

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э. Баумана**

На правах рукописи

Пузикова Валерия Валентиновна

**РАЗРАБОТКА МОДИФИКАЦИИ
МЕТОДА ПОГРУЖЕННЫХ ГРАНИЦ LS-STAG
ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
В СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧАХ ГИДРОУПРУГОСТИ**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент И.К. Марчевский

Москва — 2016

Оглавление

	Стр.
Список обозначений	5
Введение	7
Глава 1. Метод LS-STAG для моделирования течений вязкой несжимаемой среды	14
1.1. Математическая постановка задачи	14
1.2. Построение дискретных аналогов уравнений Навье — Стокса	16
1.2.1. MAC-сетка для области прямоугольной формы . . .	16
1.2.2. LS-STAG-сетка для области с погруженной границей	17
1.2.3. Законы сохранения для течений вязкой несжимаемой среды	21
1.2.4. Дискретный аналог уравнения неразрывности	22
1.2.5. Сохранение массы в дискретном случае	23
1.2.6. Дискретный аналог уравнения баланса импульса . .	25
1.2.6.1. Кососимметричная дискретизация конвективных потоков	26
1.2.6.2. Дискретизация вязких потоков	30
1.2.7. Интегрирование по времени	35
1.3. Верификация метода LS-STAG	36
1.3.1. Обтекание неподвижных профилей различных форм	37
1.3.1.1. Обтекание кругового профиля	37
1.3.1.2. Обтекание квадратного профиля	38
1.3.1.3. Обтекание эллиптического профиля	38
1.3.2. Обтекание кругового профиля, совершающего вращательные колебания	39
1.3.2.1. Низкочастотные вращательные колебания .	40
1.3.2.2. Высокочастотные вращательные колебания .	42
1.4. Результаты и выводы по главе 1	43

Глава 2. Модификация метода LS-STAG для решения сопряженных задач гидроупругости	44
2.1. Математическая постановка задачи	44
2.2. Учет движения погруженных границ	45
2.3. Интегрирование по времени	47
2.4. Верификация модификации метода LS-STAG	49
2.4.1. Поперечные колебания кругового профиля	50
2.4.2. Продольные колебания кругового профиля	52
2.4.3. Ветровой резонанс кругового профиля	54
2.5. Результаты и выводы по главе 2	57
Глава 3. Модификация метода LS-STAG для расчета течений вязкой несжимаемой среды в рамках различных подходов к моделированию турбулентности	58
3.1. Математическая постановка задачи	58
3.2. Построение дискретных аналогов RANS, LES и DES уравнений	61
3.2.1. Модификация LS-STAG-сетки	61
3.2.2. Учет рейнольдсовых или подсеточных напряжений в дискретном аналоге уравнения баланса импульса . .	64
3.2.3. Интегрирование по времени	65
3.3. Построение дискретных аналогов уравнений из моделей турбулентной вязкости	66
3.3.1. Модель Смагоринского	66
3.3.2. Модель Спаларта — Аллмараса	67
3.3.3. Модели с двумя дифференциальными уравнениями .	72
3.3.3.1. $k - \varepsilon$ модель	72
3.3.3.2. $k - \omega$ модель	76
3.3.3.3. $k - \omega$ SST модель	78
3.4. Верификация модификаций метода LS-STAG	80
3.5. Результаты и выводы по главе 3	83

Глава 4. Программная реализация разработанных модификаций метода LS-STAG	84
4.1. Архитектура программного комплекса «LS-STAG_turb» . .	85
4.1.1. Структуры, реализующие работу с LS-STAG-сеткой	85
4.1.2. Структуры, реализующие работу с матрицами	87
4.1.3. Структуры, реализующие работу решателя систем линейных алгебраических уравнений	89
4.1.4. Структуры, реализующие моделирование турбулентности	92
4.1.5. Структуры, реализующие управление расчетом . . .	95
4.2. Оптимизация и параллельная реализация разработанных алгоритмов в программном комплексе «LS-STAG_turb» . .	97
4.2.1. Решение задачи в расчетной области без подобластей	98
4.2.2. Сравнение эффективности алгоритмов с аналогами из Intel(R) MKL	108
4.2.3. Реализация алгоритма решения систем линейных алгебраических уравнений методом FGMRES	114
4.3. Верификация программного комплекса «LS-STAG_turb» .	117
4.3.1. Обтекание тандема круговых профилей	118
4.3.2. Обтекание двух неподвижных круговых профилей, расположенных рядом поперек потока	121
4.3.3. Обтекание двух вращающихся круговых профилей, расположенных рядом поперек потока	125
4.3.4. Обтекание системы из двух круговых профилей с двумя степенями свободы	127
4.4. Результаты и выводы по главе 4	133
Основные результаты и выводы	134
Литература	135

Список обозначений

- C_{DES} — константа Смагоринского при моделировании турбулентности в рамках подхода DES;
- C_{LES} — константа Смагоринского при моделировании турбулентности в рамках подхода LES;
- K — граница тела;
- k — кинетическая энергия турбулентности;
- l_{turb} — линейный масштаб турбулентности;
- \mathcal{M}^x — площадь части ячейки $\Omega_{i,j}^u$, занятой жидкостью;
- \mathcal{M}^{xy} — площадь части ячейки $\Omega_{i,j}^{xy}$, занятой жидкостью;
- \mathcal{M}^y — площадь части ячейки $\Omega_{i,j}^v$, занятой жидкостью;
- $V_{i,j}$ — площадь части ячейки $V_{i,j}$, занятой жидкостью;
- y_j — ордината j -й точки основной сетки;
- Γ — внешняя граница расчетной области, состоящая из $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$;
- Γ_1 — нижняя граница расчетной области;
- Γ_2 — западная граница расчетной области (вход потока);
- Γ_3 — верхняя граница расчетной области;
- Γ_4 — восточная граница расчетной области (выход потока);
- $\Gamma_{i,j}$ — внешняя граница усеченной ячейки $\Omega_{i,j}$, состоящая из $\Gamma_{i,j}^s, \Gamma_{i,j}^e, \Gamma_{i,j}^n, \Gamma_{i,j}^w, \Gamma_{i,j}^{ib}$;
- S_e — безразмерная частота собственных колебаний;
- Sh — безразмерная частота схода вихрей;
- Δ — характерный размер фильтра для подсеточных моделей;

$\theta_{i,j}^u$ — доля восточной стороны ячейки $\Omega_{i,j}$, занятая жидкостью;

$\theta_{i,j}^v$ — доля северной стороны ячейки $\Omega_{i,j}$, занятая жидкостью;

$\tilde{\nu}$ — модфицированная турбулентность вязкость;

ν^t — турбулентная вязкость;

$\hat{\tau}^t$ — тензор рейнольдсовых или подсеточных напряжений;

Ω — расчетная область;

$\Omega_{i,j}$ — ячейка основной сетки $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$, на которой строится дискретный аналог уравнения неразрывности;

$\Omega_{i,j}^u$ — ячейка х-сетки $(x_i^c, x_{i+1}^c) \times (y_{j-1}, y_j)$, на которой строится дискретный аналог уравнения баланса импульса в проекции на ось Ox ;

$\Omega_{i,j}^v$ — ячейка у-сетки $(x_{i-1}, x_i) \times (y_j^c, y_{j+1}^c)$, на которой строится дискретный аналог уравнения уравнения баланса импульса в проекции на ось Ox ;

$\Omega_{i,j}^{xy}$ — ячейка ху-сетки $(x_i^c, x_{i+1}^c) \times ((y_j^c, y_{j+1}^c))$, на которой строится дискретные аналоги уравнений из используемой модели турбулентности;

ω — удельная скорость диссипации кинетической энергии турбулентности.

Введение

Актуальность темы исследования. Сопряженные задачи гидроупругости являются достаточно сложными для численного решения, поскольку требуется учитывать взаимное влияние течения жидкости и движения погруженного в нее тела. При этом погруженное тело и жидкость должны рассматриваться как единая система. Для случая достаточно тяжелого тела задачу можно решать «по шагам», моделируя поочередно обтекание движущегося с заданными параметрами тела и рассчитывая динамику тела при известных гидродинамических нагрузках. Такие задачи возникают при моделировании явлений авторотации и автоколебаний, в частности, ветрового резонанса профилей в потоке.

В последние годы в вычислительной гидродинамике для моделирования течений в областях сложной или меняющейся во времени формы все более популярными становятся методы погруженных границ [75, 82, 101]. В этих методах сетка не связана с погруженной границей и остается неподвижной на протяжении всего расчета. Отметим, что погруженной называется граница раздела среды и твердого тела, в общем случае криволинейная и не проходящая через узлы прямоугольной сетки.

Наиболее важным вопросом при использовании методов погруженных границ является работа с усеченными ячейками, т.е. ячейками неправильной формы, которые образуются при пересечении прямоугольных ячеек с границей области течения, поскольку именно в этих ячейках задаются граничные условия, а решение вблизи границы обтекаемого тела может иметь большие градиенты. В зависимости от способа работы с усеченными ячейками методы могут быть разделены на два основных класса.

В классических методах погруженных границ [65], составляющих первый класс, используют конечно-объемные или конечно-разностные методы построения разностных аналогов исходных дифференциальных уравнений на структурированных сетках с прямоугольными ячейками

вне нерегулярных границ, а на усеченных ячейках дискретизация уравнений не производится. Вместо этого используются специальные методы интерполяции, которые позволяют получить на этих ячейках значения величин, описывающих течение. Таким образом, выполнения балансовых соотношений вблизи нерегулярной границы добиться не удастся. Наиболее серьезным проявлением этого является возникновение бездивергентных паразитных скоростей или нефизичных осцилляций давления вблизи погруженной границы [85, 105]. Для повышения точности и устойчивости методов данного класса предлагаются различные улучшенные схемы интерполяции [46, 85, 105, 111].

Второй класс методов погруженных границ, также называемых методами усеченных ячеек или просто методами прямоугольных сеток [55, 61, 86, 100, 135, 136, 147], предполагает фактическую дискретизацию уравнений движения в усеченных ячейках. Она обычно осуществляется при помощи специального подхода, больше похожего не на методы работы с прямоугольными сетками, а на методы, применяемые при работе с криволинейными или неструктурированными сетками. Наиболее известными являются методы объединения ячеек [55, 147], в которых усеченные ячейки объединяются с соседними прямоугольными ячейками и образуют новую многоугольную ячейку с более чем четырьмя соседями. Таким образом, шаблон дискретизации на такой вновь созданной ячейке теряет пятиточечную структуру (в двумерном случае), характерную для методов прямоугольных сеток.

К наиболее эффективным методам погруженных границ относят метод LS-STAG (Level Set STAGgered). Метод предложен в статье [54] как развитие MAC-метода (метода маркеров и ячеек [39, 71]) и обладает, как показывают численные эксперименты, вторым порядком точности. К настоящему времени метод получил определенное распространение, ему была посвящена отдельная секция специализированного семинара по методам погруженных границ, проводимого Euromech/Ercoftac (г. Лей-

ден, Нидерланды, 2013 г.). В основу построения LS-STAG-дискретизации положены численные аналоги законов сохранения массы, импульса и кинетической энергии, на усеченных ячейках корректно учитываются граничные условия, что позволяет получать физически правдоподобное численное решение [45, 104, 141].

Для представления погруженной границы в методе LS-STAG используются знакопеременные функции уровня [107, 108, 109, 132]. Использование функций уровня позволяет легко вычислять все необходимые геометрические характеристики ячеек сетки. При таком подходе затраты машинного времени на обработку ячеек сложной формы уменьшаются. Это имеет первостепенное значение для приложений, которые включают дорогостоящее с точки зрения затрат вычислительных ресурсов моделирование с помощью таких подходов как моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) и прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS) [6].

LS-STAG-дискретизация производится по одним и тем же формулам как в прямоугольных ячейках, так и в усеченных. Это позволяет не разделять жидкие и твердые ячейки при составлении систем линейных алгебраических уравнений. Благодаря этому метод LS-STAG сохраняет присущее ему изящество, когда задача усложняется за счет дополнительных физических процессов, например в случае движущихся границ или в случае расчета течений с большим числом погруженных тел.

LS-STAG-дискретизация сохраняет пятиточечную структуру шаблона MAC-метода. Это позволяет использовать эффективные методы предобуславливания [122, 131, 138, 139] для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными [24] матрицами без построения специальных модификаций для учета погруженных границ. В разработанном программном комплексе используется метод BiCGStab [13] с ILU-предобуславливанием [1] для решения разностного аналога уравнения Гельмгольца и многосеточным предобуславливанием [17, 22, 58,

67, 112, 140, 143] для решения разностного аналога уравнения Пуассона, который позволяет решать системы с матрицами достаточно произвольного вида [19, 31].

Тем не менее, как и все сеточные методы, метод LS-STAG требует сильного измельчения шагов по времени и по пространству при расчете течений, характеризующихся высоким числом Рейнольдса, что приводит к существенному росту вычислительных затрат. Традиционный метод решения данной проблемы — использование моделей турбулентности в рамках различных подходов (RANS, LES, DES и т.д.) [6, 8, 9, 16, 34, 41]. Такие модификации метода LS-STAG и соответствующий программный комплекс разработаны в рамках данной работы. Реализация моделей турбулентности предполагает расчет касательных турбулентных напряжений, что потребовало введения дополнительной сетки.

Следует отметить, что к настоящему времени метод LS-STAG не реализован в «стандартных» пакетах вычислительной гидродинамики; методы погруженных границ в целом реализованы весьма ограниченно. В то же время известные результаты решения различных задач показывают высокую эффективность метода: при использовании сравнительно грубых сеток методом LS-STAG удается качественно и количественно верно моделировать достаточно сложные и «тонкие» гидродинамические эффекты (эффект стабилизации вихревого следа за круговым профилем, совершающим высокочастотные вращательные колебания и т.д.). Таким образом, *эффективная программная реализация метода LS-STAG и его модификаций для решения сопряженных задач гидроупругости, предполагающая использование возможностей современной вычислительной техники, является актуальной задачей, имеющей теоретическое и практическое значение.*

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является разработка математических моделей, вычислительных алгоритмов и программная реализация метода LS-STAG и его модификаций для числен-

ного решения сопряженных задач гидроупругости на различных вычислительных комплексах с общей памятью.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач.

1. Программная реализация метода LS-STAG с применением эффективных численных методов решения линейных систем, возникающих при дискретизации уравнений гидродинамики.
2. Разработка модификации метода LS-STAG для расчета течений с подвижными погруженными границами и ее программная реализация.
3. Верификация программного комплекса.
4. Адаптация RANS, LES и DES уравнений гидродинамики и известных моделей турбулентности (Смагоринского, Спаларта — Аллмараса, $k-\varepsilon$, $k-\omega$, $k-\omega$ SST) к их использованию в LS-STAG-методе.
5. Программная реализация перечисленных моделей, их верификация, решение тестовых задач по расчету течений, характеризующихся высокими числами Рейнольдса.
6. Разработка переносимой параллельной реализации созданных модификаций LS-STAG-метода, адаптированной к проведению расчетов на современных вычислительных комплексах с общей памятью.

Методы исследования. Для решения задач, поставленных в диссертационной работе, используются метод погруженных границ, метод LS-STAG, метод функций уровня, метод BiCGStab, метод FGMRES, многосеточный метод, математическое моделирование, вычислительный эксперимент, технологии параллельного программирования (OpenMP, Intel[®] Cilk[™] Plus, Intel[®] Threading Building Blocks).

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов вычислительных экспериментов с известными в литературе экспериментальными и расчетными данными.

Научная новизна. Разработаны новые модификации метода погруженных границ LS-STAG, позволяющие численно решать RANS, LES и DES

уравнения гидродинамики. Построена LS-STAG-дискретизация уравнений из моделей турбулентности Спаларта — Аллмараса, $k - \varepsilon$, $k - \omega$, $k - \omega$ SST. Перечисленные модификации реализованы в рамках программного комплекса для численного решения сопряженных задач гидроупругости методом LS-STAG. Разработана переносимая параллельная реализация созданных модификаций метода LS-STAG, адаптированная к проведению расчетов на современных вычислительных комплексах с общей памятью.

Теоретическая и практическая ценность диссертационной работы состоит в разработанных модификациях метода LS-STAG для математического моделирования в сопряженных задачах гидроупругости. Разработаны и зарегистрированы программные комплексы «LS-STAG» и «LS-STAG_turb» для моделирования движения профилей в потоке вязкой несжимаемой среды методом LS-STAG и его модификациями.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Адаптация RANS, LES и DES уравнений гидродинамики и известных моделей турбулентности (Смагоринского, Спаларта — Аллмараса, $k - \varepsilon$, $k - \omega$, $k - \omega$ SST) к использованию в LS-STAG-методе.
2. Разработанные модификации метода LS-STAG для численного решения сопряженных задач гидроупругости, в т.ч. с использованием моделей турбулентности, и их программная реализация.
3. Переносимая параллельная реализация созданных модификаций метода LS-STAG, адаптированная к проведению расчетов на современных вычислительных комплексах с общей памятью.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы апробированы на XV и XVI Международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 2011, 2012), III, IV и VI Международных конференциях «Облачные вычисления. Образование. Исследования. Разработка» (г. Москва, 2012, 2013, 2015), XXXVIII Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения» (г. Москва, 2012), Международной конференции «Immersed boundary

methods: current status and future research directions (EUROMECH Colloquim 549)» (г. Лейден, Нидерланды, 2013), Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2014» (г. Новосибирск, 2014), Международных летних школах-конференциях «Advanced Problems in Mechanics» (г. Санкт-Петербург, 2014, 2015), Международной конференции «5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM)» (г. Барселона, Испания, 2014), Международной конференции «VI International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering COUPLED PROBLEMS 2015» (г. Венеция, Италия, 2015), XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Казань, 2015).

Кроме того, результаты работы обсуждались на Международном авиационно-космическом научно-гуманитарном семинаре им. С. М. Белоцерковского под рук. А. И. Желанникова, В. В. Вышинского (ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского, 2014).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 21 печатной работе [18, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 94, 95, 96, 114, 115, 116, 117], в том числе в 5 статьях из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий [19, 20, 21, 29, 31], и 14 тезисах конференций [18, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 94, 95, 96, 114, 115, 116, 117].

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, общих результатов и выводов и списка литературы. Работа представлена на 150 страницах, содержит 65 иллюстраций и 34 таблицы. Список литературы включает 150 наименований.

Глава 1. Метод LS-STAG для моделирования течений вязкой несжимаемой среды

В главе рассмотрена задача о моделировании обтекания профиля произвольной формы потоком вязкой несжимаемой среды. Построены дискретные аналоги уравнений неразрывности и баланса импульса для всех возможных типов усеченных ячеек в двумерном случае.

Для верификации метода LS-STAG использовались тестовые задачи об обтекании профилей различных форм. В частности, смоделированы наблюдавшиеся в экспериментах эффект сильного снижения лобового сопротивления при низкочастотных вращательных колебаниях кругового профиля и эффект стабилизации следа за круговым профилем, совершающим высокочастотные вращательные колебания (эффект Танеды), редко воспроизводимый численно.

1.1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим внешнее обтекание жесткого профиля произвольной формы горизонтальным равномерным потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности $\bar{\rho}$ (здесь и далее: \bar{A} — размерная физическая величина, A — соответствующая ей безразмерная комбинация) в расчетной области Ω с внешней границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (Рис. 1.1). Отметим, что в данной главе рассматриваются задачи, в которых форма расчетной области не изменяется (погруженные границы не перемещаются в пространстве). При этом скорость точек на границе профиля может быть отличной от нуля (например, течение в каверне, вращательные колебания кругового профиля). Математическая постановка задачи в безразмерных переменных имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ \mathbf{v}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = \mathbf{V}_\infty, \quad \mathbf{v}|_K = \mathbf{v}^{ib} = \mathbf{v}^{ib}(\mathbf{r}, t), \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_4} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma \cup K} = 0; \end{array} \right. \quad (1.1)$$

здесь K — граница профиля; \mathbf{n} — внешняя по отношению к профилю нормаль; $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y$ — радиус-вектор точки; x и y — безразмерные координаты (в качестве характерной длины выбираем характерный размер профиля \bar{D} : $x = \bar{x}/\bar{D}$, $y = \bar{y}/\bar{D}$, $D = \bar{D}/\bar{D} = 1$); $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = u \cdot \mathbf{e}_x + v \cdot \mathbf{e}_y$ — безразмерная скорость (в качестве характерной скорости выбираем скорость набегающего потока: $u = \bar{u}/\bar{V}_\infty$, $v = \bar{v}/\bar{V}_\infty$, $V_\infty = \bar{V}_\infty/\bar{V}_\infty = 1$); t — безразмерное время ($t = \bar{t} \bar{V}_\infty/\bar{D}$); $p = p(\mathbf{r}, t) = \bar{p}/(\bar{\rho} \bar{V}_\infty^2)$ — безразмерное давление; $\text{Re} = \bar{V}_\infty \bar{D}/\bar{\nu}$ — число Рейнольдса; $\nu = 1/\text{Re}$ — безразмерный коэффициент кинематической вязкости.

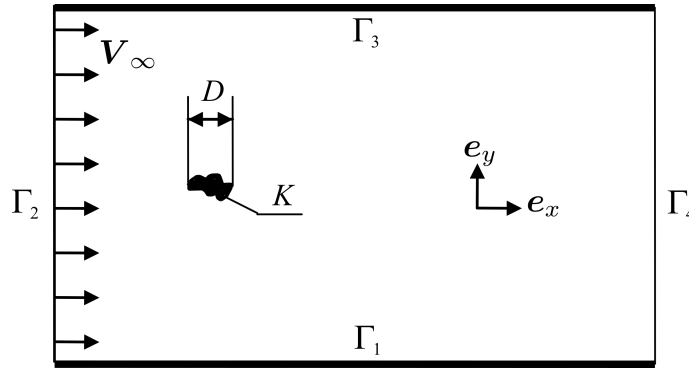


Рис. 1.1. Расчетная область

Выбор граничных условий обусловлен следующими соображениями. В силу ограниченности расчетной области условия затухания возмущений «на бесконечности» сносятся на границы расчетной сетки, которые находятся на конечном расстоянии от обтекаемого профиля. Однако если эти условия снести на все границы, то для получения физически правдоподобного решения в нестационарной задаче моделирования течения за плохообтекаемыми профилями расчетную область потребовалось бы делать слишком большой. Поэтому на выходе из расчетной области ставится условие свободного выхода потока.

Из постановки задачи видно, что в случае несжимаемой среды давление p определено неоднозначно. Из уравнения Навье — Стокса находится величина градиента давления, а для однозначного восстановления поля давления необходимо в одной произвольной точке положить p равным произвольной постоянной.

1.2. Построение дискретных аналогов уравнений Навье — Стокса

Пусть Ω^* — некоторая область, Γ^* — ее граница. Тогда уравнение неразрывности и уравнение баланса импульса в проекциях на оси Ox и Oy соответственно можно переписать в интегральной форме:

$$\int_{\Gamma^*} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^*} u dV + \int_{\Gamma^*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u dS + \int_{\Gamma^*} p \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma^*} \nu \nabla u \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^*} v dV + \int_{\Gamma^*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) v dS + \int_{\Gamma^*} p \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma^*} \nu \nabla v \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (1.4)$$

1.2.1. MAC-сетка для области прямоугольной формы

MAC-метод, на котором основан рассматриваемый метод погруженных границ, предполагает дискретизацию уравнений движения, которая строится с применением интегро-интерполяционного метода [141] и обеспечивает второй порядок точности. Это позволяет перенести на случай неравномерных прямоугольных сеток свойства консервативности (для массы, импульса и кинетической энергии), присущие исходному MAC-методу на равномерных разнесенных сетках [39].

В расчетной области Ω вводится прямоугольная сетка с ячейками $\Omega_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$. Площади этих ячеек обозначим $V_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j$, а радиусы-векторы центров — $\mathbf{x}_{i,j}^c = (x_i^c, y_j^c)$. Граница $\Gamma_{i,j}$ ячейки $\Omega_{i,j}$ разбивается на четыре элементарные грани: $\Gamma_{i,j} = \Gamma_{i,j}^e \cup \Gamma_{i,j}^w \cup \Gamma_{i,j}^n \cup \Gamma_{i,j}^s$. При этом используются обозначения сторон света (e — восток, w — запад, n — север, s — юг). Положения точек, в которых вычисляются неизвестные величины, показаны на Рис. 1.2.

Ячейка $\Omega_{i,j}$ является контрольным объемом, который используется для дискретизации уравнения неразрывности (1.2), тогда как ячейки

$\Omega_{i,j}^u = (x_i^c, x_{i+1}^c) \times (y_{j-1}, y_j)$ и $\Omega_{i,j}^v = (x_{i-1}, x_i) \times (y_j^c, y_{j+1}^c)$ являются контрольными объемами для уравнения баланса импульса в проекциях на оси Ox (1.3) и Oy (1.4) соответственно. Разбиения границ $\Gamma_{i,j}^u$ и $\Gamma_{i,j}^v$ этих контрольных объемов на элементарные грани показаны на Рис. 1.3. Таким образом, если $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, то основная сетка содержит $G = N \cdot M$ ячеек, x -сетка — $G_x = (N - 1) \cdot M$ ячеек, а y -сетка — $G_y = N \cdot (M - 1)$.

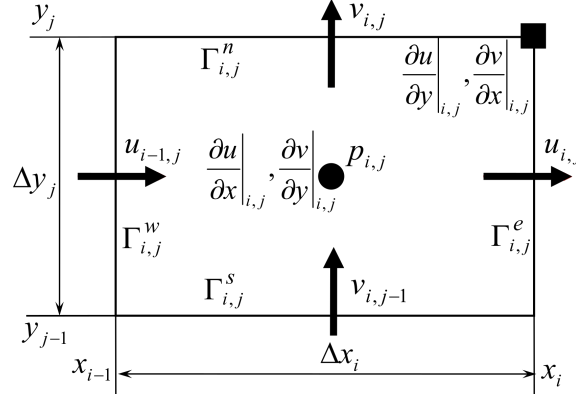


Рис. 1.2. Точки вычисления неизвестных для прямоугольной ячейки $\Omega_{i,j}$

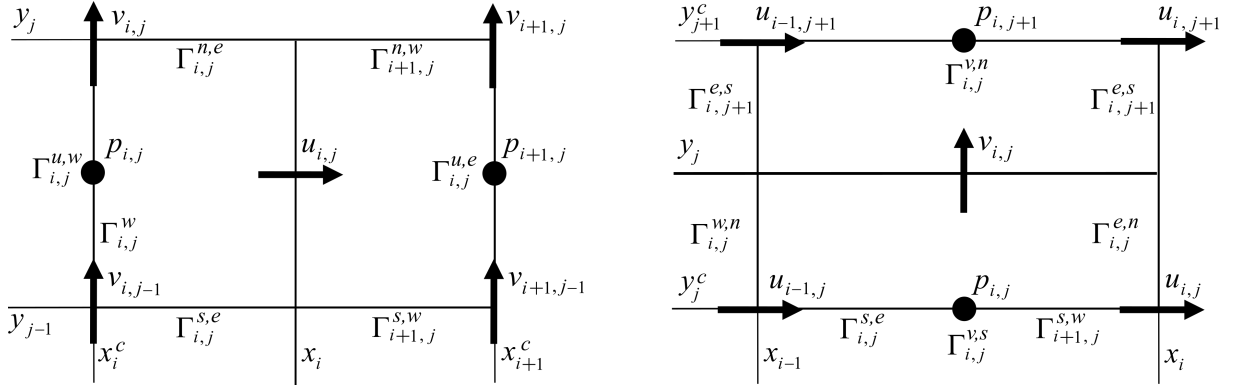


Рис. 1.3. Контрольные объемы $\Omega_{i,j}^u$ (слева) и $\Omega_{i,j}^v$ (справа) для $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$

1.2.2. LS-STAG-сетка для области с погруженной границей

Рассмотрим твердое тело произвольной формы Ω^{ib} с границей Γ^{ib} , помещенное в расчетную область Ω , так что $\Omega^f = \Omega \setminus \{\Omega^{ib} \cup \Gamma^{ib}\}$ является областью, занятой жидкостью, в которой должны решаться уравнения (1.1). Для описания положения границы Γ^{ib} вводят знакопеременную функцию уровня $\varphi(\mathbf{r})$ [107], такую что

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}) < 0, & \mathbf{r} \in \Omega^f, \\ \varphi(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \Gamma^{ib}, \\ \varphi(\mathbf{r}) > 0, & \mathbf{r} \in \Omega^{ib}. \end{cases} \quad (1.5)$$

В простейших случаях функция уровня может быть задана аналитически: так, для кругового профиля диаметра D с центром в точке (x_0, y_0)

$$\varphi(x, y) = 0,5 D - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (1.6)$$

Для построения функции уровня в случае профиля более сложной формы можно использовать алгоритм, предложенный в [29].

Использование функции уровня приводит к LS-STAG-сетке. В каждой усеченной ячейке (cut-cell) $\Omega_{i,j}$ (Рис. 1.4) погруженная граница $\Gamma_{i,j}^{ib}$ представляется отрезком прямой, положения концов которого определяются линейной интерполяцией величины $\varphi_{i,j}$, которая принимает значение функции уровня $\varphi(x_i, y_j)$ в правом верхнем углу $\Omega_{i,j}$.

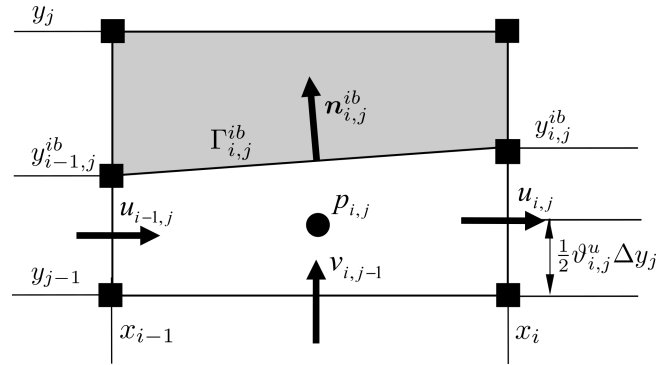


Рис. 1.4. Точки вычисления неизвестных для усеченной ячейки $\Omega_{i,j}$

Неизвестные значения скоростей вычисляются в серединах жидких частей граней. На Рис. 1.4 точка вычисления давления $p_{i,j}$ расположена на пересечении линий, содержащих точки вычисления скоростей. Такое положение выбрано исключительно для наглядности и не используется при дискретизации уравнений: давление аппроксимируется кусочно-постоянной функцией на каждой усеченной ячейке, поэтому точно указывать положение данной точки не требуется. Такой подход автоматически обеспечивает выполнение условия равенства нулю градиента давления на твердых стенках.

Для определения типа усеченных ячеек вводят коэффициенты заполнения ячеек $\theta_{i,j}^u, \theta_{i,j}^v \in [0, 1]$, показывающие, какая часть ячейки занята жидкостью на гранях $\Gamma_{i,j}^e$ и $\Gamma_{i,j}^n$ соответственно. Определим их, ис-

пользуя одномерную линейную интерполяцию функций $\varphi(x_i, y)$ на отрезке $[y_{j-1}, y_j]$ и $\varphi(x, y_j)$ на $[x_{i-1}, x_i]$: $\theta_{i,j}^u = \frac{\min(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j})}{\min(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j}) - \max(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j})}$, $\theta_{i,j}^v = \frac{\min(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j})}{\min(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j}) - \max(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j})}$. В двумерном случае усеченные ячейки можно разделить на трапециевидные, пятиугольные и треугольные. Примеры ячеек каждого типа изображены на Рис. 1.5. Для программной идентификации типа усеченной ячейки каждой ячейке присваивается код в троичной системе счисления: твердая грань обозначается нулем, жидкая — единицей, «твердо-жидкая» — двойкой. Код формируется с восточной грани против часовой стрелки (Таблица 1).

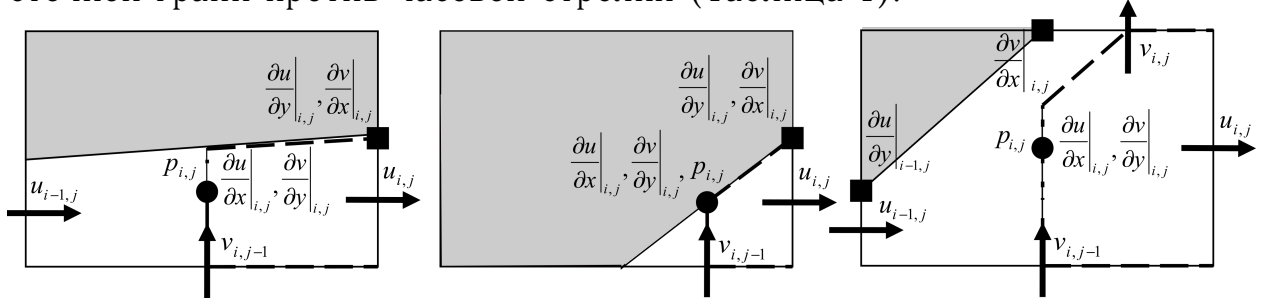


Рис. 1.5. Северная (С) трапеция (слева), северо-западный (С-З) треугольник (в центре), С-З пятиугольник (справа)

В окрестности профиля в данной работе используется блок равномерной сетки с шагом $h = D/n$ (Рис. 1.6). Характеристики используемых сеток приведены в Таблице 2: видно, что число твердых и усеченных ячеек невелико; доля последних уменьшается при измельчении сетки. Таким образом, вычислительные затраты на хранение и обработку данных, связанных с усеченными ячейками, незначительны.

Шаг интегрирования по времени Δt (Таблица 2) выбирался из условия Куранта для двумерного случая: $CFL < 1/2$, где CFL — число Куранта [42]. Для ячейки $\Omega_{i,j}$ неравномерной сетки

$$CFL_{i,j} = \left[(\bar{u}_{i,j})^+ + (-\bar{u}_{i-1,j})^+ + (\bar{v}_{i,j})^+ + (-\bar{v}_{i,j-1})^+ + (\bar{U}_{i,j}^{ib})^+ \right] \Delta t / V_{i,j},$$

где $(\cdot)^+ = \max(\cdot, 0)$ [47], соответственно условие Куранта имеет вид $\max(CFL_{i,j}) < 1/2$, $\max(CFL_{i,j}) = \frac{\max[(\bar{u}_{i,j})^+ + (-\bar{u}_{i-1,j})^+ + (\bar{v}_{i,j})^+ + (-\bar{v}_{i,j-1})^+ + (\bar{U}_{i,j}^{ib})^+] \Delta t}{\min(V_{i,j})}$, $\min(V_{i,j}) = D^2/n^2$ в силу выбранного алгоритма построения сетки.

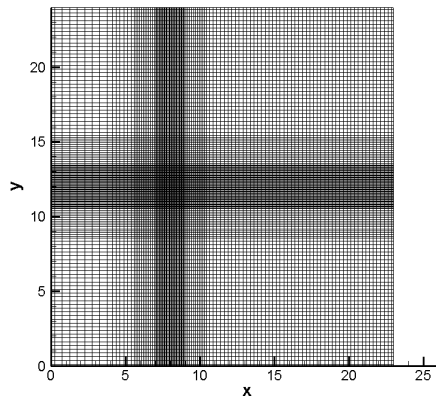
Характеристики усеченных ячеек (двумерный случай)

Тип	Коды ячейки	Объем жидкой части ячейки ($V_{i,j}$)
Трапецевидные		
С	2021, 1021, 2011, 1011	$(\theta_{i,j}^u + \theta_{i-1,j}^u)\Delta x_i \Delta y_j / 2$
Ю	2120, 1120, 2110, 1110	
З	1202, 1201, 1102, 1101	$(\theta_{i,j}^v + \theta_{i,j-1}^v)\Delta x_i \Delta y_j / 2$
В	212, 112, 211, 111	
Пятиугольные		
С-З	1221	$(\theta_{i,j}^v + (1 + \theta_{i-1,j}^u)(1 - \theta_{i,j}^v)/2)\Delta x_i \Delta y_j$
С-В	2211	$(\theta_{i,j}^v + (1 + \theta_{i,j}^u)(1 - \theta_{i,j}^v)/2)\Delta x_i \Delta y_j$
Ю-З	1122	$(\theta_{i,j-1}^v + (1 + \theta_{i-1,j}^u)(1 - \theta_{i,j-1}^v)/2)\Delta x_i \Delta y_j$
Ю-В	2112	$(\theta_{i,j-1}^v + (1 + \theta_{i,j}^u)(1 - \theta_{i,j-1}^v)/2)\Delta x_i \Delta y_j$
Треугольные		
С-З	2002, 2001, 1002, 1001	$\theta_{i,j}^u \theta_{i,j-1}^v \Delta x_i \Delta y_j / 2$
С-В	22, 11, 12, 21	$\theta_{i-1,j}^u \theta_{i,j-1}^v \Delta x_i \Delta y_j / 2$
Ю-З	2200, 2100, 1200, 1100	$\theta_{i,j}^u \theta_{i,j}^v \Delta x_i \Delta y_j / 2$
Ю-В	220, 210, 120, 110	$\theta_{i-1,j}^u \theta_{i,j}^v \Delta x_i \Delta y_j / 2$

Таблица 2.

Характеристики используемых сеток

$N \times M$	n	Δt	Число ячеек		
			твердых	усеченных	жидких
120×148	16	10^{-2}	164 (0,92%)	60 (0,34%)	17 536 (98,74%)
240×296	32	10^{-2}	732 (1,03%)	124 (0,17%)	70 184 (98,8%)
480×592	64	10^{-3}	3080 (1,08%)	252 (0,09%)	280 828 (98,83%)

Рис. 1.6. Неравномерная сетка 120×148

1.2.3. Законы сохранения для течений вязкой несжимаемой среды

В 1960-е годы было установлено, что для физически правдоподобного интегрирования уравнений динамики, линейные и квадратичные инварианты (безразмерные скорость изменения массы $\int_{\Omega^f} \nabla \cdot \mathbf{v} dV$, импульс $\mathbf{P} = \int_{\Omega^f} \mathbf{v} dV$ и, в случае отсутствия вязкости, безразмерная кинетическая энергия $E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega^f} |\mathbf{v}|^2 dV$) должны сохраняться численной схемой [45, 92].

Пусть $\mathbf{F} = (F_{xa}, F_{ya})$ — суммарная гидродинамическая сила, действующая на погруженные границы, F_{xa} — сила лобового сопротивления, F_{ya} — подъемная сила [11]:

$$F_{xa} = \int_{\Gamma^{ib}} \left[p - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma^{ib}} \nu \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.7)$$

$$F_{ya} = - \int_{\Gamma^{ib}} \nu \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma^{ib}} \left[p - \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right] \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.8)$$

Тогда уравнения (1.3) и (1.4) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = - \int_{\Gamma^{ib}} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \mathbf{F}. \quad (1.9)$$

В дискретном случае при использовании неразнесенных сеток выполнение дискретного аналога уравнения (1.2) не контролируется: об эффекте диссипации массы говорится в работах [127, 142]. За счет разнесения точек вычисления скоростей на MAC-сетке и LS-STAG-сетке масса естественным образом сохраняется. Соотношение (1.9) в дискретном виде выполняется при использовании любого численного метода, если уравнение баланса импульса записывается в консервативной форме и выполняется свойство локальной консервативности численных потоков через грани ячейки. Для несжимаемых течений сохранение кинетической энергии есть следствие уравнений Навье — Стокса:

$$\frac{dE_c}{dt} = \int_{\Omega^f} \left[\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + p \right) \nabla \cdot \mathbf{v} - \nu |\nabla \cdot \mathbf{v}|^2 \right] dV - \int_{\Gamma^{ib}} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + p - \nu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.10)$$

Вследствие уравнения неразрывности в объемном интеграле остается одно слагаемое, включающее вязкие напряжения, и выражающее уменьшение энергии из-за вязкой диссипации. Неисчезающие слагаемые в поверхностном интеграле показывают, что давление и конвективные члены оказывают влияние на баланс кинетической энергии только через их действие на погруженной границе. На равномерных прямоугольных сетках для МАС-метода с вычислением центральных производных для конвективных членов выполняется численный аналог сохранения энергии. Для сеток общего вида построение методов, обладающих этим свойством, является нетривиальной задачей [104, 141]. В работе [141] показано, что численный аналог закона сохранения энергии выполняется, если конвективные и вязкие члены дискретизируются при помощи косо-симметричных и симметричных положительно определенных операторов соответственно. На усеченных ячейках при этом необходимо корректно учитывать [54] граничные интегралы в (1.9)–(1.10), которыми пренебрегали во всех известных работах, кроме [82].

1.2.4. Дискретный аналог уравнения неразрывности

Для любой ячейки $\Omega_{i,j}$ выделим в уравнении неразрывности отдельные безразмерные потоки массы через грани $\Gamma_{i,j}^w \cup \Gamma_{i,j}^e \cup \Gamma_{i,j}^s \cup \Gamma_{i,j}^n \cup \Gamma_{i,j}^{ib}$:

$$\dot{m}^{i,j} = \bar{u}_{i-1,j} - \bar{u}_{i,j} + \bar{v}_{i,j-1} - \bar{v}_{i,j} - \bar{U}_{i,j}^{ib} = 0. \quad (1.11)$$

В этом уравнении $\bar{U}_{i,j}^{ib} = \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \mathbf{v}^{ib} \cdot \mathbf{n}_{i,j}^{ib} dS$, $\mathbf{n}_{i,j}^{ib}$ — внешняя нормаль к усеченной ячейке, скорость \mathbf{v}^{ib} на $\Gamma_{i,j}^{ib}$ предполагается известной из граничных условий. Для обозначения потоков массы через жидкие части используется горизонтальная черта: например, поток через грань $\Gamma_{i,j}^e$ равен

$$\bar{u}_{i,j} = \int_{\Gamma_{i,j}^e} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x dS = \int_{y_{j-1}}^{y_j} u(x_i, y) dy. \quad (1.12)$$

При дискретизации этого интеграла полагаем, что точка вычисления $u_{i,j}$ располагается в центре жидкой части грани: $u_{i,j} \equiv u\left(x_i, y_{j-1} + \frac{1}{2}\theta_{i,j}^u \Delta y_j\right)$.

Тогда, используя квадратурную формулу центральных прямоугольников, получаем $\bar{u}_{i,j} \approx \theta_{i,j}^u \Delta y_j u_{i,j}$, и после аналогичной процедуры для остальных граней дискретный аналог уравнения неразрывности принимает вид

$$\dot{m}^{i,j} = \Delta y_j (\theta_{i-1,j}^u u_{i-1,j} - \theta_{i,j}^u u_{i,j}) + \Delta x_i (\theta_{i,j-1}^v v_{i,j-1} - \theta_{i,j}^v v_{i,j}) - \bar{U}_{i,j}^{ib} = 0. \quad (1.13)$$

Разностный аналог слагаемого, относящегося к твердой грани, имеет вид

$$\bar{U}_{i,j}^{ib} \approx u_{i,j}^{ib} [n_x \Delta S]_{i,j}^{ib} + v_{i,j}^{ib} [n_y \Delta S]_{i,j}^{ib}, \quad (1.14)$$

где $[n_x \Delta S]_{i,j}^{ib} = (\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u) \Delta y_j$, $[n_y \Delta S]_{i,j}^{ib} = (\theta_{i,j-1}^v - \theta_{i,j}^v) \Delta x_i$, а величина $\mathbf{v}_{i,j}^{ib} = (u_{i,j}^{ib}, v_{i,j}^{ib}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^{ib}(x_i, y_{i,j}^{ib}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^{ib}(x_{i-1}, y_{i-1,j}^{ib})$ аппроксимирует скорость на $\Gamma_{i,j}^{ib}$. Значения скорости $\mathbf{v}^{ib}(x, y)$, заданные граничными условиями, вычисляются на усеченной ячейке в концах отрезка $\Gamma_{i,j}^{ib}$.

В матричной форме (1.13) имеет вид

$$\mathcal{D}U + \bar{U}^{ib} = 0, \text{ или } \mathcal{D}^x u + \mathcal{D}^y v + \bar{U}^{ib} = 0, \quad (1.15)$$

где $\mathcal{D}^x \in M(\mathbb{R})_{G \times G_x}$, $\mathcal{D}^y \in M(\mathbb{R})_{G \times G_y}$, $u \in \mathbb{R}^{G_x}$, $v \in \mathbb{R}^{G_y}$, $\bar{U}^{ib} \in \mathbb{R}^G$. Матрицы \mathcal{D}^x и \mathcal{D}^y строятся по следующим шаблонам ($i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_P^x(i, j) &= \theta_{i,j}^u \Delta y_j, \quad \mathcal{D}_W^x(i, j) = -\theta_{i-1,j}^u \Delta y_j, \\ \mathcal{D}_P^y(i, j) &= \theta_{i,j}^v \Delta x_i, \quad \mathcal{D}_S^y(i, j) = -\theta_{i,j-1}^v \Delta x_i. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь и далее для элементов матриц используются следующие обозначения: в строке соответствующей ячейке с номером (i, j) элемент с индексом P стоит на диагонали, элемент с индексом W находится в столбце с номером контрольного объема, граничащего с $\Omega_{i,j}$ с запада, и т. д.

1.2.5. Сохранение массы в дискретном случае

Покажем, что представленная дискретизация уравнения неразрывности обеспечивает выполнение дискретного аналога закона сохранения массы в случае, когда погруженные границы движутся как твердое тело:

$$\mathbf{v}^{ib}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}^{ib}(t) + \Omega^{ib}(t) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1.17)$$

где $\mathbf{V}^{ib}(t)$ и $\Omega^{ib}(t)$ — заданные линейная скорость движения некоторой точки \mathbf{r}_0 погруженного твердого тела и угловая скорость вращения тела.

Необходимо сделать два предположения относительно расчетной области: погруженная граница является замкнутой, т.е.

$$\int_{\Gamma^{ib}} \mathbf{n}^{ib} dS = \sum_{\text{Cut-cells}} \sum_{\Omega_{i,j}} \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \mathbf{n}_{i,j}^{ib} dS = 0, \quad (1.18)$$

а объем жидкой части области при движении тела не изменяется:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^f} dV = \sum_{\text{Cut-cells}} \sum_{\Omega_{i,j}} \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \mathbf{v}^{ib}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}_{i,j}^{ib} dS = 0. \quad (1.19)$$

В этих уравнениях подынтегральные выражения линейны по пространственным переменным в силу того, что $\mathbf{v}^{ib}(\mathbf{r}, t)$ задается формулой (1.17), поэтому квадратурные формулы центральных прямоугольников и трапеций дают точные значения квадратур:

$$\sum_{\text{Cut-cells}} \sum_{\Omega_{i,j}} [\overline{n\Delta S}]_{i,j}^{ib} = 0, \quad \sum_{\text{Cut-cells}} \sum_{\Omega_{i,j}} \left(\Omega^{ib}(t) \times \frac{\mathbf{a}_{i,j}^{ib} + \mathbf{b}_{i,j}^{ib}}{2} \right) \cdot [\overline{n\Delta S}]_{i,j}^{ib} = 0, \quad (1.20)$$

где $[\overline{n\Delta S}]_{i,j}^{ib} = ([n_x \Delta S]_{i,j}^{ib}, [n_y \Delta S]_{i,j}^{ib})$, а концы радиусов-векторов $\mathbf{a}_{i,j}^{ib}$ и $\mathbf{b}_{i,j}^{ib}$ совпадают с концами отрезка $\Gamma_{i,j}^{ib}$ в соответствующей усеченной ячейке.

Численный аналог закона сохранения полной массы (1.2) получается путем суммирования дискретных аналогов уравнения неразрывности (1.15) по всем ячейкам. В матричной форме это имеет вид

$$\mathbf{1}^T \mathcal{D}U + \mathbf{1}^T \overline{U}^{ib} = 0, \quad (1.21)$$

где $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^G$ — вектор, состоящий из единиц. Для доказательства данного равенства сначала упростим его левую часть, используя локальную консервативность потоков массы на гранях ячеек, тогда останутся только потоки $\overline{U}_{i,j}^{ib}$ на погруженных границах:

$$\mathbf{1}^T \mathcal{D}U + \mathbf{1}^T \overline{U}^{ib} = \mathbf{1}^T \overline{U}^{ib}. \quad (1.22)$$

После интегрирования известных скоростей (1.17) при помощи квадратурной формулы трапеций вследствие (1.20) получаем

$$\mathbf{1}^T \mathcal{D}U + \mathbf{1}^T \overline{U}^{ib} = \sum_{\text{Cut-cells}} \sum_{\Omega_{i,j}} \mathbf{v}^{ib}(t) \cdot [\overline{n\Delta S}]_{i,j}^{ib} + \left(\Omega^{ib}(t) \times \frac{\mathbf{a}_{i,j}^{ib} + \mathbf{b}_{i,j}^{ib}}{2} \right) \cdot [\overline{n\Delta S}]_{i,j}^{ib} = 0.$$

Таким образом, в методе LS-STAG выполняется численный аналог закона сохранения полной массы.

1.2.6. Дискретный аналог уравнения баланса импульса

Для уравнений баланса импульса (1.3), (1.4) дискретизированная по пространству разностная схема имеет следующий матричный вид:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{M}^x u) + \mathcal{C}^x[\bar{u}]u + \mathcal{G}^x P - \nu \mathcal{K}^x u + S_x^{ib,c} - \nu S_x^{ib,\nu} = 0, \quad (1.23)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{M}^y v) + \mathcal{C}^y[\bar{v}]v + \mathcal{G}^y P - \nu \mathcal{K}^y v + S_y^{ib,c} - \nu S_y^{ib,\nu} = 0, \quad (1.24)$$

где $\mathcal{M}^x \in M(\mathbb{R})_{G_x \times G_x}$ и $\mathcal{M}^y \in M(\mathbb{R})_{G_y \times G_y}$ — диагональные матрицы (их элементы — объемы ячеек $\Omega_{i,j}^u$ и $\Omega_{i,j}^v$ соответственно), $\mathcal{C}^x[\bar{u}] \in M(\mathbb{R})_{G_x \times G_x}$ и $\mathcal{C}^y[\bar{v}] \in M(\mathbb{R})_{G_y \times G_y}$ задают дискретные аналоги конвективных потоков, $\mathcal{G}^x \in M(\mathbb{R})_{G_x \times G}$ и $\mathcal{G}^y \in M(\mathbb{R})_{G_y \times G}$ — градиента давления, $\mathcal{K}^x \in M(\mathbb{R})_{G_x \times G_x}$ и $\mathcal{K}^y \in M(\mathbb{R})_{G_y \times G_y}$ описывают вязкую диффузию, $P \in \mathbb{R}^G$ — давление, $S_x^{ib,c} \in \mathbb{R}^{G_x}$, $S_x^{ib,\nu} \in \mathbb{R}^{G_x}$, $S_y^{ib,c} \in \mathbb{R}^{G_y}$, $S_y^{ib,\nu} \in \mathbb{R}^{G_y}$ — источниковые члены, возникающие в силу граничных условий из конвективных и вязких членов соответственно. \mathcal{M}^x и \mathcal{M}^y строятся по следующим шаблонам:

$$\mathcal{M}_P^x(i, j) = \frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i+1,j}, \quad \mathcal{M}_P^y(i, j) = \frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i,j+1}. \quad (1.25)$$

На каждой жидкой ячейке $\Omega_{i,j}$ при помощи квадратурной формулы трапеций дискретизируем выражение для $E_c(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^f} |\mathbf{v}|^2 dV$:

$$E_c(t) \approx E_c^h(t) = \frac{1}{2}U^T \mathcal{M} U + \frac{1}{2}U^{ib,T} \mathcal{M}^{ib} U^{ib}, \quad (1.26)$$

где $\mathcal{M} \in M(\mathbb{R})_{(G_x+G_y) \times (G_x+G_y)}$ — матрица, состоящая из блоков \mathcal{M}^x и \mathcal{M}^y (по аналогии вводим блочные матрицы $\mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{G}, \mathcal{D} \in M(\mathbb{R})_{(G_x+G_y) \times (G_x+G_y)}$), вектор $U \in \mathbb{R}^{G_x+G_y}$ состоит из элементов u и v , а $U^{ib,T} \mathcal{M}^{ib} U^{ib}$ — вклад граничных условий ($U^{ib} \in \mathbb{R}^{G_x+G_y}$). Численный аналог закона сохранения для $E_c^h(t)$ получается после дифференцирования (1.26) по времени; с учетом (1.23), (1.24) получаем:

$$\frac{d}{dt}(E_c^h(t)) = -U^T \frac{\mathcal{C}[\bar{U}]^T + \mathcal{C}[\bar{U}]}{2} U - P^T \mathcal{G}^T U - U^T \frac{\nu(\mathcal{K}^T + \mathcal{K})}{2} U - U^T (S^{ib,c} - \nu S^{ib,\nu}).$$

Для получения выражения, аналогичного (1.10), член $-U^T(\mathcal{K}^T + \mathcal{K})U$ должен описывать вязкую диссипацию кинетической энергии и поэто-

му всегда должен быть отрицательным. Это свойство выполняется, поскольку матрица $\mathcal{K}^T + \mathcal{K}$ является положительно определенной для метода контрольных объемов [64]. Отметим, что симметрии матрицы \mathcal{K} не требуется. Если дополнительно потребовать, чтобы дискретизация конвективных членов приводила к кососимметрической матрице

$$\mathcal{C}[\bar{U}]^T = -\mathcal{C}[\bar{U}], \quad (1.27)$$

а дискретный оператор градиента давления был связан с дискретным оператором дивергенции соотношением

$$\mathcal{G} = -\mathcal{D}^T, \quad (1.28)$$

то получим, что при отсутствии вязкости лишь слагаемые, связанные с границей расчетной области, влияют на баланс кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt}(E_c^h(t)) = -P^T \bar{U}^{ib} - U^T S^{ib,c}. \quad (1.29)$$

1.2.6.1. Кососимметричная дискретизация конвективных потоков

Для уравнения (1.3) при $\Omega^* = \Omega_{i,j}^u$ имеем следующую дискретизацию конвективного слагаемого с учетом (1.27):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,j}^u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u dS &\approx \mathcal{C}^x[\bar{U}]_W(i, j) u_{i-1,j} + \mathcal{C}^x[\bar{U}]_E(i, j) u_{i+1,j} + \\ &+ \mathcal{C}^x[\bar{U}]_S(i, j) u_{i,j-1} + \mathcal{C}^x[\bar{U}]_N(i, j) u_{i,j+1}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\mathcal{C}^x[\bar{U}]_E(i, j) = -\mathcal{C}^x[\bar{U}]_W(i+1, j), \quad \mathcal{C}^x[\bar{U}]_N(i, j) = -\mathcal{C}^x[\bar{U}]_S(i, j+1). \quad (1.31)$$

Для $\Omega_{i,j}^u$ (Рис. 1.3) дискретизация состоит в записи конвективного члена как суммы потоков через четыре его элементарные грани:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u dS = - \int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) u dy + \int_{\Gamma_{i,j}^{u,e}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) u dy - \int_{\Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{s,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) u dx + \int_{\Gamma_{i,j}^{n,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{n,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) u dx.$$

Второе и четвертое слагаемые дискретизируются при помощи (1.12):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,j}^{u,e}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) u dy &\approx \frac{\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i+1,j}}{2} u_e, \quad u_e = \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2}, \\ \int_{\Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{s,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) u dx &\approx \frac{\bar{v}_{i,j-1}}{2} u_s + \frac{\bar{v}_{i+1,j-1}}{2} u_s, \quad u_s = \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j}}{2}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Используем свойство локальной консервативности потоков:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) u \, dy = \int_{\Gamma_{i-1,j}^{u,e}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) u \, dy, \quad \int_{\Gamma_{i,j}^{n,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{n,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) u \, dx = \int_{\Gamma_{i,j+1}^{s,e} \cup \Gamma_{i+1,j+1}^{s,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) u \, dx. \quad (1.33)$$

После сопоставления с (1.30) получаем $\mathcal{C}^x[\bar{U}]_P(i, j) = (\dot{m}^{i,j} + \dot{m}^{i+1,j})/4 \equiv 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^x[\bar{U}]_E(i, j) &= \frac{1}{4}\bar{u}_{i,j} + \frac{1}{4}\bar{u}_{i+1,j}, \quad \mathcal{C}^x[\bar{U}]_W(i, j) = -\frac{1}{4}\bar{u}_{i-1,j} - \frac{1}{4}\bar{u}_{i,j}, \\ \mathcal{C}^x[\bar{U}]_N(i, j) &= \frac{1}{4}\bar{v}_{i,j} + \frac{1}{4}\bar{v}_{i+1,j}, \quad \mathcal{C}^x[\bar{U}]_S(i, j) = -\frac{1}{4}\bar{v}_{i,j-1} - \frac{1}{4}\bar{v}_{i+1,j-1}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

$i = \overline{2, N-2}$, $j = \overline{2, M-1}$, что удовлетворяет условиям (1.31), когда на $\Omega_{i,j}$ и $\Omega_{i+1,j}$ выполняются численные аналоги уравнения неразрывности.

