

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

В.А. Самсонов

Конспект лекций по механике

Издательство Московского университета
2015

УДК 531.36

ББК 22.21

Л73

Самсонов В.А.

Конспект лекций по механике. — М.: Издательство Московского университета, 2015. — 88 с.

ISBN 978-5-19-011098-2

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. А.И. Кобрин

Вниманию читателя предлагается конспект лекций по теоретической механике, прочитанных автором в 1996-1997 учебном году на 4-м курсе отделения математики механико-математического факультета МГУ. В этот курс были включены не очень традиционные для теоретической механики задачи о равновесии и об устойчивости равновесия жидкости.

Книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов механико-математических и инженерных специальностей высших учебных заведений, слушателей факультетов повышения квалификации, чей профиль связан с механикой.

УДК 531.36

ББК 22.21

ISBN 978-5-19-011098-2

© Издательство Московского университета, 2015

© Самсонов В.А., 2015

Вниманию читателя предлагается конспект лекций по теоретической механике, прочитанных автором в 1996-1997 учебном году на 4-м курсе отделения математики механико-математического факультета МГУ. Поскольку из программы была исключена механика сплошной среды, автора попросили включить в курс хотя бы ее некоторые элементы. Этим объясняется включение в курс не очень традиционных для теоретической механики задач о равновесии и об устойчивости равновесия жидкости.

По прочтении курса автор получил от студентов Андрея Бирюка, Саши Гутермана, Лены Крейнис и Ларисы Ходариновой неожиданный и очень приятный подарок — компьютерный набор конспекта лекций. С глубокой благодарностью дарителям после долгих размышлений и небольших редакционных правок этот конспект выносится на суд читателя.

Автор

Лекция 1.

Введение.

Математическое моделирование различных процессов нашло в последнее время широкое распространение. Механика — одна из наук, которая не только использует метод и приемы математического моделирования, но и в значительной мере участвовала в разработке самого этого метода. Можно даже говорить о механико-математическом моделировании определенных процессов. Именно эта сторона механики и будет обсуждаться в настоящем курсе.

1 Предмет теоретической механики.

Теоретическая механика имеет дело с двумя типами объектов: материальными точками и твердыми телами. Задачей теоретической механики является описание их движений.

Обычно понятие движения связывают с процессом изменения взаимного расположения точек и тел во времени t . Первый шаг при описании движения — введение декартовой системы координат $Oxyz$, связанной либо с одним из участвующих в движении тел, либо с некоторым фиктивным телом.

Самый простой объект механики — **материальная точка**. **Точка**, потому что ее положение определяется тремя координатами

$$\vec{r} = \{x, y, z\}$$

той точки пространства, где находится наш объект.

Материальная, потому что обладает массой.

Движение точки описывается тремя функциями времени

$$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}.$$

Механика имеет дело с такими движениями, в которых само время t меняется непрерывно и функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывные. Это отражает самые непосредственные ощущения наблюдаемых нами простейших движений.

2 Понятие скорости материальной точки.

В качестве меры интенсивности движения вводится понятие **скорости**

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}. \quad (1)$$

(Здесь и в дальнейшем дифференцирование по времени t обозначается точкой над соответствующим символом.)

Соотношение (1) устанавливает связь между положением точки и ее скоростью лишь в процессе конкретного движения. Однако очевидно, что объект может находиться в одном и том же положении, но иметь различные значения скорости. И в этом смысле положение и скорость независимы. Поэтому для описания состояния движения и необходима эта пара понятий: **положение** \vec{r} и **скорость** \vec{v} .

3 Принцип детерминированности.

Положим в основу нашей теории **принцип детерминированности**, т.е. предположение о том, что семейство движений материальной точки полностью определяется текущим моментом времени t , а также ее положением \vec{r}_0 и скоростью $\dot{\vec{r}}_0$ в начальный момент

времени t_0 и самым начальным моментом.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0), \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{\vec{r}}(t, t_0, \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0).\end{aligned}\tag{2}$$

Если окажется, что t_0 входит в эти формулы лишь в виде $t - t_0$, то можно считать, что $t_0 = 0$.

4 Понятие ускорения материальной точки.

Введем теперь понятие **ускорения точки**, которое вычисляется по формуле

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = f(t, \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0).\tag{3}$$

Исключим теперь \vec{r}_0 и $\dot{\vec{r}}_0$ с помощью уравнений (2) из соотношения (3). Получим

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})\tag{4}$$

Таким образом оказывается, что рассматриваемое семейство движений обладает тем свойством, что ускорение точки не является независимой характеристикой движения (что можно было бы ожидать по аналогии с понятием скорости), а зависит от текущего состояния движения.

С точки зрения математики (4) — динамическая система, а (2) — семейство ее решений.

Сравнение со 2-м законом Ньютона

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F},\tag{5}$$

где F — сила, приводит к выводу, что в нашей механике следует рассматривать только такие силы, которые зависят только от положения, скорости и, может быть, от явно входящего времени.

Если окажется, что время t входит явно в правую часть (4), то такая система называется **автономной**. В основном, именно с такими системами мы и будем иметь дело в дальнейшем.

В механике уравнения (5) (или (4)) называются **уравнениями движения**, а соотношения (2) — **законами движения**.

Лекция 2.

5 Законы Кеплера.

Если положить в основу механики принцип детерминированности, то ускорение точки в любой момент времени может оказаться функцией лишь только положения и скорости: $\vec{a}(t) = f(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$. Замечательно, что многие механические системы описываются в рамках динамических систем этого класса.

Для примера рассмотрим движение планет вокруг Солнца. Если бы были известны зависимости радиусов-векторов планет от времени и начальных условий, то можно было бы определить структуру силы, с которой Солнце притягивает планеты. Однако этой информации у нас нет. Зато есть **законы Кеплера**, полученные в результате многолетних наблюдений за движением небесных тел:

- (1) *Все траектории планет представляют собой эллипсы разных размеров, в одном из фокусов которых находится солнце.*
- (2) *Площадь, заметаемая радиус-вектором планеты, возрастает равномерно.*
- (3) *Отношение квадрата периода к кубу длины большой полуоси является константой, одинаковой для всех планет.*

6 Вывод формулы радиальной составляющей ускорения планеты.

Параметризуем отдельный эллипс. Для этого введем полярную систему координат.

Поместим центр в солнце, \vec{r} — радиус-вектор с концом на планете (солнце и все планеты будем считать материальными точками), а полярный угол φ — угол между направлением \vec{r} и прямой, соединяющей фокусы. Тогда

$$r = r(\varphi)$$

Для радиальной и трансверсальной составляющих скорости имеем следующие формулы:

$$v_r = \dot{r} = r' \cdot \dot{\varphi}, \quad v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi}$$

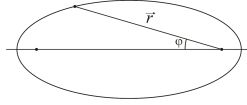


Рис. 1.

Рассмотрим скорость изменения площади, заемаемой радиус-вектором

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} r \cdot r \dot{\varphi} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const} = C.$$

Продифференцируем это соотношение. Получим

$$\ddot{\varphi} r^2 + 2r \dot{r} \dot{\varphi} \equiv 0$$

Разделим на r , тогда

$$\ddot{\varphi} r + 2\dot{r} \dot{\varphi} \equiv 0$$

или

$$\ddot{\varphi} r + 2r' \dot{\varphi}^2 \equiv 0. \quad (1)$$

С другой стороны, для трансверсальной составляющей ускорения планеты имеем:

$$a_{\varphi} = 2r' \dot{\varphi}^2 + r \ddot{\varphi}$$

Таким образом, получается, что $a_{\varphi} \equiv 0$ и все планеты испытывают только центростремительное ускорение. Подсчитаем его:

$$a_r = r'' \dot{\varphi}^2 + r' \ddot{\varphi} - r \dot{\varphi}^2. \quad (2)$$

Поскольку оси эллипсов у разных планет ориентированы в пространстве по-разному, следует ожидать, что a_r не зависит от φ . Умножим уравнение (1) на r' и разделим на r . Получим

$$r' \ddot{\varphi} = -2r'^2 \dot{\varphi}^2 / r. \quad (3)$$

Подставим это выражение в формулу (2) для радиальной составляющей ускорения.

$$a_r = (r'' - r - 2r'^2 / r) \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (4)$$

Вспомним, что наши орбиты — эллипсы, т.е.

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi}.$$

Введем вспомогательную переменную $u = \frac{1}{r}$, тогда

$$r = \frac{1}{u}, \quad r' = -\frac{1}{u^2}u', \quad r'' = -\frac{u''}{u^2} + \frac{2u'^2}{u^3}.$$

Теперь с учетом закона площадей получаем:

$$a_r = \left(-\frac{u''}{u^2} + \frac{2u'^2}{u^3} - \frac{1}{u} - \frac{2u'^2}{u^3}\right)\dot{\varphi}^2 = (-u'' - u)\frac{\dot{\varphi}^2}{u^2} = 4(-u'' - u)C^2u^2, \quad (5)$$

Выразим u через φ и подставим: $u(\varphi) = \frac{1}{p} - \frac{e}{p} \cdot \cos \varphi$ и $u''(\varphi) = \frac{e}{p} \cdot \cos \varphi$. Тогда получим

$$a_r = -\frac{4}{p}C^2u^2$$

или

$$a_r = -\frac{4C^2}{p} \frac{1}{r^2} \quad (6)$$

— формулу, которая упорядочила наш взгляд на мир.

Большая полуось эллипса

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2}.$$

Если секторная скорость равна C , то найдем период T . Площадь эллипса

$$\sigma = CT = \pi AB = \pi \frac{p^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad (7)$$

следовательно, период обращения планеты равен

$$T = \frac{\pi}{C} \cdot \frac{p^2}{(1-e^2)^{3/2}}.$$

По третьему закону Кеплера, $\frac{T^2}{A^3} = \frac{\pi^2 p}{C^2} = \text{const}$ — универсальная константа, одинаковая для всех планет Солнечной системы. Итак,

$$a_r = -\mu \frac{1}{r^2}. \quad (8)$$

Мы вывели формулу, которая упорядочила мир и позволила Исааку Ньютону дать завершение закону всемирного тяготения, по которому сила взаимного притяжения двух «тел» определяется, как

$$F = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r^2},$$

где γ — мировая константа (гравитационная постоянная).

Лекция 3.

7 Движение твердого тела.

Определение. Абсолютно твердое тело — это система материальных точек, расстояние между которыми не меняется со временем.

Поэтому с твердым телом можно связать систему координат. Относительно этой системы координат тело неподвижно. Наоборот, говоря «система координат», мы обычно подразумеваем некоторое твердое тело.

Рассмотрим движение твердого тела.

1. Пусть есть некоторая фиксированная неподвижная система координат.

2. Зафиксируем некоторую точку O нашего тела и назовем ее началом **связанной системы координат**. Движение выбранной точки O описывается радиус-вектором $\vec{r}_O(t)$. Движение произвольной точки M нашего твердого тела описывается радиус-вектором $\vec{r}_M(t)$.

3. Введем систему координат $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, связанную с описываемым телом.

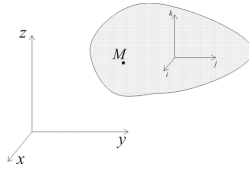


Рис. 1.

Но в связанной системе координат у точки M есть свои координаты (x, y, z) , причем они постоянные, т.к. в теле точка M неподвижна. Тогда

$$\begin{aligned}\vec{r}_M &= \vec{r}_O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \\ \vec{v}_M &= \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_O + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}.\end{aligned}\tag{1}$$

8 Понятие мгновенной угловой скорости твердого тела. Формула Эйлера.

Преобразуем выражение (1) предыдущего раздела. Поскольку базис ортонормирован, то $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ и т.д. Продифференцируем: $\dot{\vec{i}} \cdot \vec{j} = -\vec{i} \cdot \dot{\vec{j}}$, $\dot{\vec{i}} \cdot \vec{i} = 0$. Разложим производные от базисных векторов по этому же базису:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{i}} &= 0\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k} \\ \dot{\vec{j}} &= -a\vec{i} + 0\vec{j} + c\vec{k} \\ \dot{\vec{k}} &= -b\vec{i} - c\vec{j} + 0\vec{k}\end{aligned}$$

Получилась кососимметрическая матрица, содержащая всего три элемента a , b , c . Нетрудно показать, что существует такой вектор $\vec{\omega}$, что для любого вектора $\vec{\alpha} \in \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ выполнено $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{\omega} \times \vec{\alpha}$. Расписав по координатам, получим, что

$$\omega_x = c, \quad \omega_y = -b, \quad \omega_z = a.$$

Таким образом, мы формально ввели вектор $\vec{\omega}$, называемый **мгновенной скоростью поворота** заданной в нашем теле системы координат, т. е. всего тела. Подставим его в формулу (1) и получим **формулу Эйлера**:

$$\vec{v}_M = \dot{\vec{r}}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}\tag{2}$$

— закон распределения скоростей точек абсолютно твердого тела.

Упражнение. Доказать, что вектор ω не зависит от выбора системы координат в теле.

Частные случаи.

1. Тело имеет одну неподвижную точку O . Выберем в ней начало координат. Получим, что $\dot{\vec{r}}_0 \equiv 0$. Тогда формула Эйлера принимает вид:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M.$$

2. В теле есть две неподвижные точки: $\dot{\vec{r}}_1 \equiv 0$ и $\dot{\vec{r}}_2 \equiv 0$. В этом случае выберем систему координат так, чтобы ось k проходила через эти точки. При этом вектор $\vec{\omega}$ окажется сонаправленным с вектором \vec{k} , а значит все точки оси k будут неподвижны. Получили, что тело вращается вокруг неподвижной оси, поэтому здесь можно прямо интерпретировать вектор ω , как угловую скорость вращения твердого тела. Действительно, каждая точка M движется по окружности радиуса r_M вокруг оси k со скоростью $\dot{\varphi} r_M$, направленной по касательной. (Здесь есть конкретный угол φ , и угловая скорость — это скорость его изменения.) Формула Эйлера принимает вид:

$$v_M = \dot{\varphi} r_M$$

Замечание. К твердым телам, вообще говоря, неприменимо понятие скорости, поскольку различные точки тела могут иметь разные скорости. Можно говорить только об угловой скорости.

9 Относительное движение. Закон сложения скоростей.

Пусть теперь точка M передвигается по телу. Тогда,

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (3)$$

следовательно, продифференцировав, получим, что

$$\vec{v}_M = (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + (\dot{\vec{r}}_O + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}). \quad (4)$$

Первое слагаемое естественно назвать **относительной скоростью**

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

а второе — **переносной скоростью**,

$$\vec{v}_{\text{пер}} = \dot{\vec{r}}_O + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}.$$

Таким образом, скорость точки M определяется **формулой сложения скоростей**:

$$\vec{v}_{M\text{абс}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{отн}}. \quad (5)$$

Заметим, что само переносное движение осуществляется всем телом, но $v_{\text{пер}}$ — это скорость той точки N тела, положение которой совпадает с положением точки M лишь в рассматриваемый момент времени ($\vec{r}_N(t) = \vec{r}_M(t)$, но не тождественно!).

Обычно подвижная система координат вводится для упрощения описания движения. Рассмотрим пример удачного и неудачного выбора подвижной системы координат. Мы хотим описать проекции скорости на полярные оси координат.

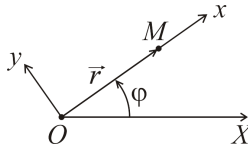


Рис. 2.

Неудачный выбор: поместим начало подвижной системы координат в точку M . При этом $\vec{v}_{\text{отн}} = 0$, а $\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{пер}}$, т.е. представление движения не упростилось.

Удачный выбор: поместим начало координат в O , одну из подвижных осей координат пустим по вектору \vec{r} , а другая будет ей перпендикулярна. Переносное движение системы координат является вращением вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Относительное движение представляет собой прямолинейное движение вдоль оси r . Тогда $v_{\text{отн}} = v_r = \dot{r}$ и $v_{\text{пер}} = v_{\varphi} = r\dot{\varphi}$. В этом случае любое движение точки представляется в виде суперпозиции двух «простых» движений.

10 Распределение ускорений в твердом теле. Формула Ривальса.

Будем дифференцировать формулу Эйлера.

$$\vec{a}_M = \ddot{\vec{r}}_M = \ddot{\vec{r}}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{OM} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{OM} = \ddot{\vec{r}}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}) \quad (6)$$

— формула Ривальса.

11 Формула сложения ускорений — формула Кориолиса.

Если точка M движется относительно тела, то

$$\vec{a}_{Мабс} = \ddot{\vec{r}}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}) + \vec{\omega} \times \vec{v}_{отн} + \vec{a}_{отн} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{отн}$$

— **теорема сложения ускорений**. Здесь $\vec{a}_{отн}$ — относительное ускорение, т.е. ускорение точки в системе координат, связанной с телом. Переносное ускорение — ускорение выше упомянутой точки N тела

$$\vec{a}_{пер} = \ddot{\vec{r}}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}), \quad \text{т.к.} \quad \vec{r}_N = \vec{r}_M.$$

По сравнению с формулой (5) здесь возникает еще один добавок: $2\vec{\omega} \times \vec{v}_{отн}$ — **кориолисово ускорение**.

Получили теорему Кориолиса:

$$\vec{a}_{Мабс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}.$$

В предыдущем примере получим:

$a_r = a_{отн} + a_{пер\,r} = \ddot{r} - \omega^2 r$, кориолисова составляющая не имеет проекции на ось r , т.к. относительная скорость $\vec{v}_{отн}$ сонаправлена с вектором \vec{r} ; $a_\varphi = a_{пер\,\varphi} + a_{кор} = r\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r}$.

Лекция 4.

