

*В. Н. Рубановский
В. А. Самсонов*

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

**в примерах
и задачах**

Допущено Министерством образования
в качестве учебного пособия
для студентов университетов

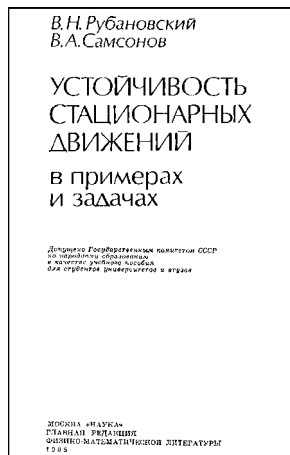
R&C
Dynamics

РХД

Москва • Ижевск

2003

УДК 531
ББК 22.21
Р82



Рубановский В. Н., Самсонов В. А.

Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 304 стр.

Рассмотрен большой круг задач об устойчивости положений абсолютного и относительного равновесия и стационарных движений механических систем, относящихся как к классическим, так и к современным разделам теоретической механики.

Может использоваться преподавателями, аспирантами и студентами, специализирующимися в области механики и машиностроения, в качестве учебного пособия к общему курсу теоретической механики, курсам по теории устойчивости движения и качественным методам дифференциальных уравнений.

Ил. 133. Библиогр. 9 назв.

Репринтное издание (оригинальное издание: М.: Наука, 1988 г.).

ISBN 5-93972-298-9

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003

<http://rzd.ru>

<http://ics.org.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	7
Раздел 1. Общие задачи устойчивости	24
§ 1.1. Равновесие консервативных механических систем	24
§ 1.2. Относительное равновесие	45
§ 1.3. Стационарные движения систем с циклическими координатами	69
§ 1.4. Равновесие систем с особенностями	92
Раздел 2. Классические задачи динамики тяжелого твердого тела	105
§ 2.1. Тело с одной закрепленной точкой	105
§ 2.2. Тело на гладкой горизонтальной плоскости	123
§ 2.3. Тело на абсолютно шероховатой плоскости	154
§ 2.4. Гироскоп	169
§ 2.5. Симметричное тело, подвешенное на струне	181
Раздел 3. Прикладные задачи динамики твердого тела	200
§ 3.1. Гироскоп в кардановом подвесе	200
§ 3.2. Ротор на гибком валу	221
§ 3.3. Тело в поле сил электромагнитной природы	230
§ 3.4. Тело в сопротивляющейся среде	237
§ 3.5. Спутник-гироскоп на круговой орбите	250
Раздел 4. Разные задачи	272
Список рекомендуемой литературы	304

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория устойчивости движения представляет собой один из важнейших разделов теоретической механики. Методы теории устойчивости являются математически строгими, универсальными и находят широкое применение при анализе различных технических задач. Значительный прогресс в развитии автоматического регулирования, в исследовании динамики роторных и гироскопических систем, летательных и космических аппаратов и т. д. был, в частности, достигнут благодаря использованию методов теории устойчивости.

Освоению методов теории устойчивости движения способствует разбор специальных задач, которые иллюстрируют соответствующие разделы курса теории устойчивости и ее роль при анализе динамики механических систем. В соответствии с учебными программами вузов отдельные вопросы теории устойчивости включены в различные общие и специальные курсы. Это требует создания серии методических пособий по изучению различных разделов теории и, в частности, типового сборника задач. Настоятельная необходимость в таких книгах назрела давно, и предлагаемое вниманию читателя пособие представляет собой первую попытку заполнить этот пробел.

Настоящее пособие появилось в процессе работы учебного семинара по специальному курсу «Теория устойчивости и стабилизация движения», который в течение многих лет на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова читает член-корреспондент АН СССР В. В. Румянцев. Опыт семинара показал, что решение учебных задач студентами помогает глубже понять теорию, способствует лучшему усвоению материала и совершенно необходимо для приобретения навыков решения прикладных задач.

При выборе материала для книги авторы ограничились задачами анализа установившихся движений меха-

нических систем. Теория устойчивости таких движений (абсолютного и относительного равновесий, перманентных вращений, стационарных движений и др.) наиболее развита и может быть проиллюстрирована на широком спектре примеров и задач. Здесь сочетание методов локального анализа устойчивости изолированных движений с основными положениями теории бифуркаций и другими геометрическими свойствами движения исследуемых объектов дает мощный аппарат глобального качественного изучения динамики механических систем.

Книга состоит из введения и четырех разделов. Введение содержит сводку основных понятий и теорем теории устойчивости, используемых при решении рассматриваемых задач.

В раздел 1 внесены сравнительно простые задачи. Их решение не требует проведения громоздких вычислений. Конечные формулы, как правило, позволяют провести качественный анализ задачи, дать полученному результату ясное механическое истолкование, выявить влияние на характер устойчивости исследуемого невозмущенного движения разных параметров системы.

В разделе 2 обсуждаются классические задачи динамики тяжелого твердого тела: тело с одной закрепленной точкой, тело на гладкой и шероховатой плоскости, тело на струне. При анализе этих задач основное внимание традиционно обращается на установление связи между достаточными и необходимыми условиями устойчивости исследуемых невозмущенных движений. Здесь также демонстрируются возможности различных приемов и методов анализа, доведенных почти до совершенства трудами многих исследователей.

В разделе 3 объединены прикладные задачи динамики твердого тела: гироскоп в кардановом подвесе, ротор на гибком валу, тело в поле сил электромагнитной природы, тело в сопротивляющейся среде, спутник на круговой орбите. Здесь на первый план выступает содержательный анализ результатов, благодаря которому нередко удается установить важные свойства движения рассматриваемых механических систем.

В разделе 4 помещены задачи, относящиеся к различным областям механики.

Большая часть задач последних трех разделов еще недавно была предметом научного исследования. Поэтому информация, получаемая при их решении, содержит эле-

менты познаваемости. Знакомство с этими задачами будет полезно для приобщения студентов к научной работе в кружках и семинарах, а также при выполнении курсовых и дипломных работ в различных областях механики.

Задачи, представленные в книге, можно также использовать на занятиях по общим курсам теоретической механики, теории колебаний и дифференциальных уравнений.

Авторы выражают признательность члену-корреспонденту АН СССР В. В. Румянцеву за поддержку идеи составления этого задачника, кандидату физико-математических наук С. Я. Степапову за участие в подборе и апробировании в работе со студентами ряда задач, доктору физико-математических наук А. В. Карапетяну за полезные советы по улучшению структуры и содержания задачника, коллективу кафедры теоретической механики Белорусского государственного университета за рецензирование пособия и высказанные замечания и пожелания и доценту Н. Н. Колесникову за труд по редактированию книги.

ВВЕДЕНИЕ

Определение устойчивости. Пусть уравнения возмущенного движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

и допускают частное решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad (2)$$

которому соответствует исследуемое невозмущенное движение системы. Здесь t — время, x_1, \dots, x_n — вещественные переменные, характеризующие состояние возмущенного движения системы, X_1, \dots, X_n — известные вещественные функции переменных x_1, \dots, x_n , которые в достаточно малой окрестности невозмущенного движения

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < H, \quad (3)$$

где H — заданная положительная постоянная, непрерывны и притом такие, что уравнения (1) для каждой системы начальных при $t = t_0$ значений x_{10}, \dots, x_{n0} величин x_1, \dots, x_n , лежащих в области (3), допускают единственное решение.

Определение 1. Если при всяком произвольно задаваемом положительном числе A ($A < H$), как бы мало оно ни было, можно найти такое положительное число λ , что при всяких возмущениях x_{10}, \dots, x_{n0} , удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 \leq \lambda, \quad (4)$$

и при любом $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < A, \quad (5)$$

то невозмущенное движение *устойчиво* по отношению к величинам x_1, \dots, x_n , в противном случае — *неустойчиво*.

Определение 2. Если невозмущенное движение устойчиво и можно указать такое число λ , что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих неравенству (4), выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) = 0, \quad (6)$$

то невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым* по отношению к величинам x_1, \dots, x_n .

Функции Ляпунова. Пусть $V(x_1, \dots, x_n)$ — функция переменных x_1, \dots, x_n , определенная в некоторой окрестности начала координат

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < h \quad (h \leq H), \quad (7)$$

однозначная, обращающаяся в нуль при $x_1 = \dots = x_n = 0$ и обладающая непрерывными частными производными.

Определение 3. Функция $V(x_1, \dots, x_n)$ называется *знакопеременной*, если в области (7) она может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 4. Функция $V(x_1, \dots, x_n)$ называется *знакопостоянной* (положительной или отрицательной), если она в области (7), кроме нулевых, может принимать значения только одного определенного знака.

Определение 5. Функция $V(x_1, \dots, x_n)$ называется *знакоопределенной* (определенно-положительной или определено-отрицательной), если в области (7), где h — достаточно малое положительное число, она может принимать значения только одного определенного знака и обращается в нуль только при $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Пусть в области (7) функцию $V(x_1, \dots, x_n)$ можно представить в виде

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j + V_*(x_1, \dots, x_n), \quad (8)$$

где

$$c_{ij} = c_{ji} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0$$

и производные вычисляются при $x_1 = \dots = x_n = 0$, а V_* — совокупность членов выше второго порядка малости.

Лемма. Если квадратичная форма

$$2V_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_ix_j \quad (9)$$

является определленно-положительной, то и функция V , допускающая представление (8), будет определленно-положительной.

Критерий Сильвестра. Для того чтобы квадратичная форма (9) была определленно-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ матрицы ее коэффициентов были положительны, т. е.

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \\ \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (10)$$

Теоремы об устойчивости и неустойчивости. Под производной \dot{V} функции V в силу уравнений возмущенного движения понимается ее полная производная по времени t , вычисленная в предположении, что переменные x_1, \dots, x_n удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1), т. е. выражение

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n. \quad (11)$$

Теорема Ляпунова об устойчивости. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с V , или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с V , то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема Барбашина — Красовского об асимптотической устойчивости. Если для дифференциальных уравне-

ний возмущенного движения можно найти определенно-положительную в области (7) функцию V такую, что ее производная \dot{V} в силу этих уравнений удовлетворяет в области (7) двум условиям:

- 1) $\dot{V} < 0$ вне M , 2) $\dot{V} = 0$ на M ,

где M — многообразие точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, не содержащее целых траекторий уравнений (1) при $t_0 \leq t < \infty$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема Ляпунова о неустойчивости. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения позволяют найти функцию V , которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной \dot{V} и могла бы принимать в окрестности нуля значения одного знака с V , то невозмущенное движение неустойчиво.

Теорема Красовского о неустойчивости. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию V такую, что ее производная \dot{V} удовлетворяет условиям:

- 1) $\dot{V} > 0$ вне M , 2) $\dot{V} = 0$ на M ,

где M — многообразие точек, не содержащее целых траекторий при $t_0 \leq t < \infty$, и если при этом можно указать точки, лежащие в произвольно малой окрестности начала координат, такие, что в них $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Устойчивость по первому приближению. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n + \\ + X_s^*(x_1, \dots, x_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (12)$$

где p_{sr} — постоянные, X_s^* — голоморфные функции x_1, \dots, x_n в области (3), начинающиеся в своих разложениях с членов не ниже второго порядка.

Уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, \dots, n) \quad (13)$$

называются *уравнениями первого приближения*.

Уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n) = 0 \quad (14)$$

называется *характеристическим уравнением* первого приближения.

Теорема Ляпунова об устойчивости. Если вещественные части всех корней λ_s характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости X_s^* .

Теорема Ляпунова о неустойчивости. Если среди корней λ_s характеристического уравнения найдется по меньшей мере один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости.

Случаи, когда характеристическое уравнение не имеет корней с положительными вещественными частями, но имеет корни с вещественными частями, равными нулю, называются *критическими*. В таких случаях устойчивость и неустойчивость не может быть установлена рассмотрением уравнений первого приближения, при этом функции X_s^* всегда можно выбрать так, чтобы имела место устойчивость или неустойчивость, по желанию.

Критерий Гурвица. Построим из коэффициентов уравнения (14) матрицу

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}, \quad (15)$$

в первом столбце которой стоят коэффициенты с нечетными индексами, начиная с a_1 ; элементы каждого последующего столбца образуются из соответствующих элементов предыдущего столбца уменьшением индекса на единицу, при этом следует считать $a_m = 0$, если $m > n$ или $m < 0$.

Составим из матрицы (15) главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (16)$$

Для того чтобы все корни алгебраического уравнения (14) с вещественными коэффициентами и положительным коэффициентом при старшем члене имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры (16) были положительны:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_n > 0. \quad (17)$$

Устойчивость абсолютного и относительного равновесия. Рассмотрим механическую систему с голономными связями, находящуюся под действием потенциальных и непотенциальных сил. Положение системы определим обобщенными независимыми координатами q_1, \dots, q_n , где n — число степеней свободы системы. Пусть кинетическая T и потенциальная Π энергии системы не зависят от t и

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (18)$$

где T_i — однородная степени i относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ часть кинетической энергии.

Уравнения движения системы возьмем в форме уравнений Лагранжа 2-го рода и запишем их в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T_2}{\partial q_s} = Q + \Gamma_s - \frac{\partial W}{\partial q_s} \quad (s = 1, \dots, n), \quad (19)$$

где Q_s — обобщенные неконсервативные силы, Γ_s — обобщенные гироскопические силы

$$\Gamma_s = \sum_{k=1}^n \gamma_{sk} \dot{q}_k, \quad \gamma_{sk} = -\gamma_{ks} = \frac{\partial a_k}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial a_s}{\partial \dot{q}_k},$$

$a_s(q_1, \dots, q_n)$ — коэффициенты линейной формы T_1 ,

$$W = \Pi - T_0 \quad (20)$$

— измененная потенциальная энергия системы.

Если связи, наложенные на систему, стационарны, то $T_2 = T$, $T_1 = T_0 = 0$, $W = \Pi$ и уравнения (20) принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \quad (s = 1, \dots, n). \quad (21)$$

В случае, когда все активные силы потенциальны ($Q_s = 0$), уравнения (19) допускают интеграл энергии

$$T_2 + W = h = \text{const.} \quad (22)$$

Рассмотрим случай, когда наложенные на систему связи допускают равномерное вращение системы как одного твердого тела вокруг некоторой неподвижной прямой с угловой скоростью ω , и обозначим через $J(q_1, \dots, q_n)$ момент инерции системы относительно указанной прямой. Тогда выражение для измененной потенциальной энергии, представляющей собой потенциальную энергию заданных сил и центробежных сил инерции, примет вид

$$W = \Pi - \frac{1}{2} \omega^2 J. \quad (23)$$

Для системы со стационарными связями интеграл (22) принимает вид

$$T + \Pi = h = \text{const} \quad (24)$$

и выражает закон сохранения полной механической энергии системы.

Положения относительного равновесия в отсутствие непотенциальных сил определяются из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, \dots, n). \quad (25)$$

В случае стационарных связей эти уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, \dots, n) \quad (26)$$

и служат для определения положений абсолютного равновесия.

Теорема Лагранжа. Если в положении абсолютного (относительного) равновесия потенциальная энергия $\Pi(W)$ имеет изолированный минимум, то такое положение равновесия устойчиво по отношению к обобщенным координатам и скоростям.

Теорема Лагранжа является обобщением известного принципа Торричелли для системы тяжелых твердых тел. Согласно этому принципу положение равновесия системы твердых тел, находящихся в однородном поле силы тяжести, будет устойчиво, если для него центр тяжести системы занимает наинизшее положение.

Для систем с одной степенью свободы имеет место обращение теоремы Лагранжа, а именно: если в положении абсолютного (относительного) равновесия потенциальная энергия $\Pi(q)$ ($W(q)$), предполагаемая аналитической функцией от q , не имеет минимума, то такое положение равновесия неустойчиво.

Для систем с несколькими степенями свободы справедлива следующая теорема.

Теорема Ляпунова. Если в положении абсолютного равновесия потенциальная энергия не имеет минимума и его отсутствие определяется членами второго порядка малости без необходимости рассмотрения членов более высокого порядка, то равновесие неустойчиво.

Теорема Ляпунова справедлива и для относительного равновесия, если уравнения (19) не содержат обобщенных непотенциальных и гироскопических сил.

Корни $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ векового уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \kappa & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \kappa & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - \kappa \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$c_{ij} = c_{ji} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$$

и производные вычисляются для положения равновесия, называются *коэффициентами устойчивости*, а число отрицательных корней — *степенью неустойчивости*.

Степень неустойчивости условимся обозначать символом χ .

Устойчивость стационарных движений. Пусть для механической системы с голономными связями кинетическая энергия не зависит явно от координат q_{m+1}, \dots, q_n , а обобщенные силы, отвечающие этим координатам, равны нулю. Такие координаты называются *циклическими*, а координаты q_1, \dots, q_m — *позиционными*. Тогда уравнения (19) допускают первые интегралы

$$P_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+j}} = c_j = \text{const} \quad (j = 1, \dots, n - m), \quad (27)$$

из которых все циклические скорости \dot{q}_{m+j} можно выразить через позиционные координаты q_1, \dots, q_m и их скорости $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$.

Введем в рассмотрение функцию Рауса

$$R = T - \sum_{j=1}^{n-m} c_j \dot{q}_{m+j}, \quad (28)$$

где циклические скорости должны быть заменены их значениями, получаемыми из интегралов (27). Тогда R можно будет представить в виде

$$R = R_2 + R_1 + R_0, \quad R_1 = \sum_{s=1}^m b_s (q_1, \dots, q_m) \dot{q}_s, \quad (29)$$

где R_i — однородная степени i относительно позиционных координат часть функции R , а уравнения для координат q_1, \dots, q_m записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial R_2}{\partial q_s} = Q_s + \Gamma_s - \frac{\partial W}{\partial q_s} \quad (s = 1, \dots, m), \quad (30)$$

где Q_s — обобщенные неконсервативные силы, Γ_s — обобщенные гироскопические силы

$$\Gamma_s = \sum_{r=1}^m g_{sr} \dot{q}_r, \quad g_{sr} = -g_{rs} = \frac{\partial b_r}{\partial q_s} - \frac{\partial b_s}{\partial q_r}, \quad (31)$$

а W — потенциальная энергия приведенной системы

$$W = \Pi - R_0. \quad (32)$$

В случае, когда все активные силы потенциальны ($Q_s = 0$), уравнения (30) допускают первый интеграл

$$R_2 + W = \text{const}, \quad (33)$$

представляющий собой интеграл энергии для приведенной системы.

Рассмотрим случай, когда наложенные на систему связи допускают вращение системы как твердого тела вокруг некоторой неподвижной прямой, а действующие на систему силы не дают момента относительно этой прямой. В этом случае кинетическая и потенциальная энергии не будут зависеть от угла q_n поворота системы как твердого тела вокруг указанной прямой, циклический интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = k = \text{const}$$

представляет собой интеграл площадей для плоскости,

ортогональной названной прямой, а для измененной потенциальной энергии системы будем иметь выражение

$$W = \Pi + \frac{k^2}{2J}, \quad (34)$$

где $J(q_1, \dots, q_{n-1})$ — момент инерции системы относительно упомянутой прямой.

Движения механической системы, для которых все позиционные координаты и циклические скорости сохраняют постоянные значения, называются *стационарными движениями*. В случае отсутствия непотенциальных сил стационарным движениям соответствуют положения равновесия приведенной системы; такие движения определяются из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, \dots, n - m)_1 \quad (35)$$

которые служат для нахождения значений позиционных координат.

Теорема Рауса. Если в стационарном движении потенциальная энергия W приведенной системы имеет минимум, то это движение устойчиво относительно позиционных координат и скоростей, а также циклических скоростей, по крайней мере для возмущений, не изменяющих значений циклических интегралов (27).

Теорема Ляпунова. Если потенциальная энергия W приведенной системы имеет минимум как при данных $p_j = c_j$, отвечающих рассматриваемому стационарному движению, так и при всяких достаточно близких к данным значениям $p_j = c_j + \eta_j$, где η_j малы по модулю, причем значения переменных q_1, \dots, q_m , обращающие ее в минимум, суть непрерывные функции величин p_j , то стационарное движение устойчиво относительно позиционных координат и скоростей, а также циклических скоростей.

Для гироскопически несвязанной системы справедлива следующая теорема.

Теорема. Если для изолированного стационарного движения гироскопически несвязанной системы при фиксированных циклических интегралах (27) функция W не имеет минимума и его отсутствие определяется членами второго порядка малости без необходимости рассмотрения членов более высокого порядка, то стационарное движение неустойчиво.

Бифуркация равновесий. Рассмотрим консервативную механическую систему с одной степенью свободы и голономными связями. Пусть потенциальная энергия $\Pi(q, \alpha)$ системы зависит от координаты q , определяющей положение системы, и от одного вещественного параметра α .

Для фиксированного значения параметра α положения равновесия определяются уравнением

$$\partial\Pi/\partial q = 0. \quad (36)$$

Множество положений равновесия можно представить геометрически на плоскости (α, q) точками кривой C , определяемой уравнением (36). Отдельные ветви C_i кривой C могут пересекаться в некоторых точках M_j , в которых уничтожается выражение

$$\Delta = \partial^2\Pi/\partial q^2. \quad (37)$$

Точки M_j называются *критическими*, или *точками бифуркации* (ветвления).

Одни точки кривой C отвечают устойчивым состояниям равновесия, другие — неустойчивым. Смена устойчивости на ветвях C_i может происходить только в точках бифуркации. Распределение устойчивых и неустойчивых положений равновесия для фиксированного значения α подчиняется закону смены устойчивости, состоящему в следующем. Пусть прямая $\alpha = \text{const}$ пересекает кривую равновесий C в точках P_j , которые занумеруем последовательно при обходе прямой $\alpha = \text{const}$ в том или ином направлении, и пусть ни одна из этих точек не является точкой бифуркации. Выражение Δ меняет знак при переходе от точки P_i к точке P_{i+1} , если при этом потенциальная энергия $\Pi(q, \alpha)$ принимает только вещественные значения. Поэтому при обходе прямой $\alpha = \text{const}$ устойчивые и неустойчивые равновесия будут чередоваться.

Аналогичные результаты имеют место для стационарных движений консервативных механических систем, для которых приведенная система имеет одну степень свободы.

Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия. Рассмотрим консервативную механическую систему с голономными связями в окрестности положения равновесия, для которого значения

всех ее лагранжевых координат q_1, \dots, q_n будем считать равными нулю.

Допустим, что на систему, кроме потенциальных сил, действуют диссипативные силы с функцией Рэля Φ

$$Q_s = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, \dots, n),$$

$$2\Phi = \sum_{s,r=1}^n e_{sr}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_s \dot{q}_r, \quad (38)$$

где Φ в окрестности рассматриваемого равновесия представляет собой положительно-определенную квадратичную форму обобщенных скоростей. Если Φ содержит производные всех обобщенных координат, то диссипация называется *полной*, в противном случае — *частичной*.

Тогда уравнения возмущенного движения можно взять в форме уравнений (21), в которых обобщенные неконсервативные силы Q_s определяются выражениями (38).

Теорема Кельвина — Четаева. Равновесие, устойчивое при одних потенциальных силах, остается устойчивым при дополнительном присоединении диссипативных сил и становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией. Изолированное и неустойчивое при одних потенциальных силах равновесие не может быть стабилизировано диссипативными силами с полной диссипацией.

Рассмотрим теперь случай, когда на исследуемую механическую систему, кроме потенциальных сил, действуют диссипативные и гироскопические силы. В этом случае уравнения возмущенного движения можно взять в форме уравнений (19), в которых Q_s определяется по формулам (38).

Теорема Кельвина — Четаева. Равновесие, устойчивое при одних потенциальных силах, сохраняет устойчивость при добавлении гироскопических и диссипативных сил. Изолированное равновесие, неустойчивое под действием потенциальных сил, остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил и сил диссипативных, если последние обладают полной диссипацией. Если неустойчивость изолированного положения равновесия под действием одних потенциальных сил имеет нечетную степень, то гироскопическая стабилизация равновесия невозможна. Равновесие, неустойчивое под действием

одних потенциальных сил, можно упрочнить или стабилизировать добавлением подходящих гироскопических сил, если степень неустойчивости четна и при этом не добавляются диссипативные силы с полной диссипацией.

Системы с известными первыми интегралами.

Теорема Рауса. Предположим, что уравнения движения какой-либо системы допускают не зависящие от времени интегралы

$$U(y_1, \dots, y_n) = c, \quad U_j(y_1, \dots, y_n) = c_j \\ (j = 1, \dots, k; k < n - 1), \quad (39)$$

непрерывные по отношению к входящим в них величинам.

Пусть U имеет изолированный минимум (максимум) $U(y_1^0, \dots, y_n^0) = c^0$ при фиксированных значениях остальных интегралов

$$U_1(y_1, \dots, y_n) = c_1^0, \dots, U_k(y_1, \dots, y_n) = c_k^0, \quad (40)$$

обращаясь в этот минимум (максимум) при значениях y_1^0, \dots, y_n^0 входящих в него переменных. Тогда эти значения будут соответствовать одному из действительных движений системы, и это движение будет устойчиво по отношению к y_1, \dots, y_n .

Замечание 1. В формулировке теоремы вид уравнений движения исследуемой системы не используется. Следовательно, теорема Рауса может быть применена для исследования стационарных движений не только систем с конечным числом степеней свободы, но и с бесконечным.

Замечание 2. Теорема сохраняет силу и в том случае, когда U есть не интеграл, а некоторая функция (или функционал), не возрастающая (не убывающая) вдоль траекторий движения системы.

Замечание 3. Теорема применима также в случае, когда переменные y_1, \dots, y_n стеснены некоторыми соотношениями вида $F(y_1, \dots, y_n) = 0$. В этом случае последние должны быть учтены при определении минимума (максимума) U наравне с условиями (40). Эти соотношения могут выражать голономные и неголономные связи, а также частные интегралы системы (в последнем случае можно сделать заключение только об условной устойчивости).

Замечание 4. Для консервативных систем с циклическими координатами требования теоремы сводятся к требованию минимума измененной потенциальной энергии системы.

Значения переменных y_1, \dots, y_n , для которых U имеет стационарные значения при условиях (40), могут быть определены по методу неопределенных множителей Лагранжа из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial W}{\partial \lambda_k} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y_1} = 0, \dots, \frac{\partial W}{\partial y_n} = 0, \quad (41)$$

$$W = U + \lambda_1 (U_1 - c_1^0) + \lambda_2 (U_2 - c_2^0) + \dots + \lambda_k (U_k - c_k^0).$$

Пусть

$$\lambda_1 = \lambda_1^0, \dots, \lambda_k = \lambda_k^0, \quad y_1 = y_1^0, \dots, y_n = y_n^0 \quad (42)$$

— решение системы (41). Введем обозначения

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{i,j=n} = \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_j} \right\|, \quad B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^{i=k,j=n} = \left\| \frac{\partial U_i}{\partial y_j} \right\|,$$

где производные вычисляются при значениях (42). Будем предполагать, что

$$\det \|b_{ij}\|_{i,j=1}^{i=k,j=n} \neq 0. \quad (43)$$

Значения y_1^0, \dots, y_n^0 будут отвечать условному минимуму интеграла U , если квадратичная форма

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad x_i = y_i - y_i^0 \quad (44)$$

положительно-определенна при условиях

$$(Bx)_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n = 0 \quad (i = 1, \dots, k). \quad (45)$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta = (-1)^k \begin{vmatrix} \Theta & B \\ B^T & A \end{vmatrix}, \quad (46)$$

где Θ — нуль-матрица размерности $k \times k$, а символ τ означает операцию транспонирования. Этот определитель с точностью до множителя $(-1)^k$ равен якобиану системы (41) и гессиану функции W по переменным $\lambda_1, \dots, \lambda_k, y_1, \dots, y_n$ при значениях (42).

Критерий условной знакоопределенности квадратичных форм. Для положительной (отрицательной) опре-

деленности квадратичной формы (44) при условиях (45), (43) необходимо и достаточно, чтобы главные диагональные миноры определителя Δ , начиная с минора $(2k+1)$ -го порядка, были положительны (чередовались по знаку, начиная с первого отрицательного):

$$\Delta_{2k+1} > 0, \dots, \Delta_{n+k} = \Delta > 0. \quad (47)$$

При исследовании устойчивости множества стационарных движений и построении областей устойчивости в пространстве параметров вместо условий (47) более предпочтительна симметризованная форма критерия условной знакоопределенности квадратичных форм.

Теорема. Для положительной определенности квадратичной формы (44) при независимых условиях (45) необходимо и достаточно выполнения условий

$$S_{2k+1} > 0, \dots, S_{n+k} = \Delta > 0, \quad (48)$$

где S_{h+i} означают суммы всевозможных диагональных миноров $(k+i)$ -го порядка определителя (46), окаймляющих его главный диагональный минор k -го порядка, состоящий из нулей.

При $k=0$ условия (48) дают симметризованную форму критерия Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм.

Метод Четаева построения функции Ляпунова. Пусть уравнения движений какой-либо системы допускают интегралы (39) и пусть значения переменных $y_1 = y_1^0, \dots$

$\dots, y_n = y_n^0$ отвечают некоторому стационарному движению системы. Функция Ляпунова для этого движения разыскивается в виде связи интегралов

$$V = V_* + \sum_{i=1}^h \lambda_i V_i + \sum_{i=1}^h \mu_i V_i^2, \quad (49)$$

$$V_*(x_1, \dots, x_n) = U(y_1^0 + x_1, \dots, y_n^0 + x_n) - U(y_1^0, \dots, y_n^0),$$

$$V_i(x_1, \dots, x_n) = U_j(y_1^0 + x_1, \dots, y_n^0 + x_n) - U_j(y_1^0, \dots, y_n^0).$$

Если постоянные $\lambda_1, \dots, \lambda_h, \mu_1, \dots, \mu_n$ возможно выбрать так, чтобы V представляла знакоопределенную по отношению к x_1, \dots, x_n функцию, то стационарное движение устойчиво по отношению к величинам y_1, \dots, y_n .

Если в (49) присутствуют квадраты всех интегралов V_1, \dots, V_k , то такую связку условимся называть *полной*, в противном случае — *неполной*.

Если интегралы (39) дважды непрерывно дифференцируемы, то постоянные $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ следует выбирать так, чтобы уничтожалась линейная часть связки (49). Очевидно, эти постоянные совпадают со значениями (42). При этом

$$V = (Cx, x) + o(|x|^2),$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} o(s)/s = 0, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad (50)$$

$$(Cx, x) = (Ax, x) + \sum_{v=1}^k \mu_v (By)_v^2.$$

Условия положительной определенности квадратичной формы (50) даются критерием Сильвестра и выражаются неравенствами

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (51)$$

Связь метода Четаева с теоремой Рауса. Связь между условиями знакоопределенности квадратичной формы (50) и квадратичной формы (44) при условиях (45), (43) дается следующей теоремой, отражающей содержание связи между методом Четаева и теоремой Рауса.

Теорема. Квадратичная форма (44) положительно определена при независимых условиях (45) тогда и только тогда, когда положительно-определенна при достаточно больших μ_1, \dots, μ_k квадратичная форма (50).

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть положительная определенность функции V и условный минимум функции U определяются из требования знакоопределенности квадратичной формы (50) и знакоопределенности квадратичной формы (44) при независимых соотношениях (45). Тогда условия устойчивости, получаемые из теоремы Рауса, совпадают с условиями, к которым приводит метод Четаева построения функции Ляпунова в виде полной связки интегралов с использованием тех же самых интегралов.

Достаточные условия обратимости теоремы Рауса. Пусть движение исследуемой системы описывается

уравнениями вида

$$\frac{dy_s}{dt} = \Phi_s(y_1, \dots, y_n) \quad (s = 1, \dots, n)$$

и эти уравнения допускают интегралы (39).

Рассмотрим уравнения в вариациях

$$\frac{dx_s}{dt} = \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial y_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial y_n} \right)_0 x_n,$$

$$x_s = y_s - y_s^0 \quad (s = 1, \dots, n),$$

где частные производные вычисляются для значений (42).

Имеет место следующий аналог теоремы Кельвина — Четаева.

Теорема. Если для стационарного движения (42) выполняются следующие условия: 1) $\Delta < 0$, 2) $\det \| b_{ij} \|_{i,j=1}^{i,j=k} \neq 0$, 3) уравнение $\left\| \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j} \right)_0 - \sigma \delta_{ij} \right\|_1^n = 0$, где $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, имеет ровно k нулевых корней, то движение (42) неустойчиво.

ОБЩИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 1.1. Равновесие консервативных механических систем

Задача 1.1.1. Тяжелый однородный стержень AC длиной $2a$ и весом P может скользить концом A по внутренней поверхности гладкой неподвижной полусферической чаши, диаметр которой $2r$ (рис. 1.1).

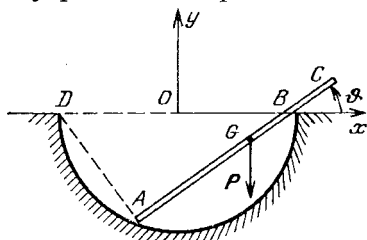


Рис. 1.1

В точке B стержень опирается о край чаши. Определить положение равновесия стержня и исследовать его устойчивость при выполнении условий $1 < a/r < 2$.

Решение. Для потенциальной энергии силы тяжести имеем выражение (рис. 1.1) $\Pi = Py_G$, где G — центр тяжести стержня. Поскольку на стержень наложена односторонняя связь, то $y_G \leq 0$; в противном случае равновесие стержня невозможно. Обозначим через ϑ угол, образуемый стержнем с осью x . Тогда $y_G = -GB \sin \vartheta$, $GB = AB - AG$, $AB = DB \cos \vartheta = 2r \cos \vartheta$, $AG = a$ и окончательно получаем

$$\Pi(\vartheta) = -2rP(\cos \vartheta - \kappa) \sin \vartheta, \quad \kappa = \frac{a}{2r} > \frac{1}{2}.$$

Положение равновесия определяем из уравнения

$$\Pi' = -2rP(2 \cos^2 \vartheta - \kappa \cos \vartheta - 1) = 0 \quad (\Pi' = d\Pi/d\vartheta).$$

Отсюда находим

$$\vartheta = \vartheta_0 = \arccos \frac{\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 8}}{4}, \quad \frac{1}{2} < \kappa < 1,$$

при этом $\vartheta_0 > 0$, если $1/2 < \kappa < 1$.

Для анализа устойчивости найденного положения равновесия вычислим вторую производную $\Pi'' =$

$= 2rP(4 \cos \vartheta - \kappa) \sin \vartheta$. Отсюда заключаем, что исследуемое равновесие устойчиво, так как для него $\Pi''(\vartheta_0) = 2rP \sqrt{\kappa^2 + 8} \sin \vartheta_0 > 0$.

Задача 1.1.2. Два тяжелых однородных стержня OA и AB , из которых второй вдвое длиннее и тяжелее первого, соединены в точке A шарниром (рис. 1.2). Первый стержень может вращаться около неподвижной точки O , второй опирается о край D стола, расположенного так, что линия OD горизонтальна и $OD = OA$. Найти положение равновесия системы и исследовать его устойчивость.

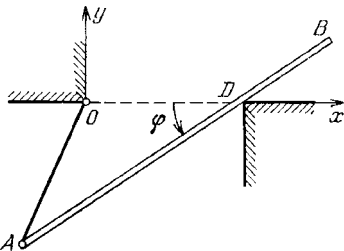


Рис. 1.2

Решение. Обозначим через φ угол ODA . Тогда для потенциальной энергии системы имеем выражение

$$\Pi(\varphi) = -\frac{1}{2}Pa \sin 2\varphi - 2Pa(\sin 2\varphi - \sin \varphi),$$

где a и P — длина и вес стержня OA .

Положение равновесия находим из уравнения

$$\Pi' = -aP(5 \cos 2\varphi - 2 \cos \varphi) = 0, \quad \cos \varphi_0 = \frac{1 + \sqrt{51}}{10}.$$

Это равновесие устойчиво, так как для него $\Pi'' > 0$.

Задача 1.1.3. Твердое тело состоит из треугольной призмы, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с высотой h и основанием $2b$, и полуцилиндра радиусом b (рис. 1.3). Обе части имеют одинаковую длину и изготовлены из одного материала. При каком ограничении на высоту тело может находиться в устойчивом равновесии, опираясь поверхностью цилиндра на горизонтальную плоскость?

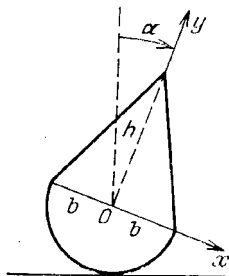


Рис. 1.3

Решение. Введем систему координат Oxy , связанную с телом, с началом на оси цилиндрической поверхности. Координата y_G центра тяжести тела вычисляется

по формуле

$$y_G = \frac{\frac{1}{2} h \cdot 2b \cdot \frac{1}{3} h - \frac{1}{2} \pi b^2 \cdot \frac{4}{3} b \cdot \frac{1}{\pi}}{\frac{1}{2} \pi b^2 + bh} = \frac{\frac{1}{3} h^2 - \frac{2}{3} b^2}{\frac{1}{2} \pi b + h}.$$

Положение тела определим углом α между вертикалью и плоскостью симметрии тела (осью y). Вычислим высоту H центра тяжести тела над опорной плоскостью $H(\alpha) = b + y_G \cos \alpha$. В положении равновесия $H' = -y_G \sin \alpha = 0$.

Пусть $y_G \neq 0$. Тогда $\alpha = 0$ — изолированное положение равновесия, в котором тело касается опорной плоскости цилиндрической поверхностью.

Для выяснения характера устойчивости этого положения равновесия необходимо определить характер экстремума функции $H(\alpha)$ при $\alpha = 0$, для чего вычислим ее вторую производную $H''(0) = -y_G$. При $y_G < 0$ функция $H(\alpha)$ имеет минимум в точке $\alpha = 0$. Следовательно, исследуемое положение равновесия устойчиво, если $y_G < 0$, или $h < \sqrt{2}b$. В случае $y_G = 0$ положение равновесия не является изолированным.

Задача 1.1.4. Решить предыдущую задачу для случая произвольной призмы.

Ответ. Ограничение на высоту призмы имеет тот же вид.

Задача 1.1.5. Положение равновесия физического маятника, в котором его центр масс находится над опорой, неустойчиво. Для стабилизации этого положения между телом и опорой помещена спиральная пружина, создающая восстанавливающий момент, пропорциональный углу α наклона маятника (рис. 1.4). Каким следует выбрать коэффициент пропорциональности, чтобы желаемая стабилизация была достигнута?

Решение. Потенциальная энергия сил, действующих на тело, имеет вид

$$\Pi(\alpha) = mgl \cos \alpha + \frac{1}{2} c \alpha^2,$$

где m — масса тела, l — расстояние между осью качания маятника O и его центром тяжести G , c — искомая жесткость пружины.

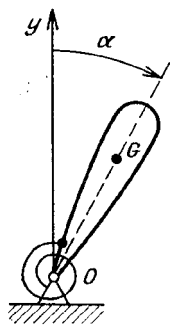


Рис. 1.4

В положении равновесия

$$\Pi' = -mgl \sin \alpha + c\alpha = 0.$$

При любых значениях параметров уравнение равновесия имеет решение $\alpha = 0$. Отвечающее этому решению положение равновесия устойчиво, если $\Pi''(0) = -mgl + c > 0$.

Отсюда получается ответ на вопрос задачи в виде неравенства $c > mgl$.

Задача 1.1.6. Один из концов невесомой нерастяжимой нити длиной l закреплен в точке B (рис. 1.5). Нить несет подвижный блок C и перекинута через неподвижный блок D . Размеры блоков будем считать исчезающе малыми; ось блока D расположена на одном уровне с точкой B . К обойме подвижного блока подвешен груз Q , который может двигаться в вертикальных направляющих, расположенных между точками B и D посередине. К концу нити подвешен груз P . Расстояние BD равно a . Найти положение равновесия системы и исследовать его устойчивость.

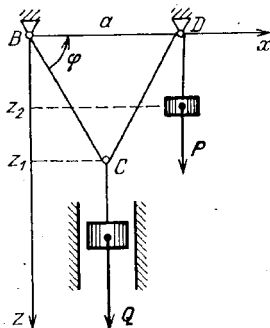


Рис. 1.5

Решение. Обозначим через z_1 расстояние оси подвижного блока от горизонтальной прямой BD , через z_2 — расстояние конца нити от той же прямой и через φ угол DBC . Очевидно,

$$z_1 = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varphi, \quad z_2 = l - \frac{a}{\cos \varphi}.$$

Поэтому для потенциальной энергии сил тяжести имеем выражение

$$\Pi(\varphi) = -Qz_1 - Pz_2 = -\frac{aQ}{2} \operatorname{tg} \varphi + \frac{Pa}{\cos \varphi} - Pl.$$

Положение равновесия находим из уравнения

$$\Pi' = -\frac{a}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{Q}{2} - P \sin \varphi \right) = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение

$$\varphi = \varphi_0 = \arcsin \frac{Q}{2P},$$

если $Q < 2P$. Если же $Q \geq 2P$, то система не имеет положений равновесия.

Найденное равновесие системы устойчиво, так как $\Pi''(\varphi_0) = aP/(\cos \alpha_0) > 0$.

Задача 1.1.7. Тяжелый однородный стержень AB скользит своими концами по двум пересекающимся неподвижным прямым, расположенным в вертикальной плоскости под одинаковыми углами к горизонту (рис. 1.6).

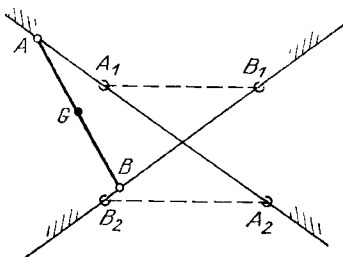


Рис. 1.6

Очевидно, что существуют два положения равновесия стержня: A_1B_1 и A_2B_2 , в которых стержень горизонтален. Какое из этих положений равновесия устойчиво? Существуют ли другие положения равновесия?

Решение. Ответ на поставленные вопросы может быть получен путем геометрических рассуждений. При перемещении стержня его центр тяжести G описывает эллипс. В этом случае существуют лишь два положения стержня, отвечающих экстремальным значениям высоты точки G . Им и отвечают два положения равновесия стержня, изображенные на рис. 1.6; других положений равновесия нет.

Поскольку в положении A_2B_2 высота точки G минимальна, то это положение равновесия устойчиво.

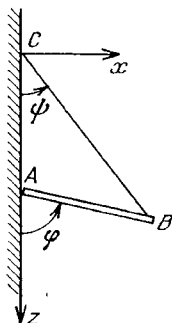


Рис. 1.7

Подтвердите эти выводы аналитическими выкладками.

Задача 1.1.8. Однородный тяжелый стержень AB концом A скользит по гладкой вертикальной направляющей, а за конец B удерживается невесомой нерастяжимой нитью длиной l , которая другим концом закреплена в точке C (рис. 1.7). Вес стержня P , его длина $2l$. Найти положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость.

Решение. Обозначим через φ и ψ углы, образуемые стержнем и нитью с вертикалью. Тогда для потенциальной энергии силы тяжести имеем выражение $\Pi(\varphi, \psi) = -P(L \cos \varphi - l \cos \psi)$, при этом углы φ и ψ связаны очевидным соотношением $L \sin \varphi = 2l \sin \psi$, с помощью которого выражение для Π пред-

ставим в виде

$$\Pi(\varphi) = Pl(\cos \varphi - 2\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}), \quad \lambda = \frac{L}{2l}.$$

Положения равновесия стержня определяются из уравнения

$$\Pi' = Pl \left(\frac{2 \cos \varphi}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} - 1 \right) \sin \varphi = 0.$$

Это уравнение имеет следующие три решения:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_3 = \arccos \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{3}}, \text{ если } 1 < \lambda \leq 2.$$

Найденные семейства положений равновесия представлены на рис. 1.8 в зависимости от значений параметра λ .

Для исследования устойчивости найденных положений равновесия вычислим вторую производную

$$\Pi''(\varphi) = Pl \left(\frac{2 \cos \varphi}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} - 1 \right) \cos \varphi - \frac{2Pl(\lambda^2 - 1) \sin^2 \varphi}{(\lambda^2 - \sin^2 \varphi)^{3/2}}.$$

Отсюда находим

$$\Pi''(0) = Pl(2 - \lambda)\lambda^{-1}, \quad \Pi''(\pi) = Pl(2 + \lambda)\lambda^{-1} > 0,$$

$$\Pi''(\varphi_3) = -\frac{2Pl(\lambda^2 - 1) \sin^2 \varphi_3}{(\lambda^2 - \sin^2 \varphi_3)^{3/2}} < 0.$$

Следовательно, равновесие $\varphi_1 = 0$ устойчиво, если $\lambda < 2$, и неустойчиво, если $\lambda > 2$; равновесие $\varphi_2 = \pi$ устойчиво, а $\varphi = \varphi_3$ неустойчиво.

Отметим, что на бифуркационной диаграмме (рис. 1.8) для значений $\lambda < 1$ не происходит смены устойчивости на ветвях кривой равновесий, что, казалось бы, противоречит общим положениям теории бифуркаций. Это объясняется тем, что на плоскости переменных λ , $\cos \varphi$ точки прямых

$\lambda = \lambda_0 < 1$, лежащие внутри полукруга D единичного радиуса (на рис. 1.8 область D заштрихована), не отвечают кинематически допустимым положениям системы.

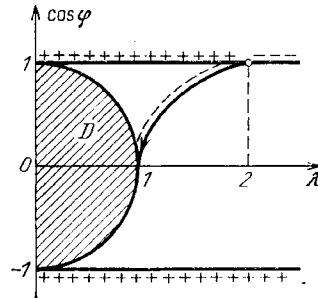


Рис. 1.8

С математической стороны это проявляется в том, что для точек области D функция $\Pi(\varphi)$ принимает комплексные значения и, следовательно, не имеет физического смысла.

На рис. 1.8 значками «+» и «—» помечены соответственно устойчивые и неустойчивые равновесия.

Задача 1.1.9. Невесомая прямолинейная трубка шарнирно закреплена в некоторой точке O своей оси (рис. 1.9). В трубку вставлена линейная пружина жесткостью c , свободный конец которой находится выше точки O на расстоянии h от нее. Кроме того, с трубкой и неподвижной опорой связана спиральная пружина, создающая восстанавливающий момент, пропорциональный углу α между трубкой и вертикалью с коэффициентом k . В трубке к свободному концу пружины прикреплен поршень весом P . Пренебрегая размером поршня, выделить в пространстве параметров задачи область, для которой вертикальное положение трубки является устойчивым положением равновесия.

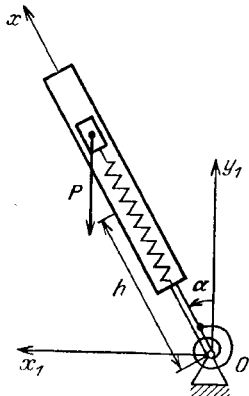


Рис. 1.9

Решение. Система имеет две степени свободы. Одной соответствует обобщенная координата α , а второй координата x , определяющая положение поршня в трубке ($x = 0$, когда поршень находится в точке O).

Потенциальная энергия активных сил имеет вид

$$\Pi = Px \cos \alpha + \frac{c}{2} (x - h)^2 + \frac{k}{2} \alpha^2.$$

В положении равновесия имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = P \cos \alpha + c(x - h) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = -Px \sin \alpha + k\alpha = 0.$$

Очевидно, что уравнения равновесия при любых допустимых значениях параметров (естественно считаем, что $c > 0$) допускают решение $\alpha = 0$, $x = x_0 = h - P/c$.

Исследуем устойчивость этого положения равновесия. В возмущенном движении положим $x = x_0 + h\xi$, а для α сохраним прежнее обозначение. Вычислим изменение

$\Delta\Pi = \Pi - \Pi_0$ потенциальной энергии при переходе от положения равновесия к возмущенному положению. Вводя безразмерные параметры $b = k/(ch^2)$, $\lambda = P/(ch)$, представим $\Delta\Pi$ в виде

$$\frac{\Delta\Pi}{ch^2} = \frac{1}{2} [\xi - \lambda(1 - \cos \alpha)]^2 + F(\alpha),$$

где

$$2F(\alpha) = b\alpha^2 - 2\lambda(1 - \lambda)(1 - \cos \alpha) - \lambda^2(1 - \cos \alpha)^2.$$

Отсюда заключаем, что условия минимума потенциальной энергии совпадают с условиями минимума функции $F(\alpha)$. Найдём последние. Для этого вычислим первые две производные от функции F при $\alpha = 0$: $F'(0) = 0$, $F''(0) = b - \lambda(1 - \lambda)$. Следовательно, равновесие устойчиво, если $b > \lambda(1 - \lambda)$, и неустойчиво, если $b < \lambda(1 - \lambda)$.

На рис. 1.10 указана область D устойчивости исследуемого равновесия на плоскости параметров b , λ ; здесь символом Γ обозначена часть границы области D , определяемая уравнением $b = \lambda(1 - \lambda)$, $0 < \lambda < 1$.

Исследуем вопрос о том, для каких точек границы Γ равновесие устойчиво и для каких точек оно неустойчиво. С этой целью вычислим следующие две производные функции F при $\alpha = 0$, $b = \lambda(1 - \lambda)$: $F'''(0) = 0$, $F^{(IV)}(0) = \lambda(1 - 4\lambda)$. Отсюда следует, что равновесие устойчиво для тех точек границы Γ , для которых $0 < \lambda < 1/4$, и неустойчиво для точек, для которых $1/4 < \lambda < 1$.

Выясним теперь вопрос о том, будет ли устойчиво равновесие для той точки границы Γ , для которой $\lambda = 1/4$. Для этого вычислим следующие две производные функции F при $\alpha = 0$, $\lambda = 1/4$: $F^{(V)}(0) = 0$, $F^{(VI)}(0) = 3/4 > 0$. Следовательно, равновесие устойчиво для указанной точки границы Γ .

Задача 1.1.10. Найти положения равновесия маятника с пружиной, описанного в условии задачи 1.1.5, и исследовать их устойчивость.

Решение. Уравнение равновесия (см. решение задачи 1.1.5) имеет вид

$$\Pi' = -mgl \sin \alpha + c\alpha = 0.$$

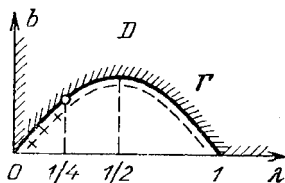


Рис. 1.10

Одно решение этого уравнения очевидно: $\alpha_1 = 0$, другие найти в аналитическом виде нельзя, но зато можно разрешить его при $\alpha \neq 0$ относительно других параметров, например, относительно $\kappa = c/(mgl)$. Проделав это, получим

$$\kappa = (\sin \alpha)/\alpha.$$

Зависимость $\kappa(\alpha)$ позволяет построить качественно семейство положений равновесия маятника (рис. 1.11).

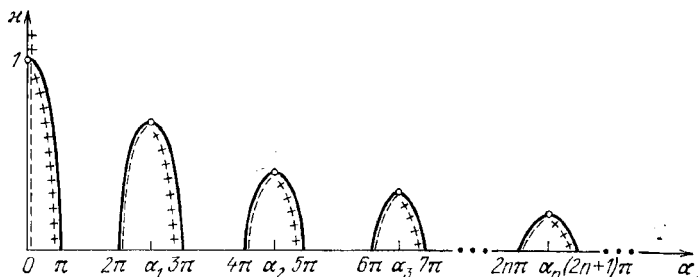


Рис. 1.11

Видно, что с уменьшением параметра κ (вследствие, например, уменьшения жесткости пружины) количество возможных положений равновесия маятника увеличивается. При достижении параметром κ очередного критического значения κ_n рождается новая пара равновесий

α_n и $-\alpha_n$, каждое из которых затем при $\kappa < \kappa_n$ разветвляется на два.

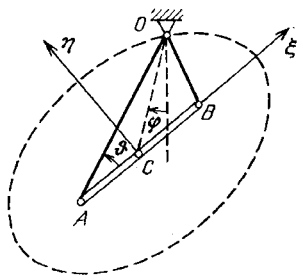


Рис. 1.12

Последовательность κ_n критических значений параметра κ имеет предельную точку $\kappa = 0$, а ветви кривых равновесий при $\kappa = 0$ примыкают к положениям равновесия математического маятника $\alpha = j\pi$ ($j = 0, \pm 1, \dots$).

В качестве самостоятельных занятий обосновать распределение устойчивых и неустойчивых равновесий, указанное на рис. 1.11.

Задача 1.1.11. К концам тяжелого однородного стержня AB длиной $2l$ и весом P прикреплепа невесомая нерастяжимая нить длиной L , которая переброшена через неподвижный бесконечно малый блок O (рис. 1.12).

Стержень может совершать движение в вертикальной плоскости, проходящей через точку O . Найти положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость.

Решение. Обозначим через x длину части нити AO , через ρ длину отрезка OC , соединяющего точку O с серединой стержня, через ϑ угол CAO и через φ угол, образуемый отрезком OC с нисходящей вертикалью. Тогда для потенциальной энергии силы тяжести будем иметь выражение $\Pi = -P\rho \cos \varphi$.

Найдем зависимость ρ от ϑ . Из треугольников OAB и OAC по теореме косинусов получаем соотношения

$$(L - x)^2 = x^2 + 4l^2 - 4xl \cos \vartheta, \quad \rho^2 = x^2 + l^2 - 2xl \cos \vartheta,$$

из которых находим

$$\begin{aligned} x &= \frac{L^2 - 4l^2}{2(L - 2l \cos \vartheta)}, \\ \rho^2(\vartheta) &= \\ &= \frac{(L^2 - 4l^2)^2 - 4l \cos \vartheta (L^2 - 4l^2)(L - 2l \cos \vartheta) + 4l^2 (L - 2l \cos \vartheta)^2}{4(L - 2l \cos \vartheta)^2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\Pi(\varphi, \vartheta) = -P\rho(\vartheta) \cos \varphi.$$

Для определения положений равновесия имеем уравнения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = P\rho(\vartheta) \sin \varphi = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} = -P \frac{d\rho}{d\vartheta} \cos \varphi = 0.$$

Отсюда заключаем, что в положении равновесия $\varphi = 0$, $d\rho/d\vartheta = 0$ и, следовательно, длина отрезка $OC = \rho$ имеет экстремальные значения. Для нахождения этих значений нет необходимости вычислять производную $d\rho/d\vartheta$. Для этого достаточно заметить, что в системе координат $C\xi\eta$, связанной со стержнем, конец O отрезка CO описывает при движении стержня AB эллипс с фокусами в точках A и B и поэтому экстремальные значения ρ равны длинам полуосей этого эллипса. В результате имеем три положения равновесия:

$$1) \quad \varphi = \vartheta = 0, \quad \rho = \frac{L}{2}; \quad 2) \quad \varphi = 0, \quad \vartheta = \pi, \quad \rho = \frac{L}{2};$$

$$3) \quad \varphi = 0, \quad \vartheta = \arccos \frac{2l}{L}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L^2}{4} - l^2}.$$

Для исследования устойчивости этих равновесий вычислим вторые производные

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = P \rho \cos \varphi, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = -P \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta} = P \frac{d\rho}{d\theta} \sin \varphi.$$

Для положений равновесия имеем

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = P \rho > 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = -P \frac{d^2 \rho}{d\theta^2}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta} = 0.$$

Следовательно, первые два положения равновесия стержня, в которых он имеет вертикальное направление, устойчивы, так как для них $d^2 \rho / d\theta^2 < 0$, а третье, в котором стержень расположен горизонтально, неустойчиво, ибо для него $d^2 \rho / d\theta^2 > 0$.

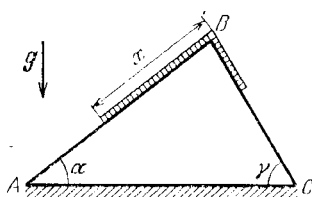


Рис. 1.13

Задача 1.1.12. На неподвижный клин ABC с горизонтальной стороной AC и углами α и γ при вершинах A и C через верхнее ребро клина перекинута тяжелая однородная цепочка длиной l и плотностью ρ (рис. 1.13). Найти положение равновесия цепочки и исследовать его устойчивость.

Решение. Обозначим через x длину части цепочки, лежащей на стороне AB клина. Тогда для потенциальной энергии силы тяжести будем иметь выражение

$$\Pi(x) = -\frac{1}{2} \rho g [x^2 \sin \alpha + (l - x)^2 \sin \gamma].$$

Положение равновесия определяется из уравнения

$$\Pi' = -g\rho [x \sin \alpha - (l - x) \sin \gamma] = 0.$$

В положении равновесия имеем $x \sin \alpha = (l - x) \sin \gamma$, и, следовательно, отрезок прямой, соединяющий концы цепочки, горизонтален. Это равновесие цепочки неустойчиво, так как

$$\Pi'' = -g\rho (\sin \alpha + \sin \gamma) < 0.$$

Задача 1.1.13. Тяжелый однородный стержень длиной l и весом P при помощи двух малых колечек, укреп-

ленных на его концах, подвешен на гладкий прут, изогнутый в форме параболы, определяемой уравнением $y = x^2/(4a)$, при этом ось y вертикальна, а $a > 0$ — постоянная (рис. 1.14). Найти положения равновесия стержня в зависимости от его длины и исследовать их устойчивость.

Решение. Рассмотрим случай, когда ось y направлена вверх.

Обозначим через x_1, y_1 и x_2, y_2 координаты концов A и B стержня и через ϑ — угол, образуемый стержнем AB с осью x . Тогда для потенциальной энергии силы тяжести будем иметь выражение

$$\Pi = P \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (1)$$

Выразим Π через ϑ . Для этого используем соотношения

$$x_2 = x_1 + l \cos \vartheta, \quad y_2 = y_1 + l \sin \vartheta \quad (-\pi/2 < \vartheta < \pi/2). \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение параболы

$$y = x^2/(4a), \quad (3)$$

имеем

$$y_1 + l \sin \vartheta = (x_1 + l \cos \vartheta)^2/(4a).$$

Отсюда находим

$$x_1 = l \frac{(\kappa \sin \vartheta - \cos^2 \vartheta)}{2 \cos \vartheta}, \quad \kappa = \frac{4a}{l} > 0. \quad (4)$$

Отметим, что параметр κ равен отношению длины отрезка CD , параллельного оси x и проходящего через фокус параболы, к длине стержня, при этом $OF = a$.

Из (4) и (3) находим

$$y_1 = l \frac{(\kappa \sin \vartheta - \cos^2 \vartheta)^2}{4\kappa \cos^2 \vartheta}$$

и получаем

$$\Pi = \frac{Pl}{4\kappa} (\cos^2 \vartheta + \kappa^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta).$$

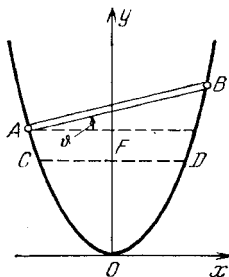


Рис. 1.14

Для определения положений равновесия имеем уравнение

$$\Pi' = \frac{Pl}{2\kappa} \frac{(\kappa^2 - \cos^4 \vartheta)}{\cos^3 \vartheta} \sin \vartheta = 0;$$

его решения

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_{2,3} = \pm \arccos \sqrt{\kappa} \quad (\kappa \leq 1). \quad (5)$$

На рис. 1.15 схематично изображены положения равновесия.

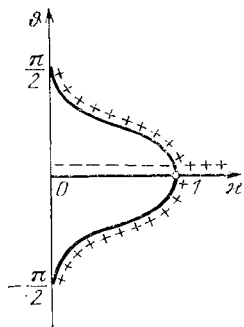


Рис. 1.15

Для исследования устойчивости равновесий (5) вычислим вторую производную

$$\Pi''(\vartheta) = \frac{Pl}{2\kappa} \left[\frac{(\kappa^2 - \cos^4 \vartheta)(1 + 2 \sin^2 \vartheta)}{\cos^4 \vartheta} + 4 \sin^2 \vartheta \right].$$

Имеем

$$\Pi''(0) = \frac{Pl(\kappa^2 - 1)}{\kappa}, \quad \Pi''(\vartheta_{2,3}) = \frac{2Pl(1 - \kappa)}{\kappa}.$$

Следовательно, положение равновесия $\vartheta_1 = 0$ устойчиво, если $\kappa > 1$, и неустойчиво, если $\kappa < 1$, а положения равновесия $\vartheta = \vartheta_2$, $\vartheta = \vartheta_3$ устойчивы, если $\kappa \neq 1$.

Остается решить вопрос об устойчивости равновесия, отвечающего точке бифуркации, для которой $\vartheta = 0$, $\kappa = 1$.

Вычисляя третью и четвертую производные от Π по ϑ , находим $\Pi'''(\vartheta) = 0$, $\Pi^{(IV)}(0) = 6Pl > 0$. Следовательно, равновесие, для которого $\vartheta = 0$, $\kappa = 1$, устойчиво.

Нетрудно видеть, что в случае, когда ветви параболы направлены вниз, в рассмотренных формулах следует считать $P < 0$. Распределение устойчивых и неустойчивых равновесий в этом случае определить самостоятельно.

Задача 1.1.14. Тонкая неподвижная трубка изогнута в форме кривой, определяемой уравнениями

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

где s — дуга кривой, отсчитываемая от некоторой фиксированной ее точки O , а ось z направлена вертикально вверх. В трубке находится тяжелая однородная нить AB длиной l и плотностью ρ . Найти положения равновесия нити и исследовать их устойчивость. Трением нити о трубку пренебречь.

Решение. Нить представляет собой систему с распределенными параметрами, однако в рассматриваемой задаче положение всех ее точек определяется одной координатой q , в качестве которой примем дугу $OA = s_A$. Тогда координата другого конца нити будет равна $q + l$, где $q = s_A$.

Для потенциальной энергии силы тяжести имеем выражение

$$\Pi(q) = g\rho \int_q^{q+l} z(s) ds.$$

Для определения положений равновесия получаем уравнение

$$\Pi' = g\rho [z(q+l) - z(q)] = 0.$$

Отсюда следует, что в положении равновесия концы нити лежат в одной горизонтальной плоскости.

Пусть для какого-либо положения равновесия $q = q_0$. Это равновесие будет устойчиво, если

$$\Pi''(q_0) = g\rho [z'(q_0 + l) - z'(q_0)] > 0 \quad \left(z' = \frac{dz}{ds}\right),$$

и неустойчиво, если

$$\Pi''(q_0) = g\rho [z'(q_0 + l) - z'(q_0)] < 0.$$

Характер устойчивости определяется наклонами к вертикали трубки на концах нити и не зависит от формы остальной части трубки.

Задача 1.1.15. Тяжелое колечко весом P надето на обруч, форма которого определяется уравнениями

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3. \quad (1)$$

Ось z направлена вертикально вверх. Найти положения

равновесия колечка, принимая его за материальную точку, и исследовать их устойчивость. Трением пренебечь.

Решение. Потенциальная энергия силы тяжести определяется выражением $\Pi = Pz$. Поскольку координаты x, y, z колечка связаны уравнениями (1), то для определения положений равновесия имеем задачу на условный экстремум. Эту задачу введением функции

$$W = Pz + \lambda(x + y + z) + \frac{1}{2} \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 3),$$

где λ и μ — неопределенные множители Лагранжа, сведем к задаче на безусловный экстремум. Тогда для определения положений равновесия наряду с (1) имеем уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \lambda + \mu x = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \lambda + \mu y = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = P + \lambda + \mu z = 0.$$

Отсюда находим два положения равновесия, для которых

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z = -\sqrt{2}, \quad \lambda = -\frac{P}{3}, \quad \mu = \frac{\sqrt{2}}{3}P, \quad (2)$$

$$x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z = \sqrt{2}, \quad \lambda = -\frac{P}{3}, \quad \mu = -\frac{\sqrt{2}}{3}P. \quad (3)$$

Обозначим через $x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0$ значения величин x, y, z, λ, μ , отвечающие одному из равновесий (2) или (3). В возмущенном движении положим

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta$$

и вычислим изменение ΔW функции W при переходе от невозмущенного к возмущенному положению колечка. Имеем

$$\Delta W = +\frac{1}{2} \mu_0 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Поскольку $\Delta W > 0$ при $\mu_0 > 0$ и $\Delta W < 0$ при $\mu_0 < 0$, то равновесие (2) устойчиво, а (3) неустойчиво.

Задача 1.1.16. Тяжелое колечко весом P надето на обруч, форма которого определяется уравнениями

$$x + y + z = 5, \quad z^2 = x^2 + y^2. \quad (1)$$

Ось z направлена вертикально вверх. Найти положения

равновесия колечка, припимая его за материальную точку, и исследовать их устойчивость. Трением пренебречь.

Решение. Потенциальная энергия силы тяжести дается выражением $\Pi = Pz$. Введем в рассмотрение функцию

$$W = Pz + \lambda(z^2 - x^2 - y^2) + \mu(5 - x - y - z),$$

где λ , μ — неопределенные множители Лагранжа.

Для определения положения равновесия имеем наряду с (1) уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -2\lambda x - \mu = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -2\lambda y - \mu = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = P + 2\lambda z - \mu = 0.$$

Эти уравнения вместе с (1) имеют следующие решения:

$$x = y = 5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad z = -5(1 + \sqrt{2}), \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{P}{5\sqrt{2}}, \quad \mu = -P(\sqrt{2} + 1),$$

$$x = y = 5 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad z = 5(\sqrt{2} - 1), \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{-P}{5\sqrt{2}}, \quad \mu = P(\sqrt{2} - 1).$$

Обозначим через x_0 , y_0 , z_0 , λ_0 , μ_0 значения величин x , y , z , λ , μ для какого-либо из решений (2) или (3) и в возмущенном движении положим

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta. \quad (4)$$

Для приращения ΔW функции W при переходе от невозмущенного к возмущенному положению колечка получаем выражение

$$\Delta W = \lambda_0(\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2),$$

при этом переменные ξ , η , ζ связаны соотношениями

$$\zeta = -(\xi + \eta), \quad \zeta = \frac{x_0}{z_0}(\xi + \eta),$$

которые получаются при подстановке (4) в (1) и отбрасывании квадратичных членов. Из последних равенств

получаем

$$\xi = -\eta, \quad \zeta = 0,$$

и выражение для ΔW принимает вид

$$\Delta W = -2\lambda_0 \xi^2.$$

Отсюда видим, что $\Delta W < 0$, если $\lambda_0 > 0$, и $\Delta W > 0$, если $\lambda_0 < 0$. Следовательно, равновесие (2) устойчиво, а (3) неустойчиво.

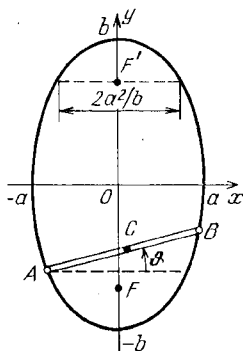


Рис. 1.16

Задача 1.1.17. Тяжелый однородный стержень длиной l и массой m подвешен при помощи двух малых невесомых колечек, укрепленных на его концах, на прут, изогнутый в форме эллипса (рис. 1.16). Ось эллипса, проходящая через его фокусы F и F' , вертикальна. Найти положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость.

Решение. Положение стержня будем определять углом ϑ , образуемым им с горизонтальным направлением (рис. 1.16), считая, что при $\vartheta = 0$ стержень расположен в нижней части эллипса. Обозначим через a и b ($b > a$) полуоси эллипса, через x_1, y_1 и x_2, y_2 координаты концов A и B стержня и выразим потенциальную энергию силы тяжести $\Pi = mgy_c = \frac{1}{2}mg(y_1 + y_2)$, где y_c — координата центра тяжести, через ϑ . Используя уравнения

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1,$$

$$x_2 - x_1 = l \cos \vartheta, \quad y_2 - y_1 = l \sin \vartheta,$$

получаем выражение

$$\Pi(\vartheta) = -\frac{mgb \cos \vartheta}{2a} \sqrt{\frac{4 - l^2 \Phi(\vartheta)}{\Phi(\vartheta)}},$$

$$\Phi(\vartheta) = \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2}.$$

Для определения положений равновесия имеем уравнение

$$\Pi' = -\frac{mgb \sin \vartheta}{2a} \left[l^2 - \frac{4}{b^2 \Phi^2(\vartheta)} \right] \sqrt{\frac{\Phi(\vartheta)}{4 - l^2 \Phi(\vartheta)}} = 0.$$

Отсюда находим следующие решения:

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_{2,3} = \pm \pi, \quad \text{если } l \leq 2a, \quad (1)$$

$$\vartheta_{4,5} = \pm \arcsin \sqrt{\frac{b(lb - 2a^2)}{l(b^2 - a^2)}}, \quad \text{если } l \geq \frac{2a^2}{b}, \quad (2)$$

$$\vartheta_{6,7} = \pm \left[\pi - \arcsin \sqrt{\frac{b(lb - 2a^2)}{l(b^2 - a^2)}} \right], \quad \text{если } l \geq \frac{2a^2}{b}. \quad (3)$$

На рис. 1.17 семейства положений равновесия изображены на плоскости (ϑ, l) . Очевидно, что не всякая со-

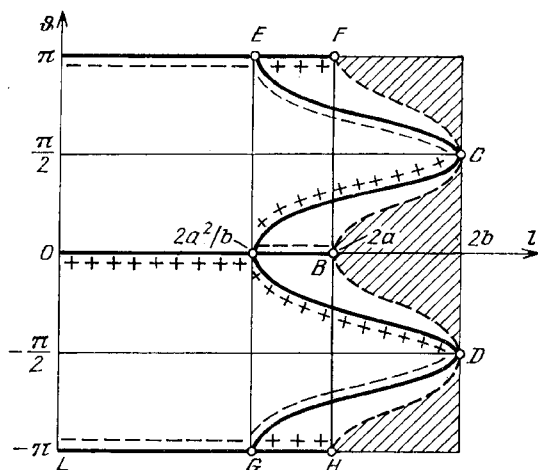


Рис. 1.17

вокупность параметров может быть физически реализуема. Так, нереализуема такая длина стержня, при которой $l > 2b$. Кроме того, нереализуемы точки заштрихованных на рис. 1.17 областей. Для исследования устойчивости этих равновесий вычислим вторую производную $d^2U/d\vartheta^2$. Имеем

$$\Pi''(0) = \frac{mg(4a^4 - b^2l^2)}{2ab \sqrt{4a^2 - l^2}}, \quad \Pi''(\pm \pi) = -\Pi''(0),$$

$$\Pi''(\vartheta_j) = \frac{mgl^3(b^2 - a^2) \sin^2 \vartheta_j \cos \vartheta_j}{a^3 \sqrt{l(2b - l)}} \quad (j = 4, 5, 6, 7).$$

Отсюда заключаем, что равновесие ϑ_1 устойчиво при $l < 2a^2/b$ и неустойчиво при $2a^2/b < l < 2a$; равновесия $\vartheta_{2,3}$

неустойчивы при $l < 2a^2/b$ и устойчивы при $2a^2/b < l < 2a$; равновесия $\vartheta_{4,5}$ устойчивы, а $\vartheta_{6,7}$ неустойчивы.

На рис. 1.17 знаками «+» и «-» отмечены соответственно устойчивые и неустойчивые положения равновесия и заштрихована область, для которой функция Π принимает комплексные значения (аналогично задаче 1.1.8). Отметим, что части FC и DH границы этой области отвечают особым устойчивым равновесиям, при которых стержень занимает предельные из возможных положения.

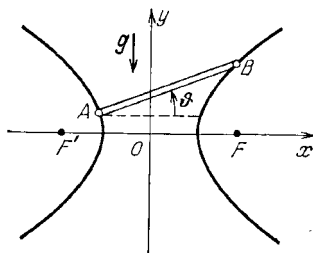


Рис. 1.18

Задача 1.1.18. Тяжелый однородный стержень AB длиной l и весом P подвешен при помощи малых колечек, укрепленных на его концах, на прут, изогнутый в форме гиперболы, фокусы F и F' которой расположены на горизонтальной прямой (рис. 1.18). Найти положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость.

Решение. Введем систему координат Oxy , ось y которой вертикальна. Уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2a < l). \quad (1)$$

Обозначим через x_1, y_1 и x_2, y_2 координаты концов A и B стержня и через ϑ — угол, образуемый стержнем с осью x , $|\operatorname{tg} \vartheta| < \frac{b}{a}$. Для потенциальной энергии силы тяжести имеем выражение

$$\Pi = P \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (2)$$

Выразим Π через ϑ . Для этого воспользуемся соотношениями

$$x_2 = x_1 + l \cos \vartheta, \quad y_2 = y_1 + l \sin \vartheta. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем уравнение, из которого находим

$$x_1 = \frac{a^2}{2 \cos \vartheta} \left(\frac{2 \sin \vartheta}{b^2} y_1 - l \Phi \right), \quad \Phi(\vartheta) = \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2} > 0. \quad (4)$$

Подстановка (4) в (1) приводит к уравнению

$$\Phi y_1^2 + l\Phi y_1 \sin \vartheta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{4} b^2 \Phi^2 = 0,$$

из которого получим

$$y_1 = -\frac{l}{2} \sin \vartheta \pm \frac{b \cos \vartheta}{2a\Phi} \sqrt{\Phi(l^2\Phi - 4)}. \quad (5)$$

Здесь верхний знак берется в случае, когда конец A стержня находится в полуплоскости $y > 0$, и нижний знак в противном случае.

Теперь из (2), (3) и (5) находим

$$\Pi(\vartheta) = \pm \frac{Pb \cos \vartheta}{2a\Phi} \sqrt{\Phi(l^2\Phi - 4)}. \quad (6)$$

Положения равновесия стержня определяются из уравнения

$$\Pi'(\vartheta) = \mp \frac{P}{2ab} \frac{(4 + b^2 l^2 \Phi^2)}{\Phi \sqrt{\Phi(l^2\Phi - 4)}} \sin \vartheta = 0.$$

Отсюда находим два положения равновесия

$$\vartheta = 0, \quad y_1 = y_2 = \frac{b}{2a} \sqrt{l^2 - 4a^2}, \quad (7)$$

$$\vartheta = 0, \quad y_1 = y_2 = -\frac{b}{2a} \sqrt{l^2 - 4a^2}. \quad (8)$$

Для исследования устойчивости этих равновесий вычислим вторую производную при $\vartheta = 0$

$$\Pi''(0) = \mp \frac{P(4a^4 + b^2 l^2)}{2ab \sqrt{l^2 - 4a^2}}.$$

Отсюда заключаем, что равновесие (7) неустойчиво, а (8) устойчиво.

Задача 1.1.19. Тяжелый однородный стержень AB длиной l и весом P подвешен при помощи малых колечек, укрепленных на его концах, на гладкий прут, изогнутый в форме гиперболы, фокусы F_1, F_2 которой расположены на одной вертикали. Найти положения равновесия стержня в зависимости от его длины для случаев, когда он подвешен на верхней (рис. 1.19, положение AB) и нижней ветвях гиперболы (рис. 1.19, положение $A'B'$), и исследовать их устойчивость.

Решение. Введем систему координат Oxy , ось y которой направлена по вертикали. Уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Положение стержня определим углом ϑ , который он образует с осью x .

Проведя вычисления, аналогичные вычислениям в предыдущей задаче, получаем для потенциальной энергии силы тяжести выражение

$$\begin{aligned} \Pi(\vartheta) &= \\ &= \pm \frac{Pb \cos \vartheta}{2a} \sqrt{l^2 + 4\Phi^{-1}}, \\ \Phi(\vartheta) &= \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2} > 0. \end{aligned}$$

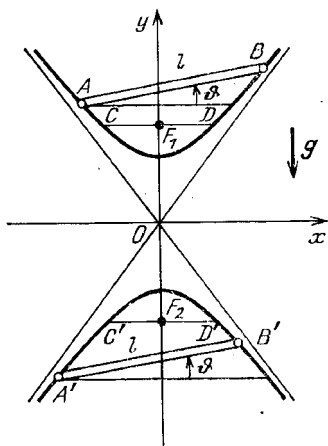


Рис. 1.19

Верхний знак берется для случая, когда стержень подвешен на верхней ветви гиперболы, а нижний — когда он подвешен на нижней ветви.

Для определения положения равновесия стержня имеем уравнение

$$\Pi'(\vartheta) = \pm \frac{P(4 - b^2 l^2 \Phi^2) \sin \vartheta}{2ab\Phi^2 \sqrt{l^2 + 4\Phi^{-1}}}.$$

Отсюда получаем, что при любой длине стержня l существует положение равновесия $\vartheta = 0$, а при $l \geq l_* = 2a^2/b$ дополнительно существует пара симметричных положений равновесия $\vartheta = \pm \vartheta_1(l)$, определяемых равенством

$$\cos^2 \vartheta_1 = \frac{a^2(2b + l)}{(a^2 + b^2)l}, \text{ если } l \geq \frac{2a^2}{b}.$$

При $\vartheta = \vartheta_1$ стержень проходит через фокус F_1 (или F_2) гиперболы. Отметим также, что l_* — длина отрезка CD (рис. 1.19).

На рис. 1.20 представлены положения равновесия в виде зависимости $\vartheta(l)$.

Для исследования устойчивости равновесия вычислим вторую производную от функции Π при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \vartheta_1$:

$$\Pi''(0) = \pm \frac{P(4a^2 - b^2l^2)}{2ab\sqrt{l^2 + 4a^2}},$$

$$\Pi''(\vartheta_1) = \pm \frac{Pl^3(a^2 + b^2)\sin^2\vartheta\cos\vartheta}{a^3\sqrt{l^2 + 2bl}}.$$

Если стержень подвешен на верхней ветви гиперболы, то равновесие $\vartheta = 0$ устойчиво для $l < l_*$ и неустойчиво для $l > l_*$, а равновесие $\vartheta = \vartheta_1$ устойчиво. Если же стержень подвешен на нижней ветви гиперболы, то имеем обратное распределение устойчивых и неустойчивых равновесий, а именно, равновесие $\vartheta = 0$ неустойчиво для $l < l_*$ и устойчиво для $l > l_*$, а равновесие $\vartheta = \vartheta_1$ неустойчиво.

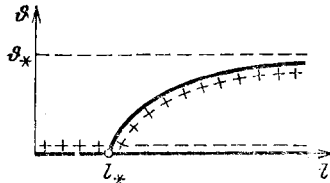


Рис. 1.20

На рис. 1.20 представлены результаты исследования устойчивости равновесия стержня для случая, когда он подвешен на верхней ветви гиперболы, при этом здесь $\vartheta_* = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Задача 1.1.20. При условиях задачи 1.1.17 найти положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость в случае, когда малая ось эллипса вертикальна ($b < a$).

Ответ. Существуют только два положения равновесия стержня при $0 < l \leq 2a$, в которых он горизонтален и расположен в нижней и верхней частях эллипса. Первое из них устойчиво, второе неустойчиво.

§ 1.2. Относительное равновесие

Задача 1.2.1. Тяжелое колечко M скользит по пруту AB , который приводится во вращение вокруг вертикальной оси OS с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1.21). Прямая AB составляет с осью OS угол α . Найти положения относительного равновесия и исследовать их устойчивость.

Решение. Положение колечка на прямой AB определим координатой x , приняв за начало отсчета точку O пересечения прямой AB и оси OS , а за положительное направление — направление от точки O к точке B (рис. 1.21).

Измененная потенциальная энергия W в соответствии с формулой (23) введения определяется выражением

$$W = mgx \cos \alpha - \frac{\omega^2}{2} J,$$

где J — момент инерции точки относительно вертикальной оси OS . Поскольку $J = mx^2 \sin^2 \alpha$, то окончательно получаем

$$\begin{aligned} W(x) &= \\ &= mgx \cos \alpha - \frac{1}{2} \omega^2 mx^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

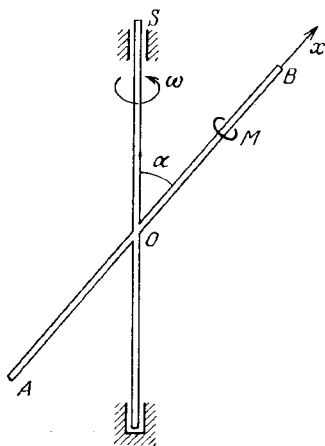


Рис. 1.21

Положение относительного равновесия определится из уравнения

$$W' = mg \cos \alpha - m\omega^2 \sin^2 \alpha x = 0,$$

откуда получаем при $\omega \neq 0$

$$x_0 = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}.$$

Это положение равновесия неустойчиво, так как

$$W'' = -m\omega^2 \sin^2 \alpha < 0,$$

т. е. функция W имеет в положении x_0 максимум.

Если $\omega = 0$, то уравнение (1) не имеет решения. Положений равновесия нет. Результаты отражены на рис. 1.22.

Задача 1.2.2. Прямолинейный стержень AB вращается вокруг неподвижной оси ON с постоянной угловой скоростью ω . Прямые ON и AB пересекаются под прямым углом. Вдоль стержня AB может скользить тело M , которое соединено линейной пружиной с некоторой точкой стержня AB . Масса тела — m , жесткость пружины — c (рис. 1.23). Определить положения относительного равновесия тела M , считая его материальной точкой и пре-

небрегая массой пружины. Выделить устойчивые положения равновесия.

Решение. Когда $\omega = 0$, то положение равновесия тела определяется длиной недеформированной пружины. Пусть это будет точка L и пусть она отстоит от оси ON на расстояние e . Положение тела относительно стержня

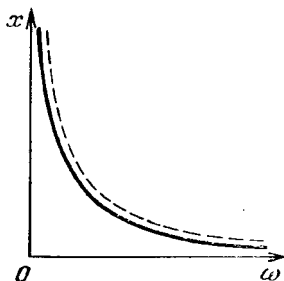


Рис. 1.22

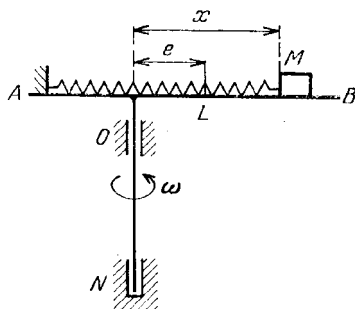


Рис. 1.23

AB определим координатой x (см. рис. 1.23). Тогда кинетическая энергия тела равна

$$T = T_2 + T_0 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m x^2 \omega^2,$$

а силовая функция упругой силы пружины имеет вид

$$U = -\frac{c}{2} (x - e)^2.$$

Измененная потенциальная энергия системы W в соответствии с формулой (20) введения имеет вид

$$W(x) = -U - T_0 = \frac{c}{2} (x - e)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$$

Положение равновесия определяется из условия

$$W' = -m\omega^2 x + c(x - e) = 0, \quad (1)$$

из которого находим

$$x = \frac{ce}{c - m\omega^2}.$$

Пусть $e \neq 0$. Тогда зависимость $x = x(\omega^2)$ претерпевает разрыв (см. рис. 1.24, а) в точке $\omega^2 = c/m$.

Рассмотрим теперь случай, когда $e = 0$. Если $m\omega^2 \neq c$, то уравнение (1) имеет единственное решение $x = 0$. Если $m\omega^2 = c$, то уравнение (1) удовлетворяется

тождественно при любом значении x . Любое положение тела A является положением относительного равновесия (см. рис. 1.24, б).

