



ГОРЯЧЕВА Ирина Георгиевна – доктор физ.-мат. наук, профессор, академик Российской академии наук, автор более 200 научных работ и 5 монографий в области механики контактных взаимодействий и трибологии. Лауреат премии Ленинского комсомола, премии Правительства РФ, Национальной премии общественного признания достижений женщин России «Олимпия», Международной золотой медали по трибологии.



МАХОВСКАЯ Юлия Юрьевна – кандидат физ.-мат. наук, специалист в области механики контактного взаимодействия и трибологии, в том числе механики адгезионного взаимодействия деформируемых тел.



МОРОЗОВ Алексей Владимирович – кандидат тех. наук, специалист в области экспериментальной трибологии.



СТЕПАНОВ Федор Игоревич – кандидат физ.-мат. наук, специалист в области механики контактных взаимодействий и трибологии.

ISBN 978-5-4344-0429-7

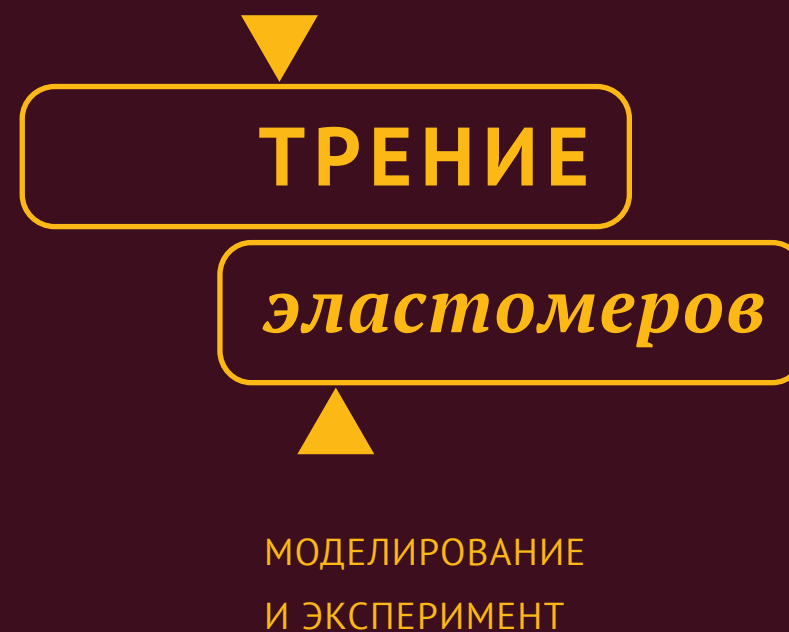


А. В. Морозов
Ф. И. Степанов

ТРЕНИЕ эластомеров
моделирование и эксперимент

И. Г. Горячева
Ю. Ю. Маховская

И. Г. Горячева
Ю. Ю. Маховская
А. В. Морозов
Ф. И. Степанов



2017

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского
Российской академии наук

И. Г. Горячева, Ю. Ю. Маховская,
А. В. Морозов, Ф. И. Степанов

ТРЕНИЕ ЭЛАСТОМЕРОВ

Моделирование и эксперимент



Москва ♦ Ижевск

2017

УДК 539.3, 539.62
ББК 22.251
Т663

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского научно-го фонда по проекту № 14-29-00198

Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю., Морозов А. В., Степанов Ф. И.

Т663 Трение эластомеров. Моделирование и эксперимент. — М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. — 204 с.

ISBN 978-5-4344-0429-7

В монографии изложены результаты исследований, которые проводились на протяжении многих лет сотрудниками лаборатории трибологии Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН в области моделирования и экспериментального изучения фрикционных характеристик эластомеров. Приводятся решения контактных задач о фрикционном взаимодействии вязкоупругих материалов, моделирующих механические свойства эластомеров, с контртелами различной макро- и микрогеометрии. На основе полученных решений исследуется зависимость деформационной составляющей силы трения от условий взаимодействия, нагрузки и скорости скольжения, геометрических параметров взаимодействующих тел, а также сил молекулярного и капиллярного притяжения поверхностей. Приводятся результаты сравнительного экспериментального анализа фрикционных характеристик различных марок резин при их взаимодействии с твердыми шероховатыми поверхностями в условиях сухого и граничного трения.

Для специалистов в области механики контактных взаимодействий и трибологии, а также студентов и аспирантов технических университетов.

ББК 22.251
УДК 539.3, 539.62

ISBN 978-5-4344-0429-7

© И. Г. Горячева, Ю. Ю. Маховская,
А. В. Морозов, Ф. И. Степанов, 2017
© ИПМех РАН, 2017

Оглавление

Предисловие	7
Список обозначений	10
Глава 1. Экспериментальное изучение фрикционных характеристик эластомеров (А. В. Морозов).....	12
1.1. Основные подходы к экспериментальному определению фрикционных характеристик эластомеров	12
1.2. Оборудование	16
1.2.1. Трибометр Т-10 (схема контакта шарик – диск).....	16
1.2.2. Трибометр UMT-2 (схема контакта кольцо – диск)	18
1.3. Методика определения коэффициента трения эластомеров при разных схемах контактного взаимодействия (точечный и комформный контакты).....	20
1.3.1. Методика проведения эксперимента на трибометре Т-10	20
1.3.2. Методика проведения эксперимента на трибометре UMT-2 в условиях сухого и смазанного контактов	23
1.3.3. Эффект «третьего» тела и истории нагружения	28
1.3.4. Эффект «тренировки» резины	31
1.4. Методика построения карт трения	33
1.4.1. Методика построения карт трения в заданных диапазонах изменения скорости скольжения, давления и температуры	33
1.4.2. Методика оценки влияния физико-механических свойств эластомеров на коэффициент трения	37
1.5. Исследование влияния геометрии поверхности контртела на коэффициент трения	39
1.6. Изучение свойств поверхности и тонких поверхностных слоев эластомеров до и после трибологических испытаний.....	44
1.6.1. Триботехнические исследования и результаты	45
1.6.2. Микроскопические исследования и результаты	45
Литература	50
Глава 2. Расчет контактных и внутренних напряжений, а также силы трения при скольжении единичной неровности и системы неровностей по вязкоупругому полупространству (Ф. И. Степанов).....	52
2.1. Подходы к изучению деформационной составляющей силы трения	52

2.2. Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству	56
2.2.1. Постановка задачи о скольжении единичного индентора.....	56
2.2.2. Метод решения контактной задачи о скольжении единичного индентора.....	57
2.2.3. Анализ результатов решения контактной задачи.....	68
2.2.4. Анализ напряженного состояния под единичным индентором	74
2.3. Скольжение гладкого индентора по вязкоупругому полупространству при наличии пригрузки в виде двух сосредоточенных сил	78
2.3.1. Постановка задачи о контакте с пригрузкой.....	78
2.3.2. Анализ влияния пригрузки на контактные характеристики и силу трения	80
2.4. Моделирование скольжения системы из двух инденторов по вязкоупругому полупространству	84
2.4.1. Постановка задачи о скольжении двух инденторов.....	84
2.4.2. Метод решения контактной задачи.....	86
2.4.3. Анализ взаимного влияния инденторов на распределение контактных давлений и силу трения.....	88
2.4.4. Анализ напряженного состояния под скользящими инденторами	92
Литература	97

Глава 3. Моделирование скольжения штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию в условиях граничного трения (И. Г. Горячева) 100

3.1. Подходы к анализу роли микрорельефа поверхности в формировании деформационной составляющей силы трения...	100
3.2. Плоская контактная задача о скольжении штампа с волнистой поверхностью по вязкоупругому слою	101
3.2.1. Постановка задачи.....	102
3.2.2. Метод решения	104
3.2.3. Анализ контактных характеристик и силы трения.....	106
3.3. Пространственная контактная задача о скольжении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому слою	111
3.3.1. Постановка контактной задачи	111
3.3.2. Модель материала	113
3.3.3. Метод решения	113
3.3.4. Анализ результатов расчетов	115

3.4. Контактные задачи о скольжении штампа с периодическим рельефом по вязкоупругой полуплоскости	122
3.4.1. Определяющие соотношения для вязкоупругой полуплоскости	122
3.4.2. Постановка и метод решения периодической задачи для упругой полуплоскости	123
3.4.3. Распределение давлений и силы трения при заданных формах рельефа в случае полного контакта штампа с вязкоупругим полупространством.....	127
3.4.4. Невозможность полного контакта для пилообразных рельефов	133
3.4.5. Форма деформированной поверхности вязкоупругой полуплоскости при приложении к ней кусочно-постоянного давления, перемещающегося с постоянной скоростью	135
3.5. Расчет силы трения при скольжении индентора с фрактальной шероховатостью по вязкоупругому основанию.....	140
3.5.1. Задачи для единичных штампов	140
3.5.2. Индентор с фрактальной шероховатостью.....	141
3.5.3. Анализ коэффициента трения	144
3.6. Моделирование скольжения штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию при наличии в зазоре жидкой смазки	147
3.6.1. Постановка задачи.....	147
3.6.2. Метод решения задачи.....	150
3.6.3. Анализ полученной системы уравнений	153
3.6.4. Алгоритм численных расчетов	153
3.6.5. Результаты и их анализ	154
Литература	157

Глава 4. Моделирование эффекта адгезионного взаимодействия эластомеров при трении (Ю. Ю. Маховская) 159

4.1. Развитие моделей адгезионного взаимодействия поверхностей...	159
4.2. Скольжение цилиндрической неровности по вязкоупругому полупространству при наличии адгезии	163
4.2.1. Молекулярная адгезия между поверхностями в контакте скольжения.....	163
4.2.2. Приведение контактной задачи к задаче Римана–Гильберта	166
4.2.3. Влияние молекулярной адгезии на контактные характеристики и силу трения	170

4.2.4. Капиллярная адгезия при скольжении цилиндра	175
4.3. Скольжение сферической неровности по вязкоупругому основанию при наличии адгезии	180
4.3.1. Постановка задачи о скольжении сферического индентора	180
4.3.2. Решение задачи методом полос	182
4.3.3. Эффект изменения адгезионных свойств в результате нахождения поверхностей в контакте	183
4.3.4. Капиллярная адгезия при скольжении сферической неровности	188
4.4. Эффект адгезии при скольжении тела с регулярным рельефом по поверхности вязкоупругого основания	190
4.4.1. Постановка периодической контактной задачи	190
4.4.2. Решение методом полос и режимы взаимодействия в отдельных полосах	192
4.4.3. Влияние характеристик поверхностного рельефа на контактные характеристики и силу трения	196
Литература	201

Предисловие

Предметом теоретических и экспериментальных исследований, изложенных в данной монографии, являются эластомеры — материалы, обладающие низким модулем упругости и низкими температурами стеклования. Типичными представителями эластомерных материалов являются различные марки резин, каучуки, высокоэластичные полимеры и композиционные материалы на их основе. В силу широкого использования этих материалов в различных узлах трения, в том числе для изготовления автомобильных шин, исследование их фрикционных свойств является важной и актуальной задачей.

При фрикционном взаимодействии резин, как и других материалов, проявляются два основных механизма диссипации энергии и возникают две составляющие силы трения. Первую из них называют адгезионной; она связана с образованием и разрывом адгезионных связей при взаимном перемещении поверхностей. Другую составляющую силы трения называют механической или деформационной. Она связана с диссипацией энергии, возникающей при циклическом деформировании контактирующих тел при скольжении. Этот механизм диссипации энергии играет значительную роль при трении эластомерных материалов.

Разделение силы трения на составляющие является условным, поскольку оба механизма трения проявляются одновременно и влияют друг на друга. Одной из целей теоретических и экспериментальных исследований, положенных в основу данной монографии, является установление взаимосвязи между этими механизмами при разных условиях взаимодействия и свойствах контактирующих поверхностей.

Монография состоит из четырех глав. В первой главе излагается методика экспериментальных исследований, проводимых в лаборатории трибологии Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, по изучению фрикционных характеристик различных эластомерных материалов в широком диапазоне скоростей, давлений и температур. Также приводятся результаты сравнительного анализа фрикционных характеристик различных марок резин при их взаимодействии с твердыми шероховатыми поверхностями в условиях сухого и граничного трения.

Последующие главы монографии посвящены построению теоретических моделей трения эластомеров, основанных на постановке и решении задач механики контактных взаимодействий с различными граничными условиями. Для моделирования основного механизма диссипации энергии в эластомерных материалах, связанного с их несовершенной упругостью, используются вязкоупругие модели.

Во второй главе строится решение трехмерной контактной задачи о скольжении единичной неровности (индентора) и системы двух неровностей по границе основания, моделируемого вязкоупругим полупространством, и изучается зависимость распределения давлений в области контактного взаимодействия и деформационной составляющей силы трения от скорости скольжения, модуля упругости и времен релаксации и последствия материала основания, коэффициента трения в области контакта, а также формы неровности. Построенные решения важны для анализа влияния нагрузочно-скоростных параметров взаимодействия на фрикционные характеристики эластомеров, а также для изучения эффекта взаимного влияния неровностей при трении эластомерных материалов. Полученные результаты позволяют также оценить влияние адгезионной составляющей силы трения, связанной с величиной касательных напряжений на единичном пятне контакта, на деформационную составляющую силы трения. Во второй главе также анализируется распределение напряжений внутри вязкоупругого полупространства при скольжении по нему одного и двух инденторов параболической формы.

Поскольку при фрикционном взаимодействии эластомерных материалов одним из основных источников диссипации энергии является упругий гистерезис, проявляющийся при циклическом деформировании поверхностных слоев материалов, на силу трения оказывает значительное влияние микрогеометрия контактирующих поверхностей. В главе 3 строятся решения контактных задач о фрикционном взаимодействии вязкоупругих материалов с телами, имеющими на поверхностях регулярный рельеф, в предположении, что касательные напряжения на единичных пятнах контакта отсутствуют. Решения этих задач применимы к исследованию фрикционного взаимодействия поверхностей в условиях граничного трения. Изучается влияние параметров рельефа и релаксационных характеристик поверхностных слоев эластомеров на деформационную составляющую силы трения при разных скоростях относительно скольжения взаимодействующих тел. Полученные решения могут быть использованы для управления фрикционными характеристиками сопряжений за счет выбора оптимальной микрогеометрии контактирующих поверхностей.

Глава 4 посвящена построению моделей скольжения шероховатых поверхностей при наличии сил адгезионного притяжения, действующих в зазоре между поверхностями. С этой целью строятся решения контактных задач для вязкоупругих материалов с учетом поверхностной энергии взаимодействующих тел и покрывающих их пленок жидкости. На основании разработанных в этой главе моделей проводится оценка совместного влияния параметров микрогеометрии поверхности и ее адгезионных

характеристик на величину силы трения при различных скоростях скольжения взаимодействующих тел. Для случая капиллярной адгезии исследовано влияние на контактные характеристики количества жидкости в зазоре и ее поверхностного натяжения.

Монография составлена по результатам многолетних исследований трения эластомерных материалов, проводимых в лаборатории трибологии Института проблем механики РАН. Часть результатов получена в рамках совместной работы с коллегами из Франции (фирма Мишлен, 2003–2010 гг.). Авторами монографии являются руководитель работ академик И. Г. Горячева и сотрудники лаборатории к. ф.-м. н. Ю. Ю. Маховская, к. т. н. А. В. Морозов и аспирант Ф. И. Степанов.

Авторский коллектив благодарит Российский научный фонд за финансовую поддержку проводимых исследований, а также сотрудницу лаборатории к. ф.-м. н. А. Н. Любичеву за помощь в оформлении монографии.

Список обозначений

γ — поверхностная энергия.
 δ — зазор между взаимодействующими поверхностями.
 z_0 — равновесное межмолекулярное расстояние.
 $p_a(\delta)$ — функция адгезионного давления в потенциале Леннард-Джонса.
 p_0, p_j ($j=1,2$) — величины капиллярного давления или адгезионного давления в модели Мажи–Дагдейла.
 $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ — характерные величины зазора в моделях адгезионного взаимодействия.
 $\sigma_{x^0}, \sigma_{y^0}, \tau_{x^0 y^0}$ — компоненты тензора напряжений.
 $\varepsilon_{x^0}, \varepsilon_{y^0}, \gamma_{x^0 y^0}$ — компоненты тензора деформаций.
 E — модуль Юнга.
 ν — коэффициент Пуассона.
 T_ε и T_σ — времена запаздывания и релаксации.
 (x^0, y^0, z^0) — неподвижная система координат, связанная с вязкоупругим основанием.
 (x, y, z) — подвижная система координат, связанная с индентором.
 t — время.
 V — скорость скольжения индентора.
 $f(x, y)$ — функция, описывающая форму индентора.
 R — радиус вершины индентора.
 $w(x, y)$ — нормальное перемещение границы вязкоупругого основания.
 $p(x, y)$ — нормальное давление на поверхности вязкоупругого основания.
 P — внешняя нормальная нагрузка.
 a, b — координаты границ области контакта цилиндра с полупространством.
 a_1 и b_1 — координаты внешних границ области адгезионного притяжения поверхностей.
 λ — параметр адгезии.
 λ_1 — параметр адгезии для случая одномерного основания.
 c — некий характерный размер (вспомогательная величина, для обозначения).
 T — тангенциальная сила (сила трения).
 R_1, R_2 — радиусы кривизны боковой поверхности мениска.
 σ — поверхностное натяжение жидкости в мениске.

p_{atm} — атмосферное давление.
 H — толщина вязкоупругого слоя.
 d — внедрение индентора в вязкоупругое основание.
 v — объем жидкости в мениске.
 μ — коэффициент трения.
 Ω^c — область контакта поверхностей.
 $\Omega^2, \Omega^1, \Omega^a$ — области адгезионного взаимодействия поверхностей.
 h и l — высота выступов регулярной поверхности и расстояние между ними соответственно.
 G, G_l — мгновенный и длительный модули сдвига.
 p_1, \dots, p_N — кусочно-постоянная функция контактного давления.
 μ^* — деформационная составляющая коэффициента трения.
 S_{Ω^c} — площадь области контакта.
 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — главные напряжения.
 τ_1, τ_2, τ_3 — главные касательные напряжения.
 $\psi(x, y)$ — функция дополнительных смещений границы полупространства.
 T_c — температура вблизи контакта.
 $S_{тр}$ — путь трения.
 $T_{ст}$ — температура структурного стеклования.
 T_s — температура приведения.
 α_T — коэффициент горизонтального сдвига.

Глава 1. Экспериментальное изучение фрикционных характеристик эластомеров

В настоящей главе представлены разработанные в лаборатории трибологии ИПМех РАН методики проведения эксперимента по изучению фрикционного взаимодействия эластомеров с опорной поверхностью, а также подходы к анализу получаемых в ходе испытаний данных. Многие из идей, реализованных в проведенных исследованиях, принадлежат известному трибологу и одному из основателей лаборатории — М. Н. Добычину (1938–2011 гг.). В качестве исследуемых материалов выбраны протекторные и уплотнительные резины, фрикционные характеристики которых исследовались в широком диапазоне температур, скоростей скольжения и давлений.

1.1. Основные подходы к экспериментальному определению фрикционных характеристик эластомеров

Эластомеры отличаются от других полимерных материалов в первую очередь своей эластичностью, то есть способностью к большим обратимым деформациям, а также низкой температурой стеклования и малым модулем упругости. В связи с этим они нашли широкое применение в различных областях техники [1, 2], в частности, в качестве материала для подвижных сопряжений (уплотнительные манжеты, элементы фрикционных передач, протекторы шин и др.). Работоспособность таких элементов во многом определяется механическими и фрикционными свойствами применяемых эластомеров [3–6].

Экспериментальному исследованию фрикционных свойств эластомеров посвящено довольно большое число публикаций, среди которых следует выделить ряд значимых монографий [7–14]. При взаимодействии эластомера с сухой поверхностью коэффициент трения достаточно высок, а значения силы трения могут достигать уровня нормальной нагрузки. Поэтому коэффициент трения является существенной характеристикой фрикционных свойств эластомеров, которая зависит от скорости скольжения, удельной нагрузки, температуры, шероховатости поверхности контртела, а также условий смазывания. В связи с этим в лабораторных исследованиях предъявляются определенные требования к выбору размеров образцов из эластомеров и способу их крепления. Особый подход требуется и при определении коэффициента трения покоя в начале движения резинового образца, поскольку датчиками прибора еще до начала скольжения будут фиксироваться весьма большие деформации

в направлении приложения внешней тангенциальной нагрузки, что затрудняет определение момента страгивания образца [2]. Существование множества взаимосвязанных факторов, влияющих на фрикционные характеристики эластомеров, сделало целесообразным проведение системного анализа при исследовании их трибологических свойств [15].

Работоспособность фрикционных пар зависит от вклада поверхностей обоих элементов пары в трении. Этот вклад учитывается коэффициентом взаимного перекрытия [2], который равен отношению площади контакта ко всей поверхности скольжения каждого элемента пары трения и может принимать значения от близких к 0 до 1. Следует отметить, что резина обладает низкой теплопроводностью, поэтому для исключения перегрева образцов при испытании нужно по возможности выбирать модель пары трения, обладающую меньшим коэффициентом взаимного перекрытия и достаточно малым путем трения, чтобы обеспечить, с одной стороны, достоверное измерение коэффициента трения, а с другой стороны минимизировать фрикционный разогрев эластомера. По этой причине образцы обычно выполняются в форме колодок или колец, прижимаемых к поверхности контртела. По мере износа форма и размеры контурной поверхности исследуемых образцов при этом не изменяются. К недостатку схемы можно отнести криволинейность траектории точек поверхности контртела при контакте с исследуемым образцом. Следует отметить также, что невозможно обеспечить стабильную толщину пленки смазки на вращающемся образце из-за действия центробежных сил при высоких угловых скоростях вращения.

Для измерения триботехнических характеристик материалов используются машины трения и трибометры. Трибометр — это прецизионный прибор, специализирующийся, главным образом, на исследованиях фрикционных характеристик, а именно коэффициента трения и зависимости его от температуры, относительной скорости скольжения (качения), номинального давления и др. Если необходимо определить износостойкость материала, то исследования проводятся в интенсивных режимах истирания. В таких случаях чаще используют машины трения. Основной задачей проводимых на них исследований является построение зависимости износа материала от пути трения: на некоторых приборах в процессе изнашивания возможно измерять также фрикционные характеристики.

В середине прошлого века в нашей стране был разработан ряд трибометров для исследования трения покоя (начального) и трения скольжения при малых скоростях относительного перемещения. Так, например, в работе [2] Г. М. Бартеневым и В. В. Лаврентьевым описаны трибометры ТПЛ-2, РТЛ, предназначенные для определения силы трения

различных полимеров, в том числе и эластомеров, в диапазоне скоростей скольжения от 10^{-9} до 10^{-3} м/с. В работе [16] представлен трибометр ТМП-3, позволяющий исследовать трение твердых тел и различных полимеров в начальной и установившейся стадии скольжения при атмосферных условиях в диапазоне температур от -100 до $+250$ °С, нормальных нагрузках от 1 до 100 Н и скоростях скольжения от 10^{-7} до 10^{-4} м/с. В работе [3] авторами представлен трибометр МПТ, позволяющий проводить испытания материалов на трение в диапазоне нагрузок от 5 до 200 Н, скоростей скольжения от 10^{-4} до 10^{-4} м/с и температур от -60 до $+150$ °С. Позднее разработаны трибометры, позволяющие проводить испытания образцов сложной формы (уплотнительные профили, кольца, подшипники скольжения и т. д.). Например, в работе [17] исследование проведено на трибометре МВПТ-1, с помощью которого были изучены фрикционные свойства резин до и после плазмохимического модифицирования поверхности исследуемых в работе эластомеров.

Описанные выше трибометры используются в основном для исследовательских целей. Они характеризуются малыми скоростями скольжения (не выше 0,1 м/с). Для изучения фрикционных характеристик в широком диапазоне скоростей скольжения главным образом используются трибометры, основанные на вращательном движении образца или поверхности трения. Наибольшее распространение в нашей стране в середине прошлого века получили дисковые трибометры, например, машина трения МИ-2 (типа Грассели), а для оценки сопротивления истиранию — машина трения МИР-1 [2]. Позднее была разработана машина трения УМТ-1 (на базе машины трения И-47), которая выпускается до сих пор в модифицированном варианте — УМТ-2168. Следует отметить, что широко распространенные машины трения СМЦ-2 и СМТ-1 (впоследствии ее улучшенный вариант ИИ-5018) не применяются для испытаний материалов из эластомеров.

На основании анализа трибометров, произведенных за рубежом, можно отметить их сходство с отечественными приборами как по используемым схемам контакта, так и по техническим характеристикам. Однако к настоящему времени мировое приборостроение научного оборудования идет по пути автоматизации испытаний, то есть минимизируется участие оператора в процессе теста. Одновременно с этим применяются новые прецизионные датчики измерения физических величин, а также более точные позиционирующие устройства (моторы, редукторы, направляющие и т. д.). Таким образом, за рубежом разрабатываются более совершенные трибометры, позволяющие проводить испытания фрикционных характеристик эластомеров с высокой точностью в значительных диапазонах изменения давлений и температур.

В настоящей работе используются два современных трибометра с вращающимся диском со схемами контакта шарик – диск и кольцо – диск. Их описание подробно приведено в разделе 1.2.

Одной из задач экспериментального изучения трения эластомеров является исследование механизмов диссипации энергии в разных условиях фрикционного взаимодействия. Среди экспериментальных работ, выполненных по изучению природы трения эластомеров, прежде всего следует упомянуть исследования, направленные на изучение молекулярно-механического механизма трения [11, 12], и теоретико-экспериментальные исследования вклада деформационной (механической) составляющей в общую силу трения [18–20]. В работе [20] была проверена гипотеза о том, что величина силы трения скольжения сферы по смазанному высокоэластичному телу по существу равна силе трения качения такой же сферы. Авторы заключили, что в этих двух случаях сила трения возникает в результате одного и того же механизма — гистерезисных потерь в резине. Серьезное исследование о роли вязкоупругих свойств резины и адгезии поверхностей при фрикционном контакте выполнил К. Грош [21]. Им исследовалось скольжение резинового индентора по гладкой и шероховатой твердой поверхности. Эксперименты проводились для нескольких типов эластомеров при различной температуре и скоростях скольжения. Результаты показали, что в случае скольжения по гладкому основанию сила трения возрастает при увеличении скорости до определенного максимального значения, а затем снижается. В случае же скольжения по шероховатому основанию наблюдается два локальных максимума силы трения.

Первый локальный максимум совпадал со случаем скольжения по гладкому основанию, а второй возникал при определенном отношении скорости скольжения к частоте возникновения деформации, обусловленной воздействием неровностей. Также было обнаружено, что при добавлении антифрикционного порошка в область контакта локальный максимум силы трения, возникающий при небольшой скорости скольжения, пропадает как в случае гладкого, так и в случае шероховатого основания. В результате автор сделал вывод — локальный максимум силы трения обусловлен наличием молекулярной адгезии поверхностей. Второй максимум силы трения, обнаруженный при скольжении индентора по шероховатой поверхности, возникает в результате гистерезисных потерь в резиноом инденторе. Таким образом, в результате проведенных экспериментальных исследований было показано, что сила трения возникает благодаря двум факторам: адгезии поверхностей и деформационным потерям. При этом оба этих фактора напрямую зависят от вязкоупругих свойств резины.

Современные работы, в которых изучается трение эластомеров, связаны с новыми задачами, вытекающими в процессе разработки новых

материалов и изделий. В частности, существует большой интерес к разработке новых материалов с повышенными эксплуатационными характеристиками, например, эластомеров, сохраняющих свои фрикционные и деформационные свойства в условиях арктического климата («Стратегия развития Арктической зоны Российской Федерации и обеспечения национальной безопасности на период до 2020 года»). Одним из востребованных направлений в мире является разработка новых резин для автомобильных шин. Так, например, управляя свойствами эластомеров, создаются шины для различных условий эксплуатации (зимние, летние и др. типы шин). Представляет интерес для приложений изучение взаимодействия колес автотранспорта с различными типами дорожного покрытия [1, 22–24]. Часто экспериментальные исследования проводятся в тесном взаимодействии с разработчиками новых материалов [25]. В подобных исследованиях определяются трибологические и механические свойства новых материалов и целесообразность их применения в парах трения. Нельзя не отметить также большую научную значимость этих работ, поскольку в них предлагаются новые эффективные экспериментальные методы исследования триботехнических свойств эластомеров.

Далее будут представлены результаты экспериментальных исследований деформационной (механической) компоненты коэффициента трения и определения коэффициента трения на образцах промышленно выпускаемой резины (раздел 1.3). Кроме того, представлены методики построения карт трения и их анализа (раздел 1.4), результаты исследования влияния на коэффициент трения геометрии поверхности контртела, на примере модельных образцов дорожных покрытий (раздел 1.5), и результаты исследования поверхности трения эластомеров методами электронной и атомно-силовой микроскопии до и после фрикционных испытаний (раздел 1.6). Целью проведенных исследований являлось изучение влияния механических и адгезионных свойств испытываемых эластомеров на коэффициент трения скольжения в сухом и смазанном контактах.

1.2. Оборудование

В разделе дается описание основного оборудования, которое использовалось при экспериментальном изучении фрикционных характеристик исследуемых эластомеров.

1.2.1. Трибометр Т-10 (схема контакта шарик – диск)

Трибометр Т-10 (ITEE-PIB, Польша) предназначен для изучения коэффициента трения и изнашивания взаимодействующих материалов

по схеме контакта шарик – диск. Испытания материалов на нем можно проводить в режиме сухого трения или трения со смазкой при комнатной температуре, а в случае экспериментов с обильной смазкой и при повышенных температурах. Стандартный диаметр используемого шарика равен 10 мм, при этом внутренний диаметр диска равен 25 мм, а внешний равен 60 мм. Нормальная нагрузка в контакте может задаваться прямым нагружением в диапазоне от 3 до 50 Н, а скорость скольжения варьируется в диапазоне 0,01–0,9 м/с. Максимальная измеряемая сила трения не может превышать значения в 50 Н.

Система трибометра Т-10 состоит из испытательного блока с датчиками измеряемых параметров с аналого-цифровым преобразователем, который управляет моторами прибора, и персонального компьютера с программным обеспечением. Трибометр позволяет измерять, сохранить в памяти, обработать и распечатать следующие параметры: силу трения, скорость, нагрузку, линейное сближение трущихся тел, температуру шарика, число оборотов диска, время эксперимента.

Принципиальная схема трибометра приведена на рис. 1.1. Исследуемый образец-диск 1 приводится во вращение двигателем 10. На образец-диск 1 воздействует шарик 2, закрепленный в цанговом зажиме 3, расположенном на поворотном кронштейне 5. Вылет кронштейна 5 регулируется с помощью ходового микровинта 6, который позволяет точно позиционировать шарик 2 относительно образца-диска 1 в радиальном

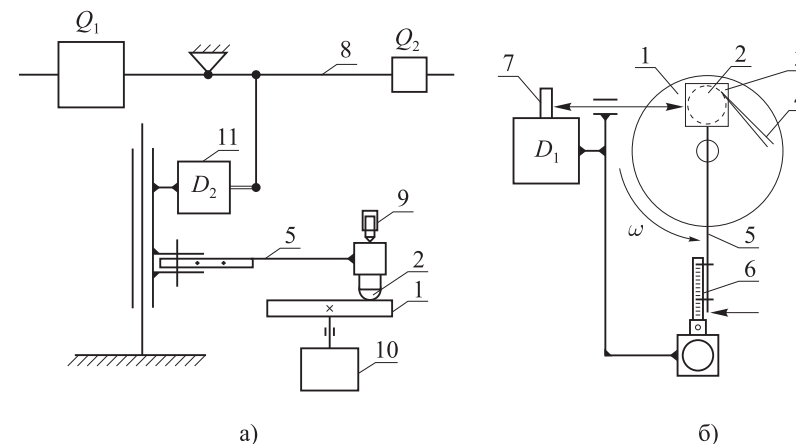


Рис. 1.1. Принципиальная схема трибометра Т-10: а) вид сбоку; б) вид сверху: 1 — образец-диск, 2 — шарик, 3 — цанговый зажим, 4 — термopара, 5 — поворотный кронштейн, 6 — микровинт, 7, 11 — датчик нагрузки, 8 — рычажное устройство нагружения, 9 — датчик перемещения, 10 — двигатель

направлении. Образец-диск представляет собой эластомерное кольцо, осесимметрично приклеенное к стальному диску, имеющему центральное отверстие для закрепления болтом через центрирующую шайбу к предметному столику трибометра. Шарик прижимается к торцевой поверхности дискового образца силой P , которая создается с помощью рычажного устройства 8 и грузов Q_1 и Q_2 . Сила прижатия шарика 2 к образцу-диску 1 измеряется датчиком 11. При вращении образца-диска 1 сила трения увлекает шарик 2 и вместе с ним поворотный кронштейн 5, который упирается в датчик 7, предназначенный для измерения силы трения T на контакте. Коэффициент трения для исследуемой пары определяется из соотношения $\mu = T / P$. На трибометре предусмотрено также измерение температуры на поверхности шарика с помощью термпары 4. В случае работы в жидкой среде (вода, масло) платформа привода образца снабжается масляной ванной (не показано на рис. 1.1).

1.2.2. Трибометр UMT-2 (схема контакта кольцо – диск)

Универсальный трибометр UMT-2 представляет собой лабораторный прибор, предназначенный для исследования фрикционных свойств различных материалов. Исследуемая пара трения представляет собой два коаксиально расположенных кольцевых образца, один из которых неподвижен, а второй вращается вокруг их общей оси. Образцы прижимаются друг к другу силой, линия действия которой совпадает с их осью. Исследования могут проводиться в диапазоне угловых скоростей от 0,001 до 90 об/мин, нормальных нагрузок от 10 до 1000 Н и температур от -25 до $+150$ °С на воздухе или в жидкой среде. Угловой путь перемещения образца в оборотах задается, исходя из задачи исследования. Показателями процесса фрикционного взаимодействия в измерительной системе прибора являются момент трения и коэффициент трения. Момент трения измеряется при помощи 6-компонентного датчика в диапазоне от 0,01 до 20 Нм, а нормальная нагрузка в диапазоне от 10 до 1000 Н.

В систему прибора кроме устройства для осуществления фрикционного взаимодействия входят холодильная установка, компрессор, а также компьютер. Вместе эти составные части образуют измерительный комплекс, блок-схема которого приведена на рис. 1.2, а принципиальная схема трибометра приведена на рис. 1.3. Исследуемый кольцевой образец 1 осесимметрично устанавливается и закрепляется на предметном столике 2, который приводится во вращение электродвигателем 3 через редуктор 4. Контртело 5 закрепляется на планшайбе 6, которая

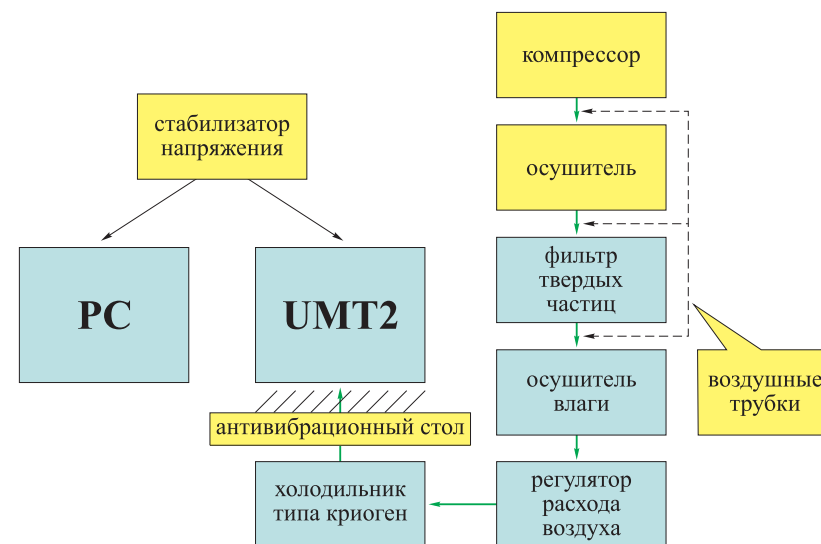


Рис. 1.2. Блок-схема трибометра UMT-2

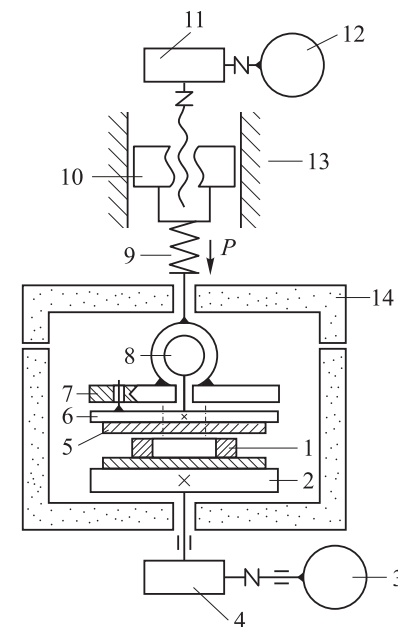


Рис. 1.3. Принципиальная схема трибометра UMT-2

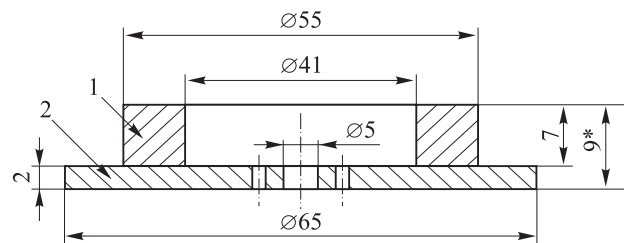


Рис. 1.4. Испытуемый образец: 1 — эластомер, 2 — стальной диск

установлена на сферическом шарнире 8 и удерживается от вращения поводковой системой 7. Сферический шарнир позволяет обеспечить равномерное распределение давления на контакте образца с контртелом. Нагрузка на контакт передается через упругий 6-компонентный тензодатчик 9 посредством винтовой передачи 10 через редуктор 11 от электродвигателя 12. Ползун-гайка винтовой передачи движется в направляющих 13. Зона фрикционного взаимодействия заключена в теплоизолированную камеру 14. Отрицательные температуры в зоне фрикционного взаимодействия создаются продувкой камеры воздухом от компрессора, пропущенным через осушитель, а затем холодильную установку.

В качестве образцов используются эластомеры, наклеенные на стальную подложку (рис. 1.4).

1.3. Методика определения коэффициента трения эластомеров при разных схемах контактного взаимодействия (точечный и конформный контакты)

В разделе приводится описание методик проведения эксперимента для изучения фрикционных характеристик исследуемых эластомеров.

1.3.1. Методика проведения эксперимента на трибометре Т-10

Эксперименты, описанные ниже, были проведены с целью изучения гистерезисной компоненты силы трения на примере схемы точечного контакта стального шарика с поверхностью эластомера. Изучалось влияние силы, приложенной к индентору, и скорости скольжения на силу трения скольжения. Для проведения исследования были выбраны условия испытаний такие, чтобы по возможности экранировать адгезионную (молекулярную) компоненту силы трения. Для этого были использованы

как твердая, так и пластичная смазка. В зависимости от вязко-пластических свойств смазочных материалов использовались различные технологии проведения экспериментальных исследований.

Мелкодисперсный порошок графита (твердая смазка). В качестве твердого смазочного материала использовался мелкодисперсный электролитический графит. Доза порошкообразного графита (~1 г) перед опытом насыпалась на рабочую поверхность образца-диска (см. рис. 1.1) и затем графит втирался в нее керамическим пестиком в результате медленного вращения кольцевого резинового образца и одновременно возвратно-поступательных перемещений пестика, который скользил вдоль радиуса образца. Результаты взвешивания образца «до» и «после» нанесения на его поверхность графита позволили оценить толщину слоя смазки, которая по нашим расчетам составляла около 300 мк. Предварительные испытания на трение показали, что графит хорошо удерживается на поверхности резинового образца. Так, на пути трения, равном 1 км, при скорости скольжения, равной 0,3 м/с, изменение массы образца составило 0,2 г, что соответствовало уменьшению первоначальной толщины слоя графита на 60 мк. Это обстоятельство позволило в дальнейшем применить следующую методику проведения опытов со смазкой графитом: перед началом каждого опыта наносился по описанной выше методике слой смазки. В процессе проведения одного опыта этот слой смазки не обновлялся. Каждый опыт по изучению зависимости коэффициента трения от скорости скольжения проводился по схеме ступенчатого повышения скорости скольжения. Продолжительность испытаний при постоянной на данной ступени скорости скольжения определялась временем достижения коэффициента трения установившегося значения. В каждом опыте периодически контролировалась температура на поверхности стального шарика вблизи его зоны контакта с резиновым образцом-диском. В течение опыта эта температура повышалась не более чем на 2÷3 градуса по сравнению с температурой окружающей среды.

Результаты двух экспериментов, проведенных при значениях нагрузки на образец 3,5 Н (что соответствует максимальному контактному давлению по Герцу, равному 0,68 МПа) и 11 Н (максимальное контактное давление по Герцу равно 1 МПа), представлены на рис. 1.5. Наблюдаются незначительные колебания коэффициента трения при постоянном значении нагрузки. Скорость скольжения в исследуемом диапазоне (от 0,01 до 0,8 м/с) практически не влияет на трение.

Наблюдавшееся в этих опытах повышение коэффициента трения с ростом нормальной нагрузки может быть объяснено с позиций гистерезисного механизма трения, для которого характерна возрастающая зависимость трения от контактного давления.

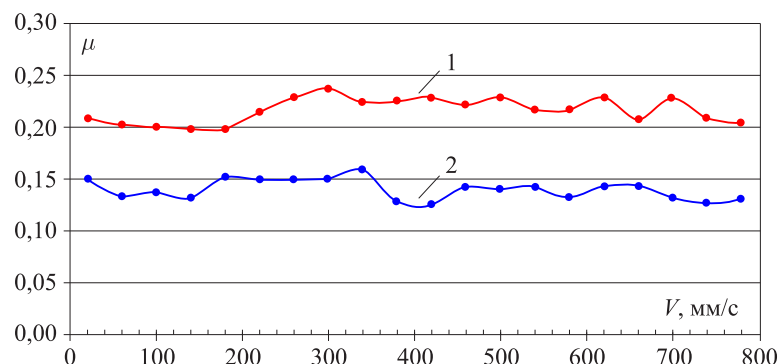


Рис. 1.5. Зависимость коэффициента трения от скорости при фиксированной нагрузке: 1 — $P = 11$ Н; 2 — $P = 3,5$ Н

Консистентная смазка «Castrol» (пластичная смазка). Отличие методики проведения экспериментов при использовании пластичной смазки от описанной выше связано с тем, что при применении этой смазки наблюдается весьма быстрое обеднение дорожки трения количеством пластичного смазочного материала, который постепенно выдавливается в бок. Это привело к необходимости перед каждым новым измерением трения обновлять смазку на поверхности резинового образца, благодаря чему создавались приблизительно одинаковые в каждом опыте условия трения. Порция смазочного материала массой $\sim 1,5$ г с помощью шпателя равномерно распределялась по всей поверхности образца-диска. Трибометр Т-10 программировался с помощью системы управления таким образом, что образец совершал три полных оборота при заданной наперед угловой скорости вращения. В процессе вращения образца регистрировался коэффициент трения. После завершения этих процедур смазка шпателем снималась с поверхности образца, которая затем тщательно протиралась. Затем повторялся новый цикл испытаний при другой скорости скольжения. Результаты этих экспериментов для двух уровней контактного давления представлены на рис. 1.6.

Общим в представленных закономерностях (см. рис. 1.5 и рис. 1.6) является повышение трения с ростом контактного давления, что, как указывалось ранее, может быть объяснено с позиции гистерезисного механизма трения. Отличие состоит в том, что при пластичной смазке поверхности резинового образца наблюдается меньшее значение коэффициента трения, чем при твердой смазке. Это, возможно, связано с тем, что в случае пластичной смазки доля сопротивления, связанная с молекулярным взаимодействием на контакте, снижается, благодаря чему повышается вклад гистерезисных потерь. Эта точка зрения подкрепляется

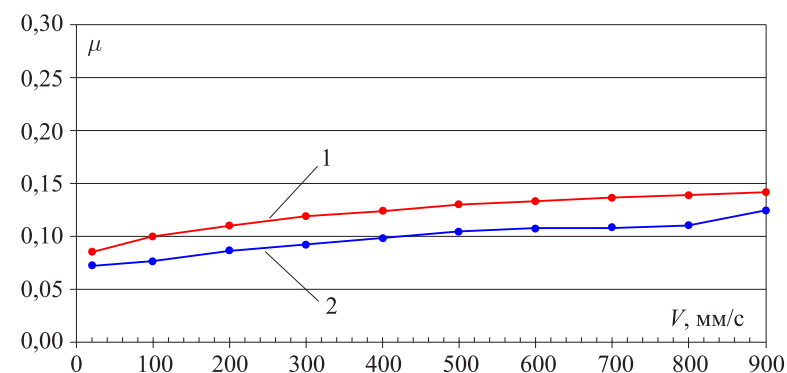


Рис. 1.6. Зависимость коэффициента трения от скорости при фиксированной нагрузке: 1 — $P = 11$ Н; 2 — $P = 3,5$ Н

тем, что при пластичной смазке наблюдается характерная для гистерезиса скоростная зависимость коэффициента трения (в диапазоне скоростей скольжения от 0,01 до 1 м/с коэффициент трения увеличивался примерно в 2 раза).

В результате проведенного исследования показано, что, используя точечный контакт (на примере гладкого сферического шарика), возможно изучить гистерезисную компоненту силы трения, в частности, возможно исследовать зависимость гистерезисной составляющей силы трения от нагрузки и скорости скольжения для высокоэластичных материалов (эластомеров).

Схема контакта единичная неровность – эластомер может быть использована только для качественного анализа силы трения, возникающей на реальной шероховатой поверхности в условиях смазанного контакта. Для схожих условий трения (скорость скольжения, давление и температура) множественный шероховатый контакт демонстрирует такую же модель поведения, но не наблюдается сильное отличие в значениях коэффициентов трения.

1.3.2. Методика проведения эксперимента на трибометре UMT-2 в условиях сухого и смазанного контактов

В разделе приведены методика проведения эксперимента и полученные результаты для заданного диапазона контактных давлений и скоростей скольжения в условиях сухого (контакт несмазанных поверхностей) трения.

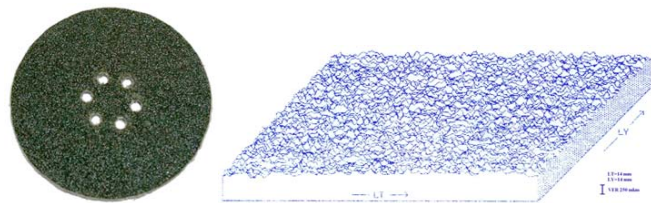


Рис. 1.7. Модельный контробразец шероховатой поверхности: слева — фотография наждачной бумаги, наклеенной на план-шайбу; справа — ее профилограмма

С целью исследования влияния шероховатости контртела на силу трения при разных условиях контактного взаимодействия была выбрана схема контакта торцевое верчение резинового кольца по неподвижному диску с заданной шероховатостью.

В качестве шероховатой поверхности была выбрана наждачная бумага, из которой был вырезан диск диаметром 65 мм и при помощи эпоксидного клея приклеен к поверхности стальной планшайбы 6 (рис. 1.7). Изготовленная таким образом шероховатая поверхность способна оказывать значительное сопротивление изнашиванию, вызываемому фрикционным взаимодействием поверхности эластомера, а склеивание наждачной бумаги с жесткой планшайбой обеспечивает ее надежное закрепление. Оба этих факта позволяют использовать изготовленную шероховатую поверхность много раз. На рис. 1.7 показан образец шероховатой поверхности: слева — наждачная бумага, наклеенная на планшайбу, справа — ее объемная профилограмма. Приведенная модель шероховатой поверхности используется как для сухого, так и для смазанного контакта.

Перед началом опытов образец из резины притирают до появления износа на всей поверхности его контакта. Притертые образцы очищают и взвешивают на аналитических весах с погрешностью не более 0,0001 г. После этого образец помещается в испытательную термокамеру, где он выдерживается при заданной температуре не менее одного часа.

Трибометр контролирует заданную температуру и выполняет цикл, в котором варьируются скорость скольжения и контактное давление (рис. 1.8). Все операции цикла запрограммированы и выполняются автоматически. Полный тест одного резинового образца содержит 11 циклов, соответствующих контактной температуре (T_c): -25, -15, -5, 5, 15, 25, 40, 55, 75, 85 и 100 °C. Каждый цикл содержит четыре различные последовательности, которые соответствуют четырем давлениям в контакте: 0,1, 0,2, 0,3 и 0,4 МПа, при этом контактное давление в последовательности постоянно. В каждой последовательности выполняется 11 опытов, соот-

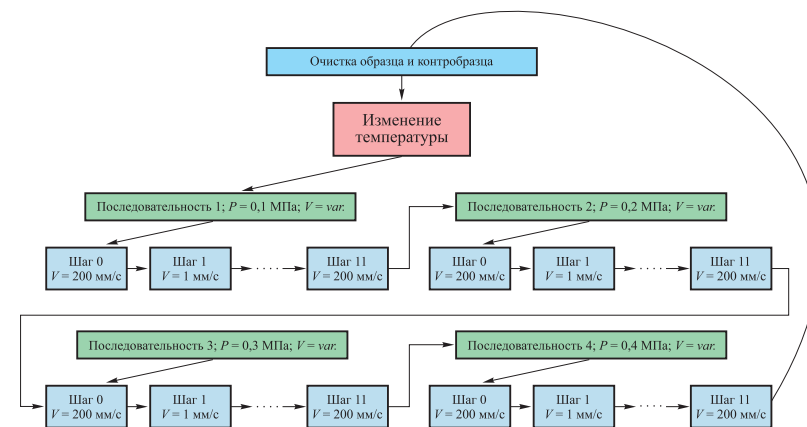


Рис. 1.8. Блок-схема испытательного цикла

ветствующих скоростям скольжения: 1, 2, 4, 8, 13, 20, 32, 50, 79, 126 и 200 мм/с. Каждый такой опыт называется *шаг*. В шаге непрерывно регистрируются изменение силы трения, нагрузки, скорости скольжения.

Ниже приведена программа выполнения шага:

1. Старт: образец резины на 5 мм поднят над поверхностью контртела (наждачной бумаги).
2. Нагружение:
 - образец движется к контртелу со скоростью нагружения, равной 1 мм/с;
 - после контакта образца с контртелом скорость нагружения снижается до 0,1 мм/с;
 - стабилизация заданной нагрузки осуществляется при скорости нагружения, равной 0,01 мм/с.
 После выполнения этих действий нормальная нагрузка в контакте становится равной заданной оператором.
3. Выдержка нормальной нагрузки в течение 1 с.
4. Вращение контртела на 90° (путь трения скольжения составляет 37,7 мм).
5. Отвод резинового образца от контртела.
6. Вращение контртела на -90°.
7. Релаксация резины в течение 20 с.

По окончании цикла испытаний образец вынимают из термокамеры, очищают и взвешивают. Поверхность наждачной бумаги перед каждым новым циклом очищают от частиц износа раствором мыла в воде. Таким образом, полное испытание одного резинового образца содер-

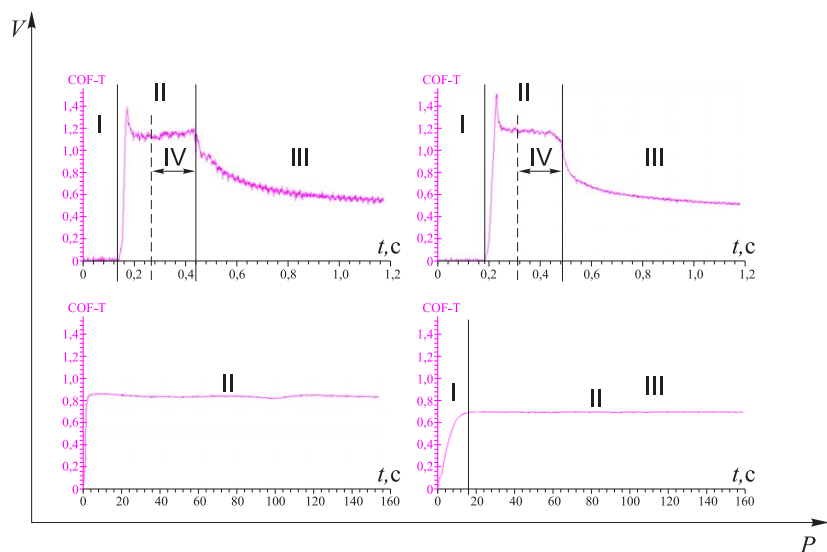


Рис. 1.9. Варианты типичных зависимостей коэффициента трения от времени испытания; трение происходит на участке II, где $V = \text{const}$

жит 484 шагов-тестов, то есть 11 (число циклов) \times 4 (число последовательностей) \times 11 (число шагов). Для обеспечения достоверности получаемых результатов полное испытание одного образца проводилось трижды.

Результатом выполнения шага является протокол испытаний, представляющий собой запись коэффициента трения от времени. На рис. 1.9 приведено четыре протокола испытаний для различных уровней давлений и скоростей. При малом давлении и скорости скольжения коэффициент трения постоянен на всем пути трения, но с увеличением давления появляется участок начального смещения (I). С увеличением скорости скольжения добавляется участок восстановления (III), на котором происходит релаксация резины. Коэффициент трения должен вычисляться только на участке, где происходит трение (II), однако при повышенных скоростях в начале трения наблюдается резкий переход из состояния покоя в состояние скольжения, поэтому для достоверной оценки коэффициента трения вычисления производили на участке (IV), на котором наблюдается установившееся движение взаимодействующих поверхностей исследуемой пары трения. Следует отметить, что при росте скорости скольжения область, в которой происходит трение, сужается, это связано с уменьшением времени воздействия между образцами.

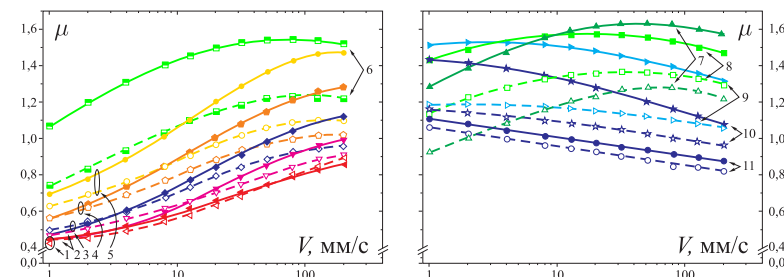


Рис. 1.10. Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения для двух давлений 0,1 (сплошная) и 0,4 МПа (пунктирная линия), где 1 — 100 °С, 2 — 85 °С, 3 — 70 °С, 4 — 55 °С, 5 — 40 °С, 6 — 22 °С, 7 — 15 °С, 8 — 5 °С, 9 — -5 °С; 10 — -15 °С, 11 — -25 °С

На рис. 1.10 приведены результаты, полученные после испытания образца протекторной резины для зимней эксплуатации, которые были обобщены и представлены в виде зависимостей коэффициента трения μ от скорости скольжения V при разных значениях номинального давления P , варьируемых в пределах от 0,1 до 0,4 МПа. При этом представленные результаты соответствуют температурам испытаний, принадлежащим диапазону от -25 до +100 °С.

Анализируя результаты, представленные на рис. 1.10, можно заключить, что при минимальных и максимальных температурах (-25 и 100 °С) влияние номинального давления на коэффициент трения в контакте мало, а при температуре 15 °С оно максимально, причем разница величин коэффициента трения может достигать до 25 % для исследуемых уровней давлений. Следует отметить, что при низких температурах коэффициент трения возрастает, а при высоких — снижается с увеличением скорости скольжения, при этом в промежуточном температурном диапазоне от 5 до 40 °С значения коэффициента трения, зависящие от скорости скольжения, максимальны, причем с понижением температуры положение максимума смещается в сторону меньших скоростей скольжения. Полученные результаты могут быть объяснены влиянием температуры на времена релаксации эластомерных материалов. Как показано в [2], при понижении температуры релаксация вязкоупругих материалов происходит настолько медленно, а при повышении настолько быстро, что рассматриваемые физические величины (например, коэффициент трения) практически мгновенно достигают своего предельного значения.

Смазанный контакт. Для проведения экспериментов в условиях смазанного (с привнесением смазочного материала) контакта трибометр УМТ-2 был оборудован смазочной ванной, в которой выполнялось ис-

пытание при полном погружении пары трения в смазочную жидкость, в качестве которой использовался раствор 20 % жидкого мыла в дистиллированной воде. Процедура проведения эксперимента идентична описанной для сухого трения, с тем лишь различием, что верхний предел температуры ограничивался температурой кипения воды и был выбран равным 85 °С, а нижний — температурой ее замерзания, и был выбран равным 5 °С.

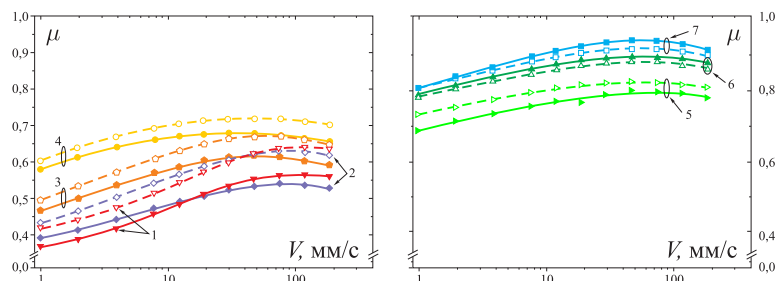


Рис. 1.11. Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения для двух давлений 0,1 (сплошная) и 0,4 МПа (пунктирная линия), где 1 — 85 °С, 2 — 70 °С, 3 — 55 °С, 4 — 40 °С, 5 — 22 °С, 6 — 15 °С, 7 — 5 °С. Смазочная среда 20% раствор мыла в дистиллированной воде

На рис. 1.11 приведены результаты, полученные после испытания образца протекторной резины для зимней эксплуатации, которые были обобщены и представлены в виде зависимостей коэффициента трения μ от скорости скольжения V при разных значениях номинального давления P , варьируемых в пределах от 0,1 до 0,4 МПа. При этом представленные результаты соответствуют температурам испытаний, принадлежащим диапазону от 5 до +85 °С.