12 Силы инерции. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Мабс} &= \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер} \\ \vec{a}_{Мабс} &= \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{отн} \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы во второй закон Ньютона, получим

$$\vec{F} = m\vec{a}_{отн} + m\vec{a}_{пер} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{отн}$$

или

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = -m\vec{a}_{\text{пер}} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{F}.$$

Т.е. масса, умноженная на относительное ускорение равняется изначально заданной силе плюс **силы инерции** (переносная сила и сила Кориолиса). Возникает вопрос, нарушается ли здесь принцип детерминированности, в соответствии с которым

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Вспомним, что

$$\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}.$$

Поэтому переносное ускорение является позиционным добавком. Сила Кориолиса, в свою очередь, зависит только от относительной скорости, поэтому обе эти силы инерции попадают в список допустимых сил.

Таким образом, в **неинерциальной системе координат** силы имеют добавок, связанный со скоростью и даже явным временем ($\omega(t)$ при $\dot{\omega} \neq 0$). Тогда вопрос о поиске **инерциальной системы координат** можно связать с возможностью исключения из структуры силы величин $\dot{\vec{r}}$ и t . Ту систему координат, в которой это получится, можно счесть инерциальной.

Инерциальные системы отсчета нужны для измерений силового воздействия прямым, так сказать, весовым способом. Ньютонову (гравитационную) силу в принципе можно измерить таким способом, поскольку она не зависит от скорости. Гораздо сложнее обстоит дело с силами, зависящими от скорости, например, с электромагнитными явлениями.

13 Падение материальной точки под действием силы притяжения Земли.

В закон всемирного тяготения не входит инерционный добавок, но если связать систему координат, например, с Землей, то он появится. Учтем движение Земли, в частности, ее вращение вокруг своей оси.

Добавком, связанным с $\dot{\omega}$, пренебрежем, поскольку изменение длительности суток составляет доли секунды в столетие. Посчитаем $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. Вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения Земли на север.

Первое векторное произведение направлено ортогонально плоскости меридиана, значит второе — в этой плоскости к оси вращения. Поэтому дополнительная составляющая силы

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_{\text{пер}}$$

направлена от оси вращения. Получается, что сила тяжести реально направлена не к центру Земли. «Глобальным» экспериментом, подтверждающим это, является форма Земли. Земля «сплюснута» именно в ту сторону, в которую она «растеклась» бы под действием этой силы.

$$R \cdot \omega^2 \approx 6400000 \cdot \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \right)^2 \approx \frac{1}{30} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (1)$$

Это дополнительное ускорение сравнимо с ускорением свободного падения, т.к. отклонение порядка $1/300$ от g .

Рассмотрим падение материальной точки с высоты порядка высоты здания университета (~ 250 метров), но, для простоты, на экваторе.

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}} + m\vec{G}, \quad (2)$$

где \vec{G} соответствует переносному и гравитационному ускорениям.

Распишем по осям:

z — по вертикали, вверх;

y — касательная к меридиану;

x — касательная к экватору на восток.

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -2\omega\dot{z} \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{x} \end{cases} \quad (3)$$

Найдем приближенное решение этой системы. Отбросим второе уравнение и будем считать, что движение происходит из начала координат без начальной скорости, т.е. $x(0) = z(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$.

Будем строить решения в виде

$$x = x^{(0)}(t) + \omega x^{(1)}(t) + \dots, \quad (4)$$

$$z = z^{(0)}(t) + \omega z^{(1)}(t) + \dots, \quad (5)$$

оставляя в стороне вопрос сходимости этого разложения.

Тогда, очевидно,

$$x^{(0)}(t) \equiv 0, \quad z^{(0)}(t) = -\frac{1}{2}gt^2, \quad z^{(1)}(t) \equiv 0,$$

а

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{3}gt^3.$$

Таким образом,

$$x(t) = \frac{1}{3}gt^3\omega. \quad (6)$$

Итак, точка не будет падать по вертикали, а будет смещаться на восток. 250 метров точка пролетает примерно за 7 секунд. За это время смещение x достигает величины

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 50 \cdot 7 \cdot 2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx \frac{6}{70} \text{ м} \approx 8.5 \text{ см} \quad (7)$$

Вполне можно измерить!

Естественно, что таким приближением можно пользоваться пока

$$\frac{1}{3}gt^3\omega \ll \frac{1}{2}gt^2, \text{ т.е. прит} \ll \frac{1}{\omega}. \quad (8)$$

(Упражнение.) Объясните, почему точка смещается именно на восток, несмотря на то, что Земля тоже «крутится» на восток?

Лекция 5.

14 Системы со связями. Типы связей.

Связями, наложенными на систему материальных точек, называют некоторые ограничения, накладываемые на изменения координат и скоростей этих точек.

Пусть есть N точек, $\{x_i, y_i, z_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Тогда для того, чтобы описать положение этой системы, надо задать $3N$ величин. Пространство, образуемое ими, назовем **координатным**. Чтобы описать движение, надо задать еще N скоростей, т.е. всего $6N$ параметров, которые образуют **пространство состояний**.

При этом возможно, что не любое состояние этого многообразия N точек является допустимым. Тогда надо вычленить допустимые.

Соотношения вида

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \dots, t) = 0 \quad j = 1, \dots, k \quad (1)$$

называются **связями**. Это пример *удерживающей связи*. Если равенство заменить на неравенство, то получится *неудерживающая* или *ограничивающая связь*.

Пример: геометрическое ограничение — мел падает на стол (или пол) и остается на нем, т.е. ниже «опуститься» не может.

Связи, зависящие только от положения системы материальных точек в пространстве

$$\varphi_j(\vec{r}_i, \dots, t) = 0, \quad (2)$$

а не от скоростей точек, называют **геометрическими**. Они выделяют в координатном пространстве поверхность допустимых положений. Геометрические связи можно превратить в обычные, продифференцировав

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \dot{x}_i + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Мы получили линейную дифференциальную форму. Таким образом, любая геометрическая связь является первым интегралом некоторой линейной формы. Но каждая линейная форма дает целое семейство первых интегралов, поэтому, чтобы выбрать связь, надо зафиксировать начальное положение.

Интегрируемые связи еще называют **голономными**.

Связи, не содержащие время t , называют **стационарными**.

Поставим в соответствие уравнению (2) линейную форму

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, k \quad (4)$$

где $\delta x_i = x_i - x_{i_0}$, $\delta y_i = y_i - y_{i_0}$, $\delta z_i = z_i - z_{i_0}$, $\{x_{i_0}, y_{i_0}, z_{i_0}\}$ — точка, в которой происходит дифференцирование. Тогда уравнение (4) задает линейное касательное многообразие к поверхности допустимых положений в некоторой его точке $\{x_{i_0}, y_{i_0}, z_{i_0}\}$. Векторы, удовлетворяющие уравнению (4) называются **возможными перемещениями**. Размерность r пространства возможных перемещений

определяется числом связей $r = 3N - k$, число r называют также **числом степеней свободы**. При стационарных связях разрешенные в действительности скорости находятся среди возможных, при нестационарных это возможно в тех точках пространства, где $\partial\varphi_i/\partial t = 0$.

Введем следующую аксиому или гипотезу: **Можно отбросить связи и ввести вместо них дополнительные силы**, т.к. связи материальны, а материальные объекты действуют друг на друга посредством сил. Полученные силы называют **силами реакции связей**. Можно подобрать их так, что движение точек с участием этих сил будет равнозначно движению по связям. Теперь все точки можно считать изолированными, и для каждой из них можно написать второй закон Ньютона. Получится $3N$ уравнений и k связей.

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^k \vec{R}_{ij} \\ \varphi_j(\vec{r}_i) = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} N \\ k \end{array} \right. \quad (5)$$

где R_{ij} — i -тая реакция j -той связи.

15 Вывод основного уравнения динамики системы материальных точек с идеальными связями.

Условия (1) должны быть независимы, а их число таким, чтобы по этим связям можно было двигаться, поэтому $0 \leq k \leq 3N - 1$. Поэтому, если расписать все силы по координатам, получается, что у нас $3N$ неизвестных ускорений и $3N$ неизвестных сил реакции связей, т.е. всего $6N$ неизвестных. А уравнений лишь $3N + k$, поэтому задача разрешима, но неоднозначно. Нужна какая-то дополнительная информация. Будем искать возможность отсечь лишние реакции. Будем рассматривать только **идеальные связи**, т.е. такие связи, реакции которых ортогональны векторам возможного перемещения

$$\sum (\vec{R}_i, \delta\vec{r}_i) = 0. \quad (6)$$

Впрочем, допустима и такая ситуация, что для некоторых точек $\delta r_i = 0$.

Преобразовав первую группу уравнений (5) с помощью соотношений (6), получим *основное уравнение динамики системы материальных точек с идеальными связями*.

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (7)$$

Из этого соотношения можно получить такое количество независимых уравнений, которое совпадает с числом степеней свободы.

16 Некоторые формы использования основного уравнения динамики.

1. *Теорема о перемещении центра масс* (изменении количества движения).

Пусть среди возможных перемещений системы существует такое, при котором все точки системы смещаются вдоль некоторого направления \vec{e}_x на одинаковое расстояние (система может вести себя, как поступательно движущееся твердое тело). Т.е. в любой момент времени во всех допустимых положениях уравнение (4) имеет частное решение

$$\delta \vec{r}_i = \vec{e}_x \cdot \delta x$$

Тогда

$$\delta x \sum (m_i \ddot{x}_i - X_i) = 0,$$

где X_i — проекция силы \vec{F} на направление \vec{e}_x . Поскольку перемещение допустимое, $\delta x \neq 0$, значит,

$$\sum (m_i \ddot{x}_i - X_i) = 0, \quad (8)$$

Посмотрим некоторые следствия

a) $(\sum m_i \dot{x}_i) = \sum X_i = X$ — сумма всех сил, действующих на систему.

Определение. Произведение массы материальной точки на ее скорость называется **количеством движения материальной точки**. Если просуммировать по всем точкам системы, то получим **количество движения системы**, обозначается Q .

Итак, мы вывели закон $\dot{Q} = X$. Внутренние силы (от точки к точке) при суммировании взаимоуничтожатся, поэтому останется

$$\dot{Q} = X_{\text{внеш}}.$$

Отсюда первый вариант формулировки теоремы: скорость изменения количества движения равна сумме всех внешних сил. Если $X = 0$, то $Q = \text{const}$ — количество движения остается постоянным, есть первый интеграл.

б) Рассмотрим еще одну интерпретацию уравнения (8).

$$\left(\sum m_i x_i\right)'' = X_{\text{внеш}}.$$

У каждой системы материальных точек есть точка C , называемая центром масс этой системы, координата x_c которой однозначно определяется из уравнения

$$\sum m_i x_i = M x_c,$$

где M — суммарная масса всех точек системы. Тогда получаем второй вариант формулировки теоремы: центр масс системы движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса и к нему приложены все внешние силы.

$$M \ddot{x}_c = X_{\text{внеш}},$$

Если $X_{\text{внеш}} = 0$, то $\dot{x}_c = \text{const}$.

2. *Теорема об изменении кинетического момента системы относительно неподвижных осей.*

Пусть в любой момент времени связи, наложенные на систему, позволяют поворот всех точек системы (как твердого тела) вокруг некоторой неподвижной оси. При повороте тела все точки движутся по окружностям, а возможные перемещения направлены по касательным к этим окружностям (см. рис.1).

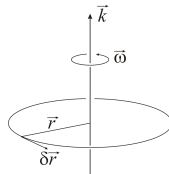


Рис. 1.

$$\delta \vec{r}_i = \omega \vec{k} \times \vec{r}_i \quad (9)$$

Множитель ω определяет величину поворота. Так как

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} \cdot (\vec{k} \times \vec{r}) &= \vec{k}(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}), \\ \vec{F}(\vec{k} \times \vec{r}) &= \vec{k}(\vec{r} \times \vec{F}), \end{aligned}$$

то

$$\omega \vec{k} \sum (\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i) = \vec{k} \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \cdot \omega$$

Сократим на произвольный множитель ω и приравняем коэффициенты при векторе \vec{k} .

Определение. Назовем **кинетическим моментом** K_z **системы** сумму моментов количества движения каждой точки системы относительно неподвижной оси z . (Он может не совпадать с суммарным моментом количества движения системы, например, скорость центра масс может равняться нулю, а вся система будет вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс и $K_z \neq 0$).

$$\dot{K}_z = \frac{d}{dt} \sum (\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i)|_z = M_z \text{ внеш}$$

Скорость изменения кинетического момента системы равна суммарному моменту всех внешних сил (у внутренних плечо одинаковое, поэтому их моменты взаимоуничтожаются).

Лекция 6.

Итак, на прошлой лекции мы остановились на связях вида:

$$1) f_i(\vec{r}_i) = 0 \text{ или } \sum_i \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = 0.$$

Заметим, что многообразие решений (т.е. возможных перемещений) существует при любом допустимом положении системы.

2) $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$ — применили гипотезу о возможности замены связей силами реакции.

$$3) \sum_i \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0 \text{ — идеальность связей.}$$

$$4) \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \text{ — основное уравнение динамики.}$$

5) $m\ddot{\vec{r}}_c = \dot{\vec{Q}} = \vec{F}_{\text{внеш}}$ — теорема о движении центра масс или об изменении **количества** движения системы.

6) $\dot{K}_z = M_z \text{ внеш}$ — теорема об изменении **кинетического момента системы** относительно неподвижной оси.

7) $T = \sum_i \left(\frac{m_i \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i}{2} \right)$ — кинетическая энергия системы.

Дополним этот список еще одной **теоремой об изменении кинетической энергии системы**.

Теорема: если связи, наложенные на систему таковы, что действительные перемещения находятся среди возможных (стационарные связи или отдельные положения системы, в которых все $\partial\varphi/\partial t$ при дифференцировании обращаются в 0), то тогда

$$\dot{T} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i \dot{\vec{r}}_i = N,$$

т.е. производная кинетической энергии равна мощности, с которой работают силы.

При этом учитываются лишь **активные** силы, т.е. силы, которые могут совершать работу на возможном перемещении системы (среди них могут быть и внутренние).

17 Тензор инерции. Главные оси инерции.

Выведем некоторые полезные формулы. Вычислим кинетический момент твердого тела относительно начала неподвижной системы координат. Рассмотрим систему материальных точек, образующих твердое тело. Пусть M — некоторая точка этого тела. С телом свяжем систему координат с началом в полюсе O . Тогда по формуле Эйлера,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}.$$

Мы уже видели, что векторное произведение можно заменить действием кососимметрической матрицы, в нашем случае

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица преобразования вектора $\vec{\omega}$ в поле скоростей точек твердого тела.

Поскольку $\vec{R}_M = \vec{R}_O + \overrightarrow{OM}$, то

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R}_O + \overrightarrow{OM}_i) \times (\vec{v}_O + X_i \vec{\omega}). \quad (1)$$

Будем преобразовывать эту сумму по частям:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM}_i \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}_i) = \\ \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix} \vec{\omega} = \mathcal{J}_0 \vec{\omega}, \quad (2) \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{J}_0 = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_x & \mathcal{J}_{xy} & \mathcal{J}_{xz} \\ \mathcal{J}_{xy} & \mathcal{J}_y & \mathcal{J}_{yz} \\ \mathcal{J}_{xz} & \mathcal{J}_{yz} & \mathcal{J}_z \end{pmatrix}$$

— **тензор инерции** твердого тела относительно точки O . Элементы, стоящие на диагонали называют **моментами инерции** относительно соответствующих осей, а внедиагональные элементы — **центробежными моментами**. Каждую симметрическую матрицу можно привести к диагональному виду. Оси, в которых матрица \mathcal{J}_0 имеет диагональный вид назовем **главными осями инерции** относительно точки O . Выберем в качестве полюса O точку C — центр масс тела. Тензор инерции, записанный в главных центральных осях тела, назовем **центральным**, он зависит только от взаимного расположения точек тела и имеет вид:

$$\mathcal{J}_C = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{Cx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_{Cy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_{Cz} \end{pmatrix}$$

Подсчитаем остальные слагаемые в формуле (1). Очевидно, что $\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{CM_i} = 0$, поэтому

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_C \times \vec{\omega} \times m_i \overrightarrow{CM_i} = \vec{R}_C \times \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{CM_i} = 0.$$

Итак, кинетический момент твердого тела относительно начала системы координат равняется

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \times \vec{v}_i m_i = \vec{R}_C \times \vec{v}_C m + \mathcal{J}_C \vec{\omega},$$

здесь m — масса всего тела.

I формула Кенига. Кинетический момент твердого тела относительно некоторой точки равен моменту количества движения материальной точки массы m , помещенной в центр масс тела, прибавленному к кинетическому моменту вращательного движения тела относительно системы координат, движущейся поступательно, с началом в центре масс тела, и называемой **осями Кенига**.

II формула Кенига. Кинетическая энергия твердого тела также складывается из энергии вращательного движения и «кинетической энергии центра масс»:

$$T = \frac{1}{2}(\mathcal{J}_x \omega_x^2 + \mathcal{J}_y \omega_y^2 + \mathcal{J}_z \omega_z^2) + \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} (\vec{\omega}, \mathcal{J}_C \vec{\omega}).$$

Отметим некоторые важные для приложений частные случаи.

