

Министерство образования и науки Российской Федерации

Научно-методический совет по теоретической механике

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Научно-исследовательский институт механики

СБОРНИК научно-методических статей ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Выпуск 27

Под редакцией профессора *Ю.Г. Мартыненко*

Издается с 1968 года

Издательство Московского университета
2009

УДК531
ББК 22.21
С 23

Редакционная коллегия:

Ю.Г. Мартыненко (гл. редактор), *В.А. Самсонов* (зам. гл. редактора),
В.В. Александров, *В.В. Дубинин*, *В.Ф. Журавлев*, *А.В. Карапетян*,
В.В. Козлов, *В.А. Космодемьянский*, *В.В. Лапшин*, *В.М. Морозов*,
Р.Г. Мухарлямов, *Ю.Д. Селюцкий* (отв. секретарь), *Ю.С. Саратов*,
С.К. Слезкинский, *К.Е. Якимова*

Рецензенты:

член-корр. РАН *В.В. Белецкий*,
доктор физ.-матем. наук *А.И. Кобрин*

Издание осуществлено при поддержке НИИ механики МГУ

С23 Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика
Вып. 27./ Под редакцией профессора Ю.Г. Мартыненко. – М.: Изд-во
Московского университета, 2009. – 224 с., ил.

ISBN 5-211 -04992-6

Сборник содержит статьи по общим и методическим вопросам теоретической механики и материалы для повышения квалификации преподавателей, интересные механические задачи и информацию о различных мероприятиях, связанных с теоретической механикой. Кроме того, обсуждаются вопросы применения новых информационных технологий в преподавании.

Несколько статей посвящены юбилейным датам и тем утратам, которые теоретическая механика понесла в последнее время.

Сборник дает возможность преподавателям, аспирантам и студентам высших учебных заведений России сориентироваться в современных тенденциях развития теоретической механики, а также перенять опыт новейших методических разработок.

ISBN 5-211 -04992-6

УДК 531
ББК 22.211

© Научно-методический совет
по теоретической механике
Минобрнауки РФ, 2009

О КАНОНИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ СИЛ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ

Об устойчивости механических систем, согласно Томсону и Тету [1], можно судить по типу приложенных к ним сил. При этом силы обычно подразделяют на потенциальные (консервативные), циркуляционные, диссипативные, ускоряющие, гироскопические и т.п.. Само разложение обобщенных позиционных сил на консервативные и собственно неконсервативные силы известно в том случае, когда эти силы линейно зависят от обобщенных координат. См. напр. [1-5]. Такому разложению соответствует представление произвольной матрицы этих сил в виде суммы симметрической и кососимметрической частей, осуществляемое единственным способом. Аналогичным образом можно разделить обобщенные силы, линейно зависящие от скоростей на диссипативную и гироскопическую части.

В настоящей заметке показывается, как выполнить такое же разложение в общем, нелинейном случае.

Как хорошо известно, если в уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

обобщенные силы потенциальны (консервативны) или обобщенно потенциальны, то они могут быть записаны с помощью функции Лагранжа $L = T - U$ в той же форме, но с нулевой правой частью:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

С помощью функции Лагранжа уравнения могут быть записаны и тогда, когда консервативна лишь часть обобщенных сил. Тогда в правой части уравнений остаются только «собственно неконсервативные» обобщенные силы. Между тем определение собственно неконсервативных сил в литературе известно лишь в линейном случае. Если обобщенные силы нелинейны, определение собственно неконсервативных сил отсутствует. Неизвестна, следовательно, и процедура разделения их на консервативную и собственно неконсервативную части.

Естественно возникает вопрос о существовании и единственности подобного разложения.

Начнем рассмотрение этого вопроса с того, что известно в линейном случае. Пусть силы Q_i линейны и имеют позиционный характер, т.е. зависят только от времени и от обобщенных координат. Такие силы можно записать следующим образом [6]

$$Q_i = \sum_j a_{ij} q_j \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

Поскольку зависимость от времени в дальнейшем никакой роли не играет, она явно и не указывается.

Матрица этих сил $A = \{a_{ij}\}_{n \times n}$ может быть единственным образом представлена суммой

$$A = K + N \quad (K^T = K, \quad N^T = -N)$$

Также в виде суммы представляются и обобщенные силы

$$Q = Aq = Kq + Nq$$

где силы $Q' = Kq$ называются *потенциальными*, или *консервативными*. Для них существует потенциальная функция

$$U = (1/2) \sum_{i,j} k_{ij} q_i q_j$$

так, что $Q'_i = \partial U / \partial q_i$. Обычно существование потенциала для этих сил и берется в качестве их определения.

Силы $Q'' = Nq$ имеют в литературе несколько названий: *собственно неконсервативные*, или *псевдогироскопические*, или *циркуляционные* (от французского *circulaires*, с правильным переводом: *циркулярные* или *окружные*) и др. Их характеристическим свойством является ортогональность вектору обобщенных координат q :

$$\sum_i Q''_i q_i = 0,$$

немедленно следующая из свойства косой симметрии матрицы N .

В задачах управления механическими системами используется и более подробная классификация линейных обобщенных сил [9]. Так, симметрическую матрицу K произвольных потенциальных сил можно единственным образом разложить на скалярную матрицу и матрицу с нулевым следом (девиатор): $K = C + H$, где $C = cE$, $c = \text{tr} K / n$, $H = K - cE$, E – единичная матрица. Соответственно, силы Cq называются *потенциальными силами скалярного (сферического) типа*, а силы Hq – *потенциальными силами девиаторного (гиперболического) типа*.

Аналогично, произвольные линейные скоростные силы $Q = B\dot{q}$ могут быть единственным образом разбиты на сумму трех слагаемых $B\dot{q} = D\dot{q} + G\dot{q} + \Gamma\dot{q}$, ($D = dE$, $G = B - \Gamma - dE$, $\Gamma^T = -\Gamma$), где $D\dot{q}$ – диссипативные или ускоряющие (в зависимости от знака d) силы сферического типа, $G\dot{q}$ – скоростные силы гиперболического типа и $\Gamma\dot{q}$ – гироскопические силы.

Пример [9]. В задаче об управлении плоским маятником $\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, описывающим в общем случае эллиптическую траекторию, можно управлять этой траекторией, прикладывая к нему подходящие силы из числа перечисленных:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = (C + H + N)\mathbf{q} + (D + G + \Gamma)\dot{\mathbf{q}}.$$

Возникающую под действием этих сил эволюцию эллиптической траектории удобно проследить в фазовых переменных, называемых в небесной механике *элементами орбиты*: τ, k, r, φ . Где τ есть время, проходимое маятником от фиксированной точки траектории до текущей, k и r – малая и большая полуоси эллипса соответственно, φ – угол наклона большой полуоси к оси q_1 . В [9] получена таблица (см. табл. 1), из которой следует, что потенциальные силы сферического типа (C) вызывают только изменение сдвига по времени, циркулярные силы (N) вызывают только изменение малой полуоси, ускоряющие силы сферического типа (D) вызывают только изменение большой полуоси и гироскопические силы (Γ) вызывают только вращение эллипса вокруг начала координат.

	C	N	D	Γ	H	G
$\dot{\tau}$	*				*	*
\dot{k}		*			*	*
\dot{r}			*		*	*
$\dot{\varphi}$				*	*	*

Таблица 1.

Эти эволюции исчерпывают все возможности управления четырехмерным фазовым состоянием осциллятора. Силы гиперболического типа в управлении обычно не используются.

В случае, когда обобщенные силы нелинейны, в основу их определений кладем свойства этих сил. Будем называть силы потенциальными,

если, как и в линейном случае, они имеют потенциал, и циркулярными, если они ортогональны вектору обобщенных координат.

Для разложения произвольных нелинейных позиционных сил на потенциальные и циркулярные воспользуемся идеей, которую уже можно было применить и в линейном случае. А именно, вычислим работу линейной позиционной силы Q при замороженном времени на перемещении q :

$$U = \int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij}(\lambda q_j) q_i d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} q_i q_j$$

После приведения подобных членов найдем

$$U = (1/2) \sum_{i,j} k_{ij} q_i q_j$$

где $k_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$. Получен потенциал консервативной части исходных обобщенных сил. Квадратичная форма получается из билинейной формы $\sum_{i,j} s_i a_{ij} q_j$ после отождествления s и q [7]. Построив по найденному потенциалу консервативную часть силы Q , находим циркулярные силы в виде разности $Q_i - \partial U / \partial q_i$.

В нелинейном случае поступаем так же. Работа заданных нелинейных обобщенных сил Q на перемещении q равна

$$U = \int_0^1 \sum_i q_i Q_i(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n) d\lambda$$

Если $\partial Q_i / \partial q_j = \partial Q_j / \partial q_i$, то силы Q_i потенциальны и найденная скалярная функция $U(q)$ является их потенциалом. Это известная в теории дифференциальных форм теорема Пуанкаре [8].

Если же сила Q не потенциальна, то имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Дифференцируемое векторное поле $Q(q)$ может быть единственным образом разложено на потенциальную и циркулярную компоненты

$$Q(q) = Q'(q) + Q''(q),$$

$$\text{где } Q'_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \int_0^1 \sum_j q_j Q_j(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n) d\lambda, \text{ и } q \cdot Q'' = \sum_i q_i Q''_i = 0.$$

Доказательство. По аналогии с линейным случаем самосопряженный функционал $\int_0^1 \sum_i q_i Q'_i(\lambda q) d\lambda$ порождается функционалом $\int_0^1 \sum_i q_i Q_i(\lambda q) d\lambda$.

Циркулярные силы находятся по формуле $Q''_i = Q_i - Q'_i$.

Следует доказать два факта. Во-первых, что найденная таким образом сила действительно ортогональна вектору обобщенных координат и, во-вторых, что полученное разложение является единственным. Для установления первого факта вычислим вначале скалярное произведение потенциальной части вектора Q на вектор обобщенных координат q .

$$\begin{aligned} \sum_i Q'_i q_i &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i = \int_0^1 \sum_i q_i Q_i(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n) d\lambda + \\ &+ \int_0^1 \sum_{i,j} q_i q_j \frac{\partial Q_i(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n)}{\partial(\lambda q_j)} \lambda d\lambda \end{aligned}$$

Выполняя в последнем интеграле интегрирование по частям, получаем

$$\sum_i Q'_i q_i = \int_0^1 \sum_i q_i Q_i(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n) d\lambda + \int_0^1 \lambda \sum_i q_i dQ_i = \sum_i Q_i q_i.$$

Следовательно, установлено, что $\sum_i q_i (Q_i - Q'_i) = 0$, но это и означает,

что сила $Q - Q'$ является циркулярной компонентой силы Q .

Вопрос о единственности найденного разложения в нелинейном случае сложнее, чем в линейном. В нелинейном случае существуют циркулярные силы, являющиеся одновременно и потенциальными.

Примером может служить следующий потенциал $V(x, y) = x(x - y)^{-1}$, порождающий, циркулярную силу $\mathbf{F} = \{\partial V / \partial x, \partial V / \partial y\} = \{y, -x\}(x + y)^{-2}$.

Класс потенциальных циркулярных сил легко описать. Пусть искомым потенциал таких сил есть $V(q_1, \dots, q_n)$. По определению циркулярных сил имеем

$$\sum_i q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Но это условие означает, что скалярная функция $V(q_1, \dots, q_n)$ допускает группу подобия, поскольку она оказывается корнем оператора этой группы. Однако если предполагать, что сила Q разложима в ряд Тейлора в окрестности нуля, в частности, если эта сила имеет полиномиальный по обобщенным координатам вид, то допускать группу подобия она не может. Отсюда следует, что построенное разложение является единственным с точностью до описанного класса. Теорема доказана.

Пример. Разложить непотенциальную силу $\mathbf{F} = \{x, xy\}$ на потенциальную и циркулярную части.

Решение. Строим потенциал искомой потенциальной части

$$U = \int_0^1 [xF_x(\lambda x, \lambda y) + yF_y(\lambda x, \lambda y)] d\lambda = \int_0^1 (x^2 \lambda + xy^2 \lambda^2) d\lambda = \frac{x^2}{2} + \frac{xy^2}{3}$$

Следовательно, потенциальная часть рассматриваемой силы имеет вид

$$\mathbf{F}' = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right\} = \{x + y^2/3, 2xy/3\}$$

Циркулярная часть силы находится так

$$\mathbf{F}'' = \mathbf{F} - \mathbf{F}' = \{-y^2/3, xy/3\}$$

Легко видеть, что она перпендикулярна вектору $\mathbf{r} = \{x, y\}$.

Не следует думать, что построенное разложение нелинейной позиционной силы на потенциальную и циркулярную части соответствует известному в теории поля разложению на потенциальную и соленоидальную части. Рассмотрим, к примеру, силу $\mathbf{F} = \{z, x, y\}$, являющуюся, очевидно, соленоидальной, поскольку дивергенция от нее равна нулю. Применив к ней изложенный метод разложения, находим потенциальную часть $\mathbf{F}' = \{y + z, x + z, x + y\}/2$ с потенциалом $U = (xy + xz + yz)/2$ и циркулярную часть $\mathbf{F}'' = \{z - y, x - z, y - x\}/2$. В этом примере сила линейна, и это же разложение можно получить обычным образом при помощи разбиения матрицы этой силы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

на симметрическую и кососимметрическую части.

Замечание 1. Совершенно аналогично можно осуществлять разложение произвольной обобщенной силы $Q(t, q, \dot{q})$ на силу, имеющую потенциал Рауса, и на гироскопическую силу. При этом роль обобщенной координаты играет обобщенная скорость, роль потенциальной силы играет диссипативная сила, а роль циркулярной – гироскопическая. Потенциалом диссипативной силы является потенциал Рауса.

Пример. Разложить силу $\mathbf{F} = \{-\dot{y}, x\dot{y}^2\}$.

Решение. Строим потенциал Рауса

$$R = \int_0^1 [\dot{x}F_x(\lambda\dot{x}, \lambda\dot{y}) + \dot{y}F_y(\lambda\dot{x}, \lambda\dot{y})]d\lambda = \int_0^1 [\dot{x}(-\lambda\dot{y}) + x\dot{y}^3\lambda^2]d\lambda = -\frac{\dot{x}\dot{y}}{2} + \frac{x\dot{y}^3}{3}$$

Таким образом, «диссипативная» часть силы получилась следующей:

$$\mathbf{F}' = \{\partial R / \partial \dot{x}, \partial R / \partial \dot{y}\} = \{-\dot{y}/2, -\dot{x}/2 + x\dot{y}^2\}$$

Вычислим гироскопическую компоненту.

$$\mathbf{F}'' = \mathbf{F} - \mathbf{F}' = \{-\dot{y}/2, \dot{x}/2\}$$

Замечание 2. Нелинейные силы, порождаемые потенциалом Рауса, могут иметь структуру циркулярных сил. К примеру, уравнения управляемого маятника Фуко [9]

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mu \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q} + \varepsilon(1 - \mathbf{q}^2 - \dot{\mathbf{q}}^2)\dot{\mathbf{q}}; \quad \mathbf{q} = \{x, y\}$$

содержит две зависящие от обобщенной скорости нелинейные управляющие силы

а) управление моментом количества движения

$$\mathbf{F}_K = \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q} = (\dot{x}y - x\dot{y})\{y, -x\}$$

б) управление амплитудой

$$\mathbf{F}_A = (1 - \mathbf{q}^2 - \dot{\mathbf{q}}^2)\dot{\mathbf{q}} = (1 - x^2 - y^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2)\{\dot{x}, \dot{y}\}$$

Изложенный выше алгоритм разложения позволяет убедиться в отсутствии гироскопической компоненты в обоих случаях.

Потенциал Рауса имеет вид

$$\text{а) для силы } \mathbf{F}_K : V_K = (\dot{x}y - x\dot{y})^2 / 2$$

$$\text{б) для силы } \mathbf{F}_A : V_A = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)[2(1 - x^2 - y^2) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2] / 4.$$

Видно, что имеющая потенциал Рауса сила \mathbf{F}_K является циркулярной по координатам.

Замечание 3. Так же как и в линейном случае, нелинейная потенциальная сила $Q'(q)$ может быть единственным способом разложена на скалярную и девиаторную части. Чтобы понять, как это можно сделать, заметим, что в линейном случае скалярная часть является инвариант-

ной по отношению к группе вращений $SO(n)$, и она могла быть вычислена усреднением линейной потенциальной силы на этой группе.

Пример. Найдем скалярную компоненту силы $\mathbf{F} = A\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$.

Решение. Рассмотрим в этом пространстве группу вращения $\tilde{\mathbf{q}} = S\mathbf{q}$, $\tilde{\mathbf{F}} = S\mathbf{F}$, где $S = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Усредним матрицу линейной

потенциальной силы $\tilde{A} = SAS^T$ по φ :

$$\langle \tilde{A} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} d\varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix}$$

Аналогично поступаем и в нелинейном случае.

Теорема 2. Потенциальная составляющая обобщенной силы $Q'(q)$ единственным образом разлагается на скалярную и девиаторную части: $Q' = Q'_c + Q'_d$, где $Q'_c = \langle SQ'(S^T q) \rangle$, а $Q'_d = Q' - Q'_c$.

Пример. Разложить потенциальную силу $Q = (q_1^3 \quad q_2^3)^T$ на скалярную и девиаторную части.

Решение.

$$Q_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (q_1 \cos \varphi - q_2 \sin \varphi)^3 \\ (q_1 \sin \varphi + q_2 \cos \varphi)^3 \end{pmatrix} d\varphi = \frac{3}{4} (q_1^2 + q_2^2) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$Q_d = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} q_1(q_1^2 - 3q_2^2) \\ q_2(q_2^2 - 3q_1^2) \end{pmatrix}$$

Аналогично осуществляется разложение нелинейной диссипативной силы на скалярную (силы с полной диссипацией) и девиаторную части.

Литература

1. Thomson W. and Tait P.G. Treatise on Natural Philosophy. – Cambridge: Cambridge University Press, 1879.
2. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. – М.: Мир, 1974. – 526 с.
3. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. – М.: Наука, 1974. – 344 с.
4. Roseau M. Vibrations des systèmes mécaniques. – Paris. Masson, 1984. – 488 p.
5. Румянцев В. В. О влиянии гироскопических сил на устойчивость стационарного движения. // ПММ. – 1975. – Т.39, вып.6. – С.963-973
6. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики. – М.: Физматлит, 2008. – 304 с.

7. Фор Р, Кофман А, Дени-Папен М. Современная математика. – М.: Мир, 1966. 271 с.
8. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.
9. Журавлёв В.Ф. Теория возмущений интегральных многообразий резонансных систем. В сб. «Нелинейная механика». – М.: Физматлит, 2001. – С.162-173

УДК 531.9:62-50

Л. Д. Акуленко
Институт проблем механики РАН

ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ДИСКА ПО ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Исследуется плоское движение диска вдоль кривой под действием возмущающих и управляющих сил и моментов сил. Система моделирует качение жесткого колеса по твердой трассе с криволинейным профилем. Построены математические модели управляемого движения, отвечающие явному или неявному координатному заданию кривой. Определены требования к величинам сил трения скольжения и нормального давления, которые обеспечивают естественный регулярный режим качения диска по кривой без проскальзывания и отрыва. Рассмотрены задачи оптимального по быстродействию приведения диска в требуемое состояние движения под действием силы тяжести и ограниченного осевого момента сил. Изучена реалистическая ситуация, когда кривая (профиль трассы) содержит линейную (наклонную вверх или вниз) и периодическую (волнистую) составляющие. Исследованы задачи оптимального синтеза в случаях относительно большого и малого управляющего момента сил.

Введение. Задачи качения твердых тел различной геометрической формы (цилиндров, дисков, шаров, эллипсоидов и др.) по поверхностям, как плоским, так и искривленным (обкатывание одних тел другими), представляют значительный теоретический интерес (см. [1-4] и др.). Их исследование существенно в прикладном аспекте для современного машиностроения, транспорта, мобильных робототехнических систем [5-7] и т.п. В научной литературе, однако, отсутствуют результаты систематических численно-аналитических исследований задач динамики и управления качением твердых тел по криволинейным поверхностям, в том числе для сравнительно простых моделей тел (цилиндров, дисков, шаров). Представляется целесообразным изучить основные свойства таких движений для упрощенной плоской модели качения диска по гладкой кривой, моделирующей движение колеса по трассе с криволинейным профилем довольно общего вида, в том числе замкнутым гладким кривым. В обыденном аспекте вызывает интерес управляемое качение диска под действием сил тяжести по кривой, содержащей линейный наклон и периодические гладкие изменения наклона. Принципиальное значение имеет решение задач об управлении движением диска по замкнутой кривой, например, окружности (внутри или вне), преодоления препятствий или «выкатывания» из углублений различных форм и т.д.

1. Постановка задачи. На геометрической плоскости имеется достаточно гладкая кривая. В некоторой точке ее касается круглый диск радиуса a (рис. 1). Считается возможным его перемещение вдоль кри-

вой посредством регулярного качения (без отрыва и проскальзывания) под действием внешних и внутренних сил и моментов сил. Диск и кривая предполагаются абсолютно жесткими и шероховатыми; трение качения не учитывается. Система моделирует качение колеса по трассе с криволинейным профилем. Она учитывает геометрические и силовые факторы; эффекты деформирования не рассматриваются.

Для описания движения диска требуется введение достаточно удобной системы координат, в том числе декартовой системы XY . Предполагаем заданными уравнение кривой и выражения для основных геометрических характеристик

$$\begin{aligned} K(x, y) &= 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2 \\ \operatorname{tg} \beta &= y' = -K'_x / K'_y, \quad K'_y \neq 0; \quad \operatorname{ctg} \beta = 1/y', \quad K'_x \neq 0 \\ \kappa &= (K_x'^2 + K_y'^2)^{-3/2} \begin{vmatrix} K''_{xx} & K''_{xy} & K'_x \\ K''_{yx} & K''_{yy} & K'_y \\ K'_x & K'_y & 0 \end{vmatrix}, \quad \rho = 1/\kappa \\ K_x'^2 + K_y'^2 &\neq 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь K – достаточно гладкая в рассматриваемой области функция; величины $x_i, y_i (i = 1, 2)$ могут быть как ограниченными, так и бесконечными. Угол β характеризует наклон касательной в точке $r = (x, y)$ кривой, функция κ – кривизну линии, ρ – радиус кривизны. Диск может касаться кривой, находясь с одной или с другой стороны (условно «сверху» или «снизу»).

Для упрощения описания движения предположим, что в рассматриваемой области кривая может быть однозначно представлена в виде (явно или неявно)

$$\begin{aligned} y &= y(x), \quad -\infty < x_1 \leq x \leq x_2 < \infty \\ \operatorname{tg} \beta &= y'(x), \quad |y'| \leq k^* < \infty, \quad |\beta| \leq \arctg k^* < \pi/2 \\ \kappa &= y''(x)(1 + y'^2(x))^{-3/2}, \quad |\kappa| \leq \kappa^*, \quad \rho = \kappa^{-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Штрих означает производную по аргументу x .

Ради определенности (рис. 1) диск расположен «сверху» над кривой. При качении он находится с одной стороны вследствие ограниченности ее наклона. Во избежание нескольких (двух и более) точек контакта и возможных «ударов» следует наложить определенные тре-

бования на локальную кривизну $\kappa(x)$, которые будут описаны ниже.

При регулярном качении точка касания движется по кривой (1.2) и проходит путь (с учетом знака), описываемый квадратурой

$$\begin{aligned} s(x) &= s^0 + \int_{x^0}^x (1 + y'^2(\zeta))^{1/2} d\zeta, \quad |s - s^0| \geq |x - x^0| \\ s'(x) &= (1 + y'^2(x))^{1/2} \geq 1, \quad \cos \beta = 1/s', \quad \sin \beta = y'/s' \end{aligned}$$

Без ограничения общности в (1.3) можно положить $s^0 = x^0 = 0$. Функция $s(x)$ необходима для описания углового движения диска, обусловленного качением. Посредством выражения $s'(x)$ удобно описывать угол наклона касательной к кривой в точке $r = (x, y(x))$. Отметим, что центр C диска находится на прямой, проходящей через точку контакта ортогонально касательной, т.е. справедливы равенства

$$\begin{aligned} y'(Y - y) &= X - x; \quad X = x_c, \quad Y = y_c, \quad (x_c - x)^2 + (y_c - y)^2 = a^2 \\ x_c &= x - a \sin \beta = x - ay'/s', \quad y = y(x) \\ y_c &= y + a \cos \beta = y + a/s', \quad s' = (1 + y'^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для дальнейших построений характеристик движения требуется определить относительное и абсолютное вращение диска относительно оси z или оси, проходящей через его центр. Угол полного поворота $\psi(x)$ можно представить в виде суммы углов $\varphi(x)$ и $\Delta\beta(x)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi(x) + \Delta\beta(x), \quad \varphi(x) = -s(x)/a \\ \Delta\beta &= \beta(x) - \beta(0), \quad \beta = \arctg y'(x) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Величина φ обусловлена качением диска, т.е. длиной пути $s(x)$ (1.3); добавка $\Delta\beta$ обусловлена изменением наклона кривой y' согласно (1.2).

Далее переменная x используется в качестве искомой обобщенной координаты $x = x(t)$. Для вывода уравнения движения и условий регулярного качения (без скольжения и отрыва) под действием потенциальных (гравитационных) и других сил и моментов сил различной физической природы (управляющих, диссипативных и т.п.) вычислим вектор скорости движения центра масс и абсолютную угловую скорость вращения относительно центра масс. Воспользуемся уравнениями связи (1.2)–(1.5) между переменными x и x_c, y_c, φ .

2. Кинематические характеристики качения диска. Определим

компоненты абсолютной скорости геометрического центра диска $\dot{r}_c = (\dot{x}_c, \dot{y}_c)$. Продифференцируем выражения для x_c, y_c согласно (1.4), имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= \dot{x} - a\dot{\beta} \cos \beta = (1 - a\kappa)\dot{x}, & x &= x(t) \\ \dot{y}_c &= \dot{y} - a\dot{\beta} \sin \beta = y'(1 - a\kappa)\dot{x} = y'\dot{x}_c\end{aligned}\quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что функции \dot{x}_c, \dot{y}_c требуют высокой гладкости зависимости $y = y(x)$ (1.2). Они будут непрерывными по t , если функция $2\theta(x)$ непрерывна, т.е. $y(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Функцию $x(t)$ (2.1) полагаем достаточно гладкой.

Вычислим абсолютную угловую скорость вращения диска относительно оси, проходящей через его геометрический центр. Аналогично (2.1) продифференцируем выражение $\psi(x)$ (1.5), имеем

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \dot{\phi} + \dot{\beta} = -a^{-1}(1 - a\kappa)s'\dot{x}, \\ \dot{\phi} &= -s'a^{-1}\dot{x} = -(1 + y'^2)^{1/2}a^{-1}\dot{x} \\ \dot{\beta} &= y''(1 - y'^2)^{-1} \\ \dot{x} &= \kappa s'\dot{x}, & x &= x(t)\end{aligned}\quad (2.2)$$

Для непрерывности функции $\dot{\psi}$ от t при условии непрерывности $\dot{x}(t)$ требуется непрерывность $y''(x)$ по x . Это свойство аналогично описанному выше для \dot{x}_c, \dot{y}_c (2.1). Таким образом, если в некоторых точках x_i значения $y(x)$ гладко согласованы, т.е. производные $y'(x)$ совпадают (например, $y \sim |x - x_i|(x - x_i)$), но могут испытывать «изломы», то в выражениях (2.1), (2.2) имеют место особенности – конечные разрывы (скачки) функций y'' и κ . При выводе уравнения движения и условий регулярности потребуются выражения для \ddot{x}_c, \ddot{y}_c и $\ddot{\psi}$ (см. ниже), что приведет к функциям $y'''(x)$, которые будут сингулярными типа δ -функций Дирака. Если же кусочно-гладкий профиль $y(x)$ может испытывать изломы, то особенности выражений для производных усугубляются. Функции y'' , κ будут сингулярными, что приведет к δ -функциям в выражениях \dot{x}_c, \dot{y}_c (2.1) и $\dot{\psi}, \dot{\beta}$ (2.2); функ-

ция $\dot{\phi}$ остается кусочно-непрерывной, т.е. имеет конечные разрывы. Вычисление вторых производных по t потребует вычисления функции $y'''(x)$, которая в рассматриваемом случае является сингулярной более высокого порядка (производная δ -функции). Исследование существенно нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих сингулярные зависимости от неизвестной функции, представляется весьма затруднительным.

Установленные свойства движения являются неожиданными и в научной литературе не отмечались. На практике они используются для предельного принудительного уменьшения скорости дорожного движения автотранспорта («лежачий полицейский»), для снижения нагрузки на реборды колес и рельсы на железнодорожном транспорте и других областях.

Используя выражения (2.1), вычислим искомые вторые производные \ddot{x}_c, \ddot{y}_c ; получим

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c &= (1 - a\kappa)\ddot{x} - a\kappa'\dot{x}^2, & \kappa' &= y'''/s'^{3/2} - 3y''^2y'/s'^{5/2} \\ \ddot{y}_c &= y'(1 - a\kappa)\ddot{x} + [y''(1 - a\kappa) - ay'\kappa']\dot{x}^2, & y'' &= \kappa s'^{3/2}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Наличие производной от функции кривизны κ' требует существования третьей производной $y'''(x)$, которая должна быть достаточно гладкой. Аналогичные эффекты имеют место после вычисления углового ускорения диска

$$\begin{aligned}\ddot{\psi} &= -(1 - a\kappa)s'a^{-1}\ddot{x} - (1 - a\kappa)s''a^{-1}\dot{x}^2 + \kappa s'\dot{x}^2 \\ s'' &= y''y'/s' = \kappa y's'^2\end{aligned}\quad (2.4)$$

Отметим, что выражения \dot{x}_c, \dot{y}_c (2.1) и $\dot{\psi}$ (2.2) содержат множитель $(1 - a\kappa)$ перед производной \dot{x} . Это свидетельствует об особенностях движения такой системы при $\kappa = a^{-1}$. Аналогичный коэффициент имеет место в выражениях \ddot{x}_c, \ddot{y}_c (2.3) и $\ddot{\psi}$ (2.4). Естественно предположить малость кривизны $2\theta(x)$ во всех точках кривой $y(x)$, т.е. малость $y''(x)$, что должно привести к выполнению неравенства $\kappa < a^{-1}$. Если $\kappa \leq 0$ (выпуклость вверх), то установленное затруднение не возникает. Таким образом, указанные свойства рассматриваемой механической систем (гладкость профиля и ограниченность кривизны) свидетельствуют об ее интересных специфических особенностях и в научной литературе не отмечались.

3. Уравнения управляемого качения диска. При выводе уравнения движения в форме Лагранжа [8] воспользуемся выражениями (2.1) для компонент \dot{x}_c, \dot{y}_c вектора скорости \dot{r}_c центра масс и (2.2) для угловой скорости $\dot{\psi}$ вращения диска. С целью упрощения выражений полагаем, что центр масс диска и его геометрический центр C совпадают. Обозначим через m массу диска, а через I – центральный момент инерции. Суммарная кинетическая энергия движения диска обусловлена абсолютной скоростью \dot{r}_c движения центра масс и полной угловой скоростью $\dot{\psi}$ вращения относительно центра масс; имеем

$$T = T_m + T_I, \quad T_m = m2(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2), \quad T_I = I2\dot{\psi}^2 \quad (3.1)$$

Как следует из выражений (2.1), (2.2), слагаемые и сумма величин (3.1) являются однородными квадратическими функциями обобщенной скорости \dot{x} . Обобщенная инерционная характеристика μ диска с учетом связи (1.4), (1.5), зависит от координаты x и приведенной массы m^* . Подстановка выражений (2.1), (2.2) в (3.1) приводит к следующему представлению кинетической энергии $T(x, \dot{x})$, пригодному для применения принципа Лагранжа; имеем

$$T = 1/2\mu(x)\dot{x}^2, \quad \mu = m^*(1 - a\kappa)^2 s'^2, \quad m^* = m + Ia^{-2} \quad (3.2)$$

Здесь κ, s' есть функции переменной x согласно (1.2), (1.3).

Стандартным образом [8] выпишем потенциальную энергию V в общем виде и, в частности, для однородного поля массовых сил (силы тяжести)

$$V(x) = W(r_c, \psi), \quad (W = W(x_c, y_c, \varphi, \beta)) \\ V(x) = W_g(y_c) = mgy_c(x) + const, \quad y_c = y + a(1 + y'^2)^{-1/2} \quad (3.3)$$

Посредством выражений (3.2), (3.3) выписывается функция Лагранжа $T - V$ через декартову координату x и производную \dot{x} . На ее основе стандартным образом находится искомое уравнение движения. Помимо потенциальных сил и моментов сил могут быть учтены другие обобщенные воздействия на основе выражений для элементарной работы δA этих сил на виртуальных перемещениях $\delta r_c, \delta \psi$ или $\delta s, \delta \psi$ [8]

$$\delta A = p_x \delta x + p_y \delta y + q \delta \psi = (p_x + y' p_y) \delta x + q b \delta x \equiv f \delta x \\ \delta A = p ds + q \delta \psi = p s' \delta x + q b \delta x \equiv f \delta x, \quad b(x) = (\kappa - a^{-1}) s' \quad (3.4)$$

Наряду с выражениями для элементарной работы моментов внешних сил на виртуальных поворотах $q \delta \psi$ могут быть учтены величины

$q_\varphi \delta \varphi, q_\beta \delta \beta$. Введенные в (3.4) функции могут зависеть от переменных t, x, \dot{x} , а также от управляющего воздействия u , исходя из целей движения. Аналогично [7] получим

$$\mu(x)\ddot{x} + 1/2\mu'(x)\dot{x}^2 + V'(x) = f(t, x, \dot{x}, u) \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) описывает качение диска в регулярном режиме без отрыва и проскальзывания. Определим соответствующую касательную S и нормальную N силы, действующие на диск в точке контакта [7]. Используя уравнения движения центра масс, подобно (2.3), дифференцированием скоростей \dot{x}_c, \dot{y}_c (2.1) получим

$$m\ddot{x}_c \equiv m(1 - a\kappa)\ddot{x} - ma\kappa'\dot{x}^2 = S/s' - Ny'/s' + G_x + P_x \\ m\ddot{y}_c \equiv my'(1 - a\kappa)\ddot{x} + m[y''(1 - a\kappa) - ay'\kappa']\dot{x}^2 = \\ = Sy'/s' + N/s' + G_y + P_y \\ (G = -\delta W/\delta r_c; \quad G = (0, -mg), \quad V = W_g)$$

Система линейных алгебраических уравнений (3.6) позволяет однозначно определить неизвестные S, N при заданных остальных величинах. Получаются выражения, изученные ранее для случаев горизонтальной и наклонной прямой [2, 5-7]

$$S = ms'(1 - a\kappa)\ddot{x} + m[y's'^2\kappa(1 - a\kappa) - a\kappa's']\dot{x}^2 - G_s - P_s \\ N = ms'^2\kappa(1 - a\kappa)\dot{x}^2 - G_n - P_n \quad (3.7)$$

Касательные G_s, P_s и нормальные G_n, P_n компоненты сил получаются из $G_{x,y}, R_{x,y}$ аналогичным пересчетом (поворотом векторов G, P на угол $-\beta$). Влияние моментов сил осуществляется косвенно через x, \dot{x}, \ddot{x} . Согласно (3.7) величина N не зависит от ускорения \ddot{x} . Кроме того, его можно исключить из выражения для S посредством уравнения (3.5). Выполнение требования регулярного качения в естественных условиях сводится к неравенствам, которые могут быть установлены априори:

$$N > 0, \quad |S| \leq k_f N, \quad k_f \sim 1 \quad (k_f > 0) \quad (3.8)$$

Здесь k_f – коэффициент сухого трения согласно закону Амонтона-Кулона [2].

Уравнение движения (3.5) допускает постановку стандартных задач управления и оптимизации [9]. Для определенности, пусть требуется

перевести фазовую точку x, \dot{x} в состояние x^f, \dot{x}^f к моменту времени $t_f < \infty$ при условии минимума функционала качества J

$$\begin{aligned} x(t_0) = x^0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}^0, \quad x(t_f) = x^f, \quad \dot{x}(t_f) = \dot{x}^f \\ J[u] \rightarrow \min_u, \quad u \in U \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для приложений может представить интерес задача оптимального быстройдействия [7, 9] $J = t_f$ в случаях, когда трасса является гладкой периодической, имеет также дополнительный наклон, содержит возвышения или (и) углубления и т.п. Решение некоторых примеров приводится ниже.

4. Примеры управляемого качения диска. Возьмем в качестве примеров конкретные случаи профилей трассы. Для приложений представляют интерес периодические профили с наклоном (вверх или вниз) или без наклона. Движение диска (качение колеса) происходит в однородном поле сил тяжести под действием управляющего момента сил, приложенного к его оси.

Пример 1. Рассмотрим сперва качение диска по наклонному волнистому профилю вида

$$\begin{aligned} y = y(x) = kx + h(1 - \cos \lambda x), \quad \operatorname{tg} \beta = y' = k + \xi \sin \lambda x \\ s = s(x) = \int_0^x [1 + y'^2(\ell)]^{1/2} d\ell, \quad \xi = k\lambda, \quad k, h, \lambda = \text{const} \quad (4.1) \\ s' = s'(x) = [1 + y'^2(x)]^{1/2}, \quad \kappa = \kappa(x) = \xi \lambda \cos \lambda x / s'^3 \end{aligned}$$

Параметры k, h, λ имеют наглядный геометрический смысл: k – коэффициент среднего наклона, h – амплитуда периодической составляющей, λ – волновое «число», а $2\pi/\lambda$ – «длина волны». Согласно (4.1), величина $y'(x)$ ограничена для всех $|x| < \infty$, т.е. $|\beta| < \pi/2$. Значения функции $s'(x) \geq 1$ и ограничены сверху. Кривизна $\kappa(x)$ является периодической знакопеременной функцией, достигающей экстремумов в точках $x_n = \nu_n/\lambda$, где ν_n – корни тригонометрического уравнения

$$\begin{aligned} \sin \nu [1 + (k + \xi \sin \nu)^2] + 3\xi \cos^2 \nu (k + \xi \sin \nu) = 0 \quad (4.2) \\ \nu_n = \pi n - 3 \cos \pi n \xi k (1 + k^2)^{-1/2} + O(\xi^2), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \kappa_n^\pm = \lambda \xi \cos \pi n (1 + k^2)^{-3/2} + O(\xi^2); \quad |\lambda \xi| (1 + k^2)^{-3/2} < a^{-1} \end{aligned}$$

Отметим, что при $k = 0$ (средний наклон отсутствует), точки экс-

тремумов $\nu_n = \pi n$, а величины $2\kappa_n^\pm = \pm \lambda \xi$; они должны удовлетворять условию $|\lambda \xi| < a^{-1}$. В противном случае при качении в естественных условиях происходят ударные взаимодействия края диска и профиля трассы (см. рис. 1, изображено штриховыми линиями).

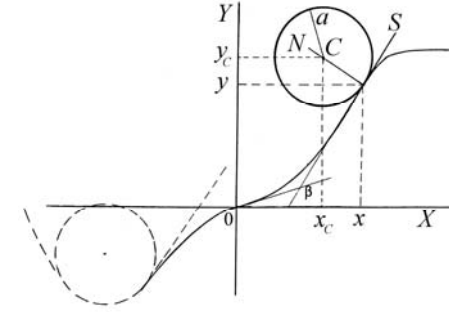


Рис. 1

Исследуем соответствующее кривой (4.1) уравнение управляемого движения диска (3.5) в потенциальном поле массовых сил с потенциальной энергией W_g (3.3) при наличии только ограниченного управляющего момента сил q в выражениях (3.4). Это уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \mu(x) \ddot{x} + 1/2 \mu'(x) \dot{x}^2 + mg(1 - a\kappa)y' = -q(1 - a\kappa)a^{-1}s' \quad (4.3) \\ \mu = m^* s'^2 (1 - a\kappa)^2, \quad |q| \leq q_0, \quad |a\kappa| < 1 \end{aligned}$$

Функции $y'(x), s'(x), \kappa(x)$ определены в (4.1). Отметим, что выражение $s(x)$ (4.1) пока не используется, что существенно упрощает описание системы, поскольку все функции представлены в элементарной аналитической форме. Функция $s(x)$ выражается через эллиптические интегралы. В частности, при $k = 0$ или $|k| = |\xi|$ формула для s (4.1) приводится к полному и неполному эллиптическим интегралам второго рода, см. далее формулу (4.12).

Для случая $\xi = 0$ имеет место профиль в виде наклонной прямой линии $y = kx$, где $k > 0$ или $k < 0$; согласно (4.1) кривизна $\kappa(x) \equiv 0$, см. также разд. 2. Тогда имеем $s' = (1 + k^2)^{1/2} = \text{const}$, $\mu = m^* s'^2$, а $\mu' \equiv 0$. Управляемая система (4.3) приводится к виду

$$\ddot{x} = u - \gamma, \quad u = -q/(am^*s'), \quad \gamma = mgk/(m^*s'^2) \quad (4.4)$$

$$|u| \leq u_0, \quad u_0 = q_0/(am^*s'), \quad u_0 > |\gamma|$$

Условие полной управляемости для всех x, \dot{x} имеет наглядный смысл: управляющий момент q_0 должен превосходить момент сил тяжести $mg a |\sin \beta|$.

Система (4.3) будет управляемой при достаточно малых значениях $|\mu'| \dot{x}^2$ при аналогичном (4.4) условии $q_0 > mga |\sin \beta|$. Функция $\sin \beta(x)$ согласно (3.1) достигает экстремальных значений при $\lambda x_n = \pi(n + 1/2)$, которые равны

$$\begin{aligned} \sin \beta_n^\pm &= y_n'(1 + y_n'^2)^{-1/2}, \quad y_n' = k \pm \xi \\ \sin \beta_n^\pm &= k(1 + k^2)^{-1/2} \pm \xi(1 + k^2)^{-3/1} + O(\xi^2), \quad |\xi| \sim 1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Условие управляемости для произвольных x и достаточно малых $|\dot{x}|$ должно проверяться с учетом переменности наклона на основе формул (4.5). Если вариации наклона относительно невелики, то управляемость имеет место в асимптотически большой области изменения $\dot{x}, |\dot{x}| \sim |\xi|^{-1/2}, |\xi| \sim 1$.

Заметим, что сильное неравенство $|\xi| \ll 1$ допускает сколь угодно большие значения амплитуды $|h|$ (например, $|h| \sim a$ или $|h| \gg a$), если число $|\lambda|$ достаточно мало ($|\lambda|a \ll 1$). И, наоборот, величина $|\lambda|$ может быть большой ($|\lambda|a \sim 1$ или $|\lambda|a \gg 1$), если амплитуда $|h|$ достаточно мала ($|h| \ll a$). В итоге должно выполняться условие $|a\kappa| < 1$; для этого достаточно, чтобы $ah\lambda^2 < 1$.

Рассмотрим случай малой кривизны: $|\kappa| \ll a^{-1}$ (см. (4.2)) и применим метод возмущений при построении синтеза оптимального управления для задачи быстрогодействия [9-11]. Возьмем в качестве естественного масштаба длины ℓ величину радиуса диска: $\ell = a$; единицу времени τ удобно связать с существенной величиной q_0 : $\tau^2 = m^*a^2(1 + k^2)^{1/2}q_0^{-1}$. Введем малый параметр ε , который свяжем с малыми величинами $\alpha = a\lambda$ и $\xi = h\lambda$. Вместо вырожденного уравнения (4.4) получается более общее возмущенное, позволяющее учесть периодические по x вариации наклона профиля. Это уравнение может быть представлено в виде системы

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u - \gamma + \varepsilon f, \quad (4.6)$$

$$f(x, v, u, \varepsilon) \equiv f_g(x) + \varepsilon f_\mu(x)v^2 + f_q(x)u, \quad |u| \leq 1$$

Возмущающие функции периодичны по x ; они обусловлены соответствующими факторами: f_g – вариацией момента силы тяжести, f_μ – величиной $\mu' \sim \varepsilon^2$, f_q – вариациями коэффициента при q (см. уравнение (4.3)). Для системы (4.6) ставится двухточечная задача оптимального быстрогодействия типа (3.9)

$$\begin{aligned} x(0) &= x^0, \quad v(0) = v^0; \quad x(t_f) = x^f, \quad v(t_f) = v^f \\ J[u] &= t_f \rightarrow \min_u, \quad |u| \leq 1; \quad |\gamma| < 1, \quad |\varepsilon| \ll 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Система (4.6) относится к классу «неосциллирующих объектов», для которых разработаны теория и методы регулярного синтеза в ограниченной области [10]. Подход к решению основан на построении кривой переключения; оптимальное по быстродействию управление релейно и имеет одну точку переключения на указанной кривой. Разработана также аналитическая методика [11], использующая процедуру метода возмущений. Применительно к рассматриваемой задаче построение кривой переключений сводится к интегрированию уравнений для ее ветвей, отвечающих $u = \pm 1$ и исходящих из точки (x^f, v^f) . Соответствующие задачи Коши имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= \frac{v}{u - \gamma} - \frac{\varepsilon f v}{(u - \gamma)(u - \gamma + \varepsilon f)}; \quad x(v^f, \varepsilon) = x^f \\ u &= +1, v < v^f; \quad u = -1, v > v^f; \quad |x| < \infty, |v| \sim \varepsilon^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Функция f определяется согласно (4.6). При $\varepsilon = 0$ (невозмущенная система (4.4)) ветви парабол $x_0^\pm(v)$ имеют простое представление [11] (см. рис. 2, сплошные линии)

$$x_0^\pm(v) = x^f + 1/2(v^2 - v^{f2})(u - \gamma)^{-1}, \quad u = \pm 1, \quad \pm v < v^f \quad (4.9)$$

Функция x_0^\pm испытывает излом (скачок касательной) $2v^f(1 - \gamma^2)^{-1}$. Обычно рассматривается случай $v^f = 0$; тогда ветви x^\pm (4.9) стыкуются гладким образом в точке $(x^f, 0)$ при $u = \pm 1$ (см. рис. 2, штриховые линии). Направо вниз уходит ветвь для $u = +1, v < 0$, а налево вверх – для $u = -1, v > 0$ (аналогично стандартному классическому варианту задачи [9, 10]).

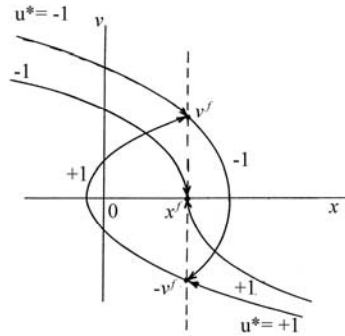


Рис. 2

Момент сил тяжести γ либо способствует либо препятствует управляющему воздействию u . Время быстрогодействия вычисляется согласно [10, 11].

Учет возмущающей функции $f(x, v, u, \varepsilon)$ проводится методом возмущений: в нее подставляются функции $x^\pm(v, \varepsilon)$, построенные на предыдущем шаге рекуррентной процедуры [11]

$$x_1^\pm(v, \varepsilon) = x_0^\pm(v) - \varepsilon(u - \gamma)^{-2} \int_{v^f}^v z f(x_0^\pm(z), 0, u, 0) dz$$

$$x_{j+1}^\pm(v, \varepsilon) = x_0^\pm(v) - \varepsilon \int_{v^f}^v z f_*(x_j^\pm(z, u, \varepsilon), z, u, \varepsilon) dz \quad (4.10)$$

$$u = \pm 1, \quad \pm v < v^f, \quad |v| \sim 1/\varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots$$

Здесь для сокращения записи введена функция f_* , которая характеризует возмущающее слагаемое в уравнениях (4.8). При достаточно малых ε значения $|v|$ могут быть взяты сколь угодно большими, вплоть до $|v| \sim \varepsilon^{-1/2}$. Процедура (4.10) имеет методический характер и мало пригодна для практических расчетов. Предпочтительнее численное интегрирование задач Коши (4.8). Для аналитических оценок влияния возмущений, т.е. кривизны профиля, на управляемое качение диска можно ограничиться первым и вторым приближениями кривой переключений $x_{1,2}^\pm(v, \varepsilon)$ (4.10).

В соответствии с картиной синтеза [9-11], оптимальное управление $u = +1$ для фазовых точек (x, v) , расположенных «ниже» кривой переключений $x^\pm(v, \varepsilon)$ и на ветви $x^+(v, \varepsilon)$. Управление $u = -1$ для то-

чек «выше» кривой и на ветви $x^-(v, \varepsilon)$. Отметим, что функция $x^\pm(v, \varepsilon)$ может быть весьма несимметричной по v , в том числе при $v^f = 0$, если величина $|\gamma|$ близка к 1. Значительные вариации ветвей парабол кривой переключений будут происходить при увеличении параметра ε вследствие влияния периодических составляющих профиля $y(x)$ (4.1).

Исследование картины синтеза для различных значений параметров системы $k, h, \lambda, a, m, m^*, g, q_0$ требует отдельного обстоятельного моделирования. Оно включает численное интегрирование задач Коши (4.8) и уравнений движения (4.6) для соответствующих значений $u = \pm 1$. Оптимальное управление предполагает высокоточное определение точек переключения, т.е. пересечения фазовой траектории и кривой переключения, вдоль которой фазовая точка будет двигаться на заключительном участке траектории. Естественно, требуется проверка условий регулярного качения без проскальзывания и отрыва (3.8).

Отметим, что система (4.6) обладает структурой, допускающей аналитическое интегрирование уравнения на фазовой плоскости (x, v) . Действительно, оно имеет вид уравнения Бернулли и сводится к линейному уравнению для неизвестной v^2 . Ветви траекторий представимы квадратурами, вычисление некоторых из них затруднительно и требует математического моделирования. Это свидетельствует, что предпочтительнее изначально проводить численное интегрирование указанных задач Коши (4.10). Кроме того, если $v^f \neq 0$, то имеется область значений x , для которых зависимость v от x неоднозначна, см. рис. 2. Удобнее численно строить однозначную обратную зависимость $x^\pm(v)$.

Пример 2. Рассмотрим другой предельный случай профиля, когда наклон трассы k незначителен и им можно пренебречь ($k = 0$). Однако периодическая составляющая предполагается существенной: амплитуда возвышений $h \sim a$ и может быть значительно больше ($h \gg a$). Для простоты и физической реализуемости полагаем $a\kappa < 1$, что имеет место при $\alpha\xi < 1$ согласно (4.3). Диск находится над кривой $y = h(1 - \cos \lambda x)$ и совершает качение под действием моментов сил тяжести и управления. В уравнении (4.3) полагается

$$\kappa = (\xi\lambda/s'^3) \cos \lambda x, \quad s' = (1 + \xi^2 \sin^2 \lambda x)^{1/2} \geq 1 \quad (4.11)$$

Вычислим величину пройденного пути $s(x)$ с учетом знака при заданном значении x . Как отмечалось, она определяется через полный

E_e и неполный F_e эллиптические интегралы второго рода [12] посредством интегрирования функции $s'(x)$ (4.11)

$$\begin{aligned} s(x) &= (\xi/\delta)[F_e(x + \pi/2, \delta) - E_e(\delta)], \quad \delta = \xi(1 + \xi^2)^{-1/2} < 1 \\ s(x) &= x + 1/6\xi^2\lambda^2x^3 + O(\lambda^4x^5), \quad \lambda x \ll 1 \\ s(x) &= x + 1/2(x - (2\lambda)^{-1}\sin 2\lambda x) + O(\xi^4x), \quad \xi \ll 1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из (4.12) с очевидностью следует неравенство $s/x > 1$ при $x \neq 0$.

Приведем уравнение движения к безразмерной форме, вводя удобные единицы измерений с целью максимального уменьшения числа параметров. Отметим, что исходная система (4.3) содержит восемь параметров, определяющих инерционно-массовые, геометрические и силовые характеристики. При $k = 0$ остаются следующие семь параметров: $m, m^*, a, h, \lambda, g, q_0$; посредством нормировки их число сводится к трем. Действительно, вводя безразмерную переменную $\theta = \lambda x$, аргумент $\tau = \nu t$ и управление u , получаем управляемую систему типа обобщенного маятника [7, 11]

$$\begin{aligned} \chi\ddot{\theta} + \chi'\dot{\theta}^2 + (1/s')\sin\theta &= u, \quad |u| \leq u_0 \\ \nu^2 &= \frac{m}{m^*} \frac{g}{h} \xi^2, \quad u = -\frac{q\lambda}{am^* \nu^2}, \quad s' = (1 + \xi^2 \sin^2\theta)^{1/2} \\ \chi(\theta) &= (1 - \alpha\xi \cos\theta/s'^3)s', \quad \xi = \lambda h, \quad \alpha = a\lambda \end{aligned} \quad (4.13)$$

Управляемая система (4.13) содержит три безразмерных параметра ξ, α, u_0 ; функция $\chi \geq \chi_* > 0$ в силу предположения $\alpha\xi = \lambda^2 ah < 1$, см. выше. При $u_0 > (1 + \xi^2)^{-1/2}$ управляющий момент сил превосходит момент сил тяжести; система будет управляемой для всех $x, v = \dot{x}$. Для приложений представляет существенный интерес решение задач типа оптимального быстрогодействия [9-11]. Искомые управление и траектория строятся численно или приближенно аналитически с помощью методов принципа максимума. В частности, аналогично изложенной в п. 1 процедуре построения регулярного синтеза могут быть найдены кривая переключений и траектории.

Рассмотрим интересную в теоретическом и прикладном аспектах ситуацию, когда управляющее воздействие мало: $u_0 \ll 1$. Ставится задача приведения обобщенного маятника (4.13) в требуемое состояние движения, которое характеризуется полной энергией $E \sim 1$, за мини-

мальное время τ_f [7, 11]. Кинетическая T , потенциальная V и суммарная E энергии неуправляемой ($u \equiv 0$) системы определяются на основе выражений (3.2), (3.3)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\chi^2(\theta)\dot{\theta}^2, \quad V = 1 - \cos\theta + \frac{\alpha}{\xi}[(1 + \xi^2 \sin^2\theta)^{-1/2} - 1] \\ E &= T + V = \text{const}, \quad 0 \leq V \leq V^* = 2, \quad \theta^* = (2n + 1)\pi \end{aligned} \quad (4.14)$$

Если $u \neq 0, |u| \leq u_0 \ll 1$, то колебательно-вращательная система (4.13) является слабоуправляемой, а ее полная энергия E (4.14) есть медленная переменная [7, 11]

$$\dot{E} = \chi(\theta)\dot{\theta}u, \quad |u| \leq u_0, \quad E(0) = E^0 \quad (4.15)$$

Здесь E^0 определяется через $\theta^0, \dot{\theta}^0$ согласно выражениям (4.14) для E, T, V . Если за время управления $0 \leq \tau \leq \tau_f$ происходит много (практически несколько) колебаний или оборотов системы (4.13), то к ней применима эффективная численно-аналитическая методика построения приближенного оптимального решения [11]. Процедура основана на использовании метода усреднения для приближенного решения краевой задачи принципа максимума. Согласно разработанному алгоритму предполагается приведение уравнения движения (4.13) к стандартному виду в переменных «энергия-фаза».

Энергия E определена формулами (4.14), а ее эволюция – соотношениями (4.15). Аналогичные выражения для фазы ψ требуют предварительного весьма громоздкого вычисления периода $\Theta(E)$ в режимах колебаний Θ_v и вращений Θ_r [7, 11]

$$\begin{aligned} \Theta(E) &= \oint \frac{d\theta}{\dot{\theta}}, \quad \dot{\theta} = \pm\sqrt{2}(E - V(\theta))^{1/2}/\chi(\theta) \\ \Theta_v &= 2\sqrt{2} \int_0^a \chi(\theta)(E - V(\theta))^{-1/2} d\theta \\ a(E) &= \arg_{\theta}(E - V(\theta)), \quad E < 2 \\ \Theta_r &= \int_0^{2\pi} \chi(\theta)(E - V(\theta))^{-1/2} d\theta, \quad E > 2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

При приближении к сепаратрисе ($E \rightarrow 2$) периоды колебаний и вращений неограниченно возрастают.

Невозмущенная (при $u = 0$) фаза находится с помощью квадратуры

$$\psi = \omega(E)\tau + \text{const} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \int \chi(\theta)(E - V(\theta))^{-1/2} d\theta, \quad \omega = \frac{2\pi}{\Theta} \quad (4.17)$$

Дифференцирование выражения (4.17) по τ в силу возмущенного уравнения (4.13) приводит к соотношению вида

$$\dot{\psi} = \omega(E) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial E} \left[\omega(E) \int \chi(\theta)(E - V(\theta))^{-1/2} d\theta \right] \chi(\theta) \dot{\theta}(E, \theta) u \quad (4.18)$$

Правые части уравнений (4.15) для E и (4.18) для ψ определены через исходные фазовые переменные $\theta, \dot{\theta}$, а также через E (и u). Чтобы замкнуть систему в переменных E, ψ (и u), требуется разрешить трансцендентное уравнение (4.17) относительно θ и подставить функцию $\theta(E, \psi)$ в указанные правые части. Эти уравнения будут 2π -периодическими по ψ , регулярно зависящими от E , и линейными по u . К соответствующим краевым задачам принципа максимума затем может быть применена асимптотическая методика разделения быстрых (фаза) и медленных (энергия и импульсы) движений, что в ряде случаев, например, при малых (квазилинейных) колебаниях, существенно облегчает их решение. Однако приведение к стандартной форме, изложенное выше, и усреднение уравнений весьма затруднительны, что значительно снижает привлекательные свойства общей схемы метода усреднения.

