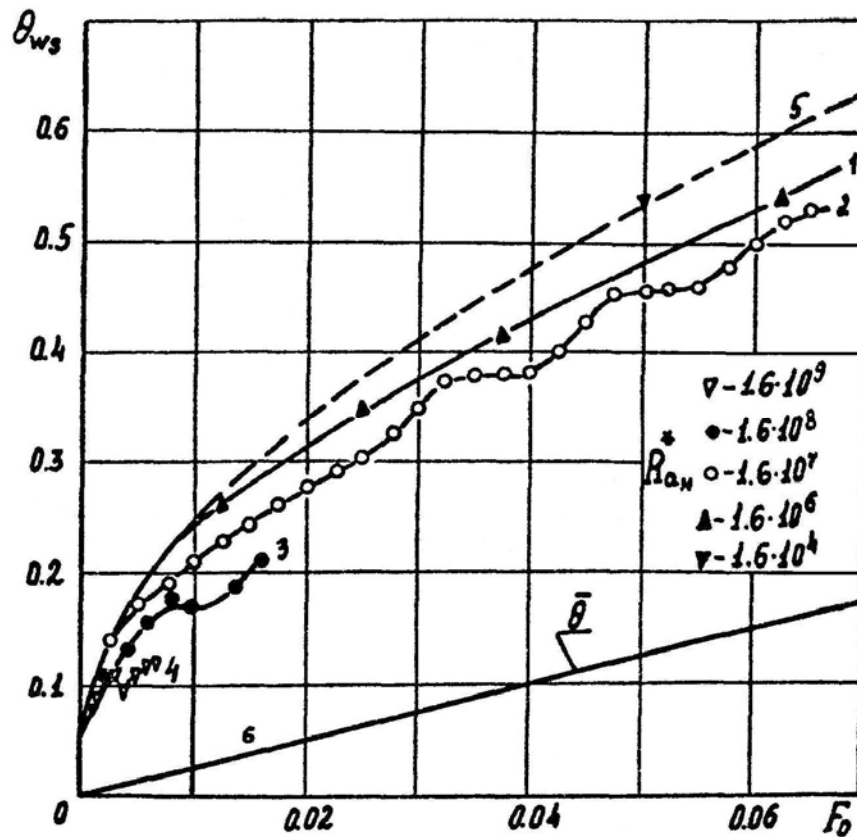
Фиг. 98. Изменение во времени амплитуды основного и вторичного движений при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям
(1 - основное движение, 2 - вторичное,
3 - основное движение при боковом подводе тепла)

2. Вклад конвекции в увеличение температуры свободной поверхности.

На фиг. 99 дано изменение во времени максимальной температуры свободной поверхности у стенки θ_{w_s} при числах Релея (линии 1-4) ^{x)}. Пунктирной линией 5 показано изменение $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7 - 1.6 \cdot 10^{10}$ во времени максимальной температуры свободной поверхности при переносе тепла путем теплопроводности; линия 6 дает изменение среднemasсовой температуры жидкости $\bar{\theta}$. Из сопоставления с аналогичными зависимостями при боковом подводе тепла (фиг.84) можно установить новый факт: влияние конвекции во всех режимах по времени и при всех числах Релея приводит к уменьшению максимальной температуры свободной поверхности по сравнению со случаем теплопроводности; это значит, что эффект локального перегрева отсутствует. Причиной локального перегрева при боковом подводе тепла являлось "натекание" нагретой жидкости к угловой точке на начальном участке по времени. В данном случае "натекание" не происходит, так как слабые конвективные токи оттесняются от боковой поверхности. При этом поступающее к свободной поверхности тепло распределяется более равномерно, и разности температур вдоль свободной поверхности уменьшаются примерно вдвое по сравнению с тем случаем, когда имеется только боковой поток, как показано на фиг.82. Таким образом, действие подвода тепла сверху, как и увеличение числа Релея, существенно выравнивает температуру свободной поверхности ^{xx)}.

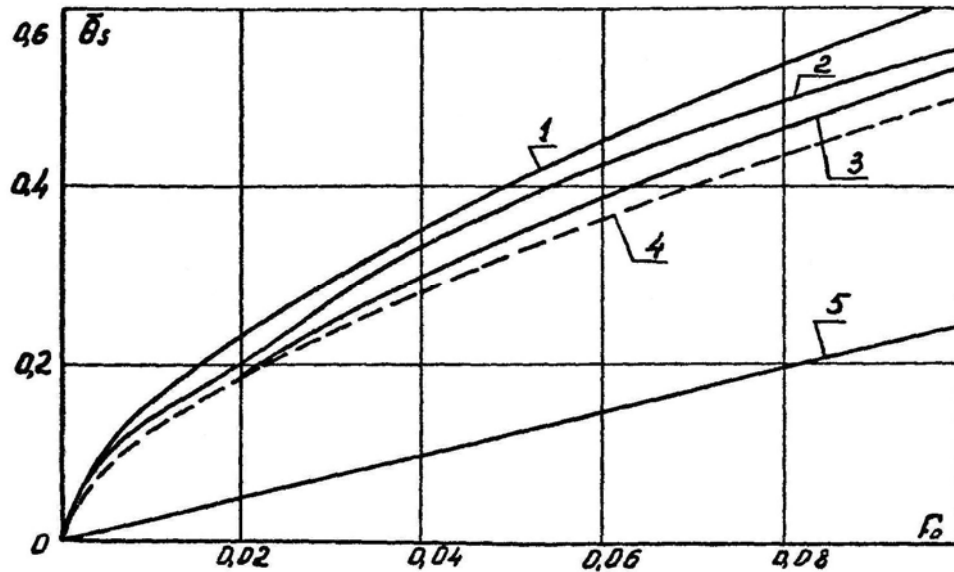
^{x)} Расчеты при $Ra_H^* > 1.6 \cdot 10^7$ выполнены на сетке 41x41 ($m_1 = n_1 = 0.3$).

^{xx)} Другими факторами, выравнивающими температуру свободной поверхности, являются термокапиллярные движения (гл. IV) и фазовые переходы.



Фиг. 99. Увеличение температуры свободной поверхности у стенки при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям

Изменение во времени средней температуры поверхности при различных числах Релея дано на фиг. 100. Линиями 1, 2, 3 на фиг. 100 показаны осредненные по радиусу температуры поверхности $\bar{\theta}_s$ при числах Релея $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7, 1.6 \cdot 10^8$ и $1.6 \cdot 10^4$ соответственно; пунктирной линией 4 дано изменение средней температуры $\bar{\theta}_{s_0}$ при отсутствии конвекции и линией 5 - изменение среднemasсовой температуры. Из этих результатов можно сделать вывод, что и в данном случае средняя температура свободной поверхности при наличии конвекции выше, чем при переносе тепла путем теплопроводности.



Фиг. 100. Изменение во времени средней температуры свободной поверхности

Изменение средней температуры поверхности можно представить в виде двух слагаемых

$$\bar{\theta}_s = \bar{\theta}_{s_0} + \Delta\theta_s \quad (3.11)$$

Здесь $\bar{\theta}_{s_0}$ - безразмерная температура свободной поверхности при переносе тепла путем теплопроводности

$$\bar{\theta}_{s_0} = f\left(\frac{q_s}{q_w}, \frac{H}{R}, F_0\right) \quad (3.12)$$

Числа Релея и Прандтля, очевидно, не входят в критериальное уравнение, определяющее $\bar{\theta}_{s_0}$. Величина $\bar{\theta}_{s_0}$ зависит в первую очередь от величины потока тепла, поступающего непосредственно к свободной поверхности q_s/q_w и будет наименьшей, когда тепло подводится только к боковой поверхности. В рассматриваемом здесь случае ($q_s = q_w$) величина $\bar{\theta}_{s_0}$ является главной в увеличении $\bar{\theta}_s$.

Второе слагаемое в формуле (3.11) $\Delta\theta_s$ - изменение средней температуры

свободной поверхности в связи с влиянием конвекции.

Как видно из фиг. 100, это положительная величина. Вклад величины $\Delta\theta_s$ в увеличение температуры свободной поверхности будет наибольшим при подводе тепла только к боковой поверхности. Главной составляющей величины $\Delta\theta_s$ (и первым приближением к ее определению) является увеличение температуры свободной поверхности при действии только бокового потока тепла.

§ 3. Общий случай прогрева; схема конвективного взаимодействия при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям и дну

$$(\gamma_w = \gamma_s = \gamma_b = 1)$$

1. Тепловая неустойчивость и конвективное взаимодействие.

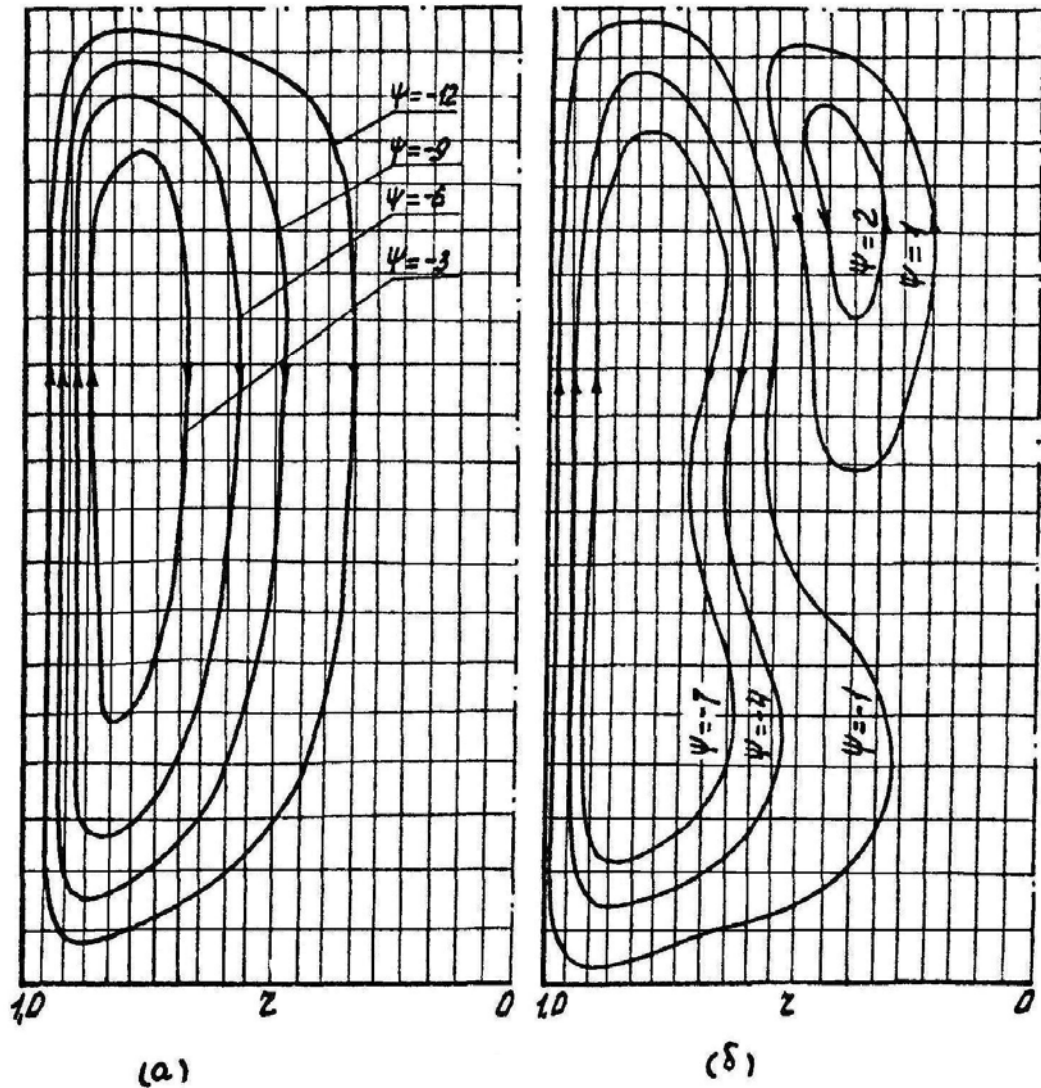
Глубина проникновения конвекции

Основное влияние на конвективное движение в сосуде подвода тепла ко дну связано с конвекцией, возникающей за счет тепловой неустойчивости. Это сложное явление довольно подробно исследовано в наиболее простых случаях численными методами, с помощью которых возможно определение движений за порогом устойчивости равновесия (см. гл. II, § 2). Данный случай отличается такими особенностями, как наличие граничных условий второго рода, нестационарность процесса, осевая симметрия. На структуру движений, развивающихся при подводе тепла ко дну, оказывает существенное влияние развитие основного циркуляционного движения при боковом подводе тепла, которое является своеобразным "фоном" начальных возмущений.

Результаты расчета структуры движения при $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$, $\gamma_w = \gamma_s = \gamma_b = 1$, $\frac{H}{R} = 2$, $Pr = 1$, представлены на фиг. 101 – 105^{х)}. Тепловая

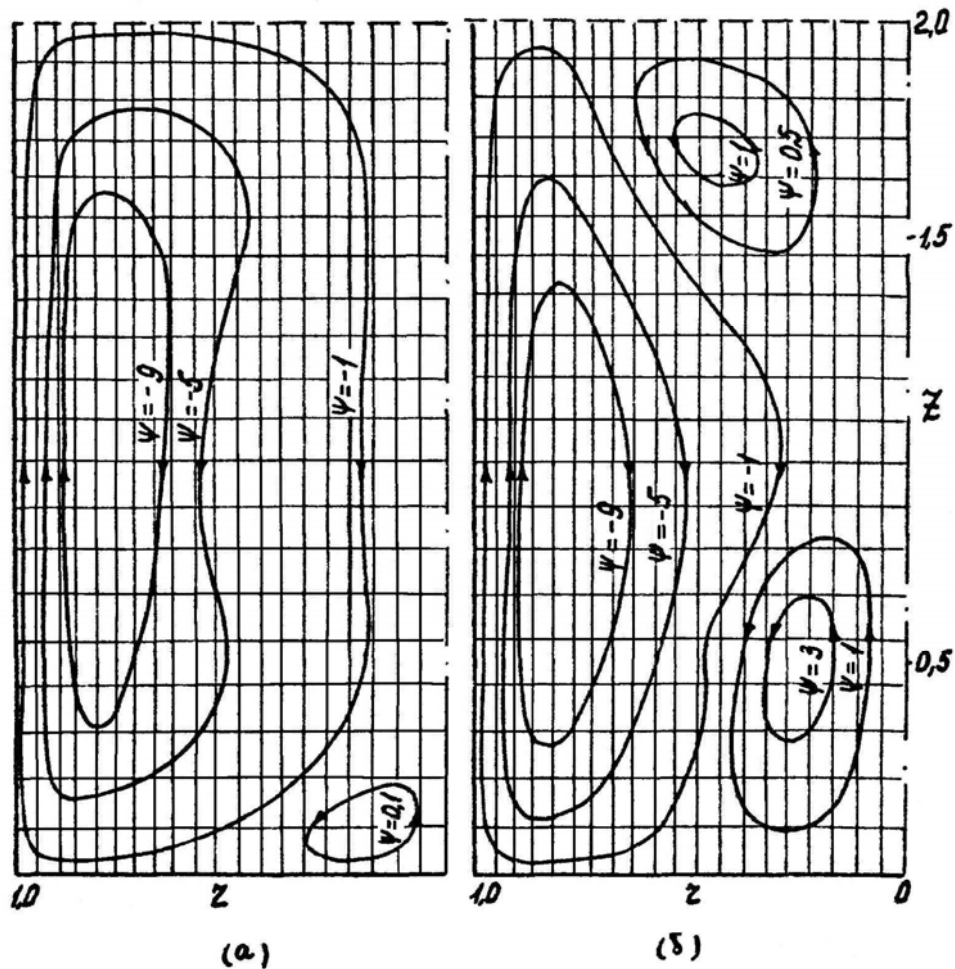
^{х)} Эти расчеты выполнены на сетке 41x41. $m_1 = n_1 = 0,3$. $\tau = 1.25 \cdot 10^{-4}$

неустойчивость возникает в некоторый момент времени после начала прогрева, когда разности температур у дна по вертикали достигают определенного значения. Появление и развитие вторичных движений у дна видно



Фиг. 101. Начальный этап развития движения при комбинированном подводе тепла ($\gamma_w = \gamma_s = \gamma_b = 1, Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$)

на картинах линий тока (фиг. 102 а,б), при числах Фурье 0.035 и 0.045 соответственно. На фиг.104 дано изменение во времени максимального значения функций тока основного движения (линия 1), вторичного движения у поверхности (линия 3) и вторичного движения у дна (пунктирная линия 4). При данном числе Релея тепловая неустойчивость возникает при значении числа Фурье $F_0 \cong 0.03$.



Фиг. 102. Развитие тепловой неустойчивости у дна. Конвективное взаимодействие

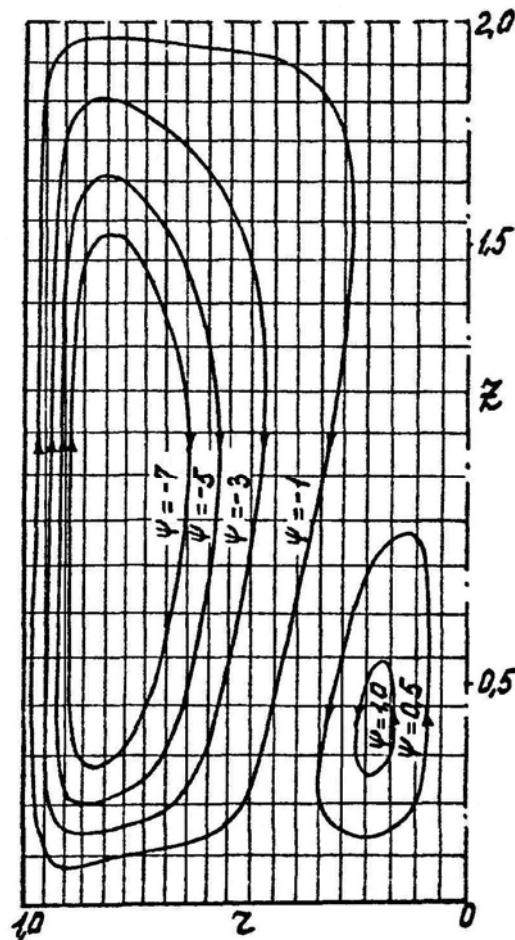
При $F_0 < 0.03$, как показано на фиг. 101, развитие основного движения и вторичного движения у поверхности происходит, как и в рассмотренном случае, когда поток тепла ко дну отсутствует. Однако, имеется отличие в интенсивности движения. Оно связано с выносом тепла, подводимого ко дну основным движением. В результате увеличения разностей температур (и подъемных сил) интенсивность основного движения заметно возрастает по сравнению с тем случаем, когда подвод тепла во дни отсутствует. Этот эффект виден из сопоставления зависимостей $|\Psi|_m(F_0)$ на фиг. 104 (линии 1 и 2). Затухание периодических движений у свободной поверхности (линия 3) протекает примерно так же, как и в случае подвода тепла к боковой и свободной поверхностям.

Типичная картина конвективного взаимодействия в переходном режиме

прогрева дана на фиг. 102б. Здесь имеются: основное движение у боковой поверхности и вторичные движения у свободной поверхности и дна ^{х)}; при данной степени заполнения сосуда жидкостью ($H/R = 2$) вторичные движения у поверхности и у дна практически не взаимодействуют.

С течением времени вторичные движения у свободной поверхности затухают; у дна вторичные движения выходят на стационарный режим при числе Фурье $F_0 \cong 0.07$ (фиг. 104). Этот момент времени для данного числа Релея можно считать завершением внутреннего переходного режима прогрева (или конвективного режима).

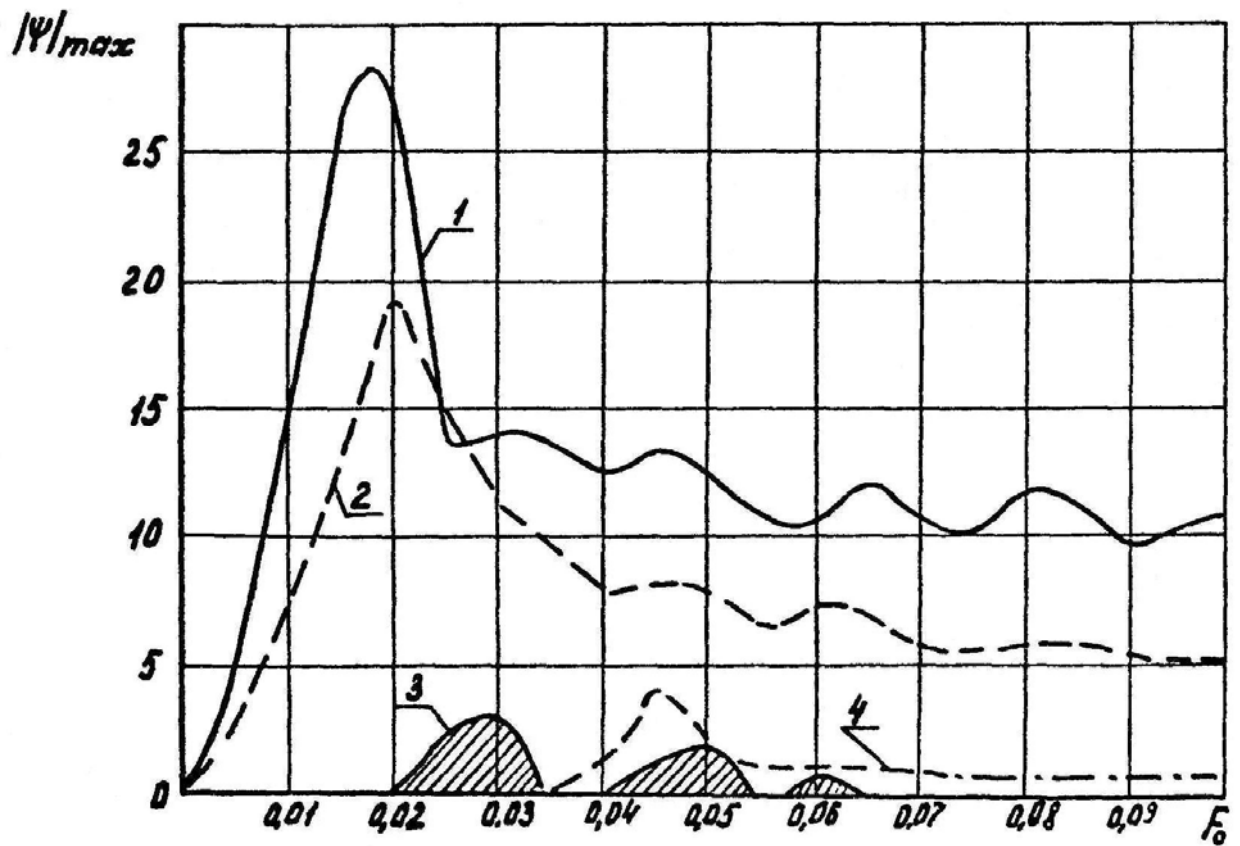
Рассмотрим структуру внешнего переходного режима (фиг. 103). Здесь



Фиг. 103. Картина движения в конце внутреннего переходного режима
($F_0 = 0.07$, $Ra_H = 1.6 \cdot 10^7$)

^{х)} Вторичное движение у свободной поверхности относится ко второму периоду колебаний в соответствии с фиг. 104.

имеется основное движение и развитое вторичное движение у дна. Вторичное движение у дна имеет проникающий характер: оно распространяется из неустойчивой зоны у дна вверх в устойчивую зону, где имеется обратный градиент температуры. Во внешнем переходном режиме происходит распространение тепла путем теплопроводности сверху и взаимодействие его с полем температуры, которое формируется основным и вторичным движениями. В этом взаимодействии важную роль играет глубина проникновения конвекции H_p из неустойчивой зоны, которая ограничивает снизу область влияния теплопроводности, поэтому по сравнению со случаем, когда поток тепла ко дну отсутствует, длительность внешнего переходного режима будет уменьшаться. Поле температур по вертикали во внешнем переходном режиме состоит из трех характерных зон (фиг.105): 1) перегретого относительно основной массы жидкости верхнего слоя с обратным градиентом температуры (в этой зоне в среднем преобладает перенос тепла путем теплопроводности), 2) конвективного ядра в средней части по высоте сосуда и 3) зоны у дна, на которую распространяется влияние тепловой неустойчивости. Структура и относительная протяженность этих зон зависят от числа Релея и степени заполнения сосуда жидкостью. По расположению этих зон можно судить о характере конвективного взаимодействия. Приведенное на фиг. 105 С-образное распределение температур типично для ламинарного режима, когда глубина проникновения конвекции из неустойчивой зоны не слишком велика; качественно близкие профили температур при ламинарной конвекции в шаровых сосудах измерены в работе [175]. При увеличении числа Релея вертикальный градиент температуры в конвективной зоне в результате интенсивного перемешивания уменьшается, и профили температур приобретают типичный Г-образный вид [165, 166].



Фиг. 104. Изменение во времени амплитуды основного и

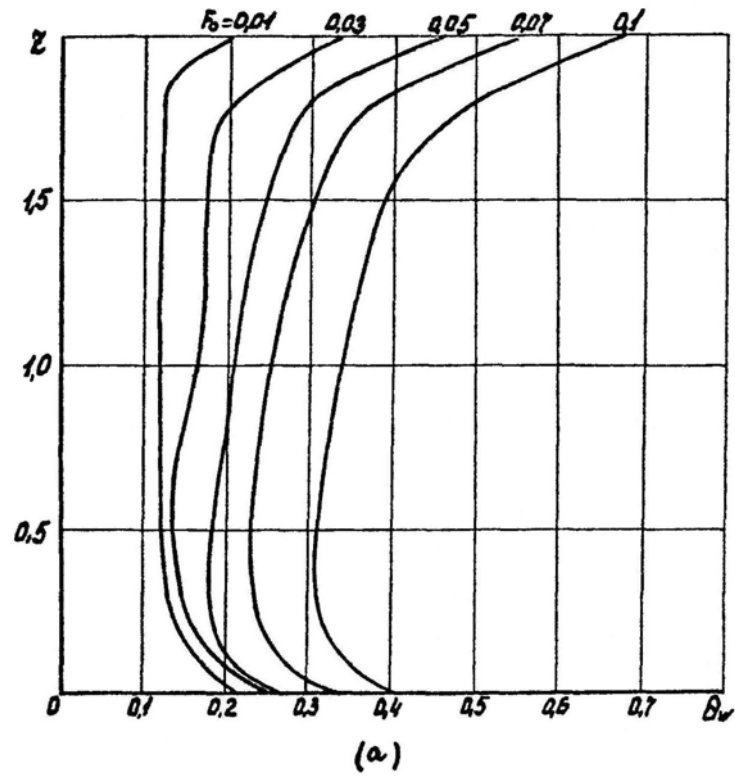
вторичных движений $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$

1 - основное движение ($\gamma_w = \gamma_s = \gamma_b = 1$)

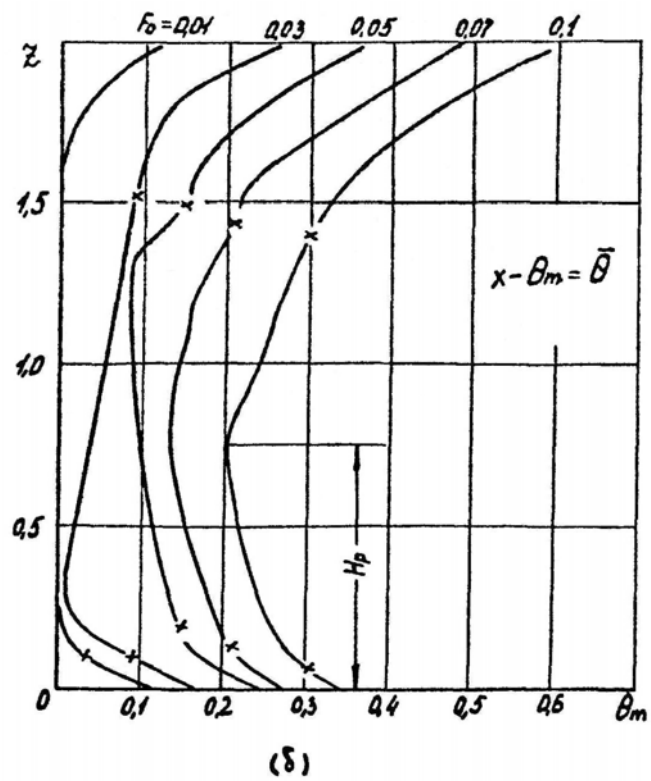
2 - основное движение ($\gamma_w = \gamma_s = 1, \gamma_b = 0$)

3 - вторичное движение у свободной поверхности

4 - вторичное движение у дна



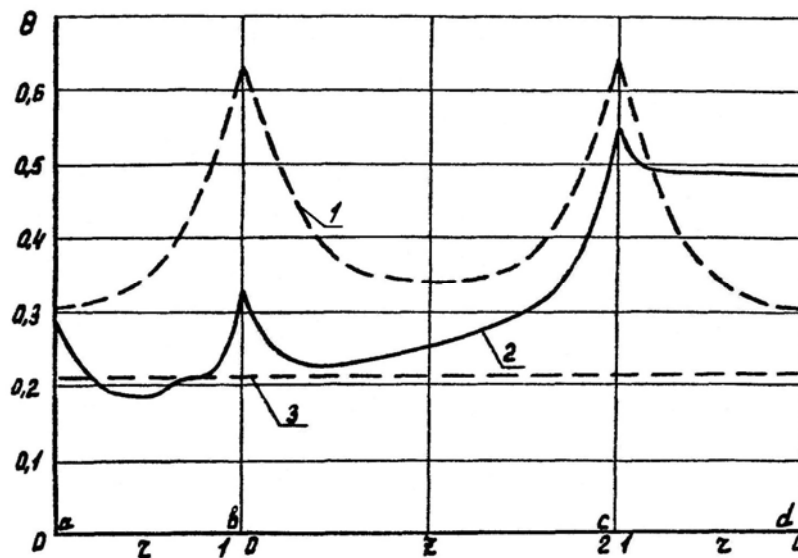
Фиг. 105а. Вертикальные профили температур на боковой поверхности
 ($Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$, $\gamma_w = \gamma_s = \gamma_b = 1$)



Фиг. 105 б. Вертикальные профили температур вдоль оси

2. Влияние конвекции на распределение температур нагреваемых поверхностей. Тепловой режим свободной поверхности

На фиг. 106 пунктирной линией 1 показано распределение температур по контуру сосуда при переносе тепла путем теплопроводности ($F_0 = 0.07$). Сплошной линией 2 дано распределение температур при наличии конвекции ($Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$, $\frac{H}{R} = 2$, $Pr = 1$), пунктирная линия 3 показывает уровень среднемассового прогрева в этот момент времени. Участки оси абсцисс соответствуют дну сосуда (ab), начиная от оси, боковой поверхности (bc) и свободной поверхности от боковой стенки до оси (cd) в соответствии с общей схемой расчета (фиг. 55б). Влияние конвекции наиболее ощутимо в местах концентрации тепловых потоков (угловые точки b и c). Из всех нагреваемых поверхностей наименьшей является температура дна. Это связано с отводом тепла от дна, как основным, так и вторичным движениями. В средней части поверхности дна, где разветвляются линии тока основного и вторичного движений, температура дна в результате интенсивного охлаждения даже ниже среднемассовой температуры.

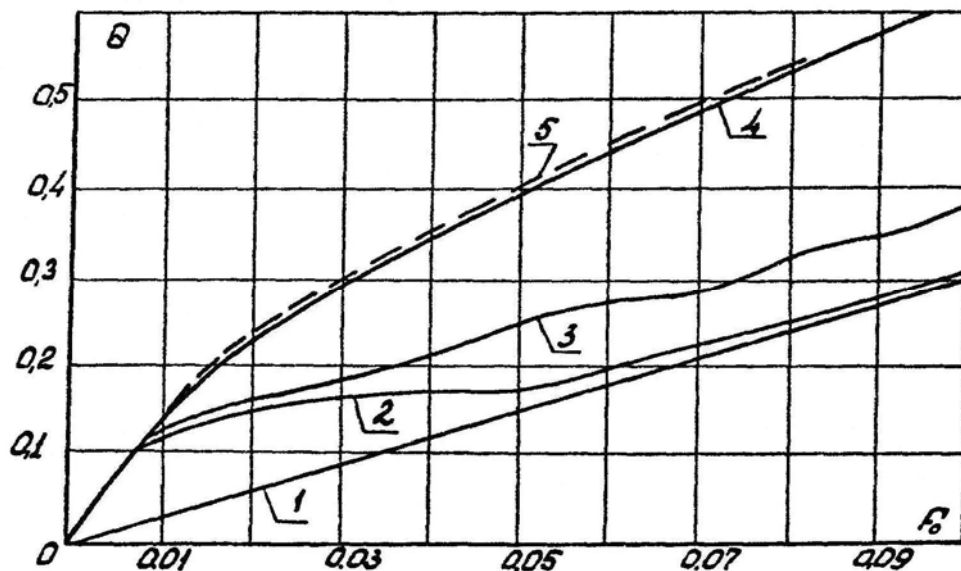


Фиг. 106. Распределение температур по контуру сосуда $F_0 = 0.07$

1 — теплопроводность, 2 - конвекция $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$,

3 - среднемассовая температура

Наличие конвекции приводит к некоторому осреднению той температуры свободной поверхности, которая была бы при переносе тепла путем теплопроводности (участок cd , фиг. 106). Это происходит в связи с уменьшением максимальной температуры свободной поверхности в зоне, прилегающей к стенке и увеличением температуры вблизи оси, благодаря переносу тепла от боковой стенки и непосредственно вдоль свободной поверхности, причем средняя температура свободной поверхности, как было установлено в § 2, выше средней температуры поверхности при переносе тепла теплопроводностью. Наличие конвекции у дна не изменяет этого вывода: происходит лишь некоторое уменьшение температуры свободной поверхности. Это можно видеть на фиг. 107, где сплошной линией 4 дано изменение температуры $\bar{\theta}_s$ при действии всех трех потоков тепла ($\gamma_w = \gamma_s = \gamma_b$), а пунктирной линией 5 показано изменение $\bar{\theta}_s$ в рассмотренном ранее случае ($\gamma_w = \gamma_s, \gamma_b = 0$). На фиг. 107 дано также изменение во времени средних температур стенки и дна ($\bar{\theta}_w$ - линия 3, $\bar{\theta}_b$ - линия 2 и среднемассовой температуры $\bar{\theta}$ - линия 1).



Фиг. 107. Изменение во времени средних - среднемассовой температуры (1) в температур дна (2), боковой (3) и свободной (4) поверхностей при комбинированном подводе тепла $Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^7$

Отсюда следует, что действие конвекции всегда приводит к такому перераспределению температур, при котором средняя температура свободной поверхности оказывается наибольшей из всех других температур нагреваемых поверхностей^{х)}. Это значит (если иметь в виду случаи фазовых переходов), что зона возможного кипения жидкости при наличии конвекции будет расположена вблизи свободной поверхности. Если же конвективная составляющая отсутствует, то зона кипения жидкости может находиться также на боковой поверхности в месте концентрации теплового потока (точка в) (фиг. 106).

Из анализа зависимостей фиг. 107 можно сделать некоторые выводы об особенностях установления квазистационарного режима прогрева. Начиная со значений $F_0 \cong 0.07$, разности между средними температурами стенки, дна и среднемассовой температуры практически постоянны, что свидетельствует об установлении в среднем квазистационарного режима прогрева по этим параметрам. Однако, разность между средней температурой свободной поверхности и среднемассовой температурой $(\bar{\theta}_s - \bar{\theta})$ продолжает увеличиваться во времени; это значит, что квазистационарный режим прогрева в зоне свободной поверхности еще не достигнут. Длительность внешнего переходного режима заметно превышает характерные длительности установления конвективных процессов τ_{q_w}, τ_{q_b} в связи с влиянием в этой зоне молекулярной теплопроводности. При большой степени заполнения сосуда жидкостью $H \gg H_p$ длительность внешнего переходного режима близка к длительности установления процессов прогрева молекулярной теплопроводностью τ_{q_s} . Это обстоятельство затрудняет обобщение данных по величине $\bar{\theta}_s$.

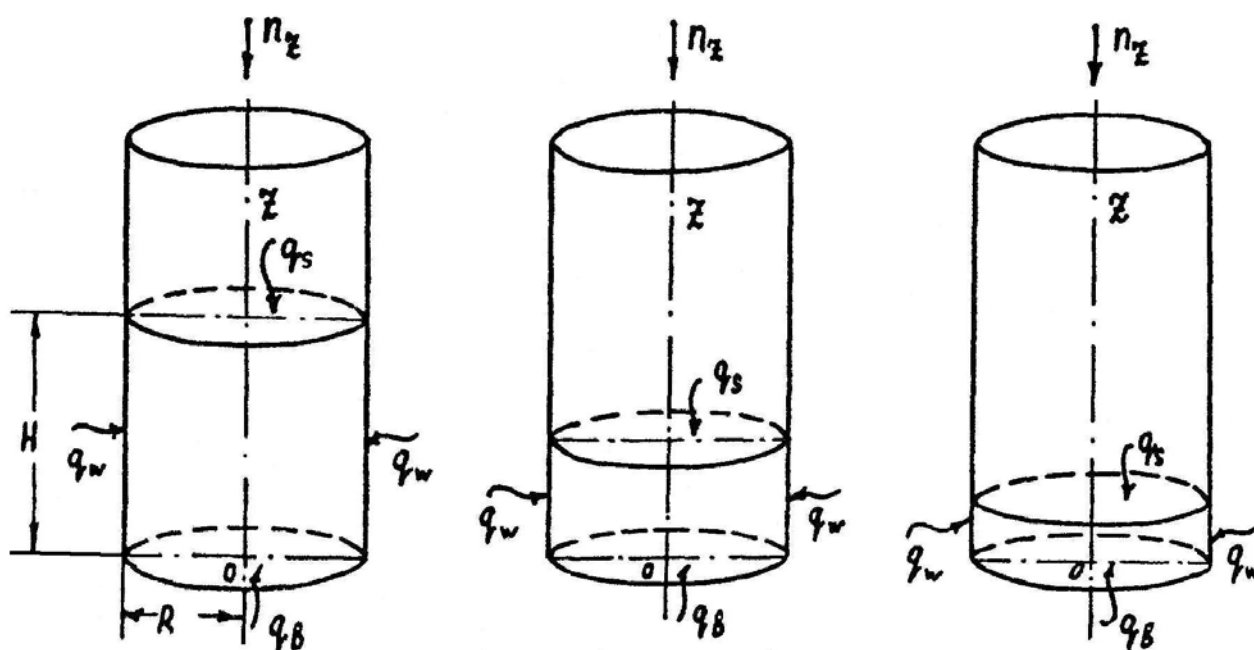
^{х)} Имеются в виду случаи равномерного распределения удельного потока тепла по поверхности сосуда ($\gamma_w = \gamma_s = \gamma_b$).

3. Влияние степени заполнения сосуда жидкостью и числа Релея

Расчеты при различных степенях заполнения сосуда жидкостью (в соответствии со схемой фиг. 108) выполнены при сохранении прежнего соотношения между теплопритоками ($\gamma_w = \gamma_b = \gamma_s = 1$) с тем, чтобы выявить и систематизировать вклад собственно конвективной составляющей^{х)}. При уменьшении степени заполнения увеличивается темп среднемассового прогрева в соответствии с таблицей 6.