Если тело вращается вокруг *неподвижной точки* O , то

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM};$$

$$\vec{K}_O = \mathcal{J}_O \vec{\omega}$$

и

$$T = \frac{1}{2} (\vec{\omega}, \mathcal{J}_O \vec{\omega}).$$

Пусть тело вращается вокруг *неподвижной оси* z , не обязательно главной. Тогда на ней существует неподвижная точка и можно использовать теорему об изменении кинетического момента (в проекциях на ось z)

$$\dot{K}_z = M_{z \text{ внеш}} = \mathcal{J}_z \dot{\omega}.$$

Этот же результат можно получить и из закона изменения кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{J}_z \omega^2,$$

следовательно,

$$\mathcal{J}_z \dot{\omega} \vec{\omega} = N = \vec{\omega} \vec{M}_{\text{внеш}},$$

т.к. для твердого тела активными являются только внешние силы. Поэтому, расписывая по осям, получим

$$\mathcal{J}_z \dot{\omega} = M_z \text{ внеш}$$

Лекция 7.

18 Движение «физического маятника».

Рассмотрим колебания твердого тела (физического маятника) относительно горизонтальной оси z , соответственно скорости всех точек тела параллельны вертикальной плоскости xOy (рис. 1).

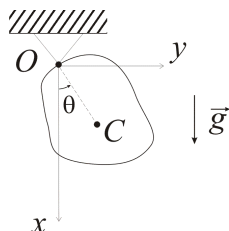


Рис. 1.

Пусть точка C обозначает центр масс нашего тела. В качестве координаты введем двугранный угол θ , который образуют неподвижная вертикальная плоскость xOz и связанная с телом плоскость zC . Тогда $\omega = \dot{\theta}$. Тело совершает плоскопараллельное движение под действием силы тяжести. Силовое поле силы тяжести образует единственную силу, приложенную к центру масс тела, направленную вниз вдоль оси Ox , туда же, куда и ускорение \vec{g} , и равную по величине mg , где m — масса всего тела. Сосчитаем момент этой силы относительно оси z . По теореме 2 имеем

$$\mathcal{J}_z \ddot{\theta} = -mgl \cdot \sin \theta \quad (1)$$

где l — расстояние от центра масс тела C до начала координат O и, соответственно, $l \cdot \sin \theta$ — расстояние от точки C до плоскости xOz . Знак « $-$ » означает, что момент должен как бы «притягивать» точку C к ее «низшему» положению.

Если вместо твердого тела рассматривать материальную точку, то $\mathcal{J}_z = ml^2$ и уравнение (1) примет вид

$$l\ddot{\theta} = -g \sin \theta. \quad (2)$$

Это уравнение имеет очевидное частное решение $\theta(t) \equiv 0$, $\dot{\theta}(t) \equiv 0$. Учитывая, что при маленьких углах синус угла примерно равен самому углу (в радианах), получим приближенное уравнение для «малых» движений:

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

его характеристические корни $\lambda = \pm \sqrt{-\frac{g}{l}}$. Положим $\alpha = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Тогда получим закон движения математического маятника

$$\theta(t) = A \sin(\alpha t - B).$$

Это периодические незатухающие колебания с постоянной амплитудой. Мы получили, что сила тяжести совсем «не притягивает» маятник к нижнему положению, а заставляет его совершать колебания.

Вернемся к физическому маятнику.

$$\ddot{\theta} = -\frac{ml^2}{\mathcal{J}_z} \frac{g}{l} \sin \theta$$

Введем так называемое **приведенное плечо** $l_{\text{пр}} = \frac{\mathcal{J}_z}{ml^2} l$. На первый взгляд кажется, что у приведенного расстояния до начала координат другая зависимость от настоящего расстояния. Но момент инерции $\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_z(l)$ тоже зависит от расстояния до начала координат. Учтем эту зависимость —

$$\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_{Cz} + ml^2$$

— **формула Гюйгенса**, которая говорит, что момент инерции относительно некоторой оси (у нас — ось z) складывается из момента инерции относительно оси, параллельной z и проходящей через

центр масс — центрального момента — и из момента инерции центра масс, как материальной точки. У собственно материальных точек первая компонента равна 0. Центральный момент является характеристикой тела, как материального объекта. Заметим, что момент инерции достигает наименьшего значения, если ось вращения проходит через центр масс. Теперь можно сказать, что

$$l_{\text{пр}} = \left(\frac{\mathcal{J}_{C_z}}{ml^2} + 1 \right) l, \quad \text{а для частоты имеем} \quad \alpha^2 = \frac{gml}{\mathcal{J}_{C_z} + ml^2}.$$

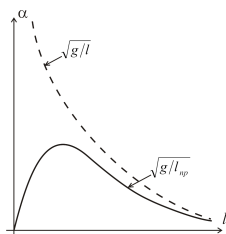


Рис. 2.

Посмотрим «чистую» зависимость $\alpha(l)$ (рис. 2): если $l \rightarrow \infty$, то $l_{\text{пр}} \rightarrow l$ и $\alpha \rightarrow 0$, т.е. если размеры тела малы по сравнению с расстоянием до точки закрепления, то по своим свойствам физический маятник приближается к математическому, в частности, частота колебаний α имеет порядок $\sim 1/\sqrt{l}$, т.е. стремится к нулю; если же $l \rightarrow 0$, то $l_{\text{пр}} \sim 1/l$, и частота колебаний α также стремится к нулю, а их период возрастает.

Примечание. В случае $l = 0$ получаем, что $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \equiv \text{const}$ по времени, и можно считать, что тело колеблется с бесконечным периодом. На самом деле эта конструкция совершает стационарные движения, например, равномерно вращается.

19 Кинетическая энергия. Фазовые траектории.

Вернемся к теореме об изменении кинетической энергии:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \vec{r}_i,$$

проинтегрируем и переставим сумму с интегралом

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^N \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_i} \vec{F}_i d\vec{r}_i.$$

Существуют силовые поля, называемые **потенциальными**, в которых значение этого интеграла не зависит от траектории. Т.е. существуют такие силовые функции $U_i(\vec{r}_i)$, что $\vec{F}_i = \text{grad}(U_i)$. Тогда

$$T - T_0 = U - U_0,$$

где $U = \sum U_i$, иначе

$$T - U = h = \text{const}$$

– **интеграл энергии или «живых сил», закон сохранения механической энергии**. Полная энергия системы со стационарными идеальными связями сохраняется тогда и только тогда, когда все силы, действующие на систему, потенциальны.

В нашем случае домножим уравнение (1) на величину $\dot{\theta}$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathcal{J}_z \dot{\theta}^2 \right) = \frac{d}{dt} (mgl \cdot \cos \theta),$$

следовательно,

$$\frac{1}{2} \mathcal{J}_z \dot{\theta}^2 - mgl \cdot \cos \theta = h = \text{const}.$$

Выразим из этого уравнения угловую скорость и проанализируем ее.

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{h + mgl \cdot \cos \theta} \cdot \sqrt{\frac{2}{\mathcal{J}_z}}$$

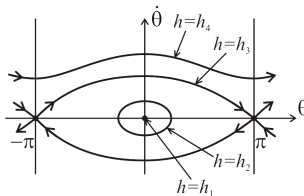


Рис. 3.

1) $h < -mgl$ — движение невозможно;
 2) $h_1 = -mgl$ — только точка покоя $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$;
 3) $-mgl < h_2 < mgl$ — колебательные движения между $\theta_1 = -\arccos(h/(mgl))$ и $\theta_2 = \arccos(h/(mgl))$, причем каждому начальному уровню энергии, т.е. каждому значению h из этого промежутка, соответствует своя замкнутая кривая в фазовом пространстве (на поверхности фазового цилиндра).

4) $h_3 = mgl$ — подкоренная функция обращается в 0 в точках $\theta = \pm\pi$, траектория образует замкнутую кривую с «углами» на фазовом цилиндре. Возникает вопрос, куда изображающая точка «двинется» дальше после «прибытия» в угол этой кривой и как быть с теоремой о единственности решения ОДУ. Ответ заключается в том, что в положение равновесия $\theta = \pi$ (или $\theta = -\pi$) изображающая точка приходит только за бесконечное время. Соответствующие траектории называются сепаратрисами. Сепаратрисы ограничивают часть плоскости, в которой происходит колебательное движение.

5) $h_4 > mgl$ — энергия слишком велика. Угловая скорость всегда остается положительной — маятник вращается в том направлении, в котором его толкнули в начальный момент. Это состояние движения называется ротацией. Заметим, что чем выше уровень энергии, тем равномернее вращение (почти нет перепадов от минимума к максимуму).

Лекция 8.

20 Следствия теоремы об изменении кинетического момента.

1. Если среди всех допустимых движений находится поворот вокруг неподвижной оси, то применима теорема об изменении кинетического момента:

$$\dot{K}_z = M_{z \text{ внеш.}}$$

Пусть $M_{z \text{ внеш.}} \equiv 0$, тогда существует первый интеграл $K_z = \mathcal{K} = \text{const.}$ Допустим также, что система вращается как твердое тело. Тогда $K_z = \mathcal{J}\omega$ — произведение момента инерции на угловую скорость вращения. Если система является твердым телом, то \mathcal{J} — постоянная величина. Добавим к этому телу одну точку, которая мо-

жет двигаться относительно тела. Пусть в начале движения момент инерции системы и ее угловая скорость равнялись соответственно \mathcal{J}_0 , ω_0 . Пусть относительное движение точки происходит исключительно за счет внутренних сил, тогда константа \mathcal{K} не изменяется, значит, с изменением момента инерции изменяется и угловая скорость, причем $\mathcal{J}_0 \cdot \omega_0 = \mathcal{J}_1 \cdot \omega_1$. Поэтому получаем

$$\frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}_1} \omega_0 = \omega_1.$$

Таким образом, угловая скорость обратно пропорциональна моменту инерции. Чтобы уменьшить угловую скорость, нужно удалить точки от оси вращения.

Заметим, что скорость центра масс не зависит от его расположения относительно тела (системы). Т.е. свободное тело (систему) можно повернуть без участия внешних сил (но нельзя сдвинуть с места ее центр масс).

2. Пусть теперь есть твердое тело, имеющее одну неподвижную точку. На него не действуют никакие внешние силы, но оно имеет полость, заполненную однородной вязкой жидкостью. Уравнения движения этой системы опять допускают первый интеграл

$$\vec{K} = \vec{\mathcal{K}} = \text{const.}$$

Если i -я главная ось системы тело-жидкость совпадает с осью вращения, то тело будет вращаться с постоянной скоростью. При этом $\mathcal{J}_i \omega_i = \mathcal{K}$. Интересно, какое движение является наиболее вероятным? Ведь если жидкость не вращается вместе с телом, как единое твердое тело, то энергия будет рассеиваться, и лишь при вращении энергия сохраняется. Посчитаем ее:

$$T_i = \frac{1}{2} \mathcal{J}_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{K}^2}{\mathcal{J}_i}.$$

Эта величина минимальна, когда система вращается вокруг оси наибольшего момента инерции, поэтому наиболее вероятным будет вращение вокруг этой оси. Как бы мы не закрутили наше тело, после некоторого количества колебаний оно придет к этому вращению.

Это подтверждается в небесной механике: все небесные тела (например, Земля) вращаются вокруг осей, перпендикулярных их «сплюснутости».

21 Обобщенные Лагранжевы координаты.

Перейдем к следующему фрагменту использования основного уравнения динамики. Вернемся к системе N материальных точек $x_i, y_i, z_i, i = 1, \dots, N$, на которую наложены геометрические (голономные) связи

$$\varphi_j(x_1, \dots, z_N, t) = 0 \quad j = 1, \dots, k, \quad (1)$$

где $0 \leq k \leq 3N - 1$, чтобы было возможно хоть какое-нибудь движение.

Эти уравнения определяют подпространство возможных положений (свое в каждый момент времени) или конфигурационное подпространство. По ним строятся уравнения

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_N} \delta z_N = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2)$$

которые определяют пространство возможных перемещений (рассматриваемое в фиксированный момент времени в фиксированной точке — касательное подпространство).

Пространство возможных перемещений может совпадать, не совпадать или пересекаться с пространством возможных скоростей, или «действительных» перемещений, которое образовано простым дифференцированием связи (1):

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_N} \dot{z}_N + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

(В случае стационарных, т.е. не зависящих явно от времени t связей, действительные перемещения всегда находятся среди возможных).

Введем в конфигурационном пространстве специальную координатную сетку, т.е. введем независимые координаты

$$q_s, \quad s = 1, \dots, r = 3N - k.$$

Число r называется числом степеней свободы. При этом координаты q_s должны предоставлять возможность однозначно вычислить все координаты $x_i = x_i(q_s, t)$. Кроме того, эти координаты позволяют параметризовать вектор возможных перемещений следующим образом

$$\delta x_i = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s. \quad (4)$$

Каждому нетривиальному решению системы (2) должна отвечать хотя бы одна вариация $\delta q_s \neq 0$, иными словами, в каждой точке конфигурационного пространства на каждом возможном перемещении $\sum_s (\delta q_s)^2 \neq 0$ (на каждом перемещении хоть одна координата должна меняться). Такая система переменных q_s называется **обобщенными Лагранжевыми координатами**. Вообще говоря, обобщенные Лагранжевы координаты можно ввести не на любой поверхности, например задать их на сфере невозможно.

22 Уравнение Лагранжа второго рода. Кинетическая энергия в обобщенных координатах.

Вспомним основное уравнение динамики:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta x_i + \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{y}_i - Y_i) \delta y_i + \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{z}_i - Z_i) \delta z_i = 0 \quad (5)$$

Замечательно, что число вариаций δq_s совпадает с числом степеней свободы. Подставляя (4) в (5) и приводя подобные, получим выражение, содержащее ровно r независимых переменных δq_s . Их линейная комбинация равна 0, значит все коэффициенты при них обращаются в 0. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_s \left(\sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \sum_i m_i \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \sum_i m_i \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \delta q_s = \\ = \sum_s \delta q_s \left(\sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \sum_i Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \sum_i Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Введем обозначение

$$\sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) = Q_s.$$

Величина Q_s называется **обобщенной силой**. *Обобщенная*, поскольку, в зависимости от координат q_s , сила Q_s может иметь разную размерность.

Преобразуем левую часть в (6). Поскольку

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (7)$$

то скорость \dot{x}_i зависит от обобщенной скорости \dot{q}_s линейным образом. Поэтому:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s};$$

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s} + \dots &= \sum_i \left[m_i \cdot \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s} \right) - m_i \cdot \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s} \right) \right] + \dots = \\ &= \sum_i \left[m_i \cdot \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s} \right) - m_i \cdot \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s} \right) \right] + \dots = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_s} + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \quad (8)$$

Полученное уравнение называется **уравнением Лагранжа второго рода**.

Нетрудно видеть, что, используя формулу (7), кинетическую энергию в новых координатах можно представить в следующем виде:

$$T(q, \dot{q}, t) = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = \sum_{i,j} a_{ij}(q_s, t) \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$T_1 = \sum_i \dot{q}_i \cdot b_i(q_s, t)$$

$$T_0 = T_0(q_s, t)$$

Видим, что кинетическая энергия T , вообще говоря, является неоднородной квадратичной формой обобщенных скоростей \dot{q}_s .

Поэтому уравнения Лагранжа линейны относительно обобщенных ускорений \ddot{q}_s .

Лекция 9.

23 Интеграл Якоби.

На прошлой лекции мы ввели понятие обобщенных координат q_s . Выразим через них векторы возможного положения точек системы $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_s, t)$ и скорости

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t},$$

а так же кинетическую энергию $T = T(\dot{q}, q, t)$. В этом случае мы записали уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \quad (1)$$

где Q_s — обобщенная сила или

$$Q_s = \sum_{i=1}^N X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \sum_{i=1}^N Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \sum_{i=1}^N Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}. \quad (2)$$

Предположим теперь, что

а) силы потенциальны, т.е. существует такая функция $U = U(\vec{r}_i)$, что

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

б) кинетическая энергия не зависит явно от времени (что, вообще говоря, может иметь место и при нестационарных связях).

Тогда U можно представить в виде функции от q_s и

$$Q_s = \frac{\partial U(q_s)}{\partial q_s}.$$

Умножим каждое из уравнений (1) на \dot{q}_s . Получим:

$$\sum_s \dot{q}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \underbrace{\sum_s \frac{\partial T}{\partial q_s} \dot{q}_s}_{\dot{U}} = \sum_s \frac{\partial U}{\partial q_s} \dot{q}_s = \dot{U}. \quad (3)$$

Заметим, что

$$\sum_s \dot{q}_s \left(\frac{\partial T}{\partial q_s} \right) = \left(\sum_s \dot{q}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \ddot{q}_s}_{\dot{U}}. \quad (4)$$

Поскольку кинетическая энергия $T = T(\dot{q}, q)$ не зависит явно от времени, то сумма подчеркнутых в (3), (4) слагаемых равняется \dot{T} , т.е.

$$\left(\sum_s \dot{q}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \dot{T} = \dot{U}.$$

У этого уравнения существует первый интеграл

$$\sum_s \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - T - U = h. \quad (5)$$

Вспомним, что в общем случае кинетическая энергия

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (6)$$

где T_2 — однородная квадратичная форма от обобщенных скоростей \dot{q}_s , T_1 — однородная линейная форма от обобщенных скоростей, а T_0 не зависит от обобщенных скоростей. Поскольку ни T_2 , ни T_1 , ни T_0 , ни U не зависят явно от времени, то интеграл (5) с учетом (6) примет вид обобщенного интеграла энергии или **интеграла Якоби**

$$T_2 - T_0 - U = h. \quad (7)$$

Таким образом, если энергия T и силовая функция U не зависят явно от времени t , то уравнения Лагранжа имеют первый интеграл, хотя полная энергия может и не сохраняться.

Обсуждавшийся ранее интеграл энергии получается из интеграла Якоби при стационарных связях. Действительно, если связи не зависят от времени, то $T_1 = 0$, $T_0 = 0$ и $T = T_2$, т.е. $T - U = h$ — тот же интеграл, что и из теоремы об изменении кинетической энергии.

