

Министерство образования и науки Российской Федерации

Научно-методический совет по теоретической механике

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Научно-исследовательский институт механики

# СБОРНИК научно-методических статей ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Выпуск 28*

Под редакцией профессора Ю.Г. Мартыненко

*Издается с 1968 года*

Издательство Московского университета  
2012

УДК 531  
ББК 22.21  
С 23

Редакционная коллегия:

Ю.Г. Мартыненко (гл. редактор), В.А. Самсонов (зам. гл. редактора),  
В.В. Александров, В.В. Дубинин, В.Ф. Журавлев, А.В. Карапетян,  
В.В. Козлов, В.В. Лапшин, В.М. Морозов, Р.Г. Мухарлямов,  
Ю.Д. Селюцкий (отв. секретарь), Ю.С. Саратов, С.К. Слезкинский,  
К.Е. Якимова

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, проф. Ю.Ф. Голубев,  
доктор физ.-мат. наук, проф. А.И. Кобрин

*Издание осуществлено при поддержке НИИ механики МГУ*

**Сборник научно-методических статей.** Теоретическая механика  
С 23 Вып. 28./ Под редакцией профессора Ю.Г. Мартыненко. – М.: Изд-во  
Московского университета, 2012. – 224 с., ил.

ISBN 978-5-211-06500-0

Сборник содержит статьи по общим и методическим вопросам теоретической механики и материалы для повышения квалификации преподавателей, интересные механические задачи и информацию о различных мероприятиях, связанных с теоретической механикой. Кроме того, обсуждаются вопросы применения новых информационных технологий в преподавании.

Несколько статей посвящены юбилейным датам и тем утратам, которые теоретическая механика понесла в последнее время.

Сборник дает возможность преподавателям, аспирантам и студентам высших учебных заведений России сориентироваться в современных тенденциях развития теоретической механики, а также перенять опыт новейших методических разработок.

ISBN 978-5-211-06500-0

УДК 531  
ББК 22.21

© Научно-методический совет  
по теоретической механике  
Минобрнауки РФ, 2012

## ПАМЯТИ Ю.Г. МАРТЫНЕНКО

Научно-методический Совет по теоретической механике Министерства образования РФ с глубоким прискорбием сообщает о том, что 15 июля после тяжелой болезни на 67 году жизни скончался Председатель Совета, главный редактор сборника статей «Теоретическая механика», доктор физико-математических наук, профессор **Юрий Григорьевич Мартыненко**.



После окончания с отличием механико-математического факультета в 1967 году и аспирантуры МГУ Юрий Григорьевич в 1971 году блестяще защитил кандидатскую диссертацию, а в 1978 г. – докторскую диссертацию на тему «Гироскоп в неконтактном подвесе». Юрий Григорьевич вел исследования в различных областях теоретической и прикладной механики – гироскопы в электромагнитном подвесе и волновые гироскопы, управление спутниками, робототехнические системы, неголономная механика, биомехатроника – и получил в них замечательные результаты. Он – автор более 200 научных работ, среди которых две монографии на русском языке и одна на китайском.

Юрий Григорьевич – Заслуженный деятель науки РФ, академик Международной академии наук Высшей школы и Академии навигации и управления движением, член-корреспондент Российской Академии естественных наук, лауреат Грантов Правительства города Москвы, лауреат премии им. А.А. Андропова РАН. Он был награжден медалями имени академика Кузнецова В.И. и «25 лет запуска ИСЗ «Радио» и «Космос-1045» Федерации космонавтики РФ, медалью «В память 850-летия Москвы», медалями и дипломами Почета ВДНХ СССР и Всероссийского Выставочного центра.

Юрий Григорьевич активно участвовал в организации и экспертизе научных исследований: в ВАКе РФ, в Российских национальных комитетах по теоретической и прикладной механике, по автоматическому управлению, возглавлял секцию Экспертного Совета РФФИ по математике, информатике и механике, был членом нескольких Диссертаци-

онных советов, редколлегий 3-х журналов. На посту Председателя Научно-методического Совета по теоретической механике Министерства образования РФ в 1999 году он стал преемником основателя и многолетнего его Председателя академика А.Ю. Ишлинского.

В 1986 – 2003 гг. Юрий Григорьевич Мартыненко заведовал кафедрой теоретической механики Московского энергетического института, а с 2003 г. руководил лабораторией общей механики НИИ механики МГУ и был профессором кафедры прикладной механики и управления на механико-математическом факультете МГУ. Юрий Григорьевич был замечательным педагогом, среди его учеников 18 кандидатов и 4 доктора наук.

Ушёл из жизни очень добрый и доброжелательный человек, человек с большим чувством юмора. Память о нём навсегда сохранится в наших сердцах.

УДК 531.383

*Д.В. Трещев*

МГУ имени М.В. Ломоносова  
Математический институт им. В.А. Стеклова

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И ЕЕ МЕСТО В СОВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

«Пусть не корят меня за то, что  
я не сказал ничего нового: ново  
уже само расположение материала».  
Блез Паскаль

Термин «теоретическая механика» традиционен, но не вполне удачен. Он более или менее соответствует европейскому термину «rational mechanics». Последний представляется несколько более адекватным. Он призван отличать эту область знаний не от «практической механики», что, конечно, лишено всякого смысла, а от релятивистской, статистической, квантовой механики, а также механики сплошной среды. Другим более удачным термином является «классическая механика». Им мы и будем пользоваться в дальнейшем.



К сожалению, стандартный курс классической (теоретической) механики в техническом университете создает впечатление, что эта дисциплина чрезвычайно специальна, изолирована, оперирует узким классом объектов и отвечает на весьма ограниченный набор вопросов. Кур-

сы, читаемые в центральных университетах, например, на механико-математическом факультете МГУ, более насыщены, но и они не могут дать сколько-нибудь полного представления о предмете. В этой заметке я попытаюсь показать, что классическая механика занимает одно из центральных мест в современной структуре естественных наук и имеет тесные связи с большинством из разделов современной математики. Эти связи изображены на рисунке, на котором числа в кружочках обозначают области и теории, через которые классическая механика осуществляет взаимодействие с другими разделами математики и естествознания. Следующие далее краткие комментарии к рисунку касаются именно этих чисел.

Здесь мы не останавливаемся на тривиальных связях, проистекающих из самой структуры предмета классической механики: кинематика  $\rightarrow$  дифференциальная геометрия в  $\mathbb{R}^3$ , (классическая) динамика  $\rightarrow$  теория обыкновенных дифференциальных уравнений, (линейная) теория устойчивости  $\rightarrow$  линейная алгебра и т.д., пытаюсь, в основном, комментировать связи, идущие через более специальные теории. Мы также считаем очевидными и отдельно не обсуждаем связи, проистекающие из того факта, что язык и объекты классической механики являются базовыми структурами для ряда областей. Это прежде всего касается уже упомянутых релятивистской, статистической, квантовой механики, механики сплошной среды, а также математической физики и теории динамических систем.

Не сомневаясь в том, что многие читатели, основываясь на своем кругозоре и области интересов, найдут многочисленные возможности для дополнений и уточнений, мы, все-таки надеемся, что представленный нами текст представляет, по крайней мере, методический интерес.

**1. Теория гамильтоновых систем.** Напомним, что в гамильтоновой механике в качестве неотъемлемой структуры появляется симплектическая форма (в канонических координатах имеющая вид  $dp \wedge dq$ ) или скобка Пуассона. По этой причине многие небезосновательно считают, что теория гамильтоновых систем, в сущности, тождественна симплектической геометрии и разница между ними сводится лишь к тому, что первая тяготеет к динамике, а вторая – к вопросам, лежащим в таких областях, как геометрия, топология и теория особенностей. Аналогичные мотивировки имеет также контактная геометрия, которой соответствует динамика на неособом уровне гамильтониана.

**2. Вариационные принципы.** Траектории лагранжеевых систем имеют двоякую природу, являясь одновременно решениями дифференциальных уравнений и экстремалими функционала действия. Этот

замечательный факт устанавливает связи классической механики с функциональным анализом (как средством исследования вариационных задач), с дифференциальной геометрией (прежде всего, с задачей о геодезических на римановых многообразиях), с топологией (особенно через проблему существования периодических решений) и с теорией оптимального управления, непосредственно занимающейся исследованием экстремалей функционалов на пространствах кривых. Впрочем, теория управления играет роль одного из инструментов, необходимых для ответа на вопросы, непосредственно лежащие в области интересов классической механики, например, вопросов, связанных с энергетической оптимизацией межпланетных перелетов или перевода искусственного спутника Земли на другую орбиту.

**3. Периодические решения.** Уже упомянутая связь с топологией здесь проходит через теорию Морса, дающую оценки снизу на число критических точек функции (в данном случае, функционала действия) в терминах топологии области определения (например, пространства замкнутых кривых на конфигурационном пространстве лагранжевой системы). Соображения из геометрии подключаются, если, например, требуется оценить число периодических решений на выпуклом уровне энергии. Оценкой снизу количества неподвижных точек симплектических диффеоморфизмов (круг вопросов, также мотивированный проблемой периодических решений) занимается относительно молодая, но уже содержащая много глубоких результатов область – симплектическая топология.

**4. Неинтегрируемость и хаос.** Одним из важнейших вкладов А. Пуанкаре в классическую динамику явилось открытие того факта, что в общей ситуации уравнения Гамильтона ни в каком разумном смысле интегрируемыми не являются. Это, конечно, касается ситуации, когда решения не идут «из бесконечности в бесконечность», а обладают рекуррентными свойствами в духе теоремы Пуанкаре о возвращении. Неинтегрируемость тесно связана с наличием в системе хаотических режимов, исследованием которых занимается теория динамических систем. Методы доказательства неинтегрируемости и исследования хаоса весьма разнообразны. Кроме методов динамики и анализа здесь оказались уместными и соображения из топологии (В.В. Козлов, топологические препятствия к интегрируемости), и соображения из аналитической теории дифференциальных уравнений (теория Пикара-Вессьо, группы монодромии периодических решений).

**5. Симметрии, понижение порядка.** Помимо наличия первых интегралов, свидетельством той или иной степени регулярности динами-

ки является существование нетривиальных симметрий. Симметрии в этом контексте следует понимать в весьма широком смысле: к ним относятся и интегральные инварианты, и (векторные) поля симметрий, и инвариантные меры, и другие тензорные инварианты. Вопросы существования или несуществования таких симметрий, а также соответствующие вопросы понижения порядка исследуются с привлечением методов групп и алгебр Ли, топологии и других областей.

**6. Теория интегрируемых систем.** Несмотря на свою исключительность интегрируемые системы играют чрезвычайно важную роль в динамике. С одной стороны, это системы доступные для подробного анализа, с другой – это отправные точки для теории возмущений. Кроме того, физики верят в то, что наиболее фундаментальные законы природы даются интегрируемыми моделями.

Поиск интегрируемых систем – огромная деятельность в среде специалистов по геометрии и математической физике. Основными инструментами здесь являются теория групп и алгебр Ли (групповые симметрии, системы на группах и алгебрах, скобки Ли-Пуассона), алгебраическая геометрия (исследование полиномиальных и алгебраических интегралов и симметрий), комплексный анализ и аналитическая теория дифференциальных уравнений (исследование поведения решений при комплексном времени). Теорией интегрируемых гамильтоновых систем мотивирована также торическая топология – относительно недавно появившаяся область, изучающая многообразия, на которых задано действие тора (моделирующее действие компактной коммутативной группы симметрий).

**7. Эргодическая теория.** Язык теории вероятностей и теории меры пришел в динамику через эргодическую теорию. Сначала эргодическая теория в основном занималась системами (прежде всего, гамильтоновыми), в которых инвариантная мера задана априори. Затем ее методы были распространены на диссипативные системы, где меру на аттракторе надо строить специально. Особенно эффективно этот класс методов работает в системах, динамика которых в той или иной степени гиперболична (например, в системах Аносова). В соответствующих объектах и теоремах широко используется язык и идеология статистической механики.

**8. Уравнения Гамильтона-Якоби, Лиувилля, ...** Традиционные связи классической механики с теорией уравнений в частных производных в основном проходят через уравнение Гамильтона-Якоби и уравнение Лиувилля. Последнее играет важную роль в статистической механике и имеет далекие обобщения в виде различных вариантов

уравнения Власова. Уравнения в частных производных возникают также в одной из версий метода усреднения (метод непрерывного усреднения), весьма эффективной при исследовании экспоненциально малых эффектов в системах с быстрой фазой. Кроме того, следует помнить о бесконечномерных гамильтоновых системах. Какие из них относить к классической механике, а какие – к математической физике, дело вкуса.

**9. Теория устойчивости, бифуркации.** Давно известно, что содержательность задач исследования положений равновесия и периодических решений резко возрастает, если принимать во внимание зависимость системы (а значит, и решений) от параметров. На этом пути появляются бифуркации и другие эффекты (например, мягкая и жесткая потеря устойчивости). Через эти вопросы классическая механика взаимодействует с теорией особенностей. Другие бифуркационные диаграммы и, соответственно, другие особенности возникают при изучении топологии совместных интегральных уровней в фазовом пространстве (диаграммы Смейла).

**10. Квазипериодические решения, теория КАМ.** Теория Колмогорова-Арнольда-Мозера указывает на то, что в гамильтоновых системах следует ожидать существование большого количества квазипериодических решений. Для их исследования постоянно приходится иметь дело с диофантовыми свойствами соответствующих наборов частот. Благодаря этому обстоятельству возникают взаимовыгодные контакты классической механики с теорией чисел.

Отметим также, что современную классическую механику невозможно представить без численных методов, которые сопровождают практически все упомянутые задачи и подходы.

Было бы неправильным полагать, что модели в классической механике жестко зафиксированы. Достаточно упомянуть задачи с трением или системы с большим (возможно, бесконечно большим числом степеней свободы). Даже в канонических моделях динамика обычно чрезвычайно сложна вследствие неинтегрируемости. Это диктует внутреннюю логику развития области. Однако указанные выше (а также оставшиеся за кадром) связи показывают, что объекты и методы классической механики существуют далеко за ее пределами. Это приводит к сотрудничеству специалистов разных областей и призывает научных работников не замыкаться в своей узкой специальности. Большинство новых интересных задач рождается не внутри конкретной области, а приходит извне.

Кроме того, перечисленные вопросы (области, теории) вполне могут послужить темами специальных курсов для студентов, специализирующихся в области классической механики, или интересующихся ее приложениями.

### ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Модели механических систем переменного состава используются для описания движений летательных аппаратов, нитей переменной длины, твердых тел, взаимодействующих со сплошной средой. Изучению динамики систем переменного состава в курсе теоретической механики уделяется, по мнению автора, недостаточное внимание и носит фрагментарный характер, поскольку этот раздел механики может быть представлен как в курсе теоретической механики, так и в курсе механики сплошной среды.

В учебниках по теоретической механике теория систем переменного состава либо отсутствует, либо ее изложение недостаточно конструктивно. Традиционно этот раздел механики излагается в курсе классической теоретической механики [1–6] и присутствует в задачниках [7, 8]. Наибольшее внимание динамике систем переменного состава уделено в учебниках [1–3]. Теории систем переменного состава посвящены работы [9, 10].

В последние годы возрос интерес к методам механики систем переменного состава в связи с моделированием контактных взаимодействий тел с учетом их деформаций и наличием смазки в контактных зонах. Отметим, что силовое взаимодействие в системах переменного состава в ряде случаев сводится к ударным явлениям, характеризующим скачками поля скоростей точек, составляющих механическую систему.

Если масса точек, испытывающих удары в данный момент времени равна нулю, то такое взаимодействие можно назвать «мягкими» ударами при условии, что это взаимодействие происходит в каждый момент времени.

«Мягкие» удары описываются реактивными силами. Если происходит изменение состава системы при скачкообразном изменении массы системы в какой-то момент времени, например, падение метеорита на Землю, то такого рода взаимодействие описывается «жестким» ударом, при котором скачком изменяются скорости материальных точек положительной массы.

Ниже представлено последовательное изложение динамики систем переменного состава и приведены примеры, поясняющие теоретические положения.

### Основные понятия и теоремы.

Рассмотрим механическую систему постоянного состава  $(\Omega, \Sigma(\Omega), \mu)$  и однопараметрическое семейство замкнутых областей  $A(t) \subset \Omega \subset E^3$ ,  $A(t) \neq \emptyset$ ,  $\forall t$ . Пусть  $M(t) = \mu(A(t))$  – масса материальных точек, образующих множество  $A(t) \in \Sigma(\Omega)$ . Рассмотрим движение механической системы  $g^t: \Omega \rightarrow \Omega_t \subset E^3$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \in \Omega_t$ ,  $\mathbf{r} \in \Omega$ .

Пусть  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}, t)\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ ,  $|\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)| = 1$  – поле скоростей точек границы множества  $A(t)$ , направленное по единичной внешней нормали  $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  к поверхности границы  $\partial A(t)$ . Тогда

$$\frac{d\mu(A(t))}{dt} = \int_{\partial A(t)} (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) d\sigma(\mu, \mathbf{n}) \quad (1)$$

Здесь  $\sigma(\mu, \mathbf{n})$  – поверхностная мера, индуцированная пространственной мерой  $\mu(\mathbf{r})$ . Например, в случае существования плотности  $\rho(\mathbf{r})$  справедливы равенства  $d\mu = \rho(\mathbf{r})dv$ ,  $d\sigma(\mu, \mathbf{n}) = \rho(\mathbf{r})d\sigma$ , где  $d\sigma$  – элемент площади поверхности  $\partial A(t)$ .

*О. Механической системой переменного состава называется система  $(A(t) \in \Sigma(\Omega), \mu, t \in (t_0, t_1))$ , если*

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial A(t)} |\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)| d\sigma(\mu, \mathbf{n}) dt > 0$$

Уравнение движения системы свободных материальных точек  $(\Omega, \Sigma(\Omega), \mu)$  представляются в виде

$$\ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  – поле активных массовых сил. Уравнение (2) понимается в смысле равенства двух обобщенных функций, принадлежащих сопряженному пространству к пространству функций, непрерывных по времени и суммируемых по мере  $\mu$  на множестве  $\Omega$ .

Определим количество движения системы переменного состава как вектор

$$\mathbf{Q}(t) = \int_{A(t)} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) d\mu \quad (3)$$

Т.1. Производная по времени от количества движения системы переменного состава (3) равна сумме равнодействующей внешних сил  $\mathbf{F}^{(e)}$ , приложенных к точкам множества  $A(t)$ , и реактивной силы  $\mathfrak{R}$ , порождаемой изменением множества  $A(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} &= \mathbf{F}^{(e)} + \mathfrak{R}, \quad \mathbf{F}^{(e)} = \int_{A(t)} \mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{r}, t) d\mu \\ \mathfrak{R} &= \int_{\sigma_-} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+0)(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \rho d\sigma + \\ &+ \int_{\sigma_+} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \rho d\sigma \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\sigma_+$  – часть границы  $\partial A(t)$ , в точках которой  $(\mathbf{u}, \mathbf{n}) > 0$ , а  $\sigma_-$  – часть границы  $\partial A(t)$ , в точках которой  $(\mathbf{u}, \mathbf{n}) < 0$ ,  $\rho(\mathbf{r})$ ,  $d\sigma$  – объемная плотность и элемент площади границы  $\partial A(t)$ ,  $\rho(\mathbf{r}) d\sigma = d\mu$ .

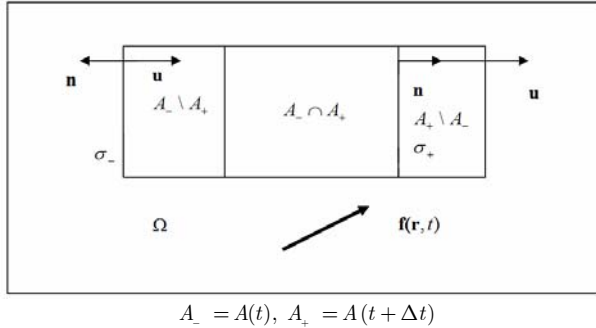


Рис. 1

Рассмотрим моменты времени  $t$ ,  $t + \Delta t$  и приращение количества движения системы переменного состава (3)

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q} &= \int_{A(t+\Delta t)} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+\Delta t) d\mu - \int_{A(t)} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) d\mu = \\ &= \int_{A(t+\Delta t) \cup A(t)_-} [\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+\Delta t) - \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)] d\mu + \end{aligned}$$

$$+ \int_{A(t+\Delta t) \setminus A(t)} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) d\mu - \int_{A(t) \setminus A(t+\Delta t)} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+\Delta t) d\mu$$

Функции  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)$  как функции времени предполагаются гладкими на множестве  $\Omega$  за исключением множеств нулевой меры  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$ , в которых функция  $\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)$  может иметь разрыва первого рода. Далее с точностью до малых порядка  $\Delta t$  представим полученное приращение в виде

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q} &\cong \int_{A(t)} \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) \Delta t d\mu + \int_{\sigma_+} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \Delta t \rho d\sigma + \\ &+ \int_{\sigma_-} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+\Delta t)(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \Delta t \rho d\sigma \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_+$  – часть границы  $\partial A(t)$ , в точках которой  $(\mathbf{u}, \mathbf{n}) > 0$ , а  $\sigma_-$  – часть границы  $\partial A(t)$ , в точках которой  $(\mathbf{u}, \mathbf{n}) < 0$  (рис. 1). Заменим поле ускорений в соотношении (5) согласно (2) полем активных сил, разделим полученное соотношение на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t$  стремящимся к нулю. В результате получим равенство (4), если учесть, что интеграл от поля активных сил равен интегралу от внешних активных сил согласно третьему закону Ньютона.

*Замечание 1.* Реактивная сила представленная в соотношениях (4) обращается в нуль, если  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ ,  $\mathbf{r} \in \partial A$ . В этом случае система превращается в систему постоянного состава.

*Замечание 2.* Скорости точек покидающих множество  $A(t)$  и присоединяющихся к нему могут иметь разрывы первого рода, т.е. изменять свои значения скачком. В системе имеют место ударные явления.

*Замечание 3.* Определим скорость центра масс системы переменного состава как вектор

$$\mathbf{V}_c(t) = \frac{1}{M(t)} \int_{A(t)} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) d\mu, \quad M(t) = \int_{A(t)} d\mu, \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)$$

Справедливы равенства

$$M(t) \mathbf{V}_c(t) = \mathbf{Q}(t) \Rightarrow M(t) \dot{\mathbf{V}}_c(t) + \dot{M}(t) \mathbf{V}_c(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{F}^{(e)} + \mathfrak{R} \quad (6)$$

П.1. Рассмотрим прямолинейный полет реактивного самолета и пренебрежем изменением его массы за счет расхода топлива на доста-

точно малом интервале времени. Поскольку двигатели самолета засасывают воздух из атмосферы, а затем его выбрасывают со скоростью, большей скорости самолета, то возникает реактивная сила, разгоняющая самолет. Пусть самолет движется вдоль оси  $Ox$ . Пусть  $X(t)$  – координата его центра масс. Масса самолета  $M(t) = m_0 + m_1(t) - m_2(t) = m_0$  постоянна, а его количество движения равно  $Q = m_0 \dot{X}(t)$ . Здесь  $m_1(t) = m_2(t)$  – массы воздуха, поступившего в двигатели из атмосферы, и масса воздуха, выброшенная из сопел двигателей. Уравнение (4) представляется в форме

$$m_0 \ddot{X}(t) = F^{(e)} + \dot{m}_1(t)0 - \dot{m}_2(t)[\dot{X}(t) - U_r(t)] \quad (7)$$

Здесь  $F^{(e)}$  – сила сопротивления воздуха, приложенная к корпусу самолета,  $U_r(t)$  – скорость струи воздуха, выбрасываемой двигателями, относительно корпуса самолета. Уравнение (7) перепишем в виде

$$m_0 \ddot{X}(t) = F^{(e)} + \mathfrak{R}(t), \quad \mathfrak{R}(t) = \dot{m}_2(t) [U_r(t) - \dot{X}(t)]$$

Аналогичным образом доказывается теорема об изменении момента количеств движения системы переменного состава

$$\mathbf{G}(t) = \int_{A(t)} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)] d\mu \quad (8)$$

*Т.2. Производная от момента количеств движения системы переменного состава относительно неподвижной точки  $O$  (начала координат) равна сумме моментов внешних активных сил и моменту реактивных сил, т.е.*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}}{dt} &= \mathbf{M}_O^{(e)} + \mathbf{M}_O^{(r)}, \quad \mathbf{M}_O^{(e)} = \int_{A(t)} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{r}, t)] d\mu, \\ \mathbf{M}_O^{(r)} &= \int_{\sigma_-} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+0)] (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \rho d\sigma + \\ &+ \int_{\sigma_+} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)] (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \rho d\sigma \end{aligned} \quad (9)$$

Приращение момента количеств движения за время  $\Delta t$  равно

$$\Delta \mathbf{G} = \int_{A(t+\Delta t)} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t+\Delta t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+\Delta t)] d\mu - \int_{A(t)} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)] d\mu =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{A(t+\Delta t) \cup A(t)} \{ [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t+\Delta t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+\Delta t)] - [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)] \} d\mu + \\ &+ \int_{A(t+\Delta t) \setminus A(t)} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)] d\mu - \int_{A(t) \setminus A(t+\Delta t)} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t+\Delta t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+\Delta t)] d\mu \end{aligned}$$

Далее с точностью до малых первого порядка относительно  $\Delta t$  получим

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{G} &\cong \int_{A(t)} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)] \Delta t d\mu + \\ &+ \int_{\sigma_+} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)] (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \Delta t \rho d\sigma + \\ &+ \int_{\sigma_-} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+0)] (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \Delta t \rho d\sigma \end{aligned}$$

Заменим в первом интеграле поле ускорений на поле сил согласно (2), разделим правую и левую части предыдущего равенства на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t$  стремящимся к нулю. В результате получим соотношение (9), если поле активных сил заменить полем внешних активных сил, используя третий закон Ньютона.

*П. 2.* Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$ . В теле имеется тонкий криволинейный канал  $AB$ , начало которого точка  $A$  лежит на оси  $Oz$ , а конец точка  $B$  – на поверхности тела. В системе координат  $Oxyz$  уравнение канала задается в параметрическом виде  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , где  $s$  – натуральный параметр. Вектор  $\boldsymbol{\tau}(s) = d\mathbf{r}(s)/ds$  – единичный вектор касательной к кривой  $AB$  в точке с координатой  $s$ . Вдоль кривой  $AB$  перемещаются материальные частицы с относительной скоростью  $\mathbf{v}(s) = v_0 \boldsymbol{\tau}(s)$ . Линейная плотность частиц равна  $\rho_0$ . Система переменного состава состоит из твердого тела и множества частиц, находящихся в канале  $AB$ . Переменность состава обусловлена поступлением в канал в точке  $A$  новых частиц и выбросом из канала в точке  $B$  частиц системы. Скорости перемещений точек границы  $\mathbf{u}(s, t)$  системы переменного состава отличны от нуля в концевых точках канала и соответственно равны  $\mathbf{u}(0, t) = v_0 \mathbf{n}(0) = -v_0 \boldsymbol{\tau}(0)$  и  $\mathbf{u}(l, t) = -v_0 \mathbf{n}(l) = -v_0 \boldsymbol{\tau}(l)$ , поскольку внешние нормали в этих точках  $\mathbf{n}(0, t) = -\boldsymbol{\tau}(0)$ ,  $\mathbf{n}(l, t) = \boldsymbol{\tau}(l)$ . Суммар-



ная масса системы остается постоянной. Заметим, что постоянство модуля скорости частиц в канале обеспечивается за счет поля внутренних реакций связей. Запишем теорему об изменении момента количества движения системы относительно оси  $Oz$ . Имеем

$$G_z = J_0 \omega + \int_0^l \mathbf{e}_z \{ \mathbf{r}(s) \times [ [\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}(s)] + v_0 \boldsymbol{\tau}(s) ] \} \rho_0 ds = J\omega + \rho_0 l a v_0$$

$$J = J_0 + \int_0^l [ \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}(s) ]^2 \rho_0 ds, \quad a = l^{-1} \int_0^l \mathbf{e}_z [ \mathbf{r}(s) \times \boldsymbol{\tau}(s) ] ds$$

Здесь  $J_0$  – момент инерции тела относительно оси  $Oz$ . Далее согласно (9) получим

$$\begin{aligned} \frac{dG_z}{dt} = J \dot{\omega} = M_z^{(e)} + \mathbf{e}_z [ \mathbf{r}(0) \times v_0 \boldsymbol{\tau}(0) ] (-v_0) \rho_0 + \\ + \mathbf{e}_z \{ \mathbf{r}(l) \times [ [\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}(l)] + v_0 \boldsymbol{\tau}(l) ] \} (-v_0) \rho_0 \end{aligned}$$

где  $M_z^{(e)}$  – момент внешних сил относительно оси  $Oz$ , действующих на точки системы. Второе слагаемое в предыдущем равенстве равно нулю, так как векторы  $\mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{r}(0)$  коллинеарны. В результате получим

$$\begin{aligned} J \dot{\omega} = M_z^{(e)} - b\omega + c, \quad b = \rho_0 [ \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}(l) ]^2 v_0, \\ c = -\rho_0 v_0^2 \mathbf{e}_z [ \mathbf{r}(l) \times \boldsymbol{\tau}(l) ] \end{aligned}$$

Если момент внешних сил положить равным нулю, то угловая скорость тела определяется формулой

$$\omega(t) = [ \omega(0) + c b^{-1} ] \exp(-b J^{-1} t) - c b^{-1}$$

Все движения системы стремятся к стационарному вращению тела вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega_0 = -c b^{-1}$ .

Рассмотрим случай физического маятника, когда момент внешних сил  $M_z^{(e)} = -k \sin \varphi$ . Уравнение движения примет вид

$$J \ddot{\varphi} = -k \sin \varphi - b \dot{\varphi} + c, \quad \dot{\varphi} = \omega$$

Реактивный момент равен сумме постоянного момента и момента, линейных диссипативных сил.

Докажем теорему об изменении кинетической энергии системы переменного состава.

*Т.3. Производная кинетической энергии системы переменного состава равна сумме мощностей активных и реактивных сил, т.е.*

$$\frac{dT}{dt} = W + W^{(r)}, \quad W = \int_{A(t)} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) d\mu \quad (10)$$

$$\begin{aligned} W^{(r)} = \frac{1}{2} \int_{\sigma_+} \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t) (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \rho d\sigma + \\ + \frac{1}{2} \int_{\sigma_-} \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t+0) (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \rho d\sigma \end{aligned}$$

Согласно определению кинетическая энергия системы переменного состава и ее приращение равны

$$\begin{aligned} T(t) = \frac{1}{2} \int_{A(t)} \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t) d\mu, \\ \Delta T = \frac{1}{2} \int_{A(t+\Delta t)} \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t+\Delta t) d\mu - \frac{1}{2} \int_{A(t)} \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t) d\mu \end{aligned}$$

Представим приращение кинетической энергии в виде

$$\begin{aligned} \Delta T = \frac{1}{2} \int_{A(t+\Delta t) \cup A(t)} [ \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t+\Delta t) - \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t) ] d\mu + \\ + \frac{1}{2} \int_{A(t+\Delta t) \setminus A(t)} \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t) d\mu - \frac{1}{2} \int_{A(t) \setminus A(t+\Delta t)} \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t+\Delta t) d\mu \end{aligned}$$

Далее с точностью до малых первого порядка относительно  $\Delta t$  получим

$$\begin{aligned} \Delta T \cong \int_{A(t)} (\ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t), \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)) \Delta t d\mu + \\ + \frac{1}{2} \int_{\sigma_+} \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t) (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \Delta t \rho d\sigma + \\ + \frac{1}{2} \int_{\sigma_-} \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t+\Delta t) (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \Delta t \rho d\sigma \end{aligned} \quad (11)$$

Заменим в соотношении (11) поле ускорений на поле активных сил согласно (2), разделим полученное равенство на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t$  стремящимся к нулю. В результате получим соотношение (10).

*П. 3.* На горизонтальной плоскости расположена бесконечная система цилиндрических катков с осями, параллельными оси  $Oy$ . Масса каждого катка равна  $m$ ,  $a$  – радиус цилиндра,  $J$  – момент инерции относительно оси цилиндра. Расстояние между осями покоящихся ци-

линдров равно  $4a$ . По каткам движется доска вдоль оси  $Ox$ . Длина доски  $L = 2a(n+1)$ ,  $n \in N$ ,  $n \geq 2$ . Относительные скорости точек контакта катков с доской и дорогой равны нулю. В качестве системы переменного состава рассматривается доска и набор катков, контактирующих с ней. Состав системы меняется в дискретные моменты времени, когда новый передний каток соприкасается с краем доски, а каток на заднем краю доски прекращает контактировать с доской. В промежутке между этими событиями система сохраняет состав, а доска движется с постоянной скоростью, поскольку имеет место закон сохранения энергии. Непосредственно перед контактом с передним катком доска двигалась по  $n$  каткам, а кинетическая энергия системы равнялась

$$T_0 = \frac{1}{2}(M + m\zeta n)v_0^2, \quad \zeta = 1 + \frac{J}{4ma^2}$$

где  $v_0$  – начальная скорость доски. Процесс взаимодействия доски с катком будем описывать абсолютно неупругим ударом, в результате которого поле скоростей катка становится отличным от нуля. После того, как передний каток вошел в контакт с передним краем доски, а задний каток покинул систему переменного состава, система сохранила свою массу, но потеряла часть кинетической энергии за счет выхода из состава системы заднего катка. В результате получим равенство

$$T_1 = T_0 - \frac{m\zeta}{2}v_0^2 \Rightarrow [M + m\zeta n]v_1^2 = [M + m\zeta(n-1)]v_0^2$$

Здесь  $v_1$  – скорость доски после контакта переднего катка с доской. Если произошло  $k$  замен передних и задних катков, то скорость доски окажется равной

$$v_k = \alpha^k v_0, \quad \alpha^2 = \frac{M + m\zeta(n-1)}{M + m\zeta n} < 1$$

Время между двумя последовательными контактами переднего края доски с катком  $\Delta t_k = 4a/v_k = 4av_0^{-1}\alpha^{-k} \rightarrow \infty$ , а скорость  $v_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Рассмотренный пример иллюстрирует ситуацию, когда в системе имеют место «жесткие» удары, а ее состав меняется в дискретные моменты времени.

**П. 4.** Обобщим пример, рассмотренный выше, на случай, когда катки заменяются слоем сплошной среды, например, слоем жидкости или достаточно мелкого песка толщиной  $h$ . Систему переменного состава

образует доска и часть слоя сплошной среды, ограниченной концами доски  $A$  и  $B$  (рис. 2). Предположим, что поле скоростей точек в слое сплошной среды распределено по линейному закону

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{vy}{h} \mathbf{e}_x, \quad 0 \leq y \leq h \quad (12)$$

где  $v$  – скорость доски вдоль оси  $Ox$ . Скорости точек сплошной среды справа от переднего края доски  $B$  примем равными нулю, а непосредственно левее заднего конца доски  $A$  скорости точек среды предполагаются заданными представленным выше линейным законом (12). За интервал времени  $\Delta t$  к системе присоединяются массы с нулевыми абсолютными скоростями в слое сплошной среды справа от вертикальной линии  $B$ .

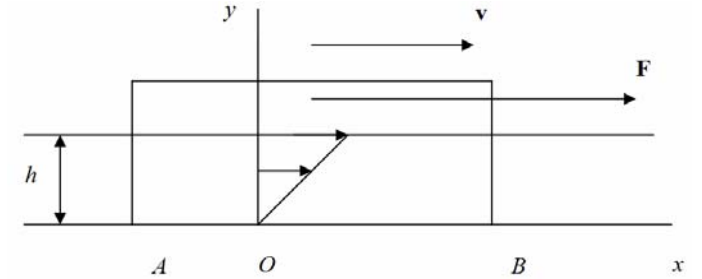


Рис. 2.

За это же время через вертикальную границу  $A$  систему покидают точки имеющие скорости, определяемые линейным законом (12). В результате мощность реактивных сил в теореме об изменении кинетической энергии (формулы (10)) оказывается равной

$$\begin{aligned} W^{(r)} &= \frac{1}{2} \int_{\sigma_-} \dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{r}, t+0)(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)) \rho d\sigma = \\ &= -\frac{vl}{2} \int_0^h \frac{v^2 y^2}{h^2} \rho dy = -\frac{1}{6} \rho v^3 l h \end{aligned}$$

Здесь  $\rho, l$  – плотность материала сплошной среды и ширина доски в направлении оси  $Oz$ . Если доска движется с постоянной скоростью под действием постоянной силы  $F\mathbf{e}_y$ , то кинетическая энергия системы переменного состава постоянна, а мощность внешней силы  $W = Fv$ . Теорему об изменении кинетической энергии системы переменного состава запишем в форме

$$\dot{T} = 0 = Fv - \rho v^3 lh/6 \Rightarrow F = \rho v^2 lh/6$$

Если внешняя сила  $F = 0$ , то ускорение доски отрицательно. Кинетическая энергия системы и теорема об ее изменении примут вид

$$T = \frac{1}{2}v^2 \left(M + \frac{1}{3}\rho lhL\right),$$

$$\frac{dT}{dt} = v \frac{dv}{dt} \left(M + \frac{1}{3}\rho lhL\right) = -\frac{1}{6}\rho lhLv^3$$

где  $L$  – длина доски  $AB$ . Таким образом, из уравнения движение доски

$$\dot{v} = -kv^2, \quad k = (\rho lhL)(6M + 2\rho lhL)^{-1}$$

получим скорость доски и закон ее движения

$$v(t) = \frac{v(0)}{1 + kv(0)t}, \quad x(t) = x(0) + \frac{1}{k} \ln[1 + kv(0)t]$$

**П. 5.** Рассмотрим плоскую задачу о скольжении тела по «непрерывной» цепочке масс, связанных пружинками и демпферами с неподвижным основанием. Массы расположены вдоль оси  $OX$ . В стационарном поступательном движении тела со скоростью  $V$  вдоль оси  $OX$  на тело действует сила  $F$ , направленная по оси  $OX$  и ортогональная ей сила  $P$ , обуславливающая перемещения масс вдоль оси  $OY$  в зоне контакта тела с цепочкой масс.

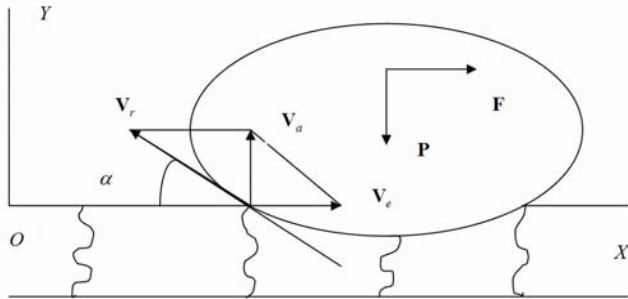


Рис. 3.

В качестве системы переменного состава рассмотрим тело и множество масс, соприкасающихся с поверхностью тела. Масса системы не меняется, но состав системы переменен. На переднем фронте зоны контакта к системе присоединяются массы с нулевой абсолютной скоростью, а на заднем фронте – отделяются массы, абсолютные скорости

которых направлены по оси  $OY$  и согласно теореме сложения скоростей равны  $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r$ ,  $\mathbf{V}_e = V\mathbf{e}_x$ , если подвижная система координат связана с движущимся телом. Относительная скорость направлена по касательной к кривой образующей поверхность тела угол  $\alpha$  (рис. 3). В результате получим  $\mathbf{V}_a = V \operatorname{tg} \alpha \mathbf{e}_y$ .

Применим теорему об изменении кинетической энергии к описанной выше системе переменного состава в случае стационарного движения тела. Имеем

$$\frac{dT}{dt} = 0, \quad W = FV, \quad W_r = \frac{1}{2}(V \operatorname{tg} \alpha)^2 (-V)\rho_0$$

Здесь  $\rho_0$  – линейная плотность цепочки масс распределенных непрерывным образом вдоль оси  $OX$ . В результате из соотношения (10) получим силу  $F = \frac{1}{2}\rho_0 V^2 \operatorname{tg} \alpha$ , т.е. сила сопротивления движения, обусловленная переменностью состава системы, пропорциональна квадрату скорости тела.

**Обобщенное уравнение Мещерского движения точки переменного состава. Формула Циолковского. Разгон ракеты в однородном поле силы тяжести.**

*О. Материальной точкой переменного состава называется точка, масса которой изменяется за счет отделяющихся от нее и присоединяющихся к ней частиц.*

Теорема об изменении количества движения точки переменного состава (4) записывается в форме

$$\frac{d(M(t)\mathbf{v}(t))}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$M(t) = m_0 + m_1(t) - m_2(t),$$

$$\mathbf{F}_1 = \dot{m}_1(t)\mathbf{v}_1(t), \quad \mathbf{F}_2 = -\dot{m}_2(t)\mathbf{v}_2(t+0)$$

Здесь  $\mathbf{v}(t)$  – скорость точки относительно инерциальной системы координат,  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$ ,  $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}_{1r}(t)$ ,  $\mathbf{v}_2(t+0) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}_{2r}(t+0)$  – соответственно массы и абсолютные скорости частиц, присоединившихся к точке переменного состава и покинувших ее,  $\mathbf{F}$  – сила, действующая на точку.

Уравнение (11) называется обобщенным уравнением Мещерского и представляется в виде

$$M(t)\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F} + \dot{m}_1(t)\mathbf{u}_{1r}(t) - \dot{m}_2(t)\mathbf{u}_{2r}(t+0),$$

$$\dot{m}_1 \geq 0, \dot{m}_2 \geq 0 \quad (14)$$

Величины  $\mathbf{u}_{1r}(t)$ ,  $\mathbf{u}_{2r}(t+0)$  являются относительными скоростями частиц присоединяющихся к точке переменного состава и отделяющихся от нее.

В рамках этой модели опишем движение реактивного самолета, когда присоединяющиеся частицы – это воздух, засасываемый реактивным двигателем, а отделяющиеся частицы – это смесь разогретого воздуха и сгоревшего топлива, вытекающая из сопла реактивного двигателя. Если пренебречь массой сгоревшего топлива по сравнению с массой воздуха, прошедшего через двигатель самолета, то получим  $\dot{m}_1(t) = \dot{m}_2(t)$ . Относительные скорости частиц покидающих и присоединяющихся к материальной точке, вообще говоря, могут быть отличными от нуля. Это обстоятельство следует трактовать как ударные явления, поскольку скорости частиц изменяются скачком.

В случае, когда присоединяющихся частиц нет и  $\dot{m}_2(t) = 0$ , уравнение (14) представляется в форме уравнения Мещерского

$$M(t)\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM(t)}{dt}\mathbf{u}_{2r}(t+0),$$

$$M(t) = m_0 - m_2(t) \quad (15)$$

Последнее слагаемое в соотношении (15) называется **реактивной силой**.

*С.1.* Если относительные скорости частиц отделяющихся от точки переменного состава равны нулю, то уравнение Мещерского по форме совпадает со вторым законом Ньютона для материальной точки постоянной массы

$$\mathbf{u}_{2r}(t+0) = 0 \Rightarrow M(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

*С.2.* Если абсолютные скорости отделяющихся частиц равны нулю, то уравнение (15) представляется в виде

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{Q} = M(t)\mathbf{v}$$

Рассмотрим прямолинейное движение изолированной материальной точки, моделирующей движение ракеты, когда действующая на нее сила равна нулю, а относительная скорость покидающих частиц постоянна и коллинеарна абсолютной скорости точки переменного состава. В этом случае уравнение Мещерского примет вид

$$M(t)\frac{dV}{dt} = \frac{dM(t)}{dt}u \Rightarrow V(t) - V(0) = u \ln \frac{M(t)}{M(0)} \quad (16)$$

Последняя формула в соотношении (16) называется формулой Циолковского и определяет изменение скорости ракеты в зависимости от израсходованной массы топлива. Скорость ракеты может увеличиваться, если относительная скорость истечения газов из сопла реактивного двигателя будет противоположна начальной скорости ракеты, и уменьшаться в противном случае. Отметим, что изменение скорости пропорционально скорости истечения газов из реактивного двигателя.

*П. 6.* Пусть ракета движется по вертикали в однородном поле силы тяжести, скорость истечения газов из двигателя ракеты постоянна относительно корпуса ракеты и направлена вниз по вертикали. Уравнение движения представим в виде уравнения Мещерского в проекции на вертикаль. Имеем

$$M(t)\dot{V} = -M(t)g - \dot{M}(t)u \Rightarrow V(t) = u \ln \frac{M(0)}{M(t)} - gt$$

Здесь  $u$  – относительная скорость отделяющихся частиц. Ракета начнет подниматься, если в начальный момент времени  $-\dot{M}(0)u > M(0)g$ . Заметим, что производная массы ракеты по времени отрицательна. Последнее неравенство означает, что реактивная сила превосходит вес ракеты. Закон движения ракеты определяется формулой

$$X(t) = ut \ln M(0) - u \int_0^t \ln M(\tau) d\tau - \frac{gt^2}{2}$$

В приведенных выше формулах предполагалось, что ракета начала движения из начала координат с нулевой скоростью.

**Движение свободного твердого тела переменного состава. Вращение вокруг неподвижной точки и оси.**

*О. Твердым телом переменного состава называется множество точек переменного состава, расстояния между которыми не изменяются в процессе движения.*

Это означает, что система материальных точек определена на фиксированном множестве  $\Omega$ , а ее мера зависит от времени, т.е.

$$\mu_t(A) = m_A(t), \quad A \in \Sigma(\Omega) \quad \text{и} \quad |\mathbf{R}(\mathbf{r}_1, t) - \mathbf{R}(\mathbf{r}_2, t)| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \quad \forall \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \Omega.$$

Изменение меры, определяющей массу соответствующего множества, происходит за счет присоединения и отделения материальных частиц.

Система координат  $OX_1X_2X_3$  неподвижна, а система координат  $Cx_1x_2x_3$  связана с твердым телом. Точка  $C$ , вообще говоря, не является центром масс тела, так как в процессе изменения масс точек тела центр масс перемещается внутри тела. Зададим дифференциал меры в виде  $d\mu_t = \rho(\mathbf{r}, t)dx$ ,  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) + \rho_1(\mathbf{r}, t) - \rho_2(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус вектор точки твердого тела относительно системы координат  $Cx_1x_2x_3$ . Функция  $\rho_1(\mathbf{r}, t)$  определяет увеличение плотности за счет присоединения материальных частиц к точкам твердого тела, а  $\rho_2(\mathbf{r}, t)$  – уменьшение плотности за счет отделения материальных частиц.

В каждой точке твердого тела определено поле активных сил  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  и поле реакций связей  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ , обеспечивающее постоянство расстояний между точками твердого тела переменного состава. Эти поля считаются заданными в неподвижной системе координат  $Cx_1x_2x_3$ . Связи, наложенные на перемещения точек твердого тела, идеальны, и, как следствие этого, поле реакций связей эквивалентно нулю

$$\int_{\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) d\mu_t = \int_{\Omega} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{p}(\mathbf{r}, t)] d\mu_t = 0 \quad (17)$$

Теорема об изменении количества движения системы с учетом соотношений (16) примет вид

$$\frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} + \mathfrak{R}, \quad \mathbf{F}^{(e)} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{r}, t) d\mu_t \quad (18)$$

$$\mathfrak{R} = \int_{\Omega} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) \rho_1(\mathbf{r}, t) dx - \int_{\Omega} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+0) \rho_2(\mathbf{r}, t) dx$$

Аналогичным образом получим теорему об изменении момента количеств движения относительно неподвижной точки

$$\frac{d\mathbf{G}_O}{dt} = \mathbf{M}^{(e)} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2, \quad (19)$$

$$\mathbf{G}_O = \int_{\Omega} [\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}] d\mu_t,$$

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega} [\mathbf{R} \times \mathbf{f}^{(e)}] \rho(\mathbf{r}, t) dx$$

$$\mathbf{M}_1 = \int_{\Omega} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)] \dot{\rho}_1(\mathbf{r}, t) dx,$$

$$\mathbf{M}_2 = \int_{\Omega} [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \times \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t+0)] \dot{\rho}_2(\mathbf{r}, t) dx$$

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной точки  $O$ . Система координат  $OX_1X_2X_3$  неподвижна, а система координат  $Ox_1x_2x_3$  связана с твердым телом. Уравнения движения тела получим на основе теоремы об изменении момента количеств движения тела относительно неподвижной точки  $O$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}}{dt} &= \mathbf{M}^{(e)} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{G} = \Gamma \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]] d\mu_t = \Gamma J(t) \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{M}^{(e)} &= \Gamma \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{f}^{(e)}] d\mu_t \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{M}_1 = \Gamma \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)] \dot{\rho}_1(\mathbf{r}, t) dx,$$

$$\mathbf{M}_2 = \Gamma \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t+0)] \dot{\rho}_2(\mathbf{r}, t) dx$$

Здесь  $\Gamma(t)$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  – ортогональный оператор перехода от подвижной системы координат к неподвижной и угловая скорость твердого тела,  $\mathbf{f}^{(e)}$ ,  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t+0)$  – поле внешних массовых сил и поля абсолютных скоростей материальных частиц, присоединяющихся к твердому телу и покидающих его, заданные в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Учитывая определение тензора инерции твердого тела, представим соотношение (19) в проекциях на оси подвижной системы координат в виде

$$\begin{aligned} J(t) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times J(t) \boldsymbol{\omega} + \dot{J}(t) \boldsymbol{\omega} &= \\ &= \mathbf{m}_0^{(e)} + \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)] \dot{\rho}_1 dx - \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t+0)] \dot{\rho}_2 dx \\ \dot{J}(t) \boldsymbol{\omega} &= \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}]] (-\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2) dx, \\ \mathbf{m}_0^{(e)} &= \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{f}^{(e)}] d\mu_t \end{aligned}$$

Объединяя подобные члены, получим векторное уравнение

$$\begin{aligned}
J(t) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times J(t) \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{m}_0^{(e)} + \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \\
\mathbf{m}_1 &= \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{u}_{1r}(\mathbf{r}, t)] \dot{\rho}_1 dx, \\
\mathbf{m}_2 &= \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times \mathbf{u}_{2r}(\mathbf{r}, t + 0)] \dot{\rho}_2 dx, \quad \mathbf{u}_{kr} = \mathbf{u}_1 - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], \quad k=1, 2
\end{aligned} \tag{21}$$

где  $\mathbf{u}_{1r}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{u}_{2r}(\mathbf{r}, t + 0)$  – относительные скорости частиц присоединяющихся к твердому телу и покидающих его.

Если тело переменного состава вращается относительно неподвижной оси  $OX_3$ , то уравнение его движения получается путем проектирования уравнения (20) на эту ось с учетом равенства  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_3$ , где  $\varphi$  – угол между осями  $OX_1$  и  $Ox_1$ , а  $\mathbf{e}_3$  – орт оси  $OX_3$ . В результате получим

$$J_{33}(t) \ddot{\varphi} = m_{03}^{(e)} + m_{13} - m_{23} \tag{22}$$

П.7. Пусть тело переменного состава вращается вокруг неподвижной оси  $OX_3$ , присоединение части к телу отсутствует и  $\dot{\rho}_1 = 0$ , а отделение частиц твердого тела происходит в точке, характеризуемой вектором  $\mathbf{r}^*$  с постоянной относительной скоростью  $\mathbf{u}_{2r}(\mathbf{r}^*, t + 0)$ .

Изменение плотности в точке, где происходит отделение частиц, задается в виде  $\dot{\rho}_2 = k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)$ , где  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)$  – пространственная функция Дирака, а  $k$  – постоянный секундный расход массы. В этом случае имеем

$$\begin{aligned}
J_{33}(t) &= J_3 - kta^2, \quad m_{03}^{(e)} = 0, \quad m_{13} = 0, \\
m_{23} &= -k[\mathbf{r}^* \times \mathbf{u}_{2r}] \mathbf{e}_3, \quad a^2 = [\mathbf{r}^* \times \mathbf{e}_3]^2
\end{aligned}$$

Уравнение (21) принимает вид

$$\begin{aligned}
(J_3 - ka^2 t) \ddot{\varphi} &= -m_{23} \Rightarrow \\
\dot{\varphi}(t) &= \dot{\varphi}(0) + \frac{m_{23}}{k a^2} \ln(1 - k a^2 J_3^{-1} t)
\end{aligned}$$

Таким образом, определяется угловая скорость вращения тела переменного состава под действием постоянного момента реактивных сил  $m_{23}$ . Практическая реализация этой задачи получается путем установки реактивного двигателя на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.

Заметим, что система, рассмотренная выше, отличается от системы переменного состава во втором примере, так как взаимные расстояния между точками системы изменяются со временем.

### Литература

1. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990.
2. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 2000.
3. Поляков Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. М.: Высшая школа, 2000.
4. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч.2. М.: Наука, 1966.
5. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001.
6. Лидов М.Л. Курс лекций по теоретической механике. М.: Физматлит, 2010.
7. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1975.
8. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике. М.: Наука, Физматлит, 1996.
9. Новоселов В.С. Аналитическая механика систем с переменными массами. Л. ЛГУ 1969. 238 с.
10. Новоселов В.С. Некоторые вопросы механики переменных масс с учетом внутреннего движения частиц // Вестник ЛГУ. Серия математика, механика, астрономия. 1956. Вып. 19. С.100–113.

## ОБ ОБРАТИМОСТИ ПРИНЦИПА ОСВОБОЖДАЕМОСТИ ОТ СВЯЗЕЙ

Изучается возможность обратимости принципа освобождаемости от связей, широко используемого при решении задач механики. Формулируется обратное положение в соответствии с которым механическое состояние системы не изменится, если игнорировать действующие на нее силы и наложить связи, реакции которых равны отброшенным силам. В этом случае изучаемая исходная механическая система получается из другой, с большим числом степеней свободы, на которую накладываются голономные идеальные связи, а движение происходит в отсутствии действующих активных сил «по инерции». Основной задачей представленной статьи является определение уравнений связей в расширенном пространстве конфигураций однозначно порождающих заданное силовое поле в исходном трехмерном евклидовом пространстве.

Получены дифференциальные уравнения в частных производных, определяющие искомые уравнения связей. Рассмотрены примеры прямолинейного движения материальной точки под действием постоянной силы, силы тяготения, силы упругости. Показана связь обратимости принципа освобождаемости от связей со «скрытыми движениями» и «игнорированием» циклических координат.

**1. Введение.** Общеизвестно [1, 2], что в четырехмерном римановом пространстве конфигураций, арифметизируемом координатами  $u^1, u^2, u^3, u^4$  с метрикой

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

уравнения движения материальной точки, движущейся в отсутствии действующих на неё сил, можно представить в форме

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial u^i} (v^4)^2, \\ \frac{dv_4}{dt} = 0, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

где  $v_i, v_4, v^4$  – соответственно ковариантные и контравариантные компоненты вектора скорости,  $g_{44} = g_{44}(u^1, u^2, u^3)$ .

Последнее уравнение в (1.2) легко интегрируется

$$v_4 = g_{44} v^4 = p = \text{const} \quad (1.3)$$

Тогда в первых трех уравнениях можно исключить  $v^4$  и получить

$$\frac{dv_i}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial u^i} \frac{p^2}{g_{44}^2} = \frac{p^2}{2} \frac{\partial}{\partial u^i} \left( -\frac{1}{g_{44}} \right) \quad (1.4)$$

Уравнения (1.4) эквивалентны уравнениям, описывающим движение материальной точки в декартовой системе координат  $u_1 u_2 \dots u_3$ .

$$m \frac{dv_i}{dt} = Q_i, \quad (1.5)$$

если под силой  $Q_i$  понимать выражение

$$Q_i = \frac{mp^2}{2} \frac{\partial}{\partial u^i} \left( -\frac{1}{g_{44}} \right), \quad (1.6)$$

где  $m$  – масса материальной точки.

Из сопоставления (1.4), (1.5), (1.6) становится ясно, что движению материальной точки в потенциальном силовом поле соответствует движение той же точки по четырехмерной криволинейной гиперповерхности с метрикой (1.1). Аналогичный вывод следует и из вариационного принципа Лагранжа в форме Якоби [3, 4]. Дифференциальные уравнения (1.6) являются уравнениями для определения компоненты  $g_{44}$  фундаментального метрического тензора  $g$ .

**2. Постановка задачи.** Основной задачей представленной статьи является определение уравнений связей в расширенном евклидовом пространстве конфигураций, обеспечивающих учет действия потенциальной силы  $Q$ , на движущуюся материальную точку в исходном пространстве.

**3. Метод решения.** В общем случае для определения уравнения голономных связей, накладываемых на движение свободной материальной точки, вводится система координат  $x^s$  ( $s = 1, R$ ) в  $R$ -мерном евклидовом пространстве с метрикой

$$G_{sq} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = q \\ 0 & \text{при } s \neq q \end{cases}, \quad (3.1)$$

в которой определяется гиперповерхность размерности  $N$  с метрикой (1.1). Возможность определения такой гиперповерхности обусловлено разрешимостью  $R$  нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$g_{mn} = G_{sq} \frac{\partial x^s}{\partial u^m} \frac{\partial x^q}{\partial u^n}, \quad (m, n = 1, 2 \dots N) \quad (3.2)$$

относительно  $R$  неизвестных функций  $x^s = x^s(u^1, u^2, \dots, u^N)$ , определяющих искомую гиперповерхность. Если размерность введенного пространства

$$R = N(N+1)/2, \quad (3.3)$$

то (3.2) всегда имеет решение [5].

С геометрической точки зрения это означает, что при изучении прямолинейного движения материальной точки следует использовать двумерную гиперповерхность, которая строится в трехмерном евклидовом пространстве. При изучении движения материальной точки по поверхности следует использовать трехмерную гиперповерхность, построенную в расширенном шестимерном евклидовом пространстве. Наконец, при изучении движения материальной точки в трехмерном пространстве используется четырехмерная гиперповерхность, построенная в десятимерном евклидовом пространстве. В общем случае уравнения (3.2) всегда имеют решения [5, стр. 393] в некоторой окрестности начального положения рассматриваемой материальной точки.

Так, если положить, что компонента  $g_{44}$  фундаментального метрического тензора в окрестности начального положения материальной точки является функцией малого параметра  $\varepsilon$  и допускает разложение в ряд

$$g_{44}(u_1, u_2, u_3) = 1 + \varepsilon k_j u^j + \varepsilon^2 l_{ij} u^i u^j + \dots \quad (3.4)$$

где  $k_j$ ,  $l_{ij}$  – постоянные, то решение системы уравнений (3.2) разыскивается в форме

$$x^p = \delta_j^p u^j + \varepsilon \tilde{x}^p + \varepsilon^2 \tilde{\tilde{x}}^p \quad (3.5)$$

где  $\delta_j^p$  – символы Кронекера.

Тогда, подставляя (3.5) в (3.2), получаем

$$\begin{aligned} g_{mn} &= G_{pq} \left( \delta_m^p + \varepsilon \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial u^m} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{\tilde{x}}^p}{\partial u^m} + \dots \right) \left( \delta_n^q + \varepsilon \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial u^n} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{\tilde{x}}^q}{\partial u^n} + \dots \right) = \\ &= G_{pq} \delta_m^p \delta_n^q + \varepsilon G_{pq} \left( \delta_n^q \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial u^m} + \delta_m^p \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial u^n} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 G_{pq} \left( \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial u^m} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial u^n} + \delta_n^q \frac{\partial \tilde{\tilde{x}}^p}{\partial u^m} + \delta_m^p \frac{\partial \tilde{\tilde{x}}^q}{\partial u^n} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Теперь при учете членов до первого порядка малости в (3.4), (3.5), (3.6) имеют место уравнения

$$\begin{cases} G_{pq} \delta_m^p \delta_n^q = \delta_{mn} \\ \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial u^m} + \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial u^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} k_i u^i & (i=1,3), \text{ если } n=m=4 \\ 0, & \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \end{cases} \quad (3.7)$$

Отсюда следует решение

$$\tilde{x}^1 = -0,25 k_1 (u^4)^2, \quad \tilde{x}^2 = -0,25 k_2 (u^4)^2, \quad (3.8)$$

$$\tilde{x}^3 = -0,25 k_3 (u^4)^2, \quad \tilde{x}^4 = 0,5 k_i u^i u^4$$

$\tilde{x}^5 = \tilde{x}^6 = \tilde{x}^7 = \tilde{x}^8 = \tilde{x}^9 = \tilde{x}^{10}$  – произвольные функции, неопределяемые в уравнениях первого приближения.

