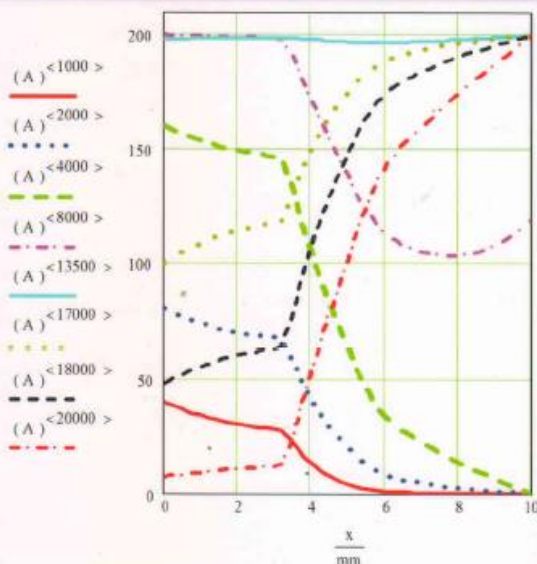


В.М. Маркочев

**Нестационарные поля
температур и напряжений
в многослойных пластинах**



Москва

Издательство фонда «Сталинград»

2020

В.М. Маркочев

**Нестационарные поля температур и
напряжений в многослойных пластинах**

Москва - 2020

УДК 536.2+539.3

В.М. Маркочев. Нестационарные поля температур и напряжений в многослойных пластинах. М.: Изд-во фонда «Сталинград». 2020. - 180 с.

Предложены методики инженерного расчета нестационарных температурных полей и соответствующих им температурных упругопластических напряжений в многослойных элементах конструкций. Все расчеты выполнены в системе компьютерной математики Mathcad.

Введены понятия «обобщенная диаграмма растяжения – сжатия», «обобщенные теплофизические свойства» и предложены их символьные математические описания с применением операторов перехода.

Книга имеет структуру учебного пособия. Она содержит примеры быстрых и малозатратных расчетов на инженерно – физическом уровне строгости. Для численных расчетов температурных полей использован прямой метод сеток. Для расчетов напряжений широко использован метод реальных элементов (MePeЭл).

Данное издание может быть полезным студентам, аспирантам и научным работникам, соприкасающимся в своей деятельности с расчетами температурных полей, с прочностными расчетами и исследованиями переходных процессам в физических и механических системах.

ISBN 978-5-6042651-5-4

© Маркочев Виктор Михайлович, 2020.
e-mail: VMMark@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Метод реальных элементов в сопротивлении материалов.....	5
2. Аналитическое описание гладкой диаграммы растяжения – сжатия	24
3. Управляемый оператор перехода. Обобщенная температуропроводность.....	42
4. Обобщенная диаграмма деформирования. Биметаллическая пластина.....	54
5. Прямой метод сеток.....	66
6. Верификация программы.....	70
7. Температурные напряжения в трехслойной пластине.....	78
8. Нагрев и охлаждение трехслойной пластины.....	90
9. Тепловыделение в трехслойной пластине.....	102
10. Моделирование несовершенного теплового контакта между слоями пластины	113
11. Односторонний прогрев трехслойной пластины.....	128
12. Сплошной цилиндр с тепловыделением.....	140
13. Трехслойная труба с тепловыделением.....	146
14. Многослойная сфера с тепловыделением.....	154
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	162
ЛИТЕРАТУРА.....	162
Приложение. Метод реальных элементов в механике разрушения.....	164
Литератур к приложению.....	177

ВВЕДЕНИЕ

Данная книга – четвертая по счету, в которой рассмотрены применения оператора перехода. Книга продолжает направление, связанное с использованием регулируемого математического оператора перехода в науке и технике, Первая книга [1] посвящена математике управляемых операторов перехода и их применениям в науке. Во второй книге [2] показано и проиллюстрировано, как предложенные в [1] операторы могут способствовать решению обратной задачи аналитической геометрии. Третья книга [3] способствует развитию математики и приложениям вейвлетов и локально определенных функций (ФОЛов).

Предложенные в данной книге решения теплофизических задач – это решения на физико-техническом уровне строгости. Не учтено обратное влияние возникающих температурных напряжений на поле температур, так как при деформировании выделяется или поглощается тепло, которое может оказывать влияние на распределение температур [4].

Решения задач о неустановившихся температурных напряжениях носят ориентировочный характер. Балка использована как модель пластины. В [5] показано, что двухосные температурные напряжения в пластине при изменении температуры только по толщине, в $1/(1-\nu)$ раз больше, чем в балке, температура в которой изменяется только по высоте. Это справедливо для упругих напряжений в однослойных пластинах и балках. В книге принято спорное инженерное допущение, что распределения упругопластических напряжений по высоте многослойных балок моделируют распределения упругопластических напряжений по толщине многослойных пластин при различных краевых условиях. В некоторой мере такой подход к решению задач о неустановившихся температурных напряжениях оправдывается их значением при решении задач прочности [6].

Приведенные в книге расчеты полей напряжений базируются на методе реальных элементов (МеРеЭл) [7,8]. Основа этого инженерного метода – гипотеза плоских сечений. Преимущество МеРеЭл в том, что он позволяет решать на единой основе как

упругие, так и упругопластические задачи при малых упругопластических деформациях, характерных при температурном нагружении. Метод весьма эффективен для расчета остаточных напряжений, возникающих после тепловой или механической разгрузки.

Книга многопланова. В ней сочетаются как численные расчеты уравнений теплопроводности методом сеток, так и расчеты упругопластических температурных напряжений в многослойных пластинах с применением обобщенных диаграмм деформирования, базирующихся на гладких диаграммах растяжения – сжатия материалов слоев пластины.

В первой части книги описана методика применения метода реальных элементов для решения классических задач сопротивления материалов. Это обусловлено необходимостью использования единой системы координат при теплофизических и прочностных расчетах.

Во второй части книги существенное внимание уделено задаче аналитического описания диаграммы растяжения – сжатия конструкционных материалов на основе известных механических свойств и задаче построения обобщенных диаграмм деформирования для многослойных пластин. Обоснована необходимость использования предела пропорциональности как истинного предела текучести для расчета температурных напряжений наряду с условным пределом текучести. Приведены примеры верификации программ теплофизических расчетов.

В третьей части книги рассмотрены алгоритмы приближенного совместного численного решения теплофизических задач и задач анализа напряженно-деформированного состояния.

В приложении описан метод реальных элементов применительно к задаче оценки предельного состояния трубопровода с окружающей трещиной и расчетам диаграммы деформирования поврежденного трубопровода.

1. МЕТОД РЕАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Метод реальных элементов (MePeЭл) [7, 8] был предложен в качестве альтернативы существующим методам упругопластической механике разрушения – пределу трещиностойкости [9], J – интегралу [10,11], критическому раскрытию трещины [12] и другим. Лишь позднее прошло понимание того, что MePeЭл, при отсутствии дефектов в виде трещин, представляет собой вариант классического сопротивления материалов не в силовой, а в деформационной постановке решения задач.

Классический курс сопротивления материалов базируется на гипотезах, основной из которых является гипотеза плоских сечений. Поэтому, на основе этой гипотезы, сначала записываются геометрические соотношения для деформированного бруса. При изгибе, например, это зависимость между радиусом кривизны ρ и производной от угла поворота сечения θ по осевой координате x (относительная угловая деформация) [13].

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} . \quad (1.1)$$

При чистом изгибе значение производной $\frac{d\theta}{dx}$ постоянно, но удлинение «волокна» ΔL длиной L и его относительное удлинение ε пропорционально зависит от его координаты y в "естественной" системе координат, начало которой находится на нейтральном слое, т.е.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = y \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{y}{\rho} . \quad (1.2)$$

Наличие нейтрального слоя - это основа сопротивления материалов. Нейтральный слой и его пересечение с поперечным сечением - нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.

Затем, с использованием закона Гука, связывающего относительную деформацию ε с напряжением σ и модулем упругости E

$$\sigma = E \cdot \varepsilon , \quad (1.3)$$

задачу об относительных деформациях ε переводят в задачу о напряжениях σ . Ценой этого перехода является необходимость вычислений и использования в расчетах таких характеристик поперечного сечения балки, как статический момент сечения S_z , осевой момент инерции сечения I_z и центробежный момент сечения I_{yz} . При этом система координат всегда должна быть связана с центром тяжести сечения, а координатные оси должны совпадать с главными осями сечения (осями симметрии).

В МеРеЭл выбор системы координат разумно произвольный. Начало декартовой системы координат (x, y, z) можно размещать в любой точке поперечного сечения бруса.

В нашем случае принимаем, что ось x нормальна к плоскости сечения, оси y и z лежат в плоскости сечения. Малый отрезок dx в МеРеЭл заменяют длиной участка балки L , малый угол $d\theta$ - углом поворота сечения θ . Принимают, что при нагружении участка балки длиной L точка начала координат перемещается на Δ_0 за счет удлинения соответствующего "волокна". Любая другая точка сечения перемещается на Δ , значение которого равно

$$\Delta = \Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z, \quad (1.4)$$

где θ_z - угол поворота сечения относительно оси z , θ_y - угол поворота сечения относительно оси y .

Относительная деформация - формула типа (1.2), запишется как

$$\varepsilon(y, z) = \frac{\Delta}{L} = \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L}. \quad (1.5)$$

Напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_x(y, z) = \frac{E}{L} \cdot (\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z). \quad (1.6)$$

Но в МеРеЭл, вместо решения задачи о напряжениях с применением осевых моментов сечения I_y и I_z , записывают три интегральных уравнений равновесия, из которых находят значения Δ_0 , θ_z и θ_y . Эти интегральные уравнения - интегралы по

площади поперечного сечения бруса имеют следующий вид в соответствии с рис. 1.1.

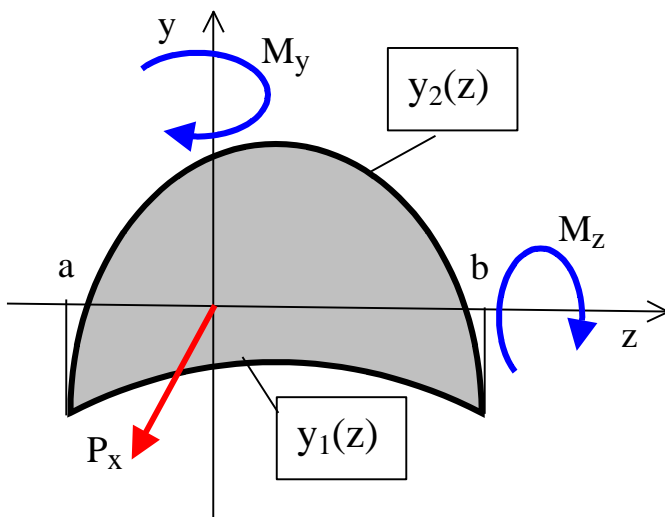


Рис. 1.1

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(z)}^{y_2(z)} E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} dy \right] dz = P_x, \quad (1.7)$$

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(z)}^{y_2(z)} E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} \cdot y dy \right] dz = M_z, \quad (1.8)$$

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(z)}^{y_2(z)} E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} \cdot z dy \right] dz = M_y. \quad (1.9)$$

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Балка треугольного сечения при чистом изгибе, рис.1.2

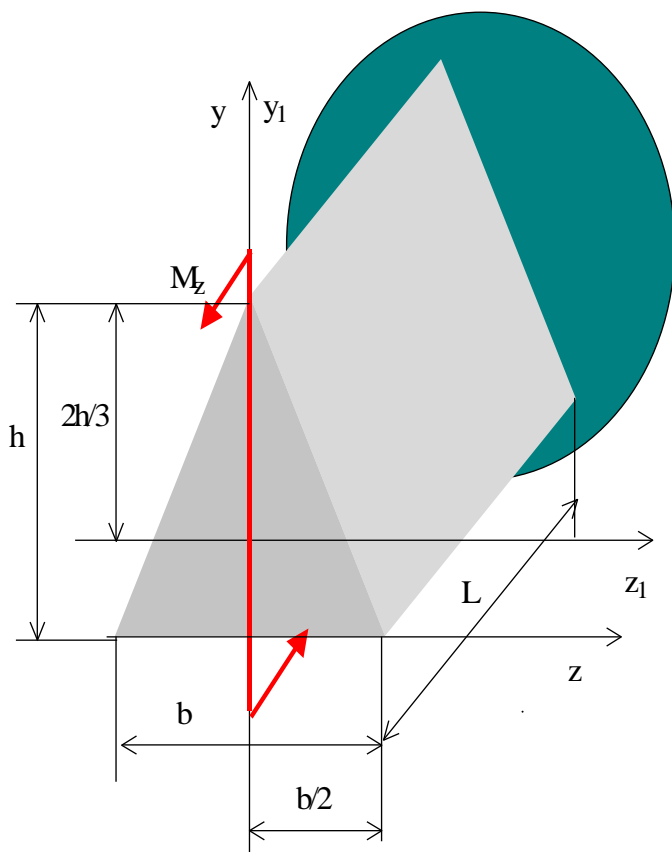


Рис. 1.2

Балка длиной L с поперечным сечением в виде равнобедренного треугольника нагружена изгибающим моментом M_z , как показано на рис. 1.2. Основание треугольника - b , высота треугольника - h . Наша задача - показать, что использование МеРеЭл приводит к тому же результату, что и классическое решение.

Классическое решение дает следующее решение для напряжений в поперечном сечении балки на рис. 1.2

$$\sigma_x(y_1, b, h, M_z) := 36 \cdot \frac{M_z \cdot y_1}{b \cdot h^3}. \quad (1.10)$$

Переходя к МеРеЭл, заметим, что в системе координат (x, y, z)

$$y_1(z) := 0,$$

$$y_2(z, b, h) := \frac{2 \cdot h}{b} \cdot z + h \quad \text{при} \quad -\frac{b}{2} \leq z \leq 0,$$

$$y_2(z, b, h) := -\frac{2 \cdot h}{b} \cdot z + h \quad \text{при} \quad 0 \leq z \leq \frac{b}{2}.$$

В силу симметрии сечения уравнение типа (1.8) можно опустить. В Mathcad символьное решение задачи приведено ниже (выделено желтым цветом).

$$P_x = 0, \quad M_y \neq 0. \quad \text{Given}$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^0 \left[\int_0^{y_2(z, b, h)} E \cdot \left(\frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y}{L} \right) dy \right] dz \dots = 0,$$

$$+ \int_0^{\frac{b}{2}} \left[\int_0^{y_2(z, b, h)} E \cdot \left(\frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y}{L} \right) dy \right] dz$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^0 \left[\int_0^{y1_2(z,b,h)} E \cdot \left(\frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y}{L} \right) \cdot y dy \right] dz \dots = M_z,$$

$$+ \int_0^{\frac{b}{2}} \left[\int_0^{y2_2(z,b,h)} E \cdot \left(\frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y}{L} \right) \cdot y dy \right] dz$$

$$\text{Find}(\Delta_0, \theta_z) \rightarrow \begin{bmatrix} -12 \cdot M_z \cdot \frac{L}{(b \cdot h^2 \cdot E)} \\ 36 \cdot M_z \cdot \frac{L}{(h^3 \cdot b \cdot E)} \end{bmatrix}.$$

Итак,

$$\Delta_0(b, h, E, L, M_z) := -12 \cdot M_z \cdot \frac{L}{(b \cdot h^2 \cdot E)}, \quad (1.11)$$

$$\theta_z(b, h, E, L, M_z) := 36 \cdot M_z \cdot \frac{L}{(b \cdot h^3 \cdot E)}. \quad (1.12)$$

Формула (1.6) для вычисления напряжений в МеРеЭл принимает следующий вид

$$\sigma_x(y, b, h, M_z) = \frac{E}{L} \cdot (\Delta_0(b, h, E, L, M_z) + \theta_z(b, h, E, L, M_z) \cdot y), \quad (1.13)$$

или, после подстановок и преобразований,

$$\sigma_x(y, b, h, M_z) := 12 \cdot M_z \cdot \frac{(-h + 3 \cdot y)}{b \cdot h^3}. \quad (1.14)$$

Уравнение для нейтральной оси по МеРеЭл в координатах (x, y, z) имеет вид

$$y = \frac{h}{3}, \quad (1.15)$$

т.е. проходит через центр тяжести сечения треугольной балки.

При $y = y_1 + \frac{h}{3}$, формула для напряжений (1.14) преобразуется в формулу (1.10), что свидетельствует об адекватности решений.

В формуле (1.10) значение $y_1 = \frac{2}{3} \cdot h$ и напряжение равно $24 \cdot \frac{M_z}{b \cdot h^2}$.

По МеРеЭл координата вершины треугольника $y = h$ и формула (1.14)

также дает классическое значение напряжения $24 \cdot \frac{M_z}{b \cdot h^2}$.

Для численных оценок примем, что

$$E_1 := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}, \quad L_1 := 100 \cdot \text{мм}, \quad b_1 := 10 \cdot \text{мм}, \quad h_1 := 20 \cdot \text{мм}.$$

$$M_{z1} := 50 \cdot \text{Дж}.$$

Напряжение в вершине треугольного сечения по МеРеЭл по формуле (1.14) равно

$$\sigma_x(h_1, b_1, h_1, M_{z1}) = 300 \cdot \text{МПа}.$$

Классическое решение дает напряжение в вершине треугольного сечения по формуле (1.10), т.е.

$$\sigma_1 \left(\frac{2}{3} \cdot h_1, b_1, h_1, M_{z1} \right) = 300 \cdot \text{МПа}.$$

Напряжения совпадают, что доказывает справедливость обоих решений.

Вычислим перемещения. Осевое перемещение по формуле (1.11) равно

$$\Delta_0(b_1, h_1, E_1, L_1, M_{z1}) = -0.075 \cdot \text{мм}.$$

Угловое перемещение по формуле (1.12) равно

$$\theta_z(b_1, h_1, E_1, L_1, M_{z1}) = 0.645 \cdot \text{deg}.$$

Радиус кривизны ρ балки по МсРсЭл равен

$$\rho(b_1, h_1, E_1, L_1, M_{z1}) := \frac{L_1}{\theta_z(b_1, h_1, E_1, L_1, M_{z1})}, \quad (1.16)$$

$$\rho(b_1, h_1, E_1, L_1, M_{z1}) = 8.889 \text{ м}.$$

Пример 2. Внецентренное сжатие бруса прямоугольного сечения

Решим задачу о напряжениях в брус прямоугольного сечения при нагружении его сжимающей силой, действующей в одном из углов, как показано на рис.1.3.

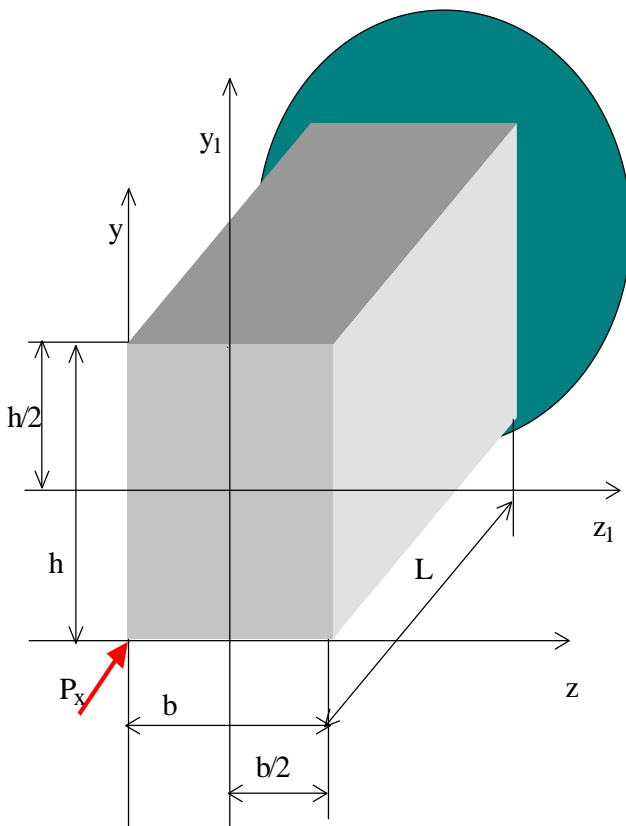


Рис.1.3.

Классическое решение о напряжениях в поперечном сечении в координатах (x_1, y_1, z_1) имеет следующий вид

$$\sigma_{2x}(y_1, z_1, b, h, P_x) := P_x \cdot \left(\frac{1}{b \cdot h} - \frac{6}{b \cdot h^2} \cdot y_1 - \frac{6}{h \cdot b^2} \cdot z_1 \right), \quad (1.17)$$

которому соответствует уравнение для нейтральной оси

$$y_2(z_1, b, h) := \left(\frac{h}{6} - \frac{h}{b} \cdot z_1 \right). \quad (1.18)$$

В Mathcad символьное решение задачи выглядит следующим образом (выделено желтым цветом).

$$y_1(z) = 0, \quad y_2(z, h) = h,$$

$$M_z = 0, \quad M_y = 0, \quad P_x \neq 0.$$

Given

$$\int_0^b \left[\int_0^h E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} dy \right] dz = P_x,$$

$$\int_0^b \left[\int_0^h E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} \cdot y dy \right] dz = 0,$$

$$\int_0^b \left[\int_0^h E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} \cdot z dy \right] dz = 0,$$

$$\text{Find}(\Delta_0, \theta_z, \theta_y) \rightarrow \begin{bmatrix} 7 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(E \cdot h \cdot b)} \\ -6 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(E \cdot h^2 \cdot b)} \\ -6 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(E \cdot h \cdot b^2)} \end{bmatrix}.$$

Итак,

$$\Delta_0(P_x, L, E, b, h) := 7 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(b \cdot h \cdot E)}, \quad (1.19)$$

$$\theta_z(P_x, L, E, b, h) := -6 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(b \cdot h^2 \cdot E)}, \quad (1.20)$$

$$\theta_y(P_x, L, E, b, h) := -6 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(b^2 \cdot h \cdot E)}. \quad (1.21)$$

Формула (1.6) для вычисления напряжений в МеРеЭл принимает следующий вид

$$\sigma_x(y, z, P_x, L, E, b, h) := E \cdot \frac{\Delta_0(P_x, L, E, b, h) + \theta_z(P_x, L, E, b, h) \cdot y + \theta_y(P_x, L, E, b, h) \cdot z}{L}, \quad (1.22)$$

или, после подстановок и преобразований

$$\sigma_x(y, z, b, h, P_x) := P_x \cdot \left(\frac{7}{b \cdot h} - \frac{6 \cdot y}{b \cdot h^2} - \frac{6 \cdot z}{b^2 \cdot h} \right). \quad (1.23)$$

Уравнение для нейтральной оси по МеРеЭл в координатах (x, y, z) приобретает следующий вид

$$y(z, h, b) := \frac{7}{6} \cdot h - \frac{h}{b} \cdot z. \quad (1.24)$$

Сопоставление уравнений (1.17) и (1.23) и (1.18) с (1.24) показывает, что структура уравнений сохраняется. Различие связано с разными системами координат. Но напряжения в заданных точках бруса с учетом различий в описании координат остаются одинаковыми. Проверим.

При $y = y_1 + \frac{h}{2}$ и $z = z_1 + \frac{b}{2}$ формула (1.24) преобразуется в формулу (1.17)

Запишем выражения для напряжений в точке приложения силы.

По МеРеЭл формула (1.23) при $y=0$ и $z=0$ дает напряжение $\frac{7 \cdot P_x}{b \cdot h}$.

Классическая формула (1.17) при $y = -\frac{h}{2}$ и $z = -\frac{b}{2}$ дает то же самое выражение для напряжений.

Для численных оценок опять примем, что

$$E_1 := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}, \quad L_1 := 100 \cdot \text{мм}, \quad b_1 := 10 \cdot \text{мм}, \quad h_1 := 40 \cdot \text{мм}, \\ P_{x1} := -10000 \cdot \text{Н}.$$

Напряжение в верхнем правом углу прямоугольного сечения по МеРеЭл по формуле (1.23) равно

$$\sigma_x(h_1, b_1, b_1, h_1, P_{x1}) = 125 \cdot \text{МПа}.$$

Классическое решение дает напряжение в вершине треугольного сечения по формуле (1.17), т.е.

$$\sigma_2 \left(\frac{1}{2} \cdot h_1, \frac{b_1}{2}, b_1, h_1, P_{x1} \right) = 125 \cdot \text{МПа}.$$

Напряжения совпадают, что доказывает справедливость обоих решений.

Вычислим перемещения. Осевое перемещение по формуле (1.19) равно

$$\Delta_0(P_{x1}, L_1, E_1, b_1, h_1) = -0.088 \cdot \text{мм}.$$

Угловое перемещение по формуле (1.20) равно

$$\theta_z(P_{x1}, L_1, E_1, b_1, h_1) = 0.107 \cdot \text{deg}.$$

Радиус кривизны ρ_z балки по МеРеЭл равен

$$\rho_z(b_1, h_1, E_1, L_1, P_{x1}) := \frac{L_1}{\theta_z(P_{x1}, L_1, E_1, b_1, h_1)}, \\ \rho_z(b_1, h_1, E_1, L_1, P_{x1}) = 53.333 \text{ м}.$$

Угловое перемещение по формуле (1.21) равно

$$\theta_y(P_{x1}, L_1, E_1, b_1, h_1) = 0.43 \cdot \text{deg}.$$

Радиус кривизны ρ_y балки по МеРеЭл равен

$$\rho_y(b_1, h_1, E_1, L_1, P_{x1}) := \frac{L_1}{\theta_y(P_{x1}, L_1, E_1, b_1, h_1)},$$

$$\rho_y(b_1, h_1, E_1, L_1, P_{x1}) = 13.333 \text{ m},$$

Пример 3. Внецентренное сжатие бруса треугольного сечения

Продолжим примеры использования МеРеЭл. Решим общем виде задачу о напряжениях в брус треугольного прямоугольного сечения при нагружении его сжимающей силой, как показано на рис.1.4. Ограничений на размеры основания b и высоты h нет.

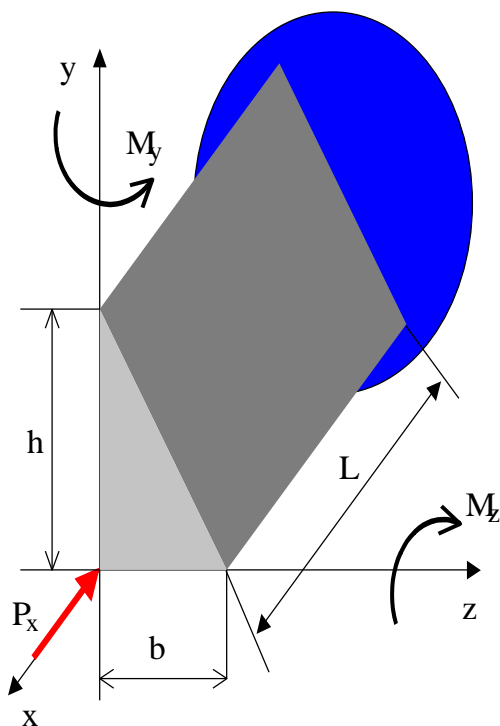


Рис.1.4

В Mathcad символьное решение задачи о линейном и угловых перемещениях выглядит следующим образом (выделено желтым цветом).

$$y_1(z) := 0, \quad y_2(z, b, h) := h \cdot \left(1 - \frac{z}{b}\right),$$

$$M_z = 0, \quad M_y = 0, \quad P_x \neq 0.$$

Given

$$\int_0^b \left[\int_0^{h \cdot \left(1 - \frac{z}{b}\right)} E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} dy \right] dz = P_x,$$

$$\int_0^b \left[\int_0^{h \cdot \left(1 - \frac{z}{b}\right)} E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} \cdot y dy \right] dz = 0,$$

$$\int_0^h \left[\int_0^{b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)} E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} \cdot z dz \right] dy = 0,$$

$$\text{Find}(\Delta_0, \theta_z, \theta_y) \rightarrow \begin{bmatrix} 18 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(E \cdot h \cdot b)} \\ -24 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(E \cdot h^2 \cdot b)} \\ -24 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(E \cdot h \cdot b^2)} \end{bmatrix}.$$

Итак, линейное перемещение и два угловых перемещений равны, соответственно

$$\Delta_0(P_x, b, h, L, E) := 18 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(h \cdot b \cdot E)}, \quad (1.25)$$

$$\theta_z(P_x, b, h, L, E) := -24 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(E \cdot h^2 \cdot b)}, \quad (1.26)$$

$$\theta_y(P_x, b, h, L, E) := -24 \cdot P_x \cdot \frac{L}{(E \cdot h \cdot b^2)}. \quad (1.27)$$

Уравнение для напряжений (1.6) с учетом (1.25), (1.26) и (1.27) приобретает вид

$$\sigma_x(y, z, P_x, b, h) := 6 \cdot P_x \cdot \frac{(3 \cdot h \cdot b - 4 \cdot b \cdot y - 4 \cdot h \cdot z)}{(h^2 \cdot b^2)}, \quad (1.28)$$

а уравнение нейтральной оси

$$y(z, b, h) := \left(\frac{3}{4} \cdot h - \frac{h}{b} \cdot z \right). \quad (1.29)$$

Отметим, что нейтральная ось идет параллельно гипотенузе треугольника.

Классическое решение задачи при разных значениях b и h теоретически выполнимо, но практически сложно. Необходимо предварительно вычислить положение главных центральных осей, вычислить значения осевых моментов относительно этих осей и, наконец, размеры плеч от точки приложения силы до главных центральных осей. И лишь после этого решать задачу сложного сопротивления по классическому алгоритму.

На рис. 1.5 показано равнобедренное прямоугольное сечение как частный случай задачи на рис. 1.4. Там, помимо осей (x, y, z)

показаны оси (x_1, y_1, z_1) , которые являются главными центральными осями равнобедренного прямоугольного сечения. В этих осях решение для напряжений имеет следующий вид.

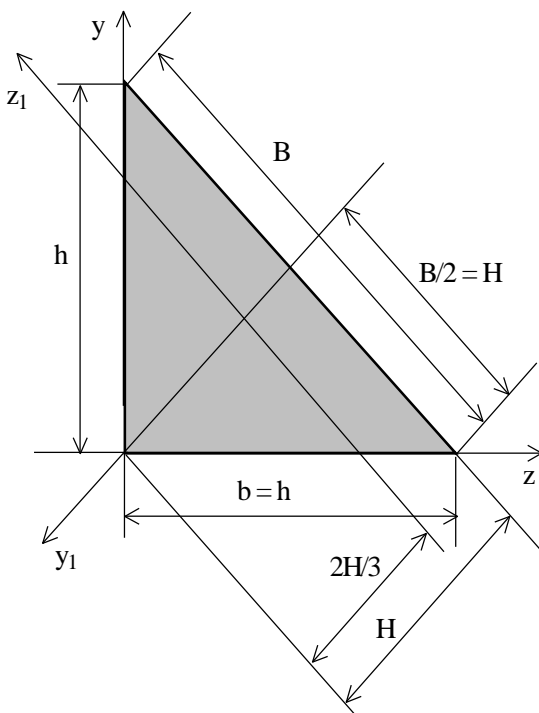


Рис.1.5

$$\sigma_{z_1}(y_1, B, H, P_x) := P_x \cdot \left(\frac{2}{B \cdot H} + \frac{72}{3 \cdot B \cdot H^2} \cdot y_1 \right). \quad (1.30)$$

Напряжения в точке приложения силы по (1.30) при $y_1 = \frac{2}{3} \cdot H$

равно $\frac{18 \cdot P_x}{B \cdot H} = \frac{18 \cdot P_x}{b \cdot h}$, так как для равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 1.5) $B \cdot H = bh$.

К такой же формуле преобразуется (1.28) при $y=0$ и $z=0$. Это подтверждает справедливость решений по МеРеЭл.

Для численных оценок опять примем, что

$$E_1 := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}, \quad L_1 := 100 \cdot \text{мм}, \quad h_1 := 20 \cdot \text{мм}, \quad b_1 := 20 \cdot \text{мм},$$

$$P_{x1} := -10000 \cdot \text{Н}. \text{ Тогда}$$

$$\sigma_x \left(0 \cdot \text{мм}, 0 \cdot \text{мм}, P_{x1}, b_1, h_1 \right) = -450 \cdot \text{МПа},$$

$$\sigma_x \left(0 \cdot \text{мм}, \frac{3}{4} \cdot h_1, P_{x1}, b_1, h_1 \right) = 0 \cdot \text{МПа}.$$

Пример 4. Косой изгиб балки треугольного сечения

Дана балка с поперечным сечением в виде прямоугольного треугольника, нагруженная изгибающим моментом, как показано на рис. 1.6. Плоскость изгибающего момента проходит через центр тяжести треугольника. Начало координат разместим в точке на основании треугольника, отстоящей от прямоугольной вершины на $1/3$ размера основания b .

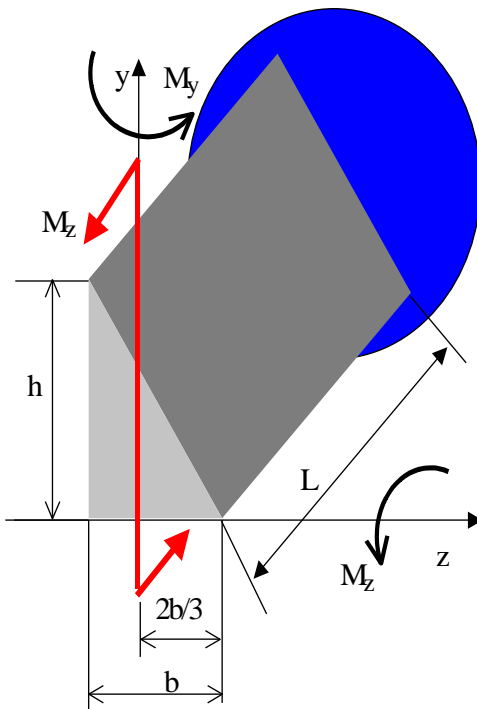


Рис.1.6

Значения перемещений дает символьное решение задачи в Mathcad (выделено желтым цветом).

Уравнение для гипотенузы треугольника

$$y(z, b, h) := \left(\frac{2 \cdot h}{3} - \frac{h}{b} \cdot z \right).$$

$$M_z \neq 0, \quad M_y := 0, \quad P_x := 0.$$

Given

$$\int_{-\frac{b}{3}}^{\frac{2 \cdot b}{3}} \left[\int_0^{y(z, b, h)} E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} dy \right] dz = P_x,$$

$$\int_{-\frac{b}{3}}^{\frac{2 \cdot b}{3}} \left[\int_0^{y(z, b, h)} E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} \cdot y dy \right] dz = M_z,$$

$$\int_{-\frac{b}{3}}^{\frac{2 \cdot b}{3}} \left[\int_0^{y(z, b, h)} E \cdot \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z}{L} \cdot z dy \right] dz = M_y,$$

$$\text{Find}(\Delta_0, \theta_z, \theta_y) \rightarrow \begin{bmatrix} -16 \cdot M_z \cdot \frac{L}{(b \cdot h^2 \cdot E)} \\ 48 \cdot M_z \cdot \frac{L}{(h^3 \cdot b \cdot E)} \\ 24 \cdot M_z \cdot \frac{L}{(h^2 \cdot b^2 \cdot E)} \end{bmatrix}.$$

Линейное перемещение и два угловых перемещений равны, соответственно

$$\Delta_0(M_z, L, E, b, h) := -16 \cdot M_z \cdot \frac{L}{(b \cdot h^2 \cdot E)}, \quad (1.31)$$

$$\theta_z(M_z, L, E, b, h) := 48 \cdot M_z \cdot \frac{L}{(b \cdot h^3 \cdot E)}, \quad (1.32)$$

$$\theta_y(M_z, L, E, b, h) := 24 \cdot M_z \cdot \frac{L}{(b^2 \cdot h^2 \cdot E)}. \quad (1.33)$$

Уравнение для напряжений (1.6) с учетом (1.31), (1.32) и (1.33) приобретает вид

$$\sigma_x(y, z, M_z, b, h) := M_z \cdot \left(-\frac{16}{b \cdot h^2} + \frac{48 \cdot y}{b \cdot h^3} + \frac{24 \cdot z}{b^2 \cdot h^2} \right), \quad (1.34)$$

а уравнение нейтральной оси

$$y(z, b, h) := h \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{z}{2 \cdot b} \right). \quad (1.35)$$

Заметим, что нейтральная ось всегда проходит через острую нижнюю вершину и через точку на половине высоты вертикального катета (см. рис. 1.6).

Для учета температурных деформаций в упругом случае уравнение (1.6) преобразуют к виду

$$\sigma_x(y, z) = \frac{E}{L} \cdot (\Delta_0 + \theta_z \cdot y + \theta_y \cdot z) - \alpha \cdot \Delta T(y, z), \quad (1.36)$$

где α - коэффициент линейного температурного расширения, $\Delta T(y, z)$ - распределение температур по сечению бруса.

Итак, МеРеЭл - главы сопротивления материалов в деформациях. Стандартный классический сопромат - расчеты в напряжениях, при необходимости возможен пересчет в относительные деформации или перемещения. МеРеЭл - расчеты перемещений с последующим пересчетом перемещений в напряжения или относительные деформации. МеРеЭл использует все допущения, принятые в сопромате, в первую очередь гипотезу плоских сечений. В ряде случаев решение задачи по МеРеЭл существенно упрощается.

Координатную систему в МеРеЭл можно выбирать произвольным образом, не обязательно связывать начало координат с центром тяжести сечения и направлять оси по главным центральным осям. Но для простоты и эффективности при решении задач плоского и кривоизгиба одну из осей, например ось u следует размещать в плоскости действия изгибающего момента. В случае внецентренного растяжения - сжатия начало координат следует размещать в точке приложения силы.

При использовании МеРеЭл нет необходимости вычислять положение центра тяжести сечения бруса и таких характеристик сечения бруса, как статический момент инерции, осевой и центробежный момент инерции. Эти характеристики в МеРеЭл отсутствуют, поскольку не нужны. Если в сопромате интегрирование по сечению связано с необходимостью вычисления статического и осевого момента инерции сечения, то в МеРеЭл интегрирование по сечению - это основной прием, результатом которого является удовлетворение уравнений равновесия. При плоских задачах - это достижения равенства продольной силы и изгибающего момента суммарным напряжениям в сечении бруса (балки). Становятся ненужными такие понятия, как главная и центральная оси. При использовании МеРеЭл, но не в науке вообще.

В сложном случае использование МеРеЭл практически **невозможно** без системы компьютерной математики типа Mathcad. Но сейчас это не является проблемой. Mfthcad - это мощная "логарифмическая линейка" современного инженера.

И, что весьма существенно, при допущении справедливости гипотезы плоских сечений при малых упругопластических деформациях МеРеЭл позволяет решать упругопластические задачи с использованием **реальных** диаграмм растяжения - сжатия конкретного конструкционного материала. При этом линейная зависимость между напряжениями и относительными деформациями заменяется на нелинейную.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГЛАДКОЙ ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ – СЖАТИЯ

Для адекватного моделирования процессов деформирования и прочностных расчетов уравнение для диаграммы растяжения - сжатия конструкционного материала должно описывать гладкую кривую, имеющую упругий и упругопластический участки.

Аналитическое уравнение для диаграммы должно базироваться на модуле упругости E материала, условном пределе текучести $\sigma_{0.2}$, пределе прочности (временном сопротивлении) σ_b и относительном удлинении образца на пределе прочности (равномерном удлинении) δ_p . Кроме этого, участок диаграммы растяжения от предела пропорциональности σ_y до условного предела текучести $\sigma_{0.2}$ и далее должен быть гладким продолжением линейного участка диаграммы. При этом предел пропорциональности σ_y следует отождествлять с истинным пределом текучести.

Последнее обстоятельство весьма существенно при расчете термических напряжений. Если диаграмму упругопластического растяжения ориентировать только на условный предел текучести $\sigma_{0.2}$, значение которого чаще всего известно, то возникает погрешность в оценке состояния, при котором возникают первые пластические деформации [14].