Для выделения устойчивых положений относительного равновесия определим характер экстремума функции W

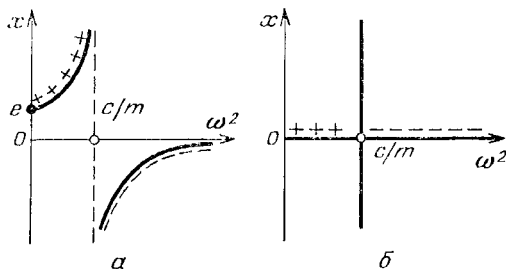


Рис. 1.24

в точке, определяемой решением уравнения (1). Имеем $W'' = c - m\omega^2$. При $\omega^2 < c/m$ имеем $W'' > 0$. Значит, функция W имеет минимум в положении относительного равновесия, и, следовательно, оно устойчиво. На рис. 1.24 множество устойчивых положений относительного равновесия отмечено крестиками.

При $\omega^2 > c/m$ положение относительного равновесия неустойчиво, так как для него $W'' < 0$.

Задача 1.2.3. Решить задачу 1.2.2, предполагая, что прямая AB отстоит от оси вращения на расстояние h (рис. 1.25).

Решение. Сохранив те же обозначения, что и в задаче 1.2.2, получим для измененной потенциальной энергии выражение

$$W(x) = \frac{c}{2}(x - e)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + h^2),$$

которое отличается от аналогичного выражения задачи 1.2.2 лишь постоянным слагаемым.

Дальнейшее решение проводится повторением тех же вычислений, что и в задаче 1.2.2.

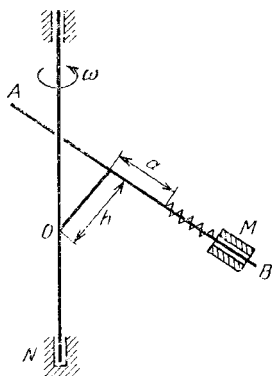


Рис. 1.25

Задача 1.2.4. Тяжелая бусинка A может двигаться по пруту, изогнутому в форме параболы, уравнение которой имеет вид

$$y = x^2/(4a),$$

при этом ось y направлена вертикально вверх (рис. 1.26). Прут равномерно вращается вокруг оси y с угловой скоростью ω . Найти положения относительного равновесия бусинки и исследовать их устойчивость.

Решение. Положение бусинки на параболе будем определять ее координатой x . Тогда для измененной потенциальной энергии будем иметь выражение

$$\begin{aligned} W(x) &= mgy - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{g}{2a} - \omega^2 \right) x^2, \end{aligned}$$

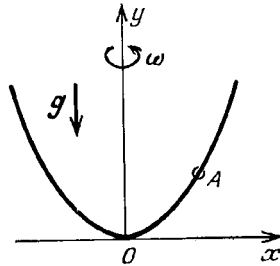


Рис. 1.26

где m — масса бусинки.

Положения относительного равновесия определяются из уравнения

$$W' = m \left(\frac{g}{2a} - \omega^2 \right) x = 0.$$

Отсюда находим положения равновесия:

$$x = 0, \quad \omega \text{ произвольно}; \quad (1)$$

$$x \text{ произвольно, если } \omega^2 = \frac{g}{2a}. \quad (2)$$

Для исследования устойчивости равновесий вычислим вторую производную

$$W'' = m \left(\frac{g}{2a} - \omega^2 \right).$$

Отсюда заключаем, что равновесие (1) устойчиво, если $\omega^2 < g/(2a)$, и неустойчиво, если $\omega^2 > g/(2a)$. Для равновесий (2) имеем $W'' = 0$. Следовательно, для $\omega^2 = g/(2a)$ все точки параболы являются положениями безразличного относительного равновесия бусинки. Геометрическое представление равновесий (1) и (2) и результат исследования их устойчивости представлены на рис. 1.27.

Задача 1.2.5. Тяжелое колечко A весом P может скользить без трения по окружности радиусом R , которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра (рис. 1.28). Опре-

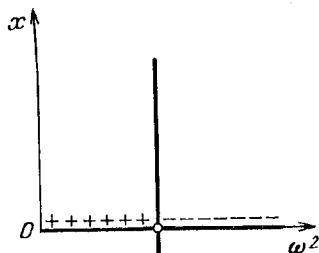


Рис. 1.27

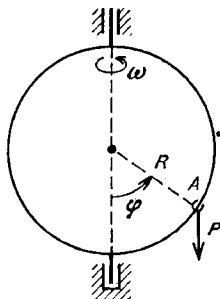


Рис. 1.28

делить положения относительного равновесия колечка и исследовать их устойчивость.

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. Введем обобщенную координату — угол φ (см. рис. 1.28).

Тогда

$$W(\varphi) = -\frac{PR}{g} \left(\frac{1}{2} \omega^2 R \sin^2 \varphi + g \cos \varphi \right).$$

Положения относительного равновесия определяются из условия

$$W' = -\frac{PR}{g} (\omega^2 R \cos \varphi - g) \sin \varphi = 0.$$

Отсюда имеем

- 1) $\sin \varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_{2,3} = \pm \pi$, ω произвольна,
- 2) $\cos \varphi = \frac{g}{\omega^2 R}$, $\varphi_{4,5} = \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 R}$, $g \leq \omega^2 R$.

Семейство решений уравнений равновесия качественно изображено на рис. 1.29.

Для исследования устойчивости вычислим

$$W'' = -\frac{PR}{g} [\omega^2 R \cos 2\varphi - g \cos \varphi].$$

Очевидно, что $W'' > 0$ при $\varphi = 0$, если $\omega^2 R < g$, или при $\varphi = \varphi_{4,5}$. Эти положения относительного равновесия устойчивы. Так как $W'' < 0$ при $\varphi = \pm\pi$ и при $\varphi = 0$, если $\omega^2 R > g$, то эти положения равновесия неустойчивы. Результаты исследования отражены на рис. 1.29.

Задача 1.2.6. Концы тяжелого однородного стержня AB , длина которого $2l$, а вес P , скользят по двум пересекающимся взаимоперпендикулярным прямым, одна из которых вертикальна, а вторая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг первой (рис. 1.30). Определить положения относительного равновесия и выделить среди них устойчивые.

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. Введем в качестве обобщенной координаты угол φ , образуемый стержнем AB с осью вращения (см. рис. 1.30).

Измененная потенциальная энергия системы W складывается из потенциальной энергии силы тяжести $W_1 = -Pl \cos \varphi$ и потенциальной энергии W_2 центробежных сил, вычисляемой по формуле $W_2 = -\frac{1}{2}\omega^2 J$, где J — момент инерции стержня относительно оси вращения.

Для вычисления J рассмотрим элемент ds длины стержня, отстоящий от его конца A на расстояние s , и обозначим через $\rho = P/(2gl)$ плотность стержня; тогда

$$J = \int_0^{2l} (s \sin \varphi)^2 \rho ds = \frac{4}{3} \frac{Pl^2}{g} \sin^2 \varphi.$$

В результате для W получаем выражение

$$W(\varphi) = -\frac{Pl}{g} \left(\frac{2}{3} \omega^2 l \sin^2 \varphi + g \cos \varphi \right).$$

Дальнейшее решение аналогично решению предыдущей задачи.

Задача 1.2.7. Бусинка массой m нанизана на проволоку, изогнутую в форме окружности радиусом R .

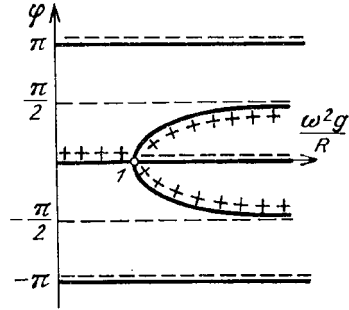


Рис. 1.29

Окружность равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости окружности и отстоящей от ее центра на расстояние a (рис. 1.31). Найти положения относительного равновесия

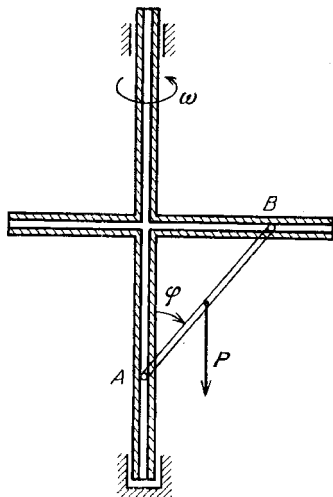


Рис. 1.30

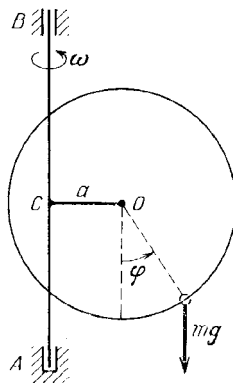


Рис. 1.31

бусинки и исследовать их устойчивость. Трением пренебречь.

Решение. Измененная потенциальная энергия определяется выражением

$$W(\varphi) = -mgR \left[\cos \varphi - \frac{\lambda}{2} (\kappa^3 + \sin \varphi)^2 \right],$$

$$\lambda = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad \kappa^3 = \frac{a}{R}.$$

Для определения положений относительного равновесия имеем уравнение

$$W' = mgR [\sin \varphi - \lambda (\kappa^3 + \sin \varphi) \cos \varphi] = 0.$$

В положениях относительного равновесия зависимость параметра λ от угла φ дается уравнением

$$\lambda = \lambda(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{(\kappa^3 + \sin \varphi) \cos \varphi}. \quad (1)$$

График функции (1) представлен на рис. 1.32, а, б для случаев, когда а) $\kappa < 1$ и б) $\kappa > 1$. Здесь

$$\varphi^* = \arcsin \kappa^3, \quad \varphi_* = \arcsin \kappa \quad (\varphi^* < \varphi_*),$$

$$\lambda_* = \lambda(\varphi_*) = \frac{1 + \kappa^2}{(1 + \kappa^4) \sqrt{1 - \kappa^2}}.$$

Отсюда видно, что при $\kappa \neq 0$ всегда существуют два положения относительного равновесия 1 и 2 (рис. 1.33, а, б),

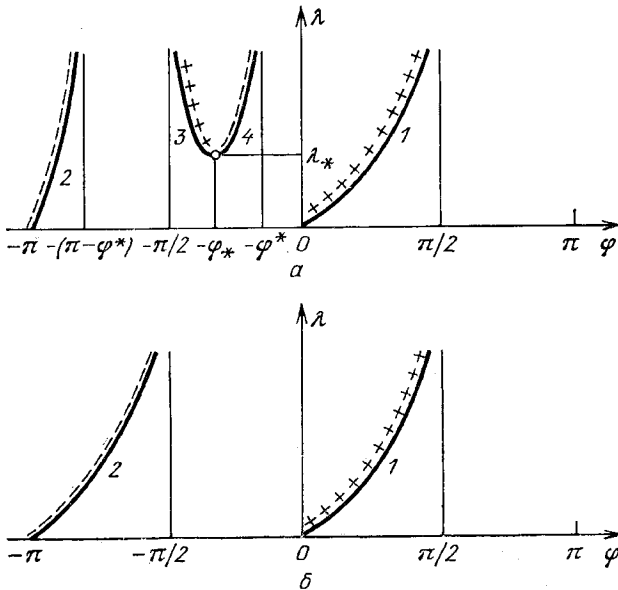


Рис. 1.32

которые отвечают ветвям $\lambda = \lambda_1(\varphi)$ и $\lambda = \lambda_2(\varphi)$ кривой (1). Если же $\kappa < 1$ и $\lambda > \lambda_*$ ($\omega^2 > \omega_*^2 = \lambda_* g/R$), то появляются еще два положения равновесия 3 и 4 (рис. 1.33, а), которые соответствуют ветвям $\lambda = \lambda_3(\varphi)$ и $\lambda = \lambda_4(\varphi)$ кривой (1). При $\kappa \rightarrow 1$ ($a \rightarrow R$) имеем $\varphi^* \rightarrow \pi/2$, $\varphi_* \rightarrow \pi/2$, $\lambda_* \rightarrow \infty$, и бифуркационная диаграмма на рис. 1.32, а переходит в диаграмму, которая аналогична диаграмме на рис. 1.32, б.

Пусть $a < R$ ($\kappa < 1$); тогда при $\omega \rightarrow \infty$ положения равновесия 1 и 3 приближаются к концам горизонтального диаметра окружности, а положения 2 и 4 — к оси

вращения. При $\omega \rightarrow \omega_*$ ($\omega > \omega_*$) положения равновесия 3 и 4 сближаются, затем при $\omega = \omega_*$ сливаются в одно положение равновесия, расположенное на рис. 1.33, а левее оси вращения, а после этого пропадают при $\omega < \omega_*$.

Пусть теперь $a > R$ ($\kappa > 1$); тогда при любом значении ω существуют только два положения равновесия

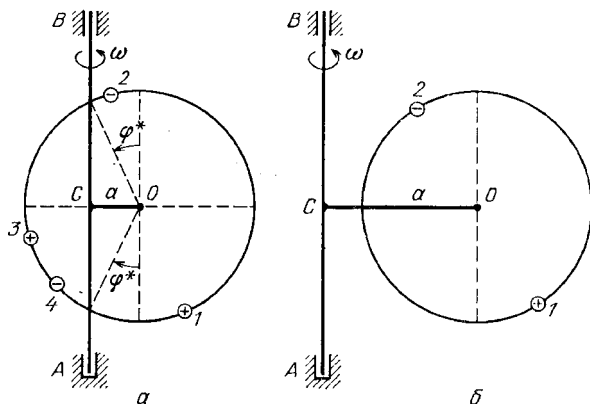


Рис. 1.33

1 и 2 (рис. 1.33, б), которые с увеличением ω приближаются к разным концам горизонтального диаметра окружности.

Исследуем устойчивость найденных равновесий. Для этого вычислим вторую производную

$$W'' = mgR [\cos \varphi + \lambda (\kappa^3 + \sin \varphi) \sin \varphi - \lambda \cos^2 \varphi].$$

Подставляя сюда значение λ из (1), получим выражение для W'' для исследуемых относительных равновесий

$$W'' = \frac{mgR (\kappa^3 + \sin^3 \varphi)}{(\kappa^3 + \sin \varphi) \cos \varphi}.$$

Представим это выражение в специальном виде. Для этого вычислим производную функции (1)

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\kappa^3 + \sin^3 \varphi}{(\kappa^3 + \sin \varphi)^2 \cos^2 \varphi}.$$

Сопоставляя это выражение с последним выражением для W'' , получаем искомое представление

$$W''(\varphi) = mgR \cos \varphi (\kappa^3 + \sin \varphi) \frac{d\lambda}{d\varphi}. \quad (2)$$

Представление W'' в виде (2) позволяет «привязать» исследование устойчивости найденных относительных равновесий к анализу кривой (1).

Для ветви $\lambda = \lambda_1(\varphi)$ (рис. 1.32) имеем $0 < \varphi < \pi/2$, $\cos \varphi > 0$, $\sin \varphi > 0$, $\lambda' > 0$ и в силу (2) $W'' > 0$. Следовательно, относительное равновесие 1 (рис. 1.33), отвечающее ветви $\lambda = \lambda_1$, устойчиво.

Для ветви $\lambda = \lambda_2(\varphi)$ имеем $-\pi < \varphi < -(\pi - \varphi^*)$, $\cos \varphi < 0$, $\kappa^3 + \sin \varphi > 0$, $\lambda' > 0$ и $W'' < 0$. Следовательно, равновесие 2, отвечающее ветви $\lambda = \lambda_2$, неустойчиво.

Для ветви $\lambda = \lambda_3(\varphi)$ имеем $-\pi/2 < \varphi < -\varphi^*$, $\cos \varphi > 0$, $\kappa^3 + \sin \varphi < 0$, $\lambda' < 0$ и $W'' > 0$. Поэтому равновесие 3, соответствующее ветви $\lambda = \lambda_3$, устойчиво.

Наконец, для ветви $\lambda = \lambda_4(\varphi)$ имеем $-\varphi^* < \varphi < -\varphi^*$, $\cos \varphi > 0$, $\kappa^3 + \sin \varphi < 0$, $\lambda' > 0$ и $W'' < 0$. Поэтому равновесие 4, отвечающее ветви $\lambda = \lambda_4$, неустойчиво.

Результаты анализа устойчивости относительных равновесий представлены на рис. 1.32 и 1.33, где значками «+» и «-» помечены соответственно устойчивые и неустойчивые равновесия.

Задача 1.2.8. Физический маятник (рис. 1.34) имеет горизонтальную ось качания OO' , которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси ON . Пусть линии OO' и OG , где точка G — центр тяжести тела, являются главными осями эллипсоида инерции тела для точки O . Определить положения относительного равновесия тела и исследовать их устойчивость.

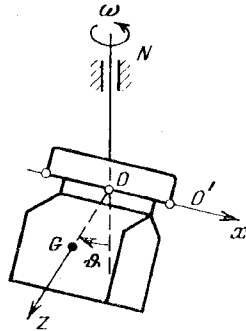


Рис. 1.34

Решение. Введем жестко связанную с телом систему прямоугольных осей координат $Oxyz$, направив оси x и z соответственно вдоль отрезков OO' и OG , а ось y ортогонально осям x и z . Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату возьмем угол φ между нисходящей вертикалью и осью z . Для вычисления кинетической энергии тела воспользуемся формулой Эйлера

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

где A, B, C — моменты инерции тела относительно осей x, y, z соответственно, а p, q, r — проекции вектора абсолютной угловой скорости тела на эти оси

$$p = \dot{\vartheta}, \quad q = -\omega \sin \vartheta, \quad r = -\omega \cos \vartheta.$$

Подставляя последние выражения в формулу для T , будем иметь

$$T = \frac{1}{2} [A \dot{\vartheta}^2 + B (\omega \sin \vartheta)^2 + C (\omega \cos \vartheta)^2].$$

Силовая функция силы тяжести дается выражением $U = mga \cos \vartheta$, $a = |OG|$, а измененная потенциальная энергия имеет вид

$$W = -mga \cos \vartheta - \frac{1}{2} B (\omega \sin \vartheta)^2 - \frac{1}{2} C (\omega \cos \vartheta)^2.$$

Положения относительного равновесия определяются из уравнения

$$W' = -[\omega^2 (B - C) \cos \vartheta - mga] \sin \vartheta = 0,$$

которое имеет следующие решения:

1) $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \pi$, ω произвольна;

2) $\vartheta_{3,4} = \pm \arccos \frac{mga}{(B - C) \omega^2}$ при $\omega^2 \geq \omega_*^2 \frac{mga}{|B - C|}$.

Множество положений относительного равновесия изображено на рис. 1.35, 1.36. Сопоставим эту картину с аналогичной в задаче 1.2.5. Видно, что центр тяжести G тела при $B > C$ ведет себя при относительных равновесиях качественно так же, как и материальная точка (ср. рис. 1.35, а с рис. 1.29 и рис. 1.36, а с 1.36, б). Иной характер носит поведение точки G в случае $C > B$. Для такого тела становятся возможными положения равновесия на «верхней» полуокружности траектории точки G (рис. 1.36, в).

Для исследования устойчивости равновесия вычислим вторую производную

$$W'' = -\omega^2 (B - C) (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + mga \cos \vartheta.$$

Рассмотрим вначале случай, когда $B > C$. Имеем $W''(0) > 0$ при $\omega^2 < \omega_*^2$ — равновесие устойчиво; $W''(0) < 0$ при $\omega^2 > \omega_*^2$ — равновесие неустойчиво; $W''(\pm\pi) < 0$ при любом ω — равновесие неустойчиво; $W''(\vartheta_{4,5}) > 0$ — равновесие устойчиво. Результаты исследования отражены на рис. 1.35, а.

Рассмотрим теперь случай, когда $B < C$. Имеем
 $W''(0) > 0$ при любом ω — равновесие устойчиво;
 $W''(\pm\pi) < 0$ при $\omega^2 < \omega_*^2$ — равновесие неустойчиво;
 $W''(\pm\pi) > 0$ при $\omega^2 > \omega_*^2$ — равновесие устойчиво;

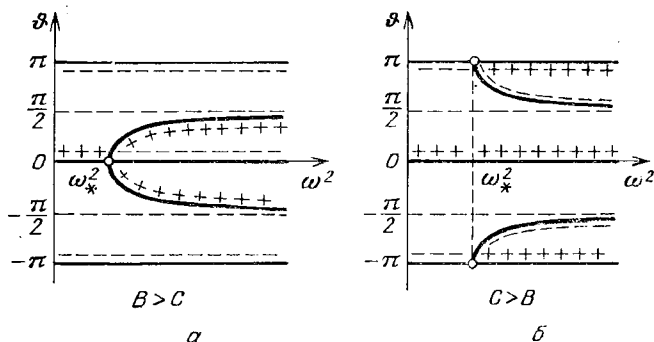


Рис. 1.35

$W''(\theta_{4,5}) < 0$ — равновесие неустойчиво. Результаты анализа отображены на рис. 1.35, б.

Задача 1.2.9. Кабина M центрифуги представляет собой твердое тело, которое может свободно поворачиваться вокруг оси OO' относительно державки COO'

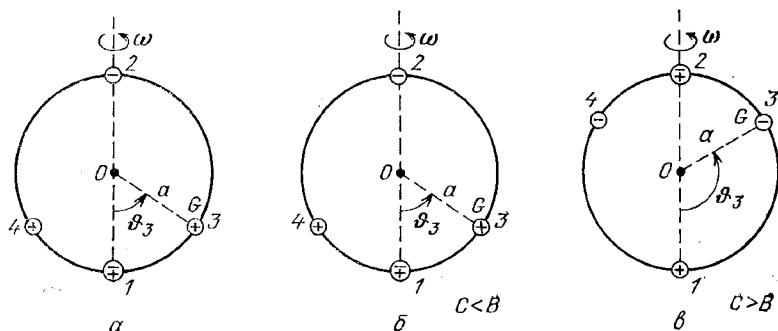


Рис. 1.36

(рис. 1.37, а). Последняя, в свою очередь, приводится во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси CD . Найти положения относительного равновесия кабины в случае, когда оси OO' и CD параллельны.

Решение. Изобразим вид механизма в плане (рис. 1.37, б). Предположим, что центр масс G кабины M расположен на оси OG на некотором расстоянии r ; обозначим расстояние OC через l . Определим положение кабины углом α между прямыми OC и GO .

Измененная потенциальная энергия имеет вид

$$W = -\frac{1}{2}\omega^2(J + ml^2 + 2mlr \cos \alpha),$$

где m — масса, а J — момент инерции кабины относительно оси OO' .

Для определения положений равновесия имеем уравнение

$$W' = \omega^2 m l r \sin \alpha = 0,$$

которое имеет два решения

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi.$$

Вычислив $W''(\alpha_1)$ и $W''(\pi)$, устанавливаем, что положение $\alpha = 0$ устойчиво, положение $\alpha = \pi$ неустойчиво.

Задача 1.2.10. Предположим, что в системе, кото-

рая описана в условии к задаче 1.2.9, ось OO' поворота кабины M ортогональна плоскости L , проходящей через ось CD центрифуги и центр масс G кабины (вид сбоку изображен на рис. 1.38). Пусть L — плоскость симметрии кабины, а ось Ox , проходящая в этой плоскости

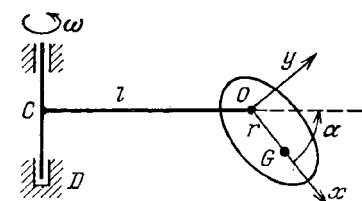


Рис. 1.38

через точку G и пересекающаяся с осью OO' в точке O , — главная ось центрального эллипсоида инерции.

Найти положения относительного равновесия кабины и исследовать их устойчивость.

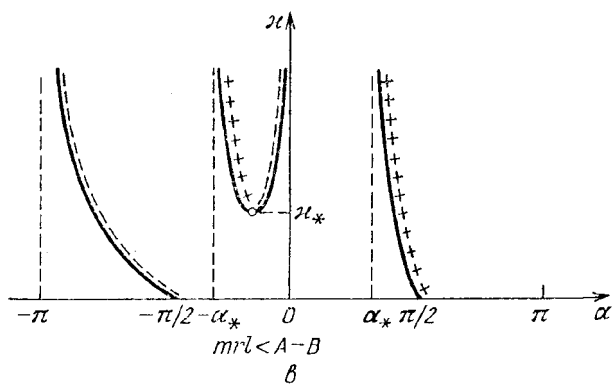
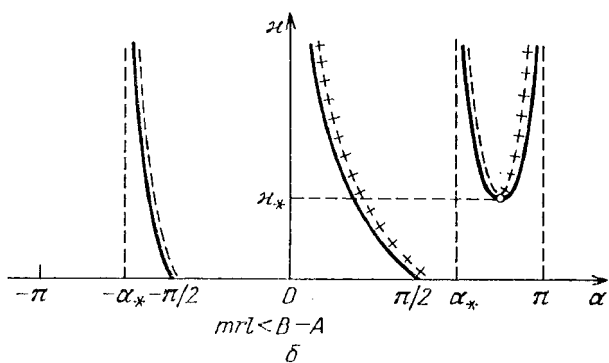
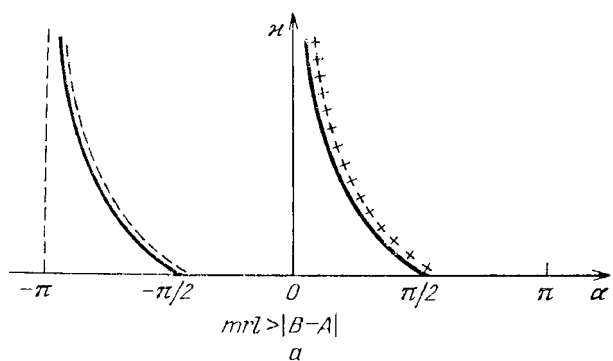


Рис. 1.39

Решение. Сохранив обозначения, введенные в задаче 1.2.9, для измененной потенциальной энергии W имеем выражение

$$W = -mgr \sin \alpha - \frac{1}{2} \omega^2 (B \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha + 2mrl \cos \alpha),$$

где A, B — моменты инерции кабины относительно осей Ox, Oy . Положения относительного равновесия определяются из условия

$$W' = -\omega^2(A - B) \sin \alpha \cos \alpha - mgr \cos \alpha + \omega^2 mrl \sin \alpha = 0.$$

Выразим отсюда зависимость $\kappa = \omega^2 r/g$ от угла α и изобразим ее качественно на рис. 1.39.

При достаточно большой длине державки (рис. 1.39, а) возможны лишь два положения относительного равновесия независимо от соотношений между моментами инерции A, B кабины. При короткой державке (рис. 1.39, б, в) расположение ветвей возможных равновесий зависит от знака разности $A - B$. Однако при любом знаке обязательно существует некоторая скорость ω_* ($\omega_*^2 = \kappa_* g/r$) такая, что при $\omega < \omega_*$ возможны лишь два положения относительного равновесия, а при $\omega > \omega_*$ — четыре.

Расположение центра масс G кабины при короткой державке (рис. 1.40), отвечающее возможным положениям

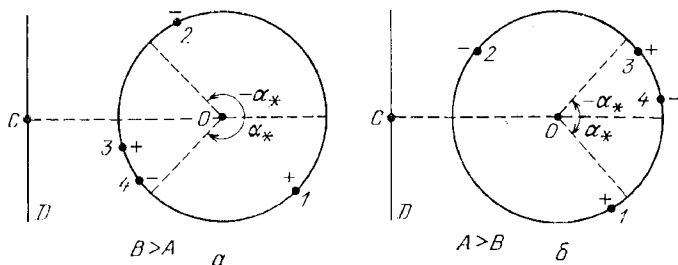


Рис. 1.40

равновесия, в общих чертах напоминает аналогичную картину для задачи 1.2.7.

Отличие заметно в некоторых деталях. Рассмотрим случай $B > A$ (рис. 1.40, а). Когда $\omega \rightarrow \infty$, положения 1, 3 смещаются (как и в задаче 1.2.7) к концам горизонтального диаметра окружности, которую описывает точ-

ка G . Положения 2, 4 теперь смещаются при $\omega \rightarrow \infty$ не к оси вращения, а к положениям, для которых $\alpha = \pm \alpha_* = \pm \arccos mrl/(A - B)$.

Обратимся к случаю $A > B$. Новое (по сравнению с задачей 1.2.7) заключается в возможности таких положений 3, 4 относительного равновесия, для которых центр масс G располагается на «правой» верхней четверти окружности (рис. 1.40, б). Соответственно изменились и тенденции при $\omega \rightarrow \infty$. К концам горизонтального диаметра смещаются положения 2, 4, а положения 1, 3 смещаются к $\alpha = \pm \alpha_*$.

Для исследования устойчивости найденных положений равновесия вычислим вторую производную от измененной потенциальной энергии

$$W'' = \omega^2(B - A)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + mgr \sin \alpha + \omega^2 mrl \cos \alpha.$$

Нетрудно видеть, что при $\omega = 0$ $W''(\pi/2) > 0$, а $W''(-\pi/2) < 0$. Поэтому положение 1 всегда устойчиво, а положение 4 неустойчиво. Аналогичным образом устанавливается устойчивость положения 3 и неустойчивость положения 2. Результаты исследования отображены на рис. 1.39, рис. 1.40.

Задача 1.2.11. Тяжелая бусинка массой m нанизана на тонкий прут, изогнутый в форме эллипса, определяемого уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ($a > b$). Эллипс равномерно вращается вокруг вертикали, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω , при этом малая ось эллипса горизонтальна, а большая ось образует с вертикалью угол φ , $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (рис. 1.41). Найти положения относительного равновесия бусинки и исследовать их устойчивость.

Решение. Обозначим через r и ϑ полярные координаты бусинки в плоскости эллипса. Тогда для измененной потенциальной энергии будем иметь выражение

$$W = -mgr \sin \varphi \cos \vartheta - \frac{1}{2} \omega^2 m r^2 (1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta),$$

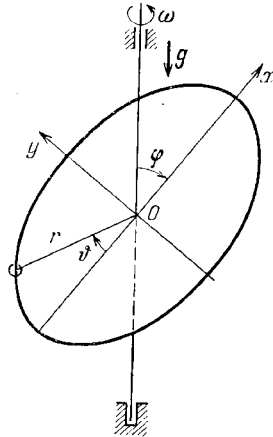


Рис. 1.41

где

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \vartheta}}.$$

Первый член в этом выражении представляет собой потенциальную энергию силы тяжести, а второй — потенциальную энергию центробежных сил.

Введем обозначения

$$W = mgbW_*, \quad \kappa = \frac{b}{a} < 1, \quad \lambda = \frac{\omega^2 b}{g}, \quad v = \cos \varphi,$$

$$R_*(\vartheta) = \sqrt{1 - (1 - \kappa^2) \cos^2 \vartheta}$$

и представим измененную потенциальную энергию в виде

$$W_*(\vartheta) = -\frac{1}{R^2} \left[vR \cos \vartheta + \frac{\lambda}{2} (1 - v^2 \cos^2 \vartheta) \right].$$

Для определения положений относительного равновесия имеем уравнение

$$W'_*(\vartheta) = \frac{\sin \vartheta}{R^4} [vR - \lambda(v^2 + \kappa^2 - 1) \cos \vartheta] = 0,$$

которое допускает следующие семейства решений:

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_{2,3} = \pm \pi, \quad \vartheta_{4,5} = \pm \pi/2, \text{ если } v = 0 \quad (\varphi = \pi/2), \quad (1)$$

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_{2,3} = \pm \pi, \text{ если } 1 - v^2 = \kappa^2 \quad (\sin \varphi = b/a), \quad (2)$$

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_{2,3} = \pm \pi, \quad \vartheta_{4,5} = \pm \vartheta_*, \quad 0 < \vartheta_* < \pi, \quad (3)$$

где ϑ_* определяется из уравнения

$$\lambda = \frac{vR(\vartheta)}{(v^2 + \kappa^2 - 1) \cos \vartheta}, \quad \lambda \geq \lambda_* = \frac{v\kappa}{|v^2 + \kappa^2 - 1|}. \quad (4)$$

Для положений относительного равновесия (1) плоскость эллипса горизонтальна, а бусинка находится на концах осей эллипса, при этом очевидно, что если она находится на концах большой оси ($\vartheta_1 = 0, \vartheta_{2,3} = \pm \pi$), то эти равновесия устойчивы, а если она находится на концах малой оси ($\vartheta_{4,5} = \pm \pi/2$), то такие равновесия неустойчивы.

Для положений относительного равновесия (2) плоскость эллипса образует с вертикалью угол $\varphi = \arcsin(b/a)$, а бусинка находится на концах большой

оси эллипса. Очевидно, что нижнее положение равновесия устойчиво, а верхнее неустойчиво.

Для положений относительного равновесия (3) плоскость эллипса образует с вертикалью угол $\varphi \neq \arcsin(b/a)$, а бусинка занимает четыре положения; первые два на концах большой оси эллипса, два другие

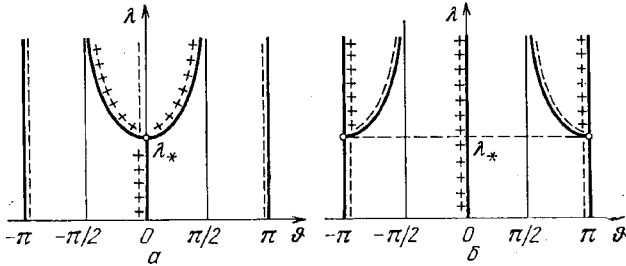


Рис. 1.42

симметричны относительно оси x . Для них $\vartheta = \pm \vartheta_*$, при этом $0 < \vartheta_* < \pi/2$, если $1 - \kappa^2 < \nu^2$, и $\pi/2 < \vartheta_* < \pi$, если $1 - \kappa^2 > \nu^2$. При $\lambda \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow \infty$) $\vartheta_* \rightarrow \pi/2$; при $\lambda \rightarrow \lambda_*$ имеем $\vartheta_* \rightarrow 0$ ($\vartheta_* \rightarrow \pi$), если $1 - \kappa^2 < \nu^2$ ($1 - \kappa^2 > \nu^2$).

На рис. 1.42, а, б дано геометрическое представление семейств относительных равновесий (3) для случаев, когда а) $1 - \kappa^2 < \nu^2$ и б) $1 - \kappa^2 > \nu^2$.

Исследуем устойчивость относительных равновесий (3). Для равновесий $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_{2,3} = \pm \pi$ имеем

$$W''_*(0) = \kappa^{-4} [\nu \kappa - \lambda (\nu^2 + \kappa^2 - 1)],$$

$$W''_*(\pm \pi) = -\kappa^{-4} [\nu \kappa + \lambda (\nu^2 + \kappa^2 - 1)].$$

Отсюда заключаем, что если $1 - \kappa^2 < \nu^2$, то равновесие $\vartheta = 0$ устойчиво, когда $\lambda < \lambda_*$, и неустойчиво, когда $\lambda > \lambda_*$, а равновесия $\vartheta = \pm \pi$ устойчивы. Если же $1 - \kappa^2 > \nu^2$, то равновесие $\vartheta = 0$ устойчиво, а равновесия $\vartheta = \pm \pi$ устойчивы, когда $\lambda > \lambda_*$, и неустойчивы, когда $\lambda < \lambda_*$.

Для равновесий $\vartheta = \pm \vartheta_*$ имеем

$$W'' = \frac{\sin \vartheta}{R^4} [\nu R' + \lambda (\nu^2 + \kappa^2 - 1) \sin \vartheta],$$

при этом сюда нужно подставить значение λ из (4).

Выполнив эту подстановку, получим

$$W''(\vartheta) = \frac{v(R' \cos \vartheta + R \sin \vartheta) \sin \vartheta}{R^4 \cos \vartheta} = \frac{(v^2 + \kappa^2 - 1) \sin 2\vartheta}{R^4} \frac{d\lambda}{d\vartheta}, \quad (5)$$

так как в силу (4)

$$\frac{d\lambda}{d\vartheta} = \frac{v(R' \cos \vartheta + R \sin \vartheta)}{(v^2 + \kappa^2 - 1) \cos^2 \vartheta}.$$

Пусть $1 - \kappa^2 < v^2$ (рис. 1.42, а). Тогда для $0 < \vartheta < \pi/2$ имеем $\sin 2\vartheta > 0$, $d\lambda/d\vartheta > 0$ и с учетом (5) $W'' > 0$; для $-\pi/2 < \vartheta < 0$ имеем $\sin 2\vartheta < 0$, $d\lambda/d\vartheta < 0$ и $W'' > 0$. Следовательно, равновесия $\vartheta = \pm \vartheta_*$ устойчивы, если $1 - \kappa^2 < v^2$.

Пусть теперь $1 - \kappa^2 > v^2$ (рис. 1.42, б). Тогда для $\pi/2 < \vartheta < \pi$ имеем $\sin 2\vartheta < 0$, $d\lambda/d\vartheta < 0$ и $W'' < 0$; для $-\pi < \vartheta < -\pi/2$ имеем $\sin 2\vartheta > 0$, $d\lambda/d\vartheta > 0$ и $W'' < 0$. Итак, равновесия $\vartheta = \pm \vartheta_*$ неустойчивы, если $1 - \kappa^2 > v^2$.

Полученные результаты допускают следующую интерпретацию.

Вообразим себе круговой цилиндр, ось которого совпадает с осью вращения эллипса, а радиус равен малой

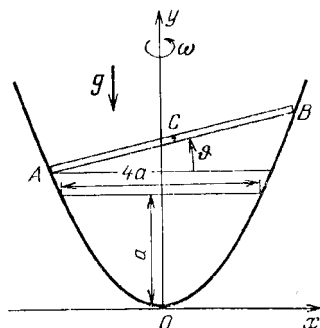


Рис. 1.43

полуоси эллипса. Тогда, если эллипс находится внутри цилиндра, то бусинка имеет положения равновесия (3), для которых $1 - \kappa^2 < v^2$; если эллипс лежит на поверхности цилиндра, то возможны только положения равновесия (2), при этом равновесия и их устойчивость не зависят от угловой скорости вращения эллипса. Наконец, если эллипс расположен вне цилиндра, то возможны только равновесия (3), для

которых $1 - \kappa^2 > v^2$, и, в частности, равновесия (1), если $v = 0$.

Задача 1.2.12. Тяжелый однородный стержень AB массой m и длиной l подвешен при помощи малых колец, укрепленных на его концах, к пруту, изогнутому в форме параболы, уравнение которой имеет вид $y = x^2/(4a)$, причем ось y направлена вертикально вверх

(рис. 1.43). Прут равномерно вращается вокруг оси y с угловой скоростью ω . Найти положения относительного равновесия стержня и исследовать их устойчивость. Рассмотреть также случай, когда ветви параболы направлены вниз.

Решение. Обозначим через x_1, y_1 и x_2, y_2 координаты концов A и B стержня и через ϑ — угол, образуемый стержнем с осью x . Тогда для измененной потенциальной энергии будем иметь выражение

$$W = mg \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (1)$$

где J — момент инерции стержня относительно оси y . По теореме Гюйгенса имеем

$$J = J_c + m \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2, \quad J_c = \frac{1}{12} m l^2 \cos^2 \vartheta. \quad (2)$$

Выразим W через ϑ . Для этого используем соотношения

$$x_2 = x_1 + l \cos \vartheta, \quad y_2 = y_1 + l \sin \vartheta. \quad (3)$$

Из (3), используя уравнение параболы, находим

$$x_1 = \frac{4a \sin \vartheta - l \cos^2 \vartheta}{2 \cos \vartheta}, \quad y_1 = \frac{(4a \sin \vartheta - l \cos^2 \vartheta)^2}{16a \cos^2 \vartheta}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 2a \operatorname{tg} \vartheta, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{l^2}{16a} + a \operatorname{tg}^2 \vartheta. \quad (4)$$

Из (1), (2) и (4) окончательно находим

$$W(\vartheta, \lambda, \kappa) = \frac{mga}{16} [\kappa^2 (6 - \lambda) \cos^2 \vartheta + 3(2 - \lambda) \operatorname{tg}^2 \vartheta] \\ (\lambda = 4a\omega^2/g, \quad \kappa = l/(4a)). \quad (5)$$

Положения относительного равновесия стержня определяются из уравнения

$$W' = \frac{mga}{3} \left[-\kappa^2 (6 - \lambda) \cos \vartheta + \frac{3(2 - \lambda)}{\cos^2 \vartheta} \right] \sin \vartheta = 0.$$

Это уравнение при любых значениях параметров κ и λ имеет решение $\vartheta = 0$. Кроме того, при определенных значениях параметров λ и κ существуют симметричные положения равновесия $\vartheta = \pm \vartheta_1(\lambda, \kappa)$, где ϑ_1 удовлетворяет

уравнению

$$\lambda = 6 \left(1 - \frac{2}{3 - \kappa^2 \cos^4 \vartheta_1} \right).$$

Зависимость $\vartheta = \vartheta_1(\lambda)$ при различных значениях параметра κ представлена на рис. 1.44. Отметим два обстоятельства. Во-первых, при $\lambda = 2$ имеем $\vartheta_1 = \pi/2$, что

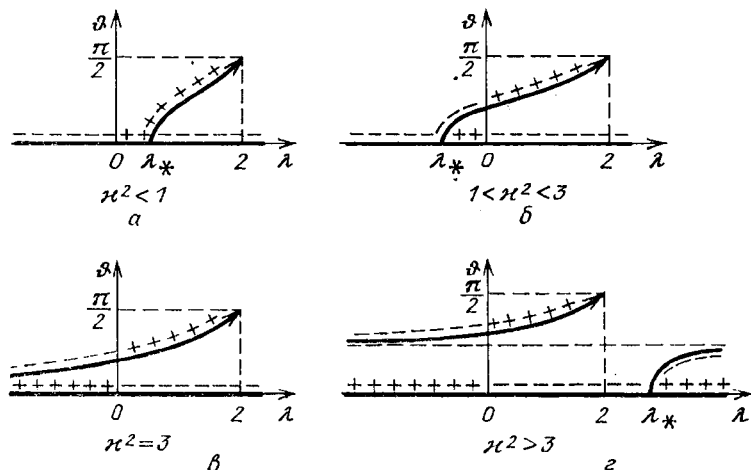


Рис. 1.44

соответствует бесконечному удалению стержня по ветви параболы. Кроме того, при $\lambda = \lambda_* = 6(1 - \kappa^2)/(3 - \kappa^2)$ имеем $\vartheta_1 = 0$. Во-вторых, область $\lambda < 0$ также представляет интерес, так как она отвечает направленной вверх (на рис. 1.43) силе тяжести, или, что то же, направленным вниз ветвям параболы. Однако непрерывное изменение физических параметров здесь не всегда отвечает непрерывному изменению формальных параметров. Например, при $g = 0$ параметр $\lambda = \pm\infty$.

Для решения вопроса об устойчивости найденных равновесий вычислим W'' . Имеем

$$W''(0) = \frac{mga}{3} (\lambda - \lambda_*) (3 - \kappa^2),$$

$$W''(\vartheta_1) = 8mga\kappa^2 \frac{\sin^2 \vartheta_1}{3 - \kappa^2 \cos^4 \vartheta_1}.$$

Результаты анализа знака W'' отображены на рис. 1.44, где знаками «+» выделены устойчивые равновесия, а знаками «-» — неустойчивые.

Задача 1.2.13. Тяжелая материальная точка массой m может двигаться без трения по поверхности эллипсоида, определяемого уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c,$$

при этом ось z направлена вертикально вверх. Эллипсоид равномерно вращается вокруг малой оси с угловой скоростью ω . Найти положения относительного равновесия и исследовать их устойчивость.

Решение. Для измененной потенциальной энергии имеем выражение

$$W = mgz - \frac{\omega^2}{2} m (x^2 + y^2).$$

Далее, не ограничивая общности, можно считать $m = 1$. Сведем задачу нахождения экстремальных значений функции W на эллипсоиде к задаче на безусловный экстремум, введя функцию

$$W_*(\lambda, x, y, z) = gz - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{gc\lambda}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right),$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Условие стационарности функции W_* выражается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_*}{\partial x} &= (\lambda \omega_1^2 - \omega^2) x = 0, & \frac{\partial W_*}{\partial y} &= (\lambda \omega_2^2 - \omega^2) y = 0, \\ \frac{\partial W_*}{\partial z} &= g \left(\lambda + \frac{\lambda z}{c} \right) = 0, & \omega_1^2 &= \frac{gc}{a^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{gc}{b^2}, \quad \omega_1 < \omega_2, \end{aligned}$$

к которым следует присоединить уравнение эллипсоида. Эти уравнения имеют четыре однопараметрические семейства решений:

$$x = y = 0, \quad z = c, \quad \lambda = -1, \quad \omega \text{ произвольна}, \quad (1)$$

$$x = y = 0, \quad z = -c, \quad \lambda = 1, \quad \omega \text{ произвольна}, \quad (2)$$

$$\frac{x}{a} = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_1^4}{\omega^4}}, \quad y = 0, \quad \frac{z}{c} = -\frac{\omega_1^2}{\omega^2},$$

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_1^2}, \quad \omega \geq \omega_1, \quad (3)$$

$$x = 0, \quad \frac{y}{b} = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_2^4}{\omega^4}}, \quad z = -\frac{\omega_2^2}{\omega^2},$$

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_2^2}, \quad \omega \geq \omega_2. \quad (4)$$

Этим решениям соответствуют положения относительно нного равновесия точки, при этом для (1) и (2) она находится на концах малой оси эллипсоида, а для (3) и (4) — в нижней части сечений эллипсоида плоскостями

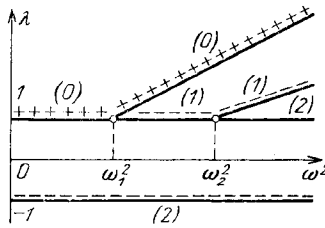


Рис. 1.45

$y = 0$ и $x = 0$, и на этих эллипсах может занимать положения, симметричные относительно оси z , причем при $\omega \rightarrow \infty$ эти положения равновесия стремятся к горизонтальной плоскости $z = 0$.

На рис. 1.45 дано геометрическое представление равновесий (1)–(4) на плоскости параметров λ и ω^2 .

Исследуем устойчивость равновесий (1)–(4). Условия устойчивости получим как условия положительной определенности второй вариации $\delta^2 W_*$ функции W_* на липслом многообразии

$$\frac{x}{a^2} \xi + \frac{y}{b^2} \eta + \frac{z}{c^2} \zeta = 0,$$

где через ξ , η , ζ обозначены вариации переменных x , y , z . С учетом этого для (1)–(4) соответственно находим

$$\delta^2 W_* = -(\omega_1^2 + \omega^2) \xi^2 - (\omega_2^2 + \omega^2) \eta^2 \quad (\omega \text{ произвольна}),$$

$$\delta^2 W_* = (\omega_1^2 - \omega^2) \xi^2 + (\omega_2^2 - \omega^2) \eta^2 \quad (\omega \text{ произвольна}),$$

$$\delta^2 W_* = \frac{\omega^6}{\omega_1^4} \left(1 - \frac{\omega_1^4}{\omega^4}\right) \xi^2 + \omega^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1\right) \eta^2 \quad (\omega \geq \omega_1),$$

$$\delta^2 W_* = \omega^2 \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1\right) \xi^2 + \frac{\omega^6}{\omega_2^4} \left(1 - \frac{\omega_2^4}{\omega^4}\right) \eta^2 \quad (\omega \geq \omega_2).$$

Отсюда заключаем, что для равновесия (1) степень неустойчивости $\chi = 2$; для (2) $\chi = 0$, если $\omega < \omega_1$, $\chi = 1$, если $\omega_1 < \omega < \omega_2$, и $\chi = 2$, если $\omega > \omega_2$; для (3) $\chi = 0$; для (4) $\chi = 1$. Следовательно, равновесие (2) устойчиво, если $\omega < \omega_1$, и неустойчиво, если $\omega_1 < \omega < \omega_2$; равновесие (3) устойчиво, а равновесие (4) неустойчиво.

Для выяснения характера устойчивости равновесия (1) и равновесия (2) при $\omega > \omega_2$ обратимся к анализу характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + [2\omega^2 + \varepsilon(\omega_1^2 + \omega_2^2)]\lambda^2 + (\omega^2 - \varepsilon\omega_1^2)(\omega^2 - \varepsilon\omega_2^2) = 0$$

для уравнений в вариациях

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} + (\varepsilon\omega_1^2 - \omega^2)x = 0, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} + (\varepsilon\omega_2^2 - \omega^2)y = 0,$$

где $\varepsilon = -1$ для (1) и $\varepsilon = 1$ для (2).

При $\varepsilon = -1$ уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет два положительных и два отрицательных корня, если $\omega^2 < \omega_*^2$, и две пары комплексных корней с положительными и отрицательными вещественными частями, если $\omega^2 > \omega_*^2$, где

$$\omega_*^2 = \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{8(\omega_1^2 + \omega_2^2)}.$$

На основе теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению отсюда заключаем, что равновесие (1) неустойчиво.

При $\varepsilon = 1$ уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ для $\omega^2 > \omega_2^2$ имеет две пары чисто мнимых корней. Поэтому для задачи устойчивости равновесия (2) при $\omega > \omega_2$ имеет место критический случай двух пар чисто мнимых корней.

Результаты анализа устойчивости равновесий (1)–(4) представлены на рис. 1.45, где цифры (0), (1), (2) на ветвях кривой равновесий указывают степень неустойчивости, а знаки \pm соответствуют устойчивым и неустойчивым равновесиям.

§ 1.3. Стационарные движения систем с циклическими координатами

Задача 1.3.1. К концам нити, пропущенной через отверстие O в гладкой горизонтальной плоскости стола, присоединены две материальные точки массами m_1 и m_2 . Первая точка скользит по поверхности стола, а вторая

движется по вертикали, проходящей через точку O . Определить условия, при которых первая точка движется по окружности, а вторая покоится, и исследовать устойчивость такого движения. Нить считать нерастяжимой, невесомой и идеально гибкой.

Решение. Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем полярные координаты r , φ первой точки.

Кинетическая энергия системы и силовая функция силы тяжести имеют вид

$$T = 0,5m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + 0,5m_2\dot{r}^2, \quad U = -m_2gr.$$

Координата φ — циклическая. Ей соответствует первый интеграл (интеграл площадей)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_1 r^2 \dot{\varphi} = p = \text{const.}$$

Определим из этого выражения величину $\dot{\varphi}$. Получим $\dot{\varphi} = p/(m_1 r^2)$. Подставим это выражение в функцию Рауса

$$\begin{aligned} R = T + U - \dot{\varphi} p &= 0,5(m_1 + m_2)\dot{r}^2 - \frac{p^2}{2m_1 r} - m_2gr = \\ &= R_2 + R_0 \quad (R_1 = 0). \end{aligned}$$

Отсюда следует выражение для измененной силовой функции

$$R_0 = -\frac{p^2}{2m_1 r^2} - m_2gr.$$

Координата r — позиционная. Движение, при котором $r(t) = \text{const.}$, — стационарное, ему отвечает экстремум измененной силовой функции.

При любых значениях p функция R_0 имеет лишь один экстремум

$$r = r_0 = \sqrt[3]{\frac{p^2}{m_1 m_2 g}}.$$

В этой точке имеем

$$R_0''(r_0) = -\frac{6a^4}{m_1 r_0^4} < 0.$$

Следовательно, функция R_0 имеет в точке экстремума максимум, и стационарное движение системы устойчиво.

В заключение укажем угловую скорость $\dot{\varphi}$ движения первой точки по окружности: $\dot{\varphi} = \sqrt{m_2 g / (m_1 r_0)}$.

Задача 1.3.2. Однородный шероховатый цилиндр катится без скольжения по внутренней поверхности цилиндрической трубы (рис. 1.46). Последняя, в свою очередь, может вращаться вокруг своей горизонтально расположенной оси O . Радиус цилиндра r , внутренний радиус трубы R ($r < R$), масса цилиндра M . Центр масс трубы находится на ее оси O .

Определить стационарные движения системы и исследовать их устойчивость.

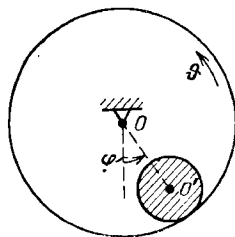


Рис. 1.46

Решение. Введем обобщенные координаты: θ — угол поворота трубы, φ — угол между линией OO' , соединяющей центры трубы и цилиндра, и вертикалью.

Кинетическая энергия системы и силовая функция силы тяжести имеют вид

$$T = 0,5J\dot{\theta}^2 + 0,5M(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + 0,25M[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\theta}]^2,$$

$$U = Mg(R-r)\cos\varphi.$$

Здесь J — осевой момент инерции трубы.

Координата θ — циклическая. После ее игнорирования получаем выражение для измененной силовой функции

$$R_0 = Mg(R-r)\cos\varphi - \frac{p^2}{J + \frac{1}{2}MR^2}.$$

Функция R_0 при любом значении постоянной циклического интеграла имеет максимум в точке $\varphi = 0$. Следовательно, система может совершать устойчивое стационарное движение, в котором угловые скорости обоих тел постоянны, а цилиндр занимает наименьшее положение $\varphi = 0$.

Отметим, что стационарное движение, отвечающее второму экстремуму R_0 ($\varphi = \pi$), нереализуемо, так как связь является односторонней.

Задача 1.3.3. Цилиндрическая труба своей внутренней поверхностью опирается на шероховатый цилиндр (рис. 1.47), который может вращаться вокруг своей горизонтально расположенной оси O' . Определить стационарные движения системы и исследовать их устойчивость.

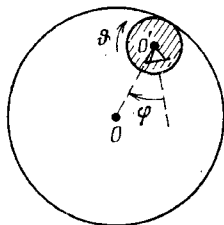


Рис. 1.47

Решение. Введем обобщенные координаты: θ — угол поворота цилиндра, φ — угол между линией OO' и вертикалью.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = 0,5J\dot{\theta}^2 + 0,5M(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + 0,5M[(R-r)\dot{\varphi} - r\dot{\theta}]^2.$$

Здесь M — масса трубы, J — осевой момент инерции цилиндра.

Дальнейшее решение проводится аналогично решению предыдущей задачи.

Задача 1.3.4. Пусть в системе, описанной в задаче 1.2.4, отсутствует привод, обеспечивающий постоянство угловой скорости ω вращения невесомого прута, и нет трения в оси вращения прута. Определить стационарные движения системы бусинка — прут и выделить устойчивые.

Решение. Циклической координате — углу поворота прута вокруг оси — отвечает интеграл площадей

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = m\omega x^2 = p = \text{const.}$$

Измененная силовая функция $R_0 = -W$ имеет вид (см. (34) введения)

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{mx^2} - \frac{mgx^2}{4a}.$$

Уравнение стационарных движений

$$R'_0 = \frac{p^2}{mx^3} - mg \frac{x}{2a} = 0$$

при любых значениях параметра p имеет два корня

$$x_{1,2} = \pm \left(\frac{|p|}{m} \sqrt{\frac{2a}{g}} \right)^{1/2}.$$

Поскольку

$$R_0'' = -\frac{3p^2}{mx^4} - \frac{mg}{2a} < 0,$$

то оба корня отвечают устойчивым стационарным движениям. Результат изображен на рис. 1.48. Не противоречит ли это положениям теории бифуркации?

Задача 1.3.5. Решить предыдущую задачу с учетом массы прута.

Решение. Обозначив через I момент инерции прута относительно оси, имеем

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{I + mx^2} - \frac{mg}{4a} x^2.$$

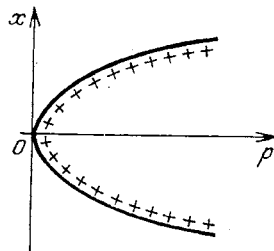


Рис. 1.48

Уравнение стационарных движений

$$R_0' = \left[\frac{p^2}{(I + mx^2)^2} - \frac{g}{2a} \right] mx = 0$$

имеет при любых значениях параметра p тривиальный корень $x_1 = 0$. Кроме того, при $|p| > p_* = I \sqrt{\frac{g}{2a}}$ существуют еще два корня

$$x_{2,3} = \pm \left[\frac{1}{m} \left(|p| \sqrt{\frac{2a}{g}} - I \right) \right]^{1/2}.$$

Для выделения устойчивых стационарных движений вычислим вторую производную

$$R_0'' = m \left[\frac{p^2}{(I + mx^2)^2} - \frac{g}{2a} \right] - mx^2 \frac{p^2}{(I + mx^2)^3}.$$

Нетрудно видеть, что

$$R_0''(0) \begin{cases} < 0 & \text{при } |p| < p_*, \\ > 0 & \text{при } |p| > p_*, \end{cases} \quad R_0''(x_{2,3}) < 0.$$

Отсюда заключаем, что стационарное движение $x = 0$ устойчиво при $|p| < p_*$ и неустойчиво при $|p| > p_*$, а стационарные движения $x = x_{2,3}$ устойчивы. Результаты исследований отражены на рис. 1.49.

Задача 1.3.6. Предположим, что вращение невесомой крестовины $AOSB$ (см. задачу 1.2.1) происходит по

инерции в отсутствие трения в подшипниках. Найти стационарные движения точки M .

Решение. Угол поворота крестовины — циклическая координата, а x — позиционная.

Кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$T = 0,5\omega^2 m (x \sin \alpha)^2 + 0,5m\dot{x}^2, \quad \Pi = mgx \cos \alpha.$$

Циклической координате отвечает первый интеграл — интеграл площадей

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = mx^2 \omega \sin^2 \alpha = p = \text{const.}$$

Измененная силовая функция имеет вид

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{mx^2 \sin^2 \alpha} - mgx \cos \alpha.$$

Значения позиционной координаты в стационарном движении определим из уравнения

$$R'_0 = \frac{p^2}{mx^3 \sin^2 \alpha} - mg \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

которое при $p \neq 0$ имеет лишь одно решение

$$x = \left(\frac{p^2}{m^2 g \cos \alpha \sin^2 \alpha} \right)^{1/3} \quad (2)$$

Если же $p = 0$, то (1) не имеет решения и стационар-

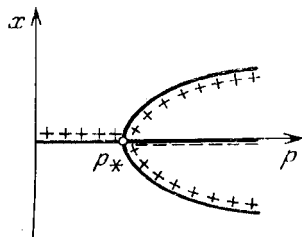


Рис. 1.49

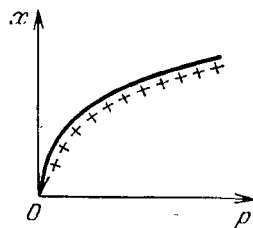


Рис. 1.50

ных движений нет. Зависимость $x(p)$ изображена на рис. 1.50.

Для сравнения с задачей 1.2.1 проведем в (2) замену p на ω и получим

$$x = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha},$$

т. е. соотношение между значениями позиционной координаты и угловой скоростью вращения крестовины в стационарном движении имеет тот же вид, что и в относительном равновесии.

Вычислив вторую производную R_0'' , обнаруживаем, что $R_0'' < 0$, т. е. стационарное движение устойчиво (в отличие от относительного равновесия; ср. рис. 1.22 и 1.50).

В чем состоит особенность бифуркации в рассмотренной задаче и с чем она связана?

Задача 1.3.7. Решить задачу 1.3.6 с учетом массы крестовины.

Решение. Введя обозначение: J — момент инерции крестовины, запишем выражение для измененной силовой функции

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{J + mx^2 \sin^2 \alpha} - mgx \cos \alpha.$$

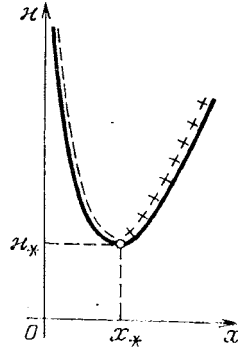


Рис. 1.51

Связь между значениями позиционной координаты в стационарном движении и постоянной p циклического интеграла дается соотношением

$$R_0' = p^2 m \sin^2 \alpha \frac{x}{(J + mx^2 \sin^2 \alpha)^2} - mg \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Разрешив (1) относительно $\kappa = p^2/g$, изобразим зависимость $\kappa(x)$ качественно на рис. 1.51.

Видно, что существует такое значение p_* ($p_*^2 = g\kappa_* > 0$) постоянной интеграла площадей — момента количества движения системы, что при $0 < p < p_*$ стационарных движений нет совсем.

При $p > p_*$ возможны два стационарных движения. Для одного из них $x < x_*$ и $x \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, а для другого $x > x_*$ и $x \sim p^{2/3}$ при $p \rightarrow \infty$.

Чтобы выяснить, какое из двух стационарных движений устойчиво, вычислим вторую производную измененной силовой функции

$$R_0'' = m \sin^2 \alpha \frac{p^2 (J - 3mx^2 \sin^2 \alpha)}{(J + mx^2 \sin^2 \alpha)^3}.$$

Нетрудно установить, что $J - 3mx_*^2 \sin^2 \alpha = 0$. Поэтому

устойчивыми являются те стационарные движения, для которых $x > x_*$. Стационарные движения при $x < x_*$ неустойчивы. Результаты анализа устойчивости отображены на рис. 1.51.

Задача 1.3.8. Пусть в системе, описанной в задаче 1.2.2 (см. рис. 1.23), отсутствует привод, обеспечивающий постоянство угловой скорости ω . Пренебрегая силами трения в подшипниках оси NO и массой стержня AB , определить положение тела M в стационарных движениях системы. Выделить устойчивые стационарные движения.

Решение. Система имеет две степени свободы. Введем обобщенные координаты: α — угол поворота стержня AB , x — см. рис. 1.23.

Кинетическая энергия системы и силовая функция упругой силы пружины имеют вид

$$T = 0,5m\dot{x}^2 + 0,5mx^2\dot{\alpha}^2, \quad U = -0,5k(x - e)^2.$$

Координате α отвечает первый интеграл — интеграл площадей

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = mx^2\dot{\alpha} = p = \text{const.}$$

После несложных преобразований получаем

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{mx^3} - 0,5k(x - e)^2.$$

Значение координаты x в стационарном движении найдем из условия

$$R'_0 = \frac{p^2}{mx^3} - k(x - e) = 0.$$

Нетрудно установить, что зависимость $p^2(x)$, определяемая этим условием, имеет характер кривой, изображенной на рис. 1.52, а. Обратная ей зависимость $x(p^2)$ изображена на рис. 1.52, б.

При любом значении параметра $p \neq 0$ существует два стационарных движения. На одном из них $x < 0$, а на другом $x > 0$.

Для исследования устойчивости стационарных движений вычислим

$$R''_0 = -\frac{3p^2}{mx^4} - k.$$

Поскольку $R_0' < 0$, то оба стационарных движения устойчивы.

При $p = 0$ существует лишь одно стационарное движение $x = e$ и оно устойчиво.

Задача 1.3.9. Решить предыдущую задачу в предположении, что прямая AB отстоит от оси вращения на расстоянии h (см. рис. 1.25).

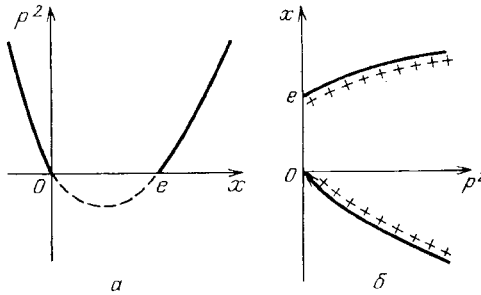


Рис. 1.52

Решение. Сохранив те же обозначения, что и в задаче 1.3.8, для измененной силовой функции R_0 получим выражение

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{m(x^2 + h^2)} - 0,5k(x - e)^2.$$

Связь между позиционной координатой x и постоянной интеграла площадей p на стационарном движении определяется соотношением

$$R_0' = \frac{2p^2}{m(x^2 + h^2)^2} - k(x - e) = 0. \quad (1)$$

Выразив из (1) $x = p^2/(mk)$ как функцию x , изобразим $x(x)$ на

рис. 1.53. Видно, что существует такое значение p_* постоянной интеграла площадей, что при $p < p_*$ возможно лишь одно стационарное движение, а при $p > p_*$ — три.

Обоснуйте распределение устойчивых и неустойчивых стационарных движений, отраженное на рис. 1.53.

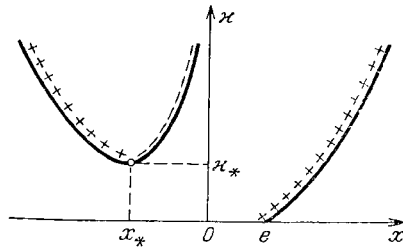


Рис. 1.53

Разберем отдельно случай $e = 0$. Уравнение (1) в этом случае имеет тривиальное решение

$$x_1 = 0$$

при любом значении параметра p и решения

$$x_{2,3} = \pm \left(p \sqrt{\frac{2}{mk}} - h^2 \right)^{1/2},$$

существующие лишь при $p > p_* = h^2 \sqrt{mk/2}$.

Для выделения устойчивых стационарных движений вычислим

$$R_0'' = \left[\frac{2p^2}{m(x^2 + h^2)^2} - k \right] - \frac{8p^2 x^2}{m(x^2 + h^2)^3}.$$

Отсюда имеем

$$R_0''(0) = \frac{2p^2}{mh^4} - k \begin{cases} < 0 & \text{при } p < p_*, \\ > 0 & \text{при } p > p_*, \end{cases}$$

$$R_0''(x_{2,3}) = -\frac{8p^2 x_{2,3}^2}{(x_{2,3}^2 + h^2)^3} < 0.$$

Таким образом, стационарное движение $x = 0$ устойчиво лишь при $p < p_*$, т. е. при малых величинах момента количества движения, и неустойчиво при $p > p_*$.

Стационарные движения $x = x_{2,3}$ устойчивы.

Задача 1.3.10. Решить задачу 1.3.8 с учетом массы стержня AB .

Решение. Пусть J — момент инерции стержня AB . Тогда имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = mx^2 \omega + J\omega = p,$$

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{J + mx^2} - 0,5k(x - e)^2.$$

Уравнение стационарных движений имеет вид

$$R_0' = p^2 m \frac{x}{(J + mx^2)^2} - k(x - e) = 0.$$

Анализ решения этого уравнения проведем тем же способом, что и в задаче 1.3.9. Зависимость $p^2(x)$ изображена на рис. 1.54, а. На левой ветви этой кривой величина p^2 имеет минимум p_*^2 в точке $x_*(x_* < 0)$,

являющейся решением кубического уравнения

$$4mx^3 - 3mex^2 + eJ = 0.$$

Построенную зависимость $p^2(x)$ нетрудно обратить в зависимость $x(p^2)$ (рис. 1.54, б).

При $p^2 < p_*^2$ существует лишь одно стационарное движение, а при $p^2 > p_*^2$ таких движений три.

Для выделения устойчивых движений вычислим

$$R_0'' = -mp^2 \frac{4mx^3 - 3mex^2 + eJ}{(x-e)(mx^2 + J)^3}.$$

Нетрудно видеть, что $R_0'' < 0$ при $x > e$ и при $x < x_*$. Следовательно, стационарные движения, для которых

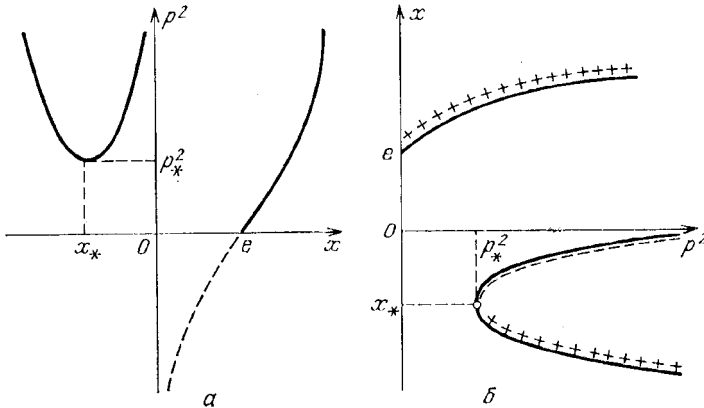


Рис. 1.54

$x > e$ или $x < x_*$ (на рис. 1.54 отмечены крестиками), устойчивы.

Случай $e = 0$ разобран самостоятельно.

Задача 1.3.11. Тяжелое колечко A массой m может скользить по невесомой окружности радиусом R (рис. 1.55). Окружность, в свою очередь, может вращаться без трения вокруг своего вертикального диаметра. Найти стационарные движения колечка и исследовать их устойчивость.

Решение. Циклической координате — углу поворота окружности отвечает интеграл площадей

$$mR^2\omega \sin^2 \varphi = p = \text{const.}$$

Измененная силовая функция R_0 имеет вид

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{mR^2 \sin^2 \varphi} + mgR \cos \varphi.$$

Уравнение стационарных движений

$$R'_0 = \frac{p^2}{mR^2} \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} - mgR \sin \varphi = 0$$

имеет при любом значении p два решения φ_1, φ_2 , качественно изображенные на рис. 1.56.

Для выделения устойчивых движений вычислим

$$R''_0 = -mg \cos \varphi - \frac{p^2}{mR^2} \left(\frac{\sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} \right).$$

Видно, что $R''_0 < 0$ при $\varphi = \varphi_{1,2}$. Поэтому оба стационарных движения устойчивы, что и отражено на рис. 1.56.

Задача 1.3.12. Решить предыдущую задачу в предположении, что вертикальная ось вращения отстоит от

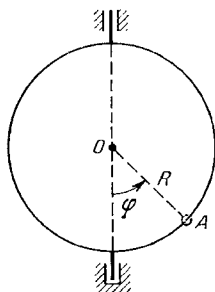


Рис. 1.55

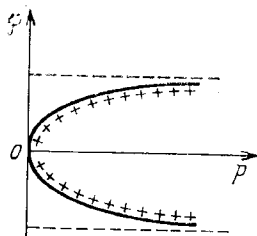


Рис. 1.56

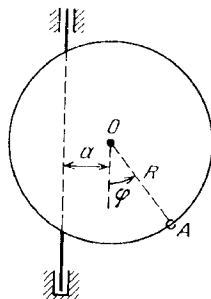


Рис. 1.57

вертикального диаметра окружности на расстояние a (рис. 1.57).

Решение. Измененная силовая функция R_0 имеет вид

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{m(a + R \sin \varphi)^2} + mgR \cos \varphi.$$

Стационарные движения находим из уравнения

$$R'_0 = \frac{p^2}{m} \frac{R \cos \varphi}{(a + R \sin \varphi)^3} - mgR \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

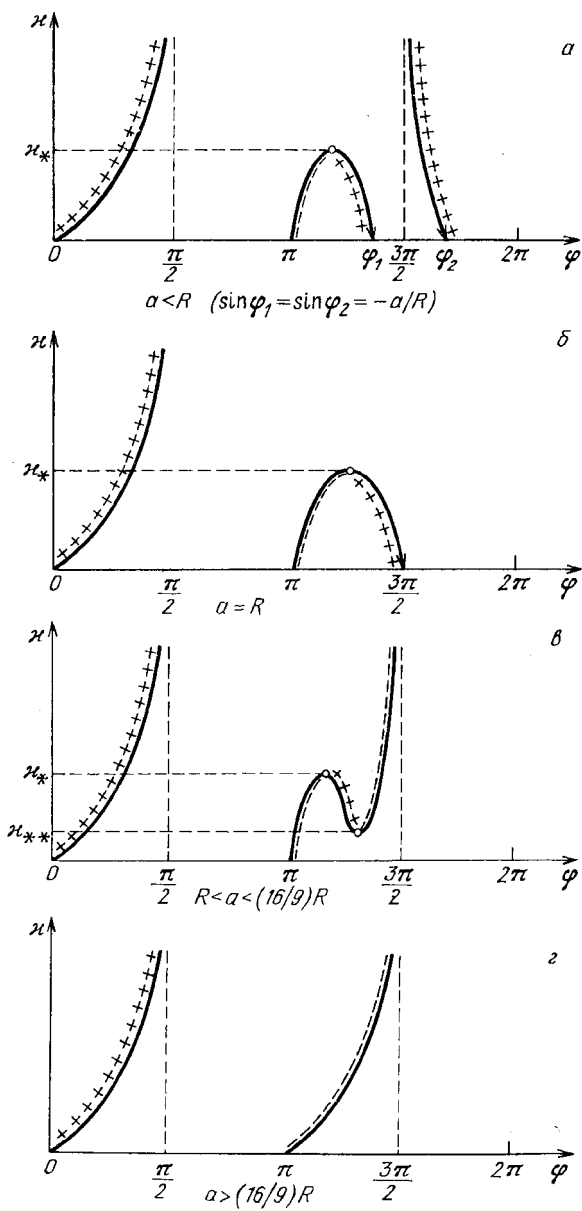


Рис. 1.58

Выразив из (1) величину $\kappa = p^2/(m^2g)$ как функцию угла φ , изобразим $\kappa(\varphi)$ качественно на рис. 1.58.

Рассмотрим сначала случай $a < R$ (рис. 1.58, а). Обязательно существует такое значение p_* постоянной интеграла площадей ($p_*^2 = m^2g\kappa_*$), что при $p < p_*$ имеются четыре возможных положения колечка, т. е. четыре различных стационарных движения с одним и тем же значением p . Изобразим их на окружности (рис. 1.59, а).

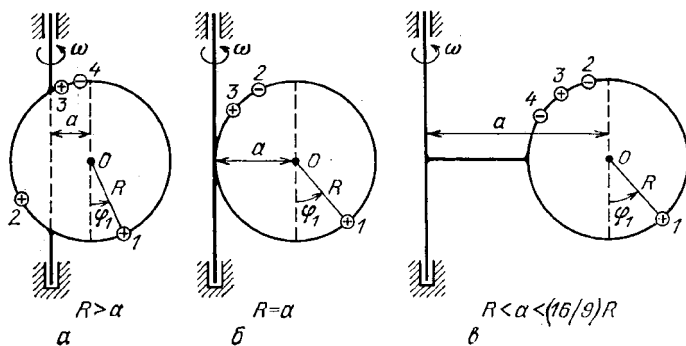


Рис. 1.59

При $p \rightarrow 0$ положения 1, 4 смещаются к концам вертикального диаметра окружности, а положения 2, 3 приближаются к оси вращения (нетрудно сообразить, что при $p = 0$ положений 2, 3 не существует). Когда $p \rightarrow p_*$, то положения 3, 4 приближаются друг к другу, сливаясь при $p = p_*$.

При $p > p_*$ существует лишь два возможных положения колечка (1 и 2) в стационарном движении с одним и тем же значением p .

Пусть теперь $a = R$ (рис. 1.58, б). Здесь также существует критическое значение p_* такое, что при $p < p_*$ возможны три стационарных движения. Отвечающие им положения колечка указаны на рис. 1.59, б. При $p \rightarrow 0$ положения 1, 2 смещаются к концам вертикального диаметра, а положение 3 приближается к оси вращения и при $p = 0$ исчезает. С увеличением p положения 2, 3 сближаются и при $p = p_*$ сливаются. Если $p > p_*$, то возможно лишь одно стационарное движение, в котором колечко занимает положение 1, смещаясь к правому концу горизонтального диаметра при $p \rightarrow \infty$.

Наиболее любопытен случай $R < a < \frac{16}{9} R$ (рис. 1.58, е). Обязательно существуют два значения p_{**}, p_* ($0 < p_{**} < p_*$) параметра p , при которых происходит ветвление стационарных движений. При $p < p_{**}$ возможны лишь два стационарных движения, а при $p_{**} < p < p_*$ — четыре, причем, для трех из них колечко располагается на левой верхней четверти окружности (рис. 1.59, е). Когда p , уменьшаясь, приближается к значению p_{**} , то сближаются положения 3, 4. Если же p увеличивается, то сближаются положения 2, 3, сливаясь при $p = p_*$. При $p > p_*$ остаются лишь два стационарных движения. Им отвечают положения 1 и 4 колечка, которые смещаются к концам горизонтального диаметра окружности при $p \rightarrow \infty$.

Случай $a > \frac{16}{9} R$ (рис. 1.58, з) не нуждается в комментариях.

Для исследования устойчивости указанных стационарных движений вычислим

$$R_0'' = -R \frac{p^2}{m} \frac{a \sin \varphi + R + 2R \cos^2 \varphi}{(a + R \sin \varphi)^4} - Rmg \cos \varphi.$$

При $p = 0$ можно вычислить R_0'' лишь в точках $\varphi = 0, \pi$:

$$R_0''(0) < 0, \quad R_0''(\pi) > 0.$$

Если $p \gg p_*$, то

$$R_0''(\pi/2) < 0, \quad R_0''(3\pi/2) \begin{cases} > 0 & \text{при } a > R, \\ < 0 & \text{при } a < R. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что при $a < R$ стационарные движения устойчивы, когда колечко занимает положения 1, 2, 3.

Если $a \geq R$, то устойчивы движения 1, 3. Остальные неустойчивы. Результат исследования устойчивости отражен на рис. 1.58, 1.59.

Задача 1.3.13. Решить предыдущую задачу с учетом массы окружности.

Решение. Введя обозначение: J — момент инерции окружности, запишем выражение для измененной силовой окружности

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{J + m(a + R \sin \varphi)^2} + mgR \cos \varphi.$$

Для определения стационарных движений имеем уравнение

$$R'_0 = p^2 m \frac{(a + R \sin \varphi) R \cos \varphi}{[J + m(a + R \sin \varphi)^2]^2} - mgR \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

которое похоже на аналогичное уравнение из предыдущей задачи.

Разберем сначала случай $a = 0$. Уравнение (1) при этом имеет два тривиальных решения

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi,$$

существующих при любых значениях параметра p .

Кроме того, при $p^2 > gJ/R = p_*^2$ существует еще два решения φ_3, φ_4 ($\varphi_3 = -\varphi_4$), для которых

$$Rp^2 \cos \varphi_{3,4} = g(J + mR^2 \sin^2 \varphi_{3,4})^2.$$

Вычисление второй производной от R_0 дает

$$R''_0 = Rm \cos \varphi \left[\frac{p^2 R \cos \varphi}{(J + mR^2 \sin^2 \varphi)^2} - g \right] - \\ - m \sin^2 \varphi p^2 R^2 \frac{(J + mR^2 + 3mR^2 \cos^2 \varphi)}{(J + mR^2 \sin^2 \varphi)^3}.$$

Нетрудно установить, что

$$R''_0(\pi) > 0, \quad R''_0(\varphi_3) = R''_0(\varphi_4) < 0,$$

$$R''_0(0) \begin{cases} < 0 & \text{при } p^2 < p_*^2, \\ > 0 & \text{при } p^2 > p_*^2. \end{cases}$$

Обратимся теперь к случаю $a \neq 0$.

Предлагаем читателю обосновать возможность такого распределения ветвей решения уравнения (1), которое указано на рис. 1.60 и при котором возможны шесть различных положений колесика в стационарном движении с одним и тем же значением постоянной p .

Задача 1.3.14. Предположим, что в системе, описанной в задаче 1.2.8, отсутствует привод, обеспечивающий постоянство угловой скорости ω вращения оси OO' , и отсутствует трение в подшипниках оси ON . Найти стационарные движения тела и исследовать их устойчивость.

Решение. Циклической координате — повороту системы вокруг оси ON отвечает первый интеграл — интег-

рал момента количества движения (интеграл площадей)

$$p = \frac{\partial T}{\partial \omega} = \omega (B \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) = \text{const.}$$

Измененная силовая функция R_0 имеет вид

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{B \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta} + mga \cos \vartheta.$$

Уравнение стационарных движений

$$R'_0 = \sin \vartheta \left[\frac{p^2 (B - C) \cos \vartheta}{(B \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta)^2} - mga \right] = 0 \quad (1)$$

имеет корни $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$ при любых значениях пара-

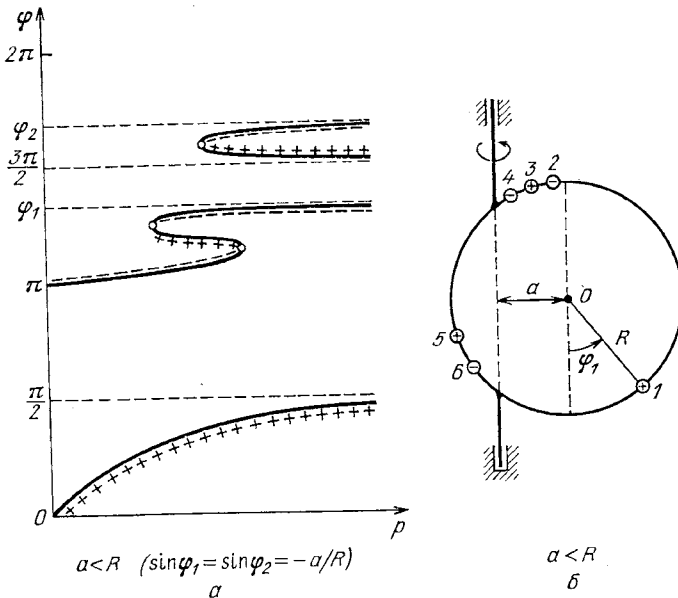


Рис. 1.60

метра p и корень ϑ_3 , обращающий в нуль выражение в квадратных скобках в (1).

Связь между ϑ_3 и p определяется соотношением

$$(B \sin^2 \vartheta_3 + C \cos^2 \vartheta_3)^2 = \kappa (B - C) \cos \vartheta, \quad \kappa = \frac{p^2}{mga}.$$

Зависимость $\kappa(\vartheta_3)$ качественно изображена на рис. 1.61. Здесь учтено, что при $B > C$ $\kappa''(0) > 0$, а при $B < C$ знак $\kappa''(\pi)$ совпадает со знаком разности $3C - 4B$.

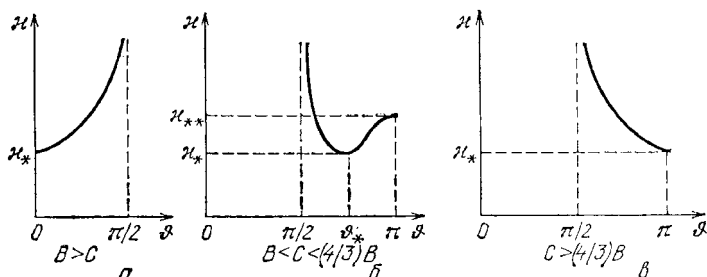


Рис. 1.61

Положение тела при стационарном движении в основном качественно подобно относительному равновесию. Отличие наблюдается лишь в случае $B < C < \frac{4}{3}B$ (рис. 1.61, б) на интервале (κ_*, κ_{**}) изменения параметра κ . Здесь на верхней полуокружности траектории точки G может разместиться пять возможных ее положений, отвечающих стационарным движениям (рис. 1.62) с одним и тем же значением постоянной интеграла площадей p .

