

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А. Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ШИМАТКОВ Антон Михайлович

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
И ОЦЕНИВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ
В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Д и с с е р т а ц и я
на соискание учёной степени доктора
физико-математических наук
(специальность 01.02.01 — теоретическая механика)

Москва — 2012

Содержание

Введение	4
Глава 1. Использование детерминированных моделей для оптимизации систем	
§1.1. Оптимальное по быстродействию достижение заданной точки с нулевой конечной скоростью	19
§1.2. Оптимальное по быстродействию достижение сферы с нулевой конечной скоростью	33
§1.3. Влияние вязкой среды	52
§1.4. Уклонение от неподвижной сферы с помощью ограниченной силы	66
§1.5. Инерционность при реализации управления	84
Глава 2. Оптимальный по быстродействию манёвр “петля” без потери скорости	
§2.1. Постановка задачи	98
§2.2. Оптимальное управление в трёхмерном случае	106
§2.3. Учёт ограничения на знак кривизны траектории ...	111
Глава 3. Развитие и применение метода эллипсоидов	
§3.1. Общие положения	118
§3.2. Новый способ аппроксимации оценки состояния линейной системы на основе метода эллипсоидов	124

§3.3. Оптимальный выбор ограничений по управлению . .	133
§3.4. Оценивание фазового состояния динамической системы при неточно заданных границах возмущений	139
§3.5. Управление матрицей системы	146
§3.6. Неточная реализация управления	152
Глава 4. Сопоставление стохастического и эллипсоидального оценивания неопределённости в динамической системе с возмущениями, ограниченными по величине	
§4.1. Обсуждение проблемы	163
§4.2. Системы, близкие к стохастическим	167
§4.3. Построение возмущений, одинаково действующих на систему	173
§4.4. Сравнение воздействия винеровского и ограниченного процессов	176
§4.5. Построение аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамической системы	182
Заключение	191
Литература	193
Приложение	220

Введение

Как известно, к задачам оптимального быстродействия для материальной точки применимы методы оптимального управления движением в виде принципа максимума Л. С. Понтрягина [122], динамического программирования [122], [26], l -проблемы моментов [74], а также прямые вариационные и численные методы [146], [28]. Однако до настоящего времени решённых задач сравнительно мало (см., например, [108], [67], [25], [97], [18], [208], [81], [43], [68], [98], [209], [44], [19], [63], [210], [136], [20], [80], [21], [135], [107], [64], [137]). Основная причина такого состояния дел в том, что после применения принципа максимума часто приходится решать нелинейную краевую задачу вдвое большей размерности, чем исходная. Поэтому представляют интерес любые модели, для которых может быть построен синтез, если они отражают реальность лучше, чем те, для которых он уже построен, без введения дополнительных переменных или используют минимальное их количество (см., например, [153], [73], [94], [60]).

Ещё в 1964 году А. М. Лётов справедливо указывал [90], что “инженеру мало одних утверждений о существовании или возможности получения частных решений в численном виде с помощью ЭЦВМ”. Через десять лет [14] отмечалось, что “работ, посвященных решению детерминированной задачи синтеза оптимальной замкнутой системы терминального управления, в отечественной и зарубежной литературе опубликовано значительно меньше, чем работ, в которых управление ищется в виде программы $u(t)$. Лишь в некоторых из них решение доведено до конечной формы или указана эффективно реализуемая вычислительная процедура решения”. Аналогичное утверждение можно найти и в [22]. Двадцать лет спустя [41] положение оставалось прежним: “в настоящее время трудно указать хотя бы одну проблему качественной теории, которая не была бы уже достаточно полно решена для рассматриваемой

задачи. Вместе с тем не легче указать и хотя бы один эффективный алгоритм численного решения задачи, позволяющий быстро и устойчиво получать достаточно хорошие управления, на которых ограничения выполняются с любой заданной точностью”. В начале 90-х годов было замечено [237], что “most real-world problems are becoming too complex to allow analytical solution¹”. В начале XXI века оказалось [179], что “When faced with an optimal control problem, it is tempting to simply "paste" together packages for optimization and numerical integration²”, т. е. решение проблемы оптимизации кажется естественным начинать с её численного представления. И в последнее время продвижение вперёд в данной области в основном было по-прежнему связано с прогрессом в сфере компьютерной техники. В итоге современные учебники [226] все примеры построения синтеза в аналитическом виде заимствуют из одного и того же классического набора (см., скажем, [122]).

Однако для приложений в связи с необходимостью построения опорных управлений и оценок большой интерес представляют полные точные решения задач управления движением при упрощающих предположениях относительно структуры объекта, вида и формы наложенных на него ограничений.

В особенности это относится к случаям, когда на систему влияют различные неопределённые возмущения: воздействие противника и другие внешние факторы, неконтролируемые вариации параметров, погрешности в измерении начальных условий. Иногда можно сделать полезные выводы, используя строго детерминированные построения, без расширения фазового пространства задачи для включения дополнительных переменных, описывающих такие возмущения. Например, обычно задачи уклонения от преследования рассматривают в рамках

¹большинство практических задач становятся слишком сложными для аналитического решения

²При встрече с задачей оптимального управления заманчиво просто “склеить” вместе программы для оптимизации и численного интегрирования

теории дифференциальных игр: [124], [121], [123], [99], [77], [159], [125]. Однако поиск управления, гарантирующего уклонение от неподвижного противника в малой окрестности последнего и отыскание достаточных условий, при которых для начальной позиции существует решение задачи уклонения от столкновения с телесным препятствием, фактически сводится [92] к решению задач оптимального управления с фазовыми ограничениями. В общем случае для создания удовлетворительной модели приходится прибегать к более сложным способам [235].

Самым распространённым подходом к исследованию неопределённых величин является вероятностный (стохастический) метод. В нём каждому неопределённому вектору сопоставляется некоторое распределение вероятностей с заданной плотностью. Соответствующим этому подходу математическим аппаратом является теория случайных процессов. Отметим, что вероятностный подход требует знания статистических характеристик исходных неопределённых факторов, что далеко не всегда доступно на практике. Вместе с тем при недостаточности априорных сведений о вероятностных характеристиках ошибок исходных данных возможно возникновение таких явлений, как ухудшение точности при увеличении количества оцениваемых параметров, а увеличение числа измерений больше некоторого количества не только становится бесполезным, но и затрудняет исследование [173].

Гарантированный (минимаксный) подход оперирует с множествами, в которых лежат неопределённые векторы. При этом предполагается, что неизвестные помехи локализованы в известных множествах, а в остальном произвольны. Наиболее адекватным математическим аппаратом для его описания должна служить теория дифференциальных игр. По существу, именно ей он обязан своим появлением. В работах [74], [75] при формулировке правила экстремального прицеливания для дифференциальных игр изучаются общие фундаментальные свойства множеств достижимости. Это родство объясняет и недостат-

ки гарантированного способа. Он предполагает гипотезу о наиболее неудачной возможной реализации помех и его применение приводит к значительному росту допустимых отклонений переменных, описывающих движение системы. Однако теория дифференциальных игр весьма сложна (см., например, [220]) и минимаксный способ стал развиваться в значительной мере самостоятельно, сохраняя, однако, связь с ней [87].

Гарантированный подход обнаруживает связи с вероятностными методами [76], [86]. Кроме того, гарантированный способ оценивания управляемых систем смыкается с теорией дифференциальных включений [24], [147], в частности понятие инвариантного множества дифференциального включения родственно понятию множества достижимости управляемой системы.

В ряде работ (см., например, [23], [11], [13], [12]), предложены способы, соединяющие в себе элементы как стохастического, так и гарантированного методов. Например, в [23] функции распределения вероятностей ошибок исходных данных считаются неизвестными, а задаются лишь некоторые множества, которым могут принадлежать указанные функции. В дальнейшем отыскивается способ решения рассматриваемых задач, гарантирующий достижение поставленной цели при наихудшем возможном распределении ошибок исходных данных. Такой подход также принято называть гарантирующим или минимаксным, хотя он имеет дело не с геометрическими ограничениями на неопределённые величины, а с геометрическими ограничениями на их функции распределения. Однако результат носит вероятностный характер и, естественно, область применимости этого способа ограничена областью применимости теории вероятностей как таковой.

Таким образом, оба подхода имеют как свои достоинства, так и недостатки. Один из главных недостатков гарантированного способа состоит в том, что операции над неопределёнными величинами в общем случае переходят в операции над множествами сколь угодно сложной

формы. Даже если исходные множества в начальный момент времени имеют геометрическую форму, требующую небольшого числа параметров для обработки и хранения, то в результате аффинных преобразований, сложения и пересечения множеств могут получаться многообразия сложной, и, самое главное, трудно предсказуемой формы. В [49], [50], [151], [152], [138], [45], [78], [139], [95], [197], [96], [79], [218], [144] изучается структура множеств достижимости, а также предельных множеств достижимости, получающихся при стремлении времени к бесконечности, называемых множествами управляемости и связанных с ними проблем. Выяснилось, что в этом случае могут получаться множества весьма необычного вида [46], [200]. Например, в пространстве форм областей достижимости в случае, когда матрица системы и множество возможных управлений имеют периодическую зависимость от времени, существуют аттракторы [101].

Свойства компактности и непрерывной зависимости множеств достижимости от времени исследовались в работах [192], [203], [229].

Изучение множества достижимости управляемой системы тесно связано с исследованием её множества притяжения, представляющего собой совокупность точек фазового пространства, из которых система может быть приведена в начало координат в течение заданного промежутка времени с помощью допустимых управлений. Соответствующим методам посвящено много работ (см., например [58], [198]). В последние годы в этой области стали использовать теорию линейных матричных неравенств [18], [119], [85].

К численным методам, применимым в общем случае при сравнительно небольшой размерности задачи, следует отнести аппроксимацию множеств объединением точек [47], [48], [230], а также, при несколько большей размерности, способы, которые основываются на теории линейных неравенств, которая выделяет в пространстве фазовых координат многогранники [190], [29], [182], [199], причём вершин может быть

много. В частности, для невыпуклых множеств можно использовать невыпуклые многогранники [227] или представлять множества в форме конечного набора выпуклых сечений [100] и аппроксимировать их выпуклыми многогранниками [115], [84]. При увеличении размерности объём вычислений, необходимый для реализации этих методов, быстро растёт.

Проблема несколько упрощается, если множество достижимости выпукло или может быть удовлетворительно аппроксимировано выпуклым [164]. Соответствующие условия были рассмотрены, например, в [24], [111], [112]. Для линейных систем множества достижимости являются выпуклыми даже при невыпуклых ограничениях на неопределённости, в них входящие (см., например, [160]). Тогда можно применять хорошо развитый математический аппарат опорных функций [129], [126]. В частности, на его основе введено понятие информационного множества, установлены его свойства, предложены способы построения и аппроксимации, рассмотрены совместные ограничения на ошибки измерений и начальные данные, включающие как совместное квадратичное ограничение, так и другие возможные ограничения [74], [86].

В [109], [110], [113], [114] получено дифференциальное уравнение в частных производных для опорной функции множества достижимости, введено понятие интегральной воронки управляемой системы.

Оценки показывают, что даже в линейном случае без создания принципиально новых моделирующих устройств ни сейчас, ни в обозримом будущем достаточно полные поточечные описания в пространствах большой размерности для сколько-нибудь широкого класса реальных систем практически невозможны. Очевидность этого обстоятельства вызывает к жизни попытки ввести множества простой (канонической) формы, приближающие настоящие множества достижимости. Под простой понимается такая форма, которая при соблюдении допустимой точности аппроксимации требует приемлемых вычислительных ресур-

сов. При этом все входящие в задачу множества заменяются на множества канонической формы. Возникает задача построения операций над каноническими множествами, результат которых был бы максимально близок в смысле некоторого критерия к результату соответствующих операций над истинными множествами неопределённости. Несмотря на то, что универсальная каноническая форма, по-видимому, не существует, разнообразие форм сравнительно невелико.

Во-первых, это параллелепипеды (см., например, [32], [175], [191], [189], [223], обзор [224]), причём их грани во многих случаях параллельны координатным плоскостям. В этом случае происходит переход к покоординатным оценкам [69] в рамках интервального анализа — давно [225] и хорошо разработанной теории [61], [10]. Дальнейшее развитие в этом направлении ведёт к использованию геометрических сумм отрезков в количестве, превышающем размерность фазового пространства — зонотопам [211]. Можно также употреблять семейства параллелотопов [57], [70], [71], [72].

Во-вторых, это эллипсоиды, использовать которые в качестве канонических множеств было предложено в [232] и [178]. Метод был развит в [233], [86], [160], [185], [193], [213], [214], [105] и многих других работах. Например, его можно применять для систем с импульсным управлением [36], [37], [150], а также для нелинейных систем [149], [148], [194]. Эллипсоиды используют и для аппроксимации множеств притяжения [155], [120], [120].

Обе эти формы можно употреблять совместно. Например, в [52], [51] предложено использовать объединения шаров и параллелепипедов, а также множеств более общего вида.

С точки зрения инженерного применения желательно, чтобы гарантированный способ аппроксимации отвечал следующим требованиям.

1°. Геометрические фигуры, которыми в конечном итоге приближают множества достижимости в рамках некоторого метода, должны

быть понятны специалистам, которые будут им пользоваться.

Реальное применение находит только конкретный результат расчётов, а его можно с удовлетворительной точностью получить многими способами. Уникальной системы уравнений, имманентных техническому устройству, не существует. Его конструктор может оказать большую помощь математикам в составлении адекватной модели этого устройства, если он в состоянии наглядно представить себе те объекты, которыми оперируют теоретики. Другими словами, желательно, чтобы система уравнений с самого начала была ориентирована на определённый метод аппроксимации. Например, весьма полезный пакет программ [215] (см. также [216]) специально приспособлен для аппроксимации множеств достижимости большим количеством эллипсоидов. Однако в абсолютном большинстве тех случаев, когда исследование проходило без непосредственного участия создателей [215], в рамках [215] было использовано приближение либо одним эллипсоидом (см. [53], [181], [183], [196], [201], [231]), либо двумя (см. [202]). Особенно интересна работа [207]. Сначала в ней с помощью [215] искомое множество было построено как объединение большого количества эллипсов, каждый из которых лежит внутри этого множества и касается границы последнего в единственной точке. Затем авторы [207] приложили значительные усилия, чтобы уменьшить количество указанных эллипсов, заменив их другими, касающимися этой границы в двух точках. Вместе с тем, как видно из рисунка 3 в [207], само искомое множество неотлично от эллипса.

2°. Для достижения приемлемой точности аппроксимации должно быть достаточно сравнительно небольших вычислительных ресурсов.

Этому требованию удовлетворяют, в частности, методы, использующие параллелепипеды и эллипсоиды в отличие от поточечных способов. Здесь следует принять во внимание то, что переход от реальных устройств к моделям часто порождает значительную ошибку, по сравнению с которой погрешность аппроксимации при использовании

множеств канонической формы может оказаться несущественной.

3°. Способ должен допускать сравнение с вероятностным оцениванием.

Дело в том, что реальные неопределённости крайне редко носят чисто случайный или чисто игровой характер. Следовательно, приходится выбирать между гарантированным и вероятностным подходами. Для этого гарантированный способ должен быть “близок” к вероятностному, а последний, как правило, опирается на гауссовы распределения неопределённых величин. Понятно, что требованию 3° лучше всего отвечает метод эллипсоидов.

В частности, для практических нужд важную роль играют задачи, требующие обработки неточных измерений фазового вектора динамической системы с неопределённостями. В рамках стохастического подхода широкое распространение получили математические модели, позволяющие на основании знаний о свойствах системы уточнять данные наблюдений. Самыми большими возможностями обладают нелинейные фильтры, предложенные в [217], [142]. Однако объём вычислений, необходимый для их применения, весьма велик (см., например, [141]). Это обстоятельство стало одной из основных причин, по которым чаще всего используют фильтры, разработанные на основе [206].

Теория нелинейной непрерывной гарантированной фильтрации с помощью эллипсоидов была предложена ещё в [232]. Один из её вариантов можно найти, например, в [103], [228] и [165]. Применение этих соотношений требует большого объёма вычислений. Более практичные методы, например, [154], [118], всё равно значительно сложнее [206]. Следовательно, представляет интерес задача построения фильтра, аналогичного [206], в рамках гарантированного подхода к аппроксимации неопределённостей.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и приложения.

В главе 1 решён ряд задач построения оптимального управления в форме программы и синтеза. Результаты исследования могут быть использованы для создания регуляторов, способных лучше учитывать особенности неопределённых внешних воздействий и конструктивные ограничения, существенные для реализации управления.

В §1.1 рассмотрена задача оптимального по быстродействию приведения системы в начало координат с нулевой скоростью посредством ограниченной по модулю силы. Посредством введения автомодельных сопряжённых переменных удалось свести решение двухточечной задачи к отысканию оптимального корня некоторой функции, задаваемой аналитически. Методами математического моделирования получено полное решение задачи управления в форме синтеза. Найдены коэффициенты обратной связи по ортам векторов положения и скорости, построен алгоритм управления и функция Беллмана. Приведён расчёт примеров с конкретными начальными данными.

В §1.2 исследована задача об оптимальном по быстродействию достижении материальной точкой поверхности сферы с нулевой скоростью посредством ограниченной по модулю управляющей силы. Поверхность проницаема и “посадка” на сферу может производиться как снаружи, так и изнутри. Оптимальное управление в форме программы и синтеза, траектории, время быстродействия и функция Беллмана строятся на основе принципа максимума Понтрягина. Введением автомодельных переменных краевая задача сводится к решению алгебраического уравнения четвёртой степени и трансцендентного уравнения, которые находятся численно. Установлено свойство вырождения краевой задачи, когда оптимальная траектория близка к прямолинейной; построено решение задачи синтеза в случае вырождения. Эффективность предлагаемого подхода иллюстрируется конкретными примерами, содержащими расчёты семейств траекторий, и анализом режимов управления.

В §1.3 рассмотрены управляемые движения материальной точки в однородной вязкой среде. Решена задача о приведении за минимальное время этой точки посредством ограниченной по модулю силы на фиксированную сферу как изнутри, так и снаружи. Для произвольного начального положения и любой начальной скорости с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина в явном виде построены оптимальное управление как в форме программы, так и в форме синтеза, время быстрогодействия и функция Беллмана, а также оптимальная фазовая траектория. Проведены аналитическое и численное исследования решения, обнаружены качественные механические свойства оптимальных характеристик движения: немонотонная зависимость времени быстрогодействия от величины начального вектора скорости, разрыв функции Беллмана.

В §1.4 решена задача синтеза управления движением динамического объекта, уклоняющегося от неподвижного сферического препятствия под действием ограниченной силы. В фазовом пространстве построены множество, для точек которого может быть осуществлено уклонение, а также режимы управления для фиксированного и неограниченного интервалов времени. Для конкретных начальных условий определены характеристики оптимального движения, в частности, время и минимальное расстояние. Установлены качественные особенности управляемого движения. Результаты существенны для задачи “мягкой” посадки без пересечения сферы.

В §1.5 исследована линейная система третьего порядка с инерционным управлением, которую требуется перевести из произвольного состояния движения в начало координат с нулевой скоростью. С помощью автомодельных переменных удалось понизить порядок системы и построить в замкнутой форме синтез оптимального управления в задаче быстрогодействия.

В главе 2 рассмотрена задача о наискорейшем переводе центра масс

манёвренного самолёта из одной заданной точки трёхмерного пространства в другую при фиксированных векторах скоростей в этих точках. Во всех приведённых примерах вектор скорости в конце движения равен начальному.

В §2.1 для удобства читателя дан вывод уравнений движения центра масс самолёта, поскольку в дальнейшем они использованы в мало распространённой форме.

В §2.2 аналитически исследован трёхмерный случай и приведены примеры расчёта траекторий, целиком лежащих в вертикальной плоскости.

В §2.3 рассмотрена задача с учётом ограничения на знак кривизны траектории и вычислены оптимальные управления как при фиксированной, так и при свободной конечной точке.

Глава 3 посвящена дальнейшему развитию метода эллипсоидов на основе [160], [185] с целью получения уравнений в форме, удобной для приложений, решению задач построения аппроксимаций в случае неопределённости ограничений на управление и оптимального выбора этих границ, а также проблеме управления ансамблями траекторий с использованием глобально оптимальных эллипсоидов.

В §3.1 приведены использованные в диссертации результаты теории эллипсоидального оценивания.

В §3.2 исследована задача, возникающая при оценивании областей достижимости линейных динамических систем эллипсоидами на малом промежутке времени в случае, когда начальное положение системы в фазовом пространстве известно точно хотя бы по некоторым координатам. Построена внешняя гарантированная эллипсоидальная оценка, применимая при любом вырождении как начального эллипсоида, так и эллипсоида, содержащего вектор внешнего возмущения. Показано, что она обеспечивает высокую точность аппроксимации на малых интервалах времени. Приведён пример использования полученных результатов.

В §3.3 рассмотрена проблема оптимального выбора границ множества возможных значений управления в процессе движения с целью получения требуемой формы множества достижимости линейной динамической системы на заданном интервале времени. Решена задача выбора параметров эллипсоида, содержащего вектор управления. При этом функционал, зависящий от матрицы эллипсоида, содержащего фазовый вектор, достигает своего максимума. Приведён пример.

В §3.4 решена задача построения гарантированной внешней аппроксимации множества достижимости линейной динамической системы в случае, когда границы допустимых значений неопределённых факторов известны неточно. Алгоритм применён к двум простым механическим системам: при неточно заданных границах начальных условий и при неточно заданных границах внешних возмущений.

В §3.5 изучена задача управления глобально оптимальными эллипсоидами для линейной системы в случае, когда матрица системы зависит от управления посредством малого параметра. Найдено приближённое решение. Для него на примере показано, что зависимость функционала от оценки всей совокупности возможных траекторий может оказать существенное влияние на выбор оптимального управления.

В §3.6 рассмотрен частный случай задачи управления глобально оптимальными эллипсоидами для линейной системы. Предполагается, что ограниченная помеха представляет собой коэффициент при искомом управлении, что с практической точки зрения можно трактовать как реализацию управления при наличии ошибки исполняющего устройства. Получены некоторые свойства искомого управления. Поставленная задача подробно решена для конкретного примера.

Глава 4 посвящена вопросам сравнения стохастического и детерминированного подходов к оцениванию фазового состояния динамических систем. Сформулированы положения, на базе которых могут быть разработаны соответствующие процедуры. На различных примерах, в том

числе на опыте построения фильтра, аналогичного фильтру Калмана, показано, что такие исследования могут привести к полезным для практики выводам.

В §4.1 выяснены основания, на которых может быть построена математически корректная процедура сравнения гарантированного и вероятностного методов.

В §4.2 рассмотрена проблема составления математической модели линейной динамической системы с аддитивным неопределённым воздействием по её инженерному описанию, причём это описание содержит такие свойства, что применение к исследуемой системе вероятностного подхода является традиционным. Указаны условия, при которых использование стохастической модели может привести к значительному завышению оценки степени неопределённости фазового вектора по сравнению с ситуацией, когда применяется гарантированный подход. Даны простые практические рекомендации по улучшению оценки, основанные на методе эллипсоидов.

В §4.3 с позиций, развитых в §4.1, изложены важные для настоящей работы результаты, полученные в [65].

В §4.4 разработан метод сопоставления результатов действия на линейную динамическую систему винеровского процесса, имеющего случайные неограниченные приращения и процесса с произвольными, в том числе и детерминированными, но ограниченными приращениями.

В §4.5 разработан фильтр, аналогичный известному фильтру Калмана, для получения внешней гарантированной эллипсоидальной оценки состояния динамической системы по данным измерений. Приведён численный пример использования полученных соотношений.

Закключение содержит основные результаты диссертации.

В приложении собраны рисунки и таблицы ко всем главам диссертации, а конце приведён список соглашений и обозначений, использованных в тексте диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [4] – [9], [106], [162], [163], [166] – [172], [187], [188]. Основные результаты, выносимые на защиту и опубликованные в работах [4] – [9], [56], [106], [162], [163], [187] и [188], получены автором диссертации.

Количество страниц в диссертации — 280, в том числе иллюстраций — 60.

Автор выражает глубокую признательность академику РАН, профессору Ф. Л. Черноусько, а также д.ф.-м.н. А. И. Овсеевичу и д.ф.-м.н. Л. Д. Акуленко за постоянное внимание и поддержку.

Глава 1.

Использование детерминированных моделей для оптимизации систем

§1.1. Оптимальное по быстродействию достижение заданной точки с нулевой конечной скоростью

1. Постановка задачи. Решение проблем математической теории оптимального управления даже в значительно упрощённой постановке имеет важное практическое значение. Например, в [140], где теория синтеза систем автоматического регулирования рассмотрена с точки зрения инженеров, проектирующих эти системы, указано на целесообразность применения в ряде реальных устройств вместо линейного регулятора системы управления с предсказанием. Последняя должна иметь управляющее звено на основе синтеза оптимального управления в известной задаче о приведении материальной точки, движущейся по прямой под действием ограниченной по модулю силы, в начало системы координат в фазовом пространстве за минимальное время (см., скажем, [122]). Это предложение основано на следующих аргументах (далее курсив [140]).

“Если ограничиться работой только в линейном диапазоне, то понадобится гораздо больше времени для уменьшения ошибки до нуля. Это означает, что система имеет звенья, мощность которых при нормальной работе никогда полностью не используется. С точки зрения экономии веса и стоимости система должна работать в режиме насыщения до тех пор, пока имеется ошибка, которую необходимо скорректировать. Линейные системы регулирования дороги в изготовлении, обладают большим весом и обычно могут быть заменены нелинейными. Их нежелательно применять также из-за больших ошибок, присущих им, так как

устойчивость и точность работы в таких системах неразрывно связаны между собой. Как правило, увеличение точности или быстродействия посредством увеличения коэффициента усиления почти всегда приводит к уменьшению устойчивости. Применение нелинейного вычислительного устройства дает возможность беспредельно увеличивать коэффициент усиления, так как счётно-решающее устройство всегда подсчитывает соответствующее направление корректирующего воздействия и момент включения торможения. Таким образом, *ошибка и все её производные* уменьшаются до нуля в *минимально короткое время*. При заданном типе преобразующего устройства и динамической нагрузки этот тип регулирования позволяет получить максимальное быстродействие без перерегулирования. Коэффициент усиления контура может быть очень большим, и быстродействие от него не зависит, разве что при очень малых сигналах.”

Предположим, что на динамическую систему действует возмущающая сила, которая иногда резко и на очень короткое время возрастает, но, как правило, сравнительно невелика. Требуется удерживать объект поблизости от заданной точки в фазовом пространстве. С этой целью можно построить управляющее устройство, включающее в себя две подсистемы. Первая представляет собой обычный линейный регулятор и предназначена для стабилизации при небольшой величине возмущения, что значительно облегчает конструирование и эксплуатацию [156]. Сила, прикладываемая к объекту в результате её работы, сравнительно мала. Как сказано в [140], “Для компенсации больших отклонений от линейного закона требуется большой коэффициент усиления в цепи обратной связи. Однако большинство сложных динамических систем с высоким коэффициентом усиления являются условно-устойчивыми, и возможный диапазон изменений коэффициента усиления нелинейного звена, допустимый по условиям устойчивости, весьма мал.” Вторая предназначена для компенсации больших импульсных воздействий и

соответствующая сила велика. Следовательно, влиянием первой подсистемы на объект во время работы второй можно пренебречь, как и действием возмущения в отсутствии импульсов, поскольку оба эти фактора одинаковы по порядку величины. С другой стороны, на вторую подсистему должно быть наложено дополнительное ограничение. Именно, требуется не просто привести объект в заданную точку, но и обеспечить в этой точке малую (а лучше нулевую) скорость. Иначе для выполнения поставленной цели возможностей первой подсистемы может не хватить. Получаем задачу оптимального быстрогодействия для детерминированной модели с требованием получить нулевую скорость в заданной точке в конечный момент времени (“мягкая встреча”). Ближайшим аналогом этой проблемы служит классическая задача для одномерной системы [122]; также отметим случай “жёсткой” встречи, когда конечная скорость не задана (см. [122], [75], [2]).

Пусть рассматриваемая управляемая система, терминальные условия, ограничения и функционал описываются соотношениями вида

$$\begin{aligned} \dot{x} = v, \quad \dot{v} = u; \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0 \\ x(t_f) = 0, \quad v(t_f) = 0; \quad t_f \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1 \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Здесь x, v, u — векторы произвольной размерности n , $n \geq 2$; x^0 и v^0 — начальные данные, получаемые в результате измерений. К задаче вида (1.1.1) элементарными заменами приводится несколько более общий случай произвольных постоянных значений массы m , ограничения управляющей силы $|u| \leq u_0$. Случай произвольного конечного значения переменной x^f и начального значения времени t_0 рассматривается аналогично.

Заметим также, что система (1.1.1) обладает центральной (сферической) симметрией и общий случай размерности $n \geq 2$ геометрического пространства эквивалентен плоскости ($n = 2$, см. далее). При $x^0 \neq 0$, $v^0 \neq 0$, $|(x^0, v^0)| < |x^0||v^0|$ плоскость задаётся этими векторами. В слу-

чае равенства, т. е. $x^0 = 0$ или $v^0 = 0$, или $|(x^0, v^0)| = |x^0||v^0|$ задача вырождается и становится одномерной. Далее рассматривается ситуация общего положения.

Применим сперва к задаче (1.1.1) необходимые условия оптимальности метода динамического программирования [122], [26], [28]. Для функции Беллмана $T = T(x, v)$ получим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$(T'_x, v) + \min_u (T'_v, u) = -1, \quad |u| \leq 1 \quad (1.1.2)$$

Здесь штрихами обозначены соответствующие производные, минимум скалярного произведения берётся по вектору u , принимающему значения из единичного n -мерного шара. Кроме того, функция T должна быть строго положительной при $x, v \neq 0$ и обращаться в нуль при $x = v = 0$. Выполняя операцию минимизации в (1.1.2), приходим к задаче Коши для нелинейного уравнения в частных производных (уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана [122], [26], [28], [1]) вида

$$\begin{aligned} (p, v) + |q| &= 1, \quad p = -T'_x, \quad q = -T'_v; \quad u^* = q|q|^{-1} \\ T = T(x, v) &> 0, \quad |x| + |v| > 0; \quad T(0, 0) = 0 \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Решение задачи (1.1.3) ищется в классе кусочно гладких функций. Отметим, что естественное условие $T > 0$ необходимо, поскольку при его игнорировании можно получить абсурдный результат. Действительно, линейная по v функция $T = (e, v)$, где e — постоянный единичный n -вектор ($|e| = 1$), удовлетворяет всем соотношениям (1.1.3) (кроме $T > 0$), но заведомо не является функцией Беллмана задачи.

Применение динамического программирования к искомому решению задачи синтеза сопряжено с существенными трудностями, связанными с негладкостью функции Беллмана T [122], [26]. Далее будем применять условия оптимальности в форме принципа максимума [122].

Введём переменные p и q , сопряжённые фазовым переменным x и v

соответственно. Решение задачи оптимального быстрогодействия приводится к построению решения двухточечной краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{x} = v, \quad \dot{v} = u^*, \quad u^* = q|q|^{-1}; \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0, \quad x(t_f) = 0 \\ v(t_f) = 0, \quad p(t) = p^0 = \text{const}, \quad q(t) = -p^0 t + q^0; \quad q^0 = \text{const} \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

причём p, q допускают нормировку. Система (1.1.4) полностью интегрируется в элементарных функциях. Требуется определить допустимые значения неизвестных p^0, q^0 и $t_f > 0$, удовлетворяющие конечным условиям для x, v .

2. Построение фазовой траектории. Выпишем явное аналитическое выражение для фазовой траектории $x(t), v(t)$. Используя структуру оптимального управления $u^*(t)$ и подставляя его в уравнения движения согласно (1.1.4), получим после интегрирования представление для вектора скорости $v(t)$ в элементарных функциях вида

$$\begin{aligned} v(t) = v^0 + \int_0^t \frac{Q(\tau)}{R(\tau)} d\tau = v^0 + \frac{1}{\rho^2} \left(-\xi R(\tau) + (\rho\eta - \sigma\xi)V(\tau) \right)_0^t \\ Q(t) = -\xi t + \eta, \quad R(t) = |Q(t)| = (\rho^2 t^2 - 2\sigma\rho t + 1)^{1/2} \\ V(t) = \text{arsh } \varkappa, \quad \varkappa = (\rho t - \sigma)(1 - \sigma^2)^{-1/2}, \quad \rho = |\xi|, \quad \eta = q^0|q^0|^{-1} \\ \xi = p^0|q^0|^{-1}, \quad |\eta| = 1, \quad \text{arsh } \varkappa = \ln \left(\varkappa + (1 + \varkappa^2)^{1/2} \right) \\ (\xi, \eta) = \rho\sigma, \quad -1 \leq \sigma \leq 1; \quad u^* = Q(t)/R(t) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

где σ — косинус угла между векторами ξ и η .

Функции Q, R в (1.1.5) определены для всех t, ξ, η , причём V нечётна по \varkappa , поскольку $-\varkappa + (1 + \varkappa^2)^{1/2} = 1/(\varkappa + (1 + \varkappa^2)^{1/2})$. Отметим, что в (1.1.5) упомянутая ранее нормировка проведена на величину $|q^0|$. В результате функция $v(t)$ зависит явным образом от времени t , известного n -вектора параметров v^0 , а также от $2n - 1$ неизвестных ξ, η , подлежащих определению из граничных (при $t = t_f$, где t_f также неизвестно) условий (1.1.1). Параметры σ, ρ определяются через n -векторы ξ, η , причём $|\eta| = 1$.

На основе найденного в (1.1.5) представления $v(t)$ с использованием формулы повторного интегрирования получим аналогичное элементарное представление для вектора положения $x(t)$:

$$x(t) = x^0 + v^0 t + \int_0^t \frac{(t - \tau)Q(\tau)}{R(\tau)} d\tau = x^0 + tv(t) + \frac{\xi}{2\rho^3} \left((\rho\tau + 3\sigma)R(\tau) + (3\sigma^2 - 1)V(\tau) \right)_0^t - \frac{\eta}{\rho^2} \left(\sigma V(\tau) + R(\tau) \right)_0^t \quad (1.1.6)$$

Здесь функции $v(t)$, $R(t)$, $V(t)$ определены согласно (1.1.5). В (1.1.5), (1.1.6) и далее верхнее $\tau = t$ и нижнее $\tau = 0$ значения τ пока не подставлены с целью сокращения записи. Таким образом, получены явные представления искомых фазовых переменных $x(t)$, $v(t)$ с помощью элементарных алгебраических и логарифмических функций. Для удобства дальнейших построений они могут быть представлены в виде “линейных выражений” относительно векторов ξ , η следующим образом

$$\begin{aligned} v(t) &= v^0 + V_\xi \xi + V_\eta \eta, \quad V_\xi = -\rho^{-2}(\sigma V + R) \Big|_0^t, \quad V_\eta = \rho^{-1} V \Big|_0^t \\ x(t) &= x^0 + v^0 t + X_\xi \xi + X_\eta \eta, \quad X_\eta = \rho^{-2} \left(-R + (\rho\tau - \sigma)V \right)_0^t \\ X_\xi &= \frac{1}{2\rho^3} \left((-\rho\tau + 3\sigma)R + (-2\rho\sigma\tau + 3\sigma^2 - 1)V \right)_0^t \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Здесь $V_{\xi,\eta}(t)$, $X_{\xi,\eta}(t)$ — известные скалярные функции t , зависящие также от неизвестных параметров ρ , σ ; они обращаются в нуль при $t = 0$.

Во избежание недоразумений следует заметить, что зависимость x , v от ξ , η на самом деле будет существенно нелинейной, поскольку коэффициенты $X_{\xi,\eta}$, $V_{\xi,\eta}$ содержат алгебраические и трансцендентные (логарифмические) функции от ρ , σ . Эти функции достаточно гладкие для рассматриваемых значений аргумента $t \geq 0$ и параметров $\rho \geq 0$, $|\sigma| < 1$. При $|\sigma| = 1$ требуется отдельное рассмотрение, которое будет проведено ниже.

3. Редукция системы граничных условий. Основную трудность в решении задачи оптимального быстрогодействия (1.1.1) представляет эффективное построение решения краевой задачи (1.1.4), т. е. определение неизвестных ξ , η и минимального значения t_f для произвольных значений x^0 , v^0 . Имеем систему $2n$ линейных алгебраических уравнений относительно векторов ξ , η , которая получается из (1.1.7) согласно (1.1.4): $x(t_f) = 0$, $v(t_f) = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} X_\xi(t_f)\xi + X_\eta(t_f)\eta &= -x^0 - v^0 t_f \\ V_\xi(t_f)\xi + V_\eta(t_f)\eta &= -v^0 \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Система (1.1.8) однозначно разрешима для произвольных x^0 , v^0 , t_f , ρ , σ , поскольку на основе неравенства Буняковского-Коши устанавливается, что её определитель отличен от нуля: $X_\xi(t_f)V_\eta(t_f) - V_\xi(t_f)X_\eta(t_f) \neq 0$.

Система (1.1.8) имеет блочно-диагональную матрицу; из неё элементарно (как для скалярных ξ , η) находятся искомые ξ , η в виде линейных функций от x^0 , v^0 :

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^*(x^0, v^0, t_f, \rho, \sigma) \equiv \xi_x^* x^0 + \xi_v^* v^0 \\ \eta &= \eta^*(x^0, v^0, t_f, \rho, \sigma) \equiv \eta_x^* x^0 + \eta_v^* v^0 \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Здесь $\xi_{x,v}^*(t_f, \rho, \sigma)$, $\eta_{x,v}^*(t_f, \rho, \sigma)$ — скалярные функции неизвестных t_f , ρ , σ . В результате применения элементарных операций скалярного произведения получим систему трёх трансцендентных уравнений относительно неизвестных t_f , ρ , σ :

$$\begin{aligned} \eta^{*2} &= \eta_x^{*2} x^{02} + 2\eta_x^* \eta_v^* |x^0||v^0|c + \xi_v^{*2} v^{02} = 1 \\ \xi^{*2} &= \xi_x^{*2} x^{02} + 2\xi_x^* \xi_v^* |x^0||v^0|c + \xi_v^{*2} v^{02} = \rho^2 \\ (\xi^*, \eta^*) &= \xi_x^* \eta_x^* x^{02} + ((\xi_x^*, \eta_v^*) + (\xi_v^*, \eta_x^*)) |x^0||v^0|c + \xi_v^* \eta_v^* v^{02} = \rho\sigma \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Здесь c — известный скалярный параметр, определяемый аналогично σ (см. (1.1.5)) посредством операции скалярного произведения векторов x^0 , v^0 : $(x^0, v^0) = |x^0||v^0|c$. Неизвестные t_f , ρ , σ являются аргументами

элементарных трансцендентных функций $\xi_{x,v}^*, \eta_{x,v}^*$, см. (1.1.5)–(1.1.7) и (1.1.8)–(1.1.9).

Интересно отметить, что система (1.1.10) определяется тремя параметрами $|x^0|, |v^0|, c$, характеризующими векторы x^0, v^0 в плоскости, задаваемой этими векторами ($|c| < 1$). Простой вырожденный случай $c = \pm 1$ изучен в [122], [26]. Он отвечает одномерной системе, т. е. движению объекта (материальной точки) по прямой, соединяющей геометрическую точку x^0 и начало координат.

Заметим, что система (1.1.10) линейна по известным измеренным параметрам $x^{02}, v^{02}, (x^0, v^0)$ и может быть разрешена относительно них. Эти параметры определяются как функции неизвестных величин $t_f > 0, \rho > 0$ и $-1 \leq \sigma \leq 1$.

Окончательное решение системы (1.1.10) можно получить численными методами. Однако “прямой” подход представляется трудно реализуемым, что, в первую очередь, связано с высокой размерностью системы (1.1.10): она равна трём. Введение автомодельных переменных и уменьшение размерности исследуемой системы может существенно уменьшить вычислительные затраты и получить искомое решение в наглядной форме [2], [1].

Анализ выражений (1.1.5), (1.1.6) показывает, что предпочтительнее ввести вектор $\zeta = t_f \xi$ вместо ξ ; его модуль $|\zeta| = \mu = t_f \rho$. Тогда векторные уравнения относительно ζ, η , аналогичные уравнениям (1.1.8) для ξ, η , преобразуются к виду

$$\begin{aligned} x^0 &= t_f^2(a_\zeta \zeta + a_\eta \eta), \quad v^0 = t_f(b_\zeta \zeta + b_\eta \eta) \\ a_\zeta &= a_\zeta(\mu, \sigma) = -(1/2\mu^3) \left((\mu + 3\sigma)a + \mu + (3\sigma^2 - 1)b \right) \\ a_\eta &= a_\eta(\mu, \sigma) = \mu^{-2}(a + \sigma b), \quad b_\zeta = b_\zeta(\mu, \sigma) = \mu^{-2}(a + \sigma b) \\ b_\eta &= b_\eta(\mu, \sigma) = b/\mu, \quad a = a(\mu, \sigma) \equiv R|_0^{t_f} = (\mu^2 - 2\mu\sigma + 1)^{1/2} - 1 \\ b &= b(\mu, \sigma) \equiv V|_0^{t_f} = \operatorname{arsh}(\mu - \sigma) (1 - \sigma^2)^{-1/2} + \operatorname{arsh} \sigma (1 - \sigma^2)^{-1/2} \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Отметим, что $a = b = 0$ при $\mu = 0$, а коэффициенты $a_{\zeta, \eta}$, $b_{\zeta, \eta}$ имеют конечные пределы при $\mu \rightarrow 0$, если $\sigma \neq \pm 1$. Это свойство следует непосредственно из выражений (1.1.11), либо может быть установлено из (1.1.5), (1.1.6) при $t = t_f$ посредством замены переменной интегрирования $\tau = t_f \theta$ и тогда верхний предел для θ будет равен $\theta_f = 1$.

Перейдём к анализу векторных уравнений (1.1.11), связывающих известные величины x^0 , v^0 и неизвестные ζ , η , t_f . В отличие от вышеизложенного (см. (1.1.9)), не будем их разрешать относительно ζ , η . Аналогично (1.1.10) посредством операций скалярного произведения получим систему трёх уравнений для определения неизвестных параметров t_f , μ , σ :

$$\begin{aligned} x^{02} &= t_f^4 \left(a_\zeta^2 \mu^2 + 2a_\zeta a_\eta \mu \sigma + a_\eta^2 \right) \equiv t_f^4 f_x^2(\mu, \sigma) \geq 0 \\ v^{02} &= t_f^2 \left(b_\zeta^2 \mu^2 + 2b_\zeta b_\eta \mu \sigma + b_\eta^2 \right) \equiv t_f^2 f_v^2(\mu, \sigma) \geq 0 \\ |x^0| |v^0| c &= t_f^3 \left(a_\zeta b_\zeta \mu^2 + (a_\zeta b_\eta + a_\eta b_\zeta) \mu \sigma + a_\eta b_\eta \right) \equiv t_f^3 f_{xv}(\mu, \sigma) \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Существенное отличие системы (1.1.12) от (1.1.11) состоит в том, что введение параметра $\mu = \rho t_f$ позволяет отделить неизвестную t_f и получить определяющую систему двух уравнений относительно неизвестных μ , σ . Эта система строится неоднозначно в зависимости от значений $l = |x^0|$, $h = |v^0|$.

4. Решение краевой задачи. Если величина скорости h достаточно велика, то предпочтительнее использовать уравнения

$$\begin{aligned} l^2 h^{-4} &\equiv \phi_v^2 = f_x^2(\mu, \sigma) f_v^{-4}(\mu, \sigma) \\ cl h^{-2} &\equiv \psi_v = f_{xv}(\mu, \sigma) |f_v|^{-3}(\mu, \sigma) \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

для определения неизвестных μ , σ . Требуется найти допустимые корни μ_i , σ_i , доставляющие минимум функционалу t_f , причём $\mu_i \geq 0$, $|\sigma_i| \leq 1$. Согласно (1.1.12) получим

$$\begin{aligned} t_f^* &= \min_i t_{fi}, \quad t_{fi} = t_f(h, \mu_i, \sigma_i), \quad t_f = h |f_v(\mu, \sigma)|^{-1} \\ \mu_i &= \mu_i(\phi_v^2, \psi_v^2), \quad \sigma_i = \sigma_i(\phi_v^2, \psi_v^2) \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Здесь ϕ_v^2, ψ_v^2 — известные измеряемые величины, определяемые на основе l, h, c из (1.1.13). Из (1.1.14) следует, что оптимальной будет та пара μ_i, σ_i , которая доставляет максимум функции $|f_v(\mu_i, \sigma_i)|$.

Если же расстояние l достаточно велико, то для определения μ, σ следует использовать соотношения, обратные к (1.1.13)

$$\begin{aligned} h^4 l^{-2} &\equiv \phi_x^2 = f_v^4(\mu, \sigma) f_x^{-2}(\mu, \sigma), \quad chl^{-1/2} \equiv \psi_x = f_{xv}(\mu, \sigma) |f_x(\mu, \sigma)|^{-3/2} \\ t_{fi} &= l^{1/2} |f_x(\mu_i, \sigma_i)|^{-1/2} \rightarrow \min_i, \quad \mu_i = \mu_i(\phi_x, \psi_x), \quad \sigma = \sigma_i(\phi_x, \psi_x) \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Из (1.1.15) находим, что оптимальной будет пара μ_i, σ_i , доставляющая максимум $|f_x|$. Отметим, что ϕ_v^2 и ϕ_x^2 функционально связаны: $\phi_v^2 = \phi_x^{-2}$. В прикладном аспекте соотношения (1.1.13)–(1.1.15) неудобны, поскольку величины $\phi_{v,x}, \psi_{v,x}$ могут быть довольно большими (“неограниченными” при $l/h^2 \rightarrow \infty$ или $h^2/l \rightarrow \infty$), что потребует значительных вычислительных затрат. Вычислительные трудности можно уменьшить введением нормированных величин $\Phi_{x,v}$:

$$\begin{aligned} \Phi_x^2 &\equiv \frac{l^2}{l^2 + h^4} = f_x^2(\mu, \sigma) F^{-2}(\mu, \sigma) \equiv L^2(\mu, \sigma) \\ \Phi_v^2 &\equiv \frac{h^4}{l^2 + h^4} = f_v^4(\mu, \sigma) F^{-2}(\mu, \sigma) \equiv H^2(\mu, \sigma) \\ \Psi &\equiv clh(l^2 + h^4)^{-3/4} = f_{xv}(\mu, \sigma) F^{-3/2}(\mu, \sigma) \\ F^2(\mu, \sigma) &\equiv f_x^2(\mu, \sigma) + f_v^4(\mu, \sigma), \quad 0 \leq \Phi_{x,v}^2 \leq 1 \\ t_f &= (l^2 + h^4)^{1/4} |F(\mu, \sigma)|^{-1/2}, \quad t_f^* = \min_i t_f(\mu_i, \sigma_i) \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

Здесь заданными и вычисляемыми величинами являются $\Phi_{x,v}^2, \Psi$. Отметим, что Φ_x^2 и Φ_v^2 функционально связаны: $\Phi_x^2 + \Phi_v^2 = 1$ (как ранее ϕ_x^2, ϕ_v^2). Неизвестные μ и σ определяются парой независимых уравнений для Φ_x^2, Ψ или Φ_v^2, Ψ . Поскольку выражение для Ψ неограничено при $l, h \rightarrow 0$, то более предпочтительно использование уравнения

$$c = f_{xv}(\mu, \sigma) |f_x(\mu, \sigma)|^{-1} |f_v(\mu, \sigma)|^{-1} \equiv C(\mu, \sigma), \quad |c| \leq 1 \quad (1.1.17)$$

В силу интегрального неравенства Буняковского-Коши в (1.1.17) правая часть выражения для c не превосходит по модулю единицы для всех допустимых значений $\mu \geq 0$, $|\sigma| \leq 1$.

Таким образом, далее требуется разрешить какую-либо пару уравнений: $\Phi_x^2 = L^2$, $c = C$ или $\Phi_v^2 = H^2$, $c = C$ относительно μ , σ и выбрать оптимальную пару корней μ^* , σ^* . Из (1.1.16) следует, что эта пара соответствует максимуму функции $|F(\mu, \sigma)|$:

$$\{\mu^*, \sigma^*\} = \arg \max_i |F(\mu_i, \sigma_i)| \quad (1.1.18)$$

После определения оптимальных значений μ^* , σ^* и t_f^* можно переходить к построению управлений и траекторий.

5. Построение оптимального управления. Итак, пусть оптимальные значения μ^* , σ^* , t_f^* определены. Тогда в соответствии с (1.1.5) может быть построено оптимальное управление в форме программы и синтеза. Согласно произведённой выше (см. (1.1.11)) замене $\zeta = t_f \xi$, выражение для программного управления преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} u_p^* &= Q^*(t)/|Q^*(t)|; \quad Q^*(t) = -\zeta^*(t/t_f^*) + \eta^*, \quad |\zeta|^* = \mu^* \\ |Q^*(t)| &= (\mu^{*2}(t/t_f^*)^2 - 2\sigma^*\mu^*(t/t_f^*) + 1)^{1/2}, \quad |\eta^*| = 1 \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Оптимальные значения n -векторов ζ^* , η^* в (1.1.19) определяются уравнениями (1.1.11), решение которых строится аналогично (1.1.9). Это решение находится элементарно, поскольку матрица системы состоит из четырёх $n \times n$ блоков, каждый из которых пропорционален единичной матрице. В результате получаем выражения

$$\begin{aligned} \zeta^* &= \alpha_x x^0 + \alpha_v v^0, \quad \alpha_x = b_\eta^*/(t_f^{*2} \delta^*), \quad \alpha_v = -a_\eta^*/(t_f^* \delta^*) \\ \eta^* &= \beta_x x^0 + \beta_v v^0, \quad \beta_x = -b_\zeta^*/(t_f^{*2} \delta^*), \quad \beta_v = -a_\zeta^*/(t_f^* \delta^*) \\ \delta^* &= a_\zeta^* b_\eta^* - a_\eta^* b_\zeta^*, \quad a_{\zeta, \eta}^* = a_{\zeta, \eta}(\mu^*, \sigma^*), \quad b_{\zeta, \eta}^* = b_{\zeta, \eta}(\mu^*, \sigma^*) \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

функции $a_{\zeta, \eta}$, $b_{\zeta, \eta}$ определяются согласно (1.1.11), где μ^* , σ^* зависят только от двух параметров, например c и L^2 (или H^2).

В полученных выражениях (1.1.20) можно избавиться от величины t_f^* и представить их в виде

$$\begin{aligned}\zeta^* &= (b_\eta^*/\delta^*)F^*\Phi_x n_x^0 - (a_\eta^*/\delta^*)(F^*\Phi_v)^{1/2} n_v^0 \\ \eta^* &= -(b_\zeta^*/\delta^*)F^*\Phi_x n_x^0 + (a_\zeta^*/\delta^*)(F^*\Phi_v)^{1/2} n_v^0 \\ n_x^0 &= x^0/l^0, \quad |n_x^0| = 1, \quad n_v^0 = v^0/h, \quad |n_v^0| = 1\end{aligned}\tag{1.1.21}$$

Подставив выражения ζ^* , η^* вида (1.1.20) или (1.1.21) в (1.1.19), получим искомое оптимальное управление в форме программы, зависящей от t , x^0 , v^0 и трёх параметров движения l , h , c :

$$u_p^* = u_p^*(t, x^0, v^0, l, h, c), \quad l = |x^0|, \quad h = |v^0|, \quad c = (x^0, v^0)l^{-1}h^{-1} \tag{1.1.22}$$

Время быстрогодействия $t_f^* = t_f^*(l, h, c)$ определено согласно (1.1.14)–(1.1.16), (1.1.18), а оптимальные траектории определены выражениями (1.1.7), в которых $\xi = \xi^* = \zeta^*/t_f^*$, $\rho = \rho^* = \mu^*/t_f^*$, $\sigma = \sigma^*$. В результате задача программного оптимального управления при фиксированных x^0 , v^0 полностью решена.

Рассмотрим проблему построения синтеза оптимального быстрогодействия. Предположим, что определены корни μ^* , σ^* и значение t_f^* как функции переменных $l = |x|$, $h = |v|$, $c = (x, v)/(lh)$ из достаточно широкой области значений $l, h \in D \subset \mathbf{R}^2$ и $-1 \leq |c| \leq 1$. Тогда на основе (1.1.19) получаем управление по обратной связи u_s^* и функцию Беллмана T задачи:

$$\begin{aligned}u_s^* &= u_s^*(l, h, c, x, v) = \eta^*(l, h, c, x, v) \\ \eta^* &= -\left(b_\zeta^*/(T^2\delta^*)\right)x + \left(a_\zeta^*/(T\delta^*)\right)v \equiv k_x x + k_v v = \\ &= -(b_\zeta^*/\delta^*)F^*\Phi_x n_x + (a_\zeta^*/\delta^*)(F^*\Phi_v)^{1/2}n_v \equiv K_x n_x + K_v n_v \\ \mu^* &= \mu^*(|x|, |v|, (x, v)|x|^{-1}|v|^{-1}), \quad \sigma^* = \sigma^*(|x|, |v|, (x, v)|x|^{-1}|v|^{-1}) \\ n_x &= x|x|^{-1}, \quad n_v = v|v|^{-1}, \\ T(x, v) &= t_f^*(|x|, |v|, (x, v)|x|^{-1}|v|^{-1}) = (l^2 + h^4)^{1/4}|F^*(\mu, \sigma)|^{-1/2}\end{aligned}\tag{1.1.23}$$

Здесь $k_{x,v}$ — коэффициенты обратных связей по x , v ; выражения $K_x = k_x|x|$, $K_v = k_v|v|$ имеют смысл коэффициентов обратных связей по ортам n_x , n_v соответственно. Отметим, что $K_{x,v}$ зависят от двух аргументов: c и Φ_x^2 , которые находятся на основе измерений и вычислений по элементарным формулам: $c = (x, v)|x|^{-1}|v|^{-1}$, $\Phi_x^2 = x^2(x^2 + v^4)^{-1}$.

Выражения (1.1.23) получаются из (1.1.22) заменами $l = |x|$, $h = |v|$, $c = (x, v)|x|^{-1}|v|^{-1}$, т. е. переходом $x^0 \rightarrow x$, $v^0 \rightarrow v$ и $t \rightarrow t - t_0$, $t_0 \rightarrow t$, т. е. $t \rightarrow 0$. Функция Беллмана T в (1.1.23) имеет смысл времени быстрогодействия из текущей фазовой точки $x(t) = x$, $v(t) = v$. Построение и анализ функций μ^* , σ^* , T представляет основную вычислительную и аналитическую трудность излагаемого подхода.

Для отыскания неизвестных величин σ и μ необходимо решить систему трансцендентных уравнений, представленную в следующем замкнутом виде:

$$\begin{aligned} f_x^2/F^2 &= \Phi_x^2, \quad f_{xv}/(|f_x||f_v|) = c \\ F^2 &= f_x^2 + f_v^4, \quad f_x^2 = a_\zeta^2\mu^2 + 2a_\zeta a_\eta\mu\sigma + a_\eta^2, \quad f_v^2 = b_\zeta^2\mu^2 + 2b_\zeta b_\eta\mu\sigma + b_\eta^2 \\ f_{xv} &= a_\zeta b_\zeta\mu^2 + (a_\zeta b_\eta + a_\eta b_\zeta)\mu\sigma + a_\eta b_\eta \\ a_\zeta &= -\mu^{-3}((\mu + 3\sigma)a + \mu + (3\sigma^2 - 1)b) \\ a_\eta &= b_\zeta = (a + \sigma b)/\mu^2, \quad b_\eta = -b/\mu, \quad a = (\mu^2 - 2\mu\sigma + 1)^{1/2} - 1 \\ b &= \ln((\mu - \sigma + (\mu^2 - 2\mu\sigma + 1)^{1/2})/(1 - \sigma)) \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Пусть $\omega = (\mu - \sigma + (\mu^2 - 2\mu\sigma + 1)^{1/2})/(1 - \sigma)$, где ω — новый неизвестный параметр, причём $\omega \geq 1$, и, кроме того, при $0 \leq \mu < 1$ должно выполняться дополнительное условие $\omega \leq 1/(1 - \mu)$. Тогда

$$\sigma = (\omega^2 - 2\mu\omega - 1)(\omega - 1)^{-2}. \tag{1.1.25}$$

Подставим (1.1.25) в первое из уравнений системы (1.1.24) и получим уравнение четвёртой степени относительно μ , что позволяет выразить μ через ω и тем самым свести проблему к решению одного трансцендент-

ного уравнения относительно ω . Соответствующие выражения очень громоздки и не могут быть приведены здесь.

В результате применения компьютерной алгебры и численных методов построено полное решение задачи синтеза: оптимальное управление по принципу обратной связи и выражение для функции Беллмана.

На рис. 1, 2 приведены семейства графиков (кривые 1 – 4) для коэффициентов обратных связей $K_x(c, \Phi_x^2)$, $K_v(c, \Phi_x^2)$ по ортам векторов положения x и скорости v соответственно. Переменная c , $|c| \leq 1$ принимается за аргумент, а Φ_x^2 — за параметр семейства, который принимает соответственно значения $\Phi_x^2 = 0.1, 0.2, 0.4$ и 0.9 . Врезки на рис. 1, 2 показывают поведение функций вблизи значения $c = -1$ и практически соответствуют движению по прямой к началу координат в режиме торможения.

На рис. 3 приведено семейство кривых $1/\sqrt{F(c, \Phi_x^2)}$ для указанных значений c и Φ_x^2 . На его основе может быть получена функция Беллмана $T = (l^2 + h^4)^{1/4}/\sqrt{F}$. Как показано ниже, построенный алгоритм вычислений позволяет получать графики для произвольных достаточно частых значений параметра семейства Φ_x^2 .

6. Примеры. Численное интегрирование производилось с помощью стандартного метода Рунге-Кутты четвёртого порядка точности с переменным шагом и контрольным членом в форме Ингланда [15]. На рис. 4 под номерами 1 – 4 показаны траектории, а на рис. 5 под теми же номерами — соответствующие соотношения между компонентами скорости, получившиеся в результате применения развитого выше подхода к решению задачи о “мягкой встрече” для системы

$$\ddot{x} = u, \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad |u| \leq 1 \quad (1.1.26)$$

при различных начальных значениях скорости и одном и том же векторе $x(0)$. Абсцисса и ордината соответствующей начальной точки A на рис. 4 равны 1.

Следует заметить, что уравнения, описывающие движение, сильно вырождаются в случае, когда оптимальное управление направлено точно в начало координат. В связи с этим расчёт производился до того момента, когда величина c отличалась от -1 не более чем на 10^{-5} . Дальнейшее движение для всех рассмотренных случаев сводится к торможению, причём $\Phi_x^2 \rightarrow 0.2$ а $c \rightarrow -1$. На рис. 4, 5 соответствующие участки траекторий в фазовом пространстве не закрашены. Указанные предельные значения достигаются лишь в конечной точке. Дальнейшее повышение точности не имеет смысла, поскольку, как было сказано в начале этого параграфа, на реальную систему действует возмущение, которое мы до сих пор считали малым и явно не учитывали. Для его гашения может быть использован стандартный регулятор. В рамках же данной теории можно добиться повышения точности уменьшением максимального шага интегрирования, применением более сложной техники интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, а также использованием различных асимптотик.

§1.2. Оптимальное по быстродействию достижение сферы с нулевой конечной скоростью

1. Постановка задачи. До сих пор, согласно сказанному в начале §1.1, действовало допущение, что регулятор, сконструированный для компенсации малых отклонений, и подсистема, предназначенная для реакции на резкие скачки возмущающей силы, работают одновременно. Однако может оказаться целесообразным разделить области действия этих устройств. Введём сферу в фазовом пространстве задачи с центром в начале координат так, чтобы внутри неё действовал только линейный регулятор, а вне — устройство, использующее алгоритм оптимального управления. Тогда этот алгоритм должен приводить систему с нулевой скоростью не в начало координат, как в §1.1, а на поверхность указанной сферы. Аналогичным образом может быть поставлена

задача о выходе точки за пределы сферы, т. е. о выводе системы из некоторой “запрещённой” области. Исследуем оба случая.

Рассмотрим движение материальной точки постоянной массы m в пространстве произвольной размерности $n \geq 1$, под действием ограниченной по модулю силы F

$$\dot{x} = v, \quad m\dot{v} = F, \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0, \quad |F| \leq F_0 \quad (1.2.1)$$

Ставится задача оптимального по быстродействию приведения на сферу S_r^n произвольного радиуса $r \geq 0$ с нулевой скоростью (“мягкая посадка”)

$$|x(t_f) - x_0| = r, \quad v(t_f) = 0, \quad t_f \rightarrow \min_F \quad (1.2.2)$$

Ограничения на возможные положения точки x не наложены: она может находиться как внутри сферы, так и вне её, а траектория может пересекать поверхность S_r^n . Ситуация, когда сфера “непроницаема”, также представляет значительный интерес и требует отдельного рассмотрения. В этом случае решение задачи попадания на сферу требует предварительного решения задачи уклонения (см. §1.4). Отметим, что для некоторого множества начальных данных решение задачи (1.2.1), (1.2.2) даёт также решение задачи с указанными фазовыми ограничениями (“мягкая посадка” снаружи или изнутри). Случай $r = 0$ вырожденный и отвечает приведению в геометрическую точку $x(t_f) = x_0$ с нулевой скоростью; полный синтез задачи оптимального быстродействия построен в [4]. Поэтому далее считаем, что $r > 0$.

Отметим, что задача наискорейшего приведения точки на цилиндрическую поверхность $S_r^m \times \mathbf{R}^{n-m}$, $m < n$, сводится к задаче (1.2.1), (1.2.2) при $n = m$.

Задача оптимального быстродействия содержит $3n + 3$ параметров: n -векторы x^0 , x_0 , v^0 и скаляры m , F_0 , r . Посредством переноса системы координат x , v в точку $x = x_0$, $v = 0$, введения единицы длины r и

времени $(mr/F_0)^{1/2}$ получим соотношения типа (1.2.1), (1.2.2), в которых $x_0 = 0$, $r = 1$, $F_0 = 1$, $m = 1$. В безразмерных переменных задача управления содержит $2n$ параметров: n -векторы x^0 и v^0 , изменяющиеся в неограниченных пределах.

Необходимые условия оптимальности управления $u = F/F_0$ в форме задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана имеют вид [122]

$$(T'_x, v) - |T'_v| = -1, \quad u^* = -T'_v |T'_v|^{-1} \quad (1.2.3)$$

$$T = T(x, v) > 0, \quad x \in S^n, \quad v \neq 0; \quad T = 0, \quad x \in S_r^n, \quad v = 0$$

Здесь T — функция Беллмана, u^* — оптимальное управление в форме синтеза. Неизвестная $T(x, v)$ строится методом характеристик, что в алгоритмическом аспекте эквивалентно решению краевой задачи принципа максимума Понтрягина [122]. Из свойства центральной симметрии следует, что при $n \geq 2$ (случай $n = 1$ особый и требует отдельного рассмотрения) искомая функция T определяется тремя автомодельными переменными l , h и c , а задача Коши (1.2.3) принимает вид

$$T'_l c/l + T'_c h^2 - |T'_h| - |T'_c| l = -1, \quad T = T(l, h, c) \quad (1.2.4)$$

$$l = |x|, \quad h = |v|, \quad c = (x, v)$$

$$T > 0, \quad l \neq 1, \quad h \neq 0; \quad T = 0, \quad l = 1, \quad h = 0$$

Это означает, что задача оптимального быстрогодействия для $n \geq 2$ эквивалентна случаю $n = 2$, т. е. плоской задаче. Плоскость, в которой происходит процесс оптимального управляемого движения, определяется двумя ненулевыми векторами x , v . Очевидно, случай $c = \pm lh$, включающий также случаи $x = 0$ или (и) $v = 0$, приводит к вырожденному одномерному движению. Свойство (1.2.4) эквивалентности плоской задаче полезно для построения решения исходной многомерной ($n > 2$) задачи оптимальной по быстродействию “мягкой посадки” на сферу. Оно также проявляется при применении необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [4].

Отметим, что задача управления имеет решение при произвольных значениях векторов x^0 и v^0 . В качестве допустимого можно взять постоянное управление $u_{(1)} = -v^0/h^0$, $h^0 = |v^0|$ на первом участке, приводящем к полному торможению в момент времени $t_{(1)} = h^0$, в точке $x(t_{(1)}) = x^{(1)}$, где $x^{(1)} = x^0 + 1/2v^0h^0$. Из точки покоя затем можно двигаться по прямой, проходящей через выбранную точку сферы, в частности, через ближайшую $x^{(2)} = x^{(1)}/l^{(1)}$; расстояние между точками $\Delta l_2 = |l^{(1)} - 1|$. При движении по указанной прямой потребуется $t_2 = 2\Delta l_2^{1/2}$ времени для достижения сферы в точке $x^{(2)}$ с гашением скорости, т. е. имеем оценку сверху t^* для t_f :

$$t_f \leq t^* = h^0 + 2 \left| \left(l^{02} + c^0 h^0 + \frac{1}{4} h^{04} \right)^{1/2} - 1 \right|^{1/2}$$

Как показано ниже, для начальных данных, приводящих к траекториям с возвращением, приближённо реализуется описанный выше режим управления.