Тогда отличие компонент  $\Delta g_{mn}$  фундаментального метрического тензора от требуемых согласно (1.1) имеют второй порядок малости и составляют

$$\varepsilon^2 G_{pq} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial u^m} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial u^n}. \quad (3.9)$$

Так при  $m, n \leq 3$

$$\Delta g_{nm} = \Delta g_{mn} = \varepsilon^2 0,25 k_m k_n (u^4)^2 \quad (3.10)$$

при  $m=4, n \neq 4$  или  $m \neq 4, n=4$

$$\Delta g_{mn} = \varepsilon^2 0,25 k_n k_i u^i u^4 \quad (3.11)$$

$$\Delta g_{nm} = \varepsilon^2 0,25 k_m k_i u^i u^4$$

при  $m=4, n=4$

$$\Delta g_{mn} = 0,25 \varepsilon^2 \left[ (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) (u^4)^2 + (k_i k_j - l_{ij}) u^i u^j \right] \quad (3.12)$$

Однако наиболее простое аналитическое решение имеет место при исследовании одномерного движения материальной точки, когда структура фундаментального метрического тензора имеет вид:

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}(u^1) \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

где  $g_{22}$  определяется из уравнения типа (1.6). В этом случае решение уравнений (3.2) разыскивается в форме

$$x^1 = \psi(u^1) \cos u^2 / r_0, \quad x^2 = \psi(u^1) \sin u^2 / r_0, \quad x^3 = \theta(u^1), \quad (3.14)$$



где  $\psi, \theta$  – искомые функции,  $r_0 = \text{const}$ .

Тогда, подставляя (3.14) в (3.2), получаем

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u^1}\right)^2 = 1, \quad \psi^2(u^1) = r_0^2 g_{22}(u^1). \quad (3.15)$$

Теперь из второго уравнения (3.15) определяется  $\psi = \psi(u^1)$ , а из первого уравнения той же системы в результате интегрирования  $\theta = \theta(u^1)$ .

#### 4. Примеры исследования одномерного движения материальной точки.

**4.1. Действие постоянной силы**  $Q = Q_0 = \text{const}$ . При  $t = 0, u = u_0, \dot{u} = \dot{u}_0$

Из (1.6) следует

$$g_{22} = \left( B - \frac{2Q_0(u - u_0)}{mp^2} \right)^{-1} \quad (4.1)$$

где  $B$  – постоянная, которую можно определить из условия равенства компоненты  $g_{22}$  фундаментального метрического тензора единице при  $Q_0 \equiv 0$ . Тогда

$$g_{22} = \left( 1 - \frac{2Q_0}{mp^2}(u - u_0) \right)^{-1} \quad (4.2)$$

В расширенном трехмерном пространстве конфигурации соответствующая поверхность определяется уравнениями голономной связи

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = \frac{r_0^2}{1 - 2\beta(u - u_0)}, \quad \frac{dx^3}{du} = \sqrt{1 - \frac{r_0^2 \beta^2}{[1 - 2\beta(u - u_0)]^3}} \quad (4.3)$$

где  $u$  – физическая координата материальной точки, используемая как параметр при задании голономных связей (4.3),  $\beta = Q_0/mp^2$ .

**4.2. Действие силы упругости**  $Q = -\alpha u$ , при  $t = 0, u = u_0, \dot{u} = \dot{u}_0$ .

В этом случае

$$g_{22} = \left( 1 + \frac{\alpha}{mp^2}(u - u_0) \right)^{-1}, \quad (4.4)$$

где постоянная  $B$ , как и в предыдущем случае, определяется из условия  $g_{22} = 1$  при  $\alpha \equiv 0$ .

Тогда уравнение голономной связи в трехмерном пространстве конфигураций в параметрической форме имеет вид

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 = r_0^2 (1 + \beta(u^2 - u_0^2))^{-1} \\ \frac{dx^3}{du} = \sqrt{1 - \beta^2 u^2 r_0^2 [1 + \beta(u^2 - u_0^2)]^{-3}}, \end{cases} \quad (4.5)$$

где  $\beta = \alpha/mp^2$ .

**4.3. Действие силы притяжения**  $Q = -\alpha/u^2$  при  $t = 0, u = u_0, \dot{u} = \dot{u}_0$ .

В этом случае для компоненты фундаментального метрического тензора получаем

$$g_{22} = \left( 1 + 2\beta \left( \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} \right) \right)^{-1} \quad (4.6)$$

где  $\beta = \alpha/mp^2$ .

Тогда в соответствии с (3.11)

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 = r_0^2 \left( 1 + 2\beta \left( \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} \right) \right)^{-1} \\ \frac{dx^3}{du} = \sqrt{1 - r_0^2 \beta^2 \left[ 1 + 2\beta \left( \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} \right) \right]^{-3}} u^{-4}. \end{cases} \quad (4.7)$$

#### 5. Обратимость принципа освобожденности от связей и «скрытые движения».

Анализ вида функций (3.14) показывает, что с геометрической точки зрения уравнения (3.15) определяют двумерную осесимметричную поверхность вращения. Поэтому при составлении уравнений Лагранжа полученные уравнения голономных связей и порождающая ими структура фундаментального метрического тензора приводят к появлению циклических координат. Вследствие этого возможен переход от уравнений Лагранжа к уравнениям Рауса. Известно [2, 4, 5], что в этом случае в уравнениях появляются слагаемые, которые можно отождествить с силами, обусловленными «скрытыми движениями» [1, 6]. Действительно, если материальная точка движется по поверхности вращения и её положение определяется координатами  $u^1$  и  $u^2 = \varphi$  (рис. 1), то её кинетическая энергия  $T$  будет определяться выражением

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{u}^1)^2 + \frac{1}{2} m r^2 (u^1)^2 \dot{\phi}^2 \quad (5.1)$$

где  $r(u^1)$  – радиус окружности в сечении поверхности с координатой  $u^1$ .

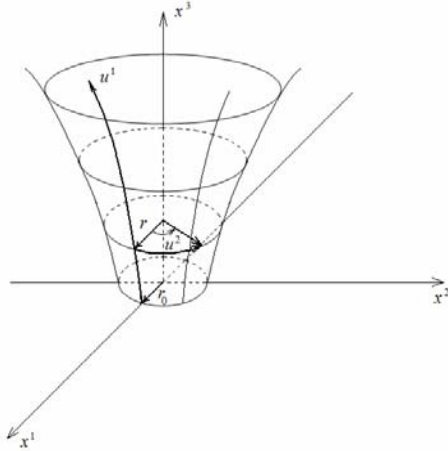


Рис. 1

Тогда, рассматривая поверхность вращения как идеальную связь, и при отсутствии внешних активных сил, можно получить дифференциальные уравнения движения

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}^1 - m r(u^1) \frac{dr}{du^1} \dot{\phi}^2 = 0 \\ m r^2(u^1) \dot{\phi} = K = \text{const} \end{cases} \quad (5.2)$$

Второе уравнение в (5.2) – частный случай уравнения (1.3), а физический смысл постоянной  $K$  – момент количества движения точки относительно оси  $Ox^3$ .

Теперь можно считать, что на материальную точку действует сила  $Q$ , направленная по касательной к координатной оси  $u^1$  в каждой точке траектории

$$Q(u_1) = \frac{K^2}{m} \frac{1}{r^3} \frac{dr}{du} = \frac{K^2}{2mr_0^2} \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (5.3)$$

где  $r_0$  – радиус окружности в начальном сечении поверхности вращения.

Сопоставление (5.3) с (1.6) показывает, что

$$K = p m r_0, \quad g = r^2 / r_0^2. \quad (5.4)$$

В этом случае постоянная  $p$  – окружная скорость материальной точки в начальном сечении поверхности вращения

$$p = r_0 \dot{\phi}_0. \quad (5.5)$$

Выбор постоянной  $r_0$  – произволен. Однако следует иметь в виду, что при достаточно большом  $r_0$  в (4.3) (4.5) (4.7) выражение, стоящее под квадратным корнем может оказаться отрицательным. Поэтому, целесообразно выбирать для  $r_0$  как можно меньшее значение, но, учитывая, что имеют место два первых интеграла, например интеграл момента количества движения  $K$  в (5.2) и интеграл энергии  $T$  в (5.1), минимальную величину постоянной  $r_{0\min}$  можно определить через эти две константы

$$r_{0\min} = \frac{K}{\sqrt{2Tm}}. \quad (5.6)$$

Тогда в рассмотренных примерах можно определить пределы изменения координат  $u$ , обеспечивающих положительность фундаментального метрического тензора  $g$  и существование производных  $dx^3/du$ .

**Заключение.** Показана возможность обратимости принципа освобождаемости от связей и установлено существование ограничений его применения при действии на материальную точку потенциальных сил. Получены приближенные уравнения голономных связей, определяющих структуру фундаментального метрического тензора, порождающего необходимое потенциальное силовое поле.

### Литература

1. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т.1 М.: Наука, 1972. 456 с.
2. Добронравов В.В. Основы аналитической механики. М.: Высшая школа, 1976. 262 с.
3. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 2000. 262 с.
4. Маркеев А.П. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1990. 416 с.
5. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
6. Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 387 с.

### ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ-МЕТАЛЛУРГОВ

В настоящее время в ряде отечественных [1-3] и зарубежных [4-6] учебников курса теоретической механики уделяется серьезное внимание изложению элементов статики, кинематики и динамики сплошных сред, как неотъемлемых частей механики систем точек с бесконечным числом степеней свободы. В условиях реализации Болонской системы подобное комбинированное изложение курса теоретической механики вполне оправдано в условиях постоянного сокращения аудиторных часов на изучение фундаментальных дисциплин и чрезвычайно важно для программ подготовки геологов, физиков, химиков, а также инженерных специалистов в технологии и металлургии. В то же время, аналогичное сокращение учебных часов по математическому анализу и геометрии существенно усложняет усвоение студентами технических специальностей курса теоретической механики с широким применением методов тензорного исчисления [1, 7-8], хотя введение тензорных величин весьма целесообразно при изложении элементов механики сплошных сред [2-4, 6]. Разумеется, эффективность изложения вопросов кинематики и динамики сплошных сред в курсе классической механики может быть повышена посредством применения современных коммерческих систем компьютерной алгебры с соответствующими модулями Maplesoft Maple-MapleSim, Wolfram Mathematica-MathModelica и MathWorks Matlab-Simulink, но достаточно высокая стоимость указанного программного обеспечения по-прежнему не способствует его широкому распространению в учебном процессе.

Вышеизложенные практические проблемы при изложении вопросов механики континуума в курсе теоретической механики обуславливают актуальность разработки учебного программного обеспечения, позволяющего продемонстрировать студентам как основные модели систем точек с бесконечным числом степеней свободы, так и решения основных задач кинематики и динамики сплошной среды, обобщающих и иллюстрирующих применение общих теорем кинематики и динамики системы.

В рамках изложения курса классической механики методика вывода дифференциальных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости по-разному изложена в ряде учебников теоретической механики [1-4]. Вывод уравнений Навье-Стокса выполняется в течение 2х-часового лекционного занятия как следствие теорем об изменении количеств движения сплошной среды по Лагранжу и обобщение уравнений Эйлера (рис. 1).

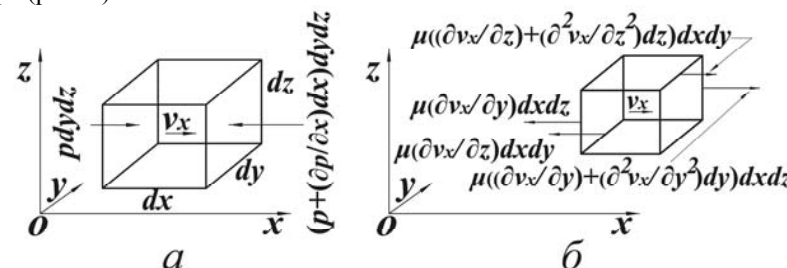


Рис. 1. Равновесие элементарного объема вязкой жидкости

Лекционное изложение вывода уравнений Навье-Стокса начинаем с выделения в жидкости элементарного прямоугольного параллелепипеда (рис. 1а), рёбра которого параллельны соответствующим координатным осям. Согласно второму закону Ньютона  $\sum F_{kx} = m dv_x / dt$ . Откуда следует:

$$p dy dz - (p + (\partial p / \partial x) dx) dy dz + \rho dx dy dz F_x^{vol} = (dv_x / dt) \rho dx dy dz, \quad (1)$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (м) – декартовы координаты точек континуума;  $\rho$  (кг/м<sup>3</sup>) – плотность вязкой жидкости;  $p$  (Па) – давление в рассматриваемой точке среды;  $\partial p / \partial x$  (Па/м) – частная производная от давления, характеризующая изменение давления на единицу длины вдоль оси  $x$ ;  $F_x^{vol}$  (м/с<sup>2</sup>) – проекция объемной силы на ось  $x$  декартовой системы координат. После упрощения (1) получаем  $-(1/\rho) \cdot (\partial p / \partial x) + F_x^{vol} = dv_x / dt$ . Аналогичные уравнения запишутся для осей  $y$  и  $z$ . Т.о. получены уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} -(1/\rho) \cdot (\partial p / \partial x) + F_x^{vol} &= dv_x / dt \\ -(1/\rho) \cdot (\partial p / \partial y) + F_y^{vol} &= dv_y / dt \\ -(1/\rho) \cdot (\partial p / \partial z) + F_z^{vol} &= dv_z / dt \end{aligned} \quad (2)$$

С учётом того, что скорость является функцией пространственных координат и времени, т.е.  $v_x = v_x(x, y, z, t)$ , то полный дифференциал составляющей скорости по оси  $x$  имеет вид:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial t} dt. \quad (3)$$

Разделив выражение (3) на  $dt$ , получим

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (4)$$

С учётом того, что  $dx/dt = v_x$ ,  $dy/dt = v_y$ ,  $dz/dt = v_z$ , выражение (4) получает следующий вид:

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (5)$$

Подставив компоненту ускорения (5) в уравнение Эйлера (2) для оси  $x$ , получим:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x^{vol} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (6)$$

На рис. 1б показаны направленные вдоль оси  $x$  силы вязкого трения, действующие на грани элементарного прямоугольного параллелепипеда. На нижнюю грань ( $z$ ) согласно закону вязкого трения Ньютона вдоль оси  $x$  действует тормозящая сила  $\mu(\partial v_x / \partial z) dx dy$ , а на верхнюю грань ( $z + dz$ ) – ускоряющая сила  $\mu(\partial v_x / \partial z + \partial^2 v_x / \partial z^2 dz) dx dy$ , где  $\mu$  (Па·с) – коэффициент динамической вязкости жидкости.

Если  $\partial v_x / \partial z$  не меняется вдоль оси  $z$ , т.е.  $\partial^2 v_x / \partial z^2 = 0$ , то на верхнюю и нижнюю грань параллелепипеда будут действовать равные по величине и противоположно направленные силы, равнодействующая которых равна нулю. Проекция силы вязкости на ось  $x$ , обусловленная производной  $\partial^2 v_x / \partial z^2$ , равна:

$$F_{x(z)} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dz - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx dy = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dx dy dz \quad (\text{рис. 1б}).$$

На ближнюю грань ( $y$ ) вдоль оси  $x$  действует тормозящая сила  $\mu(\partial v_x / \partial y) dx dz$ , а на дальнюю грань ( $y + dy$ ) – ускоряющая сила

$\mu(\partial v_x / \partial y + \partial^2 v_x / \partial y^2 dy) dx dz$ . Проекция силы вязкости на ось  $x$ , обусловленная производной  $\partial^2 v_x / \partial y^2$ , равна

$$F_{x(y)} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dz \quad \text{или} \quad F_{x(y)} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dx dy dz.$$

Проекция объемной силы вязкости  $F_x^{vol}$  на ось  $x$ , равная отношению силы вязкости к массе  $\rho dx dy dz$  элементарного параллелепипеда,

$$F_{x\mu}^{vol} = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_x, \quad (7)$$

где  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  – оператор Лапласа. Также обращаем внимание студентов, что слагаемое  $(\mu / \rho)(\partial^2 v_x / \partial x^2)$  появляется в обобщённом законе вязкого трения Ньютона. Оно представляет собой составляющую ускорения силы вязкости на ось  $x$ , обусловленную изменением скорости вдоль оси  $x$ . Его появление объясняется тем, что в сужении или расширении потока, где скорость изменяется вдоль направления движения, имеет место относительное скольжение слоёв жидкости, сопровождаемое вязким трением. Подставив составляющие объемной силы вязкости (7) в уравнения Эйлера (2), (6), получим дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье–Стокса):

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} &= F_x^{vol} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_x \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} &= F_y^{vol} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_y \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} &= F_z^{vol} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_z \end{aligned} \quad (8)$$

Имеем три уравнения (8) с четырьмя неизвестными  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ,  $p$ . Чтобы замкнуть систему, к уравнениям Навье–Стокса (8) присоединяют уравнение неразрывности. Для вывода уравнения неразрывности рассмотрим тот же элементарный параллелепипед в потоке жидкости при её установившемся движении (рис. 1). В центре параллелепипеда составляющая скорости вдоль оси  $x$  равна  $v_x$ , а плотность жидкости  $\rho$ . В центре левой грани скорость равна  $v_x - (\partial v_x / \partial x)(dx/2)$ , а плот-

ность  $\rho - (\partial\rho/\partial x)(dx/2)$ . В центре правой грани скорость равна  $v_x + (\partial v_x/\partial x)(dx/2)$ , а плотность  $\rho + (\partial\rho/\partial x)(dx/2)$ . Разность масс, поступающих через левую грань и вытекающих через правую за единицу времени,

$$\left(\rho - \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) \left(v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz - \left(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz \quad (9)$$

Аналогично для направлений  $y$  и  $z$  разности масс равны

$$-\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz; -\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dx dy dz \quad (10)$$

Согласно закону сохранения масс сумма этих приращений (9)-(10) должна равняться нулю:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

Для несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$ , и тогда уравнение неразрывности в дифференциальной форме для установившегося движения несжимаемой жидкости (11) принимает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

В рамках иллюстрации учебного процесса ограничимся плоской расчетной схемой течения вязкой ньютоновой жидкости, т.е. обобщим условие задачи 36.12 (36.14) сборника Мещерского И.В. [9]. В данном случае система (8), (12) для уравнений количеств движения сплошной среды вместе с уравнением неразрывности имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial t} &= F_x^{\text{vol}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial t} &= F_y^{\text{vol}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

где  $x, y$  (м) – декартовы координаты точек континуума;  $v_x, v_y$  (м/с) – проекции скоростей точек среды при координатном способе задания

движения;  $F_x^{\text{vol}}$  и  $F_y^{\text{vol}}$  (м/с<sup>2</sup>) – проекции объемных сил на оси декартовой системы координат;  $\rho$  (кг/м<sup>3</sup>) – плотность жидкости;  $p$  (Па) – давление в рассматриваемой точке;  $\mu$  (Па·с) – коэффициент динамической вязкости жидкости.

Поскольку решение уравнений в частных производных выходит за рамки курса классической механики и излагается преимущественно студентам-старшекурсникам, то во всех основных учебниках [1-4] введение в механику сплошных сред полностью ограничивается составлением указанных уравнений (8), (12) или (13). В рамках разработки учебного программного обеспечения рассмотрим задачу численного нахождения линий тока и полей скоростей для течения вязкой жидкости через две пересекающиеся трубы с одинаковыми поперечными сечениями шириной  $a$ , причем угол  $\alpha$  пересечения труб удовлетворяет условию  $0 < \alpha < 180^\circ$  (рис. 2). В случае установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости полагаем, что  $\partial v_x / \partial t = \partial v_y / \partial t = 0$  в (13). Без учета наличия потенциального силового поля сил тяжести, полагаем в (13), что компоненты объемных сил, которые действуют на единицу массы жидкости, составляют  $F_x^{\text{vol}} = F_y^{\text{vol}} = 0$ .

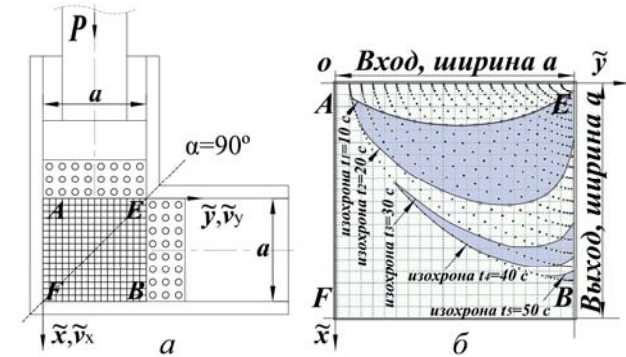


Рис. 2. Зона  $AEFB$  пересечения двух одинаковых труб, заполненных вязкой жидкостью (а), а также расчетные линии тока и соответствующие изохроны (б) для течения вязкой пластилиновой модели, полученные численным интегрированием уравнений количеств движения (13), причем вход  $AE$  в зону пересечения труб – сверху, а выход  $BE$  – справа

Согласно методике [1-4], для выполнения численного интегрирования системы (13) осуществим переход к следующим безразмерным переменным:  $\tilde{x} = x/a$ ,  $\tilde{y} = y/a$  – безразмерные координаты, где ха-

ракторный размер  $a$  – ширина трубы;  $\tilde{v}_x = v_x/v_0$ ,  $\tilde{v}_y = v_y/v_0$  – безразмерные проекции скоростей точек среды при координатном способе задания движения,  $v_0$  – скорость жидкости во входной трубе;  $\tilde{p} = p/(\rho v_0^2)$  – безразмерное давление жидкости;  $Re = a\rho v_0/\mu$  – число Рейнольдса,  $\tilde{t} = t\mu/(\rho a^2)$  – безразмерное время, а  $\tilde{x} = Re \cdot \tilde{v}_x \tilde{t}$ ,  $\tilde{y} = Re \cdot \tilde{v}_y \tilde{t}$ . При  $Re \ll 1$  из (13) получаем уравнения количеств движения в консервативной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} + Re \left[ \frac{\partial \tilde{v}_x^2}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial (\tilde{v}_x \tilde{v}_y)}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right] &= \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{t}} + Re \left[ \frac{\partial \tilde{v}_y^2}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial (\tilde{v}_x \tilde{v}_y)}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \right] &= \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}^2} \end{aligned} \quad (14)$$

Для численного конечноразностного решения системы (14) покроем зону пересечения двух труб равномерной сеткой квадратных элементов с последующей заменой искомым функций  $\tilde{v}_x = \tilde{v}_x(\tilde{x}, \tilde{y})$ ,  $\tilde{v}_y = \tilde{v}_y(\tilde{x}, \tilde{y})$  и  $\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y})$  на функции узловых аргументов. Реализацию численной модели осуществим согласно следующему расчетному алгоритму:

1. Задание параметров вязкой жидкости (плотность, удельная теплоемкость, возможное значение коэффициента вязкости), а также угла пересечения труб и скорости истечения жидкости во входной трубе;

2. Построение конечноразностной сетки;

3. Задание начальных условий при  $\tilde{t} = 0$ ;

4. Расчет нового значения момента времени  $\tilde{t} = \tilde{t} + \Delta \tilde{t}$ , вычисление новых значений проекций скорости  $\tilde{v}_x$ ,  $\tilde{v}_y$ , а также дивергенции скорости во внутренних точках по уравнениям (14) и  $D = \partial \tilde{v}_x / \partial \tilde{x} + \partial \tilde{v}_y / \partial \tilde{y}$ ;

5. Выполнение итераций для нахождения новых значений давления  $\tilde{p}$  во всех точках расчетной области согласно уравнению  $\nabla^2 \tilde{p} = -\partial^2 (\tilde{v}_x^2) / \partial \tilde{x}^2 - 2\partial^2 (\tilde{v}_x \tilde{v}_y) / \partial \tilde{x} \partial \tilde{y} - \partial^2 (\tilde{v}_y^2) / \partial \tilde{y}^2 - \partial D / \partial \tilde{t}$ ;

6. Расчет новых граничных значений проекций скорости  $\tilde{v}_x$ ,  $\tilde{v}_y$  и давления  $\tilde{p}$  с использованием значений  $\tilde{v}_x$  и  $\tilde{v}_y$  во внутренних точках; Переход к шагу № 4;

7. Достижение стационарного решения с заданной степенью точности; расчет линий тока и давления жидкости; вывод вычисленного значения

давления жидкости во входной трубе. Ввод нового приближения для значения коэффициента вязкости; переход к шагу № 1;

8. Достижение расчетного значения давления жидкости во входной трубе, которое совпадает с заданным;

9. Представление результатов расчетов в виде соответствующих графиков (рис. 2б, рис. 3).

Для установившегося течения жидкости полагаем, что начальные условия для системы (14) имеют вид

$$(\tilde{v}_x)_{i,j}^0 = 1; (\tilde{v}_y)_{i,j}^0 = 0; \tilde{p}_{i,j}^0 = 0 \quad (15)$$

Граничные условия для проекций скоростей точек жидкости сформируем из тех соображений, что вязкая жидкость течет с полным прилипанием к наружным стенкам  $AF$  ( $j=0$ ) и  $FB$  ( $i=n$ ) в зоне пересечения двух труб, т.е. скорости частиц вязкой жидкости вдоль стенок труб равны касательным составляющим скоростей материальных частиц во внутренних слоях жидкости, прилегающим к стенкам труб. При этом нормальные составляющие скоростей в слоях жидкости, которые прилегают к границе расчетной области изнутри и «снаружи», одинаковы и противоположно направлены, а на самой стенке трубы нормальные составляющие скоростей равны нулю. Т.о. для стенки трубы  $AF$  имеем:

$$(\tilde{v}_x)_{i,0} = (\tilde{v}_x)_{i,1}; (\tilde{v}_y)_{i,0} = 0; (\tilde{v}_y)_{i,-1} = -(\tilde{v}_y)_{i,1} \quad (16)$$

Для стенки трубы  $FB$  граничные условия записываем следующим образом:

$$(\tilde{v}_x)_{n+1,j} = -(\tilde{v}_x)_{n-1,j}; (\tilde{v}_y)_{n,j} = 0; (\tilde{v}_y)_{n,j} = (\tilde{v}_y)_{n-1,j} \quad (17)$$

Проекция скоростей частиц вязкой жидкости отсутствуют в угловых точках  $E$  и  $F$  пересечения труб:

$$(\tilde{v}_x)_{n,0} = 0; (\tilde{v}_y)_{n,0} = 0; (\tilde{v}_x)_{0,n} = 0; (\tilde{v}_y)_{0,n} = 0 \quad (18)$$

Граничные условия для давления возле стенок труб сформируем из условия равенства давлений в прилежащих узлах конечноразностной сетки по обе стороны границы трубы. При этом давление вязкой жидкости на выходной линии  $BE$  зоны пересечения труб может и отсутствовать:

$$\tilde{p}_{i,-1} = \tilde{p}_{i,0}; \tilde{p}_{n+1,j} = \tilde{p}_{n,j}; \tilde{p}_{i,n+1} = 0 \quad (19)$$

Из формулы Пуазейля получаем соотношения для перепада давления жидкости на шаге координаты:

$$\Delta p = 8v_0\mu/na; \Delta \tilde{p} = 8\mu/an\rho v_0 \quad (20)$$

где  $n$  – число ячеек конечноразностной сетки вдоль стороны расчетного квадрата (рис. 2а).

Граничные условия для давления вязкой жидкости на входной линии  $AE$  имеют вид:

$$\tilde{p}_{-1,j} = \tilde{p}_{0,j} + 8\mu/\alpha n \rho v_0 \quad (21)$$

В рамках разработки учебной компьютерной программы, система уравнений (14) решалась численно согласно методике [10] с начальными (15) и граничными (16)-(21) условиями. На рис. 2б приведены расчетные линии тока и соответствующие изохроны для течения пластилиновой модели вязкой жидкости, вычисленные для следующих значений параметров: плотность  $\rho=1850$  кг/м<sup>3</sup>, ширина каждой трубы  $a=35,5$  мм, скорость истечения вязкой жидкости во входной трубе  $v_0=0,19$  мм/с, динамическая вязкость жидкости  $\mu=700$  кПа·с, число Рейнольдса  $Re=1,76 \cdot 10^{-8}$ , шаг интегрирования по времени  $dt=81$  пс, количество шагов координаты  $n=100$ , количество шагов времени  $n_t=14494$ , время установления стационарного режима течения  $t^*=1,173$  мс (рис. 3). Пять последовательных изохрон, соответствующих моментам времени  $t_1=10$  с, ...,  $t_5=50$  с, обозначены кружками и дополнительно показаны на рис. 2б. Относительная погрешность итераций составляет  $\varepsilon=10^{-6}$ .

На лекционном занятии демонстрируем студентам-металлургам результаты численного интегрирования уравнений Навье-Стокса (14) для течения пластилиновой модели вязкой жидкости через две трубы одинакового поперечного сечения, которые представлены на рис. 2б и рис. 3. На рис. 2б показаны положения частиц-маркеров через равные промежутки времени. В начальный момент времени  $t=0$  частицы жидкости находились на входном сечении  $AE$ . Линии тока были построены соединением точек, которые соответствуют положениям маркеров в последовательные моменты времени. Положения маркеров в моменты времени  $t_1, \dots, t_5$  изображены кружками. Изохрона  $t_1$  была получена соединением маркеров, отвечающих моменту времени  $t_1$ . Обращаем внимание аудитории, что на рис. 2б четко прослеживается формирование свободной от маркеров застойной зоны течения жидкости, которая примыкает к нижнему левому углу  $AFB$  зоны  $AFBE$  пересечения двух труб. Численное решение позволяет определить поля безразмерных проекций скоростей  $\tilde{v}_x, \tilde{v}_y$  (рис. 3а-б), а также модуля скорости  $\tilde{v} = \sqrt{\tilde{v}_x^2 + \tilde{v}_y^2}$  (рис. 3в-г) вязкого потока и рассчитать размерные поля касательных напряжений  $\tau = \mu|dv/dz|$  (рис. 3д) и давления  $p$

(рис. 3е) жидкости в любой точке зоны  $AFBE$  пересечения двух труб одинакового поперечного сечения (рис. 2).

Силы трения между слоями вязкой жидкости, которые скользят друг относительно друга, определяются на основании закона Ньютона для сил внутреннего трения  $F = \mu S|dv/dz|$ , где  $S$  – площадь поверхности слоя жидкости, перпендикулярная к градиенту скорости потока, а  $dv/dz$  – градиент скорости, характеризующий интенсивность изменения скорости слоев при переходе между ними по направлению перпендикулярной к слоям оси  $z$ .

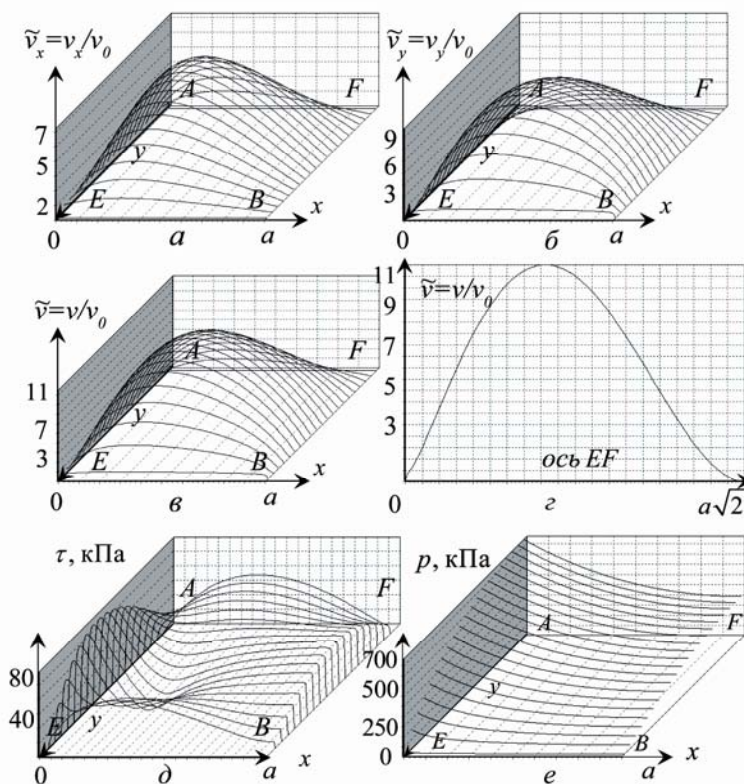


Рис. 3. Поля безразмерных проекций скоростей (а)-(б), модуля безразмерной скорости (в)-(г), а также касательных напряжений (д) и давления потока вязкой жидкости (е) в зоне пересечения двух труб, где вход  $AE$  в исследуемую область расположен слева, а выход  $BE$  расположен по направлению к нам (а-в, д-е)



Модуль градиента скорости определяется как  $|dv/dz| = \sqrt{((dv_x/dx) \cdot \sin \alpha)^2 + ((dv_y/dx) \cdot \cos \alpha)^2}$ , где угол  $\alpha = \arctg(v_y/v_x)$ . Декартовы координаты каждой точки линии тока на рис. 2б рассчитываются как

$$x_{i+1} = x_i + v_x(x_i, y_i) dt, \quad y_{i+1} = y_i + v_y(x_i, y_i) dt,$$

где на входе  $AE$  имеем  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = ja/20$ , а  $j \in [1; 19]$ .

Акцентируем внимание студентов на тот факт, что если бы слои вязкой жидкости не скользили друг относительно друга, то скорость слоя была бы пропорциональна его расстоянию от точки  $E$  в зоне пересечения двух труб (рис. 2б).

В тоже время, как это видно из рис. 3в-3г, где представлены зависимости модуля безразмерной скорости слоя  $\tilde{v}$  от его расстояния от точки  $E$  вдоль диагонали  $EF$ , возрастание скорости слоя с увеличением расстояния от точки  $E$  вначале замедляется, а потом скорость слоев существенно уменьшается. При скольжении слоев вязкой жидкости друг относительно друга происходит интенсивное перемешивание объема жидкости в зоне  $AFBE$  пересечения двух труб. Незначительная часть втекающего через сечение  $AE$  потока, которая наиболее удалена от точки  $E$ , вследствие уменьшения относительной скорости при прохождении зоны пересечения двух труб, заполняет значительную часть объема штампа  $AFB$ , которую мы называем застойной зоной вязкого течения. Именно на границе с застойной зоной течения относительная скорость от слоя к слою вязкой жидкости изменяется особенно интенсивно, причем вся картина вязкого течения определяется модулем числа Рейнольдса  $Re$ . Дополнительно обращаем внимание аудитории, что выполнение алгоритма прямого численного интегрирования системы дифференциальных уравнений в частных производных (14) требует значительного времени расчетов и не в полной мере учитывает влияние наличия входной и выходной труб (рис. 2а), примыкающих к зоне  $AFBE$  пересечения двух труб (рис. 2б). Т.о. завершаем первую лекцию по элементам механики сплошных сред объяснением студентам, что для снижения времени расчетов и более корректного учета влияния входной и выходной труб есть необходимость перейти к изложению уравнения переноса вихря (рис. 4-5). В начале второй лекции подчеркиваем, что в расчетном отношении целесообразность перехода к анализу уравнения переноса вихря состоит в уходе от решения системы (14) и интегрировании только одного уравнения в частных производных. Для стационарного течения в системе (13) полагаем

$\partial v_x / \partial t = \partial v_y / \partial t = 0$  и  $F_x^{vol} = F_y^{vol} = 0$ . Согласно методикам [1–4] выполним дифференцирование первого уравнения системы (13) по  $y$  и второго уравнения (13) по  $x$ , исключим давление  $p$  и определим функцию вихря  $\zeta$  как  $\zeta = \partial v_x / \partial y - \partial v_y / \partial x$ . Т.о. мы переходим к уравнению переноса вихря

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (22)$$

В консервативной форме уравнение переноса вихря (22) имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(v_x \zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(v_y \zeta)}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (23)$$

Будем определять функцию тока  $\psi$  следующими соотношениями

$$\partial \psi / \partial y = v_x; \quad \partial \psi / \partial x = -v_y \quad (24)$$

В таком случае функция вихря  $\zeta$  запишется в виде  $\zeta = \partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2$ . Если перейти к безразмерным переменным, то безразмерная функция вихря  $\tilde{\zeta}$  определяется как  $\tilde{\zeta} = \zeta a / v_0$  (рис. 4а), а безразмерная функция тока  $\tilde{\psi} = \psi / (v_0 a)$  (рис. 4б).

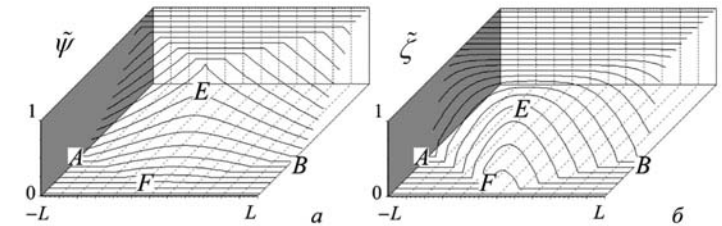


Рис. 4. Расчетные поля безразмерных функции тока  $\tilde{\psi}$  (а) и функции вихря  $\tilde{\zeta}$  (в), где вход  $AE$  в зону пересечения труб – слева, а выход  $BE$  – справа

Т.о., уравнение переноса вихря (22) в безразмерном виде записывается как

$$\partial \tilde{\zeta} / \partial \tilde{t} = -Re \left( \partial(\tilde{v}_x \tilde{\zeta}) / \partial \tilde{x} + \partial(\tilde{v}_y \tilde{\zeta}) / \partial \tilde{y} \right) + \partial^2 \tilde{\zeta} / \partial \tilde{x}^2 + \partial^2 \tilde{\zeta} / \partial \tilde{y}^2 \quad (25)$$

Уравнения (24) для безразмерной функции тока  $\tilde{\psi}$  записываются аналогично:

$$\partial \tilde{\psi} / \partial \tilde{t} = \tilde{v}_x; \quad \partial \tilde{\psi} / \partial \tilde{x} = -\tilde{v}_y, \quad (26)$$



а безразмерная функция вихря  $\tilde{\zeta}$  имеет вид  $\tilde{\zeta} = \partial \tilde{v}_x / \partial \tilde{y} - \partial \tilde{v}_y / \partial \tilde{x}$ . Обращаем внимание аудитории, что численная реализация алгоритма интегрирования уравнения переноса вихря осуществляется в следующей последовательности: 1. Задаем параметры вязкой жидкости (плотность, удельная теплоемкость, возможное значение коэффициента вязкости), а также угол пересечения труб и скорость истечения жидкости во входной трубе; 2. Построение конечноразностной сетки; 3. Задание начальных условий при  $\tilde{t} = 0$ ; 4. Расчет нового значения момента времени  $\tilde{t} = \tilde{t} + \Delta \tilde{t}$ , расчет нового значения функции вихря  $\tilde{\zeta}$  во внутренних точках согласно (25); 5. Выполнение итераций для нахождения новых значений функции тока  $\tilde{\psi}$  во всех точках по уравнениям  $\nabla^2 \tilde{\psi} = \tilde{\zeta}$  с использованием новых значений вихря  $\tilde{\zeta}$  во внутренних точках; расчет нового значения скорости  $\tilde{v}$  по формулам (26); 6. Расчет новых граничных значений вихря  $\tilde{\zeta}$  с использованием  $\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\zeta}$  во внутренних точках; Переход к шагу № 4; 7. Достижение стационарного решения с заданной степенью точности; Расчет линий тока и давления жидкости; Вывод вычисленного значения давления жидкости во входной трубе. Ввод нового приближения для значения коэффициента вязкости; Переход к шагу № 1; 8. Достижение расчетного значения давления жидкости во входной трубе, которое совпадает с заданным; 9. Представление результатов расчетов в виде соответствующих графиков (рис. 4-5).

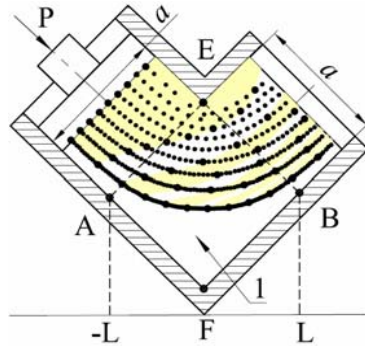


Рис. 5. Зона  $AEFB$  пересечения двух одинаковых труб, заполненных вязкой пластилиновой жидкостью с нанесенными расчетными линиями тока, застойной зоной вязкого течения 1 и соответствующими изохронами, полученными численным интегрированием уравнения переноса вихря (25), где вход  $AE$  в зону пересечения труб – слева, а выход  $BE$  – справа

Для установившегося течения жидкости полагаем, что начальные условия для (25) имеют вид

$$(\tilde{v}_x)_{i,j}^0 = 0; (\tilde{v}_y)_{i,j}^0 = 1; \tilde{\zeta}_{i,j}^0 = 1; \tilde{\psi}_{i,j}^0 = -i/m, \quad (27)$$

где  $m$  – число шагов координаты расчетной сетки на ширине трубы.

Из формул Пуазейля получаем соотношение для расхода вязкой жидкости:

$$Q = v_y \pi a^2 / 4 = \pi a^4 \Delta p / (128 \zeta \mu), \quad (28)$$

откуда следуют выражения для перепадов размерного и безразмерного давления на шаге  $\zeta$  координаты:

$$\Delta p = 32 \zeta \mu v_y / a^2; \Delta \tilde{p} = 32 \zeta \mu v_y / \rho v_0^2 a^2 \quad (29)$$

Таким образом, граничные условия на входе  $AE$  в зону пересечения двух труб (рис. 2а) имеют вид

$$\tilde{\psi}_{i,-1} = -i/m; \tilde{p}_{i,-1} = \tilde{p}_{i,0} + 32 \zeta \mu v_y / \rho v_0^2 a^2 \quad (30)$$

Граничные условия на выходе  $BE$  из зоны пересечения двух труб (рис. 2а) имеют вид

$$\tilde{\psi}_{m+1,j} = \tilde{\psi}_{m,j}; \tilde{p}_{m+1,j} = 0 \quad (31)$$

Граничные условия для безразмерных функций вихря  $\tilde{\zeta}$  и тока  $\tilde{\psi}$  в уравнении переноса вихря (25) сформулируем из следующих соображений. Семейство линий функции тока  $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{const}$  представляет собой совокупность линий тока. Можем произвольно принять, что на линиях трубы, образующих внешний угол  $AFB$  зоны пересечения двух труб, которые содержат внешнюю угловую точку  $F$  (рис. 2а, 4-5), имеем  $\tilde{\zeta} = 0$ ;  $\tilde{\psi} = 0$ , и в самой внешней угловой точке  $F$  имеем  $\tilde{\zeta} = 0$ ;  $\tilde{\psi} = 0$ , а во внутренней угловой точке  $E$  (рис. 2а, 4-5), вокруг которой закручиваются линии тока, принимаем  $\tilde{\zeta} = 1$ ;  $\tilde{\psi} = 1$ , причем единица принимается потому, что все величины являются безразмерными (рис. 4):

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= 0, \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad (\text{угол } F); \\ \tilde{\zeta}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= 1, \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 \quad (\text{угол } E). \end{aligned} \quad (32)$$

На рис. 6 представлены результаты численного интегрирования (25) с начальными (27) и граничными (28)-(32) условиями для течения пластилиновой жидкости для следующих значений входящих величин: ширина каналов труб  $a = 15$  мм, плотность жидкости  $\rho = 1850$  кг/м<sup>3</sup>, скорость истечения вязкой жидкости во входной трубе  $v_0 = 0,19$  мм/с, ди-

динамическая вязкость жидкости  $\mu=155 \text{ Па}\cdot\text{с}$ , число Рейнольдса  $Re=7,94\cdot 10^{-5}$ , число шагов координаты  $n=80$ , момент времени для построения первой изохроны  $100 \text{ с}$  и погрешность итераций  $\varepsilon=0,01$ .

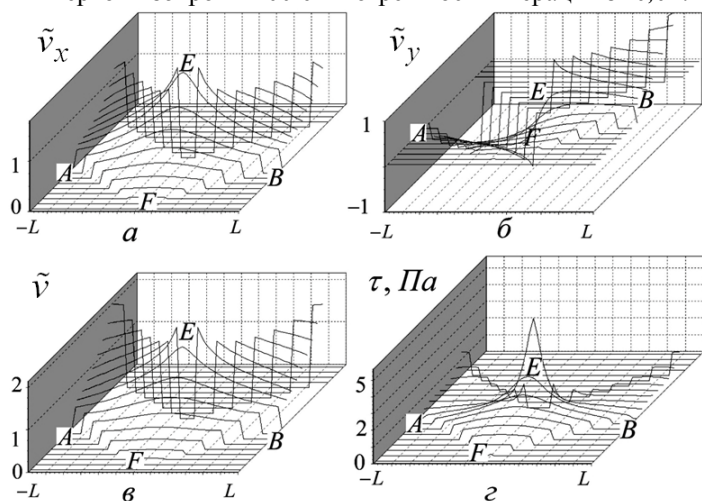


Рис. 6. Расчетные поля безразмерных проекций скоростей (а)-(б), а также модуля полной безразмерной скорости (в) и касательных напряжений (г), где вход  $AE$  в зону пересечения труб – слева, а выход  $BE$  – справа

Обращаем внимание студентов, что оба типа граничных условий для безразмерных проекций скоростей (16)-(18), а также функций вихря и тока (31)-(32) в неявном виде определяют полное прилипание вязкой жидкости к стенкам трубы (рис. 2, 5). Решение краевой задачи (25), (27)-(32) для течения вязкой жидкости в форме уравнения переноса вихря показывает формирование застойной зоны 1 (рис. 5). Наличие пиковых значений на рис. 6 свидетельствует о формировании значительных градиентов полной скорости (рис. 6в) и касательных напряжений (рис. 6г), что обуславливает относительное вращательное движение частиц сплошной среды, значительную неравномерность перемешивания, а также интенсивную макроскопическую ротацию в объеме вязкой жидкости, протекающем через зону  $AEBF$  пересечения двух труб (рис. 5).

Данный материал излагается в курсе теоретической механики студентам-металлургам специальностей «Литейное производство» и «Обработка металлов давлением» в рамках разделов «Основы кинематики твердого тела и сплошных сред», «Общие теоремы динамики. Основы динамики сплошных сред».

## Литература

1. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики, т.2. М.: Наука, 1977. 544 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 5-е изд., 1990. 607 с.
3. Бондаренко А.А., Дубинин О.А., Переяславцев А.Н. Теоретическая механика: Учебник. В 2-х ч. К.: Знання, 2004. Ч.1: Статика. Кинематика. 599 с. Ч.2: Динамика. 590 с. (на укр. яз.)
4. José J. V., Saletan E. J. Classical Dynamics: A Contemporary Approach. N.-Y.: CUP, 1998. 696 pp.
5. Johns O. Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics. Oxford: OUP, 2005. 597 pp.
6. Scheck F. Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos. Berlin: Springer, 2010. 547 pp.
7. Корнев Г.В. Тензорное исчисление. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. 240 с.
8. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. М.: Высшая школа, 2-е изд., 2000. 592 с.
9. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. 39-е изд., стер. СПб.: Лань, 2002. 448 с.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

## О ДВИЖЕНИИ ТРЕХГРАННИКА ФРЕНЕ

В каждой точке траектории, по которой совершает движение материальная точка, существуют три взаимно ортогональные направления, определяемые единичными векторами касательной  $\bar{\tau}$ , главной нормали  $\bar{n}$ , бинормали  $\bar{b}$ . Векторы  $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$  и три плоскости, попарно проходящие через них, образуют трехгранный угол, называемый трехгранником или триэдром Френе [1,2]. Все такие трехгранники, построенные для каждой точки траектории конгруэнтны, и потому могут рассматриваться как последовательные положения движущегося твердого тела – трехгранника Френе, сопровождающего данную материальную точку.

Произвольное движение твердого тела состоит из поступательного движения вместе с вершиной триэдра по траектории и вращательного движения относительно мгновенной оси вращения, проходящей через вершину. В качестве параметров, определяющих вращение триэдра, могут использоваться углы Эйлера (подход С.П. Финикова [2]), углы Крылова (исследования А.И. Лурье [3,4]). В настоящей статье приведены соотношения параметров Эйлера, Крылова с кривизной и кручением.

**1. Геометрические свойства.** Движение точки  $M$  задано векторным способом как  $\bar{r} = \bar{r}(s)$ , где  $\bar{r} = \overline{OM}$  – радиус-вектор движущейся точки,  $s$  – дуговая координата. Формулы Серре-Френе, определяющие производные единичных векторов  $\bar{\tau}$  – орта касательной,  $\bar{n}$  – орта главной нормали,  $\bar{b}$  – орта бинормали имеют вид [1, 2]

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{n}, \quad (1)$$

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -k\bar{\tau} + \kappa\bar{b}, \quad (2)$$

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -\kappa\bar{n}, \quad (3)$$

где  $k, \kappa$  – кривизна и кручение траектории<sup>1</sup>.

Введем точки  $M_i (i=1,2,3)$ , положение которых задаются единичными векторами  $\bar{\tau} = \overline{MM_1}$ ,  $\bar{n} = \overline{MM_2}$ ,  $\bar{b} = \overline{MM_3}$ . Тогда уравнения (1)-(3) можно интерпретировать как уравнения, определяющие скорости точек  $M_i (i=1,2,3)$  по отношению к системе отсчета  $Mxyz$  с началом в точке  $M$  и осями координат параллельными осям неподвижной системы отсчета  $Oxyz$

Построим поле относительных скоростей для точек  $M_i (i=1,2,3)$ , выбрав из уравнений (1)-(3), подсистему уравнений, содержащих кривизну  $k$ ,

$$\bar{v}_1^r = k\bar{n}, \quad \bar{v}_2^r = -k\bar{\tau}, \quad \bar{v}_3^r = 0, \quad (4)$$

третье уравнение показывает, что относительная скорость точки  $M_3$  равна нулю и поскольку относительная скорость начала отсчета точки  $M$  – также равна нулю, прямая  $MM_3$ , т.е. бинормаль, будет мгновенной осью вращения, при этом угловая скорость относительного движения представится как  $\bar{\omega}_r = \dot{\lambda}\bar{b}$ , где  $d\lambda$  – элементарный угол поворота триэдра относительно мгновенной оси вращения. Относительная скорость произвольной точки  $K$  триэдра, полагая  $\bar{r} = \overline{MK}$ , на основании формулы Эйлера, будет

$$\bar{v}_r = \bar{\omega}_r \times \overline{MK} = \bar{\omega}_r \times \bar{r}.$$

Для скоростей точек  $M_i (i=1,2)$   $\bar{v}_1^r = \bar{\omega}_r \times \bar{\tau} = (\dot{\lambda}\bar{b}) \times \bar{\tau} = \dot{\lambda}\bar{n}$ ,  $\bar{v}_2^r = \bar{\omega}_r \times \bar{n} = (\dot{\lambda}\bar{b}) \times \bar{n} = -\dot{\lambda}\bar{\tau}$ , сравнивая с уравнениями подсистемы (4), находим  $k = \dot{\lambda}$ ,  $\bar{\omega}_r = k\bar{b}$ .

Построим поле переносных скоростей для точек  $M_i (i=1,2,3)$ , выбрав из уравнений (1)-(3), подсистему уравнений, содержащих кручение  $\kappa$

$$\bar{v}_1^e = 0, \quad \bar{v}_2^e = -\kappa\bar{b}, \quad \bar{v}_3^e = -\kappa\bar{n}, \quad (5)$$

Первое уравнение показывает, что переносная скорость точки  $M_1$  равна нулю и поскольку переносная скорость начала отсчета – точки  $M$  – также равна нулю, прямая  $MM_1$ , т.е. касательная, будет мгновенной осью вращения, при этом угловая скорость переносного движения

<sup>1</sup> Формулы (1)-(3) были получены независимо друг от друга двумя французскими математиками: Serret (1851), Frenet (1847, 1852).

представится как  $\bar{\omega}_e = \dot{\mu}\bar{\tau}$ , где  $d\mu$  элементарный угол поворота триэдра относительно мгновенной оси вращения. Переносная скорость произвольной точки  $K$  триэдра, на основании формулы Эйлера, будет  $\bar{v}_e = \bar{\omega}_e \times \bar{MK} = \bar{\omega}_e \times \bar{r}$ .

Для скоростей точек  $M_i (i = 2, 3)$   $\bar{v}_2^e = \bar{\omega}_e \times \bar{n} = (\dot{\mu}\bar{\tau}) \times \bar{n} = \dot{\mu}\bar{b}$ ,  $\bar{v}_3^e = \bar{\omega}_e \times \bar{b} = (\dot{\mu}\bar{\tau}) \times \bar{b} = -\dot{\mu}\bar{\tau}$ , сравнивая с уравнениями подсистемы (5), находим  $\kappa = \dot{\mu}$ ,  $\bar{\omega}_e = \kappa\bar{\tau}$ .

На основании теоремы сложения скоростей, скорость точки  $K$  (по отношению к поступательно движущейся системе отсчета с вершиной в точке  $M$ ) равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e = (\kappa\bar{b} + \kappa\bar{\tau}) \times \bar{r}.$$

С другой стороны, результирующее вращательное движение триэдра представляет вращение относительно точки  $M$  с угловой скоростью  $\bar{\Omega}$ . Абсолютная скорость точки  $K$  в соответствие с формулой Эйлера

$$\bar{v}_a = \bar{\Omega} \times \bar{r}.$$

Из сравнения двух последних формул находим выражение для вектора угловой скорости в виде

$$\bar{\Omega} = \kappa\bar{b} + \kappa\bar{\tau},$$

следовательно, проекция вектора угловой скорости на направление главной нормали равна нулю.

Определим изменение ориентации трехгранника Френе по отношению к системе отсчета  $Mxyz$  с соответствующими единичными векторами  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ . Ориентацию трехгранника Френе задаем с помощью углов Эйлера (Рис.1).

Введем понятие оси собственного вращения трехгранника как прямой проходящей через его вершину и жестко связанной с трехгранником.

Будем говорить о двух положениях твердого тела – начальном, при котором орты подвижных осей  $\bar{\tau}_0$ ,  $\bar{n}_0$ ,  $\bar{b}_0$  совпадают с ортами  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , так что ось  $\bar{\tau}_0$  направлена по орту  $\bar{i}$ , ось  $\bar{n}_0$  по орту  $\bar{j}$ , ось  $\bar{b}_0$  по орту  $\bar{k}$ , и конечном, соответствующему рассматриваемому положению трехгранника.

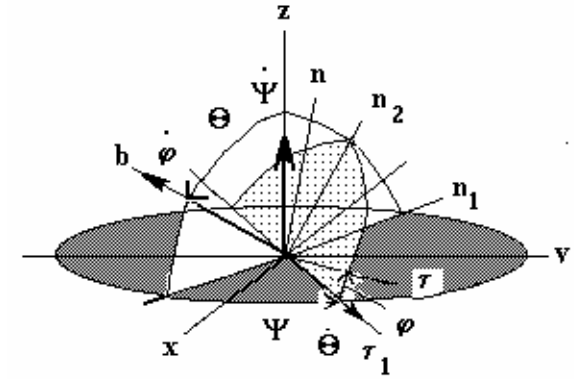


Рис.1

Тогда три последовательных поворота, которые определяются углами Эйлера, и переводят трехгранник из начального положения в конечное, будут:

1) поворот относительно вертикальной оси на угол  $\psi$ , в результате орты  $\bar{\tau}_0$ ,  $\bar{n}_0$  в плоскости  $xMy$ , будут иметь направления  $\bar{\tau}_1$ ,  $\bar{n}_1$ , орт  $\bar{\tau}_1$  определяет положение линии узлов. Новое положение ортов можно представить в матричной форме как

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{n}_1 \\ \bar{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\tau}_0 \\ \bar{n}_0 \\ \bar{b}_0 \end{bmatrix}$$

или  $\bar{e}_1 = A_\psi \bar{e}_0$ ;

2) второй поворот производится относительно линии узлов на угол  $\theta$ . При этом ось вращения займет конечное положение, определяемое ортом  $\bar{b}$ ; новое положение ортов можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau}_2 \\ \bar{n}_2 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{n}_1 \\ \bar{b}_1 \end{bmatrix}$$

или  $\bar{e}_2 = A_\theta \bar{e}_1$ ;

3) третий поворот представляет вращение относительно оси собственного вращения  $b$  на угол  $\phi$  и переводит подвижный трехгранник в конечное положение; положение ортов можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\tau}_2 \\ \bar{n}_2 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix}$$

или  $\bar{e} = A_\phi \bar{e}_2$ . Последовательность поворотов 3-1-3.

Проекция единичных векторов  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  на оси  $xMyz$  определяются соотношением  $\bar{e} = A_\phi A_\theta A_\psi \bar{e}_2 = A \bar{e}_0$ , где элементы  $a_{ki}$  матрицы  $A$ , будут

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \cos \theta, a_{12} = \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \phi \cos \theta, \\ a_{13} &= \sin \phi \cos \theta, a_{21} = -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \cos \theta, \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \cos \theta, a_{23} = \cos \phi \sin \theta, \\ a_{31} &= \sin \psi \sin \theta, a_{32} = -\cos \psi \cos \theta, a_{33} = \cos \theta. \end{aligned}$$

Представим угловую скорость трехгранника в виде

$$\bar{\omega} = \dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\theta}} + \dot{\bar{\phi}} = k\bar{b} + \kappa\bar{\tau}.$$

Проецируя данное векторное уравнение на оси  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ , получим

$$\begin{aligned} \kappa &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi, \\ 0 &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \\ k &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \quad (6)$$

откуда кручение  $\kappa = \dot{\theta} / \cos \phi$ , а кривизна определяется из третьего уравнения (6).

Задача интегрирования уравнений Серре-Френе (1)-(3) может быть поставлена в следующем виде [1,2]. Известны натуральные уравнения траектории  $k = k(s)$ ,  $\kappa = \kappa(s)$  определить траекторию  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$ .

Проектируя уравнения (1)-(3) на оси неподвижной системы, получим девять дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных  $\tau_x, \tau_y, \tau_z, n_x, n_y, n_z, b_x, b_y, b_z$ . Дополнительное затруднение состоит в том, что координаты единичных векторов

должны удовлетворять шести условиям ортогональности  $\tau^2 = n^2 = b^2 = 1$ ,  $\bar{\tau}\bar{n} = \bar{n}\bar{b} = \bar{b}\bar{\tau} = 0$ .

Переходя к описанию движения трехгранника в углах Эйлера [1], представим уравнения (6) в виде

$$\frac{d\psi}{ds} = \kappa(s) \sin \psi / \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \kappa(s) \cos \psi, \quad \frac{d\phi}{ds} = k(s) - \kappa(s) \operatorname{ctg} \theta \sin \phi$$

и при заданных начальных условиях определим  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  как функции  $s$ . Проектируя соотношение  $d\bar{r}/ds = \bar{\tau}$  на неподвижные оси координат, находим

$$dx/ds = a_{11}(\psi, \theta, \phi), \quad dy/ds = a_{12}(\psi, \theta, \phi), \quad dz/ds = a_{13}(\psi, \theta, \phi),$$

и определяем траекторию

$$x = \int a_{11} ds, \quad y = \int a_{12} ds, \quad z = \int a_{13} ds.$$

С.П. Фиников (1883 – 1964), профессор кафедры дифференциальной геометрии мехмата МГУ, вел двухсеместровый курс для потока механиков в 50-х годах прошлого столетия. В своем курсе [2], издание которого стало библиографической редкостью, Фиников увязывал курс геометрии с основными понятиями теоретической механики. В отличие от методики изложения, использованной в [2], для определения ориентации трехгранника Френе выше применен матричный метод. При доказательстве существования мгновенной оси вращения трехгранника Френе использованы понятия и конструкции кинематики сложного движения твердого тела.