Для выделения устойчивых движений вычислим вторую производную измененной силовой функции

$$R_0'' = \cos \vartheta \left[p^2 (B - C) \frac{\cos \vartheta}{(B \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta)^2} - mga \right] - \frac{p^2 \sin^2 \vartheta [3(C - B) \cos^2 \vartheta - B]}{(B \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta)^3}.$$

Определим знаки R_0'' на корнях уравнения (1):

$$R_0''(0) \begin{cases} < 0 & \text{при } B < C, \\ < 0 & \text{при } B > C, \text{ по } \kappa < \kappa_*, \\ > 0 & \text{при } B > C, \text{ по } \kappa > \kappa_*, \end{cases}$$

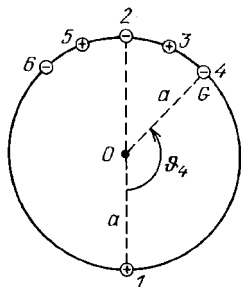


Рис. 1.62

$$R''_0(\pi) \begin{cases} > 0 & \text{при } B > C, \\ > 0 & \text{при } B < C, \text{ но } \kappa > \kappa_*, \\ < 0 & \text{при } B < C, \text{ но } \kappa < \kappa_*, \end{cases}$$

$$R''_0(\vartheta_3) \begin{cases} < 0 & \text{при } B > C, \\ < 0 & \text{при } B < C < \frac{4}{3} B, \quad \vartheta_3 > \vartheta_*, \\ > 0 & \text{при } B < C < \frac{4}{3} B, \quad \vartheta_3 < \vartheta_*, \\ > 0 & \text{при } \frac{4}{3} B < C. \end{cases} \quad \cos^2 \vartheta_* = \frac{B}{3(C-B)},$$

Отсюда заключаем, что устойчивые и неустойчивые стационарные движения распределены таким образом, как это указано на рис. 1.63.

Задача 1.3.15. Определить характер устойчивости стационарного движения центрифуги (см. задачи 1.2.9 — 10).

Решение. Разберем сначала случай, когда ось AB параллельна оси CD . Воспользуемся обозначениями за-

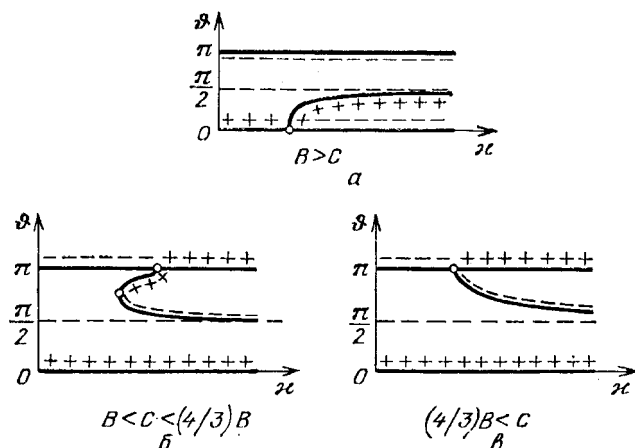


Рис. 1.63

дач 1.2.9 — 10, дополнив их еще одним: I — момент инерции державки.

Циклической координате — повороту вокруг оси CD отвечает первый интеграл — интеграл площадей

$$[I + J + ml^2 + 2mlr \cos \alpha] \omega = p = \text{const.}$$

Измененная силовая функция имеет вид

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{I_* + 2mlr \cos \alpha}, \quad I_* = I + J + ml^2.$$

Уравнение стационарных движений

$$R'_0 = - \frac{2p^2 mlr \sin \alpha}{(I_* + 2mlr \cos \alpha)^2}$$

имеет два корня $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$.

Нетрудно убедиться в том, что $R''_0(0) < 0$, $R''_0(\pi) > 0$, т. е. стационарное движение при $\alpha = 0$ устойчиво, а при $\alpha = \pi$ неустойчиво.

Обратимся теперь к случаю, когда оси AB и CD взаимно ортогональны (см. задачу 1.2.10).

Интеграл площадей теперь имеет вид

$$(I + B \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha + 2mrl \cos \alpha) \omega = p = \text{const.}$$

Для измененной силовой функции R_0 получим

$$R_0 = -0,5 \frac{p^2}{I + 2mrl \cos \alpha + A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha} + mgr \sin \alpha.$$

На стационарных движениях выполняется соотношение

$$R'_0 = \frac{(A - B) \sin \alpha \cos \alpha - mrl \sin \alpha}{(I + 2mrl \cos \alpha + A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha)^2} +$$

$$+ mgr \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Можно провести такой же геометрический анализ этого соотношения, как и в задаче 1.3.9. При этом могут быть полезны следующие соображения.

Пусть известно решение x_0 уравнения $f(x) = 0$, а нужно найти решение другого уравнения

$$f(x) + \varepsilon \varphi(x) = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Предположим, что $f(x)$ меняет знак при $x = x_0$.

Нетрудно установить, что решение уравнения (2) имеет вид

$$x = x_0 + \Delta x,$$

где знак величины Δx определяется таким образом, что

$$\varphi(x_0) \cdot f(x_0 + \Delta x) < 0.$$

Например, уравнение (1) при $I = l = 0$ с точностью до замены некоторых величин совпадает с уравнением задачи 1.3.14. Считая теперь I, l малыми величинами, определим смещение корня $\alpha = \pi/2$. Уравнение (1) в окрестности точки $\alpha = \pi/2$ может быть представлено в виде

$$-mrl + \cos \alpha [(A - b)p^2 + A^2 mgr] + o(\cos^2 \alpha) = 0.$$

Поскольку $\varepsilon f(\alpha) = -mrl < 0$, то должно быть

$$f(\pi/2 + \Delta\alpha) = -\sin \Delta\alpha [(A - B)p^2 + A^2 mgr] > 0.$$

Это означает, что при $A > B$ всегда $\Delta\alpha < 0$. Если же $A < B$, то на интервале $0 < p < p_*$ имеем $\Delta\alpha < 0$, а при $p > p_*$, наоборот, $\Delta\alpha > 0$.

Дальнейший анализ рекомендуется провести самостоятельно.

Задача 1.3.16. Найти необходимые условия устойчивости круговых орбит материальной точки P массой m в центральном поле сил, характеризуемом силовой функцией $U(r) = \mu \frac{m}{r^n}$, где r — расстояние точки P от центра притяжения, n — фиксированное число, $\mu > 0$ — постоянная.

Решение. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в притягивающем центре. Положение точки P будем характеризовать ее сферическими координатами r, θ, φ , где θ — угол, отсчитываемый от плоскости Oxy . Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + \frac{\mu}{n-1} \frac{m}{r^{n-1}}.$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода записываются в виде

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \frac{\mu}{r^n} &= 0, \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta &= 0, \\ (r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти уравнения допускают семейство частных решений

$$r = r_0, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \theta = 0, \quad (2)$$

где постоянные r_0, ω связаны соотношением

$$r_0^{n+1} \omega^2 = \mu. \quad (3)$$

Решениям (2) соответствуют равномерные движения точки P по окружностям, лежащим в плоскости Oxy .

Принимая движение (2) за невозмущенное, найдем необходимые условия его устойчивости по отношению к величинам $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$.

В возмущенном движении положим

$$r = r_0 + x_1, \quad \dot{r} = x_2, \quad \theta = x_3, \quad \dot{\theta} = x_4, \quad \dot{\varphi} = \omega + x_5.$$

Уравнения возмущенного движения записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = (r_0 + x_1) [x_4^2 + (\omega + x_5)^2 \cos^2 x_3] - \frac{\mu}{(r_0 + x_1)^n}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \quad \dot{x}_4 = -2 \frac{x_2 x_4}{r_0 + x_1} - \frac{1}{2} (\omega + x_5)^2 \sin^2 x_3, \\ \dot{x}_5 &= -2 \frac{x_2 (\omega + x_5)}{r_0 + x_1} + 2x_1 (\omega + x_5) \operatorname{tg} x_3. \end{aligned}$$

Разлагая правые части этих уравнений в ряды в окрестности невозмущенного движения и отбрасывая все нелинейные члены, получаем следующие уравнения возмущенного движения в первом приближении:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = (n+1)\omega^2 x_1 + 2r_0 \omega x_5, \quad \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 &= -\omega^2 x_3, \quad \dot{x}_5 = -2 \frac{\omega}{r_0} x_2. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \omega^2)[\lambda^2 + (3-n)\omega^2] = 0.$$

Чтобы это уравнение не имело корней с положительной вещественной частью, необходимо выполнение условия

$$n \leq 3. \quad (4)$$

При нарушении условия (4) уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ будет иметь один положительный корень, и невозмущенное движение (2) будет неустойчиво по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

Задача 1.3.17. На космический аппарат, движущийся в центральном ньютоновском поле сил, действует в радиальном направлении постоянная сила тяги $m f$. При каких условиях возможны движения аппарата по

окружности? Исследовать устойчивость этих движений. Размерами аппарата пренебречь.

Решение. Положение аппарата определим полярными координатами r , φ . Кинетическая энергия аппарата и силовая функция действующих на него сил имеют вид

$$T = 0,5m\dot{r}^2 + 0,5mr^2\dot{\varphi}^2, \quad U = m\gamma/r + mfr.$$

Координата φ — циклическая. Ей отвечает интеграл площадей

$$r^2\dot{\varphi} = \lambda = \text{const.}$$

Игнорируя циклическую координату, получаем выражение для измененной силовой функции

$$R_0 = m \left(\frac{\gamma}{r} + fr - \frac{\lambda^2}{2r^2} \right).$$

В стационарном движении аппарата имеем

$$R'_0 = -m \left(\frac{\gamma}{r^2} - f - \frac{\lambda^2}{r^3} \right) = 0$$

или

$$\gamma r - fr^3 - \lambda^2 = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим сначала случай $f > 0$, когда сила тяги направлена от притягивающего центра. Если постоянная интеграла площадей достаточно велика

$$\lambda > \lambda_0^2 = \frac{2}{3} \gamma \sqrt{\frac{\gamma}{3f}},$$

то уравнение (1) не имеет решения и круговые орбиты аппарата невозможны.

Если $\lambda < \lambda_0$, то уравнение (1) имеет два решения r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$). Поскольку функция R_0 при $\lambda \neq 0$ — возрастающая для достаточно малых или достаточно больших значений r , то решение r_1 отвечает максимуму функций R_0 , а r_2 — минимуму. Следовательно, стационарное движение при $r = r_1$ устойчиво.

Пусть теперь $f < 0$, т. е. сила тяги направлена к притягивающему центру. В этом случае уравнение (1) всегда имеет единственное решение, отвечающее максимуму функции R_0 и, следовательно, устойчивому стационарному движению. Аналогичный результат получаем и при $f = 0$.

§ 1.4. Равновесие систем с особенностями

Задача 1.4.1. Один конец тяжелого однородного стержня скользит без трения по вертикальной стене (рис. 1.64). Второй конец с помощью шарнира A прикреплен к колесу, которое может катиться без скольжения по горизонтальному полу. Построить бифуркационную

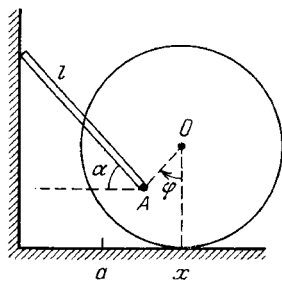


Рис. 1.64

диаграмму, приняв за параметр длину стержня, и провести анализ распределения устойчивых положений равновесия.

Решение. Определим положение системы величиной x — координатой точки O — центра колеса. Обозначим буквой a то значение x , при котором точка A расположена на одной вертикали с точкой O и ниже ее. Пусть φ — угол поворота колеса, отсчитываемый от этого положения, α — угол между стержнем и горизонталью. Величины α и φ связаны с координатой x очевидными соотношениями:

$$R\varphi = x - a, \quad x - r \sin \varphi = l \cos \varphi, \quad (1)$$

где R — радиус колеса, l — длина стержня, r — расстояние OA .

Поскольку рассматриваемая система консервативна, то положениям ее равновесия отвечают точки экстремума координаты y центра тяжести стержня, т. е.

$$\delta y = \delta (R - r \cos \varphi + 0,5l \sin \alpha) = 0. \quad (2)$$

С учетом соотношений (1) уравнение (2) приводится к виду

$$l \sin \alpha = \frac{(x - r \sin \varphi)(R - r \cos \varphi)}{r \sin \varphi}. \quad (3)$$

Исключая из (3) угол α , окончательно получаем

$$l^2 = \frac{(x - r \sin \varphi)^2 (R^2 + r^2 + 3r^2 \sin^2 \varphi - 2rR \cos \varphi)}{r^2 \sin^2 \varphi}, \quad (4)$$

$$\varphi = \frac{x - a}{R}.$$

Уравнение (4) дает нам зависимость $l^2(\varphi)$, которая качественно изображена на рис. 1.65, а для случая $0 < a < Rl$. Видно, что чем больше длина стержня, тем боль-

ше возможных положений равновесия имеет система. Минимальное число положений равновесия равно двум и оба они расположены на интервале $(a/R - \pi, a/R)$.

Общие положения теории бифуркации позволяют теперь, проводя анализ устойчивости положений равнове-

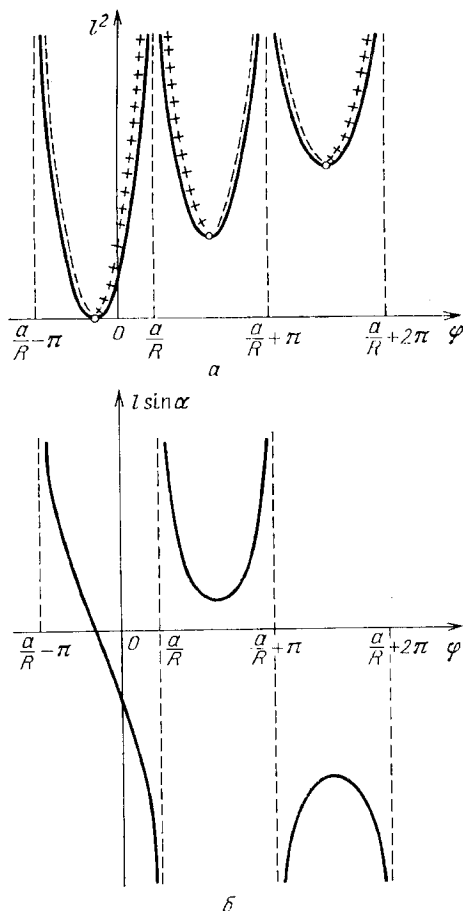


Рис. 1.65

сия, принадлежащих одной из ветвей семейства построенных кривых, определять характер устойчивости равновесий, принадлежащих другим ветвям, пользуясь простым правилом смены устойчивости без проведения громоздких вычислений. При применении этого правила необходимо

учесть то обстоятельство, что величина x не вполне однозначно определяет положение системы, так как одному и тому же положению колеса, как правило, отвечают два возможных положения стержня. Для одного из них $\sin \alpha > 0$, а для другого $\sin \alpha < 0$. Знак величины $\sin \alpha$ для каждого решения уравнения (4) определяется из соотношения (3). На рис. 1.65, б качественно изображена зависимость величины $l \sin \alpha$ от координаты φ . Из этой картины следует, что на множестве положений системы, отвечающих положительному значению $\sin \alpha$, совокупность положений равновесия описывается теми кривыми на рис. 1.65, а, которые заключены в интервалах $(a/R + 2k\pi, a/R + (2k+1)\pi)$. Совокупность положений равновесия, для которых $\sin \alpha < 0$, заключена в интервалах $(a/R + (2k-1)\pi, a/R + 2k\pi)$, где $k \neq 0$. И лишь на интервале $(a/R - \pi, a/R)$ на кривой равновесия происходит смена знака величины $\sin \alpha$, причем эта смена происходит как раз в точке бифуркации, где $l = 0$.

После того как установлена последовательность расположения равновесий при непрерывном изменении положения системы, уже нетрудно установить и чередование устойчивых и неустойчивых равновесий, приняв за опорную кривую ту, которая заключена в интервале $(a/R - \pi, a/R)$. Правая ветвь этой кривой содержит, очевидно, устойчивые положения равновесия, так как для них стержень опущен вниз и его центр тяжести занимает более низкое положение, чем для положений равновесия, отвечающих левой ветви кривой. Поскольку между двумя положениями равновесия системы нет других экстремумов потенциальной энергии, то одно из них отвечает максимуму, а другое минимуму потенциальной энергии.

Суммируя приведенные выше свойства, приходим к заключению о том, что устойчивые и неустойчивые ветви положений равновесия на бифуркационной диаграмме располагаются так, как это указано на рис. 1.65, а, где устойчивые равновесия помечены знаком «+», а неустойчивые — знаком «-».

Примечание. Если в качестве координаты системы выбрать угол α , то при определении чередования устойчивых и неустойчивых равновесий трудностей не будет. Однако это преимущество с лихвой перекрывается очевидным недостатком такого шага. Для построения зависимости $l(\alpha)$ (или $\alpha(l)$) необходимо в формуле (4) произвести подстановку $\varphi(\alpha)$. Поскольку из уравнений

связи (1) получить функцию $\Phi(\alpha)$ в аналитическом виде невозможно, то даже качественное построение зависимости $l(\alpha)$ потребует преодоления значительных технических затруднений.

Задача 1. Построение рис. 1.65 носило качественный характер. Оно гарантирует правильность расположения нулей и асимптот. Необходимо установить, может ли разместиться между двумя асимптотами более чем один экстремум (минимум).

2. Построить диаграмму и разобраться с устойчивостью в случаях $\pi < a/R < 2\pi$, $a/R = 0$, $a/R = \pi$.

Задача 1.4.2. Тяжелая однородная квадратная пластинка $ABCD$ может вращаться в вертикальной плоскости около вершины A (рис. 1.66). К точке B привязана нить, перекинутая через блок E и натягиваемая грузом Q . Бесконечно малый блок E расположен вертикально над точкой A на расстоянии, равном длине a стороны квадрата. Вес пластинки равен P . Найти положения равновесия пластинки и исследовать их устойчивость.

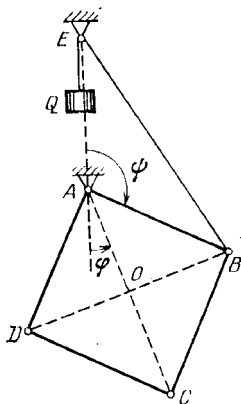


Рис. 1.66

Решение. Система имеет одну степень свободы, и положение ее вполне определяется углом φ между вертикалью AE , направленной вниз, и диагональю AC . Центр масс квадрата лежит в точке O на пересечении диагоналей AC и DB .

Если ось z направить вертикально вверх, а начало координат взять в точке A , то координата z_0 центра масс квадрата будет $z_0 = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \varphi$.

Координата z_Q груза Q выразится по условию задачи так:

$$z_Q = a - l + 2a \left| \sin \frac{\psi}{2} \right|,$$

если обозначить через l длину нити QEB , а через ψ угол EAB . Силовая функция для рассматриваемой системы определяется выражением

$$U = \frac{aP}{\sqrt{2}} \cos \varphi - Q \left(a - l + 2a \left| \sin \frac{\psi}{2} \right| \right).$$

Между углами φ и ψ имеет место соотношение $\varphi + \psi = 3/4\pi$. Поэтому силовая функция может быть представлена в виде

$$U = aP \left[0,5 (\sin \psi - \cos \psi) - 2\lambda \left| \sin \frac{\psi}{2} \right| \right], \quad \lambda = \frac{Q}{P} > 0.$$

Функция U имеет угловую точку при $\psi = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$. По смыслу задачи нас интересует лишь отрезок $0 \leq \psi \leq 2\pi$. На этом отрезке $\sin(\psi/2) \geq 0$.

Для определения положений равновесия имеем уравнение

$$U' = aP \left[0,5 (\cos \psi + \sin \psi) - \lambda \cos \frac{\psi}{2} \right] = 0. \quad (1)$$

Решения этого уравнения качественно изображены на рис. 1.67.

Видно, что при $\lambda < 0,5$ в интересующем нас отрезке имеется лишь два корня уравнения (1), отвечающие ветвям I, II возможных равновесий. При $0,5 < \lambda < \lambda_*$ к ним

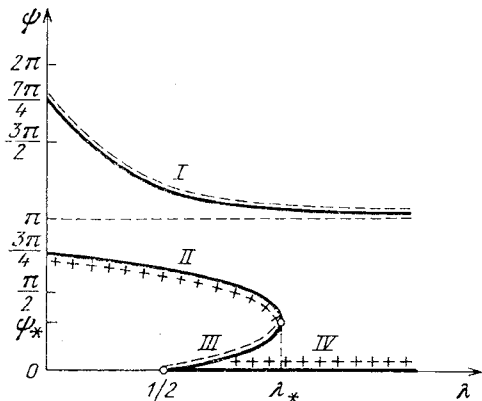


Рис. 1.67

добавляется третий корень, отвечающий ветви III . При $\lambda > \lambda_*$ остается лишь один корень (на ветви I). На рис. 1.68 выделены дуги возможных равновесий точки B на окружности, описываемой этой точкой.

Вычисление второй производной U'' при $\lambda = 0$ позволяет установить, что $U''(3\pi/4) < 0$, $U''(7\pi/4) > 0$. Отсюда вытекает, что равновесия, заполняющие ветвь I , неустойчивы, а равновесия, заполняющие ветвь II , устойчивы.

По правилу чередования экстремумов функции устанавливаем, что равновесия, отвечающие ветви *III*, неустойчивы.

Обратимся теперь к точке $\psi = 0$. В этой точке производная силовой функции U претерпевает разрыв. Поскольку

$$U'(-0) = aP(0,5 + \lambda) > 0 \quad \text{при любом } \lambda,$$

$$U'(+0) = aP(0,5 - \lambda) \begin{cases} > 0 & \text{при } \lambda < 0,5, \\ < 0 & \text{при } \lambda > 0,5, \end{cases}$$

то силовая функция U в угловой точке $\psi = 0$ не имеет экстремума при $\lambda < 0,5$ и имеет максимум при $\lambda > 0,5$.

Таким образом, к уже указанным ветвям положений равновесия нужно добавить луч $\lambda > 0,5$ оси λ , заполненный устойчивыми равновесиями.

Распределение устойчивых и неустойчивых равновесий указано на рис. 1.67. Нетрудно видеть, что точки

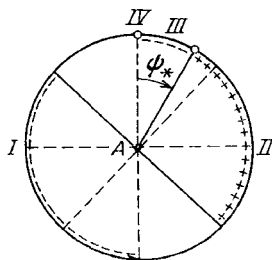


Рис. 1.68

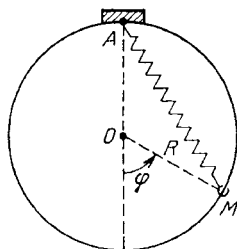


Рис. 1.69

($\lambda = 0,5$, $\psi = 0$) и ($\lambda = \lambda_*$, $\psi = \psi_*$), в которых происходит ветвление кривых равновесия, относятся к типу так называемых «опасных» точек смены устойчивости, так как потеря устойчивости одного положения равновесия сопровождается скачкообразным переходом к другому устойчивому равновесию.

Задача 1.4.3. Тяжелая материальная точка массой M может скользить без трения по вертикальной окружности радиусом R (рис. 1.69). К этой точке прикреплен один конец невесомой пружины (жесткость ее k , длина свободной пружины l), а второй — к точке A , которая находится на верхнем конце вертикального диаметра. Найти положения равновесия точки и исследовать их устойчивость.

Решение. Рассматриваемая система консервативна. Поэтому положения равновесия являются точками экстремума потенциальной энергии Π . Запишем ее:

$$\Pi = -MgR \cos \varphi + 0,5k \left(l - 2R \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2.$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\Pi' = MgR \sin \varphi + k \left(l - 2R \cos \frac{\varphi}{2} \right) R \sin \frac{\varphi}{2} = 0.$$

Введя безразмерные параметры

$$L = l/(2R), \quad \kappa = Mg/(kR),$$

перепишем уравнение равновесия

$$\left[(\kappa - 1) \cos \frac{\varphi}{2} + L \right] \sin \frac{\varphi}{2} = 0. \quad (1)$$

Анализ этого уравнения будем проводить поэтапно. Вначале разберем частный случай $L = 0$, который имеет место при нулевой длине свободной пружины. Уравнение (1) при $L = 0$ имеет следующие семейства решений:

$$\varphi_{1k} = 2k\pi, \quad \varphi_{2k} = (2k + 1)\pi,$$

φ_3 произвольно, если $\kappa = 1$.

Эти семейства изображены на рис. 1.70, а.

Для выделения устойчивых равновесий вычислим вторую производную от потенциальной энергии: $\Pi'' = (\kappa - 1) \cos \varphi$. Учитывая, что $\Pi''(2k\pi) > 0$ при $\kappa > 1$, а $\Pi''(2k\pi + 1) > 0$ лишь при $\kappa < 1$, отметим на рис. 1.70 знаком «+» устойчивые равновесия.

Пусть теперь $L \neq 0$. Первое семейство решений ($\varphi = 2k\pi$) сохранилось, а вместо второго и третьего теперь имеем

$$\varphi_{2,3} = \pm 2 \operatorname{Arccos} \frac{L}{2(1 - \kappa)}.$$

На рис. 1.70, б, в изображены семейства решений уравнения (1) при $L \neq 0$. Нетрудно определить, что распределение устойчивых равновесий соответствует распределению знаков «+» на рис. 1.70.

Отметим одну любопытную особенность рассматриваемой задачи. Функция Π , как нетрудно видеть, имеет период 4π , а не 2π , что казалось бы более естественным.

Происходит это потому, что при $L \neq 0$ угол между радиусом точки M и вертикалью не вполне определяет состояние системы, точнее, состояние пружины. Последняя может оказаться «вывернутой», т. е. иметь «отрицательную длину» (рис. 1.71). В этом случае сила пружины

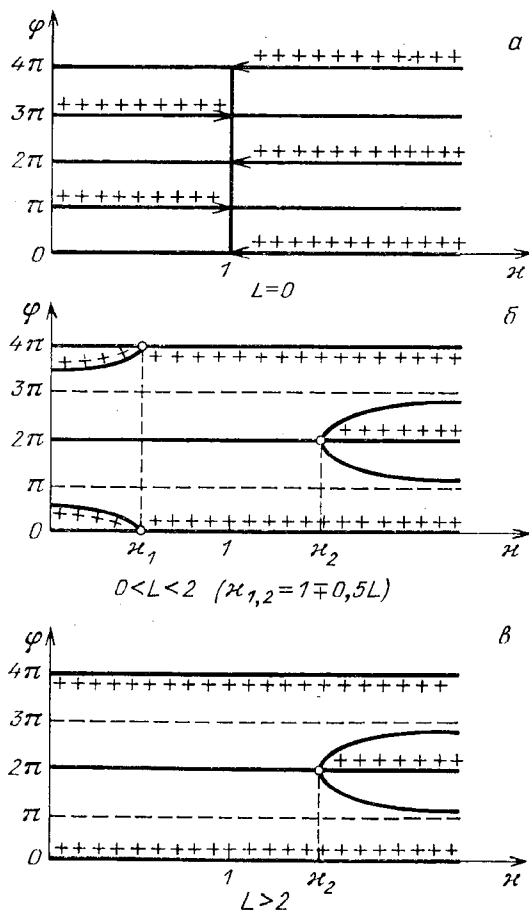


Рис. 1.70

отлична от нуля, даже если ее длина (по модулю) равна l . Это обстоятельство неявно было учтено при определении начала отсчета угла φ , когда составлялась функция $\Pi(\varphi)$.

Понятно, что обнаруженная особенность связана с тем, что длина пружины обращается в нуль, когда материальная точка M занимает положение A . Может ли размер пружины, так сказать, изменить знак или не может, зависит от физического способа ее реализации, который не был оговорен при формулировке задачи. Выше как раз

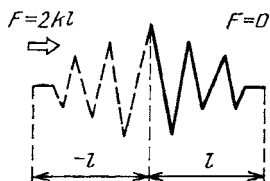


Рис. 1.71

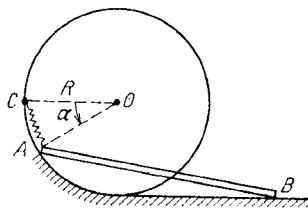


Рис. 1.72

и был разобран вариант, при котором размер пружины «меняет знак».

Предлагаем читателю самостоятельно разобрать второй вариант, который может рассматриваться как предельный для случая, когда точка A не лежит на окружности, но приближается к ней сколь угодно близко.

Задача 1.4.4. Однородный тяжелый стержень AB (рис. 1.72) своим концом A скользит по гладкой неподвижной окружности, плоскость которой вертикальна, а концом B — по горизонтальной прямой, касающейся этой окружности. В точке A к стержню прикреплена линейно-упругая пружина жесткостью k . Второй конец пружины закреплен в точке C окружности, находящейся на горизонтальном диаметре. Свободная длина пружины соответствует хорде центрального угла α_0 . Указать положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость.

Решение. Рассматриваемая система консервативна. Поэтому ее положения равновесия являются точками экстремума потенциальной энергии

$$\Pi = 2kR^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha_0}{2} \right)^2 + 0,5RP (1 - \sin \alpha),$$

т. е. удовлетворяют уравнению

$$2R \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha_0}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} - 0,5RP \cos \alpha = 0.$$

Если разрешить это уравнение относительно P , то можно построить семейство его решений $\alpha(P)$, которое качественно изображено на рис. 1.73.

Проанализировав знак второй производной Π'' от потенциальной энергии, убеждаемся, что устойчивые равновесия отвечают тем ветвям решений, которые отмечены на рис. 1.73 знаком «+».

В рассматриваемой задаче возможны две особенности. Первая из них, как и в задаче 1.4.3, связана с «нулевой» длиной пружины. Рассмотрим обычный способ реализации упругого элемента в виде витой пружины. Очевидно, что такая пружина не может менять «знак своей длины» (см. рис. 1.72), так как стержень не может пересечь витки пружины. Следовательно, если точка A может свободно проходить через точку C , то пружина неизбежно должна менять свою ориентацию на противоположную. Ее сила при этом претерпевает разрыв. Картина распределения равновесий в этом случае повторяется через 2π и отвечает одному из отрезков $[0, 2\pi]$ или $[2\pi, 4\pi]$ в зависимости от того, как смонтировано соединение пружины и стержня.

Нарушение непрерывности силы приводит к усложнению исследования экстремумов потенциальной энергии.

Вторая особенность рассматриваемой задачи связана с ограничением длины l стержня AB . Предыдущий анализ проведен в неявном предположении, что $l > 2R$. Если же $l < 2R$, то угол φ изменяется в ограниченном диапазоне. Возникает необходимость анализа экстремумов потенциальной энергии Π на отрезке.

Задача 1.4.5. Концы тяжелого стержня AB весом P скользят по вертикальной и горизонтальной направляющим (рис. 1.74). Точка A стержня соединена с неподвижной точкой C на вертикальной направляющей линейно-упругой пружиной. Исследовать возможные равновесия стержня.

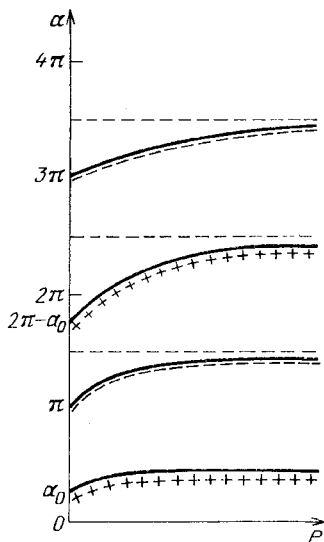


Рис. 1.73

Решение. Введем систему координат xOy . Обозначим: k , L — жесткость и свободная длина пружины, l — длина стержня, a — координата точки C , α — угол, который образует стержень с горизонтальной направляющей.

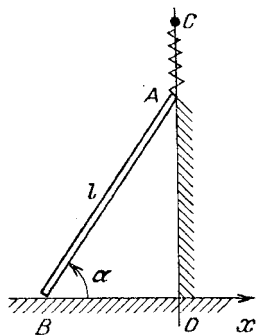


Рис. 1.74

Пусть $l > a$. Разберем случай, когда пружина меняет свою ориентацию при прохождении концом A стержня точки C . Эту ситуацию можно рассматривать как предельную для тех, при которых точка C расположена в стороне от вертикальной направляющей и приближается к ней.

Потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = 0,5Pl \sin \alpha + 0,5k(|l \sin \alpha - a| - L)^2.$$

Уравнение равновесия приобретает вид системы

- а) $l \sin \alpha > a$, $\cos \alpha [0,5P + k(l \sin \alpha - a - L)] = 0$,
 б) $l \sin \alpha < 0$, $\cos \alpha [0,5P - k(a - l \sin \alpha - L)] = 0$.

Наряду с очевидными положениями равновесия $\alpha = \pm \pi/2$ возможны еще два

- а) $\sin \alpha = \frac{a + L}{l} - \frac{P}{2k}$, $a < l \sin \alpha$,
 б) $\sin \alpha = \frac{a - L}{l} - \frac{P}{2k}$, $a > l \sin \alpha$.

Зависимость $\alpha(P/(2k))$ качественно изображена на рис. 1.75. Нетрудно видеть, что $\Pi'' > 0$ на решениях а), б). Распределение устойчивых «+» и неустойчивых «-» равновесий указано на рис. 1.75.

Как согласуется построенная здесь картина с закономерностями теории бифуркаций равновесия?

Разобрать случай $l \leq a$.

Задача 1.4.6. Невесомая трубка закреплена в точке O с помощью цилиндрического шарнира. Вдоль этой трубки может перемещаться поршень массой m (рис. 1.76), который укреплен на свободном конце пружины L . Второй конец пружины прикреплен к трубке в некоторой ее точке так, что при недеформированной пружине положение поршня определяется значением x_0 координаты на оси Ox .

Найти положения равновесия поршня (считая его материальной точкой) и исследовать их устойчивость.

Решение. Определим положение поршня обобщенными координатами x и α , где α — угол отклонения трубки от вертикали (рис. 1.76).

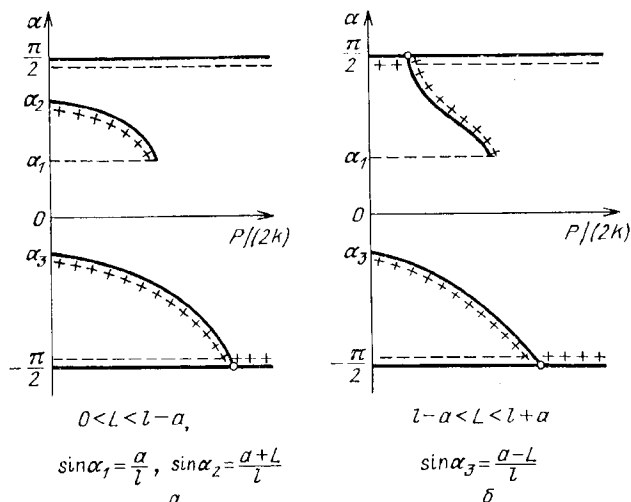


Рис. 1.75

Силовая функция сил, действующих на поршень, имеет вид

$$U = -mgx \cos \alpha - \frac{1}{2} k (x - x_0)^2.$$

Здесь k — жесткость пружины.

Для определения положений равновесия имеем систему уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = mgx \sin \alpha = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -k(x - x_0) - mg \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Эта система имеет решения

$$\alpha_1 = 0, \quad x_1 = x_0 - mg/k; \quad \alpha_2 = \pi, \quad x_2 = x_0 + mg/k,$$

существующие при любых значениях параметров, и решение, для которого

$$x_3 = 0, \quad \cos \alpha_3 = kx_0/(mg)$$

и которое существует при $k|x_0| < mg$.

Последнее решение допускает любопытную механическую интерпретацию. Рассматриваемая система представляет собой по сути дела свободную материальную точку, а трубка, пружина и неподвижная точка O как бы лишь формируют способ задания сил, действующих на свободную точку. В то же время неподвижная точка O является односторонней связью и решение x_3, α_3 отвечает такому равновесию, когда материальная точка находится на освобождающей связи.

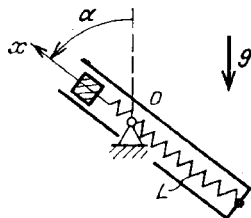


Рис. 1.76

Изобразим множество положений равновесия в зависимости от параметра $\kappa = mg/(kx_0)$ (рис. 1.77).

Прямая 1, расположенная в плоскости $x\kappa$ ($\alpha = 0$), изображает семейство решений x_1, α_1 ; прямая 2, расположенная в плоскости $\alpha = \pi$, — семейство решений x_2, α_2 , а кривая 3, расположенная в плоскости $x = 0$, — семейство решений x_3, α_3 .

Видно, что прямая 1 и кривая 3 соединяются при $\kappa = 1$, т. е. в точке с координатами $(0, 0, 1)$ происходит ветвление решения системы уравнений (1).

Для исследования вопроса об устойчивости найденных равновесий вычислим вторые производные от силовой функции U

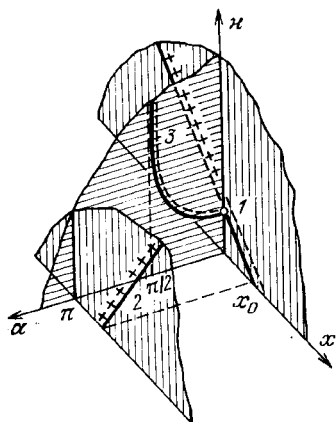


Рис. 1.77

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -k,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \alpha} = mg \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = mgx \cos \alpha.$$

Если в положении равновесия

$$-kmgx \cos \alpha -$$

$$-(mg \sin \alpha)^2 > 0 \quad (< 0),$$

то оно устойчиво (неустойчиво).

Нетрудно видеть, что устойчивые (неустойчивые) равновесия отвечают тем ветвям, которые отмечены на рис. 1.77 значком «+» («-»).

Раздел 2

КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В этом разделе рассматриваются задачи динамики тяжелого твердого тела, для которых характерны естественность и простота постановок, применение общих теорем динамики, использование первых интегралов уравнений движения, словом, которым присущ весь комплекс признаков, отличающих по-настоящему классические задачи.

Богата и их история. Многие из них сформулированы классиками механики и служили нескольким последующим поколениям исследователей полем для апробации различных новых математических методов.

Здесь строгая красота симметричных форм уравнений и условий устойчивости сочетается с возможностями геометрического представления в виде бифуркационных диаграмм и последующей интерпретацией результатов с точки зрения механики.

§ 2.1. Тело с одной закрепленной точкой

Рассмотрим движение твердого тела с одной закрепленной точкой O в однородном поле сил тяжести.

Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями эллипсоида инерции тела для точки O . Пусть J_s — моменты инерции тела относительно осей x_s ($s = 1, 2, 3$); ω_s и γ_s — проекции на оси x_s вектора мгновенной угловой скорости тела ω и единичного вектора γ , направленного по вертикали вверх, a_s — постоянные, равные произведениям веса тела на координаты его центра масс.

Уравнения движения тела получим из теоремы об изменении кинетического момента. В системе координат $Ox_1x_2x_3$ они записываются в виде

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = a_3 \gamma_2 - a_2 \gamma_3 \quad (123), \quad (1)$$

где символ (123) означает, что два других уравнения получаются из указанного уравнения в результате циклической перестановки индексов 1, 2, 3.

Уравнения (1) следует дополнить уравнениями Пуассона для направляющих косинусов вектора γ

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3 \quad (123), \quad (2)$$

выражающими то обстоятельство, что вектор γ неподвижен в пространстве.

Уравнения (1), (2) образуют замкнутую систему уравнений относительно переменных ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$). Они допускают три общих интеграла:

$$\begin{aligned} U &= J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 + 2(a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3) = \text{const}, \\ U_1 &= J_1\omega_1\gamma_1 + J_2\omega_2\gamma_2 + J_3\omega_3\gamma_3 = \text{const}, \\ U_2 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

представляющие собой соответственно интегралы энергии, площадей и геометрический.

В трех случаях, указанных Эйлером, Лагранжем и Ковалевской, уравнения (1), (2), помимо интегралов (3), допускают четвертый общий интеграл.

Случай Эйлера характеризуется условиями

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad (4)$$

означающими, что тело закреплено в центре масс, а дополнительный четвертый интеграл имеет вид

$$J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2 = \text{const}. \quad (5)$$

Для случая Лагранжа параметры тела удовлетворяют условиям

$$J_1 = J_2, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad (6)$$

означающим, что тело является динамически симметричным и его центр масс лежит на оси симметрии (рис. 2.1). Дополнительный четвертый интеграл имеет вид

$$\omega_3 = \text{const}. \quad (7)$$

В случае Ковалевской, характеризуемом условиями

$$J_1 = J_2 = 2J_3, \quad a_2 = a_3 = 0, \quad (8)$$

четвертый дополнительный интеграл записывается в виде

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2 - c\gamma_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 - c\gamma_2)^2 = \text{const} \quad (c = a_1/J_3).$$

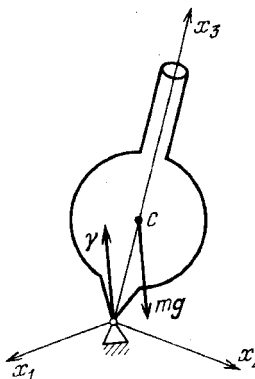


Рис. 2.1

Задача 2.1.1. Найти стационарные движения тела с одной закрепленной точкой в случае Эйлера и исследовать их устойчивость. Использовать теорему Рауса.

Решение. Уравнения движения тяжелого тела с одной закрепленной точкой в случае Эйлера допускают первые интегралы

$$U = J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 = \text{const} \quad (J_1 < J_2 < J_3),$$

$$U_1 = J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = h = \text{const}.$$

Для определения стационарных значений интеграла U при условии $U_1 = h$ введем функцию $W = U - \lambda(U_1 - h)$, где λ — множитель Лагранжа. Условие стационарности функции W приводит к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = h - U_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \omega_1} = 2J_1(J_1 - \lambda)\omega_1 = 0 \quad (123).$$

Эти уравнения имеют решения:

- 1) $\omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega_3 = 0, \lambda = J_1, h = J_1 \omega^2,$
- 2) $\omega_2 = \omega, \omega_3 = \omega_1 = 0, \lambda = J_2, h = J_2 \omega^2,$
- 3) $\omega_3 = \omega, \omega_1 = \omega_2 = 0, \lambda = J_3, h = J_3 \omega^2,$

которым соответствуют равномерные вращения тела вокруг главных центральных осей инерции.

Множество всех равномерных вращений тела можно представить геометрически на плоскости (ω, h) в виде кривых $h = J_s \omega^2$ ($s = 1, 2, 3$). Каждому значению постоянной $h \neq 0$ интеграла энергии отвечают шесть равномерных вращений тела; значению $h = 0$ отвечает положение равновесия.

Исследуем устойчивость равномерных вращений тела. Обозначим через ξ_s вариации переменных ω_s ($s = 1, 2, 3$). Условия устойчивости получим как условия знакоопределенности второй вариации $\delta^2 W$ функции W на многообразии $\delta U_1 = 0$. Обозначим символом $(\delta^2 W)$ выражение $\delta^2 W$ при условии $\delta U_1 = 0$. Тогда для вращений 1) — 3) тела относительно осей x_1, x_2, x_3 будем иметь соответственно выражения

$$(\delta^2 W)_1 = J_2(J_2 - J_1)\xi_2^2 + J_3(J_3 - J_1)\xi_3^2,$$

$$(\delta^2 W)_2 = J_3(J_3 - J_2)\xi_3^2 + J_1(J_1 - J_2)\xi_1^2,$$

$$(\delta^2 W)_3 = J_1(J_1 - J_3)\xi_1^2 + J_2(J_2 - J_3)\xi_2^2.$$

Отсюда заключаем, что $(\delta^2 W)_{1,3}$ являются знакоопределенными формами, а $(\delta^2 W)_2$ — знакопеременной. Следо-

вательно, равномерные вращения тела вокруг большой и малой осей центрального эллипсоида инерции устойчивы по отношению к ω_1 , ω_2 , ω_3 , а вращения вокруг средней оси — неустойчивы. Последнее заключение следует из обращения теоремы Рауса для систем с известными первыми интегралами.

Задача 2.1.2. Исследовать устойчивость равномерных вращений тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой в случае Эйлера по отношению к переменным ω_1 , ω_2 , ω_3 , применив метод Четаева.

Решение. В случае Эйлера динамические уравнения движения твердого тела допускают решение

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = \text{const},$$

описывающее равномерное вращение тела вокруг оси x_3 .

В возмущенном движении положим $\omega_1 = \xi_1$, $\omega_2 = \xi_2$, $\omega_3 = \omega + \xi_3$. Уравнения возмущенного движения

$$J_1 \frac{d\xi_1}{dt} = (J_2 - J_3) \xi_2 (\omega + \xi_3),$$

$$J_2 \frac{d\xi_2}{dt} = (J_3 - J_1) (\omega + \xi_3) \xi_1,$$

$$J_3 \frac{d\xi_3}{dt} = (J_1 - J_2) \xi_1 \xi_2$$

допускают первые интегралы

$$V_1 = J_1 \xi_1^2 + J_2 \xi_2^2 + J_3 (\xi_3^2 + 2\omega \xi_3) = \text{const},$$

$$V_2 = J_1^2 \xi_1^2 + J_2^2 \xi_2^2 + J_3^2 (\xi_3^2 + 2\omega \xi_3) = \text{const}.$$

Функцию Ляпунова будем искать в виде связки интегралов

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \mu V_2^2.$$

Для того чтобы функция V не содержала линейных членов, постоянную λ выберем из условия, чтобы $2\omega J_3(1 + \lambda J_3) = 0$. Отсюда находим $\lambda = -J_3^{-1}$, и функция V принимает вид

$$V = \frac{J_1(J_3 - J_1)}{J_3} \xi_1^2 + \frac{J_2(J_3 - J_2)}{J_3} \xi_2^2 + \mu V_2^2.$$

Отсюда следует, что функция V будет определено-положительной по отношению к переменным ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , если $J_3 > J_1$, $J_3 > J_2$, $\mu > 0$, и определено-отрицательной по

отношению к тем же переменным, если $J_3 < J_1$, $J_3 < J_2$, $\mu < 0$. Следовательно, равномерные вращения твердого тела вокруг малой и большой оси его центрального эллипсоида инерции устойчивы по отношению к переменным ω_1 , ω_2 , ω_3 .

Для решения вопроса о характере устойчивости равномерного вращения тела вокруг средней оси эллипсоида инерции рассмотрим функцию $W = \xi_1 \xi_2$ и вычислим производную от нее по времени в силу уравнений возмущенного движения

$$\dot{W} = (\omega + \xi_3) \left(\frac{J_2 - J_3}{J_1} \xi_2^2 + \frac{J_3 - J_1}{J_2} \xi_1^2 \right).$$

Если выражение $\omega + \xi_3$ в некоторый момент времени может обращаться в нуль, то неустойчивость очевидна, потому что при сколь угодно малом начальном значении $|\xi_{30}|$ величина ξ_3 в процессе движения тела в некоторый момент времени достигнет конечной величины $\xi_3 = -\omega$. Если $\omega + \xi_3 > 0$, то W будет определенно-положительной функцией, если $J_2 > J_3 > J_1$, и определенно-отрицательной функцией, если $J_2 < J_3 < J_1$. На основании теоремы Ляпунова о неустойчивости заключаем, что вращения тела вокруг средней оси эллипсоида инерции неустойчивы.

Задача 2.1.3. Найти необходимые условия устойчивости равномерных вращений тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой в случае Эйлера путем анализа корней характеристического уравнения.

Решение. В случае Эйлера динамические уравнения движения тела записываются в виде

$$J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \quad (123)$$

и допускают частные решения

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = \text{const},$$

описывающие равномерные вращения тела вокруг оси x_3 .

В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Уравнения возмущенного движения в линейном приближении имеют вид

$$J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega \omega_2, \quad J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega \omega_1, \quad \dot{\xi} = 0.$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda [J_1 J_2 \lambda^2 + (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)] = 0.$$

Для того чтобы это уравнение не имело корней с положительной вещественной частью, необходимо выполнение условия $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0$. Это условие выполняется в случаях, когда в невозмущенном движении тело вращается вокруг большой ($J_3 < J_1, J_3 < J_2$) и малой ($J_3 > J_1, J_3 > J_2$) осей центрального эллипсоида инерции тела, и не выполняется, если вращение тела происходит вокруг средней оси ($J_3 > J_1, J_3 < J_2$ или $J_3 < J_1, J_3 > J_2$). На основании теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению заключаем, что равномерные вращения тела вокруг средней оси его центрального эллипсоида инерции неустойчивы.

Задача 2.1.4. Исследовать устойчивость равномерных вращений тела с одной закрепленной точкой в случае Лагранжа (рис. 2.1), для которых центр тяжести и неподвижная точка лежат на одной вертикали. Использовать теорему Рауса.

Решение. Уравнения движения тяжелого тела с одной закрепленной точкой в случае Лагранжа допускают первые интегралы:

$$U = J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3\omega_3^2 + 2a_3\gamma_3 = \text{const},$$

$$U_1 = J_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + J_3\omega_3\gamma_3 = k = \text{const},$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad U_3 = \omega_3 = \omega = \text{const}.$$

Введем функцию

$$W = U - 2\lambda(U_1 - k) + \mu(U_2 - 1) + 2\nu(U_3 - \omega),$$

где λ, μ, ν — множители Лагранжа.

Уравнения стационарных движений

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = 2(k - U_1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \mu} = U_2 - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 2(U_3 - \omega) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_j} = 2J_j(\omega_j - \lambda\gamma_j) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_j} = 2(\mu\gamma_j - \lambda J_j\omega_j) = 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_3} = 2[\nu + J_3(\omega_3 - \lambda\gamma_3)] = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_3} = 2(\mu\gamma_3 - \lambda J_3\omega_3 + a_3) = 0$$

допускают решение

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \\ v = J_3(\lambda - \omega), \quad \mu = J_3\omega\lambda - a_3, \quad k = J_3\omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где λ произвольно. Это решение описывает равномерное вращение тела вокруг вертикали, проходящей через центр тяжести и неподвижную точку.

Исследуем устойчивость этого движения. В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi$, $\gamma_3 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Достаточные условия устойчивости получим из теоремы Рауса как условия положительной определенности второй вариации $\delta^2 W$ функции W

$$\begin{aligned} \delta^2 W = J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 2J_1\lambda(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + \\ + [J_3\omega\lambda - a_3](\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + J_3\xi^2 - 2J_3\lambda\xi\eta + (J_3\omega\lambda - a_3)\eta^2 \end{aligned}$$

на многообразии

$$\delta U_1 = J_3(\xi + \omega\eta) = 0, \quad \delta U_2 = 2\eta = 0, \quad \delta U_3 = \xi = 0.$$

Эти условия приводятся к неравенству

$$\Delta(\lambda) = -J_1\lambda^2 + J_3\omega\lambda - a_3 > 0. \quad (2)$$

Для того чтобы неравенство $\Delta(\lambda) > 0$ выполнялось для вещественных значений параметра λ , необходимо выполнение условия

$$J_3^2\omega^2 - 4J_1a_3 > 0. \quad (3)$$

При выполнении последнего условия будем иметь $\Delta(\lambda) > 0$ для $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, где λ_1, λ_2 — корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, и $\delta^2 W$ будет определенно-положительной функцией на многообразии $\xi = \eta = 0$. Отсюда заключаем, что условие (3) является достаточным условием устойчивости невозмущенного вращения (1) по отношению к величинам ω_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$). Условие (3) известно как условие Маиевского — Четаева.

Выясним вопрос о том, допускается ли в (3) замена знака неравенства на знак равенства; другими словами, будет ли движение (1) устойчиво при выполнении равенства

$$J_3^2\omega^2 - 4J_1a_3 = 0. \quad (4)$$

В этом случае неравенство (2) не может выполняться ни при одном вещественном значении λ , а $\delta^2 W$ при

$\xi = \eta = 0$ не будет определено-положительной квадратичной формой. Если в (2) знак неравенства изменить на противоположный, то $\delta^2 W$ будет знакопеременной функцией и из теоремы Рауса нельзя будет сделать заключения о характере устойчивости движения (1). Если же в (2) знак неравенства заменить знаком равенства и λ определить из уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, то $\delta^2 W$ при $\xi = \eta = 0$ будет знакопостоянной функцией переменных ω_j, γ_j ($j = 1, 2$) и для решения вопроса о знаке приращения ΔW функции W при переходе от невозмущенного к возмущенному движению необходимо принять во внимание члены более высокого порядка.

Из уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ с учетом (4) находим $\lambda = J_3 \omega / (2J_1)$, и для ΔW при $\xi = 0$ имеем выражение

$$\Delta W = J_1 \left[\left(\omega_1 - \frac{J_3 \omega}{J_1} \gamma_1 \right)^2 + \left(\omega_2 - \frac{J_3 \omega}{J_1} \gamma_2 \right)^2 \right] + \frac{J_3^2 \omega^2}{4J_1^2} \eta^2.$$

Из интеграла $U_2 = 1$ находим $\eta = -\frac{1}{2} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \dots$, где не выписаны члены более высокого порядка. Подставляя это значение η в ΔW , видим, что ΔW представляет собой положительно-определенную функцию переменных ω_j, γ_j ($j = 1, 2$), и, следовательно, невозмущенное вращение (1) будет устойчиво по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$).

Итак, условие устойчивости вращения (1) волчка Лагранжа имеет вид

$$J_3^2 \omega^2 - 4J_1 a_3 \geq 0. \quad (5)$$

Задача 2.1.5. Найти необходимые условия устойчивости равномерных вращений волчка Лагранжа с одной неподвижной точкой вокруг его оси симметрии, совпадающей с вертикалью, путем анализа корней характеристического уравнения.

Решение. Уравнения движения волчка Лагранжа допускают частное решение

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1,$$

которому соответствуют его равномерные вращения вокруг оси симметрии, совпадающей с вертикалью.

Найдем необходимые условия устойчивости этого движения. В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi$, $\gamma_3 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним преж-

ние обозначения. Уравнения возмущенного движения в линейном приближении имеют вид

$$J_1 \dot{\omega}_1 = (J_3 - J_1) \omega \omega_2 + a_3 \gamma_2,$$

$$J_1 \dot{\omega}_2 = (J_1 - J_3) \omega \omega_1 - a_3 \gamma_1,$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega \gamma_2 - \omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = -\omega \gamma_1 + \omega_1, \quad \dot{\xi} = 0, \quad \dot{\eta} = 0.$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$D(\lambda) = \lambda^2 \begin{vmatrix} J_1 \lambda & (J_3 - J_1) \omega & 0 & -a_3 \\ (J_1 - J_3) \omega & J_1 \omega & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & -\omega \\ 1 & 0 & \omega & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \{ [J_1 \lambda^2 + (J_3 - J_1) \omega^2 - a_3]^2 + (2J_1 - J_3)^2 \omega^2 \lambda^2 \} = 0.$$

Это уравнение, кроме двух нулевых корней, имеет следующие корни:

$$\lambda_j = \frac{\pm i (2J_1 - J_3) \omega \pm \sqrt{4J_1 a_3 - J_3^2 \omega^2}}{2J_1} \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

где допускается любая комбинация знаков. Для того чтобы среди этих корней не было корней с положительной вещественной частью, необходимо выполнение условия Маиевского — Четаева $J_3^2 \omega^2 - 4J_1 a_3 \geq 0$, которое является необходимым условием устойчивости рассматриваемого невозмущенного вращения волчка Лагранжа. Принимая во внимание решение задачи 2.1.4, приходим к заключению, что условие Маиевского — Четаева является необходимым и достаточным условием устойчивости равномерных вращений волчка Лагранжа вокруг его оси симметрии, совпадающей с вертикалью.

Задача 2.1.6. Найти необходимые условия устойчивости равномерных вращений волчка Лагранжа с одной неподвижной точкой вокруг его оси симметрии, совпадающей с вертикалью, используя теорему Ляпунова о неустойчивости.

Решение. Уравнения движения волчка Лагранжа допускают частное решение

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1,$$

которому отвечают равномерные вращения волчка Лагранжа вокруг его вертикально направленной оси симметрии.

Исследуем устойчивость этого движения. В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi$, $\gamma_3 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Уравнения возмущенного движения представим в виде

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 &= (J_1 - J_3) (\omega + \xi) \omega_2 + a_3 \gamma_2, \\ J_1 \dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1) (\omega + \xi) \omega_1 - a_3 \gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= (\omega + \xi) \gamma_2 - (1 + \eta) \omega_2, \\ \dot{\gamma}_2 &= (1 + \eta) \omega_1 - (\omega + \xi) \gamma_1, \quad \dot{\xi} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\eta = \sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} - 1 = -\frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \dots$$

Рассмотрим функцию

$$V(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2) = J_1(\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1).$$

При вычислении производной \dot{V} ограничимся возмущенными движениями, для которых $\dot{\xi} = 0$; тогда

$$\dot{V} = J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) - J_3 \omega (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + a_3(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \dots,$$

где не выписаны члены выше второго порядка. При выполнении условия $4J_1 a_3 - J_3^2 \omega^2 > 0$ производная \dot{V} представляет собой определенно-положительную функцию, и функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости. Следовательно, последнее условие является достаточным условием неустойчивости рассматриваемого невозмущенного вращения волчка Лагранжа. Принимая во внимание решение задачи 2.1.4, заключаем, что для устойчивости равномерных вращений волчка Лагранжа вокруг его вертикально направленной оси симметрии необходимо и достаточно выполнения условия Маиевского — Четаева $J_3^2 \omega^2 - 4J_1 a_3 \geq 0$.

Задача 2.1.7. Найти регулярные прецессии волчка Лагранжа с одной закрепленной точкой и исследовать их устойчивость; использовать теорему Рауса.

Решение. Уравнения движения волчка Лагранжа допускают первые интегралы

$$\begin{aligned} U &= J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2a_3 \gamma_3 = \text{const}, \\ U_1 &= J_1(\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + J_3 \omega \gamma_3 = \text{const}, \\ U_2 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad U_3 = \omega_3 = \omega = \text{const}. \end{aligned}$$

Рассмотрим связку интегралов

$$W = U - 2\lambda U_1 + J_1 \lambda^2 U_2 = \\ = J_1 (\Omega_1^2 + \Omega_3^2) + \lambda^2 J_1 \gamma_3^2 + 2(a_3 - J_3 \omega \lambda) \gamma_3,$$

где $\Omega_1 = \omega_1 - \lambda \gamma_1$, $\Omega_2 = \omega_2 - \lambda \gamma_2$, а λ — параметр.

Условия стационарности функции W по отношению к переменным Ω_1 , Ω_2 , γ_3 приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \Omega_j} = 2J_j \Omega_j = 0 \quad (j = 1, 2), \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_3} = 2(J_1 \lambda^2 \gamma_3 - J_3 \omega \lambda + a_3) = 0,$$

из которых находим

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \gamma_3 = \frac{J_3 \omega \lambda - a_3}{J_1 \lambda^2}. \quad (1)$$

Этому решению отвечают регулярные прецессии волчка Лагранжа. Чтобы в этом убедиться, обозначим через λ и μ угловые скорости прецессии и собственного вращения. Тогда будем иметь $\omega_3 = \mu + \lambda \gamma_3 = \omega$, и последнее равенство в (1) можно представить в виде

$$(J_1 - J_3) \gamma_3 \lambda^2 - J_3 \mu \lambda + a_3 = 0.$$

Это соотношение представляет собой известное условие существования регулярных прецессий волчка Лагранжа.

Итак, решению (1) отвечают регулярные прецессии волчка Лагранжа с угловой скоростью собственного вращения $\mu = \omega - \lambda \gamma_3$.

Исследуем устойчивость этих движений. В возмущенном движении обозначим через η вариацию переменной γ_3 , а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Вторая вариация

$$\delta^2 W = J_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \lambda^2 \eta^2)$$

представляет собой определенно-положительную функцию переменных Ω_1 , Ω_2 , η . Отсюда заключаем, что регулярные прецессии волчка Лагранжа устойчивы по отношению к величинам Ω_1 , Ω_2 , γ_3 . Используя этот результат и принимая во внимание интегралы U_2 и U_3 и соотношения $\omega_i = \Omega_i + \lambda \gamma_i$ ($i = 1, 2$), можно сделать заключение об устойчивости регулярных прецессий по отношению к величинам $\omega_1^2 + \omega_2^2$, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$, ω_3 , γ_3 .

Интересно рассмотреть случай, когда $\gamma_3 = 1$. В этом случае регулярная прецессия волчка Лагранжа вырождается в равномерное вращение вокруг вертикали, проходящей через его центр масс и неподвижную точку, с угловой скоростью ω . Для этого движения достаточное условие устойчивости получим из требования вещественности параметра λ , удовлетворяющего уравнению $J_1 \lambda^2 - J_3 \omega \lambda + a_3 = 0$, и оно приводит к условию Маиевского — Четаева.

Задача 2.1.8. Для тяжелого тела с одной закрепленной точкой в случае Ковалевской покажите на основе теоремы Рауса с использованием интегралов энергии, площадей и геометрического, что среди действительных движений тела имеются равномерные вращения вокруг вертикали, проходящей через центр тяжести тела. Найдите достаточные условия устойчивости этих движений по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$).

Решение. В случае Ковалевской уравнения движения тяжелого тела с одной закрепленной точкой допускают интегралы

$$U = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2} \omega_3^2 + b \gamma_1 = \text{const} \quad (b = a_1/J_3),$$

$$U_1 = 2(\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + \omega_3 \gamma_3 = k = \text{const},$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$W = U + \lambda(U_1 - k) + \mu(U_2 - 1),$$

где λ и μ — неопределенные множители Лагранжа. Уравнения стационарных движений имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = U_1 - k = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \mu} = U_2 - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_1} = 2(\omega_1 + \lambda \gamma_1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \omega_2} = 2(\omega_2 + \lambda \gamma_2) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_3} = \omega_3 + \lambda \gamma_3 = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = b + 2(\lambda \omega_1 + \mu \gamma_1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_2} = 2(\lambda \omega_2 + \mu \gamma_2) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_3} = \lambda \omega_3 + 2\mu \gamma_3 = 0.$$

Эти уравнения допускают решение

$$\begin{aligned}\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \\ \lambda = -\omega, \quad 2\mu = 2\omega^2 - b,\end{aligned}\quad (1)$$

описывающее равномерные вращения тела вокруг вертикали, проходящей через центр тяжести тела.

Достаточные условия устойчивости движения (1) получим как условия положительной определенности второй вариации $\delta^2 W$ функции W на многообразии $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$.

В возмущенном движении положим $\omega_1 = \omega + \xi$, $\gamma_1 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\delta^2 W = 2(\xi^2 + \omega_2^2) - 4\omega(\xi\eta + \omega_2\gamma_2) + \\ + (2\omega^2 - b)(\eta^2 + \gamma_2^2) + \omega_3^2 - 2\omega\omega_3\gamma_3 + (2\omega^2 - b)\gamma_3^2, \\ \delta U_1 = 2(\xi^2 + \omega\eta) = 0, \quad \delta U_2 = 2\eta = 0.\end{aligned}$$

Условия положительной определенности квадратичной формы $\delta^2 W$ на многообразии $\xi = \eta = 0$ выражаются неравенствами $b < 0$, $\omega^2 - b > 0$, второе из которых выполняется автоматически, если выполняется первое.

Итак, условие $b < 0$ является достаточным условием устойчивости вращения (1) по отношению к величинам ω_s , γ_s ($s = 1, 2, 3$).

Задача 2.1.9. Найти достаточные условия устойчивости равномерных вращений тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой в случае Ковалевской, для которых центр тяжести тела лежит на оси вращения. Использовать метод Четаева.

Решение. Уравнения движения тяжелого тела с одной закрепленной точкой в случае Ковалевской допускают частное решение

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad (1)$$

описывающее равномерные вращения тела вокруг вертикали, проходящей через его центр тяжести, и первые интегралы

$$U = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 + b\gamma_1 = \text{const} \quad (b = a_1/J_3),$$

$$U_1 = 2(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + \omega_3\gamma_3 = \text{const},$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Исследуем устойчивость движения (1). В возмущенном движении положим $\omega_1 = \omega + \xi$, $\gamma_1 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Функцию Ляпунова V будем искать по методу Четаева в форме связки интегралов $V = 2U + \lambda U_1 + \mu U_2$, где λ , μ — постоянные, подлежащие определению.

Для того чтобы функция V не содержала линейных членов, постоянные λ , μ должны удовлетворять уравнениям

$$4\omega + 2\lambda = 0, \quad 2b + 2\omega\lambda + 2\mu = 0,$$

из которых находим $\lambda = -2\omega$, $\mu = 2\omega^2 - b$, и функция V с точностью до постоянной принимает вид

$$V = 2(\omega_2^2 + \xi^2) - 4\omega(\omega_2\gamma_2 + \xi\eta) + \\ + (2\omega^2 - b)(\gamma_2^2 + \eta^2) + \omega_3^2 - 2\omega\omega_3\gamma_3 + (2\omega^2 - b)\gamma_3^2.$$

Для положительной определенности функции V необходимо выполнение условий $-2b > 0$, $\omega^2 - b > 0$, второе из которых выполняется автоматически, если выполняется первое.

Итак, условие $b < 0$ является достаточным условием устойчивости движения (1) по отношению к величинам ω_s , γ_s ($s = 1, 2, 3$).

Задача 2.1.10. Для тяжелого тела с одной закрепленной точкой в случае Ковалевской найти необходимые условия устойчивости равномерных вращений вокруг вертикали, проходящей через его центр тяжести, путем анализа корней характеристического уравнения.

Решение. Уравнения движения тяжелого тела с одной закрепленной точкой в случае Ковалевской допускают частное решение

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad (1)$$

описывающее равномерные вращения тела вокруг вертикали, проходящей через его центр тяжести.

Исследуем устойчивость этого движения. В возмущенном движении положим $\omega_1 = \omega + \xi$, $\gamma_1 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Уравнения возмущенного движения в линейном приближении имеют вид

$$\dot{\xi} = 0, \quad \dot{\omega}_2 = -\frac{1}{2}\omega\omega_3 + b\gamma_3, \quad \dot{\omega}_3 = -b\gamma_2 \quad (b = a_1/J_3),$$

$$\dot{\eta} = 0, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega\gamma_3 - \omega_3, \quad \dot{\gamma}_3 = -\omega\gamma_2 + \omega_2.$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 \left[\lambda^4 + (\omega^2 - 2b)\lambda^2 + b^2 - \frac{1}{2}b\omega^2 \right] = 0.$$

Для того чтобы уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ не имело корней с положительной вещественной частью, необходимо выполнение условия $b < 0$.

Итак, для устойчивости движения (1) по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$) необходимо, чтобы в невозмущенном движении (1) центр тяжести тела находился ниже неподвижной точки.

Принимая во внимание решение задачи 2.1.8, приходим к следующему заключению. Условие $b < 0$ является необходимым и достаточным для устойчивости движения (1) по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$).

Задача 2.1.11. Найти перманентные вращения тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой и достаточные условия их устойчивости на основе теоремы Рауса. Найти также необходимые условия устойчивости путем анализа корней характеристического уравнения.

Решение. Уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой допускают первые интегралы

$$U = J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 + 2(a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3) = \text{const},$$

$$U_1 = J_1\omega_1\gamma_1 + J_2\omega_2\gamma_2 + J_3\omega_3\gamma_3 = k = \text{const},$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Найдем значения величин ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$), для которых интеграл энергии U принимает стационарные значения при данной величине k интеграла площадей U_1 и условии $U_2 = 1$. Для этого введем функцию

$$W = U - 2\omega(U_1 - k) + \lambda\omega^2(U_2 - 1),$$

где ω, λ — множители Лагранжа. Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \omega} = 2(k - U_1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \omega^2(U_2 - 1) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_1} = 2J_1(\omega_1 - \omega\gamma_1) = 0 \quad (123),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = 2(a_1 - \omega J_1\omega_1 + \lambda\omega^2\gamma_1) = 0 \quad (123).$$

Из последних шести уравнений находим

$$\omega_1 = \omega \gamma_1, \quad \omega^2 (\lambda - J_1) \gamma_1 = a_1 \quad (123). \quad (1)$$

Значениям (1) соответствуют перманентные вращения тела вокруг вертикали с угловой скоростью ω , при этом зависимость $\omega = \omega(k)$ угловой скорости от параметра k определяется соотношениями

$$\omega = \pm \left(\sum_{(123)} \frac{a_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} \right)^{1/4},$$

$$k = \pm \left(\sum_{(123)} \frac{a_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} \right)^{-3/4} \sum_{(123)} \frac{J_1 a_1^2}{(J_1 - \lambda)^2}, \quad (2)$$

где символ (123) означает, что два другие слагаемые получаются из указанного в результате циклической перестановки индексов 1, 2, 3.

Положительная определенность квадратичной формы $\delta^2 W$ на многообразии $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ обеспечивается положительностью главных диагональных миноров определителя (см. введение)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & J_1 \gamma_1 & J_1 \omega_1 & J_2 \gamma_2 & J_2 \omega_2 & J_3 \gamma_3 & J_3 \omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \\ J_1 \gamma_1 & 0 & J_1 & -J_1 \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_1 \omega_1 & \gamma_1 & -J_1 \omega & \lambda \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_2 \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & J_2 & -J_2 \omega & 0 & 0 \\ J_2 \omega_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & -J_2 \omega & \lambda \omega^2 & 0 & 0 \\ J_3 \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3 & -J_3 \omega \\ J_3 \omega_3 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_3 \omega & \lambda \omega^2 \end{vmatrix},$$

начиная с минора пятого порядка. После преобразования получаем всего два неравенства

$$\Delta = \omega^4 (4L + JS) > 0, \quad \Delta_1 = \omega^2 L > 0,$$

$$L = \sum_{(123)} (\lambda - J_1) (J_2 - J_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2, \quad (3)$$

$$S = \sum_{(123)} (\lambda - J_2) (\lambda - J_3) \gamma_1^2, \quad J = \sum_{(123)} J_1 \gamma_1^2.$$

При выполнении условий (3) соответствующее движение (1) устойчиво, а его степень неустойчивости $\chi = 0$.

Если $\Delta < 0$, то $\chi = 1$, и движения (1) неустойчивы.

В случае, когда $\Delta > 0$, $\Delta_1 < 0$, имеем $\chi = 2$, и для решения вопроса об устойчивости движений (1) следует

обратиться к анализу корней характеристического уравнения

$$\sigma^2(g_0\sigma^4 + g_1\sigma^2 + g_2) = 0, \quad g_0 = J_1J_2J_3, \quad (4)$$

$$g_1 = \omega^2 \sum_{(123)} J_1 [(J_2 + J_3 - J_1)^2 + J_2(\lambda - J_2) + J_3(\lambda - J)] \gamma_1^2, \quad g_2 = \Delta.$$

При выполнении хотя бы одного из неравенств

$$g_1 < 0, \quad g_1^2 - 4g_0g_2 < 0 \quad (5)$$

среди корней уравнения (4) найдется корень с положительной вещественной частью, и невозмущенное движение (1) будет неустойчиво. Если в (5) знаки неравенств изменить на обратные, то уравнение (4) будет иметь пару нулевых и четыре чисто мнимых корня, и невозмущенное движение будет устойчиво в первом приближении.

Геометрически множество вращений (1) можно представить на плоскости (λ, k) точками кривой $k = k(\lambda)$, определяемой вторым из уравнений (2).

Вычисляя производную

$$\frac{dk}{d\lambda} = \frac{\omega(4L + JS)}{2(J_1 - \lambda)(J_2 - \lambda)(J_3 - \lambda)}$$

и сравнивая это выражение с выражением (3) для Δ , получаем соотношение

$$\Delta = 2\omega^3 (J_1 - \lambda)(J_2 - \lambda)(J_3 - \lambda) \frac{dk}{d\lambda}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что если $\lambda \neq J_1, J_2, J_3$, то $\Delta = 0$ тогда и только тогда, когда $dk/d\lambda = 0$. В точках бифуркации, для которых $\Delta = 0$, касательная к кривой $k = k(\lambda)$ параллельна оси λ . На рис. 2.2 показан вид кривой $k = k(\lambda)$ для случая, когда уравнение $dk/d\lambda = 0$ имеет только два вещественных корня $\lambda = \lambda_*$, $\lambda = \lambda_{**}$.

Анализ условий устойчивости (3) с учетом (6) и условий (5) приводит к следующим заключениям. Движения (1) устойчивы ($\chi = 0$), если $\lambda > J_3$ или $\lambda_{**} < \lambda < J_3$, и неустойчивы ($\chi = 1$), если $\lambda_* < \lambda < \lambda_{**}$ ($\lambda \neq J_2$). Существует такое значение $\lambda = \lambda'$, что для $\lambda' < \lambda < \lambda_*$ ($\lambda \neq J_1$) движения (1) устойчивы в первом приближении, а для $\lambda < \lambda'$ неустойчивы, при этом $\chi = 2$ для $\lambda < \lambda_*$. На рис. цифры (0), (1), (2) указывают степень неустой-

чивости движений (1). Для каждого из интервалов $-\infty < \lambda < J_1$, $J_1 < \lambda < J_2$, $J_2 < \lambda < J_3$, $J_3 < \lambda < \infty$ имеет место закон смены устойчивости, состоящий в том, что при фиксированном значении параметра k при переходе от движения на одной ветви кривой $k = k(\lambda)$ к движению на соседней ветви степень неустойчивости изменяется на

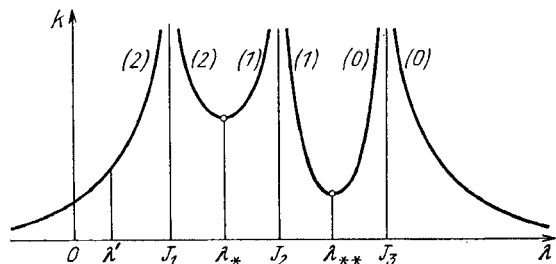


Рис. 2.2

единицу, при этом изменение степени неустойчивости при непрерывном следовании вдоль какой-либо из ветвей кривой $k = k(\lambda)$ происходит в точках бифуркации.

Задача 2.1.12. Найти перманентные вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой путем анализа измененной потенциальной энергии.

Решение. Для измененной потенциальной энергии имеем выражение

$$W = \frac{k^2}{2J} + \Pi, \quad \Pi = a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + a_3 \gamma_3,$$

$$J = J_1 \gamma_1^2 + J_2 \gamma_2^2 + J_3 \gamma_3^2,$$

где Π — потенциальная энергия, J — момент инерции тела относительно вертикали, k — постоянная интеграла площадей.

Поскольку $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ связаны соотношением $\Gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, то вместо W будем рассматривать функцию $W_* = W + \frac{1}{2} \sigma (\Gamma - 1)$, где σ — множитель Лагранжа. Условия стационарности функции W_* приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W_*}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} (\Gamma - 1) = 0, \quad \frac{\partial W_*}{\partial \gamma_1} = a_1 + (\sigma - J_1 \omega^2) \gamma_1 = 0 \quad (123)$$

$$\left(\omega = \frac{k}{J} \right).$$

Из этих уравнений, полагая $\sigma = \omega^2 \lambda$, находим

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{a_1}{\omega^2 (J_1 - \lambda)} \quad (123), \\ \omega &= \pm \left(\sum_{(123)} \frac{a_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} \right)^{1/4}, \\ k &= k(\lambda) = \pm \left(\sum_{(123)} \frac{a_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} \right)^{-3/4} \sum_{(123)} \frac{J_1 a_1^2}{(J_1 - \lambda)^2}.\end{aligned} \quad (1)$$

Значениям (1) соответствуют перманентные вращения тела вокруг вертикали с угловой скоростью ω .

Эти движения можно представить геометрически точками кривой $k = k(\lambda)$, представленной на рис. 2.2.

Достаточные условия устойчивости получим как условия положительной определенности второй вариации $\delta^2 W_*$ функции W_* на линейном многообразии, определяемом уравнением $\delta \Gamma = 0$. Они эквивалентны требованию положительности главных диагональных миноров третьего и четвертого порядков определителя

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \omega^2 (\lambda - J_1 + 2\omega^2 J^{-1} J_1 J_2 \gamma_1 \gamma_2 + 4J^{-1} J_1 \gamma_1^2) & 2\omega^2 J^{-1} J_1 J_3 \gamma_1 \gamma_3 & \\ \gamma_2 & 2\omega^2 J^{-1} J_2 J_1 \gamma_2 \gamma_1 & \omega^2 (\lambda - J_2 + 2\omega^2 J^{-1} J_2 J_3 \gamma_2 \gamma_3 + 4J^{-1} J_2 \gamma_2^2) & \\ \gamma_3 & 2\omega^2 J^{-1} J_3 J_1 \gamma_3 \gamma_1 & 2\omega^2 J^{-1} J_3 J_2 \gamma_3 \gamma_2 & \omega^2 (\lambda - J_3 + 4J^{-1} J_3 \gamma_3^2) \end{vmatrix}.$$

В симметризованной форме эти условия имеют вид

$$\begin{aligned}4\omega^2 J^{-1} \sum_{(123)} (J_2 - J_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \omega^2 \sum_{(123)} (\lambda - J_1) (\gamma_2^2 + \gamma_3^2) &> 0, \\ 4\omega^4 J^{-1} \sum_{(123)} (\lambda - J_1) (J_2 - J_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \\ + \omega^4 \sum_{(123)} (\lambda - J_2) (\lambda - J_3) \gamma_1^2 &> 0.\end{aligned}$$

§ 2.2. Тело на гладкой горизонтальной плоскости

Рассмотрим движение тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной неподвижной плоскости α .

Введем две правые прямоугольные системы осей координат: неподвижную $Oxyz$ с началом координат в

некоторой точке O плоскости α и осью z , направленной вертикально вверх, и подвижную $Sx_1x_2x_3$ с началом в центре масс тела и осями, совпадающими с его центральными осями инерции. Пусть x, y, z — координаты центра масс тела; m и J_s — масса и моменты инерции тела относительно осей x_s ($s = 1, 2, 3$); ω_s, γ_s, x_s — проекции на оси x_s вектора мгновенной угловой скорости ω тела, единичного вектора γ оси z и радиус-вектора r относительно центра масс точки касания Q тела с горизонтальной плоскостью α ; g и N — ускорение силы тяжести и реакция плоскости α , отнесенная к массе тела. Будем предполагать, что в точке Q поверхность тела имеет угловую точку или что в окрестности точки Q тело ограничено выпуклой поверхностью, определяемой уравнением $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Уравнения движения получим из теоремы о движении центра масс и теоремы моментов для центра масс. Первая из этих теорем приводит к уравнениям

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = N - g, \quad (1)$$

а вторая — к следующим уравнениям, отнесенным к подвижной системе координат:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = mN(x_2 \gamma_3 - x_3 \gamma_2) \quad (123). \quad (2)$$

К уравнениям (1), (2) следует присоединить уравнения Пуассона

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3 \quad (123), \quad (3)$$

очевидные геометрические соотношения

$$z = -r \cdot \gamma = -x_1 \gamma_1 - x_2 \gamma_2 - x_3 \gamma_3, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\gamma_1 \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2} \quad (123) \quad (5)$$

и уравнение поверхности тела

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (f(0, 0, 0) < 0). \quad (6)$$

Уравнения (1) — (6) образуют замкнутую систему уравнений относительно $x, y, z, \omega_s, \gamma_s, x_s$ ($s = 1, 2, 3$) и N . Они допускают первые интегралы

$$\begin{aligned} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 + 2mgz &= \text{const}, \\ J_1 \omega_1 \gamma_1 + J_2 \omega_2 \gamma_2 + J_3 \omega_3 \gamma_3 &= \text{const}, \\ \dot{x} = \text{const}, \quad \dot{y} = \text{const}, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, \end{aligned}$$

представляющие собой соответственно интегралы энергии, площадей, циклические, выражающие постоянство проекций вектора скорости центра масс тела на оси x и y , и геометрический.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а. Пусть при движении тела оно опирается на горизонтальную плоскость одной и той же точкой, лежащей на оси x_3 . Тогда будем иметь

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = x_{30} = \text{const}, \quad z = -x_3\gamma_3.$$

б. Пусть тело в окрестности точки опоры ограничено сферической поверхностью радиусом R и с центром в точке O , лежащей на оси x_3 . В этом случае

$$x_1 = -R\gamma_1, \quad x_2 = -R\gamma_2, \quad x_3 = -R\gamma_3 + a, \quad z = R - a\gamma_3,$$

где a — координата точки O по оси x_3 .

При $a = 0$ уравнения (2) и (3) образуют замкнутую систему шести уравнений относительно шести величин ω_s , γ_s ($s = 1, 2, 3$), описывающую движение тела вокруг его центра масс. Эти уравнения совпадают с уравнениями движения тела с одной закрепленной точкой в случае Эйлера и, помимо интегралов (7), допускают дополнительный интеграл

$$J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2 = \text{const},$$

выражающий постоянство модуля вектора кинетического момента тела в его относительном движении.

в. Пусть тело ограничено эллипсоидальной поверхностью, соосной с эллипсоидом инерции и определяемой уравнением

$$f = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0.$$

В этом случае из уравнений (4) и (5) находим

$$z = \sqrt{a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2}, \quad x_1 = -\frac{a_1^2\gamma_1}{z} \quad (123).$$

Задача 2.2.1. Найти положения равновесия на гладкой горизонтальной плоскости тяжелого твердого тела, которое ограничено выпуклой поверхностью,

имеющей в каждой точке отличные от нуля главные кривизны. Исследовать устойчивость положения равновесия.

Решение. Очевидно, что в положении равновесия тела его центр G тяжести (рис. 2.3) должен лежать на нормали к поверхности тела в точке L его касания с неподвижной горизонтальной плоскостью (α) . Рассмотрим некоторое возмущенное положение тела, близкое

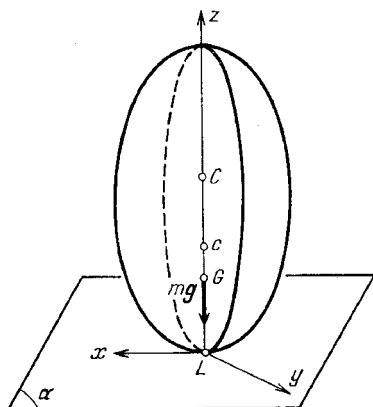


Рис. 2.3

к положению равновесия, и для этого положения тела обозначим через L' точку его касания с неподвижной горизонтальной плоскостью (α') . Вычислим длину отрезка, равного возвышению центра тяжести тела над неподвижной горизонтальной плоскостью в возмущенном положении тела. Для этого введем систему координат $Lxyz$ с началом в точке L , ось z которой вертикальна и направлена в сторону тела,

а оси x и y лежат в плоскости (α) и совпадают с направлениями главных кривизн поверхности тела в точке L . Координаты x, y, z точки L' удовлетворяют уравнению

$$z = \frac{x^2}{2r} + \frac{y^2}{2R} + \dots, \quad (1)$$

где r и R — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке L , а многоточием обозначены члены более высокого порядка малости. Уравнение касательной плоскости в точке L' имеет вид

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0, \quad (2)$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{r} + \dots, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{R} + \dots$$

Длина перпендикуляра, опущенного из точки G на плоскость (α') , равна

$$GH = (\xi - z + px + qy)(1 + p^2 + q^2)^{-1/2}, \quad \xi = GL,$$

или с учетом (1) и (2)

$$\begin{aligned} GH &= \left(\zeta + \frac{x^2}{2r} + \frac{y^2}{2R} + \dots \right) \left(1 + \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{R^2} + \dots \right)^{-1/2} = \\ &= \zeta + \frac{r-\zeta}{2r^2} x^2 + \frac{R-\zeta}{2R^2} y^2 + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что в положении равновесия $x = y = 0$ длина ζ отрезка GL будет иметь наименьшее значение, если $\zeta < r$, $\zeta < R$. Итак, положение равновесия устойчиво, если $\zeta < r$, $\zeta < R$, и неустойчиво в противном случае, при этом степень неустойчивости χ равновесия равна 1, если $r < \zeta < R$, или 2, если $\zeta > R$.