2. Краевая задача принципа максимума. Применим к исходной задаче необходимые условия оптимальности управления u в форме принципа максимума [4]. Вводя n -векторы переменных p и q , сопряжённых x и v соответственно, обычным способом получим выражения для оптимального управления u^* и краевой задачи [4]

$$\begin{aligned} u^* &= q|q|^{-1}, \quad q = \eta - \mu\nu t/t_f, \quad |q| = \left(1 - 2\sigma\mu t/t_f + \mu^2(t/t_f)^2\right)^{1/2} \\ \dot{x} &= v, \quad \dot{v} = u^*, \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0, \quad x^2(t_f) = 1, \quad v(t_f) = 0 \\ \mu &= t_f|p| \geq 0, \quad \nu = p|p|^{-1}, \quad p = \text{const}, \quad \eta = \text{const}, \quad \sigma = (\eta, \nu), \quad |\sigma| \leq 1 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Здесь η, ν — единичные n -векторы, σ — скалярное произведение этих векторов.

Отметим, что функция Гамильтона постоянна и равна $|\eta - \mu\nu| \geq 0$. Неизвестные скалярные параметры μ, σ, t_f и векторы η, ν подлежат определению из граничных (конечных) условий и условий трансвер-

сальности [122]. С этой целью проинтегрируем уравнения для v , x согласно (1.2.5)

$$\begin{aligned} v(t) &= v^0 + V_\eta(t)\eta + \mu V_\nu(t)\nu \\ x(t) &= x^0 + v^0 t + X_\eta(t)\eta + \mu X_\nu(t)\nu \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Скалярные функции $V_{\eta,\nu}(t)$, $X_{\eta,\nu}(t)$ зависят также от искоемых параметров μ , σ , t_f . Учитывая ограничения на t_f , μ и σ , представим эти функции в виде [4]

$$\begin{aligned} V_\eta(t) &= \frac{t_f}{\mu} V(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t}, \quad V_\nu(t) = -\frac{t_f}{\mu^2} (|q(\tau)| + \sigma V(\tau)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ X_\eta(t) &= V_\eta(t)t - \frac{t_f^2}{\mu^2} (|q(\tau)| + \sigma V(\tau)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t}, \quad V(t) = \operatorname{arsh} \frac{\mu t/t_f - \sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \\ X_\nu(t) &= V_\nu(t)t + \left(\frac{t_f^2}{2\mu^3} (\mu\tau/t_f + 3\sigma) |q(\tau)| + \frac{t_f^2}{2\mu^3} (3\sigma^2 - 1) V(\tau) \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Подставляя выражения (1.2.7) в (1.2.6), получим искомые зависимости от t и от векторов η и ν , куда в качестве неизвестных войдут t_f , μ и σ . Воспользуемся соответствующими конечными условиями для $v(t)$ и условиями трансверсальности для $x(t)$ при $t = t_f$. Получим систему $2n$ уравнений, содержащую неизвестный вектор $x(t_f)$

$$\begin{aligned} V_\eta(t_f)\eta + \mu V_\nu(t_f)\nu &= -v^0 \\ X_\eta(t_f)\eta + \mu X_\nu(t_f)\nu &= -x^0 - v^0 t_f + x(t_f) \\ \beta x(t_f) &= \nu, \quad \beta^2 = 1, \quad \beta = \pm 1, \quad x(t_f) = \beta \nu \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Здесь параметр β , имеющий смысл приведённого множителя Лагранжа, принимает дискретные значения. Исключая $x(t_f)$ и σ , получим замкнутую систему уравнений относительно η , ν и t_f , μ ; параметр β также подлежит определению. Вычисление корней и их исследование при произвольных значениях векторов v^0 и x^0 представляет основную трудность решения исходной задачи оптимального управления. Для её преодоления воспользуемся структурными свойствами коэффициентов

$V_{\eta,\nu}(t_f)$, $X_{\eta,\nu}(t_f)$ как функций параметров t_f , μ , σ и приведём систему (1.2.8) к виду

$$\begin{aligned} x^0 &= \beta\nu + t_f^2(a_\eta\eta + \mu a_\nu\nu), \quad v^0 = t_f(b_\eta\eta + \mu b_\nu\nu) \\ a_\eta &= b_\nu = \mu^{-2}(a + \sigma b), \quad b_\eta = -b/\mu \\ a_\nu &= -1/2\mu^{-3}((\mu + 3\sigma)a + \mu + (3\sigma^2 - 1)b) \\ a &= q(t)|_{t=0}^{t=t_f} = (1 - 2\mu\sigma + \mu^2)^{1/2} - 1, \quad \mu \geq 0, \quad |\sigma| \leq 1 \\ b &= V(t)|_{t=0}^{t=t_f} = \ln\left(\left(\mu - \sigma + (1 - 2\mu\sigma + \mu^2)^{1/2}\right)/(1 - \sigma)\right) \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Дальнейший ход решения системы (1.2.9) аналогичен применённому в [4] для задачи попадания в начало координат $x(t_f) = 0$ с нулевой скоростью $v(t_f) = 0$. Существенное отличие от рассмотренного случая заключается в наличии слагаемого $\beta\nu$ в соотношении (1.2.9) для x . Следует также отметить важное для дальнейшего анализа свойство независимости коэффициентов $a_{\nu,\eta}$ и $b_{\nu,\eta}$ от неизвестной t_f . Кроме того, в ситуации общего положения имеют место строгие неравенства $\mu > 0$, $|\sigma| < 1$; случаи равенства являются критическими. Они требуют специального исследования и аккуратного предельного перехода (см. ниже).

3. Численно-аналитическое решение краевой задачи. Для решения системы трансцендентных уравнений (1.2.9) применим элементарные алгебраические преобразования и сведём её к трём уравнениям относительно t_f , μ и σ . Такое приведение может быть реализовано различными способами [4]. Один из них заключается в разрешении относительно η , ν линейной системы с блочно-диагональной матрицей. Эта операция довольно проста, хотя и громоздка. Итак, пусть векторы η^* , ν^* определены как линейные функции векторов x^0 , v^0 посредством матрицы с блочно-диагональной структурой. Тогда могут быть получены три соотношения относительно неизвестных t_f , μ , σ : $\eta^{*2} = 1$, $\nu^{*2} = 1$, $(\eta^*, \nu^*) = \sigma$. После определения (с учётом двух возможностей $\beta = \pm 1$)

корней этой системы t_{fi} , μ_i , σ_i выбирается оптимальный

$$t_{fi} \rightarrow \min_i, \quad t_{fi} > 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad |\sigma_i| < 1$$

и подставляется в найденные выражения для η^* , ν^* , которые используются при построении управления и траекторий, см. (1.2.5), (1.2.6).

Однако такой подход представляется громоздким. Поэтому на первом этапе решения системы (1.2.9) с помощью элементарных преобразований выписываются также три уравнения относительно t_f , μ , σ в другом виде

$$\begin{aligned} l^2 - 1 &= 2t_f^2\beta(\sigma a_\eta + \mu a_\nu) + t_f^4(a_\eta^2 + 2\mu\sigma a_\eta a_\nu + \mu^2 a_\nu^2) \\ h^2 &= t_f^2(b_\eta^2 + 2\mu\sigma b_\eta b_\nu + \mu^2 b_\nu^2) \equiv t_f^2 H^2 \\ c &= \beta t_f(\sigma b_\eta + \mu b_\nu) + t_f^3(a_\eta b_\eta + \mu\sigma a_\eta b_\nu + \mu\sigma a_\nu b_\eta + \mu^2 a_\nu b_\nu) \\ l &= |x^0|, \quad h = |v^0|, \quad c = (x^0, v^0) \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

По аналогии с (1.2.4) в (1.2.10) для удобства введены скалярные параметры l , h , c , имеющие наглядный механический смысл. Напомним, что n -мерная система ($n \geq 2$) оказалась вновь эквивалентной двумерной системе ($n = 2$), допускающей удобное представление на плоскости. Во избежание недоразумений отметим, что при этом фазовое пространство x, v будет четырёхмерным. Без ограничения общности можно считать одно из значений x_1^0 или x_2^0 равным нулю.

Далее основное внимание уделяется определению корней системы (1.2.10) трансцендентных уравнений относительно t_f , μ , σ и их анализу как функций известных параметров l , h , c , изменяющихся в неограниченных пределах $l, h \geq 0$, $|c| < \infty$. Трансцендентность обусловлена наличием степенных и логарифмических функций, см. (1.2.9). Это обстоятельство приводит к значительным вычислительным трудностям, так как при расчётах возникают степенные и логарифмические масштабы изменения искомых величин. Кроме того, эти трудности усугубляются в случае вырождения исходной многомерной задачи, т. е. когда

оптимальное движение близко к прямолинейному, см. ниже и [4].

Итак, рассмотрим систему уравнений (1.2.10) и уменьшим её порядок, исключив неизвестную $t_f > 0$. Это удобно осуществить с помощью второго соотношения, которое позволяет однозначно определить t_f через μ, σ

$$t_f = h/H(\mu, \sigma), \quad h, H > 0 \quad (1.2.11)$$

Функция H определена согласно (1.2.10). После подстановки выражения (1.2.11) в первое и третье уравнения (1.2.10), получается система относительно двух неизвестных μ, σ : $\mu > 0, |\sigma| < 1$.

Введём новую переменную ω посредством соотношения

$$\sigma = \frac{\omega^2 - 2\mu\omega - 1}{(\omega - 1)^2} \quad (1.2.12)$$

Тогда выражение под знаком корня, с помощью которого определяется величина a в (1.2.9), примет вид

$$1 - 2\mu\sigma + \mu^2 = \left(\frac{\mu(\omega + 1) + 1 - \omega}{\omega - 1} \right)^2 \quad (1.2.13)$$

Далее, поскольку $\sigma \leq 1$, то из (1.2.12) получаем $\mu\omega \geq \omega - 1$. Так как $\mu > 0$, то $\mu(\omega + 1) > \omega - 1$. Следовательно, числитель дроби в (1.2.13) принимает положительные значения. С другой стороны, $\sigma \geq -1$ и из (1.2.12) имеем $\omega(\omega - (\mu + 1)) \geq 0$. В случае, когда $\omega > 0$, получаем $\omega \geq \mu + 1$, что в силу условия $\mu > 0$ даёт $\omega > 1$. Итак, при $\omega > 0$ знаменатель дроби в (1.2.13) положителен. Тогда с учётом (1.2.13) и последней строки в (1.2.9) получим выражения

$$a = \mu(\omega + 1)/(\omega - 1) - 2, \quad b = \ln \omega \quad (1.2.14)$$

Соотношение (1.2.12) позволило превратить радикал, определяющий значение a , в линейное по μ и дробно-линейное по ω выражение. Одновременно, что представляется весьма неожиданным, удалось заменить выражение под знаком натурального логарифма, зависящее от

неизвестных σ и μ , на ω . К сожалению, простой связи между поведением параметра ω и фазовыми переменными выявить не удалось.

Первое из уравнений (1.2.10) после подстановки (1.2.11) и замены (1.2.12) переходит в уравнение четвёртой степени относительно неизвестной μ . Коэффициенты этого полинома, зависящие только от ω , l , c , h и β , из-за своей громоздкости были построены с помощью компьютерной алгебры в форме фрагментов программы на языке C++. При проведении численного моделирования выяснилось, что при некоторых значениях этих четырёх величин поиск корней указанного полинома не может быть проведён с удовлетворительной точностью из-за ошибок округления. Соответствующий анализ и преобразование коэффициентов были крайне затруднены из-за их громоздкости. Оказалось, однако, что существует сравнительно простая замена переменных, позволяющая не только значительно упростить все выражения, но и снизить влияние погрешностей счёта.

Рассмотрим значения вспомогательной переменной $\omega < 0$. Тогда знаменатель дроби в (1.2.13) отрицателен и последняя строка в (1.2.9) даёт вместо представления для параметра в (1.2.14) выражение

$$b = \ln \left(\frac{\mu - \omega + 1}{\mu\omega - \omega + 1} \right)$$

Введём новую переменную s через μ , ω следующим образом:

$$s = \frac{\mu - \omega + 1}{\mu\omega - \omega + 1} \quad (1.2.15)$$

Введение неизвестной s позволяет установить интересный факт. Если исключить ω с помощью соотношения (1.2.15) и подставить в правую часть (1.2.12), то получается выражение

$$\sigma = \frac{s^2 - 2s\mu - 1}{(s - 1)^2}$$

совпадающее с (1.2.12) с точностью до замены s на ω . Следовательно, все соотношения, полученные ранее, также справедливы с точностью до

замены s на ω . В частности, в этом случае $b = \ln s$, где $s > 1$. Отсюда следует, что можно ограничиться значениями $\omega > 1$.

С помощью (1.2.15) можно выразить μ через s и ω и использовать в дальнейшем вне всякой связи со знаком ω . Имеем

$$\mu = \frac{s\omega + 1 - \omega - s}{s\omega - 1} \quad (1.2.16)$$

Подстановка (1.2.16) в уравнения (1.2.10) приводит к полиному четвёртой степени относительно s . К сожалению, его коэффициенты также весьма громоздки, но они всё же существенно компактнее, чем в случае полинома по μ , а, главное, ни разу не приводили к указанным выше затруднениям при расчётах (кроме случаев, когда $\omega \approx 1$, см. ниже).

Вычисления выполнялись по следующей схеме. В качестве исходных данных использовались значения l , c и h . На первом этапе третье уравнение из (1.2.10) рассматривалось как определение некоторой функции $c^*(l, h, \omega, \beta, s(l, h, \omega, \beta))$. Поскольку l и h — заданы, а $\beta = \pm 1$, то практически строились только зависимости $c^*(\omega)$ при $\beta = 1$ и $\beta = -1$. Значения s вычислялись как нули упомянутого полинома, в который превращается первое уравнение (1.2.10). Для каждого β в результате получалось до четырёх ветвей на графике $c^*(\omega)$. Далее по виду графика определялись ветви, а также необходимые интервалы значений ω , содержавшие искомые корни уравнения $c^*(\omega) = c$. Это уравнение решалось численно совместно с первым уравнением в (1.2.10) методом бисекций. В рамках этого метода задавалось значение ω , что позволяло найти коэффициенты полинома четвёртой степени по s . По формулам для его корней вычислялось значение s и подставлялось в последнее уравнение (1.2.10), что давало величину невязки, необходимую для работы алгоритма. Если рассматривать расчёт значений s как элементарную операцию, то фактически приходилось решать только одно трансцендентное алгебраическое уравнение относительно одного неизвестного ω . Такая процедура проводилась для каждого корня каждой

из ветвей, существование которого было установлено на предыдущем этапе. В конце выбиралось решение, соответствовавшее наименьшему времени движения t_f .

Для всех рассмотренных примеров большему значению ω соответствует большее значение времени движения, но доказать это аналитически затруднительно. Кроме того, каждая из ветвей при $\omega \gg 1$ всегда представляла собой монотонную функцию. Эти обстоятельства облегчали применение алгоритма. С другой стороны, когда оптимальная траектория является приближённо прямолинейной, оказывается, что соответствующие значения ω близки к единице; задача управления становится вырожденной. Возникающие при этом погрешности округления препятствуют нормальной работе программы. Можно использовать несколько способов преодоления этих трудностей. Во-первых, можно применять линейную интерполяцию графиков $c^*(\omega)$, так как искомое ω конечно. Во-вторых, можно применять точное решение для случая движения по прямой, описанное ниже.

4. Определение решения задачи оптимального управления.

После нахождения оптимального значения $\omega = \omega(l, h, c)$ и соответствующего ему значения $\beta = \pm 1$ ($\beta = \beta(l, h, c)$) для каждого фиксированного набора величин l, h, c по явным аналитическим формулам вычисляются параметры:

$$t_f = t_f(l, h, c), \quad \mu = \mu(l, h, c), \quad \sigma = \sigma(l, h, c) \quad (1.2.17)$$

Здесь t_f — минимальный корень (время быстродействия), μ, σ — соответствующие вспомогательные параметры. Тем самым будут определены значения скалярных коэффициентов $a_{\eta, \nu}(l, h, c)$, $b_{\eta, \nu}(l, h, c)$ в блочно-диагональной системе уравнений (1.2.9) относительно ортов η, ν , которая невырождена в силу неравенства Буняковского-Коши. Решая её, получим искомые блочно-диагональные выражения для этих

ортов через векторы x^0, v^0 в виде

$$\begin{aligned}\eta &= (-x^0 t_f b_\nu \mu + v^0 (t_f^2 a_\nu \mu + \beta)) \Delta^{-1} \\ \nu &= (x^0 t_f b_\eta - v^0 t_f^2 a_\eta) \Delta^{-1} \\ \Delta &= t_f b_\eta (t_f^2 a_\nu \mu + \beta) - t_f^3 a_\eta b_\nu \mu \neq 0\end{aligned}\tag{1.2.18}$$

Коэффициенты при известных n -векторах x^0, v^0 есть нелинейные функции этих векторов, определяемые численно на основе значений $l = |x^0|, h = |v^0|, c = (x^0, v^0)$. После подстановки ортов η, ν из (1.2.18) в выражение u^* из (1.2.5) получается n -вектор оптимального по быстродействию управления в форме программы u_p

$$\begin{aligned}u_p(t, x^0, v^0) &= -k_x(t, l, h, c)x^0 - k_v(t, l, h, c)v^0 \\ k_x &= (|q|\Delta)^{-1} (b_\nu t_f + b_\eta t), \quad |q| \equiv Q(t, l, h, c) \\ k_v &= -(|q|\Delta)^{-1} (t_f(a_\nu t_f + a_\eta t)\mu + \beta), \quad \Delta = \Delta(l, h, c)\end{aligned}\tag{1.2.19}$$

Время оптимального быстродействия t_f и параметр β определяются тремя величинами l, h, c согласно (1.2.17) и проведённым выше исследованием. Отметим, что значения $\beta = \pm 1$ отвечают ситуациям, когда оптимальной оказывается “посадка” изнутри или снаружи соответственно [3]. При этом могут осуществляться движения без пересечения сферы, а также с одним или двумя пересечениями (см. ниже). Функция Q в (1.2.19) определяется формулой (1.2.5) и величинами t_f, μ, σ , найденными выше. Подстановка вектор-функции u_p из (1.2.19) в уравнения (1.2.5) и интегрирование по t приводит к траектории, которая может быть найдена аналитически в виде (1.2.6), (1.2.7), где все постоянные $t_f, \mu, \sigma, \eta, \nu$ определены через известные векторы x^0, v^0 . На основе этих параметров вычисляются различные характеристики оптимальной траектории; в частности, при $t = t_f$ угол γ между касательной к траектории и нормалью к поверхности определяется выражением

$$\cos \gamma = -(u, x)_{t_f} = -\beta(\sigma - \mu) (1 - 2\sigma\mu + \mu^2)^{-1/2}$$

Таким образом, полностью построено решение задачи оптимального программного управления о наискорейшем приведении материальной точки на сферу с нулевой скоростью из произвольного начального состояния посредством ограниченной силы в n -мерном ($n \geq 2$) пространстве. Вырожденный случай $n = 1$ (или случай движения по прямой) исследуется ниже.

Изложенный алгоритм можно применить для построения синтеза оптимального по быстродействию управления $u_s(x, v)$ и функции Беллмана $T(x, v)$ (см. (1.2.3)). Для этой цели предположим, что измерения фазовых переменных и указанные выше при описании численно-аналитического решения краевой задачи расчёты могут проводиться достаточно быстро, практически в каждый момент времени или имеется возможность запоминания и аппроксимации функций трёх переменных в достаточно широкой области их изменения. Тогда управление по обратной связи u_s и функция T определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_s(x, v) &= -k_{xs}(l, h, c)x - k_{vs}(l, h, c)v \\ T(x, v) &= t_f(l, h, c), \quad l = |x|, \quad h = |v|, \quad c = (x, v) \\ k_{xs}(l, h, c) &= k_x(0, l, h, c), \quad k_{vs}(l, h, c) = k_v(0, l, h, c) \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Скалярные множители k_{xs}, k_{vs} в (1.2.20) имеют смысл коэффициентов обратной связи по положению x и скорости v соответственно. Интересно отметить, что матрицы коэффициентов обратных связей диагональны (пропорциональны единичным матрицам). В отличие от случая приведения точки в начало координат [4], эти коэффициенты, а также коэффициенты обратных связей по ортам $x/l, v/h$, зависят от трёх переменных l, h, c . Это обстоятельство затрудняет численно-графическое их представление и построение полной картины синтеза. Синтез управления и соответствующие траектории могут быть представлены в виде эффективной вычислительной процедуры, см. ниже результаты расчётов и комментарии к ним. Отметим также, что функция Беллмана

на $T(x, v)$, определяемая как решение задачи Коши (1.2.3) или (1.2.4), и соответствующее оптимальное управление в форме синтеза $u_s(x, v)$ вычисляются в результате нахождения оптимального корня системы трансцендентных алгебраических уравнений и ортов (1.2.18).

5. Оптимальное по быстродействию управление при движении по прямой. В критическом случае, когда оптимальное управление и все основные соотношения вырождаются, требуется отдельное исследование. Как отмечалось, одномерное движение при $n \geq 2$ имеет место, если в некоторый момент времени t_0 , в частности, $t_0 = 0$, выполняется хотя бы одно из равенств

$$x^0 = 0, \quad v^0 = 0, \quad (x^0, v^0) = \pm l^0 v^0 \quad (1.2.21)$$

Очевидно, что при $n = 1$ справедливо одно из двух последних равенств (1.2.21). Итак, рассмотрим соответствующую задачу оптимального быстродействия для одномерной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \quad \dot{v} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0 \\ |x(t_f)| &= 1, \quad v(t_f) = 0, \quad t_f \rightarrow \min_u \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Здесь x, v, u — скалярные переменные. Согласно (1.2.22) требуется привести систему из произвольной фазовой точки с абсциссой x^0 и ординатой v^0 в точку с абсциссой ± 1 и ординатой 0 за минимальное время t_f . С помощью принципа максимума решение задачи строится достаточно просто.

Сепаратриса, представляющая собой антисимметричную кривую, разделяет фазовую плоскость (x, v) на две части $P_{\pm 1}$, см. рис. 6

$$x = -v(1 + (v/2)^2)^{1/2} \equiv d(v), \quad P_{\pm 1} = \{x, v : x \gtrless d(v)\} \quad (1.2.23)$$

В неограниченных областях $P_{\pm 1}$ оптимальное управление $u_{\pm 1}$ приводит систему из фазовой точки с абсциссой x и ординатой v в точку с

абсциссой ± 1 и ординатой 0. Кривые переключений управлений имеют стандартный вид, см. рис. 6

$$L_{\pm 1} = \{x, v : x \pm 1 = 1/2|v|v; x, v \in P_{\pm 1}\} \quad (1.2.24)$$

Простыми оценками устанавливается, что в (1.2.23) разделяющая кривая $x = d(v)$ расположена целиком между кривыми переключений $L_{\pm 1}$ из (1.2.24) и асимптотически приближается к L_{+1} при $v \rightarrow -\infty$ и к L_{-1} при $v \rightarrow \infty$. Каждая кривая $L_{\pm 1}$ состоит из двух полуветвей L_{+1}^{\pm} , L_{-1}^{\pm} , входящих в точки с абсциссами ± 1 и ординатами, равными нулю при $u_{+1} = \pm 1$, $u_{-1} = \pm 1$ соответственно. Оптимальное управление в каждой области $P_{\pm 1}$ один раз изменяет знак при достижении системой фазовой кривой $L_{\pm 1}$. Оптимальная фазовая траектория остаётся в области $P_{\pm 1}$, т. е. не пересекает кривой $x = d(v)$. Время быстрогодействия $t_f = T_{\pm 1}$ определяется выражениями

$$T_{+1}(x, v) = \pm v + 2 \left(\pm(x-1) + \frac{1}{2}v^2 \right)^{1/2}, \quad x, v \in P_{+1}, \quad x-1 \geq -\frac{1}{2}|v|v \quad (1.2.25)$$

$$T_{-1}(x, v) = \pm v + 2 \left(\pm(x+1) + \frac{1}{2}v^2 \right)^{1/2}, \quad x, v \in P_{-1}, \quad x+1 \geq -\frac{1}{2}|v|v$$

На разделяющей кривой $x = d(v)$ величины T_{+1} и T_{-1} из (1.2.25) совпадают и равны

$$\begin{aligned} T_{\pm 1}(d(v), v) &= T_d(v) = -v + 2 \left(-d(v) + 1 + \frac{1}{2}v^2 \right)^{1/2} = \\ &= v + 2 \left(d(v) + 1 + \frac{1}{2}v^2 \right)^{1/2}, \quad x = d(v) = -v \left(1 + \left(\frac{v}{2} \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Таким образом, если фазовая точка D лежит на разделяющей кривой, то решение задачи оптимального быстрогодействия неединственно (двузначно), см. рис. 6. Происходит движение либо в точку с абсциссой $+1$ и ординатой 0 либо в точку с абсциссой -1 и ординатой 0; время определяется согласно (1.2.26).

Итак, картина синтеза, оптимальное управление и время быстрого действия для одномерной задачи полностью определены, см. рис. 6. По аналогии со стандартным подходом можно построить программное управление и траектории оптимального движения.

6. Результаты математического моделирования и выводы.

Эффективность расчётов оптимального управления и движений согласно изложенной выше методике определения решения задачи оптимального управления подтверждается решением ряда задач для широкой области начальных значений двумерных векторов x^0, v^0 . Естественный интерес в теоретическом аспекте представляют ситуации, когда начальная точка x^0 с абсциссой x_1^0 и ординатой x_2^0 находится вблизи окружности ($l \approx 1$) или на окружности ($l = 1$). С прикладной точки зрения важны случаи, когда начальная точка находится далеко от круга ($l \gg 1$) или близко к началу координат ($l \ll 1$). Конечно, вид оптимальных траекторий и законы управления движением будут существенно зависеть от параметров $h = |v^0|$ и $c = (x^0, v^0) = lh \cos \alpha$. Как отмечалось, без ограничения общности можно положить $x_2^0 = 0$, т. е. $l = |x_1^0|$.

Поскольку описать множество режимов управления с исчерпывающей полнотой затруднительно, прокомментируем типичные ситуации, которые представлены на рис. 7, 11 (траектории) и рис. 12, 15 (управления и скорости).

На рис. 7 приведены два семейства траекторий 1 – 3 и 4 – 6, различающиеся, в основном, тем, что луч начального вектора скорости пересекает круг для первого семейства ($\alpha = 160^\circ$) и не пересекает — для второго ($\alpha = -150^\circ$). Для разнообразия разнесены также стартовые точки $x_1^0 = 2$ и $x_1^0 = 3$ при одинаковой начальной координате $x_2^0 = 0$; при этом

$$h = 2.5; 2.2; 1.5; 1; 2; 3$$

В зависимости от величины скорости h может происходить как однократное (кривая 2) или двукратное (кривая 1) пересечение окружности, так и не происходить пересечения (остальные кривые). Кроме того, осуществляются либо относительно простые движения “в режиме торможения” (кривые 2, 3, 4, 5 на рис. 7, см. также рис. 12, на которой представлены управления $u_{1,2}$ и скорости $v_{1,2}$), либо траектории “с возвратом” (кривые 1, 6). На рис. 13 представлены управления и скорости, соответствующие кривой 6 на рис. 7, для которой $x_1^0 = 3$, $h = 3$, $\alpha = -150^\circ$. “Возвратные” траектории сопровождаются резко выраженными промежуточными участками движения с малой скоростью (“поворот” на кривой 6 и связанная с ним область малых скоростей на рис. 13), а также “переключением управления” (см. рис. 13). Время быстрого действия t_f для траекторий 1 – 6 составляет величины

$$t_f \approx 3.58; 2.21; 1.50; 2.25; 2.20; 5.06$$

Для траекторий с возвращением t_f изменяется быстрее с ростом h , чем в случаях движения “в режиме торможения”.

Аналогично можно прокомментировать траектории и режимы управления, представленные на рис. 8, содержащей два семейства кривых 1 – 3 и 4 – 9. Отметим, что все траектории “возвратные”. Кривым 1 – 3 отвечает $x_1^0 = 2$, $h = 2.5$, $\alpha = 135^\circ; 90^\circ; 45^\circ$. Траектории 4 – 9 начинаются на границе круга со скоростью $h = 2.5$ и различными углами

$$\alpha = 10^\circ; 40^\circ; 70^\circ; 110^\circ; 140^\circ; 170^\circ$$

Очевидно, траектории 1–6 не пересекают круг, а 7–9 — пересекают, что обусловлено направлением и величиной скорости. Все “посадки” на окружность происходят снаружи. Величины t_f , соответствующие кривым 1 – 9, равны

$$t_f = 4.36; 5.56; 6.31; 4.82; 4.68; 4.38; 3.73; 3.07; 2.29$$

Примерами наиболее резко выраженных траекторий возвратного типа служат кривые 3 – 5. Наряду с “предельными” режимами управления, представленными на рис. 12, 13, могут реализовываться “промежуточные” режимы, (см. рис. 14).

На рис. 9 приведено семейство кривых 1–6 траекторий для меньшей величины скорости $h = 1$, чем для кривых 4 – 9 на рис. 8. Траектории 4 – 6, не пересекающие окружность, качественно сходны с кривыми “возвратного” типа 1–8 на рис. 8. Траектории 1–3, попадающие внутрь круга, могут быть отнесены к движениям “в режиме торможения”, см. кривые 2–5 на рис. 7 (см. также траектории 2–4 на рис. 10 и кривые на рис. 11). Время оптимального быстрогодействия t_f для траекторий 1 – 6 равно

$$t_f \approx 1.91; 1.37; 1.01; 1.67; 2.19; 2.40$$

Следует отметить, что зависимость времени быстрогодействия от начального угла наклона вектора скорости немонотонна.

Было также замечено, что свойство невырожденности при $t = 0$ сохраняется для $0 < t < t_f$.

На рис. 10 представлены два семейства кривых, для которых вектор скорости в начальный момент времени $t = 0$ направлен ортогонально оси x_1 , т. е. $\alpha = 90^\circ$. Для первого семейства (кривые 1–5) $x_1^0 = 0.8$, для второго (кривые 6, 7) $x_1^0 = 1$. В обоих случаях параметром семейства является величина скорости h . Для первого семейства эти величины соответственно равны $h = 1.3; 1.001; 1.0910; 0.7; 0.1$, а для второго — $h = 1.5; 1$. Интересно отметить, что для первого семейства существует критическое значение $h^* \approx 1.1$, для которого режим торможения (см. кривую 3) переходит в режим с возвращением (см. кривую 2) и “посадка” происходит снаружи. Все кривые остаются внутри круга при $0 < h < h^*$, а при $h > h^*$ траектории пересекают границу. Значения времени оптимального быстрогодействия для кривых 1 – 7 равны соот-

$$t_f \approx 1.67; 1.10; 1.09; 0.91; 0.89; 2.60; 1.13$$

Также отметим, что изменение времени оптимального быстрогодействия для кривых первого семейства немонотонно с возрастанием скорости. Сперва оно несколько убывает с ростом h , например, при $h = 0.1$ время $t_f \approx 0.89$, а при $h = 0.4$ время $t_f \approx 0.88$. Для $h \gtrsim 0.5$ начинает возрастать, например, $t_f \approx 0.91$ для $h = 0.7$ и $t_f \approx 1.09$ для $h = 1.09$.

На рис. 11 представлено семейство траекторий (кривые 1 – 7) для которых $h = 1$, $\alpha = 90^\circ$, $v_1^0 = 0$, $v_2^0 = 1$, а значение x_1^0 изменяется в пределах $0 < x_1^0 < 1$. Кривой 1 отвечает $x_1^0 = 0.001$, а кривой 7 – $x_1^0 = 0.99$; траектории 2 – 6 начинаются при $x_1^0 = 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9$. Все режимы управления на рис. 11 соответствуют “торможению”. В строгом смысле движение в режиме торможения имеет место при $x_1^0 = 0$. Однако уже при $x_1^0 = 0.001$ заметен вначале короткий ($\Delta t \approx 0.25$) участок разгона ($u_2 \approx 1$, $u_1 \approx 0$) вдоль оси x_2 , а затем участок торможения ($u_2 \approx -1$, $u_1 \approx 0$). При $x_1^0 = 0.1$ (кривая 2) на коротком начальном участке $\Delta t \approx 0.25$ управление u_2 изменяется почти так же, как и для $x_1^0 = 0$ (модуль u_2 несколько меньше); управление u_1 отлично от нуля и приводит к заметному смещению конца траектории вправо. Интересно отметить поведение кривой 7 вблизи границы круга: оптимальная траектория пересекает окружность и “посадка” происходит снаружи. Соответствующие кривым 1 – 7 значения времени оптимального быстрогодействия равны

$$t_f \approx 1.45; 1.44; 1.37; 1.24; 1.09; 1.01; 1.11$$

Следует обратить внимание на интересный факт: при приближении точки x_1^0 к границе время оптимального быстрогодействия сравнительно быстро убывает (что представляется естественным), а затем возрастает, что не совсем очевидно. Это свойство аналогично рассмотренному

выше для траекторий на рис. 10. Довольно распространённое свойство немонотонной зависимости времени быстрогодействия от параметров усугубляется, естественно, тем, что терминальное множество представляет из себя не точку, а окружность.

§1.3. Влияние вязкой среды

1. Постановка задачи. Исследуем задачу, поставленную в §1.2, исходя из предположения, что сила вязкого трения значительна и пренебречь ею нельзя.

Рассмотрим движение материальной точки постоянной массы m в однородной вязкой среде с коэффициентом линейного по скорости сопротивления k . На динамический объект действует ограниченная по модулю управляющая сила F . Требуется найти закон управления в виде программы и синтеза по обратной связи, приводящий точку на терминальное множество — поверхность n -мерного шара — сферу S_R^n снаружи или изнутри за минимальное время t_f ; скорость в конечный момент времени не фиксируется. Сформулируем соответствующую задачу оптимального быстрогодействия для n -мерного динамического объекта

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k\dot{x} &= F, \quad x(0) = x^0 \notin S_R^n, \quad \dot{x}(0) = v^0, \quad n \geq 2 \\ x(t_f) \in S_R^n(x_0) &= \{x : |x - x_0| = R\}, \quad t_f \rightarrow \min_F, \quad |F| \leq F_0 \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Параметры системы k , F_0 , x_0 , R предполагаются фиксированными. Ранее были рассмотрены частные постановки задачи (1.3.1): случай $R = 0$ исследован численно в [39], а случаи $k = 0$ и $k = R = 0$ — соответственно в [3] и [2]. Следует отметить, что решение задачи, аналогичной (1.3.1), но для $n = 1$ при $R \neq 0$ в случае попадания на окружность фазовой плоскости снаружи, приведено в [122]. Кроме того, одномерная задача наискорейшего попадания на окружность изнутри рассмотрена как частный случай в [131].

Для дальнейшего существенно предположение $R > 0$, что позволяет в качестве единицы длины взять величину R . Таким образом, требуется привести динамический объект на единичную n -мерную сферу. За единицу времени удобно принять $(mR/F_0)^{1/2}$, что даёт возможность с помощью стандартной процедуры обезразмеривания и переноса начала системы координат в точку $x = x_0$ уменьшить число параметров и представить задачу (1.3.1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \quad \dot{v} = -kv + u, \quad x(0) = x^0, \quad |x^0| \neq 1, \quad v(0) = v^0 \\ |x(t_f)| &= 1, \quad t_f \rightarrow \min_u, \quad |u| \leq 1, \quad 0 \leq k < \infty \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Исследуемая задача оптимального быстрогодействия (1.3.2) содержит один безразмерный параметр k и n -векторы начальных значений x^0 , v^0 . Для неё требуется найти законы управления в виде программы u_p и синтеза u_s , время оптимального быстрогодействия T_p и функцию Беллмана T_s , а также оптимальные фазовые траектории $x^*(t)$, $v^*(t)$ движения, т. е. построить функции

$$\begin{aligned} u^* &= u_p(t, x^0, v^0, k), & u^* &= u_s(x, v, k) \\ t_f^* &= T_p(x^0, v^0, k), & t_f^* &= T_s(x, v, k) \\ x^* &= x(t, x^0, v^0, k), & v^* &= v(t, x^0, v^0, k) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Замечания.

1°. Задача (1.3.2) эквивалентна двумерной, т. е. случаю $n = 2$. Оптимальное движение в силу симметрии происходит в плоскости, определяемой векторами x^0 , v^0 (т. е. $x^0 - x_0$, v^0 для исходной задачи (1.3.1)) и требуется попасть на окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$ при $|x^0| \geq 1$.

2°. К данной двумерной задаче сводится более общий случай, когда терминальное множество есть n^* -мерный цилиндр, $2 \leq n^* \leq n$. Управление движением осуществляется в n^* -мерном пространстве, содержащем указанную сферу; задача вновь сводится к случаю $n^* = 2$.

3°. Построение программного управления u_p из (1.3.3) для фиксированного значения k и произвольных векторов x^0 , v^0 может быть осу-

ществлено с помощью необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума. Тогда управление по обратной связи (синтез) u_s строится посредством функции u_p в виде $u_s(x, v, k) = u_p(0, x, v, k)$.

4°. Если найдено время оптимального быстрогодействия T_p , то функция Беллмана T_s получается заменой начальной фазовой точки на текущую: $T_s(x, v, k) = T_p(x, v, k)$. Более того, вследствие связи между принципом максимума и методом динамического программирования [122] имеем

$$u^* = u_s(x, v, k) = -(\partial T_s / \partial v) |\partial T_s / \partial v|^{-1} \quad (1.3.4)$$

Как следует из дальнейшего анализа, после подстановки u_s из (1.3.4) или (1.3.3) в уравнения движения (1.3.2) и интегрирования задачи Коши на интервале времени $0 \leq t \leq T_s(x^0, v^0)$ для программного управления u_p из (1.3.3) следует свойство

$$\begin{aligned} u^* = u_p(t, x^0, v^0, k) &= u_s(x(t, x^0, v^0, k), v(t, x^0, v^0, k), k) = \\ &= u_s(x^0, v^0, k) = \text{const} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

5°. Постановку задачи можно обобщить на случай неоднородной среды с кусочно-постоянным коэффициентом вязкости: $k = k^\pm$ для значений x^0 в области $|x^0| \geq 1$ соответственно.

2. Применение принципа максимума. Допустимое управление, приводящее динамический объект на сферу, существует для произвольных $k \geq 0$, x^0 , v^0 и может быть построено весьма просто. В частности, оно может содержать два этапа: сначала торможение с управлением $u = -v^0/|v^0|$ до полной остановки в некоторый момент времени t_* в промежуточной точке x_*

$$v(t_*) = 0, \quad x(t_*) = x_* = x^0 + \frac{v^0}{k|v^0|} (|v^0| - t_*), \quad t_* = \frac{1}{k} \ln(1 + k|v^0|)$$

и затем управляемое движение по прямой, соединяющей точку x_* и некоторую точку на сфере (например, ближайшую). Отсюда следует существование искомого оптимального по быстроддействию неособо-

го управления в классе кусочно-непрерывных функций времени. Оно строится ниже с помощью принципа максимума [122].

Для задачи (1.3.2) выпишем функцию Гамильтона H и условие максимума по u

$$H = (p, v) - k(q, v) + (q, u), \quad H \rightarrow \max_u, \quad |u| \leq 1 \quad (1.3.6)$$

Здесь p и q — векторы, сопряжённые соответственно x и v . Из условия (1.3.6) максимума функции H по u получим выражения

$$u^* = q|q|^{-1} = \eta, \quad H^* = H(u^*) = (p - kq, v) + |q| \quad (1.3.7)$$

Согласно принципу максимума необходимо решить краевую задачу для гамильтоновой системы $4n$ нелинейных дифференциальных уравнений с учётом условий трансверсальности вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H^*}{\partial p} = v, \quad x(0) = x^0, \quad |x(t_f)| = 1 \\ \dot{v} &= \frac{\partial H^*}{\partial q} = -kv + \eta, \quad v(0) = v^0 \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H^*}{\partial x} = 0, \quad p = \text{const}, \quad p = \lambda x(t_f) |x(t_f)|^{-1} \\ \dot{q} &= -\frac{\partial H^*}{\partial v} = -p + kq, \quad q(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Здесь λ — скалярный множитель Лагранжа, отвечающий конечному условию (1.3.2) для x . Функция H^* (гамильтониан) и выражение для оптимального управления определены согласно (1.3.7). Привлекательным свойством системы уравнений (1.3.8) является возможность её полного интегрирования в элементарных функциях. В частности, имеем выражения для q и $u^* = \eta$

$$q = pk^{-1} (1 - \exp k(t - t_f)), \quad u^* = \eta = x^f \text{sign } \lambda = \text{const} \quad (1.3.9)$$

Через x^f в (1.3.9) обозначен неизвестный единичный вектор, характеризующий конечное положение точки на сфере: $x(t_f) = x^f$, $|x^f| = 1$.

Поскольку оптимальное управление u^* из (1.3.9) постоянно, то из (1.3.8) получим

$$u^* = \gamma x^f, \quad \gamma = \text{sign}(1 - |x^0|) \quad (1.3.10)$$

Этот вектор управления коллинеарен или антиколлинеарен орту x^f .

В результате для x, v из (1.3.8), (1.3.10) следует замкнутая краевая задача. Интегрирование уравнений (1.3.8), (1.3.10) даёт выражения для оптимальной фазовой траектории

$$\begin{aligned} x(t) &= x^0 + v^0 V(t) + \gamma x^f U(t), \quad v(t) = v^0 + (\gamma x^f - kv^0) V(t) \\ V(t) &= \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}) > 0, \quad U(t) = \frac{1}{k} (t - V(t)) > 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Формулы (1.3.11) содержат неизвестный постоянный орт x^f , который должен по определению удовлетворять соотношению $x(t_f) = x^f$, т. е.

$$x^f (1 - \gamma U(t_f)) = x^0 + v^0 V(t_f), \quad |x^f| = 1 \quad (1.3.12)$$

Требуется найти решение трансцендентного уравнения (1.3.12) относительно неизвестных x^f, t_f в зависимости от начальных векторов x^0, v^0 и параметра k . Среди допустимых корней $t_f^{(i)} > 0, x_f^f$ следует выбрать корень, доставляющий минимальное значение $t_f^* = \min t_f^{(i)}$ по i . Он полностью определяет время оптимального быстрогодействия t_f^* , программное оптимальное управление u_p из (1.3.10) и фазовую траекторию x^*, v^* согласно (1.3.11). Таким образом, нахождение и анализ оптимального корня x_f^f, t_f^* уравнения (1.3.12) в зависимости от известных векторов x^0, v^0 и коэффициента k представляют основной интерес и содержание дальнейших исследований.

3. Построение и анализ оптимального решения краевой задачи принципа максимума. Если минимальное значение t_f^* известно, то оптимальный вектор x_f^f может быть легко найден из соотношения (1.3.12) делением на скаляр $1 - \gamma U(t_f^*) \neq 0$. Он автоматически удовлетворяет условию $|x_f^f| = 1$. Искомое значение t_f^* заведомо удовлетворяет скалярному уравнению, которое получается из (1.3.12) возведением

обеих частей в квадрат, т. е. трансцендентному уравнению вида

$$(1 - \gamma U(t_f))^2 = l^2 + 2clhV(t_f) + h^2V^2(t_f) \quad (1.3.13)$$

$$l = |x^0|, \quad h = |v^0|, \quad c = (x^0, v^0) l^{-1} h^{-1}, \quad \gamma = \text{sign}(1 - l)$$

Из (1.3.13) следует, что время быстрогодействия t_f определяется тремя наглядными геометрическими величинами l , h , c , характеризующими произвольные векторы $x = x^0$, $v = v^0$ на плоскости. Оно также зависит от фиксированного коэффициента диссипации k , который входит явно в функции $U(t_f)$, $V(t_f)$ согласно (1.3.11). Уравнение (1.3.13) является трансцендентным и содержит степенные и экспоненциальные функции t_f . Это затрудняет аналитическое и численное исследование решения, т. е. функции Беллмана (1.3.3), для произвольных допустимых значений параметров:

$$t_f^* = t_f^{(i)}(l, h, c, k) \rightarrow \min_i, \quad l, h, k \geq 0, \quad |c| \leq 1 \quad (1.3.14)$$

Достаточно эффективный анализ зависимости t_f от какого-либо из параметров при фиксированных значениях остальных проводится явным построением обратной зависимости. Например, зависимость t_f от расстояния до центра сферы l определяется из квадратного уравнения (1.3.13) относительно $l \geq 0$; разрешая его, получим выражения

$$l = -chV(t_f) \pm \sqrt{D_l}, \quad D_l = (1 - \gamma U(t_f))^2 - s^2 h^2 V^2(t_f), \quad t_f > 0 \quad (1.3.15)$$

$$s^2 = 1 - c^2, \quad \gamma = \text{sign}(1 - l), \quad l \neq 1$$

Выражения (1.3.15) исследуются отдельно в двух областях значений x^0 : во-первых, при $l > 1$ (вне сферы), тогда $\gamma = -1$, и, во-вторых, при $l < 1$ (внутри сферы), тогда $\gamma = 1$. Ограничения (1.3.14) следует дополнить неравенством $D_l \geq 0$.

К аналогичным, но несколько более простым, чем (1.3.15), выражениям приводит исследование зависимости t_f от $h \geq 0$ — модуля вектора скорости:

$$h = \left(-cl \pm \sqrt{D_h} \right) / V(t_f), \quad D_h = (1 - \gamma U(t_f))^2 - s^2 l^2 \geq 0 \quad (1.3.16)$$

При фиксированных l, h , (и k) представляет интерес влияние величины косинуса угла между векторами x^0 и v^0 — существенного параметра c — на время быстрогодействия t_f . В ситуации общего положения $l, h > 0$ искомая зависимость определяется из линейного относительно c уравнения (1.3.13) с учётом области допустимых значений (1.3.14).

Влияние коэффициента диссипации k также весьма существенно. Численно-аналитическое исследование неявной зависимости t_f от k требует применения более сложной схемы. А именно, вместо t_f введём параметр $\varkappa = kt_f > 0$ и преобразуем соотношение (1.3.13) к уравнению четвёртой степени относительно $k > 0$

$$(l^4 - 1)k^4 + 2clhz(\varkappa)k^3 + (h^2z^2(\varkappa) + \gamma(\varkappa - z(\varkappa)))k^2 - (\varkappa - z(\varkappa))^2 = 0 \quad (1.3.17)$$

$$z(\varkappa) = 1 - e^{-\varkappa}, \quad 0 \leq z < 1, \quad 0 < \varkappa < \infty; \quad \varkappa = kt_f > 0$$

Требуется найти корни $k_i(\varkappa)$ при фиксированных значениях параметров c, l и h .

Случай $k = 0$ приводит к уравнению четвёртой степени относительно t_f (см. [3]). В предельной ситуации $l = 1$ из (1.3.17) с очевидностью следует, что $\varkappa = t_f = 0$. Если для некоторого θ найдено значение $k_i(\varkappa)$, $1 \leq i \leq 4$, то искомая величина $t_f^{(i)} = \varkappa/k_i(\varkappa)$ определяется условием $t_f^{(i)} \rightarrow \min$ по i .

Приведём краткий анализ решения t_f^* для различных значений коэффициента k . Как отмечалось, предельный случай нулевой диссипации подробно исследован аналитическими методами возмущений и численно в широком диапазоне изменения известных величин [3]. Рассмотрены случаи асимптотически малых значений $l, h, |c|, |l - 1|, |1 \pm c|$, асимптотически больших l, h и др. Построены численно семейства кривых, определяющие зависимость $t_f^* = \theta(c, l, h)$. Установлен ряд качественных свойств функции Беллмана θ . В частности, обнаружена неединственность корня t_f и негладкость функции $\theta(c, l, h)$.

Если влияние сопротивления незначительно, то можно ограничить-

ся решением для $k = 0$ (см. [3]). Для учёта влияния диссипации при $k \ll 1$ можно применять процедуру малого параметра, которая, однако, при расчётах оказывается громоздкой и неэффективной. Более продуктивно численное решение уравнения (1.3.17).

Определённый интерес представляет другой предельный случай, когда коэффициент диссипации “велик”, т. е. в процессе управления практически устанавливается движение по прямой к центру или от центра круга с постоянной скоростью $h_* \approx k^{-1}$, а слагаемыми, содержащими сомножитель $\exp(-\varkappa)$, можно пренебречь ($\varkappa \gg 1$; например, $\varkappa = 5 \div 10$). В результате можно получить квадратное уравнение для t_f , из которого найдём

$$t_f^{(1,2)} = \frac{k}{\gamma} + \frac{1}{k} \mp \frac{k}{\gamma} L, \quad L^2 = l^2 + 2k^{-1}clh + k^{-2}h^2 = (x + k^{-1}v)^2 \quad (1.3.18)$$

$$|l - k^{-1}h| \leq L \leq l + k^{-1}h, \quad \gamma = \text{sign}(1 - l)$$

Из (1.3.18) следует, что $t_f^* = t_f^{(1)}$ при $|l - 1| > k^{-1}h$.

На основе формулы (1.3.4) и найденного приближённого выражения (1.3.18) для функции Беллмана дифференцированием по v второго представления функции L^2 получим синтез оптимального по быстродействию управления движением динамического объекта в сильно вязкой среде

$$u_s^*(x, v, k) = \gamma (x + k^{-1}v) L^{-1} \quad (1.3.19)$$

Управление u_s^* из (1.3.19) есть единичный вектор, направленный приближённо (при $k^{-1}h \ll l$) к центру или от центра сферы при $l \gtrless 1$ соответственно. В процессе квазиоптимального движения имеют место установившееся значение скорости $v \approx v_* = \text{const}$ и $x \simeq x_*$ — равномерное и прямолинейное перемещение объекта в точку x^f на сфере

$$v_* = \frac{\gamma}{k} x^f, \quad x_* = x^0 + \frac{v^0}{k} + v_* \left(t - \frac{1}{k} \right) \quad (1.3.20)$$

$$u_p^* = \gamma x^f, \quad x^f = \left(x^0 + \frac{v^0}{k} \right) \left(1 - \frac{\gamma}{k} \left(t_f^* - \frac{1}{k} \right) \right)^{-1}, \quad t_f^* = t_f^{(1)}$$

Уточнение квазиоптимального решения (1.3.18)–(1.3.20) связано с учётом величин порядка $\exp(-kt_f)$, которые экспоненциально малы, причём $t_f \sim k$. Это обстоятельство позволяет использовать квазиоптимальные управления u_s^* из (1.3.19) и u_p^* из (1.3.20) в широкой области значений фазовых переменных. Основное требование его применимости заключается в достаточно большой длительности процесса, которая может быть оценена априори.

4. Геометрический подход к решению задачи оптимального управления. Воспользуемся симметрией системы и свойством эквивалентности двумерной задаче, отмеченными в начале §1.3. Введём соответствующие двумерные векторы x , v и представим их в тригонометрической форме, в частности

$$\begin{aligned} x_1^f &= \cos \varphi, & x_2^f &= \sin \varphi; & x_1^0 &= l \cos \alpha, & x_2^0 &= l \sin \alpha \\ v_1^0 &= h \cos \beta, & v_2^0 &= h \sin \beta; & l &= \sqrt{x_1^{02} + x_2^{02}}, & h &= \sqrt{v_1^{02} + v_2^{02}} \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Здесь φ — неизвестный угол, подлежащий определению из конечного условия (1.3.12) для $x(t_f)$ совместно с искомым временем быстрогодействия t_f . Подставим (1.3.21) в (1.3.12); посредством простых преобразований получим два соотношения

$$V(t_f) = \frac{l \sin(\varphi - \alpha)}{h \sin(\beta - \varphi)}, \quad 1 - \gamma U(t_f) = l \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta - \varphi)} \quad (1.3.22)$$

Функции $V(t)$ и $U(t)$ определены в (1.3.11); напомним, что $V \geq 0$ и $U \geq 0$ при $t \geq 0$.

Рассмотрим отдельно два случая: когда начальная точка x^0 лежит вне окружности ($l > 1$) и внутри её ($l < 1$).

Пусть $\gamma = -1$, т. е. $l > 1$; тогда из второго выражения (1.3.22) следует условие

$$l \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta - \varphi)} \geq 1 \quad (1.3.23)$$

Из первого равенства (1.3.22) можно найти двустороннее неравенство

вида

$$-\frac{1}{k} \leq \frac{l \sin(\varphi - \alpha)}{h \sin(\varphi - \beta)} \leq 0 \quad (1.3.24)$$

Без ограничения общности можно положить $\beta = 0$, т. е. повернуть систему координат так, чтобы вектор начальной скорости и ось абсцисс были параллельны. В этом случае из (1.3.23), (1.3.24) получим систему неравенств

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \geq \frac{1}{l}, \quad \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} \leq 0, \quad \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} \geq -\frac{h}{lk} \quad (1.3.25)$$

Согласно первому из неравенств (1.3.25) одновременно либо $0 \leq \alpha$, $\varphi \leq \pi$, либо $\pi \leq \alpha$, $\varphi \leq 2\pi$. Тогда из второго неравенства (1.3.25) следует, что в первом случае должно выполняться неравенство $\alpha \geq \varphi$, а во втором — $\alpha \leq \varphi$. Для последовательности координатных четвертей от I до IV имеют место неравенства для неизвестного угла φ

$$\begin{aligned} \sin \varphi &\leq \sin \alpha \quad (\text{I}), & \sin \alpha &\leq \sin \varphi \leq l \sin \alpha \quad (\text{II}) \\ l \sin \alpha &\leq \sin \varphi \leq \sin \alpha \quad (\text{III}), & \sin \varphi &\geq \sin \alpha \quad (\text{IV}) \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

В силу симметрии ограничимся верхней полуплоскостью ($x_2^0 \geq 0$, т. е. I и II четвертями). Из (1.3.26) следует интуитивно понятный вывод, что ордината конечной точки неотрицательна и не превосходит ординаты начальной точки. Аналогичное утверждение имеет место для нижней полуплоскости.

Пусть теперь $\gamma = 1$, т. е. $l < 1$ (начальная точка внутри круга). Как и в предыдущем случае, получим неравенства

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \leq \frac{1}{l}, \quad \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} \leq 0 \quad (1.3.27)$$

Отсюда следует, что для верхней полуплоскости $\alpha \geq \varphi$.

Теперь используем выражения (1.3.22) для нахождения неизвестных φ , t_f . Простыми преобразованиями приведём (1.3.22) к следующему

виду, позволяющему исключить t_f

$$t_f = \frac{k}{\gamma} - \frac{l \sin(\varphi - \alpha)}{h \sin(\varphi - \beta)} + \frac{kl \sin(\beta - \alpha)}{\gamma \sin(\varphi - \beta)} \quad (1.3.28)$$

$$\frac{l \sin(\varphi - \alpha)}{h \sin(\varphi - \beta)} = \frac{1}{k} (\exp(-kt_f) - 1)$$

Подстановка t_f из первого во второе уравнение (1.3.28) приводит к трансцендентному уравнению относительно φ , которое может быть решено численно. При $kt_f \gg 1$, пренебрегая экспоненциальным слагаемым, получим тригонометрическое уравнение для определения угла φ , корни φ_i которого вычисляются аналитически. При этом следует выбирать величину φ_i , доставляющую времени $t_f^{(i)}$ минимальное положительное значение t_f^* согласно первому выражению (1.3.28).

5. Результаты математического моделирования. Все расчёты были проведены при $\beta = 0$, т. е. начальная скорость была сонаправлена с осью абсцисс. Это позволило не только несколько упростить формулы, но и, что более существенно, уменьшить число параметров. Во всех случаях, если иное не оговорено особо, было взято $k = 1$.

На рис. 16 изображены типичные оптимальные траектории. Набор кривых, имеющих некоторую общую начальную точку Z , будем называть семейством Z . Траектории, принадлежащие одному семейству, имеют различные значения модуля начальной скорости h . Каждая кривая внутри семейства имеет свой номер j , поэтому будем обозначать её Z_j .

Наибольший интерес представляет семейство A . Точке A соответствуют значения $l_A = 2$ и $\alpha_A = 145^\circ$. При изменении h от нуля до $h_c \approx 3.936$ угол φ монотонно убывает и конечная точка траектории непрерывно перемещается по окружности. Время быстродействия также изменяется непрерывно. В частности, величинам h , равным 2, 3 и 3.93, соответствуют кривые A_1 , A_2 и A_3 . При $h = h_c$ происходит скачок в изменении значений как φ , так и времени быстродействия. Напри-

мер, траектория A_4 , построенная при $h = 3.94$, значительно отличается от A_3 , хотя различие в величине начальной скорости составляет всего 0.01. При дальнейшем увеличении h от h_c до бесконечности никаких скачков не наблюдается, угол φ убывает монотонно, стремясь к нулю. Иллюстрацией к этому могут служить траектории A_5 и A_6 , рассчитанные при $h = 5$ и 6. Ни одно из остальных семейств таким свойством не обладает. В частности, скачков функции Беллмана не наблюдается для точки C с параметрами $l_C = 2$ и $\alpha_C = -120^\circ$. В этом семействе траектории C_1 , C_2 и C_3 начинаются при значениях h , равных 1, 2 и 3 соответственно.

Поясним описанное явление. Возьмём $\beta = 0$ и приведём (1.3.28) к виду

$$1 - \frac{\gamma}{k} t_f + \frac{\gamma}{k^2} (1 - \exp(-k t_f)) = \frac{l \sin \alpha}{\sin \varphi} \quad (1.3.29)$$

$$h = \frac{lk \sin(\alpha - \varphi)}{(1 - \exp(-k t_f)) \sin \varphi} \quad (1.3.30)$$

Поскольку точка A находится вне круга, то $\gamma = -1$. Тогда левая часть (1.3.29) является монотонной гладкой функцией t_f , растущей от единицы до бесконечности при значениях t_f , изменяющихся от нуля до бесконечности. Так как A находится в верхней полуплоскости, то $l \sin \alpha > 0$. Тогда из (1.3.29) следует, что при монотонном росте значений t_f значения $\sin \varphi$ монотонно уменьшаются, причём для каждого φ всегда можно найти единственное значение t_f из (1.3.29) при условии $\sin \varphi \leq l \sin \alpha$, что, в свою очередь, следует из (1.3.26). Точка A находится во второй координатной четверти, причём $l_A \sin \alpha_A > 1$. Тогда φ может быть как больше, так и меньше $\pi/2$. Величина t_f уменьшается при уменьшении φ от α до $\pi/2$ и увеличивается при уменьшении φ от $\pi/2$ до нуля. Следовательно, минимально возможное время достижения сферы из заданной начальной точки может быть найдено решением (1.3.29) относительно t_f при условии $\varphi = \pi/2$. Соответствующее

значение h_p получится согласно (1.3.30).

Соотношение (1.3.30) после подстановки φ из (1.3.29) можно рассматривать как зависимость $h = h(t_f)$, которая не столь проста, как $\varphi = \varphi(t_f)$. На рис. 17 представлены кривые 1 и 2 для точек A и C соответственно. При $h = 0$ оба графика начинаются в одной точке $\tau_0 \approx 1.841$, поскольку $l_A = l_C$. По мере роста h соответствующие значения t_f сначала уменьшаются до $\tau_1 \approx 0.596$ и $\tau_2 \approx 1.511$. При этом $h_1 \approx 3.647$ и $h_2 \approx 1.283$ и графика имеют вертикальные касательные. Соответствующие траектории оканчиваются на “северном полюсе” для точки A и на “южном полюсе” для точки C . Первый график при дальнейшем росте h от h_1 до h_c показывает непрерывное увеличение t_f от τ_1 до $t_c \approx 0.672$, после чего, из-за локального минимума функции $h = h(t_f)$, происходит скачок времени оптимального быстрогодействия до величины $T_c \approx 1.924$. Второй график локального минимума не имеет, что означает отсутствие скачка. При больших h обе зависимости показывают непрерывный рост t_f .

Таким образом, для некоторых l и α существует такое значение h , при котором происходит скачок ΔT времени быстрогодействия, а для некоторых — нет. Линии уровня функции $\Delta T = \Delta T(l, \alpha)$ изображены на рис. 18; соответствующие значения показаны числами у кривых. В области, лежащей ниже линии уровня 0, скачка нет. Далее показаны уровни 2 и 4. Самый верхний график удовлетворяет условию $l \sin \alpha = 1$. Здесь скачок бесконечно велик. Поясним это обстоятельство с помощью семейства B на рис. 16. Точка B соответствует параметрам $l_B = 2$ и $\alpha_B = 170^\circ$. Траектории B_1 , B_2 и B_3 построены для значений h , равных 0.01, 1 и 4. Время быстрогодействия при этом приблизительно равно 1.832, 1.014 и 0.285. Заметим, что если $l \sin \alpha \leq 1$, как у точки B , то $\alpha \leq \varphi < \pi/2$ для любой точки, лежащей вне круга во второй или третьей координатных четвертях. Нетрудно показать, что тогда при $h \rightarrow \infty$ время $t_f \rightarrow 0$. Если же $l \sin \alpha > 1$, то при $h \rightarrow \infty$ время $t_f \rightarrow \infty$,

как для семейств A и C . Следовательно, при $l \sin \alpha = 1$ происходит разрыв функции Беллмана. Поскольку на рис. 18 показана максимально возможная величина скачка, то для $l \sin \alpha = 1$ она равна бесконечности. По мере приближения к ней в плоскости параметров l и α величина ΔT резко возрастает. По изложенным ранее причинам выше этой границы $\Delta T \equiv 0$.

Итак, для любого l существует такое значение α , при котором возникает скачок времени быстрого действия. На рис. 19 показана зависимость этого значения от l и коэффициента вязкости среды k . Из графика следует, что с ростом k значения α постепенно увеличиваются. Другими словами, при больших величинах k нулевая линия уровня на рис. 18 располагалась бы выше, тем самым приближаясь к кривой $l \sin \alpha = 1$.

Разрыв функции Беллмана $T = T(h, l)$ хорошо виден на рис. 20. График построен при $k = 1$ и $\alpha = 145^\circ$, что соответствует направлению на точку A (см. рис. 16).

Для точек с положительными абсциссами, лежащих вне круга, а также для всех точек внутри круга, функция Беллмана непрерывна. На рис. 16 точка D имеет параметры $l_D = 2$ и $\alpha_D = -30^\circ$. Для траекторий D_1 , D_2 и D_3 значения h равны 0.01, 1 и 2, а время оптимального быстрого действия (приблизённо) 1.850, 2.790 и 3.798 соответственно. Основное отличие от точек вне круга с отрицательной абсциссой и превышающей единицу (по модулю) ординатой состоит в том, что здесь t_f монотонно растёт как функция h .

Точка E внутри круга имеет параметры $l_E = 0.25$ и $\alpha_E = 45^\circ$. Для траекторий E_1 , E_2 и E_3 значения h равны 0.01, 0.25 и 5, а время оптимального быстрого действия (приблизённо) 1.527, 1.335 и 0.173 соответственно. Убывание t_f с ростом h делает это семейство похожим на семейство B .

Точка F имеет параметры $l_F = 0.25$ и $\alpha_F = -145^\circ$. Для траекторий F_1 , F_2 , F_3 и F_4 значения h равны 0.01, 0.25, 0.5 и 1, а время оптималь-

ного быстрогодействия (приближённо) 1.543, 1.668, 1.551 и 1.184 соответственно. То, что t_f зависит от h хотя и непрерывно, но не монотонно, придаёт некоторое сходство этому семейству с семейством C . Однако если в семействе C траектория C_1 , как имеющая конечную точку ближе к “южному полюсу”, даёт минимальное значение функции Беллмана, то в семействе F всё обстоит наоборот. Кроме того, здесь при $h \rightarrow \infty$ время $t_f \rightarrow 0$, тогда как в семействе C при $h \rightarrow \infty$ время $t_f \rightarrow \infty$.

§1.4. Уклонение от неподвижной сферы с помощью ограниченной силы

1. Постановка задачи. В §1.2 и §1.3 наряду с поиском управления, обеспечивающего возможно быстрый возврат системы в окрестность заданной точки, также были построены алгоритмы, позволяющие покинуть “нежелательную” сферу в фазовом пространстве за кратчайшее время. Как оказалось, при определённых начальных условиях оптимальные траектории могут один или два раза пересекать поверхность последней. Возникает вопрос об определении множества начальных данных, для которых возможно уклонение без пересечения сферы. Исследуем задачу об оптимальном уклонении динамического объекта малых линейных размеров под действием ограниченной силы от такой области сферической формы. Задача уклонения сферического объекта от сферы или точки эквивалентна рассматриваемой.

