

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Научно-методический совет по теоретической механике  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Научно-исследовательский институт механики

**СБОРНИК**  
научно-методических статей  
**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

*Выпуск 29*

Под редакцией профессора *В.А. Самсонова*

*Издается с 1968 года*

Издательство Московского университета  
2015

УДК531  
ББК 22.21  
С 23

Редакционная коллегия:

*В.А. Самсонов (гл. редактор), В.В. Александров, В.В. Дубинин,  
В.Ф. Журавлев, А.В. Карапетян, В.В. Козлов, В.В. Лапшин,  
В.М. Морозов, Р.Г. Мухарлямов, Ю.Д. Селюцкий (отв. секретарь),  
Ю.С. Саратов, С.К. Слезкинский, К.Е. Якимова*

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, проф. *А.В. Карапетян*,  
доктор физ.-мат. наук, проф. *А.И. Кобрин*

*Издание осуществлено при поддержке НИИ механики МГУ*

**С23 Сборник научно-методических статей.** Теоретическая механика.  
Вып. 29 / Под редакцией профессора В.А. Самсонова. – М.: Изда-  
тельство Московского университета, 2015. – 127 с., ил.

ISBN 978-5-19-011085-2

Сборник содержит статьи по общим и методическим вопросам теоретической механики и материалы для повышения квалификации преподавателей, интересные механические задачи и информацию о различных мероприятиях, связанных с теоретической механикой. Кроме того, обсуждаются вопросы применения новых информационных технологий в преподавании.

Несколько статей посвящены юбилейным датам и тем утратам, которые теоретическая механика понесла в последнее время.

Сборник дает возможность преподавателям, аспирантам и студентам высших учебных заведений России сориентироваться в современных тенденциях развития теоретической механики, а также перенять опыт новейших методических разработок.

УДК 531  
ББК 22.211

ISBN 978-5-19-011085-2

© Научно-методический совет  
по теоретической механике  
Минобрнауки РФ, 2015

## ПОЛВЕКА РАБОТЫ

**МЕХАНИКА** (от греч. *mechanike* – наука о машинах), наука, которая формирует математические модели движения и взаимодействия материальных тел, т.е. описывает и исследует эти явления средствами математики. Методами Механики исследуют модели природных процессов: движение небесных тел, воздушные и морские течения, колебания земной коры, движение атомов, молекул и т.д. С другой стороны, Механика – научная основа всех областей техники: промышленности, строительства, транспорта (сухопутного, водного, воздушного, космического), сельскохозяйственной и военной техники. Конечно, значительная часть перспективных технологий основана на достижениях других наук – физики, химии, биологии. Однако многовековой опыт человечества показывает, что для практической реализации этих достижений необходимо привлечение механики. Пренебрежение этим опытом чревато техногенными катастрофами, масштаб и последствия которых растут вместе с усложнением производств (Большая Российская Энциклопедия).

Научно-Методический Совет Минвуза СССР по теоретической механике был создан в 1964 г. по инициативе академика А.Ю. Ишлинского и Приказом Минобразования РФ от 03.09.2001 № 3070 «О НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИХ СОВЕТАХ МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ ПО ОБЩИМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ» был включен в список научно-методических советов министерства.

Председателем НМС по теоретической механике был назначен профессор Ю.Г. Мартыненко. Совету было поручено совершенствование содержания фундаментального образования и форм организации учебного процесса по теоретической механике с учетом его непрерывности и преемственности; обеспечение методического единства содержания, форм и средств преподавания теоретической механики в системе многоуровневого образования; повышение качества фундаментального образования по теоретической механике в высших учебных заведениях России; подготовка рекомендаций по выбору приоритетных научно-методических исследований, направленных на улучшение преподавания теоретической механики в вузах России, использованию современных наукоемких технологий образования в учебном процессе.

В соответствии с этим приказом работа Совета велась по следующим направлениям:

1. Организация Всероссийских и региональных семинаров-совещаний заведующих кафедрами теоретической механики и веду-

ших лекторов (2003 – Пермь, 2010 – Новочеркасск, Улан-Удэ, Астрахань, Тула, Новочеркасск).

2. Подготовка и выпуск сборников научно-методических статей по теоретической механике №№ 24 (2003), 25 (2004), 26 (2006), 27 (2009), 28 (2012). Настоящий сборник – 29-й.

3. Работа с молодежью. Подготовка и проведение всероссийских и региональных студенческих олимпиад по теоретической механике, работа со школьниками (молодежные конференции-фестивали по робототехнике).

4. Обсуждение учебных программ, содержания отдельных курсов и форм компьютерного сопровождения дисциплины «теоретическая механика». Выработка рекомендаций по их модернизации и распространение информации о достижениях в этой области (популяризация).

5. Проведение регулярных (раз в месяц) заседаний президиума Совета с научным докладом и обсуждением текущих вопросов в Москве и выездных заседаний (С.-Петербург, Тула, Астрахань), оказание методической поддержки работе региональных семинаров.

6. Обсуждение содержания новых учебных изданий и выработка рекомендаций о целесообразности присвоения им соответствующих грифов (к сожалению, с некоторого времени эта функция передана в УМО).

7. Участие в работе по организации конференций с целью образования секций «Вопросы истории и преподавания механики»:

- 5-й и 6-й Съезды по теоретической и прикладной механике, восстановление секции на 8-м,
- 1-8-е Окуневские чтения в Балтийском государственном техническом университете «ВОЕНМЕХ» имени Д.Ф. Устинова,
- конференции в Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана,
- конференции Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского и др.

Президиум обратил внимание на недостатки действующих в настоящее время в высшей школе примерных образовательных программ и образовательных программ вузов по многим инженерным специальностям и направлениям, в которых вовсе отсутствует или находится в минимальном объеме курс теоретической механики, и принял решение обратиться к ректорам и руководителям УМО технических вузов с письмом, текст которого размещён ниже.

## ОБРАЩЕНИЕ

В течение 2013-2014-го учебного года Президиум НМС по теоретической механике проводил обсуждение современного состояния преподавания курса «Теоретическая механика» в Высшей технической школе РФ. Стало ясно, что фактически отсутствует обеспечение студентов достаточно квалифицированной подготовкой в области механики. Действительно, сокращенный до 2-4 з.е. курс Теоретической механики не может дать студентам тех знаний по дисциплине, которые удовлетворяли бы профессиональным компетенциям ФГОС. Как следствие, снижается качество фундаментального образования, выпускаются не-квалифицированные специалисты. Многие ВУЗы даже не в состоянии сформировать команды для участия в студенческих олимпиадах по стандартному набору разделов теоретической механики.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА – одна из фундаментных естественнонаучных дисциплин физико-математического цикла, на учебный материал которой опирается подавляющее число общепрофессиональных и специальных инженерных курсов, определяющих научно-технический прогресс и обороноспособность страны.

Президиум считает, что действующие в настоящее время в высшей школе примерные образовательные программы и образовательные программы вузов по многим инженерным специальностям и направлениям, в которых вовсе отсутствует или находится в минимальном объеме курс теоретической механики, угрожают **национальной безопасности страны**, конкурентоспособности российского образования и ставят под угрозу **перспективу технологического развития РОССИИ**.

Научно-Методический Совет по теоретической механике, опираясь на поддержку Координационного Совета УМО и НМС Высшей школы и Российского Комитета по теоретической и прикладной механике (члена международной организации IUTAM), **обращается к руководителям УМО и ректорам технических университетов России со следующими рекомендациями.**

- В рамках своих ВУЗов сохранить (восстановить) кафедры Теоретической механики, а если это невозможно, то сосредоточить преподавание дисциплины «Теоретическая механика» на одной из кафедр, преподающих дисциплины фундаментального цикла, доверяя чтение курса только специалистам по теоретической механике.

- Установить для бакалавров минимальную трудоемкость курса не менее 8 з.е. по группам естественнонаучных и инженерных направлений:
  - 01.00.00 математика и механика;
  - 05.00.00 науки о Земле;
  - 08.00.00 техника и технологии строительства;
  - 12.00.00 фотоника, приборостроение, оптические и биотехнические системы и технологии;
  - 15.00.00 машиностроение;
  - 16.00.00 физико-технические науки и технологии;
  - 17.00.00 оружие и системы вооружения;
  - 23.00.00 техника и технологии наземного транспорта;
  - 24.00.00 авиационная и ракетно-космическая техника;
  - 25.00.00 аэронавигация и эксплуатация авиационной и ракетно-космической техники;
  - 26.00.00 техника и технологии кораблестроения и водного транспорта;
  - 27.00.00 управление в технических системах;
  - 29.00.00 технологии легкой промышленности;
 и не менее 4 з.е. по другим направлениям.
- Организовать чтение дополнительных глав теоретической механики для магистров, установив минимальную трудоемкость не менее 6 з.е.
- Ввести самостоятельную курсовую работу под руководством преподавателя с исследовательской частью, содержащую основные разделы курса теоретической механики и выполняемую с использованием компьютерных технологий.

***Надеемся на взаимопонимание в достижении нашей общей цели – успешного развития Российской Высшей школы.***

Принято на заседании  
Президиума НМС по Теоретической механике  
27.11.2014.

УДК 531.36

*В.Ф. Журавлев*

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН

## ИНВАРИАНТНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА

Метод нормальной формы представляет собой метод приближенного интегрирования и анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных.

Если речь идет об обыкновенных дифференциальных уравнениях общего вида, то метод известен как метод нормальной формы Пуанкаре. Если система гамильтонова, то в этом частном случае метод Пуанкаре называется методом Биркгофа. В последнем случае предметом интереса является не сама система, а ее гамильтониан.

Для того чтобы было ясно чем инвариантная нормальная форма гамильтониана отличается от формы Биркгофа, напомним определение последней.

В учебнике В.И. Арнольда [1] исходный гамильтониан представлен в виде суммы двух частей

$$H(t, q, p) = H_0(q, p) + H_*(t, q, p),$$

первая называется порождающей, или невозмущенной частью гамильтониана, вторая – возмущением. Если порождающая часть представляет собой гамильтониан консервативной линейной колебательной механической системы, то линейной канонической заменой переменных он может быть приведен к следующей нормальной форме

$$H_0(q, p) = \frac{1}{2}[\omega_1(p_1^2 + q_1^2) + \dots + \omega_n(p_n^2 + q_n^2)]$$

Здесь присутствуют только квадраты канонических переменных с коэффициентами, являющимися собственными частотами линейной системы. Приведение к указанному виду  $H_0(q, p)$  составляет первый обязательный этап построения нормальной формы всего гамильтониана. Суть метода нормальной формы состоит в том, чтобы выяснить, к какому наипростейшему виду можно привести возмущение не особыми преобразованиями, не меняющими уже нормализованной линейной части.

Такой наипростейший вид существует. Он и называется нормальной формой. В [1] он определяется так. Если система автономная ( $\partial H_*/\partial t \equiv 0$ ) и если нет резонанса, т.е. частоты линейной части не удовлетворяют никаким соотношениям типа  $\omega_1 k_1 + \dots + \omega_n k_n \neq 0$  с целочисленными коэффициентами, то возмущение может быть приведено к виду, в котором оно зависит только от тех же биномов

$$H_* = H_*(p_1^2 + q_1^2, \dots, p_n^2 + q_n^2)$$

Если гамильтониан записывать в канонических полярных координатах  $p_i = \sqrt{2I_i} \cos \varphi_i, q_i = \sqrt{2I_i} \sin \varphi_i$ , то в нормальной форме он окажется зависящим от переменных действие

$$H_* = H_*(I_1, \dots, I_n)$$

Если случай резонансный, т.е. найдутся такие целочисленные коэффициенты  $k_1, \dots, k_n$ , не все равные нулю ( $k_1^2 + \dots + k_n^2 \neq 0$ ), что выполняется  $k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0$ , то в нормальной форме возмущение зависит не только от переменных действие, но и от линейных комбинаций фаз с теми же коэффициентами, что и в резонансном условии

$$H_* = H_*(I_1, \dots, I_n, k_1 \varphi_1 + \dots + k_n \varphi_n)$$

Иначе выглядит определение нормальной формы Биркгофа у А.Д. Брюно [2]. Он записывает порождающий гамильтониан, как и Биркгоф с использованием комплексных переменных следующего вида:

$$x = p + iq, \quad y = p - iq,$$

в которых невозмущенная часть запишется так

$$H_0 = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n$$

Определение нормальной формы у Брюно:

*Если  $\partial H/\partial t \equiv 0$ , то нормальной формой возмущения будет выражение*

$$H_* = \sum_{m, n, > 0} h_{mn} x^m y^n$$

где  $h_{mn} = 0 \quad \forall m, n: (m - n, \lambda) \neq 0$

Определение Брюно компактнее и лучше отражает смысл нормальной формы, который как раз в том и состоит, что эта форма не содержит никаких слагаемых кроме резонансных. Иными словами нет никакого смысла разделять резонансы на так называемые «тождественные» и «нетождественные».



И Арнольд, и Брюно достаточно времени уделяют нормальной форме гамильтонианов, периодически зависящих от времени. Однако делать это не обязательно, поскольку после определения нормальной формы для автономных гамильтонианов достаточно выполнить редукцию неавтономного случая к автономному.

Сама процедура приведения возмущенной части гамильтониана к нормальной форме крайне проста. Исходный гамильтониан и определяющая каноническую замену искомая производящая функция раскладываются в ряды Тейлора по фазовым переменным в точке покоя. В преобразованном гамильтониане неизвестные коэффициенты производящей функции ищутся из условия обнуления максимального числа членов. Необнуляемые члены и есть резонансные.

Несколько слов о том, для чего нужна нормальная форма. Во-первых, система в нормальной форме, сохраняя все свои качественные особенности, имеет предельно простой вид и, следовательно, наиболее легко поддается анализу. Во-вторых, в нормальной форме система обладает уникальным геометрическим свойством: векторные поля возмущенной и невозмущенной частей системы коммутируют между собой, или, что то же самое, скобка Пуассона от этих частей гамильтониана равна нулю. Последнее свойство позволяет осуществить разделение движений, а также, как следствие, выполнить понижение порядка.

Из сказанного следует, что из двух основных свойств нормальной формы – вид резонансных членов и равенство нулю коммутатора, приведенные выше определения базируются на первом свойстве, то есть в основу определения положен внешний её признак, а не её геометрическая суть.

Между тем, как это будет ясно дальше, определение, основанное на этой самой сути, является гораздо более продуктивным.

Вот это определение [3].

### ***Инвариантное определение нормальной формы***

*$H(t, q, p) = H_0(t, q, p) + H_*(t, q, p)$  имеет нормальную форму тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial H_*}{\partial t} + \{H_0, H_*\} = 0$$

Здесь порождающая система может быть и неавтономной и нелинейной. Требуется только одно: должно быть известно общее решение этой системы и оно должно быть условно периодическим.

Прокомментируем квантор «тогда и только тогда». Если гамильтониан удовлетворяет любому из приведенных определений нормальной

формы (по Арнольду, по Брюно, или по предлагаемому новому определению), то коммутатор равен нулю. В обратную сторону. Если коммутатор равен нулю, то система может не иметь вида, описываемого Арнольдом, или Брюно. Поэтому определение инвариантной нормальной формы есть определение более широкого класса систем, оно по существу представляет собой новое понятие.

Слово «инвариантна» означает, что определяющее это понятие свойство не зависит от выбранных канонических переменных. Это могут быть и те, в которых порождающая система уже имеет нормальную форму и любые другие без каких-либо ограничений.

Понятие «инвариантная нормальная форма» является более гибким, чем старое представление о нормальной форме. Не ограничивая в выборе исходных канонических переменных, оно дает новые возможности. Однако, возникает проблема, как строить такую форму. Стандартный метод приведения к обычной нормальной форме состоит в том, что каноническими преобразованиями уничтожаются нерезонансные члены. В новом определении вид нерезонансных членов неизвестен и поэтому, никакие из применяемых ранее методов здесь принципиально неприменимы. Должен быть разработан метод, основанный на совершенно других идеях.

В дальнейшем не будут обсуждаться ни аналитические свойства нормальной формы, ни вопросы сходимости, ни вопросы точности. Все эти вопросы не имеют здесь никакой специфики и решаются так же, как и обычно.

Известно, что ряды, в которых может быть представлена нормальная форма, как правило, расходятся. Однако сходятся они, или нет — для практики этот вопрос интереса не представляет. Для такого интереса просто нет объекта. Нет того бесконечного ряда, который мог бы сходиться, если бы мы его построили. Поэтому, говоря в дальнейшем о нормальной форме, мы будем иметь в виду лишь некоторое приближение к ней.

Известно, что нормальная форма может быть разрывной функцией на всюду плотном множестве точек. Реально же разрывов не много. И они могут служить для определения существенных резонансов, т.е. таких, которые влияют на поведение системы и на точность приближенных решений. Например, в уравнении  $\ddot{x} + x = \sin 2t$  имеется формальный резонанс, однако, этот резонанс несущественный.

В отличие от вопроса сходимости, вопрос о точности это вопрос принципиальной важности. Оценка точности метода нормальной формы может быть сведена к оценке точности метода Крылова-

Боголюбова, а здесь, начиная с широко известной теоремы Боголюбова, известно огромное число результатов, вполне достаточное для практических потребностей.

Дальше речь будет идти исключительно о процедуре построения инвариантной нормальной формы.

Рассмотрим группу Ли канонических преобразований  $(u, v) \rightarrow (q, p)$ ,  $\tau$  — параметр группы. Группа формируется при помощи производящего гамильтониана  $G(u, v)$  посредством рядов Ли.

Таким же рядом представлена связь нового гамильтониана со старым. Для того, чтобы формализовать разделение порядков введем преобразование подобия с параметром  $\varepsilon$ . После чего назовем асимптотикой  $k$ -го порядка любую функцию, отличающуюся от данной членами порядка  $k+1$  и выше. Обозначим асимптотики заданного гамильтониана, производящего гамильтониана и искомого гамильтониана  $H_k = H + O(\varepsilon^{k+1})$ ;  $G_k = G + O(\varepsilon^{k+1})$ ;  $\bar{H}_k = \bar{H} + O(\varepsilon^{k+1})$

Далее отождествляем групповые параметры  $\tau = \varepsilon$ .

Пользуясь свойствами кольца асимптотик, заменим бесконечный ряд Ли для преобразованного гамильтониана конечным выражением для его асимптотики

$$\bar{H}_k = \tau \{H_0, G_{k-1}\} + L_k, \quad L_1 = H_1$$

$$L_k = H_k + \tau \{H_{k-1}, -H_0, G_{k-2}\} + \sum_{i=2}^k \frac{\tau^i}{i!} \underbrace{\{ \dots \{ H_{k-i}, G_{k-i} \}, G_{k-i} \}, \dots}_{i-\text{раз}} \quad (k > 1)$$

Из приведенного соотношения необходимо найти две функции: одна это преобразованный гамильтониан, который мы хотим иметь в нормальной форме  $-H_k$ , другая функция это производящий гамильтониан, определяющий потребное для этого каноническое преобразование  $G_{k-1}$ .

Для нахождения этих двух функций имеем два линейных дифференциальных уравнения первого порядка в частных производных (гомологическая система):

**Гомологическая система**

$$\begin{cases} \bar{H}_k(u, v) = \tau \{H_0, G_{k-1}\} + L_k \\ \{H_0, \bar{H}_k\} = 0 \end{cases}$$

Решение этой системы выписывается в явном виде. Для этого общее решение

$$q = q(u, v)$$

$$p = p(u, v)$$

порождающей системы

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H_0}{\partial p}, & q(0) = u \\ \dot{p} = -\frac{\partial H_0}{\partial q}, & p(0) = v \end{cases},$$

которое, как обычно, предполагается известным, подставляется в гомологическую систему. Тогда нижнее уравнение обращается в тождество, а в верхнем уравнении скобка Пуассона равна полной производной вдоль указанного решения от функции  $G_{k-1}$ :

$$\{H_0, G_{k-1}\} = \frac{dG_{k-1}}{dt}$$

Поэтому, интегрируя от нуля до  $t$  верхнее уравнение, получаем

$$\int_0^t L_k[q(t, u, v), p(t, u, v)] dt = t\bar{H}_k(u, v) + \tau[G_{k-1}(0) - G_{k-1}(t)]$$

Тем самым установлено, что интегрируя вдоль порождающего решения известную функцию  $L_k$ , получаем искомый гамильтониан в нормальной форме как коэффициент при  $t$ , а производящий гамильтониан как не зависящий от времени коэффициент при  $\tau$ .

Здесь надо пояснить, почему  $L_k$  является известной функцией канонических переменных. Перед нами явная одномерная рекуррентная схема, по которой все асимптотики вычисляются последовательно, начиная с  $k = 1$ . Но  $L_1$  просто совпадает с исходным гамильтонианом, и поэтому это известная функция. Тем самым для построения первого приближения нормальной формы достаточно проинтегрировать заданный гамильтониан вдоль порождающего решения. Коэффициент при  $t$  будет нормальной формой в первом приближении, а коэффициент при  $\tau - G_0(0)$  определит первое приближение необходимого канонического преобразования.

Для построения второго приближения заданный гамильтониан необходимо подправить двумя слагаемыми. Эти слагаемые зависят только от функции  $G_0$ , но она уже известно из первого приближения. И так далее.

Вся рекуррентная схема исчерпывается двумя формулами: формула для  $L_k$ , в которой никаких других операций кроме сложения и дифференцирования нет и интегрирование вдоль порождающего решения.

Изложенная процедура формально выполнена для автономного случая. Неавтономный случай –  $H(t, q, p)$  – рассматривается в точности по изложенной схеме после редукции его к автономному. Делается это так. Время объявляется новой обобщенной координатой:  $t \equiv q_0$ , а к гамильтониану прибавляется сопряженный новой координате импульс:  $H(q_0, p_0, q, p) = p_0 + H(q_0, q, p)$ .

Нормальная форма неавтономного гамильтониана оказывается в силу этой процедуры также неавтономной. Однако преимущество нормальной формы перед общим случаем вытекает из следующей теоремы:

**Теорема** (о редукции неавтономного случая к автономному).

*Если условие нормальной формы достигнуто, т.е.  $\{p_0 + H_0, H_*\} = 0$  то общее решение системы с гамильтонианом  $H_0(t, q, p) + H_*(t, q, p)$  есть композиция общих решений двух систем – системы с гамильтонианом  $H_0(t, q, p)$ , а такое решение предполагается известным, и общего решения системы с гамильтонианом  $H_*(0, q, p)$ , в котором время положено равным нулю.*

Тем самым для нормальной формы неавтономный случай сводится к автономному без повышения порядка системы.

**Пример 1.** Гамильтониан в виде рациональной функции. Продемонстрируем, что в предлагаемом подходе нет нужды ограничивать гамильтонианы лишь полиномиальными представлениями для приведения их к нормальной форме, как это обязательно имеет место в ранее известных алгоритмах. Пусть требуется построить инвариантную нормальную форму системы со следующим гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{1 + q^2}$$

Общее решение порождающей системы, в которой  $H_0 = (p^2 + q^2)/2$ , имеет вид

$$q = u \cos t + v \sin t, \quad p = -u \sin t + v \cos t.$$

В соответствии с изложенной процедурой для построения первого приближения инвариантной нормальной формы это решение надо

вставить в исходный гамильтониан и проинтегрировать его по времени:

$$\int_0^t H dt = t \left[ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \right] -$$

$$G = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{v}{u\sqrt{1+u^2+v^2}} - \operatorname{arctg} \frac{v}{u} \right)$$

В соответствии с теорией коэффициент при  $t$  есть первое приближение искомой нормальной формы

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

а не зависящий от времени коэффициент при  $\tau = \varepsilon$  есть гамильтониан генерирующего канонического преобразования:

$$G = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{v}{u\sqrt{1+u^2+v^2}} - \operatorname{arctg} \frac{v}{u} \right).$$

**Пример 2.** Волчек Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса. В этом примере демонстрируются два других отличия от общеизвестных процедур нормализации. Во-первых, нет нужды приводить к простейшему виду линейную часть. Во-вторых, неавтономный случай будет изучаться посредством сведения его к автономному.

Рассматривая малые отклонения от вертикали, запишем Лагранжиан системы. Предварительно заметим, что выбором масштаба измерения времени можно добиться, чтобы экваториальный момент инерции волчка и ускорение свободного падения были равны единице:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (h + \Delta)(x\dot{y} - \dot{x}y) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(1 + 2k \cos 2t)$$

здесь  $x, y$  – углы Крылова-Булгакова,  $h$  – кинетический момент,  $\Delta$  – расстройка частот, предполагаемая малой в случае резонанса. Первые два члена в  $L$  представляют собой кинетическую энергию волчка, второй член гироскопическую связность, третий член – поле тяжести и ускорение вибрации.

Введем два малых параметр посредством замены времени

$$t \rightarrow \frac{t}{h}: \quad \delta = \frac{\Delta}{h}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2h^2}$$

Считая  $h$  большим, а  $\delta$  порядка  $1/h$ , имеем два малых параметра одинакового порядка  $-\delta$  и  $\varepsilon$ . Выполняя далее преобразование Лежандра, находим порождающий гамильтониан и возмущение в виде:

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) - xp_y + yp_x$$

$$H_* = -\delta(xp_y - yp_x) + (x^2 + y^2)[2\delta - \varepsilon(1 + 2k \cos 2t)]$$

Подставляя общее решение системы с гамильтонианом  $H_0$  в  $H_*$  и осредняя по явно входящему времени, получаем нормализованный гамильтониан

$$\bar{H} = H_0 + \delta(yp_x - xp_y) + \frac{\delta - 2\varepsilon}{4}(x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2) +$$

$$+ \frac{\varepsilon k}{2}(x^2 + y^2 - p_x^2 - p_y^2)\cos 2t - \varepsilon k(xp_x + yp_y)\sin 2t$$

Пользуясь теоремой о редукции неавтономного случая к автономному, находим, что для устойчивости системы достаточно устойчивости нормализованной возмущенной части при  $t = 0$ :

$$(\bar{H} - H_0)|_{t=0} = \delta(yp_x - xp_y) +$$

$$+ \frac{\delta - 2\varepsilon + 2\varepsilon k}{4}(x^2 + y^2) + \frac{\delta - 2\varepsilon - 2\varepsilon k}{4}(p_x^2 + p_y^2)$$

Обозначим первый член в этом выражении через  $H_1$ , т.е.  $\delta(yp_x - xp_y) = H_1$ , а оставшуюся часть, имеющую канонический вид, через  $H_2$ . Нетрудно проверить, что  $\{H_1, H_2\} = 0$ . Поскольку система с гамильтонианом  $H_1$  устойчива, то в силу указанного свойства для устойчивости системы с гамильтонианом  $H_1 + H_2$  достаточно устойчивости системы с гамильтонианом  $H_2$ . А для этого достаточно, чтобы коэффициенты при  $(x^2 + y^2)$  и  $(p_x^2 + p_y^2)$  имели одинаковый знак, т.е.

$$\left(\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)^2 > \varepsilon^2 k^2.$$

Что и является условием устойчивости системы  $\bar{H}$ .

### **Комментарий.**

Если порождающая система такая же, как и в известных определениях, то в результате применения изложенного метода такой же получится и нормальная форма, как это было бы с применением извест-

ной техники. Однако, путь, приводящий к той же цели совершенно иной. Это легко продемонстрировать на методических примерах, в которых предлагаемый метод уже во втором приближении дает точный результат, то есть полностью весь асимптотический ряд, в то время как для построения этого ряда известными алгоритмами требуется и бесконечное число приближений.

Если порождающая система имеет вид  $H_0 = p_1$ , то продемонстрированный алгоритм приводит к осреднению по методу Крылова-Боголюбова для одночастотных систем. Если в качестве порождающей системы взята проинтегрированную по Лиувиллю систему, то изложенный алгоритм приводит к осреднению существенно нелинейных систем в многочастотном случае.

### Литература

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990.
3. *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008.



**ИЗМЕНЕНИЕ ДОЛГОТЫ ПЕРИГЕЛИЯ ОРБИТЫ МЕРКУРИЯ**

В работе изучается проблема эволюции перигелия Меркурия в рамках классической механики. В задаче о возмущенном движении планеты учитывается влияние притяжения других планет и влияние сжатия Солнца. Рассматривается задача  $n$  тел ( $n$  материальных точек) в барицентрической системе координат. Уравнения движения выписываются в гамильтоновой форме в канонических переменных Делоне и содержат малый параметр – отношение массы Юпитера к массе Солнца. Методом усреднения получено уравнение, описывающее эволюцию перигелия орбиты Меркурия.

**1. Введение.** В простейшей модели, описывающей взаимное движение планеты и Солнца, рассматривается задача о движении материальной точки (планеты) в поле притяжения неподвижной точки (Солнца). В этом случае планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Французский механик и математик У. Лаверье нашел величину скорости изменения долготы перигелия орбиты Меркурия – 529 угловых секунд за сто лет – вследствие возмущений от внешних планет. Согласно эксперименту, эта величина оказалась равной 572 дуговым секундам за сто лет [1]. Чтобы объяснить несовпадение расчетов и эксперимента, У. Лаверье предположил наличие еще одной планеты между Солнцем и Меркурием, назвав ее Вулканом. Однако поиски этой планеты оказались безуспешными.

В дальнейшем обсуждались различные варианты объяснения полученного рассогласования между теорией и экспериментом. С. Ньюкомб предложил модифицировать закон всемирного тяготения, полагая силу

$$F = -f Mm R^{-2-\delta}, \quad \delta = 161 \cdot 10^{-9},$$

где  $f = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$  – универсальная гравитационная постоянная,  $M$ ,  $m$  – массы планет, представленных материальными точками,  $R$  – расстояние между ними. Еще в одном варианте сила взаимодействия планет принималась равной (Абрагам)

$$F = \frac{A}{R^2} + \frac{B}{R^3}, \quad \frac{B}{A} = \frac{fM}{2c^2},$$

где  $c$  – скорость света.

Эволюция перигелия Меркурия обуславливается в рамках модели классической механики возмущениями центрального гравитационного поля Солнца гравитационными полями всех планет, не входящих в рассматриваемую пару Солнце – Меркурий, а также сжатием Солнца за счет центробежных сил при его вращении вокруг своего центра, которые вызывают сжатие Солнца по оси вращения. Тензор инерции Солнца перестает быть шаровым, что в свою очередь возмущает гравитационное поле. Если рассмотреть материальную точку (планету) и твердое тело (Солнце), то силовая функция в спутниковом приближении примет вид [2,3]:

$$U = \frac{fmM}{R} + \frac{fm}{2R^3} [A + B + C - 3(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)] . \quad (1.1)$$

Здесь  $\gamma_i$ ,  $i=1,2,3$  – направляющие косинусы вектора, соединяющего центры масс планет в системе координат, оси которой совпадают с главными осями инерции тел,  $A, B, C$  – главные моменты инерции тела. При выполнении условий  $\gamma_3 = 0$  и  $A = B \neq C$  силовая функция принимает вид

$$U = \frac{fmM}{R} + \frac{fm}{R^3} (C - A) ,$$

и поле становится центральным.

Отметим идею немецкого математика П. Гербера (1898), который предложил считать скорость распространения гравитационного взаимодействия конечной и получил угол поворота орбиты Меркурия за один оборот [4]

$$\Delta\phi = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)} . \quad (1.2)$$

Здесь  $a, e$  – большая полуось и эксцентриситет орбиты,  $T$  – период орбитального движения.

Позже А. Эйнштейн получил формулу (1.2), используя предложенную им общую теорию относительности (ОТО). Поправка в угловую скорость прецессии перигелия Меркурия на основе формулы (1.2) соответствует 43 дуговым секундам за сто лет, что рассматривается сторонниками ОТО в качестве доказательства ее справедливости [5].

Ниже обсуждается проблема эволюции перигелия Меркурия в рамках классической механики. В задаче о возмущенном движении планеты учитывается влияние притяжения других планет и влияние сжатия Солнца. Кроме того, задача о движении планет солнечной системы рассматривается в барицентрической системе координат.

**2.Эволюция перигелия Меркурия в барицентрической системе координат.** Рассмотрим модель Солнечной системы, состоящую из  $(n+1)$ -ой материальной точки  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Введем инерциальную систему координат  $CXYZ$  с началом в центре масс системы. Пусть  $\mathbf{R}_0$  – радиус-вектор точки  $P_0$  (Солнца), а  $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$  – радиус-векторы планет  $P_1, \dots, P_n$ , координаты которых задаются в системе отсчета  $CXYZ$ .