При ограниченной постановке задачи управления, когда требуется оптимальным образом изменить значение полной энергии движения диска, решение краевой задачи в первом приближении строится проще на основе модифицированной процедуры усреднения. Действительно, для задачи оптимального по быстродействию требуемого изменения энергии получим соотношения [7, 11]

$$\begin{aligned} E(\tau_f) &= E^f, & \tau_f &\rightarrow \min, & |u| &\leq u_0 \\ u^* &= u_0 \text{sign}[(E^f - E)\dot{\theta}], & \chi(\theta) &> 0 \\ \dot{E} &= u_0 W(E) \text{sign}(E^f - E), & E(0) &= E^0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Выражение для E в u^* (4.19) имеет вид (4.14). Функция W получается в результате подстановки синтеза управления u^* (4.19) в уравнение (4.15) и усреднения по ψ , которое эквивалентно интегрированию правой части вдоль траектории невозмущенной системы. В режимах колебаний и вращений получают соответствующие Θ_v, Θ_r вы-

ражения для W_v, W_r [7]

$$\begin{aligned} W(E) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\dot{\theta}_*(E, \psi)| \chi(\theta_*(E, \psi)) d\psi = \\ &= \frac{1}{\Theta} \oint \chi(\theta) \text{sign} \dot{\theta}(E, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (4.20)$$

Интеграл от функции $\chi(\theta)$ по θ в (4.20) согласно (4.13) приводится к совокупности выражений для s через эллиптические интегралы (4.12) и элементарной квадратуры. Основную трудность составляет вычисление значений периодов колебательных и вращательных движений $\Theta = \Theta_{v,r}(E)$ (4.16). Поскольку $\Theta_{v,r} \rightarrow \infty$ при $E \rightarrow 2$, то эффективность управления u^* обращается в нуль при движении по сепаратрисе. Однако данная особенность интегрируема и приводит к небольшому увеличению погрешности метода усреднения [7, 11]. Время движения при переходе через сепаратрису изменяется непрерывно (после разделения переменных τ и E).

Квазиоптимальное управление u^* (4.19) в режиме колебаний диска (раскачивание или успокоение) является релейным, что представляет определенные трудности при моделировании системы (4.13) на большом интервале времени. Предлагается вместо релейной использовать «сглаженную», не имеющую точек разрывов, функцию [7]

$$u_*(\theta, \dot{\theta}) = \frac{E^f - E}{|E^f - E| + d_E} \frac{\dot{\theta} + c}{|\dot{\theta}| + d_\theta} \quad (4.21)$$

Здесь $c, d_{E,\theta}$ – параметры настройки, причем $d_{E,\theta}$ – положительные.

При малых $d_{E,\theta}$, $|c|$ выражение (4.21) «близко» функции u^* (4.19) (в интегральном смысле) и в пределе совпадает с ней. Очевидно, что должно выполняться условие $|c| \leq d_\theta$, которое обеспечивает требуемое ограничение $|u_*| \leq 1$. Величина E^f в (4.21) определяет свойства финального состояния $\theta^f, \dot{\theta}^f$. Например, при $\theta^f = \dot{\theta}^f = 0$ (точка покоя) величина $E^f = 0$; состоянию $E^f = 2 = V^*$ отвечает движение по сепаратрисе и, в частности, $\theta^f = \pi(2n+1), \dot{\theta}^f = 0$. Наличие параметра c в функции u_* упрощает процесс начала движения колеса из состояния покоя $\theta^0 = \dot{\theta}^0 = 0$. Он также позволяет осуществить переход во вращение (безостановочное движение) в требуемом направлении (вперед или назад).

Аналогичное (4.13) уравнение описывает управляемое качение неоднородного цилиндра по горизонтальной плоскости посредством регулируемого вращения маховика. Квазиоптимальные режимы раскачивания и перманентного качения подробно исследованы численно-аналитическими методами [7].

Таким образом, построены режимы управления движением «колеса» по волнистой трассе. Для исследования особенностей качения в случае «малых» (п. 2) и «больших» (п. 1) моментов сил требуется проведение обширного математического моделирования. Заметим, что воздействие (сила или момент сил) может быть реализовано посредством регулируемого перемещения внутренних масс [5-7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00234) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-9831.2006.1).

Литература

1. Routh E.J. Dynamics of a system of rigid bodies. P.II. – N. Y.: Dover Publ. Inc., 1905. = Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. В 2-х т. Т. II. – М.: Наука, 1983. – 544 с.
2. Appel P. Traité de Mécanique Rationnelle. P. 2. – Paris: Gauthier-Villars, 1953. = Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1960. – 487 с.
3. Macmillan W.D. Dynamics of rigid bodies. – N. Y., L., 1936. = Мак-Миллан В. Д. Динамика твердого тела. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 468 с.
4. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. – М.: Наука, 1992. – 336 с.
5. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управление продольным движением одноколесного аппарата по неровной поверхности. // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2005. – № 4. – С. 165-173.
6. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Проблемы управления неустойчивыми системами. // Успехи механики. – 2005. – Т. 3, № 2. – С. 71-135.
7. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакиев С.А., Нестеров С.В. Управление движением неоднородного цилиндра с подвижными внутренними массами по горизонтальной плоскости. // ПММ. – 2006. – Т. 70, вып. 6. – С. 942-958.
8. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
9. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
10. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
11. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1987. – 365 с.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.

УДК 531.36

В.Г. Вильке

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ВРЕМЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

1. Введение. Механика изучает изменения взаимных положений различных объектов (материальных систем) с использованием абстрактных моделей. Основными понятиями при построении механических моделей являются понятия времени и инерциальных систем координат. Время выступает как единый непрерывный параметр, определяющий движения механических систем во всем однородном и изотропном трехмерном евклидовом пространстве, в котором постулируется существование инерциальных систем координат. Инерциальная система координат определяется как система координат, относительно которой любая изолированная материальная точка движется равномерно и прямолинейно. Практическая реализация этой схемы связана с определенными трудностями. В природе невозможно выделить изолированную материальную точку, на которую бы не действовали другие материальные объекты, и, следовательно, невозможно экспериментальным путем проверить является ли выбранная система координат инерциальной. Заметим, что физическая реализация всякой системы координат предполагает ее связь с какими-то материальными объектами, меняющими свое взаимное расположение в пространстве. Вопрос о выборе эталона времени в практическом плане также вызывает определенные трудности, поскольку при этом приходится использовать наблюдаемые в природе различные периодические процессы.

2. Измерение времени. Дискретность времени. Понятие времени связано со свойством материальных объектов изменять свои взаимные положения в пространстве. Эти изменения фиксируются живыми существами с помощью различных органов чувств. В природе существуют периодические процессы, описывающие взаимные изменения положений материальных объектов. Период времени между двумя последовательными одинаковыми положениями тел может быть принят в качестве единицы (эталона) времени. Первыми единицами времени, используемыми человеком, по-видимому, следует считать сутки (период вращения Земли вокруг своей оси относительно «неподвижных» звезд), месяц (период вращения Луны вокруг Земли), год (период вращения Земли вокруг Солнца). В течение длительного исторического периода считалось, что эти величины сохраняют свои отношения. За-

дача о разбиении на части какого-либо периода решается с помощью построения новых периодических процессов (маятниковые часы и пружинные часы – хронометры). Не имея этих приборов, невозможно измерить интервал времени меньший суток. Дальнейший прогресс физики и техники привел к появлению периодических процессов с периодом порядка $0.68 \cdot 10^{-9}$ с (атомные часы на основе квантовых переходов в атоме цезия-133). Стабильность измерения секунды в таких часах имеет порядок 10^{-13} . Измерять более короткие интервалы времени пока не представляется возможным. В этом смысле время является для нас дискретной величиной, мы не можем определить, какие изменения материи происходят на интервалах меньших, чем периоды физических процессов, которые нам удастся реализовать.

В механической модели время принимается как непрерывный параметр, что в целом соответствует идеям математики, в которой используются предельные переходы при построении непрерывных функций в математическом анализе. Аналогичная процедура предельного перехода к сплошной среде, заполняющей непрерывным образом часть пространства, используется для моделирования поведения ряда механических объектов (сплошных сред), хотя наше понимание физической природы материи, как и времени, ограничивается расстояниями порядка 10^{-10} м.

3. Основные законы механики. Постулируется, что материальные системы взаимодействуют друг с другом. Эти взаимодействия описываются векторными величинами, называемыми силами или силовыми полями.

Определение. Материальная точка, взаимодействием которой с другими материальными объектами можно пренебречь, называется изолированной.

Первый закон (Галилей). Существует система координат (инерциальная система координат) относительно которой всякая изолированная материальная точка движется равномерно и прямолинейно.

Ответ на вопрос о физической реализации инерциальной системы вызывает определенные трудности. Во-первых, это построение ортогональной системы координат в физическом пространстве, для чего необходимо найти, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой и находящиеся на неизменных расстояниях друг от друга, или найти абсолютно твердое тело, расстояния между любыми точками которого не изменяются в процессе движения. Во-вторых, определение расстояний между двумя точками на основе измерений возможно только приближенно. Кроме того, априори нельзя утверждать, что существ-

уют материальные объекты, относительные положения точек которых не изменяются. Следовательно, можно говорить лишь о приближенном построении ортогональной системы координат связанной с той или иной системой материальных объектов (механической системой). Эта задача является фундаментальной задачей астрономии, и на разных исторических этапах развития человеческой цивилизации решалась по-разному. Вот одно из решений.

Определение. Инерциальной системой координат Земли называется система координат жестко связанная с Землей, которая считается абсолютно твердым телом.

Второй закон механики (Ньютон). Ускорение материальной точки относительно инерциальной системы координат прямо пропорционально, действующей на нее силе, и обратно пропорционально ее массе. Сила считается функцией времени, положения точки и ее скорости относительно инерциальной системы координат.

Массы материальных точек определяются путем сравнения с точкой (телом) эталонной массы с использованием третьего закона механики.

Третий закон механики (Ньютон). Силы взаимодействия двух материальных точек направлены по прямой, соединяющей точки, равны по величине и противоположны.

В инерциальной системе координат Земли решается подавляющее число задач, связанных с инженерной практикой (строительство, динамика различных транспортных средств, гидравлика и т.д.). При этом используются второй и третий законы механики. Сравнение с экспериментом демонстрирует удовлетворительное совпадение расчетных движений механических систем с наблюдаемыми движениями. Существенные отличия от экспериментальных данных возникают тогда, когда интервалы времени движения становятся сравнимыми с периодом вращения Земли (сутками) или перемещения точек механических систем – с размерами Земли. Например, в этой системе координат не возможно объяснить эффект маятника Фуко. Отметим два обстоятельства, связанных с инерциальной системой координат Земли.

1. Тела, движения которых исследуются в инерциальной системе координат Земли, должны обладать массой, много меньшей массы Земли, и их влиянием на движение Земли относительно других систем координат можно пренебречь.

2. Центр масс Земли неподвижен в инерциальной системе координат Земли, а ее момент количества движения в этой системе координат, очевидно, равен нулю (все точки Земли имеют нулевые скорости). Яс-

но, что все утверждения останутся справедливыми, если мы рассмотрим другую координатную систему, которая движется поступательно с постоянной скоростью относительно инерционной системы координат Земли.

4. Инерциальная система координат N тел. Инерциальная система координат Солнечной системы.

Определение 1. Инерциальной системой изолированных N материальных тел называется система координат с началом в центре масс системы при условии, что в какой-то момент времени скорости точек системы относительно нее таковы, что момент количества движения системы относительно центра масс равен нулю.

Доминирующим телом в Солнечной системе является само Солнце, в котором сосредоточено 99,87% массы всей Солнечной системы. Центр масс всех планет Солнечной системы и Солнца расположен внутри Солнца и принимается за начало инерциальной системы координат Солнечной системы. Угловую скорость вращения этой системы координат можно определить относительно инерциальной системы координат Земли на основе соответствующих кинематических формул, если задать движения всех планет и Солнца в системе координат связанной с Землей. Однако гораздо проще произвести вычисления в системе координат Млечного пути, связанной с нашей галактикой (начало этой системы находится в центре Земли, а ее оси направлены на «неподвижные» звезды).

Характеристики и параметры движения Солнца и планет приведены в табл. 1. При расчетах было принято, что Солнце представляется однородным твердым телом шарообразной формы, а планеты – материальными точками [1].

В графе, соответствующей Солнцу, радиус орбиты заменен радиусом Солнца, момент инерции Солнца относительно его центра вычисляется по формуле $J = 0.4 m R^2$, а угловая скорость вращения Солнца соответствует его периоду вращения вокруг центра масс 25 суток. Для остальных планет моменты инерции приняты равными произведению массы на квадрат радиуса орбиты, а моменты инерции, соответствующие собственному вращению планет вокруг их центров масс, отброшены в виду их малости по сравнению с орбитальными моментами инерции. При расчетах моментов количества движения относительно центра масс Солнечной системы планеты считаются материальными точками (кроме Солнца). Кроме того, для упрощения расчетов принято, что орбиты всех планет круговые и лежат в одной плоскости, а угловая скорость вращения Солнца ортогональна плоскости орбит.

Тело	Масса, кг	Радиус орбиты, м	Угловая скорость, c^{-1}	Момент инерции	Момент кол-в движения
1.Солнце	$2 \cdot 10^{30}$	$0.7 \cdot 10^9$	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$3.9 \cdot 10^{47}$	$1.13 \cdot 10^{42}$
2.Меркурий	$3.28 \cdot 10^{23}$	$5.8 \cdot 10^{10}$	$8.26 \cdot 10^{-7}$	$0.11 \cdot 10^{47}$	$0.93 \cdot 10^{40}$
3.Венера	$4.9 \cdot 10^{24}$	$1.1 \cdot 10^{11}$	$3.23 \cdot 10^{-7}$	$0.59 \cdot 10^{47}$	$1.9 \cdot 10^{40}$
4.Земля	$6 \cdot 10^{24}$	$1.5 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{47}$	$2.7 \cdot 10^{40}$
5.Марс	$6.4 \cdot 10^{23}$	$2.28 \cdot 10^{11}$	$1.06 \cdot 10^{-7}$	$0.33 \cdot 10^{47}$	$0.35 \cdot 10^{40}$
6.Юпитер	$1.9 \cdot 10^{27}$	$7.8 \cdot 10^{11}$	$1.69 \cdot 10^{-8}$	$11.56 \cdot 10^{50}$	$19.5 \cdot 10^{42}$
7.Сатурн	$5.7 \cdot 10^{26}$	$14.3 \cdot 10^{11}$	$6.8 \cdot 10^{-9}$	$11.65 \cdot 10^{50}$	$7.9 \cdot 10^{42}$
8.Уран	$8.7 \cdot 10^{25}$	$28.8 \cdot 10^{11}$	$2.38 \cdot 10^{-9}$	$7.2 \cdot 10^{50}$	$1.7 \cdot 10^{42}$
9.Нептун	$1.03 \cdot 10^{26}$	$45 \cdot 10^{11}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$	$21 \cdot 10^{50}$	$2.5 \cdot 10^{42}$
10.Плутон	$1.3 \cdot 10^{22}$	$59.25 \cdot 10^{11}$	$0.81 \cdot 10^{-9}$	$4.56 \cdot 10^{47}$	$3.7 \cdot 10^{38}$

Таблица 1

Угловая скорость вращения инерциальной системы координат Солнечной системы относительно «неподвижных» звезд представляется отношением суммарного момента количества движения всех тел

$$G = \sum_{k=1}^{10} G_k = 32.8 \cdot 10^{42} \text{ к суммарному моменту инерции системы}$$

$$J = \sum_{k=1}^{10} J_k = 5.136 \cdot 10^{51} \text{ и равна } \Omega_s = 6.38 \cdot 10^{-9} c^{-1}. \text{ Это означает,}$$

что относительно звезд данная система совершает один оборот за 31.3 года. В этой системе координат Земля вращается вокруг своей оси, система координат связанная с Землей становится неинерциальной, и эффект маятника Фуко, заключающийся во вращении плоскости колебаний сферического маятника вокруг вертикали, объясняется в полной мере. Однако, изучение движения небесных тел в этой системе координат невозможно, так как для самого определения положения осей инерциальной системы координат Солнечной системы необходимо знание движений всех планет.

5. Инерциальная система координат Млечного Пути (МП). Если в качестве совокупности тел принять все звезды нашей галактики (МП) и рассмотреть их движение относительно системы координат с началом в центре Земли и осями, направленными на другие «неподвижные» галактики, то обнаружится вращение МП вокруг его центра масс с периодом порядка 150 – 200 миллионов лет. Вообще говоря, считать МП твердым телом и говорить о его вращении некорректно, так как МП

состоит из совокупности звезд, каждая из которых совершает оборот по своей орбите со своим собственным периодом. По этой причине достаточно сложно подсчитать суммарный момент количеств движения МП и его момент инерции относительно вектора момента количеств движения. Угловая скорость инерциальной системы координат МП относительно других галактик получится в результате деления суммарного момента количеств движения на суммарный момент инерции. Оценка этого отношения соответствует выше указанным периодам и соответствует угловым скоростям $10^{-15} - 1.33 \cdot 10^{-15} \text{ с}^{-1}$. Галактики во Вселенной распределены неравномерно и образуют группы, разделенными областями, в которых концентрация галактик значительно меньше, чем в группе. В ближайшей окрестности нашей галактики порядка полутора мегапарсек находится порядка 40 галактик, которые образуют группу и с которыми можно связать инерциальную систему координат. Рассмотренное выше «вращение» МП следует понимать как вращение относительно инерциальной системы координат связанной с этой группой галактик. Эксперименты показывают, что инерциальная система координат связанная с нашей галактикой (МП) может быть с большой степенью точности принята в качестве инерциальной системы координат в механических моделях.

Поскольку центр масс Солнечной системы движется с постоянной скоростью по окружности радиуса 25000 световых лет с центром в центре масс Галактики, то с большой степенью точности можно считать его движение равномерным и прямолинейным на значительном интервале времени, и принять систему координат с началом в центре масс Солнечной системы и с осями, направленными на «неподвижные» звезды МП, за галактическую инерциальную систему координат. Эта система координат носит название *системы координат Коперника*. Относительно этой системы момент количеств движения Солнечной системы не равен нулю и в ней целесообразно изучать движения отдельных планет и всей Солнечной системы в целом, так как масса Солнечной системы на много меньше массы нашей Галактики. Уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе координат Земли, когда инерциальной системой считается система Коперника, имеет вид

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c, \quad \mathbf{J}_e = -m \mathbf{w}_e, \quad \mathbf{J}_c = -m \mathbf{w}_c$$

где $\mathbf{w}_e, \mathbf{w}_c$ – переносное и кориолисово ускорения точки соответственно. С точки зрения практических расчетов движений материальных объектов в масштабах Солнечной системы система координат Коперника удовлетворяет критериям точности и не требуется дальнейшего

расширения состава материальных объектов, на основе которых вводятся новые инерциальные системы.

Абсолютная инерциальная система координат, существование которой постулируется в механике, может рассматриваться как предел последовательности инерциальных систем координат связанных с N телами, когда N стремится к бесконечности. На практике это означает, что мы должны включать в рассмотрение все больше и большее число галактик, которые доступны нашему наблюдению. Эта задача не может быть решена в окончательном виде, но можно говорить о продвижении в ее решении, имея в виду рассмотрение какого-то конечного, но достаточно большого количества небесных тел, на базе которых строится инерциальная система координат.

6. Заключение. Исследователю можно посоветовать следующее: приступая к изучению того или иного движения механической системы можно выбирать различные системы координат, объявляя их «инерциальными» и используя весь аппарат классической механики. Однако следует оценить погрешности, связанные со степенью «инерциальности» выбранной системы координат. Эта оценка может базироваться либо на эксперименте, что не всегда возможно или дорогостояще, либо производиться путем оценки сил инерции по сравнению с действующими физическими силами при использовании «более инерциальной» системы координат, построенной на базе механической системы значительно превосходящей по массе, механическую систему, использованную для построения исходной «инерциальной» системы.

В конце хочется поделиться следующим соображением: любая система координат может быть использована в качестве системы координат, относительно которой записывается второй закон Ньютона. Существенным при этом является вид сил действующих на материальную точку. Все эти силы объявляются физическими. Одни силы, как, например, гравитационные силы, являются результатом взаимодействия изучаемой точки с другими материальными точками Вселенной, а другие силы как, например, сила инерции Кориолиса, зависят от скорости точки и могут рассматриваться как результат взаимодействия с материальными объектами Вселенной, о которых мы можем ничего не знать. Для этих сил невозможно применять третий закон механики Ньютона просто потому, что мы ничего не знаем о второй точке, с которой взаимодействует рассматриваемая нами точка. Аналогичное утверждение можно высказать относительно сил инерции переносного движения. Введение этих сил требует определенного искусства, а цель

рассмотрения этих сил – удовлетворительное совпадение теоретических расчетов движения с экспериментом.

Литература

1. Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Рябов Ю.А. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1976. – 862 с.

УДК 531.01

А.А. Пожалостин, А.В. Панишина

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

О ПРЕПОДАВАНИИ РАЗДЕЛА КУРСА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» – ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

Введение. В данной статье излагается методика преподавания приближенной теории гироскопа, предложенная профессором кафедры «Теоретическая механика» МВТУ им. Н.Э. Баумана Блюминым Г.Д. Г.Д. Блюмин не оставил публикаций на эту тему, поэтому авторы сочли целесообразным это сделать. В основе методики лежит представление вектора мгновенной угловой скорости гироскопа в виде двух взаимно-ортогональных составляющих: собственной угловой скорости и его экваториальной составляющей. Такой подход имеет ряд преимуществ. В частности, с методической точки зрения, позволяет компактно и наглядно излагать материал, т.к. в силу однородности и симметрии гироскопа кинетический момент также можно представить в виде суммы двух векторов: собственного кинетического момента и экваториальной составляющей. Аналогично, главный момент внешних сил можно представить в виде соответствующих составляющих.

Идея представления вектора мгновенной угловой скорости гироскопа в виде таких двух составляющих еще раньше использовалось профессором МГУ Б.В. Булгаковым [1]. Такое же представление вектора угловой скорости гироскопа есть у Л.Г. Лойцянского и А.И. Лурье [2].

В данной публикации, в отличие от [2], рассмотрен более общий случай главного момента внешних сил: момент не перпендикулярен оси гироскопа. Это позволило, в частности, наглядно показать ту часть главного момента сил инерции гироскопа в его абсолютном движении, которая является гироскопическим моментом. Также на примере астатического гироскопа показано существование регулярной прецессии.

1. Допущения приближенной теории гироскопа. Представим кинетический момент \mathbf{K}_0 относительно неподвижного центра O в виде:

$$\mathbf{K}_0 = K_{Ox} \mathbf{i} + K_{Oy} \mathbf{j} + K_{Oz} \mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты некоторой системы координат $Oxyz$, начало которой находится в закрепленной точке O тела. Оси системы координат могут быть как неподвижными, так и подвижными, например, связанными с вращающимся телом.

Проекции K_{Ox}, K_{Oy}, K_{Oz} в общем случае имеют вид:

$$\begin{cases} K_{Ox} = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ K_{Oy} = -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z \\ K_{Oz} = -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z \end{cases} \quad (1)$$

Здесь J_x, J_y, J_z – осевые моменты инерции тела:

$$J_x = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2), J_y = \sum_k m_k (z_k^2 + x_k^2), J_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

где m_k – масса k -ой точки тела, x_k, y_k, z_k – ее координаты.

Величины $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{yz} = J_{zy}$, $J_{xz} = J_{zx}$ – центробежные моменты инерции твердого тела:

$$J_{xy} = \sum_k m_k x_k y_k, J_{yz} = \sum_k m_k y_k z_k, J_{xz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k.$$

$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$ – вектор угловой скорости тела.

На основании (1) следует, что если $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$, т.е. твердое тело вращается только вокруг оси Oz , то вектор \mathbf{K}_O в общем случае не направлен по оси вращения Oz . Он имеет ненулевые компоненты по осям x, y, z (рис. 1):

$$K_{Ox} = -J_{xz} \omega, K_{Oy} = -J_{yz} \omega, K_{Oz} = J_z \omega.$$

Вектор \mathbf{K}_O в этом случае будет направлен по оси Oz только тогда, когда $J_{xz} = J_{yz} = 0$, а именно, когда ось Oz будет осью динамической симметрии твердого тела (главной центральной осью инерции тела). Тогда $\mathbf{K}_O = J_z \omega \mathbf{k}$ (рис. 2).

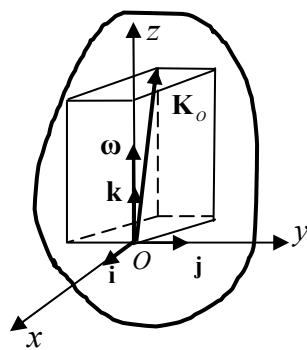


Рис. 1

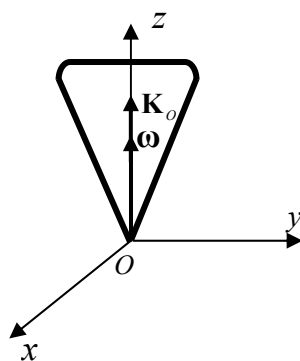


Рис. 2

Очевидно, что для того, чтобы оси координат могли быть главными осями инерции для неподвижной точки O в течение всего времени вращения тела, они должны быть скреплены с самим телом. Поэтому здесь $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты системы координат $Oxyz$, связанной с вращающимся телом.

Гироскопом называется однородное симметричное тело, имеющее ось динамической симметрии и быстро вращающееся вокруг этой оси (рис. 3).

Точка O – неподвижная точка гироскопа. Ось Oz – ось фигуры гироскопа. Причем ось Oz – главная центральная ось инерции. Плоскость Oxy – экваториальная плоскость гироскопа.

Пусть $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости гироскопа. Разложим его на две составляющие: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_c + \boldsymbol{\omega}_\vartheta$. Здесь $\boldsymbol{\omega}_c$ – собственная угловая скорость гироскопа, направленная по оси Oz , $\boldsymbol{\omega}_\vartheta$ – экваториальная составляющая угловой скорости.

Рассмотрим кинетический момент гироскопа \mathbf{K}_O относительно неподвижной точки O . Пусть J – момент инерции относительно оси фигуры гироскопа Oz . Тогда $\mathbf{H} = J\boldsymbol{\omega}_c$ – собственный кинетический момент гироскопа. Кроме этого, $\mathbf{K}_\vartheta = A\boldsymbol{\omega}_\vartheta$ – экваториальный кинетический момент гироскопа, т.к. в силу симметрии тела любая ось, проходящая через точку O и лежащая в экваториальной плоскости, – главная ось инерции гироскопа. Здесь A – экваториальный момент инерции.

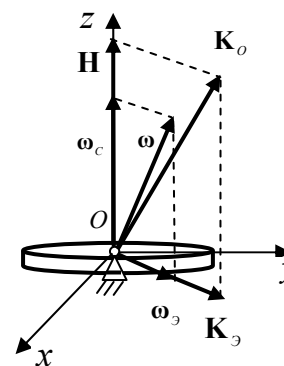


Рис. 3

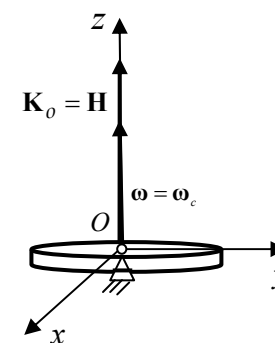


Рис. 4

Тогда $\mathbf{K}_O = \mathbf{H} + \mathbf{K}_\omega$ или $\mathbf{K}_O = J\boldsymbol{\omega}_c + A\boldsymbol{\omega}_\omega$, причем векторы \mathbf{H} и \mathbf{K}_ω направлены по векторам $\boldsymbol{\omega}_c$ и $\boldsymbol{\omega}_\omega$ соответственно.

Итак, подвижная ось Oz и векторы $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{K}_O лежат в одной плоскости (рис. 3).

В силу основных допущений приближенной теории гироскопа ($\omega_c \gg \omega_\omega$ и $H \gg K_\omega$) принимаем, что кинетический момент гироскопа \mathbf{K}_O равен собственному кинетическому моменту \mathbf{H} и направлен по оси фигуры гироскопа, т.е. $\mathbf{K}_\omega = 0$ (рис. 4).

2. Для объяснения динамического поведения быстровращающегося тела применим теорему об изменении кинетического момента системы

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{(e)}$$

и теорему Резаля

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{M}_O^{(e)},$$

где \mathbf{u}_B – скорость конца B вектора кинетического момента \mathbf{K}_O , $\mathbf{M}_O^{(e)}$ – главный момент внешних сил относительно неподвижного центра O .

Представим в общем случае $\mathbf{M}_O^{(e)}$ в виде суммы:

$$\mathbf{M}_O^{(e)} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_\omega.$$

Вектор \mathbf{M}_1 направлен вдоль оси Oz , а \mathbf{M}_ω – экваториальный момент внешних сил, расположенный в экваториальной плоскости.

Рассмотрим два случая.

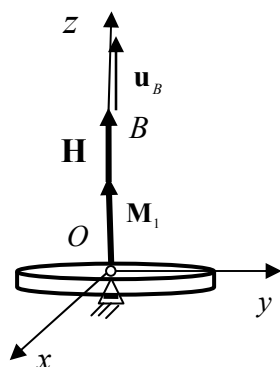


Рис. 5

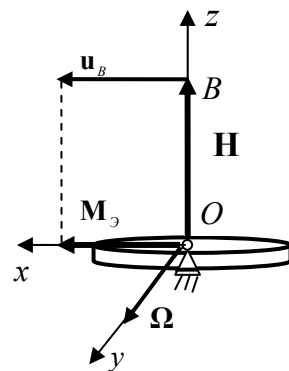


Рис. 6

Случай 1 (рис. 5). Пусть на гироскоп действует пара сил $\mathbf{M}_O^{(e)} = \mathbf{M}_1$.

Тогда на основании теоремы Резаля получаем, что скорость точки B направлена по оси Oz вверх или вниз и равна по величине M_1 . Это означает, что вектор \mathbf{K}_O либо увеличивается по длине, либо уменьшается. А это говорит о том, что угловая скорость гироскопа $\boldsymbol{\omega}_c$ изменяется по величине (гироскоп раскручивается или тормозится). При этом ось фигуры гироскопа не меняет своего расположения в пространстве. Этот случай не интересен и не будет рассматриваться в дальнейшем.

Случай 2 (рис. 6). Пусть на гироскоп действует пара сил с моментом $\mathbf{M}_O^{(e)} = \mathbf{M}_\omega$, расположенная в экваториальной плоскости. Т.к. в силу симметрии тела оси Ox и Oy равнозначны, то примем, что момент \mathbf{M}_ω направлен по оси Ox . Если бы тело не вращалось ($\omega_c = 0$ и $H = 0$), то оно повернулось бы вокруг оси Ox . Однако $H \neq 0$ (прикладываем \mathbf{M}_ω к уже быстровращающемуся телу). Поэтому ось фигуры гироскопа Oz поворачивается вокруг перпендикулярной оси Oy (рис. 6). Это движение оси фигуры гироскопа в пространстве относительно неподвижной оси называется прецессионным движением. Угловую скорость прецессии Ω можно вычислить, используя теорему Резаля и формулу Эйлера:

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{M}_\omega, \quad \mathbf{u}_B = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \Rightarrow \Omega = \frac{M_\omega}{H \sin(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{H})} = \frac{M_\omega}{J\omega_c \sin \theta} \quad (2)$$

где θ – угол между векторами $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{H} , совпадающий с углом нутации.

Анализ формулы (2) позволяет сделать следующие выводы:

- если $M_\omega = 0$, то и $\Omega = 0$;
- угловая скорость прецессии Ω прямо пропорциональна величине экваториального момента и обратно пропорциональна собственному кинетическому моменту гироскопа H , т.е. обратно пропорциональна ω_c и J ;
- при прекращении действия момента \mathbf{M}_ω угловая скорость Ω обращается в ноль, и прецессионное движение сразу прекращается, т.е. ось гироскопа «не обладает инерционностью».

3. Рассмотрим понятие гироскопического момента Γ . С точки зрения кинестатики силы, приложенные к материальным телам, уравниваются силами инерции. Если к быстровращающемуся гироскопу приложить пару сил, векторный момент которой расположен в эквато-

риальной плоскости и вызывает прецессию, то гироскоп ответит противодействующим моментом. Этот момент приложен к внешним телам, вызывающим прецессию (например, опора O , шарниры, в которых закреплена ось гироскопа, и т. п.). Этот противодействующий момент и называется гироскопическим моментом.

Итак, гироскопический момент Γ – это момент сил инерции гироскопа в его прецессионном движении, т.е. момент, действующий на опоры (например, на подшипники) при повороте оси гироскопа.

По принципу Даламбера

$$\mathbf{M}_\partial + \Gamma = 0.$$

Отсюда $\Gamma = -\mathbf{M}_\partial$, а на основании теоремы Резаля получим:

$$\Gamma = -\mathbf{M}_\partial = -\mathbf{u}_B = -\Omega \times \mathbf{H}$$

или

$$\Gamma = \mathbf{H} \times \Omega.$$

Модуль вектора Γ вычисляется по формуле:

$$\Gamma = H \cdot \Omega \cdot \sin \theta.$$

Если гироскопический момент заменить парой сил, то получим гироскопические давления \mathbf{F}_r и \mathbf{F}'_r в опорах гироскопа. Причем

$$F'_r = F_r = \Gamma / AB,$$

где AB – расстояние между опорами.

4. Покажем, что главный момент сил инерции гироскопа в общем случае не совпадает с гироскопическим моментом. Для этого определим главный момент сил инерции гироскопа относительно точки O . Рассмотрим гироскоп, регулярно прецессирующий без проскальзывания, который установлен на шероховатую горизонтальную поверхность (рис 7).

Пусть $Ox_1y_1z_1$ – неподвижная система координат с началом в неподвижной точке O гироскопа, а $Oxyz$ – подвижная система координат. Здесь удобно взять подвижную систему, связанную с гироскопом, но не участвующую в его быстром вращении, т.е. полусвязанную систему. Поэтому ось Ox все время лежит в плоскости Ox_1y_1 . Ось Ox – линия узлов (линия пересечения подвижной плоскости Oxy с неподвижной плоскостью Ox_1y_1). Угловая скорость подвижной системы $\omega_e = \Omega$, где Ω – угловая скорость прецессии волчка.

Главный вектор сил инерции волчка в системе отсчета $Ox_1y_1z_1$:

$$\Phi = -ma_c = -mr_c\Omega^2 \sin \theta \sin \Omega t \cdot \mathbf{i}_1 + mr_c\Omega^2 \sin \theta \cos \Omega t \cdot \mathbf{j}_1.$$

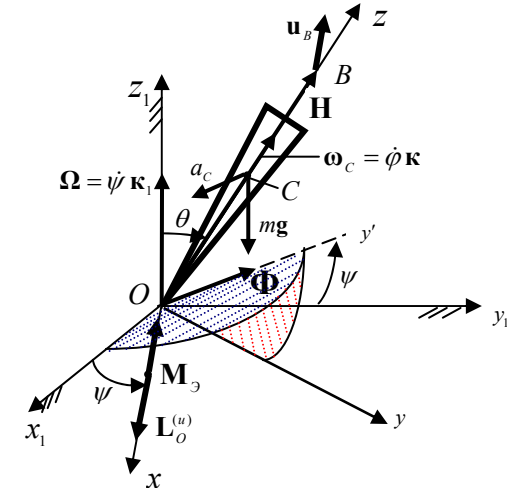


Рис. 7

Заметим, что вектор Φ направлен вдоль подвижной оси Oy' , которая является проекцией подвижной оси Oy на неподвижную плоскость Oy_1z_1 .

Вычислим главный момент сил инерции волчка относительно точки O [2]:

$$\mathbf{L}_O^{(u)} = -\frac{d\mathbf{K}_O}{dt}.$$

Согласно формуле Бура имеем:

$$\mathbf{L}_O^{(u)} = -\left[\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} + \omega_e \times \mathbf{K}_O\right],$$

где $\omega_e = \Omega$.

Рассишем проекции вектора кинетического момента \mathbf{K}_O , используя формулу (1).

Поскольку $\omega = \Omega + \omega_c$ (рис. 7), то $\omega_x = 0$, $\omega_y = -\Omega \sin \theta$ и $\omega_z = \Omega \cos \theta + \omega_c$. Оси Ox , Oy и Oz – главные оси инерции волчка в точке O (ось Oz – ось динамической симметрии волчка). Поэтому центробежные моменты инерции $J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$.

Получаем:

$$K_{Ox} = 0,$$

$$K_{Oy} = J_y \omega_y = -J_y \Omega \sin \theta ,$$

$$K_{Oz} = J_z \omega_z = J_z (\Omega \cos \theta + \omega_c) .$$

Здесь $\Omega = const$, $\theta = const$.

Вектор $\boldsymbol{\omega}_e$ имеет следующие проекции:

$$\omega_{ex} = 0, \quad \omega_{ey} = -\Omega \sin \theta, \quad \omega_{ez} = \Omega \cos \theta .$$

Поэтому

$$\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{K}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{ex} & \omega_{ey} & \omega_{ez} \\ K_{Ox} & K_{Oy} & K_{Oz} \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega_{ey} K_{Oz} - \omega_{ez} K_{Oy}) \mathbf{i} + (\omega_{ez} K_{Ox} - \omega_{ex} K_{Oz}) \mathbf{j} + (\omega_{ex} K_{Oy} - \omega_{ey} K_{Ox}) \mathbf{k} =$$

$$= (-J_z \Omega \sin \theta (\omega_c + \Omega \cos \theta) - \Omega \cos \theta (-J_y \Omega \sin \theta)) \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$$

Так как локальная производная $\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = 0$, то $\mathbf{L}_O^{(u)} = -\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{K}_O$.

Поэтому $\mathbf{L}_O^{(u)} = L_{Ox}^{(u)} \cdot \mathbf{i}$, где $L_{Ox}^{(u)} = J_z \Omega \sin \theta \omega_c + \frac{\sin 2\theta}{2} \Omega^2 (J_z - J_y)$,
 $J_z = J$.

Первое слагаемое есть величина гироскопического момента $\Gamma = J \Omega \sin \theta \omega_c$. Таким образом, $\mathbf{L}_O^{(u)} \neq \boldsymbol{\Gamma}$, т. е. гироскопический момент не совпадает с главным моментом сил инерции гироскопа. Но второе слагаемое есть величина порядка $\frac{\Omega}{\omega_c}$, что в рассматриваемой прецессионной теории есть ноль.

Следует заметить (рис. 7), что второй инвариант системы сил инерции равен нулю ($\mathbf{L}_O^{(u)} \cdot \boldsymbol{\Phi} = 0$), а $\boldsymbol{\Phi} \neq 0$ и система сил инерции может быть приведена к равнодействующей.

Определим теперь главный момент сил инерции гироскопа, применяя предложенный метод.

Т.к. в общем виде имеем:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{H} + \mathbf{K}_\vartheta ,$$

то

$$\mathbf{L}_O^{(u)} = -\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = -\frac{d\mathbf{H}}{dt} - \frac{d\mathbf{K}_\vartheta}{dt}$$

Здесь $\mathbf{H} = H\mathbf{k}$, \mathbf{k} – единичный вектор, направленный по оси фигуры гироскопа; $\mathbf{K}_\vartheta = A\boldsymbol{\omega}_\vartheta$.

$$\text{Поэтому} \quad \mathbf{L}_O^{(u)} = -\frac{dH}{dt} \mathbf{k} - H \frac{d\mathbf{k}}{dt} - A \frac{d\boldsymbol{\omega}_\vartheta}{dt}.$$

Так как $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}$, то

$$\mathbf{L}_O^{(u)} = -\frac{dH}{dt} \mathbf{k} - \boldsymbol{\Omega} \times H\mathbf{k} - A \frac{d\boldsymbol{\omega}_\vartheta}{dt}.$$

В этой формуле первое слагаемое вызвано разгоном или торможением гироскопа, третье слагаемое описывает изменение экваториального состояния гироскопа, и лишь второе слагаемое появляется при повороте вектора \mathbf{H} , т.е. в прецессионном движении гироскопа. Это слагаемое и есть гироскопический момент $\boldsymbol{\Gamma}$.

5. Покажем теперь, используя предложенный подход, что возможна регулярная прецессия астатического гироскопа (центр масс которого находится в неподвижной точке O) по инерции (рис 8).

Применим теорему об изменении кинетического момента

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{(e)}.$$

Поскольку $\mathbf{M}_O^{(e)} = 0$, то $\mathbf{K}_O = const$. Значит, $\mathbf{H} + \mathbf{K}_\vartheta = const$.

Поскольку $\frac{dH_{z_1}}{dt} = 0$, то $H \cos \theta = H_{z_1} = const$ и угол нутации $\theta = const$, т. к. $H = const$ и $\omega_c = const$.

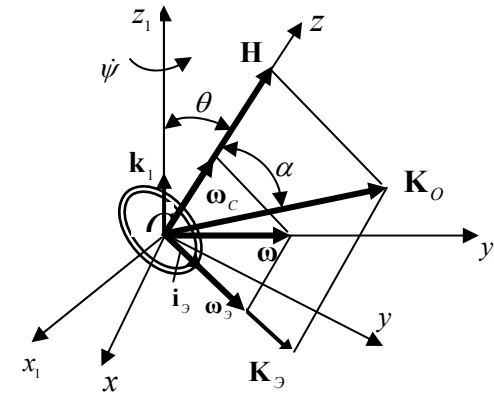


Рис. 8

Кроме того, $J_z \omega_c + A \omega_g = \text{const}$.

Рассмотрим проекцию вектора угловой скорости ω на неподвижную ось Oz_1 :

$$\omega_{z_1} = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = \dot{\psi} + \text{const}.$$

С другой стороны (см. рис. 8),

$$\omega_{z_1} = \omega_c \cos \theta + \omega_g \mathbf{i}_g \cdot \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_g \cdot \mathbf{k}_1 = \sin(\theta + \alpha) = \text{const}.$$

Т.к. $\omega_c \cos \theta = \text{const}$, то, сравнивая два выражения для ω_{z_1} , получим: $\dot{\psi} = \text{const}$.

Это и есть регулярная прецессия Эйлера-Пуансо, которую можно представить как качение эллипсоида инерции по плоскости, ортогональной вектору кинетического момента.

Литература

1. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 400 с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. В 2 т. – М.: Дрофа, 2006.
3. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. – М.: ВШ, 1968. – 624 с.
4. Лунц Я.Л. Введение в теорию гироскопов. – М.: ГФМЛ, 1972. – 296 с.
5. Халфман Р.А. Динамика. – М.: ГФМЛ, 1972. – 568 с.
6. Геронимус Я.Л. Теоретическая механика. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1972. – 511 с.
7. Граммель Р. Гироскоп. Его теория и применения. Т. 1,2. – М.: Издательство иностр. литер., 1952.

УДК 531.9: 62-50

В.Д. Бертяев, А.Г. Митяев
Тульский государственный университет

ТЕНЗОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Рассматривается вопрос использования тензорных величин при изучении теоретической механики. Показывается, что их применение не нарушая обычный стиль изложения дисциплин при подготовке студентов инженерных специальностей и направлений подготовки, позволяет существенно сократить громоздкие выводы при изложении теоретического материала и наполнить его понятным физическим смыслом.

Введение. Существенное сокращение часов (практически в два раза), отводимых на проведение аудиторных занятий основных теоретических дисциплин, в том числе и на теоретическую механику, приводит к необходимости конспективного изложения теоретического материала. Подобного рода практика приводит к необходимости исключать при чтении лекций подробные выводы основных зависимостей и теорем изучаемого курса, что неизбежно ведет к непониманию учащимися излагаемого материала. С другой стороны, Министерство образования требует повышения фундаментальной подготовки студентов ВПО при дальнейшем сокращении часов аудиторных занятий.

Такого рода противоречий можно избежать, частично изменив изложение общетеоретических и общематематических курсов дисциплин. При этом желательно широко использовать векторную и тензорную символику при выводе изучаемых в курсе теорем и положений.

Отметим, что применение тензоров второго ранга в теоретической и аналитической механике хорошо известно [1, 2, 3]. В работе [2] эти вопросы подробно и детально обсуждены. Однако при изложении теоретического материала в ней отсутствует единый подход к применению тензорного исчисления в теоретической механике. Так, при изложении кинематики твердого тела используется матричное исчисление и отсутствует понятие тензора поворота. При рассмотрении динамических величин вводится понятие тензора инерции, но его преобразование к другим координатным системам основывается на теории матриц.

Цель настоящей работы заключается в попытке представления теоретического материала в более строгой в методическом отношении форме. При изложении курса теоретической механики введение понятий единичного тензора и ортогонального тензора поворота в виде диадных произведений векторов координатных базисов, а также тензора инерции позволяет придать основным кинематическим и динамическим соотношениям крайне компактный вид. Кроме того, использова-

ние тензорных величин при выводе основных теорем и дифференциальных уравнений позволяет существенно сократить время изложения теоретического материала, а его объем оставить неизменным.

Не останавливаясь подробно на свойствах тензоров 2-го ранга, покажем, что их применение позволяет существенно сократить выводы при изложении теоретического материала всего курса теоретической механики. В качестве примера рассмотрим сферическое движение твердого тела.

1. Кинематика сферического движения. Положение тела, совершающего сферическое движение, можно определить углами Эйлера (рис. 1): углом прецессии $\psi(t)$, углом нутации $\theta(t)$ и углом собственного вращения $\varphi(t)$.

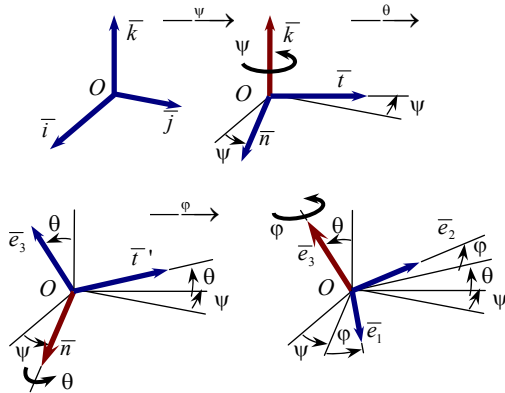


Рис. 1. Переход твердого тела из начального в конечное положение

Перевод тела из начального положения в заданное можно осуществить с помощью трех последовательных поворотов

$$(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) \xrightarrow{\psi} (\bar{n}, \bar{t}, \bar{k}) \xrightarrow{\theta} (\bar{n}, \bar{t}', \bar{e}_3) \xrightarrow{\varphi} (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3).$$

Первый поворот производится вокруг оси прецессии \bar{k} на угол ψ

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{\bar{k}} = \bar{i} \bar{n} + \bar{j} \bar{t} + \bar{k} \bar{k} = \cos \psi \bar{i} \bar{i} + \sin \psi \bar{i} \bar{j} - \\ - \sin \psi \bar{j} \bar{i} + \cos \psi \bar{j} \bar{j} + \bar{k} \bar{k} \end{aligned}$$

где $\bar{n} = \cos \psi \bar{i} + \sin \psi \bar{j}$, $\bar{t} = -\sin \psi \bar{i} + \cos \psi \bar{j}$.

Второй поворот производится вокруг линии узлов ON (ось нутации, задаваемая единичным вектором \bar{n}) на угол θ

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{\bar{n}} = \bar{n} \bar{n} + \bar{t} \bar{t}' + \bar{k} \bar{e}_3 = \bar{n} \bar{n} + \cos \theta \bar{t} \bar{t} + \\ + \sin \theta \bar{t} \bar{k} - \sin \theta \bar{k} \bar{t} + \cos \theta \bar{k} \bar{k} \end{aligned}$$

где $\bar{t}' = \cos \theta \bar{t} + \sin \theta \bar{k}$, $\bar{e}_3 = -\sin \theta \bar{t} + \cos \theta \bar{k}$.

Третий поворот осуществляется вокруг оси собственного вращения \bar{e}_3 на угол φ

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{\bar{e}_3} = \bar{n} \bar{e}_1 + \bar{t}' \bar{e}_2 + \bar{k} \bar{e}_3 = \cos \varphi \bar{n} \bar{n} + \sin \varphi \bar{n} \bar{t}' - \\ - \sin \varphi \bar{t}' \bar{n} + \cos \varphi \bar{t}' \bar{t}' + \bar{e}_3 \bar{e}_3 \end{aligned}$$

где $\bar{e}_1 = \cos \varphi \bar{n} + \sin \varphi \bar{t}'$, $\bar{e}_2 = -\sin \varphi \bar{n} + \cos \varphi \bar{t}'$.

После третьего поворота тело и оси подвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$, связанные с ним, займут заданное положение. Результирующий поворот можно определить диадным произведением (ортогональным тензором поворота)

$$\tilde{O} = \tilde{O}_{\bar{k}} \cdot \tilde{O}_{\bar{n}} \cdot \tilde{O}_{\bar{e}_3} = \bar{e}_1^0 \bar{e}_1 + \bar{e}_2^0 \bar{e}_2 + \bar{e}_3^0 \bar{e}_3 = \bar{i} \bar{e}_1 + \bar{j} \bar{e}_2 + \bar{k} \bar{e}_3$$

Положение точки, в системе координат жестко связанной с телом, определится вектором $\bar{\rho} = \xi \bar{e}_1 + \eta \bar{e}_2 + \zeta \bar{e}_3$, с помощью тензора поворота

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}^0 \cdot \tilde{O} = \tilde{O}^T \cdot \bar{\rho}^0$$

где $\bar{\rho}^0 = \xi \bar{e}_1^0 + \eta \bar{e}_2^0 + \zeta \bar{e}_3^0$ – вектор, определяющий начальное положение точки твердого тела.

Скорость точки твердого тела, совершающего сферическое движение будет равна

$$\bar{v} = \dot{\bar{\rho}} = \frac{d}{dt} (\tilde{O}^T \cdot \bar{\rho}^0) = \dot{\bar{e}}_m \bar{e}_m^0 \cdot \bar{\rho}^0 = \bar{\omega} \times \bar{e}_m \bar{e}_m^0 \cdot \bar{\rho}^0 = \bar{\omega} \times \bar{\rho}$$

Здесь $\bar{\omega}$ – угловая скорость тела, которую можно представить вектором

$$\bar{\omega} = \dot{\psi} \bar{k} + \dot{\theta} \bar{n} + \dot{\varphi} \bar{e}_3$$

Последнее выражение можно проверить непосредственным дифференцированием векторов \bar{e}_m , $m = \overline{1,3}$.

Компоненты вектора угловой скорости в системе координат $O\xi\eta\zeta$, связанной с телом, и в неподвижной системе координат можно опреде-

лить с помощью единичных тензоров $\tilde{E} = \bar{e}_m \bar{e}_m$ и $\tilde{E}^0 = \bar{e}_m^0 \bar{e}_m^0 = \bar{i} \bar{i} + \bar{j} \bar{j} + \bar{k} \bar{k}$ для каждой из систем соответственно [2]:

$$O\xi\eta\zeta \rightarrow \omega = \tilde{E} \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \cdot \tilde{E},$$

$$Oxyz \rightarrow \omega = \tilde{E}^0 \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \cdot \tilde{E}^0.$$

В частности, для системы координат $O\xi\eta\zeta$ получим:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{\omega} \cdot \tilde{E} = (\dot{\psi} \bar{k} + \dot{\theta} \bar{n} + \dot{\varphi} \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}_1 \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \bar{e}_3) = \\ &= (\dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi) \bar{e}_1 + (\dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi) \bar{e}_2 + \\ &+ (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \bar{e}_3, \end{aligned} \quad (1)$$

а для системы координат $Oxyz$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{\omega} \cdot \tilde{E}^0 = (\dot{\psi} \bar{k} + \dot{\theta} \bar{n} + \dot{\varphi} \bar{e}_3) \cdot (\bar{i} \bar{i} + \bar{j} \bar{j} + \bar{k} \bar{k}) = \\ &= (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta) \bar{i} + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta) \bar{j} + \\ &+ (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \bar{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Полученные выражения называются кинематическими соотношениями Эйлера.

2. Момент инерции относительно произвольной оси и тензор инерции. При вычислении момента инерции механической системы относительно произвольной оси $O\xi$ (рис. 2) определяемой направляющим вектором

$$\bar{e} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k},$$

обычно используют формулу [3, 4, 5, 6]

$$I_\xi = \sum_k m_k h_k^2 = \sum_k m_k |\bar{r}_k \times \bar{e}|^2, \quad (3)$$

которую после несложных, но громоздких преобразований приводят к виду

$$\begin{aligned} I_\xi &= \cos^2 \alpha I_x + \cos^2 \beta I_y + \cos^2 \gamma I_z - 2 \cos \alpha \cos \beta I_{xy} - \\ &- 2 \cos \beta \cos \gamma I_{yz} - 2 \cos \gamma \cos \alpha I_{zx} \end{aligned} \quad (1)$$

После этого вводится понятие тензора инерции \tilde{I} задаваемого матрицей

$$\tilde{I}_O = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

компоненты которой представляют собой совокупность осевых и центробежных моментов инерции, вычисленных относительно прямоугольных декартовых координат.

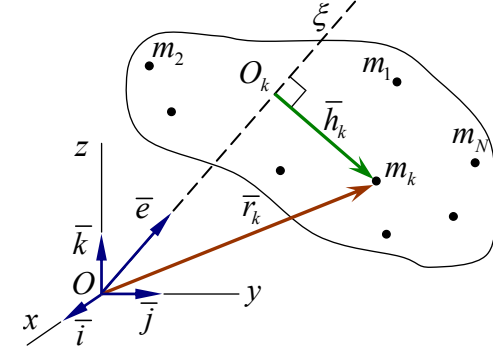


Рис. 2. Вычисление момента инерции относительно оси $O\xi$

При этом переход от соотношения (1) к понятию тензора инерции в виде матрицы \tilde{I} неочевиден и требует дополнительного осмысления.

Рассмотрим теперь вместо соотношения (3) выражение

$$I_\xi = \sum_k m_k h_k^2 = \sum_k m_k \bar{h}_k \cdot \bar{h}_k,$$

в котором вектор \bar{h}_k определяется из очевидного равенства $\bar{r}_k = \overline{OO_k} + \bar{h}_k$ (рис. 2), т.е. $\bar{h}_k = \bar{r}_k - \overline{OO_k}$. Вектор $\overline{OO_k} = OO_k \bar{e}$ определим с помощью диадного произведения $\overline{OO_k} = OO_k \bar{e} = \bar{r}_k \cdot \bar{e} \bar{e} = \bar{e} \cdot \bar{r}_k \bar{e} = \bar{e} \bar{r}_k \cdot \bar{e}$.

Тогда момент инерции системы относительно оси $O\xi$ будет равен

$$I_\xi = \sum_k m_k (\bar{r}_k - \bar{e} \cdot \bar{r}_k \bar{e}) \cdot (\bar{r}_k - \bar{e} \bar{r}_k \cdot \bar{e}) = \sum_k m_k (r_k^2 - \bar{e} \cdot \bar{r}_k \bar{r}_k \cdot \bar{e}).$$

Умножая величину r_k^2 на единицу, выраженную с помощью единичного тензора \tilde{E} ($\tilde{E} = \bar{i} \bar{i} + \bar{j} \bar{j} + \bar{k} \bar{k}$) соотношением $1 = \bar{e} \cdot \tilde{E} \cdot \bar{e}$, получим

$$I_{\xi} = \sum_k m_k \left(r_k^2 \bar{e} \cdot \tilde{E} \cdot \bar{e} - \bar{e} \cdot \bar{r}_k \bar{r}_k \cdot \bar{e} \right) = \bar{e} \cdot \tilde{I}_O \cdot \bar{e}, \quad (6)$$

где $\tilde{I}_O = \sum_k m_k \left(r_k^2 \tilde{E} - \bar{r}_k \bar{r}_k \right)$ – тензор инерции механической системы вычисленный в точке O , который в развернутой форме можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{I}_O = & I_{xx} \bar{i} \bar{i} - I_{xy} \bar{i} \bar{j} - I_{xz} \bar{i} \bar{k} - I_{yx} \bar{j} \bar{i} + \\ & + I_{yy} \bar{j} \bar{j} - I_{yz} \bar{j} \bar{k} - I_{zx} \bar{k} \bar{i} - I_{zy} \bar{k} \bar{j} + I_{zz} \bar{k} \bar{k} \end{aligned}$$

или представить матрицей (2).

Для сплошного твердого тела тензор инерции запишется в виде

$$\tilde{I}_O = \int_m \left(r^2 \tilde{E} - \bar{r} \bar{r} \right) dm. \quad (7)$$

Тензор инерции \tilde{I}_O является симметричным тензором $\tilde{I}_O = \tilde{I}_O^T$.

Тензор инерции удобно задавать в осях подвижного базиса жестко связанного с твердым телом. В этом случае его компоненты являются постоянными величинами, и переход из основного базиса к повернутому можно осуществить с помощью соотношения

$$\tilde{I}' = \tilde{O}^T \cdot \tilde{I} \cdot \tilde{O}.$$

3. Кинетический момент твердого тела в сферическом движении. При вращении твердого тела вокруг неподвижного центра (Рис. 3) скорости его точек определяются формулой Эйлера $\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k$. Кинетический момент тела будет равен

$$\bar{K}_O = \sum_k \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_k m_k \bar{r}_k \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k)$$

Учитывая, что двойное векторное произведение трех векторов \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} можно представить в виде $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} (\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c} (\bar{a} \cdot \bar{b})$, получим

$$\bar{K}_O = \sum_k m_k \left(\bar{r}_k \cdot \bar{r}_k \bar{\omega} - \bar{r}_k \bar{r}_k \cdot \bar{\omega} \right) = \sum_k m_k \left(r_k^2 \tilde{E} \cdot \bar{\omega} - \bar{r}_k \bar{r}_k \cdot \bar{\omega} \right)$$

Окончательно:

$$\bar{K}_O = \tilde{I}_O \cdot \bar{\omega}. \quad (8)$$

4. Динамика твердого тела в сферическом движении. Для составления дифференциальных уравнений сферического движения запишем теорему об изменении кинетического момента в дифференциальной форме

$$\frac{d \bar{K}_O}{dt} = \sum_k \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e$$

и согласно выражению (8) получим

$$\tilde{I}_O \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \tilde{I}_O \cdot \bar{\omega} = \sum_k \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^e$$

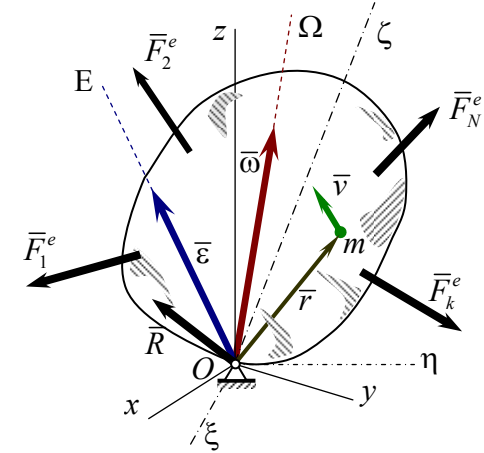


Рис. 3 Сферическое движение твердого тела.