Например, если коэффициент линейного теплового расширения

$$\alpha := 12 \cdot 10^{-6} \cdot \text{K}^{-1},$$

при $E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$, $\sigma_y := 160 \cdot \text{МПа}$, $\sigma_{0.2} := 200 \cdot \text{МПа}$,

и имеет место жесткое защемление бруса при изменении температуры на ΔT , то значение ΔT , которое требуется для возникновения температурных напряжений σ , равно

$$\Delta T(\sigma) := \frac{\sigma}{E \cdot \alpha}, \quad (2.1)$$

Этому состоянию отвечает относительная температурная деформация ε_T :

$$\varepsilon_T(\sigma) := \alpha \cdot \Delta T(\sigma) . \quad (2.2)$$

Для достижения напряжения $\sigma = \sigma_y$ в упругом случае требуется изменение температуры на $\Delta T(\sigma_y) = 66.667 \text{ K}$ при $\varepsilon_T(\sigma_y) = 0.08 \cdot \%.$

Для достижения напряжения $\sigma = \sigma_{0.2}$ требуется изменение температуры на $\Delta T(\sigma_{0.2}) = 83.333 \text{ K}$ при $\varepsilon_T(\sigma_{0.2}) = 0.1 \cdot \%.$ Относительная разность температур при $\Delta T(\sigma_y)$ и $\Delta T(\sigma_{0.2})$ равна

$$\gamma_T := \frac{\Delta T(\sigma_{0.2}) - \Delta T(\sigma_y)}{\Delta T(\sigma_y)} , \quad \gamma_T = 25 \cdot \%.$$

Возникает парадоксальное состояние. С одной стороны, мы на 25% сдвигаем вверх по напряжениям момент наступление текучести материала. С другой стороны, в соответствии с ГОСТом испытания на растяжение, реально мы должны деформировать материал упруго не на 0.1% , а упругопластически на 0.2% больше, т.е. на 0.3% .

Интересно и удивительное, что коэффициент запаса прочности по условному пределу текучести равен 1.5 [15]. Но вы нигде не найдете обоснование этой цифры. В лучшем случае вам укажут, что это подтверждает опыт эксплуатации сложной техники. Но обратный расчет показывает, что эксплуатационный запас прочности обычно больше, чем 1.5. И напрашивается вывод, что в действительности запас 1.5 нужен, чтобы не допустить раннее появление пластических деформаций, и что именно в этом инженерный смысл этой цифры. Т.е. мы ориентируемся на $\sigma_{0.2}$, но вводим запас 1.5. Решение идеальное. Но не для случая знакопеременных температур в условиях длительной эксплуатации.

Нет достоверного и убедительного объяснения значения допуска на пластическую деформацию 0.2% от длины образца для испытаний на растяжение. Разве можно применять один и тот же допуск для разных сплавов с разными пределами текучести? На наш взгляд, это традиция и нежелание сложностей. Ссылка на измерительные

возможности приемлема, но не до конца убедительна. Думается, что в те времена, когда вводился допуск 0.2%, предел текучести сталей находился на уровне 400·МПа. Для этих сталей упругая деформация равна 0.2% . И чего проще - примем допуск на пластическую деформацию равным упругой деформации. Возражать против этого приема сложно...

Отметим, что весьма существенно, что температурные деформации ограничены. Например, при $\Delta T := 500 \cdot K$ относительная температурная деформация всего $\alpha \cdot \Delta T = 0.6 \cdot \%$, что лишь только в три раза превышает принятый допуск на определение условного предела текучести $\sigma_{0.2}$.

Выход состоит в том, чтобы расчетная диаграмма деформирования материала учитывала как реальное напряжение начала необратимого упругопластического деформирования σ_y , так и общепринятое понятие и значение условного предела текучести $\sigma_{0.2}$.

Для описания упругого участка кривой деформирования будем опираться на закон Гука

$$\sigma_1(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon, \quad (2.3)$$

где ε - относительная деформация, E - модуль упругости.

Для описания упругопластического участка кривой деформирования будем применять четырех параметрическое степенное уравнение

$$\sigma_2(\varepsilon, a, b, c, n) = a \cdot (\varepsilon - b)^n + c, \quad (2.4)$$

где a - масштабирующий параметр, b и c - параметры сдвига по осям деформации и напряжения, соответственно, n - параметр деформационного упрочнения.

Уравнение (2.3) должно плавно переходить в уравнение (2.4) при заданном значении упругой деформации ε_y , соответствующей деформации предела пропорциональности.

При принятом значении ε_y должно выполняться равенство напряжений

$$\sigma_1(\varepsilon_y) = \sigma_2(\varepsilon_y, a, b, c, n), \quad (2.5)$$

и равенство производных от этих напряжений по деформации ε ,

$$E = a \cdot n \cdot (\varepsilon_y - b)^{n-1}. \quad (2.6)$$

Прибавив к уравнениям (2.5) и (2.6) дополнительные условия по условному пределу текучести и по пределу прочности

$$\sigma_{0.2} = \sigma_2 \left(\frac{\sigma_{0.2}}{E} + \varepsilon_{d,a,b,c,n} \right), \quad (2.7)$$

$$\sigma_b = \sigma_2 \left(\frac{\sigma_{0.2}}{E} + \varepsilon_{p,a,b,c,n} \right), \quad (2.8)$$

где ε_d - допуск на пластическую деформацию при определении условного предела текучести, $\varepsilon_d = 0.002$, ε_p - равномерное относительное удлинение (на пределе прочности), получаем систему четырех уравнений (2.5 - 2.8), решение которой даст значения четырех параметров уравнения (2.3) - a , b , c и показателя степени n .

Рассмотрим примеры расчета упругопластической диаграммы растяжения - сжатия применительно к задаче о температурном и силовом нагружении балки при условии, что механические свойства материала не зависят от температуры.

Пример 1

Дана статически неопределимая балка из пластичного материала. Балка закреплена с двух сторон еще до изменения ее температуры, как показано на рис. 2.1. Длина балки L , ширина основания B и высота сечения H . Требуется дать анализ напряженно-деформированного состояния балки и оценить остаточные напряжения после охлаждения балки.

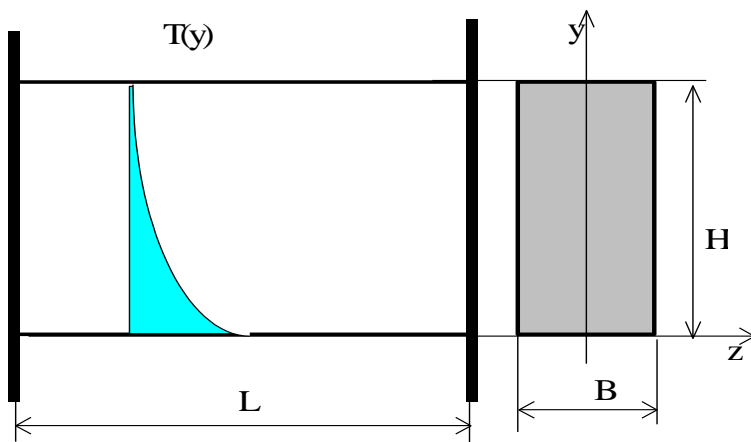


Рис.2.1

Начало системы координат расположено в середине основания балки. Геометрические размеры балки:

$$L := 200 \cdot \text{mm} , \quad B := 10 \cdot \text{mm} , \quad H := 20 \cdot \text{mm} .$$

Температура балки изменяется по высоте как

$$T(y, T_0) := T_0 - \frac{T_0 \cdot y^2}{H^2} , \quad T_0 := 500 \cdot \text{K} . \quad (2.9)$$

Зависимость температуры от координаты сечения y показана на рис. 2.2.

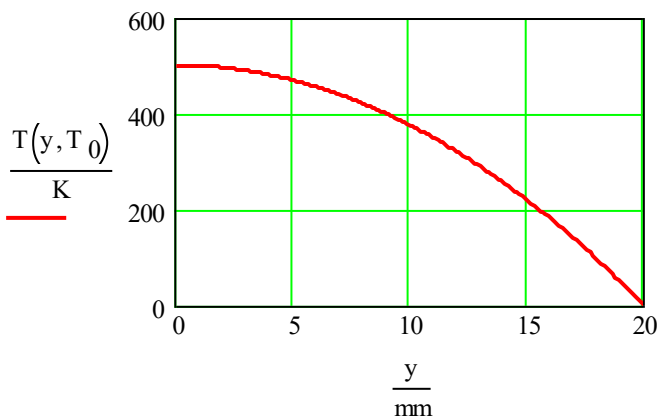


Рис.2.2.

Зададим физико-механические свойства материала балки.

Модуль упругости $E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$, коэффициент линейного теплового расширения $\alpha := 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot \text{K}^{-1}$, условный предел текучести $\sigma_{0.2} := 300 \cdot \text{МПа}$, условный допуск на пластическую деформацию $\varepsilon_d := 0.002$, предел прочности $\sigma_b := 500 \cdot \text{МПа}$, равномерное относительное удлинение $\varepsilon_p := 0.1$.

Зададим относительную деформацию текучести: $\varepsilon_y := 0.0011$.

Напряжение текучести σ_y в соответствии с (2.3)

$$\sigma_1(\varepsilon) := E \cdot \varepsilon, \quad \sigma_y := \sigma_1(\varepsilon_y), \quad \sigma_y = 220 \cdot \text{МПа}.$$

Уравнение (2.4) для аппроксимации упругопластического участка диаграммы растяжения

$$\sigma_2(\varepsilon, a, b, c, n) := a \cdot (\varepsilon - b)^n + c.$$

Решим систему уравнений (2.5 - 2.8) и построим диаграмму растяжения - сжатия в Mathcad (выделено желтым цветом).

Зададим приближенные значения искомых параметров диаграммы.

$$n := 0.5, \quad a := 500 \cdot \text{МПа}, \quad b := 0.00001, \quad c := 20 \cdot \text{МПа}.$$

Given

$$\sigma_1(\varepsilon_y) = \sigma_2(\varepsilon_y, a, b, c, n), \quad E = a \cdot n \cdot (\varepsilon_y - b)^{n-1},$$

$$\sigma_{0.2} = \sigma_2 \left(\frac{\sigma_{0.2}}{E} + \varepsilon_{d,a,b,c,n} \right),$$

$$\sigma_b = \sigma_2 \left(\frac{\sigma_{0.2}}{E} + \varepsilon_{p,a,b,c,n} \right), \quad \begin{bmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \\ n1 \end{bmatrix} := \text{Find}(a, b, c, n).$$

Решение дает следующие конкретные значения параметров диаграммы

$$\begin{aligned} a1 &= 589.493 \cdot \text{МПа}, & b1 &= 1.028 \cdot 10^{-3}, \\ c1 &= 160.025 \cdot \text{МПа}, & n1 &= 0.24. \end{aligned}$$

Уравнение для диаграммы растяжения - сжатия при равных свойствах при растяжении и сжатии.

$$\sigma_x(\varepsilon) := \begin{cases} -\sigma_2(|-\varepsilon|, a1, b1, c1, n1) & \text{if } \varepsilon < -\varepsilon_y \\ \sigma_1(\varepsilon) & \text{if } -\varepsilon_y \leq \varepsilon < \varepsilon_y \\ \sigma_2(\varepsilon, a1, b1, c1, n1) & \text{if } \varepsilon \geq \varepsilon_y \end{cases} \quad (2.10)$$

График диаграммы (2.10) показан на рис. 2.3.

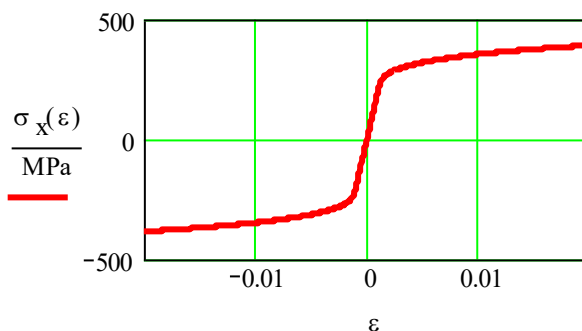


Рис. 2.3

Решим задачу о напряжениях и деформациях в балке с использованием MePeЭл.

При плоском нагружении бруса в общем случае любое его поперечное сечение перемещается по оси z на Δ_0 и поворачивается на угол θ_z относительно оси z .

Относительная деформация волокна ε в общем случае равна

$$\varepsilon(\Delta_0, \theta_z, y) := \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y - \alpha \cdot L \cdot T(y, T_0)}{L}. \quad (2.11)$$

При полном защемлении концов балки Δ_0 и θ_z равны нулю.

$$\Delta_0 := 0 \cdot \text{mm}, \quad \theta_z := 0 \cdot \text{deg}.$$

Для данной балки опорные реакции - продольная сила P_x и изгибающий M_z момент равны

$$P_x := \left(\int_0^H \sigma_x(\varepsilon(\Delta_0, \theta_z, y)) \cdot B dy \right), \quad (2.12)$$

$$M_z := \left(\int_0^H \sigma_x(\varepsilon(\Delta_0, \theta_z, y)) \cdot B \cdot y dy \right). \quad (2.13)$$

$$P_x = -5.748 \cdot 10^4 \text{ N}, \quad M_z = -521.8 \text{ J}.$$

Зависимость напряжения $\sigma_1(y)$ от координаты сечения (эпюра напряжений) имеет следующий вид:

$$\sigma_1(y) := \sigma_x \left(\frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y - \alpha \cdot L \cdot T(y, T_0)}{L} \right). \quad (2.14)$$

Эта зависимость напряжения $\sigma_1(y)$ от координаты для любого сечения балки при $T_0 = 500 \text{ K}$ приведена на рис.2.4.

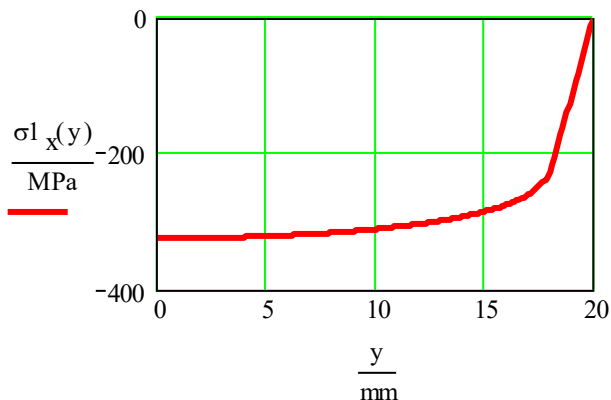


Рис. 2.4

Зависимость деформации $\varepsilon^1_x(y)$ от координаты сечения имеет вид (рис. 2.5) ,

$$\varepsilon^1_x(y) := \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y - \alpha \cdot L \cdot T(y, T_0)}{L} . \quad (2.15)$$

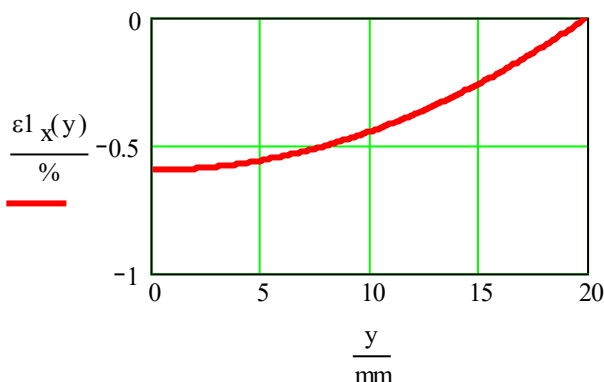


Рис. 2.5

Естественно, что для данного нагружения балки график на рис. 2.5 повторяет зависимость температуры от координаты сечения y

Для расчета остаточных напряжений после охлаждения балки необходима перестройка исходной диаграммы (2.10). Будем использовать перестройку по алгоритму, описанному в [14]. Суть алгоритма состоит в том, что исходная диаграммы перемещается

вдоль оси деформаций и по оси напряжений в соответствии с достигнутыми напряжениями и деформациями каждого волокна (рис.2.4 и 2.5)

Уравнение для перестроенной диаграммы в Mathcad имеет следующий вид. Оно записано с ориентацией на исходную диаграмму деформирования $\sigma_X(\varepsilon)$, эпюру напряжений $\sigma_{lX}(y)$, эпюру относительных деформаций $\varepsilon_{lX}(y)$, на предел текучести σ_Y и на соответствующую ему деформацию ε_Y .

$$\sigma_{Xl}(\varepsilon, y) := \left| \begin{array}{l} \text{if } \varepsilon_{lX}(y) \leq -\varepsilon_Y \\ \left| \begin{array}{l} \sigma_X(\varepsilon) \text{ if } \varepsilon \leq \varepsilon_{lX}(y) \\ \sigma_X(\varepsilon - \varepsilon_{lX}(y) - \varepsilon_Y) + (\sigma_{lX}(y) + \sigma_Y) \text{ if } \varepsilon \geq \varepsilon_{lX}(y) \end{array} \right. \\ \sigma_X(\varepsilon) \text{ if } -\varepsilon_Y \leq \varepsilon_{lX}(y) < \varepsilon_Y \\ \text{if } \varepsilon_{lX}(y) \geq \varepsilon_Y \\ \left| \begin{array}{l} \sigma_X(\varepsilon - \varepsilon_{lX}(y) + \varepsilon_Y) + (\sigma_{lX}(y) - \sigma_Y) \text{ if } \varepsilon < \varepsilon_{lX}(y) \\ \sigma_X(\varepsilon) \text{ if } \varepsilon \geq \varepsilon_{lX}(y) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Графические зависимости для исходной и перестроенной диаграммы показаны на рис. 2.6.

Охладим и разневолим балку: $T_0 := 0 \cdot K$.

Если уравнение для относительных деформаций оставить в общем виде (2.14)

$$\varepsilon(\Delta_0, \theta_Z, y) := \frac{\Delta_0 + \theta_Z \cdot y - \alpha \cdot L \cdot T(y, T_0)}{L},$$

то уравнение для напряжений будет

$$\sigma_{Xl}(\Delta_0, \theta_Z, y) := \sigma_{Xl}(\varepsilon(\Delta_0, \theta_Z, y), y). \quad (2.17)$$

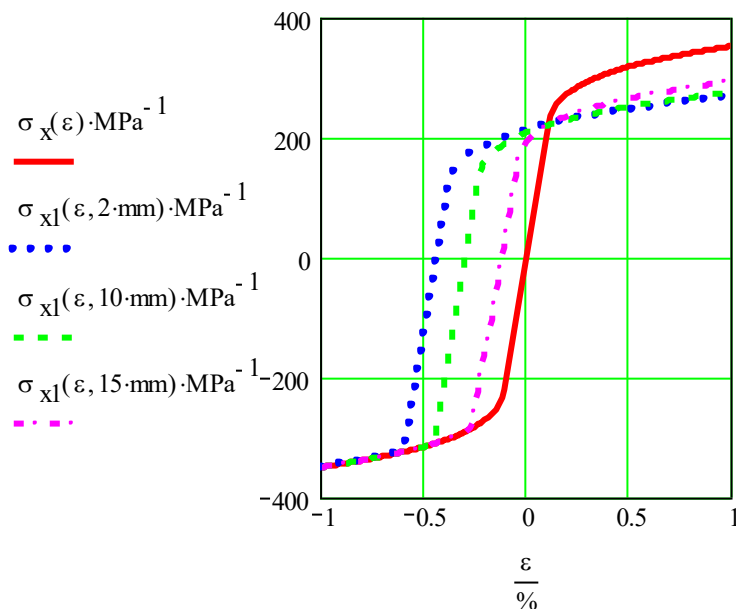


Рис. 2.6

Для данной балки после охлаждения и разневоливания продольная сила P_x и изгибающий M_z момент равны нулю, а остаточные напряжения самосбалансированы:

$$P_x := 0 \cdot \text{kN}, \quad M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}.$$

Найдем значения удлинения Δ_0 и угла поворота правого торца балки θ_z , удовлетворяющие условиям равновесия. В Mathcad решение будет следующим (выделено желтым цветом).

Зададим приближенные значения Δ_0 и θ_z .

$$\Delta_0 := 0.2 \cdot \text{mm}, \quad \theta_z := -3 \cdot \text{deg}.$$

Given

$$P_x = \int_0^H \sigma_{x11}(\Delta_0, \theta_z, y) \cdot B dy,$$

$$M_z = \int_0^H \sigma_{x11}(\Delta_0, \theta_z, y) \cdot B \cdot y \, dy, \quad \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \theta_z \end{bmatrix} := \text{Find}(\Delta_0, \theta_z).$$

Итак, остаточное состояние балки характеризуется значениями линейного и углового перемещений:

$$\Delta_0 = -1.033 \cdot \text{mm}, \quad \theta_z = 2.983 \cdot \text{deg},$$

при остаточных напряжениях, описываемых уравнением

$$\sigma_2^x(y) := \sigma_{x11}(\Delta_0, \theta_z, y). \quad (2.18)$$

Эта зависимость остаточного напряжения $\sigma_2^x(y)$ при $T_0 = 0 \text{ K}$ приведена на рис. 2.7 вместе с исходной эпюрой напряжений $\sigma_1^x(y)$.

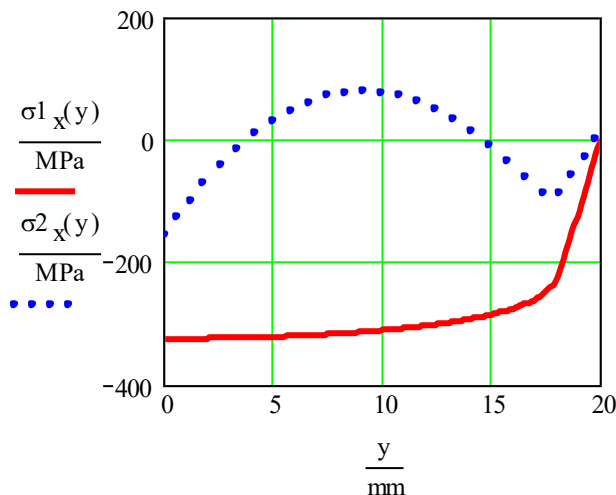


Рис. 2.7

В данном случае остаточные напряжения не превышают напряжения текучести $\sigma_y = 220 \cdot \text{MPa}$. Интегралы

$$\int_0^H \sigma_2^x(y) \cdot B \, dy = -1.492 \cdot 10^{-4} \cdot \text{N} \quad \text{и}$$

$$\int_0^H \sigma_x(y) \cdot B \cdot y dy = 1.944 \cdot 10^{-4} \cdot J$$

близки к нулю, т.е. остаточные напряжения самоуравновешены.

Пример 2

Дана одна раз статически неопределимая балка из пластичного материала. Балка оперта по оси z на шарнирно-неподвижные опоры, как показано на рис. 2.8. Геометрические размеры балки те же, что и в примере 1. Требуется дать анализ напряженно-деформированного состояния балки при заданном изменении температуры по высоте балки.

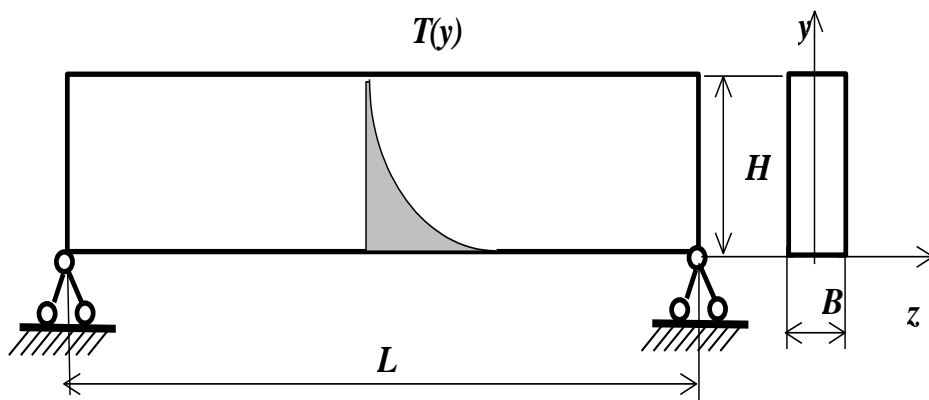


Рис..2.8

$$L = 200 \cdot \text{mm}, \quad B = 10 \cdot \text{mm}, \quad H = 20 \cdot \text{mm}.$$

Температура балки изменяется по высоте так же, как в примере 1.

$$T_0 := 500 \cdot \text{K}, \quad T(y, T_0) := T_0 - \frac{T_0 \cdot y^2}{H^2}.$$

Приняты те же самые физико-механические свойства материала балки и та же диаграмма деформирования (2.10). Различие задач в разных опорах для балки.

При плоском нагружении бруса в общем случае любое его поперечное сечение перемещается по оси z на Δ_0 и поворачивается на угол θ_z .

В процессе температурного нагружения балки (рис. 2.8) правое торцевое сечение поворачивается на угол θ_z , но при этом $\Delta_0 = 0$. И каждое волокно балки ещё удлиняется за счет изменения температуры. Относительная деформация волокна ε в общем случае описывается формулой (2.11)

$$\varepsilon(\Delta_0, \theta_z, y) := \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y - \alpha \cdot L \cdot T(y, T_0)}{L},$$

$$\sigma_{x12}(\Delta_0, \theta_z, y) := \sigma_x(\varepsilon(\Delta_0, \theta_z, y)).$$

Найдем значения продольной силы P_x (продольной реакции опор) и относительного угла поворота правого торца балки θ_z , удовлетворяющие условиям равновесия (решение в Mathcad помечено желтым цветом). Для данной балки удлинение Δ_0 и изгибающий M_z момент равны нулю:

$$\Delta_0 := 0 \cdot \text{mm}, \quad M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}.$$

Зададим приближенные значения P_x и θ_z .

$$P_x := -10 \cdot \text{kN}, \quad \theta_z := -3 \cdot \text{deg}$$

Given

$$P_x = \int_0^H \sigma_{x12}(\Delta_0, \theta_z, y) \cdot B \, dy,$$

$$M_z = \int_0^H \sigma_{x12}(\Delta_0, \theta_z, y) \cdot B \cdot y \, dy,$$

$$\begin{bmatrix} P2_x \\ \theta2_z \end{bmatrix} := \text{Find}(P_x, \theta_z).$$

Искомые значения $P2_x$ и $\theta2_z$ равны

$$P2_x = -25.081 \cdot \text{kN}, \quad \theta2_z = 2.466 \cdot \text{deg}.$$

Зависимость напряжения $\sigma_{11_x}(y)$ от координаты y имеет следующий вид.

$$\sigma_{11_x}(y) := \sigma_x \left(\frac{\Delta_0 + \theta2_z \cdot y - \alpha \cdot L \cdot T(y, T_0)}{L} \right). \quad (2.19)$$

Эта зависимость напряжения $\sigma_{11_x}(y)$ от координаты y при $T_0 = 500 \text{ K}$ приведена на рис. 2.9.

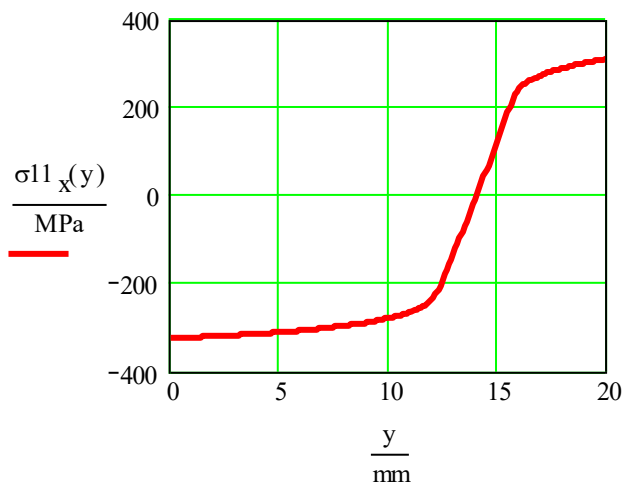


Рис. 2.9

Зависимость деформации $\varepsilon_{11_x}(y)$ от координаты сечения имеет вид (рис. 2.5)

$$\varepsilon_{11_x}(y) := \frac{\Delta_0 + \theta2_z \cdot y - \alpha \cdot L \cdot T(y, T_0)}{L}. \quad (2.20)$$

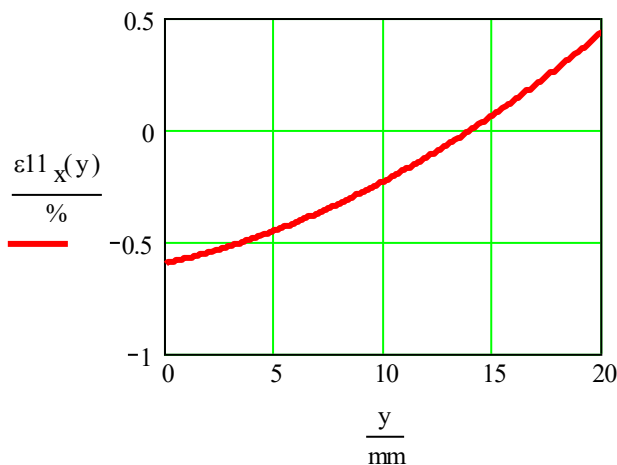


Рис. 2.10

Применительно к (2.19) уравнение для перестроенной диаграммы будет следующим. Оно, в отличие от (2.16) ориентировано на $\varepsilon_{l1_x}(y)$ и $\sigma_{l1_x}(y)$, а не на $\varepsilon_{1_x}(y)$ и $\sigma_{1_x}(y)$.

$$\sigma_{x11}(\varepsilon, y) := \left\{ \begin{array}{l} \text{if } \varepsilon_{l1_x}(y) \leq -\varepsilon_y \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x(\varepsilon) \text{ if } \varepsilon \leq \varepsilon_{l1_x}(y) \\ \sigma_x(\varepsilon - \varepsilon_{l1_x}(y) - \varepsilon_y) + (\sigma_{l1_x}(y) + \sigma_y) \text{ if } \varepsilon \geq \varepsilon_{l1_x}(y) \end{array} \right. \\ \sigma_x(\varepsilon) \text{ if } -\varepsilon_y \leq \varepsilon_{l1_x}(y) < \varepsilon_y \\ \text{if } \varepsilon_{l1_x}(y) \geq \varepsilon_y \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x(\varepsilon - \varepsilon_{l1_x}(y) + \varepsilon_y) + (\sigma_{l1_x}(y) - \sigma_y) \text{ if } \varepsilon < \varepsilon_{l1_x}(y) \\ \sigma_x(\varepsilon) \text{ if } \varepsilon \geq \varepsilon_{l1_x}(y) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Охладим балку: $T_0 := 0 \cdot K$.

Если уравнение для деформаций

$$\varepsilon(\Delta_0, \theta_z, y) := \frac{\Delta_0 + \theta_z \cdot y - \alpha \cdot L \cdot T(y, T_0)}{L},$$

то уравнение для напряжений будет

$$\sigma_{x13}(\Delta_0, \theta_z, y) := \sigma_{x11}(\varepsilon(\Delta_0, \theta_z, y), y). \quad (2.22)$$

Для данной балки после охлаждения изгибающий M_z момент и Δ_0 равны нулю, а остаточные напряжения самосбалансированы.

Вычислим значения остаточной продольной силы (остаточной реакции опор) P_x и остаточной угловой деформации балки θ_z .

В Mathcad решение будет следующим (выделено желтым цветом).

$$M_z := 0 \cdot \text{J}, \quad \Delta_0 = 0 \cdot \text{mm}.$$

Зададим приближенные значения P_x и θ_z :

$$P_x := 10 \cdot \text{kN}, \quad \theta_z := -2 \cdot \text{deg}.$$

Given

$$P_x = \int_0^H \sigma_{x13}(\Delta_0, \theta_z, y) \cdot B \cdot dy,$$

$$M_z = \int_0^H \sigma_{x13}(\Delta_0, \theta_z, y) \cdot B \cdot y \cdot dy, \quad \begin{bmatrix} P_x \\ \theta_z \end{bmatrix} := \text{Find}(P_x, \theta_z).$$

Итак, значения остаточной продольной силы и угловой деформации соответственно равны

$$P_x = 15.716 \cdot \text{kN}, \quad \theta_z = -0.012 \cdot \text{deg},$$

что приводит к остаточным напряжениям $\sigma_x(y)$ с учетом продольной силы P_x , описываемым уравнением

$$\sigma_x(y) := \sigma_{x13}(\Delta_0, \theta_z, y) - \frac{P_x}{B \cdot H}. \quad (2.23)$$

Без учета продольной силы P_x получаем, что соответствует условию $M_z = 0$,

$$\sigma_{33}^x(y) := \sigma_{x13}(\Delta_0, \theta_{z,y}). \quad (2.24)$$

Графические зависимости для (2.23) и (2.24) показаны на рис. 2.10 вместе с температурно-силовыми напряжениями по (2.19).

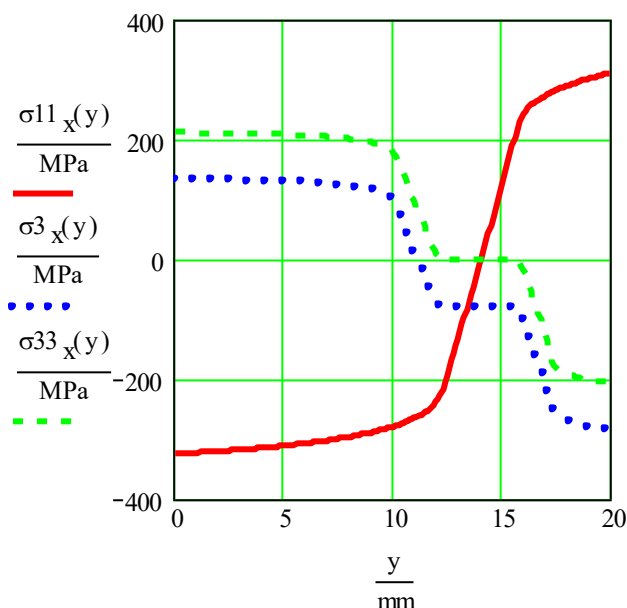


Рис. 2.11

Задача решена в упругопластической постановке при температуре $T_0 = 500 \cdot \text{K}$. В качестве материала балки задан материал, одинаково сопротивляющийся растяжению и сжатию. Для получения решения в упругой области поведения материала балки достаточно ввести значение T_0 , при котором напряжения не будут превышать истинный предел текучести при растяжении.

3. УПРАВЛЯЕМЫЙ ОПЕРАТОР ПЕРЕХОДА. ОБОБЩЕННАЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТЬ

Допустим, что мы имеем две функции, $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Оператор, позволяющий записать третью функцию $y_3(x)$, обеспечивающий переход от $y_1(x)$ к $y_2(x)$ в окрестности некоторой координаты x_{12} , имеет следующий вид [1]:

$$y_3(x, x_{12}, n) = \frac{y_1(x) + y_2(x) \cdot M}{1 + M}, \quad (3.1)$$

где M - параметр, изменяющийся от 0 до ∞ .

Например, можно связать параметр M с аргументом x , обеспечить его быстрый рост от 0 до ∞ , а также отнормировать его к координате перехода. Этим требованиям отвечают математические конструкции

$$M = \left(\frac{x}{x_{12}} \right)^n, \quad (3.2)$$

$$M = \exp(x - x_{12})^n, \quad (3.3)$$

и ряд других. Требуется только обеспечить быстрый и монотонный рост M .

С учетом (3.2) или (3.3) оператор (3.1) приобретает вид

$$y_3(x, x_{12}, n) = \frac{y_1(x) + y_2(x) \cdot \left(\frac{x}{x_{12}} \right)^n}{1 + \left(\frac{x}{x_{12}} \right)^n}, \quad (3.4)$$

или

$$y_3(x, x_{12}, n) = \frac{y_1(x) + y_2(x) \cdot \exp(x - x_{12})^n}{1 + \exp(x - x_{12})^n}, \quad (3.5)$$

где n - параметр, управляющий скоростью гладкого перехода от $y_1(x)$ к $y_2(x)$ в окрестности координаты x_{12} .

Операторы (3.4) и (3.5) могут применяться многократно, обеспечивая последовательную цепную связь между последовательно используемыми соприкасающимися функциями. Например, оператор

$$y_4(x, x_{12}, n_1, x_{34}, n_2) = \frac{y_3(x, x_{12}, n_1) + y_4(x) \cdot \left(\frac{x}{x_{34}}\right)^{n_2}}{1 + \left(\frac{x}{x_{34}}\right)^{n_2}} \quad (3.6)$$

обеспечивает переход от функции (3.5) к некоторой другой функции $y_4(x)$.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть

$$y_1(x) := x^2, \quad (3.7)$$

$$y_2(x) := 6 - x. \quad (3.8)$$

Тогда функция $y_3(x, x_{12}, n)$, гладко соединяющая функции (3.7) и (3.8), будет записана как

$$y_3(x, x_{12}, n) := \frac{x^2 + (6 - x) \cdot \left(\frac{x}{x_{12}}\right)^n}{1 + \left(\frac{x}{x_{12}}\right)^n}. \quad (3.9)$$

Графические зависимости для функций от (3.7) до (3.9) с различными значениями параметров x_{12} и n показаны на рис. 3.1.

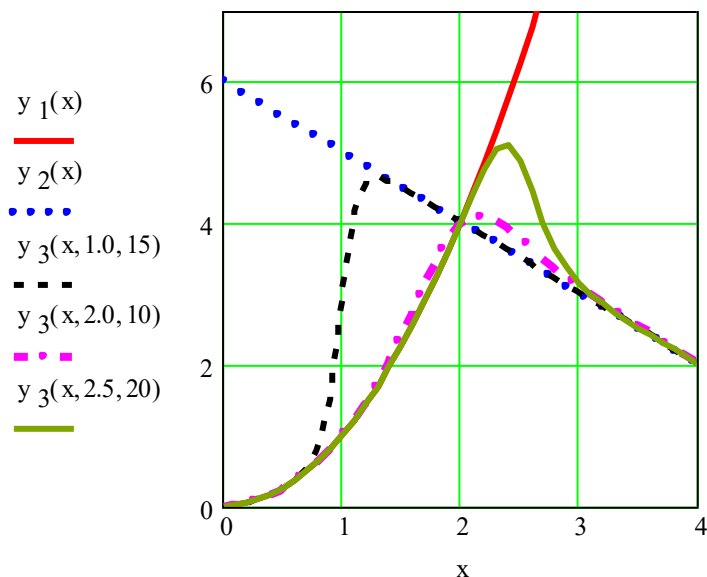


Рис. 3.1

Будем функцию (3.9) называть **обобщенной функцией** по независимой переменной x .

Как следует из рис. 3.1, функция, с которой осуществляется переход, в окрестности x_{12} испытывает влияние функции, на которую делается переход. Имеет место эффект перерегулирования, некий инерционный эффект. Кривая перехода идет над точкой пересечения функций. Отметим, что возможен переход и между "параллельными" кривыми.

Для устранения эффекта перерегулирования осуществим переход между производными $Dy_1(x)$ и $Dy_2(x)$ функций (3.7) и (3.8), а затем проинтегрируем обобщенную функцию перехода.

$$Dy_1(x) := 2 \cdot x, \quad (3.10)$$

$$Dy_2(x) := -1. \quad (3.11)$$

Обобщенная функция перехода между производными (3.10) и (3.11) записывается как (см. рис. 3.2)

$$Dy_3(x, x_{12}, n) := \frac{Dy_1(x) + Dy_2(x) \cdot \left(\frac{x}{x_{12}}\right)^n}{1 + \left(\frac{x}{x_{12}}\right)^n}. \quad (3.12)$$

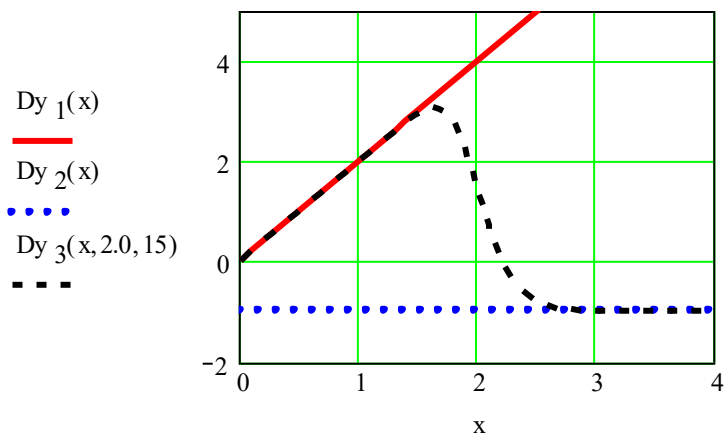


Рис. 3.2

Проинтегрируем (3.12)

$$Y_3(x, x_{12}, n) := \int_0^x Dy_3(z, x_{12}, n) dz. \quad (3.13)$$

График функции (3.14) показан на рис.3.3 совместно с графиками функций (3.7) и (3.8).