Аналогично для уравнения (1.4) при $\Omega^* = \Omega_{i,j}^v$ имеем следующий разностный аналог конвективного слагаемого с учетом (1.27):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,j}^v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) v \, dS &\approx \mathcal{C}^y[\bar{U}]_W(i, j) v_{i-1,j} + \mathcal{C}^y[\bar{U}]_E(i, j) v_{i+1,j} + \\ &+ \mathcal{C}^y[\bar{U}]_S(i, j) v_{i,j-1} + \mathcal{C}^y[\bar{U}]_N(i, j) v_{i,j+1}, \\ \mathcal{C}^y[\bar{U}]_E(i, j) &= -\mathcal{C}^y[\bar{U}]_W(i+1, j), \quad \mathcal{C}^y[\bar{U}]_N(i, j) = -\mathcal{C}^y[\bar{U}]_S(i, j+1). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Для $\Omega_{i,j}^v$ (Рис. 1.3) дискретизация состоит в записи конвективного члена как суммы потоков через четыре его элементарные грани:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,j}^v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) v \, dS &= - \int_{\Gamma_{i,j}^{v,s}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) v \, dx + \int_{\Gamma_{i,j}^{v,n}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) v \, dx - \int_{\Gamma_{i,j}^{w,n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{w,s}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) v \, dy + \int_{\Gamma_{i,j}^{e,n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{e,s}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) v \, dy, \\ \int_{\Gamma_{i,j}^{v,n}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) v \, dx &\approx \frac{\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j+1}}{2} v_n, \quad v_n = \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2}, \\ \int_{\Gamma_{i,j}^{w,n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{w,s}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) v \, dy &\approx \frac{\bar{u}_{i-1,j}}{2} v_w + \frac{\bar{u}_{i-1,j+1}}{2} v_w, \quad v_w = \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2}. \end{aligned}$$

После сопоставления с (1.35) получаем следующие коэффициенты схемы ($i = \overline{2, N-1}$, $j = \overline{2, M-2}$, $\mathcal{C}^y[\bar{U}]_P(i, j) \equiv 0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^y[\bar{U}]_E(i, j) &= \frac{1}{4}\bar{u}_{i,j} + \frac{1}{4}\bar{u}_{i,j+1}, \quad \mathcal{C}^y[\bar{U}]_W(i, j) = -\frac{1}{4}\bar{u}_{i-1,j} - \frac{1}{4}\bar{u}_{i-1,j+1}, \\ \mathcal{C}^y[\bar{U}]_N(i, j) &= \frac{1}{4}\bar{v}_{i,j} + \frac{1}{4}\bar{v}_{i,j+1}, \quad \mathcal{C}^y[\bar{U}]_S(i, j) = -\frac{1}{4}\bar{v}_{i,j-1} - \frac{1}{4}\bar{v}_{i,j}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

На усеченных ячейках дискретизация должна быть модифицирована для учета влияния граничных условий на погруженной границе. Рассмотрим $\Omega_{i,j}^u$ с твердой северной гранью: $\mathcal{C}^x[\bar{U}]_N(i,j) \equiv 0$, а вместо этого слагаемого в (1.30) появляется $S_{x,i,j}^{ib,c}$;

$$\int_{\Gamma_{i,j}^u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u dS = - \int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) u dy + \int_{\Gamma_{i,j}^{u,e}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) u dy - \int_{\Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{s,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) u dx + \int_{\Gamma_{i,j}^{ib,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{ib,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{ib}) u dx,$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{ib,e}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{i,j}^{ib}) u dx \approx \frac{\bar{U}_{i,j}^{ib}}{2} u_{ib}, \int_{\Gamma_{i+1,j}^{ib,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{i+1,j}^{ib}) u dx \approx \frac{\bar{U}_{i+1,j}^{ib}}{2} u_{ib}, \quad u_{ib} = \frac{1}{2} (\underline{u}_{i,j} + \underline{\underline{u(x_i, y_{i,j}^{ib})}}).$$

Слагаемые, подчеркнутые одной чертой, дают вклад в $\mathcal{C}^x[\bar{U}]_P(i,j)$, а подчеркнутые двумя — в $S_{x,i,j}^{ib,c}$. Аналогично получаются формулы для усеченных ячеек остальных типов (Таблицы 3–8). При этом $S_{x,i,j}^{ib,c,E}$ — составляющая источникового члена в восточной половине $\Omega_{i,j}$, $S_{x,i,j}^{ib,c,W}$ — в западной, $S_{y,i,j}^{ib,c,N}$ — в северной, $S_{y,i,j}^{ib,c,S}$ — в южной; $S_{x,i,j}^{ib,c} = S_{x,i,j}^{ib,c,E} + S_{x,i+1,j}^{ib,c,W}$, $S_{y,i,j}^{ib,c} = S_{y,i,j}^{ib,c,N} + S_{y,i,j+1}^{ib,c,S}$. Для границ расчетной области в $S_{x,i,j}^{ib,c}$ ненулевыми будут компоненты на Γ_2 и Γ_4 , а в $S_{y,i,j}^{ib,c}$ — на Γ_4 : $S_{x,1,j}^{ib,c} = -\frac{V_\infty \Delta y_j (V_\infty + u_{1,j})}{4}$, $S_{x,N-1,j}^{ib,c} = \frac{\Delta y_j u_{N-1,j}^2}{2}$, $j = \overline{1, M}$, $S_{y,N,j}^{ib,c} = \frac{v_{N,j} (u_{N-1,j} \Delta y_j + u_{N-1,j+1} \Delta y_{j+1})}{4}$, $j = \overline{1, M-1}$.

Таблица 3.

$S_{x,i,j}^{ib,c,E}$ и $S_{x,i,j}^{ib,c,W}$ для пятиугольных усеченных ячеек

Тип ячейки	$S_{x,i,j}^{ib,c,E}$	$S_{x,i,j}^{ib,c,W}$
С-З	0	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} + \bar{v}_{i,j}) \cdot u(x_{i-1}, y_{i-1,j}^{ib})/4$
С-В	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} + \bar{v}_{i,j}) \cdot u(x_i, y_{i,j}^{ib})/4$	0
Ю-З	0	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{v}_{i,j-1}) \cdot u(x_{i-1}, y_{i-1,j}^{ib})/4$
Ю-В	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{v}_{i,j-1}) \cdot u(x_i, y_{i,j}^{ib})/4$	0

Таблица 4.

$S_{y,i,j}^{ib,c,N}$ и $S_{y,i,j}^{ib,c,S}$ для пятиугольных усеченных ячеек

Тип ячейки	$S_{y,i,j}^{ib,c,N}$	$S_{y,i,j}^{ib,c,S}$
С-З	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{u}_{i-1,j}) \cdot v(x_{i,j}^{ib}, y_j)/4$	0
С-В	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} + \bar{u}_{i,j}) \cdot v(x_{i,j}^{ib}, y_j)/4$	0
Ю-З	0	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{u}_{i-1,j}) \cdot v(x_{i,j-1}^{ib}, y_{j-1})/4$
Ю-В	0	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} + \bar{u}_{i,j}) \cdot v(x_{i,j-1}^{ib}, y_{j-1})/4$

Таблица 5.

$S_{x, i, j}^{ib, c, E}$ и $S_{x, i, j}^{ib, c, W}$ для трапециевидных усеченных ячеек

Тип ячейки	$S_{x, i, j}^{ib, c, E}$	$S_{x, i, j}^{ib, c, W}$
С, Ю	$\bar{U}_{i, j}^{ib} \cdot u(x_i, y_{i, j}^{ib})/4$	$\bar{U}_{i, j}^{ib} \cdot u(x_{i-1}, y_{i-1, j}^{ib})/4$
В	0	$(\bar{U}_{i, j}^{ib} + \bar{u}_{i-1, j}) \cdot u_{i, j}^{ib}/4$
З	$(\bar{U}_{i, j}^{ib} - \bar{u}_{i, j}) \cdot u_{i, j}^{ib}/4$	0

Таблица 6.

$S_{y, i, j}^{ib, c, N}$ и $S_{y, i, j}^{ib, c, S}$ для трапециевидных усеченных ячеек

Тип ячейки	$S_{y, i, j}^{ib, c, N}$	$S_{y, i, j}^{ib, c, S}$
С	0	$(\bar{U}_{i, j}^{ib} + \bar{v}_{i, j-1}) \cdot v_{i, j}^{ib}/4$
Ю	$(\bar{U}_{i, j}^{ib} - \bar{v}_{i, j}) \cdot v_{i, j}^{ib}/4$	0
В, З	$\bar{U}_{i, j}^{ib} \cdot v(x_{i, j}^{ib}, y_j)/4$	$\bar{U}_{i, j}^{ib} \cdot v(x_{i, j-1}^{ib}, y_{j-1})/4$

Таблица 7.

$S_{x, i, j}^{ib, c, E}$ и $S_{x, i, j}^{ib, c, W}$ для треугольных усеченных ячеек

Тип ячейки	$S_{x, i, j}^{ib, c, E}$	$S_{x, i, j}^{ib, c, W}$
С-З	$((u_{i, j}^{ib}[n_x \Delta S]_{i, j}^{ib} - \bar{u}_{i, j})u_{i, j}^{ib} + v_{i, j}^{ib}[n_y \Delta S]_{i, j}^{ib}u(x_i, y_{i, j}^{ib}))/4$	0
Ю-З		
С-В	0	$((u_{i, j}^{ib}[n_x \Delta S]_{i, j}^{ib} + \bar{u}_{i-1, j})u_{i, j}^{ib} + v_{i, j}^{ib}[n_y \Delta S]_{i, j}^{ib}u(x_{i-1}, y_{i-1, j}^{ib}))/4$
Ю-В		

Таблица 8.

$S_{y, i, j}^{ib, c, N}$ и $S_{y, i, j}^{ib, c, S}$ для треугольных усеченных ячеек

Тип ячейки	$S_{y, i, j}^{ib, c, N}$	$S_{y, i, j}^{ib, c, S}$
С-З	0	$((v_{i, j}^{ib}[n_y \Delta S]_{i, j}^{ib} + \bar{v}_{i, j-1})v_{i, j}^{ib} + u_{i, j}^{ib}[n_x \Delta S]_{i, j}^{ib}v(x_{i, j-1}^{ib}, y_{j-1}))/4$
С-В		
Ю-З	$((v_{i, j}^{ib}[n_y \Delta S]_{i, j}^{ib} - \bar{v}_{i, j})v_{i, j}^{ib} + u_{i, j}^{ib}[n_x \Delta S]_{i, j}^{ib}v(x_{i, j}^{ib}, y_j))/4$	0
Ю-В		

1.2.6.2. Дискретизация вязких потоков

Для уравнения (1.3) при $\Omega^* = \Omega_{i,j}^u$ вязкие члены имеют вид

$$\int_{\Gamma_{i,j}^u} \nabla u \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Gamma_{i,j}^u} \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_{i,j}^u} \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.37)$$

Дискретизацию этих слагаемых на усеченных ячейках необходимо построить так, чтобы сохранить пятиточечную структуру шаблона. Для этого потоки нормальных напряжений ($\int_{\Gamma_{i,j}^u} \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS$ и $\int_{\Gamma_{i,j}^v} \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS$) и потоки касательных напряжений ($\int_{\Gamma_{i,j}^u} \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS$ и $\int_{\Gamma_{i,j}^v} \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS$) должны вычисляться в разных точках. В случае усеченных ячеек на внешних границах расчетной области нормальные напряжения будут вычисляться в центре ячейки $\Omega_{i,j}$, а касательные — в правом верхнем углу, как и в жидких ячейках (Рис. 1.2). Для остальных типов усеченных ячеек положение точек вычисления напряжений показано на Рис. 1.5.

Представление нормальных напряжений должно быть согласовано с дискретизацией давления: будем считать, что нормальные напряжения $\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}|_{i,j}$ принимают постоянные значения в усеченных ячейках и не требуется точно указывать точку их вычисления внутри ячейки. Тогда с учетом (1.16), (1.28) потоки нормальных напряжений представляются в виде суммы потоков через элементарные грани следующим образом:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^u} \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS \approx \theta_{i,j}^u \Delta y_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1,j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right), \quad \int_{\Gamma_{i,j}^v} \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS \approx \theta_{i,j}^v \Delta x_i \left(\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j+1} - \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right).$$

Формулы для $\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}|_{i,j}$ строятся таким образом, чтобы как для прямоугольных ячеек, так и для усеченных выполнялся численный аналог формулы Остроградского — Гаусса

$$\int_{\Omega_{i,j}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = \int_{\Gamma_{i,j}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

После дискретизации интегралов и сравнения с (1.15) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \approx \frac{\theta_{i,j}^u u_{i,j} - \theta_{i-1,j}^u u_{i-1,j} + (\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u) u_{i,j}^{ib}}{V_{i,j} / \Delta y_j}, \quad (1.38)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{\theta_{i,j}^v v_{i,j} - \theta_{i,j-1}^v v_{i,j-1} + (\theta_{i,j-1}^v - \theta_{i,j}^v) v_{i,j}^{ib}}{V_{i,j}/\Delta x_i}. \quad (1.39)$$

Эти формулы верны для усеченных ячеек любого типа, в них естественным образом учитываются граничные условия. Для жидких ячеек они переходят в стандартные конечно-разностные соотношения.

Слагаемые с касательными напряжениями вдали от погруженной границы могут быть записаны в виде

$$\int_{\Gamma_{i,j}^u} \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Gamma_{i,j}^{n,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{n,w}} \frac{\partial u}{\partial y} dx - \int_{\Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{s,w}} \frac{\partial u}{\partial y} dx.$$

Применение квадратурной формулы центральных прямоугольников дает

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{n,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{n,w}} \frac{\partial u}{\partial y} dx \approx (\Delta x_{i,j}^{n,e} + \Delta x_{i+1,j}^{n,w}) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}, \quad \int_{\Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{s,w}} \frac{\partial u}{\partial y} dx \approx (\Delta x_{i,j-1}^{s,e} + \Delta x_{i+1,j-1}^{s,w}) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j-1},$$

где для обеспечения локальной консервативности потоков величины $\Delta x_{i,j}^{n,e}$, $\Delta x_{i+1,j}^{n,w}$, $\Delta x_{i,j-1}^{s,e}$ и $\Delta x_{i+1,j-1}^{s,w}$ обозначают только жидкие части граней, т. е. $\Delta x_{i,j}^{n,e} = \Delta x_{i,j}^{n,w} = \theta_{i,j}^v \Delta x_i / 2$. Формула для $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}$ получается при дифференцировании линейного интерполяционного полинома $u(x_i, \cdot)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\frac{1}{2}\theta_{i,j+1}^u \Delta y_{j+1} + \frac{1}{2}\theta_{i,j}^u \Delta y_j}. \quad (1.40)$$

Аналогично получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,j}^v} \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Gamma_{i,j}^{e,n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{e,s}} \frac{\partial v}{\partial x} dy - \int_{\Gamma_{i,j}^{w,n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{w,s}} \frac{\partial v}{\partial x} dy, \\ \int_{\Gamma_{i,j}^{e,n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{e,s}} \frac{\partial v}{\partial x} dy &\approx (\Delta y_{i,j}^{e,n} + \Delta y_{i,j+1}^{e,s}) \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j}, \quad \int_{\Gamma_{i,j}^{w,n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{w,s}} \frac{\partial v}{\partial x} dy \approx (\Delta y_{i-1,j}^{w,n} + \Delta y_{i-1,j+1}^{w,s}) \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i-1,j}, \\ \Delta y_{i,j}^{e,n} &= \frac{1}{2}\theta_{i,j}^u \Delta y_j = \Delta y_{i,j}^{e,s}, \quad \Delta y_{i-1,j}^{w,n} = \frac{1}{2}\theta_{i-1,j}^u \Delta y_j = \Delta y_{i-1,j}^{w,s}. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\frac{1}{2}\theta_{i+1,j}^v \Delta x_{i+1} + \frac{1}{2}\theta_{i,j}^v \Delta x_i}. \quad (1.41)$$

Таким образом, дискретизация члена, описывающего вязкую диффузию, записывается на пятиточечном шаблоне следующим образом:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^u} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) dS \approx \mathcal{K}_W^x(i, j)u_{i-1,j} + \mathcal{K}_E^x(i, j)u_{i+1,j} + \mathcal{K}_P^x(i, j)u_{i,j} + \mathcal{K}_S^x(i, j)u_{i,j-1} + \mathcal{K}_N^x(i, j)u_{i,j+1}, \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_P^x(i, j) &= -\frac{(\theta_{i,j}^u)^2 \Delta y_j}{V_{i,j}/\Delta y_j} - \frac{(\theta_{i,j}^u)^2 \Delta y_j}{V_{i+1,j}/\Delta y_j} - \mathcal{K}_S^x(i, j) - \mathcal{K}_N^x(i, j), \\ \mathcal{K}_N^x(i, j) &= \frac{\theta_{i,j}^v \Delta x_i + \theta_{i+1,j}^v \Delta x_{i+1}}{\theta_{i,j+1}^u \Delta y_{j+1} + \theta_{i,j}^u \Delta y_j}, \quad \mathcal{K}_S^x(i, j) = \frac{\theta_{i,j-1}^v \Delta x_i + \theta_{i+1,j-1}^v \Delta x_{i+1}}{\theta_{i,j}^u \Delta y_j + \theta_{i,j-1}^u \Delta y_{j-1}}, \\ \mathcal{K}_E^x(i, j) &= \frac{\theta_{i,j}^u \Delta y_j \theta_{i+1,j}^u}{V_{i+1,j}/\Delta y_j}, \quad \mathcal{K}_W^x(i, j) = \frac{\theta_{i,j}^u \Delta y_j \theta_{i-1,j}^u}{V_{i,j}/\Delta y_j}, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad j = \overline{2, M-1}; \\ \int_{\Gamma_{i,j}^v} (\nabla v \cdot \mathbf{n}) dS &\approx \mathcal{K}_W^y(i, j)v_{i-1,j} + \mathcal{K}_E^y(i, j)v_{i+1,j} + \mathcal{K}_P^y(i, j)v_{i,j} + \mathcal{K}_S^y(i, j)v_{i,j-1} + \mathcal{K}_N^y(i, j)v_{i,j+1}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_P^y(i, j) &= -\frac{(\theta_{i,j}^v)^2 \Delta x_i}{V_{i,j}/\Delta x_i} - \frac{(\theta_{i,j}^v)^2 \Delta x_i}{V_{i,j+1}/\Delta x_i} - \mathcal{K}_W^y(i, j) - \mathcal{K}_E^y(i, j), \\ \mathcal{K}_E^y(i, j) &= \frac{\theta_{i,j}^u \Delta y_j + \theta_{i,j+1}^u \Delta y_{j+1}}{\theta_{i+1,j}^v \Delta x_{i+1} + \theta_{i,j}^v \Delta x_i}, \quad \mathcal{K}_W^y(i, j) = \frac{\theta_{i-1,j}^u \Delta y_j + \theta_{i-1,j+1}^u \Delta y_{j+1}}{\theta_{i,j}^v \Delta x_i + \theta_{i-1,j}^v \Delta x_{i-1}}, \\ \mathcal{K}_N^y(i, j) &= \frac{\theta_{i,j+1}^v \Delta x_i \theta_{i,j}^v}{V_{i,j+1}/\Delta x_i}, \quad \mathcal{K}_S^y(i, j) = \frac{\theta_{i,j}^v \Delta x_i \theta_{i,j-1}^v}{V_{i,j}/\Delta x_i}, \quad i = \overline{2, N-1}, \quad j = \overline{2, M-2}. \end{aligned}$$

Если одна из граней ячейки $\Omega_{i,j}$ является твердой, то формулы для элементов матриц \mathcal{K}^x , \mathcal{K}^y должны быть модифицированы с учетом граничных условий. Для твердых $\Gamma_{i,j}^n$ и $\Gamma_{i,j}^e$ соответственно имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,j}^{ib,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{ib,w}} \frac{\partial u}{\partial y} dx &\approx (\Delta x_{i,j}^{ib,e} + \Delta x_{i+1,j}^{ib,w}) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} \approx \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j}^{ib} = \frac{u(x_i, y_{i,j}^{ib}) - u_{i,j}}{\frac{1}{2} \theta_{i,j}^u \Delta y_j}, \\ \int_{\Gamma_{i,j}^{ib,n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{ib,s}} \frac{\partial v}{\partial x} dy &\approx (\Delta y_{i,j}^{ib,n} + \Delta y_{i,j+1}^{ib,s}) \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} \approx \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j}^{ib} = \frac{v(x_{i,j}^{ib}, y_j) - v_{i,j}}{\frac{1}{2} \theta_{i,j}^v \Delta x_i}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\theta_{i,j+1}^u = 0$ из $\mathcal{K}_P^x(i, j)$ нужно вычесть $s_{i,j}^{ib,x} = \frac{2(\Delta x_{i,j}^{ib,e} + \Delta x_{i+1,j}^{ib,w})}{\theta_{i,j}^u \Delta y_j}$, а к $S_{x,i,j}^{ib,\nu} = \theta_{i,j}^u \Delta y_j \left(\frac{\theta_{i,j}^u - \theta_{i+1,j}^u}{V_{i+1,j}/\Delta y_j} u_{i+1,j}^{ib} - \frac{\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u}{V_{i,j}/\Delta y_j} u_{i,j}^{ib} \right)$ — прибавить $s_{i,j}^{ib,x} u(x_i, y_{i,j}^{ib})$. Аналогично получаем, что при $\theta_{i,j-1}^u = 0$ из $\mathcal{K}_P^x(i, j)$ нужно вычесть $s_{i,j-1}^{ib,x}$, к $S_{x,i,j}^{ib,\nu}$ — прибавить $s_{i,j-1}^{ib,x} u(x_i, y_{i,j}^{ib})$; при $\theta_{i+1,j}^v = 0$ из $\mathcal{K}_P^y(i, j)$ нужно вычесть $s_{i,j}^{ib,y} = \frac{2(\Delta y_{i,j}^{ib,n} + \Delta y_{i,j+1}^{ib,s})}{\theta_{i,j}^v \Delta x_i}$, к $S_{y,i,j}^{ib,\nu} = \theta_{i,j}^v \Delta x_i \left(\frac{\theta_{i,j}^v - \theta_{i,j+1}^v}{V_{i,j+1}/\Delta x_i} v_{i,j+1}^{ib} - \frac{\theta_{i,j-1}^v - \theta_{i,j}^v}{V_{i,j}/\Delta x_i} v_{i,j}^{ib} \right)$ нужно прибавить $s_{i,j}^{ib,y} v(x_{i,j}^{ib}, y_j)$; при $\theta_{i-1,j}^v = 0$ из $\mathcal{K}_P^y(i, j)$ нужно вычесть $s_{i-1,j}^{ib,y}$,

к $S_{y\ i,j}^{ib,\nu}$ — прибавить $s_{i-1,j}^{ib,y}v(x_{i,j}^{ib}, y_j)$. Тогда в силу граничных условий на границах расчетной области в $S_x^{ib,\nu}$ ненулевые элементы будут только на $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ($S_{x\ i,j}^{ib,\nu} = \frac{V_\infty(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}{\theta_{i,j}^u \Delta y_j}$, $i = \overline{2, N-2}$, $j = \{1, M\}$; $S_{x\ 1,j}^{ib,\nu} = \frac{V_\infty(\theta_{1,j}^u \Delta y_j)^2}{V_{1,j}}$ при $j = \overline{2, M-1}$; $S_{x\ 1,j}^{ib,\nu} = \frac{V_\infty(\theta_{1,j}^u \Delta y_j)^2}{V_{1,j}} + \frac{V_\infty(\Delta x_1 + \Delta x_2)}{\theta_{1,j}^u \Delta y_j}$, $j = \{1, M\}$), кроме того на Γ_4 из $\mathcal{K}_P^y(N, j)$ не нужно вычитать $s_{N,j}^{ib,y}$, к $\mathcal{K}_P^x(N-1, j)$ надо добавить $\frac{(\theta_{N-1,j}^u \Delta y_j)^2}{V_{N,j}}$.

Необходимо определить зависящие от типа усеченной ячейки значения $\Delta x_{i,j}^{ib,e}$, $\Delta x_{i+1,j}^{ib,w}$, $\Delta y_{i,j}^{ib,n}$, $\Delta y_{i,j+1}^{ib,s}$. Для этого рассмотрим дискретный аналог $\mathbf{P}^h(t) = P_x^h(t) \cdot \mathbf{e}_x + P_y^h(t) \cdot \mathbf{e}_y$ полного импульса $\mathbf{P}(t) = \int_{\Omega^f} \mathbf{v} dV$:

$$\mathbf{P}(t) \approx \mathbf{P}^h(t) = (\mathbf{1}_x^T \mathcal{M}^x u + \mathbf{1}_x^T \mathcal{M}^{x,ib} u^{ib}) \cdot \mathbf{e}_x + (\mathbf{1}_y^T \mathcal{M}^y v + \mathbf{1}_y^T \mathcal{M}^{y,ib} v^{ib}) \cdot \mathbf{e}_y, \quad (1.44)$$

где $\mathbf{1}_x \in \mathbb{R}^{G_x}$, $\mathbf{1}_y \in \mathbb{R}^{G_y}$ — векторы, состоящие из единиц. После умножения (1.23), (1.24) на $\mathbf{1}_x$ и $\mathbf{1}_y$ соответственно получаем

$$\begin{aligned} \frac{dP_x^h}{dt} &= -[\mathbf{1}_x^T \mathcal{C}^x[\bar{u}]u + \mathbf{1}_x^T S_x^{ib,c}] - [\mathbf{1}_x^T \mathcal{G}^x P - \mathbf{1}_x^T \nu(\mathcal{K}^x u + S_x^{ib,\nu})], \\ \frac{dP_y^h}{dt} &= -[\mathbf{1}_y^T \mathcal{C}^y[\bar{v}]v + \mathbf{1}_y^T S_y^{ib,c}] - [\mathbf{1}_y^T \mathcal{G}^y P - \mathbf{1}_y^T \nu(\mathcal{K}^y v + S_y^{ib,\nu})]. \end{aligned}$$

Квадратичным членам в правой части соответствует сумма конвективных и вязких потоков и градиента давления по всем контрольным объемам. Вследствие свойства локальной консервативности потоков через жидкие грани, все слагаемые взаимно уничтожаются за исключением тех, которые возникают на твердых границах усеченных ячеек. Для того чтобы выполнялся численный аналог (1.9), эти оставшиеся слагаемые должны соответствовать компонентам силы $\mathbf{F} = (F_{xa}, F_{ya})$ (1.7), (1.8):

$$F_{xa}^h = \sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}^{ib}} [n_x \Delta S]_{i,j}^{ib} \left(p_{i,j} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right) - \nu \text{Quad}_{i,j}^{ib} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} \right), \quad (1.45)$$

$$F_{ya}^h = \sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}^{ib}} -\nu \text{Quad}_{i,j}^{ib} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} \right) + [n_y \Delta S]_{i,j}^{ib} \left(p_{i,j} - \nu \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right). \quad (1.46)$$

В данных выражениях квадратуры от давления и нормальных напряжений вычислены по формуле прямоугольников с учетом того, что эти слагаемые являются константами на усеченных ячейках; в результате одна и та же формула оказывается верной для всех типов усеченных

ячеек. Наоборот, квадратуры от касательных напряжений, обозначенные как $\text{Quad}_{i,j}^{ib}$, зависят от типа усеченной ячейки и вычисляются по формуле трапеций. Для северной трапеции (Рис. 1.5) имеем:

$$F_{xa}^h|_{i,j} = (\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u) \Delta y_j \left[p_{i,j} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right] - \frac{\nu(\theta_{i,j-1}^v - \theta_{i,j}^v) \Delta x_i}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i-1,j} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} \right],$$

$$F_{ya}^h|_{i,j} = -\frac{\nu(\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u) \Delta y_j}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i-1,j} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} \right] + (\theta_{i,j-1}^v - \theta_{i,j}^v) \Delta x_i \left[p_{i,j} - \nu \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right].$$

Рассмотрим слагаемое

$$[\mathbf{I}^T \mathcal{G}P - \mathbf{I}^T \nu(\mathcal{K}U + S^{ib,\nu})] = \sum_{\text{Cut-volumes } \Omega_{i,j}^u \Gamma_{i,j}^u} \int \left[p_{i,j} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma_{i,j}^u} \nu \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS.$$

С учетом (1.38) вклад нормальных напряжений имеет вид

$$\sum_{\text{Cut-volumes } \Omega_{i,j}^u} \theta_{i,j}^u \Delta y_j \left(p_{i+1,j} - p_{i,j} - \nu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1,j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right] \right). \quad (1.47)$$

После перенумерации для выделения суммы по ячейкам сетки получаем, что давление и нормальные напряжения взаимно уничтожаются на ячейках, для которых $\theta_{i,j}^u = \theta_{i-1,j}^u = 1$, и остается только

$$\sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}^{ib}} (\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u) \Delta y_j \left(p_{i,j} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right). \quad (1.48)$$

Аналогично, для y -й компоненты вклад нормальных напряжений равен

$$\sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}^{ib}} (\theta_{i,j-1}^v - \theta_{i,j}^v) \Delta x_i \left(p_{i,j} - \nu \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right). \quad (1.49)$$

Эти суммы равны вкладам нормальных напряжений в (1.45) и (1.46).

Для касательных напряжений потоки на всех жидких гранях взаимно уничтожаются, и остаются только потоки на погруженных границах. Для северной трапеции вклад на $\Gamma_{i,j}^{ib,w} \cup \Gamma_{i,j}^{ib,e}$ равен:

$$- \nu \left[\Delta x_{i,j}^{ib,w} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i-1,j} + \Delta x_{i,j}^{ib,e} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} \right], \quad (1.50)$$

аналогично, для y -й компоненты:

$$- \nu(\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u) \left[\Delta y_{i,j}^{ib,s} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i-1,j} + \Delta y_{i,j}^{ib,n} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} \right]. \quad (1.51)$$

После сравнения с $F_{xa}^h|_{i,j}$ и $F_{ya}^h|_{i,j}$ для северной трапеции можно однозначно определить значения величин $\Delta x_{i,j}^{ib,w}$, $\Delta x_{i,j}^{ib,e}$, $\Delta y_{i,j}^{ib,s}$ и $\Delta y_{i,j}^{ib,n}$:

$$\Delta x_{i,j}^{ib,w} = \Delta x_{i,j}^{ib,e} = \Delta x_i / 2, \quad \Delta y_{i,j}^{ib,s} = \Delta y_{i,j}^{ib,n} = |\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u| \Delta y_j / 2. \quad (1.52)$$

Аналогично можно получить формулы для остальных типов усеченных ячеек (Таблицы 9, 10).

Формулы для вычисления $\Delta x_{i,j}^{ib,w}$, $\Delta x_{i,j}^{ib,e}$, $\Delta y_{i,j}^{ib,s}$, $\Delta y_{i,j}^{ib,n}$

Ячейка	$\Delta x_{i,j}^{ib,w}$	$\Delta x_{i,j}^{ib,e}$	$\Delta y_{i,j}^{ib,s}$	$\Delta y_{i,j}^{ib,n}$
Трапецевидные				
С, Ю	$\Delta x_i/2$		$ \theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u \Delta y_j/2$	
В, З	$ \theta_{i,j-1}^v - \theta_{i,j}^v \Delta x_i/2$		$\Delta y_j/2$	
Пятиугольные				
С-З	$(1 - \theta_{i,j}^v) \Delta x_i$	0	0	$(1 - \theta_{i-1,j}^u) \Delta y_j$
С-В	0	$(1 - \theta_{i,j}^v) \Delta x_i$	0	$(1 - \theta_{i,j}^u) \Delta y_j$
Ю-З	$(1 - \theta_{i,j-1}^v) \Delta x_i$	0	$(1 - \theta_{i-1,j}^u) \Delta y_j$	0
Ю-В	0	$(1 - \theta_{i,j-1}^v) \Delta x_i$	$(1 - \theta_{i,j}^u) \Delta y_j$	0
Треугольные				
Все	$\max\{\theta_{i,j}^v, \theta_{i,j-1}^v\} \Delta x_i/2$		$\max\{\theta_{i,j}^u, \theta_{i-1,j}^u\} \Delta y_j/2$	

Таблица 10.

Формулы для вычисления $\text{Quad}_{i,j}^{ib}(\frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n})$, $\text{Quad}_{i,j}^{ib}(\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n})$

Ячейка	$\text{Quad}_{i,j}^{ib}(\frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n})$	$\text{Quad}_{i,j}^{ib}(\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n})$
Трапецевидные		
С,Ю	$\frac{\Delta x_i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big _{i,j}^{ib} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{i-1,j}^{ib} \right)$	0
В,З	0	$\frac{\Delta y_j}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big _{i,j}^{ib} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big _{i,j-1}^{ib} \right)$
Пятиугольные		
С-З	$(1 - \theta_{i,j}^v) \Delta x_i \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{i-1,j}^{ib}$	$(1 - \theta_{i-1,j}^u) \Delta y_j \frac{\partial v}{\partial x} \Big _{i,j}^{ib}$
С-В	$(1 - \theta_{i,j}^v) \Delta x_i \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{i,j}^{ib}$	$(1 - \theta_{i,j}^u) \Delta y_j \frac{\partial v}{\partial x} \Big _{i,j}^{ib}$
Ю-З	$(1 - \theta_{i,j-1}^v) \Delta x_i \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{i-1,j}^{ib}$	$(1 - \theta_{i-1,j}^u) \Delta y_j \frac{\partial v}{\partial x} \Big _{i,j-1}^{ib}$
Ю-В	$(1 - \theta_{i,j-1}^v) \Delta x_i \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{i,j}^{ib}$	$(1 - \theta_{i,j}^u) \Delta y_j \frac{\partial v}{\partial x} \Big _{i,j-1}^{ib}$
Треугольные		
С-З	$\frac{\theta_{i,j-1}^v \Delta x_i}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{i,j}^{ib}$	$\frac{\theta_{i,j}^u \Delta y_j}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \Big _{i,j-1}^{ib}$
С-В	$\frac{\theta_{i,j-1}^v \Delta x_i}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{i-1,j}^{ib}$	$\frac{\theta_{i-1,j}^u \Delta y_j}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \Big _{i,j-1}^{ib}$
Ю-З	$\frac{\theta_{i,j}^v \Delta x_i}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{i,j}^{ib}$	$\frac{\theta_{i,j}^u \Delta y_j}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \Big _{i,j}^{ib}$
Ю-В	$\frac{\theta_{i,j}^v \Delta x_i}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \Big _{i-1,j}^{ib}$	$\frac{\theta_{i-1,j}^u \Delta y_j}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \Big _{i,j}^{ib}$

1.2.7. Интегрирование по времени

Интегрирование по времени получающейся после дискретизации по пространству дифференциально-алгебраической системы (1.15), (1.23), (1.24) производится с помощью полунявного метода, основанного на

схеме типа Адамса — Башфорта второго порядка с дифференцированием назад AB/BDF 2 [40]. Этот метод состоит из двух шагов. Шаг предиктора приводит к решению разностного аналога уравнения Гельмгольца для прогноза скорости \tilde{U} в момент времени $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$

$$\mathcal{M} \frac{3\tilde{U} - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + 2(\mathcal{C}[\bar{U}^n]U^n + S^{ib,c,n}) - \mathcal{C}[\bar{U}^{n-1}]U^{n-1} - S^{ib,c,n-1} - \mathcal{D}^T P^n - \nu \mathcal{K} \tilde{U} - \nu S^{ib,\nu} = 0. \quad (1.53)$$

Следующий шаг

$$\frac{3}{2} \mathcal{M} \frac{U^{n+1} - \tilde{U}}{\Delta t} - \mathcal{D}^T (P^{n+1} - P^n) = 0, \quad \mathcal{D} U^{n+1} + \bar{U}^{ib,n+1} = 0 \quad (1.54)$$

приводит к решению разностного аналога уравнения Пуассона для функции давления $\Phi = \frac{2\Delta t(P^{n+1} - P^n)}{3}$:

$$\mathcal{A} \Phi = \mathcal{D} \tilde{U} + \bar{U}^{ib,n+1},$$

$$\mathcal{A} = -\mathcal{D}^x (\mathcal{M}^x)^{-1} (\mathcal{D}^x)^T - \mathcal{D}^y (\mathcal{M}^y)^{-1} (\mathcal{D}^y)^T, \quad \mathcal{A} \in M(\mathbb{R})_{G \times G}, \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_P(i, j) &= -\mathcal{A}_E(i, j) - \mathcal{A}_W(i, j) - \mathcal{A}_N(i, j) - \mathcal{A}_S(i, j), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \\ \mathcal{A}_E(i, j) &= \frac{(\theta_{i,j}^u \Delta y_j)^2}{\frac{1}{2} V_{i,j} + \frac{1}{2} V_{i+1,j}} = \mathcal{A}_W(i+1, j), \quad \mathcal{A}_N(i, j) = \frac{(\theta_{i,j}^v \Delta x_i)^2}{\frac{1}{2} V_{i,j} + \frac{1}{2} V_{i,j+1}} = \mathcal{A}_S(i, j+1). \end{aligned}$$

Затем определяются скорости и давление в момент времени t_{n+1} :

$$U^{n+1} = \tilde{U} + \mathcal{M}^{-1} \mathcal{D}^T \Phi, \quad P^{n+1} = \frac{3}{2\Delta t} \Phi + P^n. \quad (1.56)$$

Отметим, что система (1.55) справедлива для всей вычислительной области, хотя в твердых ячейках уравнения имеют вид $0 \cdot \Phi_{i,j} = 0$: для обеспечения невырожденности матрицы \mathcal{A} в вычислительном процессе к $\mathcal{A}_P(i, j)$ добавляется малая вещественная константа δ . Численные эксперименты [54] показывают, что схема имеет порядок точности $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

1.3. Верификация метода LS-STAG

Описанная реализация метода LS-STAG была проверена на ряде тестовых задач: [31, 29]. Кроме того, было смоделировано обтекание кругового профиля, совершающего вращательные колебания, поскольку в этом случае, несмотря на ненулевую скорость точек профиля, форма расчетной области, заполненной жидкостью, не изменяется в процессе расчета [21].

1.3.1. Обтекание неподвижных профилей различных форм

Для каждого профиля вычислялись безразмерные стационарные аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления C_{xa} и подъемной силы C_{ya} , получаемые осреднением по большому промежутку времени нестационарных нагрузок $C_{xa}(t) = \frac{2F_{xa}}{\rho V_{\infty}^2 D}$ и $C_{ya}(t) = \frac{2F_{ya}}{\rho V_{\infty}^2 D}$ (F_{xa} и F_{ya} вычисляются по формулам (1.45), (1.46)), а также число Струхала Sh .

1.3.1.1. Обтекание кругового профиля

Метод LS-STAG позволяет на достаточно грубых сетках получить результаты, хорошо согласующиеся с известными в литературе данными [54, 72, 73, 133, 149], как в случае стационарных течений (Рис. 1.7), так и в случае нестационарных (Таблицы 11 и 12).

Таблица 11.

Значения C_{xa} при обтекании кругового профиля

Re	100	200	1000
Zdravkovich [149] (эксперимент)	1,21–1,41	—	—
LS-STAG (данная работа, 120×148)	1,310	1,330	1,187
LS-STAG (данная работа, 240×204)	1,320	1,331	1,405
LS-STAG (данная работа, 480×408)	1,318	1,327	1,525
Cheny [54] (LS-STAG, 550×350)	1,317	1,327	1,530
Henderson [73]	1,350	1,341	1,509
He [72]	1,353	1,355	1,519

Таблица 12.

Значения Sh при обтекании кругового профиля

Re	100	200	1000
Zdravkovich [149] (эксперимент)	0,16–0,17	—	—
LS-STAG (данная работа, 120×148)	0,172	0,200	0,259
LS-STAG (данная работа, 240×204)	0,170	0,200	0,249
Cheny [54] (LS-STAG, 550×350)	0,170	0,200	0,241
Henderson [73]	0,164	0,197	0,237
He [72]	0,167	0,198	0,239

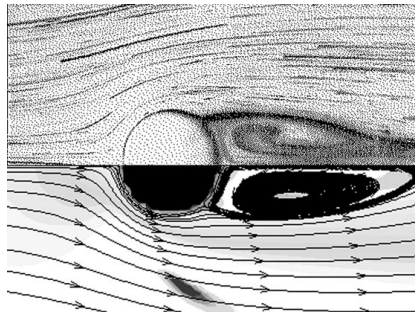


Рис. 1.7. Линии тока при $Re = 33,7$: снизу — расчет на сетке 120×148 , сверху — эксперимент [133]

1.3.1.2. Обтекание квадратного профиля

Рассчитанные значения C_{xa} и Sh хорошо согласуются с результатами работ [57, 68, 106, 123] даже на сетке 120×148 (Таблица 13).

Таблица 13.

Значения Sh при обтекании квадратного профиля

Re	100	200	250	300	400
Окаjима [106] (эксперимент)	0,141– 0,145	0,138– 0,145	0,139– 0,143	0,137– 0,139	0,129– 0,135
Данная работа	0,154	0,147	0,141	0,138	0,128
Saha [123]	0,159	0,163	0,142	0,146	0,167
Davis [57]	0,154	—	0,165	—	0,159
Franke [68]	—	0,157	0,141	0,130	—

1.3.1.3. Обтекание эллиптического профиля

В качестве характерного размера для эллиптического профиля, как и в работе [99], была выбрана проекция длины L_x большой полуоси эллипса K на ось Ox , т. е. $D = L_x \cdot \cos \alpha$ (α — угол атаки). Форма профиля задаётся отношением L_y/L_x , где L_y — длина малой полуоси эллипса K . При $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$ для двух эллиптических профилей ($L_y/L_x = 0,2$ и $L_y/L_x = 0,5$) были рассчитаны C_{xa} и Sh (Таблицы 14, 15). Для всех расчётов использовалась сетка 240×296 . Для одного из профилей ($L_y/L_x = 0,2$) при $\alpha = 45^\circ$ на Рис. 1.8 показаны распределение модуля скорости и линии тока при $Re = 163$. Результаты вычислительных экспериментов хорошо согласуются с представленными в работе [99].

Значения C_{xa} при обтекании эллиптического профиля

Re	163	525		1000
$(L_y/L_x; \alpha)$	(0,2; 45^0)	(0,5; 0^0)	(0,5; 45^0)	(0,5; 0^0)
Данная работа	3,76	0,79	2,53	0,61
Mittal [99]	3,71	0,78	2,52	0,61

Значения Sh при обтекании эллиптического профиля

Re	163	525		1000
$(L_y/L_x; \alpha)$	(0,2; 45^0)	(0,5; 0^0)	(0,5; 45^0)	(0,5; 0^0)
Данная работа	0,16	0,22	0,25	0,21
Mittal [99]	0,19	0,21	0,23	0,20

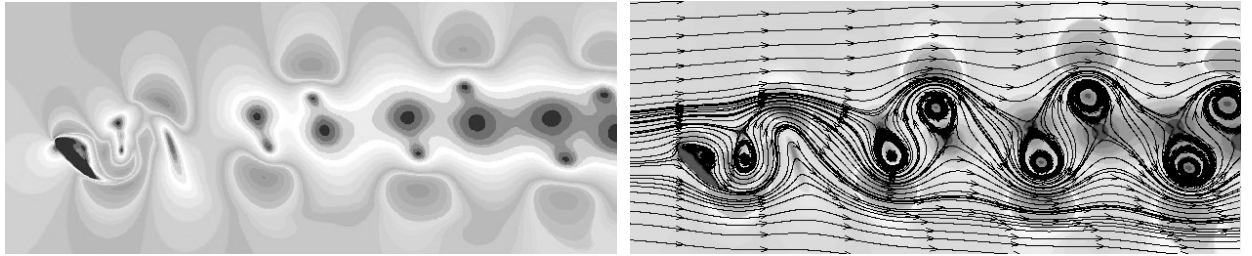


Рис. 1.8. Распределение модуля скорости (слева) и линии тока (справа) при $L_y/L_x = 0,2$, $\alpha = 45^0$, $Re = 163$

1.3.2. Обтекание кругового профиля, совершающего вращательные колебания

Рассмотрим задачу о моделировании обтекания кругового профиля, совершающего вращательные колебания. Полагаем, что угловая скорость профиля изменяется по закону

$$\omega = \omega(t) = \omega_0 \sin(2\pi S_e t),$$

где S_e — безразмерная частота вращательных колебаний, ω_0 — амплитуда угловой скорости. Тогда в зависимости от значений ω_0 и S_e могут наблюдаться различные режимы течения. Наибольший интерес представляют два возможных при определенных значениях параметров ω_0 и S_e эффекта: сильное снижение лобового сопротивления, экспериментально установленное в [134], и стабилизация следа (эффект Танеды), наблюдаемая в экспериментах [133]. Если ввести понятие относительной частоты

вынужденных колебаний $n = S_e/Sh$, где Sh — число Струхала при обтекании неподвижного профиля, характеризуемом тем же значением числа Re , то можно говорить о том, что первый эффект наблюдается в случае низкочастотных колебаний (в [134] — при $n < 5$), а второй — в случае высокочастотных (в [133] — при $n > 14$). Выбору оптимальных значений параметров ω_0 и S_e , при которых вращающийся профиль имеет наименьшее лобовое сопротивление при той или иной величине Re , посвящены многие расчетные работы, например [48, 54, 72].

Поскольку при изучении явления стабилизации следа в [133] принималось $\omega_0 = 0,5\pi^2 S_e$, а значение n достаточно велико, пиковые значения скорости движения границы профиля $v|_K = \omega_0 D/2$ будут примерно на порядок больше скорости набегающего потока. Поэтому численное моделирование данного эффекта требует устойчивости схемы при высоком значении местного числа Re . Численно эффект Танеды впервые был воспроизведен в работе [10], в которой был использован бессеточный метод вязких вихревых доменов. Сведений о моделировании данного явления сеточными методами обнаружить не удалось.

1.3.2.1. Низкочастотные вращательные колебания

Такое движение было предложено в [134], где экспериментально был установлен эффект снижения лобового сопротивления на 80 % при определенных значениях параметров ω_0 и S_e и $Re = 15000$. Для указанных в [48, 72] наборов параметров ω_0 и S_e были выполнены расчеты течений при $Re = 200$ и $Re = 1000$ ($n \approx 3,70$ и $n \approx 2,59$ соответственно). Отличие работы [48] от работы [72] состоит в использовании менее трудоёмкого с вычислительной точки зрения алгоритма, основанного на модели более низкого порядка для уравнений Навье — Стокса. Для сравнения также использовались результаты расчётов [54].

На Рис. 1.9 представлены зависимости $C_{xa}(t)$ для неподвижного профиля, профиля, совершающего крутильные колебания, и «базового» тече-

ния, под которым понимается стационарное симметричное, но неустойчивое течение, при котором достигается C_{xa}^{\min} — априори наименьшее значение C_{xa} . При $Re = 200$ значение $C_{xa}^{\min} \approx 0,864$, при $Re = 1000$ — $C_{xa}^{\min} \approx 0,422$. Расчеты проводились на сетке 240×296 . Отметим, что для цилиндра, совершающего крутильные колебания, картина обтекания становится квазисимметричной и существенно отличается от картины обтекания неподвижного профиля (Рис. 1.10): наблюдается режим захвата частоты.

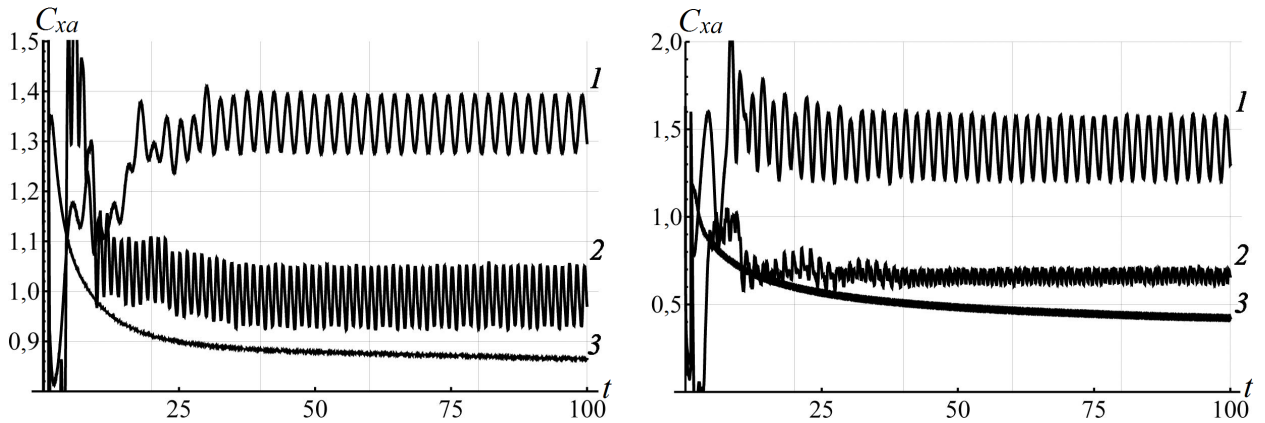


Рис. 1.9. Зависимость $C_{xa}(t)$ при $Re = 200$ (слева) и $Re = 1000$ (справа):
1 — неподвижный профиль; 2 — профиль, совершающий крутильные колебания; 3 — стационарное неустойчивое «базовое» течение.

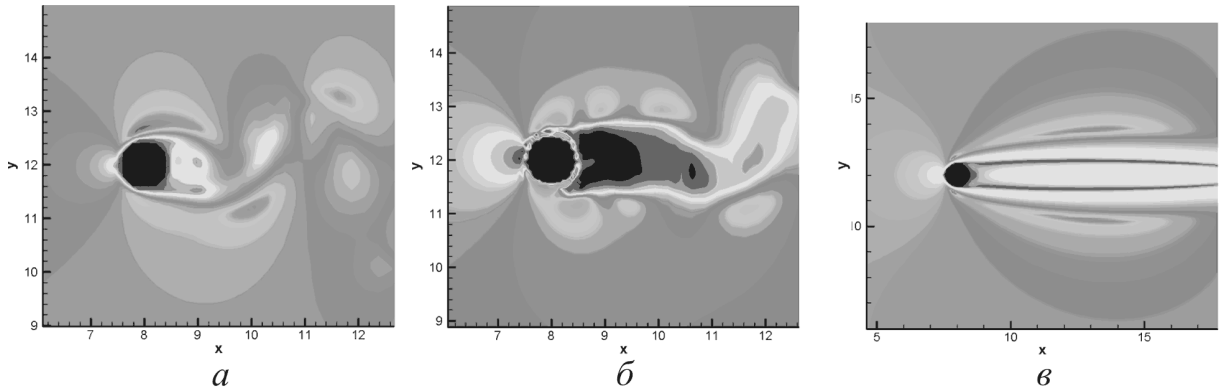


Рис. 1.10. Распределение модуля скорости при $Re = 200$:

a — неподвижный профиль; $б$ — движение с параметрами $\omega_0 = 6,0$,
 $S_e = 0,74$; $в$ — стационарное неустойчивое «базовое» течение

Расчеты проводились на сетке 240×296 . Максимальное снижение C_{xa} наблюдается при оптимальных значениях параметров [72] (Таблица 16). В Таблице 17 для смоделированных течений представлены пиковые значения коэффициента подъемной силы.

Значения C_{xa} и относительное снижение C_{xa} (в скобках)

Re	200			1000	
$(\omega_0; S_e)$	(0; 0)	(6,0; 0,74)	(8,5; 0,74)	(0; 0)	(5,5; 0,625)
LS-STAG, 240×296	1,335	0,988 (26%)	1,012 (24%)	1,409	0,665 (53%)
LS-STAG, 550×350	1,327	0,926 (30%)	0,94 (29%)	1,530	0,647 (58%)
He [72]	1,355	0,949 (30%)	—	1,519	0,608 (60%)
Bergmann [48]	1,390	1,045 (30%)	0,990	1,505	—

Таблица 17.

Пиковые значения коэффициента подъёмной силы C_{ya}^{\max}

Re	200			1000	
$(\omega_0; S_e)$	(0; 0)	(6,0; 0,74)	(8,5; 0,74)	(0; 0)	(5,5; 0,625)
LS-STAG, 240×296	0,653	0,364	0,533	1,246	0,072
LS-STAG, 550×350	0,710	0,337	0,491	1,482	0,103
Linnick [93]	0,700	—	—	—	—

1.3.2.2. Высокочастотные вращательные колебания

Моделирование проводилось при $n = 20$ для $Re = 33,7$ и $Re = 111$. В случае неподвижного профиля картины течения различны: при $Re = 33,7$ за профилем устойчиво располагаются два вихря (Рис. 1.7), при $Re = 111$ образуется вихревая дорожка (Рис. 1.11). Но при $S_e = 3,4$ ($\omega_0 = 0,5\pi^2 S_e$) картины становятся похожими (Рис. 1.12, 1.13): след выглядит стабильным, но вблизи поверхности течение нестационарное из-за вращения.

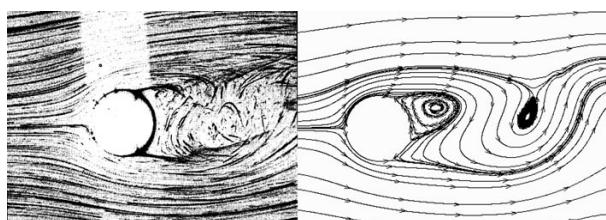


Рис. 1.11. Линии тока при $Re = 111$ и $S_e = 0$: слева — эксперимент [133], справа — расчет LS-STAG на сетке 120×148

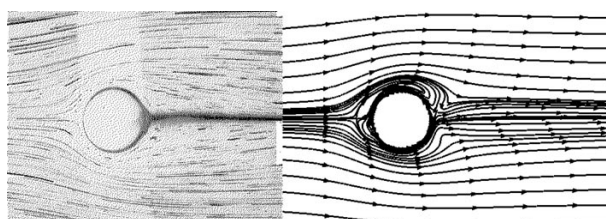


Рис. 1.12. Линии тока при $Re = 33,7$ и $S_e = 3,4$: слева — эксперимент [133], справа — LS-STAG (сетка 416×408 , $\Delta t = 10^{-3}$)

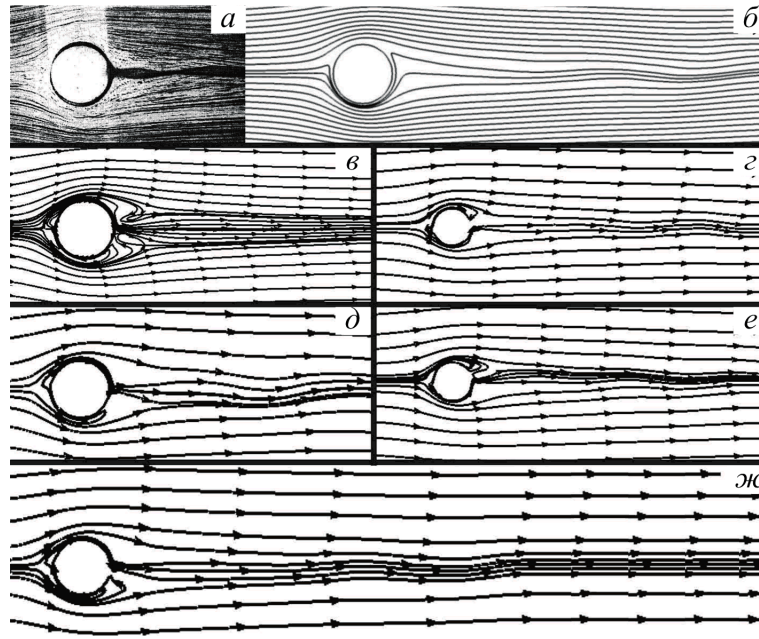


Рис. 1.13. Линии тока при $Re=111$ и $S_e=3,4$: a — эксперимент [133];
 $б$ — расчет [10]; расчеты LS-STAG, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$: $в$ — 1568×1560 ,
 $h_{\min} = 0,00195$; $г$ — 1533×1683 , $h_{\min} = 0,00195$; $д$ — LS-STAG, 1533×1883 ,
 $h_{\min} = 0,0008$; $е$ — 480×592 , $h_{\min} = 0,01562$; $ж$ — 800×792 , $h_{\min} = 0,0039$

Линии тока (Рис. 1.7, 1.11–1.13) похожи на данные эксперимента [133]: даже при расчетах на сравнительно грубых (для таких высоких пиковых значений скорости $v|_K$) сетках (Рис. 1.12, 1.13, $е$) удается уловить заметное в эксперименте характерное сгущение линий тока в следе непосредственно у кормовой части профиля и постепенное увеличение расстояния между ними вплоть до удаления от профиля на D . На Рис. 1.13, $б$, этот эффект незаметен.