Поскольку рассматривается движение абсолютно твердого тела ($r = const$), то производную по времени от тензора инерции можно записать в виде $\dot{\tilde{I}}_O = \bar{\omega} \times \tilde{I}_O - \tilde{I}_O \times \bar{\omega}$. Произведение $\dot{\tilde{I}}_O \cdot \bar{\omega}$ будет равно $\dot{\tilde{I}}_O \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \times \tilde{I}_O \cdot \bar{\omega} - (\tilde{I}_O \times \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \times \tilde{I}_O \cdot \bar{\omega}$, так как $(\tilde{I}_O \times \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega} = 0$. Окончательно уравнения сферического движения твердого тела примут вид

$$\tilde{I}_O \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \tilde{I}_O \cdot \bar{\omega} = \sum_k \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^e = \bar{M}_O. \quad (9)$$

Для получения дифференциальных уравнений движения в наиболее простом виде возьмем в качестве координатных осей подвижные главные оси инерции $O\xi\eta\zeta$, жестко связанные с телом. Тогда тензор инерции и вектор угловой скорости будут равны

$$\tilde{I} = I_{\xi} \bar{e}_1 \bar{e}_1 + I_{\eta} \bar{e}_2 \bar{e}_2 + I_{\zeta} \bar{e}_3 \bar{e}_3, \quad \bar{\omega} = \omega_{\xi} \bar{e}_1 + \omega_{\eta} \bar{e}_2 + \omega_{\zeta} \bar{e}_3$$

и уравнения движения (динамические уравнения Эйлера) примут вид:

$$I_{\xi} \frac{d\omega_{\xi}}{dt} + \omega_{\eta} \omega_{\zeta} (I_{\zeta} - I_{\eta}) = M_{\xi}^e,$$

$$I_{\eta} \frac{d\omega_{\eta}}{dt} + \omega_{\zeta} \omega_{\xi} (I_{\xi} - I_{\zeta}) = M_{\eta}^e,$$

$$I_{\zeta} \frac{d\omega_{\zeta}}{dt} + \omega_{\xi} \omega_{\eta} (I_{\eta} - I_{\xi}) = M_{\zeta}^e.$$

Для получения замкнутой системы уравнений к динамическим уравнениям Эйлера следует присоединить кинематические уравнения Эйлера (1).

Литература

1. Френкель Я.И. Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа. – М.-Л.: ГИФМЛ, 1940. – 436 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.
3. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики. Учеб. в 2-х т.т., т. 1, 2 – М.: Наука, 1977.
4. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: Учеб. пособие для студ-ов вузов по техн. спец.: В 2-х т. –5-е изд., испр. – СПб.: Лань, 1998. – 729 с.
5. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики: Учебник для вузов по направлению подгот. дипломир. специалистов в области техники и технологии / К.С. Колесников (ред.). 3-е изд., стер. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005. – 735 с. – (Механика в техническом университете: в 8 т.; т.1)
6. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учеб. пособие для студ. ун-тов. – М.: Наука, 1990. – 416 с.

УДК 531.9: 62-50

П.С. Красильников

Московский авиационный институт (технический университет)

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ КАК ПРОЦЕДУРА ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ ЧЛЕНОВ В РЯДАХ РЕШЕНИЙ

Вводится понятие O -большого функции двух переменных, одна из которых – текущее время, другая – малый параметр. На основе этого понятия в каждом приближении по малому параметру выделяются (на асимптотически больших промежутках времени) главные члены в рядах решений дифференциальных уравнений. Показано, что функциональный ряд, образованный из главных членов, является рядом Тейлора для решения усредненных уравнений, получены оценки точности приближения.

1. Сравнение решений в теории уравнений с малым параметром. Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр ε :

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t, \varepsilon) \quad (1)$$

Считаем, для простоты рассуждений, что x есть скалярная переменная, правая часть $X(x, t, \varepsilon)$ - скалярная функция. Пусть $x(t, \varepsilon)$ – решение задачи Коши уравнения (1). Считаем всюду ниже, без ограничения общности, что $\varepsilon \geq 0$.

Функцию $x(t, \varepsilon)$ будем сравнивать с бесконечно малыми величинами ε^k , где k – целое положительное число, включая ноль. Прежде всего определим, опираясь на традиции теории колебаний, понятие O -большого для функции $x(\varepsilon)$, не зависящей от t .

Определение 1. Будем говорить, что $x(\varepsilon)$ имеет один порядок малости с ε^k , если существует число A такое, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(\varepsilon)}{\varepsilon^k} = A, 0 < |A| < \infty \quad (2)$$

В этом случае пишут $x(\varepsilon) = O(\varepsilon^k)$. Из неравенства (2) следует, что функция $x(\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ с той же скоростью, что и ε^k . Будем также пользоваться символом порядка $O(1)$, когда $k = 0$. В этом случае функция $x(\varepsilon)$ имеет конечный предел A при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. $x(\varepsilon) = O(1)$, если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon) = A$

В более общем случае, когда функция $x(\varepsilon)$ сравнивается с $g(\varepsilon)$, говорят, что $x(\varepsilon)$ есть $O(g(\varepsilon))$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A \quad (3)$$

Использование символа $O(\varepsilon^k)$ удобно во многих случаях. Например, если предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon) = B \quad (4)$$

можно представить в виде

$$B - x(\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad (5)$$

то последнее имеет свои преимущества. Действительно, равенство (4) утверждает только, что предел функции $x(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен B . Соотношение (5) указывает не только на стремление функции $x(\varepsilon)$ к числу B , но задает также скорость этого процесса:

$$\left(\frac{dx}{d\varepsilon} \right)_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} = A$$

Отметим также, что символ $O(\varepsilon^k)$ удобен для записи приближенных равенств.

В определенных случаях параметр A , входящий в правую часть равенства (2), равен нулю:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(\varepsilon)}{\varepsilon^k} = 0$$

Это значит, что скорость стремления функции $x(\varepsilon)$ к нулю меньше, чем у ε^k . В этом случае говорят, что функция $x(\varepsilon)$ есть *о-малое от ε^k* , т.е. $x(\varepsilon) = o(\varepsilon^k)$.

Докажем лемму, устанавливающую границы области изменения функции $x(\varepsilon)$ порядка ε^k .

Лемма 1. *Предположим, что функция $x(\varepsilon)$ имеет порядок малости, равный ε^k . Тогда для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ существуют постоянные $A_1(\delta) > 0$, $A_2(\delta) > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon \leq \delta$*

$$A_1(\delta)\varepsilon^k \leq |x(\varepsilon)| \leq A_2(\delta)\varepsilon^k \quad (6)$$

Доказательство. Действительно, в силу условия теоремы выполняется предельное равенство (2). Его можно записать в виде

$$\frac{x(\varepsilon)}{\varepsilon^k} = A + \gamma(\varepsilon),$$

где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma(\varepsilon) = 0$.

Фиксируем δ -окрестность точки $\varepsilon = 0$. Предположим, что $A > 0$. В этом случае знак функции $x(\varepsilon)/\varepsilon^k$ будет положителен, по крайней мере, в δ -окрестности. Пусть $\gamma_1(\delta)$ и $\gamma_2(\delta)$ – точные нижние и верхние значения функции $\gamma(\varepsilon)$ в области $0 < \varepsilon \leq \delta$. Тогда будем иметь:

$$A + \gamma_1(\delta) \leq \frac{x(\varepsilon)}{\varepsilon^k} \leq A + \gamma_2(\delta)$$

Отсюда следует неравенство (6) при том условии, что $A_1(\delta) = A + \gamma_1(\delta)$, $A_2(\delta) = A + \gamma_2(\delta)$. Случай $A < 0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана. ■

Отметим, что модуль функции $x(\varepsilon)$, имеющей порядок ε^k , достигает своих верхних и нижних значений ($A_2(\delta)\varepsilon^k$ и $A_1(\delta)\varepsilon^k$ соответственно) во внутренних точках области $0 < \varepsilon \leq \delta$, либо приближается к этим значениям сколь угодно близко.

Теперь рассмотрим вопрос о сравнении решения $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1) с величиной ε^k . Функция $x(t, \varepsilon)$ зависит от времени, поэтому определение 1 недействительно. Очевидно, влияние новой переменной t будет существенным, что видно из простых примеров.

Рассмотрим две функции времени: $\varepsilon \sin(t)$ и εt . Естественно ожидать, что $\varepsilon \sin(t)$ имеет величину порядка ε , так как $\sin(t)$ ограничена. Но этого нельзя сказать о второй функции εt , поскольку она принимает неограниченные значения на бесконечном интервале времени, заведомо превосходя любые величины порядка ε .

В дальнейшем будем различать три интервала изменения времени: $[0, T]$, $[0, L/\varepsilon]$, $[0, \infty)$. Первый из них является конечным, второй – асимптотически большим (увеличивается с уменьшением ε) и третий – бесконечным интервалом. Как будет видно из последующего изложения, обоснование различных приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений существенно зависит от типа интервала и связано это, не в последнюю очередь, с оценками поведения решения $x(t, \varepsilon)$ на этих интервалах.

Унифицируем обозначения. Под интервалом $[0, T^*]$ будем подразумевать один из трех интервалов $[0, T]$, $[0, L/\varepsilon]$, $[0, \infty)$, в

зависимости от значения, которое принимает символ T^* : $T, L/\varepsilon$ или ∞ .

Определение 2. Функцию $x(t, \varepsilon)$ будем называть функцией порядка ε^k на интервале времени $[0, T^*]$, если для любого $\delta > 0$ существуют константы $A_1(\delta) \geq 0$, $A_2(\delta) > 0$ такие, что

$$A_1(\delta)\varepsilon^k \leq |x(t, \varepsilon)| \leq A_2(\delta)\varepsilon^k \quad (7)$$

при $t \in [0, T^*]$, когда ε берется из области $0 < \varepsilon \leq \delta$.

Если функция $x(t, \varepsilon)$ удовлетворяет определению 2, то будем говорить, что она есть O -большое от ε^k на интервале времени $[0, T^*]$. Другими словами $x(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^k)$ при $t \in [0, T^*]$.

Очевидно, что это определение свободно от операции предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$, поэтому его удобно использовать прежде всего для оценки порядка малости функции на асимптотически большом интервале времени $[0, L/\varepsilon]$.

На рис. 1 изображено типичное поведение такой функции. Для него характерно существование конечной зоны (7) изменения модуля функции $x(t, \varepsilon)$ на интервале времени $[0, T^*]$. За пределами этого интервала функция $x(t, \varepsilon)$ может покидать полосу (7). Исключение составляет случай $T^* = \infty$ (бесконечный интервал), когда неравенство (7) должно выполняться при всех $t \geq 0$.

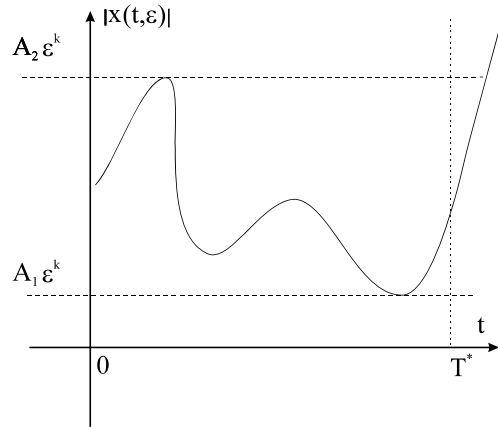


Рис. 1

Получим достаточные условия того, что искомая функция $x(t, \varepsilon)$ имеет величину порядка ε^k при $t \in [0, T]$, либо $t \in [0, \infty)$. Итак, пусть $T^* = T$, либо $T^* = \infty$, M – положительная константа. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Предположим, что функция $x(t, \varepsilon)$ такова, что существует отличный от нуля, ограниченный, равномерный по времени предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t, \varepsilon)}{\varepsilon^k} = A(t), \quad |A(t)| \leq M, \quad t \in [0, T^*]. \quad (8)$$

Тогда $x(t, \varepsilon)$ имеет порядок ε^k на промежутке времени $[0, T^*]$.

Доказательство этого утверждения повторяет фактически доказательство леммы 1, при этом условие равномерности по t гарантирует независимость коэффициентов $A_2(\delta)$, $A_1(\delta)$ от времени.

Сделаем несколько замечаний по поводу этой леммы. Если $A(t)$ принимает нулевые значения при некоторых $t \in [0, T^*]$, то мы обязаны положить $A_1(\delta) = 0$. В этом случае «размах колебаний» функции $x(t, \varepsilon)$ практически не зависит от δ , так как верхняя граница области (8) близка к $M\varepsilon^k$. Для сравнения отметим, что ширина области (6) стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Далее, требование ограниченности предела является лишним для конечного промежутка времени $[0, T]$ (непрерывная функция $A(t)$ всегда ограничена на $[0, T]$). Для бесконечного промежутка $[0, \infty)$ ограниченность предельной функции $A(t)$ обязательна, иначе с течением времени t получим неограниченный рост функции $x(t, \varepsilon)$. Так, например, функция εe^t может принимать сколь угодно большие значения, как бы мал не был параметр ε .

Предельное равенство (8) дает достаточное условие того, что функция $x(t, \varepsilon)$ имеет порядок малости ε^k . Однако это условие не является необходимым. Например, значения функции $\varepsilon(2 + \sin(t/\varepsilon))$ принадлежат полосе $[\varepsilon, 3\varepsilon]$ на бесконечном промежутке времени, поэтому она имеет порядок малости ε . Однако предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon)/\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 + \sin(t/\varepsilon))$$

не существует.

Для асимптотически больших промежутков времени применение леммы 2 проблематично из-за стремления ε к нулю, так как при этом интервал $[0, L/\varepsilon]$ становится бесконечно большим. Однако если особенность функции $x(t, \varepsilon)/\varepsilon^k$ при $\varepsilon = 0$ устраняется без использования предельного перехода, как, например, в случае $x(t, \varepsilon) = \varepsilon^k A(t)$, то лемма работает.

Рассмотрим примеры.

I. Пусть $x(t, \varepsilon) = \varepsilon e^{-ht} \cos(kt)$. Очевидно, что $x(t, \varepsilon)$ имеет порядок ε на любом из трех промежутков времени, так как выполняются условия леммы 1 (функция $A(t) = e^{-ht} \cos(kt)$ ограничена). Неравенства (7) имеют следующий вид:

$$0 \leq |x(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon, t \in [0, T^*]$$

Здесь ε может принимать любое значение, отличное от нуля.

II. Предположим, что $x(t, \varepsilon) = \sin(\varepsilon^2)/(1 + e^t)$. Для получения оценок (7) воспользуемся формулами

$$A_1(\delta) = \inf_M |x(t, \varepsilon)|/\varepsilon^2, A_2(\delta) = \sup_M |x(t, \varepsilon)|/\varepsilon^2, M = (0, \delta] \times [0, T^*]$$

A). Случай конечного интервала времени $[0, T]$. Несложно видеть, что максимум функции $(1 + e^t)^{-1}$ на этом интервале времени есть $1/2$, минимум равен $(1 + e^T)^{-1}$; максимальное значение отношения $\sin(\varepsilon^2)/\varepsilon^2$ на интервале $(0, \delta]$ есть 1, минимальное равно $\sin(\delta^2)/\delta^2$. Поэтому модуль функции $|x(t, \varepsilon)|$ удовлетворяет неравенству

$$(\sin(\delta^2)/\delta^2)(1 + e^T)^{-1} \varepsilon^2 \leq |x(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon^2/2$$

В). Случай асимптотически большого промежутка времени $[0, L/\varepsilon]$. Как и ранее, максимум функции $(1 + e^t)^{-1}$ на этом интервале времени есть $1/2$, минимум — $(1 + e^{L/\varepsilon})^{-1}$. Можно считать, что этот минимум равен нулю в силу малости величины ε . Максимальное и минимальное значения $\sin(\varepsilon^2)/\varepsilon^2$ остаются прежними. Имеем неравенство

$$0 \leq |x(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon^2/2$$

С). Случай бесконечного интервала времени $[0, \infty]$. Аналогичные рассуждения приводят нас к неравенствам

$$0 \leq |x(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon^2/2$$

Отсюда следует, что $x(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ на любом из трех промежутков времени $[0, T^*]$. Этот же результат явствует из леммы 2, поскольку функция $(1 + e^t)^{-1}$ ограничена.

III. Рассмотрим выражение $x(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 t \cos t$. Здесь $A(t) = t \cos t$ есть неограниченная функция, поэтому лемма 2 неприменима. Однако мы можем оценить порядок $x(t, \varepsilon)$, вычисляя коэффициенты $A_1(\delta)$, $A_2(\delta)$ в области $(0, \delta] \times [0, T^*]$.

Положим $t \in [0, T]$, тогда имеем

$$0 \leq |x(t, \varepsilon)| \leq T \varepsilon^2$$

Следовательно, функция $x(t, \varepsilon)$ имеет порядок ε^2 на интервале $[0, T]$.

Рассмотрим интервал $[0, L/\varepsilon]$. Очевидно, что $0 \leq |x(t, \varepsilon)| \leq L\varepsilon$, поэтому, в соответствии с определением 2, $x(t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ на интервале $[0, L/\varepsilon]$ (лемма 2 здесь неприменима, поскольку отношение $x(t, \varepsilon)/\varepsilon$ стремится к тождественному нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, более того, это стремление неравномерно по t).

На бесконечно большом интервале времени $[0, \infty]$ функция $x(t, \varepsilon)$ может принимать значения сколь угодно большие, независимо от значений параметра ε , поэтому функция $x(t, \varepsilon)$ не сравнима по величине ни с одним из выражений ε^k .

Итак, неограниченная по времени функция $x(t, \varepsilon)$ может иметь разные порядки малости на разных интервалах времени.

В заключении этого пункта отметим, что в литературе по асимптотическим методам символ O обычно используется иначе [1,2]. Пишут $x(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если существуют постоянные $\varepsilon_0 > 0$ и $A(\varepsilon_0) > 0$ такие, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполняется неравенство

$$|x(\varepsilon)| \leq A(\varepsilon_0) |g(\varepsilon)| \quad (9)$$

В этом случае символ O означает, что в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция $x(\varepsilon)$ ограничена функцией $A(\varepsilon_0) |g(\varepsilon)|$; ни о каком пределе здесь речи нет и в помине. Так, например, $1/\varepsilon = O(1/\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как $1/\varepsilon \leq 1/\varepsilon^3$ при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = 1$.

Можем уменьшить значение ε_0 , полагая $\varepsilon_0 = \sqrt{0.5}$, тогда неравенство (9) примет вид $1/\varepsilon \leq 0.5 \cdot (1/\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \leq \sqrt{0.5}$.

Из неравенства (9) следует, что при стремлении ε_0 к нулю (окрестность нуля «схлопывается» в точку) коэффициент $A(\varepsilon_0)$ не возрастает и принимает предельное значение $A(0)$, не меньшее, чем $|A|$, где A – параметр правой части равенства (3). Таким образом, традиционное определение (1) символа O -большое дает *предельную величину параметра* $A(\varepsilon_0)$ в виде $|A|$.

Всюду в дальнейшем будем пользоваться понятием O -большое в смысле определений (1), (2).

2. Процедура усреднения как метод выделения главных членов в рядах решений. Рассмотрим стандартное по Боголюбову дифференциальное уравнение, T -периодическое по явно входящему времени:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x, t), \quad X(x, t + T) = X(x, t) \quad (10)$$

Здесь x – скалярная величина.

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Фурье по t :

$$\dot{x} = \varepsilon \bar{X}(x) + \varepsilon \sum_{k \neq 0} X^{(k)}(x) e^{ik\omega t}, \quad \omega = 2\pi/T \quad (11)$$

где

$$\bar{X}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T X(x, t) dt$$

есть среднее по времени. Тогда равенство

$$\dot{x} = \varepsilon \bar{X}(x), \quad (12)$$

является усредненным уравнением.

Выделим главные члены, входящие в ряды решений

$$x(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) + \dots, \quad x(0, \varepsilon) = x_0 \quad (13)$$

уравнения (11).

В соответствии с определением (2), *главными членами* ряда (13) будем называть его слагаемые $\varepsilon^k u^{(k)}(t)$, имеющие максимальную полосу изменения на интервале времени $[0, L/\varepsilon]$. Эта полоса задается неравенством $A_1(\delta)\varepsilon^s \leq |\varepsilon^k u^{(k)}(t)| \leq A_2(\delta)\varepsilon^s$, если $(t, \varepsilon) \in [0, L/\varepsilon] \times (0, \delta]$. В этом случае мы говорим, что член ряда имеет порядок O – большое

от ε^s , т.е. $\varepsilon^k u^{(k)}(t) = O(\varepsilon^s)$. Так, например, член $\varepsilon A t$ будет главным по сравнению с $\varepsilon B \sin t$, поскольку $\varepsilon A t = O(1)$ на интервале $[0, L/\varepsilon]$, в то время как $\varepsilon B \sin t = O(\varepsilon)$. Слагаемое $\varepsilon^2 A t^2$ будет главным по отношению к $\varepsilon^2 B t, \varepsilon^2 B \cos k\omega t$, так как $\varepsilon^2 A t^2 = O(1)$, $\varepsilon^2 B t = O(\varepsilon)$, $\varepsilon^2 B \cos k\omega t = O(\varepsilon^2)$ на асимптотически большом интервале времени.

Итак, при вычислении $(k+1)$ -го члена $\varepsilon^k x^{(k)}(t)$, представляющего собой сумму некоторых выражений, выделяем *главное слагаемое*. Обозначим это слагаемое через $\varepsilon^k u^{(k)}(t)$. Группируем все эти слагаемые в виде некоторого ряда по ε :

$$u(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + \dots$$

и, далее, определяем, какое выражение правой части уравнения (11) отвечает за этот ряд. Это выражение, если оно существует, будем считать *главным (определяющим) членом правой части уравнения (11)*.

Реализуем эту идею последовательно. Представим скалярное решение $x(t)$ уравнений (11) в виде ряда (13), где x_0 – начальное значение переменной x . Отсюда следует, что $x^{(k)}(0) = 0$, когда $k = 1, 2, \dots$. Подставим этот ряд в уравнение (11) и, приравнявая коэффициенты при ε , получим

$$\dot{x}^{(1)} = \bar{X}(x_0) + \sum_{k \neq 0} X^{(k)}(x_0) e^{ik\omega t}$$

Интегрируем это равенство по времени:

$$x^{(1)}(t) = \bar{X}(x_0)t + \sum_{k \neq 0} \frac{X^{(k)}(x_0)}{ik\omega} e^{ik\omega t} + C_1 \quad (14)$$

где

$$C_1 = -\sum_{k \neq 0} \frac{X^{(k)}(x_0)}{ik\omega}$$

Изменения $\varepsilon x^{(1)}$ со временем обусловлены вековой составляющей $\varepsilon \bar{X}(x_0)t$ (дополненной членом εC_1), на которую накладываются гармонические колебания, описываемые вторым слагаемым формулы (14).

Существенное приращение векторная переменная $x = x_0 + \varepsilon x^{(1)}$ получит лишь за большой промежуток времени $t \sim 1/\varepsilon$. На таких больших интервалах времени обычно и исследуется решение системы

(11), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$. Вековой член $\varepsilon u^{(1)}(t) = \varepsilon \bar{X}(x_0)t$ дает приращение порядка 1 на промежутке времени $t \sim 1/\varepsilon$, поэтому он будет главным членом суммы $x_0 + \varepsilon x^{(1)}$. Вклад остальных членов, имеющих периодический характер, составит величину порядка ε при $t \sim 1/\varepsilon$ в силу ограниченности по времени этих слагаемых.

Таким образом, основной вклад в выражение $x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t)$ вносит вековая компонента ряда Фурье для правой части, т.е. $\varepsilon \bar{X}(x)$. Именно она задает сумму $x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t)$, представляющую собой первое приближение по ε для решения $u(t)$ усредненных уравнений (12). Точность аппроксимации $x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t)$ функцией $x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t)$ имеет порядок ε при $t \sim 1/\varepsilon$:

$$x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t) = x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + O(\varepsilon), t \in [0, L/\varepsilon]$$

Для получения второго приближения $\varepsilon^2 x^{(2)}(t)$ разложим функции

$$\bar{X}(x_0 + \varepsilon x^{(1)} + \dots), \quad X^{(k)}(x_0 + \varepsilon x^{(1)} + \dots)$$

в ряд по ε до членов первого порядка малости:

$$\bar{X}(x_0 + \varepsilon x^{(1)} + \dots) = \bar{X}(x_0) + \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} \right)_0 \varepsilon x^{(1)} + \dots$$

$$X^{(k)}(x_0 + \varepsilon x^{(1)} + \dots) = X^{(k)}(x_0) + \left(\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x} \right)_0 \varepsilon x^{(1)} + \dots$$

Подставим ряд (13) в уравнение (11) и приравняем коэффициенты при ε^2 , принимая во внимание формулу для $x^{(1)}$ (см. (14)). Получим уравнение относительно $x^{(2)}$:

$$\dot{x}^{(2)} = \left[\left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} \right)_0 + \sum_{k \neq 0} \left(\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x} \right)_0 e^{ik\omega t} \right] \left[\bar{X}(x_0)t + \sum_{l \neq 0} \frac{X^{(l)}(x_0)}{il\omega} e^{il\omega t} + C_1 \right]$$

Проинтегрируем это уравнение, учитывая, что

$$\int t e^{ik\omega t} dt = \frac{e^{ik\omega t}}{k\omega} \left(\frac{1}{k\omega} - it \right), \quad \int e^{ik\omega t} e^{il\omega t} dt = t \quad \text{при} \quad k + l = 0$$

$$\int e^{ik\omega t} e^{il\omega t} dt = \frac{e^{i(k+l)\omega t}}{i(k+l)\omega} \quad \text{при} \quad k + l \neq 0$$

В результате вычислений получим следующее выражение для функции $x^{(2)}$:

$$x^{(2)} = At^2 + Bt + N(t)t + M(t) + C_2$$

Здесь A и B – постоянные величины; $N(t)$, $M(t)$ – непрерывные периодические функции времени периода $T = 2\pi/\omega$, причем

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} \right)_0 \bar{X}(x_0), \quad B = i \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k\omega} \left(\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x} \right)_0 X^{(-k)}(x_0) + \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} \right)_0 C_1,$$

$$N(t) = -i \bar{X}(x_0) \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k\omega} \left(\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x} \right)_0 e^{ik\omega t}$$

Выражение для $M(t)$ опускаем в силу громоздкости.

Итак, второе приближение по ε , т.е. $\varepsilon^2 x^{(2)}(t)$, содержит секулярные члены вида $\varepsilon^2 At^2$, $\varepsilon^2 Bt$, $N(t)t$, а также периодические по t слагаемые, имеющие ограниченный характер. Секулярный член $\varepsilon^2 At^2$ достигает конечного значения A на промежутке времени $t \sim 1/\varepsilon$, т.е. $\varepsilon^2 At^2 = O(1)$. Порядок малости остальных слагаемых, входящих в выражение $\varepsilon^2 x^{(2)}(t)$, равен ε либо ε^2 , когда $t \sim 1/\varepsilon$:

$$\varepsilon^2 Bt = O(\varepsilon), \varepsilon^2 N(t)t = O(\varepsilon), \varepsilon^2 M(t) = O(\varepsilon^2), \varepsilon^2 C_2 = O(\varepsilon^2)$$

Это значит, что секулярный член $\varepsilon^2 At^2$ является главным, поэтому мы можем положить $\varepsilon^2 u^{(2)}(t) = \varepsilon^2 At^2$.

Главный член целиком и полностью зависит от среднего значения $\bar{X}(x)$ функции $X(x, t)$, что непосредственно следует из выражения для коэффициента A . Остальные слагаемые второго приближения зависят как от гармоник

$$X^{(k)}(x) e^{ik\omega t} \quad (15)$$

ряда Фурье для $X(x, t)$, так и от среднего значения $\bar{X}(x)$ этой функции. Исчезновение гармоник (15) ведет к исчезновению членов $\varepsilon^2 Bt$, $\varepsilon^2 N(t)t$, $\varepsilon^2 M(t)$.

Таким образом, главные члены $\varepsilon u^{(1)}(t), \varepsilon^2 u^{(2)}(t)$ второго приближения

$$x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) \quad (16)$$

искомого решения $x(t)$ зависят только от вековой компоненты ряда Фурье правой части исследуемого уравнения, т.е. от $\bar{X}(x)$. Это значит, что сумма

$$x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) = x_0 + \varepsilon \bar{X}(x_0)t + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} \right)_0 \bar{X}(x_0)t^2 \quad (17)$$

является вторым приближением ряда Тейлора для решения $u(t)$ усредненных уравнений (12).

Гармоники (15), входящие в правую часть уравнений (11), ведут к появлению дополнительных осцилляций и медленного дрейфа в решении $x(t)$ (см. члены $\varepsilon^2 Bt$, $\varepsilon^2 N(t)t$, $\varepsilon^2 M(t)$, входящие в выражение для $\varepsilon^2 x^{(2)}$). Так как порядок малости этих членов на асимптотически большом промежутке времени равен ε либо ε^2 , то отсюда следует, что функция времени (17) приближает (16) с точностью порядка ε :

$$x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) = x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + O(\varepsilon), t \in [0, L/\varepsilon]$$

Соответствующие выводы справедливы и для уравнений третьего приближения по малому параметру ε . Таким образом, можно предположить, что в каждом приближении по ε укороченный ряд

$$U_k = x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + \dots + \varepsilon^k u^{(k)}(t)$$

аппроксимирует k -е приближение

$$S_k = x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t) + \dots + \varepsilon^k x^{(k)}(t)$$

искомого решения $x(t, \varepsilon)$ с точностью порядка ε на промежутке времени порядка $1/\varepsilon$:

$$S_k = U_k + O(\varepsilon), t \in [0, L/\varepsilon]$$

Устремляя k к бесконечности и предполагая сходимость рядов $\{U_k\}$, $\{S_k\}$ к $u(t, \varepsilon)$ и $x(t, \varepsilon)$ соответственно на промежутке времени $t \sim 1/\varepsilon$, можем сделать следующий вывод: ошибка приближения искомого решения $x(t, \varepsilon)$ решением $u(t, \varepsilon)$ усредненного уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** достигает величины порядка ε на интервале времени $[0, L/\varepsilon]$:

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) + O(\varepsilon), t \in [0, L/\varepsilon]$$

Итак, на основе приближенного анализа мы показали, что ряд

$$u(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + \dots, \quad u_0 = x_0,$$

$$u^{(1)}(t) = \bar{X}(u_0)t, \quad u^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial u} \right)_0 \bar{X}(u_0)t^2, \dots \quad (18)$$

входящий в структуру ряда (13) и содержащий секулярные члены, вносит основной вклад в решение $x(t)$, так как члены $\varepsilon^k u^{(k)}(t)$ являются главными, имеющими порядок $O(1)$ на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. Этот ряд описывает решение усредненных уравнений (12) и он приближает искомое решение $x(t)$ с точностью порядка ε :

$$\|x(t, \varepsilon) - u(t, \varepsilon)\| \sim \varepsilon, t \in [0, L/\varepsilon] \quad (19)$$

Если мы рассмотрим промежуток времени $t \sim 1/\varepsilon^2$, то обнаружим, что члены $\varepsilon^2 Bt$, $\varepsilon^2 N(t)t$ имеют порядок $O(1)$, в то время, как выражение $\varepsilon^2 At^2$ является бесконечно большой величиной: $\varepsilon^2 At^2 = O(\varepsilon^{-2})$. Следовательно, точность представления искомого решения $x(t)$ его эволюционной составляющей $u(t)$ будет неудовлетворительной на промежутках времени порядка $1/\varepsilon^2$, асимптотическое стремление $x(t)$ к $u(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ невозможно.

Строгое доказательство оценки (19) принадлежит Н.Н. Боголюбову [3].

Литература

1. Sanders J.A., Verhulst F. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. –Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т.1 – М.: Изд-во «Высшая школа», 1970.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: ГИФМЛ, 1963.

УДК 531.2

А.П. Иванов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

ОБ ОБЩИХ ПРИНЦИПАХ МЕХАНИКИ В СИСТЕМАХ С ТРЕНИЕМ

Впервые систематическое изложение теории систем с сухим (кулоновским) трением было выполнено Дж.Х. Желлеттом, президентом Королевской ирландской академии и ректором (провостом) Тринити колледжа (ныне Дублинский университет) [1]. В предисловии к этой книге сказано: «Теория трения, которую считают частью теоретической механики, едва ли удостоивалась должного внимания. Даже в наиболее полных и систематических монографиях ее рассмотрению уделяется мало места по сравнению с вопросами, в которых за основу исследований принимается гипотеза абсолютно гладкой поверхности. Создается впечатление, что многих студентов просто заставили относиться к силе трения не как к составляющей теоретической механики, а как к поправке, которую необходимо сделать, чтобы научные исследования стали полезными с практической точки зрения. Однако подобное мнение в корне ошибочно. На самом деле, теория трения является такой же частью теоретической механики, как и теория тяготения». Аналогичную мысль высказал спустя четверть века известный ученый и политический деятель П. Пенлеве в своем трактате [2]: «Большая часть курсов теоретической механики посвящена исключительно системам без трения; последнее появляется только в некоторых частных приложениях. Можно ли создать для систем с трением общую теорию, аналогичную, например, той, которую дают уравнения Лагранжа в применении к системам без трения? Конечно, эмпирические законы трения имеют различные формы в зависимости от природы связей; тем не менее они имеют достаточно общих свойств; путь которым приходится идти в отдельных случаях, трудности, которые при этом встречаются, представляют достаточно аналогий для того, чтобы подобная теория была бы достаточно полезной как с точки зрения чистой теории, так и с точки зрения приложений».

Несмотря на эти благие пожелания, теория систем с трением пока не получила научной и методической проработки, достаточной для

включения ее в общий курс механики. Тем не менее, в последние два десятилетия наметился рост числа публикаций по фундаментальным проблемам трения, в которых изучаются как законы трения, так и задачи динамики (например, [4-7]). Обсуждение новых научных результатов преподавателями механики в рамках научно-методических семинаров и сборников помогло бы приблизить реализацию планов основоположников теории трения.

Данная работа посвящена анализу возможности применения ряда основных принципов механики к системам с сухим трением. Эти принципы были открыты знаменитыми учеными – классиками для систем с идеальными связями, а впоследствии были исследованы и обобщены при различных физических предположениях.

1. Принцип д'Аламбера-Лагранжа.

1.1. Формулировка принципа. Согласно данному утверждению, сформулированному в 1743 г., активные силы, действующие на механическую систему, уравниваются силами инерции и реакциями связей. Это значит, что для системы материальных точек с массами m_ν ($\nu = 1, \dots, N$) и радиус-векторами r_ν в любой момент времени выполняется следующее соотношение, называемое общим уравнением динамики:

$$\sum_{\nu=1}^N (F_\nu + R_\nu - m_\nu w_\nu) \delta r_\nu = 0 \quad (1.1)$$

где F_ν и R_ν – равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к каждой точке, $w_\nu = d^2 r_\nu / dt^2$, а δr_ν – виртуальные перемещения. Достоинство уравнения (1.1) состоит в его универсальности: оно применимо как для идеальных связей, так и при наличии трения. Тем не менее, оно приводит в этих двух случаях к неравнозначным результатам: реакции идеальных связей удовлетворяют условию

$$\sum_{\nu=1}^N R_\nu \delta r_\nu = 0 \quad (1.2)$$

что позволяет исключить их из уравнения (1.1). При переходе к обобщенным координатам q_j ($j = 1, \dots, n$) по методу Лагранжа это уравнение оказывается эквивалентным системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{q} = f(t, q, \dot{q}), \quad q \in \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

Тем самым проблема исследования механической системы переводится в область математических методов.

1.2. Классификация законов трения. В случае системы с неидеальными связями необходимо задать закон, выражающий зависимость сил трения T_i (т.е. касательных составляющих реакций) от обобщенных координат, скоростей и ускорений, а также нормальных реакций N_i

$$T_i = T_i(N, q, \dot{q}, \ddot{q}), \quad i = 1, \dots, k \quad (1.4)$$

где k – число фрикционных контактов. Необходимость включения в формулы (1.4) зависимости от \ddot{q} поясняется ниже примерами.

Важным этапом построения теории систем с трением является отбор простых случаев, для которых возможно обобщение общих принципов механики систем без трения (или их части). В связи с этим предлагается следующая классификация законов (1.4).

Определение. Закон (1.4) назовем *независимым*, если силы трения зависят лишь от обобщенных координат и скоростей, т.е.

$$T = T(q, \dot{q}) \quad (1.5)$$

Согласованный закон трения характеризуется возможностью однозначного определения значений нормальных реакций N вне зависимости от наличия и характера трения, при этом

$$T = T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (1.6)$$

В остальных случаях будем называть закон трения *несогласованным*.

Пример. К независимому закону трения относится сопротивление среды (воздуха или жидкости) движению тела, а также случай вязкого трения. Сухое трение в общем случае описывается несогласованным законом, и лишь в некоторых частных случаях (к примеру, движение шара или пластины по шероховатой плоскости) – согласованным законом.

1.3. Особенности законов разных типов. Формально силы вида (1.5) можно отнести к заданным и присоединить к активным силам. Поэтому системы с независимым законом трения приводятся в результате процедуры Лагранжа к виду (1.3). Аналогичная процедура в случае согласованного закона (1.6) приводит к более сложной системе

$$\ddot{q} = f(t, q, \dot{q}) + g(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (1.7)$$

где слагаемые g_j , выражающие трение, могут зависеть не только от обобщенных координат и скоростей, но и от ускорений. При этом система (1.7) может оказываться неразрешенной относительно \ddot{q} .

Систему с несогласованным законом (1.4) также можно привести к виду (1.7), исключив с этой целью нормальные реакции при помощи

уравнений геометрических связей. Различие между этими двумя случаями касается возможности однозначного разрешения системы (1.7) относительно \ddot{q} и будет пояснено ниже в разд. 3.

Пример. Тяжелое твердое тело скользит (вправо) по горизонтальной шероховатой плоскости, опираясь на нее двумя точками (рис. 1). Тянувшая сила F горизонтальна, а ее линия действия проходит через центр масс тела. Система сил, включая силу инерции $I = -mw$, нормальные реакции N_1, N_2 и силы трения T_1, T_2 , эквивалентна нулю. Это равносильно равенству нулю сумм проекций на горизонтальное и вертикальное направления, а также моментов относительно центра масс:

$$F - mw - (T_1 + T_2) = 0, \quad N_1 + N_2 - P = 0 \quad (1.8)$$

$$a(N_2 - N_1) - h(T_1 + T_2) = 0$$

где P – вес тела, h – высота центра масс над опорой, a – расстояние от проекции центра масс на плоскость до каждой из точек контакта.

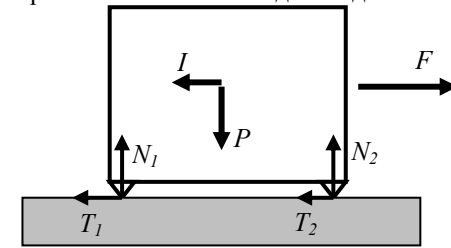


Рис. 1. Силы, действующие на движущееся тело

Систему (1.8) несложно преобразовать к виду

$$mw = F - T_1(N_1) - T_2(N_2) \quad (1.9)$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \left(P - \frac{h}{a} (F - mw) \right), \quad N_2 = \frac{1}{2} \left(P + \frac{h}{a} (F - mw) \right)$$

где зависимости $T_j(N_j)$ ($j = 1, 2$) выражают характер трения в каждой из точек контакта. Ввиду зависимости нормальных реакций от ускорения w суммарный закон трения в общем случае несогласован. В частном случае, когда функции T_j одинаковы и линейны (кулоново трение с одинаковыми коэффициентами трения), зависимость от w исчезнет, и закон трения будет независимым.

2. Принцип детерминированности Ньютона – Лапласа. Согласно данному принципу, состояние механической системы (т.е. набор зна-

чений r_v , dr_v/dt) в любой фиксированный момент времени однозначно определяет все ее движение.

Для системы (1.3) данное свойство равносильно теореме существования и единственности решения задачи Коши, справедливой при достаточно мягких требованиях к гладкости правых частей. Напротив, система (1.7) с функцией g , нелинейной по отношению к \ddot{q} , может быть неразрешима относительно \ddot{q} или иметь несколько решений. Примеры такого рода были приведены Пенлеве [2] для трения скольжения и Джеллеттом [1] для трения покоя. Несмотря на это, обсуждаемый принцип иногда неправомерно применяется для решения задач: после нахождения некоторого простого решения системы (1.3) (например, равновесия) делается (неявный) вывод о том, что других решений нет [8].

Пример. В примере из предыдущего раздела примем для трения закон Амонтона – Кулона (связи считаем удерживающими):

$$T = -\mu |N| \frac{v}{|v|}, \text{ при } v \neq 0; \quad |T| \leq \mu^0 |N|, \text{ при } v = 0 \quad (2.1)$$

где v – скорость скольжения, μ^0 – коэффициент трения покоя. При скольжении вправо сила трения направлена влево, поэтому в принятых на рис. 1 обозначениях имеем

$$T_i = \mu_i |N_i| \quad (i = 1, 2) \quad (2.2)$$

Подставляя выражения (2.2) в формулы (1.9), получим

$$z = \varphi(z), \quad \varphi(z) = \bar{\mu}_1 |\bar{P} - z| + \bar{\mu}_2 |\bar{P} + z| \quad (2.3)$$

$$z = 1 - \frac{mw}{F}, \quad \bar{P} = \frac{aP}{hF}, \quad \bar{\mu} = \frac{h}{2a} \mu$$

Правая часть формулы (2.3) кусочно-линейна по z с угловыми точками $z_1 = \bar{P}$ и $z_2 = -\bar{P}$, причем угловые коэффициенты звеньев равны: $k_1 = -\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2$ в интервале $z \in (-\infty, -\bar{P})$; $k_2 = \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1$ в интервале $z \in (-\bar{P}, \bar{P})$, и $k_3 = \bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_1$ в интервале $z \in (\bar{P}, \infty)$. Решениям уравнения (2.3) соответствуют точки пересечения ломаной с биссектрисой первой четверти, так как правая часть положительна. Число этих точек зависит от расположения правой вершины ломаной, т.е. величины $\varphi(\bar{P})$, а также значения k_3 . Несложный геометрический анализ приводит к следующему выводу: если $k_3 < 1$, то уравнение (2.3) имеет единственное решение (рис. 2,а); в случае $k_3 > 1, \bar{\mu}_2 < 0.5$

имеется два решения (рис. 2,б), а в случае $k_3 > 1, \bar{\mu}_2 > 0.5$ – ни одного (рис. 2,в).

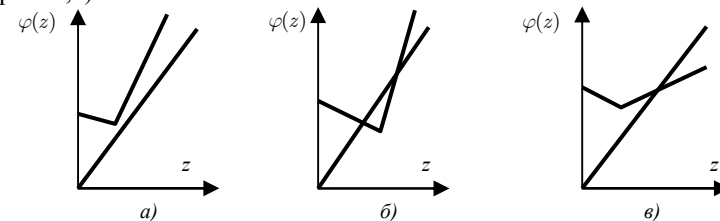


Рис. 2. Решение уравнения (2.2) геометрическим способом

На рис. 3 изображено разбиение пространства параметров $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$ на три области, соответствующие перечисленным выше случаям.

Впервые на специфику принципа детерминированности в системах с трением указал Джеллетт [1], по словам которого «Если полностью заданы динамические условия системы, то ее движение определено и уникально. Динамические условия считаются заданными полностью, если известны положения материальных точек, действующие на них силы и их скорости в любой момент времени... Однако этот вывод может и не иметь места, если любая из сил, действующих на систему, не определена по своей природе. Величины геометрических сил (т.е. нормальных реакций связей – А.Иванов) являются не заданными функциями координат, а отдельными неизвестными величинами, которые нужно определить, если это возможно, из уравнений динамики. То же касается и сил трения».

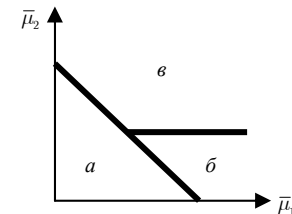


Рис. 3. Области в пространстве параметров, соответствующие трем случаям на рис. 2

Впоследствии было опубликовано значительное число исследований, посвященных путям преодоления парадоксов Пенлеве, а также ряд работ об условиях однозначной разрешимости системы (1.7) с кулоновым трением (см. [11] и библиографию). Так или иначе, обсуждаемый принцип имеет ограниченное применение.

3. Принцип Гаусса. Смысл следующей теоремы состоит в представлении основного уравнения динамики как условий стационарности некоторой функции от ускорений, названной Гауссом (1829) принуждением.

3.1. Классическая формулировка.

Теорема 1 (Гаусс). Для систем с идеальными связями действительное движение минимизирует в классе мыслимых движений функцию принуждения

$$Z(w) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (w_{\nu} - F_{\nu}/m_{\nu})^2 \quad (3.1)$$

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что вариация функции (3.1) при учете равенств

$$\delta r_{\nu} = \frac{1}{2} \delta w_{\nu} (\Delta t)^2$$

совпадает с левой частью основного уравнения динамики (1.1) (в которых реакции исключены). Кроме того, эта функция строго выпукла, поэтому она имеет единственную стационарную точку (минимум). Следовательно, условие минимальности принуждения равносильно уравнению (1.1).

Следствие 1. Целевую функцию (3.1) можно представить в виде [8]

$$Z = S - A, \quad S = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} w_{\nu}^2, \quad A = \sum_{\nu=1}^N F_{\nu} w_{\nu} \quad (3.2)$$

где величину S называют энергией ускорений, A – так называемая работа активных сил на ускорениях.

Следствие 2. Для систем с трением, описываемым независимым законом, действительное движение также определяется из условия минимальности принуждения (3.1) или (3.2), где силы трения следует присоединить к активным силам [3].

3.2. Системы с согласованным законом трения. Другой частный случай, когда принцип Гаусса справедлив, был указан Пожарицким [5]: в каждой из точек фрикционного контакта однозначно определено нормальное направление, причем нормальные составляющие реакций однозначно определяются из условий контакта вне зависимости от характера трения. В принятой выше классификации этот случай соответствует согласованному закону трения в сочетании с формулами (2.1).

При этом реакции в тех контактах, где скорость относительного скольжения отлична от нуля, добавляются к активным силам. Что касается контактов с нулевой скоростью скольжения, то для них принимается закон Амонтона-Кулона в форме ускорений вида [2]

$$T_{\nu} = -\mu_{\nu} |N_{\nu}| \frac{w_{\nu}}{|w_{\nu}|}, \quad \text{если } w_{\nu} \neq 0; \quad T_{\nu} \leq \mu_{\nu} |N_{\nu}| \quad (3.3)$$

с естественными обозначениями.

Теорема 2. Для систем с согласованным законом трения, определяемым формулами (3.3), действительное движение однозначно определяется условием минимума в классе мыслимых движений функции

$$\bar{Z} = S - A + \sum \mu_s |N_s| |w_s| \quad (3.4)$$

где суммирование проводится по тем точкам контакта, в которых скорость скольжения равна нулю, а при вычислении величины A учитываются активные силы, а также силы трения скольжения в остальных точках контакта.

Для доказательства заметим, что в силу (3.3) имеем

$$T_{\nu} \delta w_{\nu} = -\mu_{\nu} |N_{\nu}| \delta |w_{\nu}|$$

Отсюда следует, что при сделанных предположениях левая часть уравнения (1.1) является вариацией функции (3.4), обобщающей гауссово принуждение.

Эта функция строго выпукла, а ее единственная точка минимума определяет действительные ускорения.

Следствие. Системы с согласованным законом трения при использовании любой формулы для трения скольжения и формул (3.3) для трения покоя удовлетворяют принципу детерминированности Ньютона-Лапласа.

Замечание 1. В статье [5] было доказано, что функция (3.4) имеет хотя бы один локальный минимум, причем действительное движение соответствует одному из этих минимумов. Предложенное выше усиление, основанное на выпуклости функции (3.4), приводит к следующему важному следствию.

Замечание 2. Иногда в формулах (3.3) считают, что коэффициенты трения μ_{ν} , входящие в равенства и неравенства, различны. Таким образом учитывается явление адгезии, т.е. образование «спаек» между телами в состоянии относительного покоя. Такое предположение может приводить к неоднозначности в определении движения, когда начало скольжения возможно наряду с сохранением покоя. Более реалистичная модель, основанная на Штрибек-эффекте, учитывает непрерывное изменение коэффициента трения с ростом относительной скорости от нуля и приводит к формулам (3.3).

3.3. Случай несогласованного закона трения. В системах с несогласованным законом трения принцип Гаусса неприменим, хотя можно встретить и иное мнение [12]. В обоснование данного утверждения

обратимся к системе на рис. 1, имеющей единственную степень свободы (скорость скольжения отлична от нуля). Здесь функция принуждения (3.2) выглядит так:

$$\bar{Z}(w) = \frac{1}{2}mw^2 - (F - \mu_1 |N_1| - \mu_2 |N_2|)w \quad (3.5)$$

где нормальные реакции в силу формул (1.9) зависят от w . Условие стационарности функции (3.5) имеет вид

$$0 = \bar{Z}'(w) = mw - (F - \mu_1 |N_1| - \mu_2 |N_2|) - (F - \mu_1 |N_1| - \mu_2 |N_2|)' w$$

который совпадает с уравнением (1.9) лишь в случае независимости выражения в круглых скобках от w , соответствующем равенству $\mu_1 = \mu_2$.

4. Принцип виртуальных перемещений.

4.1. Классическая формулировка. Следующее утверждение, известное также как общее уравнение статики для систем с идеальными связями, принадлежит И. Бернулли (1717). С формальной точки зрения, его можно вывести из уравнения (1.1) при условии (1.2), полагая $w = 0$.

Теорема 3. Для равновесия механической системы с идеальными двусторонними связями необходимо и достаточно выполнение для любых виртуальных перемещений условия

$$\sum_{\nu=1}^N F_{\nu} \delta r_{\nu} = 0 \quad (4.1)$$

Встречающееся в литературе мнение о том, что аналогичное утверждение справедливо и в системах с трением (см. например [10]), верно лишь для независимых законов трения.

Следствие. Для равновесия механической системы с независимым законом трения необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{\nu=1}^N (F_{\nu} + T_{\nu}) \delta r_{\nu} = 0 \quad (4.2)$$

4.2. Различные понятия равновесия в системах с трением. Первое подробное исследование равновесия в системах с сухим трением было проведено Джеллеттом, который указал на неоднозначность этого понятия, связанную с неопределенностью в определении реакций. Следуя [1], будем отличать *возможное* положение равновесия от *обязательного*.

Определение. Точка координатного пространства называется *возможным положением равновесия*, если для нулевых скоростей существуют значения реакций связей, согласные с принятыми законами трения и уравнивающие активные силы. Возможное равновесие называется *обязательным*, если при тех же условиях не существует движений с ненулевыми ускорениями.

Следствие теоремы 2. В системах с согласованным законом трения всякое возможное равновесие будет также обязательным.

Замечание. В статически неопределимых системах Ф.Л. Черноушко ввел также понятие *гарантированного равновесия* [4], являющееся промежуточным между возможным и обязательным равновесием. В системах с согласованным законом трения все три понятия совпадают.

Пример. В системе на рис. 1 $w \geq 0$, так как в случае $w < 0$ баланс сил в проекции на опору невозможен. Примем для описания трения закон (3.3), тогда условие *возможного* равновесия выражается неравенством

$$\mu_1 |N_1(0)| + \mu_2 |N_2(0)| \geq F \quad (4.2)$$

где значения нормальных реакций вычисляются по формулам (1.9) при $w = 0$. Графически неравенство (4.2) означает, что $\varphi(1) \geq 1$, т.е. точка с единичной абсциссой графика функции $\varphi(z)$ (рис. 2) лежит выше биссектрисы. Равновесие *обязательно*, если неравенство

$$\varphi(z) > z \quad (4.3)$$

выполняется для всех $z < 1$, что соответствует значениям $w > 0$. Имеется два случая: если $\bar{P} \geq 1$ (вершина ломаной лежит правее точки равновесия), то условия (4.2) и (4.3) равносильны; если же $\bar{P} < 1$, то условие (4.3) складывается из неравенства (4.2) и требования $\varphi(\bar{P}) > \bar{P}$ (вершина ломаной лежит выше биссектрисы), эквивалентного неравенству $\bar{\mu}_2 > 0.5$.

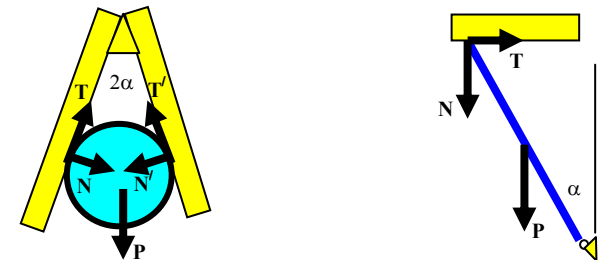


Рис. 4 Примеры возможного, но не обязательного равновесия

Другие примеры возможного, но не обязательного равновесия, допускающие простую экспериментальную проверку, представлены на рис. 4: при выполнении неравенства $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ в обеих системах возможно как равновесие, так и движение тела вниз под действием тяготения.

Замечание. Выводы Джеллетта о двух типах равновесия не получили в дальнейшем признания, и в учебной и научной литературе эти понятия смешиваются. К примеру, Аппель выводил [8] условия равновесия системы двух твердых шероховатых тел в смысле возможного равновесия, не учитывая случаев возможной неединственности.

4.3. Системы с согласованным законом трения. Как показано в [1], в системах с трением принцип виртуальных перемещений имеет форму неравенства.

Пример. Рассмотрим систему, использовавшуюся Кулоном в первых экспериментах по изучению законов трения: твердое тело, опирающееся на горизонтальную плоскость и способное совершать поступательное движение под действием тянущей силы $F > 0$. Допустим, что эта сила недостаточно велика, т.е. $F \leq \mu_0 N$, и тело покоится. При движении тела на него, помимо активной силы F , будет действовать сила трения скольжения T , вычисляемая по первой формуле (2.1) (как показано Штрибеком, для малых скоростей скольжения можно считать $\mu = \mu_0$). Сумма этих сил отлична от нуля, поэтому выполнено не условие (4.2), а неравенство

$$(F - \mu N)\delta r \leq 0$$

В рассмотренном примере закон трения согласован. Сформулируем общие условия равновесия для этого случая.

Теорема 4. Для равновесия механической системы с согласованным законом трения (3.3) необходимо и достаточно выполнение для всех виртуальных перемещений условия

$$\sum_{\nu=1}^N F_{\nu} \delta r_{\nu} - \sum_j \mu_j |N_j| |\delta r_j| \leq 0 \quad (4.4)$$

где вторая сумма распространяется на перемещения, вызывающие относительное скольжение во фрикционных контактах.

Доказательство. Достаточность условия (4.4) следует из теоремы о кинетической энергии, так как приращение кинетической энергии при начале движения из положения равновесия положительно, а левая часть этого неравенства равна суммарной работе активных сил и трения. Для проверки необходимости этого условия допустим, что систе-

ма находится в равновесии, т.е. $w_{\nu} = 0$ ($\nu = 1, \dots, N$). При этих значениях общее уравнение динамики (1.1) примет вид (4.2), где, в отличие от случая независимого закона трения значения T_{ν} , заданы не конкретными формулами, а неравенствами (3.3). Формула (4.4) получена из (4.2) путем подстановки предельных значений сил трения, для которых левая часть этой формулы минимальна.

4.4. Условия равновесия в случае несогласованного закона. В соответствии с двумя понятиями равновесия, Джеллетт сформулировал принцип виртуальных перемещений для систем с общим законом трения в виде неравенства

$$\sum_{\nu=1}^N (F_{\nu} + R_{\nu}) \delta r_{\nu} \leq 0 \quad (4.5)$$

которое в случае возможного равновесия должно выполняться *при некоторых* значениях реакций, допустимых в положении равновесия, а в случае обязательного равновесия *при всех* значениях реакций, соответствующих виртуальным перемещениям (в оригинале ошибочно включены множители m_{ν}). Данный вывод нуждается в уточнении.

Коль скоро речь идет о *возможном* равновесии, то знак неравенства в формуле (4.5) можно заменить на равенство, т.е. существуют значения реакций, согласные с законом трения, для которых выполнено условие (4.5) в форме равенства (или, что равносильно, (4.2)). В примере предыдущего подраздела достаточно положить $T = -F$. Условия в виде неравенства имеют следующий вид.

Следствие теоремы 4. Для систем с несогласованным законом трения условие (4.4) необходимо и достаточно для *возможного* равновесия.

Достаточные условия обязательного равновесия сформулируем в более сильной форме, нежели (4.5).