Покажем, что ситуации, в которых применима теорема Якоби, встречаются в жизни.

Пример: пусть среди координат голономной механической системы есть такие, которые не входят явно в кинетическую энергию; объединим их в вектор x и назовем **циклическими**. Их скорости $\dot{x} = \omega$ при этом обязаны входить в T . Остальные координаты обозначим вектором q и будем называть **позиционными**. Предположим, что кинетическая энергия имеет следующий вид:

$$2T = \dot{q}^T A(q) \dot{q} + \omega^T B(q) \omega + 2\dot{q}^T C(q) \omega, \quad (8)$$

где символом T обозначается транспонирование.

Зададим дополнительные связи формулой $\dot{x} = \omega = \text{const}$. Получим равномерное изменение со временем части координат $x = \omega t + x_0$. Таким образом, геометрические связи оказываются нестационарными.

Поскольку T не зависит явно от времени (хотя связи, очевидно, такую зависимость содержат), то существует обобщенный интеграл энергии.

А бывают ли циклические координаты?

Для иллюстрации рассмотрим движение материальной точки, записанное в полярных координатах (например, движение планет солнечной системы).

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad (9)$$

здесь φ — **циклическая координата**, а r — **позиционная координата** (входит в выражение для кинетической энергии). Имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right) = Q_\varphi$$

Силовая функция $U = \frac{\mu m}{r}$, т.е. $Q_\varphi = 0$ и

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = mr^2\dot{\varphi} = P = \text{const} \quad (10)$$

— интеграл площадей. Выразим отсюда $r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{P^2}{mr^2}$ и подставим в функцию (9). Выпишем интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + \frac{P^2}{mr^2}) - \frac{\mu m}{r} = h. \quad (11)$$

Функцию

$$W = \frac{P^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r}$$

назовем **измененной потенциальной энергией**. Она зависит от позиционной координаты r и содержит в качестве параметра постоянную P интеграла площадей. Случай $P = 0$ не представляет для нас никакого интереса. Будем считать, что $P \neq 0$.

Как обеспечить с помощью выбора начальных условий определенное значение этого параметра?

Выберем r_0 и придадим точке начальную скорость V_0 ортогонально радиус-вектору начальной точки.

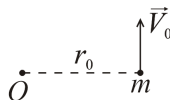


Рис. 1.

Получим, что $P = mr_0V_0$, т.е. изменяя V_0 (например, при фиксированном r_0), можно придать P любое значение.

Очевидно, что при таком выборе начальных условий имеем всегда $\dot{r}_0 = 0$!

Используем формулу (11) для построения фазовой траектории на плоскости r, \dot{r}

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(h + \frac{\mu m}{r} - \frac{V_0^2 r_0^2 m}{2r^2} \right)}. \quad (12)$$

Для второго параметра — h — имеем

$$h = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{\mu m}{r_0} > -\frac{\mu m}{r_0}$$

Очевидно, что выбор V_0 обеспечит, заодно, и определенное значение постоянной h интеграла энергии. При этом возможны даже разные знаки этого параметра.

1) Пусть сначала $h = 0$. В этом случае подкоренное выражение в (12) отрицательно при $r < r_0$, обращается в нуль при $r = r_0$, положительно при $r > r_0$, достигает максимального значения при $r = 2r_0$ и убывает до нуля при $r \rightarrow \infty$ (рис. 2). На плоскости r, φ такому движению отвечает параболическая орбита.

2) Пусть теперь $h > 0$. Подкоренное выражение по прежнему обращается в нуль при $r = r_0$, достигает максимума при $r_m = r_0^2 V_0^2 / \mu > 2r_0$ и убывает до значения $2h/m$ при $r \rightarrow \infty$ (см. рис. 2, кривая $h > 0$). На плоскости r, φ — это движение по гиперболической орбите.

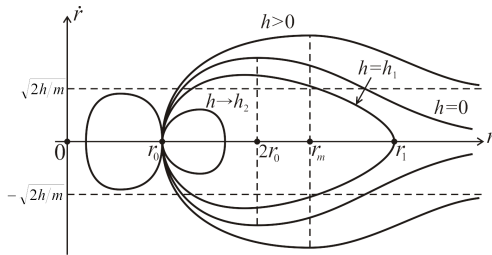


Рис. 2.

Задача. Самостоятельно вычислить \dot{r}_{max} .

Рассмотрим теперь область отрицательных значений параметра h . Подкоренное выражение в (11) устроено теперь более «хитро».

3) Пусть $h = h_1 < 0$, но относительно невелико по абсолютной величине. Видно, что, во-первых, у \dot{r} появляется второй ноль при достаточно большом значении r_1 ($r_1 \gg r_0$) и, во-вторых, фазовая траектория становится замкнутой. Это означает, что движение стало периодическим.

4) Очевидно, что уменьшение значения параметра h приводит к уменьшению (сжатию) замкнутой траектории и к стремлению r_1 к r_0 . Т.е. у параметра h , кроме значений 0 и $-\mu/r_0$ есть еще одно характерное значение h_2 , при котором r_m совпадает с r_0 , т.е.

$$h_2 = -\frac{\mu m}{2r_0}$$

На плоскости r, φ такое движение — движение точки по круговой орбите $r(t) \equiv r_0$.

5) При $-\frac{\mu m}{r} < h < -\frac{\mu m}{2r}$ у подкоренной функции в (12) появляется область положительных значений слева от r_0 . Это приводит к появлению замкнутых фазовых траекторий слева от r_0 .

Задача. Самостоятельно проверить эволюцию $\dot{r}_{max}(V_0)$.

Построенная нами картина, как видно, отличается от традиционного фазового портрета, т.к. здесь на одну плоскость r, \dot{r} спроектированы разные фазовые траектории системы, отвечающие разным значениям V_0 , но одному значению r_0 . Напомним, что полное фазовое пространство нашего объекта четырехмерно. И замкнутые фазовые траектории отвечают эллиптическим орбитам на плоскости r, φ .

Задача. А что за орбита при $V_0 = 0$?

Выше было показано, что уравнения Лагранжа допускают не только интеграл энергии, но и интеграл Якоби, и циклические интегралы. С помощью циклического интеграла мы смогли преобразовать интеграл энергии и ввести так называемую измененную потенциальную энергию.

Лекция 10.

24 Влияние «эффекта нулевых масс».

Вернемся к уравнению изменения кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \vec{v}_i), \quad (1)$$

где (\vec{a}, \vec{b}) — скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} .

Рассмотрим случай, когда $n = 2$, но система имеет одну степень свободы. Пусть существует движение, на котором $T = \text{const}$. Тогда левая часть уравнения (1) на этом движении равна нулю, откуда получаем

$$(\vec{F}_1, \vec{v}_1) + (\vec{F}_2, \vec{v}_2) = 0 \quad (2)$$

— «Золотое правило механики»: во сколько раз проигрываем в силе, во столько раз выигрываем в скорости. Обычно оно формулируется иначе: во сколько раз проигрываем в силе, во столько раз выигрываем в пути. Чтобы привести (2) к такому виду, надо проинтегрировать это соотношение, но для этого необходимо, чтобы силы были постоянны.

Но для нашей системы справедливо уравнение

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i (\vec{F}_i, \vec{v}_i) = Q\dot{q}. \quad (3)$$

У нас есть одна обобщенная сила, и в случае $T = \text{const}$ мы получаем так называемое «динамическое равновесие» при $Q = 0$.

Но левая часть уравнения (3) может обращаться в ноль также и для безынерционных систем (т.е. таких, в которых $m_i = 0$ для всех i). В реальной жизни «массы» могут оказаться очень маленькими

(по сравнению с остальными параметрами системы), но нулевых масс, конечно, не бывает. Тем не менее, такой предельный переход математически возможен.

У систем с одной степенью свободы кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$. Продифференцируем формально по времени t и подставим в уравнение (3):

$$A(q) \cdot \dot{q} \cdot \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial q} A(q) \cdot \dot{q}^3 = Q\dot{q}. \quad (4)$$

1. Для того чтобы можно было говорить о законности предельного перехода $m_i \rightarrow 0$ надо, чтобы при этом выполнялось не только $A(q) \rightarrow 0$, но и условие $\frac{\partial A}{\partial q} \rightarrow 0$.

2. Множество точек $Q = Q(q, \dot{q}) = 0$ образует некоторое многообразие в фазовом пространстве (q, \dot{q}) . Мы хотим, чтобы решения уравнения (4) при $m_i = 0$ принадлежали этому многообразию. Возникает вопрос о том, в каких случаях замена массы нулем является корректной. Ответ на этот вопрос содержится в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной (или теории разделения движений).

Рассмотрим, например, движение цилиндрического флюгера.

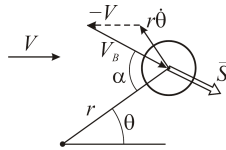


Рис. 1.

Пусть есть несжимаемый поток воздуха, движущийся со скоростью V . В него помещен цилиндр, закрепленный на тонком невесомом стержне — державке (т.е. стержень не мешает движению воздуха, пренебрежем также краевыми эффектами). Будем считать, что сила тяжести отсутствует. Пусть \mathcal{J} — момент инерции цилиндра, θ — угол отклонения флюгера, r — плечо, т.е. длина державки, V_B — так называемая воздушная скорость, α — угол между скоростью V_B и державкой и $S = sV_B^2$ — сила лобового сопротивления. Выпишем уравнение движения флюгера.

$$\mathcal{J}\ddot{\theta} = -sV_B^2 \sin \alpha \cdot r \quad (5)$$

$\alpha = \theta$, если $r\dot{\theta} = 0$, т.е. $V_{\text{в}} = V$, в общем же случае

$$V \cos \alpha = V_{\text{в}} \cos \theta \quad \text{и} \quad V \sin \alpha = r\dot{\theta} + V_{\text{в}} \sin \theta. \quad (6)$$

Если маятник безынерционный, т.е. момент инерции $\mathcal{J} \rightarrow 0$, то $\sin \alpha = 0$. Тогда из уравнения (6) получим, что

$$r\dot{\theta} + V_{\text{в}} \sin \theta = 0. \quad (7)$$

На фазовой плоскости это синусоида.

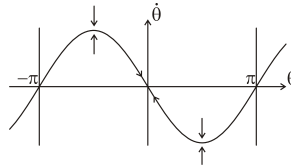


Рис. 2. Фазовая плоскость $\theta, \dot{\theta}$.

При $\mathcal{J} = \varepsilon$ эта кривая является «быстро» притягивающей, т.е. за время $\sim \varepsilon$ флюгер приобретает такую угловую скорость $\dot{\theta}$, что воздушная скорость оказывается направленной вдоль державки, и это «динамическое равновесие» сохраняется вдоль всей траектории (7).

Сопоставим теперь (5) с уравнением физического маятника

$$\mathcal{J}\ddot{\theta} = -\sin \theta \quad (8)$$

Проводя переход $\mathcal{J} \rightarrow 0$ в этом уравнении получаем, что частота растет, но маятник все равно колеблется. Значит, обращение \mathcal{J} в ноль для (8) некорректно. Такое различие объясняется тем, что первая система (флюгер) диссипативна: есть трение, сопротивление.

Получим фазовые траектории флюгера формальным образом.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{V_{\text{в}}}{r} x \\ \dot{x} &= -\frac{r^2 s}{\mathcal{J}} \frac{V^2}{V_{\text{в}}} \sin \alpha \end{aligned}$$

При $\mathcal{J} \rightarrow 0$, $\dot{x} \rightarrow \infty$, следовательно x меняется быстро. Введем вместо времени t новое «быстрое» время $T\tau$, тогда

$$\frac{x'}{T} = -\frac{r^2 s V^2}{\mathcal{J} V_{\text{в}}} \sin \alpha \quad (9)$$

$$\frac{\theta'}{T} = \frac{V_{\text{в}}}{r} x \quad (10)$$

Возьмем $T \sim \mathcal{J}$, тогда в уравнении (9) \mathcal{J} сократится, а в (10) перейдет в правую часть. Поскольку $\mathcal{J} \rightarrow 0$, получим, что $\theta' = 0$ и $\theta = \text{const}$ — фазовые кривые в «быстром» времени.

Но $x' = -r^2 s V^2 / V_{\text{в}} \sin \alpha$, т.е. параметр x изменяется вдоль этой фазовой кривой так, что $\sin \alpha \rightarrow 0$, т.е. «динамическое равновесие» $Q(q, \dot{q})$ ($\sin \alpha = 0$) является притягивающим.

Таким образом, у функции $\theta(t)$ есть две фракции: «быстрая», когда мгновенно меняется производная, а сам угол практически не меняется, происходит как бы ударное воздействие; и «медленная» — сам поворот. Ветер ударом «загоняет» легкий флюгер на синусоиду (7), а потом флюгер медленно, находясь в «динамическом равновесии», движется по ней. В этом и сказывается «эффект нулевых масс».

Лекция 11.

25 Теорема Лагранжа о стационарных решениях.

Будем рассматривать системы со стационарными связями, на которые действуют потенциальные силы, не зависящие от времени t . Тогда кинетическая энергия $T = T(q, \dot{q})$ и силовая функция $U = U(q)$ тоже не зависят от времени t . Запишем систему дифференциальных уравнений в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (1)$$

Из этой модели можно получить изменение координат со временем, в зависимости от начальных условий

$$q = q(t, q_0, \dot{q}_0, \lambda),$$

здесь λ — какие-то параметры, например, размеры и массы элементов системы. Но при этом решения могут оказаться «плохими», т.е. не записываться не только в элементарных функциях, но даже в квадратурах. Будем искать особые точки нашей системы, т.е. те, в которых решения постоянны, и исследовать поведение решений в некоторой их окрестности. Ищем решения в виде

$$\begin{cases} q(t) &= \text{const} \equiv q_0 \\ \dot{q}(t) &\equiv 0 \end{cases} \quad (2)$$

Такие решения описывают состояние покоя механической системы.

Связи стационарны, поэтому кинетическая энергия T является однородной квадратичной формой скоростей. Тогда $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ — сумма линейной формы ускорений и квадратичной формы скоростей, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ — квадратичная форма скоростей. Но все скорости в особой точке — тождественные нули, поэтому левая часть системы уравнений (1) обращается в ноль, и значит q_0 является решением системы уравнений

$$\frac{\partial U(q)}{\partial q_i} = 0 \quad (3)$$

Только что мы вывели **теорему Лагранжа**:

стационарные решения уравнения движения отвечают точкам экстремума силовой функции.

26 Продолжимость решения системы уравнений Лагранжа по параметру в окрестности особой точки.

Поскольку силовая функция является функцией параметра λ , $U = U(\lambda)$, это же самое хочется иметь и для решения, которое мы ищем: $q_0 = q_0(\lambda)$. Но по теореме о неявной функции, если для гессiana (определителя матрицы вторых производных) выполнено условие

$$\left| \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right| \neq 0,$$

то решение единственным образом продолжимо по параметру λ в некоторой окрестности точки q_0 . Если же гессиан равен 0, то могут

возникнуть следующие ситуации: решение может оказаться непродолжимым, может возникнуть ветвление, т.е. неоднозначность продолжения, или одностороннее ветвление. Остановимся на каждом из этих случаев подробнее.

Введем новую систему координат так, чтобы $q_0 = 0$ в точке $\lambda = 0$. Теперь положение равновесия — это точка с координатами $(0, 0)$.

Предположим, что функция $U(q, \lambda)$ разложима в ряд по всем своим переменным:

$$U(q, \lambda) = U'_q q + U'_\lambda \lambda + \frac{1}{2} U''_{qq} q^2 + U''_{q\lambda} q \lambda + \frac{1}{2} U''_{\lambda\lambda} \lambda^2 + \dots \quad (4)$$

$U'_q q = 0$, т.к. система находится в положении равновесия, т.е. выполнено (3). Поскольку $U'_\lambda \lambda$ и $U''_{\lambda\lambda} \lambda^2$ не зависят от q , они обратятся в ноль при дифференцировании по q . Члены третьего порядка — это члены более высокого порядка малости (т.к. мы рассматриваем окрестность точки $(0, 0)$), поэтому их влияние тоже можно пока не учитывать. Продифференцируем то, что осталось от уравнения (4) по q и получим:

$$U''_{qq} q + U''_{q\lambda} \lambda = 0$$

Если $U''_{qq} \neq 0$, то по теореме о неявной функции, существует единственное продолжение.

Теперь рассмотрим случай, когда $U''_{qq} = 0$, тогда

$$U = U''_{q\lambda} q \lambda + \frac{1}{6} U'''_{qqq} q^3 + \frac{1}{2} U'''_{qq\lambda} q^2 \lambda + \dots$$

Отсюда получим квадратное уравнение:

$$\frac{1}{2} U'''_{qqq} q^2 + U'''_{qq\lambda} q \lambda + U''_{q\lambda} \lambda = 0$$

Если сначала предположить, что $U'''_{qq\lambda} = 0$, то получим, что

$$q^2 = -2 \frac{U''_{q\lambda}}{U'''_{qqq}} \lambda \sim \lambda,$$

а значит, $q \sim \sqrt{\lambda}$, т.е. второе слагаемое действительно мало по сравнению с двумя другими, если они не нули, поэтому вторым слагаемым можно пренебречь. В этом случае мы получаем параболу, т.е.

в одну сторону продолжения нет, а в другую есть, но неоднозначное. Причем это ветвление является грубым, т.е. оно сохраняется при малых возмущениях.