Таблица 6

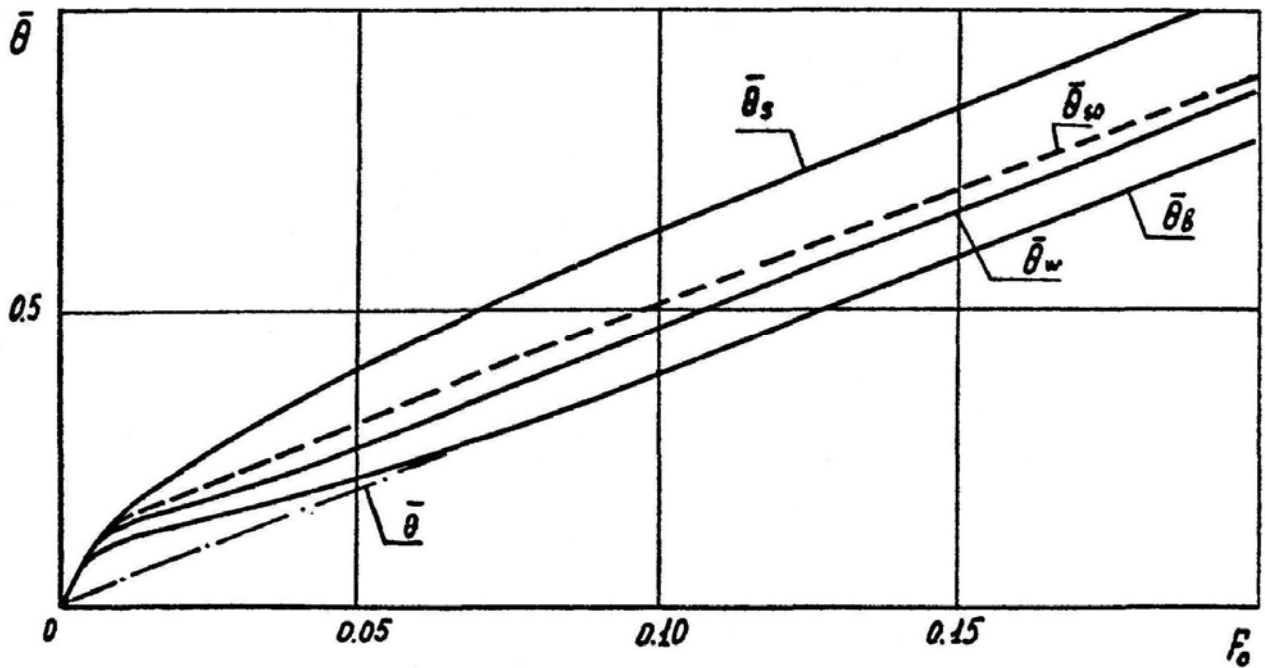
H/R	4	2	1	0.5
δ	$2.5F_0$	$3F_0$	$4F_0$	$6F_0$



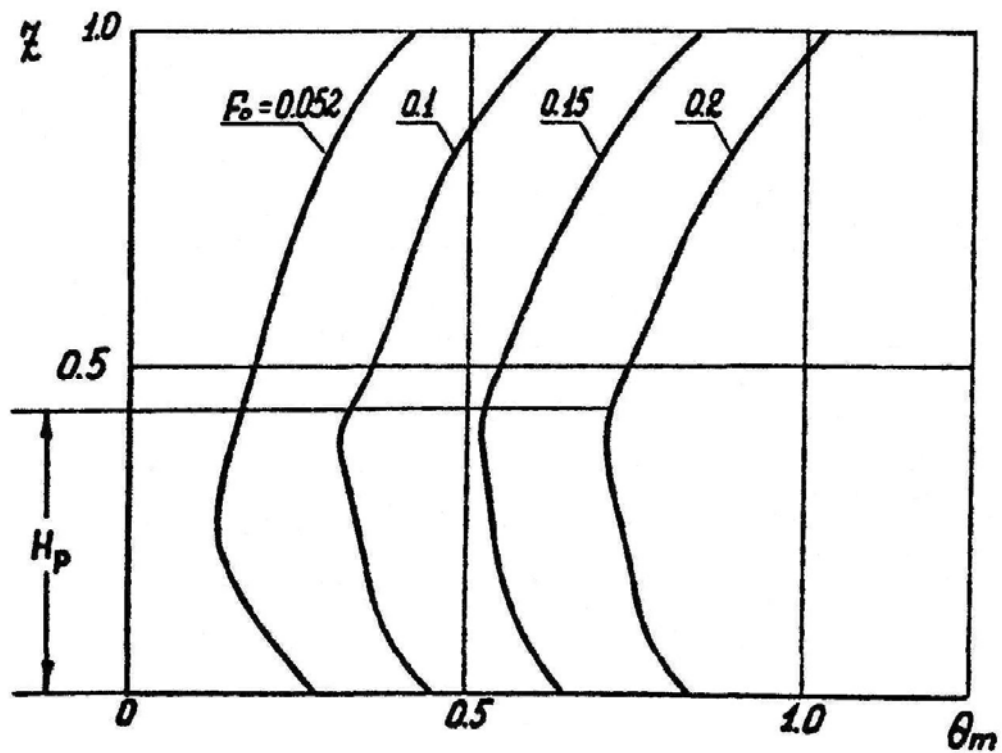
Фиг. 108. Схемы расчета конвективного теплообмена при различных степенях заполнения сосуда жидкостью ($H/R = 0.5 \div 2$)

Поэтому величина $\frac{\bar{\theta}_s - \bar{\theta}}{\bar{\theta}}$, характеризующая степень неравномерности температурного поля, при уменьшении $\frac{H}{R}$ и при достаточно большой длительности прогрева уменьшается по сравнению с рассмотренным ранее случаем $\frac{H}{R}=2$. Это можно видеть на фиг. 109, где дано изменение во времени средних температур свободной, боковой поверхности и дна при числах $Ra_R^* = 10^6, \frac{H}{R} = 1$. Пунктирной линией дано изменение температуры поверхности $\bar{\theta}_s$ при отсутствии конвекции, штрих-пунктирной линией - изменение среднемассовой температуры $\bar{\theta}$, которая при больших числах Фурье практически совпадает со средней температурой дна $\bar{\theta}_b$. Сведения о структуре для случая $Ra_R^* = 10^6, \frac{H}{R} = 1$ приведены на фиг. 110, 111. Результаты расчета (фиг.109) подтверждают установленные ранее факты о превышении средней температуры свободной поверхности над средними температурами боковой поверхности и дна и о том, что разность температур $\Delta\theta_s = \bar{\theta}_s - \bar{\theta}_{s_0}$ - положительна.

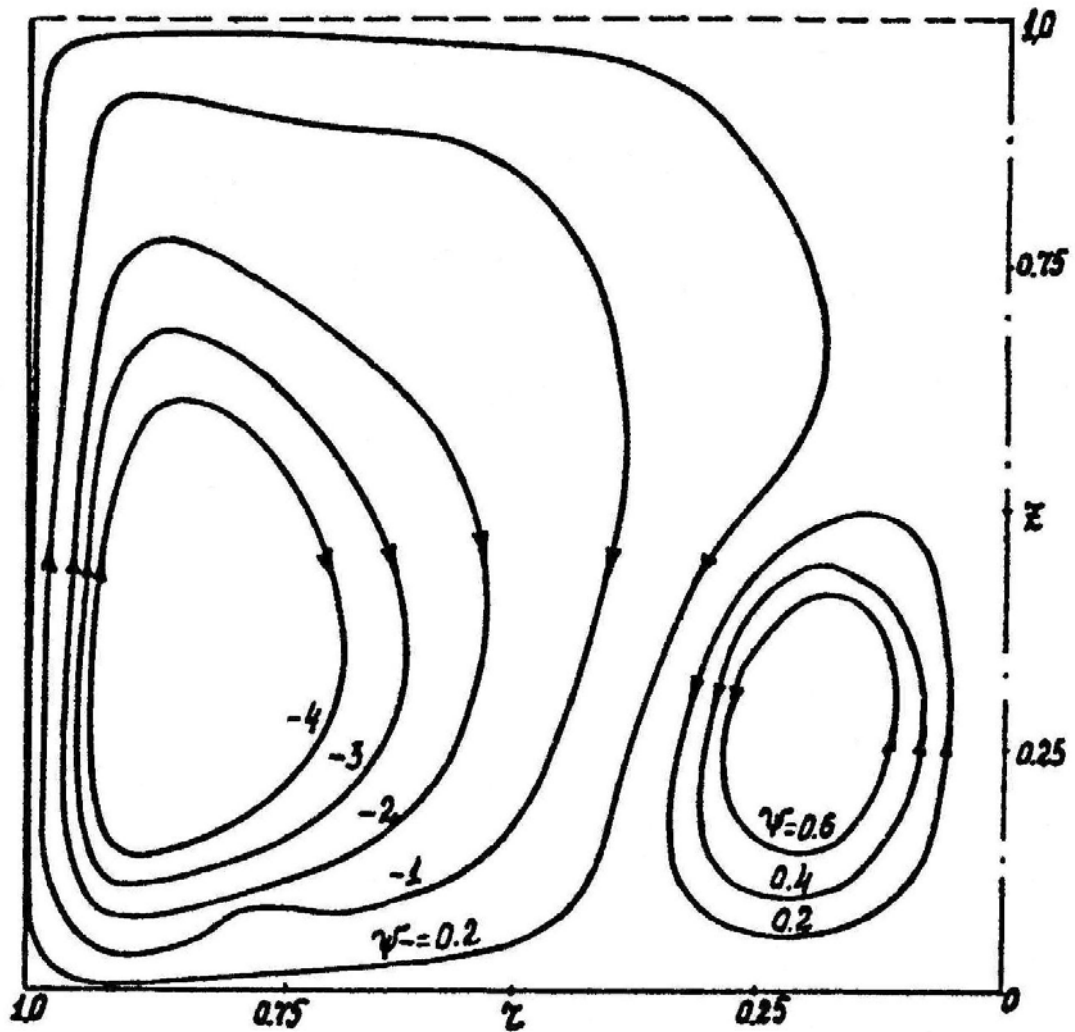
х) Отметим, что в реальных условиях и при лабораторном моделировании подвод тепла к свободной поверхности может увеличиваться в связи с перетоками тепла по стенкам.



Фиг. 109. Изменение во времени средних температур дна ($\bar{\theta}_b$), стенки ($\bar{\theta}_w$) и свободной поверхности ($\bar{\theta}_s$) $H/R=1$, $Ra_H^* = 10^6$. $\bar{\theta}_{s_0}$ - средняя температура свободной поверхности при переносе тепла теплопроводностью



Фиг.110. Профили температуры вдоль оси $H/R=1$, $Ra_R^* = 10^6$.



Фиг. 111. Линии тока ($H/R=1$, $Ra_R^*=10^6$, $F_0=0.09$)

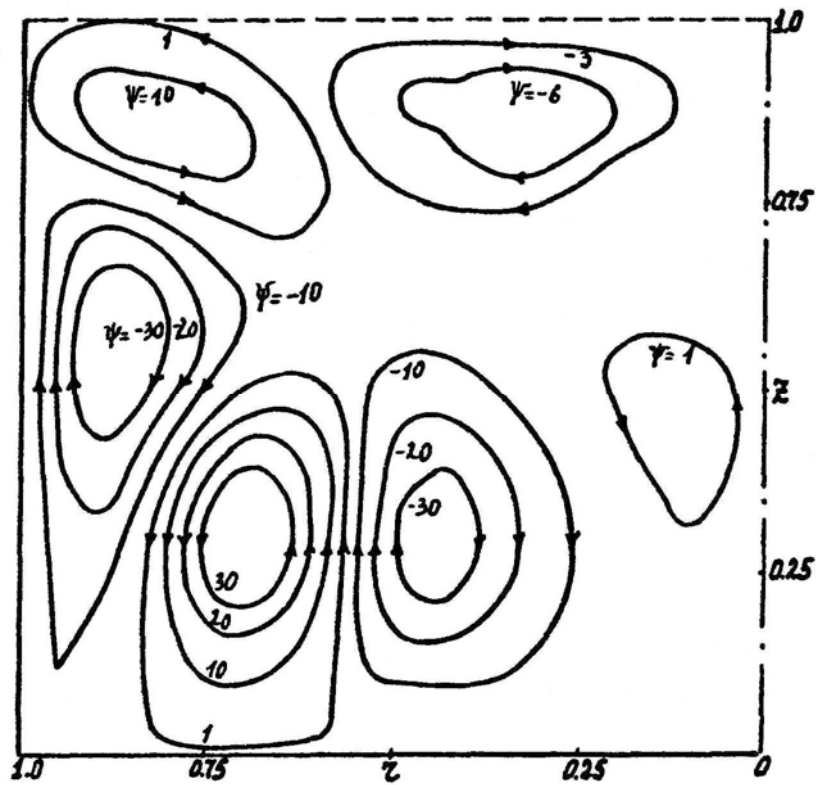
При малой степени заполнения уменьшается время установления квазистационарного режима прогрева, как по горизонтальным, так и по вертикальным разностям температур. Это связано с уменьшением высоты сосуда, определяющей длительность наибольшего из временных масштабов.

Результаты расчета прогрева при степени заполнения $\frac{H}{R}=1$ и

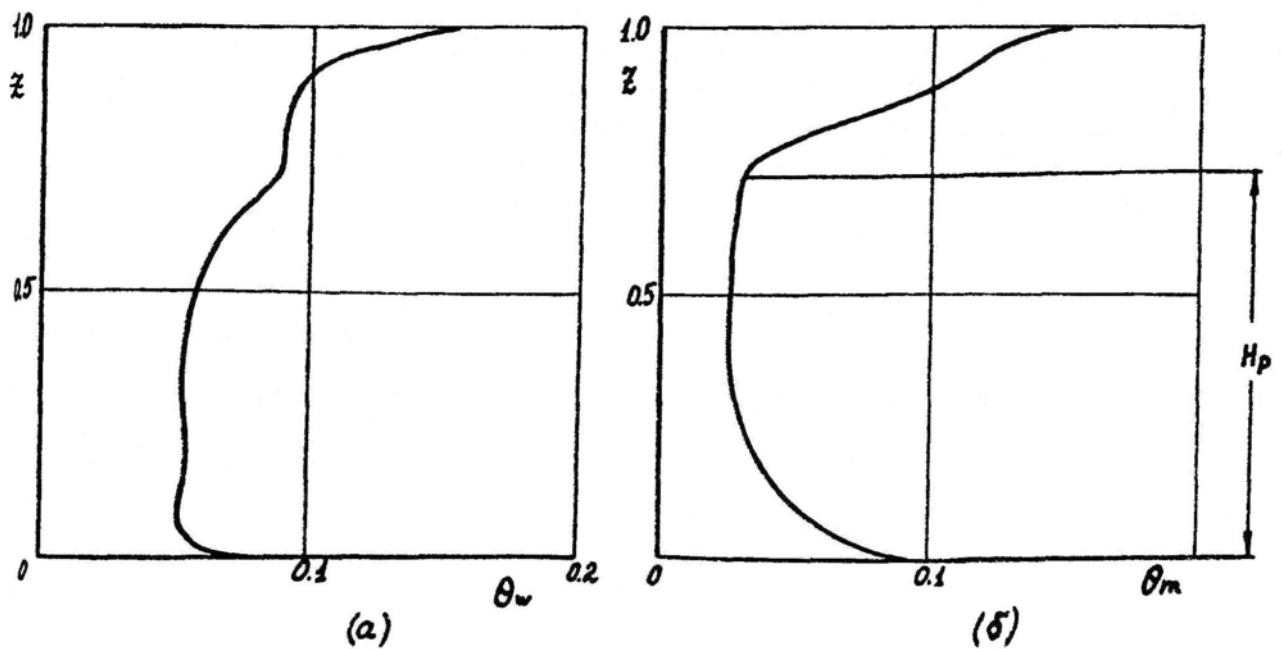
большом числе Релея $Ra_R^* = Ra_H^* = 10^8$ даны на фиг.112-113 ^{x)}. В этом случае типичная структура движения в режиме развитой конвекции нарушается. Основное движение у боковой поверхности разбивается (фиг.112): у дна образуются вторичные движения, стремящиеся в пределе при уменьшении $\frac{H}{R}$ образовать периодическую ячейковую структуру. Вблизи свободной поверхности также образуются вторичные движения в связи с разрушением основного движения под действием обратного градиента температур. Эта картина движения не является стационарной: в процессе прогрева наблюдаются довольно регулярные колебания. Поэтому квазистационарный режим прогрева здесь можно понимать лишь как осредненный по нескольким периодам колебаний ^{xx)}. Особенностью этого режима является довольно большая глубина проникновения тепловой неустойчивости в верхнюю часть области (фиг. 113) $H_p > H/2$ и образование типичного для больших чисел Релея Г-образного вертикального профиля температур.

^{x)} Этот расчет выполнен на сетке 41x41, $m_1 = n_1 = 0.3$

^{xx)} Отметим, что в данном случае число Релея наиболее близко к числу Релея перехода, которое при подогреве снизу имеет значение $Ra_H^* \sim 10^8$ [176].



Фиг. 112. Линии тока при числе Релея $Ra_H^* = 10^8$, $H/R = 1$, $F_0 = 0.01$



Фиг. 113. Профили температур вдоль стенки (а) и оси (б)

$$Ra_H^* = 10^8, \quad H/R = 1, \quad F_0 = 0.01$$

4. Обобщение результатов расчета

Время возникновения тепловой неустойчивости у дна по результатам выполненных расчетов ($Ra_H^* = 1.6 \cdot 10^4, 10^6 \div 10^8, \frac{H}{R} = 2, 1, 0.5$) можно представить в виде

$$F_0 = C(Ra_R^*)^{-0.5} \quad (3.13)$$

Значение константы C в диапазоне чисел $Ra_H^* = 10^6 \div 10^8$ равно 40-50. Если величина времени возникновения тепловой неустойчивости, получающаяся по формуле (3.13) больше, чем величина $t \sim \frac{0.5(H/2)^2}{a}$, соответствующая квазистационарному режиму прогрева путем теплопроводности, то вклад тепловой неустойчивости практически отсутствует (например, в рассмотренных случаях $Ra_R^* = 10^3, H/R = 2$ и $Ra_R^* = 10^6, H/R = 0.5$).

Зависимость (3.13) может быть получена в предположении, что возникновение конвекции определяется локальным числом Релея

$$Ra_\delta = \frac{q\beta\delta^3}{\nu a}(T_b - T^0)$$

отнесенным к глубине прогрева жидкости путем теплопроводности $\delta = \sqrt{at}$ и к разности температур между дном и основной массой жидкости в данный момент времени $T_b - T^0 \cong \frac{2q}{k}\sqrt{at}$. Оценка критического числа Релея, выполненная по результатам такого расчета, дает величину, $Ra_\delta \sim 10^4$, превышающую величину критического числа Релея в горизонтальных плоских слоях при стационарных условиях на границе. Затягивание возникновения конвекции при нестационарном прогреве отмечалось в опытах ряда авторов

[177-179], выполненных при различных темпах прогрева нижней границы горизонтального слоя.

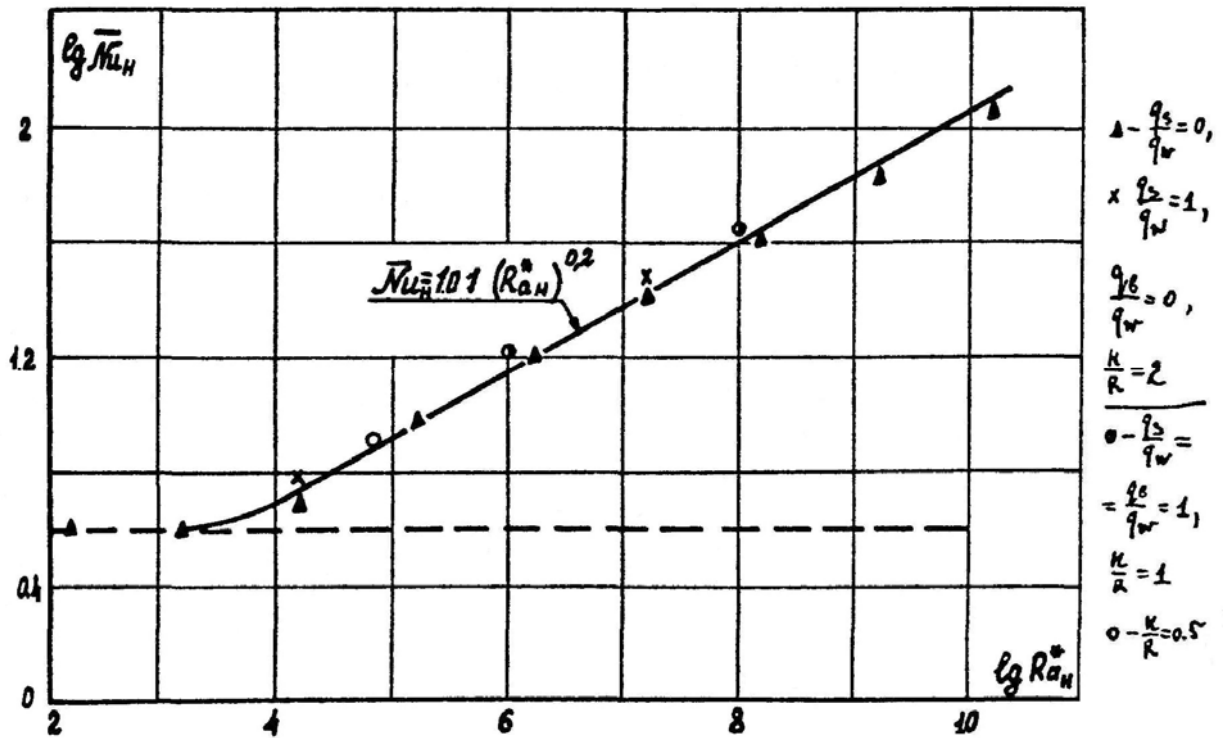
Результаты расчета средней теплопередачи на квазистационарном режиме прогрева при различных числах Релея, отношениях сторон и различных вариантах подвода тепла по контуру сосуда приведены на фиг.114а. С точностью до 10-15% справедлива единая зависимость

$$\bar{Nu} = 1.01(Ra_H)^{0.2} \quad (3.14)$$

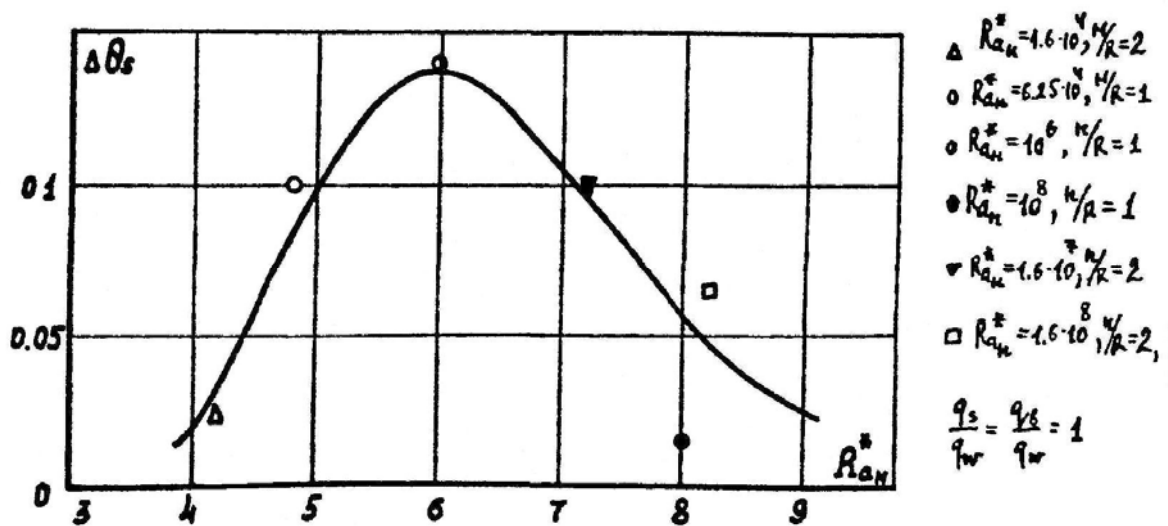
Отметим, что характер средней теплопередачи на квазистационарном режиме слабо зависит от числа Прандтля, поэтому зависимость обобщается и на более широкий класс веществ. В опытах со сферическими сосудами в работах [164, 165] получена аналогичная зависимость, отличающаяся лишь значением константы $C \cong 0.7$ ^{х)}.

На фиг.114б приведены результаты определения конвективного добавка к средней температуре свободной поверхности $\Delta\theta_s = \bar{\theta}_s - \bar{\theta}_{s_0}$ при комбинированном подводе тепла ($\gamma_w = \gamma_s = \gamma_b = 1$) в условиях, близких к квазистационарным ($F_0 \cong 0.1$). Результаты расчетов при различных числах $Ra^*, \frac{H}{R}$ на квазистационарном режиме приближенно представляются единой зависимостью $\Delta\theta_s = \varphi(Ra_H^*)$, имеющей максимальное значение при $Ra_H^* \cong 10^6$, причем главная часть конвективного добавка определяется величиной $\Delta\theta_s$ при боковом подводе тепла.

^{х)} Обработка результатов опытов [165] выполнена лишь по "конвективной" части сферы $H \cong 1.7R$. Увеличение константы C по сравнению со случаем бокового подвода тепла (3.4) и по сравнению с результатом работы [165] связано с более четко выраженным влиянием тепловой неустойчивости и действием потока тепла сверху, уменьшающими разности температур по горизонтали.



Фиг. 114а. Обобщенная зависимость средней теплоотдачи от боковой поверхности сосуда



Фиг. 114б. Обобщенная зависимость от числа Релея конвективного добавка $\Delta\theta_s$

§ 4. Приближенная методика расчета средней температуры свободной поверхности

Предлагаемая методика основана на представлении средней температуры свободной поверхности

$$\bar{\theta}_s = f\left(\frac{q_s}{q_w}, \frac{q_b}{q_w}, F_0, \frac{H}{R}, Pr, Ra_R^*\right) \quad (3.15)$$

в виде суммы

$$\bar{\theta}_s = \bar{\theta}_{s_0}\left(\frac{q_s}{q_w}, \frac{q_b}{q_w}, \frac{H}{R}, F_0\right) + \xi_1, \xi_2 \Delta\theta_s\left(F_0, \frac{H}{R}, Pr, Ra_R^*\right) \quad (3.16)$$

где $\bar{\theta}_{s_0}$ - увеличение средней температуры свободной поверхности при прогреве путем только теплопроводности;

$\Delta\theta_s$ - увеличение средней температуры свободной поверхности в связи с влиянием конвекции при боковом подводе тепла;

ξ_1, ξ_2 - поправочные множители, учитывающие влияние подвода тепла к свободной поверхности и дну.

Сама идея о представлении решения общей сложной задачи (3.15) в виде суперпозиции двух и более простых задач, разумеется, не нова. Однако, возможность ее реализации в данном конкретном случае не очевидна и вытекает из анализа результатов численных решений, выполненных в данной главе.

Решение первой задачи, хотя и является довольно громоздким, но не представляет принципиальных трудностей и в настоящее время возможно (при использовании ЭВМ) с учетом конечной толщины стенки и других сложностей в распределении теплопритоков по контуру реальных сосудов, являющихся основной причиной "неуниверсальности" процессов теплообмена в сосудах, а также при наличии газовой и жидкой фаз, фазовых переходов и т.д. Такая программа расчета разработана нами в [72]. Решение самой задачи

теплопроводности, рассматриваемое как предельный случай при $g = 0$, может и не иметь реального физического смысла (ввиду возможного кипения из-за перегрева жидкости на стенке или сильного искривления поверхности раздела при $g = 0$).

Решение второй задачи связано с трудностями принципиального характера в связи с нелинейностью уравнений конвекции. Поэтому, важное значение имеет оценка величины конвективного добавка из результатов модельных задач (подвод тепла к боковой поверхности) и опытных данных. Отметим, что обработка опытных данных по моделированию обычно выполняется не таким способом, как предлагается здесь, а в общем виде (3.15). В том виде, как это записано в (3.16), предлагается главную составляющую величины $\Delta\theta_s$ вычислять по результатам расчета при одном только боковом подводе тепла и затем вносить поправки, учитывающие влияние на конвекцию подвода тепла к свободной поверхности (ξ_1) и изменение температуры свободной поверхности в связи с действием тепловой неустойчивости (ξ_2). Вычисление $\Delta\theta_s$ значительно упрощается на квазистационарном режиме прогрева, когда величина $\Delta\theta_s$ не зависит от числа Фурье и Прандтля

$$\Delta\theta_s = \Delta\theta_s(Ra_R^*, H/R) \quad (3.17)$$

Полная величина конвективного добавка может быть определена из результатов решения общей задачи о прогреве (фиг. 114б).

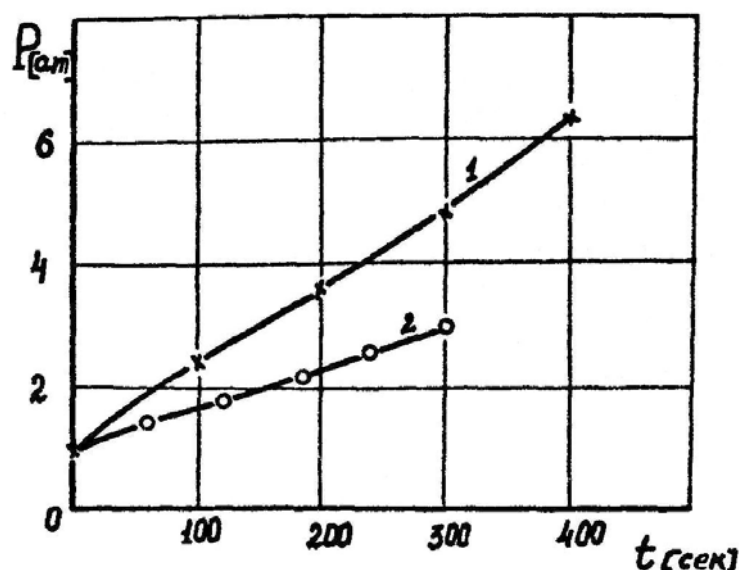
§ 5. Некоторые общие свойства нестационарной естественной конвекции в сосудах и приложения к анализу эффективности режимов длительного хранения топлива в условиях пониженной гравитации

Одно из общих свойств нестационарной естественной конвекции, важных для анализа длительного прогрева топлива в баках в условиях пониженной гравитации - это инерционность. Время начала влияния конвекции на поле

температур при боковом подводе тепла и длительность протекания переходных процессов в соответствии с формулой (3.4) увеличиваются при уменьшении перегрузки пропорционально $(g/g_0)^{-2/5}$. Это значит, что при $g/g_0 \sim 10^{-5}$ длительность переходного режима возрастает в сто раз и развитие естественной конвекции во времени по сравнению с земными условиями происходит, как в замедленной киносъемке, формулы для оценок длительности переходных режимов, имеющие распространение в литературе [7, 8], основаны лишь на модели пограничного слоя при боковом подогреве; однако, замкнутость области, наличие свободной поверхности и комбинированного подвода тепла приводят к появлению ряда новых режимов ("натекание", образование прогретого слоя и его динамика, тепловая неустойчивость). Изучение длительности этих режимов является новым результатом данной работы.

Общим итогом исследования схемы прогрева топлива, имеющего прямолинейную поверхность раздела, является обоснование того факта, что при наличии естественной конвекции средняя температура свободной поверхности всегда выше средней температуры свободной поверхности при переносе тепла путем только теплопроводности. Этот результат получен в широком диапазоне чисел Фурье ($F_0 \leq 1$), при различных степенях заполнения сосуда жидкостью $\left(0.5 \leq \frac{H}{R} \leq 2\right)$ и числах Релея $\left(10^3 \leq Ra_H^* \leq 10^{10}\right)$, при наличии комбинированного подвода тепла и в самом общем случае прогрева при взаимодействии жидкой и газовой сред и перетоков тепла по стенкам. На фиг.115 показано сопоставление результата изменения роста давления в подушке при наличии естественной конвекции $\left(Ra_R^* \sim 10^{11}\right)$ в сферическом сосуде, частично заполненном жидким водородом [161] (кривая 1) и результата расчета роста давления в этих условиях при отсутствии конвекции (кривая 2), откуда видно, что общий вывод распространяется и на область больших чисел Релея, на случаи сосудов другой геометрии и при наличии фазовых переходов. Важным следствием этого основного результата является то, что средняя температура свободной поверхности в рассматриваемой схеме хранения при

равномерном подводе тепла всегда выше средней температуры боковой стенки и дна ($\bar{\theta}_s > \bar{\theta}_w > \bar{\theta}_b$); это значит, что зона возможных фазовых переходов будет находиться вблизи свободной поверхности. Другим не менее важным следствием является то, что при всех способах интенсификации собственно естественной конвекции (например, создавая стационарную "тепловую закрутку" бака) нельзя понизить температуру $\bar{\theta}_s$ до величины, меньшей $\bar{\theta}_{s_0}$. Так как средняя температура $\bar{\theta}_{s_0}$ значительно выше среднемассовой температуры, это означает, что большой запас теплоемкости основного массива жидкости используется далеко не полностью, что является недостатком рассматриваемой схемы хранения топлива. К числу достоинств этой схемы хранения относится наличие интенсивного отвода тепла от дна бака. Это предотвращает кипение топлива при наличии тепловых мостов в узлах крепления у дна.



Фиг. 115. Увеличение давления (1) в сосуде с жидким водородом (опыты Aydelott'a [161]), 2 - расчет без учета конвекции

Пути уменьшения роста давления в баке при данной схеме хранения связаны с уменьшением двух составляющих: $\bar{\theta}_{s_0}$ и $\Delta\theta$. Первая величина

определяется конструкцией и теплозащитой бака (точнее перетоками тепла по стенкам бака от нагретой части, не смоченной жидкостью). Уменьшение величины $\bar{\theta}_{s_0}$ связано с уменьшением внешнего теплопритока (или активными средствами отвода тепла от свободной поверхности).

Вторая величина - $\Delta\theta$ связана со вкладом конвективной составляющей и определяется для данной конструкции бака длительностью хранения и величиной перегрузки. Одним из основных результатов данной главы является определение величины $\Delta\theta$ в зависимости от чисел Релея и Фурье. При бесконечно большой длительности хранения ($F_0 > 1$) величина $\Delta\theta$ имеет максимальное значение при числе Релея $Ra_H^* \sim 10^5 - 10^6$, определяя неоптимальный диапазон перегрузок в квазистационарных условиях. Этот результат получен впервые и является развитием принципа максимального температурного расслоения, сформулированного в главе II. Он имеет место для сосудов различной геометрии (плоской, цилиндрической и сферической). Наибольшее практическое значение имеет применение этого принципа в нестационарных условиях: для заданной расчетной длительности прогрева F_0^0 температурное расслоение также достигает максимального значения при некотором числе Релея, величина которого больше 10^5 и увеличивается при уменьшении числа Фурье. Таким образом, для уменьшения величины $\Delta\theta$ нужно исключить попадание в «зону максимума».

Рассмотрим один конкретный пример. Пусть бак с характерным размером $R \sim 1$ м при внешнем потоке $q = 5$ ккал/м²час находится в свободном полете на ОИСЗ при $g/g_0 \sim 10^{-5}$ (низкая орбита). Число Релея в соответствии с фиг. 56 составляет около 10^{10} . Если заданная длительность хранения составляет сутки ($F_0^0 \cong 0.01$), то величина $\Delta\theta$ в соответствии с фиг. 79 будет равна около 0.02, что соответствует величине $\Delta T_s \sim 1^\circ$ (и увеличению давления в баке с водородом $\Delta p \sim 0.3$ ата). Значение $\Delta\theta_{\max}$ будет равно около 0.05, что соответствует $\Delta T_s \cong 2.5^\circ$ и находится при числе Релея 10^8 , т.е. при значении перегрузки

$g/g_0 \sim 10^{-7}$, которая могла бы реализоваться при полете на более высокой орбите или при свободном полете к Луне ^{x)}. В последнем случае закрутка бака, создающая перегрузку $g/g_0 \sim 10^{-4} - 10^{-5}$, позволяет более чем вдвое снизить величину $\Delta\theta$; однако, на низкой орбите применение закрутки в данных условиях не будет особенно эффективно. Таким образом, полученные в данной главе результаты позволяют решать некоторые вопросы оптимизации режимов хранения.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ III

1. Разработана методика численного исследования вклада конвективной составляющей при длительном хранении топлив в баках двигательных установок в условиях пониженной гравитации при наличии плоской поверхности раздела газ-жидкость ($B_0 > 100$).

2. Исследованы характерные режимы нестационарного прогрева и их границы. Граница установления квазистационарного режима прогрева при боковом подводе тепла имеет вид

$$F_0 = \frac{40}{(Ra_H^*)^{0,4}}$$

Тепловая неустойчивость у дна сосуда возникает при

$$F_0 = \frac{40}{(Ra^*)^{0,5}}$$

^{x)} Отметим, что предельное значение $\Delta\theta_{\max}$ (фиг.78) равно около 0.45, что соответствует величине $\Delta T_s \cong 2.5^\circ$.

Установление квазистационарного режима у свободной поверхности при наличии подвода к ней тепла определяется механизмом молекулярной теплопроводности.

3. Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Релея ($Ra_H^* \leq 10^{10}$) имеет вид

$$\bar{Nu} = C(Ra_H^*)^{0.2}$$

где $C \cong 0.87$ при боковом подводе тепла. При комбинированном подводе тепла в диапазоне $0.5 \leq \frac{H}{R} \leq 2$ $C \cong 1.01$.

4. Средняя температура свободной поверхности при наличии конвекции в рассмотренном диапазоне критериев подобия превышает среднюю температуру поверхности, определенную при переносе тепла путем только теплопроводности

$$\bar{\theta}_s = \bar{\theta}_{s_0} + \Delta\theta_s, \quad \Delta\theta_s > 0$$

Главную часть конвективного добавка $\Delta\theta_s$ составляет температурное расслоение при боковом подводе тепла. Зависимость $\Delta\theta_s(Ra_H^*)$ на квазистационарном режиме прогрева имеет максимальное значение при $Ra_H^* \sim 10^5 \div 10^6$ и является верхней предельной величиной температурного расслоения. В переходных режимах величина $\Delta\theta_s$ имеет максимальное значение при числе Релея, превышающем значения $Ra_H^* \cong 10^5 - 10^6$ и увеличивающемся уменьшением заданной длительности прогрева.

ГЛАВА IV. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ И СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной главе изучаются задачи длительного прогрева жидкостей, частично заполняющих сосуды, в области более слабых гравитационных полей, чем в главе III (эта область находится ниже пунктирной линии на фиг. 56). Длительное хранение топлива в этих условиях мало изучено, но в ряде случаев может представлять преимущества по сравнению со схемой хранения при больших числах Бонда.

Новые эффекты, встречающиеся в условиях невесомости, можно условно разделить на две основные группы. К первой группе относятся эффекты, связанные с существенным и даже преобладающим влиянием на форму поверхности раздела газ-жидкость капиллярных сил. Эти силы по своей природе не зависят от поля массовых сил, но их действие в земных условиях в сосудах достаточно больших размеров не заметно из-за влияния силы тяжести. Форма свободной поверхности изотермической жидкости в стационарных условиях определяется числом Бонда $B_0 = \frac{\rho_0 g R^2}{\sigma_0}$, краевым углом смачивания

ϕ , геометрией сосуда и степенью заполнения его жидкостью. Определению равновесных форм изотермических жидкостей посвящена обширная литература [180-185]. По числу Бонда различается три характерных режима: $B_0 \gg 1$, $B_0 \sim 1$, $B_0 \ll 1$. При малых числах Бонда поверхность раздела сильно искривляется и может свернуться в пузырь. Пузырь может занимать различное положение внутри жидкости или дробиться на мелкие пузыри. В этом случае задача определения температурного режима жидкости весьма сложна. Однако, взаимным положением жидкой и газовой масс в условиях невесомости в принципе можно управлять, создавая закрутку бака вокруг оси,

расположенной в жидкости, или с помощью электрических сил [6]. При этом может быть поставлен вопрос о том, какое расположение системы газ-жидкость является оптимальным с точки зрения поддержания температурного режима. Если газовый пузырь не соприкасается со стенками сосуда, то при подводе тепла извне слой жидкости ввиду его малой теплопроводности и большой теплоемкости мог бы служить изолятором, предохраняющим газовую подушку от перегрева. Для определения реального прогрева требуется учесть движение жидкости.