Если центры главных кривизн поверхности тела в положении равновесия обозначить через c и C , то для устойчивости равновесия тела необходимо и достаточно, чтобы его центр тяжести лежал ниже точки c ; в противном случае равновесие неустойчиво, при этом $\chi = 1$, если точка G лежит между точками c и C , и $\chi = 2$, если точка G лежит выше точки C .

Задача 2.2.2. Исследовать устойчивость положений равновесия на гладкой горизонтальной плоскости тяжелого твердого тела, имеющего форму «овального параллелепипеда», уравнение поверхности которого имеет вид

$$f = J_1 x_1^{2n} + J_2 x_2^{2n} + J_3 x_3^{2n} = 1$$

$$(n > 1, J_i > 0, i = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где оси x_i совпадают с осями центрального эллипсоида инерции тела.

Решение. Потенциальная энергия силы тяжести определяется выражением $\Pi = Ph$, где P — вес тела, h — высота его центра тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью, на которой лежит тело,

$$h = \left(\sum_{i=1}^3 J_i x_i^{4n-2} \right)^{-1/2},$$

x_1, x_2, x_3 — координаты точки касания тела с указанной плоскостью. Поскольку x_1, x_2, x_3 связаны уравнением (4), то вместо Π далее будем рассматривать функцию $W(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \Pi + \lambda(f - 1)$, где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Для определения положений равновесия имеем уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial x_j} = J_j x_j^{2n-1} \left(\sum_{i=1}^3 J_i^2 x_i^{4n-2} \right)^{-3/2} \left[2n\lambda \left(\sum_{i=1}^3 J_i^2 x_i^{4n-2} \right)^{3/2} - (2n-1)P J_j x_j^{2n-2} \right] = 0 \quad (j=1, 2, 3),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^3 J_i x_i^{2n} - 1 = 0.$$

Эти уравнения допускают три семейства решений

$$x_{10}^2 = J^{-1/n}, \quad x_{20} = x_{30} = 0, \quad \lambda = \frac{2n-1}{2n} P |x_{10}| \quad (123); \quad (2)$$

$$x_{10}^2 = J_1^{-\frac{1}{n-1}} D_3^{-\frac{1}{n}}, \quad x_{20}^2 = J_2^{-\frac{1}{n-1}} D_3^{-\frac{1}{n}}, \quad x_{30} = 0,$$

$$\lambda = \frac{2n-1}{2n} D_3^{\frac{n-1}{2n}} \quad (123), \quad (3)$$

$$D_3 = J_1^{-\frac{1}{n-1}} + J_2^{-\frac{1}{n-1}} \quad (123);$$

$$x_{i0}^2 = J_i^{-\frac{1}{n-1}} D^{-\frac{1}{n}} \quad (i=1, 2, 3), \quad \lambda = \frac{2n-1}{2n} P D^{\frac{n-1}{2n}},$$

$$D = \sum_{i=1}^3 J_i^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (4)$$

Семейство (2) содержит 6 решений, которым соответствуют положения равновесия, для которых одна из осей x_1, x_2, x_3 вертикальна. Семейство (3) содержит 12 решений, которым соответствуют положения равновесия, для которых тело опирается на плоскость одним из своих «ребер», при этом одна из осей x_1, x_2, x_3 горизонтальна. Семейство (4) содержит 8 решений, которым соответствуют положения равновесия, для которых тело опирается на плоскость одной из своих «вершин».

Исследуем устойчивость равновесий (2)–(4). В возмущенном положении тела положим $x_i = x_{i0} + \xi_i$ ($i=1, 2, 3$) и обозначим через ΔW приращение функции W при переходе от положения равновесия к возмущенному положению тела.

Для семейства (2) имеем

$$\Delta W = P |x_0| \left[\frac{1}{2} (2n-1)(4n-1) \frac{\xi_1^2}{x_{10}^2} + J_2 \xi_2^{2n} + J_3 \xi_3^{2n} \right],$$

при этом переменные ξ_1, ξ_2, ξ_3 связаны соотношением

$$2n \frac{\xi_1}{x_{10}} + n(2n-1) \frac{\xi_1^2}{x_{10}^2} + \dots + J_2 \xi_2^{2n} + J_3 \xi_3^{2n} = 0,$$

из которого в первом приближении получаем $\xi_1 = 0$. Отсюда заключаем, что ΔW на плоскости $\xi_1 = 0$ представляет определенно-положительную функцию. Следовательно, положения равновесия (2) устойчивы.

Для семейства (3) имеем

$$\begin{aligned} \Delta W = P \left[-\frac{1}{2} (n-1)(2n-1) D^{\frac{1-n}{2n}} (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (2n-1)^2 D^{\frac{3(n-1)}{2n}} (x_{10}\xi_1 + x_{20}\xi_2)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2n-1}{2n} J_3 D^{\frac{n-1}{2n}} \xi_3^{2n} + \dots \right], \end{aligned}$$

при этом выполняется соотношение

$$\begin{aligned} 2n(x_{10}\xi_1 + x_{20}\xi_2) + n(2n-1)(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \\ + J_3 D^{\frac{n-1}{2n}} \xi_3^{2n} + \dots = 0 \end{aligned}$$

или в первом приближении $x_{10}\xi_1 + x_{20}\xi_2 = 0$. Отсюда заключаем, что на многообразии $x_{10}\xi_1 + x_{20}\xi_2 = 0$ приращение ΔW представляет знакопеременную функцию. Следовательно, равновесия (3) неустойчивы.

Для семейства (4) получаем

$$\begin{aligned} \Delta W = P \left[-\frac{1}{2} (n-1)(2n-1) D^{\frac{1-n}{2n}} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (2n-1)^2 D^{\frac{3(1-n)}{2n}} (x_{10}\xi_1 + x_{20}\xi_2 + x_{30}\xi_3)^2 + \dots \right], \end{aligned}$$

при этом имеем

$$\begin{aligned} x_{10}\xi_1 + x_{20}\xi_2 + x_{30}\xi_3 + \\ + \frac{1}{2} (2n-1)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + \dots = 0 \end{aligned}$$

или в первом приближении $x_{10}\xi_1 + x_{20}\xi_2 + x_{30}\xi_3 = 0$.

Отсюда заключаем, что ΔW на многообразии $x_{10}\xi_1 + x_{20}\xi_2 + x_{30}\xi_3 = 0$ представляет собой определенно-отрицательную функцию. Следовательно, равновесия (4) неустойчивы.

Если принять показатель n в качестве параметра, то нетрудно заметить, что при $n \rightarrow \infty$ «сглаженный» параллелепипед превращается в обыкновенный. Указанные выше семейства равновесий отвечают таким его положениям, при которых он опирается о плоскость одной из своих граней, ребром или вершиной. Понятно, что первое семейство устойчиво, а второе и третье нет. Любопытно, что устойчивость опоры на грань сохраняется вплоть до другого критического значения параметра n , при котором он обращается в единицу.

В качестве самостоятельного занятия исследовать поведение указанных выше равновесий при $n \rightarrow 1$.

Задача 2.2.3. Исследовать устойчивость равномерных вращений волчка Лагранжа на гладкой горизонтальной плоскости вокруг его вертикально направленной оси симметрии в предположении, что в точ-

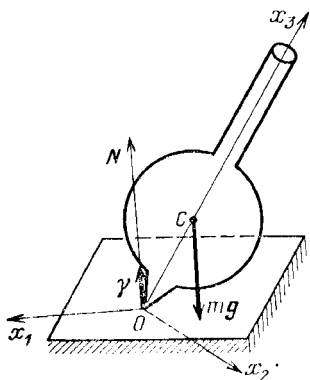


Рис. 2.4

ке опоры поверхность тела имеет угловую точку (рис. 2.4). Использовать теорему Пауса.

Решение. Уравнения движения волчка допускают первые интегралы

$$U = J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + mx_3^2(\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1)^2 - 2mgx_3\gamma_3 = \text{const},$$

$$U_1 = J_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + J_3\omega_3\gamma_3 = \text{const},$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad U_3 = \omega_3 = \omega = \text{const}.$$

Введем функцию

$$W = U - 2\lambda U_1 - \mu U_2,$$

где положено $\omega_3 = \omega$, а λ и μ — множители Лагранжа.

Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_1} = 2 [J_1 (\omega_1 - \lambda \gamma_1) + m x_3^2 (\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1) \gamma_2] = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_2} = 2 [J_1 (\omega_2 - \lambda \gamma_2) - m x_3^2 (\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1) \gamma_1] = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = -2 [\lambda J_1 \omega_1 + \mu \gamma_1 + m x_3^2 (\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1) \omega_2] = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} = -2 [\lambda J_1 \omega_2 + \mu \gamma_2 - m x_3^2 (\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1) \omega_1] = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_3} = -2 [\lambda J_3 \omega + \mu \gamma_3 + m g x_3] = 0,$$

допускающим решение

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \\ \mu = -J_3 \omega \lambda - m g x_3, \end{aligned}$$

где λ произвольно. Этому решению соответствуют равномерные вращения волчка вокруг вертикали, проходящей через центр тяжести и точку его опоры с горизонтальной плоскостью, при этом точка опоры волчка может скользить по плоскости с произвольной постоянной по величине и направлению скоростью.

Исследуем устойчивость этих движений. В возмущенном движении положим $\gamma_3 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Условия устойчивости получим из теоремы Рауса как условия положительной определенности второй вариации функции W

$$\begin{aligned} \delta^2 W = J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) - 2 J_1 \lambda (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + \\ + (J_3 \omega \lambda + m g x_3) (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

на многообразии $\delta U_2 = 2\eta = 0$. Эти условия приводятся к требованию, чтобы для некоторого вещественного значения параметра λ выполнялось неравенство $J_1 \lambda^2 - J_3 \omega \lambda - m g x_3 < 0$. Для существования таких значений λ необходимо, чтобы выполнялось условие Маиевского — Четаева $J_3^2 \omega^2 + 4 J_1 m g x_3 > 0$, которое является достаточным условием устойчивости рассматриваемого невозмущенного движения по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$), а также по отношению к скорости центра масс волчка.

Задача 2.2.4. Для равномерных вращений волчка Лагранжа на гладкой горизонтальной плоскости вокруг его вертикально направленной оси симметрии найти достаточные условия неустойчивости, используя теорему Ляпунова о неустойчивости. Поверхность волчка в точке опоры имеет угловую точку (рис. 2.4).

Решение. Движение волчка вокруг его центра масс описывается уравнениями

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 &= -m x_3 \ddot{\gamma}_2 (g - x_3 \ddot{\gamma}_3), \\ J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 &= m x_3 \ddot{\gamma}_1 (g - x_3 \ddot{\gamma}_3), \quad \dot{\omega}_3 = 0, \\ \dot{\gamma}_1 &= \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2, \end{aligned}$$

которые допускают частное решение

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1.$$

Это решение описывает равномерное вращение волчка вокруг его вертикально направленной оси симметрии.

Исследуем устойчивость этого движения. В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi$, $\gamma_3 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Уравнения возмущенного движения записываются в виде

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 &= (J_1 - J_3) (\omega + \xi) \omega_2 - m x_3 \ddot{\gamma}_2 (g - x_3 \ddot{\eta}), \\ J_1 \dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1) (\omega + \xi) \omega_1 + m x_3 \ddot{\gamma}_1 (g - x_3 \ddot{\eta}), \quad \dot{\xi} = 0, \\ \dot{\gamma}_1 &= (\omega + \xi) \gamma_2 - (1 + \eta) \omega_2, \\ \dot{\gamma}_2 &= (1 + \eta) \omega_1 - (\omega + \xi) \gamma_1, \quad \dot{\eta} = \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$V(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2) = J_1 (\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1).$$

Для производной по времени \dot{V} получаем выражение

$$\begin{aligned} \dot{V} &= J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) (1 + \eta) - J_3 (\omega + \xi) (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) - \\ &\quad - m x_3 (g - x_3 \ddot{\eta}) (\gamma_1^2 + \gamma_2^2). \end{aligned}$$

Примем во внимание соотношения

$$\dot{V} = -J_1 \ddot{\eta}, \quad \eta = \sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} - 1$$

и ограничимся рассмотрением возмущенных движений, для которых $\xi = 0$; тогда будем иметь

$$\left[1 + \frac{mx_3^2}{J_1} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \right] \dot{V} = J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) (1 + \eta) - \\ - J_3 \omega (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) - mgx_3 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2).$$

При выполнении условия $J_3^2 \omega^2 + 4J_1 mgx_3 < 0$ производная \dot{V} функции V представляет собой положительно-определенную функцию переменных ω_j, γ_j ($j = 1, 2$), а сама функция V может принимать положительные значения в сколь угодно малой окрестности невозмущенного движения. Отсюда на основе теоремы Ляпунова о неустойчивости заключаем, что последнее условие является достаточным условием неустойчивости рассматриваемого невозмущенного движения. Припимая во внимание решение задачи 2.2.3, заключаем, что условие Маиевского — Четаева является необходимым и достаточным условием устойчивости равномерного вращения волчка Лагранжа на гладкой горизонтальной плоскости вокруг его вертикально направленной оси симметрии по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$).

Задача 2.2.5. Для равномерных вращений волчка Лагранжа на гладкой горизонтальной плоскости вокруг его вертикально направленной оси симметрии найти необходимые условия устойчивости путем анализа корней характеристического уравнения. Поверхность волчка в точке опоры имеет угловую точку (рис. 2.4).

Решение. Движение волчка вокруг его центра масс описывается уравнениями

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 = -mx_3 \ddot{\gamma}_2 (g - x_3 \ddot{\gamma}_3), \\ J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = mx_3 \ddot{\gamma}_1 (g - x_3 \ddot{\gamma}_3), \quad \dot{\omega}_3 = 0, \\ \dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2.$$

Эти уравнения допускают частное решение

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1,$$

описывающее равномерное вращение волчка вокруг его вертикально направленной оси симметрии.

Найдем необходимые условия устойчивости этого невозмущенного движения. В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi, \gamma_3 = 1 + \eta$, а для остальных пере-

менных сохраним прежние обозначения. Уравнения возмущенного движения в линейном приближении имеют вид

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega \omega_2 &= -mgx_3 \gamma_2, \\ J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega \omega_1 &= mgx_3 \gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= \omega \gamma_2 - \omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = -\omega \gamma_1 + \omega_1, \quad \dot{\xi} = 0, \quad \dot{\eta} = 0. \end{aligned}$$

Для этой системы имеем характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 \{ [J_1 \lambda^2 + (J_3 - J_1) \omega^2 + mgx_3]^2 + (2J_1 - J_3)^2 \omega^2 \lambda^2 \} = 0.$$

Это уравнение, кроме двух нулевых, имеет следующие четыре корня:

$$\lambda_v = \frac{\pm i (2J_1 - J_3) \omega \mp \sqrt{-4J_1 mgx_3 - J_3^2 \omega^2}}{2J_1} \quad (v=1, 2, 3, 4),$$

где допускается любая комбинация знаков. Для того чтобы среди этих корней не было корней с положительной вещественной частью, необходимо выполнение условия Маиевского — Четаева $J_3^2 \omega^2 + 4J_1 mgx_3 \geq 0$. Принимая во внимание решение задачи 2.2.3, заключаем, что последнее неравенство является необходимым и достаточным условием устойчивости равномерного вращения волчка Лагранжа на гладкой горизонтальной плоскости вокруг его вертикально направленной оси симметрии по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s=1, 2, 3$), а также по отношению к скорости его центра масс.

Задача 2.2.6. Найти регулярные прецессии волчка Лагранжа на гладкой горизонтальной плоскости в предположении, что в точке опоры поверхность волчка имеет угловую точку (рис. 2.4), и исследовать их устойчивость. Использовать теорему Рауса.

Решение. Уравнения движения волчка на гладкой горизонтальной плоскости допускают первые интегралы:

$$\begin{aligned} U &= J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + mx_3^2 (\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1)^2 - 2mgx_3 \gamma_3 = \text{const}, \\ U_1 &= J_1 (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + J_3 \omega_3 \gamma_3 = \text{const}, \\ U_2 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad U_3 = \omega_3 = \omega = \text{const}. \end{aligned}$$

Полагая $\omega_3 = \omega$, введем в рассмотрение функцию

$$W = U - 2\lambda U_1 + J_1 \lambda^2 U_2 = J_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \\ + m x_3^2 (\Omega_1 \gamma_2 - \Omega_2 \gamma_1)^2 + J_1 \lambda^2 \gamma_3^2 - 2 (J_3 \omega \lambda + m g x_3) \gamma_3,$$

где $\Omega_1 = \omega_1 - \lambda \gamma_1$, $\Omega_2 = \omega_2 - \lambda \gamma_2$, а λ — параметр. Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \Omega_1} = 2 [J_1 \Omega_1 + m x_3^2 (\Omega_1 \gamma_2 - \Omega_2 \gamma_1) \gamma_2] = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \Omega_2} = 2 [J_1 \Omega_2 - m x_3^2 (\Omega_1 \gamma_2 - \Omega_2 \gamma_1) \gamma_1] = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = 2 m x_3^2 (\Omega_2 \gamma_1 - \Omega_1 \gamma_2) \Omega_2 = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} = 2 m x_3^2 (\Omega_1 \gamma_2 - \Omega_2 \gamma_1) \Omega_1 = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_3} = 2 (J_1 \lambda^2 \gamma_3 - J_3 \omega \lambda - m g x_3) = 0.$$

Эти уравнения допускают решение

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2, \quad (1)$$

где γ_3 определяется из уравнения

$$\gamma_3 J_1 \lambda^2 - J_3 \omega \lambda - m g x_3 = 0. \quad (2)$$

В исходных переменных решение (1) записывается в виде

$$\omega_1 = \lambda \gamma_1, \quad \omega_2 = \lambda \gamma_2, \\ \gamma_1 = \sqrt{1 - \gamma_3^2} \sin vt, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 - \gamma_3^2} \cos vt, \quad (3)$$

где $v = \omega - \lambda \gamma_3$, и описывает регулярную прецессию волчка Лагранжа с угловой скоростью прецессии λ и угловой скоростью собственного вращения v .

Исследуем устойчивость движения (1). Обозначим через η_s вариации величин γ_s ($s = 1, 2, 3$), а для ортальных переменных сохраним прежние обозначения. Для приращения ΔW функции W при переходе от невозмущенного к возмущенному движению имеем выражение

$$\Delta W = J_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + J_1 \lambda^2 \eta_3^2 + \\ + m x_3^2 [\Omega_1 (\gamma_1 + \eta_2) - \Omega_2 (\gamma_2 + \eta_1)]^2.$$

Отсюда видим, что приращение ΔW представляет собой положительно-определенную функцию по отношению к части переменных $\Omega_1, \Omega_2, \eta_3$. Следовательно, движение (1) устойчиво по отношению к $\Omega_1, \Omega_2, \gamma_3$, а также по отношению к величинам $\omega_1^2 + \omega_2^2, \omega_3, \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \gamma_3$.

При $\gamma_3 = 1$ регулярная прецессия (1) переходит в равномерное вращение волчка Лагранжа вокруг вертикально направленной оси симметрии. Достаточное условие устойчивости этого движения получим из требования вещественности параметра λ , определяемого уравнением (2) при $\gamma_3 = 1$; оно имеет вид $J_3^2 \omega^2 + 4J_1 mgx_3 \geq 0$ и представляет собой известное условие Маиевского — Четаева.

Задача 2.2.7. Тело с трехосным центральным эллипсоидом инерции ограничено сферической поверхностью с центром, совпадающим с центром масс. Тело движется на гладкой горизонтальной плоскости. Исследовать устойчивость стационарных вращений тела вокруг вертикали, проходящей через центр масс. Использовать теорему Рауса.

Решение. Уравнения движения тела допускают первые интегралы:

$$U = J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 = \text{const},$$

$$U_1 = J_1 \omega_1 \gamma_1 + J_2 \omega_2 \gamma_2 + J_3 \omega_3 \gamma_3 = \text{const},$$

$$U_2 = J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = \text{const}, \quad U_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Рассмотрим функцию

$$2W = U - 2\lambda U_1 + \sigma U_2 + \mu(U_3 - 1),$$

где λ, σ, μ — множители Лагранжа. Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_1} = J_1 [(J_1 + \sigma) \omega_1 - \lambda \gamma_1] = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \mu \gamma_1 - \lambda J_1 \omega_1 = 0 \quad (123),$$

которые допускают три однопараметрические семейства решений

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0,$$

$$\lambda = (J_1 + \sigma) \omega, \quad \mu = J_1 (J_1 + \sigma) \omega^2 \quad (123).$$

Эти решения описывают равномерные вращения тела

вокруг вертикально направленных главных центральных осей инерции.

Исследуем устойчивость этих движений по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$).

Рассмотрим для определенности невозмущенное вращение тела вокруг оси x_3 . В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi_3, \gamma_3 = 1 + \eta_3$, а для остальных величин сохраним прежние обозначения. Из условий $\delta U_1 = \delta U_2 = \delta U_3 = 0$ получаем $\xi_3 = \eta_3 = 0$, и тогда выражение для второй вариации $\delta^2 W$ функции W принимает вид

$$\begin{aligned} \delta^2 W = & J_1 (J_1 + \sigma) \omega_1^2 - 2J_1 (J_3 + \sigma) \omega \omega_1 \gamma_1 + \\ & + J_3 (J_3 + \sigma) \omega^2 \gamma_1^2 + J_2 (J_2 + \sigma) \omega_2^2 - 2J_2 (J_3 + \sigma) \omega \omega_2 \gamma_2 + \\ & + J_3 (J_3 + \sigma) \omega^2 \gamma_2^2. \end{aligned}$$

Требование положительной определенности этой квадратичной формы приводит к неравенствам

$$J_j + \sigma > 0, \quad (J_3 - J_j) (J_3 + \sigma) \omega^2 \sigma > 0 \quad (j = 1, 2).$$

Рассмотрим два случая.

а. Пусть $\sigma > 0$. Тогда для выполнения указанных неравенств необходимо выполнение условий $J_3 > J_1, J_3 > J_2$.

б. Пусть $\sigma < 0$ и $|\sigma| < \min(J_1, J_2, J_3)$. Тогда для положительной определенности $\delta^2 W$ необходимо выполнение условий $J_3 < J_1, J_3 < J_2$. Отсюда заключаем, что равномерные вращения тела вокруг малой и большой главной центральной оси инерции устойчивы. Путем анализа корней характеристического уравнения можно показать, что вращения тела вокруг средней центральной оси инерции неустойчивы.

Задача 2.2.8. Динамически симметричное тело, ограниченное сферической поверхностью с центром на оси симметрии, движется на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 2.5). Найти достаточные условия устойчивости стационарных движений тела, в которых его центр масс движется прямолинейно и равномерно, а тело равномерно вращается вокруг вертикально направленной оси симметрии. Использовать теорему Рауса.

Задача 2.2.9. Динамически симметричное тело, ограниченное сферической поверхностью с центром на оси симметрии, движется на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 2.5). Используя теорему Ляпунова о неустойчивости, найти достаточные условия неустойчивости ста-

ционарных движений тела, в которых его центр масс движется прямолинейно и равномерно, а тело равномерно вращается вокруг вертикально направленной оси симметрии.

Задача 2.2.10. Динамически симметричное тело ограничено сферической поверхностью с центром на оси симметрии и движется на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 2.5). Найти необходимые условия устойчивости

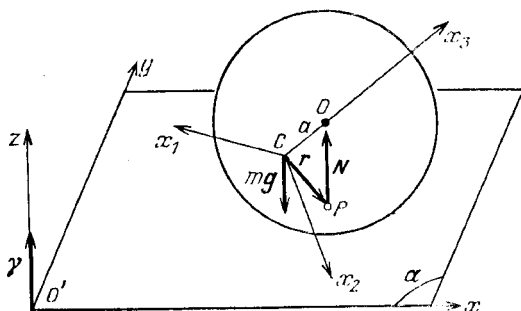


Рис. 2.5

стационарных движений тела, в которых его центр тяжести движется прямолинейно и равномерно, а тело равномерно вращается вокруг вертикально направленной оси симметрии, путем анализа корней характеристического уравнения.

Задача 2.2.11. Динамически симметричное тело, ограниченное сферической поверхностью с центром на оси симметрии, движется на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 2.5). Исследовать устойчивость стационарных движений тела, для которых движение тела вокруг центра масс представляет собой регулярную прецессию. Использовать теорему Рауса.

Задача 2.2.12. Тело, ограниченное эллипсоидальной поверхностью, которая соосна с центральным эллипсоидом инерции, движется на гладкой горизонтальной плоскости. Исследовать стационарные движения тела, их ветвление и устойчивость в случае, когда

$$J_1 < J_2 < J_3, \quad a_3 < a_2 < a_1. \quad (1)$$

Использовать теорему Рауса.

Решение. Уравнения движения тела допускают первые интегралы:

$$U = m\dot{z}^2 + J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 + 2mgz = \text{const},$$

$$z = \sqrt{a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2},$$

$$U_1 = J_1\omega_1\gamma_1 + J_2\omega_2\gamma_2 + J_3\omega_3\gamma_3 = k,$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Рассмотрим функцию

$$2W = U - 2\lambda(U_1 - k) + \sigma(U_2 - 1),$$

где λ и σ — множители Лагранжа. Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = k - U_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}(U_2 - 1) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = m\dot{z} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_1} = J_1(\omega_1 - \lambda\gamma_1) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \left(\frac{mg}{z}a_1^2 + \sigma\right)\gamma_1 - \lambda J_1\omega_1 = 0 \quad (123),$$

которые при выполнении условий (1) допускают следующие три однопараметрические семейства решений:

$$\begin{aligned} \dot{z} = 0, \quad \omega_1 = \lambda, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \\ \sigma = J_1\lambda^2 - mga_1, \quad k = J_1\lambda \end{aligned} \quad (2)$$

Этим решениям соответствуют равномерные вращения тела вокруг вертикали, совпадающей с одной из главных центральных осей инерции тела. Эти движения можно представить геометрически в пространстве параметров (k, λ, σ) в виде кривой L , отдельные ветви которой L_1, L_2, L_3 определяются последними двумя уравнениями в (2). Очевидно, что ветви L_1, L_2, L_3 представляют собой параболы с общей осью симметрии, их проекциями на плоскость (k, λ) служат три прямые $k = J_s\lambda$ ($s = 1, 2, 3$). Ветви L_s ($s = 1, 2, 3$) не имеют общих точек и отвечают равномерным вращениям тела вокруг осей x_s . Вершинам парабол L_s соответствуют положения равновесия тела.

Исследуем устойчивость движений (2) по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$). Обозначим через ξ_s, η_s

вариации переменных ω_s, γ_s . Тогда для решений (2) для $\delta^2 W$ при условиях $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ будем иметь соответственно выражения:

$$\begin{aligned}\delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 + \\ &\quad + \left[(J_1 - J_2)\lambda^2 + \frac{mg}{a_1}(a_2^2 - a_1^2) \right] \eta_2^2 + \\ &\quad + \left[(J_1 - J_3)\lambda^2 + \frac{mg}{a_1}(a_3^2 - a_1^2) \right] \eta_3^2, \\ \delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_3\Omega_3^2 + J_1\Omega_1^2 + \\ &\quad + \left[(J_2 - J_3)\lambda^2 + \frac{mg}{a_2}(a_3^2 - a_2^2) \right] \eta_3^2 + \\ &\quad + \left[(J_2 - J_1)\lambda^2 + \frac{mg}{a_2}(a_1^2 - a_2^2) \right] \eta_1^2, \\ \delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + \\ &\quad + \left[(J_3 - J_1)\lambda^2 + \frac{mg}{a_3}(a_1^2 - a_3^2) \right] \eta_1^2 + \\ &\quad + \left[(J_3 - J_2)\lambda^2 + \frac{mg}{a_3}(a_2^2 - a_3^2) \right] \eta_2^2,\end{aligned}$$

где $\Omega_i = \xi_i - \lambda \eta_i$ (123).

Отсюда заключаем, что для равномерных вращений тела вокруг большой, средней и малой осей центрального эллипсоида инерции степень неустойчивости χ соответственно равна 2, 1 и 0. Следовательно, вращения тела вокруг малой оси устойчивы, а вращения вокруг средней оси неустойчивы. Установление характера устойчивости вращений тела вокруг большой оси требует дополнительного исследования. На рис. 2.6 показана проекция кривой L на плоскость (k, λ) для $k \geq 0$ и распределение на ней степени неустойчивости соответствующих вращений.

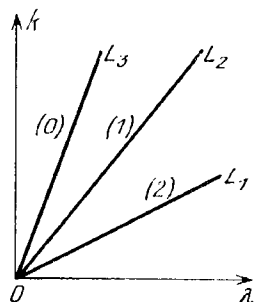


Рис. 2.6

Задача 2.2.13. Исследовать устойчивость стационарных вращений однородного трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости.

Задача 2.2.14. Тело, ограниченное эллипсоидальной поверхностью, соосной с центральным эллипсоидом инер-

ции, движется по гладкой горизонтальной плоскости. Исследовать стационарные вращения тела, их ветвление и устойчивость в случае, когда

$$J_1 < J_2 < J_3, \quad a_2 < a_3 < a_1. \quad (1)$$

Использовать теорему Рауса.

Решение. Уравнения движения тела допускают первые интегралы:

$$U = m\dot{z}^2 + J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 + 2mgz = \text{const},$$

$$z = \sqrt{a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2},$$

$$\dot{U}_1 = J_1\omega_1\gamma_1 + J_2\omega_2\gamma_2 + J_3\omega_3\gamma_3 = k,$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Рассмотрим функцию

$$2W = U - 2\lambda U_1 + \sigma U_2 = m\dot{z}^2 + J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 + 2mgz + (\sigma - J_1\lambda^2)\gamma_1^2 + (\sigma - J_2\lambda^2)\gamma_2^2 + (\sigma - J_3\lambda^2)\gamma_3^2,$$

где $\Omega_1 = \omega_1 - \lambda\gamma_1$ (123), а λ и σ — множители Лагранжа.

Интеграл $U_1 = k$ представим в виде

$$U_1 = J_1\Omega_1\gamma_1 + J_2\Omega_2\gamma_2 + J_3\Omega_3\gamma_3 + \lambda(J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2) = k.$$

Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial z} = m\dot{z} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \Omega_1} = J_1\Omega_1 = 0 \quad (123),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \left(\sigma - J_1\lambda^2 + \frac{mg}{z}a_1^2\right)\gamma_1 = 0 \quad (123),$$

которые с учетом уравнений $U_1 = k$, $U_2 = 1$ и условий (1) допускают следующие четыре однопараметрические семейства решений:

$$\begin{aligned} \dot{z} = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \quad (\omega_1 = \lambda, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0), \\ \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0 \quad (123), \\ \sigma = J_1\lambda^2 - mga_1, \quad k = J_1\lambda \quad (123); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \\ (\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \lambda\gamma_2, \quad \omega_3 = \lambda\gamma_3), \quad \gamma_1 = 0, \\ \gamma_2^2 = \frac{a_3^2(\lambda^4 - \lambda_3^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_2^2)}, \quad \gamma_3^2 = \frac{a_2^2(\lambda_2^4 - \lambda^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_2^2)}, \quad \lambda^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_2^2)}{a_2(J_3 - J_2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\lambda_3^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_2^2)}{a_3(J_3 - J_2)}, \quad \lambda_3^2 \leq \lambda^2 \leq \lambda_2^2, \quad \sigma = \frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} \lambda^2,$$

$$k = J_{23} \lambda, \quad J_{23} = \frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} + \frac{(mg)^2 (a_3^2 - a_2^2)}{\lambda^4 (J_3 - J_2)}.$$

Решения (2) описывают равномерные вращения тела вокруг главных осей центрального эллипсоида инерции, а решения (3) — вращения вокруг осей, расположенных в главной плоскости эллипсоида инерции и ортогональных его большой оси.

Решения (2) и (3) можно представить геометрически в пространстве параметров σ , λ , k точками кривой L , определяемой двумя последними уравнениями в (2) и (3). Кривая L состоит из четырех ветвей L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , первые три из которых отвечают движениям (2) и изображаются параболлами с общей осью симметрии; вершины этих парабол соответствуют положениям равновесия.

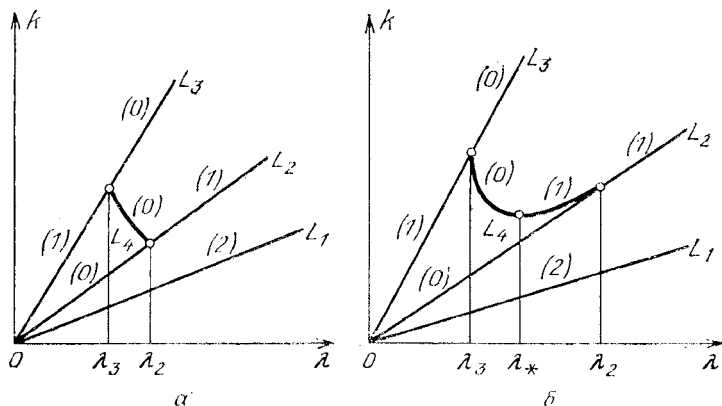


Рис. 2.7

Ветвь L_4 определяется последними двумя уравнениями в (3). На рис. 2.7 показан вид проекции кривой L на плоскость (k, λ) для $k \geq 0$.

Исследуем устойчивость движений (2) и (3) по отношению к величинам \dot{z} , ω_s , γ_s ($s = 1, 2, 3$). Обозначим через η_s вариации величин γ_s ($s = 1, 2, 3$), а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Для движений (2) $\delta^2 W$ при условиях $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ имеет вид

соответственно

$$\begin{aligned}
\delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 + \\
&+ \left[(J_1 - J_2)\lambda^2 + \frac{mg}{a_1} (a_2^2 - a_1^2) \right] \eta_2^2 + \\
&+ \left[(J_1 - J_3)\lambda^2 + \frac{mg}{a_1} (a_3^2 - a_1^2) \right] \eta_3^2, \\
\delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_3\Omega_3^2 + J_1\Omega_1^2 + \\
&+ \left[(J_2 - J_3)\lambda^2 + \frac{mg}{a_2} (a_3^2 - a_2^2) \right] \eta_3^2 + \\
&+ \left[(J_2 - J_1)\lambda^2 + \frac{mg}{a_2} (a_1^2 - a_2^2) \right] \eta_1^2, \quad (4) \\
\delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + \\
&+ \left[(J_3 - J_1)\lambda^2 + \frac{mg}{a_3} (a_1^2 - a_3^2) \right] \eta_1^2 + \\
&+ \left[(J_3 - J_2)\lambda^2 + \frac{mg}{a_3} (a_2^2 - a_3^2) \right] \eta_2^2.
\end{aligned}$$

Для движений (3) $\delta^2 W$ при условиях $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$, эквивалентных условиям

$$\eta_3 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_3} \eta_2, \quad \Omega_3 = \frac{\gamma_2}{J_3 \gamma_3} [2\lambda(J_3 - J_2)\eta_2 - J_2\Omega_2],$$

дается выражением

$$\begin{aligned}
\delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_1\Omega_1^2 + \frac{J_2 J_{23}}{J_3 \gamma_3^2} \left[\Omega_2 - \frac{2\lambda(J_3 - J_2)\gamma_2^2}{J_{23}} \eta_2 \right]^2 + \\
&+ \frac{\kappa \lambda^2}{a_3^2 - a_2^2} \eta_1^2 - \frac{(J_3 - J_2)^3 \lambda^6 \gamma_2^2}{(mg)^2 J_{23} (a_3^2 - a_2^2)} \frac{dk}{d\lambda} \eta_2^2,
\end{aligned}$$

где $\kappa = (J_3 - J_2)a_1^2 + (J_1 - J_3)a_2^2 + (J_2 - J_1)a_3^2 > 0$, а зависимость $k = k(\lambda)$ определяется последними двумя уравнениями в (3).

Рассмотрим равномерные вращения тела (2) вокруг главных центральных осей инерции. Из (4) заключаем, что для вращений вокруг оси x_1 степень неустойчивости $\chi = 2$; вращения вокруг оси x_2 устойчивы ($\chi = 0$), если $0 < \lambda^2 < \lambda_2^2$, и неустойчивы ($\chi = 1$), если $\lambda^2 > \lambda_2^2$; вращения вокруг оси x_3 неустойчивы ($\chi = 1$), если $0 < \lambda^2 < \lambda_3^2$, и устойчивы ($\chi = 0$), если $\lambda^2 > \lambda_3^2$.

Рассмотрим теперь вращения тела (3) вокруг осей, лежащих в главной плоскости $x_1 = 0$ центрального эллипсоида инерции. Обозначим через $\lambda^4 = \lambda_*^4$ корень уравнения $dk/d\lambda = 0$

$$\lambda_*^4 = \frac{3(mg)^2(a_3^2 - a_2^2)^2}{(J_3 - J_2)(J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2)}.$$

Тогда если значение λ_*^2 не принадлежит интервалу $\lambda_3^2 < \lambda^2 < \lambda_{23}^2$, то для этого интервала $dk/d\lambda < 0$ и все движения (4) устойчивы ($\chi = 0$).

Если же $\lambda_3^2 < \lambda_*^2 < \lambda_{23}^2$, то значению $\lambda^2 = \lambda_*^2$ на кривой L_4 соответствуют две точки бифуркации, для которых $\lambda = \pm \lambda_{*1}$, $\sigma = \sigma_{*1}$, $k = \pm k_{*1}$ где

$$\sigma_{*1} = \frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} \lambda_{*1}^2,$$

$$k_{*1} = \frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} \lambda_{*1} + \frac{(mg)^2(a_3^2 - a_2^2)}{\lambda_{*1}^3(J_3 - J_2)}.$$

Тогда движения (4) устойчивы ($\chi = 0$), если $\lambda_3^2 < \lambda^2 < \lambda_{*1}^2$, и неустойчивы ($\chi = 1$), если $\lambda_{*1}^2 < \lambda^2 < \lambda_{23}^2$.

На рис. 2.7 показана проекция кривой L на плоскость (k, λ) для $k \geq 0$ и распределение на ней степени неустойчивости движений (3), (4). Рис. 2.7, а соответствует случаю, когда интервал $\lambda_3^2 < \lambda^2 < \lambda_{23}^2$ не содержит значения λ_{*1}^2 , а рис. 2.7, б случаю, когда $\lambda_3^2 < \lambda_{*1}^2 < \lambda_{23}^2$.

Задача 2.2.15. Тело, ограниченное эллипсоидальной поверхностью, соосной с центральным эллипсоидом инерции, движется на гладкой горизонтальной плоскости. Исследовать стационарные вращения тела, их ветвление и устойчивость в случае, когда $J_1 < J_2 < J_3$, $a_3 < a_1 < a_2$.

Указание. Решение задачи получается из решения задачи 2.2.14, если во всех формулах ее решения индексы 1, 2, 3 заменить соответственно 3, 1, 2.

Задача 2.2.16. Тело, ограниченное эллипсоидальной поверхностью, главные оси которой совпадают с главными центральными осями инерции, движется на гладкой горизонтальной плоскости. Исследовать стационарные вращения тела, их ветвление и устойчивость в случае, когда

$$J_1 < J_2 < J_3, \quad a_2 < a_1 < a_3. \quad (1)$$

Использовать теорему Рауса.

Решение. Уравнения движения тела допускают первые интегралы:

$$U = m\dot{z}^2 + J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 + 2mgz = \text{const},$$

$$U_1 = J_1\omega_1\gamma_1 + J_2\omega_2\gamma_2 + J_3\omega_3\gamma_3 = k,$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

$$z = \sqrt{a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$2W = U - 2\lambda U_1 + \sigma U_2 = m\dot{z}^2 + J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 + \\ + 2mgz + (\sigma - J_1\lambda^2)\gamma_1^2 + (\sigma - J_2\lambda^2)\gamma_2^2 + (\sigma - J_3\lambda^2)\gamma_3^2,$$

где $\Omega_1 = \omega_1 - \lambda\gamma_1$ (123), а λ и σ — множители Лагранжа. Интеграл $U_1 = k$ представим в виде

$$U_1 = J_1\Omega_1\gamma_1 + J_2\Omega_2\gamma_2 + J_3\Omega_3\gamma_3 + \\ + \lambda(J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2) = k.$$

Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial z} = m\dot{z} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \Omega_1} = J_1\Omega_1 = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \left(\sigma - J_1\lambda^2 + \frac{mg}{z}a_1^2\right)\gamma_1 = 0 \quad (123),$$

которые с учетом уравнений $U_1 = k$, $U_2 = 1$ и условий (1) допускают следующие пять однопараметрических семейств решений:

$$\dot{z} = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \quad (\omega_1 = \lambda, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0), \\ \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \\ \sigma = J_1\lambda^2 - mga_1, \quad k = J_1\lambda \quad (123); \quad (2)$$

$$\dot{z} = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \\ (\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \lambda\gamma_2, \quad \omega_3 = \lambda\gamma_3), \quad \gamma_1 = 0, \\ \gamma_2^2 = \frac{a_3^2(\lambda^4 - \lambda_3^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_2^2)}, \quad \gamma_3^2 = \frac{a_2^2(\lambda_2^4 - \lambda^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_2^2)}, \quad \lambda_2^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_2^2)}{a_2(J_3 - J_2)}, \quad (3)$$

$$\lambda_{32}^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_2^2)}{a_3(J_3 - J_2)}, \quad \lambda_{32}^2 \leq \lambda^2 \leq \lambda_2^2, \quad \sigma = \frac{J_2a_3^2 - J_3a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} \lambda^2, \\ k = J_{23}\lambda_1$$

$$J_{23} = \frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} + \frac{(mg)^2 (a_3^2 - a_2^2)}{\lambda^4 (J_3 - J_2)};$$

$$\dot{z} = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \quad (\omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \lambda \gamma_3,$$

$$\omega_1 = \lambda \gamma_1), \quad \gamma_2 = 0,$$

$$\gamma_3^2 = \frac{a_1^2 (\lambda_1^4 - \lambda^4)}{\lambda^4 (a_3^2 - a_1^2)}, \quad \gamma_1^2 = \frac{a_3^2 (\lambda^4 - \lambda_3^4)}{\lambda^4 (a_3^2 - a_1^2)}, \quad \lambda_{31}^2 = \frac{mg (a_3^2 - a_1^2)}{a_3 (J_3 - J_1)},$$

$$(4)$$

$$\lambda_1^2 = \frac{mg (a_3^2 - a_1^2)}{a_1 (J_3 - J_1)}, \quad \lambda_{31}^2 \leq \lambda^2 \leq \lambda_1^2, \quad \sigma = \frac{J_1 a_3^2 - J_3 a_1^2}{a_3^2 - a_1^2} \lambda^2,$$

$$k = J_{31} \lambda,$$

$$J_{31} = \frac{J_1 a_3^2 - J_3 a_1^2}{a_3^2 - a_1^2} + \frac{(mg)^2 (a_3^2 - a_1^2)}{\lambda^4 (J_3 - J_1)}.$$

Решения (2) описывают равномерные вращения тела вокруг главных центральных осей инерции, решения (3) — вращения вокруг осей, лежащих в плоскости $x_1 = 0$ центрального эллипсоида инерции и ортогональных его горизонтально расположенной большой оси, а решения (4) — вращения вокруг осей, лежащих в плоскости $x_2 = 0$ и ортогональных горизонтально расположенной средней оси центрального эллипсоида инерции.

Решения (2) — (4) можно представить геометрически в пространстве параметров σ , λ , k точками кривой L , пять ветвей L_1, \dots, L_5 которой определяются уравнениями вида $\sigma = \sigma(\lambda)$, $k = k(\lambda)$ в (2) — (4). На рис. 2.8 показана проекция кривой L на плоскость (k, λ) для $k \geq 0$.

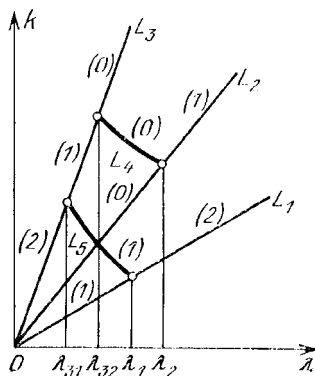


Рис. 2.8

Исследуем устойчивость движений (2) — (4) по отношению к величинам \dot{z} , ω_s , γ_s ($s = 1, 2, 3$). Обозначим через η_s вариации величин γ_s , а для остальных переменных сохраним прежние обозначения.

Для движений (2) $\delta^2 W$ при условиях $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ имеет соответственно вид

$$\begin{aligned}\delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 + \\ &+ \left[(J_1 - J_2)\lambda^2 + \frac{mg}{a_1}(a_2^2 - a_1^2) \right] \eta_2^2 + \\ &+ \left[(J_1 - J_3)\lambda^2 + \frac{mg}{a_1}(a_3^2 - a_1^2) \right] \eta_3^2, \\ \delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_3\Omega_3^2 + J_1\Omega_1^2 + \\ &+ \left[(J_2 - J_3)\lambda^2 + \frac{mg}{a_2}(a_3^2 - a_2^2) \right] \eta_3^2 + \\ &+ \left[(J_2 - J_1)\lambda^2 + \frac{mg}{a_2}(a_1^2 - a_2^2) \right] \eta_1^2, \quad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + \\ &+ \left[(J_3 - J_1)\lambda^2 + \frac{mg}{a_3}(a_1^2 - a_2^2) \right] \eta_1^2 + \\ &+ \left[(J_3 - J_2)\lambda^2 + \frac{mg}{a_3}(a_2^2 - a_3^2) \right] \eta_2^2.\end{aligned}$$

Для движений (3) $\delta^2 W$ при условиях $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$, эквивалентных условиям

$$\eta_3 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_3} \eta_2, \quad \Omega_3 = \frac{\gamma_2}{J_3 \gamma_3} [2\lambda (J_3 - J_2) \eta_2 - J_2 \Omega_2],$$

дается выражением

$$\begin{aligned}\delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_1\Omega_1^2 + \frac{J_2 J_{23}}{J_3 \gamma_3^2} \left[\Omega_2 - \frac{2\lambda (J_3 - J_2) \gamma_2^2}{J_{23}} \eta_2 \right]^2 - \\ &- \frac{(J_3 - J_2)^3 \lambda^6 \gamma_2^2}{(mg)^2 J_{23} (a_3^2 - a_2^2)} \frac{dk}{d\lambda} \eta_2^2, \quad (6)\end{aligned}$$

где

$$\kappa = (J_3 - J_2) a_1^2 + (J_1 - J_3) a_2^2 + (J_2 - J_1) a_3^2 > 0,$$

а зависимость $k = k(\lambda)$ определяется последними двумя уравнениями в (3).

Для движений (4) выражение для $\delta^2 W$ получается из (6) в результате замены индексов 1, 2, 3 соответственно

на 2, 3, 1:

$$\delta^2 W = m\dot{z}^2 + J_2 \Omega_2^2 + \frac{J_3 J_{31}}{J_1 \gamma_1^2} \left[\Omega_3 - \frac{2\lambda (J_1 - J_3) \gamma_3^2}{J_{31}} \eta_3 \right]^2 + \\ + \frac{\kappa \lambda^2}{a_1^2 - a_3^2} \eta_2^2 - \frac{(J_3 - J_1)^3 \lambda^6 \gamma_3^2}{(mg)^2 J_{31} (a_3^2 - a_1^2)} \frac{dk}{d\lambda} \eta_3^2. \quad (7)$$

Рассмотрим движения (2). Из (5) заключаем, что вращения вокруг оси x_1 неустойчивы ($\chi = 1$), если $0 \leq \lambda^2 < \lambda_1^2$, и для них степень неустойчивости $\chi = 2$, если $\lambda^2 > \lambda_1^2$. Вращения вокруг оси x_2 устойчивы ($\chi = 0$), если $0 \leq \lambda^2 < \lambda_2^2$, и неустойчивы ($\chi = 1$), если $\lambda^2 > \lambda_2^2$. Для вращений вокруг оси x_3 имеем $\chi = 2$, если $0 \leq \lambda^2 < \lambda_{31}^2$; эти движения неустойчивы ($\chi = 1$), если $\lambda_{31}^2 < \lambda^2 < \lambda_{32}^2$, и устойчивы, если $\lambda^2 > \lambda_{32}^2$.

Рассмотрим теперь движения (3). Обозначим через $\lambda^4 = \lambda_*^4$ корень уравнения $dk/d\lambda = 0$

$$\lambda_*^4 = \frac{3(mg)^2 (a_3^2 - a_2^2)^2}{(J_3 - J_2)(J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2)}.$$

Тогда, если значение λ_*^2 не принадлежит интервалу $\lambda_{32}^2 < \lambda^2 < \lambda_2^2$, то для этого интервала $dk/d\lambda < 0$ и с учетом (6) все движения (3) устойчивы ($\chi = 0$). Если же $\lambda_{32}^2 < \lambda_*^2 < \lambda_2^2$, то движения (3) устойчивы ($\chi = 0$), если $\lambda_{32}^2 < \lambda^2 < \lambda_*^2$, и неустойчивы ($\chi = 1$), если $\lambda_*^2 < \lambda^2 < \lambda_2^2$. Значению $\lambda^2 = \lambda_*^2$ соответствуют две точки бифуркации на ветви L_4 , для которых $\lambda = \pm \lambda_*$, $\sigma = \sigma_*$, $k = \pm k_*$, где

$$\sigma_* = \frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} \lambda_*^2, \\ k_* = \frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} \lambda_* + \frac{(mg)^2 (a_3^2 - a_2^2)}{\lambda_*^3 (J_3 - J_2)}.$$

Рассмотрим, наконец, движения (4). Обозначим через $\lambda^4 = \lambda_{**}^4$ корень уравнения $dk/d\lambda = 0$

$$\lambda_{**}^4 = \frac{3(mg)^2 (a_3^2 - a_1^2)^2}{(J_3 - J_1)(J_1 a_3^2 - J_3 a_1^2)}.$$

Тогда если значение λ_{**}^2 не принадлежит интервалу $\lambda_{31}^2 < \lambda^2 < \lambda_1^2$, то для этого интервала $dk/d\lambda < 0$ и в силу

(7) все движения (4) неустойчивы ($\chi = 1$). Если же $\lambda_{31}^2 < \lambda_{**}^2 < \lambda_1^2$, то движения (4) неустойчивы ($\chi = 1$), если $\lambda_{31}^2 < \lambda^2 < \lambda_{**}^2$, и для них $\chi = 2$, если $\lambda_{**}^2 < \lambda^2 < \lambda_1^2$. Значению $\lambda^2 = \lambda_{**}^2$ отвечают две точки бифуркации на ветви L_5 , для которых $\lambda = \pm \lambda_{**}$, $\sigma = \sigma_{**}$, $k = \pm k_{**}$, где

$$\sigma_{**} = \frac{J_1 a_3^2 - J_3 a_1^2}{a_3^2 - a_1^2} \lambda_{**}^2,$$

$$k_{**} = \frac{J_1 a_3^2 - J_3 a_1^2}{a_3^2 - a_1^2} \lambda_{**} + \frac{(mg)^2 (a_3^2 - a_1^2)}{\lambda_{**}^3 (J_3 - J_1)}.$$

На рис. 2.8 указано распределение степени неустойчивости движений (2)–(4) на ветвях кривой L для $k > 0$ в случае, когда $J_2 a_3^2 < J_3 a_2^2$.

Задача 2.2.17. Тело, ограниченное эллипсоидальной поверхностью, главные оси которой совпадают с главными центральными осями инерции, движется на гладкой горизонтальной плоскости. Исследовать стационарные вращения тела, их ветвление и устойчивость в случае, когда $J_1 < J_2 < J_3$, $a_1 < a_3 < a_2$.

Указание. Решение задачи получается из решения задачи 2.2.16, если во всех формулах ее решения индексы 1, 2, 3 заменить соответственно на 2, 3, 1.

Задача 2.2.18. Тело, ограниченное эллипсоидальной поверхностью, главные оси которой совпадают с главными центральными осями инерции, движется на гладкой горизонтальной плоскости. Исследовать стационарные вращения тела, их ветвление и устойчивость в случае, когда

$$J_1 < J_2 < J_3, \quad a_1 < a_2 < a_3,$$

$$\kappa = (J_3 - J_2) a_1^2 + (J_1 - J_3) a_2^2 + (J_2 - J_1) a_3^2 > 0. \quad (1)$$

Использовать теорему Рауса.

Решение. Уравнения движения тела допускают первые интегралы:

$$U = m\dot{z}^2 + J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 + 2mgz = \text{const},$$

$$z = \sqrt{a_1^2 \gamma_1^2 + a_2^2 \gamma_2^2 + a_3^2 \gamma_3^2},$$

$$U_1 = J_1 \omega_1 \gamma_1 + J_2 \omega_2 \gamma_2 + J_3 \omega_3 \gamma_3 = k,$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Рассмотрим функцию

$$2W = U - 2\lambda U_1 + \sigma U_2 = m\dot{z}^2 + J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 + \\ + 2mgz + (\sigma - J_1\lambda^2)\gamma_1^2 + (\sigma - J_2\lambda^2)\gamma_2^2 + (\sigma - J_3\lambda^2)\gamma_3^2,$$

где

$$\Omega_1 = \omega_1 - \lambda\gamma_1 \quad (123),$$

а λ и σ — множители Лагранжа. Интеграл $U_1 = k$ представим в виде

$$U_1 = J_1\Omega_1\gamma_1 + J_2\Omega_2\gamma_2 + J_3\Omega_3\gamma_3 + \\ + \lambda(J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2) = k.$$

Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \Omega_1} = J_1\Omega_1 = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \left(\sigma - J_1\lambda^2 + \frac{mg}{z} a_1^2 \right) \gamma_1 = 0 \quad (123),$$

которые с учетом уравнений $U_1 = k$, $U_2 = 1$ и условий (1) допускают следующие шесть однопараметрических семейств решений:

$$\dot{z} = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \quad (\omega_1 = \lambda, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0), \\ \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad (2) \\ \sigma = J_1\lambda^2 - mga_1, \quad k = J_1\lambda \quad (123);$$

$$\dot{z} = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \quad (\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \lambda\gamma_2, \quad \omega_3 = \lambda\gamma_3), \\ \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2^2 = \frac{a_3^2(\lambda^4 - \lambda_{32}^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_2^2)},$$

$$\gamma_3^2 = \frac{a_2^2(\lambda_{22}^4 - \lambda^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_2^2)}, \quad \lambda_{32}^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_2^2)}{a_3(J_3 - J_2)}, \quad \lambda_{22}^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_2^2)}{a_2(J_3 - J_2)},$$

$$\lambda_{32}^2 \leq \lambda \leq \lambda_{22}^2, \quad \sigma = \frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} \lambda^2, \quad k = J_{23} \lambda,$$

$$J_{23} = \frac{J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2}{a_3^2 - a_2^2} + \frac{(mg)^2(a_3^2 - a_2^2)}{\lambda^4(J_3 - J_2)}; \quad (3)$$

$$\dot{z} = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \quad (\omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \lambda\gamma_3, \quad \omega_1 = \lambda\gamma_1),$$

$$\gamma_2 = 0, \quad \gamma_3^2 = \frac{a_1^2 (\lambda_{12}^4 - \lambda^4)}{\lambda^4 (a_3^2 - a_1^2)}, \quad \gamma_1^2 = \frac{a_3^2 (\lambda^4 - \lambda_{31}^4)}{\lambda^4 (a_3^2 - a_1^2)},$$

$$\lambda_{12}^2 = \frac{mg (a_3^2 - a_1^2)}{a_1 (J_3 - J_1)},$$

$$\lambda_{31}^2 = \frac{mg (a_3^2 - a_1^2)}{a_3 (J_3 - J_1)}, \quad \lambda_{31}^2 \leq \lambda^2 \leq \lambda_{12}^2,$$

$$\sigma = \frac{J_1 a_3^2 - J_3 a_1^2}{a_3^2 - a_1^2} \lambda^2, \quad k = J_{31} \lambda,$$

$$J_{31} = \frac{J_1 a_3^2 - J_3 a_1^2}{a_3^2 - a_1^2} + \frac{(mg)^2 (a_3^2 - a_1^2)}{\lambda^4 (J_3 - J_1)},$$

$$\dot{z} = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \quad (\omega_3 = 0, \quad \omega_1 = \lambda\gamma_1, \quad \omega_2 = \lambda\gamma_2),$$

$$\gamma_3 = 0, \quad \gamma_1^2 = \frac{a_2^2 (\lambda^4 - \lambda_{21}^4)}{\lambda^4 (a_2^2 - a_1^2)},$$

$$\gamma_2^2 = \frac{a_1^2 (\lambda_{11}^4 - \lambda^4)}{\lambda^4 (a_2^2 - a_1^2)}, \quad \lambda_{21}^2 = \frac{mg (a_2^2 - a_1^2)}{a_2 (J_2 - J_1)}, \quad \lambda_{11}^2 = \frac{mg (a_2^2 - a_1^2)}{a_1 (J_2 - J_1)},$$

$$\lambda_{21}^2 \leq \lambda^2 \leq \lambda_{11}^2, \quad \sigma = \frac{J_1 a_2^2 - J_2 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \lambda^2, \quad k = J_{12} \lambda,$$

$$J_{12} = \frac{J_1 a_2^2 - J_2 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{(mg)^2 (a_2^2 - a_1^2)}{\lambda^4 (J_2 - J_1)}.$$

Решения (2) описывают равномерные вращения тела вокруг главных центральных осей инерции, решения (3) — вращения вокруг осей, лежащих в главных плоскостях центрального эллипсоида инерции и ортогональных его горизонтально расположенным большой, средней и малой оси соответственно.

Решения (2) и (3) можно представить геометрически в пространстве параметров λ , σ , k точками кривой L , шесть ветвей L_1, \dots, L_6 которой определяются уравнениями вида $\sigma = \sigma(\lambda)$, $k = k(\lambda)$ в (2) и (3). На рис. 2.9 показана проекция кривой L на плоскость (k, λ) .

Исследуем устойчивость движений (2) и (3) по отношению к величинам \dot{z} , ω_s , γ_s ($s = 1, 2, 3$). Обозначим через η_s вариации величин γ_s , а для остальных переменных сохраним прежние обозначения.

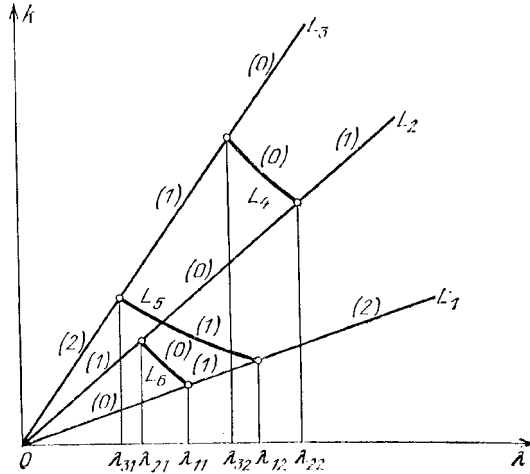


Рис. 2.9

Для движений (2) $\delta^2 W$ при условиях $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ имеет вид соответственно

$$\delta^2 W = m\dot{z}^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 + \left[(J_1 - J_2)\lambda^2 + \frac{mg}{a_1}(a_2^2 - a_1^2) \right] \eta_2^2 + \\ + \left[(J_1 - J_3)\lambda^2 + \frac{mg}{a_1}(a_3^2 - a_1^2) \right] \eta_3^2,$$

$$\delta^2 W = m\dot{z}^2 + J_3\Omega_3^2 + J_1\Omega_1^2 + \left[(J_2 - J_3)\lambda^2 + \frac{mg}{a_2}(a_3^2 - a_2^2) \right] \eta_3^2 + \\ + \left[(J_2 - J_1)\lambda^2 + \frac{mg}{a_2}(a_1^2 - a_2^2) \right] \eta_1^2, \quad (4)$$

$$\delta^2 W = m\dot{z}^2 + J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + \left[(J_3 - J_1)\lambda^2 + \frac{mg}{a_3}(a_1^2 - a_3^2) \right] \eta_1^2 + \\ + \left[(J_3 - J_2)\lambda^2 + \frac{mg}{a_3}(a_2^2 - a_3^2) \right] \eta_2^2.$$

Для движений (3) условия $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ приводят соответственно к соотношениям

$$\eta_3 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_3} \eta_2, \quad \Omega_3 = \frac{\gamma_2}{J_3 \gamma_3} [2\lambda (J_3 - J_2) \eta_2 - J_2 \Omega_2] \quad (123),$$

и для $\delta^2 W$ получаем соответственно выражения

$$\begin{aligned}\delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_1 \Omega_1^2 + \frac{J_2 J_{23}}{J_3 \gamma_3^2} \left[\Omega_2 - \frac{2\lambda (J_3 - J_2) \gamma_2^2}{J_{23}} \eta_2 \right]^2 + \\ &\quad + \frac{\kappa \lambda^2}{a_3^2 - a_2^2} \eta_1^2 - \frac{(J_3 - J_2)^3 \lambda^6 \gamma_2^2}{(mg)^2 J_{23} (a_3^2 - a_2^2)} \frac{dk}{d\lambda} \eta_2^2, \\ \delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_2 \Omega_2^2 + \frac{J_3 J_{31}}{J_1 \gamma_1^2} \left[\Omega_3 - \frac{2\lambda (J_1 - J_3) \gamma_3^2}{J_{31}} \eta_3 \right]^2 + \\ &\quad + \frac{\kappa \lambda^2}{a_1^2 - a_3^2} \eta_2^2 - \frac{(J_3 - J_1)^3 \lambda^6 \gamma_3^2}{(mg)^2 J_{31} (a_3^2 - a_1^2)} \frac{dk}{d\lambda} \eta_3^2, \quad (5) \\ \delta^2 W &= m\dot{z}^2 + J_3 \Omega_3^2 + \frac{J_1 J_{12}}{J_2 \gamma_2^2} \left[\Omega_1 - \frac{2\lambda (J_2 - J_1) \gamma_1^2}{J_{12}} \eta_1 \right]^2 + \\ &\quad + \frac{\kappa \lambda}{a_2^2 - a_1^2} \eta_3^2 - \frac{(J_1 - J_2)^3 \lambda^6 \gamma_1^2}{(mg)^2 J_{12} (a_1^2 - a_2^2)} \frac{dk}{d\lambda} \eta_1^2.\end{aligned}$$

Рассмотрим движения (2). Из (4) заключаем, что вращения вокруг оси x_1 устойчивы ($\chi=0$), если $0 \leq \lambda^2 < \lambda_{11}^2$, неустойчивы ($\chi=1$), если $\lambda_{11}^2 < \lambda^2 < \lambda_{12}^2$, и для них степень неустойчивости $\chi=2$, если $\lambda^2 > \lambda_{12}^2$.

Вращения вокруг оси x_2 неустойчивы ($\chi=1$), если $0 \leq \lambda^2 < \lambda_{21}^2$ или $\lambda^2 > \lambda_{22}^2$, и устойчивы ($\chi=0$), если $\lambda_{21}^2 < \lambda^2 < \lambda_{22}^2$. Вращения вокруг оси x_3 имеют степень неустойчивости $\chi=2$, если $0 \leq \lambda^2 < \lambda_{31}^2$, неустойчивы ($\chi=1$), если $\lambda_{31}^2 < \lambda^2 < \lambda_{32}^2$, и устойчивы ($\chi=0$), если $\lambda^2 > \lambda_{32}^2$.

Рассмотрим теперь движения (3). Для вращений вокруг осей, лежащих в плоскости $x_1=0$, обозначим через $\lambda^4 = \lambda_*^4$ корень уравнения $dk/d\lambda = 0$

$$\lambda_*^4 = \frac{3(mg)^2 (a_3^2 - a_2^2)^2}{(J_3 - J_2)(J_2 a_3^2 - J_3 a_2^2)}.$$

Тогда если значение λ_*^2 не принадлежит интервалу $\lambda_{32}^2 < \lambda^2 < \lambda_{22}^2$, то для этого интервала $dk/d\lambda < 0$ и в силу (5) все рассматриваемые движения устойчивы ($\chi=0$). Если же $\lambda_{32}^2 < \lambda_*^2 < \lambda_{22}^2$, то они устойчивы ($\chi=0$), если $\lambda_{32}^2 < \lambda^2 < \lambda_*^2$, и неустойчивы ($\chi=1$), если $\lambda_*^2 < \lambda^2 < \lambda_{22}^2$.

Рассмотрим далее вращения вокруг осей, лежащих в плоскости $x_2 = 0$. Обозначим через $\lambda^4 = \lambda_{**}^4$ корень уравнения $dk/d\lambda = 0$

$$\lambda_{**}^4 = \frac{3(mg)^2(a_3^2 - a_1^2)^2}{(J_3 - J_1)(J_1 a_3^2 - J_3 a_1^2)}.$$

Если значение λ_{**}^4 не принадлежит интервалу $\lambda_{31}^2 < \lambda^2 < \lambda_{12}^2$, то для этого интервала $dk/d\lambda < 0$ и в силу (5) все рассматриваемые вращения неустойчивы ($\chi = 1$). Если же $\lambda_{31}^2 < \lambda_{**}^2 < \lambda_{12}^2$, то они неустойчивы ($\chi = 1$), если $\lambda_{31}^2 < \lambda^2 < \lambda_{**}^2$, и для них $\chi = 2$, если $\lambda_{**}^2 < \lambda^2 < \lambda_{12}^2$.

Рассмотрим, наконец, вращения вокруг осей, лежащих в плоскости $x_3 = 0$. Обозначим через $\lambda^4 = \lambda_{***}^4$ корень уравнения $dk/d\lambda = 0$

$$\lambda_{***}^4 = \frac{3(mg)^2(a_1^2 - a_2^2)^2}{(J_1 - J_2)(J_2 a_1^2 - J_1 a_2^2)}.$$

Если значение λ_{***}^2 не принадлежит интервалу $\lambda_{21}^2 < \lambda^2 < \lambda_{11}^2$, то для этого интервала $dk/d\lambda < 0$ и в силу (5) все рассматриваемые движения устойчивы ($\chi = 0$). Если же $\lambda_{21}^2 < \lambda_{***}^2 < \lambda_{11}^2$, то эти движения устойчивы ($\chi = 0$), если $\lambda_{21}^2 < \lambda^2 < \lambda_{***}^2$, и неустойчивы ($\chi = 1$), если $\lambda_{***}^2 < \lambda^2 < \lambda_{11}^2$.

На рис. 2.9 указано распределение степени неустойчивости на ветвях кривой L для $k > 0$ в случае, когда для всех трех семейств движений (3) $dk/d\lambda < 0$.

Задача 2.2.19. При условиях предыдущей задачи исследовать случай, когда

$$J_1 < J_2 < J_3, \quad a_1 < a_2 < a_3,$$

$$\kappa = (J_3 - J_2)a_1^2 + (J_1 - J_3)a_2^2 + (J_2 - J_1)a_3^2 < 0.$$

§ 2.3. Тело на абсолютно шероховатой плоскости

Рассмотрим теперь движение динамически симметричного тела с центром масс на оси симметрии, совпадающей с осью x_3 , на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Пусть тело в окрестности точки опоры ограничено сферической поверхностью радиусом R и с центром в точке O на оси симметрии, координату которой по

оси x_3 обозначим через a . Обозначим через v_s , N_s проекции на оси x_s ($s = 1, 2, 3$) вектора скорости центра масс и реакции опорной плоскости, отнесенной к массе тела.

Уравнения движения получим из теоремы о движении центра масс и теоремы моментов и запишем их в подвижной системе осей координат:

$$\dot{v}_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 = -g\gamma_1 + N_1 \quad (123), \quad (1)$$

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = m(x_2 N_3 - x_3 N_2) \quad (123), \quad (2)$$

где

$$x_1 = -R\gamma_1, \quad x_2 = -R\gamma_2, \quad x_3 = -R\gamma_3 + a.$$

К этим уравнениям следует присоединить уравнения Пуассона

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3 \quad (123) \quad (3)$$

и кинематические соотношения

$$v_1 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 = 0 \quad (123), \quad (4)$$

выражающие равенство нулю скорости точки опоры тела. Уравнения (1)–(4) образуют замкнутую систему двенадцати уравнений относительно такого же числа переменных v_s , ω_s , γ_s , N_s ($s = 1, 2, 3$) и допускают первые интегралы:

$$m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3\omega_3^2 - 2mga\gamma_3 = \text{const},$$

$$J_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + J_3\omega_3\left(\gamma_3 - \frac{a}{R}\right) = \text{const},$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

представляющие собой соответственно интеграл энергии, интеграл Желе и геометрический интеграл.

Задача 2.3.1. Динамически симметричное тело с центром масс на оси симметрии ограничено поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью симметрии тела. Поверхность тела в окрестности точки пересечения с осью симметрии представляет собой сферическую поверхность. Тело движется на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Исследовать устойчивость равномерных вращений тела вокруг вертикально направленной оси симметрии. Использовать метод Четаева.

Решение. Уравнения движения тела допускают частное решение:

$$\begin{aligned} v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad N_1 = N_2 = 0, \quad N_3 = g, \end{aligned} \quad (1)$$

описывающее равномерное вращение тела вокруг вертикальной оси симметрии, и первые интегралы:

$$U = m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3\omega_3^2 - 2mga\gamma_3 = \text{const},$$

$$U_1 = J_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + J_3\omega_3\left(\gamma_3 - \frac{a}{R}\right) = \text{const},$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Исследуем устойчивость этого движения. В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi$, $\gamma_3 = 1 + \eta$, а для остальных величин сохраним прежние обозначения. Функцию Ляпунова V будем искать в виде связки интегралов

$$\begin{aligned} V = U - 2\lambda U_1 + \mu U_2 + \frac{1}{4}v(U_2 - 1)^2 = \\ = 2J_3\left[\omega - \left(1 - \frac{a}{R}\right)\lambda\right]\xi + 2(\mu - mga - J_3\omega\lambda)\eta + \\ + J_1[(\omega_1 - \lambda\gamma_1)^2 + (\omega_2 - \lambda\gamma_2)^2] + J_3(\xi - \lambda\eta)^2 + \\ + (\mu - J_1\lambda^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + (v + \mu - J_3\lambda^2)\eta^2 + \\ + m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \dots, \end{aligned}$$

где λ , μ , v — постоянные, подлежащие определению, а многоточием обозначены невыписанные члены выше второго порядка малости. Для того чтобы функция V не содержала линейных членов, постоянные λ и μ должны удовлетворять соотношениям

$$\omega - \left(1 - \frac{a}{R}\right)\lambda = 0, \quad \mu - mga - J_3\omega\lambda = 0,$$

из которых находим

$$\lambda = \frac{\omega R}{R - a}, \quad \mu = mga + \frac{J_3\omega^2 R}{R - a}.$$

Тогда для положительной определенности квадратичной части функции V необходимо и достаточно выполнения условий $\mu > J_1\lambda^2$, $v > J_3\lambda^2 - \mu$. Второму из этих условий

всегда можно удовлетворить при соответствующем выборе постоянной v , а первое можно представить в виде

$$\left(J_3 - J_1 \frac{R}{R-a}\right) \frac{R\omega^2}{R-a} + mga > 0. \quad (2)$$

При выполнении условия (2) функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости. Следовательно, неравенство (2) является достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (1) по отношению к величинам v_s, ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$).

Отметим, что при выводе условия (2) величины v_j, ω_j, γ_j ($j = 1, 2$), v_3, ξ, η рассматривались как независимые переменные. На самом деле между ними имеют место соотношения

$$\begin{aligned} v_1 &= (R-a)\omega_2 - R\omega\gamma_2 + R(\omega_2\eta - \gamma_2\xi), \\ v_2 &= R\omega\gamma_1 - (R-a)\omega_1 + R(\gamma_1\xi - \omega_1\eta), \\ v_3 &= R(\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1), \end{aligned} \quad (3)$$

выражающие равенство нулю скорости точки опоры тела.

Естественно предположить, что учет соотношений (3) при определении условий положительной определенности функции V мог бы привести к более широким, чем (2), условиям устойчивости.

Покажем, что в рассматриваемой задаче при учете соотношений (3) мы снова получим то же самое условие (2).

Действительно, из (3) находим с точностью до членов выше второго порядка малости

$$\begin{aligned} \omega_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= (R-a)^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \\ &\quad - 2(R-a)R\omega(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + R^2\omega^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2). \end{aligned}$$

Тогда для квадратичной части V_2 функции V будем иметь выражение

$$\begin{aligned} V_2 &= [J_1 + m(R-a)^2](\omega_1^2 + \omega_2^2) - 2[J_1\lambda + \\ &\quad + m(R-a)R\omega](\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + (\mu + mR^2\omega^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \\ &\quad + J_3(\xi - \lambda\eta)^2 + (v + \mu - J_3\lambda^2)\eta^2. \end{aligned}$$

Условия положительной определенности квадратичной формы V_2 приводятся к неравенствам

$$\begin{aligned} v &> J_3\lambda^2 - \mu, \\ [J_1 + m(R-a)^2](\mu + mR^2\omega^2) &> [J_1\lambda + m(R-a)R\omega]^2, \end{aligned}$$

первое из которых выполняется для достаточно больших значений v , а второе можно представить в виде

$$[J_1 + m(R - a)^2] \left[\left(J_3 - J_1 \frac{R}{R - a} \right) \frac{R\omega^2}{R - a} + mga \right] > 0.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству (2).

Задача 2.3.2. Динамически симметричное тело с центром масс на оси симметрии ограничено поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью симметрии тела. Поверхность тела в окрестности точки пересечения с осью симметрии представляет собой сферическую поверхность. Тело движется на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Найти достаточные условия неустойчивости равномерных вращений тела вокруг вертикально направленной оси симметрии. Использовать теорему Ляпунова о неустойчивости.

Решение. Уравнения движения тела имеют вид

$$\dot{v}_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 = -g\gamma_1 + N_1 \quad (123),$$

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = m(x_2 N_3 - x_3 N_2) \quad (J_1 = J_2) \quad (123),$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad v_1 = x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2 \quad (123),$$

$$x_1 = -R\gamma_1, \quad x_2 = -R\gamma_2, \quad x_3 = -R\gamma_3 + a.$$

Эти уравнения после исключения из них N_1, N_2, N_3 представим в виде

$$\begin{aligned} & \{J_1 + m[R^2\gamma_2^2 + (R\gamma_3 - a)^2]\} \dot{\omega}_1 - \\ & \quad - mR^2\gamma_1\gamma_2\dot{\omega}_2 - mR\gamma_1(R\gamma_3 - a)\dot{\omega}_3 = \\ & = -mga\gamma_2 - maR(\omega_1^2 + \omega_2^2)\gamma_2 - [J_3 - J_1 + ma(R\gamma_3 - a)]\omega_2\omega_3, \\ & \{J_1 + m[R^2\gamma_1^2 + (R\gamma_3 - a)^2]\} \dot{\omega}_2 - \\ & \quad - mR^2\gamma_1\gamma_2\dot{\omega}_1 - mR\gamma_2(R\gamma_3 - a)\dot{\omega}_3 = \\ & = mga\gamma_1 + maR(\omega_1^2 + \omega_2^2)\gamma_1 + [J_3 - J_1 + ma(R\gamma_3 - a)]\omega_3\omega_1, \\ & [J_3 + mR^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)] \dot{\omega}_3 - mR(R\gamma_3 - a)(\dot{\omega}_1\gamma_1 + \dot{\omega}_2\gamma_2) = \\ & \quad = maR(\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1)\omega_3, \\ & \dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения (1) допускают первые интегралы:

$$J_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + J_3\omega_3\left(\gamma_3 - \frac{a}{R}\right) = \text{const}, \quad (2)$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (3)$$

и однопараметрическое семейство частных решений

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad (4)$$

описывающих равномерные вращения тела вокруг вертикально направленной оси симметрии.

Исследуем устойчивость этого движения. В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi$, $\gamma_3 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Ограничимся рассмотрением таких возмущенных движений, для которых постоянная интеграла (2) сохраняет то же самое значение, что и для невозмущенного движения (4). Тогда, разрешая интегралы (2) и (3) относительно ξ и η , получим

$$\eta = \gamma_3 - 1 = \sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} - 1 = -\frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \dots,$$

$$\xi = \frac{J_3\omega(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 2J_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)}{2J_3(1 - a/R)} + \dots,$$

где не выписаны члены выше второго порядка малости по возмущениям. С учетом этих соотношений уравнения возмущенного движения, получаемые из уравнений (1), приводятся к виду

$$\begin{aligned} [J_1 + m(R-a)^2] \dot{\omega}_1 &= -[J_3 - J_1 + ma(R-a)]\omega\omega_2 - \\ &\quad - mga\gamma_2 + \Phi_1(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2), \\ [J_1 + m(R-a)^2] \dot{\omega}_2 &= [J_3 - J_1 + ma(R-a)]\omega\omega_1 + \\ &\quad + mga\gamma_1 + \Phi_2(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2), \\ \dot{\gamma}_1 &= \omega\gamma_2 - \omega_2 + \Gamma_1(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2), \\ \dot{\gamma}_2 &= -\omega\gamma_1 + \omega_1 + \Gamma_2(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где через Φ_j , Γ_j ($j=1, 2$) обозначены члены выше первого порядка малости.

Рассмотрим функцию

$$V(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2) = [J_1 + m(R-a)^2](\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1).$$

Ее производная по времени \dot{V} в силу уравнений (5) имеет вид

$$\dot{V} = [J_1 + m(R-a)^2](\omega_1^2 + \omega_2^2) - \\ - [J_3 + mR(R-a)]\omega(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) - mga(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + W,$$

где W — совокупность членов выше второго порядка малости, и при выполнении условия

$$[J_3 + mR(R-a)]^2\omega^2 + 4mga[J_1 + m(R-a)^2] < 0 \quad (6)$$

представляет собой определенно-положительную функцию переменных ω_j, γ_j ($j=1, 2$). Функция V в сколь угодно малой окрестности невозмущенного движения (4) может принимать положительные значения. Поэтому при выполнении условия (6) функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости. Следовательно, условие (6) является достаточным условием неустойчивости невозмущенного движения (4) по отношению к величинам v_s, ω_s, γ_s ($s=1, 2, 3$).

Задача 2.3.3. Динамически симметричное тело с центром масс на оси симметрии ограничено поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью симметрии тела. Поверхность тела в окрестности точки пересечения с осью симметрии представляет собой сферическую поверхность. Тело движется на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Найти необходимые условия устойчивости равномерных вращений тела вокруг вертикально направленной оси симметрии путем анализа корней характеристического уравнения.

Решение. Уравнения движения тела имеют вид

$$\dot{v}_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 = -g\gamma_1 + N_1 \quad (123),$$

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = m(x_2 N_3 - x_3 N_2) \quad (123) \quad (J_1 = J_2),$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad v_1 = x_2\omega_3 - x_3\omega_2 \quad (123),$$

$$x_1 = -R\gamma_1, \quad x_2 = -R\gamma_2, \quad x_3 = -R\gamma_3 + a$$

и допускают частное решение

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad N_1 = N_2 = 0, \quad N_3 = g, \quad (1)$$

описывающее равномерное вращение тела вокруг вертикально направленной оси симметрии.

Исследуем устойчивость движения (1). В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi$, $\gamma_3 = 1 + \eta$, $N_3 = gN'_3$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Уравнения возмущенного движения в линейном приближении записываются в виде

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \omega v_2 - g\gamma_1 + N_1, & \dot{v}_2 &= -\omega v_1 - g\gamma_2 + N_2, \\ \dot{v}_3 &= -g\eta + N'_3,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}v_1 &= (R-a)\omega_2 - R\omega\gamma_2, & v_2 &= -(R-a)\omega_1 + R\omega\gamma_1, \\ v_3 &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega\gamma_2 - \omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = -\omega\gamma_1 + \omega_1, \quad \dot{\eta} = 0,\tag{4}$$

$$\begin{aligned}J_1\dot{\omega}_1 &= (J_1 - J_3)\omega\omega_2 + m[-Rg\gamma_2 + (R-a)N_2], \\ J_1\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega\omega_1 + m[Rg\gamma_1 - (R-a)N_1], & \dot{\xi} &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Из уравнений (2) с учетом (3) и (4) находим

$$\begin{aligned}N_1 &= (R-a)\dot{\omega}_2 + g\gamma_1 - a\omega\omega_1, \\ N_2 &= -(R-a)\dot{\omega}_1 + g\gamma_2 - a\omega\omega_2.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (5), получаем уравнения

$$\begin{aligned}[J_1 + m(R-a)^2]\dot{\omega}_1 + [J_3 - J_1 + ma(R-a)]\omega\omega_2 + \\ + mga\gamma_2 &= 0, \\ [J_1 + m(R-a)^2]\dot{\omega}_2 - [J_3 - J_1 + ma(R-a)]\omega\omega_1 - \\ - mga\gamma_1 &= 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (4) и последним из уравнений (5) образуют замкнутую систему шести уравнений относительно переменных ω_j , γ_j ($j=1, 2$), ξ , η , которую представим в виде

$$\begin{aligned}[J_1 + m(R-a)^2]\dot{\Omega} - i\omega[J_3 - J_1 + ma(R-a)]\Omega - \\ - imga\Gamma = 0, \\ \dot{\Gamma} + i\omega\Gamma - i\Omega = 0, & \quad \dot{\xi} = 0, \quad \dot{\eta} = 0,\end{aligned}\tag{6}$$

где $\Omega = \omega_1 + i\omega_2$, $\Gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$.

Решение уравнений (6) будем искать в виде

$$(\Omega, \Gamma, \xi, \eta) = (\Omega^0, \Gamma^0, \xi^0, \eta^0) \exp[(\lambda - i\omega)t],$$

где Ω^0 , Γ^0 , ξ^0 , η^0 — начальные значения переменных Ω ,

Γ , ξ , η , а значения постоянной λ определяются уравнением

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 \{J_1 + m(R-a)^2\} \lambda^2 - i\omega \{J_3 + mR(R-a)\} \lambda + mga = 0.$$

Для того чтобы это уравнение не имело корней с положительной вещественной частью, необходимо выполнение условия

$$[J_3 + mR(R-a)]^2 \omega^2 + 4mga [J_1 + m(R-a)^2] \geq 0. \quad (7)$$

Итак, для устойчивости невозмущенного движения (1) по отношению к величинам v_s , ω_s , γ_s ($s = 1, 2, 3$) необходимо выполнение условия (7).