Рассмотрим некоторую допустимую траекторию движения материальной точки при условиях, описанных ниже. Найдём на траектории такую точку или множество точек, расстояние от которой до начала координат минимально. Для краткости назовём эту точку и соответствующее расстояние критическими. Для каждого набора начальных условий исследуем всё множество возможных траекторий, образующееся перебором допустимых управлений, и среди них найдём имеющую

максимальное критическое расстояние. Затем определим такое подмножество начальных условий, для которого это расстояние не меньше радиуса препятствия. Следовательно, невозможно избежать встречи с препятствием, если начальные условия не принадлежат найденному подмножеству. Если уклонение возможно, то не существует траектории, имеющей большее критическое расстояние, чем та, которая может быть найдена по соответствующим формулам. С точки зрения предотвращения попадания на сферу представляется естественным назвать такую траекторию оптимальной, поскольку она проходит на максимально возможном расстоянии от препятствия.

Как и в §1.2, исследуем движение материальной точки массы m в n -мерном евклидовом пространстве ($n \geq 1$) под действием ограниченной по модулю управляющей силы F при наличии непроницаемой сферы (препятствия) с произвольными фиксированными центром ζ и радиусом $R > 0$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F, \quad |F| \leq F_0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \\ S_R^n &= \{x : |x - \zeta| = R\}, \quad |x_0 - \zeta| > R \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Для управляемой системы (1.4.1) рассмотрим задачу уклонения геометрической точки x от препятствия S_R^n в любой момент времени $t > 0$, т. е. $|x(t) - \zeta| > R$, без ограничений на скорость $\dot{x} = v$. Естественно, не при всяких начальных данных x_0, v_0 задача имеет решение. Кроме того, она оказывается содержательной, если вектор скорости v_0 лежит внутри конуса с вершиной в точке $x = x_0$ и образующими, которые касаются сферы.

Отметим, что система (1.4.1) определяется совокупностью $3(n+1)$ параметров: скалярами m, F_0, R и векторами x_0, v_0, ζ . Введём безразмерные переменные $u = F/F_0, (x - \zeta)/R \rightarrow x, t/\tau \rightarrow t, v\tau/R \rightarrow v$,

$\tau = (mR/F_0)^{1/2}$. Тогда вместо системы (1.4.1) получим (см. §1.2)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, & \dot{v} &= u, & x(0) &= x_0, & v(0) &= v_0; & |u| &\leq 1 \\ S_1^n &= \{x : |x| = 1\}, & |x_0| &> 1 \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Из центральной симметрии следует, что общая задача при $n \geq 2$ эквивалентна задаче на плоскости ($n = 2$). Если векторы x_0 и v_0 неколлинеарны, то эта плоскость определяется однозначно, иначе — с точностью до произвольного поворота. Случай $n = 1$ (движение по прямой, S_1^1 — отрезок) достаточно прост и особого интереса не представляет.

Рассмотрим множество достижимости $D(t, x_0, v_0)$ согласно §3.1 для (1.4.2). Поскольку на скорость точки никаких ограничений не наложено, то будем изучать это множество только в пространстве координат. Задача уклонения имеет решение, если в D существует хотя бы одна траектория, каждая точка которой находится на единичном (или большем) расстоянии от начала координат. Известно [160], что в рассматриваемом случае множество достижимости будет компактным и выпуклым. Тогда можно исследовать только его граничные точки. Для нахождения этих точек нужно решить задачу оптимального управления с функционалом

$$(c_x, x(T)) \rightarrow \min_u, \quad |u| \leq 1 \quad (1.4.3)$$

и системой (1.4.2). Здесь T — произвольный фиксированный момент времени, а c_x — произвольный единичный вектор. Перебрав все возможные c_x в соотношении (1.4.3), можно построить искомую границу множества достижимости в момент T . Для этого момента времени среди всех точек границы следует найти самую далёкую от начала координат:

$$J = |x(T)| \rightarrow \max_{c_x}, \quad |c_x| \leq 1 \quad (1.4.4)$$

Решив задачу (1.4.4) для всех $T > 0$, получим семейство траекторий $x^*(T)$, наиболее отклоняющихся от начала координат среди всех воз-

возможных траекторий движения системы. Найдём среди них ту, конечная точка которой ближе всех к началу координат:

$$\Phi = |x^*(T)| \rightarrow \inf_T, \quad 0 < T < \infty \quad (1.4.5)$$

Если эта точка не лежит внутри сферы, то, как будет показано ниже, исходная задача имеет решение, и оно найдено.

Далее можно решить задачу для любых начальных условий и определить границу G области M допустимых начальных условий. Здесь

$$M = \{x, v : \Phi(x, v) > 1\}, \quad G = \{x, y : \Phi(x, v) = 1\} \quad (1.4.6)$$

Таким образом, для оптимального уклонения необходимо решить последовательно четыре задачи: 1) определить граничные точки множества достижимости; 2) найти наиболее удалённую от начала координат точку этого множества для каждого момента времени $t = T < \infty$; 3) отыскать ближайшую к началу координат точку на соответствующей траектории; 4) определить границы области допустимых начальных условий.

Решение первых двух задач находится аналитически сравнительно просто. Нахождение минимизирующей траектории $x^*(T)$ сопряжено с некоторыми вычислительными затратами. Определение границы допустимой области G , т. е. решение четвёртой задачи, оказывается возможным аналитически.

2. Построение траектории, максимально уклоняющейся от начала координат. Искомое решение задачи (1.4.2), (1.4.3) строится с помощью необходимых условий оптимальности принципа максимума [122]; имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, & \dot{v} &= u^*, & x(0) &= x_0, & v(0) &= v_0, & u^* &= q|q|^{-1} \\ \dot{p} &= 0, & \dot{q} &= -p, & p(T) &= -c_x, & q(T) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Здесь p, q — сопряженные x, v переменные.

Из соотношений (1.4.7) следует, что p — единичный постоянный вектор. Определение $q(t)$ и подстановка в выражение для u^* приводит к выражениям

$$u^* = -c_x, \quad v = v_0 - c_x t, \quad x = x_0 + v_0 t - c_x t^2 / 2, \quad |c_x| = 1 \quad (1.4.8)$$

Для решения задачи (1.4.4) с учетом выражений (1.4.8) нужно найти максимум

$$\begin{aligned} J[c_x] &= \left| x_0 + v_0 T - c_x \frac{T^2}{2} \right| = \left(x_0^T - (x_0^T, c_x) T + \frac{T^4}{4} \right)^{1/2} \rightarrow \max_{c_x}, \quad |c_x| \leq 1 \\ J[c_x^*] &= |x_0^T| + \frac{T^2}{2}, \quad |x_0^T| = (l^2 + 2clhT + h^2 T^2)^{1/2}, \quad c_x^* = -\frac{x_0^T}{|x_0^T|} \quad (1.4.9) \\ x_0 + v_0 T &\equiv x_0^T \neq 0, \quad l = |x_0|, \quad h = |v_0|, \quad c = (x_0, v_0) l^{-1} h^{-1} = \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Таким образом, при $|x_0^T| \neq 0$ решение задач (1.4.2), (1.4.3) и (1.4.2), (1.4.4) строится однозначно согласно соотношениям (1.4.8), (1.4.9). Очевидно, при $c \neq -1$ неравенство $|x_0^T| \neq 0$ имеет место. Рассмотрим сперва эту общую ситуацию; случай $c = -1$ исследуется далее особо. Оптимальное управление u^* из (1.4.8), (1.4.9) имеет простую геометрическую интерпретацию: оно должно быть коллинеарным ненулевому вектору x при $t = T$ для $u = 0$, который получается в результате движения точки по инерции.

3. Поиск ближайшей к началу координат точки на траектории, максимально уклоняющейся от начала координат. Для решения задачи (1.4.2), (1.4.5) функционал $J^* = J(c_x^*)$ в (1.4.9) рассмотрим как функцию аргумента $T > 0$ и параметров $l > 1$, $h > 0$, $-1 < c < 0$. Ставится задача определения минимального значения $\Phi = \inf_T J^*$ и соответствующей величины T^* . В силу структурных свойств J^* искомые величины Φ , T^* будут функциями указанных трёх параметров l , h , c . Количество параметров можно уменьшить, если проинтегрировать нормировку функционала J^* на величину l , а аргументов h и

T на \sqrt{l} , т. е. вместо задачи (1.4.5) рассмотреть задачу минимизации

$$\begin{aligned} J^*/l &= J_l^*(\theta, \gamma, c) \equiv L + \theta^2/2 \rightarrow \inf_{\theta} \\ L &\equiv (1 + 2c\gamma\theta + \gamma^2\theta^2)^{1/2} = |x_0^T|l^{-1} \\ -1 < c < 0, \quad \gamma &= h/\sqrt{l} > 0, \quad \theta = T/\sqrt{l}, \quad 0 < \theta < \infty \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Первая производная функции $J_l^*(\theta, \gamma, c)$ по θ

$$dJ_l^*/d\theta = \gamma(c + \gamma\theta)/L(\theta, \gamma, c) + \theta \quad (1.4.11)$$

для любых фиксированных значений $\gamma > 0$ и $-1 < c < 0$ отрицательна при $\theta = 0$ и положительна при $\theta \rightarrow \infty$. Найдём вторую производную

$$d^2J_l^*/d\theta^2 = \gamma^2(1 - c^2)/L^3 + 1 \quad (1.4.12)$$

Функция (1.4.12) положительна при любых $\theta > 0$, $\gamma > 0$ и $|c| < 1$. Следовательно, $J_l^*(\theta, \gamma, c)$ всегда имеет единственный минимум по θ при представляющих здесь интерес значениях параметров. Его можно найти, приравняв выражение (1.4.11) нулю. Имеем

$$\gamma(c + \gamma\theta) + \theta L(\theta, \gamma, c) = 0, \quad -1 < c < 0, \quad \gamma > 0 \quad (1.4.13)$$

Соотношение (1.4.13) можно свести к уравнению четвёртой степени относительно θ , если перенести θL направо и возвести обе части уравнения в квадрат. Получим

$$\gamma^2\theta^4 + 2c\gamma\theta^3 + (1 - \gamma^4)\theta^2 - 2c\gamma^3\theta - c^2\gamma^2 = 0 \quad (1.4.14)$$

Можно сначала найти все корни θ по известным формулам, а затем единственный подходящий $\theta^* > 0$ определить непосредственной подстановкой в уравнение (1.4.13). Соответствующие управления и траектории согласно соотношениям (1.4.8), (1.4.9) имеют вид

$$\begin{aligned} u^* &= (x_0 + v_0 T^*) |x_0 + v_0 T^*|^{-1}, \quad T^* = \theta^* |x_0|^{1/2} \\ x^*(t) &= x_0 + v_0 t + u^* t^2/2, \quad v^*(t) = v_0 + u^* t, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Теперь необходимо убедиться в том, что найденная траектория $x^*(t)$ не имеет более близких к началу координат точек, чем $x_*^* = x^*(T^*)$. Введём новую независимую переменную $\delta = t - T^*$. Тогда

$$\begin{aligned} x^{*2}(\delta) &= (x_*^* + v_*^* \delta + u^* \delta^2/2)^2 = x_*^{*2} + 2(x_*^*, v_*^*) \delta + \\ &+ (x_*^*, u^*) \delta^2 + v_*^{*2} \delta^2 + (v_*^*, u^*) \delta^3 + u^{*2} \delta^4/4, \quad v_*^* = v^*(T^*) \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Производная $dx^{*2}(\delta)/d\delta$ при $\delta = 0$ обращается в нуль при тех же значениях параметров, что и выражение (1.4.11). Тогда скалярное произведение (x_*^*, v_*^*) равно нулю. Из соотношений (1.4.3), (1.4.4) и (1.4.9) можно получить, что $u^* = x_*^*/|x_*^*|$. Тогда скалярное произведение (v_*^*, u^*) тоже равно нулю. Имеем

$$\begin{aligned} x^{*2}(\delta) &= x_*^{*2} + (x_*^*, u^*) \delta^2 + v_*^{*2} \delta^2 + u^{*2} \delta^4/4 \\ d^2 x^{*2}/d\delta^2 &= 2(x_*^*, u^*) + 2v_*^{*2} + 3u^{*2} \delta^2 \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Вторая производная, определяемая вторым равенством (1.4.17), всегда положительна. Следовательно, при $t < T^*$ объект приближается к началу координат с убывающей скоростью, а затем удаляется с возрастающей радиальной составляющей скорости. Поскольку $x^{*2}(\delta)$ — симметричная относительно нуля функция δ , то изменение расстояния при приближении к началу координат происходит по тому же закону, что и при удалении.

Исследуем оптимальное значение θ , определяемое согласно уравнению (1.4.13), как функцию γ и c . Найдём неявную производную этой функции по γ при постоянном c и приравняем нулю. Получим

$$c + 2\gamma\theta + \theta(c\theta + \gamma\theta^2)/L = 0 \quad (1.4.18)$$

Уравнения (1.4.13), (1.4.18) определяют кривую $\gamma(c)$ (или $c(\gamma)$), для которой функция $\theta^*(\gamma, c)$ достигает экстремума по $\gamma > 0$ при заданном значении $c < 0$. Преобразуем эти соотношения для построения указанной кривой, исключив неизвестную θ . Выразим L из уравнения (1.4.13)

и подставим в равенство (1.4.18). Тогда получим вспомогательное равенство вида

$$\frac{\gamma(c + \gamma\theta)}{\theta} = \theta \frac{c\theta + \gamma\theta^2}{c + 2\gamma\theta} \quad (1.4.19)$$

Перепишем соотношение (1.4.19) в виде равенства нулю полинома по степеням θ , умножим это равенство на γ и сложим с равенством (1.4.14). Находим

$$\theta(c\gamma\theta^2 + (1 + \gamma^4)\theta + c\gamma) = 0 \quad (1.4.20)$$

Поскольку $\theta \neq 0$, имеем квадратное уравнение относительно θ .

С другой стороны, обе части равенства (1.4.19) можно разделить на $c + \gamma\theta$, поскольку уравнение (1.4.13) на множестве $c = -\gamma\theta$ имеет решение лишь при $L = 0$, что, согласно соотношениям (1.4.9), (1.4.10), возможно только при $c = -1$. С учётом этого обстоятельства приведём равенство (1.4.19) к виду

$$\theta^3 = 2\gamma^2\theta + c\gamma \quad (1.4.21)$$

Подстановка θ^3 из (1.4.21) в уравнение (1.4.14) даёт соотношение, позволяющее исключить члены нулевой и первой степени по θ . Действительно, имеем

$$\gamma^2\theta^4 + (1 - \gamma^4)\theta^2 + 2c\gamma^3\theta + c^2\gamma^2 = 0 \quad (1.4.22)$$

Теперь сложим (1.4.22) и (1.4.14); получим аналогичное (1.4.20) вспомогательное равенство вида

$$\gamma^2\theta^2 + c\gamma\theta + 1 - \gamma^4 = 0 \quad (1.4.23)$$

Выразим величину θ^2 из (1.4.23) и подставим в выражение (1.4.20), разделённое на θ . Получим линейное уравнение относительно θ , из которого найдём

$$\theta = \frac{c}{\gamma} \frac{1 - 2\gamma^4}{1 + \gamma^4 - c^2}, \quad \gamma = \gamma(c) \quad (c = c(\gamma)) \quad (1.4.24)$$

Поскольку, как следует из (1.4.13), функция $\theta = \theta(\gamma, c)$ при постоянном c обращается в нуль при $\gamma = 0$ и $\theta \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow +\infty$, то её единственный экстремум по γ (1.4.24) есть максимум.

Выведем соотношение между c и γ , которое выполняется для этого максимума. После подстановки (1.4.24) в (1.4.23) следует искомая связь между γ и c

$$\frac{c^2\gamma^4(4\gamma^4 + c^2 - 5) - (\gamma^4 - 1)(\gamma^4 + 1)^2}{(\gamma^4 + 1 - c^2)^2} = 0 \quad (1.4.25)$$

Числитель дроби (1.4.25) — полином второй степени относительно c^2 . Его корни имеют вид

$$c_{1,2}^2 = (2\gamma^2)^{-1} \left(\gamma^2(5 - 4\gamma^4) \pm |2\gamma^4 - 1| (5\gamma^4 - 4)^{1/2} \right) \quad (1.4.26)$$

и определяют искомую зависимость $c(\gamma)$. Поскольку оба корня существуют, если $\gamma^4 \geq 4/5$, то $2\gamma^4 - 1 > 0$. Итак,

$$c_{1,2} = -2^{-1/2}\gamma^{-1} \left(\gamma^2(5 - 4\gamma^4) \pm (2\gamma^4 - 1) (5\gamma^4 - 4)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (1.4.27)$$

Из (1.4.25) следует, что при $c \rightarrow 0$ и при $c \rightarrow -1$ значение $\gamma \rightarrow 1$. Обе зависимости (1.4.27) представлены на врезке рис. 21. Для абсциссы крайней левой точки кривой, т. е. при $\gamma = (4/5)^{1/4} \approx 0.946$, график для c_1 переходит в график для c_2 . Интересно отметить, что при варьировании c от -0 до $-1 + 0$ величина γ изменяется незначительно (примерно на 6%).

4. Случай $c = -1$ и особый случай. Найдём минимум в (1.4.10) при $c = -1$. Имеем

$$J_l^*(\theta, \gamma, -1) \equiv |1 - \gamma\theta| + \theta^2/2 \rightarrow \inf_{\theta} \quad (1.4.28)$$

Тогда искомое значение θ будет равно

$$\theta^* = \gamma, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (1.4.29)$$

Данный случай отвечает движению по прямой с управлением, равным по модулю единице и направленным против скорости. Представляется естественным назвать такое управление “торможением”. Указанный режим является предельным при $c \rightarrow -1$ и $0 < \gamma < \gamma^*$, где γ^* — корень уравнения (1.4.25). Следовательно, эту ситуацию и при $c \neq -1$ можно условно назвать “режимом торможения”.

При остальных значениях γ получим

$$\theta^* = 1/\gamma, \quad \gamma \geq 1 \quad (1.4.30)$$

Этот случай, как следует из (1.4.9) и (1.4.10), соответствует особой ситуации $L = 0$ (т. е. $|x_0^T| = 0$). Она имеет место лишь когда $c = -1$ и $l = hT$. При этом множество достижимости в момент T — сфера с центром в начале координат и радиусом $T^2/2$. Следовательно, экстремум в (1.4.4) достигается на любом векторе c_x . Тем не менее решение (1.4.30) задачи (1.4.5) имеет физический смысл — это время достижения точки, ближайшей к началу координат. Поскольку указанная точка должна лежать на границе множества достижимости, то искомое управление u^- не зависит от времени.

Для определения u^- выберем любую из плоскостей в пространстве, где движется точка, так, чтобы она содержала вектор начальной скорости. Без ограничения общности можно считать, что в начальный момент времени скорость направлена по оси абсцисс в начало координат. Запишем формулу для радиус-вектора точки

$$x(t) = x_0 + v_0 t + u^- t^2/2, \quad u^- = \text{const}, \quad |u^-| = 1 \quad (1.4.31)$$

Здесь u_1^- , u_2^- — компоненты вектора u^- . Точка x_0 имеет абсциссу l , а точка v_0 — абсциссу $-h$. Ординаты у обеих точек равны нулю. В соответствии с (1.4.31) квадрат радиус-вектора будет иметь вид

$$x^2(t) = (l - ht)^2 + t^2 u_1^- l - t^3 u_1^- h + t^4/4 \quad (1.4.32)$$

Ближайшую к началу координат точку на траектории можно определить, приравняв к нулю производную $dx^2(t)/dt$. Получим

$$-2h(l - hT) + Tu_1^-(2l - 3Th) + T^3 = 0 \quad (1.4.33)$$

Здесь $T = T(u_1^-)$ — время достижения точки, ближайшей к началу координат. Искомое управление u_1^- должно обеспечивать максимум расстояния от этой точки до начала координат. Следовательно, необходимо приравнять к нулю производную $dx^2(T(u_1^-))/du_1^-$. Снова воспользуемся (1.4.32) и получим

$$\frac{dx^2(T(u_1^-))}{du_1^-} = \frac{\partial x^2}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial u_1^-} + \frac{\partial x^2}{\partial u_1^-} \equiv \frac{\partial x^2}{\partial u_1^-} = T^2l - T^3h = 0 \quad (1.4.34)$$

Здесь было использовано то, что производная $\partial x^2/\partial T$ равна нулю в силу (1.4.33). Из последнего равенства (1.4.34) получим, что $T = l/h$, как и следовало ожидать. Подстановка T в (1.4.33) даёт

$$u_1^- = l/h^2, \quad u_2^- = (1 - l^2/h^4)^{1/2} \quad (1.4.35)$$

Поскольку рассматривается случай $\gamma \equiv h/l^{1/2} > 1$, то формулы (1.4.35) всегда имеют смысл и определяют оптимальное управление в особом случае (1.4.30).

В процессе движения направление вектора скорости будет всё больше отклоняться от начального. Следовательно, при $\gamma > \gamma^*$ можно говорить об “уклонении”. Если же $\gamma = \gamma^*$, то “уклонение” плавно переходит в “торможение” и наоборот. В частности, при $\gamma^* = 1$ формулы (1.4.35) дают управление, направленное против скорости, так что и при $c = -1$ резкое изменение режима отсутствует.

Теперь, когда исследованы все случаи, представляющие практический интерес, можно построить зависимость $\theta = \theta(\gamma)$ при различных c . Она представлена на рис. 21. Все максимумы почти соответствуют единице по оси абсцисс, но лежат левее ее, как показано на врезке.

Исключение составляет зависимость для $c = -1$, максимум которой достигается точно в единице, где кривая имеет излом. Части графиков, лежащие левее максимума, соответствуют режиму “торможения”, в то время как лежащие правее отвечают режиму “уклонения”.

Для каждого значения θ существуют два значения γ , причём меньшее отвечает первому режиму, а большее — второму. С точки зрения механики такая картина вполне объяснима. Пусть в начале движения вектор скорости направлен почти в начало координат. Тогда время достижения точки, ближайшей к этому началу, будет одинаково как при небольшой стартовой скорости, позволяющей быстро затормозить, так и при значительной, когда точка быстро приблизится к началу координат, осуществляя уклонение. При промежуточных значениях скорости потребуется большее время либо на торможение, либо на сокращение расстояния до начала координат при уклонении. Заметим, что чем ближе значение c к предельному $c = -1$, тем сильнее указанная разница во времени.

5. Нахождение множества начальных точек фазового пространства, позволяющих осуществить уклонение. Построим искомую границу множества векторов x_0, v_0 , при которых можно уклониться от сферического препятствия в начале координат. Как установлено выше, решение задачи может быть выражено посредством трёх переменных l, γ, c , что свидетельствует об эквивалентности случая $n \geq 2$ случаю $n = 2$ в ситуации общего положения.

Допустимое множество M и его граница G , в соответствии с (1.4.6) и (1.4.10) представимы выражениями

$$\begin{aligned} J_l^*(\theta^*, \gamma, c) &> l^{-1}, & (x, v \in M) \\ J_l^*(\theta^*, \gamma, c) &= l^{-1}, & (x, v \in G) \\ x_0 = x \notin S_1^n, \quad v_0 = v, \quad \gamma > 0, \quad -1 \leq c < 0, \quad l > 1 \end{aligned} \tag{1.4.36}$$

Следовательно, предельное расстояние, которое позволяет осуществить

уклонение, можно неявно задать формулами

$$l(\gamma, c) = (L + \theta^2/2)^{-1}, \quad \gamma(c + \gamma\theta) + \theta L = 0 \quad (1.4.37)$$

Поскольку нормированное время наибольшего сближения θ^* определяется единственным образом как функция параметров γ, c согласно полученным выше соотношениям, то функция $l(\gamma, c)$ строится однозначно. В результате формулы (1.4.37) определяют границу G (1.4.36) множества фазовых точек (x, v) , для которых управление (1.4.15), (1.4.35) приводит к уклонению. Граница G может быть построена в трёхмерном пространстве автомодельных переменных l, γ, c .

Найдём явное соотношение, связывающее l, γ и c . Для этого выразим L из второго уравнения в (1.4.37) и подставим в первое. Получим

$$\theta^3/2 - (\xi + \gamma^2)\theta - \gamma c = 0, \quad \xi = l^{-1} \quad (1.4.38)$$

Введение параметра ξ удобно тем, что $0 < \xi < 1$ при $1 < l < \infty$. Далее возведём обе части первого соотношения из (1.4.37) в квадрат и подставим в получившуюся формулу θ^3 из (1.4.38). После громоздких преобразований получим квадратичное по θ соотношение

$$(\xi + \gamma^2)\theta^2 + 3c\gamma\theta + 2(1 - \xi^2) = 0 \quad (1.4.39)$$

Другое квадратичное соотношение для θ получается, если выразить θ^2 из (1.4.39) и подставить в (1.4.38), умноженное на θ . В результате имеем выражение

$$((3/2)c\gamma\theta^2 + (1 - \xi^2)\theta) / (\xi + \gamma^2) + (\xi + \gamma^2)\theta + \gamma c = 0 \quad (1.4.40)$$

Вспомогательные соотношения (1.4.39), (1.4.40) позволяют исключить θ^2 и получить однозначное выражение для θ как функции задаваемых параметров ξ, γ, c . Действительно, подставим значение θ^2 из

(1.4.39) в (1.4.40) и выразим θ из получившегося линейного по θ уравнения. Получим удобное представление для θ

$$\theta = \frac{-2\gamma c \left((\xi + \gamma^2)^2 - 3(1 - \xi^2) \right)}{2(\xi + \gamma^2) \left((\xi + \gamma^2)^2 + 1 - \xi^2 \right) - 9\gamma^2 c^2} \quad (1.4.41)$$

Искомое соотношение, определяющее границу G (1.4.36), получится после подстановки выражения (1.4.41) в (1.4.39). В результате имеем уравнение границы в пространстве автомодельных переменных ξ , γ , c в виде

$$\begin{aligned} & 27\gamma^4 c^4 - 4\gamma^2 c^2 (\xi + \gamma^2) (9(1 - \xi^2) + (\xi + \gamma^2)^2) + \\ & + 4(1 - \xi^2) ((\xi + \gamma^2)^2 + 1 - \xi^2)^2 = 0 \\ & 0 < \xi \leq 1, \quad \gamma \geq 0, \quad -1 \leq c \leq 0 \end{aligned} \quad (1.4.42)$$

Соотношение (1.4.42) является уравнением шестой степени относительно неизвестной $\xi = \xi(\gamma^2, c^2)$, или уравнением четвёртой степени относительно $\gamma^2 = \gamma^2(\xi, c^2)$ или биквадратным уравнением относительно c : $c^2 = c^2(\xi, \gamma^2)$. Оно представляется удобным для аналитического и численного исследования, поскольку автомодельные переменные ξ и c изменяются в ограниченных пределах.

Однако эти переменные не являются наглядными с точки зрения геометрических представлений для описания динамики и траекторий управляемого движения. Предпочтительнее привести уравнение границы G (1.4.36) к механическим переменным $l = |x|$, $h = |v|$, $c = \cos(x, v)$. Итак, представим равенство (1.4.42) в исходных переменных l , h и c . После элементарных преобразований получим уравнение границы G (1.4.36) в виде

$$\begin{aligned} & 27h^4 l^4 c^4 - 4h^2 l^2 (h^2 + 1) ((h^2 + 1)^2 + 9(l^2 - 1)) c^2 + \\ & + 4(l^2 - 1) ((h^2 + 1)^2 + l^2 - 1)^2 = 0 \\ & 1 \leq l < \infty, \quad h \geq 0, \quad -1 \leq c \leq 0 \end{aligned} \quad (1.4.43)$$

Соотношение (1.4.43) можно рассматривать как биквадратное уравнение относительно c , либо как кубическое относительно l^2 , либо как уравнение четвёртой степени относительно h^2 . Нужные корни проще всего определять подстановкой в (1.4.37).

Естественно, наиболее привлекательным представляется разрешить уравнение (1.4.43) относительно неизвестной c ; в результате имеем выражения

$$c_{1,2} = -2^{1/2} \left(3lh3^{1/2} \right)^{-1} \left((h^2 + 1) ((h^2 + 1)^2 + 9(l^2 - 1)) \pm \right. \\ \left. \pm ((h^2 + 1)^2 - 3(l^2 - 1))^{3/2} \right)^{1/2} \quad (1.4.44)$$

$$h \geq h_*, \quad h_* = (3(l^2 - 1))^{1/2} - 1$$

Теперь необходимо выделить искомую функцию $c = c(h, l)$ из соотношения (1.4.44). Заметим, что обе ветви (1.4.44) при постоянном l начинаются в одной и той же точке при $h = h_*$ и никаких других общих точек не имеют, причём c_1 всегда лежит ниже c_2 . Кроме того, $\lim c_1 = -\infty$, а $\lim c_2 = -(l^2 - 1)^{1/2}/l$ при $h \rightarrow +\infty$. Из общих соображений ясно, что график функции $c = c(h)$ при фиксированном значении l должен начинаться в точке с ординатой -1 . Соответствующая абсцисса, как следует из (1.4.29), (1.4.30), определяется по-разному для разных γ (и, следовательно, для разных l). Для $c = -1$ из второго уравнения (1.4.37) при $0 < \gamma < 1$ имеем $h' = (2(l - 1))^{1/2}$, а при $\gamma > 1$ получаем $h'' = l/2^{1/2}$, причём в обоих случаях соответствующие точки принадлежат ветви c_2 . Поскольку $\gamma = h/l^{1/2}$, то в первом случае $1 < l < 2$, а во втором $l > 2$. Заметим, что $h_* < h' < h''$ при всех $l > 1$, кроме $l = 2$, когда все три значения совпадают.

Таким образом, если $1 < l < 2$, то ветвь c_1 имеет единственную точку с ординатой $c = -1$, а именно при $h = h''$. Эта точка не удовлетворяет описанным выше условиям. При всех остальных $h \geq h_*$ имеем $c_1 < -1$. В случае $l > 2$ при $h > h''$ также получаем $c_1 < -1$. Окончательные

выражения, определяющие явно границу G (1.4.36) в виде $c = c(l, h)$, имеют вид

$$\begin{aligned}
 c &= -2^{1/2} \left(3lh3^{1/2} \right)^{-1} \left((h^2 + 1) ((h^2 + 1)^2 + 9(l^2 - 1)) - \right. \\
 &\quad \left. - ((h^2 + 1)^2 - 3(l^2 - 1))^{3/2} \right)^{1/2} \\
 h &\geq (2(l - 1))^{1/2}, \quad 1 < l < 2 \\
 h &\geq l/2^{1/2}, \quad l \geq 2
 \end{aligned} \tag{1.4.45}$$

Семейство зависимостей $c = c(h)$ при различных постоянных l показано на рис. 22. Для каждого l область M , определённая согласно (1.4.36), лежит левее и выше соответствующей кривой. Отметим, что при $l > 2$ все графики касаются оси абсцисс, а при $l < 2$ — нет. С точки зрения механики это означает, что если в начале движения вектор скорости направлен почти точно в начало координат, то при значительном начальном расстоянии даже небольшая разница в значениях угла оказывается решающей при определении возможности уклонения от препятствия. При малом стартовом расстоянии от сферы величина угла практически не играет никакой роли. Если $h \rightarrow \infty$, то каждая из кривых выходит на свою горизонтальную асимптоту, равную $-(l^2 - 1)^{1/2}/l$. Это соответствует косинусу угла, образуемого касательной к единичной сфере с центром в начале координат с осью абсцисс, причём касательная проведена из начальной точки траектории. Очевидно, что в случае меньших углов уклонение возможно при любой начальной скорости и поставленная в данной работе задача содержательна только тогда, когда в начальный момент времени вектор скорости направлен внутрь соответствующего конуса. Как видно из рис. 22, переход от $l < 2$ к $l > 2$ осуществляется непрерывно, без скачков. Точка пересечения кривой для $l = 2$ с осью абсцисс отвечает $h = 2^{1/2}$.

Рассмотрим также семейство зависимостей $l = l(h)$ при различных постоянных c . Оно изображено на рис. 23. Для всех значений c об-

ласть M из (1.4.36) лежит левее и выше соответствующей кривой. При $h \ll 1$ для зависимости $l(h, c)$ имеет место приближенное представление $l \approx 1 + h^2(1 - c^2/2)$. Каждый из графиков, кроме соответствующего $c = -1$, выходит на свою асимптоту $l = (1 - c^2)^{-1/2}$ по причинам, указанным выше. Кривая для $c = -1$ при $0 < h < 2^{1/2}$ описывается формулой $l = 1 + h^2/2$, а при $h > 2^{1/2}$ является прямой линией $l = 2^{1/2}h$.

В заключение приведём примеры траекторий для различных начальных условий. На рис. 24 показана плоскость, задаваемая переменными x_1 и x_2 , которой в начальный момент времени принадлежат вектор скорости и радиус-вектор материальной точки. Штриховкой выделена половина единичной сферы, встречи с которой требуется избежать. Все траектории начинаются на оси абсцисс x_1 . Кривая 1 соответствует $\alpha = 179.99^\circ$, $x_{01} = 3$, $|v_0| = 2$ (точка A на рис. 24). Оптимальное управление движением с этими значениями параметров позволяет точке в “режиме уклонения” пролететь сравнительно далеко от препятствия. Заметим, что если бы было применено управление, направленное против скорости (“режим торможения”), то точку удалось бы остановить лишь на самой поверхности сферы, а сколь угодно малое увеличение начальной скорости привело бы к “столкновению”. Траектория 2 начинается при $\alpha = 179.99^\circ$, $x_{01} = 2$, $|v_0| = 2^{1/2}$ (точка B на рис. 24). В этом случае управление происходит в “режиме торможения”, что хорошо видно по форме кривой, которая почти касается сферы (это было бы видно на рис. 24, если бы линии на нём были очень тонкими). При скорости, направленной точно в начало координат, и тех же x_{01} и $|v_0|$ точка двигалась бы точно по оси абсцисс до полной остановки на поверхности сферы, после чего началось бы обратное движение. Для траектории 3 были выбраны параметры $\alpha = -175^\circ$, $x_{01} = 1.5$, $|v_0| \approx 1.0114$, которые приводят к касанию сферы. Она тоже может служить примером применения “режима уклонения”. Траектория 4 начинается в точке $x_{01} = 2$, причём скорость велика $|v_0| = 10$, а $\alpha = -150^\circ$. Как видно из

графика, управление лишь немного отклонило эту кривую от прямой линии, касающейся препятствия. Очевидно, что для таких значений x_{01} и α уклонение осуществимо при сколь угодно большой начальной скорости.

6. Сопоставление результатов с решением задачи о минимизации промаха. Решённая задача тесно связана с другими задачами оптимального управления. Можно, например, рассмотреть задачу отыскания зависимости минимального расстояния, на которое материальная точка приблизится к началу координат, от начальных данных. Несмотря на то, что с точки зрения теории оптимального управления новая задача построения программного управления заметно отличается от рассмотренной проблемы построения синтеза, математически её решение получается простой заменой безразмерных переменных в (1.4.45) таким образом, чтобы длина начального радиус-вектора точки (а не величина радиуса сферы) была равна единице, а именно $l \rightarrow 1/r$, $h \rightarrow h/\sqrt{r}$, где r — минимальное расстояние.

Интересно сравнить это “максимизирующее промах” решение с решением задачи о минимизации промаха [82]. На рис. 25 кривые, полученные по формулам из [82], показаны сплошными линиями, а по (1.4.45) — пунктиром. Очевидно, что сопоставление можно произвести лишь для тех значений c и h , при которых происходит пролёт материальной точки мимо начала координат, т. е. когда траектория, приводящая точку точно в начало координат, сначала проходит мимо, а потом “возвращается”. В связи с этим все зависимости начинаются при разных значениях h . Параметром в обоих семействах служит минимальное расстояние r . Область выше сплошной кривой отвечает случаю, когда минимально возможный промах больше, чем соответствующее значение r , а область ниже пунктирной кривой — случаю, когда максимально возможное отклонение меньше r . Нетрудно заметить (особенно при достаточно больших значениях h , например, близких к 10), что каждая

пара кривых из разных семейств, соответствующая одному значению параметра r , образует “воронку”, обращенную широким концом в сторону малых h . Ширина “воронки” характеризует возможности нашего управления. Они естественным образом сужаются при больших начальных скоростях, когда не хватает времени для манёвра, а также при r , приближающихся к единице, когда пространственные возможности для манёвра ограничены (напомним, что начальное расстояние всюду равно единице). Таким образом, обе задачи дополняют друг друга, позволяя лучше понять особенности управляемого движения в рассматриваемой системе.

§1.5. Инерционность при реализации управления

1. Постановка задачи. Выше были рассмотрены случаи, когда движение происходит в некоторой плоскости трёхмерного пространства. Однако, как указано в начале §1.1, для практики представляют интерес и те задачи, которые можно свести к одномерным. Как известно [122], решение такого рода задач часто приводит к тому, что управляющая сила должна принимать крайние значения и мгновенно переключаться с одного них на другое. Это не всегда осуществимо на практике, поскольку применяемым в технике управляющим устройствам часто присуща значительная степень инерционности [140].

Примем более реалистическое ограничение на скорость изменения управляющего воздействия (силы или момента силы) F , ограниченного по абсолютной величине постоянной F_0 , а именно

$$|\dot{F}| \leq v_0 \quad (1.5.1)$$

где $v_0 > 0$ — заданная постоянная. Будем также полагать, что ограничение на абсолютную величину силы не достигается и всегда $|F(t)| < F_0$.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad m\dot{x}_2 = F \quad (1.5.2)$$

где x_1 — обобщённая координата, x_2 — обобщённая скорость, m — постоянная инерционная характеристика (масса или момент инерции).

При помощи замены переменных

$$x_1 = (v_0/m)x, \quad x_2 = (v_0/m)y, \quad F = v_0z$$

приведём уравнения (1.5.2) и ограничение (1.5.1) к виду

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = u, \quad |u| \leq 1 \quad (1.5.3)$$

Отметим, что к форме (1.5.3) может быть также приведена задача управления течением электрического заряда в цепи в случае, когда ёмкость очень велика, сопротивление — пренебрежимо мало, а управляют скоростью изменения внешней электродвижущей силы (см., например, [134]).

Теперь переменные x , y , z являются фазовыми координатами, а u играет роль ограниченного управления.

Зададим начальные условия для системы (1.5.3) в виде

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \quad (1.5.4)$$

где начальный момент времени без ограничения общности принят равным нулю.

Поставим задачу о построении управления $u(t)$, удовлетворяющего ограничению $|u(t)| \leq 1$ при $t \geq 0$ и переводящего систему (1.5.3) из произвольного начального состояния (1.5.4) на заданное конечное многообразие

$$x(T) = 0, \quad y(T) = 0 \quad (1.5.5)$$

при произвольном $z(T)$ за кратчайшее время T .

Рассмотрим задачу построения синтеза управления, оптимального по быстродействию для системы (1.5.3). Это управление $u(x, y, z)$, выраженное как функция текущих (или начальных) фазовых координат x, y, z , обеспечивает приведение системы (1.5.3) на заданное конечное многообразие (1.5.5) за кратчайшее время.

2. Принцип максимума. Применим принцип максимума [122] к поставленной задаче оптимального быстродействия (1.5.3) – (1.5.5). Составим функцию Гамильтона

$$H = p_x y + p_y z + p_z u \quad (1.5.6)$$

и запишем сопряжённые уравнения

$$\dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = -p_x, \quad \dot{p}_z = -p_y \quad (1.5.7)$$

Здесь p_x, p_y, p_z — сопряжённые переменные. Проинтегрируем систему (1.5.7) при условии трансверсальности $p_z(T) = 0$, отвечающем условию нефиксированности $z(T)$. Получим

$$p_x = c_x, \quad p_y = c_y + c_x \tau, \quad p_z = c_y \tau + c_x \tau^2 / 2 \quad (1.5.8)$$

Здесь $\tau = T - t$ — время, отсчитанное от конца процесса (“обратное” время), c_x и c_y — произвольные постоянные. Условие максимальности гамильтониана (1.5.6) по u при ограничении $|u| \leq 1$ из (1.5.3) дает $u(t) = \text{sign } p_z(t)$. Из формулы (1.5.8) для p_z следует, что функция $p_z(t)$ меняет знак при $t \leq T$, $\tau \geq 0$ не более одного раза. Следовательно, оптимальное управление $u(t) = \pm 1$ имеет при $t \leq T$ не более одного переключения.

Обозначим через θ_1, θ_2 длительности двух возможных участков постоянства управления $u(t)$, а через $\sigma = \pm 1$ значение $u(t)$ на первом из этих участков. Тогда оптимальное управление можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= \sigma & \text{при } t \in (0, \theta_1) \\ u(t) &= -\sigma & \text{при } t \in (\theta_1, T), \quad \theta_1 + \theta_2 = T \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Подставим управление (1.5.9) в систему (1.5.3) и проинтегрируем её при начальных условиях (1.5.4).

При $t \in (0, \theta_1)$ получим

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + y_0 t + z_0 t^2/2 + \sigma t^3/6 \\y(t) &= y_0 + z_0 t + \sigma t^2/2 \\z(t) &= z_0 + \sigma t\end{aligned}\tag{1.5.10}$$

а при $t \in (\theta_1, T)$ получим

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + y_0 \theta_1 + z_0 \theta_1^2/2 + \sigma \theta_1^3/6 + (y_0 + z_0 \theta_1 + \sigma \theta_1^2/2)(t - \theta_1) + \\&\quad + (z_0 + \sigma \theta_1)(t - \theta_1)^2/2 - \sigma(t - \theta_1)^3/6 \\y(t) &= y_0 + z_0 \theta_1 + \sigma \theta_1^2/2 + (z_0 + \sigma \theta_1)(t - \theta_1) - \sigma(t - \theta_1)^2/2 \\z(t) &= z_0 + \sigma \theta_1 - \sigma(t - \theta_1)\end{aligned}\tag{1.5.11}$$

Подставляя решение (1.5.10), (1.5.11) в условия (1.5.5), будем иметь два соотношения, разрешая которые относительно x_0 , y_0 , получим

$$\begin{aligned}x_0 &= z_0 T^2/2 + \sigma(\theta_1^3 + 3\theta_1^2 \theta_2 - \theta_2^3)/3 \\y_0 &= -z_0 T - \sigma(\theta_1^2 + 2\theta_1 \theta_2 - \theta_2^2)/2\end{aligned}\tag{1.5.12}$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned}\xi &= z_0^{-3} x_0, \quad \eta = z_0^{-1} |z_0|^{-1} y_0, \quad \zeta = \text{sign } z_0 \\s &= |z_0|^{-1} T, \quad \lambda = \theta_2 T^{-1} \quad (z_0 \neq 0)\end{aligned}\tag{1.5.13}$$

$$X(\lambda) = (1 - 3\lambda^2 + \lambda^3)/3, \quad Y(\lambda) = \lambda^2 - 1/2$$

Тогда соотношения (1.5.12) примут вид

$$\zeta(\xi s^{-3} - s^{-1}/2) = \sigma X(\lambda), \quad \zeta(\eta s^{-2} + s^{-1}) = \sigma Y(\lambda)\tag{1.5.14}$$

При $z_0 = 0$ соотношения (1.5.12) дают

$$x_0 T^{-3} = \sigma X(\lambda), \quad y_0 T^{-2} = \sigma Y(\lambda)\tag{1.5.15}$$

3. Предварительные замечания. Для построения синтеза оптимального управления достаточно найти в фазовом пространстве $x y z$ поверхности переключения, на которых управление $u = \pm 1$ меняет знак. На этих поверхностях обращается в нуль длительность одного из участков постоянства управления, т. е. $\theta_1 = 0$ либо $\theta_2 = 0$. В соответствии с (1.5.13) имеем здесь $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Этим значениям λ отвечают, согласно (1.5.14), значения X и Y , равные $\pm 1/3$ и $\mp 1/2$, соответственно. Из (1.5.14) получим условия

$$\zeta(\xi s^{-3} - s^{-1}/2) = \pm \sigma/3, \quad \zeta(\eta s^{-2} + s^{-1}) = \mp \sigma/2 \quad (1.5.16)$$

выполняемые в плоскости $\xi \eta$ на кривых переключения при $z_0 \neq 0$. Однако соотношений (1.5.16) недостаточно для определения кривых переключения; для этого потребуется непосредственный анализ соотношений (1.5.14), что будет проведено ниже.

Отметим, что при построении синтеза начальные данные x_0, y_0, z_0 можно рассматривать так же, как текущие значения фазовых координат x, y, z . Соотношения (1.5.13) будем рассматривать как формулы замены переменных

$$\xi = z^{-3}x, \quad \eta = z^{-1}|z|^{-1}y, \quad \zeta = \text{sign } z \quad (1.5.17)$$

в фазовом пространстве. Эта замена, вводящая автомодельные переменные ξ, η , позволяет при $z \neq 0$ понизить на одну единицу размерность фазового пространства и вести построение синтеза оптимального управления в плоскости $\xi \eta$.

Рассмотрим сначала отдельно случай $z = 0$. Аналогично (1.5.16) получим из (1.5.15) условия

$$xT^{-3} = \pm \sigma/3, \quad yT^{-2} = \mp \sigma/2 \quad (1.5.18)$$

которые выполняются на пересечении поверхностей переключения с плоскостью $z = 0$. Условия (1.5.18) определяют при $z = 0$ две полови-

ны полукубических парабол, которые образуют кривую переключений в плоскости $z = 0$, описываемую уравнением [161]

$$\gamma(x, y) \equiv 3x + 2y|y|^{1/2} = 0 \quad (1.5.19)$$

Анализ знаков σ на ветвях кривой переключений (1.5.19) позволяет определить знаки управления с разных её сторон. В результате получаем синтез оптимального управления при $z = 0$ в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= -\operatorname{sign} \gamma(x, y) \quad \text{при} \quad \gamma \neq 0 \\ u(x, y, 0) &= \operatorname{sign} x = -\operatorname{sign} y \quad \text{при} \quad \gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

При $z \neq 0$ замена переменных (1.5.17) преобразует первые два уравнения (1.5.3) к виду

$$\dot{\xi} = |z|^{-1}(\eta - 3u\zeta\xi), \quad \dot{\eta} = |z|^{-1}(1 - 2u\zeta\eta) \quad (1.5.21)$$

Разделив первое уравнение (1.5.21) на второе, получим линейное относительно ξ уравнение

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\eta - 3\alpha\xi}{1 - 2\alpha\eta}, \quad \alpha = u\zeta = \pm 1 \quad (1.5.22)$$

Вдоль оптимальных траекторий, не пересекающих плоскость $z = 0$, параметр α сохраняет постоянное значение. Найдём общее решение уравнения (1.5.22), интегрируя его при постоянном α

$$\xi = \Phi(\eta, \alpha, A) \equiv \alpha\eta - 1/3 + A|1 - 2\alpha\eta|^{3/2} \quad (1.5.23)$$

где A — произвольная постоянная. Отметим, что второе уравнение в системе (1.5.21) позволяет определить направление движения вдоль оптимальных траекторий. Если $\alpha = 1$, то движение происходит в сторону роста η при $\eta < 1/2$ и в сторону убывания η при $\eta > 1/2$. Если же $\alpha = -1$, то движение происходит в сторону убывания η при $\eta < -1/2$ и в сторону роста η при $\eta > -1/2$.

4. Синтез оптимального управления. Перейдём к непосредственному построению синтеза оптимального управления. Для этого, как указано выше, достаточно установить знак управления $u = \sigma$ в начальный момент времени $t = 0$ в зависимости от начальных данных x_0, y_0, z_0 . Переходя к автомодельным переменным и обращаясь к соотношениям (1.5.14), задачу синтеза можно сформулировать так: найти значение $\sigma = \pm 1$, которое соответствует решению соотношений (1.5.14) (при фиксированных ξ, η, ζ , где $\zeta = \pm 1$) с наименьшим s , причём $s > 0$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Изложим алгоритм решения в краткой форме, а затем поясним его наиболее существенные элементы.

Прежде всего отметим, что при одновременной замене знаков у ζ и σ соотношения (1.5.14) сохраняют свой вид. Следовательно, при замене ζ на $-\zeta$ искомая величина σ также меняет знак. Поэтому достаточно построить решение в случае $\zeta = 1$ при произвольных ξ, η , а затем для $\zeta = -1$ просто поменять знак в полученной зависимости $\sigma(\xi, \eta)$.

Поэтому положим без ограничения общности $\zeta = 1$ и исключим λ при помощи второго из уравнений (1.5.14). Получим

$$\lambda = (1/2 + \sigma (\eta s^{-2} + s^{-1}))^{1/2}, \quad \sigma = \pm 1 \quad (1.5.24)$$

Так как $\lambda \in [0, 1]$, то из (1.5.24) при фиксированных $\sigma = \pm 1$ и η определяются интервалы изменения s , в которых λ вещественно и $\lambda \leq 1$. Подставим λ из (1.5.24) в первое уравнение (1.5.14) и найдём зависимости ξ от s , η и $\sigma = \pm 1$. Эти зависимости при фиксированном η будем обозначать через $\xi^+(s)$ и $\xi^-(s)$ для $\sigma = \pm 1$, соответственно. При условии $\lambda \in [0, 1]$ они определяют в плоскости s, ξ две кривые, каждая из которых состоит, вообще говоря, из конечного числа дуг. Исследуем эти кривые, а именно найдём их области определения и экстремумы во всем диапазоне изменения аргумента s и параметра η , после чего проанализируем их взаимное расположение. Затем проведём мыслен-

но в плоскости s, ξ прямую $\xi = \text{const}$ и найдём минимальное значение абсциссы $s > 0$, при котором эта прямая пересекает одну из указанных кривых. Значение $\sigma = \pm 1$, отвечающее той кривой, с которой имеет место это пересечение, определяем искомое управление $u = \sigma$ при данных ξ, η и $\zeta = 1$, а значение s , отвечающее этой точке пересечения, равно нормированному времени быстрого действия: $s = T|z|^{-1}$ (нормированной функции Беллмана).

Теперь опишем указанные операции подробнее, причём все последующие построения верны только при $s > 0$. Из (1.5.14) имеем

$$\xi^{\pm}(s) = \mp s^3/6 - s^2/2 - s\eta \pm (s^2/2 \pm \eta \pm s)^{3/2}/3 \quad (1.5.25)$$

Если $s \rightarrow +\infty$, то $\xi^{\pm}(s) \approx \pm(-1 + 1/\sqrt{2})s^3/6 \rightarrow \mp\infty$.

Рассмотрим функцию $\xi^+(s)$. В случае $\sigma = 1$ условие $\lambda \leq 1$ выделяет множество $s \in (0, s_2] \cup [s_1, +\infty)$, где $s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+2\eta}$. Выражение для $\xi^+(s)$ определено, если $s \in [s_5, +\infty)$, где $s_5 = -1 + \sqrt{1-2\eta}$. Производная $d\xi^+/ds$ обращается в нуль в точках s_5 и $s_7 = -1 + \sqrt{2(1-2\eta)}$, если s_5 и s_7 существуют, причем $s_5 \leq s_7$. Кроме того, $d^2\xi^+/ds^2 < 0$ при $s = s_7$, т. е. s_7 — точка максимума. Можно показать, что, если s_1, s_2, s_5 и s_7 существуют, то $s_2 \leq s_7 \leq s_1$, а $s_2 \geq s_5$.

Если $\eta \geq 0$, то $s_2 \leq 0$ и $d\xi^+/ds < 0$ при $s \geq s_1$, т. е. функция $\xi^+(s)$ задана при $s \in [s_1, +\infty)$ и убывает от $\xi^+(s_1)$ до $-\infty$. Если $-1/2 \leq \eta < 0$, то $s_5 > 0$, т. е. функция $\xi^+(s)$ определена при $s \in [s_5, s_2] \cup [s_1, +\infty)$. Она имеет нулевую производную при $s = s_5$, возрастает на отрезке $[s_5, s_2]$ и убывает от $\xi^+(s_1)$ до $-\infty$ при $s \in [s_1, +\infty)$. Если $\eta < -1/2$, то $s_5 > 0$, а значение s_2 не определено. Тогда функция $\xi^+(s)$ задана при $s \in [s_5, +\infty)$, $d\xi^+/ds = 0$ при $s = s_5$, $\xi^+(s)$ возрастает до максимума в точке $s = s_7$, после чего убывает от $\xi^+(s_7)$ до $-\infty$.

Теперь перейдём к функции $\xi^-(s)$. Потребуем, чтобы в (1.5.24) выполнялось неравенство $\lambda \leq 1$. Получим, что $s \in [s_5, +\infty)$, где величина $s_5 = -1 + \sqrt{1-2\eta}$. Если $s \in (0, s_2] \cup [s_1, +\infty)$, то функция $\xi^-(s)$ из

(1.5.25) определена. Её производная обращается в нуль в точках s_1 , s_2 и $s_3 = 1 - \sqrt{2(1+2\eta)}$, если они существуют, причём $s_3 \geq s_1$. Кроме того, $d^2\xi^-/ds^2 > 0$ при $s = s_3$, т. е. $s = s_3$ — точка минимума.

Если $\eta \geq 0$, то $s_2 \leq 0$ и функция $\xi^-(s)$ задана при $s \in [s_1, +\infty)$, причём $d\xi^-/ds = 0$ при $s = s_1$. Функция $\xi^-(s)$ убывает от $\xi^-(s_1)$ до точки минимума $s = s_3$, после чего возрастает от $\xi^-(s_3)$ до $+\infty$. Если $-1/2 \leq \eta < 0$, то $s_5 > 0$, т. е. зависимость $\xi^-(s)$ определена при $s \in [s_5, s_2] \cup [s_1, +\infty)$. Функция $\xi^-(s)$ возрастает при изменении s от $s = s_5$ до $s = s_2$, причём $d\xi^-/ds = 0$ при $s = s_2$, и убывает при $s \in [s_1, s_3]$, причём $d\xi^-/ds = 0$ при $s = s_1$ и $s = s_3$. Далее $\xi^-(s)$ возрастает от $\xi^-(s_3)$ до $+\infty$. Если $\eta < -1/2$, то $s_5 > 0$, значения s_1 , s_2 и s_3 не определены, а $d\xi^-/ds > 0$ при $s \geq s_5$, т. е. функция $\xi^-(s)$ задана при $s \in [s_5, +\infty)$ и возрастает на всем этом интервале до $+\infty$.

Сделаем два замечания о взаимном расположении пары кривых (по одной из обоих исследованных семейств) для одного и того же значения параметра η .

Во-первых, найдём точки пересечения кривых $\xi^+(s)$ и $\xi^-(s)$, что требует решения уравнения

$$1 - (1/2 - \eta/s^2 - 1/s)^{3/2} = (1/2 + \eta/s^2 + 1/s)^{3/2} \quad (1.5.26)$$

Возведём обе части уравнения (1.5.26) в квадрат и приведем подобные члены, затем снова возведём обе части уравнения в квадрат и получим уравнение относительно s

$$\left((\eta/s^2 + 1/s)^2 + 2\right) \left((\eta/s^2 + 1/s)^2 - 1/4\right)^2 = 0 \quad (1.5.27)$$

Анализ корней уравнения (1.5.27) показывает, что только s_1 , s_2 и s_5 являются корнями уравнения (1.5.26), причём положительными хотя бы при одном значении η . Совпадающие значения $\xi^+ = \xi^-$ в указанных точках будем обозначать через ξ^\pm .

Во-вторых, устанавливаем, что $\xi^\pm(s_5) > \xi^\pm(s_1)$ тогда и только тогда, когда $-\sqrt{3}/4 < \eta \leq 0$.

В результате, оказывается удобным выделить четыре диапазона значений параметра η , соответствующих различным взаимным расположениям кривых $\xi^+(s)$ и $\xi^-(s)$, которые и определяют искомое управление для всех ξ и η , за исключением $\xi^\pm(s_1)$, $\xi^\pm(s_2)$ и $\xi^\pm(s_5)$.

При $\eta \geq 0$ для любого $\xi < \xi^\pm(s_1)$ минимальная допустимая абсцисса s достигается на кривой $\xi^+(s)$. При $\xi > \xi^\pm(s_1)$ тот же результат имеет место для $\xi^-(s)$.

При $-\sqrt{3}/4 < \eta < 0$ к кривым $\xi^+(s)$ и $\xi^-(s)$, имеющим те же характерные особенности, что и в предыдущем случае, добавляется замкнутая изолированная кривая для $s_5 \leq s \leq s_2$, причём кривая $\xi^-(s)$ лежит выше кривой $\xi^+(s)$, а $\xi^\pm(s_5) < \xi^\pm(s_2)$. Кроме того, $\xi^\pm(s_1) < \xi^\pm(s_5)$, т. е. $\xi^\pm(s_1)$ лежит ниже самой нижней точки замкнутой изолированной кривой. Следовательно, искомое управление задается так же, как и в предыдущем случае.

При $-1/2 \leq \eta \leq -\sqrt{3}/4$ выполняется неравенство $\xi(s_1) > \xi(s_5)$, и для любого $\xi < \xi^\pm(s_5)$ минимальная допустимая абсцисса s достигается на кривой $\xi^+(s)$. При $\xi > \xi^\pm(s_5)$ то же самое утверждение справедливо для $\xi^-(s)$.

Замкнутая изолированная кривая исчезает при $\eta < -1/2$, и искомое управление задается так же, как и в предыдущем случае.

Определим управление на кривых $\xi^\pm(s_1(\eta))$, $\xi^\pm(s_2(\eta))$ и $\xi^\pm(s_5(\eta))$ в плоскости $\xi\eta$. Напомним, что зависимости s_1 , s_2 и s_5 от η приведены выше. В соответствии с (1.5.24) на кривой $\xi^\pm(s_1(\eta))$ имеем $\lambda = 0$ при $\sigma = -1$, т. е. временной интервал, в котором надо применять $u = 1$, равен нулю. Следовательно, на кривой $\xi^\pm(s_1(\eta))$ надо применять $u = -1$, и она является кривой переключений при $\eta > -\sqrt{3}/4$. Аналогично, на кривой $\xi^\pm(s_2(\eta))$ следует использовать $u = -1$ при $-1/2 \leq \eta < 0$, но кривой переключений она не будет. Тем же способом нетрудно показать,

что на кривой $\xi^\pm(s_5(\eta))$ имеем $u = 1$ при $\eta < 0$. Она служит кривой переключений.

5. Графическое представление результатов. Приведём полностью результаты построения синтеза оптимального управления. Примем для определённости $z > 0$, $\zeta = 1$. Кривая переключений в плоскости $\xi\eta$ определена равенствами

$$\xi = f(\eta) = \begin{cases} \Phi(\eta, 1, 1/3), & \eta \leq \eta^* \\ \Phi(\eta, -1, -1/3), & \eta > \eta^*; \eta^* = -\sqrt{3}/4 \end{cases} \quad (1.5.28)$$

где использовано обозначение (1.5.23). Кривая переключений в точке K с координатами $\xi^* = 1/12$, $\eta^* = -\sqrt{3}/4$ непрерывна и имеет излом. Эта кривая изображена жирной линией на рис. 26, 27. В связи с тем, что масштаб на рис. 27 меньше, чем на рис. 26, точки K и R , показанные на рис. 26, практически неразличимы на рис. 27 и потому не обозначены. С другой стороны, масштаб рис. 27 позволяет изобразить все характерные фазовые траектории, существенная часть которых отсутствует на рис. 26. В остальном обозначения на рис. 26 и рис. 27 идентичны. Для определённости в дальнейшем будем ссылаться в основном на рис. 26. Ветви кривой переключений, отвечающие $\eta < \eta^*$ и $\eta > \eta^*$, обозначены буквами M и N , соответственно. В плоскости $\xi\eta$ имеем

$$\begin{aligned} u &= 1 && \text{при } \xi < f(\eta) \\ u &= 1 && \text{при } \xi = \Phi(\eta, 1, 1/3), \quad \eta \leq 0 \\ u &= -1 && \text{в остальных точках плоскости } \xi\eta \end{aligned} \quad (1.5.29)$$

Таким образом, $u = 1$ слева и снизу от кривой переключений (1.5.28), на её участке KM справа и снизу от точки K , а также на дуге кривой $\xi = \Phi(\eta, 1, 1/3)$, соединяющей начало координат и точку K , см. рис. 26, причём эта дуга является частью кривой переключений. В остальной части плоскости $\xi\eta$ имеем $u = -1$.

При $z < 0$, $\zeta = -1$ кривая переключений остаётся той же, а в соотношениях (1.5.29) множества точек $\xi\eta$, где $u = 1$ и $u = -1$, следует просто поменять местами. Итак, синтез оптимального управления $u(x, y, z)$

полностью определён соотношениями (1.5.17), (1.5.19), (1.5.20), (1.5.23), (1.5.28), (1.5.29) при всех x, y, z .

Опишем теперь множество оптимальных траекторий, которые в переменных ξ, η состоят из дуг кривых (1.5.23). Пусть задана начальная точка x, y, z , причём для определённости примем $z > 0$. Согласно формулам (1.5.13) найдём ξ, η и $\zeta = 1$.

Если точка $\xi\eta$ лежит на кривой $\xi = \Phi(\eta, 1, 1/3)$, причём $\eta \leq 0$, то движение происходит вдоль этой кривой $MK0$ с управлением $u = 1$ до попадания в начало координат.

Все остальные оптимальные траектории приходят в начало координат также по этой кривой. Исключение составляет отрезок $R0$ кривой $\xi = \Phi(\eta, -1, 1/3)$ при $\eta \in [-1/2, 0]$: этот отрезок сам является фазовой траекторией для $u = -1$, начинающейся в точке R с координатами $\xi_R = 1/6$ и $\eta_R = -1/2$ и входящей в начало координат. Заметим, что других фазовых траекторий, содержащих точку R , не существует. На рис. 26 и рис. 27 фазовые траектории изображены тонкими линиями, стрелки указывают направление движения.

Если начальная точка лежит в криволинейном угле

$$\eta \leq 0, \quad \Phi(\eta, 1, 1/3) < \xi < \Phi(\eta, -1, 1/3) \quad (1.5.30)$$

то оптимальная траектория состоит из участка с $u = -1$ до попадания на кривую $\xi = \Phi(\eta, 1, 1/3)$ и из последующего движения по ней с $u = 1$.

Если начальная точка лежит в области $\xi < f(\eta)$, то сначала движение происходит с $u = 1$ до пересечения с кривой $\Phi = \xi(\eta, -1, -1/3)$, являющейся частью KN кривой переключений (1.5.28) (см. рис. 26), а затем с $u = -1$ по этой кривой, уходящей на бесконечность. Согласно (1.5.13), в бесконечно удалённой точке плоскости $\xi\eta$ имеем $z = 0$. На бесконечности z меняет знак, и затем $z < 0$, $\zeta = -1$. Фазовая траектория продолжается, приходя при $u = -1$ из бесконечности по кривой $\xi = \Phi(\eta, 1, 1/3)$, и входит по этой кривой в начало координат. Отметим,

что движение через бесконечно удалённую точку происходит без смены управления и занимает конечное время.

Осталось рассмотреть начальные точки в области $\xi > f(\eta)$, но вне криволинейного угла (1.5.30). Здесь имеем сначала $u = -1$, и траектория $\xi = \Phi(\eta, -1, A)$ уходит на бесконечность, причём $A > -1/3$. Затем движение происходит при $\zeta = -1$, $u = -1$ по кривым $\xi = \Phi(\eta, 1, -A)$ со сменой знака A . Эти кривые лежат в области $\xi < f(\eta)$ и упираются в ветвь KN кривой переключений $\xi = \Phi(\eta, -1, -1/3)$. По этой кривой траектория с $u = 1$ уходит на бесконечность, где снова меняется знак z . Далее при $\zeta = 1$ движение происходит при $u = 1$ по кривой $\xi = \Phi(\eta, 1, 1/3)$ вплоть до попадания в начало координат.

Отметим, что некоторые фазовые траектории включают в себя отрезки прямых $\xi = \pm\eta - 1/3$ и $\eta = \pm(2\alpha)^{-1}$, которые отвечают значениям $A = 0$ и $A = \infty$ в (1.5.23), соответственно. При уходе на бесконечность по этим прямым одновременно с z обращается в нуль также переменная x (для прямых с $A = 0$) или y (для прямых с $A = \infty$), в чём легко убедиться при помощи (1.5.13). В остальном эти прямые рассматриваются так же, как остальные траектории (1.5.23).

Таким образом, для любой начальной точки x, y, z движение полностью описывается траекториями рис. 26, 27 и содержит не более двух участков постоянства управления. При этом знак z может меняться не более двух раз.

Приведём результаты исследования нормированного времени оптимального быстрогодействия s как функции ξ, η . Изучается зависимость s от ξ при различных фиксированных η , причём s_1, s_2, s_5 снова рассматриваются как введенные выше функции от η . При $\eta \geq 0$ функция $s(\xi, \eta)$ убывает с ростом ξ , если $\xi < \xi^\pm(s_1)$ и имеет разрыв, если $\xi = \xi^\pm(s_1)$. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_1)$ к $\xi > \xi^\pm(s_1)$ и при росте ξ от $\xi = \xi^\pm(s_1)$ до $+\infty$ она растёт.

При $-\sqrt{3}/4 < \eta < 0$ функция $s(\xi, \eta)$ убывает с ростом ξ , если

$\xi < \xi^\pm(s_1)$, и имеет разрыв, если $\xi = \xi^\pm(s_1)$. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_1)$ к $\xi > \xi^\pm(s_1)$ она растёт. Ещё один разрыв имеет место при $\xi = \xi^\pm(s_5)$. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_5)$ к $\xi > \xi^\pm(s_5)$ функция $s(\xi, \eta)$ убывает, а при $\xi^\pm(s_5) \leq \xi \leq \xi^\pm(s_2)$ растёт. При $\xi = \xi^\pm(s_2)$ опять происходит разрыв. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_2)$ к $\xi > \xi^\pm(s_2)$ и при росте ξ от $\xi = \xi^\pm(s_2)$ до $+\infty$ функция $s(\xi, \eta)$ также растёт.