Обозначим через  $m_s$  массу Солнца, а массы планет через  $M_k$  ( $k=1, \dots, n$ ). Введем малый параметр  $\varepsilon$ , равный отношению самой массивной планеты Солнечной системы (Юпитера) к массе Солнца:  $\varepsilon = M_s m_s^{-1}$ . Тогда массы планет можно представить в виде:  $M_k = \varepsilon m_k$ ,  $k=1, \dots, n$ , где  $m_k = M_k M_s^{-1} m_s$ ,  $m_k \leq m_s$ .

Так как начало инерциальной системы координат совпадает с барицентром, то

$$m_s \mathbf{R}_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{R}_k = 0. \quad (2.1)$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} m_s \dot{\mathbf{R}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varepsilon m_k \dot{\mathbf{R}}_k^2. \quad (2.2)$$

С учетом (2.1) и (2.2) получим

$$T = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{\mathbf{R}}_k^2 + \frac{\varepsilon^2}{2m_s} \left( \sum_{k=1}^n m_k \dot{\mathbf{R}}_k \right)^2. \quad (2.3)$$

Потенциальная энергия гравитационных сил имеет вид:

$$\Pi = - \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon f_0 m_k}{\left[ (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_k)^2 \right]^{1/2}} - \sum_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n \frac{\varepsilon^2 f m_i m_j}{R_{ij}}, \quad (2.4)$$

где  $f$  – универсальная гравитационная постоянная,  $f_0 = f m_s$ ,  $R_{ij} = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|$ .

Преобразуем выражение (2.4) с учетом равенства (2.1), сохраняя члены не выше второго порядка по  $\varepsilon$ :

$$\Pi = -\varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{f_0 m_k}{R_k} - \varepsilon^2 \sum_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n \frac{f m_i m_j}{R_{ij}} + \varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^n \frac{f m_i m_k (\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_k)}{R_k^3}, \quad R_k = |\mathbf{R}_k| \quad (2.5)$$

Механическая система с кинетической и потенциальной энергиями (2.3) и (2.5) имеет  $3n$  степеней свободы. В качестве обобщенных ко-

ординат Лагранжа можно рассматривать, например, декартовы координаты векторов  $\mathbf{R}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Функция Лагранжа рассматриваемой механической системы определяется равенством  $L = T - \Pi$  и имеет вид  $L = \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2$ , где

$$L_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{\mathbf{R}}_k^2 + \sum_{k=1}^n \frac{f_0 m_k}{R_k}, \quad (2.6)$$

$$L_2 = \frac{1}{2m_s} \left( \sum_{k=1}^n m_k \dot{\mathbf{R}}_k \right)^2 + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n \frac{f m_i m_j}{R_{ij}} - \sum_{i,k=1}^n \frac{f m_i m_k (\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_k)}{R_k^3}. \quad (2.7)$$

Функция  $L_1$  и соответствующие ей уравнения описывают кеплеровские движения по эллиптическим траекториям каждой планеты в центральном поле сил. Функция  $L_2$  определяет возмущения кеплеровских движений.

Рассмотрим задачу о возмущенном движении планет с функцией Лагранжа

$$\tilde{L} = L_1 + \varepsilon L_2. \quad (2.8)$$

Для описания движения планет будем использовать канонические переменные Делоне [6]. Для этого на первом шаге перейдем от обобщенных координат и скоростей  $(\mathbf{R}_k, \dot{\mathbf{R}}_k)$  к обобщенным координатам и импульсам  $(\mathbf{R}_k, \mathbf{p}_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ :

$$\mathbf{p}_k = \nabla_{\dot{\mathbf{R}}_k} \tilde{L} = m_k \dot{\mathbf{R}}_k + \frac{\varepsilon m_k}{m_s} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{R}}_i, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Пусть  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ ,  $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n)$ . Тогда равенства (2.9) можно представить в виде:

$$\mathbf{p} = B_1 (E + \varepsilon B_2) \dot{\mathbf{R}}, \quad (2.10)$$

$$B_1 = \text{diag} \{m_1, \dots, m_n\}, \quad B_2 = \left( \frac{\delta_{ij} m_j}{m_s} \right)_{i,j=1}^n, \quad E = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Из равенства (2.10), сохраняя члены первого порядка по  $\varepsilon$ , получим:

$$\dot{\mathbf{R}} = [B_1 (E + \varepsilon B_2)]^{-1} \mathbf{p} \approx (E - \varepsilon B_2) B_1^{-1} \mathbf{p} = B_1^{-1} \mathbf{p} - \varepsilon B_2 B_1^{-1} \mathbf{p},$$

$$B_1^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \right\}, \quad B_2 B_1^{-1} = \left( \frac{\delta_{ii} \delta_{jj}}{m_s} \right)_{i,j=1}^n.$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{m_k} \mathbf{p}_k - \frac{\varepsilon}{m_s} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

Функция Гамильтона определяется равенством [7]:

$$H = \sum_{k=1}^n (\mathbf{p}_k, \dot{\mathbf{R}}_k) - \tilde{L} \Big|_{\dot{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{p}}.$$

С учетом соотношений (2.6)–(2.8), (2.11) получим

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad (2.12)$$

$$H_0 = \sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{2m_k} - \sum_{k=1}^n \frac{f_0 m_k}{R_k},$$

$$H_1 = -\frac{1}{2m_s} \sum_{k,i=1}^n (\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_i) - \sum_{i,j=1, i < j}^n \frac{f m_i m_j}{R_{ij}} + \sum_{k,i=1}^n \frac{f m_i m_k (\mathbf{R}_k, \mathbf{R}_i)}{R_k^3} \quad (2.13)$$

На следующем шаге в качестве обобщенных координат будем использовать сферические координаты  $R_k, \phi_k, \psi_k$  векторов  $\mathbf{R}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ):

$$\mathbf{R}_k = R_k \boldsymbol{\xi}_k, \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\xi}_k = (\cos \phi_k \sin \psi_k, \sin \phi_k \sin \psi_k, \cos \psi_k).$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{R}}_k = \dot{R}_k \boldsymbol{\xi}_k + R_k \dot{\phi}_k \boldsymbol{\eta}_k + R_k \dot{\psi}_k \boldsymbol{\zeta}_k, \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\eta}_k = (-\sin \phi_k \sin \psi_k, \cos \phi_k \sin \psi_k, 0), \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\zeta}_k = (\cos \phi_k \cos \psi_k, \sin \phi_k \cos \psi_k, -\sin \psi_k) \quad (2.17)$$

Выразим векторные импульсы  $\mathbf{p}_k$  через обобщенные импульсы  $p_{R_k}, p_{\phi_k}, p_{\psi_k}$ , соответствующие обобщенным координатам  $R_k, \phi_k, \psi_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ):

$$p_{R_k} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{R}_k} = \left( \nabla_{\mathbf{R}_k} \tilde{L}, \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}_k}{\partial \dot{R}_k} \right) = (\mathbf{p}_k, \boldsymbol{\xi}_k)$$

$$p_{\phi_k} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\phi}_k} = \left( \nabla_{\mathbf{R}_k} \tilde{L}, \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}_k}{\partial \dot{\phi}_k} \right) = (\mathbf{p}_k, R_k \boldsymbol{\eta}_k), \quad (2.18).$$

$$p_{\psi_k} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\psi}_k} = \left( \nabla_{\mathbf{R}_k} \tilde{L}, \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}_k}{\partial \dot{\psi}_k} \right) = (\mathbf{p}_k, R_k \boldsymbol{\zeta}_k)$$

В результате из (2.14)–(2.18) получим

$$\mathbf{p}_k = p_{R_k} \xi_k + \frac{p_{\phi_k}}{R_k \sin^2 \psi_k} \eta_k + \frac{p_{\psi_k}}{R_k} \zeta_k \quad (2.19)$$

От обобщенных импульсов и координат  $p_{R_k}$ ,  $p_{\phi_k}$ ,  $p_{\psi_k}$ ,  $R_k$ ,  $\phi_k$ ,  $\psi_k$  перейдем к переменным Делоне  $L_k$ ,  $G_k$ ,  $H_k$ ,  $l_k$ ,  $g_k$ ,  $h_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) с помощью производящей функции канонического преобразования [6, 7]:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=1}^n W_k, \\ W_k &= W_k [R_k, \phi_k, \psi_k, L_k, G_k, H_k] = H_k \phi_k + \\ &+ \int \sqrt{G_k^2 - \frac{H_k^2}{\sin^2 \psi_k}} d\psi_k + \int \sqrt{\frac{2f_0 m_k^2}{R_k} - \frac{G_k^2}{R_k^2} - \frac{f_0^2 m_k^4}{L_k^2}} dR_k \end{aligned} \quad (2.20)$$

Система уравнений, определяющая переход к переменным Делоне, представляется в виде:

$$\begin{aligned} p_{R_k} &= \frac{\partial W}{\partial R_k}, p_{\phi_k} = \frac{\partial W}{\partial \phi_k}, p_{\psi_k} = \frac{\partial W}{\partial \psi_k}, \\ l_k &= \frac{\partial W}{\partial L_k}, g_k = \frac{\partial W}{\partial G_k}, h_k = \frac{\partial W}{\partial H_k} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Модуль вектора  $\mathbf{R}_k$  выражается через переменные Делоне следующим образом:

$$R_k = \frac{G_k^2}{f_0 m_k^2 (1 + e_k \cos \vartheta_k)}, \quad (2.22)$$

где  $e_k = \sqrt{1 - G_k^2 / L_k^2}$  – эксцентриситет орбиты  $k$ -ой планеты,  $\vartheta_k = \vartheta_k(l_k, L_k, G_k)$  – истинная аномалия, зависимость которой от переменных  $l_k, L_k, G_k$  осуществляется посредством соотношений

$$\cos w_k = \frac{e_k + \cos \vartheta_k}{1 + e_k \cos \vartheta_k}, \quad l_k = w_k - e \sin w_k.$$

Единичные векторы  $\xi_k$  в инерциальной системе координат в переменных Делоне имеют вид:

$$\xi_k = (\xi_{kx}, \xi_{ky}, \xi_{kz}), \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \xi_{kx} &= \cos(g_k + \vartheta_k) \cos h_k - \sin(g_k + \vartheta_k) \cos i_k \sin h_k, \\ \xi_{ky} &= \cos(g_k + \vartheta_k) \sin h_k + \sin(g_k + \vartheta_k) \cos i_k \cos h_k, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\xi_{kz} = \sin(g_k + \vartheta_k) \sin i_k ,$$

где  $i_k$  – наклонение орбиты  $k$ -ой планеты,  $\cos i_k = H_k / G_k$ ,  $g_k$  – долгота перигелия от восходящего узла,  $h_k$  – долгота восходящего узла.

Из соотношений (2.14), (2.16), (2.23) получим выражения для координат векторов  $\boldsymbol{\eta}_k$  в переменных Делоне:

$$\boldsymbol{\eta}_k = (-\xi_{ky}, \xi_{kx}, 0). \quad (2.25)$$

Компоненты векторов  $\boldsymbol{\zeta}_k$  в переменных Делоне найдем из следующих условий:

$$(\boldsymbol{\zeta}_k, \boldsymbol{\xi}_k) = 0, (\boldsymbol{\zeta}_k, \boldsymbol{\eta}_k) = 0, (\boldsymbol{\zeta}_k, \boldsymbol{\zeta}_k) = 1, \zeta_{kz} \leq 0. \quad (2.26)$$

Тогда из (2.23)–(2.26) получим:

$$\boldsymbol{\zeta}_k = \left( \frac{\xi_{kx} \xi_{kz}}{\sqrt{1 - \xi_{kz}^2}}, \frac{\xi_{ky} \xi_{kz}}{\sqrt{1 - \xi_{kz}^2}}, -\sqrt{1 - \xi_{kz}^2} \right). \quad (2.27)$$

Из соотношений (2.20)–(2.22) найдем выражения для обобщенных импульсов  $p_{R_k}$ ,  $p_{\phi_k}$ ,  $p_{\psi_k}$  в переменных Делоне

$$p_{R_k} = \frac{f_0 m_k^2}{G_k} e_k \sin \vartheta_k; p_{\phi_k} = H_k; p_{\psi_k} = \frac{G_k \sin i_k \cos(g_k + \vartheta_k)}{\sqrt{1 - \sin^2(g_k + \vartheta_k) \sin^2 i_k}} \quad (2.28)$$

Используя (2.19), (2.23), (2.25), (2.27), (2.28) выразим векторные импульсы  $\mathbf{p}_k$  через переменные Делоне:

$$\mathbf{p}_k = D_k \left\{ e_k \sin \vartheta_k \boldsymbol{\xi}_k + \frac{\cos i_k (1 + e_k \cos \vartheta_k)}{1 - \sin^2(g_k + \vartheta_k) \sin^2 i_k} \boldsymbol{\eta}_k + \right. \\ \left. + \frac{\sin i_k \cos(g_k + \vartheta_k) (1 + e_k \cos \vartheta_k)}{\sqrt{1 - \sin^2(g_k + \vartheta_k) \sin^2 i_k}} \boldsymbol{\zeta}_k \right\}, \quad D_k = f_0 m_k^2 G_k^{-1} \quad (2.29)$$

Невозмущенная часть гамильтониана (2.12) в переменных Делоне имеет вид:

$$H_0 = - \sum_{k=1}^n \frac{f_0^2 m_k^3}{2L_k^2} \quad (2.30)$$

Возмущенная часть гамильтониана (2.12) определяется равенством (2.13), в котором векторы  $\mathbf{p}_k$  выражаются через переменные Делоне согласно соотношению (2.29), а векторы  $\mathbf{R}_k = R_k \boldsymbol{\xi}_k$  согласно соотношениям (2.22)–(2.24). Канонические уравнения движения механической системы представим в форме:

$$\begin{aligned}
\dot{I}_k &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_k}, & \dot{i}_k &= \omega_k + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial L_k}, & \omega_k &= \frac{f_0^2 m_k^3}{L_k^3}, \\
\dot{G}_k &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial g_k}, & \dot{g}_k &= \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial G_k}, \\
\dot{H}_k &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial h_k}, & \dot{h}_k &= \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial H_k}, & k &= 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Правые части системы уравнений (2.31) зависят от канонических переменных Делоне и содержат  $n$  быстрых угловых переменных  $l_1, \dots, l_n$ , по которым функция  $H_1$  является  $2\pi$ -периодической. Остальные переменные являются медленными. Предположим, что в системе отсутствуют резонансы, т.е.  $k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n \neq 0$ , каков бы ни был нетривиальный набор целых чисел  $k_1, \dots, k_n$ , и применим метод усреднения по быстрым угловым переменным. Операция усреднения состоит в вычислении интеграла

$$\langle (*) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (*) dl_1 \dots dl_n = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (*) \frac{\partial l_1}{\partial \vartheta_1} \dots \frac{\partial l_n}{\partial \vartheta_n} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n,$$

где

$$\frac{\partial l_k}{\partial \vartheta_k} = \frac{(1 - e_k^2)^{3/2}}{(1 + e_k \cos \vartheta_k)^2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Остановимся более подробно на уравнении, описывающем эволюцию долготы перигелия  $\varpi_1 = g_1 + h_1$  ближайшей к Солнцу планеты (Меркурия). Согласно уравнениям (2.31)

$$\langle \dot{\varpi}_1 \rangle = \varepsilon \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial G_1} + \frac{\partial H_1}{\partial H_1} \right\rangle.$$

Учитывая в  $H_1$  только те слагаемые, которые зависят от  $G_1$  и  $H_1$ , получим:

$$\begin{aligned}
\langle \dot{\varpi}_1 \rangle &= \varepsilon \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial G_1} + \frac{\partial}{\partial H_1} \right) \left( -\frac{1}{2m_s} \mathbf{p}_1^2 + \frac{fm_1^2}{R_1} - \frac{1}{m_s} \sum_{k=2}^n (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_k) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{k=2}^n \frac{fm_1 m_k}{R_{1k}} + \sum_{k=2}^n \frac{fm_1 m_k (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_k)}{R_1^3} + \sum_{k=2}^n \frac{fm_1 m_k (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_k)}{R_k^3} \right) \right\rangle. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Заметим, что



$$-\frac{1}{2m_s}\mathbf{p}_1^2 + \frac{fm_1^2}{R_1} = \frac{f_0^2 m_1^4}{2m_s L_1^2}.$$

Поэтому при дифференцировании выражения в левой части последнего равенства по переменным  $G_1$  и  $H_1$  получится ноль. Далее,

$$\left\langle \frac{\mathbf{R}_k}{R_k^3} \right\rangle = \frac{(1-e_k^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi_k d\vartheta_k}{R_k^2 (1+e_k \cos \vartheta_k)^2} = \frac{(1-e_k^2)^{3/2}}{2\pi} \frac{f_0^2 m_k^4}{2G_k^4} \int_0^{2\pi} \xi_k d\vartheta_k = 0.$$

Поэтому среднее значение двух последних слагаемых в правой части формулы (2.32) равно нулю.

С учетом вышеизложенного равенство (2.32) примет вид:

$$\langle \dot{\vec{\omega}}_1 \rangle = \sum_{k=2}^n \omega_{1k}^{(p)} + \sum_{k=2}^n \omega_{1k}^{(R)}, \quad (2.33)$$

где

$$\omega_{1k}^{(p)} = -\frac{\varepsilon}{m_s} \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial G_1} + \frac{\partial}{\partial H_1} \right) (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_k) \right\rangle, \quad \omega_{1k}^{(R)} = -\varepsilon \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial G_1} + \frac{\partial}{\partial H_1} \right) \frac{f m_1 m_k}{R_{1k}} \right\rangle.$$

Координаты векторных импульсов  $\mathbf{p}_k$  (2.29) представим в виде:

$$p_{kx} = D_k (M_k \cos h_k - N_k \sin h_k), \\ p_{ky} = D_k (N_k \cos h_k + M_k \sin h_k), \quad p_{kz} = D_k Q_k,$$

где

$$M_k = M_k(e_k, g_k, i_k, \vartheta_k) = e_k \sin \vartheta_k \cos(g_k + \vartheta_k) + \\ + \frac{(1+e_k \cos \vartheta_k) \sin(g_k + \vartheta_k) [\sin^2 i_k \cos^2(g_k + \vartheta_k) - \cos^2 i_k]}{1 - \sin^2(g_k + \vartheta_k) \sin^2 i_k}, \\ N_k = N_k(e_k, g_k, i_k, \vartheta_k) = [e_k \sin \vartheta_k \sin(g_k + \vartheta_k) + \\ + \frac{(1+e_k \cos \vartheta_k) \cos(g_k + \vartheta_k) [1 + \sin^2 i_k \sin^2(g_k + \vartheta_k)]}{1 - \sin^2(g_k + \vartheta_k) \sin^2 i_k}] \cos i_k,$$

$$Q_k = Q_k(e_k, g_k, i_k, \vartheta_k) = \\ = [e_k \sin \vartheta_k \sin(g_k + \vartheta_k) - \cos(g_k + \vartheta_k) (1+e_k \cos \vartheta_k)] \sin i_k.$$

Положим

$$\tilde{M}_k = \tilde{M}_k(e_k, g_k, i_k) = \langle M_k(e_k, g_k, i_k, \vartheta_k) \rangle, \\ \tilde{N}_k = \tilde{N}_k(e_k, g_k, i_k) = \langle N_k(e_k, g_k, i_k, \vartheta_k) \rangle,$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_k = \tilde{\mathcal{Q}}_k(e_k, g_k, i_k) = \langle \mathcal{Q}_k(e_k, g_k, i_k, \vartheta_k) \rangle.$$

Тогда

$$\langle (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_k) \rangle = \frac{f_0^2 m_1^2 m_k^2 (1-e_1^2)^{3/2} (1-e_k^2)^{3/2}}{G_1 G_k} F_{1k},$$

$$F_{1k} = (\tilde{M}_1 \tilde{M}_k + \tilde{N}_1 \tilde{N}_k) \cos(h_1 - h_k) + (\tilde{M}_1 \tilde{N}_k - \tilde{N}_1 \tilde{M}_k) \sin(h_1 - h_k) + \tilde{\mathcal{Q}}_1 \tilde{\mathcal{Q}}_k.$$

С учетом соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial G_1} \frac{(1-e_1^2)^{3/2}}{G_1} &= \frac{2}{G_1} (1-e_1^2)^{3/2}, \\ \frac{\partial e_1}{\partial G_1} &= \frac{e_1^2 - 1}{e_1 G_1}, \quad \frac{\partial i_1}{\partial G_1} + \frac{\partial i_1}{\partial H_1} = \frac{\cos i_1 - 1}{G_1 \sin i_1}, \\ G_k &= \sqrt{f_0 m_k^2 a_k (1-e_k^2)}, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где  $a_k$  – большая полуось орбиты  $k$ -й планеты, получим следующие выражения для слагаемых  $\omega_{1k}^{(p)}$  в формуле (2.33):

$$\begin{aligned} \omega_{1k}^{(p)} &= -\frac{\varepsilon m_k}{a_1} \sqrt{\frac{f(1-e_1^2)}{a_k m_s}} (1-e_k^2) \times \\ &\times \left\{ 2F_{1k} + \frac{\partial F_{1k}}{\partial e_1} \cdot \frac{e_1^2 - 1}{e_1} + \frac{\partial F_{1k}}{\partial i_1} \cdot \frac{\cos i_1 - 1}{\sin i_1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Выразим слагаемые  $\omega_{1k}^{(R)}$  в (2.33) через переменные Делоне. Так как

$$R_{1k} = \sqrt{(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_k)^2} = \sqrt{R_1^2 - 2R_1 R_2 (\xi_1, \xi_k) + R_k^2},$$

то

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial G_1} + \frac{\partial}{\partial H_1} \right) \frac{1}{R_{1k}} &= -\frac{1}{(R_1^2 - 2R_1 R_2 (\xi_1, \xi_k) + R_k^2)^{3/2}} \left( R_1 \frac{\partial R_1}{\partial G_1} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial R_1}{\partial G_1} R_k (\xi_1, \xi_k) - R_1 R_k \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial G_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial H_1}, \xi_k \right) \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Преобразуем правую часть (2.35), используя равенство (2.22) для  $R_1$ ,  $R_k$ , а также выражения для частных производных

$$\frac{\partial R_1}{\partial G_1} = \frac{G_1 \cos \vartheta_1}{f_0 m_1^2 e_1}, \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial G_1} = -\frac{\sin \vartheta_1 (2 + e_1 \cos \vartheta_1)}{e_1 G_1},$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial G_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial H_1} = \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial G_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial i_1} \left( \frac{\partial i_1}{\partial G_1} + \frac{\partial i_1}{\partial H_1} \right).$$

В итоге получим:

$$\omega_{1k}^{(R)} = \frac{\varepsilon m_k (1 - e_1^2)^2}{4\pi^2 a_k^2 e_1} \sqrt{\frac{f a_1}{m_s (1 - e_k^2)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{1k} d\vartheta_1 d\vartheta_k, \quad (2.36)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{1k} = & \left\{ (1 + e_1 \cos \vartheta_1)^2 - 2\mu_{1k} (1 + e_1 \cos \vartheta_1) (1 + e_k \cos \vartheta_k) (\xi_1, \xi_k) + \right. \\ & \left. + \mu_{1k}^2 (1 + e_k \cos \vartheta_k)^2 \right\}^{-3/2} \times \\ & \times \left\{ \mu_{1k} \cos \vartheta_1 (1 + e_k \cos \vartheta_k) - \cos \vartheta_1 (1 + e_1 \cos \vartheta_1) (\xi_1, \xi_k) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1}, \xi_k \right) \sin \vartheta_1 (2 + e_1 \cos \vartheta_1) + \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial i_1}, \xi_k \right) \frac{(1 - \cos i_1) e_1}{\sin i_1} \right\} \\ \mu_{1k} = & \frac{G_1^2 m_k^2}{G_k^2 m_1^2} = \frac{a_1 (1 - e_1^2)}{a_k (1 - e_k^2)}. \end{aligned}$$

Найдем численное значение выражения в правой части (2.33), описывающего эволюцию долготы перигелия Меркурия, используя полученные формулы (2.34), (2.36). В этих формулах  $f = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$ ,  $m_s = 1.98911 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ . Числовые значения остальных параметров, входящих в правые части равенств (2.34), (2.36), представлены в таблицах 1а и 1б [8]. Результаты вычисления величин  $\omega_{1k}^{(p)}$ ,  $\omega_{1k}^{(R)}$  представлены в таблице 2. Вычисления выполнены с помощью математической системы Mathcad.

Поскольку  $1 \text{ рад/с} = 6.509222 \cdot 10^{14} \text{ ''/100 лет}$ , то, учитывая данные таблицы 2, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \omega_{1k}^{(p)} &= 39.685 \text{ (''/100 лет)}, \quad \sum_{k=2}^n \omega_{1k}^{(R)} = 528.681 \text{ (''/100 лет)} \\ \langle \dot{\omega}_1 \rangle &= \sum_{k=2}^n \omega_{1k}^{(p)} + \sum_{k=2}^n \omega_{1k}^{(R)} = 568.366 \text{ (''/100 лет)}. \end{aligned}$$

У. Лаверьё вычислил скорость изменения долготы перигелия Меркурия  $529 \text{ ''/100 лет}$ , что соответствует полученному значению  $528.681 \text{ ''/100 лет}$ . Добавочная скорость изменения долготы перигелия, найденная при решении задачи в барицентрической системе координат

нат,  $39.685''/100$  лет. Современные измерения дают значение угловой скорости перигелия  $573.57''/100$  лет [8]. Остается объяснить величину  $5.204''/100$  лет или  $\dot{\varpi}_{1s} = 7.995 \cdot 10^{-15} \text{ c}^{-1}$ . Для этого изучим влияние сжатия Солнца на возмущение скорости долготы перигелия Меркурия.

### 3. Влияние сжатия Солнца на эволюцию перигелия Меркурия.

Сжатие Солнца по оси собственного вращения за счет центробежных сил возмущает центральное гравитационное поле притяжения Солнца и влияет на  $CXYZ$  единичный вектор, направленный по оси вращения Солнца,  $\mathbf{n}_0 = \Gamma_3(h_0)\Gamma_1(i_0)\mathbf{e}_3$ , а единичный вектор  $\xi_1$ , направленный по вектору  $\mathbf{R}_1$ , равен  $\xi_1 = \Gamma_3(h_1)\Gamma_1(i_1)\Gamma_3(g_1 + \vartheta_1)\mathbf{e}_1$ . Здесь  $\mathbf{e}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0; 0; 1)$ , а операторы  $\Gamma_1, \Gamma_3$  определяют повороты вокруг соответствующих осей,

$$\Gamma_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Долгота восходящего узла Солнца в эпоху J2000  $h_0 = 75.761^\circ$ , а наклонение оси вращения Солнца к эклиптике  $i_0 = 7.25^\circ$  [9]. Величины  $h_1, i_1$  представлены в таблице 1б. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_{31} = (\mathbf{n}_0, \mathbf{R}_1^0) &= (\Gamma_3(h_0)\Gamma_1(i_0)\mathbf{e}_3, \Gamma_3(h_1)\Gamma_1(i_1)\Gamma_3(g_1 + \vartheta_1)\mathbf{e}_1) = \\ &= -\sin h_{10} \sin i_0 \cos(g_1 + \vartheta_1) - (\cos h_{10} \sin i_0 \cos i_1 - \cos i_0 \sin i_1) \sin(g_1 + \vartheta_1) \\ h_{10} &= h_1 - h_0 \end{aligned}$$

Учитывая формулу (2.22), усредним правую часть соотношения (3.1) по переменной  $l_1$  и получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \langle \Delta \Pi_{s1} \rangle &= -\frac{K}{G_1^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[ \sin^2 h_{10} \sin^2 i_0 + \cos^2 i_0 \sin^2 i_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos^2 h_{10} \sin^2 i_0 \cos^2 i_1 - \cos i_1 \sin i_1 \sin 2i_0 \cos h_{10} \right] \right\}, \quad (3.2) \\ K &= \frac{f^4 m_s^3 m_1^7 (C - A)}{2L_1^3}. \end{aligned}$$

В формуле (3.2) в явном виде представлена зависимость от канонических переменных  $G_1, H_1$ . Заметим, что  $H_1 / G_1 = \cos i_1$ . Дополнительный член, появляющийся в выражении скорости эволюции долготы перигелия Меркурия, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_{1S} &= \left( \frac{\partial}{\partial G_1} + \frac{\partial}{\partial H_1} \right) \langle \varepsilon^{-1} \Delta \Pi_{S1} \rangle = \\
&= \frac{3K}{G_1^4} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[ \sin^2 h_{10} \sin^2 i_0 + \cos^2 i_0 \sin^2 i_1 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos^2 h_{10} \sin^2 i_0 \cos^2 i_1 - \frac{1}{2} \sin 2i_1 \sin 2i_0 \cos h_{10} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{i_1}{2} \left[ \sin 2i_1 (\cos^2 i_0 - \sin^2 i_0 \cos^2 h_{10}) - \cos 2i_1 \sin 2i_0 \cos h_{10} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Учитывая равенства  $L_1 = m_1 \sqrt{f m_s a_1}$ ,  $G_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2}$ , представим правую часть соотношения (3.3) в виде

$$\dot{\omega}_{1S} = 1.491281 \frac{C - A}{(1 - e_1^2)^2} \sqrt{\frac{f}{m_s a_1^7}}. \tag{3.4}$$

Здесь  $a_1$ ,  $e_1$  – большая полуось и эксцентриситет орбиты Меркурия. Поскольку  $\dot{\omega}_{1S} = 7.995 \cdot 10^{-15} \text{ с}^{-1}$  (см. раздел 2), то из соотношения (3.4) определяется разность главных моментов инерции Солнца  $C - A = 3.9678 \cdot 10^{43} \text{ кг м}^2$ .

Оценим угловую скорость вращения Солнца  $\omega_0$ , при которой возникают его деформации, обеспечивающие полученную разность главных моментов инерции. Если принять плотность Солнца  $\rho_0$  постоянной (модель несжимаемой жидкости), то уравнение эквипотенциальной поверхности Солнца, в котором учтены гравитационные и центробежные силы инерции имеет вид:

$$\mathbf{r}^2 - \alpha^2 (x^2 + y^2) = r_s^2, \quad \alpha^2 = \frac{\omega_0^2 r_s^3}{f m_s} < 1, \tag{3.5}$$

где  $r_s = 6.96 \cdot 10^8 \text{ м}$  – радиус Солнца [8]. Вращение Солнца происходит вокруг оси  $Sz$ . Уравнение (3.5) получено в системе координат  $Sxyz$ , связанной с вращающимся Солнцем. Полагая

$$\begin{aligned}
x &= r_s (1 + \alpha^2 / 2) \xi \sin \theta \cos \phi, \quad y = r_s (1 + \alpha^2 / 2) \xi \sin \theta \sin \phi, \quad z = r_s \xi \cos \theta, \\
0 &< \xi < 1, \quad 0 < \theta < \pi, \quad \phi \bmod 2\pi,
\end{aligned}$$

найдем

$$C - A = \int_V (y^2 - z^2) \rho_0 dx dy dz = \frac{1}{5} m_s r_s^2 \alpha^2 = \frac{r_s^5 \omega_0^2}{5 f}, \quad \omega_0^2 = 5 f (C - A) r_s^{-5}.$$

Согласно последней формуле числовое значение угловой скорости вращения Солнца равно  $\omega_0 = 0.90025 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ , а его сжатие

$$\kappa = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{5(C-A)}{2m_s r_s^2} = 1.02947 \cdot 10^{-4}.$$

Здесь  $0.4 m_s r_s^2 = 3.854 \cdot 10^{47} \text{ кг м}^2$  – момент инерции Солнца, представленного однородным шаром. Согласно полученному значению угловой скорости  $\omega_0$  Солнце делает «один оборот» за 8.078 суток. Разность экваториального и полярного радиусов Солнца равна  $\kappa r_s = 71.651 \text{ км}$ .