Специфика движений жидкости в условиях невесомости представляет вторую группу эффектов, которые важны при решении задач длительного прогрева. В технической литературе нередко содержатся утверждения о том, что в условиях невесомости конвективные движения в жидкости или газе отсутствуют. Однако, для рассматриваемого здесь круга задач это далеко не так. Можно выделить четыре вида движений в жидкости или газе в условиях невесомости и слабых силовых полей.

Первый вид - это остаточные конвективные движения, связанные с периодическим включением систем астроориентации или программными включениями двигателей. Подход к рассмотрению таких движений как случайных предпринят Гебхардом [180]. Некоторые движения такого рода рассматривались также в работе [186].

Второй вид типичен для газов в неизотермических условиях и не зависит от гравитационного поля и внешних механических возмущений. Эти движения, возникающие в сжимаемом газе при распространении температурных волн, которые рассматривались в работе [187] и автором в работе [48]. Сюда же можно отнести конвекцию, возникающую в газе за счет температурных напряжений в связи с барнеттовскими эффектами (дополнительные составляющие в тензоре напряжений) [188]. Вклад этих двух движений в газе хотя и может быть ощутим, но не столь велик.

К третьей группе отнесем движения, имеющиеся в жидкости и газе в связи с естественной конвекцией в ослабленном гравитационном поле. Несмотря на

существенное подавление естественной конвекция, влияние ее для сосудов больших размеров (порядка метра) все еще остается заметным даже в условиях практической невесомости ($g/g_0 = 10^{-7} - 10^{-10}$) (фиг. 56), хотя и обладает рядом специфических особенностей, изучавшихся подробно в главах II и III.

К четвертой группе отнесем движения, связанные с наличием на поверхности неизотермической жидкости градиентов сил поверхностного натяжения в связи с изменением поверхностного натяжения от температуры (термокапиллярная конвекция). Движения аналогичного вида могут возникать при наличии в жидкости примесей ввиду зависимости поверхностного натяжения от концентрации примесей и т.д. При наличии на поверхности градиентов сил поверхностного натяжения статическое равновесие в соответствии с граничным условием (1.29) главы I невозможно или, если возможно, то будет неустойчивым и должно реализоваться конвективное равновесие. Термокапиллярная конвекция характеризуется числом Марангони

$Mn^* = \frac{g\beta R^2}{\rho\nu\alpha k} q$, значение которого для сосудов больших размеров может

достигать $10^5 - 10^7$ и более. Это значит, что в случае, когда на систему не действуют сильные возмущения извне, эффекты естественной и термокапиллярной конвекции будут наиболее существенными. Поэтому исследование и рациональное применение капиллярных и термокапиллярных эффектов важно для создания оптимальных систем длительного хранения, использующих в максимальной степени большую теплоемкость основного массива жидкости. Эти соображения были исходными при общей постановке задач данной главы.

В работах, относящихся к общим вопросам теплообмена в условиях невесомости [4-9], содержится, как правило, лишь качественное описание упоминавшихся эффектов. В последнее время достигнуты некоторые успехи в изучении механизма термокапиллярной конвекции в более простых условиях.

Рассмотрим современное состояние работ в этой области. Возросший в самое недавнее время интерес к изучению термокапиллярных явлений связан не

только с той важной ролью, которую они могут играть в процессах тепло- и массообмена в баках в условиях невесомости. Круг действия этих эффектов значительно шире и распространяется на довольно обширную область медико-биологических проблем в невесомости, а также на многие "земные" приложения. Между тем термокапиллярная конвекция менее изучена, чем естественная конвекция, поэтому существуют противоречивые мнения о ее роли в тех или иных приложениях. В земных условиях удастся реализовать термокапиллярные движения лишь в малых размерах (тонкие слои жидкости, пузырьки и т.д.). Обзоры исследования термокапиллярных явлений в последние годы выполнены рядом авторов [189-191]; в последние два года (1970-1971) выполнен ряд новых работ. Наибольшее количество работ носится к тонким слоям жидкости с плоской поверхностью раздела. Как и при естественной конвекции, здесь можно выделить два механизма: а) движение при наличии градиентов температур вдоль поверхности в результате нарушения условий равновесия и б) движение при наличии градиента температур по нормали к поверхности (неустойчивость Марангони). Движения типа (а) изучались Левичем [34] на весьма простой (квазиодномерной) модели. В работе Бириха [192] в аналогичной постановке рассмотрено совместное действие естественной и термокапиллярной конвекции. Термокапиллярные движения типа б), возникающие после потери устойчивости равновесия, обнаружены Блоком [193], однако они, по-видимому, играли существенную роль и в известных опытах Бенара, результаты которых обычно приводятся как пример возникновения естественной конвекции (на это обстоятельство указано в работе [193]). Решение линеаризованной задачи о потере устойчивости равновесия получено Пирсоном [194]; обобщение на случай совместного действия естественной и термокапиллярной конвекции дано в работах [195, 196]. В работах [197, 198] рассматривается более сложная модель движений этого вида с учетом взаимодействия двух сред через поверхность раздела и деформаций поверхности. В работе [199] рассматривается общая модель явлений, связанных с действием внутренних (активных) напряжений,

применительно к широкому классу систем, включая биологические. В последнее время выполнен ряд экспериментальных исследований термокапиллярных движений в подогреваемых снизу тонких слоях жидкости [200-202]. В частности, в работе [202] получено подтверждение условий возникновения термокапиллярной конвекции (зависимость критического числа Марангони от числа Релея), предсказанных линейной теорией [196]. В работе [203] для исследования совместного действия естественной и термокапиллярной конвекции в слоях жидкости с фиксированной плоской поверхностью раздела применен численный метод. Получены результаты в нелинейной области за порогом устойчивости равновесия при числах Марангони до $5 \cdot 10^3$.

Результаты работ, выполненных применительно к тонким плоским слоям жидкости, дают теоретическое и экспериментальное обоснование существования термокапиллярного механизма конвекции. Выявлено значение глубины слоя d_* , при уменьшении которого термокапиллярная конвекция преобладает над естественной конвекцией. Эта глубина d_* пропорциональна перегрузке $(g/g_0)^{-1/2}$ и поэтому заметно увеличивается в ослабленном гравитационном поле. Кроме того, выяснены существенная роль совместного действия естественной и термокапиллярной конвекции за порогом устойчивости, влияние граничных условий на поверхности жидкости, нестационарности и т.д. Однако, результаты по теплообмену для развитых термокапиллярных движений при больших числах Марангони ограничены.

Количество работ, относящихся к термокапиллярным движениям вокруг искривленных поверхностей, значительно меньше. Одной из первых работ, в которых обсуждался механизм термокапиллярных движений вокруг пузырей в условиях невесомости, была работа [204]. В этой работе определялся закон распределения температур в жидкости, при котором реализуется стационарное безвихревое обтекание пузыря. Движение пузырьков в неизотермической жидкости наблюдалось в опытах [205-206]. Задача о возникновении термокапиллярной конвекции в невесомости вокруг пузыря сферической

формы в сосуде в линейной постановке рассмотрена в работе [207].

В недавнее время к этому кругу задач стали применяться численные методы. В работе [208] исследовалась численно термокапиллярная конвекция внутри капли; изучалось влияние конвекции в процессе капельной конденсации. В работе [209] рассматривалась внешняя задача о термокапиллярных движениях вокруг полусферического пузыря, лежащего на нагреваемой твердой поверхности. Результаты изучения совместного действия естественной и термокапиллярной конвекции при обтекании пузыря в литературе отсутствуют.

Таким образом, судя по имеющейся литературе, область знаний о конвекции в условиях невесомости еще только выходит из стадии лабораторных опытов и изучения на относительно простых моделях основных эффектов в стадию практических приложений к задачам о прогреве жидкости в сосудах.

При постановке задач конвективного теплообмена, рассматриваемых в данной главе, принимались во внимание следующие факторы:

1. Особенности протекания теплообмена в сосудах (объем жидкости, включающий поверхность раздела, изучение теплоотдачи от стенки к жидкости, температурного расслоения, т.е. процессов во всем массиве жидкости при нестационарном прогреве, в отличие от рассматривавшихся ранее задач для тонких слоев жидкости или изолированных пузырьков в стационарных условиях).

2. Возможность различного расположения поверхности раздела газ-жидкость в условиях невесомости и слабых гравитационных полей, в связи с чем рассмотрены два предельных режима: плоская поверхность раздела в цилиндрическом сосуде и сферический пузырь в жидкости.

3. Возможность протекания различных режимов по числам Релея и Марангони: а) "чистая невесомость", т.е. учет только термокапиллярной конвекции при числе Марангони, существенно превышающем критическое, слабое гравитационное поле б) учет естественной конвекции и в) учет

совместного действия естественной и термокапиллярной конвекции, наиболее распространенного в ослабленном поле массовых сил. Рассматриваемые ниже результаты опубликованы в работах [169, 210, 211].

§ 1. Термокапиллярная и естественная конвекция в цилиндрическом сосуде, частично заполненном жидкостью

Общая постановка этой задачи отличается от рассмотренной ранее в главе III (фиг. 55б) лишь тем, что на поверхности раздела имеются градиенты термокапиллярных сил в соответствии с граничным условием (1.38) главы I.

Рассмотрим условия, при которых может физически реализоваться такая схема термокапиллярных движений. Критерии Грасгофа и Марангони связаны соотношением вида

$$Gr_R^* Pr = B_0 \frac{\beta}{\beta_\sigma} Ma^* ,$$

где $Ma^* = \frac{\sigma_0 \beta_0 R^2 q}{\rho \nu a k}$ - число Марангони, отнесенное к потоку тепла;

β - коэффициент температурного расширения;

β_0 - коэффициент “температурного расширения”

поверхностного натяжения в формуле $\sigma = \sigma_0 (1 - \beta_\sigma \Delta T)$.

Судя по результатам расчета равновесных форм свободной поверхности в цилиндрическом сосуде (см., например, [183]), кривизна поверхности для небольших углов φ не слишком велика уже при числах Бонда порядка 100 (при больших значениях φ соответствующие числа B_0 уменьшаются). Учитывая, что соотношение β/β_σ для большинства жидкостей меньше единицы, получим, что в предположении плоской поверхности раздела будет реальным рассматривать совместное действие естественной и термокапиллярной конвекции при значениях чисел Релея, на один-два порядка и более

превышающих значения чисел Марангони. Случай чисто термокапиллярной конвекции в схеме с прямолинейной поверхностью раздела может быть реализован лишь в некоторых "экзотических" условиях: например, при $g = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $g \neq 0$ ($B_0 > 100$) и $\beta = 0$, $\beta_\sigma \neq 0$.

1. Термокапиллярная конвекция при боковом подводе тепла

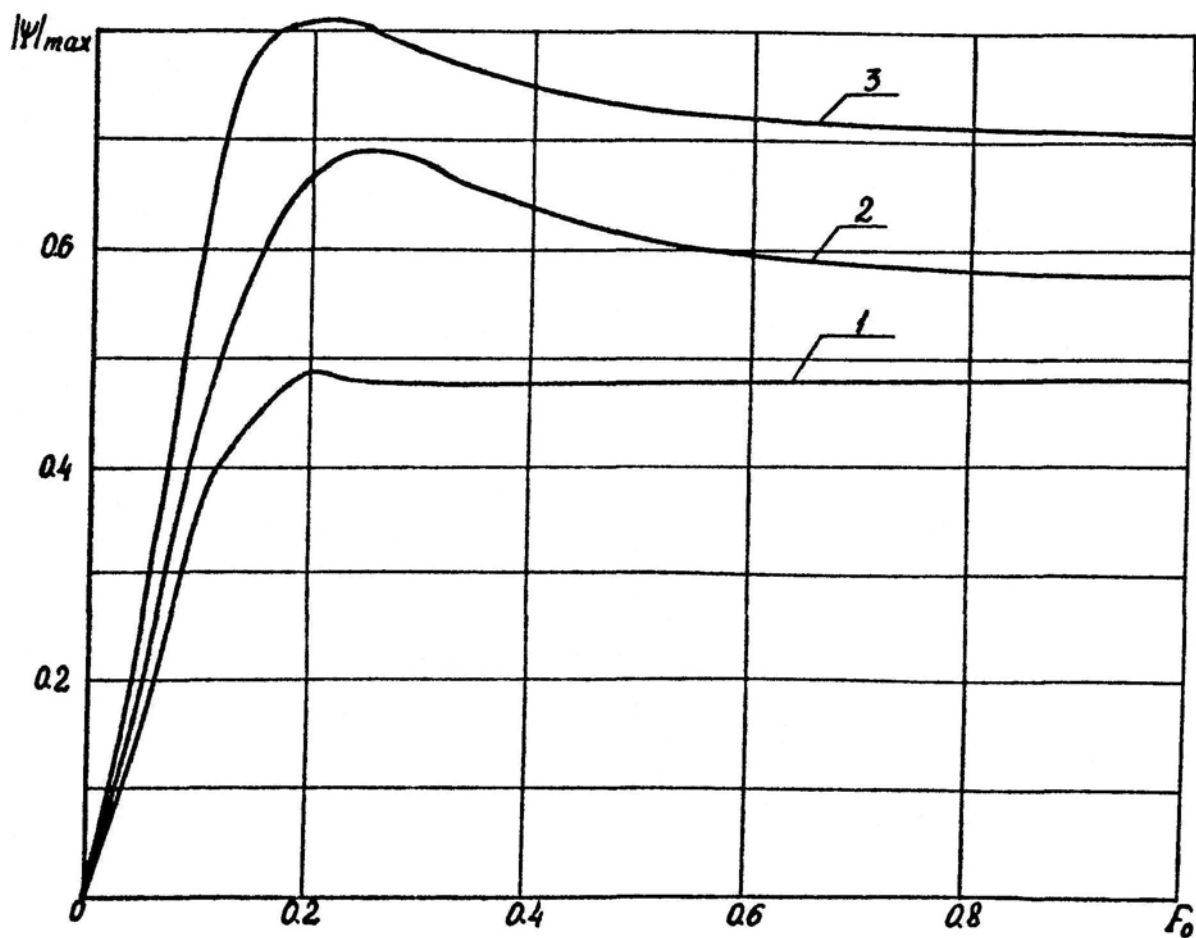
$$(\gamma_w = 1, \gamma_s = \gamma_b = 0).$$

Влияние подвода тепла к поверхности жидкости ($\gamma_w = \gamma_s = 1, \gamma_b = 0$)

Термокапиллярная конвекция при боковом подогреве сосуда возникает сразу же после появления неравномерности температуры вдоль свободной поверхности. Нестационарный процесс развития термокапиллярной конвекции так же, как и естественной конвекции, включает режим прогрева путем только теплопроводности, переходный и квазистационарный режимы. Квазистационарный режим характеризуется постоянным темпом прогрева и постоянной интенсивностью термокапиллярных движений (линия 1 на фиг.116). Ориентировочные границы характерных режимов в диапазоне чисел Фурье и Марангони приведены на фиг.117^{x)} (1 - граница начала влияния термокапиллярной конвекции на поле температуры, 2 - граница максимальной интенсивности движения, 3 - граница квазистационарного режима; горизонтальной пунктирной линией отмечено значение числа Фурье, при котором температурные волны неподвижной жидкости смыкаются на оси сосуда). Из сопоставления с аналогичными результатами для естественной конвекции при боковом подводе тепла (фиг.75) можно заключить, что длительности протекания переходных процессов при естественной и

^{x)} При $Mn^* \leq 10^4$ использовались сетки 11x11, $m_1 = n_1 = 0.3$; при $Mn^* \geq 10^4$ использовались сетки 21x21.

термокапиллярной конвекции будут примерно одинаковы для чисел Рейля, превышающих на один-два порядка числа Марангони.

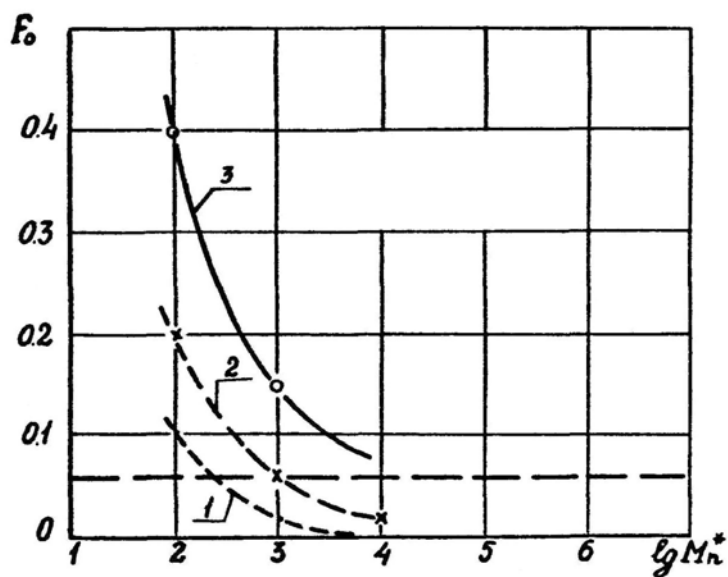


Фиг.116. Изменение во времени амплитуды естественной и термокапиллярной конвекции

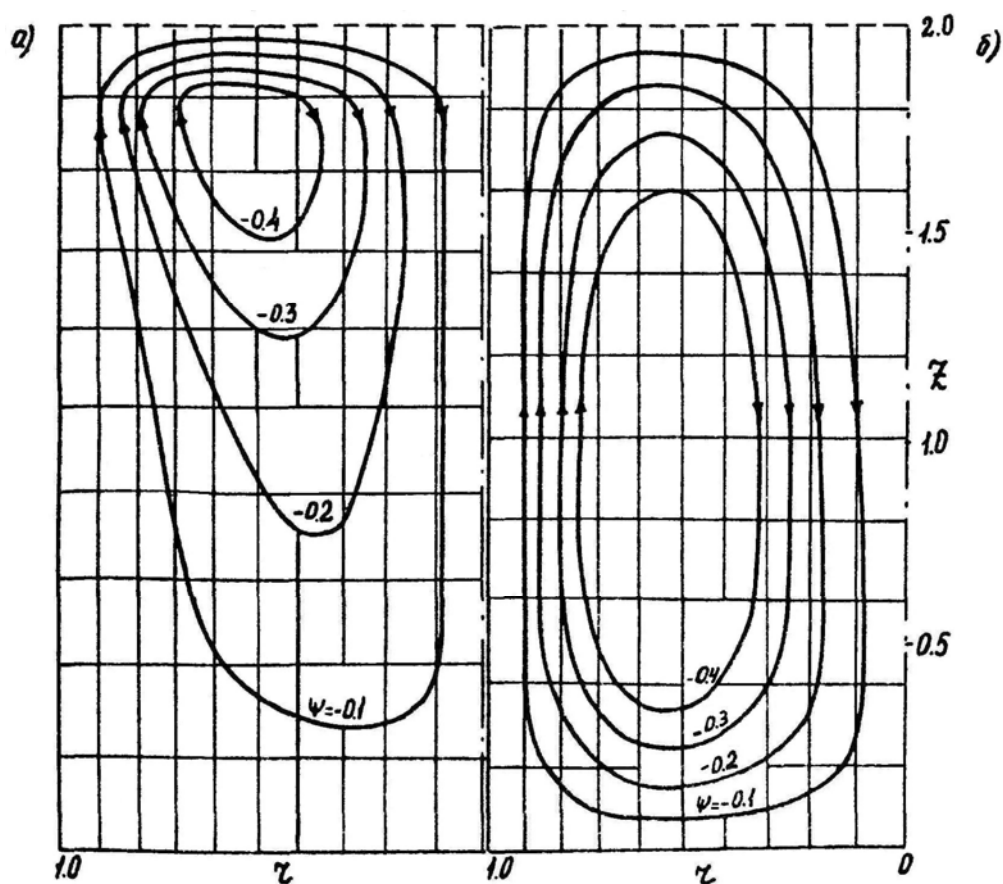
$$1 - Mn = 10^2, \quad Ra_R = 0$$

$$2 - Ra_R = 10^3, \quad Mn = 0$$

$$3 - Mn = 10^2, \quad Ra_R = 10^3$$

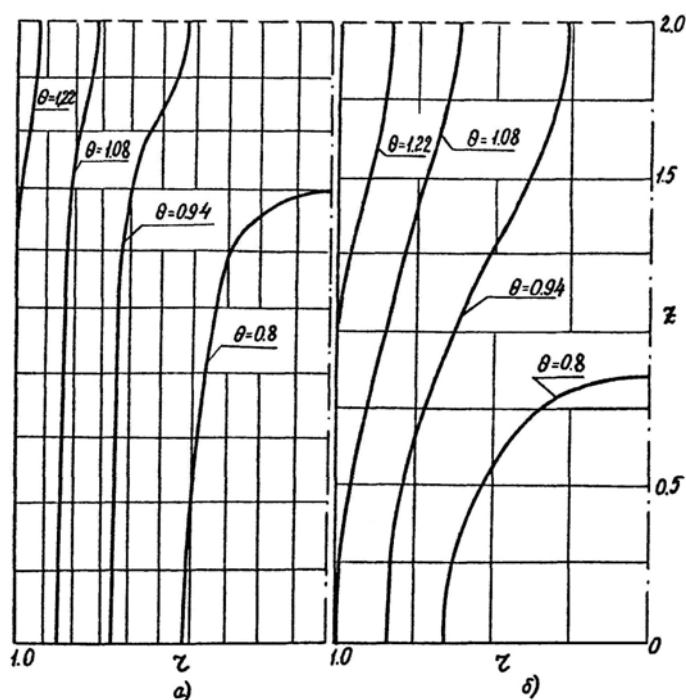


Фиг. 117. Границы режимов термокапиллярной конвекции в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла
 1 - начало влияния на поле температур
 2 - максимальное значение амплитуды
 3 - квазистационарный режим



Фиг. 118. Сопоставление картин линий тока термокапиллярной конвекции при $Mn_R^* = 10^2$ (а) и естественной конвекции при $Ra_R^* = 10^3$ (б).
 Квазистационарный режим.

На фиг. 118, 119 даны некоторые результаты расчета структуры движения и изотерм поля температур на квазистационарном режиме при термокапиллярной конвекции ($Mn_R^* = 10^2$); на каждом из этих графиков справа даны для сопоставления аналогичные результаты для естественной конвекции ($Ra_R^* = 10^3$). Максимальные интенсивности движений в этих двух случаях близки, но зоны влияния существенно различаются. Термокапиллярная конвекция наиболее интенсивна непосредственно у поверхности сосуда; скорость термокапиллярных движений здесь выше, чем при естественной конвекции. В средней и нижней по высоте областях преобладает естественная конвекция. В обоих случаях имеется вертикальное температурное расслоение, однако при термокапиллярной конвекции локальный перегрев на стенке и вертикальные разности температур меньше. Это связано с тем, что вынос тепла к поверхности жидкости происходит не от всей поверхности по высоте сосуда, а только от ее верхней части. Жидкость в нижнем углу сосуда практически не подвергается воздействию термокапиллярных токов. Дополнительные сведения о величинах температур, разностей температур и числе Нуссельта для рассмотренных случаев конвекции даны в первых двух строках приводимой ниже таблицы



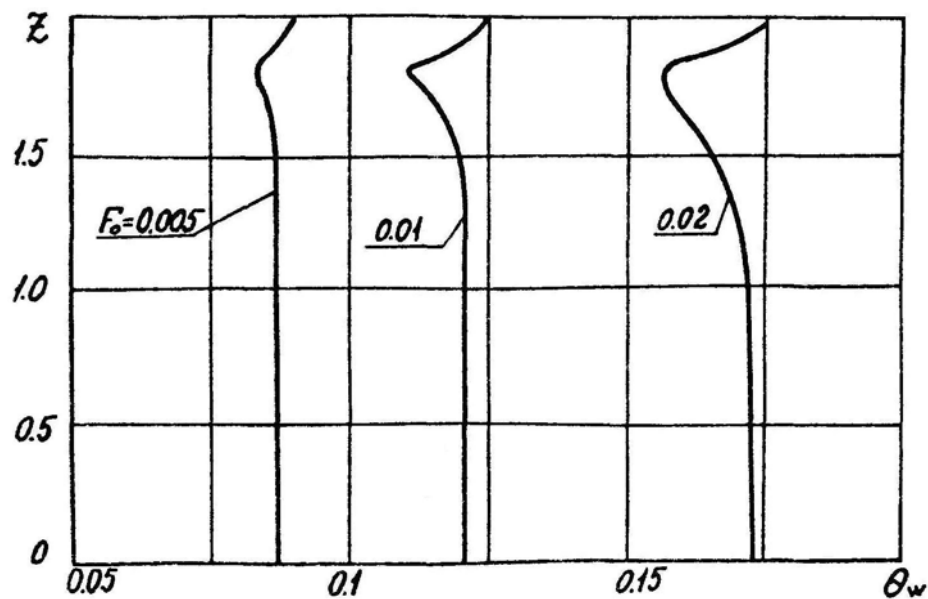
Фиг. 119. Изотермы поля температур при термокапиллярной конвекции $Mn = 10^2$ (а) и естественной конвекции $Ra = 10^3$ (б)

Таблица 7

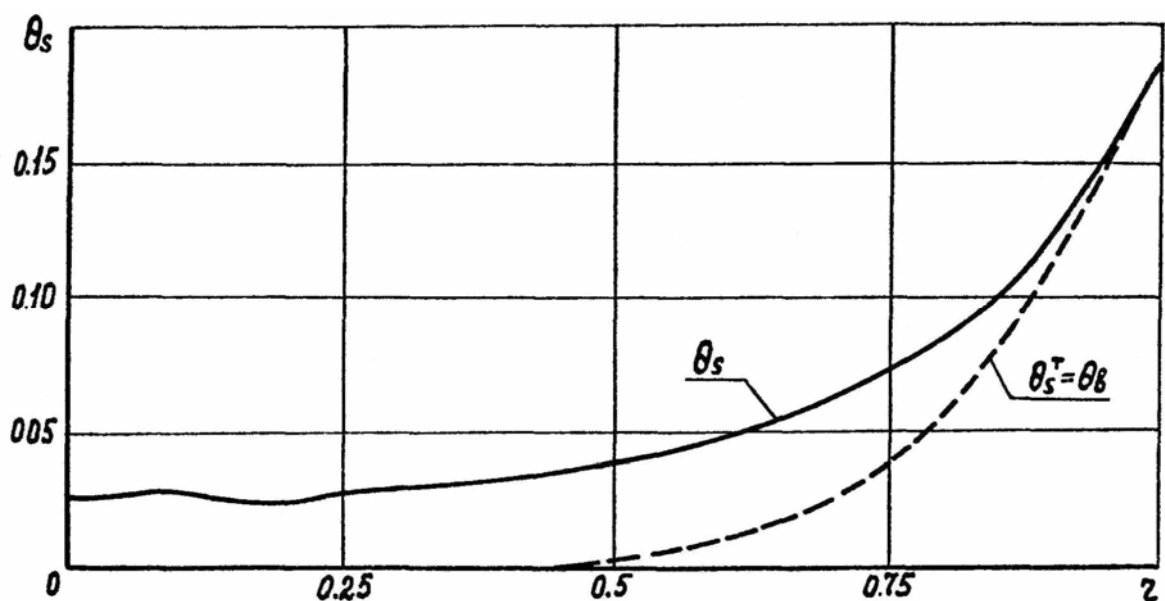
		\bar{Nu}_R	θ_{w_s}	θ_{m_s}	$\theta_{w_s} - \theta_{m_b}$	$\theta_{m_s} - \theta_{m_b}$	$\theta_{w_s} - \theta_{m_b}$
$Mn_R^* = 10^2$		2.10	2.274	1.848	0.11	0.215	0.427
$Ra_R^* = 10^3$		2.45	2.38	1.93	0.327	0.300	0.454
$Mn_R^* = 10^2$,	$Ra_R^* = 10^3$	2.69	2.34	1.95	0.317	0.329	0.393

Рассмотрим некоторые особенности термокапиллярной конвекции при большом числе Марангони $Mn^* = 10^4$ (фиг. 120-124). Скорость термокапиллярных движений возрастает, происходит более интенсивный вынос тепла от нагретой стенки к поверхности жидкости. Профиль температуры на стенке (фиг. 120) имеет характерный "провал", по которому обнаруживается зона наиболее интенсивного отвода тепла. При этом температура свободной поверхности заметно повышается по сравнению с тем случаем, когда конвекции нет (фиг. 121). С течением времени, как и при естественной конвекции, на оси образуется верхняя прогретая зона (фиг. 122). Однако, в отличие от прогрева при естественной конвекции, температура свободной поверхности у стенки мало изменяется. Это связано с тем, что "натекание" нагретой жидкости вдоль всей поверхности нагретой стенки при термокапиллярной конвекции отсутствует. Некоторые характеристики движения (линии тока или профили скорости) при числах $F_0 = 0.02$, $Mn^* = 10^4$ даны на фиг. 123, 124. Число Рейнольдса, отнесенное к максимальному значению горизонтальной составляющей скорости и радиусу сосуда, равно около 100 (что соответствует по величине режиму естественной конвекции при числе $Ra_R^* \cong 10^6$ (фиг. 81). Зона наиболее интенсивного движения и наиболее интенсивного отвода тепла от боковой стенки при больших числах Марангони, как видно из фиг.122-124, становится довольно узкой и смещается к поверхности жидкости. Значительные градиенты скорости и температуры существенно осложняют расчет этой зоны. При больших числах Марангони

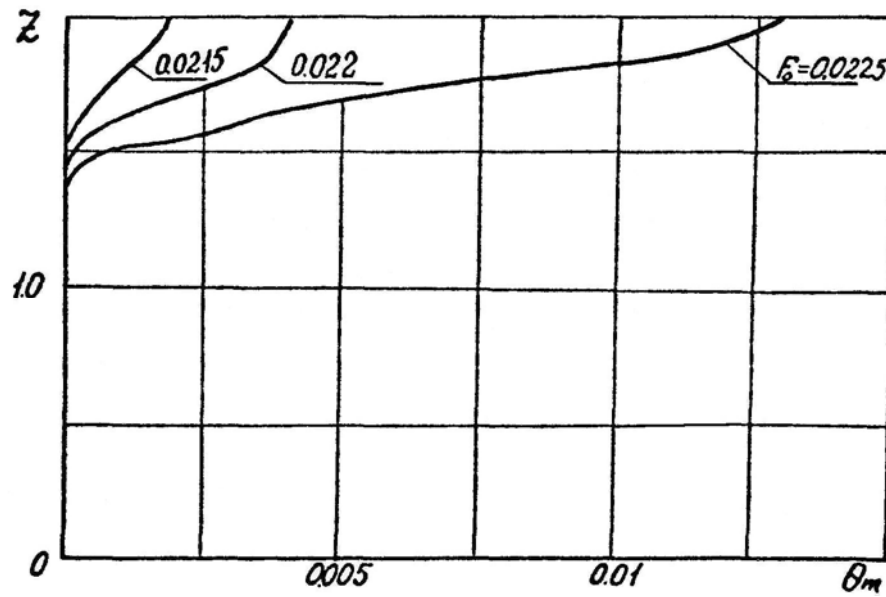
ламинарное термокапиллярное движение может быть гидродинамически неустойчиво и может переходить в турбулентное; данные о числах Марангони, при которых происходит переход в турбулентный режим, в настоящее время отсутствуют. В условиях невесомости поверхность раздела может сворачиваться в отдельные пузыри с меньшими числами Марангони, в результате чего локальные градиенты должны уменьшаться. Все эти вопросы требуют дополнительного исследования.



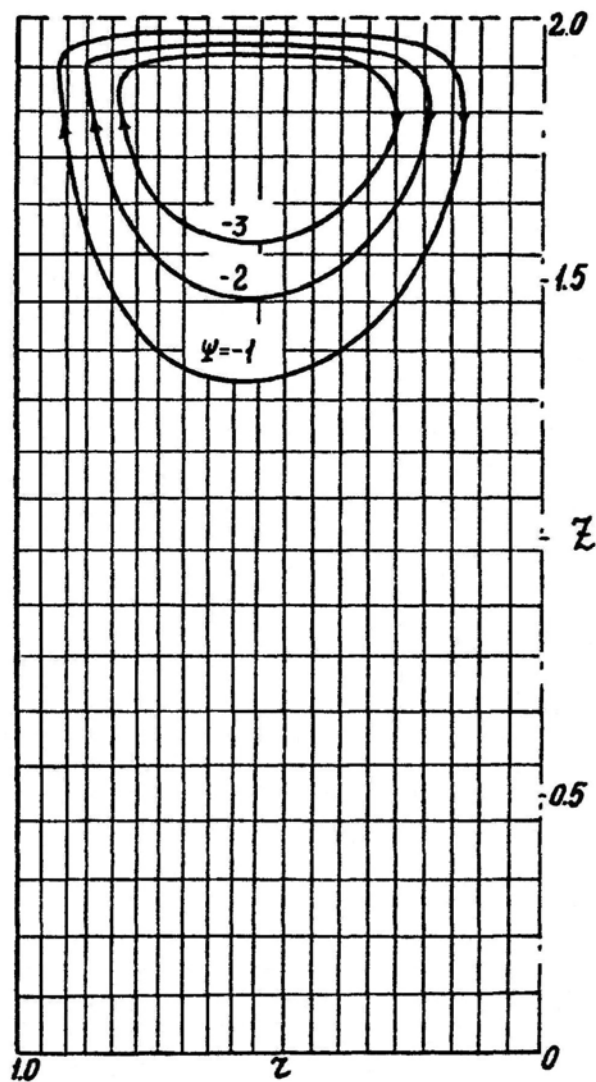
Фиг. 120. Распределение температур вдоль стенки $Mn^* = 10^4$



Фиг. 121. Распределение температуры вдоль свободной поверхности
 $Mn^* = 10^4$, $F_0 = 0.02$ - - - - теплопроводность



Фиг. 122. Распределение температур вдоль оси сосуда при термокапиллярной конвекции ($Mn^* = 10^4$)

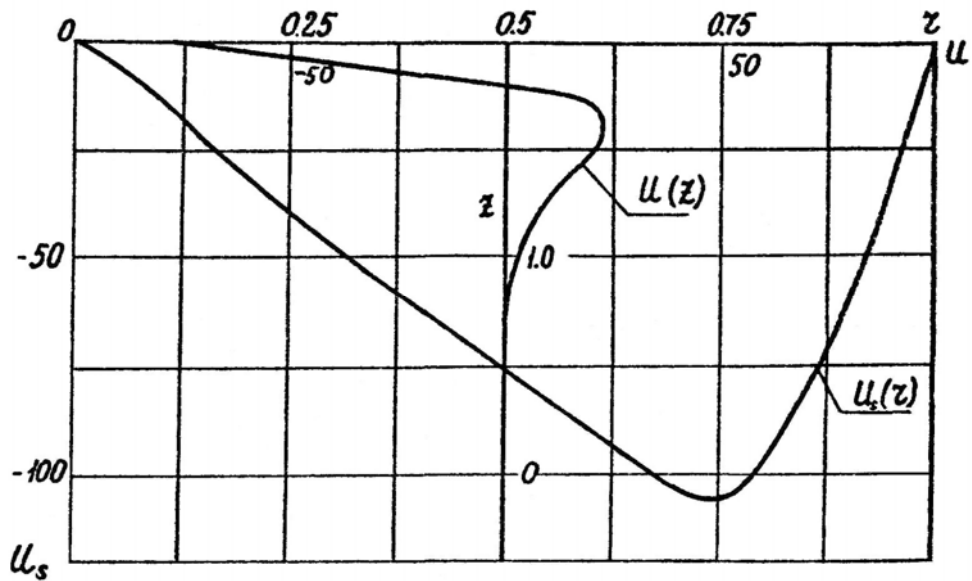


Фиг. 123. Линии тока при термокапиллярной конвекции $Mn^* = 10^4$, $F_0 = 0.02$

Рассмотрим влияние на термокапиллярные эффекты подвода тепла к свободной поверхности сверху (при наличии бокового подвода тепла). При этом интенсивность конвекции несколько уменьшается (фиг. 125а). Ослабление термокапиллярной конвекции происходит за счет большего выравнивания температуры вдоль поверхности при переносе тепла к оси от нагретой стенки, как показано на фиг. 125б.

Вклад термокапиллярной конвекции в уменьшении максимальной температуры поверхности при наличии подвода тепла сверху весьма ощутим, в особенности при больших числах Марангони. Это можно видеть из фиг. 126, на которой показано изменение максимальной температуры свободной поверхности (θ_{w_s}) при отсутствии конвекции (кривая I) и при наличии конвекции с числом $Mn_R^* = 10^5$ ^{x)}. Такое значительное уменьшение температуры поверхности при действии только естественной конвекции в аналогичной ситуации будет лишь при числах Релея $Ra_R^* = 10^7 - 10^8$ (фиг. 99). Таким образом, из приведенных результатов следует, что наибольшее влияние термокапиллярной конвекции в глубоких сосудах, подогреваемых со стороны боковой поверхности, заключается в выравнивании температуры вблизи поверхности за счет переноса тепла от нагретых пристеночных слоев к оси.

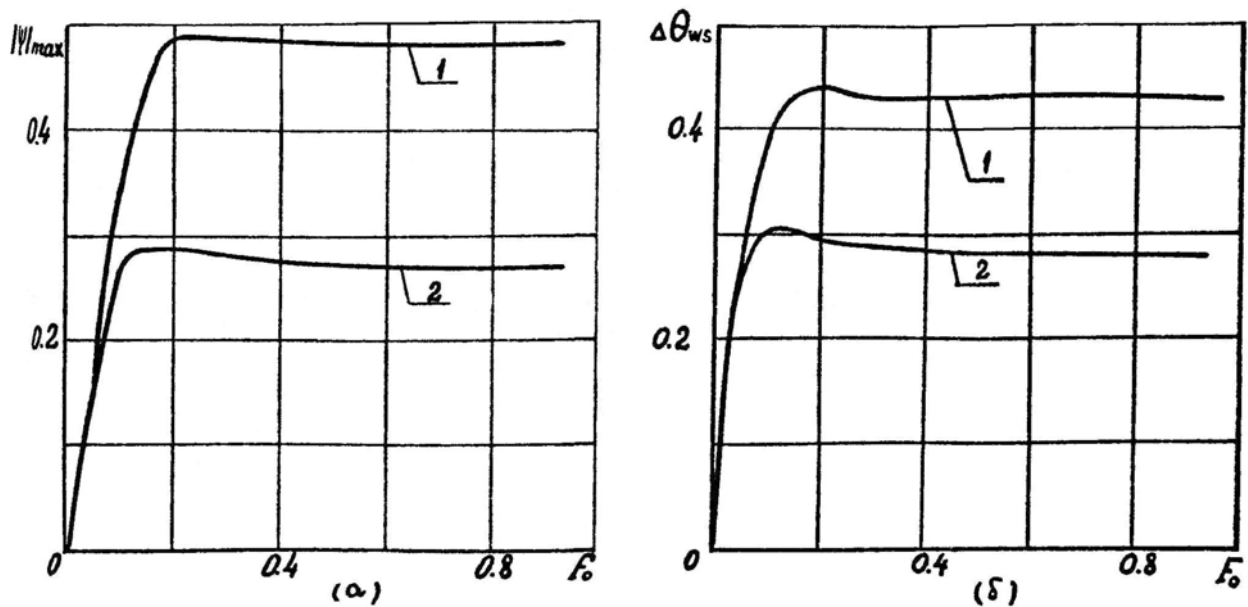
^{x)} Этот расчет выполнен на сетке с сильным сгущением у поверхности жидкости и боковой поверхности сосуда ($m_1 = n_1 = 2$) при числе узлов 41x41.