При $-1/2 \leq \eta \leq -\sqrt{3}/4$ функция $s(\xi, \eta)$ убывает с ростом ξ , если $\xi < \xi^\pm(s_5)$ и имеет разрыв, если $\xi = \xi^\pm(s_5)$. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_5)$ к $\xi > \xi^\pm(s_5)$ она убывает, а при $\xi^\pm(s_5) \leq \xi \leq \xi^\pm(s_2)$ растёт. При $\xi = \xi^\pm(s_2)$ происходит следующий разрыв. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_2)$ к $\xi > \xi^\pm(s_2)$ и при росте ξ от $\xi = \xi^\pm(s_2)$ до $+\infty$ функция $s(\xi, \eta)$ растёт.

При $\eta < -1/2$ функция $s(\xi, \eta)$ убывает с ростом ξ при $\xi < \xi^\pm(s_5)$ и имеет разрыв, если $\xi = \xi^\pm(s_5)$. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_5)$ к $\xi > \xi^\pm(s_5)$ она убывает, а при росте ξ от $\xi = \xi^\pm(s_5)$ до $+\infty$ растёт.

На рис. 28 тонкие кривые — линии уровня функции $s(\xi, \eta)$, а жирные — линии разрыва этой функции. Остальные обозначения те же, что и на рис. 27. Трёхмерный график функции $s(\xi, \eta)$ показан на рис. 29, причём чем темнее фон, тем меньше соответствующее значение.

Глава 2.

Оптимальный по быстродействию манёвр “петля” без потери скорости

§2.1. Постановка задачи

Исследованию управления полётом самолётов посвящено большое количество отечественных и зарубежных работ. Наиболее подробно изучены вопросы, связанные со стабилизацией заданных лётчиком параметров движения методами автоматического регулирования (см., например, [180], [40]). Исследованные задачи выбора оптимальной траектории полёта с помощью классических методов вариационного исчисления, принципа максимума и прямых численных методов оптимизации в большинстве случаев [222], [177] связаны с поиском наилучших параметров крейсерских режимов полёта, увеличением дальности полёта, уменьшением расхода топлива, определением оптимальных профилей полёта, четырёхмерной (4-D) навигации и др. Все эти вопросы важны, в первую очередь, для оптимизации лётно-технических характеристик неманёвренных самолётов [145].

Гораздо меньше публикаций посвящено оптимизации характеристик манёвренного самолёта. В этих работах в основном была исследована достаточно узкая проблема оптимизации угловой скорости вращения в горизонтальной плоскости без ограничений на координаты самолёта в конце манёвра (задача со свободным правым концом). Достаточное полное решение этой задачи получено в [83], [204], [205]. Траектории, лежащие в вертикальной плоскости и не сводящиеся к обычным для гражданской авиации (смена высоты полёта, заход на посадку и т. п.), изучались в основном для нужд космической отрасли (см., например, [88]).

Современные потребности развития и совершенствования самолётов приводят к необходимости решения задач с целью улучшения характеристик летательных аппаратов для более широкого класса траекторий как плоских, так и пространственных. Последнее относится к классу манёвренных самолётов, которые в соответствии с их специализацией, должны выполнять разнообразные манёвры [234]. Оптимальность последних имеет существенное значение, например, в условиях воздушного боя [219], [54], [55], [241]. Это, в свою очередь, значительно усложняет постановку задачи оптимального управления. Она становится пространственной, причём значения координат самолёта и направление полёта в конце манёвра должны удовлетворять определённым заданным условиям (задача с фиксированным правым концом). Результаты соответствующих исследований представляют несомненный интерес, поскольку позволят определить эффективность оптимального решения для типовых манёвров, таких, как “петля”, “косая петля”, “переворот”, “полупереворот”, “горка” и др., по сравнению с традиционными способами их выполнения и оценить возможность реализации оптимального управления на практике.

Одной из основных целей исследований в этом направлении является формирование алгоритмов управления самолётом при маневрировании на основе решений задачи оптимизации, которые могут быть использованы в бортовой системе интеллектуальной поддержки лётчика. Последняя должна обеспечивать ему возможность оптимального управления самолётом при выполнении им того или иного манёвра. Такие системы в настоящее время всё более широко применяются в авиации, поскольку бортовые вычислительные средства и информационное обеспечение современного самолёта позволяют реализовать достаточно сложные алгоритмы управления. Опыт последних конфликтов показывает [17], что во время воздушных поединков “противники сходились почти с двойной скоростью звука. При возросшем темпе боя остава-

лось требование, без выполнения которого закрывался путь к успеху: упреждение противника в атаке. Лётчику и думать, и действовать следовало намного быстрее. Скоротечность боя вошла в противоречие с резко возросшим объёмом работы, выполнявшейся лётчиком в боевом полёте.” Приходилось совмещать пилотирование самолёта, оценку воздушной обстановки, а также слежение за противником с операциями в кабине. В результате лётчик вышел на пределы своих психофизиологических возможностей. Конфликт мышления с черновой работой [17] определил необходимость “разработки экспертных бортовых систем, которые должны оказывать помощь лётчику в планировании боя и принятии решений в сложной воздушной обстановке”. В частности [17], внезапное нападение противника “заставляет инстинктивно, не задумываясь”, предпринимать освоенные на тренировках оборонительные манёвры. Согласно [17], здесь наиболее выгодны “мёртвая петля” или наклонный вираж (“косая петля”), “и только после энергичного уклонения от атаки противника” можно предпринять следующие шаги в завязавшейся борьбе.

Данная глава посвящена расчёту оптимального по времени манёвра “петля” на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина [122]. Эта задача была исследована в [238] (см. также [240] и список литературы в [239]). Главным отличием настоящей работы от [238] следует считать то, что все расчёты в [238] были проведены на основе предположения, что скорость в момент окончания манёвра может быть любой. В результате почти всегда эта величина оказывалась значительно меньше начальной, поскольку запас кинетической энергии использовался для скорейшего завершения движения. Однако как при уклонении от противника, так и при преследовании цели очень важно не терять скорость [16]. Поэтому далее во всех рассмотренных случаях это требование было удовлетворено, что привело к траекториям, существенно отличающимся от полученных в [238].

Поскольку уравнения движения самолёта будут использованы в мало распространённой форме, то изложим кратко их вывод, следуя [221], [27] и [31]. Попутно введём значения констант, необходимые для вычислений.

Пренебрежём влиянием ветра, вращением Земли, а также кривизной её поверхности и рассмотрим движение центра масс самолёта в трёхмерном пространстве относительно некоторой наземной неподвижной правой декартовой прямоугольной инерциальной системы координат $OXYZ$, оси OX и OZ которой лежат в горизонтальной плоскости (см. рис. 30). Имеем

$$m\ddot{r} = G + R + P, \quad m = \text{const}, \quad \dot{r} = v(t) \in \mathbf{R}^3, \quad |v| = V \geq \text{const} > 0 \quad (2.1.1)$$

Здесь m — масса летательного аппарата, которую будем считать постоянной, r — радиус-вектор центра масс самолёта в системе $OXYZ$ с компонентами x , y и z , v — вектор скорости, G — сила тяжести, R — главный вектор аэродинамических сил, P — сила тяги двигателей. В силу сказанного выше будем считать, что значение V всегда достаточно велико и ограничение на него можно не учитывать.

Гравитационное поле будем полагать однородным, так что

$$G = \text{col}(0, -mg, 0), \quad |G| = mg, \quad g = 9.81 \text{ м/с}^2 \quad (2.1.2)$$

где g — величина ускорения свободного падения, а через col обозначен вектор-столбец.

Будем считать атмосферу изотермической со следующей аппроксимационной зависимостью массовой плотности воздуха ρ от высоты y

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \exp(-y/h) \\ \rho_0 &= 9.81 \cdot 0.125 \text{ кг/м}^3 = 1.22625 \text{ кг/м}^3, \quad h = 10^4 \text{ м} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Вектор R в (2.1.1) принято рассматривать в виде суммы трёх векторов

$$R = R_x + R_y + R_z \quad (2.1.4)$$

где R_x — сила лобового сопротивления, R_y — подъёмная сила, R_z — боковая сила. Вектор R_x направлен против вектора скорости v , вектор R_y лежит в вертикальной плоскости симметрии самолёта и ортогонален R_x , вектор R_z ортогонален R_x и R_y . Будем считать, что самолёт движется без скольжения, то есть что v всегда лежит в той же плоскости, что и R_y . Тогда можно положить $R_z \equiv 0$.

Будем считать, что подъёмную силу R_y можно мгновенно менять как по величине, так и по направлению, причём $|R_y|$ может быть выражен через безразмерный скалярный коэффициент подъёмной силы C_y :

$$|R_y| = C_y q S, \quad 0 \leq C_y \leq C_y^{\max} = 1.5, \quad q = \rho v^2 / 2 \quad (2.1.5)$$

где q — скоростной напор, S — площадь крыла самолёта. Поясним физический смысл величины C_y^{\max} . Во время полёта лётчик может менять величину R_y посредством изменения угла атаки α , то есть угла между продольной осью самолёта и проекцией вектора скорости на вертикальную плоскость его симметрии. Известно, что при дозвуковых скоростях и $|\alpha| \lesssim 15^\circ$ коэффициент C_y линеен по α . При $|\alpha| \gtrsim 15^\circ$ данная зависимость становится существенно нелинейной, что происходит из-за возникновения на крыле явления срыва потока, развитие которого приводит к ухудшению устойчивости и управляемости самолёта с последующим переходом к сваливанию. Поэтому при эксплуатации самолёта значение C_y не должно превышать некоторой максимальной величины C_y^{\max} .

Модуль силы аэродинамического сопротивления может быть записан с помощью безразмерного скалярного коэффициента лобового сопротивления C_x в форме

$$|R_x| = C_x q S, \quad C_x = C_{x0} + C_{xi} \quad (2.1.6)$$

Скаляр C_{x0} — коэффициент лобового аэродинамического сопротивления при нулевой подъёмной силе. Его величина обусловлена свойствами

вязкости и сжимаемости воздуха и соответствует пассивному сопротивлению, то есть сопротивлению, которое не зависит от подъёмной силы. Соответственно ту часть силы аэродинамического сопротивления, которая зависит от подъёмной силы, описывают с помощью C_{xi} — коэффициента индуктивного сопротивления. В случае дозвуковых скоростей при симметричной конфигурации самолёта и линейной зависимости C_y от α функция $C_x(C_y)$, называемая полярой, является параболой. Положим

$$C_x = C_{x0} + AC_y^2, \quad C_{x0} = 0.025, \quad A = 0.14 \quad (2.1.7)$$

где A — коэффициент “отвала” поляры. Иначе говоря, согласно (2.1.6), полагаем $C_{xi} = AC_y^2$. Отметим, что в инженерной практике квадратичную зависимость применяют и для несимметричных конфигураций самолёта при околозвуковых скоростях полета.

Будем полагать, что вектор тяги P всегда направлен вдоль вектора скорости v . Величина $|P|$ ограничена минимальной и максимальной допустимыми мощностями двигателей:

$$P_{\min} \leq |P| \leq P_{\max}, \quad \frac{P_{\min}}{|G|} = \frac{1}{2}, \quad \frac{P_{\max}}{|G|} = -B_1 y + B_2 V + B_3 \quad (2.1.8)$$

$$B_1 = 10^{-4} \text{ м}^{-1}, \quad B_2 = 0.002 \text{ с/м}, \quad B_3 = 1$$

Здесь использована приближённая линейная аппроксимация зависимости P_{\max} от высоты полёта y и величины скорости V . Отметим, что P_{\min} выбрано равным примерно половине от P_{\max} .

Введём скаляр u согласно следующим формулам:

$$U_p = \frac{g}{2|G|} (P_{\max} + P_{\min}), \quad U_m = \frac{g}{2|G|} (P_{\max} - P_{\min}) \quad (2.1.9)$$

$$\frac{|P|}{m} = U_p + uU_m, \quad |u| \leq 1$$

Это преобразование позволяет перейти от величины $|P|$ с ограничениями, зависящими от фазовых переменных, к величине u , ограничения на которую от фазовых переменных не зависят.

Отношение $|G|/S$ называют удельной нагрузкой на крыло. Его будем считать постоянным: $|G|/S = 9.81 \cdot 300 \text{ Н/м}^2$. Разделим обе части дифференциального уравнения для \dot{r} в (2.1.1) на m . Используя выражения (2.1.2), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8) и (2.1.9), получим

$$\begin{aligned} \dot{r} = v, \quad \dot{v} &= \frac{G}{m} + (U_p + uU_m - (C_{x0} + AC_y^2) qk) \tau + C_y qk\nu \\ \tau, \nu \in \mathbf{R}^3, \quad \tau &= \frac{v}{V}, \quad \nu = \frac{R_y}{|R_y|}, \quad (\nu, \tau) = 0, \quad k = \frac{S}{m} = \frac{1}{300} \text{ м}^2/\text{кг} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Введём коэффициент нормальной перегрузки

$$n_y = \frac{|R_y|}{|G|} = \frac{C_y q S}{gm} = \frac{C_y q k}{g}, \quad 0 \leq n_y \leq n_y^{\max} = 8 \quad (2.1.11)$$

Она ограничена конструктивными особенностями летательного аппарата, а также физиологическими возможностями лётчика. Заметим, что последние весьма значительны (см., например, [236]), поэтому условие $n_y^{\max} = 8$ фактически отражает предельные возможности самолёта.

Аналогично введём тангенциальную перегрузку

$$n_x = \frac{|P| - |R_x|}{|G|} \quad (2.1.12)$$

Используя (2.1.11) и (2.1.12), можно записать дифференциальные уравнения (2.1.10) в виде

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = f_g + g n_x \tau + g n_y \nu, \quad f_g = \frac{G}{m}, \quad |f_g| = g \quad (2.1.13)$$

Уравнения (2.1.13) могут быть записаны и в более традиционной форме. Ориентацию самолёта относительно осей системы координат $OXYZ$ можно определить с помощью трёх углов θ , ψ и γ , как показано на рис. 30. Угол θ между вектором скорости и плоскостью OXZ называется углом тангажа, угол ψ между проекцией вектора скорости на плоскость OXZ и осью OX — углом курса и, наконец, γ — угол крена, который можно найти как угол между вертикальной плоскостью, содержащей вектор скорости самолёта, находящегося в точке Υ , и вектором подъёмной силы.

Выберем движущуюся вместе с самолётом правую декартову прямоугольную систему координат так, чтобы её начало находилось в центре масс самолёта, первая ось всегда была направлена по вектору τ , а вторая — по вектору ν . Введём вектор ω абсолютной угловой скорости подвижной системы координат, имеющий проекции ω_1 , ω_2 и ω_3 на оси этой системы. Производная по времени от вектора v , заданного своими компонентами относительно подвижной системы координат, равна

$$\dot{v} = \text{col}(\dot{V}, 0, 0) + \text{col}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \times \text{col}(V, 0, 0) \quad (2.1.14)$$

где \times означает векторное произведение. С учётом (2.1.14) уравнение для \dot{v} в (2.1.13) приобретает вид

$$\begin{aligned} gn_x + f_{g1} &= \dot{V}, & gn_y + f_{g2} &= V\omega_3, & f_{g3} &= -V\omega_2 \\ f_{g1} &= -g \sin \theta, & f_{g2} &= -g \cos \theta \cos \gamma, & f_{g3} &= g \cos \theta \sin \gamma \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

где f_{g1} , f_{g2} и f_{g3} — проекции вектора f_g на оси подвижной системы координат. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\gamma} \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \gamma + \dot{\theta} \sin \gamma \\ \omega_3 &= -\dot{\psi} \cos \theta \sin \gamma + \dot{\theta} \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Из (2.1.16) имеем

$$\dot{\psi} = \omega_2 \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} - \omega_3 \frac{\sin \gamma}{\cos \theta}, \quad \dot{\theta} = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma \quad (2.1.17)$$

Тогда из (2.1.15) и (2.1.17) получаем уравнения движения центра масс самолёта в традиционной форме

$$\dot{V} = gn_x - g \sin \theta, \quad \dot{\psi} = -\frac{gn_y}{V} \frac{\sin \gamma}{\cos \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{gn_y}{V} \cos \gamma - \frac{g}{V} \cos \theta \quad (2.1.18)$$

При $\cos \theta = 0$ правая часть уравнения для $\dot{\psi}$ обращается в бесконечность, что осложняет рассмотрение пространственных движений при использовании (2.1.18). Поэтому будем применять уравнения в формах (2.1.10) и (2.1.13).

§2.2. Оптимальное управление в трёхмерном случае

Приняв во внимание (2.1.5), (2.1.8), (2.1.11) и (2.1.13), уравнения (2.1.10) можно переписать в виде

$$\dot{r} = v$$

$$\dot{v} = (U_p + uU_m - qkC_{x0} - qk|c_l|^2 A) \tau + qkc_l + f_g, \quad |u| \leq 1 \quad (2.2.1)$$

$$c_l = C_y \nu, \quad |c_l| = C_y \leq C_y^{\max}, \quad |c_l|qk \leq gn_y^{\max}$$

Требуется, выбирая вектор c_l и скаляр u , за минимальное время T привести центр масс самолёта из начального состояния

$$r(0) = \text{col}(x_0, y_0, z_0), \quad v(0) = \text{col}(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \quad (2.2.2)$$

в конечное состояние

$$r(T) = \text{col}(x_T, y_T, z_T), \quad v(T) = \text{col}(v_{Tx}, v_{Ty}, v_{Tz}) \quad (2.2.3)$$

Без ограничения общности всегда можно считать, что $x_0 = z_0 = 0$.

Введём векторы ψ_v и ψ_r , сопряжённые с векторами v и r соответственно. Разложим ψ_v на составляющие, коллинеарные τ и ν . Получим

$$\psi_{v\tau} = (\psi_v, \tau), \quad \psi_{v\nu} = \psi_v - \psi_{v\tau}\tau \quad (2.2.4)$$

Составим гамильтониан

$$\begin{aligned} H = & (U_p + uU_m - qkC_{x0} - qk|c_l|^2 A) \psi_{v\tau} + qk(\psi_{v\nu}, c_l) + \\ & + (\psi_v, f_g) + (\psi_r, v) + \lambda (|c_l|qk - gn_y^{\max}) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

где λ — дополнительный скалярный неопределённый множитель Лагранжа, введённый в силу наличия в (2.2.1) фазового ограничения на управление. Согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина [122], найдём максимум (2.2.5) по u и c_l . Поскольку далее в этом разделе будут использованы только те функции, которые удовлетворяют необходимым условиям оптимальности, то можно сохранить для этих функций

те же обозначения, которые применялись выше. В частности, управления, найденные в результате поиска экстремума, будут по-прежнему обозначены через u и c_l . Подстановка соответствующих выражений в фазовое ограничение $|c_l|qk \leq gn_y^{\max}$ даёт

$$\lambda = \frac{2Ag_n^{\max}}{qk} \psi_{v\tau} - |\psi_{v\nu}| \quad (2.2.6)$$

Оптимальные значения c_l следует вычислять по такому алгоритму:

$$\text{если } \lambda < 0 \text{ и } \frac{gn_y^{\max}}{qk} \leq C_y^{\max}, \text{ то } |c_l| = \frac{gn_y^{\max}}{qk}$$

иначе

$$\chi = \frac{|\psi_{v\nu}|}{2A\psi_{v\tau}} \quad (2.2.7)$$

$$\text{если } \chi < 0 \text{ или } \chi > C_y^{\max}, \text{ то } |c_l| = C_y^{\max}$$

$$\text{иначе } |c_l| = \chi$$

$$c_l = |c_l| \frac{\psi_{v\nu}}{|\psi_{v\nu}|}$$

Для оптимального u получаем

$$u = \text{sign}(\psi_v, v) \quad (2.2.8)$$

Дифференциальные уравнения для ψ_v и ψ_r слишком громоздки и не могут быть приведены здесь. Соответствующий алгоритм на языке программирования C++ был получен с помощью системы символьных вычислений MAPLE согласно известным формулам [122]. Исключение составляют уравнения

$$\dot{\psi}_{rx} = 0, \quad \dot{\psi}_{rz} = 0 \quad (2.2.9)$$

поскольку, согласно (2.2.5), координаты центра масс x и z в функцию H явно не входят.

Для численных примеров, рассмотренных ниже, было принято, что векторы $v(0)$, $r(T)$ и $v(T)$, введённые в (2.2.2) и (2.2.3), параллельны

некоторой вертикальной плоскости. Тогда можно выбрать систему координат $OXYZ$ так, чтобы компоненты v_{0z} , z_T и v_{Tz} обращались в нуль. Из пространственной симметрии задачи следует, что в этом случае оптимальная траектория будет целиком лежать в вертикальной плоскости OXY . Тогда $\psi_{vz} \equiv 0$ и с учётом (2.2.9) оказывается, что для решения поставленной двухточечной задачи оптимального управления необходимо найти значения $\psi_{ry}(0)$, $\psi_{vx}(0)$, $\psi_{vy}(0)$, а также $\psi_{rx} \equiv \text{const}$.

Как известно [122], на оптимальном решении $H \equiv \text{const}$. Следовательно, можно нормировать H так, чтобы $\psi_{ry}^2(0) + \psi_{vx}^2(0) + \psi_{vy}^2(0) = 1$. Заметим также, что константа ψ_{rx} входит в правую часть дифференциального уравнения для $\dot{\psi}_v$ аддитивно и учесть её влияние сравнительно нетрудно. Эти два соображения позволили найти все численные решения, приведённые ниже, путём прямого перебора возможных значений $\psi_{ry}(0)$, $\psi_{vx}(0)$, $\psi_{vy}(0)$ и ψ_{rx} . Интегрирование прекращалось, когда траектория первый раз попадала в требуемую окрестность конечной точки в фазовом пространстве.

Численное интегрирование дифференциальных уравнений для фазовых и сопряжённых переменных в окрестности регулярных точек производилось с помощью стандартного метода Рунге-Кутты четвёртого порядка точности с переменным шагом и контрольным членом в форме Ингланда [15]. На интервалах времени длительностью около 10^{-13} с, в течение которых первая производная вычисляемых функций менялась скачком, был применён метод Эйлера первого порядка с шагом 10^{-13} с. Для дополнительного контроля точности были использованы значения гамильтониана H , который, согласно [122], должен сохранять свою начальную величину. В итоге удалось обеспечить выполнение условий (2.2.3) с точностью около 0.1 м по пространственным переменным и около 0.1 м/с по проекциям вектора скорости при относительной точности интегрирования около 10^{-8} и абсолютных точностях по времени, а также по компонентам векторов r и v около 10^{-13} с, 10^{-13} м и 10^{-13} м/с

соответственно.

В качестве примера рассмотрим случай, когда начальная и конечная фазовые точки (2.2.2) и (2.2.3) совпадают, а именно

$$r(0) = r(T) = \text{col}(0, 5000 \text{ м}, 0), \quad v(0) = v(T) = \text{col}(250 \text{ м/с}, 0, 0) \quad (2.2.10)$$

Так как в (2.2.10) начальная фазовая точка совпадает с конечной, то при вычислениях необходимо начинать проверку степени близости между текущим и терминальным фазовыми векторами не сразу, а спустя некоторое время t_{\min} . Для оценки величины последнего заметим, что в процессе движения проекция вектора $v(t)$ на ось абсцисс должна сначала уменьшиться до нуля, а потом снова принять начальное значение. При торможении максимум a_{\max} модуля проекции вектора ускорения точки на τ можно оценить, согласно (2.2.1), как

$$a_{\max} < \left| gP_{\min} - q_{\max}k \left(C_{x0} - A(C_y^{\max})^2 \right) - g \right|, \quad q_{\max} = \frac{\rho_0 v^2(0)}{2} \quad (2.2.11)$$

Поскольку промежуток времени, необходимый для того, чтобы проекция вектора $v(t)$ на ось абсцисс стала нулевой, не меньше $|v(0)|/a_{\max}$, то на основании (2.2.10) и (2.2.11) можно взять $t_{\min} = 5 \text{ с}$.

На рис. 31 начальная и конечная точка обозначена буквой Υ ; стрелками показано направление движения по кривым. Оптимальная траектория отмечена на рис. 31 цифрой 1. Время движения по ней составляет $T_1 \approx 24.94 \text{ с}$. Кроме того, было найдено локально оптимальное решение, помеченное на рис. 31 цифрой 2, причём время движения в этом случае $T_2 \approx 27.25 \text{ с}$. На рис. 32 кривые 1_x и 2_x — абсциссы центра масс как функции времени для траекторий 1 и 2 на рис. 31; 1_y и 2_y — соответствующие ординаты. Особый интерес представляет окрестность точки Υ , приведённая на рис. 33 в крупном масштабе. Обозначения на рис. 33 те же, что и на рис. 31. Видно, что траектория 1, в отличие от 2, имеет переменную кривизну. Заметим, что длина оптимальной кривой больше, чем локально оптимальной, а меньшее время достигается за счёт

более высокой средней скорости, как показано на рис. 34, где кривые 1 и 2 — зависимости модуля скорости центра масс от времени для траекторий 1 и 2 на рис. 31 и рис. 33; 1_x и 2_x — проекции вектора скорости на ось абсцисс для тех же траекторий; 1_y и 2_y — соответствующие проекции на ось ординат.

На рис. 35 показана зависимость скалярного управления u от времени для траектории 1 на рис. 31 и рис. 33. В локально оптимальном случае 2 оно тождественно равно единице. Поведение модуля вектора оптимального управления c_l на рис. 36 для траекторий 1 и 2 на рис. 31 и рис. 33, за исключением конечного участка, в основном зависит от ограничения на n_y , как показано на рис. 37, где кривые 1_x и 2_x представляют n_x для траекторий 1 и 2 на рис. 31 и рис. 33, а 1_y и 2_y — соответствующие значения n_y . В случае 2 это ограничение влияет лишь на очень коротком интервале времени в окрестности $t \approx 25$ с. Однако в результате траектория 2 не является окружностью. Следовательно, помимо 1 и 2, существуют ещё одно оптимальное и одно локально оптимальное решения, которые можно получить, если взять кривые, зеркально симметричные приведённым относительно вертикальной прямой, проходящей через точку Υ . Этот факт непосредственно следует из пространственно-временной симметрии задачи. Отметим, что “провал” на графике 1_x в окрестности $t \approx 5$ с, показанный на рис. 37, является следствием переключения $u(t)$ (см. рис. 35). В противоположность результатам, полученным в [238], ограничение на C_y нигде не достигается (см. рис. 36).

§2.3. Учёт ограничения на знак кривизны траектории

Поскольку понятие знака кривизны можно ввести только для плоских кривых, то в рамках описываемой постановки проблемы всюду в полученных ранее формулах следует полагать проекции векторов на горизонтальную координатную ось OZ равными нулю и тем самым считать задачу не трёхмерной, а двухмерной.

Как было показано выше, кривизна оптимальной траектории, лежащей в вертикальной плоскости, в различные моменты времени может быть как отрицательной, так и положительной. Исключим такие решения, введя дополнительное ограничение. Именно, рассмотрим поставленную ранее задачу оптимального быстрогодействия в классе траекторий, имеющих либо неотрицательную, либо неположительную кривизну. В дальнейшем для определённости будем говорить только о неотрицательной кривизне. Все формулы для случая неположительной кривизны могут быть получены с помощью соответствующей замены знаков в неравенствах, которые будут выведены ниже.

Введём вектор ζ так, чтобы τ и ζ задали правую декартову прямоугольную систему координат в плоскости движения. Именно пусть

$$\zeta = \text{col}(-v_y, v_x), \quad (\zeta, v) = 0 \quad (2.3.1)$$

Заметим, что ζ и ν коллинеарны. Условие неотрицательности кривизны траектории означает, что проекция сил, действующих на центр масс самолёта, на вектор ζ должна быть неотрицательна. Согласно (2.1.13), имеем

$$(f_g + g n_x \tau + g n_y \nu, \zeta) \geq 0 \quad (2.3.2)$$

Из (2.1.2) и (2.1.13) следует, что $(f_g, \zeta) = -g v_x$. Тогда на основании (2.1.13), (2.3.1) и (2.3.2) получаем

$$(f_g + g n_x \tau + g n_y \nu, \zeta) = -g v_x + g n_y (\nu, \zeta) \geq 0 \quad (2.3.3)$$

Из (2.3.1) и (2.3.3) следует, что

$$n_y \nu_y v_x - n_y \nu_x v_y \geq v_x \quad (2.3.4)$$

С другой стороны, поскольку $(\nu, v) = 0$, то

$$(\nu, v) = \nu_x v_x + \nu_y v_y = 0, \quad \nu_x = -\frac{v_y}{v_x} \nu_y \quad (2.3.5)$$

Подставим ν_x из (2.3.5) в (2.3.4). Получим

$$n_y \nu_y v_x + n_y \nu_y v_y^2 / v_x \geq v_x \quad (2.3.6)$$

Из (2.3.6) имеем

$$\begin{cases} n_y \nu_y \leq v_x^2 / |v|^2, & \text{если } v_x \leq 0 \\ n_y \nu_y > v_x^2 / |v|^2, & \text{если } v_x > 0 \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Введём скалярную величину

$$n_\zeta = n_y \nu_y \sqrt{1 + v_y^2 / v_x^2} \quad (2.3.8)$$

На основании (2.3.5) и (2.3.8) получаем

$$v_y = -\frac{\nu_x v_x}{\nu_y}, \quad n_\zeta = n_y \nu_y \sqrt{1 + \nu_x^2 / \nu_y^2} = n_y \frac{\nu_y}{|\nu_y|} = n_y \operatorname{sign} \nu_y \quad (2.3.9)$$

Из (2.3.9) следует, что $|n_\zeta| = n_y$. Тогда из (2.3.7) и (2.3.8) имеем

$$\begin{cases} n_\zeta \leq |v_x| / V, & \text{если } v_x \leq 0 \\ n_\zeta > |v_x| / V, & \text{если } v_x > 0 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Соотношения (2.3.5) и (2.3.8) дают

$$n_y \nu_y = \frac{n_\zeta}{\sqrt{1 + v_y^2 / v_x^2}}, \quad n_y \nu_x = -\frac{v_y}{v_x} \frac{n_\zeta}{\sqrt{1 + v_y^2 / v_x^2}} \quad (2.3.11)$$

Можно выразить через n_ζ проекции c_{lx} и c_{ly} вектора c_l , который был использован в качестве управления в трёхмерном случае:

$$c_{lx} = -\frac{2gn_\zeta \exp(y/h) v_z \operatorname{sign} v_x}{V^3 k \rho_0}, \quad c_{ly} = \frac{2gn_\zeta \exp(y/h) |v_x|}{V^3 k \rho_0}$$

Перейдём в (2.2.1) от управления c_l к n_ζ . С этой целью из (2.1.11) и (2.3.11) получим

$$C_y = \frac{gn_y}{qk}, \quad c_l = \frac{g}{qk} n_y \nu, \quad qk|c_l|^2 A = \frac{Ag^2 n_y^2}{qk} = \frac{Ag^2 n_\zeta^2}{qk} \quad (2.3.12)$$

Опираясь на (2.3.12), можно преобразовать (2.2.1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \\ \dot{v} &= (U_p + uU_m - qkC_{x0} - Ag^2 n_\zeta^2 q^{-1} k^{-1}) \tau + gn_y \nu + f_g \\ |u| &\leq 1, \quad |n_\zeta| \leq n_y^{\max}, \quad |n_\zeta| \leq C_y^{\max} qk/g \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Будем действовать так же, как и в случае отсутствия ограничения на знак кривизны траектории, рассмотренном выше. В частности, сохраним те же соглашения об обозначениях. Рассмотрим гамильтониан, аналогичный (2.2.5). С учётом (2.3.10), (2.3.11) и (2.3.13) получим

$$\begin{aligned} H_\ell &= (U_p + uU_m - qkC_{x0} - Ag^2 n_\zeta^2 q^{-1} k^{-1}) \psi_{\ell v \tau} - \\ &- gn_\zeta v_y v_x^{-1} (1 + v_y^2/v_x^2)^{-1/2} \psi_{\ell v x} + gn_\zeta (1 + v_y^2/v_x^2)^{-1/2} \psi_{\ell v y} + \\ &+ (\psi_{\ell v}, f_g) + (\psi_{\ell r}, v) + \mu_n (n_\zeta - C_y^{\max} qk/g) + \mu_\ell (n_\zeta - |v_x|/V) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Здесь вектор $\psi_{\ell v}$ с компонентами $\psi_{\ell v x}$ и $\psi_{\ell v y}$ и вектор $\psi_{\ell r}$ сопряжены с v и r соответственно, а переменная $\psi_{\ell v \tau}$ введена аналогично $\psi_{v \tau}$ в (2.2.4). Функции μ_n и μ_ℓ имеют тот же смысл, что и λ в (2.2.5). Для них согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина [122], имеем

$$\begin{aligned} \mu_n &\in \{\mu_n^+, \mu_n^-\}, \quad \mu_n^+ = \chi_1 n_c + \chi_0, \quad \mu_n^- = \chi_1 n_c - \chi_0 \\ \chi_1 &= \frac{4Ag^2(\psi_{\ell v}, v)V^{-5/2} \exp(y/h)}{\rho_0 k}, \quad \chi_0 = g \frac{\psi_{\ell v x} v_y / v_x - \psi_{\ell v y}}{\sqrt{1 + v_y^2/v_x^2}} \\ n_c &= \frac{1}{2g} C_y^{\max} k \rho_0 V^2 \exp(-y/h), \quad \mu_\ell = \chi_1 n_\ell + \chi_0 \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Введём обозначения

$$n_d = -\chi_0/\chi_1, \quad n_\ell = |v_x|/V \quad (2.3.16)$$

Используя (2.3.15) и (2.3.16), запишем формулы для вычисления оптимального управления n_ζ . Имеем

$$n_\zeta = \arg \max \{H_\ell(n_-), H_\ell(n_0), H_\ell(n_+)\}, \quad H_\ell = H_\ell(n_\zeta) \quad (2.3.17)$$

Алгоритм поиска n_- можно представить в виде

если $v_x > 0$, то

если n_+ определено и $n_\ell > n_+$, то решение не существует

иначе если $\mu_\ell > 0$, то $n_- = n_\ell$

иначе

если $-n_y^{\max} \geq -n_c$, то $n_- = -n_y^{\max}$

иначе если $\mu_n^- < 0$, то $n_- = -n_c$

(2.3.18)

Далее запишем алгоритм поиска n_0 в следующей форме

если n_- и n_+ определены и $n_d > n_-$ и $n_d < n_+$, то $n_0 = n_d$

иначе

если n_- определено и $n_d > n_-$, то $n_0 = n_d$

иначе если n_+ определено и $n_d < n_+$, то $n_0 = n_d$

(2.3.19)

И наконец, алгоритм поиска n_+ имеет вид

если $v_x < 0$, то

если $n_y^{\max} \leq n_c$ и $n_y^{\max} \leq n_\ell$, то $n_+ = n_y^{\max}$

иначе

если $n_c \leq n_y^{\max}$ и $n_c \leq n_\ell$ и $\mu_n^+ < 0$, то $n_+ = n_c$

иначе если $\mu_\ell < 0$, то $n_+ = n_\ell$

(2.3.20)

иначе

если $n_y^{\max} \leq n_c$, то $n_+ = n_y^{\max}$

иначе если $\mu_n^+ < 0$, то $n_+ = n_c$

Заметим, что значения H_ℓ в (2.3.17) следует вычислять лишь тогда, когда определено соответствующее управление, являющееся значением аргумента функции $H_\ell = H_\ell(n_\zeta)$. Кроме того, (2.3.18), (2.3.19) и (2.3.20) представлены в форме отдельных блоков лишь для удобства читателя.

В программе для компьютера n_- , n_0 и n_+ были вычислены в рамках единого алгоритма.

Оптимальное управление u можно получать аналогично (2.2.8)

$$u = \text{sign}(\psi_{\ell v}, v) \quad (2.3.21)$$

Оптимальная траектория с неотрицательной кривизной представлена на рис. 31 цифрой 2 и была описана выше. Оптимальная траектория с неположительной кривизной обозначена на рис. 31 цифрой 3. Она изображена пунктиром. Время движения по ней $T_3 \approx 24.96$ с больше T_1 примерно на 0.02 с вследствие того, что, начиная с $t \approx 23.82$ с, как видно из рис. 33, она выходит на ограничение по кривизне и около четырёхсот её последних метров лежат на горизонтальной прямой. В рассматриваемом случае отклонения от траектории 1, как видно из рис. 31 и рис. 32, где 3_x и 3_y — соответствующие абсцисса и ордината центра масс как функции времени, незначительны. Однако C_y , как показано посредством кривой 3 на рис. 36, при $t \approx 2$ с и на конечном участке времени имеет существенно иной вид. В последнем случае причиной расхождения служит выход на ограничение. Заметим, что управление u при этом, как показано на рис. 35, в случае 3 практически то же, что и в случае 1.

Требование вернуться в начальную точку приводит, вообще говоря, к большему времени движения по сравнению со случаем, когда правый конец траектории свободен. Следовательно, представляют интерес решения, для которых конечная точка не задана. Были вычислены траектории, удовлетворяющие не граничным условиям (2.2.10), а условиям

$$r(0) = \text{col}(0, 5000 \text{ м}), \quad v(0) = v(T) = \text{col}(250 \text{ м/с}, 0) \quad (2.3.22)$$

причём вектор $r(T)$ — любой. Полученные кривые показаны на рис. 38, где Υ — начальная точка; I — оптимальное решение с неположительной кривизной; II — оптимальное решение с неотрицательной кривизной.

Стрелками показано направление движения по траекториям. На рис. 39 кривые I_x и II_x — абсциссы центра масс как функции времени для траекторий I и II на рис. 38, а I_y и II_y — соответствующие ординаты. Как и для аналогичных траекторий на рис. 31, время движения по кривой I заметно меньше такового для кривой II : имеем $T_I \approx 22.74$ с против $T_{II} \approx 23.58$ с. На рис. 40 кривые I и II — зависимости модуля скорости центра масс от времени для траекторий I и II на рис. 38; I_x и II_x — проекции вектора скорости на ось абсцисс для тех же траекторий; I_y и II_y — соответствующие проекции на ось ординат. Видно, что среднее значение $|v|$ на траектории I значительно выше, чем на траектории II . Управление u для случая I на рис. 41 до момента $t \approx 0.61$ с минимально, что имеет некоторое сходство с поведением u , показанным на рис. 35. Для случая II , как и для 2 на рис. 31, оказалось, что $u(t) \equiv 1$. Рис. 42 содержит зависимость коэффициента подъёмной силы C_y от времени для траекторий I и II на рис. 38. Ограничение $C_y \leq C_y^{\max}$ активно для II в течение значительного времени, что было отмечено для аналогичных случаев в [238], однако все траектории, показанные в [238], имеют в отличие от II самопересечение. Излом недалеко от начала кривой для I на рис. 42 объясняется соответствующим поведением u , а изломы на обоих графиках, близкие к конечной точке, — выходом n_y на ограничение n_y^{\max} , что видно из рис. 43, на котором показаны зависимости тангенциальной n_x и нормальной n_y перегрузок от времени, причём кривые I_x и II_x представляют n_x для траекторий I и II на рис. 38, а I_y и II_y — соответствующие значения n_y . В свою очередь определённые угловые точки на рис. 43 — следствие выхода на ограничение по C_y . Из рис. 43 можно понять, почему время движения по траектории I — самое маленькое из всех вычисленных в рамках настоящей работы: почти на всей траектории I , за исключением сравнительно небольшого конечного участка, имеем $n_y = n_y^{\max}$. Отметим также поведение зависимости угла тангажа θ от времени, показанное на рис. 44, где кривые 1 и

2 представляют траектории 1 и 2 на рис. 31 и рис. 33, а кривые I и II — траектории I и II на рис. 38. Оно похоже в случаях I и 1. Для кривой 1 на рис. 31 и рис. 33 угол θ на небольшом интервале в конце движения становится меньше -360° и соответствующий график имеет минимум. Это связано с переменной кривизной траектории 1, что хорошо видно на рис. 33.

Глава 3.

Развитие и применение метода эллипсоидов

§3.1. Общие положения

1. Множества достижимости. Как было показано в главе 1, при некоторых условиях к системам с неопределённостью можно применять детерминированные модели. Однако такой подход имеет очевидные ограничения. В общем случае требуется управлять всем ансамблем траекторий, возникающим из-за наличия неопределённых факторов. Для описания этого ансамбля будем использовать множества достижимости. Введём соответствующие определения.

Рассмотрим управляемую систему общего вида, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = \phi(x, u, w, t), \quad t \geq t_0 \quad (3.1.1)$$

Здесь x — n -мерный фазовый вектор состояния системы (3.1.1), ϕ — соответствующая вектор-функция, u — k -мерный вектор управления, $w(t)$ — m -мерный вектор помехи (или вектор управления противника), t — время (независимая переменная), t_0 — начальный момент. Вектор u пока можно считать заданной функцией времени. Пусть $w(t)$ в любой момент времени принадлежит некоторому известному множеству в m -мерном пространстве. Предположим, что объединение всех возможных начальных состояний $x(t_0)$ задано n -мерным множеством X_0 , то есть $x(t_0) \in X_0$.

Множеством достижимости $D(t, u) = D(t, u, t_0, X_0)$ системы (3.1.1) называется совокупность концов $x(t, u)$ всех траекторий $x(\cdot, u)$ этой системы, начинающихся в момент t_0 в точках начального множества X_0 и удовлетворяющих ограничениям на вектор $w(t)$.

Семейство множеств достижимости $D(t, u) = D(t, u, t_0, X_0)$ обладает эволюционным свойством $D(t, u, t_0, X_0) = D(t, u, \tau, D(\tau, u))$, где $t_0 \leq \tau \leq t$.

Семейство множеств $\Lambda(t, u)$ называется семейством множеств супердостижимости для управляемой системы (3.1.1) с описанными выше ограничениями, если для всех моментов времени $t_0 \leq \tau \leq t$ выполнено включение $\Lambda(t, u) \supset D(t, u, \tau, \Lambda(\tau, u))$. Таким образом, множества супердостижимости обеспечивают внешние эволюционные оценки для множеств достижимости, так как из того, что $\Lambda(t, u) \supset D(t, u)$, следует, что $\Lambda(\tau, u) \supset D(\tau, u)$ для любого $\tau \geq t$.

2. Некоторые сведения о методе эллипсоидов. Пусть

$$E(\chi, \Theta) \quad (3.1.2)$$

обозначает эллипсоид, заданный l -мерным вектором своего центра χ и симметрической неотрицательно определённой $l \times l$ -матрицей Θ . Если Θ положительно определена, то

$$E(\chi, \Theta) = \{\ell \in \mathbf{R}^l : (\Theta^{-1}(\ell - \chi), \ell - \chi) \leq 1\} \quad (3.1.3)$$

где χ — центр, Θ — матрица. Если какие-либо собственные числа Θ обращаются в нуль, то под (3.1.2) будем понимать геометрическую фигуру, представляющую собой предел, к которому стремится последовательность эллипсоидов (3.1.3) с невырожденными матрицами, соответствующие собственные числа которых стремятся к нулю. В частности, $E(\chi, \Theta)$ может быть точкой. Метод эллипсоидов позволяет употреблять такие множества для аппроксимации, поскольку во многих практически важных случаях использует Θ , а не Θ^{-1} , что является одним из его достоинств.

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w(t) + \varpi(t), \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad w(t) \in \mathbf{R}^m \quad (3.1.4)$$

причём

$$w(t) \in E(g(t), W(t)), \quad x(t_0) \in E(a_0, Q_0) \quad (3.1.5)$$

где векторы $g(t)$ и a_0 , а также матрицы $W(t)$ и Q_0 известны. Тогда можно найти множество супердостижимости в виде эллипсоида супердостижимости $x(t) \in E(a(t), Q(t))$ согласно уравнениям

$$\dot{Q} = AQ + QA^\top + \frac{Q}{q(t)} + q(t)G(t), \quad G(t) = BWB^\top, \quad Q(t_0) = Q_0 \quad (3.1.6)$$

$$\dot{a} = Aa + Bg + \varpi, \quad a(t_0) = a_0 \quad (3.1.7)$$

Скалярная функция $q(t)$ подчинена двум условиям. Во-первых, задача Коши (3.1.6) должна иметь решение, а во-вторых, $q = q(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$. Существующие методы выбора функции $q(t)$ можно разделить на две группы [102]. В обоих случаях вводится функционал $L = L(S)$, гладко зависящий от произвольной симметрической матрицы S . Требуется, чтобы градиент $\text{grad}_s L(S)$ на множестве симметрических матриц существовал и был неотрицательно определённой матрицей. Тогда

$$q = \sqrt{\frac{\text{Tr}(PQ)}{\text{Tr}(PG)}} \quad (3.1.8)$$

причём для получения локально оптимальных эллипсоидов супердостижимости следует использовать соотношение

$$P(t) = \text{grad}_s L(S)|_{S=Q(t)} \quad (3.1.9)$$

а для получения глобально оптимальных эллипсоидов супердостижимости необходимо решать задачу Коши

$$\dot{P} = -PA - A^\top P, \quad P(T) = \text{grad}_s L(S)|_{S=Q(T)} \quad (3.1.10)$$

Вариант (3.1.9) означает минимизацию скорости роста функционала в каждый момент времени между t_0 и моментом окончания процесса T . Вариант (3.1.10) обеспечивает минимальное значение функционала в момент T . Оба варианта совпадают при $t_0 = T$.

Например, можно требовать минимизации скорости роста объёма эллипсоида [160]

$$\text{Vol } E(Q) = \frac{\sqrt{\pi^n \det Q}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Тогда (3.1.8) в случае (3.1.9) приобретает вид

$$q = \sqrt{\frac{n}{\text{Tr}(Q^{-1}G)}} \quad (3.1.11)$$

Заметим, что если $L(S)$ зависит от S линейно, то в (3.1.9) и (3.1.10) элементы матрицы $\text{grad}_s L(S)$ равны $\frac{\partial L(S)}{\partial S_{ij}}$.

3. Выбор функционала. Рассмотрим функционал

$$L(a, Q) = \text{Tr}(CQ(T)) + (Ca(T), a(T)) \quad (3.1.12)$$

Здесь C — фиксированная положительно определённая матрица. Сначала выясним его точный геометрический смысл. С этой целью вспомним, что опорной функцией к некоторому множеству Ξ называется скалярная функция $h(z, \Xi)$ векторного аргумента z , равная

$$h(z, \Xi) = \sup_{\ell \in \Xi} (\ell, z) \quad (3.1.13)$$

причем символ \sup обозначает верхнюю грань. Если множество Ξ ограничено и замкнуто, то по теореме Вейерштрасса его верхняя грань достигается. Тогда (3.1.13) можно переписать в виде

$$h(z, \Xi) = \max_{\ell \in \Xi} (\ell, z) \quad (3.1.14)$$

Следовательно, скаляр $h(z, \Xi)$ для вектора z единичной длины есть верхняя грань проекций на него векторов ℓ из Ξ . Опорная функция эллипсоида (см., например, [160]) имеет вид

$$h(z, E) = \max_{x \in E(a, Q)} (x, z) = \sqrt{(Qz, z)} + (a, z)$$

откуда следует, что проекция $E(a, Q)$ на i -ую ось ортонормированной системы координат представляет собой отрезок

$$\left[-\sqrt{Q_{ii}} + a_i; \sqrt{Q_{ii}} + a_i \right] \quad (3.1.15)$$

Теперь рассмотрим отрезок, один из концов которого совпадает с одним из концов (3.1.15), а другой находится в начале координат. Тогда при

единичной C правая часть (3.1.12) даёт сумму квадратов длин всех таких отрезков, т. е.

$$\sum_i \left(\left(-\sqrt{Q_{ii}} + a_i \right)^2 + \left(\sqrt{Q_{ii}} + a_i \right)^2 \right)$$

Из сказанного можно сделать следующие выводы.

1°. Поскольку с инженерной точки зрения в задаче приведения системы (3.1.1) в начало координат с максимально возможной точностью вектором a можно описывать систематическую ошибку управляющего устройства, а матрицей Q — остальную часть невязки, то (3.1.12) характеризует максимальное отклонение фазового положения системы от начала координат. В рамках вероятностного описания динамических систем используют аналогичный подход [33]: “В случае, когда ищутся оптимальные параметры системы с учётом как дисперсии, так и систематических динамических ошибок, часто в качестве критерия точности работы системы выбирают второй начальный момент α_2 на выходе системы: $\alpha_2 = D_y + m_y^2$, где D_y — дисперсия, m_y — систематическая ошибка на выходе системы. При этом параметры системы выбирают так, чтобы они обращали в минимум величину α_2 .”

2°. Если все a_i пренебрежимо малы, то (3.1.12) переходит в

$$L(Q) = \text{Tr}(CQ) \quad (3.1.16)$$

В этом случае (3.1.12) обладает следующим свойством: его значение при единичной C равно квадрату расстояния до точки, максимально удалённой от начала координат в фазовом пространстве и принадлежащей эллипсоиду с матрицей Q .

3°. Если a_i и $\sqrt{Q_{ii}}$ представляют собой малые величины одного порядка, то указанное в 2° свойство функционала (3.1.12) верно с точностью до величин второго порядка малости.

Как (3.1.12), так и (3.1.16) для (3.1.10) даёт $P(T) = C$.

В дальнейшем, как правило, будут использованы основанные на минимизации следа функционалы (3.1.12), (3.1.16) и аналогичные им.

4. Пример динамической системы. Многие результаты, полученные в диссертации, пояснены с помощью различных модификаций следующей системы.

Пусть две точечные массы m_1 и m_2 связаны пружиной с постоянной жёсткостью k . Массы могут двигаться по прямой под действием внешних возмущающих сил $F_1(t)$ и $F_2(t)$, приложенных к первой и второй массам соответственно. Данная динамическая система описывается уравнениями

$$m_1\ddot{\vartheta}_1 = F_1(t) + k(\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad m_2\ddot{\vartheta}_2 = F_2(t) + k(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (3.1.17)$$

Здесь функции $\vartheta_1(t)$ и $\vartheta_2(t)$ — координаты первой и второй масс. Запишем (3.1.17) в нормальной форме (3.1.4) так, чтобы первой и второй компонентам четырёхмерного фазового вектора $x(t)$ соответствовали координата и скорость первой массы, а третьей и четвёртой компонентам — координата и скорость второй массы. Получим

$$\dot{x} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m_1 & 0 & k/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/m_2 & 0 & -k/m_2 & 0 \end{array} \right\| x + \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} F_1(t) \\ F_2(t) \end{array} \right\| \quad (3.1.18)$$

Для вычислений будем использовать следующие значения параметров: $k = 10^3$ Н/м, $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг. Заметим, что при этом собственная частота

$$\nu_s = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{1500} \approx 38.73 \text{ с}^{-1}, \quad \tau_s = \frac{1}{\nu_s} \approx 0.026 \text{ с} \quad (3.1.19)$$

где τ_s — соответствующий период. Свойства $F_1(t)$ и $F_2(t)$, а также прочие характеристики будут выбраны особо применительно к каждой конкретной задаче, для которой данная механическая система послужит примером использования соответствующих формул.

§3.2. Новый способ аппроксимации оценки состояния линейной системы на основе метода эллипсоидов

1. Движение материальной точки по прямой под действием неопределённой силы. Часто бывает так, что начальное положение объекта в фазовом пространстве измеряют с весьма высокой точностью, т. е. матрица Q_0 в (3.1.6) вырождена. Положение ещё более осложняется, если матрица G тоже вырождена. Последнее обстоятельство естественным образом возникает, в частности, при рассмотрении тех задач механики, в которых неопределённым фактором служит сила, действующая на систему. Тогда компоненты матрицы B , входящие в уравнения, разрешённые относительно производных координат, могут быть нулевыми, в отличие от компонент, входящих в уравнения, разрешённые относительно производных импульсов. В этих случаях существующие методы выбора $q(t)$ обнаруживают ряд недостатков.

1°. Не решён вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши (3.1.6). Более того, в [66] относительно уравнения (3.1.6) применительно к локально оптимальной минимизации объёма сказано, что “по-видимому, для большинства вырожденных начальных условий решение задачи Коши для него вообще не существует”.

2°. Даже если в каком-либо частном случае и можно решить указанную проблему, то попытка численной реализации соответствующего алгоритма будет затруднена тем, что $q(t_0)$ может обратиться в нуль.

3°. Может оказаться, что при выборе определённого $L(Q)$ в (3.1.9) существует другое решение (3.1.6) для некоторого другого функционала $L_*(Q)$ с меньшим значением соответствующей целевой функции и её производной, причём соответствующее отклонение может иметь конечную относительную величину в любой сколь угодно малой окрестности начальной точки.

Для пояснения последнего утверждения рассмотрим движение ма-

териальной точки по прямой под действием неопределённой силы. В приведённых переменных соответствующие уравнения для фазовых координат имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0 \quad (3.2.1)$$

Тогда задача (3.1.6) примет вид

$$\dot{Q}_{11} = 2Q_{12} + \frac{1}{q(t)}Q_{11}, \quad \dot{Q}_{12} = Q_{22} + \frac{1}{q(t)}Q_{12}, \quad \dot{Q}_{22} = \frac{1}{q(t)}Q_{22} + q(t) \quad (3.2.2)$$

$$Q_{11}(0) = Q_{12}(0) = Q_{22}(0) = 0$$

В [160] было получено решение, локально оптимальное по площади эллипса $\text{Vol } E(Q) = \pi \sqrt{\det Q}$

$$q^f(t) = \frac{2}{3}t, \quad Q_{11}^f = \frac{32}{45}t^4, \quad Q_{12}^f = \frac{8}{9}t^3, \quad Q_{22}^f = \frac{4}{3}t^2 \quad (3.2.3)$$

Площадь соответствующего эллипса равна $S^f \approx 1.249t^3$.

В [130] для случая локальной оптимизации критерия $L_*(Q) = Q_{22}$ приведено решение

$$q^r(t) = t, \quad Q_{11}^r = \frac{1}{3}t^4, \quad Q_{12}^r = \frac{1}{2}t^3, \quad Q_{22}^r = t^2 \quad (3.2.4)$$

Площадь соответствующего эллипса равна $S^r \approx 0.907t^3$, т. е. (3.2.4) лучше (3.2.3) примерно на 27% как по площади, так и по скорости её роста, причём в любой момент времени, кроме $t_0 = 0$, в который оба эллипса вырождаются в точку.

2. Новый подход. Теперь применим другой способ. Построим приближённое решение уравнения (3.2.2) в окрестности точки $t = 0$ в виде

$$Q(t) = tQ_1 + t^2Q_2 + t^3Q_3 + t^4Q_4 + O(t^5)$$

Коэффициенты в этом представлении будем искать, одновременно назначая коэффициенты в

$$q(t) = q_0 + tq_1 + t^2q_2 + O(t^3)$$

так, чтобы функционал $\det Q(t)$, а тем самым и площадь эллипса, был минимален в окрестности точки $t = 0$.

Заметим, что эллипс, полученный таким способом, не относится ни к локально, ни к глобально оптимальным.

Если $q_0 \neq 0$, то $\det Q = q_0^2 t^4 / 12 + O(t^5)$. Следовательно, нужно брать $q_0 = 0$. Тогда имеем

$$Q(t) = t^2 Q_2 + t^3 Q_3 + t^4 Q_4 + O(t^5) \quad (3.2.5)$$

$$Q_2 = \text{diag} \left(0, \frac{q_1^2}{2q_1 - 1} \right), \quad Q_3 = \begin{vmatrix} Q_3^{11} & Q_3^{12} \\ Q_3^{21} & Q_3^{22} \end{vmatrix}, \quad Q_4 = \begin{vmatrix} Q_4^{11} & Q_4^{12} \\ Q_4^{21} & Q_4^{22} \end{vmatrix}$$

$$Q_3^{11} = 0, \quad Q_3^{12} = Q_3^{21} = \frac{q_1^3}{(3q_1 - 1)(2q_1 - 1)}, \quad Q_3^{22} = \frac{2q_2(q_1 - 1)}{q_1^2}$$

$$Q_4^{11} = 2 \frac{q_1^4}{\Delta}, \quad Q_4^{12} = Q_4^{21} = \frac{q_2 (11q_1^3 - 22q_1^2 + 12q_1 - 2)}{q_1 \Delta}$$

$$Q_4^{22} = \frac{q_2^2 (q_1^3 - 4q_1^2 + 6q_1 - 2) + 2q_1^4 q_3 (q_1 - 1)}{q_1^3 (2q_1 - 1)(4q_1 - 1)}$$

$$\det Q = \frac{q_1^6 t^6}{(3q_1 - 1)\Delta} + O(t^7), \quad \Delta = (4q_1 - 1)(3q_1 - 1)(2q_1 - 1)$$

Для минимизации $\det Q$ достаточно найти минимум по q_1 первого члена разложения $\det Q$, а именно,

$$\frac{q_1^6}{(3q_1 - 1)\Delta} \rightarrow \min_{0 < q_1 < +\infty}$$

Можно показать, что искомое значение q_1 — один из корней уравнения

$$24q_1^3 - 43q_1^2 + 21q_1 - 3 = 0$$

Получаем

$$q_1 \approx 1.0990, \quad Q_{11} \approx 0.312t^4, \quad Q_{12} \approx 0.482t^3, \quad Q_{22} \approx 1.008t^2 \quad (3.2.6)$$

Площадь соответствующего эллипса равна $S \approx 0.9001t^3$.

Для полноты изложения следует упомянуть глобально оптимальный по площади эллипс, полученный в [102]. Он имеет параметры

$$Q_{11}^* = \varrho c_*^2 t^4, \quad Q_{12}^* = \frac{\varrho}{2} t^3, \quad Q_{22}^* = \varrho t^2, \quad \varrho = \frac{2c_*^2}{9(c_*^2 - 1/4)} \quad (3.2.7)$$

где $c_* \approx 0.56215$. Его площадь $S^* \approx 0.8587t^3$ меньше площади эллипса (3.2.6) приблизительно на 5%. Это объясняется тем, что соответствующая ему функция $q^*(t)$ не является аналитической в окрестности $t = 0$. Точное же множество достижимости, полученное в [160], имеет площадь $(2/3)t^3$.

Итак, решение (3.2.6) лучше локально оптимального, но хуже глобально оптимального.

На рис. 45 показаны все указанные выше аппроксимации в автономных переменных $\xi_1 = x_1/t^2$ и $\xi_2 = x_2/t$ (см. [160]). В силу симметрии изображена лишь верхняя полуплоскость $\xi_2 \geq 0$. Цифрой 1 обозначен эллипс (3.2.7), глобально оптимальный по площади, 2 — эллипс (3.2.3), локально оптимальный по площади, 3 — эллипс (3.2.4). Штриховой кривой показано решение (3.2.6). Аппроксимируемое множество достижимости

$$(1 + \xi_2)^2 / 4 - 1/2 \leq \xi_1 \leq 1/2 - (\xi_2 - 1)^2 / 4, \quad |\xi_2| \leq 1$$

имеет границу, состоящую из дуг двух парабол и обозначенную цифрой 4. Интересно, что ни один из четырёх эллипсов не содержит другого полностью, но каждый, как это и должно быть, содержит множество достижимости. Его граница включает угловую точку с абсциссой 0.5 и ординатой 1, окрестности которой показаны в крупном масштабе на рис. 46. Видно, что только эллипс (3.2.4) проходит через указанную точку. Все остальные аппроксимации не имеют общих точек с множеством достижимости.

3. “Универсальная” асимптотика. Применим в общем случае тот же подход, что и в предыдущем разделе. Подчеркнём, что соответству-

ющие эллипсоиды не будут относиться ни к локально, ни к глобально оптимальным. Требуется решить следующую задачу Коши, представляющую частный случай (3.1.6):

$$\dot{Q} = A(t)Q + QA^\top(t) + \frac{Q}{q(t)} + q(t)G(t), \quad Q(0) = 0 \quad (3.2.8)$$

при малых t , выбирая при этом $q(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ наилучшим, в некотором смысле, способом. Построим приближённое решение уравнения (3.2.8) в окрестности точки $t = 0$. Пусть существуют представления

$$A(t) = A_0 + tA_1 + O(t^2), \quad G(t) = G_0 + tG_1 + t^2G_2 + O(t^3)$$

где A_0, A_1, G_0, G_1, G_2 — известные постоянные матрицы.

Коэффициенты представления для $Q(t)$

$$Q(t) = tQ_1 + t^2Q_2 + t^3Q_3 + t^4Q_4 + O(t^5) \quad (3.2.9)$$

будем искать, одновременно назначая коэффициенты в

$$q(t) = q_0 + tq_1 + t^2q_2 + O(t^3)$$

Подставим (3.2.9) в соотношение (3.2.8), перенесем все слагаемые в левую часть уравнения и найдем коэффициенты при различных степенях t . Из условия равенства нулю коэффициента при t^0 получим $Q_1 = q_0G_0$. Следовательно, целесообразно выбрать $q_0 = 0$. Приравняв нулю коэффициент при t^1 , получим $Q_2 = q_1/(2 - q_1^{-1})G_0$. Выберем $q_1 > 0$ так, чтобы коэффициент при G_0 был возможно меньшей положительной величиной. Тогда $q_1 = 1$ и $Q_2 = G_0$. Можно показать, что при $q_0 = 0$ и $q_1 = 1$ матрица $Q_3 = (A_0G_0 + G_0A_0^\top + G_1)/2$. Она не зависит от членов порядка t^2 суммы для функции $q(t)$. Получаем

$$Q_4 = \frac{1}{3} \left(A_0Q_3 + A_1Q_2 + Q_3A_0^\top + Q_2A_1^\top + G_2 + q_2^2G_0 + \right. \\ \left. + \frac{q_2}{2} (G_1 - A_0G_0 - G_0A_0^\top) \right)$$

Пусть $q_2 = 0$. Соотношение для $Q(t)$ приобретает вид

$$Q(t) = t^2 G_0 + t^3 Q_3 + \frac{t^4}{3} (A_0 Q_3 + Q_3 A_0^\top + A_1 G_0 + G_0 A_1^\top + G_2) + O(t^5) \quad (3.2.10)$$

При выводе соотношения (3.2.10) не было использовано никакого определённого функционала для поиска оптимального вида $q(t)$. Вместе с тем этот результат обладает рядом полезных свойств.

1°. Выражение

$$Q(t) = t^2 G_0 + t^3 Q_3 + O(t^4) \quad (3.2.11)$$

было получено в [184] для случая положительно определённой матрицы $G(t)$ при поиске решения, локально оптимального по скорости роста объёма. Там же было показано, что то же самое соотношение при тех же условиях справедливо для эллипсоида, гарантированно содержащегося в множестве достижимости. Следовательно, при положительно определённой матрице $G(t)$ само множество достижимости с точностью до членов порядка t^4 — эллипсоид с матрицей (3.2.11).

2°. Из известных результатов [102] следует, что при построении глобально оптимальных эллипсоидов для любого критерия

$$q(t) = \phi / \dot{\phi}; \quad \phi = \sqrt{\text{Tr}(PQ)}, \quad \dot{\phi} = \sqrt{\text{Tr}(PG)} \quad (3.2.12)$$

Из соотношений (3.2.12) следует, что если существует представление $\phi(t) = \phi(0) + t\dot{\phi}(0) + O(t^2)$ и $\dot{\phi}(0) \neq 0$, то при $Q(0) = 0$ имеем $\phi(0) = 0$. Тогда $q(t) = t + O(t^2)$ и снова получаем выражение (3.2.11).

3°. Если взять $q(t) = t$, то замена $Q(t) = tZ(t)$ в задаче (3.2.8) приводит к линейной по Z задаче

$$\dot{Z} = A(t)Z + ZA^\top(t) + G(t), \quad G(t) = B(t)W(t)B^\top(t), \quad Z(0) = 0 \quad (3.2.13)$$

4°. В некоторых случаях при совместном использовании методов гарантированного и стохастического оценивания соотношение (3.2.10)

позволяет, как показано в главе 4, улучшить оценку фазового состояния динамической системы.