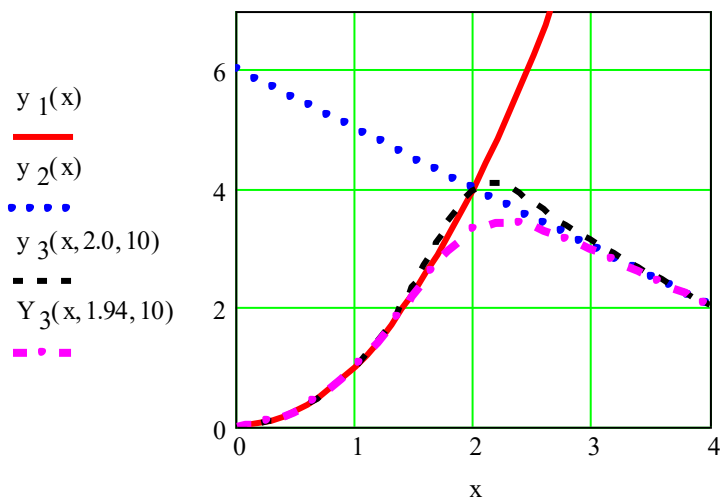


Рис. 3.3

Повторим процедуру с использованием экспоненты (см. рис. 3.4)

$$Dy_{33}(x, x_{12}, n) := \frac{Dy_1(x) + Dy_2(x) \cdot \left(\exp(x - x_{12}) \right)^n}{1 + \left(\exp(x - x_{12}) \right)^n}, \quad (3.14)$$

$$Y_{33}(x, x_{12}, n) := \int_0^x Dy_{33}(z, x_{12}, n) dz. \quad (3.15)$$

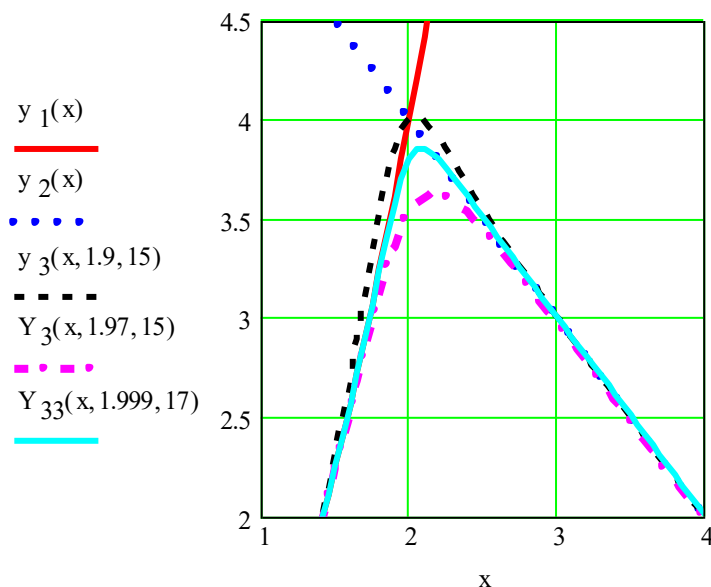


Рис. 3.4

Отметим, что подбором параметров x_{12} и n можно изменять кривизну обобщенных аппроксимирующих функции $Y_3(x, x_{12}, n)$ и $Y_{33}(x, x_{12}, n)$ в области перехода.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Течение тепла через стенку

Обычно распределение температур на границах среда - стенка или на границах раздела сред в первом приближении описывается функциями, имеющими излом на границах [6,16,17]. Это не соответствует физики явления, так как не учитывается взаимное влияние сред друг на друга в области перехода от одной среды на другую. Попробуем устранить это несоответствие с применением оператора перехода типа (3.13).

Толщина стенки $t := 1 \text{ mm}$.

Температура среды слева от стенки $T_1(x) := 5 \cdot K$.

Предположим, что распределение температур по стенке линейное,

$$T_2(x) := 10 \cdot K - 5 \cdot \frac{K}{mm} \cdot x.$$

Температура среды справа от стенки $T_3(x) := 0 \cdot K$.

Распределение температуры от среды к среде через стенку описывается уравнением (рис. 3.5).

$$T_0(x) := \begin{cases} T_1(x) & \text{if } 0 \cdot mm \leq x < 1 \cdot mm \\ T_2(x) & \text{if } 1 \cdot mm \leq x < 2 \cdot mm \\ T_3(x) & \text{if } 2 \cdot mm \leq x \end{cases} \quad (3.16)$$

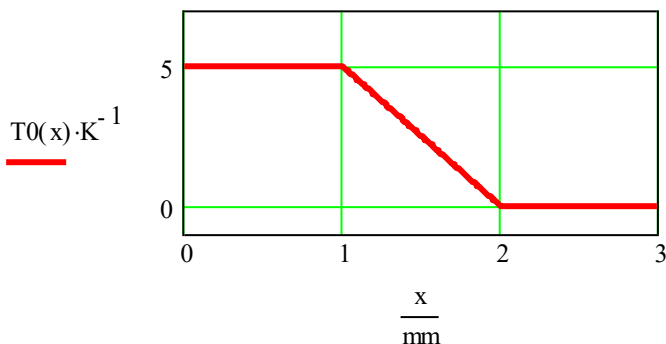


Рис. 3.5

Сгладим углы на границах среда-стенка, чтобы учесть взаимное влияние стенки на среду и обратно. Тогда уравнение для сопряжения производных от температуры по координате будет иметь вид.

$$DT(x, x_1, x_2, n1, n2) := \frac{-5 \cdot \frac{K}{mm} \cdot \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n1}\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{x_2}\right)^{n2}\right]}. \quad (3.17)$$

Интеграл от уравнения (3.17) даст распределение температур. На рис. 3.6 оно показано вместе с кривыми по (3.16) и (3.17).

$$T(x, x_1, t, n1, n2) := \int_0^x DT(z, x_1, t, n1, n2) dz + T_1(x) - T_3(x). \quad (3.18)$$

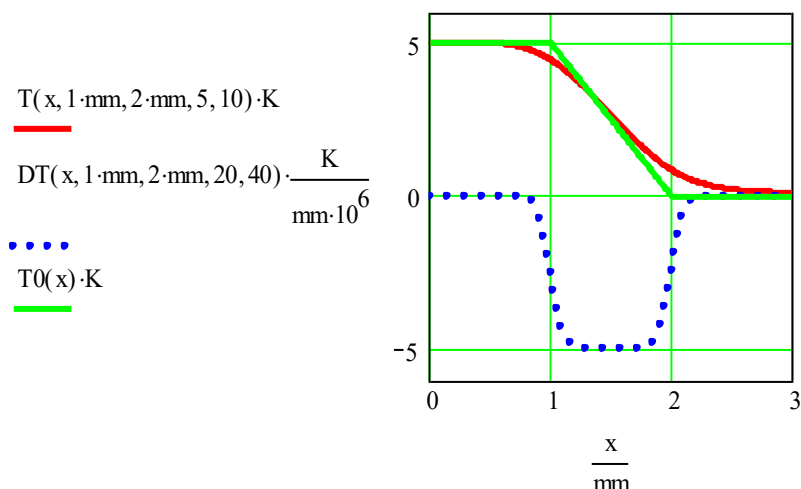


Рис. 3.6

Пример 2. Моделирование несовершенного теплового контакта двух тел

При несовершенном тепловом контакте двух твердых тел в виде пластин, $u_{11}(x)$ и $u_{22}(x)$, возникает разрыв температурных полей [17]. Принимаем, что справа и слева двухслойная пластина омываются теплоносителями. Толщина стенки каждой из соприкасающихся пластин равна 1 мм, суммарная толщина двухслойной пластины равна 2 мм.

Зададим распределение температуры по первой пластине

$$T_{11}(x) := 130 \cdot K - \frac{30 \cdot K}{\text{mm}} \cdot x, \quad (3.19)$$

и распределение температуры по второй пластине

$$T_{22}(x) := 45 \cdot K - \frac{15 \cdot K}{\text{mm}} \cdot x. \quad (3.20)$$

Температура теплоносителя слева от бипластины 100 К.

Температура теплоносителя справа от бипластины 0 К.

Используя Mathcad, запишем функцию для распределения температуры в системе теплоноситель 100·К - двухслойная пластина - теплоноситель 0 К с разрывами производных ,

$$T_{12}(x) := \begin{cases} 100 \cdot \text{К} & \text{if } 0 \cdot \text{мм} \leq x < 1 \cdot \text{мм} \\ T_{11}(x) & \text{if } 1 \cdot \text{мм} \leq x < 2 \cdot \text{мм} \\ T_{22}(x) & \text{if } 2 \cdot \text{мм} \leq x < 3 \cdot \text{мм} \\ 0 \cdot \text{К} & \text{if } x \geq 3 \cdot \text{мм} \end{cases} \quad . \quad (3.21)$$

С применением операторов перехода типа (3.4) распределение температуры в системе теплоноситель 100·К - двухслойная пластина - теплоноситель 0 К приобретает иной вид в виде гладкой функции

$$T_{33}(x, n1, n2, n3) := \frac{100 \cdot \text{К} + T_{11}(x) \cdot \left(\frac{x}{1 \cdot \text{мм}} \right)^{n1}}{1 + \left(\frac{x}{1 \cdot \text{мм}} \right)^{n1}} + T_{22}(x) \cdot \left(\frac{x}{2 \cdot \text{мм}} \right)^{n2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x}{2 \cdot \text{мм}} \right)^{n2} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{3 \cdot \text{мм}} \right)^{n3} \right]} \quad . \quad (3.22)$$

В этом случае, имея в виду проблему контакта сред, пренебрегаем возмущениями на границах с теплоносителями.

На рис. 3.7 приведены иллюстративные графические зависимости по (3.22) и (3.21). Видно, что в области контакта бесконечная первая производная (скачок температуры), заменяется на гладкую кривую.

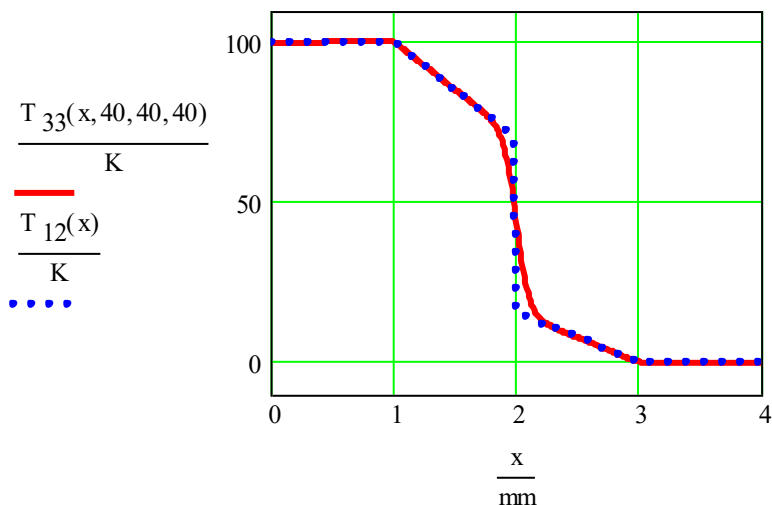


Рис. 3.7

Пример 3. Обобщенная теплопроводность

Даны конкретные тепломеханические свойства некоторых материалов - алюминий, железо, титан [18], где λ - коэффициент теплопроводности, c_p - удельная теплоемкость, ρ - плотность.

Коэффициенты температуропроводности a , входящие в дифференциальные уравнения теплопроводности, вычисляются как

$$a = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}. \quad (3.23)$$

Плотности:

$$\rho_{Al} := 2767 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \rho_{Fe} := 7754 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \rho_{Ti} := 4428 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Коэффициенты теплопроводности:

$$\lambda_{Al} := 111.6 \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{hr} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}, \quad \lambda_{Fe} := 32.74 \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{hr} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}, \quad \lambda_{Ti} := 14.88 \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{hr} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}.$$

Теплоемкости:

$$c_{p \text{ Al}} := 0.22 \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \quad c_{p \text{ Fe}} := 0.16 \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \quad c_{p \text{ Ti}} := 0.15 \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

Коэффициенты температуропроводности равны

$$a_{\text{Al}} = 0.183 \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{hr}}, \quad a_{\text{Fe}} = 0.026 \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{hr}}, \quad a_{\text{Ti}} = 0.022 \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{hr}}.$$

Коэффициент температуропроводности a может изменяться как вдоль стержня, так и поперек многослойной пластины, т.е. возникает зависимость a от пространственного параметра, координаты x . Поэтому можно сформировать функцию, описывающую **обобщенную температуропроводность** для данного тела. В нашем случае уравнение для обобщенной температуропроводности трехслойной пластины из железа, алюминия и титана будет следующим:

$$a(x, x_{\text{Fe}}, x_{\text{Al}}, x_{\text{Ti}}, n_{\text{Fe}}, n_{\text{Al}}, n_{\text{Ti}}) := \frac{a_{\text{Fe}} + a_{\text{Al}} \cdot \left(\frac{x}{x_{\text{Fe}}} \right)^{n_{\text{Fe}}} + a_{\text{Ti}} \cdot \left(\frac{x}{x_{\text{Al}}} \right)^{n_{\text{Al}}}}{1 + \left(\frac{x}{x_{\text{Fe}}} \right)^{n_{\text{Fe}}}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x}{x_{\text{Al}}} \right)^{n_{\text{Al}}} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{x_{\text{Ti}}} \right)^{n_{\text{Ti}}} \right]}. \quad (3.24)$$

Для записи уравнения (3.24) принято, что начало координат находится на левой стороне трехслойной пластины. На рис. 3.8 показан гладкий график функций (3.24) - график **обобщенной температуропроводности** в зависимости от пространственной координаты.

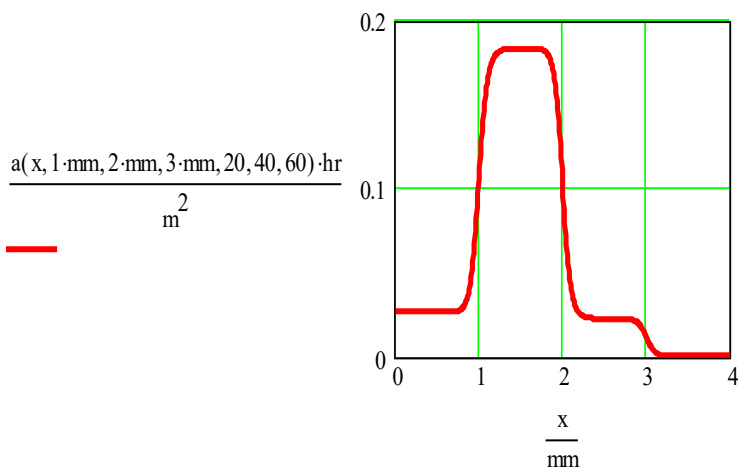


Рис. 3.8

Заметим, что обобщенная температуропроводность описывается функцией, гладкой и неоднократно дифференцируемой, что весьма важно для построения соответствующих моделей процессов распространения тепла [19]. Причем в этом случае расширено понятие оператора перехода (3.1) - показана возможность управления по временной или пространственной координате физическими процессами, функционально не связанными со временем или координатой.

4. ОБОБЩЕННАЯ ДИАГРАММА ДЕФОРМИРОВАНИЯ. БИМЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА

В разделе 3 оператор (3.1) опирается на величину (функцию) M . Эта величина M не обязательно должна быть связана по переменной x с некоторыми функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ этой же переменной. Величина M может быть функцией некоторой глобальной переменной, в первую очередь функцией времени или функцией параметра пространства в декартовой системе координат. Например, при

$$M(z, z_0, n) := \left(\frac{z}{z_0} \right)^n, \quad (4.1)$$

математическая структура (3.1) превратится в

$$Y(z, z_0, x, n) = \frac{y_1(x) + y_2(x) \cdot \left(\frac{z}{z_0} \right)^n}{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^n}, \quad (4.2)$$

где пространственный, временной или некий иной параметр z управляет процессами в виде функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ с переходом от $y_1(x)$ к $y_2(x)$ при $z = z_0$.

Применительно к нашим задачам мы будем рассматривать функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ как диаграммы деформирования $\sigma_1(\varepsilon)$ и $\sigma_2(\varepsilon)$, плавный переход от первой $\sigma_1(\varepsilon)$ на вторую $\sigma_2(\varepsilon)$ происходит в окрестности $z = z_0$ со скоростью, зависящей от параметра n .

Для начала сформируем диаграммы деформирования трех модельных материалов в соответствии с разделом 2 и уравнениями (2.5 - 2.8). Физико-механические свойства материалов и расчетные параметры диаграмм растяжения - сжатия приведены ниже.

Первый материал.

Физико-механические свойства:

$$E_1 = 1 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}, \quad \alpha_{11} := 15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{К}}, \quad \varepsilon_{1y} = 1.2 \cdot 10^{-3},$$
$$\sigma_{1y} := 120 \cdot \text{МПа}, \quad \sigma_{10.2} = 200 \cdot \text{МПа}, \quad \sigma_{1b} = 550 \cdot \text{МПа},$$
$$\varepsilon_{1p} = 0.05.$$

Параметры диаграммы деформирования:

$$a_1 = 2.26 \cdot 10^3 \cdot \text{МПа}, \quad b_1 = 1.14 \cdot 10^{-3},$$
$$c_1 = 109.132 \cdot \text{МПа}, \quad n_1 = 0.549.$$

Второй материал.

Физико-механические свойства:

$$E_2 = 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}, \quad \alpha_{22} := 11 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{К}}, \quad \varepsilon_{2y} = 1.5 \cdot 10^{-3},$$
$$\sigma_{2y} := 300 \cdot \text{МПа}, \quad \sigma_{20.2} = 400 \cdot \text{МПа}, \quad \sigma_{2b} = 700 \cdot \text{МПа},$$
$$\varepsilon_{2p} = 0.07.$$

Параметры диаграммы деформирования:

$$a_2 = 1.11 \cdot 10^3 \cdot \text{МПа}, \quad b_2 = 1.431 \cdot 10^{-3},$$
$$c_2 = 260.148 \cdot \text{МПа}, \quad n_2 = 0.347.$$

Третий материал.

Физико-механические свойства:

$$E_3 = 3.5 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}, \quad \alpha_{33} := 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{К}}, \quad \varepsilon_{3y} = 1 \cdot 10^{-3},$$
$$\sigma_{3y} := 350 \cdot \text{МПа}, \quad \sigma_{30.2} = 500 \cdot \text{МПа}, \quad \sigma_{3b} = 900 \cdot \text{МПа},$$
$$\varepsilon_{3p} = 0.04.$$

Параметры диаграммы деформирования:

$$a_3 = 2.204 \cdot 10^3 \cdot \text{МПа}, \quad b_3 = 9.615 \cdot 10^{-4},$$
$$c_3 = 317.518 \cdot \text{МПа}, \quad n_3 = 0.415.$$

Аналитические выражения для диаграмм растяжения - сжатия, при условии равенства механических свойств материалов при растяжении и сжатии, записаны с использованием уравнения

$$\sigma_x(\varepsilon) = \begin{cases} -\sigma_2(|-\varepsilon|, a, b, c, n) & \text{if } \varepsilon < -\varepsilon_y \\ \sigma_1(\varepsilon) & \text{if } -\varepsilon_y \leq \varepsilon < \varepsilon_y \\ \sigma_2(\varepsilon, a, b, c, n) & \text{if } \varepsilon \geq \varepsilon_y \end{cases} \quad (4.3)$$

где

$$\sigma_1(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon, \quad (4.4)$$

$$\sigma_2(\varepsilon, a, b, c, n) = a \cdot (\varepsilon - b)^n + c. \quad (4.5)$$

Поочередно подставляя в (4.3 - 4.5) данные для трех материалов, получаем диаграммы деформирования $\sigma_{x1}(\varepsilon)$, $\sigma_x(\varepsilon)$ и $\sigma_{x3}(\varepsilon)$, показанные на рис. 4.1.

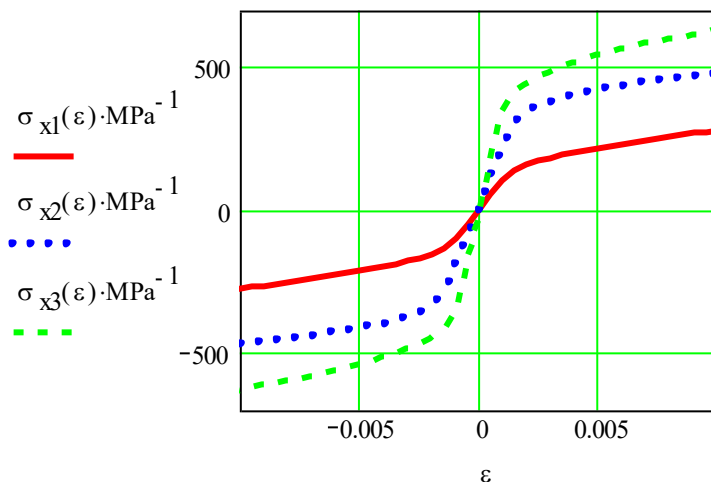


Рис. 4.1

Заметим, что решения уравнений (2.5 - 2.8) может быть не найдено, так как заданные условия сопряжения весьма жесткие. Но если снять требование на предел прочности и рассматривать деформационное упрочнение n как задаваемый управляющий

параметр, то вероятность получения гладкого аналитического описания диаграммы при малых значениях относительной деформации ϵ существенно увеличивается.

Объединим три диаграммы по толщине пластины, т.е. создадим **обобщенную диаграмму деформирования** для трехслойной пластины (рис. 4.2) в соответствии с (4.2). Отметим при этом, что обычная диаграмма представляет собой поверхность, а обобщенная диаграмма - поверхность с дополнительными изгибами в области переходов.

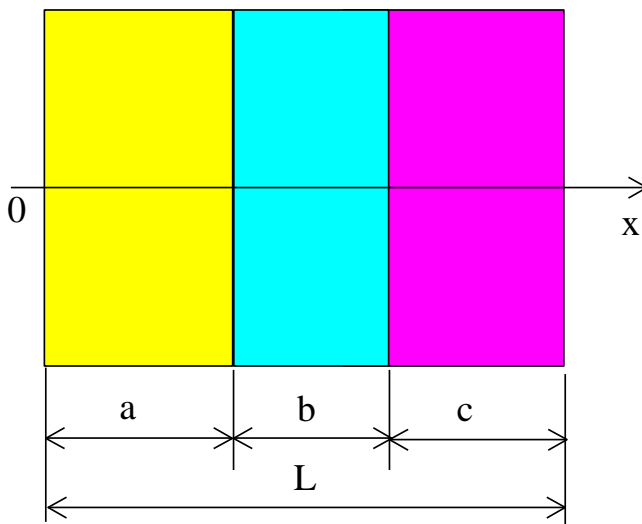


Рис. 4.2

Для трехслойной пластины, полная толщина которой равна L , получаем формулу для обобщенной диаграммы растяжения - сжатия при условии, что координата x изменяется в пределах толщины и начало координат лежит на левой стороне пластины в соответствии с рис. 4.2.

$$\sigma(x, \varepsilon, a, b, n1, n2) := \frac{\sigma_{x1}(\varepsilon) + \sigma_{x2}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{n1}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^{n1}} + \sigma_{x3}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{a+b}\right)^{n2} \cdot (4.6)$$

$$1 + \left(\frac{x}{a+b}\right)^{n2}$$

Здесь a - толщина левого слоя пластины, b - толщина среднего слоя и c - толщина правого слоя, как показано на рис.4.2. Координата x "командует" выбором диаграммы, как показано на рис. 4.3.

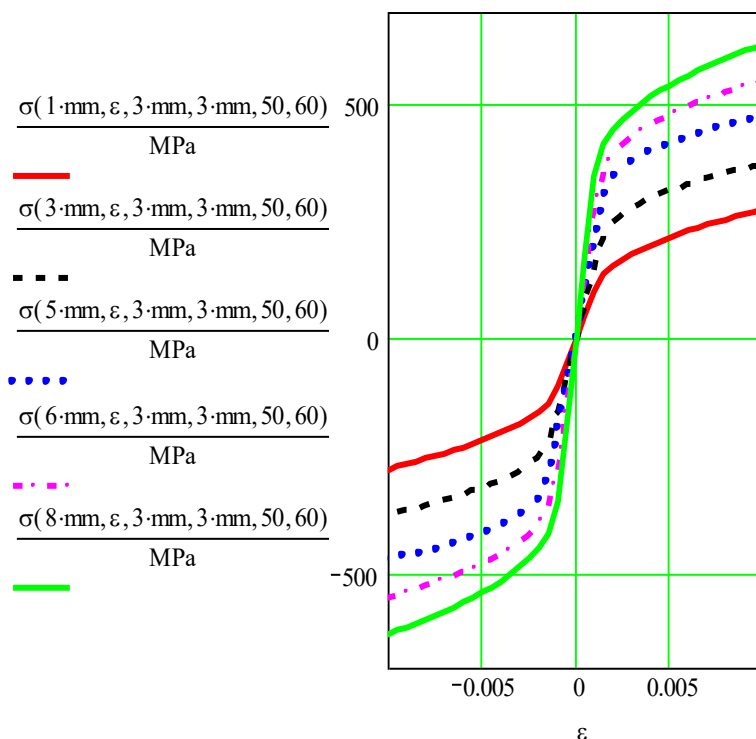


Рис. 4.3

Сопоставление рис. 4.1 и рис. 4.3 показывает, что на рис. 4.3. появились промежуточные диаграммы деформирования, соответствующие плавному переходу от первого слоя ко второму и затем от второго к третьему.

Пример. Биметаллическая пластина

Биметаллическая пластина имеет вид консольной балки нагретой до температуры ΔT (рис .4.4). Требуется найти напряжения при нагреве и после охлаждения балки.

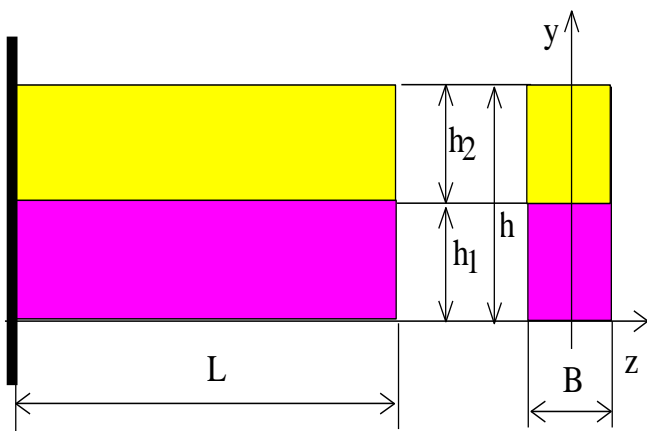


Рис. 4.4

Геометрические размеры балки:

$$L := 100 \cdot \text{mm}, B := 10 \cdot \text{mm}, h_1 := 2 \cdot \text{mm}, h_2 := 2 \cdot \text{mm}, h = 4 \cdot \text{mm}.$$

Изменение температуры балки $\Delta T := 500 \cdot \text{K}$.

Выберем два материала для балки из трех рассмотренных, например второй и третий. Для удобства расчетов переобозначим диаграммы и другие величины.

$$\sigma_1(\varepsilon) := \sigma_{x2}(\varepsilon), \quad \sigma_2(\varepsilon) := \sigma_{x3}(\varepsilon),$$

$$\alpha_1 := \alpha_{22}, \quad \alpha_2 := \alpha_{33},$$

$$\varepsilon_{1y} := \varepsilon_{2y}, \quad \varepsilon_{2y} := \varepsilon_{3y},$$

$$\sigma_{1y} := \sigma_{2y}, \quad \sigma_{2y} := \sigma_{3y}.$$

Обобщенная диаграмма растяжения - сжатия для биметаллической пластины будет иметь вид

$$\sigma_x(y, \varepsilon) := \frac{\sigma_1(\varepsilon) + \sigma_2(\varepsilon) \cdot \left(\frac{y}{h_1}\right)^{50}}{1 + \left(\frac{y}{h_1}\right)^{50}}. \quad (4.7)$$

Уравнения для обобщенного коэффициента линейного теплового расширения $\alpha(y)$, обобщенного предела текучести $\sigma_y(y)$ и обобщенной относительной деформации текучести $\varepsilon_y(y)$ запишем, соответственно как:

$$\alpha(y) := \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{y}{h_1}\right)^{50}}{1 + \left(\frac{y}{h_1}\right)^{50}}, \quad (4.8)$$

$$\sigma_y(y) := \frac{\sigma_{1y} + \sigma_{2y} \cdot \left(\frac{y}{h_1}\right)^{50}}{1 + \left(\frac{y}{h_1}\right)^{50}}, \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_y(y) := \frac{\varepsilon_{1y} + \varepsilon_{2y} \cdot \left(\frac{y}{h_1}\right)^{50}}{1 + \left(\frac{y}{h_1}\right)^{50}}, \quad (4.10)$$

В процессе температурного нагружения двухслойной балки правое торцевое сечение поворачивается на угол θ и перемещается на Δ_0 .

Относительная деформация волокна ε_1 в общем случае равна

$$\varepsilon_1(y, \Delta_0, \theta) := \frac{\Delta_0 + \theta \cdot y - \alpha(y) \cdot L \cdot \Delta T}{L}. \quad (4.11)$$

Осевое напряжение σ_{12} как функция y , Δ_0 и θ запишем в следующем виде:

$$\sigma_{12}(y, \Delta_0, \theta) := \sigma_x(y, \varepsilon_1(y, \Delta_0, \theta)). \quad (4.12)$$

В данном случае осевая сила и изгибающий момент равны нулю.

$$P_x := 0 \cdot N, \quad M_z := 0 \cdot J.$$

Вычислим значения Δ_0 и θ , удовлетворяющие уравнениям равновесия, задав их приближенные значения (Mathcad, выделено желтым цветом).

$$\Delta_0 := 0.6 \cdot \text{mm}, \quad \theta := -10 \cdot \text{deg}.$$

Given

$$\int_0^h \sigma_{12}(y, \Delta_0, \theta) \cdot B \cdot dy = P_x,$$

$$\int_0^h \sigma_{12}(y, \Delta_0, \theta) \cdot B \cdot y \cdot dy = M_z, \quad \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \theta \end{bmatrix} := \text{Find}(\Delta_0, \theta).$$

Итак,

$$\Delta_0 = 0.663 \cdot \text{mm}, \quad \theta = -11.014 \cdot \text{deg}.$$

Зависимости напряжений $\sigma_1(y)$ и деформаций $\varepsilon_1(y)$ от координаты y будут

$$\sigma_1(y) := \sigma_{12}(y, \Delta_0, \theta), \quad (4.13)$$

$$\varepsilon l_x(y) := \frac{\Delta \theta + \theta \cdot y - \alpha(y) \cdot L \cdot \Delta T}{L} . \quad (4.14)$$

Графики этих зависимостей показаны на рис. 4.5 и 4.6, соответственно.

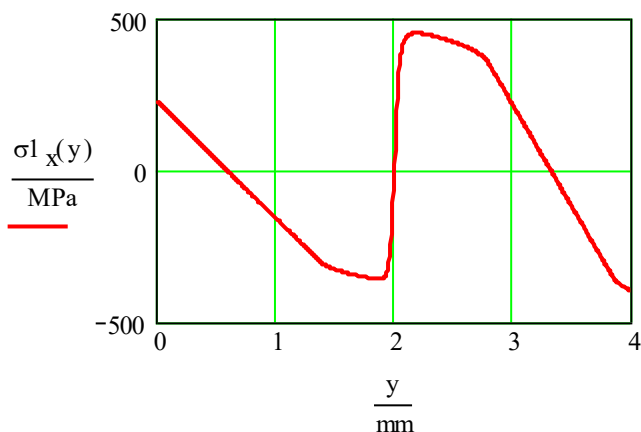


Рис. 4.5

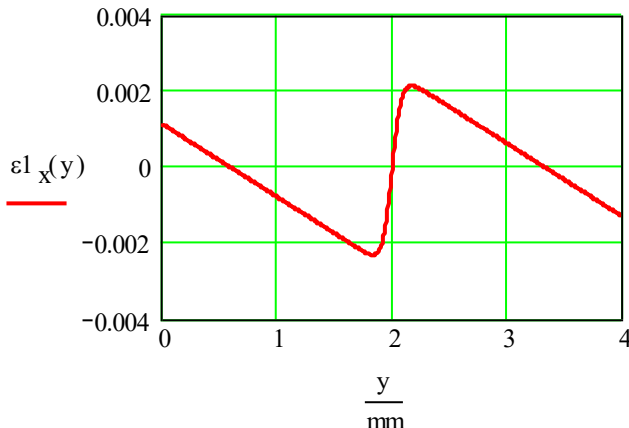


Рис. 4.6

Переходим к процессу разгрузки, т.е. к охлаждению балки. Как следует из рис. 4.5, напряжения при нагреве в некоторых местах сечения балки превышают истинный предел текучести.

Следовательно, требуется перестройка диаграммы растяжения - сжатия к виду, пригодному для расчетов остаточных напряжений в

балке после ее охлаждения. Ниже приводится формула в Mathcad для перестроенной диаграммы с использованием уравнений (4.7), (4.9), (4.10), (4.13) и (4.14).

$$\sigma_{xl}(y,\varepsilon) := \left\{ \begin{array}{l} \text{if } \varepsilon l_x(y) \leq -\varepsilon_y(y) \\ \left| \begin{array}{l} \sigma_x(y,\varepsilon) \text{ if } \varepsilon \leq \varepsilon l_x(y) \\ \sigma_x\left(y,\varepsilon - \varepsilon l_x(y) - \varepsilon_y(y)\right) + \left(\sigma l_x(y) + \sigma_y(y)\right) \text{ if } \varepsilon \geq \varepsilon l_x(y) \end{array} \right. \\ \sigma_x(y,\varepsilon) \text{ if } -\varepsilon_y(y) \leq \varepsilon l_x(y) < \varepsilon_y(y) \\ \text{if } \varepsilon l_x(y) \geq \varepsilon_y(y) \\ \left| \begin{array}{l} \sigma_x\left(y,\varepsilon - \varepsilon l_x(y) + \varepsilon_y(y)\right) + \left(\sigma l_x(y) - \sigma_y(y)\right) \text{ if } \varepsilon < \varepsilon l_x(y) \\ \sigma_x(y,\varepsilon) \text{ if } \varepsilon \geq \varepsilon l_x(y) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(4.15)

На рис. 4.7 показаны перестроенные диаграммы растяжения - сжатия применительно к эпюре напряжений на рис. 4.5.

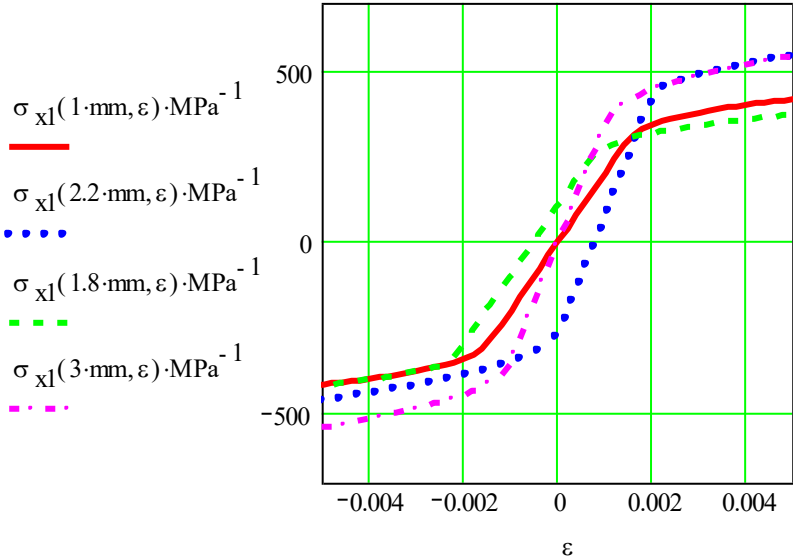


Рис. 4.7

Охладим балку. ΔT := 0·K,

Если уравнение для относительных деформаций оставить в общем виде (4.11)

$$\varepsilon_1(y, \Delta_0, \theta) := \frac{\Delta_0 + \theta \cdot y - \alpha(y) \cdot L \cdot \Delta T}{L},$$

то уравнение для напряжений будет

$$\sigma_{x11}(\Delta_0, \theta, y) := \sigma_{x1}(y, \varepsilon_1(y, \Delta_0, \theta)). \quad (4.16)$$

Для данной балки после охлаждения продольная сила P_x и изгибающий M_z момент равны нулю, а остаточные напряжения сбалансированы.

$$P_x := 0 \cdot \text{kN}, \quad M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}.$$

Найдем значения удлинения Δ_0 и угла поворота правого торца балки θ , удовлетворяющие условиям равновесия. В Mathcad решение будет следующим (выделено желтым цветом).

Зададим приближенные значения Δ_0 и θ .

$$\Delta_0 = 0.663 \cdot \text{mm}, \quad \theta = -11.014 \cdot \text{deg},$$

Given,

$$P_x = \int_0^h \sigma_{x11}(\Delta_0, \theta, y) \cdot B \, dy,$$

$$M_z = \int_0^h \sigma_{x11}(\Delta_0, \theta, y) \cdot B \cdot y \, dy, \quad \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \theta \end{bmatrix} := \text{Find}(\Delta_0, \theta).$$

Итак, остаточное состояние балки характеризуется следующими значениями линейного и углового перемещений

$$\Delta_0 = 4.239 \cdot 10^{-3} \cdot \text{mm}, \quad \theta = 0.065 \cdot \text{deg},$$

при остаточных напряжениях, описываемых уравнением

$$\sigma_2(x, y) := \sigma_{x11}(\Delta_0, \theta, y). \quad (4.17)$$

Эта зависимость остаточного напряжения $\sigma_2(y)$ при $\Delta T = 0$ К приведена на рис. 4.8 вместе с исходной эпюрой напряжений $\sigma_1(y)$.

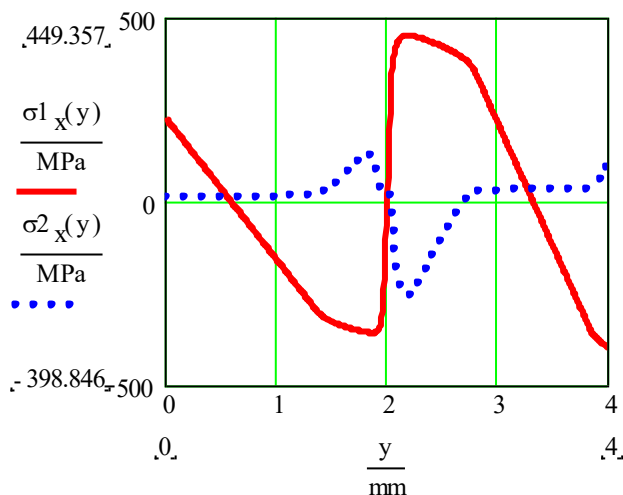


Рис. 4.8

В данном случае остаточные напряжения не превышают напряжений текучести σ_y . Нижеследующие интегралы близки к нулю,

$$\int_0^h \sigma_2(y) \cdot B dy = 1.364 \cdot 10^{-4} \cdot N,$$

$$\int_0^h \sigma_2(y) \cdot B \cdot y dy = 4.075 \cdot 10^{-7} \cdot J.$$

т.е. остаточные напряжения самоуравновешены.

5. ПРЯМОЙ МЕТОД СЕТОК

Переходим к решению задач теплопроводности. Уравнение теплопроводности при постоянных теплофизических свойствах среды имеет следующий вид [16, 19, 20].

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \frac{dQ}{dt}, \quad (5.1)$$

где T - температура среды, t - время, x - координата точки,

Q - количество выделяемого тепла в единице объема, $\frac{\text{kcal}}{\text{m}^3}$,

λ - коэффициент теплопроводности, $\frac{\text{kcal}}{\text{hr} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}$, c - удельная

теплоемкость, $\frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, ρ - плотность, $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Введя понятие коэффициента температуропроводности a , $\frac{\text{m}^2}{\text{hr}}$,

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}, \quad (5.2)$$

и температуру тепловыделения в единицу времени в

$$dTq = \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot dQ, \quad (5.3)$$

преобразуем уравнение (5.1) к виду

$$\frac{dT}{dt} = a \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{dTq}{dt}. \quad (5.4)$$

Представим уравнение (5.4) в конечно-разностном виде. Индекс i - относится к шагу по координате, индекс j - к шагу по времени:

i - координата точки, x , j - время, t .