**2. Задача А.И. Лурье.** Задача о движении трехгранника Френе рассмотрена А.И. Лурье в учебнике по теоретической механике [3] стр. 232, 368, в монографии [4]. Задача А.И. Лурье ниже изложена в соответствии с принятой методикой исследования сферического движения твердого тела, с использованием матричного анализа. Положение трехгранника Френе задаем с помощью скоростной системы координат (Рис. 2). Угол  $\alpha$  определяет положение плоскости  $zMT$ , содержащей ось  $z$  и вектор  $\bar{\tau}$ , а угол  $\beta$ , который отсчитывается от линии пересечения плоскости  $zMT$  с плоскостью  $xMy$  и называется углом возвышения, определяет положение орта  $\bar{\tau}$ .

Положение подвижных осей  $n$ ,  $b$  определим углом собственного вращения  $\gamma$  (последовательность поворотов 3-2-1).

Представим единичный вектор  $\bar{\tau}$  в виде

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 \cos \beta + \bar{k} \sin \beta.$$

Дифференцируя по  $s$  данное соотношение, получим

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = -\bar{\tau}_1 \beta' \sin \beta + \bar{k} \beta' \cos \beta + \frac{d\bar{\tau}_1}{ds} \cos \beta \quad (7)$$

Представим вектор  $\bar{\tau}_1$  в виде  $\bar{\tau}_1 = \bar{i} \cos \alpha + \bar{j} \sin \alpha$ .

Дифференцируя по  $s$  данное соотношение, получим

$$\frac{d\bar{\tau}_1}{ds} = -\bar{i} \alpha' \sin \alpha + \bar{j} \alpha' \cos \alpha = \alpha' \left[ \bar{i} \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \bar{j} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

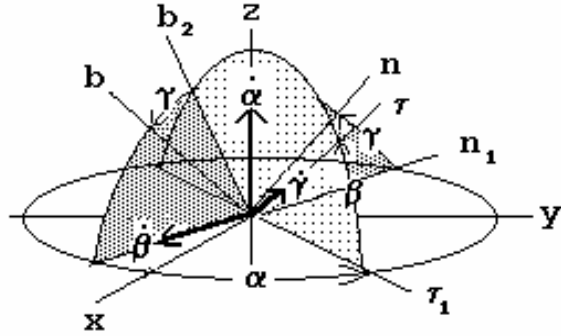


Рис. 2

причем выражение в квадратных скобках определяет единичный вектор  $\bar{n}_1$

$$\bar{n}_1 = [\bar{i} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \bar{j} \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})] \quad (8)$$

Коэффициент при  $\beta'$  в уравнении (7) определяет единичный вектор  $\bar{b}_2$

$$\begin{aligned} \bar{b}_2 &= -\bar{\tau}_1 \sin \beta + \bar{k} \cos \beta = \\ &= \tau_1 \cos(\beta + \frac{\pi}{2}) + \bar{k} \sin(\beta + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая (8)-(9), соотношение (7) представим в виде

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k \bar{n} = \beta' \bar{b}_2 + \bar{n}_1 \alpha' \cos \beta \quad (10)$$

Векторы  $\bar{n}_1$ ,  $\bar{b}_2$  ортогональны и лежат в нормальной плоскости. Если возвести в квадрат правую и левую части (10), то получим выражение для квадрата кривизны

$$k^2 = (\beta')^2 + (\alpha' \cos \beta)^2 \quad (11)$$

Угловая скорость  $\bar{\omega}$  трехгранника Френе складывается из угловых скоростей соответствующих вращений

$$\bar{\omega} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}$$

Проецируя данное векторное уравнение на направление главной нормали, получим

$$0 = -\beta' \cos \gamma + \alpha' \cos \beta \sin \gamma$$

откуда находим угол собственного вращения  $\gamma$  (угол между осью  $Mn_1$  и осью  $Mn_1$ )

$$\tan \gamma = \beta' / (\alpha' \cos \beta).$$

Дифференцируя последнее соотношение по  $s$ , получим

$$\frac{\gamma'}{\cos^2 \gamma} = \frac{d}{ds} [\beta' / (\alpha' \cos \beta)].$$

При параметризации движения по времени, формула (1) будет

$$\frac{d\bar{\tau}_1}{dt} = \frac{d\bar{\tau}_1}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = k v_\tau \bar{n}.$$

$$\kappa = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{d\alpha}{ds} \sin \beta = \left[ \cos^2 \gamma \frac{d}{dt} \left( \beta' / (\alpha' \cos \beta) \right) + \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta \right] / v_\tau.$$

**Пример 1.** Пусть точка совершает движение по винтовой линии по закону [2]  $x = a \cos(\omega t)$ ,  $y = a \sin(\omega t)$ ,  $z = ht$ , ( $a$ ,  $\omega$ ,  $h$  – константы).

Определить угловые скорости прецессии, возвышения и собственного вращения (относительно касательной), найти кривизну и кручение.

Вычисляем проекции скорости

$$\dot{x} = -a\omega \sin(\omega t), \quad \dot{y} = a\omega \cos(\omega t), \quad \dot{z} = h.$$

Составляющие скорости точки

$$v_\tau = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(a\omega)^2 + h^2},$$

$$v_{xy} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a\omega.$$

Угол возвышения  $\beta$  находится из условия  $\tan \beta = v_z / v_{xy} = h / a\omega$  и

постоянен. Отсюда следует, что угловая скорость возвышения  $\dot{\beta} = 0$ , из уравнения (7) следует, что скорость собственного вращения  $\dot{\gamma} = 0$  также равна нулю. Главная нормаль в каждой точке траектории лежит в плоскости, перпендикулярной оси винтовой линии и направлена к центру окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = v_y / v_x = -\operatorname{ctg}(\omega t) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right).$$

Трехгранник имеет постоянную скорость прецессии, равную по величине  $\omega$  и сонаправленную с осью винтовой линии. Кривизну и кручение находим как проекции угловой скорости трехгранника на бинормаль и касательную

$$k = \frac{\dot{\psi} \cos \theta}{v_\tau} = \frac{a\omega^2}{a^2\omega^2 + h^2}, \quad \kappa = \frac{\dot{\psi} \sin \theta}{v_\tau} = \frac{h\omega}{a^2\omega^2 + h^2}.$$

Полагая  $a=0.44$  м,  $v_z=0.215$  м/с,  $\omega = 0.5$  1/с, находим  $k=7.29$  м,  $\kappa=1.136$  м.

**Пример 2.** Линия пересечения центральной сферы радиуса  $a$  и прямого кругового цилиндра радиуса  $0.5a$ , проходящего через центр этой сферы, называется линией Вивиани (Рис.3). Пусть  $M$  – точка этой линии. Угол  $OPR$  прямой, поскольку опирается на диаметр окружности, которая является основанием цилиндра. Рассматривая треугольники  $OPR$  и  $OPA$ , определим  $OP = a \sin u = a \cos v$ , откуда находим уравнение линии Вивиани  $u + v = \pi/2$ . Найти кривизну и кручение данной линии.

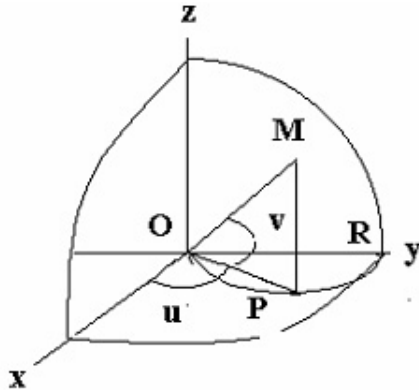


Рис. 3

Полагая  $u = \omega t$ , находим уравнения движения точки в виде  $x = 0.5a \sin(2\omega t)$ ,  $y = 0.5a(1 - \cos(2\omega t))$ ,  $z = a \cos(\omega t)$ , составляющие скорости будут  $\dot{x} = a\omega \cos(2\omega t)$ ,  $\dot{y} = a\omega \sin(2\omega t)$ ,  $\dot{z} = -a\omega \sin(\omega t)$ .

Определим углы скоростной системы координат:  $\alpha$  (угол широты) – из условия  $\operatorname{tg} \alpha = \dot{y} / \dot{x} = \operatorname{tg}(2\omega t)$ , откуда  $\alpha = \omega t$ ;  $\beta$  (угол возвышения) – из условия  $\operatorname{tg} \beta = \dot{z} / v_{xy}$ ,  $v_{xy} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega t$ ,  $\operatorname{tg} \beta = -\sin(\omega t)$ . Дифференцируя последнее соотношение по  $s$ , находим  $a\beta' = -\zeta^3 \cos(\omega t)$ ,  $\zeta = a\omega / v$ . Для второго слагаемого из (11) имеем:

$$\alpha' \cos \beta = (\alpha' v)(v \cos \beta) / v^2 = 2\zeta^2 / a.$$

Из соотношения (9) определим кривизну:  $a^2 k^2 = \zeta^4 / (2\zeta^2 + 3)$ .

Затем находим  $\gamma'$ . Второе слагаемое из (11) приводится к виду  $\alpha' \sin \beta = (\alpha' v)(v \sin \beta) / v^2 = -2\zeta^2 \sin(\omega t) / a$ .

### Литература

1. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.-Л.: ГОНТИ НКТП СССР, 1938. – 336 с.
2. Фиников С.П.. Дифференциальная геометрия. Курс лекций, читанный на механическом отделении механико-математического факультета МГУ. М.: Издательство Московского университета, 1961 г. – 158 с.
3. Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. Курс теоретической механики. Том 1. М.: ГИТТЛ, 1948. – 399 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 824 с.

### К ВОПРОСУ О КОРРЕКТНОСТИ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ КАЧЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В НЕГОЛОНОМНОЙ ФОРМЕ

Ранее вопрос о корректности математических моделей сухого трения в механике неголономных систем изучался в [1,2]. В работе [3] приведены оценки допускаемой погрешности при замене точной (в рамках закона сухого трения Кулона) модели её неголономным приближением. В настоящей работе уточняется модель, рассмотренная в [1,2] а также обсуждаются дополнительные, не рассмотренные в [1-3] обстоятельства.

Вопрос о том насколько корректно в задачах обкатывания поверхностей твердыми телами заменять сухое трение простым условием отсутствия проскальзывания в некоторой точке контакта (неголономным условием), может быть в полной мере рассмотрен на самом простом примере качения однородного шара по плоскости. При этом, поскольку вопрос о наличии, или отсутствии проскальзывания касается только трения скольжения, то трением качения при решении этого вопроса можно пренебречь.

Будем исходить из того, что тяжелый шар касается плоскости по круговой площадке контакта радиуса  $\varepsilon$ . Распределение нормальных напряжений в этой площадке подчиняется закону Герца

$$\sigma(r) = \frac{3N}{2\pi\varepsilon^2} \sqrt{1-r^2}, \quad (1)$$

где  $r$  – безразмерное расстояние от центра площадки до рассматриваемой точки внутри её, нормированное на величину радиуса пятна контакта  $\varepsilon$ ,  $N$  – нормальная реакция.

Касательные напряжения, возникающие при скольжении и верчении в этой же точке, записываются в соответствии с законом сухого трения Кулона, имеющим в локальной форме вид

$$d\mathbf{F} = -f\sigma(r) \frac{\mathbf{V}_c}{v_c} ds,$$

где  $\mathbf{V}_c$  – вектор скорости относительного скольжения в этой точке,  $v_c$  – модуль этого вектора, а  $f$  – коэффициент трения.

После интегрирования этого дифференциала силы по площадке контакта получаются следующие выражения для модуля главного вектора и главного момента относительно центра пятна контакта [4]

$$\begin{cases} M = \frac{M_0}{8}(8-8k^2+3k^4) \\ F = \frac{3}{32}\pi F_0 k(4-k^2) \end{cases}; \quad k = \frac{v}{u} = \frac{v}{\varepsilon\omega_z} \leq 1 \quad (2)$$

Если  $k > 1$ , то выражения для силы и момента несколько сложнее:

$$\begin{cases} M = \frac{M_0}{4\pi}[(8-8k^2+3k^4)\arcsin\frac{1}{k}+3(2-k^2)\sqrt{k^2-1}] \\ F = \frac{3F_0}{64k}[4k^2(4-k^2)\arcsin\frac{1}{k}+4(2+k^2)\sqrt{k^2-1}] \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $M_0 = 3\pi fmg\varepsilon/16$ ,  $F_0 = fmg$ .

В этих выражениях момент и сила, действующие на шар при его качении с проскальзыванием, зависят от скорости скольжения  $v$  и от угловой скорости верчения  $\omega_z$ , которую удобно представлять в форме  $u = \varepsilon\omega_z$ .

Как видно, выражения для момента и силы зависят от того, где находится мгновенный центр скоростей, внутри пятна контакта ( $k \leq 1$ ), или вне его ( $k > 1$ ). В целом эти выражения являются гладкими, поскольку на границе ( $k = 1$ ) производные непрерывны. Графически момент и сила как функции  $k$  представлены рис. 1 и 2.

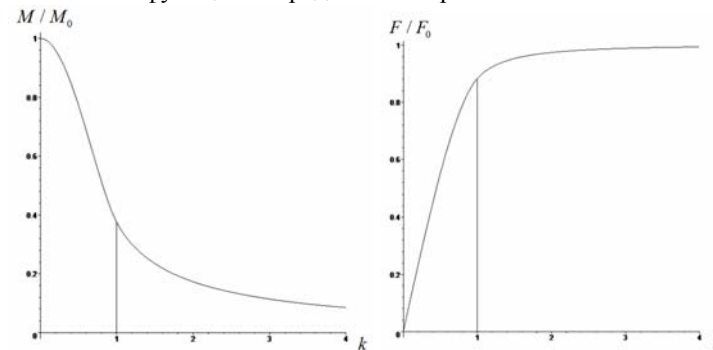


Рис. 1.

Рис. 2.

В [1,2] вместо закона Герца (1) для простоты был принят закон равномерного распределения напряжений  $\sigma = N/\pi\varepsilon^2$ . Внешняя простота в данном случае оказалась обманчивой, поскольку вместо выражений в элементарных функциях (2-3) авторы столкнулись с громоздкими и



очень неудобными в анализе выражениями для момента и силы в эллиптических функциях Якоби.

В дальнейшем понадобятся следующие свойства функции  $F(k)$ :

Свойство 1:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = F_0.$$

Свойство 2:

$$\left. \frac{dF}{dv} \right|_0 = \left. \frac{dF}{dk} \right|_0 \frac{dk}{dv} = \frac{3\pi F_0}{8u}.$$

Сухое трение при наличии наряду со скольжением ещё и верчения приобретает черты вязкого трения [2]. Коэффициент такого «вязкого» трения, устанавливаемый свойством 2, оказывается зависящим от угловой скорости верчения  $u$  гиперболическим образом.

Уравнения движения шара под действием таких сил приведены в [5]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \alpha + R\omega_y, & \dot{y} &= v \sin \alpha - R\omega_x, & J\dot{\omega}_x &= -FR \sin \alpha, \\ J\dot{\omega}_y &= FR \cos \alpha, & J\dot{u} &= -\varepsilon M, & 2m\dot{v}/7 &= -F, & \dot{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $J, m$  – момент инерции и масса шара,  $R$  – его радиус,  $\alpha$  – угол, который скорость скольжения составляет с осью  $x$ .

Отсюда немедленно следует, что направление относительной скорости проскальзывания при движении шара не изменяется  $\alpha \equiv \text{const}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\alpha \equiv 0$ , что дает  $\omega_x = \text{const}$  и из четвертого и шестого уравнений системы (4) следует первый интеграл

$$J\omega_y + 2mRv/7 = \text{const}. \quad (5)$$

Таким образом, решение системы семи уравнений (4) свелось к решению двух уравнений относительно  $u$  и  $v$ . Если уравнения относительно этих переменных решаются, то все остальные переменные находятся в квадратурах. Предпоследние два уравнения системы (4) перепишем в виде

$$\mu \frac{dv}{du} = \begin{cases} \frac{uvZ_1}{Z_2}, & k \leq 1 \\ u \left[ \frac{v^2 Z_1 \arcsin\left(\frac{u}{v}\right) + 4u(2u^2 + v^2)\sqrt{v^2 - u^2}}{v \left[ Z \arcsin\left(\frac{u}{v}\right) + 3u(2u^2 - v^2)\sqrt{v^2 - u^2} \right]} \right], & k > 1 \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $\mu = 5\varepsilon^2/(28R^2) \ll 1$ ,  $Z_1 = 4u^2 - v^2$ ,  $Z_2 = 8u^4 - 8u^2v^2 + 3v^4$ .

Уравнение (6) в плоскости  $(u, v)$  имеет единственную особую точку  $u = 0$ ,  $v = 0$ . Поскольку в силу (4)  $u$  и  $v$  являются убывающими функциями времени, то это означает, что скольжение и верчение прекращаются *одновременно*. Уравнение (6) является однородным, поэтому заменой переменных вида  $v/u = w$ ,  $\ln u = s$  оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными, что позволяет получить его первый интеграл в явной форме. При  $\mu = 1$  уравнение (6) имеет частный интеграл  $v = u$ . Фазовые траектории  $v(u)$  для  $\mu < 1$  приведены на рис. 3. После того как скольжение заканчивается, т.е. устанавливается  $u = v = 0$ , центр шара движется по прямой, поскольку из интеграла (5) в этом случае следует, что  $\omega_y = \text{const}$  и первые два уравнения системы (4) имеют общее решение  $x = x_0 + R\omega_y t$ ,  $y = y_0 - R\omega_x t$ .

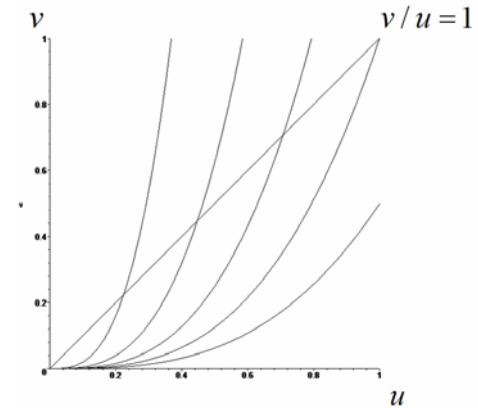


Рис. 3.

Сравним время движения со скольжением в случае точечного контакта, т.е. когда  $\varepsilon = 0$  и в случае сколь угодно малой площадки контакта с  $\varepsilon \neq 0$ .

Итак, пусть  $\varepsilon = 0$ . Тогда и  $u = \varepsilon\omega_z = 0$ . В этом случае, в силу свойства 1, имеем  $F = F_0$  и из шестого уравнения системы (4) находим  $v = v_0 - 7F_0/(2m)t$ . Следовательно, время скольжения в случае точечного контакта равно  $T = 2mv_0/(7F_0)$ .

Чтобы оценить время скольжения при  $\varepsilon \neq 0$  рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{du}{d\tau} = -\mu(8u^4 - 8u^2v^2 + 3v^4), \quad \frac{dv}{d\tau} = -uv(4u^2 - v^2). \quad (7)$$

Эта система имеет то же уравнение для фазовых траекторий, что и (6) в интересующем нас случае  $k \leq 1$ , но с другим расписанием движения по траекториям. Время  $t$  связано со временем  $\tau$  очевидным образом

$$t = (64m / 21\pi F_0) \int_0^\tau u^4(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Асимптотическое поведение решений системы (7) в окрестности нуля нетрудно установить, имея ввиду что  $u \gg v$  в этой окрестности. В этом случае из первого уравнения системы (7) приближенно имеем

$$\frac{du}{d\tau} \approx -8\mu u^4,$$

откуда следует

$$u \approx \frac{u_0}{\sqrt[3]{1 + 24\mu u_0^3 \tau}}$$

По этой причине интеграл (8) сходится, т.е. время до остановки, как и в случае точечного контакта, является конечным, однако его асимптотическая оценка при  $\tau = \infty$  оказывается такой:  $T \approx 8\pi u_0 / 21\pi F_0 \mu$ . Это означает, что при стремлении размеров площадки контакта к нулю:  $\varepsilon \rightarrow 0$ , что влечёт и  $\mu \rightarrow 0$ , время  $T$  до остановки стремится к бесконечности.

Это и означает *некорректность* неголономной модели, т.е. модели с точечным контактом, поскольку при исчезающе малой площади контакта отличие столь важной характеристики движения, как время проскальзывания  $T$  в двух моделях становится сколь угодно большим.

Замена более естественного предположения о круговом контакте точечным контактом является приближением, продиктованным желанием упростить задачу, поскольку неголономная модель имеет меньшую размерность. Это приближение, как это только что показано, очень плохо отвечает на вопрос о продолжительности движения со скольжением. Вопрос о том, насколько близки друг к другу решения в этих моделях по угловым и линейным скоростям в каждый момент времени, а также и вопрос о точности нахождения траектории центра масс шара, изучался с использованием теоремы А.Н. Тихонова в [3].

Было показано, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  на конечном интервале времени все указанные переменные стремятся друг к другу. Такое обоснование на практике часто оказывается достаточным.

Заметим к этому два обстоятельства.

Во-первых, учитывая, что неголономное приближение оказывается достаточно грубым, представляется мало оправданным изучение в задачах качения твердых тел таких вопросов как, интегралы движения, инвариантные меры, тензорные инварианты и т.п., если это не имеет учебных целей.

Во-вторых, в выполненном в [3] обосновании неголономной модели, на наш взгляд, следует изменить акцент. Как следует из свойства 2, коэффициент псевдовязкости (производная  $dF/dv$  в нуле) пропорционален  $1/u = 1/\varepsilon\omega_z$ . Близость к точному закону Кулона определяется стремлением  $u \rightarrow 0$ . А это может достигаться либо так, как это сделано в [3], т.е. при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , либо, что гораздо естественнее, при  $\omega_z \rightarrow 0$ . Поскольку в конкретных задачах исследователь распоряжаться величиной  $\varepsilon$  не может, то стремление этой величины к нулю должно пониматься при искусственном рассмотрении ансамбля шаров с уменьшающейся площадкой контакта. Напротив, скорость вращения  $\omega_z$  вполне находится в нашем распоряжении и может быть сделана по желанию малой. В экспериментах с колесными роботами, выполненными, например, в [6], именно такая угловая скорость и является малой. Этим и объясняется неплохое согласие эксперимента и теории, построенной на неголономной модели.

## Литература

1. Неймарк Ю.А., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Физматлит, 1967. – 520 с.
2. Фуфаев Н.А. Об идеализации поверхности соприкосновения в виде точечного контакта в задачах качения // ПММ, т.30, вып.1, 1966.
3. Иванов А.П. Сравнение моделей трения в динамике шара на плоскости. Нелинейная динамика, 2010. Т.6, №4. С. 907-912.
4. Журавлёв В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твёрдых тел. // ПММ. 1998. Т.62, Вып. 5. С.762-767.
5. Андронов А.А., Журавлёв В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 184 с.
6. Белотелов В.Н., Мартыненко Ю.Г. Управление пространственным движением перевернутого маятника, установленного на колесной паре. // Известия РАН, Механика твердого тела, №6, 2006. С. 10-28.

## К ЗАДАЧЕ О ВОЛЧКЕ

## К задаче о волчке

В задачнике по теоретической механике [1] помещена следующая задача (под номером 15.1) о движении волчка.

*Волчок прецессирует, будучи установлен на шероховатую горизонтальную поверхность. Момент инерции волчка относительно его оси симметрии  $J = 9000 \text{ г}\cdot\text{см}^2$ , угловая скорость его собственного вращения  $\omega = 209 \text{ рад/с}$ , масса волчка  $m = 900 \text{ г}$ , расстояние от точки опоры волчка до его центра масс  $l = 6 \text{ см}$ , угол наклона оси  $\theta = 30^\circ$ . Каков должен быть коэффициент трения  $f$  между этой поверхностью и ножкой волчка, чтобы волчок не скользил по поверхности?*

*Ответ:  $f \geq 0,024$ .*

Условие задачи предполагает следующую схему решения. При помощи теоремы Резаля находим угловую скорость прецессии

$$\Omega = \frac{mgl}{J\omega}$$

С этой угловой скоростью центр масс волчка равномерно движется по своей траектории – горизонтальной окружности радиусом  $l \sin \theta$  с центром на оси прецессии.

Применяя теорему о движении центра масс и закон сухого трения Кулона, находим величину силы трения, удерживающей точку опоры волчка в покое, и максимальную силу трения покоя:

$$F_{mp} = m l \Omega^2 \sin 30^\circ, \quad F_{mp}^{\max} = f m g.$$

Составляя теперь неравенство  $F_{mp} \leq F_{mp}^{\max}$  и решая его при найденных значениях  $F_{mp}$ ,  $F_{mp}^{\max}$ , приходим к нужному ответу.

Приведённая постановка задачи вполне соответствовала установившимся на то время представлениям на закон трения в точечном контакте шероховатых тел. Считалось, что точка тела, которой оно прикасается к опорной плоскости, может как скользить, так и покоиться относительно плоскости, так что в контакте имеет место обычный закон Кулона для трения скольжения

$$\vec{F}_{mp} = \begin{cases} -fN \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, & \vec{v} \neq 0 \\ \vec{F}_0, & 0 \leq |\vec{F}_0| \leq fN, \quad \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Так полагали классики механики, рассматривая задачи динамики твёрдых тел, соприкасающихся при движении с шероховатой поверхностью, так долгое время продолжали поступать современные авторы. Однако в последнее время положение дел радикально меняется. Можно констатировать существенный пересмотр представлений о силовом взаимодействии в точечном фрикционном контакте [2-5]. Принимается во внимание, что опорная поверхность ножки волчка всегда представляет собой часть некоторой поверхности вращения, а тела не являются абсолютно твёрдыми. Поэтому в реальности контакт осуществляется не в точке, а по некоторой, пусть и весьма малой, но конечной площадке (пятну контакта). Например, для опоры в виде полусферы можно принять пятно контакта в виде круга с малым радиусом  $a$ .

Пусть волчок движется в режиме «сна», то есть вращается вокруг своей вертикально расположенной оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$ , а центр пятна контакта неподвижен. При этом малые элементы пятна контакта, удалённые от центра, скользят с трением относительно плоскости по круговым траекториям. К каждому такому элементу приложена сила трения, которая может быть выражена согласно (1) формулой

$$d\vec{F}_{mp} = -f \sigma(\rho, \theta) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \rho d\rho d\theta, \quad \rho \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2)$$

с моментом относительно центра пятна контакта, равным

$$dM_{mp} = -f \sigma(\rho, \theta) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \rho^2 d\rho d\theta. \quad (3)$$

Здесь  $f$  – коэффициент трения,  $\rho, \theta$  – координаты элемента в полярной системе координат с полюсом в центре пятна контакта,  $\vec{v}$  – скорость этого малого элемента,  $\sigma(\rho, \theta)$  – приходящееся на элемент нормальное давление. В итоге получаем систему сил трения, распределённую по всей площадке контакта. Интегрируя (2) и (3) по всей площадке, приходим к эквивалентной форме этой системы сил – главному вектору  $\vec{F}$  (силе трения) и главному моменту относительно центра площадки  $M$  (моменту трения). Для любого центрально-симметричного распределения  $\sigma(\rho, \theta)$  будем иметь

$$F = 0, M = M_0 \neq 0 \quad (4)$$

Конкретное значение  $M_0$ , зависящее от вида распределения, для дальнейшего вывода несущественно.

А вывод такой. В результате вращения (верчения) трение покоя между волчком и шероховатой опорой совершенно исчезает. Проявляется тот же эффект Н.Е.Жуковского преобразования сухого трения в вязкое, обсуждавшийся ранее на примере поступательной фрикционной пары [5,6]. В этих условиях любая тенденция к наличию скольжения реализуется, и волчок неизбежно начинает проскальзывать. Поэтому ответ в данной задаче такой: *никакой силой сухого трения с конечным значением коэффициента трения невозможно предотвратить скольжение волчка, прецессирующего на шероховатой опорной плоскости*. Отсутствие скольжения имеет место только для спящего волчка.

### Литература

1. Сборник задач по теоретической механике/ Колесников К.С. (ред.). М.: Наука, 1989. – 446с.
2. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. – С.60-77.
3. Журавлёв В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твёрдых тел // ПММ. 1998. Т.62. Вып.5. С.762-767.
4. Журавлёв В.Ф. О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел// Успехи механики, №3, 2005. С. 58-76.
5. Андронов В.В., Журавлёв В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.-Ижевск.: РХД, 2010. – 183 с.
6. Андронов В.В. Механические системы с преобразованным сухим трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. №1. С.40-49.

УДК 531.36:534.1

Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров  
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

### УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МАЯТНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

1. Параметрически возбуждаемые системы представляют значительный интерес для теории колебаний и ее приложений [1-4]. Такие системы также возникают естественным образом при исследовании устойчивости по Ляпунову вращательно-колебательных движений нелинейных систем [1-3,5-7]. В природе и технике имеется множество механических, био- и электромеханических моделей возбуждения параметрических колебаний.

Стандартным методом исследования параметрических колебаний являются методы возмущений (малого параметра). Они направлены на построение границ локальных областей параметрического резонанса, т.е. диаграмм Айнса-Стретта. Недостаток этого подхода в том, что отсутствуют как теоретическое обоснование сходимости, так и оценки погрешности последовательных приближений. В отдельных задачах оценки погрешности оказываются весьма грубыми и не пригодными для приложений. Полученные решения имеют характер асимптотик и неприменимы для любого числового, кроме нулевого, значения малого параметра.

Использование функциональных методов Бубнова-Ритца также неявно предполагает наличие малого параметра и возможность представления решения низших мод с помощью весьма небольшого числа пробных функций. Кроме того, эти процедуры не содержат явной проверки близости решений к искомым посредством прямой подстановки в дифференциальное уравнение с целью проверки выполнения условий периодичности, т.е. краевых условий. Кроме того, при расчетах содержательных задач часто наблюдается «эффект насыщения», резко ограничивающий точность вычислений для основной и особенно высших мод колебаний. Эти подходы не позволяют отслеживать процесс сходимости строящихся решений и осуществлять эффективное продолжение по параметрам. Кроме того, они не дают возможности построения оценок решений «сверху» и «снизу».

Ниже излагается разработанный авторами конструктивный численно-аналитический метод ускоренной сходимости [8] для

решения задач о параметрических колебаниях и его приложение к конкретной механической системе. Излагаемый оригинальный подход адекватен исследуемой задаче и свободен от указанных недостатков, присущих методам локального анализа. Его основу составляет быстросходящийся итерационный процесс (2-3 итерации обычно) вычисления собственного значения (частоты) посредством перманентного интегрирования задачи Коши для конкретного номера моды колебаний (элементарная операция). По достижении требуемой точности применяется процедура продолжения по параметрам посредством интерполяционной формулы невысокого порядка (нулевого, первого и т.д.) во всей допустимой области. Проиллюстрируем подход посредством высокоточного решения задачи о параметрических колебаниях математического маятника переменной длины в допустимой области изменения параметра модуляции и приведем его глобальный анализ.

2. Исследуются собственные частоты и формы малых колебаний математического маятника единичной массы с периодически изменяющейся длиной. Рассматривается модель параметрического возбуждения системы, приводящая к уравнению движения Лагранжа вида

$$l^2 \ddot{\phi} + 2l\dot{l}\dot{\phi} + gl \sin \phi = 0, \quad |t| < \infty \quad (1)$$

$$N = g \cos \phi - \ddot{l} + l\dot{\phi}^2; \quad l = l(t)$$

Здесь  $l$  — длина, изменяющаяся в допустимых пределах  $0 < l^- \leq l \leq l^+ < \infty$ ,  $\phi$  — угол отклонения от нижнего положения равновесия,  $g$  — ускорение сил тяготения. Величина  $N$  — реакция связи (гибкой нити или невесомого стержня), которая должна быть удерживающей, т.е.  $N > 0$  в случае абсолютно гибкой нити. Уравнение (1) линеаризуем в окрестности точки  $\phi = \dot{\phi} = 0$  — положения равновесия системы. Рассматривается при этом гармоническое изменение параметра  $l = l(t)$  с частотой  $\Omega$ . Получим после неособой замены  $\phi = lu$  уравнение

$$u'' + (\mu - 4\pi^2 eq(\theta))r(\theta, e)u = 0$$

$$\theta = (\Omega / \pi)t, \quad r \equiv (1 - eq)^{-1}, \quad q \equiv \cos 2\pi\theta \quad (2)$$

$$\mu = \pi^2 g / (l_0 \Omega^2), \quad l_0 = \frac{1}{2}(l^+ + l^-), \quad e = \frac{1}{2}(l^+ - l^-)l_0^{-1}$$

Коэффициент параметрического возбуждения в уравнении (2) имеет сингулярную особенность при  $e \rightarrow 1$  для  $\theta = -1, 0, 1$ . Отметим, что в числителе перед параметром возбуждения  $e$  стоит множитель  $4\pi^2 \approx 38,4$ , что даже при малом возбуждении, например, при  $e \approx 0,2$ , приводит к значению  $4\pi^2 e \approx 10$ . Поэтому применение метода возмущений для реальных расчетов имеет условный характер.

Аналогичную (2) особенность имеет уравнение упругих колебаний коленчатого вала, которое детально исследовал в 1934г. Н.Е. Кочин [4] (см. также [5,8,9] и др.).

3. Согласно общей теории А.М. Ляпунова линейных параметрических колебаний [1-3] ниже находятся значения параметра  $\mu = \mu(e)$ , при которых уравнение (2) допускает решения  $u(\theta, \mu, r), u'(\theta, \mu, e)$ , с периодом 2. Также определены зоны параметрического резонанса для различных мод колебаний.

Изложенная постановка приводится к форме 2-периодической краевой задачи, эквивалентной самосопряженным задачам типа Штурма-Лиувилля [8,9] на интервале  $0 \leq \theta \leq 1$  первого и второго рода для  $0 \leq e < 1$

$$u = 0, \quad \theta = 0, 1; \quad \mu = \mu^s(e), \quad u = u^s(\theta, e)$$

$$u' = 0, \quad \theta = 0, 1; \quad \mu = \mu^c(e), \quad u = u^c(\theta, e) \quad (3)$$

Индексами  $s$  и  $c$  (вверху) помечены нечетные и четные соответственно решения (собственные значения  $\mu^{s,c}$  и функции  $u^{s,c}$ ). Сингулярная зависимость коэффициента возбуждения от  $\theta, e$  представляет основную аналитическую и вычислительную особенность задач (2), (3).

Обычный метод возмущений применяется лишь на начальном этапе построения искомого решения с последующим применением процедуры продолжения по параметру  $e$ :  $0 < e_0 \leq e < 1$ , где  $e_0$  — малый параметр. Соответствующие собственные значения и функции строятся в виде разложений или последовательных приближений по степени  $e$ . Интегрирование элементарных неоднородных уравнений и применение альтернативы Фредгольма приводит к стандартным выражениям  $\mu_{n,i}^{s,c}(e), u_{n,i}^{s,c}(\theta, e)$ , где  $n \geq 1$  — номер моды,  $i \geq 0$  — порядок степени приближения. Из получающихся для  $\mu_n^{s,c}(e)$  выражений следует их совпадение при  $n = 2k, k \geq 1$ , т.е. моды с четными номерами

$$\mu_{2k}^s(e) \equiv \mu_{2k}^c(e) \quad (4)$$

совпадают для  $0 \leq e \leq e_0$ , где величина  $e_0$  достаточно мала, причем  $\mu^{s,c}(0) = \pi^2 n^2$ . Нечетные моды  $n = 2k - 1$  различаются, в частности,

$$\mu_1^{s,c} = \pi^2 \mp \frac{3e}{2} \pi^2 + O(e^2) \quad (5)$$

Для произвольных мод  $n \geq 1$  имеют место представления:  $\mu_n^{s,c} = \pi^2 n^2 + O(e^n)$ , что общеизвестно, однако факт совпадения  $\mu_{2k}^{s,c}(e)$ , установленный Н.Е. Кочиным [3,4] для определенного класса задач, подтверждается в рассматриваемом случае задачи (2),(3) анализом структуры определителя Хилла [2,4], а также аналитическими и численными методами.

4. Более того, авторами доказано, что вторая ( $n = 2$ ) резонансная зона и соответствующие собственные функции равны (точно)

$$\mu_2^{s,c}(e) \equiv 4\pi^2; \quad u_2^s(\theta, e) = A_2^s \sin 2\pi\theta, \quad u_2^c(\theta, e) = A_2^c \cos 2\pi\theta \quad (6)$$

где  $A_2^{s,c} = \text{const}$ , и не зависят явно от  $e$ . Доказательство утверждения проводится непосредственной подстановкой выражений (6) в уравнения (2),(3) при произвольных  $0 \leq e \leq 1$ .

Зависимость собственных функций (6) от параметра модуляции может быть осуществлена посредством нормировки с весом  $r = (1 - eq(\theta))^{-1}$ , см. (2); имеем

$$\begin{aligned} \|u_2^{s,c}\|_r &= 1; \quad A_2^s(e) = e \left( 1 - (1 - e^2)^{1/2} \right)^{-1/2} \\ A_2^c &= e \left( (1 - e^2)^{-1/2} - 1 \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

Из выражений (7) следуют оценки  $A_2^{s,c} \rightarrow \sqrt{2}$  при  $e \rightarrow 0$ ; для предельного  $e \rightarrow 1$  имеем  $A_2^s \rightarrow 1, A_2^c \rightarrow 0$ .

5. Отметим, что свойство ортогональности собственных функций  $u_n^{c,s}(\theta, e)$  с весом  $r(\theta, e)$  имеет место, в том числе, и функций  $u_n^s, u_n^c$ , для всех  $n$ , в частности, для случаев вырождения  $n = 2k$ . Установленные выше качественные свойства решения задачи о параметрических колебаниях маятника в научной литературе неизвестны. Отметим также, что на основе метода мажорантных функций для процедуры последовательных приближений по степеням  $e^i$  устанавливается существование и единственность решений

$\mu_n^{s,c}(e), u_n^{s,c}(\theta, e)$  при достаточно малом значении  $e_0, 0 < e \leq e_0$  [2,3,8].

Из вышеизложенного следует принципиальный качественный вывод, существенный для приложений. Он свидетельствует, что при наличии возмущающих факторов возбуждение параметрических колебаний высших ( $n \geq 2$ ) мод затруднено. Для прецизионных небесномеханических, электромеханических и квантомеханических систем, однако, высшие моды имеют важное значение (струнные и стержневые гироскопы, вращательно-колебательные движения спутников, кварцевые резонаторы, квантовые генераторы и др.). Полученные теоретические результаты позволяют априори определить их влияние.

Посредством обратного преобразования  $u \rightarrow \phi$ , т.е.

$$\phi_n^{s,c}(\theta, e) = r^{-1}(\theta, e) u_n^{s,c}(\theta, e)$$

получаются собственные функции исходной линейаризованной самосопряженной задачи (2), удовлетворяющие краевым условиям периодичности при  $\mu = \mu_n^{s,c}(e)$ , а также условиям ортогональности с весом  $r^{-1}(\theta, e)$  на интервале  $-1 \leq \theta \leq 1$ .

Анализ непосредственно линейаризованной системы (1) достаточно громоздок. В то же время, примененная замена  $\phi \rightarrow u$  в п.1 имеет характер регуляризации, поскольку  $\phi, \phi'$  оказываются неограниченными.

Диаграммы резонансных зон типа Айнса-Стретта определяются на плоскости  $(\mu, e)$  посредством соотношений  $\mu = \mu_n^{s,c}(e)$ .

6. В отличие от вариационных и функциональных подходов Бубнова-Ритца и методов возмущений (разложений по степеням параметра, последовательных приближений, усреднения, многомасштабных разложений и др.), он позволяет строить двусторонние оценки собственных значений с требуемой точностью и соответствующих им собственных функций. Вычислительный алгоритм применяется к нахождению конкретной моды  $\mu_n^{s,c}(e), u_n^{s,c}(\theta, e)$  для фиксированного значения параметра возбуждения  $e = e_j, j = 0, 1, 2, \dots, j^*$ , где  $e_0 = 0, e_{j^*} = e$  – предельное значение, например  $e = 0.999$ . Процедура продолжения по параметру  $e = e_{j+1}$  осуществляется при достижении заданной точности (абсолютной или/и относительной) для  $e = e_j$ . Метод ускоренной (квадратичной)

сходимости по вариации  $\delta e_j = \delta_{j+1} - \delta_j$  приводит к последовательному интегрированию задач Коши для неизвестных функций  $u^s, u^c$  (индекс  $n$  опущен для краткости) при известных  $\mu^s, \mu^c$  и заданных начальных данных

$$\begin{aligned} u^s(0) &= 0, \quad u^{s'}(0) = 1 \\ u^c(0) &= 1, \quad u^{c'}(0) = 0; \quad e = e_{j+1} \end{aligned} \quad (8)$$

Уточненные величины  $\mu^s, \mu^c$  для  $e = e_{j+1}$  вычисляются с помощью итерационной процедуры ( $k = 0, 1, 2, \dots, k^*$ )

$$\begin{aligned} \mu_{(k+1)}^s &= \mu_{(k)}^s - \varepsilon_{(k)}^s (u_{(k)}^{s'}(1, \mu_{(k)}^s(e_j), e_j))^2 (N_{r(k)}^s)^{-2} \\ \mu_{(k+1)}^c &= \mu_{(k)}^c - \varepsilon_{(k)}^c (\mu_{(k)}^c r(1, e_j) - \\ &\quad - e_j q(1, e_j) (u_{(k)}^{c'}(1, \mu_{(k)}^c(e_j), e_j))^2 (N_{r(k)}^c)^{-2} \\ (N_{r(k)}^{s,c})^2 &= \int_0^1 (u_{(k)}^{s,c}(\theta, \mu_{(k)}^{s,c}(e_j), e_j))^2 r(\theta, e_j) d\theta \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_{(k)}^{s,c}$  — невязка по  $\theta$  решений  $u_{(k)}^s, u_{(k)}^c$  на  $k$ -м шаге итерации;  $q(\theta, e) \equiv 4\pi^2 \cos 2\pi\theta r(\theta, e)$ . Процедура (8),(9) для краевых задач (2),(3) обладает стандартной квадратичной сходимостью по  $\delta e_j : \varepsilon_{(k)}^{s,c} \sim (\delta e_j)^{2^{k-1}}$ . Формулы (9) допускают модификацию на основе выражений  $\varepsilon^s u^s(1) = u^s(1)$ ,  $\varepsilon^c u^c(1) = u^c(1)$ , а квадраты норм находятся интегрированием задач Коши для функций чувствительности  $v^{s,c} = (\partial u / \partial \mu)^{s,c}$  [8,9]. Начальное приближение  $\mu_{(0)}^{s,c}, u_{(0)}^{s,c}$  при  $e = e_{j+1}$  находится с помощью известного окончательного приближения для  $e = e_j, e_0 = 0$ . Нечетные (индекс  $s$ ) и четные (индекс  $c$ ) решения (8),(9) строятся независимо, т.е.  $k = k^{s,c}$ .

7. Результаты расчетов первых четырех мод представлены диаграммами типа Айнса-Стретта [2] (рисунок); для удобства изображены кривые  $v_n^{s,c} = \sqrt{\mu_n^{s,c}} / \pi$ . Выражения для  $\mu_{1,2,3,4}^{s,c}$  вычислены с помощью алгоритма (2),(8),(9) на интервале  $0 \leq e \leq e_{k^*} = 0.999$ .

Ряд свойств диаграмм для малых значений  $e$  (нижняя часть) отмечен выше. Умеренно большие величины параметра возбуждения  $e$  визуально свидетельствуют о существенном отличии при  $e > 0.1$

полученных кривых от асимптотических выражений. Подтверждается, что первая резонансная зона параметрических колебаний является основной и существенной в прикладном аспекте (заштрихована). Четные резонансные кривые  $\mu_{2k}^{s,c}(e)$  сливаются, т.е. зоны возбуждения параметрических колебаний отсутствуют. Нечетные кривые  $\mu_{2k-1}^{s,c}(e)$  при  $k \geq 2$  образуют весьма узкие области (неразличимые на рисунке) и требуют для визуализации существенного (в 10 – 100 раз) увеличения масштаба.

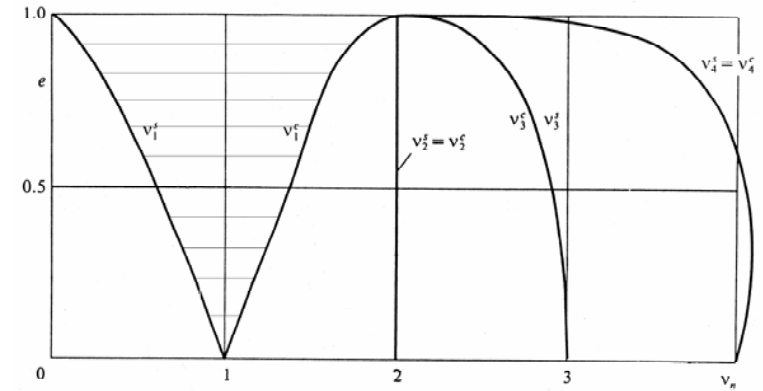


Рис. 1. Зависимость собственных частот колебаний маятника переменной длины от коэффициента модуляции.

Все кривые  $\mu_n^{s,c}$ , кроме  $\mu_1^s(e)$ , при  $e \rightarrow 1$  стремятся к  $\mu_n^{s,c}(1) = 4\pi^2$ , а  $\mu_1^s(1) = 0$ .

Кривые  $\mu_2^{s,c}(e) \equiv 4\pi^2$ , т.е. вырождаются в прямолинейный вертикальный отрезок. Резонансная частота  $\Omega_2 = (g/l_0)^{1/2}/2$  не зависит от величины параметра возбуждения  $e$ ; значения  $l_0$  и  $e$  представлены в (2). Значение  $\mu = 2$  является притягивающим при  $e \rightarrow 1$  для всех кривых, кроме  $\mu_1^s$ . Отметим, что нечетные резонансные зоны  $\mu_{2k-1}^{s,c}(e), k = 2, 3, \dots$ , имеют визуально неразличимые ширины. Однако это наблюдение обманчиво, поскольку при  $e \rightarrow 1$  значения  $\mu_{2k-1}^s(e)$  и  $\mu_{2k-1}^c(e)$  могут значительно различаться. Например при  $e = 0.99$  имеем

$\mu_3^s \approx 54.5$ , а  $\mu_3^c \approx 49.3$ , т.е. разница достигает 5.2. Более выраженный эффект следует ожидать при  $k \geq 5$ .

Отметим, что обычным методам возмущения можно определить лишь угловые точки резонансных зон и направления касательных к их границам.

**Выводы.** Из вышеизложенного следует:

1. Собственные значения  $\mu_n^{c,s}(e)$  при  $0 \leq e \leq 1$  для фиксированной моды  $n=1,2,\dots$  ограничены; более того  $\mu_1^s \rightarrow 0; \mu_1^c, \mu_n^c \rightarrow 4\pi^2$  для  $n=2,3,\dots$  при  $e \rightarrow 1; \mu_n^{c,s}(0) = (\pi n)^2, n=1,2,\dots$

2. Функции  $\mu_n^{c,s}(e)$  совпадают для фиксированных четных мод колебаний  $\mu_{2k}^c(e) \equiv \mu_{2k}^s(e), k \geq 1$ ; двумерные области параметрического резонанса четных мод отсутствуют, имеет место только резонансная кривая  $\mu_{2k}(e), 0 \leq e \leq 1$ .

3. Параметрические колебания нулевой моды ( $n=0$ ) полностью отсутствуют для всех  $0 \leq e \leq 1 (u_0^{c,s} \equiv 0)$ .

4. Наиболее значимая по площади область параметрического резонанса реализуется для первой ( $n=1$ , основной) моды колебаний (заштрихована на рис. 1). Это свойство наблюдается на практике (например для упругого маятника [5]).

5. Резонансная кривая для второй моды колебаний ( $n=2, k=1$ ) обладает уникальным свойством:  $\mu_n^{c,s}(e) \equiv 4\pi^2$ , т.е. собственные значения  $\mu_2^{c,s}(e)$  и функции  $u_2^{c,s}$  не зависят от коэффициента модуляции  $e$ .

6. Установлено, что для нечетных мод ( $n=3,5,\dots$ ) области резонансных колебаний весьма узки, однако разности  $\mu_{2k+1}^c - \mu_{2k+1}^s$  достигают существенных значений при  $e \rightarrow 1$ .

7. Высшие собственные значения  $\mu_n^{c,s}(e)$  ( $n \geq 4$ ) на начальном участке  $e \leq e \leq e_n^{c,s*}$  возрастают, достигают глобальных максимумов  $\mu_n^{c,s*}$  ( $\mu_n^{c,s*}(e_n^{c,s*}) = 0$ ); для  $n=3$  величины  $e_3^{c,s*} = 0$ , т.е. максимум достигается при  $e=0$ .

8. При  $e > e_n^{c,s*}$  значения  $\mu_n^{c,s}(e)$  убывают и достигают предельной величины  $\mu_n^{c,s} = \mu_2^{c,s} \equiv 4\pi^2$  при  $e \rightarrow 1$ .

Приведенные глобальные утверждения 1-8 в литературе не известны. Задача (2),(3) интересна для теории параметрических колебаний, а для программного обеспечения имела тестовый характер.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 10-01-00409, 11-01-00472, 11-01-00247).

## Литература

1. Ляпунов А.М. Избранные труды. Работы по теории устойчивости. М.: Наука, 2007. – 576 с.
2. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. – 718 с.
3. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
4. Кочин Н.Е. О крутильных колебаниях коленчатых валов // Собр. соч. Т.2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – С. 507-535.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. – 532 с.
6. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.; Ижевск: 2009. – 396 с.
7. Журавлев В.Ф.; Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. – 328 с.
8. Akulenko L. D., Nesterov S. V. High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. – 254 p.
9. Нестеров С.В., Акуленко Л. Д. Колебания линейных систем с большим коэффициентом модуляции // Докл. РАН. 2008. Т.423. №6. С. 758-762.



УДК 531.01

*О.М. Капустина*

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

### ПРИМЕНЕНИЕ СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМОЙ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ МАХИМА В ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ УДАР КАТЯЩЕГОСЯ ДИСКА О ПРЕГРАДУ

Статья посвящена методике использования свободно распространяемой системы Махима в курсе теоретической механики технического вуза. Приведен пример выполнения с помощью Махима расчётно-графической работы по динамике системы материальных точек, представлены фрагменты текста программы для составления и решения уравнений Лагранжа II рода.

**Введение.** Системы компьютерной алгебры (СКА) Mathematica, Maple, Mathcad [1-3] предоставляют широчайшие возможности преподавателям и студентам в подготовке и выполнении заданий по теоретической механике. С помощью СКА возможно построение, аналитическое, численное исследование уравнений различного типа, представление результатов в виде формул, таблиц, плоских и пространственных графиков и анимаций. Методические материалы, выдаваемые преподавателем, и выполненные учащимися задания представимы как в электронной, так и в печатной форме. Разработки в электронной форме, программы на языке соответствующей СКА, могут передаваться по сетям Internet.

Коммерческий статус указанных пакетов, однако, существенно ограничивает их применение в учебном процессе. Программа Махима [4], поддерживаемая группой добровольцев из разных стран мира, является свободно распространяемой. Обладая всеми перечисленными выше свойствами, Махима может быть бесплатно установлена на персональный компьютер любого студента и оставаться работоспособной неограниченное время. Указанное преимущество Махима трудно переоценить, хотя, конечно, эта СКА уступает коммерческим пакетам по различным характеристикам. В частности, внутренняя справочная система Махима, написанная на английском языке, сравнительно сложна для понимания.

Для освоения Махима имеется русскоязычная методическая литература [5, 6], некоторые примеры и ссылки на иностранные учебные пособия и книги можно найти на сайте Махима [4]. В статье [7] представлена программа решения задачи статики 4.38 из [8], дополненная параметрическим исследованием, в [9] приведена программа построения пространственной анимации движения точки по заданному в координатной форме закону её движения из варианта № 24 задания «Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения» [10]. Практика применения Махима в учебном процессе НИУ «МЭИ» показывает, что её возможности вполне достаточны для выполнения расчётных работ по теоретической механике. Получив опыт применения Махима, студенты впоследствии смогут быстрее освоить и другие СКА.

**Методика использования Махима.** Махима используется в учебном процессе НИУ «МЭИ» в течение 2011, 2012 годов при выполнении расчётно-графических работ по теоретической механике на нескольких потоках различных факультетов. Тематика расчётных работ охватывает все разделы курса: статику, кинематику и динамику. Студентам выдаются методические указания в виде программ на языке Махима, состоящих из текстовых и вычисляемых частей-ячеек. Программа содержит задания для выполнения расчётной работы, генератор случайных значений номеров вариантов и числовых значений параметров индивидуальных заданий, изложение методики выполнения заданий, операторы для проведения расчётов. В указаниях рассматриваются примеры выполнения расчётов, даются необходимые пояснения. Используя предложенную методическую разработку как редактируемый шаблон, студенты составляют программу для решения собственной задачи.

Дополнительного аудиторного времени для изучения студентами Махима не требуется, т.к. язык этой СКА интуитивно понятен. Можно демонстрировать программу на занятии в виде презентации, объясняя с её помощью методику выполнения расчёта. Преподаватель, безусловно, должен владеть системой и консультировать учащихся в процессе работы над заданием.

**Пример решения задачи динамики системы материальных точек.** Рассмотрим расчет Д-5 «Динамика машины с кулисным приводом» из [11].

В расчете Д-5 требуется определить движение машины с кулисным приводом рис.1 под действием электродвигателя, развивающего момент  $\bar{M}_д$ . Проекция  $\bar{M}_д$  на ось вращения  $O_3z$  шкива 3, перпендикулярную плоскости рисунка, имеет вид  $M_{дz} = M_0 - k\omega_{3z}$ ,  $M_0$  – пуско-

вой момент,  $k$  – крутизна характеристики двигателя,  $\omega_{3z}$  – проекция угловой скорости шкива 3 на ось  $O_3z$ . Числовые значения параметров и начальные условия задаются так, что движение близко к периодическому. Нагрузка моделируется силой  $\vec{F}_H$ , приложенной к штоку 5 и параллельной вертикальной оси  $Oy$ . Проекция этой силы на ось  $Oy$  равна  $F_{Hy} = -\mu_1 v_{5y}$ ,  $v_{5y}$  – проекция на  $Oy$  скорости штока,  $\mu_1$  – заданная постоянная. Ремни невесомы, нерастяжимы, не проскальзывают относительно шкива 3 и вала 1. Каток 4 не проскальзывает относительно неподвижной вертикальной рейки и подвижной рейки штока 5.

Требуется составить уравнения движения машины в форме уравнений Лагранжа II рода, приняв за обобщённую координату угол  $\varphi_1$  поворота вала 1. Следует проинтегрировать это уравнение численно на интервале времени  $\tau$ , построить по результатам интегрирования графики функций  $\varphi_1(t), \omega_{1z}(t) = \dot{\varphi}_1, \varepsilon_{1z}(t) = \dot{\omega}_{1z}$ , точкой сверху обозначена производная по времени.

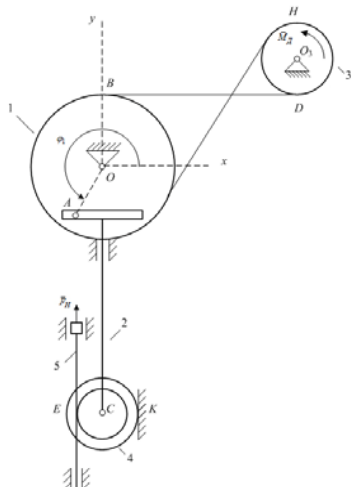


Рис. 1. Схема машины с кривошипно-кулисным приводом

Зададим следующие значения параметров:

$$OA = r_1 = 0,06 \text{ м}, R_1 = 0,09 \text{ м}, R_4 = 0,24 \text{ м}$$

$$r_4 = 0,08 \text{ м}, \rho_4 = 0,12 \text{ м}, M_0 = -27 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$k = 0,228 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \mu_1 = 309 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}, I_1 = 1,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, m_2 = 15 \text{ кг},$$

$$m_3 = 7,71 \text{ кг}, m_4 = 16 \text{ кг}, \tau = 0,2688 \text{ с},$$

$$\varphi_1(0) = 1,57, \omega_{1z}(0) = 23,375 \text{ с}^{-1}.$$

Здесь  $R_1, R_3, R_4, r_4$  – радиусы вала 1, шкива 3, большой и малый радиус катка 4 соответственно,  $\rho_4$  – радиус инерции катка 4 относительно оси  $Cz$ ,  $I_1$  – момент инерции вала 1 относительно оси  $Oz$ ,  $m_i$  – масса тела с номером  $i, i=2, 3, 4$ ,  $\varphi_1(0), \omega_{1z}(0)$  – начальные значения угла поворота и проекции угловой скорости вала 1 на ось  $Oz$ .

Ниже представлены фрагменты текста программы Maxima для решения задачи. Скобки слева выделяют элементарные части программы – ячейки, имеющие различный статус. Серым цветом окрашен фон текстовых ячеек, содержащих рисунки, комментарии. Ячейки с неокрашенным фоном содержат команды и порождённые ими результаты. Командам и результатам их выполнения система присваивает номера в формате – (%iN), (%oN) соответственно, N – номер команды. Возможно двухуровневое структурирование текста программы. Символом □ отмечены заголовки параграфов.

На первом этапе решения задачи определяется кинетическая энергия системы как функция  $T(\varphi_1, \omega_{1z})$ .