Теорема 5. Если в положении возможного равновесия для всех виртуальных перемещений, среди которых имеются ненулевые, выполнено неравенство

$$\sum_{\nu=1}^N (F_{\nu} + R_{\nu}(w)) w_{\nu} < 2S(w) \quad (4.6)$$

то движения, отличные от равновесного, невозможны (обязательное равновесие).

Доказательство. Уравнение (1.1) при учете (3.2) примет вид

$$\sum_{\nu=1}^N (F_{\nu} + R_{\nu} - m_{\nu} w_{\nu}) \delta w_{\nu} = 0 \quad (4.7)$$

В положении равновесия скорости и ускорения всех точек системы равны нулю, поэтому действительные ускорения входят в число виртуальных, и в равенстве (4.7) можно положить $\delta w_\nu = w_\nu$. В итоге получим

$$\sum_{\nu=1}^N (F_\nu + R_\nu) w_\nu = 2S(w) \quad (4.8)$$

Если допустить, что система имеет движение, отличное от равновесного, то равенство (4.8) будет выполнено при значениях w_ν , не все из которых равны нулю. Такое допущение противоречит сделанному предположению. Поэтому движения, отличные от равновесных, невозможны.

Замечание 1. Для систем с единственной степенью свободы условие теоремы 5 также является необходимым. Действительно, пусть при некотором значении $w = w^* > 0$ выполнено неравенство, противоположное (4.6). Поскольку при $w \rightarrow +\infty$ правая часть этого неравенства растет как w^2 , а левая часть не превосходит Fw , то ввиду непрерывной зависимости $R(w)$ для некоторого значения $\bar{w} > w^*$ выполняется равенство (4.7). Следовательно, \bar{w} – действительное ускорение.

Пример. Для системы на рис. 1 имеем $2S = mw^2$, и неравенство (4.6) принимает вид

$$(F + T)w < mw^2$$

После сокращения данного неравенства на величину $w > 0$ оно окажется равносильным условию (4.3), полученному путем графического анализа.

Замечание 2. В общем случае условие теоремы 5 является лишь достаточным, т.е. его нарушение не обязательно влечет за собой существование движений с ненулевыми ускорениями. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример, в котором возможные направления скольжения заполняют касательную плоскость.

Пример. Твердое тело касается шероховатой плоскости π в точке C ; активные силы имеют равнодействующую F , приложенную в точке C и направленную от тела к плоскости. Условие возможного равновесия выражается неравенством [8]

$$|F_t| \leq \mu |F_n| \quad (4.9)$$

где F_t и F_n – касательная и нормальная составляющие приложенной силы.

Условия обязательного равновесия, полученные в [11], довольно громоздки и здесь не приводятся. Сравнение этих условий с неравенством (4.6) показывает, что для некоторых значений параметров равновесие обязательно, а неравенство (4.6) нарушается для некоторых значений w .

5. Выводы.

1. Ключом к анализу динамики систем с трением является определение типа используемого закона трения. Предложенная в статье классификация основывается не только на конкретном виде трения (вязкое, сухое и пр.), но и на возможности расчета сил трения по заданным значениям координат и скоростей.

2. В случае независимого закона силы трения можно присоединить к активным силам, а затем использовать общие принципы механики в классической формулировке.

3. В случае согласованного закона трения можно использовать принципы детерминированности, Гаусса (обобщенный), а также виртуальных перемещений (обобщенный).

4. В случае несогласованного закона трения справедлив принцип Даламбера и обобщенный принцип виртуальных перемещений (достаточность).

Автор благодарит Ю.Г. Мартыненко и участников научно-методического семинара по теоретической механике за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-01-00718) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2975.2008.1).

Литература

1. Jellett J.H. A treatise on the Theory of Friction. – Dublin; London: McMillan, 1872. – 220 p.
2. Painleve P. Leçon sur le frottement. – Paris: Hermann, 1895. = Пэнлеве П. Лекции о трении. – М.: Гостехиздат, 1954. – 316 с.
3. Румянцев В.В. О принципах Гаусса и Четаева для систем с неидеальными связями // Теорет. и прикл. механика. – 1974. – Т. 5, № 1. – С. 9-14.
4. Черноусько Ф.Л. Условия равновесия тела на шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. – № 6. – С. 6-17.
5. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамике волчка Томпсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Изв. РАН, МТТ. – 2005. – № 6. – С. 159-170.
6. Матросов В.М., Финогенко И.А. О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // ПММ. – 1994. – Т. 58, вып. 6. – С. 3-16.
7. Розенблат Г.М. Динамические системы с трением. – М.; Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 155 с.
8. Аппель П. Теоретическая механика. Т.1,2. – М.: Физматгиз, 1960.

9. *Пожарицкий Г.К.* Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением // ПММ. – 1961. – Т.25, вып. 3. – С. 391-406.
10. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. Т.1. – М.: Наука, 1979.
11. *Иванов А.П.* Условия однозначной разрешимости уравнений динамики систем с трением // ПММ. – 2008. – Т.72, вып.4. – С. 531-545.
12. *Ле Суан Ань, Фам Чонг Данг Шон.* Истолкование принципа Гаусса для систем с кулоновым трением // Теория механизмов и машин. – 2006. – Т.4, № 1. – С. 66-71.

УДК 531.221.7

М.А. Осипенко, А.Н. Третьякова,

С.Д. Анферов, М.В. Мулюков

Пермский государственный технический университет (ПГТУ)

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Многие задачи статики механических систем с сухим трением (например, около 15 задач из параграфа «Силы трения» в [1] и около 25 задач из раздела «Задачи по статике» в [2]) имеют следующую структуру. В начальный момент времени ($t = 0$) механическая система занимает заданное положение и неподвижна. Система характеризуется некоторым параметром. Требуется найти, при каких значениях этого параметра система будет находиться в равновесии (то есть останется неподвижной при $t > 0$). Такие задачи имеют следующую особенность. Если при их постановке и решении использовать «физические» соображения, то получение ответа не представляет трудностей. Если же придерживаться математической строгости, то возникают принципиальные трудности. Оказывается, что в исходной постановке задачу решить практически невозможно, а если изменить постановку (на «физически», но не математически эквивалентную), то строгий ответ может не совпасть с ответом, полученным из «физических» соображений. Рассмотрим подробно эту ситуацию на примере следующей задачи (Международная студенческая олимпиада по теоретической механике 2007 г., Беларусь, Гомель, Белорусский государственный университет транспорта). Для точности формулировок авторский текст задачи несколько (непринципиально) изменен.

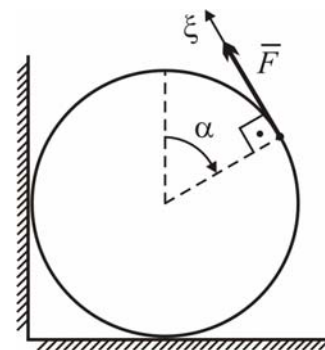


Рис. 1

Вертикальный однородный диск массы G/g касается шероховатых плоскостей: горизонтальной и перпендикулярной диску вертикальной (рис. 1). Коэффициент трения между диском и каждой плоскостью равен f . На диск действует сила \mathbf{F} , расположенная в плоскости диска так, как показано на рис. 1; угол $0 \leq \alpha < 2\pi$ задан.

Найти, при каких значениях модуля силы \mathbf{F} диск будет находиться в равновесии.

Далее будем исследовать несколько более общую задачу. Будем считать, что сила \mathbf{F} может быть направлена и в сторону, противоположную показанной на рис. 1. Тогда удобно ввести ось ξ (рис. 1) и искомой величиной считать не модуль силы \mathbf{F} , а проекцию F этой силы на ось ξ . Затем, в условии задачи следует упомянуть о том, что при $t = 0$ диск неподвижен (и занимает показанное на рис. 1 положение). Наконец, вопрос задачи должен, строго говоря, ставиться следующим образом: найти множество чисел Φ такое, что для равновесия диска (неподвижности при $t > 0$) необходимо и достаточно, чтобы $F \in \Phi$.

Пусть построено некоторое множество Φ , предположительно являющееся ответом. Принципиальная трудность строгого решения задачи в вышеприведенной постановке состоит в доказательстве достаточности условия $F \in \Phi$. Действительно, такое доказательство должно включать составление уравнений движения (а не только равновесия) диска и доказательство того, что эти уравнения с заданными начальными условиями имеют единственное решение, отвечающее неподвижному диску. Составление уравнений движения затруднительно по ряду причин. Во-первых, такие уравнения для систем с сухим трением (и с односторонними связями) нестандартны (не сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений связей) и в настоящее время еще не в полной мере изучены [3, 4]. Во-вторых, в условии задачи, строго говоря, *недостаточно данных* для составления этих уравнений. Действительно, при составлении уравнений движения требуется знать зависимость активных сил от положений и скоростей точек системы. Однако в условии задачи ничего не говорится о такой зависимости для силы \mathbf{F} при возможном движении диска. Не имея представления о виде уравнений движения, затруднительно исследовать существование и единственность их решения. Из этих затруднений можно попытаться выйти, объявив аксиомами (сверх обычных аксиом механики) некоторые общие утверждения о свойствах уравнений движения. А именно, можно сказать, что 1) если для некоторого F выполнены все уравнения равновесия диска в показанном на рисунке

положении, то уравнения движения, независимо от их вида, имеют решение, отвечающее неподвижному диску; 2) единственность решения следует из принципа «детерминированности движения» [5]. Однако если первое утверждение не вызывает принципиальных возражений, то второе утверждение является в данном случае неверным. Как известно [6], нарушение принципа «детерминированности движения» является *типичным* явлением в системах с сухим трением. Таким образом, задачу в вышеприведенной постановке решить практически невозможно и постановку следует изменить.

Минимальное изменение постановки состоит в отбрасывании требования достаточности условия $F \in \Phi$. Остается требование необходимости этого условия. Однако множеств Φ таких, что условие $F \in \Phi$ необходимо для равновесия диска, может быть много (более или менее узких); следует, очевидно, найти «наиболее узкое» множество. Если бы для некоторого Φ была (наряду с необходимостью) доказана и достаточность условия $F \in \Phi$, то именно это Φ и было бы «наиболее узким». Но доказать достаточность, как установлено выше, практически невозможно. Поэтому, строго говоря, можно сформулировать лишь некоторое *соглашение* о том, какое именно множество Φ следует считать «наиболее узким». Естественно считать искомым такое множество Φ , для которого условие $F \in \Phi$ *необходимо и достаточно для совместности* уравнений равновесия диска и добавленных к ним неравенств, выражающих односторонность связей и закон Кулона. Это есть именно соглашение, поднять которое до уровня доказанного утверждения препятствует практическая невозможность доказательства достаточности условия $F \in \Phi$ для равновесия диска.

Таким образом, приходим к следующей окончательной строгой постановке рассматриваемой задачи: найти множество Φ такое, что для совместности уравнений и неравенств равновесия диска необходимо и достаточно, чтобы $F \in \Phi$. Необходимое и достаточное условие совместности уравнений и неравенств равновесия можно назвать «наиболее сильным по соглашению» необходимым условием равновесия.

Это необходимое условие равновесия и должно фактически исследоваться при решении задач статики, имеющих упомянутую в начале данной статьи структуру.

Далее приведем решение задачи о равновесии диска в полученной строгой постановке.

На диск действуют сила тяжести \vec{G} , сила \vec{F} , силы трения \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и нормальные реакции \vec{N}_1 , \vec{N}_2 (рис. 2). Уравнения равновесия диска и

неравенства, выражающие односторонность связей и закон Кулона, составляют следующую систему:

$$\begin{cases} -F \cos \alpha + F_2 + N_1 = 0, & -G + F \sin \alpha + F_1 + N_2 = 0, \\ F - F_1 + F_2 = 0, & N_1 \geq 0, \quad N_2 \geq 0, \\ |F_1| \leq f|N_1|, & |F_2| \leq f|N_2| \end{cases} \quad (1)$$

Здесь N_1, F_2 – проекции соответствующих векторов на ось x ; N_2, F_1 – проекции на ось y .

При заданных $G \geq 0, f \geq 0, 0 \leq \alpha < 2\pi$ требуется найти множество Φ значений F такое, что для совместности (1) относительно F_1, F_2, N_1, N_2 необходимо и достаточно, чтобы $F \in \Phi$.

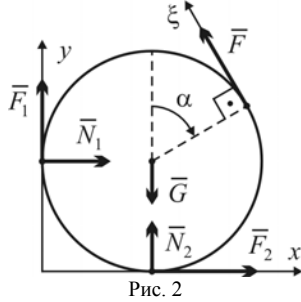


Рис. 2

Преобразуем (1), сохраняя необходимое и достаточное условие совместности. Общее решение первых трех уравнений (1) относительно F_1, F_2, N_1, N_2 имеет вид

$$\begin{cases} F_1 = F/2 + Q, & F_2 = -F/2 + Q, \\ N_1 = F \cos \alpha - Q + F/2, & N_2 = G - F \sin \alpha - Q - F/2 \end{cases} \quad (2)$$

где Q – произвольная величина. Подставляя (2) в последние четыре неравенства (1) и учитывая, что системы неравенств $\{n \geq 0, |\varphi| \leq |n|\}$ и $\{\varphi \leq n, \varphi \geq -n\}$ эквивалентны, находим, что для совместности (1) относительно F_1, F_2, N_1, N_2 необходимо и достаточно, чтобы система неравенств

$$\begin{cases} Q(1+f) \leq A_1, & Q(1+f) \leq B_1 \\ Q(1-f) \geq A_2, & Q(1-f) \geq B_2 \end{cases} \quad (3)$$

была совместна относительно Q . Здесь

$$\begin{aligned} A_1 &= fF(1/2 + \cos \alpha) - F/2, & A_2 &= -fF(1/2 + \cos \alpha) - F/2 \\ B_1 &= f(G - F(1/2 + \sin \alpha)) + F/2 \\ B_2 &= -f(G - F(1/2 + \sin \alpha)) + F/2 \end{aligned} \quad (4)$$

Можно сразу заметить, что если $f > 1$, то система (3) совместна при любых F . Действительно, в этом случае неравенства (3) имеют вид $Q \leq Q_k, k = 1..4$ и заведомо выполнены при достаточно большом по модулю отрицательном Q . Таким образом, при $f > 1$ искомое множество $\Phi = \{-\infty < F < +\infty\}$. Далее удобно отдельно рассмотреть случаи $f = 0$ и $f = 1$. Если $f = 0$, то из (3), (4) легко получить $\Phi = \{F = 0\}$. Если $f = 1$, то первые два неравенства (3) совместны при любых F , а вторые два неравенства (3) приобретают вид $F(1 + \cos \alpha) \geq 0; F(1 + \sin \alpha) \leq G$. Несложный анализ особых случаев $\alpha = \pi, 3\pi/2$ приводит к следующему ответу задачи при $f = 1$: если $\alpha = \pi$, то $\Phi = \{F \leq G\}$; если $\alpha = 3\pi/2$, то $\Phi = \{F \geq 0\}$; если $\alpha \neq \pi, 3\pi/2$, то $\Phi = \{0 \leq F \leq G/(1 + \sin \alpha)\}$.

Теперь рассмотрим случай $0 < f < 1$. В этом случае для совместности (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\min(A_1, B_1)/(1+f) \geq \max(A_2, B_2)/(1-f) \quad (5)$$

Далее искомое множество представим в виде

$$\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_+ \cup \Phi_- \quad (6)$$

где подмножества Φ_0, Φ_+, Φ_- соответствуют в (5) случаям $F = 0, F > 0, F < 0$. Если $F = 0$, то из (4) следует, что (5) выполнено, следовательно, $\Phi_0 = \{F = 0\}$. При $F \neq 0$ удобно, используя формулы $\min(A, B) = (A + B - |A - B|)/2, \max(A, B) = (A + B + |A - B|)/2$, преобразовать (5) к виду

$$2 \operatorname{sgn}(F)(f(1 + 2 \cos \alpha) - \varphi) \geq (1 - f)|\varphi - 1| + (1 + f)|\varphi + 1| \quad (7)$$

где

$$\varphi = f(1 + \sin \alpha + \cos \alpha - G/F) \quad (8)$$

Проведя несложное исследование, можно найти, что если $F > 0$, то (7) эквивалентно неравенству $\varphi \leq (f(1 + 2 \cos \alpha) - 1)/(1 + f)$. Тогда из

(8) получаем $\Phi_+ = \{0 < F \leq (1 + f)G/D\}$, где

$$D = f + 1/f + (1 + f) \sin \alpha - (1 - f) \cos \alpha$$

причем нетрудно доказать, что $D > 0$ при любых α . Аналогичное исследование дает, что если $F < 0$, то (7) при $\alpha \neq \pi$ невозможно для любых φ , а при $\alpha = \pi$ эквивалентно неравенству $\varphi \geq 1$. Тогда из (8) получаем, что если $\alpha \neq \pi$, то $\Phi_- = \emptyset$, а если $\alpha = \pi$, то $\Phi_- = \{-fG \leq F < 0\}$. Объединяя полученные при $0 < f < 1$ результаты, находим из (6), что если $\alpha = \pi$, то $\Phi = \{-fG \leq F \leq fG\}$, а если $\alpha \neq \pi$, то $\Phi = \{0 < F \leq (1 + f)G/D\}$.

Окончательный ответ задачи можно записать следующим образом:

если $f = 0$, то $\Phi = \{F = 0\}$;

если $0 < f < 1$ и $\alpha = \pi$, то $\Phi = \{-fG \leq F \leq fG\}$;

если $0 < f < 1$ и $\alpha \neq \pi$, то

$$\Phi = \{0 \leq F \leq (1 + f)G / (f + 1/f + (1 + f) \sin \alpha - (1 - f) \cos \alpha)\};$$

если $f = 1$ и $\alpha = \pi$, то $\Phi = \{F \leq G\}$;

если $f = 1$ и $\alpha = 3\pi/2$, то $\Phi = \{F \geq 0\}$;

если $f = 1$ и $\alpha \neq \pi, 3\pi/2$, то $\Phi = \{0 \leq F \leq G/(1 + \sin \alpha)\}$;

если $f > 1$, то $\Phi = \{-\infty < F < +\infty\}$.

Авторский ответ имеет вид

$$\Phi = \{F \leq G/(1 + \sin \alpha)\} \cap \{F \leq (1 + f)G / (f + 1/f + (1 + f) \sin \alpha - (1 - f) \cos \alpha)\} \quad (9)$$

где через F обозначен модуль силы \mathbf{F} . Авторское решение основано на «физических» соображениях о способах вывода диска из равновесия. Рассматриваются два таких способа: отрыв от горизонтальной плоскости и скольжение по двум плоскостям. При первом способе во втором

и третьем уравнениях (1) полагается $F_2 = N_2 = 0$, затем из этих уравнений (1) находится F ; множество значений F , не превышающих найденного, есть первое подмножество в (9). При втором способе в первых трех уравнениях (1) полагается $F_1 = fN_1$, $F_2 = -fN_2$, затем из этих уравнений (1) находится F ; множество значений F , не превышающих найденного, есть второе подмножество в (9).

Сравнивая приведенные ответы, можно сделать следующие выводы. При более общей постановке задачи найденное множество Φ в некоторых случаях содержит отрицательные значения F , которые в авторской постановке задачи не отыскиваются. Однако и для положительных значений F приведенные ответы не совпадают (в случае $f > 1$). Формально причина этого несовпадения состоит в том, что первый вариант ответа получен при последовательном решении задачи в строгой постановке, а второй вариант получен при использовании нестрогих («физических») соображений о способах вывода диска из равновесия и о поведении при этом различных сил. Качественно же причина несовпадения ответов состоит, возможно, в использовании несколько различающихся формулировок закона Кулона. При строгом решении считается [5], что в равновесии силы трения должны удовлетворять только двум последним неравенствам (1). При использовании же «физических» соображений неявно считается, что выполнено еще одно требование [7]: «приложенная к телу сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть». Для ответа, полученного при строгом решении, это требование может не выполняться. Действительно, в случае $f > 1$ при доказательстве совместности (3) допускаются сколь угодно большие по модулю отрицательные значения Q . Тогда из (2) следует, что допускаются значения $F_1, F_2 < 0$. Такие значения не соответствуют ни

одному из возможных движений диска и, следовательно, противоречат указанному дополнительному требованию на направления сил трения. Вопрос о том, следует ли включить это требование в закон Кулона (и затем в рассмотренное выше необходимое условие равновесия механической системы) является, вероятно, только частично вопросом теории, а частично – эксперимента. Заметим также, что вышеприведенная формулировка этого требования является весьма нестройной и для теоретического исследования возможности его учета следует еще решить (нетривиальную) задачу о построении соответствующей строгой формулировки.

Литература

1. *Мецкерский И.В.* Задачи по теоретической механике. – СПб.: Лань, 1998. – 448 с.
2. *Попов В.И., Тышкевич В.А., Шумский М.П.* Сборник олимпиадных задач по теоретической механике. Часть 1. Статика и кинематика. – Тамбов: изд-во ТИХМа, 1992. – 104 с.
3. *Осипенко М.А., Подгаец Р.М.* О силе трения, действующей на катящееся колесо // Научно-методические вопросы преподавания механики в современном ВУЗе (Сб. трудов Всероссийской научно-практической конференции). – Оренбург, 2001. – С. 37-39.
4. *Осипенко М.А., Подгаец Р.М.* О методике постановки и решения некоторых задач механики с учетом силы сухого трения // Тезисы докладов III-го Всероссийского совещания-семинара заведующих кафедрами теоретической механики ВУЗов РФ. – Пермь, 2004. – С. 103.
5. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
6. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. – М.: Гостехиздат, 1954. – 316 с.
7. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1998. – 416 с.

УДК 531.36

А.А. Буров

Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына

О РАВНОВЕСИЯХ БУСИНКИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ОБРУЧЕ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ СУХОГО ТРЕНИЯ

Изображение множеств установившихся движений механических систем, прежде всего, систем с первыми интегралами, в том или ином подпространстве прямого произведения конфигурационного пространства и пространства параметров в виде бифуркационных диаграмм известно, начиная, вероятно, с работ А. Пуанкаре. Такое изображение оказывается удобным с различных точек зрения, в частности, с точки зрения анализа устойчивости установившихся движений. Применение бифуркационных диаграмм для изображения и анализа установившихся движений систем с сухим трением распространено не в такой мере. Быть может, это обстоятельство так или иначе связано с тем, что для таких систем установившиеся движения, как правило, неизолированы.

В настоящей работе построение бифуркационных диаграмм осуществляется в задаче о движении тяжёлой бусинки на обруче, совершающем равномерные вращения вокруг вертикального диаметра. В случае, когда трение отсутствует, эта задача являет собой классический «учебный» пример бифуркаций установившихся движений механических систем (см., например, [1], где рассмотрены как сама задача, так и её разнообразные обобщения). Для указанной задачи при наличии сухого трения найдены относительные равновесия бусинки, исследована их зависимость от угловой скорости вращения обруча. Показано, что, в отличие от задачи о движении бусинки на гладком обруче, на бифуркационной диаграмме множество положений относительных равновесий изображается не кривыми, а целыми областями. Численно исследовано качественное поведение системы, в частности, устойчивость найденных относительных равновесий.

Рассмотренная задача позволяет дать в простейшей постановке описание движения белья в сушильной машине с барабаном, равномерно вращающимся вокруг вертикальной оси. Различные постановки задач динамики стиральных и сушильных машин, привлекают в настоящее время значительное внимание исследователей [2-5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение бусинки P единичной массы на круговом обруче радиуса ℓ , совершающем вращения вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью Ω (см. [1]). Будем считать, что помимо силы тяжести и центробежной силы,

обусловленной вращением обруча, на бусинку действует сила сухого трения F с коэффициентом трения μ (Рис.1). Сила сухого трения F направлена по касательной к обручу в точке P , её величина существенным образом зависит от величины нормальной реакции N .

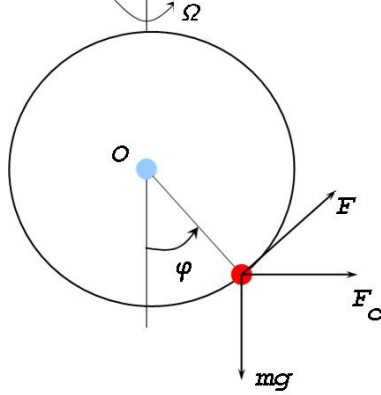


Рис.1

Пусть φ – угол между восходящей вертикалью и радиус-вектором бусинки, $d\varphi/dt = \omega$ – её угловая скорость. Тогда уравнения покоя и движения бусинки могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = 0 \\ 0 = -g \sin \varphi + \Omega^2 l \sin \varphi \cos \varphi + F \\ |F| \leq \mu |\Omega^2 l \sin^2 \varphi + g \cos \varphi| \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} \neq 0 \\ l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi + \Omega^2 l \sin \varphi \cos \varphi - \\ - \mu \operatorname{sign} \dot{\varphi} |\Omega^2 l \sin^2 \varphi + g \cos \varphi + l\dot{\varphi}^2| \end{cases} \quad (1.2)$$

соответственно.

Заметим, что движение может быть также описано с помощью декартовых координат и уравнений Лагранжа первого рода. Основное преимущество этих уравнений состоит в том, что они позволяют непосредственно определять знак нормальной реакции связи и, тем самым, в случае, когда связь предполагается односторонней, делать вывод о сходе системы со связи. На самом деле, эти уравнения и уравнение связи имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\lambda \frac{x}{l} - F \frac{y}{l} + \Omega^2 x \\ \ddot{y} = -\lambda \frac{y}{l} + F \frac{x}{l} - g \end{cases} \quad (1.3)$$

$$f = x^2 + y^2 - l^2 = 0 \quad (x = l \sin \varphi, \quad y = -l \cos \varphi) \quad (1.4)$$

Уравнения (1.3), (1.4) необходимо дополнить неравенством, определяющим особенности сухого трения

$$|F| \leq \mu |\lambda| \quad (1.5)$$

2. Относительные равновесия. Воспользуемся уравнениями (1.3), (1.4) и неравенством (1.5) для определения положений относительного равновесия. Из уравнений (1.3), (1.4), рассмотренных как система относительно (λ, F) , имеем

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{l} (\Omega^2 x^2 - l g) \\ F = \frac{x}{l} (g + y \Omega^2 l) \end{cases} \quad (2.1)$$

В этом случае неравенство (1.5) принимает вид

$$|x(g + y \Omega^2 l)| \leq \mu |\Omega^2 x^2 - y g| \quad (2.2)$$

На плоскости (x, y) неравенство (2.2) определяет область, из которой окружность (1.4) высекает множество положений относительного равновесия при данных значениях параметров (Ω, g, l) .

Исследование системы, состоящей из неравенства (2.2) и уравнения (1.4), показывает, что всегда имеются две области, заполненные положениями относительных равновесий и прилежащие, соответственно, к верхней и нижней точкам обруча. Будем говорить об этих областях, как о *верхней и нижней областях прямых относительных равновесий*.

Если угловая скорость обруча Ω превосходит некоторое критическое значение Ω_c , то от нижней области прямых относительных равновесий отделяется пара симметричных относительно вертикального диаметра областей, которые будем именовать *областями косых относительных равновесий*.

Множество относительных равновесий в проекции на плоскость (Ω, φ) представлено на рис.2 в виде закрашенной области В. Так как конфигурационное пространство системы – окружность, то пространство (Ω, φ) – цилиндр $\Gamma = S^1(\varphi \bmod 2\pi) \times R(\Omega)$, получающийся отождествлением прямых $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$. Поскольку картина симмет-

рична относительно прямой $\Omega = 0$, то на рис.2 представлена лишь его «половина» – множество $\Gamma^0 \cup \Gamma^+ = \{(\varphi, \Omega) : \Omega \geq 0\}$. Область В состоит из двух компонент связности $B = B^0 \cup B^\pi$, где B^0 – «вилка», содержащая прямую $\varphi = 0$, а B^π – полоса, содержащая прямую $\varphi = \pi$.

Прямая $\varphi = \pi$ и «скелетная линия» области B^0 составляют бифуркационную диаграмму в задаче о движении бусинки на равномерно вращающемся гладком обруче. Кривые между закрашенными областями разделяют области положительности и отрицательности нормальных реакций.

Заметим, что значения углов $\pm\varphi_c$, которым соответствует критическое значение угловой скорости Ω_c , определяются из тригонометрического уравнения

$$(\mu^2 + 1)\sin^3\varphi - \mu\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\mu^2\cos^2\varphi\sin\varphi + \mu\cos^3\varphi = 0,$$

коэффициенты которого зависят лишь от величины коэффициента трения. При этом сама величина Ω_c находится из соотношения

$$\Omega_c^2 = \frac{g}{l\sin\varphi_c} \frac{\sin\varphi_c - \mu\cos\varphi_c}{\mu\sin\varphi_c + \cos\varphi_c}$$

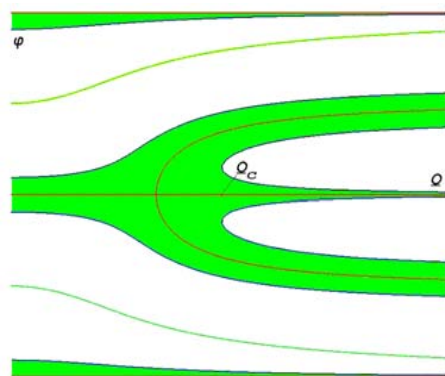


Рис. 2

3. Механическая интерпретация. Посмотрим на найденные классы установившихся движений с точки зрения баланса сил. Пусть для начала угловая скорость вращения обруча равна нулю. В этом случае относительные равновесия – это не что иное, как обычные равновесия. Они заполняют дуги длиной 2α , симметричные относительно верти-

кального диаметра и прилежащие к нижней и верхней точкам обруча. Здесь и далее $\alpha: \operatorname{tg} \alpha = \mu$ – *угол трения*. Если точка Р находится внутри любой из этих дуг, то сумма силы тяжести и нормальной реакции не покидает *конуса трения*, и точка Р остаётся в равновесии.

Заметим, что нормальная реакция направлена внутрь обруча, точнее, к его центру лишь в том случае, когда точка Р находится в его нижней части. Если точка Р располагается в верхней части обруча, то нормальная реакция направлена вовне его, точнее, от его центра. Поэтому рассмотрение верхней области относительных равновесий лишено смысла с точки зрения указанных выше приложений. Однако здесь верхняя область равновесий принимается в рассмотрение для полноты картины.

Пусть теперь обруч вращается с небольшой угловой скоростью. Появляющаяся центробежная сила по-разному сказывается на верхней и нижней областях прямых равновесий. При возрастании угловой скорости Ω верхняя область прямых равновесий сужается, так как прибавление центробежной силы к силе тяжести приводит к уменьшению нормальной реакции, иными словами, бусинку «срывает с обруча». В то же время, при возрастании угловой скорости Ω нижняя область прямых равновесий поначалу расширяется, что обусловлено возрастанием нормальной реакции. При критическом значении угловой скорости Ω_c нижняя область критических равновесий теряет связность – от неё ответвляется пара областей косых равновесий, имеющих место при $\Omega > \Omega_c$. На косых равновесиях центробежная сила доминирует над силой тяжести и даёт основной вклад в выражение для нормальной реакции. На оставшихся после бифуркации нижних относительных равновесиях основной вклад в выражение для нормальной реакции по-прежнему даёт сила тяжести, что определяет сужение этой области при возрастании угловой скорости вращения обруча Ω .

4. Представление об устойчивости относительных равновесий.

В рассматриваемой задаче имеют место две типичные картины, относящиеся к свойствам устойчивости множеств установившихся движений. Поясним их на примере случая, когда угловая скорость вращения обруча равна нулю.

Прежде всего, рассмотрим равновесия из нижней области. Сама нижняя область получилась «растягиванием» за счёт введения трения устойчивого нижнего положения равновесия математического маятника, т.е. особой точки эллиптического типа. Картина фазовых траекторий в окрестности этого множества изображена на рис. 3а. Все равновесия, составляющие нижнюю область, устойчивы, включая концевые

точки. Иными словами, на фазовом портрете устойчивые равновесия образуют отрезок. Назовём такие равновесия равновесиями типа Е.

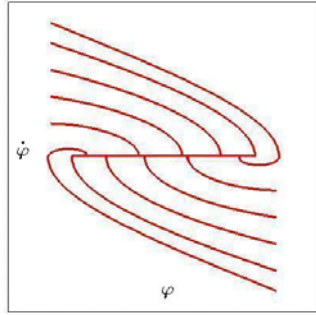


Рис. 3а

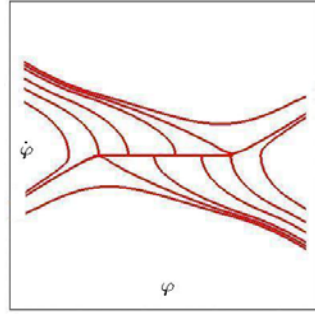


Рис. 3б

Рассмотрим теперь равновесия из верхней области. Сама верхняя область получилась «растягиванием» за счёт введения трения неустойчивого верхнего положения равновесия математического маятника, т.е. особой точки гиперболического типа. Картина фазовых траекторий в окрестности этого множества изображена на рис. 3б. Все равновесия, составляющие нижнюю область, устойчивы, за исключением концевых точек. Иными словами, на фазовом портрете устойчивые равновесия образуют интервал. Назовём такие равновесия равновесиями типа Н. Заметим, что добавленный интервал равновесий как бы «разрывает» пары сепаратрис, существующие в задаче без трения. Для каждой из концевых точек теперь имеются две входящие и одна выходящая сепаратрисы. Именно присутствие выходящих сепаратрис порождает неустойчивость концевых точек.

Вернёмся теперь к случаю, когда угловая скорость отлична от нуля. Если её величина не превосходит критического значения Ω_c , то ситуация такая же, как и в случае неподвижного обруча – нижние равновесия принадлежат классу Е, в то время как верхние равновесия принадлежат классу Н. Для закритических значений угловой скорости картина устойчивости меняется – теперь как нижние, так и верхние равновесия принадлежат классу Н, в то время как косые равновесия принадлежат классу Е. Картина распределения свойств устойчивости напоминает ту, что наблюдается в задаче о движении бусинки на вращающемся обруче без трения.

5. Интегрирование уравнений движения. Дифференциальные уравнения (1.2) могут быть проинтегрированы в явном виде. На самом деле, переходя к безразмерному времени $\tau = t\sqrt{g/l}$ и обозначая

штрихом дифференцирование по этому времени, перепишем уравнение движения (1.2) в виде

$$\varphi'' = -\sin \varphi + \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - \mu_c (\omega^2 \sin^2 \varphi + \cos \varphi + \varphi'^2) \quad (3.1)$$

Здесь и далее $\mu_c = \mu \operatorname{sign}(\varphi') \operatorname{sign}(\omega^2 \sin^2 \varphi + \cos \varphi + \varphi'^2)$ – кусочно-постоянная функция.

Для интегрирования воспользуемся заменой независимой переменной, описанной, например, у Аппеля [6, п. 389] (см. также [7, с.64]). В качестве новой независимой переменной на каждом отрезке монотонности его изменения можно воспользоваться углом φ . На самом деле, тогда

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) = \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) = \frac{dx}{d\varphi}, \quad x = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2$$

и уравнение движения принимает вид

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\sin \varphi + \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - \mu_c \omega^2 \sin^2 \varphi - \mu_c \cos \varphi - 2\mu_c x$$

Это линейное уравнение первого порядка интегрируется, например, методом вариации постоянной, или его решение ищется как сумма общего решения однородного уравнения, сложенного с частным решением неоднородного

$$x = Ce^{-2\mu_c \varphi} + B_0 + A_1 \sin \varphi + B_1 \cos \varphi + A_2 \sin 2\varphi + B_2 \cos 2\varphi$$

Непосредственная подстановка данного решения в уравнение и сопоставление коэффициентов показывает, что

$$B_0 = \frac{\omega^2}{4}, \quad A_1 = \frac{\mu_c}{1 - 4\mu_c^2}, \quad B_1 = \frac{2\mu_c^2 - 1}{1 - 4\mu_c^2}, \quad A_2 = \frac{\mu_c \omega^2}{1 + \mu_c^2},$$

$$B_2 = \frac{\omega^2 (\mu_c^2 - 1)}{4(1 + \mu_c^2)}$$

Получающиеся решения не столь сложны, сколь не наглядны. Поэтому ограничимся здесь фазовыми портретами задачи, получающимися в результате численного счёта. На рис. 4а видно, как фазовые кривые стремятся к представленным отрезками на оси φ нижним и верхним множествами относительных равновесий. Символы Е и Н указывают тип поведения фазовых траекторий в окрестности этих равновесий. На рис. 4б наблюдается картина, получившаяся в результате потери связности нижнего множества относительных равновесий. На ней видно описанное выше чередование свойств устойчивости.

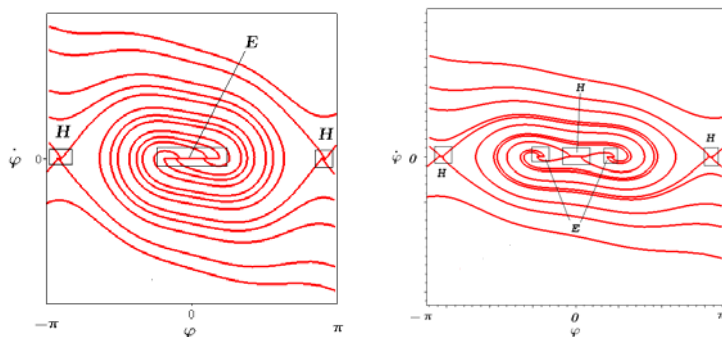


Рис. 4а

Рис. 4б

6. Вместо эпилога. Изначально настоящее исследование задумывалось как первый шаг описания движения белья в сушильной машине с вертикальной осью, на что указывает список приведённой литературы. Однако исследования показали, что задача имеет самостоятельный интерес, прежде всего, с точки зрения направлений распространения привычных методов исследования существования, устойчивости и бифуркаций установившихся движений консервативных систем на системы с сухим трением.

Литература

1. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
2. Kirk T. McDonald. Physics in the Laundromat // Am. J. Phys. – 1998. – Vol.66. – P. 209.
3. Papadopoulos, Evangelos and Papadimitriou, Iakovus. Modeling, Design and Control of a Portable Washing Machine during the Spinning Cycle // Proc. of the IEEE-ASME International Conference on Advanced Intelligence Mechatronics Systems (AIM 2001). – 8-11 July. – Como, Italy. – Pp. 899-904.
4. Morio Mitsuishi, Yutaka Nagao. Washing Machine Dehydration Dynamical Analysis. – Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu. – 2002. – No. 5. – P. 209-210. = <http://www.estech.co.jp/list.pdf/est101.pdf>
5. Thomas Nygård, Johan Sandgren, Viktor Berbyuk, Anders Bertilsson. Vibration Control of Washing Machine with Magnetorheological Dampers // Proc. The 8th International Conference on Motion and Vibration Control (MOVIC 2006), August 27-30, 2006. – KAIST, Daejeon, Korea. – Pp. 480-485.
6. Анпель П. Теоретическая механика. Т.1. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 516 с.
7. Берёзкин Е.Н. Решение задач по теоретической механике. Часть вторая. Аналитическая статика. Динамика точки. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 136 с.

УДК 531.36

П.А. Коронец¹, В.А. Самсонов²

¹Ростовский государственный университет путей сообщения

²НИИ механики МГУ

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ ТОРМОЗНОЙ КОЛОДКИ

Уже более века [1,2] известно, что движение систем твердых тел, обладающих кулоновым (сухим) трением, может сопровождаться особенностями типа «удара трением» [3,4]. Тормозная колодка работает в условиях достаточно больших нагрузок, при которых необходим учет податливости контактирующих тел. Именно такой учет позволил указать на сухое трение, как на один из вероятных источников вибрации в скользящих парах [5]. Ниже этот вопрос обсуждается на простейшей модели функционирования тормозной колодки.

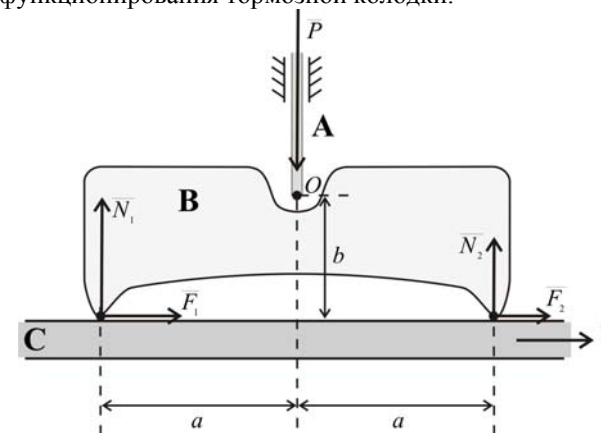


Рис. 1

1. Рассмотрим механическую систему, состоящую (рис.1) из стержня-толкателя А, тела-колодки В, прикрепленного к толкателю в шарнире О. Стержень может перемещаться в направляющих и служит для передачи на колодку силы P , которая «прижимает» колодку к движущемуся поступательно со скоростью V телу С.

Для простоты будем считать, что центр масс колодки совпадает с точкой О и колодка контактирует с телом С лишь в двух точках M_1 и M_2 . Примем также, что коэффициент f трения в обеих этих точках одинаков.

Для расчета действующих на колодку нормальных реакций N_1 и N_2 и сил трения F_1 , F_2 имеем систему уравнений равновесия колодки:

$$\left. \begin{aligned} N_1 + N_2 &= P \\ N_1 a - F_1 b &= N_2 a + F_2 b \\ F_1 &= f N_1 \\ F_2 &= f N_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_1(a - fb) = N_2(a + fb)$$

Нетрудно видеть, что при $a > fb$ имеем $N_1 > N_2$ и $F_1 > F_2$. Более того, $N_2 \rightarrow 0$ при $fb \rightarrow a$.

Если же $fb > a$, то следует положить $N_2 = 0$ и равновесие колодки оказывается невозможным. Она начнет поворачиваться вокруг шарнира O , «выпирая» толкатель.

2. Для более детального описания поведения колодки примем, что в точках M_1 и M_2 колодка обладает некоторой податливостью. Смоделируем ее с помощью невесомых пружин жесткостей k_1 и k_2 , вводя также величины x_1 , x_2 сжатия этих пружин.

Считая величины x_1 , x_2 малыми, запишем уравнения движения колодки в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 + P \\ \frac{1}{2} J(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -(a - fb)ak_1 x_1 + (a + fb)ak_2 x_2 \end{aligned}$$

Структура этих уравнений становится прозрачной, если положить $k_1 = k_2 = k$.

При $a > fb > 0$ существует положение равновесия колодки, в котором

$$x_{10} = \frac{b + af}{2ak} P > \frac{b - af}{2ak} P = x_{20}$$

Следовательно, трение приводит к некоторому «перекосу» колодки, что соответствует отмеченному выше соотношению между N_1 и N_2 .

3. Для описания отклонения системы от положения равновесия введем новые координаты

$$\begin{aligned} 2x &= x_1 + x_2 - x_{10} - x_{20} \\ 2y &= x_1 - x_2 - x_{10} + x_{20} \end{aligned}$$

Уравнения возмущенного движения примут вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ J\ddot{y} &= -a^2 ky + abfkx \end{aligned} \quad (1)$$

Матрица правой части этих уравнений может быть представлена в виде суммы симметрической матрицы (которая отвечает потенциальным силам) и кососимметрической матрицы (которая отвечает непотенциальным, или «циркулярным» силам).

Очевидно, что при

$$ma^2 = J \quad (2)$$

в системе имеется резонанс (совпадение парциальных частот), «поступательные» колебания колодки вдоль толкателя порождают ее угловые колебания, амплитуда которых возрастает линейно по времени. Скорость роста амплитуды определяется трением. Правда, в симметрической системе (1) рост амплитуды возможен лишь при выполнении резонансного соотношения (2), т.е. как говорят математики, «на множестве меры нуль».

Известно, однако, что при нарушении симметрии, в частности, при $k_1 \neq k_2$, в пространстве параметров может образоваться область неустойчивости конечной меры. Когда параметры принадлежат этой области, то в системе возникают колебания по типу флаттера [6].

Таким образом, показано, что сухое трение скольжения обеспечивает неравномерную нагрузку на участки тормозной колодки и, следовательно, неравномерный износ ее поверхности (хорошо знакомый велосипедистам). Следует также считаться с возможностью возникновения колебаний колодки в направлении, так сказать, «поперек скольжения». Дело в том, что переменная нагрузка и неравномерный износ поверхности тормозной колодки обеспечивают эволюцию ее параметров в достаточно широких пределах. Это делает вполне вероятным их попадание в область неустойчивости [5].

Отметим также, что тангенциальная податливость в зонах контакта может дополнительно вызвать колебания колодки вдоль направления скольжения. Этот тип колебаний достаточно подробно описан в литературе [7].

Литература

1. Painlevé P. Leçon sur le frottement. – Hermann, 1895. = Пенлэве П. Лекции о трении. – М.: ГИТТЛ, 1954.
2. Болотов Е.А. О движении плоской фигуры, стесненной связями с трением. – М., Моск. мат. об-во, Матем. сб. – Т. 25, вып. 4. – 1906. – С. 562-708.
3. Самсонов В.А. Динамика тормозной колодки и удар трением. // ПММ. – 2005. – Т. 69, №6. – С. 912-921.

4. Самсонов В.А. К 100-летию результата Е.А. Болотова. // Проблемы машиноведения и надежности машин. – 2007. – №2. – С. 100-102.
5. Коропец П.А. Динамическая устойчивость трибологической системы «тормозная колодка – колесная пара». // Вестник Восточноукр. нац. ун-та им. Даля. – 2008. – №5. – С. 41-46.
6. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М. Физматлит, 1961. – 329 с.
7. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 272 с.

СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 531.01

О.М. Капустина¹, Ю.Г. Мартыненко²

¹Московский государственный университет прикладной биотехнологии
²НИИ механики МГУ

ПРИМЕРЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ MATHEMATICA

В статье развиваются методики использования компьютера в курсе теоретической механики [1-4]. Представлены примеры проведения параметрического анализа и построения анимаций в задачах статики плоской системы сил и кинематики точки с помощью системы Mathematica.

Введение. Современный уровень развития компьютерной техники и программного обеспечения позволяет проводить детальный аналитический, численный и визуальный анализ в задачах теоретической механики. Преподаватель может значительно обогатить содержание известных задач и поставить перед учащимися новые вопросы, ответ на которые дает компьютерное моделирование. В частности, универсальная система символьных вычислений Mathematica и, особенно, её последние, шестая и седьмая, версии предоставляют множество инструментов построения, решения уравнений различного вида, реализации компьютерной графики. Эти версии Mathematica дают возможность создавать параметризованные плоские и пространственные анимации движения механических систем. В [4] представлено решение задачи о качении по шероховатой плоскости диска с маховиком средствами Mathematica 6. С помощью программы, приведенной в [4], создаётся параметризованная по начальным условиям и кинетическому моменту маховика трёхмерная анимация движения диска с маховиком. В настоящей работе рассмотрены примеры решения задач статики и кинематики точки.

Пример решения задачи статики. Рассмотрим расчет С-1 из [1] по определению реакций связей составной конструкции (рис.1) и дополнительно исследуем в этой задаче зависимость реакции S_1 стержня $АН$ от веса прямоугольной пластины G_1 .

В расчете С-1 плоская механическая конструкция (рис.1) находится в равновесии под действием заданных сил и наложенных связей. Вес

треугольной пластины – G_2 . В точке E приложена сила F . Требуется определить реакции шарнира O и катковой опоры K , усилия в невесомых стержнях BC и AH , давление в точке D . Кроме того, найдем значение G_1 , при котором S_1 примет наибольшее допустимое значение $S_{1\max}$.

Зададим следующие числовые значения параметров $G_2=10.7$ кН, $F=10.3$ кН, $\alpha_1=0.852$, $\alpha_2=0.365$, $\alpha_3=0.652$, $\beta=30^\circ$, $AB=DK=a$, $AK=DB=2a$, $CD=DE=b$, $l=OC/3$, $S_{1\max}=100$ кН. Вес G_1 может меняться в пределах от $G_{1\min}=20.7$ кН до $G_{1\max}=200$ кН.

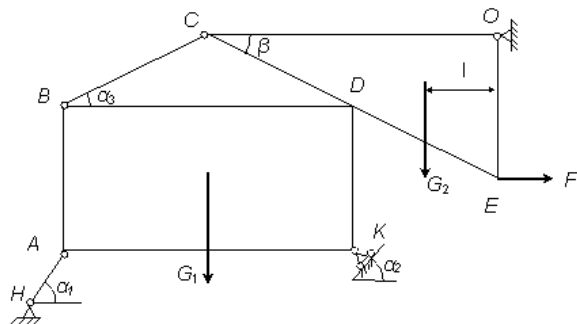


Рис. 1. Схема конструкции

Решение задачи

Для решения задачи составим программу в системе компьютерных вычислений Mathematica. Освобождаем конструкцию от внешних связей и расчлняем на две части (рис. 2), после чего составляем уравнения равновесия каждого из весомых тел.

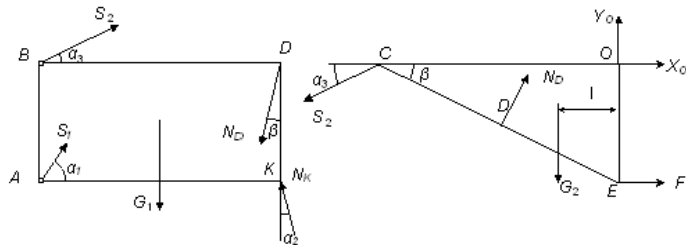


Рис. 2. Результат расчленения конструкции на две части

Уравнения равновесия получаются из условия равенства нулю главного вектора и главного момента активных сил и сил реакции связей. В случае плоской системы сил для прямоугольной пластины $ABDK$ эти уравнения примут следующий вид (уравнение моментов сил составлено относительно точки A)

$$\begin{aligned} \text{eqX1} &= S1 \cos[\alpha1] - Nk \sin[\alpha2] + S2 \cos[\alpha3] - Nd \sin[\beta] = 0; \\ \text{eqY1} &= S1 \sin[\alpha1] + Nk \cos[\alpha2] + S2 \sin[\alpha3] - Nd \cos[\beta] - G1 = 0; \\ \text{eqM1} &= Nk \cos[\alpha2] \frac{2}{a} - S2 \cos[\alpha3] \frac{1}{a} - Nd (\cos[\beta] \frac{2}{a} - \sin[\beta]) - G1 \frac{1}{a} = 0; \end{aligned}$$

Крайняя правая скобка обозначает базисный фрагмент программы Mathematica, называемый ячейкой. Вид этой скобки указывает на свойства ячейки. Выше, например, представлена ячейка ввода. В ячейки ввода помещают команды Mathematica, предназначенные для выполнения.

Уравнения равновесия плоской системы сил, приложенных к треугольной пластине COE имеют вид (уравнение моментов сил составлено относительно точки C)

$$\begin{aligned} \text{eqX2} &= X_o - S_2 \cos[\alpha_3] + N_d \sin[\beta] + F = 0; \\ \text{eqY2} &= Y_o - S_2 \sin[\alpha_3] + N_d \cos[\beta] - G_2 = 0; \\ \text{eqM2} &= 2 Y_o \cos[\beta] b + N_d b + F b - G_2 (4 b)/3 \cos[\beta] = 0; \end{aligned}$$

Уравнения равновесия всей конструкции относительно шести неизвестных $S1, Nk, S3, Nd, Xo, Yo$ представляют собой следующую систему шести линейных алгебраических уравнений

$$\text{eqns}=\{\text{eqX1},\text{eqY1},\text{eqM1},\text{eqX2},\text{eqY2},\text{eqM2}\};$$

Введем список `sub1` правил замены параметров $G1$, $G2$, $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, F , β , a , b их числовыми значениями и список X неизвестных реакций. В правилах замены переменных используется символ \rightarrow . Применяя функцию `Solve`, найдем решение системы уравнений `eqns`, в которую с помощью оператора `/.` подставлены соответствующие числовые значения параметров.

```
sub1 = {G1 → 20.7, G2 → 10.7, α1 → 0.852, α2 → 0.365,  
α3 → 0.652, F → 10.3, β → π/6, a → 1, b → 1};  
X = {S1, Nk, S2, Nd, Xo, Yo};  
Solve[eqns/.sub1, X] [[1]]
```

Результат исполнения представленных команд появится в ячейке вывода, отмеченной правой скобкой соответствующего вида

$$\{S1 \rightarrow 30.4396, Nk \rightarrow 16.465, S2 \rightarrow -9.02386, \\ Nd \rightarrow 13.9877, Xo \rightarrow -24.4667, Yo \rightarrow -6.88918\}$$

Для анализа поведения решения системы уравнений равновесия eqns при изменении какого-либо параметра (например, веса $G1$ пластины) введем список sub2, с помощью которого вес $G1$ заменяется параметром p

```
sub2 = {G1 → p, G2 → 10.7, α1 → 0.852, α1 → 0.365,  
α1 → 0.652, F → 10.3, β → Pi/6, a → 1, b → 1};
```

Введем функцию reaction(p), определяющую значение реакции $S1$ для различных значений параметра p

```
reaction[p_] := Evaluate[S1 /. Solve[eqns /. sub2, X][[1]]];
```

Здесь и далее для обозначения аргумента одних и тех же функций будем использовать в тексте статьи круглые скобки, во фрагментах программы Mathematica – квадратные скобки.

Обращение к функции reaction(p) при любом числовом значении p позволяет найти соответствующее значение реакции $S1$

```
reaction[20.7]
```

```
30.4396
```

Критическое значение $G1$ найдем как решение уравнения reaction(p) = $S1_{max}$ при $S1_{max} = 100$ кН. Соответствующие команды и результат их работы имеет вид

```
eqn = {reaction[p] == S1max} /. S1max → 100;
```

```
pcrit = p /. Solve[eqn, p][[1]]
```

```
Print["Критическое значение веса пластины = ", pcrit, " кН"]
```

```
Критическое значение веса пластины = 148.155 кН
```

Далее представлена программа построения графика функции $S1(G1)$, $G1$ принадлежит интервалу $[G1_{min}, G1_{max}]$.

Введём список sub3 правил замены переменных $G1_{min}$, $G1_{max}$, $S1_{max}$ их числовыми значениями

```
sub3 = {G1min → 20, G1max → 200, S1max → 100};
```

Определим функцию plotReaction(p), создающую изображение графика функции $S1(G1)$, точки с координатами $(G1, S1(G1))$ и других линий при числовых значениях переменных, заданных в списках sub2, sub3.

```
plotReaction[_p] := [With[{  
  lineCritReaction = {Thick, Red,  
    {Line[{G1min, S1max}, {G1max, S1max}]}},  
  lineReaction = {Thick, Line[{G1min - .0001, reaction[G1min  
    - .0001]}, {p, reaction[p]}]}},  
  pointReaction = {PointSize[Large], Red, Point[{p, reaction[p]}]},  
  If[reaction[p] > S1max,  
    EmitSound[Sound[SoundNote[0]]] /. sub3;  
  label = Style[Row[{"G1 ", p, "(кН)", "S1",  
    reaction[p], "(кН)"}], 14];  
  Labeled[Show[Graphics[  
    {lineCritReaction, pointReaction, lineReaction},  
    PlotRange → {{0, G1max}, {-1, S1max + 30}},  
    Axes → True, AxesLabel → {G1, S1}], label, Top]] /. sub3
```

В теле функции plotReaction(p) введены переменные: lineCritReaction – прямая $S1 = S1_{max}$, lineReaction – график функции reaction(p), pointReaction – точка с координатами $(p, reaction(p))$, label – заголовок графика. С помощью оператора If проверяется условие reaction(p) = $S1_{max}$. При его выполнении будет звучать звуковой сигнал, реализуемый функцией EmitSound. Функции Labeled, Show, Graphics создают снабжённое заголовком label изображение объектов lineCritReaction, pointReaction, lineReaction.

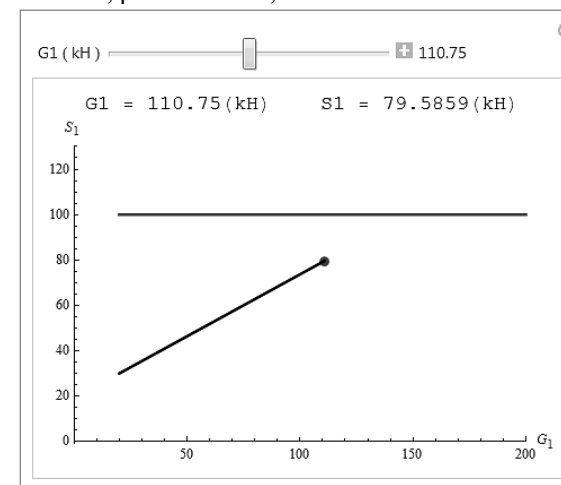


Рис. 3. График функции reaction(p)

Функция Manipulate обеспечивает интерактивное управление графиком функции reaction(p) при изменении параметра G1 (рис. 3).

```
Manipulate[plotReaction[p], {{p, G1min, "G1 (кН)"},
G1min, G1max, .01, Appearance -> "Labeled"}] /. sub3
```

В результате перемещения указателем мыши регулятора по шкале меняется параметр $G1$ и вместе с ним график функции $S1(G1)$. Значения $G1$, $S1$, соответствующие положению регулятора, можно увидеть в заголовке графика. Если реакция $S1$ превысит $S1max$, то будет слышен звуковой сигнал.

Пример решения задачи кинематики точки. Точка A , называемая далее преследователем, движется так, что вектор ее скорости в любой момент времени направлен на точку B , называемую целью (такое условие реализуется в методе погони [5, 6]). Движение точек A и B происходит в некоторой неподвижной плоскости, принимаемой за координатную плоскость Oxy . Вектор скорости цели \mathbf{u} и модуль скорости v преследователя постоянны.