Приращение температуры по координате i в момент времени j .

$$dT = T_{i+1,j} - T_{i,j}, \quad dt = \Delta t, \quad dx = \Delta x.$$

Приращение температуры второго порядка по координате i в момент времени j .

$$d^2 T = (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - (T_{i,j} - T_{i-1,j}) = T_{i+1,j} - 2 \cdot T_{i,j} + T_{i-1,j}$$

Приращение температуры от внутреннего выделения тепла за интервал времени Δt по координате i .

$$dT = T_{i,j+1} - T_{i,j}, \quad dTq = (\Delta Tq_{i,j+1} - \Delta Tq_{i,j}) = \Delta Tq$$

В результате преобразований уравнение (5.4) приобретает вид

$$T_{i,j+1} = \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot (T_{i+1,j} - 2 \cdot T_{i,j} + T_{i-1,j}) + T_{i,j} + \Delta Tq, \quad (5.5)$$

или

$$T_{i,j+1} = \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + T_{i,j} \cdot \left[1 - 2 \cdot \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] + \Delta Tq. \quad (5.6)$$

До начала вычислений по (5.5) задают значение шага по времени Δt и шага по координате Δx . Эти значения нужно выбирать так, чтобы удовлетворить условию

$$\frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (5.7)$$

иначе при расчетах возникает турбулентность (неустойчивость и колебания). Нужно, чтобы шаг по времени Δt при заданном значении Δx был равен

$$\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot a}. \quad (5.8)$$

Доказано [16, 19, 20], что если

$$\frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{6}, \quad (5.9)$$

погрешность расчетов существенно уменьшается. При этом Δx и Δt будут связаны квадратичной зависимостью следующим образом

$$\Delta x = \sqrt{6 \cdot a \cdot \Delta t}, \quad \Delta t = \frac{1}{6 \cdot a} \cdot (\Delta x)^2.$$

При уменьшении шага по координате Δx требуется снижении шага по времени Δt .

В том случае, когда коэффициент температуропроводности a зависит от координаты x , уравнение (5.1) принимает форму

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dx} a \cdot \frac{dT}{dx} + \frac{dTq}{dt}, \quad (5.10)$$

или

$$\frac{dT}{dt} = \frac{da}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} + a \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{dTq}{dt}. \quad (5.11)$$

Для представления уравнения (5.11) в конечно-разностном виде

$$da = a_{i+1} - a_i,$$

и

$$T_{i,j+1} = \Delta t \cdot \left[\frac{a_{i+1} - a_{i,j}}{\Delta x} \cdot \left(\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \right) + \frac{a_i}{\Delta x^2} \cdot (T_{i+1,j} - 2 \cdot T_{i,j} + T_{i-1,j}) \right] + T_{i,j} + \Delta Tq$$

В результате имеем

$$T_{i,j+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \cdot [a_{i+1} \cdot (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - a_i \cdot (T_{i,j} - T_{i-1,j})] + T_{i,j} + \Delta Tq, \quad (5.12)$$

при условии сходимости решения

$$a_{i+1} \cdot (T_{i+1,j} - T_{i,j}) > a_i \cdot (T_{i,j} - T_{i-1,j}). \quad (5.13)$$

Если коэффициент температуропроводности a может быть представлен в виде гладкой дифференцируемой функции $a(t)$, например, функции (3.24), построенной с использованием оператора перехода в разделе 3, то конечно-разностное уравнение (5.12)

преобразуется.

$$T_{i,j+1} = (T_{i+1,j}) \cdot \left[\left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \Delta t + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] \dots \quad (5.14)$$

$$+ T_{i,j} \cdot \left[1 - \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \Delta t - 2 \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] + T_{i-1,j} \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} + \Delta Tq$$

Условие сходимости решения

$$\Delta t \cdot \left[\left(\frac{da}{dx} \right)_i + 2 \cdot \frac{a_i}{(\Delta x_i)^2} \right] < 1. \quad (5.15)$$

Численное решение уравнения теплопроводности (5.1) методом сеток предусматривает обеспечение условий сходимости при назначении шага по координате и шага по времени. Это обязательная неперенная операция, которая должна предшествовать процессу численного решения уравнения теплопроводности в соответствии в принятыми начальными и краевыми условиями.

Преимущество гладкой функции перехода состоит в том, что имеются гладкие дифференцируемые соотношения, допускающие анализ для назначения шагов по времени и по координате. Можно так подобрать параметр перехода, что максимальное значение производной не будет участвовать в процессе решения.

6. ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОГРАММЫ

Прежде чем переходить к верификации предложенной ниже программы в Mathcad для численного решения уравнений теплопроводности методом сеток, преобразуем конечно-разностное уравнение (5.6) из раздела 5

$$u_{i,j+1} = \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + u_{i,j} \cdot \left[1 - 2 \cdot \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] + \Delta Tq. \quad (6.1)$$

Для этого примем, что

$$\Delta Tq = 0, \quad \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{6}, \quad a := 1, \quad \Delta x = \frac{1}{10}, \quad \Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{6 \cdot a} = \frac{1}{600}.$$

В результате уравнение (6.1) приобретает вид

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} \cdot (u_{i-1,j} + 4 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}). \quad (6.2)$$

Пример 1. Сопоставление численных решений

Воспроизведем решение задачи из [20], пример 1. Требуется найти решение задачи теплопроводности (6.2) для бесконечной пластины при следующих начальных и краевых условиях.

$$u(x, 0) = 4 \cdot x \cdot (1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6.3)$$

$$u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (6.4)$$

Толщина пластины $L := 1$.

Число шагов по координате x : $n := 10$, $i := 0..n$, $\Delta x := \frac{L}{10}$.

Число шагов по координате t : $k := 1000$, $j := 0..k$, $\Delta t := \frac{1}{600}$.

Векторы координат и времени:

$$x_i := \Delta x \cdot i, \quad t_j := \Delta t \cdot j.$$

Вектор начальных условий

$$u(x) := 4 \cdot x \cdot (1 - x), \quad v_i := u(x_i),$$

Все сформированные векторы показаны ниже.

v =		0	x =		0	t =		0
	0	0		0	0		0	0
	1	0.36		1	0.1		1	$1.667 \cdot 10^{-3}$
	2	0.64		2	0.2		2	$3.333 \cdot 10^{-3}$
	3	0.84		3	0.3		3	$5 \cdot 10^{-3}$
	4	0.96		4	0.4		4	$6.667 \cdot 10^{-3}$
	5	1		5	0.5		5	$8.333 \cdot 10^{-3}$
	6	0.96		6	0.6		6	0.01
	7	0.84		7	0.7		7	0.012
	8	0.64		8	0.8		8	0.013
	9	0.36		9	0.9		9	0.015
	10	0		10	1		10	0.017

Численное решение уравнения (6.2) дало следующий результат [20],
(матрица TDem)

Tdem :=	0	0	0	0	0	0	0
	0.360	0.347	0.336	0.326	0.317	0.309	0.302
	0.640	0.627	0.613	0.600	0.588	0.576	0.564
	0.840	0.837	0.813	0.800	0.787	0.774	0.761
	0.960	0.947	0.933	0.920	0.907	0.894	0.881
	1.000	0.987	0.973	0.960	0.947	0.934	0.921
	0.960	0.947	0.933	0.920	0.907	0.894	0.881
	0.840	0.827	0.813	0.800	0.787	0.774	0.761
	0.640	0.627	0.613	0.600	0.588	0.567	0.564
	0.360	0.347	0.336	0.366	0.317	0.309	0.302
	0	0	0	0	0	0	0

В матрице Tdem столбцы отражают изменение температуры через промежутки Δx по координате x , строки - изменение температуры во времени t через промежутки времени Δt .

В программе для решения уравнения теплопроводности (6.2) прямым методом сеток использована рекурсивная методика вычислений, когда следующий столбец матрицы вычисляется на основе данных предыдущего столбца.

В программе (Mathcad), приведенной ниже и выделенной желтым цветом, k - число шагов по времени t , n - число шагов по координате x . В теле программы могут использоваться векторы, предварительно заданные вне программы. В данном случае используется вектор v .

$$S(k, n) := \begin{array}{l} u \leftarrow v \\ \text{for } j \in 1..k \\ \quad \text{for } i \in 0..n \\ \quad \quad A_{i,0} \leftarrow v_i \\ \quad \quad z_i \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } i=0 \\ \frac{1}{6} \cdot (u_{i-1} + 4 \cdot u_i + u_{i+1}) & \text{if } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{if } i=n \end{cases} \\ \quad \quad A_{i,j} \leftarrow z_i \\ \quad u \leftarrow z \\ A \end{array} \quad (6.5)$$

Результатом вычислений по (6.5) является матрица Td .

$$Td := S(6, 10).$$

Сравнение матриц Td и $Tdem$ показывает, что они совпадают с точностью до третьего знака после запятой.

Изменим значения k . Получим матрицу результатов вычислений T , содержащую 300 столбцов при 10 строках.

$$T := S(300, 10), \quad TT := T^T.$$

$T_d =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.36	0.347	0.336	0.326	0.317	0.31	0.302
2	0.64	0.627	0.613	0.6	0.588	0.576	0.564
3	0.84	0.827	0.813	0.8	0.787	0.774	0.761
4	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907	0.893	0.88
5	1	0.987	0.973	0.96	0.947	0.933	0.92
6	0.96	0.947	0.933	0.92	0.907	0.893	0.88
7	0.84	0.827	0.813	0.8	0.787	0.774	0.761
8	0.64	0.627	0.613	0.6	0.588	0.576	0.564
9	0.36	0.347	0.336	0.326	0.317	0.31	0.302
10	0	0	0	0	0	0	0

Дадим графический анализ результатов вычислений. На рис. 6.1 показано, как изменяется профиль поля температур во время охлаждения пластины.

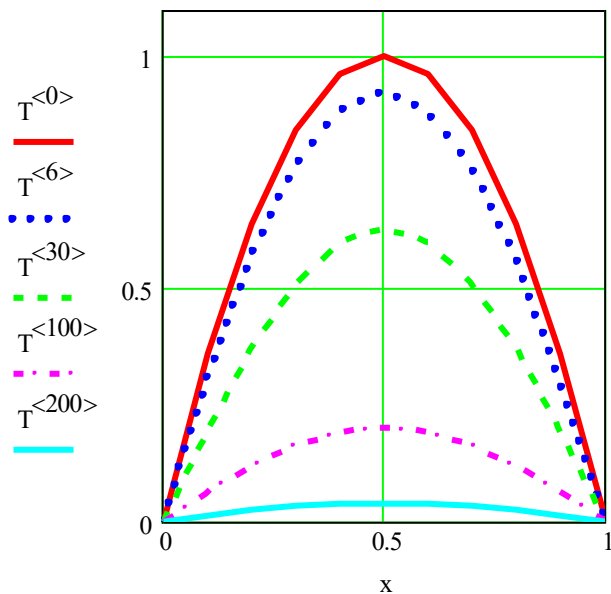


Рис. 6.1

Рис. 6.2 отражает процесс падения температур в трех выбранных точках.

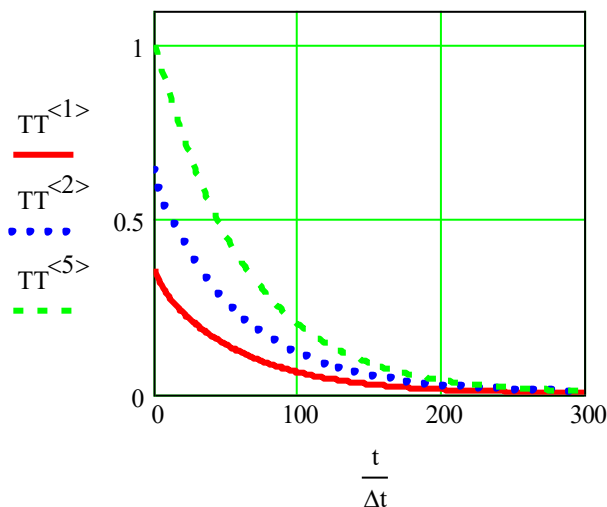


Рис. 6.2

Пример 2. Сопоставление численного решения с аналитическим. Охлаждение стенки.

В [16] приведено аналитическое решение задачи об остывании стенки (уравнение теплопроводности (6.2)) при следующих начальных и граничных условиях.

$$\begin{aligned}
 L &= 1, \quad T_0 := 200, \quad a := 1, \\
 u_1(x) &:= T_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \quad \text{при } t=0, \\
 u_1 &= 0 \quad \text{при } x=0, \quad u_1 = 0 \quad \text{при } x=L.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Начальные условия несколько отличаются от (6.3), но имеется аналитическое решение задачи.

$$Tt(x, t) := T_0 \cdot \exp\left(-\pi^2 \cdot \frac{a \cdot t}{L^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right). \tag{6.7}$$

Переходим к численному решению задачи. Запишем вектор начальных условий

$$v_i := u_1(x_i).$$

Для решения задачи остывания стенки воспользуется программой (6.5)

Результат решения - матрица T_1 - 300 столбцов и 10 строк,

$$T_1 := S(300, 10).$$

На рис. 6.3. сопоставлены численные решения (точки) с теоретическим решением - сплошная кривая.

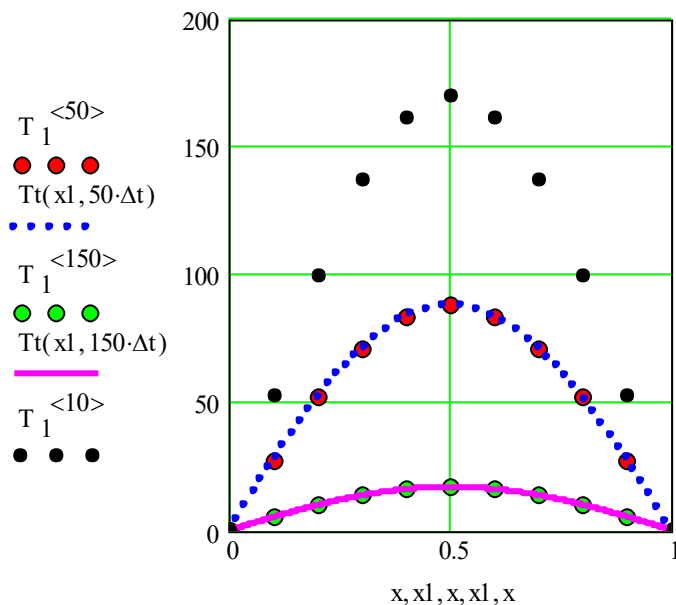


Рис. 6.3

Как видно из рис. 6.3, расчетные точки, полученные методом сеток, ложатся на расчетные кривые по (6.7).

Пример 3. Сопоставление численного решения с аналитическим. Одностороннее остывание равномерно нагретой пластины

Аналитическое решение задачи об одностороннем остывании стенки [16] (уравнения теплопроводности (6.2)) при следующих начальных и граничных условиях.

$$u_2(x) := T_0 \text{ при } t=0, \quad (6.8)$$

$$u_2 = T_0 \text{ при } x=0, \quad u_2 = 0 \text{ при } x=L$$

Решение [16] имеет вид

$$Tlt(x,t) := T_0 \cdot \frac{L-x}{L} - 2 \cdot \frac{T_0}{\pi} \cdot \sum_{j=1}^{200} \frac{(-1)^j}{j} \cdot \exp \left[-(j)^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{a \cdot t}{L^2} \right] \cdot \sin \left(j \cdot \frac{\pi \cdot x}{L} \right), \quad (6.9)$$

Вектор начальных условий для решения задачи методом сеток:

$$v_i := T_0.$$

Нижеследующая программа, используемая для расчетов, отличается от (6.5) только граничными условиями, т.е. T_0 вместо 0.

$$S(k,n) := \begin{array}{|l} u \leftarrow v \\ \text{for } j \in 1..k \\ \quad \text{for } i \in 0..n \\ \quad \quad A_{i,0} \leftarrow v_i \\ \quad \quad z_i \leftarrow \begin{cases} T_0 & \text{if } i=0 \\ \frac{1}{6} \cdot (u_{i-1} + 4 \cdot u_i + u_{i+1}) & \text{if } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{if } i=n \end{cases} \\ \quad \quad A_{i,j} \leftarrow z_i \\ \quad u \leftarrow z \\ A \end{array} \quad (6.10)$$

Численное решение задачи - матрица T_2 , имеющая 500 столбцов и 10 строк:

$$T_2 := S(500, 10).$$

Результаты решений сопоставлены на рис. 6.4. Сплошные кривые - расчеты по уравнению (6.9), точки - результаты расчетов по программе (6.10).

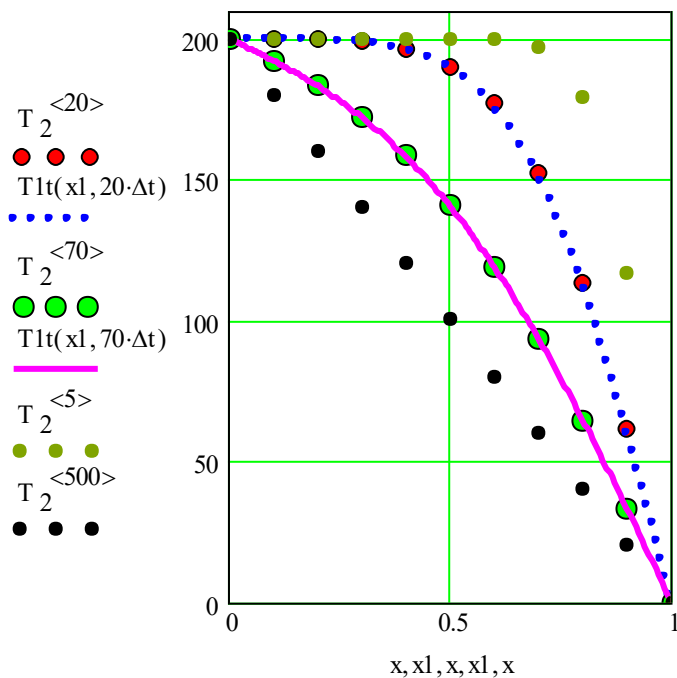


Рис. 6.4

Из рис. 6.4 видно, что точки ложатся на сплошные кривые, т.е. решения совпадают.

В заключение отметим, что три рассмотренные выше примеры позволяют сделать вывод, что верификация программы для решения уравнений теплопроводности прошла успешно.

7. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ

Задача - численно решить уравнение теплопроводности (5.11) в трехслойной пластине и оценить уровень напряжений, обусловленных нестационарными температурными полями в соответствии с уравнением

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{da}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + a(x) \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{dT_q}{dt}. \quad (7.1)$$

В этом разделе, и в дальнейшем, мы будем ориентироваться на три материала, физико-механические свойства которых, а именно обобщенная диаграмма растяжения - сжатия и обобщенное тепловое линейное расширение, описаны в разделе 4. Естественно, что порядок расположения материалов в многослойной пластине может изменяться по желанию пользователя.

Объединим три диаграммы по толщине пластины, т.е. создадим **обобщенную диаграмму деформирования** для трехслойной пластины (рис. 4.2) в соответствии с (4.2). Координата x изменяется в пределах толщины, начало координат на левой стороне пластины в соответствии с рис. 4.2.

Примем, что толщина пластины и толщины двух первых слоев соответственно равны

$$L := 10 \cdot \text{mm}, \quad aa := 3 \cdot \text{mm}, \quad bb := 3 \cdot \text{mm}$$

Зададим также параметры диаграммы, которые будем постоянно использовать:

$$n1 := 30, \quad n2 := 60.$$

Тогда формула для обобщенной диаграммы деформирования будет

$$\sigma(x, \varepsilon) := \frac{\sigma_{x1}(\varepsilon) + \sigma_{x2}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2} \right]} + \frac{\sigma_{x3}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}. \quad (7.2)$$

Диаграммы деформирования, построенные по (7.2), показаны на рис. 7.1.

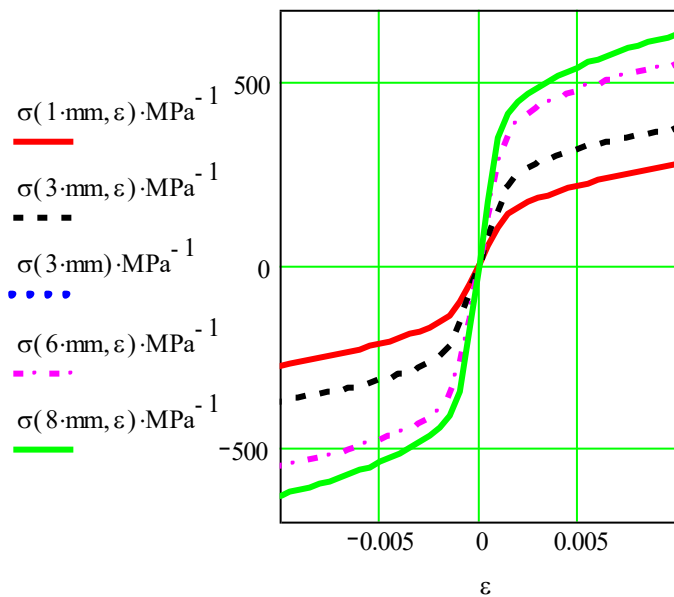


Рис. 7.1

Зададим для каждого слоя пластины коэффициенты линейного теплового расширения

$$\alpha_1 := 15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}, \quad \alpha_2 := 11 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}, \quad \alpha_3 := 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}.$$

и выпишем формулу для обобщенного теплового расширения

$$\alpha(x) := \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}\right]} + \frac{\alpha_3 \cdot \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}. \quad (7.3)$$

График обобщенного теплового расширения показан на рис. 7.2.

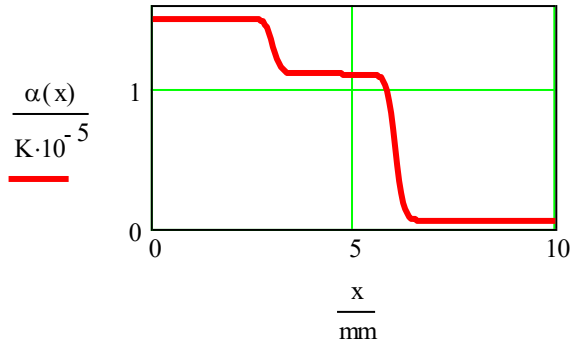


Рис. 7.2

Переходим к численному решению уравнения теплопроводности (7.1) для трехслойной пластины с коэффициентом температуропроводности $a(x)$, значение которого плавно изменяется по координате от левой стороны до правой. Уравнение (7.1) в конечно-разностном представлении будет иметь вид

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \dots \quad (7.4)$$

$$+ \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j} + \Delta T q_i$$

или

$$u_{i,j+1} = (u_{i+1,j}) \cdot \left[\left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] \dots \quad (7.5)$$

$$+ u_{i,j} \cdot \left[1 - \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} - 2 \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] + u_{i-1,j} \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} + \Delta T q_i$$

Начальные условия: $u(x, t) = 0$ при $t = 0$. $0 \leq x \leq L$.

Краевые условия: $u(0, 0) = C1$, $u(L, 0) = C2$.

Тепловыделение равно нулю. $\Delta T q_i = 0$.

Построим конечно-разностную сетку. Зададим число шагов сетки по пространственной координате: $n := 50$, $i := 0 \dots n$.

Шаг по толщине: $\Delta x_1 := \frac{L}{n}$.

Координата по толщине: $x_1 := \Delta x_1 \cdot i$.

Шаг по времени: $\Delta \tau := 0.0001 \cdot s$, $\Delta t_i := \Delta \tau$.

Зададим коэффициенты температуропроводности по слоям

$$a_1 := 50 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}, \quad a_2 := 200 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}, \quad a_3 := 20 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}.$$

и выпишем формулу для обобщенной температуропроводности

$$a(x) := \frac{a_1 + a_2 \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right]} + a_3 \cdot \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}, \quad (7.6)$$

а так же производную от обобщенного коэффициента по координате

$$Da(x) := \frac{d}{dx} a(x). \quad (7.7)$$

Графические зависимости для обобщенной температуропроводности и для ее производной показаны на рис. 7.3

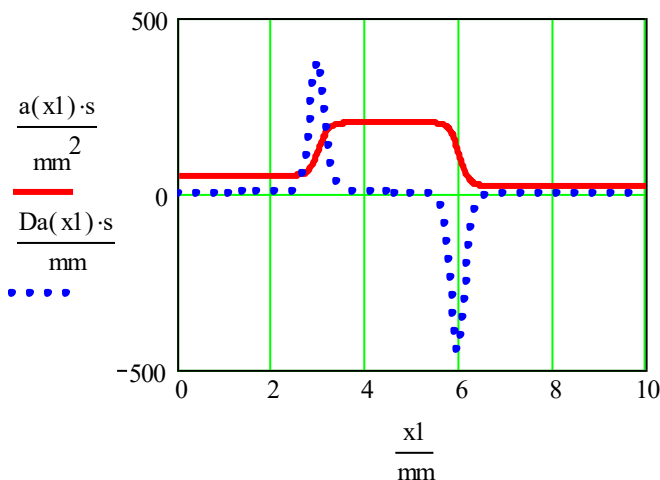


Рис. 7.3

Вычислим векторы температуропроводности a_i и ее производной

$Da x_i$:

$$a_i := a(x_i), \quad Da x_i := Da(x_i).$$

Критерий выбора шага по времени и по координате:

$$Z_i := \frac{\Delta t_i}{\Delta x_i} \cdot \left(Da x_i + 2 \cdot \frac{a_i}{\Delta x_i} \right), \quad Z_i \leq 1. \quad (7.8)$$

$$Z^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25

До начала расчетов температурных полей убедимся, что при выбранных значениях Δt и Δx все элементы Z меньше или равны единице.

Зададим конкретные значения краевых условий:

$$C1 := 200 \cdot K, \quad C2 := 10 \cdot K.$$

Сформируем вектор начальных условий: $v_i := 0 \cdot K$.

Введем новые обозначения в (7.4) и вычислим соответствующие векторы

$$DB_i := \frac{Dax_i \cdot \Delta t_i}{\Delta x_i}, \quad B_i := \frac{a_i \cdot \Delta t_i}{(\Delta x_i)^2}.$$

Тогда уравнение (7.4) примет тот вид, в котором мы будем использовать в программе для его численного решения

$$u_{i,j+1} = DB_i \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \dots + B_i \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j} \quad (7.9)$$

Программа в Mathcad для решения уравнения (7.4) имеет следующий вид, где n - число шагов по пространственной координате, t - число шагов по времени.

(7.10)

```

S(n,t) :=
  u ← v
  for j ∈ 1..t
    for i ∈ 0..n
      Ai,0 ← vi
      zi ←
        C1 if i=0
        DBi · (ui+1,j - ui,j) ... if 1 ≤ i ≤ n - 1
        + Bi · (ui-1,j - 2 · ui,j + ui+1,j) + ui,j
        C2 if i=n
      Ai,j ← zi
  u ← z
A

```

Результаты решения представлены в матрице A , имеющий 50 строк и 15000 столбцов. Столбец с индексом j дает поле температур на момент времени $\Delta \tau \cdot j$,

$$A := S(50, 15000).$$

На рис. 7.4 показаны распределения температур по толщине трехслойной балки в некоторые моменты времени.

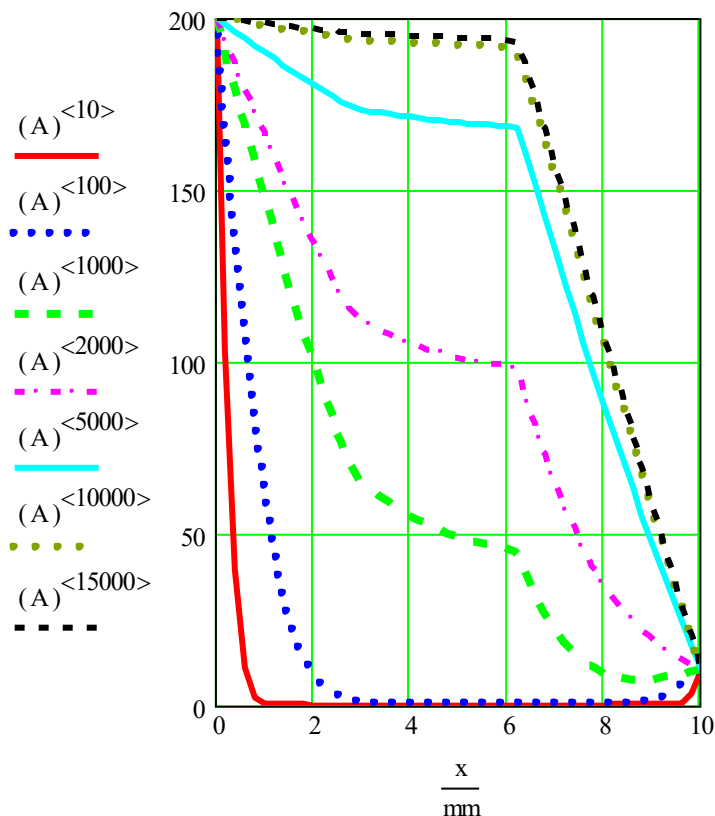


Рис. 7.4

Видно, что распределение температур на 10000-ом шаге по времени практически не отличается от температур на 15000-ом шаге. Это свидетельствует о том, что мы достигли стационарного распределения температур по толщине пластины.

Переходим к оценкам напряжений, возникающих в пластине. Пластину будем моделировать балкой с высотой, равной толщине пластины, относительные деформации в которой будем увеличивать

на $\frac{1}{1 - \mu}$, где μ - коэффициент Пуассона. Примем, что $\mu := 0.3$.

При необходимости, для уточнения расчетов можно, применив оператор перехода, сформировать функцию, описывающую изменение значения μ от 0.3 до 0.5 при переходе состояния материала от упругого к упругопластическому.

Рассмотрим балку, длина, толщина и высота которой равны соответственно,

$$L := 200 \cdot \text{mm}, \quad b := 10 \cdot \text{mm}, \quad h := 10 \cdot \text{mm}.$$

Распределение температур по высоте балки можно выбрать любое из 15000 в матрице A. Например, выберем столбец $j = 10000$.

Сгладим расчетную точечную зависимость $(A)^{<10000>}$ от x .

$$TT := \text{supsmooth} \left[\frac{x}{m}, \frac{(A)^{<10000>}}{K} \right] \cdot K. \quad (7.11)$$

Запишем линейную интерполяционную формулу, описывающую зависимость температуры T от координаты y при условии, что начало координат находится на нижнем основании балки,

$$T(y) := \text{interp}(x, TT, y). \quad (7.12)$$

Эта зависимость температуры от координаты точки сечения y показана на рис.7.5.

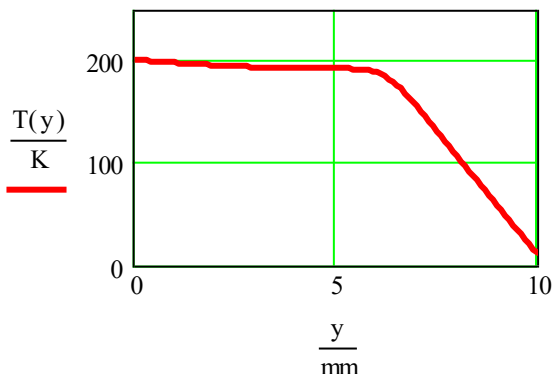


Рис.7.5.

При плоском нагружении бруса в общем случае ее торцевое поперечное сечение перемещается по оси на Δ_0 и поворачивается на угол θ . Относительная деформация волокна на уровне y в общем случае равна

$$\varepsilon(\Delta_0, \theta, y) := \frac{\Delta_0 + \theta \cdot y - \alpha(y) \cdot L \cdot T(y)}{L \cdot (1 - \mu)}. \quad (7.13)$$

Множитель $(1 - \mu)$ в знаменателе "превращает" балку в пластину. Формула для напряжений примет следующий вид;

$$\sigma_x(\Delta_0, \theta, y) := \sigma(y, \varepsilon(\Delta_0, \theta, y)). \quad (7.14)$$

Рассмотрим три случая закрепления балки.

1. Свободно лежащая балка

В это случае продольная сила P_x и изгибающий момент M_z равны нулю.

$$P_x := 0 \cdot \text{kN}, \quad M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}.$$

Остается найти Δ_0 и θ , удовлетворяющие условиям равновесия.

Зададим их приближенные значения и решим задачу в Mathcad (выделено желтым цветом).

$$\Delta_0 := 0.5 \cdot \text{mm}, \quad \theta := -5 \cdot \text{deg}.$$

Given

$$P_x = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot dy,$$

$$M_z = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \cdot dy,$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \theta \end{bmatrix} := \text{Find}(\Delta_0, \theta).$$

Итак, значения линейного и углового перемещений, отвечающие уравнениям равновесия, равны соответственно

$$\Delta_0 = 0.709 \cdot \text{mm}, \quad \theta = -4.703 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим перемещениям формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_1 x(y) := \sigma_x(\Delta_0, \theta, y). \quad (7.15)$$

2. Шарнирно опертая балка

Примем, что опорные шарниры расположены на уровне нижнего основания балки. Для этой балки удлинение нижнего волокна Δ_0 и изгибающий M_z момент равны нулю.

$$\Delta_0 := 0 \cdot \text{mm}, \quad M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m},$$

Остается найти продольную силу P_x и θ удовлетворяющие условиям равновесия. . Зададим их приближенные значения и решим задачу в Mathcad (выделено желтым цветом).

$$P_x := -10 \cdot \text{kN}, \quad \theta := 0.1 \cdot \text{deg}.$$

Given

$$P_x = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \, dy, \quad M_z = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \, dy,$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ \theta \end{bmatrix} := \text{Find}(P_x, \theta).$$

Итак, значения продольной силы и углового перемещения, отвечающие уравнениям равновесия, равны соответственно

$$P_x = -10.166 \cdot \text{kN}, \quad \theta = 0.616 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим параметрам формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_x(y) := \sigma_x(\Delta_0, \theta, y). \quad (7.15)$$

3. Полностью защемленная балка

Для данной балки перемещения Δ_0 и θ равны нулю.

$$\Delta_0 := 0 \cdot \text{mm}, \quad \theta := 0 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим перемещениям формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_x(y) := \sigma_x(\Delta_0, \theta, y). \quad (7.16)$$

Опорные реакции в виде продольной силы и изгибающего момента равны

$$P_x := \left(\int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \, dy \right), \quad P_x = -19.078 \cdot \text{kN},$$

$$M_z := \left(\int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \, dy \right), \quad M_z = -71.473 \, \text{J},$$

Для целей сравнения достигнутого уровня осевых напряжений с напряжениями текучести сформируем обобщенную функцию для предела текучести

$$\sigma_y(x) := \frac{\sigma_1 y + \sigma_2 y \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}\right]} + \frac{\sigma_3 y \cdot \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}. \quad (7.17)$$

На рис. 7.6 приведены эпюры напряжений для всех трех рассмотренных случаев закрепления балки (пластины), уравнения (7.14), (7.15) и (7.16), а также уровни растягивающих и сжимающих напряжений текучести по (7.17).

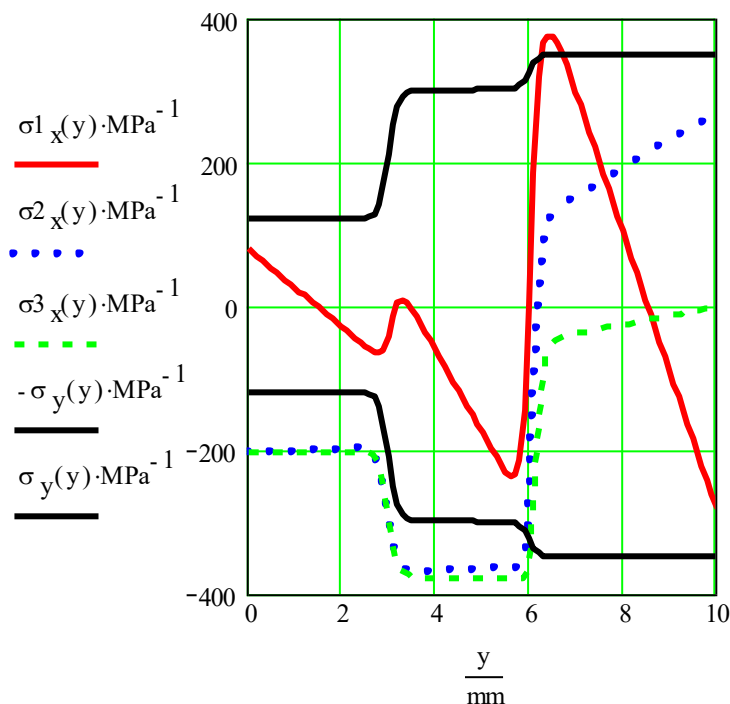


Рис.7.6.

Как следует из рис. 7.6, напряжения для всех рассмотренных случаев превышают введенный в данной работе физический предел текучести. В первом случае напряжения внутренне уравновешены. Во втором случае напряжения определяются температурными

деформациями и реакцией опор, в третьем случае - полностью реакцией опор, запрещающей температурные деформации.

Если в формуле (7.13) множитель $(1 - \mu)$ в знаменателе отсутствует, т.е

$$\varepsilon(\Delta_0, \theta, y) := \frac{\Delta_0 + \theta \cdot y - \alpha(y) \cdot L \cdot T(y)}{L}, \quad (7.18)$$

то рис. 7.6 превращается в рис. 7.7. Сопоставление этих рисунков дает возможность оценить возможное различие уровня напряжений в пластине и в балке.

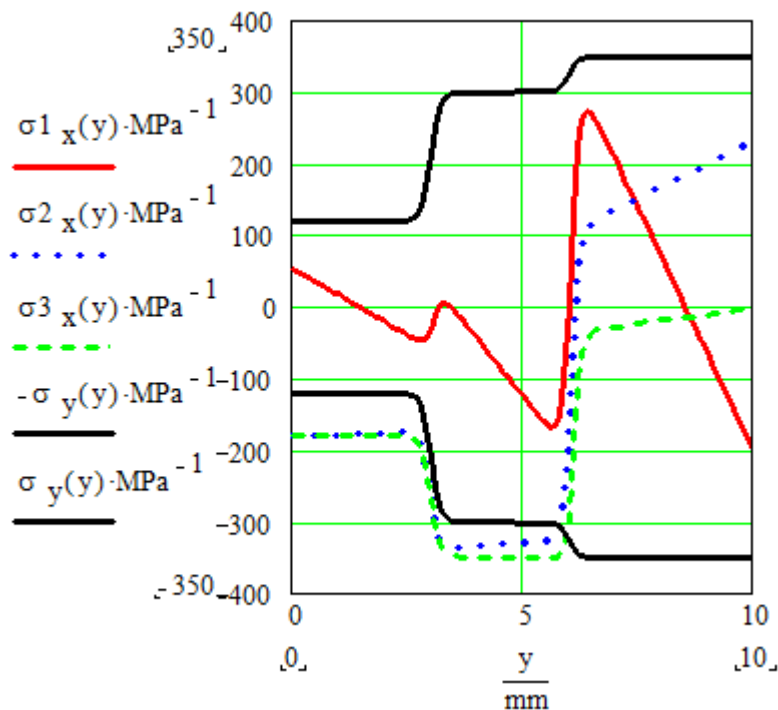


Рис.7.7

Остаточные напряжения, возникающие при охлаждении, можно оценить с применением формул для перестройки диаграмм деформирования, приведенных в разделах 2 и 4.

8. НАГРЕВ И ОХЛАЖДЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Задача - численно решить уравнение теплопроводности (5.11) в трехслойной пластине при переменных граничных условиях, отвечающих процессу нагрева и охлаждения. Оценить уровень напряжений, обусловленных нестационарными температурными полями при краевых условиях, зависящих от времени.

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{da}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + a(x) \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{dTq}{dt}. \quad (8.1)$$

В этом разделе мы будем также ориентироваться на три материала, физико-механические свойства которых, а именно обобщенная диаграмма растяжения - сжатия и обобщенное тепловое линейное расширение, описаны в разделе 4. Отличие данного раздела от предыдущего состоит в том, что краевые условия не постоянны, а изменяются в течение времени.

Начальные условия: $u(x, t) = 0$ при $t = 0$, $0 \leq x \leq L$.

Краевые условия: $u(0, t) = C1(t)$, $u(L, t) = C2(t)$.

Тепловыделение равно нулю, $\Delta Tq_i = 0$.

Объединим три диаграммы по толщине пластины, т.е. создадим **обобщенную диаграмму деформирования** для трехслойной пластины (рис. 4.2) в соответствии с (4.2). В отличие от предыдущего раздела 7, в данном разделе последовательность материалов циклически переставлена.

Координата x изменяется в пределах толщины, начало координат на левой стороне пластины в соответствии с рис. 4.2. Примем, что толщина пластины и толщины двух слоев соответственно равны

$$L := 10 \cdot \text{mm}, \quad aa := 3 \cdot \text{mm}, \quad bb := 3 \cdot \text{mm}.$$

Зададим также параметры диаграммы, которые будем постоянно использовать

$$n1 := 30, \quad n2 := 60.$$

Тогда формула для обобщенной диаграммы деформирования будет

$$\sigma(x, \varepsilon) := \frac{\sigma_{x2}(\varepsilon) + \sigma_{x3}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2} \right]} + \frac{\sigma_{x1}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}. \quad (8.2)$$

Диаграммы деформирования, построенные по (8.2), показаны на рис. 8.1.