1.4. Результаты и выводы по главе 1

Построены дискретные аналоги уравнений неразрывности и баланса импульса для всех типов усеченных ячеек в двумерном случае, при которой выполняются дискретные аналоги законов сохранения полной массы, импульса и, в случае отсутствия вязкости, кинетической энергии. Для верификации использованы тестовые задачи о моделировании обтекания профилей различных форм. В частности, смоделирован редко воспроизводимый численно эффект Танеды.

Описание представленного в главе 1 метода LS-STAG и результаты решения тестовых задач опубликованы в работах [21, 26, 28, 29, 30, 32].

Глава 2. Модификация метода LS-STAG для решения сопряженных задач гидроупругости

Методы расчета течений с подвижными границами на неподвижных прямоугольных сетках могут быть эффективной альтернативой сеточным методам с подвижной сеткой, согласованной с телом. В данной главе представлены соответствующие модификации метода LS-STAG.

Модификация LS-STAG-сетки для случая подвижных границ основана на тех же идеях, которые используются при построении лагранжево-эйлеровых сеток (ALE — Arbitrary Lagrangian–Eulerian) [60]. Метод ALE предполагает, что расчетная область изменяется при движении границы так, что сетка следует за подвижной границей лагранжевым способом и в то же время остается неподвижной, эйлеровой, на достаточном удалении от подвижной границы.

Для верификации модифицированного метода LS-STAG использовались тестовые задачи о вынужденных продольных и поперечных колебаниях кругового профиля, в которых профиль движется по заданному закону. Также с использованием описанной модификации метода LS-STAG получено численное решение гидроупругой задачи о моделировании ветрового резонанса кругового профиля. Результаты вычислительных экспериментов хорошо согласуются с известными в литературе экспериментальными и расчетными данными других исследователей.

2.1. Математическая постановка задачи

В данной главе рассматривается внешнее обтекание жесткого профиля произвольной формы равномерным потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности, причем профиль имеет степени свободы. Вместе с расчетом обтекания профиля (1.1) необходимо также моделировать его движение, которое описывается уравнениями динамики

$$\ddot{q} = \bar{\Phi}(q, \dot{q}) + Q^{\text{flow}} + Q^{\text{ext}}. \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{q} — обобщенные координаты профиля, $\tilde{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ определяется связями, наложенными на профиль, \mathbf{Q}^{flow} — обобщенная аэродинамическая сила, \mathbf{Q}^{ext} — внешние массовые силы.

2.2. Учет движения погруженных границ

Уравнения (1.2)–(1.4) при расчете ALE-методом приобретают вид

$$\int_{\Gamma^*(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^*(t)} u dV + \int_{\Gamma^*(t)} ([\mathbf{v} - \mathbf{v}^g] \cdot \mathbf{n}) u dS + \int_{\Gamma^*(t)} p \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma^*(t)} \nu \nabla u \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^*(t)} v dV + \int_{\Gamma^*(t)} ([\mathbf{v} - \mathbf{v}^g] \cdot \mathbf{n}) v dS + \int_{\Gamma^*(t)} p \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma^*(t)} \nu \nabla v \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (2.4)$$

где \mathbf{v}^g — скорость движения расчетной области (узлов сетки). Видно, что уравнения (2.2)–(2.4) похожи на уравнения (1.2)–(1.4) за исключением конвективного члена, который приобрел вид

$$\int_{\Gamma^*(t)} ([\mathbf{v} - \mathbf{v}^g] \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} dS. \quad (2.5)$$

В [90] показано, что численная схема метода ALE сохраняет точность и устойчивость, присущие базовому методу с неподвижной сеткой, если скорость сетки и алгоритм ее перестроения выбраны так, что выполняется численный аналог геометрического закона сохранения:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^*(t)} dV = \int_{\Gamma^*(t)} \mathbf{v}^g \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.6)$$

Это уравнение устанавливает, что изменение объемов ячеек во времени должно быть равно объему, «заметаемому» границами ячеек.

Выполнение геометрического закона сохранения представляет собой нетривиальную задачу, когда вся сетка деформируется при движении ее границы. Для метода LS-STAG, наоборот, выполнить это условие достаточно просто, т.к. движутся лишь узлы сетки на твердых границах

$\Gamma_{i,j}^{ib}(t)$ усеченных ячеек. Таким образом, ALE-конвективный поток (2.5) через твердые грани $\Omega_{i,j}^u(t)$ и $\Omega_{i,j}^v(t)$ равен соответственно

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{ib,e}(t) \cup \Gamma_{i+1,j}^{ib,w}(t)} ([\mathbf{v} - \mathbf{v}^g] \cdot \mathbf{n}_{i,j}^{ib}) u dS \quad \text{и} \quad \int_{\Gamma_{i,j}^{ib,n}(t) \cup \Gamma_{i,j+1}^{ib,s}(t)} ([\mathbf{v} - \mathbf{v}^g] \cdot \mathbf{n}_{i,j}^{ib}) v dS, \quad (2.7)$$

в то время как выражения для потоков через другие грани рассматриваемых контрольных объемов остаются неизменными, поскольку перемещения жидких граней ячеек равны нулю. Дискретизация (2.7) основана на кососимметричной дискретизации конвективных потоков, рассмотренной в главе 1. Формулы для вычисления источникового члена в усеченных ячейках для случая подвижных погруженных границ приведены в Таблицах 18–23. Численный поток $\bar{U}_{i,j}^g$ для усеченной ячейки $\Omega_{i,j}(t)$ будет определен ниже.

Таблица 18.

$S_{x, i,j}^{ib,c,E}$ и $S_{x, i,j}^{ib,c,W}$ для трапециевидных усеченных ячеек

Ячейка	$S_{x, i,j}^{ib,c,E}$	$S_{x, i,j}^{ib,c,W}$
С, Ю	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g) \cdot u(x_i, y_{i,j}^{ib})/4$	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g) \cdot u(x_{i-1}, y_{i-1,j}^{ib})/4$
В	0	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g + \bar{u}_{i-1,j}) \cdot u_{i,j}^{ib}/4$
З	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g - \bar{u}_{i,j}) \cdot u_{i,j}^{ib}/4$	0

Таблица 19.

$S_{y, i,j}^{ib,c,N}$ и $S_{y, i,j}^{ib,c,S}$ для трапециевидных усеченных ячеек

Ячейка	$S_{y, i,j}^{ib,c,N}$	$S_{y, i,j}^{ib,c,S}$
С	0	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g + \bar{v}_{i,j-1}) \cdot v_{i,j}^{ib}/4$
Ю	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g - \bar{v}_{i,j}) \cdot v_{i,j}^{ib}/4$	0
В, З	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g) \cdot v(x_{i,j}^{ib}, y_j)/4$	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g) \cdot v(x_{i,j-1}^{ib}, y_{j-1})/4$

Таблица 20.

$S_{x, i,j}^{ib,c,E}$ и $S_{x, i,j}^{ib,c,W}$ для пятиугольных усеченных ячеек

Ячейка	$S_{x, i,j}^{ib,c,E}$	$S_{x, i,j}^{ib,c,W}$
С-З	0	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g + \bar{v}_{i,j}) \cdot u(x_{i-1}, y_{i-1,j}^{ib})/4$
С-В	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g + \bar{v}_{i,j}) \cdot u(x_i, y_{i,j}^{ib})/4$	0
Ю-З	0	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g - \bar{v}_{i,j-1}) \cdot u(x_{i-1}, y_{i-1,j}^{ib})/4$
Ю-В	$(\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g - \bar{v}_{i,j-1}) \cdot u(x_i, y_{i,j}^{ib})/4$	0

$S_{y, i, j}^{ib, c, N}$ и $S_{y, i, j}^{ib, c, S}$ для пятиугольных усеченных ячеек

Ячейка	$S_{y, i, j}^{ib, c, N}$	$S_{y, i, j}^{ib, c, S}$
С-З	$(\bar{U}_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g - \bar{u}_{i-1, j}) \cdot v(x_{i, j}^{ib}, y_j) / 4$	0
С-В	$(\bar{U}_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g + \bar{u}_{i, j}) \cdot v(x_{i, j}^{ib}, y_j) / 4$	0
Ю-З	0	$(\bar{U}_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g - \bar{u}_{i-1, j}) \cdot v(x_{i, j-1}^{ib}, y_{j-1}) / 4$
Ю-В	0	$(\bar{U}_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g + \bar{u}_{i, j}) \cdot v(x_{i, j-1}^{ib}, y_{j-1}) / 4$

Таблица 22.

$S_{x, i, j}^{ib, c, E}$ и $S_{x, i, j}^{ib, c, W}$ для треугольных усеченных ячеек

Ячейка	$S_{x, i, j}^{ib, c, E}$	$S_{x, i, j}^{ib, c, W}$
С-З, Ю-З	$(\{v_{i, j}^{ib}[n_y \Delta S]_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g\} u(x_i, y_{i, j}^{ib}) + \{u_{i, j}^{ib}[n_x \Delta S]_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g - \bar{u}_{i, j}\} u_{i, j}^{ib}) / 4$	0
С-В, Ю-В	0	$(\{v_{i, j}^{ib}[n_y \Delta S]_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g\} u(x_{i-1}, y_{i-1, j}^{ib}) + \{u_{i, j}^{ib}[n_x \Delta S]_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g + \bar{u}_{i-1, j}\} u_{i, j}^{ib}) / 4$

Таблица 23.

$S_{y, i, j}^{ib, c, N}$ и $S_{y, i, j}^{ib, c, S}$ для треугольных усеченных ячеек

Ячейка	$S_{y, i, j}^{ib, c, N}$	$S_{y, i, j}^{ib, c, S}$
С-З, С-В	0	$(\{u_{i, j}^{ib}[n_x \Delta S]_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g\} v(x_{i, j-1}^{ib}, y_{j-1}) + \{v_{i, j}^{ib}[n_y \Delta S]_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g + \bar{v}_{i, j-1}\} v_{i, j}^{ib}) / 4$
Ю-З, Ю-В	$(\{u_{i, j}^{ib}[n_x \Delta S]_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g\} v(x_{i, j}^{ib}, y_j) + \{v_{i, j}^{ib}[n_y \Delta S]_{i, j}^{ib} - \bar{U}_{i, j}^g - \bar{v}_{i, j}\} v_{i, j}^{ib}) / 4$	0

2.3. Интегрирование по времени

Используется схема предиктор-корректор первого порядка точности, для которой шаг предиктора имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}^{n+1} \tilde{U} - \mathcal{M}^n U^n}{\Delta t} + \mathcal{C}[\bar{U}^n - \bar{U}^{g, n}] U^n + S^{ib, c, n} - \mathcal{D}^{T, n} P^n - \\ - \nu \mathcal{K}^{n+1} \tilde{U} - \nu S^{ib, \nu, n+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

при этом коэффициенты в схеме теперь зависят от времени и должны вычисляться с учетом значений функции уровня на соответствующих временных шагах. Численный поток $\bar{U}^{g, n}$ находится из условия, что постоянное решение $U = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^G$ должно являться решением для дискрет-

ной схемы (2.8). В усеченных ячейках это приводит к

$$\frac{\mathcal{M}_P^{x,n+1}(i,j) - \mathcal{M}_P^{x,n}(i,j)}{\Delta t} - \frac{\bar{U}_{i,j}^{g,n} + \bar{U}_{i+1,j}^{g,n}}{2} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\mathcal{M}_P^{y,n+1}(i,j) - \mathcal{M}_P^{y,n}(i,j)}{\Delta t} - \frac{\bar{U}_{i,j}^{g,n} + \bar{U}_{i,j+1}^{g,n}}{2} = 0, \quad (2.10)$$

откуда с учетом (1.25) численный поток $\bar{U}_{i,j}^{g,n}$ для усеченной ячейки $\Omega_{i,j}^{n+1}$ становится полностью определенным:

$$\bar{U}_{i,j}^{g,n} = \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (2.11)$$

Данное соотношение является численным аналогом геометрического закона сохранения (2.6) для неявной схемы Эйлера (2.8); шаг корректора

$$\mathcal{M}^{n+1} \frac{U^{n+1} - \tilde{U}}{\Delta t} - \mathcal{D}^{T,n+1}(P^{n+1} - P^n) = 0, \quad \mathcal{D}^{n+1}U^{n+1} + \bar{U}^{ib,n+1} = 0 \quad (2.12)$$

не нарушает это условие. Таким образом, на каждом временном шаге численный поток $\bar{U}^{g,n}$ может быть легко получен из численного аналога геометрического закона сохранения (2.11) и включен в дискретизацию конвективных членов (Таблицы 20–23).

Шаг корректора (2.12), как и (1.54), приводит к решению разностного аналога уравнения Пуассона для функции давления, которая для случая подвижных погруженных границ принимает вид $\hat{\Phi} = \Delta t(P^{n+1} - P^n)$:

$$\mathcal{A}^{n+1}\hat{\Phi} = \mathcal{D}^{n+1}\tilde{U} + \bar{U}^{ib,n+1}. \quad (2.13)$$

Таким образом, формулы для определения скорости и давления в момент времени t_{n+1} , аналогичные (1.56), принимают вид

$$U^{n+1} = \tilde{U} + (\mathcal{M}^{n+1})^{-1}\mathcal{D}^{T,n+1}\hat{\Phi}, \quad P^{n+1} = \frac{\hat{\Phi}}{\Delta t} + P^n. \quad (2.14)$$

При расчете течений с подвижными погруженными границами также следует учитывать, что формула для определения числа Куранта должна быть скорректирована с учетом скорости сетки по аналогии с тем, как это было сделано в (2.7) для конвективных членов:

$$\begin{aligned} \text{CFL}_{i,j} = & [(\bar{u}_{i,j})^+ + (-\bar{u}_{i-1,j})^+ + (\bar{v}_{i,j})^+ + (-\bar{v}_{i,j-1})^+ + \\ & + (\bar{U}_{i,j}^{ib})^+ + (\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g)^+] \Delta t / V_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Поскольку скорости жидкости в усеченных ячейках принимают значения, близкие к скорости погруженной границы, необходимо ввести число Куранта, основанное на кинематике погруженной границы [54]:

$$\text{CFL}_{i,j}^{ib} = \frac{|u_{i,j}^{ib}|\Delta t}{\Delta x_i} + \frac{|v_{i,j}^{ib}|\Delta t}{\Delta y_j}. \quad (2.16)$$

Условие $\max(\text{CFL}_{i,j}^{ib}) < 1$ гарантирует, что тело никогда не «заметает» ячейку целиком за один шаг расчета. Расчеты показывают, что число Куранта, вычисляемое по кинематике подвижной границы по формуле (2.16), всегда много меньше числа Куранта, вычисляемого по формуле (2.15).

Поскольку расчет происходит на неподвижной прямоугольной сетке, возможно появление «новых» ячеек, т.е. жидких ячеек, которые на предыдущем шаге были полностью внутри твердой границы. В этих ячейках выполнение временного шага по схеме (2.8), (2.13)–(2.14) невозможно, и для аппроксимации течения в них применяются специальные процедуры [46, 54, 55, 136, 137]. В данной работе, как и в [54], если $\Omega_{i,j}^{u,n+1}$ является «новой» ячейкой (т.е. $\theta_{i,j}^{u,n} = 0$ и $\theta_{i,j}^{u,n+1} \neq 0$), то прогнозируемая скорость $\tilde{u}_{i,j}$ просто полагается равной скорости погруженной границы $u_{i,j}^{ib}$ вместо выполнения шага предиктора (2.8), в то время как шаг корректора (2.13)–(2.14) остается неизменным. Аналогично $\tilde{v}_{i,j}$ полагается равной скорости погруженной границы $v_{i,j}^{ib}$, если $\Omega_{i,j}^{v,n+1}$ является «новой» ячейкой (т.е. $\theta_{i,j}^{v,n} = 0$ и $\theta_{i,j}^{v,n+1} \neq 0$).

Также возможно появление «новых» твердых ячеек. В таких ячейках перед вычислением P^{n+1} по формуле (2.14) давление $p_{i,j}^n$ полагается равным нулю, чтобы $p_{i,j}^{n+1}$ в «новых» твердых ячейках не отличалось от давления в ячейках, которые остаются твердыми на протяжении всего расчета.

2.4. Верификация модификации метода LS-STAG

В данном разделе представлены результаты численного моделирования течений вязкой несжимаемой среды с подвижными погруженными границами. Помимо тестовых задач о вынужденных продольных и поперечных колебаниях кругового профиля, в которых профиль движется

по заданному закону, с использованием описанной модификации метода погруженных границ LS-STAG решена гидроупругая задача о моделировании ветрового резонанса кругового профиля. При решении последней задачи профиль полагался достаточно тяжелым, поэтому оказалось возможным решать сопряженную задачу гидроупругости, расщепив ее «по шагам»: на каждом шаге по времени сначала моделировалось обтекание движущегося с заданными параметрами тела, а затем рассчитывалась динамика тела при известных гидродинамических нагрузках.

2.4.1. Поперечные колебания кругового профиля

Чтобы проверить модификацию метода LS-STAG для подвижных погруженных границ, был проведен расчет течения за круговым профилем, совершающим в невозмущенном потоке поперечные колебания:

$$\begin{cases} X_C = X_C^0, \\ Y_C = Y_C^0 + \begin{cases} A, & t < 10D/V_\infty, \\ A \cos(2\pi S_e [tV_\infty - 10D]/D), & t \geq 10D/V_\infty, \end{cases} \end{cases} \quad (2.17)$$

где A — амплитуда колебаний кругового профиля, S_e — кинематическое число Струхаля, (X_C^0, Y_C^0) — координаты центра профиля в среднем положении, (X_C, Y_C) — координаты центра профиля в текущий момент времени. Такое течение было исследовано экспериментально [70] и численно [69] на подвижной сетке, согласованной с телом.

Была проведена серия расчетов на сетке 240×296 (линейный размер ячейки сетки вблизи границы профиля $h = 0,03125$) с шагом по времени $\Delta t = 0,005$ при $V_\infty = 1,0$, $D = 1,0$, $Re = 185$, $A = 0,2D$, $S_e/Sh \in [0,8; 1,2]$, где Sh — число Струхаля, вычисленное при данном значении числа Рейнольдса Re для неподвижного профиля ($Sh \approx 0,201$). Наблюдается явление «захвата частоты» для всех значений S_e/Sh , а также появление низших гармоник при $S_e/Sh > 1$ (Рис. 2.1). Различия наблюдаются и в картинах обтекания: при $S_e > Sh$ появляются седловые точки в виде пересекающихся линий тока (Рис. 2.2). Похожие результаты получены и в работах [54, 69, 146].

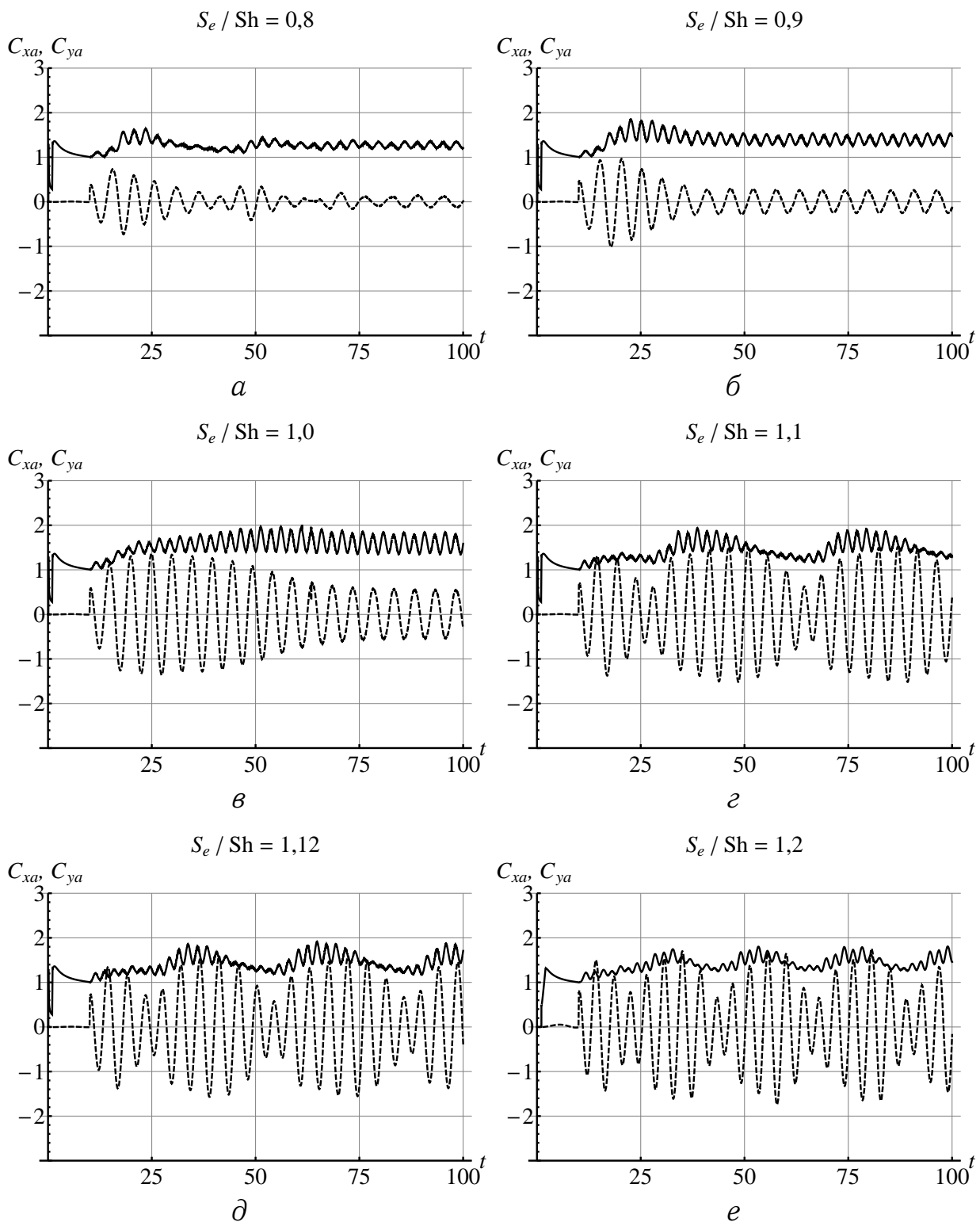


Рис. 2.1. $C_{xa}(t)$ и $C_{ya}(t)$ при $Re = 185$: *a* — $S_e/Sh = 0,8$; *б* — $S_e/Sh = 0,9$; *в* — $S_e/Sh = 1,0$; *г* — $S_e/Sh = 1,1$; *д* — $S_e/Sh = 1,12$; *е* — $S_e/Sh = 1,2$

Для проверки результатов использовались значения C_{xa} и C_{ya} , а также среднеквадратичные отклонения от них нестационарных нагрузок $C_{xa}(t)$ и $C_y(t)$, которые обозначим C_{xa}^{rms} и C_{ya}^{rms} соответственно. Полученные значения хорошо согласуются с результатами [54, 69, 146] (Рис. 2.3).

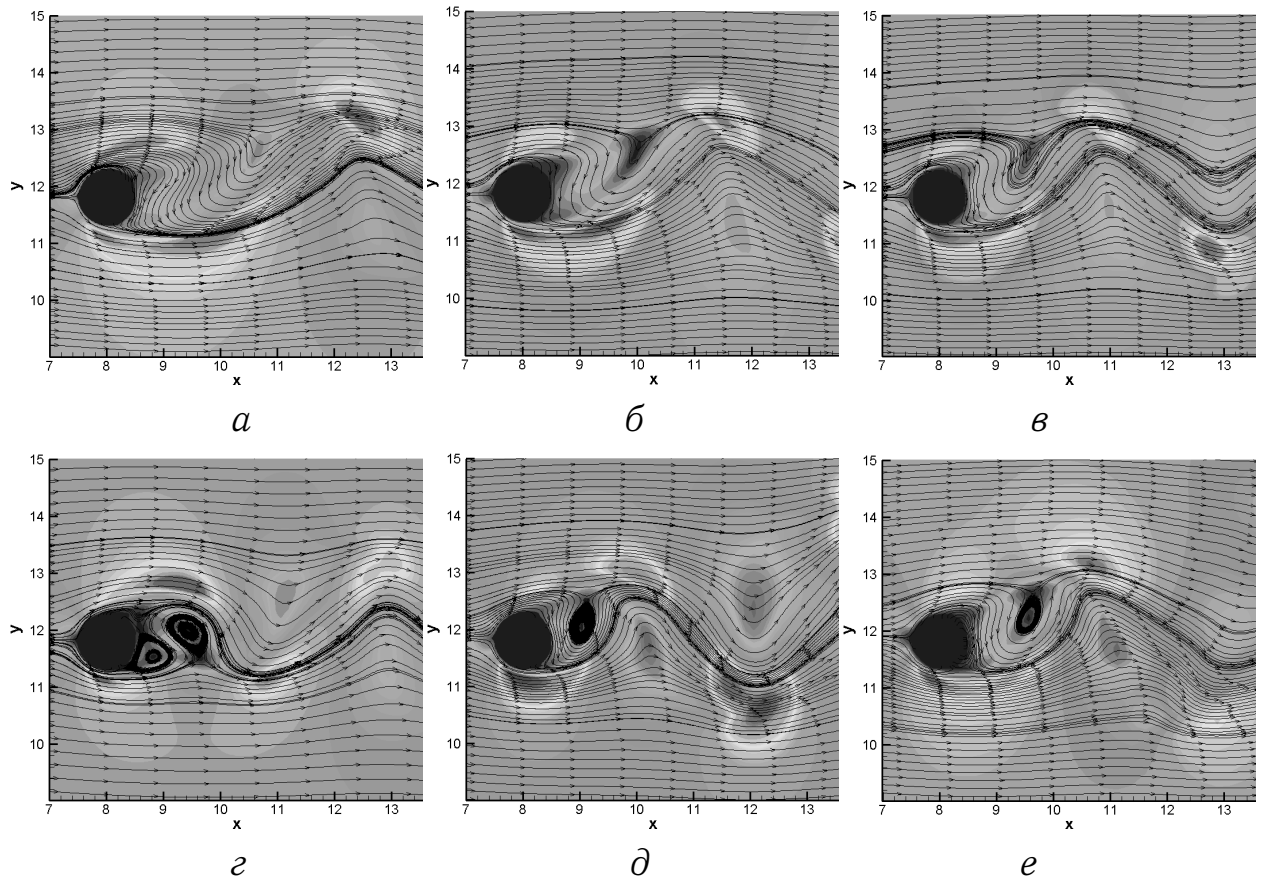


Рис. 2.2. Линии тока при $Re = 185$ (профиль находится в крайнем нижнем положении): $a - S_e/Sh = 0,8$; $б - S_e/Sh = 0,9$; $в - S_e/Sh = 1,0$; $г - S_e/Sh = 1,1$; $д - S_e/Sh = 1,12$; $e - S_e/Sh = 1,2$

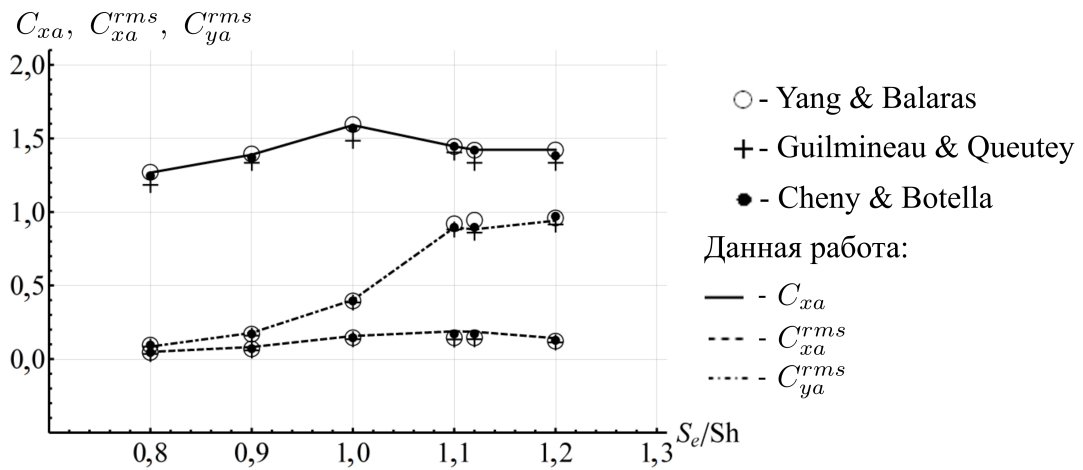


Рис. 2.3. Сравнение рассчитанных коэффициентов C_{xa} , C_{xa}^{rms} и C_{ya}^{rms} с результатами исследований [54, 69, 146]

2.4.2. Продольные колебания кругового профиля

Также был проведен расчет течения за круговым профилем, совершающим в невозмущенном потоке продольные колебания по закону

$$\begin{cases} X_C = X_C^0 + \begin{cases} A, & t < 10D/V_\infty, \\ A \cos(2\pi S_e [tV_\infty - 10D]/D), & t \geq 10D/V_\infty, \end{cases} \\ Y_C = Y_C^0, \end{cases} \quad (2.18)$$

где A — амплитуда колебаний кругового профиля, S_e — кинематическое число Струхаля, (X_C^0, Y_C^0) — координаты центра профиля в среднем положении, (X_C, Y_C) — координаты центра профиля в текущий момент времени. Такая задача рассматривалась в работах [69, 136, 146] и была исследована экспериментально в [62]. При $V_\infty = 1,0$, $D = 1,0$, $Re = 100$, $A = 0,8D$, $S_e = 0,2$ данное течение характеризуется устойчивым симметричным и периодическим сходом вихрей. Когда профиль движется из начального положения по течению, на нем начинают образовываться вихри, увеличивающиеся в размерах по мере приближения к крайнему правому положению (Рис. 2.4). Затем начинается движение против течения, и, вместе с ним, похожий процесс вихреобразования с другой стороны профиля. Когда направление движения профиля снова изменяется, с него сходit результирующая пара вихрей, и при возвращении в начальное положение описанный процесс начинается снова.

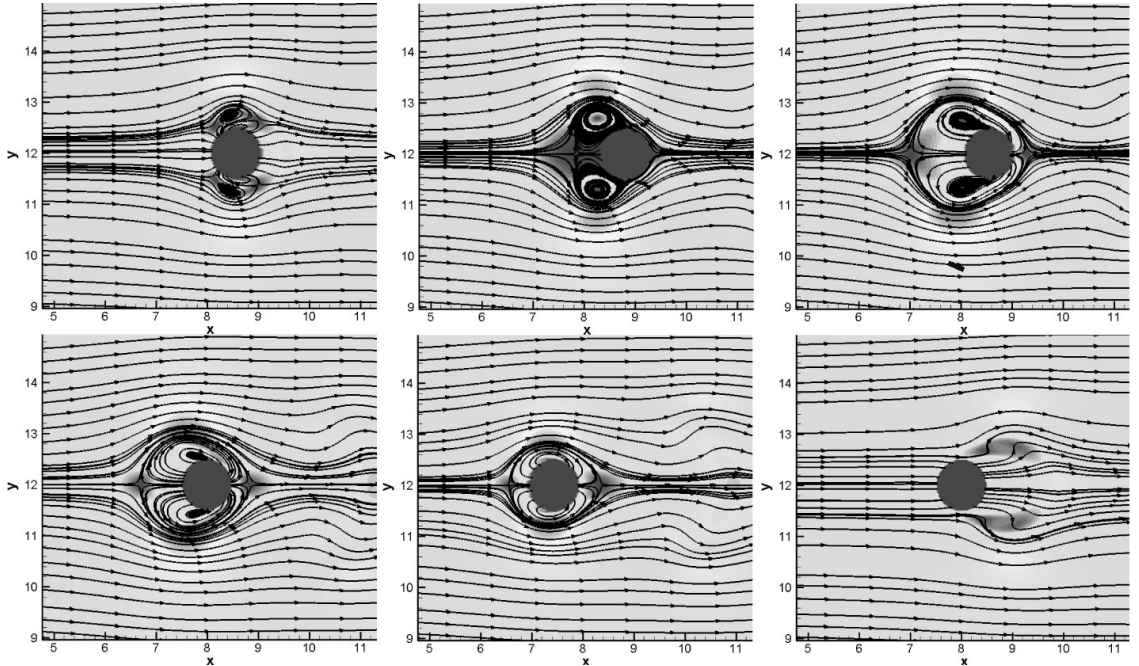


Рис. 2.4. Динамика образования и схода вихрей при вынужденных продольных колебаниях кругового профиля

При выбранных значениях параметров было проведено моделиро-

вание методом LS-STAG на неравномерной сетке 240×296 с шагом по времени $\Delta t = 0,005$. Рассчитанное значение C_{xa} отличается от определенного в [62] экспериментально менее, чем на 1 % и хорошо согласуется с результатами работы [69] (Таблица 24).

Таблица 24.

Сравнение C_{xa} с результатами других исследователей

Исследование	Сетка	C_{xa}
Dutsch [62] (эксперимент)		2,090
Данная работа	240×296	2,075
Guilmineau & Queutey [69]	480×400	2,080

2.4.3. Ветровой резонанс кругового профиля

При моделировании явления ветрового резонанса рассматривалось движение кругового профиля диаметра D поперек потока с одной степенью свободы. Если профиль закреплен при помощи линейной вязкоупругой связи (Рис. 2.5), то уравнение движения профиля (2.1) принимает вид

$$m\ddot{y}_* + b\dot{y}_* + cy_* = F_{ya}, \quad (2.19)$$

где m — масса кругового профиля, b — коэффициент демпфирования, c — жесткость связи, F_{ya} — подъемная сила, y_* — отклонение профиля от положения равновесия. Изменение c позволяет задавать различную частоту собственных колебаний системы $\omega \approx \sqrt{c/m}$ (в силу малости b).

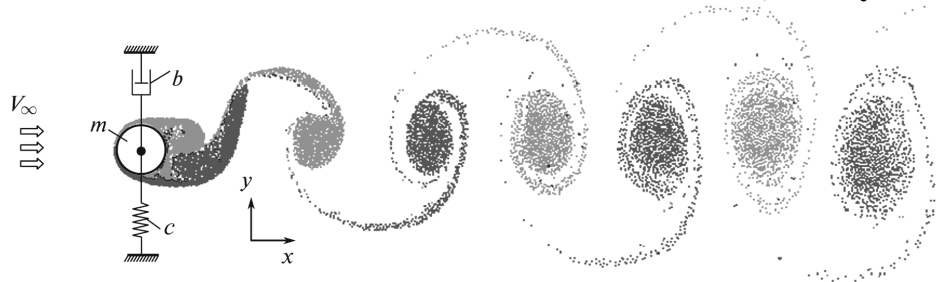


Рис. 2.5. Круговой профиль, закрепленный при помощи линейной вязкоупругой связи, и след за ним

Поскольку на n -м шаге расчета $y_*^n = Y_C^n - Y_C^0$, где Y_C^0 — ордината центра профиля в начальный момент времени, а Y_C^n — ордината центра профиля на n -м шаге расчета, разностный аналог уравнения (2.19) можно записать в виде

$$m \cdot \frac{Y_C^{n+1} - 2Y_C^n + Y_C^{n-1}}{(\Delta t)^2} + b \cdot \frac{Y_C^{n+1} - Y_C^{n-1}}{2\Delta t} + c \cdot (Y_C^n - Y_C^0) = F_{ya}|^n. \quad (2.20)$$

Из этого уравнения на каждом шаге расчета после вычисления подъемной силы, действующей на профиль со стороны потока, легко может быть определено положение центра профиля на следующем шаге по времени, что позволяет перестроить функцию уровня и все необходимые для (2.8), (2.13)–(2.14) матрицы, а также вычислить скорость движения погруженной границы v^{ib} для пересчета источниковых членов.

На неравномерной сетке 272×292 с шагом по времени $\Delta t = 0,0001$ была проведена серия расчетов со следующими значениями параметров:

$$V_\infty = 3,0, \quad \rho = 1,0, \quad \nu = 0,003, \quad D = 1,0, \quad m = 39,75, \quad b = 0,731.$$

Эти значения параметров соответствуют числу Рейнольдса $Re = 1000$. Безразмерная частота собственных колебаний менялась в диапазоне

$$Sh_\omega = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{D}{V_\infty} = 0,150 \dots 0,280.$$

Результаты хорошо согласуются с известными в литературе данными [87]: $A_{\max} \approx 0,4D$ (Рис. 2.6) и возбуждается при $Sh_\omega \approx Sh$, где Sh — число Струхаля, вычисленное для неподвижного профиля ($Sh \approx 0,24$ [29, 54, 72, 73]).

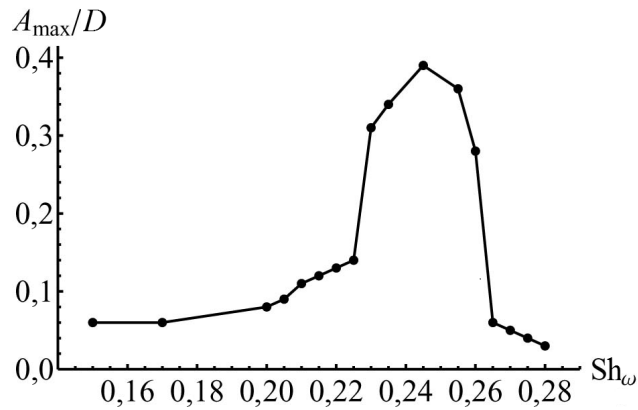


Рис. 2.6. Зависимость максимума амплитуды колебаний A_{\max}/D кругового профиля от Sh_ω при $Re = 1000$

Качественные различия в динамике кругового профиля при различных значениях Sh_ω представлены на Рис. 2.7. При $Sh_\omega \ll Sh$ наблюдается небольшая вибрация профиля (Рис. 2.7, а). При увеличении Sh_ω появляются затухающие биения (Рис. 2.7, б). Когда значение Sh_ω становится

близким к Sh , амплитуда колебаний резко возрастает (Рис. 2.7, *в–д*). Биения при этом исчезают — амплитуда колебаний продолжает нарастать, наблюдается резонанс. При дальнейшем увеличении Sh_ω амплитуда колебаний резко уменьшается и вновь наблюдаются биения (Рис. 2.7, *е*).

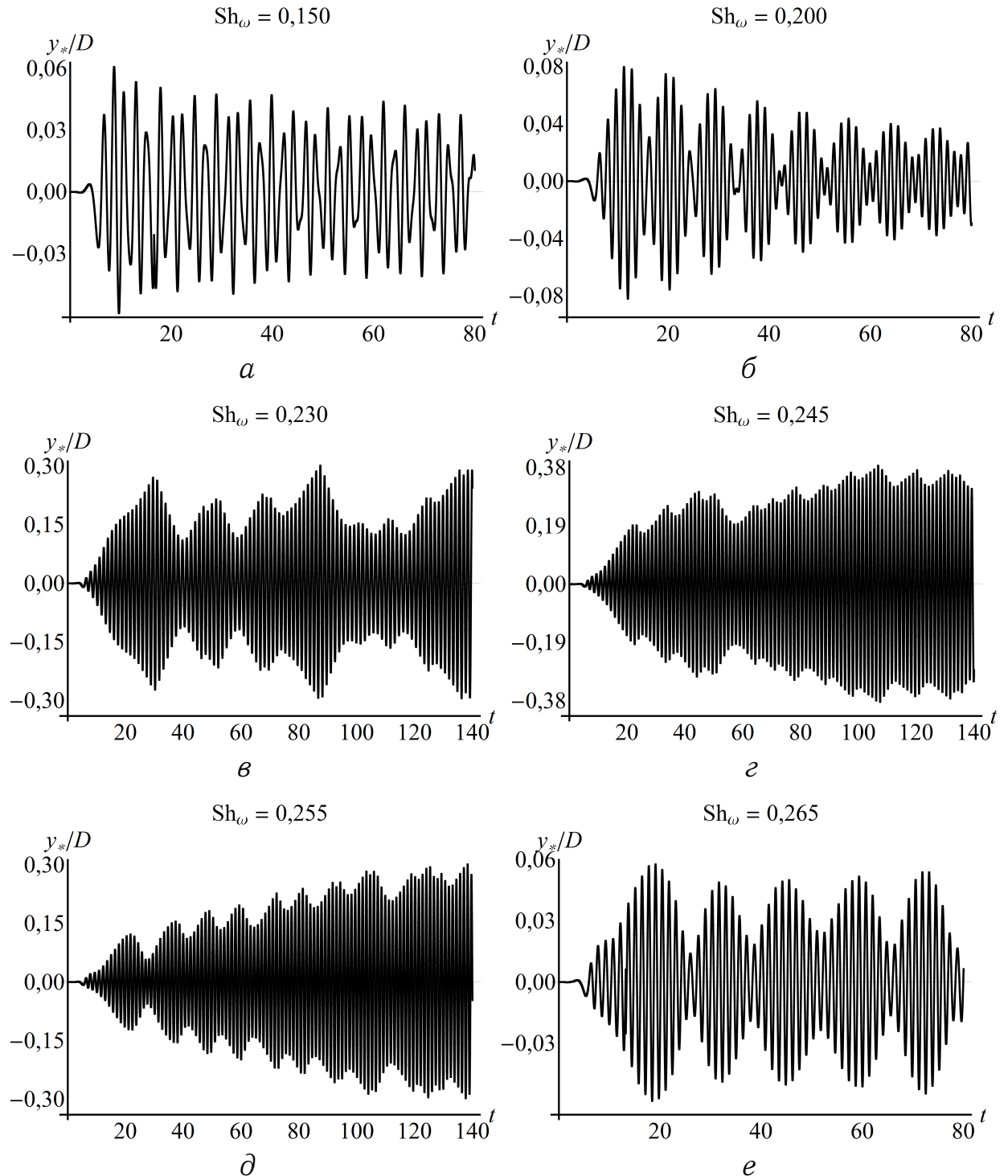


Рис. 2.7. Отклонение профиля от положения равновесия при $Re = 1000$:
a — $Sh_\omega = 0,150$; *б* — $Sh_\omega = 0,200$; *в* — $Sh_\omega = 0,230$; *г* — $Sh_\omega = 0,245$;
д — $Sh_\omega = 0,255$; *е* — $Sh_\omega = 0,265$

Для проведения расчетов использовался разработанный программный комплекс «LS-STAG» [35]. При указанных выше параметрах расчета для моделирования в течение двухсот единиц безразмерного времени при $Sh_\omega \approx Sh$ продолжительность расчета составила около 250 часов, а при остальных значениях Sh_ω — около 180 часов.

Отметим, что приведенные в данном разделе результаты получены на сетке с минимальным шагом $h_{\min} = 0,01562$, т.е. на диаметр кругового профиля приходилось 64 ячейки. При этом для получения более точных количественных результатов, а также для моделирования при более высоких значениях Re необходимо дальнейшее измельчение сетки, что приведет к резкому росту вычислительных затрат, поскольку комплекс «LS-STAG» работает в последовательном режиме. Для решения этой проблемы необходимо разработать модификации метода LS-STAG, позволяющие использовать известные модели турбулентности, и реализовать их в программном комплексе, работающем в параллельном режиме.

2.5. Результаты и выводы по главе 2

Представлены модификации метода LS-STAG для расчета течений с подвижными погруженными границами, позволяющие проводить расчет течений с движущимися границами на неподвижной прямоугольной сетке. Для верификации модифицированного метода LS-STAG использовались тестовые задачи о вынужденных продольных и поперечных колебаниях кругового профиля. Результаты тестовых расчетов хорошо согласуются с экспериментальными [62, 70] и расчетными [69, 146] данными.

С использованием описанной модификации метода LS-STAG получено численное решение гидроупругой задачи о моделировании ветрового резонанса кругового профиля. Полученные результаты качественно согласуются с известными экспериментальными данными [87].

Описание представленных в главе 2 модификаций метода LS-STAG и их верификация опубликованы в работах [27, 35, 94, 95, 96].

Глава 3. Модификация метода LS-STAG для расчета течений вязкой несжимаемой среды в рамках различных подходов к моделированию турбулентности

В рамках прямого численного моделирования (DNS) турбулентности как и все сеточные методы, LS-STAG требует сильного измельчения шагов по времени и по пространству при расчете течений, характеризующихся высоким числом Рейнольдса, что приводит к существенному росту вычислительных затрат. Традиционный метод решения данной проблемы — использование моделей турбулентности [5, 6, 44, 129] в рамках различных подходов (RANS, LES, DES и т.д.). Как показывает анализ литературы, таких модификаций метода LS-STAG на данный момент не существует, поэтому их разработка представляется актуальной задачей.

В данной главе представлены модификации метода LS-STAG, позволяющие проводить расчеты течений вязкой несжимаемой среды с использованием таких моделей турбулентности, как модель Смагоринского [126], модель Спаларта — Аллмараса [130], $k - \varepsilon$ модель [83], $k - \omega$ модель [144], $k - \omega$ SST модель [98]. Разработанные модификации могут быть использованы в рамках моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES [89]), решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса (Reynolds-Averaged Navier — Stokes, RANS [121]), а также моделирования отсоединенных вихрей (Detached Eddy Simulation, DES [128]). Все разработанные модификации метода LS-STAG реализованы в программном комплексе «LS-STAG_turb» [36]. Для его верификации использовались задачи о моделировании обтекания неподвижного кругового профиля и ветрового резонанса кругового профиля.

3.1. Математическая постановка задачи

В данной главе в рамках подходов RANS, LES и DES рассматривается внешнее обтекание жесткого профиля произвольной формы рав-

номерным потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности, который может совершать колебания с 1, 2 или 3 степенями свободы. В отличие от прямого численного моделирования, основанного на решении уравнений Навье — Стокса и разрешении всех масштабов турбулентного движения, использование перечисленных подходов предполагает моделирование вклада в осредненное движение всех масштабов турбулентности (в RANS) или масштабов, не превосходящих некоторую заданную величину — ширину фильтра Δ (в LES). В первом случае говорят о моделировании рейнольдсовых напряжений, а во втором — о моделировании подсеточных напряжений. При этом вместо уравнений Навье — Стокса в подходе RANS решаются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса, а в LES — отфильтрованные уравнения Навье — Стокса. Использование DES означает, что в одной части расчетной области решаются уравнения RANS, а в другой — уравнения LES.

Поскольку система уравнений LES по форме аналогична системе уравнений RANS, для всех трех подходов можно записать единую постановку задачи в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} - \nabla \cdot \hat{\tau}^t = 0, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ \mathbf{v}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = \mathbf{V}_\infty, \quad \mathbf{v}|_K = \mathbf{v}^{ib} = \mathbf{v}^{ib}(\mathbf{r}, t), \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_4} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma \cup K} = 0; \end{cases} \quad (3.1)$$

здесь $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t) = u \cdot \mathbf{e}_x + v \cdot \mathbf{e}_y$ — безразмерная осредненная по Рейнольдсу [121] или, в случае подхода LES, отфильтрованная [89] скорость, $p = p(x, y, t)$ — безразмерное осредненное по Рейнольдсу или отфильтрованное давление, а $\hat{\tau}^t$ — тензор рейнольдсовых или подсеточных напряжений, связь которого с параметрами осредненного или отфильтрованного течения определяется используемой моделью турбулентности. Сразу отметим, что во всех моделях турбулентности можно выделить линейный масштаб турбулентности $l_{turb} = l_{turb}(\mathbf{r})$. При использовании подхода RANS масштаб l_{turb} равен масштабу $l_{RANS} = l_{RANS}(\mathbf{r})$, который определяется моделью турбулентности. В случае использования модели

турбулентности в рамках LES l_{turb} равен подсеточному масштабу

$$l_{LES} = C_{LES}\Delta, \quad (3.2)$$

где $\Delta = \Delta(\mathbf{r})$ — характерный размер фильтра в точке с радиус-вектором \mathbf{r} , а C_{LES} — эмпирическая константа, выбор которой зависит от используемой модели турбулентности и численного метода, при помощи которого решается задача (3.1). В рамках подхода DES l_{turb} полагают равным гибриднему линейному масштабу

$$l_{DES} = \min\{l_{RANS}, C_{DES}\Delta\}, \quad (3.3)$$

где C_{DES} — константа, аналогичная C_{LES} , а в качестве характерного размера фильтра $\Delta = \Delta(\mathbf{r})$ используется максимальный из шагов сетки в точке с радиус-вектором \mathbf{r} ; таким образом, в областях расчетной области, в которых используемая сетка является слишком грубой и непригодна для разрешения турбулентных структур, т.е. при $C_{DES}\Delta > l_{RANS}$, DES функционирует как RANS, а в остальных областях, в которых сетка достаточно мелкая, — как подсеточная модель для LES [6].

Будем использовать модели турбулентной вязкости (Eddy Viscosity Models, EVM [5, 44]), в которых моделируется турбулентная вязкость ν^t и, в случае моделей с двумя дифференциальными уравнениями, кинетическая энергия турбулентности k , а для расчета рейнольдсовых или подсеточных напряжений используется предположение Буссинеска [6]:

$$\tau_{xx}^t = 2\nu^t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}k, \quad \tau_{yy}^t = 2\nu^t \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}k, \quad (3.4)$$

$$\tau_{xy}^t = \nu^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (3.5)$$

где τ_{xx}^t и τ_{yy}^t — нормальные рейнольдсовы или подсеточные напряжения, а τ_{xy}^t — касательные рейнольдсовы или подсеточные напряжения.

Уравнения, из которых могут быть определены ν^t и k , и накладываемые на них граничные и начальные условия определяются используемой моделью турбулентности. Кроме того, в случае гидроупругого движения профиля вместе с (3.1) необходимо решать уравнение динамики (2.1).

3.2. Построение дискретных аналогов RANS, LES и DES уравнений

Пусть Ω^* — некоторая область, Γ^* — ее граница. Тогда можно переписать в интегральной форме уравнения (3.1). Интегральная форма уравнения неразрывности совпадает с (1.2), а интегральная форма уравнения баланса импульса в проекциях на оси Ox и Oy имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega^*} u dV + \int_{\Gamma^*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u dS + \int_{\Gamma^*} p \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma^*} \nu \nabla u \cdot \mathbf{n} dS - \\ - \int_{\Gamma^*} \tau_{xx}^t \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma^*} \tau_{xy}^t \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega^*} v dV + \int_{\Gamma^*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) v dS + \int_{\Gamma^*} p \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma^*} \nu \nabla v \cdot \mathbf{n} dS - \\ - \int_{\Gamma^*} \tau_{yy}^t \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma^*} \tau_{xy}^t \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отличие (3.6) и (3.7) от (1.3) и (1.4), для которых дискретные аналоги построены в главах 1 и 2, формально заключается лишь в наличии подчеркнутых слагаемых. Их дискретные аналоги будут построены ниже.

3.2.1. Модификация LS-STAG-сетки

Особенностью метода LS-STAG является пятиточечная структура шаблона аппроксимации как в прямоугольных ячейках, так и в усеченных. Для получения такой структуры шаблона нормальные и касательные напряжения вычисляются в разных точках (Рис. 1.5). Аналогично предлагается дискретизировать нормальные и касательные рейнольдсовы и подсеточные напряжения. Значения ν^t и k удобно вычислять в тех же точках, что и касательные напряжения (Рис. 3.1).

Таким образом, в случае использования метода LS-STAG в рамках RANS, LES и DES, необходимо дополнить LS-STAG-сетку, описанную в главах 1 и 2, четвертой сеткой (xy -сеткой) с ячейками $\Omega_{i,j}^{xy} = (x_i^c, x_{i+1}^c) \times (y_j^c, y_{j+1}^c)$, границы которых обозначим $\Gamma_{i,j}^{xy}$, а площади — $\mathcal{M}_{i,j}^{xy}$. Ячейка $\Omega_{i,j}^{xy}$ является

контрольным объемом для $\nu_{i,j}^t$ и $k_{i,j}$ (Рис. 3.2). Если $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, то xy -сетка содержит $G_{xy} = (N - 1) \cdot (M - 1)$ ячеек.