Фиг. 124. Профили горизонтальной составляющей скорости при термокапиллярной конвекции $Mn^* = 10^4$, $F_0 = 0.02$

$u_s(r)$ - вдоль поверхности жидкости

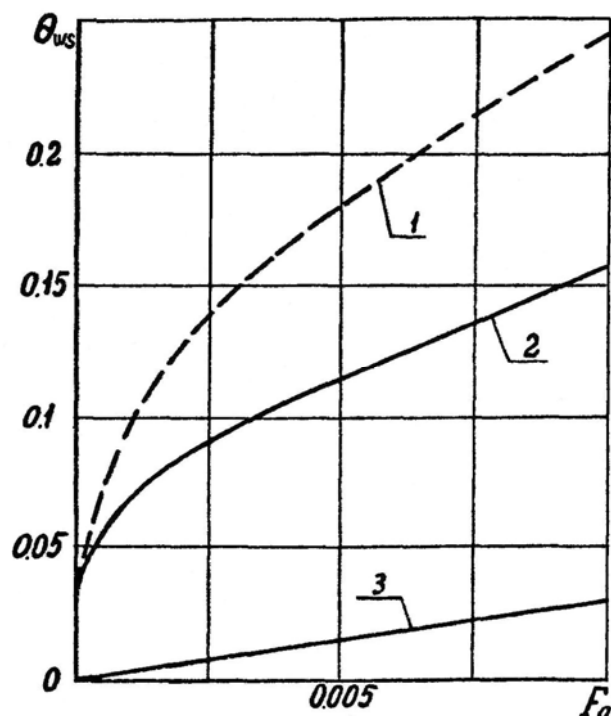
$u(z)$ - по вертикали при $r = 0.5$



Фиг. 125. Влияние на термокапиллярную конвекцию подвода тепла к поверхности жидкости. 1 - $\gamma_w = 1$, $\gamma_s = \gamma_b = 0$, 2 - $\gamma_w = \gamma_s = 1$, $\gamma_b = 0$

а) изменение амплитуды конвекции

б) изменение разностей температур вдоль поверхности



Фиг. 126. Изменение максимальной температуры свободной поверхности

$$(\gamma_w = \gamma_b = 1, \gamma_s = 0)$$

1 - теплопроводность

2 - термокапиллярная конвекция $Mn = 10^5$

3 - среднемассовая температура

2. Термокапиллярная конвекция, возникающая при подводе тепла по нормали к свободной поверхности (неустойчивость Марангони)

$$(\gamma_s = \gamma_w = 0, \gamma_b = 1)$$

В этом случае статическое равновесие поверхности раздела возможно, но может потерять устойчивость при определенном числе Марангони

$\left(Mn = \frac{\sigma_0 \beta_\sigma A H^2}{\rho \nu a} \right)$, отнесенном к глубине слоя жидкости H . Возможность этого

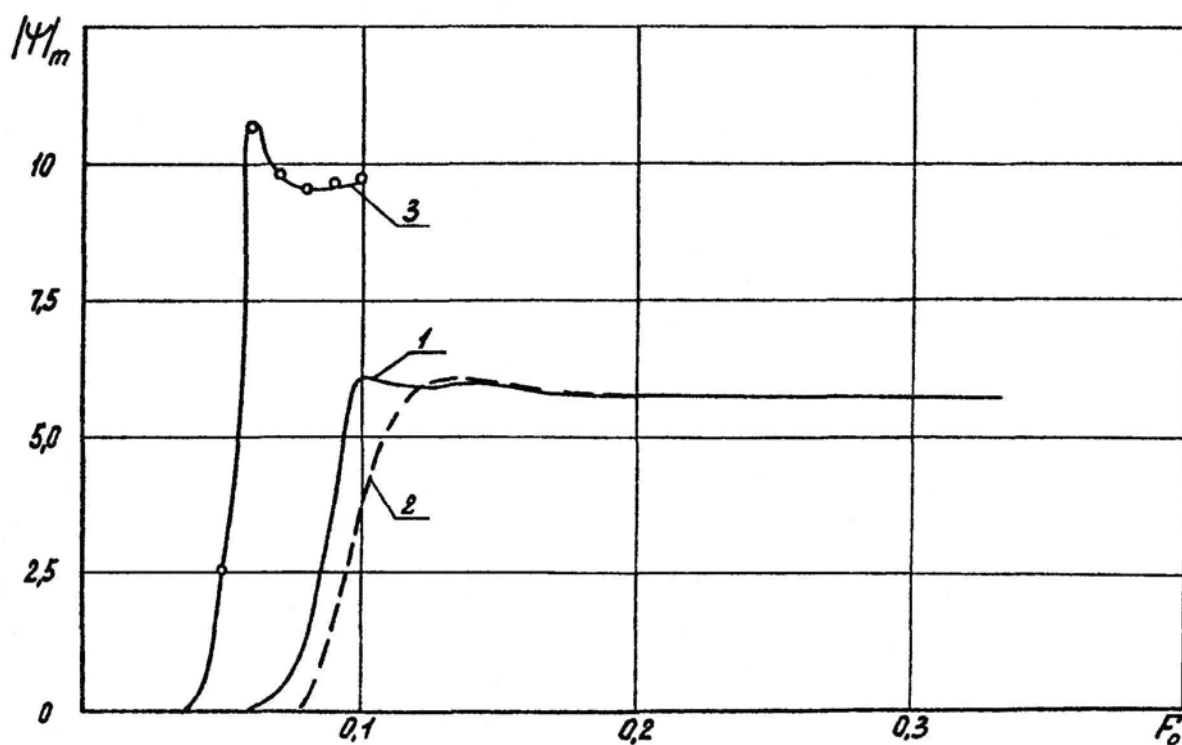
механизма возбуждения конвекции доказана теоретически и экспериментально в работах [193-195, 200-202], однако данные о развитой конвекции отсутствуют.

Рассмотрим результаты расчета нелинейных движений за порогом устойчивости равновесия. Численное решение получено на сетке 11×11 ,

$m_1 = n_1 = 0.3$ при малой степени заполнения сосуда жидкостью $\frac{H}{R} = 0.5$ и при подводе тепла ко дну сосуда. В начальный момент времени поле температур однородно, движение жидкости отсутствует; поток тепла ко дну подводится внезапно.

Если дополнительные возмущения отсутствуют, то термокапиллярное движение при численном решении уравнений (1.33-1.36) с граничным условием (1.38) (глава I) возбудить не удастся даже при весьма больших числах Марангони, заведомо превышающих критические (аналогичная ситуация нам уже встречалась ранее в главе II при расчетах естественной конвекции). Поэтому в качестве возмущений, выводящих систему из равновесия, задавался небольшой поток тепла на боковой поверхности; величина этого потока составляла $\gamma_w = 10^{-3} \div 10^{-4}$. Термокапиллярное движение реализовало при числе $Mn_R^* \cong 10^4$ ($Mn_H^* = 2.5 \cdot 10^3$). Если же тепло подводится к поверхности не со стороны жидкости, а сверху, из окружающей среды ($\gamma_s = 1$, $\gamma_w = \gamma_b = 0$), возбуждение термокапиллярных движений при этих же и больших значениях Mn^* , как и следовало ожидать, не происходит^{х)}. На фиг. 127 показано изменение во времени максимального значения функции тока $|\Psi|_{\max}(F_0)$, иллюстрирующее потерю устойчивости равновесия, развитие конвекции за порогом устойчивости и установление квазистационарного режима прогрева. Развитие основного термокапиллярного движения начинается после того, как температурные волны, распространяющиеся от дна сосуда, достигнут поверхности жидкости.

^{х)} Можно дать простое качественное объяснение этому факту. При подводе тепла сверху (в том случае, если поверхностное натяжение уменьшается при увеличении температуры) на поверхности жидкости всегда образуются конвективные токи, имеющие направление, обратное конвективным токам основного возмущающего движения, что и приводит к затуханию движения.



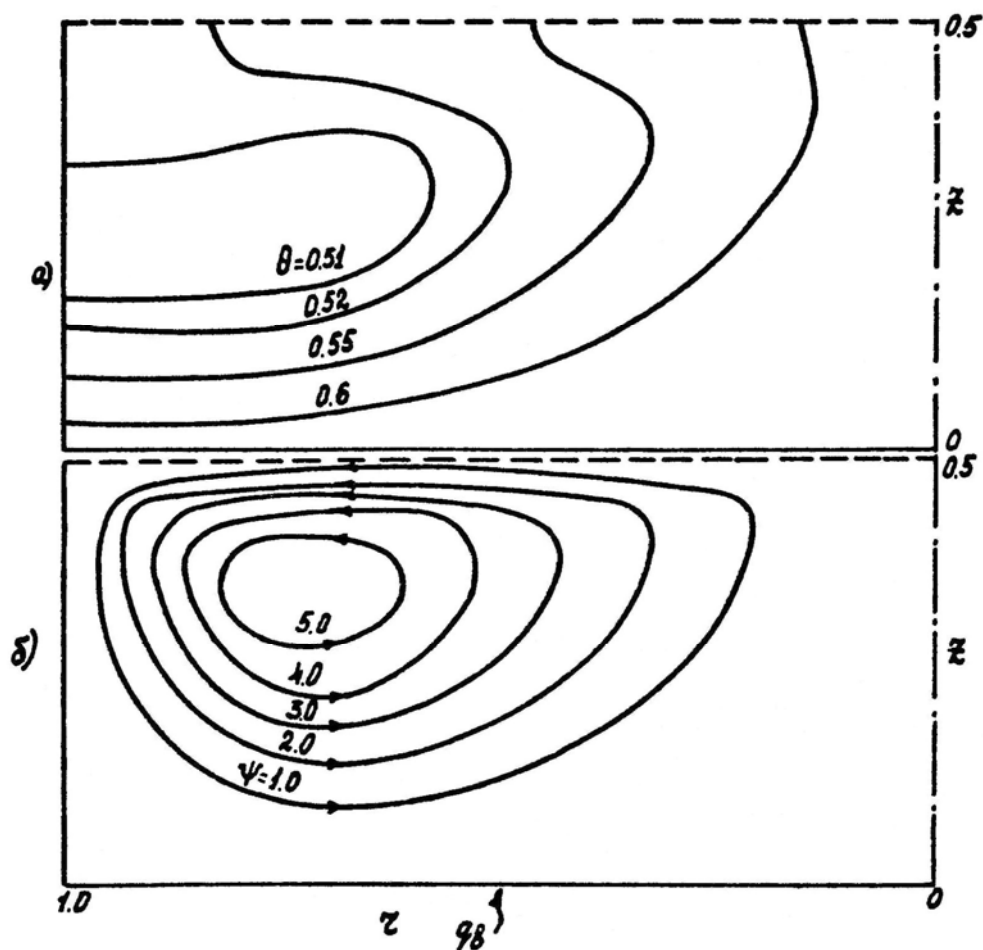
Фиг. 127. Развитие движения после потери устойчивости равновесия

$$(\gamma_b = 1, \gamma_s = 0)$$

$$1 - Mn^* = 10^4, \gamma_w = 10^{-3}; \quad 2 - Mn^* = 10^4, \gamma_w = 10^{-4};$$

$$3 - Mn^* = 3 \cdot 10^4, \gamma_w = 10^{-4}$$

Из фиг. 127 можно видеть, что величина возмущения γ_w в рассмотренном его диапазоне ($\gamma_w = 10^{-3} \div 10^{-4}$) не оказывает влияния на установившееся движение; при уменьшении γ_w лишь несколько затягивается само развитие тепловой неустойчивости. При увеличении числа Марангони происходит быстрый рост возмущений и увеличение интенсивности термокапиллярной конвекции. На квазистационарном режиме прогрева термокапиллярное движение захватывает весь массив жидкости и оказывает существенное влияние на поле температур; это можно видеть на фиг. 128а по отклонению изотерм от прямых горизонтальных линий. Линии тока даны на фиг. 128б.



Фиг. 128. Изотермы (а) и линии тока (б) термокапиллярного движения за порогом устойчивости равновесия $Mn^* = 10^4$, $F_0 = 0.03$

3. Совместное действие естественной и термокапиллярной конвекции

Эффекты совместного действия двух механизмов конвекции рассмотрим в случае бокового подогрева сосуда и при наличии бокового потока и потока тепла к свободной поверхности сверху. Интенсивность перемешивания в общем случае выше, чем в тех случаях, когда эти два вида конвекции действует отдельно^{х)}. Это видно из сопоставления зависимостей $|\Psi|_m(F_0)$ на фиг. 116.

^{х)} Этот результат будет иметь место в рассматриваемом режиме прогрева лишь в том случае, когда направления движений совпадают, т.е. когда поверхностное натяжение и плотность жидкости уменьшаются при увеличении температуры (для большинства жидкостей это выполняется).

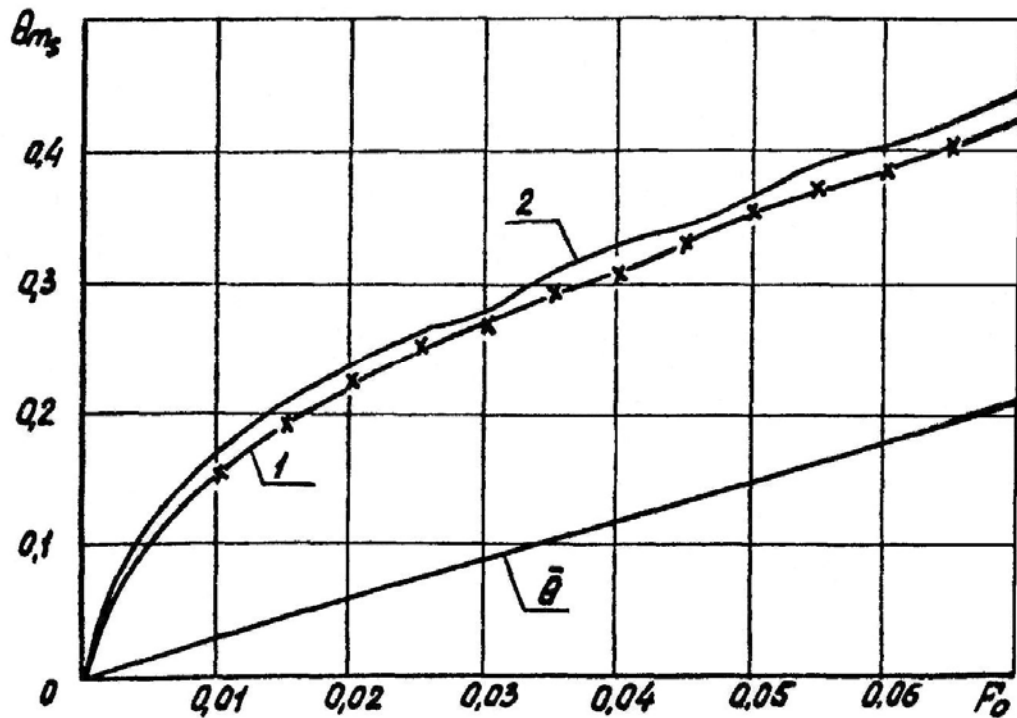
Влияние совместного действия естественной и термокапиллярной конвекции на поле температур дано в третьей строке таблицы 7. Наиболее важным эффектом по сравнению со случаем естественной конвекции является уменьшение максимальной температуры поверхности жидкости (θ_{w_s}) и вертикальной разности температур на стенке в связи с более интенсивным отводом тепла. Кроме того, увеличивается температура поверхности у оси и уменьшается разность температур на поверхности ($\theta_{w_s} - \theta_{m_s}$). Однако в количественном отношении эти эффекты не велики; вклад собственно термокапиллярной конвекции ослабляется, так как при наличии естественной конвекции уменьшается неравномерность в распределении температуры поверхности.

На фиг.129, 130 даны результаты расчета совместного действия двух механизмов конвекции при больших числах Релея и Марангони $Ra_R^* = 10^6$, $Mn^* = 10^4$ при $\frac{H}{R} = 2$, $Pr=1$, $\gamma_w = \gamma_b = 1$ в случае, когда имеется приток тепла и к поверхности жидкости; задан закон теплообмена в виде

$$q_s = \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=H/R} = Nu_s (\theta_e - \theta_s), \quad (4.1)$$

где $Nu_s = \frac{d_s R}{k}$ - число Нуссельта, α_s - коэффициент теплоотдачи от окружающей среды к поверхности жидкости, $\theta_e = \frac{T_e - T^0}{q_s R} k$ - безразмерная температура окружающей среды. В данном случае были приняты значения $Nu_s = 1$, $\theta_e = 1$. Из фиг. 129 видно, что учет термокапиллярной конвекции приводит к некоторому увеличению температуры жидкости на оси (около 10%). В то же время температура свободной поверхности у стенки уменьшается примерно на такую же величину. Поэтому разность температур вдоль свободной поверхности уменьшается примерно на 20%. Картина движения при

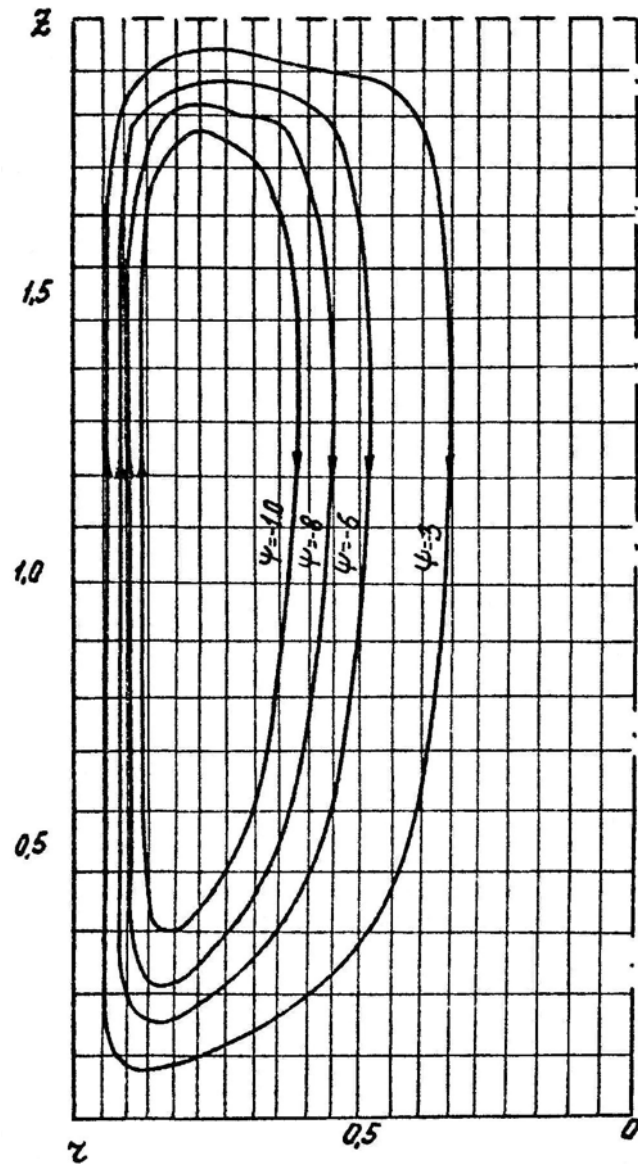
$F_0 = 0.01$ дана на фиг.130. В этом случае так же, как в рассмотренном ранее, количественный вклад термокапиллярной конвекции по сравнению с естественной конвекцией невелик.



Фиг. 129. Влияние термокапиллярной конвекции на изменение температуры поверхности жидкости у оси

$$1 - Mn = 0, Ra_R = 10^6 ; 2 - Mn = 10^4, Ra_R = 10^6$$

Таким образом, режимы невесомости и пониженной гравитации следует разделить, исходя из соотношения между значениями чисел Марангони и Релея, на три характерных режима. Собственно "режиму невесомости" будет отвечать случай $Mn \gg Ra$, когда преобладают термокапиллярные эффекты.



Фиг. 130. Линия тока при совместном действии естественной и термокапиллярной конвекции

$$Mn^* = 10^4, \quad Ra_R^* = 10^6, \quad F_0 = 0.07$$

При $Mn^* \sim Ra^*$ вносят вклад, по-видимому, оба вида конвекции и при $Mn^* > Ra^*$ преобладает естественная конвекция. Так как при увеличении числа Релея разности температур вдоль поверхности жидкости, поддерживающие термокапиллярные движения, быстро уменьшаются (см. гл. III, фиг. 82), то при фиксированном числе Mn^* и увеличении перегрузки g/g_0 вклад собственно термокапиллярной конвекции будет систематически уменьшаться. По этой

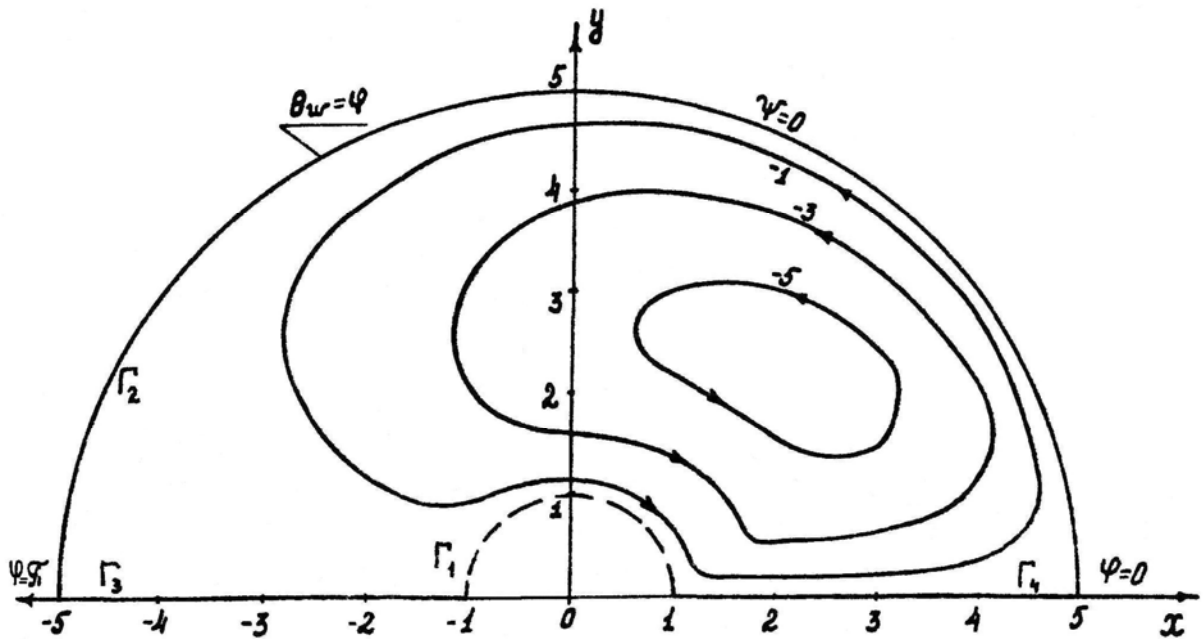
причине в поле силы тяжести Земли в сосудах больших размеров ($Ra^* \sim 10^{13} - 10^{15}$, $Mn^* \sim 10^6 - 10^8$) термокапиллярная конвекция подавляется, что и приводит к трудностям при воспроизведении термокапиллярных эффектов в земных условиях. В условиях ослабленного гравитационного поля ($Ra^* \sim Mn^*$), по-видимому, возможно оптимальное (с точки зрения поддержания температурного режима) сочетание естественной и термокапиллярной конвекции. Эти вопросы требуют дальнейшего исследования.

§ 2. Прогрев жидкости в сферическом сосуде, содержащем газовый пузырь

1. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарный прогрев жидкости в сферическом сосуде, содержащем газовый пузырь (также сферической формы), расположенный в центре сосуда, как показано на фиг. 131. На границе сосуда заданы поток тепла или некоторые распределения температур (при условии, что поля температур и движения имеют осевую симметрию). Поэтому решение рассматривается в области, границами которой являются: Γ_1 - сферическая поверхность пузыря радиуса R_0 , Γ_2 - внешняя сфера радиуса R и Γ_3, Γ_4 - отрезки оси симметрии. Поверхность пузыря предполагается теплоизолированной, т.е. поток тепла по нормали к поверхности пузыря равен нулю ^{x)}.

^{x)} Это условие предполагает отсутствие на свободной поверхности фазовых переходов, которым в однокомпонентной среде более близко соответствовало бы условие $T_s \cong const$.



Фиг. 131. Термокапиллярная конвекция вокруг пузыря при несимметричном распределении температуры на поверхности сосуда $Mn = 100$

Динамическое условие на поверхности пузыря следует из общего граничного условия (1.29) главы 1 в предположении, что поверхность пузыря недеформируема и имеет сферическую форму, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа ^{x)}

$$P_1 - P_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.2)$$

Тогда имеем в безразмерном виде

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = Mn \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \quad u_r = 0 \quad (4.3)$$

^{x)} Это условие будет предполагаться также и при наличии слабого гравитационного поля.

где r, φ - сферические координаты, $u_\varphi = \frac{u_\varphi R_0}{\nu}$ - безразмерная тангенциальная скорость на поверхности пузыря, u_r - радиальная скорость, $\theta = \frac{T - T_0}{q R_0} k$ - безразмерная температура, $Mn^* = \frac{\sigma_0 \beta_0 R_0^2 q}{\rho \nu^2 k}$ - число Марангони.

Безразмерное поле температур в общем случае определяется соотношением вида

$$\theta(r, \varphi, t) = f(Ra_R^*, Mn_{R_0}^*, Pr, R/R_0) \quad (4.5)$$

Здесь число Релея отнесено к радиусу внешней нагреваемой поверхности, а число Марангони - к радиусу пузыря. Предполагается, как и ранее, что начальное поле изотермично, движение жидкости в начальный момент времени отсутствует: $\theta^0 = u^0 = v^0 = 0$. Для решения задачи о конвекции используются нестационарные уравнения Буссинеска (записанные в данном случае в сферических координатах). Детали, относящиеся к численной реализации данной задачи, приведены в работе [211].

По разнообразию физических эффектов рассматриваемая задача весьма сложна, хотя и содержит ряд упрощающих предположений. Можно выделить два основных круга задач. Первый - это внешняя задача обтекания пузырей в неизотермической жидкости (при наличии естественной и термокапиллярной конвекции). В нелинейной постановке такие задачи ранее не рассматривались. Решение этой задачи дает информацию, на базе которой должны решаться в дальнейшем такие вопросы, как динамика пузырей в невесомости, их устойчивость и т.д. Эти вопросы в той или иной степени уже затрагивались в работах [204-207].

Второй круг задач - это собственно задачи о прогреве, основной целью которых является определение температур нагреваемой внешней поверхности, поверхности пузыря, т.е. определение теплоизолирующих свойств массива жидкости, в котором содержится пузырь.

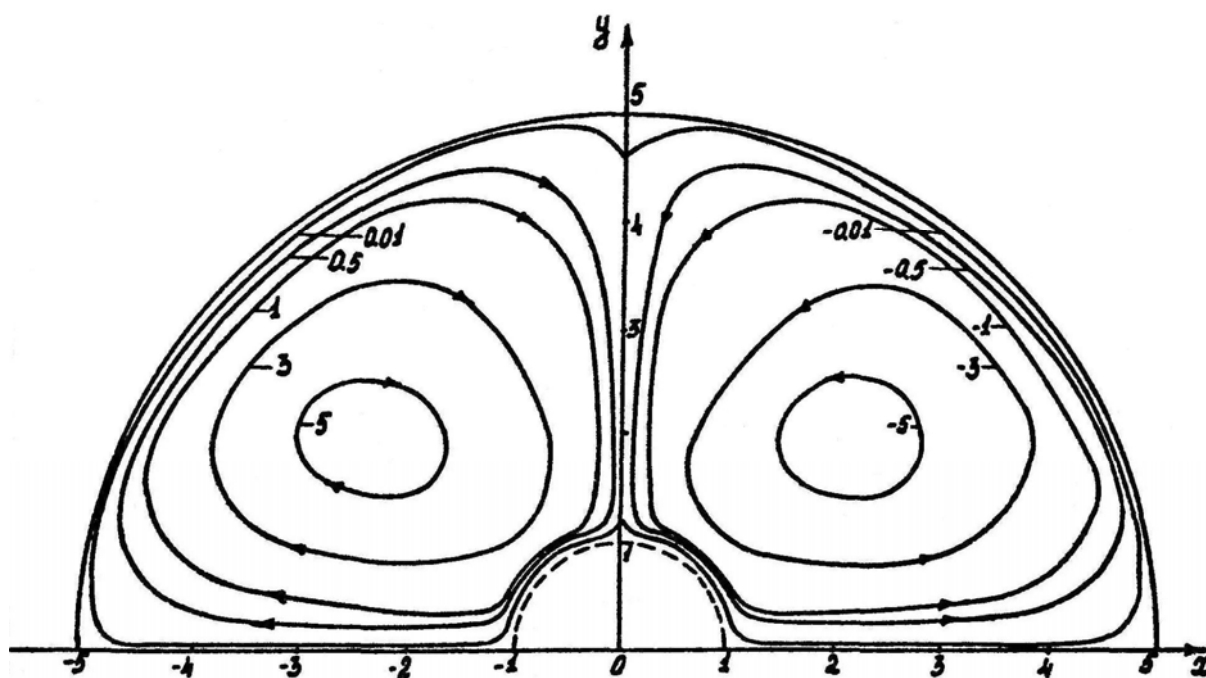
2. Термокапиллярные движения вокруг пузыря в условиях невесомости

При заданном на внешней поверхности потоке тепла (или температуре) термокапиллярные движения вокруг пузыря могут возникнуть лишь спустя некоторое время после начала прогрева, когда фронт температурной волны достигнет поверхности пузыря. Это время в соответствии с решением нестационарного уравнения теплопроводности в сфере (см. [171]), имеет порядок $F_0 = \frac{at}{R^2} \sim 0.1$. Вид возникающего движения зависит от распределения температуры вдоль поверхности пузыря, которое определяется характером подвода тепла извне. На фиг.131 дана картина линий тока установившегося несимметричного термокапиллярного движения ($Mn = 100, R/R_0 = 5, Pr = 1$) при линейном распределении температуры по углу на внешней поверхности ($\theta_w = \varphi$)^{x)}. У поверхности пузыря жидкость движется из области с высокой температурой в область с низкой температурой и, таким образом, имеется сила, выталкивающая пузырь и заставляющая его перемещаться к более нагретой стенке. Этот механизм перемещения пузырей в неизотермической жидкости отмечался в ряде работ [204-206]. Однако, возможен и другой вид термокапиллярных движений, возникающих после потери устойчивости равновесия при подводе тепла по нормали к свободной поверхности (по аналогии со случаем, рассмотренным в п. 2 § 1 данной главы). Устойчивость равновесия в этом случае рассматривалась в работе [207]. На фиг. 132 дана картина линий тока установившегося движения при числе $Mn^* = 10^3 (R/R_0 = 5, Pr = 1, \text{ сетка } 21 \times 21)$ в том случае, когда вдоль всей внешней поверхности сосуда задан равномерный поток тепла. Очевидно, что такая симметричная структура движения, в отличие от показанной на фиг. 131,

^{x)} Число Марангони в этом случае отнесено к разности температур:

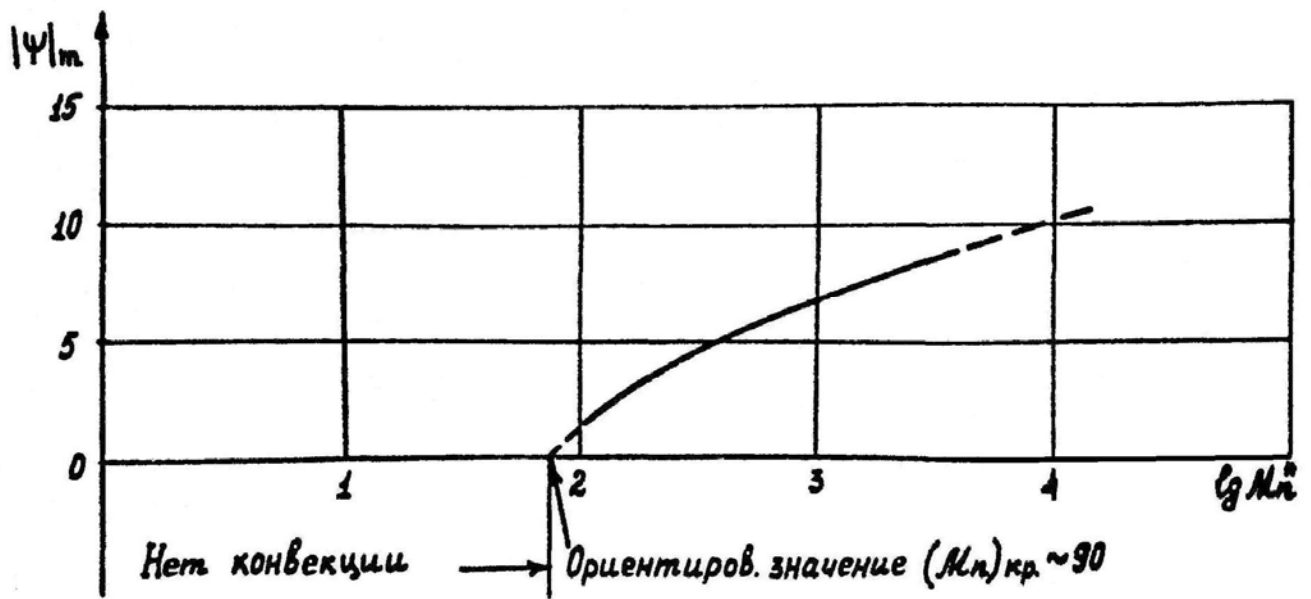
$$Mn = \frac{\sigma_0 \beta_0 R}{\rho \nu^2} (T_w - T_m^0)$$

должна способствовать удержанию пузыря внутри массива жидкости. Зависимость максимального значения функции тока от числа Марангони для этого вида движений на квазистационарном режиме дана на фиг.133. Экстраполяция этой зависимости к значению $|\Psi|_m = 0$, показанная пунктирной линией, позволяет определить значение критического числа Марангони, которое равно около 90 ^{х)}. На фиг.134 даны профили температур вдоль поверхности пузыря и вдоль внешней поверхности в различные моменты времени. Пунктирными линиями даны температуры при отсутствии конвекции. Отсюда можно видеть характерные режимы прогрева по времени и локальные эффекты термокапиллярной конвекции. Температура поверхности пузыря увеличивается благодаря поводу тепла от стенки. Влияние термокапиллярной



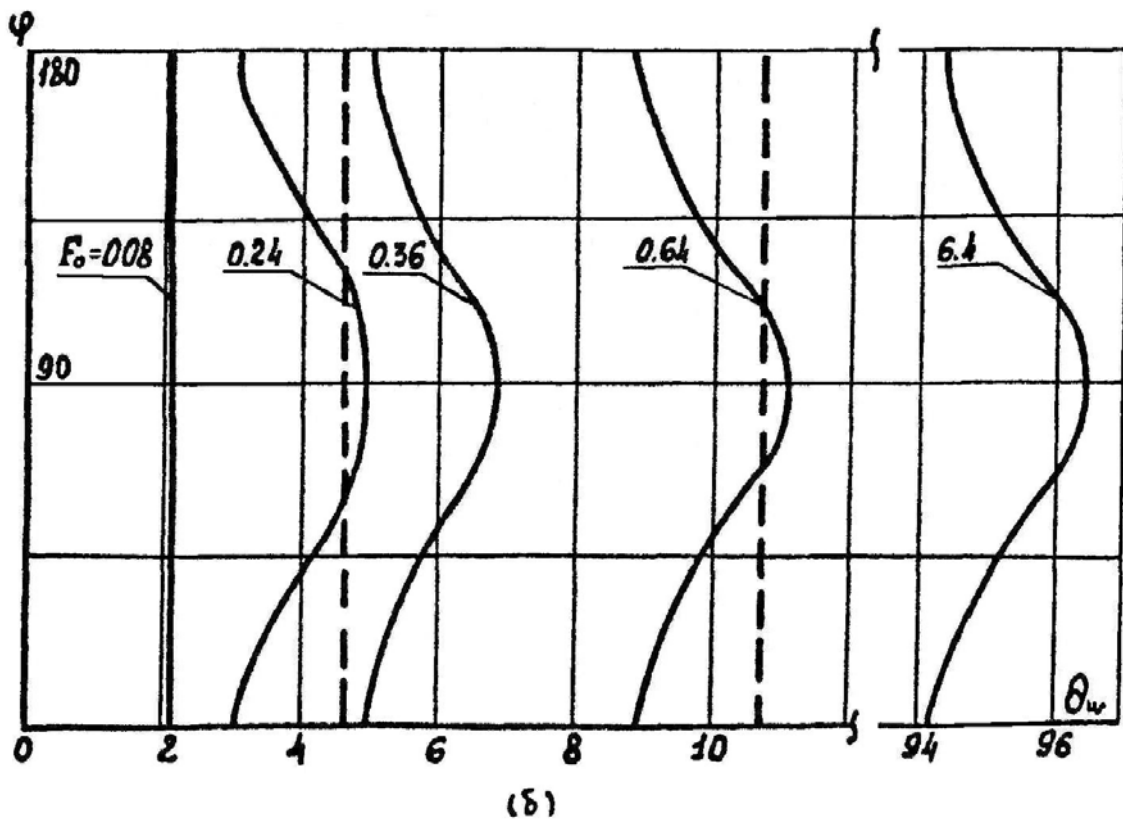
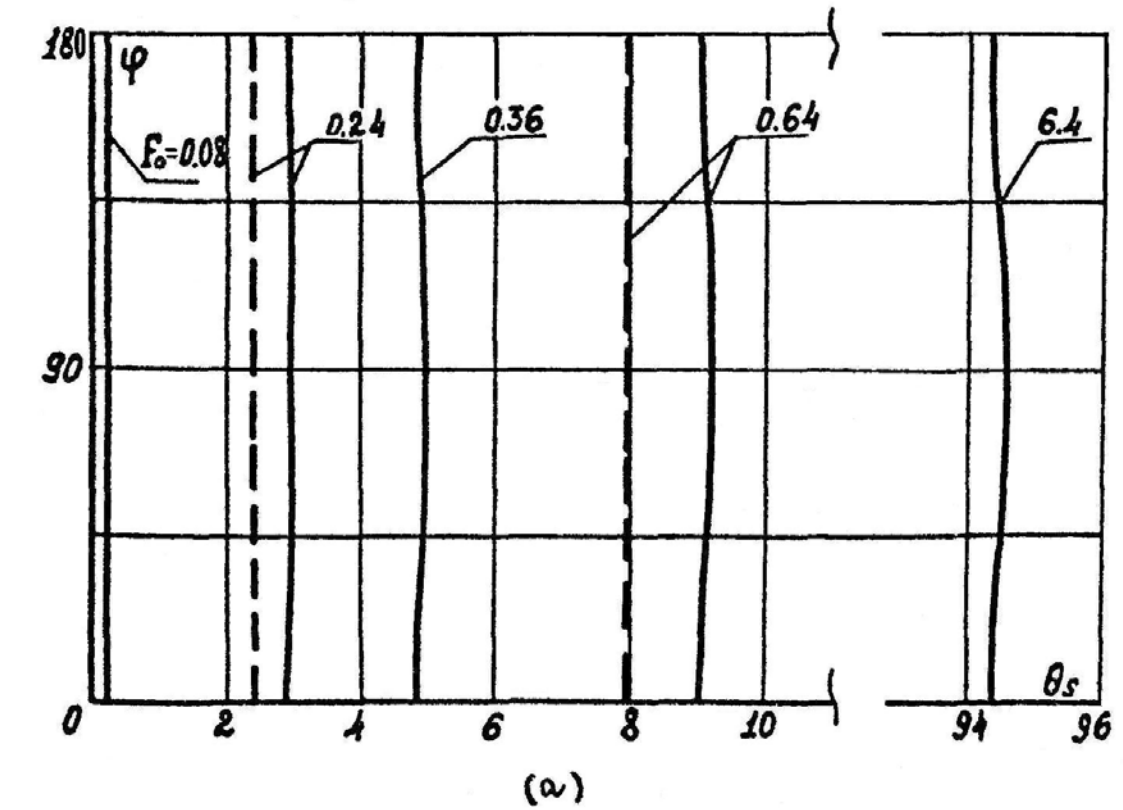
Фиг. 132. Термокапиллярная конвекция вокруг пузыря при равномерном подводе тепла к внешней поверхности сосуда
 $Mn^* = 1000, F_0 = 0.24$, сетка 21×21

^{х)}. В плоских горизонтальных слоях жидкости с теплоизолированной свободной поверхностью критическое число Марангони равно 80 [194].