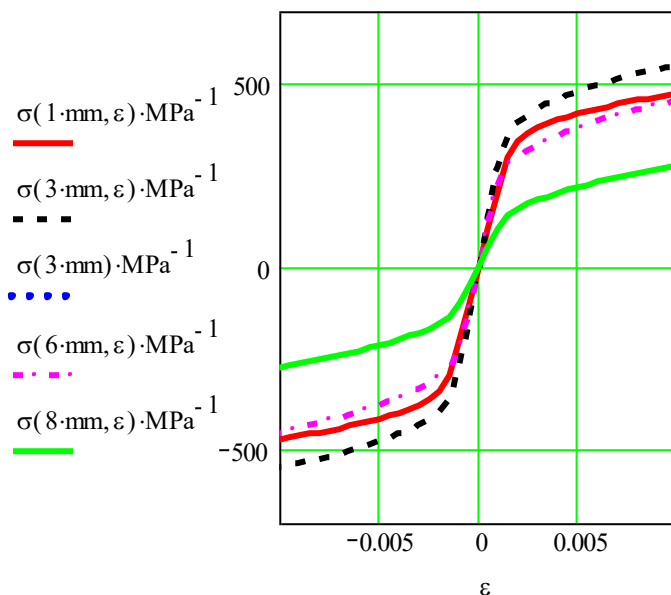


Рис. 8.1

Зададим для каждого слоя пластины коэффициенты линейного теплового расширения

$$\alpha_1 := 15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}, \quad \alpha_2 := 11 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}, \quad \alpha_3 := 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}.$$

и выпишем формулу для обобщенного теплового расширения

$$\alpha(x) := \frac{\alpha_2 + \alpha_3 \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}\right]} + \frac{\alpha_1 \cdot \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}. \quad (8.3)$$

График обобщенного теплового расширения показан на рис. 8.2.

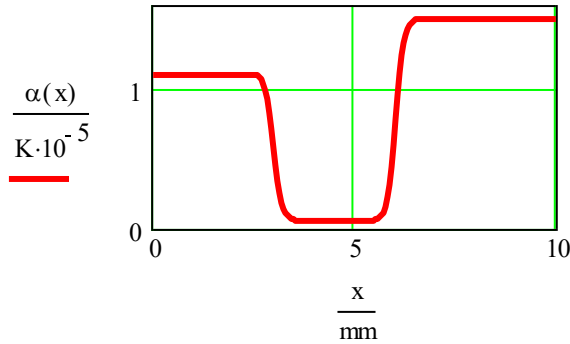


Рис. 8.2

Переходи к численному решению уравнения теплопроводности (8.1) для трехслойной пластины с коэффициентом температуропроводности $a(x)$, значение которого плавно изменяется по координате от левой стороны до правой. Уравнение (8.1) в конечно-разностном представлении будет иметь вид

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \dots \quad (8.4)$$

$$+ \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j} + \Delta T q_i$$

или

$$u_{i,j+1} = (u_{i+1,j}) \cdot \left[\left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] \dots \quad (8.5)$$

$$+ u_{i,j} \cdot \left[1 - \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} - 2 \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] + u_{i-1,j} \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} + \Delta T q_i$$

Построим конечно-разностную сетку. Зададим число шагов сетки по пространственной координате: $n := 50$, $i := 0 \dots n$.

Шаг по толщине $\Delta x_i := \frac{L}{n}$.

Координата по толщине $x_1 := \Delta x_1 \cdot i$.

Шаг по времени: $\Delta \tau := 0.0001 \cdot s$, $\Delta t_i := \Delta \tau$.

Зададим коэффициенты температуропроводности по слоям:

$$a_1 := 50 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}, \quad a_2 := 200 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}, \quad a_3 := 20 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}.$$

и выпишем формулу для обобщенной температуропроводности

$$a(x) := \frac{a_2 + a_3 \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}\right]} + \frac{a_1 \cdot \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}, \quad (8.6)$$

а так же производную от обобщенного коэффициента по координате

$$Da(x) := \frac{d}{dx} a(x). \quad (8.7)$$

Графические зависимости для обобщенной температуропроводности и для ее производной показаны на рис. 8.3.

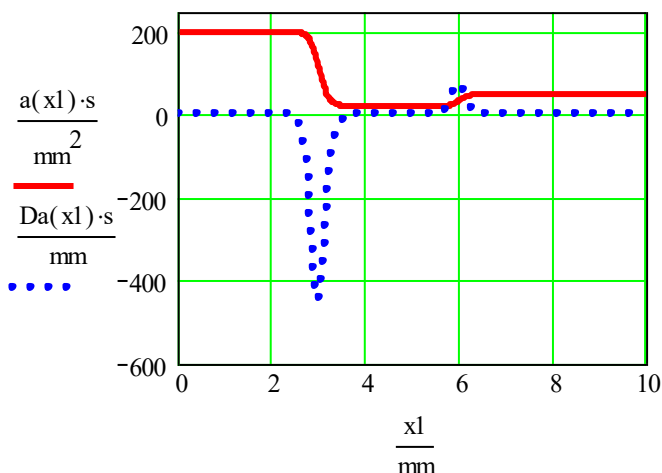


Рис. 8.3

Вычислим векторы температуропроводности a_i и ее производной

Da_{x_1} :

$$a_i := a(x_i), \quad Da x_i := Da(x_i).$$

Критерий выбора шага по времени и по координате:

$$Z_i := \frac{\Delta t_i}{\Delta x_i} \cdot \left(Da x_i + 2 \cdot \frac{a_i}{\Delta x_i} \right), \quad Z_i \leq 1, \quad (8.8)$$

До начала расчетов температурных полей нужно убедиться, что при выбранных значениях Δt и Δx все элементы Z меньше или равны единице.

Зададим конкретные значения краевых условий во времени.

Для левой стороны пластины зададим переменные во времени $c1(\tau)$ краевые условия формулой.

$$c1(\tau) := \frac{400 \cdot \frac{K}{s} \cdot \tau + 200 \cdot K \cdot \left(\frac{\tau}{0.5 \cdot s} \right)^{40}}{\left[1 + \left(\frac{\tau}{0.5 \cdot s} \right)^{40} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{\tau}{1.7 \cdot s} \right)^{20} \right]}. \quad (8.9)$$

Рис. 8.4 показывает, как изменяется во времени левое краевое условие.

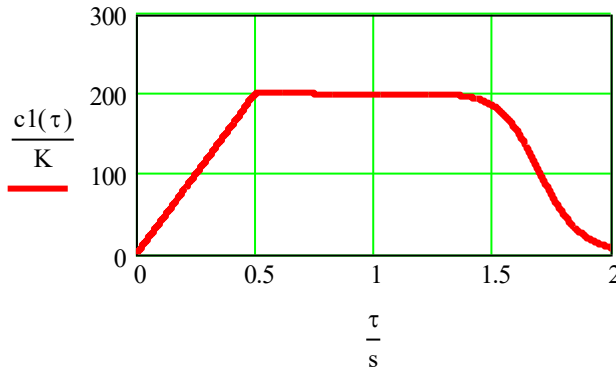


Рис. 8.4

Для правой стороны пластины зададим переменные во времени $c2(\tau)$ краевые условия формулой

$$c2(\tau) := \frac{0 \cdot K + \left(400 \cdot \frac{K}{s} \cdot \tau - 200 \cdot K\right) \cdot \left(\frac{\tau}{0.5 \cdot s}\right)^{40}}{\left[1 + \left(\frac{\tau}{0.5 \cdot s}\right)^{40}\right]} + 200 \cdot K \cdot \left[\left(\frac{\tau}{1 \cdot s}\right)^{40}\right] \cdot \left(1 + \left(\frac{\tau}{1 \cdot s}\right)^{40}\right)^{-1} \quad (8.10)$$

Рис. 8.5 показывает, как изменяется правое краевое условие.

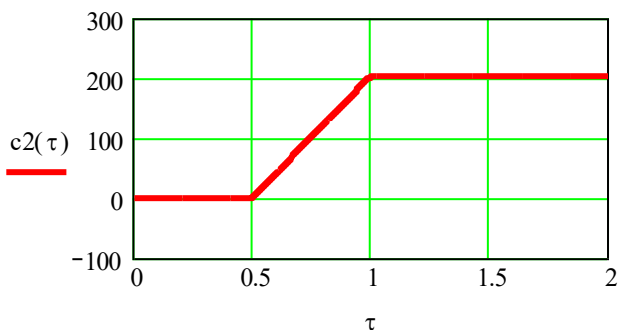


Рис. 8.5

Сформируем векторы краевых условий:

$$j := 0..20000, \quad \tau_j := \Delta\tau \cdot j, \quad C1_j := c1(\tau_j), \quad C2_j := c2(\tau_j).$$

Сформируем вектор начальных условий, $v_1 := 0 \cdot K$.

Введем новые обозначения в (7.4) и вычислим соответствующие векторы

$$DB_i := \frac{Dax_i \cdot \Delta t_i}{\Delta x_i}, \quad B_i := \frac{a_i \cdot \Delta t_i}{(\Delta x_i)^2}.$$

Теперь уравнение (8.4) примет тот вид, в котором мы будем использовать в программе для его численного решения

$$u_{i,j+1} = DB_i \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + B_i \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j} \quad (8.11)$$

Программа в Mathcad для решения уравнения (8.4) имеет следующий вид, где n - число шагов по пространственной координате, t - число шагов по времени.

$$\begin{array}{l|l}
 S(n, t) := & u \leftarrow v \\
 & \text{for } j \in 1..t \\
 & \quad \text{for } i \in 0..n \\
 & \quad \quad A_{i,0} \leftarrow v_i \\
 & \quad \quad z_i \leftarrow \begin{cases} C1_j & \text{if } i=0 \\ DB_i \cdot \begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \end{pmatrix} \dots & \text{if } 1 \leq i \leq n-1 \\ + B_i \cdot \begin{pmatrix} u_{i-1} - 2 \cdot u_i + u_{i+1} \end{pmatrix} + u_i \\ C2_j & \text{if } i=n \end{cases} \\
 & \quad \quad A_{i,j} \leftarrow z_i \\
 & \quad u \leftarrow z \\
 & A
 \end{array} \tag{8.12}$$

Отличие программы (8.12) от программы (7.10) раздела 7 - только наличие индексов у C1 и C2.

Результаты решения представлены в матрице A, имеющей 50 строк и 20000 столбцов. Столбец с индексом j дает поле температур на момент времени $\Delta\tau \cdot j$,

$$A := S(50, 20000).$$

На рис. 8.6 показаны распределения температур по толщине трехслойной балки в некоторые моменты времени. Видно, что распределение температур на 13500-ом шаге практически постоянное по всей толщине пластины.

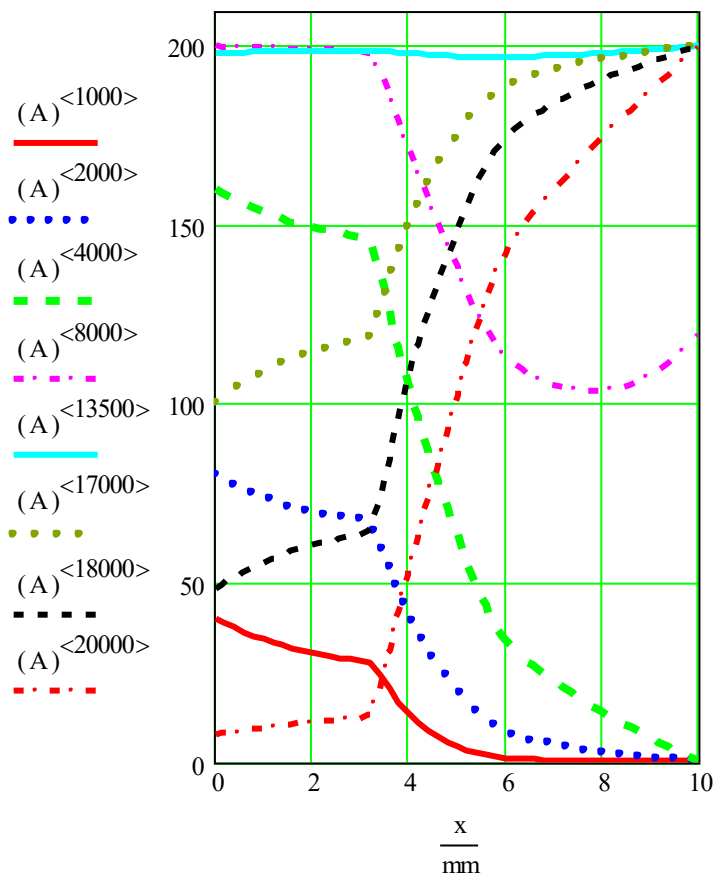


Рис. 8.6

Переходим к оценкам напряжений, возникающих в пластине. Рассмотрим балку, длина, толщина и высота которой равны соответственно

$$L := 200 \cdot \text{mm}, \quad b := 10 \cdot \text{mm}, \quad h := 10 \cdot \text{mm}.$$

Распределение температур по высоте балки можно выбрать любое из 20000 в матрице A. Например, выберем столбец $j = 18000$.

Сгладим расчетную точечную зависимость $(A)^{<18000>}$ от x .

$$TT := \text{supsmooth} \left[\frac{x}{m}, \frac{(A)^{<18000>}}{K} \right] \cdot K. \quad (8.13)$$

Запишем линейную интерполяционную формулу, описывающую зависимость температуры T от координаты y при условии, что начало координат находится на нижнем основании балки,

$$T(y) := \text{linterp}(x, TT, y). \quad (8.14)$$

Эта зависимость температуры от координаты точки сечения y показана на рис.8.7.

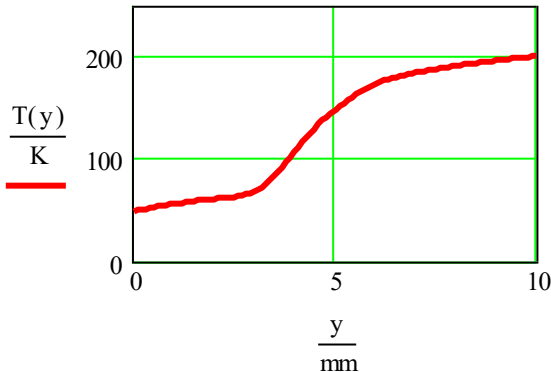


Рис.8.7.

При плоском нагружении балки, в общем случае, её торцевое поперечное сечение перемещается по оси на Δ_0 и поворачивается на угол θ . Относительная деформация волокна на уровне y в общем случае равна

$$\varepsilon(\Delta_0, \theta, y) := \frac{\Delta_0 + \theta \cdot y - \alpha(y) \cdot L \cdot T(y)}{L \cdot (1 - \mu)}. \quad (8.15)$$

Формула для напряжений примет следующий вид.

$$\sigma_x(\Delta_0, \theta, y) := \sigma(y, \varepsilon(\Delta_0, \theta, y)). \quad (8.16)$$

Рассмотрим три случая закрепления балки.

1. Свободно лежащая балка

В этом случае продольная сила P_x и изгибающий момент M_z равны нулю: $P_x := 0 \cdot \text{kN}$, $M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$.

Остается найти Δ_0 и θ , удовлетворяющие условиям равновесия. Зададим их приближенные значения и решим задачу в Mathcad (выделено желтым цветом).

$$\Delta_0 := -0.5 \cdot \text{mm}, \quad \theta := 5 \cdot \text{deg},$$

Given

$$P_x = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \, dy, \quad M_z = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \, dy,$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \theta \end{bmatrix} := \text{Find}(\Delta_0, \theta),$$

Итак, значения линейного и углового перемещений, отвечающие уравнениям равновесия, равны соответственно

$$\Delta_0 = -0.071 \cdot \text{mm}, \quad \theta = 3.158 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим перемещениям формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_x(y) := \sigma_x(\Delta_0, \theta, y). \quad (8.17)$$

2. Шарнирно опертая балка

Примем, что опорные шарниры расположены на уровне нижнего основания балки. Для этой балки удлинение нижнего волокна Δ_0 и изгибающий момент M_z равны нулю:

$$\Delta_0 := 0 \cdot \text{mm}, \quad M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}.$$

Остается найти продольную силу P_x и θ удовлетворяющие условиям равновесия. Зададим их приближенные значения и решим задачу в Mathcad (выделено желтым цветом).

$$P_x := -10 \cdot \text{kN}, \quad \theta := 0.1 \cdot \text{deg}.$$

Given

$$P_x = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \, dy, \quad M_z = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \, dy,$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ \theta_2 \end{bmatrix} := \text{Find}(P_x, \theta).$$

Итак, значения продольной силы и углового перемещения, отвечающие уравнениям равновесия, равны соответственно

$$P_x = 2.293 \cdot \text{kN}, \quad \theta_2 = 2.4 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим параметрам формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_2(x)(y) := \sigma_x(\Delta_0, \theta_2, y). \quad (8.18)$$

3. Полностью защемленная балка

Для данной балки перемещения Δ_0 и θ равны нулю.

$$\Delta_3_0 := 0 \cdot \text{mm}, \quad \theta_3 := 0 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим перемещениям формула для эпюры напряжений будет иметь вид:

$$\sigma_3(x)(y) := \sigma_x(\Delta_3_0, \theta_3, y). \quad (8.19)$$

Опорные реакции в виде продольной силы и изгибающего момента равны

$$P_x := \left(\int_0^h \sigma_x(\Delta_3_0, \theta_3, y) \cdot b \, dy \right), \quad P_x = -15.327 \cdot \text{kN},$$

$$M_z := \left(\int_0^h \sigma_x(\Delta_3_0, \theta_3, y) \cdot b \cdot y \, dy \right), \quad M_z = -82.356 \, \text{J}.$$

Для целей сравнения достигнутого уровня осевых напряжений с напряжениями текучести сформируем обобщенную функцию для предела текучести

$$\sigma_y(x) := \frac{\sigma_1 y + \sigma_2 y \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2} \right]} + \frac{\sigma_3 y \cdot \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}. \quad (8.20)$$

На рис. 8.8 приведены эпюры напряжений для всех трех рассмотренных случаев закрепления балки (пластины), уравнения (8.17), (8.18) и (8.19), а также уровни растягивающих и сжимающих напряжений текучести по (7.17).

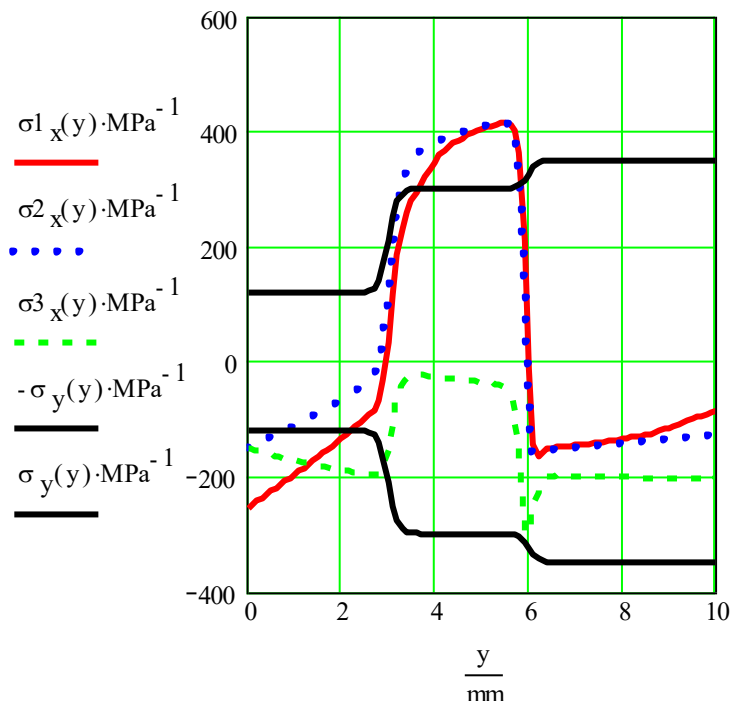


Рис.8.8.

Как следует из рис. 8.7, напряжения для всех рассмотренных случаев местами превышают введенный в данной работе физический предел текучести. В первом случае напряжения внутренне уравновешены. Во втором случае напряжения определяются температурными деформациями и реакцией опор, в третьем случае - полностью реакцией опор, запрещающей температурные деформации.

Остаточные напряжения, возникающие при охлаждении, можно оценить с применением формул для перестройки диаграмм деформирования, приведенных в разделах 2 и 4.

9. ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ

Задача - численно решить уравнение теплопроводности (5.11) в трехслойной пластине толщиной L и оценить уровень напряжений, обусловленных нестационарными температурными полями при наличии тепловыделения в среднем слое пластины.

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{da}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + a(x) \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{dTq}{dt} . \quad (9.1)$$

Начальные условия: $u(x, t) = 0$ при $t = 0$, $0 \leq x \leq L$.

Краевые условия: $u(0, 0) = 0$, $u(L, 0) = 0$.

В этом разделе мы также будем ориентироваться на три материала, физико-механические свойства которых, а именно обобщенная диаграмма растяжения - сжатия и обобщенное тепловое линейное расширение, сформированы в разделе 4.

Естественно, что порядок расположения материалов в многослойной пластине может изменяться по желанию пользователя.

Объединим три диаграммы по толщины пластины, т.е. создадим **обобщенную диаграмму деформирования** для трехслойной пластины (рис. 4.2) в соответствии с (4.2). Координата x изменяется в пределах толщины, начало координат на левой стороне пластины в соответствии с рис. 4.2.

Примем, что толщина пластины и толщины двух первых слоев соответственно равны:

$$L := 10 \cdot \text{mm}, \quad aa := 3 \cdot \text{mm}, \quad bb := 3 \cdot \text{mm}.$$

Зададим также параметры диаграммы, которые будем постоянно использовать,

$$n1 := 30, \quad n2 := 60.$$

Тогда формула для обобщенной диаграммы деформирования будет

$$\sigma(x, \varepsilon) := \frac{\sigma_{x3}(\varepsilon) + \sigma_{x1}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2} \right]} + \frac{\sigma_{x2}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}} . \quad (9.2)$$

Диаграммы деформирования, построенные по (9.2), показаны на рис. 9.1.

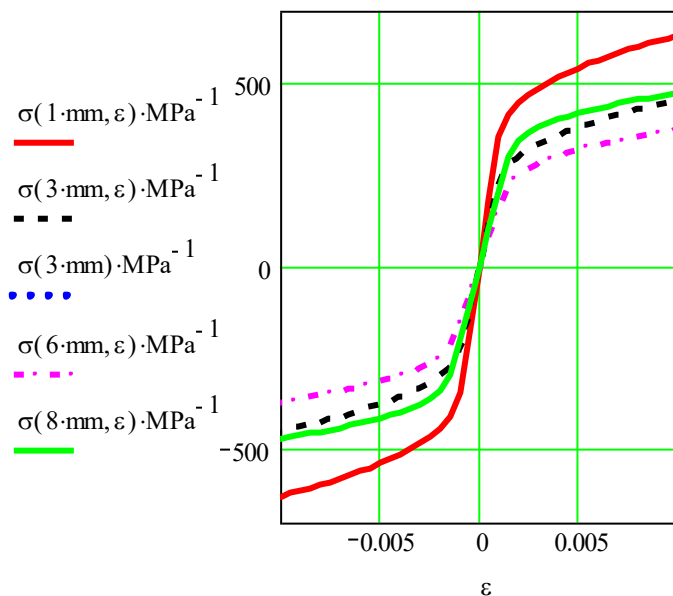


Рис. 9.1

Зададим для каждого слоя пластины коэффициенты линейного теплового расширения

$$\alpha_1 := 15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}, \quad \alpha_2 := 11 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}, \quad \alpha_3 := 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}},$$

и выпишем формулу для обобщенного теплового расширения

$$\alpha(x) := \frac{\alpha_3 + \alpha_1 \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}\right]} + \frac{\alpha_2 \cdot \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}. \quad (9.3)$$

График обобщенного теплового расширения показан на рис. 9.2.

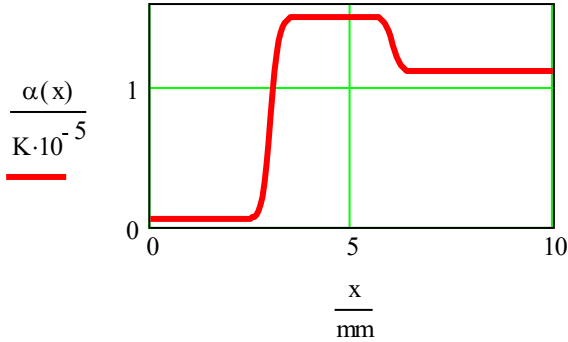


Рис. 9.2

Переходим к численному решению уравнения теплопроводности (9.1) для трехслойной пластины с коэффициентом температуропроводности $a(x)$, значение которого плавно изменяется по координате от левой стороны до правой. Уравнение (9.1) в конечно-разностном представлении будет иметь вид

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \dots \quad (9.4)$$

$$+ \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j} + \Delta T q_i$$

или

$$u_{i,j+1} = (u_{i+1,j}) \cdot \left[\left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] \dots \quad (9.5)$$

$$+ u_{i,j} \cdot \left[1 - \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} - 2 \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] + u_{i-1,j} \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} + \Delta T q_i$$

Построим конечно-разностную сетку. Зададим число шагов сетки по пространственной координате: $n := 50$, $i := 0 \dots n$.

Шаг по толщине $\Delta x_i := \frac{L}{n}$.

Координата по толщине $x_i := \Delta x_i \cdot i$.

Шаг по времени: $\Delta \tau := 0.0001 \cdot s$, $\Delta t_i := \Delta \tau$.

Зададим коэффициенты теплопроводности по слоям

$$a_1 := 50 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}, \quad a_2 := 200 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}, \quad a_3 := 20 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}},$$

и выпишем формулу для обобщенной теплопроводности

$$a(x) := \frac{a_3 + a_1 \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right]} + a_2 \cdot \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2} \quad (9.6)$$

$$1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}$$

а так же производную от обобщенного коэффициента по координате

$$Da(x) := \frac{d}{dx} a(x). \quad (9.7)$$

Графические зависимости для обобщенной теплопроводности и для ее производной показаны на рис. 9.3.

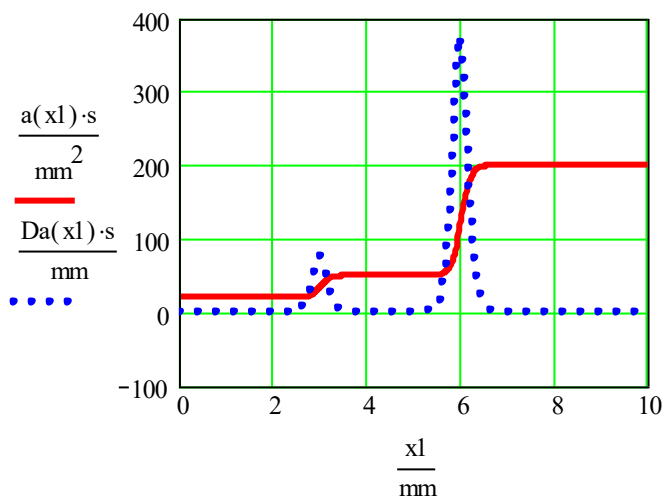


Рис. 9.3

Вычислим векторы температуропроводности a_i и ее производной Da_{x_i} : $a_i := a(x_i)$, $Da_{x_i} := Da(x_i)$.

Критерий выбора шага по времени и по координате:

$$Z_i := \frac{\Delta t_i}{\Delta x_i} \cdot \left(Da_{x_i} + 2 \cdot \frac{a_i}{\Delta x_i} \right), \quad Z_i \leq 1. \quad (9.8)$$

Еще до начала расчетов температурных полей нужно убедиться, что при выбранных значениях Δt и Δx все элементы Z меньше или равны единице.

Зададим конкретные значения краевых условий:

$$C1 := 0 \cdot K, \quad C2 := 0 \cdot K.$$

Сформируем вектор начальных условий: $v_i := 0 \cdot K$.

Введем новые обозначения в (7.4) и вычислим соответствующие

$$\text{векторы } DB_i := \frac{Da_{x_i} \cdot \Delta t_i}{\Delta x_i}, \quad B_i := \frac{a_i \cdot \Delta t_i}{(\Delta x_i)^2}.$$

Тогда уравнение (7.4) примет тот вид, в котором мы будем использовать его в программе для его численного решения

$$u_{i,j+1} = DB_i \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + B_i \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j} \quad (9.9)$$

Запишем функцию, описывающую зависимость тепловыделения от пространственной координаты, рис.9.4.

$$Tq(x) := \frac{0 \cdot K + 0.2 \cdot K \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2} \right]} \quad (9.10)$$

$$\Delta Tq_i := Tq(x_i)$$

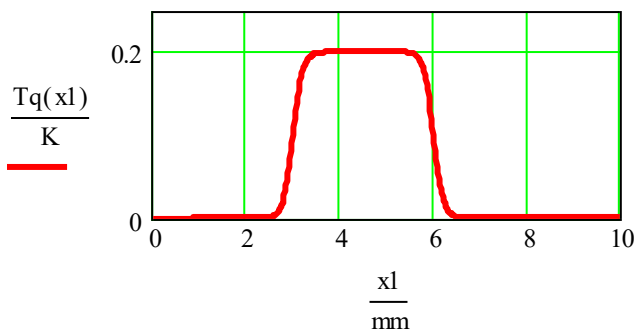


Рис. 9.4

Программа в Mathcad для решения уравнения (7.4) имеет следующий вид, где n - число шагов по пространственной координате, t - число шагов по времени.

$$S(n, t) := \begin{array}{l} u \leftarrow v \\ \text{for } j \in 1..t \\ \quad \text{for } i \in 0..n \\ \quad \quad A_{i,0} \leftarrow v_i \\ \quad \quad z_i \leftarrow \begin{cases} C1 & \text{if } i=0 \\ DB_i \cdot (u_{i+1} - u_i) \dots & \text{if } 1 \leq i \leq n-1 \\ + B_i \cdot (u_{i-1} - 2 \cdot u_i + u_{i+1}) \dots \\ + u_i + \Delta T q_i \end{cases} \\ \quad \quad \quad C2 & \text{if } i=n \\ \quad \quad A_{i,j} \leftarrow z_i \\ \quad u \leftarrow z \\ A \end{array} \quad (9.11)$$

Результаты решения представлены в матрице A , имеющей 50 строк и 15000 столбцов. Столбец с индексом j дает поле температур на момент времени $\Delta \tau \cdot j$.

$$A := S(50, 10000).$$

На рис. 9.5 показаны распределения температур по толщине трехслойной балки в некоторые моменты времени.

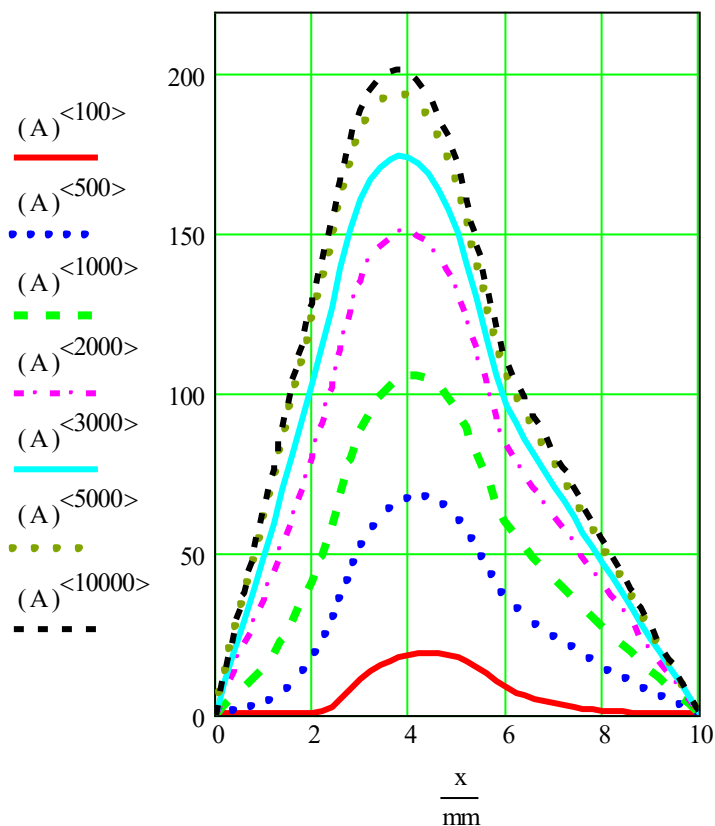


Рис. 9.5

Переходим к оценкам напряжений, возникающих в пластине.

Рассмотрим балку, длина, толщина и высота которой равны, соответственно,

$$L := 200 \cdot \text{mm}, \quad b := 10 \cdot \text{mm}, \quad h := 10 \cdot \text{mm}.$$

Распределение температур по высоте балки можно выбрать любое из 10000 в матрице A. Например, выберем столбец $j = 10000$.

Сгладим расчетную точечную зависимость $(A)^{<10000>}$ от x .

$$TT := \text{supsmooth} \left[\frac{x}{m}, \frac{(A)^{<10000>}}{K} \right] \cdot K . \quad (9.12)$$

Запишем линейную интерполяционную формулу, описывающую зависимость температуры T от координаты y при условии, что начало координат находится на нижнем основании балки.

$$T(y) := \text{linterp}(x, TT, y). \quad (9.13)$$

Эта зависимость температуры от координаты точки сечения y показана на рис.9.6.

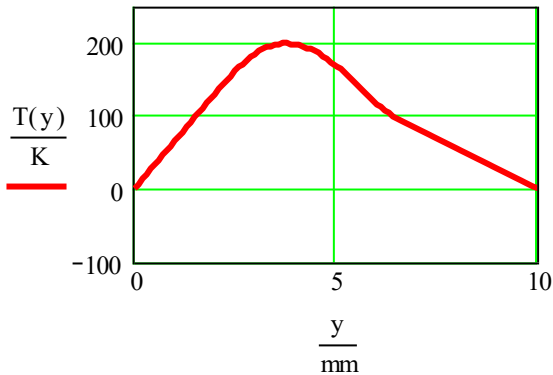


Рис.9.6

Относительная деформация волокна на уровне y в общем случае равна

$$\varepsilon(\Delta_0, \theta, y) := \frac{\Delta_0 + \theta \cdot y - \alpha(y) \cdot L \cdot T(y)}{L \cdot (1 - \mu)} . \quad (9.14)$$

Формула для напряжений примет следующий вид.

$$\sigma_x(\Delta_0, \theta, y) := \sigma(y, \varepsilon(\Delta_0, \theta, y)). \quad (9.15)$$

Рассмотрим три случая закрепления балки.

1. Свободно лежащая балка

В этом случае продольная сила P_x и изгибающий момент M_z равны нулю:

$$P_x := 0 \cdot \text{kN}, \quad M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}.$$

Остается найти Δ_0 и θ , удовлетворяющие условиям равновесия. Зададим их приближенные значения и решим задачу в Mathcad (выделено желтым цветом).

$$\Delta_0 := 0.05 \cdot \text{mm}, \quad \theta := 1 \cdot \text{deg}, \quad \text{Given} \quad P_x = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \, dy,$$

$$M_z = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \, dy, \quad \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \theta \end{bmatrix} := \text{Find}(\Delta_0, \theta).$$

Итак, значения линейного и углового перемещений, отвечающие уравнениям равновесия, равны соответственно,

$$\Delta_0 = 0.052 \cdot \text{mm}, \quad \theta = 0.713 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим перемещениям формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_1(x(y)) := \sigma_x(\Delta_0, \theta, y). \quad (9.16)$$

2. Шарнирно опертая балка

Примем, что опорные шарниры расположены на уровне нижнего основания балки. Для этой балки удлинение нижнего волокна Δ_0 и изгибающий M_z момент равны нулю.

$$\Delta_0 := 0 \cdot \text{mm}, \quad M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}.$$

Остается найти продольную силу P_x и θ удовлетворяющие условиям равновесия. Зададим их приближенные значения и решим задачу в Mathcad (выделено желтым цветом).

$$P_x := -10 \cdot \text{kN}, \quad \theta := 0.1 \cdot \text{deg}, \quad \text{Given}$$

$$P_x = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \, dy, \quad M_z = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \, dy,$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ \theta \end{bmatrix} := \text{Find}(P_x, \theta).$$

Значения продольной силы и углового перемещения, отвечающие уравнениям равновесия, равны соответственно

$$P_x = -2.628 \cdot \text{kN}, \quad \theta_2 = 1.147 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим параметрам формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_2(x(y)) := \sigma_x(\Delta_0, \theta_2, y). \quad (9.17)$$

3. Полностью защемленная балка

Для данной балки перемещения Δ_0 и θ равны нулю:

$$\Delta_3_0 := 0 \cdot \text{mm}, \quad \theta_3 := 0 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим перемещениям формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_3(x(y)) := \sigma_x(\Delta_3_0, \theta_3, y). \quad (9.18)$$

Опорные реакции в виде продольной силы и изгибающего момента равны

$$P_x := \left(\int_0^h \sigma_x(\Delta_3_0, \theta_3, y) \cdot b \, dy \right), \quad P_x = -14.168 \cdot \text{kN},$$

$$M_z := \left(\int_0^h \sigma_x(\Delta_3_0, \theta_3, y) \cdot b \cdot y \, dy \right), \quad M_z = -79.922 \, \text{J}.$$

Для целей сравнения достигнутого уровня осевых напряжений с напряжениями текучести сформируем обобщенную функцию для предела текучести

$$\sigma_y(x) := \frac{\sigma_1 y + \sigma_2 y \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2} \right]} + \frac{\sigma_3 y \cdot \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}. \quad (9.19)$$

На рис. 9.7 приведены эпюры напряжений для всех трех рассмотренных случаев закрепления балки (пластины), уравнения

(9.16), (9.17) и (9.18), а также уровни растягивающих и сжимающих напряжений текучести по (9.19).

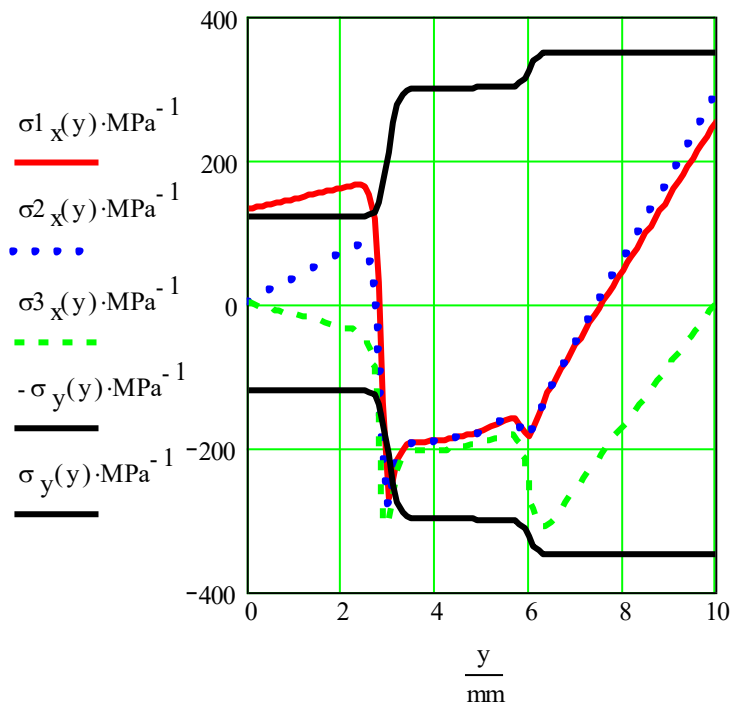


Рис.9.7

Как следует из рис. 9.7, напряжения для всех рассмотренных случаев превышают введенный в данной работе физический предел текучести. В первом случае напряжения внутренне уравновешены. Во втором случае напряжения определяются температурными деформациями и реакцией опор, в третьем случае - полностью реакцией опор, запрещающей температурные деформации.

10. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСОВЕРШЕННОГО ТЕПЛООВОГО КОНТАКТА МЕЖДУ СЛОЯМИ ПЛАСТИНЫ

Задача - численно решить уравнение теплопроводности (5.11) в двухслойной пластине с плохим контактом между слоями и оценить уровень напряжений, обусловленных нестационарными температурными полями

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{da}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + a(x) \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{dTq}{dt} . \quad (10.1)$$

Начальные условия: $u(x, t) = 0$ при $t = 0$, $0 \leq x \leq L$.

Краевые условия: $u(0, 0) = C1$, $u(L, 0) = C2$.

Тепловыделение равно нулю, $\Delta Tq_i = 0$.

В этом разделе, мы также будем ориентироваться на три материала, физико-механические свойства которых, а именно обобщенная диаграмма растяжения - сжатия и обобщенное тепловое линейное расширение, сформированы в разделе 4. Естественно, что порядок расположения материалов в трехслойной пластине может изменяться по желанию пользователя.