Требуется найти множество значений u , при которых преследователь достигнет цель до момента её пересечения оси Ox и при этом его нормальное ускорение an останется меньше допустимого значения $ancrit$. Принять, что в начальный момент преследователь находится в начале системы координат Oxy , $v = 0.6 \text{ км с}^{-1}$, $xg0 = -30 \text{ км}$, $yg0 = 30 \text{ км}$, $\alpha = -\pi/15$, $ancrit = 0.15 \text{ км с}^{-2}$. Здесь $xg0$, $yg0$ – начальные координаты цели и α – угол между Ox и вектором скорости цели \mathbf{u} .

Решение задачи

1. Введём координаты цели $xg(t)$, $yg(t)$ как функции времени, а также функцию расстояния $\Delta r(t)$ между преследователем и целью. По условию цель совершает равномерное и прямолинейное движение и, следовательно

$$\begin{aligned} xg[t_+] &:= xg0 + u \cdot t \cdot \cos[\alpha]; \\ yg[t_+] &:= yg0 + u \cdot t \cdot \sin[\alpha]; \\ \Delta r[t_+] &:= \text{Sqrt}[(xg[t] - x[t])^2 + (yg[t] - y[t])^2]; \end{aligned}$$

Здесь $x(t)$, $y(t)$ – координаты преследователя. Проекции скорости $vx(t)$, $vy(t)$ преследователя определяются из условия коллинеарности векторов $\mathbf{rg} - \mathbf{r} = \mathbf{AB}$ и \mathbf{v} , где $\mathbf{rg} = \mathbf{OB}$, $\mathbf{r} = \mathbf{OA}$ – радиусы-векторы цели и преследователя относительно начала координат (рис.4). Пусть $\boldsymbol{\tau}^0$ – единичный вектор, коллинеарный \mathbf{AB} , тогда

$$\mathbf{v} = v \boldsymbol{\tau}^0 = \frac{v}{\Delta r} (\mathbf{rg} - \mathbf{r})$$

Проектируя последнее равенство на оси Ox , Oy , будем иметь

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{v}{\Delta r} (xg - x) \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{v}{\Delta r} (yg - y) \end{aligned} \quad (1)$$

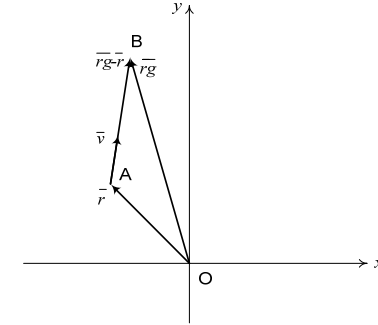


Рис. 4. Радиусы-векторы преследователя и цели

Выражения, определяющие проекции скоростей $vx(t)$, $vy(t)$ согласно (1), имеют вид

$$\begin{aligned} vx[t_+] &:= (xg[t] - x[t])v/\Delta r[t]; \\ vy[t_+] &:= (yg[t] - y[t])v/\Delta r[t]; \end{aligned}$$

Проекции ускорения $ax(t)$, $ay(t)$ преследователя получим путём дифференцирования $vx(t)$, $vy(t)$ по времени t и последующей замены dx/dt , dy/dt согласно (1)

$$\begin{aligned} ax[t_+] &:= vx'[t]/\{x'[t] -> vx[t], y'[t] -> vy[t]\}; \\ ay[t_+] &:= vy'[t]/\{x'[t] -> vx[t], y'[t] -> vy[t]\}; \end{aligned}$$

Нормальное ускорения $an(t)$ преследователя представим как модуль проекции вектора ускорения на главную нормаль его траектории

$$an[t_+] := \text{Abs}[ax[t]vy[t] - ay[t]vx[t]]/v;$$

При определении $an(t)$ учтено, что проекции единичного вектора главной нормали $\bar{\mathbf{n}}^0$ выражаются через проекции вектора скорости $\bar{\mathbf{v}}$ преследователя равенством

$$\bar{\mathbf{n}}^0 = \frac{1}{v} \{v_y, -v_x\}$$

Дифференциальные уравнения (1) и начальные условия для координат преследователя зададим в виде списка eq:

$$eq = \{x'[t] == vx[t], y'[t] == vy[t], x[0] == 0, y[0] == 0\};$$

Введём функцию $\text{anmax}(u, tf)$, определяющую максимум функции $an(t)$ в зависимости от скорости u по результатам численного интегрирования уравнений (1) на интервале времени $[0, tf]$ или $[0, te]$, где $te \leq tf$ – момент времени, в который либо преследователь достигнет цель, либо цель окажется на оси Ox .

```
anmax[u_?NumberQ,tf_] := With[{ },
  sol = DSolve[eq,{x,y},{t,0,tf},StoppingTest ->
    {yg[t] ≤ 10-4,Evaluate[Δr[t] ≤ 10-4]}];
  te = sol[[1,1,2,1,1,2]];
  NMaximize[{an[t]/.sol[[1]],0 ≤ t ≤ te},t,
    Method -> "DifferentialEvolution"][[1]] ]
```

С помощью функции NDSolve находится численное решение $x(t)$, $y(t)$ системы дифференциальных уравнений (1) при нулевых начальных условиях на интервале времени $[0, tf]$, tf – время, на котором рассматривается движение точек. Интегрирование может прекратиться при выполнении условия $yg(t) < 10^{-4}$ или $\Delta r(t) < 10^{-4}$, sol – список, содержащий решение (1), а также момент времени $te \leq tf$, равный моменту времени, в который прекратилось интегрирование. Функция NMaximize находит максимум нормального ускорения $an(t)$ преследователя по результатам численного решения (1) на интервале времени $[0, te]$. Эта величина является значением функции $\text{anmax}(u, tf)$.

Замечание. Аргумент $\text{anmax}(u, tf)$ представлен в виде $u_?NumberQ$ с целью исключения подстановки другими функциями (FindRoot) символьных переменных, приводящих к неработоспособности $\text{anmax}(u, tf)$. При обращении к $\text{anmax}(u, tf)$ функция NumberQ проверяет, является ли значение u числом. Если u число, то $\text{anmax}(u, tf)$ выполняется, в противном случае не выполняется.

2. Стремясь сосредоточить внимание читателей на методических вопросах изложения решения задач теоретической механики, авторы приводят далее несколько сокращённый вариант программы¹. Сокращения относятся к командам оформления рис. 5-8.

Введём числовые параметры задачи

```
v = .6; xg0 = -30; yg0 = 30; α = -π/15.; ancrit = .15; tf = 250;
```

Построим график функции $\text{anmax}(u, tf)$ в зависимости от u , tf фиксировано. При построении ограничимся интервалом $[0, v]$, так как известно [5, 6], что если $u \geq v$, то преследователь не догонит цель.

¹ Авторы предоставят полный текст программы всем читателям, обратившимся по адресам kapustinaom@gmail.com, martynenkoyg@gmail.com.

```
Plot[anmax[u,tf],{u,0,v},PlotRange -> All,MaxRecursion
```

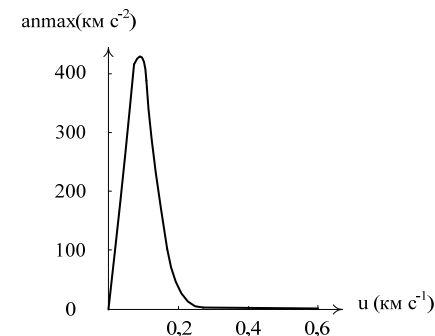


Рис. 5. График функции $\text{anmax}(u, tf)$, tf фиксировано

Можно уточнить поведение функции $\text{anmax}(u, tf)$, построив её графики в окрестности значений $u=0$ и $u=0,2$ на рис. 6. На этих же графиках изображена прямая $\text{anmax}=\text{ancrit}$.

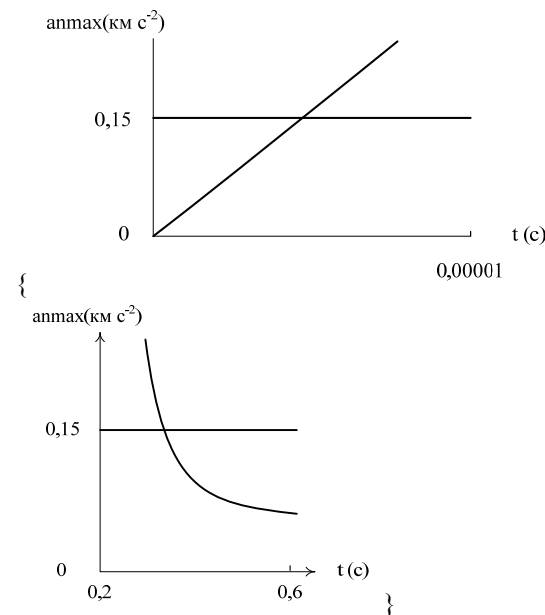


Рис. 6. Графики функции $\text{anmax}(u, tf)$ в окрестности значений $u=0$ и $u=0,2$


```
{Plot[{anmax[u,tf],ancrit},{u,0.0001},MaxRecursion->0],
Plot[{anmax[u,tf],ancrit},{u,0.2,v},MaxRecursion->0]}
```

Из графиков видно, что неравенство $\text{anmax}(u, tf) < \text{ancrit}$ выполняется при условии $u < u_1$, $u > u_2$ где u_1, u_2 – левый и правый корень уравнения

$$\text{anmax}(u, tf) = \text{ancrit} \quad (2)$$

Решим уравнение (2) с помощью функции FindRoot, которая находит корни (2) в окрестности значений $u=0$ и $u=0,3$.

```
{FindRoot[anmax[u,tf]==ancrit,{u,0.},AccuracyGoal->4],
FindRoot[anmax[u,tf]==ancrit,{u,0.3},AccuracyGoal->4]}
{{u->0.0000458694},{u->0.368054}}
```

Решение задачи имеет вид

$$0 \leq u < 5 \cdot 10^{-5} \text{ км с}^{-1}, \quad 0,368 \text{ км с}^{-1} < u < 0,6 \text{ км с}^{-1}$$

3. Далее представлена программа построения параметризованной по u анимации погони. Программа создания подобной анимация для спиралевидной траектории цели без графика нормального ускорения преследователя размещена по адресу [7].

Определим функцию $\text{graphic}(uu, tf)$, строящую траектории преследователя, цели, график $an(t)$ и другие линии и точки. Через uu – обозначен модуль скорости преследователя u . Построение реализуется по результатам численного интегрирования (1) на интервале времени $[0, tf]$ или $[0, te]$, где, как и выше, $te \leq tf$ – момент времени, в который либо преследователь настигнет цель, либо цель пересечёт ось Ox .

```
Graphic[uu_, tf_] := With[{},
u = uu;
sol = NDSolve[eq, {x, y}, {t, 0, tf}, PrecisionGoal -> 16,
StoppingTest -> {yg[y] < 0, Evaluate[Δr[t] < 10-4]}];
te = sol[[1, 1, 2, 1, 1, 2]];
plotan = Plot[Evaluate[an[t]/.sol[[1]], {t, 0, te},
PlotRange -> {{0, tanim}, {0, 1.1 ancrit}}];
tr = ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]}/.sol[[1]], {t, 0, te}];
trg = ParametricPlot[{xg[t], yg[t]}, {t, 0, te}];
points = Graphics[{Point[{x[te], y[te]}/.sol[[1]],
Point[{xg[te], yg[te]}}];
{Show[tr, trg, points, PlotRange -> {{xg0, 120}, {0, yg0}}],
Show[plotan]}
```

В теле функции $\text{graphic}(uu, tf)$ численное интегрирование (1) организовано так же, как в определении функции $\text{anmax}(u, tf)$. Здесь же вводятся переменные: sol – список, содержащий решение (1), а также момент времени te , plotan – график нормального ускорения преследователя, tanim – переменная, определяющая правую границу области, содержащей график plotan , tr , trg – траектории преследователя и цели соответственно, points – рисунок с изображением преследователя и цели в виде точек. С помощью функции Show на экране строится изображение графических объектов tr , trg , points , plotan .

После введения числового значения tanim

$\text{tanim} = 200$;

и обращения к функции $\text{graphic}(uu, tf)$

$\text{graphic}[1.2, tf]$

на экране появится рисунок, аналогичный рис. 7.

$$p = v/u = 0.5 \quad te = 120.243 \text{ с} \quad \Delta r = 62.575 \text{ км} \quad yg = 0.000 \text{ км}$$

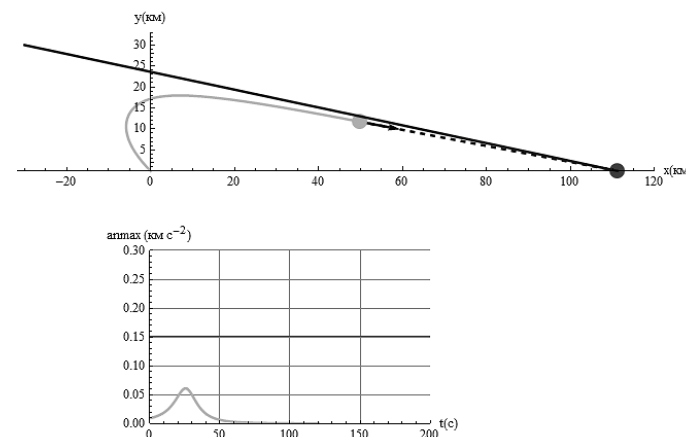


Рис. 7. Результат обращения к функции $\text{graphic}(uu, tf)$

Параметризованная по u анимация создаётся функциями Animate и Manipulate на основе построенной $\text{graphic}(uu, tf)$. При обращении к этим функциям необходимо указать интервал изменения параметра u и интервал анимации, здесь $u \in [0, 2v]$, $tf \in [0, 01]$; tanim . После исполнения оператора

```

Animate[Manipulate[graphic[u,tf],
  {{u, 0, "u"},0,2v,.01,Appearance → "Labeled"}],
  {{tf,.001,"анимация"},.001,tanim,.01,
  AnimationRunning → False, AnimationRepetitions → 1}]

```

на экране появится рисунок, аналогичный рис. 8. Перемещая мышью указатель по шкале изменения u и запуская анимацию, можно видеть режимы движения точек, отвечающие различным значениям u . При этом на нижнем графике синхронно движению будет строиться график функции $an(t)$.

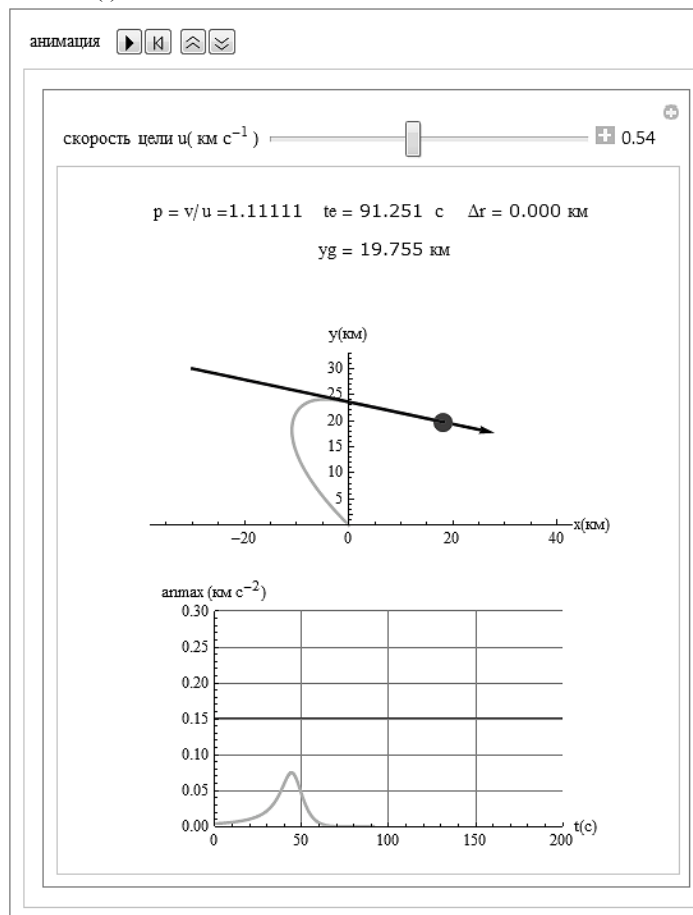


Рис. 8. Кадр анимации погони

Представленные примеры показывают, что система Mathematica позволяет проводить подробный и наглядный анализ в различных задачах курса теоретической механики.

Литература

1. Новожиллов И.В., Зацепин М.Ф. Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ. – М.: Высш. шк., 1986. – 136 с.
2. Мартыненко Ю. Г. О матричной форме уравнений неголономной механики // Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – Вып. 23. – С. 9-21.
3. Зацепин М.Ф., Капустина О.М. Решение задач статики системы с неустойчивыми связями с помощью Mathematica // Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. – М.: Изд-во МГУ, 2006. – Вып. 26. – С. 61-70.
4. Капустина О.М., Мартыненко Ю.Г. Использование анимационных технологий Mathematica 6 в задачах теоретической механики // Современные информационные технологии и ИТ-образование: III Межд. Науч.-практ. конф., М., МГУ им. М.В. Ломоносова, 6-9 декабря 2008 г.: Сб. докладов: Уч.-метод. пособие. – М.: МАКС Пресс, 2008. – С. 429-436. (<http://2008.it-edu.ru/pages/Conference-works>)
5. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения: Справочное руководство / Норден А.П. (ред.) – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 293 с.
6. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полёта беспилотных летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1973. – 616 с.
7. <http://demonstrations.wolfram.com/PursuitCurves/>

АВТОМАТИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА В ЛАБОРАТОРНОМ КОМПЛЕКСЕ ПО МЕХАНИКЕ

В статье приводятся результаты многолетней оригинальной научно-исследовательской работы, проводимой на кафедре «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана по созданию и совершенствованию автоматизированного лабораторного комплекса, используемого в учебном процессе [1-5]. Комплект лабораторного оборудования, отвечающего современным высоким уровням информационных технологий и методик организации учебного процесса, разрабатывался в соответствии с «Требованиями к материально-техническому обеспечению учебного процесса по дисциплине цикла ЕС «Теоретическая механика» высшего профессионального образования», утвержденными Министерством образования России в 2002 году.

Данный комплект включает в себя лабораторные установки по курсу теоретической механики: «Наклонная плоскость» – для изучения закономерностей плоскопараллельного движения твердого тела, «Двухстепенной гироскоп» – для исследования прецессионного движения и гироскопических моментов, «Бегуны» – для определения гироскопических давлений, «Динамические реакции подшипников» – для определения величин динамической реакции в одном из подшипников установки («плавающем»), и по курсу теории колебаний: «Физический маятник» – для исследования свободных колебаний физического маятника с учетом сил упругости и трения, «Двойной маятник» – для экспериментального и теоретического исследования колебаний парциальных систем и главных колебаний системы с двумя степенями свободы, «Вынужденные колебания механической системы с инерционным возмущением» – для демонстрации и исследования характеристик свободных и вынужденных колебаний, «Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы» – для демонстрации и изучения характеристик вынужденных колебаний твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Эти установки в настоящее время применяются в учебном процессе.

Каждая лабораторная установка представляет собой автоматизированный комплекс, содержащий экспериментальную установку, снабженную датчиками механических величин (сил, перемещений, скоростей и т.д.), аналого-цифровым преобразователем и ПЭВМ. Такой комплекс позволяет автоматизировать проводимые эксперименты – вводить и обрабатывать параметры исследуемых процессов, задавать и поддерживать режимы работы установок. В основу построения лабора-

торных установок заложен принцип выявления взаимосвязи между теоретическим описанием процесса (явления), результатами его математического моделирования и данными экспериментального исследования. Результаты экспериментов обрабатываются на ПЭВМ и отображаются в реальном масштабе времени. Используемый в данной работе подход к построению программного обеспечения лабораторных установок заключается в применении оригинальных и существующих аппаратно-программных средств автоматизации экспериментов (в частности, LabView).

Лабораторный комплекс для изучения закономерностей плоскопараллельного движения твердого тела «Наклонная плоскость» (ТМЛ-03М)», общий вид которого представлен на рис. 1а, содержит экспериментальную установку, включающую в себя две наклонные плоскости и пару цилиндрических тел с одинаковыми массой и внешними размерами, но с различными осевыми моментами инерции. Она позволяет: визуально наблюдать различие кинематических параметров движения, а также экспериментально определять эти параметры путем преобразования и обработки электрических сигналов, вырабатываемых датчиками положения центров масс тел.

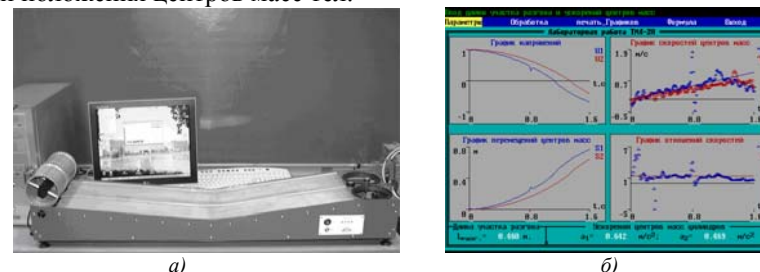


Рис. 1. Общий вид комплекса «Наклонная плоскость» (а) и результаты испытаний движения тел (б)

Графики испытаний в виде зависимостей от времени напряжений на датчиках, перемещений и скоростей центров масс тел, а также отношения этих скоростей, полученные при моделировании, показаны на рис. 1б.

Установка «Двухстепенной гироскоп» (ТМЛ-09М) для исследования прецессионного движения и гироскопических моментов (см. общий вид установки и ее схему на рис. 2) представляет собой модель двухстепенного гироскопа, которая может быть использована в качестве измерителя угловой скорости (гиротаксометр).

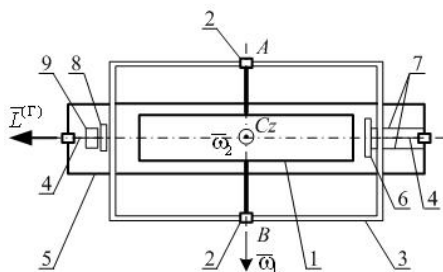


Рис. 2. Общий вид установки «Двухстепенной гироскоп» и ее схема

В данной установке маховику (ротору) 1 (см. схему установки на рис. 2) сообщается собственная угловая скорость ω_1 . Маховик установлен на оси AB и может вращаться вокруг нее на шарикоподшипниках, установленных в его корпусе. В виду малого трения в подшипниках маховика и короткого времени эксперимента можно считать $|\omega_1| = const$. Ось AB установлена в опорах 2 внутренней рамки 3. Рамка 3, в свою очередь, может поворачиваться вокруг оси 4, закрепленной во внешней рамке 5. На рамке 3 жестко укреплен пружина 6, а на рамке 5 установлены упоры 7. При повороте рамки 3 вокруг оси 4 пружина 6 опирается своим плечом на один из упоров 7.

После приведения во вращение маховика рамке 5 посредством электродвигателя, установленного в корпусе установки, сообщается постоянная угловая скорость ω_2 вокруг вертикальной оси Cz . В результате этого появляется гироскопический момент $L^{(\Gamma)}$. Рамка 3 поворачивается на небольшой угол, пропорциональный ω_2 . Этому повороту рамки препятствует момент упругих сил пружин, равный гироскопическому моменту. Поворот рамки 3 через повышающий зубчатый редуктор 8 передается потенциометру 9 – датчику угловой скорости поворота рамки 3 и таким образом определяется угловая скорость ω_2 .

Лабораторная установка «Бегуны» (ТМЛ-04М) представляет собой комплекс, в который входят собственно экспериментальная установка – модель мельничных бегунов, шарнирно закрепленных на вертикальной оси, связанной с приводом вращения (см. общий вид комплекса на рис. 3).



Рис. 3. Общий вид лабораторного комплекса «Бегуны»

С помощью данного лабораторного комплекса возможно проводить лабораторные работы по определению гироскопических давлений, создаваемых «бегунами» (связкой двух «бегунов») при вращении их с заданной угловой скоростью вокруг вертикальной оси.

Лабораторная установка комплекса оснащена специальными датчиками для замера угловой скорости вращения «бегунов» вокруг вертикальной оси (переносной угловой скорости) и осадки платформы λ , по которой они перекатываются. «Бегуны» приводятся во вращение вокруг вертикальной оси с помощью электродвигателя и, перекатываясь по платформе, получают угловую скорость вокруг собственной оси симметрии, что приводит к появлению динамического (гироскопического) давления на платформу. Платформа подпружинена относительно неподвижного основания установки.

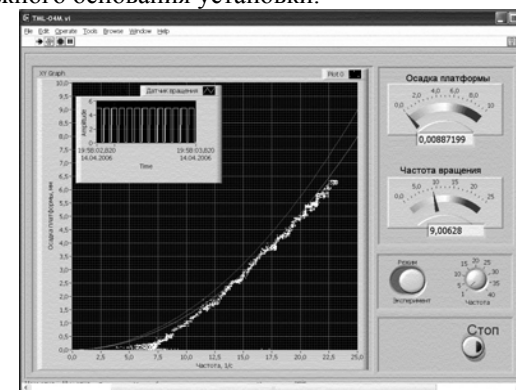


Рис. 4. Панель виртуального прибора «ТМЛ-04М.vi»

Расчетные кривые $\lambda=\lambda(\omega_2)$ представлены на экране виртуального прибора (см. рис. 4) для двух крайних значений коэффициента жесткости пружины – c_1 и c_2 , полученных экспериментально при тарировке пружины. Экспериментальные значения ω_2 и λ определяются с помощью датчиков, и экспериментальная кривая $\lambda=\lambda(\omega_2)$ строится по результатам этих измерений. На рис. 4 экспериментальные данные представлены массивом точек.

Лабораторная установка «Динамические реакции подшипников» (ТМЛ-06М) предназначена для демонстрации и исследования реакций подшипников в динамически несбалансированной механической системе, представляющей собой рамку с грузами, устанавливаемыми в различных положениях, приводимую посредством электропривода во вращение вокруг ее продольной оси симметрии (см. рис. 5).



Рис. 5. Общий вид установки «Динамические реакции подшипников»

Один из подшипников рамки установлен с возможностью перемещения в горизонтальном, перпендикулярном оси вращения направлении и снабжен центрирующими пружинами. При изменении угловой скорости вращения рамки регистрируются пропорциональные динамической реакции смещения подшипника, и строится зависимость значений реакции от угловой скорости вращения.

Теоретическая кривая выстраивается на основе измеренных параметров установки и пропорциональна квадрату угловой скорости вращения рамки вокруг ее горизонтальной оси. Экспериментальные точки и теоретическая кривая выводятся на экран дисплея ПЭВМ (рис. 6а).

Движение подшипника в реальной установке начинается при определенной угловой скорости $\omega = \omega_{кр}$, когда величина динамической нагрузки превышает трение покоя.

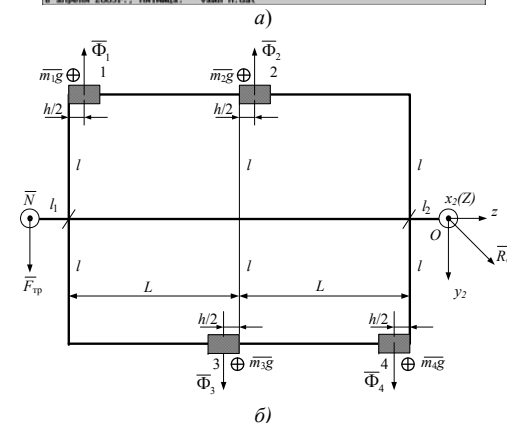
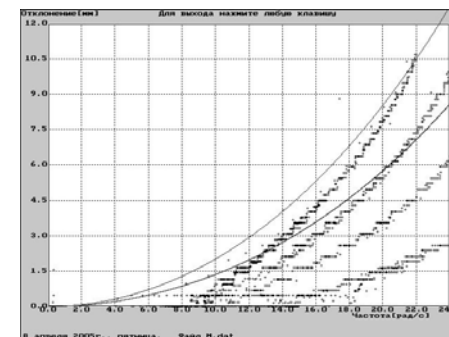


Рис. 6. Экспериментальная и расчетные зависимости и схема действующих сил.

До этого система имеет одну степень свободы, а подшипник неподвижен. Введём систему координат Ox_2y_2 (Z), где $x_2 \sim Z$ (рис. 6б). Составим уравнение моментов сил относительно оси Oy_2 (для горизонтального расположения рамки):

$$\sum_k M_{y_2}(\mathbf{F}_k) = 0$$

$$-N(2L + l_1 + l_2) + m_1g(2L + l_2 - h/2) + m_2g(L + l_2 - h/2) +$$

$$+ m_3g(L + l_2 + h/2) + m_4g(l_2 + h/2) + Mg(L + l_2) = 0$$

Далее, при $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ имеем:

$$N(2L + l_1 + l_2) = mg(4L + 4l_2) + Mg(L + l_2)$$

откуда

$$N = mg4(L + l_2)(2L + l_1 + l_2)^{-1} + Mg(L + l_2)(2L + l_1 + l_2)^{-1}$$

Составим теперь уравнение моментов относительно оси $x_2(Z)$ при условии отсутствия движения «плавающего» подшипника ($J_z \ddot{\psi} = 0$).

$$\sum_k M_{x_2}(\mathbf{F}_k) = 0$$

$$F_{\text{тр}}(2L + l_1 + l_2) - m_1 l \omega^2 (2L + l_2 - h/2) - m_2 l \omega^2 (L + l_2 - h/2) + \\ + m_3 l \omega^2 (L + l_2 + h/2) + m_4 l \omega^2 (l_2 + h/2) = 0$$

Следовательно,

$$F_{\text{тр}}(2L + l_1 + l_2) = fN(2L + l_1 + l_2) = 2ml\omega^2(L - h)$$

Отсюда получим значение

$$\omega_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{fN(2L + l_1 + l_2)}{2ml(L - h)}}$$

Лабораторная установка «Физический маятник» (ТМЛ-01М) предназначена для исследования свободных колебаний физического маятника при учете сил упругости и трения. Внешний вид и схема лабораторной установки приведены на рис. 7.

На оси подвеса маятника установлен датчик углового отклонения, позволяющий вводить в ЭВМ и отображать на экране монитора процесс колебаний

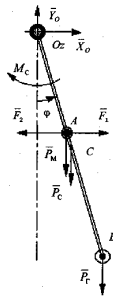
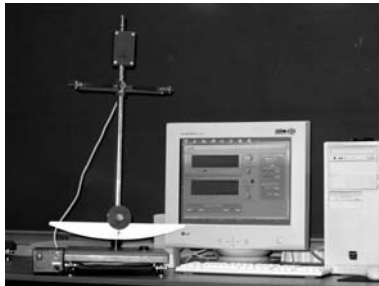


Рис. 7. Внешний вид и схема лабораторной установки ТМЛ-01М.

В установке однородный стержень OB прикреплен к вертикальной стойке неподвижного основания при помощи цилиндрического шарнира O , имеющего горизонтальную ось. К стержню OB массой m_c прикрепляется муфта A массой m_m и груз B массой m_r . При этом расстоя-

ния a и l от точек крепления муфты и груза до оси шарнира O могут изменяться при проведении экспериментов. Вместе стержень, муфта и груз образуют физический маятник, который может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости (плоскости чертежа на рис. 7). Каждая из двух пружин жесткостью k одним концом закреплена на неподвижном основании, а другим – на муфте A . Пружинам задана начальная (статическая) деформация, обеспечивающая их работу только на растяжение. В шарнирном узле O расположен датчик, фиксирующий угол φ отклонения стержня OB от вертикали. В качестве чувствительного элемента в датчике применен потенциометр (переменный резистор). Конструкция установки позволяет изменять положение оси вращения маятника так, чтобы груз со стержнем могли располагаться над шарниром O . Это осуществляется путем закрепления в неподвижном основании другого конца вертикальной стойки, на котором установлен шарнирный узел.

Чтобы записать дифференциальное уравнение движения, применяем расчетную схему, показанную на рис. 7. При этом необходимо кроме вязкого сопротивления учитывать и сухое трение в шарнире O . Тогда для полного движения можно записать уравнение:

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega^2[\varphi + \alpha \cdot \text{sgn}(\dot{\varphi})] = 0, \text{ где } \text{sgn}(\dot{\varphi}) = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot{\varphi} > 0; \\ 0, & \text{если } \dot{\varphi} = 0; \\ -1, & \text{если } \dot{\varphi} < 0. \end{cases}$$

Для численного решения дифференциального уравнения его представляют в нормальной форме Коши путем подстановок $x = \varphi$ и

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\left[\left(2\pi/T_1\right)^2 + n^2\right][x + \alpha \text{sgn}(y)] - 2ny \end{cases}$$

где T_1 – условный период затухающих колебаний, который по графику можно определить, разделив интервал времени на нескольких полных периодах, оцененный визуально (по сетке шкал графика), на число этих периодов; n – коэффициент затухания колебаний, оцениваемый по формуле $n = \delta / T_1$; $\delta = 1/m \ln(A_i / A_{i+m})$ – среднее значение логарифмического декремента колебаний; m – произвольное число полных периодов, A_i, A_{i+m} – амплитуды (максимальные отклонения) колебаний; $\left(2\pi/T_1\right)^2 + n^2 = \omega^2 = \left(2\pi/T\right)^2$.

График затухающих свободных колебаний регистрируется на экране индикатора панели виртуального прибора ТМЛ-01М.ви (рис. 8).

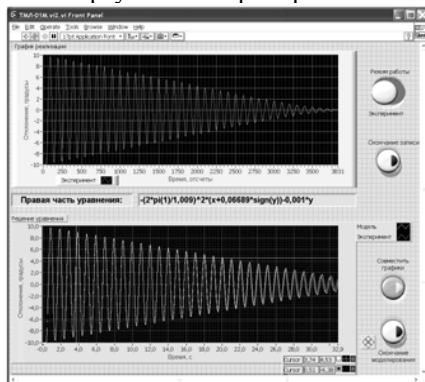


Рис. 8. Панель виртуального прибора после ввода экспериментального графика

Основной режим работы реализуется виртуальным прибором ТМЛ-01М.ви. На рис. 8 на графических индикаторах панели представлены график экспериментального процесса затухающих колебаний маятника для одного из вариантов геометрических и инерционных его характеристик, а также результат математического моделирования колебаний. В текстовое окно с заголовком «Правая часть уравнения» можно ввести в общем случае любую зависимость, в том числе нелинейную, содержащую в качестве переменных угол отклонения маятника x и его скорость y . Реализованный в данном примере вид правой части дифференциального уравнения, включает члены, обусловленные сухим и вязким трением. При этом необходимо подчеркнуть, что, с целью упрощения процедуры оценки соответствия математической модели эксперименту, в правую часть уравнения вместо периода собственных колебаний T подставляется величина условного периода затухающих колебаний T_1 , определяемого по экспериментальному графику. Это представляется вполне допустимым, поскольку значения T и T_1 в данном случае практически совпадают вследствие малости коэффициента затухания n ($n \approx 0.0005$). В приведенном примере значения периода T_1 (в секундах), угла α и коэффициента $2n$ в уравнении соответственно равны 1.009, 0.06689 и 0.001.

Лабораторная установка «Двойной маятник» (ТМЛ-02М) предназначена для экспериментального и теоретического исследования колебаний парциальных систем и главных колебаний системы с двумя степенями свободы. Общий вид этой установки приведен на рис. 9.

В данной лабораторной работе изучается динамика колебаний двойного физического маятника, состоящего из двух тонких стержней, на концах которых сосредоточены массивные тела (см. рис 9).

В работе исследуются свободные колебания маятника без учета сопротивления, рассматриваются при выбранных обобщенных координатах его парциальные системы и главные колебания. Экспериментально определяются парциальные частоты, а также экспериментально и теоретически – собственные частоты двойного маятника и коэффициенты форм главных колебаний.

Проведено обоснование и получены конкретные данные по выбору начальных условий движения маятника для обеспечения главных колебаний данной механической системы.

Запись экспериментальных данных, их обработка и графическое представление разработаны в среде LAB.VIEW.

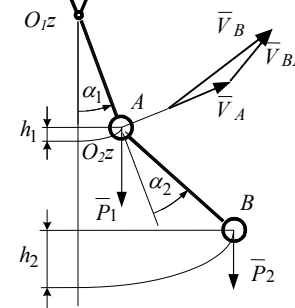
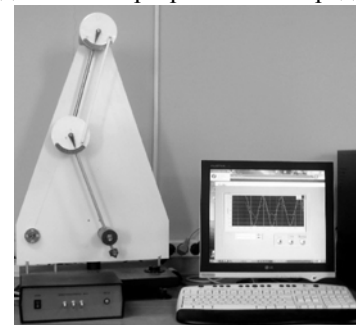


Рис. 9. Общий вид лабораторной установки «Двойной маятник» и схема маятника

Записывая выражения для кинетической и потенциальной энергий маятника, имеем:

$$T = \frac{1}{2} \left[m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2)^2 \right] \dot{\alpha}_1^2 + 2m_2 l_2 (l_1 + l_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2^2,$$

$$\Pi = \Pi(P_1) + \Pi(P_2) = m_1 g h_1 + m_2 g h_2$$

$$\text{где } P_1 = m_1 g, \quad P_2 = m_2 g, \quad h_2 = l_1 + l_2 - l_1 \cos \alpha_1 - l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2), \\ h_1 = l_1 (1 - \cos \alpha_1),$$

Для малых значений α_1 и α_2 имеем

$$h_1 \approx l_1 \alpha_1^2 / 2, \quad h_2 = l_1 + l_2 - l_1 \cos \alpha_1 - l_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) \approx \\ \approx l_2 + l_1 \alpha_1^2 / 2 - l_2 \left[(1 - \alpha_1^2 / 2)(1 - \alpha_2^2 / 2) - \alpha_1 \alpha_2 \right] \approx l_1 \alpha_1^2 / 2 + l_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 / 2$$

Потенциальная энергия окончательно примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2)l_1 + m_2l_2 \right] g \alpha_1^2 + 2m_2gl_2\alpha_1\alpha_2 + m_2gl_2\alpha_2^2.$$

Для малых колебаний системы с двумя степенями свободы при стационарных связях кинетическая и потенциальная энергии имеют формы

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2)$$

где $a_{ij}, c_{ij} (i, j = 1, 2)$ – коэффициенты инерции и коэффициенты жесткости системы.

Из сравнения полученных выражений для кинетической и потенциальной энергии с теоретическими получим коэффициенты инерции и жесткости

$$a_{11} = m_1l_1^2 + m_2(l_1 + l_2)^2, \quad a_{12} = m_2l_2(l_1 + l_2), \quad a_{22} = m_2l_2^2,$$

$$c_{11} = [(m_1 + m_2)l_1 + m_2l_2]g, \quad c_{12} = c_{22} = m_2l_2g$$

Уравнения Лагранжа второго рода для маятника имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1} - \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2} - \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2}$$

где $\partial T / \partial \alpha_1 = \partial T / \partial \alpha_2 = 0$.

Теперь дифференциальные уравнения движения двойного маятника

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{\alpha}_1 + c_{11}\alpha_1 + a_{12}\ddot{\alpha}_2 + c_{12}\alpha_2 = 0 \\ a_{12}\ddot{\alpha}_1 + c_{12}\alpha_1 + a_{22}\ddot{\alpha}_2 + c_{22}\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

примут форму

$$\begin{aligned} [m_1l_1^2 + m_2(l_1 + l_2)^2] \ddot{\alpha}_1 + [(m_1 + m_2)l_1 + m_2l_2] g \alpha_1 + \\ + m_2l_2(l_1 + l_2) \ddot{\alpha}_2 + m_2l_2g \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

$$m_2l_2(l_1 + l_2) \ddot{\alpha}_1 + m_2l_2g \alpha_1 + m_2l_2^2 \ddot{\alpha}_2 + m_2l_2g \alpha_2 = 0$$

Введя величины $\beta = l_1 / l_2$, $\gamma = m_1 / m_2$, $n^2 = g / l_2$ и разделив на $m_2l_2^2$, получим дифференциальные уравнения движения механической системы в виде:

$$\begin{aligned} [(1 + \gamma)\beta^2 + 2\beta + 1] \ddot{\alpha}_1 + [(\gamma + 1)\beta + 1] n^2 \alpha_1 + (1 + \beta) \ddot{\alpha}_2 + n^2 \alpha_2 = 0 \\ (1 + \beta) \ddot{\alpha}_1 + n^2 \alpha_1 + \ddot{\alpha}_2 + n^2 \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Для данной механической системы на рис 10 показаны первая (а) и вторая (б) парциальные системы, а также первое (в) и второе (г) главные колебания.

Полагая в полученных уравнениях последовательно $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, получаем выражения для парциальных частот

$$n_2 = n = \sqrt{\frac{g}{l_2}} \quad \text{и} \quad n_1^2 = n^2 \frac{(\gamma + 1)\beta + 1}{(1 + \gamma)\beta^2 + 2\beta + 1}$$

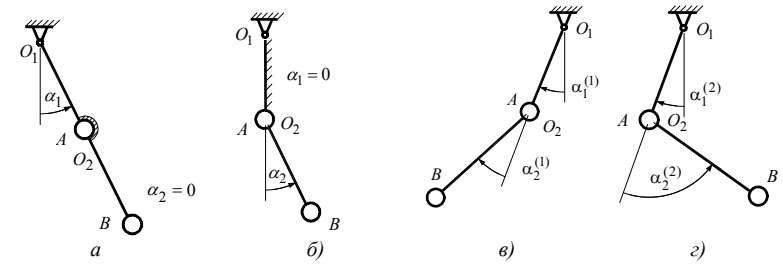


Рис. 10. Первая (а) и вторая (б) парциальные системы, первое (в) и второе (г) главные колебания

Разрешим полученные выражения относительно γ :

$$\gamma = \frac{\theta(\beta + 1)^2 - 1 - \beta}{(1 - \beta\theta)\beta} = \frac{(1 + \beta)[\theta(1 + \beta) - 1]}{(1 - \beta\theta)\beta},$$

где $\theta = (n_1 / n_2)^2 = (n_1 / n)^2 = ((\gamma + 1)\beta + 1)((1 + \gamma)\beta^2 + 2\beta + 1)^{-1}$.

В лабораторной работе определяется величина β , экспериментально определяется n_1 , экспериментально и расчетом определяется n_2 и рассчитывается θ , а по последней зависимости определяется и γ .

Главные колебания представляют собой гармонические колебания, которые совершаются по каждой координате с одинаковой частотой, главные колебания получаются в системе при специальном подборе начальных условий.

Формы колебаний определяются с помощью коэффициентов распределения (коэффициентов форм колебаний):

$$\eta_i = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)_i = - \frac{c_{11} - a_{11}\omega_i^2}{c_{12} - a_{12}\omega_i^2} = - \frac{c_{12} - a_{12}\omega_i^2}{c_{22} - a_{22}\omega_i^2} \quad \text{или}$$

$$\eta_i = - \left(\left[(\gamma + 1) \beta + 1 \right] - \left[(\gamma + 1) \beta^2 + 2 \beta + 1 \right] \frac{\omega_i^2}{n^2} \right) \left(1 - (\beta + 1) \frac{\omega_i^2}{n^2} \right)^{-1}$$

Первое и второе главные колебания определяются выбором начальных условий и могут быть изображены графически (рис. 11):

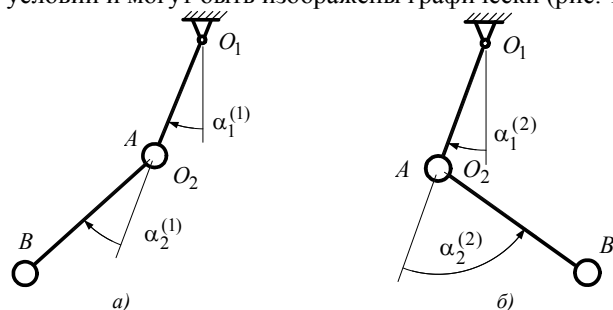


Рис. 11. Первое (а) и второе (б) главные колебания

На рис. 12 представлены записи колебаний первой и второй парциальных систем, а на рис. 13 первое и второе главные колебания двойного маятника.

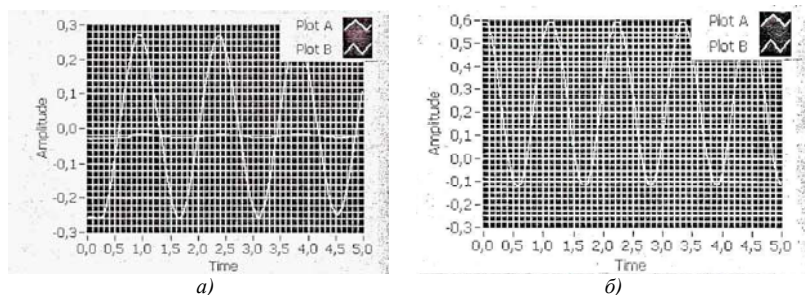


Рис. 12. Колебания первой (а) и второй (б) парциальных систем

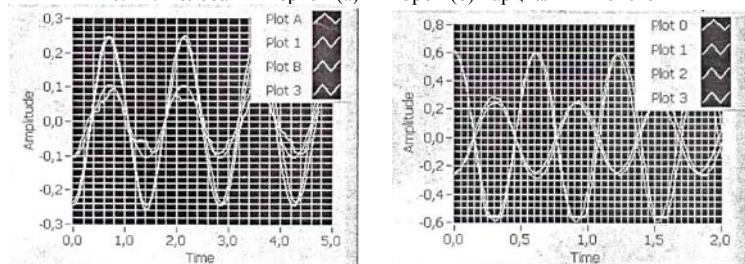


Рис. 13. Первое и второе главные колебания двойного маятника

Лабораторная установка «Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы» (ТМЛ-08М) [4] состоит из экспериментального стенда с блоком управления, АЦП и персональной ЭВМ (см. рис. 14).



Рис. 14. Общий вид лабораторной установки «Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы»

Стенд включает в себя электродвигатель, установленный на неподвижном основании и соединенный через муфту, червячный редуктор и кривошипно-рычажный механизм с регулируемым эксцентриситетом с внешним концом спиральной пружины. Внутренний конец этой пружины закреплен на валу с твердым диском, чем обеспечивается передача возмущающего воздействия от двигателя диску. Угловые отклонения рычага и диска измеряются с помощью потенциометрических датчиков, связанных с осями рычага и диска через зубчатые колеса.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний исполнительного элемента – диска (уравнение вращения диска вокруг неподвижной оси Oz) запишем в виде

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + K^2\varphi = C/I_{Oz}\varphi_0 \sin(pt + \delta)$$

где C – коэффициент жесткости пружины,

I_{Oz} – момент инерции диска относительно оси вращения Oz ,

$\varphi_0 \sin(pt + \delta)$ – угловое возмущение конца спиральной пружины,

K , p и n – круговая частота свободных (собственных) колебаний системы без учета сопротивления, частота вынужденных колебаний системы и обобщенный коэффициент сопротивления, соответственно.

Решение дифференциального уравнения для вынужденных колебаний имеет вид:

$$\varphi = a \sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

где $a = \varphi_a$ – амплитуда вынужденных колебаний системы, $\varepsilon = \psi_B - \psi_{BK}$ – разность фаз между фазой возмущения ψ_B и фазой вынужденных колебаний ψ_{BK} .

Для φ_a – максимального углового отклонения при вынужденных колебаниях диска имеем соотношение:

$$\varphi_a = \varphi_0 K^2 \left((K^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 \right)^{-1/2} = \varphi_0 \left((1 - Z^2)^2 + Z^2 Q^{-2} \right)^{-1/2}$$

Здесь $Q = K/2n$ – добротность системы; $Z = p/K$ – коэффициент расстройки.

Вводя нормирование $\varphi_a = \lambda \varphi_0$, имеем:

$$\lambda = \left((1 - Z^2)^2 + Z^2 Q^{-2} \right)^{-1/2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{K^2 - p^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \operatorname{arctg} \left(\frac{Z/Q}{1 - Z^2} \right)$$

Последние уравнения определяют, соответственно, амплитудно-частотную (АЧХ) и фазово-частотную (ФЧХ) характеристики системы, которые и отображаются на экране виртуального прибора (см. рис.15). При построении теоретической кривой используются K и n , полученные по экспериментальным данным для свободных (затухающих) колебаний.

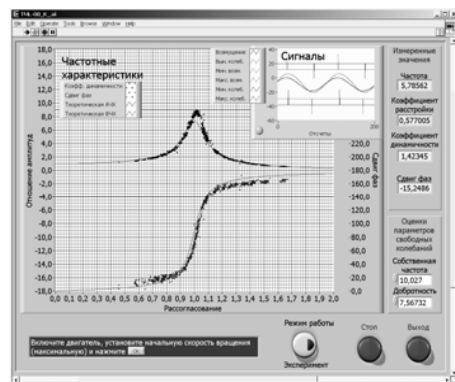


Рис.15. Амплитудно-частотная (АЧХ) и фазово-частотная (ФЧХ) характеристики системы

По рис. 15 видно, что экспериментальные точки достаточно хорошо подтверждают использование линейной математической модели для описания вынужденных колебаний диска. Максимальные относительные отклонения экспериментальных данных от теоретических зависимостей не превышают 10% (по АЧХ).

Общий вид лабораторной установки «Вынужденные колебания механической системы с инерционным возмущением» (ТМЛ-07М) приведен на рис.16. Установка включает в себя экспериментальный стенд с блоком управления. Установка позволяет получать амплитудно-частотную (АЧХ) и фазово-частотную (ФЧХ) характеристики вынужденных колебаний, а также наблюдать и анализировать особенности движения систем с одной степенью свободы.



Рис. 16. Общий вид лабораторной установки

Электромеханическая лабораторная установка (см. схему установки на рис. 17) представляет собой механическую систему, состоящую из тележки 1, перемещающейся на неподвижном основании по направляющим (рельсам) 2 в горизонтальном направлении, и установленного на тележке маятника, выполненного в виде груза 3, который может закрепляться на стержне 4 на различных расстояниях от точки O . Маятник установлен с возможностью поворота вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O и перпендикулярной направлению движения тележки. Установка приводится в движение электродвигателем 5, закрепленным на тележке. Вращение вала электродвигателя через червячный редуктор и муфту передается кривошипному механизму с регулируемым эксцентриситетом. Кривошип 6 в виде эксцентрика на муфте через тягу 7 соединен с рычагом 8, закрепленным на общей с маятником оси. Питание электродвигателя и управление скоростью его вращения осуществляется с помощью блока управления. Схема сил, действующих на установку, приведена на рис. 17б.

Таким образом, маятник совершает вынужденные колебания по закону, близкому к синусоидальному. Эти колебания и обеспечивают формирование возмущающего воздействия на тележку. Угловые отклонения маятника измеряются с помощью потенциометрического

датчика, установленного на его оси. Для измерения перемещений тележки на ней установлен индуктивный датчик. Сигналы датчиков поступают через усилитель блока управления на аналого-цифровой преобразователь.

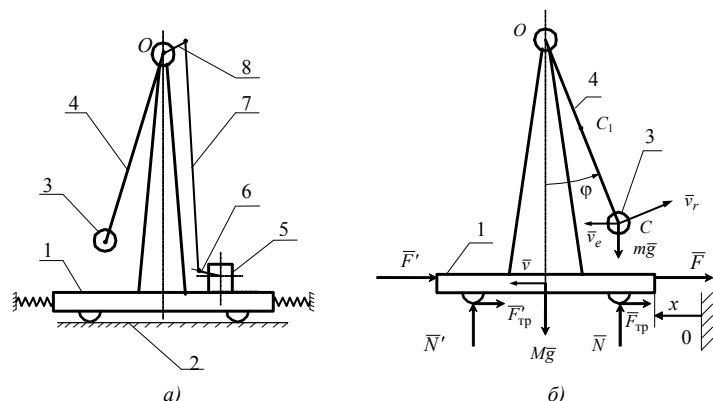


Рис. 17. Схема экспериментальной установки с инерционным возмущением(а) и силы, действующие на нее(б)

Для составления дифференциального уравнения движения тележки используем уравнение Лагранжа II рода, в соответствии с рис. 17б, получаем:

$$(M + m) \ddot{x} + 2cx = ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

При малом φ правая часть уравнения приближенно равна $ml(\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \varphi)$, причем угол φ задается принудительно, и $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \delta)$, где φ_0 , ω – амплитуда и частота кинематического параметра возмущения φ . Амплитуда φ_0 фиксируется датчиком. В силу этого уравнение примет вид

$$\ddot{x} + K^2 x = -h \sin(\omega t + \delta)$$

$$\text{где } K = \sqrt{\frac{2c}{M + m}}, \quad h = \frac{ml\varphi_0\omega^2}{M + m}.$$

Здесь K – частота свободных (собственных) колебаний всей системы без учета сопротивления.

Решение имеет вид

$$x_s = \frac{h}{\omega^2 - K^2} \sin(\omega t + \delta)$$

$$\text{где } a_s = \frac{h}{\omega^2 - K^2} \quad \text{или} \quad a_s = \frac{ml\varphi_0\omega^2}{(M + m)(\omega^2 - K^2)} = \frac{ml\varphi_0 Z^2}{(M + m)(Z^2 - 1)},$$

$Z = \omega / k$ – коэффициент расстройки.

$$\text{Введем величину } \lambda = a_s / (l\varphi_0) = m(m + M)^{-1} Z^2 |Z^2 - 1|^{-1}.$$

Теоретическая кривая $\lambda = \lambda(Z)$ строится по данной формуле. Экспериментальные точки, задаваемые координатами x_{m_i} и ω_i , наносятся на график и сравниваются с теоретической кривой. Для этого необходимо сначала получить значения

$$Z_i = \omega_i / K \quad \text{и} \quad \lambda_i = x_{m_i} / (l\varphi_0)$$

Для вынужденных колебаний тележки, вызванных возмущением инерционного типа, строят теоретические кривые АЧХ и ФЧХ, которые отображаются на экране виртуального прибора (см. рис.18). Экспериментальные данные отображаются в виде совокупности точек, соответствующих оценкам параметров (частота, амплитуда и фаза) каждого периода вынужденных колебаний при изменении частоты возмущения в некотором диапазоне частот. Вычисление амплитуды и фазы осуществляется на основе анализа сигналов, снимаемых с датчиков угла отклонения маятника и линейного перемещения тележки, т.е. сигналов возмущения и вынужденных колебаний.

На рис. 18 для одного из вариантов физических параметров установки показаны рассчитанные теоретически кривые АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний тележки, и экспериментальные значения коэффициента динамичности λ и разности фаз вынужденных колебаний и возмущающего воздействия ε , записанные в виде совокупности точек, образующих размытые линии (здесь учтено сопротивление в эксперименте).

Описанный в данной работе лабораторный комплекс позволяет экспериментально подтвердить теоретические положения ТМ и ТК. Проведение экспериментов на установках комплекса с одновременной обработкой результатов удобно и очень наглядно, при этом лабораторные работы можно совместить с аудиторными упражнениями в студенческой группе. Аналогичные комплексы создаются в МГТУ им. Н.Э. Баумана и для научно-исследовательских работ.

Созданная автоматизированная лаборатория позволяет проводить со студентами научную работу. Установки, как уже было сказано, позволяют в пределах имеющихся данных изменять некоторые параметры и проводить научные исследования.

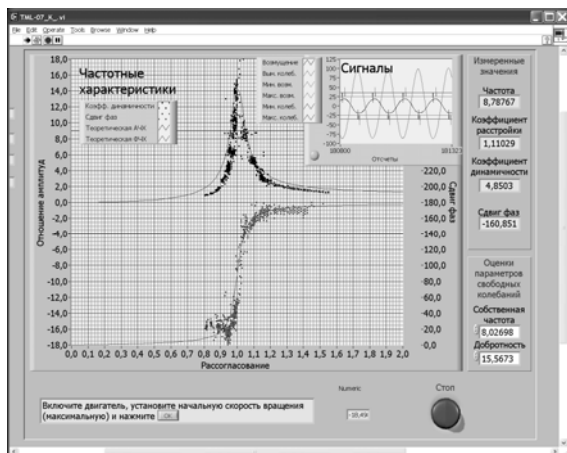


Рис.18. Теоретические и экспериментальные АЧХ и ФЧХ системы

Развитие информационных технологий в механике тесно связано с анализом физического явления (физического эксперимента). Математическое моделирование как часть информационных технологий является мощным математическим инструментом. Математическое моделирование и информационные технологии зависят от общего уровня развития техники, но все равно являются подсобным инструментом для обработки и анализа эксперимента.

В связи с этим необходимо сделать вывод, что направление в развитии информационных технологий, соединенное с физическим экспериментом, является высшей ступенью в использовании информационных технологий.

Литература

1. Дубинин В.В., Жигулевцев Ю.Н., Назаренко Б.П., Ремизов А.В. О внедрении новых информационных технологий в учебный процесс по курсу «Теоретическая механика» // Научно-методическая конференция, посвященная 35-летию образования факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – С. 65-66.
2. Дубинин В.В., Солохин Е.Н., Ремизов А.В. и др. Использование ЭВМ в учебном процессе при изучении курса «Теоретическая механика». – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 120 с., ил.
3. Дубинин В.В. Физический эксперимент в некоторых задачах механики // Труды зонального совещания-семинара заведующих кафедрами теоретической механики Центрального и Приволжского федеральных округов РФ. – Ульяновск, 2002. – С. 14-15.
4. Дубинин В.В., Жигулевцев Ю.Н., Назаренко Б.П. Автоматизированный лабораторный комплекс «Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы» // Сборник

научных статей, посвященный 125-летию кафедры теоретической механики. ИМТУ – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – С. 48-56.