Задача 2.3.4. Динамически симметричное тело с центром масс на оси симметрии опирается на горизонтальную абсолютно шероховатую плоскость. Тело касается опорной плоскости только одной своей точкой и в ее окрестности ограничено сферической поверхностью с центром на оси симметрии. Найти регулярные прецессии тела и исследовать их устойчивость. Использовать теорему Рауса.

Решение. Уравнения движения тела допускают первые интегралы

$$U = m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3\omega_3^2 - 2mga\gamma_3 = \text{const},$$

$$U_1 = J_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + J_3\omega_3(\gamma_3 - a/R) = \text{const},$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Рассмотрим функцию (λ — параметр)

$$W = U - 2\lambda U_1 + J_1\lambda^2 U_2 = m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + J_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + J_3\omega_3^2 + J_1\lambda^2\gamma_3^2 - 2\lambda J_3\omega_3(\gamma_3 - a/R) - 2mga\gamma_3,$$

где $\Omega_1 = \omega_1 - \lambda\gamma_1$, $\Omega_2 = \omega_2 - \lambda\gamma_2$.

Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial v_s} = 2mv_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial W}{\partial \Omega_j} = 2J_1\Omega_j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_3} = 2J_3 \left[\omega_3 - \lambda \left(\gamma_3 - \frac{a}{R} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_3} = 2(\gamma_3 J_1 \lambda^2 - J_3 \lambda \omega_3 - mga) = 0,$$

из которых находим

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \lambda \left(\gamma_3^0 - \frac{a}{R} \right), \quad (1)$$

где γ_3^0 определяется из уравнения

$$\lambda^2 \left[(J_1 - J_3) \gamma_3^0 + J_3 \frac{a}{R} \right] = m g a.$$

В исходных переменных решение (1) записывается в виде

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad \omega_1 = \lambda \gamma_1, \quad \omega_2 = \lambda \gamma_2, \quad \omega_3 = \lambda \left(\gamma_3^0 - \frac{a}{R} \right)$$

и описывает однопараметрическое семейство регулярных прецессий тела, для которых угловые скорости прецессии и собственного вращения соответственно равны λ и $-\lambda a/R$, при этом скорость точки опоры Q тела равна нулю, $\mathbf{v}_Q = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, потому что

$$\mathbf{r} = a \mathbf{i}_3 - R \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\gamma} - \lambda \frac{a}{R} \mathbf{i}_3.$$

Исследуем устойчивость движения (1). В возмущенном движении положим $\omega_3 = \lambda \left(\gamma_3^0 - a/R \right) + \xi$, $\gamma_3 = \gamma_3^0 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Тогда для второй вариации $\delta^2 W$ функции W будем иметь выражение

$$\delta^2 W = m (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + J_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \\ + J_3 (\xi - \lambda \eta)^2 + \lambda^2 (J_1 - J_3) \eta^2,$$

которое при выполнении условия

$$J_1 > J_3 \quad (2)$$

представляет собой положительно-определенную квадратичную форму переменных $v_1, v_2, v_3, \Omega_1, \Omega_2, \xi, \eta$. Отсюда на основе теоремы Рауса заключаем, что неравенство (2) является достаточным условием устойчивости регулярных прецессий (1) по отношению к величинам $v_1, v_2, v_3, \Omega_1, \Omega_2, \omega_3, \gamma_3$.

Задача 2.3.5. Тяжелое твердое тело находится на неподвижной горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости и имеет с ней в этом положении только одну общую точку P , в которой главные радиусы кривизны поверхности тела имеют конечные значения (рис. 2.10). Показать, что среди действительных движений тела на

плоскости имеются равномерные вращения с произвольной угловой скоростью вокруг вертикали, проходящей через точку P . Исследовать устойчивость этих движений, используя теорему Ляпунова — Малкина.

Решение. Введем подвижную систему осей координат $Cx_1x_2x_3$ с началом в центре масс C тела и осями, направленными по его главным центральным осям инерции.

Уравнения движения тела на плоскости запишем в подвижной системе координат в векторной форме

$$m(\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{N}, \quad (1)$$

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{N}, \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0. \quad (4)$$

Они выражают теоремы об изменении количества движения (1) и момента количества движения (2), а также постоянство единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ вертикали (3) и равенство нулю скорости точки касания тела с плоскостью (4).

Здесь m и \mathbf{J} — масса и центральный тензор инерции тела, \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость тела, g — ускорение силы тяжести, \mathbf{r} — радиус-вектор точки касания тела с плоскостью, \mathbf{N} — реакция плоскости.

Связь между векторами $\boldsymbol{\gamma}$ и \mathbf{r} устанавливается с помощью уравнения поверхности тела;

если это уравнение представлено в виде

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (5)$$

то очевидно, что

$$\boldsymbol{\gamma} = - \frac{\text{grad } \Phi}{|\text{grad } \Phi|}. \quad (6)$$

Из уравнения (1) с учетом (4) находим

$$\mathbf{N} = mg\boldsymbol{\gamma} - m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})].$$

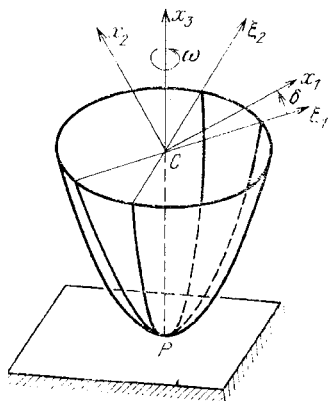


Рис. 2.10

Подставляя это выражение в (2), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ = mg(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}) - m\mathbf{r} \times [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (3), (7) с учетом (5), (6) представляют собой замкнутую систему уравнений для определения вектор-функций $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ (или $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r}).

Далее для простоты будем считать, что поверхность тела в окрестности его точки P представляет собой эллиптический параболоид вида

$$x_3 = -h + \frac{(x_1 \cos \delta - x_2 \sin \delta)^2}{2\rho_1} + \frac{(x_1 \sin \delta + x_2 \cos \delta)^2}{2\rho_2}. \quad (8)$$

Здесь (см. рис. 2.10) x_i ($i=1, 2, 3$) — проекции вектора \mathbf{r} на главные центральные оси инерции тела; ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке P с координатами $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -h$; h — высота центра масс тела в этой точке; δ — угол между направлением главной кривизны, отвечающей радиусу ρ_1 , и осью x_1 , отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть на плоскость Cx_1x_2 навстречу оси x_3 .

В системе координат $C\xi_1\xi_2x_3$, в которой плоскости $\xi_1=0$ и $\xi_2=0$ являются плоскостями симметрии параболоида, уравнение (8) имеет вид

$$x_3 = -h + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_1^2}{\rho_1} + \frac{\xi_2^2}{\rho_2} \right).$$

Из (6) и (8) получаем уравнения

$$\begin{aligned} x_1(\rho_1 \sin^2 \delta + \rho_2 \cos^2 \delta) + x_2(\rho_1 - \rho_2) \sin \delta \cos \delta = \\ = -\rho_1 \rho_2 \gamma_1 |\text{grad } \Phi|, \\ x_1(\rho_1 - \rho_2) \sin \delta \cos \delta + x_2(\rho_1 \cos^2 \delta + \rho_2 \sin^2 \delta) = \\ = -\rho_1 \rho_2 \gamma_2 |\text{grad } \Phi|, \\ 1 = \gamma_3 |\text{grad } \Phi|, \end{aligned}$$

разрешая которые относительно x_1 , x_2 , x_3 , находим

$$\begin{aligned} x_1 = -\frac{1}{\gamma_3} [(\rho_1 \cos^2 \delta + \rho_2 \sin^2 \delta) \gamma_1 + \\ + (\rho_2 - \rho_1) \gamma_2 \sin \delta \cos \delta], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 = & -\frac{1}{\gamma_3} [(\rho_2 - \rho_1) \gamma_1 \sin \delta \cos \delta + \\
& + (\rho_1 \sin^2 \delta + \rho_2 \cos^2 \delta) \gamma_2], \quad (9) \\
x_3 = & -h + \frac{1}{2\gamma_3^2} [(\rho_1 \cos^2 \delta + \rho_2 \sin^2 \delta) \gamma_1^2 + \\
& + 2(\rho_2 - \rho_1) \gamma_1 \gamma_2 \sin \delta \cos \delta + (\rho_1 \sin^2 \delta + \rho_2 \cos^2 \delta) \gamma_2^2].
\end{aligned}$$

Уравнения (3), (7) с учетом (9) допускают решение

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \\
x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = -h, \quad (10)
\end{aligned}$$

отвечающее равномерному вращению тела с угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через точку P .

Полагая $\omega_3 = \omega + y$, $\gamma_3 = 1 + z$ и сохраняя для γ_i , ω_i ($i = 1, 2$) прежние обозначения, запишем уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned}
J_3 \dot{y} = Y, \quad \dot{z} = Z, \quad \dot{\gamma}_1 - \omega \gamma_2 + \omega_2 = \Gamma_1, \\
\dot{\gamma}_2 + \omega \gamma_1 - \omega_1 = \Gamma_2, \\
(J_1 + mh^2) \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2 - mh^2) \omega \omega_2 - \\
- mh\omega [(\rho_1 \cos \delta + \rho_2 \sin \delta) \dot{\gamma}_1 + (\rho_2 - \rho_1) \dot{\gamma}_2 \sin \delta \cos \delta] + \\
+ m(g + h\omega^2) [(\rho_2 - \rho_1) \gamma_1 \sin \delta \cos \delta + \\
+ (\rho_1 \sin^2 \delta + \rho_2 \cos^2 \delta) \gamma_2] - mgh\gamma_2 = \Omega_1, \quad (11) \\
(J_2 + mh^2) \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1 - mh^2) \omega \omega_1 - \\
- mh\omega [(\rho_2 - \rho_1) \dot{\gamma}_1 \sin \delta \cos \delta + (\rho_1 \sin^2 \delta + \rho_2 \cos^2 \delta) \dot{\gamma}_2] - \\
- m(g + h\omega^2) [(\rho_1 \cos^2 \delta + \rho_2 \sin^2 \delta) \gamma_2 + \\
+ (\rho_2 - \rho_1) \gamma_2 \sin \delta \cos \delta] + mgh\gamma_1 = \Omega_2.
\end{aligned}$$

Здесь J_1, J_2, J_3 — главные центральные моменты инерции тела; Y, Z, Ω_i, Γ_i ($i = 1, 2$) — функции, зависящие от y, z, ω_i, γ_i ($i = 1, 2$), разложения которых по степеням указанных переменных начинаются с членов не ниже второго порядка малости, при этом Y и Z тождественно по y и z обращаются в нуль при $\omega_i = \gamma_i = 0$ ($i = 1, 2$).

Характеристическое уравнение, отвечающее системе (11), имеет вид

$$\lambda^2(a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4) = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
a_0 &= (J_1 + mh^2) (J_2 + mh^2) > 0, \\
a_1 &= \omega mh (J_2 - J_1) (\rho_2 - \rho_1) \sin \delta \cos \delta, \\
a_2 &= \{ (J_3 - J_1) (J_3 - J_2) + \\
&\quad + mh [(J_3 - J_1 \sin^2 \delta - J_2 \cos^2 \delta) (\rho_1 - h) + \\
&\quad + (J_3 - J_1 \cos^2 \delta - J_2 \sin^2 \delta) (\rho_2 - h)] + m^2 h^2 (\rho_1 - h) (\rho_2 - h) + \\
&\quad + (J_1 + mh^2) (J_2 + mh^2) \} \omega^2 + \\
&\quad + mg [(J_1 \sin^2 \delta + J_2 \cos^2 \delta + mh^2) (\rho_2 - h) + \\
&\quad + (J_1 \cos^2 \delta + J_2 \sin^2 \delta + mh^2) (\rho_1 - h)], \\
a_3 &= \omega^3 [(J_2 - J_1) mh (\rho_2 - \rho_1) \sin \delta \cos \delta], \\
a_4 &= \{ (J_3 - J_1) (J_3 - J_2) + \\
&\quad + mh [(J_3 - J_1 \sin^2 \delta - J_2 \cos^2 \delta) (\rho_2 - h) + \\
&\quad + (J_3 - J_1 \cos^2 \delta - J_2 \sin^2 \delta) (\rho_2 - h)] + \\
&\quad + m^2 h^2 (\rho_1 - h) (\rho_2 - h) \} \omega^4 + \\
&\quad + mg \{ (J_3 - J_1 \sin^2 \delta - J_2 \cos^2 \delta) (\rho_1 - h) + \\
&\quad + (J_3 - J_1 \cos^2 \delta - J_2 \sin^2 \delta) (\rho_2 - h) + \\
&\quad + 2mh (\rho_1 - h) (\rho_2 - h) \} \omega^2 + m^2 g^2 (\rho_1 - h) (\rho_2 - h).
\end{aligned}$$

При выполнении условий критерия Гурвица

$$\omega h (J_2 - J_1) (\rho_2 - \rho_1) \sin \delta \cos \delta > 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
&\{ (J_1 + J_2 - J_3) (\rho_1 + \rho_2 - 2h) - \\
&\quad - mh [4h^2 - 3h (\rho_1 + \rho_2) + 2\rho_1 \rho_2] \} \omega^2 - \\
&\quad - mg (\rho_1 - h) (\rho_2 - h) > 0, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{ (J_3 - J_1) (J_3 - J_2) + mh [(J_3 - J_1 \sin^2 \delta - J_2 \cos^2 \delta) \times \\
&\quad \times (\rho_1 - h) + (J_3 - J_1 \cos^2 \delta - J_2 \sin^2 \delta) (\rho_2 - h)] + \\
&\quad + m^2 h^2 (\rho_1 - h) (\rho_2 - h) \} \omega^4 + mg \{ (J_3 - J_1 \sin^2 \delta - J_2 \cos^2 \delta) \times \\
&\quad \times (\rho_1 - h) + (J_3 - J_1 \cos^2 \delta - J_2 \sin^2 \delta) (\rho_2 - h) + \\
&\quad + 2mh (\rho_1 - h) (\rho_2 - h) \} \omega^2 + m^2 g^2 (\rho_1 - h) (\rho_2 - h) > 0 \quad (15)
\end{aligned}$$

уравнение (12) имеет два нулевых корня и четыре корня с отрицательными вещественными частями. Поскольку в системе (11) нелинейные функции Y и Z тождественно по y и z обращаются в нуль при нулевых значениях переменных ω_i , γ_i ($i = 1, 2$), то при условиях (13) — (15) имеет место особый случай критического случая

двух нулевых корней и решение (10) устойчиво в силу теоремы Ляпунова — Малкина, причем асимптотически относительно y , ω_i , γ_i ($i = 1, 2$) (так как переменные y , γ_1 , γ_2 связаны соотношением $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + y^2 + 2y = 0$) и неасимптотически устойчиво относительно переменной z . При строгом нарушении хотя бы одного из неравенств (13) — (15) уравнение (12) имеет корень с положительной вещественной частью и решение (10) неустойчиво.

Анализ условий (13) — (15) проведем в предположении, что

$$J_3 > J_2 > J_1, \quad \rho_2 > \rho_1 > h > 0, \quad 0 < \delta < \pi/2. \quad (16)$$

Тогда неравенство (15) заведомо выполнено, неравенство (14) будет выполнено только при условии

$$\omega^2 > \frac{mg(\rho_1 - h)(\rho_2 - h)}{(J_1 + J_2 - J_3)(\rho_1 + \rho_2 - 2h) - mh[4h^2 - 3h(\rho_1 + \rho_2) + 2\rho_1\rho_2]} > 0, \quad (17)$$

а неравенство (13) приводится к виду $\omega > 0$.

Таким образом, вращение тела, удовлетворяющее условию (17), устойчиво только при вращении тела против часовой стрелки с достаточно большой угловой скоростью.

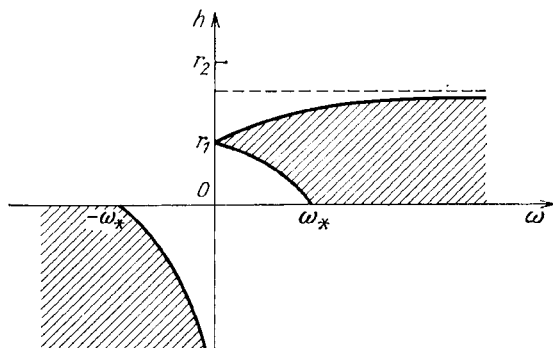


Рис. 2.11

Вращение такого тела по часовой стрелке будет неустойчиво.

При выполнении условия (17) и условия $J_3 > J_2 > J_1$, $\rho_2 > \rho_1$, $0 < \delta < \pi/2$ диаграмма устойчивости на плоскости (h, ω) имеет вид, указанный на рис. 2.11, где

$$\omega_*^2 = \frac{mg\rho_1\rho_2}{(J_1 + J_2 - J_3)(\rho_1 + \rho_2)}.$$

§ 2.4. Гиростат

Гиростатом называется механическая система S , состоящая из твердого тела S_1 и связанных с ним других тел, изменяемых или твердых, движение которых относительно тела S_1 не меняет геометрию масс системы S .

Примерами гиростатов являются, например, твердое тело, с которым неизменно связаны оси вращения нескольких (или одного) статически и динамически уравновешенных роторов, или твердое тело с полостью, целиком заполненной однородной жидкостью.

Рассмотрим движение в однородном поле сил тяжести гиростата S , состоящего из твердого тела S_1 с одной закрепленной точкой O и статически и динамически уравновешенного ротора S_2 , ось вращения которого неизменно связана с телом S_1 . Будем предполагать, что ротор вращается относительно тела с постоянной угловой скоростью Ω . Введем подвижную систему осей координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совместим с главными осями инерции гиростата для его неподвижной точки O . Пусть J_s — моменты инерции гиростата относительно осей x_s ($s = 1, 2, 3$); J — осевой момент инерции ротора относительно его оси вращения; ω_s — проекции на оси x_s вектора мгновенной угловой скорости тела S_1 ; a_s — координаты центра тяжести гиростата; P — его вес; γ_s и κ_s — косинусы углов, образуемых вертикалью и единичным вектором направления оси ротора с осями x_s ; $k_s = J\Omega\kappa_s$ — проекции на оси x_s гиростатического момента ротора.

Уравнения движения гиростата получим из теоремы об изменении момента количеств движения и запишем их в подвижной системе координат

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 + k_3\omega_2 - k_2\omega_3 = \\ = P(a_3\gamma_2 - a_2\gamma_3) \quad (123). \end{aligned} \quad (1)$$

К этим уравнениям следует присоединить уравнения Пуассона

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3 \quad (123). \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) образуют замкнутую систему шести уравнений относительно такого же числа переменных ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$).

Если $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, то гиростат называется *уравновешенным*; в противном случае — *неуравновешенным*.

Уравнения (1), (2) допускают первые интегралы:

$$\begin{aligned} J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 + 2P(a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + a_3 \gamma_3) = \text{const}, \\ (J_1 \omega_1 + k_1) \gamma_1 + (J_2 \omega_2 + k_2) \gamma_2 + \\ + (J_3 \omega_3 + k_3) \gamma_3 = k = \text{const}, \quad (3) \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \end{aligned}$$

представляющие собой соответственно интегралы энергии, площадей и геометрический.

Для уравновешенного гиростата, помимо интегралов (3), имеет место также интеграл постоянства момента количества движения

$$(J_1 \omega_1 + k_1)^2 + (J_2 \omega_2 + k_2)^2 + (J_3 \omega_3 + k_3)^2 = \text{const}. \quad (4)$$

В случае, когда $J_1 = J_2$, $a_1 = a_2 = 0$, $k_1 = k_2 = 0$, уравнения (1) допускают интеграл

$$\omega_3 = \text{const}. \quad (5)$$

Задача 2.4.1. Исследовать устойчивость равномерных вращений уравновешенного гиростата по отношению к величинам ω_1 , ω_2 , ω_3 в случае, когда ось ротора коллинеарна главной центральной оси инерции гиростата. Проанализировать влияние вращения ротора на устойчивость равномерных вращений гиростата. Использовать теорему Пауса.

Решение. Будем считать, что ось ротора коллинеарна оси x_3 ; тогда $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k = J\Omega$ и уравнения движения гиростата допускают первые интегралы

$$U = J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + (J_3 \omega_3 + k)^2 = \text{const},$$

$$U_1 = J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = \text{const}.$$

Рассмотрим функцию $2W = U - \lambda U_1$, где λ — неопределенный множитель Лагранжа. Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_1} = J_1 (J_1 - \lambda) \omega_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \omega_2} = J_2 (J_2 - \lambda) \omega_2 = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_3} = J_3 [(J_3 - \lambda) \omega_3 + k] = 0,$$

которые допускают решение

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega > 0, \quad \lambda = J_3 + J \frac{\Omega}{\omega}. \quad (1)$$

Это решение описывает равномерное вращение гиростата вокруг оси x_3 с угловой скоростью ω . Достаточные условия устойчивости движения (1) получим как условия знакоопределенности второй вариации $\delta^2 W$ функции W на линейном многообразии $\delta U_1 = 0$. В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi$, а для ω_1, ω_2 сохраним прежние обозначения. Тогда $\delta U_1 = 2J_3 \omega \xi = 0$, и для $\delta^2 W$ получаем выражение

$$\delta^2 W = J_1 \left(J_1 - J_3 - J \frac{\Omega}{\omega} \right) \omega_1^2 + J_2 \left(J_2 - J_3 - J \frac{\Omega}{\omega} \right) \omega_2^2.$$

При выполнении условия

$$\left(J_1 - J_3 - J \frac{\Omega}{\omega} \right) \left(J_2 - J_3 - J \frac{\Omega}{\omega} \right) > 0 \quad (2)$$

$\delta^2 W$ представляет собой знакоопределенную функцию, и по теореме Рауса движение (1) устойчиво. Если

$$\left(J_1 - J_3 - J \frac{\Omega}{\omega} \right) \left(J_2 - J_3 - J \frac{\Omega}{\omega} \right) < 0, \quad (3)$$

то движение (1) неустойчиво на основе обращения теоремы Рауса.

Введем обозначения

$$\Omega_1 = \frac{J_1 - J_3}{J} \omega, \quad \Omega_2 = \frac{J_2 - J_3}{J} \omega$$

и представим условия (2) и (3) в виде

$$(\Omega - \Omega_1)(\Omega - \Omega_2) > 0, \quad (2')$$

$$(\Omega - \Omega_1)(\Omega - \Omega_2) < 0. \quad (3')$$

Пусть $J_1 < J_2 < J_3$; тогда $\Omega_1 < \Omega_2 < 0$. В этом случае вращение (1) происходит вокруг малой оси эллипсоида инерции гиростата и оно устойчиво, если $\Omega < \Omega_1$ или $\Omega > \Omega_2$, и неустойчиво, если $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$.

При $\Omega = 0$ (ротор не вращается) невозмущенное вращение (1) гиростата устойчиво; при $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ вращение ротора (в направлении, противоположном невозмущенному вращению (1) гиростата) оказывает дестабилизирующее влияние на невозмущенное вращение (1) гиростата.

Пусть теперь $J_1 > J_2 > J_3$; тогда $\Omega_1 > \Omega_2 > 0$. В этом случае вращение (1) происходит вокруг большой оси эллипсоида инерции гиростата и оно устойчиво, если $\Omega < \Omega_2$ или $\Omega > \Omega_1$, и неустойчиво, если $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$.

При $\Omega = 0$ (ротор не вращается) невозмущенное вращение (1) гиростата устойчиво; при $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$ вращение ротора (в том же направлении, что и невозмущенное вращение (1) гиростата) оказывает дестабилизирующее влияние на невозмущенное вращение (1) гиростата.

Пусть, наконец, $J_1 < J_3 < J_2 (J_1 > J_3 > J_2)$; тогда $\Omega_1 < 0 < \Omega_2$ ($\Omega_2 < 0 < \Omega_1$). В этом случае вращение (1) происходит вокруг средней оси эллипсоида инерции гиростата и оно устойчиво, если $\Omega < \Omega_1$ или $\Omega > \Omega_2$ ($\Omega < \Omega_2$ или $\Omega > \Omega_1$), и неустойчиво, если $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ ($\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$).

При $\Omega = 0$ невозмущенное движение (1) неустойчиво. При $\Omega < \Omega_1$ ($\Omega < \Omega_2$) и $\Omega > \Omega_2$ ($\Omega > \Omega_1$) вращение ротора оказывает стабилизирующее влияние на невозмущенное вращение (1) гиростата.

Отметим, что в случаях, когда $\Omega < 0$, вращения вокруг оси x_3 гиростата (1) и ротора происходят в противоположных направлениях.

Задача 2.4.2. Исследовать на основании теоремы Рауса и анализа характеристического уравнения устойчивость равномерных вращений вокруг вертикали неуравновешенного гиростата, центр тяжести которого находится на главной оси инерции, а ось ротора параллельна этой оси. Проанализировать влияние вращения ротора на устойчивость вращения гиростата.

Решение. Будем считать, что центр тяжести гиростата расположен на оси x_3 и $a_3 = a$, а ось ротора параллельна этой оси; тогда $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k = J\Omega$, где Ω — относительная угловая скорость ротора.

Уравнения движения гиростата допускают первые интегралы:

$$U = J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 + 2Pa\gamma_3 = \text{const},$$

$$U_1 = J_1 \omega_1 \gamma_1 + J_2 \omega_2 \gamma_2 + J_3 \omega_3 \gamma_3 + k\gamma_3 = \text{const},$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Введем функцию $2W = U - 2\lambda U_1 + \mu U_2$, где λ , μ — неопределенные множители Лагранжа.

Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_1} = J_1 (\omega_1 - \lambda \gamma_1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \omega_2} = J_2 (\omega_2 - \lambda \gamma_2) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_3} = J_3 (\omega_3 - \lambda \gamma_3) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = (\mu - J_1 \lambda^2) \gamma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} = (\mu - J_2 \lambda^2) \gamma_2 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_3} = (\mu - J_3 \lambda^2) \gamma_3 - \lambda k + Pa = 0.$$

Эти уравнения имеют решение

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega > 0,$$

$$\lambda = \omega, \quad \mu = J_3 \omega^2 + \omega k - Pa, \quad (1)$$

описывающее равномерное вращение гиростата вокруг вертикально направленной оси x_3 с угловой скоростью ω .

Для $\delta^2 W$ при условиях $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ получаем выражение

$$\delta^2 W = J_1 (\omega_1 - \omega \gamma_1)^2 + J_2 (\omega_2 - \omega \gamma_2)^2 +$$

$$+ (\mu - J_1 \omega^2) \gamma_1^2 + (\mu - J_2 \omega^2) \gamma_2^2.$$

Условия положительной определенности $\delta^2 W$ выражаются неравенствами

$$(J_3 - J_1) \omega^2 + \omega k - Pa > 0,$$

$$(J_3 - J_2) \omega^2 + \omega k - Pa > 0, \quad (2)$$

при выполнении которых движение (1) устойчиво и его степень неустойчивости $\chi = 0$.

Если

$$[(J_3 - J_1) \omega^2 + \omega k - Pa][(J_3 - J_2) \omega^2 + \omega k - Pa] < 0, \quad (3)$$

то движение (1) неустойчиво и $\chi = 1$.

Если же

$$(J_3 - J_1) \omega^2 + \omega k - Pa < 0,$$

$$(J_3 - J_2) \omega^2 + \omega k - Pa < 0, \quad (4)$$

то для движения (1) $\chi = 2$ и на основе теоремы Рауса нельзя сделать заключения о характере устойчивости движения (1). В этом случае обратимся к анализу корневой характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = (g_0 \lambda^4 + g_1 \lambda^2 + g_2) \lambda^2 = 0$:

$$g_1 = J_1 [(J_3 - J_1) \omega^2 + \omega k - Pa] +$$

$$+ J_2 [(J_3 - J_2) \omega^2 + \omega k - Pa] - [(J_1 + J_2 - J_3) \omega - k]^2,$$

$$g_2 = [(J_3 - J_1) \omega^2 + \omega k - Pa] \times$$

$$\times [(J_3 - J_2) \omega^2 + \omega k - Pa], \quad g_0 = J_1 J_2.$$

При выполнении условий (3) или (4) это уравнение имеет по крайней мере один положительный корень, и,

следовательно, движение (1) неустойчиво согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Итак, условия (2) представляют собой необходимые и достаточные условия устойчивости движения (1) по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$).

Обозначим

$$\Omega_1 = \frac{(J_1 - J_3)\omega^2 + Pa}{J\omega}, \quad \Omega_2 = \frac{(J_2 - J_3)\omega^2 + Pa}{J\omega}$$

и представим условия (2) в виде

$$\Omega > \Omega_1, \quad \Omega > \Omega_2. \quad (5)$$

Отсюда заключаем, что при любых значениях параметров гиростата и $\omega \neq 0$ при соответствующем выборе направления относительного вращения ротора и величины его угловой скорости невозмущенное вращение (1) гиростата можно сделать по желанию как устойчивым, так и неустойчивым, при этом его степень неустойчивости будет равна 0, 1 или 2.

Задача 2.4.3. Найти стационарные движения уравновешенного гиростата с произвольным расположением оси ротора и исследовать их ветвление и устойчивость. Использовать теорему Рауса.

Решение. Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в неподвижной точке тела и осями, совпадающими с главными центральными осями инерции системы тело + ротор. Пусть $J_1 < J_2 < J_3$ — главные центральные моменты инерции системы, J — момент инерции ротора относительно его оси, ω_s — проекции на оси x_s ($s = 1, 2, 3$) вектора мгновенной угловой скорости тела, Ω — относительная угловая скорость ротора, α_s — проекции на оси x_s единичного вектора оси ротора, $k_s = J\Omega\alpha_s$ — проекции на оси x_s вектора гиросtatического момента ротора.

Уравнения движения системы получим из теоремы об изменении кинетического момента. В подвижной системе координат они имеют вид

$$J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 + \omega_2k_3 - \omega_3k_2 = 0 \quad (123),$$

где символ (123) означает, что два других уравнения получаются из указанного в результате циклической перестановки индексов 1, 2, 3.

Эти уравнения допускают первые интегралы:

$$U = (J_1\omega_1 + k_1)^2 + (J_2\omega_2 + k_2)^2 + (J_3\omega_3 + k_3)^2 = \text{const},$$

$$U_1 = J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 = h = \text{const}.$$

Решение. Уравнения движения уравновешенного гиростата допускают первые интегралы:

$$U = (J_1\omega_1 + k_1)^2 + (J_2\omega_2 + k_2)^2 + (J_3\omega_3 + k_3)^2 = \text{const},$$

$$U_1 = J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 = h = \text{const},$$

представляющие собой интеграл постоянства кинетического момента системы и интеграл энергии.

Найдем значения величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, для которых интеграл U имеет стационарные значения при данной величине h интеграла энергии U_1 . Для этого введем функцию $W = U - \lambda(U_1 - h)$, где λ — множитель Лагранжа. Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = h - U_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \omega_1} = 2J_1[k_1 - (\lambda - J_1)\omega_1] = 0, \quad (123), \quad (1)$$

из которых находим

$$\omega_1 = \frac{k_1}{\lambda - J_1} \quad (123), \quad h = \sum_{(123)} \frac{J_1 k_1^2}{(\lambda - J_1)^2}. \quad (2)$$

Вторая вариация $\delta^2 W$ при условии $\delta U_1 = 0$ будет определено-положительной, если

$$D_2 = J_1 J_2 [J_1 (J_2 - \lambda) \omega_1^2 + J_2 (J_1 - \lambda) \omega_2^2] > 0, \\ D_3 = D = -\Delta =$$

$$= J_1 J_2 J_3 (\lambda - J_1) (\lambda - J_2) (\lambda - J_3) \sum_{(123)} \frac{J_1 k_1^2}{(\lambda - J_1)^3} > 0,$$

и определено-отрицательной, если $D_2 < 0, D > 0$. Следовательно, требование знакоопределенности $\delta^2 W$ при условии $\delta U_1 = 0$ приводит к неравенствам $D > 0, D_2 \neq 0$. Покажем, что равенство $D_2 = 0$ невозможно, если $D > 0$.

В самом деле, допустим обратное, т. е. что $D > 0$ и $D_2 = 0$. Условие $D_2 \neq 0$ можно заменить симметризованным условием

$$\sum_{(123)} [J_1 (J_2 - \lambda) \omega_1^2 + J_2 (J_1 - \lambda) \omega_2^2]^2 \neq 0.$$

Тогда, если последнее условие не будет выполнено, то из тождества

$$2D = J_1 J_2 J_3 \sum_{(123)} (J_3 - \lambda) [J_2 (J_1 - \lambda) \omega_2^2 + J_1 (J_2 - \lambda) \omega_1^2]$$

будет следовать, что $D = 0$. Последнее равенство противоречит предположению о том, что $D > 0$. Утверждение доказано.

Итак, условия знакоопределенности $\delta^2 W$ на многообразии $\delta U_1 = 0$ приводятся к одному неравенству $D > 0$. По теореме Рауса—Ляпунова это неравенство служит достаточным условием устойчивости движений (2) по отношению к величинам $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, а по теореме, дающей достаточные условия обратимости теоремы Рауса—Ляпунова,— и необходимым условием устойчивости.

Дифференцируя по λ функцию $h = h(\lambda)$, определенную последним из уравнений (2), получаем соотношение

$$\frac{dh}{d\lambda} = 2 \sum_{(123)} \frac{J_1 k_1^2}{(J_1 - \lambda)^3},$$

с учетом которого выражение для D представим в виде

$$D = -\Delta = \frac{1}{2} J_1 J_2 J_3 (J_1 - \lambda)(J_2 - \lambda)(J_3 - \lambda) \frac{dh}{d\lambda} > 0. \quad (3)$$

Отсюда следует, что если $\lambda \neq J_1, J_2, J_3$, то $\Delta = 0$ тогда и только тогда, когда $dh/d\lambda = 0$. Поэтому в точках бифуркации, для которых $\Delta = 0$, функция $h = h(\lambda)$ имеет стационарные значения.

Множество движений (2) можно представить геометрически в виде кривой $h = h(\lambda)$. На рис. 2.12 показан вид этой кривой для случая, когда $J_1 < J_2 < J_3$, $k_1 k_2 k_3 \neq 0$. Здесь λ_* и λ_{**} — вещественные корни уравнения $dh/d\lambda = 0$, и $h_* = h(\lambda_*)$, $h_{**} = h(\lambda_{**})$. Ветви кривой $h = h(\lambda)$, изображенные сплошными и штриховыми линиями, соответствуют устойчивым и неустойчивым перманентным вращениям (2), при этом значениям $\lambda = \lambda_*$, $h = h_*$ и $\lambda = \lambda_{**}$, $h = h_{**}$ соответствуют точки бифуркаций. Цифры (0), (1), (2) указывают число χ отрицательных квадратов квадратичной формы $\delta^2 W$, приведенной к каноническому виду на многообразии $\delta U_1 = 0$. Отметим, что при действии на систему диссипативных сил с полной диссипацией движения (2), для которых $\chi = 2$, будут неустойчивы.

Если условие $k_1 k_2 k_3 \neq 0$ не выполняется, то перманентные вращения системы и условия их устойчивости можно получить из (2) и (3) при соответствующем предельном переходе.

Пусть, например, $k_1 = 0$, $k_2 k_3 \neq 0$. Тогда из (2) получаем

$$\omega_1 = \kappa \delta(\lambda - J_1), \quad \omega_2 = \frac{k_2}{\lambda - J_2}, \quad \omega_3 = \frac{k_3}{\lambda - J_3}. \quad (4)$$

Здесь и далее $\delta(x) = 0$, если $x \neq 0$, и $\delta(0) = 1$, если $x = 0$, а κ — параметр.

Движения (4) можно представить геометрически в пространстве (h, λ, κ) точками поверхности $h = h(\lambda, \kappa)$,

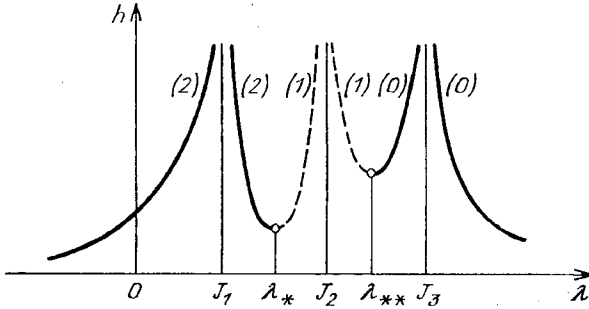


Рис. 2.12

уравнение которой получается в результате подстановки значений (4) в интеграл $U_1 = h$ и имеет вид

$$h = J_1 \kappa^2 \delta(\lambda - J_1) + \frac{J_2 k_2^2}{(\lambda - J_2)^2} + \frac{J_3 k_3^2}{(\lambda - J_3)^2}. \quad (5)$$

Поверхность (5) состоит из цилиндрической поверхности

$$h = \frac{J_2 k_2^2}{(\lambda - J_2)^2} + \frac{J_3 k_3^2}{(\lambda - J_3)^2}, \quad \lambda \neq J_1, \quad (6)$$

из которой удалена одна образующая, соответствующая значению $\lambda = J_1$, и параболы

$$h(J_1, \kappa) = J_1 \kappa^2 + \frac{J_2 k_2^2}{(J_1 - J_2)^2} + \frac{J_3 k_3^2}{(J_1 - J_3)^2}, \quad \lambda = J_1, \quad (7)$$

расположенной в плоскости $\lambda = J_1$ над «щелью» в цилиндрической поверхности (6), образовавшейся после

удаления ее образующей $\lambda = J_1$; поверхность (6) и параболы (7) имеют одну общую точку

$$\lambda = J_1, \quad \kappa = 0, \quad h = J_2 k_2^2 (J_1 - J_2)^{-1} + J_3 k_3^2 (J_1 - J_3)^{-1}.$$

Поскольку перманентные вращения, соответствующие каждой из образующих поверхности (5), имеют одни и те же составляющие (4) угловой скорости, поставим в соответствие образующим поверхности (5) точки их пересечения с плоскостью $\kappa = 0$ и для геометрического представления движений (4) в пространстве (h, λ, κ) вместо поверхности (5) введем кривую Γ , отдельные ветви которой лежат в плоскостях $\kappa = 0$ и $\lambda = J_1$ и задаются

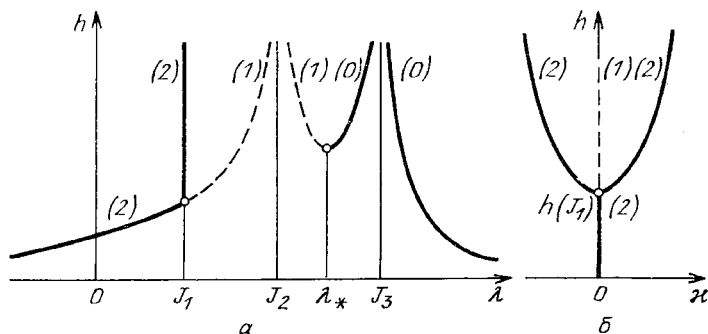


Рис. 2.13

соответственно уравнениями $h = h(\lambda, 0)$, $\kappa = 0$ и $h = h(J_1, \kappa)$, $\lambda = J_1$. На рис. 2.13, а показан вид проекции кривой Γ на плоскость $\kappa = 0$, а на рис. 2.13, б — на плоскость $\lambda = J_1$ для значений $\lambda < J_2$.

Условие устойчивости (3) можно представить в виде

$$D = -\Delta = \frac{1}{2} J_1 J_2 J_3 (J_1 - \lambda) (J_2 - \lambda) (J_3 - \lambda) \frac{\partial h}{\partial \lambda} > 0, \quad \text{если } \lambda \neq J_1; \quad (8)$$

$$D = -\Delta = \frac{1}{2} J_1 J_2 J_3 (J_2 - J_1) (J_3 - J_1) \kappa \frac{\partial h}{\partial \kappa} > 0, \quad \text{если } \lambda = J_1.$$

Пусть $\lambda \neq J_1$. Тогда из (8) следует, что в точках бифуркации, для которых $\Delta = 0$, касательная к кривой $h = h(\lambda, 0)$ параллельна оси λ . Обозначим через $\lambda = \lambda_*$ ве-

щественный корень уравнения $\partial h / \partial \lambda = 0$. Значениям $\lambda = \lambda_*$, $\kappa = 0$, $h_* = h(\lambda_*, 0)$ соответствует точка бифуркации. Из (8) заключаем, что для $-\infty < \lambda < J_1$, $\lambda_* < \lambda < J_3$, $J_3 < \lambda$ имеем $D > 0$ и движения (4) устойчивы, если же $J_1 < \lambda < J_2$ или $J_2 < \lambda < \lambda_*$, то $D < 0$ и движения (4) неустойчивы.

Пусть теперь $\lambda = J_1$. Из (8) и (7) следует, что для $\kappa \neq 0$ имеем $D > 0$ и движения (4) устойчивы. Значениям $\lambda = J_1$, $\kappa = 0$, $h = h(J_1, 0)$ соответствует точка бифуркации.

Для случая, когда $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 \neq 0$, имеем

$$\omega_1 = \kappa \delta (\lambda - J_1), \quad \omega_2 = \kappa \delta (\lambda - J_2), \quad \omega_3 = \frac{k_3}{\lambda - J_3}, \quad (9)$$

$$h = h(\lambda, \kappa) \equiv \kappa^2 [J_1 \delta (\lambda - J_1) + J_2 \delta (\lambda - J_2)] + \frac{J_3 k_3^2}{(\lambda - J_3)^2}.$$

Для геометрического представления движений (9) в пространстве (h, λ, κ) введем в рассмотрение кривую Γ , от-

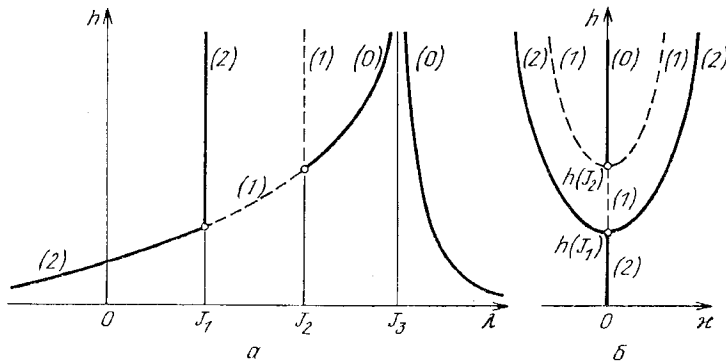


Рис. 2.14

дельные ветви которой лежат в трех плоскостях $\lambda = J_1$, $\lambda = J_2$, $\kappa = 0$ и определяются уравнениями

$$h = h(J_1, \kappa), \quad \lambda = J_1;$$

$$h = h(J_2, \kappa), \quad \lambda = J_2; \quad h = h(\lambda, 0), \quad \kappa = 0.$$

На рис. 2.14, а показан вид проекции кривой Γ на плоскость $\kappa = 0$, а на рис. 2.14, б — на плоскость $\lambda = 0$ для значений $\lambda < J_3$.

Условие устойчивости движений (9) записывается в виде

$$D = J_1 J_2 J_3 (\lambda - J_1) (\lambda - J_2) (\lambda - J_3) \times \\ \times \left\{ \frac{J_3 k_3^2}{(\lambda - J_3)^2} + \kappa^2 \sum_{j=1}^2 \frac{J_j}{\lambda - J_j} \delta (\lambda - J_j) \right\} > 0.$$

Результаты анализа условия устойчивости движений (9) представлены на рис. 2.14.

Рассмотрим еще случай, когда $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ (случай Эйлера). В этом случае

$$\omega_1 = \kappa \delta (\lambda - J_1) \quad (123), \quad h = h(\lambda, \kappa) = \kappa^2 \sum_{(123)} J_1 \delta (\lambda - J_1), \quad (10)$$

а условие устойчивости принимает вид

$$D = J_1 J_2 J_3 (\lambda - J_1) (\lambda - J_2) (\lambda - J_3) \kappa^2 \times \\ \times \sum_{(123)} \frac{J_1}{\lambda - J_1} \delta (\lambda - J_1) > 0.$$

Движения (10) можно представить геометрически в пространстве (h, λ, κ) точками кривой Γ , состоящей из пря-

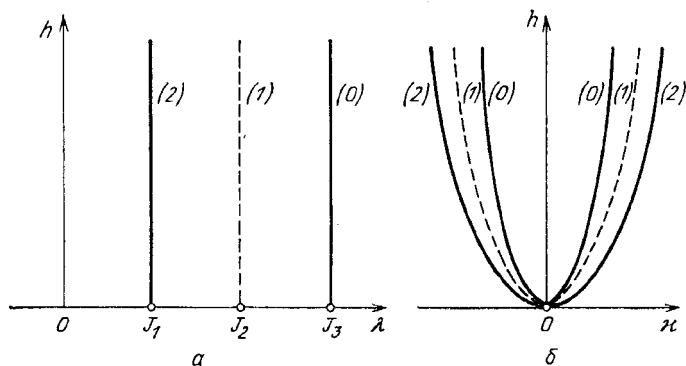


Рис. 2.15

мой $h = 0$, $\kappa = 0$ и трех парабол $h = J_s \kappa^2$, $\lambda = J_s$ ($s = 1, 2, 3$); все точки оси λ соответствуют безразличному положению равновесия системы.

На рис. 2.15, а, б представлен вид проекций кривой Γ на плоскости $\kappa = 0$ и $\lambda = 0$, при этом сплошные и штриховые линии соответствуют устойчивым и неустойчивым движениям (10).

§ 2.5. Симметричное тело, подвешенное на струне

Рассмотрим движение тяжелого динамически симметричного твердого тела с центром масс C на оси симметрии, подвешенного к неподвижной точке O_1 с помощью абсолютно гибкой нерастяжимой безынерционной струны с точкой крепления O на оси симметрии тела (рис. 2.16).

Пусть m и \mathbf{J} — масса и центральный тензор инерции тела с диагональными элементами $J_1 = J_2, J_3$; \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{K} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс, мгновенная угловая скорость и кинетический момент тела для его центра масс; $\boldsymbol{\gamma}$ и \mathbf{e} — единичные векторы восходящей вертикали и направления струны от точки O_1 к точке O ; \mathbf{a} — радиус-вектор точки подвеса O относительно центра масс C ; g и N — ускорение силы тяжести и натяжение струны, отнесенные к массе тела; l — длина струны. Все векторы будем задавать их проекциями $v_s, \omega_s, K_s = J_s \omega_s, \gamma_s, e_s, a_s$ ($s = 1, 2, 3$) на оси жестко связанной с телом правой системы осей координат $Cx_1x_2x_3$ с единичными векторами \mathbf{i}_s , оси которой совпадают с главными центральными осями инерции, причем $a_1 = a_2 = 0, a_3 = a > 0$.

Уравнения движения тела в подвижной системе координат можно представить в виде

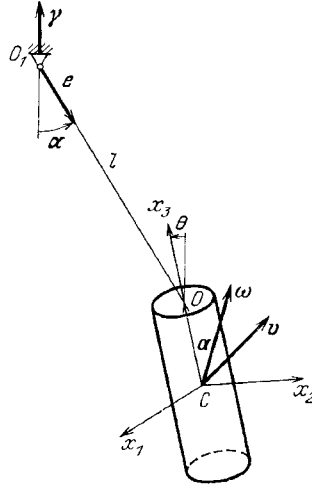


Рис. 2.16

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &= -g\boldsymbol{\gamma} - N\mathbf{e}, \\ \frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} &= mN(\mathbf{e} \times \mathbf{a}), \\ \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} &= 0, \quad \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (1)$$

Первое из уравнений (1) выражает теорему о движении центра масс, второе — теорему моментов для движения тела относительно центра масс, третье — постоянство вектора $\boldsymbol{\gamma}$, четвертое — кинетическое условие, состоя-

щее в том, что скорость конца струны $\frac{dle}{dt} + \omega \times le$ должна быть равна $v + \omega \times a$.

Уравнения (1) допускают первые интегралы:

$$\begin{aligned} V_1 &= mv^2 + \omega \cdot J \cdot \omega + 2mg(le - a) \cdot \gamma = \text{const}, \\ V_2 &= [(le - a) \times mv + J \cdot \omega] \cdot \gamma = \text{const}, \\ V_3 &= \gamma^2 = 1, \quad V_4 = e^2 = 1, \quad V_5 = \omega_3 = \omega = \text{const}, \end{aligned} \quad (2)$$

представляющие собой соответственно интегралы энергии, площадей, геометрические и постоянства проекции мгновенной угловой скорости тела на его оси симметрии.

Задача 2.5.1. Динамически симметричное твердое тело с центром масс C на оси симметрии подвешено к неподвижной точке O_1 на гибкой нерастяжимой струне, при этом другой конец струны закреплен на оси симметрии в точке O . Найти необходимые условия устойчивости равномерного вращения тела, в котором точки O_1 , O и C лежат на одной вертикали (рис. 2.17).

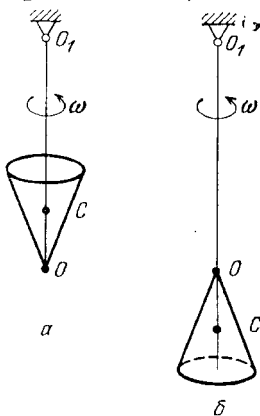


Рис. 2.17

Решение. Уравнения движения тела

$$\dot{v}_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 = -g\gamma_1 - Ne_1 \quad (123),$$

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = mN(a_3 e_2 - a_2 e_3) \quad (123),$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad l(\dot{e}_1 + \omega_2 e_3 - \omega_3 e_2) = \\ &= v_1 + a_3 \omega_2 - a_2 \omega_3 \quad (123), \end{aligned}$$

в которых следует считать $J_1 = J_2$, $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a > 0$, допускают частные решения

$$v_j = \omega_j = \gamma_j = e_j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$v_3 = 0, \quad \omega_3 = \omega_0, \quad \gamma_3 = \gamma_0 = \pm 1, \quad e_3 = e_0 = \pm 1, \quad N = g,$$

которым соответствуют равномерные вращения тела, для которых точки O_1 , O и C лежат на одной вертикали, при этом для первого решения ($\gamma_0 = 1$, $e_0 = -1$) точка C расположена ниже, а для второго решения ($\gamma_0 = -1$, $e_0 = 1$) выше точки O .

Найдем для этих движений необходимые условия устойчивости. В возмущенном движении сохраним за переменными прежние обозначения. Уравнения первого приближения записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 - \omega_0 v_2 + g(\gamma_1 + e_1) &= 0, & \dot{v}_2 + \omega_0 v_1 + g(\gamma_2 + e_2) &= 0, \\ J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_0 \omega_2 - m g a e_2 &= 0, \\ J_1 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_0 \omega_1 - m g a e_1 &= 0, \\ \dot{\gamma}_1 - \omega_0 \gamma_2 + \gamma_0 \omega_2 &= 0, & \dot{\gamma}_2 + \omega_0 \gamma_1 - \gamma_0 \omega_1 &= 0, \\ l(\dot{e}_1 - \omega_0 e_2) + (l e_0 - a) \omega_2 - v_1 &= 0, \\ l(\dot{e}_2 + \omega_0 e_1) - (l e_0 - a) \omega_1 - v_2 &= 0, \end{aligned}$$

при этом в первом приближении

$$v_3 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_3 = \gamma_0, \quad e_3 = e_0, \quad N = g.$$

Введем комплексные переменные

$$v = v_1 + i v_2, \quad \omega = \omega_1 + i \omega_2, \quad \gamma = \gamma_1 + i \gamma_2, \quad e = e_1 + i e_2$$

и представим уравнения первого приближения в форме

$$\begin{aligned} \dot{v} + i \omega_0 v + g(\gamma + e) &= 0, & J_1 \dot{\omega} + i(J_1 - J_3) \omega_0 \omega + i m g a e &= 0, \\ \dot{\gamma} + i \omega_0 \gamma - i \gamma_0 \omega &= 0, & l(\dot{e} + i \omega_0 e) - i(l e_0 - a) \omega - v &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя в первые два из этих уравнений выражения

$$\begin{aligned} \omega &= -i \gamma_0 (\dot{\gamma} + i \omega_0 \gamma), \\ v &= l(\dot{e} + i \omega_0 e) - \gamma_0 (l e_0 - a) (\dot{\gamma} + i \omega_0 \gamma), \end{aligned}$$

приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} l(\ddot{e} + 2i \omega_0 \dot{e}) + (g - \omega_0^2 l) e - \gamma_0 (l e_0 - a) (\ddot{\gamma} + 2i \omega_0 \dot{\gamma}) + \\ + [g + \gamma_0 \omega_0^2 (l e_0 - a)] \gamma = 0, \\ J_1 \ddot{\gamma} + i \omega_0 (2J_1 - J_3) \dot{\gamma} + (J_3 - J_1) \omega_0^2 \gamma - \gamma_0 m g a e = 0. \end{aligned}$$

Отыскивая решения этих уравнений в форме

$$(\gamma, e) = (\gamma^0, e^0) \exp [i(\lambda - \omega_0)t],$$

где γ^0, e^0 — начальные значения переменных γ, e , а λ —

постоянная, для определения λ получаем уравнение

$$\Delta(l, \lambda) = \begin{vmatrix} g - \lambda^2 l & g + \gamma_0 (le_0 - a) \lambda^2 \\ -\gamma_0 mga & -J_1 \lambda^2 + J_3 \omega_0 \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

или в развернутом виде

$$\Delta(l, \lambda) = g\Delta_0(\lambda) - \lambda^2 l \Delta_1(\lambda) = 0,$$

$$\Delta_0 = -J_1^* \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + \gamma_0 mga, \quad J_1^* = J_1 + ma^2,$$

$$\Delta_1 = -J_1 \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + \gamma_0 mga.$$

Итак, для устойчивости рассматриваемых вращений тела, подвешенного на струне, по отношению к величинам v_s , ω_s , γ_s , e_s ($s = 1, 2, 3$) необходимо, чтобы все четыре корня последнего уравнения были вещественными.

Для анализа необходимых условий устойчивости введем в рассмотрение функцию

$$l = l(\lambda) \equiv \frac{g\Delta_0(\lambda)}{\lambda^2 \Delta_1(\lambda)},$$

определяемую уравнением $\Delta(l, \lambda) = 0$.

Рассмотрим вращения, для которых центр масс C расположен ниже точки подвеса O ($\gamma_0 = 1$, $e_0 = -1$) (рис. 2.17, б). Для этих движений на рис. 2.18, а указан вид графика функции $l = l(\lambda)$, при этом через λ_1 , λ_2 и λ_1^0 , λ_2^0 обозначены корни соответственно уравнений $\Delta_0(\lambda) = 0$ и $\Delta_1(\lambda) = 0$. Отсюда заключаем, что уравнение $\Delta(l, \lambda) = 0$ всегда имеет четыре различных вещественных корня.

Рассмотрим теперь вращения, для которых точка C находится выше точки O (рис. 2.17, а). Для этих движений вид графика функции $l = l(\lambda)$ зависит от величины ω_0 . Здесь следует различать три случая:

$$\text{а) } J_3^2 \omega_0^2 > 4J_1^* mga; \quad \text{б) } 4J_1 mga < J_3^2 \omega^2 < 4J_1^* mga;$$

$$\text{в) } J_3^2 \omega_0^2 < 4J_1 mga.$$

Для случая а) график функции $l = l(\lambda)$ указан на рис. 2.18, а, где через λ_1 , λ_2 и λ_1^0 , λ_2^0 обозначены корни уравнений $\Delta_0(\lambda) = 0$ и $\Delta_1(\lambda) = 0$, а через l_* и l^* ($l_* < l^*$) — экстремальные значения функции $l = l(\lambda)$. Видим, что уравнение $\Delta(l, \lambda) = 0$ имеет четыре различных вещественных корня, если $l < l_*$ или $l > l^*$, и два вещественных и пару комплексных корней, если $l_* < l < l^*$.

Для случая б) график функции $l = l(\lambda)$ указан на рис. 2.18, б, где λ_1, λ_2 — корни уравнения $\Delta_1(\lambda) = 0$, а l^* — экстремальное значение функции $l = l(\lambda)$. Видим, что уравнение $\Delta(l, \lambda) = 0$ имеет четыре различных ве-

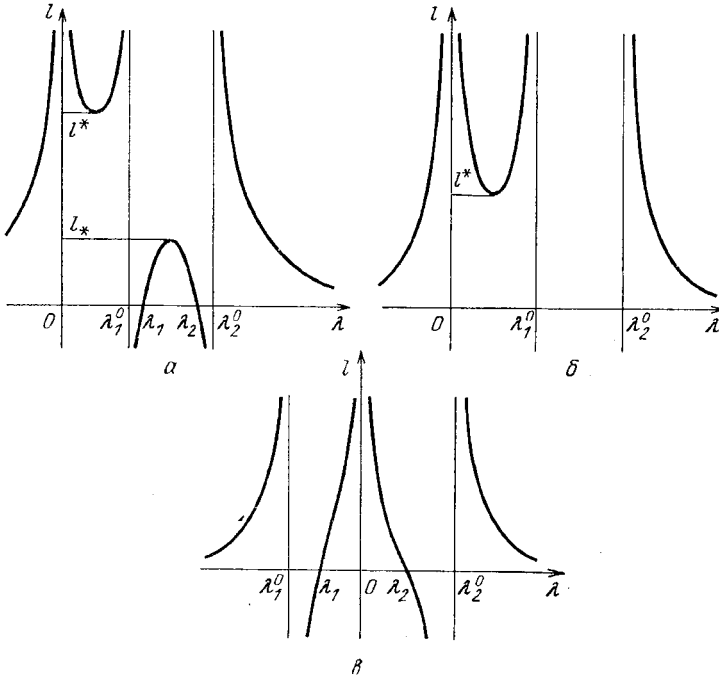


Рис. 2.18

щественных корней, если $l > l^*$, и два вещественных и пару комплексных корней, если $l < l^*$.

Анализ случая в) предоставим читателю.

На рис. 2.19 на плоскости (L, Ω) параметров

$$L = \frac{mal}{J_1}, \quad \Omega = \frac{J_3^2 \omega_0^2}{J_1 m g a}, \quad \beta = \frac{J_1^*}{J_1}$$

при фиксированном значении параметра β указаны области выполнения S, S' и невыполнения J необходимых условий устойчивости вращений тела, для которых точка C находится выше точки O . Для точек областей S и S' уравнение $\Delta(l, \lambda) = 0$ имеет четыре различных вещественных корней, а для точек области J — два вещественных и пару комплексных корней.

Задача 2.5.2. Динамически симметричное тело с центром масс C на оси симметрии шарнирно подвешено к неподвижной точке O_1 при помощи тонкого прямолинейного недеформируемого невесомого стержня, другой конец которого шарнирно закреплен на оси симметрии в точке O . Найти необходимые условия устойчивости равномерных вращений тела, для которых точки O_1 , O и C лежат на одной вертикали, точка O расположена выше точки O_1 , а точка C может находиться как выше, так и ниже точки O (рис. 2.20). Показать, что на плоскости (L, Ω) параметров

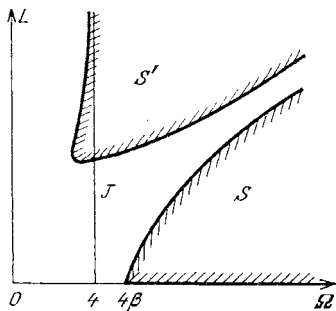


Рис. 2.19

же точки O (рис. 2.20). Показать, что на плоскости (L, Ω) параметров

$$L = \frac{mal}{J_1}, \quad \Omega = \frac{J_3^2 \omega_0^2}{J_1 m g a}, \quad \beta = \frac{J_1^*}{J_1}$$

при фиксированных значениях параметра $\beta > 9$ существуют области выполнения необходимых условий устойчивости. Исследовать эволюцию этих областей при изменении параметра β .

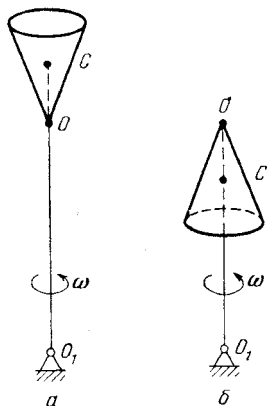


Рис. 2.20

Задача 2.5.3. Динамически симметричное тело с центром масс C на оси симметрии подвешено к неподвижной точке O_1 на струне, другой конец которой закреплен на оси симметрии в точке O . Используя метод Четаева, найти достаточные условия устойчивости равномерных вращений тела, для которых точки O_1 , O и C лежат на одной вертикали (рис. 2.17) по отношению к величинам $v_s, \omega_s, \gamma_s, e_s$ ($s = 1, 2, 3$).

Решение Уравнения движения тела допускают первые интегралы:

$$V_1 = mv^2 + \omega \cdot \mathbf{J} \cdot \omega + 2mg(le - a) \cdot \gamma = \text{const},$$

$$V_2 = [(le - a) \times mv + \mathbf{J} \cdot \omega] \cdot \gamma = \text{const},$$

$$V_3 = \gamma^2 = 1, \quad V_4 = e^2 = 1, \quad V_5 = \omega_3 = \omega = \text{const}$$

и частные решения

$$\begin{aligned} v_j = \omega_j = \gamma_j = e_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad v_3 = 0, \\ \omega_3 = \omega, \quad \gamma_3 = \gamma_0 = \pm 1, \quad e_3 = e_0 = \mp 1, \end{aligned}$$

которым соответствуют равномерные вращения тела, для которых точки O_1 , O , C лежат на одной вертикали, при этом для первого решения ($\gamma_0 = 1$, $e_0 = -1$) точка C расположена ниже, а для второго ($\gamma_0 = -1$, $e_0 = 1$) выше точки O .

Принимая эти движения за невозмущенные, исследуем их устойчивость. В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi$, $\gamma_3 = \gamma_0 + \eta$, $e_3 = e_0 + \zeta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Функцию Ляпунова будем искать в виде связи интегралов

$$V = V_1 - 2\lambda V_2 + \mu V_3 + \nu V_4 + \sigma V_5 + \frac{1}{4} \kappa V_3^2,$$

где λ , μ , ν , σ , κ — постоянные, подлежащие определению. Постоянные λ , μ , ν , σ выберем из условия, что функция V не содержит линейных членов. Приравнявая нулю коэффициенты при первых степенях переменных ξ , η , ζ , получаем уравнения

$$2J_3(\omega - \gamma_0\lambda) + \sigma = 0,$$

$$\gamma_0\mu - J_3\omega\lambda + mg(le_0 - a) = 0, \quad \nu e_0 + mgl\gamma_0 = 0.$$

Отсюда находим

$$\mu = \gamma_0 [J_3\omega\lambda - mg(le_0 - a)], \quad \nu = mgl, \quad \sigma = -2J_3(\omega - \gamma_0\lambda)$$

и функция V принимает вид

$$\begin{aligned} V = V_1 - 2\lambda V_2 + \gamma_0 [J_3\omega\lambda - mg(le_0 - a)] V_3 + \\ + mglV_4 - 2J_3(\omega - \gamma_0\lambda) V_5 + \frac{1}{4} \kappa V_3^2 = \\ = mv_3^2 + mgl(\eta + \zeta)^2 + J_3\xi^2 - 2\lambda J_3\xi\eta + \\ + [\kappa + \gamma_0(J_3\omega\lambda + mga)] \eta^2 + J_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \\ + \gamma_0(-\gamma_0 J_1\lambda^2 + J_3\omega\lambda + mga)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + mgl(\beta_1^2 + \beta_2^2) + \\ + m(v_1^2 + v_2^2) - 2\lambda ma(\gamma_1 v_2 - \gamma_2 v_1) - \\ - 2\gamma_0\lambda ml(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + \dots, \end{aligned}$$

где $\Omega_s = \omega_s - \lambda\gamma_s$, $\beta_s = \gamma_s + e_s$ ($s = 1, 2$) и не выписаны члены выше второго порядка малости.

Квадратичная часть функции V представляет собой сумму трех квадратичных форм относительно переменных $v_3, \xi, \eta, \zeta; \Omega_1, \gamma_1, \beta_1, v_2$ и $\Omega_2, \gamma_2, \beta_2, v_1$ соответственно.

Условия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы переменных v_3, ξ, η, ζ выражаются неравенствами

$$\kappa + \gamma_0(J_3\omega\lambda + mga) > 0, \quad \kappa + \gamma_0(J_3\omega\lambda + mga) - J_3\lambda^2 > 0.$$

Эти условия будут выполняться, если постоянную κ выбирать так, чтобы выполнялось неравенство $\kappa > J_3\lambda^2 - \gamma_0(J_3\omega\lambda + mga)$.

Квадратичные формы переменных $\Omega_1, \gamma_1, \beta_1, v_2$ и $\Omega_2, \gamma_2, \beta_2, v_1$ являются однотипными, их условия положительной определенности совпадают и приводятся к неравенствам

$$\begin{aligned} \gamma_0(-\gamma_0 J_1 \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + mga) &> 0, \quad g - \lambda^2 l > 0, \\ l[\gamma_0(-\gamma_0 J_1 \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + mga)(g - \lambda^2 l) - g \lambda^2 m a^2] &> 0. \end{aligned}$$

Второе из этих условий выполняется автоматически, если выполняются первое и третье.

Итак, при выполнении условий

$$\begin{aligned} \gamma_0(-\gamma_0 J_1 \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + mga) &> 0 \quad (J_1^* = J_1 + m a^2), \\ \gamma_0 l [g(-\gamma_0 J_1^* \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + mga) - \\ &- \lambda^2 l (-\gamma_0 J_1 \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + mga)] > 0 \end{aligned}$$

функция V представляет собой знакоопределенный по отношению к величинам $\omega_s, \gamma_s, e_s, v_s$ ($s = 1, 2, 3$) интеграл уравнений возмущенного движения. Отсюда на основе теоремы Ляпунова об устойчивости заключаем, что последние неравенства являются достаточными условиями устойчивости рассматриваемых невозмущенных движений по отношению к величинам $\omega_s, \gamma_s, e_s, v_s$ ($s = 1, 2, 3$).

Для вращений тела, в которых точка C расположена ниже точки O (рис. 2.17, б), $\gamma_0 = 1$ и последние условия выполняются для $\lambda = 0$. Следовательно, такие вращения тела устойчивы.

Для вращений, в которых точка C находится выше точки O (рис. 2.17, а), $\gamma_0 = -1$ и последние условия

принимают вид

$$J_1 \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + mga < 0, \\ l [g (J_1^* \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + mga) - \lambda^2 l (J_1 \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + mga)] < 0.$$

Итак, достаточные условия устойчивости вращений тела, в которых точка C расположена выше точки O , по отношению к величинам $\omega_s, \gamma_s, e_s, v_s$ ($s = 1, 2, 3$) состоят в том, чтобы для некоторого вещественного значения параметра λ одновременно выполнялись последние два неравенства.

Задача 2.5.4. Динамически симметричное тело с центром масс C на оси симметрии подвешено к неподвижной точке O_1 на струне, другой конец которой закреплен на оси симметрии в точке O . На основе теоремы Рауса найти достаточные условия устойчивости равномерных вращений тела, для которых точки O_1, O, C лежат на одной вертикали (рис. 2.17), по отношению к величинам $\omega_s, \gamma_s, e_s, w_s$ ($s = 1, 2, 3$), где w_s — проекции на главные оси x_s центрального эллипсоида инерции тела вектора скорости w точки O .

Решение. Уравнения движения тела допускают первые интегралы:

$$V_1 = m(w - \omega \times a)^2 + \omega \cdot J \cdot \omega + 2mg(le - a) \cdot \gamma = \text{const}, \\ V_2 = [(le - a) \times J(w - \omega \times a) + m \cdot \omega] \cdot \gamma = \text{const}, \\ V_3 = \gamma^2 = 1, V_4 = e^2 = 1, V_5 = \omega_3 = \omega = \text{const}$$

и частные решения

$$\omega_j = \gamma_j = e_j = w_j = 0 \quad (j = 1, 2), \\ \omega_3 = \omega, \quad \gamma_3 = \gamma_0 = \pm 1, \quad e_3 = e_0 = \mp 1, \quad w_3 = 0,$$

которым соответствуют равномерные вращения тела, для которых точки O_1, O, C лежат на одной вертикали, при этом для первого решения ($\gamma_0 = 1, e_0 = -1$) точка C расположена ниже, а для второго ($\gamma_0 = -1, e_0 = 1$) — выше точки O .

Исследуем устойчивость этих движений. В возмущенном движении положим $\omega_3 = \omega + \xi, \gamma_3 = \gamma_0 + \eta, e_3 = e_0 + \zeta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Достаточные условия устойчивости получим из теоремы Рауса как условия положительной определенности связи интегралов (λ — параметр)

$$V = V_1 - 2\lambda V_2 + \gamma_0 [J_3 \omega \lambda - mg(le_0 - a)] V_3 + \\ + mg l V_4 - 2J_3 (\omega - \gamma_0 \lambda) V_5$$

на линейном многообразии, определяемом уравнениями

$$\delta V_2 = J_3(\omega\eta + \gamma_0\xi) = 0, \quad \delta V_3 = 2\eta = 0,$$

$$\delta V_4 = 2\xi = 0, \quad \delta V_5 = \xi = 0,$$

т. е. при $\xi = \eta = \zeta = 0$. При указанных условиях функция V принимает вид

$$\begin{aligned} V = & mw_3^2 + J_1^*(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \\ & + [-J_1^*\lambda^2 + \gamma_0(J_3\omega\lambda + mga)](\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \\ & + m(w_1^2 + w_2^2) + mgl(\beta_1^2 + \beta_2^2) + 2ma(\Omega_1w_2 - \Omega_2w_1) - \\ & - 2\gamma_0\lambda mal[\Omega_1\beta_1 + \Omega_2\beta_2 + \lambda(\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2)] + \\ & + 2\gamma_0\lambda ml(w_1\beta_2 - w_2\beta_1), \end{aligned}$$

где $\Omega_j = \omega_j - \lambda\gamma_j$, $\beta_j = \gamma_j + e_j$ ($j = 1, 2$), и представляет собой сумму одночлена mw_3^2 и двух однотипных квадратичных форм относительно переменных Ω_1 , γ_1 , w_2 , β_1 и Ω_2 , γ_2 , w_1 , β_2 , условия положительной определенности которых совпадают и приводятся к неравенствам

$$-J_1^*\lambda^2 + \gamma_0(J_3\omega\lambda + mga) > 0,$$

$$\begin{aligned} l\{g[-J_1^*\lambda^2 + \gamma_0(J_3\omega\lambda + mga)] - \\ - \lambda^2l[-J_1^*\lambda^2 + \gamma_0(J_3\omega\lambda + mga)]\} > 0. \end{aligned}$$

Итак, достаточные условия устойчивости рассматриваемых движений тела по отношению к величинам ω_s , γ_s , e_s , w_s ($s = 1, 2, 3$) состоят в том, чтобы для некоторого вещественного значения параметра λ выполнялись последние два неравенства.

Для вращений, в которых точка C находится ниже точки O (рис. 2.17, б), $\gamma_0 = 1$ и эти неравенства выполняются для $\lambda = 0$. Следовательно, такие вращения тела устойчивы.

Для вращений, в которых точка C расположена выше точки O (рис. 2.17, а), $\gamma_0 = -1$ и условия устойчивости принимают вид

$$J_1^*\lambda^2 + J_3\omega\lambda + mga < 0, \tag{1}$$

$$l[g(J_1^*\lambda^2 + J_3\omega\lambda + mga) - \lambda^2l(J_1^*\lambda^2 + J_3\omega\lambda + mga)] < 0.$$

Для таких вращений тела на рис. 2.19 указаны область устойчивости S , область S' устойчивости в первом приближении и область J неустойчивости. Отметим, что

необходимые условия устойчивости рассматриваемых вращений тела состоят в требовании вещественности всех четырех корней уравнения

$$\Delta(l, \lambda) \equiv g\Delta_0(\lambda) - \lambda^2 l \Delta_1(\lambda) = 0,$$

$$\Delta_0(\lambda) = J_1^* \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + mga, \quad \Delta_1(\lambda) = J_1 \lambda^2 + J_3 \omega \lambda + mga.$$

Поучительно рассмотреть предельные случаи:

- 1) $l = 0$ — волчок Лагранжа с неподвижной точкой O ;
- 2) $l = \infty$ — волчок Лагранжа на гладкой горизонтальной плоскости.

При $l = 0$ имеем $w = 0$, и условия (1) приводятся к неравенству $\Delta_0(\lambda) < 0$, а последнее — к условию Маиевского — Четаева

$$J_3^2 \omega^2 - 4J_1^* mga > 0. \quad (2)$$

Уравнение $\Delta(l, \lambda) = 0$ при $l = 0$ принимает вид $\Delta_0(\lambda) = 0$, и требование вещественности его корней приводит к условию (2). Итак, при $l = 0$ необходимые и достаточные условия устойчивости равномерного вращения тела по отношению к величинам ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$) совпадают.

Пусть теперь $l \gg 1$; тогда достаточные условия (1) устойчивости рассматриваемых вращений тела по отношению к величинам $\omega_s, \gamma_s, e_s, w_s$ ($s = 1, 2, 3$) и, как следствие этого, по отношению к координатам центра масс C тела приводятся к неравенствам $\Delta_0(\lambda) < 0$, $\Delta_1(\lambda) > 0$ и одновременно выполняться не могут. Уравнение $\Delta(l, \lambda) = 0$ в этом случае можно представить в виде $\lambda^2 \Delta_1(\lambda) - gl^{-1} \Delta_0(\lambda) = 0$, и требование вещественности всех его корней при $l \gg 1$ приводит к условию

$$J_3^2 \omega^2 - 4J_1 mga > 0. \quad (3)$$

Отсюда заключаем, что при $l \gg 1$ необходимые условия устойчивости рассматриваемого вращения тела по отношению к $\omega_s, \gamma_s, e_s, w_s$ ($s = 1, 2, 3$) имеют вид (3), а достаточные условия устойчивости по отношению к тем же переменным не выполняются.

Этот результат допускает простое механическое истолкование. В самом деле, при $l = \infty$ предельная система представляет собой волчок Лагранжа, точка O которого может скользить по неподвижной гладкой горизонтальной плоскости. Для такого волчка горизонтальные декартовы координаты его центра масс будут циклическими

координатами, и по отношению к ним рассматриваемое вращение тела не может быть устойчиво.

При $l = \infty$ необходимые и достаточные условия устойчивости рассматриваемого движения тела по отношению к части ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$) переменных совпадают и приводятся к неравенству (3).

Задача 2.5.5. Тяжелый динамически симметричный шар радиусом r и массой m , центр C тяжести которого лежит на оси динамической симметрии и не совпадает с его геометрическим центром O , заключен внутри неподвижной сферической оболочки радиусом R и с центром в точке O' и движется по ней без трения. Найти необходимые и достаточные условия устойчивости равномерных вращений шара вокруг вертикали, проходящей через точки C, O, O' .

Указание. Покажите, что эта задача динамически эквивалентна задаче о движении тяжелого динамически симметричного твердого тела, подвешенного на нити длиной $l = R - r$.

Задача 2.5.6. Динамически симметричное тело с центром масс на оси симметрии подвешено к неподвижной точке на струне, другой конец которой закреплен на оси симметрии. Используя теорему Рауса, найти перманентные вращения системы, когда тело и струна вращаются как одно твердое тело вокруг вертикали, проходящей через неподвижную точку, с постоянной угловой скоростью, при этом струна и ось симметрии тела лежат в одной вертикальной плоскости. Исследовать достаточные условия устойчивости этих движений.

Решение. Уравнения движения тела допускают интегралы

$$\begin{aligned} V_1 &= mv^2 + \omega \cdot \mathbf{J} \cdot \omega + 2mg(l\mathbf{e} - \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = \text{const}, \\ V_2 &= [\mathbf{J} \cdot \omega + (l\mathbf{e} - \mathbf{a}) \times m\mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{\gamma} = \text{const}, \quad V_3 = \gamma^2 = 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим связку интегралов (λ — параметр)

$$\begin{aligned} 2V &= V_1 - 2\lambda V_2 + J_1 \lambda^2 V_3 = 2U + 2W, \\ 2U &= m[\mathbf{v} - \lambda \boldsymbol{\gamma} \times (l\mathbf{e} - \mathbf{a})]^2 + \\ &\quad + J_1[(\omega_1 - \lambda \gamma_1)^2 + (\omega_2 - \lambda \gamma_2)^2] + J_3(\omega_3 - \lambda \gamma_3)^2, \quad (1) \\ 2W &= 2mg(l\mathbf{e} - \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\gamma} - \lambda^2 m[\boldsymbol{\gamma} \times (l\mathbf{e} - \mathbf{a})]^2 + \\ &\quad + \lambda^2 (J_1 - J_3) \gamma_3^2. \end{aligned}$$

Вводя вместо \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ новые переменные

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \lambda \boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{l}\mathbf{e} - \mathbf{a}), \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} - \lambda \boldsymbol{\gamma}, \quad (2)$$

представим U в виде

$$2U = m(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + J_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + J_3\Omega_3^2,$$

где u_s , Ω_s — проекции на оси x_s ($s = 1, 2, 3$) векторов \mathbf{u} , $\boldsymbol{\Omega}$.

Для преобразования выражения для W к специальному виду введем систему осей координат $Oy_1y_2y_3$, ось y_1 которой перпендикулярна вертикали, проходящей через неподвижную точку, и имеет направление проекции вектора \mathbf{e} на горизонтальную плоскость, ось y_2 направлена вертикально вниз, а ось y_3 перпендикулярна осям y_1 и y_2 . Обозначим через κ_s , v_s , τ_s проекции на оси y_s ($s = 1, 2, 3$) векторов $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{e} , \mathbf{i}_3 , при этом $\kappa_1 = \kappa_3 = v_3 = 0$, $\kappa_2 = -1$, $v_1 \geq 0$, $v_2 \geq 0$. Тогда будем иметь

$$\gamma_3 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{i}_3 = -\tau_2, \quad (\mathbf{l}\mathbf{e} - \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = -lv_2 + a\tau_2,$$

$$[\boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{l}\mathbf{e} - \mathbf{a})]^2 = (lv_1 - a\tau_1)^2 + a^2\tau_3^2,$$

и выражение для W с точностью до несущественной аддитивной постоянной принимает вид

$$2W = -2mg(lv_2 - a\tau_2) + \lambda^2 m(l^2 v_2^2 + a^2 \tau_2^2 + 2alv_1\tau_1) + \lambda^2 (J_1 - J_3)\tau_2^2.$$

Рассмотрим условия стационарности интеграла V по отношению к введенным переменным. Поскольку v_1 , v_2 и τ_1 , τ_2 , τ_3 связаны соотношениями

$$V_4 = v_1^2 + v_2^2 = 1, \quad V_5 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 1,$$

то вместо V далее будем рассматривать функцию

$$2V_* = 2U + 2W_*, \quad 2W_* = 2W + \mu\lambda^2 V_4 + \sigma\lambda^2 V_5, \quad (3)$$

где μ , σ — множители Лагранжа. Условия стационарности интеграла V_* приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_*}{\partial u_s} &= mu_s = 0, \quad \frac{\partial V_*}{\partial \Omega_s} = J_s \Omega_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \\ \frac{\partial V_*}{\partial \tau_3} &= \sigma\lambda^2 \tau_3 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_*}{\partial v_1} &= \lambda^2 (mal\tau_1 + \mu v_1) = 0, \\
\frac{\partial V_*}{\partial v_2} &= \lambda^2 (\mu + ml^2) v_2 - mgl = 0, \\
\frac{\partial V_*}{\partial \tau_1} &= \lambda^2 (\sigma \tau_1 + malv_1) = 0, \\
\frac{\partial V_*}{\partial \tau_2} &= \lambda^2 (\sigma + J_1^* - J_3) \tau_2 + mga = 0 \\
(J_1^* &= J_1 + ma^2).
\end{aligned} \tag{5}$$

Из уравнений (4) находим

$$u_s = 0, \quad \Omega_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \quad \tau_3 = 0. \tag{6}$$

Отсюда с учетом (1) заключаем, что стационарным значениям интеграла V_* соответствуют перманентные вращения системы, когда тело и струна вращаются как твердое тело вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью λ , при этом струна и ось симметрии тела лежат в одной вертикальной плоскости. Для исследования таких движений можно положить

$$v_1 = \sin \alpha, \quad v_2 = \cos \alpha, \quad \tau_1 = -\sin \theta, \quad \tau_2 = -\cos \theta,$$

где α — угол между струной и нисходящей вертикалью, θ — угол между осью x_3 и восходящей вертикалью. Уравнения для определения α и θ получим в результате исключения параметров μ, σ из уравнений (5)

$$\begin{aligned}
\lambda^2 (lv_1 - a\tau_1) v_2 = g v_1, \quad \lambda^2 [(J_1^* - J_3) \tau_1 - malv_1] \tau_2 + \\
+ mga \tau_1 = 0
\end{aligned}$$

Уравнения (5) допускают два семейства решений

$$\begin{aligned}
v_1 = \tau_1 = 0, \quad v_2 = 1, \quad \tau_2 = \pm 1, \\
\mu = \frac{ml}{\lambda^2} (g - \lambda^2 l), \quad \sigma = J_3 - J_1^* - \frac{\tau_2 mga}{\lambda^2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Решения (7) соответствуют вращениям тела, в которых точки O_1, O, C лежат на одной вертикали, при этом точка C расположена выше (ниже) точки O , если $\tau_2 = 1$ ($\tau_2 = -1$).

Уравнения (5) допускают такие решения:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{1 - v_2^2}, \quad v_2 = \frac{g\sigma}{\lambda^2 l (\sigma + ma^2)}, \quad \tau_1 = -\frac{mal}{\sigma} v_1, \\ \tau_2 &= -\frac{mga}{\lambda^2 (\sigma + J_1^* - J_3)}, \quad \mu\sigma = (mal)^2, \\ \lambda^4 &= \frac{(J_1 - J_3) (mga)^2 \sigma^2 (2\sigma + ma^2 + J_1^* - J_3)}{(mal - \sigma)(mal + \sigma)(\sigma + ma^2)^2 (\sigma + J_1^* - J_3)^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

которым отвечают перманентные вращения, для которых точки O_1, O, C не лежат на одной вертикали.