Объединим две диаграммы по толщине пластины, т.е. создадим **обобщенную диаграмму деформирования** для двухслойной пластины (рис. 4.2) в соответствии с (4.2). Координата x изменяется в пределах толщины, начало координат на левой стороне пластины в соответствии с рис. 4.2.

Примем, что толщина пластины и толщины двух слоев соответственно равны

$$L := 10 \cdot \text{mm}, \quad aa := 5 \cdot \text{mm}, \quad bb := 3 \cdot \text{mm}.$$

Зададим также параметры диаграммы, которые будем постоянно использовать: $n1 := 30$, $n2 := 60$.

Рассмотрим два варианта формул для обобщенной диаграммы деформирования:

$$\sigma(x, \varepsilon) := \frac{\sigma_{x1}(\varepsilon) + \sigma_{x2}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right]}, \quad (10.2)$$

$$\sigma(x, \varepsilon) := \frac{\sigma_{x1}(\varepsilon) + \sigma_{x3}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right]} . \quad (10.2a)$$

Диаграммы деформирования, построенные по (10.2) и (10.2a), показаны на рис. 10.1 и 10.1a.

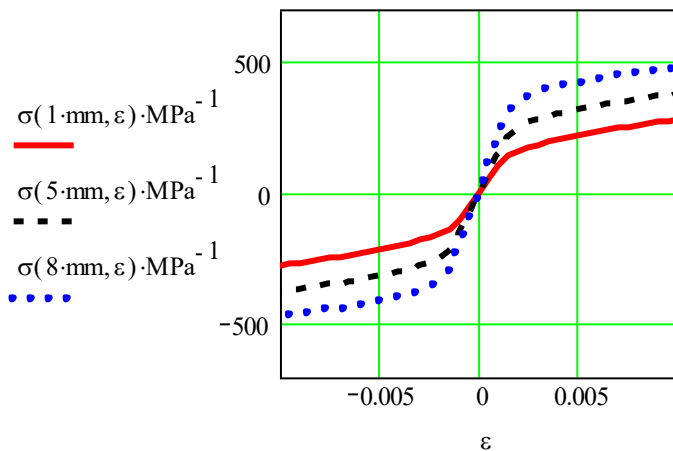


Рис. 10.1

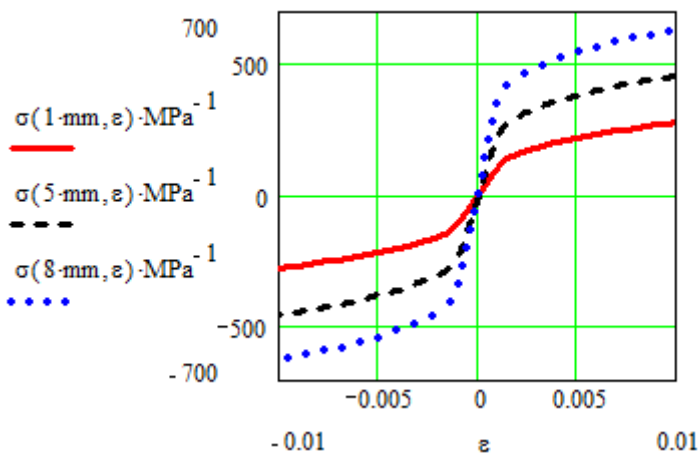


Рис. 10.1a

Зададим для каждого слоя пластины коэффициенты линейного теплового расширения:

$$\alpha_1 := 15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}, \quad \alpha_2 := 11 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}, \quad \alpha_3 := 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}},$$

и рассмотрим два варианта формул для обобщенного теплового расширения

$$\alpha(x) := \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right]}, \quad (10.3)$$

$$\alpha(x) := \frac{\alpha_1 + \alpha_3 \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right]}. \quad (10.3 \text{ a})$$

Графики обобщенного теплового расширения показаны на рис. 10.2 и 10.2а.

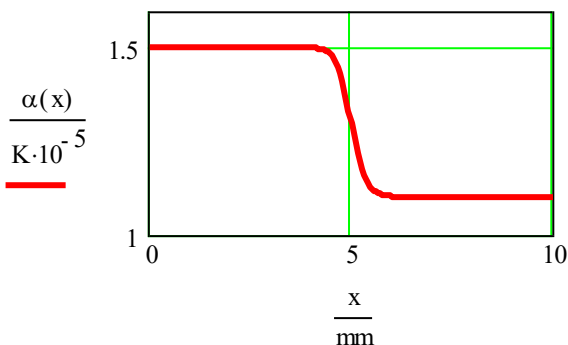


Рис. 10.2

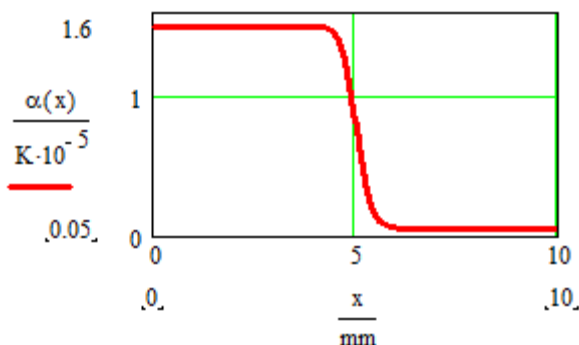


Рис. 10.2 а

Переходим к численному решению уравнения теплопроводности (10.1) для двухслойной пластины с коэффициентом температуропроводности $a(x)$, значение которого плавно изменяется по координате от левой стороны до правой. Уравнение (7.1) в конечно-разностном представлении будет иметь вид

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \dots \quad (10.4)$$

$$+ \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j} + \Delta T q_i$$

или

$$u_{i,j+1} = (u_{i+1,j}) \cdot \left[\left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] \dots \quad (10.5)$$

$$+ u_{i,j} \cdot \left[1 - \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} - 2 \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] + u_{i-1,j} \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} + \Delta T q_i$$

Построим конечно-разностную сетку. Зададим число шагов сетки по пространственной координате: $n := 50$, $i := 0..n$.

Шаг по толщине $\Delta x_i := \frac{L}{n}$.

Координата по толщине $x_i := \Delta x_i \cdot i$.

Шаг по времени: $\Delta \tau := 0.0001 \cdot s$, $\Delta t_i := \Delta \tau$.

Зададим коэффициенты температуропроводности:

$$a_1 := 50 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}, \quad a_2 := 200 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}, \quad a_3 := 20 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}},$$

и выпишем два варианта формул для обобщенной температуропроводности с плохим контактом, приняв, что

температуропроводность a_k зоны контакта равна $a_k := 0.01 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$

$$a(x) := \frac{\frac{a_1 + a_k \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{35}\right]} + a_2 \cdot \left(\frac{x}{aa + 0.7 \cdot \text{mm}}\right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + 0.7 \cdot \text{mm}}\right)^{n2}}, \quad (10.6)$$

$$a(x) := \frac{\frac{a_1 + a_k \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{35}\right]} + a_3 \cdot \left(\frac{x}{aa + 0.7 \cdot \text{mm}}\right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + 0.7 \cdot \text{mm}}\right)^{n2}}, \quad (10.6 \text{ a})$$

а так же формулу для производной от обобщенного коэффициента по координате

$$Da(x) := \frac{d}{dx} a(x). \quad (10.7)$$

Графические зависимости для температуропроводности по (10.6) и (10.6a) и для ее производной показаны на рис. 10.3 и 10.3a.

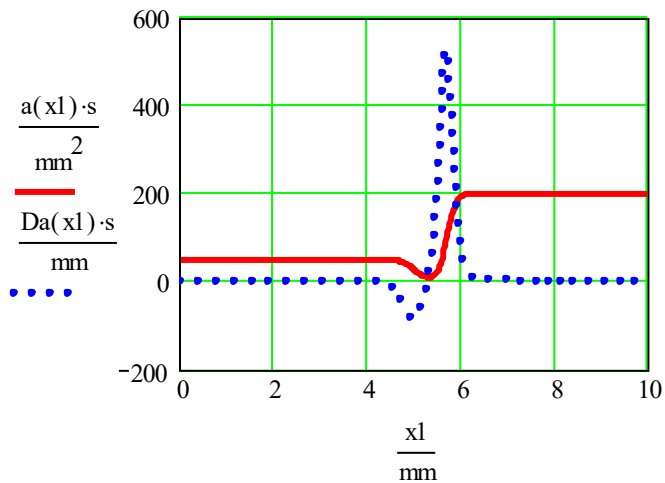


Рис. 10.3

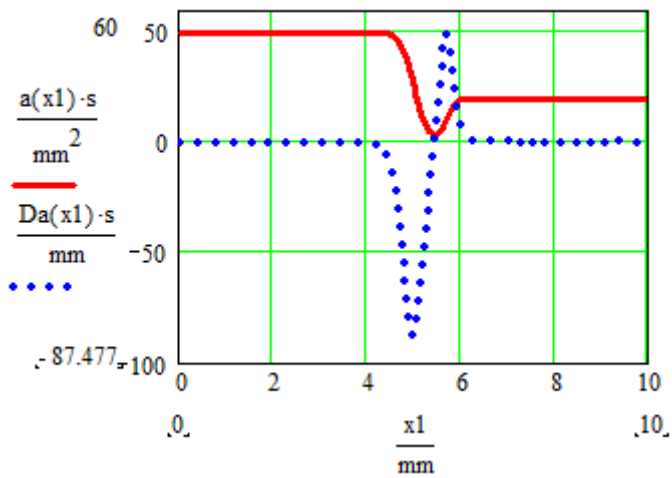


Рис. 10.3а

Вычисли векторы теплопроводности a_i и ее производной $Da x_i$: $a_i := a(x_i)$, $Da x_i := Da(x_i)$.

Критерий выбора шага по времени и по координате:

$$Z_i := \frac{\Delta t_i}{\Delta x_i} \cdot \left(Da x_i + 2 \cdot \frac{a_i}{\Delta x_i} \right), \quad Z_i \leq 1. \quad (10.8)$$

$$Z^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25

До начала расчетов температурных полей нужно убедиться, что при выбранных значениях Δt и Δx все элементы Z меньше или равны единице.

Зададим конкретные значения краевых условий:

$$C1 := 200 \cdot K, \quad C2 := 10 \cdot K.$$

Сформируем вектор начальных условий:

$$v_i := 0 \cdot K.$$

Введем новые обозначения в (10.4) и вычислим соответствующие векторы,

$$DB_i := \frac{Da x_i \cdot \Delta t_i}{\Delta x_i}, \quad B_i := \frac{a_i \cdot \Delta t_i}{(\Delta x_i)^2}.$$

Теперь уравнение (10.4) примет тот вид, в котором мы будем использовать в программе для его численного решения:

$$u_{i,j+1} = DB_i \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + B_i \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j}. \quad (10.9)$$

Программа в Mathcad для решения уравнения (10.4) имеет следующий вид, где n - число шагов по пространственной координате, t - число шагов по времени.

$$\begin{array}{l}
 S(n,t) := \begin{array}{l}
 u \leftarrow v \\
 \text{for } j \in 1..t \\
 \quad \text{for } i \in 0..n \\
 \quad \quad \begin{array}{l}
 A_{i,0} \leftarrow v_i \\
 z_i \leftarrow \begin{array}{l}
 C1 \text{ if } i=0 \\
 DB_i \cdot (u_{i+1} - u_i) \dots \quad \text{if } 1 \leq i \leq n-1 \\
 + B_i \cdot (u_{i-1} - 2 \cdot u_i + u_{i+1}) + u_i \\
 C2 \text{ if } i=n
 \end{array} \\
 A_{i,j} \leftarrow z_i
 \end{array} \\
 \quad u \leftarrow z \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (10.10)$$

Результаты решения представлены в матрице A , имеющей 50 строк и 15000 столбцов. Столбец с индексом j дает поле температур на момент времени $\Delta\tau \cdot j$,

$$A := S(50, 15000),$$

На рис. 10.4 и 10.4а показаны распределения температур по толщине двухслойной балки в некоторые моменты времени для первого и второго варианта задачи соответственно.

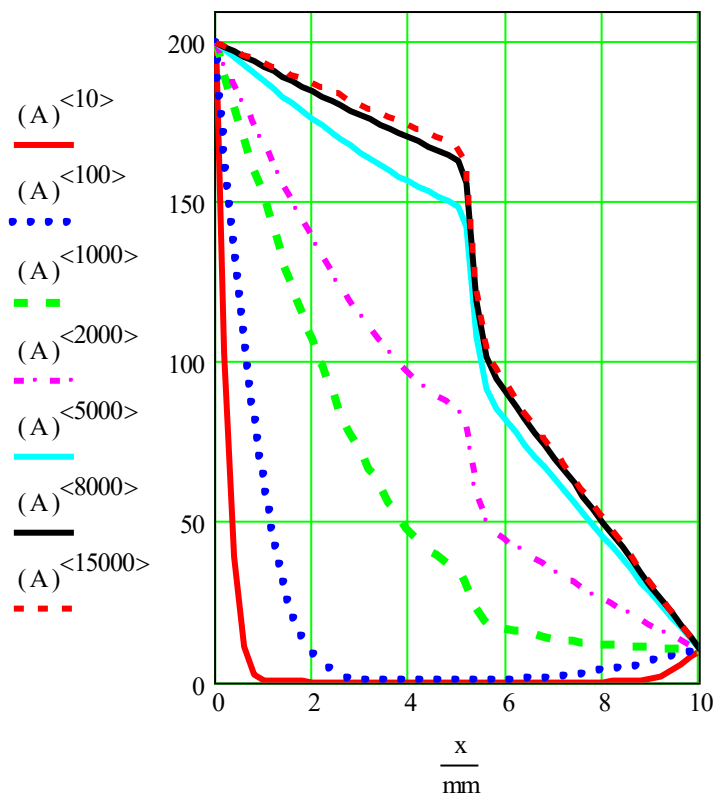


Рис. 10.4

Видно, что распределение температур на 8000-ом шаге по времени практически не отличается от температур на 15000-ом шаге. Это свидетельствует о том, что мы почти достигли стационарного распределения температур по толщине пластины.

Переходим к оценкам напряжений, возникающих в пластине. Пластину будем моделировать балкой с высотой, равной толщине пластины, относительные деформации в которой будем увеличивать

на $\frac{1}{1 - \mu}$, где μ - коэффициент Пуассона. Примем, что $\mu := 0.3$.

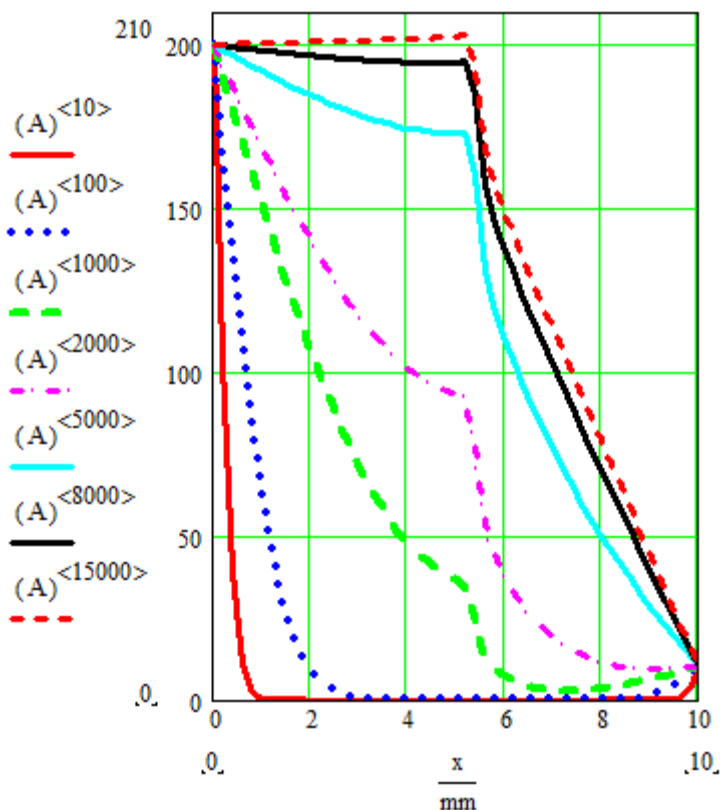


Рис. 10.4а

Переходим к расчету температурных напряжений. Рассмотрим балку, длина, толщина и высота которой равны, соответственно:

$$L := 200 \cdot \text{mm}, \quad b := 10 \cdot \text{mm}, \quad h := 10 \cdot \text{mm}.$$

Распределение температур по высоте балки можно выбрать любое из 15000 в матрице A. Например, выберем столбец $j = 10000$.

Сгладим расчетную точечную зависимость $(A)^{<10000>}$ от x .

$$TT := \text{supsmooth} \left[\frac{x}{m}, \frac{(A)^{<10000>}}{K} \right] \cdot K. \quad (10.11)$$

Запишем линейную интерполяционную формулу, описывающую зависимость температуры T от координаты y при условии, что начало координат находится на нижнем основании балки.

$$T(y) := \text{linterp}(x, TT, y) . \quad (10.12)$$

Зависимость температуры от координаты точки сечения y показана на рис.7.5 для первого варианта и на рис.10.5а для второго.

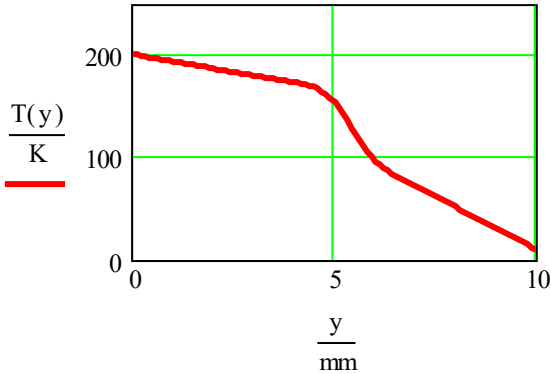


Рис.10.5.

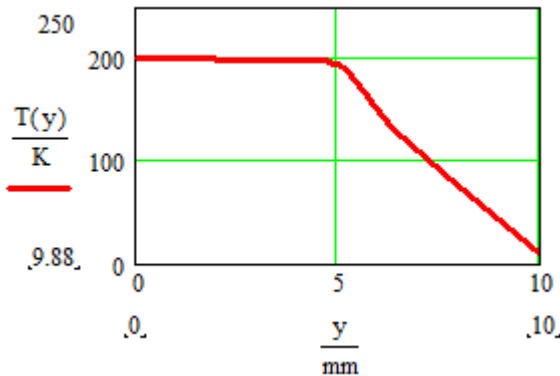


Рис.10.5а

Относительная деформация волокна на уровне y в общем случае равна

$$\varepsilon(\Delta_0, \theta, y) := \frac{\Delta_0 + \theta \cdot y - \alpha(y) \cdot L \cdot T(y)}{L \cdot (1 - \mu)} . \quad (10.13)$$

Формула для напряжений примет следующий вид.

$$\sigma_x(\Delta_0, \theta, y) := \sigma(y, \varepsilon(\Delta_0, \theta, y)) . \quad (10.14)$$

Рассмотрим три случая закрепления балки.

1. Свободно лежащая балка

В это случае продольная сила P_x и изгибающий момент M_z равны нулю. $P_x := 0 \cdot \text{kN}$, $M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$. Остается найти Δ_0 и θ , удовлетворяющие условиям равновесия. Зададим их приближенные значения и решим задачу в Mathcad (выделено желтым цветом).

$$\Delta_0 := 0.5 \cdot \text{mm}, \quad \theta := -5 \cdot \text{deg},$$

Given

$$P_x = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \, dy \quad M_z = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \, dy,$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \theta \end{bmatrix} := \text{Find}(\Delta_0, \theta).$$

Значения линейного и углового перемещений, отвечающие уравнениям равновесия, равны соответственно

$\Delta_0 = 0.692 \cdot \text{mm}$, $\theta = -4.051 \cdot \text{deg}$. Соответствующая этим перемещениям формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_x(y) := \sigma_x(\Delta_0, \theta, y). \quad (10.15)$$

2. Шарнирно опертая балка

Примем, что опорные шарниры расположены на уровне нижнего основания балки. Для этой балки удлинение нижнего волокна Δ_0 и изгибающий момент M_z равны нулю.

$$\Delta_0 := 0 \cdot \text{mm}, \quad M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}.$$

Остается найти продольную силу P_x и θ , удовлетворяющие условиям равновесия. Зададим их приближенные значения и решим задачу в Mathcad (выделено желтым цветом).

$$P_x := -10 \cdot \text{kN}, \quad \theta := 0.1 \cdot \text{deg},$$

$$\text{Given } P_x = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \, dy,$$

$$M_z = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \, dy, \quad \begin{bmatrix} P_x \\ \theta \end{bmatrix} := \text{Find}(P_x, \theta).$$

Итак, значения продольной силы и углового перемещения, отвечающие уравнениям равновесия, равны соответственно

$$P_x = -8.015 \cdot \text{kN}, \quad \theta = 1.274 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим параметрам формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_2(x) := \sigma_x(\Delta_0, \theta, y). \quad (10.16)$$

3. Полностью защемленная балка

Для данной балки перемещения Δ_0 и θ равны нулю.

$$\Delta_3_0 := 0 \cdot \text{mm}, \quad \theta_3 := 0 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим перемещениям формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_3(x) := \sigma_x(\Delta_3_0, \theta_3, y). \quad (10.17)$$

Опорные реакции в виде продольной силы и изгибающего момента равны

$$P_x = -19.686 \cdot \text{kN}, \quad M_z = -90.66 \, \text{J}.$$

Для целей сравнения достигнутого уровня осевых напряжений с напряжениями текучести сформируем два варианта обобщенной функции для предела текучести

Вариант 1.

$$\sigma_y(x) := \frac{\sigma_1_y + \sigma_2_y \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right]}. \quad (10.18)$$

Вариант 2.

$$\sigma_y(x) := \frac{\sigma_1 y + \sigma_3 y \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right]} . \quad (10.18a)$$

На рис. 10.6 и 10.6а приведены эпюры напряжений для двух вариантов задачи и для всех трех рассмотренных случаев закрепления балки (пластины), уравнения (10.15), (10.16) и (10.17), а также уровни растягивающих и сжимающих напряжений текучести по (10.18).

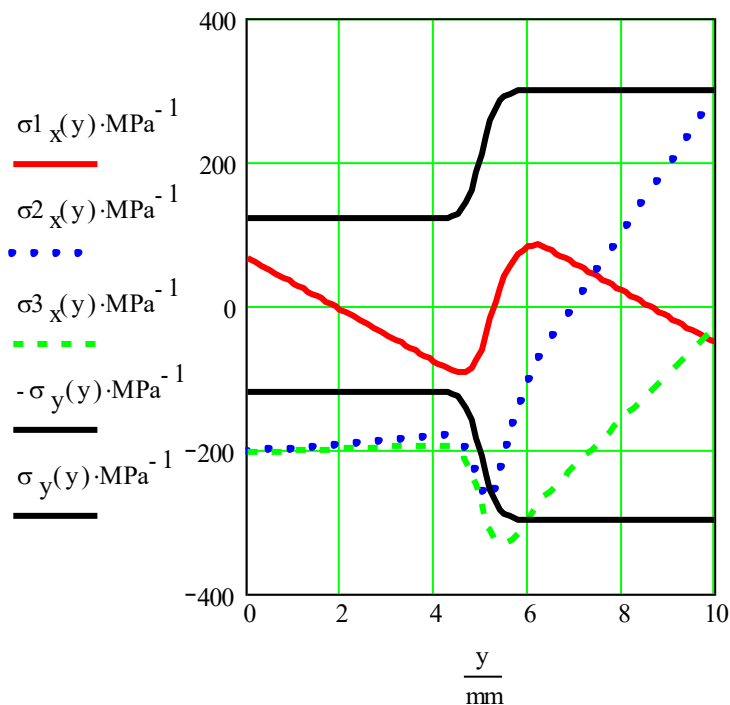


Рис.10.6

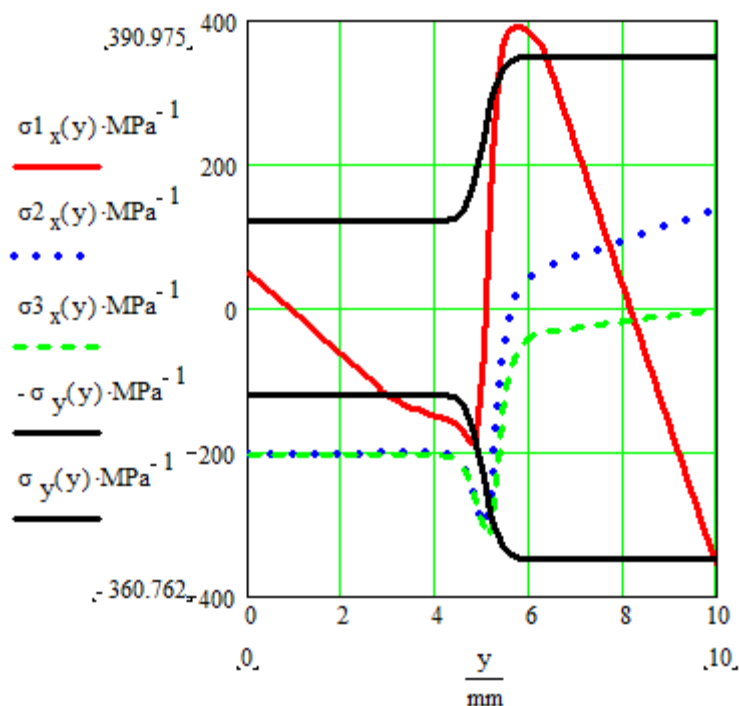


Рис.10.6а

Как следует из рис. 10.6 и 10.6а, напряжения не для всех рассмотренных случаев превышают введенный в данной работе физический предел текучести. В первом случае напряжения внутренне уравновешены. Во втором случае напряжения определяются температурными деформациями и реакцией опор, в третьем случае - полностью реакцией опор, запрещающей температурные деформации.

11. ОДНОСТОРОННИЙ ПРОГРЕВ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Задача - численно решить о прогреве трехслойной пластины и оценить уровень напряжений, обусловленных нестационарными температурными полями.

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{da}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + a(x) \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{dTq}{dt} . \quad (11.1)$$

Начальные условия: $u(x, t) = 0$ при $t = 0$, $0 \leq x \leq L$.

Краевые условия: $u(0, 0) = C1$, $du(L, t)/dx = 0$.

Тепловыделение равно нулю $\Delta Tq_i = 0$

В этом разделе, мы будем ориентироваться на три материала, физико-механические свойства которых, а именно обобщенная диаграмма растяжения - сжатия и обобщенное тепловое линейное расширение, сформированы в разделе 4. Естественно, что порядок расположения материалов в многослойной пластине может изменяться по желанию пользователя.

Объединим три диаграммы по толщины пластины, т.е. создадим **обобщенную диаграмму деформирования** для трехслойной пластины (рис. 4.2) в соответствии с формулами (4.2) и (4.6). Координата x изменяется в пределах толщины, начало координат на левой стороне пластины в соответствии с рис. 4.2. Примем, что толщина пластины и толщины двух первых слоев соответственно равны:

$$L := 10 \cdot \text{mm}, \quad aa := 3 \cdot \text{mm}, \quad bb := 3 \cdot \text{mm}.$$

Зададим также параметры диаграммы, которые будем постоянно использовать: $n1 := 30$, $n2 := 60$.

Тогда формула для обобщенной диаграммы деформирования будет

$$\sigma(x, \varepsilon) := \frac{\sigma_{x1}(\varepsilon) + \sigma_{x2}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2} \right]} + \frac{\sigma_{x3}(\varepsilon) \cdot \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}} . \quad (11.2)$$

Диаграммы деформирования, построенные по (11.2), показаны на рис. 11.1.

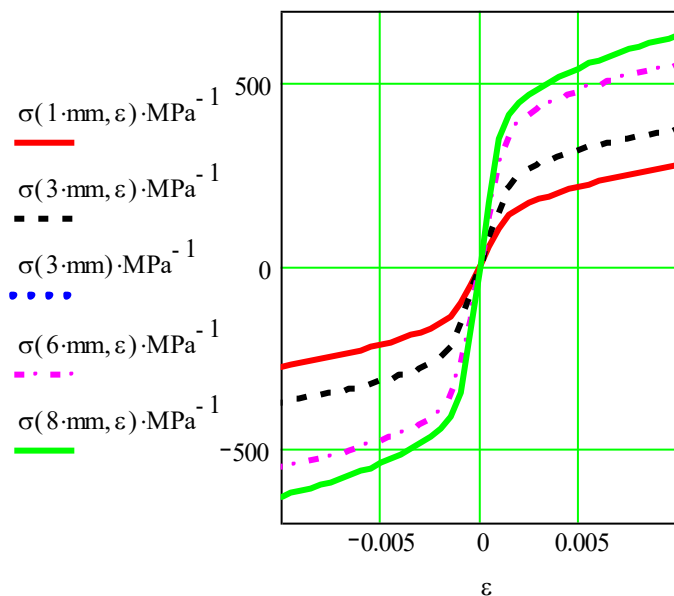


Рис. 11.1

Зададим для каждого слоя пластины коэффициенты линейного теплового расширения:

$$\alpha_1 := 15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}, \quad \alpha_2 := 11 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}}, \quad \alpha_3 := 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{K}},$$

и выпишем формулу для обобщенного теплового расширения

$$\alpha(x) := \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}\right]} + \frac{\alpha_3 \cdot \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}. \quad (11.3)$$

График обобщенного теплового расширения показан на рис. 11.2.

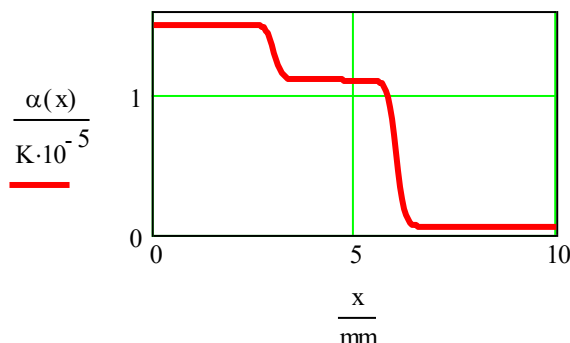


Рис. 11.2

Переходим к численному решению уравнения теплопроводности (11.1) для трехслойной пластины с коэффициентом температуропроводности $a(x)$, значение которого плавно изменяется по координате от левой стороны до правой.

Уравнение (11.1) в конечно-разностном представлении будет иметь вид

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \dots \quad (11.4)$$

$$+ \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j} + \Delta T q_i$$

или

$$u_{i,j+1} = (u_{i+1,j}) \cdot \left[\left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] \dots \quad (11.5)$$

$$+ u_{i,j} \cdot \left[1 - \left(\frac{da}{dx} \right)_i \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_i} - 2 \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] + u_{i-1,j} \cdot \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta x_i)^2} + \Delta T q_i$$

Построим конечно-разностную сетку. Зададим число шагов сетки по пространственной координате: $n := 50$, $i := 0 \dots n$.

Шаг по толщине $\Delta x_i := \frac{L}{n}$.

Координата по толщине $x_i := \Delta x_i \cdot i$.

Шаг по времени: $\Delta\tau := 0.0001 \cdot s$, $\Delta t_1 := \Delta\tau$.

Зададим коэффициенты теплопроводности по слоям:

$$a_1 := 50 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}, \quad a_2 := 200 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}, \quad a_3 := 20 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s},$$

и выпишем формулу для обобщенной к теплопроводности

$$a(x) := \frac{a_1 + a_2 \cdot \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa} \right)^{n1} \right]} + a_3 \cdot \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb} \right)^{n2}}, \quad (11.6)$$

а так же производную от обобщенного коэффициента по координате

$$Da(x) := \frac{d}{dx} a(x). \quad (11.7)$$

Графические зависимости для обобщенной теплопроводности и для ее производной показаны на рис. 11.3

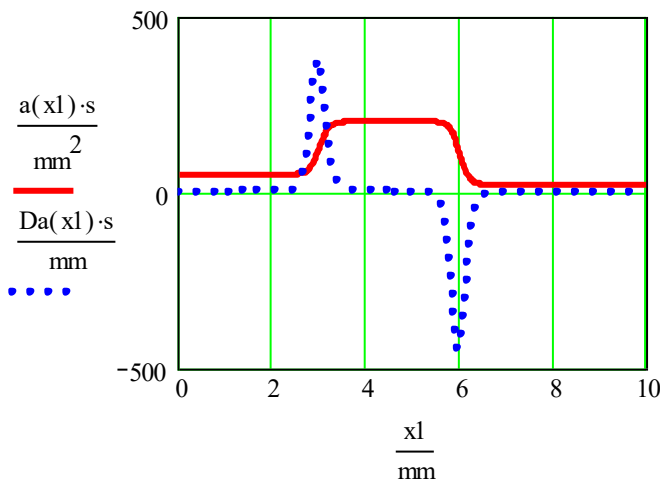


Рис. 11.3

Вычислим векторы температуропроводности a_1 и ее производной $Da x_1$: $a_1 := a(x_1)$, $Da x_1 := Da(x_1)$.

Критерий выбора шага по времени и по координате:

$$Z_i := \frac{\Delta t_i}{\Delta x_i} \cdot \left(Da x_i + 2 \cdot \frac{a_i}{\Delta x_i} \right), \quad Z_i \leq 1. \quad (11.8)$$

$$Z^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25

До начала расчетов температурных полей нужно убедиться, что при выбранных значениях Δt и Δx все элементы Z меньше или равны единице.

Зададим конкретные значения краевых условий:

$$C1 := 200 \cdot K, \quad C2 := 0 \cdot K.$$

Сформируем вектор начальных условий:

$$v_1 := 0 \cdot K.$$

Введем новые обозначения в (11.4) и вычислим соответствующие векторы:

$$DB_i := \frac{Da x_i \cdot \Delta t_i}{\Delta x_i}, \quad B_i := \frac{a_i \cdot \Delta t_i}{(\Delta x_i)^2}.$$

Теперь уравнение (7.4) примет тот вид, в котором мы будем использовать в программе для его численного решения

$$u_{i,j+1} = DB_i \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \dots \quad (11.9)$$

$$+ B_i \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j}$$

Программа в Mathcad для решения уравнения (11.4) имеет следующий вид, где n - число шагов по пространственной координате, t - число шагов по времени.

$$\begin{array}{l}
 S(n,t) := \quad u \leftarrow v \\
 \quad \text{for } j \in 1..t \\
 \quad \quad \text{for } i \in 0..n \\
 \quad \quad \quad A_{i,0} \leftarrow v_i \\
 \quad \quad \quad z_i \leftarrow \begin{array}{l} \text{C1 if } i=0 \\ DB_i \cdot (u_{i+1} - u_i) \dots \quad \text{if } 1 \leq i \leq n-1 \\ + B_i \cdot (u_{i-1} - 2 \cdot u_i + u_{i+1}) \dots \\ + u_i \\ u_n \text{ if } i=n \end{array} \\
 \quad \quad \quad A_{i,j} \leftarrow z_i \\
 \quad \quad u \leftarrow z \\
 \quad \quad u_n \leftarrow A_{i-1,j} \\
 A
 \end{array} \tag{11.10}$$

Эта программа численного решения уравнения теплопроводности отличается от программ, приведенных в предыдущих разделах тем, что на каждом j - ом шаге расчетов n - му значению температуры присваивается значение температуры $n-1$ шага по пространственной координате.

Результаты решения представлены в матрице A , имеющий 50 строк и 20000 столбцов. Столбец с индексом j дает поле температур на момент времени $\Delta\tau \cdot j$.

$$A := S(50, 20000),$$

На рис. 11.4 показаны распределения температур по толщине трехслойной балки в некоторые моменты времени.

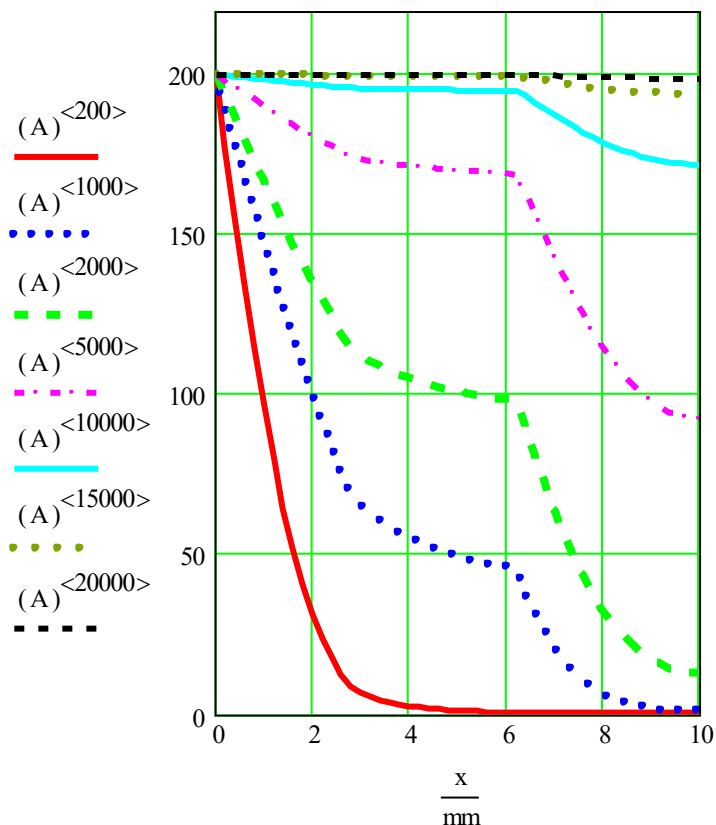


Рис. 11.4

Видно, что распределение температур на 20000-ом шаге по времени практически не отличается от температур на 15000-ом шаге. Это свидетельствует о том, что мы достигли постоянного стационарного распределения температур по толщине пластины.

Переходим к оценкам напряжений, возникающих в пластине. Рассмотрим балку, длина, толщина и высота которой равны соответственно

$$L := 200 \cdot \text{mm}, \quad b := 10 \cdot \text{mm}, \quad h := 10 \cdot \text{mm},$$

Распределение температур по высоте балки можно выбрать любое из 20000 в матрице A. Например, выберем столбцы 200 и 20000.

Сгладим расчетную точечную зависимость для столбца (A) <200> и для столбца (A) <20000> от x.

$$TT := \text{supsmooth} \left[\frac{x}{m}, \frac{(A)^{<200>}}{K} \right] \cdot K, \quad (11.11)$$

$$TT := \text{supsmooth} \left[\frac{x}{m}, \frac{(A)^{<20000>}}{K} \right] \cdot K. \quad (11.11 \text{ a})$$

Запишем линейную интерполяционную формулу, описывающую зависимость температуры T от координаты y при условии, что начало координат находится на нижнем основании балки.

$$T(y) := \text{interp}(x, TT, y). \quad (11.12)$$

Эта зависимость температуры от координаты точки сечения y показана на рис.11.5.

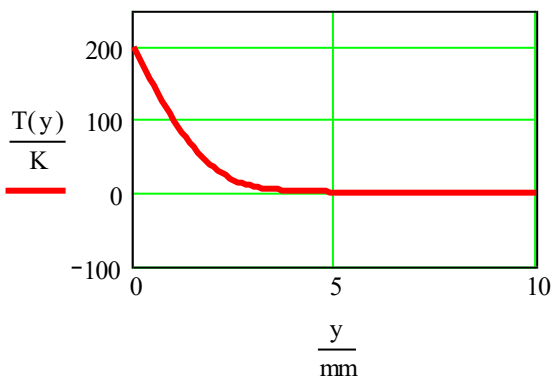


Рис.11.5.

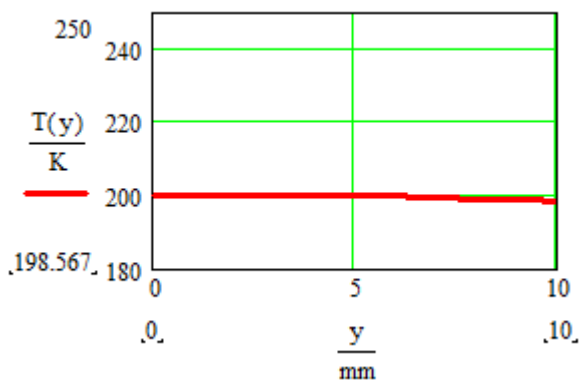


Рис.11.5a

Относительная деформация волокна на уровне y в общем случае равна

$$\varepsilon(\Delta_0, \theta, y) := \frac{\Delta_0 + \theta \cdot y - \alpha(y) \cdot L \cdot T(y)}{L \cdot (1 - \mu)}. \quad (11.13)$$

Множитель $(1 - \mu)$ в знаменателе "превращает" балку в пластину.