5. Дубинин В.В., Витушкин В.В., Назаренко Б.П. Современный лабораторный комплекс по теоретической механике. Интеграция образования, науки и производства // Материалы секционного заседания Международной конференции IX Международного форума «Высокие технологии XXI века». – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – С. 153-156.

*М.Ю. Овчинников, С.А. Мирер,
А.А. Дегтярев, С.С. Ткачев*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Московский физико-технический институт (государственный университет)

ПОЛУНАТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК ЭЛЕМЕНТ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ ПО МЕХАНИКЕ И УПРАВЛЕНИЮ

Введение. Разработка, проектирование и создание любого устройства вне зависимости от его сложности и назначения можно разделить на следующие этапы:

- постановка задачи, формулировка основных идей;
- математическое описание идеи, построение математической модели;
- аналитическое и численное исследование математической модели;
- создание макета и необходимого вспомогательного оборудования для проведения полунатурных испытаний;
- проведение полунатурных испытаний, отработка отдельных узлов и всей системы в целом, верификация (уточнение) и корректировка основных идей и моделей
- проведение натурных испытаний, обработка результатов экспериментов, сравнение с требованиями технического задания на разработку устройства.

К сожалению, молодые специалисты обычно способны реализовать только отдельные этапы работы. Например, являясь отличным специалистом в области численного моделирования, выпускник может совсем не иметь навыков по работе с «железом» и, следовательно, ему сложно будет разработать достоверные модели и реализовать их на практике. Проблема даже заключается не только в неумении выполнить всю работу целиком, а в том, что отсутствие навыка в решении всех этапов не позволяет специалисту охватить всю задачу и установить все взаимовлияния и связи между этапами ее решения.

Переход от этапа компьютерного моделирования к реализации в «железе», по-видимому, является самым трудным. Это связано, в первую очередь, с тем, что никакая математическая модель, насколько бы точной она ни была, не способна учесть всех особенностей системы. По этой причине трудно переоценить значимость результатов полунатурного моделирования.

До недавнего времени проведения таких испытаний было под силу лишь крупным организациям и предприятиям, способных создать или закупить (надо сказать, не дешевое) необходимое для этого оборудование. С развитием миниатюрной элементной базы появилась возможность создания компактных лабораторий в исследовательских институтах и университетах, в которых используется оборудование, аналогичное применяемому в реальных системах. Примером является созданная в МФТИ в рамках Инновационной образовательной программы «Наукоемкие технологии и экономика инноваций» Приоритетного национального проекта «Образование» Лаборатория «Управление и динамика сложных информационно-механических систем». Лаборатория позволила внести инновационный вклад и качественно улучшить образовательный процесс в дисциплинах *динамика космического полета, теоретическая механика, теория управления*. На примере относительно простых систем студенты могут пройти все этапы разработки реальных информационно-механических систем.

Основными компонентами Лаборатории являются компьютерный класс и стенды для проведения полунатурного моделирования, о которых в дальнейшем и пойдет речь. Такое сочетание позволяет построить мост между «родной стихией» математика-исследователя – математическими моделями и методами их исследования и «другим берегом» – реальными приложениями моделей и методов. Остановимся подробнее на каждой из составных частей лабораторий.

1. Компьютерный класс. Для проведения компьютерного моделирования был создан компьютерный класс в составе шести рабочих мест для студентов, связанных с рабочим местом преподавателя, и оборудованных необходимым презентационным и офисным оборудованием. На компьютерах установлено несколько интерактивных программ. Одна из них – программа для численного моделирования и визуализации движения твердого тела с закреплённой точкой. Она имеет множество настраиваемых параметров системы (начальные значения углов ориентации и угловых скоростей, распределения масс и др.) и позволяет наблюдать соответствующие качественные и количественные изменения характеристик движения тела (рис.1). Это помогает начинающему исследователю глубже разобраться в классических результатах теории движения твердого тела. Кроме того, настоящая работа является базисом для отработки основных идей, которые в дальнейшем задействуются при создании комплекса демонстрационных и интерактивных лабораторных работ, посвященных различным аспектам теоретической и небесной механики [1].

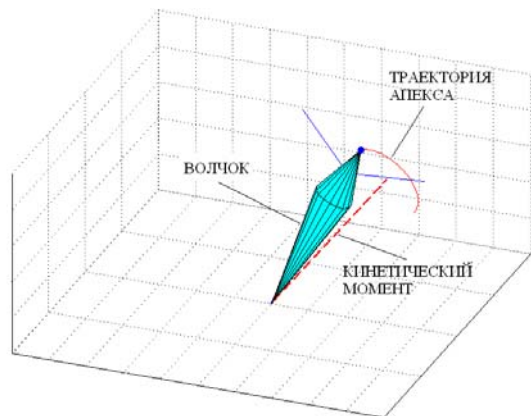


Рис.1. Визуализация движения волчка

Программа разработана с помощью интерактивного пакета. Исполняемый код написан на максимально простом и интуитивно понятном уровне, что позволяет привлечь к доработке программы и к разработке новых проектов студентов, пока еще не обладающих достаточными навыками программирования.

Другой программный пакет содержит модель движения тела на струне. Помимо начальных условий движения и параметров тела возможно задание алгоритмов управления ориентацией тела. Этот программный продукт является «мостом» между компьютерным и полунатурным моделированием, так как, по сути, это есть компьютерная модель стенда, о котором будет идти речь в следующем разделе.

2. Лабораторное оборудование. Имитационное оборудование, имеющееся в распоряжении лаборатории МФТИ «Управление и динамика сложных информационно-механических систем», было поставлено Институтом прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН в рамках Мегапроекта. В состав этого оборудования на настоящий момент входят имитатор магнитного поля, два различных по составу исполнительных и измерительных элементов макета управляемых систем и стенд для изучения работы звёздной камеры.

Имитатор представляет собой три взаимно перпендикулярные пары токовых катушек и систему их управления, включающую в себя персональный компьютер, программное обеспечение и широтно-импульсные модуляторы, преобразующие управляющие сигналы, идущие от компьютера, в электрический ток. Такой имитатор позволяет моделировать изменение магнитного поля, например, при движении

спутника по орбите Земли [2]. Он используется как самостоятельная установка для изучения моделей магнитного поля Земли, так и совместно с макетами подвижных объектов, в частности, наноспутников для имитации их управляемого движения.

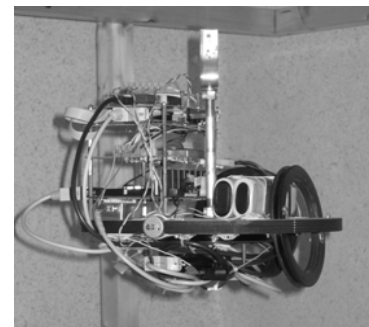


Рис.2. Макет управляемой системы

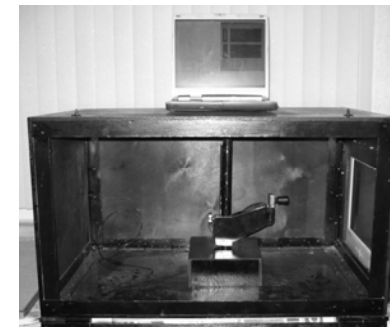


Рис.3. Стенд для изучения работы звёздной камеры

Макеты управляемых систем имеют одинаковую структуру. Оба макета представляют собой немагнитные диски (рис. 2), на которых закреплены бортовые вычислительные системы, аккумуляторы, позволяющие автономно работать в течение длительного времени, и набор измерительных и исполнительных элементов системы ориентации. Их отличие состоит в качественном составе системы ориентации. Один из макетов имеет на борту токовые катушки и магнитометр, а другой - реактивные системы (маховик и имитатор реактивных двигателей) и датчики угловой скорости. Для обеспечения необходимых степеней свободы макеты подвешивают на струне.

Стенд для изучения работы звёздной камеры состоит из имитаторов звёздного неба и звёздной камеры (рис. 3). С помощью программного обеспечения на экране симулируется картина звёздного неба, как бы видела его камера, установленная на спутнике, который движется по орбите и совершает вращательное движение относительно своего центра масс [3].

Наличие описанного выше оборудования позволило создать на их базе ряд лабораторных работ, позволяющих познакомить молодых специалистов с работой различных датчиков и актюаторов, методиками их калибровки. Кроме непосредственного знакомства с оборудованием, в ходе выполнения лабораторных работ студенты изучают разнообразные методы обработки измерений, например, пакетный фильтр и

фильтр Калмана [4], учатся работать с программным обеспечением и различными прикладными пакетами.

Лабораторные работы проводятся в рамках специализированного учебного курса, который состоит из трёх основных частей. Теоретическая часть – избранные главы теоретической механики, теории управления и динамики космического полёта, а так же лекции по ГОСТ и ЕСПД как необходимом элементе проведения любой НИОКР. Численное моделирование – создание математических, а в дальнейшем и компьютерных моделей сложных механических систем. Практическая часть – лабораторные работы, позволяющие применить полученные знания на практике.

Заключительным этапом обучения студентов является их участие в реальных проектах отечественных и зарубежных спутников, как это было с наноспутниками MUNIN, REFLECTOR, THC-0 и других, созданными с участием наших студентов и аспирантов и успешно выведенных на орбиту [5]. Обработка полетных данных и сравнение полученных результатов с требованиями технического задания, результатами аналитических и численных расчетов и полунатурных испытаний является заключительным этапом обучения, замыкающим весь образовательный цикл.

Заключение. Учебный курс, соединивший в себе различные подходы к анализу динамики механических систем и синтезу систем управления их движением, теоретические, прикладные и экспериментальные методы исследования, позволил комплексно подойти к процессу обучения и пройти со студентами основные этапы разработки и создания информационно-механических систем различного назначения, в частности, наноспутников. Предложенная структура курса может быть применена и для обучения студентов по другим тематикам, требующим тесного сочетания теоретических знаний и практических навыков в работе с инженерными приложениями.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки (Мегапроект МФТИ и Аналитическая ведомственная целевая программа «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)»), Роснауки (госконтракты в 2004-2008 гг.), РФФИ (гранты NN 07-01-92001, 07-01-00040, 06-01-00389, 03-01-00652), кафедры теоретической механики МФТИ.

Литература

1. Овчинников М.Ю., Дегтярёв А.А. Применение компьютерных технологий при изучении теоретической механики и исследовании динамики сложных механических систем: Учебно-методическое пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 56 с.

2. Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. Лабораторный стенд для полунатурной отработки систем ориентации микро- и наноспутников. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2008, №38, 32 с.
3. Овчинников М.Ю., Середницкий А.С., Овчинников А.М. Лабораторный стенд для отработки алгоритмов определения движения по снимкам звёздного неба. – Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2006. – №43. – 32 с.
4. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю. Использование одноосного гироскопа для определения ориентации макета в лабораторных условиях. – Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2008. – №11. – 32 с.
5. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Кирюшкин И.Ю., Немучинский Р.Б., Ильин А.А., Нохрина Е.Е. Опыт разработки, создания и эксплуатации магнитных систем ориентации малых спутников. – Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2002. – №53. – 32 с.

О ТЕСТИРОВАНИИ ОСТАТОЧНЫХ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ПРИ АККРЕДИТАЦИИ ВУЗа

В статье даётся описание теста и работа с программой теста, эволюции восприятия тестирования, подготовки к тестированию; говорится о модернизации тестирования и об использовании тестирования в обычной практике преподавания. В заключении отмечается, что современная база тестов Федерального Интернет-экзамена по теоретической механике мало пригодна для проверки остаточных знаний студентов при аккредитации ВУЗов.

1. Описание теста. Рабочее поле электронного бланка теста разделено на две части: левая часть – поле условий, правая – поле ответов. Нижняя часть является информационно-командным полем.

Поле условий может быть заполнено либо текстом с рисунком (подавляющая часть тестов). При этом рисунок содержит часть условия не вошедшую в текст (см. рис. 1). Либо поле условий заполнено только текстом (см. рис. 2).

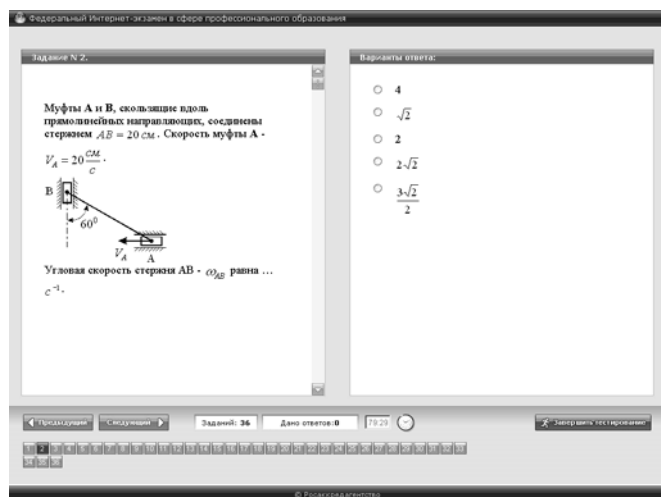


Рис. 1

Предлагается также несколько типов полей ответов:

1. содержит несколько ответов, один из которых верный и его должен выбрать тестируемый (см. рис. 1, 2);

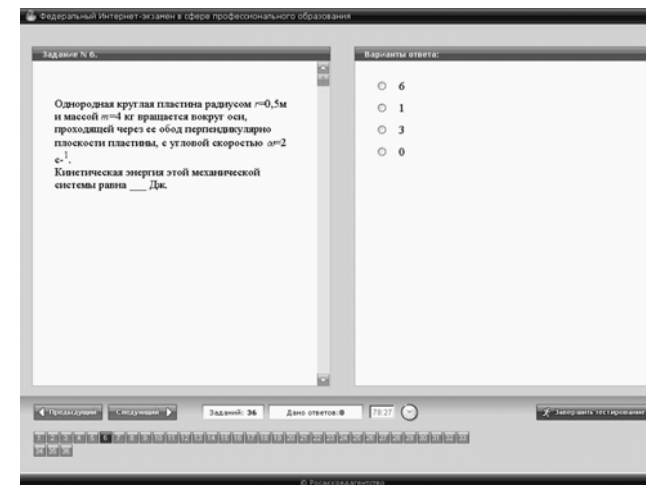


Рис. 2

2. содержит несколько пустых полей, которые надо заполнить ответами (см. рис. 3);
3. содержит только одно пустое поле, которое надо заполнить численным ответом (см. рис. 4).

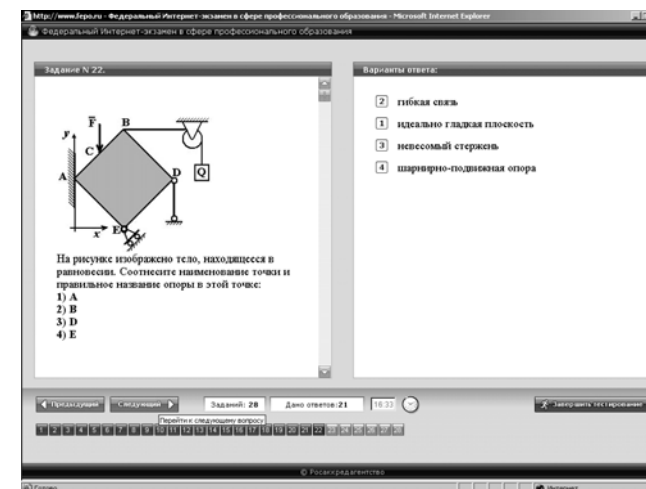


Рис. 3

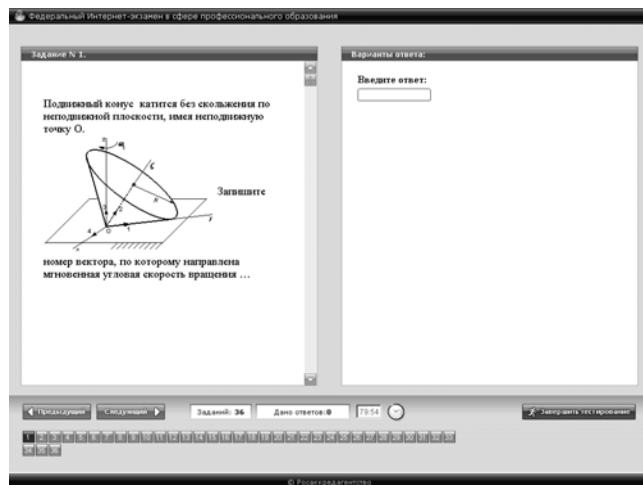


Рис. 4

В самом низу информационно-командного поля располагаются квадратики с номерами вопросов. Количество вопросов зависит от программы (специальности) студента. Красный цвет квадратика указывает на номер теста, представленного на мониторе и с которым в данный момент можно работать. Тёмно-синим цветом отмечены вопросы теста, ответы на которые тестируемый уже дал. Светло-синим цветом отмечены вопросы, для которых ответы ещё надо найти. Слева над кнопками с номерами тестов находятся две зелёные кнопки с надписями «предыдущий» и «последующий», позволяющие последовательно перемещаться по тестам назад и вперёд соответственно. Перемещаться по тестам можно и хаотически, если кликнуть кнопкой мыши по нужному номеру теста. На одной горизонтали с зелёными кнопками расположены три информационных поля белого цвета, на которых соответственно отображено: общее число вопросов, число вопросов, ответы на которые уже даны, и время, оставшееся до конца тестирования. С помощью длинной красной кнопки справа в этом же горизонтальном ряду можно закончить тестирование.

2. Работа с программой теста. Всем тестируемым студентам согласно заявке ВУЗа соответствующим подразделением Министерства науки и образования присваивается (выдаётся) логин и пароль, без введения которых студент не сможет приступить к тестированию, а в дальнейшем невозможна автоматическая идентификация этого студента программой.

После этого студент может приступить к тестированию, заполняя соответствующие места на поле ответов теста точками, галочками, буквами или числами. Заполнять тесты можно в любом порядке.

Первоначально квадратики с номерами тестов в информационно-командном поле окрашены светло-синим цветом. По мере заполнения тестов ответами соответствующие квадратики становятся тёмно-синими. Когда до окончания времени, отведённого на тестирование, ответы на все тесты будут даны (по мнению студента правильные), или когда студент считает, что на оставшиеся тесты он не сможет дать правильный ответ, или осталось менее минуты до конца тестирования, необходимо для фиксации программой результатов тестирования данного студента нажать на красную кнопку «Завершить тестирование» в информационно-командном поле.

Весь комплект тестов для каждого студента, в зависимости от его специальности, разбит на 7-9 дидактических единиц: статика, кинематика, динамика точки, динамика системы, динамика твёрдого тела, элементарная теория гироскопа, элементарная теория удара, аналитическая механика, теория малых колебаний с элементами устойчивости равновесия. Каждая дидактическая единица включает в себя четыре теста. Для получения зачёта по тестам достаточно иметь не менее 50% правильных ответов по каждой дидактической единице. Т.е. один студент может правильно выполнить 33 задания из 36 и не быть аттестованным, а другой выполнит правильно только 19 или даже 18 и будет аттестован.

На всю процедуру, состоящую из 36 заданий, отводится 80 минут, на процедуру из 28 заданий – 60 минут.

И если бы содержание и форма самих тестов позволяли бы студентам легко понять, что от них требуется, то для объективного и оперативного контроля знаний и навыков студентов вряд ли было возможно в настоящее время найти лучшую альтернативу.

3. Эволюция восприятия тестирования. Большинство людей консервативно. Этот консерватизм с возрастом только усиливается. Поэтому нулевое впечатление от рассматриваемых тестов: преподаватель-человек проводит контрольный опрос более чётко и качественно. Но с другой стороны, быстрота и объективность компьютерного контроля в какой-то мере должны были компенсировать указанные недостатки.

Первое же реальное впечатление от беглого знакомства с тестами весьма приятное: прекрасный общий дизайн, типографский шрифт, чёткие рисунки, и т.д. и т.п. При более же внимательном рассмотрении просматривается целый ряд недостатков.

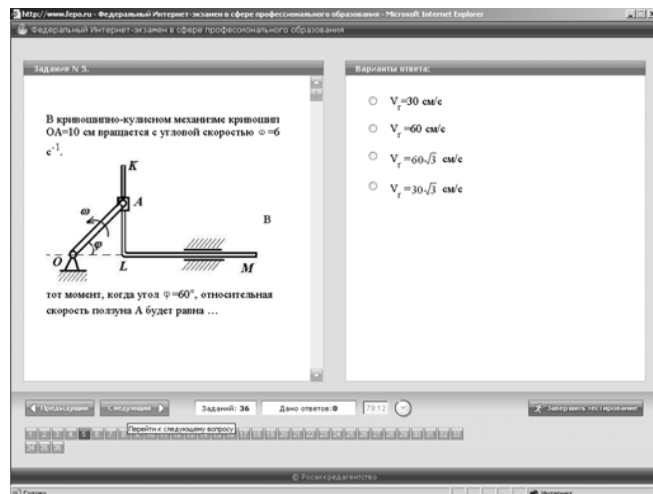


Рис. 5

Много нечёткостей в расположении текста (см. рис. 5, 6 и 7) и рисунков, мелкие буквы на рисунках (см. рис. 7) затрудняют прочтение и понимание условий тестов, а значит, увеличивают время чтения этих условий.

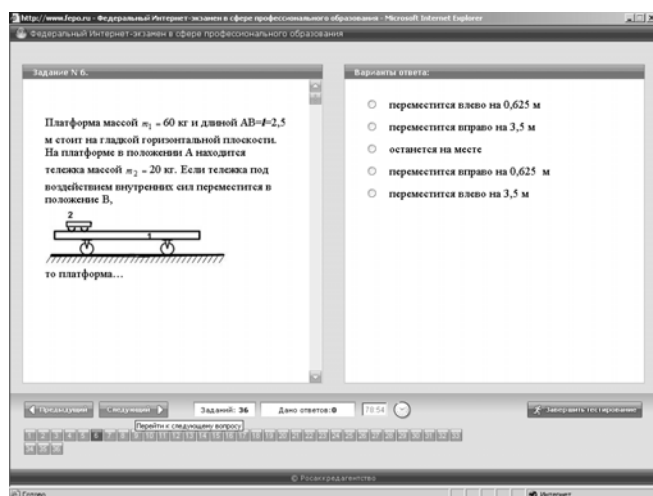


Рис. 6

В ряде тестов неполнота условий ряду студентов весьма серьезно

усложняют понимание, а в некоторых случаях вообще не позволяют выбрать правильный ответ (см. рис. 6, 7).

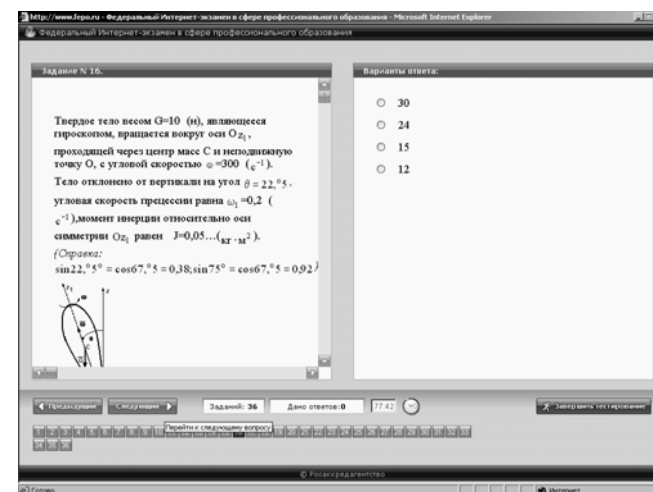


Рис. 7

В некоторых тестах правильные ответы можно получить, используя общую простую логику, а не знания по теоретической механике (см. рис. 6). Очень редко, но, тем не менее, имеются случаи, когда среди предлагаемых ответов нет правильных (см. рис. 8)!

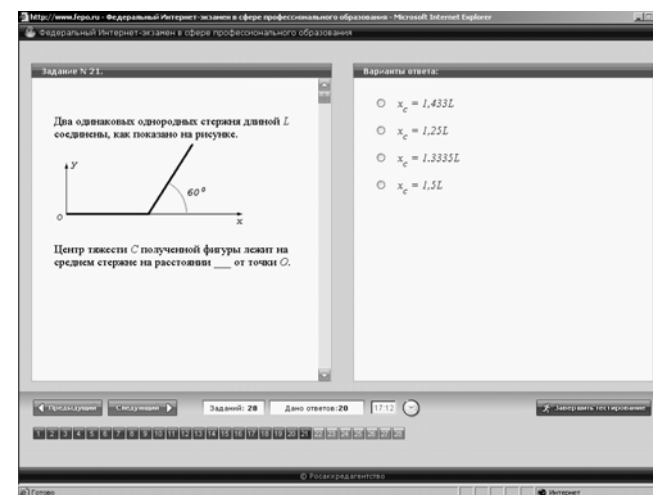


Рис. 8

Все эти факты, помимо того, что они серьезно портят настроение преподавателям и студентам, очень замедляют процесс тестирования, требуют от руководства кафедр принятия решительных мер по спасению ситуации.

4. Подготовка к тестированию. В нашем ВУЗе на кафедре механики работа по спасению ситуации велась в трёх направлениях:

- подготовка преподавателей;
- подготовка студентов;
- подготовка справочного материала.

Подготовка преподавателей свелась к многократному тестированию членов кафедры. В тренировке по теоретической механике участвовали даже профессора по сопромату и ТММ. Наш заведующий – проф. по ТММ провел не менее 20-ти циклов тестирования, чтобы время одного полного цикла тестирования не превышало 20-ти минут. Хорошо профессионально подготовленные преподаватели после подобных тренировок могут успеть протестироваться не менее 2-х, 3-х раз за время, отведённое на это программой для студентов.

Для первоначальной подготовки студентов, в форме предварительной консультации, потребовалось привести тесты к привычному виду: убрать излишний дизайн, подправить тексты условий, рисунки и т.д. После этого стало возможным с помощью видеопроектора познакомить студентов с примерным содержанием тестов, их стилем изложения; привить некоторые навыки быстрого нахождения правильных ответов. Т.е. была сделана попытка научить студентов без лишнего волнения оперативно работать с тестами вообще.

Следующим этапом подготовки студентов индивидуальная тренировка на «реальном тестировании» под руководством преподавателей. К пониманию необходимости такого этапа, по-видимому, на основании предшествующего опыта тестирования, пришли и организаторы этой процедуры. С сайта Министерства науки и образования для этих целей можно скачать все необходимые для этого материалы.

Для успешного и быстрого решения задач некоторых тестов были необходимы справочные данные. В ряде тестов такие данные были приведены самими авторами тестов, хотя и не всегда верные (см. рис. 7). В других тестах, где требовались аналогичные данные, их не было. Всё это обязало внимательно пересмотреть все доступные тесты и составить требуемые справочные данные, а затем размножить их для тестируемых студентов.

5. Окончательная оценка тестирования. Окончательная оценка тестирования сложилась по прошествии некоторого времени после

официального Федерального Интернет-экзамена по теоретической механике в нашем ВВУЗе. Выяснилось, что в тестах Федерального Интернет-экзамена количество недочётов не меньше, чем в тестах предварительного этапа. Список огрехов в тестах по теоретической механике, отмеченных преподавателями нашей кафедры, значительно больший, чем приведён в данной статье. В статье из-за недостатка места описаны лишь наиболее характерные и значимые недостатки. Недочёты, которые наблюдались в процессе Интернет-экзамена, к сожалению, не были зафиксированы из-за дефицита времени (надо было оперативно расшифровывать курсантам условия задач тестов). Благодаря большой предварительной работе преподавателей (не запланированной заранее и не учтённой в дальнейшем) обучаемые нашего ВВУЗа в целом успешно сдали Интернет-экзамен. Без предварительной работы преподавателей и их активной помощи во время тестирования в форме расшифровки условий задач положительный результат тестирования был бы в принципе невозможен.

Из изложенного выше следует, что если в ВУЗе не проведут должную предварительную подготовку к тестированию, то результат будет провальным. Статистика, которая приводится на сайте www.fero.ru, это и показывает. Иными словами, результаты тестирования показывают не столько уровень подготовки студентов в ВУЗе, сколько качество материалов и методики использования тестов. Поэтому в ближайшее время *для улучшения результатов прежде всего необходимо улучшить материалы тестов и методику их использования.*

6. Выводы и пожелания. Идеи, заложенные в процедуру тестирования, разумные, современные и в целом прекрасные. Но из всего сказанного выше видно, что их практическая реализация оставляет желать много лучшего.

Для свободного понимания условий во время тестирования разумно, чтобы студенты уже до этого работали с подобными тестами. Иными словами, тестирование должно быть для студентов привычной процедурой в процессе обучения. Таким образом, тестирование должно стать в любом ВУЗе естественным текущим контролем знаний и навыков студентов. Во многих ВУЗах текущий контроль давно уже является нормой. Реализацией такого контроля с помощью компьютера в настоящее время занимаются преподаватели многих ВУЗов. Министерству науки и образования целесообразно было бы только ввести некоторые стандарты в этот процесс и активно поощрять его.

На кафедре механики военной академии уже несколько лет работают над созданием подобных тестов. Но в отличие от рассмотренных

выше тестов, в большинстве тестов кафедры правильный ответ не выбирают, а вычисляют. Такая метода исключает попытки угадывания ответов. В 60-х годах прошлого столетия метод выбора ответа из нескольких предлагаемых педагогической наукой нашей страны был признан как один из худших.

Процесс создания тестов – это многоплановый процесс. В нём должны принимать участие не только преподаватели теоретической механики, но и профессиональные программисты, художники (художники-дизайнеры и чертёжники).

Преподаватели теоретической механики должны заботиться не только о содержании тестов, но должны следить как за самим текстом, так и за графическим оформлением. К решению вопросов по оптимальному размещению материала (текста, формул и рисунков) необходимо привлекать профессиональных дизайнеров.

Программисты, создающие оболочку теста, должны позаботиться о гибкости этой оболочки: размеры полей условий и ответов должны быть изменяемыми в зависимости от размеров условий и ответов конкретного теста. В дальнейшем эти люди должны постоянно напоминать об этом остальным участникам создания тестов.

Художники-чертёжники совместно с авторами условий должны хорошо продумать соотношение пропорций отдельных деталей и их обозначений на рисунках, место расположения рисунка относительно текста. Так, буква «В» на рис. 5 первоначально воспринимается как элемент схемы, а не текста. На рис. 7 отдельные буквы схемы настолько малы, что трудно разобрать какие это буквы. Всё это весьма серьёзно мешает пониманию условия.

Авторы любых текстов хорошо знают, что написать текст идеально сразу практически невозможно. Наиболее ярко этот тезис демонстрируется на рис. 8. В этом задании, содержащем только две фразы, вторая фраза почти совсем не сочетается с первой фразой и рисунком. Найти здесь правильный ответ в принципе невозможно. Поэтому в коллективе, создающем комплект тестов, обязательно должны работать как научный, так и технический редакторы.

Объективность тестирования обусловлена не в последнюю очередь секретностью содержания условий тестов. Конфиденциальность тестирования конкретного ВУЗа может (а по взглядам автора статьи *должна*) быть обеспечена большой базой условий тестов. Примером может служить уже имеющаяся и используемая на кафедре теоретической механики Московского энергетического института программа-генератор задач, создающая тексты условий и ответов по 50-ти (!) те-

мам статики, кинематики и динамики, соответствующих уровню курсовых работ (автор программы и текстов задач М.Н. Кирсанов). Программа содержит по каждой из тем сотни тысяч вариантов задач. Подробности о программе и задачах можно найти в Интернете на сайте www.academiaxxi.ru.

Из всего сказанного следует, что современная база тестов Федерального Интернет-экзамена по теоретической механике для проверки остаточных знаний студентов при аккредитации ВУЗов, по мнению автора статьи, является нулевым (начальным, пробным) вариантом. Для получения добротных тестов, позволяющих реально дать объективную оценку остаточных знаний студентов по теоретической механике при аккредитации ВУЗа, необходим коллектив творческих людей, преданных делу (а лучше два – три конкурирующих), который будет работать под контролем Методического Совета по теоретической механике при Министерстве науки и образования РФ, по крайней мере, в течении десяти-пятнадцати лет, создавая базу тестов и методику их использования.

УДК 531.01

Ю.П. Смирнов, В.К. Тарасов
Тульский государственный университет

ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА УСКОРЕНИЙ

Рассматривается движение плоской фигуры в плоскости чертежа. Определяется положение мгновенного центра ускорений (МЦУ) по ускорениям двух точек. Доказывается метод Н.Е. Жуковского и предлагаются новые методы определения МЦУ.

Мгновенным центром ускорений при произвольном непоступательном движении плоской фигуры называется та точка фигуры, абсолютное ускорение которой в данный момент равно нулю. В известных учебниках по теоретической механике (кроме [1]) дается только один метод определения МЦУ. Согласно этому методу требуется знать угловую скорость, угловое ускорение фигуры и вектор ускорения одной точки, чтобы найти угол α . Затем вектор ускорения точки фигуры поворачивается на этот угол и по известной формуле находится центр ускорений. Если заданы ускорения двух точек, то и в этом случае для определения угла необходимо знать угловую скорость и угловое ускорение фигуры или их отношение ε/ω^2 .

1. В то же время существует малоизвестный метод определения МЦУ, предложенный Н.Е. Жуковским [1]. Он состоит в следующем. Пусть известны векторы ускорения двух точек A и B плоской фигуры. На продолжении векторов ускорений получаем точку C . Через три точки A , B и C проводим окружность.

Дугу AB делим пополам точкой D . Хорду AB делим на части, пропорциональные модулям ускорений

$$\frac{AE}{BE} = \frac{a_A}{a_B} \quad (1)$$

Через точки D и E проводим прямую, которая пересекает окружность в точке Q . Точка Q – мгновенный центр ускорений.

Доказательства этого метода в литературе нет. Для доказательства соединим точку Q с точками A и B (рис.2).

Исходим из того, что ускорение любой точки фигуры образует один и тот же угол α с прямой, соединяющей точку с МЦУ, угол α не превышает 90° и ускорения точек пропорциональны их расстояниям до

МЦУ. Так как углы QAC и QBC опираются на одну и ту же дугу, то они равны. На рис.2 эти углы обозначены через α . Таким образом, первое условие выполнено.

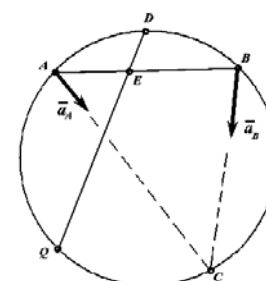


Рис. 1

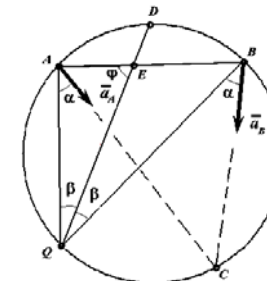


Рис. 2

Условие $\alpha \leq 90^\circ$ позволяет определить, по какую сторону от хорды AB должна находиться точка D . Как видно из рис.2, второе условие выполнено. Для доказательства выполнения третьего условия рассмотрим треугольники QAE и QBE . Углы QAE и BQE равны, так как опираются на равные дуги. На рис.2 они обозначены через β . Угол AEQ обозначим через φ .

Из треугольника AQE

$$\frac{AQ}{\sin \varphi} = \frac{AE}{\sin \beta} \quad (2)$$

Из треугольника QBE

$$\frac{BQ}{\sin \varphi} = \frac{BE}{\sin \beta} \quad (3)$$

Разделив (2) на (3), получим

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{AE}{BE} \quad (4)$$

Из (4) с учётом (1) находим

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{a_A}{a_B}$$

Таким образом, и третье условие выполнено.

2. Далее поставим такую задачу. Найдены ускорения двух точек фигуры, и векторы ускорений изображены на схеме в некотором масштабе (рис.3). Необходимо найти МЦУ без каких-либо вычислений. Принимая за полюс точку A , запишем теорему сложения ускорений для точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

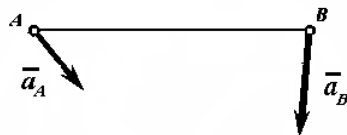


Рис. 3

Этому уравнению соответствует геометрическое построение (рис. 4)

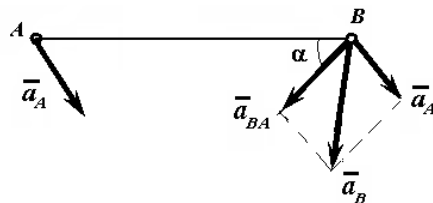


Рис. 4

Угол α есть угол между направлением AB и линией действия вектора \vec{a}_{BA} . Остается повернуть векторы ускорений точек A и B на угол α по часовой стрелке и в точке пересечения полученных линий найдем МЦУ. Направление поворота определяется знаком момента вектора \vec{a}_{BA} относительно точки A (рис. 5).

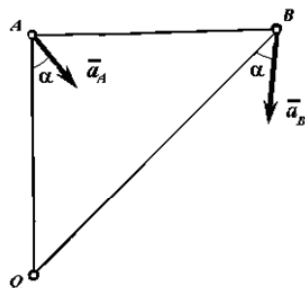


Рис. 5

Этот метод имеет один недостаток. Угол α необходимо чем-то измерять или находить с помощью дополнительных построений. Поэтому предлагаем еще один метод построения МЦУ.

3. Изобразим две точки A и B , их ускорения, точку C пересечения линий действия ускорений и окружность, проходящую через точки A ,

B и C (рис. 6). Переносим вектор ускорения точки A в точку B и соединяем концы векторов ускорений. Получаем линию MN . Из точки A проводим прямую, параллельную MN до пересечения с окружностью в точке D . Таким образом, построен угол α и дуга BD , на которую он опирается. Далее с помощью циркуля строим дугу $CQ = BD$. Причём дугу CQ необходимо строить так, чтобы момент ускорения любой точки относительно точки Q был одного знака. Точка Q – мгновенный центр ускорений.

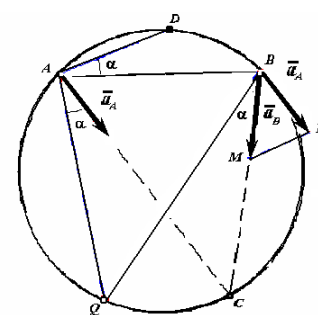


Рис. 6

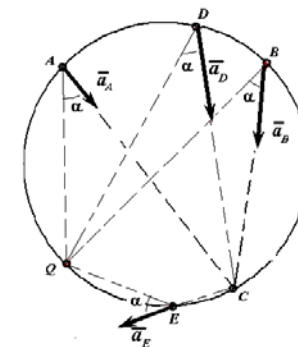


Рис. 7

Рассмотрим подробнее свойства окружности, проходящей через точки A , B и C (рис. 7).

Для построения этой окружности достаточно знать направления ускорений двух точек. При любом соотношении модулей этих ускорений МЦУ может лежать только на этой окружности. Действительно, повернув ускорения двух точек на угол α , получаем мгновенный центр ускорений, а так как равные углы опираются на равные дуги, то центр ускорений обязательно должен лежать на указанной окружности.

Далее заметим, что все точки, расположенные на этой окружности, имеют ускорения, проходящие через точку C (рис. 7). Таким образом, указанная окружность является геометрическим местом точек плоской фигуры, для которых векторы ускорений (или их продолжений) пересекаются в одной точке. Указанная окружность не является ни поворотным кругом [2] (кругом Лагира), ни кругом перемены (кругом Бресса).

В связи с этим рассмотрим простой пример (рис. 8). Диск катится по прямолинейной направляющей. Известны скорость центра, ускорение центра и радиус диска. Пусть для определённости радиус диска $R = 1$, ускорение центра $a_C = 1$, скорость центра $V_C = 1$. Окружность

диска с центром в точке C есть не что иное, как подвижная центроида. Подвижная центроида катится по прямой линии, т.е. по неподвижной центроиде. Точка P есть мгновенный центр скоростей – точка касания центроид.

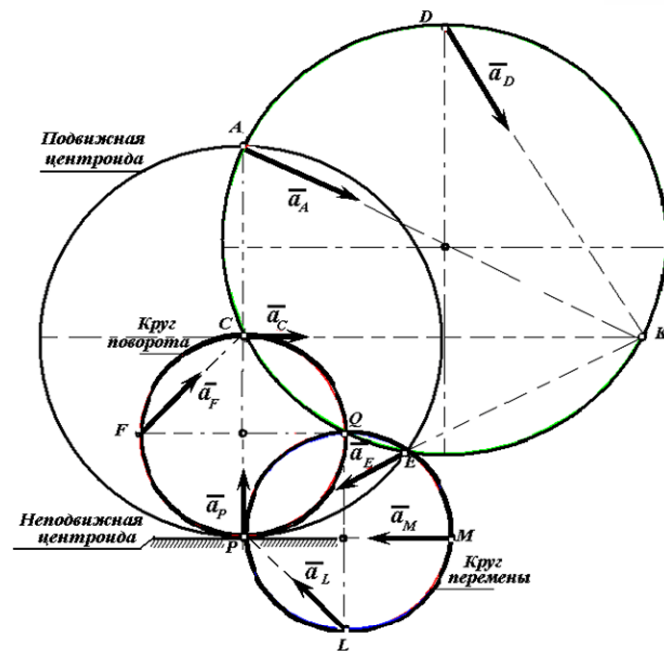


Рис. 8

Ускорение мгновенного центра скоростей не зависит от углового ускорения и направлено по общей нормали к центроидам. Находим мгновенный центр ускорений Q диска. Для этого поворачиваем векторы ускорений точек C и P на угол 45° . Окружность, касательная центроидам в точке P и проходящая через центр ускорений, есть круг поворота. Эта окружность характеризуется тем, что ускорения всех её точек направлены по касательным к траекториям этих точек. Окружность, нормальная к центроидам в точке P и проходящая через центр ускорений, есть круг перемены. Эта окружность характеризуется тем, что ускорения всех её точек направлены по нормальям к траекториям этих точек.

Возьмем какую-нибудь точку колеса, например, A , и проведем окружность через точки C , Q и A (рис. 8). Эта окружность позволяет лег-

ко построить ускорение точки A и других точек (D и E), поскольку линии действия ускорений должны пересекаться в точке K . Эта окружность не является ни кругом поворота, ни кругом перемены. Ускорения всех точек этой окружности имеют и касательные, и нормальные составляющие.

Основные результаты, полученные в данной работе, сформулируем в следующем виде:

1. Любые две точки плоской фигуры, точка пересечения их ускорений и мгновенный центр ускорений лежат на одной окружности.

2. Ускорения всех точек, лежащих на этой окружности, пересекаются в одной точке той же самой окружности.

Аналогичными свойствами обладают и скорости точек плоской фигуры.

3. Любые две точки плоской фигуры, точка пересечения их скоростей и мгновенный центр скоростей лежат на одной окружности.

4. Скорости всех точек, лежащих на этой окружности, пересекаются в одной точке той же самой окружности.

Литература

1. Рожковский В.Д., Богородицкий Д.В. Курс теоретической механики. Кинематика. / Смирнова Ю.П., Тарасова В.К. (ред.) – Тула.: Изд-во ТулГУ, 2003. – 244 с.
2. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика – М.-Л.: ГИТТЛ, 1952. – 811 с.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УДАРА С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

1. Задача №1. (Задача № 16.21 из [1]).

В цирковом аттракционе используется подкидная доска, на правый конец которой с высоты H падает шар A массы M_1 и остается на доске в точке контакта. На другом конце доски находится шар B массы M_2 , который, приобретая скорость, отделяется от доски при повороте ее вокруг горизонтальной оси. Момент инерции доски относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через точку O , равен J , угол наклона доски к горизонту равен α .

1) Определить наибольшую высоту подъема шара B , если $OA_1 = l_1$, $OB = l_2$.

2) Решить задачу, если шару B сообщена в конце удара относительная по отношению к доске скорость v , направленная перпендикулярно к доске.

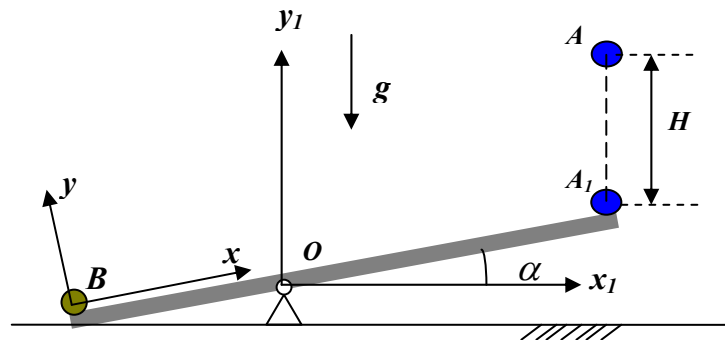


Рис. 1

Замечание 1. Фраза, выделенная в условии задачи, нуждается в уточнении. Дело в том, что на шар B наложена существенно односторонняя геометрическая связь, а поэтому процесс и момент схода с этой связи (о котором идет речь в формулировке задачи) должен быть определен строго, как с формальной, так и с физической точек зрения. В приводимом ниже решении предпринята попытка изложить этот во-

прос научно-методически так, чтобы сделать его понятным для студентов ВУЗа.

Замечание 2. Пункт 2) в формулировке задачи также нуждается в уточнении. Непонятно, как сообщить шару B дополнительную скорость в конце удара. Наверное, речь идет о той дополнительной скорости, которую сообщает своему телу цирковой акробат (шар B) в момент удара, отталкиваясь от доски.

Решение задачи. а) Доударное состояние системы известно: доска и шар B в покое, т.е. $\omega^- = 0$, где ω^- – угловая скорость доски до удара, шар A непосредственно перед ударом имеет вертикальную скорость $v_1^- = \sqrt{2gH}$ (эта скорость определяется из закона полной механической энергии для процесса свободного падения шара A с высоты H : $M_1 g H = \frac{1}{2} M_1 (v_1^-)^2$). Послеударное состояние системы также опреде-

лено: доска вместе с шарами A и B начинает поворачиваться вокруг точки O . Неизвестна только послеударная угловая скорость этого поворота, которую обозначим ω^+ .

Подчеркнем еще раз, что непосредственно после удара оба шара сохраняют свой контакт с доской (шар A по условию «прилипает к доске», а шар B может оторваться от доски только при дальнейшем ее вращении!). Для определения ω^+ , применяем теорему об изменении кинетического момента при ударе относительно точки O . Выбор точки O связан с тем, что внешние ударные импульсы возникают только в шарнире O , т.е. их момент относительно этой точки равен нулю, а поэтому кинетический момент всей системы относительно точки O сохраняется.

До удара имеем

$$K_O^- = M_1 v_1^- l_1 \cos \alpha,$$

после удара имеем

$$K_O^+ = J \omega^+ + M_1 \omega^+ l_1^2 + M_2 \omega^+ l_2^2$$

Поскольку $K_O^- = K_O^+$, получим:

$$\omega^+ = \frac{M_1 \sqrt{2gH} l_1 \cos \alpha}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2} \quad (1)$$

б) Исследуем теперь вопрос отрыва шара B от доски. Будем предполагать, что доска абсолютно шероховатая, или шар помещен в небольшом желобе доски, чтобы исключить возможность перемещения его вдоль доски. Введем систему координат Bxy с началом в точке B и

осью y , перпендикулярной доске (рис. 1). Основным критерием безотрывного движения груза B на доске является положительность нормальной (т.е. вдоль оси Bu) силы, действующей на шар со стороны доски. Запишем уравнение динамики для груза B вдоль оси y при безотрывном движении (т.е. вместе с доской):

$$M_2 \dot{\omega} l_2 = N - M_2 g \cos \varphi \quad (2)$$

где N – нормальная реакция, $\dot{\omega}$ – угловое ускорение доски, φ – угол наклона доски к горизонту: $\varphi \in (-\alpha, \alpha)$. Здесь мы для простоты предполагаем, что граничные положения доски симметричны при опоре на A или B , т.е. угол наклона φ доски к горизонтали меняется в пределах от $-\alpha$ до $+\alpha$. Этого всегда можно добиться, подняв или опустив уровень пола под точкой A (или B).

Пусть M_3 – масса доски, x_3 – координата центра ее масс в системе Bxu , тогда уравнение моментов для системы относительно точки O в послеударном движении имеет вид:

$$\dot{\omega} (J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2) = \quad (3)$$

$$= M_1 g l_1 \cos \varphi - M_2 g l_2 \cos \varphi + M_3 g (x_3 - l_2) \cos \varphi$$

Из (2) и (3) получим следующую формулу для N :

$$N = M_2 g \cos \varphi + \frac{M_2 l_2 g \cos \varphi}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2} [M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3 (x_3 - l_2)] \quad (4)$$

Изучим следующие две возможные ситуации:

1°. отрыв происходит сразу, т.е. при $\varphi = -\alpha$;

2°. отрыва при $\varphi \in [-\alpha, \alpha)$ нет, и он происходит «естественным» образом при $\varphi = \alpha$, когда конец A доски ударится об опорную горизонтальную плоскость, и доска начнет обратное вращение.

Из формулы (4) видно, что случай 1° имеет место при выполнении неравенства:

$$J + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 + M_3 l_2 (x_3 - l_2) < 0 \quad (5)$$

При выполнении противоположного неравенства

$$J + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 + M_3 l_2 (x_3 - l_2) > 0 \quad (6)$$

будет иметь место случай 2°.

Пусть, например, доска является однородной, тогда:

$$x_3 = \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad J = M_3 \frac{(l_1 + l_2)^2}{12} + M_3 \frac{(l_1 - l_2)^2}{4}.$$

Неравенства (5) и (6) принимают вид:

$$\frac{1}{6} M_3 (2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2) + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 < 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{6} M_3 (2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2) + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 > 0 \quad (8)$$

Из этих формул видно, что если M_3 достаточно велико и $2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2 < 0$ ($l_2 > 2l_1$!), то груз B отскочит сразу, а если $l_2 < 2l_1$, то груз B отскочит лишь в момент удара конца A доски о землю!

Пусть выполнено неравенство (5). Тогда груз B , получив скорость $v_2^+ = \omega^+ l_2$ перпендикулярно к доске, сразу после удара не будет контактировать с доской и полетит по параболе влево от доски (т.к. предположение контакта приводит к отрицательности нормальной реакции, действующей на шар B вдоль оси Bu). Наибольшую высоту его подъема мы определим опять же из закона сохранения полной механической энергии, записанного в неподвижных осях $Ox_1 y_1$ (рис. 1):

$$\begin{aligned} \frac{M_2}{2} [(v_{2x_1}^+)^2 + (v_{2y_1}^+)^2] &= M_2 g y_{\max} + \frac{M_2}{2} (v_{2x_1}^+)^2 \Rightarrow \\ y_{\max} &= \frac{1}{2g} (v_{2y_1}^+)^2 = \frac{1}{2g} (\omega^+)^2 l_2^2 \cos^2 \alpha = \\ &= H \cos^4 \alpha \left(\frac{M_1 l_1 l_2}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Этот же ответ приведен в задачнике [1], правда, без неравенства (5).

Пусть выполнено неравенство (6). Тогда груз B оторвется лишь при $\varphi = \alpha$, т.е. в момент удара конца A доски о землю. В этот момент он будет иметь скорость $v_2 = \omega_2 l_2$, где $\omega_2 \neq \omega^+$, $\omega_2 > \omega^+$. Причем эта скорость будет перпендикулярна доске и направлена вправо. Скорость ω_2 мы найдем из закона сохранения полной механической энергии для системы «доска + шары A и B »:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2) [\omega_2^2 - (\omega^+)^2] &= \\ &= M_1 g l_1 2 \sin \alpha - M_2 g l_2 2 \sin \alpha + M_3 g (x_3 - l_2) 2 \sin \alpha \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\omega_2^2 = (\omega^+)^2 + 4g \sin \alpha \frac{M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3 (x_3 - l_2)}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2} \quad (10)$$

Теперь нетрудно найти максимальную высоту подъема. Ясно, что при малых α эта высота количественно будет мало отличаться от уже

полученного ответа (9). Однако качественно результаты отличаются сильно: в одном случае шар B полетит влево, а в другом – вправо.

Отметим еще одну возможную ситуацию, которая может реализоваться в рассматриваемом случае выполнения неравенства (6). Если вместе с неравенством (6) выполнено неравенство

$$M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3 (x_3 - l_2) < 0 \quad (11)$$

то ситуация 2 имеет место при выполнении неравенства

$$(\omega^+)^2 + 4g \sin \alpha \frac{M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3 (x_3 - l_2)}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2} > 0$$

Используя формулу (1), отсюда получим:

$$M_1^2 H_1^2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha (J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2) [M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3 (x_3 - l_2)] > 0$$

Если будет выполнено противоположное неравенство (например, H очень мало или α близко к $\frac{\pi}{2}$), то после удара доска с шарами будет совершать замедленное вращение, и, кроме того, будет существовать также $\varphi^* \in (-\alpha, \alpha)$, при котором $\omega(\varphi^*) = 0$. После этого доска начнет вращаться против часовой стрелки и ударится о землю уже концом B .

Покажем, что множество, задаваемое неравенствами (6) и (11), не пусто. Пусть доска однородная. Тогда имеем неравенства:

$$\frac{1}{6} M_3 (2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2) + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 > 0$$

$$M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3 \frac{l_1 - l_2}{2} < 0$$

Ясно, что при выборе достаточно большой массы M_2 эти неравенства заведомо имеют решения.

Подведем итоги. Возможны три варианта послеударного движения шара B .

I. После удара шар B отрывается от доски и летит по параболе влево от нее.

II. После удара шар B вращается вместе с доской, и этот процесс длится вплоть до удара конца A о землю, после чего шар B отрывается от доски и летит по параболе вправо от нее.

III. После удара шар B вращается по часовой стрелке вместе с доской замедленно вплоть до того момента, когда доска остановится в своем вращении (не ударившись концом A). Затем продолжается ускоренное вращение против часовой стрелки вплоть до момента удара доски о землю концом B .

2. Задача № 2 (Задача № 16.38 из [1]).

Колесо массы m и радиуса r , катясь без скольжения по горизонтальной направляющей LL , наталкивается на уступ O и, огибая его, поднимается на горизонтальную направляющую OM . Высота уступа h . Удар колеса об уступ неупругий, скольжение при ударе и огибании уступа отсутствует.

1) Определить, какова должна быть скорость центра C колеса перед ударом, чтобы колесо вкатилось на верхнюю направляющую.

2) При заданной скорости центра колеса v_C до удара определить импульс ударной реакции уступа S . Колесо считать однородным диском.

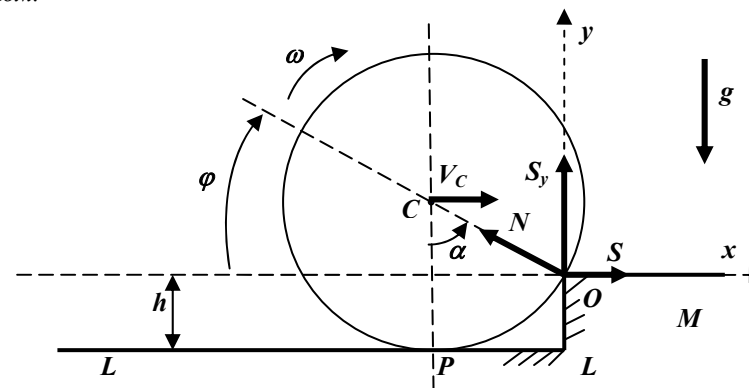


Рис.2

Замечание. Фраза, выделенная в формулировке задачи, нуждается в разъяснении и уточнении. Прежде всего, подразумевается, что точка колеса, контактирующая в момент столкновения (и удара) с уступом O , остается неподвижной и после удара. Поэтому рассматриваемый в задаче удар, следует называть абсолютно неупругим (коэффициент восстановления равен нулю). Далее, предположение об отсутствии скольжения при ударе и последующем огибании уступа подразумевает наличие положительной нормальной реакции, действующей на колесо со стороны уступа, т.к. связь в точке контакта является односторонней. Конечно, можно для упрощения предполагать эту связь двухсторонней, однако, такая модель является нереалистичной.

Решение задачи. Пусть S_x и S_y – ударные импульсы, приложенные в точке контакта O (рис. 2). Обозначим через α угол, образуемый радиусом CO с вертикалью ($\alpha = \angle OCP$). Ясно, что

$$\cos \alpha = 1 - \varepsilon, \quad \sin \alpha = \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = h/r \quad (12)$$

Доударное состояние колеса является качением без проскальзывания, а послеударное – это вращение без проскальзывания вокруг точки O . В системе координат Oxy (рис. 2) имеем для скоростей центра масс C и угловой скорости ω колеса:

$$\left. \begin{aligned} v_{Cx}^- &= v_C, & v_{Cy}^- &= 0, & \omega &= \omega^- = \frac{v_C}{r} \\ v_{Cx}^+ &= \omega^+ r \cos \alpha, & v_{Cy}^+ &= \omega^+ r \sin \alpha, & \omega &= \omega^+ \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где знак « $-$ » относится к доударному состоянию, а знак « $+$ » относится к состоянию, наступившему сразу после момента удара. Ударные импульсы S_x и S_y не создают момента относительно точки O . Следовательно, сохраняется кинетический момент колеса относительно этой точки. Имеем:

$$K_O^- = mv_C(r - h) + J_C \omega^- = \frac{3}{2} mv_C r (1 - \frac{2}{3} \varepsilon)$$

$$K_O^+ = m(\omega^+ r) r + J_C \omega^+ = \frac{3}{2} mr^2 \omega^+.$$

Приравнявая полученные выражения, найдем ω^+ :

$$\omega^+ = \frac{v_C}{r} (1 - \frac{2}{3} \varepsilon) \quad (14)$$

Для определения ударных импульсов запишем, используя формулы (13), уравнения изменения количества движения в проекциях на выбранные оси координат:

$$S_x = m(\omega^+ r \cos \alpha - v_C), \quad S_y = m\omega^+ r \sin \alpha$$

Подставляя сюда формулу (14) и используя формулу (12), получим:

$$S_x = mv_C \frac{\varepsilon}{3} (2\varepsilon - 5), \quad S_y = mv_C (1 - \frac{2}{3} \varepsilon) \sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)}$$

Это и есть ответы к пункту 2) задачи.