1.3.3. Эффект «третьего» тела и истории нагружения

Предварительные эксперименты по исследованию трения эластомеров по шероховатой поверхности (наждачная бумага) показали, что после окончания одного цикла испытаний, содержащего результаты многих измерений для всего диапазона скоростей скольжения и контактных давлений, образуется пленка из продуктов износа, которая названа третьим телом (рис. 1.12). Эта пленка прочно скреплена с шероховатой поверхностью и может быть удалена только при помощи интенсивной чистки щеткой в мыльном растворе. Как будет показано ниже, третье тело изменяет истинное значение коэффициента трения. Это обстоятельство нужно учитывать, если рассчитывать значение коэффициента трения

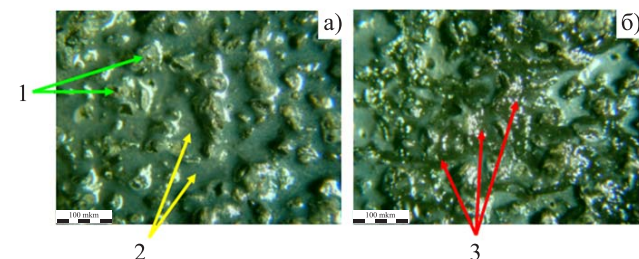


Рис. 1.12. Формирование третьего тела. а) чистая наждачная бумага; б) наждачная бумага после четырех полных оборотов ($S_{тр} = 0,6$ м): 1 — минеральные зерна, 2 — связующее вещество, 3 — третье тело

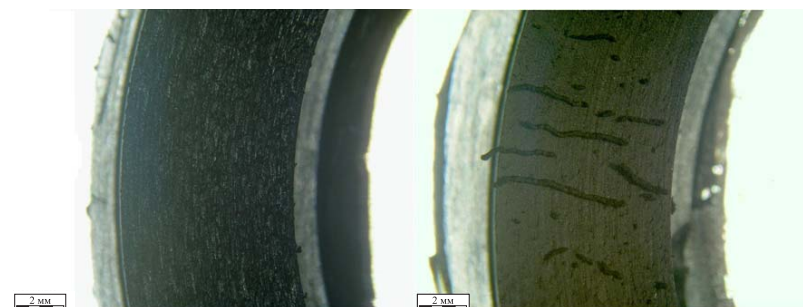


Рис. 1.13. Третье тело на поверхности трения резинового образца, полученные в диапазонах температур: слева — 15–100 °С, справа — 5–25 °С

для реального дорожного покрытия. Образование третьего тела на реальной дороге можно увидеть при экстренном торможении автомобиля (черные полосы).

Образование третьего тела на поверхности наждачной бумаги связано прежде всего с температурой, которая существенно влияет на процесс образования и свойства третьего тела. В диапазоне комнатных температур и выше на поверхности наждачной бумаги образуется тонкая, прочно скрепленная с основанием пленка (рис. 1.12, б). Поверхность резинового образца выглядит однородно, но имеет небольшие борозды и немного липкая на ощупь (рис. 1.13). Обнаружено также, что для более низких температур (5–25 °С) на поверхности наждачной бумаги не происходит формирования третьего тела в виде пленки. Наблюдаются редкие частицы износа, которые легко удаляются с поверхности при помощи щетки или потока воздуха. Поверхность трения резинового образца покрыта частицами износа, слабо сцепленными с этой поверхностью.

При этом частицы износа образуют «ролики» (рис. 1.13), а сам процесс напоминает формирование рулона. Можно предположить, что для более низких температур, близких к температуре стеклования, резина теряет свои вязкоупругие свойства. Таким образом, при объединении экспериментальных данных во всем диапазоне температур с помощью температурно-временной эквивалентности (используя трансформацию, предложенную Дж. Ферри [6]) в обобщенную мастер-кривую следует учитывать изменения в механизме образования третьего тела.

Кроме того, известно [26], что для эластомеров с релаксационными свойствами, к которым относятся и протекторные резины автомобильных шин, наблюдается зависимость коэффициента трения от предыстории нагружения.

Для исследования перечисленных явлений (формирование третьего тела и влияние предыстории нагружения на получаемые результаты) была поставлена серия опытов на одном и том же образце резины с очень маленькой скоростью скольжения (с целью избежать фрикционного разогрева резины), равной 10 мм/с, при трех значениях средних контактных давлений — 0,11, 0,34 и 0,57 МПа, при которых изучено изменение коэффициента трения при скольжении резины по наждачной бумаге в зависимости от продолжительности эксперимента. Каждая последовательность экспериментов содержала 18 опытов (6 повторов для 3 уровней контактного давления), причем выбор контактного давления в каждом следующем опыте чередуется случайным образом. Угол поворота резинового образца был равен $\pi/2$ для каждого опыта, а следовательно, для одной последовательности путь трения $S_{тр}$ составлял 4,5 оборота или $\sim 0,68$ м.

Таким образом, каждая последовательность экспериментов включала опыты, выполненные для одних и тех же внешних условий (скорость, давление и температуры образцов), но для различного пути трения и предыстории нагружения. Так, например, в первой последовательности опыты с контактным давлением 0,11 МПа были выполнены в диапазоне перемещений от 0,25 до 4,5 оборотов. Весь эксперимент содержал 12 таких последовательностей, причем поверхность контртела (наждачной бумаги) не очищалась от частиц износа.

Дисперсионный анализ полученных для малых путей трения экспериментальных результатов для одной последовательности показал, что для одних и тех же условий испытаний влияние предыстории нагружения и формирования третьего тела на результаты экспериментов незначительно. Однако результаты, полученные на большем пути трения без очистки поверхности от частиц износа, показывают, что влияние этих факторов на коэффициент трения скольжения может быть существен-

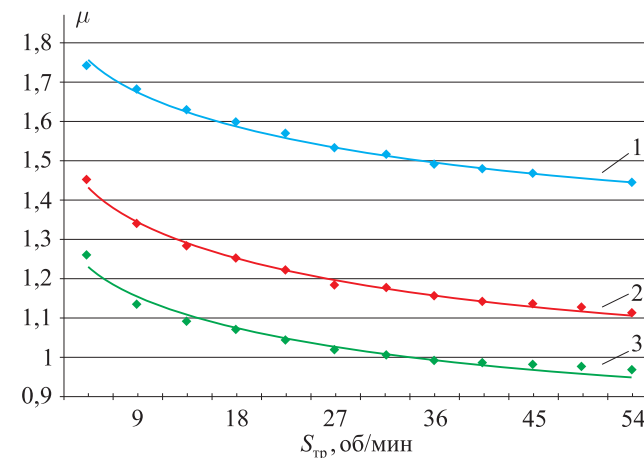


Рис. 1.14. Зависимость коэффициента трения от продолжительности опыта. Скорость скольжения — 10 мм/с; давление: 1 — 0,11 МПа, 2 — 0,34 МПа, 3 — 0,57 МПа

ным. Эти выводы проиллюстрированы на графике, представленном на рис. 1.14, на котором показано, как изменяется среднее значение коэффициента трения с увеличением пути трения резинового образца относительно контртела.

На основе этих результатов процедура испытаний была дополнена очисткой поверхности контртела от частиц износа после окончания каждого цикла экспериментов (путь трения за один цикл эквивалентен тому, который был описан для единичной последовательности).

1.3.4. Эффект «тренировки» резины

В предложенной методике проведения эксперимента учитывается эффект, подобный эффекту Патрикеева–Маллинза [26, 27], который заключается в том, что значение модуля упругости резины как при статическом, так и при динамическом нагружении зависит от уровня максимальной деформации, предшествующей опыту. Для оценки влияния эффекта Патрикеева–Маллинза было проведено исследование по индентированию резины стальным шариком на микротвердоме, который позволяет регистрировать значения нормальной нагрузки и внедрения с высокой точностью при малых деформациях контактирующих тел. Фотография установки образца на микротвердоме показана на рис. 1.15. Поверхность резинового образца индентируется шариком диаметром 1,6 мм.

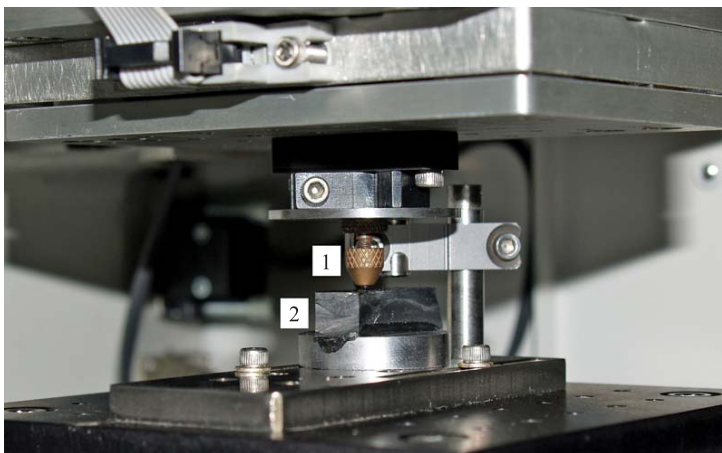


Рис. 1.15. Фотография испытуемого образца (2) на микротвердомере UMT: 1 — держатель шарика

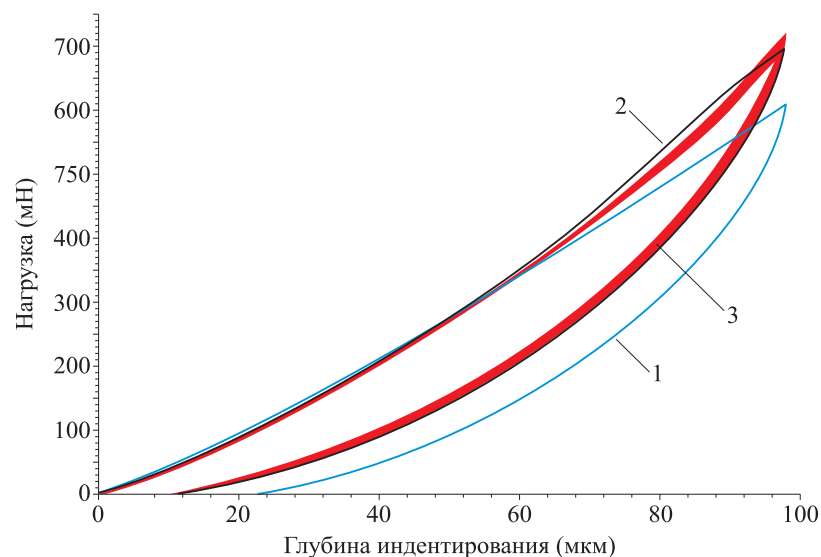


Рис. 1.16. Зависимость кривых индентирования от числа повторений, где 1, 2 — первое и второе индентирование, 3 — 30-кратное индентирование в одно и то же место

На рис. 1.16 представлены результаты индентирования резинового образца, не участвовавшего во фрикционном взаимодействии. Испыта-

ния проводились при постоянной глубине внедрения, равной 100 мкм. Число последовательно выполненных опытов равно 30, причем все опыты сделаны в одно и то же место исследуемого образца. Скорость деформации (нагружения) постоянна и равняется 0,001 мм/с. Анализ полученных результатов показал: при первом индентировании для достижения глубины внедрения в 100 мкм необходимо приложить меньшую нагрузку, чем в последующих индентированиях, осуществленных в одно и то же место с интервалом в 15 с. Причем все последующие тесты имеют одинаковый характерный вид.

По аналогии с эффектом Патрикеева–Маллинза перед началом выполнения последовательности, в которой варьируется скоростью скольжения, резиновый образец испытывают при максимальной скорости скольжения, тем самым создавая фрикционное нагружение с максимальной деформацией в материале. Такой шаг назван «технологическим» и выполняется с целью «тренировки» резины для стабилизации процесса трения, что обеспечивает получение достоверных и повторяемых результатов.

1.4. Методика построения карт трения

В разделе представлена методика построения и анализа карт трения для заданного диапазона контактных давлений, скоростей скольжения и температур в условиях сухого (без смазки) трения и трения со смазкой.

1.4.1. Методика построения карт трения в заданных диапазонах изменения скорости скольжения, давления и температуры

А. П. Александровым и Ю. С. Лазуркиным на основе экспериментальных исследований, связанных с релаксационными явлениями в вязкоупругих материалах при многократных деформациях, было показано [28], что увеличение частоты воздействия оказывает такое же влияние, как и эквивалентное понижение температуры. Аналогичные исследования, но более детально проведенные в работе [4], показали, что существует правило совмещения кривых, в частности, кривых ползучести, полученных при разных температурах, путем горизонтального сдвига вдоль оси логарифма времени, или смещения кривых механических потерь вдоль оси логарифма частот при исследовании динамических свойств резины. Данное правило легло в основу принципа температурно-временной эквивалентности, смысл которого заключается в том, что исследование релаксационных явлений можно проводить двумя эквива-

лентными методами: либо изменяя в широких пределах время воздействия, либо варьируя температуру.

Коэффициент горизонтального сдвига α_T , являющийся функцией только температуры T_c и свойств резины, определяется эмпирическим методом, впервые предложенным в работах [6, 29], и рассчитывается по формуле:

$$\lg \alpha_T = \frac{-8,86(T_c - T_s)}{101,6 + T_c - T_s}, \quad (1.1)$$

где T_s — температура приведения, которая, как показано в работе [29], для широкого класса высокоэластичных материалов приблизительно равна $T_{ст} + \Delta T$, $T_{ст}$ — температура структурного стеклования, а $\Delta T = 50$.

В работе [21] К. Грош, первым предложивший использовать температурно-скоростную эквивалентность применительно к процессам трения, показал, как можно преобразовать множество зависимостей коэффициента трения от скорости скольжения и температуры в одну так называемую «мастер-кривую». В главе 11 работы [1] им показано, как форма мастер-кривой и ее положение на оси $\lg \alpha_T V$ зависит от состава резины, а также от структуры опорной поверхности.

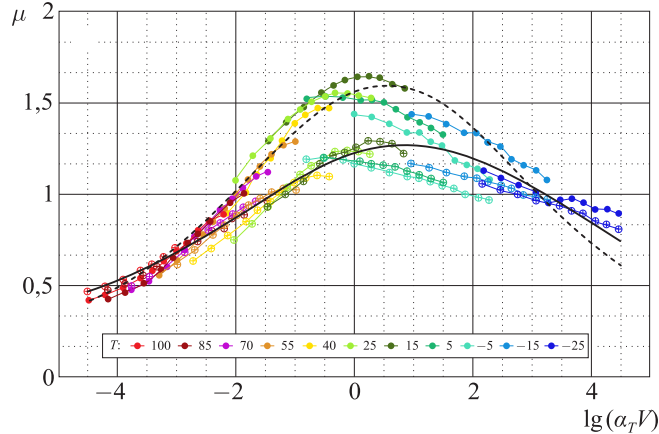


Рис. 1.17. Мастер-кривые, полученные для двух давлений: 0,1 и 0,4 МПа

Используя уравнение (1.1), значения коэффициента трения, полученные во всем диапазоне температур и скоростей скольжения (см. рис. 1.10), были объединены в единую мастер-кривую, при этом $T_{ст}$ равнялась реальному значению исследуемого эластомера (-24 °C). На рис. 1.17 представлены мастер-кривые, представляющие собой зависи-

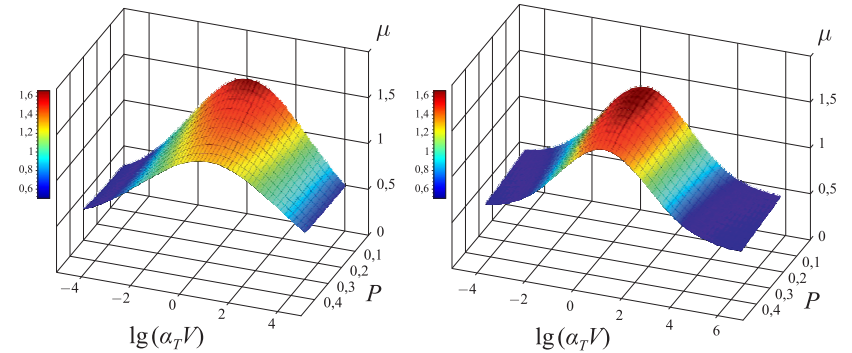


Рис. 1.18. Карты трения в условиях несмазанных поверхностей для образца зимней (слева) и летней (справа) протекторной резины, построенные для условий испытаний: $T = -25 \div 100$ °C, $p = 0,1 \div 0,4$ МПа и $V = 1 \div 200$ мм/с

мость коэффициента трения от двух уровней номинального давления (0,1 и 0,4 МПа) и параметра $\lg \alpha_T V$. Анализ мастер-кривых, представленных на рис. 1.17, дает возможность сделать ряд выводов. Во-первых, коэффициент трения является немонотонной функцией скорости скольжения: при возрастании скорости коэффициент трения сначала возрастает, а потом уменьшается. Во-вторых, в исследуемом диапазоне давлений наблюдается зависимость коэффициента трения от величины номинального давления, при этом существует смещение максимума коэффициента трения в сторону больших скоростей с увеличением номинального давления.

Полученные мастер-кривые можно обобщить в единую объемную поверхность — карту трения, представляющую собой зависимость коэффициента трения от номинального давления p и параметра $\alpha_T V$. Для построения карты трения используется четырехпараметрическая функция [30], в виде:

$$\mu = A + \exp(B) \cdot \exp(C \cdot \{\lg(\alpha_T V) - D\}^2), \quad (1.2)$$

где A , B , C , D — параметры, определяющие положение карты трения относительно аппроксимируемых экспериментально полученных данных. Алгоритм нахождения перечисленных параметров изложен в работе [31]. Следует отметить, что ошибка аппроксимации функции (1.2) может быть минимизирована соответствующим выбором другой константы ΔT , отличной от значения, предложенного Дж. Ферри и равного 50. На рис. 1.18 представлены две карты трения (для зимней и летней протекторной резины $T_{ст} = -24$ и -1 °C соответственно), построенные на основе экспериментальных данных, полученных для следующих условий

испытаний: $T = -25 \div 100$ °С, $p = 0,1 \div 0,4$ МПа и $V = 1 \div 200$ мм/с. В качестве контртела используется водостойкая наждачная бумага на тканевой основе с нанесенным на нее слоем электрокорунда циркониевого с размером зерна 100–125 мкм. Параметры уравнений (1.2) для зимней резины: $A = 0,35$, $B = 0,4 - 1,33p + 0,43p^2$, $C = -0,09 + 0,05p + 0,07p^2$, $D = 0,75 - 0,83p + 1,2p^2$, $\Delta T = 19$, а для летней резины: $A = 0,66 - 0,32p + 0,07p^2$, $B = -0,15 + 1,29p - 3,22p^2$, $C = -0,13 - 0,34p + 0,74p^2$, $D = 0,75 - 0,75p + 1,09p^2$, $\Delta T = 8$.

Карты трения, построенные на основе проведенных испытаний, иллюстрируют влияние скорости, температуры, номинального давления и свойств материалов на значение коэффициента трения при скольжении резинового образца по поверхности, характеризуемой определенной формой выступов шероховатой поверхности и расстоянием между ними.

Аналогичным образом строятся карты трения в случае проведения испытаний при наличии смазочного материала в контакте, в качестве которого использовался раствор 20 % жидкого мыла в дистиллированной воде. На рис. 1.19 представлены карты трения, построенные на основе экспериментальных данных (см. рис. 1.11), полученных в условиях смазанных поверхностей для 7 различных температур и 4 контактных давлений со следующими параметрами: $A = 0,16$, $B = -0,31 - 0,46p + 0,82p^2$, $C = -0,02 - 0,06p + 0,12p^2$, $D = 3,77 - 4,95p + 6,92p^2$, $\Delta T = 40$ °С для зимней и $A = -1,4$, $B = 0,89 + 0,12p - 0,26p^2$, $C = -0,004 - 0,002p + 0,005p^2$, $D = 5,64 - 7,57p + 13,18p^2$, $\Delta T = 35$ °С для летней резины со-

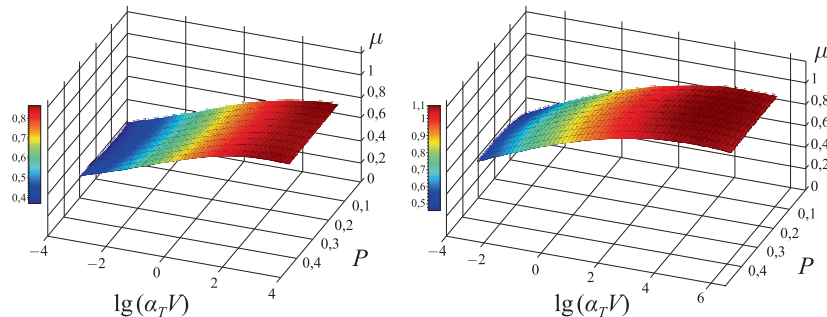


Рис. 1.19. Карты трения в условиях смазанных поверхностей для образца зимней (слева) и летней (справа) протекторной резины, построенные для условий испытаний: $T = 5 \div 85$ °С, $p = 0,1 \div 0,4$ МПа и $V = 1 \div 200$ мм/с. Смазочная среда — раствор 20 % мыла в дистиллированной воде

ответственно. Условия проведения эксперимента: $T = 5 \div 85$ °С, $p = 0,1 \div 0,4$ МПа и $V = 1 \div 200$ мм/с. Контртелом являлась наждачная бумага, подобная используемой для опытов в условиях трения без смазочного материала.

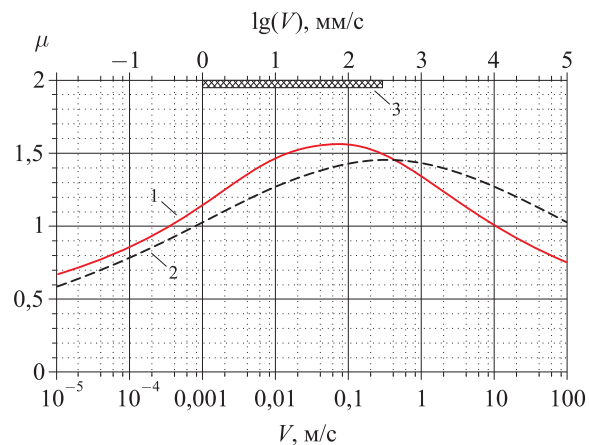
Анализ карт трения, представленных на рис. 1.18 и 1.19, позволяет сделать вывод, что значения коэффициента трения при контакте сухих поверхностей значительно превышают значения коэффициента трения смазанных поверхностей, что объясняется проявлением адгезионного взаимодействия поверхностей и хорошо согласуется с результатами моделирования (см. главу 4).

1.4.2. Методика оценки влияния физико-механических свойств эластомеров на коэффициент трения

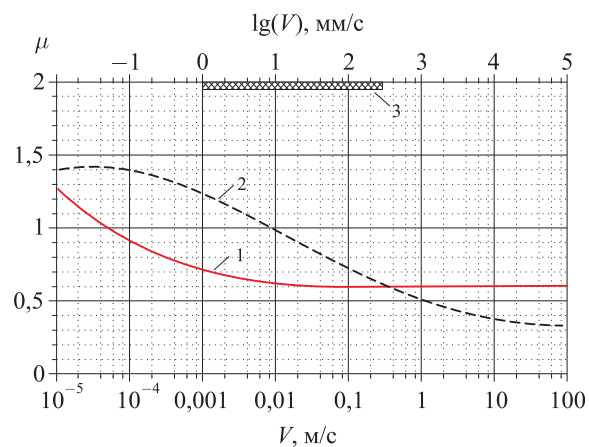
Для анализа влияния физико-механических свойств (например, температуры стеклования) на коэффициент трения целесообразно построить зависимость коэффициента трения от скорости при фиксированных значениях температуры резины и контактного давления, т. е. получить так называемую мастер-кривую. На основании результатов, представленных на рис. 1.18, можно построить зависимость коэффициента трения от скорости скольжения для зимней резины и сухой поверхности наждачной бумаги с заданной шероховатостью при фиксированной температуре $T = -20$ °С и нормальном давлении в контакте $P = 0,25$ МПа. Из уравнения (1.1), принимая в расчет, что для зимней резины $T_{ст} = -24$ °С, $\Delta T = 19$ °С, получим горизонтальный сдвиг по оси скоростей $\lg \alpha_{T=-20^\circ\text{C}} = -1,54$. Параметры уравнения (1.2) при $P = 0,25$ МПа примут значения: $A = 0,61$, $B = 0,001$, $C = -0,16$, $D = 1,31$, а зависимость коэффициента трения (мастер-кривая) от скорости скольжения примет вид: $\mu = 0,61 + 2,72 \cdot \exp(-0,16 \cdot (\lg V - 2,85)^2)$.

Аналогичным образом получены мастер-кривые зависимости коэффициента трения от скорости скольжения для зимней и летней протекторной резины, построенные для двух температур, $T = 22$ и -20 °С (рис. 1.20). Анализ показывает, что температура стеклования оказывает существенное влияние на положение максимума и значение коэффициента трения.

Следует отметить, что зависимости, приведенные на рис. 1.20, справедливы во всем диапазоне скоростей в том лишь случае, если, во-первых, не происходит разогрева контактирующих материалов, во-вторых, не возникает динамических эффектов и других явлений, возникающих при скольжении материала с высокой скоростью. В-третьих,



а)



б)

Рис. 1.20. Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения при $P = 0,25$ МПа: а) $T = 22$ °C, б) $T = -20$ °C: 1 — зимняя, а 2 — летняя протекторные резины, 3 — область, в которой выполнен эксперимент

следует отметить, что при обработке лабораторных экспериментов не учитывался эффект образования третьего тела на контактирующих поверхностях, характерный для сухого трения и влияющий на процесс трения. Несмотря на упомянутые факторы, получение подобных результатов дает возможность оценить влияние физико-механических свойств на

величину коэффициента трения, а также смещение его максимума, позволяет сравнить влияние наполнителей, вводимых в резину, а также технологии изготовления резин на величину и положение максимальных значений коэффициента трения скольжения.

1.5. Исследование влияния геометрии поверхности контртела на коэффициент трения

В разделе приводятся результаты исследования влияния геометрии поверхности контртела (макро- и микрошероховатости) на коэффициент трения скольжения при разных условиях смазывания (сухое и граничное трение).

Экспериментальное изучение влияния геометрии поверхности контртела на трение резин выполнялось на трибометре УМТ-2, принцип работы которого описан в пункте 1.1.2. В качестве образцов использовалась протекторная резина, вулканизированная в виде колец, наклеенных на стальные подложки (см. рис. 1.4). Некоторые свойства исследуемых резин приведены в таблице 1.

Таблица 1. Модули упругости и температуры стеклования резин

Образец резины	Модуль упругости E^* , МПа	$T_{ст}$, °C
а	5,9	-37
б	3,2	-34

* — при комнатной температуре.



Рис. 1.21. Модельные образцы дорожной поверхности: 1 — крупные камни с шероховатой поверхностью, 2 — крупные камни с гладкой поверхностью, 3 — маленькие камни с гладкой поверхностью

Контртелами к резиновым образцам служили модельные образцы дорожной поверхности, изготовленные в форме дисков с плоской поверхностью, содержащих камни щебня разных размеров и микрошероховатости на их поверхностях. Камни клеивались в диски при помощи специальной смолы (рис. 1.21). Все образцы состоят из набора неровностей (макрошероховатость), т. е. камней с заданными приблизительно одинаковыми размерами, с типичной микрошероховатостью их поверхностей. Модельные образцы были разделены на три группы: крупные камни с шероховатой поверхностью (1), крупные камни с гладкой поверхностью (2) и маленькие камни с гладкой поверхностью (3).

Испытания резин проводились как в условиях обильной смазки, в качестве которой использовался 20 %-ный раствор мыла в дистиллированной воде, так и без нее. Методика проведения эксперимента и построения карт трения аналогична описанной в разделе 1.3.2 и 1.4.

Экспериментальные результаты представлены в виде карт трения для двух резин и трех модельных дорожных поверхностей для условий сухого (рис. 1.22) и смазанного (рис. 1.23) контактов.

Анализ карт трения (рис. 1.22) показывает, что коэффициент трения при скольжении резины по модельной дорожной поверхности в условиях сухого контакта существенно зависит от обобщенного температурно-скоростного параметра $\lg(a_T V)$, и эта зависимость характеризуется наличием максимума коэффициента трения, причем его положение незначительно сдвигается в сторону больших скоростей с уменьшением жесткости резины. Оба эффекта объясняются вязкоупругой природой резин и ее влиянием на процесс трения скольжения. Следует отметить, что в области малых значений параметра $\lg(a_T V)$ коэффициент трения увеличивается с уменьшением номинального контактного давления, а при больших значениях этого параметра — уменьшается при уменьшении давления.

В условиях смазанного контакта испытания проводились в меньшем диапазоне изменения температур (только при положительных температурах, изменяющихся от 5 до 85 °C), поэтому зависимости коэффициента трения от параметра $\lg(a_T V)$ построены в меньшем диапазоне его изменения. В этом диапазоне характерный вид построенных карт трения существенно отличается от карт трения, полученных для сухих поверхностей. Зависимости коэффициента трения от параметра $\lg(a_T V)$ являются монотонно возрастающими. Поскольку снижение коэффициента трения при увеличении скорости скольжения для сухих поверхностей наблюдалось в области отрицательных температур, этой части карт трения в условиях смазанного контакта построить не удалось. Результаты

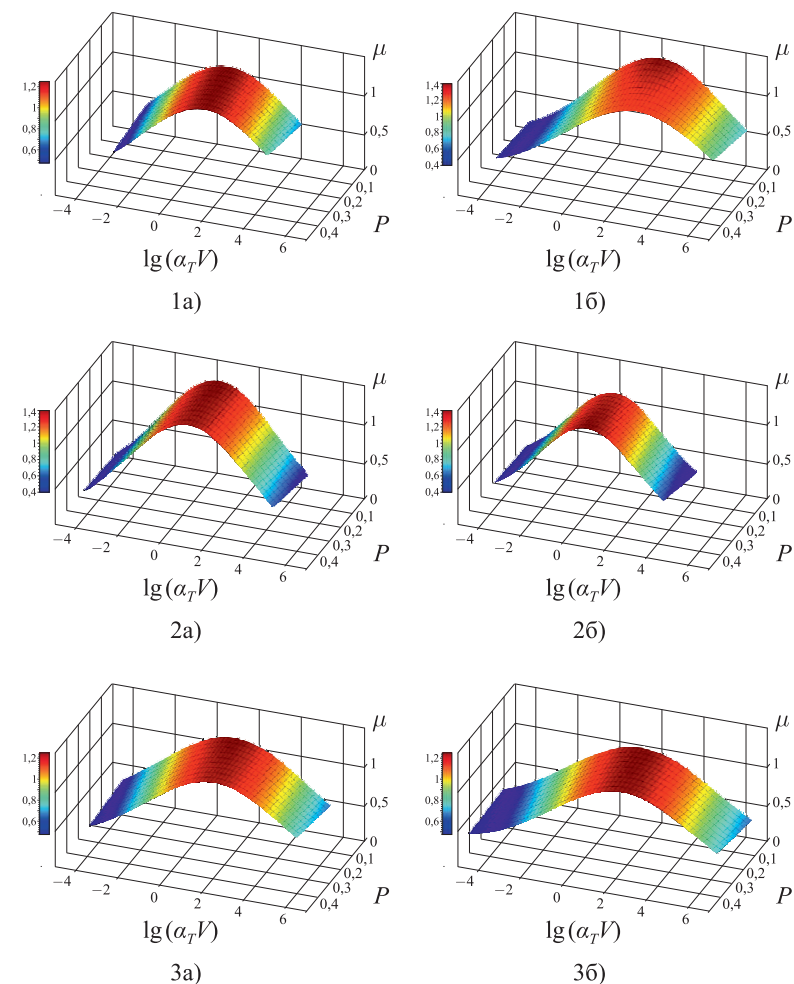


Рис. 1.22. Карты трения, полученные в условиях сухого трения: $T = -25 \div 100$ °C, $P = 0,1 \div 0,4$ МПа и $V = 1 \div 200$ мм/с, где 1 — дорожное покрытие 1, 2 — дорожное покрытие 2, 3 — дорожное покрытие 3: а — жесткая резина $E = 5,9$ МПа, б — мягкая резина $E = 3,2$ МПа

исследования также позволяют сделать вывод, что номинальное контактное давление слабо влияет на коэффициент трения, при этом наблюдается незначительное увеличение коэффициента трения с увеличением номинального давления.

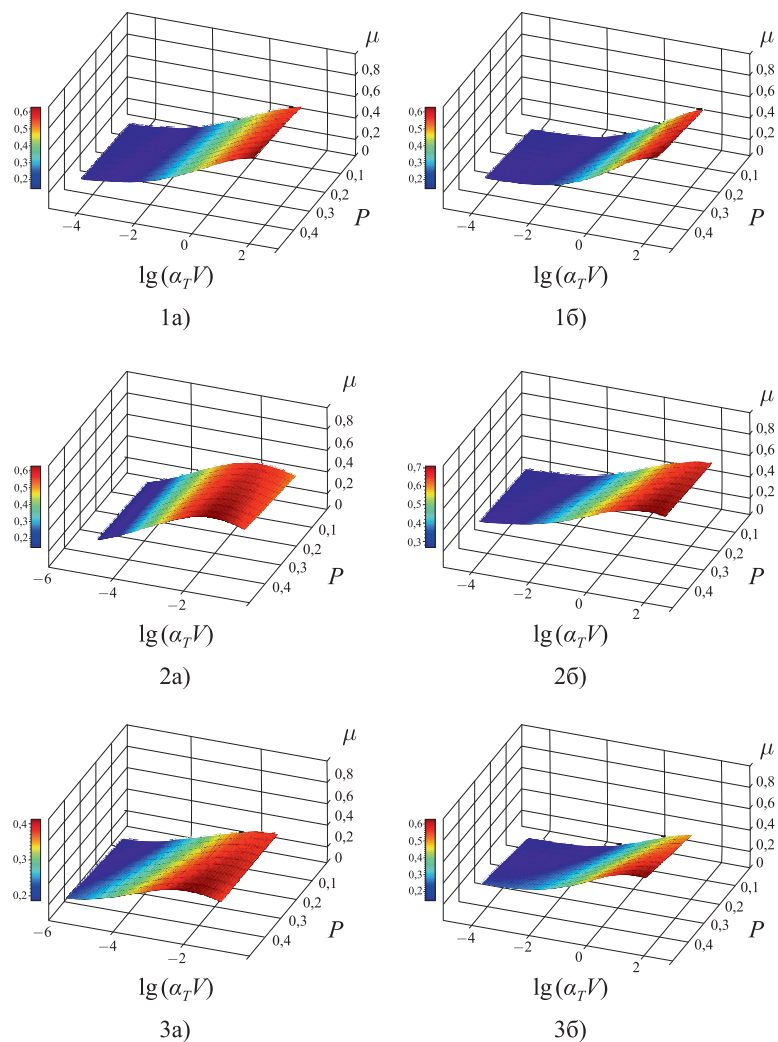


Рис. 1.23. Карты трения, полученные в условиях трения со смазкой: $T = 5 \div 85^\circ\text{C}$, $P = 0,1 \div 0,4$ МПа и $V = 1 \div 200$ мм/с, где 1 — дорожное покрытие 1, 2 — дорожное покрытие 2, 3 — дорожное покрытие 3: а — жесткая резина $E = 5,9$ МПа, б — мягкая резина. Смазочный материал — раствор 20 % мыла в дистиллированной воде

Для анализа влияния рельефа поверхности контртела на коэффициент трения карты трения для сухого и смазанного контакты были

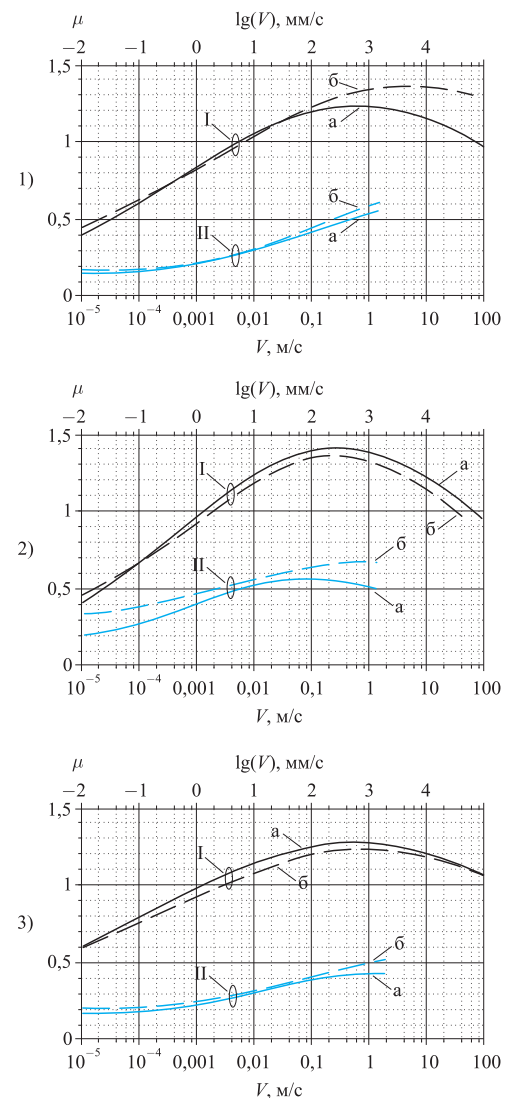


Рис. 1.24. Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения при $P = 0,25$ МПа и $T = 22^\circ\text{C}$, где 1 — дорожное покрытие 1, 2 — дорожное покрытие 2, 3 — дорожное покрытие 3: а — жесткая резина, б — мягкая резина, I — режим сухого трения, II — режим трения со смазкой. Смазочный материал — раствор 20 % мыла в дистиллированной воде

трансформированы в мастер-кривые при температуре $T = 22\text{ }^{\circ}\text{C}$ и контактном давлении $P = 0,25\text{ МПа}$. На рис. 1.24 представлены мастер-кривые, полученные для трех модельных образцов дорожной поверхности и двух типов резин.

Анализ полученных результатов показывает, что в условиях сухого трения жесткость резины влияет на положение максимума коэффициента трения при скольжении по большим неровностям, имеющим микрошероховатость на поверхности. Причем с уменьшением жесткости резины положение максимума коэффициента трения смещается в сторону больших скоростей (рис. 1.24.1). Отсутствие микрошероховатости на поверхности неровностей (гладкие камни) нивелирует эффект влияния жесткости резины на положение максимума коэффициента трения (рис. 1.24.2 и 1.24.3). Уменьшение размера неровностей приводит к снижению максимальных значений коэффициента трения, особенно в случае контакта несмазанных поверхностей. В условиях смазанного контакта влияние жесткости на коэффициент трения незначительно в сравнении с несмазанным контактом. Для больших гладких неровностей наблюдается смещение максимальных значений коэффициента трения в сторону больших скоростей с уменьшением жесткости резины.

1.6. Изучение свойств поверхности и тонких поверхностных слоев эластомеров до и после трибологических испытаний

Изучение изменений в приповерхностных слоях эластомеров вследствие трения было проведено на четырех морозостойких резиновых смесях, три из которых изготавливались на основе синтетического пропиленаксидного каучука (СКПО), четвертая — на основе бутадиен-нитрильного каучука (БНКС-18). Резиновая смесь на основе пропиленаксидного каучука содержала все необходимые для получения резин ингредиенты (сера, ускорители, активатор, диспергатор, пластификатор). Вторая резиновая смесь, рецептура которой была идентична рецептуре смеси, упомянутой выше, дополнительно содержала порошок ультрадисперсного политетрафторэтилена (УПТФЭ) в количестве 1 мас. ч. на 100 мас. ч. каучука. Следующая резиновая смесь была изготовлена в соответствии с теми же рецептурой и технологией, но вместо УПТФЭ содержала технический углерод (ТУ) марки П-803 в количестве 50 мас. ч. В варьирование наполнителей (УПТФЭ, ТУ) впоследствии позволило проследить влияние природы наполнителя на изменение коэффициента трения. Для сравнения была выбрана резиновая смесь на основе бутадиен-нитрильного каучука марки В-14 — одна из широко распространенных промышленных резин для применения при пониженных

температурах. Все смеси готовили в пластикордере «Брабендер», вулканизовали в электропрессе в течение 40 минут при $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ в виде колец, геометрические характеристики которых приведены на рис. 1.4. Следует отметить, что наполненные и ненаполненные резины на основе СКПО характеризовались высоким уровнем морозостойкости: коэффициент морозостойкости при растяжении, определенный при $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$, для них находился в пределах от 0,8 до 0,99. Наибольшая морозостойкость была зафиксирована у исходной резины на основе СКПО, ультрадисперсный политетрафторполиэтилен вследствие малого содержания (1 мас. ч.) и малых размеров частиц (не более 1 мкм) практически не снижал низкотемпературные характеристики пропиленаксидного каучука. Наполненная техническим углеродом резина, как и следовало ожидать, имела более низкое значение коэффициента морозостойкости ($K_m = 0,8$). Коэффициент морозостойкости резины В-14 характеризовался значением, свойственным резинам на основе БНКС-18, и составлял 0,3 при $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$.

1.6.1. Триботехнические исследования и результаты

Экспериментальное определение коэффициента трения исследуемых резин проводилось на трибометре УМТ-2 (раздел 1.2.2). Принцип работы прибора и методика проведения теста описаны в разделе 1.3.2.

Результаты выполненных испытаний обобщены и представлены на рис. 1.25 в виде зависимостей коэффициента трения μ от скорости скольжения V для четырех резин при разных значениях номинального давления P , варьируемых в пределах от 0,1 до 0,3 МПа. При этом представленные результаты соответствуют температурам испытаний 22 и $-25\text{ }^{\circ}\text{C}$ соответственно.

Представленные результаты, прежде всего, демонстрируют, что введение УПТФЭ и технического углерода приводит к существенному снижению коэффициента трения эластомерного материала во всем диапазоне скоростей скольжения, давлений и температур. Эти результаты объясняются, в том числе, при помощи проведенных исследований на атомно-силовом и электронном микроскопах в следующем разделе.

1.6.2. Микроскопические исследования и результаты

Все микроскопические исследования были проведены на резиновых образцах, прошедших приработку трением при комнатной температуре, давлении 0,3 МПа, скорости скольжения 5 мм/с и пути трения 5 м. В работе были исследованы как поверхности трения, так и их приповерхностные слои, изучаемые на торцевых срезах, полученных двумя отличающимися способами, а именно: путем скалывания и резания. Сколы

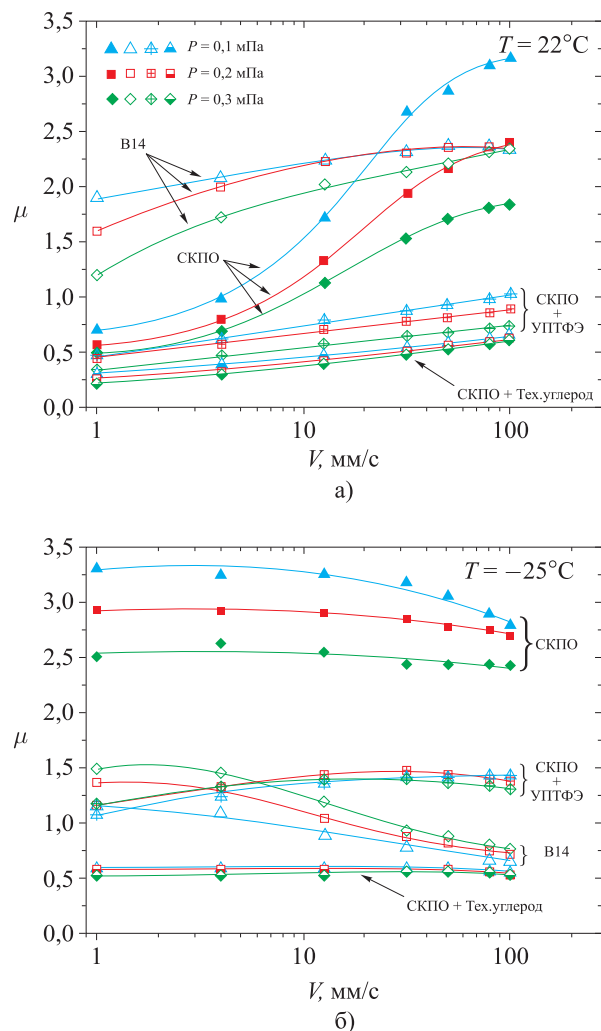


Рис. 1.25. Зависимость коэффициентов трения μ от скорости скольжения V для резин на основе СКПО, СКПО с добавлением 1 мас. ч. УПТФЭ, СКПО с добавлением технического углерода и резины марки В-14 на основе бутадиен-нитрильного каучука БНКС-18

получали механическим раскалыванием образцов, охлажденных в жидком азоте. Срезы получали путем разрезания образцов. Для создания электропроводящего слоя диэлектрическая поверхность резины металли-

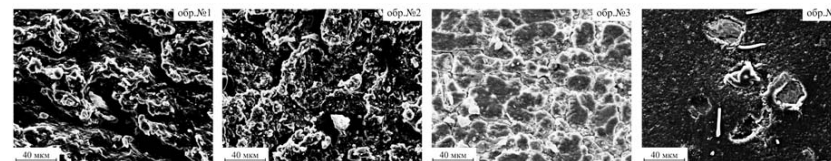


Рис. 1.26. Микрофотографии поверхности трения образцов

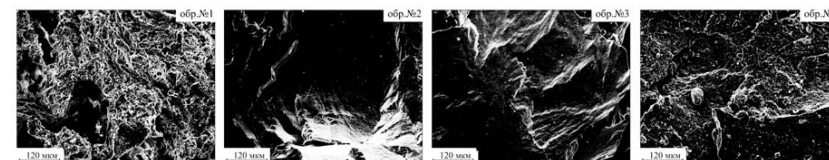


Рис. 1.27. Микрофотографии подповерхностных слоев, полученных методом «сколов»

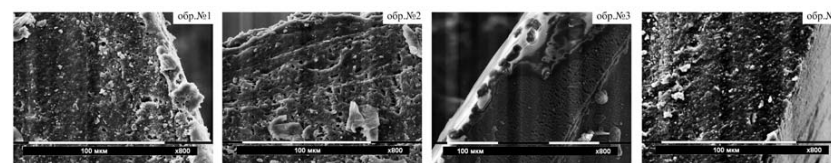


Рис. 1.28. Микрофотографии подповерхностных слоев, полученных методом «разрезания»

зировалась. Для этого был использован комплекс магнетронного напыления «SPI Supplies», с помощью которого на образцы наносился тончайший слой (порядка 10 нм) золота.

Морфология поверхности трения, а также их подповерхностные слои были изучены на сканирующем электронном микроскопе «Philips SEM 505» с системой наблюдения изображения в цифровом формате «Image Score». Использовался стандартный режим работы микроскопа — режим вторичных электронов при ускоряющем напряжении 15 кВ. При исследовании выбирались типичные области на поверхности исследуемых объектов. Микрофотографии поверхностей трения представлены на рис. 1.26, а приповерхностных слоев, полученных методом «скола» и методом «разрезания», представлены на рис. 1.27 и 1.28 соответственно.

Из результатов, представленных на рис. 1.27 и 1.28, следует, что исследуемые поверхности трения заметно отличаются друг от друга. Так, поверхность образца № 1 после трибологических испытаний достаточно ровная и плотная. Это хорошо видно также и на срезе. Она имеет определенное сходство с образцом № 4 вследствие содержания в рецептуре

резин технического углерода. Анализ сколов показал, что образец № 1, в отличие от остальных образцов, имеет некоторую объемную пористость, обусловленную образованием в объеме образца саже-каучукового геля. Морфология поверхности образцов № 2 и № 3 сходна — эти образцы демонстрируют более развитые (по сравнению с образцами № 1 и № 4) микрорельефы поверхности. При этом поверхность образца № 2 более плотная и однородная. Сравнение срезов этих образцов показывает их различие: срез образца № 2 достаточно однородный, в то время как у образца № 3 наблюдается некоторая неоднородность структуры. Образец № 4 (резина В-14) заметно отличается гладкостью поверхности и наличием «катушков» (скаток), появление которых, возможно, связано с отслаиванием материала с поверхности и «скатыванием» его в «жгутики» в процессе трения. По характеру срезов и сколов этот образец близок к образцу № 1, хотя и имеет меньшую пористость. В рецептуре резины В-14 присутствует 120 мас. ч. технического углерода, в то время как оптимальное содержание ТУ для данного класса каучуков не превышает 60 мас. ч. Вследствие высокого содержания активного наполнителя доля каучуковой составляющей в единице объема мала, что, по-видимому, и объясняет выявленный эффект.

Адгезионные и вязкоупругие свойства поверхностей образцов исследовались с использованием атомно-силового микроскопа Solver P-47. Предварительный анализ поверхности и выбор точек для дальнейшего исследования осуществлялся в режиме тэйпинга. В выбранных точках проводились измерения адгезии, о степени которой судили по кривым «подвода – отвода», характеризующим силовое взаимодействие кантилевера с исследуемой поверхностью. На рис. 1.29 приведены результаты исследования адгезионных свойств поверхности трения с помощью атомно-силового микроскопа.

Анализ этих кривых позволяет сделать вывод о том, что добавление УПТФЭ не изменяет адгезию на поверхности (рис. 1.29, образцы № 2 и 3). Этот факт скорее говорит о том, что при проведении теста не удалось «попасть» в частицу УПТФЭ вследствие их малой величины и малой концентрации в резине (1 мас. ч.). Добавление технического углерода к СКПО приводит к резкому (более чем в 5 раз) снижению адгезионных свойств поверхности (рис. 1.29, образец № 1). Бутадиен-нитрильный каучук вследствие высокой степени наполнения и высокого уровня взаимодействия каучука и ТУ (рис. 1.29, образец № 4) изначально обладает малой адгезией к другим поверхностям по сравнению с резиной на основе СКПО. Следовательно, можно сделать вывод, что образцы, содержащие технический углерод, имеют наименьшую адгезию к поверхности.

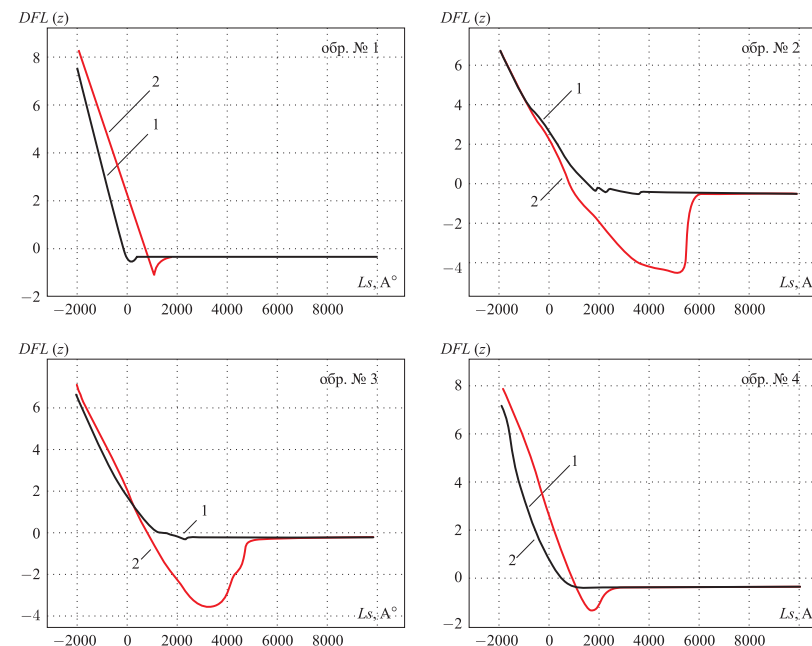


Рис. 1.29. Зависимость смещения кончика зонда $DFL(z)$ от расстояния до исследуемой поверхности Ls : 1 — подвод, 2 — отвод зонда кантилевера

Таким образом, в данном разделе экспериментально показано, что введение в рецептуру резиновой смеси на основе пропиленоксидного каучука технического углерода резко изменяет структуру и свойства образца резины. Образование множества межмолекулярных связей между наполнителем и каучуком приводит к упрочнению материала, некоторому снижению морозостойкости. Происходит сглаживание микрорельефа, увеличивается однородность поверхности и ее «плотность», уменьшается адгезия и увеличивается жесткость поверхности, что приводит к значительному снижению коэффициента трения. Коэффициент трения резины на основе СКПО, наполненной техническим углеродом, во всем диапазоне исследованных температур, давлений и скоростей в 3÷5 раз ниже, чем у промышленной резины марки В-14 на основе бутадиен-нитрильного каучука БНКС-18. Введение УПТФЭ, обладающего низким коэффициентом трения, в резиновую смесь на основе СКПО также несколько изменяет свойства поверхности: увеличивается ее изотропия, незначительно уменьшается адгезия и жесткость образца (образец становится более вязким), что существенно снижает коэффициент трения.

Коэффициенты трения резин на основе СКПО, содержащих УПТФЭ или технический углерод, при исследованной отрицательной температуре практически неизменны, что позволяет предположить стабильность работы уплотнений из них в реальных уплотнительных устройствах, испытывающих динамические нагрузки и циклические деформации.

Литература

1. Гент А. и Уолтер Дж. Пневматическая шина / Пер. с англ. М.: НТИ «НИИШП», 2015. 746 с.
2. Бартенев Г. М., Лаврентьев В. В. Трение и износ полимеров. Ленинград: Химия, 1972. 240 с.
3. Резниковский М. М., Лукомская А. И. Механические испытания каучука и резины. М.: Химия, 1968. 500 с.
4. Тобольский А. Свойства и структура полимеров. Москва: Химия, 1964. 322 с.
5. Лебедев Л. М. Машины и приборы для испытания полимеров. 1967. 212 с.
6. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Издательство, 1963. 535 с.
7. Айнбиндер С. Б., Тюнина Э. Л. Введение в теорию трения полимеров. АН ЛатССР, Ин-т механики полимеров. Рига: Зинатне, 1978. 223 с.
8. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
9. Полимеры в узлах трения машин и приборов: Справочник. М.: Машиностроение, 1980. 208 с.
10. Белый В. А., Свириденко А. И., Петроковец М. И., Савкин В. Г. Трение полимеров. М.: Наука, 1972. 202 с.
11. Крагельский И. В. Трение и износ, изд. 2-е. М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
12. Боуден Ф. П., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел. М.: Машиностроение, 1968. 543 с.
13. Мур Д. Трение и смазка эластомеров. М.: Химия, 1977. 262 с.
14. Sinha S. K., Briscoe B. J. Polymer Tribology. London: Imperial College Press, 2009.
15. Чихос Х. Системный анализ в трибонике. М.: Мир, 1982. 360 с.
16. Бартенев Г. М., Лаврентьев В. В., Елькин А. И. Приборы для исследования силы трения высокоэластичных полимеров при постоянной нагрузке и деформации в широкой области температур // Сб. «Теория трения и износа». М.: Наука, 1965. С. 290–293.

17. Абдрашитов Э. Ф., Пономарев А. Н. Фрикционные свойства силиконовых резин после плазмохимического модифицирования // Трение и износ. 2001. Т. 22, № 4. С. 452–460.
18. Flom D. G., Bueche A. M. Theory of rolling friction for spheres // J. Appl. Phys. 1959. Vol. 30, № 11. P. 1725.
19. Greenwood J. A., Minshall H., Tabor D. Hysteresis losses in rolling and sliding friction // Proc. Roy. Soc. 1961. Vol. A259, № 1299. P. 480.
20. Greenwood J. A., Tabor D. The friction of hard sliders on lubricated rubber: the importance of deformation losses // Proc. Phys. Soc. 1958. Vol. 71. P. 989.
21. Grosch K. A. The relation between the friction and visco-elastic properties of rubber // Proc. R. Soc. Lond. A. 1963. Vol. 274. P. 21–39.
22. Heinrich G., Klüppel M. Rubber friction, tread deformation and tire traction // Wear. 2008. Vol. 265, № 7. P. 1052–1060.
23. Lorenz B., Oh Y. R., Nam S. K., Jeon S. H., Persson B. N. J. Rubber friction on road surfaces: Experiment and theory for low sliding speeds // The Journal of Chemical Physics. 2015. Vol. 142. P. 194701.
24. Persson B. N. J. Theory of powdery rubber wear // Journal of Physics: Condensed Matter. 2009. Vol. 21, № 48. P. 485001.
25. Морозов А. В., Петрова Н. Н. Методика оценки коэффициента трения уплотнительных морозостойких резин // Трение и износ. 2016. Т. 37, № 2. С. 162–167.
26. Mullins L. Softening of rubber by deformation // Rubber Chem. Technol. 1969. Vol. 42, № 1. P. 339–362.
27. Резина — конструкционный материал современного машиностроения: Сб. ст. / Под общ. ред. П. М. Баденкова, В. Ф. Евстратова, М. М. Резниковского. М.: Химия, 1967. 324 с.
28. Александров А. П., Лазуркин Ю. С. Высокоэластическая деформация полимеров // ЖТФ. 1939. Т. 9. С. 1249–1260.
29. Williams M. L., Landel R. F., Ferry J. D. The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids // J. Am. Chem. Soc. 1955. Vol. 77, № 14. P. 3701–3707.
30. Savkoor A. R. Mechanics of sliding friction of elastomers // Wear. 1986. № 113. P. 37–60.
31. Буковский П. О., Морозов А. В. Препринт № 1126. Компьютерная программа построения объемных карт трения, зависящих от скорости скольжения, давления и температуры. М.: ИПМех РАН, 2016.

Глава 2. Расчет контактных и внутренних напряжений, а также силы трения при скольжении единичной неровности и системы неровностей по вязкоупругому полупространству

В этой главе представлены решения контактных задач о скольжении по вязкоупругому полупространству жесткого индентора гладкой формы при наличии касательных напряжений в области контакта (в том числе, с учетом пригрузки в виде двух сосредоточенных сил), а также системы, состоящей из двух инденторов.

На основании полученных решений исследовано влияние формы индентора, моделирующего неровность шероховатой поверхности, а также касательных напряжений, действующих в области контакта, на контактные характеристики и деформационную составляющую силы трения. Проведен анализ влияния пригрузки от других неровностей на распределение контактного давления под рассматриваемой неровностью. Изучена зависимость силы трения и распределения контактного давления от расстояния между неровностями при скольжении системы неровностей по границе вязкоупругого полупространства (эффект взаимного влияния неровностей). Исследовано распределение напряжений внутри вязкоупругого полупространства, возникающее при скольжении по нему неровности или системы неровностей заданной формы.

2.1. Подходы к изучению деформационной составляющей силы трения

Изучение природы силы трения — одно из основных направлений механики контактного взаимодействия. К настоящему времени установлено, что сила трения в случае вязкоупругих тел возникает благодаря двум основным механизмам: деформационным потерям энергии в поверхностных слоях контактирующих тел, а также адгезии поверхностей. Следует отметить, что деформационные потери при трении возникают на разных масштабных уровнях. В данной главе основное внимание уделяется решению контактных задач с учетом трения скольжения для вязкоупругих тел, в том числе исследуется механизм взаимного влияния, который может быть использован для анализа процессов, происходящих при множественном контакте.

Результаты целого ряда экспериментальных работ послужили свидетельством того, что наряду с адгезией деформационные потери внутри контактирующих тел вносят существенный вклад в силу трения. Для моделирования деформационной составляющей силы трения используются модели вязкоупругих материалов [1–9]. Для построения этих моделей развиваются теоретические и экспериментальные исследования вязкоупругих свойств различных материалов на основе индентирования [10–15]. Многие результаты этих исследований содержатся в монографиях [16–20].

В работе [5] исследовалось качение цилиндра по вязкоупругому полупространству, свойства которого описываются моделью Максвелла. В работе предложен метод решения, который основывается на серьезном упрощении модели полупространства. Упрощение заключается в том, что полупространство рассматривается как набор независимых вертикальных столбиков, сжимающихся под действием нагрузки, таким образом принимаются во внимание только нормальные напряжения внутри полупространства. В результате решения задачи определяется нагрузка, которая требуется, чтобы внедрение цилиндра оставалось постоянным, а также сила сопротивления движению цилиндра. Решение получено как для простой модели Максвелла, в которой после прохождения цилиндра поверхность полупространства не восстанавливается до первоначальной формы, так и для обобщенной модели Максвелла, которая больше подходит для описания реальных вязкоупругих материалов. Предложено также более точное решение задачи, основанное на результатах работы, посвященной индентированию вязкоупругого материала [9]. Авторы заключили, что полученные зависимости могли быть использованы для экспериментального определения спектра времен релаксации реальных вязкоупругих материалов.