Формула для напряжений примет следующий вид.

$$\sigma_x(\Delta_0, \theta, y) := \sigma(y, \varepsilon(\Delta_0, \theta, y)). \quad (11.14)$$

Рассмотрим три случая закрепления балки.

1. Свободно лежащая балка

В этом случае продольная сила P_x и изгибающий момент M_z равны нулю:

$$P_x := 0 \cdot \text{kN}, \quad M_z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}.$$

Остается найти Δ_0 и θ , удовлетворяющие условиям равновесия.

Зададим их приближенные значения и решим задачу в Mathcad (выделено желтым цветом).

$$\Delta_0 := 0.5 \cdot \text{mm}, \quad \theta := -5 \cdot \text{deg},$$

$$\text{Given } P_x = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot dy,$$

$$M_z = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \cdot dy, \quad \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ \theta_1 & \end{bmatrix} := \text{Find}(\Delta_0, \theta).$$

Итак, значения линейного и углового перемещений, отвечающие уравнениям равновесия, равны соответственно

$$\Delta_1 = 0.163 \cdot \text{mm}, \quad \theta_1 = -1.239 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим перемещениям формула для эпюры напряжений будет

$$\sigma_1 x(y) := \sigma_x(\Delta_1, \theta_1, y). \quad (11.15)$$

2. Шарнирно опертая балка

Примем, что опорные шарниры расположены на уровне нижнего основания балки. Для этой балки удлинение Δ_0 и изгибающий M_Z момент равны нулю: $\Delta_0 := 0 \cdot \text{mm}$, $M_Z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$.

Найдем продольную силу P_x и θ удовлетворяющие условиям равновесия. . Зададим их приближенные значения и решим задачу в Mathcad (выделено желтым цветом).

$$P_x := -10 \cdot \text{kN}, \quad \theta := 0.1 \cdot \text{deg}.$$

$$\text{Given } P_x = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \, dy,$$

$$M_Z = \int_0^h \sigma_x(\Delta_0, \theta, y) \cdot b \cdot y \, dy, \quad \begin{bmatrix} P_x \\ \theta \end{bmatrix} := \text{Find}(P_x, \theta).$$

Продольная сила и угловое перемещение, отвечающие уравнениям равновесия, равны соответственно

$$P_x = -3.084 \cdot \text{kN}, \quad \theta = 0.034 \cdot \text{deg}.$$

Соответствующая этим параметрам формула для эпюры напряжений будет следующей

$$\sigma_2(x(y)) := \sigma_x(\Delta_0, \theta, y). \quad (11.16)$$

3. Полностью защемленная балка

Для данной балки перемещения Δ_0 и θ равны нулю.

$$\Delta_3 := 0 \cdot \text{mm}, \quad \theta_3 := 0 \cdot \text{deg}.$$

Формула для эпюры напряжений

$$\sigma_3(x(y)) := \sigma_x(\Delta_3, \theta_3, y). \quad (11.17)$$

Опорные реакции в виде продольной силы и изгибающего момента равны

$$P_x := \left(\int_0^h \sigma_x(\Delta_3, \theta_3, y) \cdot b \, dy \right), \quad P_x = -3.697 \cdot \text{kN}.$$

$$M_z := \left(\int_0^h \sigma_x(\Delta z_0, \theta z, y) \cdot b \cdot y dy \right), \quad M_z = -4.502 \text{ J}.$$

Для сравнения достигнутого уровня осевых напряжений с напряжениями текучести сформируем обобщенную функцию для предела текучести

$$\sigma_y(x) := \frac{\sigma_1 y + \sigma_2 y \cdot \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{aa}\right)^{n1}\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}\right]} + \frac{\sigma_3 y \cdot \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}{1 + \left(\frac{x}{aa + bb}\right)^{n2}}. \quad (11.18)$$

На рис. 11.6 и 11.6а приведены эпюры напряжений для двух распределений температуры и для всех трех рассмотренных случаев закрепления балки (пластины), уравнения (7.15), (7.16) и (7.17), а также уровни растягивающих и сжимающих напряжений текучести по (11.18).

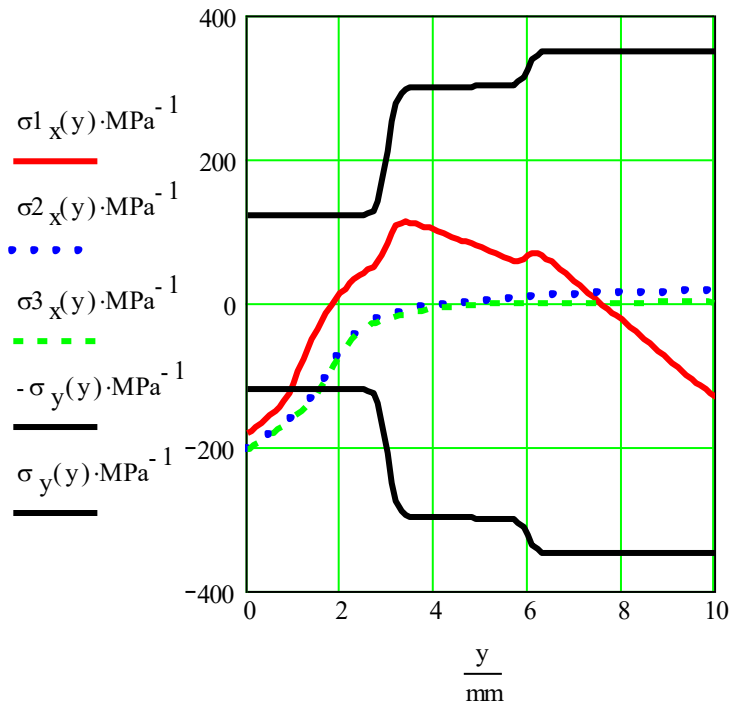


Рис.11.6.

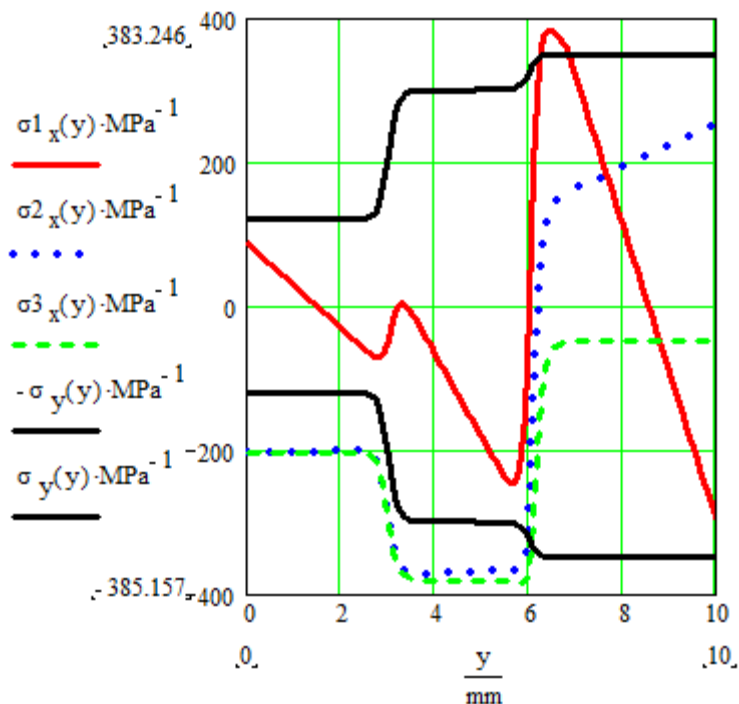


Рис.11.6а.

Как следует из рис. 11.6 и 11.6а напряжения для всех рассмотренных случаев местами превышают введенный в данной работе физический предел текучести. В первом случае напряжения внутренне уравновешены. Во втором случае напряжения определяются температурными деформациями и реакцией опор, в третьем случае - полностью реакцией опор, запрещающей температурные деформации.

Отметим также, что данный раздел издания отличается от раздела 4 только программой (11.10) для численного решения уравнения теплопроводности для трехслойной пластины.

Остаточные напряжения, возникающие при охлаждении, можно оценить с применением формул для перестройки диаграмм деформирования, приведенных в разделах 2 и 4.

12. СПЛОШНОЙ ЦИЛИНДР С ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Численно решим задачу о теплопроводности сплошного цилиндра с внешним радиусом R при наличии тепловыделения. Одномерное уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{du}{dt} = a \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{d^2 u}{dr^2} \right) + \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad (12.1)$$

Начальные условия: $u(x, t) = 0$ при $t = 0$, $0 \leq x \leq R$.

Краевые условия: $u(R, t) = C_2$, $\frac{d}{dx} u(0, t) = 0$.

Тепловыделение не равно нулю $\Delta T q_i \neq 0$

Уравнение теплопроводности (12.1) в конечно-разностной записи

$$u_{i,i+1} = \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2} \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) \dots \quad (12.2)$$

$$+ \frac{a \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + u_{i,j} + \Delta T q_i$$

где $\Delta T q_i = \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot dQ$.

Запишем уравнение (12.2) в иной записи

$$u_{i,i+1} = \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2} \cdot (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \dots, \quad (12.3)$$

$$+ \frac{a \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \left[1 - \frac{2 \cdot a \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2} - \frac{a \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} \right] \cdot u_{i,j} + \Delta T q_i$$

откуда следует условие устойчивости решения

$$Z_i = 1 - \frac{2 \cdot a \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2} - \frac{a \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i}, \quad Z_i \leq 0, \quad (12.4)$$

Примем, что материал цилиндра обладает следующими теплофизическими свойствами:

$$c := 0.15 \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \quad \lambda := 43.2 \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{hr} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}, \quad \rho := 8000 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$a := \frac{\lambda}{c \cdot \rho}, \quad a = 10 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}.$$

Примем, что тепловыделение равно $dQ := 0.1 \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{cm}^3 \cdot \text{s}}$, что

соответствует темпу повышению температуры на

$$dT_q := \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot dQ, \quad dT_q = 83.333 \frac{\text{K}}{\text{s}}.$$

Для этой задачи имеется аналитическое решение для зависимости температуры $T(r)$ от текущего радиуса цилиндра r в стационарном состоянии системы [17].

$$T(r) := 20 \cdot \text{K} + \frac{R^2}{4} \cdot \frac{dQ}{\lambda} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (12.5)$$

где, в нашем случае, $\frac{dQ}{\lambda} = 8.333 \cdot 10^6 \frac{\text{K}}{\text{m}^2}$.

Переходим к численному решению уравнения (12.1), $R := 10 \cdot \text{mm}$

Число шагов по радиусу цилиндра: $n := 50$, $i := 0..n$.

Размер шага по радиусу: $\Delta r := \frac{R}{n}$, $\Delta r = 0.5 \cdot \text{mm}$, $\Delta r_i := \Delta r$.

Координаты по радиусу: $r_i := \frac{R}{n} \cdot i$, $r_0 := \frac{R}{n} \cdot 0.7$.

Размер шага по времени процесса $\Delta t := 0.0011 \cdot \text{s}$.

Изменение температуры за один шаг по времени

$$\Delta T_{q_i} := \frac{dQ}{\lambda} \cdot a \cdot \Delta t, \quad \Delta T_{q_1} = 0.092 \text{ K}.$$

Проверим выполнение условия стабильности численного решения при заданных значениях Δr и Δt .

$$Z_i := 1 - \frac{2 \cdot a \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2} - \frac{a \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i},$$

$$Z^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.057	0.175	0.312	0.358	0.381	0.395	0.404	0.411	0.416	0.419

Зададим численно краевые условия

$$C1 := 10 \cdot K, \quad C2 := 20 \cdot K, \quad u_0 := 20 \cdot K.$$

Зададим численно начальные условия, $v_i := 20 \cdot K$.

Приняв, что

$$D1_i := \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}, \quad D2_i := \frac{a \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i},$$

преобразуем уравнение (12.2) к виду, в котором мы будем использовать в программе для численного решения задачи

$$u_{i,i+1} = D1_i \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) \dots \quad (12.6) \\ + D2_i (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + u_{i,j} + \Delta T_{q_i}$$

Программа для решения задачи в Mathcad

$$V(n,t) := \begin{array}{|l} u \leftarrow v \\ \text{for } j \in 1..t \\ \quad \text{for } i \in 0..n \\ \quad \quad \begin{array}{|l} A_{i,0} \leftarrow v_i \\ z_i \leftarrow \begin{array}{|l} u_0 \text{ if } i=0 \\ D1_i \cdot (u_{i-1} - 2 \cdot u_i + u_{i+1}) \dots \text{ if } 1 \leq i \leq n-1 \\ + D2_i \cdot (u_{i+1} - u_i) + u_i + \Delta T q_i \\ C2 \text{ if } i=n \end{array} \\ A_{i,j} \leftarrow z_i \end{array} \\ \quad u \leftarrow z \\ \quad u_0 \leftarrow A_{1,j} \\ A \end{array}, \quad (12.7)$$

Отличие данной программы от предыдущих в том, что для удовлетворения краевых условий на каждом шаге по времени значениям u_0 придаются значения u_1 .

Решение задачи выводится в виде матрицы A имеющей, в нашем случае, 50 строк и 10000 столбцов:

$$A := V(50, 10000).$$

Графическое численное решение задачи иллюстрирует рис. 12.1, где выборочно приведены нестационарные состояния на некоторые моменты времени.

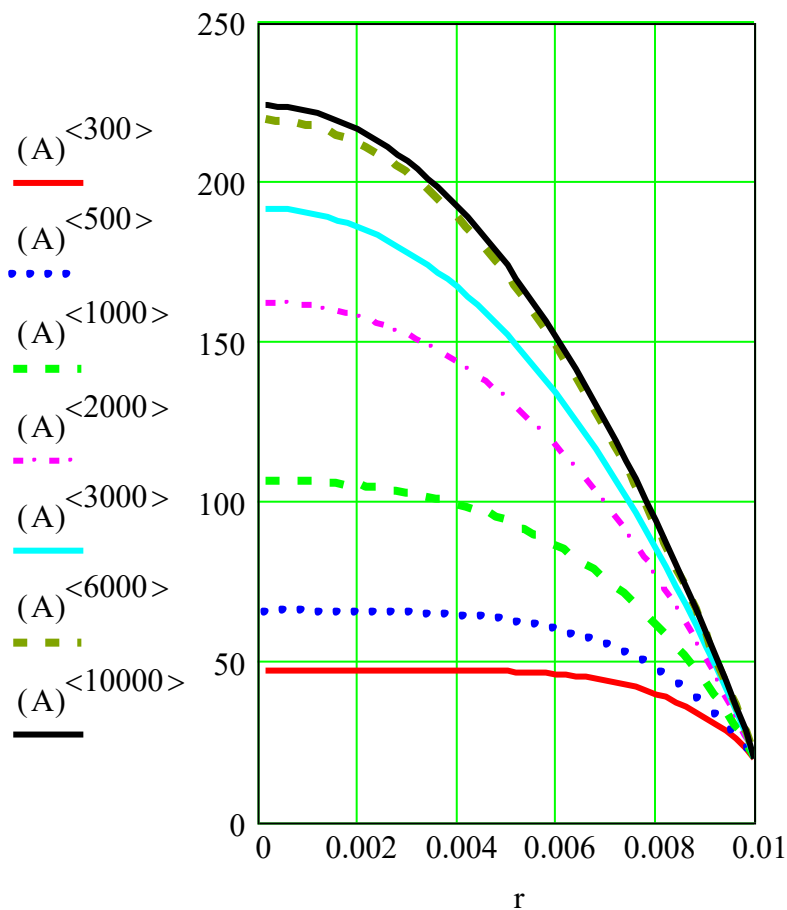


Рис. 12.1

Как следует из рис. 12.1, состояние $(A)^{<10000>}$ можно принять за стационарное.

На рис.12.2. сопоставлено численное решение $(A)^{<10000>}$ и решение (12.5).

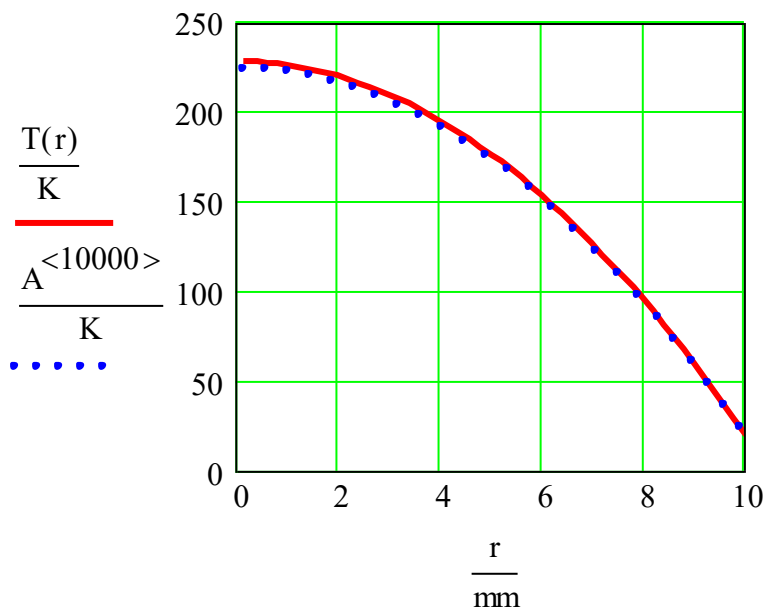


Рис. 12.2

Результаты численного решения отличаются от результатов аналитического решения примерно на 2%, что дает основание считать, что программа (12.7) дает адекватное решение, и что данный раздел является еще одной верификацией предложенной программы для численного решения уравнений теплопроводности в Mathcad.

13. ТРЕХСЛОЙНАЯ ТРУБА С ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Численно решим задачу о теплопроводности трехслойной толстостенной трубы при наличии тепловыделения. Внутренний радиус трубы R_1 , внешний радиус R_2 . Коэффициент температуропроводности изменяется от слоя к слою.

Начальные условия: $u(r, t) = 0 \cdot K$ при $t = 0$, $R_1 \leq r \leq R_2$,

Краевые условия: $u(R_1, t) = C1$, $u(R_2, t) = C2$.

При постоянном значении коэффициента температуропроводности а одномерное уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{du}{dt} = a \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{d^2 u}{dr^2} \right) + \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (13.1)$$

При этом

$$a \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{d^2 u}{dr^2} \right) = \frac{a}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{du}{dr} \right). \quad (13.2)$$

Если коэффициент теплопроводности $a(r)$ зависит от координаты r , то уравнение (13.1) с учетом (13.2) преобразуется в

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{d}{dr} \left(r \cdot a(r) \cdot \frac{du}{dr} \right) \right] + \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \frac{dQ}{dt}, \quad (13.3)$$

и, окончательно, в

$$\frac{du}{dt} = \left[\frac{du}{dr} \cdot \left(\frac{a(r)}{r} + \frac{da(r)}{dr} \right) + a(r) \cdot \frac{d^2 u}{dr^2} \right] + \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad (13.4)$$

В конечно-разностном виде уравнение (13.4) принимает вид

$$u_{(i,j+1)} = \left[\frac{\Delta t}{\Delta r_i} \cdot \left(\frac{da}{dr} \right)_i + \frac{a_i \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2} \right] \cdot (u_{i+1} - u_i) \dots \dots (13.5) \\ + \frac{-(a_i \cdot \Delta t)}{(\Delta r_i)^2} \cdot (u_i - u_{i-1}) + u_i + \Delta T q_i$$

Условие стабильности численного решения методом сеток

$$\frac{\Delta t}{\Delta r_i} \cdot \left(\frac{da}{dr} \right)_i + \frac{a_i \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2} \geq 0 . \quad (13.6)$$

Примем, что внутренний радиус, внешний радиус и толщины трех концентрических слоев соответственно равны:

$$R_1 := 10 \cdot \text{mm}, \quad R_2 := 20 \cdot \text{mm},$$

$$r_a := 3 \cdot \text{mm}, \quad r_b := 3 \cdot \text{mm}, \quad r_c := 4 \cdot \text{mm}.$$

Зададим также параметры диаграммы, которые будем постоянно использовать: $n1 := 60$, $n2 := 120$.

Зададим коэффициенты температуропроводности по слоям:

$$a_1 := 5 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}, \quad a_3 := 2 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}.$$

Первый вариант: $a_2 := 20 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}.$

Второй вариант: $a_2 := 1 \cdot \frac{\text{mm}^2}{s}.$

Формула для обобщенной температуропроводности будет выглядеть так:

$$a(r) := \frac{a_1 + a_2 \cdot \left(\frac{r}{R_1 + ra} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{r}{R_1 + ra} \right)^{n1} \right]} + a_3 \cdot \left(\frac{r}{R_1 + ra + rb} \right)^{n2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{R_1 + ra + rb} \right)^{n2}} \quad (13.6)$$

Производная от обобщенного коэффициента по координате

$$Da(r) := \frac{d}{dr} a(r) \quad (13.7)$$

Графические зависимости для обобщенной температуропроводности и для ее производной показаны на рис. 13.1 и 13.1а для первого и второго варианта соответственно.

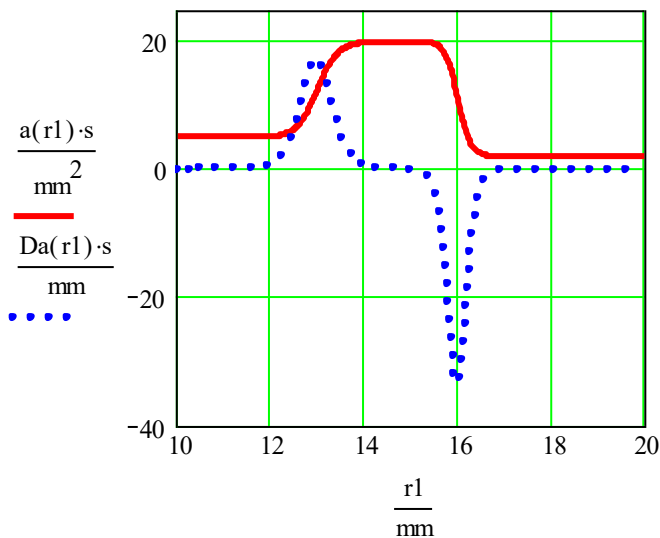


Рис. 13.1

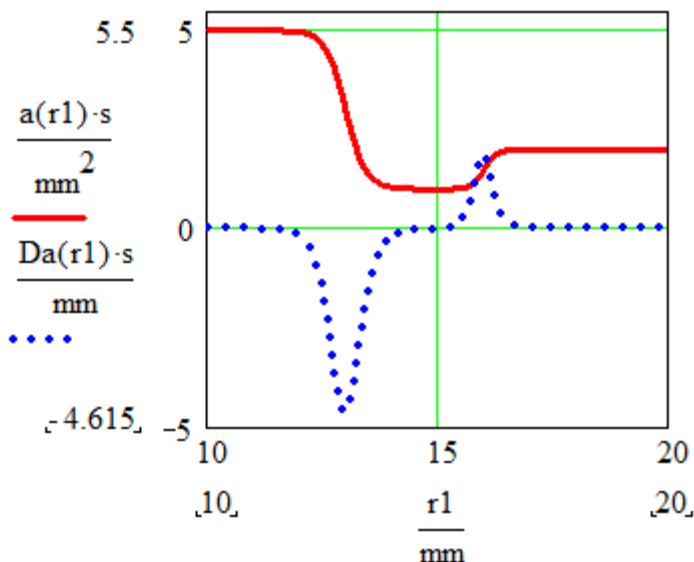


Рис. 13.1а

Переходим к численному решению уравнения (13.4).

Число шагов по радиусу стенки трубы: $n := 50$, $i := 0..n$.

Размер шага по радиусу: $\Delta r := \frac{R_2 - R_1}{n}$, $\Delta r = 0.2 \cdot \text{mm}$.

Координаты по радиусу: $r_i := R_1 + \Delta r \cdot i$, $\Delta r_i := \Delta r$.

Размер шага по времени процесса $\Delta t := 0.0005 \cdot \text{s}$.

Изменение температуры тепловыделения за один шаг по радиусу

$$\Delta T_0 := 0.05 \cdot \text{K},$$

$$\Delta T_q(r) := \frac{0 \cdot \text{K} + \Delta T_0 \cdot \left(\frac{r}{R_1 + r_a} \right)^{n1 \cdot 1.5}}{\left[1 + \left(\frac{r}{R_1 + r_a} \right)^{n1 \cdot 1.5} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{R_1 + r_a + r_b} \right)^{n2} \right]} \quad (13.8)$$

График зависимости температуры тепловыделения от радиуса показан на рис. 13.2.

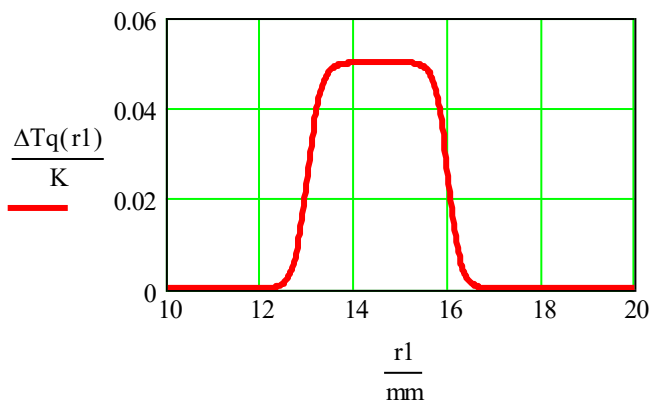


Рис. 13.2

Вектор температур тепловыделения $\Delta Tq_i := \Delta Tq(r_i)$.

Векторы температуропроводности и ее производной:

$$a_i := a(r_i), \quad Da_i := Da(r_i).$$

Вектор критерия стабильности численного решения

$$Z_i := \frac{Da_i \cdot \Delta t}{\Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}.$$

$$Z^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.065

Зададим конкретные начальные и краевые условия.

Начальные условия $v_i := 100 \cdot K$.

Краевые условия: $C1 := 100 \cdot K$, $C2 := 100 \cdot K$.

Введем обозначения

$$DB_i = \frac{\Delta t}{\Delta r_i} \cdot \left(\frac{da}{dr} \right)_i + \frac{a_i \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}, \quad B_i = \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}.$$

Теперь уравнение (13.5) примет вид, который будет использован в программе для численного решения задачи.

$$u_{(i,j+1)} = DB_i \cdot (u_{i+1} - u_i) \dots + -B_i \cdot (u_i - u_{i-1}) + u_i + \Delta T q_i \quad (13.9)$$

Сформируем векторы DB_i и B_i :

$$DB_i := \frac{Da_i \cdot \Delta t}{\Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}, \quad B_i := \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}.$$

Программа для численного решения задачи, где n - число шагов по радиусу, t - число шагов по времени.

$$S(n, t) := \begin{array}{l} u \leftarrow v \\ \text{for } j \in 1 \dots t \\ \quad \text{for } i \in 0 \dots n \\ \quad \quad A_{i,0} \leftarrow v_i \\ \quad \quad z_i \leftarrow \begin{cases} C1 & \text{if } i=0 \\ DB_i \cdot (u_{i+1} - u_i) \dots & \text{if } 1 \leq i \leq n-1 \\ + - [B_i \cdot (u_i - u_{i-1})] \dots \\ + u_i + \Delta T q_i \\ C2 & \text{if } i=n \end{cases} \\ \quad \quad A_{i,j} \leftarrow z_i \\ \quad u \leftarrow z \\ A \end{array} \quad (13.10)$$

Решение задачи по (13.10) выведем в виде матрицы A , имеющей 50 строк и 20000 столбцов:

$$A := S(50, 20000).$$

Каждый j -ый столбец, $(A)^{<j>}$, дает распределение температур по радиусу трубы в j -ый момент времени

На рис. 13.2 и 13.2а приведены некоторые распределения температур по радиусу трубы в разные моменты времени, рассчитанные по первому и второму варианту, соответственно.

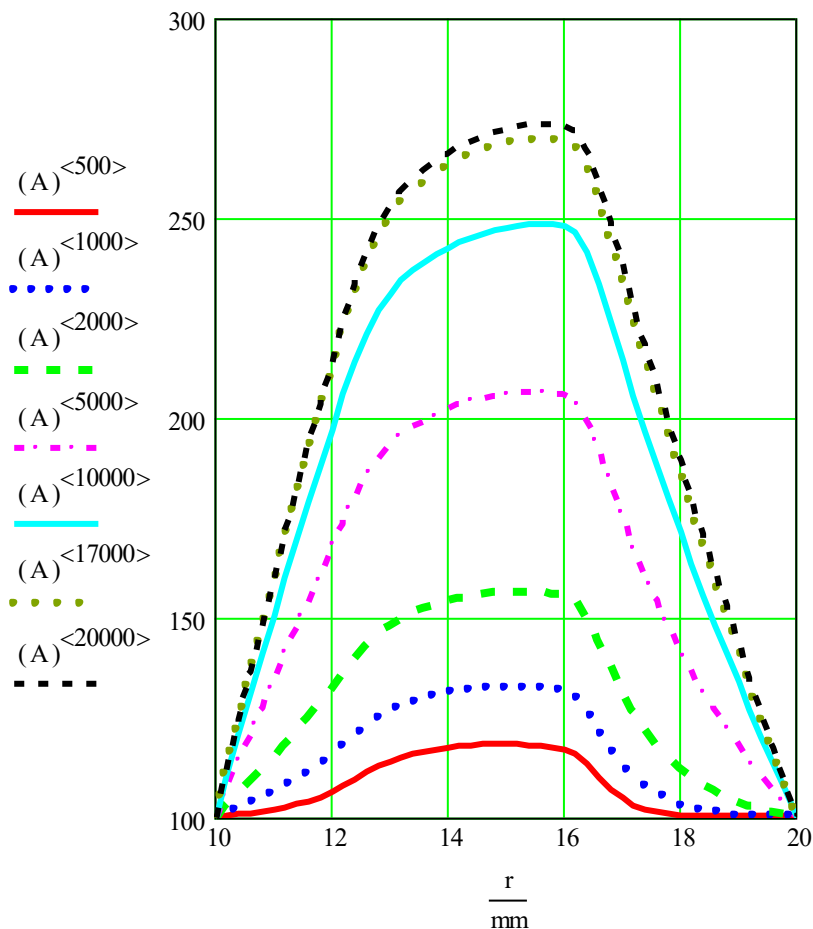


Рис. 13.2

Приближенное решение задачи о нестационарных температурных напряжениях в трехслойной трубе можно получить методом реальных элементов [8].

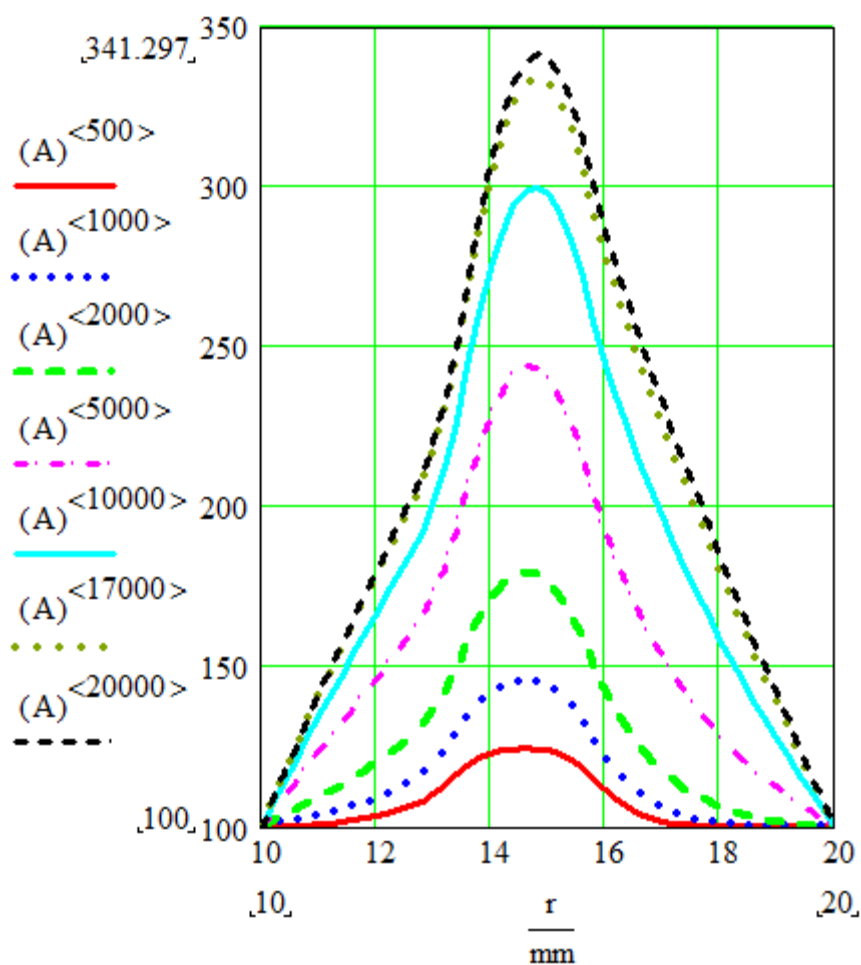


Рис. 13.2а

14. МНОГОСЛОЙНАЯ СФЕРА С ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Численно решим задачу о теплопроводности трехслойной толстостенной сферы при наличии тепловыделения. Внутренний радиус сферы R_1 , внешний радиус R_2 . Коэффициент температуропроводности изменяется от слоя к слою.

Начальные условия: $u(r, t) = C_1$ при $t = 0$, $R_1 \leq r \leq R_2$.

Краевые условия: $\frac{d}{dr}u(R_1, t) = 0$, $u(R_2, t) = C_2$.

При постоянном значении коэффициента температуропроводности a одномерное уравнение теплопроводности в сферических координатах имеет вид

$$\frac{du}{dt} = a \cdot \left(\frac{2}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{d^2 u}{dr^2} \right) + \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad (14.1)$$

При этом

$$a \cdot \left(\frac{2}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{d^2 u}{dr^2} \right) = \left[\frac{a}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{du}{dr} \right) \right] + \frac{a}{r} \cdot \frac{du}{dr}. \quad (14.2)$$

Если коэффициент теплопроводности $a(r)$ зависит от координаты r , то уравнение (14.1) с учетом (14.2) преобразуется в

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{d}{dr} \left(r \cdot a(r) \cdot \frac{du}{dr} \right) \right] + \frac{a(r)}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \frac{dQ}{dt}, \quad (14.3)$$

и, окончательно, в

$$\frac{du}{dt} = \left[\frac{du}{dr} \cdot \left(\frac{2 \cdot a(r)}{r} + \frac{da(r)}{dr} \right) + a(r) \cdot \frac{d^2 u}{dr^2} \right] + \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad (14.4)$$

В конечно-разностной записи уравнение (14.4) принимает вид

$$u_{(i,j+1)} = \left[\frac{\Delta t}{\Delta r_i} \cdot \left(\frac{da}{dr} \right)_i + \frac{2 \cdot a_i \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2} \right] \cdot (u_{i+1} - u_i) \dots \quad .(14.5)$$

$$+ \frac{-(a_i \cdot \Delta t)}{(\Delta r_i)^2} \cdot (u_i - u_{i-1}) + u_i + \Delta T q_i$$

Условие стабильности численного решения методом сеток

$$\frac{\Delta t}{\Delta r_i} \cdot \left(\frac{da}{dr} \right)_i + \frac{2 \cdot a_i \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2} \geq 0. \quad (14.6)$$

Примем, что внутренний радиус, внешний радиус и толщины трех концентрических слоев соответственно равны:

$$R_1 := 10 \cdot \text{mm}, \quad R_2 := 20 \cdot \text{mm},$$

$$r_a := 3 \cdot \text{mm}, \quad r_b := 3 \cdot \text{mm}, \quad r_c := 4 \cdot \text{mm}.$$

Зададим также параметры диаграммы, которые будем постоянно использовать:

$$n1 := 60, \quad n2 := 120.$$

Зададим коэффициенты температуропроводности по слоям:

$$a_1 := 5 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}, \quad a_3 := 2 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}.$$

Первый вариант: $a_2 := 20 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}.$

Второй вариант: $a_2 := 1 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}.$

Формула для обобщенного коэффициента температуропроводности будет иметь вид;

$$a(r) := \frac{a_1 + a_2 \cdot \left(\frac{r}{R_1 + ra} \right)^{n1}}{\left[1 + \left(\frac{r}{R_1 + ra} \right)^{n1} \right]} + a_3 \cdot \left(\frac{r}{R_1 + ra + rb} \right)^{n2} \quad (14.6)$$

$$1 + \left(\frac{r}{R_1 + ra + rb} \right)^{n2}$$

Производная от обобщенного коэффициента по координате

$$Da(r) := \frac{d}{dr} a(r). \quad (14.7)$$

Графические зависимости для обобщенной температуропроводности и для ее производной показаны на рис. 13.1 и 13.1а для первого и второго варианта соответственно.

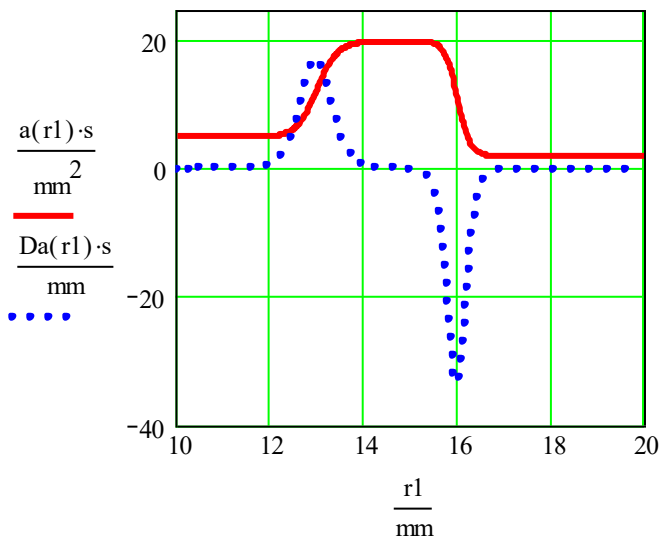


Рис. 13.1

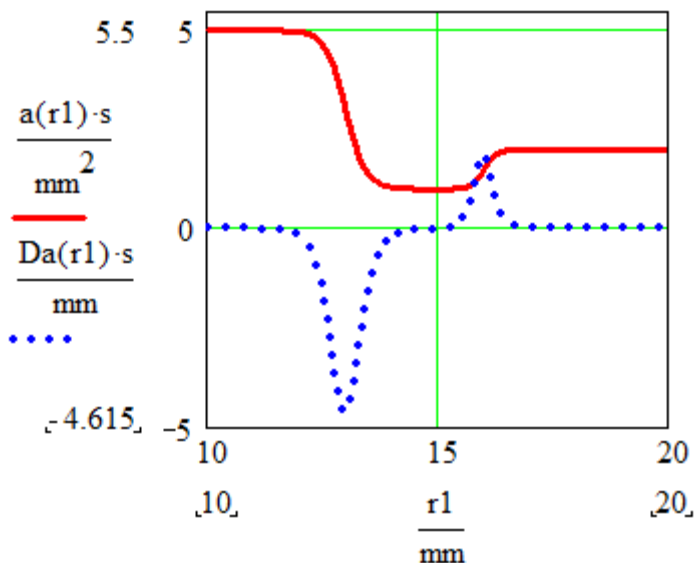


Рис. 13.1a

Переходим к численному решению уравнения (14.4) .

Число шагов по толщине стенки трубы: $n := 50$, $i := 0..n$.

Размер шага по толщине: $\Delta r := \frac{R_2 - R_1}{n}$, $\Delta r = 0.2 \cdot \text{mm}$.

Координаты по радиусу: $r_i := R_1 + \Delta r \cdot i$, $\Delta r_i := \Delta r$.

Размер шага по времени процесса $\Delta t := 0.0005 \cdot \text{s}$.

Изменение температуры тепловыделения за один шаг по радиусу

$$\Delta T_0 := 0.05 \cdot \text{K},$$

$$\Delta Tq(r) := \frac{0 \cdot \text{K} + \Delta T_0 \cdot \left(\frac{r}{R_1 + r_a} \right)^{n1 \cdot 1.5}}{\left[1 + \left(\frac{r}{R_1 + r_a} \right)^{n1 \cdot 1.5} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{R_1 + r_a + r_b} \right)^{n2} \right]}, \quad (14.8)$$

График зависимости температуры тепловыделения от радиуса показан на рис. 14.2.