6°. Покажем, что умение строить аппроксимацию при нулевой матрице Q_0 даёт возможность построить внешнюю аппроксимацию множества достижимости при любом множестве начальных условий, в том числе и невырожденном. Возьмём какую-нибудь точку, принадлежащую множеству $x(t_0)$, и предположим, что в момент t_0 система находится именно в этой точке. Тогда локально оптимальной оценкой для $x(t)$ будет эллипсоид с матрицей $Q_*(t)$, получающейся в качестве решения уравнений (3.1.6), (3.1.8), (3.1.9) при условии $Q_0 = 0$. Найденная матрица будет одной и той же для любой начальной точки. Так как эллипсоид с матрицей Q_0 ограничивает множество $x(t_0)$, то совокупность центров всех полученных таким образом эллипсоидов будет сама представлять собой эллипсоид $Q_A(t)$ с центром, подчиняющимся соотношению (3.1.7). Матрица $Q_A(t)$ может быть найдена из уравнения

$$\dot{Q}_A = A Q_A + Q_A A^\top, \quad Q_A(t_0) = Q_0 \quad (3.2.14)$$

Другими словами, искомая оценка вектора $x(t)$ — объединение эллипсоида с параметрами, полученными из уравнений (3.1.7), (3.2.14), с множеством эллипсоидов, имеющих одинаковую матрицу $Q_*(t)$, и с центрами в каждой точке эллипсоида $Q_A(t)$. По определению суммы множеств, данное множество представляет собой сумму двух эллипсоидов: эллипсоида с матрицей $Q_A(t)$ и центром $a(t)$ и эллипсоида с матрицей $Q_*(t)$ и центром в начале координат. Эта сумма может быть аппроксимирована одним эллипсоидом известными методами.

Следовательно, если необходимо много раз решать задачу аппроксимации фазового состояния одной и той же динамической системы при различных начальных условиях, то нелинейное дифференциальное уравнения типа (3.1.6) достаточно решить один раз при нулевых начальных условиях. Для каждого варианта иных начальных условий

следует решать линейное уравнение (3.2.14) и складывать полученный эллипсоид с решением (3.1.6). Заметим, что заключительная операция по аппроксимации суммы может оказаться необязательной для конкретного приложения, поскольку множество, представляющее сумму двух эллипсоидов, может использоваться и непосредственно.

Рассматриваемый подход нечувствителен к типу вырождения начального множества, поскольку правая часть уравнения (3.2.14) не имеет особенностей при любом вырождении начальной матрицы.

Итак, предлагаемая асимптотика может быть использована для широкого класса технических проблем, в которых выбор определённого критерия оптимальности оценки либо не следует с очевидностью из физического смысла задачи, либо использование такого критерия не представляется абсолютно необходимым.

С другой стороны, выбор $q(t) = t$, конечно же, в большинстве случаев не даёт возможности достигнуть экстремума заданного функционала, хотя и может быть оптимальным в некотором смысле. Например, в предыдущем разделе соответствующий $q(t) = t$ эллипс с параметрами (3.2.4) является локально оптимальным для функционала $L_*(Q) = Q_{22}$. Однако площадь этого эллипса больше, чем у эллипса минимальной площади с параметрами (3.2.6), найденного на множестве всех аналитических $q(t)$. Вместе с тем заметим, что это превышение составляет менее 0.8%.

4. Пример. Пусть в любой момент времени величины возмущающих воздействий в системе (3.1.17), (3.1.18) удовлетворяют неравенству $F_1^2/f_1^2 + F_2^2/f_2^2 \leq 1$, где f_1 и f_2 — известные постоянные. Тогда в обозначениях (3.1.6) запишем

$$W = \text{diag}(f_1^2, f_2^2), \quad G = \text{diag}(0, f_1^2/m_1^2, 0, f_2^2/m_2^2)$$

Предположим, что даны следующие начальные условия в момент $t = 0$

$$Q_0 = \text{diag}(0, 0, \alpha^2, \beta^2), \quad a_0 = \text{col}(0, 0, 0, 0)$$

Другими словами, в начальный момент времени координата и скорость первой массы известны абсолютно точно, а координата и скорость второй массы — с некоторой ограниченной точностью.

В данном примере согласно уравнению (3.1.7) вектор $a(t)$ центра оценки тождественно равен нулевому и для дальнейших рассуждений интереса не представляет.

Решение уравнения (3.2.14) в общем случае имеет вид (см., например, [160])

$$Q_A(t) = \Phi Q_0 \Phi^\top, \quad \dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad \Phi(0) = I_n \quad (3.2.15)$$

В рассматриваемом здесь случае A не зависит от времени. Тогда фундаментальная матрица $\Phi(t) = \exp(At)$.

Решение уравнения (3.2.8) при $q(t) = t$ сводится к решению задачи (3.2.13) и в общем случае может быть записано в виде квадратуры

$$Q(t) = t\Phi(t) \left(\int_0^t \Phi^{-1}(\tau) G(\tau) (\Phi^\top(\tau))^{-1} d\tau \right) \Phi^\top(t) \quad (3.2.16)$$

Искомая аппроксимация представляет собой сумму эллипсоидов с матрицами $Q_A(t)$ и $Q(t)$, найденными по формулам (3.2.15) и (3.2.16) соответственно. Обе матрицы были найдены в аналитической форме, но не могут быть полностью приведены здесь по причине громоздкости выражений. В качестве примера ограничимся формулой

$$\begin{aligned} Q_{33} = & \frac{t}{\omega^7} \left(\frac{1}{2} k_2^2 g^2 \omega t + \frac{1}{3} (k_1^2 g_2^2 + k_2^2 g_1^2) \omega^3 t^3 - \frac{1}{4} k_2^2 g^2 \sin(2\omega t) + \right. \\ & \left. + 2k_2 (k_1 g_2^2 - g_1^2 k_2) (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) \right) \\ g^2 = & g_1^2 + g_2^2, \quad \omega = \sqrt{k_1 + k_2}, \quad k_j = \frac{k}{m_j}, \quad g_j = \frac{f_j}{m_j}, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

Выделим из полученной области ту её часть, которая ограничивает множество возможных значений координаты и скорости второй массы

в моменты времени, когда координата и скорость первой массы равны нулю. На рис. 47 показано несколько сечений, помеченных значениями соответствующих моментов времени. Расчёты проведены для следующих значений параметров: $\alpha = 0.1\text{м}$, $\beta = 0.1\text{м/с}$, $f_1 = 3\text{Н}$, $f_2 = 5\text{Н}$.

Использованный алгоритм может быть развит для получения аппроксимации в виде суммы трёх и более эллипсоидов. Рассмотрим некоторый фиксированный момент времени $\tau > 0$. Его можно считать новым началом отсчета и заменить эллипсоид $Q(t)$, соответствующий решению задачи, определяемому из уравнения (3.2.8), на два. Первый будет отвечать (3.2.14) с начальным значением, равным $Q(\tau)$. Второй будет решением уравнения (3.2.8) при условии сдвига времени на τ . В итоге будет получена оценка, представляющая сумму этих двух эллипсоидов с эллипсоидом $Q_A(t)$. Аналогично, фиксируя дополнительные промежуточные моменты времени, можно получить аппроксимацию любым наперед заданным количеством эллипсоидов. Её можно использовать как непосредственно, так и предварительно приблизив единственным эллипсоидом согласно известным формулам [127].

§3.3. Оптимальный выбор ограничений по управлению

1. Постановка задачи. Согласно (3.1.4) каждая реализация фазового вектора $x(t)$ зависит от соответствующей реализации вектора $w(t)$, который здесь, в §3.3, будем считать управлением с назначаемыми ограничениями. Эти ограничения должны быть выбраны оптимальным в смысле некоторого критерия способом. В технике такого рода задача может возникнуть, например, при назначении соотношения мощностей управляющих воздействий по различным фазовым координатам. Соответствующий выбор должен быть сделан применительно ко всему ансамблю допустимых движений системы, что требует исследования

множеств достижимости. Как было показано в §3.2, для вычисления внешней оценки можно использовать (3.2.13).

В технических приложениях может потребоваться так распределить имеющиеся ресурсы управления при конструировании системы, чтобы множество достижимости имело максимально возможные размеры по определённым направлениям в фазовом пространстве. Это даёт возможность улучшить управляемость при наличии априорных данных об условиях работы реального объекта. Приведённые в §3.2 соображения позволяют для любой допустимой реализации $w(t)$ с помощью выбора матрицы $W(t)$ в (3.1.5) максимизировать функционал

$$L(Q) = \text{Tr} (\Xi Q(T)) + \int_0^T \left(\text{Tr} (\Lambda(t) Q(t)) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W(t) R(t) W(t)) \right) dt \quad (3.3.1)$$

где $\Lambda(t)$ и постоянная Ξ — произвольные положительно определённые симметрические матрицы, а T — конечный момент времени. Например, если Ξ и Λ одинаковы и диагональны, то выбор соответствующих элементов этих матриц определяет, насколько для данного практического применения величина максимума проекции множества достижимости на какую-либо ось системы координат важна по сравнению с аналогичными проекциями на другие оси. Назначение матрицы $R(t)$ позволяет, как и в линейно-квадратичной задаче [128], ограничивать норму матрицы $W(t)$ и с позиций, например, технических приложений может отражать ограничения на суммарную максимальную управляющую силу в системе (3.1.4). С этой точки зрения задача состоит в выборе мощности каждого из нескольких приводов при ограниченности суммарного веса двигателей, их габаритов, уровня потребления энергии и т.д. В отличие от линейно-квадратичной задачи, в данном случае недостаточно потребовать от матрицы $R(t)$ только симметричности и положительной определённости. Для целей данной работы достаточно обеспечить

ограниченность нормы матрицы $W(t)$, поэтому можно положить

$$R(t) = \kappa(t)I_m \quad (3.3.2)$$

где $\kappa(t)$ — произвольная скалярная положительная функция.

С учётом замены $Q(t) = tZ(t)$ функционал (3.3.1) запишем в виде

$$L(Z) = \text{Tr}(CZ(T)) + \int_0^T \left(\text{Tr}(\Lambda(t)Z(t))t - \frac{1}{2} \text{Tr}(W(t)R(t)W(t)) \right) dt \quad (3.3.3)$$

где $C = T\Xi$ — постоянная матрица.

Получаем следующую задачу оптимального управления: выбирая матрицу $W(t)$, нужно отыскать максимум функционала (3.3.3) для системы (3.2.13).

2. Решение задачи. Найдём максимум (3.3.3) по $W(t)$. Согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина [122] для неавтономных систем функция Гамильтона применительно к поставленной задаче с фиксированным временем и свободным правым концом траектории имеет вид (см., например, [128])

$$H = \text{Tr}(AZP^\top) + \text{Tr}(ZA^\top P^\top) + \text{Tr}(BWB^\top P^\top) + \text{Tr}(\Lambda Z)t - \frac{1}{2} \text{Tr}(WRW)$$

где $P(t)$ — матрица сопряжённых переменных. Её элементы могут быть найдены как решения следующей задачи Коши

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Z}, \quad P(T) = \frac{\partial \text{Tr}(CZ(T))}{\partial Z(T)}$$

Так как Λ и C — симметрические матрицы, получаем

$$\dot{P} = -A^\top P - PA - t\Lambda, \quad P(T) = C \quad (3.3.4)$$

Сделаем замену времени $\tau = T - t$ в (3.3.4), получим

$$\frac{dP}{d\tau} = \Psi P + P\Psi^\top + (T - \tau)\Lambda, \quad P(0) = C, \quad \tau \in [0; T]; \quad \Psi = A^\top \quad (3.3.5)$$

Система (3.3.5) может быть рассмотрена как частный случай системы (3.2.13) с точностью до замены симметрической неотрицательно определённой матрицы BWB^\top на симметрическую неотрицательно определённую матрицу $(T - \tau)\Lambda$. Следовательно, согласно известным результатам [160], $P(t)$ — симметрическая неотрицательно определённая матрица.

Чтобы найти экстремум H как функции W , воспользуемся производной

$$\frac{\partial H}{\partial W} = B^\top PB - WR \quad (3.3.6)$$

Симметрическая матрица $-\partial^2 H / \partial W^2$ размерности $m^2 \times m^2$ будет положительно определена в силу положительной определённости матрицы R . Поскольку матрица R невырождена, из равенства (3.3.6) получаем единственную искомую оптимальную матрицу, доставляющую максимум функции H :

$$W^*(t) = B^\top PBR^{-1} \quad (3.3.7)$$

Заметим, что если не ограничивать выбор $R(t)$ множеством скалярных матриц, то следует потребовать, чтобы симметрические матрицы $B^\top PB$ и R^{-1} были перестановочны, т. е. матрица $R^{-1}(t)$ должна быть решением соответствующей задачи Фробениуса [42]. Тогда (3.3.7) доставляет максимум (3.3.3) по $W(t)$ на множестве всех возможных (а не только симметрических) матриц.

Покажем, что матрица W^* положительно определена. Следуя известному подходу [42], введём симметрическую матрицу $Y = 1/\sqrt{R}$. Тогда равенство (3.3.7) примет вид $W^* = Y^{-1}SY$, где $S = YB^\top PBY$ — симметрическая матрица. Из того, что матрица W^* подобна симметрической матрице S , следует, что она имеет простую структуру и вещественные характеристические числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Их можно найти из уравнения $\det(B^\top PB - \lambda R) = 0$, которое, в силу неотрицательной определённости матрицы $B^\top PB$ и положительной определённости мат-

рицы R , имеет неотрицательные корни.

Итак, при указанных выше условиях всегда существует единственное оптимальное симметрическое положительно определённое решение W^* . Оно может быть найдено по формуле (3.3.7), значения $P(t)$ в которой можно получить, решая задачу Коши (3.3.4).

Полученное решение допускает два обобщения.

1°. Поставленная задача была исследована для случая, когда в системе (3.1.4) при $x(0) \in E(Q_0, a_0)$ и $w(t) \in E(W, 0)$ матрица B — известная функция времени, а W — неизвестная. Допустим, что $B = B(t, \phi)$ и $W = W(t, \phi)$, где $\phi = \phi(t)$ — неизвестный вектор параметров размерности k . Если верно тождество

$$B(t, \phi)W(t, \phi)B^\top(t, \phi) \equiv B_1(t)W_1(\phi)B_1^\top(t)$$

причём матрицу W_1 можно считать произвольной, то полученное решение можно использовать после замены B и W на B_1 и W_1 соответственно. В частности, если $w(t) \in E(I_m, 0)$ и нужно выбрать элементы B , то $B_1 = I_m$, а $W_1 = BB^\top$. На заключительном этапе для определения значений элементов оптимальной матрицы B^* потребуется решить уравнение $B^*B^{*\top} = W_1^*$, где W_1^* — оптимальная матрица, аналогичная W^* .

2°. Если $w(t)$ — не управление, а какое-либо произвольное возмущение, имеющее назначаемые границы, то найденное решение позволяет управлять поведением множества достижимости системы (3.1.4) независимо от реализации возмущения внутри этих границ.

3. Пример. Предположим, что для системы (3.1.17), (3.1.18) в начальный момент времени $t = 0$ значения всех фазовых переменных известны точно и равны нулю. Поскольку для рассматриваемой задачи без ограничения общности можно считать $g(t) \equiv 0$, то согласно уравнению (3.1.7) вектор $a(t)$ центра оценки тождественно равен нулевому в течение всего времени процесса T .

Пусть в любой момент времени вектор управления с компонентами F_1 и F_2 принадлежит эллипсоиду с центром в начале координат и матрицей $W(t)$, которую нужно выбрать так, чтобы значение функционала (3.3.3) (а тем самым и (3.3.1)) достигало максимума. Матрицы Ξ и Λ в (3.3.1) выберем равными единичной. Другими словами, нужно обеспечить возможно большую величину следа матрицы $Q(t)$. Матрица R пусть будет единичной.

Искомая матрица будет иметь вид

$$W^*(t) = \begin{vmatrix} \frac{P_{22}(t)}{m_1^2} & \frac{P_{24}(t)}{m_1 m_2} \\ \frac{P_{24}(t)}{m_1 m_2} & \frac{P_{44}(t)}{m_2^2} \end{vmatrix}$$

Несмотря на то, что задача Коши (3.3.4) в данном случае была решена аналитически, из-за громоздкости формул ограничимся графическим представлением результатов.

В §3.2 было показано, что способ аппроксимации множеств достижимости, использованный для получения $W^*(t)$, обеспечивает высокую точность на малых интервалах времени. В данном примере характерный интервал определяется собственной частотой (3.1.19). Соответствующие графики функций $W_{11}^*(t)$, $W_{22}^*(t)$ и $W_{12}^*(t)$, помеченные цифрами 1, 2 и 3, представлены на рис. 48. Видно, что $W_{22}^*(t) \approx \text{const}$ в течение указанного времени, $W_{11}^*(t)$ растёт, а $W_{12}^*(t)$ убывает. Следовательно, для увеличения возможностей управления целесообразно увеличивать мощность привода, воздействующего на первую массу, а мощность второго привода менять не нужно. Поскольку согласно результатам §3.2 использованные эллипсоиды всегда сохраняют свойство супердостижимости, то можно посмотреть, как будет меняться $W^*(t)$ на сравнительно больших интервалах времени. Соответствующие графики представлены на рис. 49. Они позволяют назначать возможности управления, руководствуясь внешней гарантированной оценкой множе-

ства достижимости. Понятно, что практический смысл имеют в первую очередь соотношения между величинами элементов матрицы $W^*(t)$ в каждый момент времени, поскольку норма этой матрицы зависит от выбора функции $\kappa(t)$ в равенстве (3.3.2). В частности, положив функцию $\kappa(t)$ равной следу $B(t)^\top P(t)B(t)$, можно было бы добиться равенства следа $W^*(t)$ единице.

§3.4. Оценивание фазового состояния динамической системы при неточно заданных границах возмущений

1. Общий случай. Любая реализация фазового вектора $x(t)$ в (3.1.4) однозначно определяется соответствующими ей начальным условием $x(t_0)$ и реализацией управляющего вектора $w(t)$. Будем считать, что величины $x(t_0)$ и $w(t)$ известны неточно. Степень этой неопределённости в реальных инженерных задачах может быть различна. В тех случаях, когда есть возможность провести многочисленные предварительные эксперименты, или, что с нашей точки зрения то же самое, когда есть обширный опыт эксплуатации соответствующих устройств, целесообразно применять математический аппарат теории вероятностей (см., например, [128]). Если же требуемые функции распределения неизвестны, но есть надёжные оценки границ изменения $x(t_0)$ и $w(t)$, то можно использовать подход, основанный на расчёте множества достижимости системы (3.1.4). С другой стороны, на практике даже сами границы допустимых значений $x(t_0)$ и $w(t)$ могут быть известны неточно. В таких случаях можно выбрать оценку возмущения настолько грубой, что она охватит все возможные случаи. Однако такой подход может привести к неоправданно высокой неопределённости в значениях $x(t)$. Укажем другой сравнительно простой способ решения задач такого рода.

В §3.2 было показано, что для вычисления гарантированной внешней эллипсоидальной оценки множества достижимости системы (3.1.4)

можно использовать (3.2.13). Из соотношений, приведённых в §3.2, следует, что (3.2.13) проще всего применять, если в (3.1.6) матрица $Q_0 = 0$. С другой стороны, если в силу каких-либо обстоятельств в момент $t_1 = 1$ известна матрица $Q(t_1)$, то $Z(t_1) = Q(t_1)$ и суммировать эллипсоиды не требуется. Для упрощения изложения результатов исследования можно рассматривать решение задачи аппроксимации при $t \geq 1$ и полагать, что матрица $Z(t_1)$ известна. Это обстоятельство будет использовано в дальнейшем.

Таким образом, необходимо указать способ построения эллипсоида, содержащего множество достижимости системы (3.1.4) при неточно заданных границах возможных начальных условий и внешних воздействий, описываемых эллипсоидами с матрицами $Z(t_1)$ и $W(t)$ соответственно. Это означает, что элементы указанных двух матриц точно неизвестны.

Для решения поставленной задачи обратим внимание на то, что система (3.2.13) линейна по компонентам матриц $Z(t)$ и $W(t)$. Составим вектор $\psi(t)$ размерности $n(n+1)/2$ из элементов симметрической матрицы $Z(t)$, находящихся не ниже главной диагонали, и вектор $\omega(t)$ размерности, не превышающей $m(m+1)/2$, из соответствующих элементов симметрической матрицы $W(t)$. Оба эти вектора заданы неточно. Построим эллипсоид с матрицей $\Psi(t_1)$, ограничивающий возможные начальные значения $\psi(t_1)$ и аналогичный эллипсоид с матрицей $\Omega(t)$, аппроксимирующий $\omega(t)$. Тогда поставленная задача сводится к решению системы вида (3.2.13), но не для исходных векторов $x(t)$ и $w(t)$, а для $\psi(t)$ и $\omega(t)$ соответственно.

Поясним полученный результат на двух простых примерах.

2. Неточно заданные границы начальных условий. Рассмотрим материальную точку, движущуюся по прямой под действием не-

определённой силы u , т. е. согласно уравнениям

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

где x_1 — координата точки, а x_2 — её скорость. Тогда $n = 2$, $m = 1$ и система (3.1.4) принимает вид

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| u \quad (3.4.1)$$

Предположим, что ограничение на возможные значения силы известно точно, а именно $|u(t)| \leq 1$.

Будем описывать неопределённое фазовое положение точки эллипсоидом с матрицей $Q(t) = tZ(t)$. Предположим, что координаты центра эллипсоида с матрицей $Z(t)$ в момент t_1 равны нулю. Поскольку вектор $\varpi(t)$ из (3.1.4) в данном случае тождественно равен нулю, как и вектор $g(t)$ центра эллипсоида, описывающего неопределённую силу $u(t)$, то из (3.1.7) следует, что и во все последующие моменты времени центр a останется в нуле. Для матрицы $Z(t)$ на основании (3.2.13) получаем

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{Z}_{11} \\ \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Z_{11} \\ Z_{12} \\ Z_{22} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\| \quad (3.4.2)$$

Здесь Z_{11} , Z_{12} и Z_{22} — компоненты матрицы Z ; как было указано выше, они составляют вектор $\psi(t)$.

Теперь рассмотрим (3.4.2) как частный случай (3.1.4) при $n = 3$ и $m = 0$. Отсутствие неопределённости в правой части (3.4.2) в отличие от (3.4.1) объясняется тем, что ограничение на силу $u(t)$ известно точно. Кроме того, в отличие от (3.4.1) вектор $\varpi(t)$ из (3.1.4) в случае (3.4.2) нулю не равен.

Допустим, что в момент $t_1 = 1$ ограничения на координату и скорость точно неизвестны. Именно, пусть $|Z_{12}(t_1)| \leq 1$, в то время как $Z_{11}(t_1) = 1$ и $Z_{22}(t_1) = 1$. Другими словами, неопределённость в задании границ возможных начальных значений исходного фазового векто-

ра $x(t_1)$ описывается как неопределённость в задании возможных начальных значений нового фазового вектора $\psi(t_1)$ с помощью вырожденного эллипсоида с матрицей $\Psi(t_1)$ и центром $a_\psi(t_1)$

$$\Psi(t_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad a_\psi(t_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (3.4.3)$$

Применительно к (3.4.2) соотношения (3.1.4) и (3.2.13) дают следующее уравнение для матрицы $Y(t)$, связанной с $\Psi(t)$ так же, как $Z(t)$ связана с $Q(t)$, т. е. равенством $\Psi(t) = tY(t)$

$$\dot{Y} = \begin{vmatrix} 4Y_{12} & 2Y_{22} + Y_{13} & 2Y_{23} \\ 2Y_{22} + Y_{13} & 2Y_{23} & Y_{33} \\ 2Y_{23} & Y_{33} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.4.4)$$

Уравнение для центра $a_\psi(t)$, составленное на основании соотношений (3.1.4), (3.1.7) и (3.2.13), совпадает с (3.4.2) с точностью до замены компонент матрицы $Z(t)$ на соответствующие компоненты вектора $a_\psi(t)$. Тогда для начальных условий (3.4.3), проинтегрировав (3.4.2) и (3.4.4), получаем

$$\begin{aligned} a_{\psi 1} &= t^3/3 - t + 5/3, & a_{\psi 2} &= t^2/2 - 1/2, & a_{\psi 3} &= t \\ \Psi_{11} &= 4t^3 - 8t^2 + 4t, & \Psi_{12} &= 2t^2 - 2t, & \Psi_{22} &= t \\ \Psi_{13} &= 0, & \Psi_{23} &= 0, & \Psi_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Отметим, что эллипсоид (3.4.5) вырожден в любой момент времени, так как неопределённость по третьей компоненте, соответствующей $Z_{22}(t)$, отсутствует.

Итак, эллипсоид с центром $a_\psi(t)$ и матрицей $\Psi(t)$ содержит все возможные значения компонент матрицы $Z(t)$. В свою очередь, множество эллипсоидов, каждый из которых обладает центром в начале координат и матрицей $Q(t) = tZ(t)$, содержит все возможные значения фазового вектора $x(t)$.

На фазовой плоскости в момент времени $t = 1$ множество достижимости представляет собой квадрат со стороной, равной единице. На

рис. 50 сплошной линией показан вид этого множества при $t = 1.5$, а штриховой — при $t = 3$.

3. Неточно заданные границы внешнего возмущения. Если неопределённый фактор, действующий на систему, может быть описан скаляром, то отсутствие надёжной информации о его возможных значениях при гарантированном оценивании всегда приводит к простому увеличению возможного диапазона этих значений в рамках математической модели. Следовательно, простейший пример динамической задачи, пригодный для разъяснения полученных результатов, должен содержать вектор сил с двумя компонентами.

Пусть в любой момент времени величины возмущающих воздействий F_1 и F_2 в (3.1.18) удовлетворяют неравенству

$$F_1^2/f_1^2 + F_2^2/f_2^2 \leq 1 \quad (3.4.6)$$

где для каждой реализации $F_1(t)$ и $F_2(t)$ величины f_1 и f_2 — некоторые параметры, значения которых, в свою очередь, также точно не известны и удовлетворяют неравенству

$$(f_1^2 - 1)^2 + (f_2^2 - 1)^2 \leq 1 \quad (3.4.7)$$

На рис. 51 сплошной линией показаны границы множества, которому принадлежит вектор с компонентами F_1 и F_2 согласно (3.4.6) и (3.4.7). Штриховой линией показана окружность радиуса $\sqrt{2}$. Видно, что (3.4.6) и (3.4.7) накладывают на возмущение более узкие рамки, поскольку окружность полностью содержит рассматриваемое множество допустимых значений сил F_1 и F_2 .

В отличие от предположений, сделанных в предшествующем разделе, допустим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ значения всех фазовых переменных известны точно и равны нулю. Заметим, что тогда, как и в предыдущем примере, при нулевых значениях a_0 , $\varpi(t)$ и $g(t)$, согласно уравнению (3.1.7), вектор $a(t)$ центра оценки множества

достижимости в пространстве, соответствующем вектору $x(t)$, тождественно равен нулевому в течение всего времени процесса.

Для (3.1.18) можно написать систему вида (3.2.13). В свою очередь, на её основе можно составить из компонент матрицы $Z(t)$ новый фазовый вектор $\psi(t) = \{Z_{11}, Z_{12}, Z_{22}, Z_{13}, Z_{23}, Z_{33}, Z_{14}, Z_{24}, Z_{34}, Z_{44}\}$ и рассмотреть систему линейных уравнений, которой он удовлетворяет. В обозначениях (3.1.4) при $n = 10$ и $m = 2$ для матрицы системы имеем

$$A = \left\| \begin{array}{cccccccccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2k_1 & 0 & 0 & 2k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & -k_2 & 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_2 & 0 & -2k_2 & 0 \end{array} \right\|$$

Здесь $k_1 = k/m_1$, $k_2 = k/m_2$. Все элементы матрицы B равны нулю, кроме $B_{31} = 1/m_1^2$ и $B_{102} = 1/m_2^2$. Вектор $\varpi(t)$ — нулевой. Новый двумерный вектор возмущения $\omega(t) = \{f_1^2, f_2^2\}$ соответствует $w(t)$ в (3.1.4). Он ограничен согласно (3.4.7). Другими словами, соответствующая $W(t)$ матрица $\Omega(t)$ — единичная; обе компоненты вектора центра эллипса, ограничивающего возмущение, тождественно равны единице.

Для момента $t = 2$ сек была построена внешняя аппроксимация множества возможных значений координат $\vartheta_1(t)$ и $\vartheta_2(t)$ первой и второй масс для тех реализаций, в рамках которых скорости первой и второй массы равны нулю в этот момент времени. Напомним, что $\vartheta_1(t)$ и $\vartheta_2(t)$ входят в состав фазового вектора $x(t)$ в виде компонент $x_1(t)$ и $x_3(t)$. Граница соответствующего множества показана на рис. 52. Её часть изображена сплошной линией в большем масштабе на рис. 53. Штриховой линией представлен фрагмент эллипса, приближённо описываемого

неравенством

$$298.417x_1^2 - 298.330x_1x_3 + 298.665x_3^2 \leq 1 \quad (3.4.8)$$

При значениях x_1 и x_3 , не показанных на рис. 53, оба множества практически совпадают, за исключением области, симметричной изображённой на рис. 53 относительно начала координат. Эллипс (3.4.8) можно получить, если решить рассматриваемую задачу построения внешнего аппроксимирующего эллипсоида при точно заданных границах внешнего возмущения, а именно, если заменить множество с границей, показанной сплошной линией на рис. 51, кругом радиуса $\sqrt{2}$. При такой замене множество допустимых значений F_1 и F_2 несколько расширяется и из рис. 53 видно, что это влечёт некоторую дополнительную погрешность в аппроксимации возможных значений $x(t)$, поскольку (3.4.8) полностью содержит множество, вычисленное для случая неточно заданных границ внешнего возмущения.

4. Дополнительные замечания.

1°. Описанный способ оценивания $\psi(t)$ не принимает во внимание то, что компоненты этого вектора — элементы положительно определённой матрицы. Если в процессе вычислений учитывать данное обстоятельство, например, используя операцию аппроксимации пересечения эллипсоидов [160], то в общем случае можно повысить точность результатов. Тем не менее понятно, что если эту особенность $\psi(t)$ игнорировать, то получаемое множество всё равно будет гарантированно содержать точное множество достижимости.

2°. Уравнения для оценивания $\psi(t)$ линейны, что позволяет применять к нему тот же подход, что и к исходному вектору $x(t)$. В частности, можно решать задачи, в которых значения элементов матриц, описывающих поведение $\psi(t)$, содержатся в неких эллипсоидах соответствующей размерности. Эта рекурсия может быть продолжена и далее.

§3.5. Управление матрицей системы

1. Постановка задачи. В §3.2, §3.3 и §3.4 отсутствовало управление, влияющее на движение центра аппроксимирующего эллипсоида. Однако в технических приложениях оно встречается часто. Пусть система уравнений (3.1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u, t) + \varepsilon f(x, u, t) \\ x(0) &\in X_0 \in \mathbf{R}^n, \quad x(T) \in X_T \in \mathbf{R}^n, \quad u \in U \in \mathbf{R}^m, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

где $\varepsilon = \text{const}$ — малый параметр, а T — некоторый фиксированный момент времени. Предположим, что F , f , X_0 и X_T таковы, что решение системы (3.5.1) при заданном $u(t)$ сводится к последовательному решению задач Коши для каждого из допустимых $x(0)$. Ограничимся рассмотрением только таких F , f , X_0 , X_T и $u(t)$, для которых верны стандартные теоремы о существовании и непрерывной зависимости решения x от параметра ε (см., например, [62]).

Введём непрерывно зависящий от x функционал $J(x(T))$. Предположим, что $J_0(u)$ и $J_\varepsilon(u)$ — значения, которые он получает в момент времени T при некоторой реализации управления $u = u(t)$ для $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon \neq 0$ соответственно.

Пусть существуют такие $u_0(t)$ и $u_\varepsilon(t)$, которые доставляют функционалу $J(x(T))$ минимумы, равные $J_0(u_0)$ и $J_\varepsilon(u_\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon \neq 0$, соответственно. Приведём простое доказательство того факта, что

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = J_\varepsilon(u_0) + O(\varepsilon) \quad (3.5.2)$$

В силу непрерывной зависимости решения x от параметра ε и непрерывной зависимости $J(x(T))$ от x имеем

$$J_0(u_\varepsilon) = J_\varepsilon(u_\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad J_0(u_0) = J_\varepsilon(u_0) + O(\varepsilon) \quad (3.5.3)$$

Из определения $J_0(u_0)$ следует, что

$$J_0(u_\varepsilon) \geq J_0(u_0) \quad (3.5.4)$$

Подставив выражения для $J_0(u_\varepsilon)$ и $J_0(u_0)$ из (3.5.3) в (3.5.4), получаем

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq J_\varepsilon(u_0) + O(\varepsilon) \quad (3.5.5)$$

С другой стороны, из определения $J_\varepsilon(u_\varepsilon)$ следует, что

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_0) \quad (3.5.6)$$

Истинность (3.5.2) непосредственно вытекает из (3.5.5) и (3.5.6). Заметим, что $u_0(t)$ и $u_\varepsilon(t)$ могут быть сколь угодно далеки друг от друга в любой общепринятой метрике. Вопросы, непосредственно связанные с (3.5.2), рассмотрены в [116]; более общие утверждения можно найти, например, в [89].

Предположим, что в (3.5.1) может быть выделена независимая по фазовым переменным подсистема, которую при $\varepsilon = 0$ можно свести, с учётом соответствующих граничных условий, к совокупности не зависящих от u задач Коши, т. е. пусть (3.5.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_* &= F_*(x_*, u, t) + \varepsilon f_*(x_*, x_\varepsilon, u, t) \\ \dot{x}_\varepsilon &= F_\varepsilon(x_\varepsilon, t) + \varepsilon f_\varepsilon(x_\varepsilon, u, t) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

где части x_ε и x_* вектора x имеют размерности n_ε и n_* соответственно, причём $n_\varepsilon + n_* = n$. Заметим, что система (3.5.7) для x_ε является слабоуправляемой в смысле [158].

Итак, для (3.5.7) требуется найти такое $u_\varepsilon(t)$, чтобы функционал $J(x(T))$ достиг минимума $J_\varepsilon(u_\varepsilon)$.

2. Общий случай. Применим к (3.5.7) принцип максимума Понтрягина [122]. Запишем гамильтониан

$$H = (F_* + \varepsilon f_*, p_*) + (F_\varepsilon + \varepsilon f_\varepsilon, p_\varepsilon)$$

где p_* и p_ε — переменные, сопряжённые к x_* и x_ε соответственно. Поскольку

$$\dot{p}_* = -\partial H / \partial x_*, \quad \dot{p}_\varepsilon = -\partial H / \partial x_\varepsilon$$

то, с учётом соответствующих граничных условий, принцип максимума приводит, вообще говоря, к краевой задаче порядка $2n$.

Разложим x_* , x_ε , p_* и p_ε в суммы по ε . При нахождении управления будем пренебрегать членами порядка $O(\varepsilon^2)$ в H , т. е. разрешим замену H на любую другую функцию, отличающуюся от исходной на $O(\varepsilon^2)$. Это можно рассматривать как точное решение не данной, а некоторой другой оптимизационной задачи, отличающейся от исходной членами порядка $O(\varepsilon^2)$ в правых частях дифференциальных уравнений для x_* и x_ε . Полученное же в результате $u(t)$ будет использоваться в исходной системе. Тогда согласно (3.5.2) ошибка по функционалу составит $O(\varepsilon^2)$. С другой стороны, из выражения для H видно, что для нахождения u понадобятся только получаемые при $\varepsilon = 0$ члены разложения x_ε и p_ε .

Тогда процесс решения исходной краевой задачи распадётся на решение задачи для x_ε , p_ε , в которую u не входит, и оставшейся краевой задачи для x_* , p_* с участием u , причем порядок последней будет равен $2n_*$. Так как F_ε , f_ε , X_0 и X_T таковы, что решение системы (3.5.7) при $\varepsilon = 0$ сводится к интегрированию совокупности задач Коши, то и решение системы для p_ε при $\varepsilon = 0$ тоже сводится к такой совокупности.

Итак, пусть (3.5.7) при $\varepsilon = 0$ сводится к совокупности задач Коши с граничными условиями, зависящими только от x_ε . Тогда порядок краевой задачи, получаемой с помощью принципа максимума из (3.5.7), которую необходимо решить для минимизации функционала $J(x(T))$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$, не превосходит удвоенного порядка подсистемы для x_* , оставшейся после исключения слабоуправляемой части системы (3.5.7).

Таким образом, нужно сначала решить уравнения $\dot{x}_\varepsilon = F_\varepsilon(x_\varepsilon, t)$, затем уравнения $\dot{p}_\varepsilon = -(\partial F_\varepsilon / \partial x_\varepsilon)p_\varepsilon$, а потом решать краевую задачу для x_* и p_* , следующую из принципа максимума, причем u следует определять из гамильтониана с отброшенными членами порядка $O(\varepsilon^2)$, а подставлять в исходную систему (3.5.7).

3. Линейный случай. Применим описанный алгоритм для динамической системы (3.1.4), (3.1.5) в случае, когда $A(t) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t, u)$ и $\varpi = \varpi(t, u)$, а вектор $g(t) \equiv 0$. Тогда система (3.1.4), (3.1.5) примет вид

$$\dot{x} = (A_0(t) + \varepsilon A_1(t, u))x + B(t)w + \varpi(t, u), \quad w \in E(0, W(t)) \quad (3.5.8)$$

Здесь $u \in U \in \mathbf{R}^k$ — управление, а скаляр $\varepsilon = \text{const}$ — малый параметр.

Множество достижимости (3.5.8) будем оценивать с помощью глобально оптимальных эллипсоидов.

Задача состоит в том, чтобы найти такое управление u для системы уравнений (3.5.8), (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.10), что функционал (3.1.12) достигнет минимума.

Применим принцип максимума Понтрягина и введём переменные χ , Ψ и φ , сопряжённые к переменным a , Q и P соответственно. Ради краткости будем использовать обозначение $\{M, N\} = MN + NM^\top$ для произвольных квадратных матриц M и N . Тогда гамильтониан запишется в виде

$$H = H_u + (A_0 a, \chi) + \text{Tr}(\{A_0, Q\}\Psi) + q^{-1} \text{Tr}(Q\Psi) + q \text{Tr}(G\Psi) - \text{Tr}(\{A_0^\top, P\}\varphi)$$

$$H_u = \varepsilon ((A_1 a, \chi) + \text{Tr}(\{A_1, Q\}\Psi) - \text{Tr}(\{A_1^\top, P\}\varphi)) + (\varpi, \chi)$$

Для сопряжённых переменных получим систему

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= -\varepsilon(\Psi A_1 + A_1^\top \Psi) - (\Psi A_0 + A_0^\top \Psi) - q^{-1}\Psi + \\ &\quad + 1/2 \text{Tr}^{1/2}(PG) \text{Tr}^{-3/2}(PQ)P \text{Tr}(Q\Psi) - \\ &\quad - 1/2 \text{Tr}^{-1/2}(PG) \text{Tr}^{-1/2}(PQ)P \text{Tr}(G\Psi) \\ \Psi(T) &= -C \\ \dot{\varphi} &= \varepsilon(\varphi A_1^\top + A_1 \varphi) + \varphi A_0^\top + A_0 \varphi - \\ &\quad - 1/2 \text{Tr}^{-1/2}(PG) \text{Tr}^{-1/2}(PQ)G \text{Tr}(Q\Psi) + \\ &\quad + 1/2 \text{Tr}^{1/2}(PG) \text{Tr}^{-3/2}(PQ)Q \text{Tr}(Q\Psi) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1/2 \operatorname{Tr}^{-1/2}(PQ) \operatorname{Tr}^{-1/2}(PG)Q \operatorname{Tr}(G\Psi) + \\
& +1/2 \operatorname{Tr}^{1/2}(PQ) \operatorname{Tr}^{-3/2}(PG)G \operatorname{Tr}(G\Psi) \\
& \varphi(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\dot{\chi} = -\varepsilon A_1^\top \chi - A_0^\top \chi, \quad \chi(T) = -2Ca(T)$$

Применим результаты, полученные выше для общего случая, и пренебрежём членами порядка ε^2 и выше в гамильтониане, что приведёт к ошибке такого же порядка при нахождении значения функционала. Тогда для поиска управления достаточно знать лишь члены разложения переменных Q , P , Ψ , φ по ε , получаемые при $\varepsilon = 0$. Для этих членов имеем

$$\dot{P}_0 = -\{A_0^\top, P_0\}, \quad P_0(T) = C \quad (3.5.9)$$

$$\dot{Q}_0 = \{A_0, Q_0\} + q_0^{-1}Q_0 + q_0G, \quad Q_0(0) = Q^0 \quad (3.5.10)$$

$$\begin{aligned}
q_0 &= \operatorname{Tr}^{-1/2}(P_0G) \operatorname{Tr}^{1/2}(P_0Q_0) \\
\dot{\Psi}_0 &= -\Psi_0A_0 - A_0^\top\Psi_0 - q_0^{-1}\Psi_0 + \\
& +1/2 \operatorname{Tr}^{1/2}(P_0G) \operatorname{Tr}^{-3/2}(P_0Q_0)P_0 \operatorname{Tr}(Q_0\Psi_0) - \\
& -1/2 \operatorname{Tr}^{-1/2}(P_0G) \operatorname{Tr}^{-1/2}(P_0Q_0)P_0 \operatorname{Tr}(G\Psi_0) \\
\Psi_0(T) &= -C
\end{aligned} \quad (3.5.11)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_0 &= \varphi_0A_0^\top + A_0\varphi_0 + \\
& -1/2 \operatorname{Tr}^{-1/2}(P_0G) \operatorname{Tr}^{-1/2}(P_0Q_0)G \operatorname{Tr}(Q_0\Psi_0) + \\
& +1/2 \operatorname{Tr}^{1/2}(P_0G) \operatorname{Tr}^{-3/2}(P_0Q_0)Q_0 \operatorname{Tr}(Q_0\Psi_0) - \\
& -1/2 \operatorname{Tr}^{-1/2}(P_0Q_0) \operatorname{Tr}^{-1/2}(P_0G)Q_0 \operatorname{Tr}(G\Psi_0) + \\
& +1/2 \operatorname{Tr}^{1/2}(P_0Q_0) \operatorname{Tr}^{-3/2}(P_0G)G \operatorname{Tr}(G\Psi_0) \\
\varphi_0(0) &= 0
\end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Интегрирование данной системы сводится к последовательному решению задач Коши: сперва (3.5.9), потом (3.5.10), затем (3.5.11) и (3.5.12). Далее, для нахождения полного решения исходной задачи в смысле

алгоритма, сформулированного ранее для общего случая, следует ещё решить следующую краевую задачу

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= A_0 a_1 + \varepsilon A_1 a_1 + \varpi, \quad a_1(0) = a_0 \\
\dot{\chi}_1 &= -\varepsilon A_1^\top \chi_1 - A_0^\top \chi_1, \quad \chi_1(T) = -2C a_1(T) \\
z(t) &= \text{Tr}(\{A_1, Q_0\} \Psi_0) - \text{Tr}(\{A_1^\top, P_0\} \varphi_0) \\
u &= \arg \max_{u \in U} ((\varpi, \chi_1) + \varepsilon(A_1 a_1, \chi_1) + \varepsilon z(t))
\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Если в (3.5.8) считать, что $B(t) = \varepsilon B_\varepsilon(t)$, то получим $\varphi_0 \equiv 0$, а для нахождения $z(t)$ в (3.5.13) будет достаточно уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_0 &= \{A_0, Q_0\}, \quad Q_0(0) = Q^0 \\
\dot{\Psi}_0 &= -\Psi_0 A_0 - A_0^\top \Psi_0, \quad \Psi_0(T) = -C
\end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Таким образом, построен алгоритм, позволяющий построить управление, учитывающее ансамбль траекторий системы (3.5.8) в смысле функционала (3.1.12) с точностью до $O(\varepsilon^2)$. При этом порядок решаемой краевой задачи равен удвоенной размерности вектора x .

4. Пример. Рассмотрим уравнение (3.5.8) в виде

$$\dot{x} + \varepsilon u x = \varepsilon w + u. \tag{3.5.15}$$

Здесь x , u и w — скаляры. Положим $C = 1$ в (3.1.12). Пусть

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= 0.2, \quad Q(0) = 100, \quad a(0) = 0, \quad |u| \leq 1 \\
|w| &\leq 1, \quad T = -5 \ln 0.8 \approx 1.12
\end{aligned} \tag{3.5.16}$$

В данном случае применимы соотношения (3.5.14). Так как $A_0 = 0$ и $A_1 = -1$, имеем

$$Q_0(t) \equiv 100, \quad \Psi_0(t) \equiv -1, \quad z(t) \equiv 200$$

Краевая задача (3.5.13) принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= -0.2 u a_1 + u, \quad a(0) = 0 \\
\dot{\chi}_1 &= 0.2 u \chi_1, \quad \chi_1(T) = -2 a_1(T) \\
u &= \text{sign}(\chi_1(1 - 0.2 a_1) + 40)
\end{aligned} \tag{3.5.17}$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что в нашем случае $a_1(T) = 1$, $u(t) \equiv 1$. Элементарные вычисления дают $J \approx 68.24$.

Для сравнения рассмотрим ту же систему (3.5.15) при тех же начальных условиях и ограничениях (3.5.16), но теперь управление будем строить без учёта помехи в уравнении (3.5.15). В этом случае будет найден минимум квадрата отклонения решения $x(t)$ от нуля в момент T . Полагая $w \equiv 0$, $J_s = a_1^2(T)$, получим задачу оптимального управления для системы (3.5.17). Эта задача имеет бесконечное множество решений, соответствующих нулевому значению нового функционала $J_s = 0$ и отвечающих приведению фазовой координаты в нуль в момент $t = T$. В частности, оптимальным является управление $u(t) \equiv 0$, см. (3.5.17). Определим, какое значение получит функционал (3.1.12) в результате применения $u(t) \equiv 0$ при наличии помехи. Вычисления показывают, что в этом случае получим $J \approx 104.51$, что существенно (на 53%) больше, чем приведённое выше значение функционала для $u(t) \equiv 1$.

Таким образом, при наличии помехи учёт всего ансамбля траекторий управляемой динамической системы при помощи метода эллипсоидов приводит к значительному изменению закона управления и к уменьшению величины отклонения ансамбля от целевой точки.

§3.6. Неточная реализация управления

1. Постановка задачи. В §3.5 для выбора оптимального управления был использован функционал (3.1.12), зависящий и от матрицы, и от центра эллипсоида. Рассмотрим задачу, в которой зависимость функционала от центра отсутствует. Именно, будем искать минимум функционала (3.1.16).

Исследуем случай, когда имеется погрешность в исполнении управляющего воздействия, зависящая от его величины. Такая особенность характерна, например, для различных манипуляторов [157]. Рассмотрим

рим следующий частный случай системы (3.1.4), (3.1.5)

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, u)w + u\varpi(t), \quad w \in E(0, W(t)) \quad (3.6.1)$$

Здесь $u \in U$ — скалярное управление. Множество достижимости (3.6.1) будем оценивать с помощью глобально оптимальных эллипсоидов, задаваемых соотношениями (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8) и (3.1.10). Поскольку здесь, в отличие от §3.5, матрица A не зависит от управления, то задача Коши (3.1.10) при известном граничном условии $P(T)$ может быть решена независимо от всей системы. Подстановка полученной функции $P(t)$ в (3.1.6) даёт возможность найти $Q(t)$ при известном $u(t)$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = \sqrt{\text{Tr} (P(t)Q(t))} \quad (3.6.2)$$

Из (3.1.16) и (3.1.10) следует, что

$$\Phi^2(T) \equiv \text{Tr} (CQ(T)) \quad (3.6.3)$$

Другими словами, $\Phi^2(T)$ — это значение минимизируемого функционала (3.1.16).

Пусть матрица $G(t, u)$ из (3.1.6) такова, что в любой момент t выполняется соотношение

$$\sqrt{\text{Tr} (P(t)G(t, u))} = |u| \sqrt{\text{Tr} (P(t)G_*(t))} \quad (3.6.4)$$

где $G_*(t)$ — некоторая симметрическая неотрицательно определённая матрица, не зависящая от u . Равенство (3.6.4) справедливо, если $B(t, u)$ в (3.6.1) удовлетворяет равенству $B(t, u) = \pm uB_*(t)$, где $B_*(t)$ — некоторая матрица, не зависящая от u .

Требуется найти все u , для которых функционал (3.1.16) достигает минимума в фиксированный момент времени T для системы (3.6.1), (3.6.4), (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8) и (3.1.10) с краевым условием $a(T) = 0$ и

ограничением на управление $|u| \leq 1$. При этом момент T можно сначала считать фиксированным, а затем произвести минимизацию (3.1.16) по нему как по параметру.

2. Общий случай. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина [122]. Введём n -мерный вектор сопряжённых переменных p и запишем соответствующую функцию Гамильтона H

$$H = (p, Aa) + u(p, \varpi) + p_{n+1}|u|\sqrt{\text{Tr}(P(t)G_*(t))} \quad (3.6.5)$$

Здесь $\dot{p} = -A^\top(t)p$ и $\dot{p}_{n+1} = 0$. В [104] показано, что $\dot{\Phi} = \sqrt{\text{Tr}(PG)}$. При $u \neq 0$

$$p_{n+1}(T) = - \left. \frac{\partial \text{Tr}(CQ(T))}{\partial \Phi} \right|_{t=T} = -2\Phi(T) < 0 \quad (3.6.6)$$

так как $\Phi(0) \geq 0$ и $\dot{\Phi} > 0$. Случай $u \equiv 0$ опустим, поскольку для него может быть $p_{n+1}(T) = 0$, а тогда неравенство (3.6.6) будет неверно. Его можно в каждом конкретном примере учесть отдельно, то есть подсчитать для него функционал и сравнить с полученным при $u \neq 0$. Обозначим

$$V_1 = (p, \varpi), \quad V_2 = -2\Phi(T)\sqrt{\text{Tr}(P(t)G_*(t))}$$

Отметим, что $V_2 < 0$. В соответствии с принципом максимума оптимальное управление u_* имеет вид

$$\begin{aligned} u_* &= 0, \text{ если } |V_1| + V_2 < 0 \\ u_* &= 1, \text{ если } |V_1| + V_2 > 0 \text{ и } V_1 > 0 \\ u_* &= -1, \text{ если } |V_1| + V_2 > 0 \text{ и } V_1 < 0 \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

Для перехода от $u_* = 1$ к $u_* = -1$ или обратно функция V_1 должна сменить знак, но тогда на некотором интервале времени должно быть верно неравенство $|V_1| < -V_2$, т. е. условие применения $u_* = 0$.

Итак, в оптимальном управлении существуют только такие точки переключения, в которых оно изменяется с ± 1 на 0 и обратно, с 0 на ± 1 .

Из сказанного выше понятно, что исследуемую проблему можно рассматривать как частный случай широко известного класса задач, искомого управления в которых можно назвать оптимальным по расходу топлива (см., например, [59]).

Возьмём систему (3.6.1) в частном случае, когда помеха отсутствует, т. е. при $w(t) \equiv 0$. Получим

$$\dot{x} = A(t)x + u\varpi(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0 \quad (3.6.8)$$

Предположим, что для (3.6.8) требуется решить задачу быстродействия [122]. Соответствующий гамильтониан в принципе максимума имеет вид

$$H_0 = (p, Ax) + u(p, \varpi) \quad (3.6.9)$$

где $\dot{p} = -A^T(t)p$. Согласно (3.6.9) моменты переключения управления в задаче быстродействия определяются тем же уравнением $(p, \varpi) = 0$, что и моменты перехода от $u_* = 1$ к $u_* = -1$ и наоборот в (3.6.5). Различие в том, что, в соответствии с (3.6.7), в окрестности этих переходов должно применяться $u_* = 0$. Кроме того, набор из n констант, входящий в функции $p(t)$ и зависящий от начальных условий, будет разным для рассматриваемых задач.

Итак, пусть $u_*(t)$ — решение задачи с возмущением при некоторых начальных данных a_0, Q_0 . Тогда функция $u_*(t)$ получается из решения задачи быстродействия для (3.6.8) при некоторых других начальных данных x_0 путём введения участков с $u_*(t) \equiv 0$ в окрестности (по t) точек переключения задачи быстродействия и, быть может, моментов $t = 0$ и $t = T$. Если $\Phi(T)$ достаточно велико, то возможно слияние участков с $u_*(t) \equiv 0$.

Указанная связь исходной задачи и соответствующей ей задачи оптимального быстродействия почти бесполезна, если хотя бы в одной из

них структура управления сильно зависит от начальных условий. Если же управление имеет одну и ту же (или близкую) структуру для любых начальных условий в задаче быстрогодействия, то можно сделать важные заключения о виде управления для исходной задачи.

Проиллюстрируем сказанное на примере простейшей задачи с возмущениями.

3. Пример. Пусть движение материальной точки по прямой описывается уравнением

$$\ddot{x} = (1 + \mu w)u, \quad \mu = \text{const} \geq 0, \quad |w| \leq 1, \quad |u| \leq 1 \quad (3.6.10)$$

где u — искомое управление, а переменная w отражает погрешность его реализации.

Будем аппроксимировать множество достижимости снаружи с помощью глобально оптимальных эллипсов, заданных соотношением

$$(Q^{-1}(\vartheta - a), (\vartheta - a)) \leq 1$$

где $a = (a_1, a_2)$ — радиус-вектор центра эллипса, а ϑ — вектор фазовых координат, причём первая из них описывает положение точки, а вторая — её скорость.

Найдём минимум функционала (3.1.16) для задачи о приведении центра эллипса в начало координат на фазовой плоскости. Другими словами, путём выбора u требуется минимизировать разброс возможных значений координаты и скорости в последний момент времени T .

В данном случае имеем

$$G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 u^2 \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Выберем

$$C = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{Bmatrix}$$

где $b = \text{const} > 0$. Получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= a_2 \\ \dot{a}_2 &= u \\ \dot{\Phi} &= \mu|u|V, \quad V = \sqrt{(T-t)^2 + b}\end{aligned}\tag{3.6.11}$$

с граничными условиями

$$a_1(T) = a_2(T) = 0, \quad \Phi(0) = \sqrt{\text{Tr}(P(0)Q(0))}\tag{3.6.12}$$

где

$$P(t) = \exp(A^\top(T-t)) C \exp(A(T-t)) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & T-t \\ T-t & (T-t)^2 + b \end{array} \right\|$$

Применяя принцип максимума Понтрягина, получим гамильтониан

$$H_s = p_1 a_2 + p_2 u + p_3 \mu|u|V$$

С учётом того, что

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -p_1, \quad \dot{p}_3 = 0$$

и, поскольку

$$p_3(T) = -\frac{\partial \text{Tr}(CQ(T))}{\partial \Phi} = -2\Phi(T) = -2\Phi_T$$

получаем

$$p_1 = c_1, \quad p_2 = -c_1 t + c_2, \quad p_3 = -2\Phi_T$$

где c_1 и c_2 – некоторые константы. Тогда

$$u_* = \begin{cases} 0, & \text{если } |p_2| + p_3 \mu V < 0 \\ 1, & \text{если } |p_2| + p_3 \mu V > 0 \text{ и } p_2 > 0 \\ -1, & \text{если } |p_2| + p_3 \mu V > 0 \text{ и } p_2 < 0 \end{cases}$$

Заметим, что $\Phi_T > 0$ для любой траектории, для которой

$$a_1^2(0) + a_2^2(0) \neq 0$$

Как было доказано выше, переключений непосредственно с $u_* = 1$ на $u_* = -1$ и с $u_* = -1$ на $u_* = 1$ быть не может. Число переключений определяется уравнением $|p_2| + p_3\mu V = 0$, которое имеет не более двух решений относительно t .

Фазовый вектор задачи включает в себя a_1 , a_2 и три компоненты симметрической матрицы Q . Рассмотрим проекции оптимальных фазовых траекторий на плоскость, заданную переменными a_1 и a_2 . Поскольку число переключений не превосходит двух, то, с учётом центральной симметрии поля оптимальных траекторий, можно рассматривать лишь два семейства траекторий, отвечающих последовательностям управлений $\{-1; 0; 1\}$ и $\{0; 1; 0\}$ и начинающихся в области, лежащей выше кривой, состоящей из дуги параболы $a_1 = -a_2^2/2$ при $a_1 < 0$ и $a_2 > 0$, а также дуги параболы $a_1 = a_2^2/2$ при $a_1 > 0$ и $a_2 < 0$ (кривая AOB на рис. 54 и рис. 55). При этом вторая дуга принадлежит указанной области.

Теперь можно найти минимум (3.1.16) как функции T для каждой из двух указанных структур и выбрать ту из них, которая обеспечивает меньшее значение. Поскольку $\Phi(T) > 0$, то в силу (3.6.3) можно искать $\Phi(T) \rightarrow \min$ по всем T .

Используя (3.6.11), вычислим интеграл

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \int_0^t V dt = \\ &= \frac{1}{2} \left((t-T)V + b \ln(t-T+V) + T\sqrt{T^2+b} - b \ln \left(\sqrt{T^2+b} - T \right) \right)\end{aligned}$$

Для последовательности $\{-1; 0; 1\}$ получаем из (3.6.11)

$$\Phi_T/\mu = \Psi(T) + \Psi(t_1) - \Psi(t_2) + \Phi(0)/\mu \quad (3.6.13)$$

где t_1 – время движения с $u_* = -1$, а t_2 – момент переключения управления с $u_* = 0$ на $u_* = 1$. Тогда для рассматриваемой последовательности

переключений управления, интегрируя уравнения (3.6.11) для a_1 и a_2 , получим

$$T = a_2(0) - a_{2*} - \frac{a_2^2(0)}{2a_{2*}} - \frac{a_1(0)}{a_{2*}}$$

где a_{2*} — скорость движения с $u_* = 0$. Поскольку $t_1 = a_2(0) - a_{2*}$ и $t_2 = T + a_{2*}$, то можно получить $\Phi(T)$ как функцию a_{2*} , причём $a_{2*} \in (a_2^0; 0)$, где a_2^0 отвечает нулевому времени движения со скоростью a_{2*} . Обратим внимание на то, что в при $a_{2*} = a_2^0$ траектория совпадает с решающей задачу быстрогодействия для (3.6.10). Проблему поиска минимума проще всего решать простым численным перебором возможных значений a_{2*} на указанном интервале с некоторым, зависящим от требуемой точности, шагом. Следует отметить, что положение минимума $\Phi(a_{2*})$ не меняется при замене

$$a_{2*} = \lambda a'_{2*}, \quad a_2(0) = \lambda a'_2, \quad a_1(0) = \lambda^2 a'_1(0), \quad b = \lambda^2 b'$$

что дает возможность всегда брать $b = 1$ при переборе.

В случае, когда управление имеет структуру $\{0; 1; 0\}$, задача поиска минимума существенно упрощается, поскольку такой структурой движение до состояния $a_1 = a_2 = 0$ задаётся однозначно. В связи с этим, опуская подробности, скажем лишь, что момент окончания процесса можно определить, вычисляя $\Phi(T)$ для разных T с некоторым шагом. Оптимальное T можно считать найденным, когда $\Phi(T)$ достигнет минимума.

На рис. 54 и рис. 55 представлены результаты работы программы, использующей описанный выше алгоритм при $b = 1$ и $\mu = 1$. Пусть

$$Q(0) = \begin{pmatrix} Q_{11}(0) & Q_{12}(0) \\ Q_{21}(0) & Q_{22}(0) \end{pmatrix}$$

Рис. 54 получен при $Q(0) = 0$, что, согласно (3.6.12), даёт $\Phi(0) = 0$.

Рис. 55 соответствует случаю

$$Q_{11}(0) = Q_{22}(0) = 10, \quad Q_{12}(0) = Q_{21}(0) = -9$$

В таблицах, помещённых ниже рис. 54 и рис. 55, колонка TL содержит относительную потерю времени при реализации полученного управления по сравнению с управлением, оптимальным по быстродействию для задачи без учёта возмущений, колонка AG — относительный выигрыш по функционалу по сравнению с тем же случаем, а колонка STR — оптимальную структуру управления.

4. Замечания к примеру. 1°. Пусть $Q(0) = 0$, что соответствует точному знанию координаты и скорости в начальный момент времени. Тогда $\Phi(0) = 0$ и на заключительном этапе процесса не может применяться $u_* = 0$, то есть случай $\{0; 1; 0\}$ становится частным по отношению к $\{-1; 0; 1\}$.

Чтобы убедиться в этом, отметим, что применение $u_* = 0$ на начальном участке приводит к тому, что на нём $\Phi(t) \equiv 0$ при $\Phi(0) = 0$ (см. (3.6.11)). Неопределённость в знании фазовых координат возникает и, соответственно, $\Phi(t)$ начинает возрастать лишь после начала применения $u_* = 1$, т. е. после перехода к движению по параболе. Поэтому начальный участок с $u_* = 0$ можно исключить из рассмотрения и считать, что все траектории в данном случае начинаются на параболе. Тогда отличие случая $\{0; 1; 0\}$ от $\{0; 1\}$ состоит только в том, что процесс при $\{0; 1; 0\}$ не кончается с прибытием системы в состояние $a_1 = a_2 = 0$, а имеет место ожидание. Это эквивалентно рассмотрению процессов с одинаковыми начальными условиями, которые различаются лишь значением T . Поэтому достаточно показать, что для случая $\{0; 1; 0\}$

$$\frac{d\Phi(T_*)}{dT_*} = \frac{d}{dT_*} \int_{t_1^*}^{t_2^*} V(T_*) dt = \frac{d}{dT_*} \int_0^{-a_2(0)} \sqrt{(T_* - \tau)^2 + b} d\tau > 0 \quad (3.6.14)$$

где $T_* = T - t_1^*$ и $\tau = t - t_1^*$. Посредством t_1^* и t_2^* обозначены границы участка, на котором применяется $u_* = 1$. Показать истинность (3.6.14) нетрудно, поскольку для структуры $\{0; 1; 0\}$ необходимо, что-

бы $a_2(0) < 0$, так как в противном случае нет возможности привести систему в требуемое конечное состояние.

2°. При условиях $\Phi(0) = 0$ и $a_2(0) < 0$ для последовательности $\{-1; 0; 1\}$ не существует участка с $u = -1$, то есть управление имеет вид $\{0; 1\}$.

В самом деле, функционал для случая $\{-1; 0; 1\}$, записанный в соответствии с (3.6.13), будет больше нуля в момент переключения на $u_* = 1$, в то время как функционал для случая $\{0; 1\}$ при тех же значениях a_1 и a_2 будет равен нулю в связи с изложенными в замечании 1° соображениями. Полное же время движения для случая $\{-1; 0; 1\}$ будет больше, чем T из (3.6.14). Отсюда следует, что в конце процесса функционал для случая $\{-1; 0; 1\}$ будет больше, чем для случая $\{0; 1\}$.

Всё сказанное позволяет найти аналитическое решение задачи для $a_2(0) < 0$, которое состоит в движении с $u_* = 0$ до параболы, ведущей в начало координат, а потом по этой параболе с $u_* = 1$ до состояния $a_1 = a_2 = 0$.

3°. При $\Phi(0) \neq 0$ управление вида $\{0; 1; 0\}$ может быть реализовано в полном виде, т. е. при ненулевой длительности всех участков.

В соответствии с (3.6.12) имеем

$$\Phi(0) = \sqrt{Q_{11}(0) + 2Q_{12}(0)T + (T^2 + b)Q_{22}(0)}$$

а, в свою очередь, в обозначениях (3.6.14)

$$\Phi(T) = \int_{t_1^*}^{t_2^*} V dt + \Phi(0) \quad (3.6.15)$$

Заметим, что первое слагаемое в (3.6.15) не зависит от $Q(0)$, а

$$\frac{d\Phi(0)}{dT} = \frac{Q_{12}(0) + TQ_{22}(0)}{\sqrt{Q_{11}(0) + 2Q_{12}(0)T + (T^2 + b)Q_{22}(0)}}$$

Поэтому при любом T всегда существует такая матрица $Q(0)$, в которой

$Q_{12}(0) < 0$, что $d\Phi(T)/dT < 0$ в (3.6.15). Следовательно, ожидание в состоянии $a_1 = a_2 = 0$ позволяет получить меньшее значение Φ .

Сказанное иллюстрирует кривая 3 на рис. 55. Для неё выигрыш по функционалу от применения $\{0; 1; 0\}$ вместо $\{-1; 0; 1\}$ составляет 14%, а проигрыш по времени — 75%.

Глава 4.

Сопоставление стохастического и эллипсоидального оценивания неопределённости в динамической системе с возмущениями, ограниченными по величине

§4.1. Обсуждение проблемы

Как известно, стохастический и гарантированный подходы значительно отличаются друг от друга. Например, для применения гарантированного оценивания необходимо указать границы возможного изменения возмущения, а в рамках вероятностного описания внешнего воздействия часто используют случайный процесс типа белого шума, который не ограничен. В свою очередь, знания упомянутых границ достаточно для гарантированного описания, а для стохастического требуется задать распределение вероятностей, но, например, в трёхмерном случае невозможно определить аддитивную меру (объём) и, тем самым, равномерное распределение на всех ограниченных множествах [133].

С другой стороны, оба подхода часто можно использовать для описания одного и того же технического устройства. Это объясняется тем, что реальные возмущения практически никогда не удовлетворяют требованиям ни одного, ни другого способов исчерпывающим образом. Поэтому на этапе перехода от инженерной задачи к математической вносят дополнительные предположения, которые чрезвычайно редко могут быть полностью оправданы с формальной точки зрения. Например, для принятия решения об использовании теории вероятностей требуется, вообще говоря, проверить применимость её аксиом (см., например, [132]) в конкретном случае, что весьма трудоёмко даже тогда, когда это можно сделать с удовлетворительной точностью. Как правило, ограничиваются проверкой устойчивости частот, т. е. требованием,

чтобы опыт мог быть произвольное число раз воспроизводим в практически одинаковых условиях [34]. Гарантированный подход предполагает, вообще говоря, реализацию всех физически возможных вариантов развития событий, что во многих случаях эквивалентно наличию противника, причём такого, который овладел сложной теорией игр (см., например, [75]) в недоступном сейчас объёме. Во всех случаях степень оправданности предположений измеряется, как обычно, величиной тех погрешностей, которые вносят, приняв решение в пользу определённого метода.