#### □ 1 Введение параметров

Введём числовые значения параметров:

```
(%i1) Param:[g=9.8,r1=0.06,R1=0.09,R4=0.24,r4=0.08,Rho4=0.12,M0=-27,k=0.228,Mu1=309,
I1=1.8,m2=15,m3=7.71,m4=16];
(%o1) [tau=9.800000000000001,r1=0.06,R1=0.09,R3=0.09,R4=0.24,r4=0.08,Rho4=0.12,
M0=-27,k=0.228,Mu1=309,I1=1.8,m2=15,m3=7.71,m4=16]
```

```
(%i2) [Tau:0.2688,Phi0:1.57,Omega1z0:23.375],numer;
(%o2) [0.2688,1.57,23.375494533920977]
```

#### □ 2 Нахождение кинетической энергии системы

Определение функции кинетической энергии тела в плоском движении

```
(%i3) T(m,vz,Iz,Omegez):=1/2*m*vz^2+1/2*Iz*Omegez^2;
(%o3) T(m,vz,Iz,Omegez):=1/2*m*vz^2+1/2*Iz*Omegez^2
```

#### □ 3 Выражение кинетической энергии системы через Phi1, Omega1z

Кинематическая цепочка O-A

```
(%i9) vAy: Omega1z*r1*cos(Phi1);
(%o9) Omega1z*cos(Phi1)*r1
```

Кинематическая связь, реализуемая кулисой

```
(%i10) v2y:vAy;
(%o10) Omega1z*cos(Phi1)*r1
```

Кинематическая цепочка O-B

```
(%i11) vBx: -Omega1z*R1*sin(%pi/2);
(%o11) -Omega1z R1
```

Кинематическая цепочка O3-D

```
(%i12) vDx: -Omega3z*R3*sin(3/2*%pi);
(%o12) Omega3z R3
```

Выражение Omega3z через Omega1z

```
(%i13) sub1: solve(vBx=vDx, Omega3z);
(%o13) [Omega3z = -frac{Omega1z R1}{R3}]
```

Кинематическая цепочка K-C

```
(%i14) vCy: Omega4z*R4*cos(%pi);
(%o14) -Omega4z R4
```

Выражение Omega4z через Omega1z

```
(%i15) sub2: solve(vAy=vCy, Omega4z);
(%o15) [Omega4z = -frac{Omega1z cos(Phi1) r1}{R4}]
```

Кинетическая энергия системы

```
(%i16) Ts:ev(ev(Ts), sub2, sub1);
(%o16) m4 Omega1z^2 cos(Phi1)^2 r1^2 Rho4^2 + m3 Omega1z^2 R1^2 + Omega1z^2 I1 +
m4 Omega1z^2 cos(Phi1)^2 r1^2 + m2 Omega1z^2 cos(Phi1)^2 r1^2
2 R4^2 4 2
(%i17) Ts:ev(Ts,Param);
(%o17) 0.063 Omega1z^2 cos(Phi1)^2 + 1.149804 Omega1z^2
```

На втором этапе решения задачи находится обобщённая сила  $Q(\varphi_1, \omega_{1z})$ . Результат имеет вид

Упрощение выражения Q

```
(%i27) Q:ratsimp(Q),numer;
(%o27) -8.0000000000000004 10^-4
(2472 Omega1z cos(Phi1)^2 + 22785 cos(Phi1) + 4560 Omega1z - 135000)
```

Затем составляется уравнение Лагранжа II рода:

5 Составление уравнения Лагранжа

Объявление переменных Phi1, Omega1z функциями t

```
(%i28) depends([Phi1, Omega1z], t);
(%o28) [Phi1(t), Omega1z(t)]
```

Составление левой части уравнения Лагранжа (дифференцирование кинетической энергии)

```
(%i29) Lefteq:diff(diff(Ts, Omega1z, 1), t, 1) - diff(Ts, Phi1, 1);
(%o29) -0.252 Omega1z cos(Phi1) sin(Phi1) (d/dt Phi1) + 0.126 Omega1z^2 cos(Phi1)
sin(Phi1) + 0.126 (d/dt Omega1z) cos(Phi1)^2 + 2.299608 (d/dt Omega1z)
```

Составление уравнения Лагранжа

```
(%i30) eqLagrange:Lefteq=Q;
(%o30) -0.252 Omega1z cos(Phi1) sin(Phi1) (d/dt Phi1) + 0.126 Omega1z^2 cos(Phi1)
sin(Phi1) + 0.126 (d/dt Omega1z) cos(Phi1)^2 + 2.299608 (d/dt Omega1z) = -
8.0000000000000004 10^-4
(2472 Omega1z cos(Phi1)^2 + 22785 cos(Phi1) + 4560 Omega1z - 135000)
```

Уравнение Лагранжа приводится к нормальной форме Коши (согласно требованиям Maxima)

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_{1z},$$

$$\frac{d\omega_{1z}}{dt} = \varepsilon_{1z}(\varphi_1, \omega_{1z}).$$

Система (1) интегрируется численно на интервале  $[0, \tau]$  с шагом  $\tau/10$ .

Замена 'diff(Phi1(t),t,1)=Omega1z(t) в Epsilon1z

```
(%i33) Epsilon1z:ev(Epsilon1z, diff(Phi1, t, 1)=Omega1z);
(%o33) (5250 Omega1z^2 cos(Phi1) sin(Phi1) - 82400 Omega1z cos(Phi1)^2 - 759500
cos(Phi1) - 152000 Omega1z + 4500000) / (5250 cos(Phi1)^2 + 95817)
```

Численное решение системы дифференциальных уравнений движения машины

```
(%i34) sol: rk([Omega1z, Epsilon1z], [Phi1, Omega1z], [Phi10, Omega1z0], [t0, Tau, Tau/10]);
(%o34) [[0, 1.57, 23.37494533920977], [0.02688, 2.199853384772339, 23.4150685299395],
[0.05376, 2.825927540772293, 23.15988556127508], [0.08064, 3.447042921366184,
23.12710895422004], [0.10752, 4.073627661096237, 23.55421920796543], [0.1344,
4.713859705521293, 24.02604506655207], [0.16128, 5.359440794964213,
23.88915416422336], [0.18816, 5.993618180569004, 23.27440616013666], [0.21504,
6.612675985915249, 22.86524348403349], [0.24192, 7.227876270475755,
22.98908366356064], [0.2688, 7.85081319774319, 23.3486074625558]]
```

По результатам интегрирования строятся графики функций  $\varphi_1(t), \omega_{1z}(t), \varepsilon_{1z}(t)$ .

7 Построение графиков функций по результатам интегрирования

Определение количества элементов списка sol

```
(%i35) n:length(sol);
(%o35) 11
```

Создание списков значений аргумента  $t$  и соответствующих значений функций  $\Phi_{i1}$ ,  $\Omega_{\text{egal}z}$ ,  $\epsilon_{\text{psilon}1z}(t)$

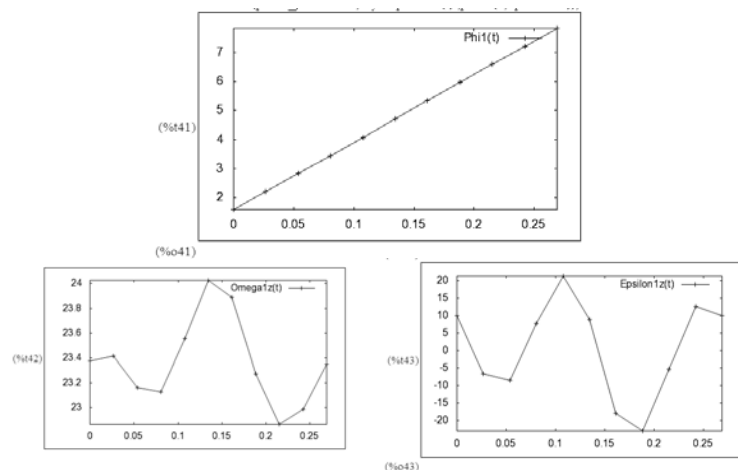
```
(%i36) T:makelist(sol[i][1],i,1,n)$
      Phi1L:makelist(sol[i][2],i,1,n)$
      Omega1zL:makelist(sol[i][3],i,1,n)$
      Epsilon1zL:makelist(ev(Epsilon1z,[Phi1=sol[i][2],Omega1z=sol[i][3]]),i,1,n)$
```

Загрузка пакета рисования

```
(%i40) load(draw)$
```

Построение графиков функций  $\Phi_{i1}(t)$ ,  $\Omega_{\text{egal}z}(t)$ ,  $\epsilon_{\text{psilon}1z}(t)$

```
(%i41) wxdraw2d(points_joined=true,key="Phi1(t)",points(T,Phi1L));
      wxdraw2d(points_joined=true,key="Omega1z(t)",points(T,Omega1zL));
      wxdraw2d(points_joined=true,key="Epsilon1z(t)",points(T,Epsilon1zL));
```



Результаты численного интегрирования системы (1) можно представить также в виде таблицы:

Построение таблицы значений функций  $\Phi_{i1}(t)$ ,  $\Omega_{\text{egal}z}(t)$ ,  $\epsilon_{\text{psilon}1z}(t)$  по результатам интегрирования

```
(%i44) for i:0 thru n do ( if i = 0 then
      printf(true,"~{-18,a~}-%s","t(c)","Phi1(paz)","Omega1z(1/c)","Epsilon1z(1/c^2) ")
    else printf(true,"~{-6,f-20,4f-23,4f-23,4f-}-%s",[T[i],Phi1L[i],Omega1zL[i],Epsilon1zL[i]]]) )$
```

t(c)	Phi1(paz)	Omega1z(1/c)	Epsilon1z(1/c^2)
0.0	1.5700	23.3749	9.9010
0.027	2.1999	23.4151	-6.6531
0.054	2.8259	23.1599	-8.4904
0.081	3.4470	23.1271	7.7644
0.108	4.0736	23.5542	21.2611
0.134	4.7139	24.0260	8.7924
0.161	5.3594	23.8892	-17.8609
0.188	5.9936	23.2744	-22.9064
0.215	6.6127	22.8652	-5.3789
0.242	7.2279	22.9891	12.5755
0.269	7.8508	23.3486	9.9946

**Выводы.** Практика применения *Maxima* в учебном процессе показала, что с помощью этой системы можно создавать полноценные

электронные методические разработки и эффективно использовать их в преподавании теоретической механики.

Автор выражает глубокую благодарность добровольцам, бескорыстными усилиями которых система *Maxima* поддерживается в рабочем состоянии и модернизируется.

## Литература

1. Капустина О.М., Мартыненко Ю.Г. Примеры параметрического анализа в задачах теоретической механики при помощи *Mathematica* // Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. М.: Изд-во МГУ, 2009, вып. 27. С. 107-120.
2. Капустина О.М., Мартыненко Ю.Г. Научно-методический сайт «Компьютерные технологии в механике» // Математика. Компьютер. Образование: 19-я международная конференция, Дубна, 30 января – 4 февраля 2012 г.: Сборник докладов. Под ред. Г.Ю. Ризниченко. Москва – Ижевск: РХД, 2012, с. 343 // <http://mce.biophys.msu.ru/rus/archive/mce19/doc150651/>
3. Борисов Д.Б., Капустина О.М. Параметрический анализ в задаче статики с помощью системы *MATHEMATICA* // Труды Международной научно-методической конференции «Информатизация инженерного образования» - ИНФОРИНО-2012 (Москва, 10-11 апреля 2012 г.). М.: Издательский дом МЭИ, 2012. С. 425-426.
4. <http://maxima.sourceforge.net/documentation.html>
5. Ильина В.А., Силаев П.К. Система аналитических вычислений *МАХИМА* для физиков-теоретиков. Изд. РХД, 2009. – 140 с.
6. Губина Т.Н., Андропова Е.В. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики *Maxima*: учебное пособие для вузов. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2009. 100 с. <http://window.edu.ru/window/library?p rid=67267>
7. Капустина О.М. Использование системы *Maxima* в преподавании теоретической механики // Вестник ТулГУ. Серия «Актуальные вопросы механики». Вып. 6. Тула: Изд-во ТулГУ, 2010, с. 199-206. <http://vuz.exponenta.ru/pdf/book/KapustinaOM1.pdf>
8. Мецкерский И. В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. 36-е изд., исправл. / под ред. Н.В. Бутенина, А. И. Лурье, Д. Р. Меркина. М.: Наука. 1986. – 448 с.
9. Капустина О.М. Использование системы *Maxima* при выполнении расчётно-графических работ по теоретической механике // Современные проблемы механики и её преподавания в вузах: доклады IV Всероссийского совещания-семинара ведущих кафедр и ведущих преподавателей вузов Российской Федерации, г. Новочеркасск, 21-24 сентября 2010 г. / Юж. Рос. гос. техн. ун-т. – Новочеркасск: ЮРГТУ, 2010. С. 88-91.
10. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.Ф. Вольфсон [и др.]; под ред. А.А. Яблонского. М.: Интеграл-Пресс, 2008. – 384 с.
11. Новожиллов И.В., Зацепин М.Ф. Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ. М.: Высш. шк., 1986. – 136 с.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРА В ПРАКТИЧЕСКИХ  
ЗАНЯТИЯХ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Задача использования компьютеров в практических занятиях по теоретической механике возникла в 60-70-ых годах прошлого века после появления персональных компьютеров и алгоритмических языков программирования высокого уровня. Появились методические разработки по использованию компьютеров в учебном процессе. Однако из-за технического несовершенства первых компьютеров, постоянных сбоев и скудности графических средств разработки приложений эта идея не получила широкого распространения.

Сегодня ситуация изменилась коренным образом. Компьютерные технологии проникли во все сферы нашей жизни. Проведение научных семинаров и конференций стало немыслимым без мультимедийного проектора. Технические характеристики компьютеров растут с экспоненциальной скоростью, а стоимость снижается. Совершенствуется программное обеспечение, созданы мощные средства компьютерной графики, объектно-ориентированные визуальные средства разработки приложений с наглядным графическим интерфейсом, разрабатываются удобные современные системы геометрического и динамического компьютерного моделирования. Все эти средства можно успешно использовать как для повышения наглядности решения и параметрического исследования задач из классических задачник по теоретической механике, теории устойчивости движения, теории колебаний, так и для существенного расширения круга решаемых задач.

Если не ограничиваться задачами, которые решаются до конца в аналитической форме, для решения и глобального параметрического исследования большинства из этих задач, в первую очередь, необходимо применение численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений движения и глобального численного построения кривых, определяемых неявными нелинейными алгебраическими уравнениями, выражающими условия равновесия или условия периодичности движений.

При написании программы на каком-либо алгоритмическом языке, например, на C++, наибольшую трудность представляет глобальное построение кривых, определяемых неявными уравнениями. Эту задачу для двумерной области можно решать введением треугольной сетки (в

n-мерном случае область разбивается на n-мерные симплексы) и линеаризацией левых частей уравнений в каждом треугольнике по их значениям в вершинах. Если перебирать все треугольники в произвольном порядке, то ветви кривой визуально соберутся из отдельных отрезков прямых. Если же найдя первую точку линии, пристраивать к каждому треугольнику смежный треугольник, содержащий продолжение этой линии, мы получим более полную информацию о линии в виде массива последовательных точек, который можно использовать для дальнейшей автоматической обработки. Важную роль играет также выбор удобного графического интерфейса решения задачи.

Для примера опишем в общих чертах программу исследования устойчивости равновесий консервативной системы на основе теорем Лагранжа или Рауса. Для исследования достаточно задать выражения потенциальной и кинетической энергий. Уравнения равновесия и условия устойчивости, определяемые первой и второй производными интеграла энергии, могут быть определены численно. В окне приложения удобно одновременно расположить диаграмму Пуанкаре ветвей равновесия на плоскости параметра и обобщенной координаты, фазовый портрет движений и движки типа движков эквалайзера для плавного изменения остальных параметров задачи. Всю картинку можно перерисовывать синхронно с плавным изменением параметров. Управление движками и графическим курсором задается в обработчиках событий от нажатия кнопок и перемещения мыши. Непрерывное изменение ветвей равновесия дает наглядное представление о возникновении точек бифуркации и распределении устойчивости на ветвях равновесия. При желании программу можно дополнить анимационной картиной движения системы. Обе диаграммы – диаграмма Пуанкаре и фазовый портрет – строятся с помощью приведенного алгоритма глобального построения кривых, определяемых неявными уравнениями. Часто при параметрическом исследовании приходится иметь дело с бесконечной областью изменения параметров  $0 \leq x < \infty$ . В этом случае удобно воспользоваться простым непрерывно дифференцируемым отображением интервала  $[0, 2)$  на  $[0, \infty)$ :  $x = y$ , если  $y \leq 1$ , и  $x = 1/(2 - y)$ , если  $y > 1$ .

Для исследования движения механизмов и систем, состоящих из многих твердых тел, также можно самостоятельно составить программу на объектно-ориентированном алгоритмическом языке программирования с использованием методов численного интегрирования и выдачи результатов в виде графиков и анимационной картины движения. При этом основная принципиальная сложность состоит в том, что, как

правило, такие системы приводятся не к дифференциальным, а к нелинейным дифференциально-алгебраическим уравнениям. Приведение вручную таких систем к обыкновенным дифференциальным уравнениям не всегда возможно и обычно сопряжено с громоздкими рутинными вычислениями, связанными с возникновением ошибок.

В общем виде численное решение дифференциально-алгебраических уравнений является несопоставимо более сложной задачей, чем решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Этой теме посвящена специальная теория, которая обычно не рассматривается в студенческих курсах дифференциальных уравнений и численных методов. Для численного решения таких систем разработана мощная компьютерная система DASSL, способная автоматически численно-аналитическими методами приводить дифференциально-алгебраическую систему уравнений к системе дифференциальных уравнений.

В последние десятилетия во всем мире проявляется повышенный интерес к разработке компьютерных средств моделирования динамики сложных технических систем. При этом выяснилось, что при разработке моделей с использованием алгоритмических языков программирования (так называемое казуальное программирование) возникают существенные трудности с иерархической организацией библиотек стандартизированных компонентов моделей, таких как тела и различные виды связей в механике или сопротивления, конденсаторы, диоды и пр. в электронике. Поэтому был выработан специальный стандарт аказуального языка «Modelica» для разработки компьютерных динамических моделей. Для этого языка было разработано несколько компиляторов и, в частности, компилятор «Dymola», в основу которого положена система DASSL. В настоящее время накоплено множество доступных библиотек стандартных компонентов моделей для различных областей техники.

Компилятор «Dymola» обладает удобной наглядной графической оболочкой, позволяющей вести разработку и прогонку модели в различных режимах. Возможен визуальный режим сборки схемы модели из готовых стандартных элементов и текстовый режим задания параметров задачи, уравнений движения отдельных элементов с неопределенными реакциями связей и уравнений связей. Результаты моделирования выдаются в виде графиков и трехмерной анимационной картины движения. Язык «Modelica» и компилятор «Dymola» хорошо приспособлены для использования в учебном процессе.

При текстовом задании модели пользователь сам выписывает дифференциально-алгебраическую систему в явном виде. При этом среди всех переменных состояния системы необходимо выделять независимые переменные, для которых нужно задавать начальные условия. Эти переменные снабжаются начальным значением «start» и атрибутом «fixed=true». Уравнения для определения начальных условий для остальных переменных могут иметь неединственное решение. Для устранения неединственности для этих переменных также можно задать ориентировочные начальные значения «start» с атрибутом «fixed=false». Эти начальные значения имеют ориентировочный характер. При этом система сама рассчитывает точные начальные значения для этих переменных, наиболее близкие к заданным ориентировочным значениям.

Проиллюстрируем эти возможности на примере плоского шарнирного четырехзвенника  $ABCD$ , представляющего из себя два математических маятника  $CA$  и  $DB$ , связанных невесомым стержнем  $AB$  (см. рис. 1).

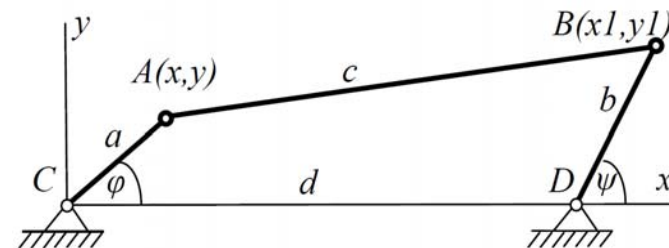


Рис. 1.

Пусть маятники имеют длины  $a$  и  $b$  и массы  $m$  и  $m1$ , соединительный стержень имеет длину  $c$ . Для описания движения системы введем систему координат  $Oxy$ . Сила тяжести направлена в отрицательном направлении оси  $y$ . Точки подвеса маятников расположены на оси  $x$  на расстоянии  $d$  одна от другой. Состояние системы будем задавать координатами  $(x, y)$  и  $(x1, y1)$  и скоростями  $(u, v) = (\dot{x}, \dot{y})$  и  $(u1, v1) = (\dot{x1}, \dot{y1})$  концевых масс маятников. В качестве независимых переменных состояния системы выберем переменные  $(x, u)$ . Предположим, что реакции связей направлены вдоль стержней  $CA$ ,  $DB$  и  $AB$  с коэффициентами пропорциональности  $s$ ,  $s1$  и  $s2$ .

Текст модели на языке «Modelica» при значениях параметров  $a = 1$ ,  $b = 1.5$ ,  $m = 1$ ,  $m1 = 1$ ,  $c = 2$ ,  $d = 1.5$  имеет вид

```

model TM
parameter Real a=1,b=1.5,c=2,d=1.5,m=1,g=1;
Real x (start=0,fixed=true),u (start=3,fixed=true);
Real y (start=-a,fixed=false),v (start=0,fixed=false);
Real x1(start= d,fixed=false),u1(start=0,fixed=false);
Real y1(start=-b,fixed=false),v1(start=0,fixed=false);
Real s,s1,s2;
equation
der(x)=u; der(y)=v; der(x1)=u1; der(y1)=v1;
m*der(u)=s*x+s2*(x1-x); m*der(v)=s*y+s2*(y1-y)-m*g;
m1*der(u1)=s1*(x1-d)-s2*(x1-x); m1*der(v1)=s1*y1-s2*(y1-y)-m*g;
x^2+y^2=a^2; (x1-d)^2+y1^2=b^2; (x1-x)^2+(y1-y)^2=c^2;
end TM;

```

В первой строке задается присвоенное модели имя «ТМ». Далее идет раздел описания переменных. Спецификатором «parameter» указаны переменные, значения которых не меняется в процессе интегрирования. Следующим идет раздел «equation», в котором выписываются дифференциальные уравнения движения и уравнения связей. В отличие от операторов присваивания алгоритмических языков, здесь последовательность записи уравнений безразлична. Здесь мы умышленно используем декартовы координаты, чтобы продемонстрировать свободу в выборе координат. В качестве переменных можно было бы задать углы поворота маятников, но это усложнило бы форму записи уравнений связей.

При задании уравнений возможно использование векторных и матричных обозначений, а также циклических и условных конструкций. Таким образом, могут рассматриваться цепочки однородных элементов с произвольным числом звеньев, системы с разрывными правыми частями, системы переменной структуры и др. К такого рода системам относятся системы с неудерживающими связями, сухим трением, ударными взаимодействиями и пр.

Освоение языка моделирования Modelica в России только начинается и русскоязычная литература практически отсутствует. На русском языке можно указать лишь пятую и шестую главы учебного пособия [1]. Для более углубленного изучения необходимо обратиться к документации [2-3] на английском языке, поставляемой вместе с системой.

В результате компиляции и прогона указанной модели мы получаем числовые значения и графики зависимости переменных от времени или одна от другой. Текст модели можно несложным образом дополнить средствами анимации движения. При заданных начальных условиях оба маятника начинают вращение против часовой стрелки. Если поме-

нить знак ориентировочного начального значения  $y1$  на противоположный  $y1$  ( $start = b$ ,  $fixed = false$ ), система выберет другую возможную начальную конфигурацию с расположением правого маятника выше точки подвеса и маятники будут вращаться в разные стороны.

Выписанная в предпоследней строке текста модели система уравнений связей вырождается в положениях, в которых градиенты левых частей уравнений направлены по одной прямой. Эта ситуация соответствует положению, в котором направление стержня  $c$  проходит через точку подвеса одного из маятников (мертвая точка). Если начальные условия попадают в одну из таких точек, система выдает сообщение об ошибке, связанной с вырождением системы уравнений для определения начальных условий. Прохождение таких точек в процессе движения не вызывает сбойной ситуации.

Область допустимых значений геометрических параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  приводится к системе неравенств

$$|d - b| < c + a, |c - a| < d + b \quad (1)$$

или к эквивалентной системе неравенств

$$|d - a| < c + b, |c - b| < d + a \quad (2)$$

В зависимости от параметров система демонстрирует большое качественное разнообразие поведения. Без потери общности будем считать  $a \leq b$ . Начнем с выбора различных соотношений между параметрами  $a$ ,  $b$  и  $d$ . Удобно различать случаи: 1) расстояние  $d$  между центрами  $C$  и  $D$  окружностей, описываемых точками  $A$  и  $B$ , больше суммы радиусов окружностей,  $d > b + a$ , 2) окружности касаются внешним образом,  $d = b + a$ , 3) окружности пересекаются,  $b - a < d < b + a$ , 4) меньшая окружность касается большей изнутри,  $d = b - a$ , и, наконец, 5) меньшая окружность располагается внутри большей,  $d < b - a$ . В случае 3) качественно выделяются подслучаи: 3а), когда большая окружность проходит через центр меньшей окружности,  $d = b$ , и 3б), когда меньшая окружность проходит через центр большей окружности,  $d = a$ . В случаях 4) и 5) также качественно выделяется подслучаи 4а) и 5а), когда меньшая окружность проходит через центр большей окружности,  $d = a$ .

Дальнейшая качественная классификация конфигурационных многообразий системы определяется параметром  $c$ . Конфигурационное многообразие удобно изображать на торе, определяемом углами  $\varphi$  и

$\psi$  отклонения маятников от оси  $Cx$ , как кривую, определяемую уравнением

$$(d + b \sin \psi - a \sin \varphi)^2 + (b \cos \psi - a \cos \varphi)^2 = c^2 \quad (3)$$

Геометрическое исследование решений этого уравнения в квадрате  $-\pi < \varphi < \pi$ ,  $-\pi < \psi < \pi$  удобно проводить с помощью указанной выше программы глобального построения всех решений подобных уравнений.

В силу условий (1) параметр  $c$  для указанных выше случаев может изменяться в диапазонах: в случае 1)  $d - a - b < c < d + a + b$ , в случае 5)  $b - a - d < c < d + a + b$ , и в случаях 2), 3), 4)  $0 < c < d + a + b$ . В каждом из этих диапазонов имеются бифуркационные значения параметра  $c$ , при прохождении через которые происходит топологическая перестройка конфигурационного многообразия. Эти значения соответствуют двойному вырождению системы уравнений связей, когда четырехугольник  $ABCD$  складывается в отрезок прямой вдоль оси  $x$ . В случае 1) эти значения равны  $d + a - b$  и  $d - a + b$ , в случае 2) они вырождаются в  $2a$  и  $2b$ , в случае 3) имеются три бифуркационных значения:  $a + b - d$ ,  $a + d - b$  и  $b + d - a$ , в случае 5) имеется два бифуркационных значения:  $b + d - a$  и  $a + b - d$ , которые в случае 4) вырождаются в  $2a$  и  $2d$ .

Наибольшее число бифуркационных значений имеется в случае 3). В начале диапазона конфигурационное многообразие представляет собой две не связанные замкнутые стягиваемые кривые с ограниченным изменением углов  $\varphi$  и  $\psi$ . При первом бифуркационном значении эти кривые склеиваются в восьмерку. При дальнейшем увеличении параметра  $c$  самопересечение пропадает, и конфигурационное многообразие представляет собой одну замкнутую стягиваемую кривую. Предположим, что на этой кривой определено положительное направление обхода. При следующем бифуркационном значении эта кривая вытягивается в направлении переменной  $\varphi$  до ширины  $2\pi$ , превращаясь в склейку двух циклов типа  $1:0$  (циклы охватывают тор в направлении угла  $\varphi$ ) с противоположными направлениями обхода, и допускает полный оборот меньшего маятника. При дальнейшем увеличении  $c$  конфигурационное многообразие превращается в два цикла типа  $1:0$ , каждый из которых допускает полный оборот меньшего маятника и ограниченное изменение угла  $\psi$ . При третьем бифуркационном значении  $c$  эти кривые снова превращаются в склейку двух циклов, которая

при дальнейшем увеличении  $c$  превращается в замкнутую стягиваемую кривую с отрицательным направлением обхода.

В случаях 1), 2) и 4) имеем такую же картину топологических перестроек, только в этих случаях первая фаза с двумя замкнутыми ограниченными кривыми отсутствует и последовательность начинается сразу с одной замкнутой ограниченной кривой. В случае 5) картина отличается тем, что замкнутая кривая после склейки по углу  $\varphi$  распадается на два цикла типа  $1:1$  (возможен полный оборот по обоим углам:  $\varphi$  и  $\psi$ ). В подслучаях 3а), 3б), 4а) и 5а) бифуркационные значения  $c$  сливаются и дают дополнительные ветви кривой конфигурационного пространства, которые соответствуют свободному вращению одного из маятников при неподвижном положении другого.

Интерес представляет также подслучай  $a = b$ , в котором два бифуркационных значения параметра  $c$  сливаются в значение  $c = d$  и приводят к двойной склейке циклов типа  $1:1$  в направлениях  $\varphi$  и  $\psi$ . Эти склейки дают две взаимно пересекающиеся обмотки тора, одна из которых соответствует соотношению  $\psi = \varphi$ , а вторая при  $d \gg a$  дает соотношение  $\psi \approx -\varphi$ , то есть такой механизм может передавать вращение как в прямую, так и в обратную сторону.

Укажем условия, при которых возможно вырождение уравнений связей, соответствующее расположению пары стержней  $AB$  и  $AC$  или пары стержней  $BA$  и  $BD$  по одной прямой [4-6]. В случае нулевого угла между  $AB$  и  $AC$  неравенство треугольника дает условие

$$|d - b| < |c - a| < d + b \quad (4)$$

а в случае развернутого угла – условие

$$|d - b| < c + a < d + b \quad (5)$$

В случае пары стержней  $BA$  и  $BD$  условия вырожденности получаются из (4) и (5) перестановкой параметров  $a$  и  $b$  местами. Второе неравенство в (4) совпадает со вторым неравенством в условии реализуемости параметров (1), а первое неравенство в (5) совпадает с первым неравенством в (1).

Все рассмотренные выше случаи двойного вырождения системы уравнений связей можно определить также в результате формальных перестановок последовательности вершин  $A, B, C, D$  вдоль отрезка, в который вырождается четырехугольник. Общее число перестановок из четырех элементов равно 24. Из них следует удалить 12 перестановок, для которых вершина  $D$  предшествует вершине  $C$ . Из оставшихся перестановок следует удалить перестановки  $CABD, ACDB$ ,



$BACD$  и  $CDBA$ , для которых в силу условий (1) или (2) конфигурационное многообразие вырождается в точку. Остается 8 перестановок: 1)  $ACBD$ , возможной при  $c - a = d - b$ , 2)  $ABCD$  при  $a - c = b - d$ , 3)  $CADB$  при  $c + a = d + b$ , 4)  $CDAB$  при  $c + a = d + b$ , 5)  $BCAD$  при  $c - a = b - d$ , 6)  $CBDA$  при  $a - c = d - b$ , 7)  $CBAD$  при  $a - c = d - b$ , 8)  $BCDA$  при  $c - a = b - d$ . Дополнительное вырождение возникает при геометрическом совпадении соседних точек. В перестановках 1) и 2) возможно слияние точек  $B$  и  $C$ , в 3) и 4) возможно слияние  $A$  и  $D$ , в 5) – 8) возможно слияние  $B$  и  $C$ , а также  $A$  и  $D$ . Слияние точек  $B$  и  $C$  осуществляется при  $b = d$ , слияние  $A$  и  $D$  осуществляется при  $a = d$ , а одновременное слияние  $B$  с  $C$  и  $A$  с  $D$  осуществляется при  $a = b = c = d$ .

В этой задаче интерес представляет также параметрическое исследование на основании указанных выше программ всех возможных положений равновесия системы и их устойчивости. При стремлении параметров системы к указанным точкам двойного вырождения уравнений связей наблюдается стремление друг к другу устойчивого и неустойчивого равновесий и их необычное слияние в качественно другое вращательное движение.

Автор выражает благодарность В.А. Самсонову за интересное обсуждение работы и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №№ 12-01-00536 и 12-08-00637.

### Литература

1. Моделирование и виртуальное прототипирование: учебное пособие / И.И. Косенко [и др.]. — М.: Альфа-М: ИНФРА-М, 2012. 176 с.
2. Modelica — A Unified Object-Oriented Language for Physical Systems Modeling. Tutorial. — Modelica Association, 2000. 52 pp.
3. Dymola. Dynamic modeling laboratory. User manual. Volume 1,2. Dymola 7.3 — Lund: Dynasim AB, Research Park Ideon, 2009. 485 pp.
4. Михалев А.А., Селюцкий Ю.Д. Особенности задачи равновесия кинематических цепей / Сб.научно-методических статей «Теоретическая механика», М.: Изд. Моск. ун-та, том 27, 2009, с.168-173.
5. Самсонов В.А. Перестройка конфигурационного пространства механических систем и критические системы / ПММ. Т. 63. Вып. 5. 1999.
6. Самсонов В.А. О перестройке пространства положений одной механической системы / Сб. Научно-методических статей «Теоретическая механика», том 23. М. Изд-во МГУ. 2000, С. 177-180.

## ИНТЕРЕСНЫЕ ЗАДАЧИ

УДК 531.9

И.Л. Антонов

МГУ имени М.В. Ломоносова

### ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Рассматривается задача об устойчивости вертикального положения шарнирно опертого на концах упругого стержня, нагруженного в верхнем конце зависящей от времени продольной силой [1], содержащей случайную составляющую. При моделировании случайной составляющей используется одномерная марковская цепь [2].

При указанных условиях закрепления нижний конец стержня остается неподвижным, а верхний может смещаться по вертикали. Положение каждой точки на стержне задается параметром  $s$  ( $0 \leq s \leq l$ ) — длиной дуги стержня от нижней точки до указанной,  $x(s, t)$  обозначает горизонтальное отклонение этой точки.

Предполагается, что в процессе малых колебаний в окрестности вертикального положения равновесия длина стержня не меняется, влиянием силы тяжести и вертикальной составляющей скоростей точек стержня можно пренебречь.

В этом случае уравнение возмущенного движения и граничные условия для него имеют вид [3],[4]:

$$\mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\delta\mu \frac{\partial x}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} + P(t, \omega) \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = 0, \quad (1)$$

$$x(0, t) = x(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(0, t) = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(l, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\mu$  — масса, отнесенная к единице длины,  $\delta$  — коэффициент демпфирования,  $EJ$  — изгибная жесткость стержня.

Соотношения (2) позволяют искать решение уравнения (1) в форме

$$x(s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{l}s\right) \quad (3)$$

Из тождества

$$\sum_{m=1}^{\infty} [\mu \ddot{a}_m + 2\delta\mu \dot{a}_m + EJ \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 a_m - P(t, \omega) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 a_m] \sin\left(\frac{m\pi}{l}s\right) \equiv 0$$

получим систему уравнений для определения коэффициентов  $a_m$  :

$$\ddot{a}_m + 2\delta\dot{a}_m + \frac{1}{\mu}[EJ(\frac{m\pi}{l})^4 - P(t, \omega)(\frac{m\pi}{l})^2]a_m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Будем считать

$$P(t, \omega) = P_0 + \varepsilon_0 \xi(t, \omega)$$

где  $P_0$  – постоянная составляющая продольной силы,  $\xi(t, \omega)$  – случайный процесс, т.е.  $\xi(\cdot, \omega)$  – фиксированная функция времени,  $\xi(t, \cdot)$  – случайная величина,  $\varepsilon_0$  – масштабный коэффициент.

В этом случае уравнения (4) примут вид

$$\ddot{a}_m + 2\delta\dot{a}_m + (v_m^2 - \varepsilon_m \xi(t, \omega))a_m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

$$v_m^2 = \frac{1}{\mu} \left[ EJ \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 - P_0 \right] \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2, \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_0}{\mu} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2$$

Поскольку рассматривается движение стержня в малой окрестности вертикального положения, естественно, считать

$$EJ \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 - P_0 > 0, \quad \forall m.$$

Как видно, уравнения (5) для всех  $m$  имеют одинаковую структуру, поэтому этот индекс в рассуждениях, проводимых ниже, опускается

$$\ddot{a} + 2\delta\dot{a} + (v^2 - \varepsilon_a \xi(t, \omega))a = 0.$$

Проведя стандартную замену

$$q = a e^{\delta t}$$

получим

$$\ddot{q} + (v^2 - \delta^2) \left( 1 - \frac{\varepsilon_a}{v^2 - \delta^2} \xi(t, \omega) \right) q = 0,$$

$$\frac{d^2 q}{dt_1^2} + (1 - \varepsilon_q \xi \left( \frac{t_1}{\lambda}, \omega \right)) q = 0,$$

$$\lambda = \sqrt{v^2 - \delta^2}, \quad t_1 = \lambda t, \quad \varepsilon_q = \frac{1}{\lambda^2} \varepsilon_a.$$

Далее производные по безразмерному времени  $t_1$  обозначаются штрихами.

Заменим получившееся уравнение

$$q'' + \left( 1 - \varepsilon_q \xi \left( \frac{t_1}{\lambda}, \omega \right) \right) q = 0$$

системой

$$q' = u,$$

$$u' = - \left( 1 - \varepsilon_q \xi \left( \frac{t_1}{\lambda}, \omega \right) \right) q,$$

и введем переменные  $\rho$  и  $\varphi$  соотношениями

$$\rho = \frac{1}{2}(q^2 + u^2), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{q}{u}.$$

Новые переменные удовлетворяют уравнениям

$$\rho' = \varepsilon_q \rho \xi \left( \frac{t_1}{\lambda}, \omega \right) \sin 2\varphi, \quad (6)$$

$$\varphi' = 1 - \varepsilon_q \xi \left( \frac{t_1}{\lambda}, \omega \right) \sin^2 \varphi. \quad (7)$$

Будем считать, что  $\xi(\cdot, \omega)$  – кусочно-постоянные на интервалах  $k\tau \leq t < (k+1)\tau$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) функции времени, непрерывные справа ( $\tau$  – параметр, выбираемый из соображений соответствия используемой модели случайного процесса реальному воздействию);  $\xi(k\tau, \cdot)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) – последовательность случайных величин, представляющая собой однородную марковскую цепь ( $|\xi(k\tau, \omega)| \leq \xi^*$ ,  $\forall k, \omega$ ), плотность вероятности перехода которой за один шаг из состояния  $\xi_0$  в состояние  $\xi_1$ , т.е.  $p(\xi_0, \xi_1)$ , всюду непрерывна и положительна. Из последнего свойства следует, что для этой цепи существует стационарное распределение с плотностью  $p(\xi)$ , являющейся [5] решением уравнения

$$p(\xi) = \int p(\xi_0) p(\xi_0, \xi) d\xi_0. \quad (8)$$

Предположим, также, что

$$\int \xi p(\xi) d\xi = 0.$$

Сравнивая предлагаемую модель с традиционно используемыми винеровским «белым» шумом или «окрашенным» шумом ([4,6]), можно отметить следующие обстоятельства: плотность распределения в традиционных моделях является нормальной (гауссовской), т.е. вероятность сколь угодно больших значений возмущения отлична от нуля, а корреляционная функция имеет вполне определенную структуру, в то время как любое реальное воздействие всегда ограничено по величине

и, совсем не обязательно, его одномерная плотность должна быть похожа на нормальную; при задании марковской цепи можно заранее ограничить множество возможных значений возмущения величиной  $\xi^*$ , а одномерной плотности  $p(\xi)$  и корреляционной функции, по крайней мере на некотором интервале, за счет выбора  $p(\xi_0, \xi)$  и  $\tau$  можно придать практически любой вид [7].

Пусть  $(1 - \varepsilon_q \xi(t, \omega) \sin^2 \varphi) > 0$  тогда вместо уравнения (6) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\varphi} &= \varepsilon_q \rho \xi(t, \omega) \sin 2\varphi \cdot (1 - \varepsilon_q \xi(t, \omega) \sin^2 \varphi)^{-1}, \\ d(\ln \rho) &= \sum_{j=1}^{\infty} (\varepsilon_q \xi(t, \omega))^j j^{-1} d(\sin \varphi)^{2j}. \end{aligned} \quad (9)$$

На каждом из интервалов  $k\tau \leq t < (k+1)\tau$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) функция  $\xi(\cdot, \omega)$  постоянна и принимает значения  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ , поэтому на каждом из этих интервалов уравнение (9) можно проинтегрировать

$$\ln \rho_{k+1} - \ln \rho_k = \sum_{j=1}^{\infty} (\varepsilon_q \xi_k)^j \left( \frac{1}{j} \right) (\sin^{2j} \varphi_{k+1} - \sin^{2j} \varphi_k), \quad (10)$$

$$\rho_k = \rho(k\tau), \varphi_k = \varphi(k\tau), \xi_k = \xi(k\tau), k = 0, 1, 2, \dots$$

Проинтегрировав методом Пикара [8] на тех же интервалах уравнение (7), получим

$$\varphi_{k+1}(\xi_k, \varphi_k) = \varphi_k + \lambda\tau - \frac{\varepsilon_q \xi_k}{2} \left( \lambda\tau - \frac{\sin 2(\varphi_k + \lambda\tau) - \sin 2\varphi_k}{2} \right) + O(\varepsilon_q^2) \quad (11)$$

Заметим, что если  $\varepsilon_q \xi_k < 1$ , чего можно добиться подходящим выбором  $\varepsilon_0$ , то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{\infty} (\varepsilon_q \xi_k)^j \left( \frac{1}{j} \right) (\sin^{2j} \varphi_{k+1} - \sin^{2j} \varphi_k) \right| &\leq \\ \sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_q \xi_k|^j \left( \frac{1}{j} \right) |\sin^{2j} \varphi_{k+1} - \sin^{2j} \varphi_k| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\varepsilon_q \xi^*)^j = \frac{\varepsilon_q \xi^*}{1 - \varepsilon_q \xi^*} \end{aligned}$$

Значит, ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\varepsilon_q \xi_k)^j \left( \frac{1}{j} \right) (\sin^{2j} \varphi_{k+1} - \sin^{2j} \varphi_k)$$

абсолютно сходится, т.е. с учетом (11) равенство

$$S(\xi_k, \varphi_k) = \sum_{j=1}^{\infty} (\varepsilon_q \xi_k)^j \left( \frac{1}{j} \right) (\sin^{2j} \varphi_{k+1} - \sin^{2j} \varphi_k) \quad (12)$$

задает функцию, определенную на множестве состояний последовательности  $(\xi_k, \varphi_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Используя (12), при суммировании (10) по  $k$  от 0 до  $n$  получим

$$\rho_n = \rho_0 \exp \left( \sum_{k=1}^n S(\xi_k, \varphi_k) \right). \quad (13)$$

Последовательность  $(\xi_k, \varphi_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  по построению является марковской цепью. Из компактности фазового пространства этой цепи и свойств последовательности  $\xi_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  вытекает, что существует такое  $n$ , что плотность вероятности перехода за  $n$  шагов для любых двух состояний  $(\xi_0, \varphi_0)$  и  $(\xi, \varphi)$  —  $p^n(\xi_0, \varphi_0, \xi, \varphi)$  — положительна. Отсюда следует [5], что для этой марковской цепи существует стационарное распределение.

Таким образом показатель экспоненты в правой части формулы (13) представляет собой сумму значений функции, определенной на состояниях стационарной марковской цепи. В этой ситуации выполняется усиленный закон больших чисел [5], т.е. с вероятностью единица справедливо соотношение:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n S(\xi_k, \varphi_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[S(\omega)]$$

Здесь  $E[\gamma(\omega)]$  обозначает математическое ожидание случайной величины  $\gamma(\omega)$ , следовательно,

$$\begin{aligned} \rho_n &= \rho_0 \exp \left( n \left[ E[S(\omega)] - \left( E[S(\omega)] - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n S(\xi_k, \varphi_k) \right) \right] \right) = \\ &= \rho_0 \exp \left( n [E[S(\omega)] - f(n, \omega)] \right), \end{aligned}$$

$$f(n, \omega) = E[S(\omega)] - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n S(\xi_k, \varphi_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

По определению

$$E[S(\omega)] = \iint S(\xi, \varphi) p(\xi, \varphi) d\xi d\varphi,$$

где  $p(\xi, \varphi)$  — плотность стационарного распределения случайной последовательности  $(\xi_k, \varphi_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , являющейся [5] решением уравнения

$$p(\xi, \varphi) = \iint p(\xi_0, \varphi_0) p(\xi_0, \varphi_0, \xi, \varphi) d\xi_0 d\varphi_0, \quad (14)$$

Здесь  $p(\xi_0, \varphi_0, \xi, \varphi)$  – плотность вероятности перехода за один шаг из состояния  $(\xi_0, \varphi_0)$  в состояние  $(\xi, \varphi)$ .

В рассматриваемой задаче

$$p(\xi_0, \varphi_0, \xi, \varphi) = p(\xi_0, \xi) \delta(\varphi - \varphi_1(\xi_0, \varphi_0)), \quad (15)$$

Здесь  $p(\xi_0, \xi)$  – плотность вероятности перехода последовательности  $\xi(k\tau, \omega)$ ,  $k=0,1,2,\dots$  за один шаг из состояния  $\xi_0$  в состояние  $\xi$ ,  $\delta(\varphi - \varphi_1(\xi_0, \varphi_0))$  –  $\delta$ -функция Дирака,  $\varphi_1(\xi_0, \varphi_0)$  определяется в соответствии с формулой (10) при  $k=0$ .

Поскольку при  $\varepsilon_q = 0$  случайные величины  $\xi(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  являются независимыми, отношение  $2\pi / \lambda\tau$ , вообще говоря, иррационально, и, кроме того, из уравнения (7) следует, что функция  $p(\xi, \varphi)$  должна быть  $\pi$ -периодической по  $\varphi$ , решение уравнения (13) следует искать в виде

$$p(\xi, \varphi) = \frac{p(\xi)}{2\pi} + \varepsilon_q (p_2(\xi) \cos 2\varphi + p_4(\xi) \cos 4\varphi + \dots) + \varepsilon_q^2 (\dots) + \dots, \quad (16)$$

где  $p(\xi)$  – решение уравнения (8), а  $p_2(\xi)$ ,  $p_4(\xi)$  – коэффициенты, подлежащие определению.

Решая (14) с учетом (15) и (16) найдем:

$$p(\xi, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot p(\xi) + \varepsilon_q \frac{1}{4\pi} \cos 2\varphi \cdot \int \xi_0 p(\xi_0) p(\xi_0, \xi) d\xi_0 + O(\varepsilon_q^2).$$

Чтобы вычислить

$$\iint S(\xi, \varphi) p(\xi, \varphi) d\xi d\varphi$$

представим выражения, входящие в (12) (см. [9]), в виде:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (-\cos 2\varphi + 1),$$

$$\sin^4 \varphi = \frac{1}{8} (\cos 4\varphi - 4 \cos 2\varphi + 3),$$

$$\sin^6 \varphi = \frac{1}{32} (-\cos 6\varphi + 6 \cos 4\varphi - 15 \cos 2\varphi + 10),$$

и учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\cos 2\varphi_k - \cos 2\varphi_{k+1}) &= \frac{1}{2} ((1 - \cos 2\lambda\tau) \cos 2\varphi_k + \sin 2\lambda\tau \sin 2\varphi_k - \\ &- \varepsilon_q \xi_k \lambda\tau (\cos 2\lambda\tau \sin 2\varphi_k + \sin \lambda\tau \cos 2\varphi_k) + \\ &+ \frac{\varepsilon_q \xi_k}{4} (1 - \cos 2\lambda\tau - \cos 4(\lambda\tau + \varphi_k) + \cos(2\lambda\tau + 4\varphi_k))) + O(\varepsilon_q^2). \end{aligned}$$

Так как по предположению  $E[\xi(\omega)] = 0$ , в результате вычислений получим:

$$E[S(\omega)] = \frac{\varepsilon_q^2}{8} (1 - \cos 2\lambda\tau) (\int \xi^2 p(\xi) d\xi - \iint \xi_0 \xi p(\xi_0) p(\xi_0, \xi) d\xi_0 d\xi) + O(\varepsilon_q^3),$$

причем

$$(\int \xi^2 p(\xi) d\xi - \iint \xi_0 \xi p(\xi_0) p(\xi_0, \xi) d\xi_0 d\xi) > 0,$$

так как вследствие стационарности марковской цепи  $\xi(k\tau, \omega)$ ,  $k=0,1,2,\dots$

$$(\int \xi^2 p(\xi) d\xi - \iint \xi_0 \xi p(\xi_0) p(\xi_0, \xi) d\xi_0 d\xi) = \frac{1}{2} E[(\xi(\tau, \omega) - \xi(0, \omega))^2].$$

Таким образом,

$$\rho_n = \rho_0 \exp(n(E[S(\omega)] - f(n, \omega))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Вернемся к исходным переменным

$$2\rho = q^2 + (q')^2 = \frac{1}{v^2 - \delta^2} e^{2\delta t} (v^2 a^2 + 2\delta a\dot{a} + \dot{a}^2),$$

$$(v^2 a^2 + 2\delta a\dot{a} + \dot{a}^2) = 2(v^2 - \delta^2) \rho(t) e^{-2\delta t}.$$

В моменты  $t = n\tau$ ,  $n=0,1,2,\dots$  имеем

$$v^2 a^2 + 2\delta a\dot{a} + \dot{a}^2 = 2(v^2 - \delta^2) \rho_0 \exp(n(E[S(\omega)] - 2\delta\tau - f(n, \omega))).$$

Так как  $f(n, \omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  с вероятностью единица, то, если

(а)  $(E[S(\omega)] - 2\delta\tau) > 0$ , то значение положительно определенной квадратичной формы  $(v^2 a^2 + 2\delta a\dot{a} + \dot{a}^2)$  для почти всех  $\omega$  при  $n > n(\omega)$  будет монотонно расти, т.е. фазовая точка  $(a, \dot{a})$  с вероятностью единица будет уходить в бесконечность;

если же

(б)  $(E[S(\omega)] - 2\delta\tau) < 0$ , то при  $n > n(\omega)$  для почти всех  $\omega$  значение формы  $(v^2 a^2 + 2\delta a\dot{a} + \dot{a}^2)$  будет монотонно стремиться к нулю, т.е.

фазовая точка  $(a, \dot{a})$  с вероятностью единица будет неограниченно приближаться к началу координат.

Пусть  $a_m$  и  $b_m$  коэффициенты в формуле (3), определяющие два разных решения уравнения (1). Определим метрику в соответствующем фазовом пространстве формулой

$$\sigma = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} [v_m^2 (a_m - b_m)^2 + 2\delta(a_m - b_m)(\dot{a}_m - \dot{b}_m) + (\dot{a}_m - \dot{b}_m)^2]}.$$

В рамках этой метрики можно говорить об устойчивости по Ляпунову вертикального положения стержня, нагруженного продольной силой, зависящей от времени (динамической устойчивости). Если хотя бы для одного  $m$  выполняется условие (а), то указанное положение равновесие неустойчиво с вероятностью единица. При выполнении условия (б) для всех  $m$  это положение с вероятностью единица является притягивающим, т.е. для почти всех  $\omega$  при  $n > n(\omega)$ , решение уравнения (1), будет монотонно стремиться к нулю в смысле указанной метрики.

Интересно отметить, что если демпфирование отсутствует и действующая на стержень сила зависит от времени периодически с частотой  $\Omega$ , то на плоскости  $(\Omega, \varepsilon_0)$  зоны устойчивости и неустойчивости будут чередоваться (см. диаграмму Айнса-Стретта, например, в [10]), если же зависимость силы от времени определяется описанным выше случайным процессом, то имеет место неустойчивость с вероятностью единица, и этот факт остается справедливым для любого процесса указанного класса при сколь угодно малом значении параметра  $\varepsilon_0$ .

### Литература

1. Беляев Н.М. Устойчивость призматических стержней при действии продольных периодических сил // Сб. «Инженерные сооружения и строительная механика», Ленинград, 1924.
2. Колмогоров А.Н. К теории цепей Маркова// в кн. Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика, М.: Наука, 1986. 534 с.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем // М.: Наука, 1979. 384 с.
4. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем // М.: Наука, 1979. 335 с.
5. Doob J.L. Stochastic processes. New York – John Wiley&sons, London – Chapman&Hall, 1953. = Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 605 с.
6. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном изменении их параметров // М.: Наука, 1969. 368 с.
7. Антонов И.Л. Случайные колебания. Свойства траекторий // М.: Изд-во Моск ун-та, 1993. 176 с.
8. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения // М.: Наука, 1971. 240 с.

9. Dwight H.B. Tables of integrals and other mathematical data. New York: The Macmillan Company, 1961 = Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы // М.: Наука, 1964. – 228 с.
10. Болотин В.В. (ред.) Вибрации в технике (в шести томах). Т.1, Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

**К ЗАДАЧЕ КАЧЕНИЯ ШАРА, УПРАВЛЯЕМОГО С ПОМОЩЬЮ  
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ МАССЫ**

Рассматривается задача управления качением шара по горизонтальной плоскости. Управление осуществляется за счет перемещения внутренней массы. Исследуются некоторые стационарные движения данной механической системы.

В ряде работ (см., например, [1-3]) обсуждаются различные вопросы, связанные с конструкцией и управлением движением мобильным шаровым роботом. Рассмотрим шар (сферу) массы  $M$  и радиуса  $R$ , катящийся по горизонтальной поверхности. Сферу будем считать телом, имеющим распределение масс, которое зависит от расстояния до центра («радиально» однородным); сфера имеет внутреннюю шаровую полость радиуса  $l \leq R$ , центр которой совпадает с ее центром  $C$ . По внутренней поверхности этой полости может перемещаться материальная точка (грузик  $K$ ) массы  $m$  (рис.1). Это перемещение осуществляется за счет приложения управляющей силы взаимодействия со сферой  $F$ , действующей в касательной плоскости шаровой полости.

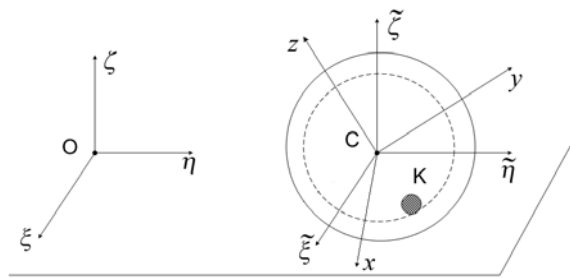


Рис. 1.

Введем в рассмотрение несколько систем координат:  $O\xi\eta\zeta$  – абсолютные оси; с центром сферы  $C$ , имеющем координаты  $(\xi, \eta, \zeta = R)$ , свяжем кениговские оси  $C\tilde{\xi}\tilde{\eta}\tilde{\zeta}$  и оси  $Cxyz$  жестко скрепленные со сферой. Положение материальной точки  $K$  зададим в осях  $C\tilde{\xi}\tilde{\eta}\tilde{\zeta}$  углами  $\alpha, \beta$  так, что ее положение есть

$$(-l \sin \alpha, l \cos \alpha \sin \beta, -l \cos \alpha \cos \beta)$$

Нижнему положению т.  $K$  отвечают углы  $\alpha = \beta = 0$ . Единичный вектор управляющей силы  $F$  перпендикулярен вектору  $\overrightarrow{CK}$ , его компоненты:

$$-\cos \alpha \cos \gamma,$$

$$\cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma,$$

$$\sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

где  $\gamma$  – свободно выбираемый угол (управления). Взаимное расположение осей  $C\tilde{\xi}\tilde{\eta}\tilde{\zeta}$  и  $Cxyz$  определим при помощи рассмотрения углов Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$  следующей матрицей  $W$  направляющих косинусов

	$\tilde{\xi}$	$\tilde{\eta}$	$\tilde{\zeta}$
$x$	$\cos \theta \cos \varphi$	$\cos \psi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta$	$\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta$
$y$	$-\cos \theta \sin \varphi$	$\cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi \sin \theta$	$\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta$
$z$	$\sin \theta$	$-\cos \theta \sin \psi$	$\cos \theta \cos \psi$

Таким образом, вектор угловой скорости  $\vec{\omega}_{abs}(p, q, r)$  сферы в осях Кенига  $C\tilde{\xi}\tilde{\eta}\tilde{\zeta}$  есть

$$p = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \theta, \quad q = \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\varphi} \cos \theta \sin \psi,$$

$$r = \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \theta \cos \psi$$

Помимо управляющей силы  $F$  на материальную точку  $K$  действует сила нормального давления  $N$  со стороны (гладкой) полости, направленная в точку  $C$  центра сферы; а на сферу, помимо сил  $-F$  и  $-N$ , в точке контакта сферы с горизонтальной плоскостью действует по соответствующим осям трехгранника  $C\tilde{\xi}\tilde{\eta}\tilde{\zeta}$  силы  $S, T, R_z$ , а также по оси  $\tilde{\zeta}$  момент сил  $m\omega$ , противодействующий верчению сферы.

**1. Уравнения движения системы.**

Запишем уравнения движения механической системы, подразделяя ее на материальную точку и сферу.

Уравнение движения материальной точки  $K$  ( $g$  – ускорение силы тяжести)

$$\begin{aligned}
m(\ddot{\xi} + l[-\ddot{\alpha} \cos \alpha + \dot{\alpha}^2 \sin \alpha]) &= N(-\sin \alpha) + F(-\cos \alpha \cos \gamma), \\
m(\ddot{\eta} + l[-\ddot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta + \ddot{\beta} \cos \alpha \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta - \\
&\quad - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \cos \alpha \sin \beta]) = N \cos \alpha \sin \beta + \\
&\quad + F(\cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma), \\
m(\ddot{\zeta} + l[\ddot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta + \ddot{\beta} \cos \alpha \sin \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta + \\
&\quad + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \cos \alpha \cos \beta]) = N(-\cos \alpha \cos \beta) + \\
&\quad + F(\sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma) - mg
\end{aligned} \tag{1}$$

Уравнение движения центра масс сферы

$$\begin{aligned}
M\ddot{\xi} &= S - N(-\sin \alpha) - F(-\cos \alpha \cos \gamma), \\
M\ddot{\eta} &= T - N \cos \alpha \sin \beta - \\
&\quad - F(\cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma), \\
M\ddot{\zeta} &= R_z - N(-\cos \alpha \cos \beta) - \\
&\quad - F(\sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma) - Mg,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\zeta \equiv R$$

Уравнение вращения сферы в осях Кенига

$$J \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = Fl \cdot \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin \gamma \\ -\cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ -\sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} TR \\ -SR \\ mom \end{pmatrix} \tag{3}$$

Здесь  $J$  – момент инерции сферы в ее центре масс  $C$ , для однородной сферы он равен  $J = 2MR^2 / 5$ .

Получили систему девяти соотношений с двумя управляющими функциями  $F$  и  $\gamma$  для семи определяющих положение координат  $(\xi, \eta, \alpha, \beta, \psi, \theta, \varphi)$  и неизвестных сил, а также момента в точке контакта шара с поверхностью. Характер движения динамической системы во многом зависит от гипотез, заложенных в описание, прежде всего, гипотез сил и момента в точке контакта. Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть сила трения качения  $\vec{\Phi}(S, T, 0)$  ограничена, определяется условием  $\Phi \leq kR_z$ , где  $k$  – коэффициент трения качения, и направлена

против скорости  $\vec{V}$  точки сферы, касающейся горизонтальной плоскости, которая имеет компоненты

$$V_\xi = \dot{\xi} + q(-R), \quad V_\eta = \dot{\eta} + pR, \quad V_\zeta = 0$$

Тогда в случае проскальзывания в точке опоры  $S = kR_z V_\xi / V$ ,  $T = kR_z V_\eta / V$ , где  $V$  – модуль скорости. Общее число неизвестных функций становится равным девяти. Если же сфера в опоре не проскальзывает, то

$$\dot{\xi} + q(-R) = 0, \quad \dot{\eta} + pR = 0 \tag{4}$$

Продифференцированное один раз условие (4) надо добавить к остальным соотношениям, решать всю систему совместно, проверяя на каждом шаге решения дифференциальных уравнений условие

$$\Phi = \sqrt{S^2 + T^2} \leq kR_z \tag{5}$$

2) Пусть сила трения качения неограниченна, т.е. поверхность перемещения абсолютно шероховатая, но допускает верчение. В этом случае условие (4) надо также добавить ко всем остальным условиям, а проверку неравенства (5) можно не осуществлять. В дальнейшем мы остановимся на анализе только этого случая.

