А. Д. ПОЛЯНИН

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И ДРУГИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. Д. ПОЛЯНИН

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И ДРУГИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Москва
ИПМех РАН
2023

УДК 517.9
ББК 517.2
П 54

Полянин А. Д. **Точные решения дифференциальных, интегральных, функциональных и других математических уравнений.** — М.: Издательство «ИПМех РАН», 2023. — 600 с. — ISBN 978-5-91741-281-8.

Книга посвящена точным решениям математических уравнений различных типов (алгебраических, тригонометрических, обыкновенных дифференциальных, с частными производными первого порядка, математической физики, интегральных, функциональных, дифференциальных с запаздыванием, функционально-дифференциальных и др.).

Особое внимание уделяется уравнениям, которые встречаются в различных областях естественных и инженерных наук (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, теории упругости, общей механике, теоретической физике, нелинейной оптике, биологии, химической технологии, экологии и др.) и уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от свободных параметров или произвольных функций. Рассматриваются также уравнения, которые изучаются в университетах и технических вузах.

Точные решения уравнений играют важную роль стандартных «математических эталонов», которые широко используются для оценки точности и разработки различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов.

Книга не имеет аналогов в мировой литературе и содержит много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался. Изложение ведется в соответствии с принципом «от простого к сложному».

Для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях прикладной математики, математической физики, вычислительной математики, механики, теории управления, биологии, медицины, химической технологии, экологии и экономики. Отдельные уравнения и их решения могут быть использованы в качестве иллюстративного материала на лекциях и семинарах по прикладной и вычислительной математике, дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики и интегральным уравнениям.

Табл. 18. Библиогр. 225 назв.

ISBN 978-5-91741-281-8

Оглавление

Предисловие

Линейные и нелинейные математические уравнения встречаются практически во всех областях естественных и технических наук, а также в некоторых областях экономических и гуманитарных наук. Данная книга посвящена краткому описанию точных решений математических уравнений различных типов, она содержит также некоторые преобразования и редукции, приводящие к более простым уравнениям.

Решение называется *точным*, если оно при подстановке в рассматриваемое математическое уравнение превращает его в тождество. При этом не допускаются какие-либо приближения или упрощения уравнения, и не используются никакие априорные допущения. Для различных типов математических уравнений понятие точного решения допускает различные уточнения и модификации.

Точные решения математических уравнений всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. В частности, точные решения нелинейных уравнений математической физики наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность искомых величин и др. Простые решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по прикладной и вычислительной математике, асимптотическим методам, теоретической физике, теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения уравнений играют важную роль стандартных «математических эталонов», которые могут быть использованы для проверки корректности и оценки точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Точные решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы компьютерной алгебры Mathematica, Maple, Maxima и др.)

В данной книге рассматриваются следующие типы уравнений:

- алгебраические уравнения;
- тригонометрические, гиперболические и другие трансцендентные уравнения;
- обыкновенные дифференциальные уравнения;
- системы обыкновенных дифференциальных уравнений;
- уравнения с частными производными первого порядка;
- линейные уравнения математической физики;
- нелинейные уравнения математической физики;
- системы уравнений математической физики;
- интегральные уравнения;

- разностные, возвратные и другие функциональные уравнения;
- обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием и другие обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения;
- уравнения математической физики с запаздыванием и другие функционально-дифференциальные уравнения с частными производными.

Важно отметить, что решения математических уравнений разных типов часто явно или неявно связаны между собой. Например, решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами сводится к решению алгебраических уравнений, а решения алгебраических уравнений старших порядков строятся с помощью соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений и выражаются в терминах специальных функций. Решение уравнений с частными производными первого порядка сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения многих линейных и нелинейных уравнений математической физики ищутся методами разделения переменных и обобщенного разделения переменных и выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (так называемые одномерные редукции) или систем таких уравнений. Решения некоторых нелинейных уравнений математической физики сводятся к функциональным или функционально-дифференциальным уравнениям, а решения различных типов функциональных уравнений выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными. Решения некоторых классов интегральных уравнений строятся с помощью соответствующих классов дифференциальных уравнений и наоборот. Решения уравнений математической физики с постоянным и пропорциональным запаздыванием часто выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и т. д. Тесные связи между решениями математических уравнений разных типов и послужили основной мотивацией написания данной книги, в которой рассматриваются наиболее распространенные и некоторые другие точные решения различных уравнений.

При отборе материала автор отдавал наибольшее предпочтение следующим трем важным классам математических уравнений:

- уравнениям, которые встречаются в различных областях естественных и инженерных наук (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, теории упругости, общей механике, теоретической физике, нелинейной оптике, химической технологии, биологии, экологии и др.);
- уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от свободных параметров или произвольных функций (точные решения таких уравнений представляют наибольший интерес для тестирования численных и приближенных аналитических методов);
- уравнениям, которые изучаются в университетах и технических вузах.

В целом, данная книга не имеет аналогов в мировой литературе и содержит много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался.

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой автор по возможности старался избегать использования специальной терминологии. Изложение материала ведется по принципу «от простого к сложному». Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом. Подробное оглавление позволяет быстро находить необходимую информацию.

Автор благодарит А. В. Аксенова и А. И. Журова за обсуждения и полезные замечания.

Автор надеется, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, математической физики, вычислительной математики, механики, теории управления, биологии, биофизики, биохимии, медицины, химической технологии и экологии. Отдельные уравнения и их решения могут быть использованы в качестве иллюстративного материала на лекциях и семинарах по прикладной и вычислительной математике, дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики и интегральным уравнениям.

Важно отметить, что некоторые алгебраические, трансцендентные и функциональные уравнения могут быть полезны учителям математики физико-математических классов для составления контрольных работ и домашних заданий (путем фиксации в этих уравнениях свободных параметров).

А. Д. Полянин
Февраль 2023 г.

Некоторые обозначения и замечания

Краткие обозначения производных

Обыкновенные производные функции $y = y(x)$:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y'''_{xxx} = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad y''''_{xxxx} = \frac{d^4y}{dx^4}, \quad y^{(n)}_x = \frac{d^ny}{dx^n} \quad \text{при} \quad n > 4.$$

Частные производные функции $u = u(x,t)$:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \ldots, \quad u^{(n)}_x = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}.$$

Замечания

1. В книге часто используются сокращения ОДУ и УрЧП, которые соответственно обозначают «обыкновенное дифференциальное уравнение» (или «обыкновенные дифференциальные уравнения») и «уравнение с частными производными» (или «уравнения с частными производными»).

2. Коэффициенты, функции, независимые переменные и искомые величины, входящие в рассматриваемые уравнения считаются действительными (если не оговаривается иное).

3. Если формула или решение содержит производные некоторых функций, то предполагается, что эти производные существуют.

4. Если формула или решение содержит неопределенные или определенные интегралы, то предполагается, что эти интегралы существуют.

5. В формулах и решениях, содержащих выражения типа $\dfrac{f(x)}{a-2}$, часто не оговаривается, что $a \neq 2$.

6. Не рассматриваются вырожденные стационарные решения ОДУ вида $y = \text{const}$, поскольку такие простые решения находятся без интегрирования дифференциальных уравнений.

7. Не рассматриваются вырожденные решения нелинейных УрЧП и функционально-дифференциальных УрЧП, которые зависят только от одной независимой переменной, входящей в исходное уравнение.

8. В книге используется простая и наглядная классификация по внешнему виду наиболее распространенных решений УрЧП и функционально-дифференциальных УрЧП, которая не связана с типом и видом рассматриваемых уравнений (см. таблицу).

ТАБЛИЦА

Структура наиболее распространенных точных решений УрЧП с двумя независимыми переменными x и t и зависимой переменной u, где $F(z)$ — искомая функция

№	Название решения	Структура решения (x и t можно поменять местами)
1	Решение с аддитивным разделением переменных	$u = \varphi(x) + \psi(t)$
2	Решение с мультипликативным разделением переменных	$u = \varphi(x)\psi(t)$
3	Решение типа бегущей волны*	$u = F(z), \quad z = \alpha x + \beta t, \quad \alpha\beta \neq 0$
4	Автомодельное решение	$u = t^{\alpha} F(z), \quad z = xt^{\beta}$
5	Обобщенное автомодельное решение	$u = \varphi(t)F(z), \quad z = \psi(t)x$
6	Решение типа обобщенной бегущей волны	$u = F(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t)$
7	Решение с обобщенным разделением переменных	$u = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$
8	Решение с функциональным разделением переменных (специальный случай)	$u = F(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t)$
9	Решение с функциональным разделением переменных	$u = F(z)$, $z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$

* Обе независимые переменные могут играть роль пространственных координат.

1. Алгебраические и некоторые трансцендентные уравнения

► **Предварительные замечания.** Алгебраическое уравнение является математическим уравнением вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — некоторый полином, x — искомая величина. Степень алгебраического уравнения определяется степенью порождающего полинома.

В данной главе рассматриваются алгебраические уравнения, решения (корни) которых допускают представление в радикалах. Приведены некоторые алгебраические уравнения старших порядков, решения которых могут быть выражены в терминах специальных функций. Указаны преобразования, позволяющие получать более простые уравнения.

Описаны тригонометрические, гиперболические, логарифмические и другие трансцендентные уравнения, решения которых могут быть выражены через решения алгебраических уравнений или получаются путем подстановки определяющих параметров уравнения в элементарные функции. Обсуждаются также трансцендентные уравнения, решениями которых являются специальные функции.

В данной главе считается, что коэффициенты всех рассматриваемых уравнений являются действительными числами.

1.1. Алгебраические уравнения

1.1.1. Линейные и квадратные уравнения

1. $\boldsymbol{ax + b = 0 \quad (a \neq 0)}$.

Линейное алгебраическое уравнение (или *алгебраическое уравнение первой степени*).

Решение:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

2. $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)}$.

Квадратное уравнение (или *алгебраическое уравнение второй степени*).

Решения (корни):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Число действительных корней квадратного уравнения определяется знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$:

Случай $D > 0$. Имеются два различных действительных корня.

Случай $D = 0$. Имеются два одинаковых действительных корня (имеется один кратный действительный корень).

Случай $D < 0$. Имеются два различных комплексных корня.

Теорема Виета. Корни квадратного уравнения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

1.1.2. Алгебраические уравнения третьей степени

1. $\boldsymbol{x^3 - a = 0.}$

Двучленное кубическое уравнение простейшего вида.

Решения (корни):

$$x_1 = a^{1/3}, \qquad x_2 = -a^{1/3}\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \quad x_3 = -a^{1/3}\Big(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad \text{при} \ \ a > 0;$$

$$x_1 = -|a|^{1/3}, \quad x_2 = |a|^{1/3}\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \quad x_3 = |a|^{1/3}\Big(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad \text{при} \ \ a < 0,$$

где $i^2 = -1$.

2. $\boldsymbol{x^3 + ax + ab + b^3 = 0.}$

Это уравнение для любых a и b имеет корень $x = -b$. Два других корня определяются из квадратного уравнения $x^2 - bx + a + b = 0$.

3. $\boldsymbol{x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0.}$

Это уравнение имеет корни: $x_1 = x_2 = a$ и $x_3 = -2a$.

4. $\boldsymbol{x^3 - (a^2 + ab + b^2)x + ab(a + b) = 0.}$

Это уравнение имеет корни: $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = -a - b$.

5. $\boldsymbol{y^3 + py + q = 0.}$

Неполное кубическое уравнение.

1°. *Решение Кардано.* Корни кубического уравнения определяются по формулам

$$y_1 = A + B, \qquad y_{2,3} = -\frac{1}{2}(A + B) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(A - B),$$

где

$$A = \Big(-\frac{q}{2} + \sqrt{D}\Big)^{1/3}, \quad B = \Big(-\frac{q}{2} - \sqrt{D}\Big)^{1/3}, \quad D = \Big(\frac{p}{3}\Big)^3 + \Big(\frac{q}{2}\Big)^2, \quad i^2 = -1,$$

а A и B — любые значения кубических корней из соответствующих комплексных чисел, удовлетворяющие соотношению $AB = -\frac{1}{3}p$.

Число действительных корней неполного кубического уравнения зависит от знака дискриминанта D:

Случай $D > 0$. Имеется один действительный и два комплексно-сопряженных корня.

Случай $D < 0$. Имеется три действительный корня.

Случай $D = 0$. Имеется действительный корень и другой действительный корень двойной кратности.

2°. *Тригонометрическое решение.* Если неполное кубическое уравнение имеет действительные коэффициенты p и q, тогда его решения можно найти с помощью тригонометрических формул, приведенных ниже.

(a) Пусть $p < 0$ и $D < 0$. Тогда

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}, \qquad y_{2,3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right),$$

где α вычисляется, исходя из соотношений

$$\cos\alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}}, \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{-D}}{\sqrt{-(p/3)^3}} > 0.$$

(b) Пусть $p > 0$ и $D \geqslant 0$. Тогда

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg}(2\alpha), \qquad y_{2,3} = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\operatorname{ctg}(2\alpha) \pm i\frac{\sqrt{3}}{\sin(2\alpha)}\right],$$

где α вычисляется, исходя из соотношений

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{2}{q}\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}, \qquad |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{4}, \qquad |\beta| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

(c) Пусть $p < 0$ и $D \geqslant 0$. Тогда

$$y_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\frac{1}{\sin(2\alpha)}, \qquad y_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\frac{1}{\sin(2\alpha)} \pm i\sqrt{3}\operatorname{ctg}(2\alpha)\right],$$

где α вычисляется, исходя из соотношений

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}, \qquad \sin\beta = \frac{2}{q}\left(-\frac{p}{3}\right)^{3/2}, \qquad |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{4}, \qquad |\beta| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Во всех трех рассмотренных выше случаев берется действительный кубический корень.

3°. *Метод Виета.* Подстановка $y = t - \dfrac{p}{3t}$ приводит неполное кубическое уравнение к уравнению $t^3 + q - \dfrac{p^3}{27t^3} = 0$, которое после умножения на t^3 и замены $z = t^3$ преобразуется к квадратному уравнению $z^2 - qz - \frac{1}{27}p^3 = 0$.

4°. Дополнительную информацию относительно неполного кубического уравнения можно найти в книгах Бронштейн & Семендяев (1986), Korn & Korn (2000), Weisstein (2002) и статьях Окунев (1951) и Cubic equation (from Wikipedia).

6. $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0).}$

Возвратное кубическое уравнение. Это уравнение имеет корень $x_1 = -1$, а два других корня определяются из квадратного уравнения $ax^2 + (b-a)x + a = 0$.

7. $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + bx + a - b + c = 0 \quad (a \neq 0).}$

Это уравнение имеет корень $x_1 = -1$, а два других корня определяются из квадратного уравнения $ax^2 + (b-a)x + a - b + c = 0$.

8. $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + bx - a - b - c = 0 \quad (a \neq 0).}$

Это уравнение имеет корень $x_1 = 1$, а два других корня определяются из квадратного уравнения $ax^2 + (a+b)x + a + b + c = 0$.

9. $\boldsymbol{ax^3 + (ab + c)x^2 + (a + bc)x + c = 0 \quad (a \neq 0).}$

1°. Пусть $x = -a/c$ не является корнем этого уравнения. Умножая обе части уравнения на $(cx+a)$, получим возвратное уравнение четвертой степени вида 1.1.3.7:

$$acx^4 + (a^2 + abc + c^2)x^3 + (a^2b + 2ac + bc^2)x^2 + (a^2 + abc + c^2)x + ac = 0. \quad (*)$$

Подстановка

$$y = x + \frac{1}{x}$$

приводит уравнение (*) к квадратному уравнению. Получив четыре корня уравнения (*), следует оставить три корня, отбросив лишний корень $x = -a/c$.

2°. Пусть $x = -a/c$ — корень исходного кубического уравнения. Два других корня определяются из квадратного уравнения

$$ax^2 + \left(ab + c - \frac{a^2}{c}\right)x + bc - \frac{a^2 b}{c} + \frac{a^3}{c^2} = 0.$$

10. $\boldsymbol{x^3 + a(b+1)x^2 + (a^2 b + c)x + ac = 0.}$

Это уравнение имеет корень $x = -a$. Два других корня определяются из квадратного уравнения $x^2 + abx + c = 0$.

11. $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0).}$

Полное кубическое уравнение (или *алгебраическое уравнение третьей степени общего вида*).

Корни полного кубического уравнения определяются по формулам

$$x_k = y_k - \frac{b}{3a}, \qquad k = 1,\, 2,\, 3,$$

где y_k — корни неполного кубического уравнения 1.1.2.5 с коэффициентами

$$p = -\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}, \qquad q = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Теорема Виета. Корни полного кубического уравнения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

1.1.3. Алгебраические уравнения четвертой степени

1. $\boldsymbol{x^4 - a = 0.}$

Двучленное уравнение четвертой степени простейшего вида.

Решения (корни):

$$x_{1,2} = \pm a^{1/4}, \qquad x_{3,4} = \pm a^{1/4} i \qquad \text{при } \ a > 0;$$

$$x_{1,2} = |a|^{1/4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad x_{3,4} = |a|^{1/4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{при } \ a < 0,$$

где $i^2 = -1$.

2. $\boldsymbol{x^4 + ax + ab - b^4 = 0.}$

Это уравнение для любых a и b имеет корень $x = -b$.

3. $\boldsymbol{x^4 - 4a^3x + 3a^4 = 0.}$

Это уравнение имеет кратный корень $x_1 = x_2 = a$. Два других (комплексных) корня определяются из квадратного уравнения $x^2 + 2ax + 3a^2 = 0$.

4. $\boldsymbol{x^4 - (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)x + ab(a^2 + ab + b^2) = 0.}$

Это уравнение имеет корни $x_1 = a$ и $x_2 = b$. Два других (комплексных) корня определяются из квадратного уравнения $x^2 + (a + b)x + a^2 + ab + b^2 = 0$.

5. $\boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0).}$

Биквадратное уравнение.

Это уравнение сводится к квадратному уравнению 1.1.1.2 заменой $z = x^2$. Поэтому корни биквадратного уравнения определяются по формулам

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

6. $\boldsymbol{x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 - b = 0.}$

Все корни этого уравнения определяются путем решения двух квадратных уравнений:

$$x^2 + ax - \sqrt{b} = 0,$$
$$x^2 + ax + \sqrt{b} = 0.$$

7. $\boldsymbol{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0).}$

Возвратное алгебраическое уравнение четвертой степени.

Подстановка

$$y = x + \frac{1}{x}$$

приводит к квадратному уравнению вида 1.1.1.2:

$$ay^2 + by + c - 2a = 0.$$

8. $\boldsymbol{ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \quad (a \neq 0).}$

Модифицированное возвратное алгебраическое уравнение четвертой степени.

Подстановка

$$y = x - \frac{1}{x}$$

приводит к квадратному уравнению вида 1.1.1.2:

$$ay^2 + by + c + 2a = 0.$$

9. $\boldsymbol{ax^4 + bx^3 + cx^2 + b\lambda x + a\lambda^2 = 0 \quad (a \neq 0).}$

Обобщенное возвратное алгебраическое уравнение четвертой степени (обобщает два предыдущих уравнения).

Подстановка

$$y = x + \frac{\lambda}{x}$$

приводит к квадратному уравнению вида 1.1.1.2:

$$ay^2 + by + c - 2a\lambda = 0.$$

10. $\boldsymbol{ax^4 + bx^2(x + k) + c(x + k)^2 = 0.}$

Разделим обе части уравнения на $(x+k)^2$, а затем сделаем замену $z = \dfrac{x^2}{x+k}$. В результате получим квадратное уравнение

$$az^2 + bz + c = 0.$$

11. $\boldsymbol{(x + a)^4 + (x + b)^4 = c.}$

Частный случай уравнения 1.1.5.19 при $n = 2$.

1°. Сделаем замену $y = x + \frac{1}{2}(a+b)$. В результате получим

$$(y+k)^4 + (y-k)^4 = c, \qquad k = \tfrac{1}{2}(a-b).$$

Используя формулу $(y+z)^4 = y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4xy^3 + z^4$ при $z = \pm k$, приходим к биквадратному уравнению

$$y^4 + 6k^2y^2 + k^4 - \tfrac{1}{2}c = 0, \qquad k = \tfrac{1}{2}(a-b),$$

которое сводится к квадратному уравнению подстановкой $z = y^2$.

2°. Тождественные преобразования левой части уравнения

$$(x+a)^4+(x+b)^4=[(x+a)^2+(x+b)^2]^2-2[(x+a)(x+b)]^2=$$
$$=\{2[x^2+(a+b)x]+a^2+b^2\}^2-2[x^2+(a+b)x+ab]^2,$$

с последующей заменой $\xi=x^2+(a+b)x$ приводят к квадратному уравнению

$$(2\xi+a^2+b^2)^2-2(\xi+ab)^2=c.$$

12. $\boldsymbol{(x+a)^4+(x+b)^4+c(x+a)(x+b)=d.}$

Частный случай уравнения 1.1.5.22.

Сделаем замену $y=x+\frac{1}{2}(a+b)$. В результате получим

$$(y+k)^4+(y-k)^4+c(y^2-k^2)=d, \qquad k=\tfrac{1}{2}(a-b).$$

Используя формулу $(y+z)^4=y^4+4y^3z+6y^2z^2+4xy^3+z^4$ при $z=\pm k$, приходим к биквадратному уравнению

$$y^4+(6k^2+\tfrac{1}{2}c)y^2+k^4-\tfrac{1}{2}ck^2-d=0, \qquad k=\tfrac{1}{2}(a-b),$$

которое сводится к квадратному уравнению с помощью подстановки $\xi=y^2$.

13. $\boldsymbol{(ax^2+bx+c_1)(ax^2+bx+c_2)=d.}$

Подстановка $z=ax^2+bx+c_1$ приводит к квадратному уравнению

$$z^2+(c_2-c_1)z-d=0.$$

14. $\boldsymbol{(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=dx^2.}$

Разделим обе части уравнения на x^2, а затем сделаем замену $z=ax+b_1+\dfrac{c}{x}$. В результате приходим к квадратному уравнению

$$z^2+(b_2-b_1)z-d=0.$$

15. $\boldsymbol{(x+a)(x+b)(x+a+c)(x+b+c)=d.}$

Перемножая в левой части уравнения первый и четвертый сомножители, а также второй и третий сомножители, имеем

$$[x^2+(a+b+c)x+a(b+c)][x^2+(a+b+c)x+b(a+c)]=d.$$

Замена $z=x^2+(a+b+c)x+a(b+c)$ приводит полученное уравнение к квадратному уравнению

$$z[z+(b-a)c]=d.$$

16. $\boldsymbol{(x+a)(x+b)(x+ac)(x+bc)=dx^2.}$

Перемножая в левой части уравнения первый и четвертый сомножители, а также второй и третий сомножители, имеем

$$[x^2+(a+bc)x+abc][x^2+(b+ac)x+abc]=dx^2.$$

Разделим обе части полученного уравнения на x^2, а затем сделаем подстановку $z = x + \dfrac{abc}{x}$. В результате приходим к квадратному уравнению

$$(z + a + bc)(z + b + ac) = d.$$

17. $a(x^2 + p_1 x + q)^2 + b(x^2 + p_2 x + q) = dx^2$.

Разделим обе части уравнения на x^2, а затем сделаем подстановку $z = x + \frac{q}{x}$. В результате приходим к квадратному уравнению

$$a(z + p_1)^2 + b(z + p_2)^2 = d.$$

18. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Общее алгебраическое уравнение четвертой степени.

1°. *Упрощение уравнения.* Подстановка

$$x = y - \tfrac{1}{4}a$$

приводит к более простому уравнению

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{1}$$

где

$$p = \frac{8b - 3a^2}{8}, \qquad q = \frac{8c - 4ab + a^3}{8}, \qquad r = \frac{256d - 64ac + 16a^2 b - 3a^4}{256}.$$

Уравнение (1) называется *неполным алгебраическим уравнением четвертой степени.*

2°. *Решение Декарта — Эйлера.* Корни y_1, y_2, y_3, y_4 неполного уравнения четвертой степени (1) равны одному из следующих выражений:

$$\pm\sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3}, \tag{2}$$

где z_1, z_2, z_3 — корни вспомогательного кубического уравнения

$$z^3 + \tfrac{1}{2}pz^2 + \tfrac{1}{16}(p^2 - 4r)z - \tfrac{1}{64}q^2 = 0, \tag{3}$$

а сочетания знаков в (2) выбираются таким образом, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$(\pm\sqrt{z_1}\,)(\pm\sqrt{z_2}\,)(\pm\sqrt{z_3}\,) = -\tfrac{1}{8}q.$$

Отметим, что в соответствии с теоремой Виета, произведение корней z_1, z_2, z_3 равно $\frac{1}{64}q^2 \geqslant 0$.

Число действительных и комплексных корней неполного уравнения четвертой степени (1) определяется корнями вспомогательного кубического уравнения (3), см. табл. 1.1.

Таблица 1.1. Качественные соотношения между корнями неполного уравнения четвертой степени (1) и корнями вспомогательного кубического уравнения (3).

Вспомогательное кубическое уравнение (3)	Уравнение четвертой степени (1)
Все корни действительные и положительны	Четыре действительных корня
Все корни действительны: один положительный и два отрицательных	Две пары комплексно-сопряженных корней
Один действительный корень и пара комплексно-сопряженных корней	Два действительных корня и пара комплексно-сопряженных корней

3°. *Решение Феррари.* Пусть u_0 — любой корень вспомогательного кубического уравнения

$$u^3 - bu^2 + (ac - 4d)u - a^2 d + 4bd - c^2 = 0.$$

Тогда четыре корня исходного уравнения определяются путем решения следующих двух квадратных уравнений:

$$x^2 + \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}u_0 = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b + u_0)x^2 + (\tfrac{1}{2}au_0 - c)x + \tfrac{1}{4}u_0^2 - d},$$

где подкоренное выражение в правой части является полным квадратом.

4°. *Теорема Виета.* Корни общего уравнения четвертой степени удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a,\\
&x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b,\\
&x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -c,\\
&x_1x_2x_3x_4 = d.
\end{aligned}$$

5°. Дополнительную информацию относительно общего алгебраического уравнения четвертой степени можно найти в книгах Бронштейн & Семендяев (1986), Korn & Korn (2000), Weisstein (2002) и статьях Окунев (1951) и Quartic equation (from Wikipedia).

Замечание 1.1. *Уравнение четвертой степени является алгебраическим уравнением наибольшей степени, корни которого можно выразить в радикалах в общем случае (т. е. когда коэффициенты уравнения могут принимать любые значения).*

1.1.4. Алгебраические уравнения пятой степени

1. $\boldsymbol{x^5 + ax - 1 = 0.}$

Частный случай уравнения 1.1.5.14 при $n = 5$ и $m = 1$.

1°. При $a = b - b^{-4}$ исходное уравнение имеет корень $x = 1/b$.

2°. Подстановка $x = a^{1/4}y$ приводит к уравнению вида 1.1.4.7:

$$y^5 + y - a^{-5/4} = 0.$$

3°. Три главных члена асимптотического разложения действительного корня этого уравнения при малых и больших a имеют вид

$$x = 1 - \tfrac{1}{5}a - \tfrac{1}{25}a^2 + O(a^3), \qquad a \to 0;$$
$$x = a^{-1} - a^{-6} + 5a^{-11} + O(a^{-16}), \qquad a \to \infty.$$

2. $\boldsymbol{x^5 + ax + ab + b^5 = 0.}$

Это уравнение для любых a и b имеет корень $x = -b$.

3. $\boldsymbol{x^5 - 5a^4x + 4a^5 = 0.}$

Это уравнение имеет кратный корень $x_1 = x_2 = a$. Три других корня определяются из кубического уравнения $x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + 4a^3 = 0$.

4. $\boldsymbol{x^5 - \dfrac{a^5 - b^5}{a - b}x + \dfrac{ab(a^4 - b^4)}{a - b} = 0, \qquad a \neq b.}$

Это уравнение имеет корни $x_1 = a$ и $x_2 = b$.

5. $\boldsymbol{x^5 - (a^4 - 3a^2b + b^2)x + ab(a^2 - 2b) = 0.}$

Два корня этого уравнения находятся путем решения квадратного уравнения $x^2 - ax + b = 0$. Три других корня определяются из кубического уравнения

$$x^3 + ax^2 + (a^2 - b)x + a(a^2 - 2b) = 0.$$

6. $\boldsymbol{x^5 + \dfrac{5e^4(3 - 4\varepsilon c)}{c^2 + 1}x - \dfrac{4e^5(11\varepsilon + 2c)}{c^2 + 1} = 0.}$

Пусть $c \geqslant 0$ и $e \neq 0$ — рациональные числа и $\varepsilon = \pm 1$. Тогда корни данного уравнения определяются по формулам (см. Spearman & Williams, 1994 и 1996):

$$x_k = e\bigl(\omega^k u_1 + \omega^{2k} u_2 + \omega^{3k} u_3 + \omega^{4k} u_4\bigr), \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,$$

где ω — корень пятой степени из единицы

$$\omega = \cos\bigl(\tfrac{2}{5}\pi\bigr) + i\sin\bigl(\tfrac{2}{5}\pi\bigr), \qquad i^2 = -1,$$

а остальные величины определяются так:

$$u_1 = (v_1^2 v_3/D^4)^{1/5}, \quad u_2 = (v_3^2 v_4/D^4)^{1/5}, \quad u_3 = (v_2^2 v_1/D^4)^{1/5}, \quad u_4 = (v_4^2 v_2/D^4)^{1/5},$$
$$v_1 = D + (D^2 - \varepsilon D)^{1/2}, \quad v_2 = -D - (D^2 + \varepsilon D)^{1/2}, \quad v_3 = -D + (D^2 + \varepsilon D)^{1/2},$$
$$v_4 = D - (D^2 - \varepsilon D)^{1/2}, \quad D = (c^2 + 1)^{1/2}.$$

7. $\boldsymbol{x^5 + x - a = 0.}$

Это уравнение имеет корни (Ritelli & Spaletta, 2021):

$$\begin{aligned}
x_1 &= Y_1(a),\\
x_2 &= -e^{3\pi i/4}Y_0(a) - \tfrac{1}{4}Y_1(a) - \tfrac{5}{32}e^{\pi i/4}Y_2(a) - \tfrac{5i}{32}Y_3(a),\\
x_3 &= e^{3\pi i/4}Y_0(a) - \tfrac{1}{4}Y_1(a) + \tfrac{5}{32}e^{\pi i/4}Y_2(a) - \tfrac{5i}{32}Y_3(a),\\
x_4 &= -e^{\pi i/4}Y_0(a) - \tfrac{1}{4}Y_1(a) - \tfrac{5}{32}e^{3\pi i/4}Y_2(a) + \tfrac{5i}{32}Y_3(a),\\
x_5 &= e^{\pi i/4}Y_0(a) - \tfrac{1}{4}Y_1(a) + \tfrac{5}{32}e^{3\pi i/4}Y_2(a) + \tfrac{5i}{32}Y_3(a),
\end{aligned}$$

где $i^2 = -1$ и

$$\begin{aligned}
Y_0(a) &= {}_4F_3\bigl(-\tfrac{1}{20}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{7}{20}, \tfrac{11}{20}; \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}; -\tfrac{3125}{256}a^4\bigr),\\
Y_1(a) &= a\;{}_4F_3\bigl(\tfrac{4}{20}, \tfrac{8}{20}, \tfrac{12}{20}, \tfrac{16}{20}; \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{4}; -\tfrac{3125}{256}a^4\bigr),\\
Y_2(a) &= a^2\,{}_4F_3\bigl(\tfrac{9}{20}, \tfrac{13}{20}, \tfrac{17}{20}, \tfrac{21}{20}; \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{4}, \tfrac{6}{4}; -\tfrac{3125}{256}a^4\bigr),\\
Y_3(a) &= a^3\,{}_4F_3\bigl(\tfrac{14}{20}, \tfrac{18}{20}, \tfrac{22}{20}, \tfrac{26}{20}; \tfrac{5}{4}, \tfrac{6}{4}, \tfrac{7}{4}; -\tfrac{3125}{256}a^4\bigr).
\end{aligned}$$

Здесь ${}_pF_q(\dots)$ — обобщенная гипергеометрическая функция, которая определяется так:

$$\begin{aligned}
&{}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k \dots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k(\beta_2)_k \dots (\beta_q)_k} \frac{z^k}{k!},\\
&(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1).
\end{aligned}$$

В случае $p = q+1$ обобщенный гипергеометрический ряд сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$.

8. $\boldsymbol{x^5 - \frac{5}{2}a^3x^2 + \frac{3}{2}a^5 = 0.}$

Это уравнение имеет кратный корень $x_1 = x_2 = a$. Три других корня определяются из кубического уравнения $x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + \frac{3}{2}a^3 = 0$.

9. $\boldsymbol{x^5 - \dfrac{a^5 - b^5}{a^2 - b^2}x^2 + \dfrac{a^5b^2 - a^2b^5}{a^2 - b^2} = 0, \quad a \neq b.}$

Это уравнение имеет корни $x_1 = a$ и $x_2 = b$.

10. $\boldsymbol{x^5 - a(a^2 - 3ab + b^2)x^2 + a^2b^2(a - b) = 0.}$

Два корня этого уравнения находятся путем решения квадратного уравнения $x^2 - ax + ab = 0$. Три других корня определяются из кубического уравнения

$$x^3 + ax^2 + a(a-b)x + ab(a-b) = 0.$$

11. $\boldsymbol{x^5 + ax^3 - 1 = 0.}$

Частный случай уравнения 1.1.5.14 при $n = 5$ и $m = 3$.

12. $\boldsymbol{x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + b = 0.}$

Уравнение де Муавра.

Решения:

$$x_k = \omega^k (y_i)^{1/5} - a\omega^{-k}(y_i)^{-1/5}, \qquad k = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,$$

где y_i — корни вспомогательного квадратного уравнения

$$y^2 + by - a^5 = 0,$$

а ω — корень пятой степени из единицы

$$\omega = \cos\bigl(\tfrac{2}{5}\pi\bigr) + i\sin\bigl(\tfrac{2}{5}\pi\bigr), \qquad i^2 = -1.$$

13. $\boldsymbol{x^5 + ax^4 - 1 = 0.}$

Частный случай уравнения 1.1.5.14 при $n = 5$ и $m = 4$.

14. $\boldsymbol{ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0).}$

Возвратное алгебраическое уравнение пятой степени.

Это уравнение имеет корень $x = -1$. Остальные корни находятся путем решения возвратного уравнения четвертой степени вида 1.1.3.7:

$$ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a = 0,$$

которое сводится к квадратному уравнению подстановкой $z = x + \frac{1}{x}$.

15. $\boldsymbol{ax^5 + adx^4 + bx^3 + bdx^2 + cx + cd = 0 \quad (a \neq 0).}$

Это уравнение имеет корень $x = -d$. Остальные корни находятся путем решения биквадратного уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

которое сводится к квадратному уравнению подстановкой $z = x^2$.

16. $\boldsymbol{x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.}$

Общее уравнение пятой степени.

1°. *Теорема Руффини — Абеля.* Общее уравнение пятой степени неразрешимо в радикалах, т. е. решения такого уравнения не могут быть выражены через его коэффициенты с использованием конечного числа арифметических операций и операции извлечения корня.

2°. Преобразование Чирнхауса (Tschirnhaus), которое основано на решении вспомогательного уравнения четвертой степени, сводит общее уравнение пятой степени к нормальной форме Бринга—Джеррарда (Bring—Jerrard) $y^5 + py + q = 0$, где $p = \pm 1$. Общее уравнение пятой степени также может быть приведено к канонической форме Эйлера $Y^5 + p_1 Y^2 + q_1 = 0$.

3°. Решения уравнения пятой степени могут быть выражены в терминах тета-функций Якоби и связанных с ними эллиптических модульных функций (Hermite, 1858; Weisstein, 2002), а также в терминах обобщенных гипергеометрических функций (см. Cockle, 1860; Harley, 1862; Weisstein, 2002).

1.1.5. Алгебраические уравнения произвольной степени

В данном разделе n и m — положительные целые числа.

1. $\boldsymbol{x^n - a = 0.}$

Двучленное алгебраическое уравнение степени n простейшего вида.

Решения (корни):

$$x_{k+1} = \begin{cases} a^{1/n}\Big(\cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\Big) & \text{при} \quad a > 0, \\ |a|^{1/n}\Big(\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{n}\Big) & \text{при} \quad a < 0, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $i^2 = -1$.

2. $\boldsymbol{ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (a \neq 0).}$

Трехчленное алгебраическое уравнение степени n специального вида.

Подстановка $y = x^n$ приводит к квадратному уравнению вида 1.1.1.2.

Замечание 1.2. *В уравнениях 1.1.5.2, 1.1.5.5, 1.1.5.6, показатель степени n может быть нецелым.*

3. $\boldsymbol{x^{2n} + 2ax^{n+1} + a^2x^2 - b = 0.}$

Все корни этого алгебраического уравнения определяются путем решения двух более простых уравнений степени n:

$$x^n + ax - \sqrt{b} = 0,$$
$$x^n + ax + \sqrt{b} = 0.$$

4. $\boldsymbol{x^{2n} + 2ax^{n+m} + a^2x^{2m} - b = 0 \quad (n > m).}$

Все корни этого алгебраического уравнения определяются путем решения двух более простых уравнений степени n:

$$x^n + ax^m - \sqrt{b} = 0,$$
$$x^n + ax^m + \sqrt{b} = 0.$$

5. $\boldsymbol{ax^{3n} + bx^{2n} + cx^n + d = 0 \quad (a \neq 0).}$

Подстановка $y = x^n$ приводит к кубическому уравнению вида 1.1.2.11.

6. $\boldsymbol{ax^{4n} + bx^{3n} + cx^{2n} + dx^n + e = 0 \quad (a \neq 0).}$

Подстановка $y = x^n$ приводит к уравнению четвертой степени вида 1.1.3.18.

7. $\boldsymbol{a_nx^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + a_{n-2}x^{2n-4} + \cdots + a_2x^4 + a_1x^2 + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0).}$

Алгебраическое уравнение степени $2n$, содержащее только четные степени. Подстановка $y = x^2$ приводит к алгебраическому уравнению степени n.

8. $\boldsymbol{a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0).}$

Возвратное алгебраическое уравнение четной степени. Подстановка

$$y = x + \frac{1}{x}$$

приводит исходное уравнение к более простому алгебраическому уравнению степени n.

Отметим, что левая часть исходного уравнения называется *возвратным многочленом.*

9. $\boldsymbol{a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n +}$
$\boldsymbol{+ \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda^2 a_{n-2}x^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1}a_1x + \lambda^n a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0).}$

Обобщенное возвратное алгебраическое уравнение четной степени.

Первые $n+1$ членов этого уравнения (которые расположены в первой строке) совпадают с соответствующими членами возвратного уравнения 1.1.5.8, а остальные члены (которые расположены во второй строке) отличаются множителями вида λ^m от соответствующих членов указанного возвратного уравнения. Подстановка

$$y = x + \frac{\lambda}{x}$$

приводит исходное уравнение к более простому алгебраическому уравнению степени n.

10. $\boldsymbol{a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0).}$

Возвратное алгебраическое уравнение нечетной степени.

Это уравнение имеет корень $x = -1$, а его левая часть допускает представление

$$[\text{левая часть уравнения}] = (x+1)P_{2n}(x),$$

где $P_{2n}(x)$ — возвратный многочлен степени $2n$. Поэтому решение исходного уравнения сводится к решению возвратного алгебраического уравнения четной степени $P_{2n}(x) = 0$.

11. $\boldsymbol{x^n - na^{n-1}x + (n-1)a^n = 0.}$

Это уравнение имеет кратный корень $x_1 = x_2 = a$.

12. $\boldsymbol{x^n - \dfrac{a^n - b^n}{a - b}x + \dfrac{a^n b - ab^n}{a - b} = 0, \qquad a \neq b.}$

Это уравнение имеет корни $x_1 = a$ и $x_2 = b$.

13. $\boldsymbol{x^n + x - a = 0.}$

Трехчленное алгебраическое уравнение степени n специального вида.

1°. Это уравнение имеет действительный корень (Ritelli & Spaletta, 2021):

$$x(a)={}_{n-1}F_{n-2}\Big(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n};\frac{2}{n-1},\frac{3}{n-1},\dots,\frac{n-2}{n-1},\frac{n}{n-1};-\frac{n^n a^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\Big),$$

где ${}_pF_q(\dots)$ — обобщенная гипергеометрическая функция, которая определяется так:

$$\begin{aligned}&{}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p;\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_q;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k\dots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k(\beta_2)_k\dots(\beta_q)_k}\frac{z^k}{k!},\\&(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1).\end{aligned}$$

В случае $p=q+1$ обобщенный гипергеометрический ряд сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|>1$.

См. также Михалкин (2006, 2012), Botta & Silva (2019), Glasser (2000), Kato & Noumi (2003), Passare & Tsikh (2004).

2°. Исходное уравнение не изменится, если одновременно сделать преобразование искомой величины x и параметра a по формулам

$$x=\bar{x}\varepsilon^j,\quad a=\bar{a}\varepsilon^j,\quad \varepsilon=e^{2\pi i/(n-1)},\quad i^2=-1,$$

где j — целое число. Поэтому исходное уравнение имеет корни, которые можно выразить через решение, указанное п. 1°, по формулам

$$x_j(a)=\varepsilon^j x(\varepsilon^{-j}a),\quad \varepsilon=e^{2\pi i/(n-1)},\quad i^2=-1,\quad j=1,\,\dots,\,n-2.$$

14. $\boldsymbol{x^n+ax^m-1=0,\quad n>m.}$

Трехчленное алгебраическое уравнение, содержащее две произвольные степени.

1°. При $a=b^m-b^{m-n}$ исходное уравнение имеет корень $x=1/b$.

2°. В общем случае рассматриваемое уравнение имеет действительный корень (Mellin, 1921):

$$x(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma\big(\frac{1}{n}+\frac{mk}{n}\big)}{\Gamma\big(\frac{1}{n}-\frac{(n-m)k}{n}+1\big)}\frac{a^k}{k!},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Это решение удовлетворяет условию нормировки $x(0)=1$, а приведенный выше ряд сходится для достаточно малых a (подробности см. ниже в п. 4°).

3°. Исходное уравнение не изменится, если одновременно сделать преобразование искомой величины x и параметра a по формулам

$$x=\bar{x}\varepsilon^j,\quad a=\bar{a}\varepsilon^{-mj},\quad \varepsilon=e^{2\pi i/n},\quad i^2=-1,$$

где j — целое число. Поэтому все корни исходного уравнения можно выразить через решение, указанное п. 2°, по формулам (Mellin, 1921):

$$x_j(a)=\varepsilon^j x(\varepsilon^{jm}a),\quad \varepsilon=e^{2\pi i/n},\quad i^2=-1,\quad j=0,\,1,\,\dots,\,n-1.$$

Здесь значению $j=0$ соответствует решение из п. 2°.

4°. Решение из п. 2° может быть выражено через обобщенные гипергеометрические функции по формулам (Михалкин, 2012):

$$x(a) = -\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\Gamma\bigl(s-\frac{1+ms}{n}\bigr)}{\Gamma\bigl(1-\frac{1+ms}{n}\bigr)}\frac{a^s}{s!}\times$$
$$\times\,{}_nF_{n-1}\bigl(\alpha_s,\dots,\alpha_s+\tfrac{m-1}{m},\beta_s,\dots,\beta_s+\tfrac{n-m+1}{n-m};\gamma_s,\dots,\hat{1},\dots,\gamma_s+\tfrac{n-1}{n};z\bigr),$$
$$\alpha_s=\tfrac{s}{n}+\tfrac{1}{mn},\quad \beta_s=\tfrac{s}{n}-\tfrac{1}{n(n-m)},\quad \gamma_s=\tfrac{s}{n}+\tfrac{1}{n},\quad z=\tfrac{m^m(n-m)^{n-m}}{n^n}a^n.$$

Здесь использовались краткие обозначения:
запись $\alpha_s,\dots,\alpha_s+\frac{m-1}{m}$ обозначает серию чисел $\alpha_s,\alpha_s+\frac{1}{m},\dots,\alpha_s+\frac{m-1}{m}$; запись $\gamma_s,\dots,\hat{1},\dots,\gamma_s+\frac{n-1}{n}$ обозначает серию $\gamma_s,\gamma_s+\frac{1}{n},\dots,\gamma_s+\frac{n-1}{n}$, в которой опущено число 1. Ряды для обобщенных гипергеометрических функций (определение этих функций дано после решения уравнения 1.1.5.13 в п. 1°) сходятся в области $|a|<nm^{-m/n}(n-m)^{-(n-m)/n}$.