Воспользуемся приведёнными общими соображениями для сравнения вероятностного и гарантированного методов.

Рассмотрим типичную постановку задачи в рамках статистического описания недетерминированных величин. Пусть динамическая система описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, t, \xi) \quad (4.1.1)$$

где $\xi = \xi(t)$ — гауссовский случайный процесс типа белого шума с ковариационной матрицей R_ξ :

$$R_\xi(t, t') = \mathbf{M} \{ \xi(t) \xi^\top(t') \} = N_\xi(t) \delta(t - t')$$

где $N_\xi(t)$ — матрица интенсивности шума, \mathbf{M} означает взятие математического ожидания, а $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Необходимо найти $m_x = \mathbf{M}\{x\}$ и матрицу ковариации $D_x(t)$ процесса $x(t)$.

Типичная задача гарантированного априорного анализа точности имеет следующий вид

$$\dot{x} = f(x, t, w) \quad (4.1.2)$$

где возмущающий вектор $w = w(t)$ лежит в заданном множестве Υ , которое, например, может быть эллипсоидом (3.1.2). Требуется найти $E(a(t), Q_\alpha(t))$, в котором лежит $x(t)$.

Для задач (4.1.1) и (4.1.2) укажем некоторые принципиальные сходства и различия между вероятностным и гарантированным способами рассмотрения [160]:

1°. Если в исходной задаче возмущение $\xi(t)$ являлось стохастическим процессом типа белого шума с известной функцией распределения, то в гарантированном фильтре $w(t)$ — неизвестная, но ограниченная известным множеством функция.

2°. Вместо вектора математического ожидания m_x и матрицы ковариации D_x будет получен вектор центра аппроксимирующего эллипсоида a и его матрица Q_α .

3°. Если размерность исходной системы равна n , то в обоих случаях потребуется $n + (n + 1)n/2$ дифференциальных уравнений относительно такого же количества неизвестных.

4°. Итоговая оценка в вероятностном случае применима только к совокупности реализаций, а в гарантированном — к любой из них. Это обстоятельство связано с тем, что при стохастической оптимизации происходит поиск наилучшего среднего, а при гарантированной решается минимаксная задача применительно к любой допустимой реализации возмущений.

Для того, чтобы сопоставить оба подхода, необходимо иметь возможность сравнить результат решения задачи (4.1.1) с таковым для (4.1.2), т. е. m_x и D_x нужно связать с a и Q_α .

Возьмём двумерное нормальное распределение (см., например, [34])

$$f_g(x, y) = \frac{\exp \left(- \frac{\left(\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy}(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} \right)}{2 \sqrt{1 - r_{xy}^2}} \right)}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2}}$$

Здесь плотность распределения $f_g(x, y)$ зависит от координат x и y , а

также от математических ожиданий m_x и m_y соответствующих случайных величин, их средних квадратических отклонений σ_x и σ_y и коэффициента корреляции r_{xy} . На рис. 56 показана функция $f_g(x, y)$, построенная для $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 3$ и $r_{xy} = -1/2$. Сечение $f_g(x, y)$ плоскостью, параллельной плоскости xOy , представляет собой эллипс, уравнение проекции которого на плоскость xOy имеет вид

$$\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy}(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} = a_g^2$$

$$a_g^2 = -2(1 - r_{xy}^2) \ln \left(b 2\pi\sigma_x\sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2} \right), \quad 0 < b < f_g(m_x, m_y)$$

где b — расстояние плоскости сечения от плоскости xOy . В верхней части рис. 56 изображено несколько таких эллипсов. В случае произвольной размерности множества, на которых плотность вероятности нормально-го распределения постоянна, являются эллипсоидами. Введём постулат, связывающий эллипсоиды равной плотности вероятности, рассматриваемые в задаче (4.1.1), с теми эллипсоидами, которые используют в гарантированном оценивании при решении задачи (4.1.2).

Именно, пусть максимальное отклонение неопределённой величины от среднего значения в α раз больше среднего отклонения, т. е.

$$Q_\alpha = \alpha^2 D_x, \quad \alpha = \text{const} > 0 \quad (4.1.3)$$

Такое отождествление обычно в инженерной практике [34]. В частности, при $\alpha = 3$ получаем известное “правило 3σ ”. Его обычно трактуют как отождествление области, вероятность попадания в которую превосходит некоторую заданную постоянную величину (например, 90%), с соответствующей областью (или её оценкой), получаемой в результате применения гарантированного метода.

Теперь можно провести сравнение вероятностного и гарантированного методов. Оно может быть сделано различными способами в зависимости от конкретных целей исследования. Далее будут рассмотрены несколько вариантов.

§4.2. Системы, близкие к стохастическим

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение некоторого технического устройства, подверженного влиянию некоторой помехи $\eta(t)$. Пусть система может быть приведена к линейному виду

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\eta(t), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \eta(t) \in \mathbf{R}^m \quad (4.2.1)$$

Допустим, что система (4.2.1) обладает свойствами, удобными для её описания методами теории вероятностей. Вместе с тем воздержимся от предположений, которые не могут быть сделаны для подавляющего большинства технических задач.

Пусть $\eta(t)$ — ограниченный по норме центрированный широкополосный шум с интервалом корреляции, намного меньшим всех характерных постоянных времени рассматриваемой динамической системы (4.2.1), и с ограниченной дисперсией $F(t)$. Назовём его, следуя [141], практически белым шумом.

Предположим, что x_0 — ограниченный по норме вектор с распределением, близким к нормальному, и матрицей дисперсии Σ_0 . Назовём векторы такого типа практически гауссовыми. В частности, будем считать $x(t)$ практически гауссовым на всём интересующем нас промежутке времени.

Требуется найти дисперсию вектора $x(t)$ как функцию времени.

Для решения поставленной инженерной задачи нужно описать $\eta(t)$ и $x(t)$ средствами какого-либо стандартного математического подхода. Рассмотрим вероятностный и гарантированный. Заметим, что в обоих уравнение движения оценки среднего $x(t)$ совпадает с (4.2.1) при $\eta(t) \equiv 0$ и его изучение особого интереса не представляет.

2. Вероятностный подход. Один из самых сложных этапов в построении стохастической модели — переход от реального процесса $\eta(t)$

к белому шуму, который имеет бесконечную среднюю мощность [93] и в природе не встречается. Напомним также, что белый шум имеет дисперсию, пропорциональную дельта-функции Дирака $\delta(t)$. Следовательно, среднеквадратическое отклонение белого шума как математический объект не существует, поскольку Л. Шварцем [38] показано, что определить однозначно произведение двух обобщённых функций, “нерегулярных” в окрестности одной и той же точки, невозможно, т. е. не существует такого произведения, которое было бы ассоциативно и коммутативно. Для перехода используют следующие рассуждения [93]: “Во многих задачах бывает известно, что спектр шума в основном постоянен в интересующей нас полосе частот. В этом случае применение постоянной спектральной плотности для всех значений частоты часто упрощает формальное математическое вычисление, не внося значительной неточности в конечный результат.” Формулируют и несколько иначе [141]: “На практике преимущественно применяются те математические модели динамических систем, которые обладают грубостью не только по отношению к собственным параметрам, но и по отношению к форме возмущающих воздействий. Для таких моделей воздействие белого шума и практически белого шума в достаточной степени одинаково.”

Поэтому заменим практически белый шум $\eta(t)$ белым шумом с корреляционной матрицей $\Phi(t)\delta(t-\tau)$. Чтобы связать дисперсию $F(t)$ и интенсивность белого шума $\Phi(t)$, требуется установить соответствие между дельта-функцией и ограниченной функцией, отличной от нуля на конечном интервале времени. Будем опираться на обычное допущение [143], состоящее в том, что реальный процесс с постоянной дисперсией и малым интервалом корреляции следует моделировать белым шумом с постоянной интенсивностью. Тогда для гладкой матричной функции $F(t)$ имеем $\Phi(t) = \mu F(t)$, где μ — константа, назначаемая из инженерных соображений [35]. Она имеет размерность времени $[t]$ (напомним, что $\delta(t-\tau)$ имеет размерность $[t]^{-1}$). В результате соответствующие зна-

чения получают характерное прилагательное “эквивалентный” (например, “белый амплитудный шум с эквивалентной спектральной плотностью”, см. [117]). Например, в [30] при исследовании флуктуаций анодного тока лампы в режиме насыщения, т. е. когда этот ток не ограничен пространственным зарядом, дисперсия F_l этих флуктуаций имеет вид $F_l = 2e_\varepsilon \Im \Delta f$, где $e_\varepsilon \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ кулона — заряд электрона, \Im — постоянная составляющая тока, идущего через лампу, а Δf — используемая полоса частот. При этом интенсивность эквивалентного белого шума Φ_l выбрана равной $\Phi_l = 2e_\varepsilon \Im$, т. е. константа $\mu_l \equiv \Phi_l/F_l = 1/\Delta f$. Для использованного в [30] значения $\Delta f = 2.5 \cdot 10^6$ герц имеем $\mu_l = 0.4 \cdot 10^{-6}$ секунды. Поскольку рассматриваемая лампа генерирует колебания с частотой $30 \cdot 10^6$ герц, то за время μ_l будет сгенерировано 12 колебаний.

Практически гауссовы векторы заменим гауссовыми с той же дисперсией.

Тогда искомая дисперсия $\Sigma(t)$ может быть найдена из уравнения (см., например, [128])

$$\dot{\Sigma} = A(t)\Sigma + \Sigma A^\top(t) + \mu G(t), \quad G(t) = B(t)F(t)B^\top(t), \quad \Sigma(0) = \Sigma_0 \quad (4.2.2)$$

3. Гарантированный подход. Здесь переход к математической модели значительно проще, чем при использовании теории вероятностей. Согласно (4.1.3) матрица эллипсоида, ограничивающего сверху значения $x(0)$, будет равна $Q_{\alpha 0} = \alpha^2 \Sigma_0$, а для $\eta(t)$ получим эллипсоид с матрицей $U(t) = \alpha^2 F(t)$. В этом случае $x(t)$ является вектором, для которого внешней гарантированной оценкой будет некоторый эллипсоид $Q_\alpha(t)$. Тогда можно найти эллипсоид для среднего отклонения $x(t)$ от среднего значения с матрицей $Q(t) = Q_\alpha(t)/\alpha^2$, подчиняющейся уравнениям (3.1.6)

$$\dot{Q} = A(t)Q + QA^\top(t) + \frac{Q}{q(t)} + q(t)G(t), \quad Q(0) = \Sigma_0 \quad (4.2.3)$$

Заметим, что как при выборе $q(t) \equiv t$ согласно §3.2, так и в случаях

(3.1.16) и (3.1.11), функция $q(t)$ и уравнения (4.2.3) не зависят от α . Поэтому для упрощения формул будем в дальнейшем всюду полагать $\alpha = 1$. Тогда $Q(t) \equiv Q_\alpha(t)$.

4. Сравнение методов. Понятно, что во многих случаях гарантированный подход даст более грубую оценку, поскольку при выводе (4.2.3) мы предполагали, что возмущение в каждый момент времени “стремится” максимально увеличить степень неопределённости $x(t)$, т. е. возмущение носит черты направленного противодействия. С точки зрения статистического подхода можно сказать, что здесь корреляционная функция помехи выбрана наихудшей из возможных, а интервал корреляции нельзя считать малым. Согласно [160], “Можно сказать, что вероятностный подход даёт в среднем (по реализациям) лучшие результаты” и, как правило, это действительно так. Однако бывают исключения.

Рассмотрим случай, когда $\Sigma_0 = 0$ и выберем $q(t) \equiv t$. Тогда из (3.2.13) и (4.2.2) получаем

$$Q(t) = \frac{t}{\mu} \Sigma(t) \quad (4.2.4)$$

Следовательно при $t < \mu$ оценка, полученная гарантированным методом, лучше стохастической.

Для примера возьмём движение материальной точки при нулевых начальных условиях по прямой под воздействием неопределённой силы. Соответствующее уравнение в приведённых переменных имеет вид $\ddot{x} = f$, где $|f| < 1$. Положим $\mu = 1$. Тогда стохастический подход даст для x средний квадрат ошибки, равный $t^3/3$, а с помощью гарантированного подхода получим $t^4/3$.

Конечно, с качественной точки зрения такой вывод новым назвать нельзя. Решением скалярного стохастического уравнения $\dot{w} = \xi$, где ξ — белый шум постоянной интенсивности, является винеровский процесс с дисперсией, линейной по времени. Если же искать квадрат возможного отклонения $y(t)$ от начального нулевого положения с помощью

уравнения $\dot{y} = u$, где u ограничено по модулю константой, то получим квадратичную функцию времени. Это общеизвестно и отмечалось в научной литературе (см., например, [176]).

Теперь предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ вектор $x(0)$ известен неточно и поэтому $\Sigma_0 \neq 0$.

Если существует такое число $s > 0$, что после замены времени $\tau = t + s$ выполняются условия $\Sigma(0) = 0$ и $\Sigma(s) = \Sigma_0$, то такой случай сводится к рассмотренному выше.

Для общего случая применим преобразования [160]. Сделаем замену переменных в (4.2.3)

$$Q(t) = V(t)Z(t)V^\top(t), \quad \dot{V} = A(t)V, \quad V(0) = I_n \quad (4.2.5)$$

Тогда (4.2.3) примет вид

$$\dot{Z} = \frac{Z}{q(t)} + q(t)\Lambda(t), \quad \Lambda(t) = V^{-1}(t)G(t)(V^\top(t))^{-1}, \quad Z(0) = Q_0$$

Так как $\Lambda(0) = G_0$, то можно получить разложение

$$Z(t) = Q_0 + t \left(\frac{Q_0}{q_0} + q_0 G_0 \right) + O(t^2) \quad (4.2.6)$$

где $q_0 = q(0)$. Сделаем замену $\Sigma(t) = V(t)\Theta(t)V^\top(t)$ с матрицей $V(t)$ из (4.2.5) в (4.2.2) и получим разложение

$$\Theta(t) = \Sigma_0 + \mu t G_0 + O(t^2) \quad (4.2.7)$$

Так как мы полагаем $\Sigma_0 = Q(0)$, то, выбрав значение q_0 , можно показать преимущество гарантированного метода при некоторых условиях.

Предположим, что матрица $Q(0)$ невырождена. Тогда, поскольку матрица G_0 неотрицательно определена, существует матрица Ω такая, что матрица $\Omega Q(0)\Omega^\top$ является единичной, а матрица $K = \Omega G_0 \Omega^\top$ — диагональной с диагональными элементами k_i , где $i = 1, \dots, n$. Умножим равенства (4.2.6) и (4.2.7) слева на Ω , а справа — на Ω^\top . Тогда

матрицы, полученные таким преобразованием из $Z(t)$ и $\Theta(t)$, будут диагональными с точностью до членов порядка $O(t^2)$. Их элементы равны $z_i = 1 + t(q_0^{-1} + q_0 k_i) + O(t^2)$ и $\theta_i = 1 + \mu t k_i + O(t^2)$ соответственно. Условие, при котором $z_i < \theta_i$ для любого i и малых t , имеет вид $k_i q_0^2 - \mu k_i q_0 + 1 < 0$. Его левая часть как функция q_0 имеет минимум в точке $q_0 = \mu/2$, где оно выполняется, если $k_i > 4/\mu^2$.

5. Результаты сравнения. В поставленной задаче среднее отклонение $x(t)$ от своего среднего значения для любого момента времени t описывается эллипсоидом рассеяния с матрицей $\Sigma(t)$ из (4.2.2) при использовании стохастического подхода и эллипсоидом с матрицей $Q(t)$ из (4.2.3) при использовании метода эллипсоидов в рамках гарантированного подхода.

1°. Если начальный фазовый вектор x_0 известен точно, т. е. $\Sigma(0) = 0$, то $Q(t) = (t/\mu)\Sigma(t)$. Следовательно, при $t < \mu$ предпочтительным является гарантированный подход.

2°. Если начальный фазовый вектор x_0 известен неточно и существует такое число $s > 0$, что после замены времени $\tau = t + s$ выполняются условия $\Sigma(0) = 0$ и $\Sigma(s) = \Sigma_0$, то $Q(\tau) = (\tau/\mu)\Sigma(\tau)$. Тогда гарантированный подход имеет преимущество при $t/\mu < 1 - s/\mu$.

3°. В общем случае следует решать уравнение (4.2.3) при $q(t) \equiv \mu/2$ на интервале времени, не превышающем μ , и сравнивать матрицу $Q(t)$ с решением $\Sigma(t)$ уравнения (4.2.2).

4°. При уменьшении значения μ сокращается интервал времени, в течение которого гарантированная оценка является более точной, но при этом уменьшается эквивалентная интенсивность белого шума, что может привести к несоответствующему реальности результату в рамках стохастического метода. Другими словами, преимущества гарантированного подхода увеличиваются при росте возможностей помехи.

Полученные результаты в ряде случаев дают более точную, по сравнению со стохастической, оценку дисперсии. Если необходимо дальней-

шее уточнение, то можно воспользоваться глобально-оптимальными эллипсоидами (см. §3.1).

§4.3. Построение возмущений, одинаково действующих на систему

Здесь, в §4.3, как и в §4.2, для упрощения рассуждений будем полагать, что в (4.1.3) константа $\alpha = 1$.

В §4.2 было показано, что если строить математическую модель возмущения в рамках каждого из двух рассматриваемых подходов традиционным образом и сравнивать матрицу Q_α в (4.1.1) с матрицей D_x в (4.1.2), то в некоторые моменты времени при определённых условиях обе матрицы совпадают. Это имеет место, например, когда $t = \mu$ в (4.2.4). Однако выбор μ в §4.2 был обусловлен свойствами возмущения, а не требованием, чтобы в некоторый заданный момент τ выполнялось равенство $Q_\alpha(\tau) = D_x(\tau)$.

Теперь установим, как следует выбирать модель возмущения, чтобы такие моменты можно было назначать специально.

Предположим, что для системы (4.1.1) требуется построить такую систему (4.1.2) (или наоборот, для системы (4.1.2) нужно построить такую систему (4.1.1)), чтобы в течение некоторых отрезков времени $[\tau_i; \tau_{i+1}]$ выполнялись соотношения $Q = D_x$ и $a = m_x$. При этом τ_{i+1} может быть равно τ_i , а точка $\tau_j = +\infty$ также принадлежит к числу допустимых.

Представляется разумным выбирать эти моменты в зависимости от рассматриваемой задачи. Например, если невозмущённая система

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (4.3.1)$$

экспоненциально устойчива, а движение начинается в момент t_0 , то можно брать момент $t_0 + t_*$, где t_* — время релаксации. Если же си-

система (4.3.1) имеет периодические решения, то моменты τ_k могут располагаться с соответствующей периодичностью.

Поскольку соответствующее решение для линейного случая в значительной степени уже изложено в [65], то приведём только важные для исследуемого вопроса результаты. Это необходимо, поскольку здесь они интерпретируются иным, отличным от оригинальной статьи образом.

Рассмотрим стационарную линейную динамическую систему

$$\dot{x} = Ax + \xi \quad (4.3.2)$$

где x — n -мерный вектор состояния, A — постоянная устойчивая матрица размерности $n \times n$, ξ — вектор независимых случайных гауссовских процессов. Начальное значение x_0 процесса x — гауссовская случайная величина, независимая от ξ . Будем считать, что математические ожидания случайных величин x_0 и ξ равны нулю. Тогда математическое ожидание гауссовского случайного процесса x также равно нулю. Вторые моменты (корреляционные матрицы) рассматриваемых векторов удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{x_0 x_0^\top\} &= P_0, \quad \mathbf{M}\{xx^\top\} = P, \quad \mathbf{M}\{x_0 \xi^\top\} = 0 \\ \mathbf{M}\{\xi(t)\xi^\top(t')\} &= S\delta(t - t') \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Требуется найти такую матрицу W , чтобы для системы

$$\dot{x} = Ax + w, \quad w \in E(0, W), \quad x_0 \in E(0, Q_0) \quad (4.3.4)$$

выполнялись соотношения

$$Q_* = P_*, \quad Q_* = \lim_{t \rightarrow +\infty} Q, \quad P_* = \lim_{t \rightarrow +\infty} P \quad (4.3.5)$$

Здесь эллипсоид $Q(t)$ — глобально оптимальный (см. §3.1) по критерию (3.1.16).

Аналогичным образом формулируется обратная задача, в которой требуется по системе (4.3.4) найти матрицу S в (4.3.2), исходя из (4.3.5).

Таким образом, нужно исследовать асимптотическое поведение матриц ковариаций и матриц эллипсоидов. Следует отметить, что данная задача является довольно сложной даже для линейного случая.

Доказано, что решение поставленной задачи может быть найдено из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} AP_* + P_*A^\top + S &= 0 \\ AQ_* + Q_*A^\top + \lambda Q_* + \lambda^{-1}W &= 0 \\ \lambda &= \sqrt{\text{Tr}(CW)/\text{Tr}(CQ_*)}, \quad Q_* = P_* \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

В качестве примера рассмотрим скалярную систему $\dot{x} = -\kappa x + \ell$ при $\kappa > 0$, где ℓ — либо центрированный белый шум с интенсивностью σ_ℓ^2 , либо ограниченное возмущение $|\ell| \leq \ell_{\max}$. Соотношения (4.3.6) при $C = 1$ дают

$$\sigma_\ell^2 = 2\ell_{\max}^2/\kappa. \tag{4.3.7}$$

Уравнение (4.3.7) и является искомым уравнением связи между методами для данного примера.

Использованный способ сопоставления связывает параметры возмущения со свойствами объекта. В примере это видно из того, что κ входит в (4.3.7). Следовательно, если необходимо построить уравнения (4.1.1) и (4.1.2), дающие эквивалентный разброс значений фазовых координат динамической системы, при составлении модели внешнего воздействия требуется, вообще говоря, учитывать не только свойства самого возмущения, но и характеристики той динамической системы, на которую оно действует, даже если между этими свойствами и характеристиками нет никакой реальной связи.

§4.4. Сравнение воздействия винеровского и ограниченного процессов

1. Постановка задачи. Как известно, в рамках стохастического метода переход от реального возмущения с конечной дисперсией и малым интервалом корреляции к белому шуму с постоянной интенсивностью в общем случае вызывает определённые трудности, связанные, в частности, с необходимостью установить соответствие между дельта-функцией и ограниченной функцией, отличной от нуля на конечном интервале времени (см. §4.2). Посмотрим, что получится, если реальному процессу с ограниченной дисперсией поставить в соответствие стохастический процесс, дисперсия которого в любой момент времени тоже ограничена.

Составим алгоритм, позволяющий сравнить результаты действия на динамическую систему процесса со случайными неограниченными приращениями и процесса с произвольными (в частности, детерминированными), но ограниченными приращениями. В качестве первого будет выступать вектор $v \in \mathbf{R}^m$, каждая компонента которого — винеровский процесс, т. е. $v_i = \int_0^t \xi_i dt$, где ξ_i — центрированный белый шум с единичной интенсивностью, соответствующий компоненте v_i . В качестве второго возьмём ограниченное возмущение $u \in E(0, I_m t)$, где $u \in \mathbf{R}^m$.

Для решения поставленной задачи сначала в гарантированной модели заменим u на v и получим вероятностную, а потом — наоборот.

Как и ранее, для упрощения формул будем полагать, что в (4.1.3) константа $\alpha = 1$.

2. Построение вероятностной модели. Ограничимся линейным случаем и предположим, что рассматривается система (3.1.4), (3.1.5). Будем считать, что $\varpi(t) \equiv 0$ и $g(t) \equiv 0$, поскольку это не ограничивает общность задачи.

Заменим вектор возмущения w новым вектором возмущения u со-

гласно формуле $w = G^{1/2}t^{-1/2}u$ и при $t_0 = 0$ представим рассматриваемую систему в виде

$$\dot{x} = Ax + BG^{1/2}t^{-1/2}u, \quad x(0) \in E(a_0, Q_0), \quad u \in E(0, I_m t) \quad (4.4.1)$$

Теперь, как было сказано выше, поставим в соответствие ограниченному вектору u случайный вектор v с некоррелированными компонентами, каждая из которых является винеровским процессом. Тогда, согласно предположению, сделанному в конце §4.1, вектору x будет соответствовать стохастический процесс z , имеющий гауссовское распределение с дисперсией Q_0 в начальный момент времени и $\mathbf{M}\{z(0)\} = a_0$. Будем рассматривать все компоненты вектора v в качестве дополнительных фазовых переменных с нулевой дисперсией и нулевым математическим ожиданием в начальный момент времени, расширив тем самым z до вектора y , первые n компонент которого являются вектором z , а остальные m — вектором v . Тогда на основании (4.4.1) получим уравнение

$$\dot{y} = A_y y + B_y \xi, \quad \mathbf{M}\{y(t_0)\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{cov}\{y(t_0)\} = \begin{Bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & I_m \end{Bmatrix} \quad (4.4.2)$$

Здесь ξ — белый шум единичной интенсивности, а \mathbf{cov} означает вычисление матрицы ковариации. Блочные матрицы A_y и B_y с размерностями $(n + m) \times (n + m)$ и $(n + m) \times m$ соответственно имеют вид

$$A_y = \begin{Bmatrix} A & BG^{1/2}t^{-1/2} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad B_y = \begin{Bmatrix} 0 \\ I_m \end{Bmatrix} \quad (4.4.3)$$

Применение теории стохастических процессов (см., например, [128]) к полученной модели (4.4.2), (4.4.3) не вызывает никаких трудностей, за исключением обычных, возникающих при решении любой задачи стохастического априорного анализа точности. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_y &= A_y \rho_y, & \rho_y(t_0) &= \mathbf{M}\{y(t_0)\} \\ \dot{P}_y &= A_y P_y + P_y A_y^\top + B_y B_y^\top, & P_y(t_0) &= \mathbf{cov}\{y(t_0)\} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Получаемые для вектора y математическое ожидание ρ_y и матрица ковариации P_y , а точнее те их составляющие, которые соответствуют части z в y , и являются искомыми величинами. Их следует сопоставить с центром a и матрицей Q эллипсоида, решающего задачу гарантированного оценивания (4.4.1). Можно заметить, что компоненты вектора a тождественно совпадают с первыми n компонентами вектора ρ_y .

Применим разработанный алгоритм к уравнению движения по прямой материальной точки, находящейся под действием ограниченной силы. Пусть начальное состояние системы известно точно. В безразмерных переменных имеем

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) \in E(0, 0) \quad (4.4.5)$$

Воспользуемся эллипсоидами супердостижимости (см. §3.1) в форме (3.2.13). Тогда получим

$$Q_{11} = t^4/3, \quad Q_{12} = t^3/2, \quad Q_{22} = t^2 \quad (4.4.6)$$

Решениями уравнений (4.4.4) применительно к составленной для (4.4.5) системе вида (4.4.2) будут функции

$$P_{11} = (7/45)t^4, \quad P_{12} = (14/45)t^3, \quad P_{22} = (2/3)t^2 \quad (4.4.7)$$

Сравнивая (4.4.6) с (4.4.7), можно заметить, что оба набора функций одинаковы с точностью до постоянных множителей перед степенями времени, причём в (4.4.7) они меньше, чем в (4.4.6). Итак, в стохастическом случае следует ожидать несколько меньший разброс возможных значений фазового вектора, что соответствует практике.

3. Построение гарантированной модели. Эта задача, т. е. построение модели с ограниченной помехой по исходным уравнениям со стохастическими воздействиями, сложнее, чем обратная, которая была решена выше. Данное обстоятельство связано с тем, что не каждую линейную вероятностную систему можно записать в форме (4.4.2), (4.4.3).

Рассмотрим исходную стохастическую систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\xi, \quad \mathbf{M}\{x(0)\} = x_0, \quad \mathbf{cov}\{x(0)\} = D_0, \quad x(t) \in \mathbf{R}^n \quad (4.4.8)$$

где $\xi \in \mathbf{R}^m$ — центрированный белый шум с интенсивностью, задаваемой дифференцируемой положительно определённой симметрической $m \times m$ матрицей $S(t)$; $A(t)$ — $n \times n$ матрица; $B(t)$ — дифференцируемая $n \times m$ матрица.

Запишем систему (4.4.8) в следующей форме:

$$\dot{x} = Ax + B_\zeta \zeta, \quad B_\zeta = BS^{1/2} \quad (4.4.9)$$

Здесь ζ — вектор центрированных белых шумов с единичной интенсивностью. Введём вектор

$$\varphi = x - B_\zeta v \quad (4.4.10)$$

где v — вектор, каждая компонента которого является винеровским процессом. Тогда уравнение (4.4.9) примет вид

$$\dot{\varphi} = A\varphi + B_v v, \quad B_v = AB_\zeta - \dot{B}_\zeta \quad (4.4.11)$$

Для отыскания математического ожидания и дисперсии процесса φ будем рассматривать в уравнении (4.4.9) все компоненты вектора v в качестве дополнительных фазовых переменных с нулевой дисперсией и нулевым математическим ожиданием в начальный момент времени, расширив тем самым x до вектора y , первые n компонент которого являются вектором x , а остальные m — вектором v . Получим уравнение

$$\dot{y} = A_y y + B_y \zeta \quad (4.4.12)$$

Блочные матрицы A_y и B_y с размерностями $(n+m) \times (n+m)$ и $(n+m) \times m$ соответственно имеют вид:

$$A_y = \left\| \begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad B_y = \left\| \begin{array}{c} B_\zeta \\ I_m \end{array} \right\| \quad (4.4.13)$$

Тогда характеристики вектора φ найдутся из теории стохастических процессов (см., например, [128]), применённой к (4.4.12), (4.4.13), и соотношения

$$\varphi = Hy, \quad H = \|I_n, -B_\zeta\| \quad (4.4.14)$$

где H — блочная $n \times (n + m)$ -матрица.

Теперь в (4.4.11) случайному вектору v поставим в соответствие ограниченный вектор u , а стохастическому вектору φ — ограниченный процесс $z \in E(a, Q)$, причём

$$u \in E(0, I_m t), \quad z(t_0) \in E(\mathbf{M}\{\varphi(t_0)\}, \mathbf{cov}\{\varphi(t_0)\}) \quad (4.4.15)$$

Итак, на основе системы (4.4.11) может быть поставлена задача гарантированного оценивания для системы

$$\dot{z} = Az + B_v u \quad (4.4.16)$$

с условиями (4.4.15). Сопоставление результатов для векторов z и φ в каждом конкретном случае даст ответ на поставленный вопрос, т. е. возможность сравнить результаты воздействия на динамическую систему винеровского и ограниченного процессов.

То, что соответствующая минимаксная модель строится не для исходного вектора x , а для вектора φ , объясняется тем, что были использованы не точные множества достижимости, а их эллипсоидальные аппроксимации, применение которых вносит ошибки. В частности, вычисление эллипсоида, ограничивающего вектор x , по соотношению (4.4.10) предполагает аппроксимацию множества, являющегося суммой двух эллипсоидов для векторов φ и u , некоторым третьим. Такая операция, не вызывающая сама по себе серьёзных затруднений (см. [127]), вносит дополнительную погрешность, которая накладывается на эффекты, возникающие при сравнении подходов. Целью же в данном случае является создание процедуры, выявляющей такие эффекты в как можно более чистом виде, что и служит оправданием перехода от x к φ .

Применим полученные формулы к уравнению движения по прямой материальной точки, находящейся под действием силы, которую можно описать белым шумом. Предположим, что начальное состояние системы известно точно. В безразмерных переменных имеем

$$\ddot{x} = \xi$$

$$\mathbf{M}\{x(0)\} = 0, \quad \mathbf{M}\{\dot{x}(0)\} = 0, \quad \mathbf{D}\{x(0)\} = 0, \quad \mathbf{D}\{\dot{x}(0)\} = 0 \quad (4.4.17)$$

где ξ — центрированный белый шум с единичной интенсивностью, а через \mathbf{D} обозначено взятие дисперсии. Для матрицы ковариации P вектора φ с компонентами $\varphi_1 = x$ и $\varphi_2 = \dot{x} - v$ получим

$$P_{11} = t^3/3, \quad P_{12} = 0, \quad P_{22} = 0 \quad (4.4.18)$$

Теперь введём вектор z с компонентами $z_1 = x_*$ и $z_2 = \dot{x}_* - u$, причём x_* и \dot{x}_* обозначают ограниченные неопределённые величины, которые в теории гарантированного оценивания соответствуют стохастическим процессам x и \dot{x} . Тогда в соответствующей (4.4.17) гарантированной задаче (4.4.16) получаем матрицу аппроксимирующего вектор z эллипсоида Q с компонентами

$$Q_{11} = (4/9)t^3, \quad Q_{12} = 0, \quad Q_{22} = 0 \quad (4.4.19)$$

Сравнивая (4.4.18) с (4.4.19), приходим к тому же выводу, как и при сравнении (4.4.6) с (4.4.7), т. е. при вероятностной помехе ожидаемый разброс возможных значений фазового вектора несколько меньше, чем при ограниченной.

Заметим, что в силу изложенного выше построить вероятностную модель по гарантированной значительно проще, чем наоборот. Следовательно, если требуется выбрать наилучшее описание реальной системы, то целесообразно начинать работу с применения метода эллипсоидов.

§4.5. Построение аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамической системы

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарную линейную систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)w(t), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad w(t) \in \mathbf{R}^m \\ y(t) &= H(t)x + v(t), \quad y(t) \in \mathbf{R}^r\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

Матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $H(t)$ известны. Вектор $w(t)$ описывает возмущение, действующее на систему, а вектор $v(t)$ — ошибку наблюдения. Тем самым точные значения фазового вектора $x(t)$ и соответствующего вектора наблюдения $y(t)$ неизвестны. Также предположим, что система (4.5.1) при $w(t) \equiv 0$ и $v(t) \equiv 0$ вполне наблюдаема [128].

Будем аппроксимировать значения $w(t)$ эллипсоидом размерности $m \times m$ с матрицей $W(t)$, а значения $v(t)$ — эллипсоидом размерности $r \times r$ с матрицей $V(t)$, причём центры обоих эллипсоидов будем считать нулевыми. Согласно §3.1, эти предположения можно записать в виде

$$w(t) \in E(0, W(t)), \quad v(t) \in E(0, V(t))\tag{4.5.2}$$

Здесь $W(t)$ и $V(t)$ будем считать известными.

Построим фильтр в форме нестационарной линейной системы

$$\dot{\rho} = F(t)\rho + K(t)y(t), \quad \rho \in \mathbf{R}^n, \quad \rho(t_0) = x(t_0)\tag{4.5.3}$$

где $F(t)$ и $K(t)$ — некоторые неизвестные матрицы, а вектор $\rho(t)$ — искомый вектор оценки. Под $x(t_0)$ будем понимать вектор центра эллипсоида, аппроксимирующего $x(t)$ в начальный момент времени. Тогда

$$e(t) = x(t) - \rho(t)\tag{4.5.4}$$

где $e(t)$ — вектор ошибки фильтра. Он может быть описан эллипсоидом

$$e(t) \in E(f(t), \Sigma(t)), \quad \Sigma(t_0) = \Sigma_0\tag{4.5.5}$$

Введём функционал

$$J = \text{Tr} (L(T)\Sigma(T)) \quad (4.5.6)$$

Здесь T — некоторый фиксированный момент времени, а матрица $L(T)$ размерности $n \times n$ — симметрическая и положительно-определённая.

Требуется найти такие матрицы $F(t)$ и $K(t)$, чтобы

$$f(t) \equiv 0, \quad J \rightarrow \min \quad (4.5.7)$$

Тождество $f(t) \equiv 0$ эквивалентно требованию, чтобы центры эллипсоидов, оценивающих $x(t)$ и $\rho(t)$, совпадали.

2. Решение задачи. Согласно (4.5.1), (4.5.3) и (4.5.4), вектор $e(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = (A(t) - F(t) - K(t)H(t)) x(t) + F(t)e + B(t)w(t) - K(t)v(t) \quad (4.5.8)$$

Для центра $f(t)$, воспользовавшись §3.1, а также с учётом (4.5.2), (4.5.3) и (4.5.8), можно получить уравнение

$$\dot{f} = F(t)f + \zeta(t), \quad f(t_0) = 0 \quad (4.5.9)$$

где $\zeta(t)$ — центр эллипсоида, аппроксимирующего вектор

$$\xi(t) = (A(t) - F(t) - K(t)H(t)) x(t) \quad (4.5.10)$$

Для выполнения первого условия в (4.5.7), нужно, чтобы $\zeta(t) \equiv 0$. Если выбрать

$$F(t) = A(t) - K(t)H(t) \quad (4.5.11)$$

то, согласно (4.5.10), вектор $\xi(t) \equiv 0$. Тогда требование $f(t) \equiv 0$ выполнено. С учётом (4.5.11) уравнение (4.5.8) приобретает вид

$$\dot{e} = (A(t) - K(t)H(t)) e + B(t)w(t) - K(t)v(t) \quad (4.5.12)$$

Слагаемое $B(t)w(t) - K(t)v(t)$ в правой части (4.5.12) представляет собой сумму двух возмущений, каждое из которых ограничено своим эллипсоидом.

Построим эллипсоид, аппроксимирующий эту сумму сверху согласно [160] и [127]. Получаем, что его центр находится в начале координат, а для его матрицы $M(t)$ в случае локально оптимальных эллипсоидов имеем (см. §3.1)

$$M(t) = (1 + \alpha(t)^{-1}) B(t)W(t)B^\top(t) + (1 + \alpha(t))K(t)V(t)K^\top(t) \quad (4.5.13)$$

где $\alpha(t)$ — произвольная скалярная функция времени, причём $\alpha(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$. Аналогично для $\Sigma(t)$ получаем

$$\dot{\Sigma} = (A(t) - K(t)H(t)) \Sigma + \Sigma (A(t) - K(t)H(t))^\top + \frac{\Sigma}{q(t)} + q(t)M(t) \quad (4.5.14)$$

где $q(t)$ должна обладать теми же свойствами, что и $\alpha(t)$. Для сокращения формул введём обозначения

$$A'(t) = A(t) + \frac{1}{2q(t)} I_n \quad (4.5.15)$$

$$W'(t) = q(t) (1 + \alpha(t)^{-1}) W(t), \quad V'(t) = q(t)(1 + \alpha(t))V(t)$$

Тогда (4.5.14) с учётом (4.5.13) и (4.5.15) примет вид

$$\dot{\Sigma} = (A' - KH) \Sigma + \Sigma (A' - KH)^\top + BW' B^\top + KV' K^\top, \quad \Sigma(t_0) = \Sigma_0 \quad (4.5.16)$$

В рамках подхода, предложенного в [174] (см. также [128]), рассмотрим минимизацию функционала (4.5.6) для (4.5.16) как задачу выбора оптимального управления K . Используя принцип максимума [122], получим

$$K = \Sigma H^\top V'^{-1} \quad (4.5.17)$$

Этот результат не зависит ни от момента времени T , ни от конкретного вида матрицы $L(T)$, хотя и опирается на её положительную определённость и симметричность. Тогда уравнение фильтра (4.5.3) примет вид

$$\dot{\rho} = A' \rho + \Sigma H^\top V'^{-1} (y(t) - H \rho), \quad \rho(t_0) = x(t_0) \quad (4.5.18)$$

а из (4.5.16) имеем

$$\dot{\Sigma} = A' \Sigma + \Sigma A'^\top - \Sigma H^\top V'^{-1} H \Sigma + BW' B^\top, \quad \Sigma(t_0) = \Sigma_0 \quad (4.5.19)$$

Соотношения (4.5.17), (4.5.18) и (4.5.19) полностью совпадут с общеизвестными, если в них согласно (4.5.15) заменить матрицу системы A' на A , а вместо V' и W' , зависящих от матриц V и W эллипсоидов, описывающих возмущения, подставить матрицы интенсивностей соответствующих белых шумов.

3. Выбор дополнительных параметров. Для определения конкретного вида A' , V' и W' необходимо назначить функции $\alpha(t)$ и $q(t)$. Напомним, что при любых неотрицательных $\alpha(t)$ и $q(t)$, таких что решения соответствующих дифференциальных уравнений существуют, будет получена гарантированная оценка сверху множества достижимости исследуемой динамической системы. Вместе с тем, можно провести дополнительную оптимизацию.

Например, потребуем локальной оптимальности (см. §3.1) по критерию (3.1.16), т. е.

$$\frac{d}{dt} \text{Tr} (C\Sigma(t)) \rightarrow \min \quad (4.5.20)$$

где C — произвольная постоянная неотрицательно определённая матрица. Введём новые параметры $\xi(t)$ и $\eta(t)$

$$\begin{aligned} \xi(t) &= q(t) (1 + \alpha^{-1}(t)), \quad \eta(t) = q(t) (1 + \alpha(t)) \\ \alpha(t) &= \eta(t)\xi^{-1}(t), \quad q(t) = (\eta^{-1}(t) + \xi^{-1}(t))^{-1} \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

В новых переменных (4.5.18) и (4.5.19) примут вид

$$\dot{\rho} = A\rho + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) \rho + \frac{1}{\eta} \Sigma H^\top V^{-1} (y(t) - H\rho), \quad \rho(t_0) = x(t_0) \quad (4.5.22)$$

$$\dot{\Sigma} = A\Sigma + \Sigma A^\top + \frac{1}{\xi} \Sigma + \xi B W B^\top + \frac{1}{\eta} (\Sigma - \Sigma H^\top V^{-1} H \Sigma), \quad \Sigma(t_0) = \Sigma_0 \quad (4.5.23)$$

Тогда из (4.5.20) и (4.5.23) получаем, что

$$\eta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{Tr}(C\Sigma) \geq \text{Tr}(C\Sigma H^\top V^{-1} H \Sigma) \\ \varepsilon, & \text{Tr}(C\Sigma) < \text{Tr}(C\Sigma H^\top V^{-1} H \Sigma) \end{cases} \quad (4.5.24)$$

где ε — малая положительная константа, т. е. $0 < \varepsilon \ll 1$. Согласно (4.5.22) выбор $\eta(t) = +\infty$ приводит к тому, что наблюдения, производимые в соответствующие моменты времени, никак не влияют на текущую оценку $\rho(t)$. Следовательно, вместо задачи фильтрации мы переходим к задаче оценивания без наблюдений. Для её решения, как указано в §3.1, нужно проинтегрировать следующие уравнения

$$\dot{\rho} = A\rho, \quad \rho(t_0) = x(t_0) \quad (4.5.25)$$

$$\dot{\Sigma} = A\Sigma + \Sigma A^\top + \frac{1}{\xi}\Sigma + \xi BWB^\top, \quad \Sigma(t_0) = \Sigma_0 \quad (4.5.26)$$

Минимизация (4.5.20) по $\xi(t)$ для (4.5.23) даёт тот же результат, что и минимизация (4.5.20) по $\xi(t)$ для (4.5.26), а именно

$$\xi(t) = \sqrt{\text{Tr}(C\Sigma) / \text{Tr}(CBWB^\top)} \quad (4.5.27)$$

Итак, для (4.5.20) параметр $\eta(t)$ задан (4.5.24), а $\xi(t)$ — соотношением (4.5.27). При $\eta(t) = +\infty$ оценка $\rho(t)$ и матрица $\Sigma(t)$ эллипсоида, гарантированно содержащего её погрешность, заданы (4.5.25) и (4.5.26) соответственно, а при $\eta(t) = \varepsilon$ — выражениями (4.5.22) и (4.5.23).

Отметим, что если согласно (4.5.24) выбрать $\eta(t) = \varepsilon$, то в случае заметного рассогласования между наблюдением $y(t)$ и текущей оценкой $\rho(t)$ производная $\dot{\rho}(t)$ может резко измениться. При этом влияние свойств системы, заключённых в матрице $A(t)$, на поведение $\dot{\rho}(t)$ практически исчезает. Другими словами, в (4.5.24) для построения оценки происходит выбор между использованием прогноза и наблюдений. Негладкое поведение оптимального решения обычно для линейных систем и может быть устранено, например, введением дополнительных требований к $\rho(t)$.

Если в (4.5.26) при $t_0 = 0$ имеем $\Sigma(t_0) = 0$, то можно взять $\xi(t) = t$ и искать решение (4.5.26) в виде $\Sigma(t) = tZ(t)$, где $Z(t)$ — новая неизвестная матрица. Как показано в §3.2, такой подход обладает опреде-

лёнными преимуществами. В этой связи заметим, что при

$$t_0 = 0, \quad \Sigma(0) = 0, \quad \rho(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

замена переменных

$$\Sigma(t) = tZ(t), \quad \rho(t) = \mu(t)\sqrt{t}, \quad y(t) = z(t)\sqrt{t}$$

и выбор

$$\xi(t) = t/(1 - \gamma(t)), \quad \eta(t) = t/\gamma(t), \quad 0 \leq \gamma(t) < 1$$

позволяют привести (4.5.22) и (4.5.23) к виду

$$\dot{\mu} = A\mu + \gamma ZH^\top V^{-1} (z(t) - H\mu), \quad \mu(0) = 0 \quad (4.5.28)$$

$$\dot{Z} = AZ + ZA^\top - \gamma ZH^\top V^{-1} HZ + \frac{1}{1 - \gamma} BWB^\top, \quad Z(0) = 0 \quad (4.5.29)$$

Уравнения (4.5.28) и (4.5.29) по форме совпадают с известными уравнениями фильтра Калмана с точностью до множителей, зависящих от $\gamma(t)$. С точки зрения, изложенной в §4.1 и §4.2, можно сказать, что эти множители увеличивают возможное воздействие факторов $w(t)$ и $v(t)$, входящих в (4.5.1), по сравнению со стохастическим случаем, когда W и V характеризуют интенсивности соответствующих шумов. Такой эффект связан с особенностями выбранного способа аппроксимации множеств достижимости. Понятно, что граница множества, представляющего собой сумму двух векторов, каждый из которых принадлежит своему эллипсоиду, в общем случае эллипсоидом не является. Построение эллипсоида, содержащего эту сумму, приводит к появлению некоторой дополнительной погрешности аппроксимации. Её влияние эквивалентно некоторому увеличению мощности неопределённых реальных воздействий, зависящему от значения $\gamma(t)$. В частности, если в момент времени τ погрешность измерений велика, то члены, содержащие $V^{-1}(\tau)$ в (4.5.28) и (4.5.29), малы и ими можно пренебречь, т. е. отбросить соответствующие наблюдения. Тогда необходимость в аппроксимации сумм

векторов, описывающих неопределённые внешние воздействия и неточные измерения, исчезает. Тем самым в множителе $1/(1 - \gamma(\tau)) \geq 1$ из (4.5.29) можно положить $\gamma(\tau) = 0$. Как следует из сказанного выше, такой выбор означает, что измерение $z(\tau)$ не будет влиять на результаты вычислений.

Функцию $\gamma(t)$ можно назначить в соответствии с (4.5.20), а именно

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{Tr}(CBWB^\top) \geq \text{Tr}(CZH^\top V^{-1}HZ) \\ 1 - \sqrt{\frac{\text{Tr}(CBWB^\top)}{\text{Tr}(CZH^\top V^{-1}HZ)}}, & \text{Tr}(CBWB^\top) < \text{Tr}(CZH^\top V^{-1}HZ) \end{cases} \quad (4.5.30)$$

Помимо способов, основанных на критериях вида (4.5.20) и приводящих к локально оптимальным решениям, можно искать минимум некоторого функционала в заданный момент времени, решая задачу оптимального выбора $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Этот путь, описанный в §3.1, даёт, вообще говоря, лучшую оценку в форме глобально оптимальных эллипсоидов. Однако его непосредственное применение к (4.5.23) может встретить трудности, поскольку правая часть (4.5.23) нелинейна по $\Sigma(t)$, что в общем случае ведёт к необходимости решения краевой задачи в пространстве большой размерности. Если же ограничиться этим способом для выбора $\xi(t)$ в (4.5.26), то, как показано в [102], можно свести проблему к последовательному решению двух задач Коши.

4. Пример. Рассмотрим механическую систему (3.1.17). Пусть наблюдения ведут только за второй массой, так что $m = 2$ и уравнения для $y(t)$ в (4.5.1) имеют вид

$$y_1(t) = x_3(t) + v_1(t), \quad y_2(t) = x_4(t) + v_2(t), \quad v_1^2(t) + v_2^2(t) \leq 0.001$$

Предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ были произведены очень точные измерения всех четырёх компонент вектора $x(0) = 0$, так что $\Sigma(0) = 0$. Другими словами, при $t = 0$ система нахо-

дится в начале координат и какая-либо неопределённость в её положении отсутствует.

Нужно построить фильтр, обеспечивающий гарантированную оценку скорости $\dot{\xi}_1(t)$ первой массы, фазовые координаты которой непосредственному наблюдению недоступны.

Для решения задачи воспользуемся (4.5.28), (4.5.29) и (4.5.30). Матрицу C в (4.5.20) выберем так, чтобы все её компоненты были равны нулю, за исключением $C_{22} = 1$. Иначе говоря, будем минимизировать скорость роста модуля проекции эллипсоида, аппроксимирующего свёрху множество достижимости, на ось x_2 .

Рассмотрим результаты численного моделирования. Реализация неопределённых факторов имела вид

$$F_1(t) = \cos(\omega_x t), \quad F_2(t) = \sin(\omega_x t), \quad v_1(t) = \beta_1 \sin(\omega_y t), \quad v_2(t) = \beta_2 \sin(\omega_y t)$$

где $\beta_1 = 1/\sqrt{1000}$ м, $\beta_2 = 1/\sqrt{1000}$ м/с, $\omega_x = 40$ рад/с, $\omega_y = 100$ рад/с. На рис. 57 кривая с малой амплитудой отражает реальную эволюцию координаты второй массы $x_3(t)$ со временем, а кривая с большой амплитудой — соответствующее измерение $y_1(t)$. На рис. 58 цифрой 1 обозначен график изменения скорости второй массы $x_4(t)$, а цифрой 2 — результат её наблюдения $y_2(t)$. Видно, что параметры измерительного устройства настроены для получения возможно более точной информации о скорости точки с массой m_2 .

На рис. 59 показан основной результат расчётов. Кривые 1, 3 и 4 представляют собой итог работы фильтра. Именно, график скорости первой массы $x_2(t)$ гарантированно заключён между кривыми 1 и 4, а центр оценки лежит на кривой 3. График реального изменения $x_2(t)$, отмеченный цифрой 2, дан для сравнения. При всех t он лежит между 1 и 4. Видно, что в течение некоторого времени после начала процесса фильтр полностью игнорировал данные наблюдений, показывавшие, что система вышла из состояния покоя. Это характерно для гаранти-

рованных оценок и в данном примере связано с тем, что цель расчётов — минимизация диапазона совместимых с результатами измерений возможных значений $x_2(t)$, т.е. расстояния между 1 и 4. При малых t норма матрицы BWB^\top в правой части дифференциального уравнения (4.5.29) значительно больше нормы $ZH^\top V^{-1}HZ$, поскольку компоненты Z малы из-за наличия точного значения $x(0)$. Следовательно, для минимизации заданного функционала целесообразно выбирать $\gamma = 0$, а это приводит к исключению результатов измерений в (4.5.28). Из рис. 60, где изображён график $\gamma(t)$, следует, что такое отбрасывание наблюдений происходит не только при малых t .

Итак, полученные формулы позволяют вычислять гарантированные внешние эллипсоидальные оценки множеств достижимости для динамических систем вида (4.5.1) с учётом наблюдений.

Заключение

Цель проведённых исследований заключалась в постановке и изучении ряда задач математической теории оптимального управления, допускающих применение аналитических методов для выяснения особенностей поведения динамических объектов.

Получено численно-аналитическое решение задачи о приведении материальной точки в начало координат с нулевой скоростью посредством ограниченной по модулю силы за минимально возможное время. Для того же объекта исследована возможность наискорейшего достижения поверхности заданной сферы в фазовом пространстве как в отсутствие, так и при наличии однородной вязкой среды. Аналитически решена задача определения границы области допустимых начальных условий, позволяющих уклониться от неподвижного сферического препятствия динамическому объекту, управляемому ограниченной силой. В замкнутой форме построен синтез оптимального управления в задаче оптимального быстрогодействия для линейной системы третьего порядка с инерционным управлением.

Рассмотрена задача о наискорейшем переводе центра масс манёвренного самолёта из одной заданной точки трёхмерного пространства в другую при фиксированных векторах скоростей в этих точках. Найдены численные решения при совпадающих начальных и конечных условиях для траекторий, целиком лежащих в вертикальной плоскости. Показано, что в общем случае решение неединственно, причём наилучшая траектория может менять знак кривизны. Найдены локально оптимальные решения. Рассмотрена задача с учётом ограничения на знак кривизны траектории и вычислены соответствующие оптимальные управления как при фиксированной, так и при свободной конечной точке.

В результате выполнения диссертационной работы получила дальнейшее развитие теория аппроксимации множеств достижимости с по-

мощью эллипсоидов. Построена внешняя гарантированная эллипсоидальная оценка, применимая при любом вырождении как начального эллипсоида, так и эллипсоида, содержащего вектор внешнего возмущения. Показано, что она обеспечивает высокую точность аппроксимации на малых интервалах времени. Исследована задача выбора параметров эллипсоида, содержащего вектор управления. Разработан метод решения проблемы построения гарантированной внешней аппроксимации множества достижимости линейной динамической системы в случае, когда границы допустимых значений неопределённых факторов известны неточно. Рассмотрены с теоретических позиций частный случай неточной реализации управления исполнительными устройствами и случай управляемой матрицы системы. Получены результаты, позволяющие учитывать всю совокупность возможных траекторий ансамбля.

Выяснены основания, на которых может быть построена математически корректная процедура сравнения гарантированного и вероятностного методов описания различных неопределённых факторов. Для динамических систем, традиционно моделируемых методами теории вероятностей, рассмотрена проблема составления математической модели линейной динамической системы с аддитивным неопределённым воздействием по её инженерному описанию. Указаны условия, при которых использование стохастической модели может привести к значительному завышению оценки степени неопределённости фазового вектора по сравнению с ситуацией, когда применяется гарантированный подход. Разработан метод сопоставления результатов действия на линейную динамическую систему процесса, имеющего случайные неограниченные приращения, и процесса с произвольными, в том числе и детерминированными, но ограниченными приращениями. Разработан фильтр, аналогичный известному фильтру Калмана, для получения непрерывной во времени внешней гарантированной эллипсоидальной оценки состояния динамической системы по данным измерений.

Литература

1. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 366 с.
2. *Акуленко Л. Д.* Возмущённая оптимальная по быстродействию задача управления конечным положением материальной точки посредством ограниченной силы // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 12–21.
3. *Акуленко Л. Д.* Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию пересечения сферы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 724–735.
4. *Акуленко Л. Д., Шматков А. М.* Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию приведения материальной точки в заданное положение с нулевой скоростью // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 129–138.
5. *Акуленко Л. Д., Шматков А. М.* Наискорейшее попадание на сферу с нулевой скоростью // Докл. Академии наук. 2001. Т. 379. № 1. С. 28–32.
6. *Акуленко Л. Д., Шматков А. М.* Оптимальное по быстродействию достижение сферы материальной точкой с нулевой скоростью // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 10–23.
7. *Акуленко Л. Д., Шматков А. М.* Оптимальное уклонение объекта от сферического препятствия // Докл. Академии наук. 2002. Т. 387. № 5. С. 608–612.
8. *Акуленко Л. Д., Шматков А. М.* Уклонение динамического объекта от неподвижной сферы под действием ограниченной силы // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 179–190.

9. *Акуленко Л. Д., Шматков А. М.* Оптимальное по быстродействию пересечение сферы в вязкой среде // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 23–30.
10. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 356 с.
11. *Ананьев Б. И.* Об информационных множествах для многошаговых статистически неопределённых систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2000. Т. 6. № 2. С. 290–306.
12. *Ананьев Б. И.* Задача коррекции движения с гауссовским каналом связи // АиТ. 2011. № 2. С. 25–40.
13. *Ананьев Б. И., Адыйуллина Е. С.* Линейное оценивание статистически неопределённых систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 3–16.
14. *Андреенко А. Я., Иванов В. П., Петров Б. Н., Портнов-Соколов Ю. П.* Вопросы теории терминальных систем управления (обзор) // АиТ. 1974. № 5. С. 44–60.
15. *Арушанян О. Б., Залёткин С. Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.
16. *Бабич В. К.* Авиация в локальных войнах. М.: Воениздат, 1988. 207 с.
17. *Бабич В. К.* Воздушный бой (зарождение и развитие). М.: Военное издательство, 1991. 192 с.
18. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 с.

19. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Оптимальное линейно-квадратичное управление в классе обратных связей по выходу // Докл. Академии наук. 2007. Т. 415. № 6. С. 748–750.
20. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Линейно-квадратичные и гамма-оптимальные законы управления по выходу // АиТ. 2008. № 6. С. 5–14.
21. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Оптимальное гашение возмущений при неизвестных начальных условиях системы // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 12. С. 1741–1747.
22. *Батенко А. П.* Управление конечным состоянием движущихся объектов. М.: Советское радио, 1977. 256 с.
23. *Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е.* Определение и коррекция движения: Гарантирующий подход. М.: Наука, 1980. 360 с.
24. *Благодатских В. И.* Теория дифференциальных включений. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1979. 273 с.
25. *Близорукова М. С., Максимов В. И.* Об одной задаче управления при неполной информации // АиТ. 2006. № 3. С. 131–142.
26. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
27. *Бочкарёв А. Ф., Андреевский В. В., Белоконов В. М., Климов В. И., Турапин В. М.* Аэромеханика самолёта: динамика полёта. М.: Машиностроение, 1985. 360 с.
28. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Наука, 1972. 544 с.

29. *Бурмистрова Л. В.* Экспериментальный анализ нового адаптивного метода полиэдральной аппроксимации многомерных выпуклых тел // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43. № 3. С. 328–346.
30. *Бычков С. И., Буренин Н. И., Сафаров Р. Т.* Стабилизация частоты генераторов СВЧ. М.: Изд-во “Советское радио”, 1962. 376 с.
31. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика самолёта. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983. 320 с.
32. *Васильев Н. С.* О численном решении экстремальных задач построения эллипсоидов и параллелепипедов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 3. С. 340–348.
33. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.
34. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.
35. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и её инженерные приложения. М.: Наука, 1991. 384 с.
36. *Вздорнова О. Г., Филиппова Т. Ф.* Внешние эллипсоидальные оценки множеств достижимости дифференциальных импульсных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 38–47.
37. *Вздорнова О. Г., Филиппова Т. Ф.* Задачи импульсного управления при эллипсоидальных ограничениях: вопросы чувствительности по параметрам ограничений // АиТ. 2007. № 11. С. 135–149.
38. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

39. *Внушков Д. В.* Оптимальное по быстродействию приведение динамической системы с линейной диссипацией в заданное конечное положение // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 3. С. 56–61.
40. *Воробьёв В. Г., Кузнецов С. В.* Автоматическое управление полётом самолётов. М.: Транспорт, 1995. 448 с.
41. *Габасов Р., Гневко С. В., Кириллова Ф. М.* Прямой точный алгоритм построения оптимального управления в линейной задаче // АиТ. 1983. № 8. С. 30–38.
42. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
43. *Голубев Ю. Ф.* Оптимальное по быстродействию управление перемещением неустойчивого стержня // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 42–50.
44. *Голубев Ю. Ф.* Брахистохрона с трением // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 5. С. 41–52.
45. *Голубев Ю. Ф., Грушевский А. В., Хайруллин Р. З.* О структуре области достижимости при спуске КА // Космические исследования. 1996. Т. 34. № 2. С. 180–189.
46. *Гончарова Е. В., Овсеевич А. И.* Асимптотические оценки множеств достижимости сингулярно возмущённых линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 12. С. 1737–1748.
47. *Гусейнов Х. Г., Моисеев А. Н., Ушаков В. Н.* Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1998. Т. 62. № 2. С. 179–187.

48. *Гусейнов Х. Г., Незнахин А. А., Ушаков В. Н.* Приближённое построение множеств достижимости с интегральными ограничениями на управление // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 580–590.
49. *Давыдов А. А.* Особенности границы достижимости в двумерных управляемых системах // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37. Вып. 3. С. 183–184.
50. *Давыдов А. А.* Квазигельдеровость границы достижимости // Труды семинара по тензорному и векторному анализу. 1986. Вып. XXII. С. 26–33.
51. *Добронец Б. С.* Приближения множеств решений параметрическими множествами // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2009. Т. 3. № 2. С. 305–311.
52. *Добронец Б. С., Рощина С. Л.* Специальные приближения множеств решений систем ОДУ с интервальными параметрами // Вопросы математического анализа. Красноярск, КГТУ. 2002. № 5. С. 12–17.
53. *Евстифеев А. Е., Маликов А. И.* Синтез робастного управления по эталонной модели с помощью матричных систем сравнения / Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань: Фолиант, 2011. Т. 2. 240 с. С. 95–109.
54. *Желнин Ю. Н., Шелехов С. А., Ярошевский В. А.* Определение вероятностей исходов воздушного боя // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 171–174.
55. *Желнин Ю. Н., Утёмов А. Е.* Построение барьерных поверхностей в одной игровой задаче преследования-уклонения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 5. С. 87–95.

56. Желнин Ю. Н., Утёмов А. Е., Шматков А. М. Оптимальный по быстродействию манёвр “петля” без потери скорости // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 170–185.
57. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. Ижевск: НИЦ РХД, 2007. 468 с.
58. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
59. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
60. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 51–64.
61. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 224 с.
62. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
63. Каюмов О. Р. Глобально управляемые механические системы. М.: Физматлит, 2007. 165 с.
64. Каюмов О. Р. О глобальной управляемости некоторых механических систем с абсолютно упругими ударами // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 6. С. 927–944.
65. Ким Ю. В., Овсеевич А. И., Решетняк Ю. Н. Сравнение стохастического и гарантированного подходов к оцениванию состояния динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. № 2. С. 87–94.

66. *Клепфиш Б. Р., Овсеевич А. И.* Асимптотика эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 2. С. 66–69.
67. *Ковалёва А. С.* Управление колебательными и виброударными системами. М.: Наука, 1990. 256 с.
68. *Ковалёва А. С.* Асимптотическое решение задачи оптимального управления нелинейными колебаниями в окрестности резонанса // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 913–922.
69. *Корноушенко Е. К.* Интервальные покоординатные оценки для множества достижимых состояний линейной стационарной системы. I IV // АиТ. I. 1980. № 5. С. 12–22; II. 1980. № 12. С. 10–17; III. 1982. № 10. С. 47–52; IV. 1983. № 2. С. 81–87.
70. *Костоусова Е. К.* Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3. № 2. С. 11–20.
71. *Костоусова Е. К.* О внешних полиэдральных оценках для множеств достижимости систем с билинейной неопределённостью // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 559–571.
72. *Костоусова Е. К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в “расширенном” пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9. № 5. С. 54–72.
73. *Краснощеченко В. И., Крищенко А. П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
74. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

75. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
76. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
77. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
78. *Крищенко А. П.* Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // *АиТ.* 1984. № 6. С. 30–36.
79. *Крищенко А. П.* Преобразования аффинных систем и их множества достижимости // *Дифференциальные уравнения.* 1997. Т. 33. № 8. С. 1144–1145.
80. *Крищенко А. П., Канатников А. Н., Ткачёв С. Б.* К задаче построения траектории и управления движением летательных аппаратов // *Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах.* 2010. Т. 16. № 2. С. 88–103.
81. *Кряжисимский А. В., Максимов В. И.* Динамическая реконструкция состояний и гарантирующее управление системой параболических уравнений // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2006. Т. 12. № 1. С. 157–172.
82. *Кузнецов А. Г., Черноусько Ф. Л.* Об оптимальном управлении, минимизирующем экстремум функции фазовых координат // *Кибернетика.* 1968. № 3. С. 50–55.
83. *Кузьмин В. П.* Оптимальный разворот самолёта в горизонтальной плоскости // *Учёные записки ЦАГИ.* 1977. Т. VIII. № 1. С. 70–78.

84. *Кумков С. И., Пацко В. С., Пятко С. Г., Решетов В. М., Федотов А. А.* Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. С. 51–61.
85. *Кунцевич В. М., Поляк Б. Т.* Инвариантные множества нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями и задачи управления // Пробл. управления и информатики. 2009. № 6. С. 6–21.
86. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределённости. М.: Наука, 1977. 392 с.
87. *Куржанский А. Б.* Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона-Якоби в теории управления // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 171–181.
88. *Лазарев Ю. Н.* Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. Самара: Самар. науч. центр РАН, 2007. 274 с.
89. *Левитин Е. С.* О дифференцируемости по параметру оптимального значения параметрических задач математического программирования // Кибернетика. 1976. № 1. С. 44–59.
90. *Лётов А. М.* О разрыве между теорией и практикой // АиТ. 1966. № 2. С. 152–155.
91. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984. 392 с.
92. *Лукьянова Л. Н.* Задача уклонения от столкновения для линейной управляемой системы // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. математика и кибернетика. 2005. № 3. С. 29–35.

