

На правах рукописи

**Кузьмина Ксения Сергеевна**

**СИСТЕМА АЛГОРИТМОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ В ВИХРЕВЫХ МЕТОДАХ  
И ПРОГРАММНАЯ ПЛАТФОРМА ДЛЯ РАСЧЕТА  
ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент И.К. Марчевский

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Математическое моделирование обтекания профиля</b>	
<b>в вихревых методах . . . . .</b>	<b>22</b>
1.1. Формулировка условия прилипания в виде граничного интегрального уравнения . . . . .	22
1.2. Два подхода к удовлетворению граничного интегрального уравнения . . . . .	31
1.3. Точные решения граничного интегрального уравнения для вихревого слоя . . . . .	36
Выводы по главе 1 . . . . .	42
<b>Глава 2. Моделирование обтекания профиля при аппроксимации его границы многоугольником . . . . .</b>	<b>43</b>
2.1. Известные алгоритмы и расчетные схемы . . . . .	43
2.1.1. Представление решения на панелях . . . . .	43
2.1.2. Подход Галеркина к построению дискретных аналогов интегральных уравнений . . . . .	46
2.2. Кусочно-линейное представление интенсивности вихревого слоя . . . . .	49
2.2.1. Схема типа разрывного метода Галеркина . . . . .	49
2.2.2. Схема типа метода конечных элементов . . . . .	51
2.2.3. Схема типа метода конечных элементов с выделением разрывов решения . . . . .	53
2.3. Вычисление коэффициентов линейной системы . . . . .	57
2.4. Верификация разработанных схем . . . . .	61
2.4.1. Вычисление погрешности приближенного решения . . . . .	61
2.4.2. Оценка точности разработанных расчетных схем . . . . .	65
2.4.3. Оценка точности моделирования поля скоростей . . . . .	70
2.5. Перспективы повышения точности . . . . .	75
Выводы по главе 2 . . . . .	76

<b>Глава 3. Математическое моделирование обтекания криволинейного профиля . . . . .</b>	<b>78</b>
3.1. Неравномерная дискретизация границы профиля с использованием прямолинейных панелей . . . . .	78
3.1.1. Квазиравномерная аппроксимация профиля . . . . .	79
3.1.2. Неравномерная дискретизация профиля . . . . .	81
3.2. Алгоритмы и расчетные схемы, учитывающие криволинейность профиля . . . . .	84
3.2.1. Численное интегрирование вдоль границы профиля .	88
3.2.2. Сплайн-аппроксимация границы профиля . . . . .	89
3.3. Вычисление интегралов по криволинейным панелям . . . . .	97
3.3.1. Вычисление интегралов в левой части . . . . .	97
3.3.2. Вычисление интегралов в правой части . . . . .	101
3.4. Решение модельных задач . . . . .	107
Выводы по главе 3 . . . . .	110
<b>Глава 4. Программный комплекс VM2D . . . . .</b>	<b>112</b>
4.1. Структура программного комплекса . . . . .	112
4.1.1. Описание задач . . . . .	113
4.1.2. Основные классы . . . . .	118
4.1.3. Реализации абстрактных классов . . . . .	120
4.1.4. Компиляция и исполнение . . . . .	122
4.1.5. Результаты моделирования . . . . .	122
4.2. Основные вычислительные блоки алгоритма . . . . .	123
4.3. Распараллеливание вычислений в VM2D . . . . .	126
4.3.1. Технологии MPI и OpenMP . . . . .	126
4.3.2. Технология Nvidia CUDA . . . . .	129
4.4. Стратегии связывания при решении сопряженных задач .	130
4.5. Пример. Ветровой резонанс кругового цилиндра . . . . .	131
Выводы по главе 4 . . . . .	135
<b>Основные выводы и заключение . . . . .</b>	<b>136</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>138</b>

## ***Введение***

**Актуальность темы исследования.** В силу нелинейности определяющих соотношений исследование математических моделей аэро- и гидродинамики сопряжено со значительными сложностями; аналитические результаты могут быть получены лишь для узкого круга частных постановок задач, а также в некоторых предельных случаях, когда удастся получить какие-либо асимптотические оценки. Прогресс в области вычислительной гидродинамики напрямую связан с развитием вычислительной техники и численных методов анализа соответствующих математических моделей. Начиная от первых ЭВМ 1950-х годов и до настоящего времени именно задачи вычислительной гидродинамики (англ. CFD — Computational Fluid Dynamics) относят к наиболее сложным для численного решения. Несмотря на наличие фундаментальных результатов в этой области, относящихся к теории численных методов, исследования в данном направлении остаются актуальными, что связано как с совершенствованием математических моделей в направлении более полного и точного описания физических процессов, так и с непрерывным развитием, а также появлением новых вычислительных технологий и аппаратных средств.

Пионерские работы Н.Е. Жуковского, среди которых выделим статью «О присоединенных вихрях» 1906 г. [27], в значительной мере определили прогресс в развитии авиации при переходе от моделей первых аэропланов, создававшихся в основном на основе интуиции конструкторов, к научно-обоснованным принципам конструирования и аэродинамического расчета. В основе этой и последующих работ лежит принцип, в соответствии с которым обтекаемый профиль может быть заменен системой вихрей таким образом, что эти вихри будут оказывать на среду такое же действие, как и профиль. Известная теорема Жуковского [27] устанавливает прямую связь между подъемной силой профиля

крыла и циркуляцией скорости вокруг профиля, которая является следствием вихревой природы обтекания. Аналогичные результаты получены Н.Е. Жуковским в виде теории тянущей силы гребного винта [26] и в дальнейшем развиты его последователями применительно к теории геликоптера (вертолета) [61].

Одним из первых численных методов расчета двумерных течений явился бессеточный чисто лагранжев метод дискретных вихрей, основные идеи которого были сформулированы в докторской диссертации С.М. Белоцерковского в 1955 году. Аналогичные работы появлялись и за рубежом; их обзор можно найти в [62, 101, 120, 121]; все они восходят к фундаментальной работе [116]. Исследования в этом направлении позволили решить актуальные на тот момент задачи проектирования и расчета новых типов летательных аппаратов, а также внедрить новые типы конструкций несущих поверхностей — например, решетчатое крыло [6]. Лагранжев характер метода связан с фундаментальными свойствами завихренности, установленными Гельмгольцем [74] и означающими, по существу, «вмороженность» вихревых линий в идеальную несжимаемую среду. С.М. Белоцерковским и его последователями была создана научная школа вихревых методов вычислительной аэрогидродинамики, в трудах которой метод дискретных вихрей был существенно развит и применен для решения широкого класса инженерных задач [5, 38, 43, 47, 53, 66].

Особенностью метода дискретных вихрей является сравнительно малая трудоемкость расчетов, которая, собственно, и сделала возможным его практическое применение на вычислительных машинах 1950–60-х годов, обладавших весьма скромной производительностью. В его основу положена модель идеальной несжимаемой среды и некоторые гипотезы, по своей сути аналогичные гипотезе Чаплыгина — Жуковского [59]. Данные предположения ограничивают область применимости метода, тем не менее, решение актуальных на тот момент задач стало возможным с приемлемой для практических целей точностью.

Бурное развитие сеточных методов начиная с 1960-х годов позволило осуществлять численный анализ более полных математических моделей, учитывающих многие факторы и свойства реальных физических процессов. На сегодняшний день именно сеточные методы развиты наиболее широко, они реализованы во многих пакетах прикладных программ; в зависимости от постановки решаемой задачи и предъявляемых требований к точности решения можно выбрать подходящий численный метод и алгоритм на его основе. Тем не менее, в силу низкой вычислительной сложности вихревых методов в своей области применимости они могут конкурировать с сеточными [80]. Точнее, правильнее говорить об иерархии различных подходов применительно к решению конкретных инженерных задач: на первом этапе выбора проектных параметров конструкции, взаимодействующей с потоком среды, возникает необходимость анализа большого количества возможных вариантов и требуется проведение большой серии вычислительных экспериментов. Здесь возможны некоторые упрощающие допущения, позволяющие применять вихревые методы и приводящие, конечно, к некоторой погрешности результатов. В итоге при сравнительно небольших затратах времени и вычислительных ресурсов может быть определен сравнительно узкий диапазон параметров конструкции, для которого требуется проведение более тщательных исследований как при помощи сеточных методов, так и в ходе экспериментальной отработки. Важным преимуществом вихревых методов является возможность рассмотрения обтекания подвижных профилей и тел, в том числе в рамках сопряженных задач гидроупругости, без существенных модификаций вычислительных алгоритмов. При этом допустимы произвольные перемещения, повороты и деформации обтекаемых поверхностей.

Развитие вихревых методов продолжалось главным образом в направлении расширения области их применимости. Идеи «классического» метода дискретных вихрей (МДВ) из аэродинамики были перенесены

на задачи электродинамики, теории фильтрации, теории упругости, дифракции волн и др. [38]. Обоснованию метода посвящены исследования И.К. Лифанова и его последователей, обобщенные в серии монографий [4, 10, 38]. Работы в этом направлении в нашей стране активно ведутся А.В. Сетухой [58] (большая часть работ данного автора посвящена решению гиперсингулярных уравнений, возникающих в пространственных задачах); среди зарубежных работ отметим [64] и другие работы этих же авторов.

Ограничения метода дискретных вихрей в задачах моделирования течений, связанные с рассмотрением модели идеальной (невязкой) среды, привели к существенным сложностям при расчете обтекания гладких поверхностей, на которых точку отрыва нельзя задать априори, как это делается в МДВ в угловых точках. С начала 1970-х годов стали появляться работы, в которых были предложены пути решения уравнений Навье — Стокса для корректного моделирования двумерных вязких течений. Из отечественных отметим работы Г.А. Павловца, А.С. Петрова [49, 51], из зарубежных — хорошо известную работу А. Чорина [68]. В упомянутых работах предложены принципиально различающиеся подходы: «детерминированный» и «стохастический», каждый из которых получил существенное развитие.

Результатом развития «детерминированного» подхода можно считать метод диффузионной скорости, восходящий к теореме Фридмана [44] и описанный Й. Огами и Т. Акаматсу [111]. Данному методу присущи некоторые недостатки, которые в значительной мере устранены в методе вязких вихревых доменов (МВВД) [1, 17, 22, 23], предложенном и развитом Г.Я. Дынниковой. «Стохастический» подход, называемый также методом случайных блужданий, основное развитие получил в трудах зарубежных ученых [69, 108, 115, 122, 123, 129]; отметим также в этой связи работу [114].

Не ставя задачу выполнения подробного обзора всех этапов развития вихревых методов, перечислим лишь некоторых отечественных ученых,

внесших наиболее существенный вклад в их развитие и практическое применение. Прежде всего, следует отметить работы научной школы, созданной и развивавшейся в ВВИА им. Н.Е. Жуковского (С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ, В.А. Подобедов, В.И. Бушуев, А.И. Желанников, Б.С. Крицкий), ученых Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова (С.В. Гувернюк, Г.Я. Дынникова, П.Р. Андронов, Я.А. Дынников и др.), научной группы из Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (С.М. Каплунов, Н.Г. Вальес, С.Н. Фесенко, А.В. Самолысов и др.), МГУ им. М.В. Ломоносова и Института вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН (А.В. Сетуха, С.Л. Ставцев, А.А. Апарин), МГТУ им. Н.Э. Баумана (Г.А. Щеглов, И.К. Марчевский), НИИ Парашютостроения (В.А. Апарин), ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского (М.А. Головкин, В.А. Головкин, В.М. Калявкин), НПО Машиностроения, ЦИАМ им. П.И. Баранова, Самарского аэрокосмического университета им. С.П. Королева. Теоретическое обоснование вихревых методов осуществляется в уже упоминавшихся работах научной школы И.К. Лифанова.

Перечислим некоторые докторские и кандидатские диссертации, защищенные в последнее время по тематике вихревых методов [3, 13, 15, 18, 19, 22, 25, 28, 30, 40, 41, 48, 56].

Следует также отметить тенденцию, наблюдаемую преимущественно в зарубежных работах начиная с 2000-х годов, к переходу от рассмотрения чисто лагранжевых методов к гибридным эйлерово-лагранжевым методам, главным образом при моделировании трехмерных течений [79]. Тем не менее, потенциал чисто лагранжевых методов представляется неисчерпанным, и их развитие остается актуальным направлением исследований, применительно как к трехмерным, так и двумерным задачам.

Изложим в самых общих чертах суть метода вязких вихревых доменов. Первичной расчетной величиной, как и во всех вихревых методах, является завихренность  $\Omega = \nabla \times \mathbf{V}$ , и течение жидкости, обтекающей профиль, описывается через два процесса: эволюцию завихренности



сти в области течения и ее генерацию на границе обтекаемого профиля. Эволюцию завихренности можно описать как движение имеющейся завихренности без изменения интенсивности по полю скоростей, представляющему собой суперпозицию скорости среды и так называемой диффузионной скорости, пропорциональной коэффициенту вязкости (в рамках МВВД предложен эффективный метод вычисления диффузионных скоростей по известному распределению завихренности и геометрии границ области течения). Генерация завихренности происходит на всей границе обтекаемого профиля, обеспечивая удовлетворение граничного условия прилипания. Отметим, что при рассмотрении обтекания неподвижных профилей или профилей, движущихся по заданному закону, давление не входит в «вихревую» постановку задачи. Его при необходимости можно определить, используя аналог интегралов Бернулли и Коши — Лагранжа для вихревых течений несжимаемой жидкости [21]. Для расчета гидродинамических нагрузок (силы лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента), получаемых интегрированием давления вдоль границы профиля, известны сравнительно простые интегральные соотношения [1, 71, 72].

Распределение завихренности в области течения моделируется большим количеством вихревых элементов, в качестве которых выступают обычно круглые вихри Рэнкина; моделирование эволюции завихренности производится, как правило, смещением всех вихревых элементов по направлению их скоростей, что соответствует интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения вихревых элементов явным методом Эйлера. Точность такого подхода исследована в работе [20], где установлены ограничения на величину шага по времени для обеспечения устойчивости (аналог условия Куранта) и показано, что погрешность численной схемы (т. н. «схемная вязкость») может приводить к результатам, существенно отличающимся от тех, которые обеспечивает корректный учет вязкости среды.

Данный вопрос был рассмотрен также в работе [45], где на примере решения модельных задач показано, что использование явного метода Рунге — Кутты второго порядка точности вместо явного метода Эйлера приводит к существенному повышению точности моделирования эволюции вихревых структур в отсутствие обтекаемого профиля, однако практически не сказывается на результатах расчетов обтекания профилей, как неподвижных, так и перемещающихся в жидкости. Таким образом, точность в этом случае ограничена главным образом погрешностью моделирования процесса генерации завихренности на профиле.

Математическая модель, описывающая генерацию завихренности на профиле, представляет собой граничное интегральное уравнение. В рамках МДВ рассматривается интегральное уравнение 1-го рода с неинтегрируемым ядром типа Гильберта, интеграл в котором следует понимать в смысле главного значения по Коши [31]. При этом генерируемая завихренность представляется в виде отдельных вихревых элементов, располагаемых на границе профиля, циркуляции которых определяются из условия коллокаций в заданных контрольных точках. В работах И.К. Лифанова [10, 38, 66] данный метод получил обоснование. В известных отечественных [1, 14, 29] и зарубежных работах [67, 69, 103, 108] по вихревым методам используется именно такой подход либо некоторые его модификации, однако систематический анализ его применимости в рамках измененных (по сравнению с МДВ) численных методов, основанных на других математических моделях, по-видимому не проводился.

Данный вопрос актуален, поскольку усовершенствованные модификации вихревых методов, в том числе МВВД, имеют важные особенности, среди которых отметим наличие завихренности в области течения вблизи профиля, моделируемой также вихревыми элементами. Для корректного моделирования ее эволюции требуется, очевидно, достаточная точность восстановления поля скоростей. При использовании схемы метода дискретных вихрей едва ли возможно утверждать о выполнении

данного требования: восстановленное поле скоростей в какой-то мере удовлетворяет граничному условию лишь в контрольных точках, тогда как между ними погрешность оказывается весьма значительной (см. Рис. В.1).

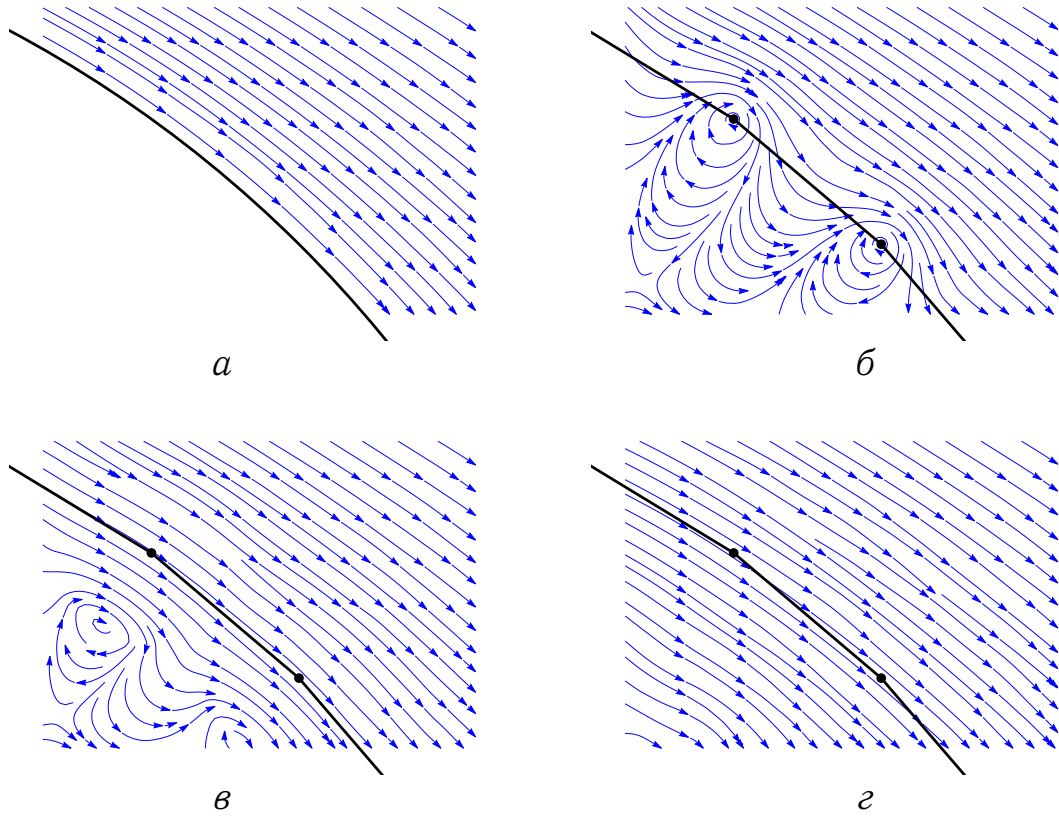


Рис. В.1. Линии тока при обтекании кругового профиля: *а* — точное решение, *б* — поле скоростей восстановлено по полю завихренности без сглаживания, *в* — поле скоростей восстановлено по полю завихренности со сглаживанием ( $\varepsilon = h/2$ ), *г* — поле скоростей восстановлено по полю завихренности со сглаживанием ( $\varepsilon = h$ ), где  $h$  — длина панели

Для решения данной проблемы может быть использован подход, описанный в [77], математическая суть которого предполагает сведение задачи к решению интегрального уравнения второго рода с ограниченным для случая гладких профилей или неограниченным, но интегрируемым ядром в случае профилей с угловыми точками. Такие модели, однако, не получили до сих пор широкого применения в вихревых методах, хотя о возможности применения подобной процедуры упомянуто в [38, 69]. При этом интересно отметить, что в последующих исследо-

ваниях авторов работы [77] предложенный ими метод использован не только применительно к вихревым методам, но и при решении задач гидромеханики в переменных «вихрь — функция тока» [75].

В упомянутой работе [77] описана лишь сама математическая модель, фундаментальной основой которой является т. н. обобщенное разложение Гельмгольца для векторных полей [109, 130], однако вопрос построения численных алгоритмов на ее основе затронут лишь косвенно: авторы, во-первых, утверждают, что точность заметно повышается при рассмотрении распределенных вихревых слоев на поверхности — граничных элементов с некоторым заданным распределением завихренности на них — вместо отдельных вихревых элементов, а, во-вторых, неоднократно замечают, что решающее влияние на качество численного решения оказывает точность вычисления коэффициентов линейной системы уравнений, возникающей при аппроксимации граничного интегрального уравнения.

В диссертации [45] на основе данных идей построена система расчетных схем вихревых методов и проведен некоторый их анализ, в основном качественного характера, в результате которого установлено, что предложенный подход к обеспечению удовлетворения граничного условия имеет значительное преимущество перед традиционными расчетными схемами метода дискретных вихрей. При этом в наиболее точной из разработанных в [45] схем предполагалось кусочно-постоянное распределение интенсивности вихревого слоя по граничным элементам (панелям) профиля, которые, в свою очередь, представляли собой прямолинейные отрезки. Кроме того, сами обтекаемые профили предполагались неподвижными и недеформируемыми (впрочем, все рассмотренные в [45] схемы можно без труда перенести на случай поступательного движения профиля без его вращения).

Тем не менее, многие вопросы количественного характера, связанные с анализом точности разработанных схем на модельных задачах, а также оценкой погрешности восстановления поля скоростей среды вбли-

зи обтекаемой поверхности, важность которой обсуждалась выше, к настоящему времени исследованы не в полной мере, что не позволяет производить обоснованный выбор конкретных моделей и схем дискретизации при решении практических задач. Кроме того, остается открытым вопрос о возможности и необходимости дальнейшего совершенствования вычислительных алгоритмов и расчетных схем вихревых методов и методики их построения. Таким образом, *исследование точности существующих алгоритмов моделирования генерации завихренности при моделировании обтекания профиля с использованием вихревых методов, а также разработка новых алгоритмов и расчетных схем повышенной точности, является актуальным вопросом, имеющим важное значение для развития и применения вихревых методов.*

Во всех упомянутых выше работах аппроксимация границы обтекаемого профиля осуществлялась при помощи замены контура многоугольником, состоящим из прямолинейных панелей. Такой подход можно рассматривать как наиболее простой из возможных, точности которого, впрочем, было достаточно для метода дискретных вихрей. В то же время ясно, что обтекание многоугольного профиля отличается от такового для гладкого профиля, как по причине недостаточно точной передачи формы профиля, так и в силу наличия особенностей поля скоростей в окрестности «внешних» угловых точек, возникающих при дискретизации. Следовательно, возможность повышения точности моделирования обтекания профиля при его аппроксимации прямолинейными панелями имеет принципиальные ограничения. Очевидным путем его преодоления является использование криволинейных панелей или аналогичных по сути алгоритмов. Данные соображения подтверждаются приведенными в работе [69] качественными оценками, в соответствии с которыми в общем случае невозможно построить метод, обеспечивающий второй порядок точности без явного учета криволинейности границы профиля. К настоящему времени данный вопрос исследован слабо, о модификаци-

ях вихревых методов, в алгоритмах которых использованы криволинейные панели, неизвестно, поэтому *построение алгоритмов и расчетных схем, позволяющих учитывать кривизну панелей профиля, также является актуальным направлением исследований.*

Несмотря на то, что вихревые методы имеют достаточно продолжительную историю развития (с 1950-х годов) в нашей стране и за рубежом, современные вихревые модели и алгоритмы не реализованы в доступных широкому кругу специалистов комплексах программ, как коммерческих, так и свободно распространяемых. Этот факт в значительной мере снижает популярность вихревых методов среди исследователей и расчетчиков. На сегодняшний день актуальна общемировая тенденция отказа от коммерческого ПО для моделирования различных физических процессов в пользу программ с открытым исходным кодом. Такой подход помимо очевидных преимуществ экономического характера играет важнейшую роль в формировании сообщества, совместная работа которого способствует развитию самих методов и расширению области их применения. Наиболее характерным примером такой платформы на сегодня является пакет OpenFOAM [112], реализующий метод контрольных объемов в различных модификациях для решения задач механики сплошной среды, главным образом, гидро- и газодинамики. Другим примером платформы, ориентированной на метод конечных элементов, является пакет Kratos [81].

При разработке подобных программных платформ важно обеспечить ясность структурной организации программы в целом, четкую иерархию и взаимосвязи между модулями, реализующими отдельные смысловые части основного алгоритма, а также использование общепринятых форматов входных и выходных данных и возможность интеграции (или хотя бы взаимодействия) с другими существующими программными пакетами. Все это способствует развитию платформы за счет расширения ее функционала, использования новых более эффективных вычислитель-

ных алгоритмов, а также возможностей современных ЭВМ. При этом сторонние пользователи получают возможность свободно ориентироваться в логике и структуре исходного кода, дополнять и модифицировать его с учетом специфики рассматриваемых ими задач. В наиболее полной мере данным требованиям отвечает парадигма объектно-ориентированного программирования, реализованная во многих современных языках высокого уровня.

На сегодня ни один алгоритм, предполагающий большой объем вычислений и не обеспечивающий при этом возможности их ускорения за счет использования современных технологий параллельного программирования, не будет являться конкурентоспособным. К основным технологиям параллельных вычислений можно отнести следующие:

- OpenMP для вычислительных систем с общей памятью [2, 113];
- MPI для кластерных систем с распределенной памятью [2, 106];
- Nvidia CUDA для графических ускорителей [50].

Таким образом, язык программирования, выбираемый для реализации программной платформы вихревых методов, должен обеспечивать возможность использования этих технологий. В наиболее полной мере их поддержка реализована в языке C++, который и выбран в качестве базового.

Нужно иметь в виду, что разработка программного комплекса для проведения вычислений на многопроцессорных системах требует учета данного фактора уже на этапе проектирования общей архитектуры, при этом, как правило, возникает необходимость в адаптации реализуемых численных методов и соответствующих алгоритмов. В наибольшей мере это относится к технологии MPI. Говоря об использовании Nvidia CUDA, следует отметить, что такая адаптация может быть нетривиальной и приводить, по существу, к разработке новых алгоритмов, учитывающих специфику работы графических ускорителей (GPU) и выполнения вычислений на них. Применительно к реализации вихревых методов привлечение вычислительных ресурсов современных графических уско-

рителей представляется перспективным. Расчеты на GPU в рамках гибридных сеточно-вихревых методов, проводившиеся еще для видеоускорителей первых поколений [118], позволили доводить число вихревых элементов до сотен тысяч и даже миллионов, что, в свою очередь, существенно повысило разрешающую способность метода.

По-видимому единственной доступной из известных на текущий момент реализаций вихревых методов для решения двумерных задач является опубликованный в сентябре 2018 года пакет `vvflow` [127], реализующий МВВД и соответствующий описанию [19]. Пакет позволяет моделировать обтекание профилей, а также решать класс сопряженных задач для механических конструкций, состоящих из связанных между собой упругими связями жестких профилей. При этом исходные коды пакета недоступны, поэтому исследовать более подробно реализованные в нем методы и подходы, и тем более модифицировать их каким-либо способом невозможно. Отметим, что в плане распараллеливания вычислений в `vvflow` реализована только возможность проведения расчетов на машинах с общей памятью при помощи технологии OpenMP. Программные пакеты, описанные в [13, 15], для пользователей недоступны.

Таким образом, *создание программной платформы для расчета двумерных течений с использованием вихревых методов, позволяющей эффективно использовать вычислительные возможности современных многопроцессорных ЭВМ различных архитектур, является актуальной задачей.*

**Цель исследования.** Целью настоящей работы является развитие вихревых методов вычислительной гидродинамики путем построения системы алгоритмов для моделирования обтекания профиля, различающихся представлением интенсивности вихревого слоя, а также способом учета кривизны обтекаемой поверхности, и создание программной платформы для решения двумерных задач гидродинамики и гидроупругости.



Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач.**

1. Построение точных аналитических решений модельных задач для оценки точности разрабатываемых алгоритмов и расчетных схем вихревых методов, а также методики выполнения такой оценки.
2. Разработка принципов построения системы алгоритмов и расчетных схем вихревых методов на основе подхода Галеркина.
3. Оценка точности ранее известных и вновь разработанных алгоритмов и расчетных схем при аппроксимации границы обтекаемого профиля прямолинейными панелями.
4. Обобщение ранее известных и вновь разработанных алгоритмов и расчетных схем вихревых методов на случай аппроксимации границы профиля криволинейными панелями.
5. Создание программной платформы с открытым исходным кодом для моделирования двумерных течений и решения сопряженных задач гидроупругости вихревыми методами с использованием возможностей современных многопроцессорных ЭВМ и анализ ее эффективности.

**Методы исследования.** При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные классы математических методов: бессеточных лагранжевых методов вычислительной гидродинамики, теории интегральных уравнений, вычислительной математики и параллельных вычислений.

**Достоверность и обоснованность полученных результатов** гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов расчетов с теоретическими оценками, известными аналитическими решениями, экспериментальными данными, а также результатами, полученными ранее другими авторами.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты.

1. Разработаны алгоритмы и расчетные схемы вихревых методов вычислительной гидродинамики с кусочно-постоянным и кусочно-линейным распределением интенсивности вихревого слоя на границе профиля при ее аппроксимации прямолинейными панелями, основанные на идеях метода Галеркина. Для вычисления коэффициентов возникающих систем линейных алгебраических уравнений получены точные аналитические формулы.
2. Разработаны алгоритмы и расчетные схемы вихревых методов повышенной точности, предполагающие явный учет криволинейности панелей, аппроксимирующих профиль. Предложены два способа учета криволинейности границы профиля: ее аппроксимация эрмитовым сплайном и приближенное вычисление криволинейных интегралов путем разложения функций по малому параметру — длине панели.
3. Создана программная платформа с открытым исходным кодом для моделирования двумерных течений и решения сопряженных задач гидроупругости вихревыми методами с использованием технологий параллельных вычислений OpenMP, MPI, Nvidia CUDA. Модульная структура программной платформы позволяет ее адаптировать для решения новых классов задач.

**Теоретическая и практическая ценность** диссертационной работы состоит в возможности повышения точности математического моделирования обтекания профилей с использованием вихревых методов путем применения разработанных алгоритмов и расчетных схем, позволяющих учитывать неравномерность распределения интенсивности вихревого слоя вдоль панелей и производить явный учет криволинейности границы профиля.

Разработан и зарегистрирован программный комплекс VM2D, представляющий собой программную платформу для моделирования двумерных течений вихревыми методами и позволяющий решать широкий класс задач, в том числе в сопряженной постановке, с использованием возможностей современных многопроцессорных ЭВМ различных архитектур.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. Алгоритмы и расчетные схемы вихревых методов вычислительной гидродинамики с кусочно-постоянным и кусочно-линейным распределением интенсивности вихревого слоя при аппроксимации профиля прямолинейными панелями, построенные с применением подхода Галеркина, а также экономичные схемы на их основе.
2. Алгоритмы и расчетные схемы вихревых методов повышенной точности, предполагающие явный учет криволинейности панелей, аппроксимирующих профиль.
3. Программная платформа с открытым исходным кодом для моделирования двумерных течений и решения сопряженных задач гидроупругости вихревыми методами с использованием технологий параллельных вычислений OpenMP, MPI, Nvidia CUDA.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы апробированы на конференциях «Advanced Problems in Mechanics» (Санкт-Петербург, 2014 и 2015), конференциях «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ)» (Архангельск, 2016 и Ростов-на-Дону, 2018), конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2016), Открытых конференциях ИСП им. В.П. Иванникова РАН (Москва, 2015 и 2018), школе-семинаре молодых ученых «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках» (Санкт-Петербург, 2017), Конференции по вычислительной и прикладной математике (Новосибирск, 2017), конференции «Методы аэрофизических исследований (ICMAR)» (Новосибирск, 2018), конференции «Particles»

(Испания, Барселона, 2015 и ФРГ, Ганновер, 2017), конференции по вихревым течениям «ICVFM» (ФРГ, Росток, 2016 и КНР, Сиань, 2018), Конференции по методам конечных элементов в задачах расчета течений (FEF) (Италия, Рим, 2017), Семинаре OpenFOAM Workshop (Португалия, Гимарайнш, 2016 и Великобритания, Эксетер, 2017), Симпозиуме по актуальным исследованиям задач механики с подвижными границами (Новая Зеландия, Крайстчерч, 2018), 7-м Европейском конгрессе по вычислительной гидродинамике (ECFD) (Великобритания, Глазго, 2018), Симпозиуме международной ассоциации по методам граничных элементов (IABEM) (Париж, 2018), 8-й и 9-й конференции «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2017 и 2018), научных слушаниях «Современные проблемы механики и математики» (Москва, 2018), XXV Всероссийском семинаре по струйным, отрывным и нестационарным течениям (Санкт-Петербург, 2018).

Результаты исследований неоднократно обсуждались на Международном авиационно-космическом научно-гуманитарном семинаре им. Сергея Михайловича и Олега Михайловича Белоцерковских под рук. А. И. Желанникова, В. В. Вышинского (ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского, 2015–2018 гг.).

Диссертация является составной частью фундаментальных исследований, проводимых в рамках гранта РФФИ 17-08-01468 «Моделирование нелинейной динамики стабилизаторов расхода для энергетических установок летательных аппаратов вихревыми методами», гранта РНФ 17-79-20445 «Развитие эффективных численных методов расчета нестационарных аэрогидродинамических нагрузок для аэрогидробаллистического проектирования летательных аппаратов» и гранта РФФИ 18-31-20051 «Разработка новых алгоритмов моделирования обтекания профилей и решения сопряженных задач гидроупругости на основе вихревых методов и их эффективная программная реализация для многопроцессорных ЭВМ различных архитектур».

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 28 научных статьях [16, 32, 33, 34, 35, 42, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 104, 105, 119], в том числе в 19 статьях в изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science [80, 82, 83, 84, 85, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 105, 119].

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, результатов и списка литературы. Диссертационная работа изложена на 150 страницах, содержит 34 иллюстрации и 17 таблиц. Библиография включает 130 наименований.

## **Глава 1. Математическое моделирование обтекания профиля в вихревых методах**

В данной главе сформулирована математическая постановка задачи. С использованием обобщенного разложения Гельмгольца записано векторное граничное интегральное уравнение относительно интенсивности вихревого слоя, выражающее собой условие прилипания на профиле. Описаны два подхода к решению данного интегрального уравнения и выписаны соответствующие им скалярные интегральные уравнения. С помощью метода конформных отображений построены точные аналитические решения модельных задач, необходимые для верификации разрабатываемых алгоритмов и расчетных схем.

### **1.1. Формулировка условия прилипания в виде граничного интегрального уравнения**

Движение вязкой несжимаемой среды [39] в области течения  $S$  описывается уравнением неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.1)$$

и уравнением Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nu \Delta \mathbf{V} - \frac{\nabla p}{\rho}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  — скорость среды в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ ;  $p = p(\mathbf{r}, t)$  — давление;  $\rho = \text{const}$  — плотность среды;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

Будем рассматривать безграничную область течения, в которой могут находиться обтекаемые профили, поверхность которых является непроницаемой для среды. Тогда граничные условия задаются следующим образом:

- условия затухания возмущений на бесконечности

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{V}_\infty, \quad p(\mathbf{r}, t) \rightarrow p_\infty \quad \text{при} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty,$$

где  $\mathbf{V}_\infty$  и  $p_\infty$  — скорость и давление в набегающем потоке;

- условие прилипания на границах обтекаемых профилей  $K(t) = \bigcup_i K_i(t)$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_K(\mathbf{r}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in K,$$

где  $\mathbf{V}_K(\mathbf{r}, t)$  — скорость движения границы профиля.

Рассмотрим поле завихренности  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в области течения  $S$ . Как показано в работах [9, 77, 130], связь между полем завихренности и полем скоростей можно установить с помощью обобщенного разложения Гельмгольца, которое в плоском случае течения несжимаемой среды (соленоидального поля скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ ) можно выразить соотношением:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{r})\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = & \mathbf{V}_\infty + \oint_{K(t)} \frac{(\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}, t) \times \mathbf{V}_K(\boldsymbol{\xi}, t)) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} d\boldsymbol{\xi} + \\ & + \oint_{K(t)} \frac{(\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}, t) \cdot \mathbf{V}_K(\boldsymbol{\xi}, t))(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} d\boldsymbol{\xi} + \int_{S(t)} \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}, t) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_\xi, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}, t)$  — орт внешней по отношению к профилю нормали.

В области течения ( $\mathbf{r} \in S$ ) следует принять  $\alpha(\mathbf{r}) = 1$ , т. е. формула (1.3) позволяет вычислить скорость несжимаемой среды в любой точке области течения по известному распределению завихренности  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t)$ , заданных значениях скорости на внутренней границе области течения (на границах обтекаемых профилей) и заданной скорости набегающего потока  $\mathbf{V}_\infty$ .

Формула (1.3) остается верной и внутри обтекаемых профилей, при этом  $\alpha(\mathbf{r}) = 0$ ; если же точка с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  лежит на границе профиля  $K$ , то граничные интегралы в (1.3) становятся сингулярными,

и если понимать их в смысле главного значения по Коши [31, 38], получается [77], что формула (1.3) оказывается верной, если в левой части принять  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_K(\mathbf{r}, t)$ , при этом коэффициент  $\alpha(\mathbf{r})$  равен внешнему углу между касательными к профилю, отнесенному к  $2\pi$ ; таким образом, для гладких участков границы  $\alpha(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}$ .

При получении (1.3) использовано лишь свойство несжимаемости среды (1.1) и общие свойства векторных полей, поэтому (1.3) должно быть справедливо в любой момент времени. Отметим, что уравнение Навье — Стокса (1.2), описывающее эволюцию полей  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$  во времени, при получении (1.3) использовано не было.

В вихревых методах завихренность  $\mathbf{\Omega}$  считается первичной расчетной величиной, по распределению которой может быть восстановлено поле скоростей  $\mathbf{V}$ . При этом для поля скоростей должно быть выполнено граничное условие прилипания на профиле, т.е. значение скорости среды на границе области течения задано. В то же время равенство, выражаемое формулой (1.3), рассматриваемой на границе профиля,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{r})\mathbf{V}_K(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_\infty + \oint_{K(t)} \frac{(\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}, t) \times \mathbf{V}_K(\boldsymbol{\xi}, t)) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} d\boldsymbol{\xi} + \\ + \oint_{K(t)} \frac{(\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}, t) \cdot \mathbf{V}_K(\boldsymbol{\xi}, t))(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} d\boldsymbol{\xi} + \int_{S(t)} \frac{\mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\xi}, t) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_{\boldsymbol{\xi}}, \quad \mathbf{r} \in K, \end{aligned} \quad (1.4)$$

при произвольно заданном пространственном распределении  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t)$  и произвольном выборе функции  $\mathbf{V}_K(\mathbf{r}, t)$ , заданной на границах профилей, может не выполняться. Такая несогласованность является следствием погрешности, возникающей при численном моделировании эволюции завихренности (в пространстве и во времени), тогда как истинное поле завихренности всегда согласовано с граничными условиями в указанном выше смысле [77].