Пусть теперь выполнено также и $U''_{q\lambda} = 0$. Выпишем сразу уравнение на q , которое мы получим после разложения в ряд и дифференцирования.

$$\frac{1}{2}U'''_{qqq}q^2 + U'''_{qq\lambda}q\lambda + \frac{1}{2}U'''_{q\lambda\lambda}\lambda^2 = 0$$

Если при этом $U'''_{q\lambda\lambda} = 0$, то существуют два решения: $q = 0$ и $q \sim \lambda$. Это негрубое ветвление: при $U'''_{q\lambda\lambda} \neq 0$, но достаточно малой, решениями будут гиперболы. Если же знаки U'''_{qqq} и $U'''_{q\lambda\lambda}$ совпадают, то при достаточно «большом» значении $|U'''_{q\lambda\lambda}|$ решение $q = 0$ непродолжимо по λ .

Рассмотрим еще случай симметричной силовой функции, когда

$$U = \frac{1}{2}U''_{qq}q^2 + \frac{1}{24}U^{(4)}_{qqqq}q^4 + \frac{1}{2}U'''_{qq\lambda}q^2\lambda + \{\text{младшие члены}\}$$

Дифференцируя и приравнявая нулю, получим:

$$q\left(U''_{qq} + \frac{1}{6}U^{(4)}_{qqqq}q^2 + U'''_{qq\lambda}\lambda\right) = 0$$

При $U''_{qq} \neq 0$ скобка не обращается в нуль при «малых» значениях q и λ , поэтому существует единственное тривиальное решение $q \equiv 0$. Но при $U''_{qq} = 0$, $U^{(4)}_{qqqq} \neq 0$, $U'''_{qq\lambda} \neq 0$ от него отходят две полупараболы с вертикальными касательными.

Лекция 12.

27 Приведение системы уравнений Лагранжа к диагональному виду в окрестности положения равновесия.

На прошлой лекции мы выяснили, что для того, чтобы найти положение равновесия системы достаточно найти экстремумы силовой функции системы U . Пусть решение системы уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 0$$

точка q_* , тогда ей отвечает движение типа покой: $q(t) \equiv q_*$. Иногда силовая функция зависит еще и от некоторого параметра $U = U(q, \lambda)$. Тогда решение $q_* = q_*(\lambda)$ и при некоторых значениях параметра λ функция $q_*(\lambda)$ может оказаться многозначной. В фазовом пространстве (\dot{q}, q) положения равновесия системы q_{1*}, q_{2*}, \dots образуют неподвижные точки фазового потока (траектория обращается в точку). Возникает вопрос об устойчивости положения равновесия: что происходит в малой окрестности неподвижной точки фазового потока. Перейдем к новой системе координат так, чтобы $q_* = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} + o(D) \\ U &= U(0) + \frac{\partial U}{\partial q}(0) \cdot q + \frac{1}{2} q^T B(0) q + o(D), \end{aligned} \quad (1)$$

где D обозначает члены второго порядка малости, $B(0)$ — матрица Гесса (матрица производных второго порядка), символом q^T обозначается вектор-строка q . Для изучения движения системы в окрестности неподвижной точки выпишем уравнения Лагранжа без учета членов второго порядка малости. Введем обозначения:

$$b_{ij} = \frac{\partial U}{\partial q_i \partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = A(0) \ddot{q}.$$

Тогда уравнение малых движений будет линейным и имеет вид:

$$A \ddot{q} = Bq. \quad (2)$$

Таким образом, от исследования малых движений системы в окрестности положения равновесия системы мы перешли к исследованию системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Заметим, что матрица A является симметрической, положительно-определенной. Матрица B тоже симметрическая, как матрица вторых производных.

Конечно, с помощью введения вспомогательной переменной $v = \dot{q}$ получим систему уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{q} &= v \\ A \dot{v} &= Bq \end{cases}$$

Но при этом мы потеряем свойство симметричности.

Будем искать решения уравнения (1) в виде

$$q = Q \cdot e^{\kappa t}. \quad (3)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получим

$$(A\kappa^2 - B) \cdot Q = 0,$$

здесь вектор Q постоянен, так как матрицы A и B не зависят от времени. Для существования нетривиального решения надо потребовать, чтобы матрица системы была вырожденной, т.е. $\det(A\kappa^2 - B) = 0$. Мы получили характеристическое уравнение системы. Обозначим $\mu = \kappa^2$, тогда характеристическое уравнение примет вид: $\det(A\mu - B) = 0$, здесь μ — действительное число, т.к. матрицы A и B симметричны. Расписывая уравнение (1) по координатам, получим систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^n b_{ji} q_i \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Матрица A для механических систем является положительно определенной, а матрица B является симметричной. Поэтому существует преобразование координат, переводящее матрицу A в единичную матрицу, а B — в диагональную. Новые координаты называются **нормальными**, а система (4) принимает вид:

$$\ddot{x}_i = \mu_i x_i.$$

Здесь μ_i — корни характеристического уравнения.

28 Типы особых точек линеаризованной системы с симметрической матрицей (вещественными собственными значениями).

Посмотрим теперь на устойчивость положения равновесия при различных значениях параметра μ .

Если есть хотя бы одно значение $\mu_i > 0$, то решением является

$$X_{i_1} \cdot e^{\sqrt{\mu_{i_1}} t} + X_{i_2} \cdot e^{-\sqrt{\mu_{i_1}} t}$$

Оно почти при любых начальных условиях неограниченно растет при $t \rightarrow \infty$, но на фазовой плоскости (x, \dot{x}) есть и входящие в начало координат, и выходящие из него «усы». Поэтому такая особая точка называется седловой точкой.

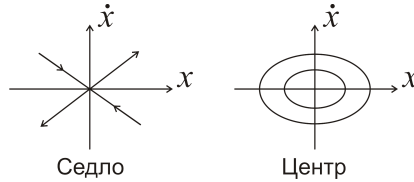


Рис. 1.

Если $\mu_i < 0$ для всех i , $1 \leq i \leq n$, то решение ограничено в окрестности положения равновесия, его общий вид задается формулой:

$$x_i = a \cos \kappa t + b \sin \kappa t.$$

Такая особая точка называется центром. При этом нелинейные члены могут, вообще говоря, «раскачать» систему.

Наконец, если $\mu = 0$, то общее решение имеет вид $x = at + b$, т.е. координата x неограниченно растет «почти при всех начальных условиях». Правда, и само положение равновесия в первом приближении оказалось неизолированным.

Лекция 13.

29 Устойчивость положения равновесия системы, находящейся под действием потенциальных сил.

Рассмотрим движение системы n материальных точек. Пусть q_i — обобщенные (Лагранжевы) координаты. Пусть точка $q = 0$ — положение равновесия системы. В окрестности состояния покоя $q = 0, \dot{q} = 0$ имеем:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} q_i q_j \quad (2)$$

Здесь a_{ij} и b_{ij} — константы. Выпишем также систему уравнений Лагранжа

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^n b_{ij} q_i \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

Тогда из этой системы получим уравнение

$$\det(A\mu - B) = 0,$$

где матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$. Поскольку матрицы A и B симметрические (в силу своего физического смысла), все корни этого уравнения $\mu_i = \kappa_i^2$ — действительные числа. Если при этом существует такой индекс i , что $\mu_i > 0$, то решением уравнения (3) будет положительная экспонента, ей отвечает движение, при котором соответствующая координата неограниченно возрастает по абсолютной величине, и поэтому траектория уйдет из любой окрестности положения равновесия.

Рассмотрим случай $\mu_i < 0$ для всех i , $1 \leq i \leq n$, тогда $\kappa_i = \pm i\sqrt{\mu_i}$ — чисто мнимые. Этому случаю отвечают периодические колебания всей системы. Возникает вопрос, могут ли члены второго порядка малости испортить этот процесс, и насколько. Покажем, что потенциальными силами колебательность нарушить не удастся.

Будем исследовать уравнение $a\ddot{q} = bq$, $b < 0$. Существует интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}bq^2 = h,$$

поэтому в фазовой плоскости (\dot{q}, q) траектория имеет вид эллипса.

Заметим, что на всем фазовом пространстве функция $h = T - U$ не отрицательна, т.к. кинетическая энергия положительна, а матрица Гесса отрицательно определена.

Сечение $h = 0$ отвечает точке покоя, $h = \varepsilon$ — некоторая окрестность этой точки. Фазовая кривая — это замкнутая кривая второго порядка. Члены большего порядка малости могут только лишь немного видоизменить эту кривую. При уменьшении h новые кривые будут оставаться внутри старых, т.к. фазовые кривые не должны пересекаться друг с другом, и все стянется к нулю.

Определение. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при заданной норме в пространстве (\dot{q}, q) , из неравенства

$\|\dot{q}, q\|_0 < \delta$ в начальный момент времени, следует, что в любой момент времени t справедливо неравенство: $\|\dot{q}, q\|_t < \varepsilon$; то такое положение равновесия называется **устойчивым**.

Теорема Лагранжа–Дирихле об устойчивости положения равновесия. Если связи, наложенные на систему стационарны, а силы потенциальны, то

1. Точки экстремума силовой функции U определяют положение равновесия системы.
2. Если точка экстремума является изолированным максимумом, то это положение равновесия устойчиво.

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой гессиан (определитель матрицы вторых производных) равен нулю в точке максимума. Это означает, что существует i : $\mu_i = 0$. Тогда движение вдоль соответствующего направления в первом приближении задается уравнением $\ddot{q}_i = 0$. Его решением является линейная по времени t функция. Она тоже неограниченно растет с ростом t , но это рост линейный, а не экспоненциальный. В этом случае линейное приближение дает неверную информацию о малом движении. По теореме Лагранжа–Дирихле все малые движения ограничены.

Теорема Лагранжа о положении равновесия и его устойчивости привязана к закону сохранения энергии

$$T - U = h,$$

но мы установили, что интеграл типа интеграла энергии существует и в некоторых других случаях. Тогда он имеет вид

$$T_2 - T_0 - U = h,$$

где T_2 — квадратичная форма обобщенных скоростей, а T_0 — функция от обобщенных координат. Обозначим $W = T_0 + U$, и назовем ее **обобщенной силовой функцией**. Соответственно, сформулируем обобщенную теорему Лагранжа в этом случае.

Теорема. Точки экстремума функции W — это точки относительного положения равновесия системы. Если обобщенная силовая функция имеет строгий максимум в положении относительного равновесия, то это положение равновесия устойчиво.

30 Импульс. Циклические интегралы.

Обозначим, как раньше, буквами q позиционные координаты (в выражение для кинетической энергии T они входят явно), а буквами x циклические координаты (в T они входят только посредством своих производных). Циклические скорости будем обозначать $\omega = \dot{x}$. Тогда выражение для кинетической энергии примет вид:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}^T \cdot A(q) \cdot \dot{q} + \omega^T \cdot B(q) \cdot \omega + 2\dot{q}^T \cdot C(q) \cdot \omega), \quad (4)$$

где символом q^T обозначается транспонированный вектор. Будем считать, что $Q_x = 0$.

Если x — циклическая координата, $\omega = \dot{x}$, то

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right) = 0. \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = p = \text{const}. \quad (6)$$

Определение. Частная производная кинетической энергии по скорости называется **импульсом**. Заметим, что импульс, отвечающий циклическим координатам постоянен, т.е. он оказывается интегралом (**циклический интеграл**). Подставляя выражение кинетической энергии (4) в формулу (6), получим

$$B(q) \cdot \omega + \dot{q}^T \cdot C = p. \quad (7)$$

Для того, чтобы формулы выглядели попроще, положим $C \equiv 0$. Тогда

$$\omega = B^{-1}p. \quad (8)$$

Подставим это выражение в формулу (4) и напишем закон сохранения энергии. Имеем,

$$\frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}p^T (B^{-1})^T \cdot B B^{-1} \cdot p - U = h. \quad (9)$$

Поскольку матрица B симметрична, $(B^{-1})^T = B^{-1}$. Введем обобщенную силовую функцию

$$W = U - \frac{1}{2} p^T \cdot B^{-1} \cdot p.$$

Поскольку, вообще говоря, $\omega_* \neq 0$ (индекс $*$ означает, что точка соответствует положению равновесия системы), то циклические координаты изменяются равномерно, т.е. исходная система совершает стационарное движение.

Соотношение (9) можно трактовать, как интеграл энергии некоторой механической системы, имеющей координаты q_i , матрицу A в качестве матрицы кинетической энергии и силовую функцию W . Эту механическую систему обычно называют **приведенной**. Для исследования ее положений равновесия можно пользоваться сформулированной выше теоремой.

Поскольку $W = W(q_i, p)$, т.е. явно зависит от параметров — вообще говоря, циклических импульсов, — то и положение равновесия, $q_{i*} = f_i(p)$. Покажем, что положение равновесия приведенной системы отвечает стационарным движением исходной.

Назначим некоторые значения параметров p . Найдем соответствующие им $q = q(p)$ — стационарные значения позиционных координат. Подставляя их в (8), найдем отвечающие им циклические скорости ω_* .

Лекция 14.

31 Движение системы материальных точек под действием сил трения.

В реальном мире закон сохранения энергии обычно не выполняется: существует трение. Будем считать, что сила трения зависит от скорости системы и, может быть, от положения: $\mathcal{F}(x, \dot{x})$.

Определение. Назовем **диссипативными** силы, удовлетворяющие следующим двум условиям:

1. $\mathcal{F}(x, \dot{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $|\dot{x}| = 0$.
2. $(\dot{x}^T, \mathcal{F}) \leq 0$ при $\dot{x} \neq 0$.

Запишем уравнение движения системы, линеаризованное около положения равновесия. Поскольку любую матрицу можно разло-

жить в сумму симметрической и кососимметрической, то имеем

$$A\ddot{x} + D\dot{x} + G\dot{x} - Bx = 0, \quad (1)$$

где матрица D сил трения – симметрическая, матрица G – кососимметрическая, а матрицы A и B – симметрические, как матрицы кинетической энергии и вторых производных от U , соответственно. Умножим уравнение (1) на \dot{x}^T слева. Тогда $\dot{x}^T G \dot{x} = 0$ из-за кососимметричности, и останется:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^T A \dot{x} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} x^T B x \right) = -\dot{x}^T D \dot{x}. \quad (2)$$

Если матрица D положительно определена, то соответствующие силы диссипативны с полной диссипацией. Если квадратичная форма $\dot{x}^T D \dot{x}$ неотрицательно определена, то силы диссипативны с частичной диссипацией (по некоторым направлениям рассеяния не происходит).

Если консервативная система имела в некоторой точке устойчивое положение равновесия, а мы подействовали на нее некоторой диссипативной силой, то эта сила будет «затягивать» в это положение равновесия.

Пример. Рассмотрим колебания двух маятников с пружинным демпфером.

Рис. 1.

Пружина создает диссипативную силу с частичной диссипацией. При этом противонаправленные колебания маятников затухнут, а синхронные останутся, демпфер будет колебаться, как обычный маятник.

Силы с кососимметрической матрицей G обычно называются **гироскопическими**.

Лекция 15.

32 Теоремы Кельвина-Четаева о влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость.

В теоретической механике, как и в любой другой науке, важную роль играет классификация. Мы будем классифицировать механи-

ческие системы и соответствующие им математические образы.

Все системы, линеаризованные около положения равновесия, имеют вид:

$$A\ddot{x} + D\dot{x} + G\dot{x} + Bx + Nx = 0 \quad (1)$$

где матрицы D и B симметричны, а матрицы G и N кососимметричны (каждый из коэффициентов при \dot{x} и x раскладывается на симметрическую и кососимметрическую составляющие). Для реальных физических систем коэффициент при \ddot{x} не может быть произвольным — он отвечает кинетической энергии, поэтому считаем матрицу A симметричной и положительно определенной (т.е. $A^T = A$ и $A \gg 0$). Символ A^T означает транспонирование матрицы A).

На прошлой лекции из уравнения (1), было выведено соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^T A \dot{x} + \frac{1}{2} x^T B x \right) = -(\dot{x}^T D \dot{x} + \dot{x}^T N x) \quad (2)$$

В этом соотношении не участвует G , т.к. для кососимметрической матрицы G имеем $\dot{x}^T G \dot{x} \equiv 0$.

Согласно *теореме Ляпунова*, если найдется гладкая функция $V(x, \dot{x})$, являющаяся квадратичной формой от (x, \dot{x}) , такая что $V \gg 0$ и $\dot{V} \leq 0$ в некоторой окрестности $x = 0, \dot{x} = 0$, то положение равновесия $x = 0$ устойчиво по Ляпунову; если, сверх того, $\dot{V} \ll 0$ то оно асимптотически устойчиво (символ \gg здесь означает соответствующую знакоопределенность).

Из этой теоремы и соотношения (2) будут следовать *теоремы Кельвина–Четаева*, формулируемые ниже. Необходимо будет положить

$$V = \frac{1}{2} \dot{x}^t A \dot{x} + \frac{1}{2} x^t B x$$

Прежде всего рассмотрим консервативную систему, т.е. такую, что $D = 0, G = 0, N = 0$. Для нее уравнения (1) и (2) запишутся так:

$$A\ddot{x} + Bx = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^t A \dot{x} + \frac{1}{2} x^t B x \right) = 0 \quad (4)$$

Случай, когда у B есть нулевые собственные значения труден для исследования; поэтому сделаем

Предположение 1: собственные значения B ненулевые.

Для консервативной системы имеем случаи:

1. $B \gg 0$. Положение $x = 0, \dot{x} = 0$ устойчиво по Ляпунову
2. $B \ll 0$. Положение $x = 0, \dot{x} = 0$ неустойчиво
3. $B <> 0$. Положение $x = 0, \dot{x} = 0$ неустойчиво

Предположение 2: $N = 0$, т. е. позиционные неконсервативные силы отсутствуют.

Первая теорема Кельвина–Четаева (о влиянии диссипативных сил) : Если положение равновесия было устойчиво при действии одних потенциальных сил, то оно останется устойчивым и при дополнительном действии диссипативных сил.