Решения (8) можно представить геометрически на плоскости (λ^2, σ) в виде кривой, определяемой послед-

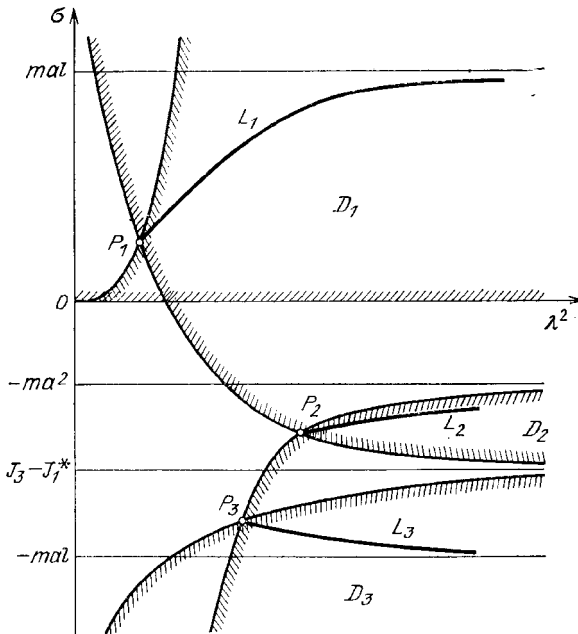


Рис. 2.21

ним из уравнений (8). На рис. 2.21 показан вид этой кривой для случая, когда

$$ma^2 < J_1^* - J_3 < mal, \quad (9)$$

а также области D_1, D_2, D_3 значений параметров λ^2, σ , границы которых определяются уравнениями $v_2 = 1, v_2 = 0, \tau_2 = \pm 1$. Для этих областей выполняются

неравенства: $-1 < \tau_1 < 0$, $-1 < \tau_2 < 0$ для D_1 , $0 < \tau_1 < 1$, $-1 < \tau_2 < 0$ для D_2 и $0 < \tau_1 < 1$, $0 < \tau_2 < 1$ для D_3 , которые с учетом (8) позволяют установить взаимное расположение струны и оси симметрии тела в перманентном вращении системы.

Перманентные вращения (8) образуют три изолированные ветви L_s ($s = 1, 2, 3$), лежащие в областях D_s и исходящие из точек P_s , которым соответствуют вертикальные вращения (7) с определенными значениями угловой скорости λ , при этом для P_1 и P_2 точка C расположена ниже, а для P_3 — выше точки O .

Для вращений, принадлежащих ветви L_1 , струна и ось симметрии тела отклонены от вертикали в одну сторону (рис. 2.22, а), точка C находится ниже точки O

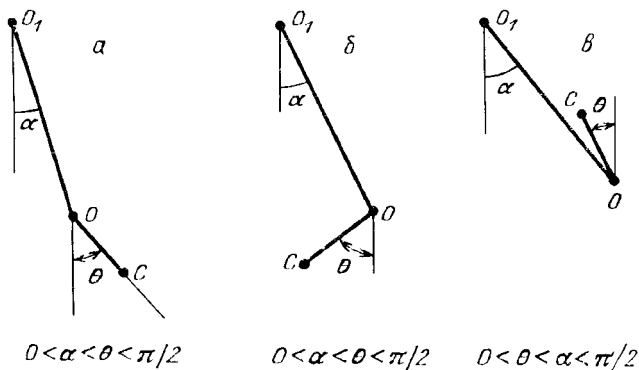


Рис. 2.22

и $0 < \alpha < \theta < \pi/2$; для предельного движения при $\lambda \rightarrow \infty$ струна и ось симметрии тела лежат на одной горизонтали, точки O_1 и O расположены по одну сторону от точки C и $\alpha = \theta = \pi/2$.

Для вращений, принадлежащих ветви L_2 (рис. 2.22, б), струна и ось симметрии тела отклонены от вертикали в противоположные стороны, точка C находится ниже точки O и $0 < \alpha < 2\pi - \theta < \pi/2$; для предельного движения при $\lambda \rightarrow \infty$ ось симметрии тела принимает горизонтальное положение ($\theta = 3\pi/2$), точки O и C лежат на одной вертикали и струна образует с вертикалью угол $\alpha = \arcsin(a/l)$.

Для вращений, принадлежащих ветви L_3 (рис. 2.22, в), струна и ось симметрии тела отклонены от вертикали

в противоположные стороны, точка C находится выше точки O и $0 < \theta - \pi < \alpha < \pi/2$; в предельном движении при $\lambda \rightarrow \infty$ струна и ось симметрии тела лежат на одной горизонтали и точки O_1 и O расположены по разные стороны от точки C ($\alpha = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$).

Исследуем устойчивость движений (8) по отношению к величинам u_s , Ω_s , τ_s , v_j ($s = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$). Обозначим через ξ_j , η_j вариации переменных v_j , τ_j ($j = 1, 2$), а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Достаточные условия устойчивости получим из теоремы Рауса как условия положительной определенности второй вариации $\delta^2 V_*$ функции V_*

$$\delta^2 V_* = m(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + J_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + J_3\Omega_3^2 + \sigma\lambda^2\tau_3^2 + \\ + \lambda^2[\mu\xi_1^2 + 2mal\xi_1\eta_1 + \sigma\eta_1^2 + (\mu + ml^2)\xi_2^2 + (\sigma + J_1^* - J_3)\eta_2^2] \quad (10)$$

на линейном многообразии

$$\delta V_4 = 2(v_1\xi_1 + v_2\xi_2) = 0, \quad \delta V_5 = 2(\tau_1\eta_1 + \tau_2\eta_2) = 0. \quad (11)$$

Обозначим через χ число отрицательных коэффициентов квадратичной формы (10), приведенной к каноническому виду на многообразии (11). Если $\chi = 0$, то квадратичная форма (10) при условиях (11) является положительно-определенной и перманентное вращение (8) устойчиво. Если $\chi > 0$, то квадратичная форма (10) на многообразии (11) знакопеременна и из теоремы Рауса нельзя сделать определенного заключения о характере устойчивости движения (8).

Квадратичная форма (10) представляет собой сумму двух квадратичных форм относительно переменных τ_s , u_s , Ω_s ($s = 1, 2, 3$) и ξ_j , η_j ($j = 1, 2$). Условия положительной определенности первой из них даются неравенством $\sigma > 0$, а условия положительной определенности второй приводятся к требованию положительности главных диагональных миноров D_5 , D_6 пятого и шестого порядков определителя

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & v_1 & 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_1 & 0 & \tau_2 \\ v_1 & 0 & \mu & mal & 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 & mal & \sigma & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & \mu + ml^2 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 & \sigma + J_1^* & J_3 \end{vmatrix},$$

т. е. к условиям

$$\begin{aligned} D_5 &= \tau_1^2 (\mu + ml^2) > 0, \\ D_6 &= D = \tau_1^2 (\mu + ml^2 v_1^2) (\sigma + J_1^* - J_3) + \\ &\quad + v_1^2 \tau_2^2 \sigma (\mu + ml^2) > 0. \end{aligned}$$

Поскольку для движений (8) $\sigma \mu = (mal)^2$, то первое из этих условий выполняется, если выполняется условие $\sigma > 0$. В результате приходим к следующим условиям устойчивости движений (8):

$$\sigma > 0, \quad D > 0. \quad (12)$$

Представим выражение для D в специальном виде. Для этого подставим значения (8) в уравнения $V_4 = 1$, $V_5 = 1$ и в (5) и продифференцируем их по λ^2 . В результате получим систему линейных уравнений относительно производных μ' , σ' , v_1' , τ_1' , v_2' , τ_2' :

$$\begin{aligned} v_1 v_1' + v_2 v_2' &= 0, \quad \tau_1 \tau_1' + \tau_2 \tau_2' = 0, \\ v_1 \mu' + \mu v_1' + mal \tau_1' &= 0, \quad \tau_2 \sigma' + \sigma \tau_1' + mal v_1' = 0, \\ v_2 \mu' + (\mu + ml^2) v_2' &= -mgl\lambda^{-4}, \\ \tau_2 \sigma' + (\sigma + J_1^* - J_3) \tau_2' &= mga\lambda^{-4}. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно σ' , получаем

$$\begin{aligned} \sigma' &= D_\sigma / D, \quad D_\sigma = mgl\lambda^{-4} D_\sigma^*, \\ D_\sigma^* &= a\sigma (\mu + ml^2) v_1^2 \tau_2 - l(\sigma + J_1^* - J_3) v_2 \tau_1 v_1 mal. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение D_σ^* с учетом (8) можно представить в виде

$$D_\sigma^* = \frac{v_1^2 (J_1 - J_3) g (mal)^2 (2\sigma + ma^2 + J_1^* - J_3)}{\lambda^2 (\sigma + ma^2) (\sigma + J_1^* - J_3)}.$$

Подставляя это выражение в (13), получаем искомое выражение для D

$$D = \frac{\frac{1}{2} v_1^2 (J_1 - J_3) ml^2 (mga)^2 (2\sigma + ma^2 + J_1^* - J_3)}{2\lambda^8 (\sigma + ma^2) (\sigma + J_1^* - J_3)} \frac{d\lambda^4}{d\sigma}, \quad (14)$$

где зависимость λ^4 от σ определяется последним из уравнений (8).

Рассмотрим ветвь L_1 перманентных вращений (8) (рис. 2.21). Для нее $\sigma > 0$, $d\lambda^4/d\sigma > 0$, и в силу (14) $D > 0$. Следовательно, эти движения устойчивы ($\chi = 0$).

Для ветви L_2 имеем $\sigma + ma^2 < 0$, $\sigma + J_1^* - J_3 > 0$, $d\lambda^4/d\sigma > 0$, и в силу (14) $D < 0$. Следовательно, для этих движений $\chi = 2$.

Наконец, для ветви L_3 имеем $2\sigma + ma^2 + J_1^* - J_3 < 0$, $d\lambda^4/d\sigma > 0$, а потому $D < 0$. Следовательно, для этих движений $\chi = 2$.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 3.1. Гироскоп в кардановом подвесе

Гироскоп служит основным элементом навигационных приборов, стабилизаторов и других объектов техники. Его рабочим режимом является, как правило, перманентное вращение либо регулярная прецессия. Поэтому вопросы устойчивости стационарных движений гироскопа и влияния его параметров на эти движения представляют интерес не только с методической точки зрения, но и с прикладной.

Гироскоп в кардановом подвесе представляет собой систему нескольких тел, соединенных последовательно с помощью цилиндрических шарниров.

Приведем здесь описание и некоторые общие формулы для рассматриваемого объекта.

Вокруг неподвижной оси L_1 (рис. 3.1) может поворачиваться внешняя рамка S_1 карданова подвеса. На рамке S_1 укреплены подшипники, в которых установлена ось L_2 поворота внутренней рамки S_2 карданова подвеса. Относительно рамки S_2 вокруг оси L вращается ротор S , который обычно представляет собой динамически симметричное твердое тело (L — ось симметрии).

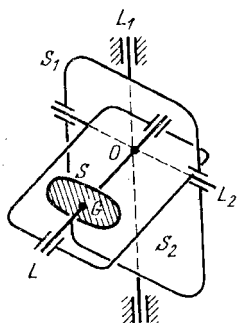


Рис. 3.1

Будем рассматривать лишь совершенный гироскоп, в котором оси L , L_1 , L_2 пересекаются в одной точке O , ось L_1 ортогональна оси L_2 , ось L ортогональна оси L_2 , оси L , L_2 являются главными осями инерции тела S_2 для точки O и центр тяжести G_2 тела S_2 расположен на оси L (ось L — главная центральная ось инерции для тела S).

Введем традиционные для гироскопии эйлеровы углы: ψ — угол поворота внешней рамки S_1 , угол прецессии; ϕ — угол поворота внутренней рамки, угол между

осями L_1 и L , угол нутации; φ — угол поворота ротора относительно внутренней рамки S_2 вокруг оси L , угол собственного вращения гироскопа. Обозначим через A, B, C главные моменты инерции ротора (для точки O), A_2, B_2, C_2 — главные моменты инерции внутренней рамки, A_1 — момент инерции внешнего кольца относительно оси L_1 ; m, m_1 — масса ротора и тела S_2 ; a, a_1 — координаты центров масс этих тел в системе координат, ось z которой направлена по оси L .

Для кинетических энергий T ротора, T_2 внутренней и T_1 внешней рамок подвеса имеем

$$\begin{aligned} 2T &= (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \dot{\vartheta}^2 + (A \sin^2 \varphi + \\ &+ B \cos^2 \varphi) \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + (A - B) \dot{\vartheta} \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi + \\ &+ C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2, \\ 2T_2 &= A_2 \dot{\vartheta}^2 + B_2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + C_2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \vartheta, \quad 2T_1 = A_1 \dot{\psi}^2. \end{aligned}$$

Задача 3.1.1. Тяжелый симметричный ротор S помещен в невесомый совершенный карданов подвес с вертикальной осью L_1 вращения внешней рамки S_1 . Ось L_2 поворота внутренней рамки S_2 подвеса при этом горизонтальна. К ротору и внешней рамке приложены некоторые силы, обеспечивающие постоянство угловых скоростей прецессии и собственного вращения $\dot{\psi} = \Omega = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$.

Среди движений ротора, очевидно, существует такое, в котором ось L симметрии ротора расположена вертикально ($\vartheta = 0$ или $\vartheta = \pi$). Исследовать устойчивость такого движения.

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. Хотя связи, наложенные на нее, явно зависят от времени ($\varphi = \omega t + \varphi_0$, $\psi = \Omega t + \psi_0$), ни кинетическая энергия T ротора, ни силовая функция U силы тяжести от времени явно не зависят:

$$\begin{aligned} T &= 0,5 [A \dot{\vartheta}^2 + A \Omega^2 \sin^2 \vartheta + C (\omega + \Omega \cos \vartheta)^2], \\ U &= mga \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Уравнения движения ротора допускают первый интеграл (интеграл Якоби)

$$A \dot{\vartheta}^2 - A \Omega^2 \sin^2 \vartheta - C (\omega + \Omega \cos \vartheta)^2 - 2mga \cos \vartheta = 2h. \quad (1)$$

В малой окрестности частного решения $\dot{\vartheta} = 0$ уравнений движения интеграл (1) с точностью до членов второго порядка малости имеет вид

$$A\dot{\vartheta}^2 + \vartheta^2[mga + (C - A)\Omega^2 + C\omega\Omega] = 2h. \quad (2)$$

Условие знакоопределенности квадратичной формы, стоящей в левой части интеграла (2),

$$mga + (C - A)\Omega^2 + C\omega\Omega > 0, \quad (3)$$

служит достаточным условием устойчивости движения $\dot{\vartheta} = 0$.

Если в условии (3) сменить знак неравенства на противоположный, то получим достаточное условие неустойчивости движения $\dot{\vartheta} = 0$.

Исследуем случай, когда

$$mga + (C - A)\Omega^2 + C\omega\Omega = 0. \quad (4)$$

Для этого необходимо учесть в разложении интеграла (1) члены порядка ϑ^4 , что с учетом (4) приводит к выражению

$$A\dot{\vartheta}^2 + (A - C)\Omega^2\vartheta^4/6 + \dots = 2h.$$

Условие знакоопределенности — достаточное условие устойчивости движения $\dot{\vartheta} = 0$ в случае, когда выполняется равенство (4), — имеет вид неравенства $A > C$. Если выполняется равенство (4) и $C > A$, то движение $\dot{\vartheta} = 0$ неустойчиво.

Остается исследовать случай $C = A$, когда эллипсоид инерции ротора превращается в шар. Интеграл Якоби в этом случае имеет вид

$$A\dot{\vartheta}^2 - 2(C\omega\Omega + mga)\cos\vartheta = 2h.$$

Если $C\omega\Omega + mga > 0$, то движение $\dot{\vartheta} = 0$ устойчиво. Если же $C\omega\Omega + mga \leq 0$, то исследуемое движение неустойчиво.

Совокупность указанных выше неравенств полностью исчерпывает вопрос об устойчивости вращения ротора вокруг вертикальной оси симметрии при $\dot{\vartheta} = 0$. Случай $\dot{\vartheta} = \pi$ исследуется аналогичным образом.

Задача 3.1.2. В условиях предыдущей задачи определить такие движения гироскопа, при которых остается постоянным значение угла нутации $\vartheta(t) = \vartheta(t_0) = \text{const}$, и исследовать их устойчивость.

Решение. Нетрудно видеть, что рассматриваемая задача является задачей об относительном равновесии.

Измененная потенциальная энергия имеет вид

$$2W = -A\Omega^2 \sin^2 \vartheta - C(\omega + \Omega \cos \vartheta)^2 - mga \cos \vartheta.$$

Уравнение для относительных равновесий

$$W' = -\sin \vartheta [(A - C)\Omega^2 \cos \vartheta - C\omega\Omega - mga] = 0 \quad (1)$$

при любых значениях параметров ω , Ω имеет два решения $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$, а когда параметры ω , Ω принадлежат области P , в которой выполняется условие

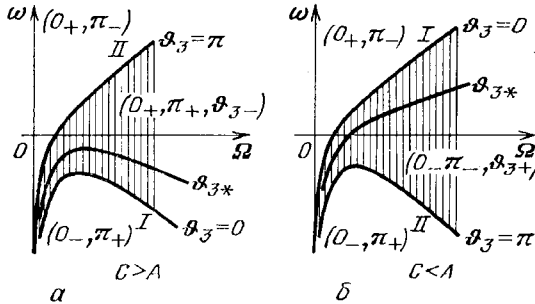


Рис. 3.2

$|mga + C\omega\Omega| < |A - C|\Omega^2$, то имеется еще и третье решение

$$\vartheta_3 = \arccos (mga + C\omega\Omega) / (A - C)\Omega^2.$$

Область P существования решения ϑ_3 состоит из двух кусков плоскости ω , Ω , заключенных между двумя гиперболами I и II (рис. 3.2), уравнения которых имеют вид

$$I. (A - C)\Omega^2 - C\omega\Omega - mga = 0;$$

$$II. (C - A)\Omega^2 - C\omega\Omega - mga = 0.$$

Каждой точке области P отвечает лишь одно значение ϑ_3 . Множество точек области P , которым отвечает одно и то же значение $\vartheta_{3*} \neq 0, \pi$, изображается гиперболой, уравнение которой

$$\omega = -\frac{mga}{C\Omega} + \frac{A - C}{C}\Omega \cos \vartheta_{3*}. \quad (2)$$

Одна из асимптот этой гиперболы — прямая $\Omega = 0$, другая асимптота — прямая $\omega = \Omega(A - C) \cos \vartheta_{3*}/C$.

Гипербола (2) при $\vartheta_{3*} = 0$ вырождается в гиперболу I , а при $\vartheta_{3*} = \pi$ — в гиперболу II .

Исследуем теперь вопрос об устойчивости найденных равновесий. Для этого вычислим вторую производную от измененной силовой функции

$$W'' = -[(A - C)\Omega^2 \cos \vartheta - C\omega\Omega - mga] \cos \vartheta + \\ + (A - C)\Omega^2 \sin^2 \vartheta.$$

Имеем

$$W''(0) \begin{cases} < 0 & \text{при } (A - C)\Omega^2 - C\omega\Omega - mga > 0, \\ > 0 & \text{при } (A - C)\Omega^2 - C\omega\Omega - mga < 0, \end{cases}$$

$$W''(\pi) \begin{cases} > 0 & \text{при } (C - A)\Omega^2 - C\omega\Omega - mga > 0, \\ < 0 & \text{при } (C - A)\Omega^2 - C\omega\Omega - mga < 0, \end{cases}$$

$$W''(\vartheta_3) \begin{cases} < 0 & \text{при } C > A, \\ > 0 & \text{при } A > C. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что относительное равновесие $\vartheta = 0$ устойчиво, если параметры Ω , ω принадлежат той части плоскости, которая заключена между ветвями гиперболы I и содержит начало координат.

Относительное равновесие $\vartheta = \pi$ устойчиво, если параметры ω , Ω принадлежат тем частям плоскости, которые являются внешними по отношению к ветвям гиперболы II , т. е. не содержат начала координат.

Отметим, что области устойчивости равновесий $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ либо разделены областью P (при $A > C$), либо имеют область P в качестве общей части (при $C > A$). В первом случае, т. е. при $A > C$, равновесие $\vartheta = \vartheta_3$ устойчиво, а во втором — неустойчиво.

Нетрудно видеть, что равновесия $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ отвечают вращениям ротора вокруг вертикальной оси симметрии, и их устойчивость исследована в задаче 3.1.1.

Относительному равновесию $\vartheta = \vartheta_3$ отвечает регулярная прецессия гироскопа.

Результаты исследования устойчивости отражены на рис. 3.2, где индексы «+», «-» означают область устойчивости (неустойчивости) соответствующего движения.

Задача 3.1.3. Предположим, что в системе, описанной в предыдущей задаче, отсутствуют силы, обеспечивающие постоянство угловой скорости φ вращения ротора относительно внутренней рамки S_2 подвеса. Координата φ в этом случае становится циклической. Среди

движений ротора, очевидно, существует вращение его вокруг вертикальной оси симметрии с некоторой постоянной угловой скоростью u .

Исследовать устойчивость этого движения методом связки Четаева.

Решение. Рассматриваемая система служит примером механических систем со связями, явно зависящими от времени ($\psi = \Omega t + \psi_0$), и одновременно обладающих циклическими координатами (φ). Кинетическая энергия T системы

$$T = 0,5 [A\dot{\vartheta}^2 + A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \Omega \cos \vartheta)^2]$$

и силовая функция U силы тяжести $U = Mga \cos \vartheta$ не зависят явно от времени. Поэтому имеет место интеграл Якоби

$$V_1 = A\dot{\vartheta}^2 - A\Omega^2 - C\Omega^2 \cos^2 \vartheta + C\dot{\varphi}^2 - 2mga \cos \vartheta = 2h. \quad (1)$$

Циклической координате φ отвечает интеграл

$$V_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \Omega \cos \vartheta) = v = \text{const}. \quad (2)$$

Положим в исследуемом движении $\vartheta_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = u = \dot{\varphi} - \Omega$.

Введем отклонения $x = \vartheta - \vartheta_0$, $y = \dot{\vartheta}$, $z = \varphi - \varphi_0$ и представим (1), (2) в виде разложения по отклонениям x , y , z с точностью до квадратичных членов

$$V_1 = Ay^2 + (C - A)\Omega^2 x^2 + mgax^2 + 2Cz\dot{\varphi}_0 + Cz^2 + \dots,$$

$$V_2 = Cz - C\Omega \frac{x^2}{2} + \dots$$

Составим связку из этих двух интегралов, не содержащую линейного по z члена,

$$V_1 - 2V_2\dot{\varphi}_0 = Ay^2 - A\Omega^2 x^2 + u\Omega x^2 + mgax^2 + Cz^2 + \dots \quad (3)$$

Условие знакоопределенности квадратичной части интеграла (3) — достаточное условие устойчивости исследуемого движения — имеет вид $mga + Cu\Omega - A\Omega^2 > 0$.

Случай обращения этого неравенства в равенство исследуется аналогично подобному в задаче 3.1.1.

Задача 3.1.4. В условиях предыдущей задачи определить стационарные движения гироскопа, при которых остается постоянным значение угла нутации $\vartheta(t) = \vartheta(t_0) = \vartheta_0 = \text{const}$, и исследовать их устойчивость.

Решение. Исключив из (1) (см. решение задачи 3.1.3) $\dot{\varphi}$ с помощью (2), получим выражение для силовой функции R_0 приведенной системы

$$R_0 = 0,5A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + v\Omega \cos \vartheta + Mga \cos \vartheta,$$

которая зависит от двух постоянных параметров Ω и v .

Уравнение стационарных движений

$$R'_0 = \sin \vartheta (A\Omega^2 \cos \vartheta - v\Omega - Mga) = 0$$

имеет два решения $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \pi$, существующие при любых значениях Ω , v . Кроме того, при $|\Omega u + Mga| < A\Omega^2$ существует решение $\vartheta_3 = \arccos(v\Omega + Mga)/(A\Omega^2)$.

Область P существования решения ϑ_3 состоит из двух кусков плоскости v , Ω (рис. 3.3), заключенных между гиперболами I и II, уравнения которых имеют вид

$$\text{I. } -A\Omega^2 - v\Omega - Mga = 0;$$

$$\text{II. } -A\Omega^2 + v\Omega + Mga = 0.$$

Каждой точке области P отвечает лишь одно значение ϑ_3 . Множество точек области P , которым

отвечает одно и то же значение $\vartheta_{3*} \neq 0, \pi$, изображается (рис. 3.3) гиперболой $A\Omega^2 \cos \vartheta_{3*} - v\Omega = mga$.

Исследуем теперь вопрос об устойчивости найденных движений. Для этого вычислим

$$R''_0 = \cos \vartheta (A\Omega^2 \cos \vartheta - v\Omega - Mga) - A\Omega^2 \sin^2 \vartheta.$$

Имеем

$$R''_0(0) \begin{cases} > 0 & \text{при } A\Omega^2 - v\Omega - Mga > 0, \\ < 0 & \text{при } A\Omega^2 - v\Omega - Mga < 0, \end{cases}$$

$$R''_0(\pi) \begin{cases} > 0 & \text{при } A\Omega^2 + v\Omega + Mga > 0, \\ < 0 & \text{при } A\Omega^2 + v\Omega + Mga < 0, \end{cases} \quad R''_0(\vartheta_3) < 0.$$

Нетрудно видеть, что движения $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ отвечают вращениям ротора вокруг вертикальной оси сим-

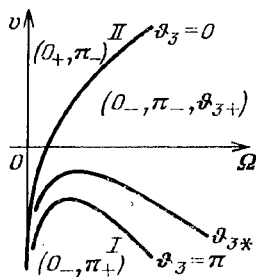


Рис. 3.3

метрии, а движение $\vartheta = \vartheta_3$ — регулярной прецессии ротора.

Отметим, что изменение условий движения ротора по сравнению с задачами 3.1.1, 3.1.2 привело к тому, что качественное распределение стационарных движений уже не зависит от соотношения между моментами инерции A и C ротора.

Задача 3.1.5. Предположим, что в системе, описанной в задаче 3.1.1, отсутствуют силы, обеспечивающие постоянство угловой скорости $\dot{\psi}$ прецессии гироскопа. Координата ψ в этом случае становится циклической (в отличие от координаты φ в условиях задачи 3.1.3). Среди движений ротора существует вращение его вокруг вертикальной оси симметрии с некоторой постоянной угловой скоростью u .

Исследовать устойчивость этого движения методом связи Четаева.

Решение. Рассматриваемая система имеет связь, явно зависящую от времени ($\varphi = \omega t + \varphi_0$), и обладает циклической координатой ψ .

Кинетическая энергия T системы и силовая функция силы тяжести не зависят явно от времени. Поэтому имеет место интеграл Якоби

$$V_1 = A\dot{\vartheta}^2 + A\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + C\dot{\psi}^2 \cos^2 \vartheta - C\omega^2 - \\ - 2mga \cos \vartheta = 2h. \quad (1)$$

Циклической координате ψ отвечает первый интеграл

$$V_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\omega + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta = v. \quad (2)$$

Положим в исследуемом движении $\vartheta_0 = 0$, $\dot{\psi}_0 = u - \omega$ и введем отклонения $x = \vartheta - \vartheta_0$, $y = \vartheta$, $z = \psi - \psi_0$.

Представим функции V_1 , V_2 в виде разложения по отклонениям x , y , z с точностью до квадратичных членов

$$V_1 = Ay^2 + (A - C)\dot{\psi}_0^2 x^2 + mga x^2 + 2C\dot{\psi}_0 z + Cz^2 + \dots, \\ V_2 = (A - C)\dot{\psi}_0 x^2 + Cz - 0,5C\omega x^2.$$

Составим из этих двух интегралов связку, не содержащую линейного по z члена,

$$V_1 - 2\dot{\psi}_0 V_2 = Ay^2 + [(C - A)u^2 + (2A - C)u\omega - \\ - A\omega^2 + mga] x^2 + Cz^2 + \dots \quad (3)$$

Условие знакоопределенности квадратичной части интеграла (3) — достаточное условие устойчивости исследуемого движения — имеет вид

$$mga - A\omega^2 + (2A - C)u\omega + (C - A)u^2 > 0.$$

Случай, когда это неравенство обращается в равенство, исследуется так же, как и в задаче 3.1.1.

Задача 3.1.6. В условиях предыдущей задачи определить стационарные движения гироскопа, при которых остается постоянным значение угла нутации $\vartheta(t) = \vartheta(t_0) = \vartheta_0 = \text{const}$, и исследовать их устойчивость.

Решение. Исключив из (1) (см. решение задачи 3.1.5) $\dot{\psi}$ с помощью (2), получим выражение для силовой функции R_0 приведенной системы

$$R_0 = Mga \cos \vartheta + 0,5(v - C\omega \cos \vartheta)^2 / (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta).$$

Провести анализ экстремумов функции R_0 (по аналогии с решением задачи 3.1.4).

Задача 3.1.7. Предположим, что гироскоп, описанный в предыдущих задачах, движется в отсутствие приводов и сил трения во всех осях подвеса. Определить стационарные движения гироскопа, при которых остается постоянным значение угла нутации, и исследовать их устойчивость.

Решение. Рассматриваемый гироскоп имеет три степени свободы. Две координаты — угол ψ прецессии и угол φ собственного вращения — являются циклическими. Им отвечают два первых интеграла:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = u,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta = v.$$

Нетрудно видеть, что параметры u , v имеют простой механический смысл. Это — проекции момента количества движения ротора на две оси: v — проекция на ось L_1 поворота внешней рамки подвеса; u — проекция на ось L симметрии ротора.

Осуществив процедуру игнорирования циклических координат, получим силовую функцию R_0 приведенной

системы в следующем виде:

$$R_0 = -0,5 \frac{(v - u \cos \vartheta)^2}{A \sin^2 \vartheta} + mga \cos \vartheta.$$

Уравнение стационарных движений имеет вид

$$R'_0 = - \frac{(u - v \cos \vartheta)(v - u \cos \vartheta)}{A \sin^3 \vartheta} - mga \sin \vartheta = 0. \quad (1)$$

Будем считать для определенности, что $a > 0$.

Функция R_0 и уравнение (1) при $\vartheta = 0, \pi$ имеют особенности. Однако одна из них исчезает, если $u = \pm v$. Проверим это. Пусть сначала $u = v$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} R_0 &= -0,5 \frac{v^2 (1 - \cos \vartheta)^2}{A (1 - \cos \vartheta) (1 + \cos \vartheta)} + mga \cos \vartheta = \\ &= 0,5 v^2 \frac{(\cos \vartheta - 1)}{A (\cos \vartheta + 1)} + mga \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Уравнение (1) принимает вид

$$\sin \vartheta \left(\frac{v^2}{(1 + \cos \vartheta)^2 A} + mga \right) = 0. \quad (2)$$

При $v \neq 0$ это уравнение имеет лишь одно решение $\vartheta = 0$. Если же $v = 0$, то появляется и второе решение $\vartheta = \pi$.

Рассмотрим теперь случай $u = -v$. Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$\sin \vartheta \left(mga - \frac{v^2}{A (1 - \cos \vartheta)^2} \right) = 0. \quad (3)$$

Кроме очевидного решения $\vartheta_1 = \pi$, которое имеет место при всех значениях параметра v , это уравнение при $v^2 < 4mga$ имеет еще одно решение, для которого

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{|v|}{\sqrt{mgaA}}.$$

Уравнение (1) определяет в пространстве ϑ, u, v некоторую поверхность. Линии уровня этой поверхности $\vartheta(u, v) = \vartheta_* = \text{const}$ при $\vartheta_* \neq 0, \pi$ представляют собой семейство гипербол, качественно изображенное на рис. 3.4.

Нетрудно видеть, что стационарные движения $\vartheta = 0, \pi$ суть перманентные вращения гироскопа вокруг оси

симметрии, ориентированной вертикально. При $\vartheta = 0$ его центр тяжести расположен ниже центра O подвеса, а при $\vartheta = \pi$ — выше. Стационарные движения $\vartheta \neq 0, \pi$ —

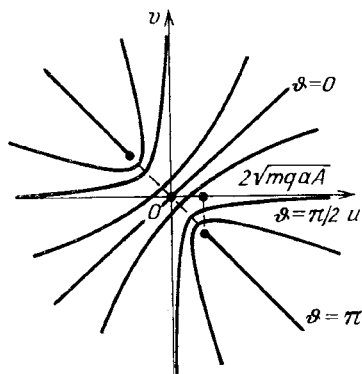


Рис. 3.4

регулярные прецессии. При этом регулярные прецессии «образуют» в пространстве ϑ, u, v некоторую непрерывную поверхность. Все точки перманентных вращений $\vartheta = 0$ примыкают к этой поверхности. Кроме того, к ней примыкают и те точки перманентных вращений $\vartheta = \pi$ (куски прямой $\vartheta = \pi, u = v$), для которых $v^2 \geq 4mga$.

Исследуем теперь устойчивость найденных стационарных движений. Для этого

вычислим вторую производную от функции R_0 . Пусть сначала $\sin \vartheta \neq 0$, тогда

$$R_0'' = -mga \cos \vartheta - \frac{v \sin \vartheta (v - u \cos \vartheta) + u \sin \vartheta (u - v \cos \vartheta)}{A \sin^3 \vartheta} + \\ + 3 \frac{(u - v \cos \vartheta)(v - u \cos \vartheta) \cos \vartheta}{A \sin^4 \vartheta}.$$

Отсюда, учитывая (1), имеем

$$R_0'' = - \frac{(u^2 + v^2)(1 + 3 \cos^2 \vartheta) + 2uv \cos \vartheta (3 + \cos^2 \vartheta)}{A \sin^4 \vartheta}.$$

Это выражение представляет собой определенно-отрицательную квадратичную форму переменных u, v . Это нетрудно установить, используя критерий Сильвестра.

Отсюда заключаем, что все регулярные прецессии ($\sin \vartheta \neq 0$) устойчивы.

Проведя аналогичные вычисления при $u = \pm v$, устанавливаем, что неустойчивы лишь перманентные вращения $\vartheta = \pi$ («верхнее» расположение центра масс) при $v^2 < 4mga$ (условие Маиевского).

Отметим еще раз особенность рассмотренной задачи, заключающуюся в том, что перманентные вращения возможны не при любом наборе постоянных параметров u, v , как это было в задачах 3.1.1 — 3.1.6. Это связано с механическим смыслом этих параметров. В самом деле,

если моменты количества движения относительно двух осей не равны по величине, то эти оси не могут совпадать.

Задача 3.1.8. Решить задачу 3.1.2 с учетом массы колец подвеса.

Решение. Измененная потенциальная энергия имеет вид

$$W = -0,5\tilde{A}\Omega^2 \sin^2 \vartheta - C(\omega + \Omega \cos \vartheta)^2 - \\ - C_2\Omega^2 \cos^2 \vartheta - mga \cos \vartheta, \quad \tilde{A} = A + B_2.$$

Уравнение для относительных равновесий

$$W' = -[(\tilde{A} - C)\Omega^2 \cos \vartheta - C\omega\Omega - mga] \sin \vartheta = 0, \\ \tilde{C} = C + C_2,$$

и вопрос об устойчивости анализируются так же, как и в задаче 3.1.2 с учетом замены параметров $A - C$ на $\tilde{A} - \tilde{C}$.

Задача 3.1.9. Решить задачу 3.1.4 с учетом массы колец подвеса.

Решение. Рассматриваемая система служит примером механических систем со связями, явно зависящими от времени ($\psi = \omega t + \psi_0$), и одновременно обладающих циклическими координатами. Однако характер зависимости связей от времени таков, что и кинетическая энергия T системы, и силовая функция U силы тяжести не зависят явно от времени:

$$T = 0,5 [A_1\Omega^2 + A_2\dot{\vartheta}^2 + B_2\Omega^2 \sin^2 \vartheta + C_2\Omega^2 \cos^2 \vartheta + \\ + A\dot{\varphi}^2 + A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \Omega \cos \vartheta)^2], \\ U = (ma + m_1a_1)g \cos \vartheta = Ma_*g \cos \vartheta.$$

Координата φ явно не входит ни в T , ни в U . Ей отвечает циклический интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \Omega \cos \vartheta) = u = \text{const.} \quad (1)$$

Обобщенный интеграл энергии — интеграл Якоби — после исключения из него с помощью (1) скорости $\dot{\varphi}$ принимает вид

$$(A + A_2)\dot{\vartheta}^2 - 2u\Omega \cos \vartheta - A_*\Omega^2 \sin^2 \vartheta - 2Mga_* \cos \vartheta = 2h, \\ A_* = A + B_2 - C_2.$$

Отсюда получаем выражение для потенциальной энергии приведенной системы

$$W = -0,5A_*\Omega^2 \sin^2 \vartheta - u\Omega \cos \vartheta - Mga_* \cos \vartheta.$$

Уравнение стационарных движений имеет вид

$$W' = (-A_*\Omega^2 \cos \vartheta + u\Omega + Mga_*) \sin \vartheta = 0.$$

Как видно, это уравнение совпадает с уравнением относительных равновесий в задаче 3.1.2 с точностью до замены параметров $A - C$ на A_* и $C\omega$ на u .

Дальнейший анализ провести самостоятельно.

Задача 3.1.10. Учтем в задаче 3.1.5 массы колец подвеса. Тогда гироскоп, очевидно, будет обладать таким движением, при котором ось L его ротора ориентирована вертикально, сам ротор вращается с некоторой абсолютной угловой скоростью ω , а рамки подвеса вращаются с другой угловой скоростью Ω . Исследовать устойчивость этого движения.

Решение. Рассматриваемая система консервативна и обладает двумя циклическими координатами (φ, ψ) . Уравнения ее движения допускают три первых интеграла: интеграл энергии

$$\begin{aligned} V_1 = & (A + A_2) \dot{\vartheta}^2 + (A + B_2) \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + C_2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \vartheta + \\ & + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 + A_1 \dot{\psi}^2 - 2Mga_* \cos \vartheta = h, \\ Ma_* = & ma + m_1 a_1 \end{aligned}$$

и два циклических

$$\begin{aligned} V_2 = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) &= u, \\ V_3 = (A + B_2) \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta + \\ &+ C_2 \dot{\psi} \cos^2 \vartheta + A_1 \dot{\psi} = v. \end{aligned}$$

На исследуемом движении постоянные этих интегралов суть

$$\begin{aligned} u &= C\omega, \quad v = C\omega + C_2\Omega + A_1\Omega, \\ h &= C_2\Omega^2 + C\omega^2 + A_1\Omega^2 + 2Mga_*. \end{aligned}$$

В возмущенном движении положим

$$\vartheta = \eta, \quad \dot{\vartheta} = x, \quad \dot{\psi} = \Omega + y, \quad \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta = \omega + z.$$

Тогда первые интегралы примут вид (с точностью до

членов второго порядка малости)

$$\begin{aligned} V_1 &= (A + A_2) x^2 + (A_* \Omega^2 + Mga_*) \eta^2 + \\ &\quad + (A_1 + C_2) (y^2 + 2\Omega y) + C (z^2 + 2\omega z) + \dots, \\ V_2 &= Cz, \quad V_3 = (A_* \Omega - 0,5C\omega) \eta^2 + \\ &\quad + (A_1 + C_2) y + Cz + \dots, \\ A_* &= A + B_2 - C_2. \end{aligned}$$

Построим связку этих интегралов, не содержащую линейных членов,

$$\begin{aligned} V &= V_1 - 2\Omega V_3 + 2(\Omega - \omega) V_2 + \lambda V_2^2 + \kappa V_3^2 = \\ &= (A + A_2) x^2 + (A_1 + C_2) y^2 - (A_* \Omega^2 - C\omega\Omega - mga) \eta^2 + \\ &\quad + \lambda V_2^2 + \kappa V_3^2 + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Поскольку V_2^2 и V_3^2 содержат лишь y^2 и z^2 , то для знакоопределенности интеграла V нужно, чтобы выполнялось следующее условие (условие устойчивости исследуемого движения): $(A + B_2 - C_2)\Omega^2 - C\omega\Omega - mga < 0$.

Покажите, что это условие совпадает с условием устойчивости аналогичного движения в предыдущей задаче.

Задача 3.1.11. В условиях задачи 3.1.10 определить стационарные движения гироскопа и исследовать их устойчивость методом Рауса.

Решение. Воспользуемся обозначениями задачи 3.1.10. Применив процедуру игнорирования циклических координат, для силовой функции R_0 приведенной системы получим следующее выражение:

$$R_0 = -0,5 \frac{(v - u \cos \vartheta)^2}{A_1 + C_2 \cos^2 \vartheta + (A + B_2) \sin^2 \vartheta} + Mga_* \cos \vartheta.$$

Уравнение стационарных движений

$$R'_0 = -\sin \vartheta \left[Mga_* + \frac{(v - u \cos \vartheta)(uB_* - vA_* \cos \vartheta)}{(A_* \sin^2 \vartheta + A_1 + C_2)^2} \right] = 0, \quad (1)$$

$$B_* = A + B_1 + A_1$$

при любых значениях параметров u, v имеет решения $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = \pi$.

Кроме того, при некоторых значениях параметров u, v возможны и дополнительные решения, удовлетво-

ряющие уравнению

$$(v - u \cos \vartheta)(uB_* - vA_* \cos \vartheta) + Mga_*(A_* \sin^2 \vartheta + A_1 + C_2)^2 = 0. \quad (2)$$

Проведем геометрический анализ уравнения (2). Оно, очевидно, определяет некоторую поверхность $\vartheta = \vartheta_3(u, v)$ в пространстве ϑ, u, v . Если спроектировать линии уровня $\vartheta_3(u, v) = \text{const}$ этой поверхности на плоскость u, v , то получим семейство гипербол. Построим три такие гиперболы: $\vartheta_3(u, v) = 0$, $\vartheta_3(u, v) = \pi/2$, $\vartheta_3(u, v) = \pi$ (рис. 3.5).

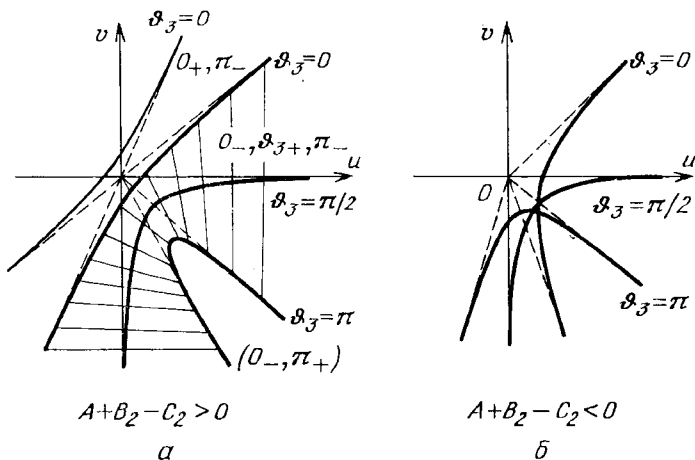


Рис. 3.5

В случае $A + B_2 - C_2 > 0$ (рис. 3.5, а) эти гиперболы не пересекаются. Попробуйте обосновать, что в этом случае любые две гиперболы $\vartheta_3(u, v) = \vartheta_*$, $\vartheta_3(u, v) = \vartheta_{**}$ не пересекаются, если $\vartheta_* \neq \vartheta_{**}$, т. е. каждой точке части плоскости u, v , ограниченной гиперболой $\vartheta_3 = 0$, $\vartheta_3 = \pi$ (на рис. 3.5, а заштрихована), отвечает лишь одно решение уравнения (1).

В случае $A + B_2 - C_2 < 0$ (рис. 3.5, б) неизбежно по крайней мере попарное пересечение этих гипербол. Поскольку при изменении ϑ от 0 до π асимптоты гипербол $\vartheta_3(u, v) = \vartheta$ поворачиваются монотонно, то область P , где находится точка пересечения гипербол $\vartheta_3(u, v) = \vartheta_*$, $\vartheta_3(u, v) = \vartheta_{**}$, $\vartheta_* \neq \vartheta_{**}$, ограничена.

Попытайтесь определить границу области P и решить вопрос о максимальном числе пересекающихся гипербол.

Нетрудно видеть, что решения $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \pi$ отвечают вращениям ротора вокруг вертикальной оси, изученным в задаче 3.1.10, а решение $\vartheta = \vartheta_3$ описывает прецессию ротора.

Для исследования устойчивости найденных стационарных движений вычислим вторую производную R''_0 функции R_0 , обозначив через $P(\vartheta)$ функцию в квадратных скобках в (1);

$$R''_0 = P(\vartheta) \cos \vartheta - P'(\vartheta) \sin \vartheta.$$

Пусть $A + B_2 - C_2 > 0$, $a_* > 0$.

Исследуем сначала устойчивость вращений ротора вокруг вертикальной оси его симметрии $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \pi$

$$R''_0(0) \begin{cases} < 0 & \text{при } P(0) < 0, \\ > 0 & \text{при } P(0) > 0, \end{cases}$$

$$R''_0(\pi) \begin{cases} < 0 & \text{при } P(\pi) < 0, \\ > 0 & \text{при } P(\pi) > 0. \end{cases}$$

Видно, что вращение с «нижним» расположением центра тяжести ротора ($\vartheta = 0$) устойчиво, если параметры u , v принадлежат области, заключенной между ветвями гиперболы $\vartheta_3(u, v) = 0$.

Вращение с «верхним» расположением центра тяжести ($\vartheta = \pi$) устойчиво, если параметры u , v принадлежат области, не лежащей между ветвями гиперболы $\vartheta_3(u, v) = \pi$.

В той области, которая на рис. 3.5, *a* заштрихована, оба вращения неустойчивы, так как на них функция R_0 достигает минимума. Поскольку между двумя минимумами непрерывной функции от одной переменной обязательно имеется хотя бы один максимум, то в этой области устойчиво движение $\vartheta = \vartheta_3$, т. е. устойчивы прецессии. Результаты исследования устойчивости отражены на рис. 3.5, *a*, где область устойчивости каждого движения отмечена индексом «+», а неустойчивости «-».

Случай $A + B_2 - C_2 < 0$ разобран самостоятельно.

Задача 3.1.12. Предположим, что ось внешней рамки вертикальна, на внутренней рамке подвеса установлен привод, обеспечивающий удержание несиммет-

ричного ($A \neq B \neq C$) ротора в положении $\varphi = 0$, а усилия второго привода обеспечивают постоянство угловой скорости прецессии $\dot{\psi} = \omega = \text{const}$. Найти установившиеся движения ротора, в которых $\vartheta(t) = \vartheta(t_0) = \text{const}$, и исследовать их устойчивость.

Решение. Нетрудно видеть, что рассматриваемая задача является задачей об относительном равновесии ротора.

Измененная потенциальная энергия имеет вид

$$W = -0,5 (\tilde{B} \sin^2 \vartheta + \tilde{C} \cos^2 \vartheta) \omega^2 - Mga_* \cos \vartheta, \\ \tilde{C} = C + C_2, \quad \tilde{B} = B + B_2.$$

Функция W имеет тот же вид, что и в задаче 1.2.8.

Задача 3.1.13. Предположим, что в условиях задачи 3.1.12 отсутствует привод на внутренней рамке (т. е. снята связь $\varphi = 0$). Найти положения относительного равновесия тела и исследовать их устойчивость.

Решение. Измененная потенциальная энергия W имеет вид

$$W = -0,5 [(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \vartheta + \\ + \tilde{C} \cos^2 \vartheta + B_2 \sin^2 \vartheta] \omega^2 - Mga_* \cos \vartheta.$$

Система уравнений для определения положений относительного равновесия

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta [(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi + B_2 - \tilde{C}) \omega^2 \cos \varphi - \\ - Mga_*] = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = -(A - B) \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \vartheta = 0$$

имеет при любом ω два особенных решения (неизолированных)

$$\vartheta_1 = 0, \quad \varphi \text{ произвольно}, \quad \vartheta_2 = \pi, \quad \varphi \text{ произвольно},$$

а при $\omega^2 > Mga_*/|A + B_2 - \tilde{C}|$ — решения

$$\varphi_{3,4} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_{3,4} = \arccos \frac{Mga_*}{(A + B_2 - \tilde{C}) \omega^2},$$

и при $\omega^2 > Mga_*/|B + B_2 - \tilde{C}|$ — решения

$$\varphi_5 = 0, \quad \varphi_6 = \pi, \quad \vartheta_{5,6} = \arccos \frac{Mga_*}{(B + B_2 - \tilde{C}) \omega^2}.$$

Для исследования устойчивости последних четырех относительных равновесий вычислим вторые производные функции W :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} &= -\cos \vartheta [(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi + B_2 - \tilde{C}) \omega^2 \cos \vartheta - \\ &\quad - Mga_*] + (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi + B_2 - \tilde{C}) \omega^2 \sin^2 \varphi, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta \partial \varphi} &= -2(A - B) \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} &= -(A - B) \omega^2 \cos 2\varphi \sin^2 \vartheta.\end{aligned}$$

Пусть для определенности $A > B$. Могут представиться два случая:

случай I: $A + B_2 - \tilde{C} > 0$, случай II: $A + B_2 - \tilde{C} < 0$.

Нетрудно видеть, что $\frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta \partial \varphi} = 0$ во всех указанных четырех положениях равновесия, $\left. \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_{3,4}} > 0$, $\left. \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_{5,6}} < 0$, $\left. \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} \right|_{\varphi=\varphi_{3,4}} > 0$ для случая I и $\left. \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_{3,4}} < 0$ для случая II.

Отсюда вытекает, что устойчивы лишь третье и четвертое положения относительного равновесия в случае I. Ротор S при этом ориентирован таким образом, что та ось его эллипсоида инерции, длина которой $2/\sqrt{B}$, ориентирована вдоль оси L_2 качания внутренней рамки подвеса.

Определите степень неустойчивости пятого и шестого относительных равновесий.

Обратимся теперь к особым решениям, которым отвечают положения равновесия, безразличные, так сказать, по отношению к углу поворота φ . Нетрудно сообразить, что при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ возможны не только равновесия ротора, но и его вращения с произвольной угловой скоростью φ . Поэтому равновесие не может быть устойчивым по отношению к переменной φ . В то же время здесь возможна постановка задачи устойчивости по отношению к части переменных, решение которой предлагаем для самостоятельной проработки.

Задача 3.1.14. Предположим, что в условиях задачи 3.1.13 отсутствует привод в оси прецессии (т. е. сня-

та связь $\dot{\psi} = \omega$). В этом случае координата ψ — циклическая, а φ и ϑ — позиционные. Найти стационарные движения гироскопа.

Решение. Циклической координате ψ отвечает интеграл площадей

$$\dot{\psi}[(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \vartheta + \tilde{C} \cos^2 \vartheta + B_2 \sin^2 \vartheta] = \\ = v = \text{const.}$$

Силовая функция R_0 приведенной системы имеет вид

$$R_0 = -0,5 v^2 / [(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \vartheta + \tilde{C} \cos^2 \vartheta + \\ + B_2 \sin^2 \vartheta] + Mga_* \cos \vartheta.$$

Система уравнений стационарных движений

$$\frac{\partial R_0}{\partial \vartheta} = \\ = \sin \vartheta \left\{ \frac{v^2 \cos \vartheta [B_2 - \tilde{C} + A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi]}{[(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \vartheta + \tilde{C} \cos^2 \vartheta + B_2 \sin^2 \vartheta]^2} - \right. \\ \left. - Mga_* \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial \varphi} = v^2 \frac{(A - B) \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi}{[(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \vartheta + \tilde{C} \cos^2 \vartheta + B_2 \sin^2 \vartheta]^2} = 0$$

имеет при любом v особенные решения (аналогичные решениям предыдущей задачи): $\vartheta_1 = 0$, φ_1 произвольно; $\vartheta_2 = \pi$, φ_2 произвольно.

Кроме того, существуют два значения v_1 и v_2 такие, что

при $v > v_1 \cos \varphi = 0$ и имеет решение уравнение

$$v^2 \cos \vartheta (A + B_2 - \tilde{C}) = Mga_* [(A + B_2) \sin^2 \vartheta + \tilde{C} \cos^2 \vartheta],$$

при $v > v_2 \sin \varphi = 0$ и имеет решение уравнение

$$v^2 (B + B_2 - \tilde{C}) \cos \vartheta = Mga_* [(B + B_2) \sin^2 \vartheta + \tilde{C} \cos^2 \vartheta]^2.$$

Дальнейший анализ этих решений провести самостоятельно.

Особенные решения обладают теми же свойствами, что и аналогичные решения в предыдущей задаче.

Задача 3.1.15. Пусть ротор гироскопа симметричен ($A = B \neq C$), а ось внешней рамки подвеса горизонтальна. Методом Рауса найти стационарные движения

гироскопа и исследовать их устойчивость (с учетом масс рамок).

Решение. В рассматриваемом случае для силовой функции U силы тяжести имеем выражение

$$U = Mga_* \sin \vartheta \sin \psi.$$

Нетрудно видеть, что такой гироскоп представляет собой систему с одной циклической координатой φ , которой отвечает интеграл $\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta = u = \text{const.}$

Игнорируя циклическую координату, для силовой функции приведенной системы получаем выражение

$$R_0 = Mga_* \sin \vartheta \sin \psi - 0,5 Cu^2.$$

Уравнения стационарных движений

$$\frac{\partial R_0}{\partial \vartheta} = mga \cos \vartheta \sin \psi = 0, \quad \frac{\partial R_0}{\partial \psi} = mga \sin \vartheta \cos \psi = 0$$

имеют решения, которым отвечают лишь три существенно различных расположения рамок, $\vartheta_1 = \pi/2$, $\psi_1 = \pi/2$; $\vartheta_2 = -\pi/2$, $\psi_2 = \pi/2$; $\vartheta_3 = 0$, $\psi_3 = 0$.

В первом и втором положениях ось L ротора вертикальна, а ось L_2 горизонтальна, но в первом положении центр масс ротора расположен ниже центра подвеса (рис. 3.6, а), а во втором — выше (рис. 3.6, б).

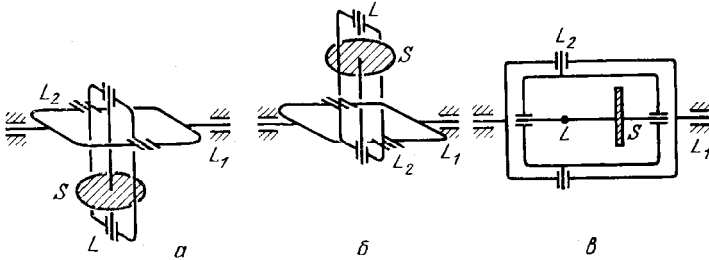


Рис. 3.6

В третьем положении ось L_2 вертикальна, а ось L горизонтальна (рис. 3.6, в).

Для исследования устойчивости вычислим определитель матрицы из вторых производных функции R_0

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\sin \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \cos \psi & -\sin \vartheta \sin \psi \end{vmatrix}.$$

Для первого положения имеем $\Delta_1 < 0$, $\Delta > 0$, и оно устойчиво. Для второго: $\Delta_1 > 0$, $\Delta > 0$, т. е. степень его неустойчивости равна двум. Вековой устойчивости нет, но возможна гироскопическая стабилизация. Для третьего: $\Delta_1 = 0$, $\Delta < 0$. Это положение неустойчиво, степень неустойчивости равна единице и гироскопическая стабилизация невозможна.

Отметим, что вращение ротора вокруг вертикали с нижним расположением его центра масс устойчиво при любых значениях моментов инерции и угловой скорости.

Задача 3.1.16. Исследовать в первом приближении вопрос о возможности гироскопической стабилизации вращения ротора вокруг его вертикальной оси L с верхним расположением центра масс.

Решение. Введя отклонения $x = \vartheta + \pi/2$, $y = \psi - \pi/2$, запишем уравнения первого приближения для возмущенного движения приведенной системы

$$\begin{aligned}(A + A_2)\ddot{x} + Cuy - Mga_*x &= 0, \\ (A + B_2 + A_1)\ddot{y} - Cux - Mga_*y &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $u = \dot{\varphi}_0$ — угловая скорость вращения ротора в невозмущенном движении.

Характеристическое уравнение линейной системы (1)

$$(A + A_2)(A + B_2 + A_1)\lambda^4 + [C^2u^2 - mga(2A + B_2 + A_1 + A_2)]\lambda^2 + M^2g^2a_*^2 = 0$$

имеет все корни чисто мнимые, если его дискриминант положителен

$$C^2u^2 - mg[2A + A_1 + B_2 + A_2 + 2\sqrt{(A + A_2)(A + A_1 + B_2)}] > 0, \quad (2)$$

это и есть необходимое условие гироскопической стабилизации.

Замечание. Система (1) обладает первым квадратичным интегралом

$$\begin{aligned}\Gamma = 2[(A + A_2)\dot{x}y - (A + B_2 + A_1)x\dot{y}] - Cu(x^2 + y^2) - \\ - \frac{A_2 - B_2 - A_1}{2Cu}[(A + B_2 + A_1)\dot{y}^2 - (A + A_1)\dot{x}^2 + \\ + Mga_*(x^2 - y^2)].\end{aligned}$$

Вывести условие (2) построением функции Ляпунова в виде связки интеграла Г, интеграла энергии и циклических интегралов.

Задача 3.1.17. Пользуясь теоремами Кельвина — Четаева, установить характер влияния диссипативных сил, действующих в осях L_1 , L_2 качания подвеса, на устойчивость стационарных движений гироскопа, исследованных в задаче 3.1.15.

Задача 3.1.18. Дополним условие задачи 3.1.15 предположением, что на внутренней рамке подвеса установлен привод, усилия которого обеспечивают постоянство угловой скорости φ собственного вращения ($\varphi = \omega = \text{const}$). Найти положения равновесия оси ротора и исследовать их устойчивость.

Решение. Задача относится к числу задач на относительное равновесие. Силовая функция U имеет вид $U = Mga_* \sin \theta \sin \psi$ и совпадает с функцией U задачи 3.1.15. Очевидно, положения равновесия оси ротора те же, что и в задаче 3.1.15.

Проанализировать влияние изменения условий движения на устойчивость вращений ротора и, в частности, на условие гироскопической стабилизации.

§ 3.2. Ротор на гибком валу

Представления о вращении человек мог бы получить, наблюдая, например, за движением естественных тел. Однако вращение как технологическая операция было освоено человечеством задолго до осознания факта — и Земля вертится. Но лишь в последнее столетие при анализе путей повышения эффективности работы машин выяснилось, что именно вращение нередко служит источником нежелательных вибраций.

Возникла задача обеспечения такого движения объекта, при котором он совершал бы вращение (с высокой угловой скоростью) вокруг некоторой оси, а эта последняя не только не совершала бы никаких движений, но и не испытывала бы больших реакций. Такой тип движения получил в теоретической механике, казалось бы, прозаическое название — «перманентное вращение» (хотя на самом деле оно вполне поэтично, так как переводится как «вечное»).

Именно исключительная прикладная важность этого движения потребовала всестороннего его изучения и обсуждения в научной литературе. В частности, широко дебатировался вопрос об устойчивости перманентного вращения (даже в этой книге ему посвящено немало страниц). Ведь обеспечение устойчивости вращения — один

из основных способов борьбы с вибрациями. Разберем здесь простейшие варианты этой задачи, проясняющие основные ее принципиальные особенности.

Пусть ротор (твердое тело — маховик) A (рис. 3.7) симметрично закреплен на гибком невесомом валу, концы которого помещены в соосные подшипники B и C . Будем считать, что в недеформированном состоянии вал прямолинеен и ось вала проходит через точку P ротора, которая отстоит от центра G тяжести маховика на расстояние e ($|PG| = e$).

Очевидно, что тело A может совершать плоскопараллельное движение, при котором точки P и G движутся в плоскости, ортогональной прямой BC . Именно этот тип движе-

ния ротора-маховика и будет служить объектом дальнейшего изучения.

Введем в плоскости движения точек P и G две системы координат (рис. 3.8) с общим началом в точке O на линии BC : неподвижную систему OXY и подвижную Oxy ,

ось x которой коллинеарна отрезку PG . В качестве обобщенных координат можно использовать различные наборы из координат точек P, G в тех или иных осях и угол φ поворота отрезка PG .

Два типичных набора координат таковы: X, Y, φ или x, y, φ , $X = x \cos \varphi - y \sin \varphi$,

$Y = x \sin \varphi + y \cos \varphi$, где X, Y или x, y — соответствующие координаты точки G .

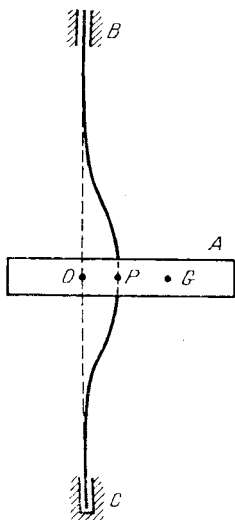


Рис. 3.7

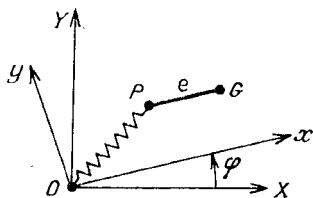


Рис. 3.8

Выражение для кинетической энергии ротора имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 = \\ = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2 (x^2 + y^2) + 2\dot{\varphi} (xy - yx)] + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2. \quad (1)$$

Здесь m — масса, J — центральный осевой момент инерции ротора.

Опишем теперь силы, приложенные к ротору в различных условиях движения.

Основная сила приложена к телу A со стороны деформированного вала (совершающего к тому же вращение вокруг своей изогнутой оси).

Поскольку вал невесом, то линия его изгиба принимает в любой момент форму устойчивого положения равновесия, соответствующую мгновенному состоянию ротора. Решение задачи о равновесной форме вала довольно сложно, и в расчетах обычно принимается та или иная аппроксимация для силы, нередко имеющая феноменологическую основу.

Следуя этому подходу, будем считать, что со стороны вала к ротору в точке P приложена центральная сила F_1 , которая направлена к точке O и величина которой пропорциональна расстоянию OP . Таким образом, имеем

$$F_1 = -c \{X - e \cos \varphi, Y - e \sin \varphi\} = -c \{x - e, y\}.$$

Очевидно, что такая аппроксимация приемлема при предположении о независимости плоской линии изгиба вала от угловой скорости его вращения и от скорости движения точки P .

В некоторых случаях необходимо учитывать потери на внутреннее трение в материале вала, сопровождающие процесс его деформирования. Линия изгиба вала перестает быть плоской. В этих случаях обычно считают, что к силе F_1 добавляется сила F_2 , которая зависит лишь от относительной скорости точки P (или, что то же, точки G), притом линейным образом, $F_2 = -a\{\dot{x}, \dot{y}\}$.

Если же ротор (или вал) движется в сопротивляющейся среде, то воздействие среды на тело моделируют силой F_3 , которая приложена к точке G (или P) и направлена в сторону, противоположную ее абсолютной скорости.

При этом величина F_3 этой силы зависит лишь от величины скорости точки G (или P) линейным или иным образом в зависимости от принятой модели. Силу F_3 называют еще силой внешнего трения.

Кроме перечисленных сил, необходим также учет усилий двигателя, обеспечивающего вращение ротора. Обычно считают, что двигатель неподвижен и что его усилия приводятся к паре с моментом M . Тогда уравнение вращательного движения ротора можно получить, применяя теорему об изменении его момента количества движения относительно оси BC ,

$$\frac{d}{dt} \{ \dot{\varphi} [J + m(x^2 + y^2)] \} + m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) = M.$$

Задача 3.2.1. Предположим, что силы F_2 и F_3 отсутствуют и момент M подобран таким образом, что во все время движения $\dot{\varphi}(t) = \omega = \text{const}$.

Найти стационарные движения (точнее, положения относительного равновесия) ротора и исследовать вопрос об их вековой устойчивости.

Решение. Запишем измененную силовую функцию

$$W = -0,5c[(x - e)^2 + y^2] + [J + m(x^2 + y^2)]\omega^2.$$

Система уравнений для стационарных движений

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -c(x - e) + m\omega^2 x = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = (-c + m\omega^2)y = 0$$

имеет решение

$$y = 0, \quad x = \frac{ec}{c - m\omega^2} = x_*, \quad (1)$$

если $m\omega^2 - c \neq 0$. Это решение качественно изображено на рис. 3.9.

Видно, что при $\omega \rightarrow \infty$ величина $x_* \rightarrow 0$, т. е. центр тяжести ротора приближается к оси его вращения. В этом проявляется свойство «самоцентрирования» ротора.

Для исследования устойчивости вычислим вторые производные функции W :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -c + m\omega^2, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -c + m\omega^2.$$

Нетрудно видеть, что условие вековой устойчивости — максимум функции W — выполняется лишь для одной ветви, той, которая расположена в области $m\omega^2 < c$.

В точках второй ветви ($m\omega^2 > c$ — «самоцентрирование») силовая функция W имеет минимум. Здесь вековой устойчивости нет, степень неустойчивости равна двум.

Задача 3.2.2. Выражение для кинетической энергии T ротора содержит произведения $\dot{x}\dot{\varphi}$ и $\dot{y}\dot{\varphi}$, т. е. рассматриваемая система является гироскопически связанной. Исследовать возможность гироскопической стабилизации движений, отвечающих второй ветви (см. решение задачи 3.2.1, $m\omega^2 > c$).

Решение. Введем возмущения $x - x_* = \xi$, $y = \eta$ и составим систему уравнений возмущенного движения

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} + (\tilde{c} - \omega^2)\xi = 0,$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + (\tilde{c} - \omega^2)\eta = 0, \quad \tilde{c} = c/m.$$

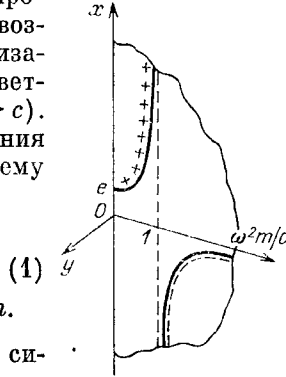


Рис. 3.9

Характеристическое уравнение этой системы

$$\lambda^4 + 2\lambda^2(\tilde{c} + \omega^2) + (\omega^2 - \tilde{c})^2 = 0$$

имеет чисто мнимые корни, если $\omega^2 \neq \tilde{c}$. Таким образом, выполняются условия гироскопической стабилизации при $\omega^2 > \tilde{c}$ (если $\omega^2 < \tilde{c}$, то имеется устойчивость в вековом смысле, как это показано в решении задачи 3.2.1).

Задача 3.2.3. Как влияют на вращение ротора силы внутреннего трения?

Решение. Нетрудно видеть, что сила внутреннего трения F_2 носит диссипативный характер. Поскольку она обращается в нуль при $\dot{x} = \dot{y} = 0$, то F_2 не влияет на положение равновесия $y = 0$, $x = x_*$. Однако учет этой силы в системе (1) задачи 3.2.2 приводит к различным свойствам устойчивости ее тривиального решения для случаев $m\omega^2 < c$ и $m\omega^2 > c$.

При $m\omega^2 < c$ положение равновесия (тривиальное решение системы (1), см. решение задачи 3.2.2) устойчиво под действием одних лишь потенциальных сил. Как мы убедились при решении предыдущей задачи, добавление к потенциальным сил гироскопических не изменило устойчивости равновесия (см. решение задачи 3.2.2). Включение в систему (1) силы F_2 в этих условиях приводит к упрочнению устойчивости до асимптотической.

Иное дело в случае $m\omega^2 > c$. Диссипативная сила F_2 , обладая полной диссипацией по переменным \dot{x} , \dot{y} , приводит к разрушению гироскопической стабилизации. При действии силы внутреннего трения F_2 «самоцентрированное» вращение ротора неустойчиво.

Задача 3.2.4. Предположим, что в дополнение к силе F_1 на ротор действует сила F_3 сопротивления внешней среды, приложенная в точке G и пропорциональная абсолютной скорости этой точки.

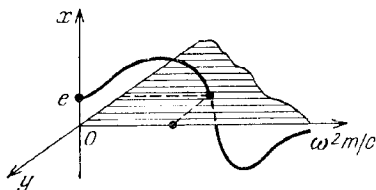


Рис. 3.10

Какое влияние на вращение ротора оказывает эта дополнительная сила?

Решение. Записав выражение для компонент силы F_3 в подвижной си-

стеме координат, получаем систему уравнений движения ротора

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - 2m\omega\dot{y} + c(x - e) - m\omega^2 x + b\dot{x} - b\omega y &= 0, \\ m\ddot{y} + 2m\omega\dot{x} + cy - m\omega^2 y + b\dot{y} + b\omega x &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где b — коэффициент внешнего трения.

Система уравнений стационарных движений имеет вид

$$(c - m\omega^2)x - b\omega y = ce, \quad b\omega x + (c - m\omega^2)y = 0,$$

а ее решение —

$$x_* = \frac{ce(c - m\omega^2)}{b^2\omega^2 + (c - m\omega^2)^2}, \quad y_* = \frac{-ceb\omega}{b^2\omega^2 + (c - m\omega^2)^2} \quad (2)$$

существует (рис. 3.10) при любых значениях ω (в отличие от аналогичного решения задачи 3.2.1).

Для исследования устойчивости найденного стационарного движения введем отклонения $\xi = x - x_*$, $\eta = y - y_*$ и запишем уравнения возмущенного движения в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} - 2m\omega\dot{\eta} + (c - m\omega^2)\xi + b\dot{\xi} - b\omega\eta &= 0, \\ m\ddot{\eta} + 2m\omega\dot{\xi} + (c - m\omega^2)\eta + b\dot{\eta} + b\omega\xi &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (3) имеют вид уравнений движения механической системы, находящейся под действием сил полной структуры, т. е. консервативных, гироскопических, диссипативных и позиционных неконсервативных (иногда —

да их называют силами циркуляционными или силами радиальной коррекции). В этом случае теоремы Кельвина — Четаева не позволяют получить заключение об устойчивости тривиального решения системы (3).

Воспользуемся критерием Гурвица. Характеристическое уравнение для системы (3) имеет вид

$$m^2\lambda^4 + 2mb\lambda^3 + [2m(c - m\omega^2) + 4m^2\omega^2 + b^2]\lambda^2 \pm \\ \pm 2b(c + m\omega^2)\lambda + b^2\omega^2 + (c - m\omega^2)^2 = 0.$$

Составим определитель Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2bm & m^2 & 0 & 0 \\ 2b(c + m\omega^2)^2 & 2m(c + m\omega^2) + b^2 & 2bm & m^2 \\ 0 & b^2\omega^2 + (c - m\omega^2)^2 & 2b(c + m\omega^2) & 2m(c + m\omega^2) + b^2 \\ 0 & 0 & 0 & (c - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2 \end{vmatrix}.$$

Условия устойчивости имеют вид неравенств

$$\Delta_2 = 2bm(cm + b^2 + \omega^2 m^2) > 0,$$

$$\Delta_3 = 4b^2m(b^2c + 4cm^2\omega^2) > 0,$$

$$\Delta_4 = [(c - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2]\Delta_3 > 0,$$

которые, очевидно, выполняются, если $b > 0$.

Таким образом, введение сил внешнего трения не только вносит изменение в характер зависимости положения равновесия от угловой скорости (ср. формулы (2) с формулами (1) задачи 3.2.1), но и обеспечивает его асимптотическую устойчивость при любых значениях угловой скорости вращения ротора.

Как в этой задаче соотносятся вопросы гироскопической стабилизации и влияния диссипативных сил?

Задача 3.2.5. Предположим, что на ротор, кроме силы F_1 , действуют также сила внутреннего трения F_2 (с коэффициентом a) и сила внешнего трения F_3 (с коэффициентом b).

Какое влияние на вращение ротора оказывает такая комбинация сил?

Решение. Нетрудно показать, что стационарные движения описываются формулами (2) из решения предыдущей задачи, а уравнения возмущенного движения

имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} - 2m\omega\dot{\eta} + (c - m\omega^2)\xi + (a + b)\dot{\xi} - b\omega\eta &= 0, \\ m\ddot{\eta} + 2m\omega\dot{\xi} + (c - m\omega^2)\eta + (a + b)\dot{\eta} + b\omega\xi &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Симметрия системы уравнений движения (1) позволяет ввести комплексную переменную $z = \xi + i\eta$ и представить систему (1) в форме одного уравнения

$$m\ddot{z} + (a + b + 2im\omega)\dot{z} + (c - m\omega^2 + ib\omega)z = 0. \quad (2)$$

Его общее решение имеет вид $z = Ae^{\lambda t}$, где λ — корень векового уравнения

$$m\lambda^2 + (2im\omega + a + b)\lambda + (c - m\omega^2 + ib\omega) = 0. \quad (3)$$

Если параметры уравнения (2) принадлежат границе области устойчивости, то обращается в нуль действительная часть показателя λ . Подставив в (3) $\lambda = i\kappa$, разделяя действительную и мнимую части уравнения, получаем, что частота κ должна удовлетворять одновременно двум уравнениям $-m\kappa^2 - 2m\omega\kappa + (c - m\omega^2) = 0$, $(a + b)\kappa + b\omega = 0$. Эти уравнения совместны при $m\omega^2 a^2 = c(a + b)^2$. Теперь нетрудно показать, что если

$$\omega^2 < c(a + b)^2 / (ma^2), \quad (4)$$

то стационарное вращение ротора асимптотически устойчиво.

Если знак строгого неравенства в (4) изменить на противоположный, то исследуемое движение станет неустойчивым.

Случай, когда неравенство (4) обращается в равенство, т. е. когда параметры принадлежат границе области устойчивости, требует дополнительного исследования. Разобрать этот случай самостоятельно.

Почему смена характера устойчивости не сопровождается ветвлением кривой стационарных движений?

Задача 3.2.6. Предположим, что после сообщения ротору некоторого момента количества движения двигатель отключается и дальнейшее вращение ротора протекает в отсутствие сил трения (как внутреннего, так и внешнего).

Найти стационарные движения ротора и исследовать вопрос об их вековой устойчивости.

Решение. Воспользуемся набором обобщенных координат x, y, φ . Как видно, кинетическая энергия T ро-

тора не зависит явно от φ . Сила F_1 , действующая на ротор, допускает силовую функцию $U = -0,5c[(x - e)^2 + y^2]$, которая также не зависит от φ . Таким образом, координата φ — циклическая. Ей отвечает первый интеграл (интеграл площадей)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(x^2 + y^2)\dot{\varphi} + J\dot{\varphi} + m(\dot{x}y - y\dot{x}) = \gamma = \text{const.}$$

Игнорируя циклическую координату, для силовой функции R_0 приведенной системы получим выражение

$$R_0 = -0,5c[(x - e)^2 + y^2] - 0,5\gamma^2/[J + m(x^2 + y^2)].$$

Система уравнений стационарных движений

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_0}{\partial x} &= -c(x - e) + \gamma^2 mx/[J + m(x^2 + y^2)]^2 = 0, \\ \frac{\partial R_0}{\partial y} &= \{-c + \gamma^2 m/[J + m(x^2 + y^2)]^2\} y = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

как нетрудно видеть, допускает только такие решения, для которых

$$y = 0. \quad (2)$$

Выразив, с учетом (2), из первого уравнения системы (1) величину $\kappa = m\gamma^2$ как функцию координаты x , получим зависимость, качественно изображенную на рис. 3.11. Видно, что существует такое κ_* , для которого при $\kappa < \kappa_*$ возможно лишь одно стационарное движение, когда $x > 0$. Если же $\kappa > \kappa_*$, то возможно несколько стационарных движений.

Особо отметим ветвь III стационарных движений, для которой $x \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$. Эта ветвь отражает сохранение упомянутого в решении задачи 3.2.1 свойства «самодентрирования» ротора, хотя условия вращательного движения изменились.

Для исследования вопроса о вековой устойчивости стационарного движения вычислим вторые производные функции R_0 на решениях системы (1):

$$\begin{aligned} \partial^2 R_0 / \partial y^2 &= -c + \gamma^2 m / (J + mx^2)^2 = -ce/x, \\ \frac{\partial^2 R_0}{\partial x \partial y} &= 0, \quad \frac{\partial^2 R_0}{\partial x^2} = -\frac{ce}{x} - \frac{4\gamma^2 mx^2}{(J + mx^2)^3}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для ветви I выполняются неравенства $\partial^2 R_0 / \partial y^2 < 0$, $\partial^2 R_0 / \partial x^2 < 0$, т. е. точки этой ветви

отвечают устойчивым в вековом смысле стационарным движениям.

Для точек ветви *II*, *III* имеем $\partial^2 R_0 / \partial y^2 > 0$, т. е. отвечающие им стационарные движения не могут быть устойчивыми в вековом смысле. При этом для ветви *II* $\partial^2 R_0 / \partial x^2 < 0$ и степень неустойчивости равна единице.

Для ветви *III* («самоцентрирование») $\partial^2 R_0 / \partial x^2 > 0$ степень неустойчивости равна двум.

Задача 3.2.7. Выражение (1) (см. § 3.2) для кинетической энергии T ротора содержит произведения

циклической скорости ϕ со скоростями \dot{x} , \dot{y} , т. е. рассматриваемая

система является гироскопически связанной. Исследовать возможность гироскопической стабилизации стационарных движений, отвечающих точкам ветви *III* (см. решение задачи 3.2.6).

Решение провести самостоятельно по аналогии с решением задачи 3.2.2.

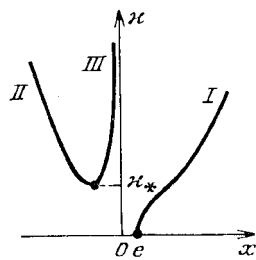


Рис. 3.11

§ 3.3. Тело в поле сил электромагнитной природы

Электромагнитные поля и взаимодействия с ними различных материалов представляют собой богатый источник сил с различными свойствами. Здесь мы можем лишь сосприкоснуться с ними и обсудить те свойства движения твердых тел, которые порождаются силами типа электромагнитных.

Почему здесь употреблено слово «типа»? Потому, что при описании электромагнитных воздействий на тело используются самые простые и схематичные их модели.

Предположим, что твердое тело имеет неподвижную точку O и находится в однородном магнитном поле напряженности \mathbf{H} .

1. Пусть тело обладает собственным магнитным моментом \mathbf{I} . Тогда в результате взаимодействия внешнего магнитного поля и магнитного поля тела развиваются силы, которые приводятся к паре сил с моментом

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} \times \mathbf{I}. \quad (1)$$

Величина и ориентация в теле магнитного момента \mathbf{I} зависят от различных условий. Рассмотрим некоторые из них.

а. Тело несет на себе постоянный магнит. В этом случае проекции вектора \mathbf{I} на оси координат, связанные с телом, постоянны.

б. Тело содержит материалы, обладающие свойством намагничивания. В этом случае можно считать, что

$$\mathbf{I} = A\mathbf{H}, \quad (2)$$

где A — некоторый постоянный в связанной с телом системе координат тензор, характеризующий магнитную проницаемость тела.

в. Тело содержит материалы немагнитной природы (структуры). Тогда при вращении тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ в нем возникает магнитный момент

$$\mathbf{I} = k\boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

(эффект Барнетта — Лондона.)

II. Как известно, при движении в магнитном поле частицы с электрическим зарядом возникает сила Лоренца. Предположим, что на нашем теле закреплено некоторое количество сосредоточенных зарядов. Положение i -го заряда определим радиусом-вектором \mathbf{r}_i , а величину заряда обозначим через e_i . Каждый заряд движется с линейной скоростью

$$\mathbf{V}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i,$$

и на него действует сила Лоренца

$$\mathbf{F}_i = -ae_i\mathbf{H} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i),$$

где a — некоторая постоянная величина.

Силы Лоренца всех зарядов приводят к тому, что на тело действует результирующая пара с моментом

$$\mathbf{M} = a\boldsymbol{\omega} \times \sum_i \mathbf{r}_i (e_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{H})).$$

III. В дальнейшем будем считать, что тело обладает динамической симметрией. Ось Oz_1 неподвижной системы координат направим вдоль вектора \mathbf{H} , а положение тела определим углами Эйлера: ϑ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) — угол между вектором \mathbf{H} и осью Oz динамической симметрии тела, т. е. угол нутации, ψ — угол прецессии (оси Oz вокруг вектора \mathbf{H}) и ϕ — угол собственного вращения тела вокруг оси Oz .

Задача 3.3.1. Предположим, что постоянный магнитный момент \mathbf{I} тела направлен по оси Oz его динамической симметрии. Определить положения равновесия тела и исследовать их устойчивость.

Решение. Нетрудно видеть, что момент \mathbf{M} результирующей пары сил направлен по линии узлов, поэтому им не совершается работа при поворотах тела вокруг осей Oz_1 , Oz . Кроме того, его величина зависит лишь от ϑ . Следовательно, рассматриваемая сила потенциальна, ее силовая функция имеет вид

$$U = -HI \cos \vartheta.$$

Положений равновесия у тела два: $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$. Поскольку силовая функция U имеет в точке $\vartheta = 0$ минимум, а в точке $\vartheta = \pi$ максимум, то положение $\vartheta = \pi$ — единственное устойчивое положение равновесия постоянного магнита в магнитном поле (эффект магнитной стрелки).

В каком смысле можно говорить об устойчивости в рассмотренной задаче?

Задача 3.3.2. Какие типы стационарных движений может совершать тело в условиях задачи 3.3.1? Исследовать устойчивость стационарных движений.

Решение. Нетрудно видеть, что движение тела происходит таким же образом, как и в случае Лагранжа движения тяжелого твердого тела, поскольку между двумя этими задачами существует полная аналогия.

Задача 3.3.3. Известно, что вращение тяжелого симметричного тела вокруг его оси симметрии, расположенной вертикально, с «верхним» расположением центра масс устойчиво лишь при выполнении условия Маиевского — Четаева $C^2\omega^2 \geq 4Amga$, в то время как вращение с «нижним» расположением центра масс тела устойчиво при любом значении угловой скорости вращения.

Исследовать возможность обеспечения устойчивости вращения с любой угловой скоростью ω (при обоих расположениях центра масс) комбинацией поля тяжести и магнитных сил в условиях задачи 3.3.1.

Задача 3.3.4. Предположим, что форма и расположение в теле намагничивающегося материала таковы, что тензор A (см. формулу (2) § 3.3) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Определить положения равновесия тела и исследовать их устойчивость.

Решение. В рассматриваемом случае силы магнитного взаимодействия потенциальны, их силовая функция имеет вид $U = \mu H^2 \sin^2 \vartheta$.

Уравнение равновесия $U' = \mu H^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$ имеет три решения $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi/2$, $\vartheta_3 = \pi$.

Вообще говоря, каждому из решений соответствует множество положений равновесия, поскольку значения координат φ и ψ произвольны (неизолированное равновесие). Тем не менее здесь возможна постановка задачи устойчивости по отношению к части переменных, а именно, по отношению к координате ϑ и скоростям $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$.

Для решения вопроса об устойчивости в указанном смысле достаточно вычислить вторую производную U'' от силовой функции $U'' = \mu H^2 (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)$. По знаку этого выражения устанавливаем, что при $\mu > 0$ устойчиво равновесие ϑ_2 , а при $\mu < 0$ — равновесия ϑ_1 и ϑ_3 .

Задача 3.3.5. В условиях задачи 3.3.4 определить стационарные движения тела и исследовать их устойчивость методом Рауса.

Решение. Рассматриваемая система обладает двумя циклическими координатами φ , ψ и одной позиционной ϑ . Применяя процедуру игнорирования циклических координат, для силовой функции R_0 приведенной системы имеем выражение

$$R_0 = -\frac{1}{2} \frac{(v - u \cos \vartheta)^2}{A \sin^2 \vartheta} + \mu H^2 \sin^2 \vartheta. \quad (1)$$

Здесь u , v — постоянные циклических интегралов

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta), \\ v &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение стационарных движений имеет вид

$$R'_0 = -\frac{(v - u \cos \vartheta)(u - v \cos \vartheta)}{A \sin^3 \vartheta} + \mu H^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0. \quad (3)$$

Для качественного анализа этого уравнения применим тот же геометрический прием, что и в задаче 3.1.7.