Ось вращения Солнца в системе координат связанной с эклиптикой в эпоху J2000 описывает конус вокруг нормали к плоскости эклиптики с угловой скоростью  $\dot{h}_0 = 0.01396^\circ/\text{год} = 5025.6''/100 \text{ лет}$  и совершает полный оборот за 25788 лет. Отсюда следует, что скорость эволюции долготы перигелия Меркурия также является периодической функцией времени с тем же периодом. Поскольку угловая скорость  $\dot{h}_0$  на порядок больше угловой скорости эволюции перигелия Меркурия, то естественно усреднить выражение, стоящее в правой части соотношения (3.2) по углу  $h_0$ . В результате получим:

$$\varepsilon^{-1} \langle \Delta \Pi_{s1} \rangle_{i, h_0} = -\frac{K}{4G_1^3} (1 - 3 \cos^2 i_0) (1 - 3 \cos^2 i_1).$$

В этом случае дополнительный член, появляющийся в выражении скорости эволюции долготы перигелия Меркурия, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{1s} &= \left( \frac{\partial}{\partial G_1} + \frac{\partial}{\partial H_1} \right) \langle \varepsilon^{-1} \Delta \Pi_{s1} \rangle_{i, h_0} = \\ &= \frac{3K}{4G_1^4} (3 \cos^2 i_0 - 1) (5 \cos^2 i_1 - 2 \cos i_1 - 1) \end{aligned}$$

В формуле (3.4) изменяется значение коэффициента, и она принимает вид:

$$\dot{\omega}_{1s} = 1.420655 \frac{C-A}{(1-e_1^2)^2} \sqrt{\frac{f}{m_s a_1^7}}. \quad (3.5)$$

Далее найдем

$$\begin{aligned} C-A &= 4.165060 \cdot 10^{43} \text{ кг м}^2, \quad \omega_0 = 0.922360 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}, \\ \kappa &= 1.080647 \cdot 10^{-4}, \quad \kappa r_s = 75.213 \text{ км}. \end{aligned}$$

В реальности Солнце не является однородным телом с постоянной плотностью, а его вращение имеет дифференциальный характер. В связи с этим последние оценки могут быть уточнены на основе иных представлений о внутреннем строении Солнца. Поскольку наблюдаемые периоды вращения поверхностных слоев Солнца лежат в диапазоне 25 – 33 суток, то внутренние слои и плотное ядро Солнца вращаются быстрее поверхностных слоев. В работе [10] «период вращения» Солнца оценивался двумя сутками.

Замечание. Планеты, в частности Меркурий, деформируются за счет центробежных сил и градиента гравитационных сил притяжения Солнца. Это обстоятельство также влияет на скорость изменения долготы перигелия. Как показывают расчеты величины этих поправок значительно меньше поправки из-за сжатия Солнца.

Из выше изложенного следует, что прецессия перигелия Меркурия объясняется в рамках классической механики, если учесть гравитационные поля планет солнечной системы, сжатие Солнца под воздействием центробежных сил и рассмотреть задачу в барицентрической системе координат.

**Таблица 1а.**

$k$	Планета	$\varepsilon m_k (\times 10^{24} \text{ кг})$	$a_k (\times 10^{11} \text{ м})$	$e_k$
1	Меркурий	0.3302	0.579092	0.20563069
2	Венера	4.8685	1.082089	0.00677323
3	Земля-Луна	6.04709	1.495979	0.01671022
4	Марс	0.64185	2.279366	0.09341233
5	Юпитер	1898.6	7.784120	0.04839266
6	Сатурн	568.46	14.26725	0.05415060
7	Уран	86.832	28.70972	0.04716771
8	Нептун	102.43	44.98253	0.00858587

**Таблица 1б.**

$k$	Планета	$g_k (pad)$	$h_k (pad)$	$i_k (pad)$
1	Меркурий	0.508323	0.843547	0.122258
2	Венера	0.957353	1.338330	0.059249
3	Земля-Луна	-4.289883	6.086650	0.0000009
4	Марс	4.999710	0.865309	0.032299
5	Юпитер	-1.497533	1.755036	0.022782
6	Сатурн	-0.371460	1.984702	0.043362
7	Уран	1.688333	1.295556	0.013437
8	Нептун	-1.514079	2.298977	0.030878

**Таблица 2.**

$k$	Планета	$\omega_{1k}^{(R)} (10^{-13} \text{ рад/с})$	$\omega_{1k}^{(P)} (10^{-15} \text{ рад/с})$
2	Венера	4.238462957	0.171446582
3	Земля-Луна	1.384256047	-0.000004687
4	Марс	0.037862687	0.057488813
5	Юпитер	2.346994130	8.712546361
6	Сатурн	0.111655189	52.17977717
7	Уран	0.002157131	-0.190873398
8	Нептун	0.000647575	0.036536342

## Литература

1. *Le Verrier U.J.* J. de mathématiques pures et appliqués. 1-er serie. **8**, 273 (1843)
2. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: ЛКИ, 2009 [*Beletsky V.V.* Essays on the motion of the celestial bodies. Basel; Berlin; Boston: Birkhauser, 2001]
3. *Brouwer D., Clemence G.* Methods of Celestial Mechanics. Academic Press: New York, 1961. [*Брауэр Д., Клеменс Дж.* Методы небесной механики. М.: Мир, 1964].
4. *Gerber P.Z.* *Math. Phys.* **43**, 93 (1898).
5. *Roseveare N.T.* Mercury's Perihelion from Le Verrier to Einstein. Oxford: Clarendon-Press, 1982. [*Роузвер Н.Т.* Перигелий Меркурия: от Лаверье до Эйнштейна. М.:Мир, 1985].
6. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.
7. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика. М.: «Лань», 2003.
8. *Murray C.D, Dermott S.F.* Solar System Dynamics. Cambridge University Press, 1999. [*Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010].
9. *Akasofu S.-I., Chapman S.* Solar-terrestrial physics. Oxford: Clarendon Press, 1972. [*Акасофу С.И., Чепмен С.* Солнечно-земная физика. М.: Мир, 1975].
10. *Dicke R.* Gravitation and the Universe. Philadelphia: American Philosophical Society, 1970. [*Дикке Р.* Гравитация и Вселенная. М.: Мир, 1972].



## **О НЕКОТОРЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Как правило, уравнения движения механической системы, линеаризованные в окрестности некоторого стационарного движения, используются только для получения необходимых условий устойчивости. Эти уравнения записываются обычно в форме Коши. Цель работы – показать, что линеаризованные уравнения помимо информации о необходимых условиях устойчивости в некоторых случаях содержат и дополнительную информацию. Оказывается, что представление линейной системы в форме уравнений второго порядка позволяет сделать дополнительные заключения о характере устойчивости и анализ устойчивости сильно упрощается.

В качестве примеров рассмотрены хорошо известные классические задачи об устойчивости стационарных движений твердого тела с неподвижной точкой и спутника на круговой орбите [1-9].

### **1.Случай Эйлера.**

**1.1.** Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера или уравнения движения свободного твердого тела относительно центра масс имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 0 \\ B\dot{q} + (A - C)pr &= 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $A, B, C$  – главные моменты инерции тела для неподвижной точки (или относительно центра масс);  $p, q, r$  – проекции угловой скорости на главные оси инерции.

Уравнения (1.1) допускают частное решение

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = r_0, \quad (1.2)$$

описывающее равномерное вращение тела относительно неподвижной оси, совпадающей с одной из главных осей инерции тела  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (в данном случае вокруг оси  $Oz$ ).

Линеаризованные в окрестности движения (1.2) уравнения имеют вид

$$\dot{x}_1 = \frac{B-C}{A} r_0 x_2, \dot{x}_2 = \frac{C-A}{B} r_0 x_1, \dot{x}_3 = 0, \quad (1.3)$$

Здесь  $x_1 = p, x_2 = q, x_3 = r - r_0$ .

Из анализа характеристического уравнения этой системы

$$D(\lambda) = \lambda \left[ \lambda^2 + \frac{(C-A)(C-B)}{AB} r_0^2 \right] = 0$$

следует, что необходимыми условиями устойчивости (по отношению к возмущениям проекций угловых скоростей) являются условия

$$C > A, C > B \text{ либо } C < A, C < B \quad (1.4)$$

Это означает, что устойчивыми могут быть вращения тела вокруг главных осей инерции с максимальным и минимальным моментами инерции.

Достаточные условия устойчивости получаются при помощи функции Ляпунова  $V$ , построенной в виде связки известных интегралов энергии и сохранения момента количества движения, которые для возмущенного движения имеют вид:

$$V_1 = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Cr_0x_3 = h,$$

$$V_2 = A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2 + 2C^2r_0x_3 = K$$

Тогда функцию Ляпунова можно сформировать следующим образом:

$$V = V_2 - CV_1 + \mu V_1^4 = A(A-C)x_1^2 + B(B-C)x_2^2 + 4\mu C^2r_0^2x_3^2 + \dots$$

Условия (1.4) представляют собой условия знакоопределенности функции  $V$ .

Таким образом, необходимые и достаточные условия устойчивости стационарного вращения (1.2) по отношению к проекциям угловой скорости тела имеют вид (1.4), т.е. устойчивыми являются вращения тела вокруг главных осей инерции с максимальным и минимальным моментами инерции.

Вращение вокруг средней оси эллипсоида инерции неустойчиво [1,4,6-8].

Этот факт хорошо известен и описан практически во всех учебниках по теоретической механике.

**1.2.** Вопрос об устойчивости этих стационарных вращений твердого тела можно ставить не только по отношению к проекциям угловой скорости, но и по отношению к положению оси вращения тела в пространстве.

Вектор кинетического момента тела  $\mathbf{K}$  неподвижен в инерциальном пространстве, и его положение в системе главных осей инерции опре-

деляется направляющими косинусами  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , которые подчиняются уравнениям Пуассона

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ \dot{\gamma}_2 &= p\gamma_3 - r\gamma_1 \\ \dot{\gamma}_3 &= q\gamma_1 - p\gamma_2\end{aligned}\tag{1.5}$$

Стационарные вращения тела теперь представляются частными решениями системы (1.1), (1.5), одно из которых имеет вид

$$p = 0, q = 0, r = r_0; \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1\tag{1.6}$$

Это решение описывает вращение с постоянной скоростью  $r_0$  вокруг оси  $Oz$ , которая совпадает с направлением вектора  $\mathbf{K}$ .

Система (1.1), (1.5) помимо указанных интегралов имеет еще интеграл площадей и тривиальный интеграл:

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = d, \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Для получения достаточных условий устойчивости стационарного движения (1.6) снова используется функция Ляпунова, построенная в виде связки четырех интегралов системы (1.1), (1.5). Достаточные условия устойчивости движения (1.6) по отношению к проекциям угловой скорости и положению оси вращения совпадают с условиями устойчивости (1.4) решения (1.2) по отношению только к проекциям угловой скорости.

Линеаризованная в окрестности решения (1.6) система (1.1), (1.5) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{B-C}{A}r_0x_2, \dot{x}_2 = \frac{C-A}{B}r_0x_1, \dot{x}_3 = 0, \\ \dot{x}_4 &= r_0x_5 - x_2, \dot{x}_5 = -r_0x_4 + x_1, \dot{x}_6 = 0\end{aligned}\tag{1.7}$$

Здесь  $x_1 = p$ ,  $x_2 = q$ ,  $x_3 = r - r_0$ ,  $x_4 = \gamma_1$ ,  $x_5 = \gamma_2$ ,  $x_6 = \gamma_3 - 1$ .

Из анализа характеристического уравнения системы (1.7)

$$D(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + r_0^2) \left[ \lambda^2 + \frac{(C-A)(C-B)}{AB}r_0^2 \right] = 0$$

следуют те же необходимые условия устойчивости (1.4).

Таким образом, устойчивым по отношению к проекциям угловой скорости и по отношению к положению оси вращения является как вращение вокруг оси наибольшего момента инерции ( $C > A, C > B$ ), так и вращение вокруг оси наименьшего момента инерции ( $C < A, C < B$ ) [6-8].

Покажем, что характер устойчивости в этих случаях принципиально различен. Для этого запишем систему (1.7) (за исключением уравнений для переменных  $x_3, x_6$ ) в виде системы двух уравнений второго порядка, выразив  $x_1, x_2$  через  $x_4, x_5$  и их производные:

$$\begin{aligned} B\ddot{x}_4 + Gr_0\dot{x}_5 + K_1x_4 &= 0 \\ A\ddot{x}_5 - Gr_0\dot{x}_4 + K_2x_5 &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $G = r_0(C - A - B)$ ,  $K_1 = r_0^2(C - A)$ ,  $K_2 = r_0^2(C - B)$ .

Систему (1.8) можно рассматривать как потенциальную механическую систему с гироскопическими силами, к которой применимы теоремы Кельвина-Четаева [3,10]. На основании этих теорем можно утверждать, что если  $K_1 > 0, K_2 > 0$ , то система (1.8) устойчива независимо от наличия гироскопических сил. Это означает, что неравенства

$$C > A, C > B \quad (1.9)$$

являются условиями вековой устойчивости.

Если  $C < A, C < B$ , коэффициенты Пуанкаре  $K_1, K_2$  системы (1.8) отрицательны, степень неустойчивости четная, и возможна гироскопическая стабилизация, которая действительно имеет место, как следует из анализа характеристического уравнения системы (1.7).

Итак, принципиальное различие характера устойчивости при  $C > A, C > B$  и при  $C < A, C < B$  состоит в том, что вращение вокруг оси наибольшего момента инерции является устойчивым, и его устойчивость носит вековой характер и сохраняется при наличии диссипативных сил. В то время как устойчивость вращения вокруг оси с наименьшим моментом инерции имеет гироскопическую природу и является временной; движение становится неустойчивым при наличии даже малых диссипативных сил как следует из теоремы Кельвина-Четаева.

В самом деле, вводя формально в систему (1.8) диссипативные силы в виде  $-\delta\dot{x}_4, -\delta\dot{x}_5$  ( $\delta > 0$ ), нетрудно убедиться, что в характеристическом уравнении этой системы

$$\begin{aligned} a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 &= 0, \\ a_0 &= AB, a_1 = \delta(A + B), a_2 = Bk_2 + Ak_1 + G^2 + \delta^2, \\ a_3 &= \delta(k_1 + k_2), a_4 = k_1k_2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

коэффициент  $a_3 < 0$ , если  $C < A, C < B$ , т.е. в этом случае система неустойчива.

Если  $C > A, C > B$ , то уравнение (1.10) имеет корни с отрицательными действительными частями, т.е. относительно переменных  $x_4, x_5$  устойчивость становится асимптотической.

Если в систему (1.7) вводятся диссипативные силы вида  $-\delta p, -\delta q$  ( $-\delta x_1, -\delta x_2$ ), то ее характеристическое уравнение принимает вид

$$D(\lambda) = (\lambda^2 + r_0^2) [AB\lambda^2 + \delta(A+B)\lambda + \delta^2 + (C-A)(C-B)r_0^2] = 0$$

Условия устойчивости в этом случае совпадают с условиями (1.4), т.е. устойчивыми являются оба вращения вокруг осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции.

Отметим, что в работе А.В. Карапетяна [7] вопрос об устойчивости рассматриваемых стационарных движений для более общего случая тяжелого твердого тела исследовался на основании изучения эффективного потенциала. Полученные в этой работе достаточные условия устойчивости для рассматриваемого здесь случая имеют вид (1.9).

**Замечание.** Ранее в литературе по космической технике широко обсуждался факт неустойчивости вращения американского космического аппарата Explorer-1, запущенного в 1958г., закрученного вокруг главной оси с наименьшим моментом инерции (см., например, [11,12]). Эволюция движения аппарата привела к тому, что он стал вращаться вокруг оси с наибольшим моментом инерции, что трактуется в современной литературе по космической технике как «правило большой оси». В [11] это явление объясняется нежесткостью конструкции аппарата. Но, как указано выше, неустойчивость вращения вокруг оси с наименьшим моментом инерции объясняется гироскопическим характером этой устойчивости и ее разрушением малыми диссипативными силами.

## 2. Случай Лагранжа.

Уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой для случая Лагранжа в переменных Эйлера-Пуассона имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C-A)qr &= Mgl\gamma_2 & \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ A\dot{q} - (C-A)pr &= -Mgl\gamma_1 & \dot{\gamma}_2 &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ C\dot{r} &= 0 & \dot{\gamma}_3 &= q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $M, l$  – масса тела и расстояние от центра масс до неподвижной точки;  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – направляющие косинусы восходящей вертикали в главных осях инерции тела.

Уравнения (2.1) допускают частное решение

$$p = 0, q = 0, r = r_0; \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1 \quad (2.2)$$

описывающее равномерное вращение тела вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наивысшем расположении центра масс.

Линеаризованная в окрестности решения (2.2) система (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} A\dot{x}_1 + (C - A)x_2r_0 - Mglx_4 &= 0 \\ A\dot{x}_2 - (C - A)x_1r_0 + Mglx_5 &= 0 \\ \dot{x}_4 - r_0x_5 + x_2 &= 0 \\ \dot{x}_5 + r_0x_4 - x_1 &= 0 \\ \dot{x}_3 = 0, \quad \dot{x}_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $x_1 = p, x_2 = q, x_3 = r - r_0, x_4 = \gamma_1, x_5 = \gamma_2, x_6 = \gamma_3 - 1$ .

Характеристическое уравнение системы (2.4) представляется в форме  $\lambda^2(a_0\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_4) = 0$ , где

$$a_0 = A^2, a_2 = [A^2 + (C - A)^2]r_0^2 - 2AMgl, a_4 = [(C - A)r_0 - Mgl]^2.$$

Необходимые условия устойчивости ( $a_2 > 0$ ,  $a_2^2 - 4a_0a_4 > 0$ ) дают единственное необходимое условие устойчивости:

$$C^2r_0^2 - 4AMgl > 0 \quad (2.5)$$

Достаточное условие устойчивости решения (2.2), полученное Н.Г. Четаевым [3] путем построения функции Ляпунова из связки четырех интегралов уравнений возмущенного движения совпадает с условием (2.5) и носит название «условия Маиевского» [6-8,13].

Таким образом, условие (2.5) является необходимым и достаточным условием устойчивости стационарного вращения (2.2).

Покажем, что из анализа линейной системы (2.4) можно получить дополнительную информацию о характере устойчивости рассматриваемого движения (2.2). Запишем эту систему (за исключением уравнений для переменных  $x_3, x_6$ ) в виде системы двух уравнений второго порядка, выразив  $x_1, x_2$  через  $x_4, x_5$  и их производные

$$\begin{aligned} A\ddot{x}_4 + G\dot{x}_5 + Kx_4 &= 0 \\ A\ddot{x}_5 - G\dot{x}_4 + Kx_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $G = r_0(C - 2A)$ ,  $K = r_0^2(C - A) - Mgl$ .

Систему (2.6) так же, как и выше, можно рассматривать как потенциальную механическую систему с гироскопическими силами, к кото-

рой применимы теоремы Кельвина-Четаева. На основании этих теорем можно утверждать, что если  $K > 0$ , то система (2.6) устойчива независимо от наличия гироскопических сил. Это означает, что неравенство

$$r_0^2(C - A) - Mgl > 0 \quad (2.7)$$

является условием вековой устойчивости.

Если же  $r_0^2(C - A) - Mgl < 0$ , коэффициенты Пуанкаре системы (2.6) отрицательны, степень неустойчивости четная, и возможна гироскопическая стабилизация, которая действительно имеет место при выполнении условия (2.5).

Сравним условия (2.5) и (2.7). Для выполнения условия (2.7) необходимо чтобы  $C > A$ . Если  $C < A$ , возможна только гироскопическая стабилизация.

Пусть  $C > A$  (короткоосный гироскоп, согласно терминологии [4]). Тогда из условия (2.7) следует, что  $r_0^2 > \omega_2^2 = Mgl(C - A)^{-1}$ , а из условия (2.5) следует, что  $r_0^2 > \omega_1^2 = 4AMglC^{-2}$ . Нетрудно видеть, что  $\omega_2^2 > \omega_1^2$ , поэтому при  $r_0^2 > \omega_2^2$  имеет место вековая устойчивость, а при  $\omega_1^2 < r_0^2 < \omega_2^2$  – гироскопическая стабилизация. При  $r_0^2 < \omega_1^2$  имеет место неустойчивость.

Итак, в области параметров системы, удовлетворяющих необходимому и достаточному условию устойчивости (2.5), движения (2.2) в переменных Эйлера-Пуассона есть две части, в которых характер устойчивости принципиально различен: 1) при  $C > A$  (короткоосный гироскоп) и  $r_0^2 > \omega_2^2$  имеет место вековая устойчивость, и она сохраняется при наличии диссипативных сил; 2) при  $C < A$  (длинноосный гироскоп), а также при  $C > A$  и  $\omega_1^2 < r_0^2 < \omega_2^2$  – устойчивость имеет гироскопическую природу, и движение становится неустойчивым при наличии даже малых диссипативных сил как следует из теоремы Кельвина-Четаева.

Введем формально в систему (2.6) диссипативные силы в виде  $-\delta\dot{x}_4$ ,  $-\delta\dot{x}_5$  ( $\delta > 0$ ). Тогда в характеристическом уравнении этой системы

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

$$a_0 = A^2, a_1 = 2\delta A, a_2 = 2AK + G^2 + \delta^2, a_3 = 2\delta K, a_4 = K^2$$

коэффициент  $a_3 < 0$  при  $K < 0$ , т.е. в этом случае система неустойчива.

Если же в систему (2.4) ввести диссипативные силы в виде  $-\delta_1 \dot{x}_1$ ,  $-\delta_2 \dot{x}_2$ , то можно показать, что последний определитель Гурвица для характеристического уравнения этой системы всегда отрицателен. Таким образом, при наличии таких диссипативных сил стационарное вращение тела (2.2) всегда неустойчиво.

Отметим, что неравенства (2.7), (2.5) были получены еще в докторской диссертации Н.Е. Жуковского в 1882 г. [2].

В монографии Р. Граммеля [4] подробно рассмотрена устойчивость в линейном приближении перманентных вращений тяжелого несимметричного твердого тела. В частности, для случая Лагранжа выписаны уравнения в виде (2.6) и сформулированы условия устойчивости вида (2.5), (2.7) без разделения характера устойчивости на вековую и имеющую гироскопическую природу. Некоторые достаточные условия устойчивости указанных перманентных вращений получены в работе В.В. Румянцева [5]. Условие (2.7) указано как достаточное условие для короткоосного гироскопа.

В работе А.В. Карапетяна [7] (см. также [8]) вопрос об устойчивости стационарных движений тяжелого несимметричного твердого тела исследовался на основании изучения эффективного потенциала. Полученные достаточные условия устойчивости для симметричного тела совпадают с условием (2.7). Отмечено также, что при  $r_0^2(C - A) - Mgl < 0$  в системе возможна гироскопическая стабилизация.

Задача о стационарном движении тяжелого симметричного твердого тела в случае Лагранжа рассматривалась также в углах Крылова  $\alpha, \beta, \gamma$ , которые определяют ориентацию главных осей инерции тела, по отношению к осям неподвижной системы координат, ось аппликат которой направлена вертикально вверх. В этом случае рассматриваемое здесь стационарное вращение определяется соотношениями

$$\alpha = 0, \beta = 0, \dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = r_0.$$

Линеаризованные в окрестности этого решения уравнения имеют вид [7, 14]

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} - Cr_0\dot{\beta} - Mgl\alpha &= 0, \\ A\ddot{\beta} + Cr_0\dot{\alpha} - Mgl\beta &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Необходимое условие устойчивости имеет вид  $C^2 r_0^2 - 4AMgl > 0$  и совпадает с условием (2.5). Здесь коэффициенты Пуанкаре отрицательны, поэтому устойчивость носит только гироскопический (следо-



вательно, временный) характер, и она разрушается диссипативными силами с полной по отношению к переменным  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  диссипацией [3].

**Замечание.** Свойство устойчивости стационарных вращений тяжелого симметричного твердого тела в случае Лагранжа не инвариантно по отношению к выбору переменных, которыми описывается данная задача, и этим объясняется различие в полученных выше результатах.

### 3. Относительное равновесие спутника на круговой орбите.

Рассмотрим задачу об устойчивости положения относительного равновесия спутника, центр масс которого движется по круговой орбите. Ориентация главных центральных осей инерции спутника относительно орбитальной системы координат определяется углами  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  [9,15], которые могут быть выбраны так, что в положении относительного равновесия все углы и угловые скорости равны нулю, т.е.  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 0$ . Уравнения малых колебаний трехосного спутника имеют вид,

$$\begin{aligned} C\ddot{\theta}_1 - G\dot{\theta}_2 + K_1\theta_1 &= 0, \\ A\ddot{\theta}_2 + G\dot{\theta}_1 + K_2\theta_2 &= 0, \\ B\ddot{\theta}_3 + K_3\theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $\beta$  – центральные моменты инерции,  $\dot{z}$ ,  $K_1 = (B - A)\omega_0^2$ ,  $K_2 = 4(B - C)\omega_0^2$ ,  $K_3 = 3(A - C)\omega_0^2$ ,  $\omega_0$  – угловая скорость орбитального движения.

Характеристическое уравнение системы (3.1) [9,15] имеет вид

$$(B\lambda^2 + K_3)(a_0\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_4) = 0,$$

где  $a_0 = AC$ ,  $a_2 = CK_2 + AK_1 + G^2$ ,  $a_4 = K_1K_2$ .

Из третьего уравнения системы (3.1) следует, что условие  $A > C$  является необходимым условием устойчивости, а остальные определяются неравенствами  $a_2 > 0$ ,  $a_4 > 0$ ,  $a_2^2 - 4a_0a_4 > 0$ .

Первые два уравнения (3.1) можно трактовать как консервативную механическую систему с гироскопическими силами. Тогда по теореме Кельвина-Четаева условия  $B > A$ ,  $B > C$  совместно с условием  $A > C$ , т. е.

$$B > A > C, \quad (3.2)$$

являются условиями вековой устойчивости.

Как показано В.В. Белецким [9,15], условия (3.2) являются и достаточными условиями устойчивости, которые означают, что в устойчи-

вом положении относительного равновесия ось наименьшего момента инерции направлена по радиус-вектору орбиты, ось наибольшего момента инерции направлена по нормали к плоскости орбиты, а средняя ось – по касательной к орбите.

При этом помимо условий (3.2), определяющих область необходимых и достаточных условий устойчивости, необходимые условия устойчивости содержат еще дополнительные условия, определяющие область, в которой выполняются **только** необходимые условия устойчивости, где реализуется гироскопическая стабилизация. Такая устойчивость является временной и разрушается диссипативными силами, пропорциональными угловым скоростям  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ .

#### 4. Регулярная прецессия симметричного спутника на круговой орбите.

Задача о регулярных прецессиях симметричного спутника на круговой орбите хорошо изучена (см., например, [6,9,15-17])

Пусть  $OXYZ$  – орбитальная система координат с началом в центре масс спутника, и осью  $OZ$ , направленной по радиус-вектору орбиты и осью  $OY$ , направленной по нормали к плоскости орбиты. Система  $Oxyz$  жестко связана со спутником, ось  $Oz$  совпадает с осью динамической симметрии спутника. Исследование стационарных движений спутника удобней вести в углах Эйлера, которые введены следующим образом. Угол  $\vartheta$  между осями  $OZ$  и  $Oz$ ; угол  $\psi$  отсчитывается в плоскости  $OXY$  от оси  $OX$  до линии узлов;  $\dot{\psi}$  – угловая скорость прецессии;  $\varphi$  – угол собственного вращения.

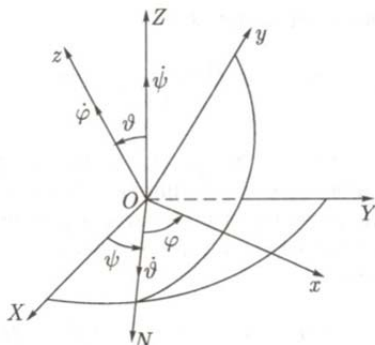


Рис.1

Соответствующие этим углам обобщенные импульсы имеют вид

$$p_g = \frac{\partial T}{\partial \dot{g}}, p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}, p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$$

Здесь  $T = \frac{1}{2}[Ap^2 + Aq^2 + Cr^2]$  – кинетическая энергия спутника,  $A$ ,  $A$ ,  $C$  – главные центральные моменты инерции спутника относительно осей  $Oxyz$ ,  $p, q, r$  – проекции абсолютной угловой скорости на оси  $Oxyz$ .

Координата  $\varphi$  является циклической, и ей отвечает циклический интеграл  $p_\varphi = \text{const}$  или  $Cr = Cr_0$ .

Введем безразмерные переменные

$$\tau = \omega_0 t, \bar{p}_g = \frac{p_g}{A\omega_0}, \bar{p}_\psi = \frac{p_\psi}{A\omega_0}, \bar{p}_\varphi = \frac{p_\varphi}{A\omega_0}$$

Здесь  $\omega_0$  – орбитальная угловая скорость.

Далее для  $\bar{p}_g, \bar{p}_\psi, \bar{p}_\varphi$  будем пользоваться старыми обозначениями.

Выражение для гамильтониана представляется в виде [15]

$$\begin{aligned} H = & \frac{p_g^2}{2} + \frac{p_\psi^2}{2\sin^2 g} - p_\psi \left( \text{ctg } g \cos \psi + \alpha \beta \frac{\cos g}{\sin^2 g} \right) - \\ & - p_g \sin \psi + \alpha \beta \frac{\cos \psi}{\sin g} + \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 \text{ctg}^2 g + \frac{3}{2} (\alpha - 1) \cos^2 g \\ & \alpha = \frac{C}{A} \quad (0 \leq \alpha \leq 2), \quad \beta = \frac{r_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

Уравнения движения в канонических переменных имеют вид

$$\frac{dp_g}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial g}, \quad \frac{dp_\psi}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \frac{dg}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_g}, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1) полностью описывают движение оси симметрии спутника в пространстве.

Стационарные решения  $g = g_0, \psi = \psi_0, p_g = p_g^0, p_\psi = p_\psi^0$  соответствуют трем положениям равновесия оси симметрии спутника в орбитальной системе координат [9,15,16]:

$$1) \ g_0 = \frac{\pi}{2}, \cos \psi_0 = -\alpha \beta, p_g^0 = \sin \psi_0, p_\psi^0 = 0 \quad (4.2)$$

$$2) \ g_0 = \frac{\pi}{2}, \sin \psi_0 = 0, p_g^0 = 0, p_\psi^0 = 0 \quad (4.3)$$

$$3) \sin \vartheta_0 = \frac{\alpha\beta}{3\alpha-4}, \psi_0 = 0, p_g^0 = 0, p_\psi^0 = 3(\alpha-1)\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \quad (4.4)$$

Этим решениям соответствуют регулярные прецессии спутника в абсолютном пространстве. Согласно терминологии P.W. Likins [17] они носят названия: «гиперболоидальной», «цилиндрической» и «конической» прецессии соответственно.

Достаточные условия устойчивости этих режимов были получены ранее Ф.Л. Черноусько [16].

Рассмотрим необходимые условия устойчивости этих режимов.

Для решения (4.2) положим в возмущенном движении  $\vartheta = \pi/2 + x_1$ ,  $\psi = \psi_0 + x_2$ ,  $p_g = \sin \psi_0 + x_3$ ,  $p_\psi = x_4$ . Линеаризованные уравнения (4.1) имеют вид [15]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha\beta x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -3(\alpha-1)x_1 \\ \dot{x}_4 &= -x_2 - \alpha\beta x_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_4 = 0,$$

где  $a_2 = 3\alpha - 2$ ,  $a_4 = 3(\alpha-1)(1-\alpha^2\beta^2)$ .

Необходимые условия устойчивости имеют вид

$$a_2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_2^2 - 4a_4 > 0 \quad (4.6)$$

которые следует проанализировать.

Представим систему (4.5) в виде системы двух уравнений второго порядка, выразив переменные  $x_3, x_4$  через  $x_1, x_2$

$$\ddot{x}_1 - \alpha\beta\dot{x}_2 + 3(\alpha-1)x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \alpha\beta x_1 + (1-\alpha^2\beta^2)x_2 = 0 \quad (4.7)$$

Как и ранее, будем интерпретировать систему (4.7) как консервативную систему с гироскопическими силами.

Тогда при  $\alpha > 1$  ( $C > A$ ) решение (4.2) имеет вековую устойчивость (условие  $1-\alpha^2\beta^2 > 0$  всегда выполнено); при  $\alpha < 1$  ( $C < A$ ) решение неустойчиво, т.к. коэффициенты Пуанкаре имеют разные знаки. Условие  $C > A$  является достаточным условием устойчивости [16]. При таком подходе к исследованию системы уравнений анализ условий (4.6) проводить не требуется.