## 2. Управление движением системы.

Ставится задача движения центра сферы по некоторой траектории с произвольной скоростью. Проведенный численный эксперимент показывает, что наиболее удачными алгоритмами управления сферой являются алгоритмы медленного движения, использующие расположение материальной точки вблизи ее наинишей точки внутри сферы. Полагая

$$\alpha = \beta \approx 0,$$

имеем из условий (2)-(4)

$$M\ddot{\xi} = S + F \cos \gamma, \quad J\dot{p} = -Fl \sin \gamma + TR, \quad R\dot{q} = \ddot{\xi},$$

$$M\ddot{\eta} = T - F \sin \gamma, \quad J\dot{q} = -Fl \cos \gamma - SR, \quad -R\dot{p} = \ddot{\eta}$$

Отсюда, обозначая  $j = J / R^2 \approx 0.4M$ ,  $\sigma = l / R$

$$S = -(j\ddot{\xi} + F\sigma \cos \gamma), \quad T = F\sigma \sin \gamma - j\ddot{\eta},$$

$$M\ddot{\xi} = F \cos \gamma - (j\ddot{\xi} + F\sigma \cos \gamma), \quad M\ddot{\eta} = -F \sin \gamma + (F\sigma \sin \gamma - j\ddot{\eta})$$

Т.е.

$$\ddot{\xi} = \frac{F}{M+j} \cdot (1-\sigma) \cos \gamma, \quad \ddot{\eta} = \frac{F}{M+j} \cdot (\sigma-1) \sin \gamma \tag{6}$$

В тоже время, используя условия (1), имеем

$$m(\ddot{\xi} - l\ddot{\alpha}) = -F \cos \gamma, \quad m(\ddot{\eta} + l\ddot{\beta}) = F \sin \gamma$$

Т.е.

$$\begin{aligned} ml\ddot{\alpha} &= m\ddot{\xi} + F \cos \gamma = F \cos \gamma \left[ 1 + m \frac{1-\sigma}{M+j} \right], \\ ml\ddot{\beta} &= -m\ddot{\eta} + F \sin \gamma = F \sin \gamma \left[ 1 + m \frac{1-\sigma}{M+j} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть, например, сфера и грузик первоначально находились в состоянии покоя, требуется выйти на некоторую прямую  $\xi = const$ . Основная идея предлагаемого метода состоит в поэтапном приближении к требуемой прямой с остановками с тем, чтобы материальная точка оставалась вблизи своей наинишей точки, когда с тем или иным приближением имеют место простые формулы (6),(7). С этой целью разделим интервал изменения координаты  $\xi$  на достаточно большое число достаточно малых подинтервалов  $\Delta\xi$ . Пусть  $\Delta\xi \geq 0$ . Рассмотрим первый из этих подинтервалов, управление на нем можно строить, выбирая  $\sin \gamma = 0$ , если, разумеется, начальным состоянием этапа был покой. Из (6),(7) имеем, обозначая через  $u = F \cos \gamma$

$$\ddot{\xi} = u \frac{1-\sigma}{M+j}, \quad l\ddot{\alpha} = u \left[ \frac{1}{m} + \frac{1-\sigma}{M+j} \right], \quad \ddot{\eta} = \ddot{\beta} = 0$$

Если управление  $u$  выбирать релейным и строить его также, как в известной задаче синтеза быстродействия в задаче  $\ddot{x} = u$ , то в конце мы будем иметь состояние покоя, требуемое значение  $\xi$  и некое значение угла  $\alpha$ , отличное от исходного нулевого

$$l\alpha_* = \Delta\xi \cdot \left( \frac{1}{m} + \frac{1-\sigma}{M+j} \right) \left( \frac{1-\sigma}{M+j} \right)^{-1} = \Delta\xi \cdot \left[ 1 + \frac{M+j}{m(1-\sigma)} \right]$$

В этот момент можно перейти в режим пассивного движения  $u = 0$ . Если бы вязкое трение в системе отсутствовало, то начались бы нескончаемые покачивания сферы, связанные с перемещением грузика от значения  $\alpha_*$  к  $-\alpha_*$  и назад. Причем при движении от  $\alpha_*$  к  $-\alpha_*$  сфера будет еще дополнительно перемещаться вперед, и назад – при обратном колебании грузика.

Реально же в динамической системе есть вязкое трение и потому амплитуда колебаний грузика начнет убывать, причем колебания будут скапливаться около нижнего положения грузика, а затем совсем пре-

кратятся. Т.е. система придет в покой около нижнего положения грузика и при соответствующим образом продвинутой немного вперед – на  $\Delta\xi > 0$  сфере. На этом данный подэтап заканчивается. С помощью нескольких подэтапов можно решить задачу выхода, а затем и движения по прямой  $\xi = const$ . Легко видеть, что подобным образом можно решать задачу выхода и движения по любой кривой  $f(\xi, \eta) = 0$ .

### 3. Стационарные движения системы.

Предложенный метод построения движения сферы обладает одним существенным недостатком – он незрелищен и требует больших времен реализации. В связи с этим его недостатком возникает интерес к возможному, относительно быстрым движениям механической системы по тем или иным программным траекториям и, прежде всего, к стационарным движениям, не требующим перерегулирования.

*Плоское движение по прямой  $\xi = const$ .*

В уравнениях (1)-(3) положим  $\alpha = \theta = \varphi = 0$ ,  $\gamma = \pi/2$ . Тогда  $q = r = 0$ , и из рассмотрения верхних условий в (1) и (2), а также среднего условия в (3) вытекает дополнительно, что  $\ddot{\xi} = S = 0$ . Выпишем остальные нетривиальные условия

$$\begin{aligned} m \begin{pmatrix} \ddot{\eta} + l[\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta] \\ l[\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} N \sin \beta + F \cos \beta, \\ N(-\cos \beta) + F \sin \beta - mg \end{pmatrix}, \\ M\ddot{\eta} &= T - N \sin \beta - F \cos \beta, \quad J\dot{p} = -Fl + TR, \quad \dot{\eta} + pR = 0 \end{aligned}$$

Отсюда, складывая почленно первое и третье соотношения, имеем

$$(M+m)\ddot{\eta} + ml(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) = T \quad (8)$$

В то же время, умножая первое соотношение на  $\cos \beta$ , а второе на  $\sin \beta$ , и складывая их, получаем

$$m(\ddot{\eta} \cos \beta + l\ddot{\beta}) = F - mg \sin \beta,$$

т.е.

$$m(-\dot{p}R \cos \beta + l\ddot{\beta} + mg \sin \beta) = F$$

Чтобы завершить преобразования и получить систему четвертого порядка, описывающую плоское движение, умножим обе части соотношения (8) на  $R$  и воспользуемся оставшимися условиями

$$(M+m)\ddot{\eta}R + mlR(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) = TR = J\dot{p} + Fl$$

т.е.



$$\begin{aligned}
[J + (M + m)R^2]\dot{p} - m l R(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) &= -F l \\
\text{Получаем окончательно следующую систему уравнений} \\
[J + (M + m)R^2]\dot{p} - m l R\ddot{\beta} \cos \beta + m l R\dot{\beta}^2 \sin \beta &= -F l, \\
m(-\dot{p} R \cos \beta + l\ddot{\beta} + m g \sin \beta) &= F
\end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая, что в данном случае  $\dot{p} = \ddot{\psi}$ , система (9) в углах  $\psi, \beta$  имеет четвертый порядок.

Из рассмотрения условий (9) легко заключить, что при  $F = const$  возможно плоское стационарное движение системы с постоянными  $\ddot{\psi}$  и  $\beta$  (а также  $N$  и  $T$ ) вида

$$\begin{aligned}
[J + (M + m)R^2]\ddot{\psi} &= -F l, \quad -m R \ddot{\psi} \cos \beta + m g \sin \beta = F, \\
m g &= F \sin \beta + N \cos \beta
\end{aligned}$$

Поскольку при  $F \neq 0$  первая производная  $\dot{\psi}$  меняется со временем по линейному закону, то динамическая система может поддерживать такой режим только все время разгоняясь, либо тормозясь. Реально, однако, рассматривать силу  $F$  как сумму собственно управления и линейного по  $\dot{\psi}$  члена, связанного с вязким трением

$$F = F_{\text{гип}} + k\dot{\psi}, \quad k = const$$

А тогда в системе (9) возможен другой стационарный режим движения

$$\dot{\psi} = const, \quad \beta = const$$

Оба этих режима при определенных условиях могут быть устойчивыми в плоском случае, однако, с точки зрения пространственной постановки они неустойчивыми, если  $F_{\text{гип}}$  не содержит обратной связи по координате  $\xi$ , а также по углам  $\theta, \varphi$ .

*Стационарное движение по окружности.*

**Постановка задачи.** Исследуем возможность существования режима стационарного горизонтального вращения механической системы. Введем в рассмотрение подвижные оси  $OXYZ$  с началом в неподвижной точке  $O$ , вращающиеся вокруг оси  $Z$  с постоянной вертикальной угловой скоростью  $\Omega$  (рис.2). Пусть центр шара принадлежит одной из точек на оси  $X$ , т.е. движется по окружности некоторого радиуса  $\rho$ , а грузик  $K$  – другой фиксированной точке пространства  $OXYZ$  и соответственно при вращении осей  $OXYZ$  он движется по другой окружности. При этом сама сфера пусть вращается в данных осях с некото-

рой постоянной относительной угловой скоростью  $\vec{\omega}(p, q, r)$ . В частности, поскольку  $\vec{\omega}_{\text{абс}} = \vec{\omega} + \vec{\Omega}$ , то и вектор абсолютной угловой скорости шара оказывается постоянным в осях  $OXYZ$ . Наконец, систему координат  $OXYZ$  построим так, чтобы ее начало – т.  $O$  – была приподнята над плоскостью перемещения шара на высоту его радиуса  $R$ .

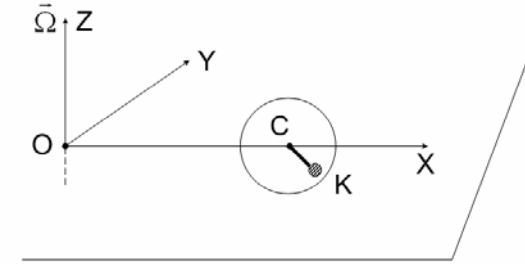


Рис. 2.

Таким образом, как геометрический образ, сфера с грузиком неподвижна во вращающейся системе осей  $OXYZ$ , хотя в кенигсовых осях  $C\tilde{\xi}\tilde{\eta}\tilde{\zeta}$  она вращается и, по существу, как тело, вращается и в осях  $OXYZ$ . Положение грузика в  $OXYZ$  для удобства зададим с помощью новых углов (типа долготы-широты)  $\alpha, \beta$  так, что его координаты, отсчитываемые от центра (этот радиус-вектор на рис.2 показан жирной прямой), есть

$$(l \cos \alpha \sin \beta, l \sin \alpha \sin \beta, -l \cos \beta)$$

Достаточно считать, что  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,  $\beta \in [0, \pi]$ .

Если такого рода стационарное вращение в динамической системе возможно, то это означает, что в любой момент времени (например, в данный) имеет место равновесие тела в неинерциальных осях  $OXYZ$ . Отталкиваясь от этого условия равновесия, можно строить стационарный режим вращения системы. Заметим, что такой способ поиска решения оказывается более удобным, чем непосредственное обращение к системе уравнений (1)-(3), поскольку он позволяет строить решение одновременно с подбором соответствующих неизвестных динамических параметров.

Поскольку оси  $OXYZ$  неинерциальные, то в правые части соответствующих уравнений равновесия необходимо добавить силы инерции

кориолисовых и центробежных (переносных) сил  $\vec{F}_k, \vec{F}_c$  (в уравнения движения центров масс), а также моменты относительно центров масс сил инерции кориолисовых и центробежных  $\vec{M}_k, \vec{M}_c$  (при исследовании движения вокруг центров масс).

Подсчитаем суммарную силу инерции. Радиус-вектор любой точки сферы  $\vec{r}$ , отсчитываемый от т.  $O$ , можно представить как  $\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{r}'$ , где  $\vec{\rho}$  - радиус-вектор центра сферы  $C$ , а  $\vec{r}'$  - положение текущей точки сферы относительно ее центра. Поэтому

$$\vec{F}_c = \sum dm \cdot [\Omega^2 \vec{r} - \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \vec{r})] = \sum dm \cdot \Omega^2 (\vec{\rho} + \vec{r}') - \vec{\Omega} \left( \vec{\Omega} \cdot \sum dm (\vec{\rho} + \vec{r}') \right) = M[\Omega^2 \vec{\rho} - \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \vec{\rho})] = M\Omega^2 \vec{\rho}$$

так как вектора  $\vec{\rho}$  и  $\vec{\Omega}$  перпендикулярны. Для кориолисовой силы инерции имеем

$$\vec{F}_k = -2 \sum dm [\vec{\Omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']] = -2[\vec{\Omega} \times [\vec{\omega} \times \sum \vec{r}' dm]] = 0$$

В сумме обе силы инерции дают

$$\vec{F}_{inert} = M\vec{\rho}\Omega^2$$

Известно, что если рассматривается динамически симметричное тело, у которого  $\vec{k}$  есть ось симметрии, то имеют место равенства

$$\vec{M}_k = C[\vec{\omega} \times \vec{\Omega}] + 2(A - C)[\vec{\omega} \times \vec{k}](\vec{\Omega}, \vec{k}), \quad \vec{M}_c = (C - A)(\vec{k}, \vec{\Omega})[\vec{k} \times \vec{\Omega}]$$

где  $A = B$ ,  $C$  - моменты инерции по главным, центральным осям тела.

Действительно,

$$\vec{M}_k = -2 \sum dm \cdot [\vec{r}' \times [\vec{\Omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']]] = -2 \sum dm \{ \vec{\Omega}(\vec{r}' \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}']) - [\vec{\omega} \times \vec{r}'](\vec{\Omega} \vec{r}') \}$$

Первый член этой суммы равен нулю. Раскрывая второй член в главных, центральных осях тела  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  как

$$\vec{r}' = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}, \quad \vec{\Omega} = \Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k}$$

имеем

$$\sum dm \cdot (\vec{\Omega} \vec{r}') [\vec{\omega} \times \vec{r}'] = \vec{\omega} \times \sum dm \cdot \vec{r}' (\vec{\Omega} \vec{r}'),$$

$$\begin{aligned} \sum dm \cdot \vec{r}' (\vec{\Omega} \vec{r}') &= \vec{i} \sum dm \cdot x(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) + \\ &+ \vec{j} \sum dm \cdot y(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) + \vec{k} \sum dm \cdot z(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z) = \\ &= \vec{i} \Omega_x \sum x^2 dm + \vec{j} \Omega_y \sum y^2 dm + \vec{k} \Omega_z \sum z^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} [\vec{i} \Omega_x (B - A + C) + \vec{j} \Omega_y (C - B + A) + \vec{k} \Omega_z (A - C + B)] \end{aligned}$$

Т.е. при  $A = B$

$$\sum dm \cdot \vec{r}' (\vec{\Omega} \vec{r}') = \vec{i} C \Omega_x + \vec{j} C \Omega_y + \vec{k} \Omega_z (2A - C) = C\vec{\Omega} + \vec{k} 2\Omega_z (A - C)$$

откуда вытекает и требуемая формула для момента кориолисовых сил инерции. Момент переносных сил инерции равен

$$\begin{aligned} \vec{M}_c &= \sum dm \cdot \vec{r}' \times [\Omega^2 (\vec{\rho} + \vec{r}') - \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \vec{r}')] = - \sum dm [\vec{r}' \times \vec{\Omega}](\vec{\Omega} \vec{r}') = \\ &= \vec{\Omega} \times \sum dm \cdot \vec{r}' (\vec{\Omega} \vec{r}') \end{aligned}$$

Дальнейшее преобразование полученного повторяет только что проделанное при выводе формулы для момента кориолисовых сил инерции: с заменой в векторном произведении вектора  $\vec{\omega}$  на вектор  $\vec{\Omega}$  и при отсутствии общего коэффициента двойки перед рассматриваемой суммой. Требуемые формулы доказаны.

Поскольку данные формулы интересуют нас применительно к однородной сфере, у которой все моменты инерции равны  $J$ , то получаем окончательно

$$\vec{M}_k = J[\vec{\omega} \times \vec{\Omega}] = J[\vec{\omega}_{acc} \times \vec{\Omega}], \quad \vec{M}_c = 0$$

Уравнения равновесия. Запишем условия равновесия тел, входящих в механическую систему в осях  $OXYZ$ .

Равновесие материальной точки:

Переносная сила инерции вычисляется по приведенной выше формуле для тела. Кориолисова сила инерции отсутствует, поскольку грузик покоится в осях  $OXYZ$ . Направляющие косинусы реакции «полости»  $N$ , направленные к центру сферы, есть  $(-\cos \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \sin \beta, \cos \beta)$ , направляющие косинусы силы  $\vec{F}$

есть

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma,$$

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha,$$

$$\sin \beta \cos \gamma$$

Действительно, скалярное произведение двух последних векторов равно нулю. Тем самым, имеем три условия равновесия материальной точки

$$\begin{aligned} m\Omega^2(\rho + l \cos \alpha \sin \beta) - N \cos \alpha \sin \beta + \\ + F(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) = 0, \\ m\Omega^2 l \sin \alpha \sin \beta - N \sin \alpha \sin \beta + \\ + F(\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$N \cos \beta + F \sin \beta \cos \gamma - mg = 0$$

Равновесие центра сферы:

Пусть  $S, T, R_z$  – соответствующие силы реакции поверхности перемещения в точке контакта ее со сферой

$$\begin{aligned} S + M\Omega^2 \rho + N \cos \alpha \sin \beta - \\ - F(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) = 0, \\ T + N \sin \alpha \sin \beta - F(\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha) = 0, \\ R_z - N \cos \beta - F \sin \beta \cos \gamma - Mg = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Равенство моментов сил относительно центра сферы:

Член за счет момента кориолисовых сил есть вектор с компонентами  $J(q\Omega, -p\Omega, 0)$ , причем компонента  $p$  абсолютной угловой скорости сферы фактически задана: поскольку скорость центра сферы направлена по оси  $Y$  и равна  $\rho\Omega$ , а скорость точки контакта сферы с поверхностью равна нулю, то  $\rho\Omega - p(-R) = 0$ . Точно также скорость центра по оси  $X$  равна нулю, т.е.  $q(-R) = 0$ . Отсюда, заключаем, что данный вектор имеет постоянные компоненты  $J(0, \Omega^2 \rho / R, 0)$ .

Вектор точки контакта сферы с поверхностью из центра сферы есть  $(0, 0, -R)$ . Сила реакции  $S$  дает момент  $-SR$ , направленный по оси  $Y$ , а сила  $T$  дает по оси  $X$  момент  $TR$ . Радиус-вектор материальной точки, где приложены силы  $-N$  и  $-F$ , относительно центра сферы есть  $(l \cos \alpha \sin \beta, l \sin \alpha \sin \beta, -l \cos \beta)$ . Но сила  $N$  направлена к центру сферы, поэтому ее момент равен нулю. Подсчитаем момент управляющей силы  $-F$ :

$$mom_{-F} =$$

$$= F \left\| \begin{array}{ccc} l \cos \alpha \sin \beta & l \sin \alpha \sin \beta & -l \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \beta \cos \gamma & \end{array} \right\|$$

Таким образом, момент силы  $F$  равен

$$Fl \cdot (-\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma, \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma, -\sin \beta \sin \gamma)$$

Система уравнений моментов имеет вид (вектор  $\vec{\omega}$  постоянен)

$$\begin{aligned} TR + Fl(-\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma) = 0, \\ -SR + Fl(\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma) + J\Omega^2 \rho / R = 0, \\ TURN - Fl \sin \beta \sin \gamma = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

где  $TURN$  – момент сил трения в опоре, противодействующий верчению.

Таким образом, равновесие описывается системой (10)-(12) и возможны две постановки задачи: стационарное движение со свободным верчением – тогда  $TURN = 0$ , а постоянное  $r$  – некоторый параметр; и движение в отсутствие верчения – тогда  $r = 0$  или  $r = \Omega$  (в зависимости от толкования этого термина), причем необходимый момент  $TURN$ , препятствующий верчению, определяется последним соотношением в (12).

Вращение с верчением. Последнее из условий (12) приводит к равенству  $\sin \beta \sin \gamma = 0$ . Рассмотрим вначале случай  $\sin \gamma = 0$ .

Понимая под  $\cos \gamma = \pm 1$ , имеем из (12)

$$T = F \sigma \sin \alpha \cos \gamma, S = J\Omega^2 \rho / R^2 + F \sigma \cos \alpha \cos \gamma.$$

Верхние два соотношения (11) тогда переписываются в следующем виде, если принять, как и выше  $J = jMR^2$  ( $0 \leq j \leq 1$ )

$$F \cos \alpha \cos \gamma (\sigma - \cos \beta) + (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho + N \cos \alpha \sin \beta = 0,$$

$$F \sin \alpha \cos \gamma (\sigma - \cos \beta) + N \sin \alpha \sin \beta = 0$$

Т.е. при  $\sin \alpha \neq 0$  имеем:

$$N \sin \beta = F \cos \gamma (\cos \beta - \sigma) \text{ и } (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho = 0;$$

последнее противоречит здравому смыслу.

Исследуем случай  $\sin \alpha = \sin \gamma = 0$ . Перепишем снова верхнее из соотношений (11)

$$F \cos \alpha \cos \gamma (\sigma - \cos \beta) + (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho + N \cos \alpha \sin \beta = 0 \quad (13)$$

Это условие в сумме с двумя нетривиальными условиями из (10) образуют систему относительно трех неизвестных. Обратимся к системе (10). Легко видеть, что автоматически удовлетворяется среднее из соотношений в (10), а верхнее - слегка упрощается

$$m\Omega^2(\rho + l \cos \alpha \sin \beta) - N \cos \alpha \sin \beta + F \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 0$$

Эти последние два соотношения можно почленно сложить, в результате имеем

$$m\Omega^2(\rho + l \cos \alpha \sin \beta) + (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho + F \sigma \cos \alpha \cos \gamma = 0 \quad (14)$$

Из (14) выразим величину  $F \cos \gamma$

$$F \cos \gamma = -[m\Omega^2(\rho \cos \alpha + l \sin \beta) + (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho \cos \alpha] / \sigma$$

и подставим это в (13). Домножив (13) предварительно на  $\cos \alpha$ , имеем

$$-[m\Omega^2(\rho \cos \alpha + l \sin \beta) + (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho \cos \alpha](\sigma - \cos \beta) / \sigma + \\ + M\Omega^2 \rho \cos \alpha + N \sin \beta = 0$$

или

$$m\Omega^2(\rho \cos \alpha + l \sin \beta)(\sigma - \cos \beta) / \sigma - \\ - (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho \cos \beta \cos \alpha / \sigma = N \sin \beta$$

Осталось все это подставить в последнее из неучтенных – нижнее условие в (10) с тем, чтобы получить уравнение для определения неизвестного угла  $\beta$

$$-mg + ctg\beta\{m\Omega^2(\rho \cos \alpha + l \sin \beta)(\sigma - \cos \beta) / \sigma - \\ (1 + j)M\Omega^2 \rho \cos \alpha \cos \beta / \sigma\} - \sin \beta / \sigma[m\Omega^2(\rho \cos \alpha + l \sin \beta) + \\ + (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho \cos \alpha] = 0$$

Избавимся от  $\sin \beta$  в знаменателе  $ctg\beta$  и  $\sigma$  в знаменателе другого члена

$$-mg\sigma \sin \beta + m\Omega^2 \sigma \cos \beta(\rho \cos \alpha + l \sin \beta) - \\ - \cos^2 \beta[m\Omega^2(\rho \cos \alpha + l \sin \beta) + (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho \cos \alpha] - \\ - \sin^2 \beta \cdot [m\Omega^2(\rho \cos \alpha + l \sin \beta) + (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho \cos \alpha] = 0$$

Приводя подобные члены, имеем окончательно

$$-mg\sigma \sin \beta + m\Omega^2(\sigma \cos \beta - 1)(\rho \cos \alpha + l \sin \beta) = \\ = (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho \cos \alpha \quad (15)$$

Уравнение (15) всегда имеет решение при достаточно малых величинах  $\Omega$ . В общем случае сказать что-либо о существовании и харак-

тере его решений трудно, поскольку уравнение содержит фактически тригонометрические функции одинарного и двойного угла  $\beta$ . Подстановкой через тангенс половинного угла задача сводится к поиску корней полинома 4-го порядка. В реальных условиях радиус  $\rho$  много больше  $l$  и потому решения уравнения (15) должны быть близки к решениям более простого уравнения с одинарным углом  $\beta$

$$-mg\sigma \sin \beta + m\Omega^2(\sigma \cos \beta - 1)\rho \cos \alpha = (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho \cos \alpha \quad (16)$$

Уравнение же (16) имеет решения по  $\beta$  в случае

$$|m\Omega^2 \rho + (1 + j) \cdot M\Omega^2 \rho| \leq m\sigma \sqrt{\rho^2 \Omega^4 + g^2}$$

Данное условие выполняется, во всяком случае, при достаточно малых величинах  $\Omega$ , когда

$$|m + (1 + j)M| \leq m\sqrt{1 + (g / \rho \Omega^2)^2}$$

Уравнение (15) с учетом возможности разных знаков у  $\cos \alpha = \pm 1$ , в принципе, может иметь до восьми решений по углу  $\beta$ . За счет двух комбинаций по  $\cos \gamma = \pm 1$ , от которого зависит выбор  $F$  и  $N$ , может возникнуть до 16-ти качественно различных типов решений. Однако, в большинстве случаев эти решения либо отсутствуют, либо «налагаются» друг на друга.

Для примера рассмотрим данные численного исследования задачи в случае:

$$M = 10 \text{ кг}, m = 1 \text{ кг}, R = 1 \text{ м}, l = 0.75 \text{ м}, \rho = 10 \text{ м}, \Omega = 5 \text{ град/с}$$

В этом случае существуют два решения, причем материальная точка располагается в плоскости  $(XZ)$  и имеет координаты  $(x_m, z_m)$  смещения от центра сферы, а управляющая сила  $(F_x, F_z)$  также имеет проекции только на оси  $(XZ)$ :

$$x_m = -0.1107 \text{ м}, z_m = -0.7418 \text{ м}, F_x = -1.505 \text{ Н}, F_z = 0.2246 \text{ Н и}$$

$$x_m = -0.1222 \text{ м}, z_m = -0.7399 \text{ м}, F_x = -1.5015 \text{ Н}, F_z = 0.2479 \text{ Н}$$

Здесь таких решений сразу два – одно вблизи наинизшей точки сферы, другое – наивысшей. Последнее, естественно, реализуемо только, если полость представляет собой «узкий» канал, способный удерживать грузик от падения вниз. Своеобразно в данных примерах и действие управляющей силы, которая как бы стремится поднимать материальную точку вверх:  $F_z > 0$ .

Формальное исследование условия (15), как уравнения для определения угла  $\beta$  при наличии ряда свободных параметров, показывает,

что существенную роль здесь в смысле качественной картины движения играет ситуация, когда решением уравнения (15) является  $\sin \beta = 0$ , т.е. когда

$$m(\sigma \cos \beta - 1) = (1 + j)M, \quad \cos \beta = \pm 1 \quad (17)$$

Точнее, условие (17) (при  $\sigma \leq 1$ ) является своеобразной границей (типа гринвичского меридиана): если  $m(\sigma - 1) \leq (1 + j)M$ , то материальная точка располагается в «западном» полушарии сферы ввиду  $\cos \alpha = -1$ , т.е. ближе к оси вращения  $Z$ ; если же в неравенстве обратный знак (что, вообще говоря, нереально и требует наличия полости существенно вне тела сферы из-за  $l > R$ ; здесь  $\sigma > 1$ ), то – в «восточном».

В разделе «вращение с верчением» осталось рассмотреть случай  $\sin \beta = 0$ . Грузик находится или в наинизшем, или наивысшем возможном положении. В этом случае  $\sin(\gamma + \alpha \cdot \cos \beta) = 0$  ввиду среднего из соотношений в (10). Обозначим через  $\varepsilon = \pm 1$  величину  $\cos(\gamma + \alpha \cdot \cos \beta)$  и перепишем снова все оставшиеся, нетривиальные условия полной системы 9-ти уравнений (10)-(12) стационарного режима

$$\begin{aligned} m\Omega^2 \rho + F\varepsilon \cdot \cos \beta &= 0, \quad N \cos \beta = mg, \quad S + M\Omega^2 \rho - \\ - F\varepsilon \cdot \cos \beta &= 0, \quad T = 0, \quad -SR + F\varepsilon l + J\rho\Omega^2 / R = 0 \end{aligned}$$

Очевидно, надо считать, что  $\varepsilon = -\cos \beta \cdot \operatorname{sgn} F$ : в противном случае первое же из соотношений противоречиво. Теперь 1-е, 3-е и 5-е условия переходят в

$$\begin{aligned} m\rho\Omega^2 &= |F|, \quad S + M\rho\Omega^2 + |F| = 0, \\ -SR - \cos \beta |F| l + J\rho\Omega^2 / R &= 0 \end{aligned}$$

В результате, полагая  $J = jMR^2$ , приходим к соотношению  $(1 + j)MR^2 + mR^2 - mRl \cos \beta = 0$

Полученное условие повторяет найденное ранее, мягко говоря, мало реальное условие (17). Углы  $\alpha, \gamma$  при этом должны быть подобраны так, чтобы  $\sin(\alpha \cdot \cos \beta + \gamma) = 0$ ; и все это уже, не говоря о том, что в механической системе должны быть соответствующим образом подобраны массы и линейные размеры.

Вращение с сопротивлением верчению. В реальной ситуации поверхность перемещения сопротивляется верчению сферы, в результате чего возникает противодействующий момент  $T_{URN}$  в нижнем из со-

отношений (12). Он может иметь разную природу: как постоянный член (типа момента сухого трения), так и содержать демпфирующие члены, зависящие от угловой скорости  $r$ . При равенстве нулю правой части в данном соотношении возникает некоторая стационарная скорость вращения  $r$  (равная по условию или нулю, или  $\Omega$ ). Однако, теперь совершенно необязательно считать, что  $\sin \gamma = 0$ .

Воспользуемся рядом соотношений системы (10)-(12). Из уравнений (12) заключаем

$$\begin{aligned} T &= F\sigma(\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma), \\ S &= F\sigma(\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma) + jM\rho\Omega^2 \\ \text{Из соотношений (11) получаем} \\ M(j+1)\Omega^2 \rho + N \cos \alpha \sin \beta + \\ &+ F[\cos \gamma \cos \alpha(\sigma - \cos \beta) + \sin \gamma \sin \alpha(1 - \sigma \cos \beta)] = 0, \\ F[\sin \alpha \cos \gamma(\sigma - \cos \beta) + \sin \gamma \cos \alpha(\sigma \cos \beta - 1)] + \\ &+ N \sin \alpha \sin \beta = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Т.е., в частности,

$$\begin{aligned} N \sin \alpha \sin \beta &= F[-\sin \alpha \cos \gamma(\sigma - \cos \beta) - \\ &- \sin \gamma \cos \alpha(\sigma \cos \beta - 1)] \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь из среднего соотношения в (10) заключаем, что

$$\begin{aligned} m\Omega^2 l \sin \alpha \sin \beta + F[\sin \alpha \cos \gamma(\sigma - \cos \beta) + \sin \gamma \cos \alpha(\sigma \cos \beta - 1) + \\ + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha] = 0 \end{aligned}$$

или

$$m\Omega^2 l \sin \alpha \sin \beta + F\sigma(\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) = 0$$

Окончательно

$$m\Omega^2 R \sin \alpha \sin \beta = -F(\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \quad (20)$$

С другой стороны, умножая в (18) верхнее соотношение на  $\sin \alpha$ , а нижнее на  $-\cos \alpha$  и складывая их, имеем

$$\begin{aligned} M(j+1)\Omega^2 \rho \sin \alpha + F \sin \alpha [\cos \gamma \cos \alpha(\sigma - \cos \beta) + \\ + \sin \gamma \sin \alpha(1 - \sigma \cos \beta)] - F \cos \alpha [\sin \alpha \cos \gamma(\sigma - \cos \beta) + \\ + \sin \gamma \cos \alpha(\sigma \cos \beta - 1)] = 0, \end{aligned}$$

$$M(j+1)\Omega^2 \rho \sin \alpha + F[-\cos 2\alpha \sin \gamma(\sigma \cos \beta - 1)] = 0$$

Окончательно

$$M(j+1)\Omega^2\rho\sin\alpha = F(\sigma\cos\beta - 1)\cos 2\alpha\sin\gamma \quad (21)$$

Попутно заметим, что условия (20) и (21) автоматически выполняются при  $\sin\alpha = \sin\gamma = 0$ .

Найдем теперь значение  $-N\cos\alpha\sin\beta$  из (18) и подставим его в верхнее соотношение (10)

$$\begin{aligned} M(j+1)\Omega^2\rho + F[\cos\gamma\cos\alpha(\sigma - \cos\beta) + \\ + \sin\gamma\sin\alpha(1 - \sigma\cos\beta)] = -N\cos\alpha\sin\beta, \\ m\Omega^2(\rho + l\cos\alpha\sin\beta) + F(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) + \\ + M(j+1)\Omega^2\rho + F[\cos\gamma\cos\alpha(\sigma - \cos\beta) + \\ + \sin\gamma\sin\alpha(1 - \sigma\cos\beta)] = 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} m\Omega^2(\rho + l\cos\alpha\sin\beta) + M(j+1)\rho\Omega^2 = \\ = F\sigma(\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\gamma\cos\alpha) \end{aligned} \quad (22)$$

Неиспользованным осталось только нижнее из соотношений (10)

$$N\cos\beta + F\sin\beta\cos\gamma - mg = 0$$

Поскольку согласно (19)

$$\begin{aligned} N\cos\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \cdot F[-\sin\alpha\cos\gamma(\sigma - \cos\beta) - \\ - \sin\gamma\cos\alpha(\sigma\cos\beta - 1)] \end{aligned}$$

то, избавляясь от знаменателя  $\sin\alpha\sin\beta$ , его можно представить в виде

$$\begin{aligned} F\cos\beta[-\sin\alpha\cos\gamma(\sigma - \cos\beta) - \sin\gamma\cos\alpha(\sigma\cos\beta - 1)] + \\ + F\sin\alpha\sin^2\beta\cos\gamma - mg\sin\alpha\sin\beta = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$-mg\sin\alpha\sin\beta = -F(1 - \sigma\cos\beta)(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma)$$

Итак, все свелось к соотношениям (19)-(23) для 4-х неизвестных  $F, \alpha, \beta, \gamma$ . Прежде всего, обращает на себя внимание определенное сходство условий (20) и (23). Подставляя в (23) выражение  $-F(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma)$  из (20), получаем

$$-mg\sin\alpha\sin\beta = m\Omega^2 R(1 - \sigma\cos\beta)\sin\alpha\sin\beta,$$

$$m[g + \Omega^2 R(1 - \sigma\cos\beta)]\sin\alpha\sin\beta = 0$$

т.е.

$$\sin\alpha\sin\beta = 0 \quad (24)$$

поскольку реальное  $\sigma \leq 1$ . (В «нереальном» случае  $\sigma > 1$  угол  $\beta$  определяется; далее для нахождения неизвестных  $F, \alpha, \gamma$  следует исследовать систему условий (20)-(22).) Условие  $\sin\beta = 0$ , вытекающее из (24), ранее фактически уже исследовалось; остается рассмотреть случай  $\sin\alpha = 0$ . Условия (20) и (21) тогда переходят в

$$F\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma = 0, F(\sigma\cos\beta - 1)\sin\gamma = 0$$

При  $F \neq 0$  они могут иметь место одновременно, если только  $\sin\gamma = 0$ , т.е. опять все сводится к рассмотренному ранее случаю  $\sin\alpha = \sin\gamma = 0$ , который физически означает, что грузик находится в плоскости  $(XZ)$ , в этой же плоскости действует и управляющая сила  $F$ , для нахождения модуля которой может быть использовано, например, условие (22). Угол  $\beta$  определяется предварительно из условия (15). Реакция полости  $N$  после этого находится из верхнего соотношения (18).

Заметим, что при  $\sin\gamma = 0$  линия действия управляющей силы  $F$  проходит через ось  $OZ$  и потому в правая часть нижнего условия (12) содержит единственный член – момент сил сопротивления верчению  $TURN \equiv 0$ . В силу этого может поддерживаться постоянная скорость верчения  $r$ . Правда, вряд ли такое движение можно считать движением с сопротивлением верчению.

Исследование устойчивости стационарного движения по окружности.

Нетрудно показать, что уравнения в вариациях около режимов стационарного движения  $\alpha = 0, \sin\gamma = 0$  при постоянном управлении представимы в виде

$$\begin{aligned} ml\cos\beta \cdot \delta\ddot{\beta} &= m\Omega^2(\delta\xi + l\delta\beta\cos\beta) - \delta N\sin\beta - \\ &- N\delta\beta\cos\beta - F\delta\beta\sin\beta\cos\gamma + 2m\Omega l\delta\dot{\alpha}\sin\beta, \\ ml\sin\beta \cdot \delta\ddot{\alpha} &= m\Omega^2(\delta\eta + l\delta\alpha\sin\beta) - N\delta\alpha\sin\beta + \\ &+ F\delta\alpha\cos\beta\cos\gamma - 2m\Omega l\delta\dot{\beta}\cos\beta, \\ ml\sin\beta \cdot \delta\ddot{\beta} &= \delta N\cos\beta - N\delta\beta\sin\beta + F\delta\beta\cos\beta\cos\gamma, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
M\delta\ddot{\xi} &= jM(\Omega\delta\dot{\xi} - \delta\ddot{\eta}) - M\Omega^2\delta\xi + \delta N \sin \beta + \\
&+ N\delta\beta \cos \beta + F\delta\beta \sin \beta \cos \gamma, \\
M\delta\ddot{\eta} &= -jM(\delta\ddot{\xi} + \Omega\delta\dot{\eta}) + F\sigma \cos \gamma \delta\alpha - M\Omega^2\delta\eta + \\
&+ N\delta\alpha \sin \beta - F\delta\alpha \cos \beta \cos \gamma
\end{aligned} \tag{26}$$

Соотношения (25), (26) представляют собой систему пяти уравнений с постоянными коэффициентами относительно пяти переменных  $\delta\xi, \delta\eta, \delta\alpha, \delta\beta, \delta N$ . При этом мы пренебрегаем вариациями углов ориентации сферы  $\psi, \theta, \varphi$ , поскольку сфера важна, прежде всего, как геометрический объект. Управляющая сила  $F$  считается неизменной, она не содержит никаких элементов отслеживания – типа обратной связи. Приведенная система в отличие от плоских стационарных режимов содержит в правых частях вариации  $\delta\xi, \delta\eta$  и их первые производные, а потому, теоретически, стационарный режим движения по окружности может обладать свойством простой устойчивости.

Наиболее трудоемким является вывод уравнений (26). Они получаются при варьировании уравнений вращения сферы

$$\begin{aligned}
J\dot{p} &= TR + Fl(-\sin \alpha \cos \gamma) + J\Omega q, \\
J\dot{q} &= -SR + Fl \cos \alpha \cos \gamma - Jp\Omega
\end{aligned}$$

вместе с условиями ее непрональзывания

$$\dot{\xi} + \rho\Omega + pR = 0, \quad \dot{\eta} - Rq = 0$$

и подстановки величин  $\delta S, \delta T$  в уравнения движения центра масс сферы.

Несколько преобразуем систему соотношений (25), (26). Выражая величину  $\delta N$  из последнего уравнения (25) и подставляя это в верхнее соотношение, получаем

$$ml\delta\ddot{\beta} = m\Omega^2(\cos \beta\delta\xi + l \cos^2 \beta\delta\beta) - N\delta\beta + 2ml\Omega \sin \beta \cos \beta\delta\dot{\alpha} \tag{27}$$

Складывая же верхние соотношения в (25) и (26), после сокращения ряда членов имеем

$$\begin{aligned}
ml \cos \beta\delta\ddot{\beta} + M\delta\ddot{\xi} &= m\Omega^2(\delta\xi + l \cos \beta\delta\beta) + 2ml\Omega \sin \beta\delta\dot{\alpha} + \\
&+ jM(\Omega\delta\dot{\xi} - \delta\ddot{\eta}) - M\Omega^2\delta\xi
\end{aligned} \tag{28}$$

В результате, учитывая среднее соотношение (25), последнее соотношение (26), а также вновь полученные уравнения (27) и (28), получаем следующую систему восьмого порядка с постоянными коэффициентами относительно

$$\begin{aligned}
a_{24} &= \frac{jMl \sin \beta}{\Omega^2}, \quad a_{23} = \frac{-2Ml \sin \beta}{\Omega}, \\
a_{22} &= jMl \sin \beta + \frac{M \sin \beta}{m\Omega^2}[N - F \cos \gamma], \quad a_{21} = -2Ml\Omega \sin \beta, \\
a_{20} &= 0, \\
ml \sin \beta \cdot \delta\ddot{\alpha} &= m\Omega^2(\delta\eta + l\delta\alpha \sin \beta) - N\delta\alpha \sin \beta + \\
&+ F\delta\alpha \cos \beta \cos \gamma - 2m\Omega l\delta\dot{\beta} \cos \beta, \\
M\delta\ddot{\eta} &= -jM(\delta\ddot{\xi} + \Omega\delta\dot{\eta}) + F\sigma \cos \gamma \delta\alpha - M\Omega^2\delta\eta + \\
&+ N\delta\alpha \sin \beta - F\delta\alpha \cos \beta \cos \gamma, \\
ml\delta\ddot{\beta} &= m\Omega^2(\cos \beta\delta\xi + l \cos^2 \beta\delta\beta) - N\delta\beta + 2ml\Omega \sin \beta \cos \beta\delta\dot{\alpha}, \\
ml \cos \beta\delta\ddot{\beta} + M\delta\ddot{\xi} &= m\Omega^2(\delta\xi + l \cos \beta\delta\beta) + 2ml\Omega \sin \beta\delta\dot{\alpha} + \\
&+ jM(\Omega\delta\dot{\xi} - \delta\ddot{\eta}) - M\Omega^2\delta\xi
\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, заключаем, что

$$\begin{aligned}
\delta\xi &= \frac{1}{m\Omega^2 \cos \beta} \{ml\delta\ddot{\beta} - m\Omega^2 l \cos^2 \beta\delta\beta + N\delta\beta - 2ml\Omega \sin \beta \cos \beta\delta\dot{\alpha}\}, \\
\delta\eta &= \frac{1}{m\Omega^2} \{ml \sin \beta\delta\ddot{\alpha} - ml\Omega^2 \sin \beta\delta\alpha + N \sin \beta\delta\alpha - \\
&- F \cos \beta \cos \gamma \delta\alpha + 2ml\Omega \cos \beta\delta\dot{\beta}\}
\end{aligned}$$

Подставим полученное сначала во второе, а затем в четвертое соотношение последней системы; в результате возникнет система того же 8-го порядка, но относительно двух переменных  $\delta\alpha, \delta\beta$

$$\begin{aligned}
&\frac{M}{m\Omega^2} \{ \sin \beta [ml\delta\alpha^{IV} - ml\Omega^2\delta\ddot{\alpha} + N\delta\ddot{\alpha}] - F \cos \beta \cos \gamma \delta\ddot{\alpha} + \\
&+ 2ml\Omega \cos \beta\delta\ddot{\beta} \} = \frac{-jM}{m\Omega^2 \cos \beta} \{ ml\delta\beta^{IV} - m\Omega^2 l \cos^2 \beta\delta\ddot{\beta} + \\
&+ N\delta\ddot{\beta} - 2ml\Omega \sin \beta \cos \beta\delta\ddot{\alpha} \} - \frac{jM\Omega}{m\Omega^2} \{ \sin \beta [ml\delta\ddot{\alpha} - ml\Omega^2\delta\dot{\alpha} + \\
&+ N\delta\dot{\alpha}] - F \cos \beta \cos \gamma \delta\dot{\alpha} + 2ml\Omega \cos \beta\delta\dot{\beta} \} + \\
&+ [F\sigma \cos \gamma + N \sin \beta - F \cos \beta \cos \gamma] \delta\alpha - \frac{M\Omega^2}{m\Omega^2} \cdot \\
&\cdot \{ \sin \beta [ml\delta\ddot{\alpha} - ml\Omega^2\delta\dot{\alpha} + N\delta\dot{\alpha}] - F \cos \beta \cos \gamma \delta\dot{\alpha} + 2ml\Omega \cos \beta\delta\dot{\beta} \},
\end{aligned}$$

т.е.

$$a_{14}\delta\alpha^{IV} + a_{13}\delta\ddot{\alpha} + a_{12}\delta\ddot{\alpha} + a_{11}\delta\dot{\alpha} + a_{10}\delta\alpha + \\ + b_{14}\delta\beta^{IV} + b_{13}\delta\ddot{\beta} + b_{12}\delta\ddot{\beta} + b_{11}\delta\dot{\beta} + b_{10}\delta\beta = 0$$

где

$$a_{14} = \frac{Ml \sin \beta}{\Omega^2}, a_{12} = \frac{M}{m\Omega^2} [N \cos \beta - F \cos \beta \cos \gamma], \\ a_{11} = \frac{jM}{m\Omega} \{ \sin \beta [N - m\Omega^2] - F \cos \beta \cos \gamma \}, a_{13} = \frac{-jMl \sin \beta}{\Omega}, \\ a_{10} = -F \cos \gamma (\sigma - \cos \beta + \frac{M}{m} \cos \beta) + N \sin \beta (\frac{M}{m} - 1) - M\Omega^2 \sin \beta, \\ b_{14} = \frac{jMl}{\Omega^2 \cos \beta}, b_{12} = \frac{jM}{m\Omega^2 \cos \beta} (N - m\Omega^2 l \cos^2 \beta), \\ b_{13} = \frac{2Ml \cos \beta}{\Omega}, b_{11} = 2M\Omega \cos \beta, b_{10} = 0$$

Подставляем все в четвертое соотношение

$$ml \cos \beta \delta\ddot{\beta} + \frac{M}{m\Omega^2 \cos \beta} \{ ml\delta\beta^{IV} - m\Omega^2 l \cos^2 \beta \delta\ddot{\beta} + N\delta\ddot{\beta} - \\ - 2m\Omega \sin \beta \cos \beta \delta\ddot{\alpha} \} = m\Omega^2 l \cos \beta \delta\beta + \frac{(m-M)\Omega^2}{m\Omega^2 \cos \beta} \{ ml\delta\ddot{\beta} - \\ - m\Omega^2 l \cos^2 \beta \delta\beta + N\delta\beta - 2m\Omega \sin \beta \cos \beta \delta\dot{\alpha} \} + \\ + 2m\Omega \sin \beta \delta\dot{\alpha} + \frac{jM\Omega}{m\Omega^2 \cos \beta} \cdot \{ ml\delta\ddot{\beta} - m\Omega^2 l \cos^2 \beta \delta\ddot{\beta} + N\delta\ddot{\beta} - \\ - 2m\Omega \sin \beta \cos \beta \delta\ddot{\alpha} \} - \frac{jM}{m\Omega^2} \{ ml \sin \beta \delta\alpha^{IV} + 2m\Omega \cos \beta \delta\ddot{\beta} + \\ + \sin \beta \delta\ddot{\alpha} \cdot [-m\Omega^2 + N - F \cos \beta \cos \gamma] \},$$

т.е.

$$a_{24}\delta\alpha^{IV} + a_{23}\delta\ddot{\alpha} + a_{22}\delta\ddot{\alpha} + a_{21}\delta\dot{\alpha} + a_{20}\delta\alpha + \\ + b_{24}\delta\beta^{IV} + b_{23}\delta\ddot{\beta} + b_{22}\delta\ddot{\beta} + b_{21}\delta\dot{\beta} + b_{20}\delta\beta = 0 \\ a_{24} = \frac{jMl \sin \beta}{\Omega^2}, a_{23} = \frac{-2Ml \sin \beta}{\Omega}, a_{21} = -2M\Omega \sin \beta, \\ a_{22} = jMl \sin \beta + \frac{M \sin \beta}{m\Omega^2} [N - F \cos \gamma], a_{20} = 0,$$

$$b_{22} = \frac{MN}{m\Omega^2 \cos \beta} + l(m-M) [\cos \beta - \frac{1}{\cos \beta}], b_{24} = \frac{Ml}{\Omega^2 \cos \beta}, \\ b_{21} = \frac{jM}{m\Omega \cos \beta} (m\Omega^2 \cos^2 \beta - N), b_{23} = \frac{jMl}{\Omega} (2 \cos \beta - \frac{1}{\cos \beta}), \\ b_{20} = \frac{(m-M)}{m \cos \beta} (m\Omega^2 \cos^2 \beta - N) - m\Omega^2 \cos \beta$$

Проведенное численное исследование характеристического уравнения для системы

$$a_{14}\delta\alpha^{IV} + a_{13}\delta\ddot{\alpha} + a_{12}\delta\ddot{\alpha} + a_{11}\delta\dot{\alpha} + a_{10}\delta\alpha + \\ + b_{14}\delta\beta^{IV} + b_{13}\delta\ddot{\beta} + b_{12}\delta\ddot{\beta} + b_{11}\delta\dot{\beta} + b_{10}\delta\beta = 0 \\ a_{24}\delta\alpha^{IV} + a_{23}\delta\ddot{\alpha} + a_{22}\delta\ddot{\alpha} + a_{21}\delta\dot{\alpha} + \\ + b_{24}\delta\beta^{IV} + b_{23}\delta\ddot{\beta} + b_{22}\delta\ddot{\beta} + b_{21}\delta\dot{\beta} + b_{20}\delta\beta = 0$$

показало, что устойчивость здесь, по-видимому, если и возможна, то в очень узкой полосе. Т.е. как правило, для стабилизации процесса все же необходимо введение обратных связей.

Работа выполнена при финансовой поддержки гранта РФФИ №12-01-00800а.

## Литература

1. A. Halme, T. Schonberg, Y. Wang. Motion control of a spherical mobile robot. AMC'-96-MIE.
2. S. Brattacharya, S.K. Agrawal. Design, experiments and motion plannings of a spherical rolling robot. // Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, CA, April 2000.
3. R. Mukherjee, M.A. Minor, J.T. Purkrushpan. Simple motion planning strategies for spherobot: a spherical mobile robot. // Proc. of the 38-th Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.



## УДАР КАТЯЩЕГОСЯ ДИСКА О ПРЕГРАДУ

Исследуется соударение катящегося по поверхности круглого диска с препятствием. Показано, что в результате абсолютно неупругого удара диск отрывается от опорной поверхности, по которой он катился до удара (сходит со связи). Найдено выражение для скорости диска после удара. Любопытно, что после удара о вертикальную стенку диск в первый момент покатится по ней вверх. Рассматриваемая задача может представить интерес при изучении движения моноцикла, сферического робота.

**Введение.** Проблемы ударного взаимодействия твердых тел с окружающей средой рассматриваются в ряде исследований. Значительный интерес представляют задачи, в которых описывается ударное взаимодействие при наличии односторонних связей, накладываемых на движущиеся тела [1-4]. В работах [5-8] изучаются задачи, касающиеся ударов переносимых ног шагающего аппарата об опору.

В настоящей статье рассматривается катящийся по поверхности без проскальзывания диск в момент, когда он наталкивается на препятствие. Исследуется вопрос о возможном поведении диска после удара о преграду. Этот вопрос может представить интерес при изучении движения моноцикла [9], сферического робота [10].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим абсолютно твердый круглый диск радиуса  $r$ , катящийся без проскальзывания по опорной прямой  $OX$  (рис. 1) слева направо. Плоскость диска остается все время вертикальной – он располагается в вертикальной плоскости  $XOY$ . На катящийся диск наложена односторонняя связь (он может оторваться от опоры), кроме того, считается, что трение в точке контакта исключает его проскальзывание. Иначе говоря, на диск наложены две связи. Обозначим через  $C$  центр диска, через  $\varphi$  – угол его поворота против часовой стрелки, отсчитываемый от какого-то начального направления (рис. 1).

Допустим, что в своем плоском движении слева направо диск в момент времени  $t = 0$  наталкивается на препятствие, которое изображено на рис. 1 справа от диска в виде прямоугольника. На рис. 1 изображен момент удара диска об угол препятствия в точке  $B$ . Контакт диска с препятствием предполагаем точечным. Через  $A$  обозначим точку опоры (прямой  $OX$ ), в которой диск касается её при ударе. Через  $B_K$  обозначим точку диска на его ободе, которая в момент удара касается точки  $B$ . Удар будем считать *абсолютно неупругим*, т.е. предположим, что

скорость  $v_{B_K}$  точки  $B_K$  диска, касающейся препятствия, после удара, при  $t = +0$ , обращается в ноль:

$$v_{B_K}(+0) = 0. \quad (1.1)$$

Равенство (1.1) означает, в частности, что диск при ударе не проскальзывает относительно точки  $B$ . Таким образом, на диск в точке  $B$  накладываются две связи. Если после удара диск оторвется от опоры  $OX$  (покинет связь), то он начнёт вращаться вокруг точки  $B$ , во всяком случае, в первое мгновение после удара.

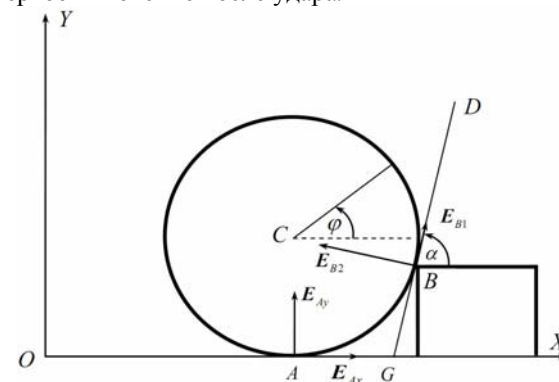


Рис. 1.

Пусть  $\dot{\varphi}(-0)$  – угловая скорость диска перед ударом о преграду, т.е. при  $t = -0$ . Если касание диском точки  $B$  происходит с ненулевой скоростью, то

$$\dot{\varphi}(-0) < 0, \quad (1.2)$$

поскольку диск перед ударом катится слева направо, вращаясь по часовой стрелке. Скорость центра диска  $C$  перед ударом  $v_C = -\dot{\varphi}(-0)r$ .

Компоненты  $\dot{x}_C(-0)$  и  $\dot{y}_C(-0)$  скорости точки  $C$  перед ударом равны:

$$\dot{x}_C(-0) = -r\dot{\varphi}(-0), \quad \dot{y}_C(-0) = 0. \quad (1.3)$$

Пусть  $\dot{\varphi}(+0)$  – угловая скорость диска после удара, т.е. при  $t = +0$ . Если диск после удара не покидает опору  $OX$  (останавливается), то

$$\dot{\varphi}(+0) = 0, \quad \dot{x}_C(+0) = \dot{y}_C(+0) = 0. \quad (1.4)$$

Через  $GD$  на рис. 1 обозначена касательная к ободу диска в точке  $B_K$ . Угол между осью  $OX$  и касательной  $GD$  (см. рис. 1) обозначим через  $\alpha$ . Будем рассматривать такие препятствия, для которых этот угол удовлетворяет неравенству

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1.5)$$

Если  $\dot{\phi}(+0) \neq 0$ , то

$$\dot{\phi}(+0) < 0, \quad \dot{x}_C(+0) = -\dot{\phi}(+0)r \cos \alpha, \quad \dot{y}_C(+0) = -\dot{\phi}(+0)r \sin \alpha. \quad (1.6)$$

После удара диска о преграду он может остаться на опоре  $OX$  либо покинуть ее, поскольку связь, на которой находится диск до удара, является неудерживающей (односторонней). Покажем, что при условиях (1.5) диск покидает опору  $OX$ .

**2. Решение задачи.** В момент удара к диску в точках  $A$  и  $B$  прикладываются в виде импульсных воздействий силы реакции опоры (связи)  $\mathbf{R}_A = \mathbf{E}_A \delta(t)$  и  $\mathbf{R}_B = \mathbf{E}_B \delta(t)$ . Здесь  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака, а  $\mathbf{E}_A$  и  $\mathbf{E}_B$  – интенсивности импульсов. Вектор  $\mathbf{E}_A$  разложим на две составляющие –  $\mathbf{E}_{Ax}$  и  $\mathbf{E}_{Ay}$ , первая из которых направлена вдоль оси  $OX$ , а вторая – вдоль оси  $OY$ . Вектор  $\mathbf{E}_B$ , направленный влево от прямой  $GD$ , разложим на компоненты  $\mathbf{E}_{B1}$  и  $\mathbf{E}_{B2}$ , первая из которых направлена вдоль касательной  $GD$ , а вторая – перпендикулярно ей влево (см. рис. 1).

Движение диска должно быть совместимо с наложенными на него в точках  $A$  и  $B$  неудерживающими связями. Это означает, что должны удовлетворяться неравенства

$$E_{Ay} \geq 0, \quad E_{B2} \geq 0. \quad (2.1)$$

Перед ударом диск катится по опоре без проскальзывания, поэтому скорость точки  $B_K$  диска перед ударом о преграду перпендикулярна отрезку  $AB$ , соединяющему точки контакта  $A$  и  $B$ . Проекция вектора этой скорости на прямую  $GD$  направлена к точке  $G$ . Поэтому естественно считать, что компонента  $\mathbf{E}_{B1}$  реакции  $\mathbf{E}_B$  направлена вдоль прямой  $GD$  в противоположном направлении, т.е. от точки  $B$  к точке  $D$  (см. рис. 1):

$$E_{B1} > 0. \quad (2.2)$$

Предположим, что центр масс диска находится в его центре  $C$ . Обозначим массу диска через  $m$ , его момент инерции относительно центра  $C$  через  $J$ .

Соотношения между скачками скоростей диска и интенсивностями импульсных реакций опоры, можно найти, выписав уравнения изменения количества движения диска в проекциях на оси абсцисс и ординат,

а также уравнение, описывающее изменение момента количества движения диска относительно его центра в момент удара

$$m[\dot{x}_C(+0) - \dot{x}_C(-0)] = E_{Ax} + E_{B1} \cos \alpha - E_{B2} \sin \alpha, \quad (2.3)$$

$$m[\dot{y}_C(+0) - \dot{y}_C(-0)] = E_{Ay} + E_{B1} \sin \alpha + E_{B2} \cos \alpha, \quad (2.4)$$

$$J[\dot{\phi}(+0) - \dot{\phi}(-0)] = r(E_{Ax} + E_{B1}). \quad (2.5)$$

Учитывая равенства (1.3), (1.6), перепишем уравнения (2.3), (2.4) в виде:

$$mr[\dot{\phi}(-0) - \dot{\phi}(+0) \cos \alpha] = E_{Ax} + E_{B1} \cos \alpha - E_{B2} \sin \alpha, \quad (2.6)$$

$$-mr\dot{\phi}(+0) \sin \alpha = E_{Ay} + E_{B1} \sin \alpha + E_{B2} \cos \alpha. \quad (2.7)$$

Допустим, что диск после удара остаётся на опоре без движения. При этом имеют место равенства (1.4), а уравнения (2.3) – (2.5) принимают вид:

$$mr\dot{\phi}(-0) = E_{Ax} + E_{B1} \cos \alpha - E_{B2} \sin \alpha, \quad (2.8)$$

$$0 = E_{Ay} + E_{B1} \sin \alpha + E_{B2} \cos \alpha, \quad (2.9)$$

$$-J\dot{\phi}(-0) = r(E_{Ax} + E_{B1}). \quad (2.10)$$

Разрешим уравнения (2.8) – (2.10) относительно величин  $E_{Ax}$ ,  $E_{B1}$ ,  $E_{B2}$ :

$$\begin{aligned} E_{Ax} &= \left[ -(J + mr^2 \cos \alpha) \dot{\phi}(-0) + rE_{Ay} \sin \alpha \right] / r(1 - \cos \alpha), \\ E_{B1} &= \left[ (J + mr^2) \dot{\phi}(-0) \cos \alpha - rE_{Ay} \sin \alpha \right] / r(1 - \cos \alpha), \\ E_{B2} &= \left[ -(J + mr^2) \dot{\phi}(-0) \sin \alpha + rE_{Ay} (1 - \cos \alpha) \right] / r(1 - \cos \alpha), \end{aligned} \quad (2.11)$$

Второе из соотношений (2.11) показывает, что при условиях (1.5) имеет место неравенство  $E_{B1} \leq 0$ , поскольку  $E_{Ay} \geq 0$ . Но неравенство  $E_{B1} \leq 0$  противоречит предположению (2.2). Следовательно, при условиях (1.5) диск после удара о преграду не может остаться на опоре.