Переходим к решению пункта 1) задачи. После удара колесо начинает вращаться вокруг точки O по часовой стрелке, т.е. поднимается вверх. Если не рассматривать процесс этого движения в деталях, то ясно, что колесо поднимается до уровня вкатывания на OM , если у него будет достаточный запас послеударной кинетической энергии. Т.к. полная механическая энергия при таком движении без проскальзывания в точке O сохраняется, то минимальное ω_1 , необходимое для такого вкатывания, находится из соотношения $T^+ = \Pi$, где

$$T^+ = \frac{m}{2} (\omega_1 r)^2 + \frac{J_C}{2} \omega_1^2, \quad \Pi = mgh.$$

$$\text{Отсюда } \omega_1^2 = \frac{4}{3} ghr^{-2}.$$

Таким образом, для вкатывания необходимо, чтобы

$$(\omega^+)^2 \geq \omega_1^2 = \frac{4}{3} \frac{gh}{r^2} \quad (15)$$

Используя (14), получим соответствующее неравенство для v_C :

$$v_C^2 \geq \frac{4}{3} \frac{gh}{(1 - \frac{2}{3} \varepsilon)^2} \quad (16)$$

Формула (16) приведена в [1], где указано также и неравенство, при котором этот ответ справедлив: $0 \leq \frac{h}{r} \leq 1$. Это неравенство, вообще

говоря, очевидно, т.к. при $h > r$ колесо может отскочить только назад или «прилипнуть» к уступу в момент удара, а далее, скорее всего, останется в покое.

Рассмотрим процесс послеударного движения колеса более детально, предполагая, что в точке O отсутствует проскальзывание. Пусть φ – угол между радиусом CO и отрицательной горизонтальной осью Ox (рис. 2). Запишем уравнение движения центра масс C колеса в проекции на радиус CO :

$$m\ddot{\varphi}^2 r = mg \sin \varphi - N \quad (17)$$

где N – нормальная реакция, действующая на колесо со стороны уступа O .

Для осуществимости такого безотрывного движения колеса необходимо, чтобы $N > 0$, т.е. из (17) имеем неравенство:

$$N = mg \sin \varphi - m\dot{\varphi}^2 r > 0 \quad (18)$$

Ясно, что $\varphi \in [\pi/2 - \alpha, \pi/2]$.

Запишем теорему об изменении кинетического момента колеса относительно точки O :

$$\frac{3}{2} mr^2 \ddot{\varphi} = -mgr \cos \varphi$$

откуда следует, что $\ddot{\varphi} < 0$, т.е. $\dot{\varphi}(\varphi)$ – монотонно убывающая функция, а $\sin \varphi$ – монотонно возрастающая функция при $\varphi \in [\pi/2 - \alpha, \pi/2]$. Тогда, если неравенство (18) выполнено в началь-

ный момент при $\varphi = \varphi_0 = \pi/2 - \alpha$, то оно будет выполнено вплоть до вкатывания колеса на OM . Таким образом, нарушение неравенства (18) (т.е. неосуществимость описанного движения) может произойти лишь при $\varphi = \varphi_0 = \pi/2 - \alpha$, т.е. сразу после удара выполняется соотношение:

$$g \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - (\omega^+)^2 r < 0 \Rightarrow (\omega^+)^2 > \frac{g \cos \alpha}{r}$$

Итак, получен следующий результат:

а) если

$$\frac{4}{3} \frac{gh}{r^2} \leq (\omega^+)^2 \leq \frac{g}{r} \left(1 - \frac{h}{r}\right) \quad (19)$$

то безотрывное вкатывание колеса возможно и реализуется при отсутствии проскальзывания в точке O ;

б) если $(\omega^+)^2 \leq \frac{4}{3} \frac{gh}{r^2}$, то вкатывание невозможно, а если $(\omega^+)^2 > \frac{g}{r} \left(1 - \frac{h}{r}\right)$, то безотрывное движение вообще невозможно реализовать при отсутствии проскальзывания в точке O .

Непустота множества движений, удовлетворяющих пункту а), может быть обеспечена только при соблюдении неравенства, вытекающего из (19):

$$\frac{4}{3} \frac{gh}{r^2} \leq \frac{g}{r} \left(1 - \frac{h}{r}\right) \Rightarrow 0 \leq h \leq \frac{3}{7} r$$

Если $h > \frac{3}{7} r$, то вкатывание колеса при отсутствии проскальзывания в точке O не реализуется. Таким образом, ответ в данной задаче к пункту 1. должен быть таким: послеударное вкатывание колеса на верхнюю направляющую OM при отсутствии проскальзывания в точке контакта O возможно только при соблюдении неравенств:

$$\frac{4}{3} gh \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{r}\right)^{-2} < v_c^2 < g(r - h) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{r}\right)^{-2}, \quad 0 \leq h \leq \frac{3}{7} r$$

Нарушение одного из этих неравенств свидетельствует о невозможности вкатывания колеса в рамках рассматриваемой модели движения с отсутствием проскальзывания колеса в точке O .

Отметим, что дальнейшее исследование данной задачи (которое здесь не приводится) ведет к возникновению парадоксальных ситуаций типа «парадоксов Пенлеве».

Литература

1. Сборник задач по теоретической механике: учебное пособие / Колесников К.С. (ред.). – СПб.: Лань, 2007. – 448 с.

УДК 531.01

А.А. Михалев, Ю.Д. Селюцкий
НИИ механики МГУ

ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Обсуждается задача о равновесии кинематических цепей в случае, когда единственная внешняя сила действует на один из шарниров. Показано, что существует конфигурация системы, которая является равновесной при любом направлении силы. При этом звенья цепи образуют треугольник, в вершине которого находится точка приложения силы.

Кинематические цепи являются объектом изучения теории машин и механизмов, в которой для их анализа были разработаны и используются специальные методы. В то же время представляется, что применение методов аналитической механики для исследования этих объектов позволяет выявить и объяснить некоторые интересные особенности их поведения.

1. Описание системы. Рассмотрим систему твердых тел, которая совершает плоско-параллельное движение и может быть представлена в виде n -звенной кинематической цепи с закрепленными концами. Обозначим узлы цепи через O_i ($i = 0 \dots n$), причем узлы O_0 , O_n неподвижны. Примем, что каждое тело-звено соединено с последующим и предыдущим в узлах цилиндрическими шарнирами, а крайние звенья $O_0 O_1$ и $O_{n-1} O_n$ могут вращаться вокруг неподвижных осей O_0 и O_n . Введем в плоскости движения систему координат $O_0 xy$, ось абсцисс которой направим вдоль линии неподвижных шарниров $O_0 O_n$. (рис. 1). Будем считать, что система находится под действием единственной силы \vec{F} , приложенной в шарнире O_k .

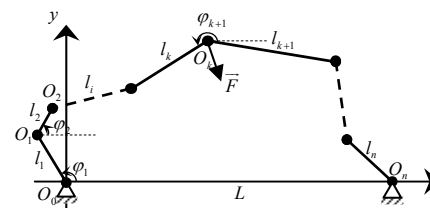


Рис. 1

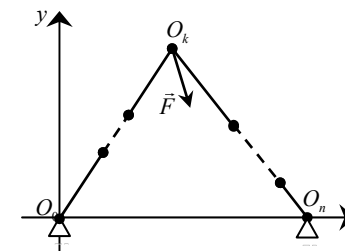


Рис. 2

Введем следующие обозначения: L – длина O_0O_n , \mathbf{r}_i – радиус-вектор O_0O_i , l_i – длина i -го звена, φ_i – угол между i -ым звеном и осью Ox .

Связи, наложенные на систему, имеют вид:

$$\sum_{i=1}^n l_i \cos \varphi_i = L, \quad \sum_{i=1}^n l_i \sin \varphi_i = 0 \quad (1)$$

Они выделяют в пространстве $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ многообразие M допустимых положений системы, размерность которого в общем случае равна $(n-2)$.

Пусть точка $P: (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ принадлежит многообразию M . Тогда в малой окрестности этой точки уравнения возможных перемещений имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} \delta \boldsymbol{\varphi} = 0, \text{ где } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} l_1 \sin \varphi_1 & \dots & l_n \sin \varphi_n \\ l_1 \cos \varphi_1 & \dots & l_n \cos \varphi_n \end{pmatrix}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \delta \varphi_1 \\ \dots \\ \delta \varphi_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

В общем случае $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$, и множество возможных перемещений в окрестности т. P принадлежат касательному пространству TR^{n-2} . В случае $\text{rank}(\mathbf{A}) = 1$ система становится критической [2] и требует дополнительного исследования. Критичность возникает при $\varphi_i = \pi m_i, \forall i \in \overline{1, n}, m_i \in Z$, т.е. когда цепь $O_0O_1O_2 \dots O_n$ целиком лежит на прямой O_0O_n .

2. Положения равновесия системы. Как известно, положения равновесия механической системы с идеальными связями определяются из уравнения $\sum_{v=1}^n \mathbf{F}_v \delta \mathbf{r}_v = 0$ [1], что в нашей задаче эквивалентно $\mathbf{F} \delta \mathbf{r}_k = 0$.

Очевидно, что в случае $\delta \mathbf{r}_k = 0$ положение равновесия не зависит от направления и величины силы \mathbf{F} , т.е. является в некотором смысле «универсальным».

Утверждение: Пусть $P: (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in M$ – некритическое положение системы, тогда

$$\delta \mathbf{r}_k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_i = \varphi_1 + \pi m_i, i = 2 \dots k, m_i \in Z \\ \varphi_j = \varphi_{k+1} + \pi m_j, j = k+2 \dots n, m_j \in Z \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

Геометрически уравнения (3,4) означают, что звенья первой части цепи лежат на одной прямой, а звенья второй части – на другой (рис.2). При этом точка O_k приложения силы \mathbf{F} находится на пересечении этих прямых.

Докажем сформулированное утверждение.

Достаточность:

Обозначим через x_k, y_k координаты вектора \mathbf{r}_k , т.е.

$$x_k = \sum_{i=1}^k l_i \cos \varphi_i, \quad y_k = \sum_{i=1}^k l_i \sin \varphi_i.$$

Из (3) следует, что $\delta \mathbf{r}_k \perp OO_k$:

$$\delta x_k = -\sum_{i=1}^k l_i \sin \varphi_i \delta \varphi_i = -\left(\sum_{i=1}^k (-1)^{m_i} l_i \delta \varphi_i \right) \sin \varphi_1$$

$$\delta y_k = \sum_{i=1}^k l_i \cos \varphi_i \delta \varphi_i = \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{m_i} l_i \delta \varphi_i \right) \cos \varphi_1$$

Из (4) следует, что $\delta \mathbf{r}_k \perp O_kO_n$:

$$\delta x_k = \sum_{i=k+1}^n l_i \sin \varphi_i \delta \varphi_i = \left(\sum_{i=k+1}^n (-1)^{m_i} l_i \delta \varphi_i \right) \sin \varphi_{k+1}$$

$$\delta y_k = -\sum_{i=k+1}^n l_i \cos \varphi_i \delta \varphi_i = -\left(\sum_{i=k+1}^n (-1)^{m_i} l_i \delta \varphi_i \right) \cos \varphi_{k+1}$$

В то же время, из условия некритичности т. P следует: $\varphi_1 \neq \varphi_{k+1} + \pi m, m \in Z$. Следовательно, $\delta \mathbf{r}_k = 0$.

Необходимость:

В силу некритичности системы $\exists i \in \overline{1, k}, j \in \overline{k+1, n}$:

$\sin(\varphi_i - \varphi_j) \neq 0$. Следовательно, система уравнений, эквивалентная (2):

$$\begin{cases} l_i \sin \varphi_i \delta \varphi_i + l_j \sin \varphi_j \delta \varphi_j = -\sum_{v \neq i, j} l_v \sin \varphi_v \delta \varphi_v \\ l_i \cos \varphi_i \delta \varphi_i + l_j \cos \varphi_j \delta \varphi_j = -\sum_{v \neq i, j} l_v \cos \varphi_v \delta \varphi_v \end{cases}$$

имеет единственное решение относительно $\delta \varphi_i, \delta \varphi_j$.

Без ограничения общности можно считать, что $\sin(\varphi_1 - \varphi_{k+1}) \neq 0$. Примем в качестве независимых перемещений $\delta \varphi_v (v \neq 1, k+1)$. Тогда:

$$\delta \mathbf{r}_k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 + \dots + l_k \sin \varphi_k \delta \varphi_k = 0 \\ l_1 \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + \dots + l_k \cos \varphi_k \delta \varphi_k = 0 \\ l_{k+1} \sin \varphi_{k+1} \delta \varphi_{k+1} + \dots + l_n \sin \varphi_n \delta \varphi_n = 0 \\ l_{k+1} \cos \varphi_{k+1} \delta \varphi_{k+1} + \dots + l_n \cos \varphi_n \delta \varphi_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^k l_i \sin(\varphi_i - \varphi_1) \delta \varphi_i = 0 \\ \sum_{i=k+2}^n l_i \sin(\varphi_i - \varphi_{k+1}) \delta \varphi_i = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_i + \pi m_i, i = 2 \dots k, m_i \in Z \\ \varphi_{k+1} = \varphi_i + \pi m_i, i = k+2 \dots n, m_i \in Z \end{cases}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Отметим, что положения равновесия указанного типа соответствуют особым положениям механизма в терминологии [3].

Примечание 1: если условия (3)-(4) выполняются для $k = 1$ ($k = n - 1$), то положение равновесия сохраняется и в том случае, когда сила \mathbf{F} приложена не к точке O_1 (O_{n-1}), а к произвольной точке тела OO_1 ($O_{n-1}O_n$).

3. Пример. Рассмотрим систему типа «волнового ветродвигателя С.Д.Стрекалова» [4]. Система представляет собой кривошипно-коромысловый механизм, состоящий из маховика OP , двух стержней PA и AB и пластины. Маховик может вращаться вокруг неподвижной оси O , шарнир B неподвижен, а пластина прикреплена к стержню PA в точке A и составляет с этим стержнем угол β (рис. 3). Движение механизма осуществляется в горизонтальной плоскости.

Система находится в потоке воздуха, скорость \mathbf{V} которого на бесконечности постоянна и перпендикулярна прямой OB . Предположим, что воздействие потока на пластину сводится к силе \mathbf{F}_n , приложенной в точке A и направленной перпендикулярно плоскости пластины («нормальная сила»).

Введем следующим обозначения: L – длина OB , l_1 , l_2 , l_3 – длины стержней, \mathbf{r} – радиус-вектор \mathbf{OA} , φ_1 , φ_2 , φ_3 – углы между стержнями и положительным направлением оси Ox .

Положения равновесия системы определяются из уравнения:

$$\mathbf{F}_n \delta \mathbf{r} = 0 \quad (5)$$

Нетрудно показать, что имеют место соотношения:

$$\mathbf{F}_n = \{-F_n \sin(\psi + \varphi_3), F_n \cos(\psi + \varphi_3)\},$$

$$\delta \mathbf{r} = \{l_3 \sin \varphi_3 \delta \varphi_3, -l_3 \cos \varphi_3 \delta \varphi_3\} \text{ (где } \psi = \varphi_2 - \varphi_3 - \beta + \pi \text{)}.$$

Следовательно, (5) в данном случае принимает вид:

$$F_n l_3 \cos \psi \delta \varphi_3 = 0 \quad (6)$$

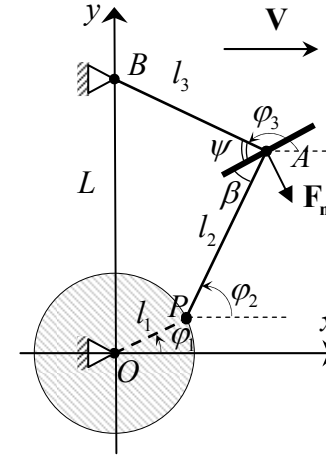


Рис. 3

Очевидно, равенство (6) выполняется в следующих трех случаях:

а) $\cos \psi = 0$, т.е. пластина перпендикулярна стержню AB и, соответственно, сила \mathbf{F}_n направлена вдоль этого стержня.

б) $F_n = 0$. Известно, что нормальная сила, действующая на плоскую пластину, обращается в нуль только в случае, когда пластина параллельна набегающему потоку. Поэтому данный случай отвечает ситуации $\varphi_2 = \beta$.

в) $\delta \varphi_3 = 0$. Этот случай соответствует условиям утверждения, сформулированного в предыдущем разделе. Поэтому:

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \varphi_1 = \varphi_2 + \pi k, k \in Z$$

Это означает, что «звенья» OP и PA лежат на одной прямой. При этом возможно два геометрически разных положения:

1) $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in Z$ (вектора \mathbf{OP} и \mathbf{PA} сонаправлены);

2) $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi + 2\pi k, k \in Z$ (вектора \mathbf{OP} и \mathbf{PA} противоположны).

Примечание 2. Пусть твердое тело может совершать плоскопараллельное движение (но не поступательное) и имеет одну степень свободы. Тогда для каждого положения тела существует свой мгновенный центр скоростей P . Возможное перемещение точки P равно нулю, и никакая приложенная в этой точке сила не способна вывести тело из состояния покоя в соответствующем положении.

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
2. Самсонов В.А. Перестройка конфигурационного многообразия и критические системы // ПММ, 1999. – Т.63, вып.5. – С. 770-774.
3. Луев В.В., Мисюрин С.Ю. Особые многообразия плоских и пространственных механизмов с несколькими степенями свободы // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1993. – №1. – С. 102-109.
4. Стрекалов С.Д. Волновая техника в сельском хозяйстве. – Волгоград: Издательско-полиграфический комплекс ВГСХА Нива. 2007. – 128 с.

К.Б. Обносков, Ф.П. Кочанов
Военная академия РВСН имени Петра Великого

Решается задача о линии погони при наложении не классических ограничений на бег собаки. Показано, что кривая найденная Г.В.Лейбницем в 1693 году является лишь линией погони, а не трактрисой, как назвал её сам автор.

В данной работе условия бега собаки значительно ужесточаются.
Пусть заяц бежит по прямой, параллельной оси абсцисс и отстоящей от неё на расстояние a .

Требуется найти скорость собаки и вид траектории её бега, которая называется линией погони.

2. Решение задачи. Для решения задачи введём в рассмотрение угол $u(t) = \angle nC3$, предполагая, что он вектором скорости \vec{V}_C делится на два: $u_1 = k \cdot u = \angle mC3$ и $u_2 = (1 - k) \cdot u = \angle nCm$, причём $1 \geq k \geq 0$.

Таким образом, будем считать, что собака может бежать на зайца (в случае $k = 0$) или с отрицательным упреждением (в случае $k > 0$).

Наличие закона изменения угла $u(t)$ позволит найти закон бега собаки, а следовательно решить поставленную задачу.

Из рисунка непосредственно видно, что

$$x_C(t) + X(t) = V_3 t, \quad y_C(t) + Y(t) = a, \quad X^2(t) + Y^2(t) = a^2 \quad (1)$$

Если из первых двух зависимостей выразить соответственно $X(t)$, $Y(t)$ и подставить их в последнюю, то получим предварительное уравнение траектории собаки в виде:

$$x_C = V_3 t - \sqrt{2 \cdot a \cdot y_C - y_C^2} \quad (2)$$

Из теоремы о равенстве проекций скоростей двух точек неизменяемого отрезка на направление отрезка, имеем

$$V_3 \sin(u) = V_C \cos(k \cdot u) \quad (3)$$

Отсюда непосредственно следует:

$$V_C(t) = V_3 \cdot \frac{\sin(u(t))}{\cos(k \cdot u(t))} \quad (4)$$

Из выражения (4) видно, что в случае сохранения неизменным расстояния между собакой и зайцем, их скорости не могут быть постоянными по модулю. Одна из скоростей может быть задана по условию, причём неважно постоянной или переменной, а вторая при этом находится по формуле (4).

Пользуясь выражением (4), найдём значение V_{Cx} , т.е.

$$V_{Cx} = V_C \sin((1 - k)u(t)) = V_3 \frac{\sin(u(t)) \sin((1 - k)u(t))}{\cos(k \cdot u(t))} \quad (5)$$

С другой стороны, из первого соотношения (1), имеем

$$x_C(t) = V_3 \cdot t - X(t) = V_3 \cdot t - a \cdot \sin(u(t)) \quad (6)$$

Дифференцируя это выражение по времени, получим

$$V_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = V_3 - a \cdot \cos(u(t)) \cdot \frac{du}{dt} \quad (7)$$

Приравнявая выражения (5) и (7), найдём

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{V_3}{a} \cdot \frac{\cos((1 - k)u(t))}{\cos(k \cdot u(t))} \quad (8)$$

Откуда, после разделения переменных, найдём выражение для определения угла $u(t)$, т.е.

$$\int \frac{\cos(k \cdot u(t))}{\cos((1 - k) \cdot u(t))} du(t) = \frac{V_3 \cdot t}{a} + C_1 \quad (9)$$

Анализ подынтегральной функции в выражении (9) показывает, что интеграл в её левой части берётся лишь только при некоторых значениях коэффициента k .

Вначале подробно разберём случай $k = 0$. Это, как уже отмечалось, соответствует случаю, когда собака бежит прямо на зайца и, следовательно, отрезок $C3 = a$ будет отрезком касательной к траектории собаки.

В этом частном случае из выражения (9), при учёте начальных условий $t_0 = 0$, $u_0 = 0$, будем иметь:

$$\int \frac{du(t)}{\cos(u(t))} = \frac{V_3 \cdot t}{a} + C_1 \quad \text{или} \quad \ln \frac{1 + \sin(u(t))}{\cos(u(t))} = \frac{V_3 \cdot t}{a}$$

Отсюда получаем зависимость для определения искомого угла $u(t)$, т.е.

$$\sin(u(t)) = \text{th}(\varphi(t)) \quad (10)$$

где введено обозначение $\varphi(t) = V_3 \cdot t / a$.

Теперь, учитывая полученное выражение, получим

$$X(t) = a \cdot \text{th}(\varphi(t)), \quad Y(t) = \frac{a}{\text{ch}(\varphi(t))} \quad (11)$$

Поэтому закон бега собаки будет иметь вид:

$$x_C(t) = V_3 \cdot t - a \cdot \text{th}(\varphi(t)), \quad y_C(t) = a - \frac{a}{\text{ch}(\varphi(t))}$$

Наконец, из первого выражения (11), установим значения $V_3 t$,

$$V_3 \cdot t = a \cdot \text{arctth}\left(\frac{X(t)}{a}\right)$$

или, с учётом выражений (1) и (12), получим

$$V_3 \cdot t = \frac{a}{2} \ln \frac{a + X(t)}{a - X(t)} = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{2 \cdot a \cdot y_C - y_C^2}}{a - \sqrt{2 \cdot a \cdot y_C - y_C^2}}$$

что окончательно преобразуется к виду:

$$V_3 \cdot t = a \ln \frac{a + \sqrt{2 \cdot a \cdot y_C - y_C^2}}{a - y_C} \quad (13)$$

Подставляя найденные значения в выражение (2), получим окончательное уравнение траектории бега собаки

$$x_C = a \ln \frac{a + \sqrt{2 \cdot a \cdot y_C - y_C^2}}{a - y_C} - \sqrt{2 \cdot a \cdot y_C - y_C^2} \quad (14)$$

Равенство (14) является уравнением кривой, найденной ещё в 1693 году Г.В. Лейбницем, которую он назвал трактрисой.

Трактрисой или линией влечения (от латинского слова traho – тащу) называют [1] траекторию материальной точки M , к которой прикреплена нерастяжимая нить длиной a , другой конец которой тянут, например, по прямой, параллельной оси Ox , если в начальный момент точка M находилась на этой оси.

Однако из описанного выше следует, что кривая (14) является всего лишь разновидностью линии погони. Поэтому в дальнейшем будем её называть кривой Лейбница. Заканчивая, отметим, что кривая (14) является эвольвентой перевёрнутой цепной линии с вершиной в начале координат.

3. Исследование полученного решения. Будем считать, что собака является точкой с массой m , которая движется по кривой Лейбница (14) по закону (12) (рис. 2).

Имея закон (12) движения точки C , найдём её кинематические характеристики. Для этого продифференцируем равенства (12) по времени:

$$\begin{cases} V_{Cx} = V_3 - V_3 \frac{1}{\text{ch}^2(\varphi(t))} \\ V_{Cy} = V_3 \frac{\text{sh}(\varphi(t))}{\text{ch}^2(\varphi(t))} \end{cases} \quad (15)$$

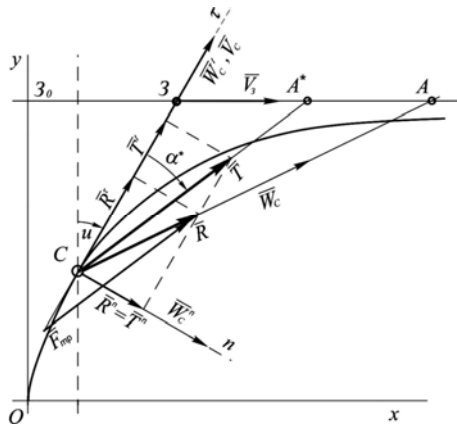


Рис. 2.

По проекциям найдём скорость точки C

$$V_C = V_3 \cdot \text{th}(\varphi(t)) \quad (16)$$

Дифференцируя по времени выражения (15), найдём проекции ускорения

$$W_{Cx} = \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{2 \text{sh}(\varphi(t))}{\text{ch}^3(\varphi(t))}, \quad W_{Cy} = \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{1 - \text{sh}^2(\varphi(t))}{\text{ch}^3(\varphi(t))}$$

Отсюда непосредственно следует:

$$W_C = \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{1}{\text{ch}(\varphi(t))} \quad (17)$$

Пользуясь выражениями (16) и (17), найдём проекции ускорения точки C на естественные оси:

$$W_C^\tau = \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{1}{\text{ch}^2(\varphi(t))}, \quad W_C^n = \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{\text{sh}(\varphi(t))}{\text{ch}^2(\varphi(t))} \quad (18)$$

И, наконец, найдём радиус кривизны кривой Лейбница

$$\rho = \frac{V_C^2}{W_C^n} = a \cdot \text{sh}(\varphi(t)) \quad (19)$$

Сравнивая выражения для W_C и W_C^τ , легко заметить, что угол α между \bar{W}_C и касательной к траектории определяется по формуле $\cos \alpha = \text{ch}^{-1} \varphi(t)$. Из выражения (10) следует, что $\cos u = \text{ch}^{-1} \varphi(t)$. Значит, $\cos \alpha = \cos u$, или $\alpha = u$.

Имея все кинематические характеристики точки C , решим для неё первую задачу динамики. Тем самым покажем, что если точку C заставить перемещаться по горизонтальной шероховатой кривой Лейбница и если сила трения ($F_{mp} = f mg$) направлена по касательной, то точку следует тянуть (с неизвестной пока силой T) не по линии $C3$.

Исходя из второго закона динамики точки в проекциях на естественные оси, получим

$$m \cdot \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{1}{\text{ch}^2(\varphi(t))} = -F_{mp} + T^\tau, \quad m \cdot \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{\text{sh}(\varphi(t))}{\text{ch}^2(\varphi(t))} = T^n \quad (20)$$

Отсюда найдём

$$T = \frac{1}{\text{ch}(\varphi(t))} \sqrt{F_{mp}^2 \cdot \text{ch}^2(\varphi(t)) + 2F_{mp} \cdot \frac{m V_3^2}{a} + \left(\frac{m V_3^2}{a} \right)^2} \quad (21)$$

Введём в рассмотрение угол α_1 между касательной и силой T . Поэтому будем иметь $T^\tau = T \cos \alpha_1$, $T^n = T \sin \alpha_1$. Тогда из (20) найдём:

$$\operatorname{tg} \alpha_1(t) = \frac{m \cdot \frac{V_3^2}{a} \operatorname{sh}(\varphi(t))}{m \cdot \frac{V_3^2}{a} + F_{mp} \cdot \operatorname{ch}^2(\varphi(t))} \quad (22)$$

Из последней зависимости непосредственно видно, что при уменьшении значения скорости V_3 угол α_1 уменьшается, а следовательно, кривая Лейбница приближается к трактрисе [2].

Однако ниже покажем, что кривая Лейбница никогда не может стать трактрисой, ибо угол α_1 может меняться в ограниченных пределах.

Из выражения (10) вытекают соотношения:

$$\operatorname{sh}(\varphi(t)) = \operatorname{tg}(u), \quad \operatorname{ch}(\varphi(t)) = \frac{1}{\cos(u)} \quad (23)$$

которые позволяют привести уравнение (22) к виду:

$$\operatorname{tg} \alpha_1(t) = m \cdot \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{\sin u \cdot \cos u}{m \cdot \frac{V_3^2}{a} \cdot \cos^2 u + F_{mp}} \quad (24)$$

Если трос, с помощью которого точку C перемещают по кривой Лейбница, совместить с линией CA (рис. 2), т.е. с полным ускорением \overline{W}_C , то будем иметь

$$R = T_1 = m \cdot W_C = m \cdot \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi(t))} \quad (25)$$

Аналогично, для проекций силы натяжения на естественные оси, получим выражения:

$$R^r = T_1^r = m \cdot W_C^r = m \cdot \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi(t))} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi(t))} = R \cdot \cos u$$

$$R^n = T_1^n = m \cdot W_C^n = m \cdot \frac{V_3^2}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi(t))} \cdot \operatorname{th}(\varphi(t)) = R \cdot \sin u$$

Таким образом, максимальный угол α_{\max} имеет значение $u(t)$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \operatorname{tg} u$. Если это значение угла подставить в (24), то увидим, что выражение (24) возможно лишь при $F_{mp} = 0$. Значит, чтобы точка C двигалась по кривой Лейбница при таком угле α , сама кривая должна быть гладкой и точку C следует тянуть под углом $u(t)$ к касательной.

Нетрудно показать (рис. 2), что при $\alpha(t) > u(t)$ трение должно быть отрицательным, а это физически невозможно.

В случае, когда сила трения имеет место, а точка C движется по кривой Лейбница, её следует тянуть под определённым углом α_1 (рис. 2), который должен вычисляться по формуле (22). Если $\alpha < \alpha_1$, при заданной силе трения, точка C должна сойти с кривой Лейбница.

Другими словами, чтобы точка C двигалась по кривой Лейбница, должно быть:

$$\alpha_1(t) \leq \alpha(t) \leq u(t) \quad (26)$$

4. Частные случаи задачи. Как уже отмечалось, кроме разобранного случая $k = 0$, интеграл в основном уравнении берётся и при других значений k . Приведём конечные результаты интегрирования уравнения при некоторых k , например:

- при $k = \frac{1}{4}$: $4 \int \frac{\cos z}{\cos 3z} dz = \frac{V_3 t}{a} + C, z = \frac{u(t)}{4}$, откуда

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u(t)}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{V_3 t}{a}\right);$$

- при $k = \frac{1}{3}$: $3 \int \frac{\cos z}{\cos 2z} dz = \frac{V_3 t}{a} + C, z = \frac{u(t)}{3}$, откуда

$$\sin\left(\frac{u(t)}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{V_3 t}{a}\right);$$

- при $k = \frac{1}{2}$: $2 \int \frac{\cos z}{\cos z} dz = \frac{V_3 t}{a} + C, z = \frac{u(t)}{2}$, откуда $u(t) = \frac{V_3 t}{a}$;

- при $k = \frac{2}{3}$: $3 \int \frac{\cos 2z}{\cos z} dz = \frac{V_3 t}{a} + C, z = \frac{2}{3} u(t)$, откуда

$$6 \sin\left(\frac{u(t)}{3}\right) - 3 \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\frac{u(t)}{3}\right)}{\cos\left(\frac{u(t)}{3}\right)} \right| = \frac{V_3 t}{a};$$

- при $k = \frac{3}{4}$: $4 \int \frac{\cos 3z}{\cos z} dz = \frac{V_3 t}{a} + C, z = \frac{3}{4} u(t)$, откуда

$$4 \sin\left(\frac{u(t)}{2}\right) - u(t) = \frac{V_3 t}{a};$$

- при $k = 1$: $\int \cos z \cdot dz = \frac{V_3 t}{a} + C, z = u(t)$, откуда

$$\sin(u(t)) = \frac{V_3 t}{a};$$

Для $k = 0.5$ и $k = 1$ можно указать явную форму уравнения траектории. Для всех других значений k это сделать не удастся (угол $u(t)$ определяется из трансцендентных уравнений).

В случае $k = 0.5$, как следует из рисунка 1, будем иметь

$$X(t) = a \cdot \sin u = a \cdot \sin(\varphi(t)), Y(t) = a \cdot \cos u = a \cdot \cos(\varphi(t))$$

Поэтому закон бега собаки примет следующий вид:

$$x_C(t) = V_3 t - a \cdot \sin(\varphi(t)), y_C(t) = a - a \cdot \cos(\varphi(t)) \quad (4)$$

Из второй зависимости (27) имеем:

$$V_3 t = a \cdot \arccos\left(\frac{a - y_C}{a}\right)$$

а тогда, подставляя найденные выражения в формулы (2) получим окончательное уравнение траектории:

$$x_C = a \cdot \arccos\left(\frac{a - y_C}{a}\right) - \sqrt{2a \cdot y_C - y_C^2} \quad (28)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, собака должна бежать по части обыкновенной циклоиды.

Имея закон бега собаки, найдём проекции её скорости и ускорения на декартовы оси:

$$\begin{aligned} V_{Cx} &= V_3 - V_3 \cdot \cos(\varphi(t)), V_{Cy} = V_3 \cdot \sin(\varphi(t)) \\ W_{Cx} &= \frac{V_3^2}{a} \cdot \sin(\varphi(t)), W_{Cy} = \frac{V_3^2}{a} \cdot \cos(\varphi(t)) \end{aligned} \quad (29)$$

Если собаку считать материальной точкой, то для неё можно решить первую задачу динамики. Предположим, что отрезок $3C = a$ является тросом, в котором возникает сила натяжения \bar{T} ; кроме того будем считать, что на точку C действует ещё сила \bar{R} . Тогда основной закон динамики точки в проекциях на оси декартовых координат даст:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{V_3^2}{a} \cdot \sin(\varphi(t)) &= T \cdot \sin(\varphi(t)) + R_x \\ m \cdot \frac{V_3^2}{a} \cdot \cos(\varphi(t)) &= T \cdot \cos(\varphi(t)) + R_y \end{aligned}$$

Исключая из этих выражений силу \bar{T} , получим:

$$R_x \cdot \cos(\varphi(t)) - R_y \cdot \sin(\varphi(t)) = 0 \quad (30)$$

Сила \bar{R} может быть только силой трения, которая по законам механики всегда направлена по касательной к траектории точки в обрат-

ную сторону направления её вектора скорости (рис. 1). Поэтому будем иметь:

$$R_x = -R \cdot \sin(0.5 \cdot \varphi(t)), R_y = -R \cdot \cos(0.5 \cdot \varphi(t))$$

Подставляя эти значения в уравнение (30), получим

$$R \cdot \sin(0.5 \cdot \varphi(t)) = 0$$

что возможно лишь при $R = 0$, т. к. $\sin(0.5 \cdot \varphi(t)) \neq 0$.

Значит, в рассматриваемом случае точка C перемещается по части гладкой циклоиды, расположенной в горизонтальной плоскости.

Наконец, исследуем вариант движения, когда $k = 1$. По предыдущему, в этом случае, $\sin u(t) = \varphi(t)$, поэтому будем иметь:

$$X(t) = V_3 t, Y(t) = \sqrt{a^2 - (V_3 t)^2}$$

Следовательно, закон движения собаки будет:

$$x_C(t) = 0, y_C(t) = a - \sqrt{a^2 - (V_3 t)^2}$$

т.е. собака должна бежать вдоль оси Oy до момента времени, когда $X(t^*) = V_3 t^* = a$, т.е. до момента времени $t^* = a / V_3$

5. Интерпретация рассмотренных траекторий. Траектории собаки, соответствующие значениям $k = 0$, $k = 0.5$ и $k = 1$, можно интерпретировать как движение точки C обода круглого диска радиусом $C3 = a$ при условии, что диск катится по горизонтальной прямой.

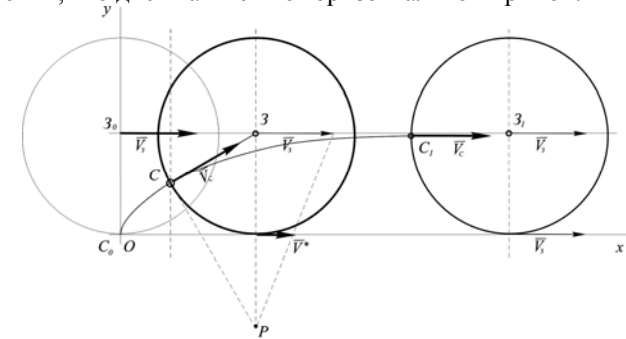


Рис. 3.

Пусть $k = 0$, то есть в случае кривой Лейбница, точка C обода диска находится в начале координат в начальный момент времени (рис. 3), центр диска 3 движется с постоянной скоростью V_3 . В рассматриваемом случае скорость \bar{V}_C направлена по $C3$, а поэтому, как следует из

рисунка, мгновенный центр скоростей диска будет находиться ниже линии его качения.

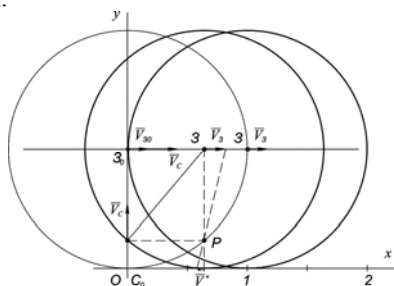


Рис. 4

Другими словами, чтобы точка C двигалась по кривой Лейбница точка касания диска с горизонтальной прямой должна проскальзывать со скоростью \bar{V}^* , причём в сторону движения его центра, угловая скорость диска монотонно убывает стремясь к нулю.

Во втором крайнем случае при $k = 1$ (рис. 4), собака должна бежать по оси OY до пересечения с траекторией зайца, при сохранении расстояния CZ . Если в этом случае, следить за точкой обода диска (рис. 4), легко заметить, что мгновенный центр диска находится выше линии его качения. Поэтому, чтобы точка C двигалась по оси OY диск должен проскальзывать со скоростью \bar{V}^* , причём в сторону обратную скорости его центра.

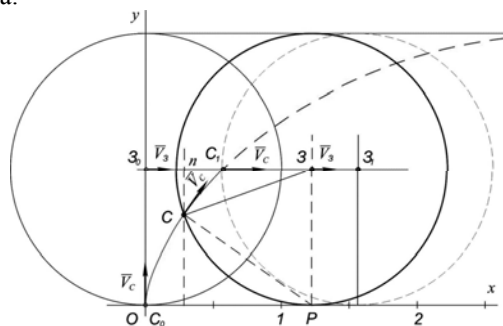


Рис. 5

Наконец, случай $k = 0.5$ является промежуточным. В этом случае вектор скорости \bar{V}_C делит угол $u(t) = \angle nCZ$ пополам. Другими словами, вектор \bar{V}_C параллелен высоте равнобедренного треугольника CZP

(рис. 5), проведённой из вершины Z . Поэтому мгновенный центр скоростей диска находится точно на линии его качения. Следовательно, точка C диска движется по части обычной циклоиды. По-видимому, других типов траекторий быть не может.

Литература

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике – М.: ГИТТЛ, 1955 г. – 608 с.
2. Бродский И.Л. Об одном предельном случае задачи Клода Перро // Сборник научно-методических статей «Теоретическая механика», 2003. – Вып. 24. – С. 66-73.
3. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1946. – 655 с.

УДК 531.01

А.В. Панишина

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ О РАБОТЕ НМС ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

За период с момента выхода в свет выпуска № 26 сборника научно-методических статей в течение 2007 и 2008 годов Научно-Методический совет по теоретической механике при Министерстве образования и науки РФ продолжил свою работу. На заседаниях Совета, которые проводятся в предпоследний четверг месяца в НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова рассматривалось много важных вопросов, в частности, связанных с работой кафедр Теоретической механики Российских вузов.

На заседания традиционно приглашались известные ведущие ученые, а также молодые ученые с научными докладами:

- *Акуленко Л.Д. (Институт проблем механики РАН)*
Управляемое движение диска по плоской кривой;
Классическая брахистохрона диска;
Внутригодовые неравномерности вращения Земли (в соавторстве с Марковым Ю.Г.)
- *Голубев Ю.Ф. (МГУ им. М.В. Ломоносова)*
О связи интегральных вариационных принципов механики с задачами управления.
- *Журавлёв В.Ф. (Институт проблем механики РАН)*
О некоторых деталях истории уникального эксперимента “Gravity Probe-B”.
- *Маркеев А.П. (Институт проблем механики РАН)*
О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона.
- *Самсонов В.А. (НИИ механики МГУ)*
Особенности динамики критических и околокритических механизмов.
- *Иванов А.И. (Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)*
Принципы механики для систем с трением.
- *Косенко И.И. (Московский государственный университет связи)*

Компьютерное моделирование динамики экипажей. Пример снейкборда.

- *Зотов А.Н. (Уфимский нефтяной технический университет)*
Системы с квазиулевым жесткостью.
- *Холостова О.В. (Московский авиационный институт (ГТУ))*
Исследование устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Были заслушаны интересные доклады, посвященные современным методикам в преподавании:

- *Бойков В.Г. (МГУ им. М.В. Ломоносова)*
Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем «Эйлер» и его использование.
- *Бертяев В.Д., Митяев А.Г. (Тульский государственный университет)*

Курсовые работы по теоретической механике на базе Mathcad.

Ноябрьское заседание 2007 года было посвящено 100-летию со дня рождения академика Л.И. Седова. Выступали А.Н. Голубятников (МГУ им. М.В. Ломоносова) с докладом «Работы Л.И. Седова в области астрофизики и их приложения» и Г.А. Тирский (МГУ им. М.В. Ломоносова) с докладом «О преподавательской деятельности Л.И. Седова».

На заседаниях Совета традиционно рассматривались вопросы, связанные с проведением городских и региональных студенческих олимпиад по теоретической механике (Дубровина Г.И., МГТУ им. Н.Э. Баумана).

В апреле 2007 года и в апреле 2008 года НМ Совет по теоретической механике совместно с Министерством образования и науки РФ и Южно-Российским государственным техническим университетом (ЮРГТУ (НПИ)) участвовал в проведении совещаний-семинаров ведущих кафедрами теоретической механики Южного Федерального округа в г. Новочеркасске. Совещание-семинар в 2007 году было приурочено к 100-летию основания ЮРГТУ (НПИ). На совещаниях обсуждались вопросы, связанные с современными проблемами механики, информационным и педагогическим обеспечением преподавания теоретической механики и другие. По результатам обсуждения докладов и выступлений был принят ряд решений и рекомендаций, в частности, по совершенствованию деятельности кафедр теоретической механики.

СЕМИНАР ИМЕНИ АКАДЕМИКА В.В. РУМЯНЦЕВА

В пятидесятых годах прошлого века член-корреспондент АН СССР Н.Г. Четаев организовал семинар по аналитической механике и теории устойчивости в Институте механики АН СССР. Почти сразу этот семинар приобрел статус общегородского и даже общесоюзного. С 1959 года по июнь 2007 года семинаром руководил Валентин Витальевич Румянцев. В начале 1965 года В.В. Румянцев перенес семинар в Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова.

В сентябре 2007 года семинар по аналитической механике и теории устойчивости в МГУ имени М.В. Ломоносова продолжил свою работу под руководством члена-корреспондента РАН В.В. Белецкого и профессора А.В. Карапетяна (ученый секретарь А.А. Зобова). Первое заседание состоялось 26 сентября и было посвящено памяти академика В.В.Румянцева. На этом заседании А.В. Карапетян сделал доклад о жизни и научно-педагогической деятельности В.В. Румянцева. С воспоминаниями о В.В. Румянцеве выступили вице-президент РАН академик В.В. Козлов, заведующий отделением механики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова академик Г.Г. Черный, академик В.Ф. Журавлев, ученики В.В. Румянцева — В.М. Морозов, В.А. Самсонов, С.Я. Степанов, А.С. Сумбатов и другие. На этом же заседании было принято решение присвоить семинару имя академика В.В.Румянцева.

Тематика сообщений на семинаре весьма разнообразна. Представление о ней можно получить по некоторым докладам, сделанным осенью 2007 и весной 2008 года:

Общая теория устойчивости; аналитическая механика:

- *В.В.Козлов.* О неустойчивости равновесий консервативных систем при типичных вырождениях.
- *В.В.Козлов.* Теорема Кельвина о неустойчивости: топологический смысл и обобщения.
- *Ю.Ф. Голубев.* Метод Охоцкого – Понтрягина в теории управления и аналитической механике.
- *Д.В. Трещев.* Полиморфизмы и адиабатический хаос.
- *Я.В. Татаринов, В.А. Прошкин.* Аналитические интегралы вблизи многообразия равновесий механических систем.

- *А.С. Андреев, Е.И. Беликова.* Об устойчивости положения равновесия нестационарной механической системы.
- *А.А. Буров.* О механике твердого тела на трёхмерной сфере.
- *С.В. Болотин, Д.В. Трещев.* Об определителе Хилла периодического решения.
- *В.М. Морозов, П.М. Соболевский.* Линейные нестационарные системы определенного класса и их приложения в механике.
- *Jan J. Slawianowski, Vasyl Kovalchuk.* Symmetries and Constraints in Dynamics of Affine Motion
- *О.Ю. Макаренко.* О применении принципа усреднения в негладких задачах механики.
- *П.С. Красильников, А.Е. Байков.* Об эффекте дестабилизации в неконсервативной механической системе с двумя степенями свободы.
- *А.А. Буров.* Об одной интерпретации лагранжевой механики с точки зрения экономики.

Теория взаимодействия тел с опорной поверхностью; динамика тел, опирающихся на поверхность:

- *А.В. Карапетян.* Двухпараметрическая модель трения (модификация модели Контенсу-Журавлева).
- *А.В. Карапетян.* Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ).
- *И.И. Косенко, Е.Б. Александров.* Контактная задача Герца и ее моделирование.
- *А.А. Киреев.* Связанные модели трения качения, скольжения и вращения.
- *А.А. Зобова.* Качественный анализ движения тела вращения на шероховатой плоскости.

Задачи небесной механики:

- *В.В. Белецкий, А.В. Родников.* О компланарных точках либрации в модельной задаче двойного астероида.
- *В.В. Сазонов.* Установившиеся вращательные движения искусственных спутников
- *В.В. Ивашкин.* О проблеме обеспечения астероидно-кометной безопасности Земли.
- *М.А. Ваишкова.* Эволюция орбит внешних спутников планет-гигантов.

Приложение методов теории устойчивости к изучению движения конкретных механических систем:

- *Чжао Дзе, В.М. Морозов.* Устойчивость стационарных движений механических систем, содержащих деформируемые элементы.
- *В.А. Самсонов, Л.А. Климина.* Бифуркации периодических движений в модели ветроприемного элемента ветряка Дарье.
- *В.И. Матюхин.* Стабилизация траекторий движения колесной механической системы.
- *А.С. Кулешов, А.В. Кремнев.* Новые результаты в динамике скейтборда.
- *С.Я. Степанов.* О периодических колебаниях двухмассового осциллятора на движущейся ленте.
- *В.Г. Вильке, Л.С. Шатина.* Стационарные движения в задаче трех вязкоупругих планет и их устойчивость.
- *Ю.Ф. Голубев.* Построение движений инсектоморфного робота на шаре.

В работе семинара регулярно принимают участие сотрудники механико-математического факультета и Института механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Вычислительного центра имени А.А. Дородницына РАН, Института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН и других научно-исследовательских центров.

Информацию о работе семинара можно найти на сайте кафедры теоретической механики и мехатроники www.tm-msu.ru в разделе «Научные семинары».

УДК 531.01

А.С. Андреев¹, В.М. Морозов²

¹ Ульяновский государственный университет
² НИИ механики МГУ

**СИБИРСКАЯ МОЛОДЕЖНАЯ НАУЧНАЯ ШКОЛА ПО
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ, УСТОЙЧИВОСТИ И
УПРАВЛЕНИЮ, ПОСВЯЩЕННАЯ ПАМЯТИ АКАДЕМИКА
ВАЛЕНТИНА ВИТАЛЬЕВИЧА РУМЯНЦЕВА**

(08.06.2009-12.06.2009, г. Ульяновск)

Задачами проведения Симбирской молодежной научной школы являлись: подробное знакомство молодых ученых Поволжского и других регионов с интенсивно развивающимися направлениями научных исследований по аналитической механике, теории устойчивости и управления; изучение молодыми учеными современных методов работы в указанной области науки; координация научной деятельности молодых и активных ученых в области современного качественного анализа динамики механических систем, развития прямого метода Ляпунова в исследовании устойчивости, стабилизации и управлении механическими системами, физическими и другими процессами, моделируемыми нелинейными обыкновенными дифференциальными, функционально-дифференциальными и стохастическими уравнениями, дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных; обсуждение возможностей практического внедрения алгоритмических методов и программ по управлению движением твердого тела, системы тел, робототехническими системами.

Научные темы школы:

1. Секция А «Аналитическая динамика»

а) качественный анализ движений механических систем под действием потенциальных и диссипативных сил, сил трения;

б) качественный анализ движения твердого тела, системы связанных твердых тел;

в) динамика движения шара, осесимметричного тела по шероховатой поверхности.

2. Секция В «Устойчивость движений и процессов»

а) прямой метод Ляпунова в исследовании устойчивости движений и процессов;

б) влияние структуры сил на устойчивость и стабилизацию движений механических систем;

в) динамика и устойчивость деформируемых элементов конструкций во взаимодействии с потоком жидкости и газа.

3. Секция С «Математическая теория управления»

а) метод функций Ляпунова в задачах управления нелинейными системами;

б) методы синтеза управления нелинейными управляемыми механическими системами;

в) устойчивость, стабилизация и управление эрмитовыми механическими системами;

г) управление механическими системами с запаздыванием в структуре обратной связи.

Прочитанные лекции ведущих ученых городов Москвы, Самары и Ульяновска содержали в доступном изложении классические материалы и материалы новейших исследований по актуальным проблемам аналитической динамики, теории устойчивости и управления. Было прочитано 15 лекций, в основном, часовой продолжительности.

На лекции проф. А.В. Карапетяна была подробно изложена методика качественного анализа динамики диссипативных систем с симметрией, основанная на применении обобщенных диаграмм Смейла. Общие положения подробно иллюстрировались в решении задачи о движении волчка «тип-топ».

Методика исследования качественного анализа движения тела в сопротивляющейся среде была ярко представлена в лекции проф. В.А. Самсонова.

Умению применения теоретических и практических знаний классической механики в решении задач космического полета была посвящена лекция проф. В.С. Асланова.

На лекции проф. В.М. Морозова была представлена эффективная методика исследования систем и процессов, моделируемых приводимыми нестационарными линейными системами и ее применение в решении самых различных задач механики.

На лекции проф. П.С. Красильникова было изложено новое представление метода усреднения и его применение в качественном анализе динамики систем.

Лекции проф. А.С. Андреева и В.С. Сергеева были посвящены качественному анализу функционально-дифференциальных уравнений и его приложению в задачах об устойчивости систем с запаздыванием. Эта тема была продолжена в лекциях молодого доктора физ.-мат. наук С.В. Павликова и докторанта Н.О. Седовой. В лекции С.В. Павликова была представлена методика применения функционалов Ляпунова в

задачах об устойчивости движений эрмитовых механических систем и стабилизации движений управляемых механических систем с учетом запаздывания в структуре обратной связи. Методика решения последней задачи на основе функции Ляпунова была представлена на лекции Н.О. Седовой.

Лекции проф. П.А. Вельмисова и докторанта А.В. Анкилова были посвящены методике исследования на основе функционалов Ляпунова задач динамики и устойчивости деформируемых элементов конструкции при аэродинамическом воздействии.

На лекции докторанта О.А. Перегудовой было представлено развитие принципа сравнения в применении к решению задач стабилизации и управления различными механическими системами, в том числе, мобильными роботами.

На лекции доц. А.Ю. Богданова было изложено развитие прямого метода Ляпунова в устойчивости и стабилизации систем, моделируемых разностными уравнениями, с применением к численным методам, в том числе, для задач механики.

С большим интересом была заслушана лекция проф. Ю.Ф. Голубева, в которой была продемонстрирована высокая эффективность методики Д.Е. Охочимского непосредственного решения задач оптимального управления механическими системами, в том числе, космическими объектами.

С большим вниманием участники школы выслушали воспоминания проф. А.В. Карапетяна, проф. Ю.П. Гупало и других ученых о научной и педагогической деятельности акад. Валентина Витальевича Румянцева, его отношении к ученикам и других аспектах его жизненной позиции.

Доклады молодых ученых (кандидатов наук и соискателей возрастом до 35 лет, аспирантов, выпускников, поступающих в аспирантуру, студентов), проходили одновременно по трем указанным выше секциям.

Такая организация позволила обеспечить продолжительность каждого доклада до 20 минут с обсуждением в течении времени до 10 минут.

Всего в работе молодежной научной школы приняло участие 64 человека, в том числе:

- 15 ведущих ученых с лекциями;
- 47 молодых ученых (кандидаты наук, соискатели в возрасте до 35 лет), аспиранты, студенты из г. Москвы, Ульяновской и Самарской областей;

- 2 доцента, к.ф.-м.н. (в возрасте до 40 лет).

На заключительном заседании единогласно было принято следующее решение:

- признать программу работы молодежной научной школы успешно выполненной;
- ходатайствовать перед редакцией журнала «Прикладная математика и механика» о размещении в журнале сообщения об итогах работы школы;
- предложить регулярное проведение молодежной научной школы по аналитической динамике, устойчивости и управлению движениями и процессами в городе Ульяновске;
- ходатайствовать перед Российским фондом фундаментальных исследований и Ульяновским государственным университетом о проведении следующей молодежной научной школы в июне 2011 года.

УДК 531.01

Г.А. Кутеева, М.П. Юшков
Санкт-Петербургский государственный университет

О РАБОТЕ СЕКЦИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ИМЕНИ ПРОФЕССОРА Н.Н. ПОЛЯХОВА ПРИ САНКТ- ПЕТЕРБУРГСКОМ ДОМЕ УЧЕНЫХ РАН

Научная и педагогическая деятельность Николая Николаевича Поляхова (1906 – 1987) почти 50 лет была связана с математико-механическим факультетом Ленинградского университета. Он избирался деканом факультета, долгое время руководил отделением механики и в течение 25 лет был заведующим кафедры теоретической механики, а с 1977 г. и до своей кончины заведовал кафедрой гидромеханики. Научные результаты Н.Н. Поляхова в области аэрогидромеханики собраны в книге «Избранные труды: Аэрогидромеханика», выпущенной издательством СПбГУ в 1997 г. Достижения Н.Н. Поляхова и его учеников С.А. Зегжды и М.П. Юшкова по аналитической негोलомной механике включены в их учебник для университетов «Теоретическая механика», который в 1985 году был опубликован издательством Ленинградского университета и получил первую университетскую премию. В 2000 г. этот учебник вышел в издательстве «Высшая школа» под грифом «учебник для университетов». Н.Н. Поляхов написал целый ряд работ по истории механики и создал великолепный соответствующий курс лекций.

По приказу Министерства высшего и среднего образования СССР в 50-х годах прошлого века в крупных городах СССР были образованы городские семинары по теоретической механике для преподавателей вузов данных городов. В Ленинграде такой семинар организовывали д.т.н., проф. Б.Н. Окунев, д.т.н., проф. Н.Н. Поляхов и д.т.н., проф. А.А. Яблонский. Он функционировал на базе Ленинградского Дома ученых АН СССР совместно с созданной одновременно с ним секцией теоретической механики Дома ученых. Эта секция при Доме ученых была создана именно для того, чтобы она являлась базой при Доме ученых для функционирования Городского семинара. По традиции считается, что одновременно с заседаниями секции проходит и городской семинар по теоретической механике. Первоначально семинаром руководил проф. Б.Н. Окунев, но через несколько лет он передал руководство проф. Н.Н. Поляхову, возглавлявшему его более 30-ти лет, вплоть до своей кончины 27 января 1987 г. Следует отметить, что благодаря особой активности известного методиста по теоретической ме-

ханике проф. А.А. Яблонского многие годы городской семинар посещало большое количество преподавателей города, при этом обсуждению методических вопросов уделялось особое внимание. После кончины проф. Н.Н. Поляхова семинар возглавил д.ф.-м.н., проф. П.Е. Товстик, являющийся председателем секции. Зам. председателя – д.ф.-м.н., проф. М.П. Юшков, ученый секретарь – к.ф.-м.н., доцент Г.А. Кутеева. В феврале 2009 г. на базе секции проведены пленарные доклады Международной научной конференции по механике «Пятые Поляховские чтения».

В 2007 – 2008 учебном году заседания секции теоретической механики и городского семинара проходили регулярно, за исключением каникулярных и предновогодних периодов. На заседаниях присутствовало от 14 до 30 человек.

Секция и городской семинар теоретической механики начали заседания в 2007–2008 учебном году в октябре 2007 г. докладом, посвященным великому ученому, математику и механику Леонарду Эйлеру. С докладом «Леонард Эйлер. К 300-летию со дня рождения» выступил к.ф.-м.н., доцент Н.Н. Поляхов (мл.). Этот доклад оказался востребованным аудиторией. На заседании присутствовало много студентов и аспирантов, которые живо участвовали в обсуждении различных фактов биографии ученого. Интересно отметить, что докладчик показывал копии страниц оригинальных книг Л.Эйлера и их переводы.