Рассмотрим устойчивость решения (4.3). Положим в возмущенном движении  $\vartheta = \pi/2 + x_1$ ,  $\psi = \psi_0 + x_2$ ,  $p_\vartheta = x_3$ ,  $p_\psi = x_4$ . Линеаризованные уравнения (4.1) имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_3, \quad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + x_4, \quad \dot{x}_3 = a_{31}x_1 - a_{21}x_4, \quad \dot{x}_4 = a_{42}x_2 - x_3$$

Здесь  $a_{21} = \alpha\beta - 1$ ,  $a_{31} = \alpha\beta(1 - \alpha\beta) + 3(1 - \alpha)$ ,  $a_{42} = -\alpha\beta$ .

Представим эту систему в виде системы двух уравнений второго порядка, выразив переменные  $x_3, x_4$  через  $x_1, x_2$

$$\ddot{x}_1 - (\alpha\beta - 2)\dot{x}_2 + \kappa_1 x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + (\alpha\beta - 2)x_1 + \kappa_2 x_2 = 0,$$

где  $\kappa_1 = \alpha\beta + 3\alpha - 4$ ,  $\kappa_2 = \alpha\beta - 1$ .

Условия вековой устойчивости:  $\kappa_1 > 0$ ,  $\kappa_2 > 0$ . Эти условия являются и достаточными [16].

Если  $\kappa_1 \kappa_2 < 0$ , то имеет место неустойчивость. Если  $\kappa_1 < 0, \kappa_2 < 0$ , то возможна гироскопическая стабилизация, условия которой определяются из анализа характеристического уравнения. Эта устойчивость разрушается при наличии диссипативных сил вида  $-\delta\dot{x}_1, -\delta\dot{x}_2$ .

Рассмотрим условия устойчивости «конической прецессии» – стационарного движения (4.4). Положим в возмущенном движении  $\vartheta = \vartheta_0 + x_1$ ,  $\psi = x_2$ ,  $p_\vartheta = x_3$ ,  $p_\psi = p_\psi^0 + x_4$ . Линеаризованные уравнения (4.1) имеют вид [15]

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_3, \quad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{24}x_4, \quad \dot{x}_3 = a_{31}x_1 - a_{21}x_4, \quad \dot{x}_4 = a_{42}x_2 + x_3$$

Здесь

$$a_{21} = 3(\alpha - 1) - \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0, \quad a_{24} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta_0},$$

$$a_{31} = -\operatorname{ctg}^2 \vartheta_0 - 9(\alpha - 1)(\alpha \sin^2 \vartheta_0 - 1), \quad a_{42} = 3(\alpha - 1)\sin^2 \vartheta_0 - 1$$

Представим эту систему в виде системы двух уравнений второго порядка, выразив переменные  $x_3, x_4$  через  $x_1, x_2$

$$\ddot{x}_1 + (3\alpha - 2)\sin^2 \vartheta_0 \dot{x}_2 + \kappa_1 x_1 = 0, \\ \sin^2 \vartheta_0 \ddot{x}_2 - (3\alpha - 2)\sin^2 \vartheta_0 x_1 + \kappa_2 x_2 = 0,$$

где  $\kappa_1 = (4 - 3\alpha)\cos^2 \vartheta_0$ ,  $\kappa_2 = 3(1 - \alpha)\sin^2 \vartheta_0$

Условия вековой устойчивости имеют вид  $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$  и выполняются при  $\alpha < 1$ . Это условие является и достаточным [16]. Если  $\kappa_1 \kappa_2 < 0$ , т.е.  $1 < \alpha < 4/3$ , то имеет место неустойчивость. Если  $\kappa_1 < 0$ ,  $\kappa_2 < 0$  ( $\alpha > 4/3$ ), то возможна гироскопическая стабилизация, условия

существования которой определяются из анализа характеристического уравнения системы [9,15].

### 5. Устойчивость прямолинейного движения моноцикла.

Рассмотрим механическую систему, представляющую собой модель одноколесного управляемого экипажа, движущегося по неподвижной горизонтальной плоскости [18]. Система состоит: из однородного кругового диска массы  $m_1$  и радиуса  $a$ , катящегося по плоскости без проскальзывания, твердого тела  $M_2$  (маятника), прикрепленного к центру диска  $O_1$  цилиндрическим шарниром. Пусть  $O_2$  – центр масс маятника ( $O_1O_2 = d$ ); ось  $O_1O_2$  лежит в плоскости диска и является главной осью инерции тела  $M_2$  относительно точки  $O_1$ . На этой же оси установлен однородный симметричный маховик, центр масс которого совпадает с точкой  $O_2$ ;  $m_2$  – масса тела  $M_2$  вместе с маховиком.

Обобщенными координатами, описывающими положение системы, являются:  $X, Y$  – горизонтальные координаты центра масс диска;  $\theta, \psi, \varphi$  – углы Эйлера, определяющие положение диска относительно его центра масс;  $\varphi_1$  – угол, характеризующий положение оси  $O_1O_2$  маятника относительно диска;  $\alpha$  – угол поворота маховика (ротора) по отношению к маятнику.

Рассматриваемая система представляет собой неголономную механическую систему с циклическими координатами, подробно исследованную в [18,19]. Покажем, что указанный подход к анализу линеаризованных в окрестности стационарных движений уравнений движения и здесь позволяет уточнить выводы о характере устойчивости.

Среди стационарных движений системы имеет место прямолинейное качение вертикального диска с постоянной скоростью центра диска  $V = \omega a$ , при этом центр масс тела  $M_2$  находится на одной вертикали с точкой  $O_1$ , а ротор вращается с постоянной угловой скоростью. Это стационарное движение описывается следующими соотношениями  $\varphi_1 = \varphi_{10}$ ,  $\theta = 0$ ,  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\psi} = \dot{\theta} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \omega$ ,  $\dot{\alpha} = \Omega_r$ . Линеаризованные в окрестности стационарного движения уравнения возмущенного движения имеют вид [18,19]

$$\begin{aligned} W_{11}\ddot{x} + W_{12}\dot{y} + V_{11}\dot{x} + K_{11}x + Py &= 0 \\ W_{21}\ddot{x} + W_{22}\dot{y} + V_{21}\dot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $x = (x_1 x_2)^T$  – вектор возмущений позиционных координат  $x_1 = \varphi_1 - \varphi_{10}$ ,  $x_2 = \theta$ ;  $y = (y_1 y_2 y_3)^T$  – вектор возмущений циклических скоростей  $y_1 = \dot{\varphi} - \omega$ ,  $y_2 = \dot{\psi}$ ,  $y_3 = \dot{\alpha} - \Omega_r$ .

$$W_{11} = \begin{vmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{vmatrix}, \quad W_{12} = W_{21}^T = \begin{vmatrix} w_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad W_{22} = \begin{vmatrix} w_{33} & 0 & 0 \\ 0 & w_{44} & w_{45} \\ 0 & w_{45} & w_{55} \end{vmatrix},$$

$$V_{11} = \begin{vmatrix} 0 & v_{12} \\ -v_{12} & 0 \end{vmatrix}, \quad V_{21}^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{42} & 0 \end{vmatrix}, \quad K_{11} = \begin{vmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \end{vmatrix}$$

$$w_{11} = C_1 + m_2 d^2, \quad w_{22} = A + A_1 + m_1 a^2 + m_2 (a + d\varepsilon)^2,$$

$$w_{13} = m_2 a d \varepsilon, \quad w_{33} = C + (m_1 + m_2) a^2, \quad w_{44} = (A + B_1)$$

$$w_{45} = w_{54} = \varepsilon I, \quad w_{55} = I, \quad v_{12} = \varepsilon I \Omega_r, \quad v_{42} = C \omega, \quad k_{11} = -m_2 g d \varepsilon,$$

$$k_{22} = -[(m_1 + m_2) a + m_2 d \varepsilon] g, \quad p_{22} = -\omega [C + (m_1 + m_2) a^2 + m_2 a d \varepsilon];$$

Здесь  $A = B$ ,  $C$  – главные центральные моменты инерции диска относительно диаметра и оси, перпендикулярной плоскости диска;  $B_1$ ,  $A_1$ ,  $C_1$  – главные центральные моменты инерции тела  $M_2$  (вместе с закрепленным на нем ротором) относительно точки  $O_2$ , а  $I$  – момент инерции ротора,  $\varepsilon = +1$ , если  $\varphi_{10} = 0$ , и  $\varepsilon = -1$ , если  $\varphi_{10} = \pi$  (предполагается, что  $a - d > 0$ ).

Исключая возмущения циклических скоростей  $y_k$  из уравнений (5.1), получим

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{11} \ddot{x}_1 + v_{12} \dot{x}_2 + k_{11} x_1 &= 0, & w_{22} \ddot{x}_1 - v_{12} \dot{x}_2 + \tilde{k}_{22} x_1 &= 0 \\ \tilde{w}_{11} &= w_{11} - \frac{w_{13}^2}{w_{33}}, \quad \tilde{k}_{22} = k_{22} - \frac{P_{22} v_{42}}{\tilde{w}_{44}}, \quad \tilde{w}_{44} = w_{44} - \frac{w_{45}^2}{w_{55}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Систему (5.2), как и выше, можно трактовать как систему с потенциальными и гироскопическими силами. Если  $k_{11} > 0$ ,  $\tilde{k}_{22} > 0$ , то имеет место вековая устойчивость, если  $k_{11} \tilde{k}_{22} < 0$ , то система неустойчива. Эти выводы справедливы независимо от наличия гироскопических сил. Если  $k_{11} \tilde{k}_{22} > 0$ , то степень неустойчивости четная, и возможна гироскопическая стабилизация.

Для параметров данной задачи эти выводы приводят к следующим результатам [18, 19].

Если  $\varepsilon = -1$ , т.е. центр масс маятника находится ниже центра диска, то при достаточно большой скорости центра диска  $V > V_{1*} = \omega_{1*} a$ ,  $\omega_{1*}^2 = \frac{(A + B_1 - I)[m_1 a + m_2(a - d)]}{C[C + m_1 a^2 + m_2 a(a - d)]} g$ , имеет место вековая устойчивость; при  $V < V_{1*}$  система неустойчива.

Если  $\varepsilon = +1$  (центр масс маятника выше центра диска), то  $k_{11} < 0$ . Тогда при  $\tilde{k}_{22} < 0$ , т.е. при достаточно малой скорости центра диска  $V < V_{2*} = \omega_{2*} a$ ,  $\omega_{2*}^2 = \frac{(A + B_1 - I)[m_1 a + m_2(a + d)]}{C[C + m_1 a^2 + m_2 a(a + d)]} g$ , в системе при достаточно большой скорости вращения ротора реализуется гироскопическая стабилизация; система является неустойчивой при  $\omega^2 > \omega_{2*}^2$ .

**Замечание.** Во всех рассмотренных задачах после перехода к системам второго порядка получаются механические системы с двумя степенями свободы вида

$$\begin{aligned} A_1 \ddot{x}_1 + D_1 \dot{x}_1 + G \ddot{x}_2 + K_1 x_1 &= 0 \\ A_2 \ddot{x}_2 + D_2 \dot{x}_2 - G \ddot{x}_1 + K_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Здесь введены дополнительно диссипативные силы  $D_i \dot{x}_i$ ,  $D_i > 0$ .

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$$

$$\begin{aligned} a_0 &= A_1 A_2, a_1 = A_1 D_2 + A_2 D_1, a_2 = A_1 K_2 + A_2 K_1 + D_1 D_2 + G^2, \\ a_3 &= K_1 D_2 + K_2 D_1, a_4 = K_1 K_2 \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости:

$$a_i > 0, (i = 1, \dots, 4), a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0$$

Если обе степени свободы системы (в отсутствии диссипативных сил) неустойчивы, т.е.  $K_1 < 0, K_2 < 0$ , то введение диссипативных сил в этом случае всегда приводит к неустойчивости, т.к. необходимые условия устойчивости нарушаются ( $a_1 > 0, a_3 < 0$ ) [4].

**Выводы.** Таким образом, предложенный подход к рассмотрению линеаризованных уравнений движения некоторых механических систем может оказаться полезным и методически оправданным, так как позволяет делать более точные выводы о характере устойчивости. Изложенные выше соображения могли бы быть полезными при чтении курса теоретической механики и специальных курсов.

## Литература



1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т.2. М.: Физматгиз, 1960. – 487с.
2. *Жуковский Н.Е.* О прочности движения. Собр. соч., Т.1. ОГИЗ, 1948.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.
4. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения. Т.1. М.: ИЛ, 1952. – 351 с.
5. *Румянцев В.В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. // ПММ. Т.20. 1956. Вып.1. С.51-66.
6. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. – 526 с.
7. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. – с.168.
8. *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кузусев Е.И., Трецев Д.В.* Теоретическая механика. Учебник. М.: Изд-во «Академия», 2010. – 432с.
9. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. – 416с.
10. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. – 344с.
11. Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. Под ред. С.Ф. Сингера. М.: Наука, 1966. – 452 с.
12. *Меркин Д.Р., Смольников Б.А.* Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. – 536 с.
13. *Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П.* Лекции по теории гироскопов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
14. *Николай Е.Л.* Теория гироскопов. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. – 173 с.
15. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. – 308 с.
16. *Черноусько Ф.Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника. // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 21. С. 153-157.
17. *Likins P.W.* Stability of symmetrical satellite in attitude fixed in an orbiting reference frame. // J. Astronaut. Sci. 1965. V. 12. №1. P. 18-24.
18. *Каленова В.И., Морозов В.М., Шевелева Е.Н.* Устойчивость и стабилизация движения одноколесного велосипеда. // Изв. РАН МТТ. 2001. №4. С. 49-58.
19. *Каленова В.И., Морозов В.М.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголомомных систем Чаплыгина. // ПММ. Т. 66. 2002. Вып. 2. С. 192-199.

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТОВ

Рассматриваются конечные повороты твердого тела с неподвижной точкой. Ориентация оси конечного поворота и угол поворота определены с помощью одной теоремы косинусов для сферического треугольника.

Пусть твердое тело совершает сферическое движение относительно точки  $O$  (рис.1). Введем неподвижную систему координат  $Oxyz$  и систему координат  $x_1y_1z_1$ , связанную с твердым телом. Ориентация системы  $Ox_1y_1z_1$  относительно системы  $Oxyz$  определяется таблицей направляющих косинусов

	$x$	$y$	$z$
$x_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$y_1$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$z_1$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

В исходном положении подвижная система совпадает с неподвижной. Затем она перемещается в другое положение в соответствии с таблицей направляющих косинусов.

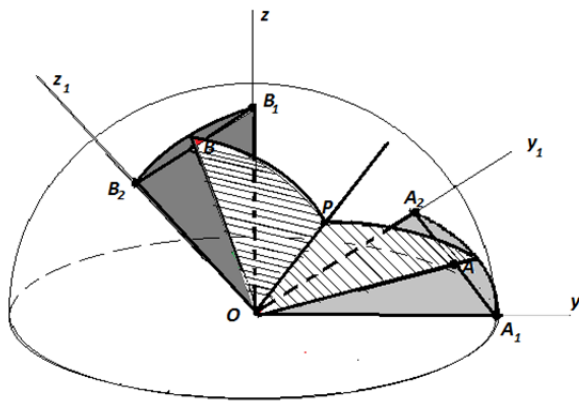


Рис.1

Согласно теореме Эйлера-Даламбера это перемещение можно осуществить с помощью одного поворота. Необходимо определить ориентацию оси конечного поворота и угол поворота вокруг этой оси.

Опишем вокруг точки  $O$  сферу единичного радиуса (на рис. 1 показана половина сферы). Точки пересечения осей  $y, z$  и  $y_1, z_1$  с поверхностью сферы обозначим буквами  $A_1, A_2, B_1, B_2$ . Оси  $x$  и  $x_1$  для дальнейшего не понадобятся. После поворота на некоторый угол, определяемый ниже, точка  $A_1$  переходит в точку  $A_2$ , а точка  $B_1$  переходит в точку  $B_2$ . Эти точки имеют следующие координаты в системе  $x y z$

$$A_1(0,1,0); A_2(a_{21}, a_{22}, a_{23}); B_1(0,0,1); B_2(a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

Проведем плоскости  $OA_1A_2$  и  $OB_1B_2$ . Точки  $A$  и  $B$  на рис.1 являются серединами отрезков  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$ .

Через прямую  $OA$  проведем плоскость  $OAP$ , перпендикулярную плоскости  $OA_1A_2$ , а через прямую  $OB$  плоскость,  $OBP$ , перпендикулярную плоскости  $OB_1B_2$ .

Плоскость  $OAP$  является геометрическим местом точек, равноудаленных от точек  $A_1$  и  $A_2$ , а плоскость  $OBP$  является геометрическим местом точек, равноудаленных от точек  $B_1$  и  $B_2$ . Следовательно, ось конечного поворота является линией пересечения указанных плоскостей.

Задача состоит в том, чтобы, зная таблицу направляющих косинусов, определить угол конечного поворота и ориентацию оси конечного поворота. Эта задача решена А.Ю. Ишлинским и помещена в его монографии в 1976 году [1].

По нашему мнению метод, используемый А.Ю. Ишлинским, является достаточно сложным, и мы предлагаем другой вывод, основанный только на одной формуле сферической тригонометрии [2].

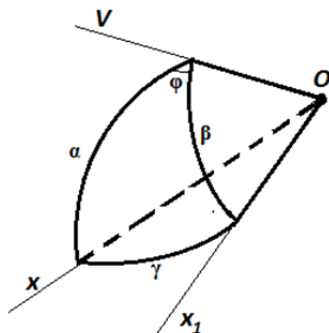


Рис. 2

Сначала найдем угол конечного поворота. Для этого изобразим ось конечного поворота  $V$ , оси  $x$  и  $x_1$  и пересечение этих осей со сферой единичного радиуса (рис.2).

На рис. 2  $\phi$  – угол между плоскостями  $OVX$  и  $OVX_1$ , т.е. угол конечного поворота  $\alpha$  – угол между осью  $x$  и осью конечного поворота,  $\beta$  – угол между осью  $x_1$  и осью конечного поворота,  $\gamma$  – угол между осями  $x$  и  $x_1$ .

Одна из теорем косинусов для сферического треугольника имеет вид [2]

$$\cos \phi \sin \alpha \sin \beta = \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta.$$

В данном случае

$$\cos \gamma = a_{11}; \quad \cos \alpha = \ell; \quad \cos \beta = \ell.$$

В соответствии с этим

$$(1 - \ell^2) \cos \phi = a_{11} - \ell^2. \quad (1)$$

Если вместо осей  $x, x_1$  взять оси  $y, y_1$  и  $z, z_1$ , то получим еще две формулы:

$$(1 - m^2) \cos \phi = a_{22} - m^2. \quad (2)$$

$$(1 - n^2) \cos \phi = a_{33} - n^2. \quad (3)$$

Далее сложим формулы (1), (2) и (3) и с учетом того, что

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

получим формулу для косинуса угла конечного поворота:

$$\cos \phi = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1) \quad (4)$$

Эта формула полностью совпадает с формулой в монографии [1].

Далее находим направляющие косинусы  $\ell, m, n$  оси конечного поворота. Из формулы (1) находим  $\ell$ , из формулы (2) находим  $m$ , а из формулы (3) находим  $n$ . В результате получим

$$\ell = \sqrt{\frac{a_{11} - \cos \phi}{1 - \cos \phi}}; \quad m = \sqrt{\frac{a_{22} - \cos \phi}{1 - \cos \phi}}; \quad n = \sqrt{\frac{a_{33} - \cos \phi}{1 - \cos \phi}}. \quad (5)$$

Вид этих формул не совпадает с формулами А.Ю. Ишлинского. Особенностью полученных формул является то, что для описания конечного поворота нужно знать не девять, а только три направляющих косинуса.

Формулы А.Ю. Ишлинского имеют вид [1]

$$\ell = \frac{a_{23} - a_{32}}{2 \sin \phi}; \quad m = \frac{a_{31} - a_{13}}{2 \sin \phi}; \quad n = \frac{a_{12} - a_{21}}{2 \sin \phi}. \quad (6)$$

Докажем, что формулы (5) и (6) тождественны. С этой целью выполним преобразования для одного из направляющих косинусов (5).

$$\begin{aligned}\ell &= \sqrt{\frac{a_{11} - \cos \phi}{1 - \cos \phi}} = \sqrt{\frac{2(a_{11} - \cos \phi) \cdot 2(1 + \cos \phi)}{4(1 - \cos \phi)(1 + \cos \phi)}} = \\ &= \frac{\sqrt{(2a_{11} - 2 \cos \phi)(2 + 2 \cos \phi)}}{2 \sin \phi}.\end{aligned}\quad (7)$$

Преобразуем круглые скобки в числителе дроби (7) с учетом равенства (4). В результате получим

$$(2a_{11} - 2 \cos \phi) = (1 + a_{11}) - (a_{22} + a_{33});$$

$$(2 + 2 \cos \phi) = (1 + a_{11}) + (a_{22} + a_{33}).$$

В соответствии с этим подкоренное выражение формулы (7) принимает вид

$$(2a_{11} - 2 \cos \phi)(2 + 2 \cos \phi) = (1 + a_{11})^2 - (a_{22} + a_{33})^2. \quad (8)$$

Запишем теперь таблицу направляющих косинусов, выраженных через углы Эйлера [3]

$$\|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} \cos \phi \cos \varphi - \sin \phi \sin \varphi \cos \vartheta & \cos \phi \sin \varphi + \sin \phi \cos \varphi \cos \vartheta & \sin \phi \sin \vartheta \\ -\sin \phi \cos \varphi - \cos \phi \sin \varphi \cos \vartheta & -\sin \phi \sin \varphi + \cos \phi \cos \varphi \cos \vartheta & \cos \phi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & -\cos \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{vmatrix},$$

и подставим диагональные элементы таблицы в формулу (8). После элементарных преобразований имеем

$$(2a_{11} - 2 \cos \phi)(2 + 2 \cos \phi) = (\cos \phi \sin \vartheta + \cos \varphi \sin \vartheta)^2 = (a_{23} - a_{32})^2$$

Таким образом, формула (7) приводится к виду

$$\ell = \frac{a_{23} - a_{32}}{2 \sin \phi},$$

т.е. она совпадает с первой формулой (6). Понятно, что остальные формулы получаются с помощью круговой перестановки индексов.

## Литература

1. А.Ю. Ишлинский. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: «Наука», 1976. – 672 с.
2. М.К. Венцель. Сферическая тригонометрия. М.: Гостехиздат, 1948. – 154 с.
3. А.И. Лурье. Аналитическая механика. М.: «Физматгиз», 1961. – 824 с.

УДК 531.01

*А.Я. Красинский<sup>1</sup>, Э.М. Красинская<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Московский авиационный институт, Московский государственный университет  
пищевых производств

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

## **О ДОПУСТИМОСТИ ЛИНЕАРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ РАВНОВЕСИЙ**

**1. Введение.** Во многих задачах современной технической практики (в частности, управления многозвенными манипуляторами и другими мехатронными системами) в силу устройства системы на ее координаты накладываются геометрические связи. Аналитические соотношения, выражающие эти связи, зачастую содержат тригонометрические функции, что чрезвычайно затрудняет выражение одних координат через другие. Сохранение зависимых координат делает невозможным применение уравнений Лагранжа второго рода, так как при их выводе предполагается введение независимых обобщенных координат, вариации которых будут также независимы. Для систем с геометрическими связями можно пользоваться уравнениями Лагранжа первого рода в декартовых координатах или уравнениями Лагранжа с множителями связей в избыточных криволинейных координатах [1-3].

Другое направления предполагает исключение множителей, которое может быть выполнено различными способами [1-6]. Как показано в [7], одним из наиболее простых способов получения свободных от множителей связей уравнений движения систем в избыточных криволинейных координатах является подход, предложенный М.Ф. Шульгиным [1]. Уравнения М.Ф. Шульгина не содержат неизвестных множителей связей, не требуют их определения и поэтому являются удобными для исследования вопросов устойчивости. Процедура их получения основана на исключении из кинетической энергии зависимых скоростей с помощью продифференцированных уравнений связей. Уравнения Шульгина являются частным случаем уравнений П.В. Воронца [8,9] для неголономных систем в случае интегрируемости кинематических связей. Этим они выгодно отличаются от не содержащих множителей связей уравнений в избыточных координатах в

форме А.И. Лурье ([2], стр. 320, уравнения (7.10.9)) (ср. также [4-6], где приведены другие формы уравнений систем с избыточными координатами).

Выбор именно этой формы уравнений позволяет [7,10] легко выделить нулевые корни характеристического уравнения системы первого приближения (из-за наличия кинематических связей) и, тем самым, показать, что устойчивость установившихся движений систем с избыточными координатами возможна лишь в критических случаях [11-14]. Кроме того, для таких систем оказывается возможным применение ранее полученных результатов, основанных на систематическом использовании векторно-матричных уравнений возмущенного движения с выделенным первым приближением [15-21] и применении теории критических (в том числе и особенных) случаев [11-14].

То обстоятельство, что устойчивость равновесий систем с геометрическими связями возможна лишь в критических случаях, приводит, вообще говоря, к необходимости анализа нелинейных членов уравнений возмущенного движения, в том числе и в продифференцированных уравнениях связей. Переход к линеаризованным уравнениям связей (и исключению с их помощью зависимых координат) в общем случае некорректен (ср. [22]). Однако при использовании разрабатываемого [9,10,15-21] метода решения задач стабилизации сведением к простейшему случаю устойчивости (когда число нулевых корней равно числу геометрических связей) выявились [7] ситуации, в которых первое приближение уравнений возмущенного движения управляемой подсистемы, полученное строгими методами нелинейной теории устойчивости, в точности совпадает с первым приближением уравнений возмущенного движения системы меньшей размерности, полученной за счет линеаризации не дифференцированных уравнений геометрических связей. Особо следует отметить, что эти последние уравнения выводятся из уравнений Лагранжа второго рода для системы меньшей размерности с исключенными из рассмотрения за счет линеаризации связей зависимыми координатами. Другими словами, некорректное в общем случае применение уравнений Лагранжа второго рода к системам с геометрическими связями в определенных условиях может дать правильное заключение об устойчивости.

Возникает необходимость уточнения этих условий, при которых переход к линеаризованным уравнениям связей и, следовательно, к системе уравнений меньшей на число связей размерности дает возможность сделать обоснованное заключение об устойчивости. Для получения таких условий проведем формальное рассмотрение задачи.

**2. Уравнения М.Ф. Шульгина.** Применим метод Шульгина к самой общей ситуации, когда на механическую систему с  $n$  степенями свободы, конфигурация которой определяется параметрами  $q_1, \dots, q_n, \dots, q_{n+m}$ , наложены  $m$  независимых соотношений – геометрических связей

$$F_k(q_1, \dots, q_{n+m}) = 0, \quad k = \overline{1, m}; \quad \text{rank} \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_1, \dots, q_n, \dots, q_{n+m})} = m \quad (1)$$

кинетическая энергия которой имеет самый общий вид

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = \frac{1}{2} \sum_{\rho, \nu=1}^{n+m} \tilde{a}_{\rho\nu}(q) \dot{q}_\rho \dot{q}_\nu + \sum_{\rho=1}^{n+m} \tilde{a}_\rho(q) \dot{q}_\rho + T_0(q)$$

и на систему действуют не только потенциальные силы с энергией  $\Pi(q)$ , но и непотенциальные силы  $\tilde{Q}_i, \tilde{Q}_\mu$ , соответствующие координатам  $q_i, q_\mu$  при их избыточном введении. Предположим, что кинетическая и потенциальная энергии, связи (1), а также непотенциальные силы в некоторой открытой области фазового пространства являются аналитическими функциями своих аргументов, причем кинетическая энергия системы – определенно-положительная функция скоростей.

Дифференцируя по времени уравнения геометрических связей (1) и предполагая

$$\det \left[ \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_{n+1}, \dots, q_{n+m})} \right] \neq 0,$$

т.е. разрешимость полученных линейных дифференциальных связей относительно  $m$  последних – зависимых скоростей, получим кинематические связи в виде

$$\begin{aligned} \dot{q}_\mu &= \sum_{j=1}^n B_{\mu j}(q_1, \dots, q_{n+m}) \dot{q}_j; \quad \mu = \overline{n+1, n+m}; \\ B_{\mu j}(q_1, \dots, q_{n+m}) &= - \left[ \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_{n+1}, \dots, q_{n+m})} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Исключая с помощью (2) зависимые скорости, для кинетической энергии будем иметь

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2} a_{s\rho}(q) \dot{q}_s \dot{q}_\rho + d_s(q) \dot{q}_s + T_0(q) = T_2^* + T_1^* + T_0(q) \\ a_{s\rho}(q) &= \tilde{a}_{s\rho} + \tilde{a}_{\mu s} B_{\mu\rho} + \tilde{a}_{\mu\rho} B_{\mu s} + \tilde{a}_{\mu\sigma} B_{\mu\rho} B_{\sigma s}, \quad d_s(q) = \tilde{a}_s + \tilde{a}_\mu B_{\mu s} \end{aligned} \quad (3)$$



Здесь и далее по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование. Индексы  $\overline{\rho, \nu} = 1, n + m$ ,  $\overline{i, j, s} = 1, n$ ,  $\overline{\mu, k} = n + 1, n + m$ . Через  $Q_\rho(q, \dot{q})$  будем обозначать непотенциальные силы после исключения зависимых скоростей.

Из принципа Даламбера-Лагранжа с использованием (3) можно получить уравнения движения системы в избыточных координатах в форме М.Ф. Шульгина

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - B_{\mu j}(q_1, \dots, q_{n+m}) \left( \frac{\partial T^*}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \right) = \\ = Q_j + B_{\mu j}(q_1, \dots, q_{n+m}) Q_\mu. \quad j = 1, n \end{aligned} \quad (4)$$

Или в явной форме

$$\begin{aligned} a_{is} \ddot{q}_s + \frac{\partial a_{is}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_s \dot{q}_j + \frac{\partial a_{is}}{\partial q_\mu} B_{\mu \rho} \dot{q}_s \dot{q}_\rho - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{s\rho}}{\partial q_i} \dot{q}_s \dot{q}_\rho - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{s\rho}}{\partial q_\mu} B_{\mu i} \dot{q}_s \dot{q}_\rho + \\ + \left( \frac{\partial d_i}{\partial q_s} - \frac{\partial d_s}{\partial q_i} + B_{\mu s} \frac{\partial d_i}{\partial q_\mu} - B_{\mu i} \frac{\partial d_s}{\partial q_\mu} \right) \dot{q}_s + \frac{\partial W}{\partial q_i} + B_{\mu i} \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = Q_i + B_{\mu i} Q_\mu \\ \dot{q}_\mu = B_{\mu i} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (5)$$

Через  $W(q) = \Pi(q) - T_0(q)$  обозначена измененная (приведенная) потенциальная энергия.