5°. Три главных члена асимптотического разложения действительного корня этого уравнения при малых и больших a имеют вид

$$x = 1-\frac{1}{n}a+\frac{2m-n+1}{2n^2}a^2+O(a^3),\qquad a\to 0;$$
$$x = a^{-\frac{1}{m}}\left(1-\frac{1}{m}a^{-\frac{n}{m}}+\frac{2n-m+1}{2m^2}a^{-\frac{2n}{m}}\right)+O\bigl(a^{-\frac{3n+1}{m}}\bigr),\qquad a\to\infty.$$

6°. При $a>0$ рассматриваемое уравнение имеет единственный положительный корень $x(a)$, где $0<x(a)<1$. Этот корень можно найти численно путем решения следующей задачи Коши для ОДУ первого порядка:

$$y'_t = -\frac{y}{ny^{n-m}+mt},\qquad y(0)=1.$$

Искомый корень определяется значением $x(a)=y(t=a)$.

7°. Интегральные представления решений и дополнительную информацию о данном уравнении и родственных уравнениях можно найти в статьях Михалкин (2006, 2012), Botta & Silva (2019), Glasser (2000), Kato & Noumi (2003), Passare & Tsikh (2004).

15. $\boldsymbol{x^n-\frac{n}{m}a^{n-m}x^m+\frac{n-m}{m}a^n=0,\quad n>m.}$

Это уравнение имеет кратный корень $x_1=x_2=a$.

16. $\boldsymbol{x^n-\frac{a^n-b^n}{a^m-b^m}x^m+\frac{a^nb^m-a^mb^n}{a^m-b^m}=0,\quad a\neq b,\ n>m.}$

Это уравнение имеет корни $x_1=a$ и $x_2=b$.

17. $\boldsymbol{ax^{2n}+bx^n(x+k)+c(x+k)^2=0.}$

Разделим обе части уравнения на $(x+k)^2$, а затем сделаем подстановку $z=x^n/(x+k)$. В результате приходим к квадратному уравнению

$$az^2+bz+c=0.$$

Решив это уравнение, для x получим два алгебраических уравнения степени n.

18. $\boldsymbol{ax^{2n} + bx^n(x+k)^m + c(x+k)^{2m} = 0.}$

Разделим обе части уравнения на $(x+k)^{2m}$, а затем сделаем подстановку $z = x^n/(x+k)^m$. В результате приходим к квадратному уравнению

$$az^2 + bz + c = 0.$$

19. $\boldsymbol{(x+a)^{2n} + (x+b)^{2n} = c.}$

Частный случай уравнения 1.1.5.22.

1°. Это уравнение не изменится, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение после возведения в степень $2n$ выражений в его левой части и замены $z = [x + \frac{1}{2}(a+b)]^2$ сводится к уравнению степени n.

2°. При $a \neq b$ и $c = (a-b)^{2n}$, исходное уравнение имеет среди прочих два корня: $x_1 = -a$ и $x_2 = -b$.

20. $\boldsymbol{(x+a)^{2n} + (x+b)^{2n} + c(x+a)(x+b) = d.}$

Частный случай уравнения 1.1.5.22. Это уравнение не изменится, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение после раскрытия скобок в его левой части и замены $z = [x + \frac{1}{2}(a+b)]^2$ сводится к уравнению степени n.

21. $\boldsymbol{(x+a)(x+b)[(x+a)^{2n} + (x+b)^{2n}] = c.}$

Частный случай уравнения 1.1.5.22. Это уравнение не изменится, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение после раскрытия скобок в его левой части и замены $z = [x + \frac{1}{2}(a+b)]^2$ сводится к уравнению степени $n+1$.

22. $\boldsymbol{P_{2n}(x) = 0.}$

Пусть $P_{2n}(x)$ — многочлен четной степени $2n$, который для некоторого λ и любого x тождественно удовлетворяет соотношению $P_{2n}(x) = P_{2n}(\lambda - x)$. Тогда исходное уравнение с помощью подстановки $z = (x - \frac{1}{2}\lambda)^2$ сводится к более простому алгебраическому уравнению степени n.

23. $\boldsymbol{x^n + a_1 x^{n_1} + \cdots + a_p x^{n_p} - 1 = 0, \quad n > n_1 > \cdots > n_p > 0.}$

1°. Это уравнение имеет действительный корень (см. Mellin, 1921 и Passare & Tsikh, 2004):

$$x(a_1, \ldots, a_p) = \frac{1}{n} \sum_{|k| \geqslant 0}^{\infty} \frac{(-1)^{|k|}\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n}k_1 + \cdots + \frac{n_p}{n}k_p\right)}{k_1! \ldots k_p! \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n_1'}{n}k_1 - \cdots - \frac{n_p'}{n}k_p + 1\right)} a_1^{k_1} \ldots a_p^{k_p},$$
$$|k| = k_1 + \cdots + k_p, \quad k_m \geqslant 0, \quad n_m' = n - n_m, \quad m = 1, \ldots, p,$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Это решение удовлетворяет условию нормировки $x(0, \ldots, 0) = 1$, а приведенный выше ряд сходится для достаточно малых коэффициентов $a_1, \ldots, a_p$.

2°. Исходное уравнение не изменится, если одновременно сделать преобразование искомой величины x и параметров a_s по формулам

$$x = \bar{x}\varepsilon^j, \quad a_s = \bar{a}_s \varepsilon^{-n_s j}, \quad \varepsilon = e^{2\pi i/n}, \quad i^2 = -1, \quad s = 1, \ldots, p,$$

где j — целое число. Поэтому все корни исходного уравнения выражаются через решение, указанное п. 1°, по формулам

$$x_j(a_1, \ldots, a_p) = \varepsilon^j x(\varepsilon^{jn_1} a_1, \ldots, \varepsilon^{jn_p} a_p), \quad \varepsilon = e^{2\pi i/n},$$
$$i^2 = -1, \quad j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1.$$

Здесь значению $j = 0$ соответствует решение из п. 1°.

23. $\boldsymbol{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0).}$

Общее алгебраическое уравнение степени n.

Имеют место следующие утверждения о корнях общего алгебраического уравнения с действительными коэффициентами:

1. Любое алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней (действительных или комплексных) с учетом их кратности. Это утверждение справедливо также для любых алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами.

2. Любое алгебраическое уравнение нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

3. Число комплексных корней алгебраического уравнения любой степени всегда четно. Если $x_1 = \alpha + i\beta$ $(i^2 = -1)$ — комплексный корень алгебраического уравнения, то $x_2 = \alpha - i\beta$ также является корнем (комплексно-сопряженным) этого уравнения.

4. Левая часть любого алгебраического уравнения может быть представлена в виде произведения линейных и квадратичных многочленов с действительными коэффициентами.

5. Общее алгебраическое уравнение степени $n > 4$ с произвольными коэффициентами неразрешимо в радикалах, т. е. решения такого уравнения не могут быть выражены через его коэффициенты с использованием конечного числа арифметических операций (сложение, вычитание, умножение и деление) и операций извлечения корня (*теорема Абеля*).

6. Если α — корень алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ степени n, то левая часть этого уравнения может быть представлена в виде произведения $P_n(x) \equiv (x - \alpha) Q_{n-1}(x)$, где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$.

7. Любой целочисленный корень алгебраического уравнения с целочисленными коэффициентами является делителем свободного члена a_0.

8. Если коэффициент при старшем члене алгебраического уравнения с целочисленными коэффициентами равен единице ($a_n = 1$), то все рациональные корни этого уравнения (если они существуют) являются целыми числами.

9. Решения алгебраического уравнения любой степени с произвольными коэффициентами могут быть выражены в терминах обобщенных тета-функций (Umemura, 1984). Решения алгебраических уравнений любой степени также могут быть представлены в терминах обобщенных гипергеометрических функций (Mellin, 1921).

10. *Теорема Виета.* Корни общего алгебраического уравнения степени n удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\
&x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},\\
&x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_1x_2x_3\dots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

24. $$\boldsymbol{(x-a)p(x) + (x-b)q(x) = \frac{a-b}{r(a)-r(b)}\bigl\{[p(b)+q(a)]r(x) - p(b)r(a) - q(a)r(b)]\bigr\}.}$$

Здесь $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — некоторые многочлены, $a \neq b$ и $r(a) \neq r(b)$.

Это уравнение имеет корни: $x_1 = a$ и $x_2 = b$.

25. $$\boldsymbol{a_np^n(x) + a_{n-1}p^{n-1}(x)q(x) + \cdots + a_1p(x)q^{n-1}(x) + a_0q^n(x) = 0.}$$

Однородное алгебраическое уравнение. Здесь $p(x)$ и $q(x)$ — некоторые многочлены.

Пусть корни многочлена $q(x)$ не являются корнями многочлена $p(x)$. Разделив все члены уравнения на $q^n(x)$ и сделав подстановку $z = p(x)/q(x)$, получим алгебраическое уравнение

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0.$$

Замечание 1.3. *В уравнении 1.1.5.25 вместо многочленов $p(x)$ и $q(x)$ могут стоять любые трансцендентные функции.*

1.1.6. Системы линейных алгебраических уравнений

1. $\boldsymbol{a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2.}$

Система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными.

В зависимости от коэффициентов системы a_k, b_k, c_k возможны следующие три случая:

1°. Если $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то исходная система имеет единственное решение

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

2°. Если $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ и $b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$ (случай пропорциональных коэффициентов), то исходная система имеет бесконечное множество решений, которые описываются формулами

$$x = t, \quad y = \frac{c_1 - a_1 t}{b_1} \quad (b_1 \neq 0),$$

где t — произвольный параметр.

3°. Если $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ и $b_1 c_2 - b_2 c_1 \neq 0$, то исходная система не имеет решений.

2. $$\begin{aligned} &\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,} \\ &\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\boldsymbol{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.} \end{aligned}$$

Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

Обозначим через $\mathbb{A} = [a_{ij}]$ матрицу коэффициентов левой части рассматриваемой системы линейных уравнений. Будем считать, что определитель этой матрицы

$$\Delta \equiv \det \mathbb{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда система имеет единственное решение, которое выражается по формулам (*правило Крамера*):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) является определителем матрицы, полученной из $\mathbb{A}$ путем замены ее k-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.2. Тригонометрические уравнения

1.2.1. Двучленные тригонометрические уравнения

1. $\boldsymbol{\sin x = a.}$

Решения при $|a| \leqslant 1$:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

При $|a| > 1$ решений нет.

2. $\boldsymbol{\cos x = a.}$

Решения при $|a| \leqslant 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

При $|a| > 1$ решений нет.

3. $\boldsymbol{\operatorname{tg} x = a.}$

Решения:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

4. $\boldsymbol{\operatorname{ctg} x = a.}$

Решения:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

5. $\boldsymbol{\cos(a_1 x + b_1) = \cos(a_2 x + b_2).}$

Используя формулу преобразования разности тригонометрических функций в произведение $\cos X - \cos Y = -2\sin\bigl(\frac{X+Y}{2}\bigr)\sin\bigl(\frac{X-Y}{2}\bigr)$, можно получить приведенные ниже решения.

1°. Две группы решений при $a_1 \neq \pm a_2$:

$$x_n = -\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} + \frac{2\pi n}{a_1 + a_2}, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;$$
$$x_m = -\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} + \frac{2\pi m}{a_1 - a_2}, \qquad m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

2°. Решения при $a_1 = a_2$:

$$x_n = -\frac{b_1 + b_2}{2a_1} + \frac{\pi n}{a_1}, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

3°. Решения при $a_1 = -a_2$:

$$x_m = -\frac{b_1 - b_2}{2a_1} + \frac{\pi m}{a_1}, \qquad m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

6. $\boldsymbol{\cos(a_1 x + b_1) = -\cos(a_2 x + b_2).}$

Это уравнение эквивалентно уравнению 1.2.1.5, в котором b_2 следует заменить на $b_2 + \pi$,

$$\cos(a_1 x + b_1) = \cos(a_2 x + b_2 + \pi).$$

7. $\boldsymbol{\sin(a_1 x + b_1) = \sin(a_2 x + b_2).}$

Используя формулу преобразования разности тригонометрических функций в произведение $\sin X - \sin Y = 2\cos\bigl(\frac{X+Y}{2}\bigr)\sin\bigl(\frac{X-Y}{2}\bigr)$, можно получить приведенные ниже решения.

1°. Две группы решений при $a_1 \neq \pm a_2$:

$$x_n = -\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2} + \frac{2}{a_1+a_2}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \qquad n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;$$
$$x_m = -\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2} + \frac{2\pi m}{a_1-a_2}, \qquad m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

2°. Решения при $a_1 = a_2$:

$$x_n = -\frac{b_1+b_2}{2a_1} + \frac{1}{a_1}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \qquad n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

3°. Решения при $a_1 = -a_2$:

$$x_m = -\frac{b_1-b_2}{2a_1} + \frac{\pi m}{a_1}, \qquad m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

8. $\boldsymbol{\sin(a_1x + b_1) = -\sin(a_2x + b_2)}$**.**

Это уравнение эквивалентно уравнению 1.2.1.7, в котором b_2 следует заменить на $b_2 + \pi$,

$$\sin(a_1x + b_1) = \sin(a_2x + b_2 + \pi).$$

9. $\boldsymbol{\cos(a_1x + b_1) = \sin(a_2x + b_2)}$**.**

Это уравнение эквивалентно уравнению 1.2.1.7, в котором b_1 следует заменить на $b_1 + \frac{1}{2}\pi$,

$$\sin(a_1x + b_1 + \tfrac{1}{2}\pi) = \sin(a_2x + b_2).$$

10. $\boldsymbol{\cos(a_1x + b_1) = -\sin(a_2x + b_2)}$**.**

Это уравнение эквивалентно уравнению 1.2.1.5, в котором b_2 следует заменить на $b_2 + \frac{1}{2}\pi$,

$$\cos(a_1x + b_1) = \cos(a_2x + b_2 + \tfrac{1}{2}\pi).$$

11. $\boldsymbol{\operatorname{tg}(a_1x + b_1) = \operatorname{tg}(a_2x + b_2)}$**.**

Решение при $a_1 \neq a_2$:

$$x_n = -\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2} + \frac{\pi n}{a_1-a_2}, \qquad n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

12. $\boldsymbol{\operatorname{tg}(a_1x + b_1) = -\operatorname{tg}(a_2x + b_2)}$**.**

Это уравнение можно записать в виде уравнения 1.2.1.11,

$$\operatorname{tg}(a_1x + b_1) = \operatorname{tg}(-a_2x - b_2).$$

1.2.2. Тригонометрические уравнения, содержащие несколько членов

► **Уравнения, линейные относительно тригонометрических функций.**

1. $\boldsymbol{a\sin x + b\cos x = c.}$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{*}$$

где вспомогательный угол φ определяется соотношениями

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Уравнение (*) заменой $y = x - \varphi$ сводится к уравнению вида 1.2.1.2.

2. $\boldsymbol{a\sin x + b\sin(2x) + c\sin(3x) = 0.}$

Используя тригонометрические формулы $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, можно показать, что решение исходного уравнения сводится к решению двух более простых уравнений:

$$\sin x = 0, \qquad 4c\cos^2 x + 2b\cos x + a - c = 0.$$

Второе уравнение заменой $z = \cos x$ сводится к квадратному уравнению (ищутся действительные решения этого уравнения, удовлетворяющие неравенству $|z| \leqslant 1$).

3. $\boldsymbol{a\cos x + b\cos(2x) + c\cos(3x) = 0.}$

Используя формулы $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ и $\cos(3x) = -3\cos x + 4\cos^3 x$, можно показать, что решение исходного уравнения сводится к решению кубического уравнения для $z = \cos x$ (ищутся действительные решения полученного уравнения, удовлетворяющие неравенству $|z| \leqslant 1$).

4. $\boldsymbol{a\sin(px) + b\cos(px) + c\sin(qx) + d\cos(qx) = 0, \qquad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.}$

Перенесем последние два члена в правую часть уравнения, а затем разделим все члены на $\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2}$. Используя тригонометрическую формулу $a\sin X + b\cos X = \rho\sin(X+\varphi)$, получим эквивалентное уравнение вида 1.2.1.7:

$$\sin(px + \varphi_1) = \sin(qr + \varphi_2),$$

где углы φ_1 и φ_2 определяются соотношениями

$$\cos\varphi_1 = a/\rho, \quad \sin\varphi_1 = b/\rho, \quad \cos\varphi_2 = -c/\rho, \quad \sin\varphi_2 = -d/\rho.$$

5. $\boldsymbol{\cos(ax) + \cos(bx) + k\{\cos(cx) + \cos[(a + b - c)x]\} = 0.}$

Используя формулу преобразования суммы тригонометрических функций в произведение $\cos X + \cos Y = 2\cos\bigl(\frac{X+Y}{2}\bigr)\cos\bigl(\frac{X-Y}{2}\bigr)$, приходим к эквивалентному уравнению

$$2\cos[\tfrac{1}{2}(a+b)x]\bigl\{\cos[\tfrac{1}{2}(a-b)x] + k\cos[\tfrac{1}{2}(2c-a-b)x]\bigr\} = 0.$$

В результате получим две группы решений, которые определяются из более простых уравнений

$$\begin{aligned}&\cos[\tfrac{1}{2}(a+b)x] = 0,\\ &\cos[\tfrac{1}{2}(a-b)x] + k\cos[\tfrac{1}{2}(2c-a-b)x] = 0.\end{aligned}$$

О решениях второго уравнения при $k = \mp 1$ см. уравнения 1.2.1.5 и 1.2.1.6.

6. $\boldsymbol{\cos(ax) - \cos(bx) + k\{\cos(cx) - \cos[(a + b - c)x]\} = 0.}$

Используя формулу преобразования разности тригонометрических функций в произведение $\cos X - \cos Y = -2\sin\bigl(\frac{X+Y}{2}\bigr)\sin\bigl(\frac{X-Y}{2}\bigr)$, приходим к эквивалентному уравнению

$$-2\sin[\tfrac{1}{2}(a+b)x]\bigl\{\sin[\tfrac{1}{2}(a-b)x] + k\sin[\tfrac{1}{2}(2c-a-b)x]\bigr\} = 0.$$

В результате получим две группы решений, которые определяются из более простых уравнений

$$\begin{aligned}&\sin[\tfrac{1}{2}(a+b)x] = 0,\\ &\sin[\tfrac{1}{2}(a-b)x] + k\sin[\tfrac{1}{2}(2c-a-b)x] = 0.\end{aligned}$$

О решениях второго уравнения при $k = \mp 1$ см. уравнения 1.2.1.7 и 1.2.1.8.

7. $\boldsymbol{\sin(ax) + \sin(bx) + k\{\sin(cx) + \sin[(a + b - c)x]\} = 0.}$

Используя формулу преобразования суммы тригонометрических функций в произведение $\sin X + \sin Y = 2\sin\bigl(\frac{X+Y}{2}\bigr)\cos\bigl(\frac{X-Y}{2}\bigr)$, приходим к эквивалентному уравнению

$$2\sin[\tfrac{1}{2}(a+b)x]\bigl\{\cos[\tfrac{1}{2}(a-b)x] + k\cos[\tfrac{1}{2}(2c-a-b)x]\bigr\} = 0.$$

В результате получим две группы решений, которые определяются из более простых уравнений

$$\begin{aligned}&\sin[\tfrac{1}{2}(a+b)x] = 0,\\ &\cos[\tfrac{1}{2}(a-b)x] + k\cos[\tfrac{1}{2}(2c-a-b)x] = 0.\end{aligned}$$

О решениях второго уравнения при $k = \mp 1$ см. уравнения 1.2.1.5 и 1.2.1.6.

8. $\mathbf{\sin(ax) - \sin(bx) + k\{\sin(cx) - \sin[(a+b-c)x]\} = 0.}$

Используя формулу преобразования разности тригонометрических функций в произведение $\sin X - \sin Y = 2\sin\left(\frac{X-Y}{2}\right)\cos\left(\frac{X+Y}{2}\right)$, приходим к эквивалентному уравнению

$$2\cos\left[\tfrac{1}{2}(a+b)x\right]\left\{\sin\left[\tfrac{1}{2}(a-b)x\right] + k\sin\left[\tfrac{1}{2}(2c-a-b)x\right]\right\} = 0.$$

В результате получим две группы решений, которые определяются из более простых уравнений

$$\cos\left[\tfrac{1}{2}(a+b)x\right] = 0,$$
$$\sin\left[\tfrac{1}{2}(a-b)x\right] + k\sin\left[\tfrac{1}{2}(2c-a-b)x\right] = 0.$$

О решениях второго уравнения при $k = \mp 1$ см. уравнения 1.2.1.7 и 1.2.1.8.

9. $\mathbf{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2kx) = 0.}$

Очевидно, что это уравнение имеет тривиальное решение $x = 0$. Чтобы найти другие корни, преобразуем сумму тригонометрических функций в левой части уравнения в произведение по формуле (Градштейн & Рыжик, 1971):

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(2kx) = \sin[(n+1)x]\sin(nx)\operatorname{cosec} x.$$

Следовательно, остальные корни определяются путем решения двух простых уравнений вида 1.2.1.1: $\sin[(n+1)x] = 0$ и $\sin(nx) = 0$.

10. $\mathbf{\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(2kx) = 0.}$

Преобразуем сумму тригонометрических функций в левой части уравнения в произведение по формуле (Градштейн & Рыжик, 1971):

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \sin[(n+1)x]\cos(nx)\operatorname{cosec} x.$$

Поэтому корни исходного уравнения определяются путем решения двух простых уравнений вида 1.2.1.1 и 1.2.1.2: $\sin[(n+1)x] = 0$ $(x \neq 0)$ и $\cos(nx) = 0$.

11. $\mathbf{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin[(2k-1)x] = 0.}$

Очевидно, что это уравнение имеет тривиальное решение $x = 0$. Чтобы найти другие корни, преобразуем сумму тригонометрических функций в левой части уравнения в произведение по формуле (Градштейн & Рыжик, 1971):

$$\sum_{k=1}^{n} \sin[(2k-1)x] = \sin^2(nx)\operatorname{cosec} x.$$

Поэтому другие корни определяются путем решения простого уравнения вида 1.2.1.1: $\sin(nx) = 0$ $(x \neq 0)$.

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos[(2k-1)x] = 0.$

Преобразуем сумму тригонометрических функций в левой части уравнения в произведение по формуле (Градштейн & Рыжик, 1971):

$$\sum_{k=1}^{n} \cos[(2k-1)x] = \frac{1}{2}\sin(2nx)\operatorname{cosec} x.$$

Поэтому корни исходного уравнения определяются путем решения простого уравнения вида 1.2.1.1: $\sin(2nx) = 0$ $(x \neq 0)$.

13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx+a) = 0.$

Преобразуем сумму тригонометрических функций в левой части уравнения в произведение по формуле (Градштейн & Рыжик, 1971):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx+a) = \sin\Big(\frac{n-1}{2}x + a\Big)\sin\frac{nx}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}.$$

Поэтому корни исходного уравнения определяются путем решения двух простых уравнения вида 1.2.1.1: $\sin(\frac{n-1}{2}x + a) = 0$ и $\sin\frac{nx}{2} = 0$ $(x \neq 0)$.

14. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx+a) = 0.$

Преобразуем сумму тригонометрических функций в левой части уравнения в произведение по формуле (Градштейн & Рыжик, 1971):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx+a) = \cos\Big(\frac{n-1}{2}x + a\Big)\sin\frac{nx}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}.$$

Поэтому корни исходного уравнения определяются путем решения двух простых уравнений вида 1.2.1.1 и 1.2.1.2: $\sin\frac{nx}{2} = 0$ $(x \neq 0)$ и $\cos(\frac{n-1}{2}x + a) = 0$.

15. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \cos(kx+a) = 0.$

Преобразуем сумму тригонометрических функций в левой части уравнения в произведение по формуле (Градштейн & Рыжик, 1971):

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \cos(kx+a) = \sin\Big(\frac{2n-1}{2}x + a\Big)\sin(nx)\sec\frac{x}{2}.$$

Поэтому корни исходного уравнения определяются путем решения двух простых уравнения вида 1.2.1.1: $\sin(nx) = 0$ и $\sin(\frac{2n-1}{2}x + a) = 0$.

16. $\boldsymbol{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sin[(2k-1)x] = 0.}$

Преобразуем сумму тригонометрических функций в левой части уравнения в произведение по формуле (Градштейн & Рыжик, 1971):

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sin[(2k-1)x] = (-1)^{n+1}\frac{\sin(2nx)}{2\cos x}.$$

Поэтому корни исходного уравнения определяются путем решения простого уравнения вида 1.2.1.1: $\sin(2nx) = 0$.

17. $\boldsymbol{a\,\mathrm{tg}\,x + b\,\mathrm{ctg}\,x + c = 0 \quad (ab \neq 0).}$

Подстановка $z = \mathrm{tg}\,x$ приводит к квадратному уравнению вида 1.1.1.2:

$$az^2 + cz + b = 0.$$

► **Другие уравнения.**

18. $\boldsymbol{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.}$

1°. При $a = 0$ решение данного уравнения сводится к решению двух более простых уравнений $\cos x = 0$ и $b\sin x + c\cos x = 0$, которые рассматривались ранее (см. уравнения 1.2.1.2 и 1.2.2.1).

2°. При $a \neq 0$ рассматриваемое уравнение после почленного деления на $\cos^2 x \neq 0$ с последующей подстановкой $z = \mathrm{tg}\,x$ сводится к квадратному уравнению вида 1.1.1.2:

$$az^2 + bz + c = 0.$$

19. $\boldsymbol{a_1\sin^2 x + a_2\sin x\cos x + a_3\cos^2 x + b_1\sin(2x) + b_2\cos(2x) + c = 0.}$

Используя тригонометрические формулы $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, $c = c(\sin^2 x + \cos^2 x)$, рассматриваемое уравнение можно свести к уравнению вида 1.2.2.18:

$$(a_1 - b_2 + c)\sin^2 x + (a_2 + 2b_1)\sin x\cos x + (a_3 + b_2 + c)\cos^2 x = 0.$$

20. $\boldsymbol{\sin(ax)\sin(bx) = \sin(cx)\sin[(a+b-c)x].}$

Используя формулу преобразования произведения тригонометрических функций в разность $\sin X\sin Y = \frac{1}{2}[\cos(X-Y) - \cos(X+Y)]$, получим эквивалентное уравнение

$$\cos[(a-b)x] = \cos[(2c-a-b)x],$$

которое совпадает с уравнением 1.2.1.5 при $a_1=a-b$, $a_2=2c-a-b$, $b_1=b_2=0$.

21. $\boldsymbol{\sin(ax)\sin(bx) = -\sin(cx)\sin[(a+b+c)x]}$.

Переобозначив $a=-a_1$ и $b=-b_1$, получим уравнение вида 1.2.2.20:

$$\sin(a_1x)\sin(b_1x) = \sin(cx)\sin[(a_1+b_1-c)x].$$

22. $\boldsymbol{\cos(ax)\cos(bx) = \cos(cx)\cos[(a+b-c)x]}$.

Используя формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму $\cos X\cos Y = \frac{1}{2}[\cos(X-Y)+\cos(X+Y)]$, получим эквивалентное уравнение

$$\cos[(a-b)x] = \cos[(2c-a-b)x],$$

которое совпадает с уравнением 1.2.1.5 при $a_1=a-b$, $a_2=2c-a-b$, $b_1=b_2=0$.

23. $\boldsymbol{\sin(ax)\cos(bx) = \sin(cx)\cos[(a+b-c)x]}$.

Используя формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму $\sin X\cos Y = \frac{1}{2}[\sin(X-Y)+\sin(X+Y)]$, получим эквивалентное уравнение

$$\sin[(a-b)x] = \sin[(2c-a-b)x],$$

которое совпадает с уравнением 1.2.1.7 при $a_1=a-b$, $a_2=2c-a-b$, $b_1=b_2=0$.

24. $\boldsymbol{\sin(ax)\cos(bx) = -\sin(cx)\cos[(a-b+c)x]}$.

Используя формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму $\sin X\cos Y = \frac{1}{2}[\sin(X-Y)+\sin(X+Y)]$, получим эквивалентное уравнение

$$\sin[(a+b)x] = \sin[(b-a-2c)x],$$

которое совпадает с уравнением 1.2.1.7 при $a_1=a+b$, $a_2=b-a-2c$, $b_1=b_2=0$.

25. $\boldsymbol{a\sin x + b\sin^2 x + c\cos^2 x + d\cos(2x) + k = 0}$.

Выражая функции $\cos^2 x$ и $\cos(2x)$ через синус, получим квадратное уравнение относительно $z=\sin x$:

$$(b-c-2d)z^2 + az + c + d + k = 0.$$

Берутся только корни, удовлетворяющие неравенству $|z|\leqslant 1$.

26. $\boldsymbol{a\cos x + b\cos^2 x + c\sin^2 x + d\cos(2x) + k = 0}$.

Выражая функции $\sin^2 x$ и $\cos(2x)$ через косинус, получим квадратное уравнение относительно $z=\cos x$:

$$(b-c+2d)z^2 + az + c - d + k = 0.$$

Берутся только корни, удовлетворяющие неравенству $|z|\leqslant 1$.

27. $\boldsymbol{a\cos(2x) + b\cos^2(2x) + c\cos(4x) + d\cos^4 x + k = 0.}$

Используя тригонометрические формулы

$$\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1,$$
$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)\right]^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{4}\cos^2(2x),$$

преобразуем исходное уравнение к квадратному уравнению для $z = \cos(2x)$:

$$(b + 2c + \tfrac{1}{4}d)z^2 + (a + \tfrac{1}{2}d)z + k - c + \tfrac{1}{4}d = 0.$$

Берутся только корни, удовлетворяющие неравенству $|z| \leqslant 1$.

28. $\boldsymbol{a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{ctg}^2 x + c = 0 \quad (ab \neq 0).}$

Подстановка $z = \mathrm{tg}^2 x$ приводит к квадратному уравнению вида 1.1.1.2:

$$az^2 + cz + b = 0.$$

1.2.3. Тригонометрические уравнения общего вида

1. $\boldsymbol{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin(kx) = 0.}$

Используя тригонометрическую формулу k-кратного аргумента (см., например, Weisstein, 2002):

$$\sin(kx) = \sin x \left[\sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \frac{(-1)^j 2^{k-2j-1}(k-j-1)!}{j!(k-2j-1)!} \cos^{k-2j-1}\right],$$

где $[A]$ — целая часть числа A, рассматриваемое уравнение можно свести к простейшему тригонометрическому уравнению $\sin x = 0$ и алгебраическому уравнению степени $n-1$ для $z = \cos x$ (ищутся действительные решения полученного алгебраического уравнения, удовлетворяющие неравенству $|z| \leqslant 1$).

2. $\boldsymbol{\sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k \sin[(2k+1)x] = b.}$

Используя тригонометрическую формулу (Градштейн & Рыжик, 1971):

$$\sin[(2k+1)x] = (2k+1)\Biggl\{\sin x + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \times$$
$$\times \frac{[(2k+1)^2 - 1][(2k+1)^2 - 3^2]\ldots[(2k+1)^2 - (2j-1)^2]}{(2j+1)!}\sin^{2j+1} x\Biggr\},$$

рассматриваемое уравнение можно свести к алгебраическому уравнению степени $2n+1$ для $z = \cos x$ (ищутся действительные решения полученного уравнения, удовлетворяющие неравенству $|z| \leqslant 1$).

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) = b.$

Используя тригонометрическую формулу k-кратного аргумента (см., например, Weisstein, 2002):

$$\cos(kx) = k \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j 2^{k-2j-1}(k-j-1)!}{j!(k-2j)!} \cos^{k-2j} x,$$

где $[A]$ — целая часть числа A, рассматриваемое уравнение можно свести к алгебраическому уравнению степени n для $z = \cos x$ (ищутся действительные решения полученного уравнения, удовлетворяющие неравенству $|z| \leqslant 1$).

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \sin^k x \cos^{n-k} x = 0.$

1°. При $a_0 \neq 0$ уравнение после деления на $\cos^n x \neq 0$ с последующей заменой $z = \operatorname{tg} x$ сводится к алгебраическому уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0 \qquad (z = \operatorname{tg} x). \tag{*}$$

2°. При $a_0 = 0$ к решениям, полученным из уравнения (*), следует добавить решения уравнения $\cos x = 0$.

5. $P(\sin x + \cos x, \sin x \cos x) = 0.$

Здесь $P(y, z)$ — многочлен от двух переменных. Полагая $y = \sin x + \cos x$ и учитывая соотношения

$$y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2z,$$

приходим к алгебраическому уравнению для y:

$$P\Bigl(y, \frac{y^2-1}{2}\Bigr) = 0.$$

6. $P(\sin x - \cos x, \sin x \cos x) = 0.$

Здесь $P(y, z)$ — многочлен от двух переменных. Полагая $y = \sin x - \cos x$ и учитывая соотношения

$$y^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = 1 - 2z,$$

приходим к алгебраическому уравнению для y:

$$P\Bigl(y, \frac{1-y^2}{2}\Bigr) = 0.$$

7. $\boldsymbol{P(\sin x, \cos x) = 0.}$

Здесь $P(y,z)$ — многочлен от двух переменных. Используя тригонометрические формулы

$$\sin x = \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}, \quad \xi = \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

получим уравнение

$$P\Big(\frac{2\xi}{1+\xi^2}, \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}\Big) = 0,$$

которое после умножения на $(1+z^2)^m$, где m — подходящее положительное целое число, сводится к алгебраическому уравнению.

Отметим, что точки $x = \pi + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, должны быть рассмотрены отдельно.

8. $\boldsymbol{P(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0.}$

Здесь $P(y,z)$ — многочлен от двух переменных, имеющий максимальную степень m по z. Подстановка $y = \operatorname{tg} x$ приводит к алгебраическому уравнению для y:

$$y^m P\big(y, 1/y\big) = 0.$$

1.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные, гиперболические и другие функции

1.3.1. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $\boldsymbol{a^{kx+m} = b^{px+q} \quad (a, b > 0).}$

Решение:

$$x = \frac{q\ln b - m\ln a}{k\ln a - p\ln b} = \frac{q\log_c b - m\log_c a}{k\log_c a - p\log_c b},$$

где c — любое положительное число, отличное от единицы. В частности, можно положить $c = a$ (если $a \neq 1$) или $c = b$ (если $b \neq 1$).

2. $\boldsymbol{ap^{2\beta x} + bp^{\beta x} + c = 0 \quad (p > 0,\ p \neq 1).}$

Подстановка $z = p^{\beta x}$ приводит к квадратному уравнению $az^2 + bz + c = 0$.

3. $\boldsymbol{ap^{2\beta x} + bq^{2\beta x} + c(pq)^{\beta x} = 0 \quad (p, q > 0).}$

Разделим все члены уравнения на $q^{2\beta x}$. В результате приходим к квадратному уравнению для $z = (p/q)^{\beta x}$:

$$az^2 + cz + b = 0.$$

4. $\boldsymbol{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k e^{k\beta x} = 0.}$

Подстановка $z = e^{\beta x}$ приводит к алгебраическому уравнению $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$.

5. $\boldsymbol{ax + b = e^{-cx}}$**.**

Решение:

$$x = -\frac{b}{a} + \frac{1}{c} W\Bigl(\frac{ce^{bc/a}}{a}\Bigr),$$

где $W(z)$ — функция Ламберта, которая определяется неявно с помощью соотношения $We^W = z$. Для действительных $z = t$ функция $W(t)$ является однозначной при $t \geqslant -1/e$ и $W \geqslant -1$ (подробности о функции Ламберта имеются в описании решения уравнения 10.1.1.2 из разд. 10.1.1).

6. $\boldsymbol{x^k e^x = a}$**.**

Здесь $a > 0$ и $x > 0$. Решение:

$$x = kW\bigl(a^{1/k}/k\bigr),$$

где $W(z)$ — функция Ламберта.

7. $\boldsymbol{(ax)^{bx} = c}$**.**

Здесь $a > 0$, $c > 0$ и $x > 0$. Решение:

$$x = \frac{1}{a} \exp\Bigl[W\Bigl(\frac{a}{b} \ln c\Bigr)\Bigr],$$

где $W(z)$ — функция Ламберта.

1.3.2. Уравнения, содержащие гиперболические функции

► **Двучленные гиперболические уравнения.**

1. $\boldsymbol{\operatorname{sh} x = a}$**.**

Решение для любого a:

$$x = \ln\bigl(a + \sqrt{a^2 + 1}\,\bigr) \equiv \operatorname{arsh} a.$$

2. $\boldsymbol{\operatorname{ch} x = a}$**.**

Решение при $a \geqslant 1$:

$$x = \ln\bigl(a + \sqrt{a^2 - 1}\,\bigr) \equiv \operatorname{arch} a.$$

При $a < 1$ нет действительных решений.

3. $\boldsymbol{\operatorname{th} x = a}$**.**

Решение при $|a| < 1$:

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + a}{1 - a} \equiv \operatorname{arth} a.$$

4. $\boldsymbol{\operatorname{cth} x = a}$**.**

Решение при $|a| > 1$:

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{a + 1}{a - 1} \equiv \operatorname{arcth} a.$$

5. $\mathbf{ch}(a_1x+b_1)=\mathbf{ch}(a_2x+b_2)$.

Используя формулу преобразования разности гиперболических функций в произведение $\operatorname{ch} X-\operatorname{ch} Y=2\operatorname{sh}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{X-Y}{2}\right)$, можно получить приведенные ниже решения.

1°. Два решения при $a_1\neq\pm a_2$:

$$x_1=-\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2},\qquad x_2=-\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}.$$

2°. Решение при $a_1=a_2$:

$$x=-\frac{b_1+b_2}{2a_1}.$$

3°. Решение при $a_1=-a_2$:

$$x=-\frac{b_1-b_2}{2a_1}.$$

6. $\mathbf{sh}(a_1x+b_1)=\mathbf{sh}(a_2x+b_2)$.

Решение при $a_1\neq a_2$:

$$x=-\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}.$$

При $a_1=a_2$ и $b_1\neq b_2$ решений нет.

► **Гиперболические уравнения, содержащие несколько членов.**

7. $a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x=c$.

1°. При $c=0$ и $|b/a|<1$, решение имеет вид

$$x=\frac{1}{2}\ln\frac{1-(b/a)}{1+(b/a)}.$$

При $c=0$ и $|b/a|\geqslant 1$ решений нет.

2°. При $c\neq 0$ рассматриваемое уравнение сводится к квадратному уравнению

$$(a+b)z^2-2cz+b-a=0,\qquad z=e^x.$$

Ищутся действительные корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $z>0$.

8. $a\operatorname{sh} x+b\operatorname{sh}(2x)+c\operatorname{sh}(3x)=0$.

Используя гиперболические формулы $\operatorname{sh}(2x)=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh}(3x)=3\operatorname{sh} x+4\operatorname{sh}^3 x$, $\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch}^2 x-1$, можно показать, что решение исходного уравнения сводится к решению двух более простых уравнений:

$$\operatorname{sh} x=0,\qquad 4c\operatorname{ch}^2 x+2b\operatorname{ch} x+a-c=0.$$

Первое уравнение имеет тривиальное решение $x = 0$. Второе уравнение заменой $z = \operatorname{ch} x$ сводится к квадратному уравнению (ищутся действительные корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $z \geqslant 1$).

9. $\boldsymbol{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{ch}(2x) + c \operatorname{ch}(3x) = 0.}$

Используя гиперболические формулы $\operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}^2 x - 1$ и $\operatorname{ch}(3x) = -3\operatorname{ch} x + 4\operatorname{ch}^3 x$, можно показать, что решение исходного уравнения сводится к решению кубического уравнения для $z = \operatorname{ch} x$ (ищутся действительные корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $z \geqslant 1$).

10. $\boldsymbol{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(kx + a) = 0.}$

Преобразуем сумму в левой части уравнения в произведение гиперболических функций по формуле (Градштейн & Рыжик, 1971):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(kx + a) = \operatorname{sh}\Bigl(\frac{n-1}{2}x + a\Bigr)\frac{\operatorname{sh}(nx/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}.$$

Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{2a}{n-1}$.

11. $\boldsymbol{a \operatorname{sh}^2 x + b \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + c \operatorname{ch}^2 x = 0.}$

1°. При $a = 0$, поскольку $\operatorname{ch} x > 0$, решение рассматриваемого уравнения сводится к решению более простого уравнения $b \operatorname{sh} x + c \operatorname{ch} x = 0$, которое рассматривалось ранее (см. уравнение 1.3.2.7).

2°. При $a \neq 0$ уравнение после почленного деления на $\operatorname{ch}^2 x$ с последующей заменой $z = \operatorname{th} x$ сводится к квадратному уравнению вида 1.1.1.2:

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Рассматриваются только действительные корни, удовлетворяющие неравенству $|z| < 1$.

12. $\boldsymbol{a_1 \operatorname{sh}^2 x + a_2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + a_3 \operatorname{ch}^2 x + b_1 \operatorname{sh}(2x) + b_2 \operatorname{ch}(2x) = c.}$

Используя гиперболические формулы $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$, $c = c(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)$, данное уравнение можно свести к уравнению вида 1.3.2.11:

$$(a_1 + b_2 + c)\operatorname{sh}^2 x + (a_2 + 2b_1)\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + (a_3 + b_2 - c)\operatorname{ch}^2 x = 0.$$

13. $\boldsymbol{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{sh}^2 x + c \operatorname{ch}^2 x + d \operatorname{ch}(2x) + k = 0.}$

Выразив $\operatorname{ch}^2 x$ и $\operatorname{ch}(2x)$ через гиперболический синус, приходим к квадратному уравнению для $z = \operatorname{sh} x$,

$$(b + c + 2d)z^2 + az + c + d + k = 0.$$

14. $\boldsymbol{a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{ch}^2\,x + c\,\mathrm{sh}^2\,x + d\,\mathrm{ch}(2x) + k = 0.}$

Выразив $\mathrm{sh}^2\,x$ и $\mathrm{ch}(2x)$ через гиперболический косинус, приходим к квадратному уравнению для $z = \mathrm{ch}\,x$,

$$(b + c + 2d)z^2 + az - c - d + k = 0.$$

Рассматриваются только действительные корни, удовлетворяющие неравенству $z \geqslant 1$.

15. $\boldsymbol{a\,\mathrm{ch}(2x) + b\,\mathrm{ch}^2(2x) + c\,\mathrm{ch}(4x) + d\,\mathrm{ch}^4\,x + k = 0.}$

Используя гиперболические формулы

$$\mathrm{ch}(4x) = 2\,\mathrm{ch}^2(2x) - 1,$$
$$\mathrm{ch}^4\,x = (\mathrm{ch}^2\,x)^2 = \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ch}(2x)\right]^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ch}(2x) + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{ch}^2(2x),$$

преобразуем исходное уравнение к квадратному уравнению для $z = \mathrm{ch}(2x)$:

$$(b + 2c + \tfrac{1}{4}d)z^2 + (a + \tfrac{1}{2}d)z + k - c + \tfrac{1}{4}d = 0.$$

Рассматриваются только действительные корни, удовлетворяющие неравенству $z \geqslant 1$.

▶ **Гиперболические уравнения общего вида.**

16. $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} a_k\,\mathrm{sh}(kx) = 0.}$

Используя гиперболическую формулу k-кратного аргумента

$$\mathrm{sh}(kx) = \mathrm{sh}\,x\left[\sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \frac{(-1)^j 2^{k-2j-1}(k-j-1)!}{j!\,(k-2j-1)!}\,\mathrm{ch}^{k-2j-1}\,x\right],$$

где $[A]$ — целая часть числа A, можно свести рассматриваемое уравнение к простейшему гиперболическому уравнению $\mathrm{sh}\,x = 0$, которое дает тривиальное решение $x = 0$, и алгебраическому уравнению степени $n - 1$ для $z = \mathrm{ch}\,x$ (ищутся только действительные корни алгебраического уравнения, удовлетворяющие неравенству $z \geqslant 1$).

17. $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} a_k\,\mathrm{ch}(kx) = 0.}$

Используя гиперболическую формулу k-кратного аргумента

$$\mathrm{ch}(kx) = k\sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j 2^{k-2j-1}(k-j-1)!}{j!\,(k-2j)!}\,\mathrm{ch}^{k-2j}\,x,$$

где $[A]$ — целая часть числа A, можно свести рассматриваемое уравнение к алгебраическому уравнению степени n для $z = \operatorname{ch} x$ (ищутся только действительные корни алгебраического уравнения, удовлетворяющие неравенству $z \geqslant 1$).