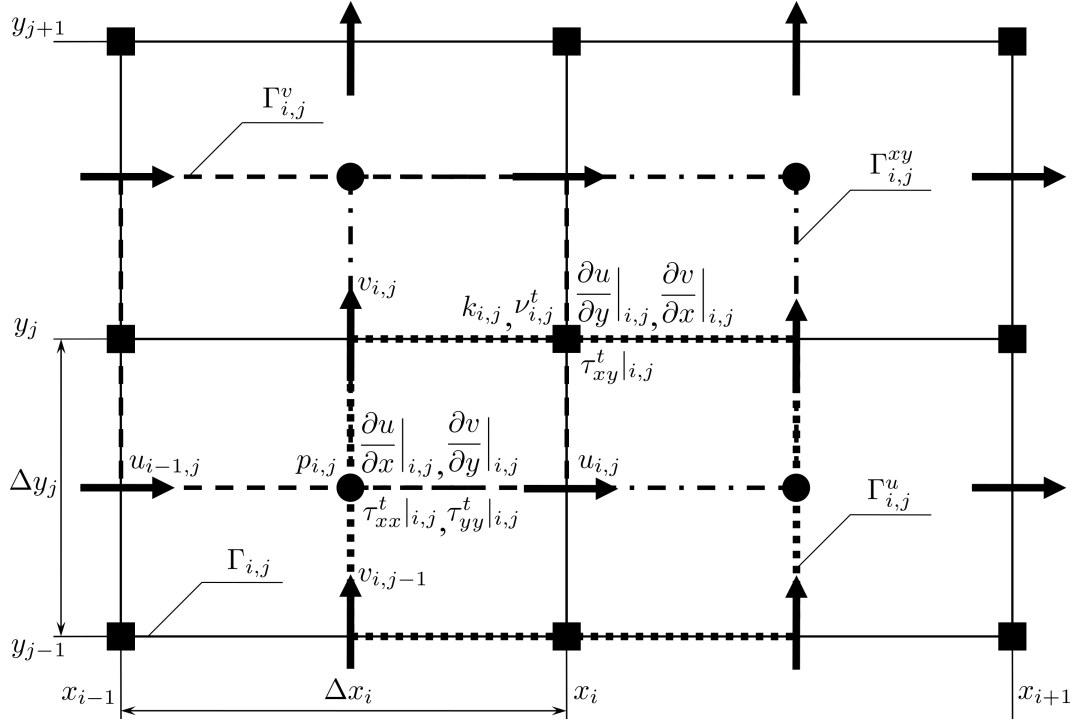


Рис. 3.1. Разнесенные сетки

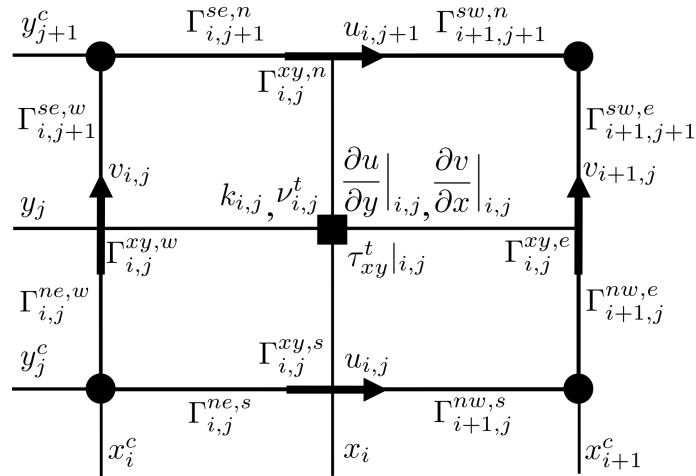


Рис. 3.2. Контрольный объем $\Omega_{i,j}^{xy}$ для $\nu_{i,j}^t$ и $k_{i,j}$

Каждой ячейке $\Omega_{i,j}$ основной сетки присвоим вес $\alpha_{i,j}$:

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega_{i,j} \text{ — твердая ячейка,} \\ 1/3, & \text{если } \Omega_{i,j} \text{ — треугольная ячейка,} \\ 1/4, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Тогда $\mathcal{M}_{i,j}^{xy}$ можно выразить через площади ячеек основной сетки:

$$\mathcal{M}_{i,j}^{xy} = \alpha_{i,j-1} V_{i,j-1} + \alpha_{i-1,j} V_{i-1,j} + \alpha_{i,j} V_{i,j} + \alpha_{i,j+1} V_{i,j+1}. \quad (3.9)$$

Поскольку точки, в которых вычисляются ν^t и касательные рейнольдсовы и подсеточные напряжения, совпадают, из (3.5) следует, что

$$\tau_{xy}|_{i,j} = \nu_{i,j}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} \right), \quad (3.10)$$

в то время как для вычисления нормальных рейнольдсовых и подсеточных напряжений (3.4) следует использовать средние по $\Omega_{i,j}$ значения турбулентной вязкости $\bar{\nu}_{i,j}^t$ и кинетической энергии турбулентности $\bar{k}_{i,j}$:

$$\tau_{xx}|_{i,j} = 2\bar{\nu}_{i,j}^t \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{2}{3}\bar{k}_{i,j}, \quad \tau_{yy}|_{i,j} = 2\bar{\nu}_{i,j}^t \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{2}{3}\bar{k}_{i,j}, \quad (3.11)$$

$$\bar{\nu}_{i,j}^t = \alpha_{i,j}(\nu_{i,j}^t + \nu_{i,j-1}^t + \nu_{i-1,j}^t + \nu_{i-1,j-1}^t), \quad \bar{k}_{i,j} = \alpha_{i,j}(k_{i,j} + k_{i,j-1} + k_{i-1,j} + k_{i-1,j-1}).$$

Значения нормальных напряжений $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j}$, необходимые для расчета нормальных рейнольдсовых и подсеточных напряжений (3.11), независимо от типа ячейки $\Omega_{i,j}$ вычисляются по формулам (1.38) и (1.39) соответственно. Формулы для расчета значений касательных напряжений $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j}$ и $\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j}$, необходимых для вычисления касательных рейнольдсовых и подсеточных напряжений (3.10), зависят от типа ячейки $\Omega_{i,j}^{xy}$: если одновременно $\theta_{i,j}^u \neq 0$ и $\theta_{i,j+1}^u \neq 0$, то $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j}$ вычисляется по формуле (1.40),

$$\theta_{i,j}^u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j}^{ib,s} = \frac{u_{i,j+1} - u(x_i, y_{i,j+1}^{ib})}{\frac{1}{2}\theta_{i,j+1}^u \Delta y_{j+1}}, \quad (3.12)$$

$$\theta_{i,j+1}^u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j}^{ib,n} = \frac{u(x_i, y_{i,j}^{ib}) - u_{i,j}}{\frac{1}{2}\theta_{i,j}^u \Delta y_j}, \quad (3.13)$$

если одновременно $\theta_{i,j}^v \neq 0$ и $\theta_{i+1,j}^v \neq 0$, то $\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j}$ вычисляется по (1.41),

$$\theta_{i,j}^v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j}^{ib,w} = \frac{v_{i+1,j} - v(x_{i+1,j}^{ib}, y_j)}{\frac{1}{2}\theta_{i+1,j}^v \Delta x_{i+1}}, \quad (3.14)$$

$$\theta_{i+1,j}^v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j}^{ib,e} = \frac{v(x_{i,j}^{ib}, y_j) - v_{i,j}}{\frac{1}{2}\theta_{i,j}^v \Delta x_i}. \quad (3.15)$$

Линейный масштаб турбулентности l_{turb} и характерный размер фильтра Δ для LES и DES удобно вычислять в тех же точках, что и ν^t и k . Напомним, что для метода DES в качестве Δ используют максимальный из шагов сетки в рассматриваемой точке расчетной области. Поскольку речь идет о xy -сетке, Δ определяется следующим образом:

$$\Delta_{i,j} = \Delta_{i,j}^{\max} = \max\{\Delta y_{i-1,j}^{xy}, \Delta y_{i,j}^{xy}, \Delta y_{i+1,j}^{xy}, \Delta x_{i,j-1}^{xy}, \Delta x_{i,j}^{xy}, \Delta x_{i,j+1}^{xy}\}, \quad (3.16)$$

$$\Delta y_{i,j}^{xy} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j}^u \Delta y_j + \theta_{i,j+1}^u \Delta y_{j+1}), \quad \Delta x_{i,j}^{xy} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j}^v \Delta x_i + \theta_{i+1,j}^v \Delta x_{i+1}). \quad (3.17)$$

Для метода LES на LS-STAG-сетке также можно использовать

$$\Delta_{i,j} = \Delta_{i,j}^{vol} = \sqrt{\mathcal{M}_{i,j}^{xy}}. \quad (3.18)$$

3.2.2. Учет рейнольдсовых или подсеточных напряжений в дискретном аналоге уравнения баланса импульса

Общий вид дискретных аналогов уравнений (3.6) и (3.7) по аналогии с дискретными аналогами уравнений Навье — Стокса, представленными в главе 1, можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{M}^x u) + \mathcal{C}^x[\bar{u}]u + \mathcal{G}^x(P - \underline{T_{xx}}) - \underline{\mathcal{D}_x^\tau T_{xy}} - \nu \mathcal{K}^x u + S_x^{ib,c} - \nu S_x^{ib,\nu} = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{M}^y v) + \mathcal{C}^y[\bar{v}]v + \mathcal{G}^y(P - \underline{T_{yy}}) - \underline{\mathcal{D}_y^\tau T_{xy}} - \nu \mathcal{K}^y v + S_y^{ib,c} - \nu S_y^{ib,\nu} = 0, \quad (3.20)$$

где $T_{xy} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$ — дискретный аналог касательных рейнольдсовых или подсеточных напряжений, $T_{xx} \in \mathbb{R}^G$ и $T_{yy} \in \mathbb{R}^G$ — дискретные аналоги нормальных рейнольдсовых или подсеточных напряжений; $\mathcal{D}_x^\tau \in M(\mathbb{R})_{G_x \times G_{xy}}$, $\mathcal{D}_y^\tau \in M(\mathbb{R})_{G_y \times G_{xy}}$ определяют дискретные аналоги операторов дивергенции.

Необходимо построить разностные аналоги слагаемых, подчеркнутых в (3.19) и (3.20) двумя чертами, поскольку они появляются только в уравнениях RANS / LES / DES. Для всех типов они вычисляются по единым формулам, которые с учетом (3.17) принимают вид

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,j}^u} \tau_{xy}^t \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS &\approx \Delta x_{i,j}^{xy} \tau_{xy}^t|_{i,j} - \Delta x_{i,j-1}^{xy} \tau_{xy}^t|_{i,j-1}, \\ \int_{\Gamma_{i,j}^v} \tau_{xy}^t \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS &\approx \Delta y_{i,j}^{xy} \tau_{xy}^t|_{i,j} - \Delta y_{i-1,j}^{xy} \tau_{xy}^t|_{i-1,j}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрицы \mathcal{D}_x^τ и \mathcal{D}_y^τ строятся по следующим шаблонам:

$$\begin{aligned} i = \overline{1, N-1} : \begin{cases} \mathcal{D}_{x,P}^\tau(i, j) = \Delta x_{i,j}^{xy}, & j = \overline{1, M-1}; \\ \mathcal{D}_{x,S}^\tau(i, j) = -\Delta x_{i,j-1}^{xy}, & j = \overline{2, M}; \end{cases} \\ j = \overline{1, M-1} : \begin{cases} \mathcal{D}_{y,P}^\tau(i, j) = \Delta y_{i,j}^{xy}, & i = \overline{1, N-1}; \\ \mathcal{D}_{y,W}^\tau(i, j) = -\Delta y_{i-1,j}^{xy}, & i = \overline{2, N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Отметим, что элементы векторов T_{xy} , T_{xx} и T_{yy} вычисляются по формулам (3.10) и (3.11). Для определения значений ν^t и k , используемых в этих формулах, необходимо решить уравнения используемой модели турбулентности. Дискретные аналоги уравнений из наиболее известных моделей турбулентной вязкости будут построены далее. Таким образом, все матрицы и векторы из (3.19) и (3.20) определены.

3.2.3. Интегрирование по времени

В случае расчета течений с неподвижными погруженными границами интегрирование по времени дифференциально-алгебраической системы (1.15), (3.19), (3.20), получающейся после дискретизации по пространству, как и в главе 1, производится с помощью полунявного метода, основанного на схеме типа Адамса — Башфорта второго порядка с дифференцированием назад. Шаг предиктора приводит к решению разностных аналогов уравнения Гельмгольца для прогноза проекции скорости на Ox ($\tilde{u} \in \mathbb{R}^{G_x}$) и на Oy ($\tilde{v} \in \mathbb{R}^{G_y}$) в момент времени $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^x \frac{3\tilde{u} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} + 2(\mathcal{C}^x[\bar{U}^n]u^n + S_x^{ib,c,n}) - \mathcal{C}^x[\bar{U}^{n-1}]u^{n-1} - S_x^{ib,c,n-1} + \\ + \mathcal{G}^x(P^n - \underline{T_{xx}^n}) - \underline{\mathcal{D}_x^{\tau,n}T_{xy}^n} - \nu\mathcal{K}^x\tilde{u} - \nu S_x^{ib,\nu} = 0, \\ \mathcal{M}^y \frac{3\tilde{v} - 4v^n + v^{n-1}}{2\Delta t} + 2(\mathcal{C}^y[\bar{U}^n]v^n + S_y^{ib,c,n}) - \mathcal{C}^y[\bar{U}^{n-1}]v^{n-1} - S_y^{ib,c,n-1} + \\ + \mathcal{G}^y(P^n - \underline{T_{yy}^n}) - \underline{\mathcal{D}_y^{\tau,n}T_{xy}^n} - \nu\mathcal{K}^y\tilde{v} - \nu S_y^{ib,\nu} = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Шаг корректора совпадает с (1.54) и приводит к решению разностного аналога уравнения Пуассона (1.55) для функции давления $\Phi = \frac{2\Delta t(P^{n+1} - P^n)}{3}$. После решения уравнений (3.22), (1.55) по формулам (1.56) определяются скорости и давление в момент времени t_{n+1} .

В расчетах с подвижными погруженными границами, как и в главе 2, используется схема предиктор-корректор первого порядка точности, для которой шаг предиктора имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}^{x,n+1}\tilde{u} - \mathcal{M}^{x,n}u^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^x[\bar{U}^n - \bar{U}^{g,n}]u^n + S_x^{ib,c,n} + \mathcal{G}^{x,n}(P^n - \underline{T_{xx}^n}) - \\ - \underline{\mathcal{D}_x^{\tau,n}T_{xy}^n} - \nu\mathcal{K}^{x,n+1}\tilde{u} - \nu S_x^{ib,\nu,n+1} = 0, \\ \frac{\mathcal{M}^{y,n+1}\tilde{v} - \mathcal{M}^{y,n}v^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^y[\bar{U}^n - \bar{U}^{g,n}]v^n + S_y^{ib,c,n} + \mathcal{G}^{y,n}(P^n - \underline{T_{xx}^n}) - \\ - \underline{\mathcal{D}_y^{\tau,n}T_{xy}^n} - \nu\mathcal{K}^{y,n+1}\tilde{v} - \nu S_y^{ib,\nu,n+1} = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Шаг корректора при этом совпадает с (2.12) и приводит к решению разностного аналога уравнения Пуассона (2.13) для функции давления

$\hat{\Phi} = \Delta t(P^{n+1} - P^n)$. После решения уравнений (3.23), (2.13) по формулам (2.14) определяются скорости и давление в момент времени t_{n+1} .

Затем решаются разностные аналоги уравнений из используемой модели турбулентности и рассчитываются значения T_{xx}^{n+1} , T_{yy}^{n+1} , T_{xy}^{n+1} .

3.3. Построение дискретных аналогов уравнений из моделей турбулентной вязкости

В данном разделе рассмотрены наиболее известные модели турбулентной вязкости и построены дискретные аналоги входящих в них уравнений. По числу дифференциальных уравнений модели турбулентной вязкости разделяют на алгебраические (без дифференциальных уравнений), например модель Смагоринского [126], модели с одним дифференциальным уравнением, например модель Спаларта — Аллмараса [130], и модели с двумя дифференциальными уравнениями, например $k - \varepsilon$ модель [83], $k - \omega$ модель [144], $k - \omega$ SST модель [98]. При использовании алгебраических моделей и моделей с одним дифференциальным уравнением полагают, что кинетическая энергия турбулентности пренебрежимо мала ($k \approx 0$), благодаря чему формула (3.11) упрощается:

$$\tau_{xx}^t|_{i,j} = 2\bar{\nu}^t_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j}, \quad \tau_{yy}^t|_{i,j} = 2\bar{\nu}^t_{i,j} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j}. \quad (3.24)$$

3.3.1. Модель Смагоринского

Модель Смагоринского [126] является простейшей алгебраической моделью турбулентности. Данную модель будем использовать только при LES-моделировании. В модели Смагоринского $k \approx 0$, а значение турбулентной вязкости определяется по формуле

$$\nu^t = (C_S \Delta)^2 \sqrt{2 \cdot \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}, \quad (3.25)$$

где C_S — эмпирическая константа (константа Смагоринского). Выбор C_S зависит от используемого для решения задачи (3.1) численного метода, поскольку точность разрешения крупномасштабных вихревых структур

при моделировании в рамках подхода LES зависит не только от сетки, но и от свойств метода, в частности, от присущей ему численной диссипации [6]. Если численная диссипация метода велика, то нужно выбирать меньшие значения C_S , а если мала — большие.

Поскольку ν^t , Δ , $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ вычисляются на xy -сетке, а $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ — на основной сетке, из (3.25) получаем

$$\nu^t|_{i,j} = (C_S \Delta|_{i,j})^2 \sqrt{2(\gamma_{i,j} + \gamma_{i+1,j} + \gamma_{i,j+1} + \gamma_{i+1,j+1}) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} \right)^2}, \quad (3.26)$$

где $\gamma_{i,j} = \alpha_{i,j} \cdot \{ (\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j})^2 \}$. Значения нормальных и касательных напряжений вычисляются по формулам (1.38)—(1.41), (3.12)—(3.15). Размер фильтра на $\Omega_{i,j}^{xy}$ вычисляется по формуле (3.16) или по формуле (3.18).

3.3.2. Модель Спаларта — Аллмараса

Рассмотрим вариант модели Спаларта — Аллмараса [130] без члена, инициирующего ламинарно-турбулентный переход в заданной точке (trip term):

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tilde{\nu} = P^\nu - D^\nu + \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot [(\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] + \frac{c_{b2}}{\sigma} (\nabla \tilde{\nu})^2, \quad (3.27)$$

где $\tilde{\nu}$ — модифицированная турбулентная вязкость, $\sigma = 2/3$, $c_{b2} = 0,622$, $P^\nu = c_{b1} [1 - f_{t2}] \tilde{S} \tilde{\nu}$ — генерационный член, $f_{t2} = c_{t3} \cdot e^{-c_{t4} \chi^2}$, $c_{t3} = 1,2$, $c_{t4} = 0,5$, $c_{b1} = 0,1355$, $\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$, $\tilde{S} = \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right| + f_{\nu 2} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 l_{turb}^2}$, $f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}}$, $f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3}$, $c_{\nu 1} = 7,1$, $\kappa = 0,41$, $D^\nu = (c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2}) \left(\frac{\tilde{\nu}}{l_{turb}} \right)^2$ — диссипативный член, $f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}$, $g = r + c_{w2} (r^6 - r)$, $r = \min \left(\frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 l_{turb}^2}, 10 \right)$, $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}$, $c_{w2} = 0,3$, $c_{w3} = 2$. После определения модифицированной турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$ значения турбулентной вязкости ν^t рассчитываются следующим образом:

$$\nu^t = \tilde{\nu} f_{\nu 1}. \quad (3.28)$$

Кинетическая энергия турбулентности полагается равной нулю.

В дальнейших расчетах используется «Trip-Less» (TL) подход [6]: сначала на входном участке внешней границы расчетной области задается достаточно большое значение $\tilde{\nu}$, а после формирования развитой отрывной зоны оно сильно уменьшается. Таким образом, при горизонтальном набегающем потоке граничные условия для (3.27) имеют вид:

$$\tilde{\nu}|_K = \tilde{\nu}^{ib} \equiv 0, \quad \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_4} = 0, \quad \tilde{\nu}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = \tilde{\nu}_\infty(t) = \begin{cases} \nu, & t \leq t^*, \\ 0,001\nu, & t > t^*. \end{cases} \quad (3.29)$$

В начальный момент времени $\tilde{\nu}$ полагаем равной $\tilde{\nu}_\infty(0)$.

При использовании модели в рамках RANS l_{turb} равен

$$l_{RANS} = d, \quad (3.30)$$

где d — безразмерное расстояние до границы профиля. При расчетах в рамках LES и DES l_{turb} полагают равным (3.2) и (3.3) соответственно.

Удобно вычислять $\tilde{\nu}$ в тех же точках, что и ν^t (Рис. 3.1): в этом случае ячейка $\Omega_{i,j}^{xy}$ (Рис. 3.2) является контрольным объемом для дискретизации уравнения (3.27). Перепишем его в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \tilde{\nu} dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \tilde{\nu} dS = & \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} (P^\nu - D^\nu) dV + \\ & + \frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} [\nu + \tilde{\nu}] \nabla \tilde{\nu} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{c_{b2}}{\sigma} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} (\nabla \tilde{\nu})^2 dV. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Очевидно, что $\int_{\Omega_{i,j}^{xy}} (P^\nu - D^\nu) dV \approx \mathcal{M}_{i,j}^{xy} (P_{i,j}^\nu - D_{i,j}^\nu) = \mathcal{M}_{i,j}^{xy} S_{i,j}$, $S \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$, поскольку P^ν и D^ν вычисляются в тех же точках, что и $\tilde{\nu}$.

Выпишем центральные разностные производные $\tilde{\nu}$:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{\tilde{\nu}_{i,j} - \tilde{\nu}_{i-1,j}}{\theta_{i,j}^v \Delta x_i}, \quad \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\tilde{\nu}_{i,j} - \tilde{\nu}_{i,j-1}}{\theta_{i,j}^u \Delta y_j}. \quad (3.32)$$

Поскольку $\tilde{\nu}$ вычисляется на xy -сетке, получаем, что $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y}$ дискретизируются на y -сетке и x -сетке соответственно:

$$G_x^{\tilde{\nu}} = \mathcal{G}_y^{xy} \check{\nu} + S_y^{ib,g} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}], \quad G_y^{\tilde{\nu}} = \mathcal{G}_x^{xy} \check{\nu} + S_x^{ib,g} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}], \quad (3.33)$$

где $\check{\nu} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$ — дискретный аналог $\tilde{\nu}$, $G_x^{\tilde{\nu}} \in \mathbb{R}^{G_y}$ и $G_y^{\tilde{\nu}} \in \mathbb{R}^{G_x}$ — дискретные аналоги $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y}$ соответственно, $\mathcal{G}_y^{xy} \in M(\mathbb{R})_{G_y \times G_{xy}}$, $\mathcal{G}_x^{xy} \in M(\mathbb{R})_{G_x \times G_{xy}}$, $S_y^{ib,g} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] \in \mathbb{R}^{G_y}$ и $S_x^{ib,g} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] \in \mathbb{R}^{G_x}$ — источниковые члены. Поскольку $\tilde{\nu}^{ib} \equiv 0$, в источниковых членах ненулевые элементы будут только на Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 : $S_y^{ib,g} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}]_{1,j} = -\frac{\tilde{\nu}_\infty}{\theta_{1,j}^v \Delta x_1}$, $j = \overline{1, M-1}$; $S_x^{ib,g} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}]_{i,1} = -\frac{\tilde{\nu}_\infty}{\theta_{i,1}^u \Delta y_1}$, $S_x^{ib,g} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}]_{i,M} = \frac{\tilde{\nu}_\infty}{\theta_{i,M}^u \Delta y_M}$, $i = \overline{1, N-1}$. Из (3.32) с учетом (3.29) получаем, что матрицы \mathcal{G}_y^{xy} и \mathcal{G}_x^{xy} строятся по следующим шаблонам:

$$\begin{aligned}
j = \overline{1, M-1} : \begin{cases} \mathcal{G}_{y,W}^{xy}(i, j) = -\frac{1}{\theta_{i,j}^v \Delta x_i}, & i = \overline{2, N-1}; \quad \mathcal{G}_{y,W}^{xy}(N, j) \equiv 0; \\ \mathcal{G}_{y,P}^{xy}(i, j) = \frac{1}{\theta_{i,j}^v \Delta x_i}, & i = \overline{1, N-1}; \end{cases} \\
i = \overline{1, N-1} : \begin{cases} \mathcal{G}_{x,S}^{xy}(i, j) = -\frac{1}{\theta_{i,j}^u \Delta y_j}, & j = \overline{2, M}; \\ \mathcal{G}_{x,P}^{xy}(i, j) = \frac{1}{\theta_{i,j}^u \Delta y_j}, & j = \overline{1, M-1}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Таким образом, дискретизация последнего члена из (3.31) имеет вид

$$\int_{\Omega_{i,j}^{xy}} (\nabla \tilde{v})^2 dV \approx S_{i,j}^{G,x} + S_{i+1,j}^{G,x} + S_{i,j}^{G,y} + S_{i,j+1}^{G,y} = S_{i,j}^G,$$

$$S_{i,j}^{G,x} = (\beta_{i,j} + \beta_{i,j+1})(G_x^{\tilde{v}}|_{i,j})^2, \quad S_{i,j}^{G,y} = (\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j})(G_y^{\tilde{v}}|_{i,j})^2, \quad \beta_{i,j} = \alpha_{i,j} V_{i,j}, \quad S \in \mathbb{R}^{G_{xy}}.$$

Рассмотрим диффузионный член

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} [\nu + \tilde{v}] \nabla \tilde{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS.$$

Каждое слагаемое представим в виде суммы потоков через элементарные грани контрольного объема $\Omega_{i,j}^{xy}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,e}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} dS - \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,w}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} dS, \\
\int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,n}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} dS - \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,s}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} dS.
\end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$ вычисляется на y -сетке, а $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$ — на x -сетке, получаем:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{i,j}^{xy,e}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} dS &\approx \frac{1}{2}(\Delta y_{i,j}^{xy} + \Delta y_{i+1,j}^{xy}) G_x^{\tilde{v}}|_{i+1,j} \left(\nu + \frac{\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{i+1,j}}{2} \right), \\
\int_{\Gamma_{i,j}^{xy,w}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} dS &\approx \frac{1}{2}(\Delta y_{i,j}^{xy} + \Delta y_{i-1,j}^{xy}) G_x^{\tilde{v}}|_{i,j} \left(\nu + \frac{\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{i-1,j}}{2} \right), \\
\int_{\Gamma_{i,j}^{xy,n}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} dS &\approx \frac{1}{2}(\Delta x_{i,j}^{xy} + \Delta x_{i,j+1}^{xy}) G_y^{\tilde{v}}|_{i,j+1} \left(\nu + \frac{\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{i,j+1}}{2} \right), \\
\int_{\Gamma_{i,j}^{xy,s}} [\nu + \tilde{v}] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} dS &\approx \frac{1}{2}(\Delta x_{i,j}^{xy} + \Delta x_{i,j-1}^{xy}) G_y^{\tilde{v}}|_{i,j} \left(\nu + \frac{\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{i,j-1}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, можно определить $\mathcal{K}^{xy}[G_x^{\tilde{v}}, G_y^{\tilde{v}}] \in M(\mathbb{R})_{G_{xy} \times G_{xy}}$ и источник член $S^{xy,\nu}[G_x^{\tilde{v}}, G_y^{\tilde{v}}, \tilde{v}_\infty, \tilde{v}^{ib}] \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$ такие, что дискретизация диффузионного члена записывается следующим образом:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} [\nu + \tilde{\nu}] \nabla \tilde{\nu} \cdot \mathbf{n} dS \approx \mathcal{K}_W^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) \tilde{\nu}_{i-1,j} +$$

$$+ \mathcal{K}_E^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) \tilde{\nu}_{i+1,j} + \mathcal{K}_P^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) \tilde{\nu}_{i,j} +$$

$$+ \mathcal{K}_S^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) \tilde{\nu}_{i,j-1} + \mathcal{K}_N^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) \tilde{\nu}_{i,j+1} + S_{i,j}^{xy,\nu} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}, \tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}],$$

$$\mathcal{K}_W^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) = -(\Delta y_{i,j}^{xy} + \Delta y_{i-1,j}^{xy}) G_x^{\tilde{\nu}}|_{i,j}/4,$$

$$\mathcal{K}_E^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) = (\Delta y_{i,j}^{xy} + \Delta y_{i+1,j}^{xy}) G_x^{\tilde{\nu}}|_{i+1,j}/4,$$

$$\mathcal{K}_S^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) = -(\Delta x_{i,j}^{xy} + \Delta x_{i,j-1}^{xy}) G_y^{\tilde{\nu}}|_{i,j}/4,$$

$$\mathcal{K}_N^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) = (\Delta x_{i,j}^{xy} + \Delta x_{i,j+1}^{xy}) G_y^{\tilde{\nu}}|_{i,j+1}/4,$$

$$\mathcal{K}_P^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) = \mathcal{K}_W^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) + \mathcal{K}_E^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) +$$

$$+ \mathcal{K}_S^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j) + \mathcal{K}_N^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j),$$

$$S_{i,j}^{xy,\nu} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}, \tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] = 2\nu \mathcal{K}_P^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, j), \quad i = \overline{2, N-2}, \quad j = \overline{2, M-2}.$$

Поскольку $\tilde{\nu}^{ib} \equiv 0$, модифицировать (3.35) на усеченных ячейках не требуется. Таким образом, изменения в (3.35) возникнут только на границах расчетной области. С учетом (3.29) получаем, что при $j = \overline{1, M-1}$ $\mathcal{K}_E^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](N-1, j) \equiv 0$, $\mathcal{K}_W^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](1, j) \equiv 0$, из $\mathcal{K}_P^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](1, j)$ нужно вычесть $s_{1,j}^{ib,w} = \frac{\Delta y_{1,j}^{xy} G_x^{\tilde{\nu}}|_{1,j}}{2}$, а из $S_{1,j}^{xy,\nu} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}, \tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}]$ — вычесть $\tilde{\nu}_\infty s_{1,j}^{ib,w}$; при $i = \overline{1, N-1}$ $\mathcal{K}_S^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, 1) \equiv 0$, из $\mathcal{K}_P^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, 1)$ нужно вычесть $s_{i,1}^{ib,s} = \frac{\Delta x_{i,1}^{xy} G_y^{\tilde{\nu}}|_{i,1}}{2}$, а из $S_{i,1}^{xy,\nu} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}, \tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}]$ — вычесть $\tilde{\nu}_\infty s_{i,1}^{ib,s}$, кроме того $\mathcal{K}_N^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, M-1) \equiv 0$, к $\mathcal{K}_P^{xy} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}](i, M-1)$ нужно прибавить $s_{i,M-1}^{ib,n} = \Delta x_{i,M-1}^{xy} G_y^{\tilde{\nu}}|_{i,M}/2$, а к $S_{i,M-1}^{xy,\nu} [G_x^{\tilde{\nu}}, G_y^{\tilde{\nu}}, \tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}]$ — прибавить $\tilde{\nu}_\infty s_{i,M-1}^{ib,n}$.

Конвективный член представим в виде суммы потоков через четыре элементарные грани контрольного объема $\Gamma_{i,j}^{xy}$:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \tilde{\nu} dS = - \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) \tilde{\nu} dy + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,e}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) \tilde{\nu} dy - \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,s}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) \tilde{\nu} dx + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,n}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y) \tilde{\nu} dx. \quad (3.36)$$

Поскольку $\Gamma_{i,j}^{xy,w} = \Gamma_{i,j}^{ne,w} \cup \Gamma_{i,j+1}^{se,w}$, $\Gamma_{i,j}^{xy,e} = \Gamma_{i+1,j}^{nw,e} \cup \Gamma_{i+1,j+1}^{sw,e}$, $\Gamma_{i,j}^{xy,s} = \Gamma_{i,j}^{ne,s} \cup \Gamma_{i+1,j}^{nw,s}$, $\Gamma_{i,j}^{xy,n} = \Gamma_{i,j+1}^{se,n} \cup \Gamma_{i+1,j+1}^{sw,n}$ (Рис. 3.2), каждое слагаемое в (3.36) можно пред-

ставить в виде суммы двух интегралов, например:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) \tilde{\nu} dy = \int_{\Gamma_{i,j}^{ne,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) \tilde{\nu} dy + \int_{\Gamma_{i,j+1}^{se,w}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) \tilde{\nu} dy.$$

При помощи (1.12) дискретные аналоги интегралов по $\Gamma_{i,j}^{ne,\omega}$ и $\Gamma_{i,j+1}^{se,\omega}$ можно записать следующим образом:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{ne,\omega}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) \tilde{\nu} dy \approx \frac{\tilde{\nu}_{i,j}^\omega}{2} \cdot \frac{\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i-1,j}}{2}, \quad \int_{\Gamma_{i,j+1}^{se,\omega}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x) \tilde{\nu} dy \approx \frac{\tilde{\nu}_{i,j}^\omega}{2} \cdot \frac{\bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i-1,j+1}}{2},$$

где $\tilde{\nu}_{i,j}^\omega = (\tilde{\nu}_{i-1,j} + \tilde{\nu}_{i,j})/2$. Аналогично строятся разностные аналоги оставшихся трех слагаемых из (3.36). Таким образом, разностный аналог конвективного члена в (3.31) имеет вид

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \tilde{\nu} dS \approx \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}]_W(i, j) \tilde{\nu}_{i-1,j} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}]_E(i, j) \tilde{\nu}_{i+1,j} + \quad (3.37)$$

$$+ \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}]_S(i, j) \tilde{\nu}_{i,j-1} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}]_N(i, j) \tilde{\nu}_{i,j+1} + S_{xy,i,j}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}],$$

$$\mathcal{C}_E^{xy}[\bar{U}](i, j) = \frac{\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i+1,j+1}}{8}, \quad \mathcal{C}_W^{xy}[\bar{U}](i, j) = -\mathcal{C}_E^{xy}[\bar{U}](i-1, j),$$

$$\mathcal{C}_N^{xy}[\bar{U}](i, j) = \frac{\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j+1} + \bar{v}_{i+1,j} + \bar{v}_{i+1,j+1}}{8}, \quad \mathcal{C}_S^{xy}[\bar{U}](i, j) = -\mathcal{C}_N^{xy}[\bar{U}](i, j-1),$$

$$S_{xy,i,j}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] \equiv 0, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad j = \overline{2, M-2}.$$

Кососимметрическая матрица $\mathcal{C}^{xy}[\bar{U}] \in M(\mathbb{R})_{G_{xy} \times G_{xy}}$ задает дискретный аналог конвективных потоков на xy -сетке, а $S_{xy,i,j}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$ — источник член. На усеченных ячейках $S_{xy,i,j}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] \equiv 0$, т.к. $\tilde{\nu}^{ib} \equiv 0$.

На границах расчетной области в (3.37) возникнут следующие изменения: $\bar{u}_{0,j} = V_\infty \Delta y_j$ при $j = \overline{1, M}$; $\mathcal{C}_E^{xy}[\bar{U}](N-1, j) \equiv 0$, $\mathcal{C}_W^{xy}[\bar{U}](1, j) \equiv 0$ при $j = \overline{1, M-1}$; $\mathcal{C}_S^{xy}[\bar{U}](i, 1) \equiv 0$, $\mathcal{C}_N^{xy}[\bar{U}](i, M-1) \equiv 0$ при $i = \overline{1, N-1}$; $S_{xy,i,1}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] = -\frac{\tilde{\nu}_\infty}{8} (\bar{v}_{i,1} + \bar{v}_{i+1,1})$, $S_{xy,i,M-1}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] = \frac{\tilde{\nu}_\infty}{8} (\bar{v}_{i,M-1} + \bar{v}_{i+1,M-1})$ при $i = \overline{2, N-2}$; при $j = \overline{2, M-2}$ $S_{xy,1,j}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] = -\frac{\tilde{\nu}_\infty}{8} (\bar{u}_{0,j} + \bar{u}_{1,j} + \bar{u}_{0,j+1} + \bar{u}_{1,j+1})$, $S_{xy,N-1,j}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] = \frac{\tilde{\nu}_{N-1,j}}{4} (\bar{u}_{N-1,j} + \bar{u}_{N-1,j+1})$; кроме того на угловых ячейках $S_{xy,1,1}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] = -\tilde{\nu}_\infty (\bar{u}_{0,1} + \bar{u}_{1,1} + \bar{u}_{0,2} + \bar{u}_{1,2} + \bar{v}_{1,1} + \bar{v}_{2,1})/8$, $S_{xy,1,M-1}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] = \tilde{\nu}_\infty (\bar{v}_{1,M-1} + \bar{v}_{2,M-1} - \bar{u}_{0,M-1} + \bar{u}_{1,M-1} - \bar{u}_{0,M} + \bar{u}_{1,M})/8$, $S_{xy,N-1,1}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] = -\frac{\tilde{\nu}_\infty}{8} (\bar{v}_{N-1,1} + \bar{v}_{N,1}) + \frac{\tilde{\nu}_{N-1,1}}{4} (\bar{u}_{N-1,1} + \bar{u}_{N-1,2})$, $S_{xy,N-1,M-1}^{ib,c} [\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] = \frac{\tilde{\nu}_{N-1,M-1}}{4} \cdot (\bar{u}_{N-1,M-1} + \bar{u}_{N-1,M}) + \frac{\tilde{\nu}_\infty}{8} (\bar{v}_{N-1,M-1} + \bar{v}_{N,M-1})$.

Таким образом, дискретный аналог уравнения (3.31) в случае подвижных погруженных границ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{M}^{xy,n+1}\check{\nu}^{n+1} - \mathcal{M}^{xy,n}\check{\nu}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n]\check{\nu}^n + S_{xy}^{ib,c,n}[\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] - \mathcal{M}^{xy,n}S^n - \\ & - \frac{1}{\sigma}(\mathcal{K}^{xy}[G_x^{\tilde{\nu},n}, G_y^{\tilde{\nu},n}]\check{\nu}^n + S^{xy,\nu}[G_x^{\tilde{\nu},n}, G_y^{\tilde{\nu},n}, \tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] + c_{b2}S^{G,n}) = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

В случае неподвижных погруженных границ (3.38) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^{xy}\frac{\check{\nu}^{n+1} - \check{\nu}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n]\check{\nu}^n + S_{xy}^{ib,c,n}[\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] - \mathcal{M}^{xy}S^n - \\ & - \frac{1}{\sigma}(\mathcal{K}^{xy}[G_x^{\tilde{\nu},n}, G_y^{\tilde{\nu},n}]\check{\nu}^n + S^{xy,\nu}[G_x^{\tilde{\nu},n}, G_y^{\tilde{\nu},n}, \tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}] + c_{b2}S^{G,n}) = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

После вычисления $\check{\nu}^{n+1}$ значения ν^t рассчитываются по формуле (3.28).

3.3.3. Модели с двумя дифференциальными уравнениями

3.3.3.1. $k - \varepsilon$ модель

В $k - \varepsilon$ модели [83] для моделирования турбулентных потоков решаются два дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)k = \tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{k^{3/2}}{l_{turb}} + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu^t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right], \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\varepsilon = c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \left[\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - c_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu^t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right], \quad (3.41)$$

где ε — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности k , $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $c_{\varepsilon_1} = 1,44$, $c_{\varepsilon_2} = 1,92$. Линейный масштаб l_{turb} при использовании $k - \varepsilon$ модели в рамках подхода RANS полагают равным

$$l_{RANS} = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}. \quad (3.42)$$

При расчетах в рамках LES и DES l_{turb} равен (3.2) и (3.3) соответственно. Граничные условия для (3.40), (3.41) по аналогии с [98] имеют вид:

$$\begin{aligned} k|_K = k^{ib} \equiv 0, \quad \varepsilon|_K = \varepsilon^{ib} \equiv C_\mu \nu \left(\frac{6\nu}{\beta_1(\Delta_1)^2} \right)^2, \quad \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_4} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_4} = 0, \\ k|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = k_\infty = \sqrt{\frac{\nu_\infty^t \varepsilon_\infty}{C_\mu}}, \quad \varepsilon|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = \varepsilon_\infty = C_\mu \nu_\infty^t \left(\frac{C V_\infty}{D} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где $C_\mu = 0,09$, $\beta_1 = 0,075$, C — константа, значения которой, как правило, лежат в диапазоне $1 \dots 10$, ν_∞^t — значение ν^t , задаваемое на границах Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 , Δ_1 — величина первого пристеночного шага сетки. В начальный момент времени k и ε полагаем равными k_∞ и ε_∞ соответственно.

После определения k и ε рассчитываются значения ν^t :

$$\nu^t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (3.44)$$

Представляется целесообразным вычислять ε в тех же точках, в которых рассчитываются значения ν^t и k (Рис. 3.1). Таким образом, ячейка $\Omega_{i,j}^{xy}$ (Рис. 3.2) является контрольным объемом как для (3.40), так и для (3.41). Перепишем (3.40) и (3.41) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} k dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) k dS = \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left(\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV + \\ + \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left[\tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{k^{3/2}}{l_{turb}} \right] dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} \left[\nu + \frac{\nu^t}{\sigma_k} \right] \nabla k \cdot \mathbf{n} dS, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \varepsilon dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \varepsilon dS = c_{\varepsilon_1} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \frac{\varepsilon}{k} \left(\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV + \\ + \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \frac{\varepsilon}{k} \left[c_{\varepsilon_1} \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - c_{\varepsilon_2} \varepsilon \right] dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} \left[\nu + \frac{\nu^t}{\sigma_\varepsilon} \right] \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Поскольку τ_{xy}^t , k и ε вычисляются в одних и тех же точках, разностные аналоги слагаемых в (3.45) и (3.46), содержащих τ_{xy}^t , имеют вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left[\tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{k^{3/2}}{l_{turb}} \right] dV \approx \mathcal{M}_{i,j}^{xy} \left[\tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{k^{3/2}}{l_{turb}} \right]_{i,j} = \mathcal{M}_{i,j}^{xy} S_{i,j}^k, \\ \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \frac{\varepsilon}{k} \left[c_{\varepsilon_1} \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - c_{\varepsilon_2} \varepsilon \right] dV \approx \mathcal{M}_{i,j}^{xy} \frac{\varepsilon_{i,j}}{k_{i,j}} \left[c_{\varepsilon_1} \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - c_{\varepsilon_2} \varepsilon \right]_{i,j} = \mathcal{M}_{i,j}^{xy} S_{i,j}^\varepsilon, \end{aligned}$$

где $S^k \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$, $S^\varepsilon \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$. Также нетрудно построить разностные аналоги слагаемых в (3.45) и (3.46), содержащих нормальные напряжения:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left(\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \tilde{G} dV \approx \beta_{i,j} \tilde{G}_{i,j} + \beta_{i+1,j} \tilde{G}_{i+1,j} + \beta_{i,j+1} \tilde{G}_{i,j+1} + \\ + \beta_{i+1,j+1} \tilde{G}_{i+1,j+1} = S_{i,j}^{ns}, \\ c_{\varepsilon_1} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \frac{\varepsilon}{k} \left(\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV \approx c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_{i,j}}{k_{i,j}} S_{i,j}^{ns} = S_{i,j}^{ns,\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $S^{ns} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$, $S^{ns,\varepsilon} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$.

Дискретные аналоги производных k и ε по аналогии с (3.32) и (3.33) вычисляются следующим образом:

$$G_x^k = \mathcal{G}_y^{xy} \check{k} + S_y^{ib,g}[k_\infty, k^{ib}], \quad G_y^k = \mathcal{G}_x^{xy} \check{k} + S_x^{ib,g}[k_\infty, k^{ib}], \quad (3.47)$$

$$G_x^\varepsilon = \mathcal{G}_y^{xy} \check{\varepsilon} + S_y^{ib,g}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}], \quad G_y^\varepsilon = \mathcal{G}_x^{xy} \check{\varepsilon} + S_x^{ib,g}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}], \quad (3.48)$$

где $G_x^k \in \mathbb{R}^{G_y}$, $G_y^k \in \mathbb{R}^{G_x}$, $G_x^\varepsilon \in \mathbb{R}^{G_y}$ и $G_y^\varepsilon \in \mathbb{R}^{G_x}$ — дискретные аналоги $\frac{\partial k}{\partial x}$, $\frac{\partial k}{\partial y}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ соответственно; $\check{k} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$ и $\check{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$ — дискретные аналоги кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации соответственно. Поскольку $\varepsilon^{ib} \neq 0$ в отличие от $\tilde{\nu}^{ib}$ и k^{ib} , в источниковых членах $S_y^{ib,g}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$ и $S_x^{ib,g}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$ появятся ненулевые элементы на усеченных ячейках: если ячейка $\Omega_{i-1,j}^{xy}$ является твердой, то $S_y^{ib,g}[\varepsilon, \varepsilon^{ib}]_{i,j} = -\frac{\varepsilon^{ib}}{\theta_{i,j}^v \Delta x_i}$; если $\Omega_{i,j-1}^{xy}$ является твердой, то $S_x^{ib,g}[\varepsilon, \varepsilon^{ib}]_{i,j} = -\frac{\varepsilon^{ib}}{\theta_{i,j}^u \Delta y_j}$; если $\Omega_{i,j}^{xy}$ — твердая ячейка, то получаем, что $S_y^{ib,g}[\varepsilon, \varepsilon^{ib}]_{i,j} = \frac{\varepsilon^{ib}}{\theta_{i,j}^v \Delta x_i}$, а $S_x^{ib,g}[\varepsilon, \varepsilon^{ib}]_{i,j} = \frac{\varepsilon^{ib}}{\theta_{i,j}^u \Delta y_j}$.

Таким образом, дискретные аналоги уравнений (3.45), (3.46) в случае подвижных погруженных границ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{M}^{xy,n+1} \check{k}^{n+1} - \mathcal{M}^{xy,n} \check{k}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n] \check{k}^n + S_{xy}^{ib,c,n}[k_\infty, k^{ib}] - S^{ns,n} - \\ & - \mathcal{M}^{xy,n} S^{k,n} - \mathcal{K}^{xy}[G_x^{k,n}, G_y^{k,n}] \frac{\check{\nu}^{t,n}}{\sigma_k} - S^{xy,\nu} \left[G_x^{k,n}, G_y^{k,n}, \frac{\nu_\infty^t}{\sigma_k}, 0 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{M}^{xy,n+1} \check{\varepsilon}^{n+1} - \mathcal{M}^{xy,n} \check{\varepsilon}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n] \check{\varepsilon}^n + S_{xy}^{ib,c,n}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}] - S^{ns,\varepsilon,n} - \\ & - \mathcal{M}^{xy,n} S^{\varepsilon,n} - \mathcal{K}^{xy}[G_x^{\varepsilon,n}, G_y^{\varepsilon,n}] \frac{\check{\nu}^{t,n}}{\sigma_\varepsilon} - S^{xy,\nu} \left[G_x^{\varepsilon,n}, G_y^{\varepsilon,n}, \frac{\nu_\infty^t}{\sigma_\varepsilon}, 0 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где $\check{\nu}^t \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$ — дискретная турбулентная вязкость.

Поскольку $\varepsilon^{ib} \neq 0$, на усеченных ячейках в $S_{xy}^{ib,c}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$ в отличие от $S_{xy}^{ib,c}[\tilde{\nu}_\infty, \tilde{\nu}^{ib}]$ и $S_{xy}^{ib,c}[k_\infty, k^{ib}]$ появятся ненулевые элементы. Значения этих элементов определяются типами ячеек $\Omega_{i,j}$, $\Omega_{i+1,j}$, $\Omega_{i,j+1}$ и $\Omega_{i+1,j+1}$. Представим $S_{xy,i,j}^{ib,c}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$ на усеченной ячейке $\Omega_{i,j}^{xy}$ в виде суммы $S_{xy,i,j}^{ib,c}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}] = S_{xy,i,j}^{ib,c,SW}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}] + S_{xy,i,j}^{ib,c,SE}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}] + S_{xy,i,j}^{ib,c,NW}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}] + S_{xy,i,j}^{ib,c,NE}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$. Значения $S_{xy,i,j}^{ib,c,SW}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$, $S_{xy,i,j}^{ib,c,SE}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$, $S_{xy,i,j}^{ib,c,NW}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$ и $S_{xy,i,j}^{ib,c,NE}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$, отличные от нуля, собраны в Таблице 25–28.

Ненулевые значения $S_{xy, i, j}^{ib, c, SW} [\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$

Тип $\Omega_{i, j}$	$S_{xy, i, j}^{ib, c, SW} [\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$
Ю трапеция	$-\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i, j} + U_{i, j}^g - \bar{U}_{i, j}^{ib})/8$
З трапеция	$-\varepsilon^{ib}(\bar{u}_{i, j} + U_{i, j}^g - \bar{U}_{i, j}^{ib})/8$
Ю-В пятиугольник	$-\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i, j} + \bar{v}_{i, j-1} + U_{i, j}^g - \bar{U}_{i, j}^{ib})/8$
С-З пятиугольник	$-\varepsilon^{ib}(\bar{u}_{i, j} + \bar{u}_{i-1, j} + U_{i, j}^g - \bar{U}_{i, j}^{ib})/8$
Ю-З треугольник	$-\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i, j} + \bar{u}_{i, j} + U_{i, j}^g - \bar{U}_{i, j}^{ib})/8$

Таблица 26.

Ненулевые значения $S_{xy, i, j}^{ib, c, SE} [\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$

Тип $\Omega_{i+1, j}$	$S_{xy, i, j}^{ib, c, SE} [\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$
Ю трапеция	$-\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i+1, j} + U_{i+1, j}^g - \bar{U}_{i+1, j}^{ib})/8$
В трапеция	$\varepsilon^{ib}(\bar{u}_{i, j} - U_{i+1, j}^g + \bar{U}_{i+1, j}^{ib})/8$
Ю-З пятиугольник	$-\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i+1, j} + \bar{v}_{i+1, j-1} + U_{i+1, j}^g - \bar{U}_{i+1, j}^{ib})/8$
С-В пятиугольник	$\varepsilon^{ib}(\bar{u}_{i, j} + \bar{u}_{i+1, j} - U_{i+1, j}^g + \bar{U}_{i+1, j}^{ib})/8$
Ю-В треугольник	$\varepsilon^{ib}(\bar{u}_{i, j} - \bar{v}_{i+1, j} - U_{i+1, j}^g + \bar{U}_{i+1, j}^{ib})/8$

Таблица 27.

Ненулевые значения $S_{xy, i, j}^{ib, c, NW} [\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$

Тип $\Omega_{i, j+1}$	$S_{xy, i, j}^{ib, c, NW} [\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$
С трапеция	$\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i, j} - U_{i, j+1}^g + \bar{U}_{i, j+1}^{ib})/8$
З трапеция	$-\varepsilon^{ib}(\bar{u}_{i, j+1} + U_{i, j+1}^g - \bar{U}_{i, j+1}^{ib})/8$
С-В пятиугольник	$\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i, j} + \bar{v}_{i, j+1} - U_{i, j+1}^g + \bar{U}_{i, j+1}^{ib})/8$
Ю-З пятиугольник	$-\varepsilon^{ib}(\bar{u}_{i, j+1} + \bar{u}_{i-1, j+1} + U_{i, j+1}^g - \bar{U}_{i, j+1}^{ib})/8$
С-З треугольник	$\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i, j} - \bar{u}_{i, j} - U_{i, j+1}^g + \bar{U}_{i, j+1}^{ib})/8$

Таблица 28.

Ненулевые значения $S_{xy, i, j}^{ib, c, NE} [\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$

Тип $\Omega_{i+1, j+1}$	$S_{xy, i, j}^{ib, c, NE} [\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}]$
С трапеция	$\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i+1, j} - U_{i+1, j+1}^g + \bar{U}_{i+1, j+1}^{ib})/8$
В трапеция	$\varepsilon^{ib}(\bar{u}_{i, j+1} - U_{i+1, j+1}^g + \bar{U}_{i+1, j+1}^{ib})/8$
С-З пятиугольник	$\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i+1, j} + \bar{v}_{i+1, j+1} - U_{i+1, j+1}^g + \bar{U}_{i+1, j+1}^{ib})/8$
Ю-В пятиугольник	$\varepsilon^{ib}(\bar{u}_{i, j+1} + \bar{u}_{i+1, j+1} - U_{i+1, j+1}^g + \bar{U}_{i+1, j+1}^{ib})/8$
С-В треугольник	$\varepsilon^{ib}(\bar{v}_{i+1, j} + \bar{u}_{i, j+1} - U_{i+1, j+1}^g + \bar{U}_{i+1, j+1}^{ib})/8$

В случае неподвижных границ (3.49) и (3.50) имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{xy} \frac{\check{k}^{n+1} - \check{k}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n] \check{k}^n + S_{xy}^{ib,c,n}[k_\infty, k^{ib}] - S^{ns,n} - \\ - \mathcal{M}^{xy} S^{k,n} - \mathcal{K}^{xy}[G_x^{k,n}, G_y^{k,n}] \frac{\check{\nu}^{t,n}}{\sigma_k} - S^{xy,\nu} \left[G_x^{k,n}, G_y^{k,n}, \frac{\nu_\infty^t}{\sigma_k}, 0 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{xy} \frac{\check{\varepsilon}^{n+1} - \check{\varepsilon}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n] \check{\varepsilon}^n + S_{xy}^{ib,c,n}[\varepsilon_\infty, \varepsilon^{ib}] - S^{ns,\varepsilon,n} - \\ - \mathcal{M}^{xy} S^{\varepsilon,n} - \mathcal{K}^{xy}[G_x^{\varepsilon,n}, G_y^{\varepsilon,n}] \frac{\check{\nu}^{t,n}}{\sigma_\varepsilon} - S^{xy,\nu} \left[G_x^{\varepsilon,n}, G_y^{\varepsilon,n}, \frac{\nu_\infty^t}{\sigma_\varepsilon}, 0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

3.3.3.2. $k - \omega$ модель

В $k - \omega$ модели [144] для моделирования турбулентных потоков решаются два дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) k = \tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{k^{3/2}}{l_{turb}} + \nabla \cdot [(\nu + \sigma^* \nu^t) \nabla k], \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = \alpha \frac{\omega}{k} \left[\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \beta \omega^2 + \nabla \cdot [(\nu + \sigma \nu^t) \nabla \omega], \quad (3.54)$$

где ω — удельная скорость диссипации k , $\sigma^* = \frac{1}{2}$, $\sigma = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{5}{9}$, $\beta = \frac{3}{40}$.

Масштаб l_{turb} в рамках подхода RANS полагают равным

$$l_{RANS} = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega}, \quad (3.55)$$

где $\beta^* = 0,09$. При использовании модели в рамках подходов LES и DES l_{turb} полагают равным (3.2) и (3.3) соответственно. Граничные условия для (3.53), (3.54) имеют следующий вид [98, 144]:

$$\begin{aligned} k|_K = k^{ib} \equiv 0, \quad \omega|_K = \omega^{ib} \equiv \frac{6\nu}{\beta_1(\Delta_1)^2}, \quad \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_4} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_4} = 0, \\ k|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = k_\infty = \nu_\infty^t \omega_\infty, \quad \nu_\infty^t = 0,001\nu, \quad \omega|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = \omega_\infty = \frac{CV_\infty}{D}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

где $\beta_1 = 0,075$, ν_∞^t — значение турбулентной вязкости, задаваемое на Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 , C — константа, значения которой, как правило, лежат в диапазоне $1 \dots 10$, Δ_1 — величина первого пристеночного шага сетки. В начальный момент времени k и ω полагаем равными k_∞ и ω_∞ .

После определения k и ω рассчитываются значения ν^t :

$$\nu^t = \frac{k}{\omega}. \quad (3.57)$$

Удобно вычислять ω в тех же точках, что и ν^t и k (Рис. 3.1). Таким образом, $\Omega_{i,j}^{xy}$ (Рис. 3.2) является контрольным объемом как для (3.53), так и для (3.54). Перепишем (3.53), (3.54) в интегральной форме с учетом (3.57):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} k dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) k dS = \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left(\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV + \\ + \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left[\tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{k^{3/2}}{l_{turb}} \right] dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\nu + \sigma^* \nu^t) \nabla k \cdot \mathbf{n} dS, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \omega dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \omega dS = \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \frac{\alpha}{\nu^t} \left(\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV + \\ + \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left[\frac{\alpha}{\nu^t} \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \beta \omega^2 \right] dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\nu + \sigma \nu^t) \nabla \omega \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Поскольку τ_{xy}^t , ν^t и ω вычисляются в одних и тех же точках, разностный аналог слагаемого в (3.59), содержащего τ_{xy}^t , имеет вид

$$\int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left[\frac{\alpha}{\nu^t} \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \beta \omega^2 \right] dV \approx \mathcal{M}_{i,j}^{xy} \left[\frac{\alpha}{\nu^t} \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \beta \omega^2 \right]_{i,j} = \mathcal{M}_{i,j}^{xy} S_{i,j}^{\omega},$$

где $S^{\omega} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$. Для слагаемого в (3.59), содержащего нормальные напряжения, которые рассчитываются на основной сетке, имеем:

$$\int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \frac{\alpha}{\nu^t} \left(\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV \approx \frac{\alpha}{\nu_{i,j}^t} S_{i,j}^{ns} = S_{i,j}^{ns,\omega},$$

где $S^{ns,\omega} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$. По аналогии с (3.48) получаем равенства

$$G_x^{\omega} = \mathcal{G}_x^{xy} \check{\omega} + S_y^{ib,g} [\omega_{\infty}, \omega^{ib}], \quad G_y^{\omega} = \mathcal{G}_y^{xy} \check{\omega} + S_x^{ib,g} [\omega_{\infty}, \omega^{ib}], \quad (3.60)$$

где $G_x^{\omega} \in \mathbb{R}^{G_y}$ и $G_y^{\omega} \in \mathbb{R}^{G_x}$ — дискретные аналоги $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ соответственно, $\check{\omega} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$ — дискретный аналог ω .