В отличие от первого доклада секции, посвященного истории механики, следующий доклад, сделанный в ноябре 2007 г. д.ф.-м.н., проф. Е.А. Ивановой, касался современных научных теоретических исследований в области рациональной механики. Этот доклад на тему «Описание термодинамических эффектов с позиций рациональной механики» является продолжением работ профессора Политехнического университета П.А. Жилина. В нем представлен неклассический подход к изучению взаимодействия частиц типа «тело-точка», однороторных, трехроторных гироскопов, а также связь полученных уравнений с уравнениями термодинамики. Доклад вызвал оживленную дискуссию, в которой участвовали профессора С.А. Зегжда, П.Е. Товстик, П.Е. Диевский.

5 февраля 2008 г. состоялось выездное заседание секции (актовый зал Санкт-Петербургского государственного университета), приуроченное к открытию Всероссийского семинара по аэрогидродинамике. В открытии семинара, посвященного 90-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР С.В. Валландера, принимали участие чл.-корр. РАН Г.А. Леонов, профессора С.К. Матвеев, Е.А. Нагнибеда, М.А. Рыдалевская и другие. Интересные доклады-воспоминания были

даны учениками профессора С.В. Валландера М.А. Рыдалевской и Е.А. Нагнибеда. С большим вниманием был заслушан доклад чл.-корр. РАН В.А. Плисса.

В марте 2008 г. состоялся доклад д.ф.-м.н., профессора И.И. Блехмана «Механика систем со скрытыми движениями и силы инерции». Этот доклад был интересен как профессорам, так и студентам. Присутствующие одобрили методическое построение доклада. Прошла также интересная научная дискуссия после доклада, в которой принимали участие многие присутствующие, среди них профессора И.А. Пасынкова, М.П. Юшков.

В апреле 2008 г. д.ф.-м.н., профессор М.П. Юшков выступил с докладом «Разгон автомобиля как голономной системы с освобождающей связью», в котором рассказал о своих совместных с А.Б. Бячковым, С.А. Зегждой и А.А. Нездоровым исследованиях в такой практической области механики как задача о разгоне автомобиля. Дан новый взгляд на эту задачу с позиций голономной системы с освобождающей связью.

В мае 2008 г. был заслушан доклад к.ф.-м.н., профессора Ш.Х. Солтаханова (г. Грозный) «Плавный перелет спутника с одной круговой орбиты на другую». Изложенная задача решалась с помощью теории движения систем с неголономными связями высокого порядка.

На всех заседаниях было задано много вопросов и сделано большое количество комментариев. Часто комментировали доклады профессора П.Е. Товстик, Г.Т. Алдошин, С.А. Зегжда, И.А. Пасынкова, С.К. Слѣзкинский, М.П. Юшков. Важно отметить, что на заседаниях присутствовали студенты, магистры и аспиранты вузов.

**НЕКОТОРЫЕ УСПЕХИ РАБОТЫ КАФЕДРЫ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И ТММ В САНКТ-
ПЕТЕРБУРГСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ РАСТИТЕЛЬНЫХ
ПОЛИМЕРОВ**

Анализ развития механики свидетельствует о том, что к настоящему времени она прошла долгий путь от теории конкретных явлений до фундаментальной науки, содержащей методы исследования окружающего мира. В настоящее время уже кажется вполне естественным, что теоретическая механика не только лежит в основе расчетов на прочность, колебания и устойчивость всех строительных сооружений, машин, приборостроительных изделий, но и позволяет анализировать динамику мехатронных конструкций, сенсорных микромеханических устройств, биологических объектов, решать актуальные проблемы нанотехнологий. Успех этого развития обусловлен тем, что фундаментальные принципы механики не могут быть ни установлены, ни опровергнуты опытным путем, а все объекты механики определены как математические понятия. Поэтому стройное здание механики возводится с помощью строгих математических методов, а пределы применимости механики совпадают с пределами применимости классической логики.

Современная механика обладает огромными возможностями, которые могут и должны стать достоянием не только профессионалов-теоретиков, но и научных сотрудников и инженеров. На основных принципах теоретической механики как фундаментальной дисциплины физико-математического цикла базируется подавляющее большинство общих и специальных инженерных курсов (теория механизмов и машин, детали машин, сопротивление материалов, гидравлика и др.), определяющих научно-технический прогресс.

Следовательно, успех образования в технических ВУЗах напрямую зависит от качества преподавания математики и теоретической механики. В Санкт-Петербургском государственном технологическом университете растительных полимеров руководство ВУЗа (ректор – д.т.н., проф. В.А. Суслов, проректор по учебной работе – к.т.н., проф. П.В. Луканин) уделяет немало внимания фундаментальной подготовке

будущих инженеров, что является проявлением не только ответственности за качество обучения в единственном в России ВУЗе, осуществляющем специализированную комплексную подготовку специалистов для всех направлений деятельности целлюлозно-бумажного производства, но и дальновидности, обеспечивающей выпускникам ВУЗа гарантированную работу в различных отраслях промышленности: целлюлозно-бумажной, лесной, химической, атомной, в энергетике, строительстве и других.

Свидетельством хорошей подготовки выпускников ВУЗа по теоретической механике является тот факт, что немалая их часть успешно работает по специальности «механика» на государственных и частных предприятиях широкого круга отраслей промышленности технологического и машиностроительного профилей. Решающую роль в процессе этой подготовки играет кафедра Теоретической механики и ТММ – лучшая из естественнонаучных и общеобразовательных кафедр ВУЗа*.

В настоящее время штат кафедры ТМ и ТММ составляет 9 человек, а возглавляет ее с 2005 года д.ф.-м.н., проф. А.А. Тихонов. Основное внимание в деятельности кафедры уделяется учебно-методической и научной работе.

Все без исключения сотрудники кафедры регулярно публикуют учебные и методические пособия. Обладая богатым преподавательским опытом, они успешно передают его следующим поколениям, совершенствуя учебную и методическую литературу не только по всем дисциплинам, читаемым на кафедре (теоретическая механика, теория механизмов и машин, надежность машин и оборудования), но и по актуальным вопросам из смежных дисциплин физико-математического цикла. Например, лучшим учебным пособием ВУЗа в 2007г. была признана книга «Теория и конструкция машин и оборудования отрасли. Бумаго- и картоноделательные машины» (объемом 46 п.л.) с грифом УМО, изданная под редакцией проректора по научной работе д.т.н., проф. В.С. Курова и д.т.н., проф. кафедры ТМ и ТММ Н.Н. Кокушина. Весь тираж этого фундаментального труда сразу же разошелся по заинтересованным организациям.

Отдельного упоминания заслуживают развиваемые на кафедре электронные средства обучения и контроля знаний. Внедряются электронные учебные пособия и конспекты лекций по теоретической механике и ТММ. С 2000 года успешно функционирует разработанный на кафедре контролирующе-обучающий комплекс «Vector» для студентов

* по итогам конкурсов 2007 и 2008 гг.

факультета «Механика автоматизированных производств», изучающих теоретическую механику в наиболее полном объеме. Постоянно совершенствуется используемый в учебном процессе и разработанный совместно со специалистами БГТУ «Военмех» пакет прикладных программ для выполнения курсового проектирования по ТММ. При этом на кафедре продолжается отработка оптимального сочетания традиционного и компьютерного методов проведения практических занятий по теоретической механике.

Электронные средства обучения оказываются важными и весьма полезными с точки зрения компенсации недостатков лабораторной базы. Внедрение в учебный процесс виртуальных лабораторных работ по курсу теоретической механики и по курсу ТММ позволило преодолеть некоторые трудности модернизации кафедральной лаборатории в соответствии с современными требованиями, предъявляемыми к фундаментальному и профессиональному обучению будущих инженеров, такие как дороговизна модернизации лабораторий и отсутствие на рынке необходимых лабораторных установок. Кроме того, в некоторых случаях виртуальные лабораторные работы, моделирующие конкретные промышленные объекты, дают студентам уникальную возможность поставить численные эксперименты и проанализировать работу сложных механических и электромеханических систем, самостоятельно меняя их параметры. В настоящее время студенты успешно осваивают разработанную на кафедре в 2006 г. виртуальную лабораторную работу «Динамика машинного агрегата на примере дисковой рубильной машины и асинхронного двигателя». Готовятся и другие виртуальные лабораторные работы, в частности по циклу «Колебания механических систем с несколькими степенями свободы».

С целью дальнейшего повышения качества образования и уровня подготовки будущих специалистов в 2006 г. в СПбГТУРП был учрежден Центр Теоретической и Прикладной Механики (ЦТПМ). Директором центра назначен д.ф.-м.н., проф., заведующий кафедрой Теоретической механики и ТММ А.А. Тихонов. Деятельность центра позволяет обеспечивать организацию дополнительных образовательных услуг по широкому спектру направлений современной рациональной и компьютерной механики, математики, прикладной математики для всех заинтересованных лиц: студентов, аспирантов, стажеров, инженеров, специалистов, проходящих переподготовку, слушателей по заказам предприятий. Являясь структурным хозрасчетным подразделением ВУЗа, находящимся в подчинении ректору СПбГТУРП, ЦТПМ имеет возможность и ставит своей целью приглашать лучших высококвалифи-

цированных преподавателей для того, чтобы стимулировать непрерывное совершенствование качества преподавания, проведение занятий на высоком научном и методическом уровне с использованием прогрессивных технологий обучения. За первый год своей работы ЦТПМ установил плодотворное сотрудничество с преподавателями из СПбГТУРП, а также из других ВУЗов и научных организаций Санкт-Петербурга (СПбГУ, БГТУ «Военмех», НИИ Машиноведения РАН), специально приглашенными для проведения работ по направлениям деятельности ЦТПМ. Многие из них разработали собственные конспекты лекций с оригинальными примерами, наборы типовых задач для практических занятий, проверочных заданий и контрольных работ. Стремясь сохранить для будущих слушателей лучшие из упомянутых учебно-методических разработок, ЦТПМ начал серию публикаций, полезных как для обучающихся, так и для преподавателей.

Широкий обмен педагогическим опытом и активное творческое участие в работе Центра представителей различных научных школ Санкт-Петербурга способствовали разработке и внедрению в педагогическую практику разнообразных активных методов обучения, направленных на интенсификацию учебного процесса и повышение его качества. В частности, разработан инновационный метод обучения дисциплинам «Теоретическая механика» и «Теория механизмов и машин», направленный на интенсификацию обучения путем деления исходной группы обучающихся на несколько малых групп для оптимизации количественного и качественного состава групп и перераспределения обучаемых между несколькими одновременно работающими преподавателями. Указанный метод позволяет повысить качество образования за счет уменьшения числа обучаемых на одного преподавателя и снижения потерь времени, неизбежных в работе с коллективом обучаемых, обладающих различными запасами знаний.

Еще одним важным итогом работы ЦТПМ и свидетельством успешности его работы стало повышение привлекательности и престижности педагогической работы среди талантливой ВУЗовской молодежи, что позволяет обеспечить успешную передачу опыта старших поколений и восстановить прерванный в последние годы процесс прилива свежих педагогических сил в ВУЗ. Так, в 2008 году коллектив кафедры Теоретической механики и ТММ пополнился молодым перспективным сотрудником, получившим первый опыт педагогической работы благодаря ЦТПМ.

Расширению возможностей ЦТПМ и повышению интереса со стороны обучающихся способствует наличие собственного компьютерно-

го класса, сети Интернет, стенда с оперативно обновляемой информацией не только по текущим направлениям деятельности Центра, но и по актуальным проблемам современной механики, по интересным изданиям, вышедшим из печати, по предстоящим международным конференциям, посвященным проблемам механики и прикладной математики.

Научно-исследовательская работа кафедры ТМ и ТММ ведется по следующим основным направлениям: аналитическая механика, динамика твердого тела, нелинейные колебания, теория и конструкция бумагоделательных машин, гидродинамика сеточной части бумагоделательных машин, вибросортирование волокнистых материалов.

Научные исследования выполняются в рамках работ по темам грантов Российского фонда фундаментальных исследований, грантов Рособразования, по программам ведущих научных школ России, по заказам предприятий ЦБП. В процессе выполнения научно-исследовательских работ сотрудники кафедры контактируют с подразделениями и институтами РАН, а также с другими российскими и зарубежными научными и учебными учреждениями. Важным итогом научно-исследовательской работы сотрудников кафедры являются научные монографии, статьи, патенты на изобретения и полезные модели, доклады на международных конференциях. В частности, в 2007 г. вышла из печати монография Н.Н. Кокушина и др. «Бумагоделательные машины» (СПб.: Изд-во СПбГПУ, 47,5 печ.л.), а в 2008 г. – монография Н.Н. Кокушина и др. «Бумагоделательные и картоноделательные машины» (СПб.: Изд-во СПбГПУ, 588 с). Данные издания отражают современные научные достижения, используемые при проектировании бумаго- и картоноделательных машин. В частности, известно, что в общей теории промышленной фильтрации рассматривается фильтрование двухфазных (твердая фаза + жидкость) суспензий. В то же время практика эксплуатации бумагоделательных машин показывает большое влияние содержащейся в бумажных массах газовой фазы (воздуха) на ход их обезвоживания. В связи с этим профессором Н.Н. Кокушиным изучена физика влияния газовой фазы на обезвоживание и разработаны методы расчета обезвоживания трехфазных бумажных масс.

В научно-исследовательской работе кафедры принимают участие студенты очной формы обучения.

Несмотря на то, что кафедра не является выпускающей, постоянно уделяется внимание подготовке научных кадров высшей квалификации. Об этом свидетельствует участие сотрудников кафедры в работе

специализированных ученых советов, работа с аспирантами и докторантами.

В планы дальнейшего развития деятельности кафедры входят:

- организация лаборатории вибраций с постановкой соответствующего цикла;
- лабораторных работ;
- организация научно-методического семинара;
- организация ВУЗовской студенческой олимпиады по теоретической механике.

ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ В САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Традиционно каждый учебный год в конце марта – начале апреля в Санкт-Петербургском государственном университете проходит студенческая олимпиада по теоретической механике. Организатором олимпиады является кафедра теоретической и прикладной механики математико-механического факультета. В настоящее время в состав жюри олимпиады входят председатель жюри, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, профессор П.Е. Товстик, заместитель председателя жюри, доцент Г.А. Кутеева, а также сотрудники кафедры К.К. Тверев, Д.Н. Иванов.

На олимпиаду приглашаются студенты любого факультета СПбГУ, интересующиеся решением нестандартных задач по механике. Реально участвуют в олимпиаде студенты дневного отделения трех факультетов – факультета прикладной математики и процессов управления, физического факультета, математико-механического факультета. Победителями олимпиады в разное время становились студенты разных факультетов. Выделить какой-то факультет невозможно. Мы приглашаем студентов любого курса участвовать в этом соревновании. В основном, задания подбираются такими, чтобы их могли решить студенты 1-3 курсов. Олимпиада длится четыре часа. Обычно дается шесть задач, но их число может меняться от 6 до 10 в зависимости от уровня сложности. Предлагаются задачи по трем темам: статика, кинематика и динамика. Каждой задаче организаторы дают свой номер – показатель уровня сложности, который оценивается в баллах. Самая сложная задача оценивается в 10 баллов, самая легкая может быть оценена в 4 балла. Победителем олимпиады считается участник, набравший наибольшее число баллов.

Это мероприятие является продолжением традиции олимпиад по теоретической механике, которые проводились в советское время. И, конечно, может рассматриваться как внутриуниверситетская студенческая олимпиада по теоретической механике I тура.

Автор статьи проводит университетские студенческие олимпиады по теоретической механике начиная с 2003 года. В обязанности автора входит подбор заданий и оценка уровня сложности задач. В подборе задач можно использовать задания предыдущих олимпиад по механи-

ке, проводимых в разное время различными учебными заведениями и с разным статусом (внутривузовские олимпиады, городские олимпиады, всероссийские). На кафедре остались некоторые задания таких олимпиад. Составители заданий не раскрывают секретов, каким образом были подобраны задачи, почему формулировка задачи выглядит именно таким образом.

Формулировки задач, без сомнения, играют важную роль при решении и понимании задач студентами, участниками олимпиад. Возможны разные способы для привлечения студентов различных специальностей к решению задач по механике. Один из способов видится в неформальной, но очень корректной постановке – формулировке задачи. Приведем несколько задач, формулировки которых (в несколько измененном виде) давались на олимпиадах.

В книге Р. Фейнмана [1] читаем следующее условие задачи (задача 4.14).

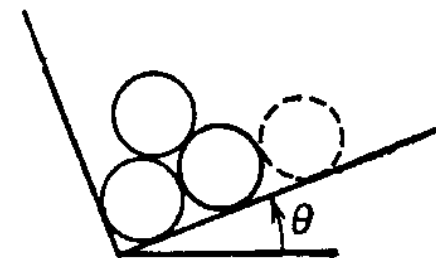


Рис. 1

«Грузовик загружен одинаковыми гладкими бревнами. Он заехал в кювет и стоит, накренившись на один борт, причем дно кузова образует с горизонталью угол θ (крена в продольном направлении нет – грузовик стоит «на ровном киле»). Заканчивается разгрузка кузова. Если удалить бревно, показанное на рисунке штрихами, то последние три бревна при малейшем уменьшении угла θ раскатятся. Найдите угол θ ». (см. рис.1). В той же книге дается решение этой задачи и приводится ответ

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{1}{(3\sqrt{3})}, \text{ что означает } \theta \approx 11^\circ.$$

Ответ любопытный и поучительный. Некоторые студенты пытаются решать эту задачу, задавая выдуманный угол, например 30° , пытаясь доказать свой ответ.

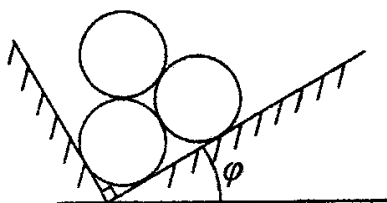


Рис. 2

В небольшой книге А.Л. Илехменева [2] дается несколько измененное условие приведенной выше задачи в следующем виде. «Три гладких одинаковых однородных цилиндра опираются на две гладкие взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 2). При каком угле наклона θ возможно показанное положение равновесия системы? (6 баллов)» Далее приводится решение, отличающееся от решения книги [1], и ответ

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) < \varphi < \frac{\pi}{6}.$$

Есть два существенных отличия формулировок этих задач. Первое отличие состоит в том, что в задаче Р. Фейнмана требуется найти минимальный угол, при котором возможно равновесие системы. Во второй задаче находится область, в которой будет положение равновесия. Второе важное отличие в том, что в формулировке первой задачи не упоминается о гладкости поверхностей дна и борта кузова, а это предполагается в решении.

Задачи, в которых рассматривается равновесие механической системы, состоящей из одного или нескольких однородных цилиндров, могут быть условно названы «задачами о бревнах». Такие задачи часто приводятся на студенческих олимпиадах по теоретической механике, а также упоминаются в качестве олимпиадных задач по физике (раздел механика) для школьников. На кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ даже появился неформальный термин «неумирающие бревна». В сборнике [3] приводится, например, следующая задача. «На земле лежат вплотную два одинаковых бревна. Сверху кладут такое же бревно. При каком коэффициенте трения между бревнами они не раскатятся? (По земле бревна не скользят)». Ответ: $k \geq (1 + \sqrt{3})^{-1}$.

Приведем еще одну задачу, различные варианты формулировок которой часто встречаются как в олимпиадных заданиях, так и в задачах по механике. Рассмотрим формулировку, приведенную в книге Р.

Фейнмана [1]. «Однородный брусок длиной L лежит на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 3).

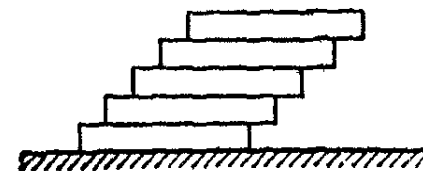


Рис. 3

Сверху на него накладываются такие же бруски так, что их боковые грани образуют одну плоскость, а торец каждого следующего бруска смещается по отношению к предыдущему на величину L/a (a – целое число). Сколько брусков удастся уложить, прежде чем все сооружение опрокинется? Покажите, что, если не ограничивать себя ни числом брусков, ни способом их укладки, верхний брусок можно сдвинуть относительно нижнего на сколь угодно большое расстояние». В книге [1] приводится решение и дается ответ: максимальное число брусков, которые можно уложить указанным способом равно a . Условно назовем эту задачу «задачей о брусках».

В сборнике задач И.В. Мещерского [4] приводится еще одна формулировка задачи о брусках в следующей форме. «Несколько одинаковых однородных плит длины $2l$ сложены так, что часть каждой плиты выступает над плитой нижележащей. Определить предельные длины выступающих частей, при которых плиты будут находиться в равновесии. При решении складываются последовательно веса плит, начиная с верхней». Ответ: $l, 1/2 l, 1/3 l, 1/4 l, 1/5 l$ и т.д. Решение этой задачи можно найти в учебном пособии [5].

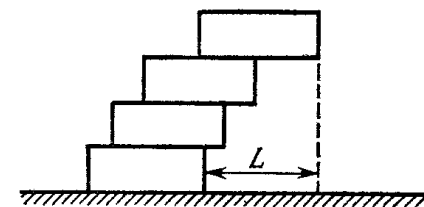


Рис. 4

Существуют и другие постановки задачи о брусках. В сборнике задач [6] приводится задание в следующем виде. «Одинаковые гладкие

пластины длины a укладываются одна на другую, как показано на рисунке (рис. 4). Найти такую длину «пролета» L (как функцию от числа пластин n), чтобы система оставалась в положении равновесия». Ответ:

$$L = \frac{1}{2} a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \frac{1}{2} a \ln(n).$$

Ответ к этому заданию естественным образом согласуется с ответом предыдущей задачи из задачника И.В. Мещерского.

Приведем примеры еще двух интересных задач вместе с методом решения. Варианты этих задач встречаются в учебной литературе [7],[8].

Пример 1: «Муха летит горизонтально параллельно столу с постоянной скоростью v_0 на высоте H от поверхности стола. Прямо под собой она заметила на столе каплю меда. Считаем, что муха может развивать ускорение a в любом направлении, причем $|a| \leq a_0$ (здесь a_0 – фиксированное число). Определить, как надо двигаться мухе, чтобы как можно быстрее добраться до меда? Сколько времени на это понадобится?» Метод решения: переходим в инерциальную систему координат (xy) , в которой муха в начальный момент покоится. Ось x направлена горизонтально параллельно поверхности стола и сонаправлена с v_0 , ось y направлена вертикально вниз. Множество достигаемых мухой точек плоскости (xy) в момент t есть круг радиусом $R = a_0 t^2 / 2$. Оптимальное время t удовлетворяет условию $H^2 + v_0^2 t^2 = R^2$, откуда находится искомое время t_{opt} . Во введенной системе координат (xy) движение мухи происходит с постоянным по модулю и направлению ускорением a_0 . В исходной неподвижной системе координат $(x_1 y_1)$ уравнение траектории мухи будет $x_1 = v_0 t_{opt} \left(\sqrt{y_1/H} - y_1/H \right)$.

Пример 2: «Груз P перемещается с помощью двух нитей ACE и BDE , перекинутых через блоки C и D (размерами блоков пренебрегаем) и связанных в точке E . Найти скорость поступательного движения груза в указанном на рис. 5 положении, если в этот момент скорости концов A и B нитей равны соответственно v_1 , v_2 и углы равны $\angle DCE = \alpha$, $\angle CDE = \beta$ ». Ответ к этой задаче:

$$v_E = \frac{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\alpha + \beta))}}{\sin(\alpha + \beta)}$$

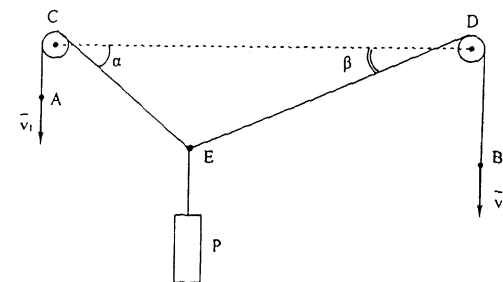


Рис. 5

Решение приведем для случая $v_1 = v_2$ и $\alpha = \beta$. Обозначим искомую скорость груза v_E . Проведем перпендикуляр EO к линии CD . По теореме Пифагора имеем $CE^2 = CO^2 + EO^2$. Дифференцируя это соотношение, получаем выражение $CE d(CE) = EO d(EO)$, где d означает знак дифференциала. Запишем выражения для приращений через скорости: $d(CE) = v_1 dt$, $d(EO) = v_E dt$. В результате имеем:

$$\frac{v_E dt}{v_1 dt} = \frac{CE}{EO} = \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

$$\text{Отсюда и находим ответ: } v_E = \frac{v_1}{\sin(\alpha)}.$$

В заключение дадим формулировку и решение одной очень изящной задачи из книги [3]. «В цилиндрический стакан наливают воду. При каком уровне воды центр тяжести стакана с водой занимает наинизшее положение?» Ответ: центр тяжести стакана с водой находится в наинизшем положении, когда он совпадает с уровнем воды в стакане. Действительно, если уровень воды ниже центра тяжести системы, то, доливая воду, мы прибавляем к системе массу, центр тяжести которой лежит ниже центра тяжести системы. При этом центр тяжести системы опускается. Это происходит до тех пор, пока центр тяжести системы и уровень воды не окажутся на одной высоте. Если далее наливать воду в стакан, то центр тяжести системы будет подниматься.

Литература

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями к вып. 1-4: Пер. с англ. / Под ред. А.П. Леванюка. Изд. 4-е. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 280 с.
2. Илехмев А.Л. Олимпиадные задачи по теоретической механике. Ч.1. Статика. – СПб.: Изд-во Балт. гос. техн. ун-та, 2004. – 36 с.

3. Понимаете ли Вы физику? Задачи академика П.Л. Капицы. Олимпиадные задачи. – М.: Знание, 1967. – 94 с.
4. Мецгерский И.В. Задачи по теоретической механике. – СПб.: Лань, 2006. – 448 с.
5. Чуркин В.М. Решение задач по теоретической механике. Геометрическая статика. – СПб.: Лань, 2006. – 304 с.
6. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
7. Розенблат Г.М. Механика в задачах и решениях. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 160 с.
8. Гельфгат И.М., Генденштейн Л.Э., Кирик Л.А. 1001 задача по физике с решениями. – Харьков-Москва: Центр «Инновации в науке, технике и образовании», 1996. – 592 с.

УДК 531.01

*Е.Б. Воронкова, И.А. Пасынкова, С.Б. Филиппов,
А.А. Тихонов, М.П. Юшков*

Санкт-Петербургский государственный университет

*, А.А. Тихонов, М.П. Юшков***О МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО МЕХАНИКЕ «ПЯТЫЕ ПОЛЯХОВСКИЕ ЧТЕНИЯ»**

3—6 февраля 2009 г. на базе математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета состоялась Международная научная конференция по механике «Пятое Поляховские чтения». В работе конференции приняли участие 289 ведущих и молодых ученых-механиков (в том числе 40 ученых из Германии, Франции, Италии, Канады, Швеции, Китая, Тайваня, Ирана, Сербии, Беларуси, Украины), подавших 216 докладов.

Председателем конференции являлся академик РАН Н.Ф. Морозов, сопредседателями были член-корр. РАН Г.А. Леонов, С.К. Матвеев, М.П. Юшков, работу ученых секретарей выполняли И.А. Пасынкова и Е.Б. Воронкова.

Открытие конференции состоялось 3 февраля в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН, находящемся в бывшем Дворце Великого Князя Владимира Александровича на Дворцовой набережной в доме 26. Были заслушаны пленарные доклады С.А. Зегжды, Е.А. Нагнибеда, В.С. Сабанеева, М.П. Юшкова «О научной, педагогической, методической и общественной деятельности Николая Николаевича Поляхова», Ю.Г. Мартыненко «Методы неголономной механики в задачах управления автономными колесными роботами», Mei Fengxiang, He Guang «On a generalization of birkhoffian mechanics», Е.А. Нагнибеда, Е.В. Кустовой «Новые модели кинетики и переноса в неравновесных потоках и их применение в газовой динамике», П.Е. Товстика «Локализованные формы потери устойчивости упругих тел», В.Н. Тхая «Грубые по периодическому движению модели».

В дальнейшем работа конференции проходила в Старом Петергофе на территории математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета по секциям «Теоретическая и прикладная механика» (сопредседатели М. Pascal, С.А. Зегжда, А.В. Карапетян, 53 доклада), «Динамика космического полета» (сопредседатели V. Vujichich, А.А. Тихонов, В.Н. Тхай, 24 доклада), «Гидроаэромеханика» (сопредседатели S. Radev, М.С. Иванов, Е.А. Нагнибеда, 51 доклад), «Механика деформируемого

твердого тела» (сопредседатели Г.И. Михасёв, П.Е. Товстик, Ю.А. Устинов, 44 доклада), «История механики» (сопредседатели Г.К. Михайлов, Н.Н. Поляхов (мл.), 14 докладов). Впервые в рамках конференции функционировала секция «Биомеханика» (сопредседатели А. Eriksson, С.М. Бауэр, Г.А. Любимов, 44 доклада). Важно отметить, что большое количество докладов было сделано молодыми учеными, аспирантами и студентами.

Работа конференции была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант РФФИ № 08-01-06007-г).

МЕХАНИКИ РОССИИ

В.В. Блескина¹, А.А. Евтушенко²

¹Северодвинский кораблестроительный институт

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

К 150-ЛЕТИЮ

ИВАНА ВСЕВОЛОДОВИЧА МЕЩЕРСКОГО (29 июля (10 августа) 1859 г. – 7 января 1935 г.)

В июле 2009 г. исполнилось 150 лет со дня рождения выдающегося отечественного ученого – Ивана Всеволодовича Мещерского.

Магистерская диссертация Мещерского «Динамика точки переменной массы», защищенная в 1897 г., была оценена по достоинству только

в середине двадцатого века в годы интенсивного развития ракетных технологий и космонавтики.

В 1949 г. А. А. Космодемьянский издал книгу И. В. Мещерского «Работы по механике тел переменной массы» тиражом 5000 экземпляров. Книга быстро разошлась, и в 1952 г. было повторено издание, которое также быстро разошлось [1].



Иван Всеволодович был признан основоположником аналитической теории реактивного движения тел переменной массы и тел переменного состава. Профессор Иван Всеволодович Мещерский руководил кафедрой теоретической механики в Петербургском (Ленинградском) политехническом институте со времени его открытия в 1902 г. до своей кончины в 1935 г. Космодемьянский, приступая к анализу работ Мещерского, изложил краткие сведения о жизни, учебе ученого.

Однако жизненный путь Ивана Всеволодовича освещался весьма лаконично. Существовали версии, что он был отпрыском княжеского рода Мещерских. В 1980-х гг. доцент Северодвинского Кораблестроитель-

ного института

тельного института Валентина Васильевна Блескина, выпускник МГУ, провела многолетнюю работу в Архангельском областном архиве и обнаружила множество интересных документов о происхождении, очень трудных условиях быта и учебы Ивана Мещерского, о его выдающихся успехах в Архангельской гимназии и Петербургском университете [2,3]. Изложим кратко найденные данные о жизненном пути И.В. Мещерского.

О деде. Сведения о деде И.В. Мещерского обнаружены (В.В. Блесскиной) в формулярном списке о его службе, в котором говорится, что провинциальный секретарь Иван Петрович Мещерский (1795 г.р.) происходил из петербургских дворян. Он был женат и имел двух дочерей: Евдокию и Александру. Евдокия – будущая мать И.В. Мещерского. Послужной список И.П. Мещерского начинается с девятнадцати лет, когда он поступил в легкую артиллерию. В двадцать пять он переведен в Санкт-Петербургский гарнизонный батальон в чине прапорщика, а в двадцать шесть – в Архангельскую губернию. В тридцать лет из-за проблем со здоровьем заканчивается военная служба Ивана Петровича в чине подпоручика. Позже он получает место дворянского заседателя в Пинежском уездном суде, потом становится провинциальным секретарем, после чего помощником Пинежского надзирателя питейного сбора. После этой должности его назначают винным приставом в Понойском дистанционном подвале. Уволен он был оттуда в 1829 г. Следующее упоминание о нем идет в 1831 г., в котором говорится, что Иван Петрович Мещерский умер в возрасте тридцати шести лет. Жена его, Степанида Кирилловна, скончалась в 1884 г. Оба они похоронены на Архангельском городском кладбище [2]. В метрической книге города Архангельска [5] существует запись «29-го июля 1859 г. у девицы Евдокии родился сын Иоанн».

Сведения о матери И.В. Мещерского О матерью Ивана Мещерского – Евдокии Ивановне Мещерской известно, что она родилась в 1825 г. на Пинеге. Как известно, жизнь у Евдокии Ивановны была трудная: «мне привелось испытать немало непосильных трудов, недостатков и нужды» (Из прошения Е.И. Мещерской о пенсии) [2]. Тем не менее, несмотря на все препятствия, которые ей довелось испытать, она все-таки приложила все свои силы, чтобы дать своему сыну достойное образование. Об отце Ивана Всеволодовича, к сожалению, ничего не известно.

Годы учебы в Архангельске. Родился Иван Мещерский 29 июля (по старому стилю) 1859 г. в Архангельске на острове Соломбала. Начальное образование Иван Мещерский получил в Соломбальском при-

ходском училище, куда поступил после семи лет. Среди двухсот учеников были дети: дворян, солдат, мещан, священников, крестьян и купцов. Преподавались такие предметы как: русский язык, арифметика, закон божий, пение. Там Мещерский проучился два года.

Иван Мещерский в 1869 г. поступил в Архангельское уездное училище. Располагалось оно в центре Архангельска, куда добираться с острова, а затем пешком было нелегко. В уездном училище, Мещерский показал отличные результаты по арифметике, геометрии, географии и закону божью; хорошие – по русскому языку, истории, чистописанию и черчению. В двенадцать лет он окончил училище и стал готовиться поступать в Архангельскую гимназию.

28 июля 1871 г. мать Мещерского составила прошение на имя директора гимназии, в котором просила принять сына на учебу [2]. Вместе с прошением она приложила выписку о его рождении и свидетельство, об окончании уездного училища. Иван поступал во 2-й класс гимназии. Для этого необходимо было сдать вступительные экзамены по закону Божию, русскому языку, арифметике, географии, естественной истории, французскому и немецкому языкам. Получив по большинству предметов отметки 4 и 5, Мещерский поступил на учебу в гимназию. Основанная в XVIII в. Архангельская гимназия была солидным учебным заведением. Начиная с 1871 г., гимназия переходила на восьмилетнее обучение, до этого было семилетнее, первоначально – четырехлетнее. За хорошую успеваемость, а так же ввиду бедственного положения семьи, Мещерского освобождают от платы за обучение.

Вспоминая учебу в гимназии, Иван пишет: «К тому, чему нас учили в гимназии, я относился с живым интересом: решал множество задач по математике, писал большие сочинения по русскому языку; помню, какое наслаждение испытывал, когда при чтении латинского или греческого классика удавалось раскрыть точный смысл запутанного места и понять все синтаксические тонкости: никаких подстрочников у нас не было, значения слов отыскивали в тяжеловесных словарях. Были, конечно, в гимназии и недостатки, – главный: мы совсем не научились, хотя и учились, ни физике, ни французскому, ни немецкому языку, но мы научились в ней добросовестно работать, – и за это большое спасибо учителям» [2]. Мещерский учился отлично, а по русскому и французскому языкам имел пятерки с плюсом. В старших классах ему пришлось зарабатывать на жизнь преподаванием. В то время в гимназии было принято делить учеников на разряды. В восьмом классе Иван был отнесен к первому, высшему разряду.



и начала называться Ломоносовской (по случаю 100-летия гимназии и 200-летия со дня рождения М.В. Ломоносова). В результате этого празднования была издана книга «Историческая записка Архангельской Ломоносовской гимназии» [4].

В этой книге, уникальное издание которой трудно найти в библиотеках, многократно встречаются лестные упоминания об Иване Мещерском; там же можно найти присланную им к юбилею автобиографию, ссылки на которую встречаются в работе [2]. В упомянутой книге идет полный список всех гимназистов, окончивших Архангельскую гимназию к 1911 г. Под порядковым номером 231 внесено имя Ивана

Учеба в гимназии была не из легких, от учеников требовали большой энергетической работы, и они выполняли ее добросовестно. Мещерский вспоминает: «в третьем классе нас было, помнится, человек тридцать, а когда я кончил курс, нас окончивших было только трое», из этих трех один гимназист окончил с золотой медалью. Это был Иван Мещерский. В 1878 г., после получения аттестата зрелости, Мещерский уезжает в Петербург и поступает в университет. С тех пор начался новый период его жизни и творчества.

В 1911 г. Архангельская гимназия торжественно отмечала 100-летний юбилей

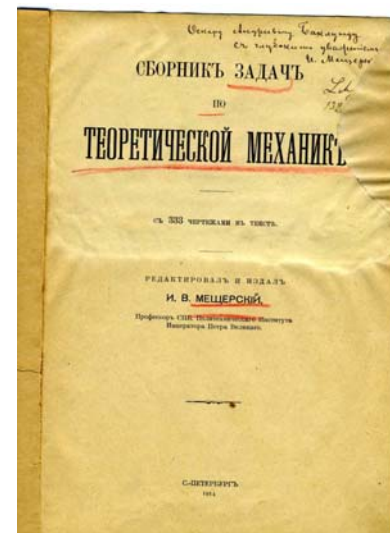
229	Щекотовъ Іоакимъ (золотая мед.). 1878 года.	Окончил курс Петровскаго-Губурской академии, на службе на Мин. Земледѣл. и Государст. Имуществъ.
230	Леонтьевъ Дмитрій.	Секретарь Военно-Медицинск. академии.
231	Мещерскій Иванъ (золотая мед.).	Профессоръ С.-Петербургскаго Политехнич. Института.
232	Ядовинъ Андрей.	

Фрагмент Исторической записки
Архангельской Ломоносовской гимназии

Мещерского. В графе о роде занятий выпускника И. Мещерского значится «профессор петербургского политехнического института».

По окончании гимназии в 1878 И.В. Мещерский поступил в Петербургский университет, который окончил в 1882 г. и был оставлен научным руководителем, проф. Д.К. Бобылевым для подготовки к профессорскому званию.

Несколько слов о педагогической деятельности. Эти годы Мещерский зарабатывал на жизнь преподаванием и частными уроками. После сдачи магистерских экзаменов в 1889 г., Мещерский вскоре начал преподавать математику и механику в качестве приват-доцента в Университете и других училищах. Он, читая там лекции по графической статике и по впервые созданному им курсу «Интегрирование уравнений механики» проводит упражнения по механике. Среди слушателей лекции Мещерского были А.Н. Крылов и В.Г. Колосов. С 1891 г. И.В. Мещерский руководил кафедрой механики на Петербургских высших женских курсах, которые в 1919 г. были слиты с университетом.



В 1902 г. решением правительства был открыт Петербургский политехнический институт с программами основных дисциплин, близкими к университетским. Проработав на этой кафедре более 30 лет (до кончины 7 января 1935 г.) в должности ординарного профессора и будучи удостоен звания заслуженного профессора Политехнического института в 1915 г., И.В. Мещерский начал создавать фундаментальный учебник «Курс теоретической механики» [6,7,8] и знаменитый у нас и за рубежом «Сборник задач по теоретической механике» [10,11,12].

Научная деятельность И.В. Мещерского посвящена решению проблем статики, динамики, гидродинамики, теории упругости. Особо выдающееся место занимают работы И.В. Мещерского по динамике тел переменной массы; его по праву считают основоположником этого раздела механики. В монографии И.В. Мещерского «Работы по Механике тел переменной массы» [1] опубликованы 6 из оригинальных исследований ученого по различным задачам динамики переменных масс. Кроме обширной магистерской диссертации чрезвычайно важное значение имеет работа Ивана Всеволодовича Мещерского «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае» (1904 г.)

Наибольшую известность И.В. Мещерскому принес общеизвестный «Сборник задач по теоретической механике», который выдержал сотню отечественных и зарубежных изданий. Это фундаментальный задачник принят в качестве основного пособия по практическим упражнениям по теоретической механике в университетах и высших технических учебных заведениях в нашей стране и за рубежом.

Заканчивая краткий обзор данных о жизни и деятельности И.В. Мещерского, мы отсылаем читателей к некоторым очеркам о его жизни и деятельности, названия которых включены в список литературы.

Литература

1. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1-е изд., 1949; 2-е изд. 1952. См. Предисловие и вводную статью Космодемьянского А.А. «Научная деятельность Ивана Всеволодовича Мещерского». – С. 5-25.
2. *Блескина В.В.* И. В. Мещерский. Годы учебы в Архангельске // История и методология естественных наук, 1986. – Вып. XXXII. – С. 159-167.
3. *Демин В.Г., Блескина В.В.* Педагогическая деятельность И.В. Мещерского // История и методология естественных наук, 1982. – Вып. XXIX. – С. 112-119.
4. ГаАо, о. д. ф., книга «Историческая записка Архангельской Ломоносовской гимназии (1811-1911)» – Архангельск, 1912.
5. ГаАо, о. д. ф., ф.29, оп.11, д. 76, л.33, об. л. 34. Архангельская духовная консерватория. Метрическая книга о родившихся на 1859 г., ч.1.
6. *Мещерский И.В.* Курс теоретической механики, ч.1. – М.-Л.: Госиздат, 1930.
7. *Мещерский И.В.* Курс теоретической механики, ч.2. – М.-Л.: Госиздат, 1930.
8. *Мещерский И.В.* Курс теоретической механики, ч.3. – СПб., 1913.
9. *Мещерский И.В.* Курс теоретической механики, ч. III. – Л.: изд-во Ленинградск. кораблестроительн. ин-та, 1930.
10. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. СПб., 1-е типографское изд. 515 задач, 1914.
11. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1986.
12. *Mieszczerski I.V.* Zbior zadan z mechaniki. – Warszawa, Panstw. wyd-wo naukowe, 1963.
13. *Meshchersky I.V.* Collection of problem in theoretical mechanics. – M., Higher school publ. house, 1968.

14. *Космодемьянский А.А.* Иван Всеволодович Мещерский / В кн.: Очерки по истории механики. – М.: Просвещение, 1964.
15. *Николаи Е.Л.* И.В. Мещерский // «Труды Ленинградского политехнического института им. М.И. Калинина», 1949. – №1. – С. 79-82.
16. *Геронимус Я.Л.* Иван Всеволодович Мещерский / В кн.: Очерки о работах корифеев русской механики. – М.: ГИТТЛ, 1952.
17. *Тюлина И.А.* Научная деятельность И.В. Мещерского // Труды института истории естествознания и техники АН СССР, 1961. – Т. 34. – С. 264-272.

С.Я. Степанов

Вычислительный центр РАН

ВАЛЕНТИН ВИТАЛЬЕВИЧ РУМЯНЦЕВ

19.07.1921 – 10.06.2007



Прошло больше двух лет со смерти выдающегося ученого академика Валентина Витальевича Румянцева. В.В. Румянцев был всемирно признанным лидером в области аналитической механики и теории устойчивости движения. Его имя неразрывно связано с теорией устойчивости движения тел с полостями, содержащими жидкость, теорией устойчивости по части переменных и с многими другими основополагающими результатами в области аналитической механики и динамики твердых тел. Эти результаты нашли

широкое практическое применение и способствовали нашему успеху в освоении космического пространства. В последние годы В.В. Румянцевым были получены новые результаты по теории обобщенных уравнений Пуанкаре — Четаева и по распространению вариационных принципов механики на системы с неустойчивающими связями.

В.В. Румянцев был учеником и продолжателем научных традиций Н.Г. Четаева, оказавшего решающее влияние на формирование научных интересов и на всю дальнейшую судьбу В.В. Румянцева. От Н.Г. Четаева он перенял титаническую работоспособность, тонкую механическую интуицию, дипломатичность и отеческую заботу об учениках. Наука и ученики из разных стран мира были главным делом жизни В.В. Румянцева. Под его руководством подготовлено более 60 кандидатов и 20 докторов наук. Его ученики являются блестящими специалистами, определяющими мировой уровень исследований по аналитической механике и теории устойчивости движения, и занимают

ведущие научные позиции в своих странах. Многие известные ученые, воспитанные на работах В.В. Румянцева, также причисляют себя к его ученикам. Таким образом, и после его смерти по праву можно говорить о существовании международной школы В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости движения. На кафедре теоретической механики и мехатроники МГУ работает научный семинар по аналитической механике им. В.В. Румянцева. Недавно в Институте проблем управления РАН прошла научная конференция, посвященная памяти В.В. Румянцева.

С 1965 года и до конца своей жизни Валентин Витальевич Румянцев работал в Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН, долгое время являясь заведующим отделом механики. Им создан высококвалифицированный коллектив сектора Теории устойчивости и механики управляемых систем. В непростые годы перестройки В.В. Румянцеву удалось не только удержать, но и почти удвоить численность возглавляемого им научного коллектива. В настоящее время сектор пополнился новыми молодыми сотрудниками и аспирантами, успешно работает над развитием методов исследования динамики гибридных систем переменной структуры (то есть систем твердых и деформируемых тел с односторонними связями, сухим трением и ударами), и ориентирован, в основном, на космические и транспортные приложения.

Научное наследие В.В. Румянцева составляет около 200 научных работ, в том числе 7 монографий. За научные труды В.В. Румянцеву присуждены премия Президиума АН СССР (1950), премия им. Чаплыгина АН СССР (1958), две Государственные премии СССР (1980, 1996), премия им. А.М. Ляпунова Президиума РАН (2004). Он награжден многими правительственными орденами и медалями. Научная деятельность В.В. Румянцева получила международное признание. Он был избран почетным профессором Московского государственного университета, действительным членом Международной Академии аэронавтики и Академии нелинейных наук, иностранным членом Сербской Академии наук и искусств и Туринской Академии наук, удостоен ряда международных научных премий.

Большое внимание В.В. Румянцев уделял научно-организационной работе. С 1981 года В.В. Румянцев был главным редактором ведущего научного журнала «Прикладная математика и механика». Его эрудиция и принципиальность сыграли существенную роль при формировании главных направлений развития тематики журнала. Благодаря его усилиям журнал занял передовые позиции в мире среди журналов по ме-

ханике. До конца своей жизни он руководил научным семинаром по аналитической механике и теории устойчивости в МГУ. Принимал активное участие в организации практически всех национальных и многих международных научных конференций по механике и устойчивости движения.

С удивительным вниманием и чуткостью Валентин Витальевич относился к своим коллегам и ученикам, ко всем, кому приходилось общаться и работать с ним. Светлая память о нем навсегда останется в наших сердцах.

П.С. Красильников

Московский авиационный институт (государственный университет)

ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА В.Г. ВЕРЕТЕННИКОВА

25 июля 2008 года, в возрасте 70-ти лет ушел из жизни Виктор Григорьевич Веретенников, член-корреспондент РАН, проректор МАИ. Последние 15 лет он руководил научно-исследовательской работой в Московском авиационном институте, будучи проректором по науке. До этого он был деканом факультета прикладной математики и физики – одного из самых молодых и успешно развивающихся факультетов.

Виктор Григорьевич родился 25 февраля 1938 года в Хабаровске. Окончив среднюю школу, он поступил в Казанский авиационный институт, который закончил в 1961 году. В то время казанская научная школа механиков была одной из ведущих школ России. Именно в Казани работал долгое время выдающийся ученый, член-корреспондент АН СССР – Четаев Н.Г., который объединил вокруг себя талантливую молодежь, занимающуюся исследованиями в области механики, нелинейной теории колебаний и устойчивости. Увлеченный научными исследованиями, Виктор Григорьевич поступает в аспирантуру МАИ к ученику Н.Г. Четаева, профессору Г.В. Каменкову, крупному российскому ученому, возглавлявшему МАИ в качестве ректора, и признанному лидеру в области теории устойчивости и колебаний, в аэродинамике. Именно задачи устойчивости в критических по Ляпунову случаях стали предметом его исследований.

Первая работа В.Г. Веретенникова связана с теорией вынужденных колебаний механической системы с двумя степенями свободы. За этим следует его обращение к теории устойчивости установившихся движений. Им была рассмотрена задача устойчивости в критическом случае трех пар чисто мнимых корней в отсутствии резонансов и получены критерии асимптотической устойчивости по формам третьего порядка малости. Исследуя общую задачу построения преобразований нелинейных, почти периодических систем, содержащих критические и не-критические переменные, он показал, что в несущественно особом случае, когда вывод об устойчивости делается по формам конечного порядка, задача устойчивости почти периодических уравнений сводится к проблеме устойчивости установившегося движения в критическом случае $(p+2q)$ нулевых корней, где p – число нулевых корней характеристического уравнения системы, q – число пар чисто мнимых собственных значений и k – число корней с отрицательными вещественными частями. На основе обобщения одной теоремы Каменкова он исследует

также существенно особый случай и доказывает устойчивость невозмущенного движения. Эти результаты, дополненные исследованиями устойчивости по Каменкову в случаях, близких к критическим, составили основу его докторской диссертации.

В 1972 году, в возрасте 34 лет, он защищает докторскую диссертацию и в этом же году становится заведующим кафедрой теоретической механики. С 1977 Виктор Григорьевич возглавляет факультет «Прикладная математика» МАИ.

Надо сказать, что становление факультета шло не просто. Далеко не все в МАИ понимали значение прикладной математики для технического вуза, более того, разделение математики на «чистую» и «прикладную» вызывало неприятие некоторых крупных математиков России и приводило к жарким дебатам в Академии Наук СССР. Это теперь, по прошествии многих лет, стало понятно, что прикладные исследования в математике, породившие революционное научное направление – информационные технологии, являются основой исследований во многих областях человеческой деятельности, в том числе и в технических дисциплинах. Виктор Григорьевич активно боролся за становление факультета и его поддерживал ректор МАИ.

В.Г. Веретенников начал с реформ в области научной работы и преподавательской деятельности на факультете. Он пригласил известных ученых работать на факультет – академика В.С. Пугачева, проф. У.Г. Пирумова и проф. А.П. Маркеева. Впоследствии, при его содействии, на факультет пришли также академики Р.Ф. Ганиев и В.М. Матроsov. Он резко повысил уровень научных исследований, привлекая талантливую молодежь в аспирантуру. Был особенно внимателен к тем преподавателям на факультете, которые активно занимались научной работой, всегда интересовался их результатами и всячески поддерживал их карьерный рост. В результате на факультете сформировались три научные школы, богатые, как результатами, так и своими учениками – школы В.Г. Веретенникова, В.С. Пугачева и У.Г. Пирумова. В конечном итоге именно эти школы привели к созданию на факультете двух диссертационных советов по защита докторских диссертаций.

Исполняя административные обязанности, он не переставал активно заниматься научными исследованиями. Продолжая исследования устойчивости в случаях, близких к критическим, Виктор Григорьевич строит замену переменных, позволяющую исследовать задачу устойчивости по укороченной системе, развивает методы и алгоритмы оценок областей устойчивости, областей притяжения, оценки интегральных воронок и их временных сечений, оценки инвариантных мно-

жеств. В последние годы своей жизни он обратился к изучению фундаментальных понятий аналитической механики в их взаимосвязи с основами геометрии, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, физики, техники. Результаты этих исследований представлены в двух монографиях, написанных им в соавторстве с В.А. Сеницыным.

Отличительная черта Виктора Григорьевича – умение работать с людьми. Он прекрасно разбирался в людях. Достаточно было первого знакомства с человеком, и он сразу распознавал его характер и способности, ошибался редко. Ставку делал на людей порядочных и способных, резко противодействуя интригам, которые в начале его карьеры имели место на факультете.

С 1992 года Виктор Григорьевич возглавлял научные исследования МАИ в должности проректора по науке. Так же, как при работе на факультете, он всего себя отдавал работе и добился успехов. В тяжелые 90-е годы МАИ продолжал активную исследовательскую работу, имея программы межуниверситетского сотрудничества, большое количество грантов. Институт имел наиболее высокие показатели по научной работе среди технических университетов.

Напряженная работа подорвала его здоровье. Виктор Григорьевич рано ушел из жизни, не реализовав свой творческий потенциал до конца. Светлая память о нем осталась, он живет в сердцах многих людей, знавших его.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

<i>В.Ф. Журавлев.</i> О каноническом разложении обобщенных сил в нелинейной механике	3
<i>Л.Д. Акуленко.</i> Задачи динамики и управления движением диска по плоской кривой.....	12
<i>В.Г. Вильке.</i> Инерциальные системы координат и время в классической механике	30
<i>А.А. Пожалостин, А.В. Панишина.</i> О преподавании раздела курса Теоретическая механика – приближенная теория гироскопа	38
<i>В.Д. Бертяев, А.Г. Митяев.</i> Тензорные величины в теоретической механике	48
<i>П.С. Красильников.</i> Метод усреднения как процедура выделения главных членов в рядах решений	56

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

<i>А.П. Иванов.</i> Об общих принципах механики в системах с трением ...	69
<i>М.А. Осипенко, А.Н. Третьякова, С.Д. Анферов, М.В. Мулюков.</i> Об одном необходимом условии равновесия механических систем с сухим трением	84
<i>А.А. Буров.</i> О равновесиях бусинки на вращающемся обруче при наличии сил сухого трения	92
<i>П.А. Коропец, В.А. Самсонов.</i> К вопросу о динамике тормозной колодки	100

СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

<i>О.М. Капустина, Ю.Г. Мартыненко.</i> Примеры параметрического анализа в задачах теоретической механики с помощью системы Mathematica.....	104
<i>В.В. Дубинин, В.В. Витушкин, Г.И. Дубровина.</i> Автоматизация эксперимента в лабораторном комплексе по механике.....	117
<i>М.Ю. Овчинников, С.А. Мирер, А.А. Дегтярев, С.С. Ткачев.</i> Полунатурное моделирование как элемент подготовки специалистов по механике и управлению.....	137
<i>К.Б. Обносов.</i> О тестировании остаточных знаний студентов по теоретической механике при аккредитации вуза	143

ИНТЕРЕСНЫЕ ЗАДАЧИ

<i>Ю.П. Смирнов, В.К. Тарасов.</i> Графические методы определения мгновенного центра ускорений	153
<i>Г.М. Розенблат.</i> О некоторых задачах теории удара с односторонними связями	159
<i>А.А. Михалев, Ю.Д. Селюцкий.</i> Особенности задачи равновесия кинематических цепей	168
<i>К.Б. Обносов, Ф.П. Кочанов.</i> Разновидности линии погони (кривая Г.В. Лейбница).....	174

ИНФОРМАЦИЯ

<i>А.В. Панишина.</i> Информационное сообщение о работе НМС по теоретической механике.....	185
<i>А.В. Карапетян, А.А. Зобова.</i> Семинар имени академика В.В. Румянцева	187
<i>А.С. Андреев В.М. Морозов.</i> Симбирская молодежная научная школа по аналитической динамике, устойчивости и управлению, посвященная памяти академика Валентина Витальевича Румянцева	190
<i>Г.А. Кутеева, М.П. Юшков.</i> О работе секции теоретической механики имени профессора Н.Н. Поляхова при Санкт-Петербургском Доме ученых РАН	194
<i>А.А. Тихонов.</i> Некоторые успехи работы кафедры теоретической механики и ТММ в Санкт-Петербургском государственном технологическом университете растительных полимеров.....	197
<i>Г.А. Кутеева.</i> Олимпиада по теоретической механике в Санкт-Петербургском государственном университете	203
<i>Е.Б. Воронкова, И.А. Пасынкова, С.Б. Филиппов, А.А. Тихонов, М.П. Юшков.</i> О международной научной конференции по механике Пятое Поляховские Чтения	210

МЕХАНИКИ РОССИИ

<i>В.В. Блескина, А.А. Евтушенко.</i> К 150-летию Ивана Всеволодовича Мещерского	212
--	-----

НАШИ УТРАТЫ

<i>С.Я. Степанов.</i> Валентин Витальевич Румянцев	219
<i>П.С. Красильников.</i> Памяти профессора В.Г. Веретенникова.....	222

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ СБОРНИКА НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

1. В адрес редколлегии представляется тщательно выверенная, научно отредактированная статья с направлением от кафедры или городского семинара по теоретической механике.

2. В статье необходимо указать фамилии, имена и отчества авторов, ученые степени, телефоны и адреса электронной почты.

3. Перед заглавием статьи указывается индекс УДК, после фамилий авторов – перечень полных названий их мест работы.

4. В статье следует применять Международную систему единиц (СИ) для обозначения физических величин и их единиц.

5. Объем рукописи вместе с таблицами, рисунками и списком литературы не должен превышать 10 страниц формата А4.

6. Статья готовится в редакторе MsWord. Размер шрифта – 10 пт. Поля по 2 см с каждой стороны. Межстрочный интервал – одинарный.

7. Набор формул осуществляется при помощи редактора формул MathType или Microsoft Equation 3.0.

8. Рисунки представляются в форматах jpg, bmp, tiff, gif, eps или wmf. Рисунки, подготовленные с помощью редактора Word, не принимаются.

9. Список литературных источников (литература) составляется по ГОСТ 7.1-84. Список составляют в соответствии с последовательностью появления ссылок в тексте. В статье ссылки на литературу заключаются в квадратные скобки.

Статьи для публикации в сборнике просим направлять по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1. Редколлегия сборника научно-методических статей «Теоретическая механика».

Самсонову В.А.

samson@imec.msu.ru

Научное издание

СБОРНИК НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Выпуск 27

Под редакцией профессора Ю.Г. Мартыненко

Редактор Ю.Д. Селюцкий

Технический редактор И.В. Топорнина
Компьютерный дизайн и верстка М.З. Досаев, Ю.Д. Селюцкий

Изд. лиц. № 040414 от 18.04.97

Подписано в печать Формат 60х90 1/16. Бумага офс. № 2.
Усл. печ. л. 14,9. Уч.-изд. л. 14,0. Тираж 250 экз.

Ордена «Знак Почета» Издательство Московского университета
125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ООО «Инсайт полиграфик»
119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1.