18. $\boldsymbol{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \operatorname{sh}^k x \operatorname{ch}^{n-k} x = 0.}$

Это уравнение после почленного деления на $\operatorname{ch}^n x \neq 0$ с последующей заменой $z = \operatorname{th} x$ сводится к алгебраическому уравнению вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0 \qquad (z = \operatorname{th} x).$$

Рассматриваются только действительные корни полученного уравнения, удовлетворяющие неравенству $|z| < 1$.

19. $\boldsymbol{P(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = 0.}$

Здесь $P(y_1, y_2)$ — многочлен от двух переменных с максимальной степенью m по y_1 и y_2. Подстановка $z = e^x$ приводит к алгебраическому уравнению для z:

$$z^m P\left(\frac{z^2 - 1}{2z}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) = 0.$$

Ищутся только действительные корни, удовлетворяющие условию $z > 0$.

20. $\boldsymbol{P(\operatorname{th} x, \operatorname{cth} x) = 0.}$

Здесь $P(y, z)$ — многочлен от двух переменных с максимальной степенью m по z. Подстановка $y = \operatorname{th} x$ приводит к алгебраическому уравнению для y:

$$y^m P(y, 1/y) = 0.$$

Ищутся только действительные корни, удовлетворяющие условию $|y| < 1$.

1.3.3. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $\boldsymbol{\log_a(bx + c) = d.}$

Решение: $x = \dfrac{a^d - c}{b}$.

2. $\boldsymbol{\log_a(b_1x + c_1) + \log_a(b_2x + c_2) = \log_a(b_3x + c_3) + \log_a(b_4x + c_4) + d.}$

Действительные корни этого уравнения определяются из квадратного уравнения

$$(b_1x + c_1)(b_2x + c_2) = a^d(b_3x + c_3)(b_4x + c_4)$$

с учетом ограничений $b_kx + c_k > 0$ при $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

3. $\boldsymbol{a \log_c^2(\beta x) + b \log_c(\beta x) + c = 0.}$

Подстановка $z = \log_c(\beta x)$ приводит к квадратному уравнению $az^2 + bz + c = 0$.

4. $\boldsymbol{b_1 \log_a x + b_2 \log_{a^2} x + \cdots + b_n \log_{a^n} x = c.}$

Используя формулу $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$, получим решение

$$x = a^{c/S}, \qquad S = b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \cdots + \frac{1}{n}b_n.$$

5. $\boldsymbol{b_1 \log_{a_1} x + b_2 \log_{a_2} x + \cdots + b_n \log_{a_n} x = c.}$

Используя формулу $\log_a x = \log_k x/\log_k a$ ($k > 0$ и $k \neq 1$), получим решение

$$x = k^{c/S}, \qquad S = \frac{b_1}{\log_k a_1} + \frac{b_2}{\log_k a_2} + \cdots + \frac{b_n}{\log_k a_n}.$$

В качестве k можно взять, например, число Эйлера e.

6. $\boldsymbol{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \log_c^k(\beta x) = 0.}$

Замена $z = \log_c(\beta x)$ приводит к алгебраическому уравнению $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$.

7. $\boldsymbol{x \log_a(bx) = c.}$

Здесь $a > 0$ и $bx > 0$. Решение:

$$x = \frac{1}{b}\exp\bigl[W(bc\ln a)\bigr],$$

где $W(z)$ — функция Ламберта, которая определяется неявно с помощью соотношения $We^W = z$. Для действительных $z = t$ функция $W(t)$ является однозначной при $t \geqslant -1/e$ и $W \geqslant -1$ (подробности о функции Ламберта имеются в описании решения уравнения 10.1.1.2 из разд. 10.1.1).

8. $\boldsymbol{\log_a x + bx^k + c = 0.}$

Решение:

$$x = a^{-c}\exp\Bigl[-\frac{1}{k}W(bka^{-ck}\ln a)\Bigr],$$

где $W(z)$ — функция Ламберта.

9. $\boldsymbol{\log_a(ba^x + c) = px + q.}$

Используя свойства логарифмической функции, получим уравнение $ba^x + c = a^{px+b}$, или

$$bz + c = a^b z^p, \qquad z = a^x.$$

При $p = 1$ имеем линейное уравнение, при $p = 2$ или $p = -1$ полученное уравнение сводится к квадратному уравнению, а если p — целое число, то приходим к алгебраическому уравнению (корни должны удовлетворять условиям $z > 0$ и $bz + c > 0$).

Литература к главе 1

Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, 13-е изд.* М.: Наука, 1986.

Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5-е изд.* М.: Наука, 1971.

Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К. *W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики.* Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006.

Михалкин Е. Н. Некоторые формулы для решений триномиальных и тетраномиальных алгебраических уравнений. *Журнал Сибирского федерального университета: Математика и Физика*, 2012, т. 5, № 2, с. 230–223.

Михалкин Е. Н. О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций. *Сиб. матем. журн.*, 2006, т. 47, № 2, с. 365–371.

Окунев Л. Я. *Кольцо многочленов и поле рациональных чисел.* В кн. *Энциклопедия элементарной математики, т. 2, Алгебра* (ред. Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я.). М.-Л.: ГТТИ, 1951, с. 205–225.

Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. *Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: Справочник.* М. : Изд-во МГУ, 1997.

Садыков Т. М., Цих А. К. *Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных.* М.: Наука, 2014.

Botta V., da Silva J. V. On the behavior of roots of trinomial equations. *Acta Math. Hungarica*, 2019, Vol. 157, No. 1, pp. 54–62.

Cockle J. Sketch of a theory of transcendental roots. *Phil. Mag.,* 1860, Vol. 20, pp. 145–148.

Cubic equation, from Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation.

Gellert W., Gottwald S., Hellwich M., Kästner H., Küstner H. (eds.). *VNR Concise Encyclopedia of Mathematics, 2nd ed.* New York: Van Nostrand Reinhold, 1989.

Glasser M. L. Hypergeometric functions and the trinomial equation. *J. Comput. Applied Math.,* 2000, Vol. 118, No. 1–2, pp. 169–173.

Harley R. On the solution of the transcendental solution of algebraic equations. *Quart. J. Pure Appl. Math.,* 1862, Vol. 5, pp. 337–361.

Hermite C. Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado. *Annali di Math. Pura ed Appl.,* 1858, Vol. 1, pp. 256–259.

Kato M., Noumi M. Monodromy groups of hypergeometric functions satisfying algebraic equations. *Tohoku Math. J., Second Series*, 2003, Vol. 55, No. 2, pp. 189–205.

King R. B. *Beyond the Quartic Equation.* Boston: Birkhäuser, 1996.

Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, 2nd ed.* New York: Dover Publ., 2000.

Lee P. D., Spearman B. K. The factorization of $x^5 + ax^m + 1$. *Scientiae Math. Japonicae*, 2011, Vol. 73, No. 2–3, pp. 171–174.

Mellin H. J., Résolution de l'équation algébrique générale a l'aide de la fonction gamma la fonction gamma. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.,* 1921, Vol. 172, pp. 658–661.

Passare M., Tsikh A. Algebraic equations and hypergeometric series. In: *The Legacy of Niels Henrik Abel* (eds. Laudal O.A., Piene R.). Berlin–Heidelberg: Springer, 2004.

Polyanin A. D., Chernoutsan A. I. (eds.). *A Concise Handbook of Mathematics, Physics, and Engineering Sciences*. Boca Raton–London: Chapman & Hall/CRC Press, 2011.

Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*. Boca Raton–London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series, Vol. 1, Elementary Functions*. New York: Gordon & Breach, 1986.

Quartic equation, from Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Quartic_equation

Ritelli D., Spaletta G. Trinomial equation: The hypergeometric way. *Open J. Math. Sci.,* 2021, Vol. 5, pp. 236–247.

Spearman B. K., Williams K. S. Characterization of solvable quintics $x^5 + ax + b$. *The American Mathematical Monthly*, 1994, Vol. 101, No. 10, pp. 986–992.

Spearman B. K., Williams K. S. On solvable quintics $x^5 + ax + b$ and $x^5 + ax^2 + b$. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1996, Vol. 28, No. 2, pp. 753–772.

Sturmfels B. Solving algebraic equations in terms of $\mathscr{A}$-hypergeometric series. *Discrete Math.,* 2000, Vol. 210, pp. 171–181.

Umemura H. Resolution of algebraic equations by theta constants. In: *Tata Lectures on Theta II* (ed. Mumford D.), Boston: Birkhäuser, 1984, pp. 3.261–3.272.

Weisstein E. W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, 2nd ed.* Boca Raton–London: Chapman & Hall/CRC Press, 2002.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

► **Предварительные замечания.** Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) являются математическими уравнениями, содержащими неизвестную функцию одного аргумента и ее производные по этому аргументу. Порядок обыкновенного дифференциального уравнения определяется максимальным порядком производной искомой функции, входящей в рассматриваемое уравнение.

Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений в замкнутой форме — это представление решений этих уравнений аналитическими формулами, при записи которых используются указанный априори набор допустимых функций и перечисленный заранее набор математических операций. Решение выражается в виде квадратур, если в качестве допустимых функций используются элементарные функции и функции, входящие в уравнение (это необходимо, когда рассматриваемое уравнение зависит от произвольных функций), а под допустимыми операциями понимается конечное множество арифметических операций, операций суперпозиции (образования сложной функции), операций дифференцирования и взятия неопределенного интеграла. Решение может быть записано в явной, неявной или параметрической форме.

В данной главе дается краткое описание решений в замкнутой форме (обычно в виде квадратур) различных обыкновенных дифференциальных уравнений, указаны также некоторые преобразования, интегралы и редукции, приводящие к более простым ОДУ. Стационарные решения вида $y = \mathrm{const}$, которые находятся без интегрирования дифференциальных уравнений, здесь не обсуждаются.

В решениях постоянные интегрирования (произвольные константы, не входящие в рассматриваемое ОДУ) обозначаются C, C_0, C_1, …, C_n.

2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

2.1.1. Простейшие ОДУ первого порядка

1. $\boldsymbol{y'_x = f(y)}$.

Автономное ОДУ первого порядка, которое является частным случаем ОДУ с разделяющимися переменными 2.1.1.2.

Общее решение: $x = \int \frac{dy}{f(y)} + C$.

2. $\boldsymbol{y'_x = f(x)g(y)}$.

ОДУ с разделяющимися переменными.

Общее решение: $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$

3. $\boldsymbol{g(x)y'_x = f_1(x)y + f_0(x)}$.

Линейное ОДУ первого порядка.

Общее решение:

$$y = Ce^F + e^F \int e^{-F} \frac{f_0(x)}{g(x)}\,dx, \qquad \text{где} \quad F(x) = \int \frac{f_1(x)}{g(x)}\,dx.$$

4. $\boldsymbol{g(x)y'_x = f_1(x)y + f_0(x)y^k}$.

Уравнение Бернулли. Здесь k — произвольное число. При $k \neq 1$ подстановка $w(x) = y^{1-k}$ приводит к линейному ОДУ: $g(x)w'_x = (1-k)f_1(x)w + (1-k)f_0(x)$.

Общее решение:

$$y = \left[Ce^F + (1-k)e^F \int e^{-F} \frac{f_0(x)}{g(x)}\,dx\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad \text{где} \quad F(x) = (1-k)\int \frac{f_1(x)}{g(x)}\,dx.$$

5. $\boldsymbol{y'_x = f(y/x)}$.

Однородное ОДУ первого порядка. Подстановка $u(x) = y/x$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $xu'_x = f(u) - u$.

Общее решение: $\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + C, \qquad u = \frac{y}{x}.$

Частные решения: $y = A_k x$, где A_k — корни алгебраического (трансцендентного) уравнения $A_k - f(A_k) = 0$.

2.1.2. Уравнения Риккати

1. $\boldsymbol{y'_x = ay^2 + bx^k}$.

Специальное уравнение Риккати, k — произвольное число.

1°. Подстановка $y = -u'_x/(au)$ приводит к линейному ОДУ второго порядка вида 2.2.2.2: $u''_{xx} + abx^k u = 0$.

2°. Решение при $k \neq -2$:

$$y = -\frac{u'_x}{au}, \quad u(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\left[C_1 J_{\frac{1}{2\sigma}}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{ab}\,x^\sigma\right) + C_2 Y_{\frac{1}{2\sigma}}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{ab}\,x^\sigma\right)\right], & ab > 0; \\ \sqrt{x}\left[C_1 I_{\frac{1}{2\sigma}}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{|ab|}x^\sigma\right) + C_2 K_{\frac{1}{2\sigma}}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{|ab|}x^\sigma\right)\right], & ab < 0, \end{cases}$$

где $\sigma = \frac{1}{2}(k+2)$; $J_m(z)$ и $Y_m(z)$ — функции Бесселя, а $I_m(z)$ и $K_m(z)$ — модифицированные функции Бесселя (см. уравнения 2.2.2.13 и 2.2.2.14).

3°. Решение при $k=-2$:

$$y=\frac{\lambda}{x}-x^{2a\lambda}\Bigl(\frac{ax}{2a\lambda+1}x^{2a\lambda}+C\Bigr)^{-1},$$

где λ — корень квадратного уравнения $a\lambda^2+\lambda+b=0$.

2. $\boldsymbol{y'_x=ay^2+be^{\lambda x}}$.

Подстановка $y=-u'_x/(au)$ приводит к линейному ОДУ второго порядка вида 2.2.3.1: $u''_{xx}+abe^{\lambda x}u=0$.

3. $\boldsymbol{y'_x=y^2+f(x)y-a^2-af(x)}$.

Частное решение: $y_0=a$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

4. $\boldsymbol{y'_x=f(x)y^2+ay-ab-b^2f(x)}$.

Частное решение: $y_0=b$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

5. $\boldsymbol{y'_x=y^2+xf(x)y+f(x)}$.

Частное решение: $y_0=-1/x$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

6. $\boldsymbol{y'_x=f(x)y^2-ax^kf(x)y+akx^{k-1}}$.

Частное решение: $y_0=ax^k$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

7. $\boldsymbol{y'_x=f(x)y^2+akx^{k-1}-a^2x^{2k}f(x)}$.

Частное решение: $y_0=ax^k$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

8. $\boldsymbol{y'_x=-(k+1)x^ky^2+x^{k+1}f(x)y-f(x)}$.

Частное решение: $y_0=x^{-k-1}$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

9. $\boldsymbol{xy'_x=f(x)y^2+ky+ax^{2k}f(x)}$.

Общее решение: $y=\begin{cases}\sqrt{a}\,x^k\operatorname{tg}\Bigl[\sqrt{a}\displaystyle\int x^{k-1}f(x)\,dx+C\Bigr] & \text{при } a>0,\\ \sqrt{|a|}\,x^k\operatorname{th}\Bigl[-\sqrt{|a|}\displaystyle\int x^{k-1}f(x)\,dx+C\Bigr] & \text{при } a<0.\end{cases}$

10. $\boldsymbol{xy'_x=x^{2k}f(x)y^2+[ax^kf(x)-k]y+bf(x)}$.

Подстановка $z=x^ky$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $z'_x=x^{k-1}f(x)(z^2+az+b)$.

11. $y'_x = f(x)y^2 + g(x)y - a^2 f(x) - ag(x).$

Частное решение: $y_0 = a$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

12. $y'_x = f(x)y^2 + g(x)y + akx^{k-1} - a^2x^{2k}f(x) - ax^k g(x).$

Частное решение: $y_0 = ax^k$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

13. $y'_x = ae^{\lambda x}y^2 + ae^{\lambda x}f(x)y + \lambda f(x).$

Частное решение: $y_0 = -\dfrac{\lambda}{a}e^{-\lambda x}$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

14. $y'_x = f(x)y^2 - ae^{\lambda x}f(x)y + a\lambda e^{\lambda x}.$

Частное решение: $y_0 = ae^{\lambda x}$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

15. $y'_x = f(x)y^2 + a\lambda e^{\lambda x} - a^2e^{2\lambda x}f(x).$

Частное решение: $y_0 = ae^{\lambda x}$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

16. $y'_x = f(x)y^2 + \lambda y + ae^{2\lambda x}f(x).$

Общее решение: $y = \begin{cases} \sqrt{a}\,e^{\lambda x}\,\mathrm{tg}\Big[\sqrt{a}\displaystyle\int e^{\lambda x}f(x)\,dx + C\Big] & \text{при } a > 0, \\ \sqrt{|a|}\,e^{\lambda x}\,\mathrm{th}\Big[-\sqrt{|a|}\displaystyle\int e^{\lambda x}f(x)\,dx + C\Big] & \text{при } a < 0. \end{cases}$

17. $y'_x = y^2 - f^2(x) + f'_x(x).$

Частное решение: $y_0 = f(x)$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

18. $y'_x = f(x)y^2 - f(x)g(x)y + g'_x(x).$

Частное решение: $y_0 = g(x)$. Общее решение может быть получено по формулам, приведенным в п. 1° уравнения 2.1.2.19.

19. $y'_x = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x).$

Общее уравнение Риккати.

1°. Если известно частное решение $y_0 = y_0(x)$ данного уравнения, то его общее решение определяется по формуле

$$y = y_0(x) + \Phi(x)\Big[C - \int \Phi(x)f_2(x)\,dx\Big]^{-1},$$

где

$$\Phi(x) = \exp\Big\{\int \big[2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)\big]\,dx\Big\}.$$

Частное решение $y_0(x)$ соответствует $C = \infty$.

2°. Подстановка

$$u(x) = \exp\Bigl(-\int f_2 y\,dx\Bigr)$$

приводит общее уравнение Риккати к линейному ОДУ второго порядка

$$f_2 u''_{xx} - \bigl[(f_2)'_x + f_1 f_2\bigr]u'_x + f_0 f_2^2 u = 0,$$

которое часто можно решить проще, чем исходное уравнение Риккати.

3°. О других разрешимых уравнениях Риккати см. справочники Камке (1976), Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003, 2018).

2.1.3. Уравнения Абеля

1. $\boldsymbol{y'_x = f_3(x)y^3 + f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \qquad f_3(x) \not\equiv 0.}$

Уравнение Абеля первого рода общего вида. Уравнение Абеля первого рода не интегрируется в замкнутом виде при произвольных функциональных коэффициентах $f_n(x)$.

Ниже описаны некоторые частные случаи, когда уравнение Абеля первого рода интегрируется в квадратурах.

1°. В вырожденном случае $f_2(x) = f_0(x) = 0$ рассматриваемое ОДУ является уравнением Бернулли 2.1.1.4 при $k = 3$.

2°. Если функции $f_n(x)$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ пропорциональны, т. е. $f_n(x) = a_n g(x)$, то исходное ОДУ является уравнением с разделяющимися переменными вида 2.1.1.2.

3°. Однородное уравнение Абеля:

$$y'_x = a\frac{y^3}{x^3} + b\frac{y^2}{x^2} + c\frac{y}{x} + d$$

является частным случаем ОДУ 2.1.1.5 при $f(u) = au^3 + bu^2 + cu + d$.

4°. Обобщенно-однородное уравнение Абеля:

$$y'_x = ax^{2n+1}y^3 + bx^n y^2 + \frac{c}{x}y + dx^{-n-2}$$

является частным случаем уравнения 2.1.4.4 при $k = n + 1$. Подстановка $w = x^{n+1}y$ приводит к его ОДУ с разделяющимися переменными: $xw'_x = aw^3 + bw^2 + (c + n + 1)w + d$.

5°. Уравнение Абеля

$$y'_x = ax^{3k-m}y^3 + bx^{2k}y^2 + \frac{m-k}{x}y + dx^{2m}$$

с помощью подстановки $y = x^{m-k}z$ приводится к ОДУ с разделяющимися переменными вида 2.1.1.2: $z'_x = x^{k+m}(az^3 + bz^2 + c)$.

6°. Пусть $f_0 \equiv 0$, $f_1 \equiv 0$ и $(f_3/f_2)'_x = af_2$, где a — некоторая константа. Тогда подстановка $y = f_2 f_3^{-1} u$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $u'_x = f_2^2 f_3^{-1}(u^3 + u^2 + au)$.

7°. Если

$$f_0 = \frac{f_1 f_2}{3f_3} - \frac{2f_2^3}{27f_3^2} - \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\frac{f_2}{f_3}, \qquad f_n = f_n(x),$$

то общее решение уравнения Абеля имеет вид

$$y(x) = E\Big(C - 2\int f_3 E^2\,dx\Big)^{-1/2} - \frac{f_2}{3f_3}, \qquad \text{где} \quad E = \exp\Big[\int\Big(f_1 - \frac{f_2^2}{3f_3}\Big)\,dx\Big].$$

2. $yy'_x - y = f(x)$.

Уравнение Абеля второго рода в канонической форме. Это уравнение не интегрируется в замкнутом виде при произвольной функции $f(x)$. В справочниках Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003, 2018) описаны общие решения этого уравнения с правой частью следующего вида:

$$\begin{aligned}
&f(x) = kx + Ax^m,\\
&f(x) = kx + A\alpha x^p + A^2\beta x^q,\\
&f(x) = kx + A\alpha x^{1/2} + A^2\beta + A^3\gamma x^{-1/2},\\
&f(x) = Ax^2 - \tfrac{9}{625}A^{-1},\\
&f(x) = kx + A\alpha x^{1/3} + A^2\beta x^{-1/3} + A^4\gamma x^{-5/3},\\
&f(x) = kx + \alpha x^{1/3} + \beta + \gamma x^{-1/3} + \delta x^{-2/3},\\
&f(x) = kx + A^2\alpha x^{-1/7} + A^3\beta x^{-5/7} + A^4\delta x^{-9/7},\\
&f(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}},\\
&f(x) = kx + \frac{\alpha x^2 + \beta}{\sqrt{x^2 + \gamma}},\\
&f(x) = A + B\exp(-2x/A),
\end{aligned}$$

где A, B, C — произвольные параметры, для которых приведенные функции имеют смысл, а k, m, p, q, α, β, γ, δ — некоторые заданные числа.

Замечание 2.1. *Линейное преобразование $y = a\hat{y}$, $x = a\hat{x} + b$ приводит исходное ОДУ к аналогичному уравнению $\hat{y}\hat{y}'_{\hat{x}} - \hat{y} = a^{-1}f(a\hat{x} + b)$. Поэтому функцию $f(x)$ в правой части рассматриваемого уравнения Абеля второго рода можно отождествить с двухпараметрическим семейством функций $a^{-1}f(ax + b)$.*

3. $yy'_x = f(x)y + g(x)$.

Уравнение Абеля второго рода. Подстановка $z = \int f(x)\,dx$ приводит это ОДУ к канонической форме 2.1.3.2:

$$yy'_z - y = \Phi(z).$$

Здесь функция $\Phi(z)$ определяется параметрически с помощью соотношений (x — параметр):

$$\Phi = \frac{g(x)}{f(x)}, \qquad z = \int f(x)\,dx.$$

Ниже приведены некоторые частные случаи, когда исходное ОДУ интегрируется в квадратурах или допускает упрощение.

1°. Уравнение Абеля

$$yy'_x = x^{k-1}[(1+2k)x + ak]y - kx^{2k}(x+a)$$

преобразованием $x = \frac{w}{z}$, $y = -\frac{1}{z^k} + x^{k+1} + ax^k$ приводится к ОДУ с разделяющимися переменными: $w'_z = w^{-k} - a$.

2°. Уравнение Абеля

$$yy'_x = [a(2n+k)x^k + b]x^{n-1}y + (-a^2nx^{2k} - abx^k + c)x^{2n-1}$$

подстановкой $y = x^n(z + ax^k)$ приводится к уравнению Бернулли относительно $x = x(z)$: $(nz^2 - bz - c)x'_z = -zx - ax^{k+1}$.

3°. Уравнение Абеля

$$yy'_x = [(3-m)x - 1]y + (m-1)(x^3 - x^2 - ax)$$

преобразованием $x = w/z$, $y = -z^{m-1} + x^2 - x - a$ приводится к уравнению Абеля второго рода в канонической форме 2.1.3.2: $ww'_z - w = az + z^m$.

О других разрешимых уравнениях Абеля этого вида см. справочники Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003, 2018).

4. $[y + g(x)]y'_x = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$**.**

Уравнение Абеля второго рода общего вида.

Некоторые случаи, когда уравнение Абеля интегрируется в квадратурах. Ниже описаны некоторые специальные частные случаи, когда это ОДУ интегрируется в квадратурах.

1°. Если $g(x) = \mathrm{const}$ и функции $f_n(x)$ ($n = 0,\ 1,\ 2$) пропорциональны, т. е. $f_n(x) = a_n f(x)$, то рассматриваемое ОДУ является уравнением с разделяющимися переменными вида 2.1.1.2.

2°. Однородное уравнение Абеля:

$$(y + sx)y'_x = \frac{a}{x}y^2 + by + cx$$

является частным случаем уравнения 2.1.1.5. Подстановка $u = y/x$ приводит данное ОДУ к уравнению с разделяющимися переменными.

3°. Обобщенно-однородное уравнение Абеля:

$$(y + sx^n)y'_x = \frac{a}{x}y^2 + bx^{n-1}y + cx^{2n-1}$$

является частным случаем ОДУ 2.1.4.4 при $k = -n$. Подстановка $w = yx^{-n}$ приводит его к уравнению с разделяющимися переменными: $x(w + s)w'_x = (a - n)w^2 + (b - ns)w + c$.

4°. Уравнение Абеля

$$(y + a_2x + c_2)y'_x = b_1y + a_1x + c_1$$

путем деления на $(y + a_2x + c_2)$ сводится к частному случаю ОДУ 2.1.4.3 при $f(u) = u$ и $b_2 = 1$.

5°. Ненормированное уравнение Абеля

$$[(a_1x + a_2x^k)y + b_1x + b_2x^k]y'_x = c_2y^2 + c_1y + c_0$$

приводится к ОДУ 2.1.3.4 путем деления на $(a_1x + a_2x^k)$. Принимая y за независимую переменную, а $x = x(y)$ — за зависимую переменную, получим уравнение Бернулли

$$(c_2y^2 + c_1y + c_0)x'_y = (a_1y + b_1)x + (a_2y + b_2)x^k.$$

См. ОДУ 2.1.1.4.

6°. Уравнение Абеля

$$(y + Ax^n + a)y'_x + Anx^{n-1}y + kx^m + b = 0$$

имеет общее решение

$$y^2 + \frac{2k}{m+1}x^{m+1} + 2(Ax^ny + ay + bx) = C.$$

7°. Уравнение Абеля

$$(y + ax^{k+1} + bx^k)y'_x = (akx^k + cx^{k-1})y$$

подстановкой $y = x^k(z - b)$ приводится к уравнению Бернулли относительно $x = x(z)$: $[-kz^2 + (bk + c)z - bc]x'_z = zx + ax^2$.

8°. Уравнение Абеля

$$(y + g)y'_x = f_2y^2 + f_1y + f_1g - f_2g^2, \qquad f_n = f_n(x), \quad g = g(x),$$

имеет общее решение

$$y = -g + CE + E\int(f_1 + g'_x - 2f_2g)E^{-1}\,dx, \qquad \text{где} \quad E = \exp\Bigl(\int f_2\,dx\Bigr).$$

9°. Уравнение Абеля

$$(y + g)y'_x = f_2y^2 + (2f_2g - g'_x)y + f_0, \qquad f_n = f_n(x), \quad g = g(x),$$

имеет общее решение

$$y = -g \pm E\Bigl[2\int(f_0 + gg'_x - f_2g^2)E^{-2}\,dx + C\Bigr]^{1/2}, \qquad \text{где} \quad E = \exp\Bigl(\int f_2\,dx\Bigr).$$

Замечание 2.2. *О других разрешимых уравнениях Абеля этого вида см. справочники Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003, 2018).*

Некоторые преобразования уравнения Абеля второго рода.

1°. Подстановка

$$w = (y + g)E, \qquad \text{где} \quad E = \exp\Bigl(-\int f_2\,dx\Bigr), \tag{1}$$

приводит исходное уравнение к более простому виду 2.1.3.3:

$$ww'_x = F_1(x)w + F_0(x), \tag{2}$$

где

$$F_1 = (f_1 - 2f_2 g + g'_x)E, \quad F_0 = (f_0 - f_1 g + f_2 g^2)E^2.$$

2°. В свою очередь, ОДУ (2) с помощью подстановки

$$z = \int F_1(x)\,dx, \tag{3}$$

приводится к канонической форме 2.1.3.2:

$$ww'_z - w = \Phi(z). \tag{4}$$

Здесь функция $\Phi(z)$ определяется параметрически с помощью соотношений (x — параметр):

$$\Phi = \frac{F_0(x)}{F_1(x)}, \qquad z = \int F_1(x)\,dx.$$

Подстановки (1) и (3), которые приводят уравнение Абеля к канонической форме, называются *каноническими*.

Замечание 2.3. *Любые уравнения Абеля второго рода, связанные линейными (по y) преобразованиями вида*

$$\tilde{x} = \psi_1(x), \qquad \tilde{y} = \psi_2(x)y + \psi_3(x),$$

имеют одинаковые канонические формы с точностью до двухпараметрического семейства функций, указанных в замечании 2.1.

3°. Подстановка $y + g = 1/u$ приводит уравнение Абеля второго рода к уравнению Абеля первого рода специального вида:

$$u'_x + (f_0 - f_1 g + f_2 g^2)u^3 + (f_1 - 2f_2 g + g'_x)u^2 + f_2 u = 0.$$

2.1.4. Другие ОДУ первого порядка, разрешенные относительно производной

► *Уравнения 2.1.4.1–2.1.4.29 содержат произвольные функции f, g, h, аргументы которых могут зависеть от x и y.*

1. $\boldsymbol{y'_x = f(ax + by)}$.

При $b \neq 0$ подстановка $u(x) = ax + by$ приводит к автономному ОДУ вида 2.1.1.1: $u'_x = bf(u) + a$.

2. $\boldsymbol{y'_x = f(y + ax^k + b) - akx^{k-1}}$.

Подстановка $u = y + ax^k + b$ приводит к автономному ОДУ вида 2.1.1.1: $u'_x = f(u)$.

3. $\boldsymbol{y'_x = f\Big(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)}$.

Это уравнение можно свести к однородному ОДУ вида 2.1.1.5. Для этого при $a_1x + b_1y \neq k(a_2x + b_2y)$ следует сделать линейное преобразование $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, где постоянные x_0 и y_0 определяются путем решения линейной алгебраической системы

$$
\begin{aligned}
a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 &= 0,\\
a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

В результате получим следующее уравнение для $\eta = \eta(\xi)$:

$$
\eta'_\xi = f\Big(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\Big).
$$

Разделив числитель и знаменатель дроби аргумента функции f на ξ, приходим к однородному ОДУ, правая часть которого зависит только от отношения η/ξ:

$$
\eta'_\xi = f\Big(\frac{a_1 + b_1\eta/\xi}{a_2 + b_2\eta/\xi}\Big).
$$

При $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$ рассматриваемое ОДУ является уравнением вида 2.1.4.1.

4. $\boldsymbol{y'_x = x^{-k-1}f(x^ky)}$.

Обобщенно-однородное ОДУ. Подстановка $z = x^ky$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $xz'_x = kz + f(z)$.

5. $\boldsymbol{y'_x = \frac{y}{x}f(x^ny^m)}$.

Обобщенно-однородное ОДУ. Подстановка $z = x^ny^m$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $xz'_x = nz + mzf(z)$.

6. $\boldsymbol{y'_x = -\frac{n}{m}\frac{y}{x} + y^kf(x)g(x^ny^m)}$.

Подстановка $z = x^ny^m$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными:

$$
z'_x = mx^{\frac{n-nk}{m}}f(x)z^{\frac{k+m-1}{m}}g(z).
$$

7. $\boldsymbol{y'_x = x^{n-1}y^{1-m}f(ax^n + by^m)}$.

Подстановка $w = ax^n + by^m$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $w'_x = x^{n-1}[an + bmf(w)]$.

8. $[x^k f(y) + xg(y)]y'_x = h(y).$

Это уравнение Бернулли относительно $x = x(y)$ (см. уравнение 2.1.1.4).

9. $x[f(x^n y^m) + mx^k g(x^n y^m)]y'_x = y[h(x^n y^m) - nx^k g(x^n y^m)].$

Преобразование $t = x^n y^m$, $z = x^{-k}$ приводит к линейному ОДУ для $z = z(t)$: $t[nf(t) + mh(t)]z'_t = -kf(t)z - kmg(t)$.

10. $x[f(x^n y^m) + my^k g(x^n y^m)]y'_x = y[h(x^n y^m) - ny^k g(x^n y^m)].$

Преобразование $t = x^n y^m$, $z = y^{-k}$ приводит к линейному ОДУ для $z = z(t)$: $t[nf(t) + mh(t)]z'_t = -kh(t)z + kng(t)$.

11. $x[sf(x^n y^m) - mg(x^k y^s)]y'_x = y[ng(x^k y^s) - kf(x^n y^m)].$

Преобразование $t = x^n y^m$, $w = x^k y^s$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $tf(t)w'_t = wg(w)$.

12. $[f(y) + amx^n y^{m-1}]y'_x + g(x) + anx^{n-1}y^m = 0.$

Общее решение: $\displaystyle\int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx + ax^n y^m = C.$

13. $y'_x = f(x)e^{\lambda y} + g(x).$

Подстановка $u = e^{-\lambda y}$ приводит к линейному ОДУ: $u'_x = -\lambda g(x)u - \lambda f(x)$.

14. $y'_x = f(x)e^{\lambda y} + g(x) + h(x)e^{-\lambda y}.$

Подстановка $u = e^{-\lambda y}$ приводит к общему уравнению Риккати вида 2.1.2.19: $u'_x = -\lambda h(x)u^2 - \lambda g(x)u - \lambda f(x)$.

15. $y'_x = e^{-\lambda x} f(e^{\lambda x} y).$

Подстановка $u = e^{\lambda x} y$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $u'_x = f(u) + \lambda u$.

16. $y'_x = e^{\lambda y} f(e^{\lambda y} x).$

Подстановка $u = e^{\lambda y} x$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $xu'_x = \lambda u^2 f(u) + u$.

17. $y'_x = yf(e^{\alpha x} y^m).$

Подстановка $z = e^{\alpha x} y^m$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $z'_x = \alpha z + mzf(z)$.

18. $y'_x = \dfrac{1}{x} f(x^n e^{\alpha y}).$

Подстановка $z = x^n e^{\alpha y}$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $xz'_x = nz + \alpha zf(z)$.

19. $\boldsymbol{y'_x = -\frac{n}{x} + f(x)g(x^n e^y).}$

Подстановка $z = x^n e^y$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $z'_x = f(x)zg(z)$.

20. $\boldsymbol{y'_x = -\frac{\alpha}{m}y + y^k f(x)g(e^{\alpha x}y^m).}$

Подстановка $z = e^{\alpha x}y^m$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными:

$$z'_x = m\exp\Big[\frac{\alpha}{m}(1-k)x\Big]f(x)z^{\frac{k+m-1}{m}}g(z).$$

21. $\boldsymbol{y'_x = e^{\alpha x-\beta y}f(ae^{\alpha x} + be^{\beta y}).}$

Подстановка $w = ae^{\alpha x} + be^{\beta y}$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $w'_x = e^{\alpha x}[a\alpha + b\beta f(w)]$.

22. $\boldsymbol{[e^{\alpha x}f(y) + a\beta]y'_x + e^{\beta y}g(x) + a\alpha = 0.}$

Общее решение: $\displaystyle\int e^{-\beta y}f(y)\,dy + \int e^{-\alpha x}g(x)\,dx - ae^{-\alpha x-\beta y} = C.$

23. $\boldsymbol{x[f(x^n e^{\alpha y}) + \alpha y g(x^n e^{\alpha y})]y'_x = h(x^n e^{\alpha y}) - nyg(x^n e^{\alpha y}).}$

Подстановка $t = x^n e^{\alpha y}$ приводит к линейному ОДУ относительно $y = y(t)$: $t[nf(t) + \alpha h(t)]y'_t = -ng(t)y + h(t)$.

24. $\boldsymbol{[f(e^{\alpha x}y^m) + mxg(e^{\alpha x}y^m)]y'_x = y[h(e^{\alpha x}y^m) - \alpha xg(e^{\alpha x}y^m)].}$

Подстановка $t = e^{\alpha x}y^m$ приводит к линейному ОДУ относительно $x = x(t)$: $t[\alpha f(t) + mh(t)]x'_t = mg(t)x + f(t)$.

25. $\boldsymbol{y'_x = f(x)\,\mathrm{ch}(\lambda y) + g(x)\,\mathrm{sh}(\lambda y) + h(x).}$

Подстановка $w = e^{\lambda y}$ приводит к общему уравнению Риккати: $w'_x = \frac{1}{2}\lambda[f(x) + g(x)]w^2 + \lambda h(x)w + \frac{1}{2}\lambda[f(x) - g(x)]$.

26. $\boldsymbol{y'_x = f(x)y\ln y + g(x)y.}$

Подстановка $y = e^u$ приводит к линейному ОДУ: $u'_x = f(x)u + g(x)$.

27. $\boldsymbol{y'_x = f(x)y\ln^2 y + g(x)y\ln y + h(x)y.}$

Подстановка $y = e^u$ приводит к общему уравнению Риккати: $u'_x = f(x)u^2 + g(x)u + h(x)$.

28. $\boldsymbol{y'_x = f(x)\cos(ay) + g(x)\sin(ay) + h(x).}$

Подстановка $u = \mathrm{tg}\big(\frac{1}{2}ay\big)$ приводит к общему уравнению Риккати: $u'_x = \frac{1}{2}a[h(x) - f(x)]u^2 + ag(x)u + \frac{1}{2}a[f(x) + h(x)]$.

29. $\boldsymbol{y'_x = f(y + a\,\mathrm{tg}\,x) - a\,\mathrm{tg}^2\,x.}$

Подстановка $u = y + a\,\mathrm{tg}\,x$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными: $u'_x = a + f(u)$.

2.1.5. ОДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной или заданные параметрически

1. $\boldsymbol{x = f(y'_x)}$.

Общее решение в параметрическом виде:

$$x = f(t), \qquad y = \int t f'_t(t)\,dt + C.$$

2. $\boldsymbol{y = f(y'_x)}$.

Общее решение в параметрическом виде:

$$x = \int f'_t(t)\frac{dt}{t} + C, \qquad y = f(t).$$

3. $\boldsymbol{f(y'_x) + ax + by + s = 0}$.

Решение в параметрическом виде:

$$x = C - \int \frac{f'_t(t)\,dt}{a + bt}, \qquad by = -ax - s - f(t).$$

Кроме того, имеется частное решение $y = \alpha x + \beta$, где коэффициенты α и β определяются из системы алгебраических (трансцендентных) уравнений:

$$a + b\alpha = 0, \qquad f(\alpha) + b\beta + s = 0.$$

4. $\boldsymbol{y = xy'_x + f(y'_x)}$.

Уравнение Клеро. Общее решение: $y = Cx + f(C)$.

Кроме того, имеется особое решение, которое записывается в параметрической форме (Камке, 1976):

$$x = -f'_t(t), \qquad y = -tf'_t(t) + f(t).$$

5. $\boldsymbol{y = xf(y'_x) + g(y'_x)}$.

Уравнение Лагранжа—Даламбера. При $f(t) = t$ см. уравнение 2.1.5.4.

Положим $t = y'_x$, а затем продифференцируем рассматриваемое ОДУ по x. Учитывая равенства $y''_{xx} = t'_x = 1/x'_t$, приходим к линейному уравнению для функции $x = x(t)$ (Камке, 1976):

$$[t - f(t)]x'_t = f'_t(t)x + g'_t(t).$$

6. $\boldsymbol{xf(y'_x) + yg(y'_x) + h(y'_x) = 0}$.

Преобразование Лежандра $X = y'_x$, $Y = xy'_x - y$, $Y'_X = x$ приводит к линейному ОДУ: $[f(X) + Xg(X)]Y'_X - g(X)Y + h(X) = 0$.

Обратное преобразование: $x = Y'_X$, $y = XY'_X - Y$, $y'_x = X$.

7. $\boldsymbol{y = x^k f(y'_x) + xy'_x}$.

Положим $t = y'_x$, а затем продифференцируем рассматриваемое ОДУ по x. Учитывая равенства $y''_{xx} = t'_x = 1/x'_t$, приходим к уравнению Бернулли для функции $x = x(t)$ (Камке, 1976):

$$kf(t)x'_t - f'_t(t)x - x^{2-k} = 0.$$

8. $\boldsymbol{(xy'_x - y)^k f(y'_x) + yg(y'_x) + xh(y'_x) = 0}$.

Преобразование Лежандра $x = u'_t$, $y = tu'_t - u$ $(y'_x = t)$ приводит к уравнению Бернулли (Камке, 1976):

$$[tg(t) + h(t)]u'_t = g(t)u - f(t)u^k.$$

9. $\boldsymbol{x = f(t), \quad y'_x = g(t)}$.

ОДУ, заданное параметрически двумя уравнениями (t — параметр).

Общее решение в параметрическом виде (Polyanin & Zhurov, 2016):

$$x = f(t), \qquad y = \int f'_t(t)g(t)\,dt + C.$$

10. $\boldsymbol{x = f(t)y + g(t), \quad y'_x = h(t)}$.

ОДУ, заданное параметрически двумя уравнениями (t — параметр).

Общее решение в параметрическом виде (Polyanin & Zhurov, 2017):

$$x = fy + g, \qquad y = CE + E\int \frac{hg'_t\,dt}{(1 - fh)E},$$

где C — произвольная постоянная, $E = \exp\Bigl(\int \frac{hf'_t\,dt}{1-fh}\Bigr)$.

2.2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

2.2.1. Предварительные замечания

► Линейные однородные ОДУ второго порядка.

Общее линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$f_2(x)y''_{xx} + f_1(x)y'_x + f_0(x)y = 0. \tag{1}$$

1°. Частным решением любого линейного однородного ОДУ является *тривиальное решение* $y = 0$.

2°. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система решений (два нетривиальных линейно независимых частных решения) уравнения (1). Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. Пусть $y_1 = y_1(x)$ — любое нетривиальное частное решение уравнения (1). Тогда общее решение этого уравнения определяется формулой

$$y = y_1\Bigl(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-F}}{y_1^2}\,dx\Bigr), \qquad \text{где} \quad F = \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx. \tag{2}$$

4°. Подстановка $u = y'_x/y$ приводит линейное однородное ОДУ второго порядка (1) к ОДУ первого порядка с квадратичной нелинейностью (уравнению Риккати) вида 2.1.2.19:

$$f_2(x)u'_x + f_2(x)u^2 + f_1(x)u + f_0(x) = 0.$$

► **Линейные неоднородные ОДУ второго порядка.**

Общее линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$f_2(x)y''_{xx} + f_1(x)y'_x + f_0(x)y = g(x). \tag{3}$$

1°. Общее решение неоднородного линейного ОДУ (3) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного ОДУ (1) и любого частного решения неоднородного ОДУ (3).

2°. Пусть $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного ОДУ (1). Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения (3) можно представить в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_2 \int y_1 \frac{g(x)}{f_2(x)}\frac{dx}{W(x)} - y_1 \int y_2 \frac{g(x)}{f_2(x)}\frac{dx}{W(x)}, \tag{4}$$

где $W(x) = y_1(y_2)'_x - y_2(y_1)'_x$ — *определитель Вронского.*

Справедлива *формула Лиувилля*:

$$W(x) = W(x_0)\exp\Bigl[-\int_{x_0}^{x} \frac{f_1(t)}{f_2(t)}\,dt\Bigr].$$

3°. Если известно одно нетривиальное частное решение $y_1 = y_1(x)$ линейного однородного ОДУ (1), то его второе частное решение $y_2 = y_2(x)$ можно найти по формуле

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-F}}{y_1^2}\,dx, \qquad \text{где} \quad F = \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx.$$

В этом случае общее решение линейного неоднородного ОДУ (3) определяется по формуле (4) при $W(x) = e^{-F}$.

2.2.2. Уравнения, содержащие степенные функции

1. $\boldsymbol{y''_{xx} + ay = 0.}$

Уравнение свободных колебаний.

$$\text{Общее решение:}\quad y = \begin{cases} C_1 \operatorname{sh}(x\sqrt{|a|}\,) + C_2 \operatorname{ch}(x\sqrt{|a|}\,) & \text{при } a < 0, \\ C_1 + C_2 x & \text{при } a = 0, \\ C_1 \sin(x\sqrt{a}\,) + C_2 \cos(x\sqrt{a}\,) & \text{при } a > 0. \end{cases}$$

2. $\boldsymbol{y''_{xx} - ax^k y = 0.}$

1°. При $k = -2$ это уравнение Эйлера 2.2.2.12, общее решение которого выражается в элементарных функциях.