Допустим теперь, что после удара диск покидает опорную поверхность  $OX$ . Будем предполагать, что при этом реакция в нижней точке диска  $A$  равна нулю

$$\mathbf{E}_A = 0 \quad (\mathbf{E}_{Ax} = 0, \mathbf{E}_{Ay} = 0). \quad (2.12)$$

Разрешая при условии (2.12) уравнения (2.5) – (2.7) относительно величин  $E_{B1}$ ,  $E_{B2}$  и  $\dot{\phi}(+0)$ , получаем

$$E_{B1} = -\frac{Jmr(1-\cos\alpha)}{J+mr^2}\dot{\phi}(-0), \quad (2.13)$$

$$E_{B2} = -mr\sin\alpha\dot{\phi}(-0), \quad (2.14)$$

$$\dot{\phi}(+0) = \frac{J+mr^2\cos\alpha}{J+mr^2}\dot{\phi}(-0). \quad (2.15)$$

Из неравенств (1.2), (2.13), (2.14) следует, что во всем диапазоне (1.5) значений угла  $\alpha$  и при любых ненулевых значениях угловой скорости  $\dot{\phi}(-0)$  имеют место неравенства

$$E_{B1} > 0, \quad E_{B2} > 0. \quad (2.16)$$

Неравенства (2.16) не противоречат условиям (2.1), (2.2). Что касается угловой скорости после удара  $\dot{\phi}(+0)$ , то, как следует из неравенств (1.2), (2.15), при условиях (1.5) она отрицательна:  $\dot{\phi}(+0) < 0$ .

Момент количества движения диска относительно его *подвижной* точки  $B_K$  перед ударом равен, как нетрудно убедиться,  $(J+mr^2\cos\alpha)\dot{\phi}(-0)$ . После удара точка  $B_K$  диска совпадает с точкой  $B$ , и ее скорость становится равной нулю (см. равенство (1.1)). Момент количества движения диска относительно *неподвижной* точки  $B$  после удара равен  $(J+mr^2)\dot{\phi}(+0)$ . Поэтому равенство (2.15) выражает условие, что момент количества движения относительно точки  $B_K$  диска во время удара не меняется (если имеет место условие (2.12)). Тем самым, равенство (2.15) можно получить непосредственно – без использования соотношений (2.5) – (2.7).

Итак, после удара о преграду, диск отрывается от опоры  $OX$  и вращается вокруг точки контакта  $B$ . Отрыв диска от опорной прямой происходит при любой, сколь угодно малой (по абсолютной величине) его угловой скорости до удара  $\dot{\phi}(-0)$ . Конечно, если величина  $|\dot{\phi}(-0)|$  «мала», то «малой» будет и величина  $|\dot{\phi}(+0)|$ . Возможно, при этом диск не сможет «перевалиться» через угловую точку  $B$  препятствия. Для возможности такого «переваливания» скорость  $|\dot{\phi}(+0)|$ , а значит и скорость  $|\dot{\phi}(-0)|$ , должна быть достаточно велика.

Угловая скорость диска после удара описывается выражением (2.15), которое представим в виде

$$\dot{\phi}(+0) = \gamma\dot{\phi}(-0), \quad (2.17)$$

где

$$\gamma = \frac{J+mr^2\cos\alpha}{J+mr^2} = \frac{j+\cos\alpha}{j+1} \left( j = \frac{J}{mr^2} \right). \quad (2.18)$$

Рассматривая коэффициент  $\gamma$  как функцию угла  $\alpha$ , заключаем, что этот коэффициент тем меньше, чем ближе угол  $\alpha$  к значению  $\pi/2$ , что естественно.

Если вся масса диска сосредоточена на его ободе, т.е. диск представляет собой колесо, то  $j=1$ ,  $\gamma=(1+\cos\alpha)/2$ . Тогда, например, при  $\alpha=\pi/2$  угловая скорость колеса после удара уменьшается в два раза. Если диск однородный, то  $j=1/2$ ,  $\gamma=(1+2\cos\alpha)/3$ ; в этом случае при  $\alpha=\pi/2$  угловая скорость диска после удара уменьшается в три раза. Значение  $J=mr^2$  ( $j=1$ ) – максимально возможное значение момента инерции диска. Из рассмотрения выражения (2.18) следует, что с уменьшением приведённого момента инерции  $j$  коэффициент  $\gamma$  строго монотонно уменьшается (при каждом фиксированном значении угла  $\alpha$ ). Если «почти» вся масса диска сосредоточена в его центре, то приведённый момент инерции  $j$  «близок» к нулю, а коэффициент  $\gamma$  «близок» к величине  $\cos\alpha$ . В этом случае при  $\alpha=\pi/2$  скорость диска после удара  $\dot{\phi}(+0)$  «близка» к нулю, т.е. диск в первый момент после удара будет «медленно» поворачиваться вокруг точки контакта  $B$ .

Пользуясь выражениями (2.13) и (2.14), можно определить ориентацию вектора  $E_B$ , характеризующего реакцию опоры в точке  $B$  при ударе диска. Вектор  $E_B$  (рис. 2) определяет линию действия ударного импульса. Обозначим через  $\beta$  угол между вектором  $E_B$  и его составляющей  $E_{B2}$ , направленной к центру диска, тогда

$$\tg\beta = \frac{E_{B1}}{E_{B2}} = \frac{j}{j+1} \tg\frac{\alpha}{2} \quad (2.19)$$

Отрезок  $AB$  наклонён к прямой  $OX$  под углом  $\alpha/2$ , при этом угол между вектором  $E_B$  и отрезком  $AB$  равен

$$\pi/2 - \alpha/2 + \beta = \pi/2 - \alpha/2 + \arctg\left(\frac{j}{j+1} \tg\frac{\alpha}{2}\right). \quad (2.20)$$

Таким образом, ориентация вектора  $E_B$  зависит не только от угла  $\alpha$ , но и от распределения масс в диске. Поскольку

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{j}{j+1}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\alpha}{2},$$

т.е. (см. (2.19)) угол  $\beta < \frac{\alpha}{2}$ , то угол (2.20) между вектором ударного импульса и отрезком  $AB$  меньше  $\pi/2$ , т.е. линия действия ударного импульса  $E_B$  не совпадает с линией, по которой направлена скорость  $v_{B_K}$  точки  $B_K$  диска до удара (см. рис. 2).

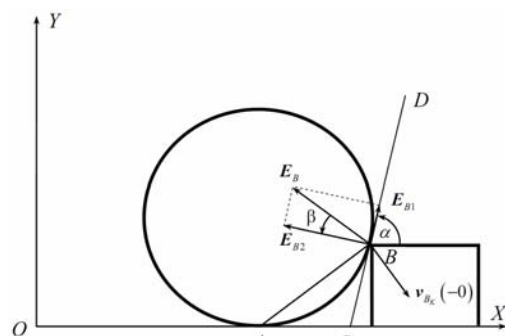


Рис. 2

Если вся масса диска сосредоточена на его ободе, то его момент инерции максимален –  $j=1$ , а угол между вектором  $E_B$  и отрезком  $AB$  принимает максимальное значение

$$\pi/2 - \alpha/2 + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right). \quad (2.21)$$

При каждой заданной величине  $\alpha$  значение угла между вектором  $E_B$  и отрезком  $AB$  лежит между нулём и значением (2.21).

Вместо задачи об ударе катящегося диска об угол  $B$  препятствия, можно рассматривать задачу об ударе диска об абсолютно шероховатую прямую  $GD$ , составляющую с осью  $OX$  тупой или прямой угол  $\alpha$ . Решение задачи об ударе о подобную прямую будет таким же, как и задачи об ударе об угловую точку  $B$  препятствия. Дело в том, что в случае абсолютно неупругого удара об абсолютно шероховатую прямую  $GD$  и отрыва диска от опоры  $OX$  точка  $B$  касания диска с прямой  $GD$  будет так же мгновенным центром скоростей, как и угловая точка

$B$  препятствия. При этом, как следует из предыдущего, диск после удара покатится по прямой  $GD$ .

Все приведенные выше рассуждения и выводы справедливы и в случае, когда диск до удара катится по горизонтальной прямой, и в случае, когда он катится по наклонной прямой. Дело в том, что сила тяжести в рассуждениях никак не участвует, поскольку она имеет конечную величину.

Если перед ударом диск катится по горизонтальной прямой и наталкивается на абсолютно шероховатую наклонную прямую, то после абсолютно неупругого удара он покатится по этой прямой и будет катиться по ней в течение некоторого промежутка времени после удара. Если диск наталкивается на *вертикальную* стенку, то после удара он покатится по ней *вверх*, во всяком случае, в первое после удара мгновение.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-07-00691-а, 12-01-00800-а).

## Литература

1. Леви-Чевита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Изд-во иностранной литературы. 1951.
2. Иванов А.П., Маркеев А.П. О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632-636.
3. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука. 1985.
4. Yildirim Hurmuzlu, Tai-Heng Chang. Rigid body collision of a special class of planar kinematic chains // IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern. 1992. V. 22. No. 5. P. 964-971.
5. Рубанович Е.М., Формальский А.М. Задача об ударе для некоторых трехзвенных механизмов // В кн.: Механика и управление роботами с элементами искусственного интеллекта (Под редакцией Д.Е.Охотимского). М.: Институт прикладной математики АН СССР. 1980. С. 22-34.
6. Рубанович Е.М., Формальский А.М. Некоторые вопросы динамики многосвязных систем, связанные с ударными явлениями. I, II // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 166-174; № 3. С. 125-133.
7. Формальский А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. –
8. Формальский А.М., Шевальеро К., Перра Б. Об ударном взаимодействии твердого тела с опорой // Вестник Моск. ун-та, серия «Математика, механика». 2000. № 1. С. 27-32.
9. Мартыненко Ю.Г., Кобрин А.И., Ленский А.В. Декомпозиция задачи управления мобильным одноколесным роботом с невозмущаемой гиросtabilизированной платформой // Доклады РАН. 2002. Т. 386. № 6. С. 767-769.
10. Halme, A., Schonberg, T., and Wang, Y. Motion Control of a Spherical Mobile Robot // Proc. AMC'96-MIE. 1996.

**О МГНОВЕННОМ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ И  
МГНОВЕННОМ СОСТОЯНИИ РАВНЫХ СКОРОСТЕЙ**

Анализируются понятия мгновенного поступательного движения и мгновенного состояния равных скоростей в применении к кинематике плоских механизмов.

Рассмотрим непоступательное движение плоской фигуры, при котором в какой-то момент времени скорости всех точек оказываются совпадающими по направлению и по величине (рис. 1).

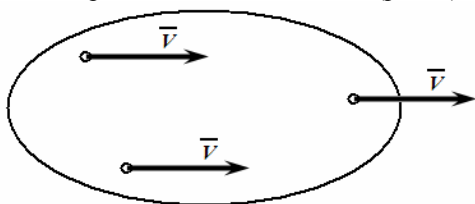


Рис. 1

В различных учебниках теоретической механики такое состояние фигуры называется по-разному. В учебнике Н.Н. Бухгольца «Основной курс теоретической механики» (1932 г.) оно называется так – мгновенное поступательное распределение скоростей. Такое определение полностью соответствует действительности. В нем ничего не говорится об ускорениях точек, а они могут быть различными.

В учебнике С.М. Тарга «Краткий курс теоретической механики» повторяется определение Н.Н. Бухгольца, но тут же добавляется, что такое движение можно назвать мгновенным поступательным движением, что не вполне соответствует действительности, так как при поступательном движении должны быть равны не только скорости всех точек, но и ускорения. Примеры мгновенного состояния равных скоростей есть во многих учебниках теоретической механики, а примеров мгновенного поступательного движения нет ни в одном учебнике. Это связано с тем, что кинематика плоских механизмов в подавляющем числе учебников представлена анализом только самых простых механизмов. Например, в сборнике заданий для курсовых работ по теоретической механике А.А. Яблонского самый сложный механизм является комбинацией кривошипно-шатунного механизма и шарнирного четырехзвенника.

Покажем, что наряду с мгновенным состоянием равных скоростей может иметь место и мгновенное поступательное движение. Для этого будем включать в рассмотрение также и другие кинематические пары.

Начнем с шарнирного четырехзвенника (рис. 2).

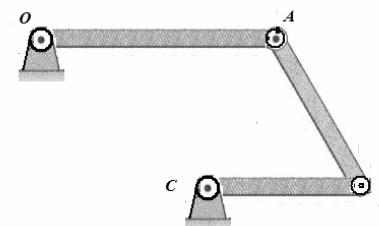


Рис. 2

При параллельности звеньев OA и CB скорости всех точек звена AB равны, а ускорения не равны. Называть движение звена AB в данный момент мгновенным поступательным движением не следует, так как оно является мгновенным состоянием равных скоростей, ускорения же точек звена AB различны. Для иллюстрации мгновенного поступательного движения изменим конструкцию механизма (рис 3.).

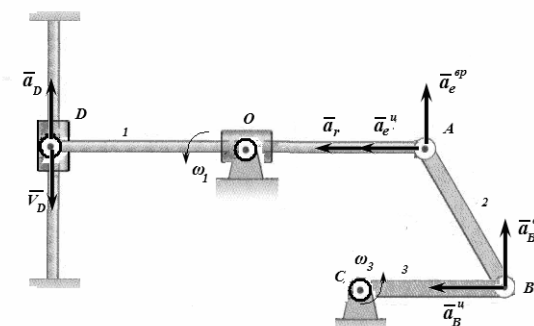


Рис. 3

Здесь изображен плоский механизм. Ползун D движется поступательно по вертикальной направляющей. Скорость и ускорение ползуна заданы. С ползуном D шарнирно связан шатун AD, O – вращающийся цилиндр. Шатун AD относительно цилиндра O движется поступательно. AB – второй шатун, BC – кривошип. Установим такие размеры

$$AO = OD = l; \quad BC = \frac{l}{2} \quad (1)$$

Докажем, что движение звена  $AB$  в данный момент времени есть мгновенное поступательное движение. То, что скорости всех точек этого звена равны и угловая скорость этого звена равна нулю, очевидно. Также очевидно, что угловая скорость звена  $BC$  равна удвоенной скорости звена  $AD$ . Найдем ускорения точек  $A$  и  $B$  и угловое ускорение звена  $AB$ . Свяжем с цилиндром  $O$  подвижную систему координат, которая вращается вокруг точки  $O$ . Движение звена  $AD$  разлагаем на переносное вращательное вместе с цилиндром  $O$  и относительное поступательное. В рассматриваемом положении абсолютная скорость точки  $D$  равна переносной скорости, а скорость точки  $D$  относительно цилиндра  $O$  равна нулю. Таким образом, точка стержня, совпадающая в данный момент времени с т.  $O$ , является мгновенным центром скоростей звена  $AD$ . В соответствии с этим угловая скорость звена  $AD$

$$\omega_1 = \frac{V_D}{\ell}.$$

Далее найдем угловое ускорение звена  $AD$ . По теореме сложения ускорений.

$$\bar{a}_D = \bar{a}_{eD}^u + \bar{a}_{eD}^{ep} + \bar{a}_{rD} + \bar{a}_{corD}$$

Так как относительная скорость равна нулю, то равно нулю и кориолисово ускорение. Учитывая это, теорему сложения ускорений представим в виде

$$\bar{a}_D - \bar{a}_{eD}^{ep} = \bar{a}_{eD}^u + \bar{a}_{rD}$$

Это уравнение представляет собой равенство двух векторов. Вектор, стоящий в правой части уравнения направлен вертикально, в левой – горизонтально. Равенство возможно, если равны нулю и правая и левая части уравнения.

$$\bar{a}_D - \bar{a}_{eD}^{ep} = 0; \quad \bar{a}_{eD}^u + \bar{a}_{rD} = 0$$

Используя эти формулы, находим угловое ускорение

$$\varepsilon_1 = \frac{a_D}{\ell}$$

и относительное ускорение

$$a_{rD} = \omega_1^2 \ell$$

При этом относительное ускорение направлено от точки  $D$  к точке  $O$ .

Далее необходимо найти ускорение точки  $A$ .

$$\bar{a}_A = \bar{a}_e^u + \bar{a}_e^{ep} + \bar{a}_r$$

или

$$\bar{a}_A = (\bar{a}_e^u + \bar{a}_r) + \bar{a}_e^{ep}.$$

По этой формуле с учетом вышеизложенного получается, что ускорение точки  $A$  равно сумме двух векторов – вектора  $(\bar{a}_e^u + \bar{a}_r)$ , величина которого равна  $2V_D^2/\ell$ , и переносного вращательного ускорения величина которого равна  $|\bar{a}_D|$ .

Переходим к определению ускорения точки  $B$ . Ускорение точки  $B$  рассмотрим, подходя к ней с двух сторон. Со стороны звена  $CB$  имеем

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^u + \bar{a}_B^{ep}.$$

С другой стороны, принимая точку  $A$  за полюс, получим уравнение

$$\bar{a}_B = (\bar{a}_e^u + \bar{a}_r) + \bar{a}_e^{ep} + \bar{a}_{BA}^{ep}.$$

Отсюда следует:

$$\bar{a}_B^u + \bar{a}_B^{ep} = (\bar{a}_e^u + \bar{a}_r) + \bar{a}_e^{ep} + \bar{a}_{BA}^{ep}$$

Замечаем, что векторы  $\bar{a}_B^u$  и  $(\bar{a}_e^u + \bar{a}_r)$  равны по величине и совпадают по направлению в силу (1). Следовательно,

$$\bar{a}_B^{ep} = \bar{a}_e^{ep} + \bar{a}_{BA}^{ep}.$$

Так как вращательное ускорение точки  $B$  и переносное вращательное ускорение точки  $A$  имеют одинаковое направление, то последнее равенство возможно только в том случае, если равно нулю вращательное ускорение точки  $B$  относительно точки  $A$ . При этом равно нулю угловое ускорение звена  $AB$ , а в этом случае при равенстве нулю угловой скорости этого звена, что установлено, скорости всех точек звена равны и ускорения всех точек равны. Таким образом, в данный момент времени движение звена  $AB$  является мгновенно поступательным.

## Литература

1. Рожковский В.Д., Богородицкий Д.В. Курс теоретической механики. Кинематика. Под ред. Смирнова Ю.П. и Тарасова В.К. Тула: Изд-во ТулГУ, 2003. 244 с.
2. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика. ГИТТЛ, М.-Л., 1952. 811 с.
3. Тарасов В.К. Курс теоретической механики для математиков: учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. 280 с.

УДК 531.01

*А.А. Евтушенко, И.А. Тюлина*  
МГУ имени М.В. Ломоносова

### ОБЗОР ОТЕЧЕСТВЕННЫХ ИЗДАНИЙ «СБОРНИКА ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ» И В. МЕЩЕРСКОГО

Магистерская диссертация Мещерского «Динамика точки переменной массы», защищенная в 1897 г., была оценена по достоинству только в середине двадцатого века в годы интенсивного развития ракетных технологий и космонавтики.

В 1949 г. А. А. Космодемьянский издал книгу И. В. Мещерского «Работы по механике тел переменной массы» тиражом 5000 экземпляров. Книга быстро разошлась, и в 1952 г. было повторено издание, которое также быстро разошлось. Иван Всеволодович был признан основоположником аналитической теории реактивного движения тел переменной массы или переменного состава.

О семье, детстве, учебе И. В. Мещерского рассказано в статье Блещиной В.В., Евтушенко А.А. [1].

Иван Всеволодович Мещерский окончил в Архангельске гимназию, после чего поступил на физико-математическое отделение Петербургского университета. В то время (1878 г.) там ещё работал знаменитый П. Л. Чебышев; 60-70-е годы XIX в. были эпохой расцвета школы Чебышева, мощное влияние идей которого на молодежь было исключительно велико.

Оставленный на кафедре механики после окончания университета, Мещерский успешно вел педагогическую и научно-исследовательскую работу. Ранними его сочинениями были работы «Давление на клин в потоке неограниченной ширины двух измерений»(1886), «Дифференциальные связи в случае одной материальной точки»(1887) и «Теорема Пуассона при существовании условных уравнений»(1890).

С 90-х годов позапрошлого столетия Мещерский начал заниматься исследованием случаев движения материальных тел, масса которых меняется вследствие различных причин. Первыми примерами задач о движении тел переменной массы, решение которых занимался Мещерский в это время, явились задачи астрономии и космогонии, весьма актуальные в конце XIX в. В результате предшествующего развития

метеоритной и кометной астрономии, в последнее десятилетие XIX в. выдвигалась проблема исследования законов движения небесного тела, масса которого либо возрастает за счет выпадения на него частиц межпланетной среды, либо убывает за счет рассеяния частиц этого тела. Задачи такого рода решали многие современники Мещерского: Дюфур, Оппольцер, Гюльден и другие.

Мещерский посвятил этой проблеме работу, называвшуюся «Один частный случай задачи Гюльдена»(1893 г.). Здесь рассматривалось движение спутника вокруг центрального тела под действием сил ньютоновского притяжения; массы обоих тел считались изменяющимися по времени.

Замечая, что в природе имеется множество явлений, в которых необходимо учитывать влияние переменности массы движущихся тел (следует отметить, что вначале Мещерский исходил именно из наблюдения явлений природы, а не техники), Мещерский пришел к убеждению в необходимости построения общей теории таких явлений.

«В классической механике масса движущегося тела рассматривается обыкновенно как величина постоянная, – писал Мещерский, – между тел существуют случаи движения, где масса тела изменяется. Такие случаи представляет сама природа: масса Земли возрастает вследствие падения на неё метеоритов; масса метеорита, движущегося в атмосфере, убывает вследствие того, что некоторые частицы его или отрываются, или сгорают; ...плавающая льдина представляет пример, где масса возрастает вследствие намерзания и убывает вследствие таяния, и т.д.»[2, стр. 32].

Отталкиваясь при построении общей теории движения тела переменной массы от задач естествознания, Мещерский имел в виду также и практические приложения этой теории в технике.

«В некоторых случаях изменение массы вызывается искусственно: убывает масса летящей ракеты вследствие сгорания; ...возрастает масса привязанного аэростата, когда он, поднимаясь, вытягивает за собой канат; возрастает масса корабля при нагрузке и убывает при разгрузке и т.д.» [2, стр.32]. Проблеме построения общей теории движения тел переменной массы Мещерский посвятил магистерскую диссертацию «Динамика точки переменной массы»(1897 г.).

Нельзя сказать, что современники по достоинству оценили это фундаментальное и важное исследование. Тематика Мещерского не казалась в то время значительной и актуальной. Тем не менее, бесспорное мастерство ученого как тонкого умелого исследователя интересных и разнообразных задач было единодушно признано, решением Ученого

совета Петербургского университета от 1 декабря 1897 г. Мещерский был утвержден в ученой степени магистра прикладной математики.

Приступая к четкой формулировке научных абстракций и физических гипотез рассматриваемых явлений, Мещерский высказал мысль, что его работа, несмотря на новую постановку вопроса относительно массы тел, не выходит за рамки классического понимания массы. Мещерский определял точку переменной массы как поступательно движущееся твердое тело, масса которого изменяется во время движения вследствие отделения или присоединения к нему частиц [2, сс. 49 и 77].

Физическая гипотеза относительно характера взаимодействия отбрасываемых (присоединяемых) частиц – так называемая гипотеза близкодействия Мещерского – сводится к тому, что она игнорирует движение изменяющих точек самих по себе и влияние этих точек на движение тела после отрыва (до присоединения). Мещерский рассматривает несколько разновидностей такого близкодействия частиц и основного тела: вначале рассматривается случай, когда масса тела меняется порциями через некоторые промежутки времени (например, выбрасывание балласта с аэростата); затем разбирается случай непрерывного отделения (присоединения) частиц, но при отсутствии ударов, т.е. частицы не имеют относительной скорости по отношению к основному телу. (Пример – наматывание цепи на горизонтальный вал.) В этих случаях уравнения движения основного тела имеют тот же вид, что и для тел постоянной массы, несмотря на то, что масса таких тел изменяется.

Наиболее интересный случай (ему Мещерский уделил главное внимание в работе) представляет собой движение тел, масса которых изменяется вследствие ударов изменяющихся частиц, т.е. при наличии относительной скорости этих частиц по отношению к основному телу. Здесь так же он рассматривал два подслучая: прерывное изменение массы при наличии ударов и непрерывное изменение массы тела при наличии ударов. «Изменение массы точки, – писал Мещерский, – является, таким образом, как результат неупругого удара, происходящего при встрече двух материальных точек: изменяемой и изменяющейся» [2, стр. 78].

Центральное место в диссертации занимает исследование случая, когда масса поступательно движущегося тела изменяется непрерывно вследствие ударного отделения (или присоединения) изменяющих частиц. Именно здесь-то и появляется знаменитое уравнение Мещерского с членами, отличающими уравнение движения тел переменной массы от уравнений движения тел постоянной массы (и постоянного состава):

$$M\ddot{x} = X + \dot{M}(\alpha - \dot{x});$$

$$M\ddot{y} = Y + \dot{M}(\beta - \dot{y});$$

$$M\ddot{z} = Z + \dot{M}(\gamma - \dot{z}),$$

где  $M$  – масса изменяемой точки;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – проекции абсолютной скорости центра инерции изменяющих точек в текущий момент времени;  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  – проекции скорости изменяемой точки;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – проекции равнодействующей задаваемых сил, приложенных к точке.

Те члены, которые характерны только для движения точки переменной массы при ударном изменении массы  $dM/(\alpha - \dot{x})$ , названы Мещерским «прибавочными силами», ибо они имеют природу сил. По современной терминологии это – реактивные силы.

Остальные разделы магистерской диссертации Мещерского посвящены исследованию различных частных случаев движения тел переменной массы: задача о вертикальном подъеме ракеты (постановка этой задачи в начале эры воздухоплавания весьма симптоматична); движение точки переменной массы в среде с сопротивлением, малые колебания кругового маятника в сопротивляющейся среде, движение точки переменной массы под действием центральной силы (основы небесной механики тел переменной массы) и др.

Кроме того, Мещерский в магистерской диссертации указал специфические для механики тел переменной массы методы решения различных групп задач.

Следующим крупным шагом в направлении более детальной разработки новой отрасли механики явилась вышедшая из печати в 1904 г. монография Мещерского «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае». Обобщением по сравнению с первой работой было рассмотрение процесса изменения массы тел путем одновременного отделения и присоединения изменяющих частиц по отношению к основной точке. В работе выводятся уравнения движения тела переменной массы в виде:

$$m\ddot{x} + \frac{dm_1}{dt}(\dot{x} - \alpha_1) - \frac{dm_2}{dt}(\dot{x} - \alpha_2) + X = 0;$$

$$m\ddot{y} + \frac{dm_1}{dt}(\dot{y} - \beta_1) - \frac{dm_2}{dt}(\dot{y} - \beta_2) + Y = 0;$$

$$m\ddot{z} + \frac{dm_1}{dt}(\dot{z} - \gamma_1) - \frac{dm_2}{dt}(\dot{z} - \gamma_2) + Z = 0,$$



где  $m$  – масса поступательно движущегося тела;  $m_1$  – та часть массы  $m$  тела, которая изменяется путем присоединения частиц (с относительной скоростью);  $m_2$  – та часть массы  $m$  тела, которая меняется путем ударного отделения частиц; остальные обозначения прежние.

В работе Мещерский указал на весьма интересный случай, когда общая масса тела остается постоянной за счет одинаковых по интенсивности процессов отделения и присоединения изменяющих частиц: «Во всех вышеуказанных примерах может представиться частный случай, когда масса движущегося тела будет оставаться постоянною вследствие того, что масса, присоединяющаяся в течение некоторого промежутка времени, равна массе, отделяющейся в течение того же промежутка». [2, стр. 216]

В названном случае теория Мещерского может быть применена к ряду актуальных практических задач, например к расчету действий воздушно-реактивных двигателей. Сам Мещерский рассматривает задачи с интересным техническим содержанием: о движении водомета или реактивного корабля; о движении тяжелой гибкой цепи при одно-временном сползании ее с верхней площадки и наложении ее на нижней площадке; задача, имеющая отношение к железнодорожному движению, о тормозе в виде тележки и цепи и др. . Другие работы Мещерского по механике тел переменной массы называются «О вращении тяжелого твердого тела с развертывающейся тяжелой нитью около горизонтальной оси»(1899); «Об интегрировании уравнений движения в задаче двух тел переменной массы»(1902); «Задача из динамики переменных масс»(1918).

В целом совокупность работ Мещерского по механике тел переменной массы и переменного состава содержит основание новой важной отрасли механики, охватывая широкий круг задач техники и естествознания. Методы Мещерского могут быть распространены и развиты на новые задачи современной техники. Известный советский ученый проф. А.А. Космодемьянский так охарактеризовал значение работ Мещерского: «Диссертация Мещерского «Динамика точки переменной массы» и его работа «Уравнение точки переменной массы в общем случае» составляют надежный теоретический фундамент современной ракетодинамики». [2]

Действительно, уравнения движения Мещерского для точки переменной массы служат скелетом всех точных расчетов, относящихся к полету ракет на активном участке, реактивных снарядов и других подобных тел. Все остальные явления: вращение этих тел относительно центра инерции, относительное течение жидкости по внутренним ка-

налам, влияние стабилизирующих устройств и прочее – все это учитывается дополнительно. С помощью теории Мещерского решаются задачи о движении веретена с наматывающейся или сматывающейся нитью, о движении развертывающегося рулона бумаги и другие, указание для решения которых дано в работе Мещерского «О вращении тяжелого твердого тела с развертывающейся тяжелой нитью около горизонтальной оси»(1899 г.). Теория Мещерского нашла себе применение в самых различных областях техники.

Например, в работе В. П. Горячкина «Теория барабана» (1910 г.), где изучается действие молотилки, говорится «Таким образом, теория барабана сводится к задаче о вращательном движении твердого тела переменной массы, испытывающего непрерывные удары... Сюда относятся работы проф. Мещерского (Динамика точки переменной массы. Уравнения движения точки переменной массы в общем случае.)». [3, стр. 106]

Весьма интересное исследование А. П. Минакова [4] применяет уравнение и теорию И.В. Мещерского к проблематике текстильной промышленности, указывая в качестве одного из факторов обрывности при осевом сматывании нити реактивного натяжение, изменяющееся рывками на концах бобины.

Педагогическая деятельность И. В. Мещерского протекала главным образом в Петербургском (затем Ленинградском) Политехническом институте, где с момента основания института в 1902 г. Мещерский заведовал кафедрой механики до конца своих дней. В 1907 г. он был избран директором Политехнического института, в 1915 г. удостоен звания заслуженного профессора Политехнического института.

Педагогическая работа Мещерского так же, как и его научная работа, отличалась пристальным вниманием к проблемам конкретного технического характера. В этом отношении Мещерский унаследовал лучшие традиции петербургской школы, основанной П. Л. Чебышевым. В творчестве Мещерского органически сочетались строгие точные и самые современные математические методы исследования задач механики с сугубо конкретной практической направленностью тематики.

Уделяя весьма серьезное внимание педагогической работе, И. В. Мещерский собрал богатый приборами и механизмами кабинет при своей кафедре, который превратился в лабораторию по механике. И. В. Мещерский дважды издал курс теоретической механики, сначала литографировано, а затем в 1923 и 1925 гг. типографским способом под названием «Курс теоретической механики».

Наибольшую известность И.В. Мещерскому принес «Сборник задач по теоретической механике», который выдержал сотню отечественных и зарубежных изданий. Этот фундаментальный задачник принят в качестве основного пособия практических упражнений по теоретической механике в университетах и высших технических учебных заведениях в нашей стране и за рубежом. В начале XX-го века в России острой проблемой стало отсутствие сборника задач по теоретической механике. Решением этой проблемы занялся профессор Санкт-Петербургского Политехнического института Императора Петра Великого - Иван Всеволодович Мещерский, в 1914 г. вышло первое издание позже ставшего общеизвестным «Сборника задач по теоретической механики». Задачник предназначался для студентов технического отделения СПб. Политехнического Института для упражнений по теоретической механике. Задачи в первый сборник были включены из тех, что уже давались студентам, некоторые были выбраны Мещерским из других, изданных ранее, сборников: Walton, Zech, Wittenbauer и др. Но большинство задач, содержащихся в «Сборнике», оказались в печати впервые; они были разработаны И.В. Мещерским.

Основной критерий по выбору задач был ясен: отбирались задачи, которые учили студентов применять теоремы и методы, излагаемые в курсе теоретической механики, на практике. Ко всем задачам «Сборника» прилагались ответы, а часть задач имели указания к решению. Первому изданию «Сборника» предшествовали несколько литографированных изданий первой и второй частей, выпускавшихся в 1907-1911 гг. в СПб Политехническом институте.

Помогали в создании сборника Мещерскому и другие преподаватели, которые вели упражнения со студентами Политехнического Института по теоретической механике: Л.В. Ассур, Б.А. Бахметев, И.И. Бентковский, А.А. Горев, К.М. Дубяга, А.М. Ларионов, В.Ф. Миткевич, Е.Л. Николаи, К.Э. Рерих, Д.Л. Тапьев, В.В. Таклинский, С.П. Тимошенко, А.И. Тудоровский, А.П. Фандер-Флит, А.К. Федерман и В.Д. Шатров. Издан и отредактирован сборник был самим Иваном Всеволодовичем Мещерским при участии И.И. Бентковского и К.Э. Рериха. Первое и второе (стереотипное) издания сборника содержали 515 задач. В составлении задач, помещенных во втором издании «Сборника», приняли участие преподаватели института Е.К. Митропольский и М.Л. Франк. В третьем издании «Сборник» пополнен тридцатью дополнительными задачами и общее количество выросло до 545 задач. Четвертое издание пополнилось ещё некоторым количеством задач притом, что часть старых задач была убрана, и итоговое количество выросло до

573 задач. Последнее издание, которое потерпело изменение при жизни Ивана Мещерского, было пятым (с 6-го по 10-е издания были стереотипными). Вышло оно в 1927 г. и было построено по принципу предыдущих изданий и главные изменения состояли в том, что в этом издании были исключены некоторые задачи, зато включена серия новых задач, поэтому частично была изменена последовательность нумерации задач. Появились краткие указания мелким шрифтом по решению задач, о чем сообщено в «Предисловии» автора к 5-му изданию.

Десятое издание вышло в год смерти Ивана Всеволодовича Мещерского в сентябре 1935 г. Это было первым изданием, которое вышло без участия в нем покойного составителя. Заботу об этом посмертном издании главная редакция технико-теоретической литературы ОНТИ возложила на известных ученых А.И. Лурье, Е.Л. Николаи, К. И. Страховича и Ф. Г. Шмидта. В десятом издании сохранен план изложения прежних изданий. Состоит книга из четырех отделов: статика, кинематика, динамика материальной точки и динамика материальной системы. Частично изменен порядок подтем и существенно переделан порядок задач. Включено в 10-е издание 406 новых задач. Бывшие ранее в «Сборнике» задачи были вновь пересмотрены и частично переработаны. Задачи, которые редакторы посчитали менее интересными, не были включены в новое издание. Суммарное количество задач стало составлять 892 задачи- 486 старых и 406 новых задач. По сравнению с предыдущим изданием сборник увеличился на 302 задачи.

В данном десятом издании предоставили свои новые задачи 15 ленинградских механиков среди них: М. И. Акимов, М. И. Бать, Б. А. Берг, Ю. В. Долголенко, А. С. Кельзон, Ю. Г. Корнилов, А. И. Лурье, К.В. Меликов, П. И. Нелюбин, Н. П. Неронов, Е. Л. Николаи, А.А. Смирнов, С.А. Сороков, К. И. Страхович, А. И. Чекмарев и Ф. Г. Шмидт.

Статику в десятом издании сборника редактировал К. И. Страхович, кинематику- Ф. Г. Шмидт, динамикой материальной точки и динамикой материальной системы занимался Е. Л. Николаи. А. И. Лурье составил и отредактировал последний раздел – «Уравнения Лагранжа». В 1936-1938 гг. вышли 11-13 издания, которые были стереотипными и редактор там значился только один- Ф.Г. Шмидт.

После этого, в связи с событиями ВОВ, был девятилетний перерыв, и следующее, четырнадцатое, издание вышло только в 1947 г. под редакцией А. И. Лурье. В этом издании задачник подвергся существенной переработке. Впервые суммарное количество задач превысило отметку в 1000 задач, всего же их стало 1140. Тексты задач были под-

вергнуты редакционной переработке, некоторые задачи устранены, и все ответы были вновь проверены. Существенно увеличился отдел динамики точки и системы, в частности уравнения Лагранжа и теория малых колебаний.

Работа по редактированию четырнадцатого издания также была проведена сотрудниками кафедры теоретической механики Ленинградского политехнического института. Статику редактировал С. А. Сороков, кинематику – Н. Н. Наугольная и А. С. Кельзон, динамику точки – А. С. Кельзон, динамику системы – М. И. Бать, уравнения Лагранжа и теорию колебаний – Г. Ю. Джанелидзе.

Помимо этого новые задачи для четырнадцатого издания «Сборника» предоставили следующие лица: Н. С. Вайбицевич, Н. И. Идельсон, В. Л. Кан, А. И. Холодняк и А. И. Цымлов. Так же помогли в создании сборника И. Я. Штаерман, В. С. Щедров и Л. В. Янковский.

Пятнадцатое издание, вышедшее в 1948 г., было стереотипным и изменений не претерпело по сравнению с 14-м изданием.

Шестнадцатое издание, вышедшее в 1953 г., представляло собой существенную переработку предшествующих изданий. Введено было большое количество новых задач, причем, не желая сильно увеличивать объем «Сборника», некоторое число второстепенных задач удалили. Таким образом, это издание стало содержать 1363 задачи, из которых 364 были новыми. То есть суммарное количество задач, по сравнению с предыдущим изданием выросло на 223 задачи.

Номера задач, в связи с этими изменениями, стали иметь ещё один номер в скобках. Этот номер соответствовал номеру задачи в 14-м и 15-м изданиях. Новые задачи двойных номеров не имели. Наибольшие изменения претерпел отдел динамики точки и системы. Введены новые параграфы (Общие уравнения динамики, Динамика системы переменной массы, Аналитическая статика и Устойчивость движения). Статику редактировал С. А. Сороков, кинематику – Н. Н. Наугольная и А. С. Кельзон, динамику точки – А. С. Кельзон, динамику системы – М. И. Бать, задачи по аналитической механике и упомянутые новые параграфы – Г. Ю. Джанелидзе.

Существенную помощь этому коллективу, прислав новые задачи и давая ценные советы и замечания, оказали: Г. Д. Ананов, Н. В. Бутенин, А. Г. Воробьев, В. К. Гольцман, Н. А. Докучаев, В. Г. Жуйкова, А. И. Зенкин, Я. Л. Лунц, К. В. Меликов, Г. С. Сантурян, Н. М. Шахунянц, И. Я. Штаерман, В. С. Щедров, А. А. Щурагин, Л. В. Янковский. Темы некоторых новых задач были взяты из трудов отечественных ученых:

Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, И. В. Мещерского и Е. И. Наколаи. Общее редактирование сборника осуществлял А. И. Лурье.

Далее, с 1951 по 1967 гг. вышли ещё пятнадцать изданий (по 31-е), которые были стереотипными. А в 1971 г. вышло тридцать второе издание под редакцией Н. В. Бутенина, А. И. Лурье и Д. Р. Меркина. Выход этого измененного сборника был вызван существенным скачком в развитии науки и техники за несколько десятилетий. В этом издании предпринята попытка, не выходя за рамки теоретической механики, отразить в какой-то степени новые проблемы техники и более полно осветить те вопросы классической механики, которые раньше были недостаточно хорошо освещены. В связи с этим в «Сборнике» появились новые разделы, содержащие задачи по пространственной ориентации (теория навигации), динамике космического полета, нелинейным колебаниям, геометрии масс, аналитической механике. Так же существенно дополнены отделы динамики материальной точки и системы, динамики точки и системы переменной массы, кинематики точки, кинематики относительного движения и плоского движения твердого тела, устойчивости движения. Небольшое количество задач введено почти во все отделы «Сборника», некоторое количество старых задач убрано. В качестве дополнения в конце приведена международная система единиц (СИ). Данное издание содержит 1744 задачи, то есть суммарное количество задач выросло на 381 по сравнению с предыдущим изданием. Введена двойная нумерация задач – первое число означает номер параграфа, а 2-е номер задачи в этом параграфе. В скобках помещен старый номер задачи (номер в 16-31-м изданиях) для удобства поиска.

Составили новые задачи и редактировали: отдел статики – Д. Р. Меркин, отдел кинематики – М. И. Бать, Д. Р. Меркин и А. С. Кельзон, отдел динамики материальной точки – А. С. Кельзон, отдел динамики материальной системы – Д. Р. Меркин и А. С. Кельзон, отдел динамики космического полета – Д. Р. Меркин, отдел теории колебаний и устойчивости полета – Н. В. Бутенин. Кроме того, новые задачи предоставили: М. З. Коловский, И. Е. Лившиц и Б. А. Смольников. Так же содействовали новому изданию Г. Ю. Степанов и В. Н. Щелкачев.

Тридцать третье и тридцать четвертое издания, вышедшие в 1972 и 1975 гг. соответственно, были стереотипными. Тридцать пятое издание, вышедшее в 1981 г., остается на данный момент последним изданием, претерпевшим какие-либо изменения. В этом издании продолжена попытка отразить в задачнике новые проблемы техники и более плотно охватить разделы механики, ранее не нашедшие достаточного

освещения. Кроме того, все величины в задачах переведены в Международную систему единиц (СИ), введенную в СССР с 1-го января 1980 года в соответствии со стандартом Совета Экономической Взаимопомощи. Новые разделы составляли: М. И. Бать (смешанные задачи на сложное движение точки и твердого тела), Н. А. Фуфаев (Системы с качением. Неголономные связи.), И. Б. Челпанов (Вероятностные задачи теоретической механики). Одновременно дополнены задачами почти все разделы, введены задачи о манипуляторах. Часть старых задач убрана. Общее количество задач выросло до 1804-х.

Подготовили сборник к печати и предоставили новые задачи: М. И. Бать, Н. В. Бутенин, А. С. Кельзон, А. И. Лурье (умер к моменту выхода «Сборника» в 1980-м году) и Д. Р. Меркин. Кроме того, новые задачи в «Сборник» представили: Е. Г. Бергер, Ю. Г. Исполов, М. В. Мионов, З. Б. Сегал, В. Б. Старосельский, И. Б. Челпанов, Н. А. Фуфаев. Нумерация задач осталась двойной, в скобках указывали номер задачи в 32-34 изданиях.

После тридцать шестого издания (стереотипное, вышло в 1986 году), закончилась советская история сборника. Российская история «Сборника» начинается аж в 1998 г.. За это время сборник не претерпел никаких изменений, только «Сборник задач по теоретической механике» стал называться просто «Задачи по теоретической механике» И. В. Мещерского. После этого пошла штамповка стереотипных изданий (2001 год – 38-е издание, 2002 – 39-е, 2003 – 40-е, 2004 – 41-е и 42-е издания, 2005 – 43-е и 44-е, 2006 – 45-е и 46-е, 2007 – 47-е издание, 2008 – 48 и 49 издания), которая продолжается по наше время. Редакторами задачников выступают В. А. Пальмов и Д.Р. Меркин.

Краткую информацию о «Сборнике» можно почерпнуть из таблицы, приведенной ниже:

№ изд.	год издания	число задач	редакторы	новые главы	что нового внесено в сборник
1	1914	515	И.В. Мещерский		Сборник состоит из 2-х частей
2	1916	515	И.В. Мещерский		как 1-е издание
3	1923	545	И.В. Мещерский		Внесены новые задачи
4	1926	573	И.В. Мещерский		Внесены новые задачи
5	1928-31	590	И.В. Мещерский		Внесены новые задачи, некоторые старые убраны

6	1932	590	И.В. Мещерский		как 5-е издание
7	1932	590	И.В. Мещерский		как 5-е издание
8	1933	590	И.В. Мещерский		как 5-е издание
9	1935	590	И.В. Мещерский		как 5-е издание
10	1935	892	А.И. Лурье Е.Л. Николаи К. Страхович Ф. Шмидт	Уравнения Лагранжа, Малые колебания струн (Лурье)	изменено построение книги. Книга содержит 4 отдела: статика на плоскости и в пространстве; кинематика; динамика
11	1936	892	А.И. Лурье Е.Л. Николаи К. Страхович Ф. Шмидт	как 10-е издание	Оставлено 486 старых задач+ 406 новых. Сохранена старая нумерация
12	1937	892	Ф. Шмидт		как 10-е издание
13	1938	892	Ф. Шмидт		как 10-е издание
14	1947	1140	А.И. Лурье	Переработаны главы динамики точки и системы. Добавлены: аналитическая статика, динамика тела переменной массы, теория устойчивости движения	Помещено большое количество новых задач, некоторые старые убраны. Темы некоторых новых задач взяты из работ С.А. Чаплыгина, Е.Л.Николаи, И.В. Мещерского, Н.Е. Жуковского
15	1948	1140	А.И. Лурье		как 14-е издание
16	1950	1363	А.И. Лурье		Введено 364 новых задачи
17	1951	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
18	1952	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
19	1953	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
20	1954	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
21	1955	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
22	1956	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
23	1957	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
24	1958	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание

25	1959	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
26	1960	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
27	1961	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
28	1962	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
29	1964	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
30	1965	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
31	1967	1363	А.И. Лурье		как 16-е издание
32	1970	1744, новая нумерация	Н.В. Бутенин А.И. Лурье Д.Р. Меркин	новые разделы: пространственная ориентация, динамика космического полета, нелинейные колебания	Переработанное. Отражены новые проблемы техники. Появились задачи на интеграл энергии, преобразования Рауса, канонические уравнения Гамильтона, уравнения Якоби-Гамильтона
33	1972	1744	Н.В. Бутенин А.И. Лурье, Д.Р. Меркин		стереотипное издание
34	1975	1744	Н.В. Бутенин А.И. Лурье, Д.Р. Меркин		стереотипное издание
35	1981	1804	Н.В. Бутенин А.И. Лурье Д.Р. Меркин И.Б. Челпанов	Вероятностные задачи теоретической механики	Новые задачи с манипуляторами во всех разделах. В раздел аналитической механики введены задачи на "системы с качеством" и "неголономные связи", перевод величин в систему СИ
36	1986	1804	Н.В. Бутенин А.И. Лурье, Д.Р. Меркин		стереотипное издание
37	1998	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.	Стал называться «Задачи по теоретической механике»	стереотипное издание
38	2001	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание
39	2002	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание

40	2003	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание
41	2004	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание
42	2004	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание
43	2005	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание
44	2005	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание
45	2006	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание
46	2006	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание
47	2007	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание
48	2008	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание
49	2008	1804	Пальмов В.А. Меркин Д. Р.		стереотипное издание

### Литература

1. Блескина В.В., Евтушенко А.А. К 150-летию со дня рождения И.В. Мещерского. // Сборник научно методических статей. Теоретическая механика. М., вып. XXVII, 2009 г., с 213-218
2. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы.- М.-Л.: ГИТТЛ, 1-е изд., 1949; 2-е изд. 1952. см. Предисловие и вводную статью Космодемьянского А.А. научная деятельность Ивана Всеволодовича Мещерского
3. Горячкин В. П. Собрание сочинений. М., т.5, 1937
4. Минаков А.П. Реактивное влияние изменения длины баллонизирующего участка нити на её натяжение при осевом сматывании с поверхности её вращения. Научно-исслед. труды Московского текстильного ин-та. М., т.15, 1955
5. Блескина В.В. И. В. Мещерский. Годы учебы в Архангельске.- М.; История и методология естественных наук, вып. XXXII, изд. МУ, 1986, с. 159-167.
6. Демин В.Г., Блескина В.В. Педагогическая деятельность И.В. Мещерского.- М.; там же, вып. XXIX, изд. МУ, 1982, с. 112-119
7. ГаАо, о. д. ф., книга «Историческая записка Архангельской Ломоносовской гимназии (1811-1911)» - Архангельск 1912, сс. 475-479
8. Мещерский И.В. Курс теоретической механики, ч.1 М.-Л.: Гозиздат, 1930; ч.2 М.-Л.: Гозиздат, 1930.
9. Мещерский И.В. Курс теоретической механики, ч.3 Спб., 1931.
10. Мещерский И.В. Курс теоретической механики, ч. III, изд. Ленинградск. Кораблестроительн. ин-та, 1930.

11. *Мецкерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. Спб., 1-е типографское изд. 515 задач, 1914.
12. *Мецкерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1986.
13. *Mieszczeriski I.V.* Zbior zadan z mechaniki. Warszawa, Panstw, wyd-wo naukowe, 1963.
14. *Meshchersky I.V.* Collection of problem in theoretical mechanics. M., Higher school publ. house, 1968.
15. *Космодемьянский А.А.* Иван Всеволодович Мещерский. В кн.: Очерки по истории механики. М.: Просвещение, 1964.

УДК 531.36

*В.А. Самсонов<sup>1</sup>, А.С. Сумбатов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова

<sup>2</sup> Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

# **К 100-ЛЕТИЮ УРАВНЕНИЙ П.В. ВОРОНЦА, ОПИСЫВАЮЩИХ КАЧЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ**

100 лет тому назад журнал *Mathematische Annalen*, опубликовал третью и последнюю [1] из опубликованных в этом журнале работ известного киевского механика П.В. Воронца. В ней в завершённой форме получены уравнения качения без скольжения твёрдого тела по неподвижной поверхности. Основной идеей Воронца явилось использование общей теоремы об изменении кинетического момента тела относительно *движущейся* геометрической точки касания тела с опорной поверхностью. В результате в динамические уравнения не вошёл момент силы реакции, действующей на тело со стороны опорной поверхности.

К этим уравнениям Воронец шёл почти 10 лет. И получилось так, что, за исключением частных случаев (опорная поверхность – плоскость или движущееся тело ограничено поверхностью вращения), в самом общем случае полученные уравнения не вошли ни в один учебник, ни в одну монографию по теоретической механике, хотя на данную публикацию имеются ссылки в научной литературе. Приложениями уравнений Воронца в рассматриваемой задаче механики занимались Я. Штаерман (1915), А. Билимович (1916) и Ю.П. Бычков (1965-67, 2004).

Ниже приведены упомянутые уравнения Воронца, и с их помощью получены необходимые и достаточные условия существования в данной задаче первого интеграла сохранения проекции на вертикаль кинетического момента, подсчитанного относительно точки контакта, для катающегося по неподвижной поверхности тяжёлого тела. Кроме того, отмечено интересное динамическое свойство кельтского камня.

1. Рассмотрим систему материальных точек (частиц)  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), к которым приложены силы  $F_i$ . Пусть  $M(x, y, z)$  – какая-нибудь точка пространства (полюс), относительно которой вычислен момент количеств движения  $K$  (кинетический момент) системы. Тогда, если полюс неподвижен в инерциальном пространстве, то

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} r_i \times F_i, \quad \text{где} \quad K = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i \times v_i \quad (1.1)$$

( $r_i$  и  $v_i$  – соответственно радиус-вектор и скорость  $i$ -ой частицы).

Если полюс  $M$  движется, то закон изменения кинетического момента системы, подсчитанного относительно этой точки, примет вид ([2], § 190)

$$\frac{dK}{dt} + M' \times L = \sum_{i=1}^{i=n} r_i \times F_i \quad (1.2)$$

Здесь  $L$  обозначает вектор количества движения системы, приложенный в её центре масс, а  $M'(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  – «производный» полюс. Его координаты – это производные координат  $x, y, z$  полюса  $M$  по времени  $t$ .

Обычно в динамике в качестве полюса  $M$  выбирают неподвижную точку или центр масс системы. Тогда закон изменения кинетического момента системы принимает простой вид (1.1). Однако, можно указать значительный класс задач, пишет в своей работе Воронец, в которых полезно использовать оси  $M\xi\eta\zeta$  с подвижным полюсом  $M$ , который не совпадает с основными точками тела. Например, когда мы рассматриваем, движение тела, которое катится без скольжения по заданной поверхности  $S_1$ . Если мы выбираем началом координатной системы  $M\xi\eta\zeta$  точку, в которой поверхность  $S$  тела касается поверхности  $S_1$  в данный момент, то в уравнения движения тела войдут те моменты действующих сил, которые не зависят от нормальной реакции поверхности  $S_1$  и от компонент силы трения. Пренебрегая моментами трения качения и верчения, в итоге получим уравнения движения и условные уравнения, которым подчинено тело. Они образуют полную систему дифференциальных уравнений, которые определяют движение тела. Остальные уравнения служат только для определения упомянутой нормальной реакции и проекций силы трения.

Такова основная идея работы [1].

2. В работе рассматриваются четыре системы координат: неподвижная  $O_1x_1y_1z_1$  система отсчёта, центральные оси  $Oxyz$  инерции тела ( $O$  – центр масс тела),  $Muvmt$  – триэдр, связанный с поверхностью  $S$  движущегося тела, начало которого постоянно совпадает с точкой касания поверхности  $S$  тела и опорной поверхности  $S_1$ , подвижный триэдр  $Mu_1v_1m_1$ , связанный с

поверхностью  $S_1$ . Направления  $m$  и  $m_1$  – нормали в точке касания соответственно поверхностей  $S$  и  $S_1$ . Роль координатной системы  $M\xi\eta\zeta$ , упомянутой выше, играет триэдр  $Muvmt$ .

Для простоты формул Воронец выбирает в качестве координатных линий  $u = \text{const}, v = \text{const}$  сеть линий кривизны на поверхности  $S$ . Аналогично, координатные линии  $u_1 = \text{const}, v_1 = \text{const}$  образуют сеть линий кривизны на поверхности  $S_1$ . Это случай общего положения. Случаи сферических поверхностей или наличия омбилических точек на поверхности не вносят принципиальных осложнений.

Задача сводится к тому, чтобы записать уравнение динамики (1.2) в проекциях на подвижные оси  $Muvmt$ , а также уравнения неголономных связей и некоторые другие кинематические уравнения, чтобы получить замкнутую систему дифференциальных уравнений движения тела.

Пусть  $r(u, v) = (x, y, z)$  – радиус-вектор точки касания  $M$ , записанный в осях  $Oxyz$  и выраженный как вектор-функция локальных гауссовых координат  $u, v$  поверхности  $S$  тела. Тогда строки

$$(\lambda, \lambda', \lambda'') = \frac{\partial r / \partial u}{|\partial r / \partial u|}, \quad (\mu, \mu', \mu'') = \frac{\partial r / \partial v}{|\partial r / \partial v|},$$

$$(\nu, \nu', \nu'') = m^T = \frac{\partial r / \partial u \times \partial r / \partial v}{|\partial r / \partial u \times \partial r / \partial v|},$$

образуют таблицу косинусов углов между  $u, v, m$  – осями с  $x, y, z$  – осями соответственно:

	$x$	$y$	$z$
$u$	$\lambda$	$\lambda'$	$\lambda''$
$v$	$\mu$	$\mu'$	$\mu''$
$m$	$\nu$	$\nu'$	$\nu''$

(2.1)

Основные две первые дифференциальные формы поверхности  $S$  имеют вид

$$(dr, dr) = E(du)^2 + G(dv)^2, \quad (dr, dm) = -(d^2r, m) = D(du)^2 + D''(dv)^2$$

Коэффициенты соответствующих дифференциальных форм опорной поверхности  $S_1$  обозначаем  $E_1, G_1, D_1, D_1''$ .

Пусть  $\sigma, \tau, n$  – компоненты в осях  $Muvmt$  абсолютной угловой скорости  $\omega$  тела. Её можно разложить на три компоненты:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad (2.2)$$

где  $\omega_1$  – угловая скорость поворота системы осей  $Oxyz$  относительно системы  $Muvmt$ ,  $\omega_2$  – угловая скорость поворота системы осей  $Muvmt$  относительно системы  $Mu_1v_1m_1$  (Рис.1) и  $\omega_3$  – угловая скорость поворота системы  $Mu_1v_1m_1$  относительно  $Ox_1y_1z_1$ .

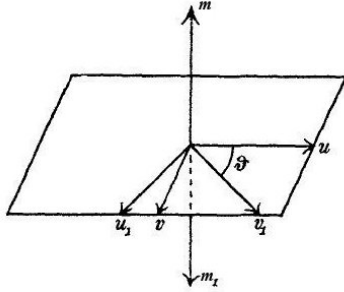


Рис. 1.

Обозначим орты системы координат  $Muvmt$  через  $i, j, k$  и совместим точки  $O$  и  $M$ . Скорость конца вектора  $k$  относительно системы координат  $Mxyz$  равна  $\dot{k} = -\omega_1 \times k$ , поэтому

$$j \cdot \dot{k} = j \cdot (-\omega_1 \times k) = \omega_1 \cdot (j \times k) = \sigma_1.$$

Аналогичные формулы имеем для  $\tau_1, n_1$ . Таким образом, для компонент вектора  $\omega_1(\sigma_1, \tau_1, n_1)$  получаем, что

$$\sigma_1 = \mu\dot{v} + \mu'\dot{v}' + \mu''\dot{v}'', \quad \tau_1 = \nu\dot{\lambda} + \dots, \quad n_1 = \lambda\dot{\mu} + \dots,$$

а проекции на  $Muvmt$  – оси угловой скорости их вращения относительно неподвижной системы  $O_1x_1y_1z_1$  равны  $\sigma - \sigma_1, \tau - \tau_1, n - n_1$ .

Так как

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right),$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{E}} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \dot{u} + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \dot{v} \right) + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \right),$$

$$\dot{\lambda}' = \dots, \quad \dot{\lambda}'' = \dots,$$

$$\dot{\mu} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \dot{u} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \dot{v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \right),$$

$$\dot{\mu}' = \dots, \quad \dot{\mu}'' = \dots,$$

$$\dot{\nu} = \dots, \quad \dot{\nu}' = \dots, \quad \dot{\nu}'' = \dots,$$

то

$$\mu\dot{\nu} + \mu'\dot{\nu}' + \mu''\dot{\nu}'' = \frac{D''}{\sqrt{G}} \dot{v}, \quad \nu\dot{\lambda} + \dots = \frac{D}{\sqrt{E}} \dot{u},$$

$$\lambda\dot{\mu} + \dots = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial E}{\partial v} \dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v} \right),$$

Следовательно, в силу (9)

$$\sigma_1 = -\frac{D''}{\sqrt{G}} \dot{v}, \quad \tau_1 = \frac{D}{\sqrt{E}} \dot{u}, \quad n_1 = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial E}{\partial v} \dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v} \right)$$

Совершенно аналогичные формулы справедливы для компонент угловой скорости  $\omega_3$ , а  $\omega_2 = (0, 0, -\dot{\theta})$ . В итоге получаем (см. (2.2) и рис. 1)

$$\sigma = -\frac{D''}{\sqrt{G}} \dot{v} - \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}} \dot{v}_1 \sin \theta - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}} \dot{u}_1 \cos \theta,$$

$$\tau = \frac{D}{\sqrt{E}} \dot{u} - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}} \dot{u}_1 \sin \theta + \frac{D''}{\sqrt{G_1}} \dot{v}_1 \cos \theta,$$

$$(2.3) \quad \dot{n} = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial E}{\partial v} \dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v} \right) + \frac{1}{2\sqrt{E_1G_1}} \left( \frac{\partial E_1}{\partial v_1} \dot{u}_1 - \frac{\partial G_1}{\partial u_1} \dot{v}_1 \right) - \dot{\theta}$$

К полученным трём уравнениям кинематики следует добавить ещё два кинематических уравнения, описывающих отсутствие проскальзывания тела в точке  $M$  его контакта с опорной поверхностью  $S_1$ . Для этого заметим, что скорость  $V$ , с которой движется точка  $M$  контакта по поверхности  $S$  тела, геометрически идентична скорости  $V_1$  движения точки  $M$  на поверхности  $S_1$ . Таким образом, для проекций векторов  $V$  и  $V_1$  на направления  $u_1$  и  $v_1$  получаем (Рис.1)



$$\begin{aligned}\sqrt{E_1}\dot{u}_1 &= \sqrt{G}\dot{v}\cos\theta - \sqrt{E}\dot{u}\sin\theta, \\ \sqrt{G_1}\dot{v}_1 &= \sqrt{G}\dot{v}\sin\theta + \sqrt{E}\dot{u}\cos\theta\end{aligned}\quad (2.5)$$

Чтобы замкнуть систему дифференциальных уравнений, остаётся записать уравнения динамики (1.2).