В [3] исследовалась задача о качении жесткого сферического индентора по вязкоупругому полупространству, свойства которого описываются моделью Кельвина–Фойхта с одним временем релаксации. В результате применения метода, подобного изложенному в работе [5], были получены аналитические выражения для контактного давления и коэффициента трения.

Плоская контактная задача о скольжении цилиндра по вязкоупругому основанию, описываемому моделью стандартного линейного вязкоупругого тела с одним временем релаксации и постоянным коэффициентом Пуассона, рассмотрена Хантером [4]. Автором получено точное аналитическое решение задачи путем сведения ее к классической задаче теории потенциала и построению гармонической функции Грина [21]. Однако, в работе отмечено, что экспериментальная проверка полученных данных невыполнима, поскольку, по мнению автора, выбранная модель

едва ли подходит для описания реально существующих материалов. Позже Морланд [6–8] распространил результаты Хантера на решение задачи о контакте двух цилиндров, описываемых более общими определяющими соотношениями.

Задача о качении вязкоупругого цилиндра по полупространству из того же материала при наличии в области контакта зон сцепления и проскальзывания поверхностей рассмотрена в [22] на основании метода сведения ее к задаче линейного сопряжения для двух функций. Полученное аналитическое решение применимо также для анализа контактных характеристик и силы трения при скольжении жесткого цилиндра по вязкоупругому полупространству.

В случае, когда скольжение по вязкоупругому полупространству исследуется в трехмерной постановке, получение аналитического решения зачастую становится невозможным. В таких случаях исследователи прибегают к различным аппроксимациям. В теоретико-экспериментальной работе [23] при исследовании трения между жестким параболическим или коническим индентором и вязкоупругим полупространством использовался так называемый метод сокращения размерности. Суть метода заключается в том, чтобы свести трехмерную задачу к одномерной. В случае, если индентор в рассматриваемой задаче является осесимметричным, метод дает точное решение. Если индентор не является осесимметричным, существует возможность получить только приближенное численное решение. Все же следует отметить, что относительно применимости данного метода ведутся научные дискуссии.

Еще один подход к решению контактных задач о скольжении цилиндрического или сферического индентора предложен в работе [24]. С его помощью можно исследовать скольжение не только по вязкоупругому полупространству, но и по тонкому слою, соединенному с жестким основанием. Однако с помощью данного метода можно определить только силу трения скольжения, в то время как распределение контактного давления определить невозможно.

В связи с развитием вычислительной техники многие численные методы оказываются весьма эффективными при решении контактных задач для вязкоупругих тел. В работе [25] в трехмерной постановке исследовалась задача, решенная Хантером с использованием аппроксимации, предложенной в [26]. В качестве формы индентора выбран эллипсоид, вытянутый перпендикулярно направлению скольжения. Такая форма индентора позволила с определенной точностью произвести сравнение с решением Хантера. Полученные численные результаты хорошо согласуются с аналитическим решением Хантера, полученным для двумерной постановки.

В настоящее время среди исследователей рассматриваемого класса контактных задач популярен метод конечных элементов [27–30]. Этот метод может быть использован для решения контактных задач с любой формой индентора и моделью вязкоупругого материала. Однако если рассматриваются трехмерные контактные задачи, этот метод оказывается малоэффективным, поскольку требует больших объемов вычислений, особенно, если требуется достаточно высокая точность численных результатов. Следует отметить, что метод конечных элементов реализован во многих автоматизированных программных пакетах (системах автоматизированного проектирования).

С целью разработки численно-аналитического метода решения пространственных контактных задач в [31] построено аналитическое решение задачи о скольжении сосредоточенной и распределенной нагрузки по вязкоупругому основанию, материал которого характеризуется постоянным коэффициентом Пуассона и сдвиговой податливостью, описываемой интегральным оператором Вольтерра с экспоненциальным ядром. На основании полученных результатов в [32] предложено численное решение с использованием метода граничных элементов контактной задачи о скольжении жесткого сферического индентора по вязкоупругому полупространству в предположении отсутствия касательных напряжений в области контактного взаимодействия.

Теоретико-экспериментальное исследование скольжения жесткого индентора по вязкоупругому полупространству, описываемому моделью Максвелла и моделью стандартного тела, изложено в работе [33]. Контактная задача решается с использованием аналога функции Грина методом граничных элементов. В работе также представлено сравнение численных результатов с экспериментальными данными. Аналогичный подход использован в работе [34], в которой для сокращения объема вычислений также используются быстрые преобразования Фурье.

В работах [35, 36] получено решение контактной задачи о скольжении жесткого индентора по вязкоупругому полупространству, имеющему упругие эллиптические неоднородности внутри.

Актуальность исследования, приведенного в данной главе монографии, обусловлена необходимостью учета касательных напряжений в области контакта при решении контактных задач о скольжении тел по вязкоупругому полупространству, а также необходимостью развития численных методов решения контактных задач для системы инденторов с целью изучения эффекта взаимного влияния инденторов при их скольжении по вязкоупругому полупространству. Часть результатов, представленных в данной главе, содержится в работах [37–40].

2.2. Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству

2.2.1. Постановка задачи о скольжении единичного индентора

Рассматривается процесс скольжения жесткого индентора по вязкоупругому полупространству. Форма индентора описывается гладкой функцией $f(x, y)$. Система координат (x, y, z) связана с индентором, ось z направлена по нормали к плоскости скольжения в противоположную полупространству сторону. Начало декартовой системы координат находится в точке первоначального касания индентора с полупространством. Движение происходит в направлении оси Ox (рис. 2.1) с постоянной скоростью V много меньшей скорости распространения волн в материале полупространства, что в дальнейшем позволяет пренебрегать силами инерции. На индентор действует вертикальная сила P и касательная сила T , коллинеарная вектору скорости.

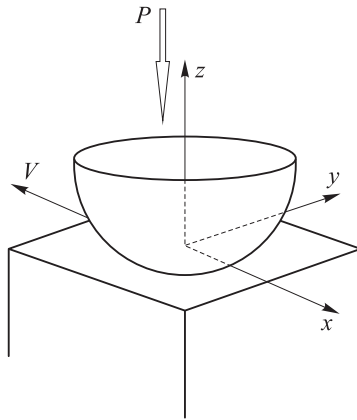


Рис. 2.1. Схема контакта

Рассматриваются следующие граничные условия на поверхности полупространства:

$$\begin{aligned} z=0: \quad \tau_{xz}(x, y) &= \mu \sigma_z(x, y), \quad \tau_{yz} = 0, \quad w(x, y) = f(x, y) - d \quad \text{при } (x, y) \in \Omega^c, \\ \sigma_z &= 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } (x, y) \notin \Omega^c, \\ -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь Ω^c — область контакта, $w(x, y)$ — вертикальные смещения поверхности полупространства, d — внедрение индентора, σ_z и τ_{xz} , τ_{yz} — нормальное и касательные напряжения, μ — коэффициент трения относительного проскальзывания.

Контактные давления $p(x, y) = -\sigma_z(x, y)$ и область контакта Ω^c неизвестны. Для определения последней используется условие непрерывности давления на границе области контакта.

Контактное давление удовлетворяет условию равновесия:

$$P = \iint \Omega^c p(x, y) dx dy. \quad (2.2)$$

Здесь и далее, если не оговорено иное, интегрирование ведется по области Ω^c . Касательная сила T , которую следует приложить к индентору, чтобы он находился в равновесии, определяется в процессе решения задачи.

Вязкоупругое полупространство является однородным и изотропным. Модель материала полупространства характеризуется постоянным коэффициентом Пуассона ν и описывается интегральным оператором Вольтерра, задающим зависимость сдвиговых деформаций $\gamma(t)$ от касательных напряжений $\tau(x, y)$ в виде:

$$\gamma_{xz}(t) = \frac{1}{G} \tau_{xz}(t) + \frac{1}{G} \int_{-\infty}^t \tau_{xz}(\tau) K(t - \tau) d\tau; \quad K(t) = \sum_i k_i \exp\left(-\frac{t}{T_{ei}}\right). \quad (2.3)$$

где G — мгновенный модуль сдвига, T_{ei} — спектр времен последдействия, $k_i = \frac{1}{T_{ei}}$ — величины, обратные времени релаксации. Процесс скольжения индентора предполагается установившимся, т. е. движение индентора начинается в момент времени $t = -\infty$.

2.2.2. Метод решения контактной задачи о скольжении единичного индентора

Рассмотрим сначала скольжение сосредоточенной силы по упругому полупространству с постоянной скоростью V в направлении оси Ox . Свяжем с приложенной нагрузкой подвижную декартову систему координат. В этой системе координат ось z направлена по нормали к поверхности полупространства в противоположную полупространству сторону. Один из способов решения данной задачи подробно описан в [19] и заключается в сведении ее к краевой задаче теории потенциала просто-

го слоя. В соответствии с полученным в [19] решением, вертикальные перемещения точек упругого полупространства записываются в следующем виде:

$$w(x, y, z) = \frac{T_x}{4\pi G} \left(\frac{xz}{r_0^3} + (1-2\nu) \frac{x}{r_0(r_0+z)} \right) + \frac{T_y}{4\pi G} \left(\frac{yz}{r_0^3} + (1-2\nu) \frac{y}{r_0(r_0+z)} \right) - \frac{T_z}{4\pi G} \left(\frac{2(1-\nu)}{r_0} + \frac{z^2}{r_0^3} \right); \quad (2.4)$$

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Здесь T_x, T_y, T_z — проекции силы на координатные оси.

Зависимость вертикальных перемещений поверхности полупространства (при $z=0$) от нагрузки, приложенной в точке $(\xi, \eta, 0)$, примет вид:

$$w(x, y, 0) = \frac{(1-2\nu)T_x}{4\pi G} \frac{(\xi-x)}{r^2} + \frac{(1-2\nu)T_y}{4\pi G} \frac{(\eta-y)}{r^2} - \frac{(1-\nu)T_z}{2\pi G r}, \quad (2.5)$$

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}.$$

Поскольку процесс скольжения сосредоточенной силы считается установившимся, положение системы координат можно отнести к любому моменту времени, например $t=0$. Таким образом, движение сосредоточенной силы начинается в момент времени $t=-\infty$, и она достигает начала системы координат в момент времени $t=0$. Заменяя $1/G$ в выражении (2.5) на оператор Вольтерра вида (2.3), а также учитывая, что в момент времени $\tau < 0$ сосредоточенная сила находится на расстоянии $-V\tau$ от центра системы координат, вертикальные перемещения границы полупространства запишутся в следующем виде [31]:

$$w(x, y, 0) = \frac{(1-2\nu)T_x}{4\pi G} \left[\frac{\xi-x}{r^2} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{\xi-x-V\tau}{r_*^2} d\tau \right] + \frac{(1-2\nu)T_y}{4\pi G} \left[\frac{\eta-y}{r^2} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{\eta-y}{r_*^2} d\tau \right] - \frac{(1-\nu)T_z}{2\pi G} \left[\frac{1}{r} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{1}{r_*} d\tau \right], \quad (2.6)$$

$$r_* = \sqrt{(\xi-x-V\tau)^2 + (\eta-y)^2}.$$

В случае скольжения распределенных внутри области Ω^c нагрузок $\tau_{xz}(x, y), \tau_{yz}(x, y), p(x, y)$ на основании принципа суперпозиции пе-

ремещений и выражения (2.6) можно получить выражение для вертикальных перемещений границы полупространства:

$$w(x, y, 0) = \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega^c} \tau_{xz}(\xi, \eta) \left[\frac{\xi-x}{r^2} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{\xi-x-V\tau}{r_*^2} d\tau \right] d\xi d\eta + \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega^c} \tau_{yz}(\xi, \eta) \left[\frac{\eta-y}{r^2} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{\eta-y}{r_*^2} d\tau \right] d\xi d\eta - \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega^c} p(\xi, \eta) \left[\frac{1}{r} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{1}{r_*} d\tau \right] d\xi d\eta. \quad (2.7)$$

Наконец, в случае, если ядро релаксации может быть представлено в виде суммы экспоненциальных функций (2.3), путем прямой подстановки в (2.7) получим выражение для вертикальных смещений границы полупространства [31]:

$$w(x, y, 0) = \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega^c} \tau_{xz}(\xi, \eta) \left[\frac{\xi-x}{r^2} + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n k_i I_1 \left(\frac{\xi-x}{T_{\varepsilon i} V}, \frac{\eta-y}{T_{\varepsilon i} V} \right) \right] d\xi d\eta + \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega^c} \tau_{yz}(\xi, \eta) \left[\frac{\eta-y}{r^2} + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n k_i I_2 \left(\frac{\xi-x}{T_{\varepsilon i} V}, \frac{\eta-y}{T_{\varepsilon i} V} \right) \right] d\xi d\eta - \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega^c} p(\xi, \eta) \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n k_i I_3 \left(\frac{\xi-x}{T_{\varepsilon i} V}, \frac{\eta-y}{T_{\varepsilon i} V} \right) \right] d\xi d\eta, \quad (2.8)$$

$$I_1(\alpha, \beta) = e^\alpha \int_\alpha^\infty \frac{e^{-u} u du}{u^2 + \beta^2},$$

$$I_2(\alpha, \beta) = e^\alpha \beta \int_\alpha^\infty \frac{e^{-u} du}{u^2 + \beta^2},$$

$$I_3(\alpha, \beta) = e^\alpha \int_\alpha^\infty \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}}.$$

В случае, если модель материала (2.3) задается одним временем релаксации: $K(t') = (1/T_\sigma) \exp(-t'/T_\varepsilon)$, учитывая граничные условия (2.1), выражение (2.8) примет вид:

$$w(x, y) = \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega^c} \mu p(\xi, \eta) \left[\frac{\xi-x}{r^2} + \frac{1}{V} k I_1 \left(\frac{\xi-x}{T_\varepsilon V}, \frac{\eta-y}{T_\varepsilon V} \right) \right] d\xi d\eta - \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega^c} p(\xi, \eta) \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{V} k I_3 \left(\frac{\xi-x}{T_\varepsilon V}, \frac{\eta-y}{T_\varepsilon V} \right) \right] d\xi d\eta, \quad (2.9)$$

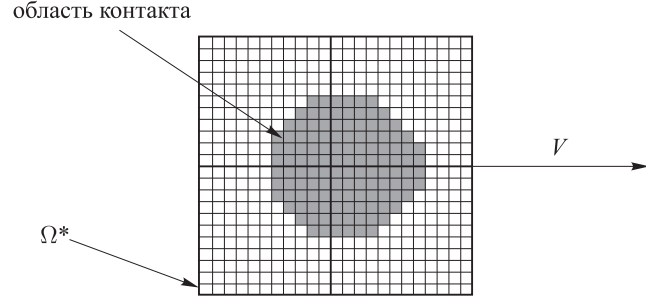


Рис. 2.2. Построение сетки внутри области Ω^*

где

$$I_1(\alpha, \beta) = e^\alpha \int_\alpha^\infty \frac{e^{-u} u du}{u^2 + \beta^2}, \quad I_3(\alpha, \beta) = e^\alpha \int_\alpha^\infty \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}}, \quad u = \frac{\xi - x - V\tau}{T_e V}.$$

Исследование контактной задачи сводится к построению решения интегрального уравнения (2.9) при учете граничных условий (2.1) и заданной функции $f(x, y)$. Для определения формы и размеров площадки контакта, а также распределения давления на ней используется метод граничных элементов. При этом выбирается прямоугольная область Ω^* , заведомо бо́льшая, чем искомая область контакта Ω^c , и разбивается на одинаковые прямоугольные элементы (в рассматриваемой задаче для удобства это квадраты со стороной Δ), давление в них предполагается постоянным (рис. 2.2). Вертикальные перемещения границы полупространства внутри области Ω^* определяются в соответствии с принципом суперпозиции перемещений, вызванных каждым нагруженным элементом отдельно.

На основании интегрального уравнения (2.9), при учете граничных условий (2.1) и условия равновесия (2.2), составляется система уравнений, записанная в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 & \dots & \Delta^2 & 0 \\ k_1^1 & \dots & k_N^1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Здесь $f_q = \frac{x_{i_0}^2 + y_{j_0}^2}{2R}$ ($i_0 = 1, \dots, N_1$; $j_0 = 1, \dots, N_2$; $q = 1, \dots, N$). Коэффициенты матрицы k_j^i соответствуют вертикальному смещению поверхности полу-

пространства в центре ячейки разбиения j в результате действия единицы давления внутри ячейки i . Безразмерные коэффициенты k_j^i вычисляются с помощью выражения, полученного из соотношения (2.9):

$$k_j^i = \frac{1}{\pi^2 s} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \iint_{\Omega_i} \left\{ \frac{(\xi' - x_{ij}') \mu}{(\xi' - x_{ij}')^2 + (\eta' - y_{ij}')^2} + \mu B e^{A(\xi' - x_{ij}')} \int_{A(\xi' - x_{ij}')}^\infty \frac{e^{-u} u du}{u^2 + A^2 (\eta' - y_{ij}')^2} \right\} d\xi' d\eta' - \frac{2}{\pi^2 s} \iint_{\Omega_i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\xi' - x_{ij}')^2 + (\eta' - y_{ij}')^2}} + B e^{A(\xi' - x_{ij}')} \int_{A(\xi' - x_{ij}')}^\infty \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + A^2 (\eta' - y_{ij}')^2}} \right\} d\xi' d\eta'. \quad (2.11)$$

Здесь интегрирование ведется по области Ω_i , соответствующей i -му элементу разбиения области Ω^* . Для большей общности результатов введены следующие безразмерные переменные и параметры:

$$(x', y', \xi', \eta') = \frac{1}{R} (x, y, \xi, \eta), \quad s = \frac{G}{G_l}, \quad A = \frac{R}{T_e V}, \quad (2.12)$$

$$B = k \frac{R}{V}, \quad P' = \frac{P}{G_l R^2}, \quad p'(x, y) = \frac{p(x, y)}{G_l},$$

где R — характерный размер индентора, G_l — длительный модуль сдвига. Также дополнительно вводится безразмерная скорость $V' = VT_e / R$.

Решение контактной задачи осуществляется с использованием написанной на языке СИ программы, ее блок-схема представлена на рис. 2.3.

Работа программы начинается с вычисления коэффициентов k_j^i в соответствии с выражением (2.11) для составления системы уравнений (2.10). Интегралы вычисляются численно-аналитически, с использованием формулы Симпсона. Для того чтобы избавиться от бесконечного верхнего предела интегрирования в (2.11), используется замена переменной $u' = 1/u$.

При разбиении области Ω^* на $N_1 \cdot N_2$ граничных элементов количество коэффициентов влияния, входящих в расширенную матрицу систе-

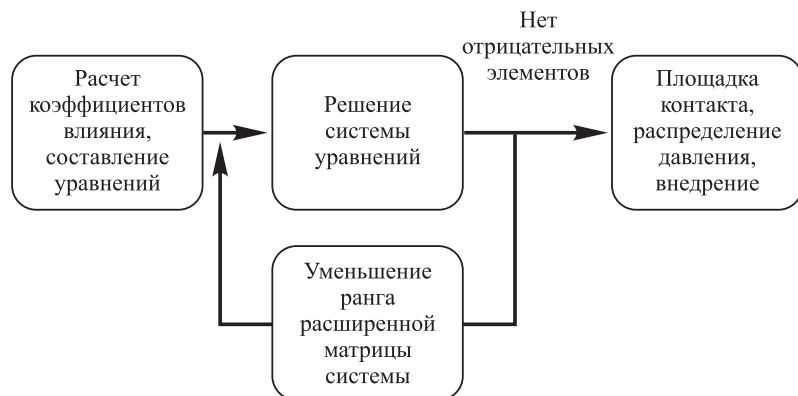


Рис. 2.3. Схема работы программы

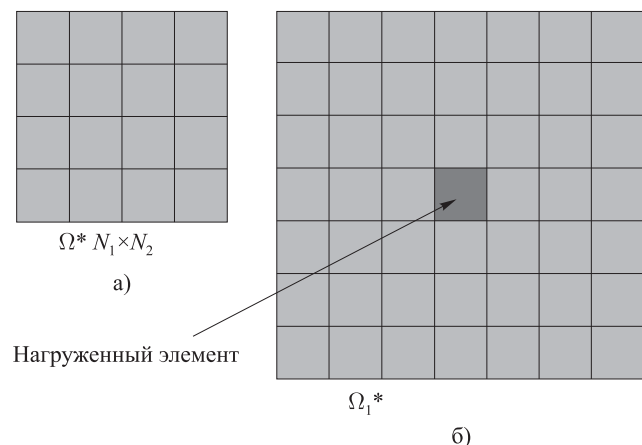


Рис. 2.4. Исследуемая область Ω^* (а) и Ω_1^* (б)

мы (2.10), составляет $(N_1 \cdot N_2)^2$. Благодаря симметрии искомой площадки контакта и распределения давления по ней относительно оси Ox , а также зависимости коэффициентов k_j^i лишь от взаимного расположения точек i и j , количество вычислений можно значительно сократить.

Рассмотрим подробнее способ вычисления коэффициентов k_j^i для прямоугольной области Ω^* , состоящей из $(N_1 \cdot N_2)$ одинаковых элементов (рис. 2.4, а). Для расчета коэффициентов влияния k_j^i достаточно определить вертикальные перемещения границы полупространства вокруг

одного нагруженного единичным давлением элемента внутри области Ω_1^* размером $(2 \cdot N_1 - 1) \cdot (2 \cdot N_2 - 1)$ (рис. 2.4, б). В силу симметрии задачи относительно оси Ox , количество элементов, которые необходимо вычислить, сокращается до $N_1 \cdot (2 \cdot N_2 - 1)$.

Коэффициенты k_j^i , где $i = (i_1 - 1)N_1 + j_1$, $j = (i_2 - 1)N_1 + j_2$, а $i_1, i_2 = 1, \dots, N_2$, $j_1, j_2 = 1, \dots, N_1$ — номера вертикальных и горизонтальных элементов области Ω^* , выражаются через внедрение $\omega(i_3, j_3)$ внутри элемента (i_3, j_3) области Ω_1^* , $i_3 = 1, \dots, (2N_1 - 1)$, $j_3 = 1, \dots, (2N_2 - 1)$, следующим образом:

$$k_j^i = \omega(N_1 + i_1 - i_2; N_2 + j_1 - j_2). \quad (2.13)$$

После расчета коэффициентов k_j^i и составления расширенной матрицы системы (2.10) происходит решение этой линейной системы уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента. Поскольку область контакта заранее неизвестна, полученные при решении контактные давления могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Элементы, обладающие нулевым и отрицательным давлением, априори не могут быть частью искомой области контакта. В соответствии с граничными условиями (2.1) элементам с отрицательным давлением присваивается значение нуль. В дальнейшем ранг матрицы системы (2.10) сокращается за счет нулевых элементов, и система решается заново. Описанный итерационный процесс продолжается до того момента, когда очередное полученное решение будет содержать в себе только положительные и нулевые значения давления. В результате приближенно определяется неизвестная область контакта Ω^c , распределение по ней контактного давления, а также внедрение d индентора в полупространство. Погрешность численного решения в значительной степени зависит от того, как была выбрана область Ω^* . Поскольку для наиболее точного решения необходимо, чтобы найденная в результате область Ω^c состояла из наибольшего числа элементов разбиения, Ω^* требуется выбирать таким образом, чтобы отношение площадей $S_{\Omega^c} / S_{\Omega^*}$ было максимальным.

Для того чтобы приближенно оценить размер области Ω^* , можно воспользоваться аналитическим решением задачи Герца. Погрешность численного решения также зависит от входных параметров задачи, поскольку они определяют искомую функцию распределения контактного давления, а точность аппроксимации этой функции, очевидно, зависит от ее гладкости. Оценивать погрешность результатов решения задачи необходимо отдельно в каждом случае, а для достижения необходимой точнос-

ти следует увеличить количество элементов разбиения, либо изменить выбранную область Ω^* .

На основании решения контактной задачи может быть вычислена деформационная составляющая коэффициента трения. Поскольку рассматриваемая задача является симметричной относительно оси Ox , то для определения деформационной составляющей коэффициента трения можно воспользоваться соотношением, полученным для случая контактной задачи в плоской постановке [41]:

$$\mu^* = \frac{T^*}{P} = \frac{\iint xp(x, y) dx dy}{R \iint p(x, y) dx dy}. \quad (2.14)$$

Здесь μ^* — механическая составляющая силы трения (обусловленная вязкоупругими свойствами материала). Общая сила трения, действующая на индентор, определяется как $T = T^* + \mu P$. Для равномерного движения индентора она должна уравниваться касательной силой, приложенной к индентору в направлении оси Ox .

Решение контактной задачи для рассматриваемого процесса скольжения индентора по вязкоупругому полупространству позволяет также исследовать напряженное состояние внутри полупространства. Поскольку рассматриваемая модель вязкоупругого материала обладает постоянным коэффициентом Пуассона, для расчета напряжений могут быть использованы известные решения задачи Буссинеска и Черутти. Ниже представлены выражения для компонентов напряжения, вызванного воздействием сосредоточенной силы σ_z^0 , направленной по нормали к поверхности полупространства [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= \frac{\sigma_z^0}{2\pi} \left(\frac{(1-2\nu)}{x^2 + y^2} \left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right) - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right); \\ \sigma_y(x, y, z) &= \frac{\sigma_z^0}{2\pi} \left(\frac{(1-2\nu)}{x^2 + y^2} \left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right) - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right); \\ \sigma_z &= -\frac{3\sigma_z^0 z^3}{2\pi\rho^5}; \\ \tau_{xy}(x, y, z) &= \frac{\sigma_z^0}{2\pi} \left(\frac{(1-2\nu)}{x^2 + y^2} \left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{zxy}{\rho^3} \right) - \frac{3zxy}{\rho^5} \right); \\ \tau_{xz}(x, y, z) &= -\frac{3\sigma_z^0 xz^2}{2\pi\rho^5}; \quad \tau_{yz}(x, y, z) = -\frac{3\sigma_z^0 yz^2}{2\pi\rho^5}; \\ \rho^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Компоненты напряжения, вызванного воздействием сосредоточенной силы τ_{xz}^0 , направленной по касательной к поверхности полупространства, записываются в следующем виде [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= -\frac{\tau_{xz}^0}{2\pi} \left((1-2\nu) \left(\frac{x}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) - \left(\frac{3x^3}{\rho^5} \right) \right); \\ \sigma_y(x, y, z) &= \frac{\tau_{xz}^0}{2\pi} \left((1-2\nu) \left(\frac{x}{\rho^3} - \frac{x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{y^2x}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2y^2x}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) - \frac{3y^2x}{\rho^5} \right); \\ \sigma_z(x, y, z) &= -\frac{\tau_{xz}^0}{2\pi} \frac{3xz^2}{\rho^5}; \\ \tau_{xy}(x, y, z) &= \frac{\tau_{xz}^0}{2\pi} \left((1-2\nu) \left(-\frac{y}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^2y}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^2y}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) - \frac{3x^2y}{\rho^5} \right); \\ \tau_{yz}(x, y, z) &= -\frac{\tau_{xz}^0}{2\pi} \frac{3xyz}{\rho^5}; \\ \tau_{xz}(x, y, z) &= -\frac{\tau_{xz}^0}{2\pi} \frac{3x^2z}{\rho^5}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

На основании соотношений (2.15) и (2.16), а также принципа суперпозиции, получены выражения, связывающие компоненты тензора напряжений с нагрузкой, равномерно распределенной по области Ω_i , соответствующей i -му элементу разбиения области Ω^* :

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= \frac{\sigma_z^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{(1-2\nu)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \frac{z(y-\eta)^2}{\rho^3} \right) \right) d\xi d\eta + \\ &\quad + \frac{\sigma_z^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(-\frac{3z(x-\xi)^2}{\rho^5} \right) d\xi d\eta - \\ &\quad - \frac{\tau_{xz}^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left((1-2\nu) \left(\frac{(x-\xi)}{\rho^3} - \frac{3(x-\xi)}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{(x-\xi)^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(x-\xi)^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) \right) d\xi d\eta + \\ &\quad + \frac{\tau_{xz}^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{3(x-\xi)^3}{\rho^5} \right) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y(x, y, z) = & \frac{\sigma_z^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{(1-2\nu)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \frac{z(x-\xi)^2}{\rho^3} \right) \right) d\xi d\eta - \\
& - \frac{\sigma_z^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{3z(y-\eta)^2}{\rho^5} \right) d\xi d\eta + \frac{\tau_{xz}^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left((1-2\nu) \left(\frac{(x-\xi)}{\rho^3} - \frac{(x-\xi)}{\rho(\rho+z)^2} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{(y-\eta)^2(x-\xi)}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(y-\eta)^2(x-\xi)}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) \right) d\xi d\eta - \frac{\tau_{xz}^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{3(y-\eta)^2(x-\xi)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta, \\
\sigma_z(x, y, z) = & - \iint_{\Omega_i} \frac{3z^2}{2\pi\rho^5} (\sigma_z^i z + (x-\xi)\tau_{xz}^i) d\xi d\eta, \\
\tau_{xy}(x, y, z) = & \frac{\sigma_z^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{(1-2\nu)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{z(x-\xi)(y-\eta)}{\rho^3} \right) \right) d\xi d\eta - \frac{\sigma_z^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(-\frac{3z(x-\xi)(y-\eta)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta + \\
& + \frac{\tau_{xz}^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left((1-2\nu) \left(-\frac{(y-\eta)}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) \right) d\xi d\eta - \\
& - \frac{\tau_{xz}^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{3(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta, \\
\tau_{xz}(x, y, z) = & -\frac{3\sigma_z^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{z^2(x-\xi)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta - \frac{3\tau_{xz}^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{z(x-\xi)^2}{\rho^5} \right) d\xi d\eta, \\
\tau_{yz}(x, y, z) = & -\frac{3\sigma_z^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{z^2(y-\eta)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta - \frac{3\tau_{xz}^i}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{z(y-\eta)(x-\xi)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Поскольку некоторые интегралы в (2.17) могут быть вычислены только с помощью численных методов интегрирования, компоненты тензора напряжений можно получить только в виде кусочно-постоянной функции. Областью определения этой функции служит трехмерная сетка, заданная внутри исследуемой области полупространства Ω_3 . Предположим, что исследуемая область Ω_3 (рис. 2.5, а) состоит из $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ элементов, а количество нагруженных элементов на поверхности полупространства, найденных при решении контактной задачи, равно n . При расчете напряжений $\sigma_x(i, j, \varphi)$ в узлах сетки с помощью выраже-

ния (2.17) потребовалось бы вычислить $n \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ интегралов. Объем вычислений можно значительно сократить, поскольку для определения напряженного состояния внутри области Ω_3 достаточно рассчитать напряжения $\sigma_x^*(i^*, j^*, \varphi^*)$ внутри области Ω_4 размером $(2 \cdot N_1 - 1) \times (2 \cdot N_2 - 1) \times N_3$, возникающие в результате воздействия единичного давления в центре этой области (рис. 2.5, б).

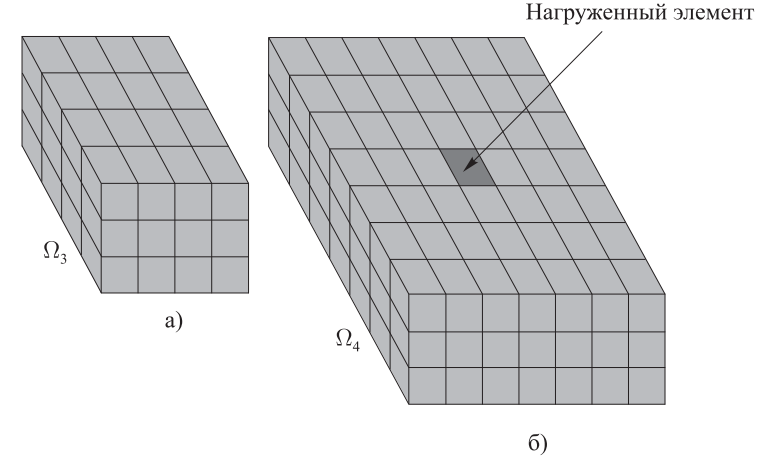


Рис. 2.5. Исследуемая область Ω_3 (а) и Ω_4 (б)

Пусть (i_0, j_0) — координаты χ -го элемента сетки, построенной внутри области Ω^* . Используя давления $p(i_0, j_0)$, полученные при решении контактной задачи, а также рассчитанные с помощью (2.17) напряжения $\sigma_x^*(i^*, j^*, \varphi^*)$, можно получить значения напряжений $\sigma_x(i, j, \varphi)$ внутри области Ω_3 следующим образом:

$$\sigma_x(i, j, \varphi) = \sum_{\chi=1}^n p(i_0, j_0) \cdot \sigma_x^*(N_1 + i - i_0, N_2 + j - j_0, \varphi). \tag{2.18}$$

Главные и максимальные касательные напряжения в произвольной точке рассматриваемой области определяются в результате решения уравнения:

$$\text{def} \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0. \tag{2.19}$$

Корни уравнения $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ являются главными напряжениями, а $\tau_1 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, $\tau_2 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$, $\tau_3 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$ — главными касательными напряжениями.

2.2.3. Анализ результатов решения контактной задачи

На основании изложенного метода решения проведен анализ зависимости контактных характеристик (распределение контактного давления, форма и размер площадки контакта) от следующих безразмерных параметров: нагрузки P' , s — отношения мгновенного модуля сдвига основания G к длительному модулю G_l , скорости V' , коэффициента Пуассона ν и коэффициента трения относительного проскальзывания μ . Результаты, представленные на рис. 2.6, 2.7 и 2.8, получены при $\nu = 0,3$, $\mu = 0,5$.

Расчеты проводились для двух форм индентора: сферического индентора, форма контактирующей поверхности которого описывается функцией:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) / (2R), \quad (2.20)$$

и индентора, форма контактирующей поверхности которого имеет вид:

$$f(x, y) = (3x^2 + y^2) / (2R). \quad (2.21)$$

Индентор с формой поверхности (2.21) был рассмотрен также с целью сравнения построенного решения пространственной контактной задачи с двумерным случаем, исследованным в [41]. Такой индентор представляет собой вытянутый вдоль оси Oy эллиптический параболоид. Для верификации метода решения проводилось сравнение полученного распределения контактного давления в центральном сечении $y = 0$ вытянутого индентора с решением плоской задачи о скольжении индентора по вязкоупругому полупространству [41]. Результаты расчетов, изображенные на рис. 2.6, показывают, что при относительно большой скорости ($V' = 10$) распределение контактного давления и расположение площадки контакта близко к решению задачи Герца с мгновенным модулем упругости. При уменьшении скорости до $V' = 2$ площадка контакта смещается в направлении скольжения относительно оси симметрии индентора, распределение давления по площадке контакта становится несимметричным вследствие проявления вязких свойств материала основания. Качественное сравнение кривых, изображенных на рис. 2.6, с решением задачи в плоской постановке [41] дает хорошее соответствие.

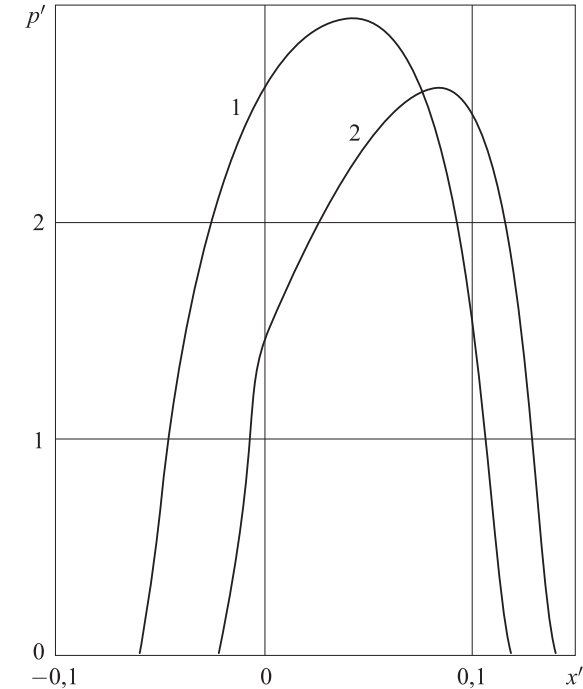


Рис. 2.6. Распределение контактного давления в сечении $y = 0$ ($P' = 0,2$, $s = 5$, $V' = 2$ (кривая 2), $V' = 10$ (кривая 1))

Для сферического индентора (2.20) изучено влияние величины параметра s , характеризующего вязкие свойства основания, на распределение давления по площадке контакта. Результаты расчетов представлены на рис. 2.7 для случаев скольжения по упругому ($s = 1$, рис. 2.7, а) и вязкоупругому ($s = 5$, рис. 2.7, б, $s = 10$, рис. 2.7, в) полупространству. На рис. 2.7, г изображены распределения контактных давлений в плоскости $y = 0$ для указанных трех случаев.

В случае скольжения по вязкоупругому полупространству, при увеличении параметра s , т. е. при увеличении вязкости, площадка контакта уменьшается и сдвигается в направлении скольжения индентора, ее форма становится вытянутой вдоль оси Oy в отличие от упругого случая, в котором площадка контакта круговая. Максимальное значение давления увеличивается, при этом точка максимума смещается вперед по направлению скольжения.

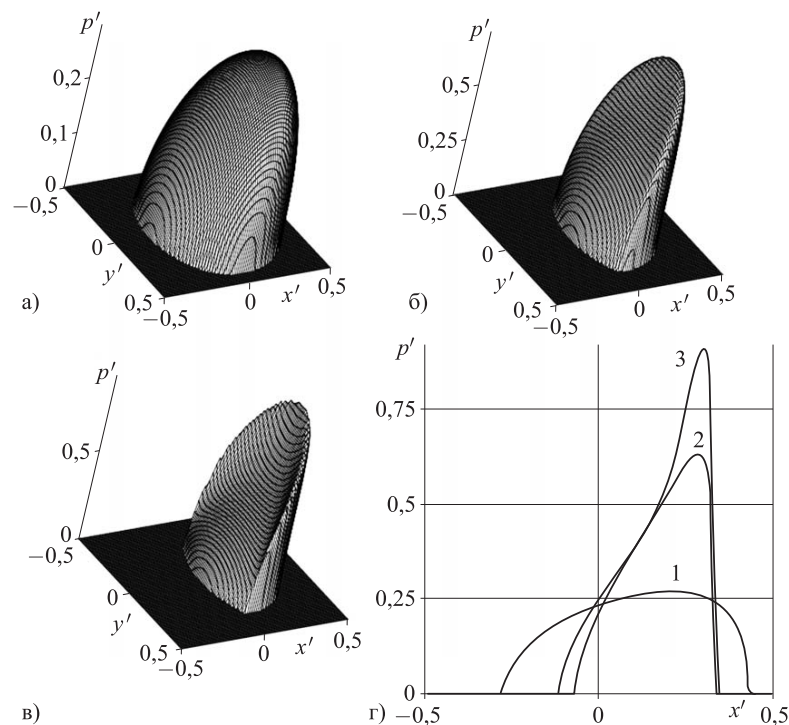


Рис. 2.7. Распределение контактного давления при различных параметрах s ($P' = 0,08$, $V' = 1,25$, $s = 1$ (кривая 1), $s = 5$ (кривая 2), $s = 10$ (кривая 3))

Результаты расчетов, представленные на рис. 2.8 для сферической формы индентора, позволяют определить влияние скорости на форму и расположение площадки контакта, а также распределение контактного давления на примере трех скоростей скольжения ($V' = 0,5$; $1,25$; 10). При увеличении скорости размер площадки контакта уменьшается, степень ее асимметрии относительно плоскости $x = 0$ возрастает, а при дальнейшем увеличении скорости уменьшается. Контактные давления в центральном сечении $y = 0$ распределены несимметрично относительно начальной точки касания. Максимальные значения контактных давлений сдвинуты по направлению движения индентора и возрастают при увеличении скорости.

Также была изучена роль касательных напряжений при скольжении. На рис. 2.9 представлены распределения контактных давлений, полученные в условиях нулевых ($\mu = 0$) и ненулевых значений касательных

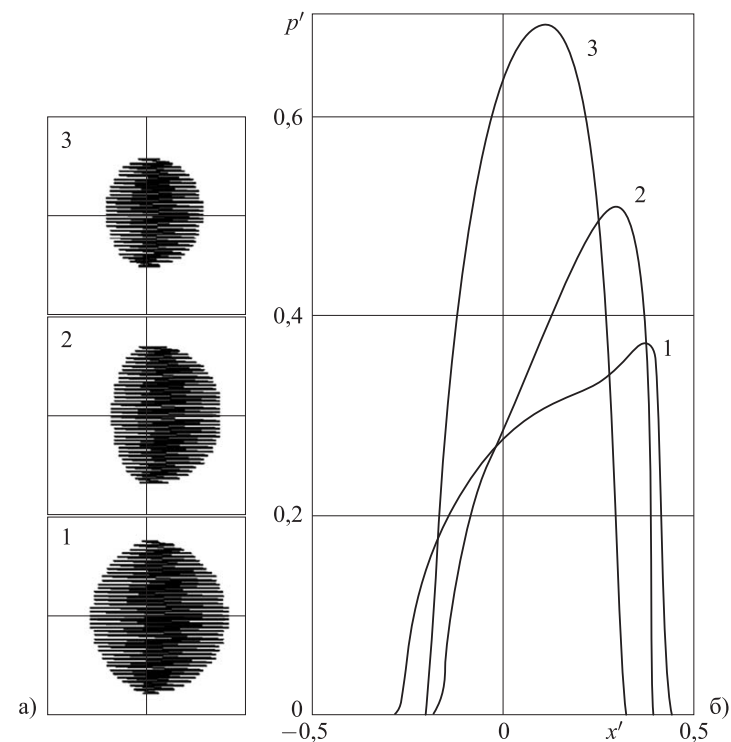


Рис. 2.8. Распределение контактного давления для различных скоростей ($P' = 0,1$, $s = 3$, $V' = 0,5$ (кривая 1), $V' = 1,25$ (кривая 2), $V' = 10$ (кривая 3))

напряжений ($\mu = 0,5$) в области контакта, соответствующих разным значениям коэффициента трения в граничных условиях (2.1). При увеличении коэффициента трения площадка контакта смещается по направлению скольжения, максимальное давление внутри нее увеличивается, а расположение максимума давления сдвигается в сторону движения индентора. Такое перераспределение давления при наличии касательных напряжений в области контакта увеличивает гистерезисные потери при скольжении, т. е. деформационную составляющую силы трения.

Контактное давление в центральном сечении $y = 0$ распределено несимметрично относительно начальной точки касания. Максимальные значения контактного давления сдвинуты по направлению движения индентора и возрастают при увеличении скорости.

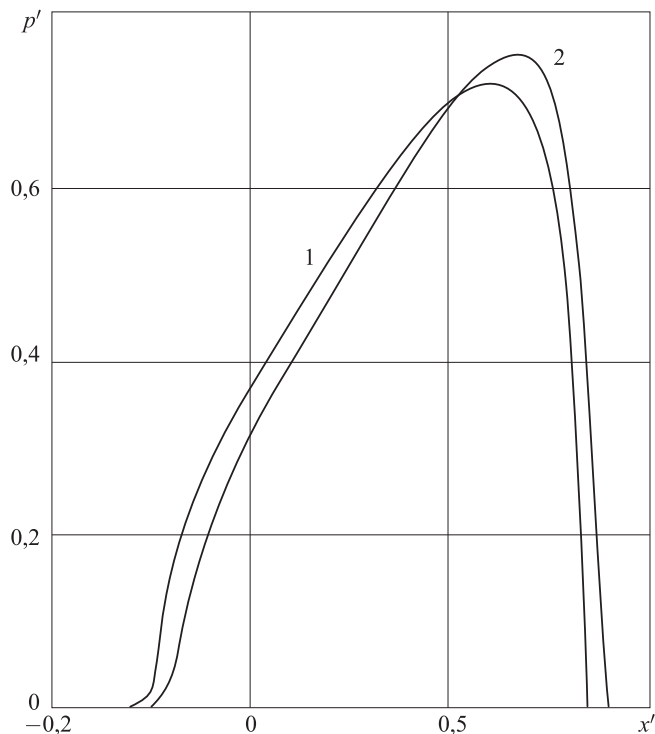


Рис. 2.9. Распределение контактного давления в сечении $y = 0$ ($P' = 0,1$, $s = 5$, $\nu = 0,3$, $V' = 2$, $\mu = 0$ (кривая 1), $\mu = 0,5$ (кривая 2))

Зависимости деформационной составляющей коэффициента трения (2.14) от скорости при разных значениях коэффициента Пуассона ν и коэффициента трения μ представлены на рис. 2.10, а ($s = 5$, $P' = 0,1$). Зависимости эти немонотонные: при возрастании скорости от нуля деформационная составляющая силы трения сначала растет, а потом снижается. При различных значениях коэффициента Пуассона касательные напряжения влияют на гистерезисные потери по-разному. Так, в случае $\mu = 0,5$ увеличение гистерезисных потерь относительно случая отсутствия касательных напряжений в области контакта ($\mu = 0$) при $\nu = 0,3$ значительно больше, чем при $\nu = 0,45$. Коэффициент Пуассона влияет на гистерезисные потери и при отсутствии касательных напряжений (коэффициент μ^* для материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ больше, чем с $\nu = 0,45$).

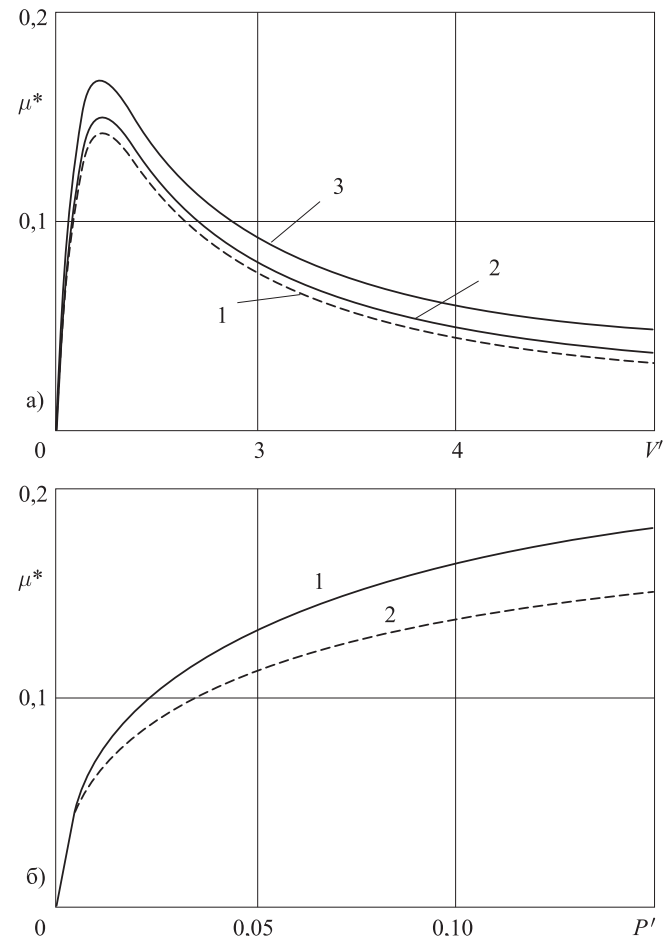


Рис. 2.10. а) Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от скорости $P' = 0,1$, $s = 5$ (кривая 1 — $\nu = 0,3$, $\mu = 0$, кривая 2 — $\nu = 0,45$, $\mu = 0,5$, кривая 3 — $\nu = 0,3$, $\mu = 0,5$); б) зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки $s = 5$, $V' = 1,0$, $\nu = 0,3$ (кривая 1 — $\mu = 0,5$, кривая 2 — $\mu = 0$)

На рис. 2.10, б изображена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки при $\mu = 0,5$ и $\mu = 0$. Эта зависимость монотонно возрастающая и нелинейная. При увеличении нагрузки от нуля значение коэффициента μ^* быстро возрастает, а при

дальнейшем увеличении нагрузки скорость роста μ^* уменьшается. Следует отметить, что для рассматриваемой модели диапазон изменения нагрузки ограничен сверху и определяется границами применимости линейных моделей теории упругости и вязкоупругости.

2.2.4. Анализ напряженного состояния под единичным индентором

Был проведен анализ растягивающих-сжимающих и максимальных касательных напряжений на поверхности полупространства и в центральном сечении $y=0$. Из (2.8) следует, что если материал полупространства является абсолютно несжимаемым ($\nu=0,5$), касательные напряжения в области контакта не оказывают влияния на перемещения границы полупространства в вертикальной плоскости. Исследовались напряжения, возникающие в материалах, характеризующихся двумя значениями коэффициента Пуассона: $\nu=0,45$, $\nu=0,3$.

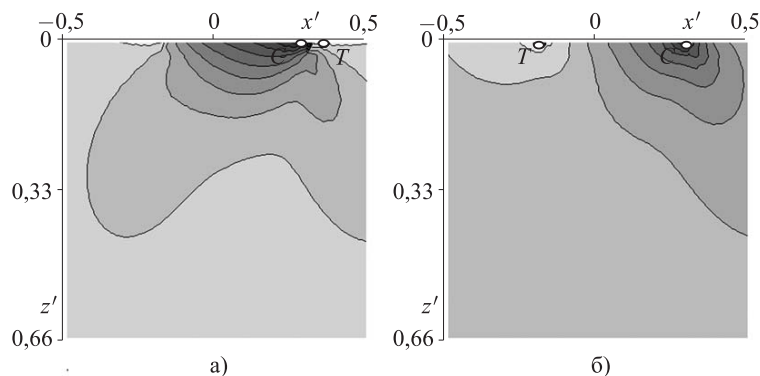


Рис. 2.11. Распределение растягивающих-сжимающих напряжений в плоскости $y=0$ при $P'=0,1$, $s=5$, $V'=0,75$, $\nu=0,3$, $\mu=0$ (а), $\mu=0,5$ (б)

На рис. 2.11 изображено распределение растягивающих-сжимающих напряжений в плоскости $y=0$. Исследовались два случая скольжения — без трения (рис. 2.11, а, $\mu=0$) и с трением (рис. 2.11, б, $\mu=0,5$). Максимум растягивающих напряжений отмечен точкой С, сжимающих — точкой Т. В обоих случаях наблюдается концентрация максимумов растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности полупространства. В связи с данным результатом, было исследовано распределение растягивающих-сжимающих напряжений в плоскости $z=0$.

На рис. 2.12, а и рис. 2.12, б изображено распределение растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности полупространства

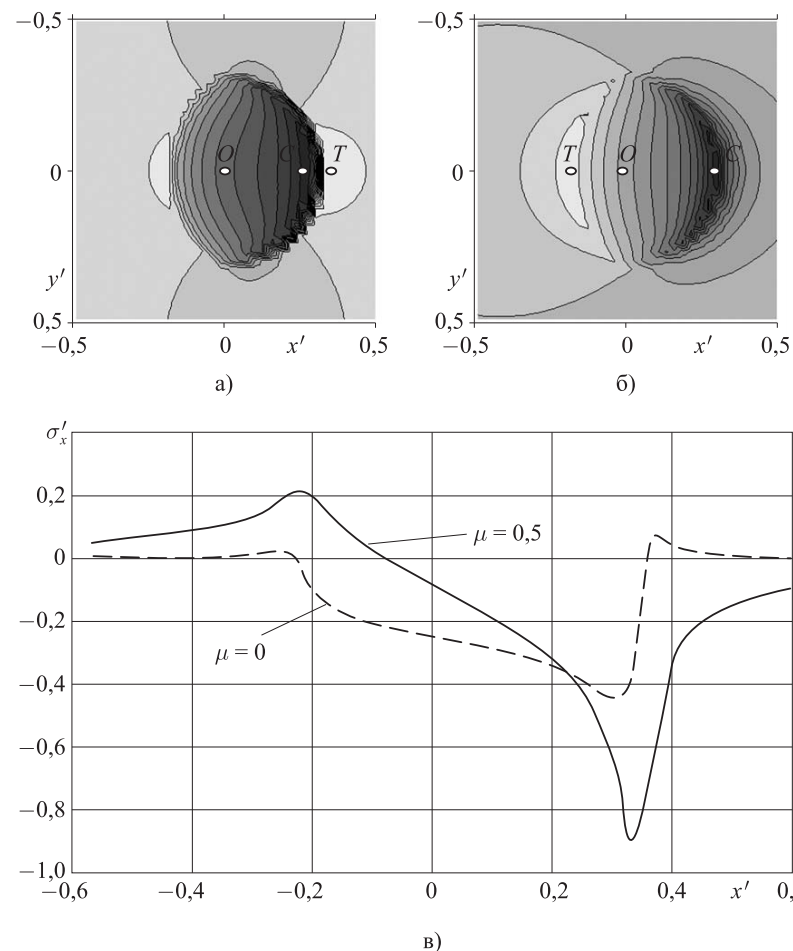


Рис. 2.12. Распределение растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности полупространства при $P'=0,1$, $s=5$, $V'=0,75$, $\nu=0,3$, $\mu=0$ (а), $\mu=0,5$ (б)

при $\mu=0$ и $\mu=0,5$ соответственно. На рис. 2.12, в представлено распределение растягивающих-сжимающих напряжений на оси Ox . Несимметрия распределения контактного давления приводит к тому, что при отсутствии трения точки максимального сжатия и растяжения (С и Т на рис. 2.12, а) находятся близко друг к другу, и переход между максимальным отрицательным (сжимающим) и максимальным положительным

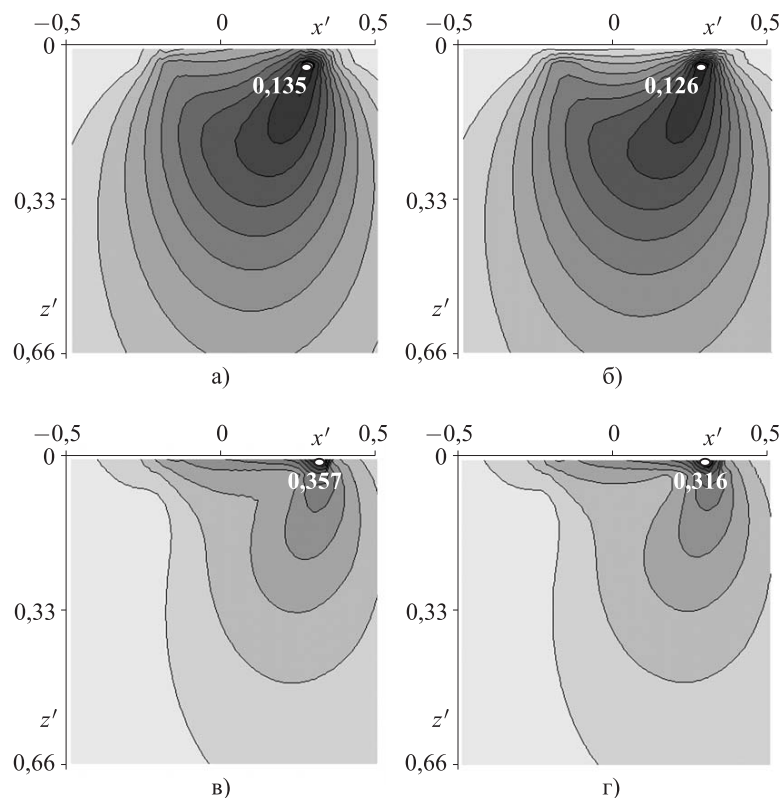


Рис. 2.13. Распределение максимальных касательных напряжений под индентором (сечение плоскостью $y=0$): $\mu=0$ (а, б), $\mu=0,5$ (в, г); $\nu=0,3$ (а, в), $\nu=0,45$ (б, г). $P'=0,1$, $s=5$, $V'=0,75$

(растягивающим) значениями напряжений происходит почти скачкообразно (пунктирная кривая на рис. 2.12, в). Наличие трения приводит к тому, что максимальное растяжение (T на рис. 2.12, б) локализуется позади области контакта (сплошная кривая на рис. 2.12, в), а резкое изменение значения напряжений приходится на область сжатия.

Изолинии максимальных касательных напряжений под сферическим индентором при двух разных значениях коэффициента Пуассона приведены на рис. 2.13. Когда трения нет, максимумы локализуются под поверхностью, но уже при коэффициенте трения $\mu=0,2$ точка максимума находится на поверхности. Интересно, что при всех прочих равных условиях абсолютные значения максимумов в слабо сжимаемом мате-

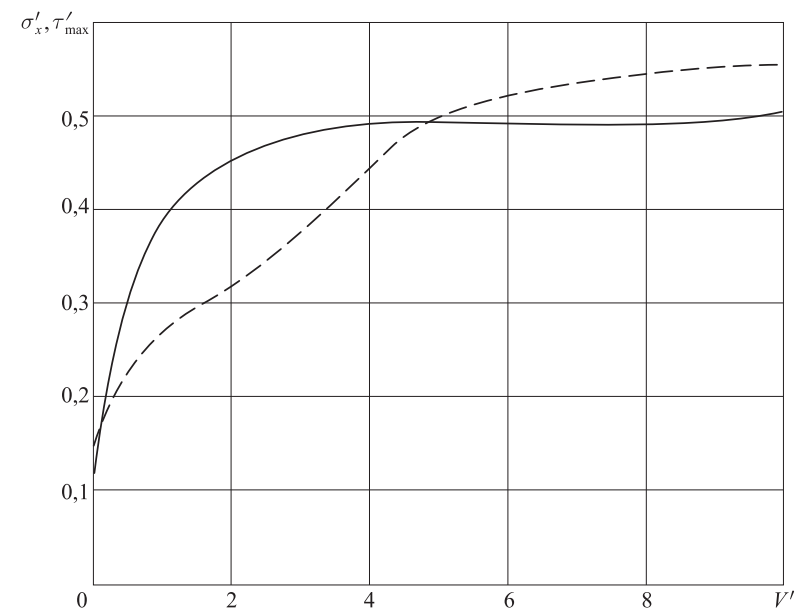


Рис. 2.14. Зависимость максимальных касательных σ'_x (сплошные линии) и растягивающих τ'_{\max} (пунктирные линии) напряжений от скорости: $P'=0,1$, $s=5$, $\nu=0,3$

риале ($\nu=0,45$) меньше, чем в материале со значением коэффициента Пуассона $\nu=0,3$.

Контактные давления и внутренние напряжения в случае вязкоупругого материала зависят от скорости. В связи с этим были получены зависимости максимальных значений растягивающих и максимальных касательных напряжений от скорости скольжения индентора (рис. 2.14). При скорости скольжения, близкой к нулю, значения напряжений соответствуют тем, что получаются при решении задачи об упругом вдавливании (при наличии сил трения) с длительным модулем сдвига G_l в качестве упругой характеристики материала. При увеличении скорости скольжения одновременно с ростом максимальных значений контактного давления растут и значения максимумов напряжений. Следует отметить, что этот рост ограничен предельными значениями, которые определяются путем решения задачи о расчете напряжений для упругого материала с модулем сдвига G . Эти предельные значения для параметров расчета, соответствующих результатам рис. 2.14, составляют $\tau'_{\max} = 0,5697$ и $\sigma'_{x_{\max}} = 0,7232$.