2°. Пусть $2/(k+2) = 2m+1$, где m — целое число. Тогда общее решение рассматриваемого ОДУ определяется формулами

$$y = \begin{cases} x(x^{1-2q}D)^{m+1}\Big[C_1 \exp\Big(\frac{\sqrt{a}}{q}x^q\Big) + C_2 \exp\Big(-\frac{\sqrt{a}}{q}x^q\Big)\Big] & \text{при } m \geqslant 0, \\ (x^{1-2q}D)^{-m}\Big[C_1 \exp\Big(\frac{\sqrt{a}}{q}x^q\Big) + C_2 \exp\Big(-\frac{\sqrt{a}}{q}x^q\Big)\Big] & \text{при } m < 0, \end{cases}$$

где $D = \frac{d}{dx}$, $q = \frac{k+2}{2} = \frac{1}{2m+1}$.

3°. Для любого k общее решение рассматриваемого ОДУ выражается через функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя:

$$y = \begin{cases} C_1\sqrt{x}\,J_{\frac{1}{2q}}\Big(\frac{\sqrt{-a}}{q}x^q\Big) + C_2\sqrt{x}\,Y_{\frac{1}{2q}}\Big(\frac{\sqrt{-a}}{q}x^q\Big) & \text{при } a < 0, \\ C_1\sqrt{x}\,I_{\frac{1}{2q}}\Big(\frac{\sqrt{a}}{q}x^q\Big) + C_2\sqrt{x}\,K_{\frac{1}{2q}}\Big(\frac{\sqrt{a}}{q}x^q\Big) & \text{при } a > 0, \end{cases}$$

где $q = \frac{1}{2}(k+2)$. О функциях $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ см. уравнения 2.2.2.13 и 2.2.2.14.

3. $\boldsymbol{y''_{xx} + ay'_x + by = 0.}$

Линейное однородное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. В физике это уравнение называют *уравнением затухающих колебаний.*

Общее решение:

$$y = \begin{cases} \exp\big(-\tfrac{1}{2}ax\big)\big[C_1 \exp\big(\tfrac{1}{2}\lambda x\big) + C_2 \exp\big(-\tfrac{1}{2}\lambda x\big)\big] & \text{при } \lambda^2 = a^2 - 4b > 0, \\ \exp\big(-\tfrac{1}{2}ax\big)\big[C_1 \sin\big(\tfrac{1}{2}\lambda x\big) + C_2 \cos\big(\tfrac{1}{2}\lambda x\big)\big] & \text{при } \lambda^2 = 4b - a^2 > 0, \\ \exp\big(-\tfrac{1}{2}ax\big)\big(C_1 x + C_2\big) & \text{при } a^2 = 4b. \end{cases}$$

4. $\boldsymbol{y''_{xx} + ay'_x + (bx + c)y = 0.}$

1°. Общее решение при $b > 0$:

$$y = \exp\big(-\tfrac{1}{2}ax\big)\sqrt{\xi}\,\big[C_1 J_{1/3}\big(\tfrac{2}{3}\sqrt{b}\,\xi^{3/2}\big) + C_2 Y_{1/3}\big(\tfrac{2}{3}\sqrt{b}\,\xi^{3/2}\big)\big], \qquad \xi = x + \frac{4c - a^2}{4b},$$

где $J_{1/3}(z)$ и $Y_{1/3}(z)$ — функции Бесселя.

2°. Общее решение при $b<0$:

$$y=\exp\left(-\tfrac{1}{2}ax\right)\sqrt{\xi}\,\left[C_1J_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{|b|}\,\xi^{3/2}\right)+C_2Y_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{|b|}\,\xi^{3/2}\right)\right],\quad \xi=x+\frac{4c-a^2}{4b},$$

где $I_{1/3}(z)$ и $K_{1/3}(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

3°. При $b=0$ см. уравнение 2.2.2.3.

5. $\boldsymbol{y''_{xx}+(ax+b)y'_x+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)y=0.}$

Подстановка $y=u\exp(sx^2)$, где s — корень квадратного уравнения $4s^2+2as+{}$ $+\alpha=0$, приводит к ОДУ вида 2.2.2.11:

$$u''_{xx}+[(a+4s)x+b]u'_x+[(\beta+2bs)x+\gamma+2s]u=0.$$

6. $\boldsymbol{xy''_{xx}+ay'_x+by=0.}$

1°. Общее решение данного ОДУ выражается через функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя:

$$y=\begin{cases} x^{\frac{1-a}{2}}\left[C_1J_\nu\left(2\sqrt{bx}\,\right)+C_2Y_\nu\left(2\sqrt{bx}\,\right)\right] & \text{при}\ \ bx>0,\\ x^{\frac{1-a}{2}}\left[C_1I_\nu\left(2\sqrt{|bx|}\,\right)+C_2K_\nu\left(2\sqrt{|bx|}\,\right)\right] & \text{при}\ \ bx<0,\end{cases}$$

где $\nu=|1-a|$. О функциях $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ см. уравнения 2.2.2.13 и 2.2.2.14.

2°. При $a=\frac{1}{2}(2n+1)$, где $n=0,\,1,\,\ldots$, общее решение выражается через элементарные функции:

$$y=\begin{cases} C_1\frac{d^n}{dx^n}\cos\sqrt{4bx}+C_2\frac{d^n}{dx^n}\sin\sqrt{4bx} & \text{при}\ \ bx>0,\\ C_1\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{ch}\sqrt{4|bx|}+C_2\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{sh}\sqrt{4|bx|} & \text{при}\ \ bx<0.\end{cases}$$

7. $\boldsymbol{xy''_{xx}+ay'_x+bxy=0.}$

1°. Общее решение данного ОДУ выражается через функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя:

$$y=\begin{cases} x^{\frac{1-a}{2}}\left[C_1J_\nu\left(\sqrt{b}\,x\right)+C_2Y_\nu\left(\sqrt{b}\,x\right)\right] & \text{при}\ \ b>0,\\ x^{\frac{1-a}{2}}\left[C_1I_\nu\left(\sqrt{|b|}\,x\right)+C_2K_\nu\left(\sqrt{|b|}\,x\right)\right] & \text{при}\ \ b<0,\end{cases}$$

где $\nu=\frac{1}{2}|1-a|$.

2°. При $a=2n$, где $n=1,\,2,\,\ldots$, общее решение выражается через элементарные функции:

$$y=\begin{cases} C_1\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\cos\left(x\sqrt{b}\,\right)+C_2\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\sin\left(x\sqrt{b}\,\right) & \text{при}\ \ b>0,\\ C_1\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\operatorname{ch}\left(x\sqrt{-b}\,\right)+C_2\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\operatorname{sh}\left(x\sqrt{-b}\,\right) & \text{при}\ \ b<0.\end{cases}$$

8. $\boldsymbol{xy''_{xx} + ky'_x + bx^{1-2k}y = 0.}$

При $k = 1$ это уравнение Эйлера 2.2.2.12. При $k \neq 1$ общее решение определяется формулами

$$y = \begin{cases} C_1 \sin\Bigl(\dfrac{\sqrt{b}}{k-1}x^{1-k}\Bigr) + C_2 \cos\Bigl(\dfrac{\sqrt{b}}{k-1}x^{1-k}\Bigr) & \text{при } \ b > 0, \\ C_1 \exp\Bigl(\dfrac{\sqrt{-b}}{k-1}x^{1-k}\Bigr) + C_2 \exp\Bigl(\dfrac{-\sqrt{-b}}{k-1}x^{1-k}\Bigr) & \text{при } \ b < 0. \end{cases}$$

9. $\boldsymbol{xy''_{xx} + ay'_x + bx^k y = 0.}$

При $k = -1$ или $b = 0$ это уравнение Эйлера 2.2.2.12.

1°. При $b > 0$ и $k \neq -1$ общее решение данного ОДУ выражается через функции Бесселя:

$$y = x^{\frac{1-a}{2}}\Bigl[C_1 J_\nu\Bigl(\frac{2\sqrt{b}}{k+1}x^{\frac{k+1}{2}}\Bigr) + C_2 Y_\nu\Bigl(\frac{2\sqrt{b}}{k+1}x^{\frac{k+1}{2}}\Bigr)\Bigr], \qquad \text{где} \quad \nu = \frac{|1-a|}{k+1}.$$

2°. При $b < 0$ и $k \neq -1$ общее решение выражается через модифицированные функции Бесселя:

$$y = x^{\frac{1-a}{2}}\Bigl[C_1 I_\nu\Bigl(\frac{2\sqrt{-b}}{k+1}x^{\frac{k+1}{2}}\Bigr) + C_2 K_\nu\Bigl(\frac{2\sqrt{-b}}{k+1}x^{\frac{k+1}{2}}\Bigr)\Bigr], \qquad \text{где} \quad \nu = \frac{|1-a|}{k+1}.$$

10. $\boldsymbol{xy''_{xx} + (b - x)y'_x - ay = 0.}$

Вырожденное гипергеометрическое уравнение.

1°. При $b \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ частным решением данного ОДУ является функция Куммера, которую можно представить в виде ряда:

$$\Phi(a, b; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k}\frac{x^k}{k!},$$

где $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$, $(a)_0 = 1$. При $b > a > 0$ это решение может быть записано в виде определенного интеграла:

$$\Phi(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}\int_0^1 e^{xt}t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\,dt,$$

где $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ — гамма-функция.

В табл. 2.1 указаны некоторые частные случаи, когда функция $\Phi(a, b; z)$ выражается через более простые функции.

Если b не является целым числом, то общее решение вырожденного гипергеометрического уравнения имеет вид

$$y = C_1\Phi(a, b; x) + C_2 x^{1-b}\Phi(a-b+1,\ 2-b;\ x).$$

2°. Следующая функция является решением вырожденного гипергеометрического уравнения:

$$\Psi(a, b; x) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)}\Phi(a, b; x) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}x^{1-b}\Phi(a-b+1,\ 2-b;\ x).$$

Таблица 2.1. Частные случаи функции Куммера $\Phi = \Phi(a, b; z)$.

a	b	z	Φ	Принятые обозначения
a	a	x	e^x	—
1	2	$2x$	$\dfrac{1}{x}e^x \operatorname{sh} x$	—
a	$a+1$	$-x$	$ax^{-a}\gamma(a,x)$	неполная гамма функция $\gamma(a,x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}t^{a-1}\,dt$
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{2}$	$-x^2$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf} x$	интеграл вероятностей $\operatorname{erf} x = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\,dt$
$-n$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{x^2}{2}$	$\dfrac{n!}{(2n)!}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{-n}H_{2n}(x)$	многочлены Эрмита $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}\big(e^{-x^2}\big)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
$-n$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{x^2}{2}$	$\dfrac{n!}{(2n+1)!}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{-n}H_{2n+1}(x)$	
$-n$	b	x	$\dfrac{n!}{(b)_n}L_n^{(b-1)}(x)$	многочлены Лаггера $L_n^{(\alpha)}(x) = \dfrac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\big(e^{-x}x^{n+\alpha}\big)$, $\alpha = b-1$, $(b)_n = b(b+1)\ldots(b+n-1)$
$\nu+\dfrac{1}{2}$	$2\nu+1$	$2x$	$\Gamma(1+\nu)e^x\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^{-\nu}I_\nu(x)$	модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$
$n+1$	$2n+2$	$2x$	$\Gamma\Big(n+\dfrac{3}{2}\Big)e^x\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^{-n-\frac{1}{2}}I_{n+\frac{1}{2}}(x)$	

Переходя к пределу при $b \to n$ (n — целое), можно получить

$$\Psi(a, n+1; x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,\Gamma(a-n)}\bigg\{\Phi(a, n{+}1; x)\ln x + {}$$
$$+ \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r}{(n+1)_r}\big[\psi(a+r) - \psi(1+r) - \psi(1+n+r)\big]\frac{x^r}{r!}\bigg\} + {}$$
$$+ \frac{(n-1)!}{\Gamma(a)}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(a-n)_r}{(1-n)_r}\frac{x^{r-n}}{r!},$$

где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ (последняя сумма опускается при $n = 0$), $\psi(z) = [\ln\Gamma(z)]'_z$ — логарифмическая производная гамма-функции:

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}k^{-1}, \quad \gamma = 0.5772\ldots \text{ — постоянная Эйлера.}$$

Если b — отрицательное число, то функция Ψ может быть выражена через аналогичную функцию с положительным вторым аргументом с помощью соотношения

$$\Psi(a, b; x) = x^{1-b}\Psi(a-b+1,\ 2-b;\ x),$$

которое выполняется для любых x.

3°. При $b \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ общее решение вырожденного гипергеометрического уравнения можно представить в виде

$$y = C_1\Phi(a,b;x) + C_2\Psi(a,b;x),$$

а при $b = 0, -1, -2, -3, \ldots$ общее решение можно определять по формуле

$$y = x^{1-b}\bigl[C_1\Phi(a-b+1,\ 2-b;\ x) + C_2\Psi(a-b+1,\ 2-b;\ x)\bigr].$$

4°. Свойства вырожденных гипергеометрических функций $\Phi(a,b;x)$ и $\Psi(a,b;x)$ подробно обсуждаются в книгах Абрамовиц & Стиган (1979), Бейтмен & Эрдейи (1973), Olver et al. (2010).

11. $(a_2x + b_2)y''_{xx} + (a_1x + b_1)y'_x + (a_0x + b_0)y = 0.$

Пусть $\mathcal{J}(a,b;x)$ — произвольное решение вырожденного гипергеометрического уравнения $xy''_{xx} + (b-x)y'_x - ay = 0$ (см. ОДУ 2.2.2.10), а функция $Z_\nu(x)$ — произвольное решение уравнения Бесселя $x^2y''_{xx} + xy'_x + (x^2 - \nu^2)y = 0$ (см. ОДУ 2.2.2.13). Результаты решения рассматриваемого уравнения представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2. Решения уравнения 2.2.2.11 для различных значений определяющих параметров.

Решение: $y = e^{kx}w(z)$, где $z = \dfrac{x-\mu}{\lambda}$					
Условия	k	λ	μ	w	Параметры
$a_2 \neq 0$, $a_1^2 \neq 4a_0a_2$	$\dfrac{\sqrt{D}-a_1}{2a_2}$	$-\dfrac{a_2}{2a_2k+a_1}$	$-\dfrac{b_2}{a_2}$	$\mathcal{J}(a,b;z)$	$a = B(k)/(2a_2k+a_1)$, $b = (a_2b_1 - a_1b_2)a_2^{-2}$
$a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$	$-\dfrac{a_0}{a_1}$	1	$-\dfrac{2b_2k+b_1}{a_1}$	$\mathcal{J}\bigl(a, \frac{1}{2}; \beta z^2\bigr)$	$a = B(k)/(2a_1)$, $\beta = -a_1/(2b_2)$
$a_2 \neq 0$, $a_1^2 = 4a_0a_2$	$-\dfrac{a_1}{2a_2}$	a_2	$-\dfrac{b_2}{a_2}$	$z^{\nu/2}Z_\nu\bigl(\beta\sqrt{z}\bigr)$	$\nu = 1-(2b_2k+b_1)a_2^{-1}$, $\beta = 2\sqrt{B(k)}$
$a_2 = a_1 = 0$, $a_0 \neq 0$	$-\dfrac{b_1}{2b_2}$	1	$\dfrac{b_1^2 - 4b_0b_2}{4a_0b_2}$	$z^{1/2}Z_{1/3}\bigl(\beta z^{3/2}\bigr)$; см. также 2.2.2.4	$\beta = \dfrac{2}{3}\Bigl(\dfrac{a_0}{b_2}\Bigr)^{1/2}$
Обозначения: $D = a_1^2 - 4a_0a_2$, $B(k) = b_2k^2 + b_1k + b_0$					

12. $x^2y''_{xx} + axy'_x + by = 0.$

Уравнение Эйлера. Общее решение:

$$y = \begin{cases} |x|^{\frac{1-a}{2}}\bigl(C_1|x|^\mu + C_2|x|^{-\mu}\bigr) & \text{при } (1-a)^2 > 4b, \\ |x|^{\frac{1-a}{2}}(C_1 + C_2\ln|x|) & \text{при } (1-a)^2 = 4b, \\ |x|^{\frac{1-a}{2}}\bigl[C_1\sin(\mu\ln|x|) + C_2\cos(\mu\ln|x|)\bigr] & \text{при } (1-a)^2 < 4b, \end{cases}$$

где $\mu = \frac{1}{2}|(1-a)^2 - 4b|^{1/2}$.

13. $\boldsymbol{x^2 y''_{xx} + x y'_x + (x^2 - \nu^2) y = 0.}$

Уравнение Бесселя.

1°. Пусть ν — любое нецелое число. Тогда общее решение уравнения Бесселя можно представить в виде

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \tag{1}$$

где $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ — *функции Бесселя* первого и второго рода:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}, \quad Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}. \tag{2}$$

Решение (1) также обозначают $y = Z_\nu(x)$ и называют *цилиндрической функцией*.

2°. Интегральные представления при $x > 0$:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta - \nu\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\sin(\pi\nu)\int_0^\infty \exp(-x\operatorname{sh} t - \nu t)\,dt,$$
$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\theta - \nu\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [e^{\nu t} + e^{-\nu t}\cos(\pi\nu)]e^{-x\operatorname{sh} t}\,dt.$$

3°. При $\nu = n + \frac{1}{2}$, где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, функции Бесселя выражаются через элементарные функции:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{n+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}, \quad J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x},$$
$$Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} J_{-n-\frac{1}{2}}(x).$$

4°. Пусть $\nu = n$ — целое число. Тогда справедливы равенства:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x).$$

Общее решение описывается формулой (1), где функция $J_n(x)$ получается подстановкой значения $\nu = n$ в формулу (2), а функция $Y_n(x)$ находится в результате предельного перехода при $\nu \to n$ и для неотрицательных n может быть представлена в виде

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2k} -$$
$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \frac{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)}{k!\,(n+k)!},$$

где $\psi(1) = -\mathcal{C}$, $\psi(n) = -\mathcal{C} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^{-1}$, $\mathcal{C} = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера, $\psi(x) = [\ln\Gamma(x)]'_x$ — логарифмическая производная гамма-функции.

5°. Функции Бесселя детально обсуждаются в книгах Абрамовиц & Стиган (1979), Бейтмен & Эрдейи (1974), McLachlan (1955), Olver et al. (2010).

14. $x^2 y''_{xx} + x y'_x - (x^2 + \nu^2) y = 0.$

Модифицированное уравнение Бесселя. Это уравнение заменой $x = i\bar{x}$ $(i^2 = -1)$ сводится к уравнению Бесселя 2.2.2.13.

1°. Решение:

$$y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x),$$

где $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ — *модифицированные функции Бесселя* первого и второго рода:

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}, \qquad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi\nu}.$$

Модифицированная функция Бесселя $I_\nu(x)$ следующим образом связана с функцией Бесселя:

$$I_\nu(x) = e^{-\pi\nu i/2} J_\nu(x e^{\pi i/2}), \quad i^2 = -1.$$

2°. Интегральные представления при $x > 0$:

$$I_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\pi^{1/2} 2^\nu \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} \exp(-xt)(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt \quad (\nu > -\tfrac{1}{2}),$$

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty \exp(-x \operatorname{ch} t) \operatorname{ch}(\nu t)\,dt.$$

Для целых $\nu = n$ имеем

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x \cos t) \cos(nt)\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$K_0(x) = \int_0^\infty \cos(x \operatorname{sh} t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \qquad (x > 0).$$

3°. При $\nu = \pm n \pm \frac{1}{2}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, модифицированные функции Бесселя выражаются через элементарные функции:

$$I_{n+1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left[e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2x)^k} - (-1)^n e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2x)^k} \right],$$

$$I_{-n-1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left[e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2x)^k} + (-1)^n e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2x)^k} \right],$$

$$K_{n+1/2}(x) = K_{-n-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2x)^k}.$$

4°. Если $\nu = n$ — неотрицательное целое чисто, то

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} I_n(x) \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \frac{(n-m-1)!}{m!} +$$

$$+ \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \frac{\psi(n+m+1) + \psi(m+1)}{m!\,(n+m)!},$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции; при $n = 0$ первая сумма опускается.

5°. Модифицированные функции Бесселя детально обсуждаются в книгах Абрамовиц & Стиган (1979), Бейтмен & Эрдейи (1974), McLachlan (1955), Olver et al. (2010).

15. $x^2 y''_{xx} + axy'_x + (bx^k + c)y = 0, \qquad k \neq 0.$

При $b = 0$ имеем уравнение Эйлера 2.2.2.12.

1°. Общее решение при $b > 0$:

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} \Big[C_1 J_\nu \Big(\frac{2}{k} \sqrt{b}\, x^{\frac{k}{2}} \Big) + C_2 Y_\nu \Big(\frac{2}{k} \sqrt{b}\, x^{\frac{k}{2}} \Big) \Big],$$

где $\nu = \frac{1}{k} \sqrt{(1-a)^2 - 4c}$; $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

2°. Общее решение при $b < 0$:

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} \Big[C_1 I_\nu \Big(\frac{2}{k} \sqrt{|b|}\, x^{\frac{k}{2}} \Big) + C_2 K_\nu \Big(\frac{2}{k} \sqrt{|b|}\, x^{\frac{k}{2}} \Big) \Big],$$

где $\nu = \frac{1}{k} \sqrt{(1-a)^2 - 4c}$; $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

16. $x^2 y''_{xx} + axy'_x + x^k (bx^k + c)y = 0.$

Подстановка $\xi = x^k$ приводит к ОДУ вида 2.2.2.11:

$$k^2 \xi y''_{\xi\xi} + k(k - 1 + a)y'_\xi + (b\xi + c)y = 0.$$

17. $x^2 y''_{xx} + (ax + b)y'_x + cy = 0.$

Преобразование $x = z^{-1}$, $y = z^k e^z w$, где k — корень квадратного уравнения $k^2 + (1-a)k + c = 0$, приводит к ОДУ вида 2.2.2.11:

$$zw''_{zz} + [(2-b)z + 2k + 2 - a]w'_z + [(1-b)z + 2k + 2 - a - bk]w = 0.$$

18. $(1 - x^2)y''_{xx} - 2xy'_x + n(n+1)y = 0, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Уравнение Лежандра (специальный случай).

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x),$$

где многочлены Лежандра $P_n(x)$ и функции Лежандра второго рода $Q_n(x)$ находятся по формулам

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} P_{m-1}(x) P_{n-m}(x).$$

Для определения многочленов $P_n = P_n(x)$ удобно использовать рекуррентные соотношения

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1),$$
$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \quad n = 2,\, 3,\, \ldots$$

Первые три функции $Q_n = Q_n(x)$ имеют вид

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1, \quad Q_2(x) = \frac{3x^2-1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x.$$

19. $\boldsymbol{(1-x^2)y''_{xx} - 2xy'_x + \nu(\nu+1)y = 0.}$

Уравнение Лежандра, где ν — произвольное число. При $\nu = n$, где n — неотрицательное целое число, см. уравнение 2.2.2.18.

Подстановка $z = x^2$ приводит к гипергеометрическому уравнению 2.2.2.22 с параметрами $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$, $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu$, $\gamma = \frac{1}{2}$. Поэтому, при $|x| < 1$ общее решение рассматриваемого ОДУ можно представить в виде

$$y = C_1 F\Bigl(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1+\nu}{2},\ \frac{1}{2};\ x^2\Bigr) + C_2 x F\Bigl(\frac{1-\nu}{2},\ 1+\frac{\nu}{2},\ \frac{3}{2};\ x^2\Bigr),$$

где $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ — гипергеометрический ряд.

20. $\boldsymbol{(ax^2+b)y''_{xx} + axy'_x + cy = 0.}$

Подстановка $z = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами: $y''_{zz} + cy = 0$.

21. $\boldsymbol{(1-x^2)y''_{xx} + (ax+b)y'_x + cy = 0.}$

Подстановка $2z = 1+x$ приводит к гипергеометрическому уравнению 2.2.2.22:

$$z(1-z)y''_{zz} + [az + \tfrac{1}{2}(b-a)]y'_z + cy = 0.$$

22. $\boldsymbol{x(x-1)y''_{xx} + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]y'_x + \alpha\beta y = 0.}$

Гипергеометрическое уравнение Гаусса.

1°. При $\gamma \neq 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$, одно из решений представляется гипергеометрическим рядом:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{x^k}{k!}, \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1),$$

которой заведомо сходится при $|x| < 1$.

2°. При $\gamma > \beta > 0$ решение из п. 1° можно записать в виде определенного интеграла:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\,dt,$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция.

3°. Если γ — нецелое число, то общее решение гипергеометрического уравнения имеет вид

$$y = C_1F(\alpha, \beta, \gamma; x) + C_2x^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma;\ x).$$

В вырожденных случаях $\gamma = 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$ одно из решений гипергеометрического уравнения соответствует значениям $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, а при $\gamma = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ — значениям $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. В этих случаях общее решение можно построить с помощью формулы (2), приведенной в разд. 2.2.1.

В табл. 2.3 указаны некоторые частные случаи, когда гипергеометрическая функция F выражается через элементарные функции.

В табл. 2.4 приведены общие решения гипергеометрического уравнения при некоторых значениях определяющих параметров.

4°. Гипергеометрические функции детально обсуждаются в книгах Абрамовиц & Стиган (1979), Бейтмен & Эрдейи (1973), Olver et al. (2010).

23. $\boldsymbol{(1 - x^2)^2y''_{xx} - 2x(1 - x^2)y'_x + [\nu(\nu + 1)(1 - x^2) - \mu^2]y = 0.}$

Уравнение Лежандра, ν и μ — произвольные числа.

Преобразование $x = 1 - 2\xi$, $y = |x^2 - 1|^{\mu/2}w$ приводит к гипергеометрическому уравнению 2.2.2.22:

$$\xi(\xi - 1)w''_{\xi\xi} + (\mu + 1)(1 - 2\xi)w'_\xi + (\nu - \mu)(\nu + \mu + 1)w = 0$$

с параметрами $\alpha = \mu - \nu$, $\beta = \mu + \nu + 1$, $\gamma = \mu + 1$.

В частности, исходное уравнение интегрируется в квадратурах, если $\nu = \mu$ или $\nu = -\mu - 1$.

24. $\boldsymbol{(x - a)^2(x - b)^2y''_{xx} - cy = 0, \qquad a \neq b.}$

Преобразование $\xi = \ln\left|\dfrac{x - a}{x - b}\right|$, $y = (x - b)\eta$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами: $(a - b)^2(\eta''_{\xi\xi} - \eta'_\xi - c\eta = 0$. Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1|x - a|^{(1+\lambda)/2}|x - b|^{(1-\lambda)/2} + C_2|x - a|^{(1-\lambda)/2}|x - b|^{(1+\lambda)/2},$$

где $\lambda^2 = 4c(a - b)^{-2} + 1 \neq 0$.

25. $\boldsymbol{(ax^2 + bx + c)^2y''_{xx} + Ay = 0.}$

Преобразование $\xi = \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, $w = \frac{y}{\sqrt{|ax^2+bx+c|}}$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами вида 2.2.2.1: $w''_{\xi\xi} + (A + ac - \frac{1}{4}b^2)w = 0$.

26. $\boldsymbol{x^2(ax^n - 1)y''_{xx} + x(apx^n + q)y'_x + (arx^n + s)y = 0.}$

Найдем корни A_1, A_2 и B_1, B_2 квадратных уравнений

$$A^2 - (q + 1)A - s = 0, \quad B^2 - (p - 1)B + r = 0$$

Таблица 2.3. Некоторые частные случаи, когда гипергеометрическая функция $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ выражается через элементарные функции.

α	β	γ	z	F
$-n$	β	γ	x	$\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-n)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\dfrac{x^k}{k!}$, где $n=1,2,\ldots$
$-n$	β	$-n-m$	x	$\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-n)_k(\beta)_k}{(-n-m)_k}\dfrac{x^k}{k!}$, где $n=1,2,\ldots$
α	β	β	x	$(1-x)^{-\alpha}$
α	$\frac{1}{2}\alpha+1$	$\frac{1}{2}\alpha$	x	$(1+x)(1-x)^{-\alpha-1}$
α	$\alpha+\frac{1}{2}$	$2\alpha+1$	x	$\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{-2\alpha}$
α	$\alpha+\frac{1}{2}$	2α	x	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{1-2\alpha}$
α	$\alpha+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	x^2	$\dfrac{(1+x)^{1-2\alpha}-(1-x)^{1-2\alpha}}{2x(1-2\alpha)}$
α	$\alpha+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\operatorname{tg}^2 x$	$\cos^{2\alpha} x\cos(2\alpha x)$
α	$\alpha+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	x^2	$\frac{1}{2}\left[(1+x)^{-2\alpha}+(1-x)^{-2\alpha}\right]$
α	$\alpha-\frac{1}{2}$	2α	x	$2^{2\alpha-1}\left(1+\sqrt{1-x}\right)^{1-2\alpha}$
α	$2-\alpha$	$\frac{3}{2}$	$\sin^2 x$	$\dfrac{\sin[(2\alpha-2)x]}{(\alpha-1)\sin(2x)}$
α	$1-\alpha$	$\frac{1}{2}$	$-x^2$	$\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{2\alpha-1}+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{2\alpha-1}}{2\sqrt{1+x^2}}$
α	$1-\alpha$	$\frac{3}{2}$	$\sin^2 x$	$\dfrac{\sin[(2\alpha-1)x]}{(\alpha-1)\sin(2x)}$
α	$1-\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\sin^2 x$	$\dfrac{\cos[(2\alpha-1)x]}{\cos x}$
α	$-\alpha$	$\frac{1}{2}$	$-x^2$	$\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{2\alpha}+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{2\alpha}\right]$
α	$-\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\sin^2 x$	$\cos(2\alpha x)$
1	1	2	$-x$	$\dfrac{1}{x}\ln(x+1)$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	x^2	$\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-x^2$	$\dfrac{1}{x}\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	x^2	$\dfrac{1}{x}\arcsin x$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-x^2$	$\dfrac{1}{x}\operatorname{arsh} x$

Таблица 2.4. Общее решение гипергеометрического уравнения 2.2.2.22 для некоторых значений определяющих параметров.

α	β	γ	Решение: $y=y(x)$
0	β	γ	$C_1+C_2\int \lvert x\rvert^{-\gamma}\lvert x-1\rvert^{\gamma-\beta-1}\,dx$
α	$\alpha+\frac{1}{2}$	$2\alpha+1$	$C_1\bigl(1+\sqrt{1-x}\bigr)^{-2\alpha}+C_2x^{-2\alpha}\bigl(1+\sqrt{1-x}\bigr)^{2\alpha}$
α	$\alpha-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$C_1\bigl(1+\sqrt{x}\bigr)^{1-2\alpha}+C_2\bigl(1-\sqrt{x}\bigr)^{1-2\alpha}$
α	$\alpha+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}\Bigl[C_1\bigl(1+\sqrt{x}\bigr)^{1-2\alpha}+C_2\bigl(1-\sqrt{x}\bigr)^{1-2\alpha}\Bigr]$
1	β	γ	$\lvert x\rvert^{1-\gamma}\lvert x-1\rvert^{\gamma-\beta-1}\Bigl(C_1+C_2\int \lvert x\rvert^{\gamma-2}\lvert x-1\rvert^{\beta-\gamma}\,dx\Bigr)$
α	β	α	$\lvert x-1\rvert^{-\beta}\Bigl(C_1+C_2\int \lvert x\rvert^{-\alpha}\lvert x-1\rvert^{\beta-1}\,dx\Bigr)$
α	β	$\alpha+1$	$\lvert x\rvert^{-\alpha}\Bigl(C_1+C_2\int \lvert x\rvert^{\alpha-1}\lvert x-1\rvert^{-\beta}\,dx\Bigr)$

и определим параметры c, α, β, γ следующим образом:

$$c=A_1,\quad \alpha=(A_1+B_1)n^{-1},\quad \beta=(A_1+B_2)n^{-1},\quad \gamma=1+(A_1-A_2)n^{-1}.$$

Тогда решение исходного уравнения имеет вид

$$y=x^c u(ax^n),$$

где $u=u(z)$ — общее решение гипергеометрического уравнения Гаусса 2.2.2.22: $z(z-1)u''_{zz}+[(\alpha+\beta+1)z-\gamma]u'_z+\alpha\beta u=0$.

2.2.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные и другие функции

1. $\boldsymbol{y''_{xx}+ae^{\lambda x}y=0,\qquad \lambda\neq 0.}$

Общее решение:

$$y=\begin{cases} C_1J_0\bigl(2\lambda^{-1}\sqrt{a}\,e^{\lambda x/2}\bigr)+C_2Y_0\bigl(2\lambda^{-1}\sqrt{a}\,e^{\lambda x/2}\bigr) & \text{при } a>0,\\ C_1I_0\bigl(2\lambda^{-1}\sqrt{|a|}\,e^{\lambda x/2}\bigr)+C_2K_0\bigl(2\lambda^{-1}\sqrt{|a|}\,e^{\lambda x/2}\bigr) & \text{при } a<0,\end{cases}$$

где $J_0(z)$ и $Y_0(z)$ — функции Бесселя, а $I_0(z)$ и $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2. $\boldsymbol{y''_{xx}+(ae^x-b)y=0.}$

Общее решение:

$$y=C_1J_{2\sqrt{b}}\bigl(2\sqrt{a}\,e^{x/2}\bigr)+C_2Y_{2\sqrt{b}}\bigl(2\sqrt{a}\,e^{x/2}\bigr),$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя.

3. $\boldsymbol{y''_{xx} - (ae^{2\lambda x} + be^{\lambda x} + c)y = 0.}$

Преобразование $z = e^{\lambda x}$, $w = z^{-k}y$, где $k = \sqrt{c}/\lambda$, приводит к ОДУ вида 2.2.2.11: $\lambda^2 z w''_{zz} + \lambda^2(2k+1)w'_z - (az+b)w = 0$.

4. $\boldsymbol{y''_{xx} + ay'_x + be^{2ax}y = 0.}$

Преобразование $\xi = e^{ax}$, $u = ye^{ax}$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами вида 2.2.2.1: $u''_{\xi\xi} + ba^{-2}u = 0$.

5. $\boldsymbol{y''_{xx} - ay'_x + be^{2ax}y = 0.}$

Подстановка $\xi = e^{ax}$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами вида 2.2.2.1: $y''_{\xi\xi} + ba^{-2}y = 0$.

6. $\boldsymbol{y''_{xx} + ay'_x + (be^{\lambda x} + c)y = 0.}$

Общее решение:

$$y = \begin{cases} e^{-ax/2}\left[C_1 J_\nu\left(2\lambda^{-1}\sqrt{b}\,e^{\lambda x/2}\right) + C_2 Y_\nu\left(2\lambda^{-1}\sqrt{b}\,e^{\lambda x/2}\right)\right] & \text{при } b > 0, \\ e^{-ax/2}\left[C_1 I_\nu\left(2\lambda^{-1}\sqrt{|b|}\,e^{\lambda x/2}\right) + C_2 K_\nu\left(2\lambda^{-1}\sqrt{|b|}\,e^{\lambda x/2}\right)\right] & \text{при } b < 0, \end{cases}$$

где $\nu = \frac{1}{\lambda}\sqrt{a^2 - 4c}$; $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — функции Бесселя.

7. $\boldsymbol{y''_{xx} - (a - 2q \operatorname{ch} 2x)y = 0.}$

Модифицированное уравнение Матье. Подстановка $x = i\xi$ приводит к уравнению Матье 2.2.3.8:

$$y''_{\xi\xi} + (a - 2q\cos 2\xi)y = 0.$$

Для собственных значений уравнения Матье $a = a_n(q)$ и $a = b_n(q)$, соответствующие решения модифицированного уравнения Матье имеют вид

$$\operatorname{Ce}_{2n+p}(x,q) = \operatorname{ce}_{2n+p}(ix,q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+p}^{2n+p} \operatorname{ch}[(2k+p)x],$$

$$\operatorname{Se}_{2n+p}(x,q) = -i\operatorname{se}_{2n+p}(ix,q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+p}^{2n+p} \operatorname{sh}[(2k+p)x],$$

где p может принимать значения 0 или 1, а коэффициенты A_{2k+p}^{2n+p} и B_{2k+p}^{2n+p} приведены в п. 2° уравнения 2.2.3.8.

8. $\boldsymbol{y''_{xx} + (a - 2q\cos 2x)y = 0.}$

Уравнение Матье.

1°. Для заданных чисел a и q существует решение $y(x)$ и характеристический показатель μ, такие, что

$$y(x+\pi) = e^{2\pi\mu} y(x).$$

Для малых q приближенное значение показателя μ можно найти из трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ch}(\pi\mu) = 1 + 2\sin^2\bigl(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{a}\,\bigr) + \frac{\pi q^2}{(1-a)\sqrt{a}} \sin\bigl(\pi\sqrt{a}\,\bigr) + O(q^4).$$

Если $y_1(x)$ — решение уравнения Матье, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = 1$ и $y_1'(0) = 0$, то характеристический показатель определяется из условия

$$\operatorname{ch}(2\pi\mu) = y_1(\pi).$$

Решение $y_1(x)$, а следовательно и показатель μ, с любой степень точности может быть найдено с помощью численных и приближенных аналитических методов.

Общее решение уравнения Матье имеет различную структуру в зависимости от величины $y_1(\pi)$ и может быть представлено с помощью двух вспомогательных периодических функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ (см. табл. 2.5).

Таблица 2.5. Общее решение уравнения Матье, представленное с помощью периодических функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Условие	Общее решение $y = y(x)$	Период функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$	Показатель
$y_1(\pi) > 1$	$C_1 e^{2\mu x}\varphi_1(x) + C_2 e^{-2\mu x}\varphi_2(x)$	π	μ — действительное число
$y_1(\pi) < -1$	$C_1 e^{2\rho x}\varphi_1(x) + C_2 e^{-2\rho x}\varphi_2(x)$	2π	$\mu = \rho + \frac{1}{2}i$, $i^2 = -1$, ρ — действительная часть μ
$\lvert y_1(\pi)\rvert < 1$	$(C_1 \cos\nu x + C_2 \sin\nu x)\varphi_1(x) +$ $+ (C_1 \cos\nu x - C_2 \sin\nu x)\varphi_2(x)$	π	$\mu = i\nu$ — чисто мнимое число, $\cos(2\pi\nu) = y_1(\pi)$
$y_1(\pi) = \pm 1$	$C_1\varphi_1(x) + C_2 x\varphi_2(x)$	π	$\mu = 0$

2°. В приложениях основной интерес представляют собой периодические решения уравнения Матье, получающиеся при определенных значениях параметров a и q (такие значения a называются собственными значениями). Наиболее важные периодические решения называются *функциями Матье* и обозначаются $\operatorname{ce}_n(x,q)$ и $\operatorname{se}_n(x,q)$. Функции Матье описаны в табл. 2.6.

3°. Ниже приведены два главных члена асимптотических разложений функций Матье $\operatorname{ce}_n(x,q)$ и $\operatorname{se}_n(x,q)$, и соответствующих им собственных значений

Таблица 2.6. Функции Матье $\mathrm{ce}_n = \mathrm{ce}_n(x,q)$ и $\mathrm{se}_n = \mathrm{se}_n(x,q)$ (для нечетных n функции ce_n и se_n являются 2π-периодическими, и для четных n они являются π-периодическими); каждому значению параметра q соответствуют определенные собственные значения $a = a_n(q)$ и $a = b_n(q)$.

Функции Матье	Рекуррентные соотношения для коэффициентов	Условия нормировки
$\mathrm{ce}_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2n}\cos(2kx)$	$qA_2^{2n} = a_{2n}A_0^{2n}$; $qA_4^{2n} = (a_{2n}-4)A_2^{2n} - 2qA_0^{2n}$; $qA_{2k+2}^{2n} = (a_{2n}-4k^2)A_{2k}^{2n} - qA_{2k-2}^{2n}$, $k \geqslant 2$	$(A_0^{2n})^2 + \sum\limits_{k=0}^{\infty}(A_{2k}^{2n})^2 = \begin{cases} 2 & \text{при } n=0, \\ 1 & \text{при } n \geqslant 1 \end{cases}$
$\mathrm{ce}_{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2n+1}\cos[(2k+1)x]$	$qA_3^{2n+1} = (a_{2n+1}-1-q)A_1^{2n+1}$; $qA_{2k+3}^{2n+1} = [a_{2n+1}-(2k+1)^2]A_{2k+1}^{2n+1} - qA_{2k-1}^{2n+1}$, $k \geqslant 1$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(A_{2k+1}^{2n+1})^2 = 1$
$\mathrm{se}_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_{2k}^{2n}\sin(2kx)$, $\mathrm{se}_0 = 0$	$qB_4^{2n} = (b_{2n}-4)B_2^{2n}$; $qB_{2k+2}^{2n} = (b_{2n}-4k^2)B_{2k}^{2n} - qB_{2k-2}^{2n}$, $k \geqslant 2$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(B_{2k}^{2n})^2 = 1$
$\mathrm{se}_{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2n+1}\sin[(2k+1)x]$	$qB_3^{2n+1} = (b_{2n+1}-1-q)B_1^{2n+1}$; $qB_{2k+3}^{2n+1} = [b_{2n+1}-(2k+1)^2]B_{2k+1}^{2n+1} - qB_{2k-1}^{2n+1}$, $k \geqslant 1$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(B_{2k+1}^{2n+1})^2 = 1$

$a_n(q)$ и $b_n(q)$, при $q \to 0$:

$$\mathrm{ce}_0(x,q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{q}{2}\cos 2x\Big), \quad a_0(q) = -\frac{q^2}{2} + \frac{7q^4}{128};$$
$$\mathrm{ce}_1(x,q) = \cos x - \frac{q}{8}\cos 3x, \quad a_1(q) = 1 + q;$$
$$\mathrm{ce}_2(x,q) = \cos 2x + \frac{q}{4}\Big(1 - \frac{\cos 4x}{3}\Big), \quad a_2(q) = 4 + \frac{5q^2}{12};$$
$$\mathrm{ce}_n(x,q) = \cos nx + \frac{q}{4}\Big[\frac{\cos(n+2)x}{n+1} - \frac{\cos(n-2)x}{n-1}\Big], \quad a_n(q) = n^2 + \frac{q^2}{2(n^2-1)} \quad (n \geqslant 3);$$
$$\mathrm{se}_1(x,q) = \sin x - \frac{q}{8}\sin 3x, \quad b_1(q) = 1 - q;$$
$$\mathrm{se}_2(x,q) = \sin 2x - q\frac{\sin 4x}{12}, \quad b_2(q) = 4 - \frac{q^2}{12};$$
$$\mathrm{se}_n(x,q) = \sin nx - \frac{q}{4}\Big[\frac{\sin(n+2)x}{n+1} - \frac{\sin(n-2)x}{n-1}\Big], \quad b_n(q) = n^2 + \frac{q^2}{2(n^2-1)} \quad (n \geqslant 3).$$

Функции Матье детально обсуждаются в книгах Абрамовиц & Стиган (1979), Бейтмен & Эрдейи (1967), McLachlan (1947), Whittaker & Watson (1952).

9. $\boldsymbol{y''_{xx} + a \operatorname{tg} x\, y'_x + by = 0.}$

1°. Подстановка $\xi = \sin x$ приводит к линейному ОДУ вида 2.2.2.21:

$$(\xi^2 - 1)y''_{\xi\xi} + (1-a)\xi y'_\xi - by = 0.$$

2°. Общее решение при $a = -2$:

$$y\cos x = \begin{cases} C_1\sin(kx) + C_2\cos(kx) & \text{при } b+1 = k^2 > 0, \\ C_1\operatorname{sh}(kx) + C_2\operatorname{ch}(kx) & \text{при } b+1 = -k^2 < 0. \end{cases}$$

3°. Общее решение при $a = 2$ и $b = 3$:

$$y = C_1\cos^3 x + C_2\sin x\,(1 + 2\cos^2 x).$$

2.2.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

► *Обозначения:* $f = f(x)$ *и* $g = g(x)$ *— произвольные функции;* a, b, λ *— свободные параметры.*

1. $\boldsymbol{y''_{xx} + fy'_x + a(f - a)y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = e^{-ax}$.

2. $\boldsymbol{y''_{xx} + xfy'_x - fy = 0.}$

Частное решение: $y_0 = x$.

3. $\boldsymbol{xy''_{xx} + (xf + a)y'_x + (a - 1)fy = 0.}$

Частное решение: $y_0 = x^{1-a}$.