а). Если $B \gg 0$, то добавление $D \geq 0$ сохраняет устойчивость.

б). Если при этом к тому же $D \gg 0$ (имеет место полная диссипация), то устойчивость становится асимптотической.

Замечание. Утверждение теоремы сохранится и при наличии гироскопических сил (т. е. $G \neq 0$)

Пункт б) можно прокомментировать следующим образом. Вследствие полной диссипации при наличии скорости энергия рассеивается и периодических траекторий возникнуть не может.

Может ли положение равновесия быть асимптотически устойчивым в условиях пункта а)? Очевидно, необходимо, чтоб многообразие, на котором $\dot{x}^T D \dot{x} = 0$ не содержало целых траекторий (на этих траекториях отсутствовала бы диссипация и колебания не затухали бы). Можно показать, что это условие является и достаточным.

Что можно сказать об устойчивости при $D = 0$? На этот вопрос отвечает

Вторая теорема Кельвина–Четаева (о влиянии гироскопических сил) : Если положение равновесия было устойчиво при действии одних потенциальных сил, то оно останется устойчивым и при дополнительном действии гироскопических сил.

Если $B \gg 0$, то добавление $G \neq 0$ сохраняет устойчивость.

Что произойдет при добавлении диссипативных сил к системе с неустойчивым положением равновесия?

Теорема: Если $B <> 0$, то добавление $D \gg 0$ сохраняет неустойчивость.

Идея доказательства. Уравнение изменения энергии выглядит так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^t A \dot{x} + \frac{1}{2} x^t B x \right) = -\dot{x}^t D \dot{x}$$

$B < 0$, и поэтому можем выделить в пространстве x сектор, где потенциальная энергия отрицательна. Отступим немного от границы и возьмем начальную точку $x = x^0$, $\dot{x} = 0$. Энергия при движении будет уменьшаться, и точка будет от границы удаляться.

Для гироскопических сил аналогичная теорема неверна. Гироскопические силы могут стабилизировать положение равновесия. В подтверждение этого рассмотрим следующий

Пример. Рассмотрим консервативную систему

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= a^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 &= b^2 x_2 \end{cases}$$

Положение равновесия неустойчиво. Добавим силу с кососимметрической матрицей G .

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= a^2 x_1 + g \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 &= b^2 x_2 - g \dot{x}_1 \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - a^2 & g\lambda \\ -g\lambda & \lambda^2 - b^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

$$g^2 \lambda^2 + (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2) = 0 \quad (6)$$

Это биквадратное уравнение.

$$\lambda^4 + \lambda^2(g^2 - a^2 - b^2) + a^2 b^2 = 0 \quad (7)$$

$$D = (g^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2$$

Мы легко можем добиться того, чтобы характеристическое уравнение имело чисто мнимые корни. Для этого необходимо добиться выполнения условия $\lambda^2 < 0$. По теореме Виета, примененной к (7), как квадратному уравнению относительно λ^2 , его корни имеют одинаковый знак. Итого, нам необходимо

1. $D > 0$.

2. $g^2 - a^2 - b^2 > 0$

т. е. $g^2 - a^2 - b^2 > 2ab$ и, в результате, $g^2 > (a+b)^2$. Пункт 2 заведомо выполняется, если считать без ограничения общности $a > 0, b > 0$.

Замечание. В исходной системе потенциальные силы давали неустойчивость по обеим координатам. Если заменить, например, во втором уравнении b^2 на $-b^2$ то наше рассуждение не пройдет, и при $D > 0$ один из корней (7), будет положительным.

Лекция 16.

На прошлой лекции мы немного затронули вопросы теории возмущения дифференциальных уравнений. Механика в основном имеет дело с системой второго порядка, имеющей коэффициенты специального вида:

$$A\ddot{q} + D\dot{q} + Gq + Bq + Nq = 0$$

Мы можем домножать это уравнение на разные матрицы, при этом вид коэффициентов будет изменяться (например, произведение симметрических матриц может не быть симметрической матрицей). Иногда (не всегда) N можно таким образом уничтожить.

33 Задача о поперечных колебаниях маховика на гибком валу.

Будем рассматривать маховик, вращающийся на гибком валу в вертикальной плоскости (см. рис. 1а). Трудно изготовить идеально центрированный маховик, поэтому считаем, что его центр масс G не совпадает с точкой закрепления K . Тело при этом будет совершать плоскопараллельные колебания в плоскости симметрии. На рис. 1б изображен вид в проекции на плоскость симметрии. Пусть $F = kr$ т. е. сила упругости вала линейна по смещению. $|KG| = e$ — т. наз. эксцентриситет — ошибка в центровке маховика.

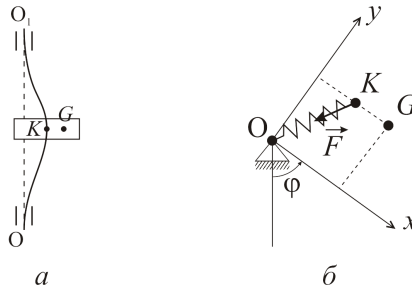


Рис. 1.

Введем обобщенные координаты следующим образом. Рассмотрим подвижную систему координат с началом в точке O и осью OX , параллельной KG . За обобщенные координаты возьмем x и y — координаты точки G в этой системе и угол φ ее поворота относительно какого-либо фиксированного направления. Будем считать, что маховик крутильных колебаний относительно вала не имеет, а вал вращается приводом равномерно. Таким образом, получаем связь

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

Она редуцирует одну степень свободы, и их остается две. Запишем уравнения движения. Из-за вращения координатной системы появятся центробежная и кориолисова силы. Учтем так же силу внутреннего трения, гасящую колебания вала и пропорциональную относительной скорости с коэффициентом h . Будем считать вал цилиндрическим и коэффициенты пропорциональности, следовательно, одинаковыми по всем направлениям. Итого:

$$m\ddot{x} = -k(x - e) + m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y} - h\dot{x} \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -ky + m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x} - h\dot{y} \quad (2)$$

Значения коэффициентов h и k обуславливаются внутренними свойствами материала и вращение маховика на них не влияет.

Станем искать стационарные точки системы (1),(2). Для этого положим в уравнениях системы

$$\dot{x} = 0, \ddot{x} = 0, \dot{y} = 0, \ddot{y} = 0.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} k(x - e) = m\omega^2 x \\ ky = m\omega^2 y. \end{cases}$$

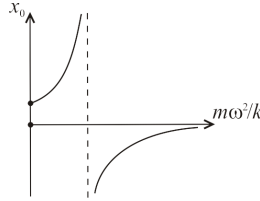


Рис. 2.

Имеем следующие случаи:

1) $m\omega^2 \neq k$. Тогда решение

$$y_0 = 0$$

$$x_0 = \frac{ke}{k - m\omega^2}$$

2) $m\omega^2 = k$. Решение отсутствует, так как первое уравнение не имеет решения.

На графике (см. рис. 2) отображена зависимость x_0 от параметра $m\omega^2/k$. График имеет две ветви.

Осуществим сдвиг $x' = x - x_0$. В новых координатах уравнения возмущенного движения (1), (2) примут вид

$$m\ddot{x} = -kx + m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y} - h\dot{x} \quad (3)$$

$$m\ddot{y} = -ky + m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x} - h\dot{y} \quad (4)$$

(здесь штрихи опущены).

Исследуем характер устойчивости тривиального решения этой системы.

Потенциальные силы

$$F_x^{\text{потенц}} = -x(k - m\omega^2)$$

$$F_y^{\text{потенц}} = -y(k - m\omega^2)$$

обеспечивают устойчивость на левой ветви и неустойчивость на правой. Добавление к ним гироскопических сил

$$\begin{aligned} F_x^{\text{гир}} &= 2m\omega\dot{y} \\ F_y^{\text{гир}} &= -2m\omega\dot{x} \end{aligned}$$

не нарушит устойчивости на левой ветви по теореме Кельвина – Четаева. Но, как видно из прошлой лекции, добавление гироскопических сил может стабилизировать неустойчивую ситуацию, поэтому для правой ветви необходимо исследовать характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + (k - m\omega^2) & -2m\omega\lambda \\ 2m\omega\lambda & m\lambda^2 + (k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$(m\chi + (k - m\omega^2))^2 + 4m^2\omega^2\chi = 0,$$

где $\chi = \lambda^2$.

$$m^2\chi^2 + 2(mk + m^2\omega^2)\chi + (k - m\omega^2)^2 = 0$$

Корни одного знака, так как свободный член положителен. Сумма их отрицательна, а сами они вещественны, так как $D > 0$ (квадрат суммы положительных величин больше квадрата их разности). Отсюда $\lambda^2 < 0$, следовательно, гироскопические силы стабилизируют ситуацию и на правой ветви.

Однако, имеются еще диссипативные силы

$$\begin{aligned} F_x^{\text{дис}} &= -h\dot{x} \\ F_y^{\text{дис}} &= -h\dot{y} \end{aligned}$$

с полной диссипацией, поэтому на левой ветви будет устойчивость, а на правой неустойчивость по теоремам из прошлой лекции. Поэтому существует критическое значение угловой скорости, которое превышать нельзя, чтобы не произошло разрушения механизма (хотя $x_0 \rightarrow 0$ с ростом ω , т. е. система самоцентрируется).

Положение отчасти спасает внешнее трение (о воздух). Считаем его пропорциональным абсолютной скорости точки G.

$$v_{\text{абс}} = v_{\text{отн}} + \omega \times r_G$$

Упражнение. Исследовать, к чему приведет добавление сил внешнего трения.

где a — расстояние от точки O (точки закрепления) до центра G масс тела.

Заметим, что координата θ является позиционной, а координаты φ и ψ — циклические.

Введем обозначения $A := \mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y$, $C := \mathcal{J}_z$. В нашей системе существует интеграл энергии, поскольку сила тяжести потенциальна, а связь идеальна и стационарна. Выпишем первый интеграл системы — интеграл энергии:

$$mga \cos \theta + \frac{1}{2} \left(A\dot{\theta}^2 + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \right) = h. \quad (4)$$

Циклическим координатам отвечают циклические интегралы — импульсы:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = U (= \text{const}); \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = V (= \text{const}). \quad (6)$$

Кроме того, в системе постоянен момент количества движения относительно вертикальной оси. Величина V есть проекция кинетического момента на вертикальную ось. Она постоянна для произвольного тела. Величина U постоянна только потому, что система обладает симметрией по отношению к повороту относительно оси z . В более общем случае задача перестает быть интегрируемой.

Выразим

$$\dot{\psi} = \frac{V - U \cos \theta}{A \sin^2 \theta}. \quad (7)$$

Это преобразование становится негладким, если ось z оказывается вертикальной, т.е. при $\sin \theta = 0$. Действительно, в этом положении невозможно различить угловые скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$, поэтому в этом положении координаты стали зависимыми, т.е. перестали быть обобщенными. Поэтому пока будем считать, что $\sin \theta \neq 0$. Перепишем выражение для полной энергии с учетом формулы (6):

$$h = mga \cos \theta + \frac{1}{2} A\dot{\theta}^2 + \frac{(V - U \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + \frac{U^2}{2C}.$$

Последнее слагаемое — константа, поэтому в качестве интеграла энергии можно рассматривать выражение

$$\tilde{h} = mga \cos \theta + \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{(V - U \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta}. \quad (8)$$

Тогда можно ввести измененную потенциальную энергию — функцию одной координаты θ

$$\tilde{\Pi} = mga \cos \theta + \frac{(V - U \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta}. \quad (9)$$

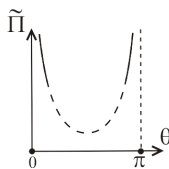


Рис. 2.

Экстремумы измененной потенциальной энергии соответствуют положениям равновесия редуцированной системы. Предположим, что для постоянных циклических интегралов выполняется соотношение: $U^2 \neq V^2$. В точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ у функции $\tilde{\Pi}(\theta)$ полюса, причем существуют вертикальные асимптоты и оба «рога» направлены вверх. Таким образом, при почти любых начальных значениях полной энергии \tilde{h} движение будет происходить в ограниченных пределах и угол θ никогда не примет значение 0 или π .

Продифференцируем функцию $\tilde{\Pi}$. Получим:

$$\begin{aligned} mga \sin \theta &= \frac{2(V - U \cos \theta)U \sin \theta}{2A \sin^2 \theta} - \frac{2(V - U \cos \theta)^2 \cos \theta}{2A \sin^3 \theta} = \\ &= \frac{(V - U \cos \theta)(U - V \cos \theta)}{A \sin^3 \theta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Это уравнение поверхности $\theta(U, V)$. Ее линии уровня суть гиперболы на плоскости (U, V) . Получим уравнения асимптот этой гиперболы $\theta_c(U, V)$:

$$V = \frac{U}{\cos \theta}, \quad V = U \cos \theta$$

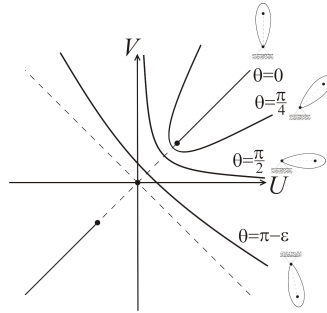


Рис. 3. Линии уровня функции $\theta(U, V)$.

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеем обычную гиперболу $V = \frac{1}{U}$. При $\theta \rightarrow \pi$ она будет разворачиваться, стремясь к биссектрисе II и IV четвертей, а при $\theta \rightarrow 0$ — складываться. Посмотрим, что получится при $U = V$. Уравнение (9) при этом примет вид:

$$V^2(1 - \cos \theta)^2 = amgA \sin^4 \theta = amgA(1 - \cos \theta)^2(1 + \cos \theta)^2. \quad (11)$$

Вдоль всей этой линии есть решение $\theta = 0$. Для второго решения имеем

$$V^2 = amgA(1 + \cos \theta)^2. \quad (12)$$

При убывании угла θ от π до 0 выражение в скобках монотонно растет от 0 до 2. Таким образом, вершина гиперболы ползет по биссектрисе первого координатного угла вверх и гиперболы, отвечающие различным значениям θ никогда не пересекаются друг с другом. Это означает, что при каждом заданном значении параметров U и V функция $\tilde{\Pi}(\theta)$ имеет единственный минимум $\theta_*(U, V)$ (см. рис. 2), а, следовательно, по теореме Лагранжа положение равновесия устойчиво. Заметим, что в силу непрерывности можно считать, что на прямой $V = U$ каждой точке $\theta \neq 0$ тоже соответствует единственный минимум функции $\tilde{\Pi}(\theta)$, т.е. устойчивое положение равновесия.

Геометрические интерпретации движения.

1) Введем неподвижную сферу с центром в точке 0 (сферу Пуассона) и движение тела, в котором редуцированная система находится в состоянии покоя, т.е. $\theta(t) \equiv \theta_c(U, V)$. Вычислим величину $\dot{\psi}$ угловой скорости прецессии. Из (6) следует, что $\dot{\psi} \neq 0$ ни в одной

точке гиперболы. Следовательно, ось z тела описывает на сфере окружность. Тело совершает регулярную прецессию, но при разных значениях параметров U, V различны и скорости $\dot{\psi}$ этих прецессий.

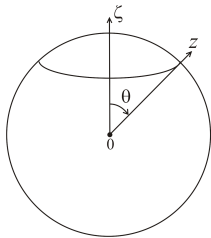


Рис. 4. Регулярная прецессия.

2) «Пройдемся» сначала по ветви гиперболы $\theta_* = \frac{\pi}{2}$ ($UV = 2mgAa$), начиная с ее правого конца ($U = \infty$). Поскольку в этой точке $V = 0$, то из (6) следует, что здесь $\dot{\psi} = 0$. При любом конечном значении параметра U угловая скорость $\dot{\psi}$ прецессии положительна ($\dot{\psi} = V/A$) и возрастает по мере приближения к верхнему концу этой ветви. Из сказанного вытекает, что все «правые» («левые») хвосты семейства гипербол отвечают «медленным» прецессиям, а все «верхние» («нижние») — «быстрым».

3) Возмущение прецессии.

На гиперболе $UV = mgAa$ имеем $\tilde{h}_{min} = \frac{V^2}{2A}$. Именно это значение параметра \tilde{h} и отвечает регулярной прецессии тела с горизонтальным наклоном его оси. Если же $\tilde{h} > \frac{V^2}{2A}$, то в пространстве θ, U, V изображающая точка перемещается по отрезку прямой, перпендикулярной плоскости (U, V) , и находящемуся внутри интервала $(0, \pi)$. При этом она совершает колебания около точки $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Для описания малых колебаний выделим в $\tilde{\Pi}$ члены второго порядка по $x = \theta - \frac{\pi}{2}$

$$\tilde{\Pi} \sim \frac{1}{A}(U^2 + V^2)x^2$$

Видно, что частота малых колебаний около медленной прецессии ($V \rightarrow 0, U \rightarrow \infty$) велика по сравнению с угловой скоростью прецессии. Поэтому ось z тела будет «рисовать» на сфере Пуассона петли около экватора (см. рис. 5).

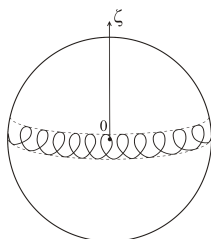


Рис. 5. Возмущение медленной прецессии.

Иная картина в области «быстрых» прецессий ($U \rightarrow 0, V \rightarrow \infty$). Здесь частота колебаний угла θ почти совпадает с угловой скоростью $\dot{\psi}$ прецессии. Поэтому угловое расстояние между последовательными точками пересечения осью тела экватора равно примерно 2π .