**3. Уравнения равновесия. Структура уравнений возмущенного движения в окрестности равновесия.** Пусть система допускает положение равновесия.

$$q_i = q_{i0}, \quad q_\mu = q_{\mu 0}; \quad F_\mu(q_0) = 0 \quad (6)$$

Уравнения равновесия можно получить из уравнений (5), полагая все  $\dot{q} = 0$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} + B_{\mu i} \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = Q_{i(\dot{q}=0)} + (B_{\mu i} Q_\mu)_{(\dot{q}=0)} \quad (7)$$

Из уравнений (7) следует, что потенциальные и непотенциальные позиционные силы могут содержать постоянные ненулевые члены (нуль в нижнем индексе означает, что выражение в скобках вычислено в равновесии (6)):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)_0 = l_i \neq 0, \left(\frac{\partial W}{\partial q_\mu}\right)_0 = l_\mu \neq 0, Q_i(q_0) = \nu_i \neq 0, Q_\mu(q_0) = \nu_\mu \neq 0, \quad (8)$$

$$l_i + B_{\mu i}(q_0)l_\mu = \nu_i + B_{\mu i}(q_0)\nu_\mu$$

Введем возмущения, матрицы коэффициентов в линейных членах разложения действующих сил в окрестности (6) и запишем уравнения возмущенного движения с выделенным первым приближением (цифра в скобках в верхнем индексе означает порядок младших членов в разложении соответствующего выражения):

$$\begin{aligned} q_{i0} &= q_{i0} + x_i, q_\mu = q_{\mu 0} + y_\mu \\ \frac{\partial W}{\partial q_i}(x, y) &= l_i + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_s}\right)_0 x_s + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_\sigma}\right) y_\mu + \dots \\ \tilde{Q}_i &= \nu_i + f_{is} \dot{x}_s + f_{ik} \dot{y}_k + p_{is} x_s + p_{ik} y_k + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial q_\mu}(x, y) &= l_\mu + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_\mu \partial q_s}\right)_0 x_s + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_\mu \partial q_\sigma}\right) y_\sigma + \dots \\ \tilde{Q}_\mu &= \nu_\mu + f_{\mu s} \dot{x}_s + f_{\mu k} \dot{y}_k + p_{\mu s} x_s + p_{\mu k} y_k + \dots \\ a_{is}(0)\ddot{x}_s &+ \left[ \left(\frac{\partial d_i}{\partial q_s}\right)_0 - \left(\frac{\partial d_s}{\partial q_i}\right)_0 + B_{\mu s}(0) \left(\frac{\partial d_i}{\partial q_\mu}\right)_0 - \left(\frac{\partial d_s}{\partial q_\mu}\right)_0 B_{\mu i}(0) \right] \dot{x}_s + \\ &+ \left[ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_s}\right)_0 + B_{\mu i}(0) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_\mu \partial q_s}\right)_0 + l_\mu \left(\frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_s}\right)_0 \right] x_s + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 y_k + \\ &+ B_{\mu i}(0) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_\mu}\right)_0 y_k + l_\mu \left(\frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_k}\right)_0 y_k = (f_{is} + f_{ik} B_{ks}) \dot{x}_s \\ &+ p_{is} x_s + p_{ik} y_k + B_{\mu i}(0) \left( (f_{\mu s} + f_{\mu k} B_{ks}) \dot{x}_s + p_{\mu s} x_s + p_{\mu k} y_k \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_s}\right)_0 \nu_\mu x_s + \left(\frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_k}\right)_0 y_k + X_i^{(2)}(\dot{x}, x, y) \\ \dot{y}_k &= B_{jk}(0) \dot{x}_k + B_{jk}^{(1)}(x, y) \dot{x}_k; \\ B_{jk}^{(1)}(x, y) &= B_{jk}(q_{i0} + x, q_{\mu 0} + y) - B_{jk}(q_{i0}, q_{\mu 0}); \\ B_{jk}(q_{i0}, q_{\mu 0}) &= B_{jk}(0) \end{aligned} \quad (10)$$

Для выделения нулевых корней характеристического уравнения проведем в системе (9), (10) линейную замену [7,8,10,15,21]

$$z_k = y_k - B_{kj}(0)x_j \quad (11)$$

после которой будем иметь (штрих означает транспонирование)

$$\begin{aligned} A\ddot{x} + (G - D)\dot{x} + (C_1 + C_2B + B^1C_3 + B^1C_4B + C^B - P)x + Zz = \\ = X^{(2)}(\dot{x}, x, z + B(0)x) \end{aligned} \quad (12)$$

$$D = \|f_{ij} + f_{i\mu}B_{\mu i} + f_{\mu i}B_{\mu j} + f_{\mu i}B_{\mu k}B_{kj}\|;$$

$$P = \|p_{ij} + p_{i\mu}B_{\mu i} + B_{\mu j}p_{\mu j} + B_{\mu i}p_{\mu k}B_{kj}\|$$

$$A = \|a_{ij}(0)\|; \quad G = \|g_{is}(0)\|; \quad C_1 = \left\| \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_s} \right)_0 \right\|; \quad C_2 = \left\| \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_\mu} \right)_0 \right\|;$$

$$C_4 = \left\| \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_\mu \partial q_\sigma} \right)_0 \right\|; \quad C_3 = C_2'; \quad B = \|B_{\mu i}(0)\|;$$

$$C^B = \left\| \left( l_\mu - \nu_\mu \right) \left[ \left( \frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_s} \right)_0 + \left( \frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_k} \right)_0 B_{ks}(0) \right] \right\|;$$

$$x' = (x_1, \dots, x_n); \quad y' = (y_{n+1}, \dots, y_{n+m})$$

$$g_{is}(0) = \left[ \left( \frac{\partial d_i}{\partial q_s} \right)_0 - \left( \frac{\partial d_s}{\partial q_i} \right)_0 + B_{\mu s}(0) \left( \frac{\partial d_i}{\partial q_\mu} \right)_0 - \left( \frac{\partial d_s}{\partial q_\mu} \right)_0 B_{\mu i}(0) \right];$$

$$Z = \left\| \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 + B_{\mu i}(0) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_\mu} \right)_0 + l_\mu \left( \frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_k} \right)_0 - p_{ik} - B_{\mu i}(0) p_{\mu k} - \nu_\mu \left( \frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_k} \right)_0 \right\|$$

Отсюда следует, что в общем случае в уравнениях возмущенного движения, определяющих ненулевые корни характеристического уравнения, содержатся линейные по возмущениям координат члены с матрицей  $C^B$ , зависящей от коэффициентов линейных членов в разложении коэффициентов уравнений кинематических связей. При этом, очевидно, окончательный вид этой матрицы существенно связан с заменой (11), причем ее компоненты не могут быть получены при линеаризации геометрических связей.

**Вывод:** нельзя линеаризовать геометрические связи и переходить к уравнениям Лагранжа второго рода за счет исключения зависимых координат, если в положении равновесия потенциальные или непотенциальные силы (8) отличны от нуля, причем выполнено

$$\left( \frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_s} \right)_0 \neq 0, \quad \left( \frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_k} \right)_0 \neq 0 \quad (13)$$

Если хотя бы одна компонента матрицы  $C^B$  отлична от нуля, требуется строгое рассмотрение задачи, при этом правильная окончательная структура первого приближения может быть получена только после проведения замены (11).

**Пример.** В [7,10,21,22] рассматривается задача стабилизации равновесия системы BALL&BEAM.

Устройство Ball & Beam состоит из двух взаимосвязанных частей – механической части и управляемого электропривода. Для описания механической части введем три координаты  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $r$ . Одна из них является избыточной, так как на систему наложена геометрическая связь, заключающаяся в том, что расстояние между точками  $A$  и  $B$  постоянно:  $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2$ . Аналитически эта связь выражается нелинейным тригонометрическим уравнением

$$(L(\cos \alpha - 1) + d(1 - \cos \theta))^2 + (L \sin \alpha + l - d \sin \theta)^2 = l^2 \quad (14)$$

где  $OA = L$ ,  $AB = l$ ,  $d$  – радиус колеса. В системе GBB 1005 при  $\alpha = 0$  и  $\theta = 0$ , рычаг  $AB$  вертикален. В большинстве работ (см., напр. [22]) по исследованию динамики систем такой конструкции применяется одна и та же необоснованно упрощенная модель – вместо полной нелинейной связи принимается линейная зависимость между углами  $\alpha = \theta d/L$ . В то же время применение уравнений Шульгина дает возможность построить строгую нелинейную модель [7,10,21] механической компоненты этого мехатронного стенда

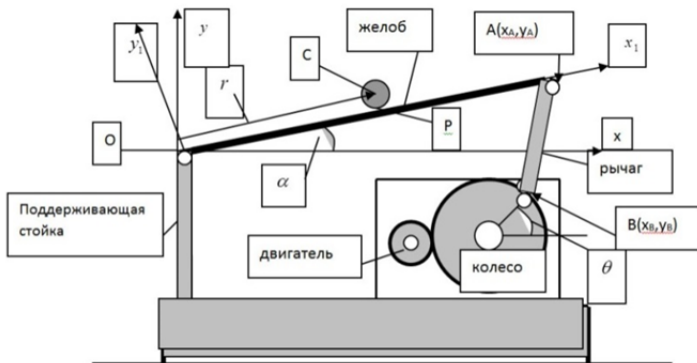


Рис. 1.

Рассмотрим случай [21], когда за избыточную координату принят угол поворота колеса  $\theta$ , а за координату, определяющую положение шарика  $r = OC$ . Для механической части системы, включающей шар и ротор двигателя с редуктором, кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2, \quad \Pi = mg\left(\sqrt{r^2 - R^2} \sin \alpha + R \cos \alpha\right)$$

где  $v_c$  – скорость центра масс шара. Выражение для полной угловой скорости шара относительно системы координат Кёнига с центром в точке  $C$  и с осями, параллельными неподвижным, можно получить из условия качения шарика без проскальзывания. Тогда для кинетической энергии получим выражение

$$T = \frac{m(r\dot{\alpha})^2}{2} + \frac{1}{2}m \frac{\dot{r}^2 r^2}{r^2 - R^2} - m\dot{r}\dot{\alpha} \frac{Rr}{\sqrt{r^2 - R^2}} + \frac{J}{2} \left( \frac{\dot{r}}{R} \frac{r}{\sqrt{r^2 - R^2}} - \dot{\alpha} \right)^2 + \frac{J_0\dot{\theta}^2}{2}$$

Дифференцируя связь (14), получим уравнение кинематической связи в виде

$$\dot{\theta} = \frac{L[d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha]}{d[L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta]} \dot{\alpha} = B_1(\alpha, \theta) \dot{\alpha}; \quad (15)$$

$$B_1(\alpha, \theta)_0 = \frac{L}{d}$$

Исключая из кинетической энергии зависимую скорость, получим выражение для  $T^*$ ,

$$T^* = \frac{m(r\dot{\alpha})^2}{2} + \frac{m\dot{r}^2 r^2}{2(r^2 - R^2)} - \frac{m\dot{r}\dot{\alpha}Rr}{\sqrt{r^2 - R^2}} + \frac{J}{2} \left( \frac{\dot{r}}{R} \frac{r}{\sqrt{r^2 - R^2}} - \dot{\alpha} \right)^2 + \frac{J_0 B_1^2(\alpha, \theta) \dot{\alpha}^2}{2}$$

Уравнения Шульгина при таком выборе избыточной координаты будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T^*}{\partial r} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} - B_1(\alpha, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \theta} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} + B_1(\alpha, \theta) Q_\theta \end{aligned} \quad (16)$$

где  $Q_\theta$  – сила, действующая по избыточной координате. Она содержит член  $K_2 i_\alpha$ , который можно считать механическим управляющим воздействием (представляющим собой момент, действующий со стороны якоря двигателя на колесо). Исключим зависимую скорость с помощью уравнения связи (15). Тогда уравнение Кирхгофа, описывающее динамику электропривода – двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, перейдет в уравнение

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 B_1(\alpha, \vartheta) \dot{\alpha} = K_1 e_v \quad (17)$$

А сила по избыточной координате примет вид

$$Q_\theta = K_2 i_\alpha - b_0 B_1(\alpha, \theta) \dot{\alpha}$$

Из уравнений (15), (16), (17) видно, что система допускает положения равновесия  $r_0 \neq 0$  только при ненулевом значении силы тока. Значение силы тока, обеспечивающее существование положения равновесия (ср. (7)), определяется из выражения

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} + B_1 K_2 i_\alpha = 0 \quad (18)$$

Кроме известного положения равновесия  $\theta_1 = 0$

$$r_0 \neq 0; \quad \theta_0 = 0; \quad \alpha_0 = 0; \quad i_a^0 = \frac{d \, mg \sqrt{r_0^2 - R^2}}{L \, K_2}; \quad e_v^0 = \frac{R_a i_a^0}{K_1}$$

Используемый подход позволяет рассматривать все равновесия этого стэнда, определяемые уравнениями связи (14) при  $\alpha = 0$  (что, очевидно, необходимо для равновесия шара).

$$(d(1 - \cos \theta))^2 + (l - d \sin \theta)^2 = l^2 \quad \text{или} \quad \cos \theta + \frac{l}{d} \sin \theta = 1 \quad (19)$$

Это уравнение имеет три корня:

$$\theta_1 = 0; \quad \theta_{2,3} = \arctg \frac{l}{d} \pm \arccos \frac{d}{\sqrt{l^2 + d^2}} \quad (20)$$

При этом решениям  $\theta_{2,3}$  для реальных значений параметров стэнда соответствует в реальном стэнде одна и та же конфигурация, при которой угол поворота колеса лежит во второй четверти.

Очевидно, такое положение равновесия никоим образом не может быть получено и, тем более, не может корректно исследоваться при переходе к общепринятому линейному приближению  $\alpha = \theta d/L$ .

В положении равновесия действующая по зависимой координате непотенциальная сила

$$Q_\theta = K_2 i_a^0 = \nu_\mu \neq 0 \quad (21)$$

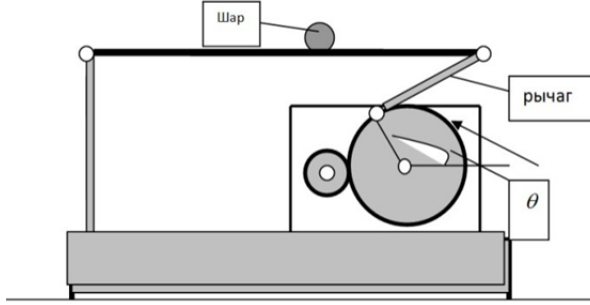


Рис. 2.

Отсюда видно принципиальное отличие структуры членов первого приближения уравнений возмущенного движения в окрестности равновесия  $\theta_{2,3} = \theta^*$  от рассмотренного в [7,10] равновесия  $\theta_1 = 0$  вследствие того, что здесь производная

$$\left( \frac{\partial B_1}{\partial \alpha} \right)_* = \frac{\sin \theta^* (\cos \theta^* - 1)(L - d) + \cos \theta^* (L \cos \theta^* - l)}{(l \cos \theta^* - d \sin \theta^*)^2} \neq 0$$

Отметим, что производная

$$\left( \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \right)_* = \frac{l(l \sin \theta^* + d \cos \theta^* - d)}{(l \cos \theta^* - d \sin \theta^*)^2} = 0$$

в силу (19) – т.е. эта производная обращается в нуль и в равновесии  $\theta_{2,3} = \theta^*$ .

Таким образом, структура уравнений возмущенного движения в окрестности равновесия  $\theta_{2,3} = \theta^*$  существенно отличается от структуры этих уравнений, рассмотренных в [7,10]. В этих работах показано полное совпадение первого приближения для системы уравнений возмущенного движения, соответствующей независимым координатам после проведения замены (11), которая в этой задаче получает вид (для равновесия  $\theta_1 = 0$ )

$$\theta = z + \frac{L}{d} \alpha$$

с первым приближением уравнений возмущенного движения, полученных из уравнений Лагранжа второго рода для системы с исключенными при помощи соотношений

$$\dot{\theta} = \frac{L}{d} \dot{\alpha}, \quad \theta = \frac{L}{d} \alpha$$

зависимой координатой и ее скоростью. Это обусловлено тем, что для  $\theta_1 = 0$  обе производные обращаются в нуль:

$$\left( \frac{\partial B_1}{\partial \alpha} \right)_0 = 0; \quad \left( \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \right)_0 = 0$$

т.е. выполнены условия, при которых матрица  $C^B = 0$ .

## Литература

1. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. / М.Ф. Шульгин // Научные труды САГУ. – Ташкент, 1958. – 183 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. / А.И. Лурье. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 824 с.
3. Суслов Г.К. Теоретическая механика. Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1946. – 656 с.
4. Ляпунов А.М. Лекции по теоретической механике. Киев: Наукова думка, 1982. – 632 с.
5. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Физматлит, 2005. – 272 с.
6. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Уравнения движения механических систем в избыточном наборе переменных. // Сборник научно-методических статей по теоретической механике, 1987. Вып.18. С. 62-66.
7. Красинская Э.М., Красинский А.Я., Обносов К.Б. О развитии научных методов школы М.Ф. Шульгина в применении к задачам устойчивости и стабилизации равновесий мехатронных систем с избыточными координатами // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. Вып. 28. Под ред. проф. Ю.Г. Мартыненко. М: Изд-во МГУ. 2012. С. 169-184.
8. Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т.6. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3-128.
9. Неймарк Ю.И., Фужаев Н.А. Динамика неголономных систем. М: Наука, 1967. – 519 с.
10. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами. // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электр. журнал. 2013. № 03. С. 347-376. DOI:10.7463/0313.0541146 (<http://technomag.edu.ru/doc/.html>).
11. Ляпунов А.М. Собрание соч. Т.2. М.–Л.: Изд. АН СССР, 1956. – 473с.
12. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Наука Москва, 1952. – 532с.
13. Каменков Г.В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. Избр. труды. Т.2. М.: Наука, 1972. – 211 с.
14. Веретенников В.Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1984. – 320 с.



15. *Красинский А.Я.* Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем // Избранные труды VIII Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2004. Электронное издание С. 97-103. <http://www.ipu.ru/semin/arhiv/stab04>.
16. *Красинская-Тюменева Э.М., Красинский А.Я.* О влиянии структуры сил на устойчивость положений равновесия неголономных систем. // Вопросы выч. и прикл. математики. Вып. 45. Ташкент. 1977. С. 172-186.
17. *Красинская Э.М.* К стабилизации стационарных движений механических систем // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 302-309.
18. *Красинский А.Я.* Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем // ПММ. 1988. Т.52. С. 194-202.
19. *Красинский А.Я.* О стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами. // ПММ. 1992. Т. 56 .С. 939-950.
20. *Красинский А.Я., Каюмова Д.Р.* О влиянии деформируемости колес на динамику робота с дифференциальным приводом. // Нелинейная динамика. 2011. Т.7. №4. С. 803-822.
21. *Красинский А.Я., Красинская Э.М.* Моделирование динамики стенда GBV 1005 BALL&BEAM как управляемой механической системы с избыточной координатой. // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электр. журнал. 2014. №. 01. с. 282-299. DOI: 10.7463/0114.0646446. <http://technomag.bmstu.ru/doc/646446.html>.
22. *Yu W.* Nonlinear PD regulation for ball and beam system // Int. J. of Electrical Engineering Education. 2009. V. 46. No. 1. P. 59-73.

## СИММЕТРИЗАЦИЯ ГАМИЛЬТониАнов

Как известно, метод гамильтоновой нормальной формы является самым мощным инструментом построения асимптотических решений нелинейных уравнений Гамильтона [1]. Гамильтониан представляется в виде степенного разложения по координатам и импульсам вблизи положения равновесия. Метод заключается в нахождении нелинейной канонической замены, максимально упрощающей первые члены степенного разложения гамильтониана, для которого потом и строится асимптотическое решение. Классический подход определения нормальной формы построен на алгебраических преобразованиях полиномиальных однородных форм [1-3]. Алгоритмы построения нормальной формы довольно громоздки и поэтому этот метод не часто применяется.

Однако, инвариантный критерий нормальной формы для автономных гамильтоновых систем позволяет осуществить полезное для асимптотического интегрирования обобщение. Соответствующее определение симметричной формы и способ её построения естественным образом вытекает из алгоритма инвариантной нормализации гамильтонианов по В.Ф. Журавлёву [4]. Симметричная форма так же, как и нормальная форма имеет дополнительный первый интеграл, что позволяет строить асимптотическое решение нелинейной гамильтоновой системы с двумя, а иногда и с тремя степенями свободы.

**1. Определение симметризации.** В методе возмущений обычно имеется порождающая система уравнений и ее возмущенная часть, содержащая малый параметр. Для гамильтоновой системы уравнений естественно представить гамильтониан в виде суммы  $H = H_0 + F$ . Первое слагаемое назовем невозмущенной частью, а второе – возмущением. Тогда порождающей системой уравнения Гамильтона является система с гамильтонианом  $H_0$ . Функции  $H_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  и  $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  произвольно зависят от времени, координат и импульсов.

**Определение.** Гамильтониан  $\bar{H} = H_0 + \bar{F}$  называется симметричной формой, если возмущение  $\bar{F}$  является первым интегралом невозмущенной части

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + H_0 * \bar{F} = 0$$

Здесь звёздочкой обозначена билинейная операция - скобки Пуассона. Для автономной гамильтоновой системы, если невозмущенная часть  $H_0$  является нормальной квадратичной формой, а возмущенная часть - рядом по однородным полиномам, начиная со степени 3, симметричная форма тождественна нормальной форме.

Преимущество симметричного гамильтониана перед другими, (также как и для нормальной формы) обусловлено тремя причинами.

**I.** Решение полной системы дифференциальных уравнений Гамильтона с симметричным гамильтонианом получается суперпозицией решений невозмущенной системы и системы с автономным гамильтонианом, равным  $F(0, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Этот факт сформулируем в виде теоремы.

**Теорема.** Если система с гамильтонианом  $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) + F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  удовлетворяет условию  $dF/dt = \partial F/\partial t + H_0 * F = 0$ , то для построения общего решения соответствующего уравнениям Гамильтона  $\dot{\mathbf{q}} = H_p$ ,  $\dot{\mathbf{p}} = -H_q$  достаточно:

**а)** найти общее решение  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, u', v')$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, u', v')$  системы  $\dot{\mathbf{q}} = \partial H_0/\partial \mathbf{p}$ ,  $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H_0/\partial \mathbf{q}$ ;

**б)** найти общее решение  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, u'', v'')$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, u'', v'')$  системы  $\dot{\mathbf{Q}} = \partial F/\partial \mathbf{P}$ ,  $\dot{\mathbf{P}} = -\partial F/\partial \mathbf{Q}$  при условии, что в этой системе явно входящее в гамильтониан время положено равным нулю:  $F(0, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ .

Тогда общее решение исходной системы с гамильтонианом  $F(0, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$  представляется композицией в произвольном порядке полученных решений (вместо произвольных постоянных  $u'', v''$  в решении второй системы подставляются решения первой  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  или, наоборот, вместо произвольных постоянных  $u', v'$  в решении первой системы подставляются решения второй  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ ).

**II.** Инвариантный характер симметричной формы позволяет осуществлять симметризацию без предварительного упрощения невозмущенной части и без разделения на случаи автономный – неавтономный, резонансный – нерезонансный.

**III.** По изложенному ниже алгоритму коэффициенты разложений симметричной формы и замены переменных находятся последовательными квадратурами от известных на каждом шаге функций.

Для автономных систем нормализацию можно провести с помощью рядов Ли по следующему алгоритму.

**2. Алгоритм симметризации с помощью производящего гамильтониана.** Пусть исходный гамильтониан имеет вид

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \varepsilon) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \varepsilon), \quad F = \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots,$$

где  $H_0$  и  $F$  – невозмущенная и возмущенная части соответственно,  $\varepsilon$  – малый параметр.

Для построения разложений по степеням  $\varepsilon$  симметризованной относительно  $H_0$  части  $\bar{F} = \varepsilon \bar{F}_1 + \varepsilon^2 \bar{F}_2 + \dots$  и генератора Ли  $G = \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + \dots$  для симметризирующей замены выполняются следующие операции.

I. Находится решение  $\mathbf{q}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$  невозмущенной системы

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{p}(0) = \mathbf{P}.$$

II. Находятся функции  $m_k(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) = M_k(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ , где для первого приближения  $M_1 = F_1$ , для второго  $M_2 = F_2 + \frac{1}{2}(F_1 + \bar{F}_1) * G_1, \dots$  выражается через  $\bar{F}_1$  и  $G_1$ , найденные в первом приближении и так далее  $M_n$  выражается через функции предыдущего приближения.

III. Обычно невозмущенная система линейна, и её решение представимо в виде суммы экспонент

$$q(t, Q, P) = \sum_j B_j(Q, P) e^{\lambda_j t}, \quad p(t, Q, P) = \sum_j C_j(Q, P) e^{\lambda_j t}$$

Подставив в степенное выражение  $m_k(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ , получим слагаемое  $\bar{F}_k(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ , не содержащее экспоненты. Оно и будет равно симметризованному возмущению.

Квадратура

$$\int_0^t m_k(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) dt = t \bar{F}_k(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + G_k(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + g(t),$$

очевидно, представится суммой трёх слагаемых: линейное по времени  $t \bar{F}_k(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ , независящее от времени  $G_k(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  и зависящие от времени

экспоненты. Второе слагаемое  $G_k(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  является генератором замены. Таким образом, при отбрасывании экспонент в квадратуре получаем симметризованное возмущение и генератор симметризирующей замены.

Непосредственная замена переменных определяется через генератор Ли по формулам

$$\begin{aligned} q &= Q + Q * G(Q, P) + \frac{1}{2!} Q * G^2 + \dots, \\ p &= P + P * G(Q, P) + \frac{1}{2!} P * G^2 + \dots \end{aligned}$$

где под  $Q * G^2$  понимается двойная скобка Пуассона  $\{\{Q, G\}, G\}$ .

Скорость работы алгоритма зависит от сложности решений, полученных на первом шаге алгоритма. Самый простой их вид достигается в случае, если  $H_0$  – квадратичная комплексная нормальная форма.

*Пример симметризации 1.* Пусть гамильтониан дан в виде рациональной функции [4]:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{1 + q^2}.$$

Фазовые кривые решений уравнения  $H = \text{const}$  представляют собой периодические траектории.

Уравнения Гамильтона интегрируются точно

$$\dot{q} = p = \sqrt{2H - q^2 - 2\frac{\varepsilon}{1 + q^2}} \Rightarrow t = \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{2H - q^2 - 2\varepsilon(1 + q^2)^{-1}}}$$

При начальных условиях  $q(0) = q_0$ ,  $p(0) = 0$  период траектории  $T$  выражается через определённый интеграл

$$\begin{aligned} T &= 4 \int_0^{q_0} \frac{dq}{\sqrt{q_0^2 - q^2 + 2\varepsilon((1 + q_0^2)^{-1} - (1 + q^2)^{-1})}} = \\ &= 2\pi \left( 1 + \varepsilon(1 + q_0^2)^{-3/2} \right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Покажем, как получить этот результат методом симметризации. В соответствии с алгоритмом находим

1) решение невозмущенной системы:

$$q = Q \cos t + P \sin t, p = -Q \sin t + P \cos t;$$

2) функцию

$$m_1(t, Q, P) = 1 / (1 + q^2(t)) = 1 / (1 + Q^2 \cos^2 t + 2QP \cos t \sin t + P^2 \sin^2 t)$$

3) Из квадратуры

$$\int_0^t m_1(t, Q, P) dt = w(Q, P) \left( t - \arctg \left( \frac{P}{Q} \right) - \arctg \left( w(Q, P) \frac{P}{Q} \right) \right) + g(t),$$

$$w(Q, P) = (1 + Q^2 + P^2)^{-1/2}$$

находим первые коэффициенты разложений симметризованной формы

$$\bar{F}_1 = 1 / \sqrt{1 + Q^2 + P^2}$$

и генератора

$$G_1 = \bar{F}_1 \left[ \arctan \frac{\bar{F}_1 P}{Q} - \arctan \frac{P}{Q} \right].$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{Q} = \omega P, \quad \dot{P} = -\omega Q, \quad \omega = 1 - \varepsilon(1 + Q^2 + P^2)^{-3/2}.$$

Решение в переменных  $Q, P$  – гармонические колебания линейного осциллятора. Частоту колебаний  $\omega$  можно выразить через начальную координату  $q_0$ :

$$\omega = 1 - \varepsilon(1 + Q^2 + P^2)^{-3/2} + O(\varepsilon^2) = 1 - \varepsilon(1 + q_0^2)^{-3/2} + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда находим период колебаний

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi(1 + \varepsilon(1 + q_0^2)^{-3/2}) + O(\varepsilon^2).$$

Как видим, это разложение в точности совпадает с найденным выше.

*Пример симметризации 2.* Рассмотрим маятник Фуко, с помощью которого демонстрируется эффект вращения Земли. Его гамильтониан можно привести к следующему безразмерному виду [6]

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - y\omega p_x + x\omega p_y + \left( \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{2}(xp_x + yp_y)^2 \right) \quad (2.1)$$

Начальные условия зададим так:

$$x(0) = x_0, \dot{x}_0 = u_0, y(0) = y_0, p_x(0) = u_0 + \omega y_0, p_y(0) = v_0 - \omega x_0.$$

Линейные уравнения

$$\dot{x} = \frac{\partial H_2}{\partial p_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H_2}{\partial p_y}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H_2}{\partial x}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H_2}{\partial y},$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + \omega(xp_y - yp_x)$$

удобно записать в переменных Биркгофа  $z_1 = p_x + ix$ ,  $z_2 = p_y + iy$ :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{z}_1} = ia_1 z_1 - a_2 z_2, \\ \dot{z}_2 &= \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{z}_2} = a_2 z_1 + ia_1 z_2, \\ a_1 &= 1, \quad a_2 = \omega, \quad \bar{H}_2 = 2i(E + \omega K), \quad , \\ E &= (z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) / 2, \quad K = \frac{1}{2i}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $E$  и  $K$  интегралы энергии и кинетического момента, соответственно.

Решение этой системы с начальными условиями  $z_{10} = p_{x0} + ix_0$ ,  $z_{20} = p_{y0} + iy_0$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{ia_1 t} \begin{pmatrix} \cos a_2 t & -\sin a_2 t \\ \sin a_2 t & \cos a_2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{x0} + ix_0 \\ p_{y0} + iy_0 \end{pmatrix}$$

Не приводя квадратичную часть гамильтониана к нормальной форме, сразу применяем алгоритм асимптотической симметризации. В переменных Биркгофа можно найти каноническую замену, приводящую гамильтонианы к симметричному виду  $\bar{H} = \bar{H}_2 + \bar{H}_4$  так, что скобка Пуассона равна нулю:  $\{\bar{H}_2, \bar{H}_4\} = 0$ . Слагаемые симметричной формы имеют вид

$$\bar{H}_2 = 2i(E + \omega K), \quad \bar{H}_4 = \frac{1}{2}i(a_{11}E^2 + 2a_{12}EK + a_{22}K^2),$$

где  $E$  и  $K$  являются первыми интегралами полной системы Гамильтона.

Уравнения Гамильтона нормальной формы имеют такой же вид (2.2) и такое же решение (2.4), как и линейные уравнения. Коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  выражаются через  $a_{11}, a_{12}$  и  $a_{22}$  так:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \frac{1}{2}(a_{11}E + a_{12}K), \quad a_2 = \omega + \frac{1}{2}(a_{12}E + a_{22}K) \\ a_{11} &= -\frac{1}{4}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{3}{4}, \quad a_1 = 1 - E/8, \quad a_2 = \omega + 3K/8. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Положим для наглядности  $y_0 = 0$ ,  $p_{x0} = 0$ . Тогда получим следующее уравнение для траектории  $x(t) = \text{Im}(z_1)$ ,  $y(t) = \text{Im}(z_2)$ :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a_2 t & -\sin a_2 t \\ \sin a_2 t & \cos a_2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \cos a_1 t \\ p_{x0} \sin a_1 t \end{pmatrix}$$

Это траектория движения по эллиптической траектории с частотой вращения  $a_1 = 1 - E/8$  и частотой прецессии  $a_2 = \omega + 3K/8$ . Учитывая принципиальную важность для практики этого результата, запишем эту же формулу для прецессии в размерных переменных:

$$\dot{\theta} = \Omega \sin \varphi + \frac{3}{8} \lambda \frac{rk}{l^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

где  $r$  и  $k$  – полуоси эллиптической траектории,  $l$  – длина маятника,  $\varphi$  – широта. Второе слагаемое в прецессии является основной принципиальной погрешностью маятника Фуко, как измерителя угловой скорости вращения Земли.

Погрешность увеличивается при уменьшении длины маятника. Для примера приведём значения параметров маятника в Исаакиевском соборе. Измеряемая частота на широте Санкт-Петербурга  $\Omega \sin \varphi = 6.2 \times 10^{-5}$  рад/с. При  $l = 90$  м,  $r = 2$  м,  $k = 2$  см погрешность  $3/8 \lambda r k l^{-2} = 6 \times 10^{-7}$  рад/с составляет 1%.

Для маятника в Политехническом музее измеряемая частота на широте Москвы  $\Omega \sin \varphi = 5.96 \times 10^{-5}$  рад/с. При  $l = 16$  м,  $r = 1$  м,  $k = 1$  см погрешность  $3/8 \lambda r k l^{-2} = 1.15 \times 10^{-5}$  рад/с составляет 19%.

Таким образом, измерение эффекта вращения Земли в Политехническом музее совершается с неприемлемо высокой погрешностью.

**3. Алгоритм симметризации с помощью параметрической функции Пуанкаре.** Алгоритм аналогичен алгоритму симметризации с помощью производящего гамильтониана [7].

1. Находим решение  $\mathbf{q}(t, t_0, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ,  $\mathbf{p}(t, t_0, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$  невозмущенной системы с начальным условием  $\mathbf{q} = \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{P}$  при  $t = t_0$ .