В общем случае удвоенная кинетическая энергия тела равна

$$2T = m_G \left( v_M + \omega \times \overrightarrow{MO} \right)^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

где  $m_G$  – масса тела,  $v_M(\alpha, \beta, \gamma)$  – мгновенная скорость той точки тела, которой оно в данный момент времени касается опоры,  $(A, B, C)$  – центральные моменты инерции тела,  $\omega(p, q, r)$  – угловая скорость тела в проекциях на центральные оси инерции  $Oxyz$ .

Скалярная функция  $2T$  может быть выражена в произвольных координатах, в частности, в координатах на оси  $Muvmt$ :

$$2T = 2\Theta(\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau, n)$$

Так как полагается, что  $v_M = 0$ , то вектор количества движения тела в осях  $Muvmt$  принимает вид

$$\begin{aligned}L &= \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Theta}{\partial \beta}, \frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} \right) = m_G (\overrightarrow{OM} \times \omega) = \\ &= m_G (\eta n - \zeta \tau, \zeta \sigma - \xi n, \xi \tau - \eta \sigma),\end{aligned}\quad (2.6)$$

где

$$\xi = x\lambda + y\lambda' + z\lambda'', \quad \eta = x\mu + \dots, \quad \zeta = x\nu + \dots$$

– координаты вектора  $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ . При этом кинетическая энергия тела может быть переписана так

$$\begin{aligned}2\Theta &= m_G (x^2 + y^2 + z^2)(\sigma^2 + \tau^2 + n^2) - m_G (\xi\sigma + \eta\tau + \zeta n)^2 + \\ &+ A(\sigma\lambda + \tau\mu + n\nu)^2 + B(\sigma\lambda' + \tau\mu' + n\nu')^2 + C(\sigma\lambda'' + \tau\mu'' + n\nu'')^2\end{aligned}$$

Если мы обозначим через  $x_1, y_1, z_1$  координаты полюса  $M$  в неподвижной системе  $O_1x_1y_1z_1$ , то координаты  $M'$  полюса в той же системе равны  $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ . Следовательно, поскольку скорость точки  $M$  в переносном движении, связанном с твёрдым телом, равна нулю, то координаты вектора  $M'$  по отношению к осям, параллельным  $u, v, t$  – осям и с началом  $O_1$ , равны

$$\xi' = \dot{x}\lambda + \dot{y}\lambda' + \dot{z}\lambda'', \quad \eta' = \dot{x}\mu + \dots, \quad \zeta' = \dot{x}\nu + \dots$$

Проектируя встретившийся в (1.2) вектор  $M' \times L$  на  $\xi, \eta, \zeta$  – оси, получим его координаты

$$\eta' \frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} - \zeta' \frac{\partial \Theta}{\partial \beta}, \quad \dots$$

Таким образом, три уравнения (1.2) изменения кинетического момента тела можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} + (\tau - \tau_1) \frac{\partial \Theta}{\partial n} - (n - n_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \\ + m_G [\xi (\xi' \sigma + \eta' \tau + \zeta' n) - \sigma (\xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta')] = \Gamma_u,\end{aligned}\quad (2.7)$$

Здесь  $\Gamma_u, \Gamma_v, \Gamma_m$  – моменты приложенных к телу сил, вычисленные относительно точки  $M$ .

Уравнения можно записать несколько иначе. Если мы обозначим через  $\rho$  и  $\varepsilon$  соответственно расстояния от центра тяжести  $O$  тела до точки  $M$  контакта и до касательной плоскости к  $S$  в точке  $M$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varepsilon = x\nu + y\nu' + z\nu'',$$

то  $\rho$  и  $\varepsilon$  являются функциями от  $u$  и  $v$ . Тогда

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\rho}{\sqrt{E}} \frac{\partial \rho}{\partial u}, \quad \eta = \frac{\rho}{\sqrt{G}} \frac{\partial \rho}{\partial v}, \quad \zeta = \varepsilon \\ \xi' &= \sqrt{E}\dot{u}, \quad \eta' = \sqrt{G}\dot{v}, \quad \zeta' = 0\end{aligned}$$

и уравнения (2.7) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} + (\tau - \tau_1) \frac{\partial \Theta}{\partial n} - (n - n_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \\ + m_G \left( \rho \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\tau}{\sqrt{E}} - \rho \frac{\partial \rho}{\partial v} \frac{\sigma}{\sqrt{G}} \right) \sqrt{G}\dot{v} = \Gamma_u, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (n - n_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} - (\sigma - \sigma_1) \frac{\partial \Theta}{\partial n} - \\ - m_G \left( \rho \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\tau}{\sqrt{E}} - \rho \frac{\partial \rho}{\partial v} \frac{\sigma}{\sqrt{G}} \right) \sqrt{E}\dot{u} = \Gamma_v, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial n} + (\sigma - \sigma_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - (\tau - \tau_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} + m_G (\sqrt{E}\dot{u}\sigma + \sqrt{G}\dot{v}\tau) \varepsilon - \\ - m_G \left( \rho \frac{\partial \rho}{\partial u} \dot{u} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial v} \dot{v} \right) n = \Gamma_m,\end{aligned}\quad (2.8)$$

где

$$2\Theta = m_G \rho^2 (\sigma^2 + \tau^2 + n^2) - m_G \left( \rho \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\sigma}{\sqrt{E}} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial v} \frac{\tau}{\sqrt{G}} + \varepsilon n \right)^2 + \\ + A(\sigma\lambda + \tau\mu + n\nu)^2 + B(\sigma\lambda' + \tau\mu' + n\nu')^2 + C(\sigma\lambda'' + \tau\mu'' + n\nu'')^2$$

Итак, имеем 8 уравнений: (2.4), (2.5) и (2.8) для 8 неизвестных функций времени  $\sigma, \tau, n, u, v, u_1, v_1, \theta$ . Эти уравнения получены Воронцом [1].

**3.** С помощью полученных уравнений исследуем вопрос об условиях существования в рассматриваемой задаче первого интеграла типа интеграла площадей.

Движение тела происходит без скольжения в точке контакта. Разумеется, предполагаем, что ограничивающая тело поверхность и неподвижная поверхность регулярные, выпуклые и таковы, что в любой момент времени существует только одна точка  $M$  контакта тела с опорной поверхностью.

Пусть  $\iota = (\iota_1, \iota_2, \iota_3)$  – заданный в осях  $Muv$  единичный вектор вертикали. Предполагаем, что, кроме веса, никакие другие активные силы на тело не действуют.

Спроектируем векторное уравнение (1.2) на вертикальное направление  $\iota$ . Получим

$$\frac{d(K \cdot \iota)}{dt} = (L \times M', \iota) \quad (3.1)$$

Так как правая часть этого уравнения представляет собой инвариант, можно его вычислить в любой системе координат, в частности, в системе  $Muv$ . Вектор  $L$  имеет координаты (2.6), вектор  $M' = (\sqrt{E}\dot{u}, \sqrt{G}\dot{v}, 0)$ . С учётом формул (2.4) выражение правой части (3.1) принимает вид

$$m_G \left\{ \sqrt{E}\dot{u} [\iota_3(\zeta\sigma - \xi n) - \iota_2(\xi\tau - \eta\sigma)] + \right. \\ \left. + \sqrt{G}\dot{v} [-\iota_3(\eta n - \zeta\tau) + \iota_1(\xi\tau - \eta\sigma)] \right\} \quad (3.2)$$

Чтобы существовал общий интеграл площадей  $K \cdot \iota = const$ , необходимо и достаточно тождественное по времени равенство нулю выражения в фигурных скобках (3.2) при все-возможных допустимых значениях кинематических величин  $\dot{u}, \dot{v}, \sigma, \tau, n$ , связанных соотношениями (2.4) и (2.5).

Зафиксируем значения  $u, v, \theta, \dot{u}, \dot{v}$ . Тогда две проекции  $\sigma, \tau$  угловой скорости тела на оси  $Muv$  тоже будут фиксированы, а

третья проекция  $n$  может принимать произвольное значение в зависимости от значения  $\dot{\theta}$ , которое может быть произвольным. Следовательно, коэффициент при  $n$  в фигурной скобке выражения (3.2) должен быть тождественно равен нулю, т.е. должны выполняться следующие два тождества по времени:

$$\iota_3 (-\xi\sqrt{E}\dot{u} - \eta\sqrt{G}\dot{v}) = 0,$$

$$\iota_3 \zeta (\sigma\sqrt{E}\dot{u} + \tau\sqrt{G}\dot{v}) + (-\iota_2\sqrt{E}\dot{u} + \iota_1\sqrt{G}\dot{v})(\xi\tau - \eta\sigma) = 0$$

Отсюда вытекают два случая:

$$a) \iota_3 = 0, \quad (-\iota_2\sqrt{E}\dot{u} + \iota_1\sqrt{G}\dot{v})(\xi\tau - \eta\sigma) = 0 \text{ или}$$

$$б) \iota_3 \neq 0, \quad -\xi\sqrt{E}\dot{u} - \eta\sqrt{G}\dot{v} = 0,$$

$$\iota_3 \zeta (\sigma\sqrt{E}\dot{u} + \tau\sqrt{G}\dot{v}) - (\iota_2\sqrt{E}\dot{u} - \iota_1\sqrt{G}\dot{v})(\xi\tau - \eta\sigma) = 0$$

В случае (а) имеем  $(\iota_1)^2 + (\iota_2)^2 = 1$ , поэтому в силу того, что величины  $\dot{u}, \dot{v}$  в каждый момент времени могут принимать произвольные значения, получаем  $\xi\tau - \eta\sigma = 0$ . Но тогда

$$\xi = \eta = 0 \quad (3.3)$$

в силу произвольности значений величин  $\sigma, \tau$ .

Радиус-вектор  $\overline{MO}$  имеет компоненты  $-\xi, -\eta, -\zeta$ , поэтому условие (3.3), так как оно выполняется в каждой точке контакта тела с опорой, показывает, что это тело представляет собой симметричный шар (или некоторую его часть, если допускается, что тело не может касаться опоры всеми точками ограничивающей его поверхности) с произвольным центральным эллипсоидом инерции.

Итак, в случае (а) тело – симметричный шар, а опорная поверхность является цилиндром с образующей, которая параллельна вертикальной прямой. Проекция на вертикаль кинетического момента, подсчитанного относительно точки контакта  $M$ , суть первый интеграл уравнений качения шара без скольжения. Если связь неудерживающая, то этот случай представляет лишь теоретический интерес, потому что не реализуем.

Рассмотрим случай (б). В силу произвольности значений  $\dot{u}, \dot{v}$  опять приходим к условию (3.3), т.е. тело обязано быть симметричным шаром, других возможностей нет. Какой должна быть неподвижная опорная поверхность? Ответ даёт второе тождество в случае (б), которое принимает вид

$$\sigma\sqrt{E}\dot{u} + \tau\sqrt{G}\dot{v} = 0 \quad (3.4)$$

Пользуясь формулами кинематики (2.4) и (2.5), компоненты  $\sigma, \tau$  угловой скорости можно выразить как линейные однородные функции переменных  $\dot{u}, \dot{v}$ . Подставив их в выражение (3.4), получим однородную квадратичную форму

$$Q_{11}(\dot{u})^2 + Q_{12}\dot{u}\dot{v} + Q_{22}(\dot{v})^2 = 0,$$

которая должна обращаться в нуль при произвольных значениях  $\dot{u}, \dot{v}$ . Следовательно, ее коэффициенты должны тождественно быть нулями.

Прямые вычисления показывают, что тождество  $Q_{11} = 0$  имеет вид

$$-\frac{D_1''}{G_1} + \frac{D_1}{E_1} = 0,$$

т.е. главные кривизны опорной поверхности в точке контакта с телом равны. Но опорная поверхность, состоящая из омбилических точек, является сферой [3]. Тождество  $Q_{22} = 0$  совпадает с  $Q_{11} = 0$ . Наконец, тождество  $Q_{12} = 0$  имеет вид

$$-\frac{D''}{G} + \frac{D}{E} = 0,$$

и оно выполняется, так как тело ограничено сферической поверхностью.

Итак, в случае (б) тело – симметричный шар, а опорная поверхность произвольная сферическая, в частности, плоскость.

Заметим, что в случае, когда опорная плоскость горизонтальна, момент силы тяжести шара относительно каждой из трёх осей триедра  $M_{uvmt}$  равен нулю. Следовательно, в этом случае существуют три линейных интеграла площадей, ровно столько, сколько необходимо, чтобы свести задачу к квадратурам [4].

Пример обкатывания без скольжения неподвижной сферы симметричным тяжёлым шаром, для которого существует обобщённый интеграл площадей, впервые привёл С.А. Чаплыгин [5]. Мы доказали, что других подобных примеров в задаче о качении тяжёлого тела по неподвижной поверхности нет. Этот результат известен давно [6]. Выше он был дополнен случаем, когда опорная поверхность цилиндрическая с вертикальной образующей.

4. Уравнения Воронца можно применить к различным задачам неголономной динамики твёрдого тела, катающегося по произвольной поверхности. Например, к задаче о движении кельтского камня [7]. Ниже с помощью уравнений (2.8) продемонстрировано одно интересное динамическое свойство кельтского камня, которое можно наблюдать экспериментально.

Кельтский камень представляет собой тяжёлое твёрдое тело, опирающееся на горизонтальную плоскость

$$E_1 = 1, G_1 = 1, D_1 = D_1'' = 0$$

Движение камня происходит без скольжения в точке контакта. По-прежнему предполагаем, что ограничивающая тело поверхность регулярная и выпуклая, так что в любой момент времени существует только одна точка  $M$  контакта тела с опорной плоскостью.

В положении устойчивого равновесия вектор  $\overrightarrow{MO}$  ортогонален плоскости, а функция  $\rho(u, v) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  имеет локальный минимум. Обозначим точку касания на поверхности тела в положении равновесия через  $M_0$ .

Важное значение имеет геометрия ограничивающей тело поверхности и распределение масс в теле. Именно: предполагается, что в точке  $M_0(u_0, v_0)$  на поверхности тела главные радиусы кривизны поверхности имеют различные значения  $r_1 \neq r_2$ , и, кроме того, в положении равновесия матрица косинусов углов между осями систем координат  $Oxyz$  и  $M_0uvmt$  имеет вид

		$x$	$y$	$z$
	$u$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	0
	$v$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	0
	$m$	0	0	1

(4.1)

(угол  $0 < \alpha < \pi/2$ ).

Правые части уравнений (2.8) содержат только компоненты момента  $\overrightarrow{MO} \times (-Pm) = P \cdot \overrightarrow{OM} \times m$  силы тяжести  $P$  камня,  $m$  – единичный вектор нормали к поверхности тела в точке  $M$ . Таким образом,

$$\Gamma_u = P \cdot (\eta\nu'' - \zeta\nu'), \dots$$

Пусть  $L$  – линия главной кривизны  $v = v_0$ . Положим, тело немного отклонено от положения равновесия так, что касается опорной плоскости своей точкой  $M \in L$ , и отпущено без начальной скорости. Тело начнёт качаться около положения равновесия, однако эксперимент показывает, что тело начнёт ещё и поворачиваться вокруг оси  $Mm$ . Мы это докажем в предположении *малости колебаний*.

Итак, в случае указанных малых колебаний тела матрица направляющих косинусов (2.1) является малым возмущением матрицы (4.1), в частности,

$$|\nu| \ll 1, \quad |\nu'| \ll 1, \quad |\lambda''| \ll 1, \quad \mu'' \equiv 0, \quad |\nu''| \approx 1,$$

и, кроме того, элементы главной диагональной подматрицы  $2 \times 2$  матрицы (2.1) все ненулевые.

В начальный момент времени имеем  $n(t_0) = 0$ ,  $\sigma(t_0) = 0$ . Тогда  $\sigma(t) \equiv 0$  и, согласно второй формуле в (2.4),

$$\tau(t) = \frac{\sqrt{E}\dot{u}}{r_1} \quad (4.3)$$

Кроме того, координаты проекции центра масс на плоскость  $Muv$ :  $|\xi| \ll 1$ ,  $\eta \equiv 0$ .

Условимся в дальнейшем обозначать приближённое равенство, в котором опущены члены малые по сравнению со всеми остальными членами такого равенства, знаком  $\cong$ .

Так как  $m$  – единичный вектор вертикали, то его полная производная по времени, вычисленная, например, в главных центральных осях  $Oxyz$  тела, равна нулю

$$\dot{v} + q\nu'' - r\nu' = 0, \quad \dot{v}' + r\nu - p\nu'' = 0, \quad \dot{v}'' + p\nu' - q\nu = 0,$$

где

$$p = \sigma\lambda + \tau\mu + \eta\nu, \quad q = \sigma\lambda' + \tau\mu' + n\nu', \quad r = \sigma\lambda'' + \tau\mu'' + n\nu''$$

С учётом оценок (4.2) получаем приближённые равенства

$$\dot{v} \cong -\tau\mu', \quad \dot{v}' \cong \tau\mu, \quad \dot{v}'' \cong 0 \quad (4.5)$$

Третье уравнение системы (2.8) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(A p\nu + B q\nu' + C r\nu'' + m_G \xi^2 n) - m_G \rho \frac{\partial \rho}{\partial u} \dot{u} n = 0 \quad (4.6)$$

В силу того, что

$$\xi^2 \ll 1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial u}(M_0) = 0,$$

его можно заменить приближённым равенством

$$\frac{d}{dt}(A p\nu + B q\nu' + C r\nu'') \cong 0,$$

откуда в силу (4.2), (4.4) и (4.5) следует равенство

$$C\dot{n} + \tau[A(-\tau\mu\mu') + B\tau\mu\mu'] \cong 0,$$

которое в силу формулы (4.3) запишется так:

$$(4.2) \quad C\dot{n} \cong (A - B) \left( \frac{\dot{u}}{r_1} \right)^2 E \mu \mu' > 0, \quad \text{т.к.} \quad \mu \mu' > 0 \quad (4.7)$$

(полагаем, что  $A > B$ ).

Если тело аналогично совершает малые качания вдоль другой линии главной кривизны  $u = u_0$  в окрестности точки  $M_0$ , то вместо (4.7) получим приближённое равенство

$$C\dot{n} \cong (B - A) \left( \frac{\dot{v}}{r_2} \right)^2 G \lambda \lambda' > 0, \quad \text{т.к.} \quad \lambda \lambda' < 0$$

В обоих случаях качания тела вызывают его вращение вокруг вертикали в направлении оси  $Oy$  с меньшим значением центрального момента инерции.

Аналогичный «перевод» колебаний во вращение наблюдается для физического маятника в сферическом подвесе, но анализ этого явления проще.

## Литература

1. Woronetz P. Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers // Mathematische Annalen. 1912. Bd. 71. S. 392-403. = Воронец П. Об уравнениях движения твёрдого тела. Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. 2. С. 431-441.
2. (4.4) Фролов Г.К. Основы аналитической механики. – Т.1. Киев: тип. Корчак-Новицкого. 1900. – 543+XIV с.
3. Погорелов А.В. Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков: изд-во ХГУ им. А.М.Горького. 1967. – 163 с.
4. Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сборник. 1903. Т.24. Вып.1. С.139-168. (Полн. собр. соч. Т.1. С.216-234. 1933; Собр. соч. Т.1. С.76-101. 1948; в книге «Иссл. по динамике негolon. систем», сер. «Классики естествознания». С.39-71. 1949).
5. Чаплыгин С.А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров // Матем. сборник. 1897. Т.20. Вып.1. С.1-32. (Полн. собр. соч. Т.1. С.172-193. 1933; Собр. соч. Т.1. С.26-56. 1948; в книге «Иссл. по динамике негolon. систем» сер. «Классики естествознания». С.72-99. 1949).
6. Сумбатов А.С. О применении некоторых обобщений теоремы площадей в системах качения твёрдых тел // Прикл. матем. мех. 1976. Т.40. Вып.1. С. 599-605.
7. Walker G.T. On a Curious Dynamical Property of Celts // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1895. Vol.8. Part 5. Pp. 305-306.

Э.М. Красинская<sup>1</sup>, А.Я. Красинский<sup>2</sup>, К.Б. Обносков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

<sup>2</sup> Московский государственный университет пищевых производств

# О РАЗВИТИИ НАУЧНЫХ МЕТОДОВ ШКОЛЫ М.Ф. ШУЛЬГИНА В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ РАВНОВЕСИЯ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ С ИЗБЫТОЧНЫМИ КООРДИНАТАМИ

Для голономных систем с геометрическими связями излагается разработанный М.Ф. Шульгиным [1] способ получения уравнений движения без множителей связей, связанный с однократным дифференцированием связей. Разрабатывается методика использования такой формы уравнений движения применительно к задачам устойчивости и стабилизации положений равновесия систем с избыточными координатами. Эффективность предлагаемого подхода исследования систем с избыточными координатами подтверждена решением задачи стабилизации положения равновесия в реальном мехатронном стенде **GBV1005 Ball&Beam Educational Control System**.



Шульгин Михаил Федорович (10.08.1901 – 08.05. 1981)

**Краткая биографическая справка.** Родился в селе Боровском Кустанайской области в семье крестьянина-хлебороба. В 1919 году окончил Кустанайское реальное училище. С 1919 по 1922 служил в Красной армии. По демобилизации из РККА в 1922 году был зачислен студен-

том горного факультета Томского технологического института. Из-за материальных трудностей через год оставил институт и работал в 1923-1925 гг агентом государственного страхования Урицкого уезда Кустанайской области, одновременно преподавал математику в Боровской школе-семилетке. В июле 1925 года был командирован Кустанайским ОблОНО для продолжения образования в САГУ (Среднеазиатский государственный университет). В 1925-30 гг – студент физико-математического факультета САГУ. На 4-5 курсах работал преподавателем математики и физики в Узбекской школе второй ступени и в узбекском экстернате по подготовке в вузы. В 1930 году после окончания САГУ по специальности «математика» работал ассистентом кафедры математики и механики в Среднеазиатском хлопково-ирригационном политехническом институте. С сентября 1931 года работал в должности доцента в Среднеазиатском механико-технологическом институте (ТИТЛП), где с января 1933 г по сентябрь 1937 г заведовал кафедрой математики и теоретической механики. С августа 1933 года начал работать в должности доцента физико-математического факультета САГУ (ТашГУ – Ташкентский государственный университет, а ныне Национальный университет Узбекистана) на физико-математическом факультете (затем механико-математическом факультете) до конца жизни. Заведовал кафедрой механики (а затем общей механики) с 1940 по 1975 годы.

С 1965 г. на кафедре общей механики ТашГУ под руководством профессора М. Ф. Шульгина работает общегородской научно-методический семинар по теоретической механике, способствующий плодотворному обмену опытом и расширению кругозора преподавателей ВУЗов Ташкента и всего Узбекистана.

**Основные сочинения** (всего их около 70):

1. «О методе избыточных координат в аналитической механике», Бюллетень САГУ, вып. 30, 1949.
2. «Теорема о свойствах интегралов динамических уравнений Чаплыгина», ДАН СССР, т. 84, №5, 1952.
3. Монография «О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрирование». Изд-во САГУ, Ташкент, 1958 – 186 с. [1]
4. Русско-узбекский терминологический словарь по теоретической механике. Изд-во ТашГУ. 1978.

**Основные научные направления работ М.Ф.Шульгина** связаны с вопросами аналитической динамики несвободных механических систем.

Еще Лагранж отмечал, что, хотя разрешение задачи можно, используя условные уравнения, привести к рассмотрению уравнений только для обобщенных координат, но достаточно часто встречаются такие случаи, когда, во избежание излишнего осложнения расчета, возникает необходимость и оказывается целесообразным сохранение большего числа переменных, чем это необходимо для определения конфигурации системы.

При исследовании динамики систем со связями, начиная с Лагранжа и до настоящего времени, используются дифференциальные уравнения с неопределенными множителями, к которым добавляются уравнения связей. Общее число уравнений становится равным сумме числа переменных и числа связей. Если в исследованиях не предполагается определение реакций связей, то из полученных уравнений эти множители исключают различными методами [2-5].

Естественно возникает необходимость получения для связанных задач динамики уравнений движения, сразу свободных от неопределенных множителей, на базе которых можно было бы построить все теории аналитической динамики. Разработка методов получения таких уравнений явилась основной темой многих работ М.Ф.Шульгина [1]. Характерная особенность этих уравнений состоит в том, что хотя они и составлены в избыточных координатах, но не содержат неопределенных множителей. Далее, в избыточных координатах изложены теория Гамильтона – Якоби, теория Пуассона и др.

Кроме того, в [1] дан достаточно простой способ построения всей аналитической динамики в неголономных координатах для голономных систем, а также выведены наиболее общие уравнения движения классической динамики, пригодные для исследования движения неголономных систем и систем с сервомоторными связями.

В настоящее время рассмотрение систем со связями, в том числе неголономных систем, стали одними из основных направлений аналитической динамики и привлекают к себе все большее внимание ученых и инженеров.

#### **Устойчивость и стабилизация равновесия мехатронных систем с избыточными координатами**

Наиболее востребованными к настоящему времени оказались уравнения движения [1] голономных систем, положение которых определяется избыточными переменными, по структуре несколько отличающиеся от уравнений Лагранжа 2-го рода. Ниже уравнения Шульгина используются для голономных систем с избыточными координатами в задачах устойчивости и стабилизации.

**1. Вывод уравнений М.Ф.Шульгина.** Во многих задачах современной технической практики (в частности, управления многозвенными манипуляторами и другими мехатронными системами) целесообразно [1-6] задавать конфигурацию механической системы параметрами  $q_1, \dots, q_{n+m}$ , взятыми в числе, превосходящем необходимое  $n$  - число степеней свободы системы. Тогда  $m$  из этих  $n+m$  параметров называются избыточными координатами. Между  $n+m$  параметрами  $q_1, \dots, q_n, \dots, q_{n+m}$  существуют  $m$  независимых соотношений (которые, вообще говоря, могут содержать и время)

$$F_k(q_1, \dots, q_{n+m}) = 0 \quad (k = \overline{1, m}), \quad \text{rank} \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_1, \dots, q_{n+m})} = m \quad (1)$$

Исключение из этих выражений лишних зависимых координат часто приводит к громоздким формулам, особенно когда в уравнениях связей присутствуют тригонометрические функции ([2], с. 20-21).

Использование избыточных координат требует дать другую постановку задач динамики [1-3]. Нельзя будет пользоваться уравнениями Лагранжа второго рода, так как при их выводе предполагается введение независимых обобщенных координат, вариации которых будут также независимы. Для рассматриваемых систем можно пользоваться уравнениями Лагранжа первого рода в декартовых координатах или уравнениями Лагранжа с множителями связей в избыточных криволинейных координатах [1-3].

Другое направления предполагает исключение множителей. В частности, предлагался ([3], с. 328-331) следующий подход к исключению множителей связей: уравнения геометрических связей предлагалось дифференцировать два раза и один раз – уравнения дифференциальных связей, а затем подставлять в эти условные уравнения ускорения как линейные функции множителей связи из уравнений движения. Множители находятся из полученной линейной алгебраической неоднородной системы уравнений. В [4] этот способ исключения множителей развивается применительно к новому классу задач, причем отмечено ([4], с. 27), что аналитические выражения для множителей впервые получены и исследованы Г.К.Сусловым [3] и А.М.Ляпуновым [5].

Методика, связанная с однократным дифференцированием геометрических связей и применением уравнений движения, получаемых из общих теорем динамики, отрабатывалась [6] в МЭИ в ходе применения комплекса типовых расчетов по теоретической механике, выполняемых с помощью ЭВМ.

Отметим, что использование продифференцированных геометрических (голономных) связей для исключения множителей связей предлагалось еще в [2] (с. 319-321). Однако широкого распространения этот подход не получил, возможно, потому, что такой метод предлагался в основном для неголономных систем (систем с неинтегрируемыми дифференциальными связями), и отмечалось, что среди дифференциальных связей могли быть и интегрируемые.

Принципиально иной способ получения уравнений движения систем с избыточными координатами без множителей связей, связанный с однократным дифференцированием связей, разработан М.Ф. Шульгиным [1]. Именно такая форма этих уравнений, по нашему мнению, является одной из наиболее подходящих для исследования динамики систем с избыточными координатами, в особенности для рассмотрения задач устойчивости и стабилизации установившихся движений систем с геометрическими связями.

Если продифференцировать по времени уравнения геометрических связей, наложенных на систему с избыточными координатами, получим кинематические (голономные) связи в виде

$$\sum_{s=1}^{n+m} b_{ks} \dot{q}_s = 0 \quad (\overline{k, m}) \quad (2)$$

Геометрические связи (1) или связи (2) налагают на вариации координат следующие условия

$$\sum_{s=1}^{n+m} b_{ks} \delta q_s = 0 \quad (\overline{k, m}) \quad (3)$$

Здесь  $b_{ks} = \partial F_k / \partial q_s$ , причем  $\partial b_{ks} / \partial q_r = \partial b_{kr} / \partial q_s$ , так как связи интегрируемы и представимы в виде (1).

Пусть  $T(q_1, \dots, q_{n+m}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n+m})$  – кинетическая энергия без учета связей,  $\tilde{Q}_s$  – (потенциальные и непотенциальные) силы, отнесенные к координатам  $q_s$ . Тогда из принципа Даламбера-Лагранжа получим [1-3] уравнения движения системы с избыточными координатами с множителями связей

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \tilde{Q}_s + \sum_{k=1}^m \lambda_k b_{ks}, \quad s = 1, \dots, n+m \quad (4)$$

С другой стороны, допуская, исходя из (1), без ограничения общности, что

$$\det \left[ \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_{n+1}, \dots, q_{n+m})} \right] \neq 0$$

можем представить связи (2) в разрешенном относительно скоростей зависимых координат виде

$$\dot{q}_k = \sum_{j=1}^n B_{kj}(q_1, \dots, q_{n+m}) \dot{q}_j \quad k = n+1, \dots, n+m \quad (5)$$

Тогда из последних  $m$  уравнений (4) для множителей имеем выражения

$$\lambda_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \tilde{Q}_k, \quad k = \overline{n+1, n+m},$$

подставляя которые в уравнения для остальных координат, будем иметь

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j - \sum_{k=n+1}^{n+m} B_{kj}(q_1, \dots, q_{n+m}) \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \tilde{Q}_k \right), \quad j = \overline{1, n}$$

В несколько ином виде аналогичные уравнения получены в [2] (с. 320-321).

Исключим из  $T(q_1, \dots, q_{n+m}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n+m})$  зависимые скорости с помощью уравнений связей (5). Обозначая полученное выражение кинетической энергии через  $T^*(q_1, \dots, q_{n+m}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ , сравнивая соответствующие производные от  $T$  и  $T^*$  и учитывая интегрируемость кинематических связей (2), получим уравнения движения системы в избыточных координатах М.Ф. Шульгина

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} - E_j(T^*) = \tilde{Q}_j + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_{kj}(q_1, \dots, q_{n+m}) \tilde{Q}_k, \quad j = \overline{1, n} \quad (6)$$

где  $E_j = \partial / \partial q_j + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_{kj}(q_1, \dots, q_{n+m}) \partial / \partial q_k$

Уравнения (6) не содержат множителей связей, и их число равно числу степеней свободы системы. Эти уравнения следует рассматривать совместно с уравнениями связей (5).

Система уравнений (6) представляет собой частный случай уравнений движения неголономных систем с однородными связями в форме Воронца, если кинематические связи (5) интегрируемы (см. [1]). Отметим, что это позволяет применять к исследованию динамики систем с избыточными координатами все методы, разработанные для изучения динамики неголономных систем. Но, вместе с тем, кроме принципиально иной структуры из-за отсутствия членов неголономности, эти уравнения имеют и другие особенности, которые требуют дальнейшего изучения и использования.

**2. Явный вид уравнений движения с избыточными координатами М. Ф. Шульгина в скалярной форме.** Первоначальная кинетическая энергии без учета связей (1), которая в общем случае равна

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = \frac{1}{2} A_{\gamma\nu}(q) \dot{q}_\gamma \dot{q}_\nu + A_\gamma(q) \dot{q}_\gamma + T_0(q) \quad (7)$$

после исключения зависимых скоростей с помощью (5) получит вид

$$T^* = \frac{1}{2} a_{s\rho}(q) \dot{q}_s \dot{q}_\rho + d_s(q) \dot{q}_s + T_0(q) = T_2^* + T_1^* + T_0(q) \quad (8)$$

$$a_{s\rho}(q) = A_{s\rho} + A_{\mu s} B_{\mu\rho} + A_{\mu\rho} B_{\mu s} + A_{\mu\sigma} B_{\mu\rho} B_{\sigma s}$$

$$d_s(q) = A_s + A_\mu B_{\mu s}$$

Здесь и далее по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование. Индексы меняются следующим образом:  $\gamma, \nu = \overline{1, n+m}$ ;  $i, j, s, \rho = \overline{1, n}$ ;  $\mu, k = \overline{n+1, n+m}$ . Уравнения Шульгина (6) представим в явной форме:

$$\begin{aligned} a_{is} \ddot{q}_s + \frac{\partial a_{is}}{\partial q_j} \dot{q}_s \dot{q}_j + \frac{\partial a_{is}}{\partial q_\mu} B_{\mu\rho} \dot{q}_s \dot{q}_\rho - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{s\rho}}{\partial q_i} \dot{q}_s \dot{q}_\rho - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{s\rho}}{\partial q_\mu} B_{\mu i} \dot{q}_s \dot{q}_\rho + \left( \frac{\partial d_i}{\partial q_s} - \frac{\partial d_s}{\partial q_i} + B_{\mu s} \frac{\partial d_i}{\partial q_s} - B_{\mu i} \frac{\partial d_s}{\partial q_\mu} \right) \dot{q}_s + \\ + \frac{\partial W}{\partial q_i} + B_{\mu i} \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = Q_i + B_{\mu i} Q_\mu \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{q}_\mu = B_{\mu i} \dot{q}_i$$

Здесь  $W(q) = \Pi(q) - T_0(q)$  – измененная (приведенная) потенциальная энергия,  $\Pi(q)$  – потенциальная энергия, через  $Q_i$ ,  $Q_\mu$  теперь обозначены непотенциальные силы, соответствующие координатам  $q_i$ ,  $q_\mu$  при их избыточном введении.

Уравнения равновесия можно получить из этих уравнений, полагая все  $\dot{q} = 0$ :

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} + B_{\mu i} \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = Q_{i(\dot{q}=0)} + (B_{\mu i} Q_\mu)_{(\dot{q}=0)} \quad (10)$$

При  $T_0(q) = 0$  и отсутствии непотенциальных сил получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + B_{\mu i} \frac{\partial \Pi}{\partial q_\mu} = 0$$

**Замечание 1.** Отсюда следует, что положение равновесия при использовании избыточных координат может не быть стационарной точкой потенциальной энергии. Однако, если потенциальная энергия может быть выражена через независимые обобщенные координаты  $\Pi(q_1, \dots, q_n)$ , то для нее при отсутствии непотенциальных позиционных сил все  $\partial \Pi / \partial q_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

**Замечание 2.** В общем случае при отсутствии непотенциальных позиционных сил положение равновесия определяется из уравнений для приведенной потенциальной энергии  $W(q)$ . Эти уравнения будут уравнениями относительного равновесия. Например, при сложном движении механической системы  $T_o(q)$  представляет собой кинетическую энергию переносного движения системы [2].

Очевидно, уравнений (10) недостаточно для определения положений равновесия. К ним необходимо еще присоединить уравнения геометрических связей (1).

**3. Структура уравнений возмущенного движения.** Пусть система допускает положение равновесия.

$$q_i = q_{i0}, \quad q_\mu = q_{\mu 0} \quad (11)$$

Введем возмущения, составим уравнения возмущенного движения и выделим в них первое приближение

$$\begin{aligned} q_{i0} = q_{i0} + x_i, \quad q_\mu = q_{\mu 0} + y_\mu \\ a_{is}(0) \ddot{x}_s + \left[ \left( \frac{\partial d_i}{\partial q_s} \right)_0 - \left( \frac{\partial d_s}{\partial q_i} \right)_0 + B_{\mu 0}(0) \left( \frac{\partial d_i}{\partial q_\mu} \right)_0 - \left( \frac{\partial d_s}{\partial q_\mu} \right)_0 B_{\mu i}(0) \right] \dot{x}_s + \\ + \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_s} \right)_0 + B_{\mu i}(0) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_\mu \partial q_s} \right)_0 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_\mu} \right)_0 \left( \frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_s} \right)_0 \right] x_s + \\ + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 y_k + B_{\mu i}(0) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_\mu} \right)_0 y_k + \\ + \left( \frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_k} \right)_0 \left( \frac{\partial W}{\partial q_\mu} \right)_0 y_k = X_i(\dot{x}, x, y) \end{aligned} \quad (12)$$

Добавим к этим уравнениям уравнения дифференциальных связей с выделенным первым приближением

$$\dot{y}_k = B_{jk}(0) \dot{x}_k + B_{jk}^{(1)}(x, y) \dot{x}_k \quad (13)$$

Если в системе (12), (13) провести линейную замену [7-9]



$$z_k = y_k - B_{kj}(0)x_j \quad (14)$$

то уравнения связей примут вид

$$\dot{z}_k = B_{kj}^{(1)}(x, z + B(0)x)\dot{x}_k, \quad (15)$$

Очевидно, переменным  $z_k$  соответствуют нулевые корни характеристического уравнения.

Уравнения (12) для простоты составлены без учета непотенциальных сил. Пусть теперь на систему, кроме потенциальных, действуют еще непотенциальные позиционные силы и силы, зависящие от скоростей. Выделяя в них первое приближение и используя векторно-матричную форму записи, будем иметь

$$Q_\gamma = g_{\gamma j}\dot{q}_j + g_{\gamma \mu}\dot{q}_\mu + p_{\gamma j}q_j + p_{\gamma \mu}q_\mu + \dots$$

Исключая из этих сил зависящие скорости, и, выполнив замену (14), для ненулевых корней характеристического уравнения системы первого приближения при действии непотенциальных сил получим

$$\det[A\lambda^2 + (\Gamma + D)\lambda + C_1 + C_2B + B'C_3 + B'C_4B + C^B + P] = 0 \quad (16)$$

$$D = \|g_{ij} + g_{i\mu}B_{\mu i} + g_{\mu i}b_{\mu j} + g_{\mu i}b_{\mu k}B_{kj}\|$$

$$P = \|p_{ij} + p_{i\mu}B_{\mu i} + B_{\mu j}p_{\mu j} + B_{\mu i}p_{\mu k}B_{kj}\|$$

$$A = \|a_{ij}(0)\|; \Gamma = \|\gamma_{is}(0)\|; C_1 = \left\| \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_s} \right)_0 \right\|;$$

$$C_2 = \left\| \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_\mu} \right)_0 \right\|; C_4 = \left\| \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_\mu \partial q_\sigma} \right)_0 \right\|; C_3 = C_2';$$

$$C^B = \left\| \left( \frac{\partial W}{\partial q_\mu} \right)_0 \left( \frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_s} \right)_0 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_\mu} \right)_0 \left( \frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_k} \right)_0 B_{kj}(0) \right\|; B = \|B_{\mu i}(0)\|$$

$$\gamma_{is}(0) = \left[ \left( \frac{\partial d_i}{\partial q_s} \right)_0 - \left( \frac{\partial d_s}{\partial q_i} \right)_0 + B_{\mu 0}(0) \left( \frac{\partial d_i}{\partial q_\mu} \right)_0 - \left( \frac{\partial d_s}{\partial q_\mu} \right)_0 B_{\mu i}(0) \right]$$

**Замечание 3.** Если среди корней характеристического уравнения (16) имеется хотя бы один с положительной действительной частью, положение равновесия будет неустойчиво, например, в случае, когда

$$\det[C_1 + C_2B + B'C_3 + B'C_4B + C^B + P] < 0$$

В последнем случае свободный член характеристического уравнения отрицателен и среди корней имеется хотя бы один с положительной действительной частью. Доказательство следует из теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

**4. Достаточное условие асимптотической устойчивости равновесия систем с избыточными координатами.** В силу того, что полное характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^m \det[A\lambda^2 + (\Gamma + D)\lambda + C_1 + C_2B + B'C_3 + B'C_4B + C^B + P] = 0 \quad (17)$$

устойчивость положений равновесия систем с избыточными координатами возможна лишь в критических случаях, когда число корней характеристического уравнения на мнимой оси не меньше числа геометрических связей. При этом, в отличие от неголономных систем, для систем с избыточными координатами, в случае, когда действительные части всех корней уравнения (16) отрицательны, несмотря на наличие  $m$  нулевых корней уравнения (17), имеет место асимптотическая устойчивость равновесия по отношению ко всем координатам и скоростям: условия, накладываемые геометрическими связями, приводят к тому, что  $z_k(t) \equiv 0 \forall t$ . С использованием этого условия и теории критических случаев [7-10] доказана [11,12] следующая

**Теорема.** Если действительные части всех корней характеристического уравнения (16) отрицательны, то положение равновесия (11) асимптотически устойчиво.

**Пример применения предлагаемой методики. Стабилизация равновесия системы GBB1005 Ball&Beam Educational Control System («Шар и желоб»)** [13].

Ball & Beam – достаточно универсальный инструмент для изучения динамики нелинейных управляемых объектов. В этой системе электропривод за счет наклона желоба может перекатить шарик в любое наперед заданное положение на желобе и стабилизировать это равновесие (Рис. 1).

Управление реализовано в виде обратной связи по информации о положении  $r(t)$  шарика на желобе, и угле поворота колеса  $\theta(t)$ .

Шарик может катиться свободно по всей длине желоба. Желоб присоединен к неподвижной поддерживающей стойке с одной стороны, и к подвижному рычагу с другой. При  $\alpha = 0$  угол  $\theta = 0$ , а рычаг  $AB$  вертикален. Движение рычага управляется двигателем постоянного тока.

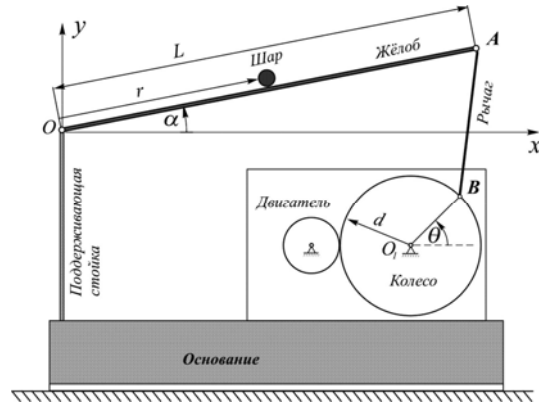


Рис. 1.

Для механической части системы, включающей шар и ротор двигателя с редуктором, кинетическая и потенциальная энергии в предположениях  $R \ll r$ ,  $R\dot{\alpha} \ll \dot{r}$  имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} J \left( \frac{\dot{r}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2; \Pi = mgr \sin \alpha,$$

где  $R$  – радиус шара;  $m$  – его масса;  $J$  – момент инерции шара;  $J_0$  – момент инерции всей системы, приведённый к двигателю. Для описания механической части введены три переменные  $r$ ,  $\theta$  и  $\alpha$  (см. рисунок), одна из них является избыточной (лишней). Будем считать, как и в [13], что уравнение связи в первом приближении имеет вид  $\alpha \approx \theta d/L$ ,  $L$  – длина желоба,  $d$  – радиус колеса. Рассмотрение только первого приближения в уравнении связи здесь оказывается достаточным, поскольку, как будет показано далее, заключение об устойчивости получается, по существу по первому приближению, на основании анализа расположения корней характеристического уравнения.

Для построения полной модели привода необходимо добавить уравнение Кирхгофа

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v; e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

где  $e_v$  – напряжение на выходе усилителя (В);  $e_b$  – напряжение противо-ЭДС (В);  $K_3$  – постоянная двигателя (В·с/рад);  $L_a$  – индуктивность (Гн);  $R_a$  – сопротивление (Ом);  $K_1$  – коэффициент преобразователя питания.

Исключая с помощью приближенного уравнения связи и избыточную координату, и ее скорость, будем иметь систему с обобщенными координатами, для которой составим уравнения Лагранжа

$$\left( m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{r} - mr \left( \frac{d}{L} \dot{\theta} \right)^2 + mg \sin \left( \frac{d}{L} \theta \right) = 0;$$

$$\left( J_0 + m \left( r \frac{d}{L} \right)^2 \right) \ddot{\theta} + 2mr \left( \frac{d}{L} \right)^2 \dot{r} \dot{\theta} + mgr \frac{d}{L} \cos \left( \frac{d}{L} \theta \right) = -b_0 \dot{\theta} + K_2 i_{a_0}$$

где  $b_0$  – коэффициент сопротивления вращению, приведенный к двигателю;  $K_2$  – электромеханическая постоянная двигателя. В таком случае при  $r_0 \neq 0$  система уравнений допускает равновесие:

$$r_0 \neq 0; \theta_0 = 0; i_a^0 = \frac{mgr_0}{K_2} \frac{d}{L}; e_v^0 = \frac{R_a i_a^0}{K_1} = \frac{mgr_0 R_a}{K_1 K_2} \frac{d}{L} \quad (18)$$

Полученные уравнения и следующие из них условия равновесия отличаются от уравнений, составленных в [13] (Equation 3-2, 3-6, 3-7), так как в [13] сначала составляются уравнения движения с избыточными координатами и скоростями, но без множителей связей (?!); в дальнейшем эти избыточные координаты и скорости исключаются. В принятых в настоящее время методиках составления уравнений сначала исключают избыточные координаты и скорости, а лишь потом составляются уравнения движения (без множителей связей). По нашему мнению методика составления уравнений движения в [13] неправомерна, так как приближенное уравнение связи учтено не при получении выражения для функции Лагранжа, а после ее дифференцирования – т.е. по существу, после составления уравнений движения.

Введём следующие обозначения ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  – возмущения,  $u$  – дополнительное напряжение на якоре двигателя, обеспечивающее стабилизацию заданного равновесия  $r_0 \neq 0$ ).

$$r = r_0 + x_1; \dot{r} = x_2; \theta = \theta_0 + x_3; \dot{\theta} = x_4; i_a = i_a^0 + x_5; e_v = e_v^0 + u \quad (19)$$

Система первого приближения уравнений возмущенного движения системы с двумя обобщенными координатами получит форму

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{-mg}{m + JR^{-2}} \frac{d}{L} x_3; \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4; \\ \frac{dx_4}{dt} &= \frac{-mgdL^{-1}x_1 - b_0x_4 + K_2x_5}{J_0 + m(r_0dL^{-1})^2}; \quad \frac{dx_5}{dt} = \frac{K_1u - R_ax_5 - K_3x_4}{L_a}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для этой системы выполнено условие управляемости – достаточное условие разрешимости методом [14] задачи стабилизации равновесия (18) до асимптотической устойчивости по первому приближению. В качестве подинтегральной функции в критерии качества удобно взять [14] квадратичную форму

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + u^2.$$

Приведём теперь строгую методику получения необходимых для рассматриваемого примера уравнений движения с использованием уравнений М.Ф. Шульгина.

В действительности вместо приближенной линейной зависимости  $\alpha \approx \theta d/L$  имеет место следующая нелинейная связь ( $l$  длина стержня, соединяющего желоб и колесо):

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2 \text{ или}$$

$$(L(\cos \alpha - 1) + d(1 - \cos \theta))^2 + (L \sin \alpha + l - d \sin \theta)^2 = l^2,$$

вследствие чего следует применять строгие методы механики систем с избыточными координатами. Дифференцируя эту связь по времени, получим

$$\dot{\alpha} = \frac{d(L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta)}{L(d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha)} \dot{\theta} = B(\alpha, \theta) \dot{\theta};$$

$$B(\alpha, \theta)_0 = \frac{d}{L}$$

Кинетическая энергия (8) после исключения зависимой скорости будет иметь вид

$$T^* = \frac{1}{2} \left( m + \frac{J}{R^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \left( m(rB(\alpha, \theta))^2 + J_0 \right) \dot{\theta}^2 \}$$

Уравнения Шульгина (6) для данной системы с избыточной координатой

$$\begin{aligned} & \left( m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{r} - mr(B(\alpha, \theta) \dot{\theta})^2 + mg \sin \alpha = 0 \\ & \left( m(rB(\alpha, \theta))^2 + J_0 \right) \ddot{\theta} + m \left( 2rB(\alpha, \theta)(\dot{r} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} \dot{\theta}) \dot{\theta} - \right. \\ & \left. - m(rB(\alpha, \theta)) \frac{\partial B}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 - B(\alpha, \theta) mrB(\alpha, \theta) \frac{\partial B}{\partial \alpha} \dot{\theta}^2 = \right. \end{aligned}$$

$$= -b_0 \dot{\theta} + K_2 \dot{i}_a - B(\alpha, \theta) mgr \cos \alpha$$

$$\dot{\alpha} = B(\alpha, \theta) \dot{\theta}$$

Рассмотрим задачу об устойчивости положения равновесия :

$$\alpha_0 = 0; r_0 \neq 0; \theta_0 = 0; \quad i_a^0 = \frac{mgr_0}{K_2} \frac{d}{L}; \quad e_\nu^0 = \frac{R_a i_a^0}{K_1} = \frac{mgr_0 R_a}{K_1 K_2} \frac{d}{L} \quad (*)$$

Введем, аналогично (19), возмущения

$$\alpha = \alpha_0 + x_6; r = r_0 + x_1; \dot{r} = x_2; \theta = \theta_0 + x_3;$$

$$\dot{\theta} = x_4; i_a = i_a^0 + x_5; e_\nu = e_\nu^0 + u$$

и выделим первое приближение в уравнениях возмущенного движения.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \frac{dx_2}{dt} = \frac{-mg}{m + JR^{-2}} x_6; \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4; \\ \frac{dx_4}{dt} &= \frac{-mgdL^{-1}x_1 - b_0x_4 + K_2x_5}{J_0 + m(r_0dL^{-1})^2}; \\ \frac{dx_5}{dt} &= \frac{K_1u - R_ax_5 - K_3x_4}{L_a}; \quad \frac{dx_6}{dt} = \frac{d}{L}x_4; \end{aligned} \quad (21)$$

Последнее уравнение системы (21) представляет собой линейное приближение уравнения кинематической связи. Замена (14) получает вид  $x_6 = z + x_3 d/L$ , выполнив которую вместо (21) получим

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{-mg}{m + JR^{-2}} \frac{d}{L} x_3 + \frac{-mg}{m + JR^{-2}} z; \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4; \quad \frac{dx_4}{dt} = \frac{-mg \frac{d}{L} x_1 - b_0x_4 + K_2x_5}{J_0 + m(r_0dL^{-1})^2}; \\ \frac{dx_5}{dt} &= \frac{K_1u - R_ax_5 - K_3x_4}{L_a}; \quad \frac{dz}{dt} = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

Характеристическое уравнения для определения ненулевых корней системы (22) полностью совпадает с уравнением системы (20). Управление, разрешающее задачу стабилизации до асимптотической устойчивости положения равновесия (18) системы (20), обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия (\*) системы с избыточной координатой  $\alpha$ . Справедливость такого утверждения следует из теоремы, поскольку действительные части всех корней (кроме одного нулевого) характеристического уравнения системы (25), замкнутой определенным из решения линейно-квадратичной задачи стабилизации

системы (20) управлением, отрицательны. Обратим внимание на то, что введение в управление дополнительного линейного члена по переменной  $x_6$  (или по  $z$  после замены) обеспечить асимптотическую по первому приближению устойчивость не может, поскольку по этой переменной управляемости нет.

Таким образом, при условии  $C^B = 0$  вопрос об устойчивости положений равновесий систем с геометрическими связями в избыточных координатах может быть полностью решен следующим образом. В уравнениях связей в окрестности рассматриваемого равновесия выделяется первое приближение и с помощью этих соотношений зависимые координаты (а с помощью продифференцированного первого приближения уравнений связей – и их скорости) исключаются из рассмотрения. Для полученной таким образом системы с обобщенными координатами с использованием уравнений Лагранжа II рода составляются уравнения возмущенного движения. Рассмотрение задачи об устойчивости равновесий таких упрощенных систем в случае, когда действительные части всех корней характеристического уравнения системы первого приближения отрицательны, полностью решает вопрос об асимптотической устойчивости рассматриваемого положения равновесия исходной системы с избыточными координатами для рассмотренного примера.

При этом в задаче об устойчивости положений равновесия систем с избыточными координатами, несмотря на формальное сведение к особому случаю – критического случая нулевых корней в количестве, равном числу геометрических связей, нет механического многообразия положений равновесия (в отличие от неголономных систем), а имеет место асимптотическая устойчивость. Изолированность исследуемого равновесия обеспечивается условиями, накладываемыми связями, как на начальные возмущения, так и вообще на движение системы.

### Литература

1. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. / М.Ф. Шульгин // Научные труды САГУ. – Ташкент, 1958 г. 183 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. / А.И. Лурье. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 824 с.
3. Сулов Г.К. Теоретическая механика. Москва-Ленинград: ОГИЗ. 1946. – 656 с.
4. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Физматлит, 2005. – 272 с.
5. Ляпунов А.М. Лекции по теоретической механике. Киев: Наукова думка, 1982. – 632 с.

6. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Уравнения движения механических систем в избыточном наборе переменных. / Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М., 1987. Вып.18. С. 62-66.
7. Ляпунов А.М. Собрание соч. Т.2.Изд. АН СССР, Москва - Ленинград, 1956.
8. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1952.
9. Каменков Г.В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. Избр. труды. М.: Наука, Т.2. – 211 с.
10. Веретенников В.Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1984. – 320 с.
11. E. Krasinskaya, A. Krasinskiy. On the application of the analytical mechanics and nonlinear stability theory for stabilization problems of mechatronic systems. // CCMECH7, 2011, Moscow-Sedlce. с. 54-55.
12. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Применение избыточных координат в задачах устойчивости и стабилизации связанных систем. // XV International Conference «Dynamical system modeling and stability investigation», 2011, Kyiv, Ukraine, с. 92.
13. <http://www.googoltech.com>
14. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1967. – С. 475-514.

## ЛОМОНОСОВ И МЕХАНИКА

К 300-летию со дня рождения М.В. Ломоносова

Михаил Васильевич Ломоносов сумел охватить в своём творчестве все главные области знаний, фундаментальные, основополагающие их проблемы, и настолько глубоко проникнуть в самую сущность непонятых в его время явлений, настолько идти впереди своего времени, что и сейчас кажутся актуальными слова В.И. Вернадского, который более чем сто лет назад назвал М.В. Ломоносова «нашим современником по тем задачам и целям, которые он ставил научному исследованию».



Об энциклопедизме М.В. Ломоносова с определённой ясностью говорит и сам перечень его трудов, что отмечают как представители естествознания, так и гуманитарии. Ещё А.С. Пушкин так его характеризует: «Соединяя необыкновенную силу воли с необыкновенною силою понятия, Ломоносов обнял все отрасли просвещения. Жажда науки была сильнейшею страстью сей души, исполненной страстей. Историк, ритор, механик, химик, минералог, художник и стихотворец, он всё испытал и всё проник: первый углубляется в историю отечества,

утверждает правила общественного языка его, даёт законы и образцы классического красноречия, с несчастным Рихманом предугадывает открытие Франклина, учреждает фабрику, сам сооружает машины, дарит художественные мозаичные произведения, и наконец открывает нам истинные источники нашего поэтического языка».

А сам учёный, словно подтверждая цельность своей натуры и понимание глубины взаимосвязи всех направлений и областей знания, весьма лаконично излагает свои мысли на этот счёт: «Нет сомнения, что науки наукам много весьма взаимно способствуют, как и физика химии, физике математика, нравоучительная наука и история стихотворству».

Среди многообразия научных интересов и достижений Ломоносова остановимся на его вкладе в механику.

В 1748 г. М. В. Ломоносов написал Л. Эйлеру письмо, являющееся серьёзной и обстоятельной научной работой, посвящённой главным образом проблеме тяготения. В этом письме он сформулировал общий закон сохранения материи и движения: «...все встречающиеся в природе изменения происходят так, что если к чему-либо нечто прибавилось, то это отнимается у чего-то другого. Так, сколько материи прибавляется какому-либо телу, столько же теряется у другого... Так как это всеобщий закон природы, то он распространяется и на правила движения: тело, которое своим толчком возбуждает другое к движению, столько же теряет от своего движения, сколько сообщает другому, им движущемуся». По сути, здесь другими словами изложен закон сохранения количества движения.

В сентябре 1748 г. Ломоносов представляет Академии ещё одно значительное сочинение «Опыт теории упругости воздуха», в котором эффект сжатия и расширения воздуха в насосах объясняется уплотнением частиц в единице объема за счет работы поршня или от других факторов. Таким образом, здесь намечен эскиз кинетической теории газов.

Ломоносовым была проделана огромная и чрезвычайно важная работа по формированию русскоязычной терминологии в разных отраслях науки, в том числе, и в механике.

Так, в 1749 г. Ломоносов выполнил русский перевод «Предисловия» Эйлера к двухтомному латинскому трактату «Scientia navalis» (Корабельная наука), который был опубликован в Санкт-Петербурге. Этот перевод представляет собой самостоятельный научный труд по динамике твердого тела. В частности, необходимо отметить удачный выбор Ломоносовым термина «устойчивость», от которого позже временно отступали, выбрав слова «твердостояние» и «остойчивость». Вот как сказано в переводе Ломоносова в соответствующем рассуждении Эйлера: «Отсюда происходит весьма важная разность между разными равновесными стояниями, для которой иные называются устойчивыми, а иные падкими. Тела, на воде плавающего, равновесное положение будет устойчиво, ежели, оное тело, будучи несколько наклонено, опять справится». В противном случае положение будет «падкое».

Созданная М.В. Ломоносовым теория теплоты являлась, по существу, механистической, поскольку температура в ней связывалась с движением частиц-корпускул (в частности, с вращением).

Он внес вклад и в механику природных процессов, в частности, доказав существование вертикальных течений воздушных масс.

В своём письме академику А.Н. Гиршову, который, в числе других, указывал на приоритет Б. Франклина в исследованиях атмосферного электричества, он пишет: «а) ...Винить меня не станет никто, так как произведения учёных столь поздно доходят до нас, особенно из Америки. б) Нисхождение верхней атмосферы Франклин только предполагал по догадке; я же вывожу его из внезапного наступления холодной погоды, о чём у Франклина нет никакого упоминания. γ) Я также произвёл расчёт и доказал, что верхний воздух не только может, но и должен стекать вниз, чего у Франклина нет и следа. δ) Мнение Франклина о северном сиянии совершенно расходится с моим. Ведь электрическую материю, необходимую для образования северного сияния, он старается привлечь с тропиков к полюсам; я же нахожу её в изобилии на месте; он не излагает, каким образом это происходит, а мимоходом в нескольких словах намечает свою догадку, а я подробнейшим образом изъясняю свою теорию; он не обосновал никакими аргументами, а я подкрепляю не только аргументами, но и объяснением явления».