4. $\boldsymbol{xy''_{xx} + [(ax + 1)f + ax - 1]y'_x + a^2xfy = 0.}$

Частное решение: $y_0 = (ax + 1)e^{-ax}$.

5. $\boldsymbol{xy''_{xx} + [(ax^2 + bx)f + 2]y'_x + bfy = 0.}$

Частное решение: $y_0 = a + b/x$.

6. $\boldsymbol{x^2y''_{xx} + xfy'_x + a(f - a - 1)y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = x^{-a}$.

7. $\boldsymbol{y''_{xx} + (f + ae^{\lambda x})y'_x + ae^{\lambda x}(f + \lambda)y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = \exp\Bigl(-\dfrac{a}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)$.

8. $\boldsymbol{y''_{xx} - (f^2 + f'_x)y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = \exp\Bigl(\int f\,dx\Bigr)$.

9. $\boldsymbol{y''_{xx} + 2fy'_x + (f^2 + f'_x)y = 0.}$

Общее решение: $y = (C_2x + C_1)\exp\Bigl(-\int f\,dx\Bigr)$.

10. $\boldsymbol{y''_{xx} + (1-a)fy'_x - a(f^2 + f'_x)y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = \exp\Bigl(a\int f\,dx\Bigr)$.

11. $\boldsymbol{y''_{xx} + fy'_x + (fg - g^2 + g'_x)y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = \exp\Bigl(-\int g\,dx\Bigr)$.

12. $\boldsymbol{fy''_{xx} - af'_x y'_x - bf^{2a+1}y = 0.}$

Общее решение: $y = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$, где $u = \sqrt{b}\int f^a\,dx$.

13. $\boldsymbol{f^2 y''_{xx} + f(f'_x + a)y'_x + by = 0.}$

Подстановка $\xi = \int f^{-1}dx$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами: $y''_{\xi\xi} + ay'_\xi + by = 0$.

14. $\boldsymbol{y''_{xx} - f'_x y'_x + a^2 e^{2f}y = 0.}$

Общее решение: $y = C_1 \sin\Bigl(a\int e^f\,dx\Bigr) + C_2\cos\Bigl(a\int e^f\,dx\Bigr)$.

15. $\boldsymbol{y''_{xx} - f'_x y'_x - a^2 e^{2f}y = 0.}$

Общее решение: $y = C_1 \exp\Bigl(a\int e^f\,dx\Bigr) + C_2\exp\Bigl(-a\int e^f\,dx\Bigr)$.

2.3. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

2.3.1. Уравнения вида $y''_{xx} = f(x, y)$

1. $\boldsymbol{y''_{xx} = f(y).}$

Двучленное автономное ОДУ второго порядка. Подстановка $u(y) = y'_x$ приводит к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными: $uu'_y = f(y)$.

Общее решение: $\displaystyle\int\Bigl[C_1 + 2\int f(y)\,dy\Bigr]^{-1/2}dy = C_2 \pm x.$

2. $\boldsymbol{y''_{xx} = Ax^n y^m.}$

Уравнение Эмдена — Фаулера.

1°. Преобразование $z = x^{n+2}y^{m-1}$, $w = xy'_x/y$ приводит к ОДУ первого порядка (уравнению Абеля второго рода): $z[(m-1)w+n+2]w'_z = -w^2 + w + Az$.

2°. Преобразование $y = w/t$, $x = 1/t$ приводит к аналогичному ОДУ с независимой переменной в другой степени: $w''_{tt} = At^{-n-m-3}w^m$.

3°. При $m \neq 1$ уравнение Эмдена—Фаулера допускает частное решение

$$y = \lambda x^{\frac{n+2}{1-m}}, \qquad \text{где} \quad \lambda = \left[\frac{(n+2)(n+m+1)}{A(m-1)^2}\right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

4°. В табл. 2.7 представлены все разрешимые уравнения Эмдена—Фаулера, общие решения которых приведены в справочниках Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003 и 2018). Сначала идут однопараметрические семейства (в пространстве параметров n и m), а затем изолированные точки. Уравнения расположены в порядке увеличения m и увеличения n (для одинаковых m).

Таблица 2.7. Разрешимые уравнения Эмдена—Фаулера $y''_{xx} = Ax^n y^m$.

№	m	n
	Однопараметрические семейства	
1	любое	0
2	любое	$-m-3$
3	любое	$-\frac{1}{2}(m+3)$
4	0	любое
5	1	любое
	Изолированные точки	
6	-7	1
7	-7	3
8	$-5/2$	$-1/2$
9	-2	-2
10	-2	1
11	$-5/3$	$-10/3$
12	$-5/3$	$-7/3$
13	$-5/3$	$-5/6$
14	$-5/3$	$-1/2$
15	$-5/3$	1
16	$-5/3$	2
17	$-7/5$	$-13/5$
18	$-7/5$	1
19	$-1/2$	$-7/2$
20	$-1/2$	$-5/2$
21	$-1/2$	-2
22	$-1/2$	$-4/3$
23	$-1/2$	$-7/6$
24	$-1/2$	$-1/2$
25	$-1/2$	1
26	2	-5
27	2	$-20/7$
28	2	$-15/7$

3. $y''_{xx} + f(x)y = ay^{-3}$.

Уравнение Ермакова. Пусть $w = w(x)$ является нетривиальным решением линейного ОДУ второго порядка: $w''_{xx} + f(x)w = 0$. Преобразование $\xi = \int \frac{dx}{w^2}$, $z = \frac{y}{w}$ приводит исходное уравнение к более простому автономному ОДУ вида 2.3.1.1: $z''_{\xi\xi} = az^{-3}$.

Общее решение: $C_1 y^2 = aw^2 + w^2\Big(C_2 + C_1 \int \frac{dx}{w^2}\Big)^2$.

► *Далее f, g, h, ψ — произвольные функции различных аргументов, указанных в круглых скобках после знака функции (аргумент этих функций может зависеть от x и y).*

4. $y''_{xx} = f(ay + bx + c)$.

Подстановка $w = ay + bx + c$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.1.1: $w''_{xx} = af(w)$.

5. $\boldsymbol{y''_{xx} = f(y + ax^2 + bx + c)}$.

Подстановка $w = y + ax^2 + bx + c$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.1.1: $w''_{xx} = f(w) + 2a$.

6. $\boldsymbol{y''_{xx} = x^{-1} f(yx^{-1})}$.

Однородное ОДУ второго порядка. Преобразование $t = -\ln|x|$, $z = y/x$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.2.1: $z''_{tt} - z'_t = f(z)$.

7. $\boldsymbol{y''_{xx} = x^{-3} f(yx^{-1})}$.

Преобразование $\xi = 1/x$, $w = y/x$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.1.1: $w''_{\xi\xi} = f(w)$.

8. $\boldsymbol{y''_{xx} = x^{-3/2} f(yx^{-1/2})}$.

Полагая $w = yx^{-1/2}$, имеем $\frac{d}{dx}(xw'_x)^2 = \frac{1}{2}ww'_x + 2f(w)w'_x$. Интегрируя полученное уравнение, приходим к ОДУ с разделяющимися переменными.

Общее решение: $\displaystyle\int \Bigl[C_1 + \tfrac{1}{4}w^2 + 2\int f(w)\,dw\Bigr]^{-1/2} dw = C_2 \pm \ln x$.

9. $\boldsymbol{y''_{xx} = x^{k-2} f(x^{-k} y)}$.

Обобщенно-однородное ОДУ второго порядка. Преобразование $z = x^{-k}y$, $w = xy'_x/y$ приводит к ОДУ первого порядка: $z(w-k)w'_z = z^{-1}f(z) + w - w^2$.

10. $\boldsymbol{y''_{xx} = yx^{-2} f(x^n y^m)}$.

Обобщенно-однородное ОДУ второго порядка. Преобразование $z = x^n y^m$, $w = xy'_x/y$ приводит к ОДУ первого порядка: $z(mw + n)w'_z = f(z) + w - w^2$.

11. $\boldsymbol{y''_{xx} = y^{-3} f\left(\dfrac{y}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right)}$.

Полагая $u(x) = y(ax^2 + bx + c)^{-1/2}$ и интегрируя полученное уравнение, приходим к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными:

$$(ax^2 + bx + c)^2 (u'_x)^2 = (\tfrac{1}{4}b^2 - ac)u^2 + 2\int u^{-3} f(u)\,du + C_1.$$

12. $\boldsymbol{y''_{xx} = e^{-ax} f(e^{ax} y)}$.

Преобразование $z = e^{ax}y$, $w = y'_x/y$ приводит к ОДУ первого порядка:

$$z(w + a)w'_z = z^{-1} f(z) - w^2.$$

13. $\boldsymbol{y''_{xx} = y f(e^{ax} y^m)}$.

Преобразование $z = e^{ax}y^m$, $w = y'_x/y$ приводит к ОДУ первого порядка: $z(mw + a)w'_z = f(z) - w^2$.

14. $y''_{xx} = x^{-2} f(x^n e^{ay})$.

Преобразование $z = x^n e^{ay}$, $w = xy'_x$ приводит к ОДУ первого порядка: $z(aw+n)w'_z = f(z) + w$.

15. $y''_{xx} = \dfrac{\psi''_{xx}}{\psi} y + \psi^{-3} f\left(\dfrac{y}{\psi}\right), \qquad \psi = \psi(x)$.

Преобразование $\xi = \int \frac{dx}{\psi^2}$, $w = \frac{y}{\psi}$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.1.1: $w''_{\xi\xi} = f(w)$.

Общее решение: $\displaystyle\int \Bigl[C_1 + 2\int f(w)\,dw\Bigr]^{-1/2} dw = C_2 \pm \int \frac{dx}{\psi^2(x)}$.

2.3.2. Уравнения вида $f(x,y)y''_{xx} = g(x,y,y'_x)$

1. $y''_{xx} - y'_x = f(y)$.

Автономное ОДУ второго порядка. Подстановка $w(y) = y'_x$ приводит это ОДУ к уравнению Абеля вида 2.1.3.2: $ww'_y - w = f(y)$. О разрешимых случаях исходного уравнения см. справочники Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003, 2018).

2. $y''_{xx} + f(y)y'_x + g(y) = 0$.

Уравнение Лиенара. Подстановка $w(y) = y'_x$ приводит это ОДУ к уравнению Абеля вида 2.1.3.3: $ww'_y + f(y)w + g(y) = 0$. О разрешимых случаях исходного уравнения см. справочники Polyanin & Zaitsev (2003, 2018).

3. $y''_{xx} + [ay + f(x)]y'_x + f'_x(x)y = 0$.

Интегрируя, получим ОДУ первого порядка с квадратичной нелинейностью (уравнение Риккати): $y'_x + f(x)y + \frac{1}{2}ay^2 = C$.

4. $y''_{xx} + [2ay + f(x)]y'_x + af(x)y^2 = g(x)$.

Полагая $u = y'_x + ay^2$, получим линейное ОДУ первого порядка: $u'_x + f(x)u = g(x)$.

5. $y''_{xx} = ay'_x + e^{2ax} f(y)$.

При $a = 0$ это ОДУ вида 2.3.1.1.

Общее решение при $a \neq 0$: $\displaystyle\int \Bigl[C_1 + 2\int f(y)\,dy\Bigr]^{-1/2} dy = C_2 \pm \frac{1}{a} e^{ax}$.

6. $y''_{xx} = f(y)y'_x$.

Общее решение: $\displaystyle\int \frac{dy}{F(y)+C_1} = C_2 + x$, где $F(y) = \int f(y)\,dy$.

7. $\boldsymbol{y''_{xx} = \left[e^{\alpha x} f(y) + \alpha\right] y'_x}$.

Подстановка $w(y) = e^{-\alpha x} y'_x$ приводит к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными: $w'_y = f(y)$.

Общее решение: $\displaystyle\int \frac{dy}{F(y) + C_1} = C_2 + \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, где $F(y) = \displaystyle\int f(y)\,dy$.

8. $\boldsymbol{x y''_{xx} = k y'_x + x^{2k+1} f(y)}$.

1°. Общее решение при $k \neq -1$:

$$\int \left[C_1 + 2\int f(y)\,dy\right]^{-1/2} dy = \pm \frac{x^{k+1}}{k+1} + C_2.$$

2°. Общее решение при $k = -1$:

$$\int \left[C_1 + 2\int f(y)\,dy\right]^{-1/2} dy = \pm \ln|x| + C_2.$$

9. $\boldsymbol{x y''_{xx} = f(y) y'_x}$.

Подстановка $w(y) = x y'_x / y$ приводит к линейному ОДУ первого порядка: $y w'_y = -w + 1 + f(y)$.

10. $\boldsymbol{x y''_{xx} = \left[x^k f(y) + k - 1\right] y'_x}$.

Общее решение: $\int \frac{dy}{F(y)+C_1} = C_2 + \frac{1}{k} x^k$, где $F(y) = \displaystyle\int f(y)\,dy$.

11. $\boldsymbol{x^2 y''_{xx} + x y'_x = f(y)}$.

Подстановка $x = \pm e^t$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.1.1: $y''_{tt} = f(y)$.

12. $\boldsymbol{(ax^2 + b) y''_{xx} + a x y'_x + f(y) = 0}$.

Подстановка $\xi = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + b}}$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.1.1: $y''_{\xi\xi} + f(y) = 0$.

13. $\boldsymbol{y''_{xx} = f(y) y'_x + g(x)}$.

Интегрируя, получим ОДУ первого порядка: $y'_x = \displaystyle\int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx + C$.

14. $\boldsymbol{x y''_{xx} + (k+1) y'_x = x^{k-1} f(y x^k)}$.

Преобразование $\xi = x^k$, $w = y x^k$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.1.1: $w''_{\xi\xi} = k^{-2} f(w)$.

15. $\boldsymbol{g y''_{xx} + \tfrac{1}{2} g'_x y'_x = f(y), \qquad g = g(x)}$.

Интегрируя, получим ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными: $g(x)(y'_x)^2 = 2\displaystyle\int f(y)\,dy + C_1$.

Общее решение при $g(x) \geqslant 0$:

$$\int \left[C_1 + 2\int f(y)\,dy\right]^{-1/2} dy = C_2 \pm \int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}}.$$

16. $\boldsymbol{y''_{xx} = -ay'_x + e^{ax} f(ye^{ax})}$**.**

Преобразование $\xi = e^{ax}$, $w = ye^{ax}$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.1.1: $w''_{\xi\xi} = a^{-2} f(w)$.

17. $\boldsymbol{xy''_{xx} = f(x^k e^{ay}) y'_x}$**.**

Преобразование $z = x^k e^{ay}$, $w = xy'_x$ приводит к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными: $z(aw+k)w'_z = [f(z)+1]w$.

18. $\boldsymbol{x^2 y''_{xx} + xy'_x = f(x^k e^{ay})}$**.**

Преобразование $z = x^k e^{ay}$, $w = xy'_x$ приводит к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными: $z(aw+k)w'_z = f(z)$.

19. $\boldsymbol{yy''_{xx} + (y'_x)^2 = f(x)}$**.**

Общее решение:

$$y^2 = C_1 x + C_2 + 2\int_0^x (x-t) f(t)\,dt,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

20. $\boldsymbol{yy''_{xx} + (y'_x)^2 + f(x)yy'_x + g(x) = 0}$**.**

Подстановка $u = y^2$ приводит к линейному ОДУ второго порядка $u''_{xx} + f(x)u'_x + 2g(x) = 0$, которое заменой $w(x) = u'_x$ сводится к линейному ОДУ первого порядка.

21. $\boldsymbol{yy''_{xx} - (y'_x)^2 + f(x)yy'_x + g(x)y^2 = 0}$**.**

Подстановка $u = y'_x/y$ приводит к линейному ОДУ первого порядка: $u'_x + f(x)u + g(x) = 0$.

22. $\boldsymbol{yy''_{xx} + a(y'_x)^2 + f(x)yy'_x + g(x)y^2 = 0}$**.**

Подстановка $w = y^{a+1}$ приводит к линейному ОДУ второго порядка: $w''_{xx} + f(x)w'_x + (a+1)g(x)w = 0$.

23. $\boldsymbol{yy''_{xx} + (1-k)(y'_x)^2 = f(x)y^k}$**.**

При $k = 2$ это ОДУ вида 2.3.2.21.

Общее решение при $k \neq 2$:

$$y^{2-k} = C_1 x + C_2 + (2-k)\int_0^x (x-t) f(t)\,dt,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

24. $\boldsymbol{yy''_{xx} - k(y'_x)^2 + f(x)y^2 + ay^{4k-2} = 0}$**.**

1°. При $k = 1$ это ОДУ вида 2.3.2.22.

2°. При $k \neq 1$ подстановка $w = y^{1-k}$ приводит к уравнению Ермакова 2.3.1.3: $w''_{xx} + (1-k)f(x)w + a(1-k)w^{-3} = 0$.

25. $\boldsymbol{yy''_{xx} - k(y'_x)^2 + f(x)y^2 + g(x)y^{k+1} = 0.}$

Подстановка $w = y^{1-k}$ приводит к неоднородному линейному ОДУ второго порядка: $w''_{xx} + (1-k)f(x)w + (1-k)g(x) = 0$.

26. $\boldsymbol{yy''_{xx} = f(x)(y'_x)^2.}$

Подстановка $w(x) = xy'_x/y$ приводит к уравнению Бернулли 2.1.1.4: $xw'_x = w + [f(x) - 1]w^2$.

27. $\boldsymbol{y''_{xx} - a(y'_x)^2 = f(x)e^{ay}.}$

Общее решение при $a \neq 0$:

$$e^{-ay} = C_1 x + C_2 - a\int_0^x (x-t)f(t)\,dt,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

28. $\boldsymbol{y''_{xx} - a(y'_x)^2 + f(x)e^{ay} + g(x) = 0.}$

Подстановка $w = e^{-ay}$ приводит к линейному неоднородному ОДУ второго порядка: $w''_{xx} - ag(x)w = af(x)$.

29. $\boldsymbol{y''_{xx} - a(y'_x)^2 + be^{4ay} + f(x) = 0.}$

Подстановка $w = e^{-ay}$ приводит уравнению Ермакова 2.3.1.3: $w''_{xx} - af(x)w = abw^{-3}$.

30. $\boldsymbol{y''_{xx} + a(y'_x)^2 - \frac{1}{2}y'_x = e^x f(y).}$

Подстановка $w(y) = e^{-x}(y'_x)^2$ приводит к линейному ОДУ первого порядка: $w'_y + 2aw = 2f(y)$.

31. $\boldsymbol{y''_{xx} + \alpha(y'_x)^2 = \bigl[e^{\beta x}f(y) + \beta\bigr]y'_x.}$

Общее решение:

$$\int \frac{e^{\alpha y}\,dy}{F(y) + C_1} = C_2 + \frac{1}{\beta}e^{\beta x}, \qquad \text{где} \quad F(y) = \int e^{\alpha y} f(y)\,dy.$$

32. $\boldsymbol{y''_{xx} + f(y)(y'_x)^2 + g(y) = 0.}$

Подстановка $z(y) = (y'_x)^2$ приводит к линейному ОДУ первого порядка: $z'_y + 2f(y)z + 2g(y) = 0$.

33. $\boldsymbol{y''_{xx} + f(y)(y'_x)^2 - \frac{1}{2}y'_x = e^x g(y).}$

Подстановка $w(y) = e^{-x}(y'_x)^2$ приводит к линейному ОДУ первого порядка: $w'_y + 2f(y)w = 2g(y)$.

34. $\boldsymbol{y''_{xx} = f(y)(y'_x)^2 + g(x)y'_x}$**.**

Разделив обе части уравнения на y'_x, приходим к уравнению в полных дифференциалах. Интегрируя его, получим первый интеграл в виде:

$$\ln|y'_x| = \int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx + C.$$

Разрешив это ОДУ относительно y'_x, имеем ОДУ с разделяющимися переменными. Кроме того, исходное уравнение имеет частное решение $y = C_1$, зависящее от одной произвольной постоянной C_1.

35. $\boldsymbol{y''_{xx} = xf(y)(y'_x)^3}$**.**

Принимая y за независимую переменную, получим линейное ОДУ для функции $x = x(y)$: $x''_{yy} = -f(y)x$.

36. $\boldsymbol{y''_{xx} = \frac{y}{x^2} f\Bigl(\frac{xy'_x}{y}\Bigr)}$**.**

Подстановка $w(x) = xy'_x/y$ приводит к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными: $xw'_x = f(w) + w - w^2$.

37. $\boldsymbol{gy''_{xx} + \frac{1}{2}g'_x y'_x = f(y)h\bigl(y'_x\sqrt{g}\,\bigr), \qquad g = g(x)}$**.**

Подстановка $w(y) = y'_x\sqrt{g}$ приводит к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными: $ww'_y = f(y)h(w)$.

38. $\boldsymbol{y''_{xx} = f\bigl(y'^2_x + ay\bigr)}$**.**

Подстановка $w(y) = (y'_x)^2 + ay$ приводит к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными: $w'_y = 2f(w) + a$.

2.3.3. ОДУ общего вида, содержащие произвольные функции двух аргументов

1. $\boldsymbol{y''_{xx} = F(x,\, y'_x)}$**.**

Правая часть этого ОДУ не зависит явно от искомой функции y.

Подстановка $u(x) = y'_x$ приводит к ОДУ первого порядка: $u'_x = F(x, u)$.

2. $\boldsymbol{y''_{xx} = F(y,\, y'_x)}$**.**

Автономное ОДУ второго порядка общего вида. Правая часть этого ОДУ не зависит явно от независимой переменной x.

Подстановка $u(y) = y'_x$ приводит к ОДУ первого порядка: $uu'_y = F(y,\, u)$.

3. $\boldsymbol{y''_{xx} = F(ax + by,\, y'_x)}$**.**

Подстановка $bw = ax + by$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.3.2:

$$w''_{xx} = F\bigl(bw,\, w'_x - a/b\bigr).$$

4. $\boldsymbol{y''_{xx} = yF\big(x, y'_x/y\big).}$

ОДУ, однородное относительно искомой функции y. Это ОДУ сохраняет вид при линейном масштабировании искомой переменной по правилу $y \Rightarrow cy$, где c — произвольная ненулевая константа.

Подстановка $u(x) = y'_x/y$ приводит рассматриваемое уравнение к ОДУ первого порядка: $u'_x + u^2 = F(x, u)$.

5. $\boldsymbol{y''_{xx} = x^{-2}F\big(y,\ xy'_x\big).}$

ОДУ, однородное по независимой переменной x. Это ОДУ сохраняет вид при линейном масштабировании независимой переменной по правилу $x \Rightarrow cx$, где c — произвольная ненулевая константа.

Подстановка $t = \ln|x|$ приводит рассматриваемое уравнение к автономному ОДУ вида 2.3.3.2, а подстановка $u(y) = xy'_x$ приводит к ОДУ первого порядка: $uu'_y - u = F(y, u)$.

6. $\boldsymbol{y''_{xx} = \frac{1}{x}F\Big(\frac{y}{x},\ y'_x\Big).}$

ОДУ, однородное по двум переменным. Это ОДУ не меняется при одинаковом масштабировании независимой и зависимой переменных по правилу $x \Rightarrow cx$ и $y \Rightarrow cy$, где c — произвольная ненулевая константа.

Преобразование

$$z = y/x, \qquad w = y'_x$$

приводит к ОДУ первого порядка $(w - z)w'_z = F(z, w)$.

7. $\boldsymbol{y''_{xx} = \dfrac{1}{ax + by + c}F\Big(\dfrac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma},\ y'_x\Big).}$

1°. При $a\beta - b\alpha \neq 0$ преобразование

$$z = x - x_0, \qquad w = y - y_0,$$

где x_0 и y_0 — постоянные, которые определяются из линейной алгебраической системы уравнений

$$ax_0 + by_0 + c = 0, \qquad \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0,$$

приводит к автономному ОДУ вида 2.3.3.6:

$$w''_{zz} = \frac{1}{z}\Phi\Big(\frac{w}{z},\ w'_z\Big), \qquad \text{где} \quad \Phi(\xi, u) = \frac{1}{a + b\xi}F\Big(\frac{a + b\xi}{\alpha + \beta\xi},\ u\Big).$$

2°. При $a\beta - b\alpha = 0$ подстановка $bw = ax + by + c$ приводит к автономному ОДУ вида 2.3.3.2.

8. $\boldsymbol{y''_{xx} = x^{-k-2}F(x^k y,\ x^{k+1}y'_x).}$

Обобщенно-однородное ОДУ. Это ОДУ не меняется при одновременном масштабировании независимой и зависимой переменных по правилу $x \Rightarrow cx$ и $y \Rightarrow c^{-k}y$, где c — произвольная положительная константа.

1°. Преобразование $t = \ln x$, $z = x^k y$ приводит к уравнению вида 2.3.3.2: $z''_{tt} - (2k+1)z'_t + k(k+1)z = F(z,\, z'_t - kz)$.

2°. Преобразование $z = x^k y$, $u = x^{k+1} y'_x$ приводит к ОДУ первого порядка:

$$(u + kz)u'_z = (k+1)u + F(z,u).$$

3°. Рассматриваемое ОДУ допускает частное решение степенного вида

$$y = ax^{-k},$$

где a — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения $ak(k+1) - F(a, -ak) = 0$.

9. $\boldsymbol{y''_{xx} = \frac{y}{x^2} F\Big(x^p y^q,\ \frac{x}{y} y'_x\Big).}$

Обобщенно-однородное ОДУ. При $q \neq 0$ это ОДУ является альтернативной формой представления уравнения 2.3.3.8 при $k = p/q$.

1°. Преобразование $z = x^p y^q$, $w = xy'_x/y$ приводит к ОДУ первого порядка:

$$z(qw + p)w'_z = F(z,w) + w - w^2.$$

2°. Рассматриваемое ОДУ допускает частное решение степенного вида

$$y = ax^k, \qquad k = -p/q,$$

где a — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения $k(k-1) - F(a^q, k) = 0$.

10. $\boldsymbol{y''_{xx} = a^2 y + F(x, y'_x + ay).}$

1°. Подстановка $w = y'_x + ay$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = aw + F(x,w)$.

2°. При $F(x,w) = f(w)$ рассматриваемое ОДУ допускает частное решение экспоненциального вида

$$y = Ce^{-ax} + k,$$

где C — произвольная постоянная и k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $a^2 k + f(ak) = 0$.

11. $\boldsymbol{y''_{xx} = (a^2x^2 + a)y + F(x, y'_x - axy).}$

Подстановка $w = y'_x - axy$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = -axw + F(x,w)$.

12. $\boldsymbol{y''_{xx} = F\Big(x,\ y'_x - \frac{y}{x}\Big).}$

Подстановка $w(x) = y'_x - \frac{y}{x}$ приводит к ОДУ первого порядка: $xw'_x = -w + xF(x,w)$.

13. $y''_{xx} = F(x,\, xy'_x - y)$.

Подстановка $w(x) = xy'_x - y$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = xF(x, w)$.

14. $y''_{xx} = x^{-2}F(y,\, xy'_x - y)$.

Подстановка $w(y) = xy'_x - y$ приводит к ОДУ первого порядка: $(y + w)w'_y = F(y, w)$.

15. $xy''_{xx} + (a+1)y'_x = F(x, xy'_x + ay)$.

Подстановка $w(x) = xy'_x + ay$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = F(x, w)$.

16. $x^2 y''_{xx} = 2y + F(x, xy'_x + y)$.

Подстановка $w(x) = xy'_x + y$ приводит к ОДУ первого порядка: $xw'_x = 2w + F(x, w)$.

17. $x^2 y''_{xx} = a(a+1)y + F(x, xy'_x + ay)$.

Подстановка $u(x) = xy'_x + ay$ приводит к ОДУ первого порядка: $xu'_x = (a+1)u + F(x, u)$.

18. $y''_{xx} = 2ayy'_x + F(x, y'_x - ay^2)$.

Подстановка $w(x) = y'_x - ay^2$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = F(x, w)$.

19. $y''_{xx} = e^{-\alpha x}F(e^{\alpha x}y,\, e^{\alpha x}y'_x)$.

ОДУ, инвариантное относительно преобразования сдвига-масштабирования. Это ОДУ не меняется при одновременном сдвиге по независимой переменной и масштабировании зависимой переменной по правилу $x \Rightarrow x + b$ и $y \Rightarrow cy$, где $c = e^{-\alpha b}$, b — произвольная постоянная.

1°. Подстановка $z(x) = e^{\alpha x}y$ приводит к автономному ОДУ второго порядка вида 2.3.3.2: $z''_{xx} - 2\alpha z'_x + \alpha^2 z = F(z,\, z'_x - \alpha z)$.

2°. Преобразование $z = e^{\alpha x}y$, $u = e^{\alpha x}y'_x$ приводит к ОДУ первого порядка: $(u + \alpha z)u'_z = \alpha u + F(z, u)$.

3°. Рассматриваемое ОДУ имеет частное решение экспоненциального вида $y = Ae^{-\alpha x}$, где A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A\alpha^2 - F(A, -A\alpha) = 0$.

20. $y''_{xx} = yF(e^{\beta x}y^m,\, y'_x/y)$.

ОДУ, инвариантное относительно преобразования сдвига-масштабирования. При $m \neq 0$ это ОДУ является альтернативной формой представления уравнения 2.3.3.19 при $\alpha = \beta/m$.

1°. Преобразование $z = e^{\beta x}y^m$, $w = y'_x/y$ приводит к ОДУ первого порядка: $z(mw + \beta)w'_z = F(z, w) - w^2$.

2°. Рассматриваемое ОДУ допускает частное решение экспоненциального вида $y = Ae^{-\beta x/m}$, где A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $(\beta/m)^2 - F(A^m, -\beta/m) = 0$.

21. $\boldsymbol{y''_{xx} = x^{-2}F(x^m e^{\alpha y},\, xy'_x)}$.

ОДУ, инвариантное относительно преобразования масштабирования-сдвига. Это ОДУ не меняется при одновременном масштабировании независимой переменной и сдвиге по зависимой переменной по правилу $x \Rightarrow bx$ и $y \Rightarrow y + c$, где $b = e^{-c\alpha/m}$, c — произвольная постоянная.

1°. Преобразование $z = x^m e^{\alpha y}$, $w = xy'_x$ приводит к ОДУ первого порядка: $z(\alpha w + m)w'_z = F(z, w) + w$.

2°. Рассматриваемое ОДУ допускает частное решение логарифмического вида $y = -(m/\alpha)\ln(Ax)$, где A — константа, подлежащая определению.

22. $\boldsymbol{y''_{xx} = e^{2ay}F(xe^{ay},\, e^{-ay}y'_x)}$.

Преобразование $z = xe^{ay}$, $w = e^{-ay}y'_x$ приводит к ОДУ первого порядка: $(azw + 1)w'_z = F(z, w) - aw^2$.

23. $\boldsymbol{y''_{xx} = ae^y y'_x + F(x,\, y'_x - ae^y)}$.

Подстановка $w(x) = y'_x - ae^y$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = F(x, w)$.

24. $\boldsymbol{y''_{xx} = (e^{2x} + e^x)y + F\big(x, y'_x - e^x y\big)}$.

Подстановка $w(x) = y'_x - e^x y$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = -e^x w + F(x, w)$.

25. $\boldsymbol{y''_{xx} = F(x, y'_x \operatorname{sh} x - y \operatorname{ch} x) + y}$.

Подстановка $w(x) = y'_x \operatorname{sh} x - y \operatorname{ch} x$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = F(x, w) \operatorname{sh} x$.

26. $\boldsymbol{y''_{xx} = F(x, y'_x \operatorname{ch} x - y \operatorname{sh} x) + y}$.

Подстановка $w(x) = y'_x \operatorname{ch} x - y \operatorname{sh} x$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = F(x, w) \operatorname{ch} x$.

27. $\boldsymbol{y''_{xx} = x^{-2}F(ay + b\ln x,\, xy'_x)}$.

Преобразование $z = ay + b\ln x$, $w = xy'_x$ приводит к ОДУ первого порядка: $(aw + b)w'_z = F(z, w) + w$.

28. $\boldsymbol{y''_{xx} = yF(ax + b\ln y,\, y'_x/y)}$.

Преобразование $z = ax + b\ln y$, $w = y'_x/y$ приводит к ОДУ первого порядка: $(bw + a)w'_z = F(z, w) - w^2$.

29. $\boldsymbol{y''_{xx} = F(x, y'_x \sin x - y\cos x) - y.}$

Подстановка $w(x) = y'_x \sin x - y\cos x$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = F(x, w)\sin x$.

30. $\boldsymbol{y''_{xx} = F(x, y'_x \cos x + y\sin x) - y.}$

Подстановка $w(x) = y'_x \cos x + y\sin x$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = F(x, w)\cos x$.

31. $\boldsymbol{y''_{xx} = (\varphi^2 + \varphi'_x)y + F(x, y'_x - \varphi y), \qquad \varphi = \varphi(x).}$

Подстановка $w(x) = y'_x - \varphi y$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = -\varphi w + F(x, w)$.

32. $\boldsymbol{y''_{xx} = \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}y + F\Bigl(x, y'_x - \frac{\varphi'_x}{\varphi}y\Bigr), \qquad \varphi = \varphi(x).}$

Подстановка $w(x) = y'_x - \frac{\varphi'_x}{\varphi}y$ приводит к ОДУ первого порядка: $w'_x = -\frac{\varphi'_x}{\varphi}w + F(x, w)$.

33. $\boldsymbol{f^2 y''_{xx} + f f'_x y'_x = \Phi(y,\, f y'_x), \qquad f = f(x).}$

Подстановка $w(y) = f y'_x$ приводит к ОДУ первого порядка: $w w'_y = \Phi(y, w)$.

2.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения старших порядков

2.4.1. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения старших порядков

► **Предварительные замечания.**

В этом разделе старшие производные вида $d^n y/dx^n$ обозначаем $y_x^{(n)}$.

1°. Частным решением любого линейного однородного ОДУ является *тривиальное решение* $y = 0$.

2°. Общее решение линейного однородного ОДУ n-го порядка

$$f_n(x)y_x^{(n)} + f_{n-1}(x)y_x^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y'_x + f_0(x)y = 0 \qquad (1)$$

имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x), \qquad (2)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ — фундаментальная система решений (нетривиальные линейно независимые частные решения) уравнения (1); C_1, C_2, …, C_n — произвольные постоянные.

3°. Пусть $y_0 = y_0(x)$ — нетривиальное частное решение уравнения (1). Тогда подстановка

$$y = y_0(x) \int z(x)\,dx \tag{3}$$

приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка для функции $z = z(x)$.

Вместо (3), можно использовать подстановку

$$z(x) = \varphi(x)\bigl[y_0(x)y'_x - y'_0(x)y\bigr],$$

где $\varphi(x)$ — любая заданная функция.

4°. Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — два нетривиальных линейно независимых частных решения уравнения (1). Тогда подстановка

$$y = y_1 \int y_2 w\,dx - y_2 \int y_1 w\,dx \tag{4}$$

приводит к линейному ОДУ $(n-2)$-го порядка для функции $w = w(x)$.

► Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

1. $\boldsymbol{y'''_{xxx} + ay = 0.}$

1°. Общее решение при $a = 0$:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2.$$

2°. Общее решение при $a \neq 0$:

$$y = C_1 \exp(-kx) + C_2 \exp\bigl(\tfrac{1}{2}kx\bigr)\cos\bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}kx\bigr) + C_3 \exp\bigl(\tfrac{1}{2}kx\bigr)\sin\bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}kx\bigr),$$

где $k = a^{1/3}$.

2. $\boldsymbol{y'''_{xxx} + a_2 y''_{xx} + a_1 y'_x + a_0 y = 0.}$

Линейное однородное ОДУ третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Обозначим $P(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$.

1°. Пусть характеристический многочлен $P(\lambda)$ можно разложить на множители:

$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$, где λ_1, λ_2, λ_3 — действительные числа.

Общее решение:

$$y = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}, & \text{если все корни } \lambda_k \text{ различны;} \\ (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}, & \text{если } \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3; \\ (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{\lambda_1 x} & \text{если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3. \end{cases}$$

2°. Пусть $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_0)$, где $b_1^2 < b_0$.

Общее решение:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + e^{-b_1 x}(C_2 \cos \mu x + C_3 \sin \mu x), \text{ где } \mu = \sqrt{b_0 - b_1^2}.$$

3. $\boldsymbol{y''''_{xxxx} + ay = 0.}$

1°. Общее решение при $a = 0$:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3.$$

2°. Общее решение при $a = 4k^4 > 0$:

$$y = C_1 \operatorname{ch} kx \cos kx + C_2 \operatorname{ch} kx \sin kx + C_3 \operatorname{sh} kx \cos kx + C_4 \operatorname{sh} kx \sin kx.$$

3°. Общее решение при $a = -k^4 < 0$:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx.$$

4. $\boldsymbol{y''''_{xxxx} + (a+b) y''_{xx} + aby = 0.}$

1°. Общее решение при $a = b$:

$$y = \begin{cases} (C_1 + C_2 x)\cos\bigl(\sqrt{a}\,x\bigr) + (C_3 + C_4 x)\sin\bigl(\sqrt{a}\,x\bigr) & \text{при } \ a > 0, \\ (C_1 + C_2 x)\exp\bigl(\sqrt{|a|}\,x\bigr) + (C_3 + C_4 x)\exp\bigl(-\sqrt{|a|}\,x\bigr) & \text{при } \ a < 0. \end{cases}$$

2°. Общее решение при $a > 0,\ b > 0,\ a \neq b$:

$$y = C_1 \cos\bigl(\sqrt{a}\,x\bigr) + C_2 \sin\bigl(\sqrt{a}\,x\bigr) + C_3 \cos\bigl(\sqrt{b}\,x\bigr) + C_4 \sin\bigl(\sqrt{b}\,x\bigr).$$

3°. Общее решение при $a > 0,\ b < 0,\ a \neq b$:

$$y = C_1 \cos\bigl(\sqrt{a}\,x\bigr) + C_2 \sin\bigl(\sqrt{a}\,x\bigr) + C_3 \exp\bigl(\sqrt{|b|}\,x\bigr) + C_4 \exp\bigl(-\sqrt{|b|}\,x\bigr).$$

4°. Общее решение при $a < 0,\ b > 0,\ a \neq b$:

$$y = C_1 \exp\bigl(\sqrt{|a|}\,x\bigr) + C_2 \exp\bigl(-\sqrt{|a|}\,x\bigr) + C_3 \cos\bigl(\sqrt{b}\,x\bigr) + C_4 \sin\bigl(\sqrt{b}\,x\bigr).$$

5°. Общее решение при $a < 0,\ b < 0,\ a \neq b$:

$$y = C_1 \exp\bigl(\sqrt{|a|}\,x\bigr) + C_2 \exp\bigl(-\sqrt{|a|}\,x\bigr) + C_3 \exp\bigl(\sqrt{|b|}\,x\bigr) + C_4 \exp\bigl(-\sqrt{|b|}\,x\bigr).$$

5. $\boldsymbol{y''''_{xxxx} + a_3 y'''_{xxx} + a_2 y''_{xx} + a_1 y'_x + a_0 y = 0.}$

Линейное однородное ОДУ четвертого порядка с постоянными коэффициентами. При $a_0 = 0$ подстановка $w(x) = y'_x$ приводит к линейному ОДУ третьего порядка.

Далее считаем, что $a_0 \neq 0$ и обозначим $P(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$.

1°. Пусть характеристический многочлен $P(\lambda)$ можно разложить на множители: $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)$, где λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — действительные числа. Возможны следующие случаи:

a) если все λ_i различны, то

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + C_3e^{\lambda_3 x} + C_4e^{\lambda_4 x};$$

b) если $\lambda_1 = \lambda_2$, а λ_3 и λ_4 различны и не равны λ_1, то

$$y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda_1 x} + C_3e^{\lambda_3 x} + C_4e^{\lambda_4 x};$$

c) если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4$, то

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{\lambda_1 x} + C_4e^{\lambda_4 x};$$

d) если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, то

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3)e^{\lambda_1 x}.$$

2°. Пусть $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_0)$, где λ_1 и λ_2 — действительные числа, а $b_1^2 - b_0 < 0$. Возможны следующие случаи:

a) если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + e^{-b_1x}[C_3\cos(\mu x) + C_4\sin(\mu x)], \quad \mu = \sqrt{b_0 - b_1^2};$$

b) если $\lambda_1 = \lambda_2$, то

$$y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda_1 x} + e^{-b_1x}[C_3\cos(\mu x) + C_4\sin(\mu x)], \quad \mu = \sqrt{b_0 - b_1^2}.$$

3°. Пусть $P(\lambda) = (\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_0)(\lambda^2 + 2\beta_1\lambda + \beta_0)$, где $b_1^2 - b_0 < 0$ и $\beta_1^2 - \beta_0 < 0$. Возможны следующие случаи:

a) если $(b_1 - \beta_1)^2 + (b_0 - \beta_0)^2 \neq 0$, то

$$y = e^{-b_1x}[C_1\cos(\mu x) + C_2\sin(\mu x)] + e^{-\beta_1x}[C_3\cos(\nu x) + C_4\sin(\nu x)],$$

где $\mu = \sqrt{b_0 - b_1^2}$, $\nu = \sqrt{\beta_0 - \beta_1^2}$;

b) если $b_1 = \beta_1$, $b_0 = \beta_0$, то

$$y = e^{-b_1x}[(C_1 + C_2x)\cos(\mu x) + (C_3 + C_4x)\sin(\mu x)], \qquad \mu = \sqrt{b_0 - b_1^2}.$$

6. $y_x^{(n)} = f(x)$.

Простейшее линейное неоднородное ОДУ n-го порядка.

Общее решение: $y = \sum_{k=0}^{n-1} C_kx^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$, где C_k — произвольные постоянные, x_0 — любое число, для которого интеграл в правой части имеет смысл.

7. $y_x^{(n)} = ay$.

1°. Общее решение при $a = 0$:

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}x^{k-1},$$

где C_{k-1} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные постоянные.

2°. Общее решение при $a > 0$:

$$y = \sum_{k=1}^{k\leqslant\frac{1}{2}(n+2)} \exp(\alpha_k x)\bigl[A_k\cos(\beta_k x) + B_k\sin(\beta_k x)\bigr],$$

$$\alpha_k = a^{1/n}\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}, \qquad \beta_k = a^{1/n}\sin\frac{2(k-1)\pi}{n},$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные.

3°. Общее решение при $a < 0$:

$$y = \sum_{k=1}^{k\leqslant\frac{1}{2}(n+1)} \exp(\alpha_k x)\bigl[A_k\cos(\beta_k x) + B_k\sin(\beta_k x)\bigr],$$

$$\alpha_k = |a|^{1/n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}, \qquad \beta_k = |a|^{1/n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{n},$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные.

8. $\boldsymbol{y_x^{(n)} + a_{n-1}y_x^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_x' + a_0 y = 0.}$

Линейное однородное ОДУ n-го порядка общего вида с постоянными коэффициентами. Общее решение этого ОДУ определяется корнями характеристического уравнения

$$P(\lambda) = 0, \qquad \text{где} \quad P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0. \tag{1}$$

Возможны следующие случаи:

1°. Все корни λ_1, λ_2, …, λ_n характеристического уравнения действительны и различны. Тогда общее решение линейного однородного ОДУ имеет вид

$$y = C_1\exp(\lambda_1 x) + C_2\exp(\lambda_2 x) + \cdots + C_n\exp(\lambda_n x). \tag{2}$$

2°. Имеются m равных действительных корней характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$ ($m \leqslant n$), а остальные корни действительны и различны. В этом случае общее решение линейного однородного ОДУ дается формулой

$$\begin{aligned} y = {} & \exp(\lambda_1 x)(C_1 + C_2 x + \cdots + C_m x^{m-1}) + \\ & + C_{m+1}\exp(\lambda_{m+1}x) + C_{m+2}\exp(\lambda_{m+2}x) + \cdots + C_n\exp(\lambda_n x). \end{aligned}$$

3°. Имеются m равных комплексно сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ (при $2m \leqslant n$), а остальные корни действительны и различны. В этом случае общее решение линейного однородного ОДУ имеет вид

$$\begin{aligned} y = {} & \exp(\alpha x)\cos(\beta x)(A_1 + A_2 x + \cdots + A_m x^{m-1}) + \\ & + \exp(\alpha x)\sin(\beta x)(B_1 + B_2 x + \cdots + B_m x^{m-1}) + \\ & + C_{2m+1}\exp(\lambda_{2m+1}x) + C_{2m+2}\exp(\lambda_{2m+2}x) + \cdots + C_n\exp(\lambda_n x), \end{aligned}$$

где A_1, …, A_m, B_1, …, B_m, C_{2m+1}, …, C_n — произвольные постоянные.