2. Находим функции

$$M_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = F_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad M_2 = F_2 + F_1 * \Psi_1 + \frac{1}{2} H_0 * \Psi_1^2, \dots$$

3. Представляем квадратуру

$$\int_{t_0}^t m_i(t', t_0, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) dt' = (t - t_0) \bar{F}_i(t_0, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \Psi_i(t_0, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \varphi(t)$$



в виде слагаемого, линейного по  $(t - t_0)$  сомножителем  $\bar{F}_i$ , слагаемого, не зависящего от  $t$ , и периодической по времени функции  $\varphi(t)$  с нулевым средним значением по периоду.

Тогда  $\bar{F}_i(t_0, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$  и является  $i$ -ым членом разложения симметризованной формы, не зависящее от  $t$  слагаемое  $\Psi_i(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$  –  $i$ -ым членом разложения параметрической функции Пуанкаре, определяющей каноническую замену, приводящую гамильтониан к симметризованной форме. Первые члены разложения замены имеют вид

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q} * \Psi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \frac{1}{2} \mathbf{Q} * \Psi^2 + \dots,$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{P} * \Psi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \frac{1}{2} \mathbf{P} * \Psi^2 + \dots$$

Алгоритм, использующий параметрическую функцию  $\Psi$ , наиболее универсален. Он применим как для автономного, так и для неавтономного случаев, как для резонанса, так и при отсутствии его. В автономном случае первые два приближения в параметрическом методе и методе генератора тождественны, а в следующих приближениях имеются отличия.

Приведём примеры симметризации неавтономного гамильтониана и построения асимптотического решения.

#### 4. Уравнение Матьё. Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = h + f, \quad h = \frac{1}{2}(x^2 + u^2), \quad f = \delta \frac{3}{2} x^2 \cos 2t,$$

где  $h$  – порождающий гамильтониан,  $f$  – возмущение.

Уравнения Гамильтона являются уравнением Матьё

$$\ddot{x} + x(1 + 3\delta \cos 2t) = 0.$$

К этому уравнению приводится задача о повороте плоскости колебаний пружинного маятника при резонансе вертикальной и горизонтальной мод колебаний [8]. Не прибегая к достаточно сложной теории уравнения Матьё [9] стр. 229-258, построим методом симметризации общее его асимптотическое решение при  $\delta \ll 1$ .

1) Находим решение невозмущенной системы

$$\begin{aligned} x &= X \cos(t - t_0) + U \sin(t - t_0), \\ u &= -X \sin(t - t_0) + U \cos(t - t_0) \end{aligned} \quad (4.1)$$

2) Определим функцию  $m(t, t_0, Q, P)$  с помощью подстановки решения (4.1) в возмущённую часть гамильтониана

$$m(t, t_0, X, U) = \delta \frac{3}{2} (X \cos(t - t_0) + U \sin(t - t_0))^2 \cos 2t \quad (4.2)$$

3) Вычисляем интеграл в пределах  $(t_0, t)$  от функции  $m(t', t_0, X, U)$ . В этом интеграле нужно выделить линейное по времени слагаемое  $\bar{f}(t_0, X, U)$ , независящее от времени слагаемое  $\Psi(t_0, X, U)$  и периодическое по времени  $\varphi(t)$ , со средним значением по периоду равным нулю

$$\int_{t_0}^t m(t', t_0, X, U) dt' = (t - t_0) \bar{f}(t_0, X, U) + \Psi(t_0, X, U) + \varphi(t) \quad (4.3)$$

Из интеграла (4.3) находим функции  $\bar{f}, \Psi$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= -\frac{3}{8} \delta \left( \cos(2t_0) (U^2 - X^2) + 2XU \sin(2t_0) \right), \\ \bar{\Psi} &= -\frac{3}{32} \delta \left( \sin(2t_0) (5X^2 + 3U^2) - 2XU \cos(2t_0) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Первая функция является возмущением нормальной формы, второе слагаемое определяет замену переменных

$$\begin{aligned} x &= X - \Psi_U(t, X, U) = X + \frac{3}{16} \delta (3U \sin 2t - X \cos 2t) \\ u &= U + \Psi_X(t, X, U) = U + \frac{3}{16} \delta (-5X \sin 2t + U \cos 2t) \end{aligned}$$

которая с точностью до малых порядка  $\delta^2$  симметризует гамильтониан

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \bar{h} + \bar{f}, \quad \bar{h} = \frac{1}{2} (X^2 + U^2), \\ \bar{f} &= \frac{3}{8} \delta \left( (-U^2 + X^2) \cos 2t - 2XU \sin 2t \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Нетрудно убедиться, что возмущённая часть  $\bar{f}$  является интегралом невозмущённой части  $\bar{h}$ . Это позволяет найти аналитическое решение задачи, используя для симметризованной системы теорему о суперпозиции решений.

Общее решение уравнений с гамильтонианом  $\bar{H}$  получается подстановкой в невозмущённое решение

$$\begin{aligned} X &= q \cos t + p \sin t, \\ U &= -q \sin t + p \cos t \end{aligned} \quad (4.6)$$

решения с возмущённым гамильтонианом:

$$\bar{f}(0, q, p) = \frac{3}{8} \delta (-p^2 + q^2)$$

$$q = A \operatorname{ch} \tau + B \operatorname{sh} \tau, \quad p = -A \operatorname{sh} \tau - B \operatorname{ch} \tau, \quad \tau = \frac{3}{4} \delta t \quad (4.7)$$

Формулы (4.6) и (4.7) определяют общее, асимптотическое по малому параметру  $\delta$  решение  $x = X(t)$  уравнения Матьё  $\ddot{x} + x(1 + 3\delta \cos 2t) = 0$ , зависящее от двух произвольных постоянных  $A$  и  $B$ . Зададим начальные условия:  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Отсюда найдём постоянные  $A = x_0$ ,  $B = 0$ . Асимптотическое решение уравнения Матьё принимает вид

$$X = x_0 (\operatorname{ch} \tau \cos t - \operatorname{sh} \tau \sin t)$$

Численная проверка показывает, что при  $0 < \delta < 0.1$  графики асимптотического и точного решений практически неотличимы на отрезке времени, на котором  $|x| < 10^7$ .

На рис. приведено сравнение точного решения (сплошная линия) с асимптотическим (точки) при  $\delta = 0.1$ ,  $x_0 = 1$  на отрезке времени  $t \in (220, 240)$ .

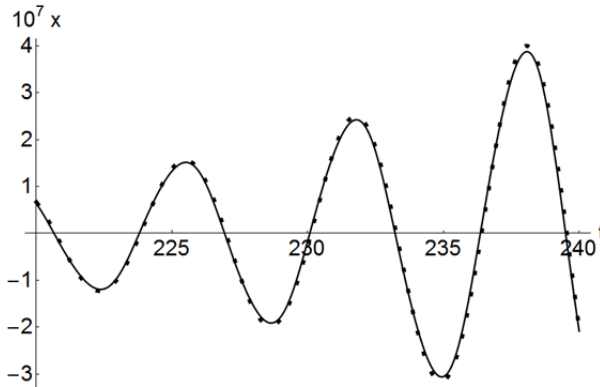


Рис. 1. Сравнение точного решения (сплошная линия) и асимптотического (точки) уравнения Матьё при  $\delta = 0.1$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 14-01-00818, 14-01-00892.

### Литература

1. *Арнольд В.И. Математические методы классической механики.* М.: «Эдиториал УРСС», 2000. – 408 с.
2. *Биркгоф Д.Д.* Динамические системы. М.-Л.: Гостехиздат, 1941. – 320 с.
3. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. – 296 с.
4. *Журавлев В.Ф.* Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // ПММ, 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356-365.
5. *Журавлев В. Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН, МТТ. 1997. №6. С. 27-35.
6. *Журавлев В. Ф., Петров А.Г.* О волчке Лагранжа и маятнике Фуко в наблюдаемых переменных // Доклады РАН. Т. 454. № 2. С. 168-172.
7. *Петров А.Г.* Об инвариантной нормализации неавтономных гамильтоновых систем// ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 402-413.
8. *Петров А.Г.* О повороте плоскости колебаний тяжелой материальной точки на пружине при резонансе // Доклады РАН. 2014. Т. 454. № 1. С. 42–46.
9. *Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н.* Курс современного анализа. Часть II. Л.-М.: Гос. тех-теор издат., 1934. – 468 с.

## ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛИМЫХ СВЯЗЕЙ

Предлагаются критерии построения связей с определенными реакциями для плоской и пространственной системы тел. Показано, что все задачи сводимы к системе двух тел.

### 1. Введение.

Обращаясь к сборникам задач по теоретической механике [1,2], студент может прийти к ложному выводу, что все задачи имеют решение. Это относится и к задачам статики твердого тела. Понятно, что в задачах предлагаются именно такие задачи. Полезно показать студентам, что существуют задачи статики, не имеющие решения в классической постановке. И указать методы создания таких задач.

### ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

#### 2. Одно тело.

В проекциях на оси  $x, y$  два векторных условия равновесия

$$V^R = -V^a, \quad M_o^R = -M_o^a \quad (1)$$

где индексом  $R$  обозначены реакции связей, а индексом  $a$  – нагрузка, дают три алгебраических уравнений для реакций связей, которые можно представить в матричном виде

$$Ax = y \quad (2)$$

Здесь  $A$  – матрица системы, зависящая только от устройства связей,  $x$  – столбец искомых реакций связей,  $y$  – столбец заданной нагрузки.

Как известно, алгебраическая система имеет единственное решение если матрица  $A$  квадратная ( $3 \times 3$ ), т.е. уравнения имеют три неизвестных и определитель матрицы отличен от нуля.

$$|A| \neq 0 \quad (3)$$

Связи с такой матрицей  $A$  назовем статически определенными (или коротко определенными), потому что реакции только таких связей могут быть определены из уравнений статики (2).

Условие (3) обеспечивает тривиальность решения однородной системы

$$Ax = 0 \quad (4)$$

при отсутствии нагрузки. Это значит, что реакции определенных связей исчезают при снятии нагрузки. Иначе говоря, если

$$\mathbf{V}^R = 0, \quad \mathbf{M}_o^R = 0 \quad (5)$$

то все реакции определимых связей равны нулю.

Таким образом, анализ связей на определимость сводится к требованию (3)

Условие (3) означает, что в матрице  $A$  не должно быть линейно зависимых и нулевых строк или столбцов. Строки независимы по ортогональности осей координат и независимости проекций на оси и моментов относительно осей. Наличие нулевой строки в матрице  $A$  означает, что связи «не держат» в данном направлении, т.е. не являются «достаточными». Договоримся рассматривать только достаточные связи, которые обеспечивают покой тела при любой нагрузке.

Нулевые столбцы невозможны, поскольку не существует сил и моментов, которые не имели бы проекций. Зависимые столбцы могут появиться только в случае, если две силы реакции окажутся на одной прямой или существует два момента связей.

Отсюда правило построения определимых связей:

***Ставя новую связь, нужно позаботиться о том, чтобы число неизвестных не превысило трех, число моментов не превысило одного, а новая реакция связи не смогла оказаться на одной прямой с реакциями ранее поставленных связей.***

При невыполнении условия (3), связи будут избыточными в каком-то направлении. Важно отметить, что при правильном числе неизвестных, равном числу уравнений, избыточность связей в одном направлении всегда сопровождается их недостаточностью в другом направлении.

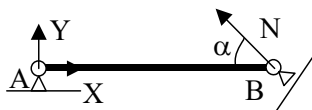


Рис. 1

Так для стержня на двух опорах с «правильным» числом неизвестных, равным трем, при  $\alpha = 0$  реакции в опорах могут оказаться на одной прямой  $AB$ , связи становятся избыточными вдоль  $AB$  и недостаточными в отношении поворота вокруг опоры  $A$ .

Таким образом, силовой и кинематический анализ связей взаимно дополняют друг друга при построении определимых связей.

Важным вопросом является оптимизация связей по величине реакций. Приближение конфигурации к неопределимой всегда устремляет некоторую реакцию к бесконечности. Максимальное удаление от

неопределимой конфигурации оптимизирует конфигурацию, минимизируя модуль той же реакции. Оптимальную конфигурацию схемы Рис.1 получим при  $\alpha = \pi/2$ .

### 3. Приведение реакций к одной силе.

Для упрощения анализа полезно привести реакции связей к одной силе.

*Связи с одной неизвестной* (опора, каток, нить и стержень на шарнирах) создают силу перпендикулярную поверхности опоры (опора, каток) или вдоль связи (нить, стержень) и приложенную в точке связи.

*Глухая заделка* создает произвольную силу в плоскости (две неизвестных).

*Скользкая заделка* создает силу, перпендикулярную оси заделки (две неизвестных).

*Цилиндрический шарнир* создает в шарнире произвольную силу (две неизвестных).

### 4. Система тел.

Под системой тел понимаем цепь тел, связанных между собой и с основанием на концах цепи любым способом, кроме глухой заделки. Покажем, что такая система тел сводится к двум телам.

Действительно, пусть в систему входит  $n$  тел. У такой системы всего  $n + 1$  связей: из них  $n - 1$  внутренних связей и 2 внешние связи. Связи не могут быть заделками, иначе число тел системы уменьшится. Значит, во всех  $n + 1$  связях от одной до двух неизвестных. Полная система уравнений состоит из  $3n$  уравнений, которые должны иметь  $3n$  неизвестных реакций связей. Поскольку при максимальном числе неизвестных 2 в каждой связи, уравнение

$$3n = 2(n + 1)$$

имеет единственное решение  $n = 2$ , то любая плоская система тел сводится к двум телам с шестью неизвестными реакциями связей.

Единственным возможным вариантом остаются три связи с двумя неизвестными в каждой. К таким связям относятся цилиндрический шарнир и скользящая заделка. Комбинаций таких связей всего шесть.

Чтобы вывести правила построения определяемых связей, изобразим все шесть неопределимых комбинаций связей для двух стержней.

Становится очевидным, что на всех схемах, кроме рис.5, три реакции могут оказаться на одной прямой. На схеме рис.5 параллельны три момента. Видно, что во всех схемах избыточность связей в одном

направлении сопровождается их недостаточностью в другом направлении, система становится механизмом.

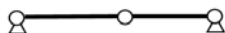


Рис. 2



Рис. 3

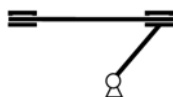


Рис. 4

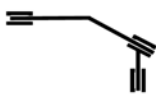


Рис. 4

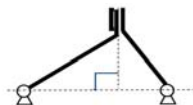


Рис. 5



Рис. 6

Таким образом, при построении определяемых связей для плоской системы двух тел нельзя допускать трех сил на одной прямой и трех моментов.

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

### 5. Приведение реакций к одной силе.

*Глухая заделка* создает произвольную пространственную силу (6 неизвестных).

*Скользкая заделка стержня прямоугольного сечения* создает перпендикулярную оси силу (5 неизвестных).

*Скользкая заделка стержня круглого сечения* создает силу, перпендикулярно пересекающую ось (4 неизвестных).

*Сферический шарнир* или *три некомпланарных стержня в одной точке* создают в шарнире произвольную силу (3 неизвестных).

*Цилиндрический шарнир* или *два стержня в одной точке* создают в шарнире силу, перпендикулярную оси шарнира (2 неизвестных).

*Связи с одной неизвестной* (опора, каток, нить и стержень на шарнирах) создают силу, перпендикулярную поверхности опоры (опора, каток) или вдоль связи (нить, стержень) и приложенную в точке связи.

### 6. Одно тело.

Требование неравенства определителя матрицы  $A$  (2) приводит к следующим правилам:

*Ставя новую связь, нужно позаботиться о том, чтобы число неизвестных не превысило шести, число параллельных моментов*



*не превысило одного, а новая реакция связи не смогла оказаться на одной прямой с реакциями ранее поставленных связей.*

Заметим, что три силы на плоскости эквивалентны двум силам на одной прямой. Поэтому такое сочетание тоже невозможно.

### 7. Пример построения определимых связей 3+2+1.

<https://www.youtube.com/watch?v=1VJK3xldwA>

Поставим в произвольной точке  $A$  тела сферический шарнир. Незвестных становится 3.

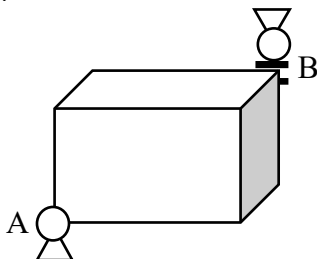


Рис. 7

В точке  $B$  поставить второй сферический шарнир нельзя, поскольку две реакции могут оказаться на одной прямой  $AB$ . Поставим в точке  $B$  цилиндрический шарнир. Его ось не может быть перпендикулярна линии  $AB$ , иначе опять возникнет избыточность связей по  $AB$ , и реакции в шарнирах будут стремиться к бесконечности. Чтобы реакции были минимальными при данной нагрузке, ось шарнира  $B$  нужно направить вдоль  $AB$ . Незвестных стало 5.

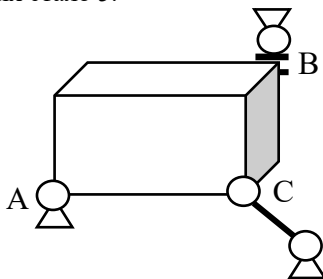


Рис. 8

В точке  $C$  можно поставить связь с одной неизвестной, иначе число неизвестных станет больше шести. Поставим стержень на двух шарнирах.

Стержень нельзя расположить в плоскости  $ABC$ , иначе три силы окажутся в одной плоскости, и реакция в стержне будет стремиться к бесконечности.

Чтобы реакция была минимальна при данной нагрузке, стержень нужно направить перпендикулярно плоскости  $ABC$ .

## 8. Система тел.

Покажем, что любая пространственная система тел сводится к двум телам. Действительно, пусть в систему входит  $n$  тел. У такой системы  $n + 1$  связей:  $n - 1$  внутренних связей и 2 внешние связи. Они не могут быть заделками, иначе число тел системы уменьшится. Значит, во всех  $n + 1$  связях от одной до пяти неизвестных.

Полная система уравнений состоит из  $6n$  уравнений, которые должны иметь  $6n$  неизвестных реакций связей. Уравнение

$$k(n + 1) = 6n,$$

где  $k$  – среднее число неизвестных в  $n + 1$  связях, имеет решение  $n \geq 2$  только при  $k = 4$  ( $n = 2$ ) и  $k = 5$  ( $n = 5$ ). Но последний случай не реализуем, поскольку  $k = 5$  у скользящей заделки стержня прямоугольного сечения, создающей пространственную силу, перпендикулярную заделке. Но  $n + 1 = 6$  таких направлений в пространстве невозможно создать, не нарушив определенности связей.

Остается вариант  $k = 4$  ( $n = 2$ ), соответствующий двум телам с 12 неизвестными.

Связи могут иметь 2 неизвестных (цилиндрический шарнир), 3 неизвестных (сферический шарнир), 4 неизвестных (скользящая заделка стержня круглого сечения), 5 неизвестных (скользящая заделка стержня прямоугольного сечения).

Наиболее интересны случаи  $3+4+5=12$  и  $4+4+4=12$

Правило: Три реакции не должны оказаться на одной прямой. Три момента не могут быть параллельны.

## 9. Построение связей 3+4+5.

Рассмотрим систему двух стержней:  $ABC$  и  $CDE$  (рис.9). В общей точке  $C$  стоит скользящая заделка с поршнем прямоугольного сечения (5 неизвестных). В точке  $A$  стоит сферический шарнир (3 неизвестных).

Реакции  $R_A$  и  $R_C$  могут оказаться на произвольной линии, проходящей через  $A$  перпендикулярно поршню заделки  $C$ .

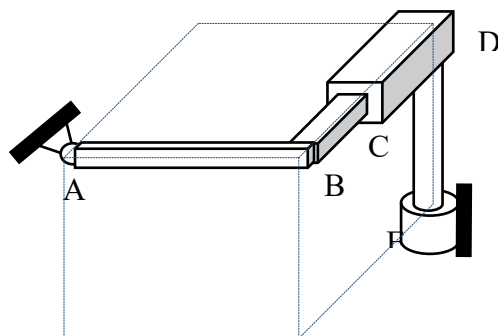


Рис. 9

В точке  $E$  поставим скользящую заделку с поршнем круглого сечения и недостающими четырьмя неизвестными. Она создаст силу, пересекающую ось заделки.

Чтобы эта сила не смогла пересечь шарнир  $A$ , ось заделки не должна быть параллельной оси заделки  $C$ .

Вывод: оси скользящих заделок не должны быть параллельны.

### Литература

1. *Мещерский И.В.* Задачи по теоретической механике: учебное пособие. 45-е изд., стер. / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. СПб.: «Лань», 2006. – 448 с.
2. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1 – Статика и кинематика. М.: Наука, 1967. – 512 с.

УДК 378.141.2/5:531

*В.Д. Бертяев*

ФГБОУ «Тульский государственный университет»

## **ЭЛЕКТРОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Проводится анализ современного состояния образования в Российской Федерации. Рассматривается вопрос повышения его эффективности и предлагается технологическая модель применения электронных технологий при изучении теоретической механики. Приводится опыт применения электронных технологий при изучении теоретической механики на инженерных специальностях и направлениях подготовки в Тульском государственном университете.

В настоящее время министерством образования и науки РФ ставится задача непрерывного повышения качества образования, усиления фундаментальной подготовки, обеспечения его доступности широким слоям населения РФ и интеграции в международное образовательное пространство за счет применения инновационных технологий. Новые базовые принципы высшего образования призваны обеспечить конкурентоспособность экономической системы. В рамках указанных задач и поставленных целей утверждены федеральные государственные стандарты (ФГОС) третьего поколения и разрабатываются ФГОС 3+. Внедряется компетентностный подход к оценке освоенных знаний. Формулируются все более жесткие требования к выполнению нормативов на проведение аудиторной работы преподавателя вуза и самостоятельной работы студента.

Так в государственных образовательных стандартах первого и второго поколения объем учебной (аудиторной) нагрузки по теоретической механике (и не только по ней) по сравнению со стандартами СССР был существенно, практически в 2 раза, сокращен. В связи с переходом системы высшего образования на ФГОС 3, наблюдается тенденция сокращения объема аудиторных занятий по естественнонаучным и общетехническим дисциплинам усиливается. При этом основной упор в изучении дисциплин делается на самостоятельную работу студентов.

Выполнение требований ФГОС, помимо серьезных изменений учебных планов и рабочих программ дисциплин, требует кардинального пересмотра технологии проведения аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов, а также индивидуальной работы преподавателя со студентом. Требуется его всемерная интенсификация.

Классическая технология проведения аудиторных занятий: доска, мел или маркер, плакаты и т.д.; требует от преподавателя не только высокой квалификации в предметной области, но и инженерных навыков: профессионально и грамотно нарисовать расчетную схему, график изменения процесса и прочее. Интенсивность занятий определяется не степенью усвоения излагаемого материала студентом, а скоростью отображения читаемого материала преподавателем.

Использование мультимедийных презентаций на базе персонального компьютера в связке с проектором, не изменяя качественно классическую технологию проведения занятий, позволяет наполнить ее дополнительными элементами, такими как фотографии, видео, сканированные документы. В тоже время следует отметить, что в реальности плакаты и рисунки на доске просто заменяются статическими изображениями на мониторе и (или) экране проектора.

Применение интерактивных досок или планшетов с сенсорными экранами делает возможным дополнить классическую технологию новым содержанием. Они позволяют обеспечить не только высокое качество изображаемых текста, формул, рисунков и графиков, как на обычном компьютере, но и производить их изменение, дополнение по мере изложения теоретического материала самим преподавателем (рис.2). Однако, при всех достоинствах этой технологии, её реализация требует достаточно больших временных затрат, а также участия в её подготовке высококвалифицированных педагогов и IT-специалистов. Кроме того, процесс замены традиционной доски на интерактивную сталкивается, по крайней мере, с двумя основными проблемами – небольшим размером и высокой стоимостью последних. В этом отношении планшеты с сенсорным экраном в связке с проектором представляют собой наиболее оптимальное сочетание цены и качества.

Настоящее время характеризуется лавинообразным развитием вычислительной техники и сетевых информационных технологий, которые позволяют обеспечить доступ к ним широкому кругу пользователей. Активно развиваются математически-ориентированные среды, позволяющие произвести не только численное решение поставленных задач, но и возможность моделирования физических задач, их исследование и визуализацию, как на этапе постановки, так и при решении.

Применение математически ориентированных сред в учебном процессе, и в частности, при изучении теоретической механики, позволяет проводить:

- визуализацию исследуемых механизмов, с отображением кинематических характеристик;
- анимацию расчетных схем;
- быстрое построение 2D и 3D графиков зависимостей основных характеристик от исследуемых параметров.

Теоретическая механика является первой из общеобразовательных дисциплин, изучаемых в технических вузах, в которой широко используется язык математики. Именно поэтому указанные среды можно и нужно широко использовать при изучении теоретической механики:

- при чтении лекций для визуализации расчетных схем и механизмов;
- при проведении практических, семинарских и индивидуальных занятий, при моделировании процессов и явлений, сравнении численных и приближенных решений, а также различных постановок задач;
- в самостоятельной работе студентов, курсовом проектировании и НИРС.

Так, при чтении лекций, можно обеспечить анимацию расчетных схем (скорость и ускорение), показать движение изучаемых объектов (точка, механизм) и вычисляемых кинематических и динамических характеристик. Можно обеспечить визуализацию изучаемого явления (плоское и сферическое движение твердого тела, маятник Фуко) и т.д. (рис.1).

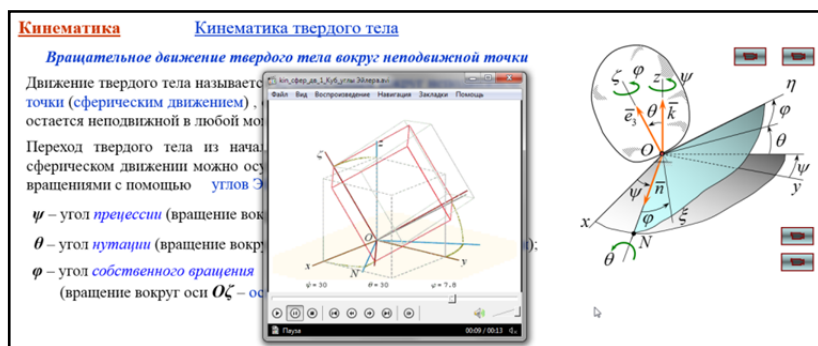


Рис. 1. Визуализация при чтении лекций

При проведении практических и семинарских занятий можно:

- показать визуализированное решение изучаемой задачи и отобразить определяемые кинематические и динамические характеристики (рис.2);
- провести анализ влияния тех или иных параметров на характер поведения исследуемых объектов;
- сравнить численное решение с приближенным и различные математические модели изучаемого явления.

Динамика
Общие теоремы динамики

*Теорема об изменении кинетической энергии*

**Пример** **Цилиндр скатывающийся с наклонной плоскости**

Дано:  $m, J_C, r, \alpha, h$       Определить:  $v_C(h) = ?$

Решение:  $(\cdot)P - \text{мцс} \Rightarrow v_C = \omega r$

$$T \rightarrow \sum_k A(\vec{F}_k) + \sum_k \cancel{A(\vec{E}_k)}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{C_2} \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{J_{C_2}}{r^2} v_C^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left( m + \frac{J_{C_2}}{r^2} \right) v_C^2 = \frac{1}{2} m_{\text{нр}} v_C^2$$

Рис. 2. Проведение практических и семинарских занятий

Математические модели, создаваемые для решения задач методами теоретической механики, являются, как правило, нелинейными. Формирование математической модели обычно сводится к составлению и решению дифференциальных уравнений. Чаще всего математический аппарат, необходимый для решения поставленной задачи, настолько сложен и громоздок, что теряется физический смысл задачи. В учебном процессе, когда главное внимание должно быть направлено на изучение того или иного процесса, приходится значительное время уделять стандартным математическим преобразованиям. Необходимость использования для решения полученных дифференциальных уравнений численных методов сокращает диапазон задач, так как требует от студента хорошего владения хотя бы одним из алгоритмических языков и умения организации численных процедур. Поэтому длительное время при изучении теоретической механики использовались и используются сейчас приближенные и графические методы.

Применение численных методов при решении задач механики ограничивалось возможностями вычислительной техники и применялось чаще всего при курсовом проектировании с использованием готовых программ, создаваемых преподавательским составом кафедр.

Курсовое проектирование с использованием пакета Mathcad требует не только глубокого усвоения теории, но и умения грамотно поставить задачу, решить ее, проанализировать результаты и при необходимости выбрать оптимальный вариант. Так как теоретическая механика является первой из дисциплин, в которой математические методы находят благодатную почву для решения практически важных задач, курсовое проектирование рассматривается на примере курса теоретической механики, которое содержит:

- кинематическое исследование плоских шарнирных механизмов;
- исследование равновесия плоских шарнирных ферм и составных конструкций и механизмов;
- динамическое исследование механических систем с одной степенью свободы.

На кафедре теоретической механики Тульского государственного университета широко используется курсовое проектирование с применением пакета Mathcad [2], которое требует не только глубокого усвоения теории, но и умения грамотно поставить задачу, решить ее, проанализировать результаты и при необходимости выбрать оптимальный вариант.

В курсовой работе по кинематике кроме определения основных кинематических параметров механизма стандартными методами, проводится анализ изменений закона движения выходного звена в зависимости от геометрических соотношений между звеньями, визуализация движения механизма с отображением векторных характеристик его узловых точек. Это позволяет студенту спроектировать кинематическую схему таким образом, чтобы движение выходного звена осуществлялось по заданному закону.

В курсовой работе по статике рассматриваются задачи на равновесие систем тел и определение усилий в стержнях плоской шарнирной фермы. В отличие от общепринятых решений при рассмотрении равновесия составных систем исследуется влияние геометрических параметров балок и интенсивности нагрузок на величины реакций связей, а также определяется область их оптимальных значений. При расчете плоских шарнирных ферм поставлена задача выбора оптимального варианта по одному или нескольким параметрам. Использование



Mathcad позволяет оптимизировать различные схемы ферм по минимальным значениям усилий в стержнях или по виду внешних связей.

В курсовой работе по динамике и аналитической механики, кроме традиционного определения основных кинематических и динамических характеристик механизма, решается многопараметрическая задача нахождения инерционных параметров звеньев, обеспечивающих минимизацию неравномерности движения выходных звеньев [3].

При выполнении курсовой работы у студентов вырабатываются навыки исследования динамического поведения механической системы, обусловленного условиями эксплуатации. Важнейшим этапом исследования динамического поведения механизмов является оптимизация их внутренних параметров, обеспечивающая функционирование системы в соответствие с физической и математической моделью (рис.3).

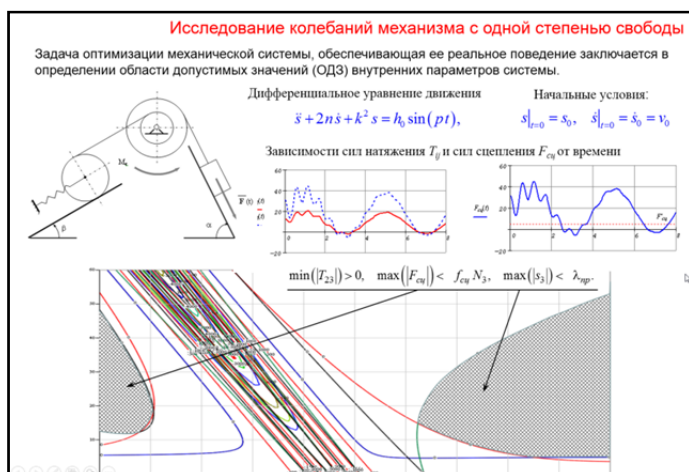


Рис. 3. Исследовательская часть в курсовом проектировании

При изучении любой учебной дисциплины требуется подтверждение уровня ее освоения. Для этого служат процедуры текущей (коллоквиумы, тесты, контрольные работы) и промежуточной аттестации (зачет, экзамен). Применение в учебном процессе автоматизированных обучающих систем и программ-тренажеров (рис.4) позволяет студенту освоить самостоятельно и (или) с помощью преподавателя необходимый объем знаний для решения типовых задач изучаемой дисциплины. Отличительной особенностью этих программ является тотальный, но

ненавязчивый контроль работы студента, предоставляющий ему определённую свободу при решении задач. В настоящее время на кафедре эти программы используются при самостоятельной работе студентов, при защите расчетно-графических и курсовых работ, при проведении текущих и промежуточных аттестаций. Методическое обеспечение этих программ гарантирует получение каждым студентом индивидуального задания.