Уравнение (3) определяет некоторую поверхность в пространстве ϑ , u , v . Представление о рельефе этой по-

верхности можно получить, построив на плоскости u, v ее своеобразную «карту» — семейство линий уровня $\vartheta(u, v) = \text{const}$. Каждая линия $\vartheta(u, v) = \vartheta_*$, где $\vartheta_* \neq 0; \pi/2; \pi$, — гипербола (рис. 3.12) с асимптотами $v = u \cos \vartheta$ и $u = v \cos \vartheta$. Поскольку вдали от начала координат ветви гиперболы близки к своим асимптотам, а последние с ростом ϑ поворачиваются монотонно, то точкам плоскости u, v , расположенным достаточно далеко от начала координат, отвечает лишь одно решение уравнения (3).

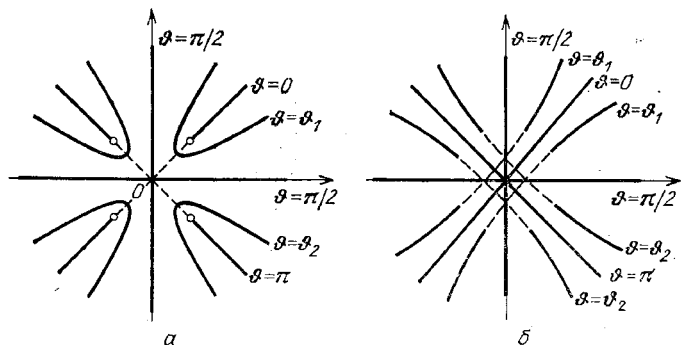


Рис. 3.12

Так как функция $R_0(\vartheta)$ имеет особенности при $\vartheta = 0; \pi$ ($R_0 \rightarrow -\infty$ при $\vartheta \rightarrow 0$ или $\vartheta \rightarrow \pi$), то ее единственный экстремум может быть только максимумом. Поэтому все стационарные движения, для которых $\vartheta \neq 0; \pi$ и $u^2 + v^2$ достаточно велико, устойчивы.

Обратимся теперь к тем движениям, для которых $\vartheta = 0$ ($\vartheta = \pi$). Нетрудно видеть, что такие движения возможны лишь в том случае, если $u = v$ ($u = -v$). В самом деле, при $u = v$ одна из особенностей функции R_0 устранима:

$$R_0 = -\frac{v^2}{2A} \cdot \frac{1 - \cos \vartheta}{(1 + \cos \vartheta)} + \mu H^2 \sin^2 \vartheta,$$

и уравнение (3) принимает вид

$$R'_0 = \left[-\frac{v^2}{A} \frac{1}{(1 + \cos \vartheta)^2} + 2\mu H^2 \cos \vartheta \right] \sin \vartheta = 0.$$

Его тривиальное решение $\vartheta = 0$ отвечает устойчивому режиму вращения, если $4A\mu H^2 \leq v^2$.

При $\mu < 0$ это условие устойчивости выполняется для любого значения параметра ν (рис. 3.12, б), а при $\mu > 0$ оно выполняется для $\nu^2 \geq 4\mu H^2 A$ (рис. 3.12, а) (как уже отмечалось выше, для «достаточно большого» ν).

Устойчивость вращения $\vartheta = \pi$ исследуется тем же способом.

Любопытно движение при $\vartheta = \pi/2$. Уравнение (3) показывает, что для такого движения выполняется условие $u\dot{u} = 0$, т. е. возможны два варианта:

1) $\nu = 0$, u произвольно, 2) $u = 0$, ν произвольно.

В первом варианте, как нетрудно установить с помощью (2), имеем $\dot{\psi} = 0$, т. е. такое движение представляет собой вращение тела вокруг неподвижной оси симметрии, ориентированной ортогонально вектору \mathbf{H} .

Во втором варианте $\dot{\varphi} = 0$, т. е. такое движение представляет собой вращение тела вокруг некоторой экваториальной оси его эллипсоида инерции, которая совпадает с вектором \mathbf{H} .

Анализ устойчивости этих движений предлагается провести самостоятельно.

Задача 3.3.6. Исследовать устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг вектора \mathbf{H} под действием сил Барнетта — Лондона.

Решение. Нетрудно показать, что перманентное вращение тела возможно лишь в том случае, если ось вращения коллинеарна вектору \mathbf{H} и является одной из главных осей эллипсоида инерции (ось симметрии тела или одна из экваториальных осей эллипсоида инерции).

Уравнения движения в рассматриваемой задаче допускают три первых интеграла.

1. Поскольку обобщенная сила $\mathbf{M} = k\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}$ не совершает работы на действительном перемещении, то имеет место интеграл энергии

$$V_1 = A\dot{\vartheta}^2 + A\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 = 2h. \quad (1)$$

2. Момент обобщенной силы \mathbf{M} относительно оси Oz_1 равен нулю. Поэтому имеет место интеграл площадей

$$V_2 = A\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta = v. \quad (2)$$

3. Имеет место обобщенный **циклический** интеграл

$$V_3 = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) + kH \cos \vartheta = u. \quad (3)$$

Дело в том, что обобщенная сила M допускает обобщенный потенциал $L_1 = \dot{\varphi} k H \cos \vartheta$. Поэтому функция Лагранжа системы $L = T + L_1$ не зависит явно от координаты φ .

Принимая одно из указанных выше вращений за невозмущенное движение, составить самостоятельно связку интегралов V_1, V_2, V_3 , не содержащую квадратичных по возмущениям членов, и получить условия устойчивости вращения.

Задача 3.3.7. В условиях задачи 3.3.6 определить стационарные движения тела и исследовать их устойчивость.

Указание. С помощью интегралов (2) и (3) (см. решение задачи 3.3.6) исключить из (1) $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ и построить силовую функцию приведенной системы. Дальнейший анализ аналогичен решению задачи 3.3.5.

Задача 3.3.8. Предположим, что в некоторой точке M оси симметрии тела размещен электрический заряд величины e . Очевидно, что тело имеет возможность совершать перманентное вращение вокруг оси симметрии, совпадающей с осью Oz_1 . Исследовать устойчивость такого вращения.

Решение. Сила Лоренца, как нетрудно видеть, относится к разряду гироскопических сил. Поэтому имеет место интеграл энергии

$$V_1 = A\dot{\vartheta}^2 + A\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 = 2h. \quad (1)$$

Момент силы Лоренца относительно оси симметрии тела равен нулю. Поэтому имеет место интеграл

$$V_3 = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = 0. \quad (2)$$

Кроме того, теорема об изменении момента количества движения тела относительно оси Oz_1 приводит к интегралу

$$V_4 = A\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta + eHa l^2 \cos \vartheta = v.$$

Дальнейший анализ провести самостоятельно.

§ 3.4. Тело в сопротивляющейся среде

Во многих учебниках теоретической механики излагается задача о движении точки в среде с сопротивлением.

Если же в среде движется твердое тело, то появляется по крайней мере одно новое обстоятельство: направление силы воздействия среды на тело не совпадает с направлением скорости потока среды относительно тела. Возникает так называемая подъемная сила.

Что мы знаем о тенденциях движения, вызываемых этим силовым фактором? Вообще говоря, немного. Подъемная сила удерживает самолет в воздухе, служит причиной автоколебаний (флаттера), — вот, пожалуй, и все вопросы, которые обычно обсуждаются в учебной литературе.

Лишь где-то в недрах специальной литературы затронут вопрос о характере зависимости обобщенных сил, порождаемых воздействием среды, от обобщенных скоростей тела. По-видимому, именно подъемная сила — первый естественный источник такой зависимости силы от скорости, которая носит не диссипативный, а ускоряющий характер.

Это обстоятельство вносит свою специфику в задачи об устойчивости движения.

Для решения задач о движении тела в среде необходимо построить сначала модель для сил взаимодействия тела и среды. При этом часто используется гипотеза о так называемом квазистационарном движении среды. В рамках этой гипотезы сила воздействия среды на тело характеризуется скоростью некоторой точки тела. Эта модель описывается наиболее просто, когда тело совершает плоскопараллельное движение в среде, которая покоится вдали от него. При некоторых предположениях о симметрии тела система сил воздействия среды на тело является плоской. Следовательно, за исключением отдельных вырожденных случаев она приводится к одной результирующей силе F . Более того, для многих тел выпуклой формы можно считать, что эта сила проходит через одну и ту же точку A тела, которую называют цент-

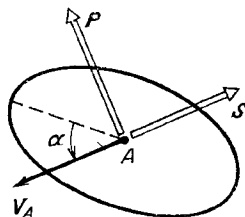


Рис. 3.13

ром давления. Скорость этой точки V_A принимается за основную опорную характеристику силы F , которую представляют в виде суммы двух векторов (рис. 3.13): силы S сопротивления, направленной против вектора V_A , и поперечной силы P , направленной ортогонально к V_A . Иногда силу P называют подъемной. Величины сил S и P определяются по формулам

$$S = s(\alpha) V_A^2, \quad P = p(\alpha) V_A^2, \quad (1)$$

где коэффициенты s, p представляют собой некоторые функции так называемого угла атаки α — угла между вектором V_A и некоторым связанным с телом направлением. В качестве начала отсчета угла атаки принимают обычно одно из таких направлений, что $p(0) = 0$.

Если форма тела такова, что его размер в одном направлении (продольном) заметно больше, чем размер в другом (поперечном), то при $\alpha \neq 0$ продольное направление находится всегда внутри квадранта, образованного векторами V_A и P (рис. 3.13).

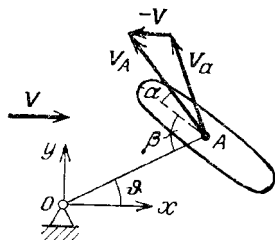


Рис. 3.14

Ряд задач связан с описанием поведения тел в потоке среды (например, при продувках в аэродинамических трубах подвижных моделей), скорость V которого вдали от тела постоянна. В этом случае сила F взаимодействия зависит от скорости точки A относительно потока.

Пусть в поток помещено тело, которое может поворачиваться вокруг неподвижной оси O , ориентированной ортогонально направлению потока (рис. 3.14). Приняв за неподвижную ось x декартовой системы координат направление потока вдали от тела и за обобщенную координату полярный угол ϑ точки A , имеем для абсолютной скорости точки A представление

$$V_A = \{-r\dot{\vartheta} \sin \vartheta, r\dot{\vartheta} \cos \vartheta\}, \quad r = |OA|, \quad \vartheta = x\widehat{OA}$$

и для относительной (относительно потока)

$$V_A = \{-V - r\dot{\vartheta} \sin \vartheta, r\dot{\vartheta} \cos \vartheta\}.$$

Подъемная сила определяется формулой

$$P = p(\alpha) V_A \{r\dot{\vartheta} \cos \vartheta, V + r\dot{\vartheta} \sin \vartheta\},$$

а сила сопротивления

$$S = s(\alpha) V_A \{V + r\dot{\vartheta} \sin \vartheta, -r\dot{\vartheta} \cos \vartheta\}.$$

Предположим, что тело развернуто относительно линии OA на угол β таким образом, что коэффициент $p(\alpha)$ обращается в нуль при $\alpha = 0$, когда V_A составляет с линией OA угол β . Тогда для угла атаки α имеем очевидные соотношения:

$$V_A \cos(\alpha + \beta) = V \cos \vartheta, \quad V_A \sin(\alpha + \beta) = r\dot{\vartheta} + V \sin \vartheta.$$

Если при $\alpha = 0$ тело вытянуто вдоль (поперек) вектора скорости V_A , то $p(\alpha) > 0$ ($p(\alpha) < 0$) для $\alpha > 0$.

Задача 3.4.1. Тело эллиптического сечения с помощью стержня OA закреплено цилиндрическим шарниром в точке O , находящейся на продолжении наибольшей оси сечения (рис. 3.15), и помещено в поток жидкой или газообразной среды, движущейся с постоянной скоростью V . Очевидно, что существуют по крайней мере два положения равновесия тела $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = \pi$.

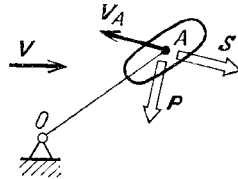


Рис. 3.15

Исследовать устойчивость этих равновесий.

Решение. В рассматриваемом случае $\beta = 0$ и $p(\alpha) > 0$ для $\alpha > 0$.

Уравнение изменения момента количества движения тела относительно точки O имеет вид

$$J\ddot{\vartheta} = -V_A^2 (s(\alpha) \sin \alpha + p(\alpha) \cos \alpha). \quad (1)$$

Учитывая, что

$$V_A \cos \alpha = V \cos \vartheta, \quad V_A \sin \alpha = r\dot{\vartheta} + V \sin \vartheta,$$

убеждаемся, что уравнение (1) допускает частные решения $\vartheta_1(t) \equiv 0$ и $\vartheta_2(t) \equiv \pi$. Несложные рассуждения позволяют установить, что других постоянных решений нет.

Проведя линеаризацию правой части уравнения (1) по $\vartheta, \dot{\vartheta}$, получим

$$J\ddot{\vartheta} = -V\kappa(V\dot{\vartheta} + r\dot{\vartheta}), \quad \kappa = p'(0) + s(0) > 0. \quad (2)$$

Сила, действующая на тело, представляет собой сумму потенциальной (силовая функция $U = -V^2 \kappa \vartheta^2 / 2$ имеет при $\vartheta = 0$ максимум) и диссипативной силы $-V \kappa r \dot{\vartheta}$. На основании теоремы Кельвина — Четаева о влиянии диссипативных сил заключаем, что положение равновесия $\vartheta = 0$ асимптотически устойчиво. Поскольку асимптотическая устойчивость установлена уже по первому приближению, то она сохранится и в силу полного уравнения (1).

Введя отклонение $y = \vartheta - \pi$ и линеаризуя уравнение (1) по y , \dot{y} , имеем

$$J\ddot{y} = -V\kappa(r\dot{y} - Vy), \quad \kappa = p'(\pi) + s(\pi) > 0. \quad (3)$$

В этом случае силовая функция $U = 1/2 V^2 \kappa \vartheta^2$ имеет минимум, определяемый квадратичной частью. Положение $y = 0$ устойчиво под действием как одной потенциальной силы, так и при добавлении диссипативной силы $-V \kappa r \dot{y}$.

Таким образом, рассматриваемое тело имеет лишь одно положение асимптотически устойчивого равновесия $\vartheta = 0$.



Рис. 3.16

Задача 3.4.2. Тело эллиптического сечения с помощью стержня OA закреплено цилиндрическим шарниром в точке O , находящейся на продолжении наименьшей оси сечения (рис. 3.16), и помещено в поток среды, движущейся с постоянной скоростью V .

Найти положения равновесия тела и исследовать их устойчивость.

Решение. В рассматриваемой задаче можно считать либо $\beta = \pi/2$, либо $p(\alpha) < 0$ при $\alpha > 0$. Приняв второе, запишем уравнение движения

$$J\ddot{\alpha} = -V_A^2 (s(\alpha) \sin \alpha + p(\alpha) \cos \alpha). \quad (1)$$

В состоянии покоя $V_A = -V \neq 0$ для определения положения равновесия имеем уравнение

$$-s(\alpha) \sin \alpha = p(\alpha) \cos \alpha, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{p(\alpha)}{s(\alpha)} = k(\alpha). \quad (2)$$

Уравнение (2) допускает довольно простое графическое исследование. Для тела эллиптического сечения (в силу его симметрии) $p(0) = p(\pm \pi/2) = p(\pi) = 0$, т. е. функцию $k(\alpha)$ можно изобразить в виде кривых I или II (рис. 3.17). Построим на этом же рисунке график

функции $\operatorname{tg} \alpha$. Очевидно, что построенные кривые всегда пересекаются при $\alpha = 0$; π . Если $k'(0) \leq 1$ (как на кривой I), то других точек пересечения нет, и, следовательно, уравнение (2) имеет только решения $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$.

Если же $k'(0) > 1$ (для кривой II), то неизбежно существование еще двух решений $\alpha_3 = \alpha_*$, $\alpha_4 = \alpha_{**}$ (рис. 3.17).

Исследуем вопрос об устойчивости положения равновесия, которому отвечает значение $\alpha = 0$. Очевидно, при

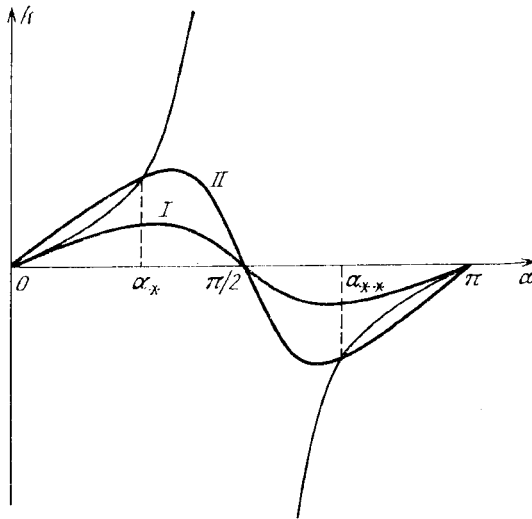


Рис. 3.17

этом и $\dot{\vartheta} = 0$. Линеаризуя уравнение (1) в окрестности точки $\vartheta = \dot{\vartheta} = 0$, получаем

$$J\ddot{\vartheta} = -V\kappa(V\vartheta + r\dot{\vartheta}), \quad \kappa = +p'(0) + s(0). \quad (3)$$

Если $\kappa > 0$, то положение равновесия $\vartheta = 0$ асимптотически устойчиво. Нетрудно видеть, что $\kappa > 0$, если $k' < 1$. Если же $\kappa < 0$, то положение равновесия $\vartheta = 0$ неустойчиво.

Для положения равновесия $\alpha = \pi$, или, что то же, $\vartheta = \pi$ имеем после замены $y = \vartheta - \pi$ уравнение

$$J\ddot{y} = -V\kappa(r\dot{y} - Vy), \quad \kappa = s(\pi) + p'(\pi). \quad (4)$$

При $\kappa > 0$ правая часть уравнения (4) представляет собой сумму диссипативной силы $-V\kappa\dot{y}$ и потенциальной, производной от силовой функции $U = V^2\kappa y^2$, причем последняя имеет при $y = 0$ минимум.

При $\kappa < 0$ имеем комбинацию потенциальной силы, силовая функция U которой имеет в точке $y = 0$ максимум, и ускоряющей силы.

В обоих случаях ($\kappa > 0$ и $\kappa < 0$) положение равновесия $\vartheta = \pi$ неустойчиво.

Исследовать устойчивость положений равновесия $\alpha = \alpha_*$ и $\alpha = \alpha_{**}$.

Задача 3.4.3. Пусть тела, рассмотренные в предыдущих задачах, обтекаются потоком идеальной среды, которая создает лишь подъемную силу и не создает сопротивления (наподобие безотрывного обтекания идеальной жидкостью при наличии циркуляции). Тогда $s(\alpha) = 0$. Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.

Решение. Поскольку $s(\alpha) = 0$, то уравнение равновесия имеет вид $p(\alpha)\cos\alpha = 0$. Его решения: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_{3,4} = \pm\pi/2$. Этим значениям угла атаки соответ-

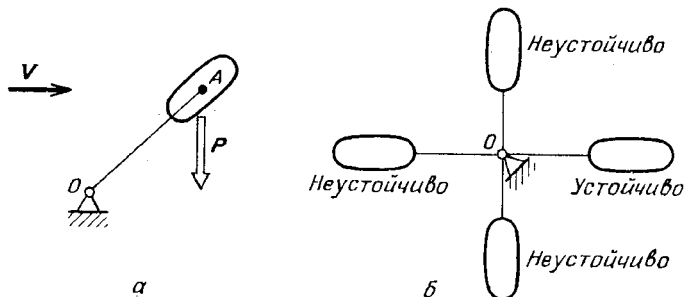


Рис. 3.18

ствуют положения тела, для которых $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$, $\vartheta_{3,4} = \pm\pi/2$.

Уравнение движения имеет тот же вид, что и в задаче 3.4.1, с учетом равенства $s = 0$. После линеаризации его около равновесия $\vartheta_1 = 0$ получаем уравнение $J\ddot{\vartheta} = -p'(0)(V\vartheta + r\dot{\vartheta})$.

Для тела, форма которого вытянута вдоль линии OA , имеем $p'(0) > 0$. Поэтому положение равновесия $\vartheta_1 = 0$ для такого тела асимптотически устойчиво (рис. 3.18).

Если же форма тела сплюснута в направлении OA , то $p'(0) < 0$ и равновесие $\vartheta = 0$ неустойчиво (рис. 3.19).

Рассмотрим теперь положение $\vartheta_1 = \pi$. Введем отклонение $y = \vartheta - \pi$ и проведем линеаризацию уравнения движения по переменной y . Получим уравнение $J\ddot{y} = p'(\pi)(Vy - r\dot{y})$.

Частное решение $y = 0$ этого уравнения неустойчиво. В самом деле, если $p'(\pi) > 0$, то обобщенная сила, входящая в правую часть этого уравнения, представляет

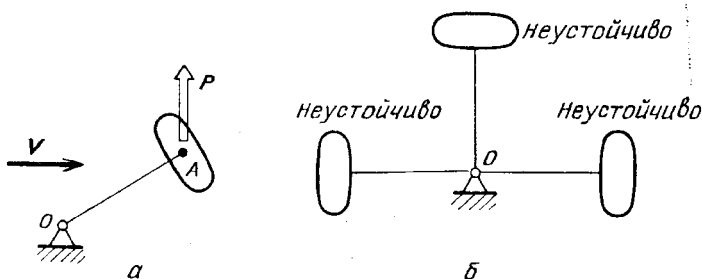


Рис. 3.19

собой суперпозицию отталкивающей силы, зависящей от положения, и диссипативной, зависящей от скорости. При $p'(\pi) < 0$ позиционная часть обобщенной силы станет притягивающей, зато «скоростная» — ускоряющей. И та, и другая комбинация сил обеспечивают неустойчивость равновесия $\vartheta_2 = \pi$.

Обратимся теперь к равновесию $\vartheta_3 = \pi/2$. Введем отклонение $y = \vartheta - \pi/2$ и разложим обобщенную силу (момент M сил взаимодействия с потоком) в ряд по степеням y, \dot{y} . Нетрудно видеть, что коэффициенты при линейных членах обращаются в нуль. Ограничимся лишь квадратичными членами разложения; тогда будем иметь уравнение $J\ddot{y} = \kappa y^2$, $\kappa = -p'(\pi/2) r V^2$.

Частное решение $y = 0$ этого уравнения неустойчиво. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим знакопеременную функцию $V = \dot{y} + Ay\dot{y}$ и вычислим ее полную производную по времени с точностью до членов второго порядка по y : $\dot{V} = \kappa y^2 + A\dot{y}^2$.

Подходящим выбором величины A всегда можно добиться знакоопределенности \dot{V} . Тогда функция V будет удовлетворять всем условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Аналогично доказывается неустойчивость положения равновесия $\vartheta = -\pi/2$.

Итак, тело, форма которого вытянута вдоль линии OA , имеет лишь одно устойчивое положение равновесия (типа флюгера). В то же время тело сплюснутой в направлении OA формы не имеет ни одного устойчивого положения равновесия (рис. 3.19).

Задача 3.4.4. Пусть тело симметричной формы (GB — линия симметрии) установлено в потоке идеальной среды (см. задачу 3.4.3) таким образом, что его

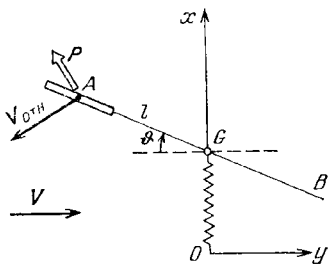


Рис. 3.20

центр тяжести G может двигаться вдоль прямой Ox , ортогональной направлению потока (рис. 3.20). Будем считать, что при смещении центра тяжести G от точки O и при повороте тела на угол ϑ возникают упругая сила $Q = -kx$ и восстанавливающий момент $M = -c\vartheta$ вследствие деформации элементов крепления.

Очевидно, что положение тела $x = 0$, $\vartheta = 0$ является положением равновесия. Исследовать его устойчивость.

Решение. Будем считать, что центр давления потока на тело при $\vartheta = 0$ находится в точке A на оси CB . Обозначим AG через l (при $l > 0$ точка A вынесена навстречу потоку, а при $l < 0$ снесена вниз по потоку).

Скорость точки A относительно потока имеет вид

$$V_{\text{отн}} = \{\dot{x} + l\dot{\vartheta} \sin \vartheta, -V + l\dot{\vartheta} \cos \vartheta\}.$$

Поток действует на тело силой $Q_a = p(\alpha) V_{\text{отн}}^2$ и парой сил с моментом $M_a = lp(\alpha) V_{\text{отн}}^2$. Учитывая, что $V_{\text{отн}} \sin \alpha = \dot{x} \cos \vartheta + l\dot{\vartheta} - V \sin \vartheta$ и проводя линеаризацию Q_a и M_a , получим линеаризованные уравнения движения тела:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - kx - \gamma V^2 \vartheta + \gamma V \dot{x} + \gamma V l \dot{\vartheta} &= 0, \\ J\ddot{\vartheta} + (c - l\gamma V^2) \vartheta + l^2 \gamma V \dot{\vartheta} + l\gamma V \dot{x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m — масса, J — момент инерции тела, а $\gamma = p'(0)$. Влияние среды, как видно, приводит к появлению не

только опрокидывающего момента $\gamma l V^2 \theta$ и неконсервативной позиционной силы $\gamma V^2 \theta$, но и к линейным по $\dot{\theta}$, \dot{x} силам, характер которых зависит от знака γ . При $\gamma > 0$ (для тел вытянутой формы вдоль линии AB) это — силы диссипативные, а при $\gamma < 0$ — ускоряющие.

Для исследования устойчивости тривиального решения уравнений (1) воспользуемся теоремой Гурвица.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$mJ\lambda^4 + \gamma V(ml^2 + J)\lambda^3 + (mc - ml\gamma V^2 + kJ)\lambda^2 + \gamma V(c + kl^2)\lambda + k(c - l\gamma V^2) = 0.$$

Все корни этого уравнения имеют отрицательные действительные части, если выполняются условия

$$l\gamma V^2 < c, \quad (2)$$

$$l\gamma^2 V^2 (kJ - mc) [V^2 \gamma l (J + ml^2) + (kJ - mc)l] > 0, \quad (3)$$

$$\gamma V(c + kl^2) > 0, \quad (4)$$

$$\gamma V(J + ml^2) > 0. \quad (5)$$

Рассмотрим вначале случай $\gamma > 0$. Условия (4), (5) при этом всегда удовлетворяются. Если параметры тела и крепления таковы, что $kJ > mc$, то с увеличением скорости потока нарушится лишь неравенство (2). На границе области устойчивости в этом случае один из корней характеристического уравнения обращается в нуль. Такая форма потери устойчивости обычно сопровождается ветвлением положений равновесия.

Если же $kJ < mc$, то с ростом скорости потока условие (3) нарушается прежде, чем условие (2). На границе области устойчивости пара корней характеристического уравнения попадает на мнимую ось. Такая форма потери устойчивости сопровождается развитием колебаний тела. Это явление носит название «флаттер».

Обратимся теперь к случаю $\gamma < 0$ (тело сплюснуто вдоль линии AB). Поскольку условия (4), (5) в этом случае нарушаются, то положение равновесия неустойчиво. Причиной этой неустойчивости служит ускоряющий характер той части сил, которая зависит от скоростей.

Задача 3.4.5. Тело, имеющее плоскость симметрии и находящееся в неподвижной сопротивляющейся среде

под действием силы тяжести, может совершать поступательный прямолинейный спуск по вертикали. Плоскость симметрии тела в таком движении расположена вертикально. Исследовать устойчивость вертикального спуска в предположении о плоскопараллельном движении тела.

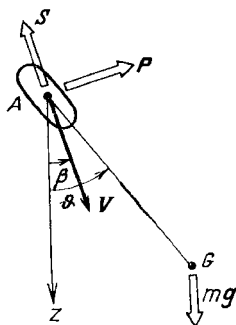


Рис. 3.21

Решение. В силу симметрии тела его центр масс G и центр давления A расположены в плоскости симметрии. Направим ось z по вертикали вниз (рис. 3.21). Введем следующие характеристики состояния тела: ϑ — отклонение плоскости симметрии (линии AG) от вертикали; V — вектор скорости центра давления; β — отклонение вектора V от вертикали. Обозначим m , J массу и центральный момент инерции тела.

В выбранных переменных уравнения движения центра масс примут вид (в проекциях на направление AG и ему ортогональное):

$$m[\dot{V} \cos(\vartheta - \beta) + V\dot{\beta} \sin(\vartheta - \beta) - r\dot{\vartheta}^2] = mg \cos \vartheta + V^2[p \sin(\vartheta - \beta) - s \cos(\vartheta - \beta)], \quad (1)$$

$$m[V\dot{\beta} \cos(\vartheta - \beta) - \dot{V} \sin(\vartheta - \beta) - r\ddot{\vartheta}] = -mg \sin \vartheta + V^2[s \sin(\vartheta - \beta) + p \cos(\vartheta - \beta)]. \quad (2)$$

Уравнение движения относительно центра масс

$$J\ddot{\vartheta} + rV^2[s \sin(\vartheta - \beta) + p \cos(\vartheta - \beta)] = 0. \quad (3)$$

Очевидно частное решение системы уравнений (1)–(3) $\vartheta = \beta = 0$, $V = V_0 = \sqrt{mg/s(0)}$. Это решение соответствует такому режиму вертикального спуска тела, при котором центр масс G расположен ниже центра давления A .

Введем отклонение $v = V - V_0$ и проведем линеаризацию уравнений (1)–(3) по переменным v , ϑ , β . Получим

$$m\dot{v} = -2V_0 s(0)v, \quad (4)$$

$$m(V_0\dot{\beta} + r\ddot{\vartheta}) = -mg\vartheta + \kappa(\vartheta - \beta), \quad (5)$$

$$J\ddot{\vartheta} + r\kappa(\vartheta - \beta) = 0, \quad \kappa = s(0) + p'(0). \quad (6)$$

Из уравнения (4) вытекает, что $v \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Система уравнений (5), (6) связывает угловые переменные. Запишем ее характеристическое уравнение

$$mJV_0\lambda^3 + J\kappa\lambda^2 + mrV_0\kappa\lambda + mr^2\kappa\lambda^2 + mgr\kappa = 0.$$

Условия устойчивости нулевого решения системы уравнений (5), (6) (условия Гурвица) имеют вид $r > 0$, $\kappa > Jmgr/(J + mr^2)$. Отметим, что условие устойчивости спуска более жесткое, чем условие устойчивости равновесия тела в потоке ($\kappa > 0$, см. задачу 3.3.2).

Возможно и второе частное решение системы уравнений (1)–(3), которому отвечает режим вертикального спуска с расположением центра масс G над центром давления A . Для исследования этого движения можно воспользоваться теми же уравнениями, положив в них $r < 0$. Очевидно, что при этом всегда нарушается одно из условий устойчивости. Поэтому второе движение неустойчиво.

Задача 3.4.6. Пусть тело имеет форму сферы, но его центр масс G не совпадает с центром O сферы. Предположим также, что ось GO является осью динамической симметрии, и к телу приложена постоянная сила N , направленная вдоль оси GO . Будем считать, что силы взаимодействия с внешней средой, в которой движется тело, сводятся к силе F сопротивления, приложенной в точке O , и к паре сил, момент M которой направлен вдоль оси GO . Примем силу F пропорциональной скорости точки O , а момент M в виде суммы

$$M = M_0 - kr \quad (k > 0, \quad M_0 > 0),$$

где r — проекция на ось GO вектора угловой скорости тела.

Нетрудно видеть, что тело может совершать такое движение, при котором точка G движется равномерно и прямолинейно (вдоль линии GO), а тело вращается вокруг оси GO с постоянной угловой скоростью. Исследовать устойчивость этого движения.

Решение. Свяжем с телом систему координат $Gxyz$, ось z которой направлена по GO . Обозначим u, v, w — проекции скорости точки G на выбранные оси, p, q, r — проекции угловой скорости тела на эти же оси, m, A, C — массу и моменты инерции тела, σ — коэффициент пропорциональности для силы F . Уравнения движения тела

(в форме Кирхгофа)

$$\begin{aligned} m\dot{u} &= m(rv - qw) - \sigma u, & A\dot{p} &= (A - C)qr + \sigma lv, \\ m\dot{v} &= m(pw - ru) - \sigma v, & A\dot{q} &= (C - A)pr - \sigma lu, \\ m\dot{w} &= m(qu - pv) - \sigma w + N, & C\dot{r} &= M_0 - kr \end{aligned}$$

допускают частное решение

$$p = q = u = v = 0, \quad w = w_0 = N/\sigma, \quad r = r_0 = M_0/k.$$

Обозначив через $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ вариации переменных u, v, w, p, q, r , запишем уравнения возмущенного движения с точностью до членов первого порядка малости

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= r_0\beta_1 - w_0\beta_2 - \bar{\sigma}\alpha_1, & \dot{\alpha}_2 &= (1 - \bar{C})r_0\beta_2 + \bar{\sigma}\bar{l}\beta_1, \\ \dot{\beta}_1 &= w_0\alpha_2 - r_0\alpha_1 - \bar{\sigma}\beta_1, & \dot{\beta}_2 &= (\bar{C} - 1)r_0\alpha_2 - \bar{\sigma}\bar{l}\alpha_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\bar{\sigma}\gamma_1 (\bar{\sigma} = \sigma/m), & \dot{\gamma}_2 &= -k\gamma_2 (\bar{\sigma}\bar{l} = \sigma l/A, \quad \bar{C} = C/A). \end{aligned} \quad (1)$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет два очевидных отрицательных действительных корня $\lambda_1 = -\bar{\sigma}, \lambda_2 = -k$.

Рассмотрим функцию

$$2V = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + P(\alpha_2^2 + \beta_2^2).$$

Производная \dot{V} в силу уравнений (1) имеет вид

$$\dot{V} = -\bar{\sigma}(\alpha_1 + \beta_1) + (w_0 + P\bar{\sigma}\bar{l})(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1).$$

Если принять $P = -w_0/(\bar{\sigma}\bar{l})$, то производная \dot{V} станет знакопостоянной функцией, отрицательной и обращающейся в нуль лишь на множестве $S = \{\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0\}$. Нетрудно проверить, что множество S не содержит целых траекторий системы (1). Сама же функция V будет определено-положительной при выполнении неравенства $w_0 < 0$. Следовательно, условие $w_0 < 0$ по теореме Барбашина — Красовского является достаточным условием асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1), а значит, и отрицательности действительных частей остальных четырех корней ее характеристического уравнения $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$. Последнее гарантирует и асимптотическую устойчивость исследуемого режима движения в силу исходной системы уравнений.

Отметим, что условие $w_0 < 0$ (при этом $N < 0$) означает, что точка G при движении расположена впереди точки O .

Получить условия Гурвица для системы (1).

Задача 3.4.7. Тяжелый самолет совершает полет в вертикальной плоскости с выключенным двигателем. Управление рулями высоты осуществляется таким образом, что ось самолета направлена всегда по мгновенной скорости его центра масс, а угол атаки на крыле постоянен $\alpha = \alpha_0 \neq 0$. Найти установившиеся режимы движения самолета и исследовать их устойчивость.

Решение. Так как угол атаки постоянен, то постоянны и коэффициенты s , p силы сопротивления и подъемной силы. Введем обозначения: v — скорость центра масс самолета; ϑ — угол между горизонталью и вектором \mathbf{v} ; g — ускорение силы тяжести; m — масса самолета.

Уравнения движения

$$m\dot{v} = -mg \sin \vartheta - sv^2, \quad m v \dot{\vartheta} = -mg \cos \vartheta + p v^2 \quad (1)$$

допускают лишь одно стационарное решение, для которого $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const}$, $v(t) = v_0 = \text{const}$. При этом

$$\vartheta_0 = -\arctg(s/p), \quad v_0 = \left(\frac{mg}{s^2 + p^2} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Для исследования устойчивости указанного решения введем отклонения $x = v - v_0$, $y = \vartheta - \vartheta_0$. Проведем в (1) замену переменных $v, \vartheta \rightarrow x, y$, получим с точностью до членов первого порядка малости по x, y

$$\dot{x} = -2sv_0x - mg(\cos \vartheta_0)y, \quad v_0\dot{y} = mg(\sin \vartheta_0)y + 2pv_0x.$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\lambda^2 + 3sv_0\lambda + 2(s^2 + p^2)v_0^2 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3sv_0 \pm v_0 \sqrt{s^2 - 8p^2}}{2},$$

действительные части которых отрицательны при $s \neq 0$.

Следовательно, по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению устанавливаем, что решение (2) асимптотически устойчиво в силу полных уравнений (1) по отношению к переменным v, ϑ , если $s \neq 0$.

Разберем теперь случай $s = 0$ (отсутствие лобового сопротивления или компенсация его тягой самолета). В установившемся режиме движения имеем $\vartheta_0 = 0$.

Уравнения (1) допускают при $s = 0$ первый интеграл

$$V = \frac{p}{3gm} v^3 - v \cos \vartheta = \text{const.} \quad (3)$$

Проведя указанную выше замену $v, \vartheta \rightarrow x, y$, представим (3) в виде

$$V = \frac{p}{gm} v_0 x^2 + v_0 \frac{y^2}{2} + \dots = \text{const.}$$

Здесь многоточием обозначены члены третьего и более высокого порядков малости по x, y . Приняв V в качестве функции Ляпунова, устанавливаем, что частное решение (2) при $s = 0$ устойчиво.

§ 3.5. Спутник-гиростат на круговой орбите

Практическое освоение космоса не только привело к постановке новых теоретико-механических задач, но и воскресило интерес к некоторым «старым» вопросам механики. Один из них: почему Луна все время обращена к Земле одной и той же стороной?

Небесной механикой давно уже дан ответ на этот вопрос: центральное поле тяготения Земли и трехосность эллипсоида инерции Луны обеспечивают устойчивость относительного равновесия Луны в ее орбитальной системе координат.

На этом же принципе основаны системы гравитационной стабилизации ряда орбитальных космических аппаратов. Дело в том, что при приведении сил, действующих на спутник, к центру масс получается, вообще говоря, не только результирующая сила, но и результирующая пара. Момент последней оказывает заметное влияние на движение спутника относительно его центра масс.

Будем считать, что спутник представляет собой твердое тело или гиростат, движущийся в центральном ньютоновском поле сил с гравитационным параметром μ . Его кинетическая энергия может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + T_c,$$

где v_c — скорость центра C масс спутника, а T_c — кинетическая энергия в его движении относительно центра масс (см., например, формулу (3) введения к § 2.5).

Введем неподвижную систему координат $O\xi\eta\xi$ с началом в центре O притяжения и связанную со спутником систему координат $Cx_1x_2x_3$, оси которой совпадают с его главными центральными осями инерции.

Введем обозначения: \mathbf{R} — вектор \mathbf{OC} ; γ_s — косинус угла между вектором \mathbf{R} и осью x_s ; τ — область, занимаемая телом-спутником; ρ — плотность распределения его масс.

Запишем потенциальную энергию сил притяжения

$$\Pi = -\mu \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r},$$

$$r = R^{-1} [1 + 2(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3)/R + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/R^2]^{1/2} + \dots$$

Будем считать, что размеры спутника малы по сравнению с R , т. е. величины x_s/R малы внутри области τ , и вычислим Π с точностью до тех старших членов разложения по этим величинам, которые содержат в явном виде характеристики γ_s ориентации тела.

Получим

$$\Pi = -\left(\frac{\mu m}{R} + \frac{3\mu}{2R^3} \frac{J_1 + J_2 + J_3}{3}\right) + \frac{3\mu}{2R^3} (J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2), \quad (1)$$

где m — масса, а J_s — главные центральные моменты инерции спутника.

Отметим отличия в потенциальной энергии тела-спутника и материальной точки той же массы, помещенной в точку C . Во-первых, величина результирующей силы, действующей на тело, не совпадает с величиной силы, действующей на точку.

Во-вторых, поскольку потенциальная энергия (1) зависит от величин γ_s , то к телу приложена результирующая пара, момент которой представляет собой линейную по γ_s вектор-функцию.

Первое отличие, как нетрудно видеть, мало для многих реальных ситуаций, и им иногда пренебрегают, считая, что центр масс спутника движется по известной кеплеровой орбите. В таком предположении задача о движении спутника около центра масс называется ограниченной.

В ряде случаев необходимо решать задачу в полной постановке с учетом взаимной связи между движением центра масс и движением около центра масс спутника. Такая постановка задачи называется неограниченной.

Рассмотрим задачу об устойчивости движения спутника в обеих постановках.

Ограниченная задача. Пусть центр масс спутника движется по кеплеровой круговой орбите с орбитальной угловой скоростью ω_0 . Введем орбитальную систему *Схуз*, ось *z* которой направлена по радиусу-вектору **R** спутника, ось *x* — по касательной к орбите в сторону движения центра масс, ось *y* — по нормали к плоскости орбиты. Пусть орбита расположена в плоскости $\xi O \zeta$, тогда оси *y* и η параллельны. Система координат *Схуз* вращается вокруг оси η с угловой скоростью ω_0 ($\omega_0^2 = \mu R^{-3}$). Единичные векторы осей *x*, *y*, *z* обозначим через α , β , γ , а их проекции на оси x_s — через α_s , β_s , γ_s ($s = 1, 2, 3$). Вектор ω мгновенной угловой скорости спутника представим в виде $\omega = \omega_0 \beta + p$, где **p** — вектор мгновенной угловой скорости спутника в его движении относительно орбитальной системы осей координат, проекции которого на оси x_s обозначим через p_s ($s = 1, 2, 3$). Тогда для потенциальной энергии системы будем иметь выражение

$$\Pi = \frac{3}{2} \omega_0^2 (J_1 \gamma_1^2 + J_2 \gamma_2^2 + J_3 \gamma_3^2),$$

а обобщенный интеграл энергии можно записать в виде

$$T_2 + W = \text{const}, \quad 2T_2 = J_1 p_1^2 + J_2 p_2^2 + J_3 p_3^2, \quad (2)$$

где

$$W = \frac{3}{2} \omega_0^2 (J_1 \gamma_1^2 + J_2 \gamma_2^2 + J_3 \gamma_3^2) - \\ - \frac{1}{2} \omega_0^2 (J_1 \beta_1^2 + J_2 \beta_2^2 + J_3 \beta_3^2) - \omega_0 (k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 + k_3 \beta_3) \quad (3)$$

— измененная потенциальная энергия системы.

В случае, когда ротор не вращается или его вообще нет, $k = 0$ и выражение для *W* принимает вид

$$2W = 3\omega_0^2 (J_1 \gamma_1^2 + J_2 \gamma_2^2 + J_3 \gamma_3^2) - \\ - \omega_0^2 (J_1 \beta_1^2 + J_2 \beta_2^2 + J_3 \beta_3^2). \quad (4)$$

Неограниченная постановка задачи. Ограничимся здесь рассмотрением движения спутника без ротора. По-

ложение центра масс спутника относительно неподвижной системы координат будем определять сферическими координатами R, θ, ψ , где θ — угол, образуемый вектором \mathbf{R} с плоскостью $O\xi\xi$, а ψ — угол между осью $O\xi$ и проекцией вектора \mathbf{R} на плоскость $O\xi\xi$. Тогда для кинетической и потенциальной энергий спутника будем иметь выражения

$$2T = m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + R^2\dot{\theta}^2) + J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2,$$

$$\Pi = -\frac{\mu m}{R} + \frac{3\mu}{2R^3} \left(J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2 - \frac{J_1 + J_2 + J_3}{3} \right).$$
(5)

Уравнения движения спутника допускают интегралы энергии и площадей

$$T + \Pi = \text{const}, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = k = \text{const}.$$

Игнорируя циклическую координату ψ , построим функцию Рауса

$$R = T + \Pi - \dot{\psi}k = R_2 + R_1 + W,$$

где

$$W = \frac{k^2}{2S} + \Pi, \quad S = mR^2 \cos^2 \theta + J_1\beta_1^2 + J_2\beta_2^2 + J_3\beta_3^2 \quad (6)$$

— измененная потенциальная энергия тела; S — момент инерции тела относительно оси $O\eta$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — косинусы углов, образуемых осью η с осями x_1, x_2, x_3 . В (5) и (6) направляющие косинусы γ_s, β_s связаны соотношением

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = \sin \theta. \quad (7)$$

Задача 3.5.1. Исследовать устойчивость относительного равновесия на круговой орбите спутника с трехосным центральным эллипсоидом инерции. Использовать теоремы Лагранжа и Кельвина — Четаева.

Решение. Для измененной потенциальной энергии спутника на невозмущаемой кеплеровой круговой орбите имеем выражение

$$2\omega_0^{-2}W = 3(J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2) - (J_1\beta_1^2 + J_2\beta_2^2 + J_3\beta_3^2).$$

Поскольку направляющие косинусы γ_s, β_s ($s = 1, 2, 3$)

связаны соотношениями

$$\begin{aligned}\pi_\gamma &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0, \quad \pi_\beta = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 1 = 0, \\ \pi_{\gamma\beta} &= \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3,\end{aligned}\quad (1)$$

то вместо W далее будем рассматривать функцию

$$2W_* = 2\omega_0^{-2}W + 2\lambda\pi_{\alpha\beta} + \sigma\pi_\gamma + \nu\pi_\beta,$$

где λ , σ , ν — неопределенные множители Лагранжа. Условия стационарности функции W_* приводят к уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_*}{\partial \gamma_1} &= (3J_1 + \sigma)\gamma_1 + \lambda\beta_1 = 0 \quad (123), \\ \frac{\partial W_*}{\partial \beta_1} &= (\nu - J_1)\beta_1 + \lambda\gamma_1 = 0 \quad (123).\end{aligned}\quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) имеют 24 решения, соответствующие положениям относительного равновесия спутника, для которых оси x_1 , x_2 , x_3 его центрального эллипсоида инерции совпадают с орбитальными осями. Рассмотрим одно из них, для которого

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \gamma_2 = \beta_3 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_3 = \beta_2 = 1, \\ \sigma &= -3J_3, \quad \nu = J_2, \quad \lambda = 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Для этого положения относительного равновесия ось x_3 направлена по радиусу-вектору круговой орбиты, ось x_2 — по нормали к плоскости орбиты, а ось x_1 — по касательной к орбите.

Исследуем устойчивость равновесия (3) по отношению к величинам p_s , γ_s , β_s ($s = 1, 2, 3$). В возмущенном движении положим $\gamma_3 = 1 + \xi$, $\beta_2 = 1 + \eta$, а для остальных величин сохраним прежние обозначения. На линейном многообразии $\delta\pi_\gamma = \delta\pi_\beta = \delta\pi_{\alpha\beta} = 0$ выполняются условия $\xi = \eta = 0$, $\beta_3 = -\gamma_2$, при учете которых для $\delta^2 W_*$ будем иметь выражение

$$\delta^2 W_* = (J_2 - J_1)\beta_1^2 + 3(J_1 - J_3)\gamma_1^2 + 4(J_2 - J_3)\gamma_2^2.$$

Отсюда заключаем, что при выполнении условий

$$J_3 < J_1 < J_2 \quad (4)$$

измененная потенциальная энергия для значений переменных (3) имеет изолированный минимум.

Согласно теореме Лагранжа условия (4) представляют собой достаточные условия устойчивости положения относительного равновесия (3) по отношению к величинам p_s ; γ_s , β_s ($s = 1, 2, 3$).

Условия (4) показывают, что для устойчивости относительного равновесия спутника достаточно, чтобы большая ось x_3 центрального эллипсоида инерции была направлена по радиусу-вектору круговой орбиты, средняя ось x_1 — по касательной к орбите и малая ось x_2 — по нормали к плоскости орбиты. Существуют четыре устойчивых положения относительного равновесия спутника, переходящие одно в другое при поворотах спутника на углы 180° вокруг радиуса-вектора и нормали к плоскости орбиты.

При выполнении одной из групп условий

$$J_2 > J_3 > J_1, \quad J_3 > J_1 > J_2, \quad J_1 > J_2 > J_3 \quad (5)$$

степень неустойчивости будет нечетной, а при

$$J_3 > J_2 > J_1, \quad J_1 > J_3 > J_2 \quad (6)$$

— четной. Согласно теореме Кельвина — Четаева положение относительного равновесия (3) при условиях (5) неустойчиво, а при условиях (6) возможна гироскопическая стабилизация положения равновесия.

Задача 3.5.2. Найти необходимые условия гироскопической стабилизации положения относительного равновесия спутника на круговой орбите, для которого степень неустойчивости четна и $\beta_2 = \gamma_3 = 1$.

Указание. Уравнения малых колебаний спутника около положения равновесия можно записать в виде

$$\begin{aligned} J_2 \ddot{\gamma}_1 + 3\omega_0^2 (J_1 - J_3) \gamma_1 &= 0, \\ J_1 \ddot{\gamma}_2 + \omega_0 (J_3 + J_1 - J_2) \dot{\beta}_1 + 4\omega_0^2 (J_2 - J_3) \gamma_2 &= 0, \\ J_3 \ddot{\beta}_1 - \omega_0 (J_3 + J_1 - J_2) \dot{\gamma}_2 + \omega_0^2 (J_2 - J_1) \beta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Задача 3.5.3. Исследовать устойчивость относительного равновесия на круговой орбите динамически симметричного спутника.

Задача 3.5.4. Исследовать устойчивость стационарных движений спутника. Использовать теоремы Рауса и Кельвина — Четаева.

Решение. Для измененной потенциальной энергии спутника имеем выражение

$$W = \frac{k^2}{2S} - \frac{\mu m}{R} + \frac{3\mu}{2R^3} \left(J_1 \gamma_1^2 + J_2 \gamma_2^2 + J_3 \gamma_3^2 - \frac{J_1 + J_2 + J_3}{3} \right),$$

$$S = mR^2 \cos^2 \theta + J_1 \beta_1^2 + J_2 \beta_2^2 + J_3 \beta_3^2.$$

Здесь S — момент инерции спутника относительно неподвижной оси $O\eta$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — косинусы углов, образуемых с осями x_1, x_2, x_3 центрального эллипсоида инерции спутника соответственно осью $O\eta$ и радиусом-вектором \mathbf{R} центра масс спутника; θ — угол, образуемый вектором \mathbf{R} с плоскостью $O\xi\xi$; k — постоянная интеграла площадей. Поскольку величины γ_s, β_s связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \pi_\gamma &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0, \quad \pi_\beta = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 1 = 0, \\ \pi_{\gamma\beta} &= \gamma_1 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2 + \gamma_3 \beta_3, \end{aligned} \quad (1)$$

то далее вместо W будем рассматривать функцию

$$W_* = W + \lambda \pi_{\gamma\beta} + \frac{1}{2} \sigma \pi_\gamma + \frac{1}{2} \nu \pi_\beta,$$

где λ, σ, ν — неопределенные множители Лагранжа. Условия стационарности функции W_* приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_*}{\partial R} &= -\frac{k^2}{S^2} mR \cos^2 \theta + \frac{\mu m}{R^2} - \frac{9\mu}{2R^4} \left(J_1 \gamma_1^2 + J_2 \gamma_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + J_3 \gamma_3^2 - \frac{J_1 + J_2 + J_3}{3} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \theta} = \frac{k^2}{S^2} mR^2 \sin \theta \cos \theta - \lambda \cos \theta = 0,$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \gamma_1} = \frac{3\mu}{R^3} J_1 \gamma_1 + \sigma \gamma_1 + \lambda \beta_1 = 0 \quad (123),$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \beta_1} = -\frac{k^2}{S^2} J_1 \beta_1 + \nu \beta_1 + \lambda \gamma_1 = 0 \quad (123).$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (1) имеют решения вида

$$\begin{aligned} R &= R_0, \quad \theta = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \beta_3 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_3 = \beta_2 = 1, \\ \lambda &= 0, \quad \sigma = -3J_3 \omega_0^2, \quad \nu = J_2 \Omega_0^2 \quad (\omega_0^2 = \mu R_0^{-3}), \end{aligned} \quad (2)$$

если постоянные R_0 и $\dot{\psi} = \Omega_0$ удовлетворяют условию

$$\Omega_0^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{2} \frac{(J_1 + J_2 - 2J_3)}{mR_0^2} \omega_0^2 \quad \left(\Omega_0 = \frac{k_0}{S_0} \right), \quad (3)$$

где ω_0 — кеплерова угловая скорость орбитального движения спутника по круговой орбите, если вся его масса сосредоточена в центре масс.

Решению (2) отвечает стационарное движение спутника, в котором центр масс C описывает круговую орбиту радиусом R_0 , расположенную в плоскости $O\xi\zeta$, с постоянной угловой скоростью $\dot{\psi} = \Omega_0$, определяемой из уравнения (3) при данном значении $R = R_0$. При этом спутник покоится в орбитальной системе координат и его главные центральные оси инерции x_1, x_2, x_3 коллинеарны осям x, y, z орбитальной системы координат.

Индекс «0» означает, что соответствующая величина вычисляется для решения (2).

Решение (2) совпадает с решением, рассмотренным в задаче 2.4.1 и описывающим относительное равновесие спутника на круговой орбите, за исключением угловой скорости Ω_0 вращения орбитальной системы. Однако, как следует из (3), разность $\Omega_0^2 - \omega_0^2$ для сравниваемых движений имеет порядок малости $l^2 R_0^{-2}$, где l — характерный размер спутника, и она мала для тел, размеры которых много меньше R_0 .

Исследуем устойчивость движения (2). В возмущенном движении положим $\gamma_3 = 1 + \xi$, $\beta_2 = 1 + \eta$, $R = R_0 + \zeta$, а для остальных величин сохраним прежние обозначения. На линейном многообразии $\delta\pi_\gamma = \delta\pi_\beta = 0$ выполняются равенства $\xi = \eta = 0$, с учетом которых для $\delta^2 W_*$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \delta^2 W_* = & \left(\frac{\partial^2 W_*}{\partial R^2} \right)_0 \zeta^2 + \frac{1}{2} m R_0^2 \Omega_0^2 \theta^2 + \\ & + \Omega_0^2 [(J_2 - J_1) \beta_1^2 + (J_2 - J_3) \beta_3^2] + \\ & + 3\omega_0^2 [(J_1 - J_3) \gamma_1^2 + (J_2 - J_3) \gamma_2^2], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 W_*}{\partial R^2} \right)_0 = & m\omega_0^2 \left\{ 1 + \frac{3(2J_3 - J_1 - J_2)}{2mR_0^2} - \right. \\ & \left. - \frac{4J_2}{mR_0^2 + J_2} \left[1 - \frac{3(2J_3 - J_1 - J_2)}{2mR_0^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что функция W_* имеет изолированный минимум, если выполняются условия $\left(\frac{\partial^2 W_*}{\partial R^2}\right)_0 > 0$, $J_2 > J_1 > J_3$. Первое из этих условий всегда выполняется для искусственных спутников Земли. Следовательно, достаточными условиями устойчивости стационарного движения (2) спутника по отношению к переменным $R, \dot{R}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, p_s, \dot{p}_s, \gamma_s, \dot{\gamma}_s, \beta_s, \dot{\beta}_s$ ($s = 1, 2, 3$) являются неравенства

$$J_3 < J_1 < J_2, \quad (4)$$

совпадающие с условиями устойчивости относительного равновесия спутника на круговой орбите в ограниченной задаче (см. решение задачи 3.5.1). Условия (4) означают, что если большая ось x_3 центрального эллипсоида инерции спутника направлена по радиусу-вектору орбиты, малая ось x_2 — по нормали к плоскости орбиты, то стационарное движение (2) устойчиво по отношению к переменным $R, \dot{R}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}$, характеризующим движение центра масс, и к переменным $p_s, \dot{p}_s, \gamma_s, \dot{\gamma}_s, \beta_s, \dot{\beta}_s$ ($s = 1, 2, 3$), характеризующим движение около центра масс.

При выполнении одной из групп условий $J_1 > J_2 > J_3$, $J_2 > J_3 > J_1$, $J_3 > J_1 > J_2$ степень неустойчивости будет нечетной, и невозмущенное движение (2) неустойчиво согласно теореме Кельвина — Четаева.

Задача 3.5.5. Положение относительного равновесия и условия его устойчивости для спутника-гиростата с невращающимся ротором, очевидно, совпадают с аналогичными для твердого тела. Если ось ротора направлена по бинормали Oy к орбите, то такое равновесие спутника существует при любой угловой скорости ω вращения ротора.

Исследовать влияние угловой скорости вращения ротора на характер устойчивости рассматриваемого равновесия.

Решение. Измененная потенциальная энергия спутника-гиростата имеет вид

$$W = \sum_{(123)} (3J_1 \omega_0^2 \gamma_1^2 - J_1 \omega_0^2 \beta_1^2 - 2\omega_0 k_1 \beta_1),$$

где $k_1 = k_3 = 0$.

Величины γ_i, β_i связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0, & \pi_2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 1 = 0, \\ \pi_3 &= \gamma_1 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2 + \gamma_3 \beta_3 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для определения экстремума функции W при условиях (1) введем функцию

$$W_* = W + 2\lambda\omega_0^2\pi_3 + \sigma\omega_0^2\pi_1 + \nu\omega_0^2\pi_2,$$

где λ , σ , ν — неопределенные множители Лагранжа.

Система уравнений относительного равновесия представляет собой совокупность уравнений (1) и уравнений

$$\frac{\partial W_*}{\partial \gamma_i} = (3J_i + \sigma)\omega_0^2\gamma_i + \lambda\omega_0^2\beta_1 = 0,$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \beta_i} = (\nu - J_i)\omega_0^2\beta_i + \lambda\omega_0^2\gamma_i = 0 \quad (i = 1, 3),$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \beta_2} = (\nu - J_2)\omega_0^2\beta_2 + \lambda\omega_0^2\gamma_2 = 0,$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \beta_2} = (\nu - J_2)\omega_0^2\beta_2 + \lambda\omega_0^2\gamma_2 - \omega_0 k_2 = 0.$$

Эта система при любом значении параметра k_2 имеет очевидное решение

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_2 = \beta_3 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_3 = \beta_2 = 1, \\ \sigma = -3J_3, \quad \lambda = 0, \quad \nu = J_2 - k_2/\omega_0, \end{aligned} \quad (2)$$

т. е. описанное в условии задачи относительное равновесие действительно существует при любом значении угловой скорости вращения ротора.

Исследуем устойчивость равновесия (2). В возмущенном движении положим $\gamma_3 = 1 + \xi$, $\beta_2 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Вычислим вторую вариацию $\delta^2 W$ на многообразии $\delta\pi_1 = \delta\pi_2 = \delta\pi_3 = 0$. С учетом того, что на этом многообразии $\xi = \eta = 0$, $\beta_3 = -\gamma_2$, имеем

$$\begin{aligned} \delta^2 W_* = 3(J_1 - J_3)\omega_0^2\gamma_1^2 + 4(J_2 - J_3 + k_2/(4\omega_0))\omega_0^2\gamma_2^2 + \\ + (J_2 - J_1 + k_2/\omega_0)\omega_0^2\beta_1^2. \end{aligned}$$

Условия положительной определенности $\delta^2 W_*$ имеют вид

$$J_2 + k_2/\omega_0 > J_1 > J_3, \quad J_2 + k_2/(4\omega_0) > J_3 \quad (3)$$

и представляют собой достаточные условия устойчивости исследуемого относительного равновесия спутника-гиростата.

Сопоставим их с условиями устойчивости для того же спутника, но с «замороженным» ротором ($k_2 = 0$).

Видно, что надлежащим выбором параметра k_2 можно обеспечить выполнение условий (3) в том случае, когда при $k_2 = 0$ они не выполняются, если $J_2 < J_3 < J_1$ или $J_1 > J_2 > J_3$. Во втором из этих двух случаев можно со всей определенностью говорить о стабилизирующем влиянии ротора.

Отметим также, что возможен и такой выбор параметров вращения ротора (при $k_2 < 0$), что условия (3) окажутся нарушенными даже тогда, когда при $k_2 = 0$ они выполнялись.

Задача 3.5.6. Найти условия существования относительных равновесий спутника-гиростата на круговой орбите, для которых его центральные оси инерции коллинеарны орбитальным осям. Исследовать устойчивость этих относительных равновесий. Использовать теоремы Лагранжа и Кельвина — Четаева.

Решение. Найдем стационарные значения измененной потенциальной энергии спутника-гиростата

$$2W = \sum_{(123)} (3J_1\omega_0^2\gamma_1^2 - J_1\omega_0^2\beta_1^2 - 2\omega_0 k_1\beta_1)$$

при условиях

$$\begin{aligned}\pi_\gamma &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0, & \pi_\beta &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 1 = 0, \\ \pi_{\gamma\beta} &= \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Введем функцию

$$2W_* = 2W + 2\lambda\omega_0^2\pi_{\gamma\beta} + \sigma\omega_0^2\pi_\gamma + \nu\omega_0^2\pi_\beta,$$

где λ , σ , ν — неопределенные множители Лагранжа.

Уравнения относительного равновесия записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_*}{\partial \gamma_1} &= (3J_1 + \sigma)\omega_0^2\gamma_1 + \lambda\omega_0^2\beta_1 = 0 \quad (123), \\ \frac{\partial W_*}{\partial \beta_1} &= (\nu - J_1)\omega_0^2\beta_1 + \lambda\omega_0^2\gamma_1 - \omega_0 k_1 = 0 \quad (123).\end{aligned}\quad (2)$$

Уравнения (1), (2) имеют решения вида

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \gamma_2 = \beta_3 = \beta_1 = 0, & \gamma_3 &= \beta_2 = 1, \\ \sigma &= -3J_3, & \nu &= J_2 - k_2\omega_0^{-1}, & \lambda &= 0,\end{aligned}\quad (3)$$

если $k_1 = k_3 = 0$.

Решению (3) отвечает положение равновесия спутника-гиростата на круговой орбите, в котором его главные оси инерции x_1, x_2, x_3 коллинеарны соответственно осям x, y, z орбитальной системы координат, при этом ось ротора перпендикулярна нормали к плоскости орбиты.

Исследуем устойчивость равновесия (3). В возмущенном движении положим $\gamma_3 = 1 + \xi$, $\beta_2 = 1 + \eta$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. На многообразии $\delta\pi_\gamma = \delta\pi_\beta = \delta\pi_{\gamma\beta} = 0$ выполняются равенства $\xi = \eta = 0$, $\beta_3 = -\gamma_2$, с учетом которых для $\delta^2 W_*$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \delta^2 W_* = 3(J_1 - J_3)\omega_0^2\gamma_1^2 + 4\left(J_2 - J_3 + \frac{k_2}{4\omega_0}\right)\omega_0^2\gamma_2^2 + \\ + \left(J_2 - J_1 + \frac{k_2}{\omega_0}\right)\omega_0^2\beta_1^2. \end{aligned}$$

Условия положительной определенности этой квадратичной формы имеют вид

$$J_2 + \frac{k_2}{\omega_0} > J_1 > J_3, \quad J_2 + \frac{k_2}{4\omega_0} > J_3$$

и представляют собой достаточные условия устойчивости равновесия (3) по отношению к величинам p_s, γ_s, β_s ($s = 1, 2, 3$).

Равновесие (3) будет неустойчиво при выполнении одной из групп условий

$$\begin{aligned} J_2 + \frac{k_2}{4\omega_0} > J_3 > J_1, \quad J_2 + \frac{k_2}{\omega_0} > J_1; \\ J_2 + \frac{k_2}{\omega_0} > J_1 > J_3 > J_2 + \frac{k_2}{4\omega_0}; \quad J_1 > J_3, \quad J_2 + \frac{k_2}{4\omega_0} > J_3; \\ J_1 > J_2 + \frac{k_2}{\omega_0}; \quad J_3 > J_1 > J_2 + \frac{k_2}{\omega_0}, \quad J_3 > J_2 + \frac{k_2}{4\omega_0}, \end{aligned}$$

так как степень неустойчивости при этом будет нечетной.

Задача 3.5.7. Найти условия существования семейства положений относительного равновесия спутника-гиростата, в которых одна из его главных центральных осей инерции коллинеарна радиусу-вектору круговой орбиты. Исследовать устойчивость этих равновесий.

Решение. Для нахождения стационарных значений измененной потенциальной энергии спутника-гиростата

$$2\omega_0^{-2}W = \sum_{(123)} (3J_1\gamma_1^2 - J_1\beta_1^2 - 2\omega_0^{-1}k_1\beta_1)$$

при условиях

$$\begin{aligned}\pi_\gamma &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0, & \pi_\beta &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 1 = 0, \\ \pi_{\gamma\beta} &= \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0\end{aligned}\quad (1)$$

введем функцию

$$2W_* = 2\omega_0^{-2}W + 6\lambda\pi_{\gamma\beta} + \nu\pi_\beta - 3\sigma\pi_\gamma,$$

где λ , σ , ν — неопределенные множители Лагранжа. Уравнения относительного равновесия записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_*}{\partial \gamma_1} &= 3[(J_1 - \sigma)\gamma_1 + \lambda\beta_1] = 0 \quad (123), \\ \frac{\partial W_*}{\partial \beta_1} &= 3\lambda\gamma_1 + (\nu - J_1)\beta_1 - \omega_0^{-1}k_1 = 0 \quad (123)\end{aligned}\quad (2)$$

и допускают однопараметрические семейства решений вида

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \gamma_2 = \beta_3 = 0, & \gamma_3 &= 1, \\ \beta_1 &= \sin \theta, & \beta_2 &= \cos \theta, & \lambda &= 0, & \sigma &= J_3,\end{aligned}\quad (3)$$

если

$$\omega_0^{-1}k_1 = (\nu - J_1)\sin \theta, \quad \omega_0^{-1}k_2 = (\nu - J_2)\cos \theta, \quad k_3 = 0.$$

Решениям (3) отвечают положения относительного равновесия спутника-гиростата, в которых его главная центральная ось инерции x_3 коллинеарна радиусу-вектору круговой орбиты, а оси x_1 и x_2 лежат в плоскости Sxy , при этом ось x_2 образует угол θ с нормалью к плоскости орбиты.

Исследуем устойчивость равновесия (3). Обозначим через ξ , η_s вариации величин γ_3 , β_s ($s=1, 2, 3$), а для остальных величин сохраним прежние обозначения. На многообразии $\delta\pi_\gamma = \delta\pi_\beta = \delta\pi_{\gamma\beta} = 0$ выполняются условия

$$\begin{aligned}\xi &= 0, & \eta_1 \sin \theta + \eta_2 \cos \theta &= 0, \\ \eta_3 + \gamma_1 \sin \theta + \gamma_2 \cos \theta &= 0,\end{aligned}$$

с учетом которых для $\delta^2 W_*$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \omega_0^{-2} \delta^2 W_* = & (\nu - J_1 \cos^2 \theta - J_2 \sin^2 \theta) \cos^{-2} \theta \eta_1^2 + \\ & + [3(J_1 - J_3) + (\nu - J_3) \sin^2 \theta] \gamma_1^2 + [3(J_2 - J_3) + \\ & + (\nu - J_3) \cos^2 \theta] \gamma_2^2 + 2(\nu - J_3) \sin \theta \cos \theta \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned}$$

Симметризованные условия положительной определенности $\delta^2 W_*$ выражаются неравенствами

$$\begin{aligned} \nu &> J_1 \cos^2 \theta + J_2 \sin^2 \theta, \\ 3(J_1 \cos^2 \theta + J_2 \sin^2 \theta - J_3) + 2(\nu - J_3) \sin^2 \theta \cos^2 \theta &> 0, \\ (\nu - J_3)(J_1 \cos^2 \theta + J_2 \sin^2 \theta - J_3) + 3(J_1 - J_3)(J_2 - J_3) &> 0. \end{aligned}$$

Эти условия эквивалентны условиям

$$\begin{aligned} J_1 \cos^2 \theta + J_2 \sin^2 \theta - J_3 &> 0, \quad \nu > \nu_1, \quad \nu > \nu_2, \\ \nu_1 = J_1 \cos^2 \theta + J_2 \sin^2 \theta, \quad \nu_2 = J_3 - \frac{3(J_1 - J_3)(J_2 - J_3)}{J_1 \cos^2 \theta + J_2 \sin^2 \theta - J_3}. \end{aligned}$$

Результаты анализа этих условий представлены на рис. 3.22, $a - d$, где на плоскости параметров ν, θ указаны области, для которых степень неустойчивости решения (3) равна 0, 1, 2, 3. Случаи $a - d$ рис. 3.22 характеризуются условиями:

а) $J_1 < J_2 < J_3$; б) $J_3 < J_1 < J_2$; в) $J_1 < J_3 < J_2$, $3J_1 + J_2 < 4J_3 < J_1 + 3J_2$; г) $J_1 < J_3 < J_2$, $4J_3 < 3J_1 + J_2$; д) $J_1 < J_3 < J_2$, $J_1 + 3J_2 < 4J_3$.

Задача 3.5.8. Указать условия существования семейств относительных равновесий спутника-гиростата на круговой орбите, для которых одна из главных центральных осей инерции коллинеарна касательной к орбите. Исследовать устойчивость этих равновесий.

Решение. Уравнения относительного равновесия спутника-гиростата (см. решение задачи 2.5.6, уравнения (1), (2)) допускают однопараметрические семейства вида

$$\gamma_1 = \cos \theta, \quad \gamma_2 = -\sin \theta, \quad \gamma_3 = 0, \quad \beta_1 = \sin \theta, \quad \beta_2 = \cos \theta, \quad (1)$$

$$\beta_3 = 0, \quad \lambda = (J_2 - J_3) \sin \theta \cos \theta, \quad \sigma = J_1 \cos^2 \theta + J_2 \sin^2 \theta,$$

если

$$\omega_0^{-1} k_1 = [\nu - J_1 + 3(J_1 - J_2) \cos^2 \theta] \sin \theta,$$

$$\omega_0^{-1} k_2 = [\nu - J_2 + 3(J_2 - J_1) \sin^2 \theta] \cos \theta, \quad k_3 = 0.$$

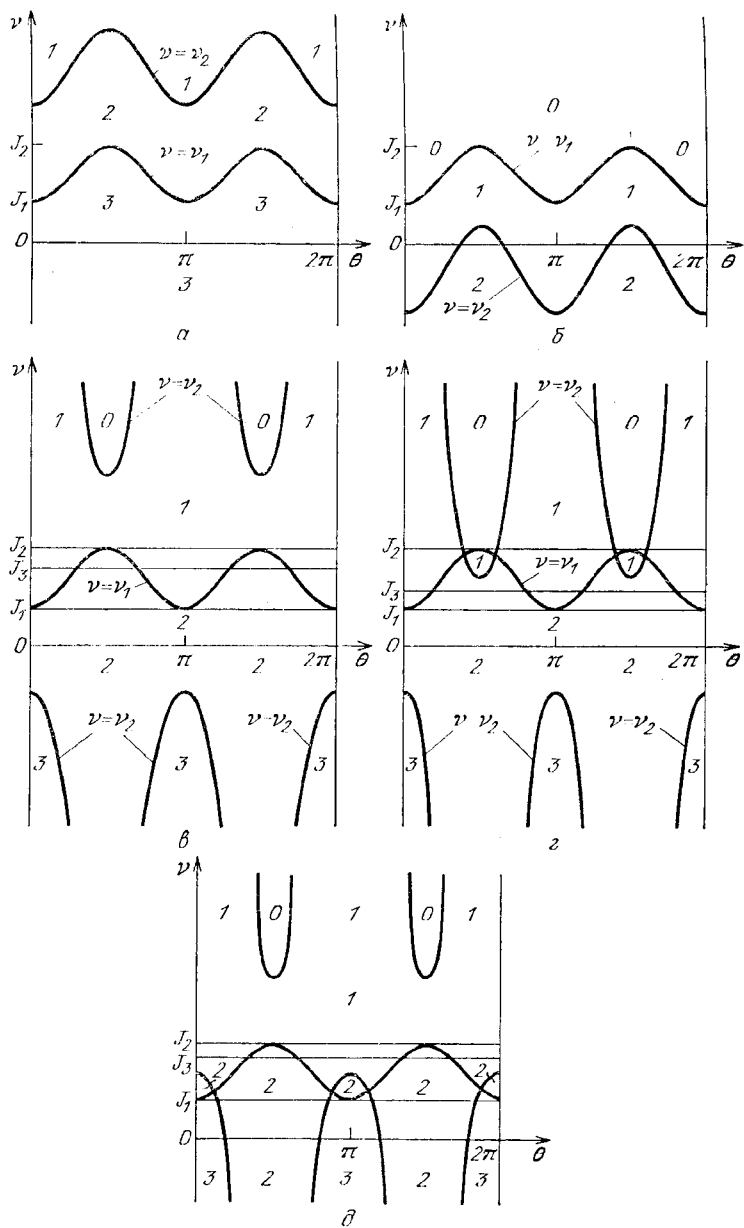


Рис. 3.22

Решениям (1) отвечают положения относительного равновесия, в которых ось x_3 коллинеарна оси x , а оси x_1 и x_2 расположены в плоскости yz , при этом ось x_2 составляет с осью y угол θ , а ось ротора ортогональна осям x_3 и x .

Исследуем устойчивость равновесий (1) по отношению к величинам p_s, γ_s, β_s ($s = 1, 2, 3$). Обозначим через ξ_s, η_s вариации величин γ_s, β_s . На линейном многообразии $\delta\pi_p = \delta\pi_\gamma = \delta\pi_\beta = 0$ выполняются равенства

$$\eta_1 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \xi_1, \quad \eta_2 = \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \xi_1,$$

с учетом которых для $\delta^2 W_*$ получаем выражение

$$\delta^2 W_* = [\nu - \sigma - 3(2\sigma - J_1 - J_2)] \sin^{-2} \theta \xi_1^2 + \\ + 3(J_3 - \sigma) \xi_3^2 + 6\lambda \xi_3 \eta_3 + (\nu - J_3) \eta_3^2,$$

условия положительной определенности которого можно представить в виде

$$J_3 > \sigma, \quad \nu > \nu_1, \quad \nu > \nu_2, \quad \nu_1 = J_3 + \frac{3(\sigma - J_1)(\sigma - J_2)}{\sigma - J_3}, \\ \nu_2 = \sigma + 3(2\sigma - J_1 - J_2). \quad (2)$$

Результаты анализа условий (2) представлены на рис. 3.23, где на плоскости параметров σ, ν указаны

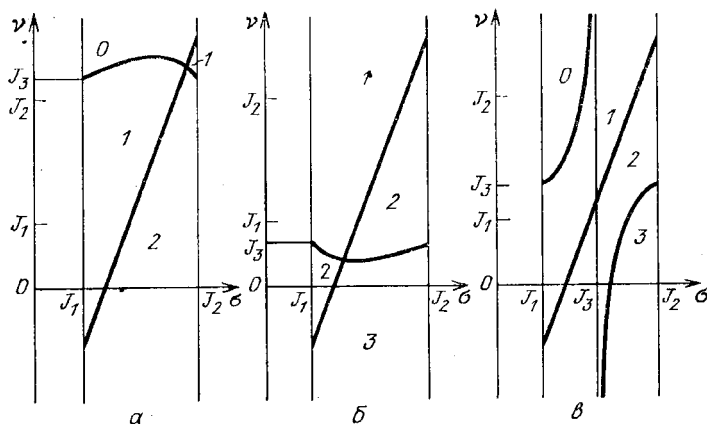


Рис. 3.23

области, для которых степень неустойчивости равновесий (1) равна 0, 1, 2, 3 в случаях, когда а) $J_1 < J_2 < J_3$; б) $J_3 < J_1 < J_2$; в) $J_1 < J_3 < J_2$.

Задача 3.5.9. Найти все положения относительного равновесия динамически симметричного спутника-гиростата на круговой орбите. Исследовать устойчивость этих равновесий.

Задача 3.5.10. Найти множество всех положений относительного равновесия спутника-гиростата на круговой орбите и указать достаточные условия их устойчивости.

Решение. Для нахождения стационарных значений измененной потенциальной энергии спутника-гиростата

$$2\omega_0^{-2}W = \sum_{(123)} (3J_1\gamma_1^2 - J_1\beta_1^2 - 2\omega_0^{-1}k_1\beta_1)$$

при условиях

$$\pi_\gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0, \quad \pi_\beta = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 1 = 0, \quad (1)$$

$$\pi_{\gamma\beta} = \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0$$

введем функцию

$$2W_* = 2\omega_0^{-2}W + 6\lambda\pi_{\gamma\beta} - 3\sigma\pi_\gamma + \nu\pi_\beta,$$

где λ , σ , ν — неопределенные множители Лагранжа.

Уравнения относительного равновесия имеют вид

$$\frac{\partial W_*}{\partial \gamma_1} = 3[(J_1 - \sigma)\gamma_1 + \lambda\beta_1] = 0 \quad (123),$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \beta_1} = 3\lambda\gamma_1 + (\nu - J_1)\beta_1 - \omega_0^{-1}k_1 = 0 \quad (123). \quad (2)$$

Укажем два способа решения и геометрического представления решений уравнений (1), (2).

Первый способ. Зафиксируем значения величин ν и γ_1 , γ_2 , γ_3 , удовлетворяющие соотношению $\pi_\gamma = 0$, и разрешим уравнения (1), (2) относительно σ , λ , β_s , k_s ($s = 1, 2, 3$). В результате получим

$$\sigma = J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2, \quad (3)$$

$$\lambda = \pm \left[\sum_{s=1}^3 J_s^2 \gamma_s^2 - \left(\sum_{s=1}^3 J_s \gamma_s^2 \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4)$$

$$\beta_j = \lambda^{-1} \left(\sum_{s=1}^3 J_s \gamma_s^2 - J_j \right) \gamma_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad (5)$$

$$\omega_0^{-1}k_j = 3\lambda\gamma_j + (\nu - J_j)\beta_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad (6)$$

если $\lambda \neq 0$.

Если $\lambda = 0$, то в качестве β_j можно взять любые значения, удовлетворяющие уравнениям (1), а величины k_j определяются из второй группы уравнений (2).

$$\omega_0^{-1} k_j = (\nu - J_j) \beta_j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Из (5) и (4) следует, что ориентация корпуса гиростата в положении относительного равновесия не зависит от параметра ν , который влияет только на выбор гиросtatических моментов k_j и на устойчивость равновесий.

Выражение для λ^2 можно представить в виде

$$\lambda^2 = \sum_{(123)} (J_2 - J_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \geq 0. \quad (8)$$

Правая часть этого выражения обращается в нуль лишь в случае, когда в положении равновесия одна из главных центральных осей инерции гиростата коллинеарна оси z . Следовательно, уравнения (1), (2) разрешимы относительно σ , λ , β_j , k_j при любых значениях ν и γ_1 , γ_2 , γ_3 , связанных равенством $\pi_7 = 0$.

Итак, в положении относительного равновесия спутник-гиростат может быть ориентирован на притягивающий центр произвольно выбранным в нем направлением. Если главная центральная ось инерции гиростата не коллинеарна оси z ($\lambda \neq 0$), то каждому такому направлению отвечают два динамически эквивалентных положения равновесия, соответствующих различным знакам величины λ и различающихся поворотом на 180° вокруг оси, коллинеарной оси z . Для этих двух положений равновесия величины k_j различаются знаками. Если главная центральная ось инерции гиростата коллинеарна оси z ($\lambda = 0$), то возможно любое, относительно поворота вокруг этой оси, положение равновесия.

Уравнения (1), (2) имеют однопараметрические семейства относительных равновесий вида

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \beta_2 = \sin \theta_1, \quad \beta_3 = \cos \theta_1, \quad (9)$$

$$k_1 = 0, \quad \omega_0^{-1} k_2 = (\nu - J_2) \sin \theta_1, \quad \omega_0^{-1} k_3 = (\nu - J_3) \cos \theta_1,$$

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \cos \theta_1, \quad \gamma_3 = -\sin \theta_1, \quad \beta_1 = 0,$$

$$\beta_2 = \sin \theta_1, \quad \beta_3 = \cos \theta_1,$$

$$k_1 = 0, \quad \omega_0^{-1} k_2 = [\nu - J_2 + 3(J_2 - J_3) \cos^2 \theta_1] \sin \theta_1, \quad (10)$$

$$\omega_0^{-1} k_3 = [\nu - J_3 + 3(J_3 - J_2) \sin^2 \theta_1] \cos \theta_1.$$

В положении равновесия (9) ось x_1 коллинеарна оси z , а оси x_2 и x_3 расположены в плоскости xu , при этом ось x_3 образует с осью u угол θ , а ось ротора ортогональна осям x_1 и z .

Для решения (10) ось x_1 коллинеарна оси x , а оси x_2 и x_3 расположены в плоскости yz , при этом ось x_3 составляет с осью y угол θ , а ось ротора ортогональна осям x_1 и x . Семейства положений относительного равновесия вида (9) и (10) отвечают точкам больших кругов $\gamma_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) на единичной сфере $\pi_7 = 0$. Если эллипсоид инерции гиростата симметричен ($J_1 = J_2$), то семейства (9) и (10) исчерпывают все положения относительных равновесий спутника-гиростата.

Второй способ. Зафиксируем значения λ , σ , ν и решим уравнения (1), (2) относительно γ_s , β_s , k_s ($s = 1, 2, 3$). Из уравнений (2) находим

$$\gamma_s = \frac{\lambda k_s}{\omega_0 \Phi_s}, \quad \beta_s = \frac{(\sigma - J_s) k_s}{\omega_0 \Phi_s} \quad (s = 1, 2, 3), \quad (11)$$

$$\Phi_s = 3\lambda^2 + (\sigma - J_s)(\nu - J_s).$$

Подстановка этих значений в (1) приводит к трем линейным относительно $(k_1/\omega_0)^2$, $(k_2/\omega_0)^2$, $(k_3/\omega_0)^2$ уравнениям, из которых получаем

$$k_1^2 = \frac{\omega_0^2 (J_3 - J_2) L_1 \Phi_1^2}{\lambda^2 B}, \quad L_1 = \lambda^2 + (\sigma - J_2)(\sigma - J_3) \quad (123),$$

$$B = (J_2 - J_3)(J_3 - J_1)(J_1 - J_2). \quad (12)$$

С учетом равенств (12) выражения (11) принимают вид

$$\gamma_1^2 = \frac{(J_3 - J_2) L_1}{B}, \quad \beta_1^2 = \frac{(J_3 - J_2)(\sigma - J_1)^2 L_1}{\lambda^2 B} \quad (123). \quad (13)$$

В случае трехосного центрального эллипсоида инерции спутника-гиростата будем считать, что $J_1 < J_2 < J_3$. Для геометрического представления множества всех относительных равновесий спутника-гиростата рассмотрим в пространстве параметров λ , σ , ν область D , определяемую неравенствами: $L_1 > 0$, $L_2 < 0$, $L_3 > 0$. Точкам области D отвечают вещественные значения величин k_s , γ_s , β_s , определяемые по формулам (12), (13). Область D представляет собой (рис. 3.24) цилиндрическое тело, профиль которого образуют три круга: $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, которые аналогичны известным в теории упругости кругам Мора.