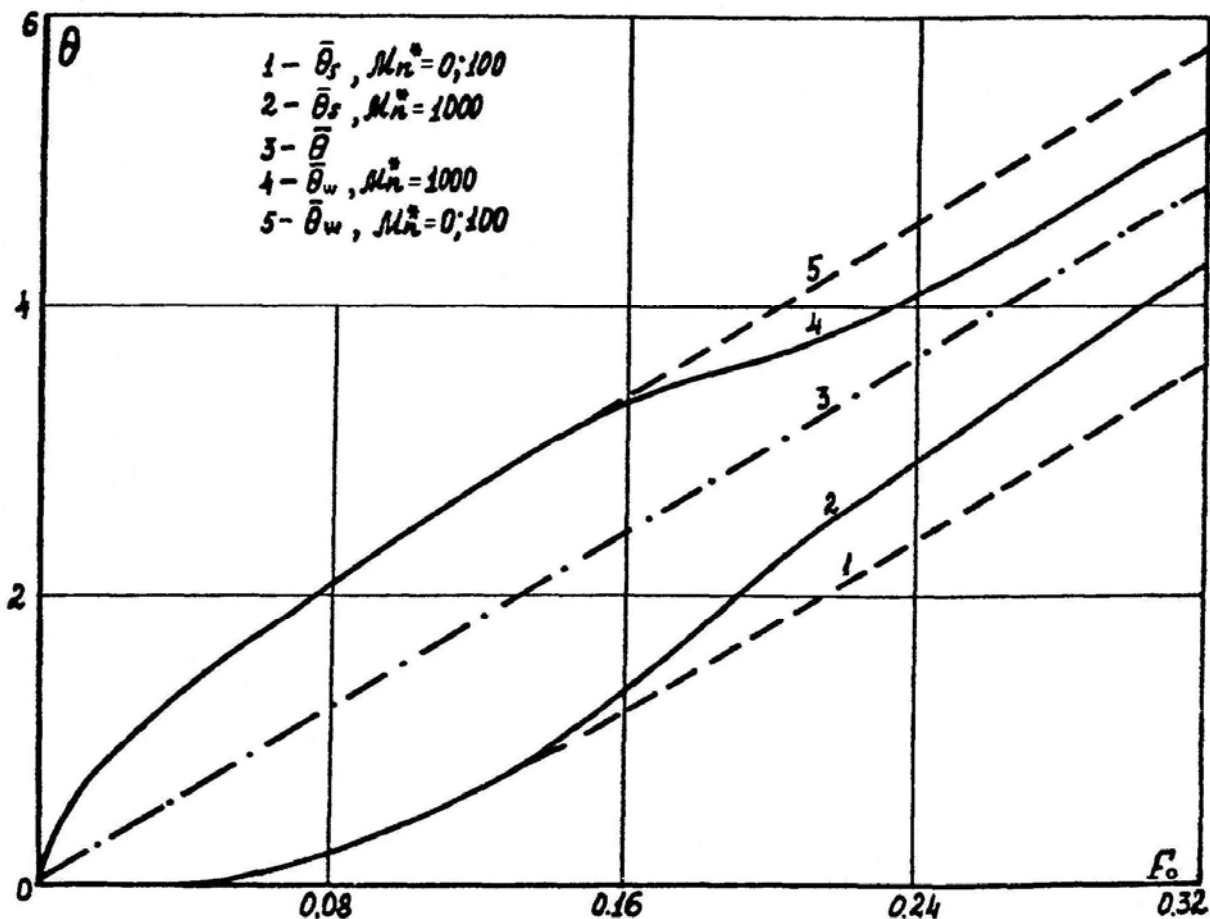
Фиг. 133. Квазистационарный режим прогрева. Изменение амплитуды термокапиллярной конвекции в зависимости от числа Марангони

конвекции заметно и на внешней поверхности сосуда, несмотря на малый относительный размер пузыря ($R_0 = 0,2R$). В соответствии со структурой движения (фиг. 132) тепло выносится конвективными токами вначале в верхнюю часть сферы и затем отводится внутрь массива жидкости. Сопоставление с уровнем прогрева путем теплопроводности выявляет зону локального перегрева стенки при $72^\circ \leq \varphi \leq 108^\circ$.



Фиг. 134. Влияние термокапиллярной конвекции на распределение температур на поверхности пузыря (а) и внешней стенке (б)

--- теплопроводность, — $Mn^* = 10^3$



Фиг. 135. Влияние термокапиллярной конвекции на увеличение температур стенки и пузыря ($R/R_0 = 5$)

Изменение во времени средних температур поверхности пузыря и внешней поверхности дано на фиг. 135. Пунктирной линией дано изменение среднемассовой температуры жидкости. Благодаря изоляции пузыря слоем жидкости рост температуры поверхности пузыря меньше температуры стенки и среднемассовой температуры: $\bar{\theta}_w > \bar{\theta} > \bar{\theta}_s$. В этом отношении данная схема прогрева принципиальным образом отличается от рассмотрения в главе III схемы с прямолинейной поверхностью раздела, в которой при равномерном подводе тепла по контуру всегда имеет место соотношение: $\bar{\theta}_s > \bar{\theta}_w > \bar{\theta}$, определяющее смещение возможных фазовых переходов в зону свободной поверхности. В данном случае после достижения определенной величины перегрева стенки возможно кипение на стенке сосуда с образованием паровой

подушки у стенки и последующим быстрым ростом давления. Таким образом, можно ожидать, что в начальные моменты прогрева (до начала кипения у стенки) изменение давления будет соответствовать изменению температуры пузыря, т.е. одной из нижних кривых на фиг.135, а затем, довольно быстро возрастая, будет соответствовать температуре, близкой к температуре стенки, т.е. одной из верхних кривых на фиг. 135. Решение этого вопроса выходит за рамки данной модели.

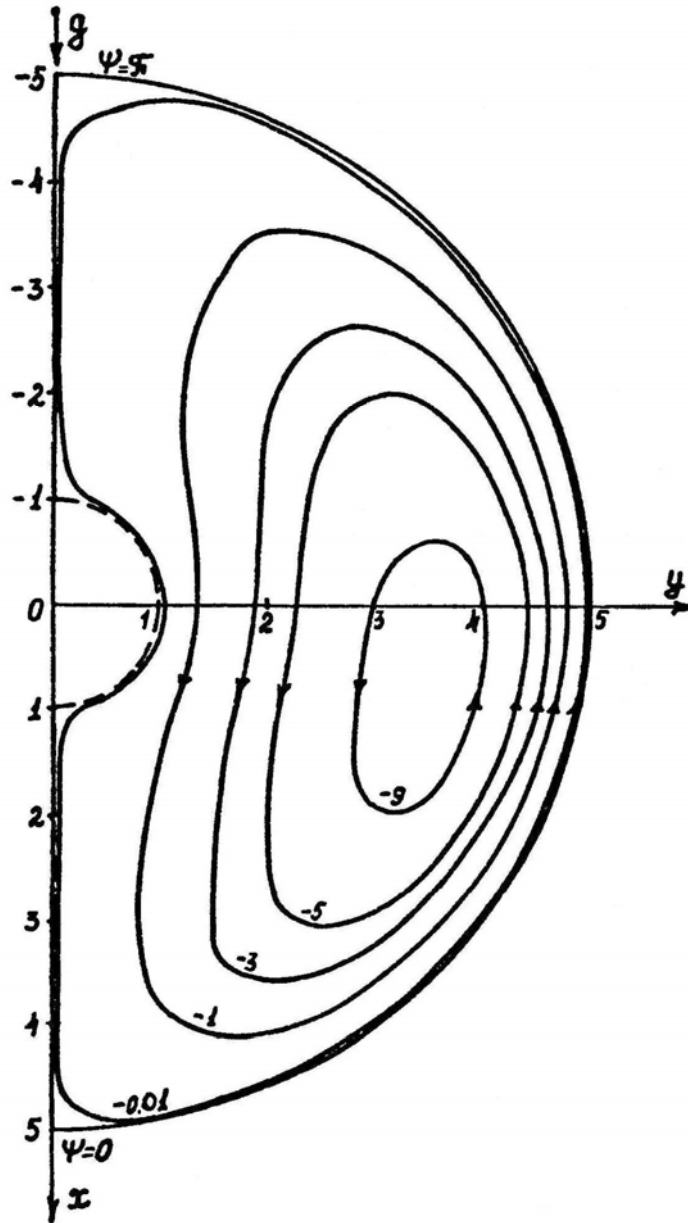
При уменьшении степени заполнения сосуда жидкостью (или отношения $\frac{R}{R_0}$) относительная разность температур $\theta_s - \theta_w$ падает, поэтому менее заметен и вклад конвективной составляющей. При этом уменьшается и интенсивность собственно термокапиллярной конвекции в связи со стабилизирующим влиянием твердой поверхности и перестройкой движения. Например, в расчетах при $\frac{R}{R_0} = 1,5$ (что соответствует отношению объема жидкости к полному объему $V_1/V_2 \cong 2/3$) прежняя двухвихревая структура сменялась более сложной четырехвихревой. Более полное описание возможных структур термокапиллярной конвекции дано в работе [211].

3. Совместное действие естественной и термокапиллярной конвекции

При наличии слабого гравитационного поля, как и ранее, предполагается, что поверхность пузыря остается равновесной, однако учитывается механизм перемешивания естественной конвекцией при малых числах Релея. Рассмотрим вначале эффекты естественной конвекции отдельно, учитывая, что в некоторых случаях (например, при наличии фазового равновесия на поверхности раздела однокомпонентной среды) термокапиллярная конвекция может ослабляться.

Естественная конвекция имеет объемный характер и возникает тотчас же после приложения тепловой нагрузки. Картина линий тока установившегося движения на квазистационарном режиме прогрева при заданном на внешней

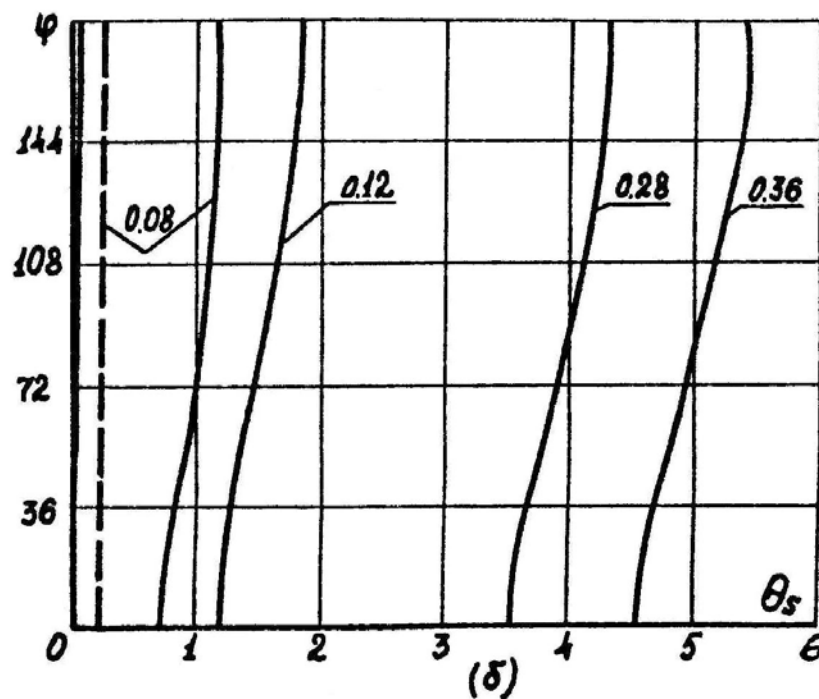
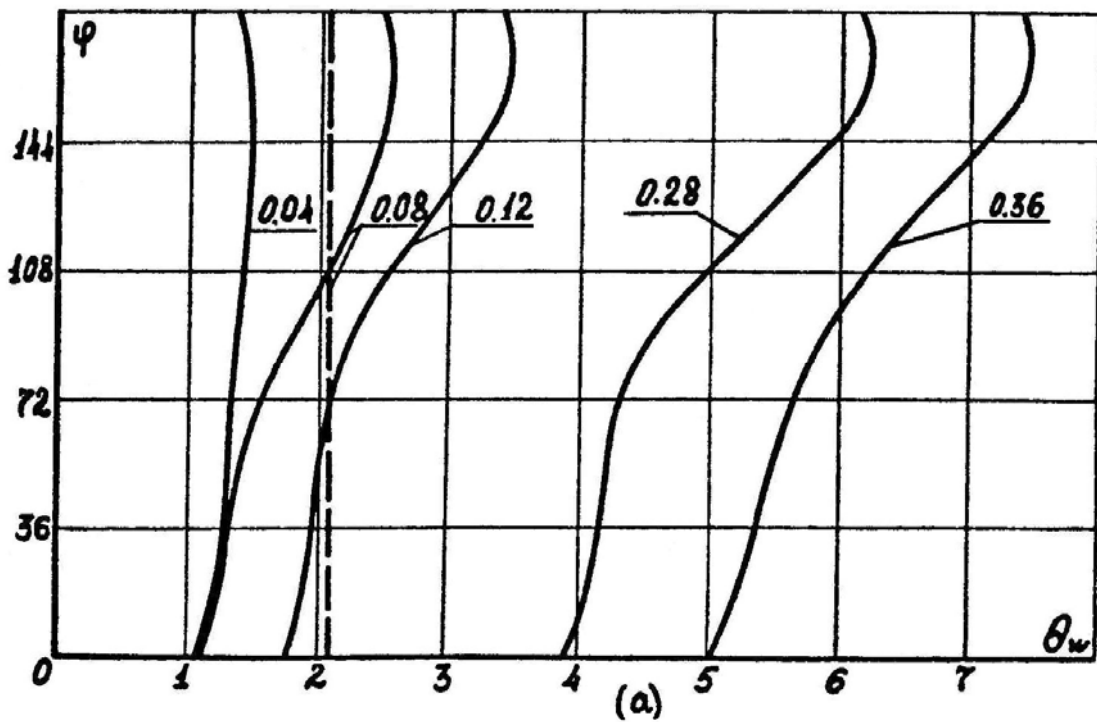
поверхности равномерном потоке тепла, приведенная на фиг. 136 ($Ra_R^* = 3.125 \cdot 10^4$, $R/R_0 = 5$, $Pr = 1$), имеет типичный для естественной конвекции вид: жидкость поднимается вдоль нагретой внешней поверхности сферы и



Фиг. 136. Естественная конвекция. Линии тока при $Gr_R^* = 3.125 \cdot 10^4$, $Mn^* = 0$

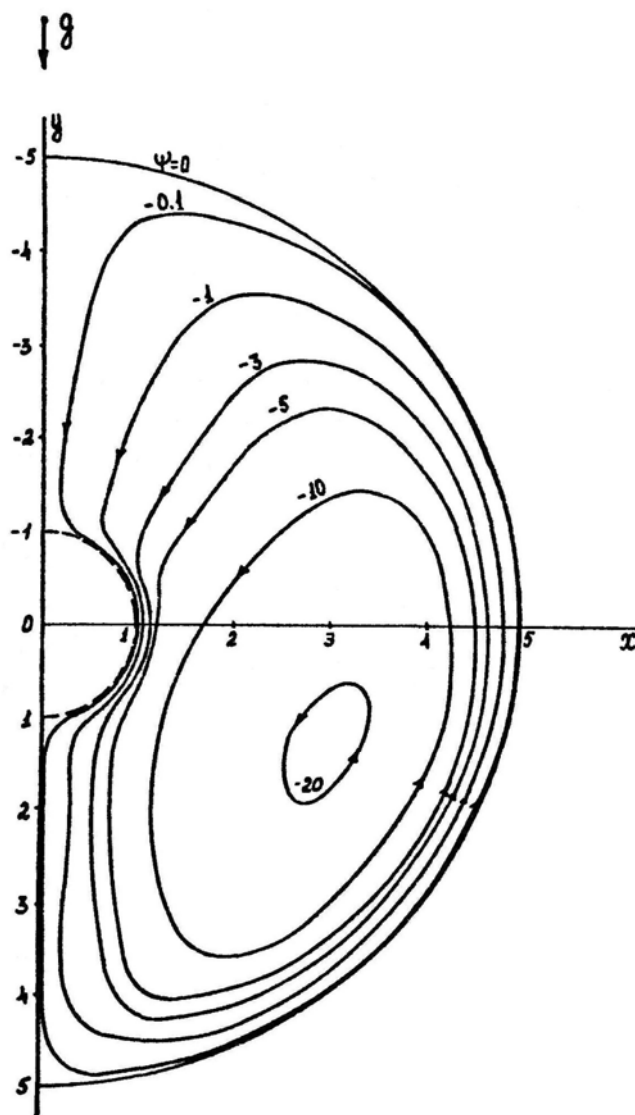
опускается в центре сосуда. Это движение напоминает термокапиллярное движение несимметричного типа, показанное на фиг. 131. Естественная конвекция вызывает довольно значительное температурное расслоение по углу как на внешней поверхности, так и на поверхности пузыря (фиг. 137). Это может быть причиной возбуждения термокапиллярных движений, движущая

сила которых определяется градиентом температуры вдоль поверхности пузыря. Поэтому при совместном действии естественной и термокапиллярной конвекции ведущую роль играет естественная конвекция, которая создает некоторый "фон" начальных возмущений для термокапиллярной конвекции. Картина установившегося движения жидкости

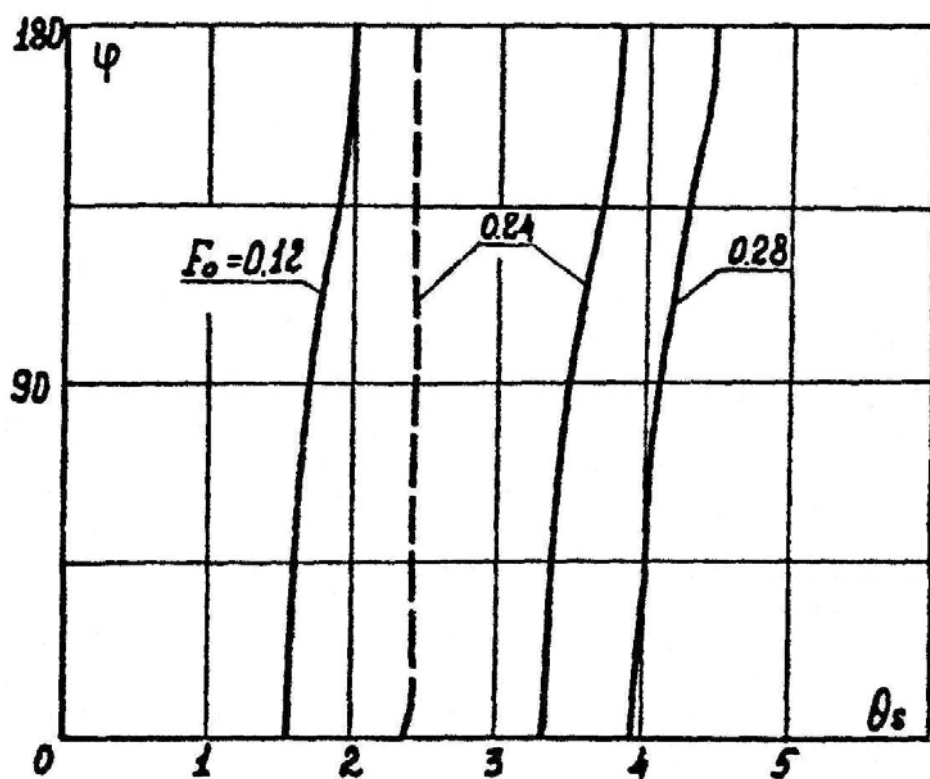
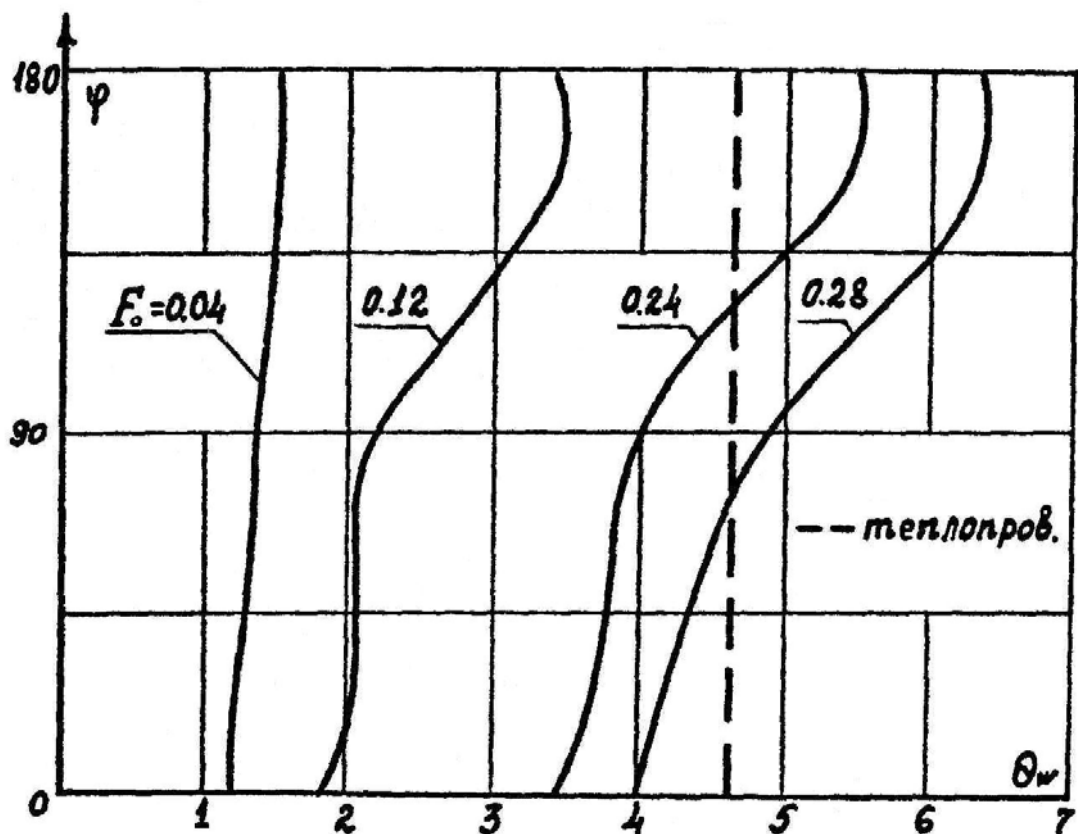


Фиг. 137. Распределение температур вдоль стенки (а) и пузыря (б) при $Gr_R^* = 3.125 \cdot 10^4$, $Mn^* = 0$, - - - теплопроводность

на квазистационарном режиме прогрева при числах $Mn_{R_0}^* = 10^3$, $Ra_R = 3.125 \cdot 10^4$, $R/R_0 = 5$ дана на фиг. 138. При такой форме движения (и при наличии сил трения на поверхности пузыря) существует сила, выталкивающая пузырь вверх; поэтому при отсутствии активных воздействий на пузырь его устойчивое положение в ослабленном гравитационном поле даже при равномерном подводе тепла по контуру должно быть в верхней части сосуда. Локальное распределение температур по углу на внешней поверхности сосуда и на поверхности пузыря дано на фиг.139. Температурное расслоение, вызываемое самой конвекцией, может быть причиной движения пузырей. Этот эффект имеет важное значение и, насколько известно, ранее не рассматривался.



Фиг. 138. Линии тока при совместном действии естественной и термокапиллярной конвекции $Mn^* = 10^3$, $Gr_R^* = 3.125 \cdot 10^4$

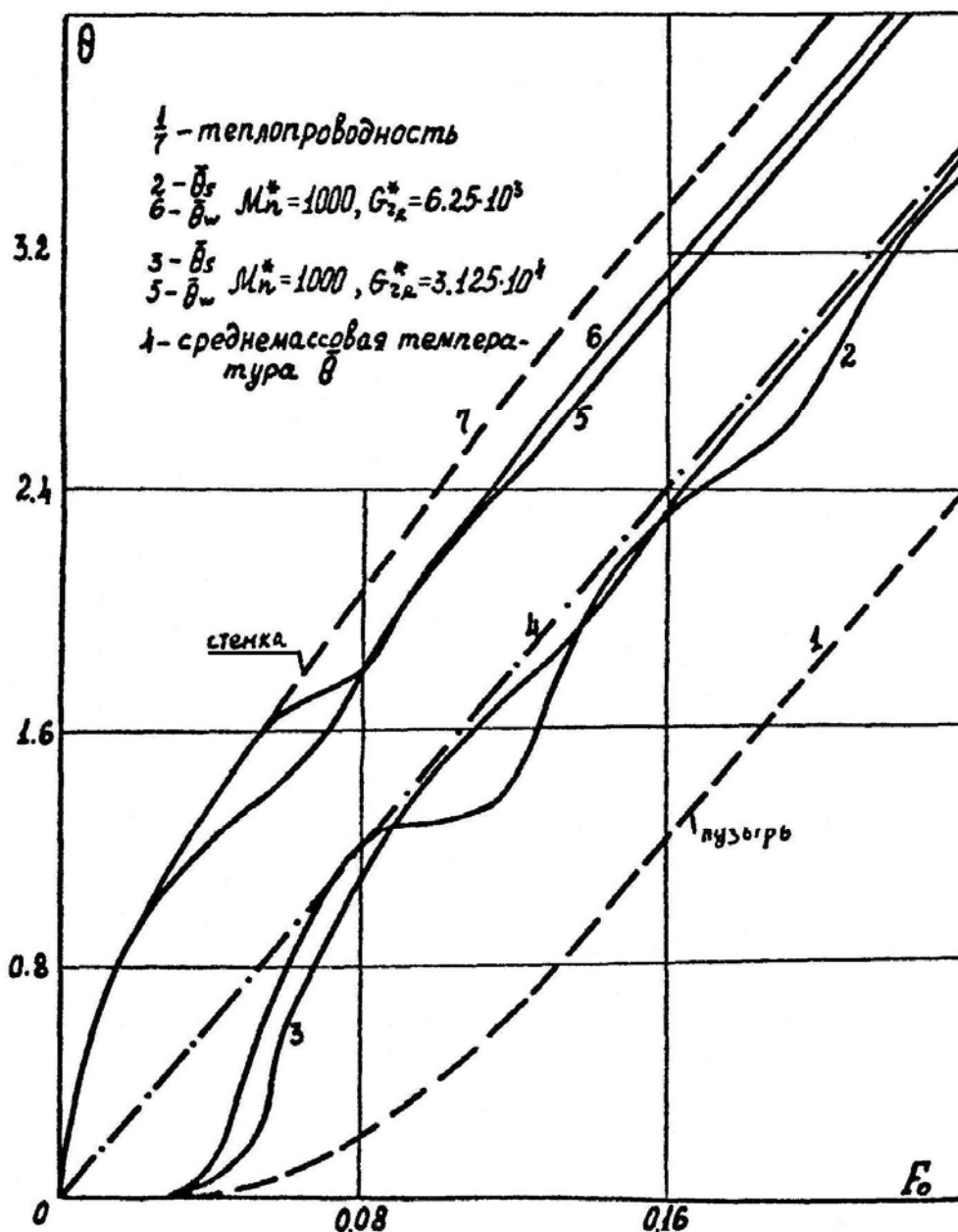


Фиг. 139. Профили температур вдоль поверхности сосуда (а) и поверхности пузыря (б) при $Mn_{R_0}^* = 10^3$, $Gr_R^* = 3.125 \cdot 10^4$, ----- теплопроводность

Из сопоставления с уровнем прогрева путем теплопроводности (пунктирные линии) можно отметить зону локального перегрева, расположенную теперь уже в верхней части внешней поверхности сосуда. Относительная неравномерность температуры на контуре, вызываемая конвекцией, $\xi = \frac{\theta_{w_{\max}}}{\theta_w}$ равна здесь около 1.25.

Зависимость $|\Psi|_m(F_0)$ имеет в переходном режиме колебательный характер, причем амплитуда колебаний выше, чем в тех случаях, когда естественная и термокапиллярная конвекция действуют отдельно. Наибольшая интенсивность конвекции наблюдается при числах $Mn^* = 10^3$, $Ra_R^* = 6.25 \cdot 10^3$, т.е. при несколько меньшем числе Релея. Это связано с усилением термокапиллярной конвекции за счет температурного расслоения по углу, создаваемого естественной конвекцией, которое и является причиной своеобразного "резонанса" при совместном действии естественной и термокапиллярной конвекции.

Итог исследования средних характеристик прогрева в общем случае дан на фиг. 140, где приведено сравнение характерных температур при переносе тепла теплопроводностью, конвекцией и изменение среднемассовой температуры. Наиболее важный вывод, следующий из этих результатов, состоит в том, что средняя температура поверхности пузыря при длительном прогреве в случае совместного действия естественной и термокапиллярной конвекции становится близкой к среднемассовой температуре жидкости. Колебания температуры пузыря в переходном режиме связаны с упоминавшимися колебаниями интенсивности конвекции. На начальном участке прогрева влияние конвекции на поле температур не существенно. При рассмотренных значениях чисел Mn^* и Ra^* длительность этого режима соответствует числу Фурье $\frac{at}{R^2} \sim 0,03$; это значение, как было показано ранее, уменьшается при увеличении Mn^* и Ra^* .



Фиг. 140. Изменение во времени средних температур внешней поверхности сосуда и пузыря при совместном действии естественной и термокапиллярной конвекции

Суммируя результаты исследования, выполненного в двух предельных по числу Бонда режимах, можно сделать следующий общий вывод: влияние конвективных составляющие гравитационного и термокапиллярного вида в условиях невесомости и слабых гравитационных полей существенно и всегда приводит к уменьшению средних температур нагреваемых твердых поверхностей, смоченных жидкостью, и к увеличению средней температуры

поверхности раздела газ-жидкость. Для оценки увеличения средней температуры свободной поверхности может быть предложена формула

$$\bar{\theta}_s = \bar{\theta}_{s0} + \Delta\theta, \quad (4.6)$$

где $\bar{\theta}_{s0}$ - средняя температура свободной поверхности, вычисленная из уравнения теплопроводности (без учета конвекции), $\Delta\theta$ - увеличение температуры свободной поверхности, связанное с совместным действием естественной и термокапиллярной конвекции. В первом приближении эту величину можно представить в виде двух слагаемых

$$\Delta\theta = \xi'_1 \Delta\theta_{EK} + \xi'_2 \Delta\theta_{TK} \quad (4.7)$$

где $\Delta\theta_{EK}$ - вклад только естественной конвекции,

$\Delta\theta_{TK}$ - вклад только термокапиллярной конвекции,

ξ'_1, ξ'_2 - поправочные множители, учитывающие эффекты совместного действия этих двух видов конвекции.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ IV

1. При хранении топлив в баках двигательных установок в условиях ослабленного гравитационного поля различаются три характерных режима: $Mn^* \ll Ra^*$, $Mn^* \gg Ra^*$ и $Mn^* \sim Ra^*$. Наличие естественной конвекции в первом режиме приводит к подавлению термокапиллярной конвекции. В случае плоской поверхности раздела при значениях $Ra_R^* = 10^6$, $Mn_R^* = 10^4$ вклад термокапиллярной конвекции в изменение максимальной температуры поверхности составляет около 10-15%.

2. В условиях невесомости (второй режим) численно реализованы термокапиллярные движения, возникающие при наличии потока тепла вдоль

поверхности раздела (нарушение равновесия) и движения, возникающие при подводе тепла по нормали к свободной поверхности со стороны жидкости (неустойчивость Марангони). Термокапиллярная конвекция при больших числах Марангони ($Mn^* \sim 10^5$) при наличии подвода тепла к плоской поверхности раздела существенно уменьшает максимальную температуру поверхности жидкости. Возникновение термокапиллярной конвекции вокруг пузыря в невесомости ($R/R_0 = 5$) происходит при критическом числе Марангони $Mn_{R_0}^* \cong 90$. При $Mn_{R_0}^* \geq 10^3$ наличие термокапиллярных движений приводит к уменьшению разности температур между пузырем и внешней поверхностью сосуда.

3. В третьем режиме совместное действие естественной и термокапиллярной конвекции приводит к существенному увеличению интенсивности теплообмена. Температура поверхности пузыря в сосуде при длительном хранении ($Mn_R^* = 10^3$, $Ra_R^* = 10^4$) близка к среднемассовой температуре.

4. Влияние на поле температур естественной и термокапиллярной конвекции и совместного действия естественной и термокапиллярной конвекции в сосудах, частично заполненных жидкостью, в условиях пониженной гравитации (в диапазоне чисел Релея и Марангони, рассмотренном в главах III, IV) состоит в уменьшении средних температур нагреваемых твердых поверхностей, смоченных жидкостью и увеличении средней температуры свободной поверхности по сравнению с тем случаем, когда перенос тепла осуществляется путем теплопроводности:

$$\bar{\theta}_w = \bar{\theta}_{w0} - \Delta\theta_w \quad \bar{\theta}_s = \bar{\theta}_{s0} - \Delta\theta_s$$

ГЛАВА V. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕНЦИИ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Механизм отвода тепла, связанный с движениями, возникающими после потери устойчивости механического равновесия газа, во многом определяет вертикальную структуру нижних слоев атмосферы Земли и других планет. В этих слоях при развитой конвекции устанавливается градиент температуры, близкий к так называемому адиабатическому градиенту [213-214]. При этом атмосферная конвекция имеет проникающий характер: она развивается в нижней зоне, где равновесие в начальном поле неподвижной атмосферы (так называемое «лучистое равновесие») неустойчиво и распространяется вверх, проникая в слои, находящиеся в лучистом равновесии.

Ввиду сложности и многомасштабности атмосферных движений одновременный учет на одном уровне точности глобальных и локальных эффектов не представляется возможным даже при использовании современных ЭВМ. В схемах общей (или глобальной) циркуляции локальные эффекты конвекции учитываются приближенно путем введения некоторой турбулентной вязкости; собственно тепловая неустойчивость при этом исключается (фильтруется) благодаря применению так называемого "квазистатического приближения" [213, 215]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = -g,$$

заменяющего уравнения количества движения для вертикальной составляющей скорости.

Фундаментальной моделью, позволяющей достаточно полно учесть локальные эффекты, является рассматривавшаяся в гл. II, § 2 модель конвекции в горизонтальном слое; она изучается в последнее время особенно интенсивно

геофизиками (см., например, библиографию к § 2 гл. II). Однако, конвекция в атмосфере намного сложнее и для построения ее модели требуется учесть многие дополнительные факторы, из которых в данной главе изучаются следующие (речь идет о так называемой "сухой атмосфере"): а) влияние вертикальной стратификации плотности, имеющейся в сжимаемом газе (в соответствии с уравнениями гидростатики и состояния газа)^{х)}; б) проникающий характер конвекции, т.е. наличие по высоте зон неустойчивой и устойчивой стратификации без явного выделения их границ; в) влияние нелинейного начального профиля температуры лучистого равновесия. Общей для всех задач геофизики является проблема турбулентного переноса, требующая специального рассмотрения.

Эффекты вертикальной стратификации плотности наиболее существенны в задачах астрофизики ввиду больших размеров рассматриваемых объектов и в связи с наличием сильных гравитационных полей. Однако, и в атмосфере Земли для конвективных слоев глубиной более 5-10 км эти эффекты ощутимы. Для модели атмосферы Венеры [216] глубина конвективной зоны составляет около 50 км, что весьма существенно. Эффекты гидростатической сжимаемости встречаются и в технических приложениях, например, при действии больших перегрузок $\frac{g}{g_0} \gg 1$ или вблизи точки критического состояния вещества^{xx)}.

Между тем эти эффекты, в особенности для развитых движений за порогом

х) Сжимаемость этого вида в отличие от температурной или динамической сжимаемости будем называть гидростатической (или весовой) сжимаемостью.

xx) Условия вблизи критической точки сложнее ввиду аномалий в свойствах переноса и других эффектов, но эффект гидростатической сжимаемости там играет существенную роль.

устойчивости, являются пока одним из "белых пятен" теории естественной конвекции. Это связано, с одной стороны, с трудностями теоретического исследования; уравнений конвекции сжимаемого газа даже в линеаризованной постановке, а с другой стороны - с трудностями лабораторного моделирования. Более полно, чем другие вопросы, рассмотрены лишь условия возникновения конвекции в сжимаемых газах в простейшем случае, когда начальный профиль температур является линейным [217-223], причем количественные результаты с учетом сжимаемости и вязкости получены лишь в последнее время [221-223].

Модели конвекции проникающего типа рассматриваются сравнительно недавно, причем пока еще без учета гидростатической сжимаемости. При лабораторном изучении стационарной проникающей конвекции обычно используется инверсия плотности воды при температуре $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ [224-225]. Анализ линеаризованных уравнений Буссинеска для конвекции этого типа выполнен в работах [225]; численное решение нелинейных уравнений Буссинеска для периодической проникающей конвекции выполнено в работе [226]. Проникновение конвекции из неустойчивой зоны в устойчивую при нелинейном характере начального поля температур представляет более общий интерес; оно уже упоминалось в главе III в связи с тепловой неустойчивостью на дне подогреваемых снизу сосудов; его роль велика при прогреве жидкости источниками ядерного излучения, создающими нелинейное начальное распределение температур по вертикали и т.д.

В последнее время геофизиками выполнен ряд работ по построению моделей атмосферной конвекции в приближении Буссинеска с учетом переноса влажности, вертикального сдвига ветра, трехмерности и т.д. [227-228]. Данная модель расширяет диапазон высот, но в применении к реальной атмосфере является менее полной, чем эти модели.

Постановка рассматриваемых здесь задач во многом стимулировалась работой по интерпретации результатов непосредственных измерений аппаратами "Венера" 4, 5, 6, 7 вертикальной структуры атмосферы планеты Венера [10, 229, 230], имеющей глубокую конвективную зону. В связи с этим

кругом вопросов в данной главе исследуются стационарные режимы естественной конвекции сжимаемого газа. Однако, существует и целый ряд других проблем, которые требуют применения нестационарных уравнений конвекции сжимаемого газа (например, наличие суточного хода температур или большие начальные градиенты температур, вызванные взрывами в атмосфере и т.д.). Для многих из этих проблем применимы разностная схема, разработанная в главе I, и развиваемый ниже подход к анализу эффектов сжимаемости.

§ 1. Эффекты сжимаемости при естественной конвекции в замкнутых конвективных ячейках с линейным начальным профилем температуры

1. Критерии конвекции в сжимаемом вязком газе. Влияние сжимаемости на возникновение конвекции в вязком и теплопроводном газе

Условие, при котором возникает конвекция в сжимаемом газе без учета теплопроводности и вязкости (так называемый адиабатический градиент температуры), имеет вид (см., например, [29])^{x)}

$$\frac{\partial T}{\partial y} > \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ag}$$

Это необходимое условие возникновения конвекции было установлено еще в начале века немецким астрофизиком К. Шварцшильдом [217] и в настоящее время широко используется в геофизике и астрофизике как критерий вертикальной устойчивости атмосфер звезд и планет [214, 219, 220]. Еще один шаг в этом направлении был сделан в 1930 году Джеффри [218].