4°. В общем случае, когда имеется r различных корней λ_1, λ_2, …, λ_r с кратностями m_1, m_2, …, m_r соответственно, левую часть характеристического уравнения (1) можно представить в виде произведения

$$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_r)^{m_r},$$

где $m_1+m_2+\dots+m_r=n$. Тогда общее решение линейного однородного ОДУ дается формулой

$$y=\sum_{k=1}^{r}\exp(\lambda_k x)(C_{k,0}+C_{k,1}x+\dots+C_{k,m_k-1}x^{m_k-1}),$$

где $C_{k,l}$ — произвольные постоянные.

Если имеются комплексно сопряженные корни характеристического уравнения (1), то в приведенном выше решении следует выделить действительную часть с учетом формулы $\exp(\alpha\pm i\beta)=e^{\alpha}(\cos\beta\pm i\sin\beta)$.

9. $\boldsymbol{y_x^{(n)}+a_{n-1}y_x^{(n-1)}+\dots+a_1y'_x+a_0y=f(x).}$

Линейное неоднородное ОДУ n-го порядка общего вида с постоянными коэффициентами.

1°. Общее решение данного уравнения является суммой общего решения соответствующего линейного однородного ОДУ при $f(x)\equiv 0$ (см. предыдущее уравнение) и любого частного решения исходного линейного неоднородного ОДУ.

Если все корни λ_1, λ_2, …, λ_n характеристического уравнения

$$P(\lambda)=0,\qquad \text{где}\quad P(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0$$

различны, то общее решение рассматриваемого ОДУ имеет вид

$$y=\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu e^{\lambda_\nu x}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{e^{\lambda_\nu x}}{P'_\lambda(\lambda_\nu)}\int f(x)e^{-\lambda_\nu x}\,dx, \tag{1}$$

где $P'_\lambda(\lambda)=n\lambda^{n-1}+a_{n-1}(n-1)\lambda^{n-2}+\dots+a_1$. При наличии комплексных корней в решении (1) следует выделить действительную часть.

2°. Вид частных решений для некоторых функций в правой части линейного неоднородного ОДУ указан в табл. 2.8.

3°. Рассмотрим задачу Коши для исходного ОДУ с однородными начальными условиями

$$y(0)=y'_x(0)=\dots=y_x^{(n-1)}(0)=0. \tag{2}$$

Пусть $y(x)$ — решение исходного ОДУ с произвольной правой частью $f(x)$, удовлетворяющее условиям (2), а $u(x)$ — решение вспомогательной, более простой задачи Коши с $f(x)\equiv 1$, так что $u(x)=y(x)|_{f(x)\equiv 1}$. Тогда справедлива формула

$$y(x)=\int_0^x f(t)u'_x(x-t)\,dt,$$

которую называют *интегралом Дюамеля*.

Таблица 2.8. Вид частных решений линейного неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами $y_x^{(n)} + a_{n-1}y_x^{(n-1)} + \dots + a_1 y'_x + a_0 y = f(x)$ с правой частью специального вида.

Вид функции $f(x)$	Корни характеристического уравнения $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$	Вид частного решения $y = \widetilde{y}(x)$
$P_m(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения (т. е. $a_0 \neq 0$)	$\widetilde{P}_m(x)$
	Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r \widetilde{P}_m(x)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
	Число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r \widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
$P_m(x)\cos\beta x + {}$ $+ Q_n(x)\sin\beta x$	Число $i\beta$ не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_\nu(x)\cos\beta x +{}$ $+ \widetilde{Q}_\nu(x)\sin\beta x$
	Число $i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r[\widetilde{P}_\nu(x)\cos\beta x +{}$ $+ \widetilde{Q}_\nu(x)\sin\beta x]$
$[P_m(x)\cos\beta x + {}$ $+ Q_n(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$	Число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения	$[\widetilde{P}_\nu(x)\cos\beta x +{}$ $+ \widetilde{Q}_\nu(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$
	Число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r[\widetilde{P}_\nu(x)\cos\beta x +{}$ $+ \widetilde{Q}_\nu(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$

Обозначения: $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени m и n с заданными коэффициентами; $\widetilde{P}_m(x)$, $\widetilde{P}_\nu(x)$, $\widetilde{Q}_\nu(x)$ — многочлены степени m и ν, коэффициенты которых определяются путем подстановки данного частного решения в исходное ОДУ; $\nu = \max(m,\ n)$; α и β — действительные числа, $i^2 = -1$.

► Линейные уравнения, содержащие степенные функции.

10. $\boldsymbol{y''''_{xxxx} - 2a^2 y''_{xx} + a^4 y - \lambda(ax - b)(y''_{xx} - a^2 y) = 0.}$

Это уравнение встречается в теории турбулентности. Полагая $z(x) = y''_{xx} - a^2 y$, получим линейное ОДУ второго порядка вида 2.2.2.4:

$$z''_{xx} - a^2 z - \lambda(ax - b)z = 0. \tag{1}$$

Пусть даны граничные условия

$$y(0) = y'_x(0) = 0, \quad y(1) = y'_x(1) = 0. \tag{2}$$

Решение исходного ОДУ, удовлетворяющее первым двум условиям в (2), можно представить в виде

$$2ay = e^{ax}\int_0^x e^{-ax} z\,dx - e^{-ax}\int_0^x e^{ax} z\,dx.$$

Чтобы удовлетворить двум последним граничным условиям в (2), следует взять решение линейного ОДУ (1), которое удовлетворяет интегральным соотношениям $\int_0^1 e^{-ax} z\,dx = \int_0^1 e^{ax} z\,dx = 0$.

11. $\boldsymbol{x^2 y''''_{xxxx} + 6xy'''_{xxx} + 6y''_{xx} - a^2 y = 0.}$

Уравнение поперечных колебаний стержня.

Общее решение:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}\bigl[C_1 J_1\bigl(2\sqrt{ax}\,\bigr) + C_2 Y_1\bigl(2\sqrt{ax}\,\bigr) + C_3 I_1\bigl(2\sqrt{ax}\,\bigr) + C_4 K_1\bigl(2\sqrt{ax}\,\bigr)\bigr],$$

где $J_1(z)$ и $Y_1(z)$ — функции Бесселя, а $I_1(z)$ и $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

12. $\boldsymbol{y^{(n)}_x = axy + b, \qquad a > 0.}$

Общее решение:

$$y = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \varepsilon_\nu \int_0^\infty \exp\Bigl[\varepsilon_\nu xt - \frac{t^{n+1}}{a(n+1)}\Bigr]\,dt, \qquad \varepsilon_\nu = \exp\Bigl(\frac{2\pi\nu i}{n+1}\Bigr),$$

где $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu = \frac{b}{a}$ и $i^2 = -1$.

13. $\boldsymbol{x^{2n} y^{(n)}_x = ay.}$

Преобразование $x = t^{-1}$, $y = wt^{1-n}$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами вида 2.4.1.7: $w^{(n)}_t = (-1)^n aw$.

14. $\boldsymbol{x^n y^{(2n)}_x = ay.}$

Общее решение:

$$y = x^{n/2} \sum_{k=1}^{n} \bigl[C_{k1} I_n\bigl(2\beta_k\sqrt{x}\,\bigr) + C_{k2} K_n\bigl(2\beta_k\sqrt{x}\,\bigr)\bigr],$$

где $I_n(z)$ и $K_n(z)$ — модифицированные функции Бесселя; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — корни уравнения $\beta^n = \sqrt{a}$.

15. $\boldsymbol{x^{3n} y^{(2n)}_x = ay.}$

Преобразование $x = t^{-1}$, $y = wt^{1-2n}$ приводит к уравнению вида 2.4.1.14: $t^n w^{(2n)}_t = aw$.

16. $\boldsymbol{x^{n+1/2} y^{(2n+1)}_x = ay.}$

Общее решение:

$$y = x^{(2n+1)/4} \sum_{k=0}^{2n} C_k \bigl[J_{-n-1/2}\bigl(2\beta_k\sqrt{x}\,\bigr) + iJ_{n+1/2}\bigl(2\beta_k\sqrt{x}\,\bigr)\bigr],$$

где $J_m(z)$ — функции Бесселя; $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2n}$ — корни уравнения $\beta^{2n+1} = -ai$; $i^2 = -1$.

17. $\boldsymbol{x^{3n+3/2} y_x^{(2n+1)} = ay.}$

Преобразование $x = t^{-1}$, $y = wt^{-2n}$ приводит к линейному ОДУ вида 2.4.1.16: $t^{n+1/2} w_t^{(2n+1)} = -aw$.

18. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = ax^\beta y.}$

Для некоторых значений показателя степени β см. уравнения 2.4.1.7, 2.4.1.12 (при $b = 0$), 2.4.1.13–2.4.1.17, 2.4.1.19 (при $b = 0$), 2.4.1.45 (при $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$).

1°. Пусть $n \geqslant 2$, $\beta > -n$ и $(n+\beta)(s+1) \neq 1, 2, \ldots, n-1$, где $s = 0, 1, \ldots$ Тогда рассматриваемое ОДУ имеет n решений, которые можно представить в виде

$$y_j(x) = x^{j-1} E_{n,1+\beta/n,(\beta+j-1)/n}\bigl(ax^{\beta+n}\bigr), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $E_{n,m,l}(z)$ — специальная функция типа Миттаг-Леффлера, которая определяется так:

$$\begin{gathered} E_{n,m,l}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \\ b_k = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\Gamma\bigl(n(ms+l)+1\bigr)}{\Gamma\bigl(n(ms+l+1)+1\bigr)} = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{1}{[n(ms+l)+1]\ldots[n(ms+l)+n]}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\Gamma(\xi)$ — гамма-функция, l — произвольное число, $m > 0$.

При $\beta \geqslant 0$ решения (1) являются линейно независимыми. Разложения в ряд (2) удобно использовать для малых x.

2°. Пусть $n \geqslant 2$, $\beta < -n$ и $(n+\beta)(s+1) \neq -1, -2, \ldots, -(n-1)$, где $s = 0, 1, \ldots$ Тогда рассматриваемое ОДУ имеет n решений, которые можно представить в виде

$$y_j(x) = x^{j-1} E_{n,-1-\beta/n,-1-(\beta+j)/n}\bigl(a(-1)^n x^{\beta+n}\bigr), \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где $E_{n,m,l}(z)$ — специальная функция типа Миттага-Леффлера, определенная в (2). При $\beta \leqslant -2n$ решения (3) являются линейно независимыми. Разложения в ряд (3) удобно использовать при больших x.

3°. Преобразование $x = t^{-1}$, $y = wt^{1-n}$ приводит рассматриваемое ОДУ к аналогичному виду с другим показателем степени:

$$w_t^{(n)} = a(-1)^{n+1} t^{-2n-\beta} w.$$

Более подробную информацию о решениях, приведенных в пп. 1° и 2°, см. в статье Сайго & Килбас (2000).

19. $\boldsymbol{x^{2n+1}y_x^{(n)} = ay + bx^n.}$

Преобразование $x=t^{-1}$, $y=wt^{1-n}$ приводит к линейному ОДУ вида 2.4.1.12: $w_t^{(n)} = (-1)^n(atw+b)$.

20. $\boldsymbol{(ax+b)^{2n+1}y_x^{(n)} = (cx+d)y.}$

Преобразование $\xi = \dfrac{cx+d}{ax+b}$, $w = \frac{y}{(ax+b)^{n-1}}$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.12: $w_\xi^{(n)} = \Delta^{-n}\xi w$, где $\Delta = bc - ad$.

21. $\boldsymbol{(ax+b)^n(cx+d)^n y_x^{(n)} = ky.}$

1°. Преобразование $\xi = \ln\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $w = \frac{y}{(cx+d)^{n-1}}$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами.

2°. Преобразование $\zeta = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $w = \frac{y}{(cx+d)^{n-1}}$ приводит к уравнению Эйлера 2.4.1.45: $\zeta^n w_\zeta^{(n)} = k\Delta^{-n}w$, где $\Delta = ad - bc$.

22. $\boldsymbol{(ax^2+bx+c)^n y_x^{(n)} = ky.}$

Преобразование $\xi = \displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $w = y(ax^2+bx+c)^{\frac{1-n}{2}}$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами.

23. $\boldsymbol{(ax+b)^n(cx+d)^{3n} y_x^{(2n)} = ky.}$

Преобразование $\xi = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $w = \frac{y}{(cx+d)^{2n-1}}$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.14: $\xi^n w_\xi^{(2n)} = k\Delta^{-2n}w$, где $\Delta = ad - bc$.

24. $\boldsymbol{(ax+b)^{n+1/2}(cx+d)^{3n+3/2} y_x^{(2n+1)} = ky.}$

Преобразование $\xi = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $w = \frac{y}{(cx+d)^{2n}}$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.16: $\xi^{n+1/2} w_\xi^{(2n+1)} = k\Delta^{-2n-1}w$, где $\Delta = ad - bc$.

25. $\boldsymbol{y_x^{(n)} + ax^k y_x' + akx^{k-1}y = 0.}$

Интегрирование приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка: $y_x^{(n-1)} + ax^k y = C$.

26. $\boldsymbol{y_x^{(n)} + ax^{k+1}y_x' - a(n-1)x^k y = 0.}$

Подстановка $z = xy_x' - (n-1)y$ приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка: $z_x^{(n-1)} + ax^{k+1}z = 0$.

27. $\boldsymbol{y_x^{(n)} + ax^{k+1}y_x' + a(k+n)x^k y = 0.}$

Преобразование $x=t^{-1}$, $y=wt^{1-n}$ приводит к линейному ОДУ вида 2.4.1.25: $w_t^{(n)} + bt^\nu w_t' + b\nu t^{\nu-1}w = 0$, где $b = a(-1)^{n+1}$, $\nu = 1 - k - 2n$.

28. $y_x^{(n)} + (ax+b)x^k y'_x - ax^k y = 0.$

Частное решение: $y_0 = ax + b$.

29. $y_x^{(n)} + (ax+b)x^k y'_x - 2ax^k y = 0.$

Частное решение: $y_0 = (ax+b)^2$.

30. $y_x^{(n)} + (ax+b)x^k y'_x - 3ax^k y = 0.$

Частное решение: $y_0 = (ax+b)^3$.

31. $y_x^{(n)} + (ax+b)x^k y'_x - a(n-1)x^k y = 0.$

Частное решение: $y_0 = (ax+b)^{n-1}$. Подстановка $z = (ax+b)y'_x - a(n-1)y$ приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка: $z_x^{(n-1)} + (ax+b)x^k z = 0$.

32. $y_x^{(n)} + ax^{k+1}y'_x - amx^k y = 0, \qquad m = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1.$

Частное решение: $y_0 = x^m$. Подстановка $z = xy'_x - my$ приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка:

$$D^{n-m-1}\left(\frac{z_x^{(m)}}{x}\right) + ax^k z = 0, \qquad \text{где} \quad D = \frac{d}{dx}.$$

33. $y_x^{(2n)} = a^n y + bx^k(y''_{xx} - ay).$

Частный случай уравнения 2.4.1.64 при $f(x) = bx^k$. Подстановка $w = y''_{xx} - ay$ приводит к линейному ОДУ $(2n-2)$-го порядка: $w_x^{(2n-2)} + aw_x^{(2n-4)} + \cdots + a^{n-1}w = bx^k w$.

34. $y_x^{(n)} + ax^k y_x^{(m)} - (ab^m x^k + b^n)y = 0.$

Частное решение: $y_0 = e^{bx}$.

35. $y_x^{(n)} + (ax^k - b^{n-m})y_x^{(m)} - ab^m x^k y = 0.$

Частное решение: $y_0 = e^{bx}$.

36. $y_x^{(n)} + ay_x^{(n-1)} + bx^m y'_x + abx^m y = 0.$

Частное решение: $y_0 = e^{-ax}$.

37. $xy_x^{(n)} - nmy_x^{(n-1)} + axy = 0, \quad n = 2,\, 3,\, 4,\, \ldots, \quad m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$

Общее решение:

$$y = x^{(m+1)n-1}\left(x^{1-n}\frac{d}{dx}\right)^m (x^{1-n}w),$$

где w — общее решение линейного ОДУ с постоянными коэффициентами вида 2.4.1.7: $w_x^{(n)} + aw = 0$.

38. $\boldsymbol{xy_x^{(n)} + ny_x^{(n-1)} = axy + b.}$

Подстановка $w = xy$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами: $w_x^{(n)} = aw + b$.

39. $\boldsymbol{xy_x^{(n)} + ny_x^{(n-1)} = ax^2y + b.}$

Подстановка $w = xy$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.12: $w_x^{(n)} = axw + b$.

40. $\boldsymbol{xy_x^{(n)} + (n-m-1)y_x^{(n-1)} + ax^k y_x' - amx^{k-1}y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = x^m$.

41. $\boldsymbol{xy_x^{(n)} + ax^k y_x^{(m)} - (ax^k + amx^{k-1} + x + n)y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = xe^x$.

42. $\boldsymbol{xy_x^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}[(aA_{k+1} - A_k)x + A_{k+1}]y_x^{(k)}.}$

Здесь $A_n = 1$, $A_0 = 0$; a и A_k — произвольные числа ($k = 1, 2, \ldots, n-1$).

Обозначим $P(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_{k+1}\lambda^k$. Пусть все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ алгебраического уравнения $P(\lambda) = 0$ различны и $P(a) \neq 0$. Тогда общее решение рассматриваемого ОДУ имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_{n-1} e^{\lambda_{n-1} x} + C_n e^{ax}\left[x - \frac{P'_\lambda(a)}{P(a)}\right].$$

43. $\boldsymbol{x^2y_x^{(n)} + 2nxy_x^{(n-1)} + n(n-1)y_x^{(n-2)} = ax^2y + b.}$

Подстановка $w = x^2y$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами: $w_x^{(n)} = aw + b$.

44. $\boldsymbol{x^2y_x^{(n)} + 2nxy_x^{(n-1)} + n(n-1)y_x^{(n-2)} = ax^3y + b.}$

Подстановка $w = x^2y$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.12: $w_x^{(n)} = axw + b$.

45. $\boldsymbol{a_n x^n y_x^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y_x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y_x' + a_0 y = 0.}$

Уравнение Эйлера. Если все корни λ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) алгебраического уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-\nu+1) = -a_0$$

различны, то общее решение данного ОДУ имеет вид

$$y = C_1|x|^{\lambda_1} + C_2|x|^{\lambda_2} + \cdots + C_n|x|^{\lambda_n}.$$

В общем случае подстановка $t = \ln|x|$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами вида 2.4.1.8.

46. $\boldsymbol{x^{2n+1}y_x^{(n)} + nx^{2n}y_x^{(n-1)} = axy.}$

Подстановка $w = xy$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.13: $x^{2n}w_x^{(n)} = aw$.

47. $\boldsymbol{x^{2n+1}y_x^{(n)} + nx^{2n}y_x^{(n-1)} = ay.}$

Подстановка $w = xy$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.19 (при $b = 0$): $x^{2n+1}w_x^{(n)} = aw$.

48. $\boldsymbol{x^n y_x^{(2n)} + 2nx^{n-1}y_x^{(2n-1)} = ay.}$

Подстановка $w = xy$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.14: $x^n w_x^{(2n)} = aw$.

49. $\boldsymbol{x^{3n}y_x^{(2n)} + 2nx^{3n-1}y_x^{(2n-1)} = ay.}$

Подстановка $w = xy$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.15: $x^{3n}w_x^{(2n)} = aw$.

50. $\boldsymbol{x^{n+1}y_x^{(2n+1)} + (2n+1)x^n y_x^{(2n)} = a\sqrt{x}\,y.}$

Подстановка $w = xy$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.16: $x^{n+1/2}w_x^{(2n+1)} = aw$.

51. $\boldsymbol{x^{3n+3/2}y_x^{(2n+1)} + (2n+1)x^{3n+1/2}y_x^{(2n)} = ay.}$

Подстановка $w = xy$ приводит к ОДУ вида 2.4.1.17: $x^{3n+3/2}w_x^{(2n+1)} = aw$.

► **Уравнения, содержащие произвольные функции.**

52. $\boldsymbol{fy_x^{(n)} - f_x^{(n)}y = 0, \qquad f = f(x).}$

Частное решение: $y_0 = f(x)$.

53. $\boldsymbol{fy_x^{(2n+1)} + f_x^{(2n+1)}y = g(x), \qquad f = f(x).}$

Первый интеграл: $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k f_x^{(2n-k)}y_x^{(k)} = \int g(x)\,dx + C$.

54. $\boldsymbol{y_x^{(n)} + (ax+b)f(x)y'_x - af(x)y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = ax + b$.

55. $\boldsymbol{y_x^{(n)} + (ax+b)f(x)y'_x - 2af(x)y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = (ax+b)^2$.

56. $\boldsymbol{y_x^{(n)} + (ax+b)f(x)y'_x - (n-1)af(x)y = 0.}$

Частное решение: $y_0 = (ax+b)^{n-1}$. Подстановка $z = (ax+b)y'_x - a(n-1)y$ приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка: $z_x^{(n-1)} + (ax+b)f(x)z = 0$.

57. $\boldsymbol{y_x^{(n)} + xf(x)y'_x - mf(x)y = 0, \qquad m = 1,\,2,\,\ldots,\,n-1.}$

Частное решение: $y_0 = x^m$. Подстановка $z = xy'_x - my$ приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка:

$$D^{n-m-1}\left(\frac{z_x^{(m)}}{x}\right) + f(x)z = 0, \qquad \text{где} \quad D = \frac{d}{dx}.$$

58. $\boldsymbol{y_x^{(n)} + f(x)y'_x + f'_x(x)y = g(x).}$

Интегрируя, получим линейное ОДУ $(n-1)$-го порядка:

$$y_x^{(n-1)} + f(x)y = \int g(x)\,dx + C.$$

59. $\boldsymbol{y_x^{(2n)} = y + f(x)(y'_x \operatorname{ch} x - y \operatorname{sh} x).}$

Подстановка $w = y'_x \operatorname{ch} x - y \operatorname{sh} x$ приводит к линейному ОДУ $(2n-1)$-го порядка.

60. $\boldsymbol{y_x^{(2n)} = y + f(x)(y'_x \operatorname{sh} x - y \operatorname{ch} x).}$

Подстановка $w = y'_x \operatorname{sh} x - y \operatorname{ch} x$ приводит к линейному ОДУ $(2n-1)$-го порядка.

61. $\boldsymbol{y_x^{(2n)} = (-1)^n y + f(x)(y'_x \sin x - y \cos x).}$

Подстановка $w = y'_x \sin x - y \cos x$ приводит к линейному ОДУ $(2n-1)$-го порядка.

62. $\boldsymbol{y_x^{(2n)} = (-1)^n y + f(x)(y'_x \cos x + y \sin x).}$

Подстановка $w = y'_x \cos x + y \sin x$ приводит к линейному ОДУ $(2n-1)$-го порядка.

63. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = \frac{\varphi_x^{(n)}}{\varphi} y + f(x)\Big(y'_x - \frac{\varphi'_x}{\varphi} y\Big), \qquad \varphi = \varphi(x).}$

Частное решение: $y_0 = \varphi(x)$. Подстановка $w = y'_x - \frac{\varphi'_x}{\varphi} y$ приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка.

64. $\boldsymbol{y_x^{(2n)} = a^n y + f(x)(y''_{xx} - ay).}$

Подстановка $w = y''_{xx} - ay$ приводит к линейному ОДУ $(2n-2)$-го порядка:

$$w_x^{(2n-2)} + aw_x^{(2n-4)} + \cdots + a^{n-1}w = f(x)w.$$

65. $\boldsymbol{y_x^{(2n)} = a^2 y + f(x)[y_x^{(n)} + ay].}$

Подстановка $w = y_x^{(n)} + ay$ приводит к линейному ОДУ n-го порядка: $w_x^{(n)} =$ $= [f(x) + a]w$.

66. $y_x^{(n)} + f(x)y_x^{(m)} - [a^n + a^m f(x)]y = 0.$

Частное решение: $y_0 = e^{ax}$.

67. $y_x^{(n)} + (f - a^{n-m})y_x^{(m)} - a^m f y = 0, \qquad f = f(x).$

Частное решение: $y_0 = e^{ax}$.

68. $y_x^{(n)} + a y_x^{(n-1)} + f y_x' + a f y = 0, \qquad f = f(x).$

Частное решение: $y_0 = e^{-ax}$.

69. $y_x^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} f - a_k) y_x^{(k)}, \qquad f = f(x).$

Здесь $a_n = 1$, $a_0 = 0$; a_k — произвольные числа ($k = 1, 2, \ldots, n-1$).

1°. Частные решения: $y_k = e^{\lambda_k x}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), где λ_k — корни алгебраического уравнения $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \lambda^k = 0$.

2°. Рассматриваемое уравнение допускает первый интеграл

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} y_x^{(k)} = C \exp\Bigl(\int f\,dx\Bigr),$$

который является линейным неоднородным ОДУ $(n-1)$-го порядка с постоянными коэффициентами вида 2.4.1.9.

70. $x y_x^{(n)} + (a + n - 1) y_x^{(n-1)} = f(x)(x y_x' + a y).$

Подстановка $w = x y_x' + a y$ приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка: $w_x^{(n-1)} = f(x) w$.

71. $x^n y_x^{(n)} + b_{n-1} x^{n-1} y_x^{(n-1)} + \cdots + b_1 x y_x' + b_0 y = f(x).$

Неоднородное уравнение Эйлера. Подстановка $x = a e^t$ ($a \neq 0$) приводит к линейному неоднородному ОДУ с постоянными коэффициентами вида 2.4.1.9.

72. $x^m y_x^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} [x^m (a_{k+1} f - a_k) + a_{k+1}] y_x^{(k)}, \qquad f = f(x).$

Здесь $a_n = 1$, $a_0 = 0$; m и a_k — произвольные числа ($k = 1, 2, \ldots, n-1$).

Частные решения: $y_k = e^{\lambda_k x}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), где λ_k — корни алгебраического уравнения $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \lambda^k = 0$.

73. $\sum\limits_{k=2}^{n} f_k(x) y_x^{(k)} = g(x)(x y_x' - y).$

Частное решение: $y_0 = x$. Подстановка $w(x) = x y_x' - y$ приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка.

74. $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)y_x^{(k)} = g(x)(xy'_x - my), \qquad m = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1.$

Частное решение: $y_0 = x^m$. Подстановка $w(x) = xy'_x - my$ приводит к линейному ОДУ $(n-1)$-го порядка.

75. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (f_k - af_{k+1})y_x^{(k)} = 0.$

Здесь $f_k = f_k(x)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$; $f_{n+1} \equiv f_0 \equiv 0$.

Частное решение: $y_0 = e^{ax}$.

76. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k[f_k + (k-m)f_{k+1}]y_x^{(k)} = 0.$

Здесь $f_k = f_k(x)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$; $f_{n+1} \equiv f_0 \equiv 0$.

Частное решение: $y_0 = x^m$.

2.4.2. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения третьего и четвертого порядка

1. $y'''_{xxx} = f(y).$

Двучленное автономное ОДУ третьего порядка. Подстановка $z(y) = (y'_x)^2$ приводит к ОДУ второго порядка: $z''_{yy} = \pm 2f(y)z^{-1/2}$. В частности, полученное ОДУ при $f(y) = ay^n$ является уравнение Эмдена — Фаулера вида 2.3.1.2 при $m = -1/2$.

2. $yy'''_{xxx} = f(x).$

1°. Интегрируя, приходим к уравнению второго порядка $yy''_{xx} - \frac{1}{2}(y'_x)^2 = \int f(x)\,dx + C$. Подстановка $y = w^2$ приводит полученное ОДУ к виду $w''_{xx} = \frac{1}{2}\Bigl[\int f(x)\,dx + C\Bigr]w^{-3}$.

2°. Преобразование $x = 1/t$, $y = u/t^2$ приводит исходное ОДУ к уравнению аналогичного вида: $uu'''_{ttt} = -t^{-2}f(1/t)$.

3. $(y'_x)^2 - yy''_{xx} - ay'''_{xxx} = 0.$

Это автономное уравнение встречается в теории гидродинамического пограничного слоя.

Частные решения:

$$y = \frac{6a}{x+C},$$
$$y = Ce^{\lambda x} - a\lambda,$$

где C и λ — произвольные постоянные.

4. $\boldsymbol{yy'''_{xxx} + 3y'_x y''_{xx} = f(x).}$

Решение:

$$y^2 = C_1x^2 + C_2x + C_3 + \int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

5. $\boldsymbol{y'''_{xxx} = (f-a)y''_{xx} + (af-b)y'_x + bfy, \qquad f = f(u).}$

Частное решение:

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x},$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

6. $\boldsymbol{y''''_{xxxx} = ay^{-5/3}.}$

Умножим обе части уравнения на $y^{5/3}$, а затем продифференцируем по x. В результате получим ОДУ пятого порядка

$$3yy_x^{(5)} + 5y'_x y''''_{xxxx} = 0.$$

Интегрируя трижды это уравнение, имеем

$$3yy''''_{xxxx} + 2y'_x y'''_{xxx} - (y''_{xx})^2 = 2C_2, \tag{1}$$

$$3yy'''_{xxx} - y'_x y''_{xx} = 2C_2x + C_1, \tag{2}$$

$$3yy''_{xx} - 2(y'_x)^2 = C_2x^2 + C_1x + C_0, \tag{3}$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Исключая из (1)–(3) с помощью исходного ОДУ старшие производные, приходим к уравнению первого порядка

$$(2Py'_x - 3P'_x y)^2 = 9(C_1^2 - 4C_0C_2)y^2 - 2P^3 + 54aPy^{4/3},$$

где $P = C_2x^2 + C_1x + C_0$. Подстановка $y = (P/w)^{3/2}$ приводит к ОДУ с разделяющимися переменными, интегрируя которое получим общее решение исходного уравнения

$$\int \bigl[9(C_1^2 - 4C_0C_2) + 54aw - 2w^3\bigr]^{-1/2}\frac{dw}{w} \pm \int \frac{dx}{3P} = C_3.$$

7. $\boldsymbol{y''''_{xxxx} = ay^m.}$

Частный случай ОДУ 2.4.2.9 при $f(w) = ay^m$.

1°. Интегрируя, получим ОДУ третьего порядка

$$2y'_x y'''_{xxx} - (y''_{xx})^2 = \frac{2a}{m+1}y^{m+1} + \frac{4}{3}C,$$

где C — произвольная постоянная и $m \neq -1$. Подстановка $w(y) = (y'_x)^{3/2}$ приводит его к ОДУ второго порядка

$$w''_{yy} = \Bigl(\frac{3a}{2m+2}y^{m+1} + C\Bigr)w^{-5/3},$$

которое при $C = 0$ является частным случаем уравнения Эмдена — Фаулера вида 2.3.1.2.

2°. Частное решение: $y = \left[\frac{8(m+1)(m+3)(3m+1)}{a(m-1)^4}\right]^{\frac{1}{m-1}} \left(x+C\right)^{\frac{4}{1-m}}$.

8. $\boldsymbol{y''''_{xxxx} = ax^{-3m-5}y^m}$.

Преобразование $x = t^{-1}$, $y = t^{-3}w(t)$ приводит к ОДУ вида 2.4.2.7: $w''''_{tttt} = = aw^m$.

9. $\boldsymbol{y''''_{xxxx} = f(y)}$.

Автономное уравнение четвертого порядка специального вида. Интегрируя, получим ОДУ третьего порядка $y''_{xx})^2 = 2\int f(y)\,dy + 2C$. Подстановка $w(y) = |y'_x|^{3/2}$ приводит его к ОДУ второго порядка

$$w''_{yy} = \tfrac{3}{2}\Bigl[\int f(y)\,dy + C\Bigr]w^{-5/3}.$$

10. $\boldsymbol{y''''_{xxxx} + ay''_{xx} = f(y)}$.

Интегрируя, получим ОДУ третьего порядка $2y'_x y'''_{xxx} - (y''_{xx})^2 + a(y'_x)^2 = = 2\int f(y)\,dy + 2C$, где C — произвольная постоянная. Подстановка $w(y) = = |y'_x|^{3/2}$ приводит его к ОДУ второго порядка

$$w''_{yy} = -\tfrac{3}{4}aw^{-1/3} + \tfrac{3}{2}\Bigl[\int f(y)\,dy + C\Bigr]w^{-5/3}.$$

2.4.3. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения старших порядков

1. $\boldsymbol{y^{(2n)}_x = ay^{\frac{1+2n}{1-2n}}}$.

Умножим обе части на $y^{\frac{2n+1}{2n-1}}$, а затем продифференцируем по x. В результате получим ОДУ $(2n+1)$-го порядка

$$(2n-1)yy^{(2n+1)}_x + (2n+1)y'_x y^{(2n)}_x = 0.$$

Три интеграла этого уравнения, содержащие произвольные постоянные C_0, C_1, C_2 выписаны в 2.4.3.23, где следует положить $f \equiv 0$. Исключая из этих интегралов и исходного уравнения производные старших порядков, можно получить ОДУ $(2n-3)$-го порядка. Это уравнение с помощью преобразования

$$t = \int \frac{dx}{P}, \quad w = yP^{\frac{1-2n}{2}}, \qquad \text{где} \quad P = C_2x^2 + C_1x + C_0,$$

сводится к ОДУ автономного вида. Последующая подстановка $z(w) = w'_t$ приводит в итоге к ОДУ $(2n-4)$-го порядка для функции $z = z(w)$.

2. $\boldsymbol{y^{(n)}_x = f(y)}$.

Двучленное автономное ОДУ n-го порядка. Частный случай ОДУ 2.4.3.31.

1°. Подстановка $w(y) = y'_x$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

2°. Для уравнения четного порядка $n = 2m$, первый интеграл рассматриваемого ОДУ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k y_x^{(k)} y_x^{(2m-k)} + \tfrac{1}{2}(-1)^m \left[y_x^{(m)}\right]^2 + \int f(y)\,dy = C.$$

Порядок полученного ОДУ далее можно понизить с помощью подстановки $w(y) = y'_x$.

3. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = x^{-n} f(y).}$

Подстановка $t = \ln|x|$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31.

4. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = x^{1-n} f(y/x).}$

Однородное ОДУ специального вида, частный случай уравнения 2.4.3.36. Преобразование $t = \ln x$, $w = y/x$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31.

5. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = x^{-n-1} f(x^{1-n} y).}$

Преобразование $x = t^{-1}$, $y = t^{1-n} w$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.2: $w_t^{(n)} = (-1)^n f(w)$.

6. $\boldsymbol{y_x^{(2n)} = x^{-\frac{2n+1}{2}} f\Big(x^{\frac{1-2n}{2}} y\Big).}$

Преобразование $x = e^t$, $y = x^{\frac{2n-1}{2}} w(t)$ приводит к автономному уравнению вида 2.4.3.26, которое можно свести к ОДУ $(2n-2)$-го порядка.

7. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = x^{-n-k} f(y x^k).}$

Частный случай ОДУ 2.4.3.37.

1°. Преобразование $t = \ln x$, $z = yx^k$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31.

2°. Преобразование $z = yx^k$, $w = xy'_x/y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

8. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = y x^{-n} f(x^p y^q).}$

Частный случай ОДУ 2.4.3.38. Преобразование $t = x^p y^q$, $w = xy'_x/y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

9. $\boldsymbol{y y_x^{(2n+1)} = f(x).}$

Интегрируя, получим ОДУ $2n$-го порядка:

$$2\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m y_x^{(m)} y_x^{(2n-m)} + (-1)^n \left[y_x^{(n)}\right]^2 = 2\int f(x)\,dx + C,$$

где $y_x^{(0)} \equiv y$.

10. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = (ax+by+c)^{1-n} f\Big(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\Big).}$

1°. При $a\beta - b\alpha = 0$ подстановка $bw = ax+by+c$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31.

2°. При $a\beta - b\alpha \neq 0$ преобразование

$$z = x - x_0, \qquad w = y - y_0,$$

где x_0 и y_0 — константы, которые определяются из линейной алгебраической системы

$$ax_0 + by_0 + c = 0,$$
$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0,$$

приводит к однородному ОДУ вида 2.4.3.36:

$$w_z^{(n)} = z^{1-n} F\Big(\frac{w}{z}\Big), \qquad \text{где} \quad F(\xi) = (a+b\xi)^{1-n} f\Big(\frac{a+b\xi}{\alpha+\beta\xi}\Big).$$

11. $\boldsymbol{(ax+b)^n (cx+d) y_x^{(n)} = f\Big(\dfrac{y}{(cx+d)^{n-1}}\Big).}$

Преобразование $\xi = \ln\Big|\dfrac{ax+b}{cx+d}\Big|$, $w = \dfrac{y}{(cx+d)^{n-1}}$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31.

12. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = (ax^2+bx+c)^{-\frac{1+n}{2}} f\Big(y(ax^2+bx+c)^{\frac{1-n}{2}}\Big).}$

1°. Преобразование

$$t = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \qquad w = y(ax^2+bx+c)^{\frac{1-n}{2}} \tag{1}$$

приводит к автономному ОДУ для функции $w = w(t)$, порядок которого можно понизить с помощью подстановки $z(w) = w_t'$.

2°. Пусть $n = 2m$ — четное число ($m = 1, 2, 3, \ldots$). В этом случае преобразование (1) приводит к ОДУ вида 2.4.3.26, порядок которого можно понизить на две единицы.

Полагая $P = ax^2+bx+c$, $y = wP^{\frac{2m-1}{2}}$ и умножая обе части уравнения на $w_x' = P^{-\frac{1+2m}{2}}\Big(Py_x' + \dfrac{1-2m}{2}P_x' y\Big)$, получим

$$\Big(Py_x' + \frac{1-2m}{2}P_x' y\Big) y_x^{(2m)} = f(w) w_x'.$$

Интегрируя обе части этого выражения по x (левая часть интегрируется по частям), имеем

$$\sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k \psi_x^{(k)} y_x^{(2m-1-k)} + (-1)^{m-1} \int \psi_x^{(m-1)} y_x^{(m+1)}\, dx = \int f(w)\, dw + C, \tag{2}$$

где

$$\psi_x^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k}\Big(Py'_x + \frac{1-2m}{2}P'_x y\Big) = Py_x^{(k+1)} + \Big(k-m+\frac{1}{2}\Big)P'_x y_x^{(k)} + ak(k-2m)y_x^{(k-1)}$$

(напомним, что $n = 2m$). Можно показать, что подынтегральное выражение в левой части (2) является полным дифференциалом. В результате получим первый интеграл

$$\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k\big[Py_x^{(k+1)} + \big(k-m+\tfrac{1}{2}\big)P'_x y_x^{(k)} + ak(k-2m)y_x^{(k-1)}\big]y_x^{(2m-1-k)} +$$
$$+ (-1)^{m-1}\Big\{\tfrac{1}{2}P\big[y_x^{(m)}\big]^2 - \tfrac{1}{2}P'_x y_x^{(m-1)}y_x^{(m)} + a(1-m^2)y_x^{(m-2)}y_x^{(m)} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}am^2\big[y_x^{(m-1)}\big]^2\Big\} = \int f(w)\,dw + C.$$

13. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = e^{\alpha x} f(ye^{-\alpha x})}$.

Подстановка $w(x) = ye^{-\alpha x}$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31.

14. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = yf(e^{\alpha x}y^m)}$.

Преобразование $z = e^{\alpha x}y^m$, $w(z) = y'_x/y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

15. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = x^{-n} f(x^m e^{\alpha y})}$.

Преобразование $z = x^m e^{\alpha y}$, $w(z) = xy'_x$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

16. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = a^n y + F(x, y'_x - ay)}$.

1°. Подстановка $u = y'_x - ay$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка:

$$u_x^{(n-1)} + au_x^{(n-2)} + \cdots + a^{n-1}u = F(x, u).$$

2°. При $F(x, u) = f(u)$ рассматриваемое уравнение допускает частное решение экспоненциального вида

$$y = Ce^{ax} + k,$$

где C — произвольная постоянная, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $a^n k + f(-ak) = 0$.

17. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = F(x, xy'_x - y)}$.

Подстановка $u = xy'_x - y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка: $\dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\Big(\dfrac{u'_x}{x}\Big) = F(x, u)$.

18. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = F\big(x,\, xy'_x - my\big)}$.

Здесь m — положительное целое число и $n \geqslant m+1$. Подстановка $u = xy'_x - my$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка: $\zeta_x^{(n-m-1)} = F(x, u)$, где $\zeta = u_x^{(m)}/x$.

19. $\boldsymbol{y_x^{(2n)} = a^n y + F\big(x, y''_{xx} - ay\big).}$

1°. Подстановка $u(x) = y''_{xx} - ay$ приводит к ОДУ $(2n-2)$-го порядка:

$$u_x^{(2n-2)} + a u_x^{(2n-4)} + \cdots + a^{n-1} u = F(x, u).$$

В частности, при $n = 2$ имеем

$$u''_{xx} + au = F(x, u).$$

2°. При $F(x, u) = f(u)$ исходное ОДУ допускает частное решение вида

$$y = \begin{cases} C_1 \exp\big(-x\sqrt{a}\,\big) + C_2 \exp\big(x\sqrt{a}\,\big) + k & \text{при} \;\; a > 0, \\ C_1 \cos\big(x\sqrt{-a}\,\big) + C_2 \sin\big(x\sqrt{-a}\,\big) + k & \text{при} \;\; a < 0, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $a^n k + f(-ak) = 0$.

20. $\boldsymbol{y_x^{(2n)} = a^2 y + F\big(x, y_x^{(n)} + ay\big).}$

Подстановка $u = y_x^{(n)} + ay$ приводит к ОДУ n-го порядка: $u_x^{(n)} = au + F(x, u)$.

21. $\boldsymbol{x y_x^{(n)} + (a + n - 1) y_x^{(n-1)} = F(x, x y'_x + ay).}$

Подстановка $u = xy'_x + ay$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка: $u_x^{(n-1)} = F(x, u)$.

22. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = \dfrac{\varphi_x^{(n)}}{\varphi} y + F\Big(x, y'_x - \dfrac{\varphi'_x}{\varphi} y\Big), \qquad \varphi = \varphi(x).}$

Подстановка $w = y'_x - \dfrac{\varphi'_x}{\varphi} y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

23. $\boldsymbol{(2n-1) y y_x^{(2n+1)} + (2n+1) y'_x y_x^{(2n)} = f(x).}$

После однократного интегрирования имеем

$$(2n-1) y y_x^{(2n)} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} y_x^{(k)} y_x^{(2n-k)} + (-1)^{n+1} \big[y_x^{(n)}\big]^2 = \int f(x)\,dx + 2C_2.$$

Интегрируя далее, получим ОДУ $(2n-1)$-го порядка:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2n-1-2k)(-1)^k y_x^{(k)} y_x^{(2n-1-k)} = 2C_2 x + C_1 + \int_{x_0}^{x} (x-t) f(t)\,dt.$$

Интегрируя третий раз, приходим к ОДУ $(2n-2)$-го порядка:

$$\sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(2n-k-1)(-1)^k y_x^{(k)} y_x^{(2n-2-k)} + \tfrac{1}{2}(-1)^{n-1} n^2 \big[y_x^{(n-1)}\big]^2 =$$

$$= C_2 x^2 + C_1 x + C_0 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f(t)\,dt.$$

24. $\boldsymbol{yy_x^{(n)} - y_x' y_x^{(n-1)} = f(x)y^2.}$

Интегрируя, получим линейное однородное ОДУ $(n-1)$-го порядка:

$$y_x^{(n-1)} = \Bigl[\int f(x)\,dx + C\Bigr]y.$$

25. $\boldsymbol{yy_x^{(n)} = y_x' y_x^{(n-1)} + f(x)yy_x^{(n-1)}.}$

Интегрируя, получим линейное ОДУ $(n-1)$-го порядка:

$$y_x^{(n-1)} = C\exp\Bigl[\int f(x)\,dx\Bigr]y.$$

26. $\boldsymbol{\sum\limits_{m=1}^{n} a_m y_x^{(2m)} = f(y).}$

Это ОДУ допускает первый интеграл:

$$\sum_{m=1}^{n} a_m\Bigl\{\sum_{\nu=1}^{m-1}(-1)^\nu y_x^{(\nu)} y_x^{(2m-\nu)} + \frac{1}{2}(-1)^m\bigl[y_x^{(m)}\bigr]^2\Bigr\} + \int f(y)\,dy = C,$$

где C — произвольная постоянная. Порядок полученного уравнения можно понизить с помощью подстановки $w(y) = y_x'$.