93. *Лэнинг Дж., Бэттин Р. Г.* Случайные процессы в задачах автоматического управления. М.: ИЛ, 1958. 388 с.
94. *Матюхин В. И.* Универсальные законы управления механическими системами. М.: МАКС пресс, 2001. 249 с.
95. *Матюхин В. И.* Управляемость неголономных механических систем в классе ограниченных управлений // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 758–775.
96. *Матюхин В. И.* Управляемость механических систем при учёте фазовых ограничений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 19–34.
97. *Матюхин В. И.* Управление механическими системами. М.: Физматлит, 2009. 319 с.
98. *Матюхин В. И.* Приведение двух твёрдых тел в контакт без ударов ограниченными управлениями за конечное время // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 5. С. 840–855.
99. *Мищенко Е. Ф., Никольский М. С., Сатимов Н. Ю.* Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц / Тр. МИАН СССР. 1977. Т. 143. С. 105–128.
100. *Моржсин О. В., Тятюшкин А. И.* Алгоритм метода сечений и программные средства для построения множеств достижимости // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 1. С. 5–11.
101. *Овсеевич А. И.* Структура аттрактора форм множеств достижимости // Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44. № 2. С. 74–81.

102. *Овсеевич А. И.* Явные формулы для эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости. II. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 3. С. 14–20.
103. *Овсеевич А. И., Решетняк Ю. Н.* Аппроксимация пересечения эллипсоидов в задачах гарантированного оценивания // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 4. С. 182–189.
104. *Овсеевич А. И., Решетняк Ю. Н.* Асимптотическое поведение эллипсоидальных оценок областей достижимости // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 90–100.
105. *Овсеевич А. И., Тарабанько Ю. В.* Явные формулы для эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 33–44.
106. *Овсеевич А. И., Шматков А. М.* К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 11–16.
107. *Осипов Ю. С., Кряжиский А. В., Максимов В. И.* Метод экстремального сдвига Н. Н. Красовского и задачи граничного управления // АиТ. 2009. № 4. С. 18–30.
108. *Охоцимский Д. Е., Голубев Ю. Ф., Сихарулидзе Ю. Г.* Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. - М.: Наука, 1975. 400 с.
109. *Панасюк А. И.* Уравнения областей достижимости и их применение в задачах оптимального управления // АиТ. 1982. № 5. С. 67–68.
110. *Панасюк А. И.* Уравнение множеств достижимости // Сибирский матем. журнал. 1984. Т. 25. № 4. С. 143–154.

111. *Панасюк А. И.* Необходимое и достаточное условие выпуклости множеств достижимости дифференциальных включений // Матем. заметки. 1987. Т. 41. Вып. 2. С. 207–215.
112. *Панасюк А. И.* Качественная динамика множеств, определяемых дифференциальными включениями // Матем. заметки. 1989. Т. 45. Вып. 1. С. 80–88.
113. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. Минск: Изд-во БГУ, 1977. 320 с.
114. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 296 с.
115. *Пацко В. С., Пятко С. Г., Кумков С. И., Федотов А. А.* Оценивание траекторного движения воздушного судна на основе информационных множеств. СПб: Академия гражданской авиации. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 1999. 75 с.
116. *Первозванский А. А., Гайцгори В. Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближённая оптимизация. М.: Наука, 1979. 344 с.
117. *Питерсон И. Л.* Статистический анализ и оптимизация систем автоматического управления. М.: “Советское радио”, 1964. 248 с.
118. *Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Докл. Академии наук. 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.
119. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
120. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание

- с помощью инвариантных эллипсоидов / Стохастическая оптимизация в информатике. Под ред. О. Н. Граничина. СПб.: СПб ГУ. 2008. Вып. 4. С. 3–23.
121. *Понтрягин Л. С.* Линейная дифференциальная игра убегания / Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 112. С. 30–63.
122. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
123. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 3. С. 436–445.
124. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр // Доклады АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 285–287.
125. *Пшеничный Б. Н., Остапенко В. В.* Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 259 с.
126. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 368 с.
127. *Решетняк Ю. Н.* Суммирование эллипсоидов в задаче гарантированного оценивания // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 249–254.
128. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1992. 576 с.
129. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
130. *Рокитянский Д. Я.* Точное решение уравнений эллипсоидов, аппроксимирующих область достижимости одного класса линейных систем // Изв. АН. Теория и системы управления. 1996. № 1. С. 16–21.

131. *Саввин А. Б.* О наибо́льшей скорости выведения изображающей точки за пределы заданной области фазовой плоскости // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 4. С. 147–156.
132. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982. 256 с.
133. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. Ижевск: НИЦ РХД, 2003. 271 с.
134. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество. М.: Наука, 1977. 688 с.
135. *Сиротин А. Н.* Управление линейными дискретными системами с невыпуклыми симметричными ограничениями на конечном интервале времени // АиТ. 1994. № 1. С. 128–141.
136. *Сиротин А. Н.* Управляемость линейных дискретных систем с ограниченным управлением и (почти) периодическими возмущениями // АиТ. 2001. № 5. С. 53–64.
137. *Сиротин А. Н.* О решении задачи синтеза управления для класса линейных 0-управляемых дискретных систем с ограничениями // АиТ. 2005. № 1. С. 49–58.
138. *Сиротин А. Н., Формальский А. М.* Области достижимости и управляемости линейных дискретных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 4. С. 5–16.
139. *Сиротин А. Н., Формальский А. М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // АиТ. 2003. № 12. С. 17–32.
140. *Смит Отто Дж. М.* Автоматическое регулирование. М.: Физматлит, 1962. 848 с.

141. Справочник по теории автоматического управления / Под. ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
142. *Стратонович Р. Л.* Условные марковские процессы и их применение в теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966. 319 с.
143. *Тихонов В. И.* Статистическая теория радиотехнических устройств. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1965. 464 с.
144. *Тятюшкин А. И., Моржсин О. В.* Численное исследование множеств достижимости нелинейных управляемых дифференциальных систем // *АиТ.* 2011. № 6. С. 160–170.
145. *Умнов А. А.* Проектирование бортовых комплексов управления. СПб.: СПбГУАП, 2000. 59 с.
146. *Федоренко Р. П.* Приближённое решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
147. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
148. *Филиппова Т. Ф.* Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2009. Т. 15. № 4. С. 262–269.
149. *Филиппова Т. Ф.* Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2010. Т. 16. № 1. С. 223–232.

150. *Филиппова Т. Ф., Матвейчук О. Г.* Алгоритмы оценивания множеств достижимости импульсных управляемых систем с эллипсоидальными фазовыми ограничениями // *АиТ.* 2011. № 9. С. 127–141.
151. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
152. *Формальский А. М.* Об угловых точках границ областей достижимости // *ПММ.* 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 566–574.
153. *Формальский А. М.* К задаче синтеза оптимального управления в системах второго порядка // *Доклады Академии наук.* 2010. Т. 430. № 6. С. 747–750.
154. *Хлебников М. В.* Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2009. № 1. С. 147–161.
155. *Хлебников М. В., Поляк Б. Т., Кунцевич В. М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // *АиТ.* 2011. № 11. С. 9–59.
156. *Цыпкин Я. З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977. 560 с.
157. *Черноруцкий Г.С., Сибрин А. П., Жабреев В. С.* Следящие системы автоматических манипуляторов / Под ред. Г. С. Черноруцкого. М.: Наука, 1987. 272 с.
158. *Черноустько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром // *ПММ.* 1968. Т. 32. Вып. 1. С. 15–26.
159. *Черноустько Ф. Л.* Одна задача уклонения от многих преследователей // *ПММ.* 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.

160. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.
161. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
162. Черноусько Ф. Л., Шматков А. М. Синтез оптимального быстродействия в одной системе третьего порядка // Доклады Академии наук. 1997. Т. 354. № 2. С. 174–177.
163. Черноусько Ф. Л., Шматков А. М. Оптимальное по быстродействию управление в одной системе третьего порядка // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 723–731.
164. Черных О. Л. Построение выпуклой оболочки множества точек в виде системы линейных неравенств // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. № 8. С. 1213–1228.
165. Шматков А. М. Непрерывная гарантированная фильтрация с помощью эллипсоидов // Тезисы V Всероссийской школы-семинара “Математические методы навигации и управления движущимися объектами” (Таруса, сентябрь 1994 г.). Препринт механико-математического факультета МГУ. 1994. № 5. С. 32–34.
166. Шматков А. М. Об управлении системами с помехой, ограниченной по величине // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 4. С. 48–55.
167. Шматков А. М. Об управлении ансамблем траекторий при наличии ограниченной помехи // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 4. С. 82–87.
168. Шматков А. М. Сопоставление стохастического и эллипсоидального оценивания неопределённости для динамической системы с

- возмущениями, ограниченными по величине // Докл. Академии наук. 2006. Т. 411. № 4. С. 460–463.
169. Шматков А. М. О невырожденной локально оптимальной эллипсоидальной аппроксимации оценки состояний линейных систем // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 241–250.
 170. Шматков А. М. Об оптимальном выборе ограничений по управлению // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 1. С. 170–175.
 171. Шматков А. М. Оценивание фазового состояния динамической системы при неточно заданных границах возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 4. С. 66–72.
 172. Шматков А. М. Построение аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамической системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 5. С. 33–40.
 173. Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.
 174. Athans M., Tse E. A direct derivation of the optimal linear filter using the maximum principle // IEEE Trans. Automat. Control. 1967. V. AC-12. N 6. P. 690–698.
 175. Barmish B. R., Sankaran J. The propagation of parametric uncertainty via polytopes // IEEE Trans. Automat. Contr. 1979. V. AC-24. N 2. P. 346–349.
 176. Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability // Structural Safety. 1994. V. 14. P. 227–245.
 177. Benoît A., Swierstra S. A simulation facility for assessing the next generation of 4-d air traffic control procedures / ICAS proceedings (ed. P. Santini, R. Staufenbiel), 1986: 15th Congress of the International

Council of the Aeronautical Sciences, London, UK, September 7–12, 1986, ICAS-86-3.4.1, p. 531a–h.

178. *Bertsekas D. P., Rhodes J. B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control 1971. V. AC-16. N 2. P. 117–128.
179. *Betts J. T.* Practical methods for optimal control using non-linear programming. Philadelphia, PA: SIAM, 2001. x+190 p.
180. *Blakelock J. H.* Automatic control of aircraft and missiles, 2nd edition. N.Y.: J. Wiley & Sons, 1991. 672 p.
181. *Bui D., Hamdaoui M., Vuyst F. De* Reduced-order modeling of parametrized finite element solutions by the POD-ISAT technique. Application to aircraft air control systems // Proc. IV International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering held in Kos, Greece, 2011. A publication of International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE) 2011, p. 1200–1211, Barcelona, Spain.
182. *Bushenkov V., Chernykh O., Kamenev G., Lotov A.* Multi-dimensional images given by mappings: construction and visualization // Pattern Recognition and Image Analysis. 1995. V. 5. N 1. P. 35–56.
183. *Campa G., Fravolini M. L., Mammarella M., Napolitano M. R.* Bounding set calculation for neural network-based output feedback adaptive control systems // Neural Computing and Applications. 2011. V. 20. N. 3. P. 373–387.
184. *Chernousko F. L.* On equations of ellipsoids approximating reachable sets // Probl. of Control and Information Theory. 1983. V. 12. N 2. P. 97–110.

185. *Chernousko F. L.* State estimation for dynamic systems. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994. 304 p.
186. *Chernousko F. L., Ovseevich A. I., Shmatkov A. M.* Optimal two-sided ellipsoidal state estimation in dynamical systems // Proc. of 3rd European Control Conf., 1995.
187. *Chernousko F. L., Shmatkov A. M.* Synthesis of time-optimal control in the third order system // Proc. of the International IFAC Workshop "Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization". June 17–20, 1998, Chelyabinsk.
188. *Chernousko F. L., Shmatkov A. M.* New results on optimal ellipsoidal estimation for uncertain dynamical systems // Proc. of the World Congress IFAC-2002, v. 15, part 1, 2002, Barcelona, Spain.
189. *Chisci L., Garulli A., Zappa G.* Recursive state bounding by parallelo-topes // Automatica. 1996. V. 32. N 7. P. 1049–1055.
190. *Davey D. P., Stewart N. F.* Guaranteed error bounds for the initial value problem using polytope arithmetic // BIT. 1976. N 16. P. 257–268.
191. *Dobronets B. S.* On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations // Interval Computations. 1992. V. 3. N 1. P. 6–19.
192. *Eaton J. H.* An iterative solution to time optimal control // J. of Math. Anal. and Appl. 1962. V. 5. N 2. P. 329–344.
193. *Filippov A. F.* Ellipsoidal estimates for a solution of a system of differential equations // Interval Computations. 1992. V. 4. N 2. P. 6–17.

194. *Filippova T. F., Berezina E. V.* On state estimation approaches for uncertain dynamical systems with quadratic nonlinearity: theory and computer simulations // Lecture Notes in Computer Science. 2008. V. 4818. P. 326–333.
195. *Fisher M. E., Gayek J. E.* Estimating reachable sets for two-dimensional discrete systems // J. of Optimization Theory and Appl. 1988. V. 56. N 1. P. 67–88.
196. *Fonseca R. J., Zymler S., Wiesemann W., Rustem B.* Robust optimization of currency portfolios. Working Papers 012, COMISEF. 2009. 21 p.
197. *Formalsky A. M., Sirotin A. N.* On the geometric properties of reachable and controllable sets for linear discrete systems // J. of Optimization Theory and Appl. 2004. V. 122. N 2. P. 257–284.
198. *Genesio R., Tartaglia M., Vicino A.* On the estimate of the asymptotic stability regions: state of art and new proposals // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. V.–30. N 8. P. 747–755.
199. *Goncharova E. V., Baturin V. A., Sousa J. B., Pereira F. L.* A reachable set estimation algorithm for impulsive control systems // Tools for Mathematical Modelling: Proc. of the Fourth Intern. Conf., June 23–28, 2003, St.-Petersburg. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Technical Univ., 2003. P. 213–219. (Mathematical Research, V. 9).
200. *Goncharova E. V., Ovseevich A. I.* Asymptotics for Singularly Perturbed Reachable Sets // Lecture Notes in Computer Science. 2010. V. 5910. P. 290–295.
201. *Holzinger M. J.* Optimal control applications in space situational awareness. Ph. D. Thesis, University of Colorado, Boulder, Colorado, 2011. 179 p.

202. *Hope E. M.* Design verification of power electronics systems subject to bounded uncertain inputs. Ph. D. Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, Illinois, 2009. 97 p.
203. *Jacobs M.* Attainable sets in systems with unbounded controls // J. of Diff. Equations. 1968. V. 4. N 3. P. 408–423.
204. *Järmark B.* Minimum time turning / Atmospheric Flight Mechanics Conference, 12th, Snowmass, Colorado, August 19–21, 1985. Technical Papers A85-43826 21-08. AIAA Paper 1985–1780, New York, 1985, p. 131–135.
205. *Järmark B.* Optimal turns with altitude variations / 11st AIAA Applied Aerodynamics Conference, Monterey, California, August 9–11, 1993. AIAA Paper 1993-3658, New York, 1993, p. 362–367.
206. *Kalman R., Bucy R.* New results in linear filtering and prediction theory // ASME Transactions. J. of Basic Engineering. Series D. 1961. V. 83. P. 45–108.
207. *Kaynama S., Oishi M., Mitchell I. M., Dumont G. A.* Fixed-complexity piecewise ellipsoidal representation of the continual reachability set based on ellipsoidal techniques // Proc. American Control Conference, 2012, p. 1–7, Montréal, Canada.
208. *Kovaleva A. S.* Optimal control of mechanical systems. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 276 p.
209. *Kovaleva A.* Stability and control of random rocking motion of a multidimensional structure: the Melnikov approach // Nonlinear Dynamics. 2010. V. 59. N 1. P. 309–317.
210. *Kovaleva A.* Control of a weakly perturbed Lagrangian system with a guaranteed escape rate // Probabilistic Engineering Mechanics. 2011. V. 26. N 1. P. 39–43.

211. *Kühn W.* Rigorously computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect // Computing. 1998. V. 61. P. 47–67.
212. *Kurzhanski A. B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
213. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations // Optimiz. Methods & Software. 2002. V. 17. N 2. P. 177–206.
214. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimiz. Methods & Software. 2002. V. 17. N 2. P. 207–237.
215. *Kurzhanskiy A. A., Varaiya P.* Ellipsoidal toolbox: Tech. Rep. UCB/EECS – 2006–46: EECS Department, University of California, Berkeley, 2006. <http://code.google.com/p/ellipsoids>.
216. *Kurzhanskiy A. A., Varaiya P.* Theory and computational techniques for analysis of discrete-time control systems with disturbances // Optimization Methods & Software. V. 26. N 4–5. P. 719–746.
217. *Kushner H. J.* On the differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes, with applications // J. SIAM Control. 1964. Ser. A. V. 2. P. 106–119.
218. *Matasov A. I.* Estimators for uncertain dynamic systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 420 p.
219. *Mehra R. K., Washburn R. B., Sajan S., Carrol J. V.* A study of the application of singular perturbation theory. NASA CR–3167. August 1979. 338 p.

220. *Melikyan A. A.* Generalized characteristics of first order PDEs. Applications in optimal control and differential games. Boston, Massachusetts: Birkhäuser Boston, Inc., 1998. xiv+310 p.
221. *Miele A.* Flight mechanics. Vol. 1: Theory of flight paths. London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1962. xi+416 p.
222. *Miele A., Wang T., Wang H., Melvin W. W.* Optimal penetration landing trajectories in the presence of windshear // Journal of Optimization Theory and Applications. 1988. V. 57. N 1. P. 1-40. DOI: 10.1007/BF00939327.
223. *Milanese M., Belforte G.* Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors. Linear families of models and estimators // IEEE Trans. Automat. Contr. 1982. V. AC-27. N 2. P. 408-414.
224. *Milanese M., Vicino A.* Optimal estimation theory for dynamic systems with set-membership uncertainty: an overview // Automatica. 1991. V. 27. N 6. P. 997-1009.
225. *Moore R. E.* Interval Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1966. 145 p.
226. *Naidu D. S.* Optimal control systems. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2003. 433 p.
227. *Ohta Y.* Nonconvex polygon interval arithmetic as a tool for the analysis and design of robust control systems // Reliable Computing. 2000. V. 6. N 3. P. 247-279.
228. *Ovseevich A. I.* On equations of ellipsoids approximating attainable sets // J. Optimization Theory Appl. 1997. V. 95. N 3. P. 659-676.

229. *Pecsvaradi T., Narendra K. S.* Reachable sets for linear dynamic systems // Information and Control. 1971. V. 19. N 4. P. 319–344.
230. *Revenko V. V., Sesekin A. N., Stephanova A. V.* Attainability sets of dynamic systems with impulse control // Preprints of the Eleventh IFAC Intern. Workshop “Control Applications of Optimization”, July 3–6, 2000, St.-Petersburg. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Univ., 2000. V. 2. P. 172–176.
231. *Scacchioli A., Bayen A. M., Stojadinović B.* Quality of hybrid simulation: a reachability analysis approach // Proc. 18th Engineering Mechanics Division Conference of ASCE (ASCE EMD 2007), 2007, p. 1–6, Blacksburg, Virginia, USA.
232. *Schweppe F. C.* Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. AC–13. N 1. P. 22–28.
233. *Schweppe F. C.* Uncertain dynamic systems. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1973. 563 p.
234. *Sederstrom D. C., Zagalsky N. R., McLane R. C.* Energy/energy rate meter for energy management in flight. Final report prepared for Office of Naval Research, AD–763 450, February 1973. 110 p.
235. *Shanmugavel M., Tsourdos A., White B.* Obstacle Avoidance: Static Obstacles. Encyclopedia of Aerospace Engineering. Hoboken, New York: John Wiley & Sons, 2010. Chapter 241. V. 5.
DOI: 10.1002/9780470686652.eae555
236. *Spark N. T.* The fastest man on Earth // Annals of Improbable Research. 2003. V. 9. N 5. P. 4–26.

237. *Teo K. L., Goh C. J., Wong K. H.* A unified computational approach to optimal control problems. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1991. 329 p.
238. *Uehara S.* Theoretical investigation of minimum time loop maneuvers of jet aircraft. Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, May 1974. 93 p.
239. *Uehara S.* Application of optimal control theory to supersonic fighter maneuverability // Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences. 1982. V. 30. N 340. P. 238–251. (in Japan).
240. *Uehara S., Stewart H. J., Wood L. J.* Minimum time loop maneuvers of jet aircraft // Journal of Aircraft. 1978. V. 15. N 8. P. 449–455.
241. *Virtanen K., Karelahti J., Raivio T.* Modeling air combat by a moving horizon influence diagram game // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2006. V. 29. N 5. P. 1080-1091. DOI:10.2514/1.17168.

Приложение

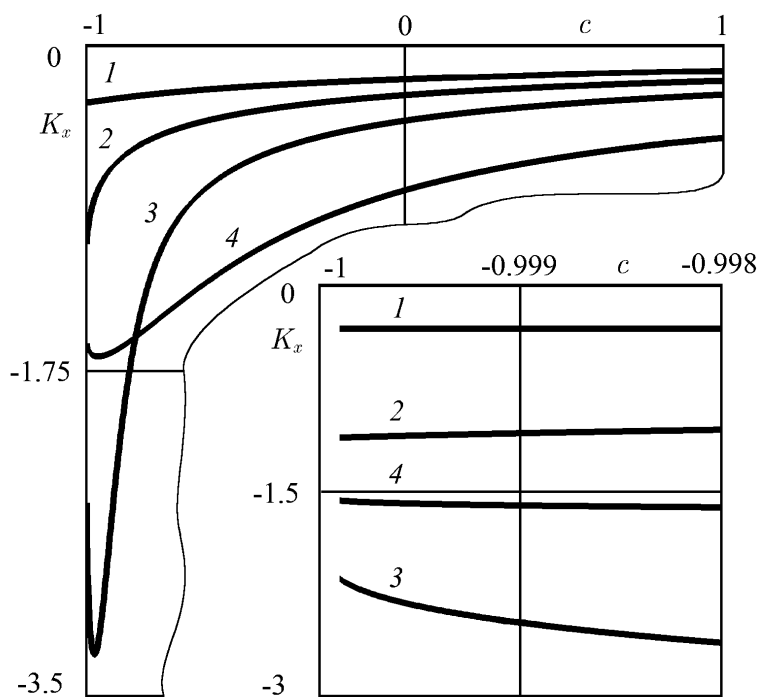


Рис. 1.

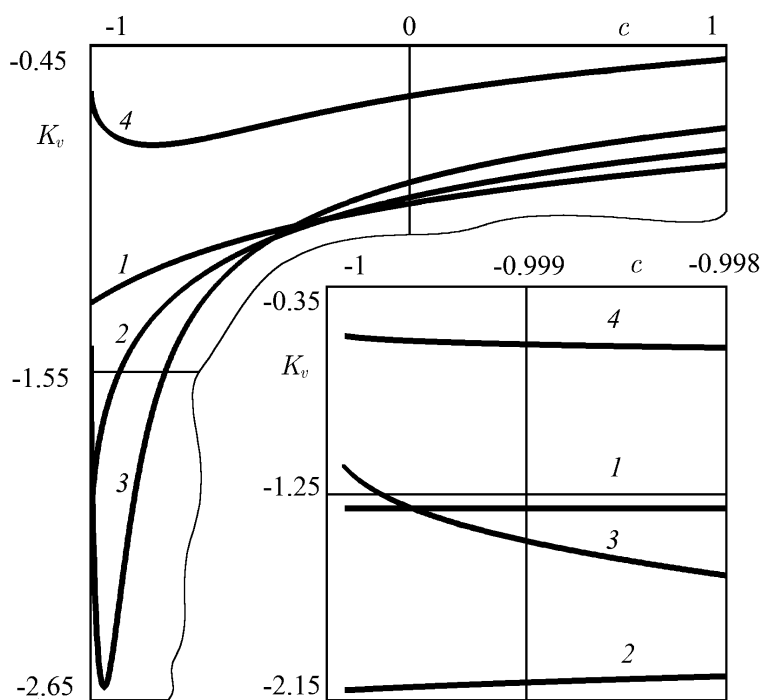


Рис. 2.

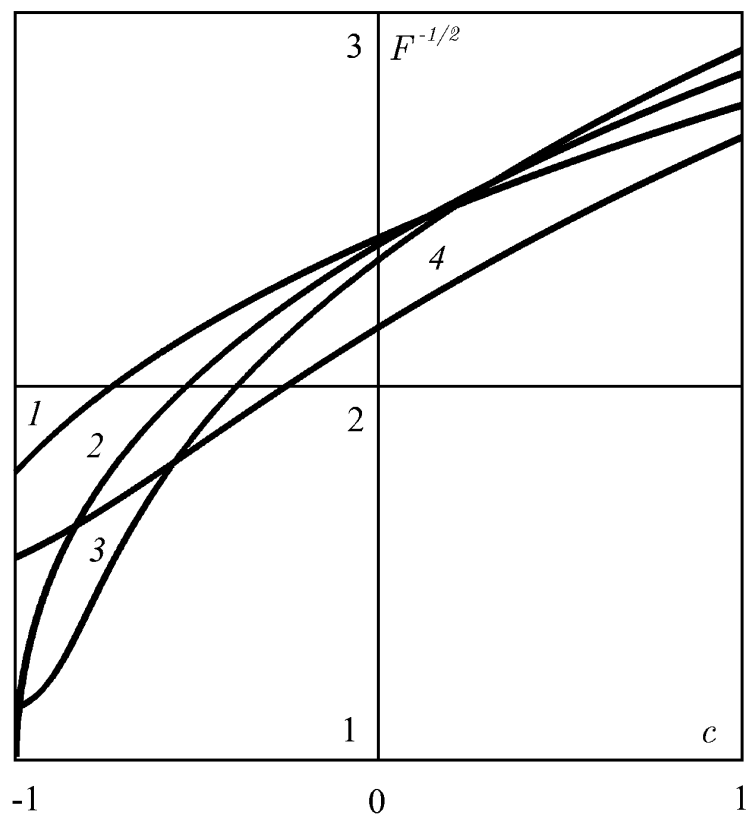


Рис. 3.

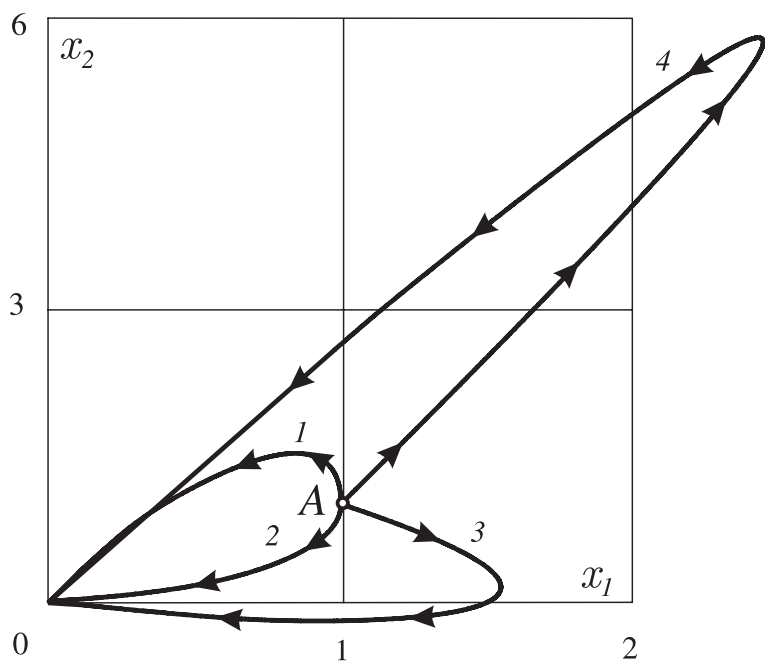


Рис. 4.

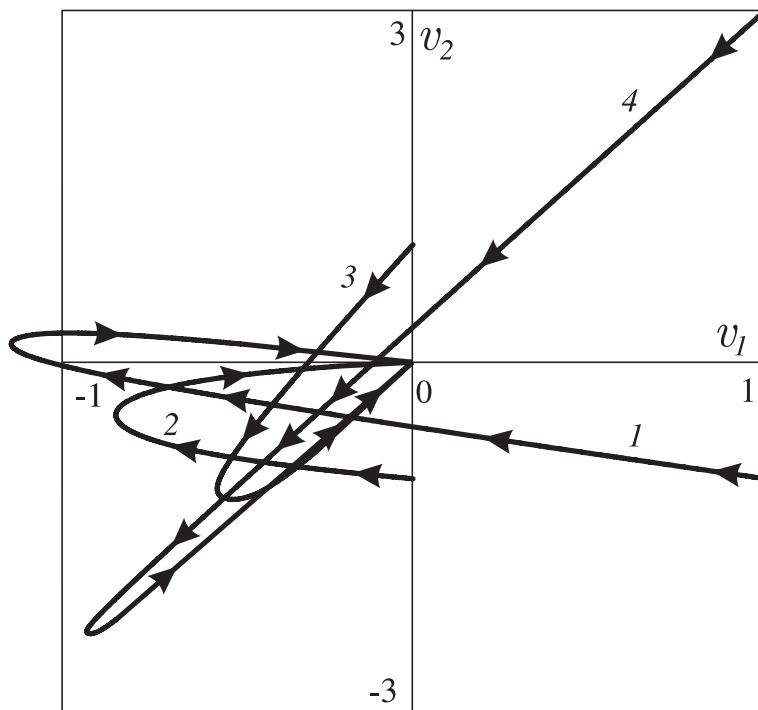


Рис. 5.

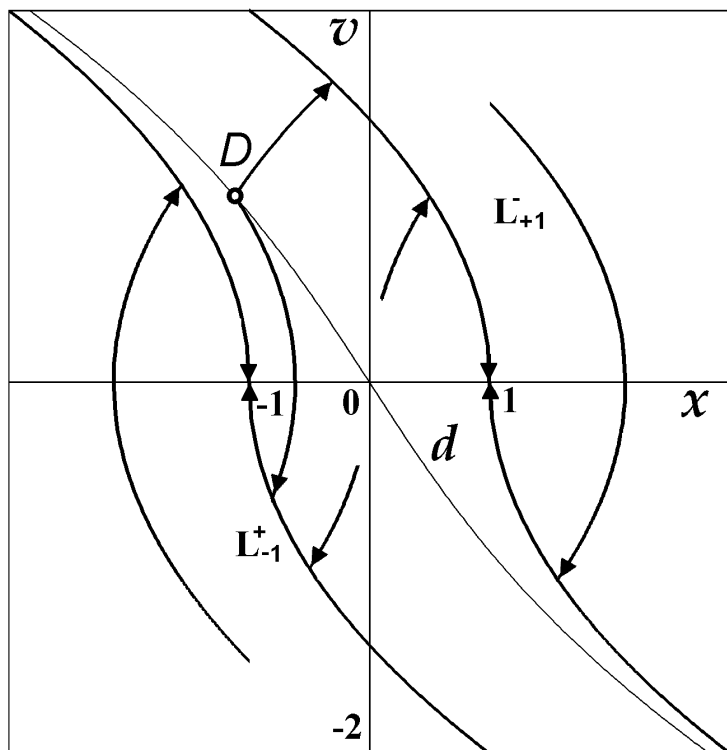


Рис. 6.

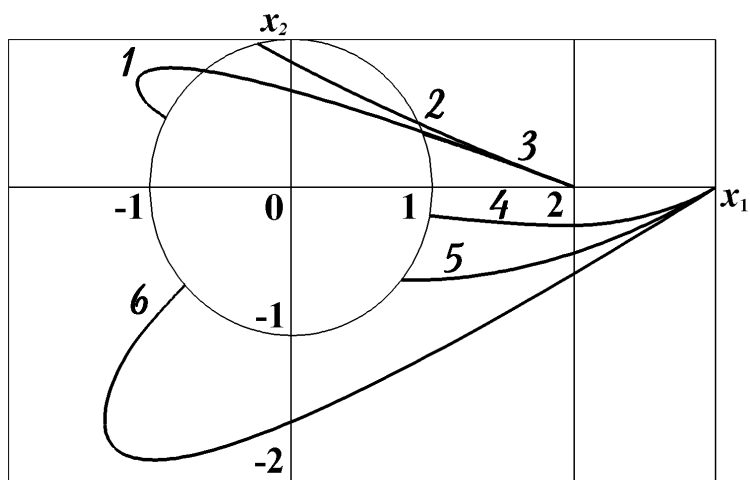


Рис. 7.

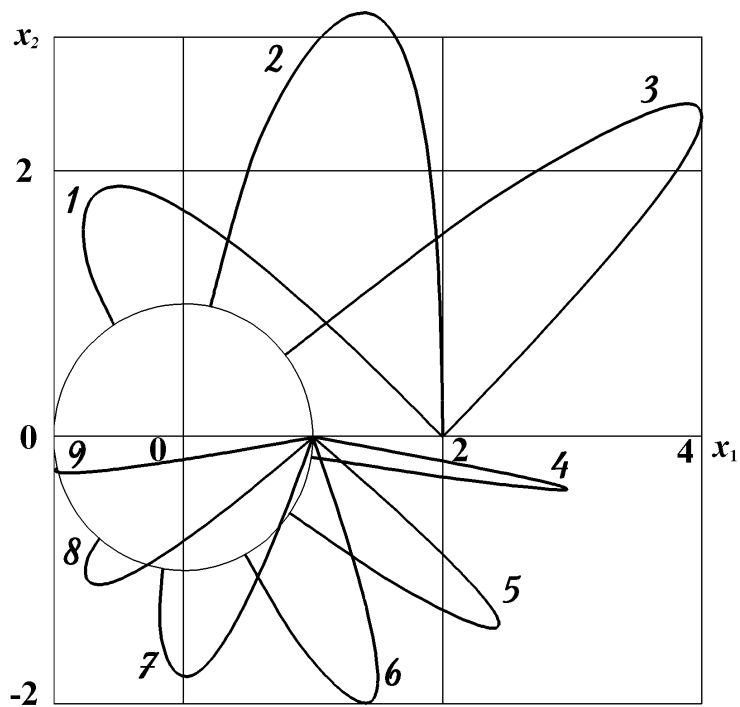


Рис. 8.

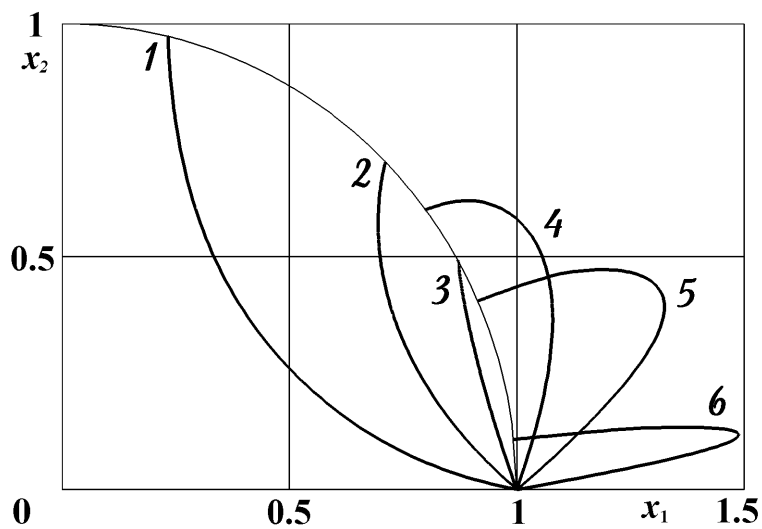


Рис. 9.

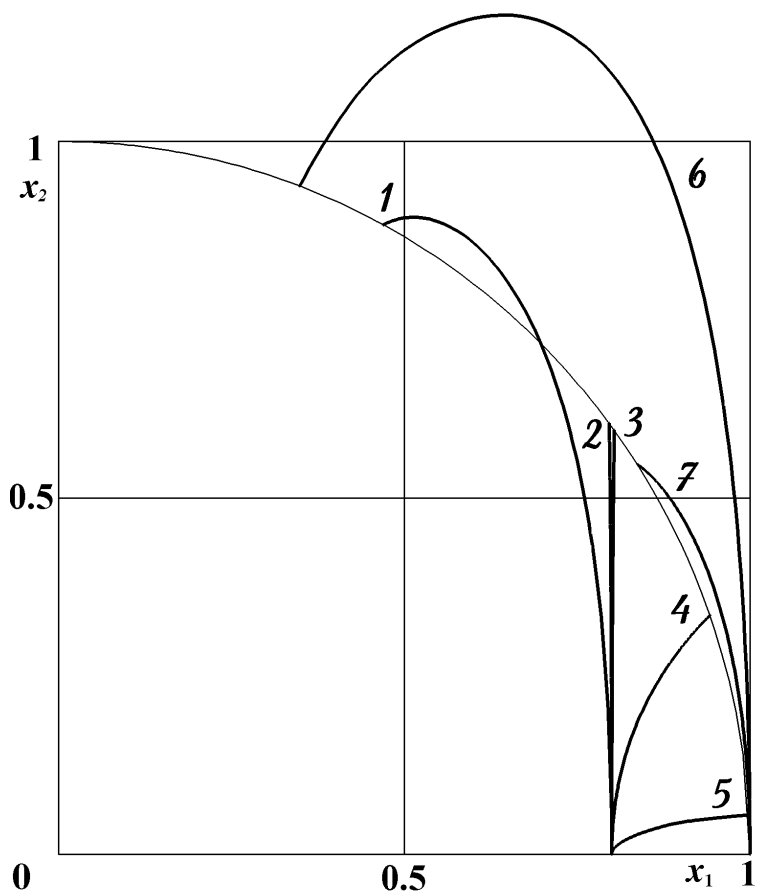


Рис. 10.

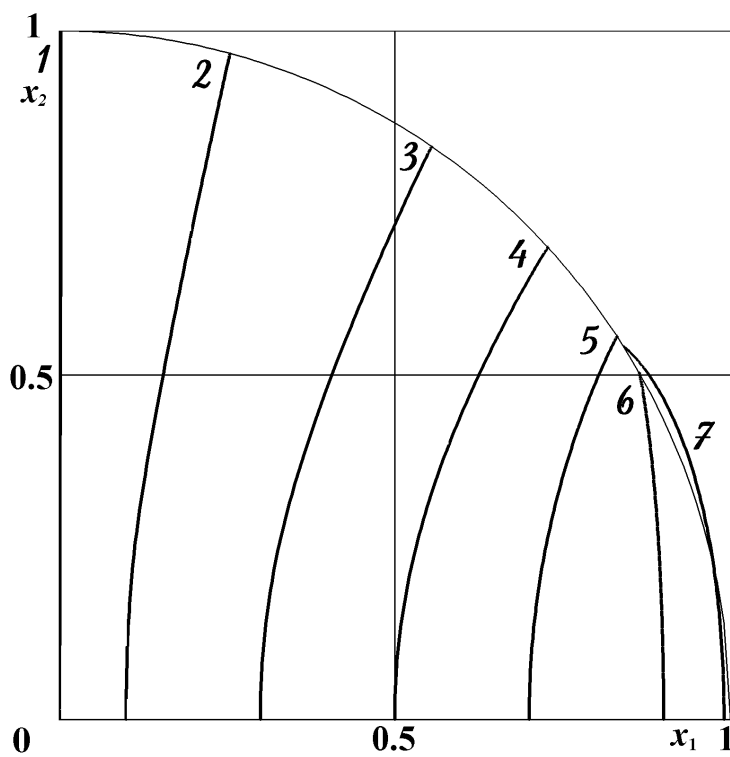


Рис. 11.

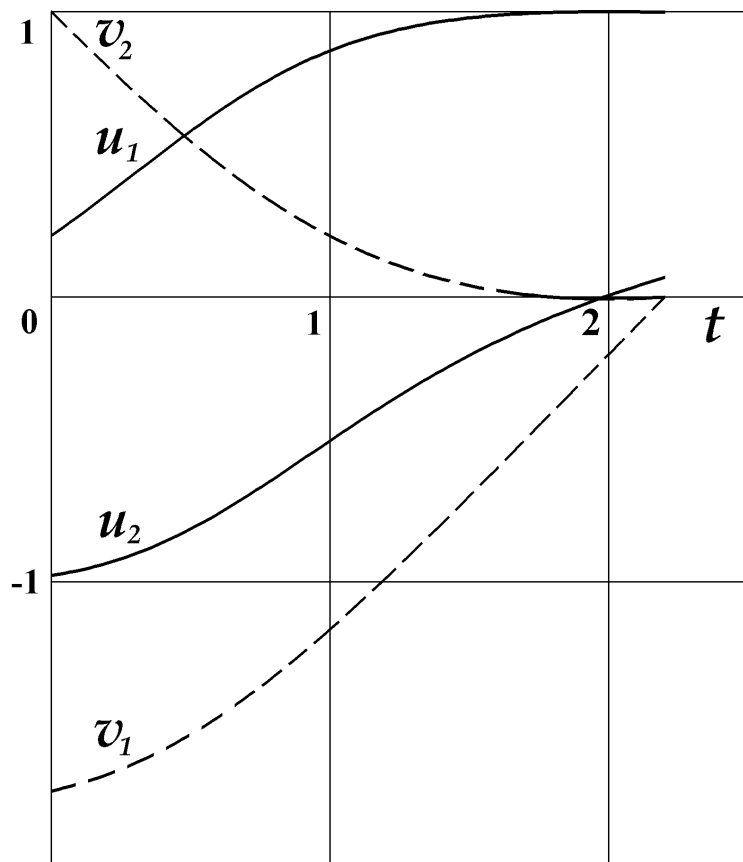


Рис. 12.

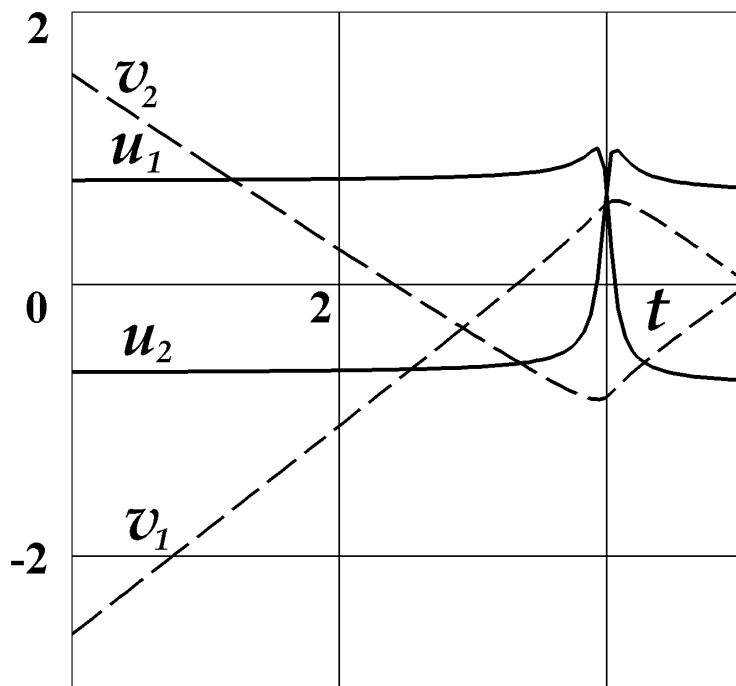


Рис. 13.

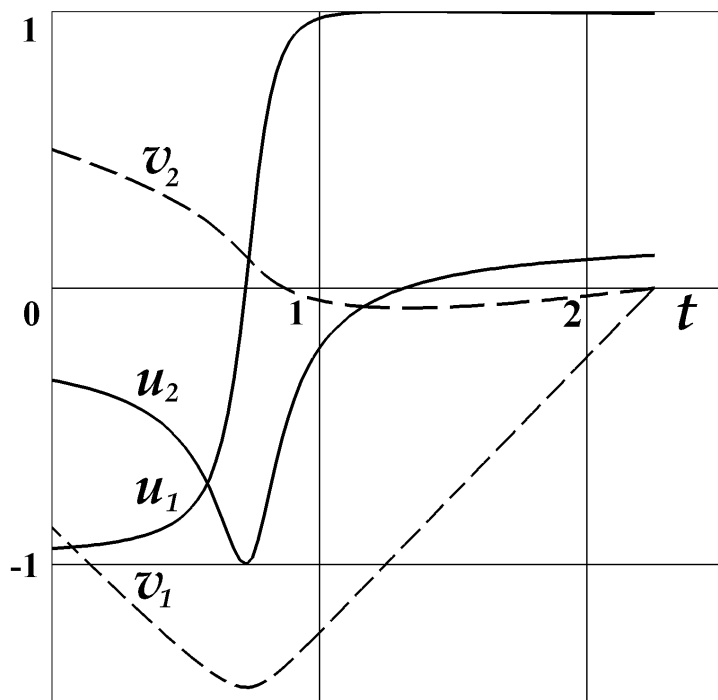


Рис. 14.

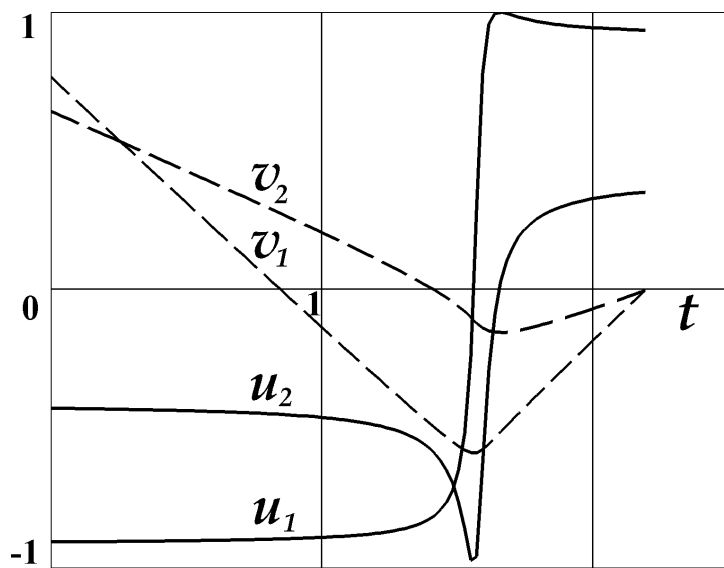


Рис. 15.

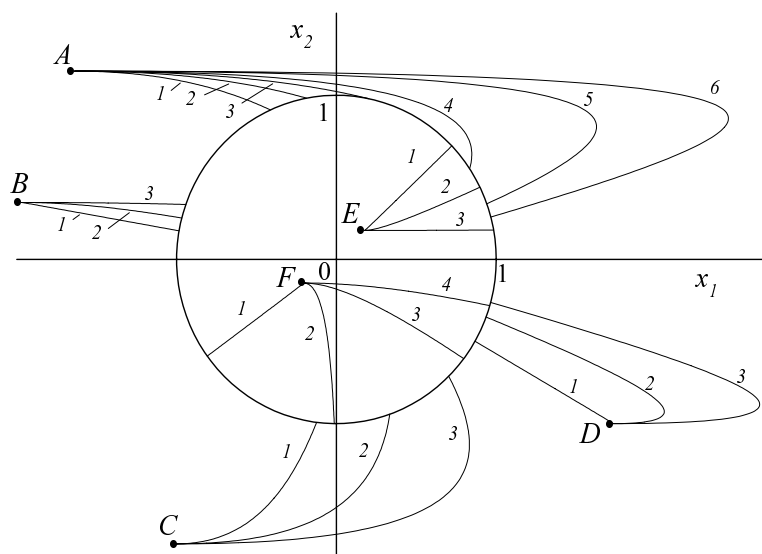


Рис. 16.

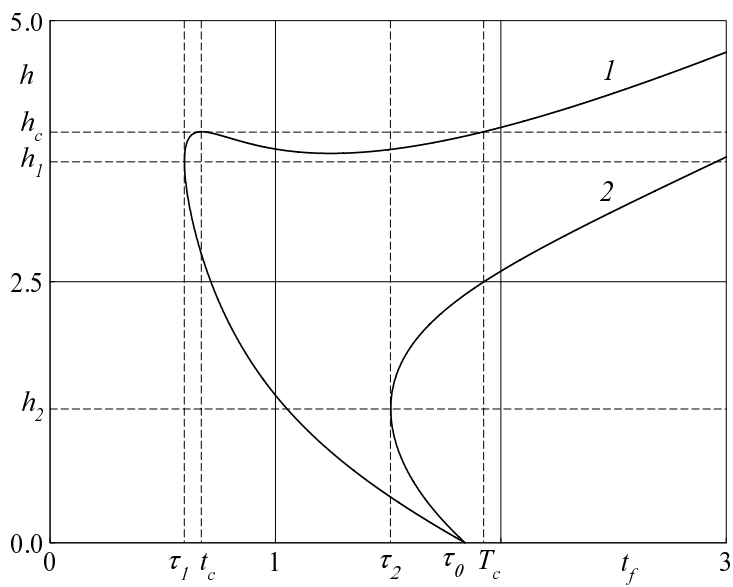


Рис. 17.

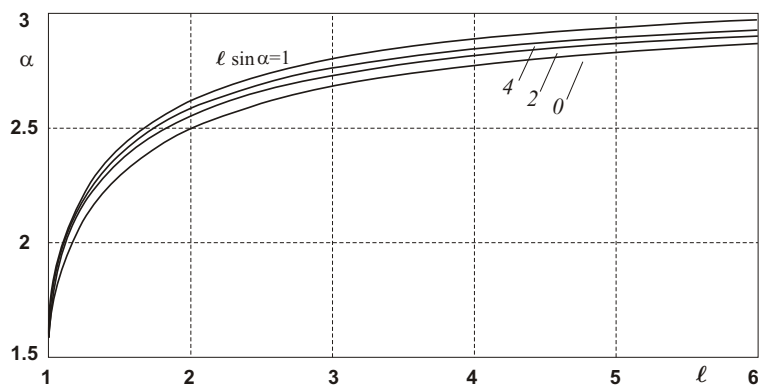


Рис. 18.

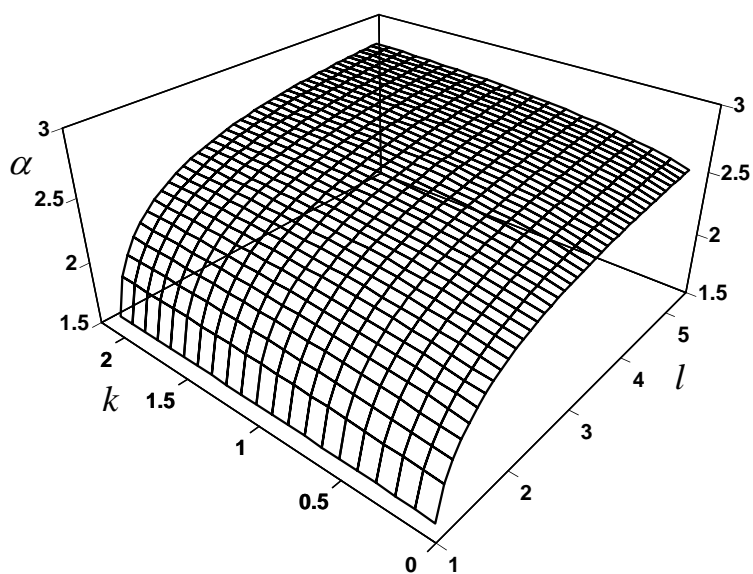


Рис. 19.

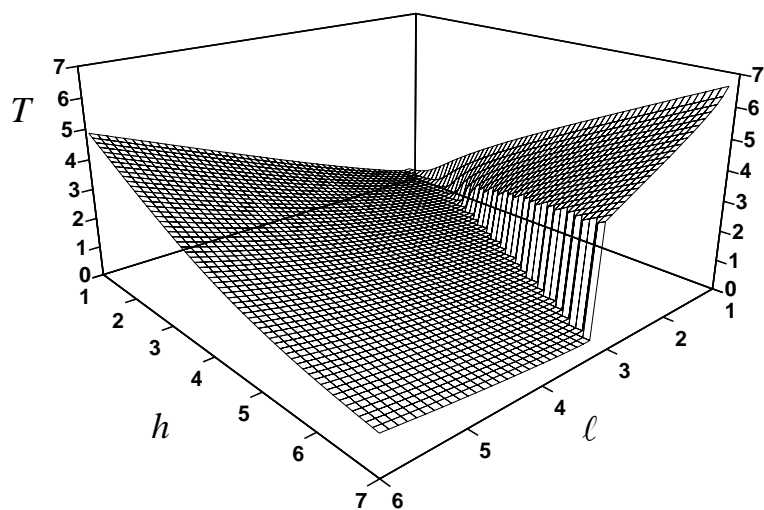


Рис. 20.

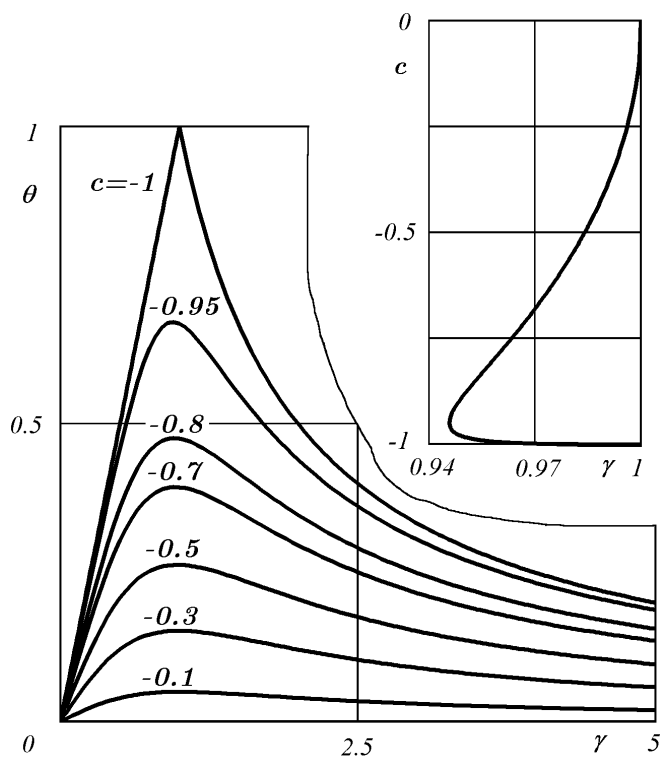


Рис. 21.

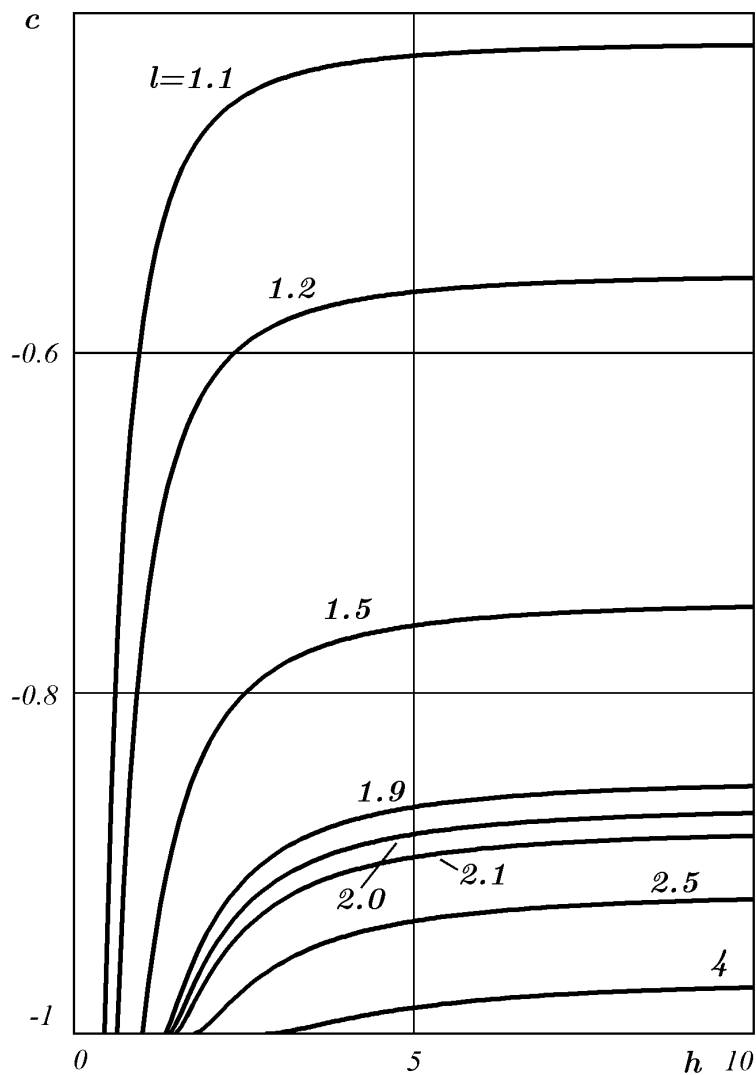


Рис. 22.

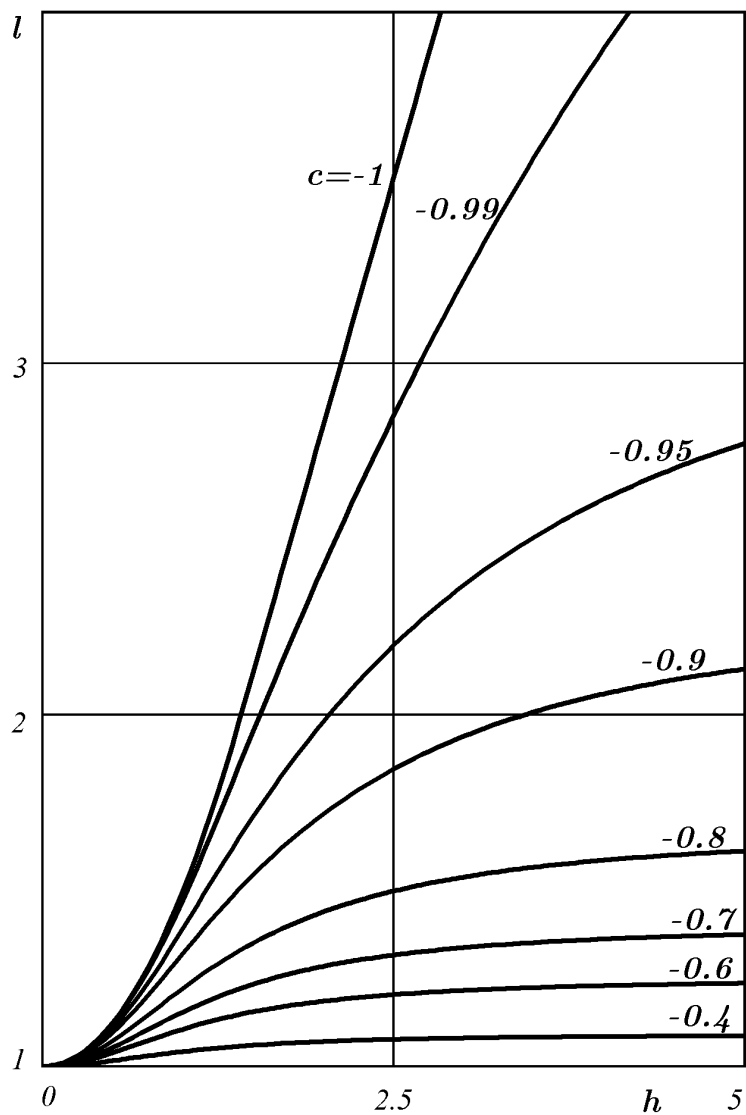


Рис. 23.

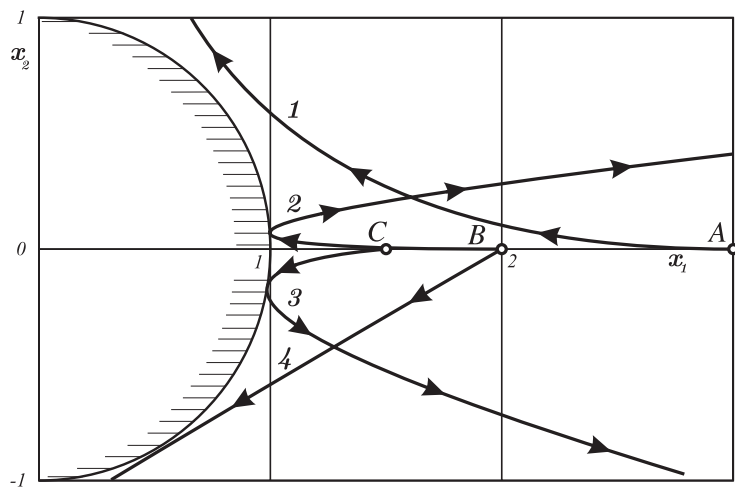


Рис. 24.

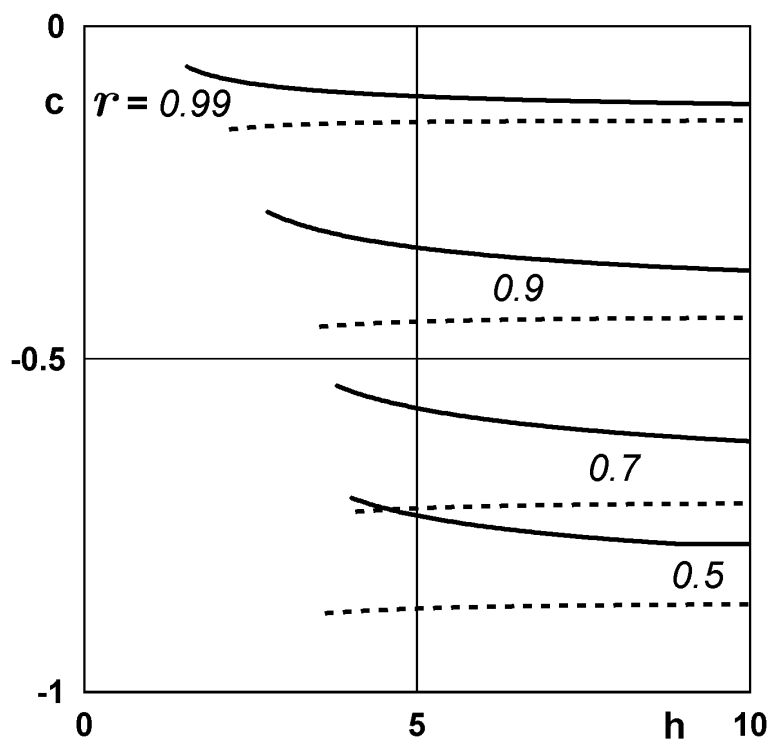


Рис. 25.

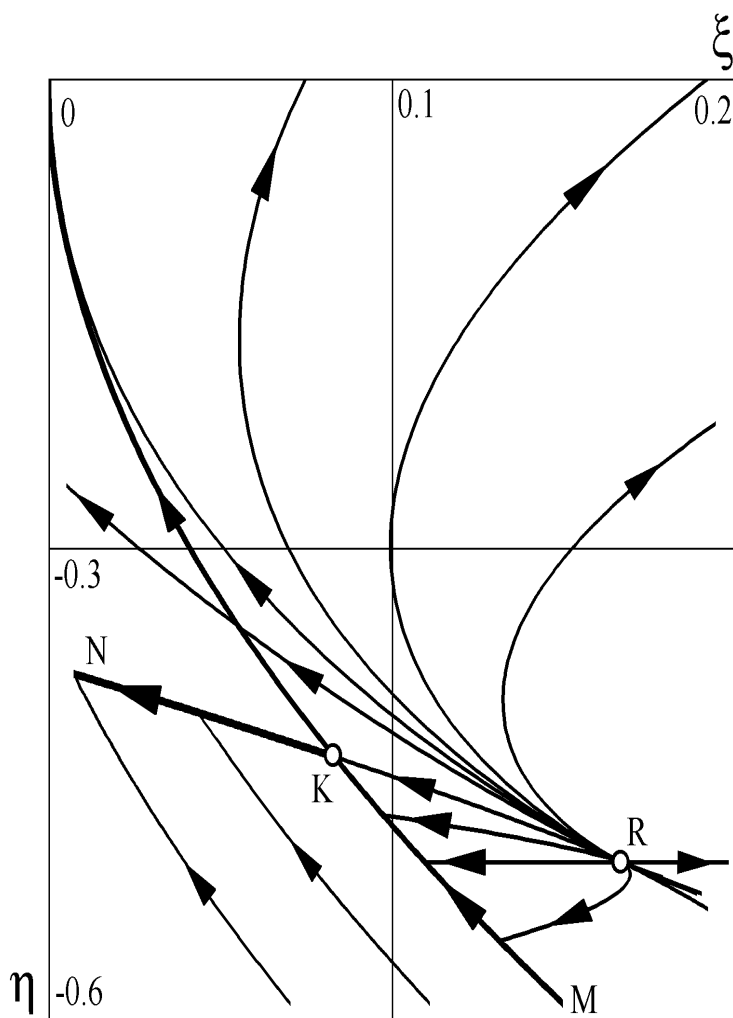


Рис. 26.