^{x)} Для совершенного газа величина адиабатического градиента равна - $\frac{g}{C_p}$.

Джеффрис получил уравнения конвекции газа с учетом в уравнении энергии работы сил сжатия, из которых следует условие возникновения конвекции с учетом сжимаемости, теплопроводности и вязкости

$$\tilde{Ra} = \frac{g\beta L^3}{\nu a} \left[\frac{\partial T}{\partial y} - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ag} \right] > (Ra)_{kp},$$

где \tilde{Ra} - число Релея с поправкой на величину адиабатического градиента. Приближение Джеффриса в настоящее время также широко используется в геофизике и астрофизике, являясь основой моделей атмосферной конвекции [214, 227], однако диапазон применимости этого приближения в количественной форме мало изучен. Качественное рассмотрение условий возникновения конвекции было предпринято Сорокиным [231]. В работе Шпигеля [221] получены линеаризованные уравнения конвекции сжимаемого газа для “задачи Релея” (конвекция в слое между двумя свободными поверхностями) и даны некоторые количественные результаты. В работе [223] исходя из линеаризованных уравнений сжимаемого газа анализируются условия возникновения конвекции вблизи критической точки вещества.

Подход к изучению условий возникновения конвекции в вязком газе, развитый автором в работах [104, 105, 222], основан на численном решении нелинейных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа (гл. 1 § 2) при изменении параметров сжимаемости, что позволяет установить зависимость между критерием возникновения конвекции в приближении Буссинеска (критерий Релея) и критерием Шварцшильда.

Для рассматриваемого здесь случая конвекция в замкнутой ячейке при линейном начальном профиле и заданных температурах на границах $T_2, T_1 (T_2 > T_1)$ условие (5.1) можно представить в следующем безразмерном виде

$$K < 1 \tag{5.3}$$

где

$$K = \frac{gL}{C_p(T_2 - T_1)} = \frac{(\chi - 1)C_F}{T_2/T_1 - 1} \quad (5.4)$$

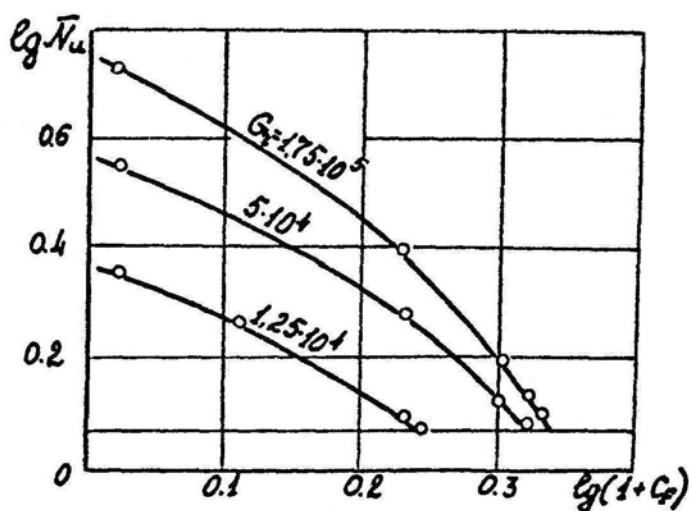
- отношение адиабатического градиента температур к заданному.

Это представление критерия Шварцшильда в безразмерном виде, введенное в работе [222], имеет большое значение и для режимов развитой конвекции за порогом устойчивости; в этом случае критерий K является некоторым обобщенным критерием для сжимаемого газа, учитывающим одновременно влияние и отношения теплоемкостей и гидростатической сжимаемости и температурного фактора ^{x)}. Этот критерий имеет простой физический смысл: разность $1-K$ дает безразмерную величину силы, выталкивающую нагретый элемент газа при отсутствии диссипативных сил и теплообмена этого элемента с окружающей средой. Величина этой силы (а значит и потеря устойчивости равновесия) зависит от χ , C_F , T_2/T_1 . Поэтому в развитом конвективном режиме к обычной для уравнений Буссинеска взаимной зависимости полей течения и температур, определяемой числом Релея, добавляются новые прямые связи полей течения и стратификации плотности, а также прямые и косвенные связи полей температур и стратификации плотности, которые определяются критерием гидростатической сжимаемости C_F и критерием K .

Рассмотрим результаты расчетов. На фиг. 141 приведено изменение среднего числа Нуссельта в зависимости от параметра сжимаемости C_F за порогом устойчивости при нескольких значениях числа Грасгофа $Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$, $5 \cdot 10^4$ и $1.75 \cdot 10^5$. Эти расчеты выполнены для одновихревой ветви в замкнутой конвективной ячейке с теплоизолированными

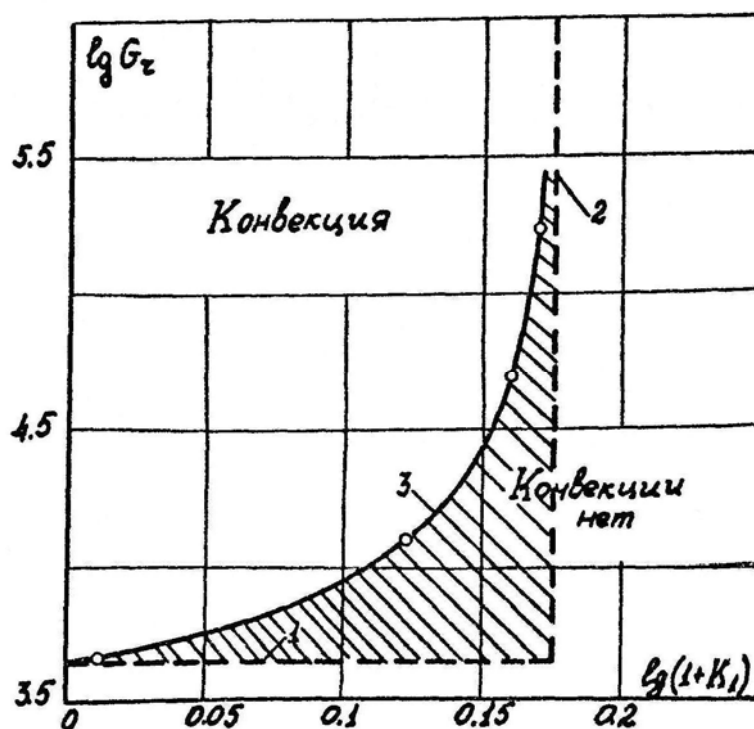
^{x)} В работах [223, 231] условия возникновения конвекции определялись в ином виде, аналогичном (5.1).

боковыми поверхностями (см. §2, гл.П) при числах $Pr = 0.71$, $H/L = 1$, $\chi = 1.405$, $T_2/T_1 = 1.5$. Техника расчета движений за порогом устойчивости аналогична той, которая использована в § 2 главы П. Ослабление конвекции и уменьшение числа Нуссельта при увеличении параметра гидростатической сжимаемости связано с перераспределением плотности: плотность газа увеличивается в нижней части и уменьшается в верхней части области, поэтому величина подъемных сил также уменьшается. Условия возникновения конвекции определяются из пересечения кривых $\bar{Nu}(C_F)$ с линией $\bar{Nu} = const$, соответствующей переносу тепла путем теплопроводности. Полученная таким образом зависимость критического числа Грасгофа от параметра сжимаемости дана на фиг.142; по оси абсцисс на фиг.142 отложены значения $1 + K_1$, где $K_1 = (\chi - 1)C_F$. Пунктирной линией 1 проведена граница возникновения конвекции при условии, что сжимаемость газа отсутствует ($Gr > Gr_{кр}$).



Фиг. 141. Потеря устойчивости равновесия в сжимаемом газе.

Зависимость числа Нуссельта от параметра сжимаемости



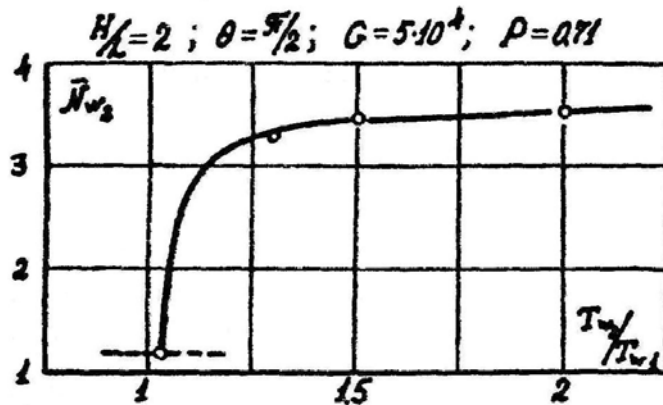
Фиг. 142. Границы возникновения конвекции в сжимаемом вязком газе

Пунктирной линией 2 показана граница возникновения конвекции в сжимаемом газе без учета теплопроводности и вязкости согласно критерию Шварцшильда (5.1) при $T_2/T_1 = 1.5$. Согласно этим двум предельным условиям конвекция должна быть в области значений Gr , K_1 , находящихся сверху от линии 1 и слева от линии 2. Граница возникновения конвекции, полученная в общем случае с учетом вязкости, теплопроводности и сжимаемости газа, показана сплошной линией 3. Отсюда видно, что влияние сжимаемости затягивает возникновение конвекции в вязком газе: при значениях Gr , K_1 , ограниченных линиями 1, 2, 3 (заштрихованная зона на фиг. 142) конвективного движения нет. В этой области механическое равновесие оказывается устойчивым, хотя градиент температур превышает адиабатический градиент. Таким образом, критерий возникновения конвекции Шварцшильда (5.1, 5.3) дает необходимое (но недостаточное) условие возникновения конвекции ^{x)}.

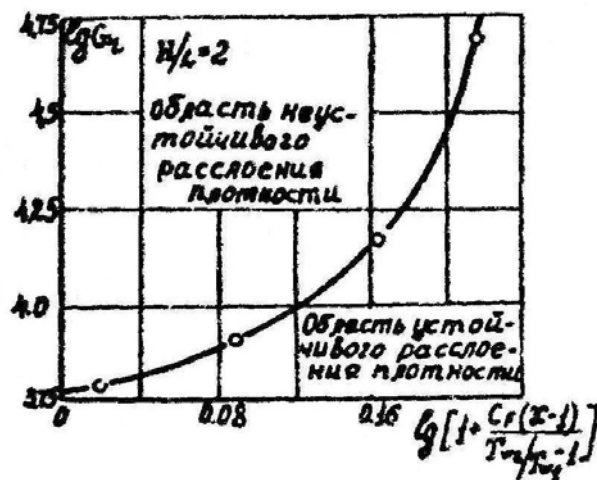
^{x)} Условия существования устойчивых сверхадиабатических зон представляют интерес, например, в микрометеорологии [232].

Потеря устойчивости равновесия в сжимаемом газе может происходить, согласно (5.3, 5.4), и при изменении температурного фактора. Зависимость $\bar{Nu}(T_2/T_1)$ показана на фиг.143 (значения остальных критериев подобия фиксированы: $Gr_L = 5 \cdot 10^4$, $Pr = 1$, $H/L = 2$, $\chi = 1.4$, $C_F = 0.05$).

На фиг.144 дана обобщенная зависимость критерия Грасгофа от критерия Шварцшильда в форме (5.4), полученная для области $H/L = 2$ при различных значениях числа Грасгофа $0.63 \cdot 10^4 \leq Gr \leq 5 \cdot 10^4$ и параметров сжимаемости $0.01 \leq C_F \leq 1.2$, $1.3 \leq T_2/T_1 \leq 4$, $1 \leq \chi \leq 2$.



Фиг. 143. Потеря устойчивости равновесия в сжимаемом газе при изменении температурного фактора



Фиг. 144. Обобщенная граница возникновения конвекции в сжимаемом вязком газе

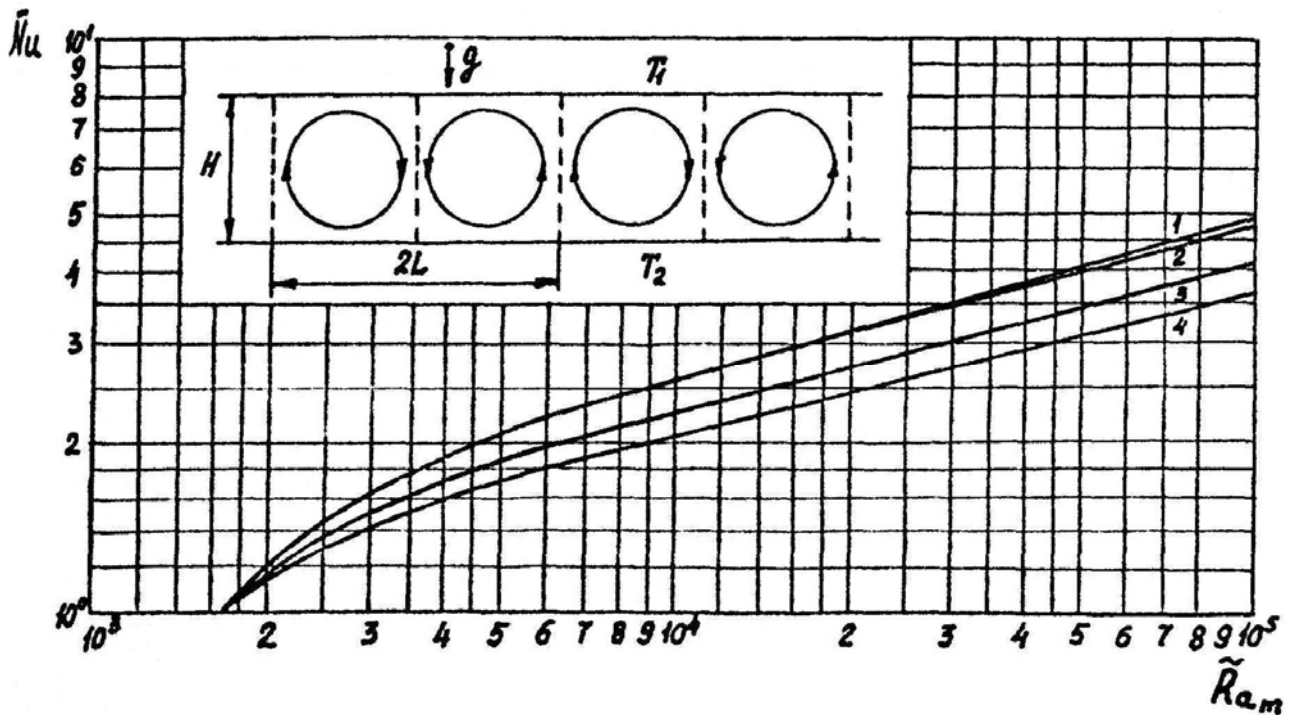
$$10^4 \leq Gr \leq 5 \cdot 10^4, \quad Pr = 0.71, \quad 0.01 \leq C_F \leq 1.2, \quad 1.3 \leq T_2/T_1 \leq 4, \quad 1 \leq \chi \leq 2$$

Критерий (5.2), являющийся следствием приближения Джеффри, можно представить в виде комбинации критериев Ra, K :

$$\tilde{Ra} = Ra(1 - K) \quad (5.5)$$

Так как зависимость $Gr(K)$ (фиг.144) нелинейна, то критерий \tilde{Ra} , строго говоря, не дает универсального описания потери устойчивости во всем диапазоне Ra, K . Однако, можно выделить определенный диапазон значений Ra, K , в котором одновременный учет сжимаемости и вязкости возможен в виде (5.5). Отметим, что в этом случае существенное значение имеет и величина параметра гидростатической сжимаемости C_F (т.е. «глубина» слоя). При малых значениях C_F потеря устойчивости равновесия удовлетворительно описывается одним только критерием \tilde{Ra} в довольно широком диапазоне K . Это видно из результатов расчета числа Нуссельта от числа \tilde{Ra} (фиг. 145) для периодической конвекции, выполненных при $C_F = 0.05, T_2/T_1 = 1.5, Pr = 1$ (изменение K в диапазоне $0 \leq K \leq 0.33$ достигалось путем изменения χ). Критическое число Релея \tilde{Ra} изменяется для этих значений K в диапазоне $\tilde{Ra}_{кр} = 1620-1750$; при $K = 0$ значение $(\tilde{Ra}_m)_{кр}$ равно 1750, что удовлетворительно согласуется с результатами опытов по определению условий возникновения конвекции как в газах, так и в жидкостях [117-119]^{х)}, однако несколько выше значения числа $Ra_{кр} = 1708$, которое получается исходя из уравнений Буссинеска.

^{х)} В этих опытах, выполненных в тонких горизонтальных слоях, значение K не превышало 10^{-2} .



Фиг. 145. Проверка условий применимости приближения Джефриса

	1	-	0
K	2	-	0.04
	3	-	0.2
	4	-	0.33

Из других, более тонких эффектов влияния сжимаемости на возникновение конвекции, отметим упоминавшееся в § 2 гл. II различие в ветвях стационарных движений (фиг. 27) и областей притяжения этих ветвей. Это важно для решения вопроса о преимущественном направлении движения восходящих и нисходящих токов и выборе длин волн за порогом устойчивости. Ввиду малой разработанности модели конвекции сжимаемого газа этот вопрос, по-видимому, еще даже не ставился.

2. Конвекция сжимаемого газа за порогом устойчивости равновесия.

Режимы конвекции в диапазоне чисел Gr, K

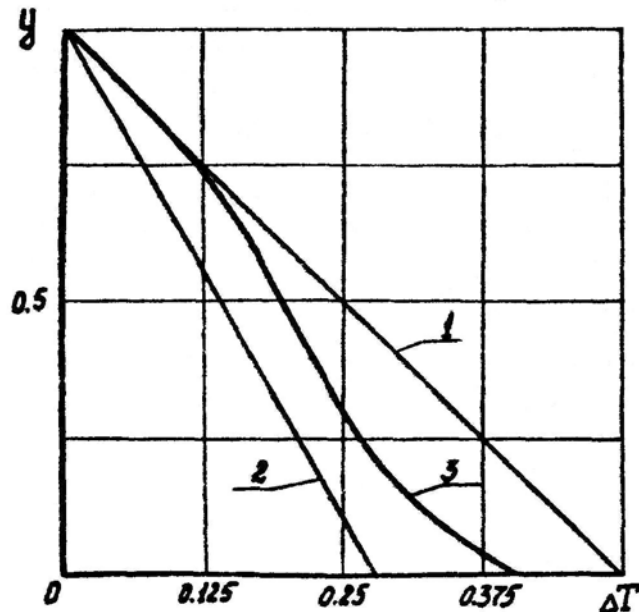
Развитым конвективным движениям сжимаемого газа соответствует область значений Gr, K , находящаяся выше сплошной линии потери устойчивости равновесия (фиг. 145). Всей этой области соответствует большое число различных режимов конвекции в атмосфере в зависимости от шкалы высот и характера распределения температуры по высоте. Отметим наиболее характерные предельные режимы. В известных лабораторных опытах по естественной конвекции жидкостей и газов (см., например, [116-118, 122-124]) реализуется режим $K \ll 1$, непосредственно прилегающий к оси ординат ^{x)}. Судя по зависимостям $\bar{Nu}(Ra)$, представленным на фиг. 145, учет сжимаемости газа в этой области, по крайней мере при $K \leq 0/04$, с достаточной точностью может быть выполнен с помощью числа Релея, определенного в виде (5.5). Отклонение от обобщенной зависимости $\bar{Nu}(\tilde{Ra})$ (составляющее до 25-30%) наблюдается при величине $K \sim 0.2-0.3$.

Другим предельным режимом является режим $K \sim 1$, располагающийся при больших числах Грасгофа вблизи порога устойчивости статического равновесия. Этот режим характерен для ядра конвективной зоны, где обычно наблюдается градиент температуры, близкий к адиабатическому.

Рассмотрим некоторые количественные результаты расчета интенсивности вертикальных токов в этом режиме на несколько иной, более наглядной схеме ^{xx)}. Пусть на нижней поверхности задана не температура, а поток тепла q ; на верхней границе поддерживается постоянная температура T_1 . На фиг. 146 приведены соответствующие этой схеме предельные профили

^{x)} Этот режим реализуется также в приповерхностном слое атмосферы (на уровне нескольких десятков метров).

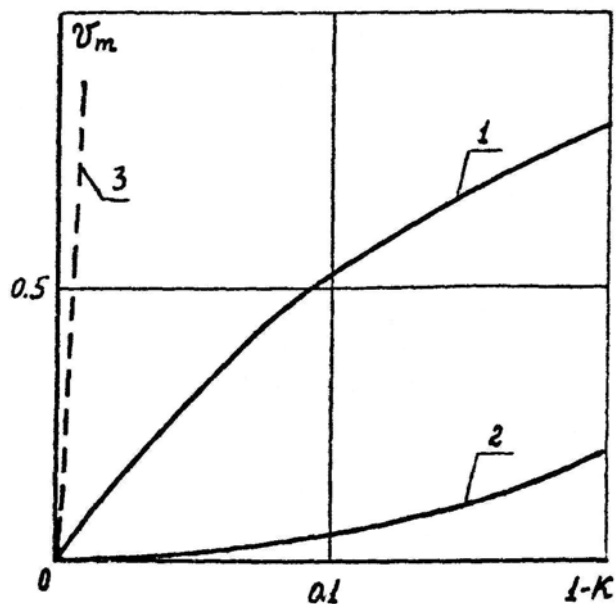
^{xx)} Эта схема использовалась для оценок интенсивности вертикальных токов в атмосфере Венеры в работах [10, 229].



Фиг. 146. Профили температур в ячейке при заданном потоке тепла
1 - начальный, 2 - адиабатический, 3 – конвективный

температур: заданный начальный профиль 1 (который может рассматриваться как профиль лучистого равновесия) и адиабатический профиль 2, соответствующий условию $K=1$ ^{х)}. При развитой конвекции на стационарном режиме температура поверхности за счет отвода тепла уменьшается (профиль 3); в ядре градиент температуры близок к адиабатическому градиенту (здесь $Gr_L = 10^6$, $K = 0.56$, $C_F = 1.0$, $\chi = 1.4$, $Pr = 0.71$). На фиг.147 дана зависимость максимальной интенсивности вертикальных токов от параметра $1-K$ при фиксированном числе Грасгофа $Gr_L = 10^6$ (линия 1 - основная ветвь - ячейка с одним вихрем, линия 2 - побочная ветвь - ячейка с двумя вихрями). Пунктирной линией 3 на фиг. 147 показана максимальная интенсивность вертикальных движений в предельном случае, когда вязкость отсутствует ($V_m / C_1 \sim \sqrt{2(1-K)C_F}$). Отсюда видно, что даже очень небольшое превышение заданного градиента температур над адиабатическим приводит к появлению

^{х)} При заданном потоке тепла имеем $K = \frac{gk}{C_p q} T_1$, $Gr_R^* = \frac{g\beta L^4}{\nu a k} q$.



Фиг. 147. Интенсивность вертикальных токов в зависимости от разности $1-K$

интенсивных вертикальных токов. Например, при $K=0.99$ (что соответствует при $(\partial T/\partial y)_{ag} \sim 8.5$ град/км отклонению от адиабатического градиента на 0.1 град/км), максимальная интенсивность конвективных движений в масштабе $L \sim 10-12$ км может достигать $1,5$ м/сек (если вязкость не учитывать, то интенсивность при этом будет около 40 м/сек). Независимые оценки величины $1-K$, выполненные по результатам измерений профиля температур в атмосфере Венеры [10], дают значение $1-K \approx 10^{-5}$. Таким образом, режим конвекции в ядре глубокой атмосферы находится практически у порога устойчивости $K \approx 1$. Однако, и в последнем случае значения $\tilde{Ra} = Ra(1-K)$ все же весьма велики (порядка $10^{15} - 10^{17}$), так как при высотах $H \sim 10$ км числа Релея имеют порядок $10^{20} - 10^{22}$ ^{x)}. Это значит (в соответствии с фиг. 145), что при расчетах теплоотдачи отклонения от приближения Джеффри могут быть значительными. Однако, для не слишком глубоких слоев атмосферы ($H \sim 1$ км) и в предельном

^{x)} Отметим, что при столь больших числах Релея само значение критического градиента температур, определенное по условию (5.1), практически не отличается от (5.2), так как $\tilde{Ra} \ll Ra$.

режиме $K \sim 1$ приближение Джеффри может давать приемлемые результаты, если соответствующий режим по числу $\tilde{Ra} = Ra(1 - K)$ находится в окрестности порога устойчивости (фиг. 145).

В работе [106] выполнено большое число расчетов в диапазоне чисел Gr , K , C_F . Зависимость среднего числа Нуссельта от параметра $1-K$ для ячейки $\frac{H}{L} = 2$, $T_2 / T_1 = 1.5 \div 4$ и $\chi = 1.2$ при различных числах Грасгофа аппроксимируется формулой

$$\bar{Nu} \sim (1 - K)^n, \quad (5.6)$$

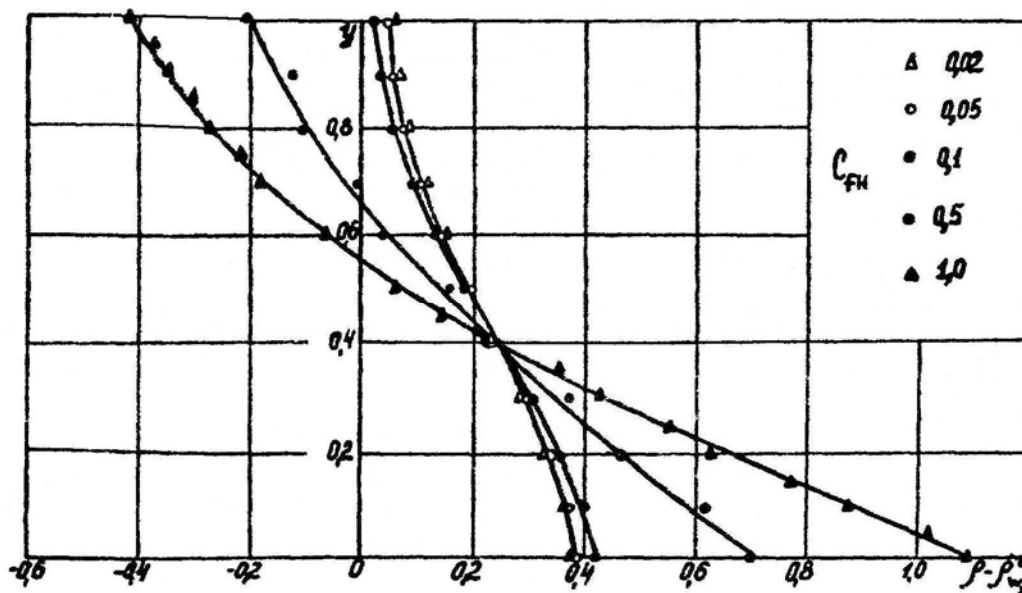
где показатель степени $n = (Gr = 8 \cdot 10^3 \div 2.5 \cdot 10^5)$ изменяется от 1.09 до 1.54.

3. Температурное расслоение в сжимаемом газе при боковом подводе тепла

В пограничном слое при естественной конвекции на боковой поверхности вертикальной пластины эффекты сжимаемости рассмотрены в работе [233]. В работах [234, 235] также рассматривались задачи пограничного слоя, но в приближении Буссинеска; учитывалась лишь работа сил сжатия и диссипация энергии за счет вязкости в уравнении энергии. Влияние вертикальной стратификации плотности приводит в случае бокового подогрева к качественно иным эффектам, чем в рассмотренном выше случае тепловой неустойчивости.

Рассмотрим некоторые результаты расчетов для замкнутой конвективной ячейки с различными температурами боковых поверхностей и теплоизолированными основаниями ($\varphi = \pi/2$ в соответствии со схемой фиг. 1). Вертикальная стратификация плотности при различных параметрах сжимаемости C_{FH} в режиме развитой конвекции ($Gr_L = 1.25 \cdot 10^4$, $Pr = 0.71$, $\chi = 1.405$, $T_2 / T_1 = 1.5$) показана на фиг. 148. Отличия в распределениях плотности при $C_F = 0.02 \div 0.05$ невелики (режим слабой

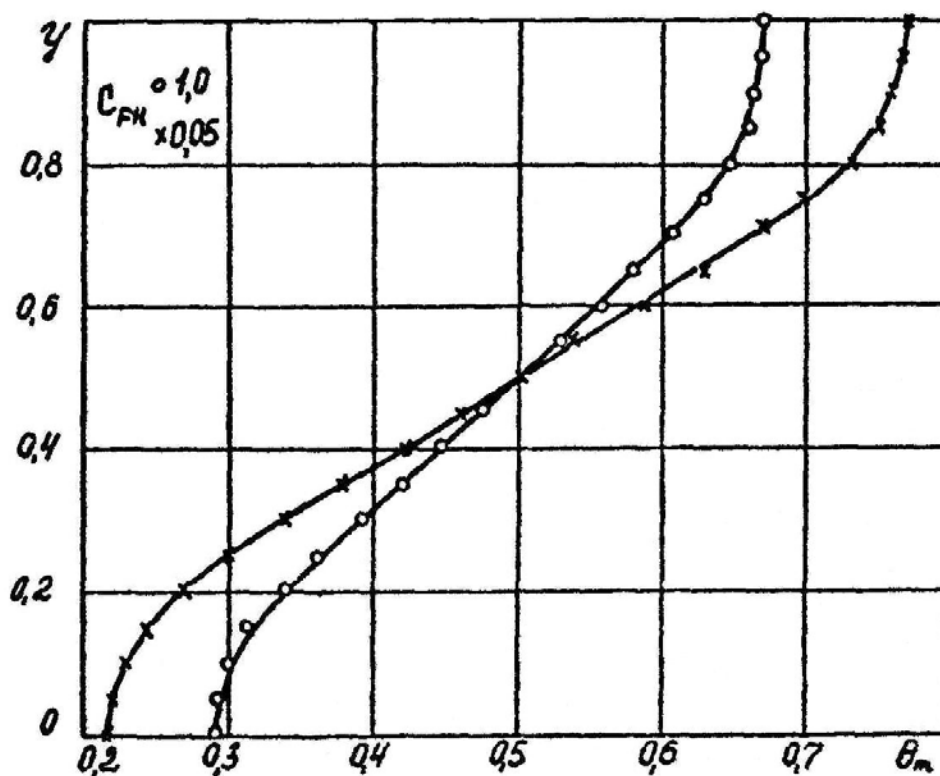
сжимаемости). Наличие вертикальной стратификации плотности в этих условиях в основном определяется температурной стратификацией, имеющейся при боковом подводе тепла (см. гл. II, § 1). При $C_F \sim 1$ и выше эффект вертикальной стратификации плотности связан с сжимаемостью газа



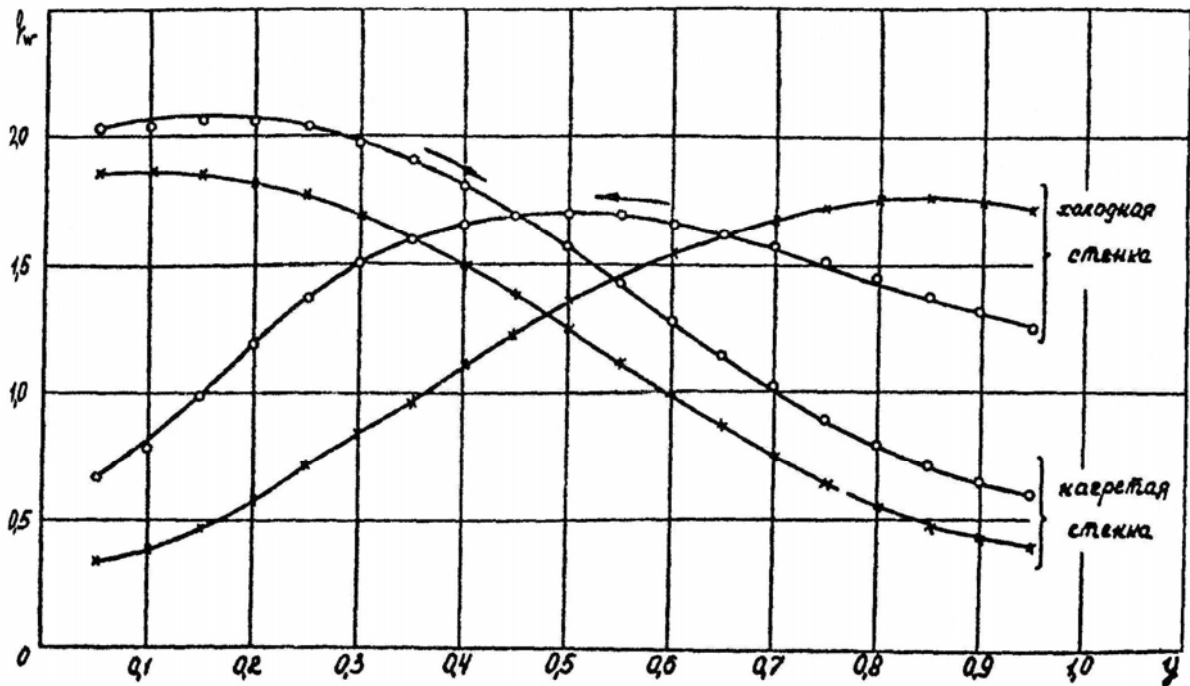
Фиг. 148. Вертикальная стратификация плотности в ячейке при боковом подводе тепла

в поле внешних сил и становится преобладающим (режим сильной сжимаемости). Это приводит к качественно новым закономерностям в изменении полей скорости и температур при наличии конвекции. Один из наиболее важных эффектов - уменьшение вертикального температурного расслоения, вызываемого конвекцией (фиг. 149). Он объясняется тем, что газ, поднимающийся вверх, охлаждается при расширении, а опускаясь вниз, нагревается при сжатии. Величина безразмерной разности температур по вертикали при $C_{FH} = 1$ уменьшается примерно вдвое. Другой новый эффект - увеличение интенсивности конвекции и средней теплопередачи от нагретой стенки к холодной и перераспределение местных потоков тепла на стенках (фиг. 150). На нагретой стенке местный поток тепла всюду увеличивается при увеличении C_F . В верхней части области ($y \sim 1$) это можно объяснить тем, что

уменьшается температура θ_m на внешней границе пограничного слоя. В нижней части области на начальном участке температура θ_m увеличивается, однако тепловой поток все же возрастает, по-видимому, в связи с ускорением восходящего потока. Местный поток тепла на холодной стенке обнаруживает следующую аномалию (фиг. 150): он вначале возрастает вдоль по потоку, имея меньшее значение, чем при $C_F = 0.05$, достигает максимального значения в средней части по высоте при $y \sim 0.5$, а затем падает (однако, начиная со значения $y \sim 0.6$ имеет уже большее значение, чем при $C_F = 0.05$).



Фиг. 149. Температурное расслоение в стратифицированном (по плотности) газе при слабой и сильной сжимаемости



Фиг. 150. Распределение местных потоков тепла

$$C_{FH} \quad \circ - 1.0$$

$$x - 0.05$$

Влияние на среднюю теплопередачу эффектов сжимаемости в случае бокового потока тепла исследовалось при развитой конвекции в работах [77, 222]. Из трех параметров $\chi, C_F, T_2/T_1$ наибольшее значение при боковом подводе тепла имеет параметр ^{x)}

$$K_1 = (\chi - 1) C_F = \frac{gH}{C_p T_1}, \quad (5.7)$$

учитывающий вертикальную стратификацию плотности и работу сил сжатия. При $K \ll 1$ возможно универсальное представление функции, учитывающей сжимаемость, в виде

^{x)} Для модели конвекции в приближении Буссинеска, но с учетом в уравнении энергии работы сил сжатия и диссипативных сил этот критерий был введен Острахом [235].

$$f(\chi, C_F) = (1 + K_1)^{0.7} \quad (5.8)$$

Общий вид этой функции

$$f(\chi, C_F) = \chi^{0.13} (1 + C_F)^{0.35} \quad (5.9)$$

Здесь

$$f(\chi, C_F) = \frac{\bar{Nu}(\chi, C_F)}{\bar{Nu}(\chi \rightarrow 1, C_F \rightarrow 0)}$$

Температурный фактор в данном случае не играет столь большой роли, как при тепловой неустойчивости. Его влияние представляется а виде

$$\bar{Nu} \sim \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{0.085} \quad (5.10)$$

Таким образом, влияние сжимаемости при боковом подогреве газа имеет принципиальные отличия от случая подогрева снизу. Ряд новых эффектов, на которых здесь не будем останавливаться, возникает и в том случае, когда внешняя сила наклонена под некоторым углом φ . Эти эффекты рассмотрены в работе [106].

Сформулируем условия, при которых влиянием сжимаемости можно пренебречь. В режиме слабой сжимаемости $C_F \leq 0.02 \div 0.05 \left(\chi = 1.4, \frac{T_2}{T_1} = 1.5 \right)$ поправка на влияние сжимаемости в среднем потоке тепла не превышает 2%; оказывается также, что в этом режиме безразмерные значения скорости $u / \sqrt{C_F}$, $v / \sqrt{C_F}$ и характерного масштаба времени $t / \sqrt{C_F}$ (например, времени установления стационарного режима) также не зависят от параметра C_F . Это является обоснованием методики исследования режимов слабой сжимаемости при малых, но конечных значениях C_F , использовавшейся в § 1, 2 главы II. В большинстве же технических приложений, где имеют место процессы теплообмена при естественной конвекции в земных условиях (или условиях

пониженной гравитации) вдали от критической точки вещества значение параметра C_F составляет не более $10^{-3} - 10^{-4}$, поэтому приближение Буссинеска заведомо применимо. Кроме условия $C_{FH} \ll 1$ следует отметить еще одно условие ^{х)}: $C_{FH} \ll \frac{T_2}{T_1} - 1$, являющееся следствием более общего условия

$$K = \frac{(\chi - 1)C_F}{T_2/T_1 - 1} \ll 1, \quad (5.11)$$

упоминавшегося выше в п.2.

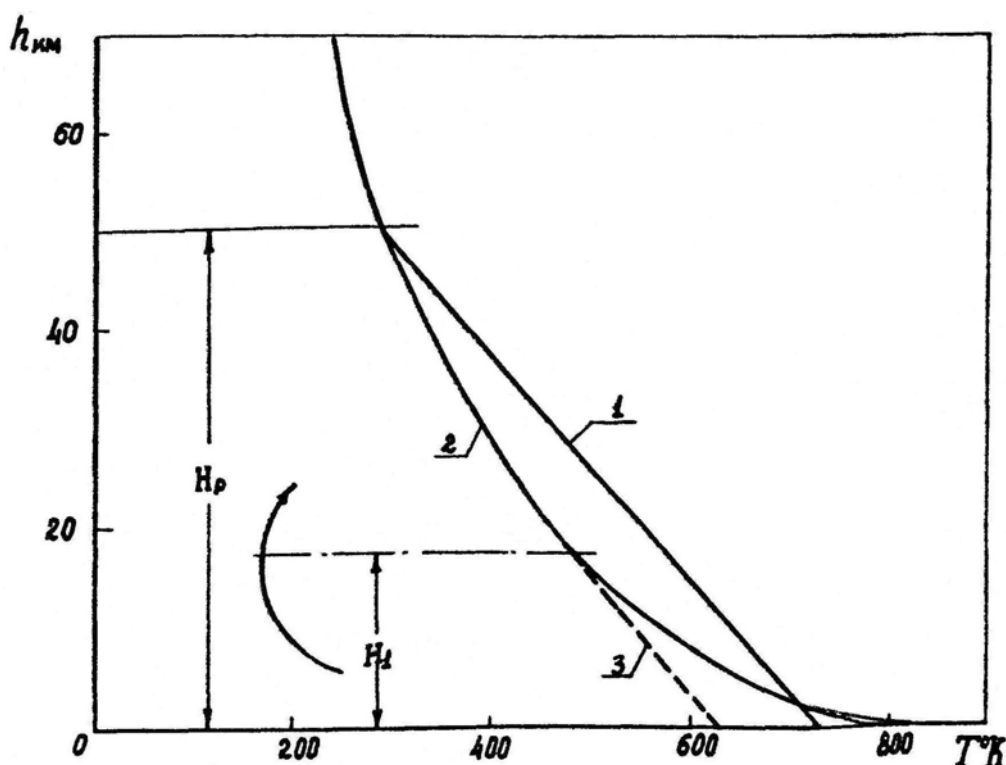
Влияние температурного фактора в связи с изменением физических свойств $\mu(T), K(T)$ здесь подробнее не рассматривается. Для воздуха это влияние учитывается формулой (5.10).