Рассмотрим теперь вопрос моделирования эволюции завихренности в плоских течениях вязкой несжимаемой среды. В работах [1, 22, 111] показано, что уравнение Навье — Стокса (1.2) при условии (1.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}),$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} - \nabla \times ((\mathbf{V} + \mathbf{W}) \times \mathbf{\Omega}) = 0, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{W} = -\nu \frac{\nabla \mathbf{\Omega}}{\Omega}$  — так называемая диффузионная скорость;  $\Omega$  — единственная отличная от нуля в плоских течениях компонента поля  $\mathbf{\Omega}$ ; для краткости зависимость от пространственных координат и времени опущена.

Такая форма представления позволила сформулировать в [1, 22] аналог теоремы Томсона [39]: в вязкой баротропной среде при наличии потенциальных сил циркуляция скорости по замкнутому контуру остается постоянной, если каждая точка контура движется со скоростью  $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ . Аналогия между уравнением (1.5) и уравнением переноса дает возможность считать, что внутри вязкой жидкости происходит лишь перенос (включая перераспределение по частицам среды) имеющейся внутри области течения завихренности. Генерация «новой» завихренности возможна, таким образом, лишь на границе области течения — т.е. на границах обтекаемых профилей  $K$ .

Процесс генерации завихренности на границах профилей происходит непрерывно, тогда как при численном моделировании рассматривают совокупность временных слоев  $\{t_k\}_{k=1}^M$ , и решение дискретного аналога исходной (дифференциальной) задачи на каждом последующем слое находят, исходя из известного решения на предыдущем или предыдущих.

Известно также, что завихренность в вязкой жидкости распространяется по жидким частицам благодаря процессу диффузии (в частном случае распределения завихренности, соответствующем вихрю Ламба, данная задача имеет точное аналитическое решение [37]), причем эта

диффузия в силу параболичности уравнения (1.5) сразу же затрагивает всю область течения [60]. При этом имеет место экспоненциальное убывание завихренности при удалении от области, диффузия из которой рассматривается.

Значит, завихренность, генерируемая на поверхности профиля, мгновенно распространяется на все неограниченное пространство течения, но в силу экспоненциального ее убывания при удалении от профиля с высокой точностью можно ограничиться рассмотрением сравнительно тонкого слоя, окружающего профиль, в который завихренность успевает распространиться вследствие конвекции и диффузии за шаг по времени. Для величины потока завихренности (т. е. скорости ее генерации во времени с единицы длины поверхности контура) в работе [1] получено граничное интегральное уравнение, однако эффективных моделей генерации завихренности в области течения в рамках такого подхода неизвестно; исключение составляет подход, описанный в [126] для трехмерных течений, который, впрочем, широкого распространения не получил в силу сложности и невысокой точности.

Поэтому на практике используют следующее дополнительное упрощение: считая шаг по времени малым, пренебрежем (конечной) толщиной генерируемого за этот промежуток времени слоя завихренности и заменим его бесконечно тонким вихревым слоем, расположенным в области течения бесконечно близко к границе профиля, интенсивность которого выбирается так, чтобы выполнялось (1.4).

Таким образом, завихренность, содержащаяся в вихревом слое, моделирует результат процесса ее генерации на профиле на момент конца временного шага. Проводя аналогию с численным решением задач для дифференциальных уравнений, содержащих производную по времени, можно заметить, что описанный подход соответствует применению неявной схемы. Получаемое в результате численное решение помимо описания процесса генерации завихренности обеспечивает выполнение

условия согласованности полей  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{\Omega}$ , выражаемого уравнением (1.4). Это важно, поскольку для расчета эволюции завихренности применяется приводящий к нарушению этого условия явный метод, состоящий в описанном выше перемещении завихренности вдоль векторных линий поля  $\mathbf{V} + \mathbf{W}$  без изменения ее интенсивности.

Генерируемый вихревой слой будем называть свободным в том смысле, что он является частью течения и, будучи сгенерированным на границе, в дальнейшем эволюционирует в соответствии с законами гидродинамики. Обозначим его интенсивность  $\gamma(\mathbf{r})$ , тогда как под  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$  будем понимать результат моделирования на конец временного шага эволюции завихренности, уже имевшейся в области течения к началу этого шага. В связи с приведенными рассуждениями далее будем рассматривать уравнение (1.3) лишь в моменты  $t_k$ , соответствующие временным шагам, и зависимость всех величин от времени опустим.

Тогда для произвольной точки области течения (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}) = & \mathbf{V}_\infty + \int_S \frac{\mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_\xi + \oint_K \frac{\gamma(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi + \\ & + \oint_K \frac{(\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{V}_K(\boldsymbol{\xi})) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi + \oint_K \frac{(\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{V}_K(\boldsymbol{\xi}))(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi, \quad \mathbf{r} \in S. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Второй и третий интегралы в правой части (1.6) имеют одинаковую структуру, и аналогичную структуру имеет последний интеграл, поэтому если обозначить

$$\gamma^{att}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{V}_K(\boldsymbol{\xi}), \quad q^{att}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{V}_K(\boldsymbol{\xi}),$$

то соответствующие контурные интегралы можно рассматривать как скорости, индуцируемые вихревым слоем интенсивностью  $\gamma^{att}(\boldsymbol{\xi})$  и слоем источников интенсивностью  $q^{att}(\boldsymbol{\xi})$ , расположенными на границе профиля. Данные слои называют присоединенными, понимая под этим их

«негидродинамическую» природу: их интенсивности определяются только скоростью границы профиля и его формой. Соответственно, частью течения эти слои не являются и рассматривать их эволюцию не требуется. С учетом введенных обозначений соотношение (1.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \int_S \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_\xi + \oint_K \frac{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi + \\ + \oint_K \frac{\boldsymbol{\gamma}^{att}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi + \oint_K \frac{q^{att}(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi, \quad \mathbf{r} \in S. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Таким образом, формула (1.7) дает возможность вычислить скорость в любой точке области течения, зная распределение завихренности  $\boldsymbol{\Omega}$ , интенсивность свободного вихревого слоя  $\boldsymbol{\gamma}$ , а также скорость движения границы профиля, определяющую интенсивности слоев  $\boldsymbol{\gamma}^{att}$  и  $q^{att}$ . Это соотношение можно рассматривать как естественное обобщение закона Био — Савара для течений несжимаемой среды.

Поскольку «суммарное» распределение завихренности в области течения теперь представляется через поле  $\boldsymbol{\Omega}$  и тонкий вихревой слой интенсивностью  $\boldsymbol{\gamma}$ , последний интеграл в соотношении (1.4), выражающий влияние завихренности в области течения, также следует модифицировать. Данный интеграл вычисляется при  $\mathbf{r} \in K$ , т. е. на границе профиля, поэтому сейчас его следует понимать как предельное значение скорости, индуцируемой  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  на профиле, считая, что вихревой слой лежит в области течения (говоря нестрого, можно считать, что между вихревым слоем и поверхностью профиля имеется «бесконечно малый зазор»).

Математически это означает, что в дополнение к последнему интегралу в правой части (1.4) требуется вычислять предельное значение интеграла

$$\oint_K \frac{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi$$

со стороны профиля, при этом сам интеграл представляет собой интеграл

с ядром Гильберта [38], и его предельное значение

$$\Phi^-(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow K^-} \oint_K \frac{\gamma(\xi) \times (\mathbf{r} - \xi)}{2\pi|\mathbf{r} - \xi|^2} d\ell_\xi$$

может быть выражено через главное значение по Коши с помощью формул Сохоцкого — Племеля [46]:

$$\Phi^-(\mathbf{r}) = \oint_K \frac{\gamma(\xi) \times (\mathbf{r} - \xi)}{2\pi|\mathbf{r} - \xi|^2} d\ell_\xi - \alpha(\mathbf{r})(\gamma(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})).$$

Здесь  $\alpha(\mathbf{r})$  имеет тот же смысл, что и в формуле (1.4).

Таким образом, окончательно получаем вместо (1.4) интегральное уравнение, справедливое на границе профиля ( $\mathbf{r} \in K$ ):

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{r})\mathbf{V}_K(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \int_S \frac{\Omega(\xi) \times (\mathbf{r} - \xi)}{2\pi|\mathbf{r} - \xi|^2} dS_\xi + \oint_K \frac{\gamma(\xi) \times (\mathbf{r} - \xi)}{2\pi|\mathbf{r} - \xi|^2} d\ell_\xi - \\ - \alpha(\mathbf{r})(\gamma(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})) + \oint_K \frac{\gamma^{att}(\xi) \times (\mathbf{r} - \xi)}{2\pi|\mathbf{r} - \xi|^2} d\ell_\xi + \oint_K \frac{q^{att}(\xi)(\mathbf{r} - \xi)}{2\pi|\mathbf{r} - \xi|^2} d\ell_\xi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отметим еще раз, что в (1.8) все контурные интегралы в правой части являются сингулярными, их следует понимать в смысле главных значений по Коши.

Если контур  $K(t)$  является кусочно-гладким, то нормаль  $\mathbf{n}$ , а следовательно, и интенсивности присоединенных слоев  $\gamma^{att}$  и  $q^{att}$  в угловых точках не определены. В этом случае записать уравнение (1.8) в самой угловой точке нельзя, однако оно остается справедливым в пределе при приближении к угловой точке слева и справа.

Если принять, что скорость движения границы профиля  $\mathbf{V}_K(\mathbf{r})$  известна в любой момент времени, т. е. профиль движется по заданному закону или покоится, уравнение (1.8) содержит единственную неизвестную величину  $\gamma(\mathbf{r})$  и может быть записано в виде

$$\oint_K \frac{\gamma(\xi) \times (\mathbf{r} - \xi)}{2\pi|\mathbf{r} - \xi|^2} d\ell_\xi - \alpha(\mathbf{r})(\gamma(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})) = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K, \quad (1.9)$$

где правая часть

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = & \alpha(\mathbf{r})\mathbf{V}_K(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_\infty - \int_S \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_\xi - \\ & - \oint_K \frac{\boldsymbol{\gamma}^{att}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi - \oint_K \frac{q^{att}(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi \quad (1.10) \end{aligned}$$

является известной функцией.

Если же рассматривается сопряженная задача, в которой движение профиля обусловлено действующими на него гидродинамическими нагрузками, скорости точек границы  $\mathbf{V}_K(\mathbf{r})$  заранее неизвестны. В этом случае могут применяться два подхода:

- применение некоторой схемы расщепления, тогда на каждом шаге расчета по времени решаются последовательно задачи по моделированию обтекания профиля, движущегося с известной скоростью, и расчету его динамики под действием известных гидродинамических нагрузок;
- рассмотрение задачи в полностью связанной («монолитной») постановке, когда  $\mathbf{V}_K(\mathbf{r})$  и выражаемые через нее величины  $\boldsymbol{\gamma}^{att}(\mathbf{r})$  и  $q^{att}(\mathbf{r})$  в уравнении (1.9) неизвестны.

Применительно ко второму случаю в работах [17, 71] рассмотрен случай движения жесткого профиля. В этом случае скорость любой его точки линейно выражается через скорость одной (произвольной) выделенной точки и угловую скорость вращения. Тогда уравнение (1.9) помимо неизвестного распределения  $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi})$  содержит неизвестные линейные и угловую скорости и дополняется уравнениями, определяющими динамику профиля. В [17] показано, что гидродинамические силы при этом могут быть выражены линейно через  $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi})$  и  $\mathbf{V}_K$ , поэтому результирующая система остается линейной по отношению ко всем неизвестным, если только силы реакции механической подсистемы, действующие на профиль, являются линейными функциями компонент вектора его скорости и угловой скорости.

## 1.2. Два подхода к удовлетворению граничного интегрального уравнения

Уравнение (1.9), следующее из условия прилипания, является векторным. Будем считать, что в области течения введена правая декартова прямоугольная система координат  $Oxyz$  с ортами  $i, j, k$ , при этом орт  $k$  ортогонален плоскости течения. Тогда векторы завихренности  $\Omega$  и интенсивности вихревых слоев  $\gamma$  и  $\gamma^{att}$  имеют лишь одну отличную от нуля компоненту и можно записать

$$\Omega(\mathbf{r}) = \Omega(\mathbf{r})\mathbf{k}, \quad \gamma(\mathbf{r}) = \gamma(\mathbf{r})\mathbf{k}, \quad \gamma^{att}(\mathbf{r}) = \gamma^{att}(\mathbf{r})\mathbf{k},$$

работая в дальнейшем для удобства со скалярным полем  $\Omega(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \in S$ , и распределениями  $\gamma(\mathbf{r})$  и  $\gamma^{att}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \in K$ .

Введем в каждой точке границы профиля правый локальный ортогональный базис  $(\mathbf{n}(\mathbf{r}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}), \mathbf{k})$ , где как и ранее  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — орт внешней по отношению к профилю нормали, тогда вектор касательной  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$  будет направлен таким образом, чтобы при обходе контура в его направлении область течения оставалась справа (Рис. 1.1). Отметим при этом, что в угловых точках профиля следует рассматривать левые и правые нормали и касательные соответственно.

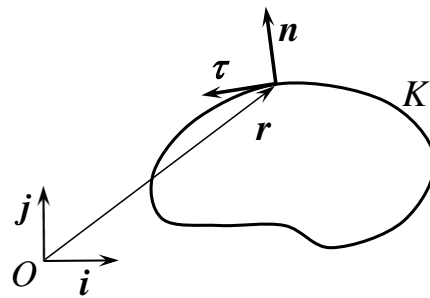


Рис. 1.1. Векторы касательной и нормали к границе профиля в точке  $\mathbf{r}$

Запишем уравнение (1.9), спроецировав его в каждой точке границы профиля на векторы  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  и  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$ . В первом случае получим уравнение, выражающее собой условие непротекания на границе профиля ( $\mathbf{r} \in K$ ):

$$\oint_K \frac{(\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\ell_{\boldsymbol{\xi}} - \alpha(\mathbf{r}) \left( (\mathbf{k} \times \mathbf{n}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \right) \gamma(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}),$$

или, с учетом свойств смешанного произведения векторов,

$$\oint_K \frac{-\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K. \quad (1.11)$$

В случае проецирования на орт касательной к контуру получаем условие непроскальзывания:

$$\oint_K \frac{(\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \alpha(\mathbf{r}) \left( (\mathbf{k} \times \mathbf{n}(\mathbf{r})) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \right) \gamma(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}),$$

или

$$\oint_K \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \alpha(\mathbf{r}) \gamma(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K. \quad (1.12)$$

Математические модели обтекания профиля, предполагающие отыскание интенсивности вихревого слоя в результате решения уравнения (1.11), будем по аналогии с работой [45] называть  $N$ -схемой, а модели на основе уравнения (1.12) —  $T$ -схемой. Для удобства записей введем для уравнений (1.11) и (1.12) универсальную форму представления:

$$\oint_K Q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \mu \alpha(\mathbf{r}) \gamma(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K, \quad (1.13)$$

где для ядра уравнения, его правой части и параметра  $\mu$  использованы обозначения, приведенные в Таблице 1.

Таблица 1.

Ядра и правые части интегральных уравнений

	$Q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})$	$\mathbf{f}(\mathbf{r})$	$\mu$
$N$ -схема	$Q_n(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi \mathbf{r} - \boldsymbol{\xi} ^2}$	$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$	0
$T$ -схема	$Q_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi \mathbf{r} - \boldsymbol{\xi} ^2}$	$\mathbf{f}_\tau(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$	1



Свойства уравнения (1.11) подробно исследованы в [38], где, в частности, приведено условие его разрешимости, состоящее в равенстве нулю интеграла от правой части. Можно показать, что при задании  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  в виде (1.10) данное условие удовлетворено. Применительно к (1.12) в [77] также показана его разрешимость.

В работе [77] показано, что для удовлетворения векторного уравнения (1.9) достаточно удовлетворить одному из уравнений (1.11) или (1.12), т.е. математически подходы, основанные на обеспечении равенства касательных либо нормальных компонент скоростей на границе профиля, эквивалентны. Однако интегральные уравнения (1.11) и (1.12) обладают существенно различающимися свойствами:

- уравнение (1.11) представляет собой сингулярное граничное интегральное уравнение 1-го рода с ядром типа Гильберта;
- уравнение (1.12) представляет собой граничное интегральное уравнение 2-го рода, ядро которого ограничено для гладких профилей.

Уравнение (1.11) всегда имеет бесконечное множество решений; для выделения единственного решения требуется задание дополнительного условия, которое, как доказано в [38], может быть сформулировано одним из следующих способов:

- задание решения в одной из точек на контуре;
- задание интеграла от решения по всему контуру.

В вихревых методах вычислительной гидродинамики применяются приемы, относящиеся к обоим способам. В частности, при расчете безотрывного стационарного обтекания крыловых профилей методом дискретных вихрей циркуляцию вихря, расположенного на острой кромке, полагают равной нулю [38], что соответствует условию Чаплыгина — Жуковского — Кутты. При решении нестационарных задач задают величину интеграла от решения по контуру

$$\oint_K \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{l}_\xi = \Gamma^*, \quad (1.14)$$

что соответствует содержанию теоремы Томсона о сохранении завихренности внутри жидкого контура с учетом ее обобщения на случай обтекания подвижных профилей потоком вязкой несжимаемой жидкости [1, 22].

В [77] указано, что уравнение (1.12) имеет единственное решение, при этом выполнение условия (1.14) обеспечивается автоматически (величина  $\Gamma^*$  определяется изменением скорости движения границы профиля за шаг по времени). Следует сделать замечание о том, что данное утверждение верно лишь частично: оно выполнено для случая внутренних течений, т.е. при ограниченной области  $S$  (именно такие течения рассмотрены в работе [77]). В случае внешних течений и неограниченной области  $S$  решение уравнения (1.12) также неединственно, как и решение уравнения (1.11), и для выделения того из них, которое имеет физический смысл, следует использовать обсуждавшееся выше дополнительное условие.

Проиллюстрируем сказанное на примере неподвижного кругового контура радиусом  $R$  и покоящейся среды. В этом случае, очевидно,  $\gamma \equiv 0$ . Введем естественную параметризацию контура длиной дуги, тогда

$$\mathbf{r}(s) = \left( R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right)^T,$$

во всех точках  $\alpha(s) = \frac{1}{2}$  и правая часть  $\mathbf{f}(\mathbf{r}(s)) = 0$ , как это следует из (1.10).

При рассмотрении в качестве области течения внешности круга имеем

$$\mathbf{n}(s) = \left( \cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R} \right)^T, \quad \boldsymbol{\tau}(s) = \left( -\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right)^T,$$

а для области течения — внутренности круга

$$\mathbf{n}(s) = \left( -\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R} \right)^T, \quad \boldsymbol{\tau}(s) = \left( \sin \frac{s}{R}, -\cos \frac{s}{R} \right)^T.$$

Подставляя данные выражения в (1.12), получаем интегральное уравнение вида

$$\int_0^{2\pi R} \pm \frac{\gamma(\sigma)}{4\pi R} d\sigma - \frac{\gamma(s)}{2} = 0, \quad s \in [0, 2\pi R].$$

где знак «+» соответствует внешнему течению, а знак «−» — внутреннему. Это уравнение запишем в виде

$$\gamma(s) = \pm \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \gamma(\sigma) d\sigma, \quad (1.15)$$

и рассмотрим простейшую задачу на собственные значения интегрального оператора

$$L\gamma = \int_0^{2\pi R} \gamma(\sigma) d\sigma,$$

действующего в пространстве интегрируемых функций. Имеем  $L\gamma = \lambda\gamma$ , т. е.

$$\int_0^{2\pi R} \gamma(\sigma) d\sigma = \lambda\gamma(s), \quad s \in [0, 2\pi R],$$

и, проинтегрировав левую и правую части этого уравнения, получим

$$\int_0^{2\pi R} ds \int_0^{2\pi R} \gamma(\sigma) d\sigma = \lambda \int_0^{2\pi R} \gamma(s) ds,$$

откуда  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 2\pi R$ . Значение  $\frac{1}{\lambda_2}$  является характеристическим числом уравнения (1.15) для внешнего течения, значит, его решение неединственно (его решением является  $\gamma(s) = C$  для любой константы  $C$ ), тогда как для внутреннего течения выполнено условие единственности, следовательно, оно имеет только нулевое решение.

В общем случае контура произвольной формы, и тем более в случае моделирования обтекания системы профилей, решить уравнение (1.9) точно невозможно, однако для частных случаев аналитическое решение может быть получено в элементарных функциях. Такие решения полезны для верификации математических моделей, используемых в практических реализациях вихревых методов.

### 1.3. Точные решения граничного интегрального уравнения для интенсивности вихревого слоя

Рассмотрим случай внешнего обтекания неподвижного недеформируемого профиля набегающим потоком несжимаемой среды, имеющим скорость  $\mathbf{V}_\infty$ , когда распределение завихренности в области течения задано в виде  $N_v$  изолированных вихревых элементов, расположенных в точках с радиус-векторами  $\mathbf{r}_s$  и имеющих циркуляции  $\Gamma_s$ ,  $s = 1, \dots, N_v$ :

$$\Omega(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^{N_v} \Gamma_s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \quad (1.16)$$

где  $\delta(\mathbf{r})$  — двумерная дельта-функция Дирака.

Поскольку профиль неподвижен, то  $\mathbf{V}_K = 0$  и, следовательно

$$\gamma^{att}(\mathbf{r}) = 0, \quad q^{att}(\mathbf{r}) = 0.$$

Точное аналитическое решение для профилей простой формы — эллипсов и крыловых профилей Жуковского может быть построено с помощью методов теории конформных отображений [36, 44].

Для этого следует записать выражение для комплексного потенциала поля скоростей, соответствующего обтеканию кругового профиля  $C$  радиусом  $R$  в присутствии изолированных вихревых элементов в области течения. Пусть  $\xi$  — точка на комплексной плоскости, а центр кругового профиля расположим в начале координат; комплексную скорость набегающего потока обозначим за  $W_\infty$ . Вихревые элементы с циркуляциями  $\Gamma_s$  будем считать расположенными в точках  $\xi_{s,1} = \rho_{s,1} e^{i\theta_s}$ .

Чтобы учесть вклад от влияния  $s$ -го вихря в комплексный потенциал течения, необходимо ввести систему отраженных вихрей [44] (Рис. 1.2): вихрь с циркуляцией  $(-\Gamma_s)$ , расположенный в симметричной относительно окружности точке

$$\xi_{s,2} = \rho_{s,2} e^{i\theta_s} = \frac{R^2}{\rho_{s,1}} e^{i\theta_s}, \quad (1.17)$$

и вихрь с циркуляцией  $\Gamma_s$ , расположенный в центре окружности.

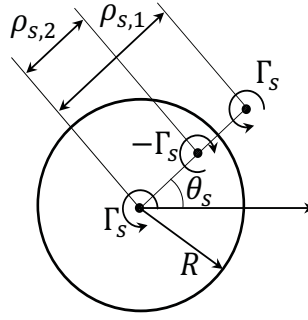


Рис. 1.2. Вихревой элемент и система отраженных вихрей

Тогда комплексный потенциал может быть выражен суперпозицией комплексных потенциалов бесциркуляционного течения вокруг кругового профиля, чисто циркуляционного течения с произвольной циркуляцией  $\Gamma$  и течений, обусловленных влиянием вихревых элементов в области течения и системы отраженных вихрей:

$$F(\xi) = W_{\infty}^* \xi + \frac{R^2 W_{\infty}}{\xi} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{\xi}{R} + \sum_{s=1}^{N_v} \frac{\Gamma_s}{2\pi i} \left( \operatorname{Ln} \frac{\xi - \xi_{s,1}}{R} - \operatorname{Ln} \frac{\xi - \xi_{s,2}}{R} + \operatorname{Ln} \frac{\xi}{R} \right),$$

где верхний индекс «\*» означает комплексное сопряжение;  $\Gamma$  — циркуляция поля скоростей вдоль контура, охватывающего профиль  $C$ , но не содержащего вихревых элементов в области течения.

Для произвольного профиля  $C'$  комплексный потенциал можно построить, если известны прямое и обратное конформные отображения  $z = \zeta(\xi)$  и  $\xi = \hat{\zeta}(z)$ , переводящие внешность круга  $C$  на внешность профиля  $C'$  и наоборот соответственно (Рис. 1.3), причем  $\zeta'(\xi) \rightarrow \text{const}$  при  $\xi \rightarrow \infty$ .

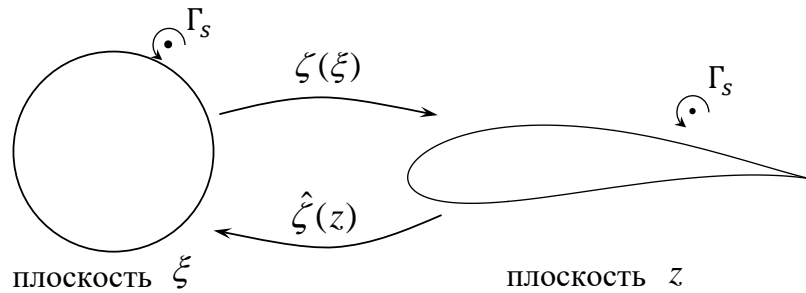


Рис. 1.3. Комплексные плоскости  $\xi$  и  $z$  с круговым профилем и профилем произвольной формы и отображения их внешностей друг на друга

Чтобы построить комплексный потенциал течения вокруг кругового профиля  $C$  на плоскости  $\xi$ , который соответствует комплексному потенциалу течения вокруг профиля произвольной формы на плоскости  $z$ , необходимо отобразить точки расположения вихрей с плоскости  $z$  на плоскость  $\xi$  и построить для них систему отраженных вихрей на плоскости  $\xi$ . Таким образом, с помощью введенных конформных отображений можно записать выражение для комплексного потенциала течения во внешности профиля  $C'$ :

$$F(\xi) = F(\hat{\zeta}(z)) = W_{\infty}^* \hat{\zeta}(z) + \frac{R^2 W_{\infty}}{\hat{\zeta}(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{\hat{\zeta}(z)}{R} + \\ + \sum_{s=1}^{N_v} \frac{\Gamma_s}{2\pi i} \left( \operatorname{Ln} \frac{\hat{\zeta}(z) - \hat{\zeta}(z_s)}{R} - \operatorname{Ln} \frac{\hat{\zeta}(z) - R^2/\hat{\zeta}(z_s)^*}{R} + \operatorname{Ln} \frac{\hat{\zeta}(z)}{R} \right) = f(z).$$

Здесь  $z_s$  — положения вихревых элементов в области течения на плоскости  $z$ ; для комплексной скорости  $W_{\infty}$  справедливо выражение  $W_{\infty} = V_{\infty} \cdot \zeta'(\infty)^*$ , где  $V_{\infty} = |V_{\infty}|e^{i\beta}$  — комплексная скорость набегающего потока, обтекающего профиль  $C'$ .

Для эллиптических профилей и крыловых профилей Жуковского требуемые отображения известны и могут быть выражены через функцию Жуковского [36, 44]:

$$\zeta(\xi) = \frac{1}{2} \left( \xi + H + \frac{a^2}{\xi + H} \right), \quad \hat{\zeta}(z) = z - H + \sqrt{z^2 - a^2}.$$

Здесь параметры  $a$ ,  $H$  и радиус  $R$  круга  $C$  определяются формой обтекаемого профиля  $C'$ :

- для эллиптического профиля с полуосями  $a_1$  и  $b_1$

$$a = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}, \quad R = a_1 + b_1, \quad H = 0;$$

- для крылового профиля Жуковского, длина, толщина и кривизна которого заданы параметрами  $a$ ,  $d$  и  $h$  соответственно,

$$R = d + \sqrt{a^2 + h^2}, \quad H = \frac{-ad + iRh}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Отметим, что  $\zeta'(\xi) \rightarrow \frac{1}{2}$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , поэтому  $W_{\infty} = \frac{1}{2}V_{\infty}$ .

Введя параметризацию границы кругового профиля  $C$  на плоскости  $\xi$  при помощи параметра  $t$

$$\xi = Re^{i(t-\varphi)}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

получим выражение для комплексного потенциала течения на границе профиля:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = F(Re^{i(t-\varphi)}) = W_\infty^* Re^{i(t-\varphi)} + W_\infty Re^{-i(t-\varphi)} + \\ + \frac{t-\varphi}{2\pi} \left( \Gamma + \sum_{s=1}^{N_v} \Gamma_s \right) + \sum_{s=1}^{N_v} \frac{\Gamma_s}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{Re^{i(t-\varphi)} - \rho_{s,1} e^{i\theta_s}}{Re^{i(t-\varphi)} - \rho_{s,2} e^{i\theta_s}}, \quad t \in [0, 2\pi), \end{aligned}$$

где  $\rho_{s,1} e^{i\theta_s} = \hat{\zeta}(z_s)$  — положение  $s$ -го вихря, отображенного на плоскость  $\xi$ ;  $\rho_{s,2} = R^2/\rho_{s,1}$ . Значение параметра  $\varphi$  выберем таким образом, чтобы точка  $t = 0$  соответствовала точке на большой полуоси эллипса (в этом случае  $\varphi = 0$ ), либо острой кромке профиля Жуковского (тогда  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{h}{a}$ ).

Тогда произвольному значению параметра  $t$  на исходном профиле  $C'$  соответствует точка

$$z(t) = \zeta(e^{i(t-\varphi)}) = \frac{1}{2} \left( \chi(t) + \frac{a^2}{\chi(t)} \right), \quad \chi(t) = R e^{i(t-\varphi)} + H \quad (1.18)$$

на окружности  $C$  на комплексной плоскости  $\xi$ .

Интенсивность свободного вихревого слоя в случае неподвижного недеформируемого профиля может быть найдена как касательная компонента скорости в соответствующей точке границы профиля, которая, в свою очередь, равна произведению комплексно сопряженной скорости в этой точке на «комплексную касательную» (комплексное число единичного модуля, соответствующее вектору касательной):

$$\gamma^{ex}(t) = V^*(t) \cdot \tau(t) = \frac{\Phi'(t)}{z'(t)} \cdot \frac{z'(t)}{|z'(t)|} = \frac{\Phi'(t)}{|z'(t)|}.$$

В результате получаем следующую формулу для искомой интенсивности свободного вихревого слоя:

$$\gamma^{ex}(t) = \frac{2|V_\infty| \sin(\varphi + \beta - t) + (\Gamma + W(t))/(\pi R)}{\left| 1 - \frac{a^2}{(Re^{i(t-\varphi)} + H)^2} \right|}, \quad (1.19)$$

где  $W(t)$  выражает влияние точечных вихрей в области течения:

$$W(t) = \sum_{s=1}^{N_v} \Gamma_s \frac{R \cos(t - \theta_s - \varphi) - \rho_{s,2}}{R \cos(t - \theta_s - \varphi) - (\rho_{s,1} + \rho_{s,2})/2}.$$

Величины  $\rho_{s,1}$  и  $\theta_s$  могут быть вычислены по формулам

$$\rho_{s,1} = |\hat{\zeta}(z_s)|, \quad \theta_s = \text{Arg } \hat{\zeta}(z_s),$$

где при вычислении значения  $\hat{\zeta}(z)$  следует выбирать ту ветвь функции квадратного корня, для которой выполнено условие  $\rho_{s,1} > R$ . Значения  $\rho_{s,2}$  заданы формулой (1.17).

Отметим, что знаменатель в формуле (1.19) может быть выражен через параметры профиля: для эллиптического профиля

$$\left| 1 - \frac{a^2}{(Re^{i(t-\varphi)} + H)^2} \right| = \frac{2\sqrt{a_1^2 \sin^2 t + b_1^2 \cos^2 t}}{a_1 + b_1},$$

а для профиля Жуковского

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{a^2}{(Re^{i(t-\varphi)} + H)^2} \right| &= \\ &= \frac{2}{(d \sin \varphi + h + R \sin(t - \varphi))^2 + (R \cos(t - \varphi) - d \cos \varphi)^2} \times \\ &\times \left\{ \left( (d \sin \varphi + R \sin(t - \varphi))(d \sin \varphi + h + R \sin(t - \varphi)) + dR(\cos t - 1) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( R(\sin(t - \varphi) + \sin \varphi)(R \cos(t - \varphi) - d \cos \varphi) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Величина циркуляции  $\Gamma$  для эллиптического профиля может быть задана произвольно, для рассматриваемых далее модельных задач положим  $\Gamma = 0$  для произвольного угла атаки профиля; для крылового профиля Жуковского  $\Gamma$  может быть определена из условия Чаплыгина — Жуковского об ограниченности скорости на острой кромке: ее величина пропорциональна скорости набегающего потока и зависит от формы профиля, угла атаки, а также расположения вихрей в области течения:

$$\Gamma = -2\pi|V_\infty| \sin(\beta + \varphi) R - \sum_{s=1}^{N_v} \Gamma_s \frac{R \cos(\theta_s + \varphi) - \rho_{s,2}}{R \cos(\theta_s + \varphi) - (\rho_{s,1} + \rho_{s,2})/2}.$$



Ниже на рисунках представлены точные решения модельных задач об обтекании профиля в присутствии одного вихря в области течения вблизи его поверхности. В реальных расчетах вихревыми методами в области течения присутствует множество вихрей, влияния которых будут в соответствии с вышеописанной методикой суммироваться. В данном случае хорошо видно, какое влияние оказывает вихрь на решение.

На Рис. 1.4, *а*, представлены линии тока для течения вокруг эллиптического профиля с полуосями  $a_1 = 4$  и  $b_1 = 1$  в присутствии вихря, расположенного в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}_s = (2, 1.5)^T$  и имеющего циркуляцию  $\Gamma_s = 10$ . Набегающий поток имеет единичную скорость и направлен под углом атаки  $\beta = \frac{\pi}{6}$ . На Рис. 1.4, *б*, показана зависимость точного решения для интенсивности вихревого слоя на профиле от параметра  $t$ , введенного так, как описано выше.

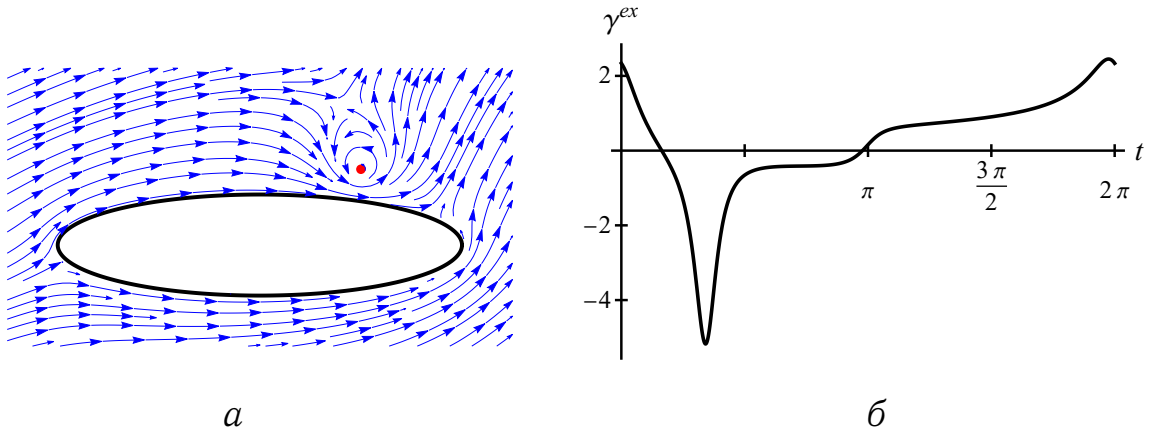


Рис. 1.4. Линии тока поля скоростей при обтекании эллиптического профиля ( $a_1/b_1 = 4$ ) в присутствии вихря (*а*) и точное решение для интенсивности вихревого слоя (*б*)

На Рис. 1.5, *а* и *б*, показаны результаты решения аналогичной задачи для крылового профиля Жуковского с параметрами  $a = 3$ ,  $d = 0.5$ ,  $h = 0.3$ . Как и ранее, скорость набегающего потока равна 1, угол атаки  $\beta = \frac{\pi}{6}$ . Вихрь расположен в точке  $\mathbf{r}_s = (1.1, 1)^T$  и имеет циркуляцию  $\Gamma_s = 10$ .

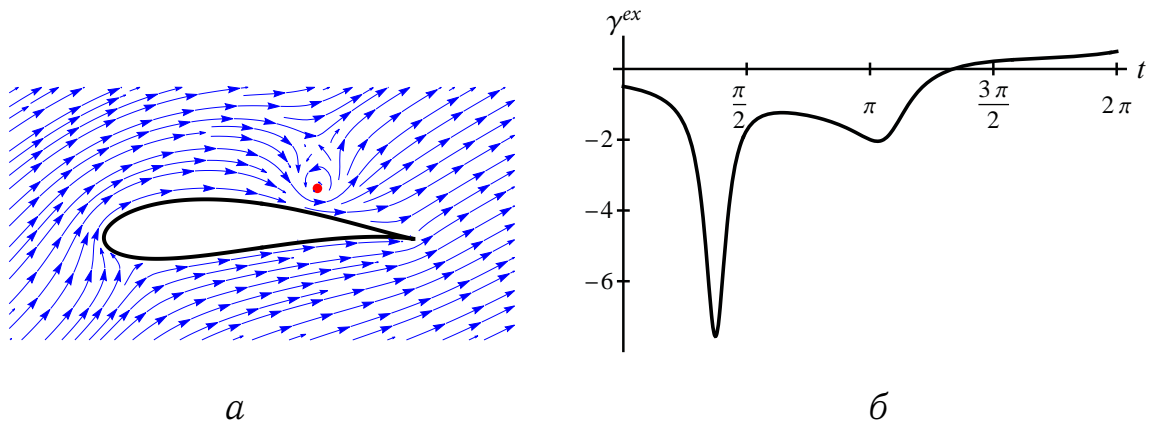


Рис. 1.5. Линии тока поля скоростей при обтекании профиля Жуковского ( $a = 3$ ,  $d = 0.5$ ,  $h = 0.3$ ) в присутствии вихря (а) и точное решение для интенсивности вихревого слоя (б)

### Выводы по главе 1

В данной главе выписано векторное граничное интегральное уравнение относительно скалярной величины интенсивности свободного вихревого слоя, которое выражает собой условие прилипания на профиле.

Рассмотрены два подхода к удовлетворению граничного условия прилипания на профиле. Первый подход, который по существу представляет собой обеспечение условия непротекания, приводит к необходимости решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром типа Гильберта. Второй подход — обеспечение условия непроскальзывания — подразумевает решение интегрального уравнения второго рода с ограниченным (для гладких профилей) ядром.

Для модельных задач об обтекании неподвижного аэродинамического профиля Жуковского и эллиптического профиля записаны точные аналитические решения граничного интегрального уравнения. Данные решения могут быть использованы для верификации разрабатываемых моделей и схем в вихревых методах.

## **Глава 2. Моделирование обтекания профиля при аппроксимации его границы многоугольником**

В данной главе рассмотрены известные алгоритмы и расчетные схемы для моделирования обтекания профиля при его аппроксимации многоугольником. Данные схемы основаны на представлении интенсивности вихревого слоя в виде отдельных вихрей либо в виде кусочно-постоянного распределения и удовлетворении граничного интегрального уравнения в отдельных точках либо в среднем на панелях. С использованием идей метода Галеркина построены схемы с кусочно-линейным представлением интенсивности вихревого слоя, и произведена их верификация.