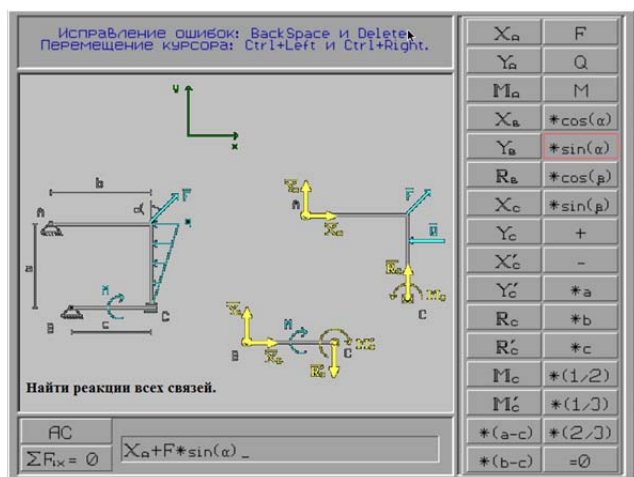


Рис. 4. Программы-тренажеры по теоретической механике

Таким образом, предложена технология преподавания и изучения дисциплин естественнонаучного и общетехнического профиля. Описанная технология является базовой. В зависимости от объема дисциплины допускается ее корректировка.

### Литература

1. Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум: учебное пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
2. Бертяев В.Д., Булатов Л.А., Латышев В.И., Митяев А.Г. Теоретическая механика. Курсовые работы с использованием Mathcad. Учебное пособие. М.: АСВ, 2010. – 304 с.
3. Бертяев В.Д., Булатов Л.А., Глаголев В.В., Латышев В.И., Митяев А.Г. ЭВМ в курсе теоретической механики. Применение вычислительной техники в учебном процессе: учебное пособие. Тула: ТулГУ, 2005. – 236 с.

УДК 531.01

*О.Н. Арсеньев*

Военно-космическая академия им. Н.Ф. Можайского

## **ЖИЗНЬ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ Н.В. БУТЕНИНА (К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)**

Николай Васильевич Бутенин запомнился как человек многогранного таланта и редкого человеческого обаяния. Его оптимизм, чувство юмора, неиссякаемая энергия, трудолюбие и плодотворная многогранная деятельность для всех, кто с ним вместе работал, являлись образцом и примером для подражания.



*Студент 5-го курса Горьковского государственного университета, 1936 год*

Это был крупный ученый известный как в нашей стране, так и за рубежом. Его работы в области нелинейных колебаний и прикладной теории гироскопических систем стали классикой и по праву вошли в золотой фонд российской науки. Результаты, полученные Николаем Васильевичем в этих областях, имеют мировую известность.

Николай Васильевич Бутенин родился 14 октября 1914 года в Петрограде. Его отец, Бутенин Василий Павлович, работал ревизором-инструктором в управлении канала имени Москвы. В июле 1941 года в рядах Московского народного ополчения он ушел на фронт и погиб в декабре 1941 года. Мать Николая Васильевича, Бутенина Евдокия Михайловна – домашняя хозяйка, умерла в Ленинграде в 1961 году.

С 1922 по 1931 год Николай Васильевич учился в средней школе Нижнего Новгорода. Учась в девятом классе, вынужден был одновременно (с декабря 1930 года) начать работать. Сначала работал подручным слесаря на судовой верфи, затем слесарем в гараже, позднее помощником моториста в Нижегородском обществе содействия развитию водного транспорта.

В сентябре 1932 года Николай Васильевич поступил на физико-математический факультет Горьковского государственного университета, который окончил с отличием в 1937 году по специальности «механика». После окончания университета был направлен на преподавательскую работу в Горьковский педагогический институт, в котором преподавал высшую математику и теоретическую механику до сентября 1941 года.

Стремление к глубоким научным и инженерным исследованиям побудило его в октябре 1938 года поступить в аспирантуру Горьковского университета на кафедру теоретической физики. Ему повезло работать под руководством выдающегося советского ученого академика Александра Александровича Андропова, который предложил молодому аспиранту Н.В. Бутенину решить задачу Кельвина о ходе часов методами теории нелинейных колебаний и осуществить динамическое объяснение данного явления. Задача была блестяще решена и результаты были опубликованы в журнале «Экспериментальной и теоретической физики», АН СССР, т.10, в.11, 1940 г. Работа называлась «Об одной задаче Кельвина, относящейся к теории часов». Заметим, что уже первая работа Николая Васильевича привлекла внимание специалистов. Уже тогда у него проявились незаурядные способности будущего ученого.

Аспирантура была решающим этапом в формировании Н.В. Бутенина как ученого. 26 июня 1941 года, буквально в первые дни войны, Николай Васильевич в возрасте 26 лет защитил диссертацию в Горьковском государственном университете на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему: «Механические автоколебательные системы».

В сентябре 1941 года Н.В. Бутенина призвали в Красную Армию и направили на службу в Ленинградскую военно-воздушную академию. Вначале он был назначен преподавателем кафедры теоретической механики, которой руководил С.И. Лазеев. В 1944 году Николай Васильевич становится начальником этой кафедры, которую бессменно возглавлял до 1987 года (43 года).

В военный период Николай Васильевич ведет большую научную работу. В 1942 году в журнале «Прикладная математика и механика» АН СССР, Т. VI, 1942 год появляется его большая статья: «Механические автоколебательные системы с гироскопическими силами». В этой работе было проведено первое теоретическое исследование автоколебательных систем с гироскопическими силами.

Следует отметить, что научные работы Николая Васильевича, выполненные в военное время, имели большое оборонное значение.

Основные результаты, полученные в работах за период с 1942 по 1951 год, легли в основу докторской диссертации, которая была блестяще защищена в 1952 году в Ленинградском политехническом институте имени М.И. Калинина. Тема диссертации: «Исследование действия внешней силы на автоколебательные системы методом медленно меняющихся коэффициентов».

Позднее Николай Васильевич развил и обобщил результаты, полученные в докторской диссертации, в своих крупных монографиях. Это: «Элементы теории нелинейных колебаний», Судпромгиз, 1962 г; «Теория колебаний», Высшая школа, 1963 г; «Введение в аналитическую механику», Наука, 1971 г, второе издание совместно с Н.А. Фуфаевым вышло в 1991 г; «Введение в теорию нелинейных колебаний», Наука, 1976 г, совместно с Ю.И. Неймарком и Н.А. Фуфаевым, книга переиздана в 1987 году.

Успехи Н.В. Бутенина в науке закономерны. Он был учеником А.А. Андропова и принадлежал к знаменитой андроновской школе.

Широкая научная эрудиция позволила Н.В. Бутенину получить существенные результаты и во многих других областях науки. Особенно следует отметить динамику тела переменной массы.

За активную научную деятельность Н.В. Бутенину в 1966 году было присвоено почетное звание заслуженного деятеля науки и техники РСФСР. В 1974 году за большой вклад в подготовку высококвалифицированных инженерных кадров Н.В. Бутенин был награжден нагрудным знаком «За отличные успехи в работе в области высшего образования СССР».

Благодаря заслуженному авторитету и широкой известности Николай Васильевич был избран членом Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике, членом Научно-методического совета по теоретической механике при МВ ССР СССР, членом экспертной комиссии ВАК.

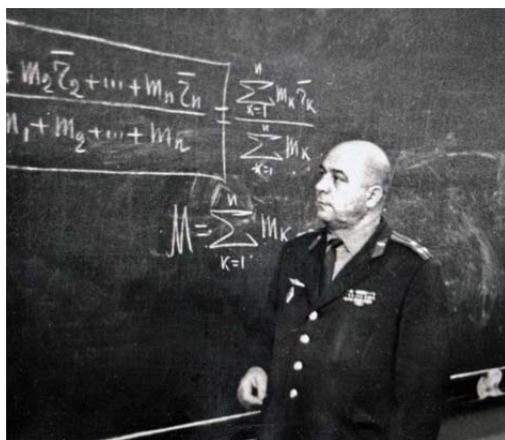
Он входил в состав редколлегии журнала «Известия высшей школы», был членом редакционного совета уникального шеститомного

справочника «Вибрация в технике» и являлся членом редколлегии журнала «Теоретическая механика».

За многие годы работы в академии Н.В. Бутенин проявил себя и как незаурядный организатор. Приняв в 1944 году кафедру теоретической механики, Николай Васильевич в трудные военные и послевоенные годы сумел создать сплоченный работоспособный коллектив. Благодаря инициативе и заботливому вниманию Н.В. Бутенина кафедра стала одной из лучших общенаучных кафедр академии. Особое внимание профессор Н.В. Бутенин уделял методике преподавания теоретической механики и прикладной значимости этой фундаментальной общенаучной дисциплины. Поэтому не случайно «Сборник задач по теоретической механике» автор И.В. Мещерский, начиная с 32го издания, выходил под редакцией Н.В. Бутенина, А.И. Лурье и Д.Р. Меркина.

Глубокие научные знания и творческие способности счастливо сочетались у Н.В. Бутенина с прирожденным талантом педагога. Он был своеобразным и неповторимым лектором высшей школы, обаятельным, человечным, умным.

Через всю жизнь Н.В. Бутенин пронес любовь к ученикам. Желание со всей щедростью души передать им часть своих глубоких знаний – одна из наиболее характерных черт его занятий. Ученики это чувствовали и платили ему любовью и глубоким уважением.



*На лекции, 1969 год*

Несмотря на высокий авторитет, высокие звания и степени, Николай Васильевич был скромным, весьма демократичным, доступным,

общительным. Он искренне любил людей; в нем всегда было желание помочь всем и каждому. Люди это чувствовали и шли к нему со своими заботами, он никому не отказывал, каждый получал частичку тепла его большого человеческого сердца.

Николай Васильевич был прекрасным семьянином, любящим мужем, отцом и дедушкой. У него четверо детей, три дочери и сын. Все они получили высшее образование.

Н.В. Бутенин прослужил в Вооруженных Силах более 30 лет (с 1941 по 1972 год) и за этот период прошел путь от рядового до полковника. За добросовестную и безупречную службу он награжден орденом «Красная звезда» и 15 медалями.

В память о выдающемся ученом, педагоге, организаторе ученый совет академии постановил присвоить имя Н.В. Бутенина одной из лучших аудиторий, в которой читаются лекции по теоретической механике.

Время – самый бесстрастный и строгий ценитель заслуг ученого-педагога, оно показало, что заслуги Николая Васильевича перед наукой, а также перед высшим образованием велики и неоспоримы. Непрерывное расширение сферы приложений теории нелинейных колебаний, углубление и развитие ее математических методов, а также грандиозные возможности вычислительной техники с течением времени только усиливают значимость его научных работ.

Н.В. Бутенин, ученый-педагог, Человек (с большой буквы) служил и продолжает служить превосходным образцом для научной молодежи наших дней!

**100 ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ НИКОЛАЯ НИКИТИЧА  
НИКИТИНА**

8 октября 2014 г. исполнилось 100 лет со дня рождения Николая Никитича НИКИТИНА — профессора кафедры теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана, лауреата Государственной премии СССР, крупного специалиста по аэро-гидродинамике, известного методиста и педагога высшей школы. По учебнику Н.Н. Никитина «Курс теоретической механики» училось не одно поколение студентов-бауманцев, а его лекции по методике преподавания теоретической механики до сих пор с благодарностью вспоминают слушатели Факультета повышения квалификации преподавателей практически из всех вузов республик Советского союза.



В 1941 г. Николай Никитич окончил механико-математический факультет МГУ по специальности гидрогазодинамика. В 1946 г. после окончания аспирантуры начал работать в ЦАГИ и по совместительству ассистентом на кафедре теоретической механики МВТУ, которую возглавлял тогда профессор В.П. Ветчинкин.

Тема его кандидатской диссертации — «Устойчивость ламинарного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления». Защита диссертации проходила в НИИ механики МГУ в 1947 г.

В 1952 г. Н.Н. Никитин поступил работать в Спецкомитет № 2 при Совете Министров СССР, в научно-технический отдел, на должность заместителя его главы — А. А. Космодемьянского.

В мае 1955 г. Николай Никитич перешел в МВТУ имени Н. Э. Баумана на постоянную работу. С этого времени преподавание теоретической механики в высшей школе стало главным делом его жизни.

После организации издательства «Высшая школа» В.В. Добронравову было предложено написать учебник по теоретической механике для технических вузов. Он привлек к этой работе А.Л. Дворникова и Н.Н. Никитина.



Первое издание учебника «Курс теоретической механики» вышло в 1966 г. Это издание учебника получило 1-ю премию МВТУ (премия Совета Министров). Авторы – Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Позднее этот учебник выдержал еще 4 издания. В 1990 г. вышло 5-е издание учебника «Курс теоретической механики» под авторством Н.Н. Никитина.

Кроме работы в МВТУ, с 1955 г. до начала 1968 г. Н.Н. Никитин читал лекции по теоретической механике слушателям Академии оборонной промышленности, ВВИА им. Н.Е. Жуковского, Академии химической защиты, а в 1975 г. — преподавателям высшей школы в Варшавском политехническом институте.

В 1967 г. на кафедре было создано отделение ФПК преподавателей теоретической механики — одно из первых в стране. По предложению К.С. Колесникова куратором этого ФПК был назначен Никитин Н.Н., он читал там лекции, проводил семинары, практически руководил всей его работой.

До мая 2002 г. он проработал в МГТУ сначала доцентом, а затем профессором кафедры теоретической механики, активно участвуя во всех методических форумах механиков. До последних дней своей жизни он совершенствовал методику изложения механики для студентов, 6-е издание его учебника вышло в год его смерти.

Николай Никитич Никитин принадлежал к тем замечательным людям, для которых служение науке составляет весь смысл жизни, а истина — мерило всего сущего.

**ПАМЯТИ АКАДЕМИКА  
ВАСИЛИЯ ПРОХОРОВИЧА ГОРЯЧКИНА (1868-1935)**

Исполнилось 80 лет со дня смерти В.П. Горячкина и скоро будет 150 лет со дня его рождения.

Выдающийся ученый, теоретик сельскохозяйственной машинной техники, основоположник новой научной дисциплины «Земледельческая механика», почётный член АН СССР (1932), академик ВАСХНИЛ (1932) Василий Прохорович Горячкин в 1890 г. окончил с отличием математическое отделение физико-математического факультета Московского университета и под влиянием своего учителя Н.Е. Жуковского решил посвятить себя техническим наукам. В 1894 г. Василий Прохорович окончил Императорское Московское техническое училище (ныне МВТУ им. Баумана) и получил звание инженера-механика.

В своих воспоминаниях академик Г.М. Кржижановский писал: «...будучи учеником Н.Е. Жуковского и имея перспективу вместе с другими учениками продолжить работу в области особенно увлекательной и в то время молодой науки – аэродинамики, В.П. Горячкин нашел в себе смелость вступить на совершенно неисследованный, но



не менее важный для человечества путь – создание науки о с.-х. машинах, получившей впоследствии название «Земледельческой механики» [1].

В.П. Горячкин сразу приступил к новому для него делу – изучению сельскохозяйственных машин. Министерство земледелия направило его в две длительные научные командировки. Сначала он в течение шести месяцев ознакомился с отечественными заводами сельскохозяйственного машиностроения, а затем Василий Прохорович полтора года пробыл в Германии и Франции. Заграничная командировка показала ему, что и в передовых странах Запада еще не создана научная основа для проектирования и испытания сельскохозяйственных машин и орудий. Он считал, что «...применение орудий вообще, а пахотных в особенности, оказывает человеку неоценимые услуги. В то время как человек может непосред-

ственно собрать все силы своего ума, остановить все свое внимание на одной мысли, он не в состоянии без помощи орудия сосредоточить все свои физические силы на одном предмете, в одной точке. Орудие позволяет человеку прилагать свои усилия в измененном по величине и направлению виде сообразно условием работы».

Василий Прохорович начал свою научную и учебную работу в 1896 г., сразу же по возвращении из командировок, и вел ее непрерывно до 1935 г. – до конца своей жизни. При его кафедре в Московском сельскохозяйственном институте в 1913 г. была создана машиноиспытательная станция. Главную задачу станции он видел в том, чтобы получать опытные данные, без которых невозможно дальнейшее развитие теории сельскохозяйственных машин.

В 1913 году В.П. Горячкин издал атлас чертежей жатвенных машин; научная обработка собранного материала и превосходное качество графического изображения принесли ему всемирную известность. О большом значении этого труда можно судить по тому факту, что значительная часть тиража атласа была быстро скуплена международной компанией жатвенных машин. В.П. Горячкину было сделано предложение переехать работать в Америку, но он отверг его.

В годовщину своего 50-летия Василий Прохорович закончил работу над «Земледельческой механикой» (1919 г.), ставшей основой методологии при разработке теории, расчета с.-х. машин и научных принципов высшего агроинженерного образования.

Завершающей печатной работой В.П. Горячкина, предпринятой им незадолго до смерти, была энциклопедия по теории и конструкциям сельскохозяйственных машин – «Теория, конструкция и производство сельскохозяйственных машин» (тт. I-IV, [2]).

В.П. Горячкин заложил основы современной науки о сельскохозяйственных машинах; разработал общую теорию плуга, молотильного барабана, методов подбора, уравнивания сил инерции, теорию масс и скоростей (применительно к сельскохозяйственным машинам и орудиям) и др. Василий Прохорович предложил многие ставшие классическими формулы, например формулы мощности и производительности молотильного барабана (1924), силы тяги плугов (1923) и др.

Василий Прохорович, создавший новое научное направление, был неутомимым организатором научных и педагогических центров. В МСХИ Горячкин организовал отделение Инженерного факультета (1915), а в 1928 г. – факультет сельскохозяйственного машиностроения. Затем учебный институт МИМЭСХ. Аналогичные институты при

его консультировании открывались как в нашей стране, так и за рубежом.

Как выдающийся ученый и общественный деятель В.П. Горячкин был в 1919 г. выбран и назначен ректором Петровской сельскохозяйственной Академии, так стал называться сельскохозяйственный институт. С 1929 г. он – директор Всесоюзного института сельскохозяйственного машиностроения (ВИСХОМ). В 1931 году по его инициативе был организован Всесоюзный научно-исследовательский институт механизации сельского хозяйства (ВИМ), в котором Василий Прохорович до конца жизни был председателем ученого совета.

В 1935 г. академик В.П. Горячкин был награжден орденом Трудового Красного знамени. Ему было присуждено звание «Заслуженный деятель науки и техники РСФСР», его именем были названы МГАУ<sup>1</sup> и ВИСХОМ.

Роль Василия Прохоровича не ограничилась созданием новой научной дисциплины. Он оставил после себя не только научные труды, но и воспитал целую научную школу учеников и последователей. Среди них – автор проекта и строитель «Ростсельмаша», член-корреспондент АН СССР В.Ю. Ганн, академики АН СССР И.И. Артоболевский, В.А. Желиговский, академики ВАСХНИЛ Н.Д. Лучинский, И.Ф. Василенко, множество докторов и кандидатов наук, инженеров. Созданная В. П. Горячкиным научная школа повлияла и на развитие сельскохозяйственного машиностроения как в нашей стране, так и за ее пределами.

## Литература

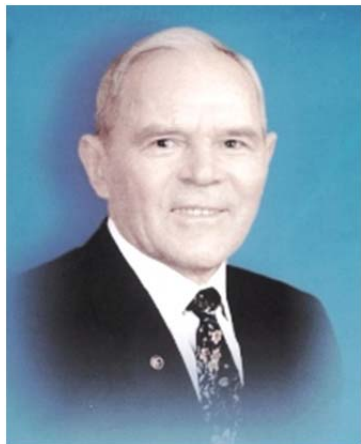
1. *Горячкин В.П.* Земледельческая механика. Часть I. (Основы теории земледельческих машин и орудий). М.: Кн. изд. студ. Петр. с.-х. академии, 1919. – 200 с. / Собр. соч. в семи томах. Т.II. М.: Сельхозгиз, 1937. / Собр. соч. в 3-х томах. Т.1. М.: Колос, 1968.
2. Теория, конструкция и производство сельскохозяйственных машин – тт. I-IV. // Под ред. В.П. Горячкина. М.-Л.: Сельхозгиз, 1935-1936.
3. *Кржижановский Г.М.* Речь на торжественном заседании // Материалы к торжественному заседанию научно-технического совета ВИСХОМа, посвященному 100-летию со дня рождения акад. В.П. Горячкина. М.: Отдел научно-технич. Информации ВИСХОМ, 1968. С. 11.

---

<sup>1</sup>Ныне РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева. МГАУ – Московский государственный агроинженерный университет им. В.П. Горячкина (с 1993г.) организован в 1930 г. как Московский институт механизации и электрофикации сельского хозяйства (МИМЭСХ), с 1964 г. – Московский институт инженеров сельскохозяйственного производства (МИИСП).

### К.С. КОЛЕСНИКОВ

27 декабря 2014 года исполнилось 95 лет академику РАН Константину Сергеевичу КОЛЕСНИКОВУ, выдающемуся ученому в области ракетно-космической техники, теории колебаний, динамики и прочности машин, Заслуженному деятелю науки и техники РСФСР, лауреату Государственной премии СССР, лауреату премии Правительства РФ в области образования.



Его имя прочно связано с МВТУ/МГТУ им. Н.Э. Баумана, где он учился, а затем работал почти 70 лет. Поступив в МВТУ после окончания автомобильного техникума в предвоенный год, К.С. Колесников затем был призван на срочную военную службу, а потом прошел на фронте в автобатальоне все тяжелые годы Великой Отечественной войны. Участвовал в боях на Западном, Вол-

ховском, 2-м Украинском фронтах, защищал Москву и Ленинград, с боями дошел до Будапешта. Демобилизовавшись только в 1946 г. К.С. Колесников возвращается на учебу в МВТУ и заканчивает его в 1952 г., а уже через год с блеском защищает кандидатскую диссертацию на тему по исследованию «шимми» управляемых колес автомобиля. Он становится штатным преподавателем МВТУ и резко меняет направление научных исследований на одно из самых актуальных в то время: начинает заниматься динамикой ракетно-космических систем. В 1959 г. он защищает докторскую диссертацию по устойчивости движения жидкостной ракеты пакетной схемы. После этого он становится профессором кафедры М1, а затем после непродолжительной работы в Минвузе, становится проректором по научной работе МВТУ им. Н.Э. Баумана и с 1966 года по совместительству возглавляет кафедру теоретической механики.

С приходом К.С. Колесникова на кафедре, в состав которой влились его ученики и новые молодые кадры, стали разрабатываться научные направления, актуальные прежде всего для ракетно-

космической техники: динамика ракет с ЖРД, включая вопросы продольных и поперечных колебаний конструкции с учетом колебаний жидкости в баках; устойчивости и автоколебаниям систем управления движением; системам топливоподачи, в том числе при кавитации в шнекоцентробежных насосах; динамика разделения ступеней ракет и раскрытия солнечных батарей спутников и космических станций; ударные взаимодействия и многие другие. На основе результатов, полученных при исследовании и отработке реальных конструкций, одна за другой выходят монографии по динамике ракет и их систем. Эти издания и сейчас остаются настольными книгами разработчиков и конструкторов ракетной техники в НИИ и КБ.

Решение конкретных исследовательских задач членами научной школы К.С. Колесникова завершалось и шло параллельно не только с внедрением их в практику расчетов конкретных изделий и систем, но и с разработкой новых методик обучения студентов соответствующих специальностей вопросам математического моделирования и расчетов, применяемых ими при курсовом и дипломном проектировании. Были написаны учебники по динамике ракет и космических аппаратов, теории колебаний, устойчивости движения, теоретической механике. Основной курс теоретической механики для студентов МВТУ был существенно расширен, переработан и дополнен курсовыми домашними заданиями, что обеспечивало необходимый уровень знаний по механике, необходимый будущим специалистам.

К.С. Колесников активно участвовал в работе Научно-методического совета по теоретической механике и являлся главным редактором Научно-методического сборника трудов по теоретической механике до 1995 г. В соответствии с решением Научно-методического совета им было организовано на базе кафедры проведение ежемесячного Общемоосковского научно-методического семинара по теоретической механике для преподавателей вузов Московского региона. При нем преподаватели кафедры проводили работу на Факультете повышения квалификации преподавателей практически всех технических вузов страны, а кафедра была признана базовой кафедрой Министерства высшего и среднего специального образования СССР по дисциплине «Теоретическая механика».

Перейдя в 1988 г. на работу советником при ректорате МГТУ им. Н.Э. Баумана академик К.С. Колесников продолжил работу по решению актуальных вопросов развития науки и образования в Университете, совмещая это с активной работой в отделении РАН. Он становится заместителем главного редактора академического многотомного

издания «Энциклопедия машиностроения». Лично им и его учениками написаны важные разделы по динамике и прочности машин, теории колебаний механических и гидромеханических систем. В рамках выполнения Федеральной программы «Интеграция» К.С. Колесников является инициатором издания, одним из авторов и главным редактором серии книг «Механика в техническом университете» в 8 томах, которая в 2008 году отмечена премией Правительства РФ в области образования.

Долгое время К.С. Колесников был председателем экспертного совета ВАК и председателем диссертационного совета по динамике и прочности машин, приборов и оборудования, одного из самых авторитетных в стране по данному направлению.

Достижения К.С. Колесникова высоко оценены Правительством и Президентом страны. За боевые и трудовые заслуги он награжден многими медалями и орденами, а за огромный вклад в дело развития МГТУ им. Н.Э. Баумана отмечен почетным знаком «За заслуги перед Университетом».

И сегодня Константин Сергеевич Колесников остается признанным лидером созданной им научно-педагогической школы по динамике механических и гидромеханических систем, продолжая работать на благо науки и высшего образования нашей страны.

УДК 531.01

*Г.Т. Алдошин*

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова

### **VIII ОКУНЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ**

Международная конференция по механике и баллистике «VIII Окуневские чтения» была организована и проведена Балтийским государственным техническим университетом «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова 25 – 28 июня 2013 г. в Санкт-Петербурге. В подготовке конференции участвовали БГТУ «ВОЕНМЕХ», СПбГУ, Томский ГУ, НИИ механики МГУ, ЦНИИмаш, Нижнетагильский институт испытания металлов, ОАО НПК «Высокие технологии», Балтийский научно-исследовательский центр, Военно-исторический музей артиллерии, инженерных войск и войск связи. Конференция проходила под эгидой Научно-методического совета Минобрнауки РФ по теоретической механике, Научного совета РАН по проблеме «Тепловые режимы машин и аппаратов», Академии нелинейных наук, Научно-инженерного общества судостроителей им. А.Н. Крылова. В рамках конференции проведен мини-симпозиум «А.Н. Крылов и современная наука», посвященный 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова – выдающегося инженера-кораблестроителя, механика и организатора науки. В научный комитет входили видные отечественные и зарубежные ученые, специалисты промышленности, НИИ и КБ.

Целью конференции являлось предоставление возможности преподавателям высшей школы, ученым, представляющим академическую и прикладную науку, специалистам промышленности встретиться и обсудить с коллегами новые результаты и новые идеи, установить контакты для дальнейшего сотрудничества, обсудить проблемы совершенствования методов подготовки молодых специалистов. На конференцию было заявлено более 170 докладов преподавателей высшей школы, научных учреждений и промышленности России, стран СНГ (Азербайджан, Белоруссия, Грузия, Казахстан, Украина, Узбекистан) и зарубежных государств (Германия, Италия, Мексика, Тайвань). Авторами докладов явились 3 академика РАН (И.Г. Горячева, В.А. Левин, Н.Ф. Морозов), 4 чл.-корр. РАН (О.М. Алифанов, Г.Л. Леонов, Ю.В. Петров, В.А. Плисс), свыше 50 докторов и более 70 кандидатов



наук, аспиранты и студенты (103). Впервые в работе конференции приняли участие 2 преподавателя школы.

Работа конференции проходила в трех секциях: теоретическая и прикладная механика, баллистика, компьютерные и образовательные технологии в механике и баллистике.

В рамках конференции было проведено также выездное заседание Научно-методического совета Минобрнауки по теоретической механике, обсудившее критическую ситуацию с преподаванием механики в высших учебных заведениях в связи с переходом на новые федеральные стандарты.

На открытии состоялся, в частности, доклад сотрудника Русского музея Ю.Л. Соломонович «Собрание Б.Н. Окунева в Русском музее», в котором было отмечено, что собрание Б.Н. Окунева, завещанное им, является одной из самых крупных и значительных коллекций, пополнявших фонды музея во второй половине XX века.

Нельзя особо не отметить доклады школьных учителей Пасынковой С.В. «Роль школьного музея истории в образовательном пространстве» (коллекция старинных демонстрационных приборов в школьном музее физики) и Ивановой В.В. «Цикл занятий для учащихся начальной школы», «Механика для детей». Музеем школы 206 может похвастаться любая механическая кафедра вуза, приборное оснащение которых за годы разрухи пришло в упадок. Доклад Ивановой В.В. (школа 222) представляет собой луч света на темном фоне физико-математического образования, которое с внедрением ЕГЭ стремительно деградирует, и хочется верить, что все-таки еще не все потеряно, и повторить вслед за автором доклада: «Ребята (а речь идет о втором классе!) наверняка заинтересуются этой областью знаний и захотят продолжить свои научные открытия и изыскания».

На заключительном пленарном заседании участники конференции отметили высокий научный уровень представленных работ, о чем свидетельствует и то, что многие исследования выполнялись в рамках грантов РФФИ и научных программ по проблемам. Как положительный факт, было отмечено, что публикация развернутых материалов докладов способствовала более плодотворному их обсуждению.

## **СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И ЕЁ ПРЕПОДАВАНИЕ В ВУЗЕ**

В период с 14 по 15 октября 2014 года в Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского проведена Всероссийская научно-методическая конференция «Современные проблемы механики и её преподавание в ВУЗе», посвящённая 100-летию со дня рождения профессора Н.В. Бутенина.

В рамках работы конференции состоялось выездное заседание Президиума научно-методического совета по теоретической механике при Министерстве образования и науки Российской Федерации.

Организаторами конференции выступили:

1. Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского;
2. Научно-методический совет по теоретической механике при Министерстве образования и науки Российской Федерации.

Цели конференции:

- анализ проблемных вопросов по выделенным направлениям прикладной механики;
- обсуждение методик совершенствования преподавания теоретической механики и смежных с ней дисциплин на основе применения современных технических средств обучения и внедрения информационно-телекоммуникационных и анимационных технологий в научно-образовательный процесс;
- оценка вклада профессора Н.В. Бутенина в теорию нелинейных колебаний и теорию гироскопов.

В работе конференции приняли участие специалисты, ученые и преподаватели 5 военных вузов, 17 гражданских вузов, 4 учреждений РАН, 4 воинских частей и военных организаций, 4 научно-производственных организаций из Москвы, Санкт-Петербурга, Самары, Волгограда, Воронежа, Екатеринбурга, Калининграда, Нижнего Новгорода, Тулы, Московской и Ленинградской областей.

На конференции заслушаны и обсуждены 57 устных и 55 стендовых докладов на четырёх секциях:

1. Механика машин.
2. Механика сплошных сред.
3. Механика космического полёта.
4. Проблемы преподавания теоретической механики в вузе.

Большой интерес на пленарных заседаниях вызвали доклады о 300-летней истории и современной деятельности Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, о научно-педагогической деятельности и жизненном пути профессора Н.В. Бутенина, а также выступления на секционных заседаниях профессора В.Д. Бертяева (Тульский государственный университет), профессора П.М. Шкапова (МГТУ им. Н.Э. Баумана), доцента О.М. Капустиной (МЭИ), профессора В.В. Козлова (ВКА им. А.Ф. Можайского), доцента Н.Н. Бутениной (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского) и многих других.

На заседании Президиума НМС по теоретической механике принято в уточненной редакции обращение к ректорам политехнических вузов Российской Федерации об опасности и недопустимости тренда сокращения объема преподавания теоретической механики, формирующей основы инженерного мировоззрения.