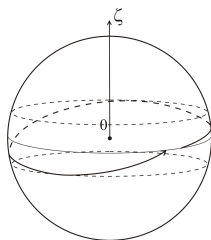


Рис. 6. Возмущение быстрой прецессии.

Несмотря на внешне различный характер этих колебаний их фазовые портреты качественно похожи как «в малом», так и «в большом» (см. рис. 7а), и при конечных значениях параметров U, V ($U \neq V$) чем выше значение \tilde{h} , тем интенсивней полюса $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ «отражают» фазовую точку и превращают ее фазовую траекторию в траекторию бильярда.

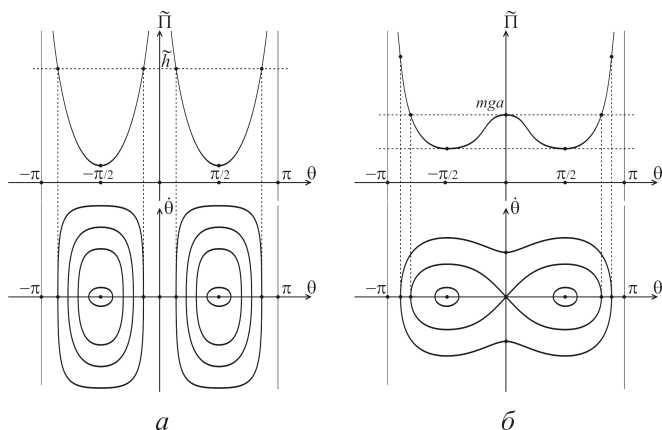


Рис. 7.

Редкая перестройка (катастрофическая) фазового портрета происходит, когда $U = V$. В этой точке функция \tilde{P} «теряет» один полюс $\theta = 0$, который превращается в ее максимум (см. рис. 7б).

Характер малых колебаний около положения $\theta = \frac{\pi}{2}$ остался прежним, но точка $\theta = 0$ теперь достижима при $\tilde{h} \geq mga$. При $\tilde{h} = mga$ образуется восьмерка, состоящая из седловой точки $\theta = 0$ и двух сепаратрис. При $\tilde{h} > mga$ — фазовые траектории охватывают оба минимума $\theta_1 = \pi/2$ и $\theta_2 = -\pi/2$ потенциальной энергии. С ростом параметра \tilde{h} они снова превращаются в траекторию билиярда, но уже с «бортами» в точках $\theta = -\pi$ и $\theta = \pi$.

Отразим отдельно на сфере Пуассона петлю, отвечающую сепаратрисе (см. рис. 8). Движение волчка с асимптотическим (при $t \rightarrow \infty$) выходом его оси в вертикальное положение носит название «спящий волчок».

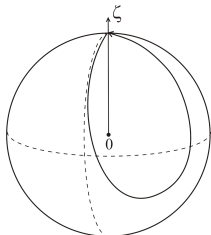


Рис. 8. «Спящий волчок».

Все свойства, присущие прецессии с наклоном $\theta = \frac{\pi}{2}$, качественно выполняются и при других значениях θ . (*Упражнение.* Описать их самостоятельно.)

4) Изменение угла наклона при прецессии.

Рассмотрим теперь, как будет изменяться фазовый портрет колебаний «в большом», если параметры U , V «перемещать» вдоль прямой $U = V$ в сторону уменьшения угла наклона ($V^2 \rightarrow 4mgAa$). При этом (см. рис. 9) происходит сближение минимумов функции $\tilde{\Pi}$ и их слияние с ее максимумом в точке $\theta = 0$.

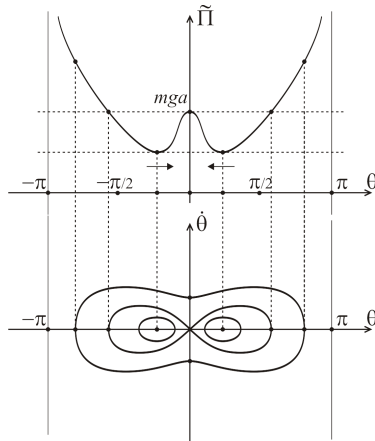


Рис. 9.

Такая эволюция $\tilde{\Pi}$ приводит к стягиванию петель сепаратрис на фазовом портрете колебаний и уменьшению «пережатия» охватывающих траекторий. При $V^2 = 4mgAa$ сепаратрисы исчезают. Фазовый портрет колебаний при $V^2 = 4mgAa$ становится качественно похожим на рис. 7а с тем лишь отличием, что колебания совершаются на интервале $(-\pi, \pi)$ около точки $\theta = 0$.

Упражнение. Эволюцию фазового портрета при увеличении угла наклона описать самостоятельно.

Напомним, что любой «сход» параметров U , V в сторону от прямой $U = V$ немедленно вызывает «катастрофу» — появление у $\tilde{\Pi}$ полюса в точке $\theta = 0$ с соответствующими вытекающими из этого перестройками фазового портрета.

Гироскоп без действия силы тяжести.

Уничтожим параметр g , т. е. положим $g = 0$. Уравнение равновесия запишется так:

$$0 = (v - u \cos \theta)(v \cos \theta - u)$$

Гиперболы вырождаются в лучи (см. рис. 10). В правом квадранте $\dot{\psi} = 0$ — здесь «собрались» режимы чистого вращения. В другом имеем:

$$\dot{\psi} = \frac{v - u \cos \theta}{A \sin^2 \theta} = \frac{v^2 - u^2}{v^2 - u^2} \frac{v}{A} = \frac{v}{A}$$

т. е. вдоль прямой $v = \text{const}$ в верхнем квадранте значение $\dot{\psi}$ не меняется. Здесь только и «поместились» регулярные прецессии.

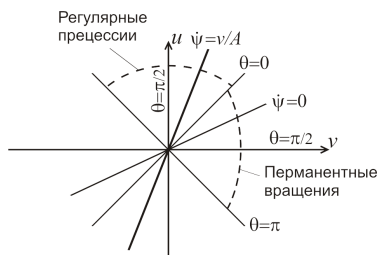


Рис. 10.

Задача. При отсутствии силы тяжести для любого движения оси z гироскопа можно выбрать систему координат так, что в ней оно будет регулярной прецессией.

Лекция 19.

35 Введение в механику сплошной среды.

Тела бывают разные: твердые, жидкие и газообразные. Сегодня речь пойдет о движении жидкого тела, заключенного в сосуд с плоскопараллельными стенками. Будем считать, что жидкость в сосуде движется таким образом, чтобы в любой момент времени существовала плоскость γ , сечения параллельными переносами которой двигались бы одинаково. Описание конфигурационного пространства, занимаемого жидкостью, приводит к описанию поверхностей типа:

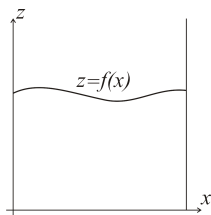


Рис. 1.

Четкая поверхность раздела имеет место из-за того, что система находится в поле тяжести и существует окружающий воздух. (В невесомости жидкое состояние не реализуется – вся жидкость превращается частично в лед, а частично в газ.) Окружающий воздух мы будем считать неким условным газом, не относящимся к материальным телам, т.е. пренебрежем его плотностью, а будем учитывать только создаваемое им давление. Пренебрежем так же термодинамическими эффектами, т.е. тем, что со временем жидкость может испаряться.

Свяжем неподвижную систему координат с сосудом, как показано на рис. 2. Будем считать, что ось y направлена от нас.

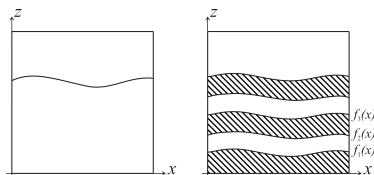


Рис. 2.

Плотность силовой функции поля силы тяжести равняется

$$U = -\rho g z \quad (1)$$

, где ρ — плотность жидкости.

Интегрируя по объему, занимаемому жидкостью, получим потенциальную энергию системы

$$\Pi = \int_{(\tau)} \rho g z d\tau. \quad (2)$$

Будем считать, что длина сосуда равняется L и все вертикальные сечения одинаковы, тогда интегрирование по объему можно заменить интегрированием по площади, и формула (2) примет вид

$$\Pi = L \int_S \rho g z dS. \quad (3)$$

Положим $L = 1$ и разобьем жидкость на однородные слои поверхностями $z = f_i(x)$. Преобразуем интеграл (3) к виду:

$$\Pi = g \int_0^1 dx \sum_i \int_{f_i(x)}^{f_{i+1}(x)} \rho_i z dz = M \cdot z_{\text{ж}}, \quad (4)$$

где $z_{\text{ж}}$ — z -координата центра масс жидкости.

Мы хотим применить к этой ситуации теорему Лагранжа или теорему Торичелли, но они были сформулированы для систем с конечным числом степеней свободы. Здесь же потенциальная энергия является функционалом и число степеней свободы бесконечно.

Предположим, что устойчивому положению равновесия опять отвечает минимум потенциальной энергии. Доказывать это мы не будем, поскольку если на систему не наложены никакие ограничения (например, условие сплошности), то мы не можем даже описать ее. А позже будет показано, что доказательство подобного факта невозможно в принципе.

Заметим теперь, что при падении капелек воды вниз, как и при всплывании на поверхность пузырьков воздуха, центр тяжести понижается, а значит, потенциальная энергия уменьшается. Поэтому система неизбежно должна принять вид, изображенный на рис. 3.

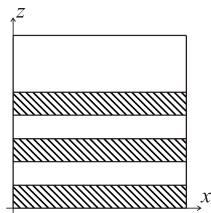


Рис. 3.

Но от последних дыр избавиться не удастся, т.к. при опускании воды увеличивается давление воздуха в промежутке между слоями

— создается поршневой эффект и вода перестает опускаться дальше вниз.

Посмотрим, что происходит в нижнем слое. Для этого оставим лишь интеграл от 0 до f_1 . Тогда

$$Mz_{\text{ж}} = \Pi = \rho g \int_0^1 dx \frac{1}{2} f_1^2(x). \quad (5)$$

В стационарном значении вариация потенциальной энергии равна 0. Возьмем вариацию подынтегрального выражения:

$$\delta \Pi = 0 = \rho g \int_0^1 f_1 \delta f_1 dx, \quad (6)$$

здесь δf_1 — функция, описывающая возмущение поверхности. Приравнять к нулю коэффициент при вариации нельзя (получится, что $f_1 = 0$, т.е. жидкость находится в покое только тогда, когда ее нет). На самом деле, δf_1 не является независимой функцией. Поскольку жидкость предполагается несжимаемой, надо потребовать сохранения объема. Итак,

$$\int_0^1 f_1(x) dx = \text{const},$$

тогда

$$\int_0^1 \delta f_1(x) dx = 0.$$

Получим по принципу Лагранжа уравнение равновесия:

$$0 = \rho g \int_0^1 (f_1 - \lambda_*) \delta f_1 dx, \quad (7)$$

откуда $f_1 = \lambda_* = \text{const}$.

Итак, равновесной является конфигурация, в которой свободная поверхность горизонтальна. Все равновесные конфигурации —

это такие, в которых жидкость расположена между двумя горизонтальными плоскостями.

Пусть теперь верхний слой жидкости находится под жесткой крышкой. Выпишем вторую вариацию. Пусть $f(x)$ — поверхность верхнего слоя жидкости. Тогда

$$\Pi = \rho g \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - f^2(x))dx, \quad (8)$$

$$\delta\Pi = 0 = \rho g \int_0^1 (-f\delta f)dx, \quad (9)$$

и, наконец,

$$\delta^2\Pi = -\rho g \int_0^1 (\delta f)^2 dx < 0, \quad (10)$$

независимо от ограничений, т.е. в верхнем слое потенциальная энергия не имеет минимума. В то же время, для нижнего слоя (ограниченного снизу дном) имеем

$$\delta^2\Pi = \rho g \int_0^1 \delta f_1^2 dx > 0. \quad (11)$$

Таким образом, мы рационально обосновали устойчивость наблюдаемого положения равновесия.

Покажем невозможность строго обосновать сделанное расширение принципа Лагранжа.

Пусть над поверхностью воды болтается капля. Сосуд имеет ограниченную высоту. Тогда капля может выплеснуться через край.

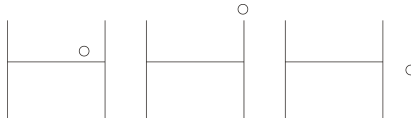


Рис. 4.

Потенциальная энергия уменьшилась. Таким образом, все вышерассмотренное годится только для сосудов с бесконечными стенками или крышками.

Кроме того, можно рассматривать бесконечно тонкую трубку из самой жидкости — сифон. Поскольку сечение трубки бесконечно мало, достаточно будет небольшого возмущения, чтобы создать пусть очень маленькую, но конечную начальную скорость. А дальше жидкость будет течь по этой трубке, пока вся не вытечет. При этом, возникновение трубки не очень увеличит потенциальную энергию жидкости, т.к. масса трубки бесконечно мала.

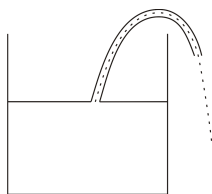


Рис. 5.

Таким образом, условие $\delta^2\Pi > 0$ не гарантирует безусловного сохранения равновесной конфигурации. Более того, вода, например, в сосуде непрерывно испаряется, и значит, равновесной конфигурации, строго говоря, нет.

Этот пример показывает, что на пути строгой математической формализации движения даже относительно простых объектов природы могут возникнуть практически непреодолимые препятствия.

Лекция 20.

36 Устойчивость формы жидкости при действии сил поверхностного натяжения.

На прошлой лекции мы рассматривали сосуд, наполненный водой, и обосновали следующее утверждение: если поверхность жидкости горизонтальна и жидкость находится под ней, то состояние ее устойчиво. Мы предполагали принцип Лагранжа распространенным на жидкости и показали, что в этом состоянии достигается минимум потенциальной энергии.

Однако в жизни мы можем наблюдать жидкость, находящуюся в устойчивом состоянии при совсем другой конфигурации: поверхность жидкости может иметь форму, близкую к сферической (например, жидкость в узкой трубке), а сама жидкость может находиться даже над ней (капли, свисающие с потолка в помещениях с большой влажностью). Это объясняется действием сил поверхностного натяжения.

Примем следующую гипотезу: потенциальная энергия складывается не только из энергии, связанной с силой тяжести, но и из поверхностной энергии, пропорциональной площадям свободной и смоченной поверхности.

$$\Pi = \alpha\sigma + \alpha_1\sigma_T + \Pi_g$$

где σ и σ_T площади, соответственно, свободной и смоченной поверхностей. В этой модели исходим из понятия энергии, а не из понятия силы. Силы могут быть восстановлены по энергиям, как градиенты.

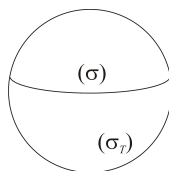


Рис. 1.

Обобщим этот случай: будем считать, что жидкостей в сосуде две. При этом к уравнению добавляется слагаемое $\alpha_2(\sigma_{\text{сосуда}} - \sigma_T)$. Однако, $\alpha_2\sigma_{\text{сосуда}} = \text{const}$, и мы, переименовав коэффициенты и отбросив константы, придем к этому же уравнению.

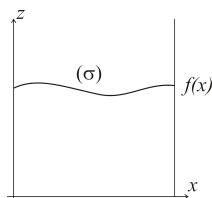


Рис. 2.

Перепишем Π через функцию f , описывающую поверхность.

$$\Pi = \int_0^1 (\rho_1 - \rho_2) g \frac{f^2}{2} dx + \alpha_1 f(0) + \alpha_1 f(1) + \alpha \int_0^1 \sqrt{1 + f'^2} dx$$

При этом сохраняется объем:

$$\int_0^1 f(x) dx = V \quad (1)$$

Будем полагать $\rho_1 - \rho_2 = \rho$. Проанализируем:

$$\delta \Pi = \alpha \int_0^1 dx \frac{f' \delta(f')}{\sqrt{1 + f'^2}} + \alpha_1 \delta f(0) + \alpha_1 \delta f(1) + \int_0^1 dx g \rho f \delta f$$

При этом появляется $\delta(f')$. Будем предполагать f , такой что что варьирование и дифференцирование перестановочны: $\delta(f') = (\delta f)'$. Первое слагаемое проинтегрируем по частям:

$$\alpha \int_0^1 dx \frac{f' \delta(f')}{\sqrt{1 + f'^2}} = \frac{\alpha f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \delta f \Big|_0^1 - \int_0^1 dx \left(\frac{\alpha f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \right)'$$

Используя (1), получаем:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\alpha f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \right)' + \rho g f = \lambda = \text{const} \\ \alpha_1 + \frac{\alpha f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \Big|_1 &= 0, \quad \alpha_1 - \frac{\alpha f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \Big|_0 = 0 \end{aligned}$$

f' представляет из себя тангенс угла наклона:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \tan \theta(0) \\ \sin \theta(0) &= \frac{\alpha_1}{\alpha} \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\sin \theta(1) = -\frac{\alpha_1}{\alpha}$$

Это — граничные условия для f , а θ — так называемый угол смачивания.

Станем полагать $g = 0$ т. е. силой тяжести пренебрежем.

$$-\left(\frac{\alpha f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)' = \lambda$$

$$\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}} - \frac{f'^2 f''}{(1+f'^2)^{3/2}} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} = \chi = \text{const}$$

Решение есть кривая постоянной кривизны, то есть окружность (в частном случае прямая).

Отношение $\frac{\alpha_1}{\alpha}$ задается условиями задачи. Как проинтерпретировать с физической точки зрения случай $\alpha_1/\alpha \geq 1$? При этом надо считать, что контакт с твердой стенкой отсутствует, то есть между твердой стенкой и первой жидкостью заливается бесконечно тонкий слой второй.