### **2.1. Известные алгоритмы и расчетные схемы**

Ориентируясь на известные реализации вихревых методов [1, 14, 29, 38, 69, 103, 108], представляется целесообразным принять следующее упрощение относительно представления формы обтекаемого профиля: будем заменять контур  $K$  ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков, называемых обычно панелями. Это позволяет существенно упростить исходные математические модели, основанные на граничных интегральных уравнениях (1.11) и (1.12): контурные интегралы в них теперь можно заменить суммами по отдельным панелям (либо по их участкам для выделения главных значений интегралов по Коши), при этом векторы касательной и нормали вдоль каждой панели остаются постоянными.

#### **2.1.1. Представление решения на панелях**

В [45] для профиля, заданного многоугольником, рассмотрены две группы алгоритмов определения интенсивности вихревого слоя на его границе:

- 1) вихревой слой моделируется совокупностью отдельных вихрей;
- 2) вихревой слой полагается распределенным; его интенсивность представляется в виде кусочно-постоянной функции (по панелям).

Для каждого из них для  $N$ - и  $T$ -схем получены две различающиеся по точности расчетные схемы для построения дискретных аналогов соответствующих интегральных уравнений (1.11) и (1.12):

- удовлетворение интегрального уравнения в точках коллокации;
- удовлетворение интегрального уравнения в среднем на панелях.

Рассмотрим кратко подходы, в которых вихревой слой на профиле представляется совокупностью отдельных вихрей. В частности, подробно исследованная и обоснованная в [38] расчетная схема метода дискретных вихрей (МДВ) соответствует именно этому алгоритму моделирования обтекания профиля, при этом дискретный аналог интегрального уравнения (1.11) получается из условия коллокации в т. н. контрольных точках. Необходимость выделения главных значений соответствующих сингулярных интегралов приводит к требованию равномерности разбиения границы профиля на панели. Точки расположения вихрей в МДВ, как указано в [38], рекомендуется выбирать в началах панелей, контрольные точки — в серединах панелей. Там же отмечено, что схема расположения вихрей и контрольных точек отстоящими на  $1/4$  и  $3/4$  от начала панелей соответственно в ряде задач обладает определенными преимуществами, а также указан путь построения иных схем расположения данных точек.

В работе [22] указано, что дискретизацию данной модели можно проводить, обеспечивая выполнение граничного условия непротекания как в отдельных контрольных точках, так и интегрально по панелям. Эти же подходы, включая возможность использования  $T$ -схем, упоминаются в [69].

В рассмотренной в [45]  $T$ -схеме для данной модели вихри предложено располагать в центрах панелей, а граничное условие удовлетворять в этих же точках, либо интегрально по панелям.

В рамках рассмотрения распределенного свободного вихревого слоя кусочно-постоянной интенсивности при решении модельных задач в [45] показано, что  $T$ -схема обеспечивает существенно бóльшую точность. При удовлетворении граничного условия в контрольных точках, располагае-

мых в центрах панелей, подынтегральные функции всегда ограничены; при удовлетворении граничного условия в среднем по панелям интегралы для смежных панелей оказываются несобственными, но сходящимися.

В общем, в [45] сделан обоснованный вывод о предпочтительности использования моделей на основе  $T$ -схемы в силу более высокой точности получаемого решения при достаточно качественной аппроксимации профиля многоугольником. При этом наилучшие результаты для рассмотренной серии модельных задач в [45] удалось получить для модели с кусочно-постоянным распределением интенсивности вихревого слоя, когда при переходе к дискретному аналогу обеспечивается удовлетворение уравнения (1.12) в среднем по панелям.

Естественным направлением дальнейшего повышения точности определения интенсивности вихревого слоя представляется развитие данного подхода в сторону уточнения поведения решения на каждой панели. В частности, представляет интерес схема, основанная на кусочно-линейном представлении решения на панелях. Возможность использования моделей такого типа обсуждается в [7, 8, 76] применительно к общей схеме решения задач теории потенциала, сводящихся к граничным интегральным уравнениям. В работе [107] при моделировании течений вихревыми методами также используется одна из возможных схем с кусочно-линейным представлением решения, однако ее преимущество в плане потенциального повышения точности решения в значительной мере нивелируется по причине использования  $N$ -схемы и грубой дискретизации интегрального уравнения (1.11) — его удовлетворения в точках коллокации.

В настоящей работе выполнено обобщение идей, предложенных в [45], и построена расширенная иерархия алгоритмов, включающая дополнительно схемы с кусочно-линейным представлением интенсивности свободного вихревого слоя. Основное внимание уделено  $T$ -схеме, однако все идеи построения математических моделей и расчетных схем могут быть с некоторыми оговорками применены и к  $N$ -схеме.

### 2.1.2. Подход Галеркина к построению дискретных аналогов интегральных уравнений

В описанных выше схемах с изолированными вихрями и кусочно-постоянным распределением интенсивности вихревого слоя решение можно представить в виде линейной комбинации некоторых функций, которые будем называть базисными.

- Для схем, в которых вихревой слой на профиле представляется совокупностью отдельных вихрей, можно считать, что

$$\gamma(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{r} \in K,$$

где  $\Gamma_i$  — циркуляции вихрей, подлежащие определению;  $\mathbf{r}_i$  — задаваемые при построении расчетной схемы положения этих вихрей;  $\delta(\mathbf{r})$  — дельта-функция Дирака.

- При распределенном свободном вихревом слое кусочно-постоянной интенсивности для  $T$ -схем имеем

$$\gamma(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \gamma_i^0 \varphi_i^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K, \quad (2.1)$$

где  $\gamma_i^0$  — неизвестные интенсивности вихревого слоя на панелях;  $\varphi_i^0(\mathbf{r})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , — набор базисных функций, каждая из которых равна единице на соответствующей панели и обращается в нуль на всех остальных панелях. Для  $N$ -схем подход аналогичен, за исключением того, что  $i$ -я базисная функция равна единице на половинах смежных панелей, примыкающих к  $i$ -й вершине многоугольника, аппроксимирующего контур.

Описанные в предыдущем подразделе способы дискретизации интегрального уравнения, соответствующие удовлетворению граничного усло-

вия в контрольных точках либо интегрально по панелям, приводят к системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$  или  $\{\gamma_i^0\}_{i=1}^N$ . Процедуру их получения можно интерпретировать как обеспечение ортогональности невязки соответствующего интегрального уравнения некоторому набору проекционных функций  $\psi_i^0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Выбор в качестве проекционных дельта-функций Дирака  $\psi_i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{c}_i)$ , где  $\mathbf{c}_i$  — радиус-векторы контрольных точек, приводит к схеме с удовлетворением граничного условия в этих точках, а схему с интегральным выполнением граничного условия можно получить, взяв в качестве проекционных кусочно-константные функции  $\psi_i^0(\mathbf{r}) = \varphi_i^0(\mathbf{r})$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Подход с представлением приближенного решения в виде линейной комбинации некоторых базисных функций и составлением системы алгебраических уравнений из условия ортогональности невязки набору проекционных функций соответствует методу Галеркина, относящегося к семейству проекционно-сеточных методов решения уравнений математической физики [11].

Не останавливаясь подробно на всех возможных комбинациях получаемых таким образом дискретных аналогов уравнений (1.11) и (1.12), выпишем одну систему линейных алгебраических уравнений, которая соответствует алгоритму для  $T$ -схемы с выбором в качестве проекционных и базисных функций кусочно-постоянных функций (как отмечалось выше, это наиболее точная схема из построенных в [45]). Подставляя приближенное решение в форме (2.1) в уравнение (1.12), запишем его невязку на каждой из панелей  $K_i$ , используя обозначения, введенные ранее в Таблице 1 на стр. 32:

$$p_i^0(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \left( \gamma_j^0 \int_{K_j} Q_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right) - \alpha(\mathbf{r}) \gamma_i^0 - f_\tau(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K_i.$$

Условие ортогональности невязки проекционным функциям  $\psi_i^0(\mathbf{r})$ , в качестве которых выступают базисные, приводит к системе линейных

алгебраических уравнений относительно величин  $\{\gamma_j^0\}_{j=1}^N$ :

$$\int_{K_i} \left( \sum_{j=1}^N \gamma_j^0 \int_{K_j} Q_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) dl_\xi \right) dl_r - \frac{1}{2} \gamma_i^0 L_i = \int_{K_i} f_\tau(\mathbf{r}) dl_r, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

где  $L_i$  — длина  $i$ -й панели;  $N$  — количество панелей; учтено, что  $\alpha(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}$  во всех точках панелей за исключением концов, которые не влияют на результат вычисления интегралов.

Как было указано в разделе 1.2, для выделения единственного решения уравнения (1.12) требуется задать величину интеграла от решения по контуру (1.14). С учетом представления решения (2.1), дискретный аналог (1.14) имеет вид

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i^0 L_i = \Gamma^*. \quad (2.3)$$

Для совместного решения системы (2.2)–(2.3), состоящей из  $(N+1)$  линейного уравнения относительно  $N$  неизвестных  $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ , используется метод введения регуляризующей переменной [38], в результате задача сводится к решению линейной системы вида

$$\begin{pmatrix} A^{00} + D^{00} & I_N \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 \\ \Gamma^* \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где  $A^{00}$  и  $D^{00}$  — квадратная и диагональная матрицы с коэффициентами

$$A_{ij}^{00} = \int_{K_i} \left( \int_{K_j} Q_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) dl_\xi \right) dl_r, \quad D_{ii}^{00} = -\frac{1}{2} L_i, \quad i, j = 1, \dots, N;$$

$I_N$  — вектор-столбец из единиц;  $L$  — вектор-строка из значений длин панелей;  $\gamma^0$  — вектор искомых неизвестных,  $\gamma^0 = \{\gamma_i^0\}_{i=1}^N$ ;  $R$  — регуляризующая переменная;  $b^0$  — вектор правой части системы с компонентами

$$b_i^0 = \int_{K_i} f_\tau(\mathbf{r}) dl_r, \quad i = 1, \dots, N.$$

Система (2.4) хорошо обусловлена; для вычисления коэффициентов матрицы и правой части в [45] получены аналитические формулы.



## 2.2. Кусочно-линейное представление интенсивности вихревого слоя

Описанная в предыдущем разделе методика построения дискретных аналогов интегральных уравнений (1.11) и (1.12) позволяет предложить уточненный алгоритм с представлением интенсивности свободного вихревого слоя в виде кусочно-линейного распределения вдоль прямолинейных панелей.

### 2.2.1. Схема типа разрывного метода Галеркина

На каждой панели в дополнение к кусочно-постоянным  $\{\varphi_i^0\}_{i=1}^N$  введем кусочно-линейные базисные функции  $\{\varphi_i^1\}_{i=1}^N$ .

Тогда приближенное решение уравнения (1.12) будем искать в виде линейной комбинации базисных функций с неизвестными коэффициентами  $\{\gamma_i^0\}_{i=1}^N$  и  $\{\gamma_i^1\}_{i=1}^N$ :

$$\gamma(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N (\gamma_i^0 \varphi_i^0(\mathbf{r}) + \gamma_i^1 \varphi_i^1(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in K. \quad (2.5)$$

Невязка уравнения (1.12) на каждой панели теперь имеет вид

$$p_i^1(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \left( \gamma_j^0 \int_{K_j} Q_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \varphi_j^0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \gamma_j^1 \int_{K_j} Q_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \varphi_j^1(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right) - \\ - \frac{1}{2} (\gamma_i^0 \varphi_i^0(\mathbf{r}) + \gamma_i^1 \varphi_i^1(\mathbf{r})) - f_\tau(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K_i.$$

Коэффициенты  $\{\gamma_i^0\}_{i=1}^N$  и  $\{\gamma_i^1\}_{i=1}^N$  согласно методу Галеркина будем искать из условий ортогональности невязки проекционным функциям, которые снова возьмем совпадающими с базисными функциями  $\varphi_i^0(\mathbf{r})$  и  $\varphi_i^1(\mathbf{r})$ .

Условие выделения единственного решения уравнения (1.14) с учетом представления решения (2.5) теперь имеет вид

$$\sum_{i=1}^N \int_{K_i} (\gamma_i^0 \varphi_i^0(\mathbf{r}) + \gamma_i^1 \varphi_i^1(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = \Gamma^*.$$

Таким образом, дискретным аналогом уравнения (1.12) для расчетной схемы с кусочно-линейным представлением интенсивности вихревого слоя является система линейных уравнений вида

$$\begin{pmatrix} A^{00} + D^{00} & A^{01} + D^{01} & I_N \\ A^{10} + D^{10} & A^{11} + D^{11} & O_N \\ L^0 & L^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ \Gamma^* \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где  $A^{pq}$  — квадратные матрицы размером  $N \times N$ ;  $D^{pq}$  — диагональные матрицы размером  $N \times N$ ,  $p, q = 0, 1$ ;  $L^0$  и  $L^1$  —  $N$ -мерные вектор-строки;  $I_N$  — столбец из единиц;  $O_N$  — столбец из нулей;  $\gamma^0$  и  $\gamma^1$  —  $N$ -мерные векторы, составленные из искомых коэффициентов;  $b^0$  и  $b^1$  —  $N$ -мерные векторы, образующие правую часть системы:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{pq} &= \int_{K_i} \left( \int_{K_j} Q_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \varphi_j^q(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right) \varphi_i^p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ D_{ii}^{pq} &= -\frac{1}{2} \int_{K_i} \varphi_i^p(\mathbf{r}) \varphi_i^q(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad L_i^p = \int_{K_i} \varphi_i^p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ b_i^p &= \int_{K_i} f_\tau(\mathbf{r}) \varphi_i^p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad p, q = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Отметим, что, например, в [124] имеются описания более простых схем вихревых методов, учитывающих кусочно-линейное распределение интенсивности вихревого слоя по длине панелей. Однако авторы схемы [124] предполагали, что искомое распределение непрерывно (и даже непрерывно дифференцируемо) вдоль профиля, что неверно в случае профиля с острыми кромками и угловыми точками. Для схемы (2.6) требуется лишь непрерывность решения внутри каждой панели, что обеспечивается естественным требованием к дискретизации профиля: острые кромки и угловые точки должны совпадать с концами панелей.

В качестве кусочно-линейных базисных функций возьмем функции, которые линейно меняются вдоль панели от значения  $-\frac{1}{2}$  до значения  $\frac{1}{2}$ :

$$\varphi_i^1(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{c}_i) \cdot \boldsymbol{\tau}_i}{L_i}, & \mathbf{r} \in K_i, \\ 0, & \mathbf{r} \notin K_i, \end{cases} \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{c}_i$  — радиус-вектор центра  $i$ -й панели; остальные обозначения соответствуют введенным ранее. Тогда для коэффициентов диагональных матриц  $D^{pq}$  имеем выражения

$$D_{ii}^{00} = -\frac{L_i}{2}, \quad D_{ii}^{11} = -\frac{L_i}{24}, \quad D_{ii}^{01} = D_{ii}^{10} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

а коэффициенты векторов-строк  $L^p$  принимают значения

$$L_i^0 = L_i, \quad L_i^1 = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Система (2.6) с кусочно-линейным распределением имеет в два раза бóльшую размерность по сравнению со системой (2.4) с кусочно-постоянным распределением, что значительно увеличивает трудоемкость решения задачи, поскольку матрица системы получается полностью заполненной и для решения системы приходится применять прямые методы. Поэтому актуальным вопросом является разработка экономичных алгоритмов и схем, сочетающих точность схемы (2.6) и размерность системы (2.4).

### 2.2.2. Схема типа метода конечных элементов

Экономичную схему можно построить, если принять во внимание, что для гладких профилей точное решение является непрерывным, поэтому для них можно построить схему типа метода конечных элементов (МКЭ), которая позволяет получать непрерывное кусочно-линейное решение. Для этого введем базисные функции (Рис. 2.1), аналогичные функциям формы первого порядка в МКЭ, которые могут быть построены на основе введенных ранее базисных функций  $\varphi_i^0(\mathbf{r})$  и  $\varphi_i^1(\mathbf{r})$ :

$$\hat{\varphi}_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi_{i-1}^0(\mathbf{r}) + \varphi_{i-1}^1(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in K_{i-1}, \\ \frac{1}{2}\varphi_i^0(\mathbf{r}) - \varphi_i^1(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in K_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \quad K_0 \equiv K_N.$$

Тогда зададим структуру приближенного решения в виде

$$\gamma(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i \hat{\varphi}_i(\mathbf{r}), \quad (2.8)$$

где неизвестные значения  $\hat{\gamma}_i$  соответствуют значениям интенсивности вихревого слоя в началах панелей. Для их определения по аналогии с МКЭ в качестве проекционных функций выберем те же функции формы.

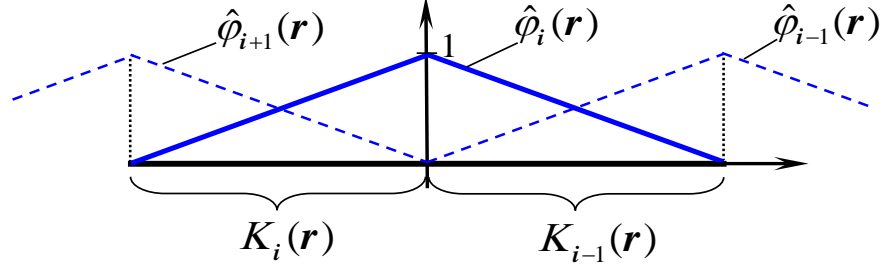


Рис. 2.1. Базисные функции, аналогичные функциям формы в МКЭ

После регуляризации система линейных алгебраических уравнений принимает вид

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & I_N \\ \hat{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \Gamma^* \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где  $\hat{\gamma} = \{\hat{\gamma}_i\}_{i=1}^N$  — вектор искомых величин.

Коэффициенты матричного блока  $\hat{A}$  (размером  $N \times N$ ) могут быть выражены через введенные в предыдущем подразделе коэффициенты матриц  $A^{pq}$  ( $p, q = 0, 1$ ):

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ij} = & \frac{1}{4}(A_{ij}^{00} + A_{i-1,j}^{00} + A_{i,j-1}^{00} + A_{i-1,j-1}^{00}) + \frac{1}{2}(-A_{ij}^{01} - A_{i-1,j}^{01} + A_{i,j-1}^{01} + A_{i-1,j-1}^{01}) + \\ & + \frac{1}{2}(-A_{ij}^{10} + A_{i-1,j}^{10} - A_{i,j-1}^{10} + A_{i-1,j-1}^{10}) + (A_{ij}^{11} - A_{i-1,j}^{11} - A_{i,j-1}^{11} + A_{i-1,j-1}^{11}) + \\ & + \frac{1}{4}(D_{ij}^{00} + D_{i-1,j}^{00} + D_{i,j-1}^{00} + D_{i-1,j-1}^{00}) + (D_{ij}^{11} - D_{i-1,j}^{11} - D_{i,j-1}^{11} + D_{i-1,j-1}^{11}). \end{aligned}$$

Компоненты строки  $\hat{L}$  и столбца правой части  $\hat{b}$  также могут быть выражены через коэффициенты, введенные в предыдущем подразделе:

$$\hat{L}_i = \frac{1}{2}(L_i^0 + L_{i-1}^0), \quad \hat{b}_i = \frac{1}{2}(b_i^0 + b_{i-1}^0) - (b_i^1 - b_{i-1}^1).$$

Полученная система (2.9) имеет матрицу размером  $(N+1) \times (N+1)$ , поэтому процедура решения имеет такую же вычислительную сложность, как и в случае схемы с кусочно-постоянным представлением решения.

Недостатком такой схемы является невозможность ее применения в случае, когда граница профиля имеет острые кромки или угловые точки, поскольку точное решение в них становится неограниченным или терпит разрыв.

Отметим, что схема похожего типа в вихревых методах описана в работе [107]: решение имеет тот же вид (2.8), однако в качестве проекционных выступают дельта-функции Дирака (граничное условие выполняется в точках коллокации) и использована математическая модель на основе уравнения (1.11), т. е.  $N$ -схема. Кроме того, вместо регуляризации введением дополнительной переменной применен метод наименьших квадратов, что ведет к значительному увеличению вычислительной сложности за счет процедуры поиска псевдорешения системы.

### 2.2.3. Схема типа метода конечных элементов с выделением разрывов решения

Для корректного моделирования обтекания негладких профилей схема (2.9) может быть усовершенствована. Поскольку решение имеет разрывы в угловых точках и на острых кромках, положения которых известны, в соответствующих узлах многоугольника, аппроксимирующего границу профиля, следует вместо одной непрерывной функции формы ввести две разрывные базисные функции. Для узла с индексом  $i$  функции  $\tilde{\varphi}_i^-$  и  $\tilde{\varphi}_i^+$  будут отличны от нуля лишь на панелях  $K_{i-1}$  и  $K_i$ , примыкающих к этому узлу, соответственно (Рис. 2.2).

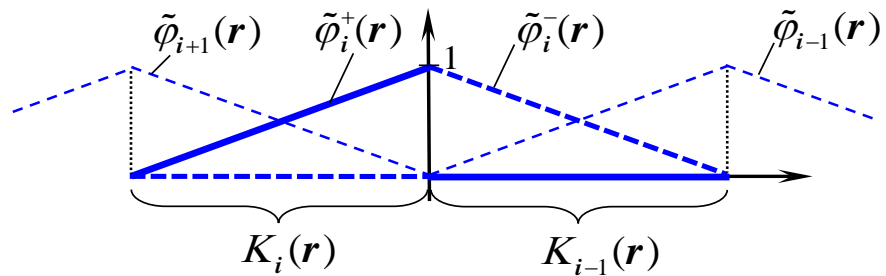


Рис. 2.2. Разрывные базисные функции в узле, где имеется разрыв

Приближенное решение в этом случае имеет вид

$$\gamma(\mathbf{r}) = \sum_{i \notin D} \tilde{\gamma}_i \tilde{\varphi}_i + \sum_{i \in D} (\tilde{\gamma}_i^- \tilde{\varphi}_i^- + \tilde{\gamma}_i^+ \tilde{\varphi}_i^+),$$

где  $D$  — множество из  $d$  узлов, где производится выделение разрывов решения. Неизвестные величины  $\tilde{\gamma}_i^-$  и  $\tilde{\gamma}_i^+$  здесь означают предельные значения численного решения слева и справа от точки разрыва.

Разрывные базисные функции также могут быть выражены через ранее введенные базисные функции  $\varphi_0^i$  и  $\varphi_1^i$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i^-(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \varphi_{i-1}^0(\mathbf{r}) + \varphi_{i-1}^1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K_{i-1}, \\ \tilde{\varphi}_i^+(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \varphi_i^0(\mathbf{r}) - \varphi_i^1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K_i. \end{aligned}$$

Базисные функции, соответствующие остальным узлам контура, остаются теми же, что и в предыдущем подразделе:

$$\tilde{\varphi}_i(\mathbf{r}) = \hat{\varphi}_i(\mathbf{r}), \quad i \notin D.$$

Проекционные функции выбираются, как и ранее, равными базисным.

Для простоты примем, что контур имеет одну угловую точку, соответствующую узлу с индексом  $i = 1$ , к которому примыкают панели  $K_1$  и  $K_N$ . Тогда результирующая система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & I_{N+1} \\ \tilde{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \Gamma^* \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

имеет размер  $(N + 2) \times (N + 2)$ ; коэффициенты матрицы, образующие первые и последние строки и столбцы, могут быть выражены через коэффициенты  $A_{ij}^{pq}$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ) системы (2.6). Для первой строки имеем

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= \frac{1}{4} A_{11}^{00} - \frac{1}{2} A_{11}^{01} - \frac{1}{2} A_{11}^{10} + A_{11}^{11} + \frac{1}{4} D_{11}^{00} + D_{11}^{11}; \\ \tilde{A}_{1j} &= \frac{1}{4} (A_{1j}^{00} + A_{1,j-1}^{00}) - \frac{1}{2} (A_{1j}^{01} + A_{1,j-1}^{01}) - \frac{1}{2} (A_{1j}^{10} + A_{1,j-1}^{10}) + (A_{1j}^{11} + A_{1,j-1}^{11}) + \\ &\quad + \frac{1}{4} (D_{1j}^{00} + D_{1,j-1}^{00}) + (D_{1j}^{11} + D_{1,j-1}^{11}); \\ \tilde{A}_{1,N+1} &= \frac{1}{4} A_{1N}^{00} + \frac{1}{2} A_{1N}^{01} - \frac{1}{2} A_{1N}^{10} - A_{1N}^{11}; \end{aligned}$$

для первого и последнего столбца

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{i1} &= \frac{1}{4}(A_{i1}^{00} + A_{i-1,1}^{00}) - \frac{1}{2}(A_{i1}^{01} + A_{i-1,1}^{01}) - \frac{1}{2}(A_{i1}^{10} + A_{i-1,1}^{10}) + \\ &\quad + (A_{i1}^{11} + A_{i-1,1}^{11}) + \frac{1}{4}(D_{i1}^{00} + D_{i-1,1}^{00}) + (D_{i1}^{11} + D_{i-1,1}^{11}); \\ \tilde{A}_{i,N+1} &= \frac{1}{4}(A_{iN}^{00} + A_{i-1,N}^{00}) + \frac{1}{2}(A_{iN}^{01} + A_{i-1,N}^{01}) - \frac{1}{2}(A_{iN}^{10} + A_{i-1,N}^{10}) - \\ &\quad - (A_{iN}^{11} + A_{i-1,N}^{11}) + \frac{1}{4}(D_{iN}^{00} + D_{i-1,N}^{00}) - (D_{iN}^{11} + D_{i-1,N}^{11});\end{aligned}$$

для последней строки

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{N+1,1} &= \frac{1}{4}A_{N1}^{00} - \frac{1}{2}A_{N1}^{01} + \frac{1}{2}A_{N1}^{10} - A_{N1}^{11}; \\ \tilde{A}_{N+1,j} &= \frac{1}{4}(A_{Nj}^{00} + A_{N,j-1}^{00}) - \frac{1}{2}(A_{Nj}^{01} + A_{N,j-1}^{01}) + \frac{1}{2}(A_{Nj}^{10} + A_{N,j-1}^{10}) - \\ &\quad - (A_{Nj}^{11} + A_{N,j-1}^{11}) + \frac{1}{4}(D_{Nj}^{00} + D_{N,j-1}^{00}) - (D_{Nj}^{11} + D_{N,j-1}^{11}); \\ \tilde{A}_{N+1,N+1} &= \frac{1}{4}A_{NN}^{00} + \frac{1}{2}A_{NN}^{01} + \frac{1}{2}A_{NN}^{10} + A_{NN}^{11} + \frac{1}{4}D_{NN}^{00} + D_{NN}^{11}.\end{aligned}$$

Первые и последние компоненты векторов  $\tilde{L}$  и  $\tilde{b}$  принимают теперь вид

$$\tilde{L}_1 = \frac{L_1}{2}, \quad \tilde{L}_{N+1} = \frac{L_N}{2}, \quad \tilde{b}_1 = \frac{b_1^0}{2} - b_1^1, \quad \tilde{b}_{N+1} = \frac{b_N^0}{2} + b_N^1;$$

остальные коэффициенты матрицы  $\tilde{A}$ , вектора  $\tilde{b}$  и вектора  $\tilde{L}$  остаются такими же, как в предыдущем подразделе:

$$\tilde{A}_{ij} = \hat{A}_{ij}, \quad \tilde{b}_i = \hat{b}_i, \quad \tilde{L}_i = \hat{L}_i, \quad i, j = 2, \dots, N.$$

Таким образом, каждая точка, в которой допускается разрыв численного решения, приводит к появлению одной дополнительной неизвестной и одного уравнения; размер матрицы составляет  $(N + d + 1) \times (N + d + 1)$ , а поскольку  $d \ll N$ , вычислительная сложность схемы остается близкой к таковой для схемы (2.4).

На Рис. 2.3 и 2.4 показаны численные решения (интенсивность вихревого слоя) для модельных задач о моделировании обтекания эллиптического профиля и профиля Жуковского, найденные с использованием всех описанных схем.

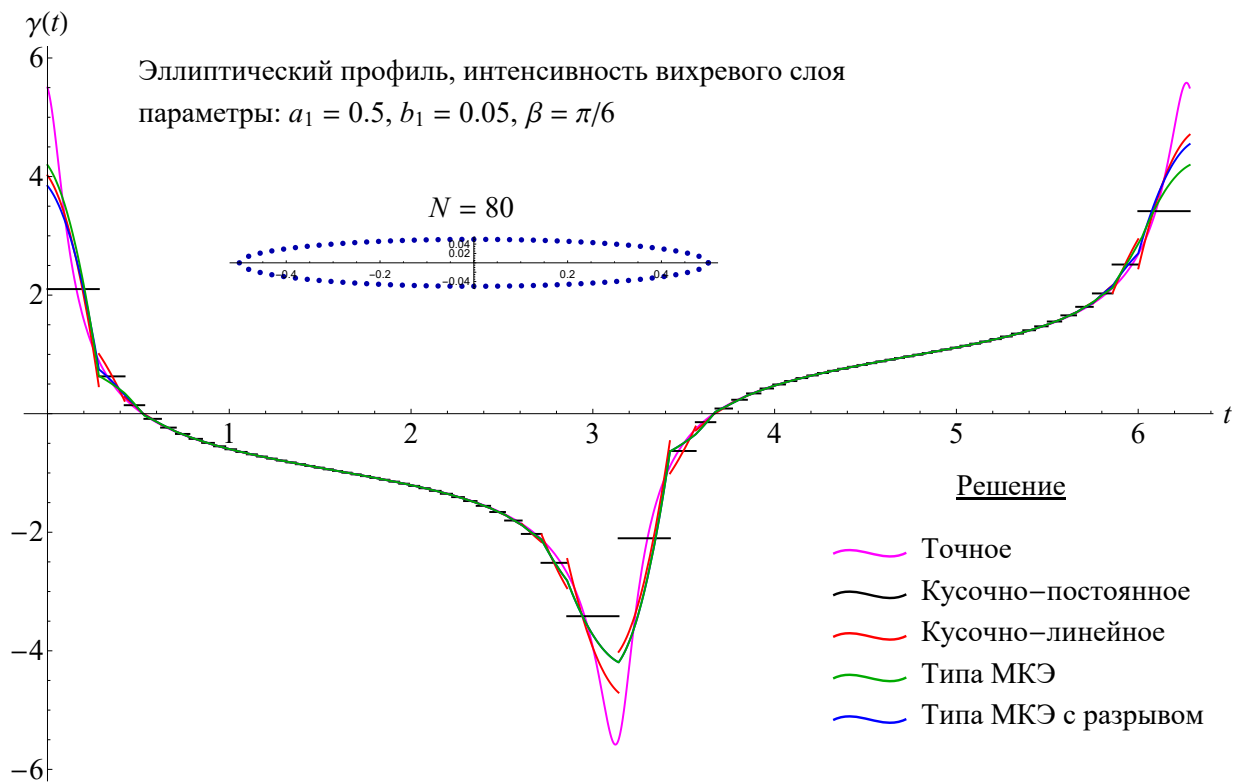


Рис. 2.3. Интенсивности вихревого слоя при обтекании эллиптического профиля, найденные с использованием различных схем

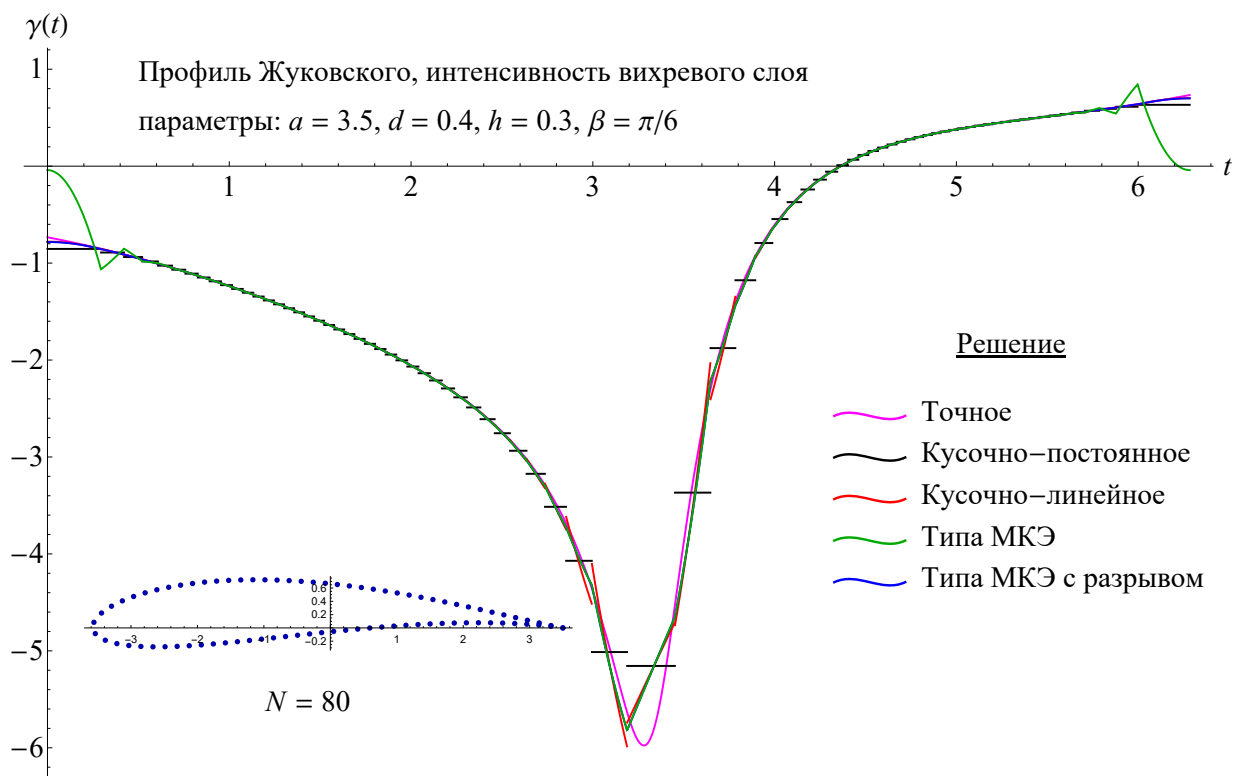


Рис. 2.4. Интенсивности вихревого слоя при обтекании профиля Жуковского, найденные с использованием различных схем



Видно, что при обтекании эллиптического профиля все кусочно-линейные схемы дают приблизительно одинаковые результаты. При расчете обтекания профиля Жуковского все кусочно-линейные схемы, кроме непрерывной схемы типа МКЭ, также дают приблизительно одинаковые результаты; непрерывная схема МКЭ дает качественно неверное решение в окрестности острой кромки, поскольку точное решение в данном случае имеет разрыв.

Далее в работе количественное сравнение точности будет произведено только для кусочно-постоянной и кусочно-линейной схем (2.4) и (2.6).

### 2.3. Вычисление коэффициентов линейной системы

В [77] указано, что при использовании  $T$ -схемы для обеспечения высокой точности приближенного решения ключевое значение имеет качество дискретизации соответствующего интегрального уравнения: коэффициенты систем (2.4) и (2.6), выраженные интегралами по панелям, должны быть вычислены как можно точнее; для  $N$ -схем это менее критично.

Заметим, что все коэффициенты систем (2.4) и (2.6), а также выраженные через них коэффициенты систем (2.9) и (2.10), с учетом постоянства векторов касательной и нормали вдоль каждой из панелей могут быть выражены через следующие 6 интегралов:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_j^0(\mathbf{r}) &= \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, & \mathbf{I}_j^1(\mathbf{r}) &= \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \varphi_j^1(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\ \mathbf{I}_{ij}^{00} &= \int_{K_i} d\boldsymbol{\xi} \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, & \mathbf{I}_{ij}^{01} &= \int_{K_i} d\boldsymbol{\xi} \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \varphi_j^1(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\ \mathbf{I}_{ij}^{10} &= \int_{K_i} d\boldsymbol{\xi} \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \varphi_i^1(\mathbf{r}) d\boldsymbol{\xi}, & \mathbf{I}_{ij}^{11} &= \int_{K_i} d\boldsymbol{\xi} \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \varphi_i^1(\mathbf{r}) \varphi_j^1(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\varphi_i^0 \equiv 1$  на  $i$ -й панели, и для обеспечения универсальности формул введено обозначение для антисимметричного векторного ядра

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2}.$$

**Вычисление интегралов  $I_j^0(\mathbf{r})$  и  $I_j^1(\mathbf{r})$ .** На Рис. 2.5 изображены  $j$ -я панель и точка  $\mathbf{r}$ , а также введены несколько вспомогательных векторов для вычисления интегралов  $I_j^0(\mathbf{r})$  и  $I_j^1(\mathbf{r})$ : вектор  $\mathbf{d}_j$  совпадает с  $j$ -й панелью; векторы  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{p}$  соединяют начало и конец  $j$ -й панели с точкой  $\mathbf{r}$  соответственно. Также введем вектор  $\boldsymbol{\tau}_j$  — единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора  $\mathbf{d}_j$ .

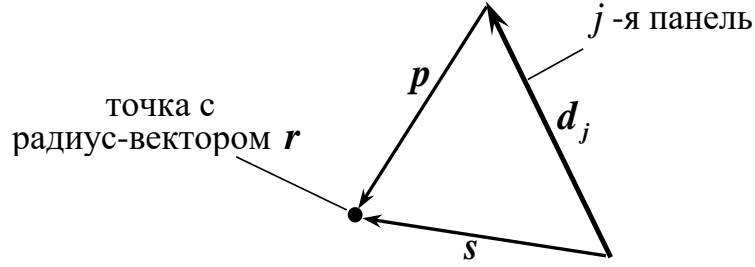


Рис. 2.5. Точка  $\mathbf{r}$ ,  $j$ -я панель и вспомогательные векторы

С помощью данных векторов можно записать следующие формулы:

$$I_j^0(\mathbf{r}) = \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) d\ell_{\boldsymbol{\xi}} = \alpha \mathbf{u}_0 \times \mathbf{k} + \lambda \mathbf{u}_0,$$

$$I_j^1(\mathbf{r}) = \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \varphi_1^j(\boldsymbol{\xi}) d\ell_{\boldsymbol{\xi}} = \alpha \mathbf{u}_1 \times \mathbf{k} + \lambda \mathbf{u}_1 - \frac{1}{2\pi} \boldsymbol{\tau}_j.$$

Здесь введены обозначения

$$\mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}_j) = \boldsymbol{\tau}_j, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2|\mathbf{d}_j|} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p} + \mathbf{s}, \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}_j),$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \angle(\mathbf{p}, \mathbf{s}), \quad \lambda = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{p}|},$$

где

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c},$$

$$\angle(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \text{Arg}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} + i(\mathbf{p} \mathbf{s} \mathbf{k})),$$
(2.11)

функция  $\text{Arg}(z)$  означает главное значение аргумента комплексного числа  $z$ .