Из (12) и (13) следует, что ориентация корпуса спутника в относительном равновесии не зависит от параметра ν , который влияет только на выбор гиросtatических моментов ротора и на устойчивость равновесий.

Каждой точке области D соответствуют восемь положений равновесия, для которых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ отличаются только знаками. На единичной сфере $\pi_1 = 0$ этим восьми

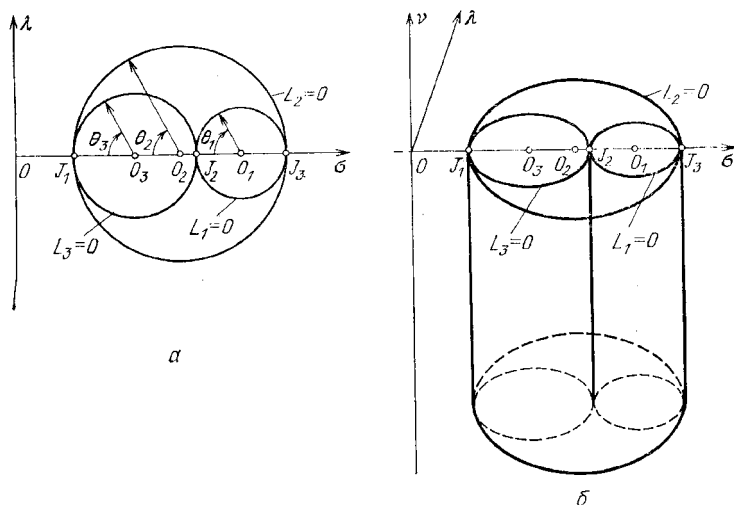


Рис. 3.24

равновесиям отвечают восемь точек, по одной в каждом октанте. Точкам области D , симметричным относительно плоскости $\lambda = 0$, соответствуют динамически эквивалентные положения равновесия, получаемые одно из другого поворотом корпуса спутника вокруг оси z на 180° .

Решения вида (9) отвечают образующим границы Γ области D , по которым происходит взаимное касание цилиндров $L_s = 0$ ($s = 1, 2, 3$), т. е. прямым $\lambda = 0, \sigma = J_s$.

Решения вида (10) соответствуют точкам цилиндров $L_s = 0$ ($s = 1, 2, 3$), образующим границу Γ области D .

Таким образом, семействам решений вида (9) и (10) отвечают точки границы области D .

При $J_2 \rightarrow J_1$ ($J_2 \rightarrow J_3$) цилиндр $L_3 = 0$ ($L_1 = 0$) стягивается в прямую $\lambda = 0, \sigma = J_1$ ($\lambda = 0, \sigma = J_3$), а область D вырождается в поверхность цилиндра $L_2 = 0$.

Исследуем устойчивость относительных равновесий (13) спутника-гиростата. Обозначим через ξ_s , η_s вариации величин γ_s , β_s ($s = 1, 2, 3$). Достаточные условия устойчивости получим как условия положительной определенности второй вариации

$$\delta^2 W_* = \sum_{s=1}^3 [3(J_s - \sigma)\xi_s^2 + (\nu - J_s)\eta_s^2 + 6\lambda\xi_s\eta_s]$$

на линейном многообразии

$$\delta\pi_\gamma = 2 \sum_{s=1}^3 \gamma_s \xi_s = 0, \quad \delta\pi_\beta = 2 \sum_{s=1}^3 \beta_s \eta_s = 0,$$

$$\delta\pi_{\gamma\beta} = \sum_{s=1}^3 (\beta_s \xi_s + \gamma_s \eta_s) = 0.$$

Эти условия приводятся к требованию положительности главных диагональных миноров седьмого, восьмого и девятого порядков определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \gamma_1 & \beta_2 & \gamma_2 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & 0 & \beta_1 & 3(J_1 - \sigma) & 3\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 & 3\lambda & \nu - J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 3(J_2 - \sigma) & 3\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 3\lambda & \nu - J_2 & 0 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3(J_3 - \sigma) & 3\lambda \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\lambda & \nu - J_3 \end{vmatrix}$$

и выражаются в симметризованной форме неравенствами

$$a > 0, \quad 2av + b > 0, \quad \Delta = av^2 + bv + c > 0, \quad (14)$$

где

$$a = \sum_{s=1}^3 (J_s - \sigma)\alpha_s^2, \quad (15)$$

$$b = -a \sum_{(123)} (J_2 + J_3)\beta_1^2 + 3 \sum_{(123)} (J_2 - \sigma) \times \\ \times (J_3 - \sigma)\gamma_1^2 - 3\lambda^2,$$

$$c = a \sum_{(123)} J_2 J_3 \beta_1^2 - 3 \sum_{s=1}^3 J_s \alpha_s^2 \sum_{(123)} (J_2 - \sigma)(J_3 - \sigma)\gamma_1^2 + \\ + 3\lambda^2 \left[\sum_{s=1}^3 J_s \gamma_s^2 - 3 \sum_{s=1}^3 (J_s - \sigma)\beta_s^2 \right], \quad \alpha_1 = \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2 \quad (123).$$

Уравнение $\Delta = 0$ имеет вещественные корни $v_1 \leq v_2$, поскольку его дискриминант $b^2 - 4ac$ неотрицателен. В противном случае при $a \neq 0$ и любом v было бы $\Delta \neq 0$, и знак Δ совпадал со знаком a . Тогда в силу второго из условий (14) степень неустойчивости была бы различной при $v = \pm N$, где N — достаточно большое положительное число, а именно: равна 0 и 2, если $a > 0$, и 1 и 3, если $a < 0$, что противоречит теории бифуркаций.

Степень неустойчивости положения относительного равновесия спутника-гиростата при изменении параметра v в интервалах $v > v_2$, $v_1 < v < v_2$, $v < v_1$ соответственно равна 0, 1, 2, если для этого равновесия $a > 0$, и 1, 2, 3, если для него $a < 0$.

Рассмотрим положения относительного равновесия, для которых $\lambda \neq 0$. Для них выражения (15) для a , b , c можно представить в виде

$$\begin{aligned} a &= \lambda^{-2} H, \quad b = \lambda^{-4} (3H'\lambda^4 - 2\sigma H\lambda^2 - H^2), \\ c &= \lambda^{-4} \left[\frac{9}{2} H''\lambda^6 + 3(2H - \sigma H')\lambda^4 + \right. \\ &\quad \left. + (\sigma^2 - 3H')H\lambda^2 + \sigma H^2 \right], \\ H &= (\sigma - J_1)(\sigma - J_2)(\sigma - J_3), \quad H' = \frac{dH}{d\sigma}. \end{aligned} \quad (16)$$

Условия (14) эквивалентны условиям

$$a > 0, \quad v > v_1, \quad v > v_2. \quad (17)$$

Условия (17) для решения (9) принимают вид

$$a = J_2 \cos^2 \theta + J_3 \sin^2 \theta - J_1 > 0, \quad v > v_1, \quad v > v_2, \quad (18)$$

$$v_1 = J_2 \cos^2 \theta + J_3 \sin^2 \theta,$$

$$v_2 = J_1 - 3(J_2 - J_1)(J_3 - J_1)(J_2 \cos^2 \theta + J_3 \sin^2 \theta - J_1)^{-1},$$

а для решения (10) записываются в форме

$$a = J_1 - \sigma > 0, \quad \sigma = J_2 \cos^2 \theta + J_3 \sin^2 \theta, \quad v > v_1, \quad v > v_2, \quad (19)$$

$$v_1 = J_1 + 3(\sigma - J_2)(\sigma - J_3)(\sigma - J_1)^{-1},$$

$$v_2 = \sigma + 3(2\sigma - J_2 - J_3).$$

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 4.1. Диск вращается в вертикальной плоскости вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр O , с постоянной угловой скоростью ω . В точке O закреплен один конец линейно-упругой пружины жесткостью c , к другому концу прикреплена материальная точка M массой m . Между диском и точкой M действует сила трения $F_{тр}$, пропорциональная скорости точки относительно диска $V_{отн}$. Считая естественную длину пружины равной нулю, найти положения равновесия точки M и исследовать их устойчивость.

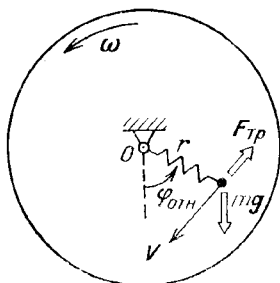


Рис. 4.1

Решение. Положение точки M определим ее полярными координатами r, φ (рис. 4.1). Для проекций относительной скорости $V_{отн}$ и силы $F_{тр}$ имеем выражения

$$V_{отн\,r} = \dot{r}, \quad V_{отн\,\varphi} = r(\dot{\varphi} - \omega),$$

$$F_{тр\,r} = -kr, \quad F_{тр\,\varphi} = -kr(\varphi - \omega),$$

где k — коэффициент трения.

Уравнения движения точки M имеют вид

$$m\ddot{\varphi} + 2m\dot{\varphi}\dot{r} = -mg \sin \varphi - kr(\dot{\varphi} - \omega),$$

$$m\ddot{r} - m\dot{\varphi}^2 = -cr + mg \cos \varphi - kr. \quad (1)$$

Положения равновесия точки M определяются из уравнений $cr = mg \cos \varphi$, $mg \sin \varphi = kr\omega$, откуда

$$\varphi_0 = \arctg k\omega/c, \quad r_0 = mg/\sqrt{c^2 + \omega^2 k^2}. \quad (2)$$

Введя отклонения $z = \varphi - \varphi_0$, $p = r - r_0$ и проведя линеаризацию системы (1) по z, p , получим

$$m\ddot{p} + k\dot{p} + cp + mg(\sin \varphi_0)z = 0,$$

$$mr_0\ddot{z} + kr_0\dot{z} - k\omega p + mg(\cos \varphi_0)z = 0. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (3) описывают движение некоторой механической системы, находящейся под действием диссипативных и позиционных сил (потенциальных и непотенциальных). Наличие непотенциальных позиционных сил может служить источником неустойчивости тривиального решения ($p = z = 0$) уравнений (3) даже в том случае, когда оно является асимптотически устойчивым без учета этих сил.

Для решения вопроса об устойчивости запишем характеристическое уравнение системы (3)

$$m^2 r_0 \lambda^4 + 2mr_0 k \lambda^3 + (cmr_0 + k^2 r_0 + m^2 g \cos \varphi_0) \lambda^2 + (kcr_0 + kmg \cos \varphi_0) \lambda + cmg \cos \varphi_0 + k\omega mg \sin \varphi_0 = 0. \quad (4)$$

Записав определитель Гурвица и вычислив его главные миноры, находим, что действительные части корней уравнения (4) отрицательны, если выполняется условие

$$(kcm^2 r_0^2 + 2k^3 mr_0^2 + km^3 gr_0 \cos \varphi_0) \times \\ \times (kcr_0 + kmg \cos \varphi_0) - 4m^2 r_0^2 k^2 (cmg \cos \varphi_0 + \\ + k\omega mg \sin \varphi_0) > 0,$$

которое после подстановки значений (2) приводится к более компактному виду $\omega < \sqrt{c/m}$.

Положение равновесия точки M устойчиво до тех пор, пока угловая скорость диска не превышает частоты колебаний этой точки под действием одной лишь пружины (отметим, что при $k = \omega = 0$ точка M хотя и имеет две степени свободы, но обе частоты ее колебаний совпадают между собой).

Решить задачу, считая свободную длину пружины отличной от нуля.

Задача 4.2. Два одинаковых однородных шара с центрами в точках M , N скреплены невесомым стержнем (рис. 4.2) и вместе с другим невесомым стержнем AC образуют симметричное твердое тело — физический маятник с осью качания в точке C . Маятник помещен в центральное притягивающее ньютоновское поле сил с центром в точке O . Вывести условия устойчивости положения равновесия маятника, при котором точки M и N расположены симметрично относительно линии OC .

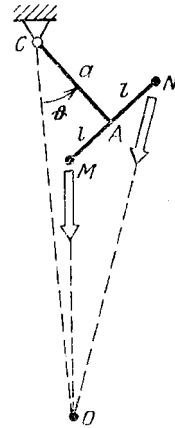


Рис. 4.2

Решение. Введем обозначения $|MN| = 2l$, $|AC| = a$, $|OC| = R$, за обобщенную координату примем ϑ — угол OCA отклонения маятника от линии OC (рис. 4.2).

Силовая функция действующих на шары центральных сил имеет вид

$$U = \mu(R^2 + l^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta + 2lR \sin \vartheta)^{-1/2} + \\ + \mu(R^2 + l^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta - 2lR \sin \vartheta)^{-1/2}.$$

Нетрудно проверить, что силовая функция U имеет в точке $\vartheta = 0$ экстремум, так как производная

$$U'(\vartheta) = -\mu R(a \sin \vartheta + l \cos \vartheta)(R^2 + l^2 + a^2 - \\ - 2Ra \cos \vartheta + 2lR \sin \vartheta)^{-3/2} - \mu R(a \sin \vartheta - l \cos \vartheta) \times \\ \times (R^2 + l^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta - 2lR \sin \vartheta)^{-3/2}$$

обращается в нуль при $\vartheta = 0$. Следовательно, положение $\vartheta = 0$ является положением равновесия, что, впрочем, очевидно.

Положение равновесия $\vartheta = 0$ устойчиво, если $U'' < 0$, что приводит нас к неравенству

$$a_*^3 - 2a_*^2 + a_*(1 + l_*^2) - 3l_*^2 > 0 \quad (a_* = a/R, \quad l_* = l/R). \quad (1)$$

Это неравенство выделяет на плоскости параметров a_* , l_* область устойчивости, заштрихованную на рис. 4.3.

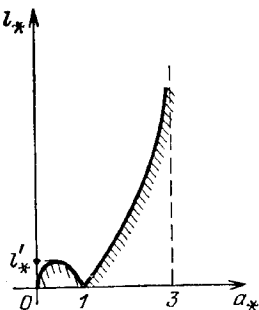


Рис. 4.3

Если l_* мало, то для параметра a_* существует два интервала, в которых выполняется условие устойчивости (1). При $l_* > l'_*$ такой интервал лишь один. При $a_* > 3$ исследуемое положение равновесия устойчиво для любых l_* .

Вычислить l'_* . Решить вопрос об устойчивости, когда неравенство (1) превращается в равенство.

Задача 4.3. Однородный куб с длиной ребра $2a$ и массой m закреплен в центре C масс и находится в центральном ньютоновском поле притяжения с центром в точке O , отстоящей от точки C на расстояние R ($R \gg a$). Вычислить потенциальную энергию, найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.

Решение. Введем подвижную систему координат $Sx_1x_2x_3$ с началом в центре масс тела и осями, перпендикулярными граням куба. Обозначим через γ единичный вектор, имеющий направление отрезка OC , а через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — его проекции на оси x_1, x_2, x_3 .

Потенциальная энергия сил притяжения равна

$$\Pi = -fM \int_m \frac{dm}{\sqrt{R^2 + 2R(\gamma \cdot r) + r^2}}, \quad (1)$$

где M — масса притягивающего центра, r — радиус-вектор точки тела, f — гравитационная постоянная.

Разложим подынтегральную функцию в (1) в ряд по степеням x_i/R ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} (R^2 + 2R(\gamma \cdot r) + r^2)^{-1/2} = & \frac{1}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(2 \frac{\gamma \cdot r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right) + \right. \\ & + \frac{3}{8} \left(2 \frac{\gamma \cdot r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right)^2 - \frac{5}{16} \left(2 \frac{\gamma \cdot r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right)^3 + \\ & \left. + \frac{35}{768} \left(2 \frac{\gamma \cdot r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right)^4 - \dots \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\begin{aligned} \Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \\ = \text{const} - \frac{35}{48} fMR^{-5} \int_m \sum_{m(123)} (\gamma_1^4 x_1^4 + 6\gamma_2^2 \gamma_3^2 x_2^2 x_3^2) dm + \dots, \quad (3) \end{aligned}$$

где в правой части постоянная не зависит от $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, знак суммы с символом (123) означает, что другие слагаемые получаются из написанных в результате циклической перестановки индексов 1, 2, 3, и не выписаны члены более высокого порядка малости.

Для куба имеем

$$\int_m x_1^4 dm = \frac{1}{5} ma^4, \quad \int_m x_2^2 x_3^2 dm = \frac{1}{9} ma^4.$$

Поэтому получаем, отбрасывая постоянную,

$$\begin{aligned} \Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = & -\frac{35}{48} \frac{fM a^4}{R^5} \left[\frac{1}{5} (\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + \gamma_3^4) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} (\gamma_2^2 \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \gamma_1^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2) \right] \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношение

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad (4)$$

последнее выражение можно представить в виде

$$\Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \frac{7}{12} mga\epsilon^3 (\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + \gamma_3^4), \quad (5)$$

где $\epsilon = a/R$, а $g = fM/R^2$ — ускорение тяготения на расстоянии R от центра притяжения.

Введем функцию

$$W(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \Pi - \frac{7}{36} mga\epsilon^3 \lambda (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1),$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Уравнения равновесия записываются в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \frac{7}{18} mga\epsilon^3 (\gamma_1^2 - \lambda) \gamma_1 = 0 \quad (123), \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Эти уравнения имеют следующие три семейства решений:

$$\gamma_{10}^2 = \gamma_{20}^2 = \gamma_{30}^2 = \lambda = \frac{1}{3}, \quad (6)$$

$$\gamma_{10} = 0, \quad \gamma_{20}^2 = \gamma_{30}^2 = \lambda = \frac{1}{2} \quad (123), \quad (7)$$

$$\gamma_{10} = \gamma_{20} = 0, \quad \gamma_{30}^2 = \lambda = 1 \quad (123). \quad (8)$$

Первому семейству отвечают восемь положений равновесия, для которых одна из вершин куба лежит на прямой Γ , проходящей через точки O и C . Второму семейству соответствуют двенадцать положений равновесия, для которых одно из ребер куба пересекается с прямой Γ под прямым углом. Третьему семейству отвечают шесть положений равновесия, для которых прямая Γ перпендикулярна граням куба.

Исследуем устойчивость равновесий (6). В возмущенном положении тела положим $\gamma_i = \gamma_{i0} + \eta_i$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда, обозначая через ΔW изменение функции W при переходе от положения равновесия к возмущенному положению, будем иметь

$$\Delta W = \frac{7}{216} mga\epsilon^3 (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) + \dots$$

Выражение для ΔW представляет собой положительно-определенную функцию, а потому для положений равновесия (6) потенциальная энергия имеет изолированный минимум и они устойчивы.

Исследуем теперь устойчивость равновесий (7). В возмущенном положении положим $\gamma_2 = \gamma_{20} + \eta_2$, $\gamma_3 = \gamma_{30} + \eta_3$, а для γ_1 сохраним прежнее обозначение. Тогда

$$\Delta W = \frac{7}{72} m g a e^3 [2(\eta_2^2 + \eta_3^2) - \gamma_1^2] + \dots,$$

при этом из уравнения (4) получаем в первом приближении соотношение $\eta_2 + \eta_3 = 0$, а потому

$$\Delta W = \frac{7}{72} m g a e^3 (4\eta_2^2 - \gamma_1^2) + \dots$$

Отсюда заключаем, что для равновесий (7) П не имеет минимума и они неустойчивы, причем степень неустойчивости $\chi = 1$.

Исследуем, наконец, устойчивость равновесий (8). В возмущенном положении считаем $\gamma_3 = \gamma_{30} + \eta_3$, а для γ_1 и γ_2 сохраним прежние обозначения. Тогда

$$\Delta W = \frac{7}{36} m g a e^3 (2\eta_3^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2),$$

при этом в первом приближении $\eta_3 = 0$. Следовательно, равновесия (8) неустойчивы и степень неустойчивости $\chi = 2$.

Задача 4.4. Для плоской неограниченной задачи трех тел с массами m_1 , m_2 , m_3 исследовать устойчивость по Ляпунову постоянных лапласовых решений в случае, когда сила F_{ij} взаимного тяготения масс m_i и m_j ($i, j = 1, 2, 3$), находящихся одна от другой на расстоянии r_{ij} , определяется выражением $F_{ij} = f m_i m_j r_{ij}^n$, где $n > 1$, а f — константа.

Решение. Пусть точки M_1 , M_2 , M_3 с массами m_1 , m_2 , m_3 движутся в плоскости Oxy с началом координат в центре масс тел. Пусть x_i , y_i — координаты точки M_i ; ψ — угол, образуемый направлением отрезка M_3M_1 с осью x ; ϑ — угол между отрезками M_3M_1 и M_3M_2 . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} m x_1 &= (m - m_1) r_1 \cos \psi - m_2 r_2 \cos(\psi + \vartheta), \\ m y_1 &= (m - m_1) r_1 \sin \psi - m_2 r_2 \sin(\psi + \vartheta), \\ m x_2 &= -m_1 r_1 \cos \psi + (m - m_2) r_2 \cos(\psi + \vartheta), \\ m y_2 &= -m_1 r_1 \sin \psi + (m - m_2) r_2 \sin(\psi + \vartheta), \\ m x_3 &= -m_1 r_1 \cos \psi - m_2 r_2 \cos(\psi + \vartheta), \\ m y_3 &= -m_1 r_1 \sin \psi - m_2 r_2 \sin(\psi + \vartheta), \\ r_1 &= r_{31}, \quad r_2 = r_{32}, \quad m = m_1 + m_2 + m_3. \end{aligned}$$

Отсюда для кинетической T и потенциальной Π энергий системы получаем выражения

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) = \\
 &= \frac{1}{2m} \left\{ m_1(m_2 + m_3) (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\psi}^2) + \right. \\
 &+ m_2(m_3 + m_1) [\dot{r}_2^2 + r_2^2 (\dot{\psi} + \dot{\vartheta})^2] - 2m_1 m_2 [\dot{r}_1 \dot{r}_2 \cos \vartheta + \\
 &+ r_1 \dot{r}_2 \dot{\psi} \sin \vartheta + r_2 (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) (r_1 \dot{\psi} \cos \vartheta - \dot{r}_1 \sin \vartheta)] \Big\}, \\
 \Pi &= \frac{f}{n+1} (m_1 m_2 r_{12}^{n+1} + m_2 m_3 r_{23}^{n+1} + m_3 m_1 r_{31}^{n+1}) = \\
 &= \frac{f}{n+1} [m_3 m_1 r_1^{n+1} + m_3 m_2 r_2^{n+1} + \\
 &+ m_1 m_2 (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \vartheta)^{(n+1)/2}].
 \end{aligned}$$

Очевидно, ψ — циклическая переменная, которой отвечает первый интеграл $\partial T / \partial \psi = k = \text{const}$ или в явном виде

$$\begin{aligned}
 &[m_1(m_2 + m_3) r_1^2 + m_2(m_3 + m_1) r_2^2 - 2m_1 m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta] \dot{\psi} + \\
 &+ [(m_3 + m_1) r_2 - 2m_1 r_1 \cos \vartheta] m_2 r_2 \dot{\vartheta} - \\
 &- m_1 m_2 (r_1 \dot{r}_2 - r_2 \dot{r}_1) \sin \vartheta = mk,
 \end{aligned}$$

Игнорируя циклическую координату, получаем для измененной потенциальной энергии выражение

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{k^2}{2J} + \Pi, \\
 mJ &= m_1(m_2 + m_3) r_1^2 + m_2(m_3 + m_1) r_2^2 - \\
 &- 2m_1 m_2 r_1 r_2 \cos \vartheta,
 \end{aligned}$$

где J — момент инерции системы относительно ее центра масс.

Уравнения стационарных движений имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial r_1} &= - \frac{m_1 k^2}{mJ^2} [(m_2 + m_3) r_1 - m_2 r_2 \cos \vartheta] + \\
 &+ fm_1 [m_3 r_1^n + m_2 (r_1 - r_2 \cos \vartheta) r_{12}^{n-1}] = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial r_2} &= -\frac{m_2 k^2}{m J^2} [(m_3 + m_1) r_2 - m_1 r_1 \cos \vartheta] + \\ &\quad + f m_2 [m_3 r_2^n + m_1 (r_2 - r_1 \cos \vartheta) r_{12}^{n-1}] = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial \vartheta} &= m_1 m_2 r_1 r_2 \left(-\frac{k^2}{m J^2} + f r_{12}^{n-1} \right) \sin \vartheta = 0 \\ (r_{12}^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \vartheta).\end{aligned}$$

Эти уравнения допускают решение

$$r_1 = r_2 = r_{12} = \rho, \quad \vartheta = \pi/3, \quad k^2 = f v^2 m^3 \rho^{n+3},$$

где $v = (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) m^{-2}$. Подставляя эти значения в интеграл площадей, находим $\dot{\psi} = \omega = k(v m \rho^2)^{-1}$; кроме того, между ω и ρ имеет место соотношение $\omega^2 = f m \rho^{n-1}$.

Найденному решению соответствуют постоянные лапласовы движения, в которых точки M_1, M_2, M_3 находятся в вершинах равностороннего треугольника, равномерно вращающегося вокруг центра масс системы с угловой скоростью ω .

Исследуем устойчивость постоянных лапласовых движений. В возмущенном движении положим

$$r_1 = \rho(1 + \xi), \quad r_2 = \rho(1 + \xi + x), \quad \vartheta = \pi/3 + y.$$

Разложение функции W в окрестности невозмущенного движения в ряд по степеням ξ, x, y имеет вид

$$\begin{aligned}W &= v m \omega^2 \{ (n+3) (\xi + \alpha x + \beta y)^2 + \\ &+ \frac{(n-1) m_1 m_2 m_3}{2 m^4 v^2} [(m_1 + m_2 + 4 m_3) x^2 + 3 (m_1 + m_2) y^2 + \\ &\quad + 2 \sqrt{3} (m_1 - m_2) xy] \} + \dots\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{m_2 (m_1 + 2 m_3)}{2 m^2 v}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3} m_1 m_2}{2 m^2 v},$$

где члены выше второго порядка малости опущены.

Условия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы, стоящей в квадратных скобках выражения для W , записываются в виде

$$\begin{aligned}m_1 + m_2 + m_3 &> 0, \quad m_1 + m_2 > 0, \\ (m_1 + m_2 + 4 m_3) (m_1 + m_2) - 3 (m_1 - m_2)^2 &= \\ &= 4 (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) > 0\end{aligned}$$

и выполняются. Поэтому функция W будет определено-положительной по отношению к ξ , x , y , если $n > 1$. Отсюда на основании теоремы Рауса заключаем, что при $n > 1$ постоянные лапласовы движения устойчивы по отношению к величинам r_1 , r_2 , ϑ , \dot{r}_1 , \dot{r}_2 , $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$.

Задача 4.5. Динамически симметричное тело массой m с центром тяжести C на оси симметрии движется на неподвижной горизонтальной плоскости под действием силы тяжести и силы трения скольжения. Сила трения пропорциональна нормальной составляющей mN реакции опорной плоскости и скорости w точки опоры Q , коэффициент трения скольжения μ ; направление силы трения противоположно скорости w точки опоры. Поверхность тела в окрестности точки Q представляет собой сферическую поверхность с центром в точке O на оси симметрии тела и радиусом R , при этом $CO = a$.

Исследовать устойчивость равномерных вращений тела вокруг вертикально направленной оси симметрии. Использовать теорию особенного случая в анализе критического случая одного нулевого корня.

Решение. Введем подвижную систему осей координат $Cx_1x_2x_3$ с началом в центре масс тела и осями, совпадающими с его центральными осями инерции. Будем считать, что ось x_3 совпадает с осью симметрии тела, а ее направление выбрано так, что для точки O выполняется неравенство $x_3 = a \geq 0$.

Пусть m и $J_1 = J_2$, J_3 — масса и моменты инерции тела относительно осей x_s ($s = 1, 2, 3$); v и ω — скорость центра масс и мгновенная угловая скорость тела; γ и i_3 — единичный вектор восходящей вертикали и орт оси x_3 ; $r = ai_3 - R\gamma$ — радиус-вектор точки Q относительно точки C ; $w = v + \omega \times r$ — скорость точки Q ; g и N — ускорение силы тяжести и нормальная составляющая реакции опорной плоскости, отнесенная к массе тела. Проекции векторов v , w , ω , γ , r на оси x_s обозначим v_s , w_s , ω_s , γ_s , x_s .

Уравнения движения тела имеют вид

$$\dot{v}_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 = (N - g)\gamma_1 - \mu N w_1 \quad (123), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2 \omega_3 = \\ = mN[x_2 \gamma_3 - x_3 \gamma_2 - \mu(x_2 w_3 - x_3 w_2)] \quad (123), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3 \quad (123), \quad (3)$$

$$w_1 \gamma_1 + w_2 \gamma_2 + w_3 \gamma_3 = 0 \quad (123), \quad (4)$$

где $J_1 = J_2$ и

$$w_1 = v_1 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \quad (123), \quad (5)$$

$$x_1 = -R\gamma_1, \quad x_2 = -R\gamma_2, \quad x_3 = -R\gamma_3 + a. \quad (6)$$

Эти уравнения допускают однопараметрическое семейство решений

$$\begin{aligned} v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \\ \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad N = N_0 = g, \end{aligned} \quad (7)$$

описывающих равномерные вращения тела вокруг его вертикально направленной оси симметрии.

Исследуем устойчивость этих вращений по отношению к величинам v_s , γ_s , ω_s ($s = 1, 2, 3$). Сохраняя за переменными прежние обозначения, запишем уравнения возмущенного движения в виде, не содержащем реакции N .

Из (4) с учетом (5) и (6) получаем соотношение

$$v_1\gamma_1 + v_2\gamma_2 + v_3\gamma_3 = a(\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1), \quad (8)$$

которое с учетом последнего уравнения из (3) можно представить в виде

$$v_1\gamma_1 + v_2\gamma_2 + v_3\gamma_3 = -a\dot{\gamma}_3. \quad (9)$$

Умножая уравнения (1) соответственно на γ_1 , γ_2 , γ_3 и почленно их складывая, получаем с учетом (4) и (9) выражение $N = g - a\dot{\gamma}_3$, которое с использованием уравнений (3) представим в виде

$$\begin{aligned} N = g + a\gamma_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) - a\omega_3(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + \\ + a(\dot{\omega}_1\gamma_2 - \dot{\omega}_2\gamma_1). \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения $\dot{\omega}_1$ и $\dot{\omega}_2$ из уравнений (2) и разрешая получаемое соотношение относительно N , находим

$$N = \frac{J_1 [g + a\gamma_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) - a\omega_3(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)]}{J_1 + ma^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \mu ma(R - a\gamma_3)[v_3 + R(\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1)]}. \quad (10)$$

В качестве уравнений, описывающих движение тела, можно взять уравнения для переменных ω_3 , ω_1 , ω_2 , γ_1 ,

γ_2 , v_1 , v_2 , в которых с учетом (8) следует положить

$$v_3 = -\frac{1}{\gamma_3} [v_1\gamma_1 + v_2\gamma_2 + a(\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1)]_*,$$

$$\gamma_3 = \sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}. \quad (11)$$

Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} J_3\dot{\omega}_3 &= \mu m R N [\gamma_1 v_2 - \gamma_2 v_1 + (R\gamma_3 - a)(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) - \\ &\quad - R\omega_3(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)], \\ J_1\dot{\omega}_1 &= (J_1 - J_3)\omega_2\omega_3 - maN\gamma_2 + \mu m N [av_2 + \\ &\quad + R(\gamma_2 v_3 - \gamma_3 v_2) + R(R\gamma_3 - a)\omega_3\gamma_1 - \\ &\quad - (R^2 + a^2 - 2Ra\gamma_3)\omega_1 + R^2(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)\gamma_1], \\ J_1\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + maN\gamma_1 + \mu m N [-av_1 + \\ &\quad + R(\gamma_3 v_1 - \gamma_1 v_3) + R(R\gamma_3 - a)\omega_3\gamma_2 - \\ &\quad - (R^2 + a^2 - 2Ra\gamma_3)\omega_2 + R^2(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)\gamma_2], \\ \dot{v}_1 &= \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3 + (N - g)\gamma_1 - \\ &\quad - \mu N [v_1 + a\omega_2 + R(\omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3)], \\ \dot{v}_2 &= \omega_1 v_3 - \omega_3 v_1 + (N - g)\gamma_2 - \\ &\quad - \mu N [v_2 - a\omega_1 + R(\omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1)], \\ \dot{\gamma}_1 &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) с учетом выражений (10) и (11) представляют собой уравнения возмущенного движения. Эти уравнения таковы, что имеет место особенный случай в теории критического случая одного нулевого корня.

Уравнения первого приближения для некритических переменных ω_j , v_j , γ_j ($j = 1, 2$) записываются в виде

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 &= (J_1 - J_3)\omega_2 - mga\gamma_2 - \\ &\quad - \mu mg(R - a)[v_2 + (R - a)\omega_1 - R\omega\gamma_1], \\ J_1\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega_1 + mga\gamma_1 + \\ &\quad + \mu mg(R - a)[v_1 - (R - a)\omega_2 + R\omega\gamma_2], \\ \dot{v}_1 &= \omega v_2 - \mu g[v_1 - (R - a)\omega_2 + R\omega\gamma_2], \\ \dot{v}_2 &= -\omega v_1 - \mu g[v_2 + (R - a)\omega_1 - R\omega\gamma_1], \\ \dot{\gamma}_1 &= \omega\gamma_2 - \omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = -\omega\gamma_1 + \omega_1. \end{aligned}$$

Вводя комплексные переменные

$$\Omega = \omega_1 + i\omega_2, \quad v = v_1 + iv_2, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2,$$

последние уравнения представим в виде

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\Omega} + [\mu mg(R-a)^2 + i(J_1 - J_3)\omega] \Omega - i\mu mg(R-a)v - \\ - mg[\mu R(R-a)\omega + ia]\gamma = 0, \\ \dot{v} + (\mu g + i\omega)v + i\mu g(R-a)\Omega - i\mu gR\omega\gamma = 0, \\ \dot{\gamma} + i\omega\gamma - i\Omega = 0. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений будем искать в виде

$$(\Omega, v, \gamma) = (\Omega_0, v_0, \gamma_0) \exp[(\lambda - i\omega)t],$$

где Ω_0, v_0, γ_0 — начальные значения переменных Ω, v, γ , а постоянная λ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = P(\lambda) + \mu g Q(\lambda) = 0, \quad P(\lambda) = (J_1 \lambda^2 - iJ_3 \omega \lambda + mga)\lambda, \\ Q(\lambda) = [J_1 + m(R-a)^2]\lambda^2 - \\ - i[J_3 + mR(R-a)]\omega \lambda + mga. \quad (13) \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала предельные случаи.

а) $\mu = 0$ — тело на гладкой плоскости. В этом случае $\Delta(\lambda) = P(\lambda)$ и требование, чтобы уравнение (13) не имело корней с положительными вещественными частями, приводит к условию

$$J_3^2 \omega^2 + 4J_1 mga \geq 0, \quad (14)$$

которое служит необходимым условием устойчивости вращения (7).

б) $\mu = \infty$ — тело на абсолютно шероховатой плоскости. В этом случае уравнение (13) приводится к виду $Q(\lambda) = 0$, и для того чтобы это уравнение не имело корней с положительными вещественными частями, необходимо выполнение условия

$$[J_3 + mR(R-a)]^2 + 4[J_1 + m(R-a)^2] mga \geq 0, \quad (15)$$

которое служит необходимым условием устойчивости вращения (7).

Обратимся к анализу корней $\lambda_j(\mu)$ ($j = 1, 2, 3$) уравнения (13), которые будем рассматривать как функции параметра μ и искать в виде разложений

$$\lambda_j(\mu) = \lambda_j(0) + \lambda_j'(0)\mu + \frac{1}{2}\lambda_j''(0)\mu^2 + \dots \quad (\lambda' = d\lambda/d\mu).$$

Из уравнения (13) находим

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}(0) &= \frac{i}{2J_1} \left(J_3 \omega \pm \sqrt{J_3^2 \omega^2 + 4J_1 m g a} \right), \\ \lambda_3(0) &= 0, \quad \lambda_3'(0) = -g, \\ \lambda_{1,2}'(0) &= -\frac{m(R-a)^2}{2J_1} \left[1 \pm \frac{J_3(R-a) - 2J_1 R}{(R-a) \sqrt{J_3^2 \omega^2 + 4J_1 m g a}} \omega \right].\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что для того чтобы уравнение (13) не имело корней с положительными вещественными частями, необходимо выполнение условия

$$\left| \frac{J_3(R-a) - 2J_1 R}{(R-a) \sqrt{J_3^2 \omega^2 + 4J_1 m g a}} \omega \right| < 1,$$

которое можно представить в виде

$$\frac{R}{R-a} \left(J_1 \frac{R}{R-a} - J_3 \right) \omega^2 < m g a. \quad (16)$$

При выполнении условия (16) невозмущенное движение (7) будет устойчиво по отношению к величинам v_s , ω_s , γ_s ($s = 1, 2, 3$), и всякое достаточно близкое к нему возмущенное движение будет асимптотически стремиться к некоторому установившемуся движению, принадлежащему семейству (7).

Другими словами, невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво по отношению к величинам ω_1 , ω_2 , γ_1 , γ_2 , γ_3 , v_1 , v_2 , v_3 и устойчиво (не асимптотически) по отношению к ω_3 . Если в (16) знак неравенства изменить на противоположный, то невозмущенное движение будет неустойчиво.

Отметим, что в особенном случае критического случая одного нулевого корня уравнения возмущенного движения допускают не зависящий от времени голоморфный первый интеграл. Для рассматриваемой задачи таким интегралом является интеграл Желе

$$J_1(\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + J_3 \omega_3 (\gamma_3 - a/R) = \text{const.}$$

Задача 4.6. При условиях задачи 4.5 исследовать стационарные движения тела, их ветвление и устойчивость.

Решение. Сохраняя принятые в задаче 4.5 обозначения, будем считать, что $J_1 \neq J_3$.

Уравнения движения тела допускают энергетическое соотношение

$$\frac{dU}{dt} = -\mu m N (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2), \quad (1)$$

где U — полная механическая энергия тела,

$$2U = m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3\omega_3^2 + 2mg(R - a\gamma_3),$$

и первые интегралы

$$U_1 = J_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + J_3\omega_3(\gamma_3 - a/R) = k,$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Введем полусвязанную систему осей координат $Cy_1y_2x_3$ с началом в центре масс тела, оси y_1 и x_3 которой расположены в вертикальной плоскости, а ось y_2 ортогональна этой плоскости. Обозначим через $p_1, p_2, p_3; u_1, u_2, u_3$ и v_1, v_2, v_3 проекции векторов ω, v и γ на оси y_1, y_2, x_3 , при этом $v_2 = 0$. Тогда будем иметь

$$2U = m(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + J_1(p_1^2 + p_2^2) + J_3p_3^2 + 2mg(R - av_3),$$

$$U_1 = J_1p_1v_1 + J_3p_3(v_3 - a/R) = k, \quad U_2 = v_1^2 + v_3^2 = 1.$$

Согласно теореме Рауса стационарным движениям тела соответствуют критические точки функции U при постоянных значениях интегралов $U_1 = k, U_2 = 1$. Задачу определения этих точек сведем к задаче об определении критических точек функции

$$2W = 2U - 2\lambda(U_1 - k) + \sigma(U_2 - 1),$$

где λ и σ — неопределенные множители Лагранжа.

Условия стационарности функции W приводят к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = k - U_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}(U_2 - 1) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = mu_1 = 0 \quad (123),$$

$$\frac{\partial W}{\partial v_1} = (\sigma - J_1\lambda^2)v_1 - J_1\lambda(p_1 - \lambda v_1) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial v_3} &= (\sigma - J_3 \lambda^2) v_3 + J_3 \frac{a}{R} \lambda^2 - mga - \\ &\quad - J_3 \lambda \left[p_3 - \lambda \left(v_3 - \frac{a}{R} \right) \right] = 0, \quad (2) \\ \frac{\partial W}{\partial p_1} &= J_1 (p_1 - \lambda v_1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial p_2} = J_2 p_2 = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial p_3} &= J_3 \left[p_3 - \lambda \left(v_3 - \frac{a}{R} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения допускают следующие три однопараметрических семейства решений (соотношения $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, общие для всех этих семейств, опущены):

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 &= \lambda \left(1 - \frac{a}{R} \right), \quad v_1 = 0, \quad v_3 = 1, \\ \sigma &= J_3 \left(1 - \frac{a}{R} \right) \lambda^2 + mga, \quad k = J_3 \left(1 - \frac{a}{R} \right)^2 \lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 &= \lambda \left(1 + \frac{a}{R} \right), \quad v_1 = 0, \quad v_3 = -1, \\ \sigma &= J_3 \left(1 + \frac{a}{R} \right) \lambda^2 - mga, \quad k = J_3 \left(1 + \frac{a}{R} \right)^2 \lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda v_1, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \lambda \left(v_3 - \frac{a}{R} \right), \\ v_1^2 &= 1 - v_3^2, \quad v_3 = \frac{J_3 \frac{a}{R} \lambda^2 - mga}{(J_3 - J_1) \lambda^2}, \quad (5) \\ \sigma &= J_1 \lambda^2, \quad k = \frac{J_1 \left[J_3 \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right) - J_1 \right]}{J_3 - J_1} \lambda + \frac{(mga)^2}{(J_3 - J_1) \lambda^3}. \end{aligned}$$

Решениям (3) и (4) отвечают перманентные вращения тела вокруг вертикально расположенной оси симметрии, когда его центр масс находится соответственно ниже (3) или выше (4) геометрического центра сферической поверхности тела.

Решениям (5) отвечают регулярные прецессии: тело вращается с угловой скоростью $\lambda \frac{a}{R}$ вокруг оси симметрии, прецессирующей с угловой скоростью λ вокруг вертикали, проходящей через центр масс тела и составляющей с осью симметрии постоянный угол.

Центр масс тела неподвижен на всех движениях (3) — (5); точка касания тела с опорной плоскостью неподвижна на движениях (3) и (4), а на движениях (5) описывает окружность и на опорной плоскости, и на сферической поверхности тела, при этом тело совершает чистое качение.

Очевидно, регулярные прецессии тела существуют не при всех значениях параметра λ , а только при тех из них, для которых $|v_3| < 1$.

Все движения (3) — (5) можно геометрически представить в пространстве параметров λ , σ , k точками кривой L , ветви которой L_1 , L_2 , L_3 определяются последни-

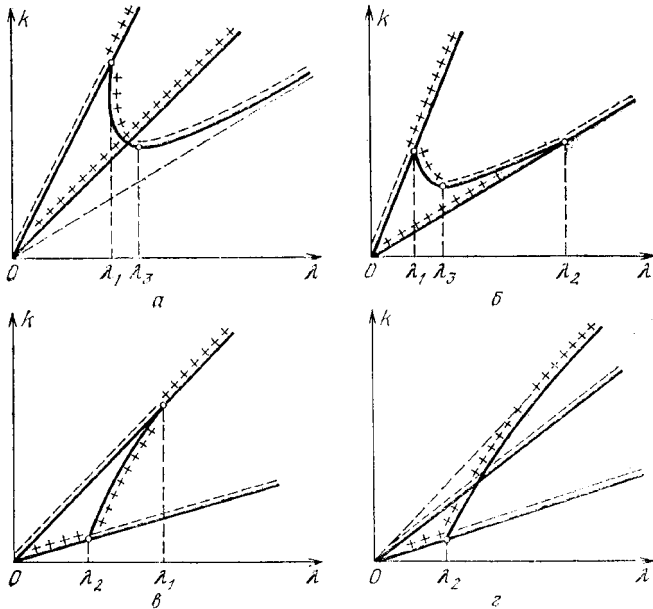


Рис. 4.4

ми двумя уравнениями в (3) — (5). На рис. 4.4 показан вид проекций кривой L на плоскости (k, λ) для $k > 0$.

Рисунки а—г отвечают соответственно случаям, когда а) $0 < \alpha < 1$, б) $\alpha > 1$, в) $\alpha < -1$, г) $-1 < \alpha < 0$, где $\alpha = J_3 \frac{a}{R} (J_3 - J_1)^{-1}$. Прямолинейные ветви отвечают движениям (3) и (4), а криволинейные — движениям (5).

Вещественным значениям $\lambda = \lambda_j$ ($j = 1, 2, 3$), где

$$\lambda_1^2 = \frac{mga}{J_3(1+a/R) - J_1}, \quad \lambda_2^2 = \frac{mga}{J_1 - J_3(1-a/R)},$$

$$\lambda_3^4 = \frac{3(mga)^2}{J_1[J_3(1-a^2/R^2) - J_1]},$$

соответствуют точки бифуркации, при этом значение λ_3 определяется для решений (5) как корень уравнения $dk/d\lambda = 0$. При фиксированных значениях параметра k , отличных от его бифуркационных значений $k_j = k(\lambda_j)$, движения (3)–(5) являются изолированными.

Исследуем устойчивость движений (3)–(5) по отношению к величинам u_s, p_s ($s = 1, 2, 3$), v_1, v_3 . Обозначим через ξ_s, η_1 и η_3 вариации переменных p_s, v_1, v_3 , а для остальных величин сохраним прежние обозначения. Найдем условия положительной определенности второй вариации

$$\begin{aligned} \delta^2 W = m(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + J_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + J_3\xi_3^2 - \\ - 2\lambda(J_1\xi_1\eta_1 + J_3\xi_3\eta_3) + \sigma(\eta_1^2 + \eta_3^2) \end{aligned} \quad (6)$$

на линейном многообразии

$$\begin{aligned} \delta U_1 = J_1(v_1\xi_1 + p_1\eta_1) + J_3(v_3 - a/R)\xi_3 + J_3p_3\eta_3 = 0, \\ \delta U_2 = 2(v_1\eta_1 + v_3\eta_3) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для решений (3) и (4) из уравнений (7) следует, что $\xi_3 = \eta_3 = 0$ и условия положительной определенности квадратичной формы (6) выражаются соответственно неравенствами

$$[J_3(1 - a/R) - J_1]\lambda^2 + mga > 0, \quad (3')$$

$$[J_3(1 + a/R) - J_1]\lambda^2 > mga. \quad (4')$$

Для решений (5) условия положительной определенности $\delta^2 W$ на многообразии (7) приводятся к неравенству

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & v_1 & v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 p_1 & J_3 p_3 & J_1 v_1 & J_3(v_3 - a/R) \\ v_1 & J_1 p_1 & J_1 \lambda^2 & 0 & -J_1 \lambda & 0 \\ v_3 & J_3 p_3 & 0 & J_1 \lambda^2 & 0 & -J_3 \lambda \\ 0 & J_1 v_1 & -J_1 \lambda & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & J_3(v_3 - a/R) & 0 & -J_3 \lambda & 0 & J_3 \end{vmatrix} > 0. \quad (5')$$

Представим выражение для Δ в специальном виде. Для этого будем рассматривать решения (5) как семейство решений, зависящее от параметра k . Подставляя соотношения (5) в уравнения (2), получим тождества по k , дифференцируя которые по k , придем к системе уравнений относительно производных $u'_s, p'_s (s = 1, 2, 3), v'_1, v'_2, v'_3, \sigma', \lambda',$ из которой возьмем подсистему относительно $\sigma', \lambda', v'_1, v'_2, v'_3, p'_1, p'_3$:

$$\begin{aligned} v_1 v'_1 + v_3 v'_3 &= 0, \\ J_1 p_1 v'_1 + J_3 p_3 v'_3 + J_1 v_1 p'_1 + J_3 (v_3 - a/R) p'_3 &= 1, \\ v_1 \sigma' - J_1 \lambda v_1 \lambda'' - J_1 \lambda (p'_1 - \lambda v'_1) &= 0, \\ v_3 \sigma' - J_3 p_3 \lambda' + J_1 \lambda^2 v'_3 - J_3 \lambda p'_3 &= 0, \\ J_1 (p'_1 - \lambda v'_1 - \lambda' v_1) &= 0, \quad J_3 [p'_3 - \lambda v'_3 - \\ &\quad - \lambda' (v_3 - a/R)] = 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно λ' , получаем

$$\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{D}{\Delta}, \quad D = \begin{vmatrix} 0 & v_1 & v_3 & 0 & 0 \\ v_1 & J_1 \lambda^2 & 0 & -J_1 \lambda & 0 \\ v_3 & 0 & J_1 \lambda^2 & 0 & -J_3 \lambda \\ 0 & -J_1 \lambda & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & -J_3 \lambda & 0 & J_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (J_3 - J_1) J_1 J_3 v_1^2 \lambda^2$$

или

$$\Delta = (J_1 - J_3) J_1 J_3 v_1^2 \lambda^2 \frac{dk}{d\lambda}. \quad (8)$$

Для производной по времени \dot{W} от функции W имеем в силу (1) соотношение

$$\dot{W} = \dot{U} = -\mu m N (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \leq 0. \quad (9)$$

При выполнении соответственно условий (3')—(5') стационарные движения (3)—(5) доставляют функции W строгий минимум при постоянных значениях интегралов $U_1 = k, U_2 = 1$ и, следовательно, устойчивы согласно теореме Рауса по отношению к переменным $u_s, p_s (s = 1, 2, 3), v_1, v_2, v_3$.

Ниже будет показано, что функция U сохраняет постоянные значения только на движениях (3)—(5). По-

сколько эти движения изолированы друг от друга для всех значений параметра k , отличных от его бифуркационных значений, то согласно теореме Барбашина — Красовского движения (3) — (5) устойчивы, причем асимптотически по отношению к переменным $u_1, u_2, u_3, p_1, p_2, v_1, v_3$ при выполнении условий (3') — (5') соответственно, и неустойчивы согласно теореме Красовского при

выполнении соответственно условий (3') — (5'), если в них знак неравенства изменить на противоположный.

Результаты анализа условий устойчивости движений (3) — (5) представлены на рис. 4.4, а — г, где ветви кривой L , отвечающие устойчивым и неустойчивым движениям, отмечены знаками «+» и «-» соответственно. Рис. 4.4, а отвечает условию, когда $0 < \alpha < 1$ и $\lambda_3 > \lambda_1$; если $\lambda_3 < \lambda_1$, то все прецес-

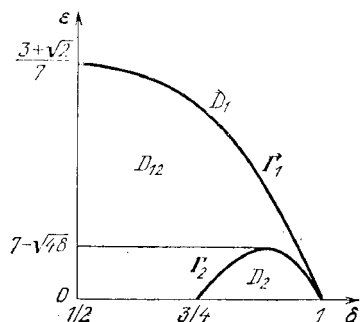


Рис. 4.5

сии (5) неустойчивы. Рис. 4.4, б отвечает случаю, когда $\alpha > 1$ и $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2$; если $\lambda_3 < \lambda_1$, то все прецессии (5) неустойчивы, а если $\lambda_3 > \lambda_2$ или если $\lambda_3^4 < 0$ (это имеет место, когда $J_3(1 - a^2/R^2) < J_1$), то все прецессии (5) устойчивы. Рис. 4.4, в отвечает случаю, когда $\alpha < -1$, а рис. 4.4, г — случаю, когда $-1 < \alpha < 0$.

На рис. 4.5 указаны области D_1, D_2, D_{12} устойчивости и неустойчивости прецессий (5) на плоскости параметров $\varepsilon = a/R$ и $\delta = J_1/J_3 > 1/2$. Здесь кривые Γ_1 и Γ_2 определяются уравнениями

$$\Gamma_1: 8\delta^2 - 2\delta(1 - \varepsilon)(7 + \varepsilon) + 6(1 - \varepsilon)^2 = 0,$$

$$\Gamma_2: 8\delta^2 - 2\delta(1 + \varepsilon)(7 - \varepsilon) + 6(1 + \varepsilon)^2 = 0.$$

Для точек областей D_1 и D_2 существует только одно прецессионное движение, а для точек области D_{12} — два прецессионных движения, а именно: «быстрая» прецессия, для которой $\lambda > \lambda_3$, и «медленная» прецессия, для которой $\lambda < \lambda_3$. Для области D_1 прецессии устойчивы, для области D_2 неустойчивы, а для области D_{12} медленные прецессии устойчивы, а быстрые неустойчивы.

Покажем, что функция U сохраняет постоянные значения только на стационарных движениях (3) — (5), ко-

торые в исходных переменных v_s, ω_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$) записываются соответственно в виде (соотношения $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, общие для всех этих семейств решений, опущены)

$$\omega_1 = \omega_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \omega_3 = \lambda(1 - a/R), \quad \gamma_3 = 1, \quad (3'')$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \omega_3 = -\lambda(1 + a/R), \quad \gamma_3 = -1, \quad (4'')$$

$$\omega_1 = \lambda\gamma_1, \quad \omega_2 = \lambda\gamma_2, \quad \omega_3 = \lambda(\gamma_3 - a/R),$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2, \quad (5'')$$

$$\gamma_3 = \frac{J_3 \frac{a}{R} \lambda^2 - mga}{(J_3 - J_1) \lambda^2}.$$

Из соотношения (1) следует, что функция U сохраняет постоянное значение только на таких движениях тела, на которых скорость его точки опоры равна нулю, т. е. когда тело катается на плоскости без проскальзывания. При этом необходимо выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \omega_1 &= v_1 + R\gamma_2\omega_3 - (R\gamma_3 - a)\omega_2 = 0, \\ \omega_2 &= v_2 + (R\gamma_3 - a)\omega_1 - R\gamma_1\omega_3 = 0, \\ \omega_3 &= v_3 + R(\omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

выражающие равенство нулю скорости точки опоры тела, а уравнения движения тела принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 &= (N - g)\gamma_1, \\ \dot{v}_2 + \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 &= (N - g)\gamma_2, \\ \dot{v}_3 + \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 &= (N - g)\gamma_3, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 &= aN\gamma_2, \\ J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \dot{\omega}_3 \omega_1 &= -aN\gamma_1, \quad J_3 \dot{\omega}_3 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1, \\ \dot{\gamma}_3 &= \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Эти уравнения допускают первые интегралы $U_1 = k$, $U_2 = 1$ и

$$J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3 \omega_3^2 - 2mga\gamma_3 = 2h = \text{const.} \quad (14)$$

Дифференцируя первые два соотношения (10) по времени и исключая $\dot{\omega}_j$, $\dot{\gamma}_j$ ($j=1, 2, 3$) с помощью уравнений (12) и (13), подставим полученные выражения для \dot{v}_j и выражения для v_j , полученные из (10), в первые два уравнения (11):

$$\begin{aligned} N[J_1 - ma(R\gamma_3 - a)]\gamma_i = \\ = J_1 g \gamma_i + [J_3(R\gamma_3 - a) - J_1 R \gamma_3] \omega_3 \omega_i \quad (i=1, 2). \end{aligned} \quad (15)$$

Исключая из соотношений (15) величину N , получим

$$[J_3(R\gamma_3 - a) - J_1 R \gamma_3] \omega_3 (\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1) = 0,$$

откуда следует, что либо $\omega_3 = 0$, либо

$$\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1 = 0 \quad (16)$$

(если $J_3(R\gamma_3 - a) - J_1 R \gamma_3 = 0$, то $\gamma_3 = \text{const}$ и из (13) опять следует (16)).

Предположим сначала, что $\omega_3 = 0$. Тогда из (15) и (12) получаем соотношения

$$\dot{\omega}_1 = - \frac{mga}{J_1 - ma(R\gamma_3 - a)} \gamma_2, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{mga}{J_1 - ma(R\gamma_3 - a)} \gamma_1, \quad (17)$$

а из интеграла (14), дифференцируя его по времени и учитывая (17), — соотношение

$$\dot{\gamma}_3 = \frac{J_1}{J_1 - ma(R\gamma_3 - a)} (\omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2). \quad (18)$$

Из сравнения (18) и (13) следует (16), т. е. чистые качения тела возможны только при выполнении условия (16). При этом из (10), (12) и (13) вытекает, что должны выполняться соотношения

$$\omega_1 = \lambda \gamma_1, \quad \omega_2 = \lambda \gamma_2, \quad \omega_3 = \text{const}, \quad \gamma_3 = \text{const}, \quad v_3 = 0, \quad (19)$$

$$v_1 = [(R\gamma_3 - a)\lambda - R\omega_3] \gamma_2, \quad v_2 = -[(R\gamma_3 - a)\lambda - R\omega_3] \gamma_1,$$

где $\lambda = \text{const}$, что следует из интеграла $U_1 = k$. Подставляя (19) в (11), получим соотношения

$$\begin{aligned} (N - g) \gamma_i &= [(R\gamma_3 - a)\lambda - R\omega_3] \lambda \gamma_3 \gamma_i \quad (i=1, 2), \\ (N - g) \gamma_3 &= -[(R\gamma_3 - a)\lambda - R\omega_3] \lambda (1 - \gamma_3^2). \end{aligned}$$

Умножая эти соотношения соответственно на γ_1 , γ_2 , γ_3 и почленно складывая, получим $N = g$; тогда последнее соотношение примет вид $[(R\gamma_3 - a)\lambda - R\omega_3] \lambda (1 - \gamma_3^2) = 0$,

откуда следует, что чистые качения тела возможны только на стационарных движениях (3"), (4"), (5").

Задача 4.7. Тяжелый однородный стержень AB длиной $2l$ и массой m подвешен при помощи колечек, укрепленных на его концах, к «крестовине», образованной двумя скрещивающимися прямыми A_1A_2 и B_1B_2 , так, что конец A находится на прямой A_1A_2 , а конец B на прямой B_1B_2 . Расстояние A_0B_0 между прямыми равно $2h$, а угол равен 2σ . Найти положения равновесия стержня, исследовать их устойчивость и проанализировать зависимость результатов от параметров. Трением пренебречь.

Решение. Введем неизменно связанную с крестовиной систему координат $Oxyz$. Ось z направим перпендикулярно прямым A_1A_2 и B_1B_2 , взяв начало отсчета в середине отрезка A_0B_0 . Для определения направления осей x и y проведем через точку O плоскость перпендикулярно оси z и спроектируем на нее прямые A_1A_2 и B_1B_2 . Вертикальные углы, об-

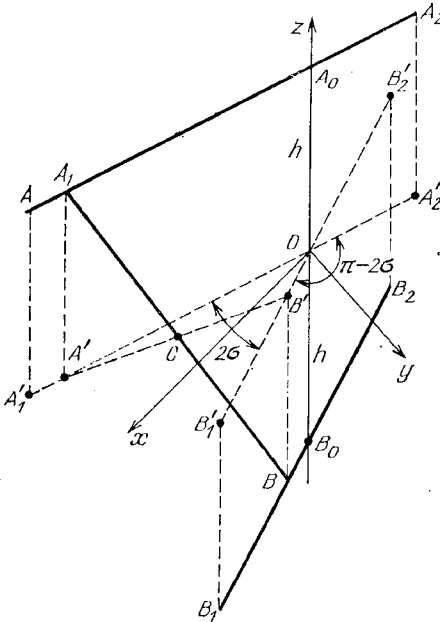


Рис. 4.6

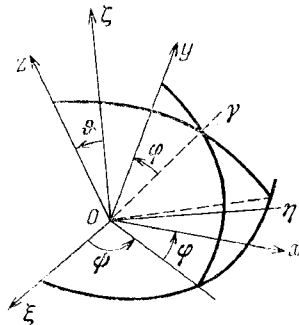


Рис. 4.7

разумемые проекциями $A'_1A'_2$ и $B'_1B'_2$ прямых, равны 2σ и $\pi - 2\sigma$. Оси x и y направим по биссектрисам этих углов (рис. 4.6).

Ориентацию крестовины относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ с направленной вертикально вверх осью ζ определим углами Эйлера φ, ψ, θ (рис. 4.7).

Обозначим через u и v расстояния концов A и B стержня от оси z , через x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 координаты этих точек и через x, y, z — координаты центра тяжести C стержня. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}x_1 &= u \cos \sigma, & x_2 &= v \cos \sigma, & x &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{v + u}{2} \cos \sigma, \\y_1 &= -u \sin \sigma, & y_2 &= v \sin \sigma, & y &= \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{v - u}{2} \sin \sigma, \\z_1 &= h, & z_2 &= -h, & z &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Последнее равенство в (1) показывает, что центр тяжести стержня находится в плоскости Oxy . Найдём геометрическое место положений центра тяжести в плоскости $z = 0$.

Условие $AB = 2l$ приводит к соотношению

$$(v - u)^2 \cos^2 \sigma + (v + u)^2 \sin^2 \sigma + 4h^2 = 4l^2.$$

Подставляя сюда значения $v - u = 2y/\sin \sigma$, $v + u = 2x/\cos \sigma$, получаемые из последней колонки формулы (1), получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a = R \operatorname{ctg} \sigma, \quad b = R \operatorname{tg} \sigma, \quad R = \sqrt{l^2 - h^2}.\tag{2}$$

Отсюда заключаем, что при движении стержня его центр тяжести перемещается по эллипсу (2), расположенному в плоскости $z = 0$ (рис. 4.8).

Обозначим через α, β, γ косинусы углов, образуемых осью ξ с осями x, y, z , которые выражаются через углы φ и θ соотношениями

$$\alpha = \sin \theta \sin \varphi, \quad \beta = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma = \cos \theta.\tag{3}$$

Тогда для потенциальной энергии силы тяжести будем иметь выражение

$$\Pi = mg(\alpha x + \beta y).\tag{4}$$

Итак, задача нахождения положений равновесия стержня и анализа их устойчивости приводится к математической задаче о нахождении экстремальных значений линейной функции (4), определенной на эллипсе (2). Эта задача допускает геометрический и аналитический способы решения.

Геометрический способ решения. Построим сначала эллипс (2). С этой целью найдем точки пересечения эллипса с прямыми $A'_1A'_2$ и $B'_1B'_2$, которые в параметрической форме определяются уравнениями, даваемыми первыми двумя колонками формул (1). Подставляя последовательно эти значения x, y в (2), находим $u = \pm R, v = \pm R$. Следовательно, точки пересечения эллипса с прямыми $A'_1A'_2$ и $B'_1B'_2$ лежат на окружности с центром в точке O и радиусом R . Проведем теперь к этой окружности касательные, параллельные осям x и y , до их пересечения с прямыми $A'_1A'_2$ и $B'_1B'_2$. Длины отрезков F_1F_2 и G_1G_2 этих касательных, заключенных между прямыми

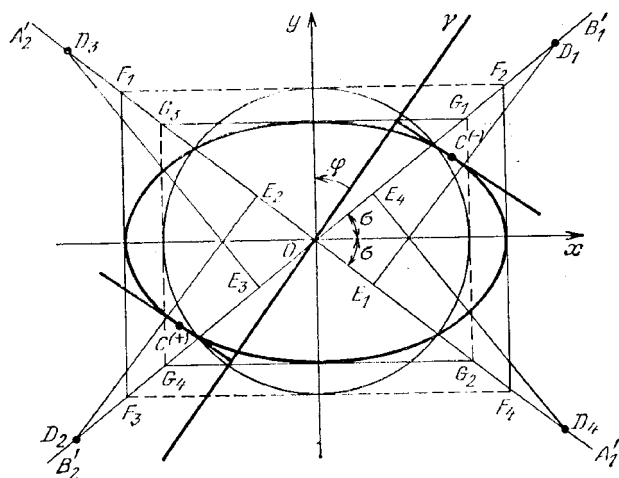


Рис. 4.8

$A'_1A'_2$ и $B'_1B'_2$, равны длинам $2a$ и $2b$ осей эллипса. Отметим, что площадь эллипса πab равна площади πR^2 круга радиусом R .

Проанализируем теперь расположение стержня относительно эллипса. Для этого проведем две пары прямых, параллельных $A'_1A'_2$ и $B'_1B'_2$ и отстоящих от них на расстоянии $2R$. Точки пересечения указанных прямых с $B'_1B'_2$ и $A'_1A'_2$ обозначим через D_1, D_2 и D_3, D_4 . Если один из концов стержня совпадает с одной из точек D_1 или D_2 (D_3 или D_4), то стержень располагается перпендикулярно прямой $A'_1A'_2$ ($B'_1B'_2$) и занимает положение

D_1E_1 или D_2E_2 (D_3E_3 или D_4E_4). Точкам D_1 , D_2 и D_3 , D_4 соответствуют предельные кинематически допустимые положения концов стержня на прямых $B'_1B'_2$ и $A'_1A'_2$. Положения стержня, для которых один из его концов лежит вне отрезков D_1D_2 и D_3D_4 , невозможны. При полном обходе центром масс стержня эллипса по ходу часовой стрелки, начиная от точки, отвечающей положению стержня D_1E_1 , конец B стержня пройдет отрезок D_1D_2 дважды в прямом D_1D_2 и обратном D_2D_1 направлениях.

Спроектируем теперь ось ξ на плоскость Oxy . Эту проекцию назовем осью γ . Эквипотенциальными поверхностями являются горизонтальные плоскости, пересечение которых с плоскостью Oxy дает семейство прямых, перпендикулярных оси γ . Проведем две касательные к эллипсу, перпендикулярные оси γ . Точки касания $C^{(\mp)}$ будут соответствовать положениям равновесия стержня, при этом в точке $C^{(-)}$ потенциальная энергия имеет максимум и $C^{(-)}$ отвечает неустойчивому равновесию, а в точке $C^{(+)}$ — минимум и $C^{(+)}$ отвечает устойчивому равновесию.

Проанализируем теперь зависимость положений равновесия стержня от изменения параметров задачи.

В положениях равновесия ориентация стержня относительно крестовины не зависит от угла прецессии ψ , потому что этот угол не входит в формулы (1) — (4).

При $\phi = 0$ имеем $\alpha = \beta = 0$ и $\Pi = \text{const} = 0$. В этом случае прямые A_1A_2 и B_1B_2 горизонтальны и любое кинематически допустимое положение стержня является положением равновесия.

При изменении угла ϕ , который отсчитывается на плоскости Oxy от оси γ (рис. 4.8), эллипс поворачивается вокруг точки O против хода часовой стрелки, а точки $C^{(\mp)}$ перемещаются по нему по ходу часовой стрелки, оставаясь всегда на прямой, проходящей через точку O , при этом характер устойчивости равновесий стержня не меняется.

При заданной длине $2l$ стержня и изменении расстояния $2h$ между прямыми A_1A_2 и B_1B_2 от 0 до $2l$ параметр R изменяется от l до 0. При $h = 0$ прямые, на которые подвешен стержень, пересекаются; этому случаю будет отвечать эллипс, для которого $R = l$. При $h = 2l$ стержень перпендикулярен прямым A_1A_2 и B_1B_2 и образует с ними неизменяемую конфигурацию. При изменении $2h$ от 0 до $2l$ эллипс стягивается в точку, изменяясь подобным образом с коэффициентом подобия R , при этом точки

$C^{(\mp)}$ перемещаются по одной и той же прямой в направлении к точке O .

При заданных длине стержня и расстоянии между прямыми A_1A_2 и B_1B_2 ($0 \leq h < l$) и изменении угла скрепления 2σ эллипс изменяется таким образом, что его площадь остается неизменной и равной площади круга радиусом R . При $2\sigma = \pi/2$ эллипс вырождается в окружность, а точки $C^{(\mp)}$ совпадают с точками ее пересечения с осью γ . При уменьшении (увеличении) угла 2σ от $\pi/2$ до 0 (до π) эллипс вытягивается в направлении оси x (оси y), а точки $C^{(\mp)}$ перемещаются по нему в направлении к оси x (оси y) и пропадают (уходят в бесконечность) при $2\sigma = 0$ ($2\sigma = \pi$). В последнем случае прямые A_1A_2 и B_1B_2 параллельны и равновесий стержня не существует.

Аналитический способ решения. Задачу на условный экстремум — определение экстремальных значений функции (4) при условии (2) — сведем к задаче на безусловный экстремум, введя функцию

$$W(\lambda, x, y) = mg \left[\alpha x + \beta y - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right],$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа. Условие стационарности функции W приводит к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial x} = mg \left(\alpha - \frac{\lambda x}{a^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = mg \left(\beta - \frac{\lambda y}{b^2} \right) = 0,$$

к которым следует присоединить уравнение (2). Отсюда находим два решения

$$x = x^{(-)} = \frac{\alpha a^2}{\lambda} = \frac{R\alpha \cos^3 \sigma}{\Delta \sin \sigma}, \quad y = y^{(-)} = \frac{\beta b^2}{\lambda} = \frac{R\beta \sin^3 \sigma}{\Delta \cos \sigma},$$

$$\lambda = \lambda^{(-)} = \frac{R\Delta}{\sin \sigma \cos \sigma},$$

$$x = x^{(+)} = -x^{(-)}, \quad y = y^{(+)} = -y^{(-)}, \quad \lambda = \lambda^{(+)} = -\lambda^{(-)},$$

$$\Delta = \sqrt{\alpha^2 \cos^4 \sigma + \beta^2 \sin^4 \sigma}.$$

Этим решениям соответствуют положения равновесия стержня, которым на эллипсе отвечают точки $C^{(\mp)}$.

Исследуем устойчивость этих равновесий. Обозначив через ξ, η вариации переменных x, y , для второй вариации $\delta^2 W$ функции W получим выражение

$$\delta^2 W = -\lambda mg \left[\left(\frac{\xi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{b} \right)^2 \right].$$

Отсюда заключаем, что первому решению, для которого $\delta^2 W < 0$ и Π имеет максимум, соответствует неустойчивое равновесие, а второму, для которого $\delta^2 W > 0$ и Π имеет минимум, — устойчивое равновесие стержня.

Задача 4.8. Крестовина, описанная в задаче 4.7, равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, направленной вдоль отрезка $A_0 B_0$. Найти положения относительного равновесия стержня и исследовать их устойчивость.

Задача 4.9. Крестовина, описанная в задаче 4.7, равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через середину отрезка $A_0 B_0$. Найти положения относительного равновесия стержня и исследовать их устойчивость.

Задача 4.10. Тяжелый однородный стержень AB подвешен при помощи малых колечек, укрепленных на его концах, к двум обручам одинакового радиуса, которые расположены в параллельных плоскостях, и их центры O_1 и O_2 лежат на прямой, перпендикулярной этим плоскостям. Найти положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость.

Задача 4.11. Обручи, описанные в задаче 4.10, равномерно вращаются как твердое тело с угловой скоростью ω вокруг оси, направленной вдоль отрезка прямой $O_1 O_2$. Найти положения относительного равновесия стержня AB и исследовать их устойчивость.

Задача 4.12. Обручи, описанные в задаче 4.10, равномерно вращаются как твердое тело с угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через середину отрезка $O_1 O_2$. Найти положения относительного равновесия стержня и исследовать их устойчивость.

Задача 4.13. Обруч радиусом R равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . Горизонтальный диаметр обруча перпендикулярен оси вращения, а центр обруча отстоит от оси вращения на расстояние a . Угол, образуемый с вертикалью перпендикуляром к плоскости обруча, равен ϑ ($0 \leq \vartheta \leq \pi/2$). На обруч надето колечко. Найти положения относительного равновесия колечка и исследовать их устойчивость.

Задача 4.14. Четыре материальные точки одинаковой массы расположены в вершинах тетраэдра $A_1 A_2 A_3 A_4$ и соединены невесомыми стержнями длиной $2a$ (рис. 4.9). Центр масс S системы закреплен. Система находится в ньютоновском поле сил неподвижного притягивающего

центра O , отстоящего от точки C на расстояние R . Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.

Решение. Пусть A_1A_2 и A_3A_4 — скрещивающиеся ребра тетраэдра, расстояние между которыми обозначим через $2b = a\sqrt{2}$. Введем неизменно связанную с тетраэдром систему координат $Cx_1x_2x_3$, ось x_3 которой перпендикулярна ребрам A_1A_2 и A_3A_4 , а оси x_2 и x_1 им параллельны.

Обозначим через R_j расстояния вершин A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) тетраэдра от центра притяжения, а через γ_i — проекции на оси x_i ($i = 1, 2, 3$) единичного вектора γ , имеющего направление отрезка OC . Тогда для потенциальной энергии сил притяжения с точностью до несущественного положительного множителя будем иметь выражение

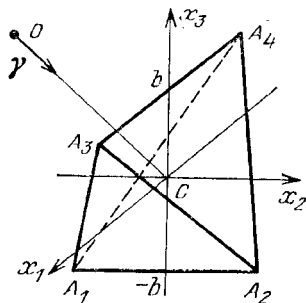


Рис. 4.9

$$\Pi = -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4},$$

где

$$\begin{aligned} R_1^2 &= R^2 + a^2 + b^2 - 2R(a\gamma_2 + b\gamma_3), \\ R_2^2 &= R^2 + a^2 + b^2 + 2R(a\gamma_1 + b\gamma_3), \\ R_3^2 &= R^2 + a^2 + b^2 + 2R(a\gamma_2 - b\gamma_3), \\ R_4^2 &= R^2 + a^2 + b^2 - 2R(a\gamma_1 - b\gamma_3). \end{aligned} \quad (1)$$

Найдем соотношения, связывающие переменные R_j . Почленно складывая равенства (1), получаем первое из них

$$V_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 = k = 4(R^2 + a^2 + b^2).$$

Из (1) находим

$$8abR\gamma_1 = 2b(R_3^2 - R_4^2), \quad 8abR\gamma_2 = 2b(R_2^2 - R_1^2),$$

$$8abR\gamma_3 = a(R_3^2 + R_4^2 - R_1^2 - R_2^2).$$

Возводя эти равенства в квадрат и затем почленно их

складывая, получаем второе соотношение

$$V'_2 = 4b^2 [(R_3^2 - R_4^2)^2 + (R_2^2 - R_1^2)^2] + \\ + a^2 (R_3^2 + R_4^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 = (8abR)^2.$$

Далее вместо этого соотношения будем использовать эквивалентное ему симметризованное соотношение

$$V_2 = \frac{1}{4} V_1^2 + \frac{1}{4a^2} V'_2 = R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 = h = \\ = 4(R^2 + a^2 + b^2) + 16b^2 R^2.$$

Таким образом, нахождение положений равновесия и исследование их устойчивости приводится к задаче определения экстремальных точек и выяснения характера экстремума функции Π при условиях $V_1 = k$, $V_2 = h$. Эту задачу на условный экстремум сведем к задаче на безусловный экстремум, введя функцию

$$\Pi_* = \Pi - \frac{\lambda}{2} (V_1 - k) + \frac{\mu}{4} (V_2 - h),$$

где λ и μ — неопределенные множители Лагранжа.

Условие стационарности функции Π_* приводит к уравнениям

$$\frac{\partial \Pi_*}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} (V_1 - k) = 0, \quad \frac{\partial \Pi_*}{\partial \mu} = \frac{1}{4} (V_2 - h) = 0, \\ \frac{\partial \Pi_*}{\partial R_j} = R_j^{-2} - \lambda R_j + \mu R_j^3 = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Рассмотрим уравнения для R_i и R_j ($i, j = 1, 2, 3, 4$; $i \neq j$). Умножая эти уравнения сначала на $R_i^3 R_j^3$ и $R_j^3 R_i^3$, а затем на $R_i^2 R_j^5$ и $R_j^2 R_i^5$ и вычитая из первого второе, получим соотношение

$$(R_i - R_j) [R_i^2 + R_j^2 + R_i R_j - \mu (R_i + R_j) R_i^3 R_j^3] = 0, \\ (R_i - R_j) [R_i^4 + R_j^4 + (R_i^2 + R_j^2 + R_i R_j) R_i R_j - \\ - \lambda (R_i + R_j) R_i^3 R_j^3] = 0.$$

Отсюда заключаем, что $\mu > 0$, $\lambda > 0$, если все вершины тетраэдра не лежат на поверхности одной и той же сферы с центром в точке O . Последнее возможно лишь в случае, когда точки O и C совпадают; тогда любое положение тетраэдра будет положением равновесия системы.

Зафиксируем значения $\lambda > 0$, $\mu > 0$ и рассмотрим уравнения для определения значений переменных R_j . Эти значения являются корнями одного и того же уравнения

$$f(\lambda, \mu, x) = \mu x^5 - \lambda x^3 + 1 = 0.$$

Найдем экстремальные значения функции f , которые достигаются для значений

$$x = x_*, \quad x = x^* = -x_*, \quad x = x_{**} = 0 \quad \left(x_* = \sqrt[5]{\frac{3\lambda}{5\mu}} \right),$$

Для этих значений имеем

$$f_{**} = f(\lambda, \mu, 0) = 1,$$

$$f_* = f(\lambda, \mu, x_*) = 1 - \frac{6\lambda^2}{25\mu} \sqrt[5]{\frac{3\lambda}{5\mu}},$$

$$f^* = f(\lambda, \mu, x^*) = 1 + \frac{6\lambda^2}{25\mu} \sqrt[5]{\frac{3\lambda}{5\mu}}.$$

На рис. 4.10, а, б, в представлен график функции $f = f(\lambda, \mu, x)$ для случаев, когда а) $f_* < 0$, б) $f_* = 0$ и в) $f_* > 0$; здесь через u и v ($u < v$) обозначены положительные корни уравнения $f(\lambda, \mu, x) = 0$.

Отметим, что ситуация, представленная на рис. 4.10, в, нереализуема, потому что тогда уравнение $f(\lambda, \mu, x) = 0$ не имело бы положительных корней и, следовательно, равновесие невозможно. Ситуация, представленная на рис. 4.10, б, отвечает случаю, когда $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = x_*$.

Рассмотрим случай, представленный на рис. 4.10, а. В этом случае уравнения для R_j могут допускать следующие типы решений: 1) $R_1 = R_2 = R_3 = u$, $R_4 = v$, 2) $R_1 = R_2 = u$, $R_3 = R_4 = v$, 3) $R_1 = u$, $R_2 = R_3 = R_4 = v$.

Решения первого и третьего типов соответствуют положениям равновесия, в которых прямая, проходящая через точки O и C , перпендикулярна одной из граней тетраэдра, а его вершина, не лежащая в этой грани, лежит на указанной прямой и для решений первого (третьего) типа наиболее удалена от точки O (находится на кратчайшем расстоянии от нее). Для решений второго типа указанная прямая перпендикулярна скрепляющимся ребрам тетраэдра. Забегая вперед, укажем, что решения третьего типа отвечают устойчивым положениям равновесия и для них степень неустойчивости $\chi = 0$; решения первого и второго типов соответствуют неустой-

чивым положениям равновесия, при этом для равновесий второго типа $\chi = 1$, а для равновесий первого типа $\chi = 2$.

Исследуем устойчивость найденных равновесий. Обозначим через ξ_j вариации переменных R_j . Условия устойчивости получим как условия положительной определен-

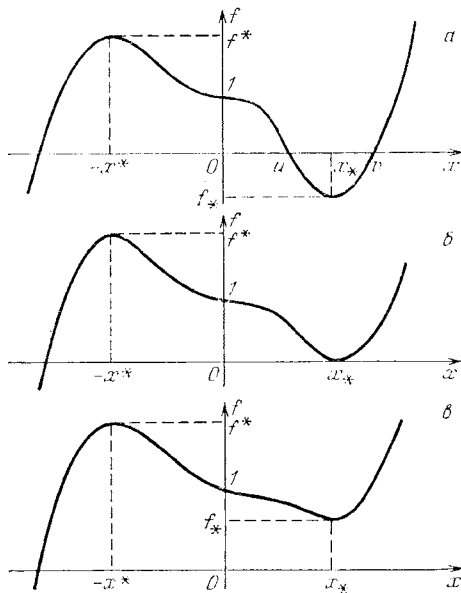


Рис. 4.10

ности второй вариации $\delta^2\Pi_*$ функции Π_* на линейном многообразии, определяемом уравнениями

$$\delta V_1 = 2(R_1\xi_1 + R_2\xi_2 + R_3\xi_3 + R_4\xi_4) = 0,$$

$$\delta V_2 = 4(R_1^3\xi_1 + R_2^3\xi_2 + R_3^3\xi_3 + R_4^3\xi_4) = 0.$$

Для решений 1)–3) соответственно имеем

$$\delta^2\Pi_* = -\frac{5\mu}{2}(x_*^2 - u^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \ll 0,$$

$$\delta^2\Pi_* = -\frac{5\mu}{2}[(x_*^2 - u^2)\xi_1^2 - (v^2 - x_*^2)\xi_3^2] \geq 0,$$

$$\delta^2\Pi_* = \frac{5\mu}{2}(v^2 - x_*^2)(\xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2) \gg 0,$$

где значки \gg (\ll) и \cong означают, что квадратичная форма $\delta^2\Pi$ — положительно-(отрицательно-)определенная и знакопеременная. Отсюда приходим к анонсированным заключениям о характере устойчивости решений 1)–3).

Вычислим теперь значения u , v , λ , μ для решений 1)–3). Уравнения для определения этих величин получим в результате подстановки значений 1)–3) в соотношения $V_1=k$ и $V_2=h$ и уравнения для R . Решая эти уравнения, для решений 1)–3) соответственно находим

$$1) \quad u^2 = R^2 + \frac{3}{2} a^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} Ra, \quad v^2 = R^2 + \frac{3}{2} a^2 + \sqrt{6} Ra,$$

$$\lambda = \frac{3(v^5 - u^5)}{4\sqrt{6}v^3u^3Ra}, \quad \mu = \frac{3(v^3 - u^3)}{4\sqrt{6}v^3u^3Ra};$$

$$2) \quad u^2 = R^2 + \frac{3}{2} a^2 - \sqrt{6} Ra, \quad v^2 = R^2 + \frac{3}{2} a^2 + \frac{\sqrt{6}}{3} Ra,$$

$$\lambda = \frac{3(v^5 - u^5)}{4\sqrt{6}v^3u^3Ra}, \quad \mu = \frac{3(v^3 - u^3)}{4\sqrt{6}v^3u^3Ra};$$

$$3) \quad u^2 = R^2 + \frac{3}{2} a^2 - \sqrt{2} Ra, \quad v^2 = R^2 + \frac{3}{2} a^2 + \sqrt{2} Ra,$$

$$\lambda = \frac{v^5 - u^5}{2\sqrt{2}v^3u^3Ra}, \quad \mu = \frac{v^3 - u^3}{2\sqrt{2}v^3u^3Ra}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.— 471 с.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.— 535 с.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.— М.: Наука, 1966.— 530 с.
4. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения.— М.: Наука, 1987.— 304 с.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников.— М.: ВЦ АН СССР, 1967.— 141 с.
6. Сулов Г. К. Теоретическая механика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1944.— 655 с.
7. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1, 2.— М.: Физматгиз, 1960.— 515 с., 487 с.
8. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М.: Мир, 1980.— 300 с.
9. Рубановский В. Н., Самсонов В. А. Избранные задачи по теории устойчивости.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.— 51 с.
10. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел.— Ч. I.— М.: Наука, 1983.— 464 с.
11. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел.— Ч. II.— М.: Наука, 1983.— 544 с.

Рубановский Владимир Николаевич
Самсонов Виталий Александрович

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Редакторы Н. Н. Колесников, Н. П. Рябенкая
Художественный редактор Г. Н. Кольченко
Технический редактор Е. В. Морозова
Корректоры О. А. Бутусова, М. Л. Медведская

Подписано в печать 06.03.03. Формат 84 × 108^{1/32}.
Усл. печ. л. 15,96. Уч. изд. л. 16,57. Бумага офсетная №1.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Заказ №137.

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
<http://rtd.ru> E-mail: borisov@rtd.ru