§ 2. Модель проникающей конвекции сжимаемого газа в глубокой атмосфере

Конкретная постановка задачи о проникающей конвекции связана с интерпретацией измерений вертикальной структуры атмосферы Венеры АМС "Венера"-4, 5, 6, 7; однако эта задача вообще типична для физики планет и астрофизики. Распределение вертикального профиля температур в нижнем слое атмосферы Венеры, полученное путем непосредственного зондирования, приведено на фиг. 151. При построении модели теплового режима атмосферы делается предположение о поглощении солнечной радиации в атмосфере. Для атмосферы Венеры одной из наиболее вероятных является так называемая парниковая гипотеза, согласно которой солнечная радиация в видимой части спектра доходит до поверхности, а поглощается - отраженная радиация в

^{х)} Это условие получено в работе [233] при анализе решений уравнений пограничного слоя для сжимаемого газа.

инфракрасной области спектра ^{x)}. Профили температур лучистого равновесия, рассчитанные в этих предположениях в работе [230], показаны на фиг. 151 линией 2. Различие между измеренным профилем и профилем лучистого равновесия должно быть связано с влиянием конвекции ^{xx)}. Лучистое равновесие обеспечивается в действительности лишь на высотах $H \geq 50$ км, где линии 1 и 2 сливаются. Эту высоту будем называть глубиной проникновения



Фиг. 151. Вертикальные профили температур в атмосфере Венеры

1 - измеренный профиль [216]

2 - профили лучистого равновесия, парниковая модель [10, 229]

^{x)} Это не единственная гипотеза: например, Гуди и Робинсон [236] исходят из положения о поглощении радиации в облачном слое Венеры.

^{xx)} При этом следует учитывать, что и характеристики лучистого переноса не всегда достаточно надежны.

конвекции H_p . При $H \geq H_p (\partial T / \partial y) = (\partial T / \partial y)_a$, т.е. $K > 1$. При $H < H_p$ измеренный профиль вплоть до поверхности имеет градиент температур, равный в пределах точности измерений адиабатическому градиенту. Естественно поэтому предположить, что глубокая адиабатическая зона в атмосфере Венеры формируется под действием тепловой неустойчивости. Глубина неустойчивого слоя H_1 , определяемая точкой на профиле лучистого равновесия, где градиент температуры равен адиабатическому ($K=1$), отмечена на фиг. 151 горизонтальной штрих-пунктирной линией. Нетрудно видеть, что зона наиболее сильной неустойчивости ($K \ll 1$) расположена непосредственно у поверхности. Таким образом, задача состоит в том, чтобы построить модель конвекции, в которой осуществлялось бы формирование конвективного профиля, исходя из профиля лучистого равновесия. Приближенный прием, применяемый иногда при построении конвективного профиля [220], состоит в том, что в зоне $H < H_1$ лучистый градиент температуры заменяется на адиабатический (пунктирная линия 3). При этом, естественно, получается, что $H_p = H_1$. В применении к атмосфере Венеры температура поверхности в этом случае получается существенно заниженной. Это обстоятельство явилось одной из причин, побудивших Гуди и Робинсона [236] перейти к другой модели поглощения радиации, хотя суть дела, может быть, состоит и в несовершенстве модели отвода тепла конвекцией. Так как глубина атмосферы велика, то учет гидростатической сжимаемости газа весьма важен, причем по сравнению с рассмотренным ранее (§ 1 данной главы) случаем $K(y) = const$, по вертикали имеется несколько "этажей", т.е. различных режимов по параметру устойчивости $K (K \ll 1, K \sim 1, K > 1)$.

Перейдем к описанию предлагаемой модели проникающей конвекции. Будем считать, что слой газа подогревается за счет потока тепла q_w , подводимого к подстилающей поверхности. Этот поток тепла предполагается неизменным во времени, равномерно распределенным вдоль поверхности планеты и равным потоку тепла, проходящему через слой газа при лучистом

равновесии: $q_w = q$ (поток q постоянен по высоте: $q(y) = const$). Не детализируя процесс переноса тепла излучением, будем считать вертикальное распределение температуры при лучистой равновесии известным и равным начальному распределению

$$T(y)|_{y=0} = T^\circ(y) \quad (5.12)$$

Начальные распределения плотности и давления находятся из уравнений гидростатики и уравнения состояния совершенного газа в соответствии с распределением температур (5.12). Исходной для расчета конвекции является система уравнений Навье-Стокса сжимаемого вязкого и теплопроводного газа (1.10-1.15); коэффициент вязкости μ предполагается не зависящим от температуры. Рассматриваются стационарные решения этой системы, причем в уравнении энергии введен коэффициент "лучистой теплопроводности" по вертикали $\kappa(T)$, определяемый в виде

$$\kappa = \frac{q}{dT^\circ / y} \quad (5.13)$$

При таком определении коэффициента κ условия лучистого и гидростатического равновесия будут следствием уравнений конвекции. Предполагается далее, что при наличии конвекции зависимость $\kappa(T)$, найденная из (5.13), не изменяется. Таким путем учитывается приближенно и взаимодействие поля излучения и конвекции. Коэффициент теплопроводности в горизонтальном направлении (κ_0) полагается постоянным.

Рассмотрим граничные условия. На поверхности при $y = 0$ предполагаются условия прилипания газа и заданный поток тепла

$$u = v = 0, \quad q_w = \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (5.14)$$

Конвективное движение предполагается периодическим в горизонтальном направлении с некоторым полупериодом L , на границах которого ставятся условия симметрии

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (5.15)$$

На достаточно большом удалении от поверхности конвективные движения рассматриваемого типа должны затухать, поэтому на верхней границе расчетной области при $y \rightarrow H$

$$u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_1 \quad (5.16)$$

Эти условия, имеющие асимптотический характер, ставятся на достаточно большой высоте H , конкретное значение которой зависит от глубины проникновения конвекции в устойчивую зону.

Проникающая конвекция сжимаемого газа при сформулированных условиях будет определяться критериями подобия

$$K^0(y), C_{FH}, Ra^*, Pr, \chi, L/H \quad (5.17)$$

Здесь $K^0(y)$ - распределение параметра устойчивости по высоте, определяемое вертикальной структурой профиля температуры лучистого равновесия. Рассмотрим некоторые характерные значения этого параметра. Глубина неустойчивого слоя $y = H_1$ определяется из условия $K_1^0 = 1$. Другое характерное значение - K_2^0 соответствует градиенту температуры, при котором плотность вблизи поверхности может иметь инверсию. Градиент плотности по высоте, найденный из уравнений гидростатики и состояния газа, имеет вид:

$$\frac{\partial \rho^0}{\partial y} = -\frac{\rho^0}{T} \left(\frac{g}{R} + \gamma^0 \right), \quad (5.18)$$

откуда может быть найдено значение $K_2 = \frac{\chi - 1}{\chi}$.

Глубина атмосферы определяется величиной критерия сжимаемости $C_{FH} = \frac{gH}{\chi RT_1}$ или $\chi C_{FH} = \frac{H}{H_0}$, где $H_0 = \frac{RT_1}{g}$ - шкала высоты, χ - отношение теплоемкостей газа, причем параметр устойчивости $K^0(y)$ связан со значениями $\gamma^0(y)$, χ , C_{FH} соотношением, аналогичным (5.4):

$$K^0(y) = \frac{(\chi - 1)C_{FH}}{\chi^0(y)} \quad (5.19)$$

где γ_0 - безразмерное значение градиента температуры лучистого равновесия (масштаб температуры T_1 , масштаб длины - H).

Влияние вязкости газа учитывается критерием Релея $Ra^* = Gr_H^* \cdot Pr$, где Gr_H^* - число Грасгофа, отнесенное к потоку тепла, $Gr_H^* = \frac{gH'q^*}{\nu_*^2}$, $q^* = \frac{q_w H}{\kappa_* T_1}$ - безразмерный поток тепла, ν_* , κ_* - соответственно масштабы кинематической вязкости и лучистой теплопроводности; $Pr = \frac{\mu C_p}{\kappa_0}$ - число Прандтля.

Численное решение системы уравнений конвекции сжимаемого газа осуществлялось с помощью конечно-разностной схемы, приведенной в главе I (§ 2). В расчетной схеме использовались логарифмические переменные $p^* = \ln p$, $\rho^* = \ln \rho$, благодаря которым удастся отчасти преодолеть вычислительные трудности, связанные с сильным изменением параметров атмосферы по высоте.

§ 3. Результаты исследования структуры стационарной проникающей конвекции

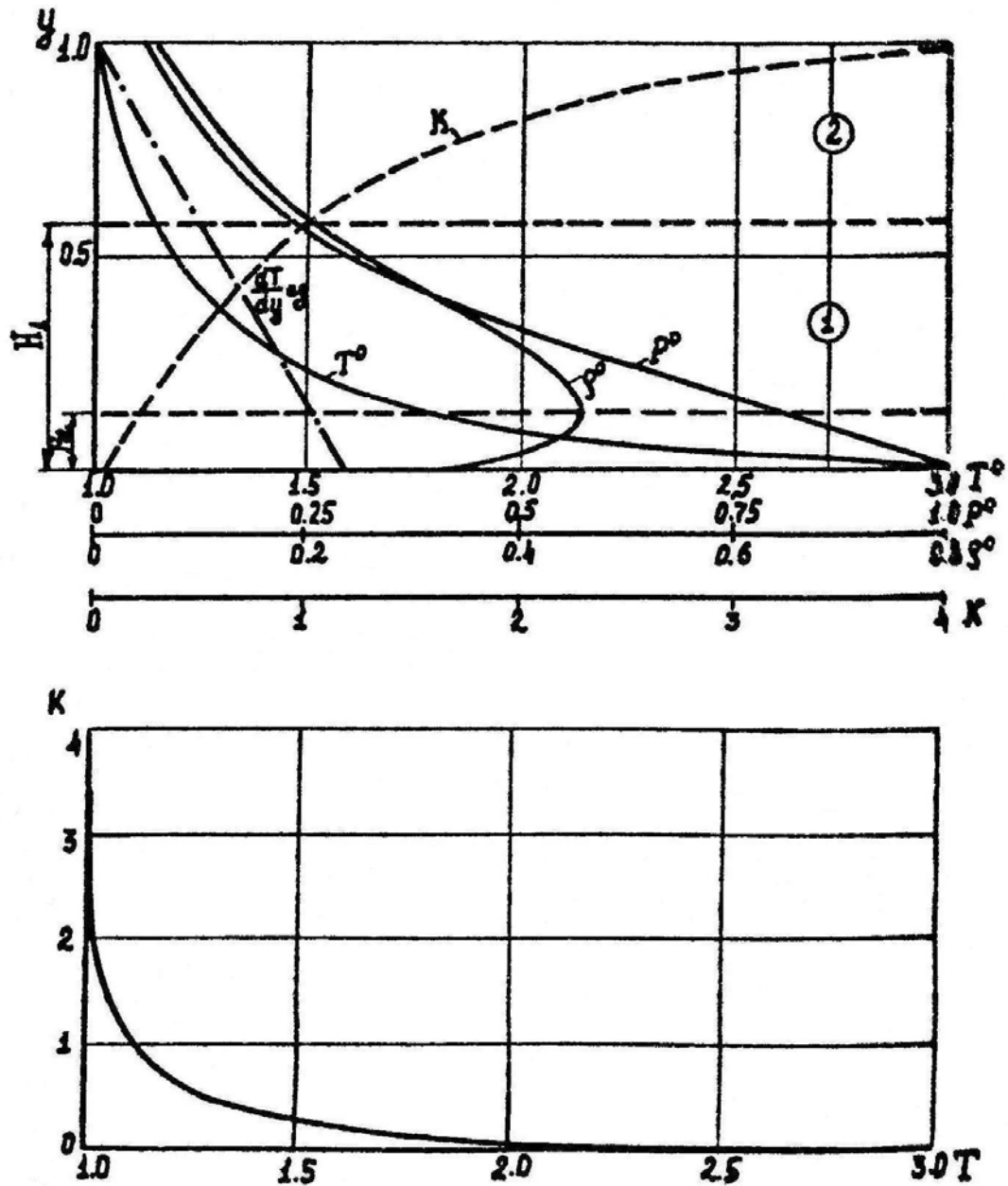
Сделаем ряд замечаний относительно реализации в природе данной схемы конвекции, возможностей численного моделирования параметров реальной атмосферы и целей предпринимаемого ниже численного исследования. Из планет земной группы рассмотренная стационарная периодическая модель конвекции, по-видимому, наиболее близко отвечает условиям атмосферы Венеры (в связи с большой длительностью венерианских суток и однородностью температурных условий вдоль ее поверхности) и в меньшей степени - условиям атмосфер Земли и Марса в связи с "пятнистостью" их поверхности и суточным ходом температур. Однако, на современном этапе исследования локальных атмосферных явлений важно развитие и общих физических представлений о механизме действия тепловой неустойчивости в атмосфере и о вкладе конвективной составляющей независимо от возможного влияния других факторов.

Численное моделирование всего спектра локальных конвективных движений (определяемых числами Релея $Ra_H^* \sim 10^{15} - 10^{20}$) на современных вычислительных машинах не представляется возможным. Известные вычислительные трудности имеются и при моделировании глубоких атмосфер ($H \sim 10H_0$) в связи с существенным изменением плотности. При численном исследовании, предпринятом ниже, осуществлялся последовательный переход по числу Релея, начиная от условий лучистого равновесия ($Ra_H^* = 0$) до чисел Релея $Ra_H^* \sim 10^7 - 10^8$. При этом не вводилось специальных аппроксимаций для коэффициента турбулентной вязкости, однако результаты расчетов, представленные в критериальном виде, могут быть использованы для оценок, если определить коэффициент турбулентной вязкости ν_* с помощью эмпирических зависимостей (например, с помощью закона Ричардсона-Обухова [237-238]). При этом верхний предел чисел Релея, достигнутый в

расчетах, приближенно соответствует уровню чисел Релея в реальной атмосфере, если под ν_* понимать коэффициент "турбулентной вязкости". В такой интерпретации (хотя и не вполне удовлетворительной, но принятой в настоящее время в работах по мезометеорологии, см., например, [239]) полученные результаты дают представление о поведении некоторых "крупномасштабных" составляющих тепловой неустойчивости в атмосфере.

1. Нижний слой атмосферы при наличии у поверхности зоны инверсии.

На фиг. 152а приведены безразмерные начальные профили температуры $T^0(y)$, плотности $\rho^0(y)$ и давления $p^0(y)$ для одной из моделей атмосферы при значениях $C_{FH} = 3, \chi = 1,2$, которая приближенно соответствует лучистому равновесию в нижнем слое углекислой атмосферы Венеры (при $g=8.8$ м/сек², $R=190$ дж/кг град и $T_1 = 400$ °К, высота H , принятая за масштаб высоты, равна около 28 км). В приповерхностном слое этой атмосферы, однако, градиент температуры взят большим, чем в лучистой атмосфере Венеры, благодаря чему температура поверхности выше и вблизи поверхности на высоте H_2 (фиг.152а) имеется зона инверсии плотности, составляющая около $0.22 H_1$. Отметим, что в упоминавшихся лабораторных моделях проникающей конвекции [224-226] начальная глубина зоны инверсии плотности всегда равна глубине неустойчивого слоя, т.е. $H_2 = H_1$, а значения параметра C_{FH} на несколько порядков меньше. На фиг. 152б дана зависимость коэффициента лучистой теплопроводности от температуры, вычисленная по заданному профилю $T^0(y)$. При расчете этой зависимости для более точного определения градиента $dT/dy(y)$ производилось предварительное выглаживание профиля $T^0(y)$, заданного таблично; в расчетах использовалась равномерная сетка с числом узлов по вертикали $N = 41$ и по горизонтали $M=21$, что соответствовало "разрешающей способности" сетки около 0.75 км. Значения остальных параметров равны $Pr = 1, L/H = 0.5(L/H_1 = 0.86)$.

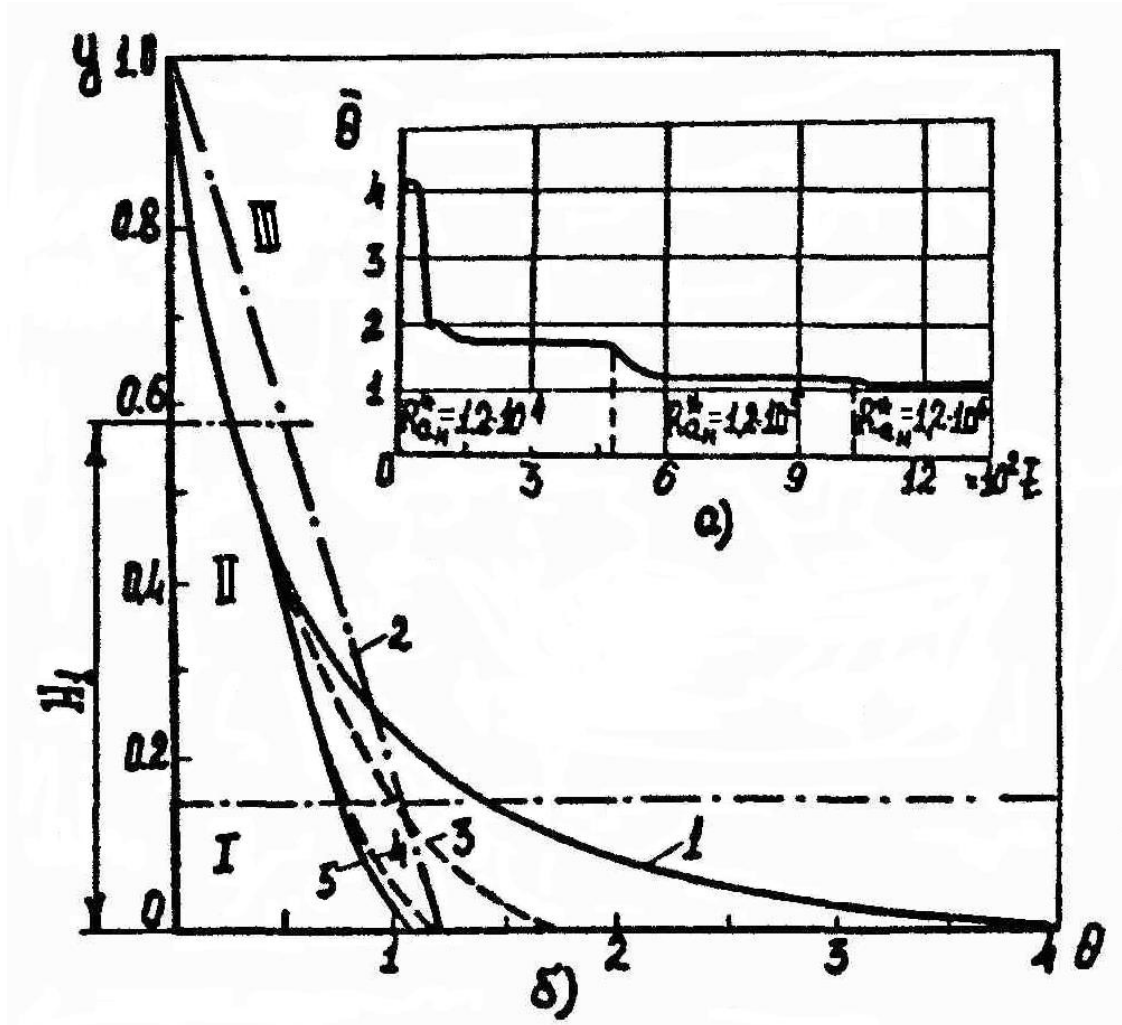


Фиг. 152. а) Начальные распределения по высоте плотности, температуры и давления (модель I)
 б) Зависимость коэффициента лучистой теплопроводности от температуры

Здесь и в п. 2 постоянной по высоте принималась динамическая вязкость μ , т.е. кинетическая вязкость увеличивалась по высоте в соответствии с уменьшением плотности. На фиг.153а показано уменьшение средней температуры подстилающей поверхности при числах Релея $Ra_H^* = 10^5, 10^6, 10^7$,

иллюстрирующее установление стационарных режимов и отвод тепла от поверхности путем конвекции.

На фиг. 153б дано сопоставление вертикальных профилей температуры лучистого равновесия (кривая 1) и трех конвективных профилей при числах Релея $10^5, 10^6, 10^7$ (линии 3, 4, 5); штрих-пунктирной линией 2 дан адиабатический градиент температуры. При наличии конвекции вертикальный профиль температуры имеет три характерные зоны: I - зона, где градиент температуры больше адиабатического ($K < 1$), II - зона конвективного ядра ($K \approx 1$) и III - зона, где градиент температуры меньше адиабатического ($K > 1$). В данном случае оказывается, что зона III практически не подвергается влиянию конвекции и распределение температур в ней практически равно начальному. Зона II при числе $Ra_H^* = 10^5$ имеет очень малую протяженность (пунктирная линия 3 на фиг. 153б), что связано с относительно слабым перемешиванием газа. При увеличении числа Релея глубина адиабатической зоны увеличивается (линии 4, 5); это происходит в основном за счет более интенсивного перемешивания в неустойчивой зоне и в меньшей степени за счет выноса тепла в верхнюю часть области. Таким образом, относительная глубина проникновения конвекции H_p/H_1 (определенная по влиянию конвекции на поле температур в зоне III) оказывается в данном случае значительно меньше, чем в упоминавшихся лабораторных опытах и расчетах [224-226], что объясняется, по-видимому, разреженностью газа в связи со значительно большей глубиной неустойчивой зоны H_1 , и, кроме того, относительно малой глубиной инверсионной зоны H_2/H_1 , в которой конвективные движения наиболее интенсивны.



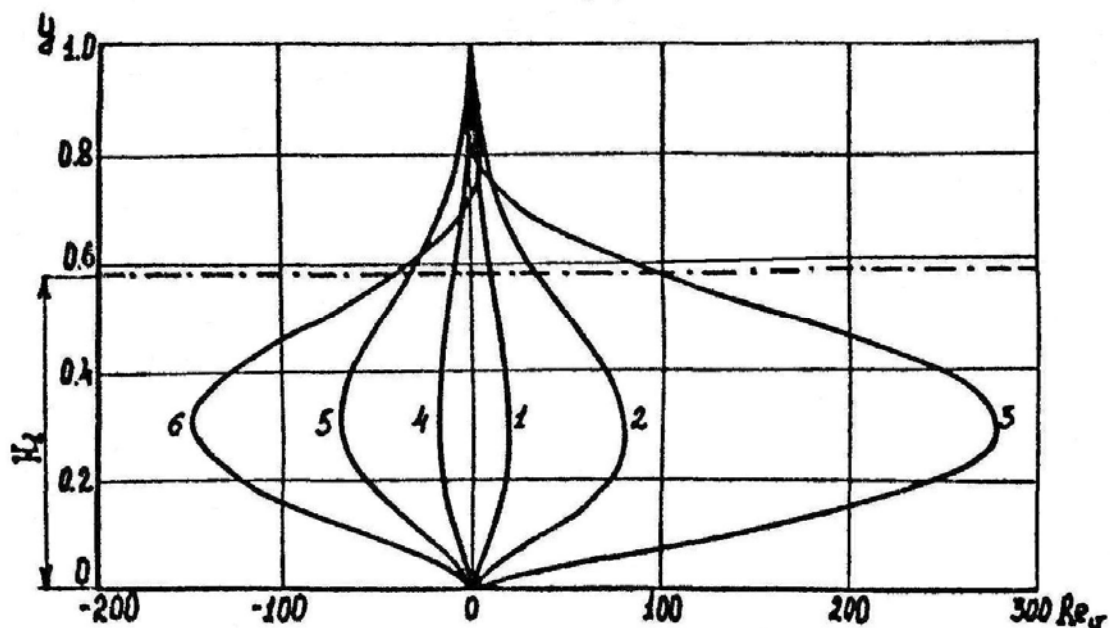
Фиг. 153. а) Изменение средней температуры поверхности.

б) Распределение температуры по высоте

(1 - лучистое равновесие; 2 - адиабата,

3, 4, 5 – профили при $Ra_H^* = 10^5, 10^6, 10^7$)

Одной из особенностей конвекции в глубокой атмосфере является существенное различие между интенсивностями восходящих и нисходящих токов, увеличивающееся при уменьшении вязкости. Профили вертикальных токов ($Re_v = vH/v_*$) даны на фиг.154. Максимальной интенсивности вертикальные токи достигают на высоте y_m , примерно равной половине высоты неустойчивой зоны ($y_m \approx 0,515H_1$), причем, как видно из фиг. 154, значение y_m практически не зависит от числа Релея в рассмотренном его диапазоне.

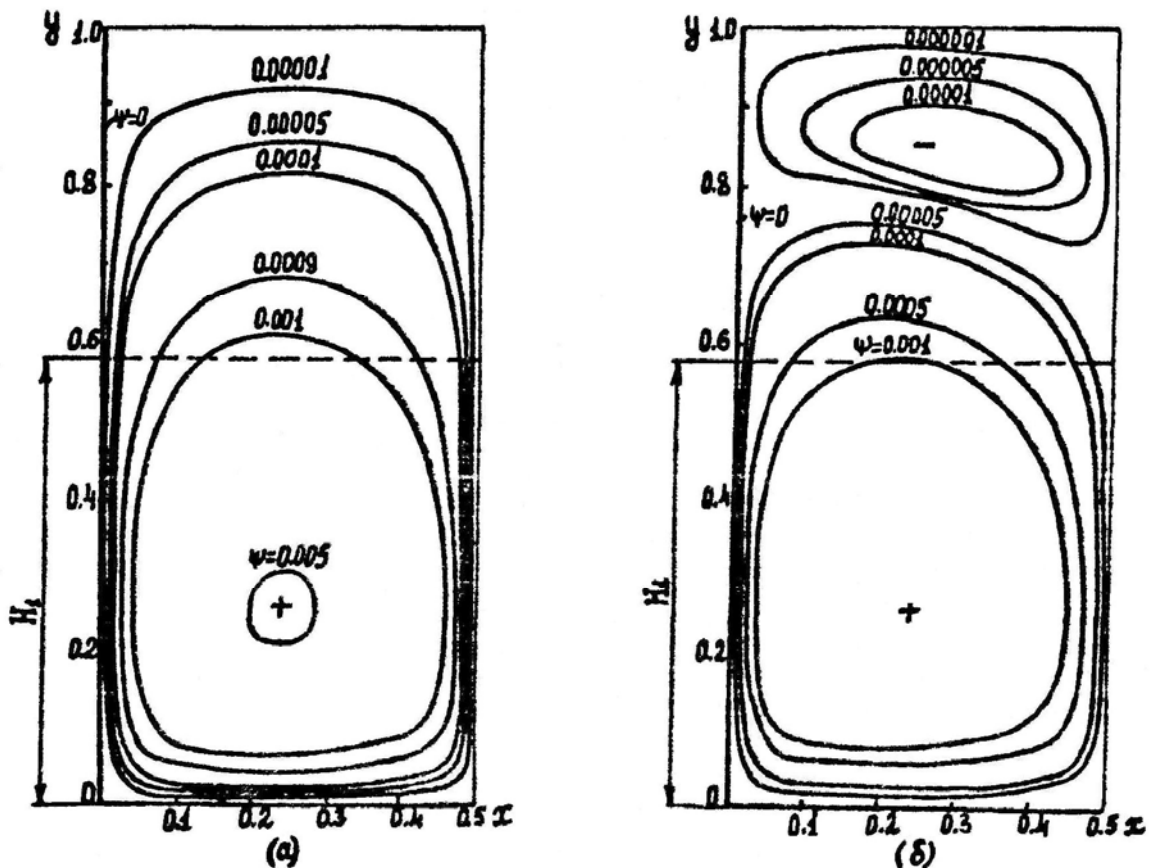


Фиг. 154. Профили вертикальных токов восходящих (1, 2, 3) и нисходящих (4, 5, 6)

	1,4	2,5	3,6
Ra_H^*	10^5	10^6	10^7

Другой особенностью проникающей конвекции (в отличие от рассмотренных в § 1 случаев при $K(y)=\text{const}$) является образование в зоне III при больших числах Релея вторичных течений, как бы "запирающих" основное течение (фиг. 155). Причиной появления вторичных токов является торможение основного потока в устойчивой зоне III. В несколько иной ситуации аналогичный механизм вторичных движений уже встречался в главе III (§ 2). Появление вторичных токов отмечалось также и в работах, относящихся к проникающим движениям несжимаемой жидкости [226]. Условие образования этих движений, по-видимому, существенно зависит от структуры запирающего слоя III (в особенности от градиента температуры и плотности в этом слое). В упоминавшихся случаях [224-226] всегда имелся обратный градиент температур в слое III. Для данного случая, когда плотность и температура падают по высоте, возможность образования вторичных токов показана, по-видимому, впервые. Вторичные движения такого типа играют важную роль в

формировании облачности. Отметим, что глубина проникновения конвективных движений, определяемая по затуханию вертикальных токов основного движения (фиг. 154), превосходит глубину неустойчивой зоны H_1 , хотя влияние этих токов на профиль температур в зоне III и не заметно.



Фиг. 155. Линии тока на стационарном режиме

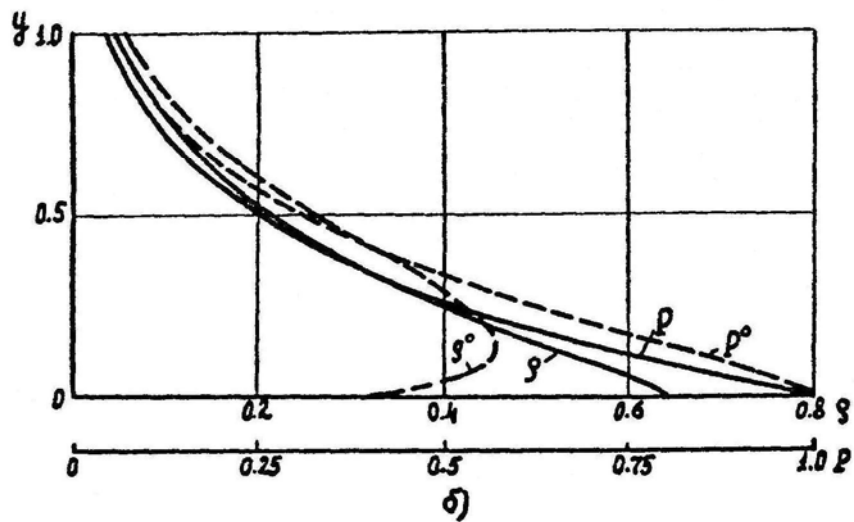
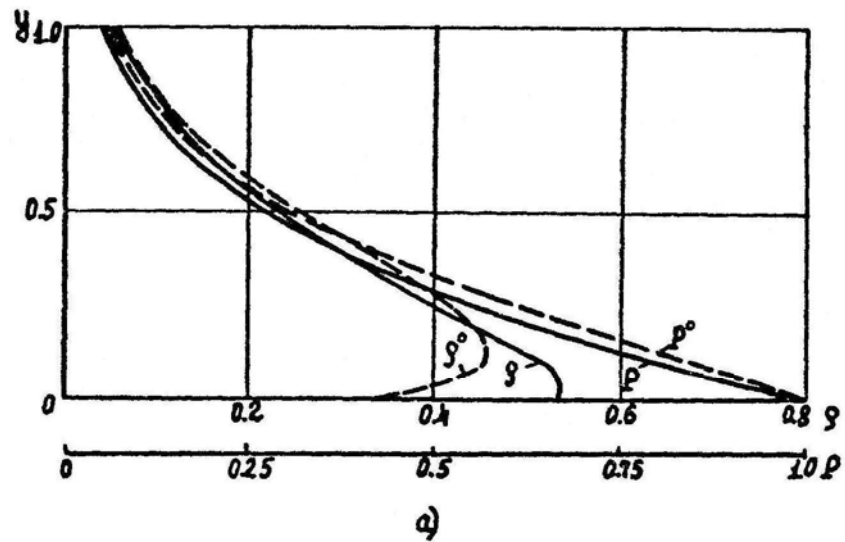
а) $Ra_H^* = 10^6$, б) $Ra_H^* = 10^7$

Из других результатов следует отметить влияние конвекции на изменение вертикальных профилей плотности и давления (фиг. 156а, б). Напомним, что при выводе "уравнений и отклонениях" (гл. I § 1) обычно предполагается, что

$$p' = p - p^0 \ll p^0, \quad \rho' = \rho - \rho^0 \ll \rho^0$$

Первое из этих условий достаточно хорошо выполняется, однако для

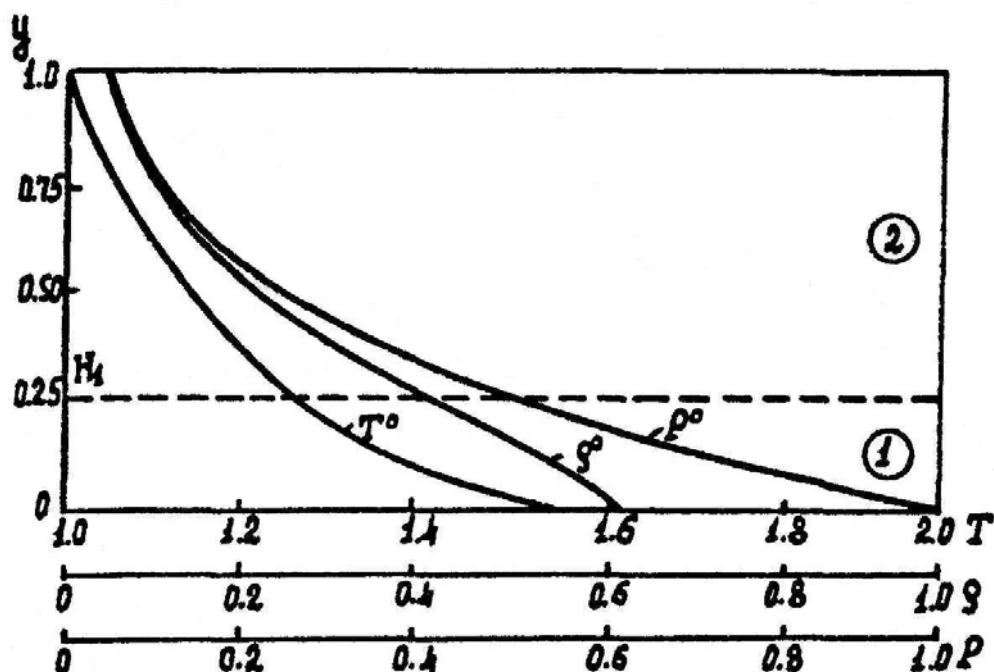
плотности (фиг.156) скорее будет справедливо соотношение $\rho' \sim \rho^0$. Увеличение плотности газа вблизи поверхности при больших числах Релея, приводящее к исчезновению инверсионной зоны, связано с сильным охлаждением поверхности за счет конвекции.



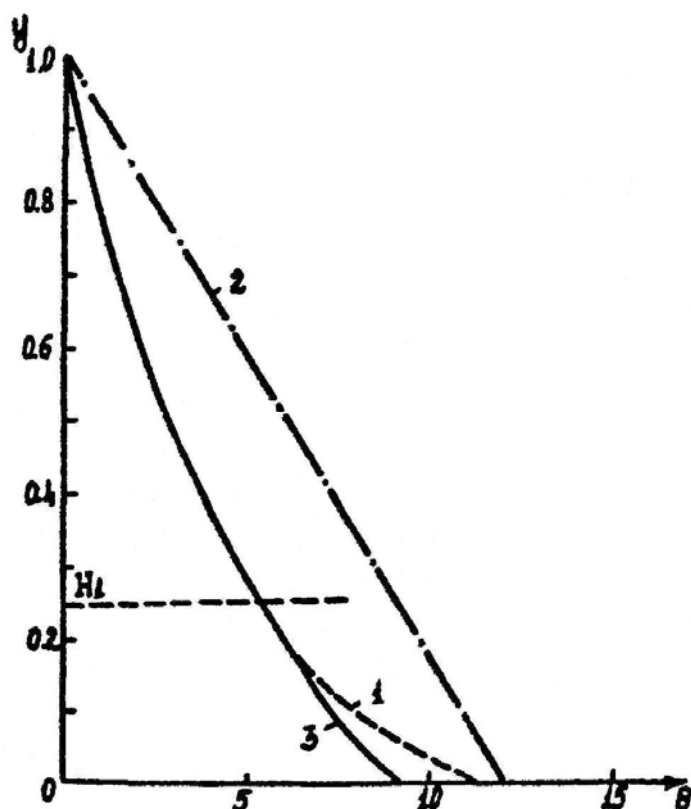
Фиг. 156. Начальные (ρ^0, p^0) и конвективные профили плотности и давления а) $Ra_H^* = 10^5$, б) $Ra_H^* = 10^7$

2. Подобие начального распределения температуры при уменьшенном вертикальном масштабе атмосферы. Влияние закона изменения вязкости

В модели атмосферы, которая приведена на фиг. 157, профиль температуры $T^o(y)$ всей высоте подобен профилю лучистого равновесия 2 на фиг.151. При этом отсутствует зона инверсии плотности в неустойчивой зоне, а отношение глубины неустойчивой зоны к глубине атмосферы H_1/H равно 0.25. Горизонтальный масштаб конвективной ячейки L/H , как и ранее, равен 0.5, однако масштаб L/H_1 теперь увеличен примерно вдвое. Целью расчетов, выполненных с этой моделью атмосферы, является изучение влияния инверсии плотности при сопоставлении с результатами, полученными выше, и более детальный анализ структуры проникающей конвекции непосредственно в устойчивой зоне. Как и ранее, использовалась сетка 41x21. Расчеты выполнены при том же параметре сжимаемости $C_{FH} = 3$.