2.3. Скольжение гладкого индентора по вязкоупругому полупространству при наличии пригрузки в виде двух сосредоточенных сил

2.3.1. Постановка задачи о контакте с пригрузкой

Рассматривается пространственная контактная задача о скольжении с постоянной скоростью гладкого индентора и двух точечных нагрузок по границе вязкоупругого полупространства (рис. 2.15). В области контакта действуют касательные напряжения, связанные с контактным давлением законом трения Кулона–Амонтона и обусловленные силами адгезионного взаимодействия поверхностей. Впереди и позади индентора на равном расстоянии движутся две сосредоточенные силы (пригрузки).

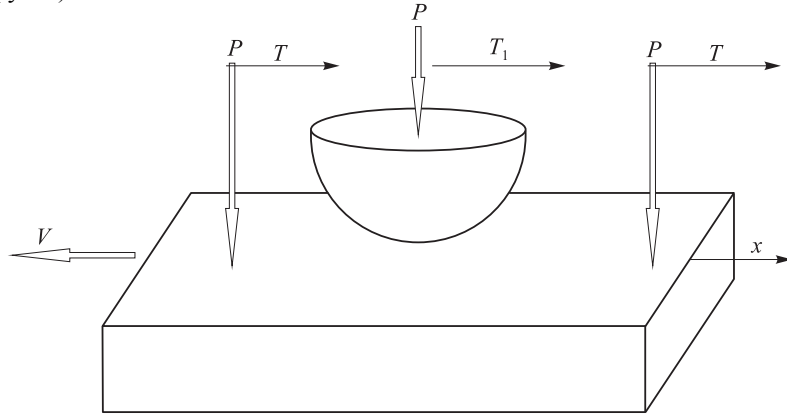


Рис. 2.15. Схема контакта

Модель материала полупространства аналогична рассмотренной в разделе 2.2.1 и описывается выражением (2.3). На поверхности полупространства рассматриваются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} z=0: \quad & \tau_{xz}(x, y) = \mu \sigma_z(x, y), \quad w(x, y) = f(x, y) - \psi(x, y, L) - d: (x, y) \in \Omega^c, \\ & \tau_{xz}(x, y) = T \delta(x \pm L, y \pm 0), \quad \sigma_z(x, y) = P \delta(x \pm L, y \pm 0), \\ & \tau_{xz}(x, y) = 0, \quad \sigma_z(x, y) = 0: (x, y) \notin \{\Omega^c, (-L, 0), (L, 0)\}, \\ & \tau_{yz} = 0: -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь Ω^c — область контакта, $w(x, y)$ — вертикальные смещения поверхности полупространства, обусловленные воздействием индентора,

d — внедрение индентора, σ_z и τ_{xz} , τ_{yz} — нормальное и касательные напряжения, μ — коэффициент трения, T и P — касательная и нормальная сила соответственно, при этом $T = \mu P$. Касательная сила T_1 , которую необходимо приложить, чтобы индентор находился в равновесии, определяется в процессе решения задачи. Форма индентора описывается функцией $f(x, y)$. Контактные давления внутри области контакта Ω^c удовлетворяют условию равновесия:

$$P = \iint \Omega^c p(x, y) dx dy. \quad (2.23)$$

Вертикальные перемещения границы полупространства, обусловленные воздействием пригрузки, описываются функцией $\psi(x, y, L)$. Координаты точек приложения сосредоточенных сил: $(-L, 0)$ и $(L, 0)$. Контактные давления $p(x, y) = -\sigma_z(x, y)$ и область контакта Ω^c неизвестны.

Линейная система уравнений, составленная на основании граничных условий (2.22) и условия равновесия внутри области Ω^* (2.23) запишется в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 & \dots & \Delta^2 & 0 \\ k_1^1 & \dots & k_N^1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ f_1 - \psi_1 \\ \vdots \\ f_N - \psi_N \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

При составлении системы (2.24) помимо расчета коэффициентов k_i^j требуется также рассчитать значения кусочно-постоянной функции дополнительных перемещений ψ_i .

Рассмотрим подробнее способ вычисления значений ψ_i для n -го количества сосредоточенных сил, действующих в точках с координатами (x^θ, y^θ) , где $\theta = 1, \dots, n$. Если область Ω^* разбита на $N_1 \times N_2$ прямоугольных элементов, коэффициент ψ_i соответствует вертикальному смещению границы полупространства в точке (x_q, y_j) , где $i = q \cdot N_1 + j$, $j = 1, \dots, N_1$, $q = 1, \dots, N_2$, $i = 1, \dots, N_1 \cdot N_2$. Производя суммирование по всем имеющимся сосредоточенным силам, из (2.6) получим следующее выражение для элементов ψ_i :

$$\begin{aligned} \psi_i = \psi(x_q, y_j) = & \sum_{\theta}^n \left(\frac{1-2\nu}{4\pi G} \mu p(x^\theta, y^\theta) \left[\frac{x^\theta - x_q}{r^2} + \frac{1}{V} kI_1 \left(\frac{x^\theta - x_q}{T_\varepsilon V}, \frac{y^\theta - y_j}{T_\varepsilon V} \right) \right] \right) - \\ & - \sum_{\theta}^n \left(\frac{1-\nu}{2\pi G} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{V} kI_3 \left(\frac{x^\theta - x_q}{T_\varepsilon V}, \frac{y^\theta - y_j}{T_\varepsilon V} \right) \right] \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$I_1(\alpha, \beta) = e^\alpha \int_\alpha^\infty \frac{e^{-u} u du}{u^2 + \beta^2}, \quad I_3(\alpha, \beta) = e^\alpha \int_\alpha^\infty \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}}, \quad u = \frac{x^\theta - x_q - V\tau}{T_\varepsilon V}.$$

Далее, система (2.24) решается при помощи итерационного метода, подробно описанного в разделе 2.2.2. В результате решения определяются область контакта индентора, распределение контактного давления и внедрение индентора в полупространство с учетом воздействия сосредоточенных сил.

2.3.2. Анализ влияния пригрузки на контактные характеристики и силу трения

С целью определения влияния пригрузки в виде двух сосредоточенных сил на контактные характеристики при скольжении индентора по вязкоупругому полупространству были получены решения контактной задачи при различных расстояниях L' от точек приложения сил до центра индентора, и при различных скоростях скольжения.

Изменения контактных характеристик индентора с пригрузкой по сравнению с контактными характеристиками изолированного индентора обусловлены наличием дополнительных перемещений границы полупространства в области контакта. На рис. 2.16 изображены дополнительные

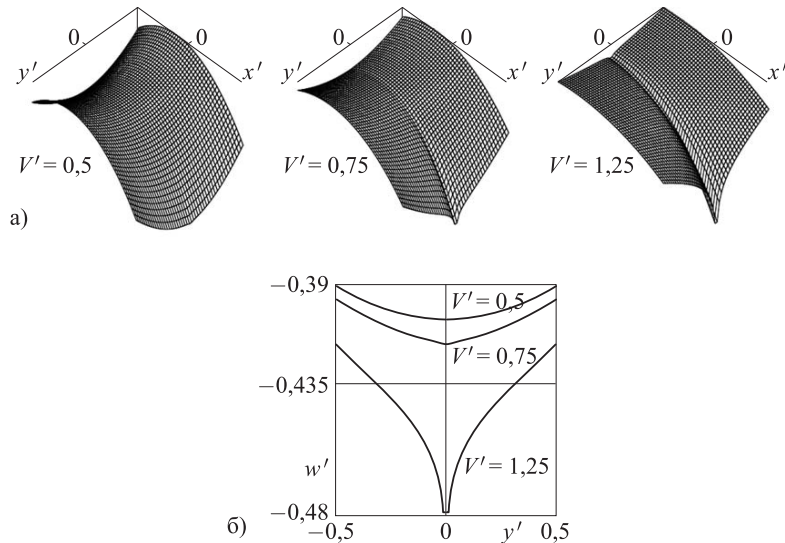


Рис. 2.16. Функция $\psi(x, y)$ ($P' = 0,1$, $\nu = 0,3$, $s = 3$, $\mu = 0,5$, $L' = 3$)

перемещения границы полупространства $\psi(x, y)$ внутри области Ω^* . В данном случае две сосредоточенные силы движутся при трех различных скоростях $V' = 0,5$, $V' = 0,75$, $V' = 1,25$.

Расстояние от точек приложения сил до начала системы координат (при наличии индентора — это соответствует его центру) в каждом случае одинаковое: $L' = 3$. На рис. 2.16, б представлены дополнительные перемещения в плоскости $x = 0$.

При относительно небольшой скорости $V' = 0,5$, когда проявляются преимущественно упругие свойства полупространства, поверхность, описываемая функцией $\psi(x, y)$, принимает седловидную форму, точка минимума внедрения границы полупространства смещена незначительно в сторону, противоположную направлению движения. По мере увеличения скорости движения сосредоточенных сил вязкие свойства полупространства начинают преобладать. Минимум внедрения поверхности значительно смещается назад, вдоль оси Ox возникает канавка, которая образуется после прохождения точечной нагрузки, движущейся впереди. Глубина этой канавки тем меньше, чем дальше она находится от точки приложения передней сосредоточенной силы. При дальнейшем увеличении скорости скольжения глубина указанной канавки значительно увеличивается, поверхность полупространства приобретает клиновидную форму. Дополнительные перемещения границы полупространства вызывают изменения в форме площадки контакта и распределении давления по ней относительно случая скольжения изолированного индентора.

На рис. 2.17 представлены распределения контактных давлений и формы области контакта для разных скоростей скольжения индентора при наличии пригрузки. Анализ результатов расчетов показывает, что при увеличении скорости скольжения давление в центре площадки контакта уменьшается вплоть до полного разделения площадки контакта на две подобласти. Такой эффект имеет место вследствие того, что при увеличении скорости скольжения глубина центральной канавки может оказаться больше, чем глубина максимального внедрения индентора d .

В соответствии с вышеупомянутым изменением распределения контактного давления изменяется также и значение деформационной составляющей коэффициента трения. На рис. 2.18 представлена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от скорости для изолированного индентора (пунктирная кривая) и индентора, скользящего при наличии точечных пригрузок (сплошные кривые), находящихся на расстоянии $L' = 3$ и $L' = 10$ от центра индентора. При относительно малых скоростях, когда вязкие свойства материала полупространства проявляются незначительно, значение деформационной

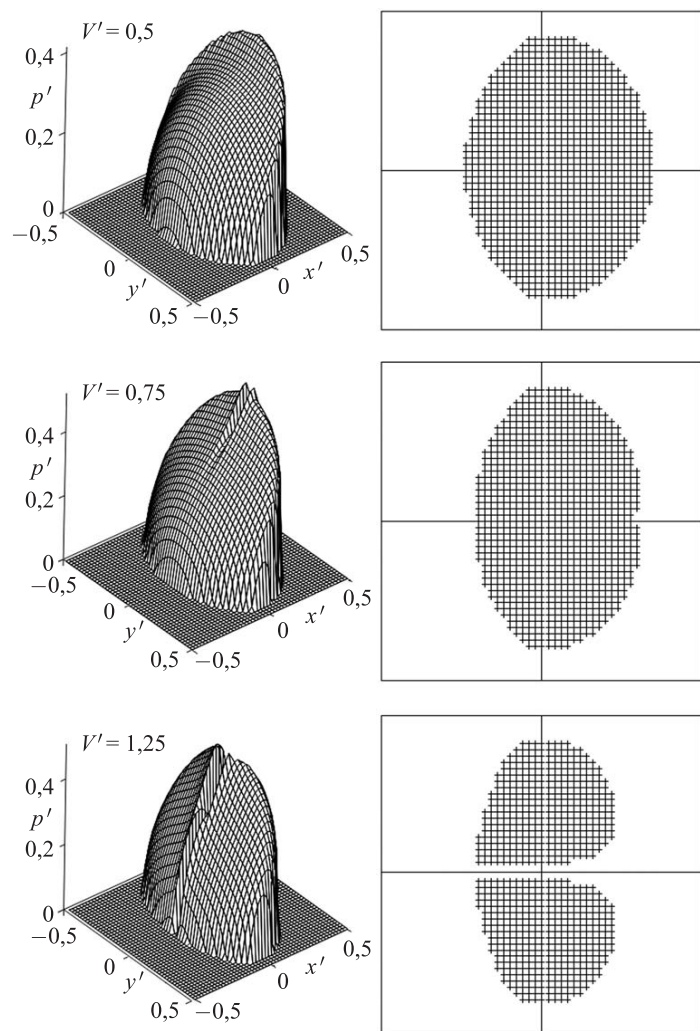


Рис. 2.17. Распределение контактного давления и форма площадки контакта при разных значениях безразмерной скорости скольжения ($P' = 0,1$, $\nu = 0,3$, $s = 3$, $\mu = 0,5$)

составляющей коэффициента трения для индентора с пригрузкой практически совпадает с изолированным индентором. Увеличение скорости приводит к снижению деформационной составляющей коэффициента

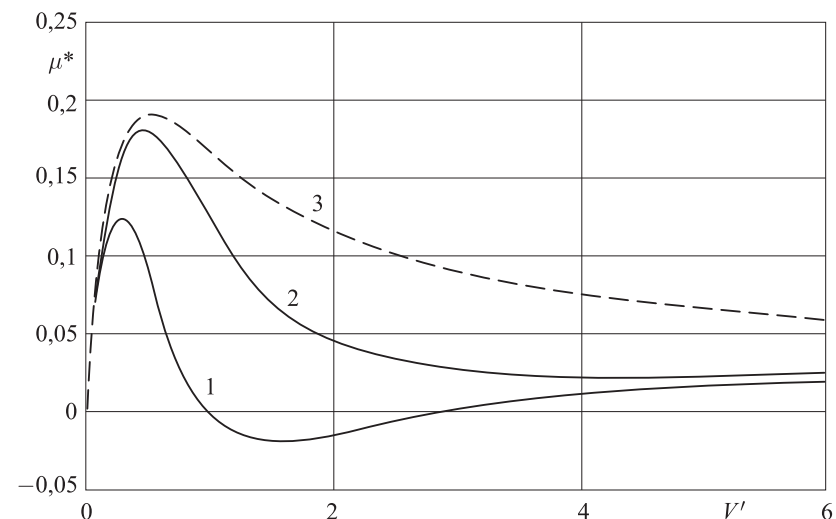


Рис. 2.18. Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от скорости скольжения: $s = 5$, $\mu = 0,5$, $\nu = 0,3$, $P' = 0,1$ (кривая 1 — $L' = 3$, кривая 2 — $L' = 10$, кривая 3 — изолированный индентор)

трения по сравнению с изолированным индентором. Это обусловлено тем, что при увеличении скорости скольжения минимум дополнительных перемещений смещается в сторону, противоположную направлению скольжения (см. рис. 2.16), соответственно возрастают контактные давления в задней части индентора. Как следует из результатов, представленных на рис. 2.18 (кривая 1), деформационная составляющая коэффициента трения при определенных скоростях скольжения (и др. параметрах задачи) становится отрицательной. Таким образом, дополнительные перемещения границы полупространства настолько существенно перераспределяют контактные давления, что вызывают силу, толкающую индентор в направлении скольжения. При увеличении скорости скольжения поверхность, описываемая функцией $\psi(x, y)$, меняет свою форму (см. рис. 2.16) таким образом, что деформационная составляющая коэффициента трения снова становится положительной (см. рис. 2.18).

Также была исследована зависимость деформационной составляющей коэффициента трения индентора от расстояния между сосредоточенными силами и центром индентора (рис. 2.19). Исследования проводились при двух различных скоростях скольжения $V' = 3$, $V' = 5$. Штриховые прямые изображают деформационную составляющую коэф-

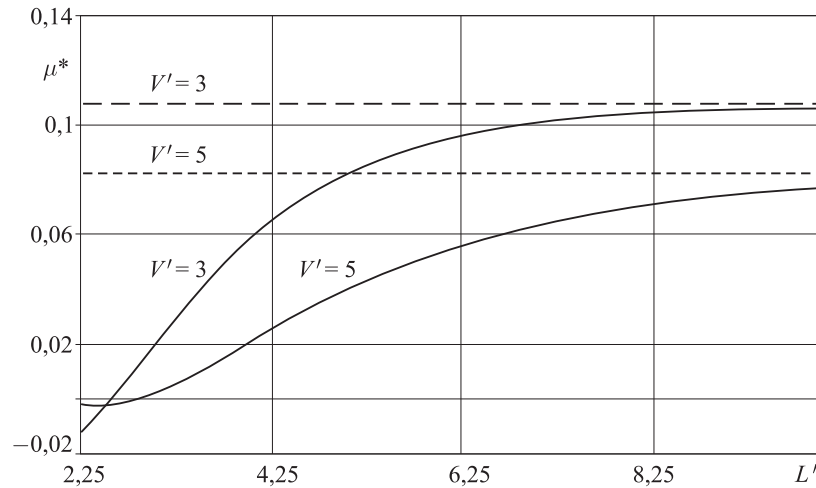


Рис. 2.19. Зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от расстояния между центром индентора и сосредоточенными силами, рассчитанные при $s = 3$, $\mu = 0,5$, $\nu = 0,3$, $P' = 0,1$ и разных значениях параметра V'

коэффициента трения изолированных инденторов. При малом расстоянии от точек приложения сосредоточенных сил до центра индентора гистерезисные потери значительно ниже, чем в случае, когда индентор скользит без пригрузки. При малых значениях L' наблюдаются отрицательные значения деформационной составляющей коэффициента трения.

При увеличении расстояния L' значение деформационной составляющей коэффициента трения стремится к асимптоте, которая соответствует значению μ^* при движении изолированного индентора.

2.4. Моделирование скольжения системы из двух инденторов по вязкоупругому полупространству

2.4.1. Постановка задачи о скольжении двух инденторов

Рассмотрим скольжение с постоянной скоростью V двух жестких инденторов по вязкоупругому полупространству в направлении оси Ox (рис. 2.20). Каждый индентор нагружен вертикальной силой P и касательными силами T_1 и T_2 , коллинеарными вектору скорости. Система координат (x, y, z) связана с индентором 1, движущимся за индентором 2, ось z направлена по внешней нормали к границе полупространства.

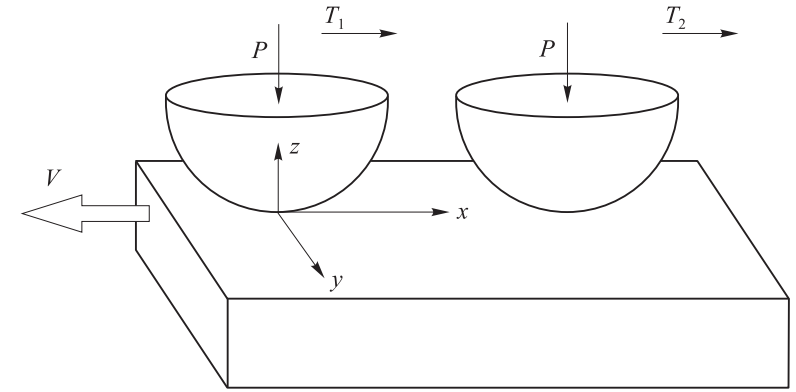


Рис. 2.20. Схема контакта

ва. Расстояние между инденторами постоянно $L = \text{const}$. Рассматриваются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \tau_{xz}(x, y) &= \mu \sigma_z(x, y), \quad \tau_{yz} = 0, \\ w_1(x, y) &= f(x, y) - \psi_1(x, y) - d_1, \quad (x, y) \in \Omega_1^c, \\ w_2(x, y) &= f(x - L, y) - \psi_2(x, y) - d_2, \quad (x, y) \in \Omega_2^c, \\ \sigma_z &= 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega_1^c, \Omega_2^c, \\ -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ω_1^c и Ω_2^c — области контакта инденторов (здесь и далее индексы 1 и 2 обозначают соответствие индентору 1 или 2), d_1 и d_2 — внедрения инденторов, w_1 и w_2 — вертикальные перемещения поверхности полупространства, σ_z и τ_{xz} , τ_{yz} — нормальное и касательные напряжения соответственно, μ — коэффициент трения относительного проскальзывания, одинаковый для обоих инденторов. Функции $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ описывают определяемые из решения задачи дополнительные вертикальные перемещения полупространства в области Ω_1^c и Ω_2^c соответственно в результате воздействия соседнего индентора, функция $f(x, y) = (x^2 + y^2) / (2R)$ описывает форму каждого из инденторов в системах координат, связанных с их центрами (R — радиус каждого индентора). Необходимо найти контактные давления $p(x, y) = -\sigma_z(x, y)$ под каждым индентором, неизвестные области контакта Ω_1^c и Ω_2^c , а также внедрения инденторов в полупространство d_1 и d_2 . Для определения областей кон-

такта используется условие непрерывности давлений на их границе. Контактные давления удовлетворяют условию равновесия:

$$P = \iint_{\Omega_1^c} p(x, y) dx dy, \quad P = \iint_{\Omega_2^c} p(x, y) dx dy. \quad (2.27)$$

Свойства вязкоупругого полупространства описываются моделью (2.3). При анализе используются введенные в разделе 2.2 безразмерные параметры (2.12).

2.4.2. Метод решения контактной задачи

Решение задачи основано на методе граничных элементов, применявшемся при решении уже рассмотренных в этой главе задач. Выбираются две одинаковые по размеру области Ω_1^* и Ω_2^* , заведомо большие искомым областям контакта Ω_1^c и Ω_2^c , и разбиваются на одинаковые прямоугольные элементы (рис. 2.21). Отличие данной задачи от задачи с пригрузкой заключается в том, что распределение давления и площадка контакта соседнего индентора заранее не известна, поэтому сразу рассчитывать функцию дополнительных перемещений невозможно. В связи с этим предложен следующий метод решения контактной задачи.

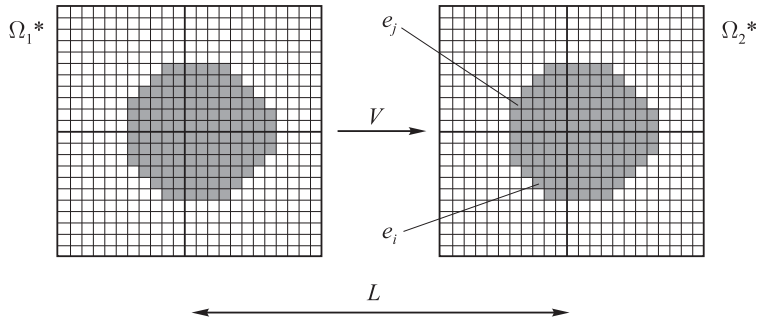


Рис. 2.21. Построение сетки внутри областей Ω_1^c и Ω_2^c

Сначала один из инденторов рассматривается как изолированный. В данном случае выбор пал на индентор 2, поскольку он меньше подвержен воздействию соседнего индентора за счет вязкоупругих свойств материала. Определяются контактные характеристики выбранного индентора с помощью метода, описанного в разделе 2.3. На данном этапе предполагается, что полученные контактные характеристики приближенно равны искомым. Таким образом, становится возможным вычис-

лить функцию дополнительных перемещений границы полупространства внутри области Ω_1^* на основании соотношения (2.8):

$$\begin{aligned} \psi_{1,j} = & \frac{1}{\pi^2 s} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \iint_{\omega_{2,i}} p_{2,i} \left\{ \frac{(x'_{ij} - \xi')\mu}{(x'_{ij} - \xi')^2 + (\eta' - y'_{ij})^2} + \right. \\ & \left. + \mu B e^{A(x'_{ij} - \xi')} \int_{A(x'_{ij} - \xi')}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{u^2 + A^2(\eta' - y'_{ij})^2} \right\} d\xi' d\eta' - \\ & - \frac{2}{\pi^2 s} \iint_{\omega_{2,i}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x'_{ij} - \xi')^2 + (\eta' - y'_{ij})^2}} + \right. \\ & \left. + B e^{A(x'_{ij} - \xi')} \int_{A(x'_{ij} - \xi')}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + A^2(\eta' - y'_{ij})^2}} \right\} d\xi' d\eta'. \end{aligned} \quad (2.28)$$

После расчета дополнительных перемещений $\psi_{1,j}$, на основании граничных условий (2.26) и условия равновесия (2.27) составляется система линейных уравнений для индентора 1:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 & \dots & \Delta^2 & 0 \\ k_1^1 & \dots & k_N^1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ \vdots \\ p_{1,N} \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ f_{1,1} - \psi_{1,1} \\ \vdots \\ f_{1,N} - \psi_{1,N} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Система (2.29) решается с помощью итерационной процедуры, описанной в разделе 2.4. После определения контактных характеристик индентора 1 вычисляется функция дополнительных перемещений границы полупространства $\psi_{2,j}(x, y)$ внутри области Ω_2^* . Далее система линейных уравнений, аналогичная (2.29), составляется для индентора 2. Решение этой системы уравнений уточняет полученные ранее контактные характеристики индентора 2. Описанная двойная итерационная процедура (рис. 2.22) прекращается в тот момент, когда найденные площадки контакта инденторов перестают отличаться от соответствующих площадок на предыдущем шаге внешнего цикла процедуры, а изменения контактных давлений не превышают заданной погрешности.

Следует отметить, что описанная процедура обладает хорошей сходимостью. Это обусловлено тем, что взаимное влияние инденторов не равнозначно. Так, при воздействии индентора 1 на индентор 2 проявляются преимущественно упругие свойства полупространства, а инден-

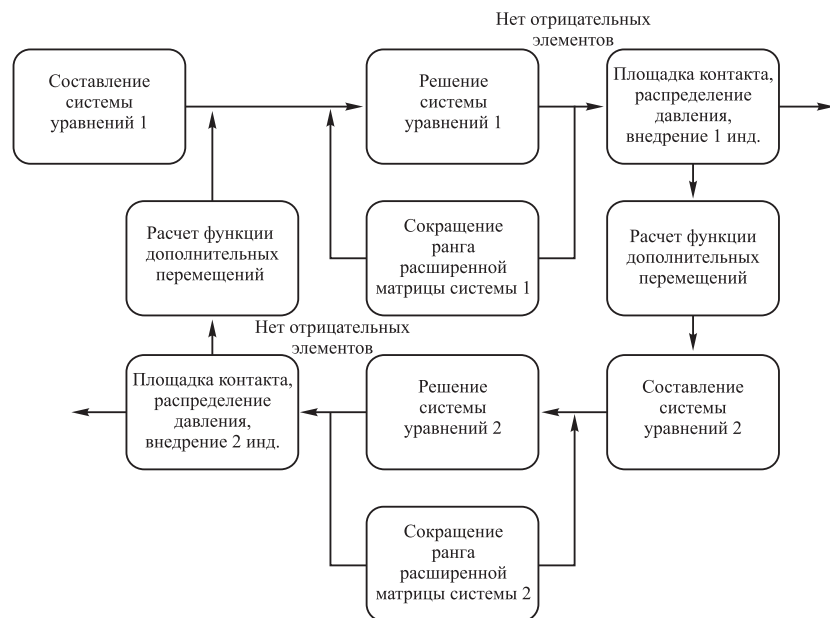


Рис. 2.22. Алгоритм решения контактной задачи для двух инденторов

тор 2 воздействует на индентор 1 за счет вязких свойств полупространства.

2.4.3. Анализ взаимного влияния инденторов на распределение контактных давлений и силу трения

С помощью предложенного метода решения контактной задачи был проведен ряд исследований. Изучались зависимости контактных характеристик, деформационной составляющей коэффициента трения, а также напряженного состояния инденторов от различных параметров задачи.

На рис. 2.23 и 2.24 представлены распределения контактного давления под инденторами и соответствующие функции дополнительных перемещений при двух характерных скоростях $V' = 3$ (рис. 2.23) и $V' = 6$ (рис. 2.24). Изображенные на рис. 2.23 и 2.24 функции $\psi(x, y)$ наглядно демонстрируют характер взаимодействия инденторов. Так, индентор 2, двигаясь по поверхности, оставляет после себя канавку, а индентор 1 при движении вызывает впереди себя изгиб поверхности полупространства, похожий на деформацию поверхности при упругом вдавливании.

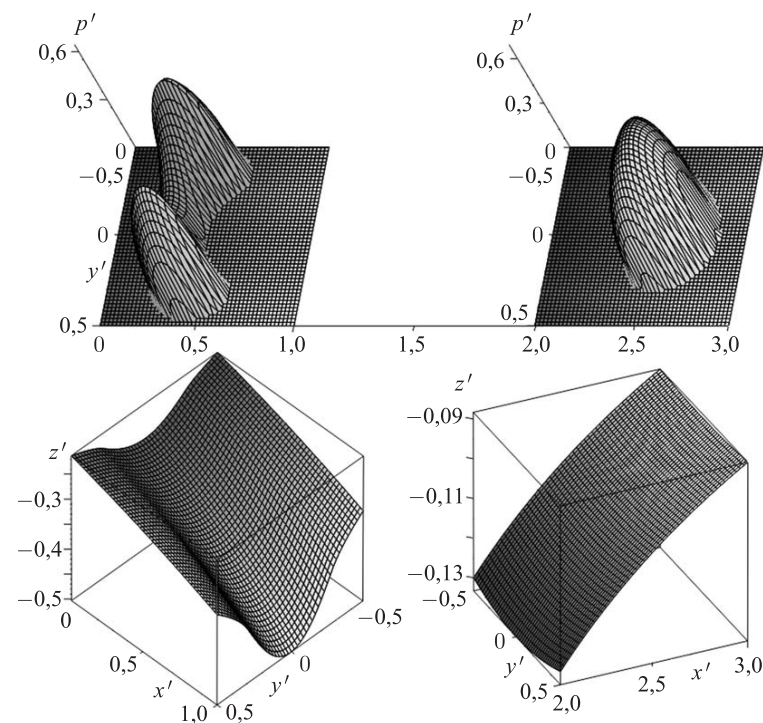


Рис. 2.23. Распределение контактного давления и соответствующие функции дополнительных перемещений: $s = 3$, $L' = 2$, $\mu = 0,5$, $\nu = 0,3$, $V' = 3$

Дополнительные перемещения границы полупространства вызывают снижение давления в центре площадки контакта индентора 1. Увеличение скорости скольжения приводит к разделению площадки контакта на две подобласти (рис. 2.24). Площадка контакта индентора 2 смещена вперед по сравнению со случаем скольжения изолированного индентора.

Результаты исследования зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от расстояния между центрами инденторов представлены на рис. 2.25. Штриховой линией отмечена деформационная составляющая коэффициента трения изолированного индентора, цифрами 1 и 2 — инденторов 1 и 2 соответственно. При малом расстоянии между инденторами их взаимодействие приводит к тому, что деформационная составляющая коэффициента трения индентора 2 становится значительно больше, чем изолированного, а у индентора 1 становится отрицательной. Увеличение расстояния L' приводит к тому, что дефор-

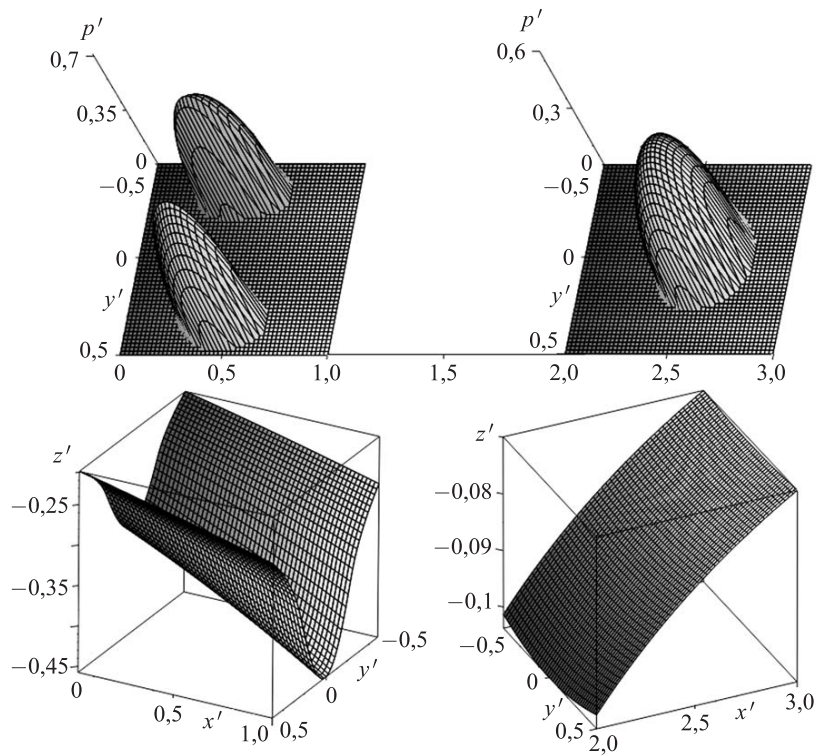


Рис. 2.24. Распределение контактного давления и соответствующие функции дополнительных перемещений: $s = 3$, $L' = 2$, $\mu = 0,5$, $\nu = 0,3$, $V' = 6$

мационная составляющая коэффициента трения μ^* обоих инденторов начинает асимптотически приближаться к значению, соответствующему скольжению изолированного индентора. Из результатов, представленных на рис. 2.25, следует, что коэффициент μ^* системы, состоящей из индентора 1 и 2, меньше, чем в случае скольжения изолированного индентора.

Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки P' изображена на рис. 2.26. Увеличение нагрузки при малых скоростях скольжения вызывает одновременное увеличение деформационной составляющей коэффициента трения у индентора 2 и уменьшение у индентора 1. При большей скорости данный эффект пропадает, деформационные составляющие коэффициента трения отличаются не столь значительно. Диапазон исследуемых нагрузок ограничен, поскольку необходимо, чтобы размер площадки контакта был мал по сравнению с радиусом индентора.

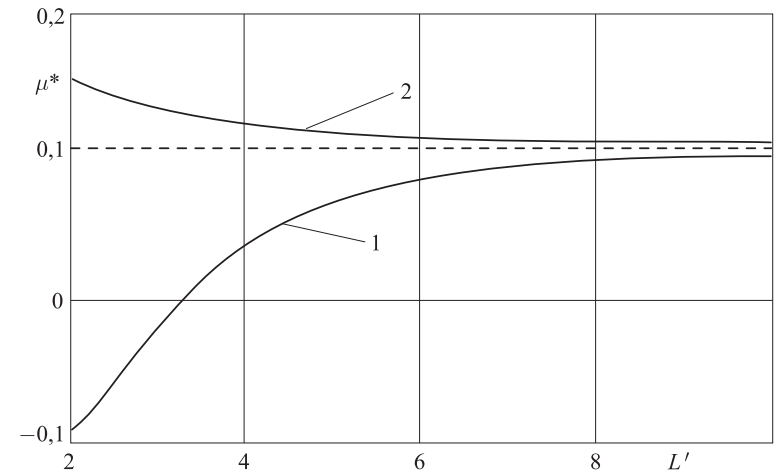


Рис. 2.25. Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения инденторов 1 и 2 от расстояния между ними ($s = 3$, $\mu = 0,5$, $\nu = 0,3$, $V' = 3$, $P' = 0,08$)

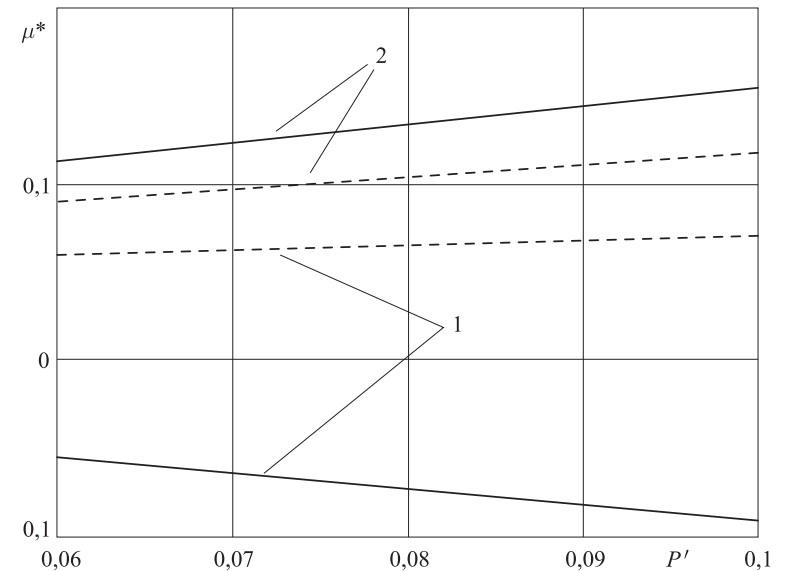


Рис. 2.26. Зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки при $s = 3$, $\mu = 0,5$, $\nu = 0,3$ и $V' = 3$ (сплошная линия), $V' = 6$ (пунктирная линия), $L' = 3$

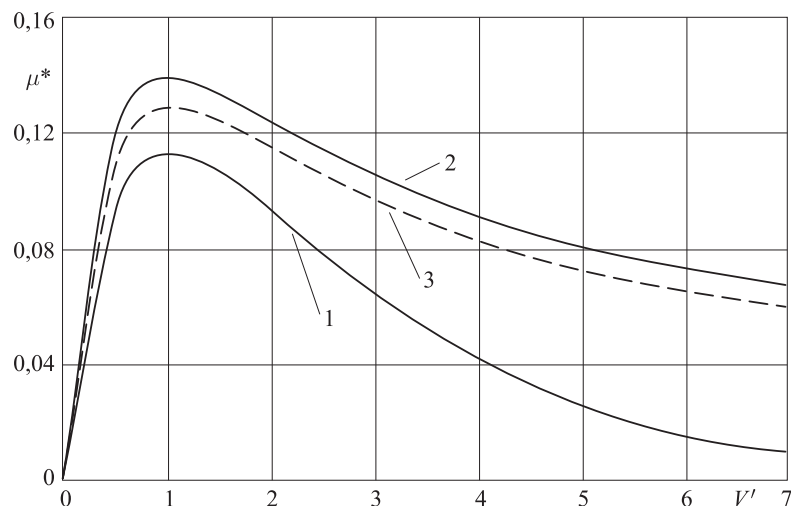


Рис. 2.27. Зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от скорости скольжения при $s = 3$, $\mu = 0,5$, $\nu = 0,3$, $L' = 5$, $P' = 0,08$

На рис. 2.27 изображена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения инденторов от их скорости скольжения. Штриховая кривая 3 изображает указанную зависимость в случае изолированного индентора, цифрами 1 и 2 указаны зависимости, рассчитанные для инденторов 1 и 2 соответственно. При небольших скоростях скольжения значения μ^* инденторов 1 и 2 мало отличаются от значения μ^* изолированного индентора. При достижении определенной скорости скольжения значение коэффициента μ^* индентора 2 становится больше, чем изолированного, на постоянную величину. При этом коэффициент μ^* индентора 1 при увеличении скорости снижается быстрее, чем у изолированного индентора.

2.4.4. Анализ напряженного состояния под скользящими инденторами

С использованием полученных решений контактной задачи методом, описанным в разделе 2.2, проведен анализ напряженного состояния полупространства, возникающего при скольжении по нему системы из двух жестких инденторов. Исследовались максимальные касательные напряжения, возникающие на поверхности полупространства, а также в плоскости $y = 0$. Для расчетов напряженного состояния полупростран-

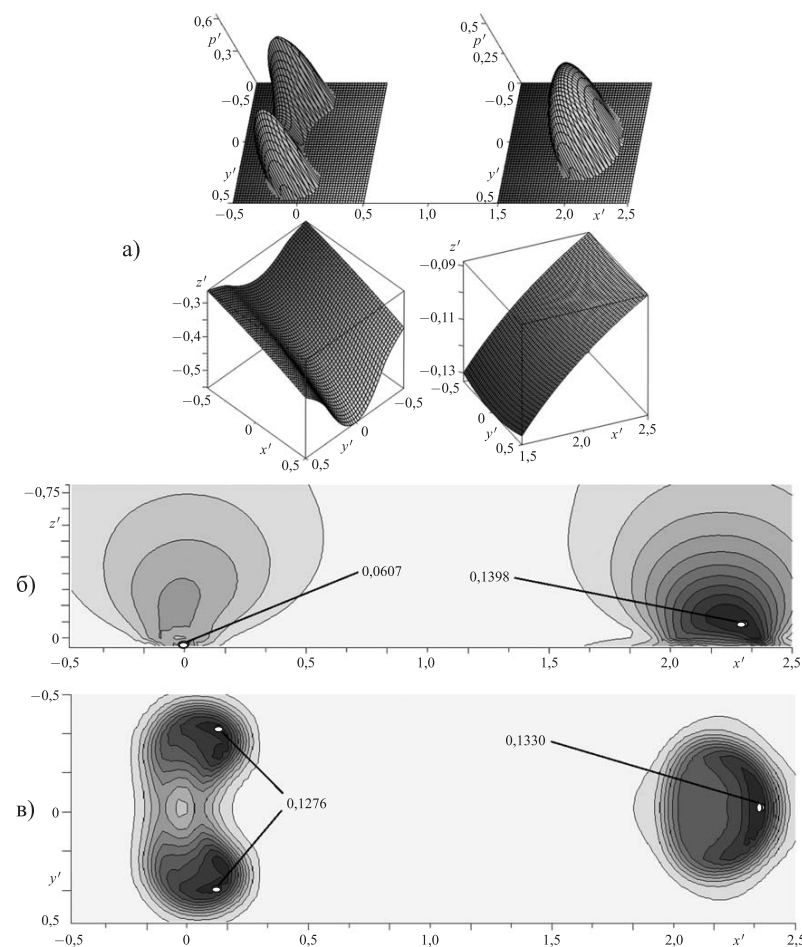
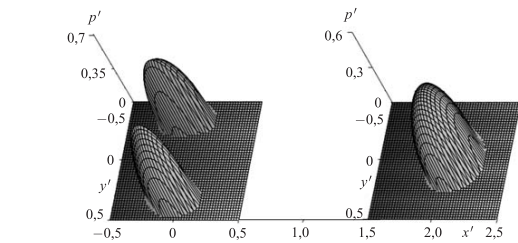


Рис. 2.28. Распределение контактного давления (а), максимальные касательные напряжения в сечении (б), максимальные касательные напряжения на поверхности полупространства (в) ($s = 3$, $L' = 2$, $\mu = 0,5$, $\nu = 0,3$, $V' = 3$)

ства использовались распределения контактных давлений, представленные на рис. 2.23 и 2.24. На рис. 2.28 представлены распределения контактного давления под инденторами, рассчитанные при безразмерной скорости их скольжения $V' = 3$ (а), соответствующее распределение максимальных касательных напряжений полупространства в плоскости $y = 0$ (б) и распределение максимальных касательных напряжений на



а)

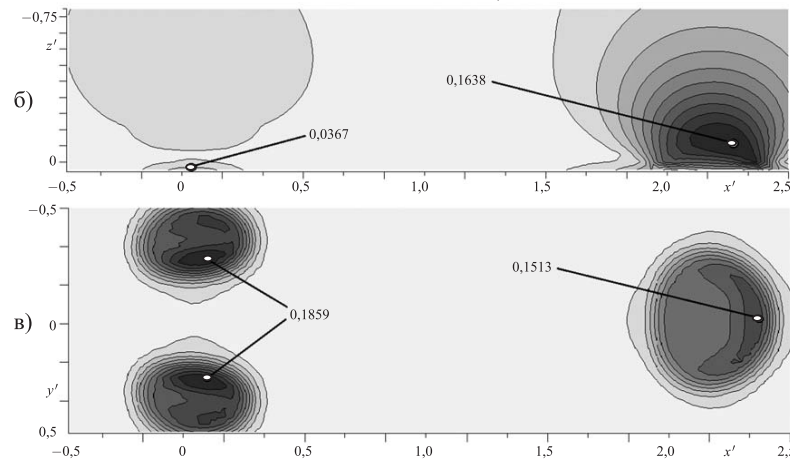
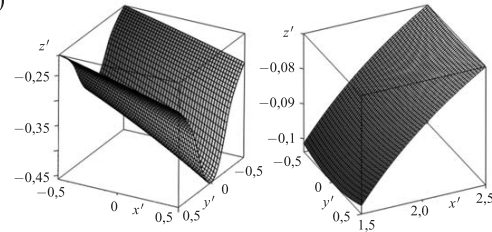


Рис. 2.29. Распределение контактного давления (а), максимальные касательные напряжения в сечении (б), максимальные касательные напряжения на поверхности полупространства (в) ($s = 3$, $L' = 2$, $\mu = 0,5$, $\nu = 0,3$, $V' = 6$)

поверхности полупространства (в). На рис. 2.29 представлены аналогичные результаты для другой скорости скольжения ($V' = 6$).

Пики максимальных касательных напряжений в плоскости $y = 0$ (рис. 2.28, б, 2.29, б) находятся под передним индентором на некотором расстоянии от поверхности полупространства, причем для большей скорости скольжения значение пика максимальных касательных напряже-

ний больше. В случае меньшей скорости скольжения пик максимальных касательных напряжений на поверхности полупространства находится в передней части площадки контакта индентора 2. При увеличении скорости скольжения и разделении площадки контакта заднего индентора пики максимальных касательных напряжений концентрируются под индентором 1.

Выводы к главе 2

В этой главе разработан метод решения контактной задачи о скольжении гладкого индентора по вязкоупругому полупространству, который позволяет провести анализ влияния формы индентора, касательных напряжений в области контактного взаимодействия, а также вязкоупругих характеристик основания, нагрузки и скорости скольжения на распределение напряжений и силу сопротивления при скольжении с трением жесткого индентора по вязкоупругому полупространству, в том числе с учетом действия соседних инденторов при их скольжении по исследуемому основанию.

Предложен метод решения контактной задачи о скольжении жесткого индентора по вязкоупругому полупространству при наличии двух сосредоточенных сил, действующих вне области контакта на линии скольжения индентора. Вычислены дополнительные перемещения границы полупространства, возникающие в результате воздействия пригрузки. Обнаружен эффект разделения площадки контакта индентора на две подобласти вследствие возникающей в результате прохождения сосредоточенной силы канавки.

Изучен эффект взаимного влияния инденторов при скольжении системы из двух инденторов по вязкоупругому полупространству на основании разработанного метода решения трехмерной контактной задачи. Исследовано влияние скорости скольжения, а также расстояния между центрами инденторов на контактные характеристики и деформационную составляющую коэффициента трения. Установлено, что в результате взаимодействия между инденторами площадка контакта заднего индентора смещается назад, возникает падение давления в центре, а при достаточно большой скорости скольжения возникает эффект разделения площадки контакта на две подобласти. Передний индентор в меньшей степени подвержен влиянию соседнего индентора, его площадка контакта незначительно смещена вперед, а распределение контактного давления мало отличается от соответствующего распределения в случае скольжения изолированного индентора.

Разработан метод расчета внутренних напряжений, возникающих при скольжении с трением гладкого индентора по границе вязкоупругого полупространства. В результате исследования напряженного состояния вязкоупругого полупространства под сферическим индентором обнаружено, что максимумы максимальных касательных напряжений могут локализоваться как под поверхностью, так и на поверхности в зависимости от величины коэффициента трения, а растягивающие и сжимающие напряжения достигают максимума на поверхности. Величина максимумов напряжений растет с увеличением скорости скольжения, она несколько больше для материалов с меньшим значением коэффициента Пуассона. Увеличение коэффициента трения также приводит к росту концентрации напряжений под индентором.

Установлено, что общая сила трения не является прямой суммой ее механической и адгезионной составляющих, как это часто принимается при расчете силы сопротивления скольжению деформируемых тел, поскольку распределение контактного давления при наличии касательных напряжений в области контакта отличается от распределения давления в случае скольжения без трения. При этом указанное различие зависит от величины коэффициента Пуассона ν . Этот вывод согласуется с результатами экспериментальных исследований, описанных в главе 1.

Исследования показали, что наличие сосредоточенных сил впереди и позади скользящего индентора вызывает снижение деформационной составляющей коэффициента трения относительно случая изолированного индентора. Установлено, что деформационная составляющая коэффициента трения может принимать отрицательные значения при малых расстояниях между сосредоточенными силами и центром индентора (сосредоточенные силы находятся при этом вне области контакта). Этот эффект объяснен влиянием сосредоточенных сил на деформацию формы поверхности полупространства под индентором. Увеличение расстояния от центра индентора до точек приложения сосредоточенных сил вызывает увеличение деформационной составляющей коэффициента трения вплоть до асимптотического значения, равного деформационной составляющей коэффициента трения изолированного индентора.

Обнаружено, что деформационная составляющая коэффициента трения системы инденторов всегда меньше, чем изолированного индентора, а уменьшение расстояния между центрами инденторов приводит к уменьшению деформационной составляющей коэффициента трения.

Деформационная составляющая коэффициента трения переднего индентора больше, чем у изолированного на постоянную величину, не зависящую от скорости скольжения. В то же время разница между деформационной составляющей коэффициента трения заднего и изолиро-

ванного индентора увеличивается с увеличением скорости скольжения. Деформационная составляющая коэффициента трения заднего индентора может принимать отрицательные значения при достаточно высокой скорости скольжения и расстоянии между центрами инденторов.

Литература

1. Ишлинский А. Ю. Теория сопротивления перекачиванию (трение качения) и смежных явлений // Всесоюз. конф. по трению и износу в машинах. 1940. Т. 2. С. 255–264.
2. Солдатенков И. А. К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 1. С. 12–21.
3. Flom D. G., Bueche A. M. Theory of rolling friction for spheres // J. appl. phys. 1959. Vol. 30, № 11. P. 1725–1730.
4. Hunter S. C. The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space // J. Appl. Mech. 1961. Vol. 28, № 4. P. 611–617.
5. May W. D., Morris E. L., Atack D. Rolling friction of a hard cylinder over a viscoelastic material // J. Appl. Phys. 1959. Vol. 30, № 11. P. 1713–1724.
6. Morland L. W. A plane problem of rolling contact in linear viscoelasticity theory // J. Appl. Mech. 1962. Vol. 29, № 2. P. 345–352.
7. Morland L. W. Exact solutions for rolling contact between viscoelastic cylinders // The Quarterly J. Mech. and Appl. Math. 1967. Vol. 20, № 1. P. 73–106.
8. Morland L. W. Rolling contact between dissimilar viscoelastic cylinders // The Quarterly J. Mech. and Appl. Math. 1968. P. 363–376.
9. Prescott J., Applied Elasticity. New York: Dover Publications, 1946. 666 p.
10. Chen W., Wang Q., Huan Z., Luo X. Semi-analytical viscoelastic contact modeling of polymer-based materials // J. Trib. 2011. Vol. 133, № 4. P. 041404.
11. Graham G. A. C. The contact problem in the linear theory of viscoelasticity when the time dependent contact area has any number of maxima and minima // Int. J. Engineering Sci. 1967. Vol. 5, № 6. P. 495–514.
12. Hunter S. C. The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space // J. Mech. Phys. Solids. 1960. Vol. 8. P. 219–234.
13. Kalker J. J. On elastic line contact // J. of Appl. Mech. 1972. Vol. 39, № 4. P. 1125–1132.
14. Kalker J. J. The surface displacement of an elastic half-space loaded in a slender, bounded, curved surface region with application to the calcula-

- tion of the contact pressure under a roller // *J. of Appl. Math.* 1977. Vol. 19, № 2. P. 127–144.
15. Lee E., Radok J. The Contact Problem for Viscoelastic Bodies // *J. Appl. Mech.* 1960. Vol. 27. P. 438–444.
 16. Горячева И. Г. Контактные задачи в трибологии: Дисс. докт. физ.-мат. наук. 1987.
 17. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
 18. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 339 с.
 19. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1955. 485 с.
 20. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 970 с.
 21. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. Clarendon, 1954.
 22. Горячева И. Г. Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // *ПММ*. 1973. Т. 37. С. 877–885.
 23. Popov V. L. et al. Generalized law of friction between elastomers and differently shaped rough bodies // *Scientific reports*. 2014. Vol. 4. P. 3750–3756
 24. Persson B. N. J. Rolling friction for hard cylinder and sphere on viscoelastic solid // *The Eur. Phys. J. E*. 2010. Vol. 33, № 4. P. 327–333.
 25. Panek C., Kalker J. J. Three-dimensional contact of a rigid roller traversing a viscoelastic half space // *J. Appl. Math.* 1980. Vol. 26, № 3. P. 299–313.
 26. Panek C., Kalker J. J. A solution for the narrow rectangular punch // *J. of Elast.* 1977. Vol. 7, № 2. P. 213–218.
 27. Le Tallec P., Rahler C. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations // *Int. J. Num. Meth. in Engineering*. 1994. Vol. 37, № 7. P. 1159–1186.
 28. Nasdala L. et al. An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling structures // *Comp. Mech.* 1998. Vol. 22, № 5. P. 395–403.
 29. Padovan J. et al. Alternative formulations of rolling contact problems // *Finite elements in analysis and design*. 1992. Vol. 11, № 4. P. 275–284.
 30. Padovan J., Paramadilok O. Transient and steady state viscoelastic rolling contact // *Computers & Structures*. 1985. Vol. 20, № 1–3. P. 545–553.
 31. Александров В. М., Горячева И. Г. Движение с постоянной скоростью распределенной нагрузки по вязкоупругому полупространству // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Матер. 5-й Росс. конф. с междунар. участием. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. С. 23–25.
 32. Александров В. М., Горячева И. Г., Торская Е. В. Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству // *Докл. РАН*. 2010. Т. 430. № 4. С. 490–493.
 33. Carbone G., Putignano C. A novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials: theory and experiments // *J. Mech. and Phys. Sol.* 2013. Vol. 61, № 8. P. 1822–1834.
 34. Kusche S. Frictional force between a rotationally symmetric indenter and a viscoelastic half-space // *ZAMM J. Appl. Math. Mech.* 2016. Vol. 19, № 2. P. 123–129.
 35. Koumi K. E. et al. Contact analysis in the presence of an ellipsoidal inhomogeneity within a half space // *Int. J. Sol. Struc.* 2014. Vol. 51, № 6. P. 1390–1402.
 36. Koumi K. E., Chaise T., Nelias D. Rolling contact of a rigid sphere/sliding of a spherical indenter upon a viscoelastic half-space containing an ellipsoidal inhomogeneity // *J. Mech. Phys. Sol.* 2015. Vol. 80. P. 1–25.
 37. Горячева И. Г., Степанов Ф. И., Торская Е. В. Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству // *ПММ*. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 853–863.
 38. Степанов Ф. И. Последовательное скольжение двух гладких штампов по вязкоупругому основанию с трением // *ПМТФ*. 2015. Т. 56. № 6. С. 158–165.
 39. Степанов Ф. И., Торская Е. В. Исследование напряженного состояния при скольжении штампа по вязкоупругому полупространству // *Трение и износ*. 2016. Т. 37. № 2. С. 12–17.
 40. Goryacheva I. G., Stepanov F. I., Torskaya E. V. Effect of friction in sliding contact of a sphere over a viscoelastic half-space // *Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures, series Computational Methods in Applied Sciences*, Berlin: Springer, 2016. P. 93–103.
 41. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

Глава 3. Моделирование скольжения штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию в условиях граничного трения

В данной главе представлены некоторые математические модели, позволяющие изучить влияние параметров микрогеометрии поверхности на контактные характеристики и силу трения при скольжении жесткого тела, поверхность которого имеет регулярный рельеф, по тонкому вязкоупругому слою, сцепленному с жестким или упругим основанием, а также по границе вязкоупругого полупространства. Предполагается, что касательные напряжения в области контакта отсутствуют, поэтому полученные решения применимы к исследованию граничного трения шероховатых поверхностей и поверхностей с регулярным рельефом.

3.1. Подходы к анализу роли микрорельефа поверхности в формировании деформационной составляющей силы трения

При трении эластомеров, к которым относятся резины, каучуки, высокоэластичные полимеры и композиционные материалы на их основе, один из основных источников диссипации энергии — упругий гистерезис, имеющий место при циклическом деформировании поверхностных слоев материалов. Для описания этого процесса используются различные модели вязкоупругих тел. Другой фактор, в значительной степени влияющий на силу трения, является микрогеометрия контактирующих поверхностей. Именно она определяет частоту взаимодействия материала и время его нахождения в контакте с контртелом. Исследование совместного действия этих факторов важно при разработке способов управления силами трения в контакте тел, обладающих несовершенной упругостью поверхностных слоев.

Изучался ряд аспектов этой проблемы путем решения контактных задач в квазистатической постановке при разном способе описания микрорельефа поверхности контртела, взаимодействующего с вязкоупругим материалом в условиях трения скольжения [1–12]. Рассмотрены контактные задачи в плоской постановке о движении периодической системы штампов по тонкому вязкоупругому слою, сцепленному с упругой полуплоскостью [1–5]. Деформации слоя описывались одномерными моделями Максвелла [1, 2] и Кельвина [3]. Исследовалась пространственная контактная задача о скольжении системы сферических неровностей по вязкоупругому слою, описываемому одномерной моделью Кельвина [6].

С целью изучения влияния на контактные характеристики и силу трения не только формы вершин неровностей, но и впадин шероховатой поверхности исследовались контактные задачи о скольжении двоякопериодической волнистой поверхности по вязкоупругому слою, описываемому одномерной моделью Кельвина, характеризуемой спектром времен релаксации [8–10]. Рассматривались случаи полного [8] и дискретного контакта [9, 10]. Разработаны также методы расчета деформационной составляющей силы трения при скольжении индентора с фрактальной шероховатостью по вязкоупругому основанию [12].

Деформационная составляющая трения играет значительную роль в условиях сцепления автомобильных шин с влажным асфальтовым покрытием. Шероховатость поверхности асфальта в сочетании с водной смазкой делают несущественным вклад адгезионной составляющей силы трения в общую силу сопротивления движению шины. При этом наличие жидкости в зазоре между поверхностями также влияет на величину силы трения. В зависимости от количества жидкости и скорости относительного скольжения поверхностей механизм влияния жидкости на силу трения может быть различным — от проявления капиллярных эффектов при очень тонком поверхностном слое до гидродинамических эффектов, когда слой жидкости способен разделить трущиеся поверхности. Промежуточной является ситуация, при которой жидкость заполняет зазор между поверхностями, но не проникает в области контактного взаимодействия, т. е. не разделяет полностью трущиеся поверхности. В условиях нормального нагружения поверхности с регулярным рельефом, взаимодействующей с упругой полуплоскостью, характер влияния жидкости в зазоре между телами на характеристики контактного взаимодействия исследовался в [13]. В этой главе на основе решения задачи о скольжении жесткого трехмерного штампа периодической структуры по вязкоупругому основанию при наличии несжимаемой жидкости в зазоре между контактирующими поверхностями [14] дан анализ влияния жидкости на сопротивление движению штампа и на распределение давлений в области контакта.

Полученные решения используются для анализа контактных характеристик эластомеров при фрикционном взаимодействии в условиях граничной смазки.