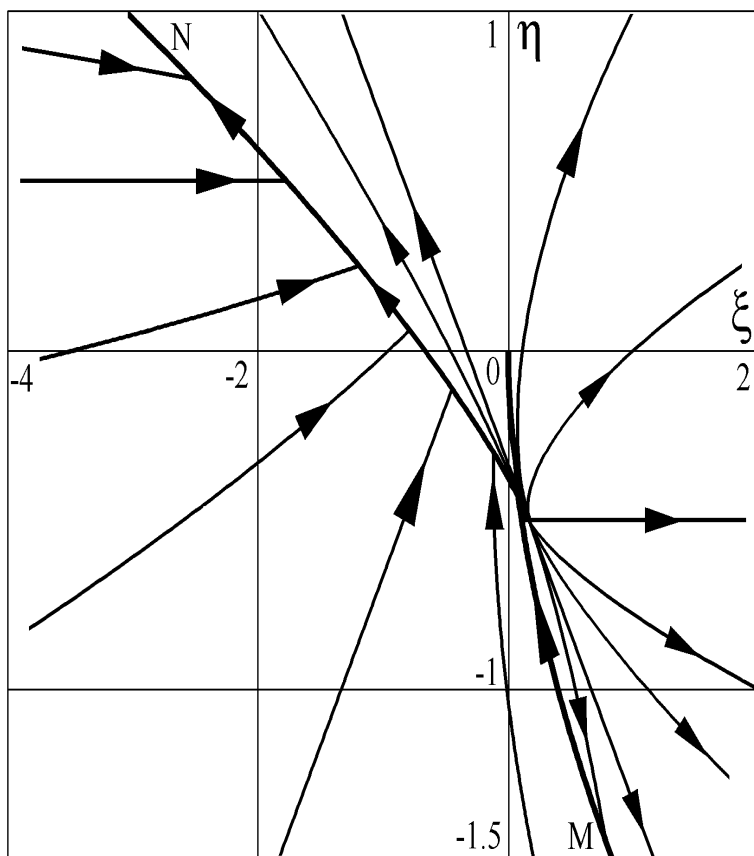


Рис. 27.

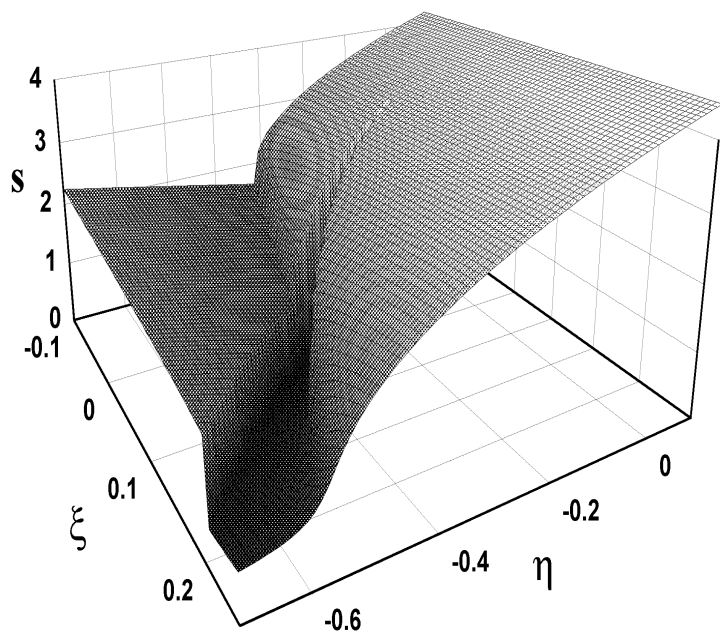


Рис. 29.

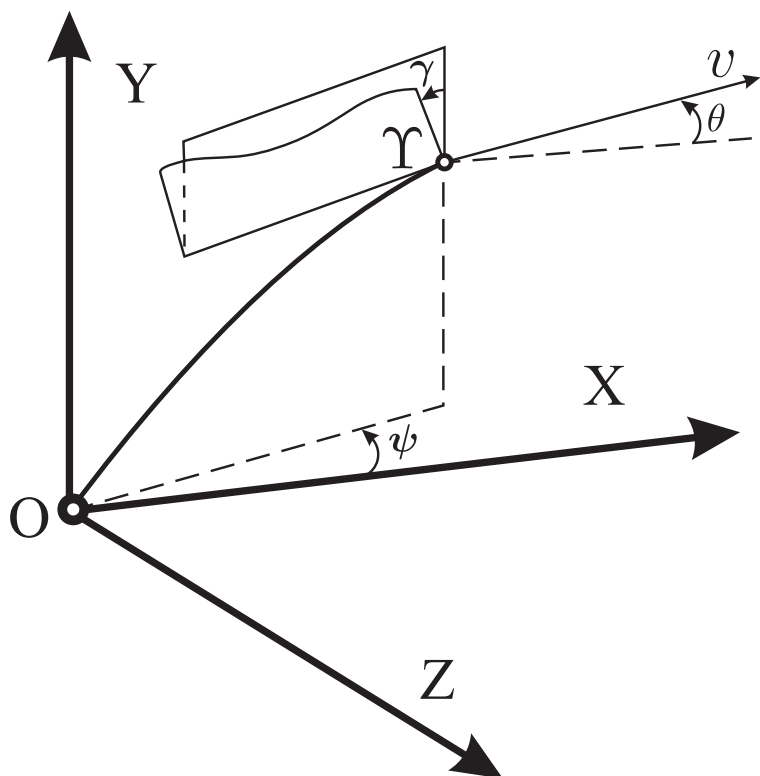


Рис. 30.

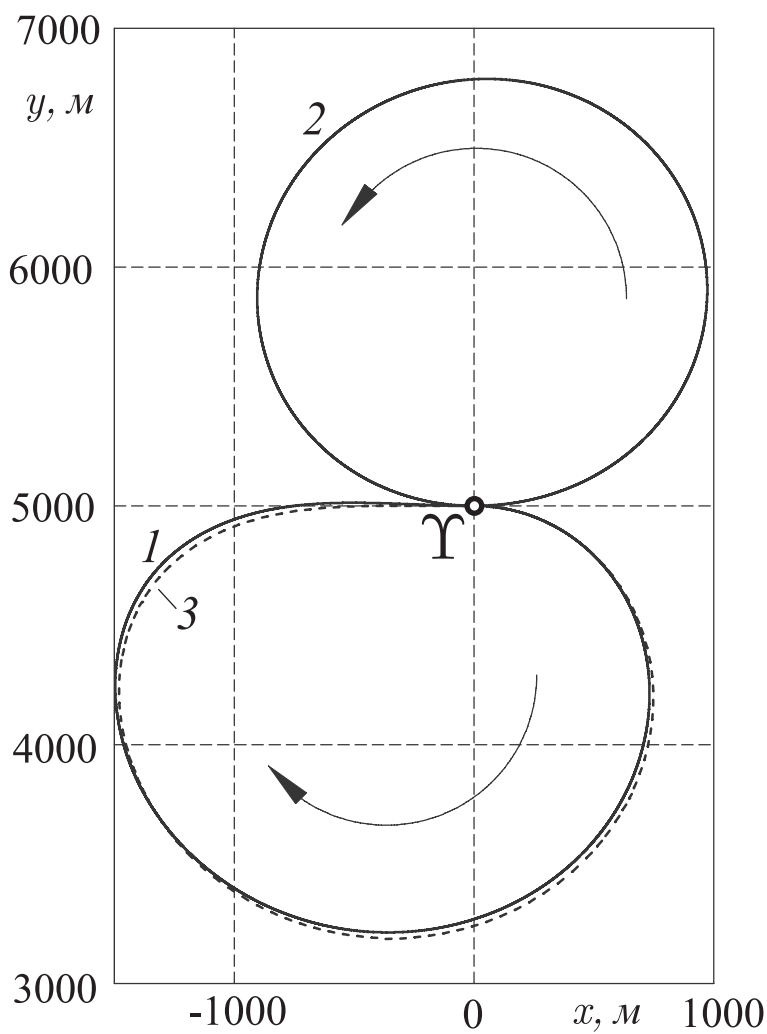


Рис. 31.

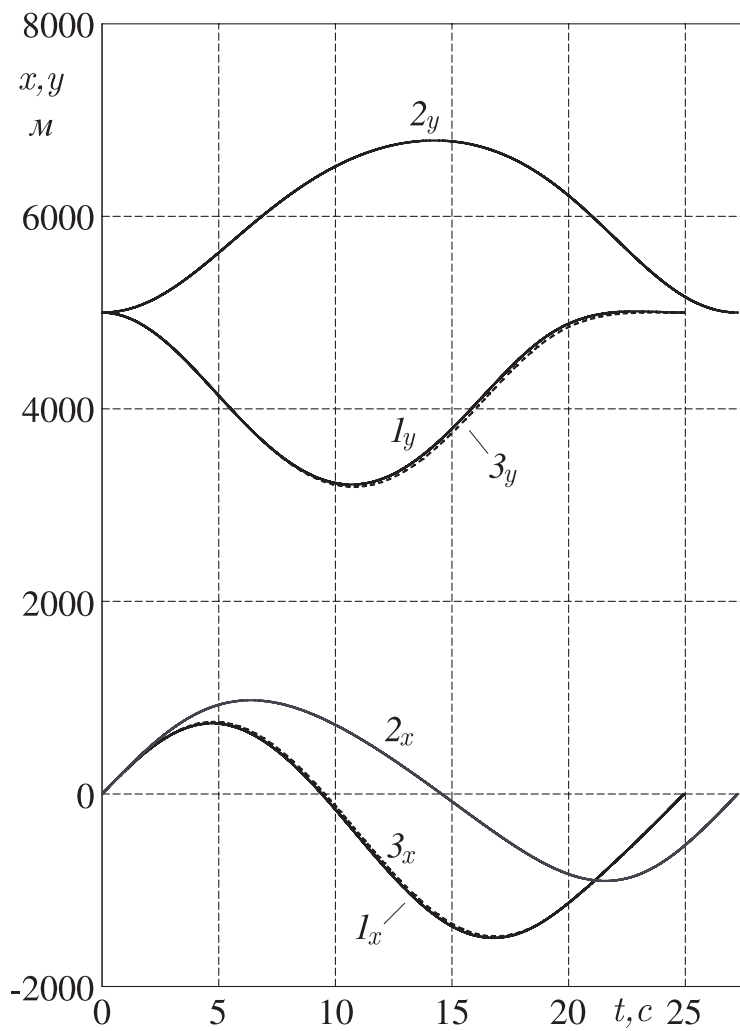


Рис. 32.

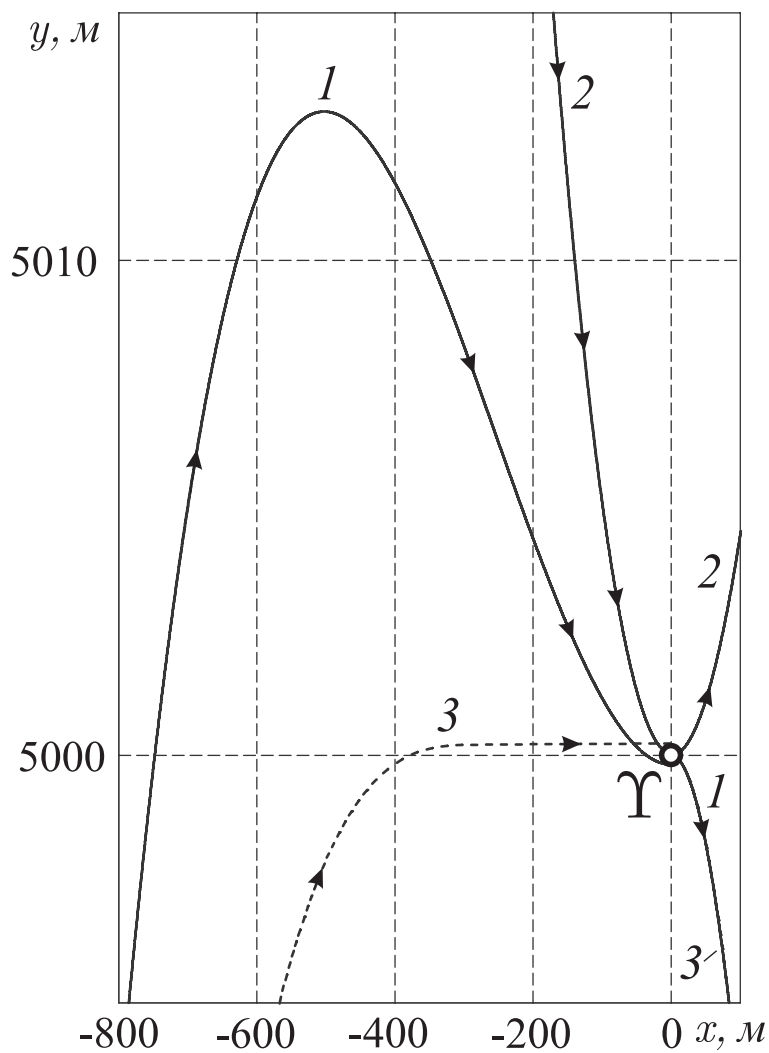


Рис. 33.

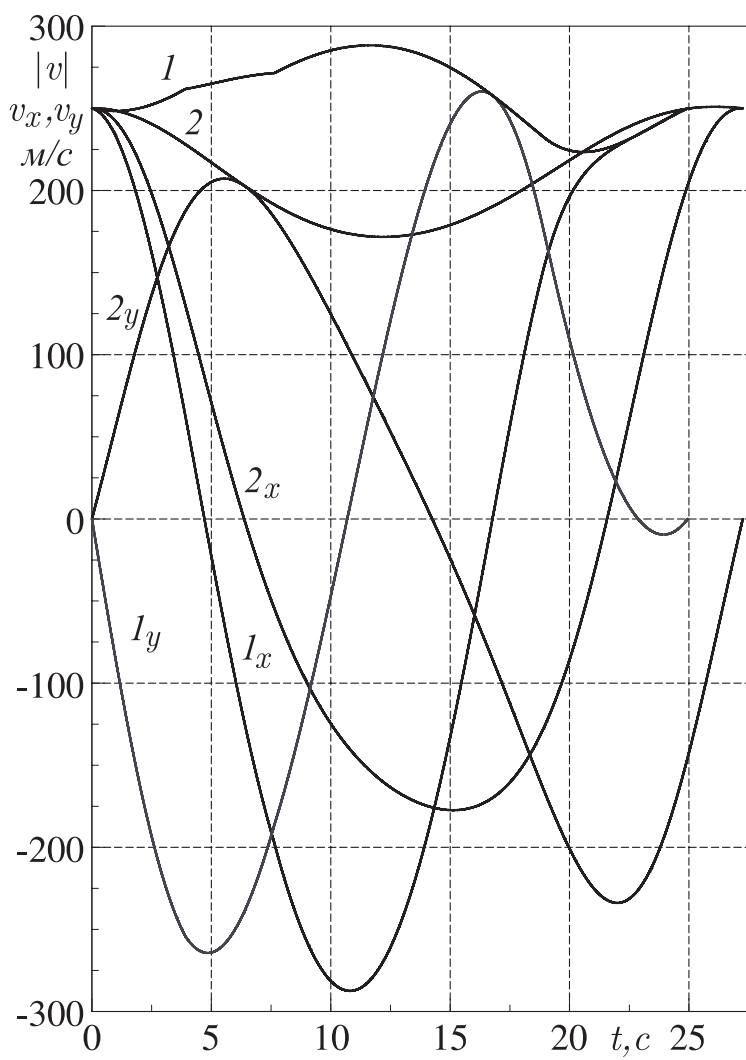


Рис. 34.

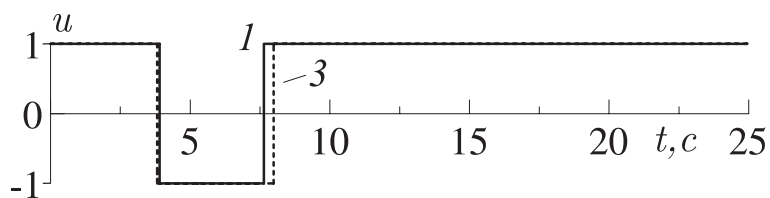


Рис. 35.

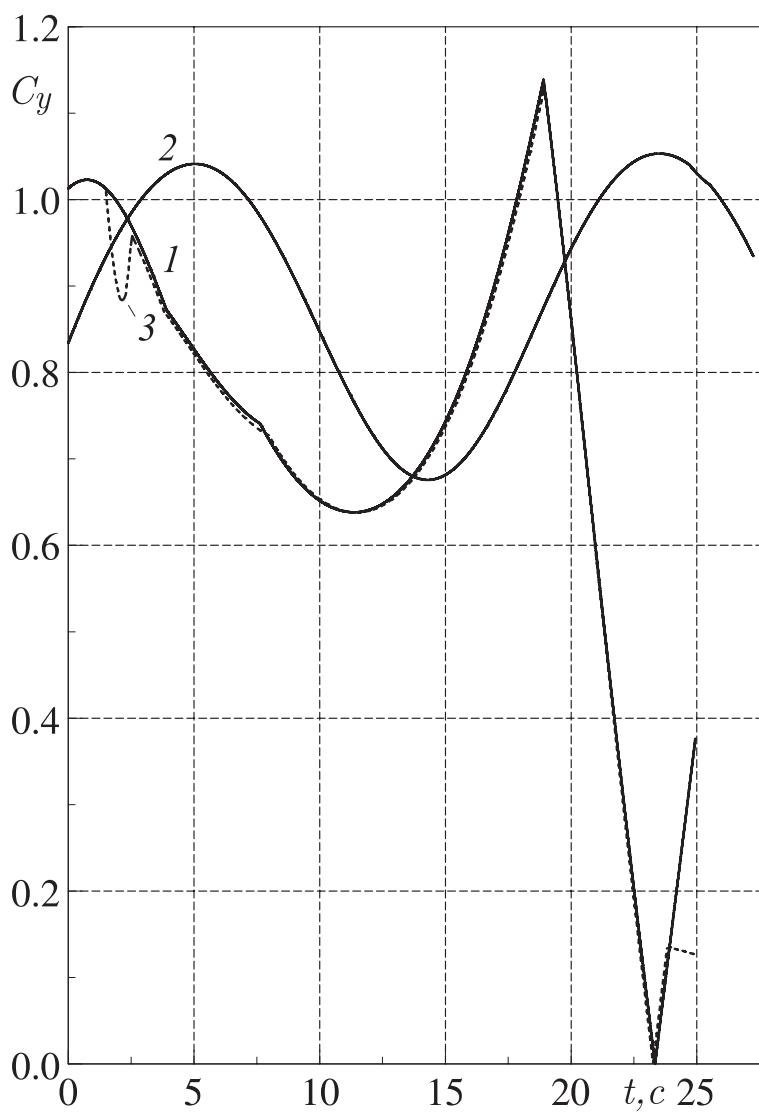


Рис. 36.

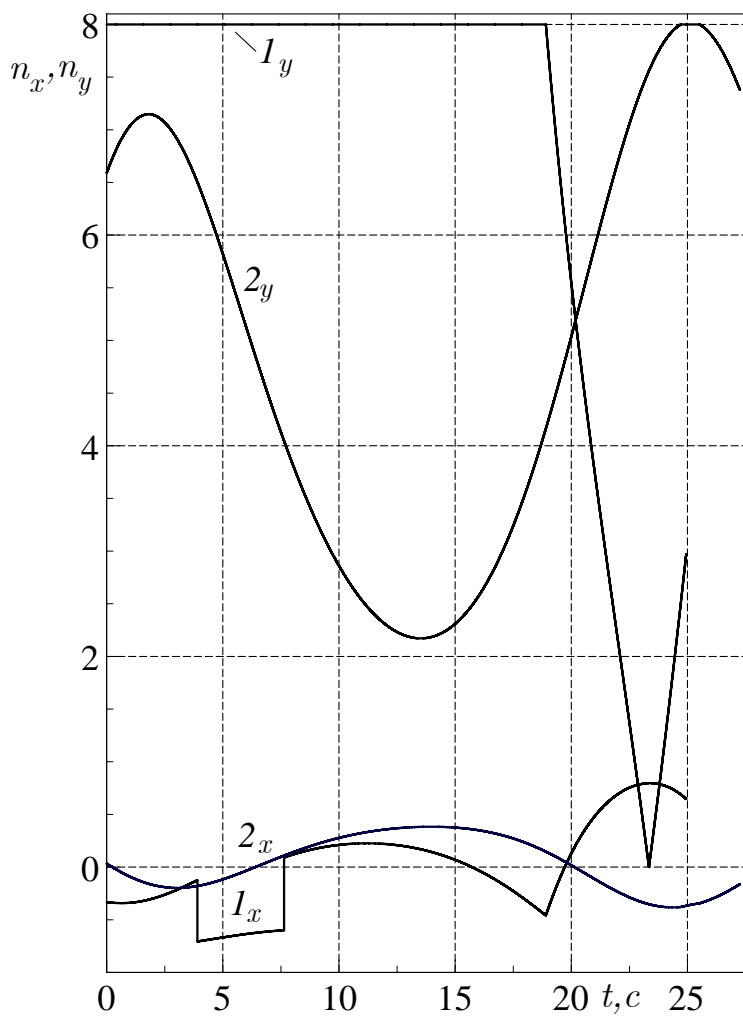


Рис. 37.

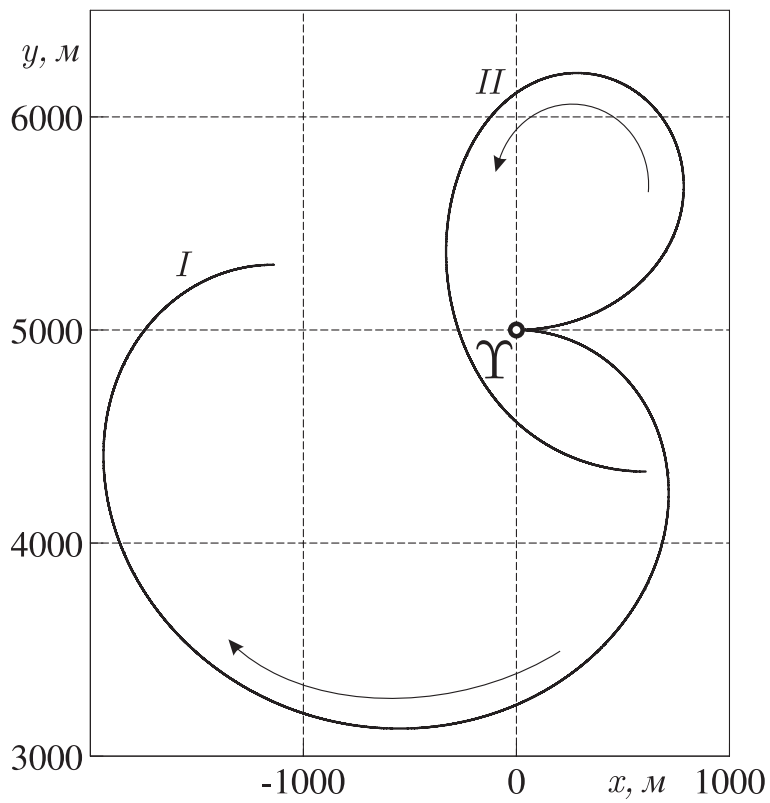


Рис. 38.

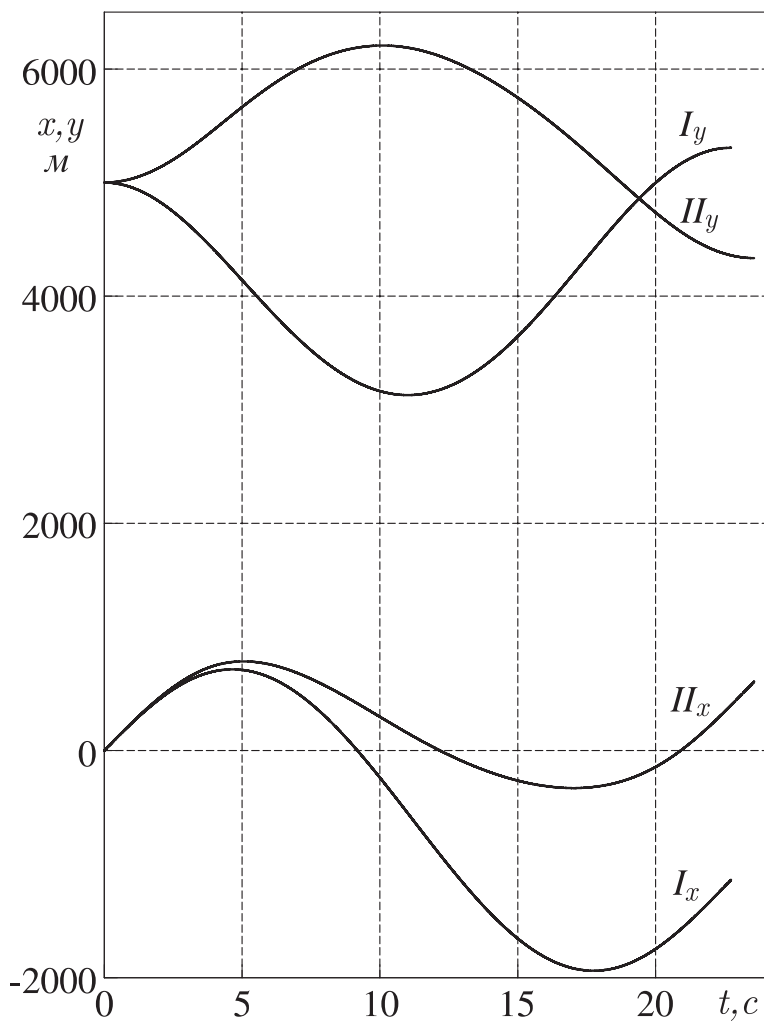


Рис. 39.

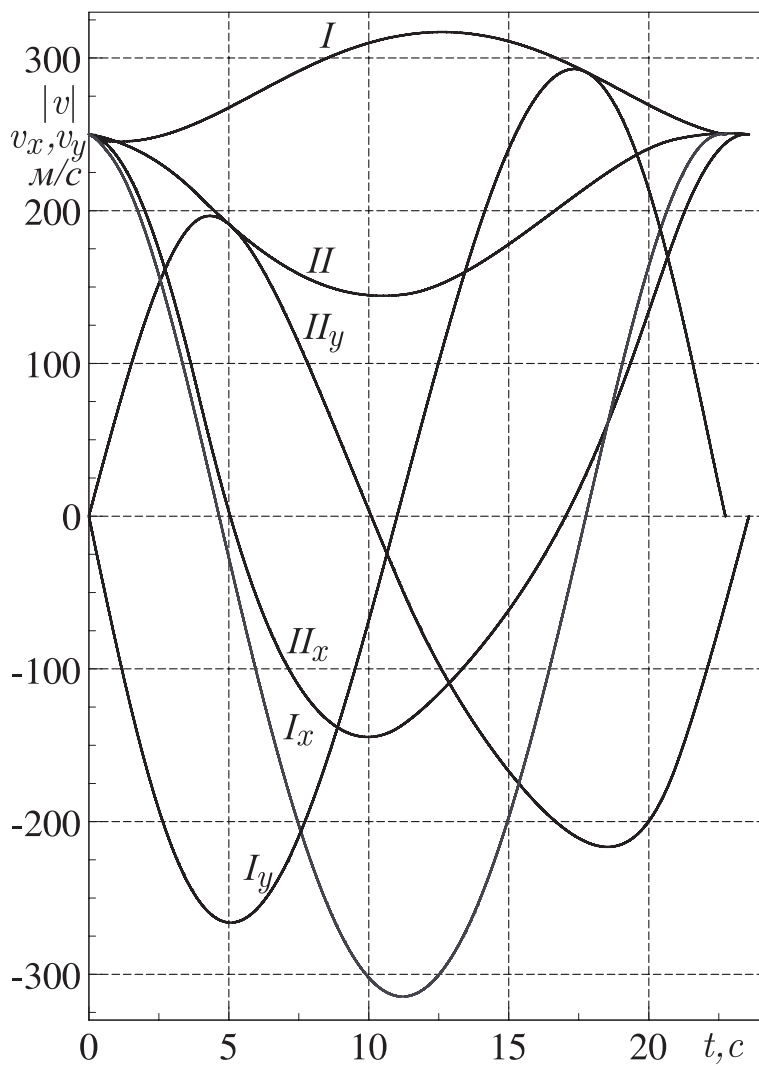


Рис. 40.

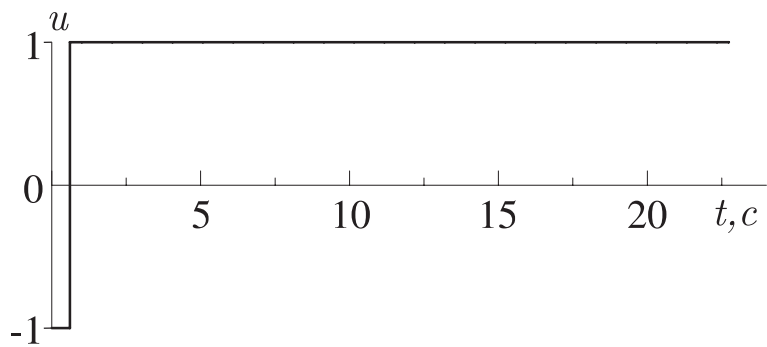


Рис. 41.

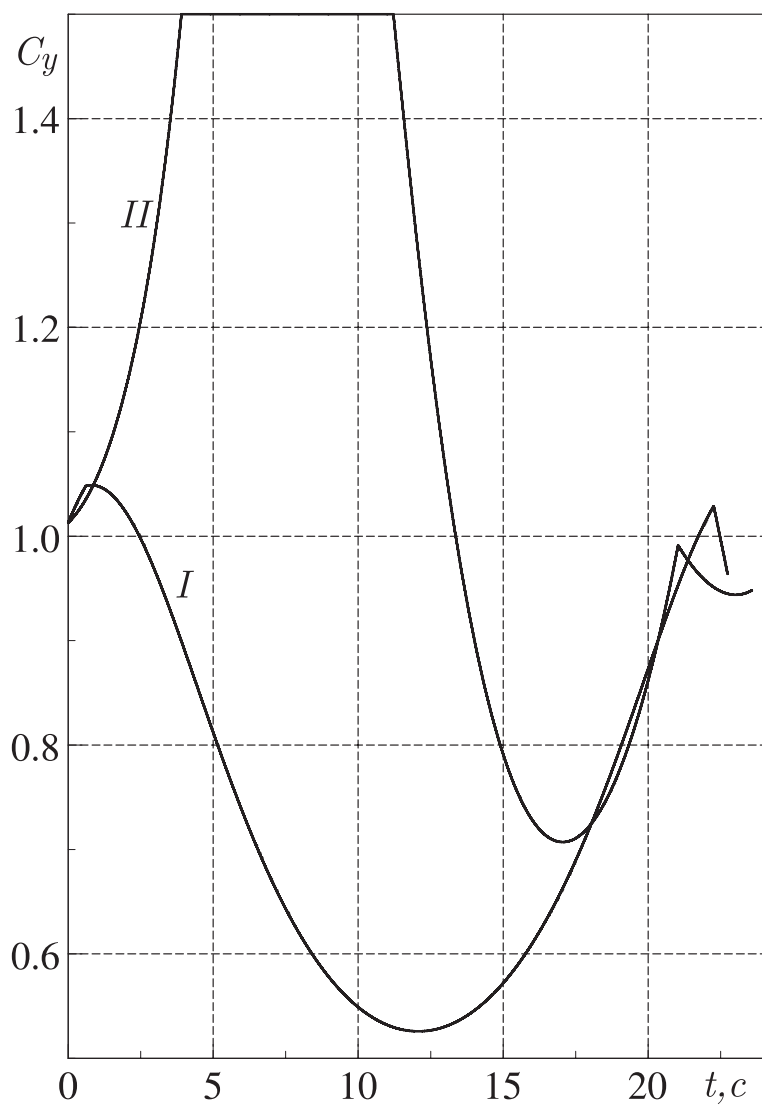


Рис. 42.

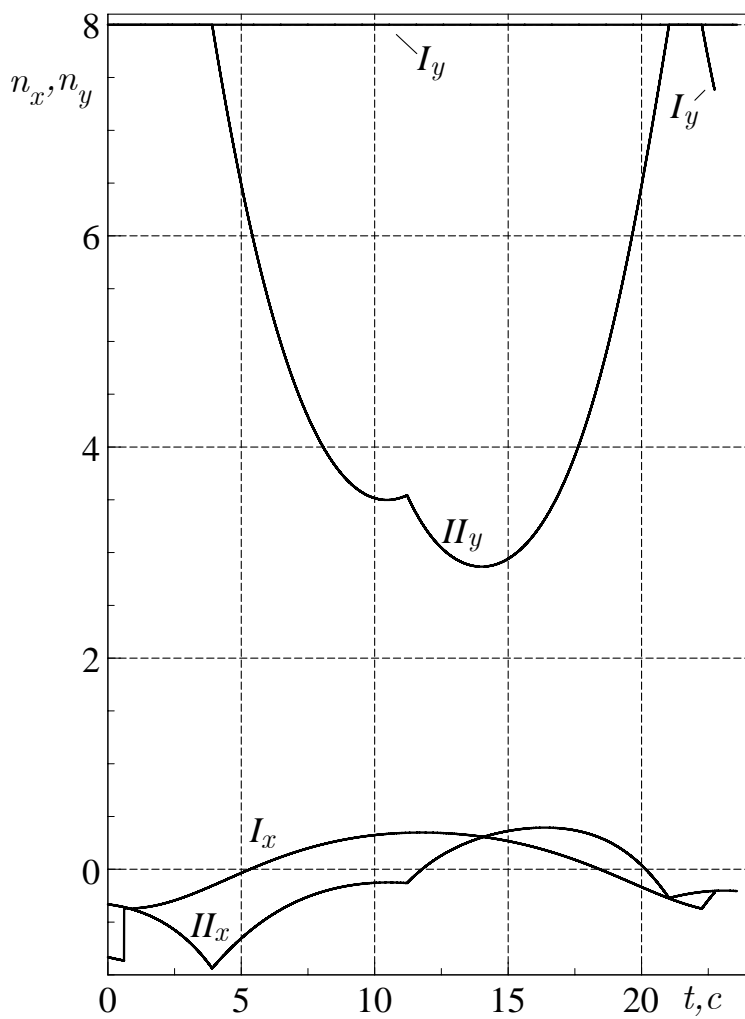


Рис. 43.

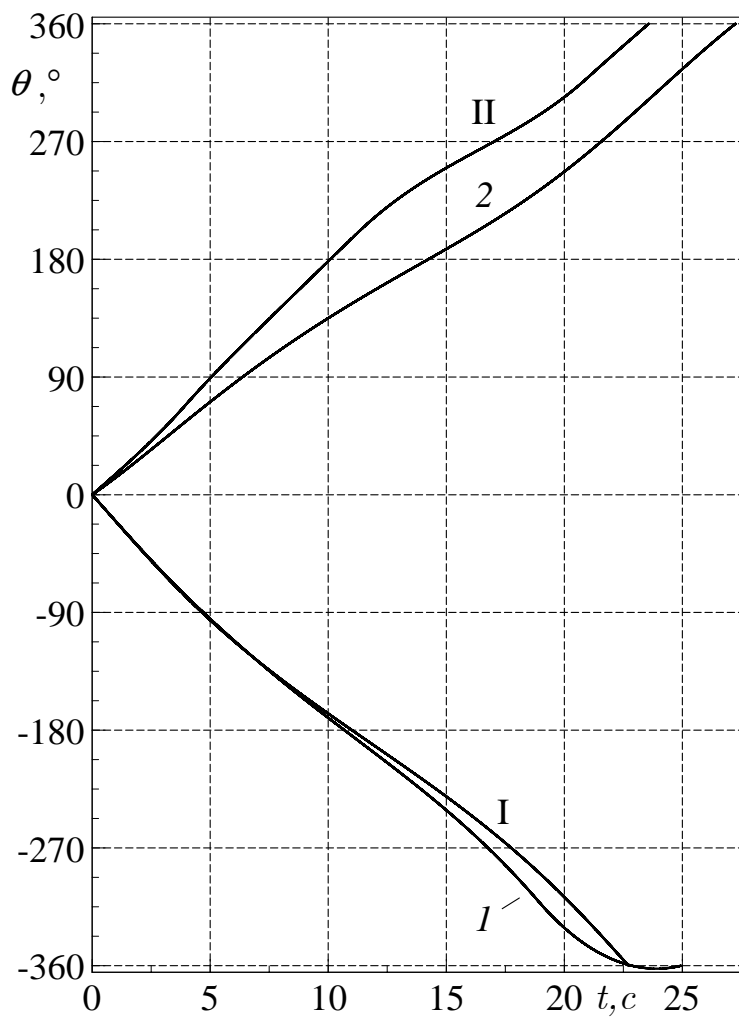


Рис. 44.

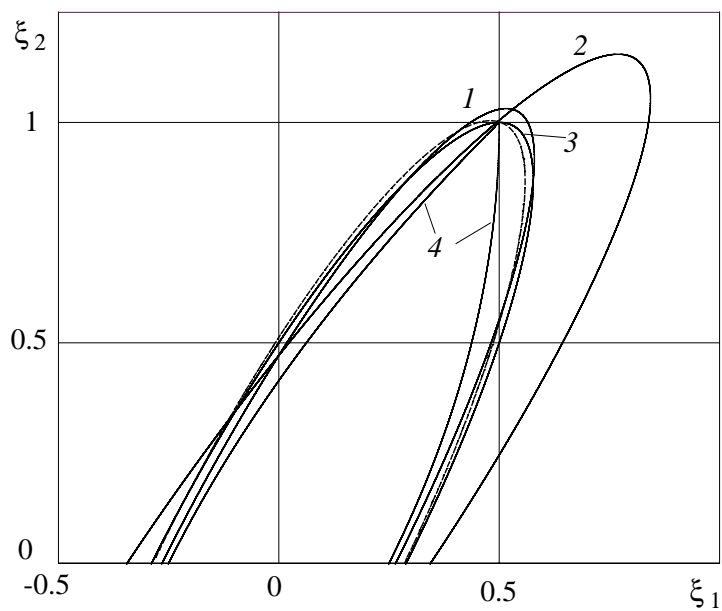


Рис. 45.

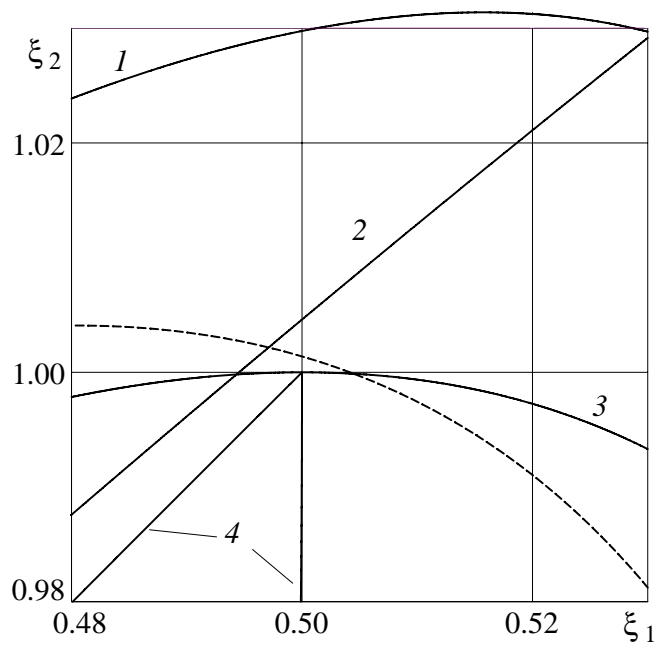


Рис. 46.

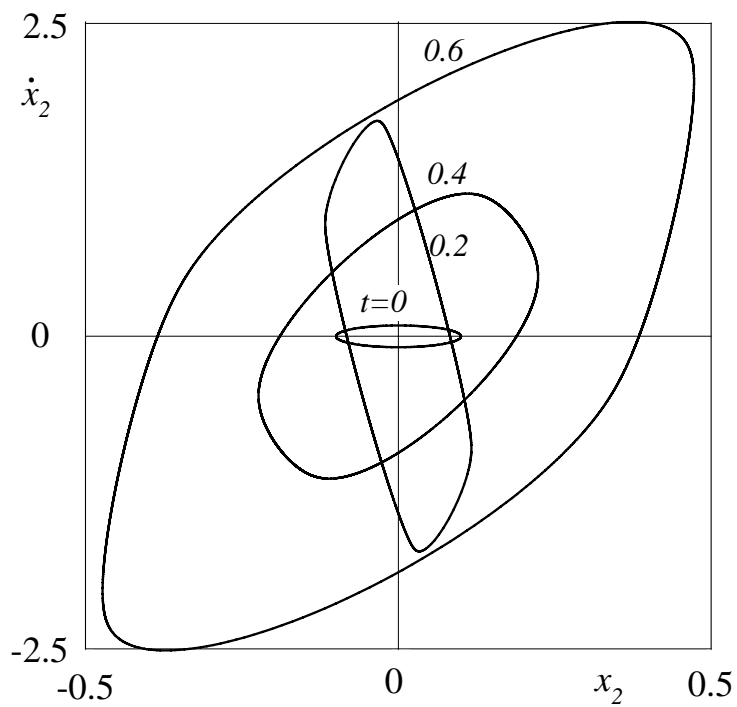


Рис. 47.

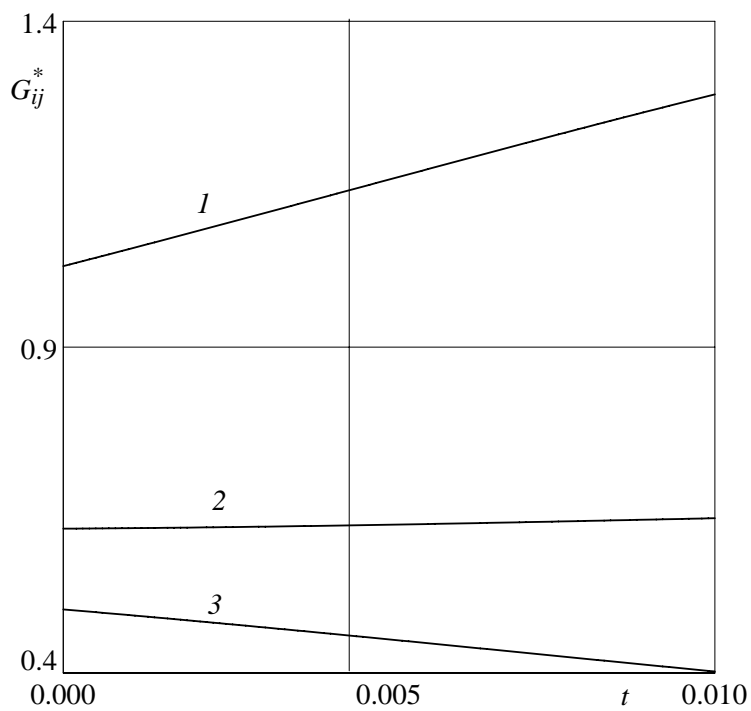


Рис. 48.

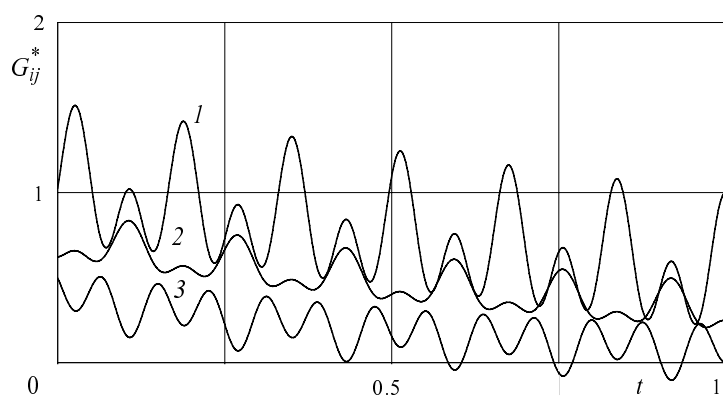


Рис. 49.

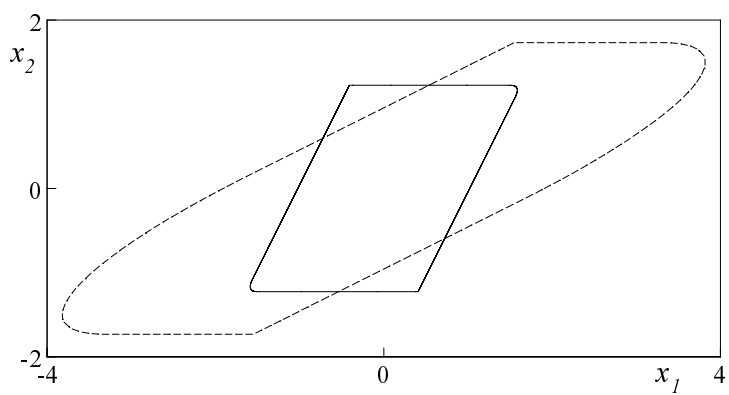


Рис. 50.

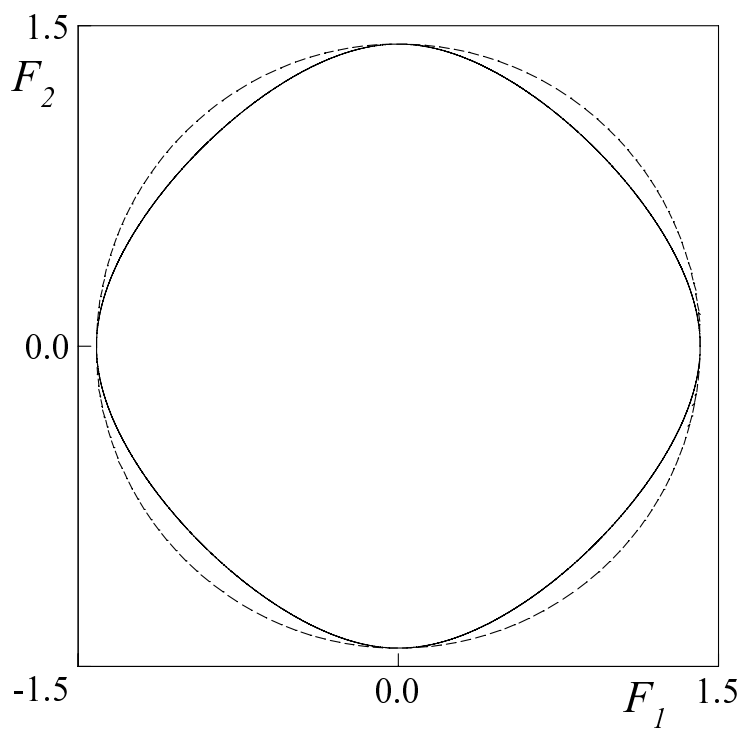


Рис. 51.

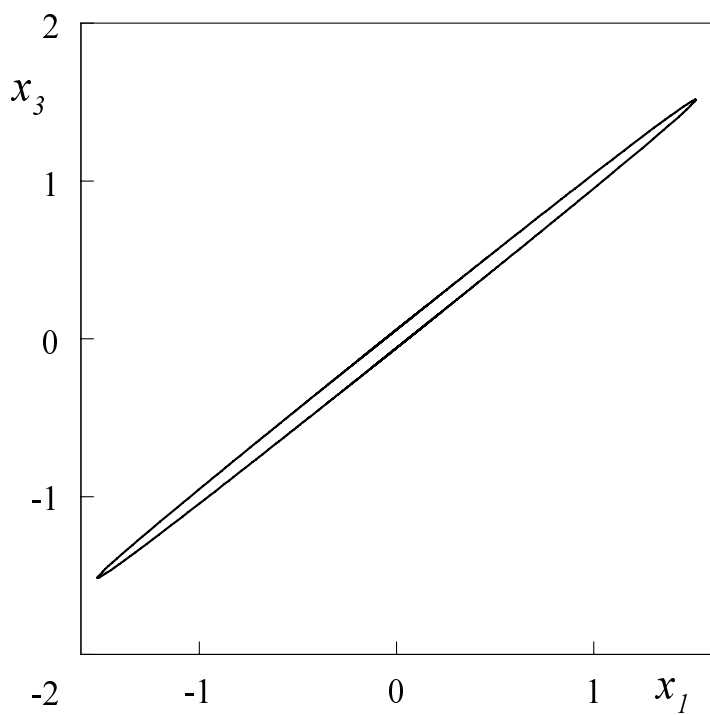


Рис. 52.

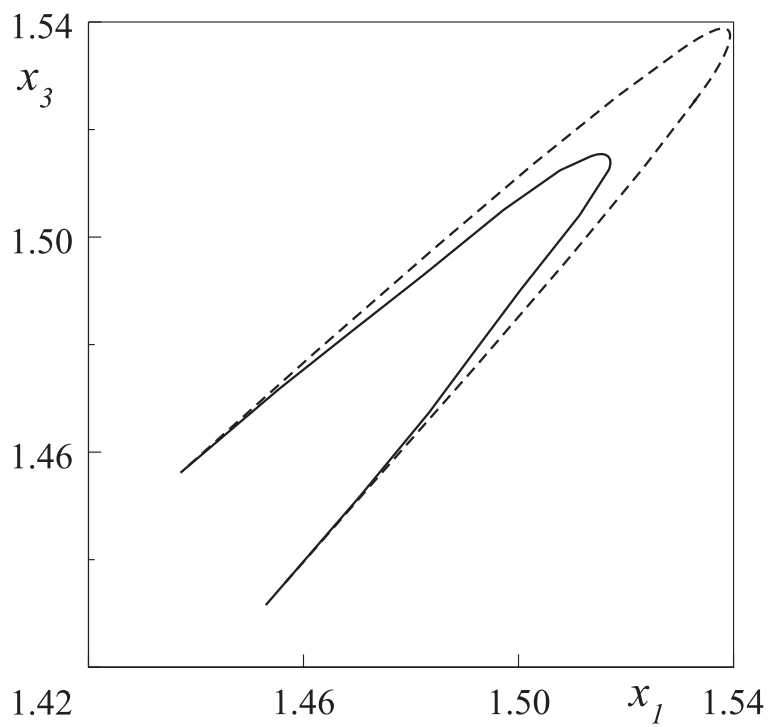


Рис. 53.

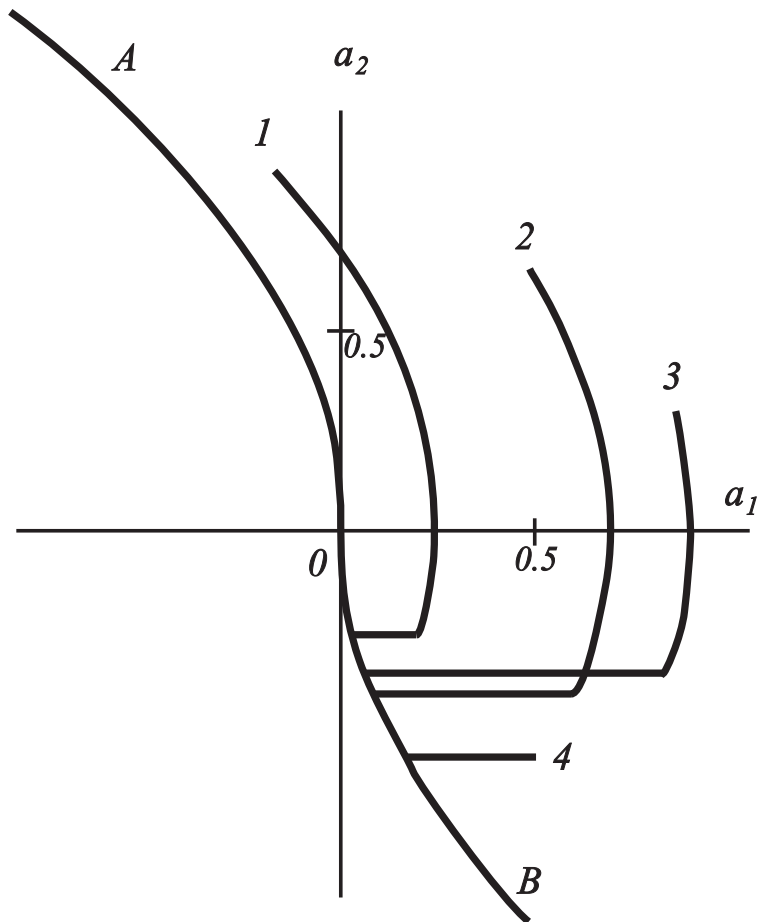


Рис. 54.

№	$a_1(0)$	$a_2(0)$	a_{2*}	t_1	t_2	T	TL	AG	STR
1	-0.184	0.920	-0.262	1.182	1.830	2.092	23%	11%	-1;0;1
2	0.478	0.653	-0.407	1.061	2.350	2.758	36%	18%	-1;0;1
3	0.856	0.300	-0.356	0.656	2.832	3.188	53%	31%	-1;0;1
4	0.506	-0.567	-0.567	0.000	0.608	1.176	46%	51%	0;1

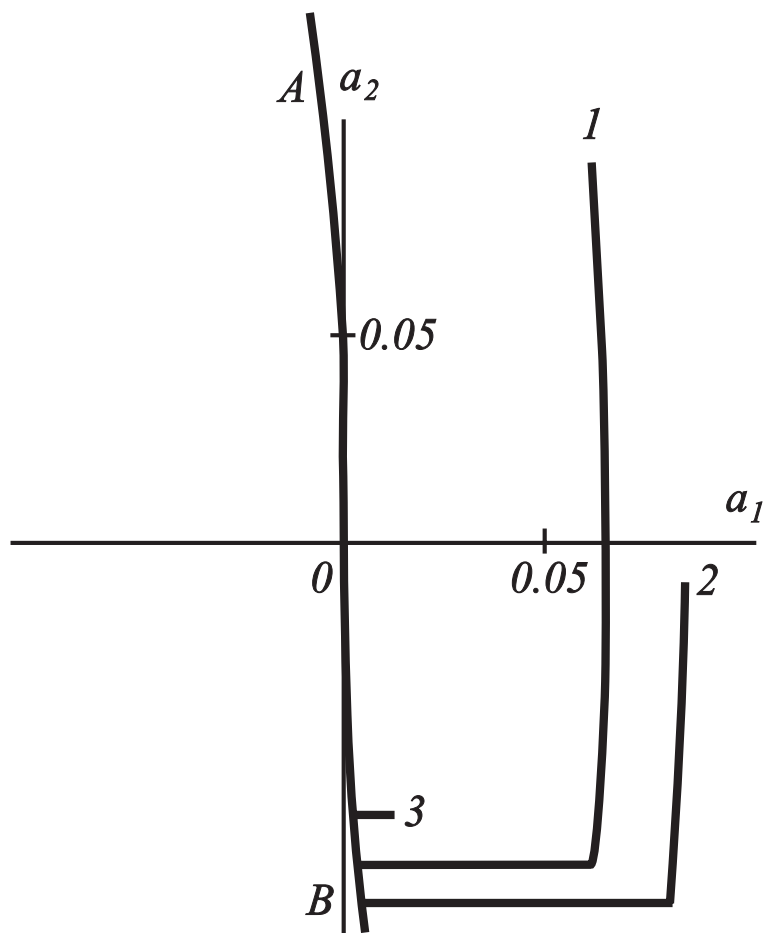


Рис. 55.

№	$a_1(0)$	$a_2(0)$	a_{2*}	t_1	t_2	T	TL	AG	STR
1	0.061	0.095	-0.081	0.176	0.912	0.992	57%	15%	-1;0;1
2	0.086	-0.009	-0.090	0.081	0.943	1.033	70%	19%	-1;0;1
3	0.013	-0.068	-0.068	0.000	0.150	0.873	61%	19%	0;1;0

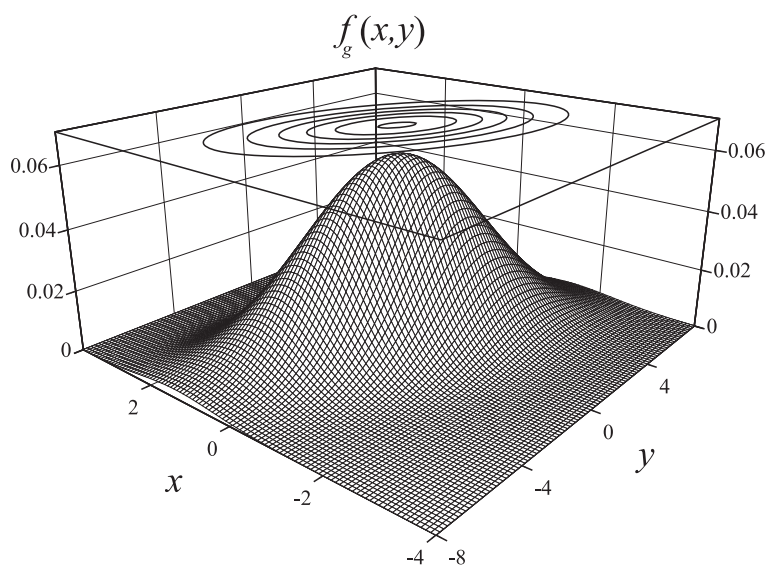


Рис. 56.

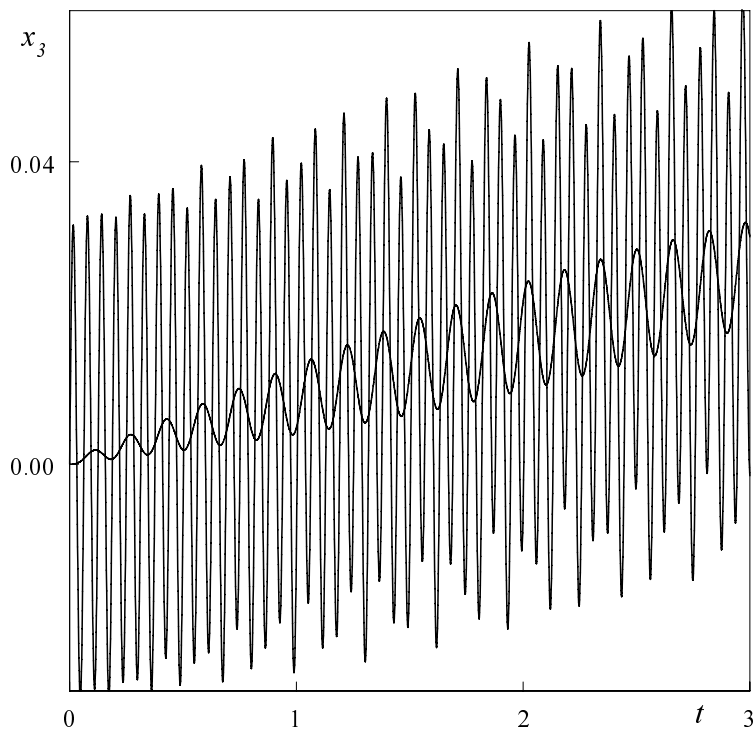


Рис. 57.

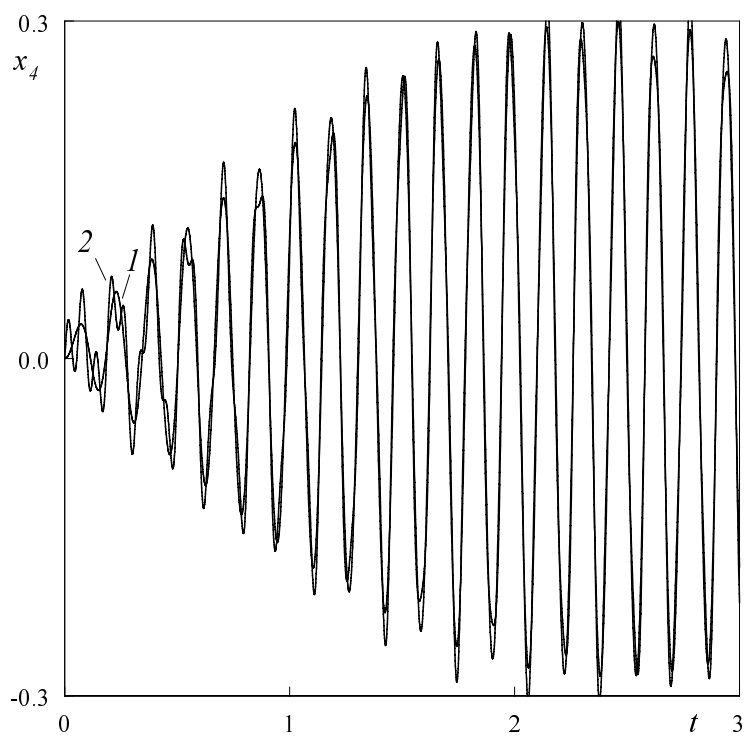


Рис. 58.

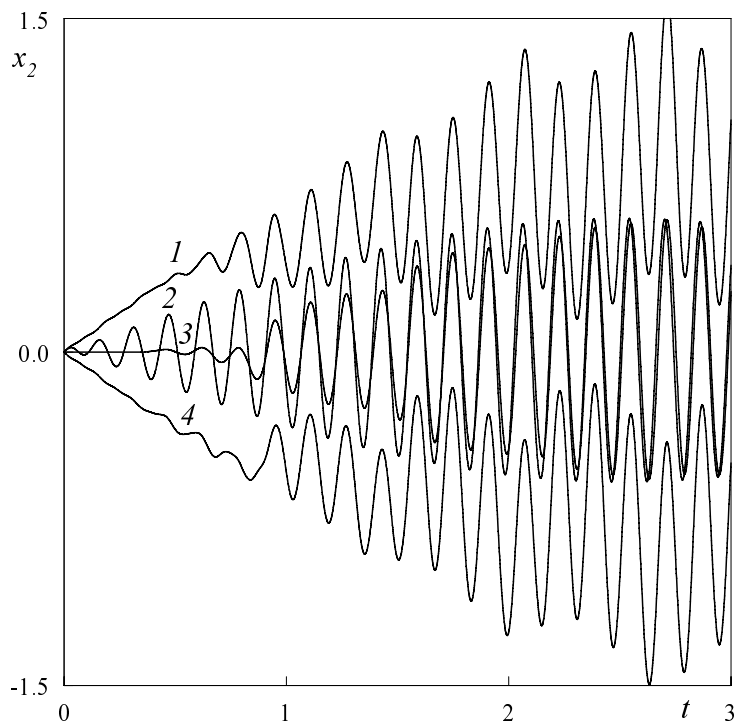


Рис. 59.

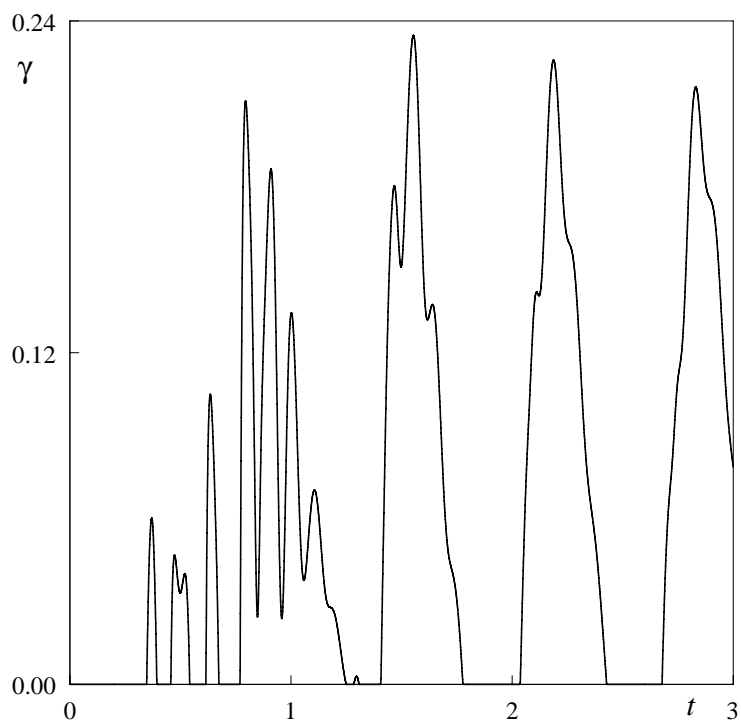


Рис. 60.

Соглашения и обозначения, использованные в диссертации

1°. Все рассматриваемые функции времени таковы, что решения дифференциальных уравнений, в которых эти функции используются, существуют, а все случаи наложения дополнительных ограничений оговорены отдельно.

2°. Зависимость всех введённых величин от времени явно указана при их определении и далее может быть опущена ради уменьшения громоздкости формул, если это не ведёт к недоразумениям.

3°. Символ, над которым стоит точка, означает производную по времени от соответствующей функции. Например, \dot{f} эквивалентно $\frac{df(t)}{dt}$.

4°. За исключением специально оговорённых случаев, в тексте и на рисунках все физические величины представлены в единицах СИ.

5°. Символ $^{\top}$ означает транспонирование.

6°. Посредством (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение векторов, $(\cdot; \cdot)$ — интервал, $[\cdot; \cdot]$ — отрезок. Соответственно, $[\cdot; \cdot)$ и $(\cdot; \cdot]$ — полуинтервалы.

7°. I_k — единичная матрица размерности $k \times k$.