Рассмотрим случай $g \neq 0$. Для упрощения положим $\alpha_1 = 0$. Тогда $f'(0) = f'(1) = 0$. $f(x) = \text{const}$ есть решение, и в силу единственности других решений нет. Найдем вторую вариацию считая, что невозмущенная поверхность $f \equiv 0$

$$\delta^2 \Pi = \int_0^1 (\rho g (\delta f)^2 + \alpha (\delta f')^2) dx$$

Если $\rho > 0$, то есть нижняя жидкость тяжелее верхней, то конфигурация устойчива.

Если $\rho < 0$, заменим в формуле ρ на $-\rho$. Надо решить

$$\delta^2 \Pi = \int_0^1 (-\rho g (\delta f)^2 + \alpha (\delta f')^2) dx > 0$$

или, сократив и переобозначив $f = \delta f$,

$$(*) = \int_0^1 (-k^2 f^2 + f'^2) dx > 0, \quad k^2 = \rho g / \alpha$$

При $k = 0$ неравенство верно. При малых k оно тоже выполняется, но с ростом k появится такое $f(x)$, на котором оно неверно. Эта функция будет ненулевым минимумом. Рассмотрим соответствующую экстремальную задачу.

$$\frac{\delta(*)}{2} = \int_0^1 (f' \delta f' - k^2 f \delta f) dx = 0$$

Проинтегрировав по частям:

$$f' \delta f|_0^1 - \int_0^1 (f'' + k^2 f) \delta f dx = 0.$$

Откуда получаем краевую задачу:

$$\begin{aligned} f'' + k^2 f &= c \\ f'(0) = f'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Считаем что f отсчитывается от невозмущенного уровня. Условие изопериметричности имеет вид:

$$\int_0^1 f dx = 0.$$

Отсюда $f = A \cos(kx - x_0) + C$. Производная на концах должна равняться 0, и поэтому при $k < \pi$ краевая задача не имеет нетривиального решения. Отсюда получаем условие устойчивости для верхнего расположения жидкости:

$$\frac{\rho g}{\alpha} < \pi^2$$

Лекция 21.

37 Задача о равновесии твердого тела с жидким наполнением.

Возьмем сосуд с жидким наполнением (по простому, банку с водой) в качестве физического маятника.

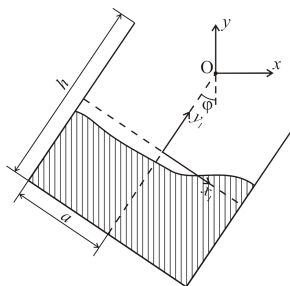


Рис. 1.

Поскольку система находится в поле силы тяжести, устойчивое положение равновесия отвечает наинизшему положению центра масс. Для пустого сосуда это означает, что стенки сосуда должны быть расположены вертикально. Если налить жидкость, то эта конфигурация по-прежнему будет соответствовать положению равновесия, но, возможно, неустойчивого. Мы будем исследовать устойчивость этого положения равновесия.

Для описания системы введем угол φ отклонения оси симметрии сосуда от вертикали и уровень поверхности жидкости в сосуде $y_1 = f(x_1)$, в координатах (x_1, y_1) связанных с сосудом, (для простоты рассматриваем двумерный случай). Конфигурационное пространство представляет собой объединение прямой φ и множества функций f , удовлетворяющих условию

$$\int_{-a}^a f(x_1) dx_1 = 0.$$

Это условие сохранения объема (жидкость не испаряется). Положение поверхности жидкости отсчитываем от невозмущенного состояния, т.е. наше положение равновесия описывается уравнениями

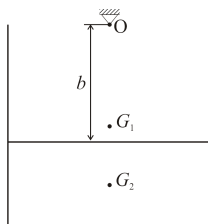


Рис. 2.

$$q = 0, \quad f(x) \equiv 0.$$

Пусть G_1 — центр масс пустого сосуда, G_2 — центр масс жидкости в положении равновесия. (Устойчивость которого собираемся исследовать) Пусть $OG_1 = h_1$, $OG_2 = h_2$, m_1 — масса пустого сосуда, m_2 — масса жидкости, ρ — плотность жидкости.

Введем неподвижную систему координат (xOy), как показано на рис. 1, начало координат находится в точке подвеса O , b — расстояние между началом координат подвижной и неподвижной систем (невозмущенной поверхностью жидкости и точкой подвеса).

$$y = (-b + y_1) \cos \varphi - x_1 \sin \varphi \quad - \quad \text{связь между координатами}$$

Тогда потенциальная энергия относительно точки O :

$$\begin{aligned} \Pi &= -m_1 g h_1 \cos \varphi + g \int_{V_{\text{жидк.}}} \rho y dx dy = \\ &= -m_1 g h_1 \cos \varphi + g \int_{-a}^a dx_1 \int_{-h+b}^{f(x_1)} [(y_1 - b) \cos \varphi - x_1 \sin \varphi] \rho dy_1 = \\ &= -m_1 g h_1 \cos \varphi + g \int_{-a}^a \left(\left[\frac{f^2(x_1)}{2} - \frac{(h-b)^2}{2} - b f(x_1) + b^2 - b h \right] \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - x_1 (f(x_1) - b + h) \sin \varphi \right) \rho dx_1 = \quad (1) \\ &\left(\text{используем то, что } \int_{-a}^a f(x_1) dx_1 = 0 \text{ и } \int_{-a}^a x_1 dx_1 = 0 \right) \\ &= -m_1 g h_1 \cos \varphi + g \int_{-a}^a \left(\frac{f^2(x_1) + b^2 - h^2}{2} \cos \varphi - x_1 f(x_1) \sin \varphi \right) \rho dx_1 = \\ &\left(\text{поскольку } \frac{b^2 - h^2}{2} = h_2(b - h) \text{ и } \int_{-a}^a (b - h) \rho dx_1 = -m_2 \right) \\ &= -(m_1 h_1 + m_2 h_2) g \cos \varphi + g \int_{-a}^a \left[\frac{f^2(x_1)}{2} \cos \varphi - x_1 f(x_1) \sin \varphi \right] \rho dx_1 = \end{aligned}$$

(с точностью до константы, равной $-m_1gh_1 - m_2gh_2$ и малых выше второго порядка)

$$\begin{aligned}
 &= m_1gh_1 \frac{\varphi^2}{2} + m_2gh_2 \frac{\varphi^2}{2} + \\
 &\quad + g\rho \int_{-a}^a \left(\frac{1}{2}(f^2(x_1) - 2x_1f(x_1)\varphi + \varphi^2x_1^2) - \frac{1}{2}\varphi^2x_1^2 \right) dx_1 = \\
 &= m_1gh_1 \frac{\varphi^2}{2} + m_2gh_2 \frac{\varphi^2}{2} + g\rho \int_{-a}^a \frac{1}{2} (f(x_1) - x_1\varphi)^2 dx_1 - \frac{\varphi^2}{2} \frac{2}{3} a^3 \rho g = \\
 &= m_1gh_1 \frac{\varphi^2}{2} + m_2g \left(h_2 - \frac{a^2}{3(h-b)} \right) \frac{\varphi^2}{2} + \\
 &\quad + g\rho \int_{-a}^a \frac{1}{2} (f(x_1) - x_1\varphi)^2 dx_1 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Все остальное — члены третьего порядка малости, которые мы не учитываем. Константу — нулевого порядка малости — равную значению потенциальной энергии в положении равновесия мы тоже не учли (она не имеет большого значения). Заметим также, что слагаемые первого порядка малости обратились в 0, т.е. положение системы $\varphi = 0$, $f(x_1) = 0$ действительно является положением равновесия.

Условия устойчивости:

$$\begin{aligned}
 \Pi(\varphi, f()) - \Pi(0, 0) &= m_1gh_1 \frac{\varphi^2}{2} + \\
 &+ m_2g \left(h_2 - \frac{a^2}{3(h-b)} \right) \frac{\varphi^2}{2} + g\rho \int_{-a}^a \frac{1}{2} (f(x_1) - x_1\varphi)^2 dx_1 \geq 0. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Это равносильно неравенству $m_1gh_1 + m_2g \left(h_2 - \frac{a^2}{3(h-b)} \right)^{-1} \geq 0$. (Т.к. интеграл всегда не меньше нуля, но при любом φ бывает равен нулю, поскольку функция φx_1 — допустимая, т.е. $\int_{-a}^a \varphi x_1 dx_1 = 0$). В противном случае это положение равновесия становится неустойчивым.

Итак, если G — центр масс всей системы, а $M = m_1 + m_2$ — масса всей системы, то условием устойчивости положения равновесия $\varphi = 0$, $f(x) = 0$ является условие:

$$My_G(0) = -m_1 h_1 - m_2 h_2 \leq -m_2 \frac{a^2}{3(h-b)}$$

(Если бы жидкость была заморожена, то условие устойчивости: $My_G(0) \leq 0$.)

Этим описывается следующее физическое явление: если достаточно легкий сосуд симметрично закреплен в центре масс и его глубина меньше, чем $\frac{2}{3}$ его ширины, то устойчивому положению равновесия с малым количеством жидкости отвечает рис. 3а, а на рис. 3б положение равновесия неустойчиво.

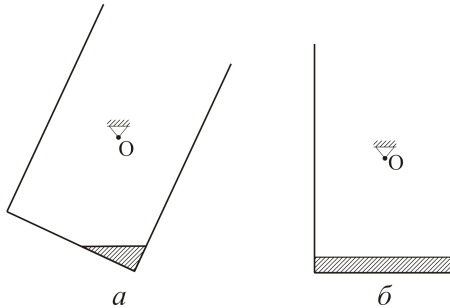


Рис. 3.

Лекция 22.

38 Уравнения Гамильтона.

Вариационные задачи занимают почетное место в теоретической механике.

Рассмотрим конфигурационное пространство в обобщенных координатах (q_1, q_2, \dots, q_n) . Пусть P_0 — начальное положение системы. Придадим системе начальные скорости — она придет в движение, опишет некоторую траекторию в конфигурационном пространстве и в момент времени t займёт в нем положение P_t . Станем предполагать, что система консервативна, то есть связи, наложенные на неё

идеальны и голономны, а силы, действующие на неё потенциальны. Введем

$$L = L(q, \dot{q}) = T + U.$$

L является дескриптивной функцией системы, то есть полностью её описывает. Введем **действие** формулой:

$$V = \int_{t_0}^t L dt.$$

Действие является функционалом на возможных траекториях системы и обладает замечательным экстремальным свойством: минимум его по всем возможным траекториям, соединяющим P_0 и P_t , достигается на действительной траектории. Положим

$$q = q_1(t) + \delta q(t).$$

Время мы не варьируем, а варьируем координаты в каждый фиксированный момент времени. При этом

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_{t_0}^t \delta L dt = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \delta q \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) dt \end{aligned}$$

Если уравнение Лагранжа выполняется, то подынтегральное выражение обращается в 0. Концы мы считаем фиксированными, поэтому первое слагаемое тоже обращается в 0, и наша траектория оказывается экстремалью.

Если рассматривать ситуацию не в малом, а в большом, то может появиться возможность попасть из одной точки в другую по нескольким траекториям.

Перейдем от координат (q, \dot{q}) к другим, так называемым фазовым координатам (q, p) . Назовём i —м **импульсом**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Разрешив это уравнение относительно \dot{q}_i , получим

$$\dot{q}_i = f_i(p).$$

Введём **гамильтониан**

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

После осуществления замены

$$H = H(q, p) = \sum_i p_i \dot{q}_i(p) - L(q, \dot{q}(p)).$$

H тоже является дескриптивной функцией.

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

Вхождение p в L не влияет на производную, так как добавок

$$\sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i} = 0$$

Имеем

$$\begin{aligned} V &= \int_{t_0}^t L dt = \int_{t_0}^t \left(\sum_i p_i \dot{q}_i(p) - H(q, p) \right) dt \\ \delta V &= \int_{t_0}^t dt \left(\sum_i \dot{q}_i \delta p_i + \sum_i p_i \delta \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \\ &= p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t dt \delta q \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

В силу экстремальности траектории получаем

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

Система

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \end{cases}$$

называется системой канонических уравнений Гамильтона. Она уже разрешена относительно производных.

Мы можем рассматривать V не как функционал, а как функцию начального и конечного положений и времени. При этом

$$-p_0 = \frac{\partial V}{\partial q_0}(q_0, q, t), \quad p = \frac{\partial V}{\partial q}(q_0, q, t),$$

и

$$V = \int_{t_0}^t \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p) \right) dt.$$

Продифференцировав V , получим два выражения:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q} \dot{q} \\ \dot{V} &= \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p). \end{aligned}$$

Приравнявая правые части, получаем **уравнение Гамильтона**:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H \left(q, \frac{\partial V}{\partial q} \right) = 0$$

Решая его, можем получить уравнения траектории.

Лекция 23.

39 Ускорения точек системы с неголономными связями.

Рассмотрим систему N материальных точек со связями

$$\sum_{i=1}^N a_i(t, r) \dot{x}_i + \sum_{i=1}^N b_i(t, r) \dot{y}_i + \sum_{i=1}^N c_i(t, r) \dot{z}_i + f(t, r) = 0. \quad (1)$$

Связи могут быть голономными, а могут и не быть. Формально подставим вместо производных \dot{x}_i виртуальные перемещения δx_i , и получим вместо вектора реальных скоростей вектор возможных перемещений:

$$\sum_{i=1}^N a_i(t, r) \delta x_i + \sum_{i=1}^N b_i(t, r) \delta y_i + \sum_{i=1}^N c_i(t, r) \delta z_i = 0. \quad (2)$$

Если связи не зависят явно от времени t , то эти уравнения совпадают. Запишем **основное уравнение динамики**:

$$\sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (3)$$

Пусть в момент времени t известно состояние системы $\vec{r}_i(t)$, $\dot{\vec{r}}_i(t)$, но неизвестно ускорение $\ddot{\vec{r}}$. Мы хотим решить следующую геометрическую задачу: в пространстве всех возможных ускорений найти реальное ускорение.

Поскольку связи не накладываются на ускорения, искать их мы будем из условий кинематики, а не динамики. Но мы знаем, что уравнение (1) выполняется в любой момент времени, продифференцируем его. Получим

$$\sum_{i=1}^N a_i(t, \vec{r}) \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^N b_i(t, \vec{r}) \ddot{y}_i + \sum_{i=1}^N c_i(t, \vec{r}) \ddot{z}_i + \Phi(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = 0. \quad (4)$$

Будем обозначать реальные ускорения индексом (d) вверх (действительные), а возможные – индексом (μ) (мыслимые). Тогда

$$\sum_i a_i(t, r) (\ddot{x}_i^{(\mu)} - \ddot{x}_i^{(d)}) + \dots + 0 = 0, \quad (5)$$

т.к. состояния в каждый момент времени одинаковые. Т.е. разность $\ddot{x}_i^{(\mu)} - \ddot{x}_i^{(d)}$ удовлетворяет тому же уравнению, что и вектор возможного перемещения. Это означает, что $\delta \vec{r}_i = \kappa (\ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)} - \ddot{\vec{r}}_i^{(d)})$. Освободим систему от связей и введем соответствующие ускорения $\ddot{\vec{r}}_i^{(o)} = \vec{F}_i/m_i$. Тогда из основного уравнения динамики получим, что

$$\sum_i m_i (\ddot{\vec{r}}_i^{(d)} - \ddot{\vec{r}}_i^{(o)}) (\ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)} - \ddot{\vec{r}}_i^{(d)}) = 0. \quad (6)$$

Раскроем скобки и приведем подобные.

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)m(\ddot{\vec{r}}_i^{(d)})^2 - m\ddot{\vec{r}}_i^{(o)}\ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)} + m\ddot{\vec{r}}_i^{(d)}\ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)} + m\ddot{\vec{r}}_i^{(o)}\ddot{\vec{r}}_i^{(d)} + \\
 & + \frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(o)})^2 - \frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(o)})^2 + \frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)})^2 - \frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)})^2 = \\
 & = \frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)} - \ddot{\vec{r}}_i^{(o)})^2 - \frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(d)} - \ddot{\vec{r}}_i^{(o)})^2 - \frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(d)} - \ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)})^2 = 0
 \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)} - \ddot{\vec{r}}_i^{(o)})^2 = \frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(d)} - \ddot{\vec{r}}_i^{(o)})^2 + \frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(d)} - \ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)})^2,$$

достигает минимума при $\frac{1}{2}m(\ddot{\vec{r}}_i^{(d)} - \ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)})^2 = 0$. Получили еще одну задачу на минимум:

$$A = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i^{(\mu)} - \frac{F_i}{m_i} \right)^2.$$

Минимум A достигается на $\ddot{\vec{r}}_i^{(d)}$ — **принцип Гаусса наименьшего принуждения**.

Замечание. Мы ищем минимум при условии того, что выполняется соотношение (5).

Итак, мы получили, что отклонение мыслимого движения от освобожденного (нет никаких связей) достигает минимума на действительном ускорении. Этот принцип справедлив также и для систем с неголономными связями.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.М. Морозову за ценные замечания по тексту, а также Т.С. Сумину и Ю.Д. Селюцкому за оформление материала.

Учебное издание

Виталий Александрович САМСОНОВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО МЕХАНИКЕ

Технический редактор И.В. Топорнина

Подписано в печать 15.07.2015

Формат 60x90 1/16

Бумага офсет. №1

Офсетная печать

Объем 5.5 усл. печ. л.

Тираж 120 экз.

Издательство Московского университета

125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7

Отпечатано на ризографе НИИ механики МГУ

119192, Москва, Мичуринский пр., 1