Таким образом, дискретные аналоги уравнений (3.58), (3.59) в случае подвижных погруженных границ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}^{xy,n+1} \check{k}^{n+1} - \mathcal{M}^{xy,n} \check{k}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy} [\bar{U}^n] \check{k}^n + S_{xy}^{ib,c,n} [k_{\infty}, k^{ib}] - S^{ns,n} - \\ - \mathcal{M}^{xy,n} S^{k,n} - \sigma^* \mathcal{K}^{xy} [G_x^{k,n}, G_y^{k,n}] \check{\nu}^{t,n} - S^{xy,\nu} [G_x^{k,n}, G_y^{k,n}, \sigma^* \nu_{\infty}^t, 0] = 0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{M}^{xy,n+1}\check{\omega}^{n+1} - \mathcal{M}^{xy,n}\check{\omega}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n]\check{\omega}^n + S_{xy}^{ib,c,n}[\omega_\infty, \omega^{ib}] - S^{ns,\omega,n} - \\ & - \mathcal{M}^{xy,n}S^{\omega,n} - \sigma\mathcal{K}^{xy}[G_x^{\omega,n}, G_y^{\omega,n}]\check{\nu}^{t,n} - S^{xy,\nu}[G_x^{\omega,n}, G_y^{\omega,n}, \sigma\nu_\infty^t, 0] = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

В случае неподвижных границ (3.61) и (3.62) имеют вид:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^{xy}\frac{\check{k}^{n+1} - \check{k}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n]\check{k}^n + S_{xy}^{ib,c,n}[k_\infty, k^{ib}] - S^{ns,n} - \\ & - \mathcal{M}^{xy}S^{k,n} - \sigma^*\mathcal{K}^{xy}[G_x^{k,n}, G_y^{k,n}]\check{\nu}^{t,n} - S^{xy,\nu}[G_x^{k,n}, G_y^{k,n}, \sigma^*\nu_\infty^t, 0] = 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^{xy}\frac{\check{\omega}^{n+1} - \check{\omega}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n]\check{\omega}^n + S_{xy}^{ib,c,n}[\omega_\infty, \omega^{ib}] - S^{ns,\omega,n} - \\ & - \mathcal{M}^{xy}S^{\omega,n} - \sigma\mathcal{K}^{xy}[G_x^{\omega,n}, G_y^{\omega,n}]\check{\nu}^{t,n} - S^{xy,\nu}[G_x^{\omega,n}, G_y^{\omega,n}, \sigma\nu_\infty^t, 0] = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

3.3.3.3. $k - \omega$ SST модель

В $k - \omega$ SST модели [98], сочетающей в себе преимущества $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ моделей, решаются два дифференциальных уравнений переноса:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)k = \tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{k^{3/2}}{l_{turb}} + \nabla \cdot [(\nu + \sigma_k \nu^t) \nabla k], \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega &= \frac{\gamma}{\nu^t} \left[\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \\ & - \beta \omega^2 + \nabla \cdot [(\nu + \sigma_\omega \nu^t) \nabla \omega] + (1 - F_1) D_{k\omega}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

где $\sigma_k = F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1) \sigma_{k2}$, $\sigma_\omega = F_1 \sigma_{\omega1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega2}$, $\beta = F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2$, $\gamma = F_1 \gamma_1 + (1 - F_1) \gamma_2$, $\sigma_{k1} = 0,5$, $\sigma_{k2} = 1,0$, $\sigma_{\omega1} = 0,5$, $\sigma_{\omega2} = 0,856$, $\beta_1 = 0,075$, $\beta_2 = 0,0828$, $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \sigma_{\omega1} \frac{\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$, $\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \sigma_{\omega2} \frac{\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$, $\beta^* = 0,09$, $\kappa = 0,41$, $D_{k\omega} = \frac{2\sigma_{\omega2}}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega$ — член с перекрестной диффузией, F_1 — весовая функция, обеспечивающая плавный переход от $k - \omega$ модели в пристеночной области к $k - \varepsilon$ модели вдали от стенки. В [98] весовая функция F_1 подобрана так, что F_1 оказывается равной нулю на верхней границе пограничного слоя и стремится к единице при приближении к стенке:

$$F_1 = \text{th}(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left(\max \left\{ \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega} \right\}, \frac{4\sigma_{\omega2}k}{CD_{k\omega}d^2} \right), \quad (3.67)$$

где $CD_{k\omega} = \max(D_{k\omega}, 10^{-20})$, d — безразмерное расстояние до стенки.

Масштаб l_{turb} при использовании $k - \omega$ SST модели в рамках RANS полагают равным (3.55). При использовании модели в рамках LES и DES

l_{turb} полагают равным (3.2) и (3.3) соответственно с той лишь разницей, что C_{LES} и C_{DES} в (3.2) и (3.3) для данной модели не являются константами, а вычисляются на xy -сетке при помощи весовой функции:

$$C_{LES} = F_1 C_{LES}^{k-\omega} + (1 - F_1) C_{LES}^{k-\varepsilon}, \quad C_{DES} = F_1 C_{DES}^{k-\omega} + (1 - F_1) C_{DES}^{k-\varepsilon}, \quad (3.68)$$

где $C_{LES}^{k-\omega}$ и $C_{LES}^{k-\varepsilon}$ — константы C_{LES} из (3.2), выбранные для $k-\omega$ и $k-\varepsilon$ модели соответственно, $C_{DES}^{k-\omega}$ и $C_{DES}^{k-\varepsilon}$ — константы C_{DES} из (3.3), выбранные для $k-\omega$ и $k-\varepsilon$ модели соответственно.

Граничные условия для (3.65), (3.66) совпадают с (3.56). В начальный момент времени k и ω полагаем равными k_∞ и ω_∞ соответственно. После определения k и ω рассчитываются значения ν^t :

$$\nu^t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, \quad (3.69)$$

где $a_1 = 0,31$, $\Omega = \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right|$, $F_2 = \text{th}(\arg_2^2)$, $\arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0,09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega}\right)$.

Перепишем уравнения (3.65) и (3.66) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} k dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) k dS = & \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left(\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV + \\ & + \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left[\tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{k^{3/2}}{l_{turb}} \right] dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\nu + \sigma_k \nu^t) \nabla k \cdot \mathbf{n} dS, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \omega dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \omega dS = & \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \frac{\gamma}{\nu^t} \left(\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV + \\ & + \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left[\frac{\gamma}{\nu^t} \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \beta \omega^2 \right] dV + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\nu + \sigma_\omega \nu^t) \nabla \omega \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} (1 - F_1) D_{k\omega} dV. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Поскольку τ_{xy}^t , ν^t и ω вычисляются в одних и тех же точках, разностный аналог слагаемого в (3.71), содержащего τ_{xy}^t , имеет вид

$$\int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \left[\frac{\gamma}{\nu^t} \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \beta \omega^2 \right] dV \approx \mathcal{M}_{i,j}^{xy} \left[\frac{\gamma}{\nu^t} \tau_{xy}^t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \beta \omega^2 \right]_{i,j} = \mathcal{M}_{i,j}^{xy} S_{i,j}^{\omega S},$$

где $S^{\omega S} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$. Для слагаемого в (3.71), содержащего нормальные напряжения, которые рассчитываются на основной сетке, имеем:

$$\int_{\Omega_{i,j}^{xy}} \frac{\gamma}{\nu^t} \left(\tau_{xx}^t \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}^t \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV \approx \frac{\gamma_{i,j}}{\nu_{i,j}^t} S_{i,j}^{ns} = S_{i,j}^{ns, \omega S},$$

где $S^{ns,\omega} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$. Для слагаемого с перекрестной диффузией имеем:

$$\int_{\Omega_{i,j}^{xy}} (1-F_1) D_{k\omega} dV \approx (1-F_1|_{i,j}) \frac{2\sigma_{\omega 2}}{\omega_{i,j}} (S_{i,j}^{k\omega,x} + S_{i+1,j}^{k\omega,x} + S_{i,j}^{k\omega,y} + S_{i,j+1}^{k\omega,y}) = S_{i,j}^{SST},$$

где $S_{i,j}^{k\omega,x} = G_x^k|_{i,j} G_x^\omega|_{i,j} (\alpha_{i,j}^V + \alpha_{i,j+1}^V)$, $S_{i,j}^{k\omega,y} = G_y^k|_{i,j} G_y^\omega|_{i,j} (\alpha_{i,j}^V + \alpha_{i+1,j}^V)$, $\alpha_{i,j}^V = \alpha_{i,j} V_{i,j}$, $S^{SST} \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$. Для вычисления значений весовой функции F_1 в тех же точках, в которых вычисляются k и ω , необходимо определить в этих точках значения $CD_{k\omega}$ из (3.67). Поскольку $CD_{k\omega} = \max(D_{k\omega}, 10^{-20})$, для этого достаточно определить значение $D_{k\omega}|_{i,j}$ на ячейке $\Omega_{i,j}^{xy}$:

$$D_{k\omega}|_{i,j} = (\mathcal{M}_{i,j}^{xy})^{-1} \int_{\Omega_{i,j}^{xy}} D_{k\omega} dV \approx \frac{2\sigma_{\omega 2}}{\omega_{i,j} \mathcal{M}_{i,j}^{xy}} (S_{i,j}^{k\omega,x} + S_{i+1,j}^{k\omega,x} + S_{i,j}^{k\omega,y} + S_{i,j+1}^{k\omega,y}).$$

Таким образом, дискретные аналоги уравнений (3.70), (3.71) в случае подвижных погруженных границ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{M}^{xy,n+1} \check{k}^{n+1} - \mathcal{M}^{xy,n} \check{k}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n] \check{k}^n + S_{xy}^{ib,c,n} [k_\infty, k^{ib}] - S^{ns,n} - \\ & - \mathcal{M}^{xy,n} S^{k,n} - \mathcal{K}^{xy} [G_x^{k,n}, G_y^{k,n}] \check{\nu}^{k,n} - S^{xy,\nu} [G_x^{k,n}, G_y^{k,n}, \sigma_k \nu_\infty^t, 0] = 0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{M}^{xy,n+1} \check{\omega}^{n+1} - \mathcal{M}^{xy,n} \check{\omega}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n] \check{\omega}^n + S_{xy}^{ib,c,n} [\omega_\infty, \omega^{ib}] - S^{ns,\omega s,n} - \\ & - \mathcal{M}^{xy,n} S^{\omega s,n} - \mathcal{K}^{xy} [G_x^{\omega,n}, G_y^{\omega,n}] \check{\nu}^{\omega,n} - S^{xy,\nu} [G_x^{\omega,n}, G_y^{\omega,n}, \sigma_\omega \nu_\infty^t, 0] - S^{SST,n} = 0, \end{aligned} \quad (3.73)$$

где $\check{\nu}^k \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$, $\check{\nu}^\omega \in \mathbb{R}^{G_{xy}}$, $\check{\nu}_{i,j}^k = \sigma_k|_{i,j} \check{\nu}_{i,j}^t$, $\check{\nu}_{i,j}^\omega = \sigma_\omega|_{i,j} \check{\nu}_{i,j}^t$. В случае неподвижных погруженных границ (3.72) и (3.73) принимают вид

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^{xy} \frac{\check{k}^{n+1} - \check{k}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n] \check{k}^n + S_{xy}^{ib,c,n} [k_\infty, k^{ib}] - S^{ns,n} - \\ & - \mathcal{M}^{xy} S^{k,n} - \mathcal{K}^{xy} [G_x^{k,n}, G_y^{k,n}] \check{\nu}^{k,n} - S^{xy,\nu} [G_x^{k,n}, G_y^{k,n}, \sigma_k \nu_\infty^t, 0] = 0, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^{xy} \frac{\check{\omega}^{n+1} - \check{\omega}^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^{xy}[\bar{U}^n] \check{\omega}^n + S_{xy}^{ib,c,n} [\omega_\infty, \omega^{ib}] - S^{ns,\omega s,n} - \\ & - \mathcal{M}^{xy} S^{\omega s,n} - \mathcal{K}^{xy} [G_x^{\omega,n}, G_y^{\omega,n}] \check{\nu}^{\omega,n} - S^{xy,\nu} [G_x^{\omega,n}, G_y^{\omega,n}, \sigma_\omega \nu_\infty^t, 0] - S^{SST,n} = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

3.4. Верификация модификаций метода LS-STAG

С использованием разработанных модификаций метода LS-STAG было проведено численное моделирование обтекания неподвижного кругового профиля при $Re = 1000$ (сетки 120×148 с шагом по времени

$\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ и 240×296 с $\Delta t = 10^{-3}$) и $Re = 3900$ (сетки 120×148 с шагом по времени $\Delta t = 10^{-3}$ и 240×296 с $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$). Выбор данных значений Re обусловлен тем, что для них известны экспериментальные данные [148, 149] и результаты расчетов других исследователей [49, 51, 110, 119]. Были вычислены безразмерный стационарный аэродинамический коэффициенты лобового сопротивления C_{xa} , а также число Струхала Sh . Результаты расчетов приведены в Таблице 29.

Таблица 29.

Сравнение рассчитанных значений C_{xa} и Sh с известными данными

Модель турбулентности	Число ячеек	Re = 1000		Re = 3900	
		C_{xa}	Sh	C_{xa}	Sh
Эксперимент [149]	—	0,98	0,21	0,93	0,22
Эксперимент [148]	—	1,12	—	1,01	—
LES [51]	1 103 520	—	—	1,08	—
SV LES [49]	30 720	—	—	1,01	0,22
FV LES [49]	855 040	—	—	1,07	0,24
$k - \varepsilon$ [119]	46 304	1,00	0,15	1,00	0,15
Real $k - \varepsilon$ [119]	46 304	—	0,17	—	0,20
SST $k - \omega$ [119]	46 304	—	0,23	—	0,25
$k - \varepsilon$ [110], ANSYS	388 550	1,17	—	0,74	—
SST $k - \omega$ [110], ANSYS	388 550	0,99	—	0,62	—
LES [110], ANSYS	388 550	1,15	0,21	1,07	—
LES, $\Delta = \Delta^{\max}$, $C_S = 0,2$	71 040	1,35	0,24	1,11	0,26
LES, $\Delta = \Delta^{\max}$, $C_S = 0,5$	71 040	1,37	0,25	1,10	0,25
S-A, RANS	71 040	1,37	0,25	1,13	0,25
S-A, DES, $C_S = 0,7$	71 040	1,37	0,25	1,11	0,25
$k - \varepsilon$, RANS	71 040	1,36	0,25	1,23	0,28
$k - \varepsilon$, LES, $\Delta = \Delta^{\max}$, $C_S = 0,9$	71 040	1,37	0,25	1,11	0,25
$k - \omega$, RANS	71 040	1,32	0,24	1,18	0,24
$k - \omega$, DES, $C_S = 1,0$	71 040	1,32	0,25	1,00	0,25
SST $k - \omega$, RANS	71 040	1,34	0,25	1,14	0,25

Как видно из Таблицы 29, при расчетах модифицированным методом LS-STAG результаты, наиболее близкие к экспериментальным данным, получаются при использовании $k - \omega$ модели турбулентности в рам-

ках подхода RANS на сетке 240×296 . Это можно объяснить тем, что используемая сетка является достаточно грубой (на диаметр кругового профиля приходится всего 32 ячейки), а, как известно, DES и LES подходы к моделированию турбулентности требуют более подробных сеток по сравнению с RANS моделированием [6]. Кроме того, $k - \omega$ модель обеспечивает существенно более точное описание пристеночных пограничных слоев [144], что позволяет более точно по сравнению с другими моделями турбулентности определять C_{xa} , C_{ya} и Sh (Рис. 3.3).

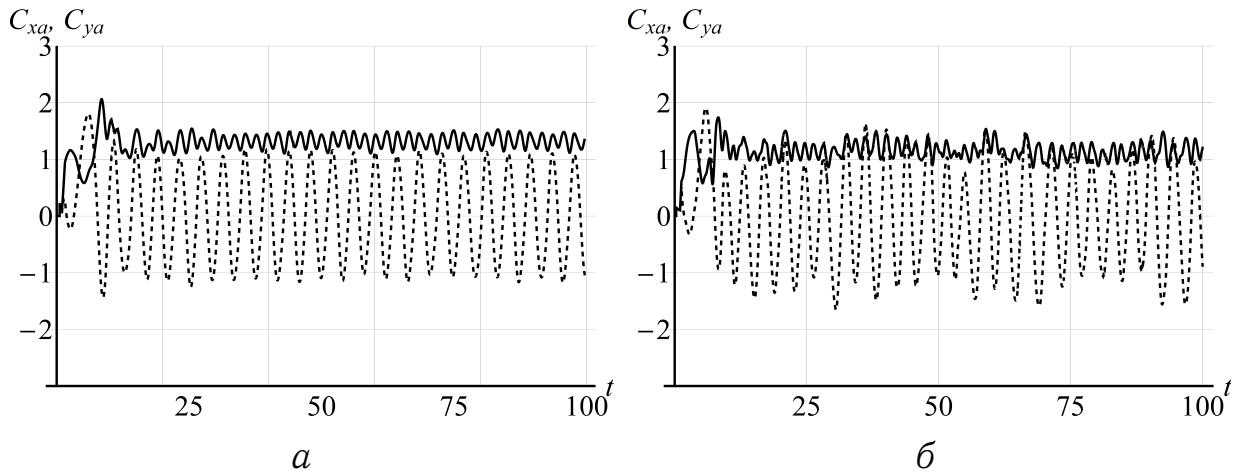


Рис. 3.3. Рассчитанные зависимости $C_{xa}(t)$ и $C_{ya}(t)$ (RANS, модель $k - \omega$, сетка 240×296): а — $Re = 1000$; б — $Re = 3900$

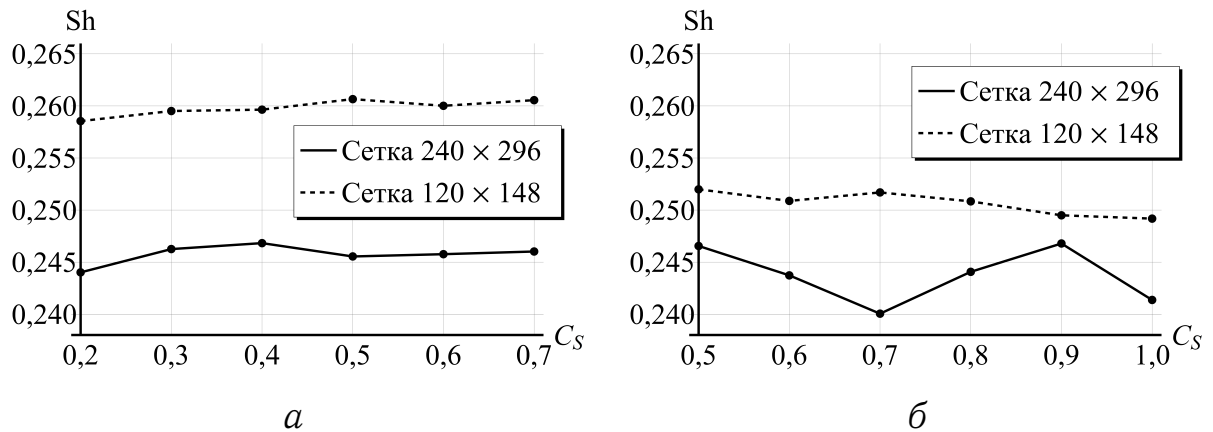


Рис. 3.4. Значения числа Струхали Sh, рассчитанные при $Re = 1000$ (LES, $\Delta = \Delta^{\max}$): а — модель Смагоринского; б — модель $k - \omega$

Рис. 3.4 иллюстрирует влияние шага сетки и используемой модели турбулентности на получаемые результаты при $Re = 1000$. Сравнение значений $Sh(C_s)$, рассчитанных на сетке 240×296 , представлено на Рис. 3.5

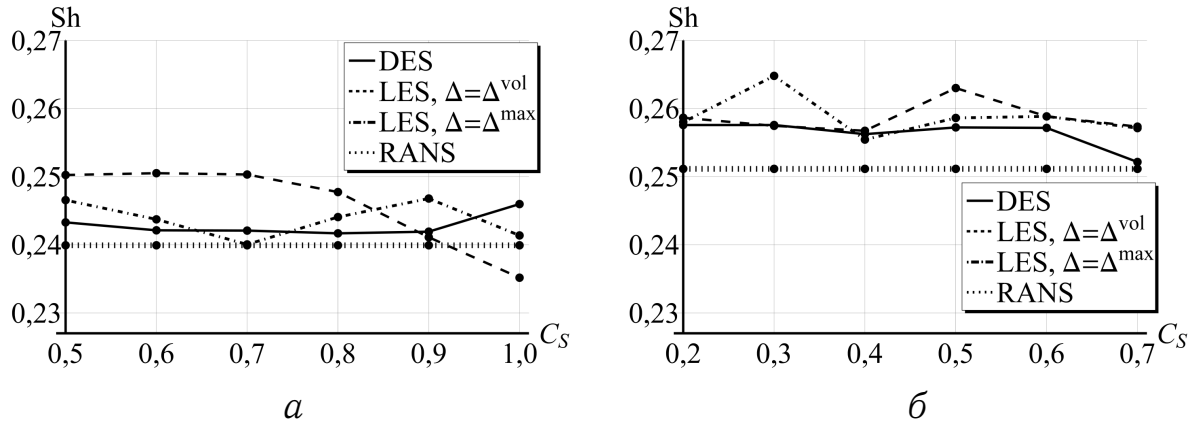


Рис. 3.5. Рассчитанные значения числа Струхала Sh : a — $Re = 1000$, модель $k - \omega$; b — $Re = 3900$, модель Спаларта — Аллмараса

3.5. Результаты и выводы по главе 3

Представлены модификации метода LS-STAG, позволяющие проводить расчеты течений вязкой несжимаемой среды с использованием таких моделей турбулентности, как модель Смагоринского, модель Спаларта — Аллмараса, $k - \varepsilon$ модель, $k - \omega$ модель, $k - \omega$ SST модель в рамках подходов RANS, LES и DES. В частности, LS-STAG-сетка дополнена четвертой сеткой, используемой для моделирования τ_{xy}^t , ν^t , k , ε , ω . Все разработанные модификации метода LS-STAG реализованы в программном комплексе «LS-STAG_turb» [36].

Для верификации было проведено численное моделирование обтекания неподвижного кругового профиля при значениях числа Рейнольдса $Re = 1000$ и $Re = 3900$ на сетках 120×148 и 240×296 . Использование более подробных сеток приводит к значительному росту вычислительных затрат, поэтому естественным направлением дальнейшего развития метода погруженных границ LS-STAG и его программной реализации является разработка параллельной версии вычислительного алгоритма.

Описание представленных в главе 3 модификаций метода LS-STAG и их верификация опубликованы в работах [36, 114, 115, 117].

Глава 4. Программная реализация разработанных модификаций метода LS-STAG

В данной главе описаны особенности программной реализации метода LS-STAG и разработанных модификаций этого метода, представленных в главах 2 и 3. Метод LS-STAG и его модификации для решения сопряженных задач гидроупругости реализованы в программном комплексе «LS-STAG» [35]. Комплекс позволяет моделировать обтекание движущихся профилей произвольной формы и их систем. На основе комплекса «LS-STAG» разработан программный комплекс «LS-STAG_turb», в котором реализованы описанные в главе 3 модификации метода погруженных границ LS-STAG, позволяющие использовать модели турбулентности Смагоринского, Спаларта — Аллмараса, $k - \varepsilon$, $k - \omega$ и $k - \omega$ SST в рамках RANS, LES и DES подходов к моделированию турбулентности.

Для сокращения затрат машинного времени на проведение расчетов разработана параллельная версия алгоритмов, реализованных в комплексах «LS-STAG» и «LS-STAG_turb», и проведена оптимизация участков последовательного кода. Разработанные алгоритмы реализованы в параллельном программном комплексе «LS-STAG_turb» с использованием таких технологий параллельного программирования, как Intel® Cilk™ Plus, Intel® Threading Building Blocks (TBB) и OpenMP. Также в данной главе описаны особенности реализации метода обобщенных минимальных невязок, FGMRES [122], используемый в комплексе «LS-STAG_turb» для решения систем линейных алгебраических уравнений вместо метода бисопряженных градиентов со стабилизацией, BiCGStab [122, 138]. Проведено сравнение эффективности некоторых алгоритмов, реализованных в «LS-STAG_turb», с аналогами из библиотеки высокооптимизированных математических алгоритмов Intel® Math Kernel Library (MKL). Для верификации «LS-STAG_turb» использовались задачи о моделировании обтекания систем круговых профилей, в т.ч. с двумя степенями свободы.

4.1. Архитектура программного комплекса «LS-STAG_turb»

Для реализации алгоритмов решения задач механики жидкости и газа чаще всего используют парадигму директивного (процедурного или структурного) программирования: программа организуется в виде библиотеки подпрограмм, решающих независимые подзадачи [4]. Однако при достижении проектом определенного размера код и взаимосвязи между подпрограммами становятся сложными для восприятия разрабатываемого приложения как единого целого [43]. Также к недостаткам процедурного программирования относят низкую модифицируемость, избыточную поддержку эквивалентных представлений данных [4].

По этим причинам для разработки комплекса «LS-STAG_turb» было решено использовать парадигму объектно-ориентированного программирования [2, 23, 43]. Основой программы при этом являются объекты (экземпляры структур или классов). Каждый объект содержит данные (поля) и функции (методы), которые определяют операции, выполняемые над полями объекта. Таким образом, возникает задача проектирования системы объектов. Для ее решения выбрано проблемно-ориентированное проектирование (Domain Driven Design) [63], при котором схема архитектуры приложения представляет собой описание одной или нескольких моделей предметных областей и их взаимосвязей. В данном разделе описаны и проиллюстрированы UML-диаграммами классов [3] иерархии структур, реализующих работу с LS-STAG-сеткой, разреженными матрицами, разностными аналогами уравнений, моделями турбулентности.

4.1.1. Структуры, реализующие работу с LS-STAG-сеткой

Иерархия структур, реализующих работу с LS-STAG-сеткой, представлена на Рис. 4.1. В базовой структуре LSSTAGUniformMesh определен интерфейс: методы `void init()` для построения сетки перед началом расчета, `void build()` для ее перестроения при движении границ, `bool movBody()`, возвращающий `true` при движении границ, и поля, содер-

жащие координаты узлов, коэффициенты заполнения, параметры разнесенных сеток и т.д. Для работы с сеточными функциями используются обертки (wrapper) над обычными массивами (Рис. 4.2).

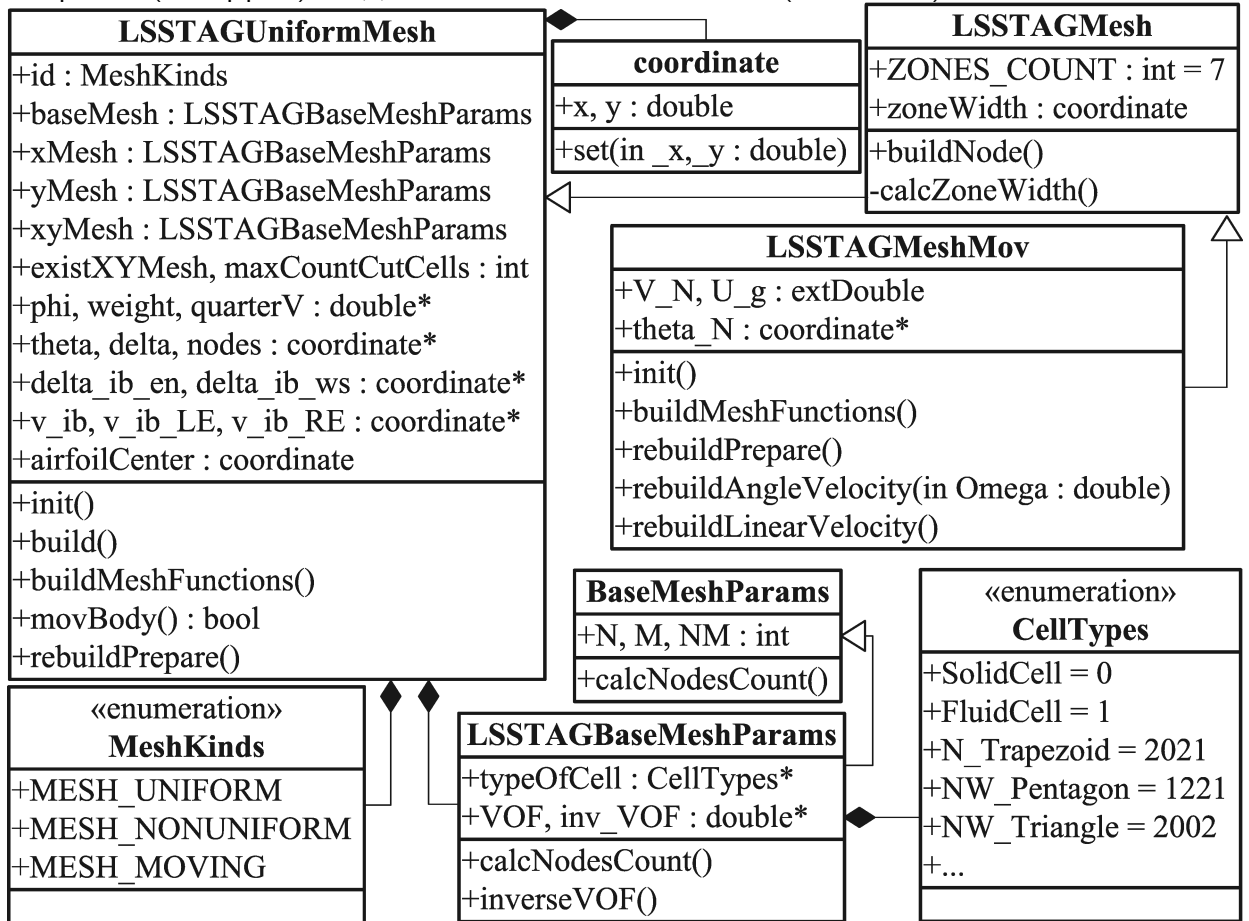


Рис. 4.1. Иерархия структур, реализующих работу с LS-STAG-сеткой

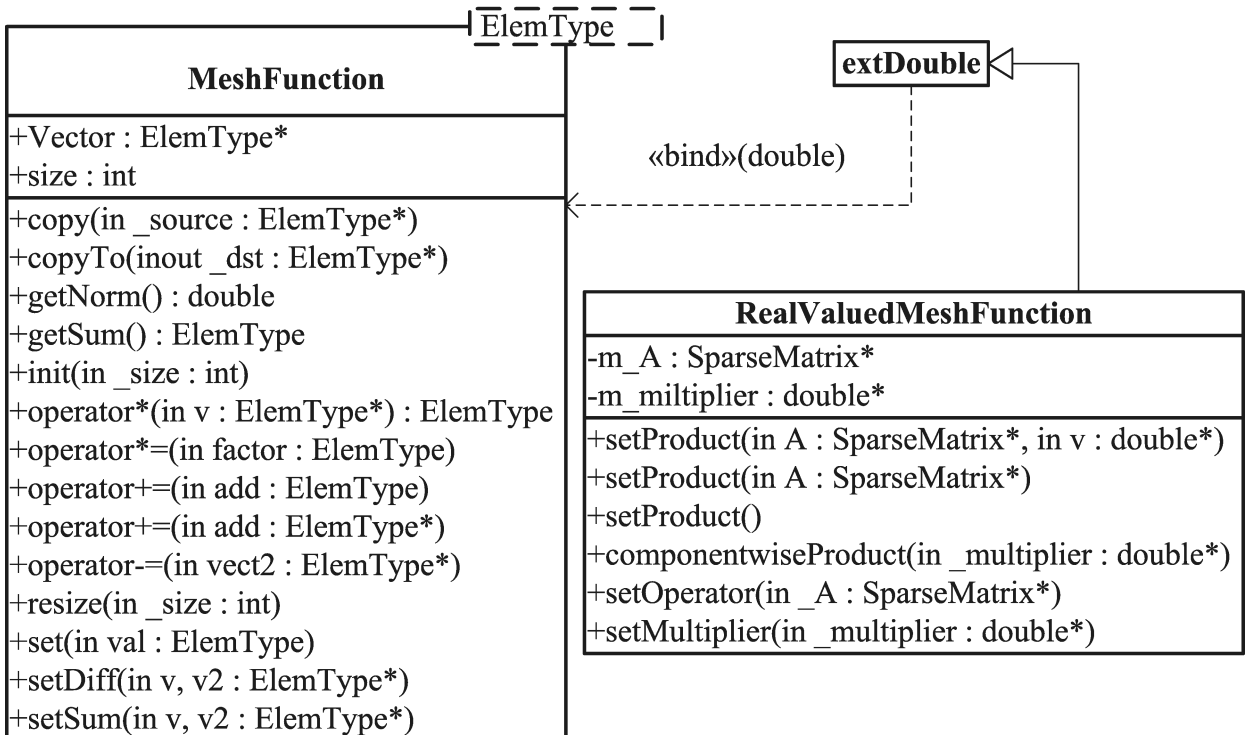


Рис. 4.2. Структуры, реализующие работу с сеточными функциями

4.1.2. Структуры, реализующие работу с матрицами

Иерархия структур, реализующих работу с разреженными матрицами, представлена на Рис. 4.3–4.5. Матрицы хранятся в формате CSR (Compressed Sparse Row) [1]: массив `Cell` содержит все ненулевые элементы матрицы, перечисленные в строчном порядке; `Portrait` — номера столбцов, в которых находятся соответствующие элементы массива `Cell`; `Number` — позиции начальных элементов соответствующих строк в массивах `Cell` и `Portrait`. В поле `NM` хранится число строк матрицы.

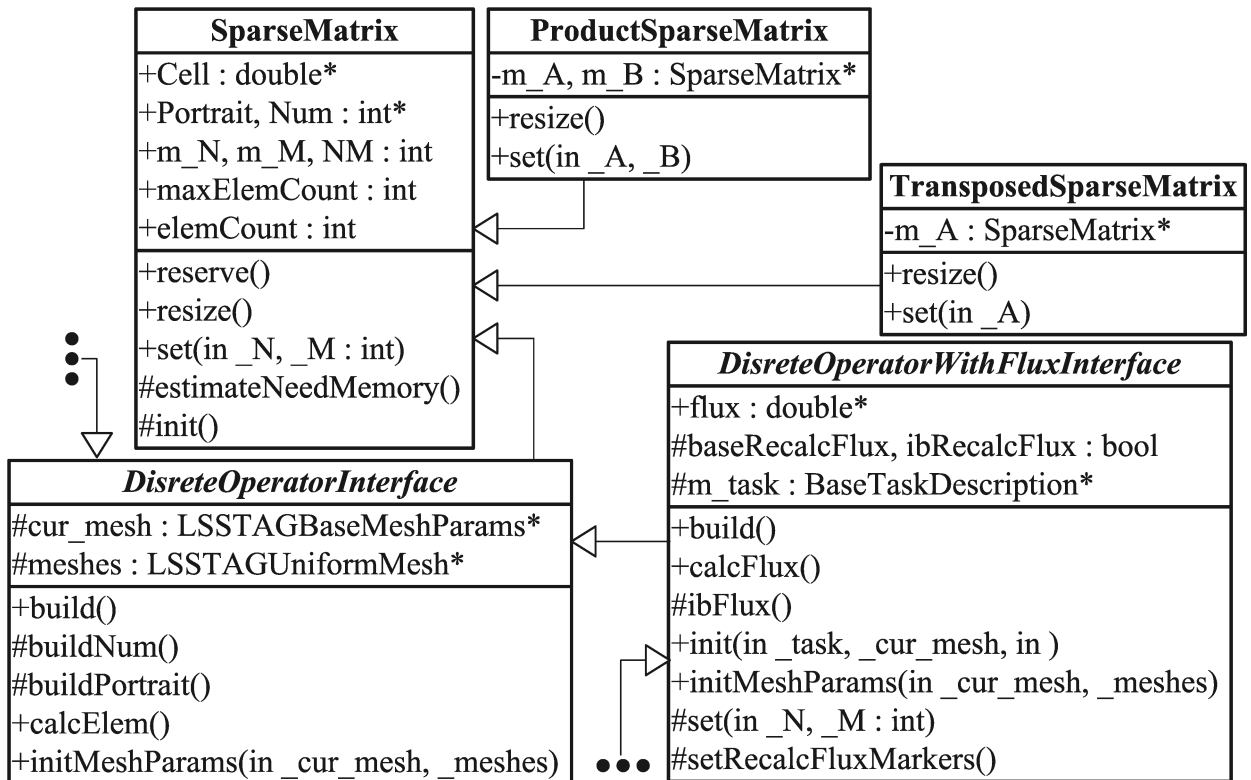


Рис. 4.3. Структуры, реализующие работу с разреженными матрицами

Число ненулевых элементов матрицы `elemCount` может изменяться в процессе расчета при вызове метода `void resize()`. В силу специфики производных структур можно оценить максимальное число ненулевых элементов `maxElemCount` в виртуальном методе `virtual void estimateNeedMemory()`. Затем вызывается метод `void reserve()`, в котором происходит выделение памяти под массивы `Cell` и `Portrait` из расчета, что в них может содержаться `maxElemCount` элементов. Таким образом, при изменении портрета матриц из-за движения погруженной границы не требуется каждый раз освобождать и выделять память.

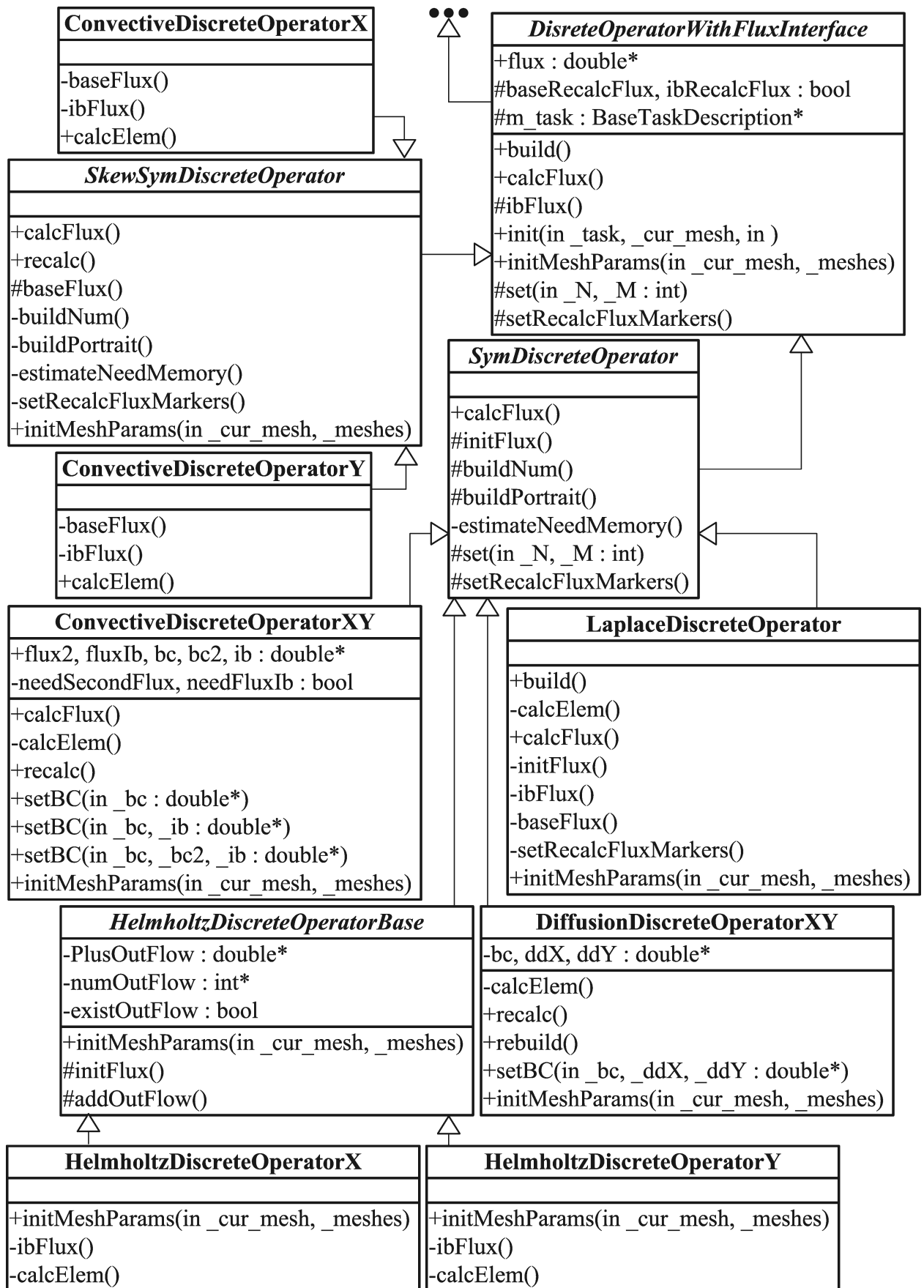


Рис. 4.4. Структуры для работы с дискретными аналогами операторов Лапласа, Гельмгольца, конвективного и диффузионного переноса

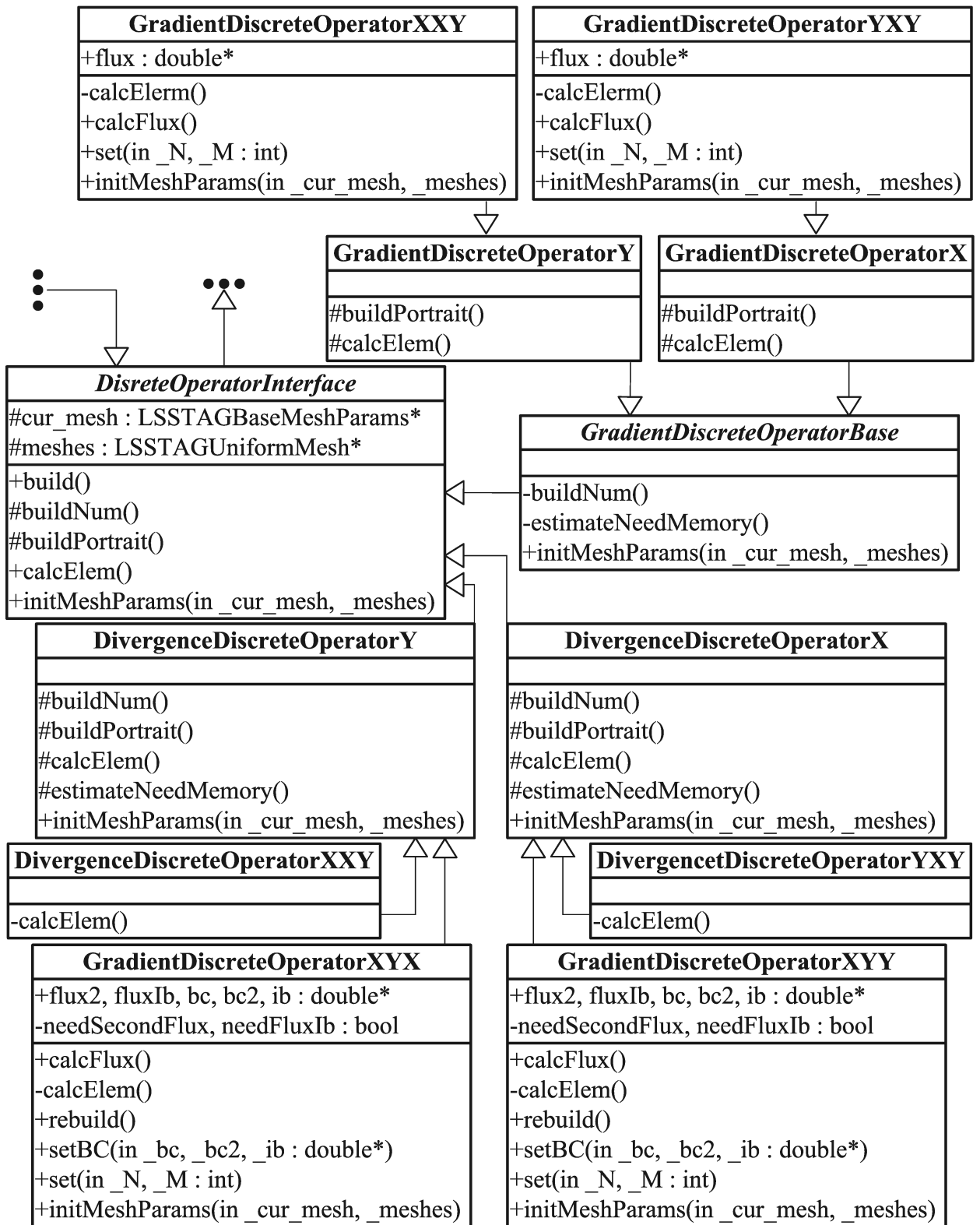


Рис. 4.5. Иерархия структур, реализующих работу с дискретными аналогами операторов градиента и дивергенции

4.1.3. Структуры, реализующие работу решателя систем линейных алгебраических уравнений

Базовая структура `ViCGStabInterface` (Рис. 4.6) реализует схему решения системы линейных алгебраических уравнений методом би-

сопряженных градиентов со стабилизацией (BiCGStab) [138]. Для использования предобуславливания в производных структурах переопределены виртуальные методы `setPrecond()`, `rebuildPreconditioner()` и `preconditioner()`. При решении разностного аналога уравнения Гельмгольца используется экземпляр структуры `ILUBiCGStab`, а при решении разностного аналога уравнения Пуассона — `MGBiCGStab`.

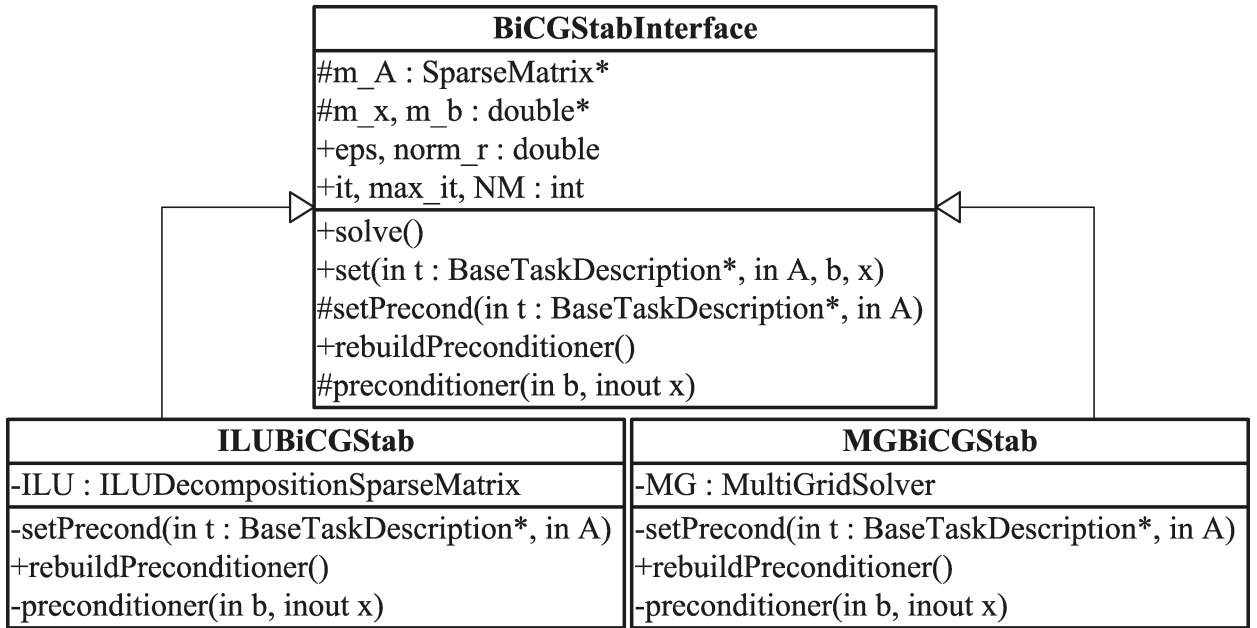


Рис. 4.6. Реализация метода BiCGStab с предобуславливанием

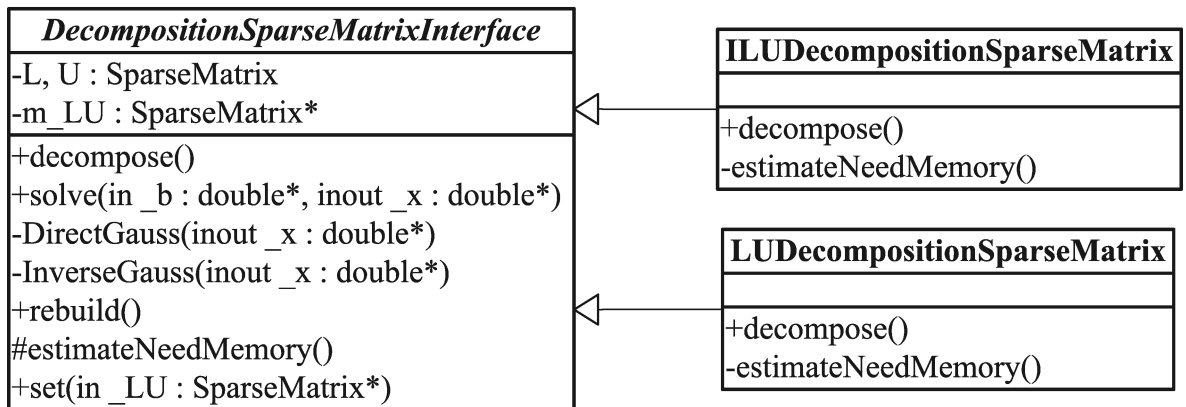


Рис. 4.7. Структуры для работы с разложениями разреженных матриц

ILU-разложение [1] реализовано в методе `decompose()` структуры `ILUDecompositionSparseMatrix` (Рис. 4.7). Иерархия структур, реализующих работу многосеточного решателя, представлена на Рис. 4.8. Краткое описание особенностей используемой модификации многосеточного метода приведено в [19, 31]. Основное отличие данного варианта ре-

ализации многосеточного решателя от модификации, описанной в [140], заключается в использовании оптимальных значений параметров многосеточного предобуславливателя, к которым относится параметр релаксации ω в сглаживающем методе *ADLJ* (альтернирующая линия Якоби с релаксацией) [143], число предсглаживаний n_{pre} и число постсглаживаний n_{post} . Эти оптимальные значения были определены при помощи оригинальной методики анализа коэффициентов усиления гармоник [19].

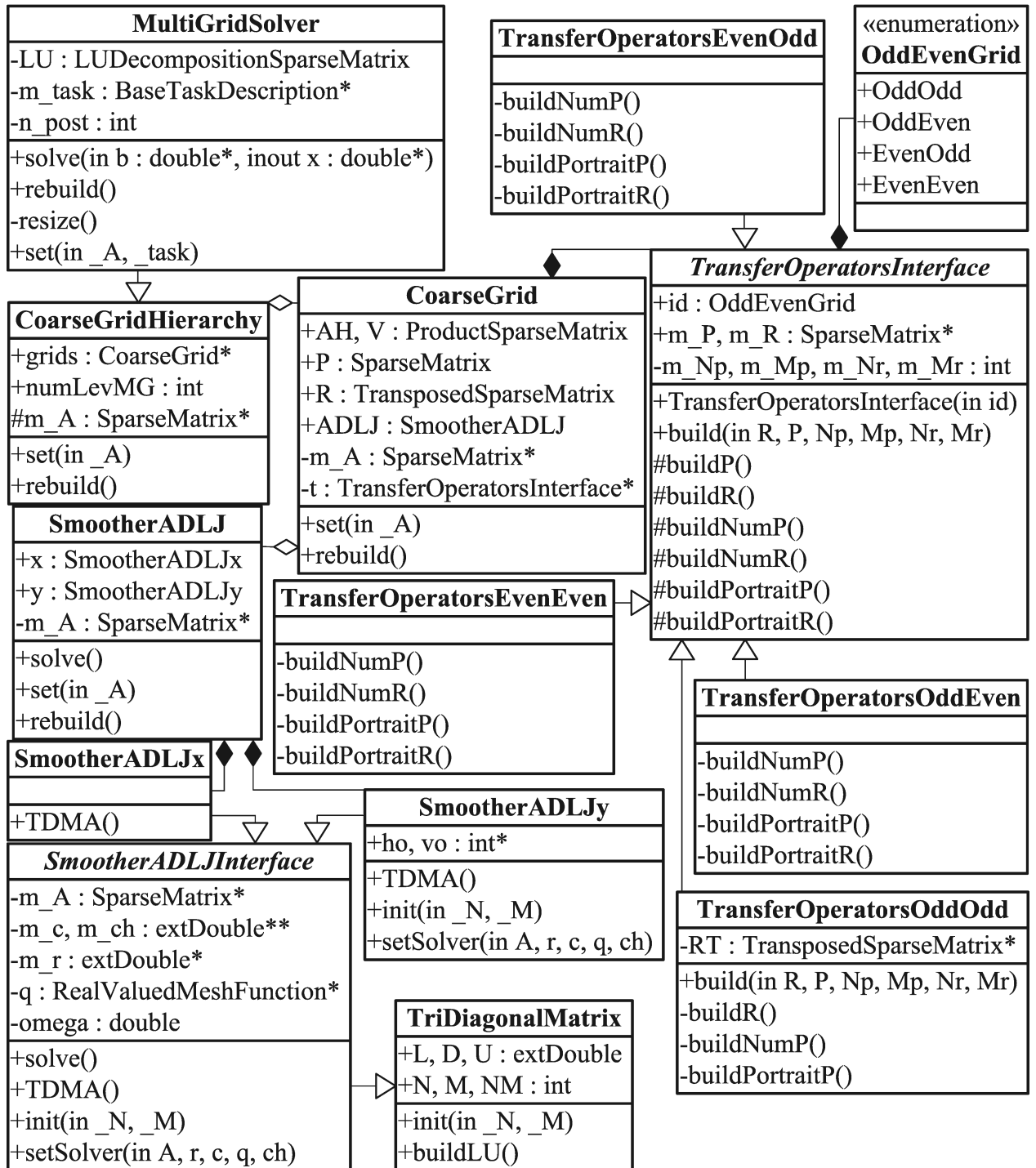


Рис. 4.8. Структуры, реализующие работу многосеточного решателя

Структуры для работы с разностными аналогами уравнений показаны на Рис. 4.9. Базовая структура `DiscreteEquationInterface` содержит указатели на матрицу системы, правую часть, решение, используемый решатель, параметры сетки, на которой строился разностный аналог уравнения. В виртуальном методе `recalcRightMember()`, переопределяемом в производных структурах, происходит пересчет правой части.