3.2. Плоская контактная задача о скольжении штампа с волнистой поверхностью по вязкоупругому слою

В этом разделе строится модель скольжения индентора с периодическим волнистым рельефом по границе вязкоупругого слоя, сцепленно-

го с упругим основанием, позволяющая исследовать влияние параметров рельефа поверхности контртела, а также относительных механических характеристик поверхностного слоя на распределение фактических контактных давлений и деформационную составляющую силы трения. Модель основана на решении контактной задачи в двумерной (плоской) постановке.

3.2.1. Постановка задачи

Контактная задача в плоской постановке о скольжении с постоянной скоростью V жесткого индентора, имеющего на поверхности периодически расположенные выступы, по поверхности тонкого вязкоупругого слоя толщины H , сцепленного с упругим основанием (рис. 3.1), исследована в [1–5] для различных моделей поверхностного слоя.

Форма индентора описывается периодической (с периодом l) функцией $f(x)$, т. е. $f(x) = f(x + l)$. Рассмотрены [5] две различные модели вязкоупругого слоя — модель Максвелла и модель Кельвина. Для модели Кельвина, обладающей ограниченной ползучестью, соотношение между перемещениями верхней границы слоя v_3 в направлении оси Oy

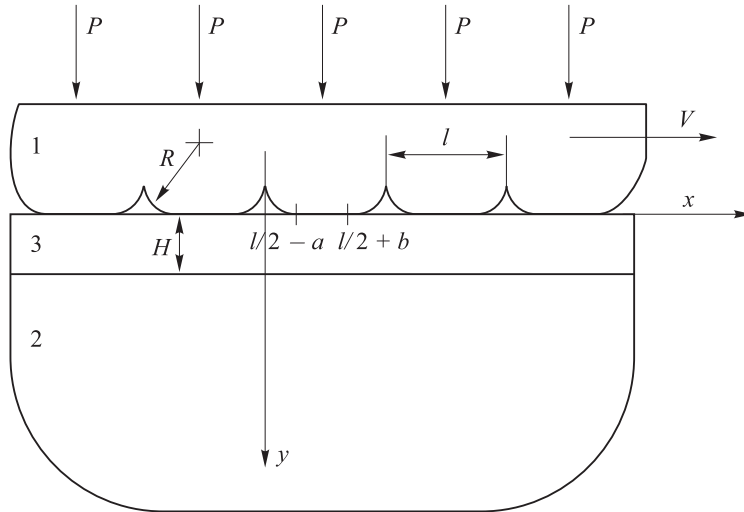


Рис. 3.1. Схема контакта индентора (1) с периодически расположенными выступами, скользящего по поверхности вязкоупругого слоя (3), сцепленного с основанием (2)

и нормальным давлением $p(x)$ имеет следующий вид:

$$v_3 + T_\varepsilon \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{H}{E_L} \left(p + T_\sigma \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad (3.1)$$

где T_ε и T_σ — времена последствий и релаксации, E_L — длительный модуль упругости, H — толщина слоя.

Будем считать движение установившимся и свяжем с индентором подвижную систему координат (x, y) . В системе координат (x, y) все напряжения и деформации не зависят от времени и являются функциями координат. В подвижной системе координат соотношение (3.1) примет следующий вид:

$$v_3 - T_\varepsilon V \frac{dv_3}{dx} = \frac{H}{E_L} \left(p - T_\sigma V \frac{dp}{dx} \right). \quad (3.2)$$

Заметим, что нормальные перемещения слоя также удовлетворяют условию периодичности:

$$v_3(x) = v_3(x + l). \quad (3.3)$$

Поскольку для одномерной модели вязкоупругого слоя давление не меняется по толщине слоя, то на границе слоя и упругого основания действует давление, описываемое периодической функцией $p(x)$. Будем считать, что касательные напряжения отсутствуют или не влияют на распределение контактных давлений. Тогда перемещения v_2 границы основания, моделируемого упругой полуплоскостью, связаны с действующим на нее давлением $p(x)$, распределенным периодически внутри площадок контакта $[(2n+1)l/2 - a, (2n+1)l/2 + b]$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), соотношением [15]:

$$v_2(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_2} \int_{l/2-a}^{l/2+b} p(x') \ln \left| 2 \sin \left[\frac{\pi(x'-x)}{l} \right] \right| dx'. \quad (3.4)$$

Здесь E_2 и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона основания соответственно.

Для определенности положим, что функция $f(x)$ является гладкой и имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2R} \left(x - \frac{l}{2} \right)^2, \quad x \in (0, l), \quad (3.5)$$

поэтому контактное давление $p(x)$ на концах площадок контакта удовлетворяет условию:

$$p\left(\frac{l}{2}-a\right)=p\left(\frac{l}{2}+b\right)=0. \quad (3.6)$$

В силу периодичности функции $p(x)$ имеем

$$p(x)=p(x+l). \quad (3.7)$$

В областях контакта выполняется условие контактного взаимодействия, которое в случае жесткого индентора имеет вид:

$$\begin{aligned} v_2(x)+v_3(x) &= D-f(x), \\ x \in \left[\frac{(2n+1)l}{2}-a, \frac{(2n+1)l}{2}+b \right] \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где D — сближение тел за счет их деформирования.

3.2.2. Метод решения

Соотношения (3.2), (3.4), (3.5), (3.8) совместно с условиями периодичности (3.3) и (3.7) и граничным условием (3.6) представляют собой полную систему уравнений для определения неизвестных контактных давлений. Исключая из уравнений (3.2), (3.4) и (3.8) функции $v_i(x)$ ($i=2, 3$) и используя выражение (3.5), получим соотношение, выполняющееся для всех точек области контакта, т. е. для всех $x \in [l/2-a, l/2+b]$:

$$\begin{aligned} -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_2} \int_{l/2-a}^{l/2+b} p(x') \left[\ln \left| 2 \sin \frac{\pi(x'-x)}{l} \right| + \frac{\pi T_\varepsilon V}{l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(x'-x)}{l} \right] dx' + \\ + \frac{h}{E_L} p(x) - \frac{h T_\sigma V}{E_L} p'(x) = D - \frac{1}{2R} \left(x - \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{T_\varepsilon V}{R} \left(x - \frac{l}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Решением уравнения (3.2) на ненагруженных участках, т. е. при $x \in [-l/2+b, l/2-a]$, где $p(x)=0$, является функция:

$$v_3 = v_0 \exp \left(\frac{x}{T_\varepsilon V} \right). \quad (3.10)$$

Эта функция должна удовлетворять условию контакта (3.8) при $x = -l/2-a$ и $x = l/2+b$, а также условию периодичности (3.3), из кото-

рых следует:

$$\begin{aligned} v_0 \exp \left(\frac{b-l/2}{T_\varepsilon V} \right) &= D - \frac{b^2}{2R} + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_2} \int_{l/2-a}^{l/2+b} p(x') \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(x'+l/2-b)}{l} \right| dx', \\ v_0 \exp \left(\frac{l/2-a}{T_\varepsilon V} \right) &= D - \frac{a^2}{2R} + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_2} \int_{l/2-a}^{l/2+b} p(x') \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(x'-l/2+a)}{l} \right| dx'. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Исключая из соотношений (3.9) и (3.11) постоянные D и v_0 , получим следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение для определения безразмерных контактных давлений $\tilde{p}(\xi) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_2} \times \times p \left(\frac{b-a+l}{2} + \frac{a+b}{2} \xi \right)$ ($\xi \in [-1, 1]$):

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}(\xi') H(\xi, \xi') d\xi' - \frac{\beta_\varepsilon}{L} \tilde{p}(\xi) + \frac{\beta_\varepsilon}{L \zeta_0 \alpha_T} \tilde{p}'(\xi) = G(\xi), \quad (3.12)$$

где ядро $H(\xi, \xi')$ и функция $G(\xi)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} H(\xi, \xi') = \ln \left| 2 \sin \frac{\pi L}{2\tilde{l}} (\xi' - \xi) \right| + \frac{\pi L}{2\zeta_0 \tilde{l}} \operatorname{ctg} \frac{\pi L}{2\tilde{l}} (\xi' - \xi) + \\ + \frac{\ln \left| 2 \sin \frac{\pi L}{2\tilde{l}} (1 - \xi') \right| \exp \left(2\zeta_0 \left(\frac{\tilde{l}}{L} - 1 \right) \right) - \ln \left| 2 \sin \frac{\pi L}{2\tilde{l}} (1 + \xi') \right|}{1 - \exp \left(2\zeta_0 \left(\frac{\tilde{l}}{L} - 1 \right) \right)}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$G(\xi) = \frac{L}{2} \xi^2 + L \xi \left(\varepsilon - \frac{1}{\zeta_0} \right) - \frac{L \varepsilon}{\zeta_0} - \frac{L}{2} (1 + 2\varepsilon) + \frac{2\varepsilon L}{1 - \exp \left(2\zeta_0 \left(\frac{\tilde{l}}{L} - 1 \right) \right)}.$$

В формулах (3.12) и (3.13) введена безразмерная координата

$$x = \frac{b-a+l}{2} + \frac{a+b}{2} \xi \quad (3.14)$$

и использованы следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} L = \frac{a+b}{2R}, \quad \varepsilon = \frac{b-a}{a+b}, \quad \beta_\varepsilon = \frac{H \pi E_2}{2(1-\nu^2) R E_L}, \\ \alpha_T = \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma}, \quad \zeta_0 = \frac{a+b}{2VT_\varepsilon}, \quad \tilde{l} = \frac{l}{2R}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Введенные параметры зависят от механических характеристик вязкоупругого слоя (величин E_L , T_ε , T_σ), его толщины H , упругих характеристик основания (величин E_2 и ν), а также радиуса кривизны отдельного выступа R и расстояния между выступами l .

Для определения неизвестных размеров единичных зон контакта (величины $(a+b)$), а также внедрения D при заданных нагрузках P на отдельный выступ использовались условия равновесия:

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}(\xi) d\xi = \tilde{P}, \quad \tilde{P} = \frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E_2 R}, \quad (3.16)$$

и непрерывности давлений на краях площадок контакта в силу гладкости выступов (3.6), которое в безразмерном виде запишется как

$$\tilde{p}(-1) = \tilde{p}(1) = 0. \quad (3.17)$$

Численное решение уравнения (3.12) с учетом соотношений (3.16) и (3.17) осуществлялось путем сведения их к линейной алгебраической системе.

3.2.3. Анализ контактных характеристик и силы трения

Полученное решение контактной задачи использовано в [3, 5] для анализа совместного влияния свойств тонкого вязкоупругого поверхностного слоя и параметров рельефа поверхности индентора на распределение контактных давлений и внутренних напряжений в упругом основании, а также на размер и смещение единичных зон контакта.

Свойства поверхностного слоя, при моделировании его телом Кельвина, описываются безразмерными параметрами α_T , ς_0 и β_ε (3.15). Параметр α_T характеризует вязкие свойства слоя, причем случай $\alpha_T = 1$ соответствует упругому слою с модулем упругости, равным длительному модулю E_L . Параметр ς_0 зависит от времени запаздывания T_ε и скорости V скольжения индентора и представляет собой отношение времени, за которое элемент проходит расстояние, равное полуширине $(a+b)/2$ области контакта, ко времени запаздывания вязкоупругого материала. Параметр β_ε характеризует относительную толщину и относительный модуль упругости поверхностного слоя. Случай $\beta_\varepsilon \rightarrow +\infty$ соответствует модели жесткого индентора, скользящего по вязкоупругому слою, сцепленному с жестким основанием.

Рельеф поверхности (ее волнистость) характеризуется безразмерным расстоянием \tilde{l} между неровностями.

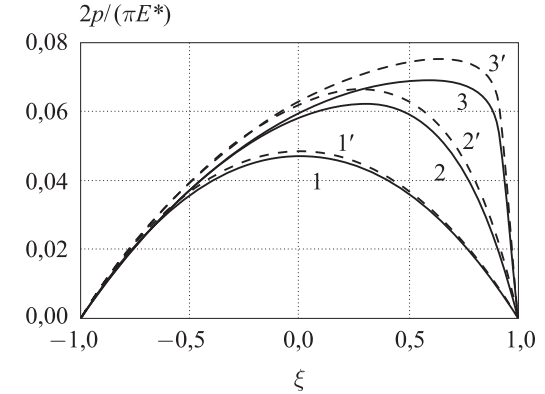


Рис. 3.2. Распределение контактных давлений при $\tilde{P} = 1/15$, $\beta_\varepsilon = 10$, $T_\varepsilon V / R = 1$ и $\alpha_T = 1$ (1, 1'), $\alpha_T = 5$ (2, 2'), $\alpha_T = 50$ (3, 3'); $\tilde{l} = 5$ (1, 2, 3), $\tilde{l} = 1$ (1', 2', 3')

На рис. 3.2 приведены графики распределения безразмерного контактного давления \tilde{p} (на рис. 3.2 введено обозначение $E^* = E_2 / (1-\nu^2)$) при различных значениях параметров α_T и $\tilde{l} = l / (2R)$. Результаты показывают, что при увеличении параметра α_T распределение давлений в контакте становится более несимметричным. Однако уменьшение расстояния $l / (2R)$ между неровностями частично сглаживает эту несимметрию.

Помимо несимметричного распределения давлений имеет место также смещение области контакта относительно оси симметрии каждой неровности. Величина этого смещения зависит от расстояния между неровностями (рис. 3.3). Результаты расчетов показывают, что заметное влияние расстояния между соседними неровностями индентора на контактные характеристики начинает проявляться лишь при достаточно малых значениях параметра $l / (2R)$ ($l / (2R) < 0,2$). Сравнение кривых 1, 2 и 1', 2' на рис. 3.3 (последняя пара построена для случая жесткого основания) показывает, что учет упругости основания приводит к уменьшению смещения площадки контакта, что наиболее сильно проявляется при больших значениях параметра $T_\varepsilon V / R$, т.е. при больших скоростях скольжения. При этом, как показывают расчеты, ширина площадки контакта увеличивается.

На рис. 3.4 представлены графики зависимостей безразмерной ширины L / L_0 области контакта единичной неровности, ее смещения ε и максимального внедрения Δ_{\max} индентора в вязкоупругий слой от па-

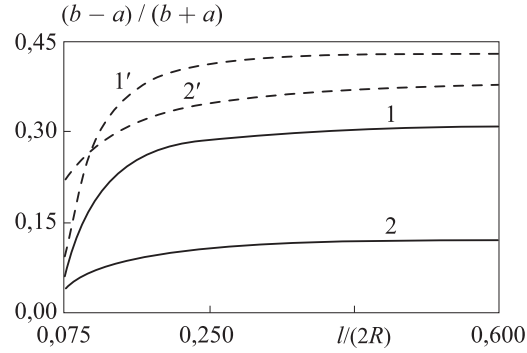
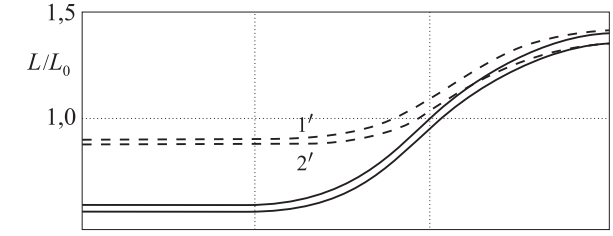


Рис. 3.3. Смещение области контакта как функция расстояния между неровностями при $\alpha_T = 50$, $\tilde{P} = 1/15$ и $T_\varepsilon V / R = 1$ (1, 1'), $T_\varepsilon V / R = 10$ (2, 2'); $\beta_\varepsilon = 10$ (сплошные линии) и $\beta_\varepsilon \rightarrow +\infty$ (штриховые линии)

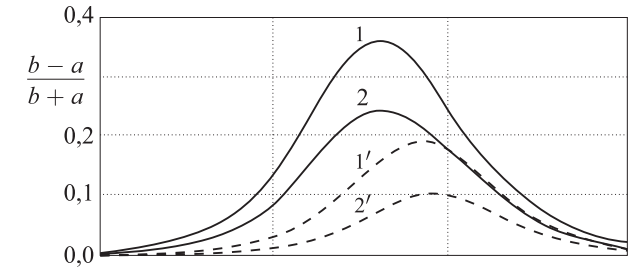
раметра ζ_0 при различных значениях α_T и \tilde{l} . При определении величины Δ_{\max} использовалось полученное на основании соотношений (3.4), (3.8) и (3.11) выражение:

$$\Delta_{\max} = \max_{x \in (-a, b)} \frac{v_3}{R} = L \int_{-1}^1 \tilde{p}(\xi) \left[H(0, \xi) - \frac{\pi L}{2\tilde{l}\zeta_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi L}{2\tilde{l}} \xi \right] d\xi + \frac{L^2(\varepsilon + 1)^2}{2} + \frac{2\varepsilon L^2}{\exp\left(2\zeta_0\left(\frac{\tilde{l}}{L} - 1\right)\right) - 1}. \quad (3.18)$$

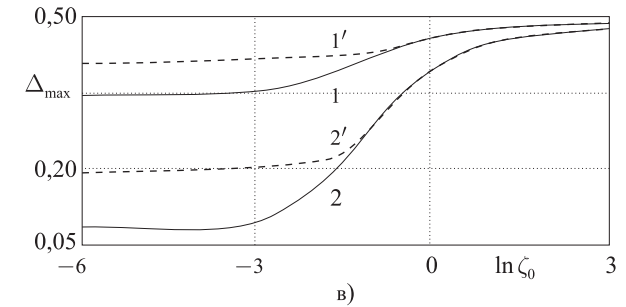
Результаты расчетов позволяют заключить, что ширина площадки контакта и максимальное внедрение в вязкоупругий слой ограничены предельными значениями, которые они имеют при $\zeta_0 \rightarrow 0$ и $\zeta_0 \rightarrow \infty$. Случай $\zeta_0 \rightarrow \infty$, т. е. $V \rightarrow 0$, соответствует решению задачи о взаимодействии индентора с упругим слоем, характеризующимся модулем E_L , который сцеплен с упругим основанием. В случае $\zeta_0 \rightarrow 0$, т. е. $V \rightarrow \infty$, деформации поверхностного слоя определяются его мгновенным модулем упругости $\alpha_T E_L$. Следует отметить, что увеличение скорости скольжения V (уменьшение параметра ζ_0) приводит к уменьшению размера площадки контакта и величины внедрения индентора (эффект всплывания). Смещение площадки контакта достигает максимума при некотором значении ζ_0 и стремится к нулю при $\zeta_0 \rightarrow 0$ и $\zeta_0 \rightarrow \infty$.



а)



б)



в)

Рис. 3.4. Зависимости ширины (а) и смещения (б) области контакта неровности, а также максимального внедрения в вязкоупругий слой (в) от параметра ζ_0 , рассчитанные при $\tilde{P} = 1/15$, $\beta_\varepsilon = 10$ и $\tilde{l} = 5$ (1, 1'), $\tilde{l} = 1$ (2, 2'); $\alpha_T = 50$ (1, 2), $\alpha_T = 5$ (1', 2')

Смещение области контакта относительно оси симметрии неровности, а также несимметрия распределения контактных давлений приводят к тому, что на каждую неровность индентора действует тангенциальная сила T в направлении, противоположном направлению скольжения индентора, называемая деформационной (механической) составляющей

силы трения. Безразмерная величина этой силы может быть найдена из соотношения

$$\tilde{T} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi R^2 E_L} \int_{-a}^b x p(x) dx. \quad (3.19)$$

Деформационная составляющая μ_d коэффициента трения определяется с учетом соотношений (3.14), (3.15), (3.16) и (3.19) по формуле

$$\mu_d = \frac{\tilde{T}}{\tilde{P}} = \frac{L^2}{\tilde{P}} \int_{-1}^1 (\varepsilon + \xi) \tilde{p}(\xi) d\xi. \quad (3.20)$$

Соотношение (3.20) позволяет провести анализ зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от параметров его рельефа штампа, реологических характеристик поверхностного слоя и скорости скольжения. В частности, показано (рис. 3.5), что деформационная составляющая коэффициента трения μ_d является немонотонной функцией параметра $\zeta_0 = (a+b)/(2VT_\varepsilon)$ и стремится к нулю при $\zeta_0 \rightarrow 0$ и $\zeta_0 \rightarrow \infty$. Эти предельные случаи соответствуют решению задачи в упругой постановке.

Результаты, представленные на рис. 3.5, рассчитаны при следующих значениях безразмерных параметров: $\beta_\varepsilon = 10$ $\left(\beta_\varepsilon = \frac{H\pi E_2}{2(1-\nu^2)RE_L} \right)$, $\tilde{P} = 1/15$ $\left(\tilde{P} = \frac{2(1-\nu^2)P}{\pi E_2 R} \right)$ и $T_\varepsilon / T_\sigma = 50$ (сплошные линии), $T_\varepsilon / T_\sigma = 5$ (штриховые линии).

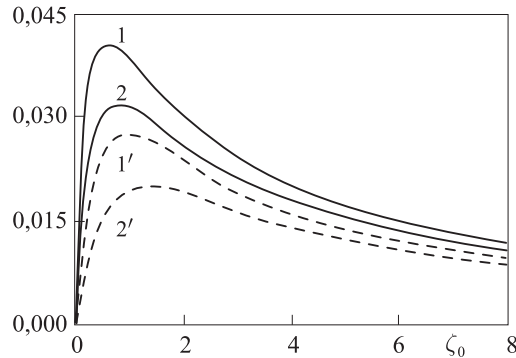


Рис. 3.5. Деформационная составляющая коэффициента трения как функция параметра ζ_0

(штриховые линии). При этом кривые 1 и 1' построены при $l/(2R)=5$, а кривые 2 и 2' при $l/(2R)=1$. Сравнение кривых показывает, что увеличение параметра T_ε / T_σ , характеризующего вязкость слоя, а также уменьшение расстояния между выступами приводит к росту коэффициента трения. Однако если длина $(l-a-b)$ участка между площадками контакта достаточно мала и выполняется неравенство $(l-a-b)/V \ll T_\varepsilon$, слой не успевает восстановить свою форму, что приводит к уменьшению области контакта и ее сдвига и, следовательно, к уменьшению коэффициента трения. Этот случай подробно исследован в [3, 5]. Там же показано, что учет упругости индентора и основания приводит к уменьшению смещения площадки контакта и, соответственно, коэффициента трения, что наиболее существенно проявляется при больших значениях параметра $T_\varepsilon V / R$, т. е. при больших скоростях скольжения.

3.3. Пространственная контактная задача о скольжении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому слою

В данном разделе излагается модель скольжения индентора с двояко-периодическим рельефом по границе вязкоупругого слоя, сцепленного с жестким основанием, позволяющая исследовать влияние параметров рельефа поверхности контртела, а также механических характеристик поверхностного слоя на распределение фактических контактных давлений и деформационную составляющую силы трения. Модель основана на решении контактной задачи в трехмерной (пространственной) постановке, полученном в [9].

3.3.1. Постановка контактной задачи

Рассмотрим контактную задачу об установившемся прямолинейном скольжении в направлении оси x' со скоростью V штампа 1 с регулярным рельефом, описываемым двоякопериодической функцией $f(x, y)$: $f(x + nl_1, y + ml_2) = f(x, y)$; $n = 1, 2, \dots, \infty$; $m = 1, 2, \dots, \infty$; l_1 и l_2 — расстояния между соседними выступами штампа по оси x и y соответственно, по вязкоупругому основанию 2 (рис. 3.6). Введем неподвижную систему координат (x', y', z') , связанную с основанием, и подвижную (x, y, z) , связанную со штампом. При этом

$$x' = x + Vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (3.21)$$

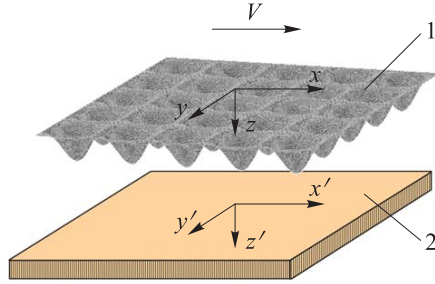


Рис. 3.6. Схема контакта

При равномерном скольжении штампа движение можем считать установившимся по отношению к системе координат (x, y, z) . В этой системе координат смещения и напряжения не зависят явно от времени t и являются функциями координат (x, y, z) .

Область контакта штампа с основанием представляет совокупность дискретных пятен контакта Ω , для которых нормальные смещения границы вязкоупругого слоя $w(x, y)$ в зоне контакта удовлетворяют условию контактного взаимодействия ($z = 0$):

$$w(x, y) = D + f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3.22)$$

где D — сближение тел за счет деформирования.

Наложим условие периодичности на распределение контактного давления $p(x, y)$:

$$p(x, y) = p(x + nl_1, y + ml_2); \quad m = 1, 2, \dots, \infty; \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.23)$$

Будем считать, что тангенциальные напряжения на границе вязкоупругого слоя отсутствуют, а нормальные напряжения удовлетворяют условию

$$p(x, y) = 0, \quad (x, y) \notin \Omega. \quad (3.24)$$

На границе Γ_Ω области Ω выполняется граничное условие

$$p(x, y)|_{\Gamma_\Omega} = 0. \quad (3.25)$$

Контактные давления удовлетворяют условию равновесия:

$$\iint_{\Omega} p(x, y) dx dy = P, \quad (3.26)$$

где P — нормальная нагрузка, действующая на вершину единичного выступа, она связана с номинальным давлением p_0 соотношением

$$P = p_0 l_1 l_2. \quad (3.27)$$

3.3.2. Модель материала

В качестве модели основания 2 рассмотрим вязкоупругий слой толщиной H , сцепленный с жестким основанием. Свойства слоя описываются моделью Кельвина со спектром времен релаксации, согласно которой деформации слоя связаны с давлением соотношением:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} p(t) + \frac{1}{E} \int_{-\infty}^t p(\tau) \sum_{i=1}^n k_i \exp[-(t-\tau)\beta_i] d\tau. \quad (3.28)$$

С учетом выражения для деформаций $\varepsilon = w(x, y)/H$, соотношение между перемещениями верхней границы слоя $w(x, y)$ и контактным давлением $p(x, y)$ в подвижной системе координат, связанной с движущимся телом, примет следующий вид:

$$w(x, y) = \frac{H}{E} p(x, y) + \frac{H}{EV} \int_{-\infty}^x p(\xi, y) \sum_{i=1}^n k_i \exp\left[-\left(\frac{\xi-x}{V}\right)\beta_i\right] d\xi. \quad (3.29)$$

3.3.3. Метод решения

Для решения задачи прямоугольник поверхности вязкоупругого основания, геометрически эквивалентный периоду системы неровностей, образующей регулярный рельеф штампа (рис. 3.6), разобьем на m тонких полос, параллельных направлению скольжения. Для каждой полосы будем решать соответствующую плоскую задачу. Этот метод является точным для одномерной модели вязкоупругого основания.

Функцию давления $p(x)$ на интервале $x \in (-l_1/2, l_1/2)$ представим в виде кусочно-постоянной функции: $p(x) = p_i$ при $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, \dots, K$, где $x_i = -l_1/2 + (i-1)l_1/(K-1)$ (рис. 3.8). Здесь K — число интервалов деления отрезка.

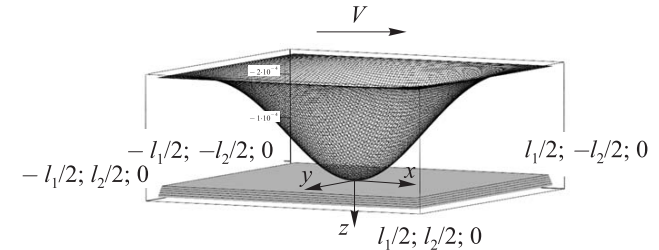


Рис. 3.7. Элемент основания, геометрически эквивалентный периоду системы неровностей

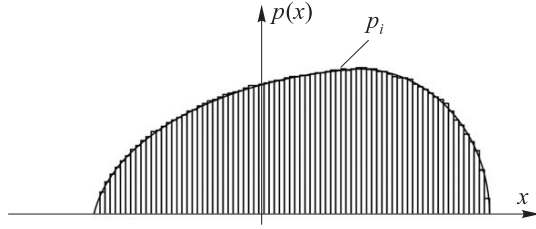


Рис. 3.8. Кусочно-постоянная функция давления $p(x)$ для j -й полосы

Нормальные перемещения границы вязкоупругого слоя в произвольной полосе представляются дискретным набором точек, который соответствует форме выступа системы неровностей в контактной зоне: $w(x) = w_{i'}$, $x \in (x_{i'}, x_{i'+1})$, $i' = 1, \dots, K$.

Тогда соотношение между перемещениями w по нормали к поверхности вязкоупругого основания и действующими на него давлениями будет иметь вид:

$$\{w\} = [S]\{p\}, \quad (3.30)$$

где $[S]$ — матрица с элементами $S_{i'j'}$:

$$S_{i'j'} = \frac{H}{E} + \frac{H}{E} \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\beta_i} \left(\exp \left[-\frac{(j' - i')\beta_i}{Kf} \right] - \exp \left[-\frac{(j' - i' + 1)\beta_i}{Kf} \right] \right)_{\text{при } j' \geq i'} + \frac{H}{E} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^M \frac{k_i}{\beta_i} \left(\exp \left[-\frac{(jK + j' - i')\beta_i}{Kf} \right] - \exp \left[-\frac{(jK + j' - i' + 1)\beta_i}{Kf} \right] \right). \quad (3.31)$$

Здесь $f = \frac{V}{l}$ — частота взаимодействия. Материал задается набором матриц $[S]^k$ для ряда исследуемых частот f_k .

Кусочно-постоянная функция p_i удовлетворяет условию (3.24) отсутствия контактного давления вне области контакта. Функции перемещений границы слоя w_i удовлетворяют условию контактного взаимодействия (3.22).

Соотношения (3.30) и (3.22) с учетом (3.21) и (3.24) представляют собой систему линейных уравнений для определения неизвестных контактных давлений.

Для заданного внедрения D контур пятна контакта для каждой полосы определяется методом итераций. За условие сходимости принимаем

отсутствие элементов с отрицательным контактным давлением и равенство нулю давления на границе пятна контакта. Таким образом, итерационно определив контур пятна контакта и контактное давление для каждой полосы, получим распределение контактного давления для рассматриваемого прямоугольника вязкоупругого основания. Исходя из того, что выступ системы неровности симметричен относительно оси x , контактное давление достаточно определить в половине рассматриваемого прямоугольника.

Проекция сил, действующих на один выступ, определяются при помощи интегрирования по единичной площади контакта ω проекций контактного давления на оси x и z (для случая $l_1 = l_2 = l$):

$$P_x = \iint_{\omega} p(x, y) \sin \alpha dx dy = l^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_{i,j} \sin a_i, \quad (3.32)$$

$$P_z = \iint_{\omega} p(x, y) \cos \alpha dx dy = l^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_{i,j} \cos a_i$$

здесь α — угол между направлением контактного давления и осью z ; нормальная составляющая P_z представляет нагрузку, приложенную к выступу. Необходимое внедрение системы неровностей D при заданной нагрузке P_z определяется итерационным путем. Тангенциальная проекция P_x направлена против движения выступа и представляет собой деформационную составляющую силы трения, которая связана с гистерезисными потерями в вязкоупругом материале.

Таким образом, можно рассчитать деформационную составляющую коэффициента трения

$$\mu = \frac{P_x}{P_z} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_{i,j} \sin a_i}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_{i,j} \cos a_i}. \quad (3.33)$$

3.3.4. Анализ результатов расчетов

Построенная модель позволяет варьировать геометрическими характеристиками системы неровностей (высота неровностей, расстояние между ними), а также рассматривать различную форму выступа.

Для расчета контактных характеристик и силы трения был рассмотрен вязкоупругий материал, зависимость эффективной податливости E_{li} которого от времени релаксации $T_{\sigma i}$ представлена графически на рис. 3.9.

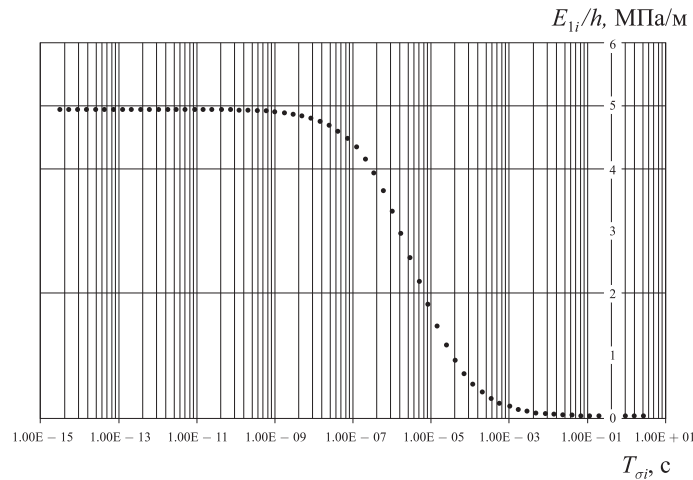


Рис. 3.9. Зависимость эффективной податливости материала (E_{li}/H) от спектра времен релаксации ($T_{\sigma i}$)

На основании этой зависимости рассчитывались значения E , k_i и β_i в соотношении (3.29) по формулам:

$$k_i = \frac{1000E_{li}}{E\lambda_i}, \quad \beta_i = \frac{1001}{\lambda_i}, \quad E = \sum_1^n E_i.$$

Определим распределение контактного давления для двух систем неровностей, характеризующихся одинаковыми периодами и высотами (высота — $h=0,0002$ м; период — $l_1=l_2=0,001$ м) и различными формами выступов (рис. 3.10). При этом нагрузка на единичный выступ в обоих случаях принималась $P_z=8 \cdot 10^{-6}$ Н, а скорость скольжения — $V=0,5$ м/с. Номинальное давление в контакте равнялось 8 Па. Первая система неровностей характеризовалась сферической формой контактирующей части неровности, вторая описывалась двоякопериодической синусоидальной функцией вида:

$$f(x, y) = \frac{h}{4} \left(\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + 1 \right) \left(\cos\left(\frac{2\pi y}{l}\right) + 1 \right). \quad (3.34)$$

Распределение контактного давления для симметричной половины рассматриваемого квадрата основания показано на рис. 3.11.

Сравнение графиков дает возможность заключить, что для рассматриваемого нагрузочно-скоростного режима давления под единич-

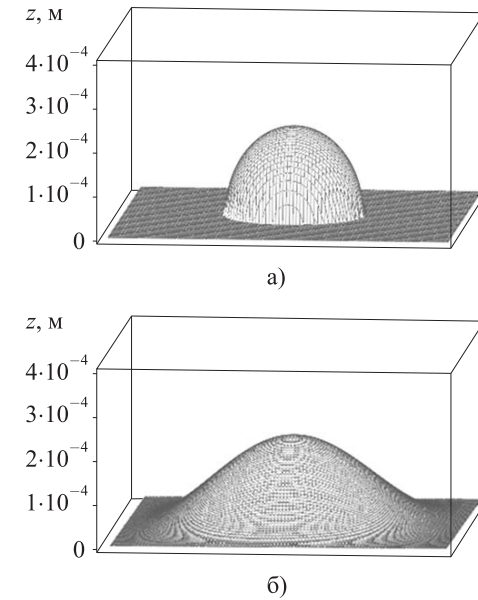


Рис. 3.10. Выступы рассматриваемых систем неровностей: а) сферической формы; б) функцией (3.36)

ным сферическим выступом (рис. 3.11, а) характеризуются большими максимальными значениями и распределены по меньшей области контакта. На рис. 3.12 приведены распределения контактного давления для центральной полосы и контуры пятен контакта для рассматриваемых распределений контактного давления, рассчитанные при $V=0,5$ м/с; $P_z=8 \cdot 10^{-6}$ Н. Следует отметить, что для обоих распределений характерно смещение пятен контакта по оси Ox в направлении движения штампа и несимметрия относительно плоскости Oyz распределения контактных давлений по площадке контакта.

Результаты анализа влияния скорости скольжения на контактные характеристики представлены на рис. 3.13 и 3.14. Расчеты выполнены для системы неровностей, описываемой двоякопериодической синусоидальной функцией (3.29) с высотой выступов $H=0,0001$ м и периодом $l=0,001$ м при заданной нагрузке на единичный выступ $P_z=1,16 \cdot 10^{-5}$ Н (номинальное давление $p_0=11,6$ Па). На рис. 3.13 показано распределение контактного давления для двух различных скоростей 0,1 и 2 м/с. При скорости 0,1 м/с наблюдается слияние областей контакта в направлении, перпендикулярном движению.

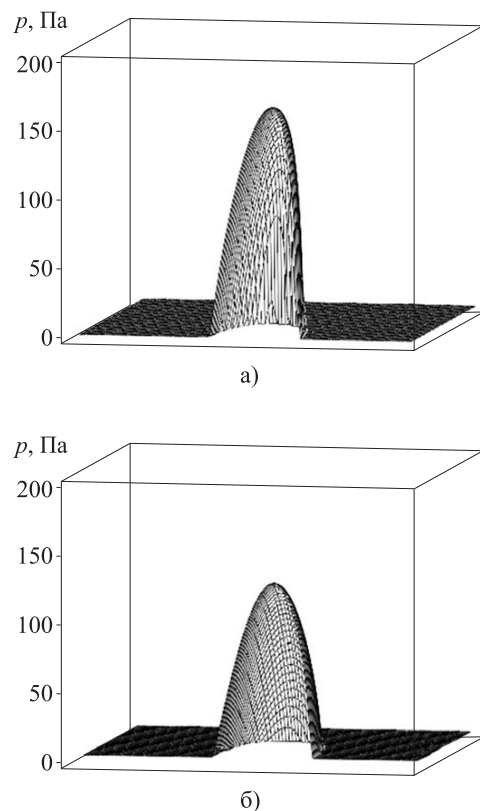


Рис. 3.11. Распределение контактного давления для различных систем неровностей: а) для системы неровностей с выступами сферической формы; б) для системы неровностей, описываемой функцией (3.36); скорость проскальзывания $V = 0,5$ м/с; нагрузка $P_z = 8 \cdot 10^{-6}$ Н

Результаты расчета показывают, что при увеличении скорости возникает асимметрия распределения давления в направлении движения, размер области контакта уменьшается (наблюдается эффект «всплытия»). При дальнейшем увеличении скорости область контакта продолжает уменьшаться. В конечном итоге контур пятна контакта становится замкнутым, максимальное значение давления увеличивается, при этом распределение давления становится близким к осесимметричному распределению относительно оси симметрии выступа.

Смещение области контакта относительно оси симметрии единичного выступа, а также асимметрия распределения контактных давлений

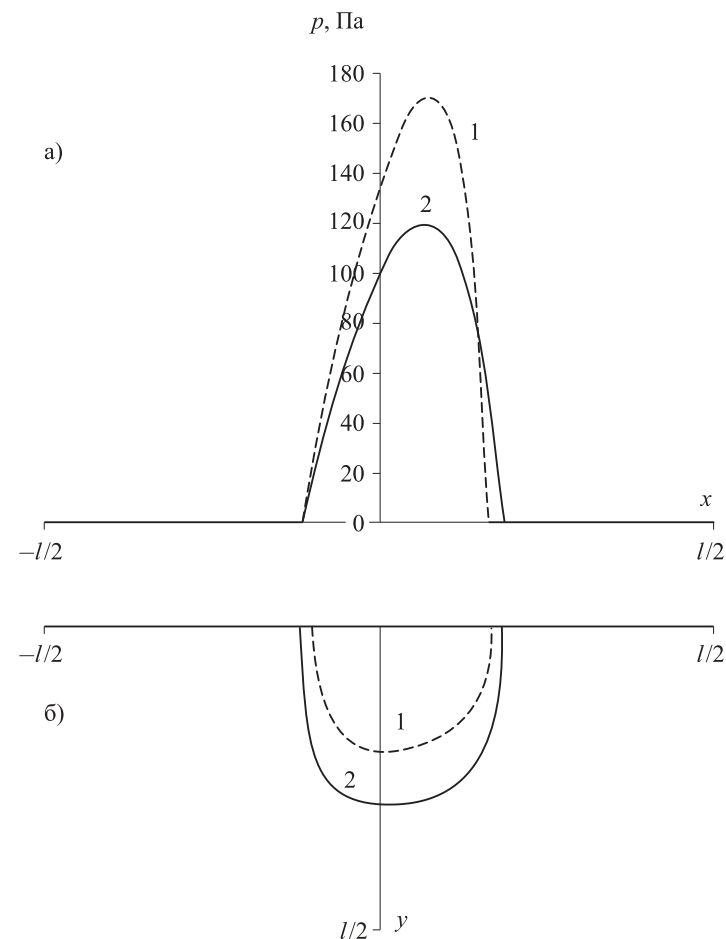


Рис. 3.12. Распределение контактного давления для центральной полосы (а) и области контакта (б) для различных систем неровностей: системы со сферической формой выступа (1) и системы, образованной двоякопериодической синусоидальной функцией (3.29) (2)

приводят к тому, что на выступ действует тангенциальная сила P_x в направлении, противоположном направлению скольжения системы неровностей, называемая деформационной (механической) составляющей силы трения (3.27). На рис. 3.15 приведена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения, рассчитанной по формуле (3.28), от

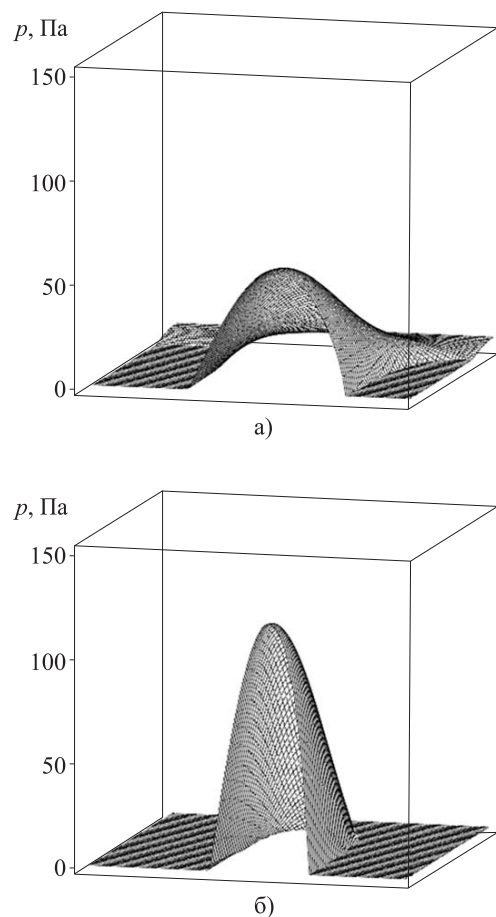


Рис. 3.13. Распределение контактного давления при нагрузке $P_z = 1,16 \cdot 10^{-5}$ Н и различных скоростях скольжения: а) $V = 0,1$ м/с и б) $V = 2$ м/с

скорости скольжения. Эта зависимость является немонотонной, для выбранной модели материала и заданной нагрузки функция имеет максимум при $V = 0,5$ м/с. При больших и малых значениях скоростей скольжения коэффициент трения стремится к нулю, что согласуется с результатами расчета давления и положения площадки контакта, представленными на рис. 3.13 и 3.14.

Проведенное исследование позволяет оценить совместное влияние параметров микрогеометрии поверхности штампа и несовершенной уп-

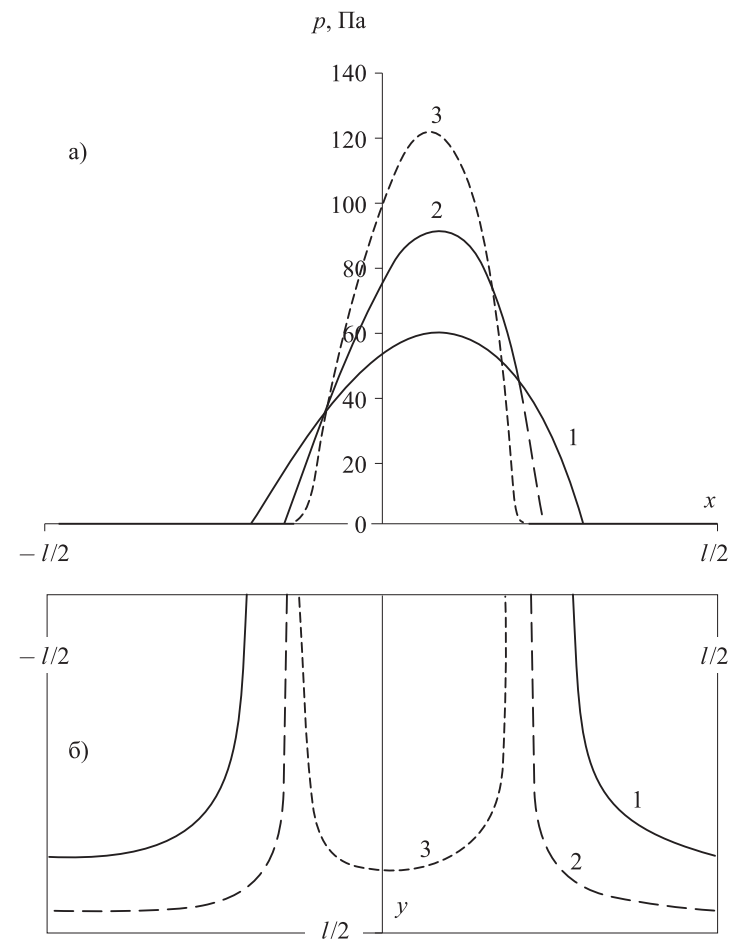


Рис. 3.14. Распределения контактного давления для центральной полосы (а) и области контакта (б) при постоянной нагрузке $P_z = 1,16 \cdot 10^{-5}$ Н и различных скоростях скольжения: $V = 0,1$ м/с (кривые 1); $V = 0,6$ м/с (кривые 2); $V = 2$ (кривые 3)

ругости поверхностных слоев материалов взаимодействующих тел на контактные характеристики и деформационный коэффициент трения в условиях граничного трения, когда в области контактного взаимодействия можно пренебречь касательными напряжениями.

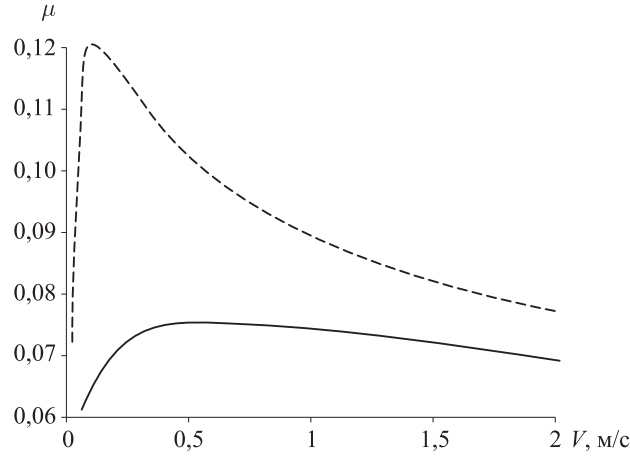


Рис. 3.15. Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения μ от скорости скольжения V для двух поверхностей, образованных пространственными синусоидальными функциями одинаковой высоты ($h = 0,0001$ м), но различным шагом (сплошная линия соответствует шагу 0,001 м, пунктирная линия соответствует шагу 0,0005 м) при постоянной нагрузке, соответствующей номинальному давлению $p_0 = 11,6$ Па

3.4. Контактные задачи о скольжении штампа с периодическим рельефом по вязкоупругой полуплоскости

В этом разделе изучается зависимость контактных характеристик и силы трения при скольжении волнистого штампа по вязкоупругому основанию в условиях насыщенного контакта.

3.4.1. Определяющие соотношения для вязкоупругой полуплоскости

Соотношения между компонентами деформации $\varepsilon_{x^0}, \varepsilon_{y^0}, \gamma_{x^0 y^0}$ и напряжений $\sigma_{x^0}, \sigma_{y^0}, \tau_{x^0 y^0}$ в изотропном вязкоупругом теле примем в следующем виде [5] (случай плоской деформации):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{x^0}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{y^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{y^0}}{\partial t} \right), \\ \varepsilon_{y^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{y^0}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{y^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{y^0}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

$$\gamma_{x^0 y^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \gamma_{x^0 y^0}}{\partial t} = \frac{1+\nu}{E} \left(\tau_{x^0 y^0} + T_\sigma \frac{\partial \tau_{x^0 y^0}}{\partial t} \right). \quad (3.35)$$

Здесь T_ε и T_σ характеризуют вязкие свойства среды ($T_\varepsilon > T_\sigma$), E и ν — длительный модуль Юнга и коэффициент Пуассона, $E_l = T_\varepsilon E / T_\sigma$ — мгновенный модуль. Уравнения (3.35) являются двумерным аналогом одномерной модели Кельвина.

При равномерном движении со скоростью V штампа по границе вязкоупругой полуплоскости распределение напряжений и деформаций в ней можно считать установившимся по отношению к системе координат, связанной со штампом: $x = x^0 - Vt$, $y = y^0$. В этой системе координат смещения и напряжения не зависят явно от времени и являются функциями только координат (x, y) . Введем фиктивные напряжения и деформации по формулам (см. [5])

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^0 + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{ij}^0}{\partial t} &= \varepsilon_{ij} - T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \varepsilon_{ij}^*, \\ \sigma_{ij}^0 + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial t} &= \sigma_{ij} - T_\sigma V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij}^*. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Введенные функции удовлетворяют уравнениям, эквивалентным уравнениям равновесия, совместности деформаций и закону Гука для изотропного упругого тела.

Из формул (3.36) следует, что фиктивное перемещение $u^*(x)$ и фиктивное давление $p^*(x)$ связаны с истинным перемещением $u(x)$ деформированной границы вязкоупругого тела в направлении оси Oy , перпендикулярной границе полуплоскости, и действующим на нее давлением $p(x)$, соответственно, соотношениями

$$u^*(x) = u(x) - T_\varepsilon V u'(x), \quad p^*(x) = p(x) - T_\sigma V p'(x) \quad (3.37)$$

(штрихом обозначена производная по x).

3.4.2. Постановка и метод решения периодической задачи для упругой полуплоскости

Рассмотрим в плоской квазистатической постановке задачу о штампе с периодическим рельефом $f(x) = f(x+l)$, скользящем с постоянной скоростью V по границе вязкоупругого полупространства в направлении оси Ox . На границе полуплоскости выполняются сле-

дующие условия: на участках контакта $u'(x) = f'(x)$, а вне участков контакта $p(x) = 0$. Касательные напряжения на границе полуплоскости отсутствуют.

При скольжении штампа по вязкоупругому основанию вследствие несимметрии распределения контактного давления возникает погонная (действующая на единицу длины индентора вдоль оси Oy) сила трения T по направлению оси Ox , которую можно вычислить по формуле [5]

$$T = \int_0^l p(x) f'(x) dx = \int_0^l p(x) u'(x) dx.$$

При выводе этого соотношения принято во внимание, что амплитуда h неровностей рельефа много меньше их периода l ($h \ll l$).

Для равномерного движения штампа по вязкоупругому основанию необходимо, чтобы к нему была приложена касательная сила, уравновешивающая силу трения. Кроме того, штамп прижимается к основанию погонной силой P , действующей на один период и уравновешивающей контактное давление $p(x)$:

$$P = \int_0^l p(x) dx.$$

Задачу об определении связи между перемещением $u(x)$ деформированной границы вязкоупругой полуплоскости и действующим на нее давлением $p(x)$, а также об определении силы трения T будем решать в безразмерном виде, для чего введем следующие безразмерные величины и параметры:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{l}, \quad \tilde{p}(\tilde{x}) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} p(\tilde{x}l), \quad \tilde{p}^*(\tilde{x}) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} p^*(\tilde{x}l), \\ \tilde{u}(\tilde{x}) &= \frac{u(\tilde{x}l)}{l}, \quad \tilde{u}^*(\tilde{x}) = \frac{u^*(\tilde{x}l)}{l}, \quad \tilde{P} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi El} P = \int_0^1 \tilde{p}(\tilde{x}) d\tilde{x}, \\ \alpha &= \frac{T_e}{T_\sigma}, \quad \beta = \frac{h}{l}, \quad \zeta = \frac{l}{2VT_e}, \quad \tilde{T} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi El} T = \int_0^1 \tilde{p}(\tilde{x}) \tilde{u}'_{\tilde{x}}(\tilde{x}) d\tilde{x}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

В этих обозначениях соотношения (3.37) имеют вид (в дальнейшем для упрощения записи знак «тильда» опущен):

$$u^*(x) = u(x) - \frac{u'(x)}{2\zeta}, \quad p^*(x) = p(x) - \frac{p'(x)}{2\alpha\zeta}. \quad (3.39)$$

Из решения задачи в упругой постановке следует, что при заданной на границе упругой полуплоскости функции $p^*(x)$ связь между фиктивным перемещением $u^*(x)$ границы и фиктивным давлением $p^*(x)$ осуществляется с помощью интегрального оператора [15]

$$\int_0^1 p^*(t) \ln|2 \sin \pi(t-x)| dt = u^*(x). \quad (3.40)$$

Отсюда следует, что производная фиктивного перемещения $u^{*'}(x)$ является преобразованием Гильберта для фиктивного давления $p^*(x)$:

$$-\pi \int_0^1 p^*(t) \operatorname{ctg} \pi(t-x) dt = u^{*'}(x) \quad (3.41)$$

и поэтому функцию $p^*(x)$ можно выразить через $u^{*'}(x)$ с помощью обратного преобразования Гильберта:

$$p^*(x) = \int_0^1 p^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \operatorname{ctg} \pi(t-x) u^{*'}(t) dt. \quad (3.42)$$

Если разложение функции $u^*(x)$ в тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$u^*(x) = \frac{\alpha_0^+}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^+ \cos 2\pi kx + \alpha_k^- \sin 2\pi kx), \quad (3.43)$$

то, подставляя этот ряд в выражение (3.42) и вычисляя интегралы, получаем

$$p^*(x) = \int_0^1 p^*(t) dt - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k (\alpha_k^+ \cos 2\pi kx + \alpha_k^- \sin 2\pi kx). \quad (3.44)$$

На основании соотношений (3.39), (3.43) и (3.44) установим связь между коэффициентами Фурье разложения функции перемещения $u(x)$ и коэффициентами Фурье разложения функции давления $p(x)$. Пусть

$$u(x) = \frac{a_0^+}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ \cos 2\pi kx + a_k^- \sin 2\pi kx) \quad (3.45)$$

(так как функция $u(x)$ определяется с точностью до постоянной, то величина начального слагаемого несущественна), а

$$p(x) = \int_0^1 p(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^+ \cos 2\pi kx + A_k^- \sin 2\pi kx) \left[\int_0^1 p(t) dt = \int_0^1 p^*(t) dt = P \right] \quad (3.46)$$

(отметим, что равенства, приведенные в квадратных скобках, вытекают из формул (3.38) и (3.39) и условия периодичности функций). Тогда из соотношений (3.39), (3.43) и (3.44) следует (берутся только верхние или нижние знаки «плюс» и «минус»; в формулах (3.47), (3.48) и (3.49) $k = 1, 2, 3, \dots$)

$$A_k^\pm \mp \frac{\pi k}{\alpha \zeta} A_k^\mp = -2k \left(a_k^\pm \mp \frac{\pi k}{\zeta} a_k^\mp \right). \quad (3.47)$$

Отсюда можно получить выражение коэффициентов A_k^\pm через коэффициенты a_k^\pm [11]:

$$A_k^\pm = -2k \frac{\left(1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi k}{\zeta} \right)^2 \right) a_k^\pm \mp \frac{\pi k}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) a_k^\mp}{1 + \left(\frac{\pi k}{\alpha \zeta} \right)^2}. \quad (3.48)$$

Из равенств (3.48) также следуют выражения коэффициентов a_k^\pm через коэффициенты A_k^\pm [11]:

$$a_k^\pm = -\frac{1}{2k} \frac{\left(1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi k}{\zeta} \right)^2 \right) A_k^\pm \pm \frac{\pi k}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) A_k^\mp}{1 + \left(\frac{\pi k}{\zeta} \right)^2}. \quad (3.49)$$

При заданном распределении давления внутри периода или форме штампа в случае полного контакта из формул (3.38) и (3.45)–(3.49) можно получить выражение для безразмерной тангенциальной силы трения T через коэффициенты разложения a_k^\pm функции $u(x)$ и/или через коэффициенты разложения A_k^\pm функции $p(x)$ [11]:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^1 p(x) u'(x) dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k (A_k^+ a_k^- - a_k^+ A_k^-) = \\ &= \frac{2\pi^2}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 (a_k^{+2} + a_k^{-2})}{1 + \left(\frac{\pi k}{\alpha \zeta} \right)^2} = \frac{\pi^2}{2\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k (A_k^{+2} + A_k^{-2})}{1 + \left(\frac{\pi k}{\zeta} \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.4.3. Распределение давлений и силы трения при заданных формах рельефа в случае полного контакта штампа с вязкоупругим полупространством

Волнистый профиль, описываемый функцией

$$f(x) = h \cos^2 \frac{\pi x}{l}. \quad (3.51)$$

Пусть периодический профиль (рис. 3.16, а) задан функцией (3.51) и имеет место полный контакт штампа с вязкоупругим основанием при его скольжении с заданной скоростью V , т. е.

$$u(x) = f(x) + D, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Постоянная D характеризует внедрение штампа при заданной нагрузке P и, как указывалось выше, не влияет на решение задачи. Поэтому для упругих смещений границы в безразмерных координатах из условия контакта получим выражение

$$u(x) = \frac{\beta}{2} (1 + \cos 2\pi x). \quad (3.52)$$

Тогда, согласно формулам (3.46) и (3.48), безразмерное контактное давление определяется из следующего выражения:

$$p(x) = \int_0^1 p(t) dt - \beta \frac{\left(1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi}{\zeta} \right)^2 \right) \cos 2\pi x + \frac{\pi}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \sin 2\pi x}{1 + \left(\frac{\pi}{\alpha \zeta} \right)^2}, \quad (3.53)$$

которое с учетом обозначений (3.38) можно записать в виде

$$\begin{aligned} p(x) &= P - P_0 \cos(2\pi x - \varphi); \\ P_0 &= \beta \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\zeta} \right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\alpha \zeta} \right)^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\frac{\pi}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)}{1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi}{\zeta} \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Безразмерная тангенциальная сила на основании (3.50) определяется выражением:

$$T = \frac{\pi^2 \beta^2}{2\zeta} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{1 + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\pi}{\zeta} \right)^2}. \quad (3.55)$$

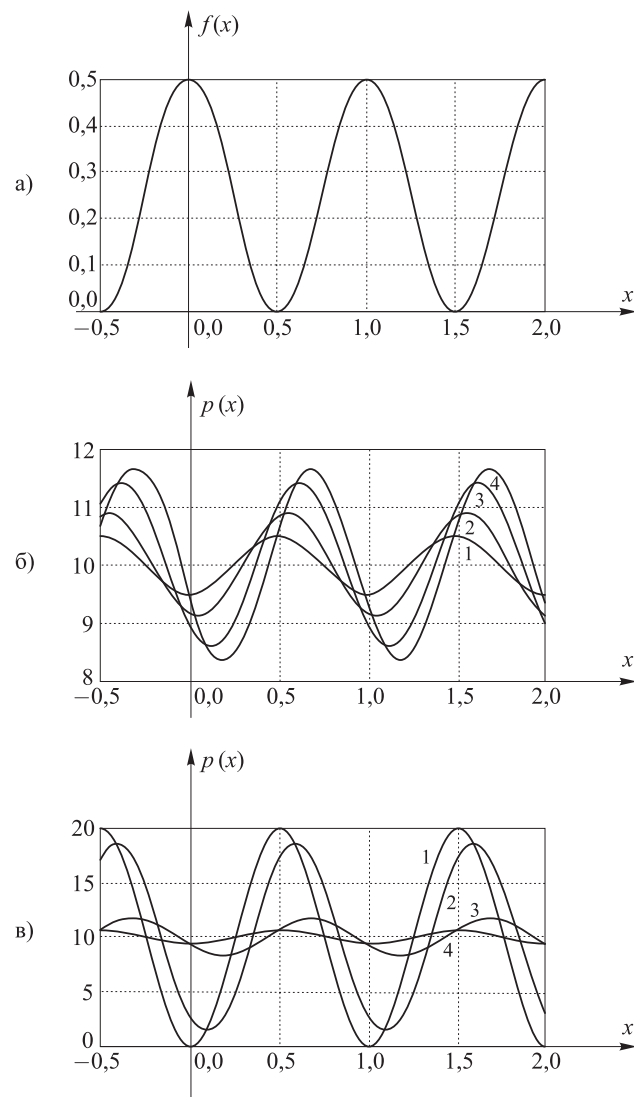


Рис. 3.16. Форма штампа (а) и распределение давления под ним при $\beta=1/2$, $P=10$ и разных значениях параметров α ($\zeta=1$): $\alpha=1$ (1), $\alpha=2$ (2), $\alpha=5$ (3), $\alpha=20$ (4) (б) и параметра ζ ($\alpha=20$): $\zeta=10^{-3}$ (1), $\zeta=10^{-1}$ (2), $\zeta=1$ (3), $\zeta=10^3$ (4) (в)

Из формулы (3.54), в частности, следует, что полный контакт имеет место, только когда справедливо неравенство $P > P_0$.