27. $\boldsymbol{\sum\limits_{m=1}^{n} a_m x^m y_x^{(m)} = f(y).}$

Подстановка $t = \ln|x|$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31.

28. $\boldsymbol{y\sum\limits_{m=0}^{n} a_m y_x^{(2m+1)} = f(x).}$

Интегрируя, получим ОДУ $2n$-го порядка:

$$\sum_{m=0}^{n} a_m\Bigl\{2\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^\nu y_x^{(\nu)} y_x^{(2m-\nu)} + (-1)^m\bigl[y_x^{(m)}\bigr]^2\Bigr\} = 2\int f(x)\,dx + C,$$

где $y_x^{(0)} = y$.

29. $\boldsymbol{\sum\limits_{m=0}^{n} a_m y_x^{(m)} y_x^{(2n+1-m)} = f(x).}$

Это ОДУ допускает первый интеграл:

$$2\sum_{m=0}^{n-1} A_m y_x^{(m)} y_x^{(2n-m)} + A_n\bigl[y_x^{(n)}\bigr]^2 = 2\int f(x)\,dx + C,$$

где

$$A_m = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}a_k = a_m - a_{m-1} + a_{m-2} - \cdots\,.$$

Если выполняется условие

$$A_n = 2\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^{n-1+m}A_m,$$

то полученное ОДУ можно дважды проинтегрировать (в частности, см. уравнение 2.4.3.23).

30. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = F\big(x, y_x', y_{xx}'', \ldots, y_x^{(n-1)}\big).}$

Правая часть этого ОДУ не зависит явно от искомой функции y. Подстановка $u(x) = y_x'$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка:

$$u_x^{(n-1)} = F\big(x, u, u_x', \ldots, u_x^{(n-2)}\big).$$

31. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = F\big(y, y_x', y_{xx}'', \ldots, y_x^{(n-1)}\big).}$

Автономное ОДУ общего вида. Правая часть этого ОДУ не зависит явно от независимой переменной x.

Подстановка $u(y) = y_x'$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

32. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = yF\big(y_x'/y, y_{xx}''/y, \ldots, y_x^{(n-1)}/y\big).}$

Частный случай ОДУ 2.4.3.33.

Это уравнение допускает частное решение экспоненциального вида

$$y = Ce^{\lambda x},$$

где C — произвольная постоянная, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения: $\lambda^n = F\big(\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}\big)$.

33. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = yF\big(x, y_x'/y, y_{xx}''/y, \ldots, y_x^{(n-1)}/y\big).}$

ОДУ, однородное относительно искомой функции y. Это ОДУ сохраняет вид при линейном масштабировании искомой переменной по правилу $y \Rightarrow cy$, где c — произвольная ненулевая константа.

Подстановка $u(x) = y_x'/y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

34. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = x^{-n}F\big(y,\, xy_x',\, x^2y_{xx}'',\, \ldots,\, x^{n-1}y_x^{(n-1)}\big).}$

ОДУ, однородное относительно независимой переменной x. Это ОДУ сохраняет вид при линейном масштабировании независимой переменной по правилу $x \Rightarrow cx$, где c — произвольная ненулевая константа.

Подстановка $t = \ln|x|$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31, а подстановка $u(y) = xy_x'$ приводит исходное уравнение к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

35. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = F\big(x,\, xy_x' - y,\, y_{xx}'',\, y_{xxx}''',\, \ldots,\, y_x^{(n-1)}\big).}$

Подстановка $u(x) = xy_x' - y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка:

$$\zeta_x^{(n-2)} = F\big(x,\, u,\, \zeta,\, \zeta_x',\, \ldots,\, \zeta_x^{(n-3)}\big), \quad \text{где} \quad \zeta = u_x'/x.$$

36. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = x^{1-n} F\big(y/x,\, y'_x,\, xy''_{xx},\, \ldots,\, x^{n-2} y_x^{(n-1)}\big).}$

ОДУ, однородное по двум переменным. Это ОДУ не меняется при одинаковом масштабировании независимой и зависимой переменных по правилу $x \Rightarrow cx$ и $y \Rightarrow cy$, где c — произвольная ненулевая константа.

Преобразование $t = \ln x$, $z = y/x$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31, а преобразование $z = y/x$, $w = xy'_x/y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

37. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = x^{-k-n} F\big(x^k y,\, x^{k+1} y'_x,\, \ldots,\, x^{k+n-1} y_x^{(n-1)}\big).}$

Обобщенно-однородное ОДУ. Это ОДУ не меняется при одновременном масштабировании независимой и зависимой переменных по правилу $x \Rightarrow cx$ и $y \Rightarrow c^{-k} y$, где c — произвольная положительная константа.

1°. Преобразование $t = \ln x$, $z = x^k y$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31.

2°. Рассматриваемое ОДУ допускает частное решение степенного вида $y = Ax^{-k}$, где A — константа, подлежащая определению.

38. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = yx^{-n} F\big(x^p y^q,\, xy'_x/y,\, x^2 y''_{xx}/y,\, \ldots,\, x^{n-1} y_x^{(n-1)}/y\big).}$

Обобщенно-однородное ОДУ. При $q \neq 0$ это ОДУ является альтернативной формой представления уравнения 2.4.3.37 при $k = p/q$.

1°. Преобразование $z = x^p y^q$, $w = xy'_x/y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

2°. Рассматриваемое ОДУ допускает частное решение степенного вида $y = Ax^{-p/q}$, где A — константа, подлежащая определению.

39. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = e^{-\alpha x} F\big(e^{\alpha x} y,\, e^{\alpha x} y'_x,\, e^{\alpha x} y''_{xx},\, \ldots,\, e^{\alpha x} y_x^{(n-1)}\big).}$

ОДУ, инвариантное относительно преобразования сдвига-масштабирования. Это ОДУ не меняется при одновременном сдвиге по независимой переменной и масштабировании зависимой переменной по правилу $x \Rightarrow x + b$ и $y \Rightarrow cy$, где $c = e^{-\alpha b}$, b — произвольная постоянная.

1°. Подстановка $z = e^{\alpha x} y$ приводит к автономному ОДУ вида 2.4.3.31, а преобразование $z = e^{\alpha x} y$, $w = y'_x/y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

2°. Рассматриваемое ОДУ допускает частное решение экспоненциального вида $y = Ae^{-\alpha x}$, где A — константа, подлежащая определению.

40. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = yF\big(e^{\beta x} y^m,\, y'_x/y,\, y''_{xx}/y,\, \ldots,\, y_x^{(n-1)}/y\big).}$

ОДУ, инвариантное относительно преобразования сдвига-масштабирования. При $m \neq 0$ это ОДУ является альтернативной формой представления уравнения 2.4.3.39 при $\alpha = \beta/m$.

1°. Преобразование $z = e^{\beta x} y^m$, $w = y'_x/y$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

2°. Рассматриваемое ОДУ допускает частное решение экспоненциального вида $y = Ae^{-\beta x/m}$, где A — константа, подлежащая определению.

41. $\boldsymbol{y_x^{(n)} = x^{-n} F\big(x^m e^{\alpha y},\, xy'_x,\, x^2 y''_{xx},\, \ldots,\, x^{n-1} y_x^{(n-1)}\big).}$

ОДУ, инвариантное относительно преобразования масштабирования-сдвига. Это ОДУ не меняется при одновременном масштабировании независимой переменной и сдвиге по зависимой переменной по правилу $x \Rightarrow bx$ и $y \Rightarrow y + c$, где $b = e^{-c\alpha/m}$, c — произвольная постоянная.

1°. Преобразование $z = x^m e^{\alpha y}$, $w = xy'_x$ приводит к ОДУ $(n-1)$-го порядка.

2°. Рассматриваемое ОДУ допускает частное решение логарифмического вида $y = -(m/\alpha)\ln(Ax)$, где A — константа, подлежащая определению.

► *Больше точных решений линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений можно найти в специализированных справочниках Камке (1976), Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003, 2018).*

Литература к главе 2

Абрамовиц М., Стиган И. (ред.). *Справочник по специальным функциям. М.: Наука*, 1979.

Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции, т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*. М.: Наука, 1973.

Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции, т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*. М.: Наука, 1974.

Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции, т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье*. М.: Наука, 1967.

Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А.В. *Дифференциальные уравнения (структурная теория), 2-е изд.* Санкт-Петербург: Лань, 2018.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Физматлит, 2001.

Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 5-е изд.* М.: Наука, 1976.

Сайго М., Килбас А. А. Решение одного класса линейных дифференциальных уравнений в терминах функции типа Миттаг-Леффлера *Дифференциальные уравнения*, 2000, т. 38, № 2, с. 168–176.

Magnus W., Oberhettinger F., Soni R. P. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, 3rd ed.* Berlin: Springer, 1966.

McLachlan N. W. *Bessel Functions for Engineers*. Oxford: Clarendon Press, 1955.

McLachlan N. W. *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford: Clarendon Press, 1947.

Murphy G. M. *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*. New York, D. Van Nostrand, 1960.

Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. (eds.) *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge: NIST and Cambridge Univ. Press, 2010.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition*. Boca Raton — London: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton — London: CRC Press, 2018.

Polyanin A. D., Zhurov A. I. Parametrically defined nonlinear differential equations and their solutions: Applications in fluid dynamics. *Applied Math. Letters*, 2016, Vol. 55, pp. 72–80.

Polyanin A. D., Zhurov A. I. Parametrically defined nonlinear differential equations, differential-algebraic equations, and implicit ODEs: Transformations, general solutions, and integration methods. *Applied Math. Letters*, 2017, Vol. 64, pp. 59–66.

Slavyanov S. Yu., Lay W. *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities*. Oxford: Oxford University Press, 2000.

Weisstein E. W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, 2nd ed.* Boca Raton—London: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.

Whittaker E. T., Watson G. N. *A Course of Modern Analysis, Vols. 1–2*. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

Zwillinger D. *Handbook of Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1989.

3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Предварительные замечания. В данной главе описаны точные решения некоторых линейных и нелинейных систем, состоящих из двух или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Указаны также специальные преобразования, первые интегралы и редукции, приводящие к более простым отдельным (не связанным между собой) ОДУ.

3.1. Линейные системы двух ОДУ

3.1.1. Системы ОДУ первого порядка

1. $\boldsymbol{x'_t = ax + by, \quad y'_t = cx + dy.}$

Система двух линейных однородных ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение, соответствующее данной системе ОДУ, является квадратным уравнением

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0, \tag{1}$$

которое имеет дискриминант

$$D = (a-d)^2 + 4bc. \tag{2}$$

1°. Случай $ad - bc \neq 0$. Тривиальное решение $x = y = 0$ определяет единственную стационарную точку, которая является

$$\begin{aligned} &\text{узлом, если } D = 0;\\ &\text{узлом, если } D > 0 \ \text{ и } \ ad - bc > 0;\\ &\text{седлом, если } D > 0 \ \text{ и } \ ad - bc < 0;\\ &\text{фокусом, если } D < 0 \ \text{ и } \ a + d \neq 0;\\ &\text{центром, если } D < 0 \ \text{ и } \ a + d = 0. \end{aligned}$$

1.1. При $D > 0$ характеристическое уравнение (1) имеет два различных действительных корня

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\bigl(a + d + \sqrt{D}\,\bigr), \qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\bigl(a + d - \sqrt{D}\,\bigr).$$

В этом случае общее решение рассматриваемой системы ОДУ имеет вид

$$\begin{aligned} x &= C_1 b e^{\lambda_1 t} + C_2 b e^{\lambda_2 t},\\ y &= C_1(\lambda_1 - a)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - a)e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

1.2. При $D<0$ характеристическое уравнение (1) имеет два комплексно сопряженных корня

$$\lambda_{1,2}=\sigma\pm i\beta,\qquad \sigma=\tfrac{1}{2}(a+d),\qquad \beta=\tfrac{1}{2}\sqrt{|D|},\qquad i^2=-1.$$

В этом случае общее решение рассматриваемой системы ОДУ имеет вид

$$\begin{aligned}
&x=be^{\sigma t}\bigl[C_1\sin(\beta t)+C_2\cos(\beta t)\bigr],\\
&y=e^{\sigma t}\bigl\{[(\sigma-a)C_1-\beta C_2]\sin(\beta t)+[\beta C_1+(\sigma-a)C_2]\cos(\beta t)\bigr\},
\end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

1.3. При $D=0$, $a\neq d$ характеристическое уравнение (1) имеет два равных действительных корня $\lambda_1=\lambda_2$ и общее решение рассматриваемой системы ОДУ имеет вид

$$\begin{aligned}
x&=2b\Bigl(C_1+\frac{C_2}{a-d}+C_2t\Bigr)\exp\Bigl(\frac{a+d}{2}t\Bigr),\\
y&=[(d-a)C_1+C_2+(d-a)C_2t]\exp\Bigl(\frac{a+d}{2}t\Bigr),
\end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

1.4. При $a=d\neq 0$, $b=0$ общее решение рассматриваемой системы ОДУ имеет вид

$$x=C_1e^{at},\qquad y=(cC_1t+C_2)e^{at}.$$

1.5. При $a=d\neq 0$, $c=0$ общее решение рассматриваемой системы ОДУ имеет вид

$$x=(bC_1t+C_2)e^{at},\qquad y=C_1e^{at}.$$

2°. Случай $ad-bc=0$ $(a^2+b^2>0)$. Вся линия $ax+by=0$ состоит из стационарных точек. Исходную систему ОДУ можно записать в виде

$$x'_t=ax+by,\qquad y'_t=k(ax+by). \tag{3}$$

2.1. При $a+bk\neq 0$ общее решение системы ОДУ (3) имеет вид

$$x=bC_1+C_2e^{(a+bk)t},\qquad y=-aC_1+kC_2e^{(a+bk)t}.$$

2.2. При $a+bk=0$ общее решение системы ОДУ (3) имеет вид

$$x=C_1(bkt-1)+bC_2t,\qquad y=k^2bC_1t+(bk^2t+1)C_2.$$

2. $\boldsymbol{x'_t=a_1x+b_1y+c_1,\qquad y'_t=a_2x+b_2y+c_2.}$

Общее решение этой системы является суммой общего решения соответствующей линейной однородной системы ОДУ при $c_1=c_2=0$ (см. предыдущую систему 3.1.1.1) и любого частного решения исходной линейной неоднородной системы ОДУ.

1°. Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Тогда имеется простое частное решение

$$x = x_0, \qquad y = y_0,$$

где константы x_0 и y_0 определяются из линейной алгебраической системы уравнений

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \qquad a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0.$$

2°. Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ и $a_1^2 + b_1^2 > 0$. Тогда исходную систему ОДУ можно записать в виде

$$x'_t = ax + by + c_1, \qquad y'_t = k(ax + by) + c_2.$$

2.1. Если $\sigma = a + bk \neq 0$, то рассматриваемая система ОДУ имеет частное решение

$$x = b\sigma^{-1}(c_1k - c_2)t - \sigma^{-2}(ac_1 + bc_2), \qquad y = kx + (c_2 - c_1k)t.$$

2.2. Если $\sigma = a + bk = 0$, то рассматриваемая система ОДУ имеет частное решение

$$x = \tfrac{1}{2}b(c_2 - c_1k)t^2 + c_1t, \qquad y = kx + (c_2 - c_1k)t.$$

3. $\boldsymbol{x'_t = f(t)x + g(t)y, \quad y'_t = g(t)x + f(t)y.}$

Решение:

$$x = e^F(C_1e^G + C_2e^{-G}), \qquad y = e^F(C_1e^G - C_2e^{-G}),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и использованы обозначения

$$F = \int f(t)\,dt, \qquad G = \int g(t)\,dt.$$

4. $\boldsymbol{x'_t = f(t)x + g(t)y, \quad y'_t = -g(t)x + f(t)y.}$

Решение:

$$x = F(C_1\cos G + C_2\sin G), \qquad y = F(-C_1\sin G + C_2\cos G),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и использованы обозначения

$$F = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr], \qquad G = \int g(t)\,dt.$$

5. $\boldsymbol{x'_t = f(t)x + g(t)y, \quad y'_t = ag(t)x + [f(t) + bg(t)]y.}$

Преобразование

$$x = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]u, \qquad y = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]v, \qquad \tau = \int g(t)\,dt$$

приводит рассматриваемую систему к частному случаю системы линейных однородных ОДУ с постоянными коэффициентами вида 3.1.1.1:

$$u'_\tau = v, \qquad v'_\tau = au + bv.$$

6. $\boldsymbol{x'_t = f(t)x + g(t)y, \quad y'_t = a[f(t) + ah(t)]x + a[g(t) - h(t)]y.}$

Умножая первое уравнение на $-a$ и почленно складывая со вторым уравнением, имеем

$$y'_t - ax'_t = -ah(t)(y - ax).$$

Полагая $U = y - ax$ и интегрируя, находим первый интеграл

$$y - ax = C_1 \exp\Bigl[-a \int h(t)\,dt\Bigr], \qquad (*)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Решив $(*)$ относительно y и подставив полученное выражение в первое уравнение рассматриваемой системы, можно вывести линейное ОДУ первого порядка для x.

7. $\boldsymbol{x'_t = f(t)x + g(t)y, \quad y'_t = h(t)x + p(t)y.}$

1°. Выразим y из первого уравнения и подставив во второе, получим линейное ОДУ второго порядка

$$gx''_{tt} - (fg + gp + g'_t)x'_t + (fgp - g^2h + fg'_t - f'_tg)x = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение легко интегрируется, если, например, выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}
&1) \quad fgp - g^2h + fg'_t - f'_tg = 0;\\
&2) \quad fgp - g^2h + fg'_t - f'_tg = ag, \quad fg + gp + g'_t = bg,
\end{aligned}$$

где a и b — некоторые постоянные. В первом случае ОДУ (1) подстановкой $z(t) = x'_t$ сводится к линейному ОДУ первого порядка. Во втором случае ОДУ (1) является линейным ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Значительное число других разрешимых случаев уравнения (1) можно найти в разд. 2.2.

2°. Пусть известно частное решение рассматриваемой системы

$$x = x_0(t), \qquad y = y_0(t).$$

Тогда общее решение этой системы определяется по формулам

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1x_0(t) + C_2x_0(t)\int \frac{g(t)F(t)P(t)}{x_0^2(t)}\,dt,\\
y(t) &= C_1y_0(t) + C_2\biggl[\frac{F(t)P(t)}{x_0(t)} + y_0(t)\int \frac{g(t)F(t)P(t)}{x_0^2(t)}\,dt\biggr],
\end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и использованы обозначения

$$F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr], \qquad P(t) = \exp\Bigl[\int p(t)\,dt\Bigr].$$

3.1.2. Системы ОДУ второго порядка

1. $\boldsymbol{x''_{tt} = ax + by, \quad y''_{tt} = cx + dy.}$

Система двух линейных однородных ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (частный случай системы ОДУ 3.1.3.2 при $n = 2$).

Характеристическое уравнение, соответствующее данной системе ОДУ, является биквадратным алгебраическим уравнением

$$\lambda^4 - (a+d)\lambda^2 + ad - bc = 0.$$

1°. Пусть $ad - bc \neq 0$.

1.1. При $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$ характеристическое уравнение имеет четыре различных корня $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ (действительных или комплексно-сопряженных). В этом случае общее решение рассматриваемой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
x &= C_1 b e^{\lambda_1 t} + C_2 b e^{\lambda_2 t} + C_3 b e^{\lambda_3 t} + C_4 b e^{\lambda_4 t},\\
y &= C_1(\lambda_1^2 - a)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2^2 - a)e^{\lambda_2 t} + C_3(\lambda_3^2 - a)e^{\lambda_3 t} + C_4(\lambda_4^2 - a)e^{\lambda_4 t},
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные. При наличии комплексных корней в решении следует выделить действительную часть.

1.2. Решение при $(a-d)^2 + 4bc = 0$ и $a \neq d$:

$$\begin{aligned}
x &= 2C_1\Bigl(bt + \frac{2bk}{a-d}\Bigr)e^{kt/2} + 2C_2\Bigl(bt - \frac{2bk}{a-d}\Bigr)e^{-kt/2} + 2bC_3te^{kt/2} + 2bC_4te^{-kt/2},\\
y &= C_1(d-a)te^{kt/2} + C_2(d-a)te^{-kt/2} + C_3[(d-a)t + 2k]e^{kt/2} +\\
&\quad + C_4[(d-a)t - 2k]e^{-kt/2},
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, $k = \sqrt{2(a+d)}$.

1.3. Решение при $a = d \neq 0$, $b = 0$:

$$\begin{aligned}
x &= 2\sqrt{a}\, C_1 e^{\sqrt{a}\, t} + 2\sqrt{a}\, C_2 e^{-\sqrt{a}\, t},\\
y &= cC_1te^{\sqrt{a}\, t} - cC_2te^{-\sqrt{a}\, t} + C_3e^{\sqrt{a}\, t} + C_4e^{-\sqrt{a}\, t}.
\end{aligned}$$

1.4. Решение при $a = d \neq 0$, $c = 0$:

$$\begin{aligned}
x &= bC_1te^{\sqrt{a}\, t} - bC_2te^{-\sqrt{a}\, t} + C_3e^{\sqrt{a}\, t} + C_4e^{-\sqrt{a}\, t},\\
y &= 2\sqrt{a}\, C_1 e^{\sqrt{a}\, t} + 2\sqrt{a}\, C_2 e^{-\sqrt{a}\, t}.
\end{aligned}$$

2°. Случай $ad - bc = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$. Исходную систему ОДУ можно записать в виде

$$x''_{tt} = ax + by, \qquad y''_{tt} = k(ax + by).$$

2.1. Решение при $a + bk \neq 0$:

$$\begin{aligned}
x &= C_1 \exp\bigl(t\sqrt{a+bk}\,\bigr) + C_2 \exp\bigl(-t\sqrt{a+bk}\,\bigr) + C_3bt + C_4b,\\
y &= C_1k \exp\bigl(t\sqrt{a+bk}\,\bigr) + C_2k \exp\bigl(-t\sqrt{a+bk}\,\bigr) - C_3at - C_4a.
\end{aligned}$$

2.2. Решение при $a + bk = 0$:

$$x = C_1bt^3 + C_2bt^2 + C_3t + C_4,$$
$$y = kx + 6C_1t + 2C_2.$$

2. $\boldsymbol{x''_{tt} = a_1x + b_1y + c_1, \quad y''_{tt} = a_2x + b_2y + c_2.}$

Общее решение этой системы является суммой общего решения соответствующей линейной однородной системы ОДУ при $c_1 = c_2 = 0$ (см. предыдущую систему 3.1.2.1) и любого частного решения исходной линейной неоднородной системы ОДУ.

1°. Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Тогда имеется простое частное решение

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

где константы x_0 и y_0 определяются из линейной алгебраической системы уравнений

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \quad a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0.$$

2°. Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ и $a_1^2 + b_1^2 > 0$. Тогда исходную систему ОДУ можно записать в виде

$$x''_{tt} = ax + by + c_1, \quad y''_{tt} = k(ax + by) + c_2.$$

2.1. Если $\sigma = a + bk \neq 0$, то рассматриваемая система ОДУ имеет частное решение

$$x = \tfrac{1}{2}b\sigma^{-1}(c_1k - c_2)t^2 - \sigma^{-2}(ac_1 + bc_2), \quad y = kx + \tfrac{1}{2}(c_2 - c_1k)t^2.$$

2.2. Если $\sigma = a + bk = 0$, то рассматриваемая система ОДУ имеет частное решение

$$x = \tfrac{1}{24}b(c_2 - c_1k)t^4 + \tfrac{1}{2}c_1t^2, \quad y = kx + \tfrac{1}{2}(c_2 - c_1k)t^2.$$

3. $\boldsymbol{x''_{tt} - ay'_t + bx = 0, \quad y''_{tt} + ax'_t + by = 0.}$

Эта система ОДУ используется для описания горизонтального движения маятника с учетом вращения Земли.

Решение при $a^2 + 4b > 0$:

$$x = C_1\cos(\alpha t) + C_2\sin(\alpha t) + C_3\cos(\beta t) + C_4\sin(\beta t),$$
$$y = -C_1\sin(\alpha t) + C_2\cos(\alpha t) - C_3\sin(\beta t) + C_4\cos(\beta t),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а параметры α и β определяются так:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}, \quad \beta = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}.$$

4. $\boldsymbol{x''_{tt} + a_1x'_t + b_1y'_t + c_1x + d_1y = k_1e^{i\omega t}, \quad y''_{tt} + a_2x'_t + b_2y'_t + c_2x + d_2y = k_2e^{i\omega t}.}$

Системы такого типа часто возникают в теории колебаний (например, колебания корабля и судового гироскопа). Общее решение этой линейной неоднородной системы ОДУ с постоянным коэффициентом выражается как сумма любого из ее частных решений и общего решения соответствующей линейное однородной системы (при $k_1 = k_2 = 0$).

1°. Частное решение ищется методом неопределенных коэффициентов в виде

$$x = A_* e^{i\omega t}, \quad y = B_* e^{i\omega t}.$$

Подставляя эти выражения в рассматриваемую систему ОДУ, можно получить линейную неоднородную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_* и B_*.

2°. Общее решение линейной однородной системы ОДУ определяется линейной комбинацией ее линейно независимых частных решений. Они ищутся в виде экспоненциальных функций

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}.$$

Подставляя эти выражения в систему ОДУ при $k_1 = k_2 = 0$, получим линейную алгебраическую систему уравнений для неизвестных коэффициентов A и B:

$$(\lambda^2 + a_1\lambda + c_1)A + (b_1\lambda + d_1)B = 0,$$
$$(a_2\lambda + c_2)A + (\lambda^2 + b_2\lambda + d_2)B = 0.$$

Чтобы существовало нетривиальное решение этой системы, ее определитель должен быть равен нулю. Указанное требование приводит к характеристическому уравнению

$$(\lambda^2 + a_1\lambda + c_1)(\lambda^2 + b_2\lambda + d_2) - (b_1\lambda + d_1)(a_2\lambda + c_2) = 0,$$

которое используется для определения экспоненциального показателя λ. Если все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ этого уравнения различны, то общее решение рассматриваемой линейной однородной системы ОДУ имеет вид

$$\begin{aligned} x = &-C_1(b_1\lambda_1 + d_1)e^{\lambda_1 t} - C_2(b_1\lambda_2 + d_1)e^{\lambda_2 t} - \\ &- C_3(b_1\lambda_3 + d_1)e^{\lambda_3 t} - C_4(b_1\lambda_4 + d_1)e^{\lambda_4 t}, \\ y = &\, C_1(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + c_1)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + c_1)e^{\lambda_2 t} + \\ &+ C_3(\lambda_3^2 + a_1\lambda_3 + c_1)e^{\lambda_3 t} + C_4(\lambda_4^2 + a_1\lambda_4 + c_1)e^{\lambda_4 t}, \end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

5. $\boldsymbol{x''_{tt} = a(ty'_t - y), \quad y''_{tt} = b(tx'_t - x).}$

Преобразование

$$u = tx_t - x, \qquad v = ty'_t - y$$

приводит к линейной системе ОДУ первого порядка

$$u'_t = atv, \qquad v'_t = btu.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\text{при } ab > 0\text{:} \quad \begin{cases} u(t) = C_1 a \exp\bigl(\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,t^2\bigr) + C_2 a \exp\bigl(-\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,t^2\bigr), \\ v(t) = C_1\sqrt{ab}\,\exp\bigl(\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,t^2\bigr) - C_2\sqrt{ab}\,\exp\bigl(-\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,t^2\bigr); \end{cases}$$

$$\text{при } ab < 0\text{:} \quad \begin{cases} u(t) = C_1 a \cos\bigl(\frac{1}{2}\sqrt{|ab|}\,t^2\bigr) + C_2 a \sin\bigl(\frac{1}{2}\sqrt{|ab|}\,t^2\bigr), \\ v(t) = -C_1\sqrt{|ab|}\,\sin\bigl(\frac{1}{2}\sqrt{|ab|}\,t^2\bigr) + C_2\sqrt{|ab|}\,\cos\bigl(\frac{1}{2}\sqrt{|ab|}\,t^2\bigr), \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Общее решение исходной системы ОДУ определяется по формулам

$$x = C_3 t + t\int \frac{u(t)}{t^2}\,dt, \qquad y = C_4 t + t\int \frac{v(t)}{t^2}\,dt,$$

в которые надо подставить полученные выше функции $u(t)$ и $v(t)$, C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

6. $\boldsymbol{x''_{tt} = f(t)(a_1 x + b_1 y) + g(t), \quad y''_{tt} = f(t)(a_2 x + b_2 y) + h(t).}$

Пусть k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$k^2 - (a_1 + b_2)k + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Тогда, умножая уравнения системы на константы a_2 и $k - a_1$ соответственно, а затем складывая их почленно, можно переписать систему в виде двух независимых (несвязанных) линейных ОДУ:

$$z''_1 = k_1 f(t) z_1 + a_2 g(t) + (k_1 - a_1)h(t), \quad z_1 = a_2 x + (k_1 - a_1)y \quad (\text{при } k = k_1);$$
$$z''_2 = k_2 f(t) z_2 + a_2 g(t) + (k_2 - a_1)h(t), \quad z_2 = a_2 x + (k_2 - a_1)y \quad (\text{при } k = k_2).$$

Здесь штрих обозначает производную по t.

7. $\boldsymbol{x''_{tt} + f(t)x + g(t)(x - y) + h(t) = 0, \quad y''_{tt} + f(t)y - g(t)(x - y) + p(t) = 0.}$

Сначала сложим оба ОДУ системы почленно, а затем вычтем второе ОДУ из первого. Вводя далее новые переменные по формулам

$$u = x + y, \qquad v = x - y \qquad \bigl(\text{или } x = \tfrac{1}{2}(u + v), \quad y = \tfrac{1}{2}(u - v)\bigr),$$

приходим к двум независимым (несвязанным) линейным ОДУ:

$$u''_{tt} + f(x)u + h(t) + p(t) = 0, \qquad v''_{tt} + [f(t) + 2g(t)]v + h(t) - p(t) = 0.$$

Для простого частного случая $f(t) = a^2 = \text{const}$, $g(t) = b^2 = \text{const}$, $h(t) = p(t) = 0$, решения полученных ОДУ выражается через тригонометрические функции

$$u = C_1 \cos(at) + C_2 \sin(at), \qquad v = C_3 \cos\bigl(\sqrt{a^2 + 2b^2}\,t\bigr) + C_4 \sin\bigl(\sqrt{a^2 + 2b^2}\,t\bigr),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

8. $\boldsymbol{x''_{tt} = f(t)(a_1 x'_t + b_1 y'_t) + g(t), \quad y''_{tt} = f(t)(a_2 x'_t + b_2 y'_t) + h(t).}$

1°. Пусть k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$k^2 - (a_1 + b_2)k + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Тогда, умножая уравнения системы на константы a_2 и $k - a_1$ соответственно, а затем складывая их почленно, можно переписать систему в виде двух независимых (несвязанных) линейных ОДУ:

$$z''_1 = k_1 f(t) z'_1 + a_2 g(t) + (k_1 - a_1)h(t), \quad z_1 = a_2 x + (k_1 - a_1)y \quad (\text{при } k = k_1);$$
$$z''_2 = k_2 f(t) z'_2 + a_2 g(t) + (k_2 - a_1)h(t), \quad z_2 = a_2 x + (k_2 - a_1)y \quad (\text{при } k = k_2).$$

Здесь штрих обозначает производную по t. Полученные ОДУ легко интегрируются, поскольку допускают понижение порядков с помощью подстановок $u_1(t) = z'_1$ и $u_2(t) = z'_2$.

2°. Пусть $g(t) = h(t) \equiv 0$. Интегрируя ОДУ для z_1 и z_2 из п. 1° и возвращаясь к исходным переменным, получим линейную алгебраическую систему для искомых величин x и y:

$$a_2 x + (k_1 - a_1)y = C_1 \int \exp\bigl[k_1 F(t)\bigr]\,dt + C_2,$$
$$a_2 x + (k_2 - a_1)y = C_3 \int \exp\bigl[k_2 F(t)\bigr]\,dt + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, $F(t) = \int f(t)\,dt$.

9. $\boldsymbol{x''_{tt} = af(t)(ty'_t - y), \quad y''_{tt} = bf(t)(tx'_t - x).}$

Преобразование
$$u = tx_t - x, \qquad v = ty'_t - y$$
приводит к линейной системе ОДУ первого порядка
$$u'_t = atf(t)v, \qquad v'_t = btf(t)u.$$

Общее решение этой системы выражается по формулам

$$\text{при } ab > 0\text{:}\quad \begin{cases} u(t) = C_1 a \exp\Bigl(\sqrt{ab}\int tf(t)\,dt\Bigr) + C_2 a \exp\Bigl(-\sqrt{ab}\int tf(t)\,dt\Bigr), \\ v(t) = C_1\sqrt{ab}\,\exp\Bigl(\sqrt{ab}\int tf(t)\,dt\Bigr) - C_2\sqrt{ab}\,\exp\Bigl(-\sqrt{ab}\int tf(t)\,dt\Bigr); \end{cases}$$

$$\text{при } ab < 0\text{:}\quad \begin{cases} u(t) = C_1 a \cos\Bigl(\sqrt{|ab|}\int tf(t)\,dt\Bigr) + C_2 a \sin\Bigl(\sqrt{|ab|}\int tf(t)\,dt\Bigr), \\ v(t) = -C_1\sqrt{|ab|}\,\sin\Bigl(\sqrt{|ab|}\int tf(t)\,dt\Bigr) + C_2\sqrt{|ab|}\,\cos\Bigl(\sqrt{|ab|}\int tf(t)\,dt\Bigr), \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Общее решение исходной системы ОДУ определяется по формулам

$$x = C_3 t + t\int \frac{u(t)}{t^2}\,dt, \qquad y = C_4 t + t\int \frac{v(t)}{t^2}\,dt,$$

в которые надо подставить полученные выше функции $u(t)$ и $v(t)$, C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

10. $\boldsymbol{t^2 x''_{tt} + a_1 t x'_t + b_1 t y'_t + c_1 x + d_1 y = 0,}$
$\boldsymbol{t^2 y''_{tt} + a_2 t x'_t + b_2 t y'_t + c_2 x + d_2 y = 0.}$

Линейная система ОДУ, однородная по независимой переменной (*линейная система ОДУ типа Эйлера*).

1°. Общее решение этой системы определяется линейной комбинацией линейно независимых частных решений, которые ищутся методом неопределенных коэффициентов в виде степенных функций

$$x = A|t|^k, \quad y = B|t|^k.$$

Подставляя эти выражения в систему ОДУ, получим линейную алгебраическую систему уравнений для неизвестных коэффициентов A и B:

$$[k^2 + (a_1 - 1)k + c_1]A + (b_1 k + d_1)B = 0,$$
$$(a_2 k + c_2)A + [k^2 + (b_2 - 1)k + d_2]B = 0.$$

Чтобы существовало нетривиальное решение этой системы, ее определитель должен быть равен нулю. Указанное требование приводит к характеристическому уравнению

$$[k^2 + (a_1 - 1)k + c_1][k^2 + (b_2 - 1)k + d_2] - (b_1 k + d_1)(a_2 k + c_2) = 0,$$

которое используется для определения показателя k. Если все корни $k_1, \ldots, k_4$ этого уравнения различны, то общее решение исходной системы ОДУ имеет вид

$$\begin{aligned} x &= -C_1(b_1 k_1 + d_1)|t|^{k_1} - C_2(b_1 k_2 + d_1)|t|^{k_2} - \\ &\quad - C_3(b_1 k_3 + d_1)|t|^{k_3} - C_4(b_1 k_4 + d_1)|t|^{k_4}, \\ y &= C_1[k_1^2 + (a_1 - 1)k_1 + c_1]|t|^{k_1} + C_2[k_2^2 + (a_1 - 1)k_2 + c_1]|t|^{k_2} + \\ &\quad + C_3[k_3^2 + (a_1 - 1)k_3 + c_1]|t|^{k_3} + C_4[k_4^2 + (a_1 - 1)k_4 + c_1]|t|^{k_4}, \end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

2°. Подстановка $t = \sigma e^\tau$ ($\sigma \neq 0$) приводит к системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами

$$x''_{\tau\tau} + (a_1 - 1)x'_\tau + b_1 y'_\tau + c_1 x + d_1 y = 0,$$
$$y''_{\tau\tau} + a_2 x'_\tau + (b_2 - 1)y'_\tau + c_2 x + d_2 y = 0.$$

11. $\boldsymbol{(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^2 x''_{tt} = ax + by, \quad (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^2 y''_{tt} = cx + dy.}$

Преобразование

$$\tau = \int \frac{dt}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}, \quad u = \frac{x}{\sqrt{|\alpha t^2 + \beta t + \gamma|}}, \quad v = \frac{y}{\sqrt{|\alpha t^2 + \beta t + \gamma|}}$$

приводит к системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами вида 3.1.2.1:

$$u''_{\tau\tau} = (a - \alpha\gamma + \tfrac{1}{4}\beta^2)u + bv,$$
$$v''_{\tau\tau} = cu + (d - \alpha\gamma + \tfrac{1}{4}\beta^2)v.$$

12. $\boldsymbol{x''_{tt} = f(t)(tx'_t - x) + g(t)(ty'_t - y), \quad y''_{tt} = h(t)(tx'_t - x) + p(t)(ty'_t - y).}$

Преобразование

$$u = tx_t - x, \qquad v = ty'_t - y \tag{1}$$

приводит к системе линейных ОДУ первого порядка

$$u'_t = tf(t)u + tg(t)v, \qquad v'_t = th(t)u + tp(t)v. \tag{2}$$

Чтобы найти общее решение этой системы, достаточно знать любое из ее частных решений (см. систему 3.1.1.7).

О решениях некоторых систем вида (2) см. системы 3.1.1.3–3.1.1.6.

Если все функции в (2) пропорциональны, т. е.

$$f(t) = a\varphi(t), \quad g(t) = b\varphi(t), \quad h(t) = c\varphi(t), \quad p(t) = d\varphi(t),$$

где a, b, c, d — некоторые константы, то введение новой независимой переменной по формуле $\tau = \int t\varphi(t)\,dt$ приводит к линейной системе ОДУ с постоянными коэффициентами вида 3.1.1.1.

2°. Пусть найдено общее решение системы (2) в виде

$$u = u(t, C_1, C_2), \qquad v = v(t, C_1, C_2), \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда, подставляя (3) в (1) и интегрируя, получим решение исходной системы ОДУ:

$$x = C_3 t + t\int \frac{u(t, C_1, C_2)}{t^2}\,dt, \qquad y = C_4 t + t\int \frac{v(t, C_1, C_2)}{t^2}\,dt,$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

3.1.3. Другие линейные системы ОДУ

1. $\boldsymbol{x'_t + ay'_t + by = f(t), \quad x''_{tt} + ay''_{tt} + by'_t + x + ay = g(t).}$

Эта система имеет единственное решение:

$$x = g + \tfrac{a}{b}g'_t - f'_t - \tfrac{a}{b}\big(f + f''_{tt}\big), \qquad y = \tfrac{1}{b}\big(f + f''_{tt} - g'_t\big).$$

Важно отметить, что решение этой системы ОДУ не содержит произвольных констант.

2. $\boldsymbol{x_t^{(n)} = a_1x + b_1y + f_1(t), \quad y_t^{(n)} = a_2x + b_2y + f_2(t).}$

Умножим второе ОДУ системы на k и сложим его почленно к первым ОДУ. После элементарных преобразований получим

$$(x + ky)_t^{(n)} = (a_1 + ka_2)\Big(x + \frac{b_1 + kb_2}{a_1 + ka_2}y\Big) + f_1(t) + kf_2(t). \tag{1}$$

Выбираем константу k так, чтобы выполнялось равенство

$$a_2k^2 + (a_1 - b_2)k - b_1 = 0. \tag{2}$$

В этом случае уравнение (1) представляет собой линейное неоднородное ОДУ n-го порядка для $z = x + ky$:

$$z_t^{(n)} = (a_1 + ka_2)z + f_1(t) + kf_2(t), \tag{3}$$

которое является частным случаем уравнения 2.4.1.9. Интегрируя ОДУ (3), получим

$$x + ky = C_1\varphi_1(t,k) + \cdots + C_n\varphi_n(t,k) + \psi(t,k), \tag{4}$$

где $\varphi_m(t,k)$ — линейно независимые частные решения соответствующего линейного однородного ОДУ (3) при $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0$ (о решениях этого уравнения см. ОДУ 2.4.1.7), а $\psi(t,k)$ — любое частное решение неоднородного ОДУ (3). Если корни k_1 и k_2 квадратного уравнения (2) различны, то (4) дает два соотношения

$$\begin{aligned}
x + k_1 y &= C_1\varphi_1(t,k_1) + \cdots + C_n\varphi_n(t,k_1) + \psi(t,k_1),\\
x + k_2 y &= C_{n+1}\varphi_1(t,k_2) + \cdots + C_{2n}\varphi_n(t,k_2) + \psi(t,k_2),
\end{aligned}$$

которые представляют собой алгебраическую систему уравнений, позволяющую найти искомые функции x и y.

Замечание 3.1. *Описанный выше метод решения системы ОДУ 3.1.3.2 называется методом Даламбера.*

3.2. Линейные системы трех и более ОДУ

1. $x'_t = ax, \quad y'_t = bx + cy, \quad z'_t = dx + ky + pz.$

Решение:

$$\begin{aligned}
x &= C_1 e^{at},\\
y &= \frac{bC_1}{a-c}e^{at} + C_2 e^{ct},\\
z &= \frac{C_1}{a-p}\Big(d + \frac{bk}{a-c}\Big)e^{at} + \frac{kC_2}{c-p}e^{ct} + C_3 e^{pt},
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2. $x'_t = cy - bz, \quad y'_t = az - cx, \quad z'_t = bx - ay.$

1°. Первые интегралы:

$$ax + by + cz = A, \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = B^2, \tag{2}$$

где A и B — произвольные постоянные. Отсюда следует, что интегральные кривые представляют собой окружности, образованные пересечением плоскостей (1) и сфер (2).

2°. Решение:

$$\begin{aligned}
x &= aC_0 + kC_1\cos(kt) + (cC_2 - bC_3)\sin(kt),\\
y &= bC_0 + kC_2\cos(kt) + (aC_3 - cC_1)\sin(kt),\\
z &= cC_0 + kC_3\cos(kt) + (bC_1 - aC_2)\sin(kt),
\end{aligned}$$

где $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, а три из четырех констант интегрирования $C_0, \dots, C_3$ связаны одним соотношением

$$aC_1+bC_2+cC_3=0.$$

3. $\boldsymbol{ax'_t = bc(y-z), \quad by'_t = ac(z-x), \quad cz'_t = ab(x-y).}$

1°. Первый интеграл:

$$a^2x+b^2y+c^2z=A,$$

где A — произвольная постоянная. Отсюда следует, что интегральные кривые являются плоскими кривыми.

2°. Решение:

$$\begin{aligned}
x &= C_0+kC_1\cos(kt)+a^{-1}bc(C_2-C_3)\sin(kt),\\
y &= C_0+kC_2\cos(kt)+ab^{-1}c(C_3-C_1)\sin(kt),\\
z &= C_0+kC_3\cos(kt)+abc^{-1}(C_1-C_2)\sin(kt),
\end{aligned}$$

где $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, а три из четырех констант интегрирования $C_0, \dots, C_3$ связаны одним соотношением

$$a^2C_1+b^2C_2+c^2C_3=0.$$

4. $\boldsymbol{x'_t = (a_1f+g)x+a_2fy+a_3fz,}$
$\boldsymbol{y'_t = b_1fx+(b_2f+g)y+b_3fz, \quad z'_t = c_1fx+c_2fy+(c_3f+g)z.}$

Здесь $f=f(t)$ и $g=g(t)$.

Преобразование

$$x=\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u, \quad y=\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]v, \quad z=\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]w, \quad \tau=\int f(t)\,dt$$

приводит к системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами

$$u'_\tau=a_1u+a_2v+a_3w, \quad v'_\tau=b_1u+b_2v+b_3w, \quad w'_\tau=c_1u+c_2v+c_3w.$$

5. $\boldsymbol{x'_t = h(t)y-g(t)z, \ \ y'_t = f(t)z-h(t)x, \ \ z'_t = g(t)x-f(t)y.}$

1°. Первый интеграл:

$$x^2+y^2+z^2=C^2,$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Рассматриваемая система может быть сведена к уравнению Риккати (см. Камке, 1976).