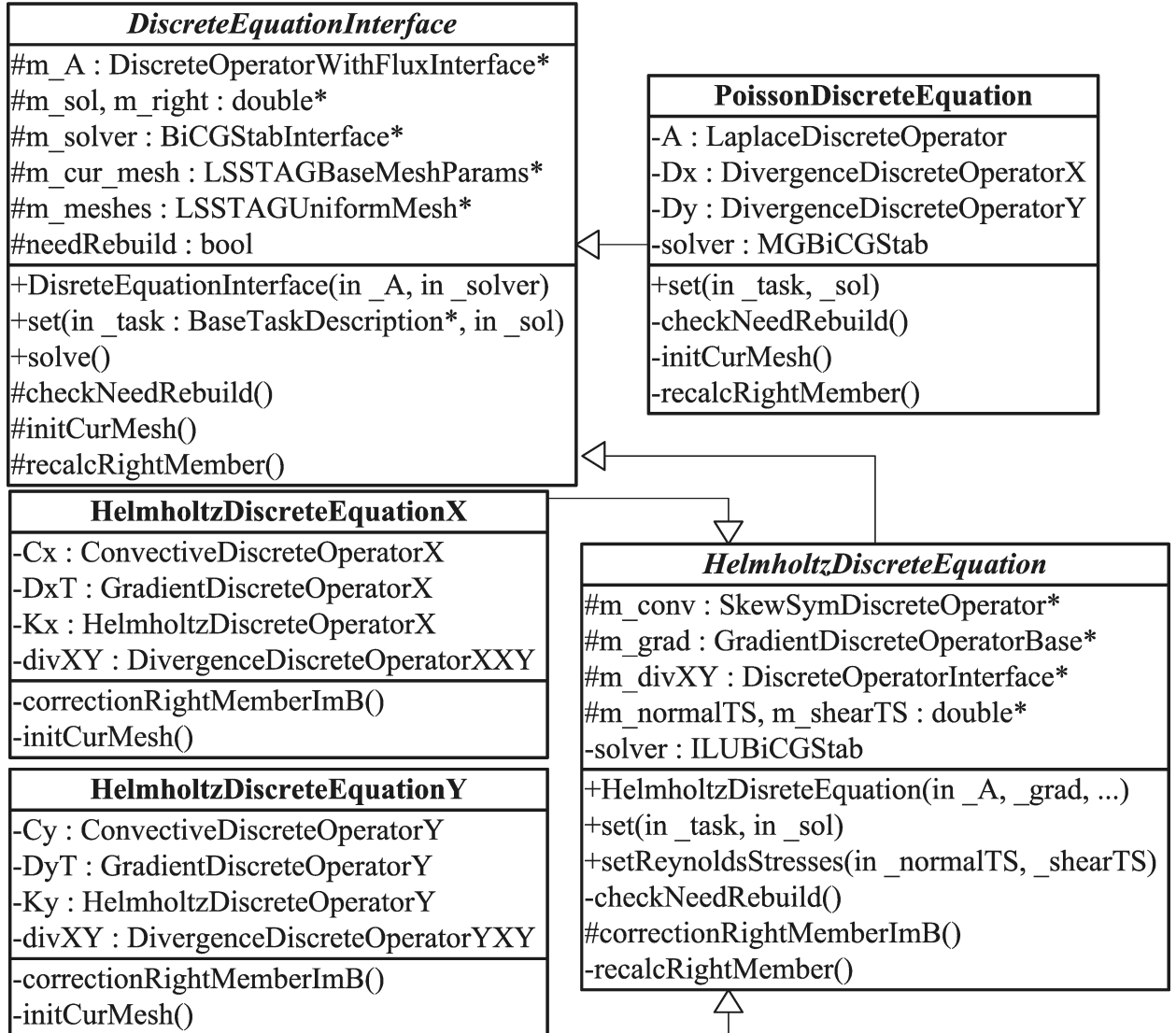


Рис. 4.9. Структуры для работы с разностными аналогами уравнений

4.1.4. Структуры, реализующие моделирование турбулентности

Иерархия структур, реализующих работу с моделями турбулентности и подходами к моделированию турбулентности, представлена на Рис. 4.10 и 4.11. Структура `TurbulenceSimulationApproachInterface`

содержит идентификатор подхода `id` и указатель `m_TM` на базовую структуру, реализующую работу с моделями турбулентности.

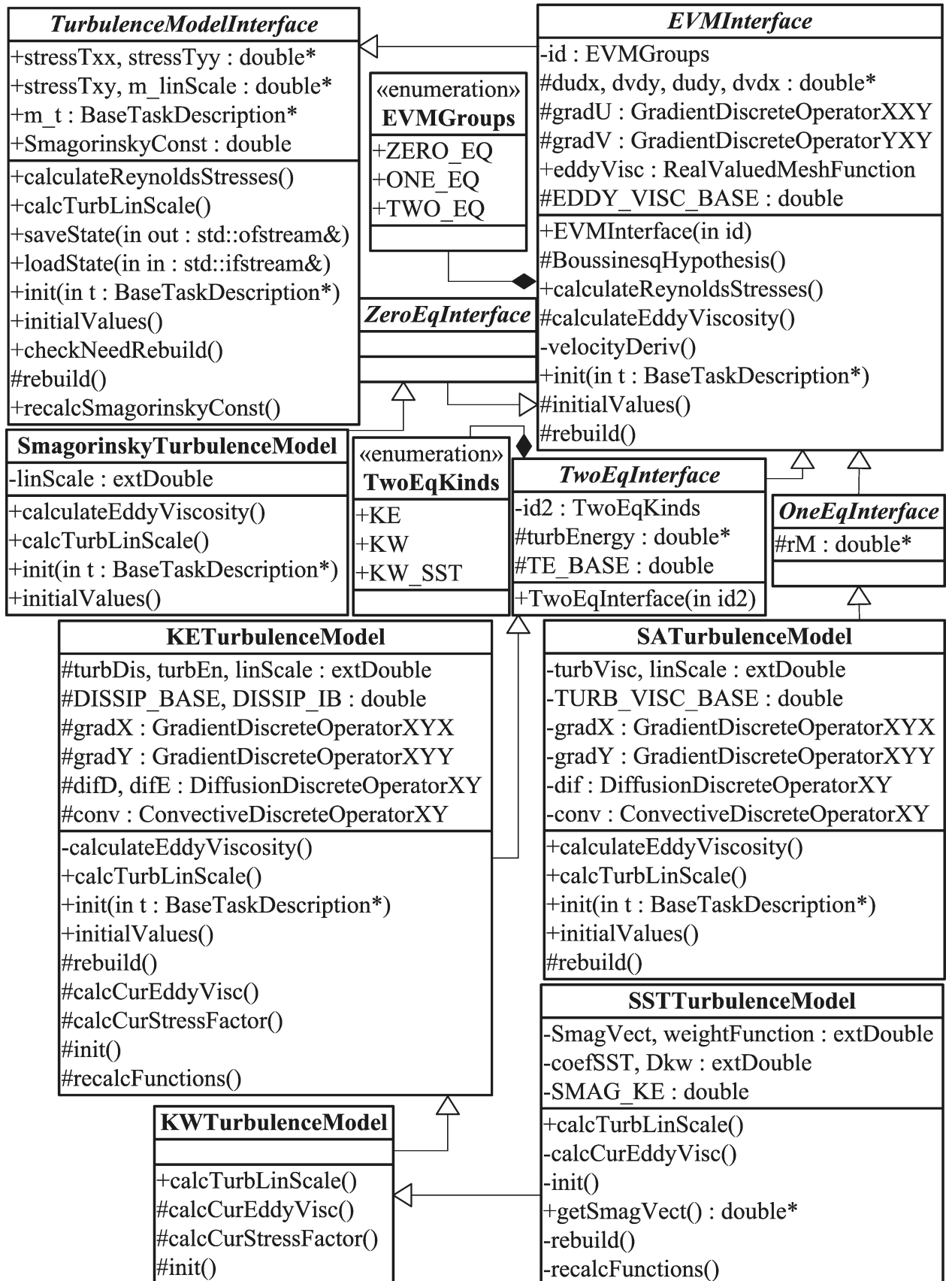


Рис. 4.10. Структуры, реализующие работу с моделями турбулентности

В `calculateReynoldsStresses()` происходит вызов виртуальных методов `TurbulenceLinearScale()` и `m_TM->calculateReynoldsStresses()`, в которых выполняется расчет линейного масштаба турбулентности l_{turb} и рейнольдсовых или подсеточных напряжений соответственно. Для подхода RANS l_{turb} определяется моделью турбулентности, и, поэтому, рассчитывается в виртуальном методе `m_TM->calcTurbLinScale()`. Метод `calculateReynoldsStresses()` для моделей турбулентной вязкости определен в структуре `EVMInterface`. Для расчета напряжений по формулам (1.38)–(1.41), (3.12)–(3.15) вызывается метод `velocityDeriv()`. Расчет ν^t происходит в виртуальном методе `calculateEddyViscosity()`. Для расчета рейнольдсовых или подсеточных напряжений с использованием гипотезы Буссинеска вызывается метод `BoussinesqHypothesis()`.

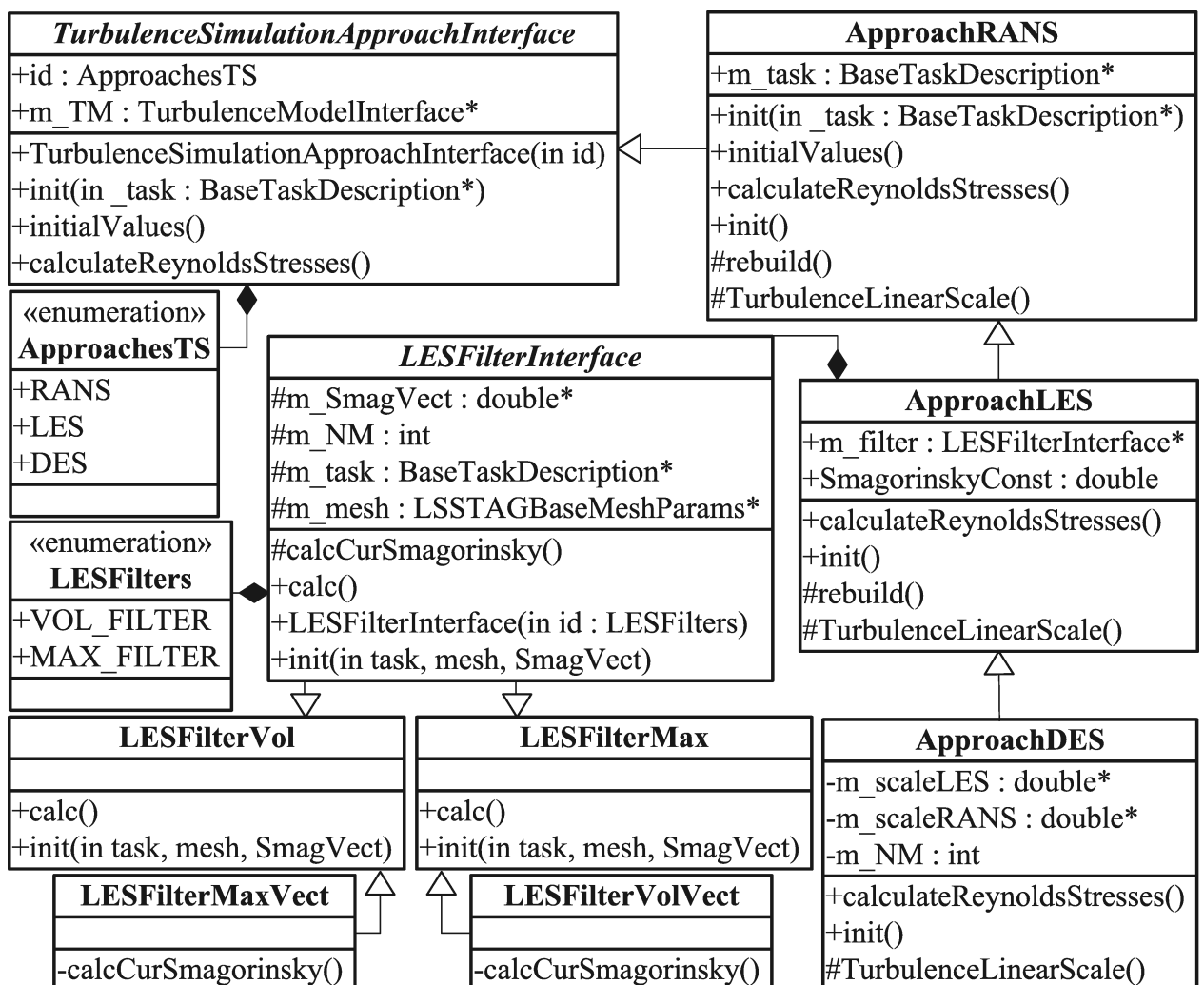


Рис. 4.11. Структуры, реализующие подходы RANS, LES и DES

4.1.5. Структуры, реализующие управление расчетом

Структура `TimeSteppingMethodInterface` (Рис. 4.12) реализует управление вычислительным процессом. В число ее полей входят экземпляры структур разностных аналогов уравнений, структуры `SetSolutions`, реализующей работу с решением, указатели на экземпляр структуры для моделирования турбулентности и на экземпляр базовой структуры, реализующей работу с описанием решаемой задачи, `BaseTaskDescription`.

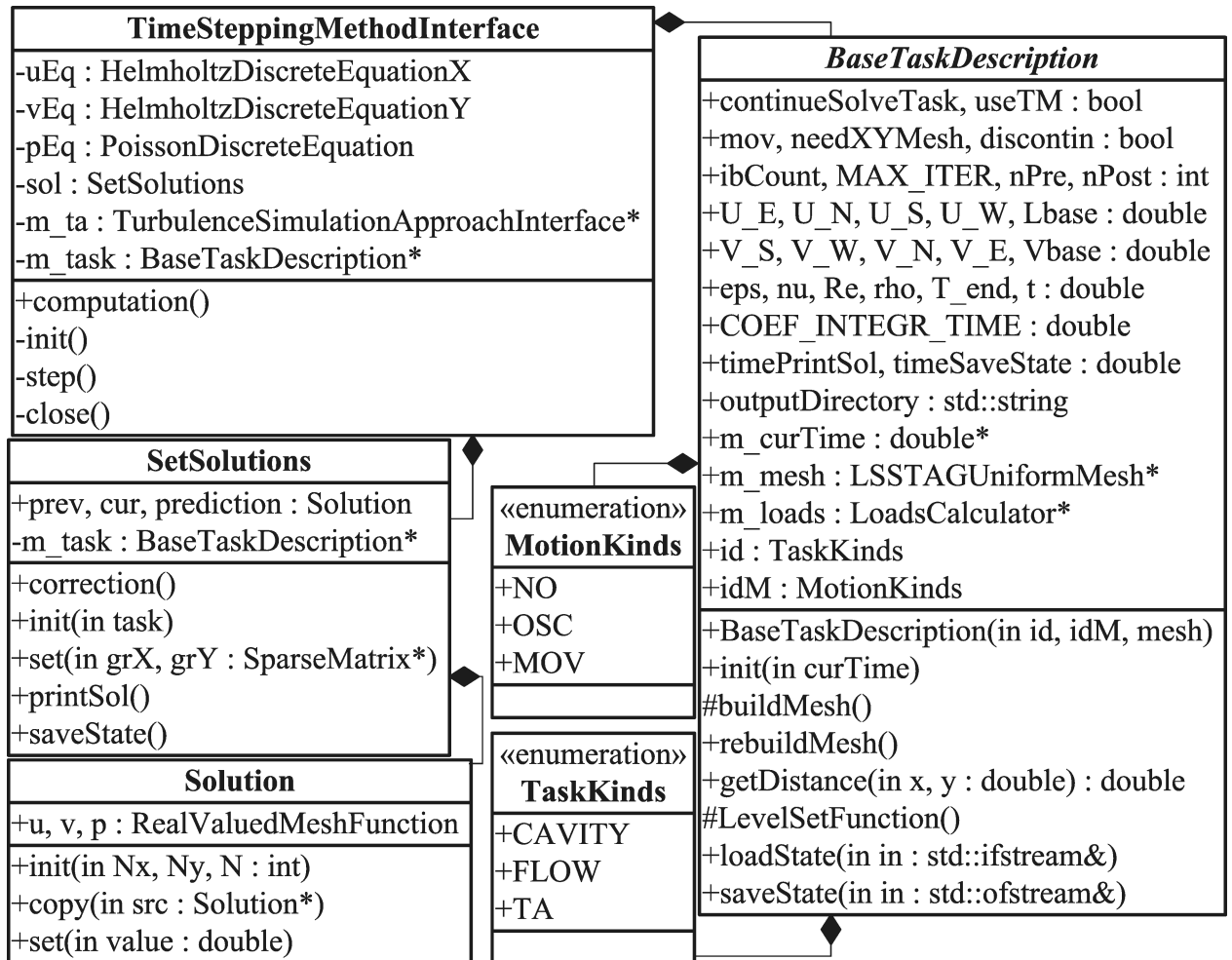


Рис. 4.12. Структуры для управления вычислительным процессом

Из главной функции приложения вызывается только один метод управляющей структуры — `computation()`. Общая схема реализованных в нем действий представлена на Рис. 4.13. Вызов метода `init()` соответствует блоку Б1: происходит заполнение полей структуры описания задачи из файла с постановкой, инициализация сервисной информации (текущее время, номер итерации, пути к папкам с результатами), открытие лог-

файла, инициализация экземпляров структур `Solution` и производных от `LSSTAGUniformMesh` и `DiscreteEquationInterface`. Затем запускается процесс моделирования: до выполнения заданного числа шагов по времени выполняются действия, реализованные в методе `step()` (блоки Б2–Б7).

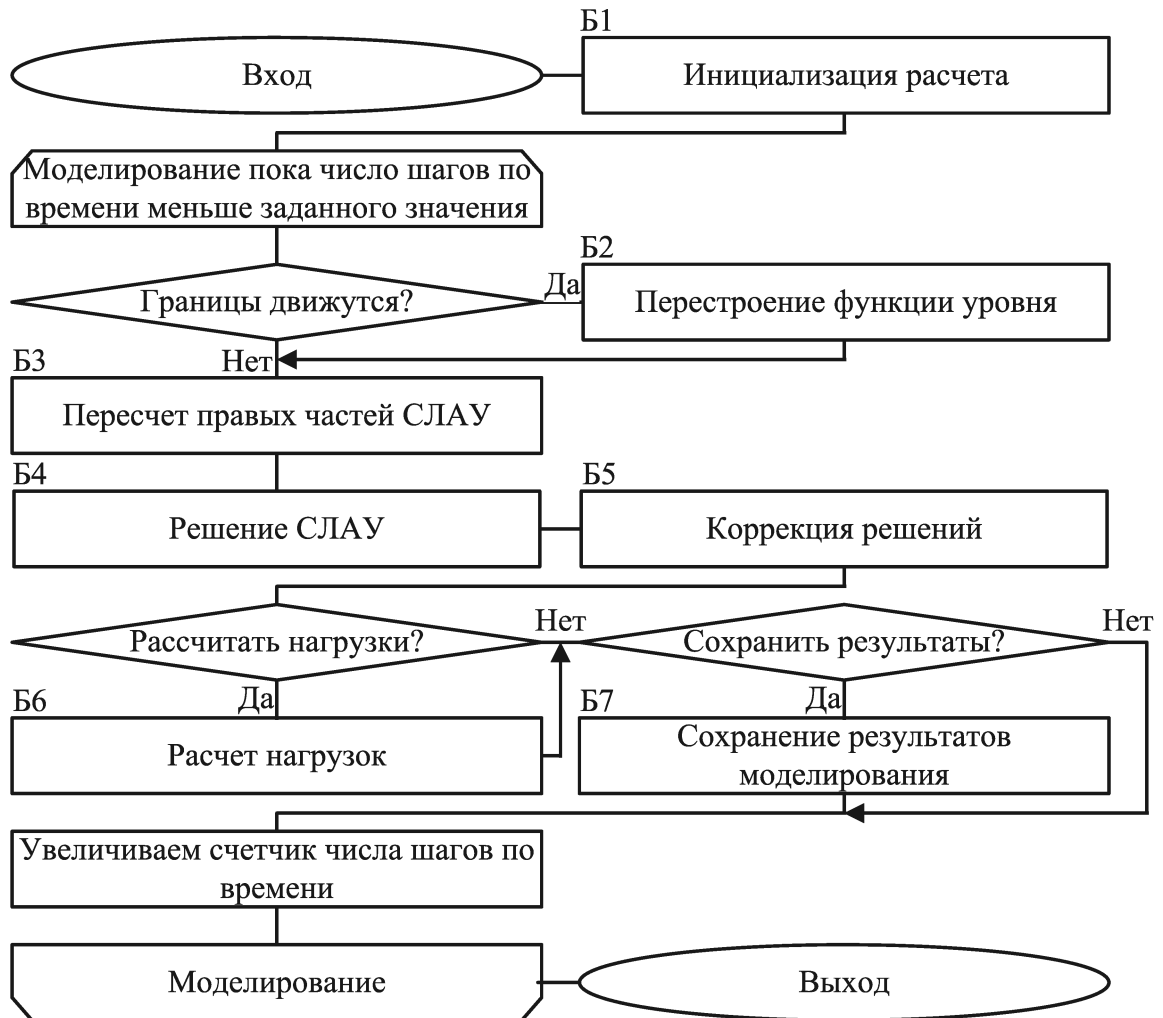


Рис. 4.13. Блок-схема работы программного комплекса «LS-STAG_turb»

Функция уровня и зависящие от нее характеристики сетки (блок Б2) пересчитываются в методе `build()` структуры `LSSTAGUniformMesh`. В комплексе «LS-STAG_turb» реализован алгоритм построения функции уровня для профиля произвольной формы при помощи аппроксимации границы кривой Безье [29], что позволяет моделировать обтекание профилей сложной формы и их систем (Рис. 4.14). В методе `solve()` базовой структуры `DiscreteEquationInterface` пересчитываются правые части систем линейных алгебраических уравнений (блок Б3) и, при движении границ, матрицы разностных аналогов операторов и предобуславливателей

перед решением систем (блок Б4). В случае неподвижных погруженных границ решаемые системы имеют вид (1.53) или (3.22) при использовании модели турбулентности и (1.55), а в случае движения границ — (2.8) или (3.23) при использовании модели турбулентности и (2.13). Коррекция решений (блок Б5) по формуле (1.56) для неподвижных границ или по формуле (2.14) при движении границ реализована в методе `correction()` структуры `Solution`. В зависимости от информации из `BaseTaskDescription` после коррекции решений может быть произведен расчет действующих на погруженные границы со стороны потока нагрузок (блок Б6) по формулам (1.45), (1.46) и/или осуществлено сохранение результатов и состояния расчета (блок Б7). В методе `close()` управляющей структуры происходит запись в лог-файл данных о продолжительности расчета и его закрытие.

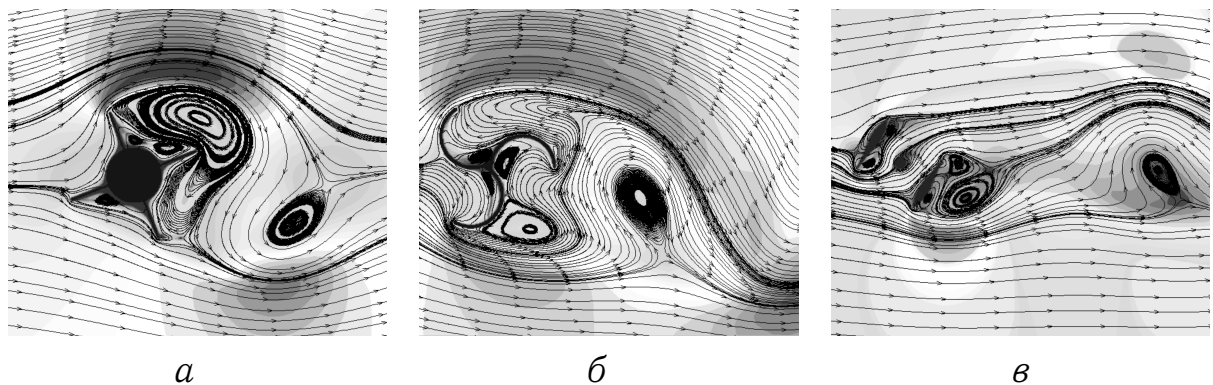


Рис. 4.14. Авторотация профилей различных форм при $Re = 200$:
а — пропеллер с четырьмя лопастями; *б* — ротор Савониуса с тремя лопастями; *в* — ротор Дарье с двумя лопастями в форме симметричного крылового профиля ЦАГИ серии В с относительной толщиной 20 % [37]

4.2. Оптимизация и параллельная реализация разработанных алгоритмов в программном комплексе «LS-STAG_turb»

Для распараллеливания вычислений при решении задач вычислительной механики часто используют методы декомпозиции области [118]. Идея методов декомпозиции заключается в том, что расчетная область разбивается на пересекающиеся или непересекающиеся подобласти, и исходная задача представляется в виде совокупности вспомогательных кра-

евых задач в этих подобластях. При этом на границах подобластей, совпадающих с границами исходной расчетной области, ставятся граничные условия из исходной задачи, а на остальных границах подобластей, называемых внутренними, ставятся условия сопряжения, которые записываются в виде граничных условий третьего рода. Решение вспомогательных задач может осуществляться параллельно, при этом эффективность полученного алгоритма зависит от многих факторов [14]: наличия и величины пересечения смежных подобластей, организации итерационных процессов, эффективности распараллеливания вычислений при решении вспомогательной задачи в подобласти. На LS-STAG-сетке дополнительные сложности также возникают из-за наличия твердых и усеченных ячеек и изменения их местоположения при движении границы.

Таким образом, разработка параллельного алгоритма решения задачи методом LS-STAG, основанного на декомпозиции расчетной области, представляет собой предмет отдельного исследования. В рамках данной диссертационной работы рассматриваются только вопросы оптимизации и распараллеливания вычислений при решении одной задачи в расчетной области без подобластей на системе с общей памятью. Разработанные алгоритмы впоследствии также можно будет применять для эффективного решения вспомогательных задач в подобластях.

4.2.1. Решение задачи в расчетной области без подобластей

В качестве тестовой задачи рассмотрим представленную в разделе 2.4.1 задачу о моделировании обтекания кругового профиля, совершающего вынужденные поперечные колебания по заданному закону (2.17) при $S_e/Sh = 1,2$. При тестировании модификаций алгоритмов будем моделировать обтекание в течение 30 единиц безразмерного времени. Далее эту тестовую задачу будем обозначать VerOscTest.

Тестирование проводилось на рабочей станции, построенной на платформе Intel N81 с использованием двухъядерного процессора Intel Core

i3-4350T (Haswell) с поддержкой HyperThreading (4 логических ядра), работающего на частоте 3100 МГц. Станция оснащена 8 ГБайт оперативной памяти DDR3-1333, SSD-накопителем Crucial объемом 128 ГБайт и жестким диском Seagate объемом 1 ТБайт. Внешние графические карты не использовались. Далее эту рабочую станцию будем обозначать PC1.

В первую очередь исследуем возможность сокращения временных затрат на проведение расчета за счет компилятора и его опций, т. е. за счет оптимизаций при трансляции исходного (высокоуровневого) кода программы в конечный (низкоуровневый) код. Время решения тестовой задачи комплексом «LS-STAG_turb», при разработке которого использовался компилятор Microsoft Visual Studio 2010, составляет 4666 с. Использование оптимизирующего компилятора Intel C++ 15.0 позволяет без модификаций кода уменьшить время счета на 0,5 %. Опция компилятора /MT предписывает приложению использовать многопоточную статическую версию библиотеки времени выполнения. После ее включения время счета уменьшилось на 15 % (3968 с). Далее будем использовать компилятор Intel C++ 15.0 с опцией /MT.

Определим, вычисления в каких методах классов имеет смысл распараллелить в первую очередь. Для этого необходимо выделить участки программы, на выполнение которых расходуется наибольшее количество времени, т. е. провести профилировку. Использование профилировщика Intel[®] VTune[™] Amplifier [80] позволяет определить лишь то, что большую часть времени счета занимает решение разностного аналога уравнения Пуассона, и не дает возможности рассмотреть, какие методы имеют наибольшую трудоемкость. Полная структура временных затрат при решении VerOscTest (Рис. 4.15) была определена с помощью профилировщика AMD CodeAnalyst [56]. Он показал, что 48,0 % времени работы программы занимает выполнение умножения разреженной матрицы на вектор (метод `setProduct()` структуры `RealValuedMeshFunction`), а 34,5 % — решения систем линейных алгебраических уравнений с трех-

диагональными матрицами методом прогонки при выполнении сглаживания в многосеточном предобуславливателе (метод `SmootherADLJ::solve()`). Решение систем методом `BiCGStab` без учета затрат на работу предобуславливателей (метод `solve()` структуры `BiCGStabInterface`) занимает 16,5 % времени выполнения расчета, вызов прочих методов — 1 %.

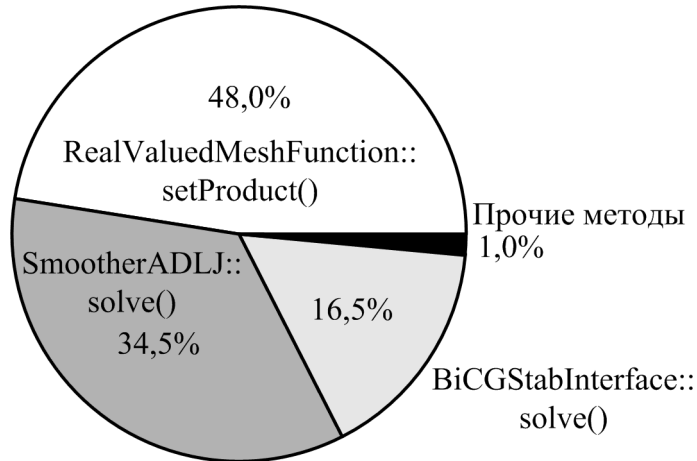


Рис. 4.15. Структура временных затрат при решении тестовой задачи VerOscTest (компилятор Intel C++ 15.0 с опцией /MT)

Поскольку в `BiCGStabInterface::solve()` вызывается ряд методов структуры `extDouble`, реализующих различные векторные операции, сначала сосредоточимся на распараллеливании методов `setProduct()` и `SmootherADLJ::solve()`. Оценим максимальное ускорение (Таблица 30), которое можно получить при распараллеливании этих методов, при помощи закона Амдала [7], который гласит, что для системы из S вычислительных ядер максимально возможное ускорение программы с долей P параллельного кода и $(1 - P)$ последовательного кода равно

$$\alpha = \frac{1}{(P/S) + (1 - P)}.$$

Эти оценки соответствуют случаю идеального (линейного) распараллеливания, при котором параллельный код на вычислительной системе с S ядрами выполняется в S раз быстрее. Реальное ускорение будет ниже из-за накладных расходов на поддержку многопоточных вычислений [33]: расходов на создание задач и потоков, работу планировщика потоков,

запуск и синхронизацию потоков; коммуникационных издержек на передачу информации между потоками; издержек в виде дисбаланса загрузки ядер из-за точек синхронизации или конфликтов в конвейере процессора и планировщике операционной системы.

Таблица 30.

Максимально возможное ускорение при распараллеливании методов

`setProduct()` и `SmootherADLJ::solve()`

Распараллеливаемые методы	P	Максимальное ускорение		
		2 ядра	4 ядра	8 ядер
Только <code>setProduct()</code>	0,480	1,316	1,563	1,724
Оба метода	0,825	1,702	2,623	3,596

Далее будем использовать такие технологии параллельного программирования, как Intel[®] Cilk[™] Plus [77], Intel[®] TBB [120], OpenMP (реализация из Intel[®] Parallel Studio XE 2015, стандарт 4.0). Они предполагают, что пользователь при помощи ключевых слов лишь обозначает задачи, выполняемые параллельно, а организация многопоточности определяется самой технологией. Таким образом, вышеперечисленные накладные расходы на поддержку многопоточности, а, значит, и реальное ускорение, зависят от используемой технологии.

Получить оценки ожидаемого ускорения в зависимости от используемой технологии параллельного программирования позволяет инструмент Intel[®] Advisor [76]: для метода `setProduct()` наибольшее ускорение при использовании любой из трех рассматриваемых технологий прогнозируется при расчете на системе с четырьмя ядрами. Согласно прогнозу, использование OpenMP и Intel[®] TBB приведет к замедлению работы программы, а Intel[®] Cilk[™] Plus — к незначительному ускорению (на 20 %). Тем не менее, поскольку оценки Intel[®] Advisor являются приблизительными, представляется целесообразной поддержка в разрабатываемом приложении всех перечисленных технологий и переключение между ними при помощи директив препроцессора по определениям `LS_STAG_USE_CILK`, `LS_STAG_USE_OMP` и `LS_STAG_USE_TBB`.

Произведем преобразование последовательного кода в параллельный при помощи этих технологий на примере метода `setProduct()`. В данном методе происходит умножение разреженной матрицы на вектор `multiplier`, и сохранение результата в `Vector`. Элементы матрицы хранятся в массиве `m_Cell`, портрет — в массиве `m_Portrait`, а индексы элементов, с которых начинаются строки матрицы — в массиве `m_Num`. Последовательная реализация метода имеет следующий вид:

```
for(int i = 0; i < size; i++)
{ double aux = 0.0;
  for(int j = m_Num[i]; j < m_Num[i+1]; j++)
    aux += m_Cell[j] * multiplier[m_Portrait[j]];
  Vector[i] = aux;
};
```

Итерации внешнего цикла являются независимыми, поэтому для распараллеливания вычислений достаточно при использовании технологии Intel® Cilk™ Plus вместо `for` написать `cilk_for`, а при использовании OpenMP — перед `for` поставить `#pragma omp parallel for`. При использовании технологии Intel® TBB код параллельной версии данного метода получается более громоздким, но при помощи лямбда-выражений из стандарта C++11 [81] его можно записать следующим образом:

```
tbb::parallel_for(tbb::blocked_range<int>(0, size),
 [=](const tbb::blocked_range<int>& r)
 {for(int i = r.begin(); i < r.end(); i++)
  { double aux = 0.0;
   for(int j = m_Num[i]; j < m_Num[i+1]; j++)
     aux += m_Cell[j] * multiplier[m_Portrait[j]];
   Vector[i] = aux;
  }
 } )
```

Количество ядер для Intel® Cilk™ Plus и OpenMP задается при помощи функций `__cilkrts_set_param` и `omp_set_num_threads`, а для Intel® TBB указывается при создании планировщика — экземпляра класса `tbb::task_scheduler_init`. Поскольку Intel® Advisor показал, что оптимальным является использование вычислительной системы из четырех ядер, задача VerOscTest была решена на PC1 с использованием че-

тырех логических ядер (Таблица 31). Наибольшее ускорение, достаточно близкое к полученной по закону Амдала оценке (1,563), достигнуто при использовании Intel® Cilk™ Plus. При этом для всех трех технологий полученные ускорения достаточно сильно превышают оценки Intel® Advisor. Также не подтвердился прогноз Intel® Advisor о том, что технология Intel® TBB позволит получить большее ускорение, чем OpenMP. Это подтверждает целесообразность предусмотренной возможности задания используемой технологии при помощи определений препроцессора.

Таблица 31.

Время счета на PC1 с использованием четырех логических ядер
и ускорение при распараллеливании метода `setProduct()`

Технология	Intel® Cilk™ Plus	OpenMP	Intel® TBB
Время счета	2548 с	2713 с	2870 с
Ускорение	1,557	1,463	1,383

Сравним также работу планировщиков (диспетчеров) потоков при использовании рассматриваемых технологий. Для этого используем программу ProcessExplorer [113], предназначенную для мониторинга процессов в системе и предоставляющую более подробную по сравнению с диспетчером задач Windows информацию о процессах (Рис. 4.16).

TID	CPU	Cycles Delta
7152	24.52	3 072 685 ...
5564	6.14	769 615 348
3856	6.32	791 350 376
3720	6.17	772 975 260

TID	CPU	Cycles Delta
252	23.37	2 930 607 ...
4948	21.49	2 695 512 ...
6048	21.52	2 699 380 ...
6312	< 0.01	71 492
8144	21.47	2 693 507 ...

TID	CPU	Cycles Delta
3852	19.28	2 402 586 ...
7264	24.16	3 010 219 ...
7620	19.34	2 409 444 ...
7856	19.23	2 395 839 ...

Рис. 4.16. Информация о потоках приложения при расчете на четырех ядрах: *а* — Intel® Cilk™ Plus; *б* — OpenMP; *в* — Intel® TBB

При использовании рассматриваемых технологий потоки создаются один раз, поскольку их идентификаторы (TID) не изменяются на протя-

жении всего расчета. При этом диспетчеры потоков работают в основном потоке приложения, однако диспетчер потоков OpenMP создает дополнительный дочерний поток (на Рис. 4.16, б это поток с TID, равным 6312), который занимается мониторингом рабочих потоков, судя по низкой загрузке данного потока — обслуживанием конфликтов. В результате на основной диспетчер потоков OpenMP ложатся дополнительные расходы по обслуживанию этого потока, что, по-видимому, и приводит к увеличению времени проведения расчета и к меньшему по сравнению с Intel® Cilk™ Plus ускорению (Таблица 31). Тем не менее, время счета при использовании OpenMP оказалось меньше, чем при использовании Intel® TBB. Это свидетельствует о том, что основной диспетчер потоков OpenMP реализован достаточно эффективно. Также необходимо отметить, что при использовании технологии Intel® Cilk™ Plus время проведения расчета оказалось наименьшим, хотя загрузка ядер рабочими дочерними потоками приложения была примерно в 3 раза ниже, чем при использовании OpenMP и Intel® TBB. Из этого можно сделать вывод, что диспетчер потоков Intel® Cilk™ Plus эффективно управляет средствами конвейеризации и кеширования процессора, снижая нагрузку на ядра, а также берет на себя большую часть функций синхронизации, в то время как диспетчеры OpenMP и Intel® TBB перекладывают их на рабочие дочерние потоки, отрывая их от основной работы и создавая большую загрузку ядер при меньшей эффективности.

Распараллелим метод `SmootherADLJ::solve()`, предполагающий решение систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, сформированными из матрицы исходной системы. Для матриц хранится LU-разложение в массивах `L`, `D` и `U` (нижняя, главная и верхняя диагонали), и алгоритм вычисления решения `sol` системы с правой частью `right_side` имеет следующий вид:

```
sol[0] = right_side[0] / D[0];
for(int i = 1, r = 0; i < NM; i++, r++)
    sol[i] = (right_side[i] - L[r] * sol[r]) / D[i];
for(int i = NM - 2; i > -1; i--) sol[i] -= U[i] * sol[i+1];
```

В таком виде алгоритм не может быть распараллелен, поскольку итерации циклов являются зависимыми: при вычислении значения элемента `sol[i]` используются значения `sol[r]` и `sol[i+1]`, полученные на предыдущих итерациях. Однако, поскольку исходная матрица была получена при дискретизации с пятиточечной структурой шаблона на прямоугольной сетке $N \times M$, сформированная из нее трехдиагональная матрица распадается на M независимых блоков размера $N \times N$, и алгоритм может быть переписан следующим образом:

```
for(int j = 0; j < M; j++) // блоки
{ int q = j * N; // номер первой строки блока
  sol[q] = right_side[q] / D[q];
  for(int r = q, i = r + 1, k = r + N; i < k; i++, r++)
    sol[i] = (right_side[i] - L[r] * sol[r]) / D[i];
  for(int q2 = q - 1, i = q2 + N - 1; i > q2; i--)
    sol[i] -= U[i] * sol[i+1];
}
```

Теперь итерации внешнего цикла являются независимыми, и его можно распараллелить аналогично циклу из `setProduct()`. Наибольшее ускорение, близкое к оценке по закону Амдала (2,623), снова достигнуто при использовании технологии Intel[®] Cilk[™] Plus (Таблица 32).

Таблица 32.

Время счета и ускорение при распараллеливании методов
`setProduct()` и `SmootherADLJ::solve()` (4 логических ядра)

Технология	Intel [®] Cilk [™] Plus	OpenMP	Intel [®] TBB
Время счета	1547 с	1698 с	1774 с
Ускорение	2,565	2,337	2,237

После распараллеливания двух наиболее трудоемких методов было произведено распараллеливание ряда методов, реализующих операции с векторами, на которые приходится бóльшая часть времени работы метода `BiCGStabInterface::solve()`, и перестроение некоторых матриц при движении погруженной границы. Помимо продемонстрированного на примере метода `setProduct()` распараллеливания цикла `for` с независимыми итерациями, использовались приемы распараллеливания циклов с редукцией. Покажем различия в распараллеливании циклов такого

типа при использовании различных технологий параллельного программирования на примере распараллеливания метода `double getNorm()` шаблона `MeshFunction`. В данном методе реализован расчет евклидовой нормы вектора, элементы которого хранятся в массиве `Vector`:

```
double getNorm()
{
    ElemType aux = 0;
    for(int i = 0; i < size; i++)
    { ElemType cur = Vector[i]; aux += cur * cur; }
    return sqrt((double)aux); }
```

При использовании OpenMP перед `for` необходимо добавить директиву `#pragma omp parallel for reduction(+:aux)`. При использовании Intel® Cilk™ Plus алгоритм принимает следующий вид:

```
double getNorm()
{
    cilk::reducer< cilk::op_add<ElemType> > aux(0);
    cilk_for(int i = 0; i < size; i++)
    { ElemType cur = Vector[i]; *aux += cur * cur; }
    return sqrt((double)aux.get_value()); }
```

При использовании технологии Intel® TBB код получается более громоздким, но может быть записан при помощи лямбда-выражений:

```
double getNorm()
{
    ElemType res =
    tbb::parallel_reduce(tbb::blocked_range<int>(0,size),
        ElemType(0), [=](const tbb::blocked_range<int>& r,
                        ElemType aux)->ElemType
    { for(int i = r.begin(); i < r.end(); i++)
      { ElemType cur = Vector[i]; aux += cur * cur; }
      return aux;
    }, [](ElemType x, ElemType y)->ElemType
        { return x + y; } );
    return sqrt((double)res); }
```

Также была проведена оптимизация кода с учетом приемов, описанных в [38]. После этого время счета значительно уменьшилась даже при использовании одного ядра (Таблица 33). Поскольку диспетчеры потоков Intel® Cilk™ Plus, OpenMP и Intel® TBB не отключаются при работе приложения на одном ядре, особенности их работы, рассмотренные выше, напрямую сказываются на быстродействии даже в однопоточной версии. Таким образом, представленные в Таблице 33 данные

подтверждают наше предположение о том, что диспетчер потоков Intel® Cilk™ Plus реализован эффективнее планировщиков потоков OpenMP и Intel® TBB.

Таблица 33.

Время счета на PC1 с использованием одного ядра и ускорение, полученное в результате оптимизации

Технология	Intel® Cilk™ Plus	OpenMP	Intel® TBB
Время счета	1958 с	2207 с	2318 с
Ускорение	2,027	1,798	1,712

Для исследования масштабируемости алгоритмов помимо PC1 также использовалась рабочая станция, построенная на платформе Intel Z97 с использованием 4-ядерного процессора Intel Core i7-4790K (Devil's Canyon) с поддержкой технологии HyperThreading (8 логических ядер), работающего на частоте 4400 МГц. Рабочая станция оснащена 16 ГБайт оперативной памяти DDR3-1600 и двумя SSD-накопителями Crucial объемом 256 ГБайт и 1 ТБайт. Внешние графические карты в рабочей станции не использовались. Данную рабочую станцию будем обозначать PC2. Результаты вычислительных экспериментов представлены на Рис. 4.17.

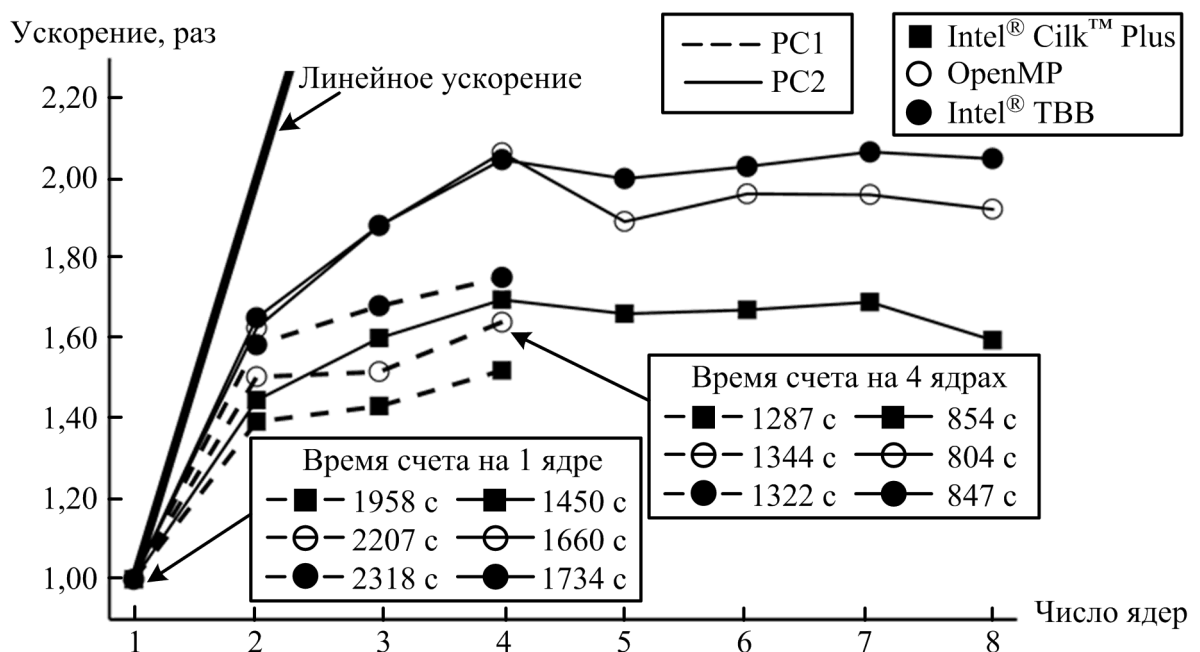


Рис. 4.17. Масштабируемость разрабатываемого программного комплекса после оптимизации кода и распараллеливания алгоритмов

Видно, что наименьшее время проведения расчета независимо от технологии параллельного программирования и на PC1, и на PC2 получается при использовании четырех ядер. При расчете на одном ядре быстроедействие приложения с Intel® Cilk™ Plus оказывается выше быстрогодействия приложения с OpenMP, а дольше всего решение задачи идет при использовании Intel® TBV. Однако приложение с Intel® Cilk™ Plus на обеих PC масштабируется хуже приложения с OpenMP, а оно, в свою очередь, — хуже приложения, использующего Intel® TBV. Из-за этого при проведении расчета с использованием четырех логических ядер на PC1 получаем, что приложение с Intel® TBV решает задачу быстрее приложения с OpenMP (при этом наименьшее время счета получается по-прежнему при использовании Intel® Cilk™ Plus), а на PC2 приложение, использующее OpenMP, по быстроддействию опережает приложение с Intel® Cilk™ Plus, также уступающее и приложению с Intel® TBV.

4.2.2. Сравнение эффективности алгоритмов с аналогами из Intel® MKL

В состав Intel® Parallel Studio XE 2015, используемой при разработке комплекса «LS-STAG_turb», входят высокопроизводительные библиотеки Intel® Integrated Performance Primitives (IPP) 8.2 [78] и Intel® Math Kernel Library (MKL) 11.2 [79], которые оптимизированы для работы с разными процессорами Intel и обеспечивают использование их расширенных возможностей. Intel® IPP ориентирована на обработку сигналов, поэтому функций, аналогичных реализованным в «LS-STAG_turb», в ней не так много — это функции, реализующие векторные операции. Однако они не реализованы в многопоточной версии библиотеки. Поэтому для сравнения выбрана Intel® MKL.

Используем функцию `mkl_cspblas_dcsrgemv` из Intel® MKL вместо `RealValuedMeshFunction::setProduct()` для умножения разреженной матрицы в формате CSR (`m_Cell`, `m_Num`, `m_Portrait`) на вектор `multiplier` с сохранением результата в `Vector` (Рис. 4.18):
`char n = 'N'; mkl_cspblas_dcsrgemv(&n, &size, m_Cell,`

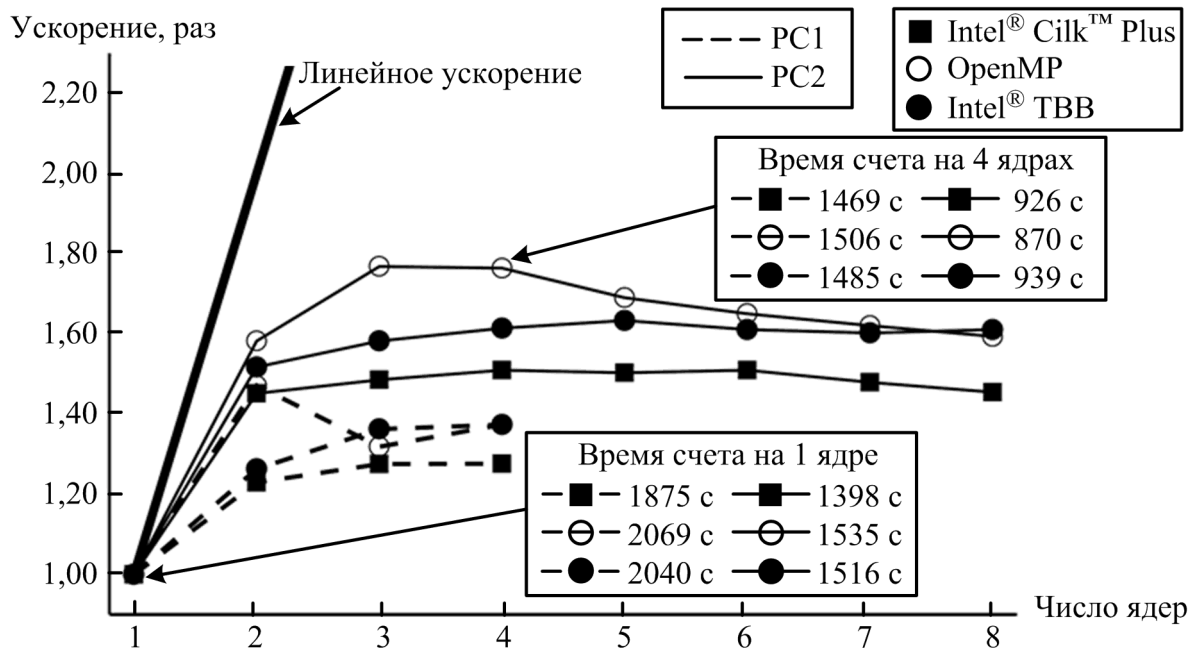


Рис. 4.18. Масштабируемость комплекса при использовании матрично-векторного умножения из Intel® MKL

Видно, что использование `mkl_cspblas_dcsrgev` позволяет получить незначительное ускорение на одном ядре (в среднем на 8–9 %), но полученный алгоритм хуже масштабируется, и на четырех ядрах время счета оказывается большим, чем при использовании исходного алгоритма. Отметим, что многопоточная версия библиотеки Intel® MKL использует технологию OpenMP. Количество ядер, выделяемых для работы библиотеки, задается при помощи функции `mkl_set_num_threads`.

При использовании ILU-предобуславливания происходит решение двух систем линейных алгебраических уравнений с треугольными разреженными матрицами. Вместо реализации из «LS-STAG_turb» можно использовать функцию `mkl_cspblas_dcsrtrsv` из Intel® MKL:

```
char l = 'L', n = 'N', u = 'U';
mkl_cspblas_dcsrtrsv(&l, &n, &u, &s, LC, LN, LP, b, y);
mkl_cspblas_dcsrtrsv(&u, &n, &n, &s, UC, UN, UP, y, x);
```

Первый вызов функции соответствует решению системы с нижнетреугольной матрицей (LC, LN, LP) размера $s \times s$, а второй — решению системы с верхнетреугольной матрицей. Результаты вычислительных экспериментов представлены на Рис. 4.19: видно, что использование Intel® MKL увеличивает время счета как на одном, так и на четырех ядрах.

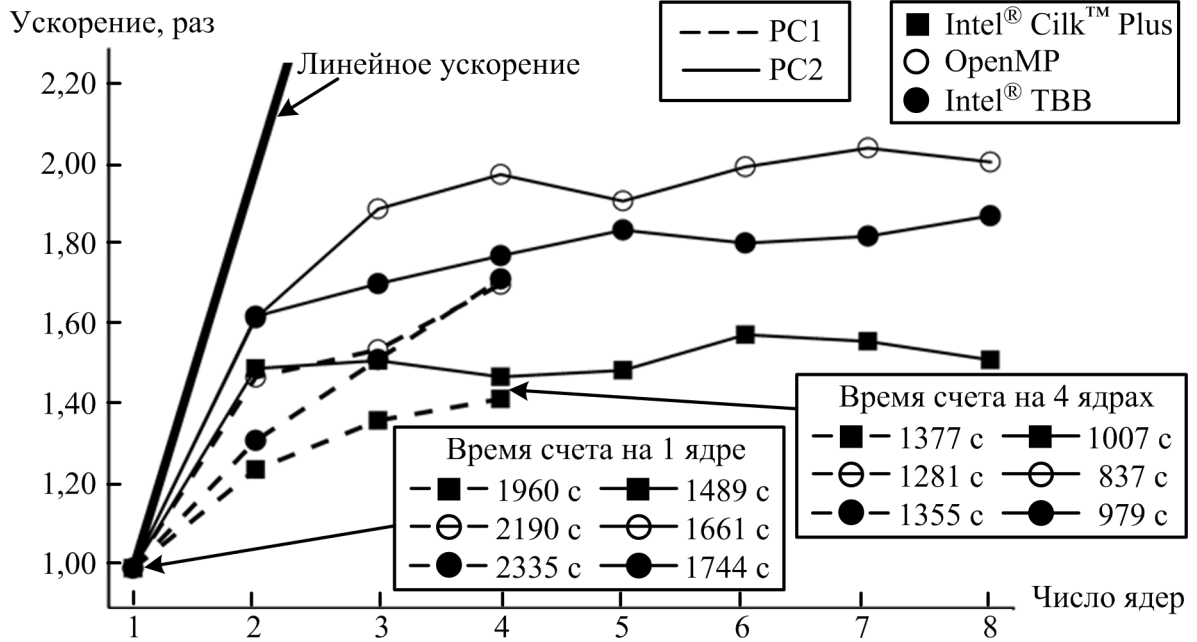


Рис. 4.19. Масштабируемость программного комплекса при использовании функции `mk1_cspblas_dcsrtrsv` из Intel® MKL

Методы структуры `RealValuedMeshFunction`, реализующие операции над векторами, можно заменить на такие функции Intel® MKL, как `cblas_dnrm2` (расчет евклидовой нормы), `cblas_ddot` (вычисление скалярного произведения) и ряд покомпонентных операций: `vdAdd` (сложение), `vdSub` (вычитание), `vdMul` (умножение), `vdSqr` (возведение в квадрат), `cblas_dscal` (умножение на скаляр).

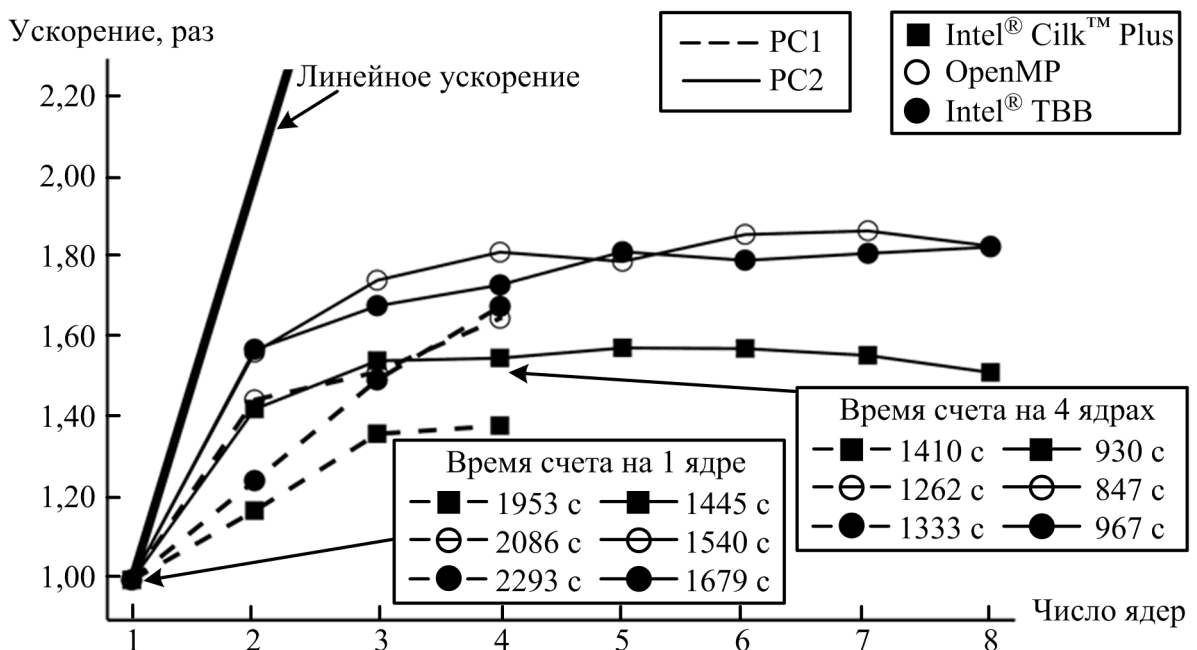


Рис. 4.20. Масштабируемость разрабатываемого программного комплекса при использовании операций над векторами из Intel® MKL

Однако, как и в случае матрично-векторного умножения, такая замена приводит лишь к незначительному ускорению на одном ядре (в среднем на 3 %) и ухудшению масштабируемости, из-за чего при расчете на четырех логических ядрах время счета оказывается примерно на 8 % больше, чем при использовании исходного алгоритма (Рис. 4.20).