На рис. 3.16, б и в показаны распределения давлений при $\beta=1/2$, $P=10$ и разных значениях параметров ζ и α . На рис. 3.16, б представлены распределения давления при $\zeta=1$ и значениях параметра α , равных $\alpha=1$ (кривая 1), $\alpha=2$ (кривая 2), $\alpha=5$ (кривая 3), $\alpha=20$ (кривая 4). Из анализа формул (3.54) и результатов расчетов следует, что при $\alpha=1$ (случай упругой полуплоскости, $E_I = E$) давления распределены симметрично относительно оси симметрии выступа, перепад значений давления на одном периоде минимален и равен 2β . При увеличении вязкости основания (параметра α) происходит сдвиг максимального значения функции давления (3.54) по отношению к оси симметрии отдельного выступа в направлении его движения. Величина сдвига и амплитудные значения давления возрастают с ростом параметра α .

Рис. 3.16, в иллюстрирует распределения давления под штампом, рассчитанные по формуле (3.54) при $\alpha=20$ и следующих значениях параметра ζ , обратно пропорционального скорости скольжения штампа (см. (3.38)): $\zeta=10^{-3}$ (кривая 1), $\zeta=10^{-1}$ (кривая 2), $\zeta=1$ (кривая 3), $\zeta=10^3$ (кривая 4). Функция давления является периодической, амплитудные значения которой возрастают с ростом скорости (уменьшением параметра ζ). При больших и малых скоростях график распределения давления является симметричным относительно оси симметрии выступа.

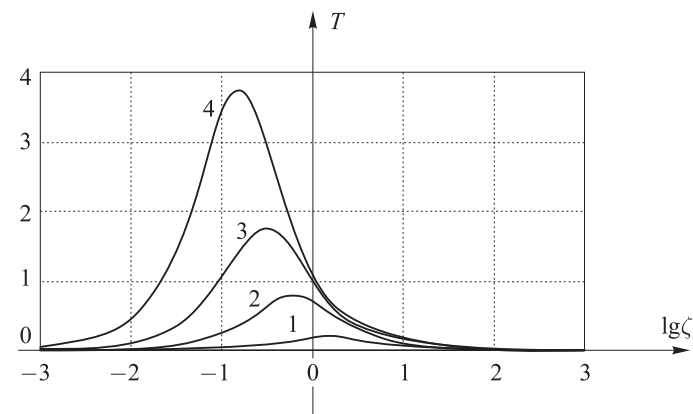


Рис. 3.17. Зависимость деформационной составляющей силы трения от параметра ζ при $\beta=1/2$ и $\alpha=2$ (1), $\alpha=5$ (2), $\alpha=10$ (3) и $\alpha=20$ (4)

Максимальное смещение графика распределения давлений относительно оси симметрии выступа, как это следует из (3.54), имеет место при $\zeta = \pi/\sqrt{\alpha}$ ($\alpha > 1$).

На рис. 3.17 представлены графики зависимости деформационной составляющей силы трения (3.55) от параметра ζ , построенные при $\beta = 1/2$ и разных значениях α . Деформационная составляющая силы трения является немонотонной функцией скорости. При скоростях скольжения, стремящихся к нулю или бесконечности ($\zeta \rightarrow \infty$ или $\zeta \rightarrow 0$), сила трения стремится к нулю. Как уже отмечалось, эти случаи соответствуют упругому решению с длительным и мгновенным модулем упругости соответственно, при котором давление распределено симметрично относительно оси симметрии выступа. Как следует из (3.55), максимальное значение силы трения $T_{\max} = \frac{\pi\beta^2(\alpha-1)}{4}$ достигается

при $\zeta = \frac{\pi}{\alpha}$, т. е. $\lg \zeta = \lg \pi - \lg \alpha$. Величина силы трения возрастает с увеличением параметра α , т. е. с увеличением вязкости основания. Кроме того, из (3.55) следует, что сила трения растет с увеличением высоты неровностей ($T \sim \beta^2$).

Волнистый профиль, описываемый функцией

$$f(x) = h \cos^4 \frac{\pi x}{l}. \quad (3.56)$$

Пусть теперь периодический профиль (рис. 3.18, а) задан функцией (3.56) и имеет место полный контакт скользящего штампа с вязкоупругим основанием. Тогда функция $u(x)$ в безразмерных координатах имеет вид:

$$u(x) = \beta \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\pi x + \frac{1}{8} \cos 4\pi x \right). \quad (3.57)$$

т. е. в (3.45) $\frac{a_0^+}{2} = \frac{5\beta}{8}$, $a_1^+ = \frac{\beta}{2}$, $a_2^+ = \frac{\beta}{8}$. Тогда из (3.46) получим безразмерное контактное давление

$$p(x) = P + A_1^+ \cos 2\pi x + A_1^- \sin 2\pi x + A_2^+ \cos 4\pi x + A_2^- \sin 4\pi x, \quad (3.58)$$

где, как и ранее, безразмерная нормальная сила P определяется по

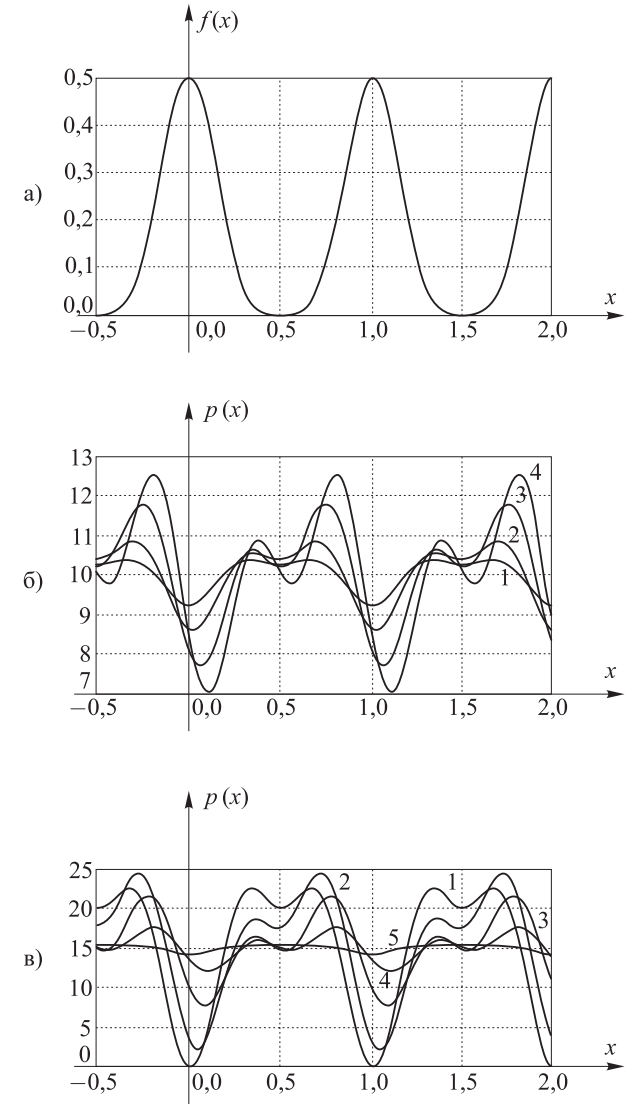


Рис. 3.18. Форма штампа (а) и распределение давления под ним при $\beta = 1/2$ и разных значениях параметров α ($\zeta = 1$, $P = 10$): $\alpha = 1$ (1), $\alpha = 2$ (2), $\alpha = 5$ (3), $\alpha = 20$ (4) (б) и параметра ζ ($\alpha = 20$, $P = 15$): $\zeta = 10^{-3}$ (1), $\zeta = 10^{-1}$ (2), $\zeta = 10^{-1/2}$ (3), $\zeta = 1$ (4), $\zeta = 10^3$ (5) (в)

формуле (3.46), а согласно (3.48)

$$\begin{aligned} A_1^+ &= -\beta \frac{1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi}{\zeta} \right)^2}{1 + \left(\frac{\pi}{\alpha \zeta} \right)^2}, & A_1^- &= -\beta \frac{\frac{\pi}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)}{1 + \left(\frac{\pi}{\alpha \zeta} \right)^2}, \\ A_2^+ &= -\frac{\beta}{2} \frac{1 + \frac{4}{\alpha} \left(\frac{\pi}{\zeta} \right)^2}{1 + 4 \left(\frac{\pi}{\alpha \zeta} \right)^2}, & A_2^- &= -\beta \frac{\frac{\pi}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)}{1 + 4 \left(\frac{\pi}{\alpha \zeta} \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Как следует из (3.58), для существования полного контакта достаточно выполнения неравенства: $P \geq \sqrt{(A_1^+)^2 + (A_1^-)^2} + \sqrt{(A_2^+)^2 + (A_2^-)^2}$.

Безразмерная тангенциальная сила T определяется на основании (3.50) и (3.57) выражением

$$T = \frac{3\pi^2 \beta^2}{4\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{1 + 3 \left(\frac{\pi}{\alpha \zeta} \right)^2}{\left(1 + \left(\frac{\pi}{\alpha \zeta} \right)^2 \right) \left(1 + 4 \left(\frac{\pi}{\alpha \zeta} \right)^2 \right)}. \quad (3.60)$$

На рис. 3.18, б представлены распределения давления при $\beta=1/2$, $P=10$, $\zeta=1$ и разных значениях параметра α . Из результатов расчетов следует, что при $\alpha=1$ (случай упругой полуплоскости, $E_t = E$) давления распределены симметрично относительно оси симметрии выступа, внутри одного периода имеется два равных максимума функции $p(x)$, расположенных на выступе поверхности штампа. При увеличении вязкости основания (параметра α) происходит рост давлений на выступе и их уменьшение на впадине, по-прежнему имеется два локальных максимума функции $p(x)$, причем значения локального максимума давлений на набегающей части выступа превышают значения второго максимума функции давления (3.58). Наблюдается также сдвиг точек достижения локальных максимумов в сторону скольжения штампа. Величина сдвига и амплитудные значения давления возрастают с ростом параметра α .

Рис. 3.18, в иллюстрирует распределение давлений под штампом, рассчитанные по формуле (3.58) при значениях $\alpha=20$, $\beta=1/2$, $P=15$

и разных величинах параметра ζ , обратно пропорционального скорости скольжения штампа (см. (3.38)). При больших и малых скоростях графики распределения давления являются симметричными относительно оси симметрии выступа, при этом перепад значений давлений на выступе и впадине увеличивается с ростом скорости. При промежуточных значениях параметра ζ на выступе имеется два локальных максимума функции $p(x)$, значения локального максимума давлений на набегающей части выступа превышают значения второго максимума, при этом разница в их значениях зависит от скорости движения штампа.

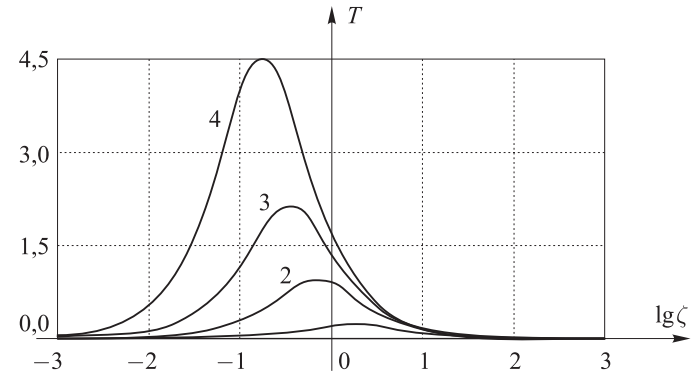


Рис. 3.19. Зависимость деформационной составляющей силы трения от параметра ζ при $\beta=1/2$ и $\alpha=2$ (1), $\alpha=5$ (2), $\alpha=10$ (3) и $\alpha=20$ (4)

Зависимость деформационной составляющей силы трения от параметра ζ представлена на рис. 3.19 при разных значениях параметра α . Как следует из расчетов, зависимости деформационной составляющей силы трения от параметров ζ , α и β , рассчитанные по формуле (3.60), подобны тем, которые представлены на рис. 3.17 для другой формы штампа. Однако наличие более плоского участка на вершине выступа (рис. 3.18, а) приводит к росту силы трения при одинаковых значениях скорости, высоты выступа и вязкоупругих характеристик основания.

3.4.4. Невозможность полного контакта для пилообразных рельефов

Пусть периодический профиль имеет пилообразный вид, т. е. он задан в безразмерных координатах уравнением

$$u(x) = \beta |2x - 1|, \quad x \in [0, 1]. \quad (3.61)$$

Раскладывая эту функцию в ряд Фурье, имеем

$$u(x) = \frac{\beta}{2} + \frac{4\beta}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}. \quad (3.62)$$

Следовательно, согласно (3.46)

$$p(x) = P + \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1}^+ \cos 2\pi(2n+1)x + A_{2n+1}^- \sin 2\pi(2n+1)x), \quad (3.63)$$

где (см. (3.48)) для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливы равенства:

$$A_{2n+1}^+ = -\frac{8\beta}{\pi^2(2n+1)} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi(2n+1)}{\zeta} \right)^2}{1 + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\pi(2n+1)}{\zeta} \right)^2},$$

$$A_{2n+1}^- = -\frac{8\beta}{\pi\zeta} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{1 + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\pi(2n+1)}{\zeta} \right)^2} = -\frac{8\beta}{\pi^2(2n+1)} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\pi(2n+1)}{\zeta}}{1 + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\pi(2n+1)}{\zeta} \right)^2}. \quad (3.64)$$

Поскольку разложение функции $\ln|\operatorname{ctg} \pi x|$ имеет вид:

$$\ln|\operatorname{ctg} \pi x| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{2n+1}, \quad (3.65)$$

причем ряд в (3.65) сходится для всех $x \in (0, 1)$, то из (3.63)–(3.65) следует, что

$$p(x) + \frac{4\alpha\beta}{\pi^2} \ln|\operatorname{ctg} \pi x| =$$

$$= P - \frac{8\beta}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\alpha \cos 2\pi(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\pi}{\zeta} \sin 2\pi(2n+1)x}{1 + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\pi(2n+1)}{\zeta} \right)^2}. \quad (3.66)$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (3.66), сходится равномерно, и поэтому правая часть является непрерывной и, следовательно, ограниченной функцией на отрезке $[0, 1]$. Стоящая же в левой части равенст-

ва (3.66) функция $\ln|\operatorname{ctg} \pi x|$ принимает на интервале $(0, 1)$ любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому для выполнения равенства (3.66) нужно, чтобы и функция $p(x)$ также принимала на интервале $(0, 1)$ любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Это значит, что при всяком P на $(0, 1)$ найдутся промежутки, где $p(x) < 0$, что говорит об отсутствии полного контакта в рассматриваемом случае.

3.4.5. Форма деформированной поверхности вязкоупругой полуплоскости при приложении к ней кусочно-постоянного давления, перемещающегося с постоянной скоростью

С помощью формул (3.49) на основании заданного распределения давления (функции $p(x)$) можно определить форму (разумеется, с точностью до константы) деформированной поверхности (функцию $u(x)$) и, соответственно, форму штампа $f(x)$, задающего такое распределение. Пусть

$$p(x) = \begin{cases} \frac{P}{2a}, & 0 < x < a, \quad 1-a < x < 1, \\ 0, & a < x < 1-a. \end{cases} \quad (3.67)$$

Тогда ее разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$p(x) = P + \frac{P}{\pi a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi ka}{k} \cos 2\pi kx. \quad (3.68)$$

Поэтому функция $u(x)$ имеет вид ряда (3.45), коэффициенты которого для всех $k = 1, 2, 3, \dots$ определяются по формулам (3.49):

$$a_k^+ = -\frac{P \sin 2\pi ka}{2\pi a k^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi k}{\zeta} \right)^2}{1 + \left(\frac{\pi k}{\zeta} \right)^2},$$

$$a_k^- = \frac{P \sin 2\pi ka}{2\pi a k^2} \cdot \frac{\frac{\pi k}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{1 + \left(\frac{\pi k}{\zeta} \right)^2} = \frac{P \sin 2\pi ka}{2ka} \cdot \frac{\frac{1}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{1 + \left(\frac{\pi k}{\zeta} \right)^2}. \quad (3.69)$$

Подставляя (3.69) в (3.45), имеем

$$u(x) = \frac{a_0^+}{2} - \frac{P}{2\pi a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k a}{k^2 \left(1 + \left(\frac{\pi k}{\zeta}\right)^2\right)} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi k}{\zeta}\right)^2\right) \cos 2\pi k x - \frac{\pi k}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \sin 2\pi k x \right], \quad (3.70)$$

причем ряд (3.70) сходится равномерно, а величина его начального слагаемого, как уже отмечалось ранее, несущественна, и поэтому ниже, на рис. 3.20 и 3.21, принята равной нулю.

Деформационная составляющая силы трения рассчитывается по формуле:

$$T = \int_0^1 p(x) u'_x(x) dx = \frac{P}{2a} (u(a) - u(-a)) = \frac{P^2}{4a^2 \zeta} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2\pi k a}{k \left(1 + \left(\frac{\pi k}{\zeta}\right)^2\right)}. \quad (3.71)$$

Пусть распределение давления (рис. 3.20, а) задано функцией (3.67) при $P=1$ и $a=0,2$. На рис. 3.20, б и в показаны соответствующие ему формы деформированной поверхности при различных значениях параметров α и ζ . На рис. 3.20, б представлены формы деформированной поверхности, рассчитанные на основании (3.70) при $\zeta=1$ и разных значениях параметра α . Форма поверхности, построенная при $\alpha=1$, соответствует упругой полуплоскости и является симметричной относительно оси симметрии прикладываемого давления. При увеличении параметра α , характеризующего вязкие свойства основания, форма деформированной поверхности основания становится несимметричной ($\alpha=2$ и $\alpha=20$).

Рис. 3.20, в иллюстрирует зависимость формы деформированной поверхности вязкоупругой полуплоскости при заданном значении параметра вязкости основания ($\alpha=20$) и разных скоростях скольжения штампа, обратно пропорционального (см. (3.38)) задаваемому параметру ζ . Поскольку при больших и малых скоростях скольжения решение для вязкоупругой полуплоскости стремится к решению для упругой полуплоскости соответственно с мгновенным и длительным модулями упругости, то кривые, полученные для значений $\zeta=10^{-3}$ и $\zeta=10^3$, являются симметричными относительно оси симметрии приложенного давления

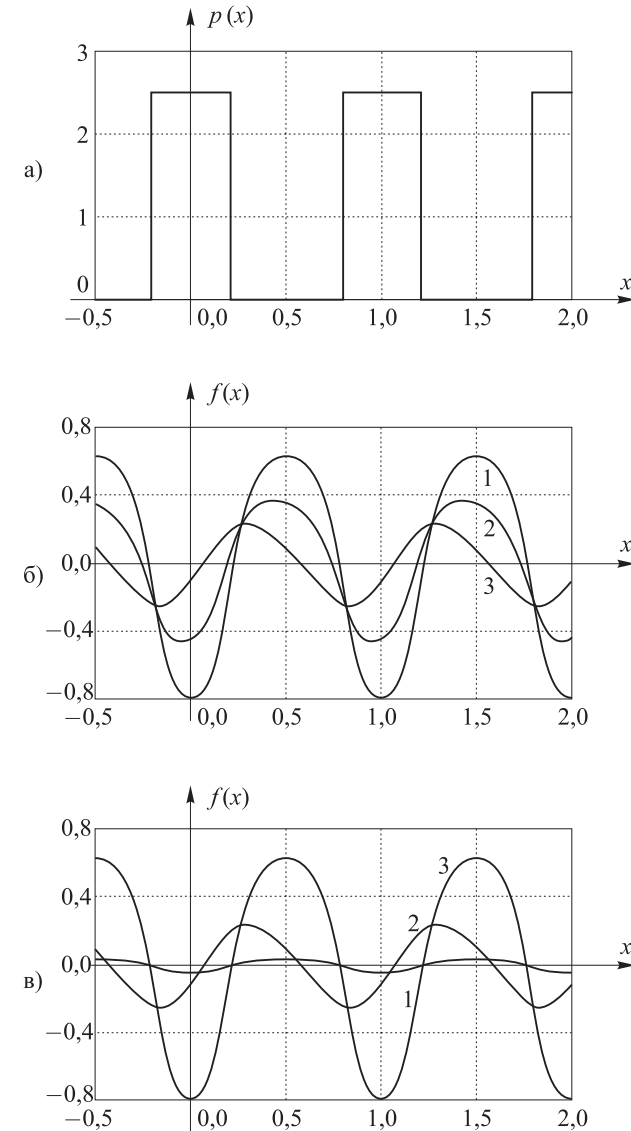


Рис. 3.20. Распределение давления (а) и форма деформированной поверхности при $\zeta=1$ и $\alpha=1$ (1), $\alpha=2$ (2), $\alpha=20$ (3) – (б) и при $\alpha=20$, $\zeta=10^{-3}$ (1), $\zeta=1$ (2), $\zeta=10^3$ (3) – (в)

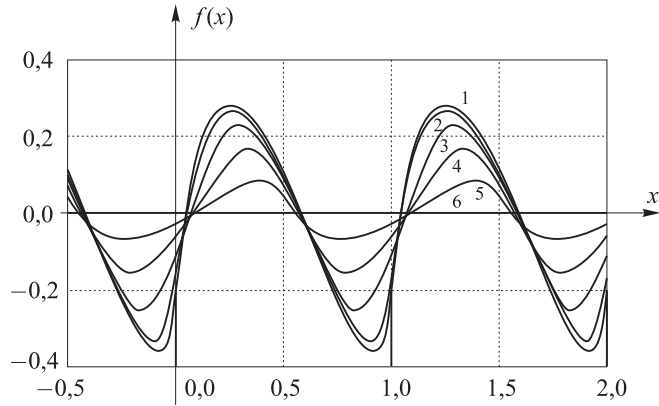


Рис. 3.21. Форма деформированной поверхности при $P=1$, $\alpha=20$, $\zeta=1$ и разных величинах полуширины области нагружения: $a=0$ (1), $a=0,1$ (2), $a=0,2$ (3), $a=0,3$ (4), $a=0,4$ (5), $a=0,5$ (6)

и различаются только амплитудными значениями рельефа поверхности (в α раз). При промежуточных значениях скорости скольжения форма рельефа поверхности становится несимметричной.

На форму рельефа поверхности оказывает влияние также относительный размер зоны приложения нагрузки, что иллюстрируется графиками, представленными на рис. 3.21. Значения функции $u(x)$ рассчитаны по формуле (3.70) при $P=1$, $\alpha=20$ и $\zeta=1$. Изменение полуширины области нагружения (параметр a) от 0 (сосредоточенная функция) до 0,5 (равномерное нагружение полуплоскости) приводит к существенному изменению формы деформированной поверхности вязкоупругой полуплоскости. При уменьшении ширины зоны нагружения увеличиваются амплитудные значения рельефа и его несимметрия относительно зоны нагружения. При $a \rightarrow 0$, т. е. если заданная функция распределения давления стремится к функции $p(x)=P\delta(x)$ (разумеется, периодически продолженной с периодом 1), соответствующая форма поверхности стремится к функции, получаемой из (3.70) предельным переходом при $a \rightarrow 0$:

$$u(x) = \frac{P}{\alpha} \ln |2 \sin \pi x| - P \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{k} \cos 2\pi kx - \frac{\pi}{\zeta} \sin 2\pi kx}{1 + \left(\frac{\pi k}{\zeta} \right)^2}. \quad (3.72)$$

Заметим, что при $\alpha=1$ (упругое решение) соотношение (3.72) дает ядро интегрального оператора, описывающего перемещения границы упругой полуплоскости при периодическом характере нагружения [16].

Из анализа соотношения (3.71) следует, что при рассматриваемом характере нагружения вязкоупругой полуплоскости деформационная составляющая силы трения T возрастает с ростом нагрузки P ($T \sim P^2$) и вязкости основания (параметра α). Представляют интерес зависимости силы трения от полуширины зоны нагружения a , представленные на рис. 3.22. Они вычислены при $P=1$, $\alpha=20$ и различных значениях параметра ζ . При размере области нагружения, близкой к периоду, сила трения близка к нулю при любых значениях скорости скольжения. При малых размерах зоны нагружения сила трения в значительной степени зависит от скорости перемещения нагрузки. Эта зависимость носит немонотонный характер и подобна зависимостям, представленным на рис. 3.17 и 3.19.

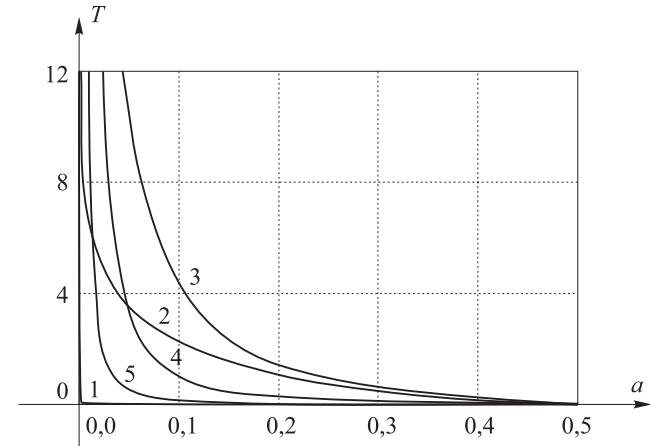


Рис. 3.22. Зависимости деформационной составляющей силы трения от полуширины зоны нагружения a , построенные при $P=1$, $\alpha=20$ и $\zeta=10^{-3}$ (1), $\zeta=1$ (2), $\zeta=10$ (3), $\zeta=10^2$ (4), $\zeta=10^3$ (5)

Полученные результаты важны для анализа контактных характеристик и силы трения при фрикционном взаимодействии тел с шероховатыми поверхностями, а также для управления трением за счет выбора оптимальных параметров рельефа поверхности. Результаты, полученные в разделе 3.3.5, могут оказаться полезными при прогнозировании установившейся формы изношенных поверхностей, работающих при различных нагрузочно-скоростных условиях взаимодействия.

3.5. Расчет силы трения при скольжении индентора с фрактальной шероховатостью по вязкоупругому основанию

В этом разделе, излагающем результаты исследований И. А. Солдатенкова [12], проводится расчет деформационной силы трения при скольжении шероховатого индентора по вязкоупругому основанию, свойства которого описываются моделью Кельвина. Шероховатость индентора представляется фракталом типа Кантора–Бородича, состоящим из набора прямоугольных неровностей. Сила трения индентора получается суммированием вкладов от единичных неровностей, для каждой из которых сила трения определяется по диссипации энергии. Дается обоснование правомерности подобного суммирования. Проанализировано влияние нагрузки, скорости скольжения и геометрических характеристик шероховатости на коэффициент трения. Дана оценка вклада многоуровневой шероховатости в силу трения.

3.5.1. Задачи для единичных штампов

Рассмотрим двумерную задачу о скольжении со скоростью V абсолютно жесткого штампа прямоугольной формы по вязкоупругому основанию (далее — задача Λ_0 , рис. 3.23). Считается, что скольжение штампа происходит без граничного трения, а деформационные свойства основания описываются моделью Кельвина (3.1). В этом случае связь нормальной нагрузки P на штамп с его внедрением δ имеет вид [16]:

$$P = \alpha \delta; \quad \alpha = A_e L [1 + r \Phi(\lambda L)], \quad (3.73)$$

где $A_e = \kappa_1 \kappa_2 / (\kappa_1 + \kappa_2)$, $r = \kappa_2 / \kappa_1$, $\lambda = (\kappa_1 + \kappa_2) / (\eta V)$, $\Phi(X) = (1 - e^{-X}) / X$, L — длина штампа, κ_1, κ_2, η — жесткости пружин и вязкость демпфера в элементе Кельвина (рис. 3.23).

Касательную силу F сопротивления скольжению штампа (деформационную составляющую силы трения) можно определить, рассчитав энергию, которая рассеивается в основании при прохождении по нему штампа, так что [16]:

$$F = \beta \delta^2 = \frac{\beta}{\alpha^2} P^2; \quad \beta = \frac{A_e^2 \lambda L}{2 \kappa_1} (2 + r + r e^{-\lambda L}) \Phi(\lambda L), \quad (3.74)$$

при этом второе выражение для силы F получается с учетом равенства (3.73).

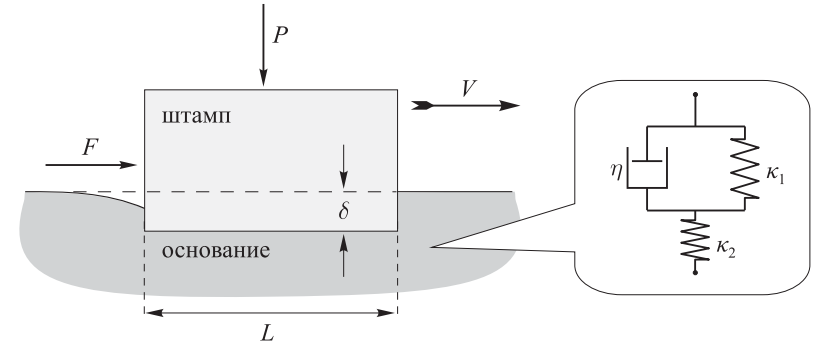


Рис. 3.23. Взаимодействие единичного штампа с вязкоупругим основанием (задача Λ_0)

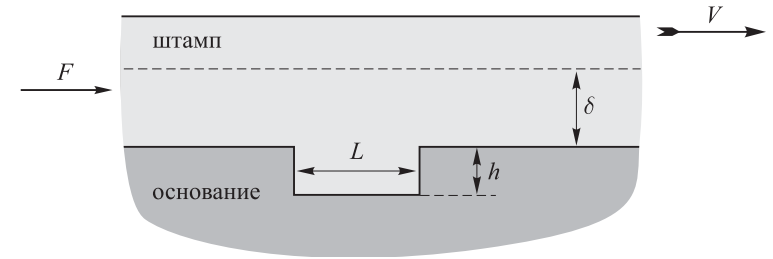


Рис. 3.24. Случай бесконечного штампа с прямоугольным выступом (задача Λ_+)

Далее также будет использоваться решение задачи о скольжении по вязкоупругому основанию бесконечно протяженного штампа с прямоугольным выступом высоты h при условии их полного контакта (задача Λ_+ , рис. 3.24). Считается, что основная часть штампа внедрена в основание на величину δ . В этом случае, используя результаты [16], можно установить, что деформационная сила трения рассчитывается по формуле:

$$F = A_e r \lambda L \Phi(\lambda L) h^2. \quad (3.75)$$

Заметим, что при такой постановке задачи сила трения не зависит от внедрения δ .

3.5.2. Индентор с фрактальной шероховатостью

Рассмотрим теперь случай, когда поверхность индентора, скользящего по вязкоупругому основанию, имеет многоуровневую фракталь-

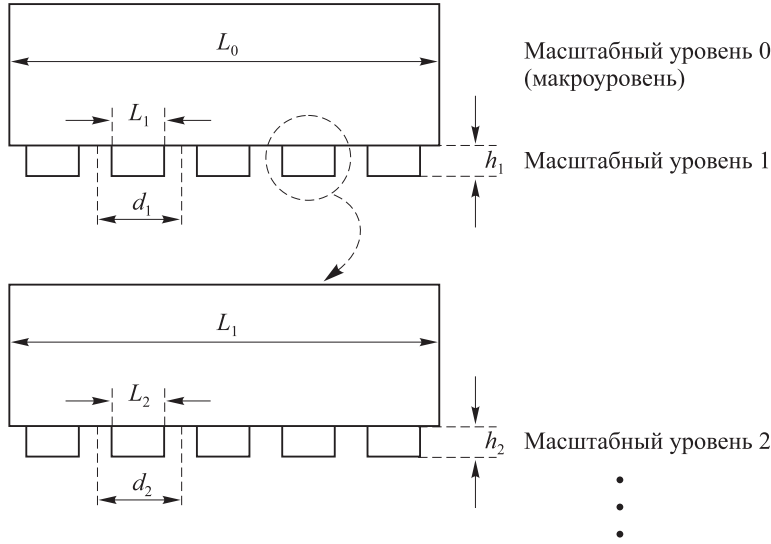


Рис. 3.25. Многоуровневая фрактальная шероховатость индентора

ную шероховатость типа Кантора–Бородича [17], представленную на рис. 3.25. Введем в рассмотрение следующие геометрические характеристики этой шероховатости:

$$\rho = \frac{L_k}{d_k} = \text{const} < 1, \quad N = \frac{L_{k-1}}{d_k} = \text{const} \geq 1, \quad \zeta = \frac{h_{k+1}}{h_k} = \text{const} < 1; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.76)$$

причем N — число неровностей масштабного уровня k на каждой неровности уровня $k-1$.

Равенства (3.76) позволяют записать соотношения:

$$L_k = (\rho / N)^k L_0, \quad h_k = \zeta^{k-1} h_1. \quad (3.77)$$

Будем считать, что на каждом масштабном уровне k имеет место полный контакт между поверхностями индентора и основания [18]. Кроме того, будем использовать принцип суперпозиции вкладов потерь на трение с различных масштабных уровней, допустимость которого обосновывается в приложении к этому разделу. А именно, получим общую силу трения F индентора суммированием вкладов F_k от единичных неровностей на каждом масштабном уровне:

$$F = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} N^k F_k, \quad (3.78)$$

при этом сила трения F_0 на макроуровне находится на основе решения задачи Λ_0 по формуле (3.74), тогда как силы F_k — по формуле (3.75) задачи Λ_+ , т. е.

$$F_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} P_0^2, \quad F_k = A_e r \lambda L_k \Phi(\lambda L_k) h_k^2. \quad (3.79)$$

Здесь α_0 и β_0 определяются по формулам (3.73) и (3.74) при $L = L_0$.

Замечание. В работе [19] установлено, что при полном фрикционном контакте упругой полосы со штампом, форма которого описывается суммой гармоник разной частоты, соответствующая деформационная сила трения получается суммированием вкладов от каждой гармоники. Данный результат отвечает принципу суперпозиции вкладов потерь на трение с различных масштабных уровней, если гармоники формы штампа интерпретировать как шероховатость различных масштабных уровней.

Подстановка выражений (3.79) в равенство (3.78) позволяет с учетом соотношений (3.77) прийти к следующему выражению для общей силы трения:

$$F = F_0 + F_m; \quad F_m = A_e r \lambda L_0 \left(h_1 / \zeta \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\rho \zeta^2 \right)^k \Phi(\lambda L_k). \quad (3.80)$$

Второе слагаемое F_m в этом выражении обусловлено наличием многоуровневой шероховатости и может интерпретироваться как составляющая общей силы трения, связанная с вкладом шероховатости поверхности на разных масштабных уровнях (микроскопическая составляющая силы трения). По аналогии с (3.78) представим нормальную контактную нагрузку P в виде разложения:

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} N^k P_k \equiv P_0 + P_m,$$

в котором P_m — составляющая контактной нагрузки, обусловленная шероховатостью индентора. Величина P_k представляет собой нагрузку на неровность уровня k и определяется из решения вязкоупругой задачи Λ_+ (рис. 3.24) для бесконечного штампа с единичной прямоугольной неровностью ширины L_k и высоты h_k , так что $P_k = A_e L_k h_k$.

С учетом последнего разложения выражение (3.80) позволяет найти коэффициент трения [12]:

$$\mu \equiv \frac{F}{P} = \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} P \left(1 - \frac{P_m}{P} \right)^2 + \frac{F_m}{P}. \quad (3.81)$$

3.5.3. Анализ коэффициента трения

Пользуясь формулами (3.80) и (3.81), проанализируем влияние нагрузки P на коэффициент трения. Для этого заметим, что микроскопическая составляющая F_m не зависит от нагрузки P , поэтому, согласно формуле (3.81), коэффициент трения с ростом нагрузки сначала убывает, а затем увеличивается. Подобные зависимости коэффициент трения от нагрузки известны в трибологии и объясняются существованием разных механизмов трения [20].

Скорость скольжения V входит в формулы (3.80), (3.81) через параметр λ и ее влияние на трение может быть оценено только численно. На рис. 3.26 представлены расчетные данные по влиянию скорости скольжения на коэффициент трения, а также на его макроскопическую $\mu_0 = F_0 / P$ и микроскопическую $\mu_m = F_m / P$ составляющие, полученные при $P = 6,66 \cdot 10^2$ Па/м, $\kappa_1 = 10^8$ Па/м, $\kappa_2 = 0,5 \cdot 10^8$ Па/м, $\eta = 10^6$ Па·с/м, $N = 10$, $L_0 = 10^{-2}$ м, $\rho = 0,3$, $\zeta = 0,1$, $h_1 = 0,1L_0$, $V_* = L_0(\kappa_1 + \kappa_2) / \eta = 1,5$ м/с. Убывающий характер представленных зависимостей обуславливается прямоугольной формой неровностей [16]. Обращает на себя внимание тот факт, что соотношение макроскопической μ_0 и микроскопической μ_m составляющих коэффициента трения изменяется с ростом скорости V .

На рис. 3.27, а представлены расчетные зависимости величин μ , μ_0 , μ_m от числа N неровностей уровня k на каждой неровности уровня

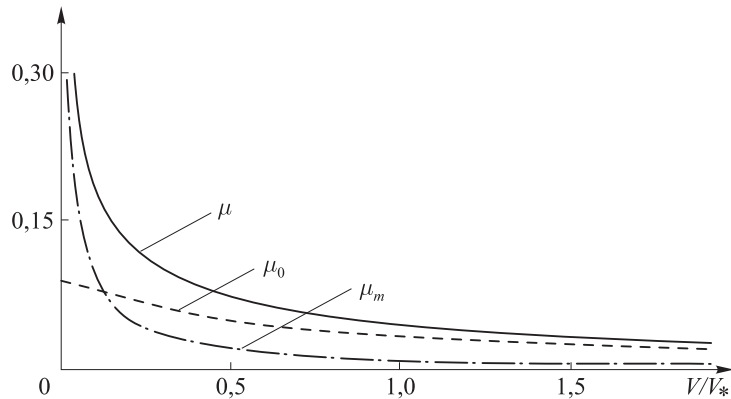


Рис. 3.26. Зависимость коэффициента трения μ , его макроскопической μ_0 и микроскопической μ_m составляющих от скорости V скольжения

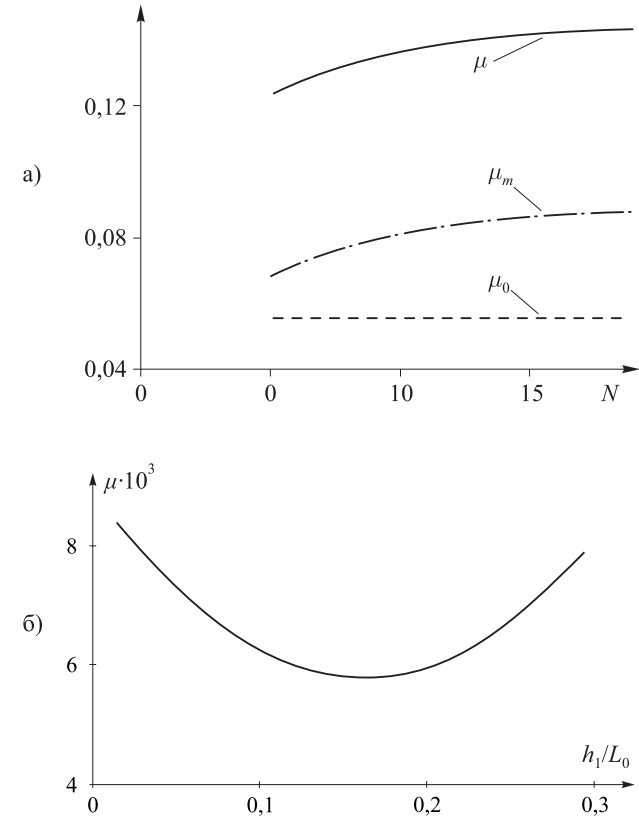


Рис. 3.27. Зависимость коэффициента трения μ , его макроскопической μ_0 и микроскопической μ_m составляющих от числа N неровностей уровня k на каждой неровности уровня $k-1$ (для наглядности графики сглажены) (а); зависимость коэффициента трения μ от высоты неровности h_1 на 1-м уровне (б)

на $k-1$, полученные при $P = 6,66 \cdot 10^2$ Па/м, $\kappa_1 = 10^8$ Па/м, $\kappa_2 = 0,5 \cdot 10^8$ Па/м, $\eta = 10^6$ Па·с/м, $V = 0,115$ м/с, $L_0 = 10^{-2}$ м, $\rho = 0,3$, $\zeta = 0,1$, $h_1 = 0,1L_0$.

На рис. 3.27, б показана зависимость коэффициента трения μ от высоты неровности h_1 на 1-м уровне, которая согласно равенству (3.77) определяет высоты h_k неровностей на остальных уровнях. Расчеты коэффициента трения проводились по формуле (3.81) при $P = 2,73 \cdot 10^2$ Па/м,

$\kappa_1 = 10^8$ Па/м, $\kappa_2 = 10^7$ Па/м, $\eta = 10^6$ Па·с/м, $V = 2,2$ м/с, $N = 10$, $L_0 = 10^{-2}$ м, $\rho = 0,5$, $\zeta = 0,3$. Примечательной особенностью показанной зависимости является наличие у нее минимума, что согласуется с известными в трибологии закономерностями о влиянии шероховатости на коэффициент трения [20].

Таким образом, в этом разделе путем прямого суммирования вкладов потерь на трение от единичных неровностей получено аналитическое выражение для деформационной силы трения, возникающей при скольжении индентора с фрактальной шероховатостью по вязкоупругому основанию. Это выражение позволяет оценить влияние нагрузки, скорости скольжения и геометрических характеристик шероховатости индентора на коэффициент трения. Полученные таким образом зависимости качественно согласуются с некоторыми известными в трибологии закономерностями.

Приложение. Продемонстрируем правомерность гипотезы о суммировании вкладов потерь на трение с различных масштабных уровней на примере модельной задачи для штампа с одиночным выступом в предположении полного контакта штампа с вязкоупругим основанием (задача Λ_C , рис. 3.28). Основываясь на известных результатах [16], можно установить, что для задачи Λ_C деформационная составляющая силы трения определяется по формуле:

$$F = F_0 + F_1 + E\{\Lambda_0, \Lambda_+\}, \quad (3.82)$$

в которой первое слагаемое отвечает макроскопической силе трения (масштабный уровень 0) и рассчитывается по формуле (3.74) задачи Λ_0 , а второе слагаемое — силе трения масштабного уровня 1 и определяется по формуле (3.75) задачи Λ_+ при $L = b_1 - a_1$, $h = h_1$. Последнее слагаемое

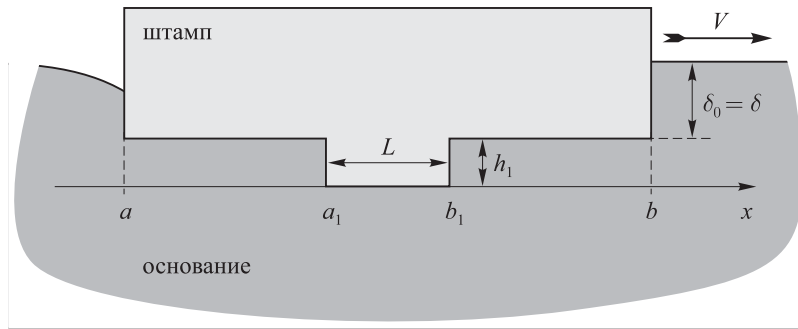


Рис. 3.28. Модельная задача Λ_C для штампа с одиночным выступом

в формуле (3.82) представляет собой известную функцию параметров задач Λ_0 и Λ_+ , обладающую следующими асимптотическими свойствами:

$$E\{\Lambda_0, \Lambda_+\} = \Phi_a\{\Lambda_0, \Lambda_+\} O(\exp(-\lambda l_{1a})) + \Phi_b\{\Lambda_0, \Lambda_+\} O(\exp(-\lambda l_{1b})) \rightarrow 0, \\ -a, b \rightarrow \infty,$$

где $l_{1a} = a_1 - a$, $l_{1b} = b - b_1$ — расстояния выступа от левого и правого концов штампа, $\Phi_a\{\Lambda_0, \Lambda_+\}$, $\Phi_b\{\Lambda_0, \Lambda_+\}$ — известные функции.

Из вышеизложенного следует, что сила трения в задаче Λ_C может быть представлена в виде суммы (суперпозиции) сил трения с масштабных уровней 0 и 1, если в окрестности выступа реализуются условия задачи Λ_+ и $|E\{\Lambda_0, \Lambda_+\}| \ll 1$, что, в свою очередь, обеспечивается условиями вида:

$$A \exp(-\lambda l_{1a}) \ll 1, \quad B \exp(-\lambda l_{1b}) \ll 1; \quad A = \max\left\{\frac{h_1}{\delta_0}, r \frac{h_1}{\delta_0}\right\}, \quad B = \max\left\{\frac{\delta_0}{h_1}, r\right\}.$$

Кроме того, следует обеспечить условие полного контакта выступа с основанием: $rh_1 / \delta_0 \leq 1$.

В случае штампа с N выступами, располагающимися на расстоянии d_1 друг от друга, суперпозиция $F = F_0 + NF_1$ имеет место при дополнительном условии: $\exp(-\lambda d_1) \ll 1$, обеспечивающем отсутствие взаимного влияния выступов.

3.6. Моделирование скольжения штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию при наличии в зазоре жидкой смазки

В этом разделе строится решение задачи о скольжении жесткого трехмерного штампа периодической структуры по вязкоупругому основанию при наличии несжимаемой жидкости в зазоре между контактирующими поверхностями [14], которое используется для анализа влияния жидкости в зазоре на сопротивление движению штампа и распределение давлений в области контакта.

3.6.1. Постановка задачи

Рассмотрим жесткий штамп, форма поверхности которого описывается периодической функцией (рис. 3.29)

$$f(x, y) = h \left(1 - \frac{1}{4} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{l_1} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{l_2} \right) \right), \quad (3.83)$$

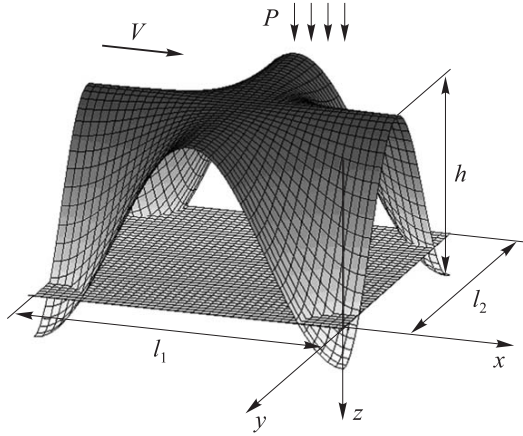


Рис. 3.29. Форма поверхности штампа на одном периоде

где l_1 — период в направлении оси x , l_2 — в направлении оси y , h — высота неровности. Штамп вдавливаются с усилием P , действующим на каждом периоде, и скользит со скоростью V в направлении оси x по границе вязкоупругого слоя толщины H , сцепленного с жестким основанием.

В зазоре между поверхностями на каждом периоде находится некоторый заданный объем v несжимаемой жидкости:

$$0 \leq v \leq v_{\max}; \quad v_{\max} = \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} f(x, y) dx dy. \quad (3.84)$$

Соотношение между перемещением $u_z = u_z(x, y)$ границы слоя по нормали к его поверхности и действующим на него давлением $p = p(x, y)$ описывается моделью Кельвина–Фойгта

$$u_z + T_\varepsilon \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{h}{E_1} \left(p + T_\sigma \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad 0 < T_\sigma \leq T_\varepsilon, \quad (3.85)$$

где T_ε и T_σ — времена запаздывания и релаксации материала вязкоупругого слоя, E_1 — длительный модуль упругости материала вязкоупругого слоя. При установившемся движении штампа по границе слоя уравнение (3.85) в подвижной системе координат, связанной со штампом, примет вид

$$u_z - T_\varepsilon V \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{h}{E_1} \left(p - T_\sigma V \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (3.86)$$

Граничные условия на поверхности слоя в подвижной системе координат имеют вид:

– в отдельной области контакта Ω штампа со слоем в предположении отсутствия тангенциальных напряжений

$$u_z = d - f(x, y), \quad (3.87)$$

где d — глубина внедрения штампа в основание;

– в областях, занятых жидкостью,

$$p(x, y) = p_f, \quad (x, y) \notin \Omega, \quad (3.88)$$

где p_f — давление жидкости в зазоре, которое зависит от нагрузки на штамп и определяется из условия равновесия

$$P = \int_{-y_c}^{y_c} \int_{-a(y)}^{b(y)} p(x, y) dx dy + p_f \left(l_1 l_2 - \int_{-y_c}^{y_c} \int_{-a(y)}^{b(y)} dx dy \right), \quad (3.89)$$

где $-a(y)$ и $b(y)$ — функции, определяющие форму отдельной области контакта Ω в плоскости xu (рис. 3.30), которые подлежат определению в ходе решения задачи, $2y_c$ — максимальная ширина области контакта в направлении оси y .

Тангенциальная сила, возникающая за счет несимметричного распределения давления на одном периоде (деформационная составляющая силы трения), определяется выражением

$$T = \int_{-y_c}^{y_c} \left(\int_{-a(y)}^{b(y)} f_x(x, y) p(x, y) dx + \int_{-b(y)}^{-a(y)} f_x(x, y) p_f dx \right) dy; \quad f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}. \quad (3.90)$$

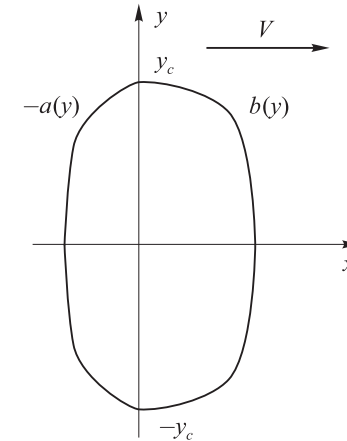


Рис. 3.30. Область контактного взаимодействия отдельного выступа

Деформационная составляющая коэффициента трения рассчитывается по формуле

$$\mu = \frac{T}{P}. \quad (3.91)$$

3.6.2. Метод решения задачи

Заметим, что область контакта

$$\Omega = (x \in [-a(y), b(y)], y \in [-y_c, y_c]) \quad (3.92)$$

симметрична относительно плоскости xz . Точно такой же симметрией обладает и решение задачи, поэтому будем его рассматривать в области $y > 0$.

Перейдем к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{l_1}, \quad \bar{y} = \frac{y}{l_2}, \quad \bar{a}(\bar{y}) = \frac{a(\bar{y}l_2)}{l_1}, \quad \bar{b}(\bar{y}) = \frac{b(\bar{y}l_2)}{l_1}, \quad \bar{y}_c = \frac{y_c}{l_2}, \\ \bar{h} &= \frac{h}{H}, \quad \bar{v} = \frac{v}{L_1 L_2 H}, \quad \bar{v}_{\max} = \frac{v_{\max}}{L_1 L_2 H}, \quad \bar{T}_\varepsilon = \frac{T_\varepsilon V}{l_1}, \quad \bar{T}_\sigma = \frac{T_\sigma V}{l_1}, \\ \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{p(\bar{x}l_1, \bar{y}l_2)}{E_1}, \quad \bar{u}_z = \frac{u_z(\bar{x}l_1, \bar{y}l_2)}{H}, \quad \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{f(\bar{x}l_1, \bar{y}l_2)}{H}, \\ \bar{P} &= \frac{P}{E_1 l_1 l_2}, \quad \bar{T} = \frac{T}{E_1 H l_2}, \quad \bar{\mu} = \frac{\bar{T}}{\bar{P}} = \mu \frac{l_1}{H}, \quad \bar{d} = \frac{d}{H}, \quad \bar{p}_f = \frac{p_f}{E_1}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

В дальнейшем черту над безразмерными величинами опустим.

Соотношения (3.83), (3.86), (3.89) и (3.84) преобразуются, соответственно, к следующему виду:

$$f(x, y) = h \left(1 - (1 + \cos(2\pi x))(1 + \cos(2\pi y))/4 \right), \quad (3.94)$$

$$u_z - T_\varepsilon \frac{\partial u_z}{\partial x} = p - T_\sigma \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.95)$$

$$P = \int_{-y_c}^{y_c} \int_{-a(y)}^{b(y)} p(x, y) dx dy + p_f \left(1 - \int_{-y_c}^{y_c} \int_{-a(y)}^{b(y)} dx dy \right), \quad (3.96)$$

$$v_{\max} = 3h/4. \quad (3.97)$$

Выражения (3.87), (3.88), (3.90) и (3.91) не изменят своего вида.

Из соотношений (3.95), (3.87) получим уравнение для распределения давлений в области контакта Ω

$$p - T_\sigma \frac{\partial p}{\partial x} = C - f(x, y) + T_\varepsilon \frac{\pi H}{2} (1 + \cos(2\pi y)) \sin(2\pi x) \quad (3.98)$$

со следующими граничными условиями:

$$p(-a(y), y) = p(b(y), y) = p_f, \quad y \in [0, y_c]. \quad (3.99)$$

Решение уравнения (3.98) имеет вид

$$p(x, y) = k_p(y) \exp(x/T_\sigma) + C + F_p(x, y). \quad (3.100)$$

Здесь использованы обозначения

$$F_p(x, y) = -h + h \left(\cos(2\pi y) + 1 \right) \left(1/4 + A \cos(2\pi x) - B \sin(2\pi x) \right), \quad (3.101)$$

$$A = \frac{4\pi^2 T_\sigma T_\varepsilon + 1}{4\Lambda}, \quad B = \frac{\pi(T_\sigma - T_\varepsilon)}{2\Lambda}, \quad \Lambda = 1 + 4\pi^2 T_\sigma^2. \quad (3.102)$$

Из граничного условия (3.99) и выражений (3.100)–(3.102) следует система уравнений для определения неизвестной функции $k_p(y)$ и функций $a(y)$ и $b(y)$, входящих в граничное условие (3.99). Исключив из этой системы $k_p(y)$, получим уравнение относительно неизвестных $a(y)$ и $b(y)$:

$$(F_p(-a(y), y) + D) \exp\left(\frac{a(y) + b(y)}{T_\sigma}\right) = F_p(b(y), y) + D; \quad D = C - p_f, \quad (3.103)$$

и выражение

$$k_p(y) = (-D - F_p(b(y), y)) \exp\left(\frac{-b(y)}{T_\sigma}\right). \quad (3.104)$$

Вне области контакта, где $p(x, y) = p_f$, получим из соотношения (3.95) уравнение для определения перемещений по нормали к границе вязкоупругого слоя:

$$u_z - T_\varepsilon \partial u_z / \partial x = p_f \quad (3.105)$$

со следующими граничными условиями:

– при $y \in [y_c, 1/2]$ граничные условия определяются условием периодичности решения:

$$u_z(x, y) = u_z(x + 1, y); \quad (3.106)$$

– при $y \in [0, y_c]$ граничные условия определяются формой внедряемого штампа:

$$u_z(b(y), y) = C - f(b(y), y), \quad u_z(1 - a(y), y) = C - f(a(y), y). \quad (3.107)$$

Решение уравнения (3.105) имеет вид

$$u_z(x, y) = k_u(y) \exp(x/T_\varepsilon) + p_f. \quad (3.108)$$

Граничным условиям (3.106) удовлетворяет решение $u_z = p_f$.

Из граничного условия (3.107) и выражения (3.108) следует система уравнений для определения неизвестной функции $k_u(y)$ и функций $a(y)$ и $b(y)$, входящих в граничное условие (3.107). Исключив из этой системы $k_u(y)$, получим уравнение относительно неизвестных $a(y)$ и $b(y)$:

$$(D - f(b(y), y)) \exp\left(\frac{1 - a(y) - b(y)}{T_\varepsilon}\right) = D - f(a(y), y) \quad (3.109)$$

и выражение для функции $k_u(y)$:

$$k_u(y) = (D - f(b(y), y)) \exp\left(\frac{-b(y)}{T_\varepsilon}\right). \quad (3.110)$$

Из уравнений (3.103) и (3.109) получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} (F_p(-a(y), y) + D) \exp\left(\frac{a(y) + b(y)}{T_\sigma}\right) &= F_p(b(y), y) + D, \\ (D - f(b(y), y)) \exp\left(\frac{1 - a(y) - b(y)}{T_\varepsilon}\right) &= D - f(a(y), y). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Решение этой системы позволяет определить функции $a(y)$ и $b(y)$ (при этом y — параметр), определяющие форму границы области контакта. Далее из формул (3.100) и (3.104) определяем распределение напряжений в контакте, а из формул (3.108) и (3.110) — перемещение точек свободной поверхности вязкоупругого слоя.

Оставшиеся неизвестные постоянные — внедрение штампа d и давление жидкости под штампом p_f — определяются из условия равновесия (3.89) и из условия, что объем жидкости v в зазоре между поверхностями внутри каждого периода задан, т. е. из соотношения

$$v = \frac{3h}{4} - 2 \int_0^{1/2} \int_0^1 (d - u_z(x, y)) dx dy. \quad (3.112)$$

Таким образом, полученные соотношения полностью определяют распределение контактных давлений и перемещения поверхности вязкоупругого слоя.

3.6.3. Анализ полученной системы уравнений

Докажем следующее утверждение: если существует некоторое решение задачи, т. е. пара функций $(u_z(x, y), p(x, y))$, определяющих форму деформированной поверхности вязкоупругого основания и распределение давлений на его границе, при заданных значениях нагрузки P и объема жидкости в зазоре, то пара функций $(u_z(x, y) + \delta, p(x, y) + \delta)$ также является решением задачи при том же объеме жидкости в зазоре и значении нагрузки $P + \delta$. Это утверждение проверяется подстановкой $(u_z(x, y) + \delta, p(x, y) + \delta)$ в уравнение (3.95) и в граничные условия (3.96). Следует отметить, что утверждение верно для постоянной скорости скольжения штампа.