**Вычисление интегралов  $I_{ij}^{00}$ ,  $I_{ij}^{01}$ ,  $I_{ij}^{10}$  и  $I_{ij}^{11}$ .** На Рис. 2.3 изображены  $i$ -я и  $j$ -я панели и вспомогательные векторы, введенные по аналогии с предыдущим пунктом: векторы  $\mathbf{d}_i$  и  $\mathbf{d}_j$  совпадают с  $i$ -й и  $j$ -й панелями; векторы  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$  соединяют начало  $j$ -й панели с концом и началом

$i$ -й панели соответственно; векторы  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  соединяют конец  $j$ -й панели с концом и началом  $i$ -й панели соответственно.

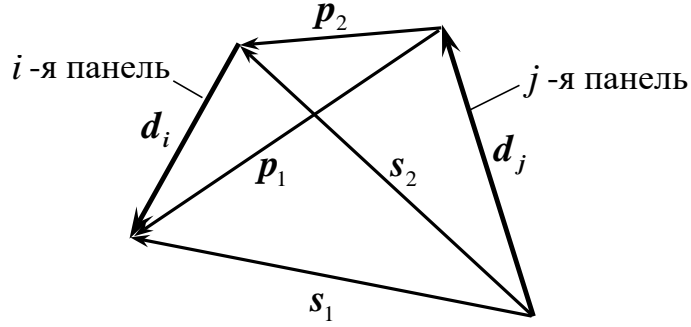


Рис. 2.6. Вспомогательные векторы для  $i$ -й и  $j$ -й панелей

Введенные вспомогательные векторы позволяют после некоторых преобразований, которые удобно выполнять в системе компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*, записать следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{ij}^{00} &= \int_{K_i} dl_r \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) dl_\xi = \\ &= (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3) \times \mathbf{k} + (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{ij}^{01} &= \int_{K_i} dl_r \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \varphi_1^j(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi = \\ &= ((\alpha_1 + \alpha_3) \mathbf{v}_4 + (\alpha_2 + \alpha_3) \mathbf{v}_5) \times \mathbf{k} + \\ &+ ((\lambda_1 + \lambda_3) \mathbf{v}_4 + (\lambda_2 + \lambda_3) \mathbf{v}_5) - \frac{1}{4\pi} |\mathbf{d}_i| \boldsymbol{\tau}_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{ij}^{10} &= \int_{K_i} dl_r \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \varphi_1^i(\mathbf{r}) dl_\xi = \\ &= ((\alpha_1 + \alpha_3) \mathbf{v}_6 + \alpha_3 \mathbf{v}_7) \times \mathbf{k} + ((\lambda_1 + \lambda_3) \mathbf{v}_6 + \lambda_3 \mathbf{v}_7) + \frac{1}{4\pi} |\mathbf{d}_j| \boldsymbol{\tau}_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{ij}^{11} &= \int_{K_i} dl_r \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \varphi_1^i(\mathbf{r}) \varphi_1^j(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi = \\ &= ((\alpha_1 + \alpha_3) \mathbf{v}_8 + (\alpha_2 + \alpha_3) \mathbf{v}_9 + \alpha_3 \mathbf{v}_{10}) \times \mathbf{k} + \\ &+ ((\lambda_1 + \lambda_3) \mathbf{v}_8 + (\lambda_2 + \lambda_3) \mathbf{v}_9 + \lambda_3 \mathbf{v}_{10}) + \\ &+ \frac{1}{24\pi} (|\mathbf{d}_j| \boldsymbol{\tau}_i + |\mathbf{d}_i| \boldsymbol{\tau}_j - 2\omega(\mathbf{s}_1, \boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_j)). \end{aligned}$$

Здесь введены дополнительные обозначения для коэффициентов

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \angle(s_2, s_1), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\pi} \angle(s_2, p_1), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\pi} \angle(p_1, p_2),$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|s_1|}{|s_2|}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|p_1|}{|s_2|}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|p_2|}{|p_1|}$$

и вспомогательных векторов

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega(s_1, \tau_i, \tau_j), \quad v_2 = -\omega(d_i, \tau_i, \tau_j), \quad v_3 = \omega(p_2, \tau_i, \tau_j), \\ v_4 &= \frac{1}{2|d_j|} (((p_1 + s_1) \cdot \tau_j) \omega(s_1, \tau_i, \tau_j) - |s_1|^2 \tau_i), \\ v_5 &= -\frac{|d_i|}{2|d_j|} \omega(s_1 + p_2, \tau_j, \tau_j), \\ v_6 &= -\frac{1}{2|d_i|} (((s_1 + s_2) \cdot \tau_i) \omega(s_1, \tau_i, \tau_j) - |s_1|^2 \tau_j), \\ v_7 &= \frac{|d_j|}{2|d_i|} \omega(s_1 + p_2, \tau_i, \tau_i), \\ v_8 &= \frac{1}{12|d_i||d_j|} \left( 2(s_1 \cdot \omega(s_1 - 3p_2, \tau_i, \tau_j)) \omega(s_1, \tau_i, \tau_j) - |s_1|^2 (s_1 - 3p_2) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \omega(s_1, \tau_i, \tau_j), \\ v_9 &= -\frac{1}{12} \frac{|d_i|}{|d_j|} \omega(d_i, \tau_j, \tau_j), \quad v_{10} = -\frac{1}{12} \frac{|d_j|}{|d_i|} \omega(d_j, \tau_i, \tau_i). \end{aligned}$$

Для соседних панелей, когда  $i = j + 1$  (т.е.  $p_2 = \mathbf{0}$ ,  $s_1 \neq \mathbf{0}$ ), коэффициенты  $\alpha_3$  и  $\lambda_3$  следует положить равными нулю; в случае, когда  $j = i + 1$  ( $s_1 = \mathbf{0}$ ,  $p_2 \neq \mathbf{0}$ ), нулю следует приравнять коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\lambda_1$ .

В случае, когда  $i = j$ , соответствующие интегралы являются сингулярными, а их предельные значения выражаются следующим образом (формально можно считать, что все коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\lambda_k$  равны нулю):

$$I_{ii}^{00} = I_{ii}^{11} = \mathbf{0}, \quad I_{ii}^{01} = -\frac{1}{4\pi} d_i, \quad I_{ii}^{10} = \frac{1}{4\pi} d_i.$$

Отметим, что найденные выражения для интегралов по панелям от векторного ядра позволяют записать точные аналитические формулы для всех возможных расчетных схем для моделей с любыми комбинациями

базисных и проекционных функций (сингулярных, кусочно-постоянных, кусочно-линейных — как разрывных, так и непрерывных) применительно к  $N$ - и  $T$ -схемам. Более того, определение коэффициентов правых частей систем линейных уравнений, соответствующих таким схемам, выражающих собой в соответствии с (1.10) влияние завихренности в области течения, присоединенного вихревого слоя и слоя источников, а также скорости движения границы профиля, приводит при согласованном представлении соответствующих распределений к вычислению этих же интегралов с учетом антисимметричности ядра. Такие же интегралы возникают при вычислении скоростей среды и вихрей в области течения при учете влияния свободного вихревого слоя и присоединенных слоев.

## 2.4. Верификация разработанных схем

Опишем методику оценки погрешности расчетных схем вихревых методов при аппроксимации границы обтекаемого профиля прямолинейными панелями и применим ее к оценке точности разработанных схем численного решения задач об обтекании эллипса и аэродинамического профиля Жуковского, для которых известны точные аналитические решения (1.19).

### 2.4.1. Вычисление погрешности приближенного решения

Будем считать, что граница профиля аппроксимирована многоугольником таким образом, что концы всех панелей — вершины многоугольника — лежат на контуре, а решение представляется кусочно-постоянным или кусочно-линейным (разрывным на концах панелей, непрерывным или непрерывным всюду, кроме выделенных точек) распределением. Считая, что на границе профиля введена параметризация  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ , а точное решение задано функцией  $\gamma^{ex}(t)$ , можно предложить три способа вычисления погрешности приближенного решения:

- в равномерной норме, считая точное решение ограниченным,

$$\|\Delta\gamma\|_C = \max_{t \in [0; 2\pi)} |\gamma(t) - \gamma^{ex}(t)|, \quad (2.12)$$

при этом возможно рассмотрение случаев, когда в заранее известных точках точное и приближенное решения испытывают конечные разрывы (скачки); такой точкой, в частности, является острая кромка профиля Жуковского;

- как максимальную разницу между средними по панелям величинами интенсивностей вихревого слоя  $\bar{\gamma}_i$  и  $\bar{\gamma}_i^{ex}$ , вычисленными по приближенному и точному решению соответственно,

$$\|\Delta\gamma\|_{C^h} = \max_{1 \leq i \leq N} |\bar{\gamma}_i - \bar{\gamma}_i^{ex}|; \quad (2.13)$$

- в норме  $L_1$ :

$$\|\Delta\gamma\|_{L_1} = \int_0^{2\pi} |\gamma(t) - \gamma^{ex}(t)| dl_t. \quad (2.14)$$

Если оказывается, что с увеличением количества панелей погрешность приближенного решения пропорциональна  $h^m$ , где  $h$  — наибольшая длина панели, то будем говорить, что соответствующая схема обладает  $m$ -м порядком точности. При этом величина  $m$  может зависеть от способа вычисления погрешности.

Так, величина  $\|\Delta\gamma\|_C$  характеризует погрешность вычисления распределения интенсивности вихревого слоя. Строго говоря, она применима лишь для весьма узкого класса задач и численных схем. Из рассмотренных к ним относятся только схемы типа МКЭ с непрерывным решением или допускающие разрыв решения в выделенных точках.

Величина  $\|\Delta\gamma\|_{C^h}$  представляет собой сеточный аналог равномерной нормы [54], если под сеткой понимать множество панелей, а в качестве оператора проецирования на сетку рассматривать оператор вычисления среднего значения по панели. Эта величина имеет важное значение применительно к оценке точности моделирования процесса генерации завихренности на поверхности профиля, обсуждавшемуся в разделе 1.1:

она показывает максимальную ошибку в определении количества завихренности, генерируемой на панелях, в расчете на единицу длины соответствующих панелей.

В то же время завихренность, сосредоточенная в вихревом слое, оказывает влияние на поле скоростей в области течения, и это влияние наиболее значительно вблизи поверхности профиля. Поэтому на точность определения поля скоростей в области течения, которое, в свою очередь в значительной мере определяет эволюцию завихренности, влияет не только погрешность, связанная с ошибкой определения суммарного количества генерируемой на панели завихренности, но и погрешность, вносимая за счет предопределенной структуры численного решения — кусочно-постоянного или кусочно-линейного. Эту погрешность будет характеризовать величина  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$ .

Заметим, что порядок точности схемы в смысле убывания  $\|\Delta\gamma\|_{C^h}$  при  $h \rightarrow 0$  в принципе может быть любым даже при кусочно-постоянном представлении решения. Порядок схемы в смысле  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$  в данном контексте более информативен; при этом ясно, что при кусочно-постоянном представлении решения порядок не может быть выше первого, а при кусочно-линейном представлении решения — выше второго.

Основной проблемой при расчете погрешностей в общем случае является то, что точное и приближенное решение заданы на разных контурах: точное — на границе исходного профиля  $K$ , численное — на многоугольнике, вершины которого лежат на  $K$ . В связи с этим при вычислении  $\|\Delta\gamma\|_{C^h}$  по формуле (2.13) средние значения интенсивности вихревого слоя для точного решения следует вычислять вдоль дуги границы исходного профиля, стягиваемой соответствующей панелью многоугольника, вдоль которой, в свою очередь, должна быть вычислена величина среднего значения численного решения. Вычислить величины  $\|\Delta\gamma\|_C$  и  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$  напрямую по вышеприведенным формулам (2.12) и (2.14) невозможно, поэтому предварительно необходимо построить ме-

тодику проецирования точного решения с границы профиля  $K$  на аппроксимирующий многоугольник или наоборот.

Для этого зададим отображение  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}$ , где  $\mathcal{T}$  — множество значений параметра  $t$ , равное  $[0, T)$  и соответствующее полному обходу замкнутого контура,  $\mathcal{P}$  — множество значений естественного параметра  $p$ , заданного на аппроксимирующем многоугольнике:  $\mathcal{P} = [0, L)$ , где  $L$  — сумма длин панелей; значения  $p = 0$  и  $p = L$  соответствуют  $t = 0$  и  $t = T$ .

Обозначим за  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}_{i+1}$  начало и конец  $i$ -й панели соответственно и будем считать, что этим точкам соответствуют значения параметра  $t = t_i$  и  $t = t_{i+1}$  на контуре  $K$  и значения параметра  $p = p_i$  и  $p = p_{i+1}$  на многоугольнике. Тогда для любого значения  $\tilde{t} \in [t_i, t_{i+1}]$  можно найти радиус-вектор  $\mathbf{r}(\tilde{t})$  точки на исходной кривой и соответствующее значение точного решения для интенсивности вихревого слоя. Для того, чтобы найти значение численного решения, соответствующее точке  $\mathbf{r}(\tilde{t})$ , опустим перпендикуляр из этой точки на прямолинейную панель (Рис. 2.7) и найдем значение параметра  $\tilde{p}$  следующим образом:

$$\tilde{p} = p_i + \frac{(\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|}.$$

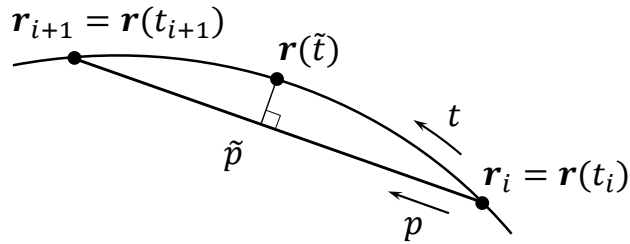


Рис. 2.7. Проекция точки на исходной границе профиля на прямолинейную панель

Тогда можно считать зависимость  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\tilde{p}(t))$  проекцией численного решения на исходный контур  $K$  и при вычислении погрешности по формулам (2.12) и (2.14) использовать в них для численного решения  $\tilde{\gamma}(t)$ , производя поиск наибольшего значения либо интегрирование соответственно вдоль границы исходного профиля.



«Обратное» проецирование точного решения с границы профиля на аппроксимирующий многоугольник также возможно, однако для его практической реализации потребуется решать нелинейные уравнения для поиска значений параметра  $\tilde{t}$ , соответствующих значениям параметра  $\bar{p}$  на многоугольнике.

#### 2.4.2. Оценка точности разработанных расчетных схем

##### Потенциальное обтекание профиля

Как было отмечено выше,  $T$ -схемы, т.е. схемы численного решения задач на основе модели (1.12), обеспечивают более высокую точность [45, 82] по сравнению с  $N$ -схемами на основе модели (1.11), поэтому в данном разделе ограничимся рассмотрением только таких схем.

Для оценки точности схем рассмотрим модельные задачи, имеющие аналитическое решение (1.19): о расчете безвихревого обтекания эллиптических профилей с полуосями  $a_1 = 1.0$ ,  $b_1 = 0.5$  и  $a_1 = 1.0$ ,  $b_1 = 0.1$ , а также профиля Жуковского с параметрами  $a = 3.5$ ,  $d = 0.4$  и  $h = 0.3$ . Профили будем считать неподвижными и установленными под углом атаки  $\beta = \frac{\pi}{6}$  к набегающему потоку единичной скорости  $V_\infty = 1$ , а завихренность в области течения — отсутствующей. Тогда правая часть интегрального уравнения (1.12) принимает наиболее простой вид

$$f_\tau(\mathbf{r}) = -\mathbf{V}_\infty \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{V}_\infty$  — вектор скорости набегающего потока;  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$  — орт касательной к профилю.

В расчетах профили разбивались на 128...2000 панелей примерно равной длины  $h$ , которую можно считать обратно пропорциональной  $N$ .

Величины погрешности  $\|\Delta\gamma\|_{C^h}$  для различного числа панелей при проведении расчетов с использованием кусочно-постоянной (2.4) и кусочно-линейной (2.6) схем для указанных выше профилей приведены

в Таблице 2. Там же приведены апостериорные оценки порядка точности, получаемые как логарифм отношения величин ошибок

$$m = \log_{\frac{N_i}{N_{i-1}}} \frac{\|\Delta\gamma\|_{C_h}^{(N_{i-1})}}{\|\Delta\gamma\|_{C_h}^{(N_i)}},$$

вычисляемый для последовательных значений  $N$ .

При расчетах по схеме (2.6), учитывающей кусочно-линейное распределение завихренности на панелях, величина  $\|\Delta\gamma\|_{C_h}$  лишь незначительно меньше аналогичной величины, рассчитанной по кусочно-постоянной схеме (2.4); по этому параметру обе схемы обеспечивают второй порядок точности. Исключение составляет случай моделирования обтекания профиля Жуковского при большом числе панелей, второй порядок при этом позволяет получить лишь кусочно-линейная схема (2.6).

Таблица 2.

Погрешности  $\|\Delta\gamma\|_{C_h}$  для разного количества панелей при обтекании эллипсов и профиля Жуковского

$N$	128	256	500	1000	2000
Эллипс с соотношением полуосей 2 : 1					
Схема (2.4)	0.003429	0.000834	0.000213	0.000052	0.000013
$m^c$	—	2.04	2.04	2.02	2.01
Схема (2.6)	0.003026	0.000758	0.000197	0.000049	0.000012
$m^l$	—	2.00	2.01	2.01	2.01
Эллипс с соотношением полуосей 10 : 1					
Схема (2.4)	0.329668	0.275927	0.182452	0.076524	0.021914
$m^c$	—	0.26	0.62	1.25	1.80
Схема (2.6)	0.202452	0.201297	0.148667	0.066032	0.019624
$m^l$	—	0.01	0.45	1.17	1.75
Профиль Жуковского					
Схема (2.4)	0.224635	0.083121	0.021947	0.015383	0.011887
$m^c$	—	1.43	1.99	0.51	0.37
Схема (2.6)	0.186348	0.071811	0.019552	0.004912	0.001202
$m^l$	—	1.38	1.94	1.99	2.03

Зависимость величины  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$  при проведении расчетов по схемам (2.4) и (2.6) с кусочно-постоянным и кусочно-линейным распределением интенсивности вихревого слоя от числа панелей показана в Таблице 3. Апостериорные оценки порядка точности, получаемые теперь как логарифм отношения величин ошибок

$$m = \log_{\frac{N_i}{N_{i-1}}} \frac{\|\Delta\gamma\|_{L_1}^{(N_{i-1})}}{\|\Delta\gamma\|_{L_1}^{(N_i)}}, \quad (2.15)$$

вычислены для последовательных значений  $N$  для обеих схем.

Таблица 3.

Погрешности  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$  для разного количества панелей при обтекании эллипсов и профиля Жуковского

$N$	128	256	500	1000	2000
Эллипс с соотношением полуосей 2 : 1					
Схема (2.4)	0.090671	0.045283	0.023180	0.011589	0.005795
$m^c$	—	1.00	1.00	1.00	1.00
Схема (2.6)	0.004532	0.001164	0.000309	0.000078	0.000019
$m^l$	—	1.96	1.98	1.99	2.00
Эллипс с соотношением полуосей 10 : 1					
Схема (2.4)	0.154985	0.07755	0.039515	0.019695	0.009838
$m^c$	—	1.00	1.01	1.00	1.00
Схема (2.6)	0.042246	0.016769	0.005578	0.001533	0.000396
$m^l$	—	1.33	1.64	1.86	1.95
Профиль Жуковского					
Схема (2.4)	0.35730	0.17460	0.08817	0.04386	0.02189
$m^c$	—	1.03	1.02	1.01	1.00
Схема (2.6)	0.09498	0.02818	0.00791	0.00205	0.00053
$m^l$	—	1.75	1.90	1.95	1.96

Из Таблицы 3 видно, что для схемы (2.4) с кусочно-постоянным представлением решения имеет место линейное по  $h$  убывание ошибки, что говорит о 1-м порядке точности схемы, при этом схема (2.6) с кусочно-линейным распределением обеспечивает 2-й порядок точности.

### Обтекание профиля в присутствии вихря

Исследуем, как присутствие завихренности в области течения может влиять на точность определения интенсивности вихревого слоя.

Пусть теперь в области течения вблизи границы профиля присутствует вихрь, расположенный в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}_w$  и имеющий циркуляцию  $\Gamma_w$ . Тогда правая часть уравнения (1.12) принимает вид

$$\dot{f}_\tau(\mathbf{r}) = -\mathbf{V}_\infty \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) - \frac{\Gamma_w \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|^2},$$

где  $\mathbf{V}_\infty$  — вектор скорости набегающего потока;  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — орты касательной и внешней нормали к профилю.

Для оценки точности схем рассмотрим три модельные задачи, выбирая расположение вихря достаточно близким к границе профиля, а циркуляцию такой, чтобы его влияние на распределение интенсивности вихревого слоя было существенным (Рис. 2.8):

- обтекание эллиптического профиля с полуосями  $a_1 = 1.0$ ,  $b_1 = 0.5$ ; параметры вихря:  $\Gamma_w = 0.2$ ,  $\mathbf{r}_w = (0.600, 0.420)^T$  — Рис. 2.8, а;
- обтекание эллиптического профиля с полуосями  $a_1 = 1.0$ ,  $b_1 = 0.1$ ; параметры вихря:  $\Gamma_w = 0.2$ ,  $\mathbf{r}_w = (0.350, 0.109)^T$  — Рис. 2.8, б;
- обтекание профиля Жуковского с параметрами  $a = 3.5$ ,  $d = 0.4$ ,  $h = 0.3$ ; параметры вихря:  $\Gamma_w = 0.2$ ,  $\mathbf{r}_w = (1.900, 0.410)^T$  — Рис. 2.8, в.

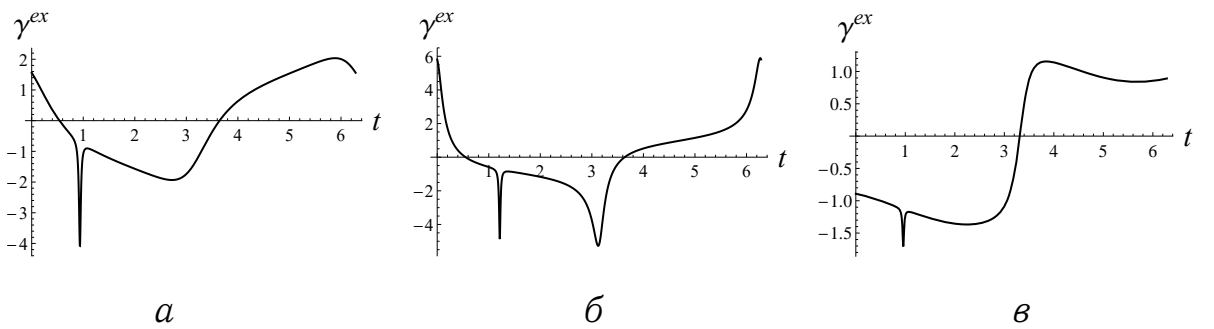


Рис. 2.8. Точное решение для интенсивности вихревого слоя в присутствии вихря при обтекании эллиптического профиля с соотношением осей 2 : 1 (а), 10 : 1 (б) и профиля Жуковского (в)

В расчетах, как и ранее, профили разбивались на  $128 \dots 2000$  панелей примерно равной длины  $h$ . При этом расстояние от границы профиля до вихря во всех случаях приблизительно равно длине панели  $h$  для самого грубого разбиения на 128 панелей.

Зависимости величин  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$  от числа панелей при проведении расчетов по схемам (2.4) и (2.6) с кусочно-постоянным и кусочно-линейным представлением решения соответственно для трех рассматриваемых задач приведены в Таблице 4. Там же приведены апостериорные оценки порядка точности, вычисляемые по формуле (2.15).

Таблица 4.

Погрешности  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$  при обтекании  
эллипсов и профиля Жуковского в присутствии вихря

$N$	128	256	500	1000	2000
Эллипс с соотношением полуосей 2 : 1					
Схема (2.4)	0.16317	0.07925	0.03923	0.01978	0.00988
$m^c$	—	1.04	1.05	0.99	1.00
Схема (2.6)	0.01732	0.00528	0.00176	0.00045	0.00011
$m^l$	—	1.71	1.65	1.95	1.99
Эллипс с соотношением полуосей 10 : 1					
Схема (2.4)	0.43965	0.22399	0.10935	0.05268	0.02593
$m^c$	—	0.97	1.07	1.05	1.02244
Схема (2.6)	0.12978	0.06000	0.02963	0.00917	0.00248
$m^l$	—	1.11	1.05	1.69	1.88589
Профиль Жуковского					
Схема (2.4)	0.37741	0.20692	0.10343	0.05155	0.02575
$m^c$	—	0.87	1.04	1.00	1.00
Схема (2.6)	0.10819	0.03198	0.00934	0.00242	0.00062
$m^l$	—	1.76	1.84	1.95	1.97

Видно, что в случае, когда вблизи границы профиля присутствует вихрь, погрешности увеличиваются, но несущественно, порядки точности схем (2.4) и (2.6) также остаются первым и вторым соответственно.

### 2.4.3. Оценка точности моделирования поля скоростей

Как видно из рассмотренных выше примеров, при аппроксимации границы обтекаемого профиля многоугольником с панелями примерно равной длины обе рассмотренные схемы обеспечивают второй порядок точности в смысле величины  $\|\Delta\gamma\|_{C_h}$ , тогда как в смысле нормы  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$  известная схема с кусочно-постоянным представлением решения обеспечивает первый порядок точности, а разработанная схема с кусочно-линейным решением — второй порядок.

Исследуем, как влияет выбор схемы на качество воспроизведения поля скоростей среды вблизи профиля. Для этого рассмотрим несколько тестовых примеров.

При потенциальном обтекании неподвижного кругового профиля единичного радиуса с центром в начале координат горизонтальным набегающим потоком, имеющим скорость  $|\mathbf{V}_\infty| = 1$ , как обсуждалось в разделе 1.3, комплексный потенциал и комплексно-сопряженная скорость имеют вид

$$F(z) = z + \frac{1}{z}, \quad V^*(z) = 1 - \frac{1}{z^2},$$

где  $z = x + iy$  — точка на комплексной плоскости. Тогда выражение для скорости течения на действительной плоскости  $Oxy$  принимает вид

$$\mathbf{V}^{ex}(x, y) = \left( 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)^T, \quad (2.16)$$

где  $x$  и  $y$  — координаты точки в области течения, в которой вычисляется скорость.

Чтобы оценить разницу между полем скоростей, возмущаемым вихревым слоем на контуре, интенсивность которого может быть найдена в результате использования одной либо другой схемы, сравним его с полем скоростей (2.16) по следующей методике. Аппроксимируем профиль правильным 16-угольником и рассмотрим линии тока при его обтекании и более подробно — область течения вблизи его границы, обозначенную штриховой рамкой (Рис. 2.9).

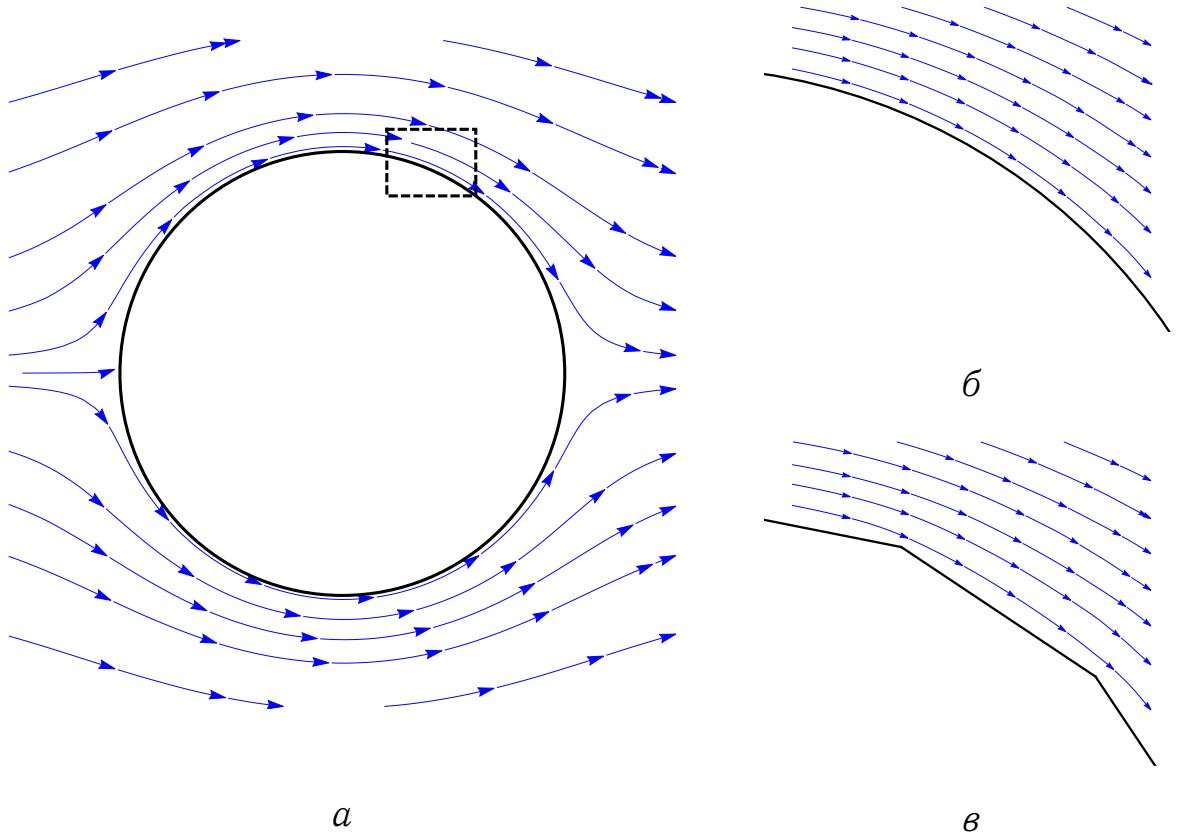


Рис. 2.9. Линии тока вокруг кругового профиля (*a*); линии тока вблизи кругового профиля (*б*); линии тока вблизи 16-угольника (*в*);

Видно, что даже при чрезвычайно грубой аппроксимации границы 16-ю прямолинейными панелями равной длины картины течения схожи: линии тока, построенные по точному решению (2.16), показанные на Рис. 2.9, *б*, визуально не отличаются от линий тока, построенных по приближенному кусочно-постоянному решению (Рис. 2.9, *в*).

Для количественного сравнения полей скоростей проведем несколько вычислительных экспериментов, аппроксимируя круговой контур различным количеством прямолинейных панелей. Вычисление погрешности будем производить путем интегрирования модуля вектора разности скоростей вдоль кругового замкнутого контура  $K^h$ :

$$\|\Delta \mathbf{V}^c\|_{L_1} = \oint_{K^h} |\mathbf{V}^{ex}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}^c(\mathbf{r})| dl_{K^h}, \quad (2.17)$$

$$\|\Delta \mathbf{V}^l\|_{L_1} = \oint_{K^h} |\mathbf{V}^{ex}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}^l(\mathbf{r})| dl_{K^h}, \quad (2.18)$$

где  $\mathbf{V}^c(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{V}^l(\mathbf{r})$  — скорости течения в точке  $\mathbf{r}$ , вычисленные по закону Био — Савара (1.7) с использованием полученных в разделе 2.3 аналитических формул для интегралов применительно к схемам с кусочно-постоянным и кусочно-линейным распределением интенсивности вихревого слоя соответственно; радиус контура  $K^h$  будем выбирать согласованно с длиной панели  $h$ :

$$R_{K^h} = 1 + \frac{h}{8}.$$

Такой выбор радиуса «контрольного» контура представляется интересным для анализа по следующей причине: при моделировании течения вязкой жидкости на контуре происходит образование завихренности и требуется обеспечить корректное моделирование ее эволюции (движения) вблизи поверхности профиля. Если поле скоростей будет воспроизводиться неверно, это повлечет за собой погрешность в расчете смещений вихревых элементов и, как следствие, ошибку в определении параметров процесса генерации завихренности на следующем шаге.

Результаты расчетов приведены в Таблице 5 для различного числа панелей на контуре, т.е. при моделировании кругового профиля  $N$ -угольниками. Здесь же приведены апостериорные оценки порядка точности, получаемые как логарифм отношения величин ошибок при последовательных значениях  $N$  по аналогии с (2.15).

Таблица 5.

Погрешности моделирования поля скоростей  
снаружи профиля, вычисленные по формулам (2.19)

$N$	16	32	64	128	256	512
$\ \Delta \mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.3758	0.1797	0.0897	0.0451	0.0226	0.0113
$m^c$	—	1.06	1.00	0.99	1.00	1.00
$\ \Delta \mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.2814	0.1254	0.0597	0.0293	0.0145	0.0072
$m^l$	—	1.17	1.07	1.03	1.01	1.01



Видно, что погрешность восстановления поля скоростей убывает практически линейно с увеличением числа панелей, т.е. имеет место первый порядок точности, при этом абсолютная величина ошибки для обеих математических моделей оказывается близкой и отличается примерно в 1.5 раза, несмотря на то, что в предыдущем подразделе было показано, что решение граничного интегрального уравнения в одном случае имеет первый порядок точности, а в другом — второй (в норме  $L_1$ ).

Аналогичные тесты проведем для исследования точности восстановления поля скоростей внутри профиля. Радиус замкнутого контура будем, как и ранее, определять согласованно с величиной длины панели:

$$R_{K^h} = 1 - \frac{h}{8}.$$

Формулы для расчета погрешности с учетом того, что внутри профиля скорость равна нулю, имеют вид

$$\|\Delta \mathbf{V}^c\|_{L_1} = \oint_{K^h} |\mathbf{V}^c(\mathbf{r})| dl_{K^h}, \quad (2.19)$$

$$\|\Delta \mathbf{V}^l\|_{L_1} = \oint_{K^h} |\mathbf{V}^l(\mathbf{r})| dl_{K^h}. \quad (2.20)$$

В Таблице 6 приведены погрешности восстановления поля скоростей внутри окружности и оценки порядка точности.

Таблица 6.

Погрешности моделирования поля скоростей  
внутри профиля, вычисленные по формулам (2.19)

$N$	16	32	64	128	256	512
$\ \Delta \mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.4166	0.1953	0.0942	0.0462	0.0229	0.0114
$m^c$	—	1.09	1.05	1.03	1.01	1.01
$\ \Delta \mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.2233	0.1141	0.0575	0.0288	0.0145	0.0072
$m^l$	—	0.97	0.99	1.00	1.00	1.01

Видно, что погрешность восстановления поля скоростей внутри профиля убывает приблизительно так же (по абсолютным значениям), как и для ранее рассмотренного контрольного контура снаружи окружности.

Вернемся к задачам о потенциальном обтекании эллиптических профилей с полуосями  $2 : 1$  и  $10 : 1$ , обсуждавшимся в разделе 2.4.2 на стр. 65. Погрешности вычисления интенсивности вихревого слоя приведены в Таблице 3. Теперь, как и для случая обтекания окружности, исследуем точность моделирования поля скоростей вблизи эллиптических профилей. В Таблице 7 приведены значения погрешностей  $\|\Delta \mathbf{V}^c\|_{L_1}$  и  $\|\Delta \mathbf{V}^l\|_{L_1}$  восстановления поля скоростей по кусочно-постоянному и кусочно-линейному численному решению.

Таблица 7.

Погрешности $\ \Delta \mathbf{V}\ _{L_1}$ при моделировании обтекания эллиптических профилей					
$N$	128	256	500	1000	2000
Эллипс с соотношением полуосей $2 : 1$					
$\ \Delta \mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.042848	0.021439	0.011005	0.005460	0.002721
$m^c$	—	1.00	1.00	1.01	1.00
$\ \Delta \mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.028499	0.013966	0.007083	0.003496	0.001751
$m^l$	—	1.03	1.01	1.02	1.00
Эллипс с соотношением полуосей $10 : 1$					
$\ \Delta \mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.074089	0.029215	0.011342	0.004842	0.002295
$m^c$	—	1.34	1.41	1.23	1.08
$\ \Delta \mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.058357	0.023368	0.009001	0.003695	0.001699
$m^l$	—	1.32	1.43	1.28	1.12

Видно, что как и в случае обтекания кругового профиля, в данном случае восстановление поля скоростей осуществляется лишь с первым порядком точности.

Из полученных результатов следует возможность применения схем как с кусочно-постоянным, так и с кусочно-линейным распределением интенсивности вихревого слоя при расчете обтекания гладких профилей в случае их аппроксимации многоугольником с панелями равной длины и, соответственно, невозможность существенного повышения качества

моделирования течения за счет введения кусочно-линейной аппроксимации интенсивности вихревого слоя на профиле.

Резюмируя вышеизложенное, можно заключить, что точность решения, обеспечиваемая кусочно-постоянной схемой, соответствует точности моделирования поля скоростей — в обоих случаях погрешность убывает линейно по  $h$ . Для кусочно-линейной схемы квадратичная точность решения интегрального уравнения не сохраняется при переходе к анализу точности восстановления поля скоростей, поскольку имеет место погрешность аппроксимации формы профиля.

## 2.5. Перспективы повышения точности

Существенное повышение точности определения интенсивности вихревого слоя при использовании кусочно-линейной схемы (2.6) (по сравнению с кусочно-постоянной схемой (2.4)) дает основание полагать, что возможно и дальнейшее уточнение результатов с использованием кусочно-квадратичного распределения приближенного решения. Однако этот путь на практике не позволяет повысить точность решения задачи при использовании прямолинейных панелей, более того, наблюдается качественно неверное поведение численного решения.

Причина этого состоит в том, что при замене исходной гладкой кривой многоугольником между панелями будут возникать «искусственные» угловые точки, в которых точное решение для интенсивности вихревого слоя на многоугольнике имеет особенности («пики», их асимптотика известна [38]), а численное кусочно-квадратичное распределение будет его приближать, что повлечет за собой возникновение «пиков» вблизи концов панелей, схожих с изображенными на Рис. 2.10.

Однако эти «пики» не имеют физической природы, поэтому следует ожидать, что поле скоростей вблизи концов панелей будет восстанавливаться со значительной погрешностью.