Рассмотрим возможность замены всего решателя аналогом из Intel® MKL. Библиотека содержит прямой решатель PARDISO [124], позиционируемый как высокопроизводительный параллельный прямой решатель для систем с разреженными матрицами, который при числе уравнений менее ста тысяч оказывается эффективнее итерационных решателей [79] (при решении VerOscTest системы содержат по 71040 уравнений). Из-за индексации массивов с нуля параметры решателя задаются вручную; затем поочередно вызываются четыре фазы решателя:

```
void *t[64]; int ip[64]; int e = 0; int type = 11;
for(int i = 0; i < 64; i++){ t[i] = 0; ip[i] = 0; }
int* p; p = new int[s]; ip[0] = 1; // не по умолчанию
ip[1] = 2; ip[9] = 13; ip[10] = 1; ip[12] = 1;
ip[17] = -1; ip[18] = -1; ip[23] = 1; // параллельный
ip[20] = 1; ip[34] = 1; // индексация в массивах с 0
int fct = 1; int lvl = 0; int *f = &fct, *v = &lvl;
int phase = 11; pardiso(t, f, f, &type, &phase, &s,
Cell, Num, Portrait, p, f, ip, v, b, x, &e); // анализ
phase = 22; pardiso(t, f, f, &type, &phase, &s, Cell,
Num, Portrait, p, f, ip, v, b, x, &e); // LU
phase = 33; pardiso(t, f, f, &type, &phase, &s, Cell,
Num, Portrait, p, f, ip, v, b, x, &e); // решение
phase = -1; pardiso(t, f, f, &type, &phase, &s, Cell,
Num, Portrait, p, f, ip, v, b, x, &e); delete [p];
```

Однако использование PARDISO привело к значительному увеличению продолжительности расчета (Рис. 4.21). Снижение быстродействия наблюдается даже по сравнению с исходной последовательной версией комплекса «LS-STAG_turb»: на одном ядре замедление составило в среднем 0,482, а на четырех — от 0,540 при использовании Intel® TBV до 0,635 при использовании Intel® Cilk™ Plus.

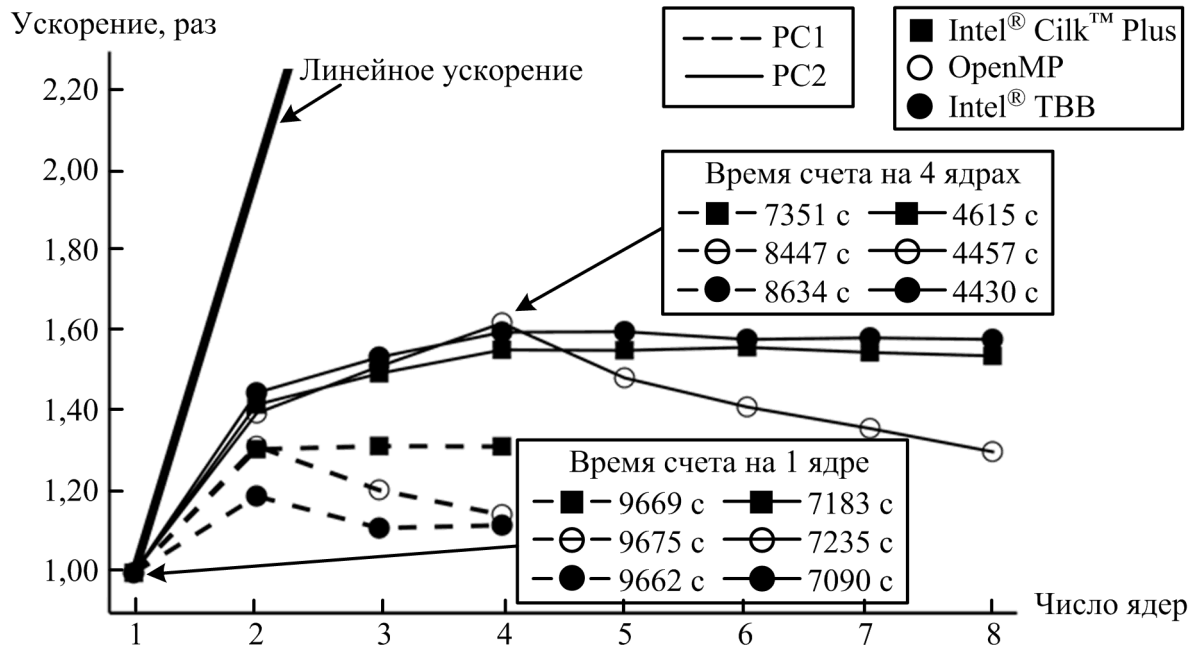


Рис. 4.21. Масштабируемость приложения при использовании PARDISO

Из предобуславливателей библиотека Intel® MKL содержит только ILU, но из-за индексации массивов с единицы в его реализации эту функцию можно использовать лишь в программах, написанных на языке Фортран. Используемый в «LS-STAG_turb» метод BiCGStab в Intel® MKL не реализован: из итерационных методов доступны только CG (метод сопряженных градиентов) и FGMRES (гибкий метод обобщенных минимальных невязок). Метод CG не подходит для решения поставленной задачи, поскольку матрицы возникающих систем в общем случае являются несимметричными. Использование метода FGMRES без предобуславливания также не позволяет решить задачу: метод не сходится за 200 итераций при решении разностного аналога уравнения Пуассона, и примерно через четыре единицы модельного времени расчет «разваливается». Воспользуемся тем фактом, что работа решателя FGMRES в Intel® MKL построена таким образом, что становится возможным использовать предобуславливатель, реализованный вне библиотеки:

```
int it = 0, req, ip[128]; double dp[128], *t;
t = new double[1+(2*max_it+1)*s+max_it*(max_it+9)/2];
dfgmres_init(&s, x, b, &req, ip, dp, t);
ip[4] = max_it; ip[14] = max_it;
ip[10] = 1; // используется предобуславливатель
dfgmres_check(&s, x, b, &req, ip, dp, t);
```

```

while(true)
{ bool exit = false; dfgmres(&s, x, b, &req, ip, dp, t);
  switch(req)
  { case 0: exit = true; break; // решение получено
    case 1: // умножение на матрицу
      w.setProduct(&t[ip[21]-1], &t[ip[22]-1], s); break;
    case 2: if(dp[4] < eps) exit = true; break;
    case 3: // предобуславливание
      preconditioner(&t[ip[21]-1], &t[ip[22]-1]); break;
    case 4: if(dp[6] < PLUS_TINY) exit = true; break;
  } if(exit) break;
} norm_r = dp[4]; dfgmres_get(&s, x, b, &req, ip,
                             dp, t, &it); delete[] t;

```

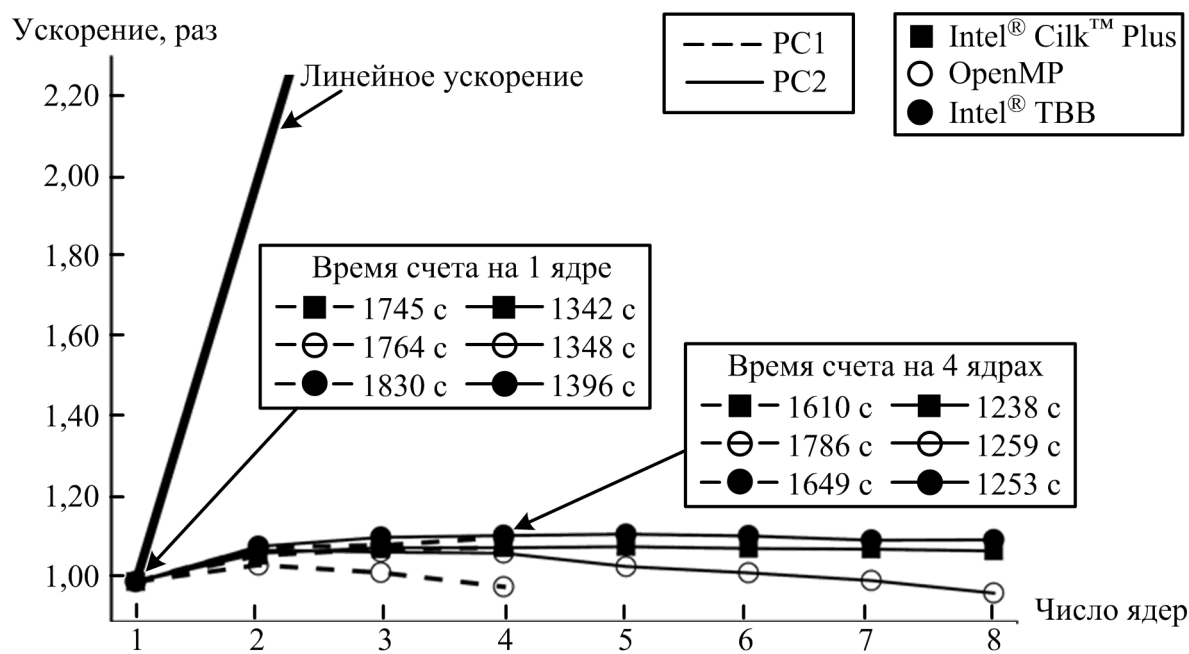


Рис. 4.22. Масштабируемость приложения при использовании метода FGMRES из Intel® MKL с ILU-предобуславливанием

При использовании метода FGMRES из Intel® MKL с разработанной реализацией ILU-предобуславливания получаем ускорение по сравнению с BiCGStab в среднем на 20 % при расчете на одном ядре. Однако масштабируемость алгоритма оказывается очень низкой, и на четырех ядрах он уступает исходному решателю (Рис. 4.22). При этом решение разностного аналога уравнения Гельмгольца при использовании обоих методов получается за 2 итерации, тогда как решение разностного аналога уравнения Пуассона при использовании метода BiCGStab

с многосеточным предобуславливанием получается за 7–20 итераций, а при решении методом FGMRES с ILU-предобуславливанием — за 25–140. Несмотря на это метод FGMRES позволил существенно уменьшить время счета на одном ядре, что говорит о высокой эффективности метода.

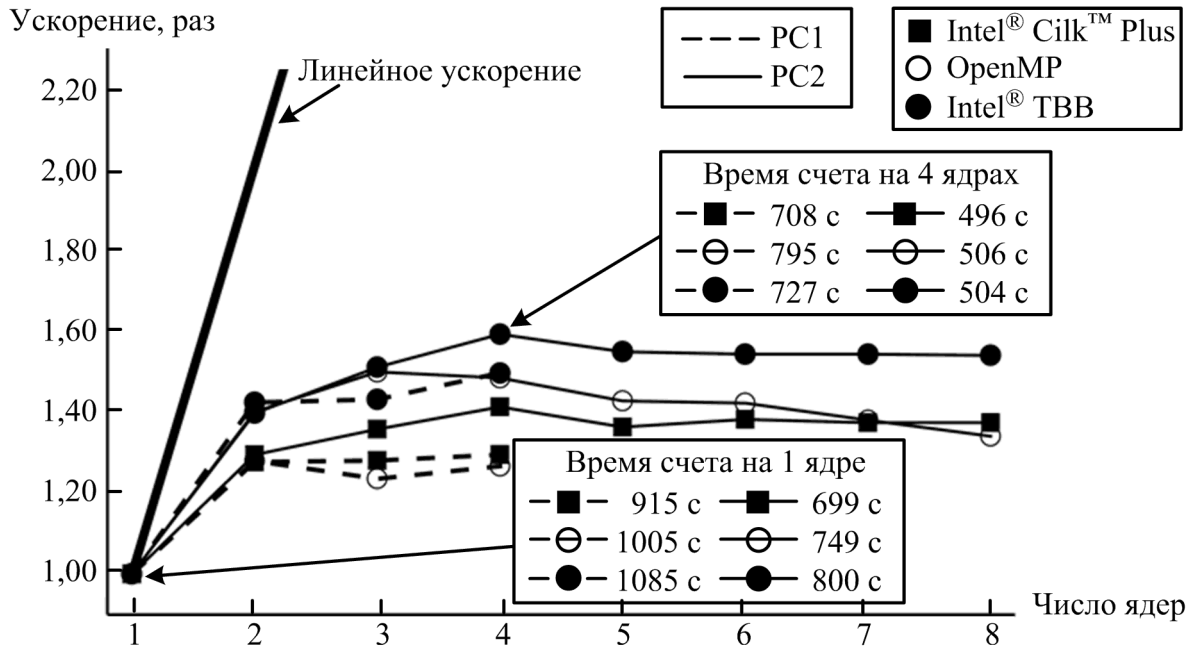


Рис. 4.23. Масштабируемость приложения при использовании метода FGMRES из Intel® MKL с ILU- и многосеточным предобуславливанием

4.2.3. Реализация алгоритма решения систем линейных алгебраических уравнений методом FGMRES

Метод FGMRES, как и BiCGStab, относится к методам крыловского типа. Основное различие между ними заключается в способе построения базиса в подпространстве Крылова: в BiCGStab используется биортогонализация Ланцоша, а в FGMRES — ортогонализация Арнольди [122]. Для системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad x, b \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M(\mathbb{R})_{n \times n},$$

которую требуется решить с точностью ε , алгоритм метода FGMRES с рестартами через каждые m итераций имеет следующий вид [122]:

$$\begin{aligned}
&\text{Start. } r^0 = b - Ax^0, \beta = \|r^0\|_2, v^1 = r^0/\beta; \\
&\text{for}(j = 1, \dots, m) \\
&\quad z^j = M_j^{-1}v^j; \quad w^j = Az^j; \\
&\quad \text{for}(i = 1, \dots, j)\{ h_{i,j} = (w^j, v^i); \quad w^j = w^j - h_{i,j}v^i; \} \\
&\quad h_{j+1,j} = \|w^j\|_2; \quad v^{j+1} = w^j/h_{j+1,j}; \\
&\quad Z_m = [z^1 \dots z^m]; \quad \overline{H}_m = \{h_{i,j}\}; \quad y^m = \operatorname{argmin}_y \|\beta e^1 - \overline{H}_m y\|_2; \\
&\quad x^m = x^0 + Z_m y^m; \quad \text{if}(\|b - Ax^m\|_2 > \varepsilon)\{ x^0 = x^m; \text{goto Start. } \}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $x^0, r^0 \in \mathbb{R}^n$ — начальные приближение и невязка; $M_j \in M(\mathbb{R})_{n \times n}$ — матрица предобуславливателя на j -й итерации; $Z_m \in M(\mathbb{R})_{n \times m}$ — матрица, столбцами которой являются векторы z^j ; $\overline{H}_m \in M(\mathbb{R})_{(m+1) \times m}$ — матрица коэффициентов ортогонализации $H_m \in M(\mathbb{R})_{m \times m}$ (верхняя матрица Хессенберга), дополненная строкой $(0 \dots 0 \ h_{m+1,m})$; $y^m \in \mathbb{R}^m$; $w^j, z^j \in \mathbb{R}^n$ при $j = \overline{1, m}$; $v^j \in \mathbb{R}^n$ при $j = \overline{1, m+1}$; $e^1 = (1 \ 0 \dots 0)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$; (u, p) — скалярное произведение u и p ; $\|u\|_2 = \sqrt{(u, u)}$ — евклидова норма вектора u . Отметим, что векторы v^1, \dots, v^m образуют ортогональный базис в подпространстве Крылова размерности m , порожденном вектором v^1 и матрицей A , т. е. линейном пространстве $K_m = K_m(A, v^1) = \operatorname{span}\{v^1, Av^1, A^2v^1, \dots, A^{m-1}v^1\}$.

Алгоритм (4.1) требует решения линейной задачи наименьших квадратов $y^m = \operatorname{argmin}_y \|\beta e^1 - \overline{H}_m y\|_2$, т. е. решения системы

$$\overline{H}_m y = \beta e^1. \tag{4.2}$$

Для этого используем QR -разложение, построенное при помощи метода вращений [122]: умножим (4.2) слева на матрицу $Q_m = \Omega_m \cdot \dots \cdot \Omega_1$, $Q_m, \Omega_i \in M(\mathbb{R})_{(m+1) \times (m+1)}$, $i = \overline{1, m}$, где Ω_i — матрица вращений Гивенса: i -й и $(i+1)$ -й диагональные элементы этой матрицы равны $c_i = h_{i+1,i}/\Delta_i$, $\Delta_i = \sqrt{h_{i,i}^2 + h_{i+1,i}^2}$, остальные диагональные элементы — единицы; $(i+1)$ -й элемент i -й строки равен $s_i = h_{i,i}/\Delta_i$, i -й элемент $(i+1)$ -й строки равен $(-s_i)$, остальные элементы — нули. В итоге получаем систему

$$\overline{R}_m y = \overline{g}^m, \tag{4.3}$$

где $\overline{R_m} = Q_m \overline{H_m} \in M(\mathbb{R})_{(m+1) \times m}$, $\overline{g^m} = Q_m(\beta e^1) = (\gamma_1 \dots \gamma_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1}$. После удаления из (4.3) последнего уравнения получаем

$$R_m y^m = g^m, \quad (4.4)$$

где $R_m \in M(\mathbb{R})_{m \times m}$ — верхнетреугольная матрица, что позволяет решить эту систему при помощи обратного хода метода Гаусса. Полученное решение y^m системы (4.4) также является решением задачи (4.2). При этом для нормы вектора невязки из (4.1) справедливо равенство $\|b - Ax^m\|_2 = |\gamma_{m+1}|$ [122]. Благодаря этому свойству критерий останова можно проверять на каждой итерации без решения системы (4.4), и, если он выполняется, вычислять решение, не дожидаясь m -й итерации. При этом удобно хранить матрицы Z_m и H_m по столбцам (packed storage). Для того, чтобы пересчитывать на j -й итерации элементы j -го столбца матрицы H_m и элементы правой части системы (4.4) g_j и $g_{j+1} = \gamma$, также необходимо хранить векторы косинусов и синусов $c, s \in \mathbb{R}^m$. Тогда алгоритм (4.1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & 1. \ r^0 = b - Ax^0, \ \beta = \|r^0\|_2, \ w^0 = r^0, \ \gamma = \beta, \ k = m; \\ & \text{for}(j = 1, \dots, m) \\ & \quad v^j = w^{j-1}/\beta; \ z^j = M_j^{-1}v^j; \ w^j = Az^j; \\ & \quad \text{for}(i = 1, \dots, j) \{ \ h_{i,j} = (w^j, v^i); \ w^j = w^j - h_{i,j}v^i; \} \\ & \quad \text{for}(i = 1, \dots, j-1) \\ & \quad \quad \{ \ \tilde{h} = h_{i,j}; \ h = h_{i+1,j}; \ h_{i,j} = c_i\tilde{h} + s_i h; \ h_{i+1,j} = -s_i\tilde{h} + c_i h; \} \\ & \quad \tilde{h} = h_{j,j}; \ \beta = \|w^j\|_2; \ h_{j,j} = \sqrt{\tilde{h}^2 + \beta^2}; \ c_j = \beta/h_{j,j}; \ s_j = \tilde{h}/h_{j,j}; \\ & \quad g_j = \gamma c_j; \ \gamma = -s_j \gamma; \ \text{if}(|\gamma| < \varepsilon) \{ \ k = j; \ j = m + 1; \} \\ & \quad Z_k = [z^1 \dots z^k]; \ H_k = \{h_{i,j}\}; \ x^m = x^0 + Z_k H_k^{-1} g^k; \ \text{if}(|\gamma| > \varepsilon) \{ x^0 = x^m; \text{goto } 1. \} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Алгоритм (4.5) реализован в параллельном программном комплексе «LS-STAG_turb» для решения разностных аналогов уравнений Гельмгольца и Пуассона с ILU- и многосеточным предобуславливанием соответственно. После этого была проведена серия вычислительных экспериментов для исследования масштабируемости алгоритма (Рис. 4.24).

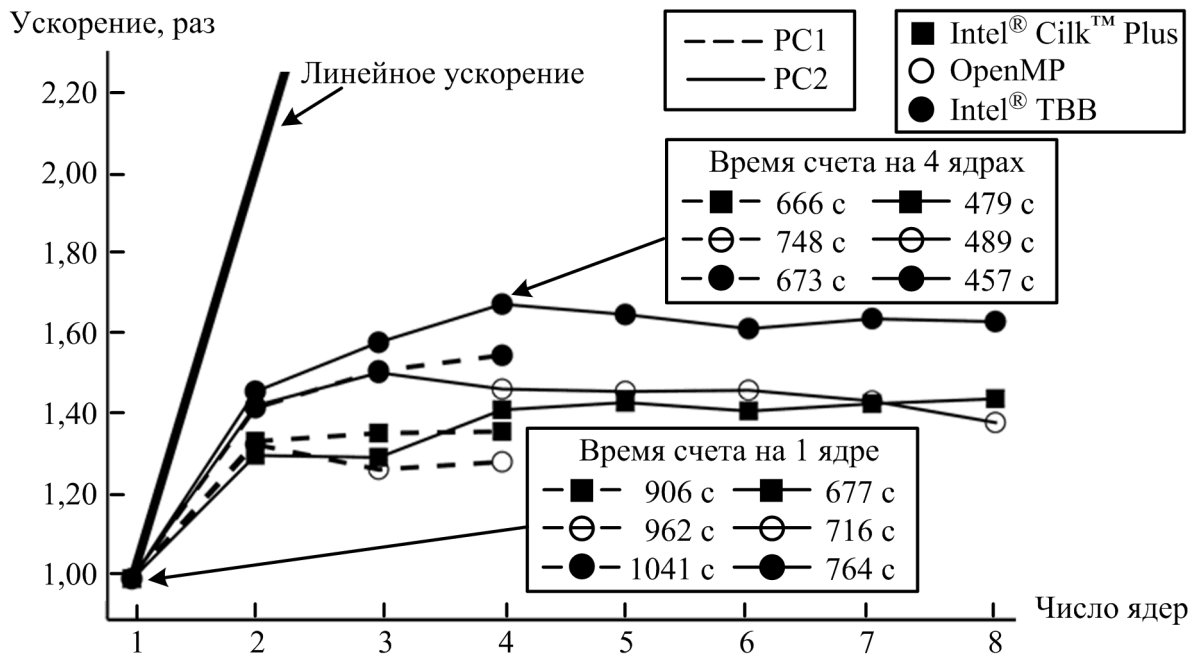


Рис. 4.24. Масштабируемость программного комплекса «LS-STAG_turb»

Разработанная реализация позволила получить ускорение по сравнению с аналогичным решателем из Intel® MKL на одном ядре в среднем на 4 %, а на четырех ядрах — на 6 %. Наилучшее быстродействие при расчетах на одном ядре демонстрируют приложения, использующие технологию Intel® Cilk™ Plus, однако при расчете на PC2 с четырьмя ядрами благодаря хорошей масштабируемости наименьшая продолжительность расчета получается при использовании Intel® TBB. Отметим, что по сравнению исходной последовательной версией комплекса «LS-STAG_turb» время проведения расчета уменьшилось примерно в 5 раз при использовании одного ядра и в 7 раз при использовании четырех.

4.3. Верификация программного комплекса «LS-STAG_turb»

Во многих инженерных приложениях возникает необходимость моделирования обтекания системы из двух круговых профилей. В качестве примеров таких приложений можно привести обтекание элементов конструкции летательных аппаратов, линий электропередачи с расщепленными фазами, труб теплообменников и т.д. Изменение характера обтекания из-за интерференции между телами [12] может существенным образом влиять режим колебаний тел в потоке [15]. При этом большое значение для практики могут иметь не только величины стационарных

аэродинамических коэффициентов, подробно исследованные экспериментально [12, 145], но и их нестационарные зависимости от времени, которые могут быть определены лишь в ходе численного моделирования.

В данном разделе представлены результаты решения таких задач комплексом «LS-STAG_turb». Рассматриваются круговые профили K_1 и K_2 , $K = K_1 \cup K_2$ (Рис. 4.25). Проекция расстояния между центрами профилей на ось Ox равна L , а на ось Oy — T . Профили могут быть расположены тандемом ($T = 0$), рядом поперек потока ($L = 0$) или с углом выноса.

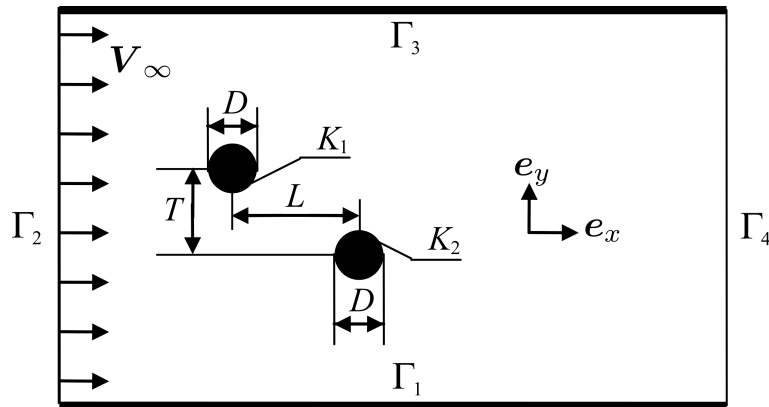


Рис. 4.25. Расчетная область

4.3.1. Обтекание тандема круговых профилей

В работе [52] выделены три режима обтекания тандема круговых профилей. При малом L в промежутке между профилями наблюдается два симметричных стационарных вихря (режим SG — symmetric in the gap, Рис. 4.26, а). В этом режиме среднеквадратичное отклонение коэффициента подъемной силы заднего профиля $C_{ya,2}^{rms}$ очень мало. При увеличении L вихри за передним профилем перестают быть симметричными: они последовательно уменьшаются и увеличиваются в размерах на донной части переднего профиля и на лобовой части заднего профиля (режим AG — alternating in the gap, Рис. 4.26, б), при этом $C_{ya,2}^{rms}$ возрастает. Наконец, при больших значениях L в промежутке между профилями образуется вихревая дорожка, $C_{ya,2}^{rms}$ резко возрастает, а $C_{xa,2}$ становится положительным (режим WG — wake in the gap, Рис. 4.26, в). При фиксированном L режим обтекания зависит от Re (Рис. 4.27).

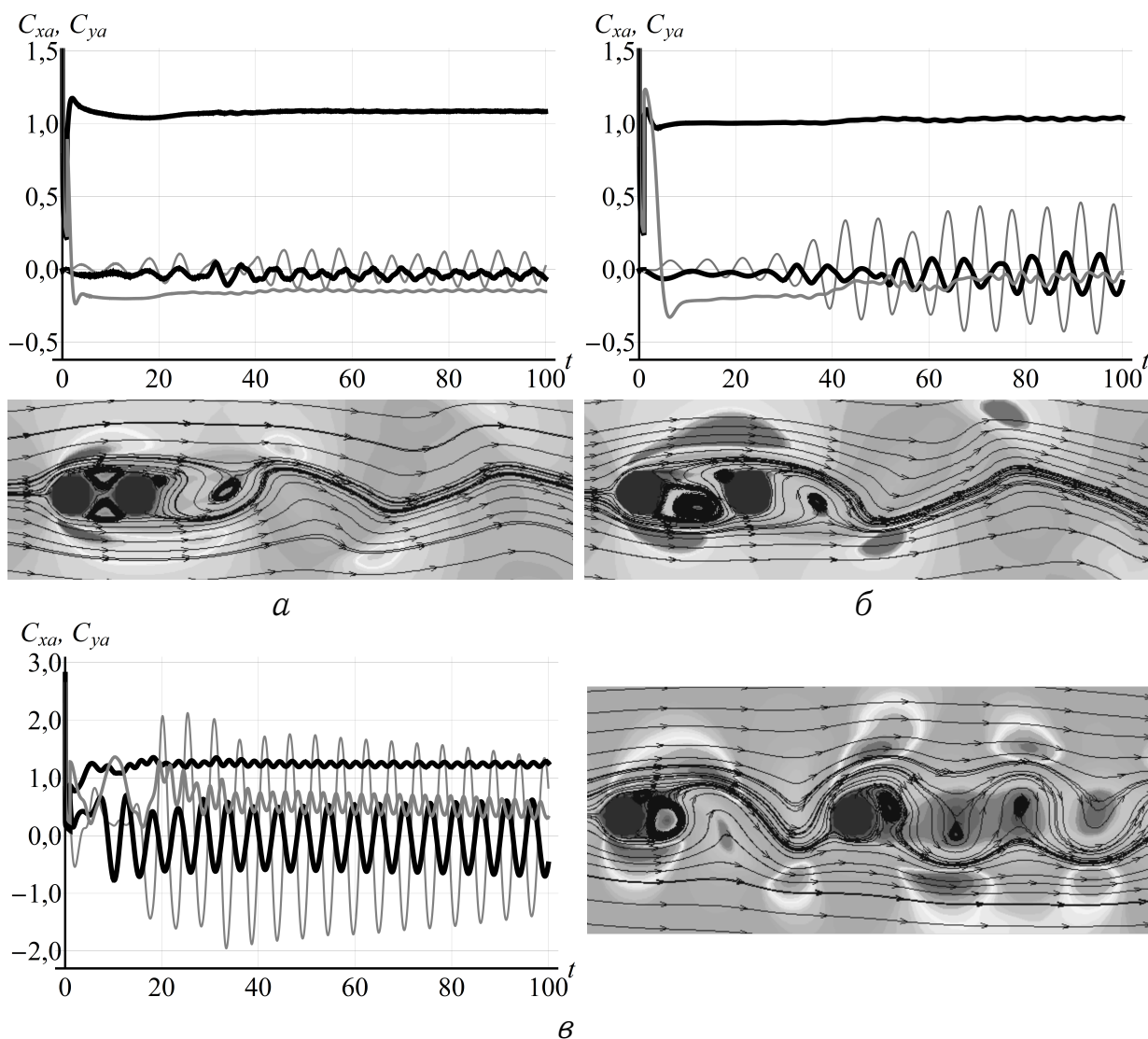


Рис. 4.26. Зависимости $C_{xa}(t)$, $C_{ya}(t)$ для K_1 (черные линии) и K_2 (серые линии) и картины обтекания при $Re=200$: а — режим SG ($L=1,5$); б — режим AG ($L=2,3$); в — режим WG ($L=5,0$)

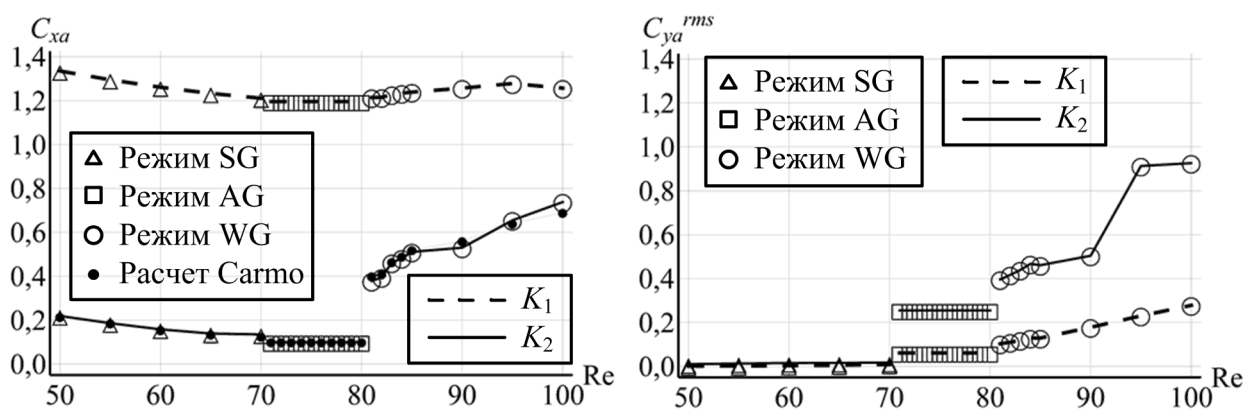


Рис. 4.27. Значения $C_{xa,1}$, $C_{xa,2}$, $C_{ya,1}^{rms}$ и $C_{ya,2}^{rms}$ при $L = 3,8$, рассчитанные методом LS-STAG на сетке 168×148 и приведенные в [52]

Рассчитанные характеристики гидродинамических нагрузок, действующих на тандем при $Re = 100$ и $L = 1,5 \dots 8,5$, хорошо согласуются с результатами, приведенными в работах [59, 74, 91, 125], Рис. 4.28. Их анализ показывает, что при $L = 1,5$ числа Струхала, как для переднего, так и для заднего профиля примерно на 20 % меньше Sh , рассчитанного при $Re = 100$ для одного профиля.

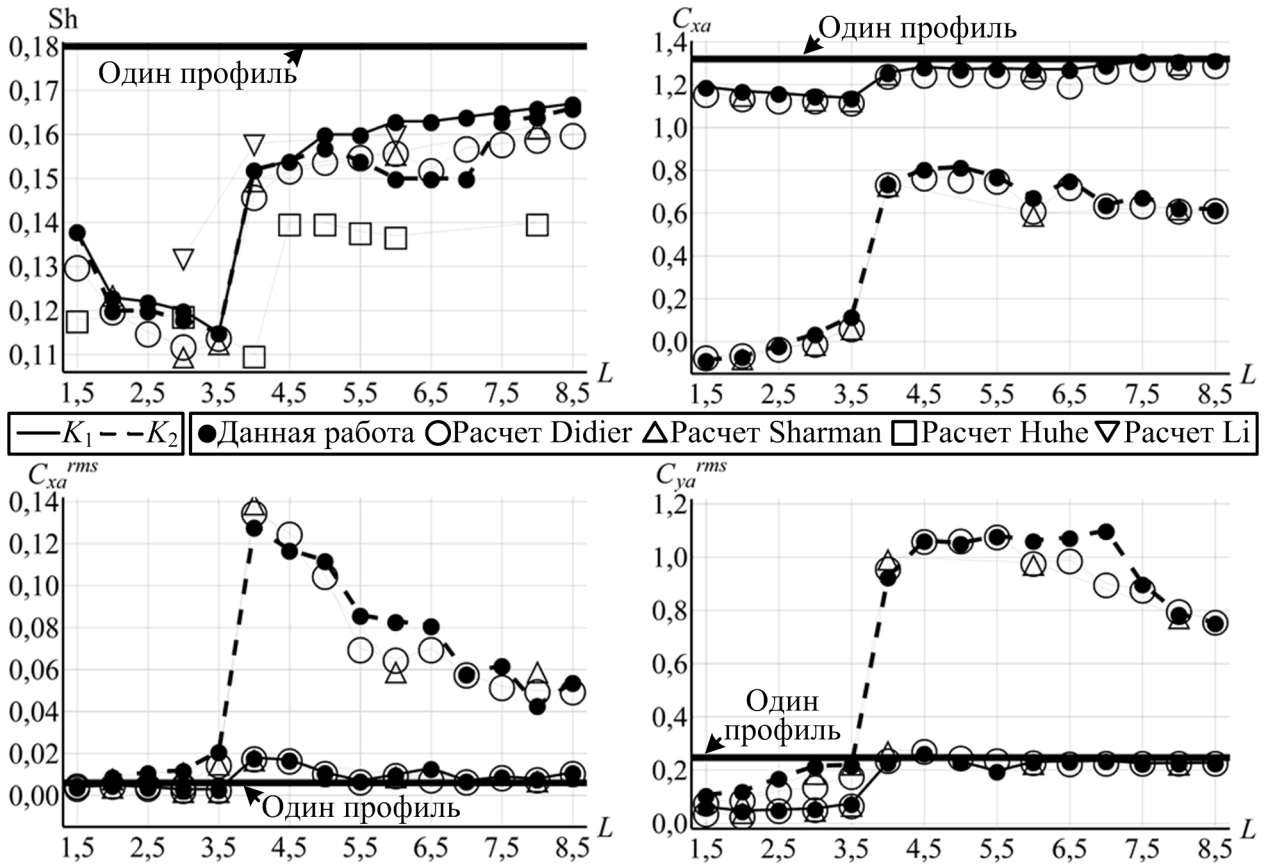


Рис. 4.28. Сравнение рассчитанных при $Re = 100$ значений Sh , C_{xa} , C_{xa}^{rms} и C_{ya}^{rms} с результатами работ [59, 74, 91, 125]

При увеличении L значения Sh_1 и Sh_2 уменьшаются, достигая минимума (почти на 33 % меньше Sh для одного профиля) при $L = 3,5$. При $3,5 < L < 4,0$ происходит резкий рост Sh , обусловленный переходом в режим WG: Sh_1 и Sh_2 становятся всего на 10 % меньше Sh , рассчитанного для одиночного профиля. С дальнейшим увеличением L значения Sh_1 и Sh_2 продолжают возрастать, приближаясь к Sh . При $L < 4,0$ значение $C_{xa,1}$ на 10–15 % меньше значения C_{xa} для одного профиля, тогда как значение $C_{xa,2}$ колеблется около нуля. Затем происходит резкий рост

значения $C_{xa,2}$ — оно становится на 40–50 % меньше значения C_{xa} . При этом $C_{xa,1}$ также возрастает, приближаясь к C_{xa} . Значение $C_{xa,2}^{rms}$ даже при малом L оказывается выше значения C_{xa}^{rms} , полученного для одного профиля, тогда как $C_{xa,1}^{rms}$ оказывается несколько меньше C_{xa}^{rms} . При $3,5 < L < 4,0$ из-за перехода в режим WG происходит рост обеих величин: $C_{xa,1}^{rms}$ превышает C_{xa}^{rms} в 3 раза, а $C_{xa,2}^{rms}$ — в 20. В это же время $C_{ya,1}^{rms}$ возрастает до C_{ya}^{rms} , а $C_{ya,2}^{rms}$ резко возрастает, становясь в 5 раз больше C_{ya}^{rms} . При дальнейшем увеличении L флуктуации нестационарных нагрузок уменьшаются: уже при $L = 5,5$ значение $C_{xa,1}^{rms}$ становится примерно равно C_{xa}^{rms} и при дальнейшем увеличении L совершает незначительные колебания в окрестности этого значения, а $C_{xa,2}^{rms}$ при $L = 8,5$ превышает C_{xa}^{rms} в 9 раз.

Все расчеты проводились с шагом по времени $\Delta t = 0,01$ на неравномерных сетках, в которых на каждый профиль приходился блок равномерной сетки (64 ячейки на диаметр). Время выполнения каждого нестационарного расчета на РС1 при использовании четырех ядер и технологии Intel® Cilk™ Plus составляет 4 минуты.

4.3.2. Обтекание двух неподвижных круговых профилей, расположенных рядом поперек потока

Два круговых профиля диаметром $D = 1,0$, расположенные рядом поперек потока, ведут себя в потоке аналогично одиночному профилю лишь при $T > 5,0$ [12]. При меньших значениях T возникает интерференция: взаимодействие между профилями изменяет картину обтекания, распределения сил и давления. В работе [84] выделено несколько типов результирующей картины обтекания: стационарная картина, обтекание единого плохо обтекаемого тела (при $T \leq 1,5$), искривленная вихревая дорожка, триггерное обтекание, две вихревые синхронизированные в фазе дорожки и две вихревые синхронизированные в противофазе дорожки. Наибольший интерес представляют последние три режима. Далее приведены результаты моделирования при $1,5 < T \leq 5,0$.

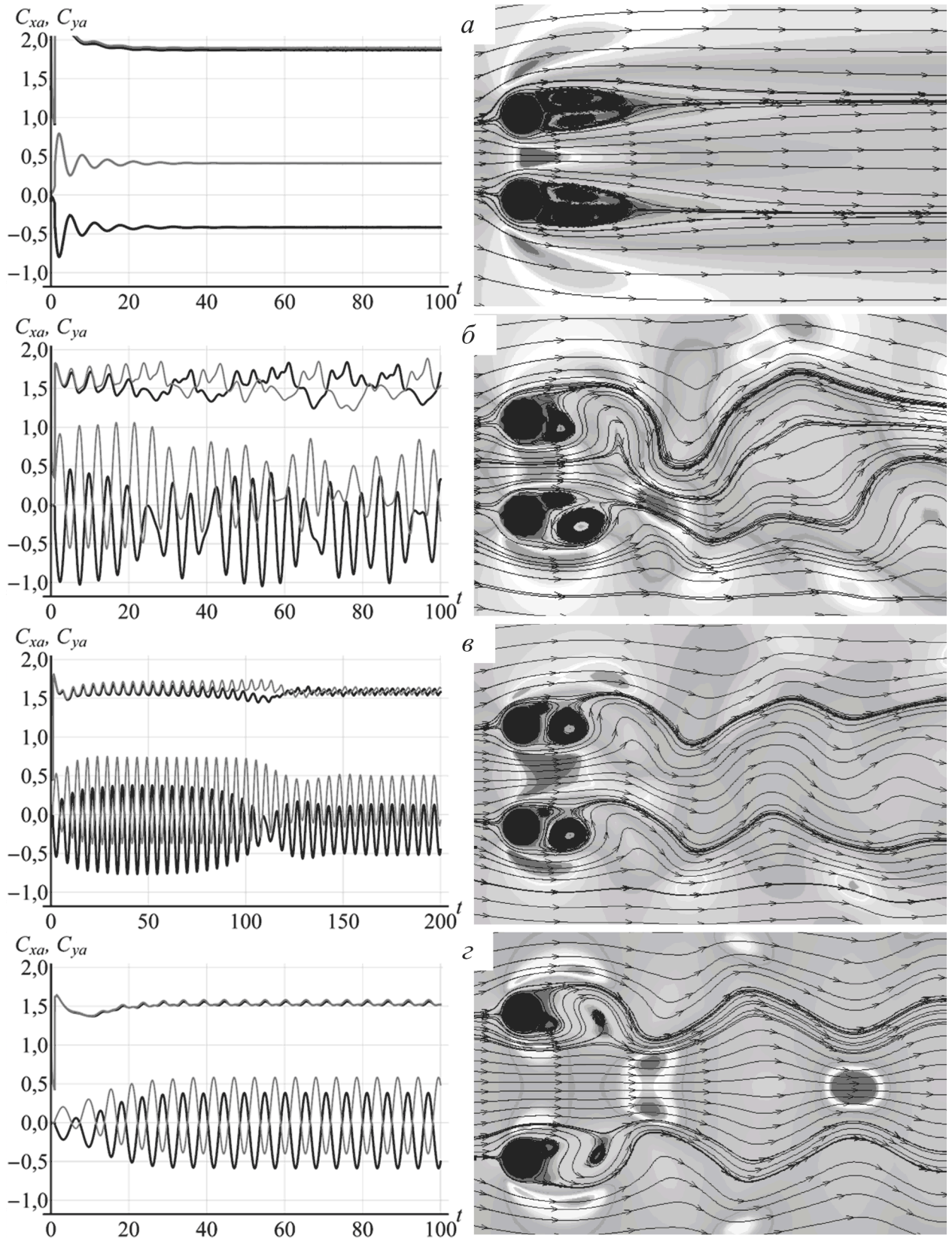


Рис. 4.29. Зависимости $C_{xa}(t)$, $C_{ya}(t)$ для K_1 (черные линии) и K_2 (серые линии) и линии тока: *a* — установившееся течение ($Re=40, T=2,0$); *б* — триггерное течение ($Re=150, T=2,0$); *в* — синхронизированные в фазе дорожки ($Re=100, T=2,5$); *з* — синхронизированные в противофазе дорожки ($Re=100, T=3,5$)

При $Re < 50$ и любом значении T из рассматриваемого диапазона след за парой профилей представляет собой пару стационарных вихрей, симметричных относительно срединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему центры профилей (Рис. 4.29, а). При больших значениях числа Рейнольдса вихри за профилями начинают образовываться и отрываться поочередно то с одной, то с другой стороны. При $1,5 < T < 2,2$ линии тока в промежутке между профилями вначале отклоняются в сторону одного из профилей, а после 5–7 периодов схода вихрей отклоняются в сторону другого профиля (Рис. 4.29, б). В работе [84] данное течение названо триггерным (как известно, триггер — устройство, которое способно длительно находиться в одном из двух устойчивых состояний и чередовать их под воздействием внешних сигналов). В этом случае в спектре подъемной силы можно выделить две частоты: нижнюю, триггерную (характеризует частоту изменения отклонения линий тока в промежутке между профилями в ту или иную сторону), и верхнюю, частоту схода вихрей.

При дальнейшем увеличении T след за профилями распадается на две вихревые дорожки, характеризующиеся одним и тем же Sh , т.е. синхронизированные [84]. При $2,2 < T \leq 3,4$ дорожки синхронизированы в фазе (Рис. 4.29, в), а при $3,4 < T \leq 5,0$ — в противофазе (Рис. 4.29, г). Коэффициенты подъемной силы для K_1 и K_2 в обоих режимах примерно равны по модулю, но противоположны по знаку. Значение Sh при этом совпадает с числом Струхала, характеризующим обтекание одного профиля, а значения C_{xa} для каждого профиля оказываются примерно на 13 % выше коэффициента лобового сопротивления одиночного профиля.

В Таблице 34 приведены рассчитанные при $Re = 200$ и $T = 2,0$ значения C_{xa} , C_{ya} и Sh для K_1 и K_2 , а также результаты эксперимента [145] и расчетов [97, 150]. Для $Re = 100$ и $T = 2,0 \dots 5,0$ на Рис. 4.30 представлены рассчитанные значения характеристик гидродинамических нагрузок, действующих на K_1 и K_2 , и результаты работ [66, 84, 88].

Таблица 34.

Сравнение рассчитанных при $Re = 200$ и $T = 2,0$ значений C_{xa} , C_{ya} и Sh с известными в литературе результатами

Источник	$C_{xa,1}$	$C_{ya,1}$	Sh_1	$C_{xa,2}$	$C_{ya,2}$	Sh_2
Эксперимент [145]	—	—	0,22	—	—	0,22
Данная работа	1,67	-0,31	0,22	1,64	0,31	0,22
Расчет [97]	1,42	-0,22	0,20	1,42	0,22	0,20
Расчет [150]	1,69	-0,32	0,21	1,64	0,30	0,21

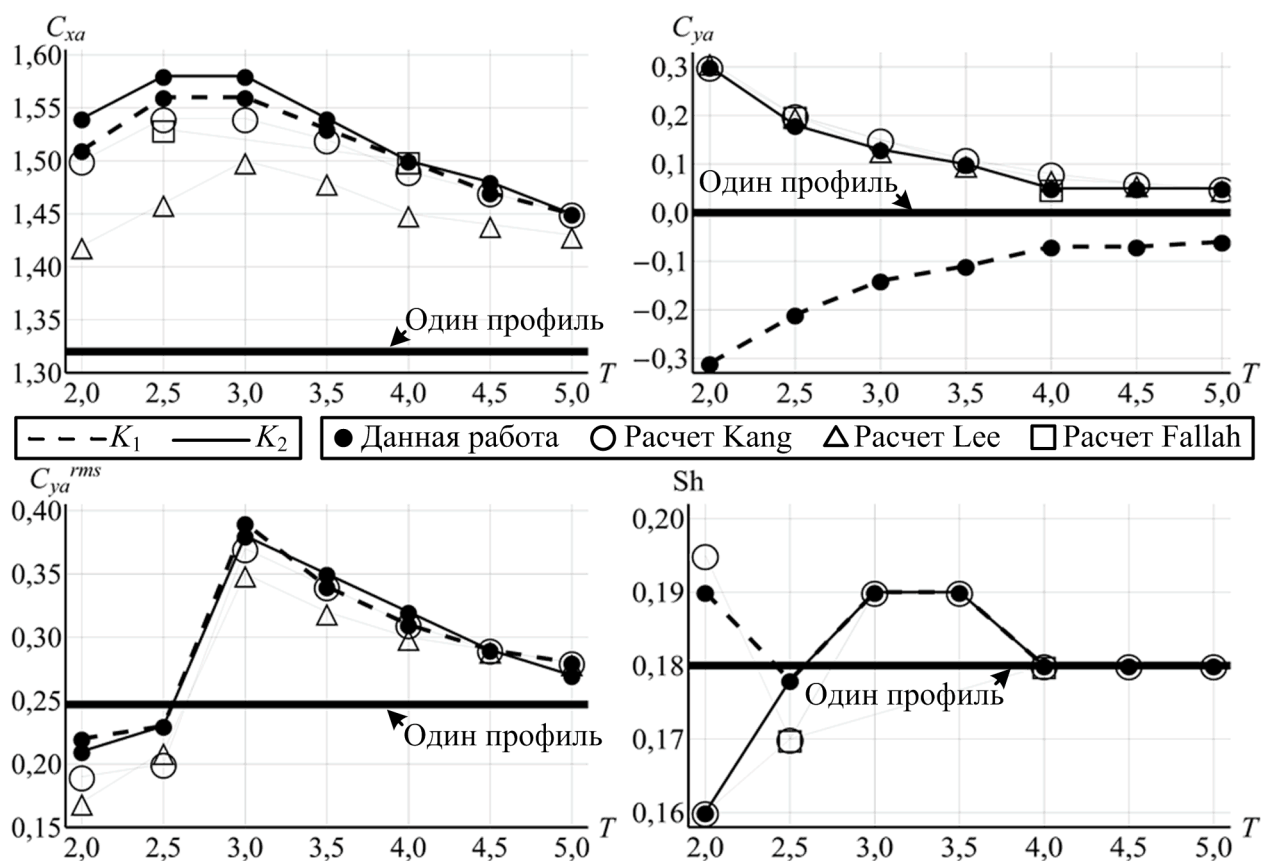


Рис. 4.30. Сравнение рассчитанных при $Re = 100$ значений C_{xa} , C_{ya} ,

C_{ya}^{rms} и Sh с результатами работ [66, 84, 88]

Из графиков видно, что $C_{xa}(K_1)$ и $C_{xa}(K_2)$ достигают максимума при $2,5 < T < 3,0$, а затем уменьшаются, приближаясь к значению C_{xa} , получаемого при обтекании одного цилиндра. Модуль стационарного коэффициента подъемной силы при увеличении T монотонно уменьшается и приближается к нулю. Резкое увеличение флуктуаций $C_{ya}(t)$ при $2,5 < T < 3,0$ связано с переходом от триггерного обтекания к разделению следа на две синхронизированные в фазе вихревые дорожки. Полученные результаты хорошо согласуются с известными данными.

4.3.3. Обтекание двух вращающихся круговых профилей, расположенных рядом поперек потока

Рассмотрим обтекание пары вращающихся в противоположных направлениях с постоянной угловой скоростью ω круговых профилей при $Re = 150$, $T = 2,0$; верхний профиль (K_1) вращается по часовой стрелке, а нижний (K_2) — против часовой стрелки. Характерное значение угловой скорости определим как $\Omega = 2V_\infty/D$. Таким образом, $|\mathbf{v}^{ib}| = V_\infty$ при $\omega = \Omega$. В работе [53] показано, что при $\omega > \Omega$ происходит стабилизация следа за профилями, а при достаточно больших скоростях вращения замкнутые линии тока образуют «виртуальное» эллиптическое тело. Расчеты методом LS-STAG проводились на неравномерной сетке 240×344 с шагом по времени $\Delta t = 0,001$. Для проведения расчета на PC1 при использовании четырех ядер и технологии Intel® Cilk™ Plus требуется от получаса ($\omega < 3\Omega$) до полутора часов (при более высоких значениях ω).

На Рис. 4.31 представлены результаты моделирования при $\omega = \Omega$. Видно, что флуктуации $C_{xa}(t)$ и $C_{ya}(t)$ ниже, чем при обтекании пары неподвижных профилей ($\omega = 0$, Рис. 4.29, б). Кроме того, значения C_{xa} для обоих профилей уменьшаются на 35 %, а разница между значениями $C_{ya,1}$ и $C_{ya,2}$ значительно увеличивается.

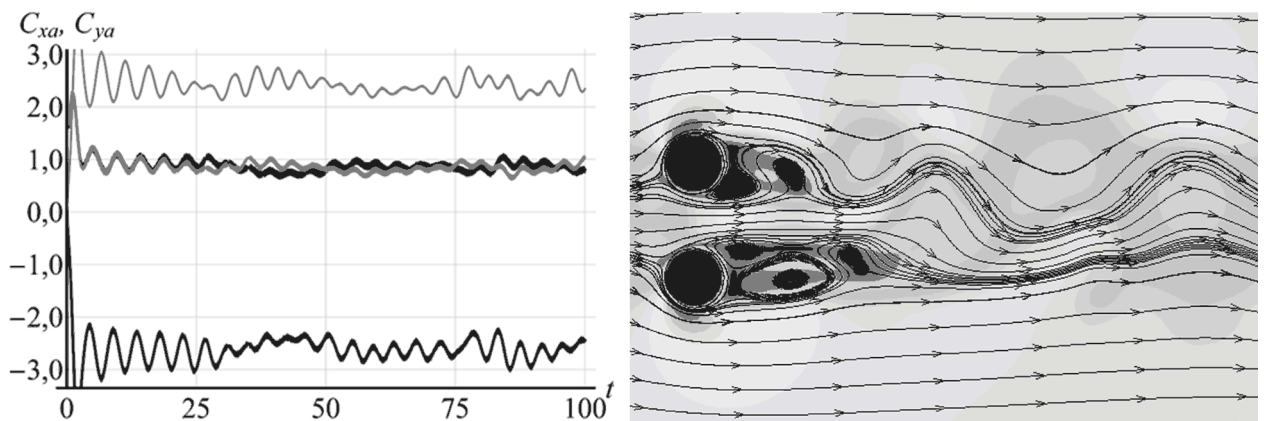


Рис. 4.31. Зависимости $C_{xa}(t)$, $C_{ya}(t)$ для K_1 (серые линии) и K_2 (черные линии) и линии тока при $\omega/\Omega = 1,00$

При $\omega > \Omega$, как и в работе [53], смоделирована стабилизация следа за профилями (Рис. 4.32). В таких режимах $C_{ya,1} \approx C_{ya,2}$ (Рис. 4.33).