Из сформулированного утверждения следует, что если имеется некоторое решение $(u_{z1}(x, y), p_1(x, y))$, соответствующее заданным значениям нагрузки и объема жидкости в зазоре (P_1, v) , то решение для значений этих величин (P, v) представляется в виде

$$p(x, y) = p_1(x, y) - (P_1 - P), \quad u_z(x, y) = u_{z1}(x, y) - (P_1 - P). \quad (3.113)$$

Из этого утверждения, в частности, следует упрощенная форма зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки на штамп. Если при отсутствии жидкости изменение нагрузки вызывает изменение формы области контакта и для разных нагрузок необходимо заново решать систему уравнений (3.111), то при наличии жидкости зависимость коэффициента трения μ от нагрузки P легко вычисляется в аналитической форме при подстановке выражений (3.113) в соотношения (3.90) и (3.91) (при условии неизменности скорости скольжения и прочих параметров). Пара коэффициентов μ и μ_1 , соответствующих нагрузкам P и P_1 , связаны следующим соотношением:

$$\mu_1(P_1) = \frac{\mu - \zeta}{k} + \zeta; \quad k = 2 \int_0^{y_c} \int_{-a(y)}^{b(y)} f_x(x, y) dx dy, \quad \zeta = \frac{P_1}{P}. \quad (3.114)$$

3.6.4. Алгоритм численных расчетов

1. В системе уравнений (3.111) примем значение p_f равным произвольной малой величине. Далее методом итераций находим внедрение d таким, чтобы объем жидкости под одним периодом штампа стал равен заданной в постановке задаче величине. При этом мы находим форму области контакта (функции $a(y)$ и $b(y)$). Далее на основании

формул (3.108) и (3.110) находим решение $(u_{z1}(x, y), p_1(x, y))$ для случая выбранного давления в зазоре контакта, удовлетворяющего заданному значению v .

2. Найдем соответствующую этому решению величину нагрузки на один период штампа P_1 по формуле (3.96).

3. Находим искомое решение по формулам (3.113).

Для численного решения задачи отрезок $y \in [0, 1/2]$ разбивается на N равных отрезков с шагом Δ и система уравнений (3.111) решается в узлах оси y : $y_n = \Delta n$ ($n=0, 1, \dots, N$). Значение параметра y_c можно отыскать следующим методом. В точке $y_0=0$ отыскиваем решение в области $a \in [0, 1/2]$, $b \in [0, 1]$, так как $a(y) + b(y) \leq 1$, $a(y) \leq b(y)$, $\forall y$. В этой области при $y=0$ система имеет единственное решение. Далее последовательно отыскиваются решения в точках y_1, y_2, \dots в области $a(y_k) \in [0, a(y_{k-1})]$, $b(y_k) \in [0, b(y_{k-1})]$.

В обозначенных пределах система имеет единственное решение при $y_k < y_c$. В области $y \in [y_c, 1/2]$ система не имеет решений, удовлетворяющих указанным выше условиям. При дальнейших вычислениях интегрирование по y осуществляется суммированием функций в точках $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$

3.6.5. Результаты и их анализ

Анализ полученных выражений показывает, что решение задачи зависит от следующих безразмерных параметров: объем жидкости под одним периодом штампа v , высота неровности h , нагрузка на период штампа P , параметры T_ϵ и T_σ , объединяющие характеристики материала и скорость скольжения.

На рис. 3.31 штриховой кривой приведена зависимость объема зазора на одном периоде в отсутствие жидкости ($p_f = 0$, $h = 2$) от параметра T_ϵ , который пропорционален скорости движения штампа. Видно, что с увеличением скорости объем полости монотонно возрастает и выходит на горизонтальную асимптоту при стремлении скорости к бесконечности. Из этого следует, что если объем жидкости меньше критической величины $v_* = \lim_{T_\epsilon \rightarrow \infty} v \Big|_{p_f=0}$, то при увеличении скорости

скольжения давление жидкости под штампом в некоторый момент упадет до нуля, и она перестанет оказывать влияние на процесс скольжения.

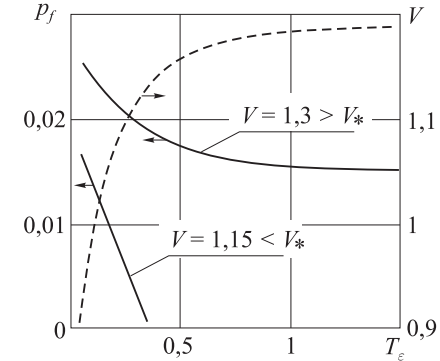


Рис. 3.31. Зависимости давления жидкости в зазоре (сплошные линии) и объема зазора на одном периоде (штриховая линия) от параметра T_ϵ

Если же объем жидкости под штампом больше критического, жидкость будет оказывать влияние на процесс скольжения при любых скоростях.

Это иллюстрируется графиками (см. рис. 3.31, сплошные кривые), показывающими зависимость давления жидкости от скорости штампа. При объеме жидкости меньше критического давление падает до нуля, при большем объеме оно стремится к постоянному значению. Для остальных параметров задачи при расчетах были приняты следующие значения: $P = 0,03$, $T_\sigma = 0,13 T_\epsilon$.

Зависимость формы области контакта от параметра T_ϵ показана на рис. 3.32 при наличии (сплошные кривые) и при отсутствии (штриховые кривые) жидкости в зазоре. Наличие жидкости под штампом уменьшает размеры области контакта. Форма области контакта становится более симметричной при наличии жидкости под штампом, объем которой превышает критический, чем в случае отсутствия жидкости.

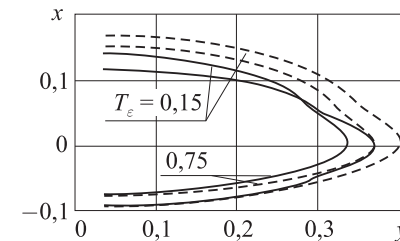


Рис. 3.32. Форма области контакта при наличии жидкости в зазоре (сплошные линии) и при ее отсутствии (штриховые линии) при различных значениях параметра T_ϵ

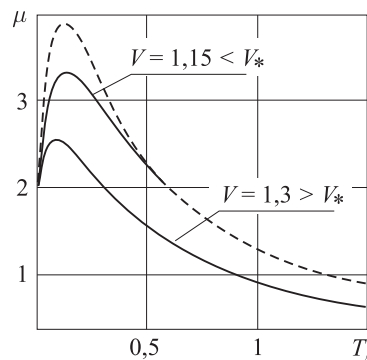


Рис. 3.33. Зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от параметра T_c при различных объемах жидкости в зазоре

Зависимости деформационной составляющей коэффициента трения, рассчитанные на основании соотношений (3.90) и (3.91), от параметра T_c представлены на рис. 3.33 для разных объемов жидкости в зазоре; штриховая линия соответствует случаю отсутствия жидкости. Результаты расчетов показывают, что эти зависимости являются немонотонными с четко выраженным максимумом. Наличие жидкости в зазоре снижает коэффициент трения и его максимальную величину.

Оценка диапазона параметров, в котором деформационная составляющая коэффициента трения максимальна, имеет большое значение для практических приложений, например при расчете сцепления шин с дорожным покрытием.

Предлагаемая модель может использоваться в разных приложениях, например, при учете явления аквапланирования при взаимодействии шины с мокрым асфальтом. Анализ разработанной модели показывает, что все исследуемые характеристики зависят от пяти безразмерных параметров. Из численных результатов следует, что наличие жидкости в зазоре приводит к уменьшению размера пятна контакта и деформационной составляющей силы трения. Если объем жидкости не превосходит некоторой критической величины, этот эффект исчезает с увеличением скорости скольжения, а если превосходит, эффект имеет место при любых скоростях скольжения.

Выводы к главе 3

Проведенные в этой главе исследования дают возможность оценить влияние параметров микрогеометрии поверхности на распределе-

ние контактных давлений, фактическую площадь контакта и деформационную составляющую силы трения при фрикционном взаимодействии смазанных поверхностей, когда можно пренебречь касательными напряжениями в области контактного взаимодействия.

В результате моделирования удалось выявить некоторые новые механические эффекты, связанные с пространственным расположением выступов. В частности, для двоякопериодической формы рельефа поверхности установлена возможность слияния областей контакта в направлении, перпендикулярном направлению относительного перемещения поверхностей, при некоторых скоростях скольжения индентора.

Показано, что наличие жидкости в зазоре между шероховатыми поверхностями может приводить к уменьшению фактической области контакта и снижению коэффициента трения в определенном диапазоне изменения скорости скольжения.

Полученные результаты могут быть использованы для разработки способов управления функциональными характеристиками узлов трения за счет выбора оптимального поверхностного рельефа.

Литература

1. Goryacheva I. G., Sadeghi F. Contact characteristics of rolling/sliding cylinder and a viscoelastic layer bonded to an elastic substrate // *Wear*. 1995. Vol. 184. P. 125–132.
2. Goryacheva I. G., Sadeghi F., Nickel D. Internal stresses in contact of rough body and a viscoelastic layered semi-infinite plane // *ASME J. Tribol.* 1996. Vol. 118, № 1. P. 131–136.
3. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Влияние несовершенной упругости поверхностного слоя на контактные характеристики при скольжении шероховатых упругих тел // *Трение и износ*. 1997. Т. 18. № 1. С. 5–12.
4. Goryacheva I. G. *Contact Mechanics in Tribology*. Dordrecht etc.: Kluwer, 1998. 344 p.
5. Горячева И. Г. *Механика фрикционного взаимодействия*. М.: Наука, 2001. 478 с.
6. Любичева А. Н. Анализ взаимного влияния пятен контакта при скольжении периодической системы неровностей по вязкоупругому основанию винклеровского типа // *Трение и износ*. 2008. Т. 29. № 2. С. 125–133.
7. Любичева А. Н. Численное моделирование скольжения системы сферических инденторов по вязкоупругому телу // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*. 2011. № 4/5. С. 2324–2325.

8. Ноздрин М. А., Маховская Ю. Ю., Шептунов Б. В. Расчет деформационной составляющей силы трения при скольжении тела по вязкоупругому основанию // Вестник ИГЭУ. 2009. № 3. С. 48–50.
9. Шептунов Б. В., Горячева И. Г., Ноздрин М. А. Контактная задача о движении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию // Трение и износ. 2013. Т. 34. № 2. С. 109–119.
10. Ноздрин М. А., Шептунов Б. В. Модель трения твердого тела с регулярным рельефом и вязкоупругого полупространства // Физика, химия и механика трибосистем. 2015. № 12. С. 24–29.
11. Горячева И. Г., Горячев А. П. Контактные задачи о скольжении штампа с периодическим рельефом по вязкоупругой полуплоскости. ПММ. 2016. Т. 80, вып. 1. С. 103–116.
12. Солдатенков И. А. Расчет трения индентора с фрактальной шероховатостью о вязкоупругое основание // Трение и износ. 2015. Т. 36. № 3. С. 257–262.
13. Kuznetsov Ye. A. Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression // WEAR. 1985. Vol. 102. № 3. P. 177–194.
14. Горячева И. Г., Шпенёв А. Г. Моделирование скольжения штампа с регулярным рельефом подошвы по вязкоупругому основанию при наличии жидкой смазки // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. № 5. С. 754–763.
15. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехтeоретиздат, 1949. 270 с.
16. Солдатенков И. А. К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // Трение и износ. 2008 (29). № 1. С. 12–21.
17. Borodich F. M. Fractal contact mechanics. Encyclopedia of Tribology. New York: Springer, 2013. P. 1249–1258.
18. Persson B. N. J., Tosatti E. The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // J. Chem. Phys. 2001 (115). № 12. P. 5597–5610.
19. Солдатенков И. А. Деформационная составляющая силы трения в волнистом упругом контакте с износом // Трение и износ. 2011 (32). № 6. С. 602–607.
20. Крагельский И. В. Трение и износ. М.: Машиностроение, 1968. 480 с.

Глава 4. Моделирование эффекта адгезионного взаимодействия эластомеров при трении

В настоящей главе представлены теоретические модели, учитывающие эффект адгезионного взаимодействия поверхностей при скольжении единичного выступа и регулярной волнистой поверхности по вязкоупругому основанию. Адгезионное взаимодействие задается в виде силы притяжения, действующей вне области контакта. Величина этой силы зависит от величины зазора между поверхностями, т. е. как от начальной геометрии поверхностей до взаимодействия, так и от их деформации при контактировании. Рассмотренные в данной главе модели адгезионного взаимодействия основаны на самосогласованном подходе, при котором геометрия деформированных поверхностей вне зон контакта определяется в процессе решения контактной задачи с учетом сил адгезионного притяжения. Такой подход позволяет исследовать совместное влияние параметров микрогеометрии контактирующих поверхностей, поверхностных свойств и несовершенной упругости взаимодействующих тел на характеристики контактного взаимодействия.

4.1. Развитие моделей адгезионного взаимодействия поверхностей

Адгезионные силы имеют молекулярную природу, они действуют в зазоре между поверхностями и влияют на напряженно-деформированное состояние взаимодействующих тел. При трении поверхностей в режимах гидродинамической и граничной смазки межмолекулярные силы не оказывают значительного влияния на контактные характеристики. Однако при взаимодействии сухих и чистых поверхностей силы адгезии могут играть значительную роль, особенно в случае небольших размеров взаимодействующих выступов и малых нагрузок, действующих на них.

Межмолекулярное взаимодействие впервые было учтено Ван-дер-Ваальсом в 1873 году в уравнении, описывающем свойства газов и жидкостей. Модели адгезионного контакта твердых тел стали появляться только в 30-х годах XX века. В 1937 году Лондоном было дано теоретическое объяснение дисперсионных сил притяжения, которые в большинстве случаев дают наибольший вклад в ван-дер-ваальсовское взаимодействие. Феноменологическое соотношение для потенциала межмолекулярного взаимодействия было предложено Леннардом-Джонсом

в 1924 году [1]:

$$U(r) = -\frac{A_1}{r^6} + \frac{A_2}{r^{12}},$$

где r — расстояние между центрами взаимодействующих частиц, A_1 и A_2 — некоторые постоянные. Первое слагаемое в этом выражении соответствует притяжению частиц, а второе — отталкиванию.

Сила взаимодействия $p_a(\delta)$ на единицу площади между двумя полупространствами с параллельными границами в зависимости от величины зазора между ними δ определяется из предыдущего соотношения путем двойного интегрирования [2, 3]:

$$p_a(\delta) = -\frac{8\gamma}{3z_0} \left(\left(\frac{z_0}{\delta} \right)^3 - \left(\frac{z_0}{\delta} \right)^9 \right),$$

где z_0 — равновесное расстояние между поверхностями, при котором сила взаимодействия равна нулю: $p_a(z_0) = 0$. Величина γ называется удельной работой адгезии двух поверхностей. Эта величина количественно характеризует адгезионные свойства двух взаимодействующих поверхностей и определяется как работа на единицу площади, необходимая для того, чтобы раздвинуть две поверхности от равновесного расстояния z_0 до бесконечности:

$$\gamma = \int_{z_0}^{\infty} p_a(\delta) d\delta$$

Зависимость $p_a(\delta)$ для закона Леннард-Джонса показана на рис. 4.1 (кривая 1). При величинах зазора, меньших равновесного расстояния, т. е. $\delta < z_0$, давление p_a положительно, что соответствует отталкиванию поверхностей. При $\delta > z_0$ имеет место адгезионное притяжение поверхностей, и адгезионное давление p_a отрицательно; его абсолютная величина достигает максимума при некоторой величине зазора, а при дальнейшем увеличении δ стремится к нулю.

Расчет силы межмолекулярного притяжения между двумя макроскопическими жесткими сферами, находящимися в контакте, был впервые проведен практически одновременно Брэдли [4] и Дерягиным [5, 6]. Брэдли рассмотрел полный потенциал молекулярного взаимодействия, включая оба слагаемых: как ответственное за притяжение, так и за отталкивание молекул, в то время как Дерягин учитывал только притяжение, задаваемое функцией произвольного вида.

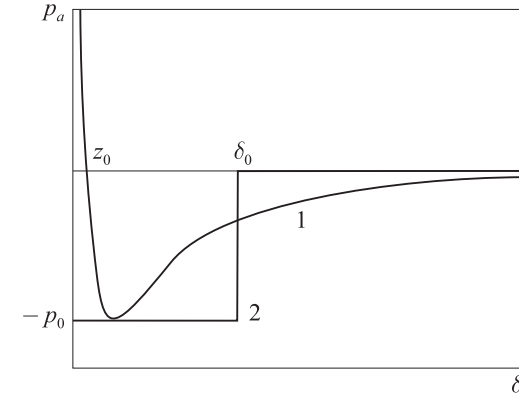


Рис. 4.1. Зависимость силы молекулярного взаимодействия от величины зазора между поверхностями

Экспериментальные исследования, проведенные в 1950–1960-х годах [7–9], показали, что адгезионные силы не только действуют между поверхностями макроскопических твердых тел, но и заметно влияют на их контактное деформирование при малых нагрузках. Таким образом, возникла необходимость в построении новой модели контактного взаимодействия с учетом адгезионных сил, которая позволила бы описывать результаты таких экспериментов для деформируемых тел.

Построению моделей, описывающих адгезионное взаимодействие упругих тел, посвящено большое количество работ. Известная модель Дерягина–Муллера–Топорова [10, 11] применима для достаточно жестких взаимодействующих тел, когда их контактная деформация мало отличается от герцевского случая. Другая классическая модель — модель Джонсона–Кендалла–Робертса [9, 12] применима для случая достаточно мягких тел и относительно высоких величин их поверхностной энергии.

Для более строгого решения задач об адгезионном контакте с учетом упругих деформаций контактирующих тел был развит самосогласованный подход, в основе которого лежит расчет упругих деформаций границ контактирующих тел и, соответственно, формы зазора между ними, таким образом, чтобы обеспечить равенство деформационных и молекулярных сил на этих границах. Один из вариантов этого подхода, являющийся развитием идеи Брэдли, основан на допущении, что зазор между контактирующими телами существует всегда, т. е. поверхности не соприкасаются, при этом в качестве граничного условия задается потенциал Леннард-Джонса, который может определять как притяжение, так и отталкивание поверхностей в зависимости от величины зазора [13–15].

Другим направлением развития самосогласованного метода для решения задач об адгезионном взаимодействии деформируемых тел стал подход Дерягина, в котором предполагается наличие области контакта между взаимодействующими телами. При этом внутри области контакта задаются граничные условия на перемещения, а вне этой области молекулярное взаимодействие между двумя элементарными противоположащими участками поверхностей задается так же, как если бы оно действовало между двумя параллельными плоскостями. Для адгезионного контакта упругих тел в рамках этого подхода построены как численные решения [16, 17], так и аналитические модели, основанные на аппроксимации адгезионного давления, действующего вне области контакта поверхностей, заданными функциями [18–20].

Среди таких моделей особого внимания заслуживает модель, предложенная Можи на основе известного в механике разрушения приближения Дагдейла [18]. В ней сила притяжения поверхностей на единицу площади описывается соотношением (см. рис. 4.1, кривая 2):

$$p_a(\delta) = \begin{cases} -p_0, & 0 < \delta \leq \delta_0, \\ 0, & \delta > \delta_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

В этой модели не учитываются силы молекулярного отталкивания на границе: они возникают только за счет упругих сил при контактном нагружении. Сила же молекулярного притяжения (адгезии) считается постоянной при $\delta \leq \delta_0$ и равной нулю при $\delta > \delta_0$. Удельная работа адгезии γ определяется в этом случае как

$$\gamma = \int_0^{\infty} p_a(\delta) d\delta = p_0 \delta_0. \quad (4.2)$$

Для контакта сферического штампа с упругим полупространством эта модель дает аналитическое решение, причем, в отличие от классических моделей ДКР и ДМТ, это решение применимо для тел любой жесткости и при произвольных параметрах, характеризующих силы адгезии. Модель Можи–Дагдейла была в дальнейшем обобщена на случай взаимодействия с упругим полупространством осесимметричного штампа, форма которого описывается функцией произвольной степени [21, 22].

Помимо молекулярного взаимодействия поверхностей, причиной адгезионного притяжения между ними могут быть микроскопические мениски жидкости, находящиеся в зазоре и «стягивающие» между собой поверхности. В этом случае говорят о капиллярной адгезии. В обычных условиях большинство поверхностей покрыто тонкими пленками воды, конденсированной из воздуха, поэтому явление капиллярной адгезии

очень распространено. Влияние капиллярных эффектов на напряженно-деформированное состояние контактирующих тел до настоящего времени мало изучено. Ранее подход, аналогичный модели Можи–Дагдейла, был использован для решения контактной задачи о нагружении осесимметричных упругих тел при наличии капиллярной адгезии [23].

В настоящей главе модель (4.1)–(4.2) будет использована для описания адгезионного притяжения в скользящем контакте инденторов различной формы и вязкоупругого основания. Силы адгезии, действующие по нормали к поверхности, оказывают влияние на поле напряжений вблизи поверхности и, таким образом, влияют на гистерезисные потери в материале и деформационную составляющую силы трения. Исследованию этих эффектов и посвящена настоящая глава.

4.2. Скольжение цилиндрической неровности по вязкоупругому полупространству при наличии адгезии

4.2.1. Молекулярная адгезия между поверхностями в контакте скольжения

Рассматривается плоская контактная задача для вязкоупругого полупространства, свойства которого описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{x^0}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{y^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{y^0}}{\partial t} \right), \\ \varepsilon_{y^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{y^0}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{y^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{y^0}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} \right), \\ \gamma_{x^0 y^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \gamma_{x^0 y^0}}{\partial t} &= \frac{1+\nu}{E} \left(\tau_{x^0 y^0} + T_\sigma \frac{\partial \tau_{x^0 y^0}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где σ_{x^0} , σ_{y^0} , $\tau_{x^0 y^0}$ — компоненты тензора напряжений, ε_{x^0} , ε_{y^0} , $\gamma_{x^0 y^0}$ — компоненты тензора деформаций, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, T_ε и T_σ характеризуют вязкие свойства полупространства, (x^0, y^0) — система координат, связанная с полупространством, t — время. Уравнения (4.3) являются двумерным аналогом модели Кельвина–Фойгта и соответствуют случаю плоской деформации.

По границе вязкоупругого полупространства скользит со скоростью V жесткий цилиндр радиуса R (рис. 4.2). Предполагается, что тангенциальное напряжение между цилиндром и полупространством отсут-

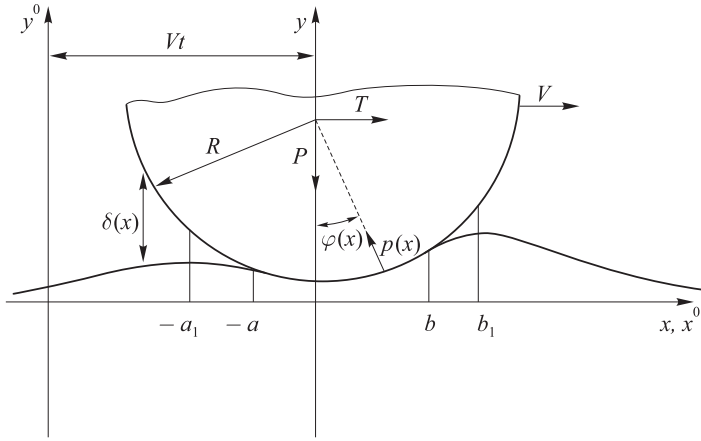


Рис. 4.2. Схема скольжения цилиндра по вязкоупругому полупространству при наличии молекулярной адгезии

ствует. Также предполагается, что скорость V много меньше скорости распространения звука в вязкоупругой среде и направлена вдоль оси Ox , таким образом, инерционными свойствами полупространства можно пренебречь.

Введем подвижную систему координат (x, y) , связанную с цилиндром: $x = x^0 - Vt$, $y = y^0$.

Считая, что форму цилиндра в окрестности области взаимодействия с полупространством можно описать функцией $f(x) = x^2 / (2R)$, получим следующие граничные условия для вязкоупругого полупространства в подвижной системе координат (x, y) :

– условия в области контакта:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{R}, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad -a < x < b, \quad (4.4)$$

где $w(x)$ — нормальное перемещение границы вязкоупругого полупространства;

– условия в области адгезионного взаимодействия в соответствии с (4.1):

$$\sigma_y|_{y=0} = p_0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad -a_1 \leq x \leq a, \quad b \leq x \leq b_1; \quad (4.5)$$

– условие отсутствия нагрузки вне области взаимодействия:

$$\sigma_y|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad x < -a_1, \quad x > b_1. \quad (4.6)$$

В подвижной системе координат (x, y) напряжения, деформации и перемещения не зависят явно от времени. В частности, для нормального пе-

ремещения границы полупространства имеем $w(x) \equiv w^0(x + Vt, t)$, где $w^0(x^0, t)$ — нормальное перемещение в неподвижной системе координат (x^0, y^0) . Дифференцируя это тождество по времени, получим $\partial w(x^0, t) / \partial t = -V \partial w(x) / \partial x$. Аналогичные соотношения имеют место для производных всех компонент напряжений, перемещений и деформаций.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \varepsilon_{x^0} - T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}, & \varepsilon_y^* &= \varepsilon_{y^0} - T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}, & \gamma_{xy}^* &= \gamma_{x^0 y^0} - T_\varepsilon V \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x}, \\ \sigma_x^* &= \sigma_{x^0} - T_\sigma V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, & \sigma_y^* &= \sigma_{y^0} - T_\sigma V \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}, & \tau_{xy}^* &= \tau_{x^0 y^0} - T_\sigma V \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \quad (4.7) \\ w^* &= w - T_\varepsilon V \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (4.3) принимают вид, совпадающий по форме с законом Гука для упругого полупространства. Введенные функции со звездочкой удовлетворяют также уравнениям равновесия и совместности деформаций для упругого тела.

Для того чтобы получить граничные условия для функций со звездочкой (4.7), используем условия (4.4)–(4.6). Из (4.5) и (4.6) видно, что функцию σ_y при $y=0$ вне области контакта можно представить с помощью θ -функции Хевисайда:

$$\sigma_y|_{y=0} = \begin{cases} p_0 \theta(x + a_1), & x \leq -a, \\ p_0 \theta(b_1 - x), & x \geq b. \end{cases}$$

С учетом этого получаем следующие граничные условия при $y=0$ для функций со звездочкой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial x} &= \frac{x - T_\varepsilon V}{R}, \quad \tau_{xy}^* = 0, & -a < x < b, \\ \sigma_y^* &= p_0 \theta(x + a_1) - T_\sigma V p_0 \delta(x + a_1), \quad \tau_{xy}^* = 0, & x \leq -a, \\ \sigma_y^* &= p_0 \theta(b_1 - x) + T_\sigma V p_0 \delta(b_1 - x), \quad \tau_{xy}^* = 0, & x \geq b, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Таким образом, исходная задача сводится к решению задачи для упругой полуплоскости с граничными условиями (4.8). После этого истинные напряжения, деформации и перемещения в вязкоупругом полу-

пространстве определяются из решения дифференциальных уравнений (4.7).

4.2.2. Приведение контактной задачи к задаче Римана–Гильберта

Решение задачи для упругой полуплоскости. Для решения задачи для упругой полуплоскости с граничными условиями (4.8) воспользуемся методом сведения к задаче Римана–Гильберта [24–26] и введем при $y \leq 0$ функцию комплексного переменного $z = x - iy$

$$W(z) = X - iY = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y^* \frac{dt}{t - z}. \quad (4.9)$$

Поскольку на границе $y = 0$ упругой полуплоскости выполняется соотношение

$$\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial w^*}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y^* \frac{dt}{1-x} - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \tau_{xy}^*, \quad (4.10)$$

то, с учетом предельного значения интеграла типа Коши (4.9) при $z \rightarrow x - i0$, из условий (4.8) получим граничные условия для компонент функции $W(z)$

$$\begin{aligned} X(x, 0) &= \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)R} (x - T_\varepsilon V), & -a < x < b, \\ Y(x, 0) &= \begin{cases} \pi p_0 \theta(x + a_1) - \pi T_\sigma V p_0 \delta(x + a_1), & x \leq -a, \\ \pi p_0 \theta(b_1 - x) + \pi T_\sigma V p_0 \delta(b_1 - x), & x \geq b. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Задача определения функции $W(z)$, аналитической при $y \leq 0$, по заданным граничным условиям (4.11) при $y = 0$ является частным случаем задачи Римана–Гильберта. Решение этой задачи, ведущее себя как P/z при $z \rightarrow \infty$, имеет вид [25]

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{\pi \sqrt{Z(z)}} \left[P + \int_{-a}^b X(x, 0) \sqrt{-Z(x)} \frac{dx}{x - z} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{-a} Y(x, 0) \sqrt{-Z(x)} \frac{dx}{x - z} + \int_b^{\infty} Y(x, 0) \sqrt{Z(x)} \frac{dx}{x - z} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь

$$Z(z) = (z + a)(z - b),$$

P — нормальная внешняя сила, действующая на цилиндр (см. рис. 4.2).

Зная функцию W , можно определить напряжение σ_y^* и перемещение w^* на границе $y = 0$ из соотношений [25]

$$X(x, 0) = E^* \frac{\partial w^*}{\partial x}, \quad Y(x, 0) = \pi \sigma_y^*|_{y=0}; \quad E^* = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}. \quad (4.13)$$

С учетом этих соотношений, после взятия интегралов в (4.12) получим следующие выражения для напряжения σ_y^* и перемещений w^* :

$$\begin{aligned} \sigma_y^*|_{y=0} &= -p^*(x) = [-F(x) + G(x)] / \pi, \quad -a < x < b, \\ \frac{\partial w^*}{\partial x} &= \frac{x - T_\varepsilon V}{R} + \begin{cases} [H(x) - F(x)] / E^*, & -a_1 < x < -a, \\ [F(x) - H(x)] / E^*, & b < x < b_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{|Z(x)|}} \left\{ \frac{E^*}{R} \left[\frac{1}{8} (a+b)^2 + \frac{1}{2} (x - T_\varepsilon V)(b - a - 2x) \right] + \right. \\ &\quad \left. + P + \frac{1}{2} p_0 \ln \frac{2a_1 + b - a + 2\sqrt{Z(-a_1)}}{2b_1 - b + a + 2\sqrt{Z(b_1)}} + \right. \\ &\quad \left. + p_0 \left[\sqrt{Z(-a_1)} + \sqrt{Z(b_1)} \right] + T_\sigma V p_0 \left[\frac{\sqrt{Z(b_1)}}{b_1 - x} - \frac{\sqrt{Z(-a_1)}}{a_1 + x} \right] \right\}, \\ G(x) &= p_0 \left\{ \pi + \frac{(a_1 - a)(b - x) - (a_1 + b)(a + x)}{2\sqrt{Z(-x)Z(-a_1)}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(b_1 + a)(b - x) - (b_1 - b)(a + x)}{2\sqrt{Z(-x)Z(b_1)}} \right\}, \\ H(x) &= p_0 \left\{ -\operatorname{arcth} \frac{(a_1 - a)(x - b) + (a_1 + b)(x + a)}{2\sqrt{Z(x)Z(-a_1)}} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arcth} \frac{(b_1 + a)(x - b) + (b_1 - b)(x + a)}{2\sqrt{Z(x)Z(b_1)}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Определение истинных напряжений и перемещений на границе вязкоупругого полупространства. Напряжения и перемещения на границе вязкоупругого полупространства определяются путем решения дифференциальных уравнений (4.8). В качестве граничных условий используются условия непрерывности для этих напряжений и перемещений.

С учетом условия $p(-a) = -p_0$, где $p(x) = -\sigma_y|_{y=0}$ — контактное давление, получим в области контакта $-a < x < b$ выражение

$$p(x) = -\frac{1}{T_\sigma V} \int_{-a}^x p^*(t) e^{(x-t)/(T_\sigma V)} dt - p_0 e^{(x+a)/(T_\sigma V)}. \quad (4.16)$$

Учитывая условие $\partial w / \partial x = -a / R$ при $x = -a$, получим следующее выражение для перемещений при $-a_1 < x < -a$:

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x} = \frac{1}{T_\varepsilon V} \int_x^{-a} \frac{\partial w^*(t)}{\partial t} e^{(x-t)/(T_\varepsilon V)} dt - \frac{a}{R} e^{(x+a)/(T_\varepsilon V)}. \quad (4.17)$$

Чтобы получить выражение для перемещений в области $b < x < b_1$, используем условие $\partial w / \partial x = b / R$ при $x = b$:

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x} = -\frac{1}{T_\varepsilon V} \int_b^x \frac{\partial w^*(t)}{\partial t} e^{(x-t)/(T_\varepsilon V)} dt + \frac{b}{R} e^{(x-b)/(T_\varepsilon V)}. \quad (4.18)$$

Полученные соотношения (4.16)–(4.18), в которых функции $p^*(x)$ и $\partial w^*(x) / \partial x$ заданы выражениями (4.7), определяют нормальные давление и перемещение на границе вязкоупругого полупространства.

Определение границ областей контакта и адгезионного взаимодействия. Соотношения (4.16)–(4.18), определяющие напряжения и перемещения на границе вязкоупругого полупространства, содержат неизвестные величины a , b , a_1 и b_1 — координаты границ области контакта цилиндра с полупространством ($-a$ и b) и внешних границ области адгезионного притяжения поверхностей ($-a_1$ и b_1). Для определения этих четырех неизвестных величин необходимо четыре условия.

Первое условие вытекает из оставшегося неиспользованным условия непрерывности контактного напряжения при $x = b$. Из выражения (4.16) с учетом условия $p(b) = -p_0$ получим

$$-\frac{1}{T_\sigma V} \int_{-a}^b p^*(x, 0) e^{-x/(T_\sigma V)} dx + p_0 \left(1 - e^{(a+b)/(T_\sigma V)} \right) = 0. \quad (4.19)$$

Второе условие получается из условия затухания деформаций на границе полупространства при $x \rightarrow \infty$. Применение этого условия к соотношению (4.18) дает

$$\frac{1}{T_\varepsilon V} \int_b^{+\infty} \frac{\partial w^*(x)}{\partial x} e^{-x/(T_\varepsilon V)} dx - \frac{b}{R} e^{-b/(T_\varepsilon V)} = 0. \quad (4.20)$$

Третье и четвертое условия следуют из того, что величина зазора между поверхностями цилиндра и полупространства в точках $x = -a_1$ и $x = b_1$ должна быть равна максимальному расстоянию δ_0 , при котором поверхности еще испытывают адгезионное притяжение (см. (4.2)). Приравнивая величину зазора в точке $x = -a_1$ величине δ_0 , определяемой соотношением (4.3), получим

$$f(-a_1) - f(-a) - w(-a_1) + w(-a) = \gamma / p_0,$$

откуда следует

$$\int_{-a_1}^{-a} \frac{\partial w(x)}{\partial x} dx = \frac{\gamma}{p_0} - \frac{a_1^2 - a^2}{2R}.$$

Подставляя в это соотношение выражение для производной нормального перемещения границы полупространства (4.17) при $-a_1 < x < -a$ и выполняя замену пределов интегрирования, получим условие

$$\int_{-a_1}^{-a} \frac{\partial w^*(x)}{\partial x} \left(1 - e^{-\frac{a_1+x}{T_\varepsilon V}} \right) dx - \frac{a T_\varepsilon V}{R} \left(1 - e^{-\frac{a_1-a}{T_\varepsilon V}} \right) = \frac{\gamma}{p_0} - \frac{a_1^2 - a^2}{2R}. \quad (4.21)$$

Аналогичным образом, приравнивая величину зазора в точке $x = b_1$ величине h_0 , находим четвертое условие:

$$\int_b^{b_1} \frac{\partial w^*(x)}{\partial x} \left(e^{\frac{b_1-x}{T_\varepsilon V}} - 1 \right) dx - \frac{b T_\varepsilon V}{R} \left(e^{\frac{b_1-b}{T_\varepsilon V}} - 1 \right) = \frac{\gamma}{p_0} - \frac{b_1^2 - b^2}{2R}. \quad (4.22)$$

Полученная система из четырех уравнений (4.19)–(4.22) для определения четырех неизвестных a , b , a_1 и b_1 решалась численно методом Ньютона.

Частный случай упругого полупространства. Рассмотрим случай упругого полупространства, взаимодействующего с жестким цилиндром при наличии адгезии. В этом случае получим контактную задачу для упругой полуплоскости с граничными условиями (4.4)–(4.6). Решая эту задачу методом, аналогичным изложенному, находим следующие выражения для контактного давления при $-a \leq x \leq a$ (решение симметрично относительно оси Oy , т. е. $b = a$, $b_1 = a_1$):

$$p(x) = \frac{E^*}{\pi R} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{p_0}{\pi} [\xi_+(x) - \xi_-(x) - \pi], \quad (4.23)$$

$$\xi_{\pm}(x) = \frac{a_1 x \pm a^2}{\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{a_1^2 - a^2}}$$

и упругого перемещения границы полупространства при $a \leq x \leq a_1$:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{x}{R} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{R} + \frac{p_0}{E^*} [\eta_+(x) - \eta_-(x)], \quad (4.24)$$

$$\eta_{\pm}(x) = \operatorname{arcth} \frac{a_1 x \mp a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{a_1^2 - a^2}}.$$

Кроме того, получаем выражение для нагрузки, приложенной к цилиндру:

$$P = E^* a^2 / (2R) - 2p_0 \sqrt{a_1^2 - a^2}, \quad (4.25)$$

и условие

$$a_1 \sqrt{a_1^2 - a^2} + \left(a^2 \frac{4p_0}{E^*} \sqrt{a_1^2 - a^2} \right) \ln \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - a^2}}{a} = \frac{2R\gamma}{p_0}, \quad (4.26)$$

которое получено в результате приравнивания величины зазора в точке $x = a_1$ величине δ_0 , определяемой соотношением (4.2). Соотношения (4.25) и (4.26) служат для численного определения координат a и a_1 границ областей контакта и адгезионного взаимодействия.

4.2.3. Влияние молекулярной адгезии на контактные характеристики и силу трения

В ходе численного решения задачи исследовалась зависимость контактных характеристик от безразмерных параметров, характеризующих вязкие свойства полупространства T_e/T_σ , адгезию поверхностей $\lambda = p_0[9R\pi/(8E^{*2}\gamma)]^{1/3}$, скорость скольжения цилиндра и время последействия материала полупространства $c/(2VT_e)$, а также величину нормальной нагрузки $\lambda P/(cp_0)$, где $c = [R^2\gamma/(9\pi E^*)]^{1/3}$.

На рис. 4.3 показаны распределения безразмерного контактного давления $\lambda p/p_0$ по безразмерной координате x/l при $T_e/T_\sigma = 3$, $\lambda = 0,5$ и разных значениях нагрузки. Штриховые линии показывают распределение давления при тех же параметрах для упругого полупространства (соотношения (4.23), (4.25), (4.26)); эти результаты совпадают с решением, полученным для вязкоупругого полупространства при $T_e/T_\sigma = 1$. Видно, что учет вязких свойств полупространства приводит к уменьшению области контакта и увеличению максимального контактного давления. Кроме того, распределение контактного давления

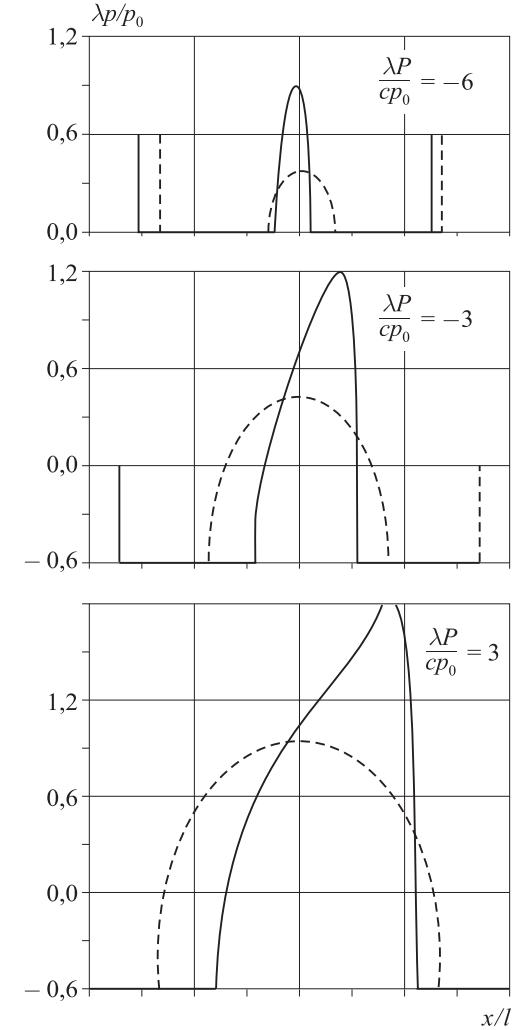


Рис. 4.3. Распределения безразмерного контактного давления при различных величинах нагрузки для вязкоупругого (сплошные линии) и упругого (штриховые линии) полупространства

становится несимметричным. При положительных значениях нагрузки P (внешняя сила прижимает цилиндр к полупространству) область контакта смещается в сторону движения цилиндра. При достаточно больших отрицательных нагрузках (внешняя сила разрывает цилиндр

и полупространство) область контакта смещается против движения цилиндра. Аналогичным образом смещается и область адгезионного взаимодействия поверхностей, в которой безразмерное давление на границе вязкоупругого полупространства постоянно и равно $p = -p_0$.

Зависимость безразмерной ширины области контакта $(a+b)/l$ и ее смещения относительно оси симметрии цилиндра $(b-a)/l$ от параметра скорости $c/(2VT_\epsilon)$ представлена на рис. 4.4 при $\lambda = 0,5$, $T_\epsilon/T_\sigma = 3$ и различных безразмерных нагрузках: $\lambda P/(cp_0) = -6,3$ (кривая 1), $\lambda P/(cp_0) = -3$ (кривая 2) и $\lambda P/(cp_0) = 3$ (кривая 3). Результаты расчетов дают возможность заключить, что ширина области контакта ограничена предельными значениями, которые она имеет при $V \rightarrow 0$ и $V \rightarrow \infty$. Случай $V \rightarrow 0$ соответствует решению задачи о взаимодействии цилиндра с упругим полупространством, характеризующимся модулем E . В случае $V \rightarrow \infty$ вязкоупругое полупространство ведет себя как упругое тело с модулем ET_ϵ/T_σ , называемым мгновенным модулем упругости. В случае положительных нагрузок (кривая 3) увеличение скорости скольжения V (уменьшение параметра $c/(2VT_\epsilon)$) приводит к уменьшению размера площадки контакта. Этот эффект аналогичен эффекту всплывания при скольжении по вязкоупругому телу в отсутствие адгезии (см. главу 2). В случае отрицательных значений нагрузки зависимость размера площадки контакта от скорости немонотонна, а именно, при больших значениях скорости (малых значениях параметра $c/(2VT_\epsilon)$) имеется область, в которой уменьшение размера площадки контакта происходит при уменьшении скорости скольжения (кривая 2). Эта область расширяется

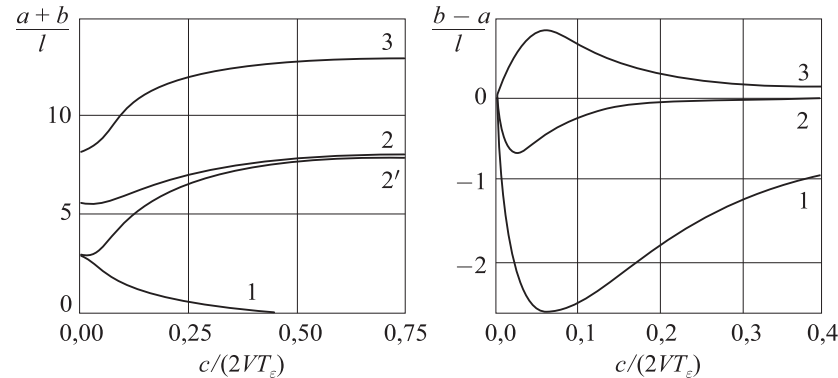


Рис. 4.4. Зависимость безразмерной ширины области контакта и ее смещения относительно оси симметрии цилиндра от параметра скорости при различных значениях нагрузки на цилиндр

при увеличении абсолютного значения отрицательной нагрузки P . При достаточно больших абсолютных значениях нагрузки уменьшение скорости приводит к уменьшению размера площадки контакта до нуля, за чем следует отрыв взаимодействующих поверхностей (кривая 1). Таким образом, наличие адгезии приводит при отрицательных нагрузках к эффекту, обратному эффекту всплывания: при увеличении скорости разделенные поверхности вступают в контакт, при этом область контакта с возрастанием скорости увеличивается.

Кривая 2' в левой части рис. 4.4 получена при тех же значениях параметров, что и кривая 2, но при другой вязкости $T_\epsilon/T_\sigma = 10$. Кривая 2', в отличие от кривой 2, имеет монотонный характер, т. е. увеличение параметра вязкости T_ϵ/T_σ привело к уменьшению эффектов, связанных с адгезией.

Смещение площадки контакта $(b-a)/l$, графики которого приведены в правой части рис. 4.4, положительно при положительных нагрузках, т. е. площадка контакта смещается по ходу движения цилиндра (кривая 3), при этом смещение достигает максимума при некотором значении параметра скорости $c/(2VT_\epsilon)$ и стремится к нулю при $c/(2VT_\epsilon) \rightarrow 0$ и $c/(2VT_\epsilon) \rightarrow \infty$. При отрицательных нагрузках площадка контакта смещается в противоположную сторону (смещение становится отрицательным, кривые 1 и 2).

Результаты показывают, что области контакта и адгезионного взаимодействия смещаются относительно оси симметрии цилиндра, распределение контактного давления также несимметрично. Это приводит к возникновению тангенциальной силы, действующей со стороны вязкоупругого полупространства на цилиндр, несмотря на то, что постановка задачи предполагает нулевые тангенциальные напряжения на границе полупространства ($\tau_{xy} = 0$ при $y = 0$).

Рассчитаем тангенциальную силу T , которую надо приложить к цилиндру, чтобы обеспечить его движение с постоянной скоростью по границе вязкоупругого полупространства. Эта сила равна компоненте силы реакции полупространства вдоль оси Ox . Поскольку размер области взаимодействия $a_1 + b_1$ много меньше радиуса R цилиндра, справедливо соотношение (см. рис. 4.1)

$$T = \int_{-a_1}^{b_1} p(x) \sin \varphi(x) dx \approx \frac{1}{R} \int_{-a_1}^{b_1} xp(x) dx. \quad (4.27)$$

Приводя равенство (4.27) к безразмерному виду, получим

$$\frac{9\pi}{2\gamma} T = \int_{-a}^b \xi \bar{p}(\xi) d\xi = \int_{-a/l}^{b/l} \xi \bar{p}(\xi) d\xi - \frac{\lambda}{2l^2} (b_1^2 - b^2 + a^2 - a_1^2). \quad (4.28)$$

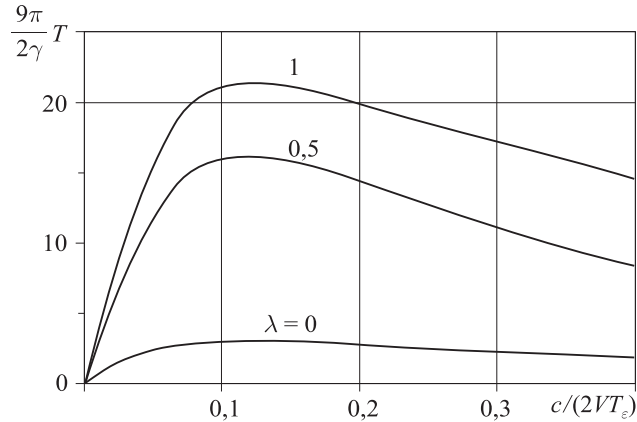


Рис. 4.5. Зависимость безразмерной деформационной силы трения от параметра скорости при различных значениях параметра адгезии

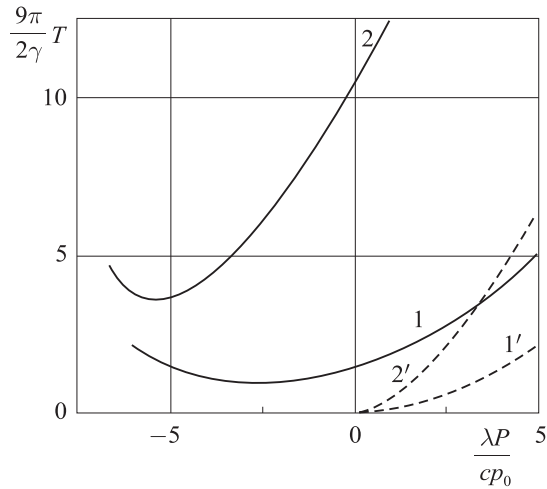


Рис. 4.6. Зависимость безразмерной силы трения от нагрузки на цилиндр

На рис. 4.5 и 4.6 представлены графики зависимостей величины $\frac{9\pi}{2\gamma}T$, рассчитанной по формуле (4.28), от параметров $c/(2VT_\epsilon)$ и $\lambda P/(cp_0)$. Кривые на рис. 4.5 получены при $T_\epsilon/T_\sigma = 3$, $\lambda P/(cp_0) = 3$ и разных значениях параметра адгезии λ . Параметр λ аналогичен пара-

метру адгезии, введенному для упругого адгезионного контакта [18]. Этот параметр характеризует соотношение между упругими и адгезионными свойствами материала. Случай $\lambda \rightarrow 0$ соответствует достаточно жестким материалам и слабым адгезионным силам, когда адгезия не оказывает влияния на распределение контактных давлений; этот случай описывается моделью адгезии Дерягина–Муллера–Топорова (ДМТ). Случай $\lambda \rightarrow \infty$ соответствует очень мягким материалам и высоким адгезионным силам, сосредоточенным в узкой зоне вокруг областей контакта; этот случай описывается моделью Джонсона–Кендалла–Робертса (ДКР).

Результаты решения задачи показывают, что увеличение параметра адгезии λ приводит к возрастанию тангенциальной силы. Как и в случае отсутствия адгезии, тангенциальная сила отлична от нуля в некотором диапазоне значений $c/(2VT_\epsilon)$ и стремится к нулю при $c/(2VT_\epsilon) \rightarrow 0$ и $c/(2VT_\epsilon) \rightarrow \infty$. Эти предельные случаи, как отмечалось, соответствуют решению задачи в упругой постановке.

Результаты показывают также, что тангенциальная сила T , действующая на цилиндр со стороны полупространства, всегда направлена против движения цилиндра как при положительных, так и при отрицательных значениях нагрузки. Зависимости этой величины от нагрузки $\lambda P/(cp_0)$ приведены на рис. 4.6 при наличии адгезии (кривые 1 и 2) и при отсутствии адгезии (кривые 1' и 2'). Кривые 1 и 1' соответствуют $c/(2VT_\epsilon) = 0,01$, кривые 2 и 2' — $c/(2VT_\epsilon) = 0,1$. При отсутствии адгезии ($\lambda = 0$) тангенциальная сила сопротивления движению цилиндра равна нулю при $P = 0$ и монотонно возрастает при $P > 0$. Учет адгезии приводит к немонотонной зависимости T от нагрузки P с минимумом в области отрицательных нагрузок.

4.2.4. Капиллярная адгезия при скольжении цилиндра

Капиллярная адгезия вызвана наличием в зазоре менисков жидкости, стягивающих между собой выступы взаимодействующих поверхностей. Согласно формуле Лапласа, давление под искривленной поверхностью жидкости меньше атмосферного давления p_{atm} на величину

$$p_0 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 , R_2 — радиусы кривизны боковой поверхности мениска, σ — поверхностное натяжение жидкости.

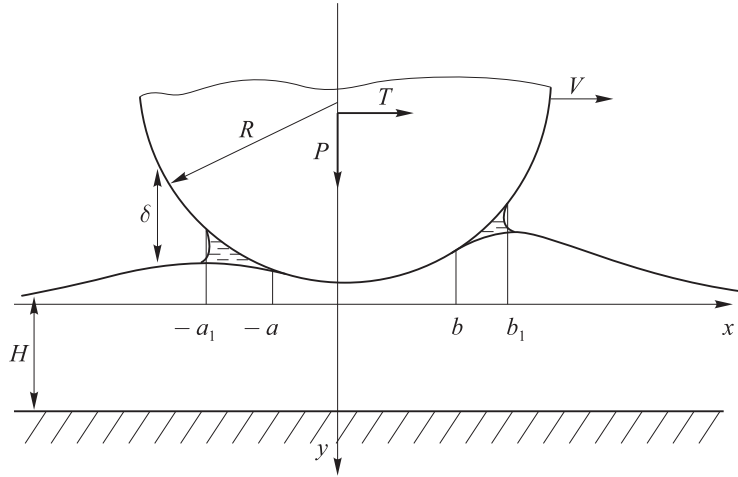


Рис. 4.7. Схема скольжения цилиндра по вязкоупругому слою при наличии капиллярной адгезии

При взаимодействии между жестким цилиндром радиуса R и первоначально плоской поверхностью деформируемого основания (рис. 4.7) контакт между поверхностями имеет место в некоторой области $-a \leq x \leq b$. Вне области контакта в областях, занятых менисками, $-a_1 \leq x \leq -a$ и $b \leq x \leq b_1$, на основание действует равномерное давление $p_{atm} - p_0$. Считая, что угол смачивания равен нулю, а радиус цилиндра много больше размеров области взаимодействия, $a_1 \ll R$, $b_1 \ll R$, можно написать

$$R_1 \approx \frac{\delta_1}{2}, \quad R_2 \approx \frac{a_1 + b_1}{2},$$

где δ_1 — величина зазора между взаимодействующими поверхностями на внешней границе области мениска. Предполагаем, что эта величина удовлетворяет условию $\delta_1 \ll b_1$, $\delta_1 \ll a_1$, откуда получим

$$p_0 = \frac{2\sigma}{\delta_1}. \quad (4.29)$$

При постановке контактной задачи атмосферное давление полагается равным нулю, т. е. в области менисков на поверхность основания действует отрицательное давление $p(x) = -p_0$.

Основание, по которому скользит цилиндр, представляет собой одномерный вязкоупругий слой толщины H , лежащий на жесткой под-

ложке (см. рис. 4.7). Механические свойства слоя описываются одномерной моделью Кельвина–Фойгта:

$$w + T_\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{(1-\nu^2)H}{E} \left(p + T_\sigma \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad (4.30)$$

где $w(x^0, y^0, t)$ — смещение поверхности в направлении оси y , $p(x^0, y^0, t)$ — давление, отношение толщины слоя H к приведенному модулю $\frac{E}{1-\nu^2}$ характеризует податливость слоя, остальные обозначения в уравнении (4.30) совпадают с обозначениями в определяющих уравнениях для вязкоупругого полупространства (4.3). Как и прежде, предполагается, что скорость V много меньше скорости распространения звука в вязкоупругой среде и направлена вдоль оси Ox .

Перейдем к подвижной системе координат (x, y, z) , жестко связанной с индентором:

$$x^0 = x + Vt, \quad y^0 = y, \quad z^0 = z. \quad (4.31)$$

Движение будем считать установившимся, следовательно, в подвижной системе координат (x, y, z) давление и перемещение не зависят от времени. Тогда в этой системе координат соотношение (4.30), описывающее механические свойства вязкоупругого основания, примет вид:

$$w - VT_\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(1-\nu^2)H}{E} \left(p - T_\sigma V \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (4.32)$$

Для нормального перемещения $w(x)$ и давления $p(x)$ имеют место следующие условия. В области контакта:

$$w(x) = D - \frac{x^2}{2R}, \quad -a \leq x \leq b. \quad (4.33)$$

В области мениска:

$$p(x) = -p_0, \quad -a_1 \leq x < -a, \quad b < x \leq b_1. \quad (4.34)$$

При $x < -a_1$, $x > b_1$ поверхность основания не нагружена, $p(x) = 0$.

Капиллярное давление в мениске меньше нуля, $-p_0$, его величина задается условием (4.29):

$$p_0 = \frac{2\sigma}{\delta(-a_1)} = \frac{2\sigma}{\delta(b_1)}. \quad (4.35)$$

Величина зазора между цилиндром и основанием определяется выражением $\delta(x) = u(x) + \frac{x^2}{2R} - d$, где d — внедрение цилиндра. Также выпол-

няется условие равновесия для цилиндра:

$$P = \int_{-a_1}^{b_1} p(x) dx \quad (4.36)$$

и условие сохранения объема жидкости в мениске:

$$v = \int_{-a_1}^{-a} d(x) dx + \int_b^{b_1} d(x) dx. \quad (4.37)$$

Подставляя условия (4.33) и (4.34) в уравнение (4.32), получим дифференциальные уравнения для функции $w(x)$ на интервалах $-a_1 \leq x \leq -a$ и $b \leq x \leq b_1$ и для функции $p(x)$ на интервале $-a \leq x \leq b$. В качестве граничных условий для этих уравнений используются условия непрерывности контактного давления на краях области контакта $x = -a$, $x = b$, условие непрерывности перемещения и его затухания на бесконечности. В результате, для контактного давления получено выражение

$$p(x) = \frac{E^*}{2RH} \left[2dR - x^2 + 2T_\varepsilon V(T_\varepsilon V + x) \left(\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} - 1 \right) \right] - e^{-\frac{(x+a)T_\varepsilon}{V}} \left[p_0 + \frac{E}{2RH} \left\{ 2dR - a^2 + 2T_\sigma V(T_\sigma V - T_\varepsilon) \left(\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} - 1 \right) \right\} \right], \quad (4.38)$$

где $d = -\frac{Hp_0}{E^*} + \frac{b^2}{2R}$. Величины a , b , a_1 , b_1 , p_0 определяются численно из системы алгебраических уравнений.

На рис. 4.8 показано распределение безразмерного контактного давления при скольжении цилиндра при наличии мениска (сплошная линия) и без мениска (штриховая линия). Графики построены при следующих значениях параметров: безразмерная нагрузка на цилиндр $P \frac{H}{ER} = 0,01$; параметр скорости $\frac{R}{T_\varepsilon V} = 10$; параметр вязкости

$\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} = 1000$, безразмерный объем жидкости $\frac{v}{R^2} = 4$; безразмерное поверхностное натяжение $\sigma \frac{2H}{ER^2} = 4 \times 10^{-4}$. Результаты показывают, что наличие мениска приводит к увеличению размера области контакта и к повышению контактного давления.