По результатам выступлений, обсуждений и обмена мнениями конференция постановила:

1. Считать актуальной проблему унификации терминологии и символьных обозначений в теоретической и прикладной механике. Поручить кафедре «Теоретической механики и теории механизмов и машин» Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского разработать проект программы по решению актуальной проблемы и представить этот проект для обсуждения на Президиуме научно-методического совета по теоретической механике при Министерстве образования и науки Российской Федерации.
2. Считать целесообразным внедрение в научно-образовательный процесс информационно-телекоммуникационных и анимационных технологий с учетом опыта Тульского государственного университета и Московского энергетического института.
3. Отметить высокий профессионально-методический, учебно-научный и организационный уровень проведения конференции. Использовать опыт Южно-Российского государственного технического университета и Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского при проведении научно-методических конференций по данной тематике в ведущих вузах России.

*Выводы:*

1. Цели конференции достигнуты в намеченном объеме;

2. Предложения, сформулированные в процессе обсуждения выступлений, одобрены всеми участниками конференции;
3. Конференция отмечает высокий уровень организации ее работы и выражает благодарность командованию Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, программному и организационному комитетам.

**О РАБОТЕ КАФЕДРЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»  
ИМЕНИ ПРОФЕССОРА Н.Е. ЖУКОВСКОГО**

В последнее время в связи с реализацией в системе высшего образования России перехода на двухуровневую систему подготовки специалистов явно обозначилась тенденция на снижение объема часов на преподавание механики в технических вузах. На научных и научно-методических форумах разного уровня, в решениях Научно-методического совета по теоретической механике неоднократно указывалось, что это существенно снижает качество подготовки не только по механике, но вместе с этим и общий уровень профессиональной подготовки выпускаемых специалистов.

В сложившихся условиях, при значительной самостоятельности вузов в части формирования учебных планов и программ, поддержание объема курса теоретической механики на приемлемом уровне в значительной мере зависит от руководства самих вузов, от понимания им всей критичности ситуации, связанной с опасностью снижения знаний по механике для будущих специалистов.

Следуя рекомендациям Научно-методического совета по теоретической механике при Министерстве образования и науки РФ, Национального комитета по теоретической и прикладной механике РФ, других общественных научных сообществ кафедры и авторитетные ученые-механики ставят эти вопросы перед методическими управлениями, советами вузов, ректорами, однако часто без успеха – линия на сокращение объема часов на преподавание теоретической механики в большинстве вузов не прекращается.

Для МГТУ им. Н.Э. Баумана все сказанное выше имеет еще большее значение, так как речь идет о подготовке специалистов с повышенным уровнем знаний и умений, ориентированных на исследовательскую, творческую работу в наиболее современных областях техники и технологий. Соответственно, осуществляется углубленное изучение фундаментальных общетеоретических дисциплин – высшей математики, физики, теоретической механики, информатики, последовательно переходящее затем на предметы общепромышленного цикла – теорию механизмов и машин, сопротивление материалов, детали машин, гидравлику и др. Всё это, плюс основательная подготовка студентов в лабораториях и практика в научно-исследовательских инсти-

тудах РАН и университета, на научно-производственных комплексах и на опытных предприятиях с инновационным производством – находится в русле получившего мировое признание «русского метода» подготовки инженеров. Так была названа в свое время система подготовки инженеров в МГТУ им. Н.Э.Баумана, возникшая еще в годы его «молодости» и постоянно развивающаяся в соответствии с вызовами времени и новыми потребностями общества.

В первом ряду создателей этого метода стоит имя Николая Егоровича Жуковского – «отца русской авиации», труды которого отличается не только фундаментальность и обоснованность выводов, но и практическая направленность результатов. Следует отметить, что именно с его именем связано формирование курса теоретической механики в инженерном образовании России. Становление дисциплины «Теоретическая механика» в Императорском высшем техническом училище началось с 1878 г., когда Николай Егорович выделил курс теоретической механики из общего курса высшей математики.

Отдавая дань памяти выдающемуся ученому и учитывая большую роль преподавания механики в подготовке современных специалистов, в 2012 г. Ученый совет МГТУ им. Н.Э. Баумана присвоил кафедре теоретической механики имя ее основателя – профессора Николая Егоровича Жуковского.

Вся история становления и развития учебного курса и в целом дисциплины «Теоретическая механика» связаны с широкой востребованностью приобретаемых обучающимися знаний не только в традиционно наукоемких направлениях ракетно-космической, авиационной, атомной, энергетической, но и во всех других отраслях промышленности. Актуальность этого постоянно возрастает, а предметная область с течением времени не сужается, а расширяется в новых инновационных направлениях, к которым относятся наноинженерия, биомеханика, робототехника и т.д. Ориентация на подготовку бакалавров, как узких специалистов для обслуживания импортных технологий, может привести к критической ситуации, когда возникшая проблема «импортозамещения» кадров может потребовать больших усилий, средств и времени, чем переподготовка специалистов с фундаментальной подготовкой по базовым дисциплинам.

Проявляя озабоченность современным состоянием вопроса преподавания механики в вузах, кафедра «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского при поддержке Научно-методического совета по теоретической механике выступила инициатором ряда мероприятий, направленных на обсуждение не только актуальных совре-

менных вопросов механики, но и роли механики и фундаментальных дисциплин в подготовке современных специалистов.

9 - 10 октября 2012 г. прошла научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященная 165-летию Николая Егоровича ЖУКОВСКОГО и присвоению его имени кафедре теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана.

23-25 октября 2013 года состоялась 2-я научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», приуроченная к 135-летию кафедры теоретической механики, основанной Н.Е. Жуковским.

17-19 ноября 2014 года в рамках Международной научной конференции «Физико-математические проблемы создания новой техники» состоялись заседания секции 1 «Современные проблемы механики и процессов управления машинами» под руководством академика К.С. Колесникова.

Кроме обширной научной программы в расписании конференций были выделены заседания, на которых совместно с членами президиума Научно-методического совета по теоретической механике проходило обсуждение актуальных научно-методических и организационных вопросов преподавания механики в современных условиях.

Считаем, что привлечению внимания к вышеобозначенным проблемам может способствовать любая возможность популяризации как самой дисциплины, так и деятельности авторитетных ученых и методистов-механиков.

Поэтому кафедра, также активно участвовала в последнее время в Окуневских чтениях, конференции, посвященной 100-летию Н.В. Бутенина, провела расширенное заседание, посвященное 100-летию Н.Н. Никитина, а также запланировала ряд мероприятий, связанных с 95-летием академика РАН Константина Сергеевича Колесникова, признанного лидера научно-педагогической школы механиков МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Студенческие олимпиады по теоретической механике, научные конференции и школы, ориентированные на участие студентов и аспирантов также поддерживают авторитет нашей дисциплины.

Сохранить и творчески приумножить имеющийся потенциал преподавания и изучения механики можно только общими усилиями всего научного и учебного сообщества.

### **О ВЫЕЗДНОМ ЗАСЕДАНИИ НМС ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Очередное заседание научно-методического Совета (НМС) по теоретической механике состоялось во время Всероссийской научно-методической конференции «Современные проблемы механики и её преподавание в вузе», посвящённой 100-летию со дня рождения проф. Н.В. Бутенина. Конференция проходила в Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского) в Санкт-Петербурге 14-15 октября 2014 года.

Прежде всего, следует отметить и поблагодарить командование академии, всех организаторов, сотрудников, участвовавших в подготовке и проведении этого мероприятия, за высокий уровень конференции, достигнутый благодаря их вниманию и значительным усилиям.

Конференция проходила в стенах одного из старейших инженерных учебных заведений России, основанном в 1712 году по указу Петра I. В академии в разные годы преподавали М.В. Ломоносов, М.И. Кутузов, Н.А. Добролюбов, Н.Г. Чернышевский, Д.И. Менделеев. Среди выпускников – множество славных имён. В здании академии, сохранившемся с 18 века, царит особая атмосфера и ясно ощущается величие традиций и глубокая преемственность в развитии науки России.

В заседании приняли участие заведующие кафедрами, ведущие преподаватели теоретической механики вузов Российской Федерации: Алдошин Г.Т. (БГТУ «Военмех» им. Д.Ф. Устинова), Бертяев В.Д. (Тульский государственный университет), Варенцов В.В. (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Горшков Л.К. (ВКА им. А.Ф. Можайского), Гурецкий В. В. (Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»), Докучаев Л.В. (ЦНИИМАШ); Диевский В.А. (Военный институт (инженерно-технический) Военной академии материально-технического обеспечения), Капустина О.М. (НИУ МЭИ), Красовский А.Н. (Уральский государственный аграрный университет), Лобода О.С. (СПб государственный политехнический университет), Слёзкин С.К. (ВКА им. А.Ф. Можайского), Самойлов Н.С. (ВКА им. А.Ф. Можайского), Панкратов А. А. (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Шкапов П.М. (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Щеглова Ю.Д. (Воронежский государственный университет), Щербаков В.И. (ВКА им. А.Ф. Можай-



ского). Вели совещание: председатель – профессор Шкапов П.М., заведующий кафедрой теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана, секретарь – доцент Капустина О.М.

Среди вопросов, обсуждавшихся на заседании, необходимо отметить два основных:

1. О сокращении числа часов, отводимых в вузах на преподавание теоретической механики.
2. О необходимости унификации и стандартизации обозначений в теоретической механике.

По первому вопросу выступил заведующий кафедрой теоретической механики МГТУ им. Баумана профессор Шкапов П.М. С глубокой тревогой он отметил, что часы, отводимые на преподавание теоретической механики во многих ВУЗах, сокращённые до 2-4 зачётных единиц (з.е.), не позволяют дать студенту знания, необходимые для квалифицированного решения научно-технических задач в его будущей инженерной деятельности. Докладчик констатировал наличие угрозы снижения качества фундаментального образования в России.

Выступившие Алдошин Г.Т., Бертяев В.Д., Горшков Л.К., Капустина О.М. выразили озабоченность в связи с полным исключением из образовательных программ некоторых технических ВУЗов курса теоретической механики или снижением до недопустимого уровня количества часов, отводимых на изучение этого курса.

Участники заседания пришли к выводу, что малый объём знаний у выпускников таких ВУЗов в области теоретической механики, фундаментальной естественнонаучной дисциплины физико-математического цикла, на которую опирается подавляющее число общепрофессиональных и специальных инженерных курсов, ведёт к падению уровня российского образования и ставит под сомнение возможность развития высоких технологий в РФ.

Участники совещания одобрили (после редактирования) текст обращения НМС к руководителям учебно-методических объединений и ректорам технических университетов РФ. В этом обращении содержится критика современных программ подготовки выпускников в области теоретической механики и сформулирован ряд конкретных предложений по улучшению существующего положения.

В, частности, рекомендовано:

1. Сохранить (восстановить) кафедры теоретической механики, а если это невозможно, то сосредоточить преподавание дисциплины «Теоретическая механика» на одной из кафедр фунда-

ментального цикла, доверяя чтение курса только специалистам.

2. Установить для бакалавров минимальную трудоемкость курса не менее 8 з.е. по ряду естественнонаучных и инженерных направлений.
3. Организовать чтение дополнительных глав теоретической механики для магистров, установив минимальную трудоемкость не менее 6 з.е.
4. В качестве самостоятельной работы под руководством преподавателя ввести курсовую работу с исследовательской частью, содержащую разделы статика, кинематика, динамика, выполняемую на базе компьютерных технологий.

По вопросу необходимости унификации и стандартизации обозначений в теоретической механике выступили: Горшков Л.К., Алдошин Г.Т., Шкапов П. М., Щербаков В.И., Докучаев Л.В. Они отметили актуальность рассматриваемой проблемы, а также предложили план работы по её решению. Участники совещания поддержали этот план.

## ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ О РАБОТЕ НМС ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

За период с момента выхода в свет выпуска № 28 сборника научно-методических статей с сентября 2012 года по ноябрь 2014 года Научно-Методический совет по теоретической механике при Министерстве образования и науки РФ продолжил свою работу. На заседаниях Совета, которые проводятся в предпоследний четверг месяца в НИИ механики МГУ, рассматривалось много актуальных и интересных вопросов, посвященных важным современным научным направлениям, методике преподавания различных разделов курса теоретической механики, вопросов, связанных с историей, методологией механики и работой кафедр теоретической механики Российских вузов.

На заседания традиционно приглашались известные ведущие ученые, а также молодые ученые с научными докладами:

- *Журавлёв В.Ф.* (ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН). Голономные и неголономные связи в задачах точной механики
- *Самсонов В.А.* (НИИ механики МГУ) О развитии некоторых задач Н.Е.Жуковского
- *Барбашова Т.Ф., Кугушев Е.И., Попова Т.В.* (МГУ им. М.В. Ломоносова). Некоторые задачи из раздела «Переменные действие-угол»
- *Зобова А.А.* (МГУ им. М.В. Ломоносова). Динамика однородного шара на вязко-упругой горизонтальной плоскости с трением
- *Вильке В.Г., Шатина А.В., Шатина Л.С.* (МГУ им. М.В. Ломоносова). Об эволюции перигелия Меркурия
- *Петров А.Г.* (ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН). О маятнике Фуко, волчке Лагранжа и кчающейся пружине
- *Обносков К.Б.* (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Интегральные инварианты осциллятора с  $n$  степенями свободы
- *Формальский А.М.* (НИИ механики МГУ). Как избежать колебаний в системах с податливыми элементами
- *Морозов В.М., Каленова В.И.* (НИИ механики МГУ). О некоторых методических вопросах исследования устойчивости стационарных движений твердого тела.
- *Русанов П.Г.* (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Дискретные расчетные схемы механики деформируемых тел.

На заседаниях были представлены доклады, посвященные современным методикам в преподавании:

- *Степанов С.Я.* (ВЦ РАН). Использование компьютера в практических занятиях по теоретической механике
- *Бертяев В.Д.* (ТулГУ). Применение математически ориентированных сред и интерактивного мультимедийного оборудования при проведении аудиторных занятий в курсе теоретической механики
- *Додонов Б.М.* (МАДИ). Облачные технологии для изучения теоретической механики в техническом университете

В октябре 2013 года состоялось выездное заседание Научно-Методического Совета в МГТУ им. Н.Э. Баумана, совмещенное с научной конференцией «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященной 135-летию кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана.

14-15 октября 2014 года выездное заседание Научно-Методического Совета состоялось в Санкт-Петербурге в Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, где проходила Всероссийская научно-методическая конференция «Современные проблемы механики и её преподавание в вузе», посвященная 100-летию со дня рождения профессора Н.В. Бутенина.

На научных заседаниях выступали с интересными докладами и сообщениями сотрудники принимающих сторон и гости конференций.

На заседаниях Совета традиционно рассматривались вопросы, связанные с проведением городских и региональных студенческих олимпиад по теоретической механике. Руководителем секции НМС, занимающейся студенческими олимпиадами, является Дубровина Г.И. (МГТУ им. Н.Э. Баумана).

## О МЕЖДУНАРОДНОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ 2014 ГОДА

С 21 по 25 апреля 2014 г. в Белорусском государственном университете транспорта (г. Гомель) проводилась очередная 10-ая международная олимпиада по теоретической механике. В олимпиаде приняли участие студенты 38 вузов Белоруссии, России, Украины Польши, Китая и Турции. Всего присутствовало 147 участников.

Проводилось два конкурса: теоретический (лично-командный) и «Брейн-ринг» (командный). На теоретических конкурсах всех олимпиад участникам олимпиады предлагалось за четыре часа решить восемь задач. Две задачи по статике (С1, С2), две по кинематике (К1, К2) и четыре по динамике (Д1, Д2, Д3, Д4).

Задача С1, практически стандартная и для решения больших усилий не требует. Задача С2 значительно сложнее. Обычно это задача с трением и иногда необходимо рассматривать различные варианты опирания твердого тела с различными поверхностями. При этом многие ошибаются в определении совокупности решений (табл. 1).

Задача К1 обычно относится к плоскому движению твердого тела и проблеме определения скоростей точек. Определению ускорений точек при плоском движении твердого тела посвящена, как правило, задача К2 (табл. 2).

Таблица 1. Типовое задание по статике

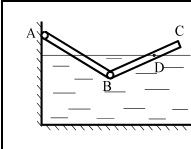
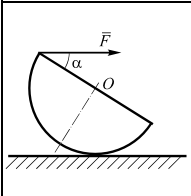
	<p><b>С1.</b> Два соединенных между собой с помощью шарнира одинаковых однородных стержня длины <math>l</math>, шарнирно прикрепили к точке <math>A</math> стенки сосуда, заполненного жидкостью. При этом в положении равновесия стержень <math>AB</math> оказался погруженным в жидкость ровно до середины. Определить длину участка <math>CD</math> стержня <math>CB</math>, находящуюся над поверхностью жидкости при равновесии системы.</p>
	<p><b>С2.</b> Изображенный на схеме полуцилиндр опирается на шероховатую поверхность и нагружен некоторой горизонтальной силой <math>F</math>. Коэффициент трения между полуцилиндром и плоскостью равен <math>f</math>. Плотность цилиндра изменяется по линейному закону в зависимости от расстояния от рассматриваемой точки полуцилиндра до центра <math>O</math>. Причем, плотность материала у криволинейной поверхности в 2 раза больше плотности в точке <math>O</math>. Определить максимальное значение угла <math>\alpha</math> при равновесии системы.</p>

Таблица 2. Типовое задание по кинематике

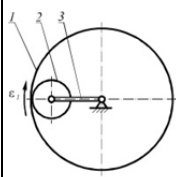
	<p><b>K1.</b> В изображенном на рисунке механизме <math>OC = AD = l</math>, <math>OA = AB = CM = 3l</math>. Кривошип <math>OA</math> вращается с постоянной угловой скоростью <math>\omega</math>. Для указанного на рисунке положения определить скорость точки <math>M</math>.</p>
	<p><b>K2.</b> Квадратная пластина перемещается в своей плоскости, причем в данный момент времени скорости точек <math>A</math>, <math>B</math> и <math>D</math> одинаковы по величине. Ускорения точек <math>B</math> и <math>D</math> также одинаковы, и их векторы направлены так, как это показано на рисунке. Найти, во сколько раз отличаются скорости точек <math>A</math> и <math>C</math>, а также отношение их ускорений.</p>

Задача Д1 относится или к динамике точки, или к динамике простой системы не более чем двух тел. Задачи Д2 и Д3 – это, как правило, системы с двумя степенями свободы, которые поддаются анализу с помощью уравнений Лагранжа. Задача Д4 – сложная. Это может быть система с одной или несколькими степенями свободы, но есть некоторые особенности, например сложные уравнения связей, не позволяющие решить ее быстро (табл. 3).

Конкурс «Брейн-ринг» заключается в следующем. Соревнуются студенческие команды. Каждая команда состоит из трех студентов. Три студента садятся за один стол и сообща решают тридцать задач за один час.

Таблица 3. Типовое задание по динамике

	<p><b>Д1.</b> Груз подвешен на невесомой нити длины <math>l</math>, другой конец которой прикреплен к неподвижной точке <math>O</math>. В начальный момент времени нить находилась в нижнем вертикальном положении <math>OA</math>, и грузу была сообщена некоторая начальная скорость <math>v_0</math>. При последующем движении в некоторый момент нить ослабилась, и груз начал свободное падение. Найти, при какой начальной скорости <math>v_0</math> нить снова окажется натянутой именно в тот момент, когда груз вернется в исходную точку <math>A</math>.</p>
	<p><b>Д2.</b> Х-образная конструкция, состоящая из двух одинаковых жестко соединенных стержней, установлена на гладкий горизонтальный пол. <math>AE = BE = BC = CE = ED</math>. В некоторый момент времени к точке <math>A</math> приложили силу <math>F</math>. Найти значение этой силы, если известно, что в первый момент после начала ее действия ускорение точки <math>A</math> оказалось в 4 раза больше ускорения точки <math>C</math>.</p>
	<p><b>Д3.</b> Груз 1 массы <math>m</math> скользит по боковой грани призмы 2 массы <math>2m</math>, перемещающейся по горизонтальной плоскости. К грузу приложена сила <math>F</math>, параллельная грани <math>BC</math> призмы 2. Трение между телами отсутствует. Призма может быть изготовлена с разными соотношениями между длинами ее ребер <math>AB</math> и <math>AC</math>. Определить максимально возможное при этом ускорение призмы 2.</p>

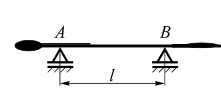
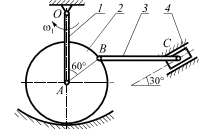



**Д4.** В планетарном механизме, расположенном в вертикальной плоскости, центральное колесо 1 радиуса  $R$  движется с постоянным угловым ускорением  $\epsilon_1$ . Колесо 2, которое представляет собой однородный диск радиуса  $r$ , перекачивается без скольжения по внутренней поверхности центрального колеса 1. В некоторый момент времени кривошип 3, шарнирно связанный с центром колеса 2, занимает горизонтальное положение. В этот момент скорости всех точек системы равны нулю. Пренебрегая массой кривошипа, определить его угловую скорость в тот момент, когда он первый раз займет вертикальное положение.

Задачи легкие (табл. 4), но дефицит времени и стрессовое состояние студентов приводит к тому, что лишь нескольким командам удастся набрать больше 15 баллов (1 задача – 1 балл)

После подведения предварительных результатов проводился анализ решения всех задач, затем апелляция, а потом – объявление окончательных итогов и награждение победителей.

Таблица 4. Типовое задание для брейн-ринга

	<p>4. Неоднородный стержень лежит на двух гладких опорах <math>A</math> и <math>B</math>. Реакция опоры <math>A</math> в два раза больше реакции опоры <math>B</math>. Расстояние между опорами <math>l</math>. На какое максимальное расстояние можно сместить влево правую опору, чтобы стержень при этом остался в равновесии?</p>
	<p>17. Для изображенного на рисунке положения механизма найти, во сколько раз скорость точки <math>C</math> больше скорости точки <math>A</math>?</p>
	<p>27. Однородный Г-образный стержень постоянного поперечного сечения с длинами элементов <math>l</math> и <math>2l</math> расположен в вертикальной плоскости так, что его большая сторона горизонтальна. Определить угловое ускорение стержня в этом положении.</p>

Первыми призерами олимпиады 2014 года стали команды Белоруссии, Санкт-Петербурга и Китая. Первое место в теоретическом конкурсе в личном зачете занял студент Белорусского государственного университета И. Л. Любач. В конкурсе «Брейн-ринг» первое место с максимальным количеством баллов (24) заняла команда УГНТУ (Уфимский государственный нефтяной технический университет). Команда Тульского государственного университета заняла пятое место в теоретическом конкурсе (в 2013 году – шестое место) среди 49 команд. Студент Тульского государственного университета Ю. В. Астапов занял 13 место из 147 участников в личном зачете.

В рамках олимпиады состоялся научно-методический семинар преподавателей вузов, на котором преподаватели обменялись опытом организации учебно-методической и научной работы на кафедрах теоретической механики вузов различных стран. По материалам семинара издается ежегодный сборник научных и учебно-методических работ.

Оргкомитет олимпиады во главе с проф. Шимановским А.О. провел большую работу по организации и проведению олимпиады. Создана спокойная, доброжелательная творческая обстановка и для студентов, и для преподавателей, участвующих в олимпиаде. Международная олимпиада в Гомеле пользуется большой популярностью среди студентов и преподавателей разных стран.

Изучение опыта проведения международной олимпиады в Гомеле будет способствовать повышению качества других олимпиад различного уровня по теоретической механике.



## **ОЛИМПИАДЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Олимпиада для студентов младших курсов дает возможность решать нестандартные задачи, в которых надо создать модель реального объекта и математическими методами исследовать движение, равновесие, устойчивость этого состояния. Решение задач повышенной трудности развивает творческие способности студентов, готовит их к научно-исследовательской работе, совершенствованию в будущем своей квалификации.

Министерство образования России ввело три этапа проведения олимпиад: 1-й тур – вузовская, 2-й тур – региональная, 3-й тур – Всероссийская.

Для проведения Всероссийских олимпиад с учетом существующего опыта и утверждено Научно-методическим советом по теоретической механике положение об олимпиадах.

С 2009 – 2011, 2013, 2014 гг. Всероссийскую олимпиаду по теоретической механике проводила кафедра теоретической механики Южно-Российского государственного политехнического университета (НПИ). Все годы задачи для теоретического конкурса составлял Кондратенко А.И., только один год автором нескольких задач был Муштари А.И., доцент Казанского национального исследовательского технологического университета. Авторами интересных задач компьютерного конкурса были Кондратенко А.И., Притыкин Д.Е. В компьютерном конкурсе студентам предлагается задача с двумя степенями свободы, для которой нужно составить модель решения, уравнения движения (равновесия), программу решения этих уравнений и исследовать с помощью компьютера движение системы. Итоги теоретического конкурса проводились отдельно для студентов классических и технических университетов в связи с сокращением в вузах курса теоретической механики. Президентом России были учреждены премии: 69 тысяч рублей за первое место в личном зачете и 30 тысяч рублей за второе и третье места.

В 2011г. среди классических и технических университетов в личном зачете 1-е место занял Ефимов С. (МФТИ), 2-е место – Ристюк М. (МГТУ им. Н.Э. Баумана, в командном зачете 1-е место занял МФТИ. Среди технических университетов в командном зачете 1-е место занял МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В 2013 г. среди классических и технических университетов 1-е место занял Костандов М. (ЮУрГУ), 2-е – Антонов А. (МГТУ им. Н.Э. Баумана). В командном зачете 1-е место заняла команда ЮУрГУ, в компьютерном конкурсе – команда МГТУ им. Н.Э. Баумана. Среди технических университетов в командном зачете 1-е место заняла команда МГТУ им. Н.Э. Баумана.

На этих олимпиадах успешно выступали студенты МФТИ, МГТУ им. Н.Э.Баумана, ЮУрГУ, РГУНиГ, Уфы, НГУ, Беларуси. Оргкомитет олимпиады проводил для студентов деловые игры, знакомство с городом, экскурсии в Старочеркасск, Таганрог, Азов. Во Всероссийских олимпиадах принимают участие студенты из Москвы, Санкт-Петербурга, Перми, Екатеринбурга, Челябинска, Тамбова, Новочеркасска, Ростова, Новосибирска, Красноярска, Иванова, Тулы, Казани, Минска, Гомеля и других городов.

С 2014г. в течение 5 лет Всероссийская олимпиада будет проходить в Казанском национальном исследовательском технологическом университете. Задачи для теоретического и компьютерного конкурсов составлял доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов Муштари А.И. В 2014г. в олимпиаде участвовало 92 студента. Среди технических и классических университетов в теоретическом конкурсе в личном зачете 1-е место занял Худяков В. (МФТИ), в командном зачете 1-е место заняла команда МФТИ, в компьютерном конкурсе – команда МФТИ. Среди технических университетов в командном зачете 1-е место заняла команда МГТУ им. Н.Э.Баумана.

Московская городская олимпиада – это 2-й тур Всероссийской олимпиады. В Московской олимпиаде принимают участие от 10 до 14 вузов Москвы и Московской области. 17 мая 2014 г Московская олимпиада проходила в МАМИ, в ней приняли участие 10 команд. 1-е место в командном зачете заняла команда МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1-е место в личном зачете занял студент из РГУНиГ. В 2015 г. Московскую олимпиаду проводит кафедра имени проф. Н.Е. Жуковского МГТУ им.Н.Э. Баумана.

На Всероссийских Московских олимпиадах студентам предлагается 6-8 задач по разделам статики, кинематики и динамики, время теоретического конкурса – 4 часа. На Всероссийских олимпиадах есть приз за самое оригинальное решение задачи.

Олимпиада выявляет одаренных студентов, развивает их творческие способности. Проведение олимпиад, поездки студентов на олимпиады связаны с материальными затратами. Поэтому нужна поддержка администрации вузов, Министерства образования, молодежных ор-

ганизаций. Победителей, призеров олимпиад нужно представлять к именным стипендиям, оказывать им материальную поддержку. Участники, победители олимпиад – это будущее науки, России.

### **Литература**

1. *Попов А.И.* Теоретическая механика. Тамбов: изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010.
2. *Дубинин В.В., Тушева Г.М., Нарская Н.Л., Дубровина Г.И., Саратов Ю.С.* Сборник олимпиадных задач. М.: изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006.
3. *Соколов Г.М.* Сборник олимпиадных задач по теоретической механике. Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2014. – 212 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Полвека работы .....	3
Обращение .....	5

### ОБЩИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

<i>В.Ф. Журавлев.</i> Инвариантная нормальная форма систем Гамильтона ..	7
<i>В.Г. Вильке, А.В. Шатина, Л.С. Шатина.</i> Изменение долготы перигелия орбиты Меркурия .....	17
<i>В.М. Морозов, В.И. Каленова.</i> О некоторых методических вопросах исследования устойчивости стационарных движений твердого тела ...	33
<i>В.К. Тарасов, Ю.П. Смирнов.</i> Элементарный вывод основных соотношений теории конечных поворотов .....	50

### МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

<i>А.Я. Красинский, Э.М. Красинская.</i> О допустимости линеаризации уравнений геометрических связей в задачах устойчивости и стабилизации равновесий .....	54
<i>А.Г. Петров.</i> Симметризация гамильтонианов .....	66
<i>А.В. Костарев, Т.А. Костарева.</i> Построение определимых связей .....	77

### СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>В.Д. Бертяев.</i> Электронные технологии при изучении теоретической механики .....	84
---	----

### МЕХАНИКИ РОССИИ

<i>О.Н. Арсеньев.</i> Жизнь и деятельность Н.В. Бутенина (к 100-летию со дня рождения) .....	91
<i>П.М. Шкапов.</i> 100 лет со дня рождения Николая Никитича Никитина .....	96
<i>И.А. Тюлина, В.Н. Чиненова.</i> Памяти академика Василия Прохоровича Горячкина (1868-1935) .....	98

### ЮБИЛЕИ

<i>К.С. Колесников</i> .....	101
------------------------------	-----

### ИНФОРМАЦИЯ

<i>Г.Т. Алдошин.</i> VIII Окуневские чтения .....	104
---	-----

<i>В.И. Щербаков. Современные проблемы механики и ее преподавание в ВУЗе.....</i>	106
<i>П.М. Шкапов. О работе кафедры.....</i>	109
<i>О.М. Капустина. О выездном заседании НМС по теоретической механике.....</i>	112
<i>А.В. Панишина. Информационное сообщение о работе НМС по теоретической механике.....</i>	115
<i>В.К. Тарасов. О международной олимпиаде по теоретической механике 2014 года .....</i>	117
<i>Г.И. Дубровина. Олимпиады по теоретической механике.....</i>	121

## **К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ СБОРНИКА НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

1. В адрес редколлегии представляется тщательно выверенная, научно отредактированная статья с направлением от кафедры или городского семинара по теоретической механике.

2. В статье необходимо указать фамилии, имена и отчества авторов, ученые степени, телефоны и адреса электронной почты.

3. Перед заглавием статьи указывается индекс УДК, после фамилий авторов – перечень полных названий их мест работы.

4. В статье следует применять Международную систему единиц (СИ) для обозначения физических величин и их единиц.

5. Объем рукописи вместе с таблицами, рисунками и списком литературы не должен превышать 10 страниц формата А4.

6. Статья готовится в редакторе MS Word. Размер шрифта – 12 пт. Поля по 2 см с каждой стороны. Межстрочный интервал – одинарный.

7. Набор формул осуществляется при помощи редактора формул MathType.

8. Рисунки представляются в форматах jpg, bmp, tiff, gif, eps или wmf. Рисунки, подготовленные с помощью редактора Word, не принимаются.

9. Список литературных источников (литература) составляется по ГОСТ 7.1-84. Список составляют в соответствии с последовательностью появления ссылок в тексте. В статье ссылки на литературу заключаются в квадратные скобки.

Статьи для публикации в сборнике просим направлять по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1. Редколлегия сборника научно-методических статей «Теоретическая механика».

Самсонову Виталию Александровичу.

samson@imec.msu.ru

# Научное издание

СБОРНИК НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ  
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**Выпуск 29**

Под редакцией профессора *В.А. Самсонова*

Редактор *Ю.Д. Селюцкий*

Технический редактор *И.В. Топорнина*

Компьютерный дизайн и верстка *М.З. Досаев, Ю.Д. Селюцкий*

Подписано в печать 02.06.2015                      Формат 60х90 1/16

Бумага офс. № 2. Объем 8,2 усл. печ. л. Тираж 120 экз.

Издательство Московского университета  
125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5

Отпечатано на ризографе НИИ механики МГУ  
119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1.