Фиг. 157. Начальные распределения по высоте плотности, температуры и давления (модель II)

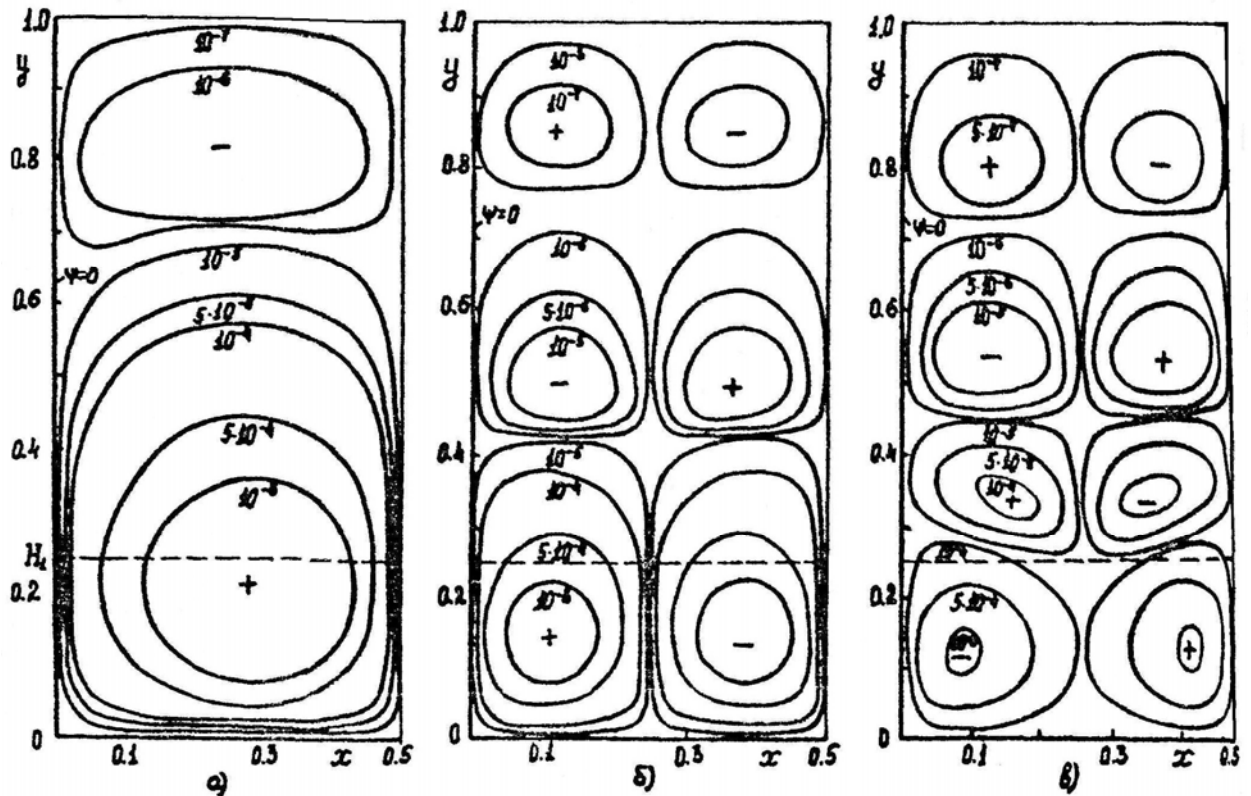


Фиг. 158. Распределение температуры по высоте (1 - лучистое равновесие, 2 - адиабата, 3 - профиль при $Ra_H^* = 10^7$)

На фиг. 158 дано сопоставление распределения вертикальных профилей: начального (линия 1) и конвективного при $Ra_H^* = 10^7$ (линия 2); отсюда видно, что влияние конвекции ощутимо лишь в нижней части зоны H_1 . Из сопоставления с аналогичным результатом на фиг. 153б видно, что при наличии инверсионной зоны плотности интенсивность конвекции в неустойчивой зоне и глубина зоны адиабатического градиента выше.

Новым эффектом является образование вторичных токов в устойчивой зоне уже при числе $Ra_H^* = 10^6$ (фиг. 159а) и дальнейшее дробление вторичных токов по вертикали с образованием нескольких "ярусов" конвекции (фиг. 159б,в). При этом интенсивность движения в каждом верхнем "ярусе" на один-два порядка меньше, чем в нижнем. Поэтому "обрезание" вертикального размера, которое было предпринято в п. 1, практически не должно сказываться на структуре нижних слоев. Интересно, что при увеличении числа Релея происходит дробление ячейки и в горизонтальном направлении; это значит, что

горизонтальный масштаб "настраивается" на прежнюю величину параметра L/H_1 , которая по-видимому и является характерной для горизонтальной длины волны проникающей конвекции.



Фиг. 159. Образование ярусов вторичных движений при проникающей конвекции

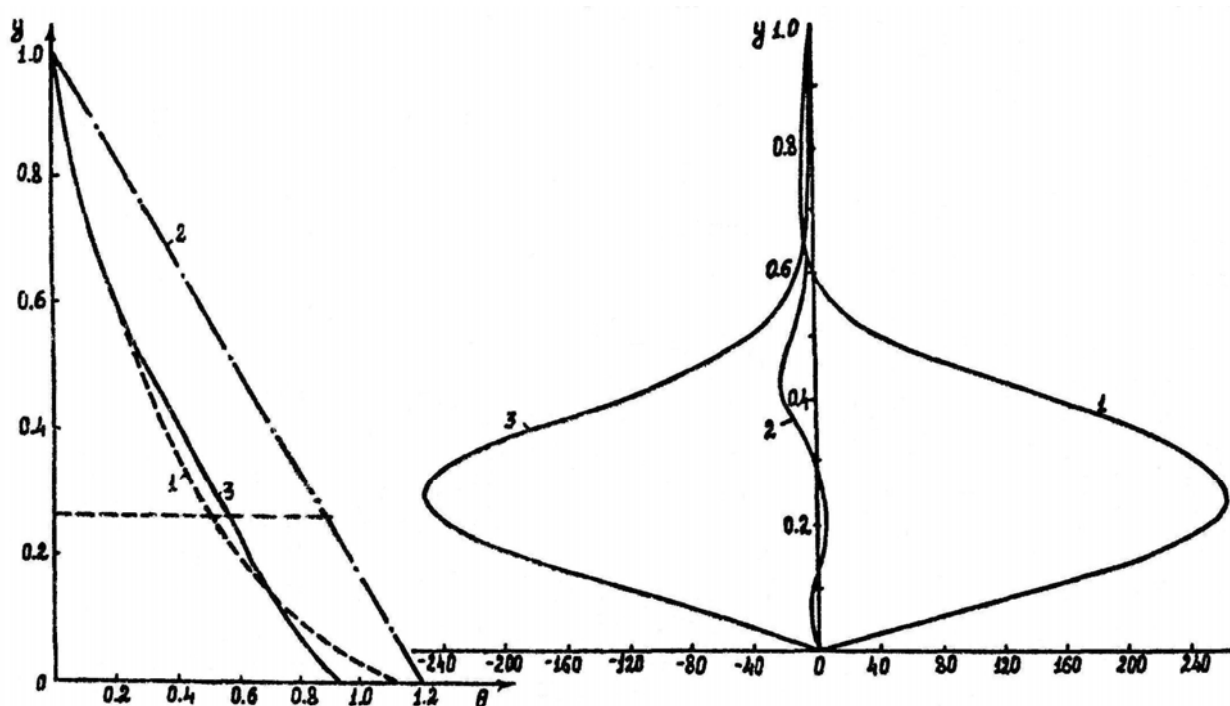
$$Ra_H^* \quad \text{а) } 10^6, \quad \text{б) } 10^7, \quad \text{в) } 10^8$$

Вертикальная протяженность основного движения, развивающегося в неустойчивой зоне, при увеличении числа Релея уменьшается: это движение как бы "запирается" вторичными токами, образующимися в устойчивой зоне.

На фиг. 160а,б приведены некоторые результаты расчета конвекции, выполненные для этой же модели атмосферы в предположении, что постоянной по высоте является не динамическая, а кинематическая вязкость ν (ранее при $\mu = const$ кинематическая вязкость $\nu = \mu \rho^{-1}$ была переменна и увеличивалась по высоте), что связано с аппроксимацией турбулентной вязкости в атмосфере. Из фиг. 160б видно, что вертикальные профили скорости не обнаруживают несимметрии в восходящих и нисходящих токах, которая отмечалась ранее.

Изменяется и само влияние конвекции на поле температур: конвективный профиль имеет четко выраженную адиабатическую зону, причем величина H_p / H_1 составляет около 2. Качественное поведение конвективного профиля ближе к приведенному на фиг.151 для атмосферы Венеры.

Таким образом, из результатов, полученных в п.1, 2, следует, что оценка вклада конвекции в тепловой режим нижнего слоя атмосферы существенно зависит от начального профиля лучистого равновесия и закона изменения вязкости.



Фиг. 160. Результаты расчетов при $v = const$

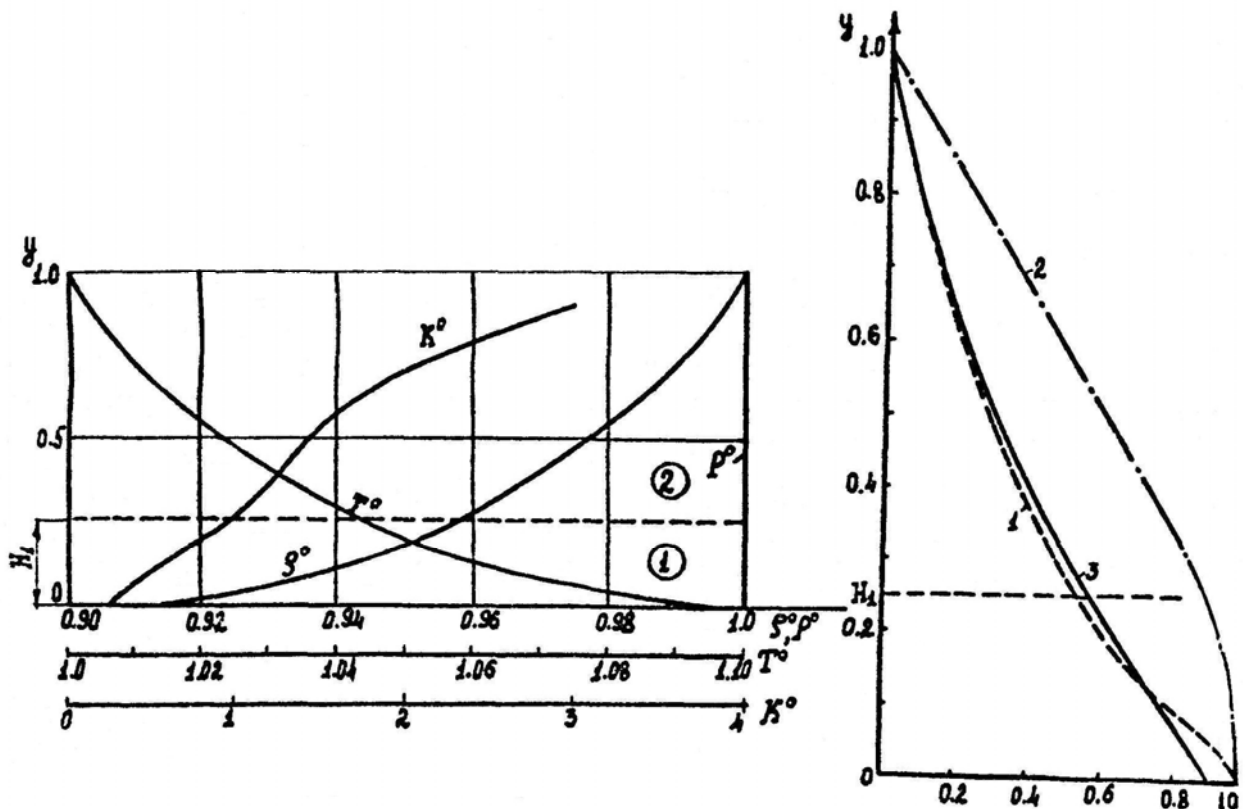
а) Распределение температуры по высоте
(1 - лучистое равновесие, 2 - адиабата,
3 - конвективный профиль)

б) Профили вертикальных токов, $Ra_H^* = 10^6$

3. Влияние параметра сжимаемости C_{FH}

На фиг. 161а приведены распределения температуры, плотности и давления по высоте при значительно уменьшенном вертикальном масштабе $C_{FH} = 0.5$, что соответствует глубине атмосферы около 5 км; однако, при

сохранении подобия по вертикальному профилю температуры $T^o(y)$ с прежней моделью (фиг. 157) плотность в соответствии с уравнением гидростатики увеличивается по высоте. Результаты расчета профиля температуры проникающей конвекции для этой модели атмосферы даны на фиг. 161б. Характерной и важной особенностью конвекции в данном случае является значительно большая в сравнении с рассмотренными ранее случаями область влияния конвекции на поле температур, простирающаяся выше глубины неустойчивого слоя K . Зона адиабатического градиента значительно шире и более четко выражена. Этот результат подтверждает сделанный выше вывод о том, что одной из причин относительно слабого влияния конвекции в устойчивой зоне (фиг.158) является большая глубина атмосферы, определяемая параметром гидростатической сжимаемости.



Фиг. 161. а) Начальные распределения по высоте плотности, температуры и давления при малой глубине атмосферы ($C_F = 0.5$)
 б) Распределение температуры (1 - лучистое равновесие, 2 - адиабата, 3 - конвективный профиль)

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ V

1. Показано, что потеря устойчивости равновесия сжимаемого вязкого газа с удовлетворительной точностью определяется одним универсальным критерием Джеффриса

$$\tilde{Ra} = Ra(1 - K)$$

При развитой конвекции приближение Джеффриса дает существенные погрешности при определении теплоотдачи. Условия слабой сжимаемости для режимов развитой конвекции имеют вид

$$C_F \ll 1, \quad K \ll 1$$

При $C_F \sim 0.02 \div 0.05$ и $K \leq 0.05$ влияние сжимаемости газа на теплоотдачу составляет не более 2%.

Впервые реализованы численно режимы потери устойчивости равновесия при изменении параметра гидростатической сжимаемости C_F и температурного фактора T_2/T_1 . Показано, что наличие вертикальной стратификации плотности приводит к увеличению критического числа Релея. Влияние вертикальной стратификации плотности при боковом подогреве приводит к уменьшению температурного расслоения, вызываемого конвекцией, и к перераспределению местного потока тепла.

2. Разработана модель проникающей конвекции с учетом вертикальной стратификации плотности и изменения по высоте параметра устойчивости $K(y)$. В численных экспериментах показано, что глубина адиабатической зоны для парниковой модели атмосферы Венеры существенно зависит от начального профиля лучистого равновесия, вертикальной стратификации плотности и изменения вязкости по высоте. Показано, что крупномасштабные составляющие конвективных движений, развивающихся за счет тепловой неустойчивости у поверхности планеты, проникают на высоту, значительно превышающую начальную глубину неустойчивой зоны. Проникновение конвекции из неустойчивой зоны ($K < 1$) в устойчивую ($K > 1$) сопровождается образованием в устойчивой зоне "ярусов" вторичных движений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработаны методы решения нелинейных задач естественной конвекции для газовых сред с учетом температурной и гидростатической сжимаемости, для жидкостей при наличии термокапиллярных эффектов, нестационарности переменного поля массовых сил и для проницаемых пористых сред. Развита методика анализа конвективных процессов, обладающих сложной пространственно-временной структурой (включая случаи неединственности) и зависящих от большого числа параметров. Разработанные методы применяются в практике исследований конвективного теплообмена в НИИТП и ряде других организаций (МВТУ, ВЦМГУ, ИПМ). Результаты исследований используются в ОКБ.

2. Выполнено систематическое исследование переноса тепла через плоские однородные слои жидкости и газа и слои проницаемого пористого материала в зависимости от чисел Релея, Прандтля, геометрии, угла наклона, температурного фактора.

В результате исследования местных характеристик течения и теплообмена установлен принцип максимального температурного расслоения, заключающийся в том, что максимальная неравномерность местного потока тепла или максимальное температурное расслоение имеют место при переходе от промежуточного режима слабой конвекции к режиму пограничного слоя развитой конвекции. Показано, что режим максимального температурного расслоения реализуется при воздействиях различной физической природы: при локальном или среднем изменении перегрузки, изменении геометрии, введении пористого наполнителя и в переходных режимах прогрева после внезапного увеличения или сброса тепловой или гравитационной нагрузки.

Использование полученных результатов дает возможность существенно уменьшить средние потоки тепла и избежать местного перегрева конструкции космических аппаратов, работающих длительное время в условиях высоких температур и давлений.

3. Выполнено систематическое исследование вклада конвективных составляющих при длительном нестационарном прогреве топлив в баках двигательных установок в условиях пониженной гравитации ($B_0 > 100$, $Ra_H^* < 10^{10}$) с учетом градиента гравитации, возникающего при вращении бака, при наличии комбинированного подвода тепла к боковой свободной поверхностям и дну. Исследована структура конвекции, найдены границы (Ra^*, F_0) нестационарных режимов прогрева, обобщены характеристики теплоотдачи. Установлены новые закономерности температурного расслоения, вызываемого естественной конвекцией. Показано, что температурное расслоение в каждый из моментов времени имеет максимальное значение при определенной величине перегрузки g_m ; это значение g_m уменьшается при увеличении заданной длительности прогрева. Впервые найдена предельная характеристика температурного расслоения, вызываемого естественной конвекцией в условиях пониженной гравитации.

Исследованы характерные режимы конвективного теплообмена при длительном хранении топлив в баках в условиях слабого гравитационного поля и невесомости ($Mn^* \ll Ra^*$, $Mn^* \gg Ra^*$, $Mn^* \sim Ra^*$).

Рассмотрены две предельные схемы прогрева топлива по числу Бонда (плоская поверхность раздела, сферический пузырь в жидкости) и показано увеличение интенсивности теплообмена при совместном действии естественной и термокапиллярной конвекции; показано, что в этом случае средняя температура поверхности пузыря, расположенного внутри жидкости, близка к среднemasсовой температуре жидкости.

В результате выполненного исследования обоснован фундаментальный вывод о вкладе конвекции в увеличение температуры поверхности: при наличии естественной и термокапиллярной конвекции в отдельности и при их совместном действии средняя температура поверхности топлива $\bar{\theta}_S$ в баках двигательных установок превышает среднюю температуру свободной поверхности $\bar{\theta}_{S0}$, определенную при прогреве путем молекулярной

теплопроводности

$$\bar{\theta}_S = \theta_{S0} + \Delta\theta_S,$$

причем конвективный добавок $\Delta\theta_S$ в рассмотренном диапазоне определяющих критериев подобия $Ra^* < 10^{11}$, $Mn^* < 10^5$, $0.5 < H/R < D$ имеет положительное значение. На основании результатов выполненного исследования предложена приближенная методика определения средней температуры поверхности топлива.

Полученные результаты дают возможность определить вклад конвективной составляющей в увеличение температуры поверхности топлива и увеличение давления в баках двигательных установок в широком диапазоне перегрузок при длительном хранении в условиях пониженной гравитации, включая пребывание на орбите искусственного Спутника Земли и полет в условиях невесомости. Установлены не оптимальные диапазоны перегрузок при различной заданной длительности прогрева (аналогичные упоминавшимся выше режимам максимальной неравномерности местного потока тепла), даны рекомендации о целесообразности создания искусственной силы тяжести путем вращения баков.

4. Исследованы эффекты сжимаемости при естественной конвекции газов и определены условия применимости известных приближений Буссинеска и Джеффриса. Показано уменьшение температурного расслоения и увеличение критического числа Релея при наличии гидростатической сжимаемости газа. Впервые реализованы численно режимы потери устойчивости равновесия при изменении параметра сжимаемости и температурного фактора. Разработана схема проникающей конвекции сжимаемого газа, выполнено исследование структуры стационарной проникающей конвекции и условий реализации адиабатического градиента температуры в конвективной зоне для модели атмосферы Венеры.

28. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе И.В. Теоретическая гидродинамика, ч.П, Физматгиз, 1963.
29. Ландау Л.Д., Лифшиц И.М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1953.
30. Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Math. Comp.*, v. 2, № 1, 1967.
31. Владимирова Н.И., Кузнецов Г.Г., Яненко Н.Н. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости. Сб. "Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики", Новосибирск, 1966.
32. Джахупов К.Б. О некоторых постановках задач динамики вязкой жидкости и разностных методах их решения. Диссертация, ВЦ СО АН СССР, 1970.
33. Spiegel E.A., Veronis. On the Bousinesq approximations for compressible fluid. *Astrophys. J.* 131, 442-467, 1960.
34. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М. Физматгиз, 1959.
35. Scriven L.E., Sterling C.V. The Marangoni effects. *Nature*, v.187, №4733, 1960.
36. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. Гостоптехиздат, 1960.
37. Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций. Изд-во «Мир», 1968.
38. Horton C.W., Rogers F.T. Convective currents in porous medium. *J. Appl. Phys.* 16, 367, 1945.
39. Lapwood E.R. Convection of a fluid in a porous medium *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 44, 508, 1948.
40. Брайловская И.Ю. Разностная схема для численного решения двумерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа. *ДАН СССР*, т.160, №5, 1965.
41. Брайловская И.Ю. Явные разностные методы для расчета отрывши. течений вязкого сжимаемого газа. Сб.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, Изд-во МГУ, вып. IV, 1971.
42. Kurzrock J.W. Exact numerical solution of the time - dependent compressible equations. *AIAA paper*, № 66-33, 1966.

43. Thommen H.V. Numerical integration of the Navier-Stokes equations ZAMP, v.17, № 3, 1966.
44. Scala S.M., Gordon P. Solution of the time-dependent Navier-Stokes equations for the flow around the circular cylinder. AIAA Journal, v. 6, № 5, 1968.
45. Павлов Б.М. О расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел с использованием полных уравнений Навье-Стокса. Изв. АН СССР, МЖГ, №3, 1968.
46. Альбер С.И., Бекнева Е.Б., Коган В.Р., Петражицкий Г.Б., Станкевич Н.М. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для течения и теплообмена вязкого теплопроводного сжимаемого газа в замкнутой кольцевой области. Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, 1968.
47. Мышенков В.И. Дозвуковое и трансзвуковое течение вязкого газа в следе плоского тела. Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 1970.
48. Полежаев В.И. Численное решение системы одномерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, 1966.
49. Полежаев В.И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 1967.
50. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов. Наука, 1966.
51. Peaceman D.W., Rachford H. The numerical solutions of parabolic and elliptic differential equations. Journal Soc. Industr. and Appl. Math. V.3, № 1, 1955.
52. Douglas J. On numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ by implicit methods. J. Soc. Ind. And Appl. Math., v.3, № 1, 1955.
53. Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, 1962.
54. Павлов Б.М. Численное исследование сверхзвукового обтекания затупленных тел потоком вязкого газа. В сб. "Некоторые применения метода сеток в газовой динамике", вып. IV, Изд-во МГУ, 1971.

55. Дородницын А.А., Меллер Н.А. О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье-Стокса. Журнал Вычисл. Матем. и матем. физ., т. 8, № 2, 1968.
56. Люлька В.А., Щенников В.В. Численное решение уравнений Навье-Стокса. Сб. теор. работ по гидромех., ВЦ АН СССР, 1970.
57. Israeli M. A fast implicit numerical method for time dependent viscous flows Stud. Appl. Math., 49, № 4, 327-349, 1970.
58. Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.Г. О стационарном обтекании кругового цилиндра вязкой жидкостью. Препринт № 4, Ин-т Прикладной Математики АН СССР, 1969.
59. Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.Г. Задача для уравнений Навье-Стокса в плоской задаче обтекания. Препринт ИПМ АН СССР, № 9, 1971.
60. Кускова Т.В. Численное исследование двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости. Сб. "Некоторые применения метода сеток в газовой динамике", вып. III, изд-во МГУ, 1971.
61. Pearson A. Computational method for viscous flow problems. J. Fluid Mech. v.21, pt.4, 1965.
62. Громов Б.Ф., Петрищев В.С. О решении двумерных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. "Наука", Новосибирск, 1969.
63. Булеев Н.И., Тимухин Г.И. О численном решении уравнений гидродинамики для плоского потока вязкой несжимаемой жидкости. Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, вып. 1, № 3, 1969.
64. Тарунин Е.Л. Нестационарная конвекция жидкости в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, 1968.
65. Torrance K.E., Rockett J.A. Numerical study of natural convection in an enclosure with localised heating from below creeping flow to onset of laminar instability. J. Fluid Mech., 36, pt I, 1969.

79. Eckert E.R., Carlson W.O. Natural convection in an air enclosed between two vertical plates with different temperatures. *Intern. J. Heat and Mass Transfer*. V.2, № 1/2, 1961.
80. Elder J.W. Laminar free convection in a vertical slot. *J. Fluid Mech.* V. 23, pt. 1, 1969.
81. G. De Vahl Davis. Laminar natural convection in an enclosed rectangular cavity. *Int. J. Heat and Mass Transfer*. V. II, № II, 1968.
82. Mac. Gregor R.K., Emery A.F. Free convection through vertical layer-moderate and high Prandtl number fluids. *Trans. ASME, ser. C.*, 1969.
83. Rubel A., Landis F. Numerical Study of natural convection in vertical rectangular enclosure. "High Speed computing in Fluid Dynamics". *Physics of Fluids Supplement II*, v. 12, 1969.
84. Тарунин Е.Л. Тепловая конвекция в прямоугольной полости, подогреваемой сбоку. Ученые записки № 216. Гидродинамика, вып.2, Пермь, 1970.
85. Newell M.E., Schmidt F.W. Heat transfer by laminar natural convection within rectangular enclosure. *Trans. ASME, ser. C.*, v. 92, № 1, 1970.
86. Rubel A., Landis F. Laminar natural convection in a rectangular enclosure with moderately large temperature differences. *Heat Transfer*, v. IV, № C 2.10, Paris-Versalles, 1970.
87. Elder J.W. Turbulent free convection in vertical slot. *J. of Fluid Mech.* V. 23, pt.I, 1965.
88. Jacob M. Free heat convection through enclosed plane gas layers. *Trans. ASME, ser.C*, v. 70, № I, 1949.
89. Wilkes J.O., Churchill S.W. The finite-difference computational natural convection in a rectangular enclosure. *AI Ch. Eng. Journal*. V. 12, № II, 1966.
90. Schmidt E. Versuche zum Wärmeübergang bei natürlicher Konvektion. *Chem.-Ing. Techn.*, 28, 175, 1956.
91. Hirata M., Nishiwaki N., Miyashita H., Itoch M. Heat transfer across an enclosed vertical layer of relatively low height / thickness ratio. *Semy-Internat. Symp. JSME*, Tokyo, 1967.

108. Полежаев В.И., Власюк М.П. О ячейковой конвекции в бесконечно длинном горизонтальном слое газа, подогреваемом снизу. ДАН СССР, 195, № 5, 1970.
109. Catton J. Convection in a closed rectangular region: The onset of motion. Trans. ASME № 2, 1970.
110. Pellow A., Sonthwell R. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. of the Roy. Soc. Ser. A, v. 176, 312, 1940.
111. Зимин В.Д., Ляхов Ю.Н., Петухова В.Г., Шайдуров Г.Ф. Исследование стационарной тепловой конвекции в полости прямоугольного сечения. Сб. "Гидродинамика", выш.2, Ученые записки, 216, Пермь, 1970.
112. Тарунин Е.Л. О численном исследовании ветвлений при свободной конвекции в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 1967.
113. Ogura Y. A numerical study of wave number selection in finite amplitude Rayleigh convection. J. Atmosph. Sci.
114. Сорокин В.С. Об устойчивости неравномерно нагретого газа в поле силы тяжести. ПММ, т. 17, № 2, 1953.
115. Овчинников А.П. Конвективная устойчивость жидкости в кубической полости. ПМТФ, № 3, 1967.
116. Koschmieder E.L. On convection on a uniformly heated plane. Beitrage zur Physik der Atmospher. Bd 30. S. I-II, 1966.
117. Silveston P.L. Warmedurchgang in waagerechten Flussigkeitssihichten. Forsch. Ing.-wes. Bd. 24. Heft 1,2, 1958.
118. Leontiev A.I., Kirdyaschkin A.G. Experimental study of flow patterns and temperature fields in horizontal free convection liquid layers. Int. J. Heat Mass Transfer, v. II, 196I.
119. Rossby H.T. A study of Benard convection with and without rotation. J. Fluid Mech. 36, Part 2, 309, 1969.
120. Schneck P., Veronis G. Comparison of some recent experimental and numerical results in Benard convection. Phys. of Fluids, v. 10, № 5, 1967.

121. Plows W.H. Some numerical results for two-dimensional steady laminar Benard convection. *Phys. of Fluids*, v. II, № 8, 1968.
122. Thomas D.B., Thownsend A.A. Turbulent convection over a heated horizontal surface. *J. Fluid Mech.*, v. 2, 473-492, 1957.
123. Willis G.E., Deardorff J.W. Development of short-period temperature fluctuations in thermal convection. *Phys. Fluids*. V. 10, № 5. 1967.
124. Gille J. Interferometric measurement of a temperature gradient reversal in a layer of convecting air. *J. Fluid Mech.* V. 30, pt. 2, 1967.
125. Asis K., Hellums J. Numerical solution of the three dimensional equations of motion for laminar natural convection. *Phys. Fluids*, v. 10, № 2, 1967.
126. Chorin A.J. Numerical solution of Navier-Stokes equations. *Math. of Comput.* v.22, pt. 104, 1968.
127. Шварцблат Д.Л. Стационарные конвективные движения в плоском горизонтальном слое жидкости с проницаемыми границами. *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 5, 1969.
128. Koschmieder F.L. On the wavelengh of convective motions. *J. Fluid Mech.*, v.35, pt. 3, 527-330, 1969.
129. Busse. F.H. On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below. *J. ot Math. and Phys.*, v. XLVI, № 2, 1967.
130. Busse F.H., Whitehead J.A. Instabilities of convection rolls in a high Prandtle number fluid. *J. Fluid Mech.*, v. 47, pt. 2, 1971.
131. Krishnamurti R. On the transition to turbulent convection. Part I. The transition from two-to three-dimensional flow. *J. Fluid Mech.*, v. 42, part. 2, 1970.
132. Krishnamurti R. On the transition to turbulent convection. Part 2. The transition to time dependent flow. *J. Fluid Mech.*, v. 42, part 2, 1970.
133. Lipps F., Sommerville R.C.J. Dynamics of variable wave length in finite-amplitude Benard convection. *Phys. of Fluids*, v. 14, № 4, 1971.
134. Katto Y., Masuoka T. Criterion for the onset of convective flow in a fluid in a poreus medium. *Int. J. Heat and Mass Transfer*. V. 10. № 3, 1967.

149. Schwind H.G., Vliet G.C. Observations and investigation of natural convection and stratification in vessels. Pros. 1964 Heat transfer and Fluid Mech. Inst. p. 51-62, Berkely, Calif. Press, 1964.
150. Evans L.B., Reid R.C. Transient convection in vertical cylinder AI Ch. Eng. I, v.14, № 2, 1968.
151. Мосин Е.Ф. Исследование некоторых процессов теплопередачи свободной конвекцией в ракетах и космических летательных аппаратах. Диссертация, ЛМИ, 1971.
152. Tellep D.M., Hurper E.Y. Approximate analysis of propellant stratification. AIAA Journal, v.1, № 8, 1963.
153. Vliet G.C., Brogan J.J., Sheppard T.S., Morse E.H., Hines F.L. Stratified layer flow model - a numerical approach to temperature stratification in liquids contained in heated vessels. AIAA, preprint № 64-37, 1964.
154. Merte H., Clark J.A., Lady E.R., Suh C.C. Transient pressure rise of a liquid-vaper system in a closed container under variable gravity. Heat Transfer, Paris-Versalles, 1970.
155. Ливенцов В.М. Нестационарный теплообмен в цилиндрической области. Тезисы доклада, представленного на Всесоюзную конференцию "Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции", Минск, 1971.
156. Купцова В.С. Исследование процесса насыщения газом компонента топлива в баках жидкостной ракеты. Диссертация, МВТУ, 1971.
157. Беляев Н.М. Исследование прогрева жидкости при подводе теплового потока со стороны свободной поверхности. В сб. "Гидроаэромеханика, вып.Ш, изд-во ХГУ, 1966.
158. Hantley S.C. Temperature-pressure-time relationships in a closed cryogenic container. Adv. in Cryog. Eng. 1957.
159. Баслина Е.М., Винников Л.И., Аксельрод Л.С. Экспериментальное исследование тепломассообменных процессов в закрытых сосудах с низкотемпературными жидкостями. Сб. Тепло- и массоперенос, т. IV, 1968.

191. Levitch V.G., Krylov V.S. Surface-tension-driven phenomena, Annual review of Fluid Mech. ed. Sears V.R., Dyck M. № I, 1969.
192. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости. ПМТФ, № 3, 1966.
193. Block M.J. Surface tension as a cause of Benard cells and surface deformation in a liquid film. Nature, v. 178, № 4534, 1956.
194. Pearson J. H. A. On convection cells induced by surface tension. Fluid Mech., v.4, pt. 5, 1958.
195. Kobayashi R. Instabilitat einer von unter erwarmten Flusigkeitssischicht bei gleichzeitiger Beruckzichtigung von Oberflachenspannung und Auftribskraft ZAMP. V. 18, № 6, 1967.
196. Nield D.A. J. Fluid Mech., 19, 341, 1964.
197. Scriven L.E., Sternling C.V. On cellular convection driven by surface-tension gradients. J. Fluid Mech., 19, 321-340, 1964.
198. Smith K.A. On convective instability induced by surface-tension gradients. J. Fluid Mech. V. 24, 401-414, 1966.
199. Finalson B.A., Scriven L.E. Convective instability by active stress. Proc. Roy. Soc. A 310, 183-219, 1969.
200. Berg J.C., Boudart M., Acrivos A. Natural convection in pools ot evaporating liquids. J. Fluid Mech. V. 24, pt. 4, 1966.
201. Vidal A., Acrivos A. Effect of nonlinear temperature profiles on the onset of convection driven by surface tension gradients. Industr. and Eng. Chem. Fundamentals, v. 7, № I, 1968.
202. Palmer H.J., Berg J.C. Convective instability in liquid pools heated from below. J. Fluid Mech. V. 47, pt. 4, 1971.
203. Cabelli A., Davis G. A numerical study of Benard cell. J. Fluid Mech., v. 45, pt. 4, 1971.
204. Любин Л. Я., Повицкий А.С. Термокапиллярные явления в жидкости при отсутствии массовых сил. ПМТФ, № 2, 1961.

220. Шварцшильд М. Строеение и эволюция звезд. Изд-во И.Л., 1960.
221. Spiegel E.A. Convective instability in a compressible atmosphere. *Astrophys. J.*, 141, 1965.
222. Полежаев В.И. О влиянии сжимаемости на течение и перенос тепла при естественной конвекции. *Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа*, № 6, 97-102, 1968.
223. Гитерман М.Ш., Штейнберг В.А. Критерии возникновения конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости. *ПММ*, т. 34, № 2. 1970.
224. Malkus W.V.R. A laboratory example of penetrative convection. *Techn. Conf. of Hurricans and Tropical Meteor.*, Mexico, 1963.
225. Veronis G. Penetrative convection. *Astrophys. J.*, v. 73, № 2, 1963.
226. Musman S. Penetrative convection. *Astrophys. J.*, v. 73, № 2, 1963.
227. Пастушков Р.С. Численная модель трехмерной конвекции в атмосфере с вертикальным сдвигом ветра. *Труды ЦАО*, вып. 97, 1970.
228. Deardorff J.W. Preliminary results from numerical integrations of the unstable planetary layer. *J. Atm. Sci.* V. 27, № 8, 1970.
229. Авдудевский В.С., Завелевич Ф.С., Маров М.Я., Нойкина А.И., Полежаев В.И. Тепловой режим и конвективные движения в нижних слоях атмосферы планеты Венера. Доклад, представленный на Симпозиум по Луне и планетам. Киев, 1968.
230. Avduevsky V.S., Marov M.Ya., Noykina A.I., Polezhaev V.I., Zavelevich F.S. *Heat Transfer in the Venus Atmosphere.*
231. Сорокин В.С. Об устойчивости неравномерно нагретого газа в поле силы тяжести. *ПММ*, т. 17, № 2, 1953.
232. Сеттон О.Г. Микрометеорология. Гидрометеоиздат, 1958.
233. Eshghy S., Morrison. Compressibility and free convection. *Pros. Roy. Soc.*, A-293, № 1434, p. 395-407, 1966.
234. Gebhard B. Effect of viscous dissipation on natural convection. *J. Fluid Mech.*, № 14, pt. 2, 1962.

235. Ostrach S. New aspects of natural convection heat transfer. Transaction ASME, v. 75, p. 1287-1290, 1953.
236. Гуди Р.М., Робинсон А.Р. Глубокая циркуляция в атмосфере Венеры. Сб. статей "Новое о Марсе и Венере", Мир, 1968.
237. Richartson L.F. Roy. Soc. A 110, 709, 1926.
238. Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4-5, 1941.
239. Гутман А.Л. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Гидрометеиздат, 1969.
240. Полежаев В.И. Течение и теплообмен при естественной конвекции газа в замкнутой области, подогреваемой снизу. 3-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. М., (Тезисы), с. 245-246, 1968.
241. Petrazhitsky G.B., Polezhaev V.I. Heat transfer in the vortex flow of compressed gas in the field of body forces. Internat. Seminar Heat and Mass Transfer, Herceg-Novı, Yugoslavia, 1969.
242. Полежаев В.И. Расчет конвективных движений сжимаемого газа после потери устойчивости. Тезисы докладов II-го Всесоюзного семинара "Вычислительные методы механики вязкой жидкости", Киев, 21с., 1968.
243. Полежаев В.И. Нестационарный прогрев и температурное расслоение жидкости при постоянном подводе тепла в условиях пониженной гравитации. Доклад, представленный на II Конференцию по проблемам гидродинамики и теплообмена в условиях слабых силовых полей. Москва, 1969.
244. Авдуевский В.С., Полежаев В.И. Некоторые проблемы исследования естественной конвекции жидкостей и газов. Доклад, представленный на Всесоюзное совещание по современным проблемам тепловой гравитационной конвекции. Минск, октябрь, 1971.
245. Полежаев В.И. Численное исследование естественной конвекции жидкостей и газов. Сб. "Некоторые применения метода сеток в газовой динамике", вып IV, изд-во МГУ, с. 86-180, 1971.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

u, v - проекции вектора скорости на оси координат,

x, y - проекции вектора внешней силы на оси координат,

ρ - плотность,

p - давление,

T - температура,

t - время,

q - поток тепла,

k - коэффициент теплопроводности (или коэффициент газопроницаемости),

ν - коэффициент кинематической вязкости,

C_p, C_v - удельные теплоемкости соответственно при постоянном
давлении и объеме,

c - скорость звука,

g - ускорение, создаваемое внешней массовой силой,

g_0 - ускорение силы тяжести Земли,

σ - коэффициент поверхностного натяжения,

H - высота,

R - радиус сосуда,

β - коэффициент температурного расширения,

a - коэффициент температуропроводности,

τ - шаг разностной сетки по времени,

h, l - шаги сетки по пространственной координате,

λ^* - коэффициент теплопроводности пористой среды

БЕЗРАЗМЕРНЫЕ КОМПЛЕКСЫ И КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

$$F_0 = \frac{at}{R^2} \quad - \text{число Фурье,}$$

$$Gr_L = \frac{gL^3}{\nu^2} \frac{T_2 - T_1}{T_1} \quad - \text{число Грасгофа,}$$

$$Gr_L^* = \frac{gL^4}{\nu^2} \frac{q}{k} \quad - \text{модифицированное число Грасгофа,}$$

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k} \quad - \text{число Прандтля,}$$

$$Ra = Gr \cdot Pr \quad - \text{число Релея,}$$

$$Ra^* = Gr^* \cdot Pr \quad - \text{модифицированное число Релея,}$$

$$C_F = \frac{gL}{c^2} \quad - \text{число гидростатической сжимаемости,}$$

$$\chi \quad - \text{отношение теплоемкостей,}$$

$$K = \frac{(\chi - 1)C_F}{T_2/T_1 - 1} \quad - \text{число Шварцшильда,}$$

$$Mn^* = \frac{\sigma_0 \beta_\sigma R^2}{\rho \nu a k} q \quad - \text{число Марангони,}$$

$$C_R = \frac{cL}{\nu} \quad - \text{звуковое число Рейнольдса,}$$

$$Re = \frac{\nu L}{\nu} \quad - \text{число Рейнольдса,}$$

$$\bar{Nu} = \frac{qL}{k\Delta T} \quad - \text{число Нуссельта,}$$

$$\theta = \frac{T - T^0}{qR} k \quad - \text{безразмерная температура,}$$

$$Bo = \frac{\rho_0 g R^2}{\sigma_0} \quad - \text{число Бонда,}$$

$Ra_* = \frac{g\beta L k \rho^2 C_p}{\mu \lambda^*} \Delta T$ - число Релея для пористой среды,

$Da = \frac{k}{L^2}$ - число Дарси

ИНДЕКСЫ

w - значения на твердой стенке,

s - значения на свободной поверхности жидкости,

m - значения на оси симметрии или на центральной оси,

b - значения на дне сосуда

ВЕРХНИЕ ИНДЕКСЫ

o - начальные значения,

— - безразмерные величины или средние величины

* - модифицированные значения