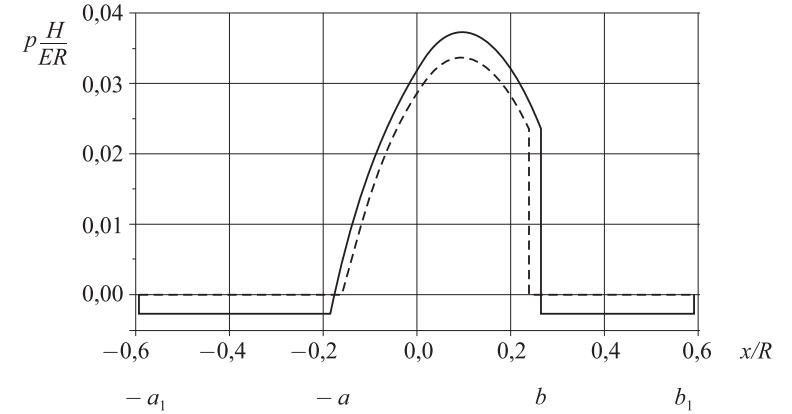


Рис. 4.8. Распределения контактного давления при наличии (сплошная кривая) и отсутствии (штриховая кривая) мениска

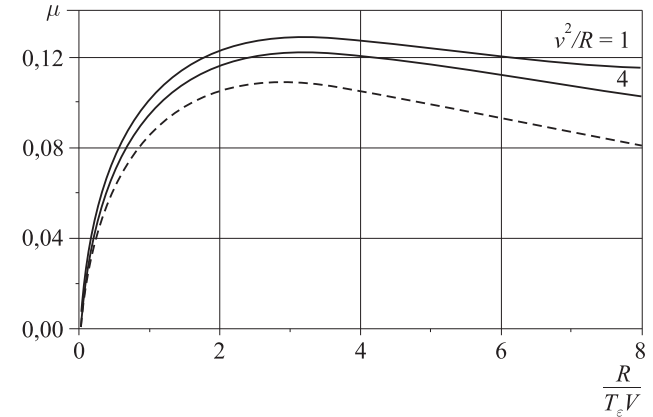


Рис. 4.9. Зависимость коэффициента трения μ от параметра скорости при различных объемах менисков

На рис. 4.9 показаны зависимости коэффициента трения $\mu = T / P$, где тангенциальная сила сопротивления скольжению цилиндра T рассчитывается по соотношению (4.27), от параметра скорости $R / (T_\varepsilon V)$. Результаты, представленные на рис. 4.9, получены при тех же значениях параметров, что и результаты на рис. 4.8, и при двух различных безразмерных объемах жидкости в мениске $\frac{v}{R^2} = 1$ и 4. Штриховая линия соответствует случаю отсутствия мениска.

Результаты показывают, что капиллярная адгезия, подобно молекулярной адгезии, приводит к увеличению силы трения. При этом максимум коэффициента трения смещается в сторону меньших скоростей. Величина коэффициента трения тем выше, чем меньше размер мениска.

4.3. Скольжение сферической неровности по вязкоупругому основанию при наличии адгезии

В разделе 4.1 была рассмотрена и решена контактная задача о скольжении цилиндрической неровности по вязкоупругому полупространству при наличии адгезии. Цилиндрическую форму могут иметь, например, выступы поверхности с искусственно нанесенным двумерным рельефом или текстурой. Однако поверхностные неровности реальных шероховатых поверхностей чаще имеют форму трехмерных выступов. Задача о скольжении жесткой единичной неровности сферической формы в отсутствие адгезии была рассмотрена в главе 2. В настоящем разделе учитывается адгезионное притяжения между неровностью и вязкоупругим основанием, действующее вне области контакта. При этом дополнительно будет учитываться изменение поверхностных свойств в результате нахождения поверхностей в контакте. Для упрощения анализа в качестве модели вязкоупругого тела рассматривается одномерный вязкоупругий слой, лежащий на жестком основании.

4.3.1. Постановка задачи о скольжении сферического индентора

Сферический индентор скользит с постоянной скоростью V по вязкоупругому слою толщины H (рис. 4.10), механические свойства которого описываются одномерной моделью Кельвина–Фойгта (4.30). После перехода к подвижной системе координат, связанной с индентором (4.31), уравнение для описания свойств вязкоупругого слоя принимает вид (4.32).

Поскольку область взаимодействия поверхностей на порядок меньше радиуса сферы R , форму индентора можно принять в виде параболоида вращения с тем же радиусом кривизны:

$$f(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{2R}. \quad (4.39)$$

Адгезионное взаимодействие поверхностей описывается моделью Можи–Дагдейла (4.1)–(4.2). При этом в общем случае будем полагать, что адгезионное давление — различное на входе в контакт и на выходе из него в силу изменения свойств поверхности после нахождения ее

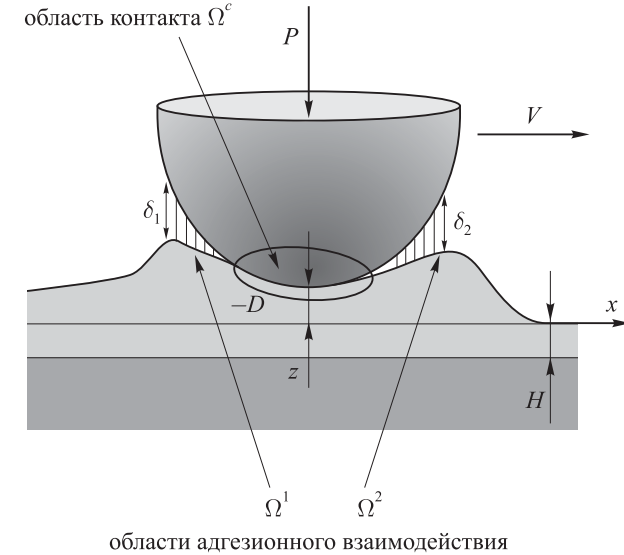


Рис. 4.10. Схема скольжения сферической неровности по поверхности вязкоупругого слоя, сцепленного с жестким основанием

в контакте. Пусть до вступления в контакт адгезионное взаимодействие между поверхностями характеризуется отрицательным давлением $p_0 = -p_2$, если величина зазора в этой области не превосходит значение δ_2 . В той же области поверхности после выхода ее из контакта действует постоянное давление $p_0 = p_1$ при зазоре, не превышающем значение δ_1 .

Обозначим область контакта поверхностей за Ω^c , а области действия адгезионного притяжения на входе и выходе из контакта соответственно Ω^2 и Ω^1 (см. рис. 4.10). Тогда в области Ω^c выполняется условие контакта поверхностей:

$$w(x, y) = f(x, y) + d, \quad (x, y) \in \Omega^c, \quad (4.40)$$

где d — величина внедрения индентора.

В областях Ω^i известно распределение адгезионных давлений:

$$p(x, y) = -p_j, \quad (x, y) \in \Omega^j. \quad (4.41)$$

Нормальная сила P рассчитывается путем интегрирования контактных напряжений по всей области взаимодействия:

$$P = \iint_{\Omega^c \cup \Omega^j} p(x, y) dx dy. \quad (4.42)$$

4.3.2. Решение задачи методом полос

Задача решается методом полос, который является точным для рассматриваемой одномерной модели вязкоупругого слоя. В каждой полосе между сечениями области взаимодействия плоскостями $y = j$, где $j = 0, \dots, N$, контактная задача решается в плоской постановке. Вводятся в рассмотрение следующие функции:

$$p^j(x) = p(x, y)|_{y=j} = p(x, j), \quad w^j(x) = w(x, j), \quad f^j(x) = f(x, j).$$

Значение $j = 0$ соответствует центральному сечению. В полосе $y = j$ области $\Omega^1, \Omega^c, \Omega^2$ примут вид интервалов соответственно $(-a^j, -a^j), (-a^j, b^j), (b^j, b_1^j)$.

Для произвольного сечения $y = j$ возможен один из двух видов постановки граничной задачи:

- 1) на поверхности вязкоупругого слоя существуют неизвестные заранее области контакта Ω^c , адгезионного притяжения Ω^1 и Ω^2 , остальная граница не нагружена;
- 2) на поверхности вязкоупругого слоя существует область адгезионного притяжения Ω^a , а остальная граница не нагружена (рассматриваемое сечение не входит в контакт с основанием).

Случай контакта поверхностей. Форма поверхности индентора в произвольном j -м сечении плоскостью $y = j$ имеет вид:

$$f^j(x) = f^0(x) - j^2/2R,$$

где $f^0(x)$ — форма поверхности в сечении, проходящем через ось симметрии индентора. Таким образом, функции формы в различных сечениях отличаются друг от друга на постоянную величину.

При известном максимальном внедрении d распределение давлений $p^j(x)$ в произвольном j -м сечении находится из решения дифференциального уравнения (4.32) с известной левой частью, определяемой формой штампа, и имеет вид:

$$p^j(x) = Ce^{x/(T_\sigma V)} + \frac{E}{H(1-\nu^2)} \left(d^j - \frac{x^2}{2R} + \frac{V}{R}(x + T_\sigma V)(T_\varepsilon - T_\sigma) \right),$$

$$-a^j < x < b^j,$$

где $d^j = d - \frac{j^2}{2R}$. Отсюда видно, что решение задачи в сечении $y = j$ при фиксированном внедрении d будет то же, что и для сечения $y = 0$ при значении внедрения d^j .

В областях адгезии за индентором $(-a_1^j, -a^j)$ и перед индентором (b^j, b_1^j) уравнение (4.32) решается относительно неизвестной функции перемещений $w^j(x)$ границы в направлении оси Oz при известном распределении давления, соответственно,

$$p^j(x) = -p_1 \quad (x \in \Omega^1) \quad \text{и} \quad p^j(x) = -p_2 \quad (x \in \Omega^2).$$

Из условий непрерывности функций $p^j(x)$ и $w^j(x)$ следует система уравнений для определения неизвестных концов участков контакта и зон действия сил адгезионного притяжения a^j, a_1^j, b^j, b_1^j , как функций переменной d^j .

Случай отсутствия контакта поверхностей. В этом случае в области Ω^a : $(-a_1, b_1)$ действует то же адгезионное давление, какое действовало бы перед входом в контакт в случае контактирования поверхностей: $p^j(x) = -p_2$. Из условий непрерывности функций $p^j(x)$ и $w^j(x)$ получаем систему уравнений относительно неизвестных a_1^j, b_1^j как функций переменной d^j аналогично решению для случая контакта поверхностей.

Изложенный алгоритм позволяет получить соотношения для определения границ области адгезионного взаимодействия в произвольном сечении, параллельном плоскости Oxz , а также распределения контактных давлений и смещения границы вязкоупругого слоя.

Для определения нормальной P и тангенциальной T сил, действующих на индентор, необходимо рассчитать проекции на оси Oz и Ox , соответственно, нормального давления (контактного и адгезионного), действующего на штамп, и поинтегрировать их по соответствующим областям контакта и адгезионного притяжения.

4.3.3. Эффект изменения адгезионных свойств в результате нахождения поверхностей в контакте

Полученные соотношения позволили провести расчеты контактных характеристик (границ областей контакта и адгезионного взаимодействия, распределения давлений и нормальных смещений вязкоупругой поверхности), а также рассчитать нормальную и тангенциальную силы, действующие на индентор при различных значениях параметров задачи (внедрении индентора, скорости его скольжения и т. д.).

На рис. 4.11 приведены графики зависимости безразмерных координат области контакта $-a^0/R$ и b^0/R (кривые 1 и 2, соответственно)

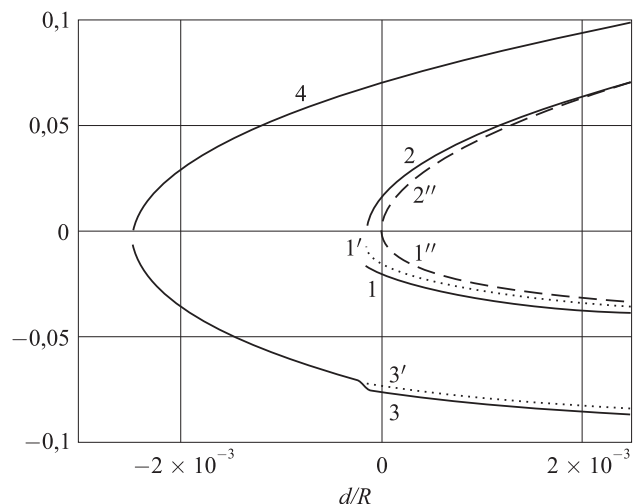


Рис. 4.11. Зависимость координат границ областей контакта и адгезии от внедрения

и безразмерных координат области адгезионного взаимодействия $-a_1^0 / R$ и b_1^0 / R (кривые 3 и 4, соответственно) в центральном сечении в зависимости от максимального внедрения индентора d / R . Здесь кривым 1'' и 2'' соответствуют контактные характеристики задачи с нулевыми давлениями p_1 и p_2 , т. е. в отсутствии адгезионных сил; кривым 1' и 3' — задача с адгезионными силами, но с одинаковой поверхностной энергией (одинаковыми величинами давлений $p_1 = p_2 = 0,68 \times 10^4$ Па); кривым 1–4 соответствует задача с учетом различия поверхностных энергий на входе в контакт и на выходе из него (т. е. различных давлений на входе и на выходе: $p_1 = 1,35 \times 10^4$ Па, $p_2 = 0,68 \times 10^4$ Па).

Результаты, представленные на рис. 4.11, показывают, что при наличии адгезии контакт поверхностей существует в некотором диапазоне отрицательных внедрений. При учете различных адгезионных давлений на входе и выходе область адгезионного взаимодействия с увеличением внедрения расширяется и скачкообразно увеличивается в момент вступления в контакт, при этом скачкообразно возникает контакт по области конечной ширины; асимметрия этих областей больше по сравнению со случаем постоянных адгезионных характеристик. Скачкообразность перехода связана с тем, что в принятой модели адгезионное давление всегда изменяется в результате соприкосновения поверхностей на заданную величину, независимо от времени пребывания в контакте.

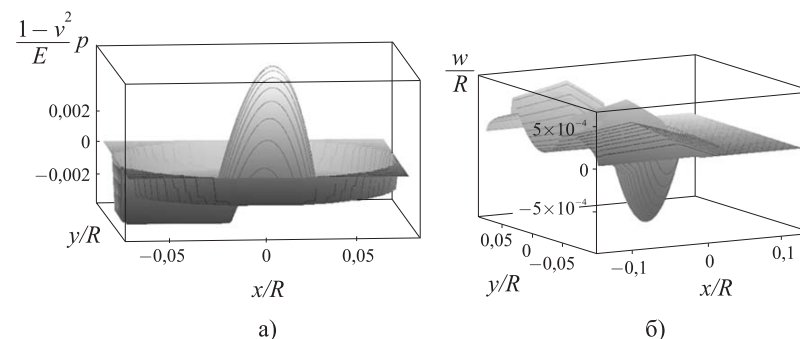


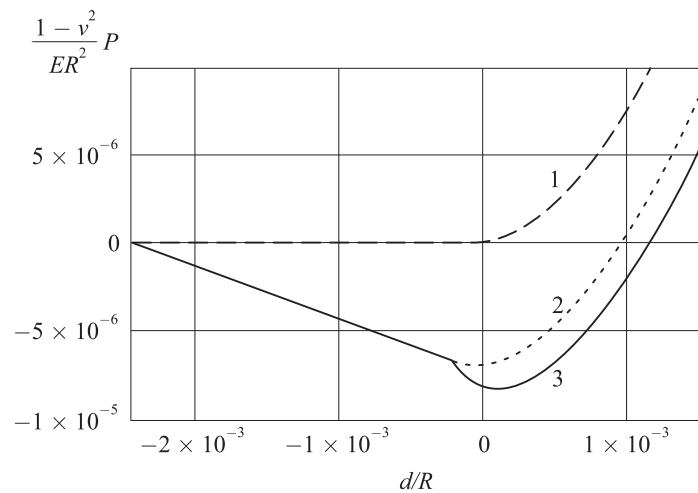
Рис. 4.12. Распределение контактного давления (а) и форма поверхности вязкоупругого основания (б)

На рис. 4.12 приведены в качестве примера распределение безразмерного давления $\frac{1-v^2}{E} p$ и формы поверхности $\frac{w}{R}$ вязкоупругого основания при внедрении $d / R = 2 \times 10^{-3}$ с учетом различных давлений на входе и на выходе из контакта $p_1 = 1,35 \times 10^4$ Па, $p_2 = 0,68 \times 10^4$ Па.

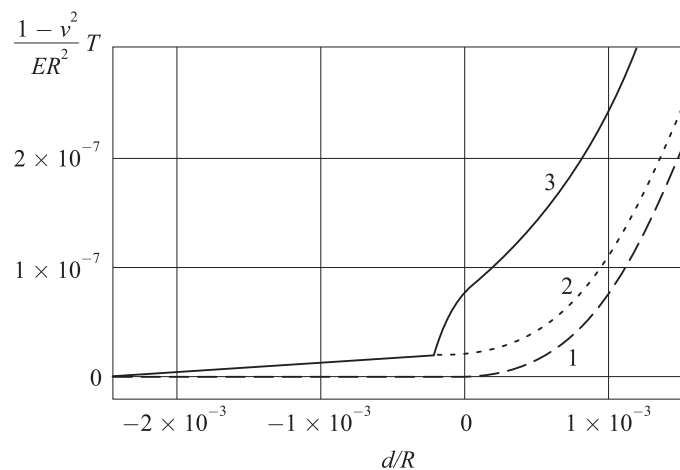
Результаты расчетов показывают, что учет адгезии приводит к появлению отрицательных давлений не только в области адгезионного взаимодействия, но и по краям области контакта. Учет изменения адгезионных характеристик в результате контактирования приводит к образованию высоких по абсолютной величине отрицательных давлений в области, расположенной за скользящим индентором. Это влечет за собой еще более несимметричное распределение давлений в контакте. Учет адгезионного притяжения приводит также к появлению отрицательных (выпучивающих) деформаций в вязкоупругом основании.

На рис. 4.13, а и б приведены зависимости нормальной силы P и силы трения T от внедрения при фиксированной скорости $V = 0,01$ м/с. На рис. 4.14 дана зависимость коэффициента трения от нормальной нагрузки при этом же значении скорости. На рис. 4.13 и 4.14 кривые 1 соответствуют отсутствию адгезии, 2 — наличию адгезии с постоянным адгезионным давлением, а 3 — адгезии с учетом различного адгезионного давления на входе и выходе из контакта.

Представленные зависимости описывают как случай отсутствия контакта, так и контакт поверхностей. Как видно из рис. 4.13, а, нормальная сила уменьшается при наличии адгезионных давлений, причем зависимости ее, а также коэффициента и силы трения (рис. 4.13, б) от внедрения получаются немонотонными. Сила трения при учете адгезии увеличивается (см. рис. 4.13, б), при этом зависимости нормальной силы



а)

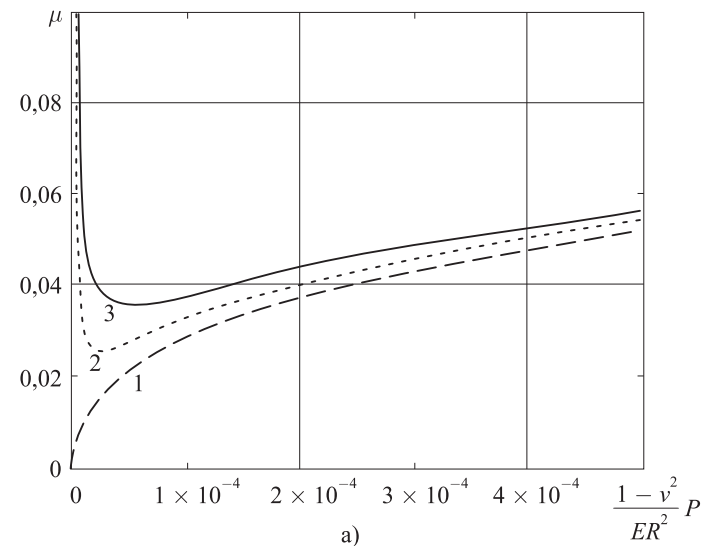


б)

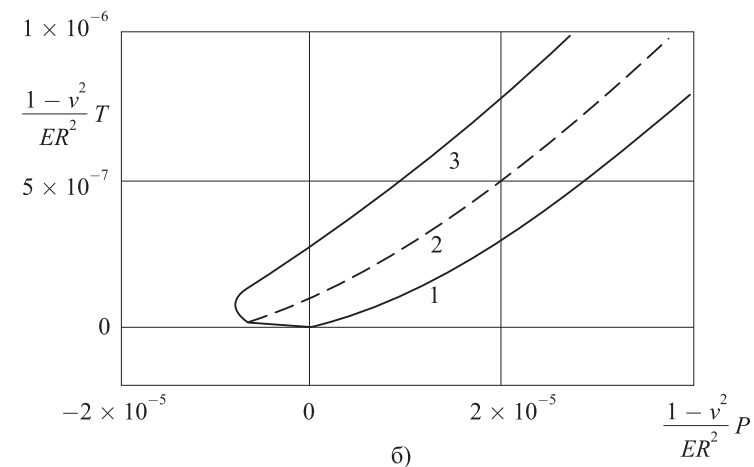
Рис. 4.13. Зависимость нормальной силы (а) и силы трения (б), действующих на штамп, от внедрения

и силы трения от внедрения получают разрыв в месте «точечного» контакта.

Это означает, что при приближении взаимодействующих поверхностей друг к другу (при увеличении внедрения d) вступление поверхностей в контакт происходит скачкообразно. Заметим, что скачкообраз-



а)



б)

Рис. 4.14. Зависимость коэффициента трения (а) и силы трения (б) от нагрузки

ное вступление поверхностей в контакт и выход их из контакта имеет место и в случае решения задачи об адгезионном взаимодействии упругих поверхностей [14, 18, 21], однако в данном случае скачкообразное изменение характеристик связано с упомянутой выше особенностью модели, согласно которой пребывание в контакте приводит к изменению адгезионного давления всегда на одинаковую величину. Из полученных

результатов также можно заключить, что учет различных адгезионных давлений на входе в контакт и на выходе из него оказывает не очень большое влияние на нормальную силу взаимодействия тел, при этом его влияние на силу трения очень существенно.

Результаты, приведенные на рис. 4.14, *а* показывают, что в случае учета адгезии коэффициент трения неограниченно возрастает при стремящейся к нулю нормальной нагрузке. Это связано с тем, что деформационная составляющая силы трения в этом случае отлична от нуля при нулевой нагрузке. Результаты расчетов показывают (рис. 4.14, *б*), что влияние адгезии на силу трения особенно сильно при отрицательных нагрузках, а также малых положительных нагрузках, и этот эффект усиливается, если в результате контактирования поверхностей происходит увеличение их поверхностной энергии. При увеличении нагрузки на коэффициент трения оказывают больше влияния вязкоупругие потери в материале, при этом влияние адгезии становится менее значительным.

4.3.4. Капиллярная адгезия при скольжении сферической неровности

Пусть между сферической неровностью, форма вершины которой описывается соотношением (4.39), и вязкоупругим основанием имеется мениск жидкости объемом v . Условия контактной задачи описываются в этом случае соотношениями (4.40)–(4.42), где адгезионное давление p_j постоянно во всей области, занятой мениском, и равно капиллярному давлению жидкости $p_j = p_0$. Величина этого давления удовлетворяет соотношению (4.29), следующему из формулы Лапласа. Кроме того, удовлетворяется условие сохранения объема жидкости в мениске:

$$v = \iint_{\Omega^a} d(x, y) dx dy,$$

где Ω^a — область, занятая мениском, $d(x, y)$ — величина зазора между поверхностями.

Задача решается методом полос, описанным в разделе 4.3.2. На рис. 4.15 представлены распределения контактного давления при скольжении сферического индентора при наличии мениска для трех различных скоростей скольжения: $V = 10^{-7}$ м/с (*а*), 10^{-6} м/с (*б*) и 10^{-3} м/с (*в*). Расчет проведен для следующих параметров материала, характерных для эластомеров: податливость вязкоупругого слоя $\frac{E}{(1-\nu^2)H} = 5 \times 10^{12}$ Па/м,

время релаксации $T_\sigma = 98$ с, соотношение времен запаздывания и релаксации $T_\varepsilon / T_\sigma = 10$. Радиус неровности брался $R = 5$ мм. Величина внешней нагрузки $P = 0,39$ Н и объем жидкости в мениске $v = 5 \times 10^{-7}$ м одинаковы для трех представленных на рис. 4.15 распределений давлений. Результаты показывают, что при относительно низкой скорости (рис. 4.15, *а*) распределение контактного давления близко к симметричному, а область контакта близка к круговой. При этом мениск, в котором давление отрицательно, занимает узкую кольцевую область вокруг области контакта. При увеличении скорости (рис. 4.15, *б*) область контакта становится вытянутой в направлении оси y , распределение давлений становится несимметричным, при этом большая часть мениска располагается за областью контакта. При дальнейшем увеличении скорости (рис. 4.15, *в*) область контакта снова становится симметричной, материал ведет себя как упругий с более высоким модулем упругости (мгновенный модуль), максимальное контактное давление возрастает, область контакта становится меньше по размеру, а мениск занимает более широкое кольцо вокруг области контакта.

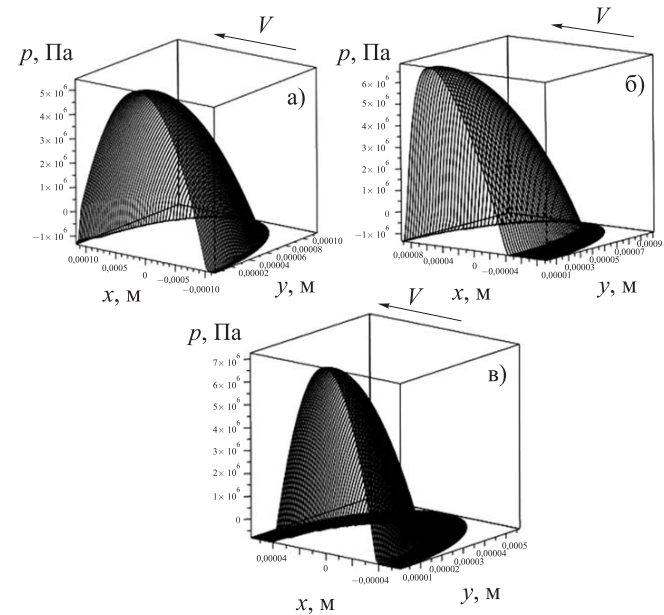


Рис. 4.15. Распределение контактного давления при скольжении сферической неровности при наличии мениска

4.4. Эффект адгезии при скольжении тела с регулярным рельефом по поверхности вязкоупругого основания

В предыдущих разделах были рассмотрены эффекты, возникающие при скольжении по вязкоупругому основанию единичной неровности при наличии адгезии. Для описания реальных шероховатых поверхностей, однако, может быть недостаточно моделировать каждый выступ как отдельную изолированную неровность, поскольку учет точной формы зазора между поверхностями (не только формы вершин выступов, но и впадин между ними) особенно важен при расчете адгезионных сил. В этом случае можно использовать модель поверхности с регулярным рельефом. Контактные задачи о скольжении тела с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию без учета адгезии были рассмотрены в главе 3. В настоящей главе будет построено решение задачи для индентора с регулярным рельефом с учетом молекулярной адгезии и проведено сравнение со случаем скольжения изолированной неровности также с учетом адгезии.

4.4.1. Постановка периодической контактной задачи

Рассматривается жесткий волнистый индентор, скользящий с постоянной скоростью по поверхности вязкоупругого слоя, лежащего на жестком основании. На рис. 4.16 показана схема контакта, где 1 — жесткий волнистый индентор, 2 — вязкоупругий слой, 3 — жесткое основание. Волнистый индентор 1 состоит из периодически расположенных одинаковых выступов, форма его поверхности описывается функцией

$$f(x, y) = h - \frac{h}{4} \left(\cos \frac{2\pi x}{l} + 1 \right) \left(\cos \frac{2\pi y}{l} + 1 \right), \quad (4.43)$$

где h и l — высота выступов и расстояние между ними соответственно. Индентор скользит со скоростью V вдоль оси x и прижимается к вязкоупругому слою внешней силой P , действующей на каждый выступ и направленной вдоль оси z .

Механические свойства вязкоупругого слоя описываются линейной одномерной моделью (4.30), которая при переходе к движущейся системе координат, связанной с индентором, принимает форму (4.32). Адгезионное взаимодействие поверхностей описывается моделью (4.1)–(4.2), адгезионное давление на входе и выходе из контакта считается одинаковым и равным p_0 .

В силу периодической формы поверхности контактную задачу можно рассматривать в ячейке периодичности $x \in (-l/2, l/2)$,

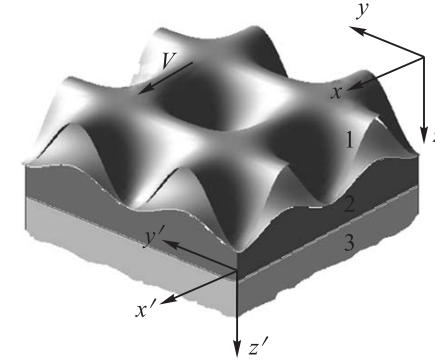


Рис. 4.16. Схема скольжения индентора с регулярным рельефом по поверхности вязкоупругого основания

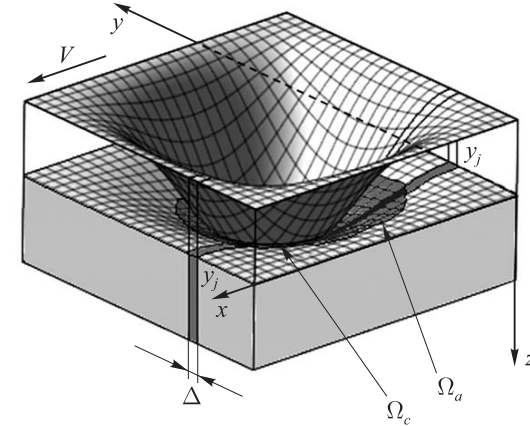


Рис. 4.17. Схема разбиения ячейки периодичности на полосы

$y \in (-l/2, l/2)$, которая содержит один выступ (рис. 4.17). На границе этой области должны удовлетворяться условия периодичности для давления $p(x, y) = p(x + l, y)$, $p(x, y) = p(x, y + l)$ и перемещения $w(x, y) = w(x + l, y)$, $w(x, y) = w(x, y + l)$.

Поверхность вязкоупругого слоя $z=0$ внутри ячейки периодичности $x \in (-l/2, l/2)$, $y \in (-l/2, l/2)$ можно разделить на следующие области. Во-первых, это область контакта Ω^c , в которой выступ волнистого индентора непосредственно соприкасается с поверхностью вязкоупругого слоя. Во-вторых, это область адгезионного взаимодействия Ω^a , в которой поверхности не соприкасаются, но взаимодействуют друг

с другом посредством силы адгезионного притяжения (рис. 4.17). Оставшаяся поверхность вязкоупругого слоя свободна от взаимодействия.

В подвижной системе координат (x, y, z) , граничные условия для напряжений и перемещений в области $x \in (-l/2, l/2)$, $y \in (-l/2, l/2)$ при $z = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} w(x, y) &= f(x, y) + d, & (x, y) \in \Omega^c, \\ p(x, y) &= -p_0, & (x, y) \in \Omega^a, \\ p(x, y) &= 0, & (x, y) \notin \Omega^c \cup \Omega^a, \end{aligned} \quad (4.44)$$

где d — внедрение индентора в вязкоупругий слой. Выполняется также условие равновесия для нагрузки P , действующей на один выступ

$$P = \iint_{\Omega^c \cup \Omega^a} p(x, y) dx dy. \quad (4.45)$$

4.4.2. Решение методом полос и режимы взаимодействия в отдельных полосах

Задача решается методом полос, аналогичным представленному в разделе 4.3.2 для случая скольжения отдельной неровности. Область $x \in (-l/2, l/2)$, $y \in (-l/2, l/2)$ делится на $2N$ полос одинаковой толщины Δ , параллельных оси x (см. рис. 4.17). Нормальное перемещение j -й полосы индентора равно:

$$d_j = \frac{h}{2} \left(\cos \frac{2\pi y_j}{l} - 1 \right) + d, \quad (4.46)$$

где $y_j = j\Delta$. Максимальное внедрение d имеет место в центральной полосе $j = 0$. Форма индентора в каждой полосе имеет вид

$$f(x, y_j) = \frac{h_j}{2} \left(\cos \frac{2\pi x}{l} - 1 \right), \quad h_j = \frac{h}{2} \left(\cos \frac{2\pi y_j}{l} + 1 \right). \quad (4.47)$$

Задача решается в каждой полосе отдельно. Для j -й полосы условия для перемещения $w(x, y_j)$ и давления $p(x, y_j)$ следуют из (2.7):

$$\begin{aligned} w(x, y_j) &= f(x, y_j) + d_j, & x \in \Omega_j^c, \\ p(x, y_j) &= -p_0, & x \in \Omega_j^a, \\ p(x, y_j) &= 0, & x \notin \Omega_j^c \cup \Omega_j^a, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где Ω_j^c — область контакта в j -й полосе, а Ω_j^a — область адгезионного взаимодействия в j -й полосе. После определения контактного давления $p(x, y_j)$ для каждой полосы нормальная нагрузка, действующая на

каждый выступ, определяется суммированием:

$$P = 2 \sum_{j=1}^N P_j, \quad P_j = \Delta \int_{-l/2}^{l/2} p(x, y_j) dx. \quad (4.49)$$

Для определения тангенциальной нагрузки, действующей на индентор со стороны вязкоупругого слоя, используется соотношение

$$\tau(x, y_j) = p(x, y_j) \sin \left[\arctg \left(f'(x, y_j) \right) \right] \approx p(x, y_j) f'(x, y_j), \quad (4.50)$$

с помощью которого тангенциальная сила определяется как

$$T = 2 \sum_{j=1}^N T_j, \quad T_j = \Delta \int_{-l/2}^{l/2} \tau(x, y_j) dx. \quad (4.51)$$

Таким образом, задача сводится к плоской контактной задаче для определения в каждой полосе контактного давления $p(x, y_j)$ в области контакта $x \in \Omega_j$ и перемещения $w(x, y_j)$ в области адгезии Ω_j^a , после чего нормальная нагрузка и сила трения определяются соотношениями (4.49)–(4.51). Для точной формулировки граничных условий в каждой полосе необходимо рассмотреть различные режимы взаимодействия.

Рассмотрены различные возможные режимы взаимодействия: насыщенный контакт, дискретный контакт с насыщенным адгезионным взаимодействием, дискретный контакт с областями адгезионного взаимодействия, адгезионное взаимодействие без контакта. В j -й полосе реализуется один из этих режимов, в зависимости от сближения поверхностей d_j в этой полосе.

Насыщенный контакт. Решение задачи в каждой полосе начинается с рассмотрения возможности насыщенного контакта. В этом случае поверхности вязкоупругого полупространства и волнистого индентора полностью соприкасаются по всей длине полосы. Тогда перемещение границы $z = 0$ вязкоупругого слоя $w(x, y_j)$ удовлетворяет первому из условий (4.48) на всем отрезке $x \in [-l/2, l/2]$. Решая дифференциальное уравнение (4.32) с первым условием (4.48) и используя условие периодичности для давления $p(x - l/2, y_j) = p_j(x + l/2, y_j)$, получим контактное давление в виде

$$\begin{aligned} p(x, y_j) &= \frac{E}{2H(l^2 + 4\pi^2 T_\sigma^2 V^2)} \left[\frac{h}{2} \left(\cos \frac{2\pi y_j}{l} + 1 \right) \left\{ l^2 + 4\pi^2 T_\sigma^2 V^2 \right\} \cos \frac{2\pi x}{l} + \right. \\ &\quad \left. + 2\pi l V (T_\sigma - T_\varepsilon) \sin \frac{2\pi x}{l} \right] + (4\pi^2 T_\sigma^2 V^2 + l^2) \left\{ \frac{h}{2} \left(\cos \frac{2\pi y_j}{l} - 3 \right) + 2d \right\}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Нормальная сила P_j , действующая в j -й полосе, определяется выражением

$$P_j = \Delta \int_{-l/2}^{l/2} p(x, y_j) dx = \Delta \frac{El}{2Hl} \left\{ \frac{h}{2} \left(\cos \frac{2\pi y_j}{l} - 3 \right) + 2d \right\}. \quad (4.53)$$

Насыщенный контакт в j -й полосе реализуется при условии

$$\min(p(x, y_j)) \geq -p_0. \quad (4.54)$$

Это означает, что вследствие адгезии контактные давления могут быть отрицательными, но не меньшими, чем адгезионное давление $-p_0$. Если минимальное контактное давление в j -й полосе не удовлетворяет условию (4.54), то сближение поверхностей d_j недостаточно велико для обеспечения насыщенного контакта. В этом случае контакт может носить дискретный характер, т. е. в полосе имеются зоны, в которых поверхности разделены. Следующим рассматривается случай дискретного контакта, когда вне зон контакта везде действует адгезионное притяжение.

Дискретный контакт с полной адгезией. В этом случае в j -й полосе имеет место контакт по области $\Omega_j^c = (-a_j, b_j)$, а адгезионное давление $-p_0$ действует по областям $\Omega_j^a = (-l/2, -a_j) \cup (b_j, l/2)$. Дифференциальное уравнение (4.32) решается в области контакта $-a_j < x < b_j$ относительно контактного давления $p(x, y_j)$, при этом перемещение $w(x, y_j)$ задано первым из условий (4.48). В областях адгезионного притяжения $-l/2 < x < -a_j$ и $b_j < x < l/2$ дифференциальное уравнение (4.32) решается относительно $w(x, y_j)$, при этом давление $p(x, y_j)$ задается вторым из условий (4.48). Кроме того, необходимы два условия для определения границ a_j и b_j области контакта. В качестве таких условий используются условия непрерывности функций $p(x, y_j)$ и $w(x, y_j)$ в точках $x = -a_j$ и $x = b_j$ и условия периодичности, которые приводят к двум нелинейным уравнениям для численного определения величин a_j и b_j , если сближение d_j в j -й полосе задано. Давление $p(x, y_j)$ в области контакта $-a_j < x < b_j$ определяется соотношением

$$p(x, y_j) = -p_0 e^{(x-a_j)/(T_\sigma V)} + \frac{Eh}{4H(l^2 + 4\pi^2 T_\sigma^2 V^2)} \left(\cos \frac{2\pi y_j}{l} + 1 \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[(l^2 + 4\pi^2 T_\sigma^2 V^2) \left(\cos \frac{2\pi x}{l} - e^{(x-a_j)/(T_\sigma V)} \cos \frac{2\pi a}{l} \right) - \right. \\ & - 2\pi l V (T_\sigma - T_\sigma) \left(\sin \frac{2\pi x}{l} - e^{(x-a_j)/(T_\sigma V)} \sin \frac{2\pi a}{l} \right) + \\ & + h^2 \left(1 - e^{(x-a_j)/(T_\sigma V)} \right) \left(\cos \frac{2\pi y_j}{l} + 1 \right) \Big] + \\ & + \frac{E}{2H} \left\{ \frac{h}{2} \left(\cos \frac{2\pi y_j}{l} - 3 \right) + 2d \right\} \left(1 - e^{(x-a_j)/(T_\sigma V)} \right). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Аналогичное выражение получено для определения неизвестной функции перемещения $w(x, y_j)$ в области адгезионного взаимодействия $b_j < x < l - a_j$.

Нормальная и тангенциальная силы, действующие на один период волнистой поверхности, рассчитываются из соотношений

$$P_j = \Delta \int_{-a_j}^{l-a_j} p(x, y_j) dx, \quad T_j = \Delta \int_{-a_j}^{l-a_j} \tau(x, y_j) dx. \quad (4.56)$$

Условие существования режима дискретного контакта с полной адгезией вытекает из принятой модели адгезионного взаимодействия (4.1) и (4.2) — максимальная величина зазора между поверхностями $w(x, y_j) - f(x, y_j) - d_j$ не должна превышать δ_0 , т. е.

$$\max(w(x, y_j) - f(x, y_j) - d_j) \leq \gamma/p_0. \quad (4.57)$$

Если функция $w(x, y_j)$ на интервале $b_j < x < l - a_j$ не удовлетворяет условию (4.57), тогда в j -й полосе не реализуется дискретный контакт с полной адгезией. В этом случае зазор слишком велик, и возникают зоны, в которых нет контакта и не действует адгезионное притяжение. Необходимо рассмотреть возможность режима дискретного контакта с зонами адгезионного взаимодействия и зонами свободной от нагружения поверхности.

Дискретный контакт с областями адгезионного взаимодействия. В этом случае в j -й полосе имеет место контакт по области $\Omega_j^c = (-a_j, b_j)$, адгезионное давление $-p_0$ действует по интервалам $\Omega_j^a = (-a_j, -a_j) \cup (b_j, b_j)$ и свободны от нагружения интервалы $(-l/2, -a_j) \cup (b_j, l/2)$. Имеют место различные граничные условия

для трех различных областей. Дифференциальное уравнение (4.32) решается в области контакта $-a_j < x < b_j$ для контактного давления $p(x, y_j)$ и на интервалах $-a_j < x < -a_j$, $b_j < x < b_{1j}$ для перемещения $w(x, y_j)$. Для определения неизвестных постоянных используются условия непрерывности для давления $p(x, y_j)$ и перемещения $w(x, y_j)$ в точках $x = -a_{1j}$, $x = -a_j$ и $x = b_j$, $x = b_{1j}$ и условия периодичности. Для определения граничных точек областей адгезионного взаимодействия a_{1j} и b_{1j} используются условия, следующие из (4.1) и (4.2), согласно которым величина зазора между поверхностями в точках $x = -a_{1j}$ и $x = b_{1j}$ должна быть равна δ_0 :

$$\begin{aligned} w(-a_{1j}, y_j) - f(-a_{1j}, y_j) - d_j &= \gamma / p_0, \\ w(b_{1j}, y_j) - f(b_{1j}, y_j) - d_j &= \gamma / p_0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

В результате получены четыре нелинейных алгебраических уравнения относительно четырех неизвестных a_j , b_j , a_{1j} и b_{1j} , при условии, что сближение поверхностей в j -й полосе d_j задано. Давление $p(x, y_j)$ в области контакта $-a_j < x < b_j$ определяется соотношением (4.55).

Если полученные уравнения не удастся решить относительно a_j , b_j , a_{1j} и b_{1j} так, чтобы найденные корни были положительными и не превышали $l/2$, то можно предположить, что поверхности индентора и вязкоупругого слоя в этой полосе не соприкасаются. В этом случае реализуется один из следующих режимов взаимодействия: адгезионное притяжение по всей поверхности, адгезионное притяжение по отдельным областям либо отсутствие взаимодействия между поверхностями. Решения для этих режимов получены аналогично решениям для описанных выше режимов взаимодействия.

4.4.3. Влияние характеристик поверхностного рельефа на контактные характеристики и силу трения

Для расчетов использовалась параметризация со следующими безразмерными величинами: контактное давление $p l / \gamma$, координаты x / l , y / l , нормальное внедрение индентора $d \sqrt{k \gamma}$ в вязкоупругий слой, где $k = (1 - \nu^2) H / E$, нормальная нагрузка на один выступ $P / (l \gamma)$, сила трения на один выступ $T / (l \gamma)$. Полученное решение зависит от безразмерных параметров: параметр вязкости T_e / T_σ , параметр адге-

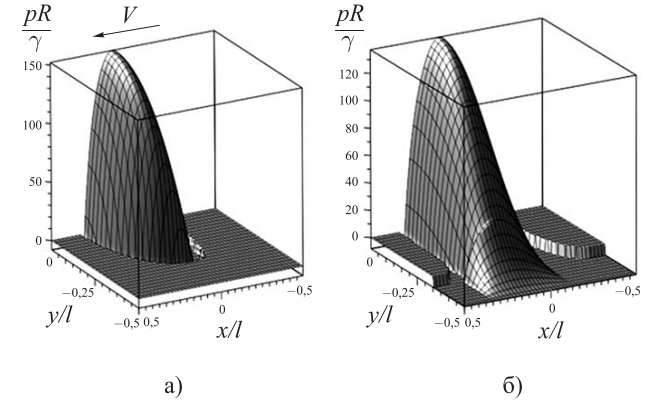


Рис. 4.18. Распределение контактного давления в случае одного выступа (а) и при скольжении волнистой поверхности (б)

зии $\lambda_1 = p_0 (k / \gamma)^{1/3}$, параметр скорости $l / (V T_e)$ и параметр волнистости h / l . Параметр λ_1 — это аналог параметра адгезии λ для случая одномерного основания винклеровского типа.

На рис. 4.18 показаны распределения безразмерного контактного давления $p(x, y) R / \gamma$ для случая отдельной неровности (а) и индентора с регулярным рельефом (б) при одной и той же величине безразмерной нагрузки, приложенной к индентору $P / (R \gamma) = 400$. Результаты для отдельной неровности получены по соотношениям, представленным в разделе 4.3 в предположении, что адгезионные свойства взаимодействующих поверхностей на входе и выходе из контакта одинаковы. Распределение давления для случая индентора с регулярным рельефом (см. рис. 4.18, б) представлено на половине ячейки периодичности $\frac{x}{l} \in [-0,5; 0,5]$, $\frac{y}{l} \in [-0,5; 0]$, распределение давления для отдельной неровности (см. рис. 4.18, а) представлено на такой же области для удобства сравнения. Значения параметров, использованные в расчете, следующие: $T_e / T_\sigma = 10$, $\lambda_1 = 1$, $l / (V T_e) = 0,4$, $l / h = 4$. Результаты показывают, что в случае регулярного рельефа максимальное контактное давление меньше, а площадь контакта больше, чем для отдельной неровности.

Расчеты показывают, что при относительно малых нагрузках, при которых только вершины выступов регулярной поверхности находятся в контакте с вязкоупругим основанием, распределение контактного давления близко к распределению для отдельной неровности. По мере того, как нагрузка возрастает и контакт приближается к насыщению, результа-

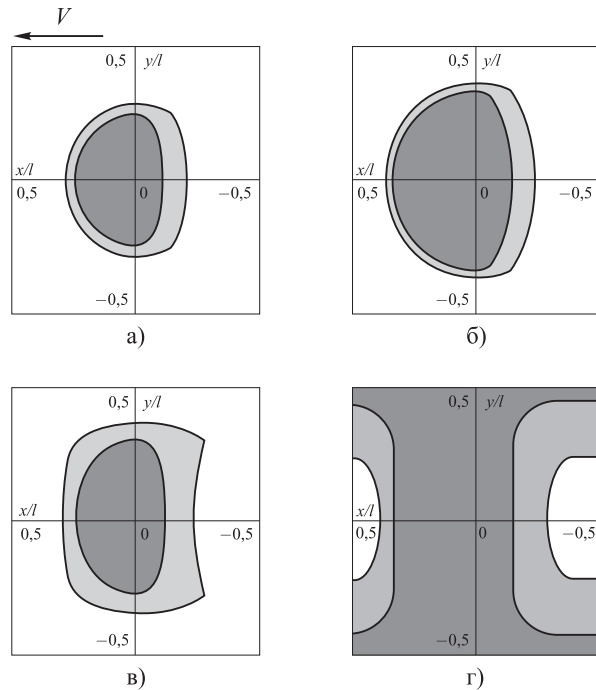


Рис. 4.19. Области контакта и адгезии при увеличении нагрузки для отдельной неровности (а), (б) и для индентора с регулярной поверхностью (в), (г)

ты, полученные с помощью этих двух моделей, все более сильно отличаются друг от друга. На рис. 4.19 показаны области контакта (темно-серые области) для отдельной неровности (а и б), и для случая индентора с регулярной поверхностью (в и г).

Результаты на рис. 4.19, а и в соответствуют величине безразмерной нагрузки на одну неровность $P/(R\gamma) = 200$. Для этой нагрузки область контакта в случае индентора регулярной формы представляет собой отдельное пятно, лишь незначительно отличающееся по форме от области контакта для случая отдельной неровности. Результаты (б) и (г) соответствуют нагрузке $P/(R\gamma) = 550$, при которой в случае регулярного рельефа пятна контакта начинают сливаться между собой (г), при этом области контакта и адгезии значительно отличаются по форме и размерам от соответствующих областей для отдельной неровности (б).

Графики, представленные на рис. 4.20, иллюстрируют эффект плотности контакта (расстояния между неровностями). Номинальное

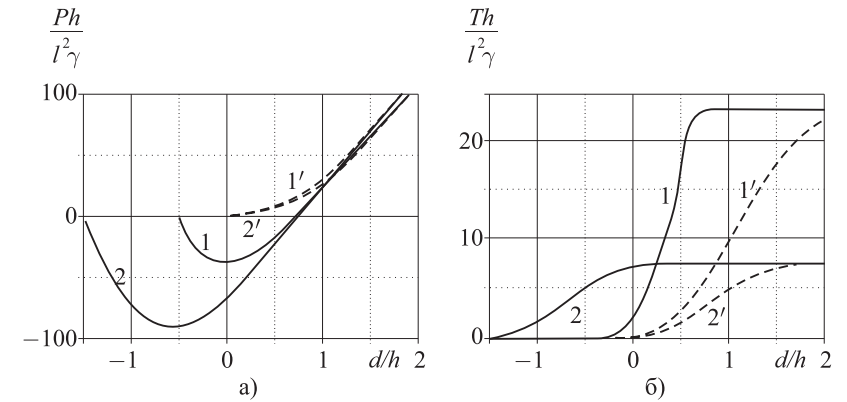


Рис. 4.20. Зависимость безразмерной нормальной (а) и тангенциальной (б) силы от внедрения индентора с регулярной поверхностью в вязкоупругое основание

давление (P/l^2) и тангенциальное напряжение рассчитаны для двух значений безразмерного расстояния между неровностями — $l/h = 3$ (кривые 1 и 1') и $l/h = 6$ (кривые 2 и 2'). Сплошными линиями 1 и 2 показаны кривые, полученные при следующих значениях параметров: $T_\epsilon/T_\sigma = 10$, $l/(VT_\epsilon) = 0.4$, $\lambda_1 = 15$. Штриховые линии 1' и 2' построены при тех же значениях параметров для случая отсутствия адгезии.

Нагрузка, при которой зависимость от внедрения достигает минимума, называется силой отрыва — при достижении этой нагрузки происходит скачкообразный отрыв поверхностей друг от друга. Результаты показывают, что абсолютная величина силы отрыва тем больше, чем больше параметр адгезии λ_1 . Также, чем больше расстояние между неровностями, тем выше отрицательная нагрузка, которую выдерживает контакт. Результаты, представленные на рис. 4.20, б, показывают, что с увеличением внедрения индентора сила трения растет, пока не достигнет предельного значения, соответствующего насыщенному контакту поверхностей. Чем больше параметр адгезии λ_1 , тем при меньших внедрениях происходит переход от дискретного контакта к насыщенному.

Величина силы трения, соответствующая насыщенному контакту, тем больше, чем меньше расстояние между неровностями. Таким образом, уменьшение расстояния между неровностями (увеличение плотности контакта) уменьшает влияние адгезии, но увеличивает вклад гистерезисных потерь в силу трения. Благодаря этому при отрицательных и малых положительных величинах внедрения сила трения увеличивается с увеличением расстояния между неровностями, в то время как при зна-

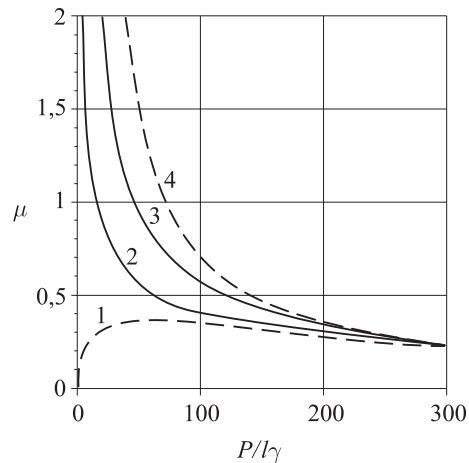


Рис. 4.21. Зависимость коэффициента трения от внешней нормальной нагрузки на один выступ регулярной поверхности

чительных внедрениях индентора в основание сила трения уменьшается с увеличением расстояния между неровностями.

На рис. 4.21 приведены зависимости коэффициента трения $\mu = T/P$ от внешней нормальной нагрузки, при этом коэффициент трения определялся только в области положительных нагрузок, как это принято в трибологии. Кривая 1 соответствует параметру адгезии $\lambda_1 = 0$, кривая 2 — $\lambda_1 = 5$, кривая 3 — 10, кривая 4 построена для случая $\lambda_1 \rightarrow \infty$. В случае, когда адгезия не влияет на контактные характеристики (кривая 1), коэффициент трения равен нулю при нулевой нагрузке, с увеличением нагрузки он возрастает, достигает максимума, а потом уменьшается, что связано с вязкими свойствами материала и эффектом насыщения фактической площади контакта. Учет адгезии приводит к тому, что сила трения всегда отлична от нуля при нулевой внешней нагрузке, вследствие чего коэффициент трения резко возрастает при малых нагрузках.

Выводы к главе 4

Разработанные в этой главе модели позволяют оценить влияние сил адгезионного притяжения в зазоре между поверхностями на распределение контактных напряжений, размер области фактического контакта и силу трения при фрикционном взаимодействии вязкоупругих материа-

лов с контртелами, имеющими разные формы поверхностного рельефа. Результаты проведенных расчетов позволяют сделать следующие выводы:

- учет адгезионного взаимодействия приводит к существенному увеличению фактической площади контакта; переход от дискретного к полному контакту происходит при меньших нагрузках, чем при отсутствии адгезии;
- наличие адгезии приводит к тому, что контакт существует даже при отрицательных внешних нагрузках (разрывающих поверхности), при этом деформационная составляющая силы трения всегда действует в направлении, противоположном движению волнистого тела;
- с увеличением адгезионного давления сила трения возрастает;
- при уменьшении высоты и расстояния между выступами состояние насыщенного контакта возникает при меньших номинальных давлениях.

Предложенные модели дают возможность оценить влияние параметров микрогеометрии поверхности на контактные характеристики и деформационную составляющую силы трения для несмазанных поверхностей и разработать способы управления этими характеристиками за счет выбора оптимального поверхностного рельефа.

Литература

1. Lennard-Jones J. E. On the Determination of Molecular Fields // Proc. R. Soc. Lond. 1924. A106 (738). P. 463–477.
2. Hamaker H. C. The London – van der Waals attraction between spherical particles // Physica. 1937. Vol. 4, Issue 10. P. 1058–1072.
3. Boer J. H. The influence of van der Waals' forces and primary bonds on binding energy, strength and orientation, with special reference to some artificial resins // Trans. Faraday Soc. 1936. Vol. 32. P. 10–37.
4. Bradley R. S. The cohesive force between solid surfaces and the surface energy of solids // Phil. Mag. 1932. Vol. 13. P. 853–862.
5. Derjaguin B. V. Untersuchungen uber die reibung und adhesion // Kolloid Z. 1934. Vol. 69. P. 155–164.
6. Дерягин Б. В. Теория прилипания // Журнал физической химии. 1935. Т. VI. Вып. 10. С. 1306–1319.
7. Дерягин Б. В., Абрикосова И. И. Прямое измерение молекулярного притяжения в функции расстояния между поверхностям // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 8. С. 945–946.

8. Tabor D., Winterton R. H. S. The direct measurement of normal and retarded van der Waals forces // *Proc. R. Soc. Lond.* 1969. A312. P. 435–450.
9. Johnson K. L., Kendall K. I, and Roberts A. D. Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. London.* 1971. A324. P. 301–313.
10. Derjaguin B. V., Muller V. M., Toporov Yu. P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interface Sci.* 1975. Vol. 53. № 2. P. 314–326.
11. Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 385 с.
12. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
13. Hughes B. D. and White L. R. «Soft» contact problems in linear elasticity // *Q. J. Mech. appl. Math.* 1979. Vol. 32. P. 445–471.
14. Greenwood J. A. Adhesion of elastic spheres // *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1997. A453. P. 1277.
15. Солдатенков И. А. Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // *ПММ.* 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
16. Muller V. M., Yushchenko V. S., Derjaguin B. V. On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Colloid Interface Sci.* 1980. Vol. 77. № 1. P. 91–101.
17. Attard P., Parker J. L. Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46. № 12. P. 7959–7971.
18. Maugis D. Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // *J. Colloid Interface Sci.* 1991. Vol. 150. P. 243–269.
19. Barthel E. // *J. Colloid Interface Sci.* 1998. N 200. P. 7–18.
20. Greenwood J. A., Johnson K. L. An alternative to the Maugis model of adhesion between elastic spheres // *J. Phys. D. Appl. Phys.* 1998. Vol. 31(22). P. 3279–3290.
21. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Адгезионное взаимодействие упругих тел // *Прикладная математика и механика.* 2001. Т. 65. № 2. С. 279–289.
22. Zheng Z. and Yu J. Using the Dugdale approximation to match a specific interaction in the adhesive contact of elastic objects // *Journal of Colloid and Interface Science.* 2007. Vol. 310(1). P. 27–34.
23. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии // *ПММ.* 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 128–137.
24. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
25. Горячева И. Г. Контактная задача качения вязко-упругого цилиндра по основанию из того же материала // *ПММ.* 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 925–933.
26. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.



Полный ассортимент литературы издательств
«Институт компьютерных исследований»
и «Регулярная и хаотическая динамика»
по самым доступным ценам представлен:



Прямое представительство

Россия, Ижевск
Удмуртский государственный университет
ул. Университетская, д. 1, корп. 4, оф. 201а/207
Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95
E-mail: subscribe@rcd.ru, rhd-m@mail.ru

Интернет-магазин



<http://shop.rcd.ru>

- Отправка заказов осуществляется почтой РФ из г. Ижевска
- Цены на сайте указаны без учета стоимости доставки

Книжные магазины и киоски:



Московский дом книги
Москва, ул. Новый Арбат, д. 8
(м. «Арбатская»)
Тел.: +7 (495) 789-35-91



Дом технической книги
Москва, Ленинский проспект, д. 40
(м. «Ленинский проспект»)
Тел.: +7 (499) 137-60-19



Магазин научной книги URSS
Москва, Нахимовский проспект, д. 56
(м. «Профсоюзная»)
Тел.: +7 (499) 724-25-45



Книжная сеть «Буквоед»
Санкт-Петербург, ул. Минеральная, д. 13
Тел.: +7 (812) 601-0-601

На просторах Интернета

ozon.ru

<http://www.ozon.ru>

EAGE Геомодель
<http://www.eage.ru>

Центр/Интефре/Газ
<http://centrlit.ru>



НИИ «ИНФРА-М»
<http://www.infra-m.ru>



Московский дом книги
<http://www.mdk-arbat.ru>



Инфра-Инженерия
<http://www.infra-e.ru>

**Каталог изданий для предприятий
нефтегазового комплекса**
<http://www.yagello.ru>



**Книжное поисковое агентство
ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КНИГА**
<http://chebakov.com>

LOGOBOOK.RU

<http://rus.logobook.ru>

Библион

<http://www.biblion.ru>

БУКВОЕД
<http://www.bookvoed.ru>



бибком
центральный
книжный
букинист
<http://www.ckbib.ru>

*Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю.,
Морозов А. В., Степанов Ф. И.*

Трение эластомеров
Моделирование и эксперимент

*Дизайнер Чекина О. Г.
Технический редактор Бакиев А. В.
Компьютерная верстка Высоцкий С. В.
Корректор Бекмачева А. В.*

Подписано в печать 28.03.2015. Формат 60 × 84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,86. Уч.-изд. л. 12,34.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная № 1. Тираж 150 экз. Заказ № 17-23.
АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Кооперативная, д. 5.
<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95