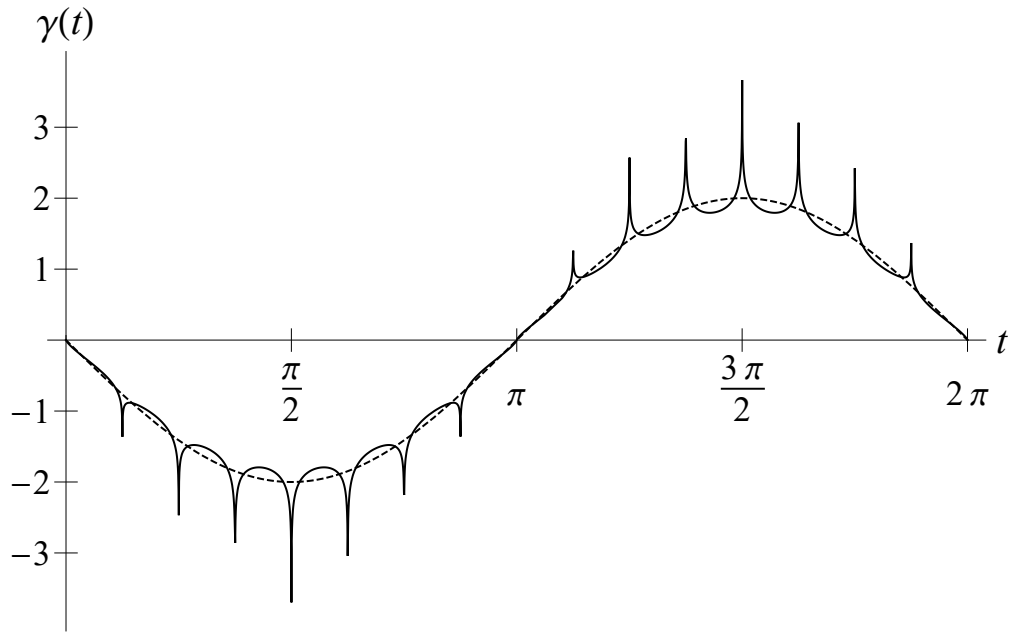


Рис. 2.10. Интенсивность вихревого слоя при потенциальном обтекании кругового профиля (штриховая линия, точное решение) и 16-угольного профиля (сплошная линия; получена по схеме (2.6) при разбиении границы профиля на  $N = 6400$  панелей)

Отсюда следует, что для повышения точности моделирования обтекания профиля с помощью кусочно-квадратичных схем (а в общем случае — и кусочно-линейных, и даже кусочно-постоянных) необходимо обеспечивать гладкость кривой, аппроксимирующей исходный гладкий профиль. Таким образом, возникает необходимость построения математических моделей, учитывающих кривизну исходного профиля.

## Выводы по главе 2

Описаны известные алгоритмы и расчетные схемы для математического моделирования обтекания профиля при аппроксимации его границы многоугольником, основанные на представлении решения в виде совокупности отдельных вихрей либо в виде кусочно-постоянной функции (по панелям). При этом дискретные аналоги соответствующих ин-

тегральных уравнений строятся путем их удовлетворения в отдельных точках коллокации либо в среднем на панелях.

Выполнено обобщение данных схем с использованием идей разрывного метода Галеркина и построена расширенная иерархия схем, включающая дополнительно схемы с кусочно-линейным представлением интенсивности свободного вихревого слоя. Получены точные аналитические формулы, позволяющие вычислять интегралы, через которые выражаются коэффициенты соответствующих систем линейных алгебраических уравнений.

На примере тестовых задач, для которых известны точные аналитические решения, произведена верификация предложенных алгоритмов и расчетных схем. Показано, что разработанная схема с кусочно-линейным распределением позволяет обеспечить второй порядок точности определения интенсивности вихревого слоя, в то время как наиболее точная из ранее известных схем обеспечивает лишь первый порядок (в норме  $L_1$ ).

Проведен ряд вычислительных экспериментов для исследования точности восстановления поля скоростей с использованием кусочно-постоянной и кусочно-линейной схем. Показано, что в случае гладких профилей точность обоих подходов приблизительно одинакова и погрешность убывает линейно с убыванием длины панели.

На основе полученных результатов сделан вывод о том, что дальнейшее повышение точности с использованием кусочно-квадратичных схем возможно только при учете криволинейности границы профиля.

Основные результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [35, 82, 83, 87, 89, 90, 91, 93].

### **Глава 3. Математическое моделирование обтекания криволинейного профиля**

В данной главе исследуем вопрос повышения точности моделирования обтекания профилей, границы которых представляют собой гладкие кривые. Последнее подразумевает, что решение интегрального уравнения относительно интенсивности свободного вихревого слоя является ограниченным и гладким.

Целесообразность и удобство использования схем, соответствующих математическим моделям с прямолинейными панелями, заключается в том, что все интегралы, необходимые для вычисления коэффициентов матриц и правых частей соответствующих систем линейных алгебраических уравнений, могут быть вычислены точно. Все необходимые для этого расчетные формулы приведены в главе 2.

В то же время, как следует из изложенных выше результатов, единственной возможностью повышения точности восстановления поля скоростей вблизи профиля является обеспечение гладкости кривой, аппроксимирующей границу профиля, и далее дискретизируемой путем разбиения на криволинейные панели.

Необходимость учета криволинейности панелей возникает также в случае существенно неравномерной дискретизации границы профиля. При этом, как будет показано ниже, численное решение с использованием описанных в главе 2 кусочно-постоянной и кусочно-линейной схем и их модификаций не обеспечивает соответственно 1-й и 2-й порядки точности.

#### **3.1. Неравномерная дискретизация границы профиля с использованием прямолинейных панелей**

В предыдущей главе получена система алгоритмов и расчетных схем на их основе, имеющих различную сложность и обеспечивающих различную точность применительно к определению интенсивности вихревого слоя на границе профиля при ее аппроксимации прямолинейными

панелями. В рассмотренных ранее примерах дискретизация контура производилась равномерно, т. е. все панели имели приблизительно равные длины. Исследуем на примере влияние неравномерности дискретизации границы профиля на точность получаемого решения интегрального уравнения.

Рассмотрим в качестве примера расчет обтекания эллиптического профиля с соотношением полуосей  $2 : 1$  ( $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 0.5$ ); граница профиля задана параметрически:

$$x(t) = a_1 \cos t, \quad y(t) = b_1 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Положим, что профиль является неподвижным, завихренность в области течения отсутствует, скорость набегающего потока имеет величину  $|\mathbf{V}_\infty| = 1$ , а угол атаки равен  $\beta = \pi/6$ . Циркуляцию  $\Gamma^*$  поля скоростей вдоль контура, охватывающего профиль, равную суммарной завихренности, содержащейся в вихревом слое, примем равной нулю. Точное решение в этом случае имеет максимально простой вид и может быть определено по формуле (1.19).

### 3.1.1. Квазиравномерная аппроксимация профиля

Произведем аппроксимацию эллиптического профиля с помощью  $N = 20$  прямолинейных панелей следующим образом: пусть начала и концы панелей соответствуют значениям параметра  $t_j = \frac{2\pi j}{N}$ ,  $j = 0, \dots, N$ ; положения данных точек изображены на Рис. 3.1. Длины панелей в данном случае не равны, однако длины соседних панелей различаются незначительно. Такую аппроксимацию назовем «квазиравномерной».

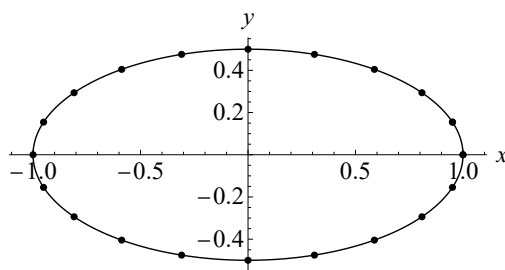


Рис. 3.1. Квазиравномерная аппроксимация границы профиля

В данном разделе при построении графиков точных и приближенных решений будем использовать следующую методику: по оси абсцисс будем откладывать длину дуги  $s$  границы исходного профиля,  $s \in [0, L)$ , приближенное решение на каждом промежутке изменения  $s$ , соответствующем одной панели, будем изображать либо горизонтальным (для кусочно-постоянной модели), либо наклонным (для кусочно-линейной модели) отрезком, ординаты концов которого равны значениям решения на концах соответствующей панели. Выбор в качестве величины, откладываемой по оси абсцисс, параметра  $s$ , а не параметра  $t$ , которым параметризована граница исходного профиля, обусловлен тем, что для второго случая визуальное представление результатов было бы не совсем удобным для восприятия, поскольку решение на каждом промежутке, соответствующем панели, имело бы отличающийся от прямой линии вид. Строго говоря, при использовании параметра  $s$  изображать приближенное для кусочно-линейной модели решение наклонным отрезком также не совсем верно, поскольку на самом деле оно меняется линейно вдоль прямолинейной панели, а не вдоль стягиваемой ею дуги. Однако для визуализации результатов это вполне допустимо, поскольку возникающая в этом случае погрешность пренебрежимо мала.

Результаты решения систем (2.4) и (2.6), соответствующих кусочно-постоянной и кусочно-линейной схемам соответственно, совместно с дополнительным условием (2.3) в сравнении с точным аналитическим решением (1.19) приведены на Рис. 3.2. На графиках показаны зависимости приближенных решений от дуговой координаты  $s$ , измеряемой вдоль границы исходного эллиптического профиля; данные зависимости получены путем применения процедуры проецирования численного решения на границу исходного профиля, описанной в разделе 2.4.1.

Видно, что оба приближенных решения довольно хорошо аппроксимируют точное, поэтому можно заключить, что разработанные схемы вполне применимы на практике в случае, когда длины соседних панелей отличаются незначительно.



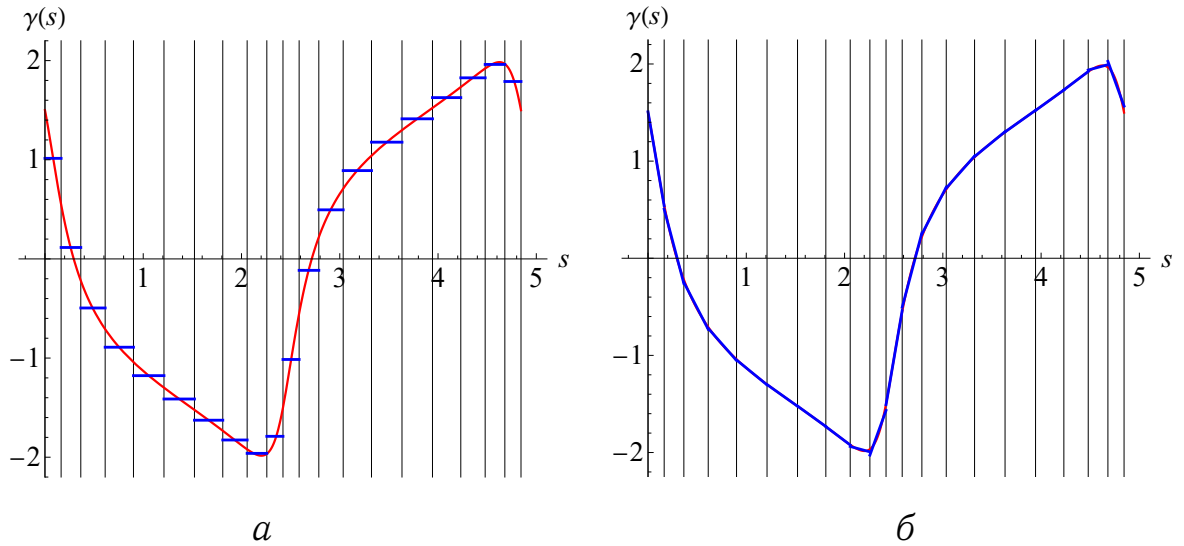


Рис. 3.2. Кусочно-постоянное (а) и кусочно-линейное (б) численное решение для прямолинейных панелей при квазиравномерной аппроксимации эллипса прямолинейными панелями в сравнении с точным решением; вертикальные линии соответствуют концам панелей

### 3.1.2. Неравномерная дискретизация профиля

Рассмотрим теперь ту же модельную задачу, но дискретизацию профиля выполним существенно неравномерно: верхнюю часть эллипса, как и ранее, разделим на 10 панелей, а нижнюю — на 50 панелей (Рис. 3.3). Максимальное отношение длин соседних панелей становится довольно большим и составляет примерно 5.2.

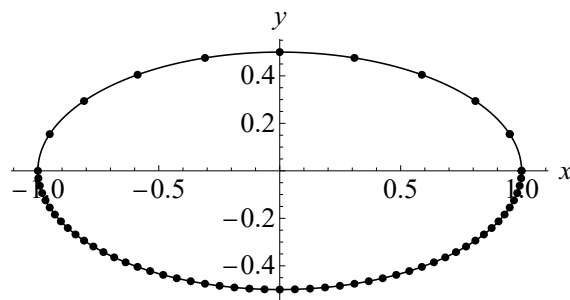


Рис. 3.3. Неравномерная дискретизация профиля с помощью 60 панелей

Результаты применения ранее описанных схем решения интегрального уравнения — кусочно-постоянной (2.4) и кусочно-линейной (2.6) — в сравнении с точным решением (1.19) показаны на Рис. 3.4.

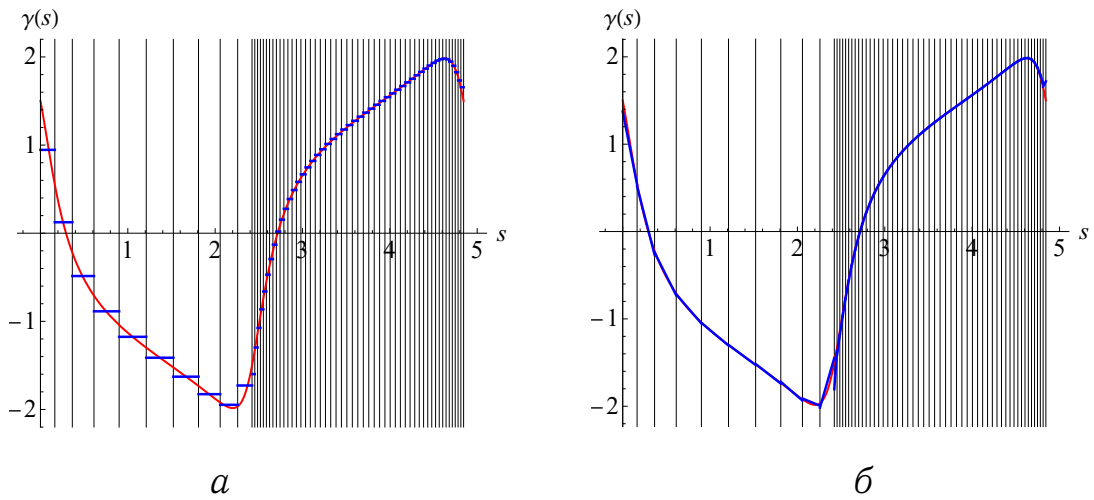


Рис. 3.4. Кусочно-постоянное (а) и кусочно-линейное (б) численное решение для прямолинейных панелей при неравномерной дискретизации эллипса; красная линия соответствует точному решению; вертикальные линии соответствуют концам панелей

Фрагменты данных графиков в окрестности тех точек, где соседние панели имеют существенно различающиеся длины, изображены в более крупном масштабе на Рис. 3.5 и Рис. 3.6. Графики на Рис. 3.5 соответствуют значениям параметра  $s$  от 2.0 до 2.6.

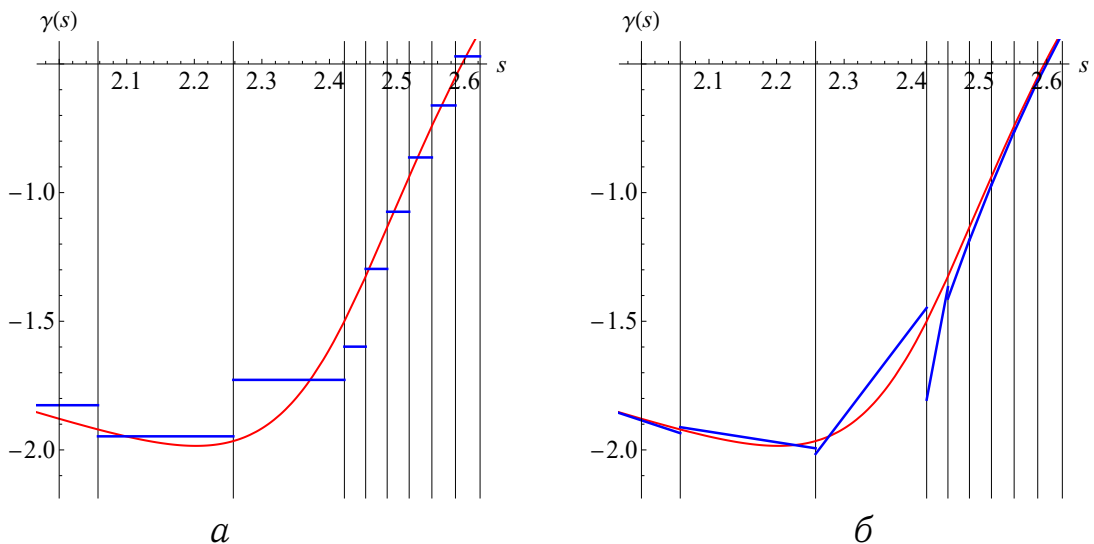


Рис. 3.5. Кусочно-постоянное (а) и кусочно-линейное (б) численное решение для прямолинейных панелей при неравномерной дискретизации в окрестности левой вершины эллипса; красная линия соответствует точному решению; вертикальные линии соответствуют концам панелей

На Рис. 3.6 значения параметра  $s$  изменяется от 4.6 до 5.2, при этом для удобства визуализации значениям параметра  $s$ , выходящим за промежуток  $[0, L)$ , поставлены в соответствие «циклические» продолжения решений.

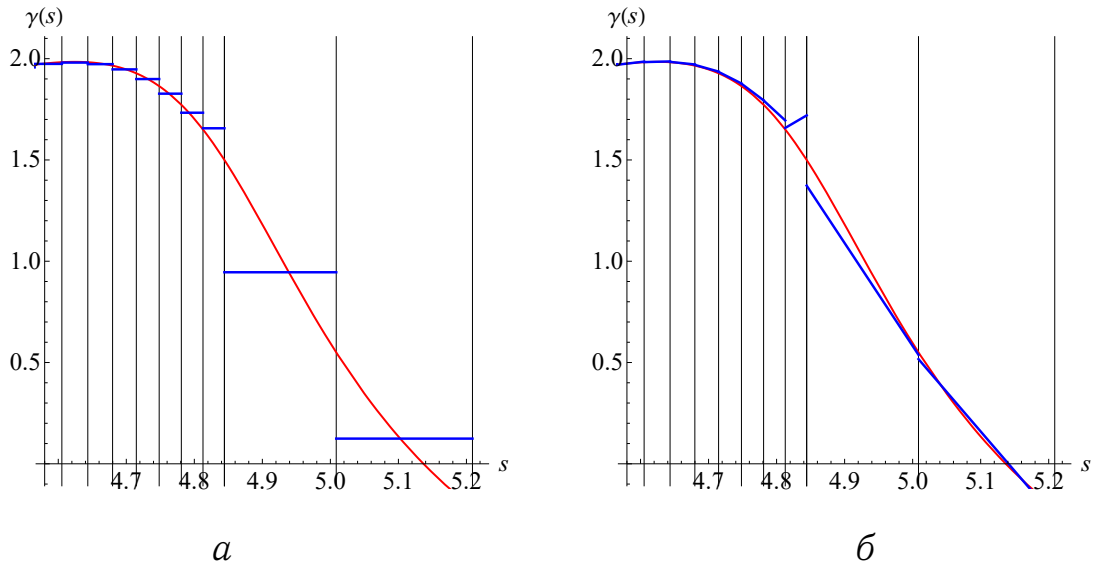


Рис. 3.6. Кусочно-постоянное (а) и кусочно-линейное (б) численное решение для прямолинейных панелей при неравномерной дискретизации в окрестности правой вершины эллипса; красная линия соответствует точному решению; вертикальные линии соответствуют концам панелей

Видно, что в данном случае использование кусочно-линейной модели приводит к качественно неверному решению: на обоих рисунках наблюдается нефизичная немонотонность решения. Использование кусочно-постоянной модели, хоть и позволяет получать монотонное решение, дает количественно неверные результаты: на рисунке видно, что средние по панелям значения приближенного решения существенно отличаются от средних значений точного решения.

Описанная проблема, возникающая при неравномерной дискретизации профиля, может быть устранена путем учета криволинейности панелей, дискретизирующих профиль.

### 3.2. Алгоритмы и расчетные схемы, учитывающие криволинейность профиля

Положим, что граница обтекаемого профиля параметризована естественным параметром, тогда уравнение (1.13) примет вид

$$\int_L Q(s, \sigma) \gamma(\sigma) d\sigma - \mu \alpha(s) \gamma(s) = f(s), \quad s \in [0, L], \quad (3.1)$$

где  $L$  — длина границы профиля; выражения для ядра уравнения  $Q(s, \sigma)$ , правой части  $f(s)$  и параметра  $\mu$  приведены в Таблице 1 на стр. 32 для  $N$ - и  $T$ -схем.

Дополнительное условие (1.14) с учетом введенной параметризации теперь примет вид

$$\oint_K \gamma(s) ds = \Gamma^*. \quad (3.2)$$

Будем считать, что профиль аппроксимирован с помощью  $N$  панелей, которые являются криволинейными (если исходный профиль имеет прямолинейный участок границы, панели на этом участке будут прямолинейными). Пусть начала и концы панелей соответствуют значениям  $s_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , параметра  $s$ , тогда  $i$ -я панель соответствует значениям параметра  $s \in [s_{i-1}, s_i]$ .

Дискретизацию модели, как и ранее, будем производить с помощью подхода Галеркина, при этом ограничимся рассмотрением  $T$ -схем.

- Введем набор базисных функций  $\varphi_i^q(s)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $q = 0, \dots, m$ ; положим, что для каждого значения  $i$  функции  $\varphi_i^q$  отличны от нуля только на  $i$ -й панели. Стоит отметить, что такое предположение о базисных функциях не согласуется с логикой построения экономических схем в предыдущей главе. Однако на первоначальном этапе разработки методики построения схем с криволинейными панелями данное ограничение является целесообразным.

- Приближенное решение граничного интегрального уравнения будем искать в виде линейной комбинации базисных функций

$$\gamma(s) = \sum_{i=1}^N \sum_{q=0}^m \gamma_i^q \varphi_i^q(s). \quad (3.3)$$

- Поиск неизвестных  $\gamma_i^q$  будем осуществлять из условия ортогональности невязки уравнения (3.1) после подстановки в него представления (3.3) набору проекционных функций, которые, как и ранее, выберем совпадающими с базисными:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^m \gamma_j^q \int_{s_{j-1}}^{s_j} \varphi_i^p(s) ds \int_{s_{j-1}}^{s_j} Q_\tau(s, \sigma) \varphi_j^q(\sigma) d\sigma - \\ - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^m \gamma_i^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i^q(s) \varphi_i^p(s) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} f_\tau(s) \varphi_i^p(s) ds, \\ i = 1, \dots, N, \quad p = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь учтено, что в силу гладкости границы профиля  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Дополнительное условие для выделения единственного решения (3.2) примет вид

$$\sum_{i=1}^N \sum_{p=0}^m \gamma_i^p \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i^p(s) ds = \Gamma^*. \quad (3.5)$$

Введем обозначение

$$\mathbf{G}(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\sigma)}{|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\sigma)|^2}$$

для градиента функции Грина — фундаментального решения двумерного уравнения Лапласа. Тогда интегральное уравнение (3.4) после подстановки в него явного выражения для правой части (1.10) можно записать

в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^m \gamma_j^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i^p(s) ds \int_{s_{j-1}}^{s_j} \mathbf{n}_i(s) \cdot \mathbf{G}(s, \sigma) \varphi_j^q(\sigma) d\sigma - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^m \gamma_i^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i^q(s) \varphi_i^p(s) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{\tau}_i(s) \cdot \left( \frac{\mathbf{V}_K(s)}{2} - \mathbf{V}_\infty \right) \varphi_i^p(s) ds - \\
& - \int_{s_{i-1}}^{s_i} ds \int_{S(t)} \boldsymbol{\tau}_i(s) \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}, t) \times (\mathbf{r}(s) - \boldsymbol{\xi})}{2\pi |\mathbf{r}(s) - \boldsymbol{\xi}|^2} \varphi_i^p(s) dS_\xi - \\
& - \sum_{j=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i^p(s) ds \int_{s_{j-1}}^{s_j} \mathbf{n}_i(s) \cdot \mathbf{G}(s, \sigma) \gamma_j^{att}(\sigma) d\sigma - \\
& - \sum_{j=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i^p(s) ds \int_{s_{j-1}}^{s_j} \boldsymbol{\tau}_i(s) \cdot \mathbf{G}(s, \sigma) q_j^{att}(\sigma) d\sigma, \\
& i = 1, \dots, N, \quad p = 0, \dots, m. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Будем считать, что интенсивности присоединенных слоев вихрей и источников  $\gamma^{att}(s)$  и  $q^{att}(s)$  также представлены в виде разложения по базисным функциям:

$$\gamma^{att}(s) = \sum_{i=1}^N \sum_{q=0}^m (\gamma^{att})_i^q \varphi_i^q(s), \quad q^{att}(s) = \sum_{i=1}^N \sum_{q=0}^m (q^{att})_i^q \varphi_i^q(s). \quad (3.7)$$

Распределение завихренности в области течения, как и ранее, будем считать заданным в виде набора вихревых элементов с циркуляциями  $\Gamma_\omega$ , расположенных в точках  $\boldsymbol{\rho}_\omega$ ,  $\omega = 1, \dots, N_v$ :

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) = \sum_{\omega=1}^{N_v} \Gamma_\omega \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_\omega),$$

где  $\delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_\omega)$  — двумерная дельта-функция Дирака.

С учетом сделанных допущений (3.6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^m \gamma_j^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i^p(s) ds \int_{s_{j-1}}^{s_j} \mathbf{n}_i(s) \cdot \mathbf{G}(s, \sigma) \varphi_j^q(\sigma) d\sigma - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^m \gamma_i^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i^q(s) \varphi_i^p(s) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{\tau}_i(s) \cdot \left( \frac{\mathbf{V}_K(s)}{2} - \mathbf{V}_\infty \right) \varphi_i^p(s) ds - \\
& - \sum_{w=1}^{N_v} \Gamma_w \int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathbf{n}_i(s) \cdot \mathbf{G}_w(s) \varphi_i^p(s) ds - \\
& - \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^m (\gamma^{att})_j^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i^p(s) ds \int_{s_{j-1}}^{s_j} \mathbf{n}_i(s) \cdot \mathbf{G}(s, \sigma) \varphi_j^q(\sigma) d\sigma - \\
& - \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^m (q^{att})_j^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i^p(s) ds \int_{s_{j-1}}^{s_j} \boldsymbol{\tau}_i(s) \cdot \mathbf{G}(s, \sigma) \varphi_j^q(\sigma) d\sigma, \\
& i = 1, \dots, N, \quad p = 0, \dots, m. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Здесь также введено обозначение

$$\mathbf{G}_w(s) = \mathbf{G}(\mathbf{r}(s) - \boldsymbol{\rho}_w) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}(s) - \boldsymbol{\rho}_w}{|\mathbf{r}(s) - \boldsymbol{\rho}_w|^2}$$

для градиента функции Грина, необходимое для вычисления скоростей, индуцируемых вихревыми элементами при приближении к точкам их расположения. Отметим, что искусственно ограничивать величину  $\mathbf{G}_w(s)$  не требуется.

Фактическое интегрирование в уравнениях (3.8) и (3.5) может производиться не по участкам исходной кривой, а по криволинейным панелям, которыми она аппроксимирована.

Далее рассмотрим несколько подходов к аппроксимации границы исходного профиля криволинейными панелями.

### 3.2.1. Численное интегрирование вдоль границы профиля

Рассмотрим расчетную схему (3.8) и (3.5); криволинейные панели будем считать совпадающими с границей профиля. Расчет всех интегралов будем производить численно с использованием системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*. Результаты численного решения, полученного таким образом, показаны на Рис. 3.7 и Рис. 3.8 только для областей в окрестности правой и левой вершин эллипса.

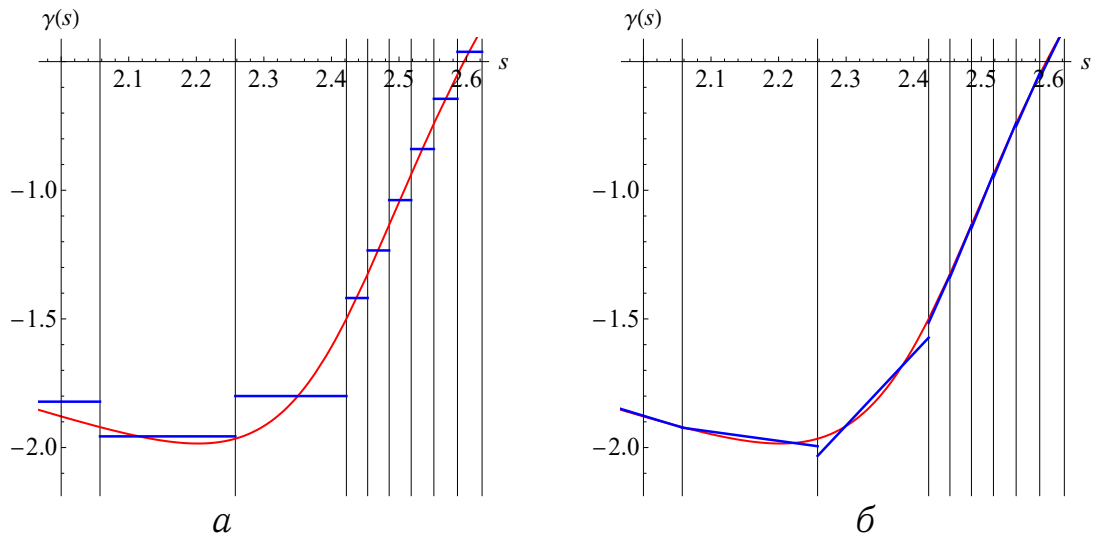


Рис. 3.7. Кусочно-постоянное (а) и кусочно-линейное (б) решения в окрестности левой вершины эллипса

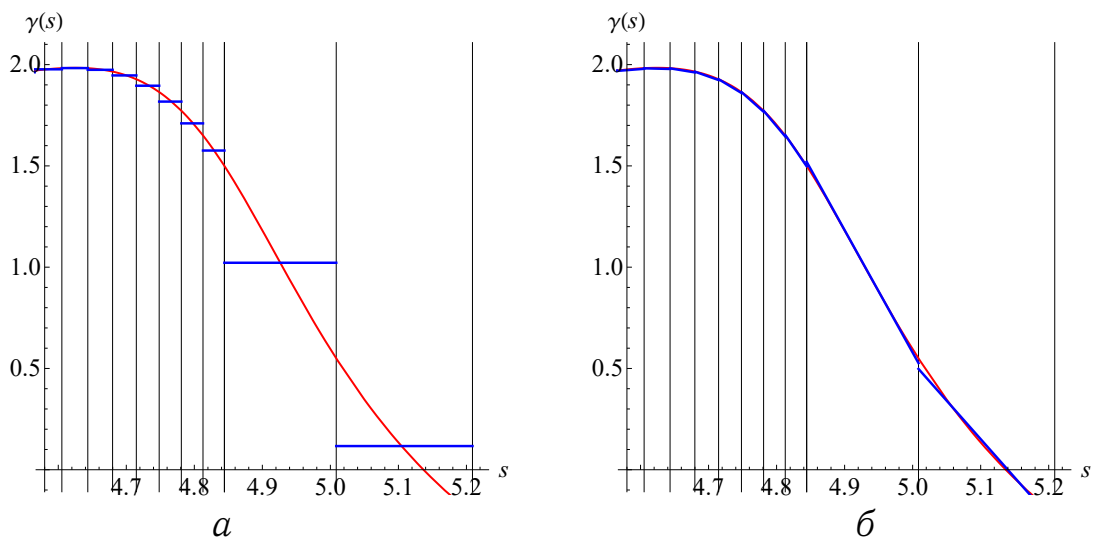


Рис. 3.8. Кусочно-постоянное (а) и кусочно-линейное (б) решения в окрестности правой вершины эллипса



Видно, что численное решение хорошо аппроксимирует точное, неравномерность разбиения при этом не оказывает принципиального влияния на качество численного решения. Однако этот метод малоприменим для практических вычислений, поскольку численный расчет всех необходимых интегралов является чрезвычайно трудоемким, главным образом, за счет тех интегралов, которые являются несобственными в силу неограниченности подынтегрального выражения — это относится к диагональным, поддиагональным и наддиагональным элементам соответствующих блоков матрицы ( $|i - j| \leq 1$ ), а также слагаемым в правой части, учитывающим влияние присоединенных слоев вихрей и источников, если таковые присутствуют.

### 3.2.2. Сплайн-аппроксимация границы профиля

Одним из наиболее очевидных способов аппроксимации границы исходной кривой представляется ее замена эрмитовым сплайном. Форму криволинейных панелей, аппроксимирующих участки границы профиля, будем задавать таким образом, чтобы направления касательных в концах панелей совпадали с таковыми для исходной кривой.

Рассмотрим простейший случай обтекания неподвижного профиля.

Пусть  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , — радиус-векторы вершин профиля; отрезки  $C_i C_{i+1}$  назовем хордами профиля. Форма границы профиля над  $i$ -й хордой аппроксимируется гладкой кривой, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$\mathbf{r}_i^{sp}(u) = \mathbf{C}_i + L_i (u \boldsymbol{\tau}_i + h_i(u) \mathbf{n}_i), \quad (3.9)$$

где значения  $u = 0$  и  $u = 1$  соответствуют началу и концу панели;  $L_i$  — длина  $i$ -й хорды;  $\boldsymbol{\tau}_i$  и  $\mathbf{n}_i$  — орты касательной и нормали к  $i$ -й хорде профиля. В качестве  $h_i(u)$  рассмотрим кубическую функцию

$$h_i(u) = \alpha_i u(1 - u) + \beta_i u(1 - u)(1 - 2u), \quad (3.10)$$

где коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  находятся из условия совпадения касательных к исходной кривой и к криволинейной панели в ее концах (Рис. 3.9) и вычисляются следующим образом:

$$\alpha_i = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \varphi_i + \operatorname{tg} \psi_i), \quad \beta_i = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \varphi_i - \operatorname{tg} \psi_i).$$

Отметим, что если участок исходного профиля над  $i$ -й хордой представляет собой гладкую кривую класса  $C^4$ , погрешность аппроксимации профиля будет величиной порядка  $O(L_i^4)$ .

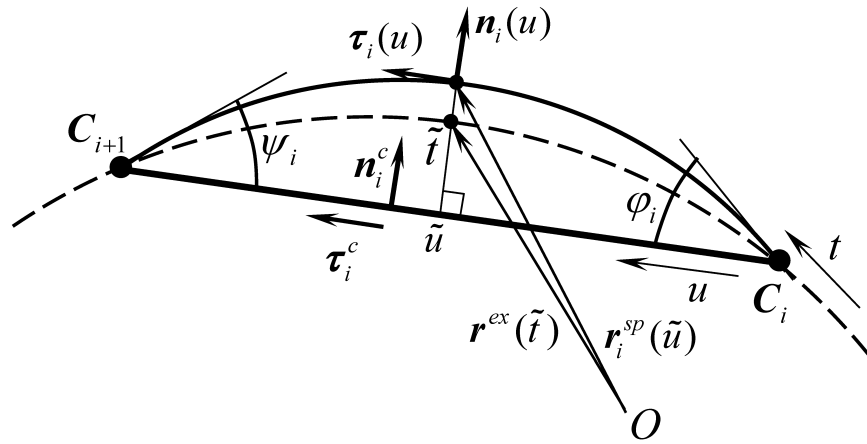


Рис. 3.9. Криволинейная панель, заданная сплайном (сплошная линия), исходная граница профиля (штриховая линия) и  $i$ -я хорда профиля

При построении расчетной схемы для поиска приближенного решения уравнений (3.1)–(3.2) воспользуемся описанными выше идеями метода Галеркина; константные и линейные базисные функции  $\varphi_i^0(u)$  и  $\varphi_i^1(u)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , введем, как и ранее, таким образом, что каждая из них отлична от нуля только на  $i$ -й панели; тогда можно считать их зависящими от параметра  $u$ , меняющегося от 0 до 1 вдоль соответствующей хорды:

$$\varphi_i^0(u) \equiv 1, \quad \varphi_i^1(u) = u - \frac{1}{2}, \quad u \in [0, 1]. \quad (3.11)$$

Решение на панелях будем искать в виде кусочно-линейной по  $u$  функции:

$$\gamma(\mathbf{r}_i^{sp}(u)) = \gamma_i^0 \varphi_i^0(u) + \gamma_i^1 \varphi_i^1(u), \quad u \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, N.$$

Коэффициенты разложения  $\gamma_i^0$  и  $\gamma_i^1$  можно найти из условий ортогональности невязки уравнения (3.1) базисным функциям  $\varphi_k^0(u)$  и  $\varphi_k^1(u)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , из которых следуют нетривиальные алгебраические уравнения лишь при  $k = i$ , поскольку носителями базисных функций являются панели профиля, а условие ортогональности представляет собой равенство нулю интеграла от произведения невязки на эти базисные функции. Тогда достаточно рассмотреть невязку отдельно на  $i$ -й панели:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left( \gamma_j^0 \int_0^1 Q_\tau(\mathbf{r}_i^{sp}(u), \mathbf{r}_j^{sp}(\xi)) \varphi_0^j(\xi) J_j(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \gamma_j^1 \int_0^1 Q_\tau(\mathbf{r}_i^{sp}(u), \mathbf{r}_j^{sp}(\xi)) \varphi_1^j(\xi) J_j(\xi) d\xi \right) - \\ - \frac{\gamma_i^0 \varphi_0^i(u) + \gamma_i^1 \varphi_1^i(u)}{2} - \hat{f}_\tau(\mathbf{r}_i^{sp}(u)), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь якобиан  $J_j(\xi)$  на каждой  $j$ -й панели вычисляется в соответствии с используемой аппроксимацией (3.9), (3.10) и имеет вид

$$J_j(\xi) = \left| \frac{d\mathbf{r}_j^{sp}(\xi)}{d\xi} \right| = L_j \sqrt{1 + (\alpha_j(1 - 2\xi) + \beta_j(6\xi^2 - 6\xi + 1))^2}. \quad (3.12)$$

Дискретный аналог уравнения (3.2) имеет вид:

$$\sum_{j=1}^N \left( \underbrace{\gamma_j^0 \int_0^1 \varphi_0^j(\xi) J_j(\xi) d\xi}_{L_j^0} + \underbrace{\gamma_j^1 \int_0^1 \varphi_1^j(\xi) J_j(\xi) d\xi}_{L_j^1} \right) = \Gamma^*. \quad (3.13)$$

В итоге приходим к системе линейных алгебраических уравнений, в которую введена дополнительная регуляризирующая переменная  $R$  по аналогии с методикой, описанной в разделе 2.1.2:

$$\begin{pmatrix} A^{00} + D^{00} & A^{01} + D^{01} & I_N \\ A^{10} + D^{10} & A^{11} + D^{11} & O_N \\ L^0 & L^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ \Gamma^* \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Здесь блоки  $A^{pq}$  — квадратные матрицы размером  $N \times N$ ;  $D^{pq}$  — диагональные матрицы,  $p, q = 0, 1$ ;  $L^0$  и  $L^1$  — строки, составленные из

длин криволинейных панелей  $L_j^0$  и коэффициентов  $L_j^1$ , обозначения для которых введены в (3.13);  $I_N$  — столбец из единиц;  $O_N$  — столбец из нулей;  $\gamma^0$  и  $\gamma^1$  — столбцы искоемых коэффициентов;  $b^0$  и  $b^1$  — столбцы, образующие правую часть системы.