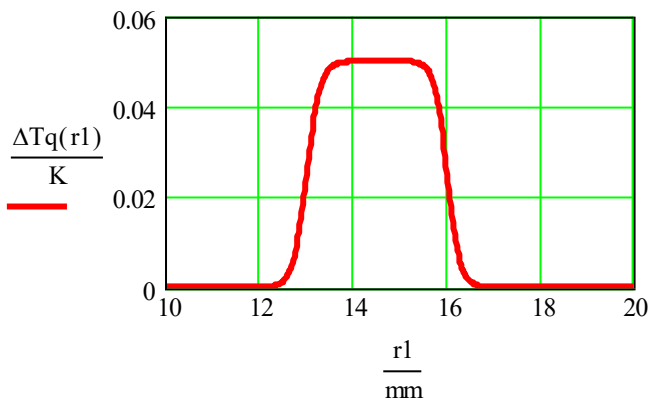


Рис. 14.2

Вектор температур тепловыделения

$$\Delta Tq_i := \Delta Tq(r_i).$$

Векторы теплопроводности и ее производной:

$$a_i := a(r_i), \quad Da_i := Da(r_i).$$

Вектор критерия стабильности численного решения

$$Z_i := \frac{Da_i \cdot \Delta t}{\Delta r_i} + \frac{2 \cdot a_i \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}.$$

$$Z^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065	0.066

Зададим конкретные начальные и краевые условия

Начальные условия:

$$v_i := 100 \cdot K.$$

Краевые условия:

$$C1 := 100 \cdot K, \quad C2 := 100 \cdot K.$$

Введем обозначения

$$DB_i = \frac{\Delta t}{\Delta r_i} \cdot \left(\frac{da}{dr} \right)_i + \frac{2 \cdot a_i \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}, \quad B_i = \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}.$$

Теперь уравнение (13.5) примет вид, который будет использован в программе для численного решения задачи.

$$u_{(i,j+1)} = DB_i \cdot (u_{i+1} - u_i) \dots + -B_i \cdot (u_i - u_{i-1}) + u_i + \Delta T q_i \quad (14.9)$$

Сформируем векторы DB_i и B_i .

$$DB_i := \frac{Da_i \cdot \Delta t}{\Delta r_i} + \frac{2 \cdot a_i \cdot \Delta t}{r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}, \quad B_i := \frac{a_i \cdot \Delta t}{(\Delta r_i)^2}.$$

Программа для численного решения задачи, где n - число шагов по радиусу, t - число шагов по времени.

$S(n,t) :=$.(14.10)

```

    u ← v
    for j ∈ 1 .. t
        for i ∈ 0 .. n
            Ai,0 ← vi
            zi ←  $\begin{cases} u_0 & \text{if } i=0 \\ DB_i \cdot (u_{i+1} - u_i) \dots & \text{if } 1 \leq i \leq n-1 \\ + - [B_i \cdot (u_i - u_{i-1})] \dots & \\ + u_i + \Delta T q_i & \\ C2 & \text{if } i=n \end{cases}$ 
            Ai,j ← zi
        u ← z
        u0 ← A1,j
    A

```

Решение задачи по (14.10) выведем в виде матрицы A , имеющей 50 строк и 20000 столбцов:

$$A := S(50, 20000).$$

Каждый j - ый столбец, $(A)^{<j>}$, дает распределение температур по радиусу трубы в j - ый момент времени

На рис. 14.3 и 14.3а приведены некоторые распределения температур по радиусу трубы в разные моменты времени, рассчитанные по первому и второму варианту, соответственно.

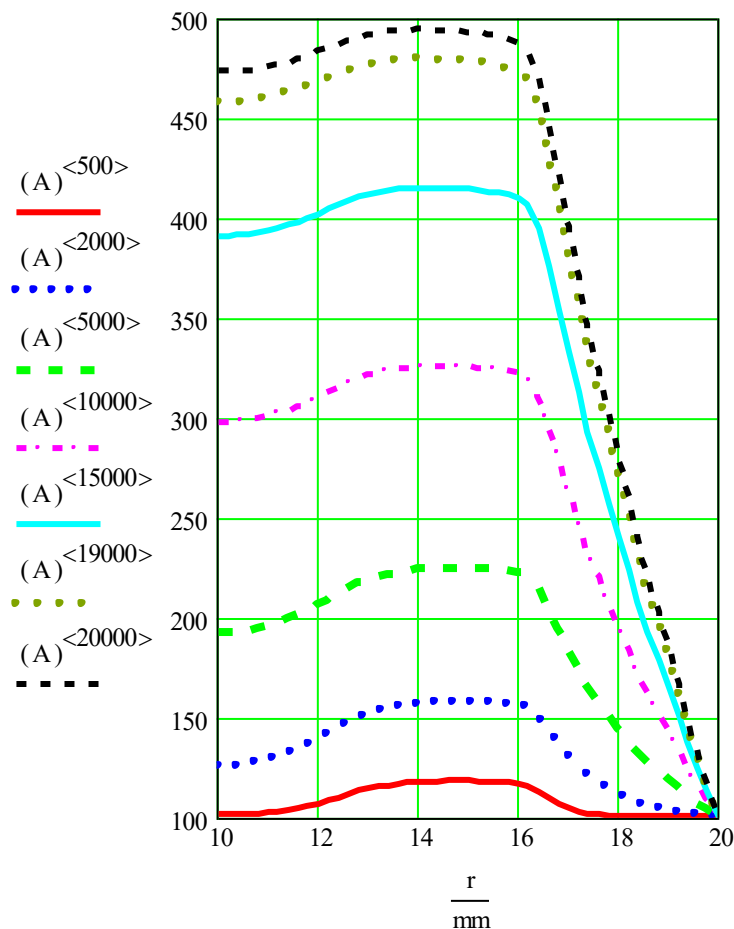


Рис. 14.3

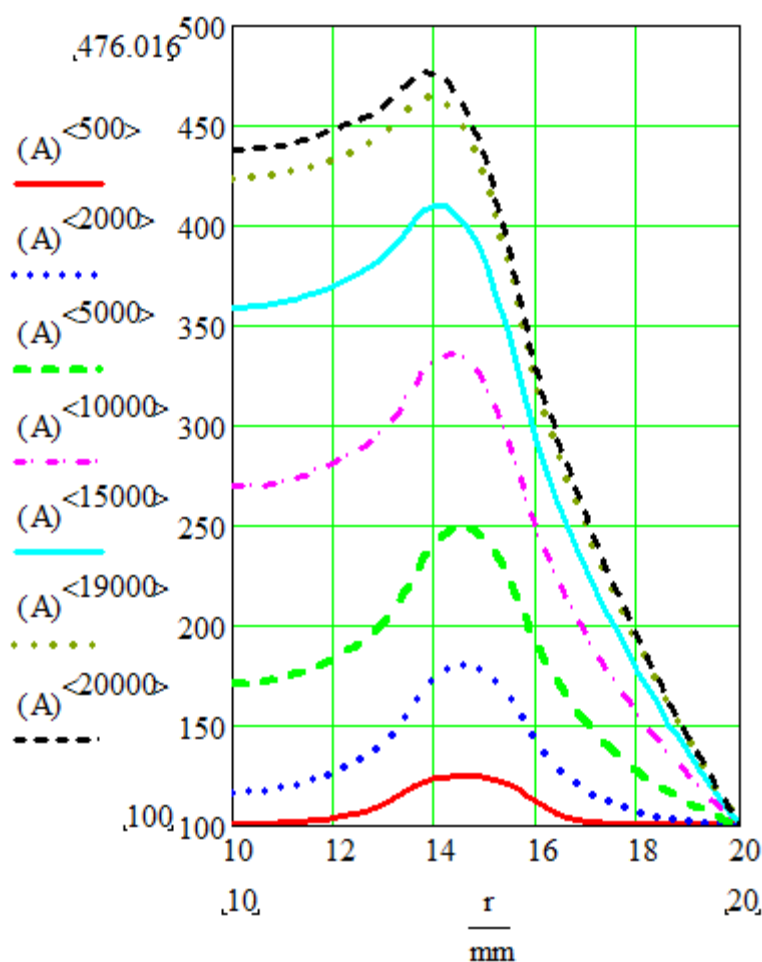


Рис. 14.3а

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой книге на инженерно-физическом уровне строгости промоделированы нестационарные процессы распространения тепла и уровни напряжений в трехслойных пластинах, обусловленных нестационарным тепловым воздействием. В рамках предложенных алгоритмов нет никаких препятствий для распространения рассмотренных алгоритмов на пластины, имеющие любое число слоев.

Текст книги обладает определенной избыточностью. Это сделано сознательно для того, чтобы читатель (пользователь) мог легко воспроизвести и проверить заинтересовавшие его вычисления и результаты в среде Mathcad. Поэтому во многих разделах книги еще и еще раз воспроизводятся тексты, уравнения и алгоритмы расчетов вместо того, чтобы сослаться на их написания в предыдущих разделах. Поэтому книга может претендовать на ранг учебного пособия.

В книге присутствует определенный набор новаций. Это метод реальных элементов, это управляемый по независящему от аргументов функций параметру математический оператор перехода от одной функции к другой. Это понятие обобщенной функции для физико-механических величин. Это алгоритм построения гладкой диаграммы деформирования конструкционного материала на основе известных его механических свойств. Это также обоснованная необходимость использования в прочностных расчетах при температурно-силовом нагружении детали значений предела пропорциональности, как истинного предела текучести, наряду с условным пределом текучести.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркочев В.М. Математический оператор перехода и его приложения в науке и технике. - М.: Изд-во фонда "Сталинград". 2018. - 162 с.
2. Маркочев В.М. Обратная задача аналитической геометрии - М.: Изд-во фонда "Сталинград". 2018. - 172 с.
3. Маркочев В.М. Конструирование гладких вейвлетов и финитных функций - М.: Изд-во фонда "Сталинград". 2019. – 76 с.
4. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения – М.: Физматгиз. 1963. – 252 с.

5. Boley B.A., Weiner J.H. Theory of thermal stresses -N.Y.: John Wiley & Sons. – 586 p.
6. Григорьев Л.Я., Маньковский О.Н. Инженерные задачи нестационарного теплообмена. – Л.: Энергия. 1968. – 84 с.
7. Маркочев В.М., Кравченко И.О. Метод реальных элементов как основа расчетов на прочность поврежденных деталей конструкций. М.: Препринт / МИФИ, 012-94, 1994. – 36 с.
8. Маркочев В.М., Олферьева М.А. Упругопластические состояния и прочность конструкций - М.: МИФИ, 2001.- 140 с.
9. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения – М.: Наука. 1985. – 504 с.
10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения – М.: Наука. 1974. – 640 с.
11. Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. Избранные нелинейные задачи механики разрушения – М.:ФИЗМАТДИТ. 2004. – 408 с.
12. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения – Киев: Наукова думка. 1988. – 488 с.
13. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов – М.: Физматгиз. 1962. – 536
14. Маркочев В.М., Тарасов Н.И. Моделирование процессов упругопластического деформирования защитных чехлов штуцеров оборудования / Атомная энергия. 2016. т. 121. вып. 2. с. 85-90.
15. Нормы расчетов на прочность оборудования и трубопроводов АЭУ, ПНАЕ Г-7-002-86 – М.: Энергоатомиздат. 1989. – 524 с.
16. Васильев В.И., Кононов Ю.И. Температурные напряжения в бетонных массивах – Л.: ЛПИ. 1969. – 120 с.
17. Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках – М.: Энергоатомиздат. 1986. – 472 с.
18. Гейтвуд Б.Е. Температурные напряжения - М.: ИЛ. 1959. - 349 с.
19. Калиткин Н.Н. Численные методы - М.: Наука. 1978. - 512 с.
20. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа - М.: Наука. 1967. – 368 с.

МЕТОД РЕАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КАК МЕТОДОЛОГИЯ ОЦЕНКИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ПОВРЕЖДЕННОГО ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ

Существующие критерии прочности, в том числе и критерии прочности тел с трещинами, возникли как результат постановки задачи о расчете прочности элемента конструкции исходя из известной прочности конструкционного материала, определенной в результате простого эксперимента на растяжение образца из этого же материала. Вся идеология, связанная с тем или иным критерием, направлена на то, чтобы отождествить предельные свойства образца с предельными возможностями элемента конструкции и одновременно обосновать не существенность для практики различий в поведении образца и конструкции под действием внешних сил. Это привело к тому, что в расчетах на прочность используются критериальные значения нагрузок, соответствующие одной единственной точке на экспериментальной диаграмме деформирования образца.

Большинство используемых в настоящее время критериев прочности являются силовыми. Деформационные критерии, связанные с такими весьма объективными физическими величинами, как удлинение, укорочение и перемещение, в явном виде широко не используются. Однако хорошо известно, что состояние испытуемого образца в некоторый момент времени описывается минимум двумя

величинами - напряжениями и соответствующими им деформациями. При этом значения предельных деформаций также важны, как и значения предельных напряжений, и немаловажное значение имеет путь достижения предельного состояния.

В настоящее время проблема определения степени приближения текущего состояния поврежденного элемента конструкции к его предельному состоянию приобрела весьма актуальное значение. Стало очевидно, что без решения задачи о моделировании процесса деформирования поврежденного элемента конструкции названная проблема решена быть не может.

В связи с вышесказанным была поставлена цель - разработать метод расчета на прочность поврежденных элементов конструкции, отвечающий основным нижеследующим требованиям:

- использование деформационного критерия;
- применение в расчетах значительно большего, чем обычно, объема эмпирического знания;
- обеспечение возможности рассчитать диаграммы деформирования анализируемого элемента конструкции;
- описание предельных состояний в терминах эксплуатационных силовых и деформационных факторов при разумной консервативности оценок предельного состояния.

Разработанный метод расчета назван «методом реальных элементов» (MePeЭл) [1].

Рассмотрим основные положения и процедуру применения MePeЭл на примере решения задачи о прочности поврежденного отрезка трубопровода при нагружении его изгибающим моментом $M_z = M$ и осевой силой $P_x = P$. Отрезок трубы имеет окружную трещину, максимальная глубина которой расположена на вертикальном диаметре трубы, лежащем в плоскости изгиба (рис.П.1,а). Профиль трещины симметричен относительно вертикальной оси (рис.П.2).

1. Мысленно разрежем рассматриваемый отрезок трубы длиной L на $2n$ продольных полос (стержней) равной ширины (рис.П.1,б). Большинство стержней будут целыми, некоторые будут содержать трещины определенной глубины a_i . Значение глубины трещины будем рассматривать как параметр, характеризующие этот стержень.

2. Составим стержневую модель анализируемого отрезка трубы с окружной трещиной. Для этого шарнирно соединим концы стержней

с двумя абсолютно жесткими обручами (рис.П.1,в). Взаимные осевые и угловые перемещения обручей относительно друг друга будут сопровождаться только растяжением или сжатием стержней модели.

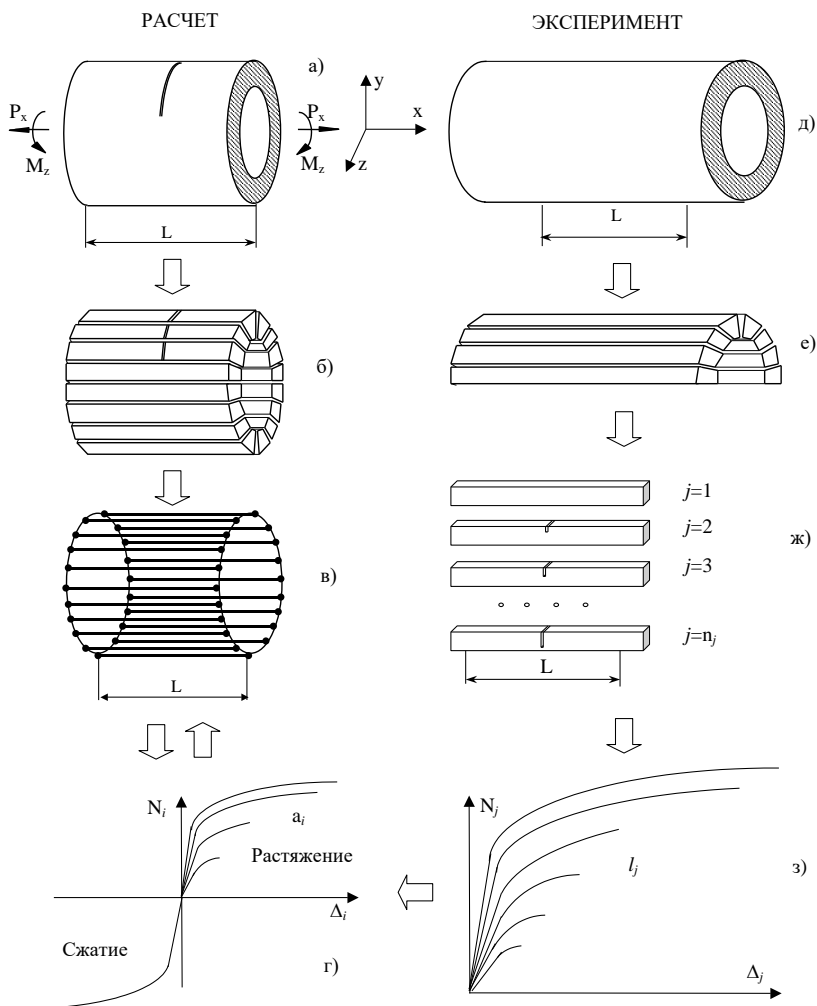


Рис.П.1. Алгоритм расчета по методу реальных элементов

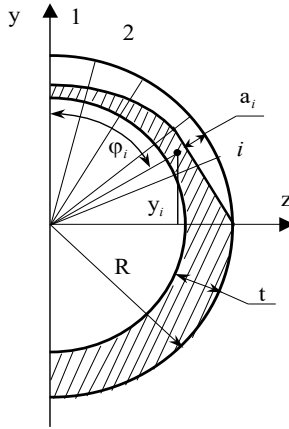


Рис.П.2. Разбиение сечения трубопровода с окружным дефектом на элементы.

3. Из трубы, желательно той же партии и имеющей те же значения внешнего радиуса R и толщины t , вырежем образцы, ориентированные аналогично стержням расчетного отрезка (рис.П.1,д,е). Ширина образцов может отличаться от ширины стержневой модели. В образцах изготавливаются надрезы (трещины) в направлении толщины различной относительной глубины $l_j / t = 0, 0,1, 0,2, \dots, 0,9, 0,95$ (рис.П.1,ж). Данный набор образцов испытывают на растяжение с записью диаграмм деформирования (нагрузка N - удлинение Δ) на базе L (рис.П.1,з).

4. Используя процедуру интерполирования экспериментальных диаграмм деформирования с параметрами l_j и учтя различие ширины образцов и стержневой модели, построим диаграммы для стержней поврежденной трубы с параметрами a_i (рис.П.1,г). Отметим, что диаграммой деформирования для неповрежденных стержней будет промасштабированная по силе экспериментальная диаграмма деформирования образца без надреза. Диаграмма сжатия для целых и поврежденных стержней принимается аналогичной диаграмме растяжения гладкого стержня с обратным знаком. Существенно, что каждому стержню модели соответствует своя диаграмма растяжения-сжатия.

5. Допустим, что левый обруч сместился относительно правого обруча по оси трубы на Δ и развернулся на угол θ , (рис. П.3).

Тогда, считая угол θ малым и $tg(\theta) = \theta$, каждый из стержней получит удлинение, равное:

$$\Delta_i = \theta \cdot y_i + \Delta, \quad (\text{П.1})$$

где $y_i = (R - (t + a_i)/2) \cdot \cos \varphi_i$ - расстояние между центром тяжести неповрежденного сечения (лигамента) i -го стержня с внешней трещиной и горизонтальной осью Z поперечного сечения трубы, φ_i - угловая координата центра лигамента i -го стержня (см.рис.П.2).

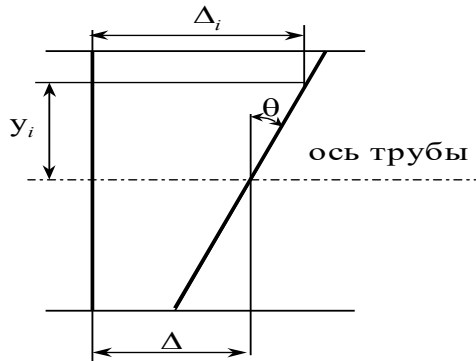


Рис.П.3. Схематическое изображение удлинения i -ого стержня в зависимости от перемещений концевой сечения

Этому удлинению будут соответствовать силы N_i , определяемые по соответствующим диаграммам деформирования (рис. П.1,г). Силы, действующие в стержнях, создадут суммарную осевую силу P и суммарный изгибающий момент M , равные соответственно:

$$P = \sum_{i=1}^{2n} N(\theta \cdot y_i + \Delta)_i, \quad (\text{П.2})$$

$$M = \sum_{i=1}^{2n} N(\theta \cdot y_i + \Delta)_i \cdot y_i. \quad (\text{П.3})$$

Получили систему из двух уравнений. Перемещениям Δ и θ крайних сечений отрезка трубы поставлены в соответствие однозначные значения осевой силы P и изгибающего момента M .

Задав значения для любой пары из этих четырех силовых и деформационных факторов, можно вычислить значения для оставшейся пары факторов. Определим предельные деформационные и силовые состояния данного отрезка трубопровода с осевой трещиной.

6. Отождествим достижение предельного состояния трубопровода с достижением предельного состояния наиболее поврежденного стержня. По условию задачи наиболее поврежденный стержень модели ($i=1$) лежит на вертикальном диаметре (рис.П.4). Так как его диаграмма деформирования известна, то известно и его предельное удлинение

$$\Delta_1^{\text{lim}} = \Delta_K.$$

Это предельное удлинение может быть достигнуто при различных сочетаниях осевого удлинения и углового перемещения отрезка трубы, что отражает уравнение:

$$\Delta_K = \theta_c \cdot y_1 + \Delta_c. \quad (\text{П.4})$$

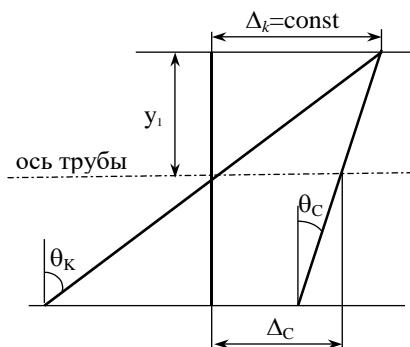


Рис.П.4. Схема к расчету критической деформационной прямой при жестком нагружении

Это уравнение дает зависимость предельного углового перемещения θ_c от предельного осевого перемещения Δ_c , т.е. критическую деформационную прямую $\theta_c - \Delta_c$ (рис.П.5).

Определив значения удлинения для всех стержней, соответствующих некоторой точке A критической деформационной кривой и вычислив суммарную осевую силу и изгибающий момент, получаем точку B на силовой критической кривой $M_c - P_c$ (см.рис.П.5). Повторив процедуру для требуемого числа точек, получим всю силовую критическую кривую - зависимость критического изгибающего момента M_c от продольной силы P_c .

7. Для построения диаграммы деформирования при жестком нагружении зададим некоторую программу деформирования элемента трубопровода с трещиной, например, самую простую - осевое и угловое перемещения прямо пропорциональны времени. На плоскости «угловое перемещение θ - осевое перемещение Δ » этой программе будет соответствовать прямой луч OA , исходящий из начала координат (рис.П.5). Вычислив для ряда точек этого луча соответствующие продольные силы и изгибающие моменты (аналогично п.6), получим кривую OB на плоскости $P - M$, которая, естественно, оканчивается на критической силовой кривой $M_c - P_c$. По этим двум кривым на силовой и деформационной плоскостях строим диаграммы деформирования $P - \Delta$ и $M - \theta$ (см.рис.П.5).

8. Для построения диаграммы деформирования при мягком силовом нагружении зададим программу нагружения на силовой плоскости, например в виде луча OA , исходящего из начала координат (рис.П.6). Используя итерационную процедуру, найдем последовательность точек OB на деформационной плоскости, соответствующих заданной последовательности точек на силовом луче OA . Отметим, что силовому лучу будет соответствовать кривая на деформационной плоскости и наоборот. Затем строим диаграммы деформирования $P - \Delta$ и $M - \theta$ аналогично пункту 7 (см.рис.П.6).

Поскольку критериальные диаграммы растяжения имеют конечную длину, то каждый из стержней модели автоматически наделяется критериальными свойствами - его удлинение не может быть большим, чем получено при его испытании. Тем самым удовлетворено первое требование к методу расчета – применение деформационного критерия.

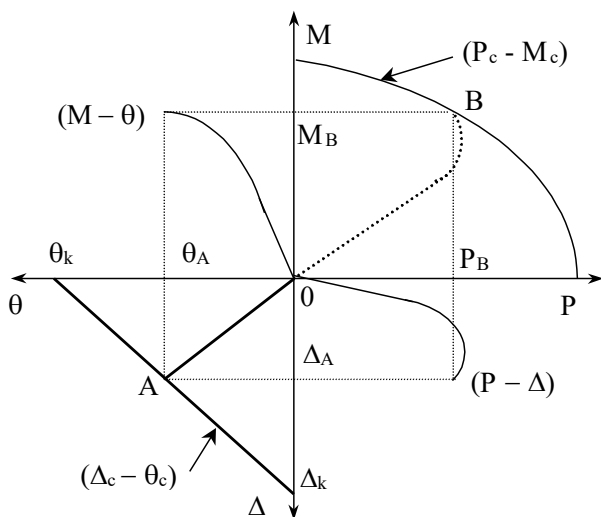


Рис.П.5. Критические кривые и диаграммы деформирования для трубопровода при жестком нагружении

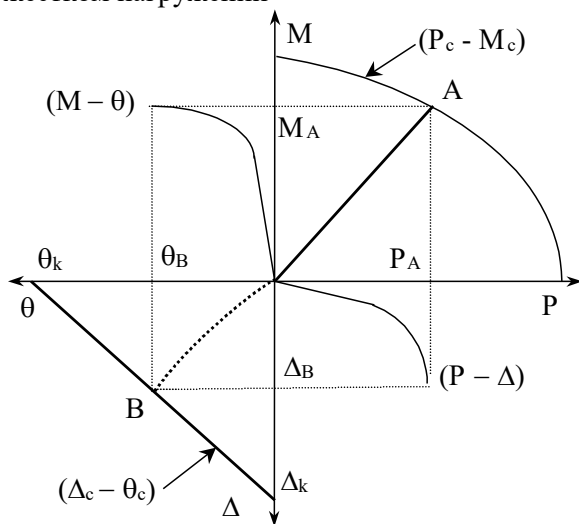


Рис.П.6. Критические кривые и диаграммы деформирования для трубопровода при мягком нагружении

Использование в расчетах не одного значения координаты на кривой растяжения, а всего семейства диаграмм позволяет резко увеличить используемый в расчетах объем эмпирического знания и удовлетворить второму требованию. При этом в базу данных закладываются и возможные различия в механизмах разрушения, зависящие от размера дефекта.

Третье и четвертое требование также удовлетворены - МеРеЭл позволяет моделировать процесс нагружения с построением соответствующих диаграмм деформирования элемента конструкции и предельных силовых и деформационных кривых в терминах эксплуатационных нагрузок и перемещений. В данном случае ими являются продольная сила, изгибающий момент и соответствующие осевое и угловое перемещения.

Удовлетворено также и требование консервативности, так как введение разрезов не увеличивает прочности всего элемента конструкции, а отсутствие поддержки наиболее слабому стержню со стороны соседей позволяет ему скорее достичь предельного состояния.

Рассмотрим ограничения и возможности МеРеЭл.

Наиболее существенное отличие МеРеЭл от традиционных методов расчета на прочность и трещиностойкость состоит в отказе от строгого решения задачи о напряженно-деформированном состоянии. Условия совместности деформаций соблюдаются не по всему объему элемента конструкции, а только на концах стержневых элементов. Кроме того, предполагается справедливость гипотезы плоских сечений.

Основная гипотеза, лежащая в основе МеРеЭл - это гипотеза о возможности замены сплошного элемента конструкции эквивалентной ему по прочности и деформационной способности стержневой системой. Если учесть, что большинство существующих методов расчета неявно используют гипотезу об отождествлении прочности элемента конструкции с единственным образцом, названная гипотеза относительно эквивалентной стержневой системы представляется весьма правдоподобной.

Вся тяжесть МеРеЭл - расчетов в принципиальном плане переносится на методологию построения эквивалентной стержневой системы, на процедуру соответствующих испытаний материалов и на способ, с помощью которого стержням расчетной схемы приписываются адекватные диаграммы деформирования и разрушения. Отметим, что для определенной группы элементов

конструкций (сосуды давления, балки, стержни и др.) процедура построения эквивалентной стержневой системы является очевидной.

Критическое состояние стержневой системы соответствует разрыву одного из поврежденных стержневых элементов, обладающего пониженной деформационной способностью и находящемуся в месте, где перемещения в системе максимальны. Остальная система элементов, деформируясь под действием внешней нагрузки, задает возможные для критериального элемента перемещения, исполняя роль «внутренней испытательной машины».

Реализация МеРеЭл возможна только при использовании вычислительной техники, так как в вычислениях обрабатываются большие объемы данных. Можно утверждать, что создание МеРеЭл - методологии прочностных расчетов стало возможным лишь при современном уровне развитии вычислительной техники.

Рассмотрим, какие новые возможности дает МеРеЭл за счет потери строгости анализа напряженно-деформированного состояния, компенсируемой использованием в расчетах большего объема экспериментальных данных и деформационного критерия прочности.

1. Возможность численного расчета диаграммы деформирования поврежденного элемента конструкции решает задачу оценки степени близости данного состояния к реальному критическому состоянию. При необходимости реальное критическое состояние можно заменить некоторым расчетным критическим состоянием с введением соответствующих запасов по прочности и перемещениям.

Отметим сразу, что представляемая МеРеЭл возможность описывать состояние элемента конструкции одновременно по силовым и деформационным параметрам снимает неопределенность, возникающую при силовых расчетах, когда вопрос о упругопластических перемещениях, необходимых для достижения предельных несущих нагрузок остается открытым. Нередко оказывается, что обозначенное предельное состояние по нагрузке может быть реализовано лишь при значительных перемещениях и деформациях, недопустимых или недостижимых на практике для данной системы.

2. Поскольку МеРеЭл - расчеты базируются всецело на прямых экспериментальных данных без преобразования в другие теоретически введенные величины, существенно повышается достоверность и надежность результатов расчета. Этому также способствует отсутствие некой глобальной критериальной гипотезы и устранение сингулярностей чисто математического

происхождения. Получение абсолютно нереальных предельных значений силовых и деформационных факторов при МеРеЭл - расчетах практически исключено.

3. Перечислим возможности, которые открывает МеРеЭл:

- расчеты при сложном программном нагружении, когда силы и моменты изменяются независимо друг от друга с изменением направления или знака воздействия. Это достигается перестройкой диаграмм деформирования после каждого шага нагружения, что позволяет учесть не только нелинейность, но и явную необратимость процесса упругопластического деформирования.
- расчеты при нестационарном термосиловом нагружении с учетом изменения диаграмм деформирования с изменением температуры.
- расчеты с учетом остаточных напряжений. Для этого достаточно сместить критериальные диаграммы деформирования по оси удлинения, чтобы обеспечить ненулевые начальные условия.
- расчеты на прочность сварных соединений. Осуществляются на основе диаграмм растяжения-сжатия образцов с аналогичными сварными швами.

4. Процедура МеРеЭл - расчетов остается той же при переходе материала в хрупкое состояние, так как при этом переходе изменяется вид диаграмм деформирования. Для повышения степени консервативности можно вместо нелинейных диаграмм деформирования использовать линейные диаграммы при температурах ниже критической температуры хрупкости. МеРеЭл - методология открывает возможность прогнозировать изменения прочности поврежденных элементов конструкций с ростом дозы нейтронного облучения на основе экспериментальных диаграмм деформирования облученных малогабаритных образцов.

5. МеРеЭл базируется на прямом экспериментальном учете чувствительности материала к трещинам и концентрации напряжений. Сложные решения упругопластических задач заменяются прямыми экспериментальными данными о поведении образцов с надрезами или трещинами. Учет двухосности напряженного состояния в трубах при нагружении внутренним давлением осуществляется введением соответствующего эффективного модуля упругости при описании линейного участка диаграмм деформирования.

В заключение еще раз отметим следующее:

Как и большинство математических моделей твердого тела, сам МеРеЭл формулируется на физическом (или инженерном) уровне строгости. Решения же на основе этой модели базируются на математическом уровне строгости.

Например, теория упругости базируется на законе Гука и модели твердого тела, как сплошной, изотропной и однородной среды, что соответствует физическому уровню строгости. Решения же задач теории упругости выполняются на математическом уровне строгости.

В общем случае каждый стержень имеет свою индивидуальную математическую модель (диаграмму растяжения – сжатия) и обладает своим предельным удлинением. Тем самым каждый стержень наделяется собственным деформационным критерием разрушения при его растяжении.

Отличие сопромата от МеРеЭл – волокно или образец. Волокно – понятие, образец – реальность, имеющая форму и размеры, превышающие размеры структурных составляющих.

Стержневая МеРеЭл модель обладает как внешним правдоподобием, так внутренним. Внешнее правдоподобие достигается геометрическим совпадением элемента конструкции и стержневой модели. Внутреннее правдоподобие обеспечивается использованием в модели реальной упругопластической реакции конструкционного материала на внешнее воздействие, отраженной в диаграмме растяжения-сжатия.

Важная особенность МеРеЭл модели – применимость для прочностных расчетов как в упругом, так и в упругопластическом состоянии материала. Она обладает внутренней консервативностью и устойчивостью. Незначительное изменение параметров модели не приводит к ошибочным результатам. Достоверность результатов расчета повышается за счет использования не отдельных значений механических свойств, а всей диаграммы деформирования. Результаты расчетов близки к результатам натурных испытаний. К тому же, результатом расчетов является не число, а кривая - диаграмма упругопластического деформирования элемента конструкции.

МеРеЭл модель допускает дальнейшее уточнение и развитие. Например, возможно введение внутренних связей между

элементами, использование стержней переменного поперечного сечения по длине и т.д.

Ограничение модели связано с тем, что она не вполне описывает изменение формы элемента конструкции при большом упругопластическом деформировании. Поэтому ее использование для прочностных расчетов напрямую связано с нормированием, разумным ограничением области применения и введением деформационных запасов прочности.

Метод реальных элементов (MePeЭл) базируется на базе диаграмм деформирования образцов - стержней, как целых, так и поврежденных трещиной. Образца с трещиной имеют короткие диаграммы с быстрым нарастанием напряжений. Тем самым обеспечивается учет концентрации деформаций, и введение критерия начала разрушения. Число поврежденных стержневых элементов мало в сравнении с числом всех стержней, описывающих элемент конструкции и участвующих в процессе нагружения. Тем самым обеспечивается локальность области предразрушения.

MePeЭл модель допускает дальнейшее уточнение и развитие. Например, возможно введение внутренних связей между элементами, использование стержней переменного поперечного сечения по длине и т.д.

В MePeЭл математика применяется к каждому элементу и ко всей совокупности элементов, но не рассматривается взаимодействие элементов друг с другом.

Консервативность модели достигается тем, что предельное состояние детали отождествляется с разрушением наиболее слабого стержневого элемента.

ЛИТЕРАТУРА ПО МЕРЕЭЛ

1. Маркочев В.М., Кравченко И.О. Метод реальных элементов как основа расчетов на прочность поврежденных деталей конструкций. М.: Препринт / МИФИ. 012-94. 1994. – 36 с.
2. Маркочев В.М., Кравченко И.О., Шамраев Ю.В. Оценка прочности поврежденных элементов конструкций методом реальных элементов. Основы метода / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1997. № 2. С. 44 – 51.
3. Маркочев В.М., Гольцев В.Ю., Кравченко И.О., Шамраев Ю.В. Оценка прочности поврежденных конструкций методом реальных элементов. Экспериментальная проверка / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1997. – № 3. – С. 33-38.
4. Маркочев В.М., Шамраев Ю.В., Спиров В.М. Оценка прочности поврежденных элементов конструкций методом реальных элементов. Испытания материалов и банк критериальных диаграмм деформирования / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1998. – №2. – С. 40-45.
5. Маркочев В.М., Шамраев Ю.В. Расчет прочности поврежденных трубопроводов атомных электростанций методом реальных элементов / Известия вузов. Ядерная энергетика. 1999. № 2. С. 26-32.
6. Markotchev V.M., Shamraev Yu.V. Assessment of the integrity of pipes containing circumferential defects using the method of the real elements / Int. J. of Pressure Vessels and Piping. 1999. Vol.76. pp. 935-943.
7. Markotchev V.M., Olferieva M.A., Shamraev Yu.V. Assessment of the Integrity of a Pipe under Combined Load and Displacement Controlled Loading / Int.J. of Pressure Vessels and Piping. 2001, Vol.78. No.8. pp.581-587.
8. Маркочев В.М., Олферьева М.А. Упругопластические состояния и прочность конструкций. М.: МИФИ, 2001.- 140 с.

9. Маркочев В.М., Олферьева М.А. Методика расчета остаточной прочности трубопровода с окружной трещиной. – М.: Препринт / МИФИ. 009-2001. 2001. – 40 с.
10. Ван Хайжун, Маркочев В.М. Анализ предельного состояния гiba трубопровода с 3D дефектом стенки / Инженерная физика. 2004. № 4. С. 24-27.
11. Маркочев В.М., Ван Хайжун. Построение объединенных критериев прочности / Инженерная физика. 2004. № 3. С. 31-35.
12. Ван Хайжун, Маркочев В.М. Предельное состояние стенки трубы с трехмерными дефектами / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2005. №4. С. 49 - 52.
13. Маркочев В.М. Прочность трубопроводов при наличии окружной трещины / Тяжелое машиностроение. 2011. № 4. С. 18-21.
14. Маркочев В.М. Оценка предельного состояния поврежденного гiba трубопровода АЭС / Известия ВУЗОВ. Ядерная энергетика. 2011. № 4. С. 63-68.
15. Маркочев В.М., Гольцев В.Ю. Прочность трубопровода Ду 500 АЭС с реактором ВВЭР-440 при наличии осевой трещины / Тяжелое машиностроение. 2012. № 4. С. 10-14.
16. Маркочев В.М., Хайжун Ван. Предельное давление в трубопроводе с локальным дефектом стенки / Ядерная физика и инжиниринг. 2012. том 3. № 4. С. 298-305.
17. Маркочев В.М. Хрупкость, пластичность и прочность поврежденных элементов конструкций / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. № 8. С. 56-61.
18. Маркочев В.М. Оценка опасности трехмерного дефекта стенки трубопровода АЭС / Ядерная физика и инжиниринг. 2013. том 4. № 11-12. С. 960-963.
19. Маркочев В.М. О двухкритериальном подходе в механике разрушения / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2014. № 3. С. 56 – 59.
20. Маркочев В.М. Стержневая модель упругопластического кручения вала / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2014. № 4. С. 51 – 56.

Диссертации

21. Шамраев Ю.В. Анализ прочности поврежденных трубопроводов АЭС методом реальных элементов: Автореф...дис. кан. техн. наук. – М.: МИФИ, 1998. – 24 с.
22. Олферьева М.А. Прочность поврежденных трубопроводов АЭС: Автореф...дис. кан. техн. наук. – М.: МИФИ, 2002. – 24 с.
23. Ван Хайжун. Прочность трубопроводов АЭС, ослабленных трехмерными дефектами стенки: Автореф...дис. кан. техн. наук. – М.: МИФИ, 2005. – 24 с.

В.М. Маркочев

**Нестационарные поля температур и
напряжений в многослойных пластинах**

Стистика, орфография и пунктуация автора сохранены.

Оформление издательства фонда «Сталинград»

www.lit-izdat.ru

Издательства фонда «Сталинград»

123182, Москва, ул. Авиационная, дом 79 В

www.lit-izdat.ru

e-mail: L6322257@gmail.com

+7(495)968-15-82 +7(495)632-22-57

Подписано в печать 21.05.2020

Формат 60x84x16. Усл. печ. л. 10,46. Бум. мелованная.

Гарнитура *Times New Roman*

Тираж 30 экз. Заказ 845.

Отпечатано в типографии фонда «Сталинград»



Маркочев Виктор Михайлович

Выпускник физфака МГУ 1958 г. Доктор технических наук, профессор. Область научных интересов – экспериментальная и теоретическая механика разрушения, расчеты на прочность по критериям механики разрушения и теория катастроф.

Автор более 200 печатных работ, 13 учебных пособий и 11 изобретений. Разработал ряд методов измерений скорости роста трещин – метод слежения, метод феррографии, односторонний метод разности электрических материалов.

Предложил математический оператор гладкого управляемого перехода с одной математической функции на другую. Данная книга – четвертая по счету, базирующаяся на использовании этого модифицированного оператора, а также метода реальных элементов, разработанного автором. Ей предшествуют книги «Математический оператор перехода и его приложения в науке и технике», «Обратная задача аналитической геометрии» и «Конструирование гладких вейвлетов и финитных функций».

ISBN 978-5-6042651-5-4



9 785604 265154