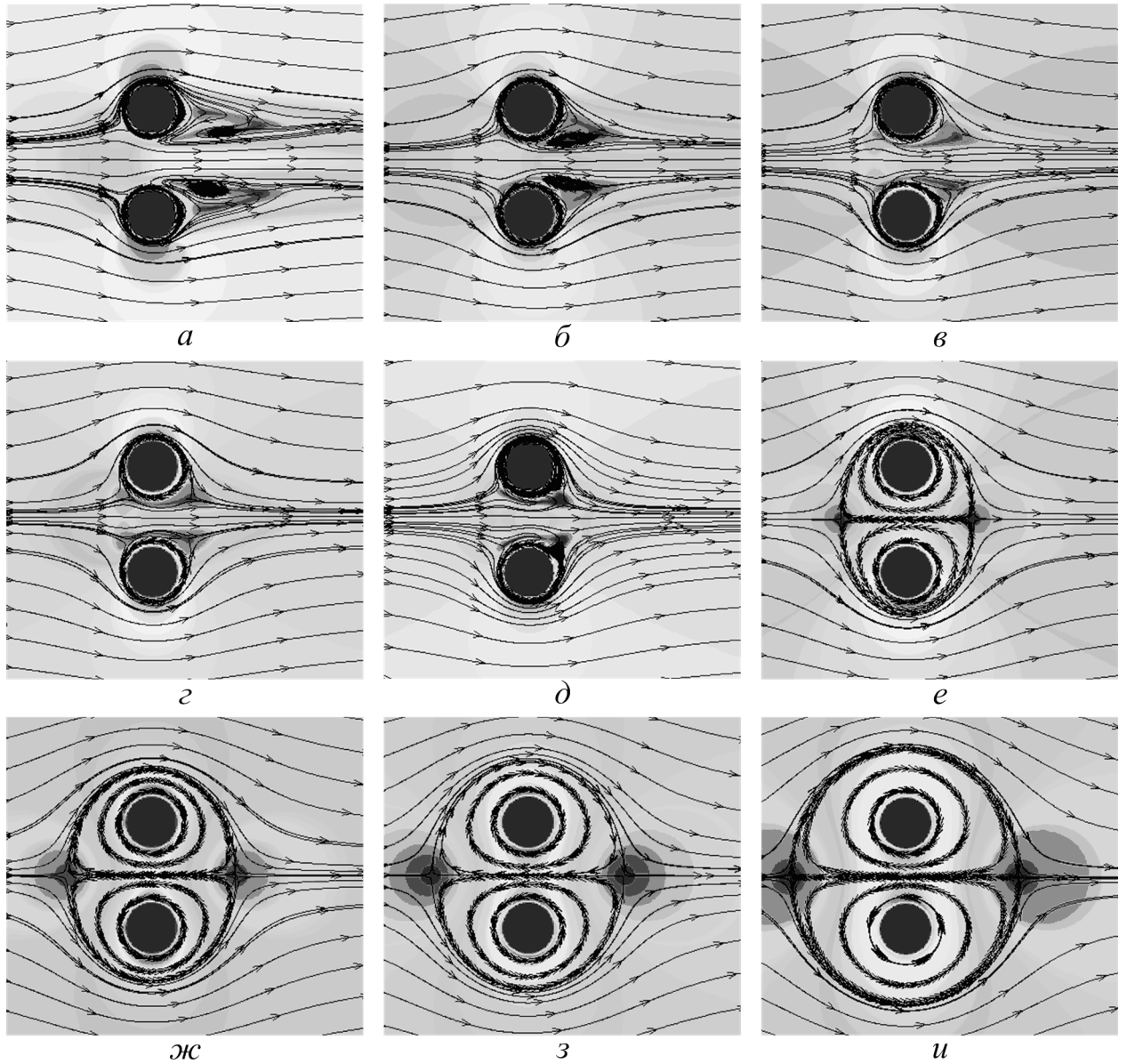


Рис. 4.32. Линии тока при различных значениях ω/Ω : *a* — $\omega/\Omega = 1,50$; *б* — $\omega/\Omega = 2,00$; *в* — $\omega/\Omega = 2,25$; *г* — $\omega/\Omega = 2,50$; *д* — $\omega/\Omega = 2,75$; *е* — $\omega/\Omega = 3,00$; *ж* — $\omega/\Omega = 4,00$; *з* — $\omega/\Omega = 5,00$; *и* — $\omega/\Omega = 7,00$

При $\omega/\Omega > 2,75$ (Рис. 4.32, *д–и*) вокруг системы профилей появляются замкнутые линии тока — образуется «виртуальное» эллиптическое тело [53]. По мере возрастания ω размеры этого тела увеличиваются, и при $\omega = 7\Omega$ тело становится почти круговым с диаметром $4,4D$ (Рис. 4.32, *и*). В режимах без образования «виртуального» эллиптического тела суммарный стационарный коэффициент лобового сопротивления уменьшается при увеличении ω , а в режимах с образованием данного тела — увеличивается (Рис. 4.33). При $\omega < 3\Omega$ значение $C_{ya,1}$ поло-

жительно и увеличивается при увеличении ω , а $C_{ya,2}$ — отрицательно и уменьшается. При дальнейшем увеличении ω значение $C_{ya,1}$ уменьшается, а значение $C_{ya,2}$ увеличивается. При $4\Omega < \omega < 5\Omega$ значения $C_{ya,1}$ и $C_{ya,2}$ меняют знак. Полученные результаты хорошо согласуются с расчетом [53].

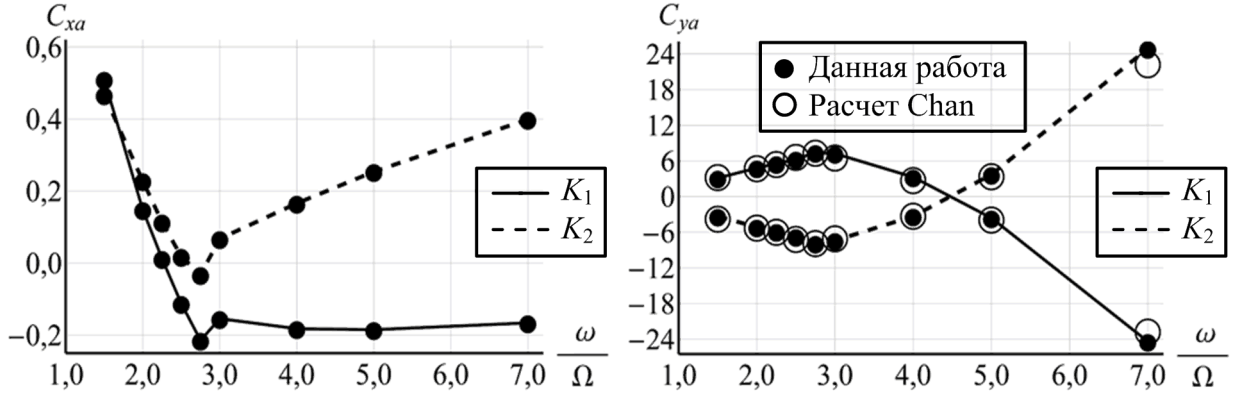


Рис. 4.33. Сравнение рассчитанных значений C_{xa} и C_{ya} с результатами работы [53]

4.3.4. Обтекание системы из двух круговых профилей с двумя степенями свободы

Рассмотрим обтекание системы из двух одинаковых круговых профилей диаметром $D = 1,0$ и массой $m = 4,7273$, расположенных с углом выноса ($L = 5,5$, $T = 0,7$). Скорость набегающего потока $V_\infty = 1,0$. Каждый профиль имеет две степени свободы (Рис. 4.34) и уравнения движения (2.1) можно записать следующим образом:

$$m\ddot{x}_{*,i} + b\dot{x}_{*,i} + cx_{*,i} = F_{xa,i}, \quad m\ddot{y}_{*,i} + b\dot{y}_{*,i} + cy_{*,i} = F_{ya,i}, \quad (4.6)$$

где $b = 4\pi m\xi Sh_\omega$ — коэффициент демпфирования; $c = m(2\pi Sh_\omega)^2$ — жесткость связи; $\xi = 3,3 \cdot 10^{-4}$; Sh_ω — безразмерная частота собственных колебаний системы; $F_{xa,i}$ и $F_{ya,i}$ — действующие на i -й профиль сила лобового сопротивления и подъемная сила соответственно; $x_{*,i}$ и $y_{*,i}$ — отклонение i -го профиля от положения равновесия по оси Ox и Oy соответственно; $i = \{1, 2\}$. Такое течение при $Re = 100$ и $Re = 1000$ было исследовано численно в работах [102, 103].

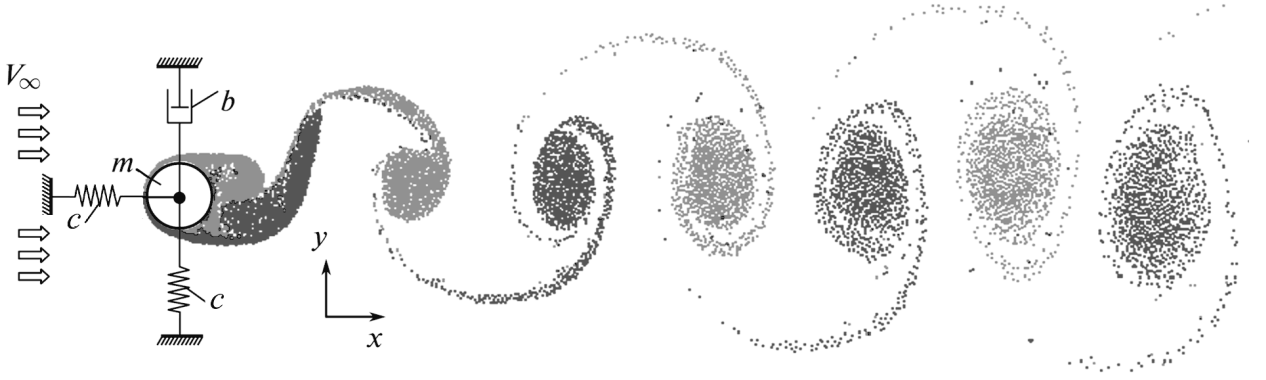


Рис. 4.34. Круговой профиль с двумя степенями свободы и след за ним

На n -м шаге расчета $x_{*,i}^n = X_{C,i}^n - X_{C,i}^0$, $y_{*,i}^n = Y_{C,i}^n - Y_{C,i}^0$, где $(X_{C,i}^0; Y_{C,i}^0)$ и $(X_{C,i}^n; Y_{C,i}^n)$ — координаты центра i -го профиля в начальный момент времени и на n -м шаге расчета соответственно, а разностные аналоги уравнений (4.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{X_{C,i}^{n+1} - 2X_{C,i}^n + X_{C,i}^{n-1}}{(\Delta t)^2} + b \cdot \frac{X_{C,i}^{n+1} - X_{C,i}^{n-1}}{2\Delta t} + c \cdot (X_{C,i}^n - X_{C,i}^0) &= F_{xa,i}|^n, \\ m \cdot \frac{Y_{C,i}^{n+1} - 2Y_{C,i}^n + Y_{C,i}^{n-1}}{(\Delta t)^2} + b \cdot \frac{Y_{C,i}^{n+1} - Y_{C,i}^{n-1}}{2\Delta t} + c \cdot (Y_{C,i}^n - Y_{C,i}^0) &= F_{ya,i}|^n. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Была проведена серия расчетов при $Re = 100$ и $Re = 1000$. Собственная частота системы менялась в диапазоне $Sh_\omega/Sh = 0,50 \dots 2,00$, где Sh — значение числа Струхала, вычисленное для неподвижной системы профилей. Расчеты проводились на неравномерной сетке 666×344 с шагом по времени $\Delta t = 10^{-4}$ ($\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ при $Re = 1000$) при $Sh_\omega/Sh = 0,85 \dots 1,15$ и $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ ($\Delta t = 10^{-4}$ при $Re = 1000$) при $Sh_\omega/Sh = \{0,50, 0,70, 1,40 \dots 2,00\}$. На диаметр профиля приходилось 64 ячейки.

Поскольку расстояние между центрами профилей достаточно велико ($> 5D$), профиль K_1 , расположенный выше по потоку, ведет себя как одиночный профиль, а профиль K_2 , расположенный ниже по потоку в следе профиля K_1 , совершает вынужденные колебания, вызванные периодическим сходом вихрей с профиля K_1 , т.е. наблюдается бафтинг профиля K_2 . При $Re = 100$ амплитуда колебаний K_2 значительно превышает амплитуду колебаний профиля K_1 (Рис. 4.35). Как и в работе [102] для профиля K_1 наибольшая амплитуда колебаний наблюдается

при $Sh_\omega \approx Sh$ ($Sh \approx 0,162$ при $Re = 100$), что соответствует поведению одиночного профиля в потоке, а для профиля K_2 наибольшая амплитуда колебаний вдоль оси Oy возбуждается при $Sh_\omega \approx 0,85Sh$. При $Re = 1000$ амплитуда колебаний профиля K_2 вдоль оси Oy оказывается меньше амплитуды колебаний профиля K_1 (Рис. 4.36), как и в работе [103]. При этом наибольшая амплитуда колебаний профилей, как вдоль оси Oy , так и вдоль оси Ox , возбуждается при $Sh_\omega \approx Sh$.

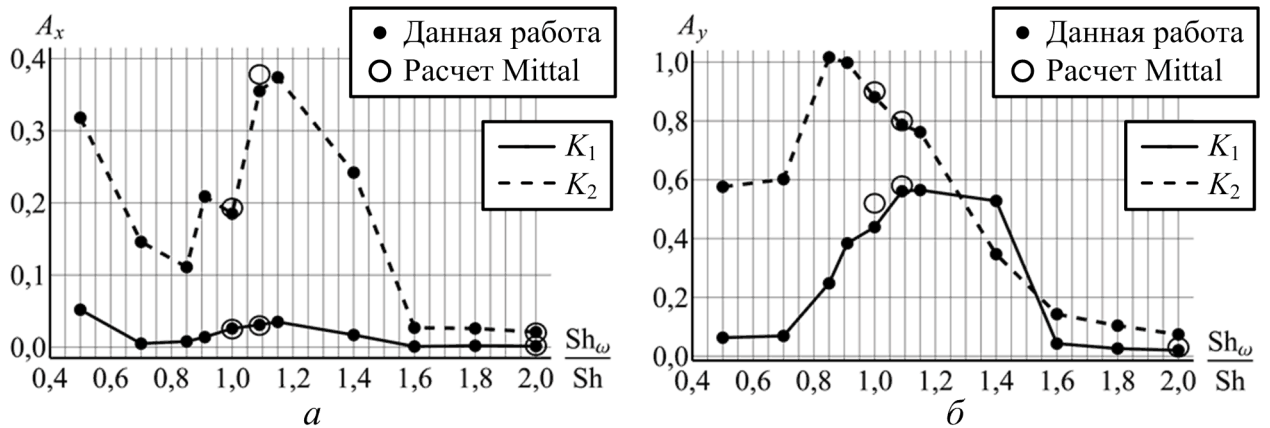


Рис. 4.35. Зависимость максимума амплитуды колебаний профилей от Sh_ω при $Re = 100$: a — вдоль оси Ox ; b — вдоль оси Oy

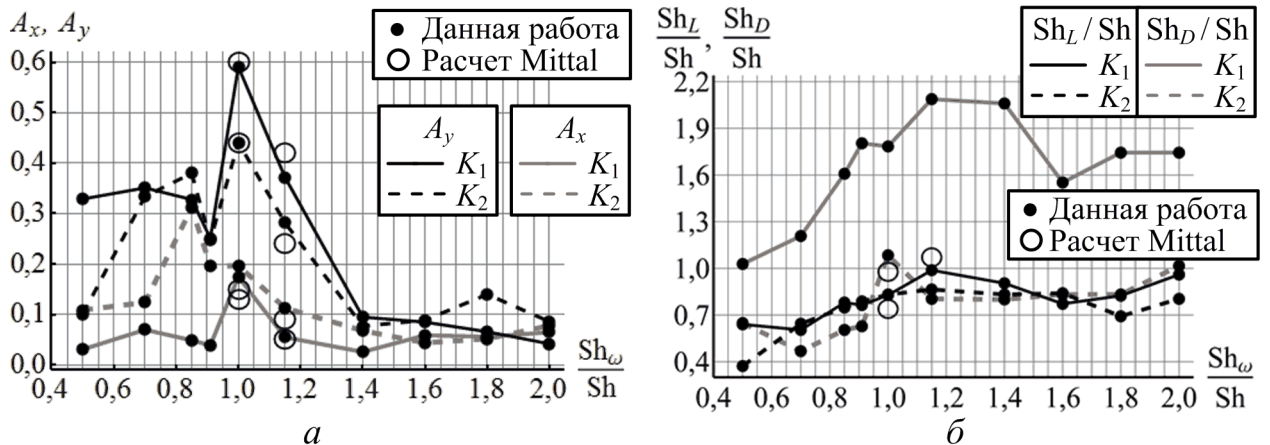


Рис. 4.36. Зависимость характеристик колебаний профилей от Sh_ω при $Re = 1000$: a — максимум амплитуды колебаний вдоль осей Ox и Oy ; b — частоты колебаний подъемной силы и силы лобового сопротивления

Траектории движения центров профилей при $Sh_\omega / Sh = 0,50 \dots 2,00$ и $Re = 100$ изображены на Рис. 4.37 и на Рис. 4.38. Для случая $Sh_\omega = Sh$ при $Re = 100$ на Рис. 4.39 также представлены линии тока в моменты времени $t = 44$, $t = 47$, $t = 51$.

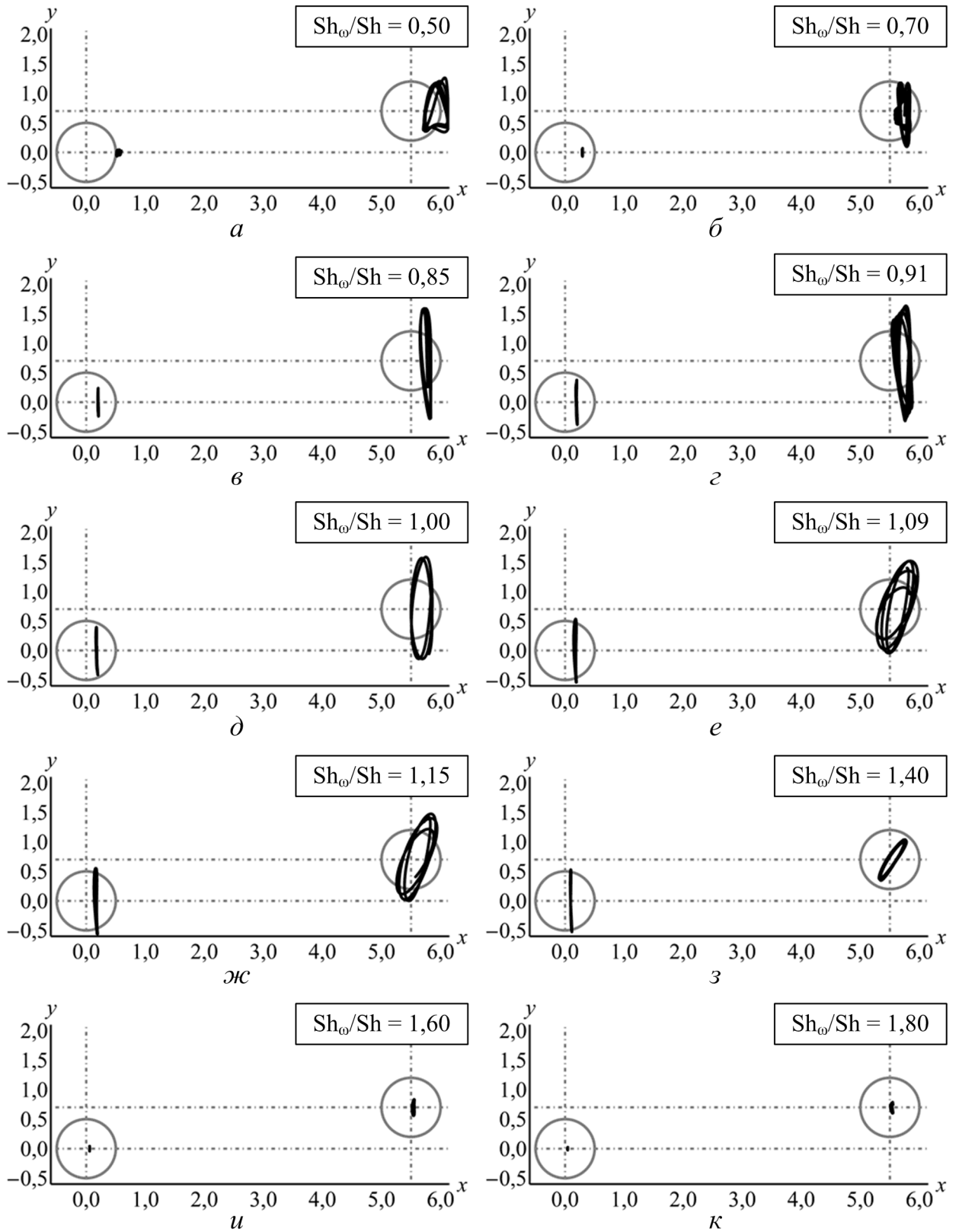


Рис. 4.37. Траектории движения центров профилей при $Re = 100$:

a — $Sh_\omega/Sh = 0,50$; *б* — $Sh_\omega/Sh = 0,70$; *в* — $Sh_\omega/Sh = 0,85$;
г — $Sh_\omega/Sh = 0,91$; *д* — $Sh_\omega/Sh = 1,00$; *е* — $Sh_\omega/Sh = 1,09$;
ж — $Sh_\omega/Sh = 1,15$; *з* — $Sh_\omega/Sh = 1,40$; *и* — $Sh_\omega/Sh = 1,60$;
к — $Sh_\omega/Sh = 1,80$

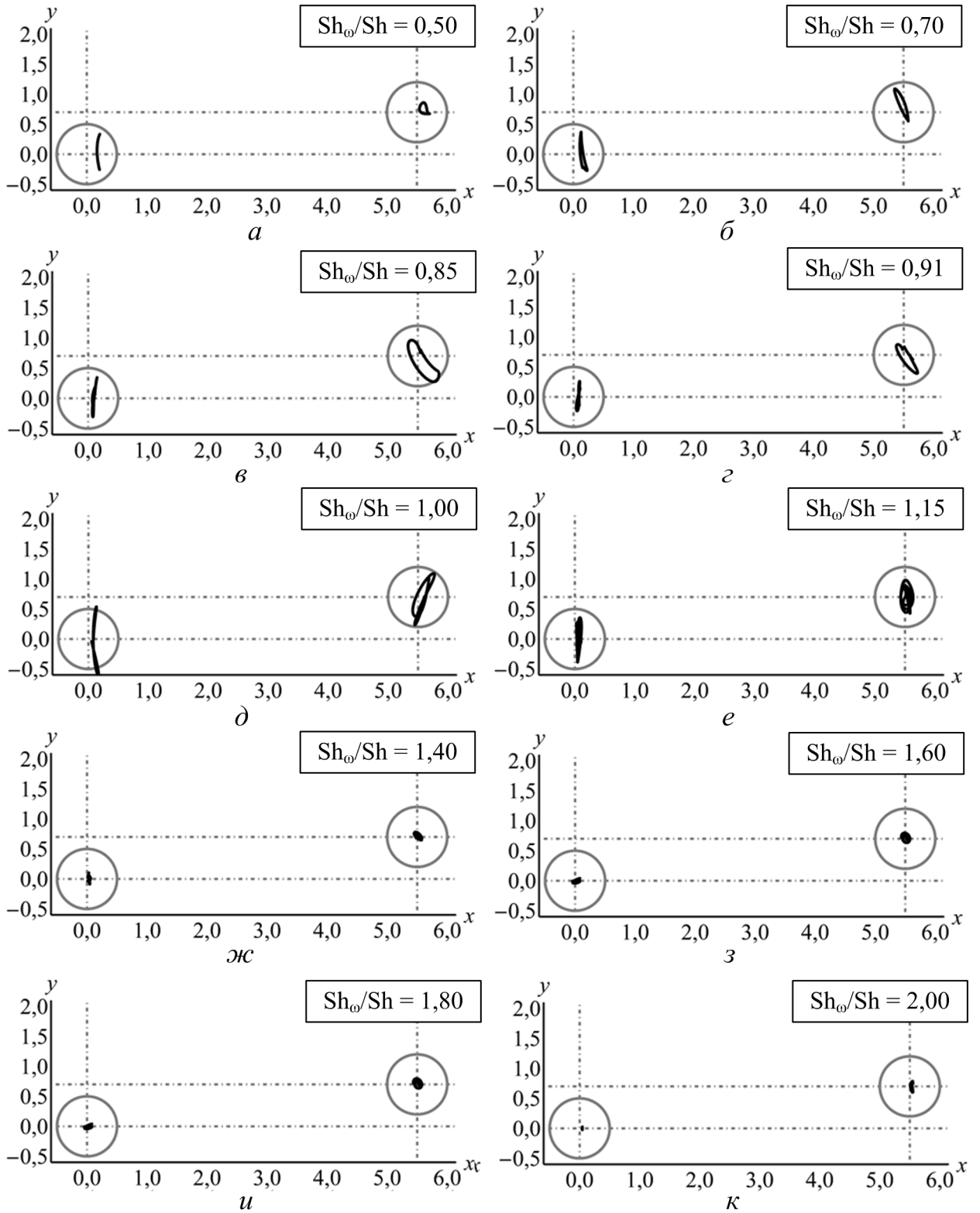


Рис. 4.38. Траектории движения центров профилей при $Re = 1000$:

- a — $Sh_\omega/Sh = 0,50$; $б$ — $Sh_\omega/Sh = 0,70$; $в$ — $Sh_\omega/Sh = 0,85$;
 $г$ — $Sh_\omega/Sh = 0,91$; $д$ — $Sh_\omega/Sh = 1,00$; $е$ — $Sh_\omega/Sh = 1,15$;
 $ж$ — $Sh_\omega/Sh = 1,40$; $з$ — $Sh_\omega/Sh = 1,60$; $и$ — $Sh_\omega/Sh = 1,80$;
 $к$ — $Sh_\omega/Sh = 2,00$

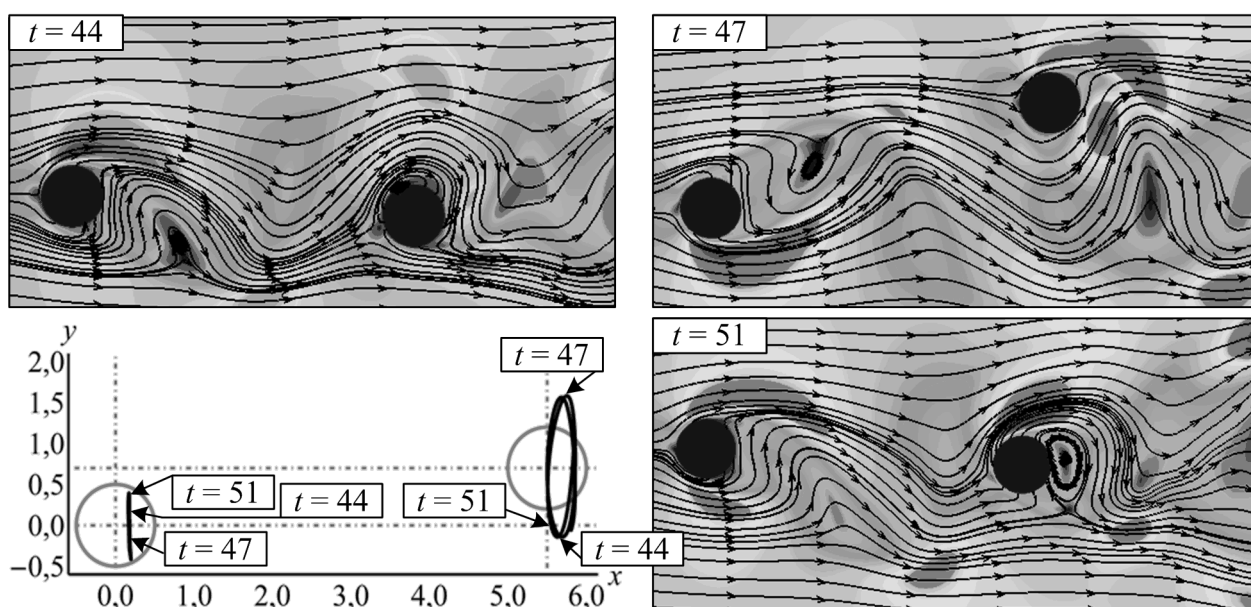


Рис. 4.39. Линии тока в моменты времени $t = 44$, $t = 47$, $t = 51$ и траектории движения центров профилей при $Re = 100$ и $Sh_\omega/Sh = 1,00$

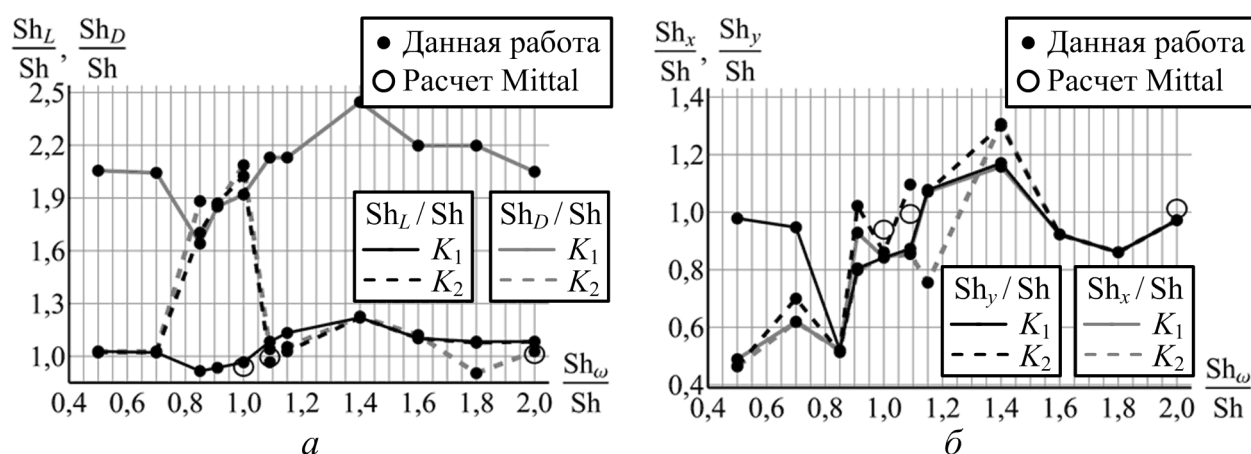


Рис. 4.40. Зависимость безразмерных частот колебаний нестационарных нагрузок и профилей от Sh_ω при $Re = 100$: a — частоты Sh_L и Sh_D колебаний подъемной силы и силы лобового сопротивления; b — частоты Sh_x и Sh_y колебаний профилей вдоль осей Ox и Oy

При $0,70 < Sh_\omega/Sh \leq 2,00$ наблюдается захват частоты (Рис. 4.36, b и Рис. 4.40, a): частота схода вихрей приближается к собственной частоте системы. При $Sh_\omega/Sh = 0,50 \dots 2,00$ для профиля K_2 , расположенного вниз по течению, наблюдается совпадение частот колебаний подъемной силы и силы лобового сопротивления, в то время как для профиля K_1 сила лобового сопротивления изменяется с удвоенной частотой колебаний

подъемной силы, как и должно быть при обтекании одиночного профиля. Из-за этого траектории движения профиля K_2 имеют овальную форму (Рис. 4.37, Рис. 4.38 и Рис. 4.39.), а траектории движения профиля K_1 напоминают восьмерку (Рис. 4.37 и Рис. 4.38).

При указанных выше параметрах расчета для моделирования сотни единиц безразмерного времени при $Sh_\omega \approx Sh$ продолжительность расчета на PC2 с использованием двух ядер составила около 150 часов, а при остальных значениях Sh_ω — около 10 часов.

4.4. Результаты и выводы по главе 4

Для моделирования движения профилей в потоке вязкой несжимаемой среды методом LS-STAG, описанным в главах 1 и 2, разработан программный комплекс «LS-STAG». Разработанные модификации метода LS-STAG для использования моделей турбулентности Смагоринского, Спаларта — Аллмараса, $k - \varepsilon$, $k - \omega$ и $k - \omega$ SST в рамках RANS, LES и DES подходов к моделированию турбулентности, представленные в главе 3, реализованы в программном комплексе «LS-STAG_turb».

Разработана параллельная версия алгоритмов, реализованных в комплексах «LS-STAG» и «LS-STAG_turb». Использовались такие технологии, как Intel® Cilk™ Plus, Intel® TBB и OpenMP. Для решения систем линейных алгебраических уравнений реализован метод FGMRES. Проведено сравнение эффективности некоторых алгоритмов, реализованных в «LS-STAG_turb», с аналогами из Intel® MKL. Для верификации комплекса «LS-STAG_turb» использовались тестовые задачи о моделировании обтекания систем круговых профилей, в т.ч. с двумя степенями свободы.

Результаты, представленные в главе 4, опубликованы в работах [18, 19, 25, 29, 31, 35, 116].

Основные результаты и выводы

В диссертационной работе рассмотрена двумерная задача о моделировании обтекания профилей произвольной формы и их систем потоком вязкой несжимаемой среды. При этом обтекаемые профили могут быть как неподвижными, так и совершать колебания с одной, двумя или тремя степенями свободы. Для решения рассматриваемой задачи разработаны модификации метода LS-STAG, позволяющие численно решать RANS, LES и DES уравнения гидродинамики. Кроме того, построена LS-STAG-дискретизация уравнений из моделей турбулентности Смагоринского, Спаларта — Аллмараса, $k-\varepsilon$, $k-\omega$, $k-\omega$ SST. Перечисленные модификации реализованы в рамках программных комплексов. По результатам исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Модификацию метода LS-STAG для расчета течений с подвижными погруженными границами следует рассматривать как эффективную альтернативу сеточным методам с подвижной сеткой, согласованной с телом.
2. При моделировании методом LS-STAG обтекания профилей при высоких значениях числа Рейнольдса целесообразно использовать разработанные в диссертационной работе модификации метода LS-STAG, позволяющие проводить RANS, LES и DES моделирование.
3. Результаты детального тестирования разработанных программных комплексов показали, что они являются эффективным инструментом для численного решения сопряженных задач гидроупругости и моделирования обтекания профилей в потоке и их систем на вычислительных машинах с общей памятью.

Литература

1. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 70 с.
2. Буч Г., Максимчук Р.А., Энгл М.У., Янг Б.Дж., Коналлен Д., Хьюстон К.А. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений. М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2008. 720 с.
3. Буч Г., Рамбо Д., Джекобсон А. Язык UML. Руководство пользователя. СПб.: Питер, 2004. 430 с.
4. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 468 с.
5. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
6. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 88 с.
7. Гергель В.П. Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. 544 с.
8. Глазунов А.В. Вихреразрешающее моделирование турбулентности в пограничном слое атмосферы: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. М., 2013. 282 с.
9. Глотов В.Ю. Математическая модель свободной турбулентности на основе принципа максимума: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2015. 134 с.
10. Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я., Дынников Я.А., Малахова Т.В. О стабилизации следа за круговым цилиндром, совершающим высокочастотные вращательные колебания // ДАН. 2010. Т. 432, № 1. С. 45–49.
11. Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. М.: Энергия, 1971. 480 с.

12. Здравкович М.М. Обзор исследований интерференции между двумя круглыми цилиндрами при различном их взаимном расположении // Труды Америк. общества инж.-механиков, сер. «Д», рус. перевод. 1977. Т. 99, № 4. С. 119–137.
13. Ильин В.П. Методы бисопряженных направлений в подпространствах Крылова // Сиб. журнал индустр. математики. 2008. Т. 9, № 4. С. 47–60.
14. Ильин В.П., Кныш Д.В. Параллельные методы декомпозиции в пространствах следов // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 110–119.
15. Каплунов С.М., Вальес Н.Г., Ченцова Н.А., Фурсов В.Ю. Математическая модель гидроупругого механизма возбуждения вибраций системы плохо обтекаемых тел в поперечном потоке жидкости // Теплоэнергетика. 2012. № 6. С. 44–49.
16. Куркин Е.И. Пограничный слой на осесимметричных телах и каналах при их осевом вращении: дис. . . . канд. техн. наук. Самара, 2014. 194 с.
17. Мартыненко С.И. Многосеточная технология для математического моделирования тепловых и гидродинамических процессов: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. М., 2013. 268 с.
18. Марчевский И.К., Пузикова В.В. Анализ эффективности итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 4. С. 37–52.
19. Марчевский И.К., Пузикова В.В. Анализ эффективности итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, реализованных в пакете OpenFOAM // Труды ИСП РАН. 2013. Т. 24. С. 71–85.
20. Марчевский И.К., Пузикова В.В. Исследование эффективности распараллеливания вычислений при моделировании течений вязкой

несжимаемой среды методом LS-STAG на системах с общей памятью // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16. С. 595–606.

21. Марчевский И.К., Пузикова В.В. Моделирование обтекания кругового профиля, совершающего вращательные колебания, методом LS-STAG // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2014. № 3. С. 93–107.
22. Ольшанский М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ им. М. В. Ломоносова, 2003. 163 с.
23. Орлов С.А., Цилькер Б.Я. Технологии разработки программного обеспечения. СПб.: Питер, 2012. 608 с.
24. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988. 410 с.
25. Пузикова В.В. Архитектура программного комплекса для численного моделирования движения профилей в потоке вязкой несжимаемой среды методом LS-STAG // Молодежный научно-технический вестник. 2014. № 7. [Электронный ресурс]. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/727985.html> (дата обращения: 05.10.2015).
26. Пузикова В.В. Использование метода LS-STAG для моделирования обтекания профиля потоком вязкой несжимаемой среды // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XVI Международной конференции. В 2 т. Т. II. Ростов-на-Дону, 2012. С. 190–194.
27. Пузикова В.В. Математическое моделирование в сопряженных задачах гидроупругости с использованием метода LS-STAG // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов. Казань, 2015. С. 3152–3154.
28. Пузикова В.В. Особенности моделирования обтекания профиля методом LS-STAG // Молодежный научно-технический вестник. 2013. № 4.

[Электронный ресурс]. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/567803.html> (дата обращения: 20.07.2015).

29. Пузикова В.В. Построение функции уровня для профиля произвольной формы при моделировании его обтекания методом LS-STAG // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2012. Спец. выпуск № 2 «Математическое моделирование в технике». С. 163–173.
30. Пузикова В.В. Расчет течения вязкой несжимаемой среды в каверне методом LS-STAG — методом погруженных границ с функциями уровня // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XV Международной конференции. В 2 т. Т. II. Ростов-на-Дону, 2011. С. 199–203.
31. Пузикова В.В. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом BiCGStab с предобуславливанием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2011. № 5. С. 124–133.
32. Пузикова В.В. Численное моделирование обтекания профиля произвольной формы потоком вязкой несжимаемой жидкости методом LS-STAG // XXXVIII Гагаринские чтения: Научные труды Международной молодежной конференции. Т. 5. М., 2012. С. 103–105.
33. Рихтер Дж. Windows для профессионалов: создание эффективных Win32-приложений с учетом специфики 64-разрядной версии Windows. СПб.: , 2004. 749 с.
34. Саушин И.И. Турбулентность в пограничном слое пульсирующего потока: дис. . . . канд. техн. наук. Казань, 2015. 112 с.
35. Свидетельство о государственной регистрации программы № 2014661906. Программный комплекс «LS-STAG» для моделирования движения профилей в потоке вязкой несжимаемой среды методом LS-STAG / В.В. Пузикова. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 18.11.14.

36. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015662166. Программный комплекс «LS-STAG_turb» — Моделирование течений вязкой несжимаемой среды с использованием моделей турбулентности / В.В. Пузикова. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 18.11.15.
37. Ушаков Б.В. и др. Атлас аэродинамических характеристик профилей крыльев. М.: Издание БНТ НКАП при ЦАГИ, 1940. 340 с.
38. Фленов М.Е. Программирование на C++ глазами хакера. СПб.: БХВ-Петербург, 2009. 352 с.
39. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
40. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
41. Храбрый А.И. Численное моделирование нестационарных турбулентных течений жидкости со свободной поверхностью: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. СПб., 2014. 154 с.
42. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др. М.: Наука, 1976. 400 с.
43. Шилдт Г. C++ для начинающих. М.: ЭКОМ Паблишерз, 2007. 640 с.
44. Юн А.А. Исследование течений и прочностной анализ. М.: ЛЕНАНД, 2014. 432 с.
45. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Part I // J. Comput. Phys. 1996. № 1. P. 119–143.
46. Balaras E. Modeling complex boundaries using an external force field on fixed Cartesian grids in large-eddy simulations // Comp. Fluid. 2004. № 33. P. 375–404.

47. Barth T.J., Jespersen D.C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper 89-0366. 1989.
48. Bergmann M., Cordier L., Brancher J.P. Drag minimization of the cylinder wake by trust-region proper ortogonal decomposition // Notes on Num. Fluid Mech. and Multidisciplinary Design. 2007. V. 95. P. 309-324.
49. Blackburn H.M., Schmidt S. Large Eddy Simulation of flow past a circular cylinder // 14th Australasian Fluid Mechanics Conference, Adelaide University, Adelaide, Australia. 2001.
50. Braza M., Chassaing P., Minh H.H. The numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder // J. Fluid Mech. 1986. № 165. P. 79-130.
51. Breuer M. Large Eddy Simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: numerical and modelling aspects // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1998. № 28. P. 1281-1302.
52. Carmo B. S., Meneghini J. R., Sherwin S. J. Possible states in the flow around two circular cylinders in tandem with separations in the vicinity of the drag inversion spacing // Phys. Fluids. 2010. № 22. P. 541-562.
53. Chan A.S., Jameson A. Suppression of the unsteady vortex wakes of a circular cylinder pair by a doublet-like counter-rotation // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2010. № 63. P. 22-39.
54. Cheny Y., Botella O. The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties // J. Comput. Phys. 2010. № 229. P. 1043-1076.
55. Chung M.H. Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape // Comput. Fluid. 2006. № 35. P. 607-623.

56. CodeAnalyst Performance Analyzer [Electronic resource] // AMD Developer Central [Official website]. URL: <http://developer.amd.com/tools-and-sdks/archive/amd-codeanalyst-performance-analyzer/> (accessed: 15.08.2015).
57. Davis R. W., Moore E. F., Purtell L. P. A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders // *Phys. Fluid.* 1984. № 27. P. 46–59.
58. De Zeeuw P.M. Matrix-dependent prolongations and restrictions in a black box multigrid solver // *J. Comp. and Appl. Math.* 1990. № 33. P. 1–27.
59. Didier E. Simulation de l'écoulement autour de deux cylindres en tandem // *C. R. Mecanique.* 2007. № 335. P. 696–701.
60. Donea J., Huerta A., Ponthot J.-Ph., Rodriguez-Ferran A. Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods // *Encyclopedia of Computational Mechanics. Fundamentals.* 2004. Vol. 1. P. 413–437.
61. Droge M., Vestappen R. A new symmetry-preserving Cartesian-grid method for computing flow past arbitrarily shaped objects // *Int. J. Numer. Method Fluid.* 2005. № 47. P. 979–985.
62. Dutsch H., Durst F., Becker S. et al. Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1998. № 360. P. 249–271.
63. Evans E. *Domain-Driven Design: Tackling Complexity in the Heart of Software.* Addison Wesley, 2003. 560 p.
64. Eymard R., Gallouet T., Herbin R. Finite volume methods // *Hanbook for Numerical Analysis.* 2000. P. 715–1022.
65. Fadlun E.A., Verzicco R., Orlandi P. et al. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations // *J. Comput. Phys.* 2000. № 161. P. 35–60.

66. Fallah K., Fardad A., Sedaghatizadeh N., Fattahi E., Ghaderi A. Numerical simulation of flow around two rotating circular cylinders in staggered arrangement by multi-relaxation-time lattice Boltzmann method at low Reynolds number // World Appl. Sciences J. 2011. № 15. P. 544–554.
67. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. N. Y.: Springer, 2002. 423 p.
68. Franke R., Rodi W., Schonung B. Numerical calculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders // J. Wind Engr. Indust. Aero. 1990. № 35. P. 237–257.
69. Guilmineau E., Queutey P. A numerical simulation of vortex shedding from an oscillating circular // J. Fluid Struct. 2002. № 16. P. 773–794.
70. Gu W., Chyu C., Rockwell D. Timing of vortex formation from an oscillating cylinder // Physics of Fluids. 1994. № 6. P. 3677–3682.
71. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surfaces // Ph.Fluid. 1965. № 8. P. 2181–2189.
72. He J.W., Glovinski R., Metcalfe R., Nordlander A., Triaux J.P. Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder. Part I: Oscillatory cylinder rotation // J. Comput. Phys. 2000. № 163. P. 87–117.
73. Henderson R.D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition // J. Fluid Mech. 1997. № 352. P. 65–112.
74. Huhe-Aode H., Tatsumo M., Taneda S. Visual studies on wake structure behind two cylinders in tandem arrangement // Rep. Res. Inst. Appl. Mech. 1985. № 32. P. 1–20.
75. Iaccarino G., Verzicco R. Immersed boundary technique for turbulent flow simulations // Appl. Mech. Rev. 2003. № 56. P. 331–347.

76. Intel® Advisor Tutorials [Electronic resource] // Intel® Developer Zone [Official website]. URL: <https://software.intel.com/en-us/articles/advisorxe-tutorials> (accessed: 15.08.2015).
77. Intel(R) Cilk(TM) Plus [Electronic resource] // Intel® Developer Zone [Official website]. URL: <https://software.intel.com/ru-ru/node/522579> (accessed: 15.08.2015).
78. Intel® Integrated Performance Primitives — Documentation [Electronic resource] // Intel® Developer Zone [Official website]. URL: <https://software.intel.com/en-us/articles/intel-integrated-performance-primitives-documentation> (accessed: 15.08.2015).
79. Intel® Math Kernel Library — Documentation [Electronic resource] // Intel® Developer Zone [Official website]. URL: <https://software.intel.com/en-us/articles/intel-math-kernel-library-documentation> (accessed: 15.08.2015).
80. Intel® VTune™ Amplifier Tutorials [Electronic resource] // Intel® Developer Zone [Official website]. URL: <https://software.intel.com/en-us/articles/intel-vtune-amplifier-tutorials> (accessed: 15.08.2015).
81. ISO/IEC 9899:2011. Information technology — Programming languages — C [Electronic resource] // ISO [Official website]. URL: <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso-iec:9899:ed-3:v1:en> (accessed: 15.08.2015).
82. Jameson A. The construction of discretely conservative finite volume schemes that also globally conserve energy or entropy // J. Sci. Comput. 2008. № 34. P. 152–187.
83. Jones W.P., Launder B.E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. V. 15. P. 301–314.

84. Kang S. Characteristics of flow over two circular cylinders in a side-by-side arrangement at low Reynolds numbers // *Phys. Fluids*. 2003. № 15. P. 2486–2498.
85. Kang S., Iaccarino G., Moin P. Accurate and efficient immersed-boundary interpolations for viscous flows // *Center for Turbulence Research Briefs, NASA Ames/Stanford University*. 2004. P. 31–43.
86. Kirkpatrick M.P., Armfield S.W., Kent J.H. A representation of curved boundaries for the solution of the Navier-Stokes equations on a staggered three-dimensional Cartesian grid // *J. Comput. Phys.* 2003. № 184. P. 1–36.
87. Klamo J.T., Leonard A., Roshko A. On the maximum amplitude for a freely vibrating cylinder in cross flow // *J. of Fluids and Structures*. 2005. № 21. P. 429–434.
88. Lee K., Yang K.-S., Yoon D.-H. Flow-induced forces on two circular cylinders in proximity // *Computers & Fluids*. 2009. № 38. P. 111–120.
89. Leonard A. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows // *Advances in Geophysics*. 1974. V. 18, Part A. P. 237–248.
90. Lesoinne M., Farhat C. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations // *Comput. Method Appl. Mech. Eng.* 2003. № 134. P. 71–90.
91. Li J., Chambarel A., Donneaud M., Martin R. Numerical study of laminar flow past one and two circular cylinders // *Comput. Fluids*. 1991. № 19. P. 155–170.
92. Lilly D.K. Introduction to «Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow, part I» // *J. Comput. Phys.* 1966. № 135. P. 101–102.
93. Linnick M.N., Fasel H.F. A high order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains // *J. Comput. Phys.* 2005. V. 204. P. 157–192.

94. Marchevsky I.K., Moreva V.S., Puzikova V.V. The efficiency comparison of the vortex element method and the immersed boundary method for numerical simulation of airfoil's hydroelastic oscillations // Proceedings of the VI International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. San Servolo, Venice, Italy. 2015. P. 800–811.
95. Marchevsky I., Puzikova V. Application of the LS-STAG immersed boundary method for numerical simulation in coupled aeroelastic problems // Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics, 5th European Conference on Computational Mechanics, 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics. Barcelona, Spain. 2014. P. 1995–2006.
96. Marchevsky I., Puzikova V. Numerical simulation in coupled aeroelastic problems by using the LS-STAG method // Immersed boundary methods: current status and future research directions: Book of abstracts. Leiden, The Netherlands. 2013. P. 45–47.
97. Meneghini J.R., Saltara F., Siqueira C.L.R., Ferrari J.A. Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements // J. Fluids Struct. 2001. № 15. P. 327–350.
98. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994. V. 32, № 8. P. 1598–1605.
99. Mittal R., Balachandar S. Direct numerical simulation of flow past elliptic cylinders // J. Comput. Phys. 1996. № 124. P. 351–367.
100. Mittal R., Dong H., Bozkurttas M., Najjar F.M., Vargas A., von Loebbecke A. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries // J. Comput. Phys. 2008. № 227. P. 4825–4852.
101. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods // Annu. Rev. Fluid Mech. 2005. № 37. P. 239–261.

102. Mittal S., Kumar V. Flow-induced oscillations of two cylinders in tandem and staggered arrangements // J. Fluids Struct. 2001. № 15. P. 717–736.
103. Mittal S., Kumar V. Vortex induced vibrations of a pair of cylinders at Reynolds number 1000 // Int. J. Comput. Fluid Dyn. 2004. № 18. P. 601–614.
104. Morinishi Y., Lund T.S., Vasilyev O.V., Moin P. Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow // J. Comput. Phys. 1998. № 143. P. 90–124.
105. Muldoon F., Acharya S. A divergence-free interpolation scheme for the immersed boundary method // Int. J. Num. Meth. Fluid. 2008. № 56. P. 1845–1884.
106. Okajima A. Strouhal numbers of rectangular cylinders // J. Fluid Mech. 1982. № 128. P. 379–398.
107. Osher S., Fedkiw R.P. Level set methods and dynamic implicit surfaces. N. Y.: Springer, 2003. 273 p.
108. Osher S., Fedkiw R.P. Level set methods: an overview and some recent results // J. Comput. Phys. 2001. № 169. P. 463–502.
109. Osher S., Sethian J.A. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations // J. Comp. Phys. 1988. № 79. P. 12–49.
110. Patel Y. Numerical Investigation of flow past a circular cylinder and in a staggered tube bundle using various turbulence models. Master's thesis. Lappeenranta: Lappeenranta University of Technology. 2010. 87 p.
111. Peller N., Le Duc A., Tremblay F., Manhart M. High-order stable interpolations for immersed boundary methods // Int. J. Num. Meth. Fluid. 2006. № 52. P. 1175–1193.
112. Piquet J., Vasseur X. Multigrid preconditioned Krylov subspace methods for three-dimensional numerical solutions of the incompressible Navier–Stokes equations // Numerical Algorithms. 1998. № 17. P. 1–32.

113. Process Explorer v16.05 [Electronic resource] // Microsoft TechNet [Official website]. URL: <https://technet.microsoft.com/ru-ru/sysinternals/bb896653.aspx> (accessed: 15.08.2015).
114. Puzikova V.V. On generalization of the LS-STAG immersed boundary method for Large Eddy Simulation and Detached Eddy Simulation // Advanced Problems in Mechanics International Summer School-Conference: Book of proceedings. St.-Petersburg, Russia. 2015. P. 411–417.
115. Puzikova V.V., Marchevsky I.K. Extension of the LS-STAG cut-cell immersed boundary method for RANS-based turbulence models // Advanced Problems in Mechanics International Summer School-Conference: Book of proceedings. St.-Petersburg, Russia. 2014. P. 411–417.
116. Puzikova V.V., Marchevsky I.K. The software package for the numerical simulation of the airfoils' motion in the viscous incompressible flow by using the LS-STAG method // The International Conference «Advanced Mathematics, Computations and Applications — 2014»: Abstracts. Novosibirsk, Russia. 2014. P. 83.
117. Puzikova V.V., Marchevsky I.K. Extension of the LS-STAG immersed boundary method for RANS-based turbulence models and its application for numerical simulation in coupled hydroelastic problems // Proceedings of the VI International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. Venice. 2015. P. 532–543.
118. Quarteroni A., Valli A. Domain decomposition methods for partial differential equations. Oxford: Clarendon Press, 1999. 360 p.
119. Rahman M.M., Karim M.M., Alim M.A. Numerical investigation of unsteady flow past a circular cylinder using 2-D finite volume method // J. Naval Arch. and Marine Eng. 2007. № 4. P. 27–42.
120. Reinders J. Intel Threading Building Blocks: Outfitting C++ for Multi-Core Processor Parallelism. Sebastopol: O'Reilly, 2007. 336 p.

121. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1895. V. 186. P. 123–161.
122. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. N.Y.: PWS Publ., 1996. 547 p.
123. Saha A. K., Huralidhar K., Biswas G. Transition and chaos in two-dimensional flow past a square cylinder // J. Eng. Mech. 2000. № 126. P. 523–532.
124. Schenk O., Gartner K. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO // J. of Future Generation Computer Systems. 2004. № 20. P. 475–487.
125. Sharman B., Lien F. S., Davidson L., Norberg C. Numerical predictions of low Reynolds number flows over two tandem circular cylinders // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. № 47. P. 423–447.
126. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment // Monthly Weather Review. 1963. V. 91, № 3. P. 99–164.
127. Sotiropoulos F., Abdallah S. The discrete continuity equation in primitive variable solutions of incompressible flow // J. Comput. Phys. 1991. № 95. P. 212–227.
128. Spalart P.R. Detached-eddy simulation // Annu. Rev. Fluid Mech. 2009. № 41. P. 181–202.
129. Spalart P.R. Strategies for turbulence modelling and simulations // Int. J. Heat and Fluid Flow. 2000. № 21. P. 252–263.
130. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // Recherche Aerospaciale. 1994. № 1. P. 5–21.
131. Stone H.L. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations // SIAM J. Sci. Numer. Anal. 1968. № 3. P. 530–558.

132. Sussman M., Smereca S., Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow // J. Comput. Phys. 1994. № 114. P. 146–159.
133. Taneda S. Visual observation of the flow past a circular cylinder performing a rotary oscillation // J. Phys. Soc. Japan. 1978. Vol. 45, № 3. P. 1038–1043.
134. Tokumaru P.T., Dimotakis P.E. Rotary oscillation control of a cylinder wake // J. Fluid Mech. 1991. № 224. P. 77–90.
135. Tucker P.G., Pan Z. A Cartesian cut cell method for incompressible viscous flow // Appl. Math. Model. 2000. № 24. P. 591–606.
136. Udaykumar H.S., Mittal R., Rampunggoon P. et al. A sharp interface Cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries // J. Comput. Phys. 2001. № 174. P. 345–380.
137. Udaykumar H.S., Mittal R., Shyy W. Computation of solid–liquid phase fronts in the sharp interface limit on fixed grids // J. Comp. Phys. 1999. № 153. P. 535–574.
138. Van der Vorst H.A. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for solution of non-symmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1992. № 2. P. 631–644.
139. Van der Vorst H.A. High performance preconditioning // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1989. № 6. P. 1174–1185.
140. Van Kan J., Vuik C., Wesseling P. Fast pressure calculation for 2D and 3D time dependent incompressible flow // Num. Lin. Alg. Appl. 2000. № 7. P. 429–447.
141. Vestappen R.W.C.P., Veldman A.E.P. Symmetry-preserving discretization of turbulent flow // J. Comput. Phys. 2003. № 187. P. 343–368.
142. Wendl M.C., Agarwal R.K. Mass conservation and the accuracy of non-staggered grid incompressible flow schemes // Numerical Simulations of Incompressible Flows, World Scientific, Singapore. 2003. P. 277–287.

143. Wesseling P. An introduction to multigrid methods. Chichester: John Willey & Sons Ltd., 1991. 284 p.
144. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // AIAA Journal. 1988. V. 26, № 11. P. 1299–1310.
145. Williamson C.H.K. Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies // J. Fluid Mech. 1985. № 159. P. 1–18.
146. Yang J., Balaras E. An embedded-boundary formulation for large-eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries // J. Comput. Phys. 2006. № 215. P. 12–40.
147. Ye T., Mittal R., Udaykumar H. S. et al. An accurate Cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries // J. Comp. Phys. 1999. № 156. P. 209–240.
148. Zahm A.F. Flow and drag formulas for simple quadrics // NACA Tech. Rept. 1927. № 253. P. 1–23 p.
149. Zdravkovich M.M. Flow around circular cylinders. Vol. 1. Oxford: OUP, 1997. 694 p.
150. Zhang C.H., Liu Y., So R.M.C. Three dimensional wake interactions for cylinders array in a cross flow // 8th International Conference on Flow-Induced Vibration. 2004. Vol. 1. P. 313–318.