Коэффициенты матриц  $A^{pq}$  имеют вид

$$A_{ij}^{pq} = \int_0^1 \left( \int_0^1 Q_\tau \left( \mathbf{r}_i^{sp}(u), \mathbf{r}_j^{sp}(\xi) \right) \varphi_j^q(\xi) J_j(\xi) d\xi \right) \varphi_i^p(u) J_i(u) du; \\ i, j = 1, \dots, N; \quad (3.15)$$

матрицы  $D^{pq}$  являются диагональными:

$$D^{pq} = \text{diag} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 (\varphi_i^1(u))^{p+q} J_i(u) du \right\}_{i=1}^N, \quad p, q = 0, 1.$$

Коэффициенты правой части вычисляются по формулам

$$b_i^p = \int_0^1 f_\tau(r_i(u)) \varphi_i^p(u) J_i(u) du, \quad p = 0, 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Наиболее простой способ вычисления внедиагональных коэффициентов матриц  $A^{pq}$  и коэффициентов вектора правой части, обеспечивающий требуемую точность, — это численное интегрирование с использованием, к примеру, квадратурных формул Гаусса.

Для диагональных элементов матриц  $A^{pq}$  можно получить приближенные формулы, разлагая подынтегральные выражения в ряды по степеням  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  и удерживая несколько первых членов. Результат будет представлять собой полином по степеням  $u$  и  $\xi$ , который интегрируется аналитически. Такая методика корректна при малой длине панели.

Действительно, если ввести естественную параметризацию, то орт касательной  $\boldsymbol{\tau}(s)$ , орт главной нормали  $\boldsymbol{\nu}(s)$  и кривизна

$$\kappa^*(s) = |\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)|$$

плоской кривой связаны формулами Френе [52]

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} = \kappa^*(s)\boldsymbol{\nu}(s), \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}(s)}{ds} = -\kappa^*(s)\boldsymbol{\tau}(s).$$

Однако в данном случае удобнее воспользоваться вектором внешней нормали  $\mathbf{n}(s)$  и величиной

$$\varkappa(s) = (\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)) \cdot \mathbf{k},$$

которую условно будем называть «кривизной со знаком». Используя формулы, следующие из формул Френе:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} = -\varkappa(s)\mathbf{n}(s), \quad \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = \varkappa(s)\boldsymbol{\tau}(s),$$

можно выписать выражения для производных радиус-вектора по натуральному параметру:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} &= \boldsymbol{\tau}(s), & \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} &= -\varkappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \frac{d^3\mathbf{r}(s)}{ds^3} &= -\varkappa'(s)\mathbf{n}(s) - \varkappa^2(s)\boldsymbol{\tau}(s). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Тогда для параметров  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  в выражении для сплайна (3.10) можно получить

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\varkappa\delta_i + O(\delta_i^2), \quad \beta_i = -\frac{1}{12}\varkappa'\delta_i^2 + O(\delta_i^3),$$

где  $\delta_i$  — длина  $i$ -й панели;  $\varkappa$  — кривизна со знаком кривой на панели; штрих означает производную по длине дуги.

Теперь, учитывая, что  $\beta_i$  имеет тот же порядок, что и  $(\alpha_i)^2$ , ограничиваясь членами порядка 4-й степени длины хорды  $L_i$ , можно записать

$$\begin{aligned} A_{ii}^{00} &\approx \frac{\alpha_i}{2\pi}L_i, & A_{ii}^{01} &\approx -\frac{\beta_i}{12\pi}L_i, & A_{ii}^{10} &\approx -\frac{\beta_i}{6\pi}L_i, & A_{ii}^{11} &\approx -\frac{\alpha_i^3}{144\pi}L_i, \\ D_{ii}^{00} &\approx -\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_i^2}{12}\right)L_i, & D_{ii}^{01} &= D_{ii}^{10} \approx \frac{\alpha_i\beta_i}{30}L_i, & D_{ii}^{11} &\approx -\left(\frac{1}{24} + \frac{\alpha_i^2}{80}\right)L_i, \\ L_i^0 &\approx \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{6}\right)L_i, & L_i^1 &\approx 0. \end{aligned}$$

После решения системы линейных алгебраических уравнений и отыскания значений неизвестных  $\gamma_i^p$ ,  $p = 0, 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ , распределение интенсивности вихревого слоя по панелям можно считать найденным. Для его сопоставления с точным решением и оценки погрешности

требуется предпринять некоторые действия, по своей сути аналогичные описанным в разделе 2.4.1 и необходимые в силу того, что точное решение (1.19) задано на исходной границе профиля, т.е.  $\gamma^{ex} = \gamma^{ex}(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ , а приближенное задано на каждой дуге сплайна и параметризовано вдоль хорд профиля:  $\gamma_i = \gamma_i(u)$ ,  $u \in [0, 1]$ . Тогда для каждой  $i$ -й панели, которой соответствуют значения  $t$  в диапазоне  $[t_{i-1}, t_i]$ , можно задать отображение, которое имеет простой геометрический смысл — оно соответствует процедуре ортогонального проецирования точки исходной кривой на хорду (Рис. 3.9):

$$u_i(t) = \frac{(\mathbf{r}^{ex}(t) - \mathbf{r}^{ex}(t_{i-1})) \cdot \boldsymbol{\tau}_i^0}{L_i}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $\mathbf{r}^{ex}(t)$  — радиус-вектор точки на исходном контуре;  $\boldsymbol{\tau}_i^0$  — орт касательной к  $i$ -й хорде;  $L_i$  — длина хорды.

После проделанной процедуры можно считать, что численное решение становится параметризованным параметром  $t$ . В результате ошибку приближенного решения будем вычислять как

$$\|\Delta\gamma\|_{L_1} = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma(u_i(t)) - \gamma^{ex}(t)| J^{ex}(t) dt,$$

где якобиан  $J^{ex}(t)$  должен вычисляться для исходной кривой; его на  $i$ -й панели можно приближенно заменить выражением  $J^{ex}(t) \approx J_i(u_i(t))$ , где  $J_i(u)$  — якобиан, вычисляемый для сплайна по формуле (3.12).

Ошибку определения средних величин интенсивности вихревого слоя на панелях можно вычислить по формуле

$$\|\Delta\gamma\|_{C^h} = \max_{1 \leq i \leq N} |\bar{\gamma}_i - \bar{\gamma}_i^{ex}|,$$

где  $\bar{\gamma}_i$  и  $\bar{\gamma}_i^{ex}$  — средние значения приближенного и точного решений:

$$\bar{\gamma}_i = \frac{1}{L_i^0} \int_0^1 \gamma_i(u) J_i(u) du \quad \bar{\gamma}_i^{ex} = \frac{1}{L_i^0} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma^{ex}(t) J^{ex}(t) dt.$$

Ниже в Таблице 8 приведены погрешности  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$  определения интенсивности вихревого слоя при моделировании обтекания эллиптических профилей с полуосями  $a_1 = 1.0$ ,  $b_1 = 0.5$  и  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 0.1$ , установленных под углом атаки  $\beta = \frac{\pi}{6}$  к набегающему потоку, имеющему скорость  $V_\infty = 1.0$ . Дискретизация границы профиля производилась квазиравномерно (см. стр. 79). Для вычисления внедиагональных коэффициентов матрицы и правой части СЛАУ (3.14) выполнялось численное интегрирование по квадратурной формуле Гаусса с 4 точками.

Таблица 8.

Погрешности  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$  при моделировании  
обтекания эллиптических профилей

$N$	128	256	500	1000	2000
Эллипс с соотношением полуосей 2 : 1					
$\ \Delta\gamma^c\ _{L_1}$	0.068286	0.034140	0.017479	0.008740	0.004370
$m^c$	—	1.00	1.00	1.00	1.00
$\ \Delta\gamma^l\ _{L_1}$	0.000736	0.000184	0.000048	0.000012	0.000003
$m^l$	—	2.00	2.00	2.00	2.00
Эллипс с соотношением полуосей 10 : 1					
$\ \Delta\gamma^c\ _{L_1}$	0.081528	0.040818	0.020895	0.010448	0.005224
$m^c$	—	1.00	1.00	1.00	1.00
$\ \Delta\gamma^l\ _{L_1}$	0.003383	0.000849	0.000222	0.000055	0.000014
$m^l$	—	1.99	2.00	2.00	2.00

В Таблице 9 для этих же задач приведены величины погрешности  $\|\Delta\mathbf{V}\|_{L_1}$  восстановления поля скоростей вблизи границы профиля — интеграл от разности точного и восстановленного поля скоростей в каждом расчете был вычислен вдоль эллипса, отстоящего от границы профиля на  $\frac{1}{8}$  длины панели  $h$ .

Таким образом, разработанная методика позволила в определенной мере решить проблему аппроксимации гладкого профиля таким образом, чтобы при этом не возникало «фиктивных» угловых точек, наличие которых отрицательно сказывается на точности приближенного решения.

Погрешности  $\|\Delta \mathbf{V}\|_{L_1}$  при моделировании  
обтекания эллиптических профилей

$N$	128	256	500	1000	2000
Эллипс с соотношением полуосей 2 : 1					
$\ \Delta \mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.026341	0.013105	0.006614	0.003232	0.001684
$m^c$	—	1.01	1.02	1.03	0.94
$\ \Delta \mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.000323	0.000081	0.000021	0.000005	0.000001
$m^l$	—	2.00	2.00	1.99	2.00
Эллипс с соотношением полуосей 10 : 1					
$\ \Delta \mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.048177	0.023526	0.011054	0.005851	0.002922
$m^c$	—	1.03	1.13	0.92	1.00
$\ \Delta \mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.001996	0.000506	0.000130	0.000033	0.000008
$m^l$	—	1.98	2.03	1.98	2.00

Погрешность восстановления поля скоростей при использовании кусочно-линейной схемы теперь квадратично убывает с уменьшением  $h$ .

Однако у предложенного подхода имеются недостатки. Прежде всего, аппроксимация границы профиля эрмитовыми сплайнами, особенно при малом числе панелей, может приводить к существенной погрешности, поэтому на методику дискретизации контура следует накладывать определенные ограничения, связанные с его кривизной. Во-вторых, сравнительно простые аналитические выражения в данном случае удастся получить лишь для диагональных элементов соответствующих блоков матриц. Для остальных интегралов простые выражения аналогичного типа получить в общем случае не удастся, поэтому необходимо выполнять численное интегрирование по описанной выше методике. При этом базисные функции неортогональны, что не является принципиальным для реализации метода, но осложняет анализ и интерпретацию результатов.

В результате можно сделать промежуточный вывод о том, что предложенный подход в целом представляется перспективным, однако его практическая реализация не является тривиальной.



### 3.3. Вычисление интегралов по криволинейным панелям

Заметим, что точное интегрирование при вычислении коэффициентов системы (3.8), если и возможно, то для профиля, граница которого задана кривой простейшей формы. В разделе 2.3 эта операция проделана в наиболее общем виде для прямолинейного участка границы профиля. Используя результаты раздела 1.3, некоторые (не все!) интегралы можно вычислить точно для панели, представляющей собой дугу окружности, однако качественная аппроксимация произвольного профиля дугами окружностей затруднительна. Ясно, что в случае достаточно произвольной формы границы обтекаемого профиля получить точные формулы, аналогичные тем, что получены в разделе 2.3 для случая прямолинейных панелей, невозможно.

Ниже предложена методика приближенного вычисления всех необходимых интегралов, которая предполагает знание лишь положений концов и центров криволинейных панелей, их длин, направлений касательных и внешних нормалей в центрах панелей, а также кривизн и их производных (по длине дуги) в центрах и на концах панелей. Ее суть состоит в отказе от непосредственной аппроксимации границы профиля, ограничиваясь лишь предположением, что она является кусочно гладкой кривой на каждой панели.

#### 3.3.1. Вычисление интегралов в левой части

Рассмотрим, как и ранее, расчетные схемы с кусочно-постоянным и кусочно-линейным представлением приближенного решения. Для этого введем два семейства ортогональных базисных функций:

$$\varphi_i^0(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in K_i, \\ 0, & \mathbf{r} \notin K_i; \end{cases} \quad \varphi_i^1(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{s(\mathbf{r}) - s(\mathbf{c}_i)}{\delta_i}, & \mathbf{r} \in K_i, \\ 0, & \mathbf{r} \notin K_i. \end{cases}$$

Здесь  $K_i$  —  $i$ -я криволинейная панель;  $s(\mathbf{r})$  — натуральный параметр, соответствующей точке  $\mathbf{r}$  на границе профиля;  $\mathbf{c}_i$  — радиус-вектор цен-

тра  $i$ -й панели;  $\delta_i$  — длина  $i$ -й криволинейной панели. Таким образом, базисная функция  $\varphi_i^1(r)$  является линейной функцией относительно длины дуги, изменяющейся от значения  $-\frac{1}{2}$  в начале панели до значения  $\frac{1}{2}$  в конце панели, как и было описано в разделе 2.2. Проекционные функции выберем такими же, как базисные.

Приближенное решение имеет вид

$$\gamma(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N (\gamma_i^0 \varphi_i^0(\mathbf{r}) + \gamma_i^1 \varphi_i^1(\mathbf{r})),$$

где неизвестные коэффициенты  $\gamma_i^0$  и  $\gamma_i^1$ , как и ранее, найдем из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.3)–(3.4), которая имеет следующий блочный вид (с учетом использования процедуры регуляризации, описанной в разделе 2.1.2):

$$\begin{pmatrix} A^{00} + D^{00} & A^{01} + D^{01} & I_N \\ A^{10} + D^{10} & A^{11} + D^{11} & O_N \\ L^0 & L^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ \Gamma^* \end{pmatrix}.$$

Здесь блоки  $A^{pq}$  — квадратные матрицы размером  $N \times N$ ;  $D^{pq}$  — диагональные матрицы,  $p, q = 0, 1$ ;  $I_N$  и  $O_N$  — векторы-столбцы, состоящие из нулей и единиц соответственно;  $L^p$  — векторы, компонентами которых являются интегралы от базисных функций вдоль криволинейных панелей;  $\gamma^p = (\gamma_1^p, \dots, \gamma_N^p)^T$  — векторы неизвестных коэффициентов;  $R$  — регуляризирующая переменная;  $b^p$  — векторы правых частей:

$$A_{ij}^{pq} = \int_{K_i} \left( \int_{K_j} Q_\tau(s, \sigma) \varphi_j^q(\sigma) d\sigma \right) \varphi_i^p(s) ds, \quad D_{ii}^{pq} = -\frac{1}{2} \int_{K_i} \varphi_i^p(s) \varphi_i^q(s) ds,$$

$$L_i^p = \int_{K_i} \varphi_i^p(s) ds, \quad b_i^p = \int_{K_i} f_\tau(s) \varphi_i^p(s) ds, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad p, q = 0, 1.$$

Поскольку базисные функции ортогональны,  $D_{ii}^{01} = D_{ii}^{10} = 0$ ,  $L_i^1 = 0$ , а  $L_i^0$  представляет собой длину  $i$ -й криволинейной панели.

Для диагональных коэффициентов матриц  $D_{ii}^{pq}$  справедливы следующие точные формулы:

$$D_{ii}^{00} = -\frac{\delta_i}{2}, \quad D_{ii}^{01} = D_{ii}^{10} = 0, \quad D_{ii}^{11} = -\frac{\delta_i}{24}. \quad (3.17)$$

Далее воспользуемся модифицированными соотношениями дифференциальной геометрии плоских кривых, вводя в рассмотрение орт касательной  $\boldsymbol{\tau}(s)$ , орт внешней нормали  $\mathbf{n}(s)$  и «кривизну со знаком»  $\varkappa(s)$  так же, как это было сделано в предыдущем разделе на стр. 93.

Будем считать, что длина  $i$ -й панели  $\delta_i = s_i - s_{i-1}$  является малой, тогда оказывается возможным выписать приближенные формулы для вычисления коэффициентов матрицы в виде разложения по формуле Тейлора по параметру  $\delta_i$ . Будем учитывать только те слагаемые, которые пропорциональны  $(\delta_i)^k$ , где  $k \leq 3$ . Значение параметра  $s_i^* = \frac{s_{i-1} + s_i}{2}$  соответствует центру криволинейной панели.

Для вычисления диагональных коэффициентов  $A_{ii}^{pq}$  будем производить разложение подынтегральных выражений в окрестности точки  $s_i^*$ , как по параметру  $s$ , так и по параметру  $\sigma$ . После интегрирования по обеим переменным по промежуткам  $[s_{i-1}, s_i]$ , или, что то же самое,  $\left[s_i^* - \frac{\delta_i}{2}, s_i^* + \frac{\delta_i}{2}\right]$ , получаем следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} A_{ii}^{00} &= \frac{\delta_i^2}{4\pi} \varkappa_i + O(\delta_i^4), & A_{ii}^{01} &= \frac{\delta_i^3}{144\pi} \varkappa_i' + O(\delta_i^4), \\ A_{ii}^{10} &= \frac{\delta_i^3}{72\pi} \varkappa_i' + O(\delta_i^4), & A_{ii}^{11} &= O(\delta_i^4), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $\varkappa_i$  — кривизна со знаком кривой в центре  $i$ -й панели; штрих означает производную по длине дуги.

Теперь рассмотрим внедиагональные коэффициенты, вычисление которых требует интегрирования по разным панелям ( $i \neq j$ ). Введем вспомогательные обозначения:  $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{r}_i^* - \mathbf{r}_j^*$  — вектор, соединяющий центры соответствующих панелей;  $\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j$  — единичные векторы касательных и внешних нормалей в центрах  $i$ -й и  $j$ -й панелей соответственно.

Тогда для коэффициентов матриц  $A_{ij}^{00}$ ,  $A_{ij}^{01}$  и  $A_{ij}^{10}$  можно получить следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{00} &\approx \frac{\delta_i \delta_j}{2\pi |\mathbf{d}_{ij}|^2} (\mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i), \\ A_{ij}^{01} &\approx \frac{\delta_i \delta_j^2}{24\pi |\mathbf{d}_{ij}|^2} \left( (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_j) + 2 \frac{(\mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{d}_{ij} \cdot \boldsymbol{\tau}_j)}{|\mathbf{d}_{ij}|^2} \right), \\ A_{ij}^{10} &\approx \frac{\delta_i^2 \delta_j}{24\pi |\mathbf{d}_{ij}|^2} (\mathbf{d}_{ij} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \left( \kappa_i - 2 \frac{(\mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i)}{|\mathbf{d}_{ij}|^2} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Коэффициентами  $A_{ij}^{11}$ , включая диагональные, можно пренебречь и принять их равными нулю.

Отметим, что первая из формул (3.19) является не вполне корректной для случая моделирования обтекания негладких профилей — при рассмотрении соседних панелей, если в их общей точке находится угловая точка на границе исходного профиля. В этом случае она может быть модифицирована, однако для повышения точности на практике представляется более рациональным считать примыкающие к угловой точке панели прямолинейными, поскольку основной вклад в коэффициенты их взаимного влияния будет вносить не их кривизна, а именно наличие угловой точки, и вычислять соответствующие интегралы точно с использованием полученных в разделе 2.3 аналитических формул.

В случае гладких профилей при вычислении коэффициентов, которые требуют интегрирования по соседним панелям ( $|i - j| = 1$ ), применение формул (3.19) может приводить к погрешности, причиной возникновения которой является тот факт, что разложение подынтегрального выражения производится в центрах панелей, а отрезки интегрирования примыкают друг к другу. Соответственно, величина  $|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\sigma)|$  после разложения по  $s$  и  $\sigma$  будет иметь большúю относительную погрешность при приближении к общей точке смежных панелей.

Поэтому для приближенного вычисления таких коэффициентов целесообразно раскладывать подынтегральное выражение по обоим переменным в окрестности их общей точки  $s_{ij}^*$ , сводя к нулю указанную

погрешность. При этом будет наблюдаться бóльшая абсолютная погрешность на противоположных концах панелей, однако они отстоят друг от друга, поэтому относительная ошибка будет невелика. Таким образом, для соседних панелей можно получить следующие приближенные формулы, которые проще и точнее по сравнению с формулами (3.19):

$$\begin{aligned} A_{ij}^{00} &= \frac{\delta_i \delta_j}{4\pi} \left( \kappa_{ij} \pm \frac{\delta_j - 2\delta_i}{6} \kappa'_{ij} \right) + O(\delta_j^4), & A_{ij}^{01} &= \frac{\delta_i \delta_j^2}{144\pi} \kappa'_{ij} + O(\delta_j^4), \\ A_{ij}^{10} &= \frac{\delta_i^2 \delta_j}{72\pi} \kappa'_{ij} + O(\delta_j^4), & A_{ij}^{11} &= O(\delta_j^4). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь  $\kappa_{ij}$  — кривизна со знаком границы профиля в общей точке соседних панелей; штрих означает производную по длине дуги; знак «+» в формуле для  $A_{ij}^{00}$  используется, когда  $j = i + 1$ , а знак «−» — когда  $j = i - 1$ .

Рассмотрим здесь же вычисление правой части для простейшего случая, соответствующего обтеканию неподвижного профиля набегающим потоком, имеющим скорость  $\mathbf{V}_\infty$ , при отсутствии завихренности в области течения. Тогда для выражения  $f(s)$  в уравнении (3.4) получаем  $f(s) = -\mathbf{V}_\infty \cdot \boldsymbol{\tau}(s)$  и можно записать следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} b_i^0 &= -(\mathbf{V}_\infty \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \delta_i + \frac{1}{24} \left( \mathbf{V}_\infty \cdot (\kappa'_i \mathbf{n}_i + \kappa_i^2 \boldsymbol{\tau}_i) \right) \delta_i^3 + O(\delta_i^4), \\ b_i^1 &= \frac{1}{12} \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_i \kappa_i \delta_i^2 + O(\delta_i^4). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}_i$  и  $\mathbf{n}_i$  — единичные векторы касательной и внешней нормали соответственно; все величины вычисляются в центрах соответствующих панелей.

### 3.3.2. Вычисление интегралов в правой части

В предыдущем подразделе были получены формулы для приближенного вычисления коэффициентов правой части уравнения (3.1) для частного случая, когда профиль является неподвижным и недеформируемым, а завихренность в области течения отсутствует. Запишем необходимые формулы для наиболее общего случая (как и ранее, в рамках

$T$ -схемы), когда правая часть уравнения (3.4) имеет вид

$$\begin{aligned} b_i^p &= \int_{K_i} f(s) \varphi_i^p(s) ds = \\ &= \int_{K_i} \left( \frac{\mathbf{V}_K(\mathbf{r}, t)}{2} - \mathbf{V}_\infty \right) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) \varphi_i^p(s) ds - \sum_{w=1}^{N_v} \Gamma_w \int_{K_i} (\mathbf{G}_w(s) \cdot \mathbf{n}(s)) \varphi_i^p(s) ds - \\ &- \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^m \int_{K_i} \varphi_i^p(s) ds \left( \int_{K_j} ((\mathbf{G}(s, \sigma) \cdot \mathbf{n}(s)) (\gamma^{att})_j^q + (\mathbf{G}(s, \sigma) \cdot \boldsymbol{\tau}(s)) (q^{att})_j^q) \varphi_j^q(\sigma) d\sigma \right), \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$b_i^p = (b_V)_i^p - \sum_{w=1}^{N_v} \Gamma_w (z_w)_i^p - \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^m A_{ij}^{pq} (\gamma^{att})_j^q - \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^m S_{ij}^{pq} (q^{att})_j^q, \quad (3.22)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} (b_V)_i^p &= \int_{K_i} \left( \frac{\mathbf{V}_K(\mathbf{r}, t)}{2} - \mathbf{V}_\infty \right) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) \varphi_i^p(s) ds, \\ (z_w)_i^p &= \int_{K_i} (\mathbf{G}_w(s) \cdot \mathbf{n}(s)) \varphi_i^p(s) ds, \\ S_{ij}^{pq} &= \int_{K_i} \varphi_i^p(s) ds \left( \int_{K_j} (\mathbf{G}(s, \sigma) \cdot \boldsymbol{\tau}(s)) \varphi_j^q(\sigma) d\sigma \right), \end{aligned}$$

а коэффициенты  $A_{ij}^{pq}$ , отвечающие за учет влияния присоединенного вихревого слоя, остаются такими же, как в предыдущем подразделе.

Для коэффициентов  $(b_V)_i^p$  при помощи изложенной выше методики разложения по формуле Тейлора в центре панели получаем следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} (b_V)_i^0 &= \frac{\delta_i}{2} ((\mathbf{V}_{K,i} - 2\mathbf{V}_\infty) \cdot \boldsymbol{\tau}_i) + \frac{\delta_i^3}{48} ((\mathbf{V}_{K,i} - 2\mathbf{V}_\infty) \cdot \boldsymbol{\tau}_i)'' + O(\delta_i^4), \\ (b_V)_i^1 &= \frac{\delta_i^2}{24} ((\mathbf{V}_{K,i} - 2\mathbf{V}_\infty) \cdot \boldsymbol{\tau}_i)' + O(\delta_i^4) = \\ &= \frac{\delta_i^2}{24} \left( (\mathbf{V}'_{K,i} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) - \varkappa_i ((\mathbf{V}_{K,i} - 2\mathbf{V}_\infty) \cdot \mathbf{n}_i) \right) + O(\delta_i^4). \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{V}_{K,i}$  — скорость границы профиля в центре  $i$ -й панели;  $\boldsymbol{\tau}_i$  и  $\mathbf{n}_i$  — единичные векторы касательной и внешней нормали в центре  $i$ -й панели соответственно; штрих означает производную по длине дуги.

Теперь запишем приближенные формулы для коэффициентов  $S_{ij}^{pq}$ , отвечающих за учет влияния присоединенного слоя источников. Техника их получения принципиально остается той же, что и для коэффициентов  $A_{ij}^{pq}$ , однако преобразования становятся более трудоемкими, поскольку подынтегральная функция при  $|i - j| \leq 1$  имеет неинтегрируемую особенность и следует вычислять главные значения интегралов по Коши.

Для диагональных элементов  $S_{ii}^{pq}$  справедливы следующие формулы:

$$S_{ii}^{00} = S_{ii}^{11} = O(\delta_i^4), \quad S_{ii}^{01} = -S_{ii}^{10} = -\frac{1}{4\pi}\delta_i + \frac{\kappa_i^2}{288\pi}\delta_i^3 + O(\delta_i^4).$$

Для коэффициентов, вычисление которых требует интегрирования вдоль разных панелей, как и ранее, используем обозначение  $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  для вектора, соединяющего центры  $i$ -й и  $j$ -й панелей, тогда для  $S_{ij}^{pq}$  (несоседних,  $|i - j| > 1$ ) можно получить следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} S_{ij}^{00} &\approx \frac{\delta_i \delta_j}{2\pi|\mathbf{d}_{ij}|^2}(\mathbf{d}_{ij} \cdot \boldsymbol{\tau}_i), & S_{ij}^{01} &\approx \frac{\delta_i \delta_j^2}{12\pi|\mathbf{d}_{ij}|^2} \left( \frac{(\mathbf{d}_{ij} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)(\mathbf{d}_{ij} \cdot \boldsymbol{\tau}_j)}{|\mathbf{d}_{ij}|^2} - \frac{(\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)}{2} \right), \\ S_{ij}^{10} &\approx \frac{\delta_i^2 \delta_j}{12\pi|\mathbf{d}_{ij}|^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{(\mathbf{d}_{ij} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)^2}{|\mathbf{d}_{ij}|^2} - \frac{(\mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i)}{2} \kappa_i \right), & S_{ij}^{11} &\approx 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Как и для коэффициентов  $A_{ij}^{pq}$ , формулы (3.23) могут стать некорректными для негладких профилей, т. е. для панелей, между которыми имеется угловая точка. При этом остается в силе и замечание о том, что при наличии угловой точки может быть целесообразной замена примыкающих к ней панелей прямолинейными с последующим точным вычислением интегралов.

Для гладких частей границы профиля при вычислении коэффициентов матрицы, которые требуют интегрирования по соседним панелям

( $|i - j| = 1$ ), следует применить прием, описанный при получении формул (3.20); в результате получаются следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{00} &= \pm \left( -\frac{\delta_i}{2\pi} \ln\left(\frac{\delta_i + \delta_j}{\delta_i}\right) - \frac{\delta_j}{2\pi} \ln\left(\frac{\delta_i + \delta_j}{\delta_j}\right) + \frac{\delta_i(\delta_i + \delta_j)\delta_j}{48\pi} \varkappa_{ij}^2 \right) + O(\delta_j^4), \\
S_{ij}^{01} &= -\frac{\delta_i}{4\pi} + \frac{\delta_i(\delta_i + \delta_j)}{4\pi\delta_j} \ln\left(\frac{\delta_i + \delta_j}{\delta_i}\right) + \frac{\delta_i\delta_j^2}{288\pi} \varkappa_{ij}^2 + O(\delta_j^4), \\
S_{ij}^{10} &= \frac{\delta_j}{4\pi} - \frac{\delta_j(\delta_i + \delta_j)}{4\pi\delta_i} \ln\left(\frac{\delta_i + \delta_j}{\delta_j}\right) - \frac{\delta_i^2\delta_j}{288\pi} \varkappa_{ij}^2 + O(\delta_j^4), \\
S_{ij}^{11} &= \pm \left( \frac{\delta_i + \delta_j}{24\pi} - \frac{\delta_i^2}{24\pi\delta_j} \ln\left(\frac{\delta_i + \delta_j}{\delta_i}\right) - \frac{\delta_j^2}{24\pi\delta_i} \ln\left(\frac{\delta_i + \delta_j}{\delta_j}\right) \right) + O(\delta_j^4).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Здесь  $\varkappa_{ij}$  — кривизна со знаком границы профиля в общей точке соседних панелей; знак «+» в формулах для  $S_{ij}^{00}$  и  $S_{ij}^{11}$  используется для  $j = i + 1$ , а «−» — для  $j = i - 1$ .

Для учета влияния вихревых элементов, находящихся в области течения, т.е. для вычисления коэффициентов  $(z_w)_i^p$  в формуле (3.22), обозначим вектор, который соединяет точку расположения  $w$ -го вихря с центром  $i$ -й панели за  $\mathbf{h}_{iw} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_w$ .

Необходимо рассмотреть два случая. В случае малой величины отношения  $\frac{\delta_i}{|\mathbf{h}_{iw}|}$ , т.е. когда вихревой элемент находится достаточно далеко от панели, применимы приближенные формулы, получаемые по вышеописанной методике:

$$\begin{aligned}
(z_w)_i^0 &= \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \mathbf{n}_i)}{2\pi|\mathbf{h}_{iw}|} \frac{\delta_i}{|\mathbf{h}_{iw}|} + \frac{1}{2\pi} \left( \left( \frac{1}{4} - \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \mathbf{n}_i)^2}{3|\mathbf{h}_{iw}|^2} - \frac{\varkappa_i^2|\mathbf{h}_{iw}|^2}{24} \right) \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \mathbf{n}_i)}{|\mathbf{h}_{iw}|} + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\varkappa_i'|\mathbf{h}_{iw}|^2}{24} - \frac{\varkappa_i(\mathbf{h}_{iw} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)}{4} \right) \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)}{|\mathbf{h}_{iw}|} + \frac{\varkappa_i|\mathbf{h}_{iw}|}{8} \right) \left( \frac{\delta_i}{|\mathbf{h}_{iw}|} \right)^3 + O\left( \frac{\delta_i}{|\mathbf{h}_{iw}|} \right)^4, \\
(z_w)_i^1 &= \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)}{12\pi|\mathbf{h}_{iw}|} \left( \frac{\varkappa_i|\mathbf{h}_{iw}|}{2} - \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \mathbf{n}_i)}{|\mathbf{h}_{iw}|} \right) \left( \frac{\delta_i}{|\mathbf{h}_{iw}|} \right)^2 + O\left( \frac{\delta_i}{|\mathbf{h}_{iw}|} \right)^4.
\end{aligned}$$

Если же вихревой элемент расположен достаточно близко к панели, получить по разработанной методике сравнительно простые и при этом достаточно точные приближенные формулы, позволяющие учиты-



вать криволинейность границы профиля, не удастся. В этом случае криволинейная панель может быть заменена на дугу соприкасающейся окружности радиусом  $R_i = \frac{1}{\varkappa_i^*} = \frac{1}{|\varkappa_i|}$ , которая имеет ту же длину, что и исходная панель. При таком подходе, используя точное решение (1.19), можно получить следующую формулу, точную для дуги окружности:

$$(z_w)_i^0 \approx \Psi_{iw}^0\left(\chi_i + \frac{\delta_i \varkappa_i}{2}\right) - \Psi_{iw}^0\left(\chi_i - \frac{\delta_i \varkappa_i}{2}\right),$$

где

$$\Psi_{iw}^0(\beta) = \frac{\beta - \theta_{iw}}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \left( \arctg\left(\frac{\alpha_{iw}}{2 + \alpha_{iw}} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \theta_{iw}}{2}\right) - \pi \operatorname{sign} \alpha_{iw} \eta(\beta - \theta_{iw}) \right)$$

обозначает непрерывную ветвь первообразной (по длине дуги) для соответствующей подынтегральной функции;  $\chi_i$  — аргумент вектора  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{c}_i)$ , т. е. угол между этим вектором и горизонтальной прямой, Рис. 3.10, измеряемый в диапазоне  $(-\pi, \pi]$ ;  $\mathbf{c}_i = \mathbf{r}_i - \frac{\mathbf{n}_i}{\varkappa_i}$  — радиус-вектор центра соприкасающейся окружности;  $\delta_i$  и  $\varkappa_i$  — как и ранее, длина  $i$ -й панели и кривизна со знаком в ее центре;  $\theta_{iw}$  аргумент вектора  $(\boldsymbol{\rho}_w - \mathbf{c}_i)$ , величина которого может быть поправлена на  $\pm 2\pi$  для обеспечения выполнения условия

$$-\pi < \beta - \theta_{iw} \leq \pi \quad \text{для} \quad \chi_i - \frac{\delta_i \varkappa_i^*}{2} \leq \beta \leq \chi_i + \frac{\delta_i \varkappa_i^*}{2};$$

$\varkappa_i^* = |\varkappa_i| \geq 0$  — кривизна, понимаемая в традиционном смысле;  $\alpha_{iw}$  — безразмерный параметр, учитывающий то, как близко вихревой элемент расположен к дуге окружности:

$$\alpha_{iw} = |\boldsymbol{\rho}_w - \mathbf{c}_i| \varkappa_i^* - 1 = \frac{|\boldsymbol{\rho}_w - \mathbf{c}_i|}{R_i} - 1;$$

$\eta(x)$  — функция Хевисайда, равная 1 при  $x > 0$  и равная 0 при  $x < 0$ .

В случае малых значений разности  $\beta - \theta_{iw}$  можно воспользоваться приближенным выражением

$$\Psi_{iw}^0(\beta) \approx -\frac{1}{4} \operatorname{sign} \alpha_{iw} - \frac{\beta - \theta_{iw}}{2\pi \alpha_{iw}}.$$

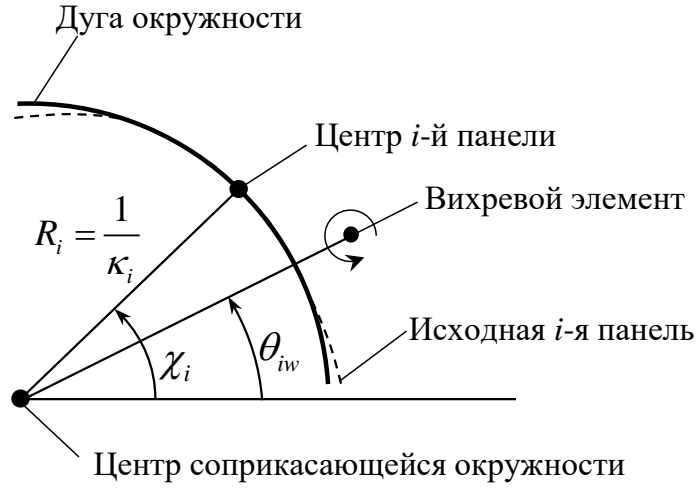


Рис. 3.10. Положение вихревого элемента, криволинейной границы профиля и ее аппроксимация соприкасающейся окружностью

Описанный прием, однако, не позволяет вычислить коэффициент  $(z_w)_i^1$ , точнее, аналитическое интегрирование соответствующей функции вдоль дуги соприкасающейся окружности возможно, но результат не выражается в элементарных функциях, а дается с помощью специальной функции полилогарифма [102], что не позволяет производить практические расчеты. В этом случае можно принять еще одно упрощающее предположение, и считая ранее введенный параметр  $\alpha_{iw}$  малым, разложить полилогарифмы по формуле Тейлора по степеням  $\alpha_{iw}$  с учетом того, что все производные могут быть выражены элементарными функциями. В результате получим приближенную формулу для  $(z_w)_i^1$ :

$$(z_w)_i^1 \approx \Psi_{iw}^1\left(\chi_i + \frac{\delta_i \varkappa_i}{2}\right) - \Psi_{iw}^1\left(\chi_i - \frac{\delta_i \varkappa_i}{2}\right),$$

где  $\Psi_{iw}^1(\beta)$  — непрерывная ветвь первообразной; все обозначения соответствуют описанным выше:

$$\begin{aligned} \Psi_{iw}^1(\beta) = & \frac{1}{4\pi\delta_i\varkappa_i^*} \left( \frac{(\beta - \theta_{iw})^2}{2} + \right. \\ & + \left( (\beta - \theta_{iw}) - 2\pi\eta(\alpha_{iw}) - 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta - \theta_{iw}}{\alpha_{iw}} - \frac{\alpha_{iw}^2(\beta - \theta_{iw})}{\alpha_{iw}^2 + (\beta - \theta_{iw})^2} \right) (\theta_{iw} - \chi_i) + \\ & \left. + \alpha_{iw}(2 - \alpha_{iw}) - \left( \alpha_{iw} - \frac{\alpha_{iw}^2}{2} + \frac{\alpha_{iw}^3}{3} \right) \ln(\alpha_{iw}^2 + (\beta - \theta_{iw})^2) - \frac{\alpha_{iw}^4}{18} \frac{5\alpha_{iw} - 18}{\alpha_{iw}^2 + (\beta - \theta_{iw})^2} \right). \end{aligned}$$

### 3.4. Решение модельных задач

Вернемся к задаче о моделировании обтекания эллиптического профиля, рассмотренной в подразделе 3.1.2, особенностью которой была существенно неравномерная дискретизация границы профиля. Напомним, что при использовании моделей с прямолинейными панелями схема с кусочно-постоянным решением приводила к неверному количественно, но «монотонному» решению, а схема с кусочно-линейным решением — к качественно неверному немонотонному решению (Рис. 3.5 и 3.6).

Применение для этой задачи описанной выше схемы с учетом криволинейности панелей приводит к следующему результату. Численные решения, полученные из систем линейных алгебраических уравнений для кусочно-постоянной и кусочно-линейной моделей, показаны на Рис. 3.11 и Рис. 3.12 (как и ранее, показаны только фрагменты графиков в окрестности левой и правой вершины эллипса, где для более простых моделей наблюдалась существенная погрешность).