В рамках метеоисследований, в том числе измерений на разных высотах (температура, давление и т. д.), М.В. Ломоносов, независимо от идеи Леонардо да Винчи, чьи труды найдены много позже, разработал летательный аппарат вертикального взлёта – первый прототип вертолёт, при двух равных винтах на параллельных осях, равноудалённых от центра тяжести и оси прибора. Однако он не подразумевал пилотируемых полётов – только подъём метеоприборов.

Документы показывают, что учёный сделал его действующую модель. В протоколе конференции Академии Наук от 1754 г. записано: «...Высокопочтенный советник Ломоносов показал изобретённую им машину, называемую им аэродинамической [воздухобежной], которая должна употребляться для того, чтобы с помощью крыльев, подвижных горизонтально в различных направлениях силой пружины, какой обычно снабжаются часы, нажимать воздух [отбрасывать его вниз], отчего машина будет подниматься в верхние слои воздуха, с той целью, чтобы можно было обследовать условия [состояние] верхнего воздуха посредством метеорологических машин [приборов], присоединённых к этой аэродинамической машине. Машина подвешивалась на шнуре, протянутом по двум блокам, и удерживалась в равновесии грузиками, подвешенными с противоположного конца. Как только пружина заводилась, [машина] поднималась в высоту и потом обещала достижение желаемого действия. Но это действие, по суждению изобрета-

теля, ещё более увеличится, если будет увеличена сила пружины и если увеличить расстояние между той и другой парой крыльев, а коробка, в которой заложена пружина, будет сделана для уменьшения веса из дерева. Об этом он [изобретатель] обещал позаботиться...».

Мы упомянули лишь о некоторых аспектах вклада Ломоносова в механику. Другие еще ждут своего исследователя.

Хотелось бы выразить надежду на то, что среди российской молодежи будут появляться люди с таким же стремлением к постижению наук, каким отличался Ломоносов.

## И.А. ТЮЛИНА

ТЮЛИНА Ирина Александровна – заслуженный преподаватель Московского университета, выдающийся историк механики, доцент кабинета истории и методологии математики и механики механико-математического ф-та МГУ им. М.В. Ломоносова.

Вся творческая жизнь Ирины Александровны неразрывно связана с Московским Университетом: здесь в 1939 году она начала учиться, отсюда в 1941 она ушла добровольцем на фронт. В годы Великой Отечественной войны Ирина Александровна с оружием в руках защищала нашу Родину. Свидетельством ее ратного подвига служат ее боевые награды: два ордена: «Отечественной войны 2-й степени», медали: «За боевые заслуги», «За отвагу», «За победу над Германией», «За оборону Москвы». В 1945 г. она вернулась, чтобы окончить университетский курс в 1948 г.



Будучи членом Совета Ветеранов войны и труда механико-математического факультета МГУ, Ирина Александровна много времени и сил отдает работе с молодежью, поисковой работе, поддерживает переписку с родственниками погибших студентов и сотрудников механико-математического факультета.

Ирина Александровна является членом Научно-методического совета по теоретической механике при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР с 1973-го года, но в заседаниях принимала участие, начиная с 1965 г., неоднократно успешно делала доклады по вопросам истории механики, участвовала во Всесоюзных, затем во Всероссийских совещаниях-семинарах заведующих кафедрами теоретической механики вузов страны. И.А. Тюлина и ее ученики регулярно публикуют статьи в сборнике научно-методических статей «Теоретическая механика», который выходит с 1968г.

И.А. Тюлина является выдающимся специалистом в области истории механики, замечательным педагогом: на ее лекциях по истории и методологии механики, на ее спецкурсах, по ее учебникам изучали историю своей науки несколько поколений отечественных механиков.

В период с 1965 по 1991 гг. многие преподаватели из всех вузов СССР приезжали на факультеты повышения квалификации (ФПК). Ирина Александровна читала для них спецкурсы по истории механики: они слушали лекции с нескрываемым интересом, многие брали темы для рефератов по истории и методологии механики. Ирина Александровна образовала специальный семинар для преподавателей ФПК, на котором заслушивались доклады по темам рефератов, они бывали не менее содержательны и интересны, чем доклады на главном научно-исследовательском семинаре кабинета Истории и методологии математики и механики.

В 1980-х гг. доц. Тюлину приглашали читать лекции по истории механики для слушателей ФПК Московского авиационно-технологического института им. К.Э. Циолковского, чтение курса «Истории механики» в МАТИ продолжалось пять лет. В 1980-90-е гг. Тюлину приглашали в Пермский государственный университет, где она читала цикл лекций по истории механики для преподавателей, аспирантов и желающих студентов при кафедре механики и процессов управления (заведующий кафедрой ректор ПГУ проф. В.В. Маланин, декан механико-математического факультета проф. В.И. Яковлев).

Ирина Александровна – воплощение энергии, бескомпромиссности и вечной неуспокоенности!

УДК 531.01

*А.В. Панишина*

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

### ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ О РАБОТЕ НМС ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

За период с момента выхода в свет выпуска № 27 сборника научно-методических статей в течение 2009-2012 годов Научно Методический совет по теоретической механике при Министерстве образования и науки РФ продолжил свою работу. На заседаниях Совета, которые традиционно проводятся в предпоследний четверг месяца в НИИ механики МГУ, рассматривалось много актуальных и интересных вопросов, посвященных важным современным научным направлениям, методике преподавания различных разделов курса Теоретической механики, вопросов, связанных с историей, методологией механики и работой кафедр теоретической механики Российских вузов.

На заседания традиционно приглашались известные ведущие ученые, а также молодые ученые с научными докладами:

- Голубев Ю.Ф. (МГУ им. М.В. Ломоносова).  
Об истории создания первого спутника Земли в рассказах его создателей (с демонстрацией документального фильма).  
Брахистохрона с сухим и вязким трением.
- Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. (Институт проблем механики РАН)  
Зависимость собственных колебаний тонкого неоднородного стержня в упругой среде от его длины.
- Акуленко Л.Д., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В. (ИПМ РАН)  
О неравномерности вращения оси Земли (интерполяция и прогноз).
- Маркеев А.П. (ИПМ РАН)  
К теории резонансного движения Меркурия.
- Розенблат Г.М. (МАДИ (ГТУ))  
О решении некоторых задач с трением и ударами.
- Журавлёв В.Ф. (ИПМ РАН), Розенблат Г.М. (МАДИ (ГТУ))  
Об устойчивости колебаний прямолинейного движения автомобиля при наличии трения.

Задачи с качением И.В. Мещерского – Н.А. Фуфаева и неголономные связи.

- Меркурьев И.В., Подалков В.В. (НИУ МЭИ)  
Современное состояние разработок микромеханических и волновых твердотельных гироскопов.
- Самсонов В.А. (НИИ механики МГУ)  
Крест как содержательный геометрический образ в некоторых задачах механики.
- Сумбатов А.С. (ВЦ РАН)  
Об уравнениях движения выпуклого тела по плоскости без проскальзывания.
- Антонов И.Л. (МГУ им. М.В. Ломоносова)  
Применение теории марковских цепей к задаче о динамической устойчивости упругого стержня, нагруженного продольной случайной силой.
- Трещёв Д.В. (МГУ им. М.В. Ломоносова)  
Классическая механика и динамические системы.

На заседаниях были заслушаны интересные доклады, посвященные знаменательным датам и вопросам истории:

- Тюлина И.А. (МГУ им. М.В. Ломоносова)  
О 150-летию В.И. Мещерского (в соавторстве с Евтушенко А.Д. (МГУ им. М.В. Ломоносова))  
О 100-летию С.М. Тарга.
- Обносов К.Б. (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Красинский А.Я. (МГУПП)  
К 110-летию со дня рождения М.Ф. Шульгина – основателя одной из школ по аналитической механике в Ташкенте.

На заседаниях были представлены доклады, посвященные современным методикам в преподавании:

- Обносов К.Б. (МГТУ им. Н.Э.Баумана)  
О тестировании остаточных знаний студентов по теоретической механике при аккредитации ВУЗов.
- Кирсанов М.Н. (НИУ МЭИ)  
Статика. Материалы для дистанционного обучения.
- Лапшин В.В. (МГТУ им. Н.Э.Баумана)  
О принципе виртуальных перемещений.
- Мартыненко Ю.Г. (НИИ механики МГУ), Капустина О.М. (НИУ МЭИ)  
Использование систем символьных вычислений в преподавании теоретической механики.



- Борисевич В.Г., Додонов Б.М., Розенблат Г.М. (МАДИ (ГТУ)), Берестова С.А., Митюшов Е.А. (УПИ УГТУ УрфТУ), Митяев А.Г., Бертяев В.Д. (ТулГУ)).

Разработка сетевых компьютерных технологий методической поддержки курса теоретической механики в технологическом университете (опыт внедрения и прогноз развития).

В апреле 2010 года состоялось выездное заседание Научно Методического Совета в Тульском Государственном Университете, посвященное 85-летию кафедры Теоретической механики ТулГУ. На научных заседаниях выступили с интересными докладами и сообщениями сотрудники ТулГУ и гости конференции.

20-24 сентября 2010 г. Совет по теоретической механике совместно с Южно-Российским государственным техническим университетом (ЮРГТУ (НПИ)) и Министерством образования и науки РФ участвовал в проведении IV Всероссийского совещания-семинара заведующих кафедрами и ведущих преподавателей теоретической механики вузов Российской Федерации на базе ЮРГТУ (НПИ) в г. Новочеркасск. В работе совещания-семинара приняло участие 77 человек из 29 городов из 50 вузов РФ. Целью совещания был обмен опытом и выработка рекомендаций и предложений по организации, научному и методическому обеспечению учебного процесса на кафедрах теоретической механики вузов Российской Федерации. В работе Совещания-семинара приняли участие известные ученые механики РФ, среди них академик РАН В.Ф. Журавлев, профессора Ю.Г. Мартыненко, Е.С.Брискин, В.А. Волосухин, Л.В. Докучаев, Ю.Ф. Голубев, А.Н. Кабельков, А.И. Кобрин, А.И. Кондратенко, М.Ю. Овчинников, Ю.И. Няшин, В.А. Самсонов, Р.С. Санжаровский, А.И. Смелягин. Доклады, включенные в Программу совещания, были посвящены последним научным достижениям механики и новым информационным технологиям в преподавании. По результатам обсуждения докладов и выступлений был принят ряд решений и рекомендаций, в частности, по совершенствованию деятельности кафедр теоретической механики. В рамках совещания-семинара была проведена Всероссийская студенческая олимпиада по теоретической механике.

На заседаниях Совета традиционно рассматривались вопросы, связанные с проведением городских и региональных студенческих олимпиад по теоретической механике (руководитель секции НМС, занимающейся студенческими олимпиадами, – Дубровина Г.И. (МГТУ им. Н.Э. Баумана)).

#### РЕШЕНИЕ IV ВСЕРОССИЙСКОГО СОВЕЩАНИЯ-СЕМИНАРА ЗАВЕДУЮЩИХ КАФЕДРАМИ И ВЕДУЩИХ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ВУЗОВ РФ

С 20.09 по 24.09.2010 года в г. Новочеркасск на базе Южно-Российского государственного технического университета (Новочеркасского политехнического института) и кафедры теоретической механики ЮРГТУ (НПИ) было проведено IV Всероссийское совещание-семинар заведующих кафедрами и ведущих преподавателей теоретической механики вузов РФ. Целью совещания был обмен опытом и выработка рекомендаций и предложений по организации, научному и методическому обеспечению учебного процесса на кафедрах теоретической механики вузов Российской Федерации. В работе совещания-семинара приняло участие 77 человек из 29 городов из 50 вузов нашей страны.

В работе Совещания-семинара приняли участие известные ученые механики РФ, среди них академик РАН В.Ф. Журавлев, профессора Ю.Г. Мартыненко, Е.С.Брискин, В.А. Волосухин, Л.В. Докучаев, Ю.Ф. Голубев, А.Н. Кабельков, А.И. Кобрин, А.И. Кондратенко, М.Ю. Овчинников, Ю.И. Няшин, В.А. Самсонов, Р.С. Санжаровский, А.И. Смелягин. Доклады, включенные в программу Совещания, представляли следующие направления:

- Научные доклады, позволившие участникам ознакомиться с последними достижениями механики, проанализировать тенденции развития теоретической механики в настоящее время.
- Доклады, посвященные применению новых информационных технологий в преподавании.
- Доклады, отражающие проблемы методического обеспечения учебного процесса.

В дискуссиях по проблемам преподавания теоретической механики был высказан целый ряд интересных и содержательных предложений по повышению статуса теоретической механики в современной высшей школе.

В своих докладах и выступлениях участники Совещания-семинара с тревогой отмечали усилившиеся в последние годы в высшей школе процессы, представляющие серьезную угрозу для фундаментальной компоненты отечественного образования. Это, прежде всего, сокраще-

ние (а иногда и упразднение) курсов теоретической механики, практика объединения курсов теоретической механики, сопротивления материалов, теории механизмов, деталей машин (к сожалению, список можно продолжить) в одну учебную дисциплину. Участники Совещания подчеркивали, что «Теоретическая механика» является одной из фундаментальных ключевых естественнонаучных дисциплин физико-математического цикла, на материал которой опирается подавляющее число общепрофессиональных и специальных инженерных курсов, определяющих научно-технический прогресс. В настоящее время роль теоретической механики еще более возросла в связи с интенсивным развитием новых областей знания, лежащих на стыке классической механики, электроники, теории управления и информатики, биологии как, например, мехатроники, биомеханики и других наукоемких направлений «высоких технологий». Было поддержано мнение о том, что одной из важнейших причин техногенных катастроф последних лет была некомпетентность и техническая безграмотность проектировщиков и эксплуатационников инженерных сооружений и конструкций.

По результатам обсуждения докладов, выступлений и дискуссий участники Совещания-семинара приняли следующие решения и рекомендации:

1. Обратить внимание научного сообщества на крайне тревожное положение, складывающееся с преподаванием теоретической механики в высшей школе Российской Федерации.
2. Президиуму Научно-методического совета по теоретической механике обратиться в Министерство образования и науки России с настоятельным требованием, чтобы государственные стандарты для всех инженерных специальностей вузов Российской Федерации обсуждались с участием НМС по теоретической механике.
3. Направить письма о необходимости сохранения в программах курсов теоретической механики в Главные управления вузов Министерств, имеющих учебные заведения инженерного профиля и УМО технических и технологических специальностей.
4. Считать, что одним из главных направлений совершенствования деятельности кафедр является привлечение студентов самостоятельности в учебной и научной работе, в том числе в выполнении расчетно-графических работ.
5. Рекомендовать заведующим кафедрами организовать инновационную деятельность кафедр теоретической механики вузов с привлечением студентов и аспирантов.

6. Рекомендовать использовать опыт кафедр Пермского государственного технического университета, Московского энергетического института (технического университета), Ивановского государственного энергетического университета имени В.И. Ленина по подготовке бакалавров, дипломированных специалистов и магистров по направлению «Прикладная механика» (биомеханика, мехатроника и робототехника, динамика и прочность машин).
7. Организовать работу по модернизации курса теоретической механики, основанной на внедрении новых информационных технологий, для интенсификации самостоятельной работы студентов и облегчения освоения ими основных положений механики. Обратить внимание на опыт Московского государственного университета прикладной биотехнологии по использованию в учебной деятельности свободно распространяемого пакета компьютерной алгебры Maxima.
8. Рекомендовать кафедрам теоретической механики вузов принять участие во Всероссийском научно-техническом фестивале молодежи «Мобильные роботы» имени профессора Е.А. Деянина и активно использовать опыт новой эффективной формы обучения студентов и аспирантов в области теоретической и прикладной механики, мехатроники и управления движением сложных интеллектуальных систем.
9. Рекомендовать ректорам вузов формировать лекционные потоки, не превышающими 100 человек, а группы для практических занятий – не более 15 человек.
10. Добиваться приведения в соответствие содержание дидактических единиц теоретической механики в ГОСВПО с количеством часов, выделяемых на изучение курсов теоретической механики по конкретной специальности и увеличения числа аудиторных занятий до 75% от общего числа.
11. Заведующим кафедрами теоретической механики проводить активную работу с УМО специальностей и направлений подготовки по сохранению полноценного курса теоретической механики.
12. Использовать возможности фактического увеличения роли теоретической механики в подготовке специалистов за счет введения специальных курсов, читаемых для студентов старших курсов. Поддерживать работу по созданию новых углубленных курсов теоретической механики для магистров.
13. Продолжить работу по изданию Сборника научно-методических

- статей «Теоретическая механика», найти финансовые источники для публикации его очередного 28 выпуска.
14. Провести специальное заседание Президиума НМС с анализом современного состояния учебников и учебных пособий по теоретической механике и добиваться обязательности учета рекомендаций НМС при выдачи грифов.
  15. Интенсифицировать работу городских и региональных межвузовских семинаров по теоретической механике. Считать работу в межвузовских семинарах важнейшим элементом работы преподавателей. Необходимо, чтобы заведующие кафедрами обеспечивали участие в семинарах всех преподавателей, включив эту работу в индивидуальные планы преподавателей.
  16. Возобновить практику командировки ведущих лекторов теоретической механики в вузы (особенно периферийные) для чтения отдельных разделов курса.
  17. Регулярно обновлять сайт НМС, обеспечивая преподавателям кафедр теоретической механики вузов России возможность быть в курсе последних решений НМС и научно-методических разработок.
  18. Отметить необходимость укрепления материально-технической и лабораторной базы кафедр теоретической механики и обеспечения учебных лабораторий компьютерами с соответствующим программным обеспечением, а также обновление лабораторной базы кабинетов по теоретической механике.
  19. Регулярно организовывать и проводить городские и региональные олимпиады по теоретической механике. Поддерживать практику проведения Всероссийской олимпиады по теоретической механике с привлечением вузов стран СНГ. Отметить высокий уровень проведения Всероссийской олимпиады в г. Новочеркасске (ЮФО) на базе ЮРГТУ (НПИ).
  20. Активнее проводить работу со школьниками с целью привлечения творческой молодежи и пропаганды достижений теоретической механики.
  21. Сформировать региональные секции НМС по теоретической механике, поручив им основную координацию работы кафедр теоретической механики вузов России. Регулярно проводить Зональные совещания-семинары по теоретической механике.
  22. Заведующим кафедрами теоретической механики проводить активную работу с руководителями факультетов, вузов и УМО о месте теоретической механики, стоять на позициях сохранения

- фундаментальной компоненты физико-математического образования, включающей классический курс теоретической механики с учетом востребованности знаний в данной области подготовки специалистов.
23. Отметить и одобрить большую работу, проведенную Оргкомитетом при подготовке и проведении совещания, высокий научный уровень и хорошую организацию совещания.
  24. Выразить благодарность Оргкомитету IV Всероссийского совещания-семинара, руководству Южно-Российского государственного технического университета и коллективу кафедры теоретической механики и лично мэру города Новочеркасска профессору А.И. Кондратенко за хорошую организацию и проведение данного мероприятия.
  25. Следующее V Всероссийское совещание-семинар заведующих кафедрами теоретической механики вузов России провести в 2015 году на базе Астраханского государственного технического университета.

## О МЕТОДОЛОГИЧЕСКОМ СЕМИНАРЕ

Методологический семинар по механике был организован и действовал в Московском университете. В 50-х годах XX века его посещали сотни слушателей со всей Москвы. Позже это число и активность обсуждения докладов снизилась. Долгие годы его научным руководителем был академик АН УЗССР Х.А. Рахматулин. После его кончины (в 1988 г.) «тягловой силой» методологического семинара была доц. Тюлина И.А. В 1990-х годах в ногу с перестройкой всех устоев жизни деятельность методологического семинара прекратилась. Прекратилось межфакультетское издание периодического сборника «История и методология естествознания», активно функционировавшего полвека. Все естественные факультеты принимали участие в создании коллекции около 40 выпусков названного сборника. Наиболее активными в захвате выпуска «без очереди» были физический факультет и механики с математиками. Среди авторов статей сборника часто выступали крупные ученые, из механиков – акад. А.Ю.Ишлинский, Л.И.Седов, профессора – А.А.Космодемьянский, Н.А.Слезкин, В.Г.Демин, В.В.Толмачев; П.М.Огибалов; многие докладчики методологического семинара публиковали материалы доклада в вышеуказанном сборнике.

А.П.Минаков ставил вопрос, какие задачи имеет в виду лектор, начиная чтение данного курса. Это может быть задача запоминания ряда важных формул и их вывода, четкой формулировки аксиом и теорем; может быть поставлена иная задача – привить слушателям **понимание** содержания данной науки; наконец, педагог может стремиться пробудить и развить в своих учениках способность и вкус к самостоятельному мышлению.

Наивысшим взлетом активности в работе методологического семинара были 1950-е годы. В это время семинар работал регулярно, аудитория была многочисленной и активной. В часто возникающих дискуссиях по методологическим проблемам спорили не только организаторы семинара – крупные ученые университета, но и аспиранты, и гости из других вузов. Например, однажды разгорелся спор проф. А.А.Космодемьянского с проф. Н.Д.Моисеевым о том, какой из факторов прогресса механики наиболее значителен: запросы техники (в целом про-

изводства) или мышление одаренных мужей науки, в частности фантазия ученого. Примером последнего фактора, как ведущего в прогрессе космонавтики, А.А.Космодемьянский приводил творчество уездного учителя К.Э.Циолковского, своеобразного пророка, предсказавшего в недалеком будущем выход человечества в космос, и высказавшего много принципиальных соображений теоретического и технического характера для достижения этой цели. Напомним, до запуска в СССР первого искусственного спутника Земли один из дискутирующих, а именно Н.Д.Моисеев, не дожил всего два года. Аудитория бурно реагировала на каждый аргумент одной из спорящих сторон, приводились разнообразные примеры из истории науки и техники.

Примерно в 1951 г. (осенью) на фоне идеологической борьбы Т.Д.Лысенко в биологии против менделистов, вейсманистов и морганистов, последователи которых, известные биологи были изгнаны из Московского университета (иные получили инфаркты, проф. Д.А.Сабинин застрелился, кое – кто исчез в глубинке, например, проф. Жебрак), и другие университетские научные направления пытались проводить подобные «чистки» своих рядов. На методологическом семинаре механиков МГУ развернулась острая дискуссия металлургов, возглавляемых членом-корреспондентом АН СССР, опытным специалистом инженерной практики машиностроения, И.А.Одингом против ученых Московского университета в области теории упругости и теории пластичности. Во главе университетских прочнистов выступали: один из основоположников зарождающейся области – теории пластичности – член-корреспондент АН СССР А.А.Ильюшин и его коллеги. Представители инженерного искусства противопоставляли себя теоретикам, квалифицируя не всегда понятные им научные труды и соответствующие практические результаты университетов как чересчур формализованные писания, едва ли не тарбарщицу, выражаясь любимым словом Лысенко, которое последний запускал против любого научного труда в биологии.

Исключая некоторые резкие выпады спорящих сторон друг против друга, дискуссия прошла плодотворно и в духе товарищества, без каких-либо оргвыводов. Такое расширенное заседание методологического семинара механиков привлекло множество слушателей, переполнивших самую большую аудиторию механико-математического факультета.

После многих интереснейших заседаний методологического семинара механиков, где горячо обсуждали варианты программы курса истории механики, которая ежегодно видоизменялась и совершенствовалась

лась, обсуждался учебник проф. Н.Н. Бухгольца «Основной курс теоретической механики» в двух частях. В результате такого публичного обсуждения квалифицированными участниками методического семинара книга Н.Н. Бухгольца также дополнялась новыми актуальными разделами. В переработке шестого издания «Основного курса теоретической механики» (1972) главным исполнителем был прекрасный методист в преподавании теоретической механики выпускник механико-математического факультета проф. С.М. Тарг, к этому времени заведующий кафедрой теоретической механики Артиллерийской академии. Он, как и многие другие заведующие аналогичными кафедрами, нередко бывал и активно выступал на методологических семинарах механико-математического факультета.

УДК 531.01

*Г.Т. Алдошин*

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.Устинова

### **МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «VII ОКУНЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ»**

20-24 июня 2011 г. Балтийским государственным техническим университетом «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.Устинова в г. Санкт-Петербург на базе Военно-исторического музея артиллерии, инженерных войск и войск связи была проведена очередная конференция «Седьмые Окуневские чтения». Конференция проходила под эгидой Министерства образования и науки РФ, Российской академии наук, Российской академии ракетно-артиллерийских наук, Академии нелинейных наук при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. В рамках конференции был организован мини-симпозиум «Научная школа И.П.Гинзбурга и актуальные проблемы современной механики полёта и прикладной гидрогазодинамики», посвящённый 100-летию со дня рождения профессора И.П. Гинзбурга – известного механика и организатора науки.

В подготовке конференции участвовали Санкт-Петербургский и Томский государственные университеты, НИИ механики МГУ, ЦНИИМАШ, ВНИИ экспериментальной и технической физики и ряд других организаций. Сопредседателями конференции были академики РАН К.С. Колесников, Н.Ф. Морозов и академик МАН ВШ Ю.Г. Мартыненко.

На конференции было заявлено 240 докладов, авторами которых были 2 академика и 3 чл.-корр. РАН, свыше 40 докторов и 50 кандидатов наук. По сравнению с предыдущей конференцией заметно выросло число молодых учёных (44 чел.), аспирантов (28 чел.), студентов (15 чел.). География конференции весьма обширна – наряду с Санкт-Петербургом и Москвой были представители Новосибирска, Томска, Перми, Тулы, Калининграда и т.д., стран СНГ (Белоруссия, Грузия, Украина) и зарубежных государств (Англия, Франция, США, ФРГ, Мексика). К открытию конференции издан сборник материалов конференции объёмом 20 п.л. Работа конференции проходила в трёх секциях: теоретическая и прикладная механика, баллистика, компьютерные и образовательные технологии. Отдельное заседание было посвящено мини-симпозиуму.

На чтениях представители вузовской и научно-инженерной общности обсудили результаты исследований по следующим основным направлениям современной механики:

- динамика твёрдого тела;
- колебания, удар, хаос, теория катастроф;
- сопряжённые и обратные задачи механики;
- аэрогидроупругость;
- внешняя баллистика и аэродинамика ракет и снарядов;
- баллистика старта и аэротермобаллистика;
- научное наследие выдающихся механиков;
- компьютерные и образовательные технологии в механике и баллистике.

Пленарное заседание было посвящено обсуждению актуальных проблем механики, интенсивно развивающихся последние годы:

- «Инженерные проблемы нанотехнологий», акад. РАН Морозов Н.Ф., проф. Семёнов Б.Н.
- «Астероидно-кометная опасность и проект орбитальной звёздной стереоскопической обсерватории», гл.н.с. Чубей М.С.

Перечисленные научные направления были представлены на чтениях в форме докладов на секциях и стендовых докладов. Представленные доклады, их обсуждение и последующая дискуссия показали, что, несмотря на известные трудности (недофинансирование науки и образования, утечка научных кадров и т.д.), высшая школа сумела сохранить научно-технический потенциал. На заключительном пленарном заседании участники конференции отметили высокий научный уровень представленных работ, о чём свидетельствует и тот факт, что многие исследования выполнялись в рамках грантов РФФИ и научных программ. Положительным моментом явилась публикация развёрнутых материалов докладов, что способствует высокой цитируемости докладов при защите диссертаций и в научной периодике.

В решении конференции отмечены актуальность проведения конференции и ее практическая значимость. Общение специалистов разных направлений и школ полезно для постановки и обсуждения возникающих задач, позволяет быстрее внедрять новые результаты и компьютерные технологии в практическую деятельность и совершенствование учебного процесса. Признано необходимым продолжение и расширение научных контактов и целесообразность проведения очередной VIII международной конференции «Окуневские чтения», поручив Оргкомитету выбор места и времени (ориентировочно г. Санкт-Петербург, июнь 2013 г.).

Отметив высокий уровень организации и проведения конференции, её участники выразили благодарность Организационному комитету, Ректорату БГТУ «ВОЕНМЕХ» (Ректор проф. Иванов К.М.), администрации Военно-исторического музея артиллерии, инженерных войск и войск связи (Директор проф. Крылов В.М.), Российскому фонду фундаментальных исследований.

*С.К. Матвеев, М.П. Юшков,  
Е.В. Кустова, Л.А. Пузырева*  
Санкт-Петербургский государственный университет

## О МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО МЕХАНИКЕ «ШЕСТЫЕ ПОЛЯХОВСКИЕ ЧТЕНИЯ»

С 31 января по 3 февраля 2012 г. в Санкт-Петербургском государственном университете прошла Международная научная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения». Конференция была посвящена 95-летию со дня рождения С.В. Валландера.

Сергей Васильевич Валландер (1917-1975) – советский ученый в области механики, член-корр. АН СССР (1966). Окончил Ленинградский университет (1939). Участник Великой Отечественной войны. С 1950 г. доктор физико-математических наук, профессор Ленинградского университета (преподавал с 1946 по 1975 гг.). Работал преимущественно в области гидро- и газодинамики. Основные труды относятся к теории решеток, теории крыла в сверхзвуковом потоке, к закону гиперзвукового подобия, к аэродинамике разреженных газов, в которой он создал целое направление.

Был награжден орденом Ленина, двумя орденами Красного Знамени, орденом Красной Звезды, медалями.

### Организаторы конференции:

- Министерство образования и науки РФ,
- Российский фонд фундаментальных исследований,
- Санкт-Петербургский государственный университет,
- Санкт-Петербургский Дом ученых РАН,
- Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
- Институт проблем машиноведения РАН,
- Балтийский государственный технический университет («Военмех»),
- ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова.

Председатель конференции: Морозов Никита Федорович, академик РАН.

### Организационный комитет конференции:

Сопредседатели: Леонов Г.А. (член-корр. РАН), Матвеев С.К., Юшков М.П. (СПбГУ).

Ученые секретари: Ворошилова Ю.Н., Пузырева Л.А. (СПбГУ).

Члены оргкомитета: Даль Ю.М. (СПбГУ), Кустова Е.В. (СПбГУ), Лашков В.А. (СПбГУ), Мирошин Р.Н. (СПбГУ), Нагнибеда Е.А. (СПбГУ), Никитин Г.В. (Дом Ученых РАН), Поляхова Е.Н. (СПбГУ), Рыдалевская М.А. (СПбГУ), Рябинин А.Н. (СПбГУ), Тихонов А.А. (СПбГУ), Трифоненко Б.В. (СПбГУ), Усков В.Н. (БГТУ «Военмех»), Цибаров В.А. (СПбГУ).

### Научный комитет конференции:

Белецкий В.В. (Россия), Маркеев А.П. (Россия), Рыжов Ю.А. (Россия), Блехман И.И. (Россия), Мартыненко Ю.Г. (Россия), Смирнов Е.М. (Россия), Вуйичич В. (Сербия), Михайлов Г.К. (Россия), Спасич Д. (Сербия), Егоров И.В. (Россия), Михасев Г.И. (Беларусь), Степанов С.Я. (Россия), Журавлев В.Ф. (Россия), Мэй Фунсян (Китай), Товстик П.Е. (Россия), Иванов М.С. (Россия), Пальмов В.А. (Россия), Тхай В.Н. (Россия), Индейцев Д.А. (Россия), Папаставридис Дж. (США), Федоров М.П. (Россия), Карапетян А.В. (Россия), Паскаль М. (Франция), Фомин В.М. (Россия), Каспер Р. (Германия), Пашин В.М. (Россия), Черноушко Ф.Л. (Россия), Козлов В.В. (Россия), Петров Ю.В. (Россия), Эрикссон А. (Швеция), Кривцов А.М. (Россия), Радев С. (Болгария), Левин В.А. (Россия), Ребров А.К. (Россия).

В программу конференции были включены пленарные и секционные доклады по следующим научным направлениям:

- Теоретическая и прикладная механика
- Динамика космического полета
- Гидроаэромеханика
- Механика деформируемого твердого тела
- Биомеханика
- История механики

В работе конференции приняли участие более 260 ученых из 12 различных стран и городов, в том числе:

Россия (Москва, Санкт-Петербург, Новосибирск и др.), Белоруссия, Украина, Армения, Грузия, Германия, Израиль, Турция, Сингапур, Латвия, Сербия и Франция.

Открытие конференции и пленарное заседание проходили в Санкт-Петербургском Доме

Ученых РАН. Присутствовало более 300 человек, среди которых было много молодых ученых, студентов и аспирантов, а также представителей из других ВУЗов, научных институтов и организаций Санкт-Петербурга.

С приветственной речью выступили декан математико-механического факультета СПбГУ, член-корр. РАН, Г.А. Леонов и заведующий отделением механики математико-механического факультета СПбГУ, академик РАН Н.Ф. Морозов.

Далее программу пленарного заседания продолжили следующие доклады:

- Нагнибеда Е.А., Рыдалевская М.А. (СПбГУ). О жизни и творчестве С.В. Валландера.
- Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. (СПбГУ). Формы поверхностной и объемной потери устойчивости.
- Даль Ю.М. (СПбГУ). Некоторые актуальные задачи плоской теории упругости.
- Самсонов В.А. (НИИ механики МГУ). Геометрия и механика. Крест – содержательный геометрический образ в некоторых задачах механики.
- Зегжда С.А., Юшков М.П. (СПбГУ), Солтаханов Ш.Х. (ЧГУ), Spasic D.T. (Университет в Новим Саде, Сербия). Неголономная механика со связями высокого порядка и управление движением.

С 1 по 3 февраля в здании математико-механического факультета СПбГУ (Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28) проходила работа шести секций. Обсуждались современные проблемы аналитической механики; колебаний и устойчивости механических систем; неголономной механики; прикладных задач механики; развития методов исследования траекторных задач космодинамики – точных аналитических, приближенных аналитических, а также численных; физико-химической гидроаэродинамики; кинетической теории газов и динамики разреженного газа; кинетики излучения при зондировании аэродисперсных потоков; гиперзвукового обтекания; процессов переноса и релаксации; кинетики химических реакций в сильнонеравновесных течениях смесей газов; переноса в микро- и наноканалах; механики деформируемого твердого тела; биомеханики; истории механики и т.д.

На закрытии конференции были подведены итоги и отмечено ее успешное проведение.

Общее собрание конференции постановило:

Опубликовать наиболее значительные доклады в журнале «Вестник Санкт-Петербургского университета» и в сборнике избранных трудов конференции.

**Организации-спонсоры конференции:**

Международная научная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения» проводилась при финансовой поддержке: Российского фонда фундаментальных исследований (проект \No 11-01-06103-г), Санкт-Петербургского государственного университета (проект № 6.41.217.2012) и ООО «Максидом».



**О VII МЕЖДУНАРОДНОМ СИМПОЗИУМЕ  
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ**  
(посвящен 90-летию В.В. РУМЯНЦЕВА)

С 16 по 28 октября 2011 г. прошел очередной 7-ой Международный Симпозиум по классической и небесной механике (ССМЕСН-7, Москва – Седльце). Организаторами Симпозиума были Учреждение Российской Академии наук Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына РАН (ВЦ РАН), Московский авиационный институт им. С. Орджоникидзе (МАИ), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ) и Частный институт «Мазовская Коллегия г. Седльце (Польша)». Симпозиум проводился в рамках плана мероприятий Российской Академии наук и Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике и был посвящен 90-летию юбилею со дня рождения (19 июля 1921 г.) председателя предыдущих сессий этого Симпозиумов, выдающегося ученого-механика академика Валентина Витальевича Румянцева.

В.В. Румянцев был продолжателем лучших традиций классиков науки. Широко известны его фундаментальные результаты в области аналитической механики и теории устойчивости движения. Его работы по устойчивости по части переменных, устойчивости тел с полостями, содержащими жидкость, а также по устойчивости стационарных движений спутников внесли существенный вклад в успех нашей космической программы.

Председателем 7-го Симпозиума был известный ученый в области небесной механики профессор Евгений Александрович Гребеников (ВЦ РАН). Участие в подготовке Симпозиума принимают также И.И. Косенко (ВЦ РАН), П.С. Красильников (МАИ), А.Н. Прокопеня (Collegium Mazovia, Siedlce, Poland), Т.М. Поленова (Академия Госслужбы при Президенте РФ), С.Я. Степанов (ВЦ РАН) и др.

Симпозиум проводился в двух секциях: с 16 по 21 октября – в ВЦ РАН, где В.В. Румянцев работал до конца своих дней, и с 23 по 28 октября – в Польше в живописном городке Седльце, недалеко от Варшавы. Научная программа обеих секций включала пленарные доклады и два минисимпозиума:

*Классическая механика*

1.1. Аналитическая механика.

- 1.2. Теория устойчивости и бифуркаций.
- 1.3. Регулярная и хаотическая динамика.
- 1.4. Колебания механических систем.
- 1.5. Динамика систем твердых и деформируемых тел.
- 1.6 Контактные задачи, удары и трение

*Небесная механика*

- 2.1. Задачи трех тел и N тел.
- 2.2. Периодические и условно-периодические орбиты – резонансы.
- 2.3. Динамика планет солнечной системы.
- 2.4. Динамика вращательного движения небесных тел.
- 2.5. Динамика орбитальных систем.

Наибольший интерес и обсуждение участников российской секции Симпозиума вызвали доклады Вильке В.Г. (МГУ), Гребеникова Е.А. (ВЦ РАН), Зегжды С.А. (СПб.ГУ), Карапетяна А.В. (МГУ), Киреенкова А.А. (ИПМех), Маркеева А.П. (МФТИ), Самсонова В.А. (НИИ механики МГУ), Сарычева В.А. (ИПМ), Соколова Л.Л. (СПбГУ), Трещева Д.В. (МГУ), Slawianowski J. (IPPT PAN), Pascal M. (Univ. Evry, France)

Польская секция Симпозиума проходила в пригороде Мосты Броды города Седльце в прекрасно отреставрированном корпусе бывшей помещичьей усадьбы с 23 по 28 октября 2011 года. В этом здании размещался просторный зал для заседаний и достаточно большое количество комфортабельных гостиничных номеров для участников Симпозиума. Большую часть участников составляли гости из России и Польши. Несколько участников прибыли также из Белоруссии, Сербии, Казахстана. Следует отметить идеальную организацию приема гостей, включая интересные экскурсии в Варшаву и Седльце, со стороны Высшей школы инноваций Коллегиум Мазовия и председателя местного Организационного комитета профессора Лешека Гадомского. Проф. Гадомский является также ректором Высшей школы финансов и управления в городе Седльце, который является типично университетским городом – в нем несколько кампусов, большая часть населения города – молодые люди, учащиеся местных университетов.

Все доклады делались последовательно в одном общем зале. Тематика выступлений была традиционной для симпозиумов серии ССМЕСН. Значительное число сообщений польских участников касалась качественной теории динамических систем и их приложений к задачам механики. Доклады были выполнены на исключительно высоком уровне и касались современных проблем механики и динамических систем. В этой связи следует упомянуть несколько выступлений:

проф. Мациевского (Зелена Гура), проф. Славяновского (Варшава), проф. Жличинского (Краков), проф. Золадека (Варшава), проф. Чичурина (Люблин) и их коллег и учеников.

Гости также представили интересные сообщения. Выделим из них доклады проф. Тихонова (Санкт-Петербург), проф. Прокопени (Брест), проф. Хедрих (Белград), проф. Холостовой (Москва), проф. Гребеникова (Москва), проф. Журавлева (Москва), д-ра Киреевского (Москва), проф. Красильникова (Москва), проф. Косенко (Москва), д-ра Соболевского (Минск).

Все доклады проходили при живом участии слушателей. Работа симпозиума освещалась средствами местного телевидения.

УДК 531.01

*П.М. Шкапов*

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

### **О НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ», ПОСВЯЩЕННОЙ 165-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Н.Е. ЖУКОВСКОГО**

В 2012 г. исполнилось 165 лет со дня рождения «отца русской авиации» Николая Егоровича Жуковского. «Для меня главный жизненный интерес сосредоточен на излюбленной мною науке – механике», – так писал сам великий ученый. С 1878 г. Николай Егорович стал читать в Императорском Московском техническом училище курс теоретической механики как самостоятельный, отдельно от курса прикладной математики. Этот год считается годом основания кафедры теоретической механики, которой Н.Е. Жуковский руководил в течение 43 лет.

16 апреля 2012 Ученый совет Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана единогласно присвоил имя профессора Николая Егоровича Жуковского кафедре теоретической механики.

9-10 октября 2012 в МГТУ им. Н.Э.Баумана МГТУ им. Н.Э.Баумана состоялась научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященная 165-летию со дня рождения Николая Егоровича Жуковского.

В работе конференции участвовали: президент МГТУ им. Н.Э.Баумана, академик РАН И.Б.Федоров; академик РАН К.С.Колесников; академик РАН В.Ф.Журавлев; исполнительный директор ЦАГИ имени профессора Н.Е.Жуковского, член-корреспондент РАН С.Л.Чернышев; руководитель Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки», д.ф.-м.н., проф. В.О.Гладышев; преподаватели и научные работники различных подразделений МГТУ им. Н.Э.Баумана, гости из других вузов и организаций. Председательствовал на конференции академик РАН К.С.Колесников, заведующий кафедрой теоретической механики МВТУ им. Н.Э.Баумана с 1966г. по 1991г. Вел заседание заведующий кафедрой «Теоретическая механика», д.т.н. П.М.Шкапов.

В начале пленарного заседания прозвучали приветствия от гостей конференции, были заслушаны сообщения о научном творчестве и развитии идей Н.Е. Жуковского в современных условиях: «Николай Егорович Жуковский и Московское техническое училище» (академик

РАН К.С. Колесников), «Н.Е. Жуковский – основатель кафедры теоретической механики ИМТУ» (к.т.н., доцент В.В. Дубинин, заведующий кафедрой теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана с 1991г. по 2012г.), «Н.Е. Жуковский и научные школы МГТУ им. Н.Э. Баумана» (д.т.н., проф. В.С. Зарубин), «Н.Е. Жуковский и перспективы развития техники» (д.ф.-м.н., проф. М.И. Киселев).

Во второй части пленарного заседания были представлены научные доклады по фундаментальным и прикладным задачам механики: «О некорректных моделях в механике» (академик РАН В.Ф. Журавлев), «Моделирование и численные методы в нелинейной механике сплошной среды» (д.ф.-м.н., проф. Ю.И. Димитриенко, МГТУ им. Н.Э. Баумана) «Собственные колебания трубопровода, транспортирующего идеальную жидкость» (д.ф.-м.н., проф. С.В. Нестеров, ИПМех РАН), «Динамика течений с ограниченной искусственной газовой каверной» (д.т.н. П.М. Шкапов, МГТУ им. Н.Э. Баумана), «О разрушении волн Фарадея» (д.ф.-м.н. В.А. Калинин, ИПМех РАН), «Нелинейная вязкоупругая модель коллинеарного удара» (д.ф.-м.н., проф. В.В. Лапшин, Р.В. Дягель, МГТУ им. Н.Э. Баумана), «Концепция построения интеллектуальной системы активной виброзащиты и высокоточного наведения раскрываемого на орбите космического телескопа «Миллиметр» в условиях сверхнизких температур» (д.т.н., проф. С.Н. Саяпин, ИМАШ РАН), «Теоремы Н.Е. Жуковского о движении твердого тела с полостями, наполненными несжимаемой жидкостью, и их развитие» (к.ф.-м.н., доцент А.Н. Темнов, МГТУ им. Н.Э. Баумана), «Асимптотические решения одной потенциальной модели цунами» (д.ф.-м.н., проф. С.Я. Серж-Зенькович, ИПМех РАН), «Влияние вихрей на аэродинамические характеристики стабилизирующих поверхностей при дозвуковом обтекании летательных аппаратов» (д.т.н., проф., лауреат премии имени Н.Е. Жуковского В.Т. Калугин, А.С. Епихин, МГТУ им. Н.Э. Баумана).

10 октября состоялось выездное заседание конференции в музейно-усадьбе на родине Н.Е. Жуковского в селе Орехово Владимирской области. Было заслушано сообщение к.т.н., доцента В.В. Витушкина «Кабинет приборов и автоматизированная лаборатория по теоретической механике», прошел круглый стол по актуальным научным и методическим вопросам механики. Сотрудники музея во главе с директором – Майей Константиновной Ширкановой – радушно встретили участников конференции, организовали экскурсию по дому, в котором родился, жил и куда в течение всей жизни часто приезжал Николай Егорович Жуковский, а также по территории усадьбы. На берегу пру-

да, перед домом, сохранились старинные солнечные часы, по которым узнавал время наш великий соотечественник, подвижник науки, ученый, который, опережая время, говорил, что «...человек полетит, опираясь не на силу своих мускулов, а на силу своего разума».

### **О РАБОТЕ МОСКОВСКОГО ГОРОДСКОГО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО СЕМИНАРА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

При кафедре «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана более 30 лет работает Московский городской научно-методический семинар (далее МГ НМС) по Теоретической механике. Основная цель работы семинара – консолидация деятельности кафедр Теоретической механики по внедрению передового опыта и эффективных методик преподавания дисциплины «Теоретическая механика» в технических вузах Москвы.

Тематика докладов на семинарах МГ НМС представляет широкий круг актуальных вопросов методики преподавания «Теоретической механики», современных научных достижений в областях прикладной механики, смежных дисциплин, специального и отраслевого машиностроения. Так в период с 2009 по настоящее время выступили с докладами:

- «О сухом трении» – Академик РАН Журавлев В.Ф., ИПМ им. А.Ю.Ишлинского;
- «Неголономная механика и задачи управления движением колесных роботов» – Заслуженный деятель науки РФ, д.к.-ф.н., проф. Мартыненко Ю.Г., МГУ;
- «Крест, как содержательный геометрический образ в некоторых задачах механики» – д.ф.-м.н., проф. Самсонов В.А., МГУ;
- «Колебания сферического маятника при резонансе» – д.ф.-м.н., проф. Петров А.Г., МФТИ;
- «Проблемы динамики космического аппарата относительно центра масс» – д.т.н., проф., Докучаев Л.В., ЦНИИТМАШ.

Также был сделан ряд других интересных докладов.

МГ НМС работает в соответствии с планом работы, который утверждается кафедрой Теоретической механики МГТУ на учебный год.

В настоящее время семинар проводится шесть раз в учебный год (третья среда октября, ноября, декабря, февраля, марта и апреля) в здании учебно-лабораторного корпуса МГТУ (аудитория 806).

Руководителями МГ НМС в последние годы были: проф. Лапшин В.В., доц. Космодемьянский В.А., доц. Смирнов В.Ф. С 2009 года

руководители семинара – проф. Андронов В.В. и проф. Благовещенский И.Г. Общее научное руководство семинаром осуществляет заведующий кафедрой Теоретической механики МГТУ им. Н.Э.Баумана проф. Шкапов П.М.

Постоянное внимание в работе семинара уделяется подготовке и проведению Олимпиады по Теоретической механике в Университете, выступлению сборной команды МГТУ на городских и Всероссийских Олимпиадах, этим направлением работы руководит доц. Дубровина Г.И.

МГ НМС работает в тесном и постоянном контакте с Научно-методическим Советом по Теоретической механике при Минобрнауки РФ.

В планах дальнейшего развития и совершенствования работы МГ НМС предусмотрено активное привлечение к участию в семинарах с докладами о фундаментальных и прикладных задачах Теоретической механики ученых РАН и отраслевых НИИ, а также ведущих лекторов Московских и региональных технических университетов.

Кафедра Теоретической механики МГТУ им. Н.Э.Баумана и руководители МГ НМС приглашают к участию в работе семинара с докладами всех заинтересованных специалистов по указанной тематике.

Заявки на участие в семинаре и доклады просим направлять по адресу: 105005, Москва, Рубцовская наб. 2/18, д.5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра «Теоретическая механика» им. профессора Н.Е. Жуковского.

тел. 8 499 2636496;

E-mail: drbl@bk.ru.

### О СТУДЕНЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ 2011-2012 гг.

*Всероссийская олимпиада по теоретической механике Южно-Российский государственный технический университет (г. Новочеркасск).*

В период 3-7 октября 2011г. в Южно-Российском государственном техническом университете (НПИ) состоялась Всероссийская студенческая олимпиада по теоретической механике, в которой приняли участие 19 команд из Москвы, Санкт-Петербурга, Новочеркасска, Новосибирска, Перми, Екатеринбурга, Казани, Уфы, Ростова, Краснодар, Челябинска.

В теоретическом конкурсе среди классических и технических университетов в личном зачете заняли:

- |  |            |
|--|------------|
| 1. Землянов В.В., МФТИ                   | 1-е место  |
| 2. Попов Ф.К., МФТИ                      | 2-е место  |
| 3. Власюк А.А., МФТИ                     | 3-е место  |
| 4. Христюк М.А., МГТУ им. Н.Э.Баумана    | 4-е место  |
| 5. Кондратенко К.Е., МГТУ им.Н.Э.Баумана | 5-е место. |

В командном зачете среди классических и технических университетов заняли:

- |                         |            |
|-------------------------|------------|
| 1. МФТИ (ГУ)            | 1-е место  |
| 2. МГТУ им. Н.Э.Баумана | 2-е место  |
| 3. ЮУГУ                 | 3-е место. |

Среди технических университетов в командном зачете заняли:

- |                         |            |
|-------------------------|------------|
| 1. МГТУ им. Н.Э.Баумана | 1-е место  |
| 2. ЮрГТУ                | 2-е место  |
| 3. УГНТУ                | 3-е место. |

В компьютерном конкурсе среди классических и технических университетов заняли:

- |                          |              |
|--------------------------|--------------|
| 1. МФТИ (ГУ)             | 1-е место    |
| 2. МГТУ им. Н.Э. Баумана | 2-3 –е место |
| 3. ЮУГУ                  | 2-3-е место  |

### Московская олимпиада по теоретической механике

20 мая 2012 г. в РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина состоялась Московская олимпиада по теоретической механике, в которой приняли участие 11 команд вузов Москвы: МЭИ, МГТУ им. Н.Э.Баумана, МФТИ (ГУ), МАДИ, МАТИ им. Э.К. Циолковского, МГТУ (Горный университет), МИИТ, МАИ, РГУ Нефти и Газы им. И.М. Губкина, филиал МИФИ (г. Обнинск), МАМИ.

В личном зачете заняли:

- |  |            |
|--|------------|
| 1. Мкртчян В.Г., МГТУ им. Н.Э. Баумана | 1-е место  |
| 2. Астраханцев МФТИ(ГУ)                | 2-е место  |
| 3. Антонов А.В., МГТУ им. Н.Э. Баумана | 3-е место. |

В командном зачете заняли:

- |                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| 1. МФТИ(ГУ)                     | 1-е место  |
| 2. МГТУ им. Н.Э. Баумана        | 2-е место  |
| 3. РГУ нефти и газа им. Губкина | 3-е место. |

Московскую олимпиаду проводила кафедра теоретической механики РГУ нефти и газа им. Губкина. Организация олимпиады, проверка конкурсных работ были проведены на высоком уровне. Научно-методический Совет выразил благодарность ректору вуза за проведение Московской олимпиады.

Российскую олимпиаду, третий тур олимпиад, по решению Научно-методического Совета третий раз проводит ЮрГТУ (НПИ). Методическая группа, кафедра теоретической механики, мэр г. Новочеркаска Кондратенко А.Н., зав. кафедрой теоретической механики Кабельков А.Н. провели большую работу по подбору задач, проведению теоретического конкурса. В этом году впервые в Новочеркасске состоялся компьютерный конкурс, к которому студенты относятся с большим интересом.

Традиционно в Новочеркасске большое внимание уделяется культурной программе для студентов и преподавателей. В этом году была организована поездка в г. Таганрог по чеховским местам и местам боевой славы.

Студенческие олимпиады развивают творчество студентов, учат студентов создавать модель реального объекта и описывать её математическими методами, исследовать движение, равновесие реальных объектов. Это поможет студентам в их будущей работе.

### ПАМЯТИ КОЛЛЕГИ И НАСТАВНИКА



26 марта 2012 года исполнился год, как ушёл из жизни доктор технических наук, профессор, первый декан физико-математического факультета, заведующий кафедрой «Теоретическая механика», председатель секции НМС по теоретической механике Министерства образования и науки РФ по Югу России, почётный профессор ЮРГТУ(НПИ), почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации – Кабельков Александр Николаевич – ученый уникальной эрудиции и талантливый педагог.

Александра Николаевича по праву называли ученым, вкладывая в это понятие не только ученость, профессиональные знания, творческую увлеченность наукой, но и интеллигентность, душевную теплоту и отзывчивость, человеческое обаяние и скромность. Профессора Кабелькова любили студенты, и Александр Николаевич отвечал взаимностью, к каждому находил подход, каждого стремился ободрить и поддержать.

Мысли и идеи Александра Николаевича продолжают воплощать в жизнь его ученики. Бурцева О.А., Нефедов В.В., Притыкин Д.Е. утвердили темы докторских диссертаций, руководят соискателями, работают по г/б НИР, выигрывают гранты; Гордиенко Д.А. после защиты дипломной работы (руководителем которой был проф. Кабельков) стал ассистентом кафедры «Теоретическая механика». Сын - Виктор Александрович продолжает работать над диссертацией, трудиться на кафедре, где продолжает свой трудовой путь и вдова Татьяна Николаевна.

В память об Александре Николаевиче при активном участии Васько Н.Г. и Бурцевой О.А. издано два незаконченных им учебника по

теоретической механике в издательствах «Лань», Санкт-Петербург и «Феникс», Ростов-на-Дону; Нефедовым В.В. и Калинин П.В. доработана и передана в редакцию журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки» последняя неизданная статья.

Продолжается традиция проведения межрегиональных совещаний-семинаров заведующих кафедрами и ведущих преподавателей теоретической механики на базе нашего ВУЗа, заложенная 2007 году Кабельковым А.Н.

Многое было сделано Александром Николаевичем для развития физико-математического факультета, кафедры «Теоретическая механика» и ВУЗа в целом. Все его начинания будут продолжены в делах учеников и коллег.

Светлое имя Кабелькова Александра Николаевича навсегда останется в наших сердцах!

## СОДЕРЖАНИЕ

Памяти Ю.Г. Мартыненко .....	3
<b>ОБЩИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ</b>	
<i>Д.В. Трещев.</i> Теоретическая механика и ее место в современной структуре естественных наук .....	5
<i>В.Г. Вильке.</i> Динамика системы переменного состава .....	11
<i>Е.С. Брискин.</i> Об обратимости принципа освобожденности от связей .....	29
<i>А.В. Периг, Н.Н. Голоденко.</i> Элементы механики сплошных сред в курсе теоретической механики для инженеров-металлургов .....	37
<b>МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ</b>	
<i>В.А. Космодемьянский.</i> О движении трехгранника Френе .....	53
<i>В.Ф. Журавлев.</i> К вопросу о корректности постановки задач качения твердых тел в неголономной форме .....	63
<i>В.В. Андронов.</i> К задаче о волчке .....	69
<i>Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров.</i> Устойчивость положения равновесия маятника переменной длины .....	72
<b>СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ</b> .....	
<i>О.М. Капустина.</i> Применение свободно распространяемой системы компьютерной алгебры <i>Mathima</i> в преподавании теоретической механики .....	81
<i>Степанов С.Я.</i> Использование компьютера в практических занятиях по теоретической механике .....	89
<b>ИНТЕРЕСНЫЕ ЗАДАЧИ</b>	
<i>И.Л. Антонов.</i> Применение теории марковских цепей в задаче о динамической устойчивости упругого стержня .....	98
<i>Э.К. Лавровский.</i> К задаче качения шара, управляемого с помощью перемещения внутренней массы .....	107
<i>А.М. Формальский.</i> Удар катящегося диска о преграду .....	129
<i>В.К. Тарасов, Ю.П. Смирнов.</i> О мгновенном поступательном движении и мгновенном состоянии равных скоростей .....	137
<b>МЕХАНИКИ РОССИИ</b>	
<i>А.А. Евтушенко, И.А. Тюлина.</i> Обзор отечественных изданий «Сборника задач по теоретической механике» И.В. Мещерского .....	141
<i>В.А. Самсонов, А.С. Сумбатов.</i> К 100-летию уравнений П.В. Воронца, описывающих качение твердого тела по опорной поверхности без скольжения .....	156
<i>Э.М. Красинская, А.Я. Красинский, К.Б. Обносков.</i> О развитии научных методов школы М.Ф. Шульгина в применении к задачам устойчивости	

и стабилизации равновесия мехатронных систем с избыточными координатами .....	169
<b>ЮБИЛЕИ</b>	
Ломоносов и механика .....	185
И.А. Тюлина .....	189
<b>ИНФОРМАЦИЯ</b>	
<i>А.В. Панишина.</i> Информационное сообщение о работе НМС по теоретической механике .....	191
Решение IV Всероссийского совещания-семинара заведующих кафедрами и ведущих преподавателей теоретической механики вузов РФ .....	194
<i>И.А. Тюлина.</i> О методологическом семинаре .....	199
<i>Г.Т. Алдошин.</i> Международная конференция «VII Окуневские чтения» .....	202
<i>С.К. Матвеев, М.П. Юшков, Е.В. Кустова, Л.А. Пузырева.</i> О международной научной конференции по механике «Шестые Поляховские чтения» .....	205
О VII Международном Симпозиуме по классической и небесной механике .....	209
<i>П.М. Шкапов.</i> О научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященной 165-летию со дня рождения Н.Е. Жуковского .....	212
<i>И.Г. Благовещенский.</i> О работе Московского городского научно-методического семинара по теоретической механике .....	215
<i>Г.И. Дубровина.</i> О студенческих олимпиадах 2011-2012 гг. ....	217
<b>НАШИ УТРАТЫ</b>	
Памяти коллеги и наставника .....	219

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ СБОРНИКА НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

1. В адрес редколлегии представляется тщательно выверенная, научно отредактированная статья с направлением от кафедры или городского семинара по теоретической механике.

2. В статье необходимо указать фамилии, имена и отчества авторов, ученые степени, телефоны и адреса электронной почты.

3. Перед заглавием статьи указывается индекс УДК, после фамилий авторов – перечень полных названий их мест работы.

4. В статье следует применять Международную систему единиц (СИ) для обозначения физических величин и их единиц.

5. Объем рукописи вместе с таблицами, рисунками и списком литературы не должен превышать 10 страниц формата А4.

6. Статья готовится в редакторе MsWord. Размер шрифта – 12 пт. Поля по 2 см с каждой стороны. Межстрочный интервал – одинарный.

7. Набор формул осуществляется при помощи редактора формул MathType.

8. Рисунки представляются в форматах jpg, bmp, tiff, gif, eps или wmf. Рисунки, подготовленные с помощью редактора Word, не принимаются.

9. Список литературных источников (литература) составляется по ГОСТ 7.1-84. Список составляют в соответствии с последовательностью появления ссылок в тексте. В статье ссылки на литературу заключаются в квадратные скобки.

Статьи для публикации в сборнике просим направлять по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1. Редколлегия сборника научно-методических статей «Теоретическая механика».

Самсонову Виталию Александровичу.  
samson@imec.msu.ru

## Научное издание

СБОРНИК НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ  
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**Выпуск 28**

Под редакцией профессора Ю.Г. Мартыненко

Редактор Ю.Д. Селюцкий

Технический редактор И.В. Топорнина  
Компьютерный дизайн и верстка М.З. Досаев, Ю.Д. Селюцкий

Подписано в печать 10.12.12 г. Формат 60х90 1/16. Бумага офс. № 2.  
Усл. печ. л. 14,9. Тираж 150 экз.

Ордена «Знак Почета» Издательство Московского университета  
125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.

Отпечатано с готового оригинал-макета на ризографе НИИ механики МГУ  
119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1.