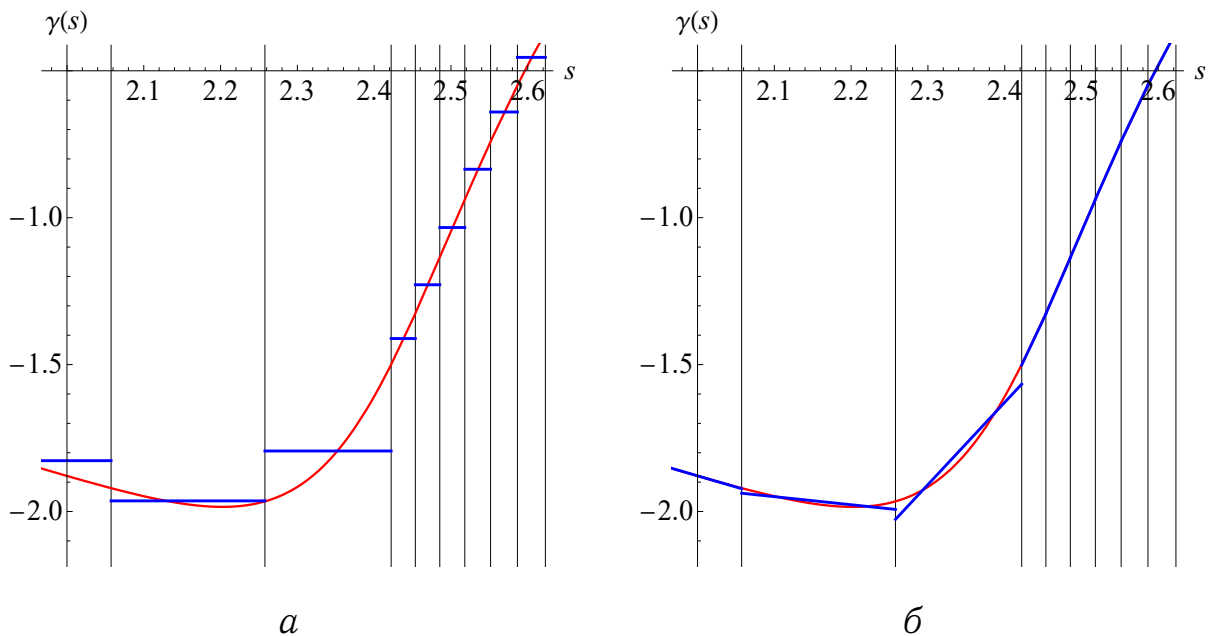


Рис. 3.11. Кусочно-постоянное (а) и кусочно-линейное (б) решения в окрестности левой вершины эллипса при полуаналитическом вычислении интегралов; вертикальные линии соответствуют концам панелей

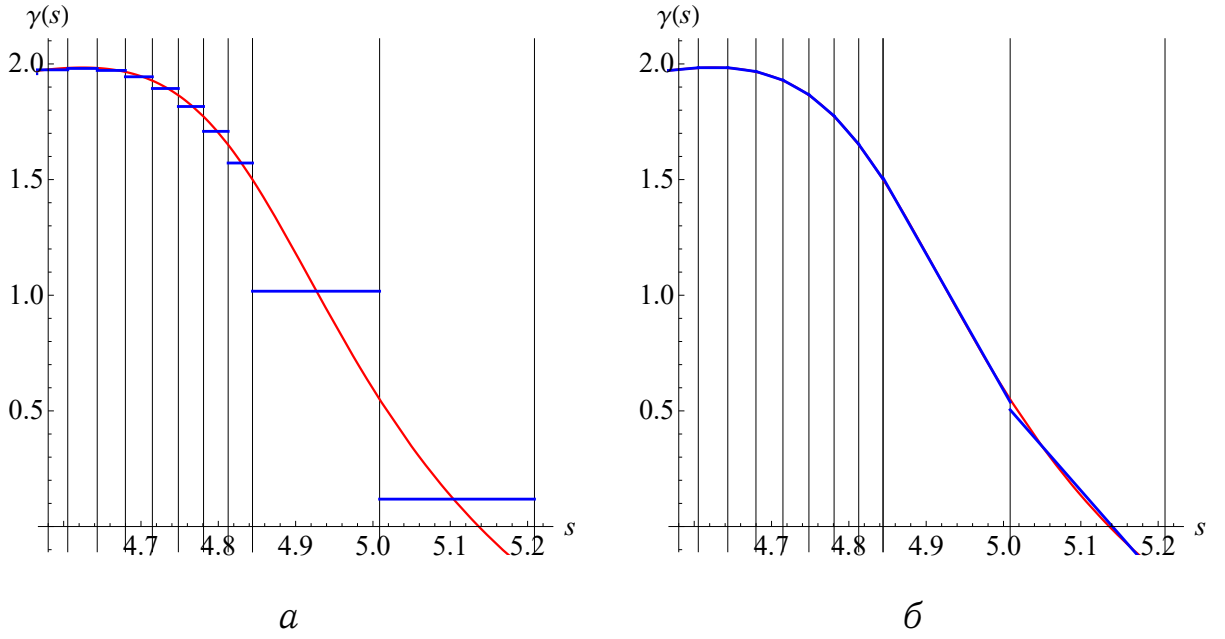


Рис. 3.12. Кусочно-постоянное (а) и кусочно-линейное (б) решения в окрестности правой вершины эллипса при полуаналитическом вычислении интегралов; вертикальные линии соответствуют концам панелей

Видно, что полученные распределения интенсивности вихревого слоя качественно хорошо согласуются с точным решением, и при этом визуальнo результаты выглядят неотличимыми от таковых, полученных с помощью численного подсчета всех интегралов по фрагментам исходной границы профиля (подраздел 3.2.1, Рис. 3.7 и Рис. 3.8).

Далее рассмотрим обсуждавшиеся ранее модельные задачи об определении интенсивности вихревого слоя и восстановлении поля скоростей вблизи границы профиля при потенциальном обтекании эллиптических профилей с соотношением полуосей  $2 : 1$  и  $10 : 1$  под углом атаки  $\beta = \frac{\pi}{6}$ .

Количественные результаты расчета погрешностей (по норме  $L_1$ ) приведены в Таблицах 10 и 11, где приняты следующие обозначения:  $\|\Delta\gamma^c\|_{L_1}$  и  $\|\Delta\gamma^l\|_{L_1}$  — погрешности вычисления интенсивности вихревого слоя с использованием кусочно-постоянной и кусочно-линейной схем соответственно,  $\|\Delta V^c\|_{L_1}$  и  $\|\Delta V^l\|_{L_1}$  — погрешности моделирования поля скоростей вблизи границы профиля, восстановленные по кусочно-постоянному и кусочно-линейному численному решению соответствен-

но, рассчитанные, как и ранее, путем интегрирования разности точного и численного решения вдоль кривой, охватывающей профиль, и отстоящей на  $1/8$  длины панели. Также в таблицах приведены апостериорные оценки порядка точности, получаемые как логарифм отношения величин ошибок при последовательных значениях  $N$ .

Таблица 10.

Погрешности  $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$  для эллиптических профилей

$N$	128	256	500	1000	2000
Эллипс с соотношением полуосей 2 : 1					
$\ \Delta\gamma^c\ _{L_1}$	0.068286	0.034140	0.017479	0.008740	0.004370
$m^c$	—	1.00	1.00	1.00	1.00
$\ \Delta\gamma^l\ _{L_1}$	0.000736	0.000184	0.000048	0.000012	0.000003
$m^l$	—	2.00	2.00	2.00	2.00
Эллипс с соотношением полуосей 10 : 1					
$\ \Delta\gamma^c\ _{L_1}$	0.082215	0.040894	0.020905	0.010449	0.005224
$m^c$	—	1.01	1.00	1.00	1.00
$\ \Delta\gamma^l\ _{L_1}$	0.01530	0.003640	0.000930	0.000232	0.000058
$m^l$	—	2.07	2.04	2.00	1.99

Таблица 11.

Погрешности  $\|\Delta\mathbf{V}\|_{L_1}$  для эллиптических профилей

$N$	128	256	500	1000	2000
Эллипс с соотношением полуосей 2 : 1					
$\ \Delta\mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.026341	0.013105	0.006617	0.003231	0.001684
$m^c$	—	1.01	1.02	1.03	0.94
$\ \Delta\mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.000323	0.000081	0.000021	0.000005	0.000001
$m^l$	—	2.00	2.01	1.99	2.00
Эллипс с соотношением полуосей 10 : 1					
$\ \Delta\mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.056181	0.024933	0.011645	0.005763	0.002938
$m^c$	—	1.17	1.14	1.01	0.97
$\ \Delta\mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.023169	0.005535	0.001413	0.000353	0.000088
$m^l$	—	2.07	2.04	2.00	2.00

Видно, что кусочно-постоянная схема с дискретизацией границы профиля криволинейными панелями дает первый порядок точности при расчете интенсивности вихревого слоя и поля скоростей. Кусочно-линейное представление численного решения с использованием криволинейных панелей позволило повысить порядок точности моделирования поля скоростей вблизи границы профиля до второго.

Отметим, что для эллиптического профиля с отношением полуосей  $2 : 1$  результаты практически неотличимы от таковых при сплайн-аппроксимации профиля. Для эллипса с соотношением осей  $10 : 1$  результаты несколько грубее, чем при сплайн-аппроксимации, что объясняется большей погрешностью при описании формы профиля.

### **Выводы по главе 3**

Показано, что в случае существенно неравномерной дискретизации границы профиля использование расчетных схем с прямолинейными панелями приводит к большой погрешности либо даже качественно неверному решению для интенсивности вихревого слоя.

Разработаны расчетные схемы, позволяющие явно учитывать криволинейность контура. Рассмотрен подход с аппроксимацией границы профиля с помощью эрмитовых сплайнов. Такая схема обеспечивает второй порядок точности как для интенсивности вихревого слоя, так и при восстановлении поля скоростей вблизи границы профиля. Однако в силу высокой вычислительной трудоемкости подобная схема неприменима на практике.

Более удобной для практического использования является разработанная схема, позволяющая учитывать криволинейность границы профиля, но не предполагающая его аппроксимации какой-либо кривой. Выражения для коэффициентов получаются разложением подынтегральных функций по формуле Тейлора по малому параметру (длине панели) и последующим интегрированием по длине дуги вдоль панелей, удерживая

несколько первых слагаемых. В результате получены приближенные аналитические формулы для вычисления всех коэффициентов систем линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих исходное граничное интегральное уравнение. Для вычисления данных коэффициентов необходимо знание лишь длин панелей, ортов касательной и нормали в центрах панелей, величины кривизны границы профиля в центрах и на концах панелей и ее производной по длине дуги.

Рассмотренные модельные задачи показали, что учет криволинейности панелей позволяет получать корректные результаты при существенно неравномерной дискретизации границы профиля; анализ точности получаемых результатов подтверждает, что разработанные алгоритмы и численные схемы обеспечивают второй порядок точности для интенсивности вихревого слоя на границе профиля и поля скоростей среды вблизи него.

Основные результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [33, 85, 86, 99, 104, 105].

## Глава 4. Программный комплекс *VM2D*

В данной главе описана общая архитектура и возможности программной платформы *VM2D* [57, 97, 98, 125], в которой реализованы вихревые методы для моделирования течений вязкой несжимаемой среды и решения сопряженных задач гидроупругости. В основу платформы положен метод вязких вихревых доменов (МВД), а также разработанные новые алгоритмы и расчетные схемы, относящиеся, главным образом, к описанию процесса генерации завихренности на границе обтекаемого профиля. В качестве базовой использована *T*-схема и описанная в главе 2 математическая модель с кусочно-постоянным распределением интенсивности свободного вихревого слоя.

Программная платформа имеет открытый исходный код, который доступен по лицензии GNU GPLv3 и размещен на платформе github по ссылке <https://www.github.com/vortexmethods/VM2D>.

### 4.1. Структура программного комплекса

Исходный код программного комплекса *VM2D* написан на языке программирования C++ и имеет модульную структуру. Программный комплекс является кроссплатформенным и может быть скомпилирован под операционные системы Windows и Linux с помощью компиляторов MSVC, GCC, Clang или Intel C++ Compiler (либо другими компиляторами, поддерживающими стандарт C++11).

Для решения систем линейных алгебраических уравнений в *VM2D* используется внешняя библиотека **Eigen**. Для ускорения вычислений используются технологии параллельного программирования OpenMP, MPI и Nvidia CUDA, которые позволяют производить вычисления на многоядерных и многопроцессорных кластерных системах, а также использовать возможности графических ускорителей.





паспортов расчетов можно использовать параметры `$angle` и `$tau`, первый из которых в соответствующих расчетах будет принимать значения 0.0, 2.0 и 4.0, а второй — значения 0.015, 0.015 и 0.010.

При решении нескольких однотипных задач, отличающихся лишь некоторыми входными параметрами (например, угол атаки или шаг по времени, как указано в примере выше), можно использовать следующую возможность, исключающую необходимость ручной подготовки однотипных файлов паспортов расчета. В файле `problems` следует записать список решаемых задач, и для каждой указать в качестве значения параметра `copyPspFile` имя файла с «универсальным» паспортом, содержащим общие данные для всех задач. Изменяемые параметры в файле универсального паспорта должны в этом случае быть заданы через формальные переменные со знаком `$`, а их конкретные индивидуальные значения должны быть перечислены в качестве параметров в скобках после имени задачи в файле `problems`. В этом случае папки с необходимыми паспортами для всех задач будут сгенерированы автоматически, что упрощает процедуру подготовки исходных данных.

Фрагмент файла с описанием перечня задач в этом случае представлен ниже:

```
problems =
{
    wing00(np=1, angle=0.0, tau = 0.015, copyPspFile="wingBase/uniPassport"),
    wing02(np=2, angle=2.0, tau = 0.015, copyPspFile="wingBase/uniPassport"),
    wing04(np=4, angle=4.0, tau = 0.010, copyPspFile="wingBase/uniPassport")
}
```

Во входных файлах используется следующий синтаксис:

- `«//»` — однострочный комментарий;
- `«/* ... */»` — многострочный комментарий;
- конец строки — то же самое, что и пробел;
- `«;»` — разделительный знак между параметрами;
- `«,»` — разделитель между параметрами внутри списка (в скобках) или разделитель между компонентами массивов или векторов;

- пробелы и знаки табуляции игнорируются;
- в именах параметров регистр не учитывается.

Приведем пример структуры файла **passport** (он же может быть использован в качестве вышеописанного «универсального паспорта») для описанного выше примера, когда пользователь производит расчеты для трех задач об обтекании крылового профиля (задачи имеют соответствующие имена) для различных углов атаки и величин шага по времени:

```

/*-----*- VM2D -*-----*\
| ##  ##  ##  ##  #####  #####  | | Version 1.4 |
| ##  ##  ##  ##  ##  ##  ##  ##  | VM2D: Vortex Method | 2018/10/16 |
| ##  ##  ##  #  ##  ##  ##  ##  | for 2D Flow Simulation *-----*\
| #####  ##  ##  ##  ##  ##  | Open Source Code |
| ##  ##  ##  #####  #####  | https://www.github.com/vortexmethods/VM2D |
| |
| Copyright (C) 2017-2018 Ilia Marchevsky, Kseniia Kuzmina, Evgeniya Ryatina|
*-----*\
| File name: ./wing00deg/passport |
| Info: Parameters of the problem to be solved |
\*-----*\

//Physical Properties
rho = 1.0;
vInf = {1.0, 0.0};
nu = 0.001;

//Time Discretization Properties
timeStart = 0;
timeStop = 10;
dt = $tau;
timeAccel = 1.0;
saveTXT = 0;
saveVTK = 10;
saveVP = 100;

//Wake Discretization Properties
eps = 0.015;
epscol = 0.010;
distFar = 20.0;
delta = 1e-5;
vortexPerPanel = 1;

//Files and parameters
airfoil = {
    wing(basePoint = {0.0, 0.0}, scale = 1.0, angle = $angle,
        panelsType = panelsRectilinear,
        boundaryCondition = boundaryConstLayerAver,
        mechanicalSystem = mechanicsRigidImmovable) };
wake = {};

```

Значения параметров, содержащихся в паспорте задачи, описаны в Таблице 12.

Таблица 12.

## Основные параметры в файле паспорта задачи

Параметр	Краткое описание
<b>Физические параметры</b>	
<code>rho</code>	плотность среды
<code>vInf</code>	скорость набегающего потока
<code>nu</code>	кинематический коэффициент вязкости среды
<b>Параметры дискретизации по времени</b>	
<code>timeStart</code>	физическое время, соответствующее старту расчета (обычно 0.0)
<code>timeStop</code>	физическое время окончания расчета
<code>dt</code>	шаг по времени
<code>timeAccel</code>	время разгона потока от нуля до заданной <code>vInf</code>
<code>saveTXT</code>	период (в шагах) сохранения вихревого следа в текстовый файл
<code>saveVTK</code>	период (в шагах) сохранения вихревого следа в файл VTK
<code>saveVP</code>	период (в шагах) вычисления скорости и давления в заданных точках и сохранение результатов в файл
<b>Параметры дискретизации для вихревого следа</b>	
<code>eps</code>	радиус вихревого элемента
<code>epscol</code>	максимальное расстояние, на котором два вихря объединяются в один (при выполнении некоторых дополнительных условий)
<code>distFar</code>	расстояние, на котором вихревые элементы удаляются из расчета
<code>delta</code>	малое расстояние, на которое сгенерированные вихревые элементы отодвигаются от поверхности профиля

Файлы с описанием геометрии профилей находятся в папке `airfoils`; они представляют собой текстовые файлы, структура которых довольно проста и понятна из примеров. После имени файла в скобках необходимо указать следующие параметры:

- `basePoint` — точка, в которую должен быть установлен центр профиля (по умолчанию (0.0, 0.0));
- `scale` — коэффициент масштабирования профиля (по умолчанию 1.0);
- `angle` — угол в градусах, на который должен быть повернут профиль (по умолчанию 0.0);

- `mechanicalSystem` — модель сопряженной задачи гидроупругости, определяющая возможное движение профилей и стратегию связывания механической подсистемы с гидродинамической (по умолчанию `mechanicsRigidImmovable`).

Для перечисленных, а также некоторых других параметров, требуемых для проведения расчета, заданы значения по умолчанию, при этом имеется несколько «уровней» задания таких умолчаний. Значения по умолчанию, имеющие наиболее низкий приоритет, заданы в исходном коде; значения по умолчанию с более высоким приоритетом могут быть заданы пользователем в файле `defaults`.

Для обеспечения ясности смысла некоторых значений параметров, они задаются при помощи словесных выражений (например, ключевое слово `mechanicsRigidImmovable` означает, что профиль является неподвижным и недеформируемым). В файле `switchers` каждому такому строковому параметру поставлены в соответствие некоторые целочисленные значения, которые использованы в коде программы.

Если необходимо произвести моделирование течения вокруг нескольких профилей, соответствующий раздел файла `passport` будет иметь следующую структуру:

```
airfoil =
{ square_160points(basePoint = {0.0, 0.0}, angle = 45.0),
  circle_200points(basePoint = {1.2, -0.2}, scale = 0.5) };
```

В данном случае моделируется обтекание двух профилей с учетом их взаимного влияния: круговой профиль, отмасштабированный в 0.5 раза, расположен за квадратным профилем, установленным под углом атаки  $45^\circ$ . Все остальные параметры принимают значения по умолчанию; положение квадратного профиля для наглядности введено явно.

Координаты точек, в которых необходимо вычислить поле скоростей и давления в области течения, должны быть предварительно записаны в файл `pointsVP`.

В случае, когда пользователю необходимо использовать вихревой след, который был получен ранее в расчетах, можно загрузить его, задав имя файла в соответствующем разделе файла паспорта. Файлы, содержащие описания вихревых следов, должны быть размещены в папке **wakes**.

#### 4.1.2. Основные классы

Документация разработчика для VM2D генерируется автоматически при помощи системы документирования исходных текстов **doxygen** [70]; ее обновление происходит автоматически с помощью сервиса **Travis-CI** после модификации исходного кода и его загрузки на **GitHub**.

Данная документация содержит полную информацию о классах, реализованных в VM2D: описание их полей и методов, для каждого метода перечислены и описаны все входные и выходные параметры. Взаимосвязи между классами и диаграммы вызовов функций представлены в графическом виде.

Ссылка на документацию присутствует на титульной странице проекта на веб-сервисе **GitHub**

<https://github.com/vortexmethods/VM2D/>

там же имеются краткие сведения о текущем состоянии проекта, инструкции по установке и компиляции с помощью различных компиляторов, необходимых для работы внешних библиотеках и т. п.

Функция **main** (входная точка C++ программы) определена в файле **VM2D.cpp**. Она имеет довольно простую структуру: в ней создается экземпляр класса **Queue**, загружается список решаемых задач и запускается «вычислительный конвейер», который продолжает работать до тех пор, пока не будут решены все задачи, описанные в файле **problems**.

Все доступные процессоры, связанные по **MPI**, делятся на подгруппы в соответствии с тем, сколько процессоров требуется для решения

каждой отдельной задачи. В случае, когда количество доступных процессоров меньше, чем требуется для одновременной обработки всего списка задач, класс `Queue` работает как очередь по принципу FIFO («first in — first out», или «первый зашел — первый вышел»). Все группы процессоров работают в асинхронном режиме; глобальная синхронизация производится только каждые  $\Delta T$  секунд, когда обновляется состояние очереди, задачи, в которых расчет закончен, заменяются новыми и т. д. Необходимые общие константы и функции определены в файлах `defs.h` и `defs.cpp`.

Базовые и вспомогательные классы, определенные в `VM2D`, перечислены в Таблицах 13 и 14.

Таблица 13.

Базовые классы, определенные в `VM2D`

Имя класса	Краткое описание
<code>Queue</code>	список решаемых задач, организация их решения в параллельном режиме
<code>Task</code>	состояние задачи в <code>Queue</code> и ее описание (паспорт)
<code>Passport</code>	полное описание задачи
<code>World2D</code>	все свойства и текущее состояние конкретной задачи; экземпляр класса является основным объектом, реализующим численное моделирование обтекания профилей
<code>Airfoil</code>	<i>абстрактный класс</i> — описание геометрии профиля
<code>Sheet</code>	описание присоединенных слоев вихрей и источников и свободного вихревого слоя на границе профиля
<code>VirtualWake</code>	вихревые элементы, моделирующие вихревой слой на границе профиля при его передаче в вихревую пелену
<code>Wake</code>	описание вихревого следа и реализация работы с ним
<code>Boundary</code>	<i>абстрактный класс</i> — расчетная схема для решения граничного интегрального уравнения для интенсивности свободного вихревого слоя
<code>Velocity</code>	<i>абстрактный класс</i> — способ расчета скоростей
<code>Mechanics</code>	<i>абстрактный класс</i> — модель сопряженной задачи гидроупругости, определяющая движение профилей и стратегию связывания механической подсистемы с гидродинамической
<code>MeasureVP</code>	вычисление скорости и давления в заданных точках

Вспомогательные классы, определенные в VM2D

Имя класса	Краткое описание
<code>numvector</code>	<i>шаблонный класс</i> определяет массив заданной длины, состоящий из переменных заданного типа; определены все базовые арифметические операции над геометрическими векторами
<code>Point2D</code>	наследует <code>numvector&lt;double, 2&gt;</code> и имеет MPI-описатель
<code>Vortex2D</code>	свойства вихревого элемента (его положение и циркуляция), включая необходимый MPI-описатель
<code>WakeDataBase</code>	база данных вихревых элементов, родительский класс для <code>Wake</code> и <code>VirtualWake</code>
<code>Gpu</code>	обеспечивает возможность выполнения вычислений на GPU с использованием технологии Nvidia CUDA
<code>Parallel</code>	свойства MPI-коммуникатора конкретной задачи
<code>Preprocessor</code>	инструменты препроцессинга входных файлов: исключение комментариев, замена концов строк на пробелы, исключение повторяющихся пробелов и знаков табуляции; результат используется в качестве входного параметра для <code>StreamParser</code>
<code>StreamParser</code>	инструмент обработки входного файла после препроцессинга; используется для чтения всех текстовых файлов, включая <code>problems</code> , <code>defaults</code> , <code>passport</code> и др.
<code>LogStream</code>	инструмент вывода сообщений о работе вычислительного конвейера в целом и состоянии каждой решаемой задачи
<code>Times</code>	содержит структуры для сбора временной статистики по операциям алгоритма и инструменты для ее вывода в файл <code>timestat</code>

### 4.1.3. Реализации абстрактных классов

В программном комплексе VM2D определены четыре абстрактных класса: `Airfoil`, `Boundary`, `Velocity`, `Mechanics`, реализации которых соответствуют различным модификациям вихревых методов.

Класс `Airfoil` определяет способ задания геометрии обтекаемого профиля. На данный момент существует лишь одна его реализация `AirfoilRect`, которая соответствует расчетным схемам с прямолинейными панелями. В будущем предполагается также реализовать класс `AirfoilCurv` для расчетных схем, позволяющих явным образом учитывать кривизну границы профиля.



Класс **Boundary** определяет способ удовлетворения граничного условия на обтекаемом профиле. На данный момент существует лишь одна его реализация **BoundaryConstLayerAver**, которая соответствует  $T$ -схеме и подходу Галеркина с кусочно-постоянными базисными и проекционными функциями. Предполагается, что будут созданы и другие реализации, соответствующие расчетным схемам с кусочно-линейными базисными и проекционными функциями и экономичным схемам.

Класс **Velocity** определяет способ вычисления скоростей вихревых элементов. На данный момент реализован класс **VelocityBiotSavart**, который предполагает прямое вычисление скоростей вихревых элементов по закону Био — Савара. В будущем предполагается создание реализаций, использующих приближенные быстрые методы, основанные на мультипольном разложении [63, 24] и быстром преобразовании Фурье [108]. Оценки трудоемкости соответствующих алгоритмов и примеры решения модельных задач приведены в [32, 34, 88, 92, 119].

В классе **Mechanics** задается модель сопряженной задачи гидроупругости, определяющая возможное движение профилей и стратегию связывания механической подсистемы с гидродинамической. Список реализаций данного класса приведен в Таблице 15.

Таблица 15.

Реализации абстрактного класса **Mechanics**

Имена классов	Краткое описание
<b>RigidImmovable</b>	обтекание жесткого неподвижного профиля
<b>RigidGivenLaw</b>	моделирование течения вокруг жесткого профиля, движущегося по заданному закону
<b>RigidOscillPart</b>	моделирование течения вокруг жесткого профиля, закрепленного линейными вязко-упругими связями; для сопряжения механической и гидродинамической подсистем используется схема расщепления
<b>RigidOscillMon</b>	моделирование течения вокруг жесткого профиля, закрепленного линейными вязко-упругими связями; для сопряжения подсистем используется монолитный подход
<b>RigidRotateMon</b>	моделирование течения вокруг жесткого вращающегося профиля; для сопряжения подсистем используется монолитный подход

#### 4.1.4. Компиляция и исполнение

Исходный код программы должен быть загружен или клонирован из публичного GitHub-репозитория

`https://github.com/vortexmethods/VM2D.git`

В папке с загруженным репозиторием необходимо создать подпапку `build`, из которой должна быть вызвана команда «`cmake`» (с необходимыми параметрами `CMake`). Предварительно в дополнение к компилятору с языка C++, поддерживающему стандарт C++11 (MSVS, GCC, Clang, Intel C++ Compiler), в системе должны быть установлены и сконфигурированы реализация MPI [106], библиотека `Eigen` [73] и, если предполагается расчет на графических ускорителях, средства разработки CUDA SDK [110].

После того, как будут завершены описанные подготовительные процедуры, код `VM2D` может быть скомпилирован. Для запуска расчета необходимо вызвать исполняемый файл из папки с файлом `problems`, содержащим список решаемых задач.

Для запуска программы в параллельном режиме следует использовать команду `mpirun/mpirexec` с необходимым набором параметров.

#### 4.1.5. Результаты моделирования

Результаты моделирования сохраняются в файлы в папку с именем, совпадающим с именем решаемой задачи. Выходные файлы, содержащие описание вихревого следа (на шагах, номера которых кратны `saveTXT` и `saveVTK`), сохраняются в подпапку `snapshots` в текстовом и/или VTK-формате. Файлы, содержащие значения скоростей и давления, вычисленные в заданных точках, на шагах, номера которых кратны `saveVP`, сохраняются в подпапку `velocityPressure`.

Гидродинамические нагрузки, действующие на тело — сила лобового сопротивления  $F_{xa}$ , подъемная сила  $F_{ya}$  и гидродинамический момент  $M_z$

— сохраняются в текстовый файл `forces-airfoil-n` (в конце имени файла вместо буквы «n» ставится номер профиля) на каждом шаге расчета; положения и скорости профилей, если они подвижны, на каждом шаге расчета сохраняются в файлы `position-airfoil-n`.

Журнал событий («лог») программы отображается на экране, при необходимости его вывод может быть перенаправлен в файл оператором `>`.

## 4.2. Основные вычислительные блоки алгоритма

Алгоритм вихревых методов, реализованный в VM2D, содержит пять основных вычислительных блоков. В данном разделе приведено их краткое описание, выделены основные операции и сделаны оценки их вычислительной сложности.

**Блок 1.** *Генерация завихренности на границе профиля.* Генерация завихренности на границе профиля происходит путем удовлетворения условия прилипания на границе профиля. В главах 2 и 3 были рассмотрены различные расчетные схемы для решения граничного интегрального уравнения, которое выражает граничное условие. В VM2D в качестве базовой реализована схема с прямолинейными панелями и кусочно-постоянным распределением завихренности, описанная в разделе 2.1.2, которой соответствует система линейных уравнений (2.4).

Для оценки количества операций здесь и далее будем использовать следующие обозначения:

- $N$  — суммарное количество панелей на всех обтекаемых профилях;
- $n$  — количество вихревых элементов в области течения.

Тогда имеем следующие оценки вычислительной трудоемкости операций рассматриваемого блока:

- вычисление коэффициентов матрицы:  $Q_1 = 83N^2$ ,
- вычисление коэффициентов правой части:  $Q_2 = 30Nn + 85N^2$ ,
- решение системы  $Q_3 = N^3/3$ .

В наиболее общем случае, когда производится моделирование течения вокруг  $m$  деформируемых профилей, необходимо пересчитывать все коэффициенты системы и осуществлять ее решение на каждом шаге расчета. Матрица системы в этом случае имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} B^{11} & B^{12} & \dots & B^{1m} \\ B^{21} & B^{22} & \dots & B^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{m1} & B^{m2} & \dots & B^{mm} \end{pmatrix},$$

где диагональные блоки  $B^{kk}$  выражают влияние друг на друга панелей  $k$ -го профиля, а внедиагональные блоки  $B^{kp}$  ( $k \neq p$ ) выражают влияние вихревого слоя, генерируемого на  $p$ -м профиле, на панели  $k$ -го профиля.

Коэффициенты данных блоков зависят лишь от взаимного расположения панелей, поэтому в случае моделирования течения вокруг недеформируемых профилей, неподвижных относительно друг друга, матрица системы остается постоянной, что позволяет вычислить коэффициенты и обратить ее лишь один раз на первом шаге расчета, а решение системы на всех шагах осуществлять путем умножения обратной матрицы на правую часть. В случае недеформируемых профилей, которые перемещаются относительно друг друга, диагональные блоки  $B^{kk}$  остаются постоянными, а все остальные должны быть пересчитаны на каждом шаге расчета.

**Блок 2. Вычисление скоростей вихревых элементов.** В соответствии с методом вязких вихревых доменов [1, 17, 22, 23] скорости вихревых элементов в области течения состоят из двух компонент: конвективных и диффузионных (обусловленных вязкостью). При расчете конвективных скоростей в соответствии с законом Био — Савара необходимо учитывать взаимное влияние всех вихревых элементов друг на друга. Расчет диффузионных скоростей также требует учета взаимного влияния всех вихревых элементов.

Данные операции имеют следующие вычислительные сложности, если осуществлять прямой учет влияния всех вихревых элементов друг на друга, не используя приближенные быстрые методы:

- вычисление конвективных скоростей:  $Q_4 = 5n^2 + 8Nn$ ,
- вычисление диффузионных скоростей:  $Q_5 = 9n^2 + 13Nn$ .

Отметим, что вычислительная сложность расчета диффузионных скоростей может быть снижена с учетом того, что влияние вихревых элементов на величину диффузионной скорости экспоненциально уменьшается с увеличением расстояния, поэтому на практике учитывается взаимное влияние только тех элементов, которые находятся не слишком далеко друг от друга.

Также стоит отметить, что границы профилей также оказывают влияние на диффузионные скорости вихревых элементов в вихревом следе. Это влияние необходимо учитывать только для тех вихрей, которые расположены достаточно близко к границе профиля. Вычислительная сложность данной процедуры порядка  $N^2$ .

**Блок 3. Расчет гидродинамических нагрузок, скоростей и давления среды.** В данном блоке производится расчет гидродинамических нагрузок (сил и момента), действующих на профили. Для этого используются интегральные формулы, полученные Г.Я. Дынниковой и адаптированные для различных типов задач, решаемых вихревыми методами [1, 17, 71, 72]. Вычислительная сложность данного блока низка, поэтому ею можно пренебречь.

Сюда же относится вычисление значений скорости и давления в заданных точках среды, если это требуется в расчете. Трудоемкость данной операции пропорциональна количеству расчетных точек.

**Блок 4. Эволюция завихренности.** В данном блоке происходит перемещение вихревых элементов вдоль поля скоростей. Для интегрирования уравнений движения используется явный метод Эйлера, поэтому вычислительная сложность данного блока также является довольно низкой и ее можно не учитывать при оценке сложности всего алгоритма.

**Блок 5.** Блок *реструктуризации вихревого следа* включает в себя три основные операции.

- Контроль проникновения вихревых элементов внутрь профиля; его сложность зависит от реализации; можно принять, что  $Q_6 \sim N^2$ .
- Объединение близкорасположенных вихрей друг с другом; вычислительная сложность данной операции также зависит от выбранного алгоритма, вычислительная сложность  $Q_7 \sim n^2$ , при этом коэффициент пропорциональности довольно мал.
- Исключение из расчета вихревых элементов, находящихся далеко от обтекаемых профилей; его сложность пренебрежимо мала.

### 4.3. Распараллеливание вычислений в VM2D

В VM2D реализованы параллельные алгоритмы с использованием технологий MPI, OpenMP и Nvidia CUDA, что позволяет производить расчеты на вычислительных системах различных архитектур: как на CPU (с общей и распределенной памятью), так и на GPU. Для достижения наибольшего ускорения алгоритма, произведено распараллеливание всех описанных выше основных операций.

#### 4.3.1. Технологии MPI и OpenMP

Распараллеливание для систем с распределенной памятью выполнено при помощи технологии MPI, при этом в рамках одного вычислительного узла распараллеливание вычислений осуществляется с использованием технологии OpenMP. Для оценки эффективности распараллеливания VM2D проведены расчеты для 4 тестовых задач расчета обтекания неподвижного профиля со следующими параметрами:

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) $N = 1000, n = 80\,000$ ;  | 3) $N = 4000, n = 320\,000$ ; |
| 2) $N = 2000, n = 160\,000$ ; | 4) $N = 6000, n = 480\,000$ . |

Тестовые расчеты проводились на двух кластерных системах:

1. Блейд-сервер BL2x220c G7 в Институте системного программирования им. В.П. Иванникова РАН. Характеристики: сеть Infiniband QDR, каждый узел имеет по 2 процессора Intel Xeon X5670, содержащих по 6 ядер, тактовая частота процессоров 2.93 ГГц.
2. Кластер НРС1 в Национальном исследовательском центре «Курчатовский институт». Характеристики: сеть Infiniband QDR, каждый узел имеет по 2 процессора Intel Xeon E5345, содержащих по 4 ядра, тактовая частота процессоров 2.33 ГГц.

На Рис. 4.1 показаны ускорения вычислений при решении 4 рассматриваемых задач на системе BL2x220c G7 с использованием различного количества процессоров  $p$ . Черной линией изображен график оценки ускорения по закону Амдала [12], для алгоритма с 0.1 % последовательного кода.

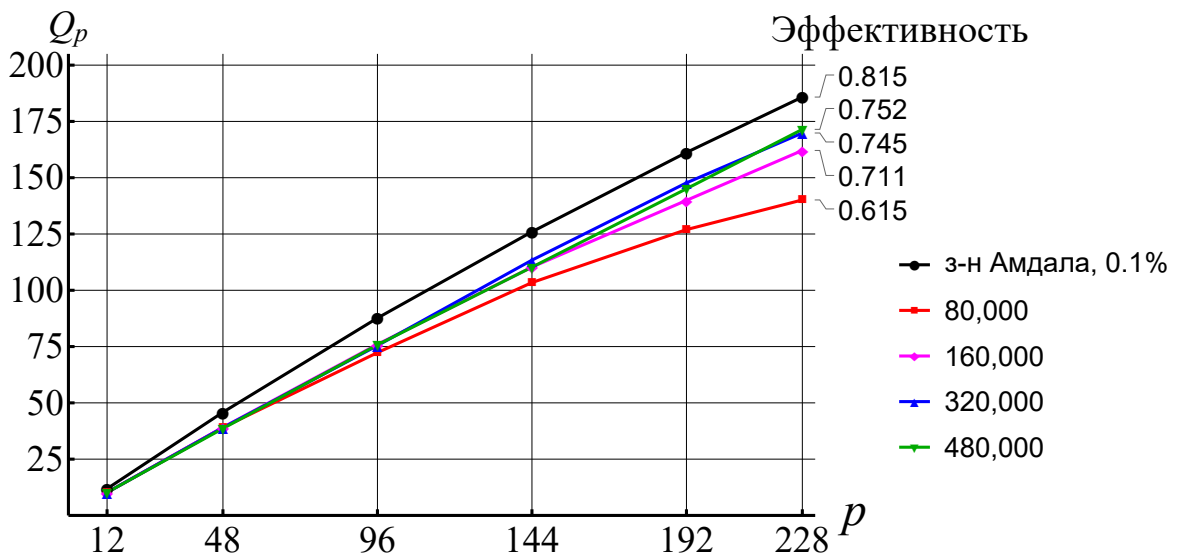


Рис. 4.1. Ускорение вычислений на BL 2x220c G7 для задач с различными параметрами

С увеличением количества вихревых элементов эффективность распараллеливания ожидаемо растет. Для рассматриваемых задач достигается абсолютная эффективность распараллеливания 0.75...0.79 на 8 узлах кластера (96 ядер) и 0.62...0.75 на 19 узлах (228 ядер). Если «нор-

мировать» полученные ускорения на величину ускорения кода с 0.1 % последовательных операций, эффективность ускорения будет составлять 0.82...0.92 на 8 узлах и 0.75...0.88 на 19 узлах.

На Рис. 4.2 показан аналогичный график для кластера НРС1 Национального исследовательского центра «Курчатовский институт». Для рассматриваемых задач достигаются эффективности распараллеливания 0.68...0.76 на 32 узлах (256 ядер) и 0.30...0.41 на 160 узлах (1280 ядер). Если, как и ранее, «нормировать» полученные ускорения алгоритма к ускорению кода с 0.1 % последовательных операций, то эффективность имеет следующие значения: 0.84...0.94 на 32 узлах и 0.68...0.93 на 160 узлах.

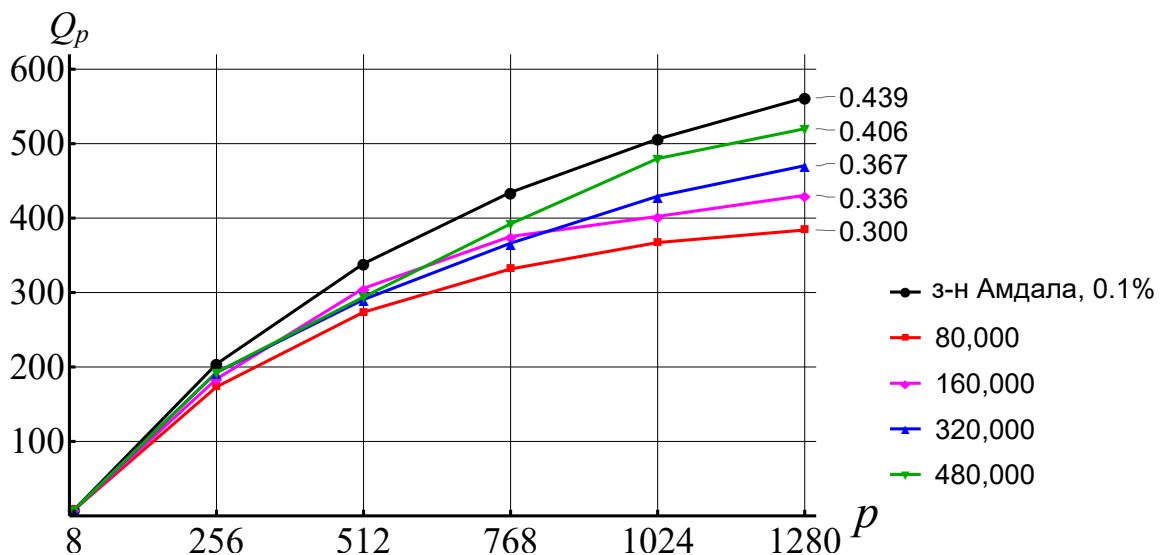


Рис. 4.2. Ускорение вычислений на кластере НРС1 для задач с различными параметрами

Совместное использование OpenMP и MPI на кластерных системах, каждой узел которой — многоядерная ЭВМ с общей памятью, позволяет существенно сократить объем пересылаемых по MPI данных (по сравнению с «чистым» MPI-распараллеливанием), поскольку в реализованном алгоритме вихревых методов производится пересылка всего вихревого следа на каждом шаге расчета всем узлам кластера.



### 4.3.2. Технология Nvidia CUDA

Произведена адаптация основных операций алгоритма вихревых методов для проведения расчетов с использованием GPU. Тестовые расчеты производились с использованием двух графических ускорителей:

	GeForce GTX 970	Tesla K40c
Число мультипроцессоров/ядер	13/1664	15/2880
Объем памяти	3.5 Gb	12 Gb

В Таблицах 16 и 17 приведено сравнение производительности расчетов в VM2D на GPU и CPU. Видно, что использование одного графического ускорителя GeForce GTX 970 в данном случае может заменять десятки и даже сотни ядер CPU. Производительность графического ускорителя Tesla K40c превосходит производительность 1000 ядер CPU вычислительной системы HPC1, работающих по MPI/OpenMP.

Таблица 16.

Ускорение при расчете на кластере BL2x220c G7 и GPU

Число ядер	1	12	48	G970	96	144	192	228	K40
$N = 80\,000$	1	10.2	39.1	<b>58.7</b>	72.3	103.4	127.0	140.1	<b>158.9</b>
$N = 480\,000$	1	10.2	38.6	<b>66.1</b>	75.8	110.3	145.1	171.5	<b>162.6</b>

Таблица 17.

Ускорение при расчете на кластере HPC1 и GPU

Число ядер	1	8	G970	256	512	768	1024	K40	1280
$N = 80\,000$	1	7.2	<b>127.9</b>	173.3	273.7	331.7	367.2	<b>467.6</b>	468.6
$N = 480\,000$	1	7.3	<b>190.8</b>	192.8	294.0	392.3	463.0	<b>469.0</b>	565.9

Также в VM2D предусмотрена возможность проведения расчетов с использованием нескольких графических ускорителей, расположенных на различных узлах вычислительного кластера. Тестовые расчеты показывают, что при использовании двух вихрекарт можно достичь ускорения в 1.6 раза, а при использовании трех видеокарт — в 2.2 раза (по сравнению с использованием одной видеокарты).

#### 4.4. Стратегии связывания при решении сопряженных задач

В программном комплексе VM2D реализована возможность решения задач в сопряженной гидроупругой постановке. Для этого реализован учет взаимовлияния двух процессов — динамики профиля под действием нестационарных гидродинамических нагрузок и движения среды. Возможно использование двух различных стратегий связывания при решении таких задач: монолитного подхода и метода расщепления. В VM2D реализованы оба данных подхода.

**Схема расщепления.** Данный подход предполагает отдельное решение двух подзадач: на каждом шаге по времени сначала решается граничное интегральное уравнение относительно интенсивности вихревого слоя и вычисляются гидродинамические нагрузки, действующие на профиль, а затем происходит перемещение профиля под действием вычисленных нагрузок. Такой подход является более простым в реализации, к тому же его удобство заключается в возможности независимого моделирования динамики гидродинамической и механической подсистем. Это позволяет модифицировать каждый из данных блоков по отдельности или, при необходимости, использовать сторонние программы-решатели, имеющие открытый исходный код или интерфейс взаимодействия. Однако область применимости данного подхода ограничена рассмотрением профилей, имеющих плотность, большую, чем плотность среды. В противном случае алгоритм теряет устойчивость, причем уменьшение шага по времени не позволяет его стабилизировать.

**Монолитный подход.** Данный подход предполагает одновременное решение двух задач — механики конструкции и гидродинамики, т. е. на каждом шаге по времени происходит одновременное решение граничного интегрального уравнения вместе с уравнением, задающим динамику конструкции [1, 17, 22, 71, 72]. К системе линейных уравнений относительно интенсивности генерируемой на профиле завихренности добавля-

ются 1, 2 или 3 (по числу степеней свободы недеформируемого профиля) уравнения; гидродинамические нагрузки при этом выражаются линейно через неизвестные линейные и угловую скорости движения профиля и интенсивность генерируемой завихренности.

Метод обладает высокой точностью и устойчивостью, однако более сложен в реализации и в данном случае исключается возможность разделения алгоритма расчета на отдельные модули. В VM2D данный подход реализован для профиля с одной поступательной степенью свободы, закрепленного посредством линейной упруго-вязкой связи типа Кельвина — Фойгта, а также для профиля типа вертушки, который имеет возможность вращаться вокруг неподвижной оси и нагружен внешним моментом.

#### 4.5. Пример. Ветровой резонанс кругового цилиндра

Рассмотрим пример моделирования обтекания кругового профиля, который может совершать колебания поперек потока. Исследование колебаний кругового цилиндра при обтекании его потоком вязкой несжимаемой жидкости является модельной задачей для многих инженерных приложений, таких как расчет деформаций от ветровой нагрузки высотных труб и башен, участков нефте- и газопроводов над поверхностью рек, режимов колебаний трубок теплообменных аппаратов энергетической установок и т.п. Таким образом, эта задача является одной из важных модельных задач гидроупругости. Особый интерес представляет исследование динамики профиля вблизи ветрового резонанса, когда частота собственных колебаний цилиндра близка к частоте схода вихрей и возбуждаются его колебания с большой амплитудой.

В качестве механической подсистемы рассмотрим модель Кельвина — Фойгта, которая состоит из упругой пружины жесткостью  $k$  и демпфера вязкостью  $b$ . Будем считать, что обтекаемый профиль массой  $m$  имеет одну степень свободы: он может совершать колебания поперек набегающего потока, то есть вдоль оси  $y$  (Рис. 4.3).

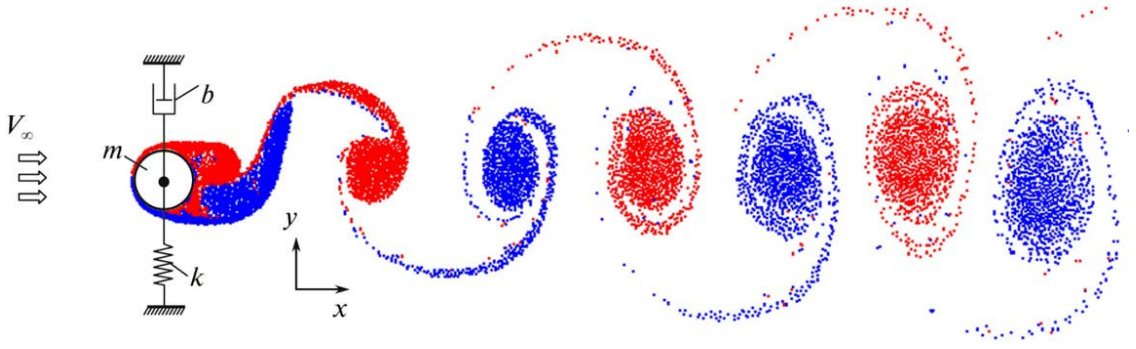


Рис. 4.3. Колебания кругового профиля

Колебания профиля под действием реакций связей и гидродинамических сил со стороны жидкости описываются уравнением

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_{ya}, \quad (4.1)$$

где  $y$  — отклонение профиля от положения равновесия,  $F_{ya}$  — подъемная сила, действующая на профиль со стороны жидкости.

Задача решается описанным выше методом расщепления — данный метод может быть применен, поскольку рассматривается тяжелый профиль. На первом подшаге при решении задачи гидродинамики происходит вычисление гидродинамических сил, действующих на профиль, движущийся с известной с прошлого шага скоростью. Далее, когда вычислена вертикальная составляющая гидродинамической силы  $F_y$ , переходим к численному решению уравнения (4.1).

Будем считать, что в начальный момент времени  $t = t_0$  профиль находится в точке с нулевой координатой по  $y$  и имеет нулевую скорость. Таким образом, для уравнения (4.1) справедливы начальные условия

$$y(t_0) = 0, \quad \dot{y}(t_0) = 0. \quad (4.2)$$

Для численного решения уравнения (4.1) с начальными данными (4.2), использован четырехстадийный метод Рунге — Кутты четвертого порядка точности [55].

Безразмерные параметры были выбраны следующим образом: скорость набегающего потока  $\mathbf{V}_\infty = (3, 0)^T$ , плотность среды  $\rho_f = 1$ , кинематическая вязкость  $\nu = 0.1$ .

матический коэффициент вязкости  $\nu = 0.02$ . Профиль имеет следующие безразмерные характеристики: диаметр  $D = 1$ , масса  $m = 39.15$ , коэффициент демпфирования  $b = 0.731$ ; жесткость пружины  $k$  варьировалась для регулирования частоты собственных колебаний системы. Таким образом, для рассмотренной задачи число Рейнольдса составляло

$$\text{Re} = \frac{V_{\infty} \cdot D}{\nu} = 150,$$

а отношение плотности тела к плотности жидкости составляло  $\rho_b/\rho_f \approx 50$ .

В расчете профиль аппроксимировался при помощи  $N = 400$  прямолинейных панелей, шаг по времени составлял  $dt = 0.005$ .

При выбранном значении числа Рейнольдса было произведено моделирование обтекания неподвижного профиля; число Струхала  $\text{Sh}$ , рассчитанное по частоте пульсаций подъемной силы, составляет  $\text{Sh} \approx 0.178$ , что хорошо согласуется с экспериментальными данными [117].

Число Струхала  $\text{Sh}_{\omega}$ , вычисленное по собственной частоте колебаний профиля  $\omega \approx \sqrt{k/m}$  (зависимостью от коэффициента демпфирования  $b$  в данном случае можно пренебречь), рассчитывается по формуле

$$\text{Sh}_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{D}{V_{\infty}},$$

тогда жесткость связи, обеспечивающая заданное значение  $\text{Sh}_{\omega}$ , будет вычисляться по формуле

$$k = 4\pi^2 m \text{Sh}_{\omega}^2 \frac{V_{\infty}^2}{D}.$$

Варьируя величину  $\text{Sh}_{\omega}$  в интервале  $\text{Sh}_{\omega} = 0.154 \dots 0.224$  (т. е. в окрестности значения  $\text{Sh}$ ) с шагом 0.002, получаем соответствующий набор значений коэффициента жесткости связи и будем рассматривать серию однотипных задач моделирования колебаний цилиндра, различающихся лишь величиной параметра  $k$ .

Расчеты показывают, что характер колебаний профиля сильно зависит от режима. Когда частота собственных колебаний системы далека от частоты схода вихрей ( $\text{Sh}_{\omega} = 0.156$ , Рис. 4.4), наблюдается быстрое

затухание колебаний, в установившемся режиме амплитуда составляет около 2.5 % диаметра цилиндра.

При  $Sh_\omega = 0.198$  (Рис. 4.5) амплитуда колебаний резко возрастает в течение переходного режима и установившиеся колебания имеют амплитуду, приблизительно равную половине диаметра профиля, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [78].

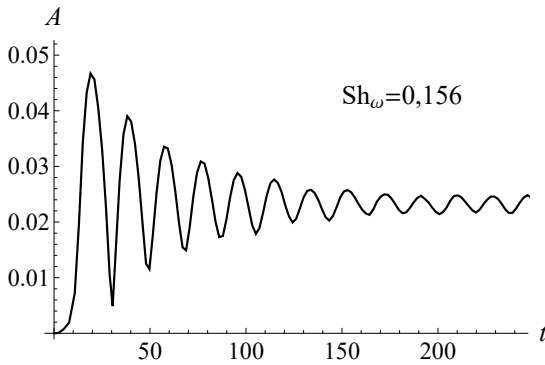


Рис. 4.4. Амплитуда при  $Sh_\omega = 0.156$

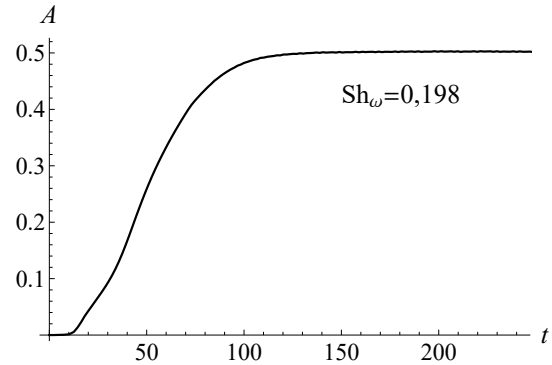


Рис. 4.5. Амплитуда при  $Sh_\omega = 0.198$

График зависимости средней амплитуды колебаний профиля от числа Струхала  $Sh_\omega$  приведен на Рис. 4.6.

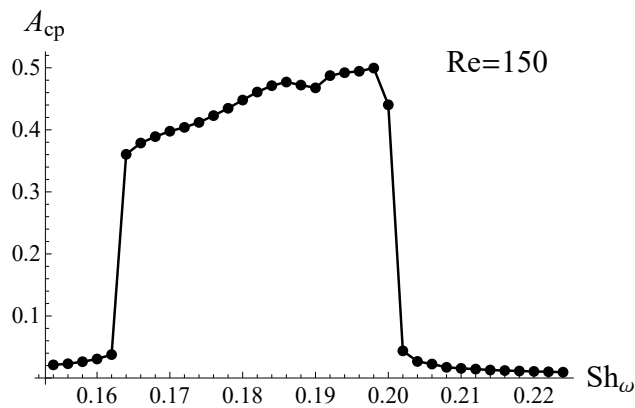


Рис. 4.6. Зависимость средней амплитуды  $A_{cp}$  от  $Sh_\omega$

Видно, что при значениях  $Sh_\omega = 0.166 \dots 0.202$  средняя амплитуда колебаний  $A_{cp}$  резко возрастает. Полученные результаты соответствуют известному в литературе явлению захвата частоты, при котором происходит синхронизация частоты схода вихрей  $Sh$  и частоты собственных колебаний механической системы  $Sh_\omega$ . Обзор исследований данного вопроса можно найти в [128].

## Выводы по главе 4

Разработана программная платформа VM2D с открытым исходным кодом, реализующая вихревые методы для моделирования обтекания профилей потоком вязкой несжимаемой среды и решения сопряженных задач гидроупругости. Код VM2D имеет модульную структуру, что позволяет легко расширять ее функционал и реализовывать новые алгоритмы.

Описана структура программной платформы, особенности ее компиляции и запуска, а также форматы входных файлов. Перечислены основные вычислительные блоки алгоритма VM2D и сделана оценка их вычислительной трудоемкости. В VM2D реализованы параллельные алгоритмы для выполнения основных операций с использованием технологий OpenMP, MPI и Nvidia CUDA. Это позволяет проводить расчеты с использованием возможностей современных многопроцессорных ЭВМ различных архитектур. Результаты решения модельных задач показали высокую эффективность распараллеливания и перспективность использования для расчетов графических ускорителей (GPU).

Результаты моделирования ветрового резонанса кругового цилиндра хорошо согласуется с известными экспериментальными данными.

Основные результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [16, 32, 34, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 119].

## ***Основные выводы и заключение***

В диссертационной работе рассмотрены вопросы развития вихревых методов вычислительной гидродинамики применительно к решению задач моделирования обтекания профиля потоком вязкой несжимаемой среды. Исследованы вопросы повышения точности расчета при различных способах представления интенсивности вихревого слоя на границе профиля и учета кривизны этой границы, и разработана программная платформа для моделирования двумерных течений с использованием вихревых методов. В ходе проведенных исследований получены следующие основные результаты.

1. С применением подхода Галеркина построена система алгоритмов и расчетных схем для моделирования обтекания профиля в вихревых методах вычислительной гидродинамики, основанных на кусочно-постоянном и кусочно-линейном представлении интенсивности вихревого слоя, в том числе экономичные схемы.
2. Получены точные аналитические выражения для коэффициентов результирующих линейных систем для случая аппроксимации границы профиля прямолинейными панелями.
3. Разработаны алгоритмы вихревых методов, позволяющие учесть криволинейность панелей и обеспечить второй порядок точности моделирования поля скоростей вблизи обтекаемого профиля.
4. Создана программная платформа с открытым исходным кодом для моделирования двумерных течений и решения широкого класса задач вихревыми методами с использованием технологий параллельных вычислений OpenMP, MPI, Nvidia CUDA.

Таким образом, все поставленные в диссертации задачи решены и цель исследования достигнута.



Перспективным направлением дальнейших исследований является обобщение разработанных в настоящей диссертации алгоритмов и расчетных схем для численного решения граничного интегрального уравнения относительно интенсивности вихревого слоя, возникающего в вихревых методах при моделировании двумерных течений, на случай пространственного обтекания тел потоком несжимаемой среды. Такое направление исследований актуально при аэрогидробаллистическом проектировании летательных аппаратов, поскольку использование современных модификаций вихревых методов для расчета обтекания дает возможность при сравнительно низких затратах вычислительных ресурсов определять с достаточной для практических целей точностью параметры обтекания и величины нестационарных аэрогидродинамических нагрузок, действующих на элементы конструкции летательных аппаратов, в том числе с учетом их упругой динамики.

Разработанная в настоящей диссертации программная платформа VM2D позволяет производить ее модификацию, как в направлении реализации новых алгоритмов и методов расчета, в том числе изложенных в диссертации, использования возможностей новых аппаратных средств, так и путем расширения ее функционала применительно к рассмотрению новых постановок задач, более сложных механических подсистем и т. п.

Общая архитектура платформы VM2D отвечает всем предъявлявшимся к ней на этапе разработки требованиям (открытый исходный код, кроссплатформенность, модульная структура, возможность использования многопроцессорных ЭВМ различных архитектур, эффективная реализация параллельных алгоритмов), поэтому она может быть положена в основу программного комплекса для моделирования пространственных течений вихревыми методами.

### ***Список литературы***

1. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.
2. Антонов А.С. Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP. М.: Издательство МГУ, 2012. 344 с.
3. Апарин А.А. Быстрые матричные вычисления в методе дискретных вихрей: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2010. 124 с.
4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применения в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
5. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
6. Белоцерковский С.М., Одновол Л.А., Сафин Ю.З. Решетчатые крылья. М.: Машиностроение, 1985. 320 с.
7. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
8. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
9. Быховский Э.Б., Смирнов Н.В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа // Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости: сборник работ. Труды МИАН СССР. Вып. 59. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 5–36.
10. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях. М.: Янус-К, 2001. 507 с.
11. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.

12. Гергель В.П. Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. 544 с.
13. Гирча А.И. Реализация вихревых методов и алгоритмов численного моделирования процессов нестационарной гидродинамики на основе эффективного комплекса программ: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2009. 172 с.
14. Головкин М.А., Головкин В.А., Калявкин В.М. Вопросы вихревой гидромеханики. М.: Физматлит, 2009. 264 с.
15. Григоренко Д.А. Комплекс программ для реализации семейства вихревых методов и его применение: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2008. 149 с.
16. Гречкин-Погребняков С.Р., Кузьмина К.С., Марчевский И.К. О реализации вихревых методов моделирования двумерных течений несжимаемой среды с использованием технологии CUDA // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2015. Т. 16. № 1. С. 165–176.
17. Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Моделирование обтекания колеблющегося профиля методом вязких вихревых доменов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 1. С. 3–14.
18. Дергачев С.А. Математическое моделирование гидродинамического нагружения капсулы летательного аппарата методом вихревых петель: дис. . . . канд. техн. наук. М., 2018. 173 с.
19. Дынников Я.А. Бессеточная технология численного моделирования взаимодействий вязкой жидкости и систем профилей с кинематическими и упругими связями: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2016. 101 с.
20. Дынников Я.А., Дынникова Г.Я. О вычислительной устойчивости и схемной вязкости в некоторых бессеточных вихревых методах решения уравнений Навье — Стокса и теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 10. С. 1905–1917.

21. Дынникова Г.Я. Аналог интегралов Бернулли и Коши — Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 1. С. 31–41.
22. Дынникова Г.Я. Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. М., 2011. 269 с.
23. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С. 11–19.
24. Дынникова Г.Я. Использование быстрого метода решения «задачи  $N$  тел» при вихревом моделировании течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 8. С. 1458–1465.
25. Ермаков А.В. Определение аэроупругих колебаний летательного аппарата, обусловленных вихреобразованием от порыва ветра на стартовой позиции: дис. . . . канд. техн. наук. М., 2017. 165 с.
26. Жуковский Н.Е. Вихревая теория гребного винта. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 245 с.
27. Жуковский Н.Е. О присоединенных вихрях // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания. 1906. Т. 13. Вып. 2. 14 с.
28. Иванова О.А. Математическое моделирование аэроупругих колебаний провода линии электропередачи: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2013. 142 с.
29. Каплунов С.М., Вальес Н.Г., Шитова Л.И. Применение метода дискретных вихрей для расчета автоколебаний трубки в потоке жидкости // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 4. С. 13–18.
30. Короткий С.А. Расчет проектных параметров аэрокосмической системы с воздушным стартом с учетом интенсивного вихреобразования: дис. . . . канд. техн. наук. М., 2010. 121 с.

31. Коши О.Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. СПб.: Императорская Академия Наук, 1831. 257 с.
32. Кузьмина К.С., Марчевский И.К. Об оценках вычислительной сложности и погрешности быстрого алгоритма в методе вихревых элементов // Труды Института системного программирования РАН. 2016. Т. 28. № 1. С. 259–274.
33. Кузьмина К.С., Марчевский И.К. Об учете кривизны границы обтекаемого профиля для разработки расчетной схемы вихревого метода повышенной точности // Марчуковские научные чтения — 2017: Тр. Междунар. научной конференции. Новосибирск, 2017. С. 477–484.
34. Кузьмина К.С., Марчевский И.К. Оценка трудоемкости быстрого метода расчета вихревого влияния в методе вихревых элементов // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С. 399–414.
35. Кузьмина К.С., Марчевский И.К., Морева В.С. О точности расчетных схем вихревых методов при моделировании обтекания профилей с угловой точкой // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 2. С. 234–249.
36. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
37. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ОГИЗ. ГИТТЛ, 1947. 928 с.
38. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
39. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
40. Малахова Т.В. Нестационарная гидродинамика и теплообмен колеблющихся тел: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2012. 150 с.
41. Марчевский И.К. Математическое моделирование обтекание профиля и исследование его устойчивости в потоке по Ляпунову: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2008. 119 с.

42. Марчевский И.К., Кузьмина К.С., Пузикова В.В. Сравнение эффективности методов контрольных объемов, вихревых элементов, погруженных границ и конечных элементов с частицами при решении сопряженных задач гидроупругости // Совр. проблемы механики сплошной среды: Тр. XVIII Межд. конф. Т. 1. Ростов-на-Дону, 2016. С. 97–101.
43. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С.М. Белоцерковский и др. М.: Наука, 1988. 232 с.
44. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 660 с.
45. Морева В.С. Математическое моделирование обтекания профилей с использованием новых расчетных схем метода вихревых элементов: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2013. 130 с.
46. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
47. Нелинейная теория крыла и ее приложения / Т.О. Аубакиров и др. Алматы: Гылым, 1997. 448 с.
48. Никонов В.В. Развитие вихревых методов расчета обтекания тел несжимаемыми невязким и вязким потоками: дис. . . . канд. техн. наук. Самара, 2007. 174 с.
49. Павловец Г.А., Петров А.С. Об одной возможной схеме расчета отрывного обтекания тел // Труды ЦАГИ. 1974. № 1571. 12 с.
50. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA / А.В. Боресков и др. М.: Изд-во МГУ, 2015. 336 с.
51. Петров А.С. Расчет отрывного обтекания эллиптических цилиндров // Труды ЦАГИ. 1978. № 1930. 12 с.
52. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.
53. Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов: Сб. ст. / Под ред. С.М. Белоцерковского. М.: Изд. ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986. Вып. 1313. 503 с.

54. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
55. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 269 с.
56. Самолысов А.В. Повышение вибропрочности трубных пучков теплообменных аппаратов при гидроупругом возбуждении колебаний: дис. . . . канд. техн. наук. М., 2016. 116 с.
57. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018615579. VM2D — программный комплекс для моделирования двумерных течений несжимаемой среды вихревыми методами / К.С. Кузьмина, И.К. Марчевский, Е.П. Рятина. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11.05.2018.
58. Сетуха А.В. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши на отрезке в классе обобщенных функций // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 9. С. 1208–1218.
59. Степанов Г.Ю. Теория крыла в трудах Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина // Ученые записки ЦАГИ. 1997. Т. 28. № 1. С. 6–27.
60. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
61. Юрьев Б.Н. Избранные труды. Т. 1. Воздушные винты. Вертолеты. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1961. 553 с.
62. Barba L.A., Leonard A., Allen C.B. Advances in viscous vortex methods — meshless spatial adaption based on radial basis function interpolation // International Journal of Numerical Methods in Fluids. 2005. V. 47. No. 5. P. 387–421.
63. Barnes J., Hut P. A hierarchical  $O(N \log N)$  force-calculation algorithm // Nature. 1986. V. 324. No. 4. P. 446–449.
64. Beale J.T., Majda A. Vortex methods II: Higher order accuracy in two and three dimensions // Mathematics of Computation. 1982. V. 29. No. 159. P. 29–52.

65. Bearman P.W., Zdravkovich M.M. Flow around a circular cylinder near a plane boundary // *Journal of Fluid Mechanics*. 1978. V. 89. No. 1. P. 33–47.
66. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. *Method of discrete vortices*. Boca Raton: CRC Press, 1993. 447 p.
67. Branlard E. *Wind turbine aerodynamics and vorticity-based methods: Fundamentals and recent applications*. Springer, 2017. 634 p.
68. Chorin A.J. Numerical study of slightly viscous flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 1973. V. 57. No. 4. P. 785–796.
69. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. *Vortex methods: theory and practice*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 328 p.
70. Doxygen [Электронный ресурс]. URL: <http://www.doxygen.nl> (Дата обращения: 19.12.2018).
71. Dynnikova G.Y. The integral formula for pressure field in the nonstationary barotropic flows of viscous fluid // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. 2014. V. 16. No. 1. P. 145–162.
72. Dynnikova G.Y., Andronov P.R. Expressions of force and moment exerted on a body in a viscous flow via the flux of vorticity generated on its surface // *European Journal of Mechanics, B/Fluids*. 2018. V. 72. P. 293–300.
73. Eigen is template library for linear algebra: matrices, vectors, numerical solvers, and related algorithms [Электронный ресурс]. URL: <http://eigen.tuxfamily.org> (Дата обращения: 19.12.2018).
74. Helmholtz H. Uber integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche den wirbelbewegungen entsprechen // *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. 1858. V. 55. P. 25–55.
75. Ingber M.S., Kempka S.N. A Galerkin implementation of the generalized Helmholtz decomposition for vorticity formulations // *Journal of Computational Physics*. 2001. V. 169. No. 1. P. 215–237.



76. Katz J., Plotkin A. Low-speed aerodynamics. from wing theory to panel methods. Singapore: McGraw-Hill Book Co., 1991. 632 p.
77. Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H., Ingber M.S. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations // SANDIA report. SAND96-0583, UC-700. 1996. 52 p.
78. Klamo J.T., Leonard A., Roshko A. On the maximum amplitude for a freely vibrating cylinder in cross flow // Journal of Fluids and Structures, 2005. V. 21. No. 4. P. 429–434.
79. Koumoutsakos P. Multiscale flow simulations using particles // Annual review of fluid mechanics. 2005. V. 37. P. 457–487.
80. Kraposhin M., Kuzmina K., Marchevsky I., Puzikova V. Study of OpenFOAM efficiency for solving fluid-structure interaction problems // OpenFOAM. Selected papers of the 11th Workshop / Eds. J. Nobrega, H. Jasak. Springer, 2019. 465–479 p.
81. KRATOS Multiphysics («Kratos») [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/KratosMultiphysics/Kratos/wiki> (Дата обращения: 19.12.2018).
82. Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S. Vortex sheet intensity computation in incompressible flow simulation around an airfoil by using vortex methods // Mathematical Models and Computer Simulations. 2018. V. 10. No. 3. P. 276–287.
83. Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S., Ryatina E.P. Numerical scheme of the second order of accuracy for vortex methods for incompressible flow simulation around airfoils // Russian Aeronautics. 2017. V. 60. No. 3. P. 398–405.
84. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. An effective software implementation of vortex element method for 2D flow simulation // CEUR Workshop Proceedings. 2016. V. 1576. P. 191–204.

85. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. High-order numerical scheme for vortex layer intensity computation in two-dimensional aerohydrodynamics problems solved by vortex element method // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. 2016. No. 6. P. 93–109.
86. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. High-order numerical scheme for vortex sheet approximation in vortex methods for 2D flow simulation // PARTICLES 2017: Proc. of 5th Intern. Conf. on Particle-Based Methods. Hannover, 2017. P. 715–724.
87. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. On numerical schemes in 2D vortex element method for flow simulation around moving and deformable airfoils // Advanced Problems in Mechanics 2014: Proc. of the XLII Summer School Conference. Saint-Petersburg, 2014. P. 335–344.
88. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. On the efficiency of fast algorithms in 2D vortex element method // 20th Conference on Scientific Computing: Proc. of Intern. conf. Vysoke Tatry, 2016. P. 93–102.
89. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. The modified numerical scheme for 2D flow-structure interaction simulation using meshless vortex element method // PARTICLES 2015: Proc. of the 4th Intern. Conf. on Particle-Based Methods. Barcelona, 2015. P. 680–691.
90. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Milani D., Ryatina E.P. Accuracy comparison of different approaches for vortex sheet discretization on the airfoil in vortex particles method // PARTICLES 2017: Proc. of the 5th Intern. Conf. Hannover, 2017. P. 691–702.
91. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Moreva V.S. On vortex sheet intensity computation for airfoils with angle point in vortex methods // International Journal of Mechanical Engineering and Technology. 2018. V. 9. No. 2. P. 799–809.
92. Kuzmina K., Marchevsky I., Moreva V. Parallel Implementation of Vortex Element Method on CPUs and GPUs // Procedia Computer Science, 2015. V. 66. P. 73–82.

93. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Exact analytical formulae for linearly distributed vortex and source sheets influence computation in 2D vortex methods // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 918. Art. 012013.
94. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Numerical simulation in 2D strongly coupled FSI problems for incompressible flows by using vortex method // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 2027. Art. 040045.
95. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. On CPU and GPU parallelization of VM2D code for 2D flows simulation using vortex method // *ECCM 6 & ECFD 7: Proc. of 6th European Conference on Computational Mechanics; 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics*. Glasgow, 2018. P. 2390–2401.
96. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. On partitioned and monolithic coupling strategies in Lagrangian vortex methods for 2D FSI problems // *ECCM 6 & ECFD 7: Proc. of 6th European Conference on Computational Mechanics; 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics*. Glasgow, 2018. P. 2402–2409.
97. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Open source code for 2D incompressible flow simulation by using meshless lagrangian vortex methods // *Proceedings of Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS 2017)*. Moscow, 2017. P. 97–103.
98. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. VM2D: Open source code for 2D incompressible flow simulation by using vortex methods // *Communications in Computer and Information Science*. 2018. V. 910. P. 251–265.
99. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Soldatova I.A. Improved algorithm of boundary integral equation approximation in 2D vortex method for flow simulation around curvilinear airfoil // *Mathematics and Mathematical Modeling*. 2018. No. 6. P. 22–51.

100. Lei C., Cheng L., Kavanagh K. Re-examination of the effect of a plane boundary on force and vortex shedding of a circular cylinder // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1999. V. 80. No. 3. P. 263–286.
101. Leonard A. Vortex methods for flow simulation // *Journal of Computational Physics*. 1980. N 37. P. 289–335.
102. Lewin L. Polylogarithms and associated functions. New York: North-Holland, 1981. 359 c.
103. Lewis R.I. Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems. Cambridge: CUP, 2005. 588 p.
104. Marchevsky I.K., Kuzmina K.S. High-order numerical scheme for attached vortex layer intensity computation in 2D vortex element method // *Advanced Problems in Mechanics 2015: Proc. of the XLI Summer School Conference*. Saint-Petersburg, 2015. P. 168–178.
105. Marchevsky I., Kuzmina K., Soldatova I. Improved algorithm of boundary integral equation approximation in 2D vortex method for flow simulation around curvilinear airfoil // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 2027. Art. 040048.
106. Microsoft MPI [Электронный ресурс]. URL: <https://docs.microsoft.com/en-us/message-passing-interface/> (Дата обращения: 19.12.2018).
107. Milani D., Morgenthal G. Adaptive Methods for the simulation of Multiscale Fluid Dynamic Phenomena using Vortex Particle Methods with applications to Civil Structures // *PARTICLES 2015: Proc. of the 4th Intern. Conf. Barcelona*, 2015. P. 379–390.
108. Morgenthal G., Walther J.H. An immersed interface method for the Vortex-In-Cell algorithm // *Computers and Structures*. 2007. V. 85. P. 712–726.
109. Morino L. Helmholtz decomposition revisited: vorticity generation and trailing edge condition // *Computational Mechanics*. 1986. V. 1. No. 1. P. 65–90.

110. Nvidia. Accelerated computing. CUDA Toolkit [Электронный ресурс]. URL: <https://developer.nvidia.com/cuda-toolkit> (Дата обращения: 19.12.2018).
111. Ogami Y., Akamatsu T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model — the diffusion velocity method // *Computers and Fluids*. 1991. V. 19. No. 3/4. P. 433–441.
112. OpenFOAM. The open source CFD toolbox [Электронный ресурс]. URL: <https://www.openfoam.com/> (Дата обращения: 19.12.2018).
113. OpenMP. Architecture Review Boards [Электронный ресурс]. URL: <https://www.openmp.org/> (Дата обращения: 19.12.2018).
114. Ostrikov N.N., Zhmulin E.M. Vortex dynamics of viscous fluid flows. Part 1. Two-dimensional flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 1994. V. 276. P. 81–111.
115. Roberts S. Accuracy of the random vortex method for a problem with a nonsmooth initial condition // *Journal of Computational Physics*. 1985. V. 58. No. 1. P. 29–43.
116. Rosenhead L., Jeffreys H. The formation of vortices from a surface of discontinuity // *Proc. of the Royal Society. Ser. A*. 1931. V. 134. No. 823. P. 170–192.
117. Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets // *NACA Tech. Rept. N 1191*. 1954. 25 p.
118. Rossinelli D., Bergdorf M., Cottet G.-H., Koumoutsakos P. GPU accelerated simulations of bluff body flows using vortex particle methods // *Journal of Computational Physics*. 2010. V. 229. No. 9. P. 3316–3333.
119. Ryatina E., Kuzmina K., Marchevsky I. On investigation and efficient software implementation of fast methods for vortex influence computation in 2D flow simulation // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 2027. Art. 040051.

120. Sarpkaya T. Computational Methods With Vortices — The 1988 Freeman Scholar Lecture // Journal of Fluids Engineering. 1989. V. 111. P. 5–52.
121. Sarpkaya T., Schoaff R. Inviscid Model of Two-Dimensional Vortex Shedding by a Circular Cylinder // AIAA Journal. 1979. V. 17. No. 11. P. 1193–1200.
122. Sethian J., Ghoniem A. Validation study of vortex methods // Journal of Computational Physics. 1988. V. 74. No. 2. P. 283–317.
123. Smith P.A., Stansby P.K. Impulsively started flow around a circular cylinder by the vortex method // Journal of Fluid Mechanics. 1988. V. 194. P. 45–77.
124. Vaz G., Falcao de Campos J.A.C., Eca L. A numerical study on low and higher-order potential based BEM for 2D inviscid flows // Computational Mechanics. 2003. V. 32. No. 4. P. 327–335.
125. VM2D: Vortex method for 2D flow simulation [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/vortexmethods/VM2D>. (Дата обращения: 19.12.2018).
126. Vortex methods: selected papers of the First Intern. Conf. on Vortex Methods / Eds. K. Kamemoto, M. Tsutahara. Singapore, 2000. 220 p.
127. Vvflow CFD Suite (stable): [Электронный ресурс]. URL: <https://packagecloud.io/vvflow/stable> (Дата обращения: 19.12.2018).
128. Zhang W., Li X., Ye Z., Jiang Y. Mechanism of frequency lock-in in vortex-induced vibrations at low Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. 2015. V. 783. P. 72–102.
129. Winckelmans G. Topics in vortex methods for the computation of three- and two-dimensional incompressible unsteady flows: Ph.D. thesis. California Institute of Technology, 1989. 290 p.
130. Wu J.C., Thompson J.F. Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier — Stokes equations using an integro-differential formulation // Computers & Fluids. 1973. V. 1. P. 197–215.