6. $\boldsymbol{x'_k = a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\dots+a_{kn}x_n; \qquad k=1,2,\dots,n.}$

Система линейных однородных ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами общего вида.

Общее решение линейной однородной системы ОДУ является линейной комбинацией линейно независимых частных решений, которые ищутся методом неопределенных коэффициентов в виде экспоненциальных функций

$$x_k = A_k e^{\lambda t}; \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставляя эти выражения в рассматриваемую систему, получим линейную однородную систему алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов A_k:

$$a_{k1}A_1 + a_{k2}A_2 + \cdots + (a_{kk} - \lambda)A_k + \cdots + a_{kn}A_n = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Чтобы существовало нетривиальное решение этой системы, ее определитель должен быть равен нулю. Указанное требование приводит к алгебраическому уравнению степени n для экспоненциального показателя λ.

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Bigl(a_{mk}t^2\frac{d^2x_k}{dt^2} + b_{mk}t\frac{dx_k}{dt} + c_{mk}x_k\Bigr) = f_m(t), \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Линейная неоднородная система ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами (типа Эйлера).

1°. Подстановка $t = \pm e^{\xi}$ приводит эту систему к линейной неоднородной системе ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{n}\Bigl[a_{mk}\frac{d^2x_k}{d\xi^2} + (b_{mk} - a_{mk})\frac{dx_k}{d\xi} + c_{mk}x_k\Bigr] = f_m(\pm e^{\xi}), \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

которую можно решить, например, с помощью преобразования Лапласа.

2°. Частные решения соответствующей линейной однородной системы ОДУ (при $f_m(t) \equiv 0$) ищутся в виде степенных функций

$$x_1 = A_1|t|^{\sigma}, \quad x_2 = A_2|t|^{\sigma}, \quad \ldots, \quad y_n = A_n|t|^{\sigma}, \tag{*}$$

где коэффициенты $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ определяются путем решения линейной алгебраической системы уравнений, полученной в результате подстановки выражений (*) в исходную систему ОДУ с последующим делением на t^{σ}. Поскольку алгебраическая система однородна, то для существования нетривиальных решений ее определитель должен быть равен нулю. Указанное требование приводит к алгебраическому уравнению для показателя степени σ.

3.3. Нелинейные системы двух ОДУ

3.3.1. Системы ОДУ первого порядка

1. $x'_t = xf(ax - by) + g(ax - by), \quad y'_t = yf(ax - by) + h(ax - by).$

Здесь $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

Умножим первое уравнение на a, второе уравнение на $-b$, а затем сложим почленно. В результате получим автономное ОДУ первого порядка

$$z'_t = zf(z) + ag(z) - bh(z), \qquad z = ax - by. \tag{1}$$

Будем рассматривать это уравнение вместе с первым уравнением исходной системы, которое запишем в виде

$$x'_t = xf(z) + g(z). \tag{2}$$

Общее решение изолированного автономного уравнения (1) может быть представлено в неявной форме (см. ОДУ 2.1.1.1). Функция $x = x(t)$ может быть определена путем решения линейного уравнения первого порядка (2), после чего по формуле $y = (ax - z)/b$ находится функция $y = y(t)$.

2. $\boldsymbol{x'_t = b_2 f(a_1x + b_1y) + b_1 g(a_2x + b_2y),}$
$\boldsymbol{y'_t = -a_2 f(a_1x + b_1y) - a_1 g(a_2x + b_2y).}$

Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Умножая оба ОДУ на подходящие константы и складывая их почленно, получим два независимых автономных ОДУ первого порядка:

$$u'_t = (a_1b_2 - a_2b_1)f(u), \qquad u = a_1x + b_1y;$$
$$v'_t = -(a_1b_2 - a_2b_1)g(v), \qquad v = a_2x + b_2y.$$

3. $\boldsymbol{x'_t = e^{-ax} f(y - x), \quad y'_t = e^{-ay} g(y - x).}$

1°. Частное решение:

$$x = \frac{1}{a}\ln\bigl[af(\lambda)t + C\bigr], \qquad y = \frac{1}{a}\ln\bigl[af(\lambda)t + C\bigr] + \lambda,$$

где C — произвольная постоянная, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(\lambda) = e^{-a\lambda}g(\lambda)$.

2°. Сначала в рассматриваемой системе ОДУ исключим переменную t, а затем сделаем замену $y = x + z$. В результате получим автономное ОДУ первого порядка вида 2.1.1.1:

$$z'_x = e^{-az}\frac{g(z)}{f(z)} - 1.$$

4. $\boldsymbol{x'_t = xf(y/x) + g(y/x), \qquad y'_t = yf(y/x) + h(y/x).}$

Здесь $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

1°. Пусть λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda g(\lambda) = h(\lambda).$$

Частное решение при $f(\lambda) \neq 0$:

$$x = C\exp[f(\lambda)t] - \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}, \qquad y = \lambda\Bigl\{C\exp[f(\lambda)t] - \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}\Bigr\},$$

где C — произвольная постоянная.

Частное решение при $f(\lambda)=0$:

$$x=g(\lambda)t+C, \qquad y=\lambda[g(\lambda)t+C].$$

2°. Подстановка $y=xz$ приводит рассматриваемую систему ОДУ к системе

$$x'_t=xf(z)+g(z), \qquad xz'_t=h(z)-zg(z).$$

Деля почленно первое уравнение на второе, исключим переменную t. В результате приходим к уравнению Бернулли

$$x'_z=\frac{g(z)}{h(z)-zg(z)}x+\frac{f(z)}{h(z)-zg(z)}x^2.$$

5. $\boldsymbol{x'_t=xf(y/x)+h(y/x), \qquad y'_t=yg(y/x)+(y/x)h(y/x).}$

Решение:

$$x=F(t)\Big[\int\frac{h(\varphi)}{F(t)}dt+C\Big], \qquad y=\varphi(t)F(t)\Big[\int\frac{h(\varphi)}{F(t)}dt+C\Big],$$
$$F(t)=\exp\Big[\int f(\varphi)\,dt\Big],$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается автономным ОДУ первого порядка вида 2.1.1.1:

$$\varphi'_t=\varphi[g(\varphi)-f(\varphi)].$$

6. $\boldsymbol{x'_t=xf(y/x)\ln x+xg(y/x), \qquad y'_t=yf(y/x)\ln y+yh(y/x).}$

Преобразование $x=e^u$, $y=e^v$ приводит к системе ОДУ вида 3.3.1.1:

$$u'_t=uf(e^{v-u})+g(e^{v-u}), \qquad v'_t=vf(e^{v-u})+h(e^{v-u}).$$

7. $\boldsymbol{x'_t=xf\Big(\frac{y}{x}\Big)-yg\Big(\frac{y}{x}\Big)+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}h\Big(\frac{y}{x}\Big),}$

$\boldsymbol{y'_t=yf\Big(\frac{y}{x}\Big)+xg\Big(\frac{y}{x}\Big)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}h\Big(\frac{y}{x}\Big).}$

Решение:

$$x=r(t)\cos\varphi(t), \qquad y=r(t)\sin\varphi(t),$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ является решением автономного ОДУ первого порядка

$$\varphi'_t=g(\operatorname{tg}\varphi),$$

а функция $r=r(t)$ удовлетворяет линейному ОДУ первого порядка

$$r'_t=rf(\operatorname{tg}\varphi)+h(\operatorname{tg}\varphi).$$

8. $\boldsymbol{x'_t=xf\Big(\frac{y}{x}\Big)+yg\Big(\frac{y}{x}\Big)+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}h\Big(\frac{y}{x}\Big),}$

$\boldsymbol{y'_t=yf\Big(\frac{y}{x}\Big)+xg\Big(\frac{y}{x}\Big)+\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}h\Big(\frac{y}{x}\Big).}$

Решение:

$$x=r(t)\operatorname{ch}\psi(t), \qquad y=r(t)\operatorname{sh}\psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ является решением автономного ОДУ первого порядка

$$\psi'_t = g(\operatorname{th}\psi),$$

а функция $r = r(t)$ удовлетворяет линейному ОДУ первого порядка

$$r'_t = rf(\operatorname{th}\psi) + h(\operatorname{th}\psi).$$

9. $\boldsymbol{x'_t = xf(ax+by) - byg(y/x), \quad y'_t = yf(ax+by) + ayg(y/x).}$

1°. Решение:

$$x = br(t)\cos^2\varphi(t), \quad y = ar(t)\sin^2\varphi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $r = r(t)$ определяются из двух независимых автономных ОДУ первого порядка

$$r'_t = rf(abr),$$
$$\varphi'_t = \frac{1}{2}a\operatorname{tg}\varphi\, g\Big(\frac{a}{b}\operatorname{tg}^2\varphi\Big),$$

общие решения которых можно представить в неявном виде (см. ОДУ 2.1.1.1).

2°. Решение:

$$x = br(t)\operatorname{ch}^2\psi(t), \quad y = -ar(t)\operatorname{sh}^2\psi(t),$$

где функции $\psi = \psi(t)$ и $r = r(t)$ определяются из двух независимых автономных ОДУ первого порядка

$$r'_t = rf(abr),$$
$$\psi'_t = \frac{1}{2}a\operatorname{th}\psi\, g\Big(-\frac{a}{b}\operatorname{th}^2\psi\Big).$$

3°. Умножим первое уравнение на a, второе уравнение на $-b$, а затем сложим почленно. В результате получим автономное ОДУ первого порядка

$$z'_t = zf(z), \quad z = ax + by.$$

10. $\boldsymbol{x'_t = xf(x^2+y^2) - yg(y/x), \quad y'_t = yf(x^2+y^2) + xg(y/x).}$

Решение:

$$x = r(t)\cos\varphi(t), \quad y = r(t)\sin\varphi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $r = r(t)$ определяются из двух независимых автономных ОДУ первого порядка

$$r'_t = rf(r^2),$$
$$\varphi'_t = g(\operatorname{tg}\varphi).$$

11. $\boldsymbol{x'_t = xf(x^2-y^2) + yg(y/x), \quad y'_t = yf(x^2-y^2) + xg(y/x).}$

Решение:

$$x = r(t)\operatorname{ch}\psi(t), \quad y = r(t)\operatorname{sh}\psi(t),$$

где функции $\psi=\psi(t)$ и $r=r(t)$ определяются из двух независимых автономных ОДУ первого порядка

$$r'_t = rf(r^2),$$
$$\psi'_t = g(\operatorname{th}\psi).$$

12. $\boldsymbol{x'_t = x^n F(x,y), \quad y'_t = g(y)F(x,y).}$

Решение:

$$x=\varphi(y), \quad \int \frac{dy}{g(y)F(\varphi(y),y)} = t + C_2,$$

где

$$\varphi(y) = \begin{cases} \left[C_1 + (1-n)\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)}\right]^{\frac{1}{1-n}} & \text{при } \ n\neq 1, \\ C_1 \exp\left[\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)}\right] & \text{при } \ n=1, \end{cases}$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

13. $\boldsymbol{x'_t = e^{\lambda x} F(x,y), \quad y'_t = g(y)F(x,y).}$

Решение:

$$x=\varphi(y), \quad \int \frac{dy}{g(y)F(\varphi(y),y)} = t + C_2,$$

где

$$\varphi(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda}\ln\left[C_1 - \lambda\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)}\right] & \text{при } \ \lambda\neq 0, \\ C_1 + \displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} & \text{при } \ \lambda=0, \end{cases}$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

14. $\boldsymbol{x'_t = F(x,y), \quad y'_t = G(x,y).}$

Автономная система двух нелинейных ОДУ общего вида.

Пусть

$$y = y(x, C_1), \tag{$*$}$$

где C_1 — произвольная постоянная, является общим решение ОДУ первого порядка

$$F(x,y)y'_x = G(x,y).$$

Тогда общее решение рассматриваемой системы ОДУ задается соотношением (*) вместе неявной зависимостью

$$\int \frac{dx}{F(x, y(x, C_1))} = t + C_2.$$

15. $\boldsymbol{x'_t = f(t, y-ax), \quad y'_t = g(t, y-ax).}$

1°. Решение:

$$x = \int f(t,\varphi(t))\,dt + C, \qquad y = \varphi(t) + a\int f(t,\varphi(t))\,dt + aC,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка

$$\varphi'_t = g(t, \varphi) - af(t, \varphi). \tag{1}$$

2°. Если обе функции f и g не зависят явно от t, то уравнение (1) является автономным ОДУ типа 2.1.1.1. В этом случае рассматриваемая система ОДУ имеет частное решение, линейное по t, вида

$$x = f(k)t + C, \qquad y = af(k)t + aC + k,$$

где C — произвольная постоянная, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $af(k) = g(k)$.

16. $\boldsymbol{x'_t = xf(t, y/x), \qquad y'_t = yg(t, y/x).}$

1°. Решение:

$$x = C\exp\Bigl[\int f(t, \varphi(t))\,dt\Bigr], \qquad y = C\varphi(t)\exp\Bigl[\int f(t, \varphi(t))\,dt\Bigr],$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка

$$\varphi'_t = \varphi[g(t, \varphi) - f(t, \varphi)]. \tag{1}$$

2°. Если обе функции f и g не зависят явно от t, то уравнение (1) является автономным ОДУ типа 2.1.1.1. В этом случае рассматриваемая система ОДУ имеет частное решение, экспоненциального вида

$$x = Ce^{\lambda t}, \qquad y = Cke^{\lambda t}, \qquad \lambda = f(k),$$

где C — произвольная постоянная, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(k) = g(k)$.

17. $\boldsymbol{x'_t = xf(t, yx^a), \qquad y'_t = yg(t, yx^a).}$

Эта система является обобщением предыдущей системы ОДУ.

1°. Решение:

$$x = C\exp\Bigl[\int f(t, \varphi(t))\,dt\Bigr], \qquad y = C^{-a}\varphi(t)\exp\Bigl[-a\int f(t, \varphi(t))\,dt\Bigr],$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка

$$\varphi'_t = \varphi[g(t, \varphi) + af(t, \varphi)]. \tag{1}$$

2°. Если обе функции f и g не зависят явно от t, то уравнение (1) является автономным ОДУ типа 2.1.1.1. В этом случае рассматриваемая система ОДУ имеет частное решение, экспоненциального вида

$$x = Ce^{\lambda t}, \qquad y = kC^{-a}e^{-a\lambda t}, \qquad \lambda = f(k),$$

где C — произвольная постоянная, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $af(k)+g(k)=0$.

18. $\boldsymbol{x'_t = f_1(x)g_1(y)\Phi(t,x,y), \quad y'_t = f_2(x)g_2(y)\Phi(t,x,y).}$

Первый интеграл:

$$\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\,dx - \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = C, \qquad (*)$$

где C — произвольная постоянная.

Разрешив $(*)$ относительно x (или y) и подставив полученное выражение в одно из уравнений исходной системы, можно получить ОДУ первого порядка для y (или x).

19. $\boldsymbol{x = tx'_t + F(x'_t, y'_t), \quad y = ty'_t + G(x'_t, y'_t).}$

Система ОДУ в неявной форме типа Клеро.

Решениями этой системы являются:

(i) прямые линии

$$x = C_1 t + F(C_1, C_2), \qquad y = C_2 t + G(C_1, C_2),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные;

(ii) огибающие этих прямых;

(iii) непрерывно дифференцируемые кривые, которые образованы отрезками прямых (i) и кривых (ii).

3.3.2. Нелинейные системы ОДУ второго порядка

1. $\boldsymbol{x''_{tt} = xf(ax-by) + g(ax-by), \quad y''_{tt} = yf(ax-by) + h(ax-by).}$

Здесь $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

Умножим первое уравнение на a, второе уравнение на $-b$, а затем сложим почленно. В результате получим автономное ОДУ второго порядка

$$z''_{tt} = zf(z) + ag(z) - bh(z), \qquad z = ax - by. \qquad (1)$$

Будем рассматривать это уравнение вместе с первым уравнением исходной системы, которое запишем в виде

$$x''_{tt} = xf(z) + g(z). \qquad (2)$$

Общее решение изолированного автономного уравнения (1) может быть представлено в неявной форме (см. ОДУ 2.3.1.1). В ряде случаев функцию $x = x(t)$ можно найти путем решения линейного уравнения второго порядка (2), после чего по формуле $y = (ax - z)/b$ определяется функция $y = y(t)$.

2. $\boldsymbol{x''_{tt} = b_2 f(a_1x + b_1y) + b_1 g(a_2x + b_2y),}$
$\boldsymbol{y''_{tt} = -a_2 f(a_1x + b_1y) - a_1 g(a_2x + b_2y).}$

Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Умножая оба ОДУ на подходящие константы и складывая их почленно, получим два независимых автономных ОДУ второго порядка:

$$
\begin{aligned}
u''_{tt} &= (a_1b_2 - a_2b_1)f(u), &\qquad u &= a_1x + b_1y;\\
v''_{tt} &= -(a_1b_2 - a_2b_1)g(v), &\qquad v &= a_2x + b_2y,
\end{aligned}
$$

общее решение которых можно представить в неявном виде (см. ОДУ 2.3.1.1).

3. $\boldsymbol{x''_{tt} = xf(y/x), \quad y''_{tt} = yg(y/x).}$

Здесь $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

1°. Частное периодическое решение:

$$
\begin{aligned}
x &= C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt), \qquad k = \sqrt{-f(\lambda)},\\
y &= \lambda[C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt)],
\end{aligned}
$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$
f(\lambda) = g(\lambda). \tag{$*$}
$$

2°. Частное решение:

$$
\begin{aligned}
x &= C_1\exp(kt) + C_2\exp(-kt), \qquad k = \sqrt{f(\lambda)},\\
y &= \lambda[C_1\exp(kt) + C_2\exp(-kt)],
\end{aligned}
$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения (*).

4. $\boldsymbol{x''_{tt} = xf(y/x) + g(y/x), \quad y''_{tt} = yf(y/x) + h(y/x).}$

Пусть λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$
\lambda g(\lambda) = h(\lambda).
$$

1°. Частное решение при $f(\lambda) > 0$:

$$
\begin{aligned}
x &= C_1\exp\bigl(-\sqrt{f(\lambda)}\,t\bigr) + C_2\exp\bigl(\sqrt{f(\lambda)}\,t\bigr) - \tfrac{g(\lambda)}{f(\lambda)},\\
y &= \lambda\Bigl[C_1\exp\bigl(-\sqrt{f(\lambda)}\,t\bigr) + C_2\exp\bigl(\sqrt{f(\lambda)}\,t\bigr) - \tfrac{g(\lambda)}{f(\lambda)}\Bigr],
\end{aligned}
$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. Частное периодическое решение при $f(\lambda) < 0$:

$$
\begin{aligned}
x &= C_1\cos\bigl(\sqrt{|f(\lambda)|}\,t\bigr) + C_2\sin\bigl(\sqrt{|f(\lambda)|}\,t\bigr) - \tfrac{g(\lambda)}{f(\lambda)},\\
y &= \lambda\Bigl[C_1\cos\bigl(\sqrt{|f(\lambda)|}\,t\bigr) + C_2\sin\bigl(\sqrt{|f(\lambda)|}\,t\bigr) - \tfrac{g(\lambda)}{f(\lambda)}\Bigr].
\end{aligned}
$$

3°. Частное решение при $f(\lambda) = 0$:

$$
x = \tfrac{1}{2}g(\lambda)t^2 + C_1t + C_2, \qquad y = \lambda[\tfrac{1}{2}g(\lambda)t^2 + C_1t + C_2].
$$

5. $\boldsymbol{x''_{tt} = x^k f(y/x), \quad y''_{tt} = y^k g(y/x).}$

Частное решение:

$$x = x(t), \qquad y = \lambda x(t),$$

где $x = x(t)$ — решение автономного ОДУ второго порядка $x''_{tt} = f(\lambda)x^k$, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(\lambda) = \lambda^{k-1} g(\lambda)$.

6. $\boldsymbol{x''_{tt} = e^{ax} f(y-x), \quad y''_{tt} = e^{ay} g(y-x).}$

Частное решение:

$$x = x(t), \qquad y = x(t) + \lambda,$$

где $x = x(t)$ — решение автономного ОДУ второго порядка $x''_{tt} = f(\lambda)e^{ax}$, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(\lambda) = e^{a\lambda} g(\lambda)$.

7. $\boldsymbol{x''_{tt} = kxr^{-3}, \quad y''_{tt} = kyr^{-3},}$ **где** $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2+y^2}.}$

Уравнения движения материальной точки в плоскости xy под действием силы тяжести.

Переходя к полярным координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r = r(t), \qquad \varphi = \varphi(t),$$

можно получить два первых интеграла

$$r^2\varphi'_t = C_1, \qquad (r'_t)^2 + r^2(\varphi'_t)^2 = -2kr^{-1} + C_2, \tag{1}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Считая, что $C_1 \neq 0$ и интегрируя далее, имеем

$$r[C\cos(\varphi - \varphi_0) - k] = C_1^2, \qquad C^2 = C_1^2 C_2 + k^2, \tag{2}$$

где φ_0 — произвольная постоянная. Уравнение (2) является уравнением конического сечения. Зависимость $\varphi(t)$ может быть найдена из первого уравнения в (1).

8. $\boldsymbol{x''_{tt} = xf(r), \quad y''_{tt} = yf(r),}$ **где** $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2+y^2}.}$

Уравнения движения материальной точки в плоскости xy под действием центральной силы.

Переходя к полярным координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r = r(t), \qquad \varphi = \varphi(t),$$

можно получить два первых интеграла

$$r^2\varphi'_t = C_1, \qquad (r'_t)^2 + r^2(\varphi'_t)^2 = 2\int rf(r)\,dr + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Интегрируя далее, имеем

$$t + C_3 = \pm\int \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2F(r) + r^2C_2 - C_1^2}}, \qquad \varphi = C_1\int\frac{dt}{r^2} + C_4, \tag{$*$}$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные и использовано обозначение

$$F(r) = \int r f(r)\, dr.$$

Во втором соотношении в $(*)$ предполагается, что зависимость $r = r(t)$ получена разрешением первого уравнения в $(*)$ относительно $r(t)$.

9. $\boldsymbol{x''_{tt} + a(t)x = x^{-3} f(y/x), \quad y''_{tt} + a(t)y = y^{-3} g(y/x).}$

Нелинейная система ОДУ типа Ермакова.

1°. Первый интеграл:

$$\frac{1}{2}(xy'_t - yx'_t)^2 + \int \bigl[uf(u) - u^{-3}g(u)\bigr]\, du = C, \qquad u = \frac{y}{x},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — нетривиальное частное решение линейного ОДУ второго порядка

$$\varphi''_{tt} + a(t)\varphi = 0. \tag{1}$$

Тогда преобразование

$$\tau = \int \frac{dt}{\varphi^2(t)}, \quad u = \frac{x}{\varphi(t)}, \quad v = \frac{y}{\varphi(t)} \tag{2}$$

приводит к автономной системе ОДУ

$$u''_{\tau\tau} = u^{-3} f(v/u), \qquad v''_{\tau\tau} = v^{-3} g(v/u). \tag{3}$$

3°. Частное решение системы (3) имеет вид

$$u = A\sqrt{C_2\tau^2 + C_1\tau + C_0}, \quad v = Ak\sqrt{C_2\tau^2 + C_1\tau + C_0}, \quad A = \biggl[\frac{f(k)}{C_0C_2 - \frac{1}{4}C_1^2}\biggr]^{1/4},$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k^4 f(k) = g(k).$$

10. $\boldsymbol{x''_{tt} = f(y'_t/x'_t), \quad y''_{tt} = g(y'_t/x'_t).}$

1°. Преобразование

$$u = x'_t, \qquad w = y'_t \tag{1}$$

приводит к системе ОДУ первого порядка

$$u'_t = f(w/u), \qquad w'_t = g(w/u). \tag{2}$$

Исключение переменной t приводит к однородному ОДУ первого порядка, решение которого имеет вид

$$\int \frac{f(\xi)\, d\xi}{g(\xi) - \xi f(\xi)} = \ln|u| + C, \quad \xi = \frac{w}{u}, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная. Разрешив (3) относительно w, получим $w = w(u, C)$. Подставив это выражение в первое уравнение (2), можно найти $u = u(t)$, а затем $w = w(t)$. В итоге можно определить функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ из (1) простым интегрированием.

2°. *Задача Суслова.* Задача о скольжении материальной точки по наклонной шероховатой плоскости описывается уравнениями

$$x''_{tt} = 1 - \frac{kx'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}, \qquad y''_{tt} = -\frac{ky'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}},$$

которые являются частным случаем рассматриваемой системы ОДУ с определяющими функциями

$$f(z) = 1 - \frac{k}{\sqrt{1+z^2}}, \qquad g(z) = -\frac{kz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Решение соответствующей задачи Коши с начальными условиями

$$x(0) = y(0) = x'_t(0) = 0, \qquad y'_t(0) = 1$$

приводит, для случая $k = 1$, к искомым функциям $x(t)$ и $y(t)$, которые можно записать в параметрической форме

$$x = -\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}\xi^4 - \tfrac{1}{4}\ln\xi, \quad y = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2}\xi - \tfrac{1}{6}\xi^3, \quad t = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\xi^2 - \tfrac{1}{2}\ln\xi \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant 1).$$

11. $\boldsymbol{x''_{tt} = x\Phi(x, y, t, x'_t, y'_t), \quad y''_{tt} = y\Phi(x, y, t, x'_t, y'_t).}$

1°. Первый интеграл:

$$xy'_t - yx'_t = C,$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Частное решение: $y = C_1 x$, где C_1 — произвольная постоянная, а функция $x = x(t)$ описывается ОДУ второго порядка

$$x''_{tt} = x\Phi(x, C_1 x, t, x'_t, C_1 x'_t).$$

Замечание 3.2. *В пп.* 1° *и* 2° *функция* Φ *может также зависеть от второй и старших производных по* t.

12. $\boldsymbol{x''_{tt} + x^{-3} f(y/x) = x\Phi(x, y, t, x'_t, y'_t),}$
$\boldsymbol{y''_{tt} + y^{-3} g(y/x) = y\Phi(x, y, t, x'_t, y'_t).}$

Первый интеграл:

$$\frac{1}{2}(xy'_t - yx'_t)^2 + \int \bigl[u^{-3} g(u) - u f(u)\bigr]\,du = C, \qquad u = \frac{y}{x},$$

где C — произвольная постоянная.

Замечание 3.3. *Функция* Φ *может также зависеть от второй и старших производных по* t.

13. $\boldsymbol{x''_{tt} = F(t, tx'_t - x, ty'_t - y), \quad y''_{tt} = G(t, tx'_t - x, ty'_t - y).}$

1°. Преобразование

$$u = tx_t - x, \qquad v = ty'_t - y \tag{1}$$

приводит к системе ОДУ первого порядка

$$u'_t = tF(t,u,v), \qquad v'_t = tG(t,u,v). \tag{2}$$

2°. Пусть решение системы (2) получено в виде

$$u = u(t, C_1, C_2), \qquad v = v(t, C_1, C_2), \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда, подставляя (3) в (1) и интегрируя, находим решение исходной системы ОДУ:

$$x = C_3 t + t\int \frac{u(t,C_1,C_2)}{t^2}\,dt, \qquad y = C_4 t + t\int \frac{v(t,C_1,C_2)}{t^2}\,dt.$$

3°. Если функции F и G не зависят от t, то исключая t из системы (2), приходим к ОДУ первого порядка

$$g(u,v)u'_v = F(u,v).$$

14. $\boldsymbol{(x'_t)^2 - xx''_{tt} - ax'''_{ttt} = 0, \quad x'_t y'_t - xy''_{tt} - ay'''_{ttt} = 0.}$

Эта автономная система ОДУ третьего порядка встречается в теории гидродинамического пограничного слоя.

1°. Частное решение:

$$x = \frac{6a}{t+C_1}, \qquad y = \frac{C_2}{t+C_1} + \frac{C_3}{(t+C_1)^2} + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

2°. Частное решение:

$$x = C_1 e^{\lambda t} - a\lambda, \qquad y = C_2(C_1 e^{\lambda t} - a\lambda),$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Пусть $x = x(t)$ — некоторое решение первого ОДУ рассматриваемой системы уравнений. Тогда второе ОДУ системы представляет собой линейное ОДУ третьего порядка относительно y, которое имеет два частных решения: $y_1 = 1$ и $y_2 = x(t)$. Поэтому второе ОДУ может быть сведено к линейному ОДУ первого порядка (см. формулы (4) в разд. 2.4.1), которое легко интегрируется.

3.4. Нелинейные системы трех и более ОДУ

3.4.1. Нелинейные системы трех ОДУ

1. $\boldsymbol{ax'_t = (b-c)yz, \quad by'_t = (c-a)zx, \quad cz'_t = (a-b)xy.}$

Первые интегралы:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = C_1,$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Разрешая первые интегралы относительно y и z и подставляя полученные выражения в первое ОДУ системы, получим ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными.

2. $\boldsymbol{x'_t = cg(y) - bh(z), \quad y'_t = ah(z) - cf(x), \quad z'_t = bf(x) - ag(y).}$

Частный случай системы 3.4.1.4 при $F_1 = f(x)$, $F_2 = g(y)$, $F_3 = h(z)$.

Первые интегралы:

$$ax + by + cz = C_1,$$
$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy + \int h(z)\,dz = C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. $\boldsymbol{ax'_t = (b - c)yzF(x, y, z, t),}$
$\boldsymbol{by'_t = (c - a)zxF(x, y, z, t), \quad cz'_t = (a - b)xyF(x, y, z, t).}$

Первые интегралы:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = C_1,$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Разрешая первые интегралы относительно y и z и подставляя полученные выражения в первое ОДУ системы, получим ОДУ первого порядка (если функция F не зависит от t, то это ОДУ с разделяющимися переменными).

4. $\boldsymbol{x'_t = cF_2 - bF_3, \quad y'_t = aF_3 - cF_1, \quad z'_t = bF_1 - aF_2.}$

Здесь $F_n = F_n(x, y, z)$ — произвольные функции ($n = 1,\ 2,\ 3$).

Первый интеграл:

$$ax + by + cz = C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Исключая t и z из первых двух ОДУ рассматриваемой системы (используя приведенный выше первый интеграл), получим ОДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{aF_3(x, y, z) - cF_1(x, y, z)}{cF_2(x, y, z) - bF_3(x, y, z)}, \quad \text{где} \quad z = \frac{1}{c}(C_1 - ax - by).$$

5. $\boldsymbol{x'_t = czF_2 - byF_3, \quad y'_t = axF_3 - czF_1, \quad z'_t = byF_1 - axF_2.}$

Здесь $F_n = F_n(x, y, z)$ — произвольные функции ($n = 1,\ 2,\ 3$).

Первый интеграл:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Исключая t и z из первых двух ОДУ рассматриваемой системы (используя приведенный выше первый интеграл), получим ОДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{axF_3(x, y, z) - czF_1(x, y, z)}{czF_2(x, y, z) - byF_3(x, y, z)}, \quad \text{где} \quad z = \pm\sqrt{\frac{1}{c}(C_1 - ax^2 - by^2)}.$$

6. $\boldsymbol{x'_t = x(cF_2 - bF_3), \quad y'_t = y(aF_3 - cF_1), \quad z'_t = z(bF_1 - aF_2).}$

Здесь $F_n = F_n(x, y, z)$ — произвольные функции ($n = 1,\ 2,\ 3$).

Первый интеграл:

$$|x|^a |y|^b |z|^c = C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Исключая t и z из первых двух ОДУ рассматриваемой системы (используя приведенный выше первый интеграл), можно получить ОДУ первого порядка.

7. $\boldsymbol{x'_t = h(z)F_2 - g(y)F_3, \quad y'_t = f(x)F_3 - h(z)F_1, \quad z'_t = g(y)F_1 - f(x)F_2.}$

Здесь $F_n = F_n(x, y, z)$ — произвольные функции ($n = 1,\ 2,\ 3$).

Первый интеграл:

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy + \int h(z)\,dz = C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Исключая t и z из первых двух ОДУ рассматриваемой системы (используя приведенный выше первый интеграл), можно получить ОДУ первого порядка.

8. $\boldsymbol{x''_{tt} = \dfrac{\partial F}{\partial x}, \quad y''_{tt} = \dfrac{\partial F}{\partial y}, \quad z''_{tt} = \dfrac{\partial F}{\partial z},}$

где $\boldsymbol{F = F(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.}$

Уравнения движения материальной точки под действием силы тяжести.

Рассматриваемая система ОДУ может быть записана в виде одного векторного уравнения

$$\mathbf{r}''_{tt} = \operatorname{grad} F \qquad \text{или} \qquad \mathbf{r}''_{tt} = \frac{F'(r)}{r}\mathbf{r},$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

1°. Первые интегралы:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{r}'_t)^2 = 2F(r) + C_1 && \text{(закон сохранения энергии)},\\ &[\mathbf{r} \times \mathbf{r}'_t] = \mathbf{C} && \text{(закон сохранения площадей)},\\ &(\mathbf{r} \cdot \mathbf{C}) = 0 && \text{(все траектории — плоские кривые)}. \end{aligned}$$

2°. Решение (Камке, 1976):

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\, r \cos\varphi + \mathbf{b}\, r \sin\varphi.$$

Здесь постоянные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ должны удовлетворять двум соотношения

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1, \qquad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0,$$

а функции $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ определяются неявно выражениями

$$t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2F(r) + C_1r^2 - C_3^2}} + C_2, \quad \varphi = C_3 \int \frac{dr}{r\sqrt{2r^2F(r) + C_1r^2 - C_3^2}}, \quad C_3 = |\mathbf{C}|.$$

9. $\boldsymbol{x''_{tt} = xF, \quad y''_{tt} = yF, \quad z''_{tt} = zF,}$ **где** $\boldsymbol{F = F(x, y, z, t, x'_t, y'_t, z'_t)}$**.**

Первые интегралы (законы сохранения площадей):

$$
\begin{aligned}
zy'_t - yz'_t &= C_1,\\
xz'_t - zx'_t &= C_2,\\
yx'_t - xy'_t &= C_3,
\end{aligned}
$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Следствие законов сохранения:

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0.$$

Отсюда следует, что все интегральные кривые являются плоскими кривыми.

Замечание 3.4. *Функция F может также зависеть от второй и старших производных по t.*

10. $\boldsymbol{x''_{tt} = F_1, \quad y''_{tt} = F_2, \quad z''_{tt} = F_3,}$
где $\boldsymbol{F_n = F_n(t, tx'_t - x, ty'_t - y, tz'_t - z)}$**.**

1°. Преобразование

$$u = tx_t - x, \qquad v = ty'_t - y, \qquad w = tz'_t - z \tag{1}$$

приводит к системе ОДУ первого порядка

$$u'_t = tF_1(t, u, v, w), \qquad v'_t = tF_2(t, u, v, w), \qquad w'_t = tF_3(t, u, v, w). \tag{2}$$

2°. Пусть решение системы (2) получено в виде

$$u(t) = u(t, C_1, C_2, C_3), \quad v(t) = v(t, C_1, C_2, C_3), \quad w(t) = w(t, C_1, C_2, C_3), \tag{3}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Тогда, подставляя (3) в (1) и интегрируя, находим решение исходной системы ОДУ:

$$x = C_4t + t\int \frac{u(t)}{t^2}\,dt, \quad y = C_5t + t\int \frac{v(t)}{t^2}\,dt, \quad z = C_6t + t\int \frac{w(t)}{t^2}\,dt,$$

где C_4, C_5, C_6 — произвольные постоянные.

3.4.2. Уравнения динамики твердого тела с неподвижной точкой*

► **Кинематические и динамические уравнения Эйлера.**

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки под действием внешних сил описывается системой, состоящей из шести связанных нелинейных ОДУ

* Этот раздел написал А. В. Фомичев.

первого порядка:

$$Ap'_t + (C - B)qr = M_1, \tag{1}$$
$$Bq'_t + (A - C)pr = M_2, \tag{2}$$
$$Cr'_t + (B - A)pq = M_3, \tag{3}$$
$$p = \psi'_t \sin\theta \sin\varphi + \theta'_t \cos\varphi, \tag{4}$$
$$q = \psi'_t \sin\theta \cos\varphi - \theta'_t \sin\varphi, \tag{5}$$
$$r = \psi'_t \cos\theta + \varphi'_t, \tag{6}$$

где p, q, r — компоненты угловой скорости тела в движущейся ортонормированной системе координат $\xi\eta\zeta$, жестко связанной с телом и образованной главными осями инерции (начало координат находится в неподвижной точке); A, B, C — моменты инерции относительно главных осей; а M_1, M_2, M_3 — компоненты момента внешних сил в системе $\xi\eta\zeta$, которые обычно зависят от углов Эйлера ψ, θ, φ, определяющих положение подвижной системы координат относительно неподвижной.

Требуется определить зависимости функций p, q, r, ψ, θ, φ от времени t из системы ОДУ (1)–(6).

Далее будут использоваться следующие обозначения: m — масса тела, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор положения центра масс, $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)^{\mathrm{T}} = (Ap, Bq, Cr)^{\mathrm{T}}$ — угловой момент тела в системе $\xi\eta\zeta$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — вертикальный единичный вектор ($\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$), который вводится, когда тело находится в однородном гравитационном поле так, что направление $\boldsymbol{\gamma}$ противоположно направлению гравитационного ускорения $\mathbf{g}$, и $g = |\mathbf{g}|$.

Уравнения (1)–(3) называются *динамическими уравнениями Эйлера*, а уравнения (4)–(6) — *кинематическими уравнениями Эйлера*. В общем случае система ОДУ (1)–(6) не интегрируется в квадратурах. Однако есть три важных частных случая, когда система сводится к квадратурам и интегрируется для любых начальных условий; это связано с наличием первых интегралов, которых в общем случае не существует. Эти три разрешимых случая обсуждаются ниже.

► Случай Эйлера.

Случай Эйлера соответствует движению тела произвольной формы, когда все внешние моменты равны нулю:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0. \tag{7}$$

При выполнении равенств (7) динамические уравнения (1)–(3) могут быть решены независимо от кинематических уравнений.

Для определенности будем считать, что $A \geqslant B \geqslant C$ и $A > C$ (случай $A = B = C$ тривиален). Система ОДУ (1)–(3) при условии (7) имеет следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= 2T \qquad &&(\text{закон сохранения энергии}),\\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= K^2 \qquad &&(\text{закон сохранения углового момента}), \end{aligned}$$

где $T > 0$ и K — произвольные постоянные.

Используя законы сохранения, при $A > C$ искомые функции p и r выразим через q по формулам

$$p = \pm\sqrt{a - bq^2}, \qquad r = \pm\sqrt{c - dq^2}, \tag{8}$$

где константы a, b, c, d можно выразить через определяющие параметры системы A, B, C и постоянные интегрирования T и K. Подставив (8) в уравнение для q, получим ОДУ с разделяющимися переменными

$$Bq'_t \pm (A - C)\sqrt{(a - bq^2)(c - dq^2)} = 0.$$

Интегрируя, находим его решение в неявном виде

$$t - t_0 = \pm\frac{B}{A - C}\int_0^q \frac{dq}{\sqrt{(a - bq^2)(c - dq^2)}}.$$

Фактически задача сводится к обращению эллиптического интеграла, что приводит к выражениям $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ через эллиптические функции времени.

Для решения кинематических уравнений удобно направить ось z неподвижной системы отсчета вдоль постоянного углового момента $\mathbf{K}$. В этом случае имеем

$$K_1 = Ap = K\sin\theta\sin\varphi, \quad K_2 = Bq = K\sin\theta\cos\varphi, \quad K_3 = Cr = K\cos\theta. \tag{9}$$

Из второго и третьего уравнений (9), а также уравнений (4)–(5) следуют формулы для углов Эйлера

$$\cos\theta(t) = \frac{Cr(t)}{K}, \qquad \cos\varphi(t) = \frac{Bq(t)}{K\sin\theta(t)},$$
$$\psi(t) = \psi_0 + \int_0^t \frac{p(t)\sin\varphi(t) + q(t)\cos\varphi(t)}{\sin\theta(t)}\,dt.$$

Решение Эйлера имеет геометрические интерпретации, предложенные Пуансо и МакКуллахом (см., например, Журавлев (1996) и Борисов & Мамаев (2001)).

► Случай Лагранжа.

Случай Лагранжа соответствует движению динамически симметричного тела в однородном гравитационном поле, когда его центр масс лежит на оси динамической симметрии (оси ζ). В этом случае в уравнениях (1)–(3) следует положить

$$A = B, \qquad \mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)^T = mg(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}). \tag{10}$$

Система (1)–(6) при условиях (10) допускает следующие три первых интеграла:

$K_3 = \mathrm{const}$ (закон сохранения проекции углового момента на ось ζ);

$(\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\gamma}) = K_1\gamma_1 + K_2\gamma_2 + K_3\gamma_3 = C_1$ (закон сохранения проекции углового момента на направление $\boldsymbol{\gamma}$);

$\dfrac{h}{2}(\theta'_t)^2 + \dfrac{K_3^2}{2C} + \dfrac{(C_1 - K_3\cos\theta)^2}{2A\sin\theta} + mgl\cos\theta = h = \mathrm{const}$ (интеграл энергии).

Наличие этих интегралов позволяет свести рассматриваемую систему к одному ОДУ первого порядка

$$(\theta'_t)^2 = 2h - \frac{K_3^2}{C} - \frac{(C_1 - K_3\cos\theta)^2}{\sin\theta} - 2\cos\theta,$$

при выводе которого считалось, что $A = mgl = 1$ (это можно сделать без потери общности). С помощью подстановки $u = \cos\theta$ полученное уравнение упрощается и принимает вид ОДУ с разделяющимися переменными

$$u'_t = \sqrt{R(u)},$$
$$R(u) = 2(h_1 - u)(1-u^2) - (C_1 - K_3 u)^2, \quad h_1 = h - \frac{K_3^2}{2C},$$

решение которого можно записать в неявном виде и выразить через эллиптические интегралы.

Для определения полного движения системы надо проинтегрировать следующие два простых независимых уравнения:

$$\psi'_t = \frac{C_1 - K_3 u}{1-u^2}, \qquad \varphi'_t = \Bigl(\frac{1}{C} - 1\Bigr)K_3 + \frac{C_1 - K_3 u}{1-u^2}.$$

В зависимости от исходных данных и конкретных параметров задачи решение определяет четыре типа движения, в одном из которых ось волчка асимптотически стремится к вертикальному положению.

► Случай Ковалевской.

Случай Ковалевской соответствует движению динамически симметричного тела с $A = B$ при условии $A = 2C$ в однородном гравитационном поле, так что $\mathbf{M} = mg(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\gamma})$. Считается, что центр масс лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (центр которого находится в неподвижной точке), а его положение в системе $\xi\eta\zeta$ определяется вектором $\mathbf{r} = (L, 0, 0)^T$. Без ограничения общности для простоты далее будем считать, что $A = 1$, $mg = 1$, $L = 1$.

Этот случай намного сложнее, чем два предыдущих, как с точки зрения интегрирования системы ОДУ, так и с точки зрения качественного анализа движения. Уравнения Эйлера (1)–(6) допускают следующие три первых интеграла:

$(\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\gamma}) = K_1\gamma_1 + K_2\gamma_2 + K_3\gamma_3 = c = \mathrm{const}$ (закон сохранения проекции углового момента на вертикаль);

$\frac{1}{2}(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2) - L\gamma_1 = h = \mathrm{const}$ (интеграл энергии);

$\frac{1}{4}(K_1^2 + K_2^2 + 2\gamma_1 x)^2 + (K_1K_2 + \gamma_2 x)^2 = k = \mathrm{const}$ (интеграл, не имеющий ясного физического смысла).

Уравнения движения с помощью указанных интегралов интегрируются с использованием переменных Ковалевской (s_1, s_2), которые определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = \frac{R - \sqrt{R_1R_2}}{2(z_1 - z_2)^2}, \quad s_2 = \frac{R + \sqrt{R_1R_2}}{2(z_1 - z_2)^2},\\
&z_1 = K_\xi + iK_\eta, \quad z_2 = K_\xi - iK_\eta, \quad i^2 = -1,\\
&R = R(z_1, z_2) = \tfrac{1}{4}z_1^2z_2^2 - \tfrac{1}{2}h(z_1^2 + z_2^2) + c(z_1 + z_2) + \tfrac{1}{4}k^2 - 1,\\
&R_1 = R(z_1, z_1), \quad R_2 = R(z_2, z_2).
\end{aligned}
$$

В этих переменных уравнения движения принимают вид

$$
\frac{ds_1}{dt} = \frac{\sqrt{P(s_1)}}{s_1 - s_2}, \qquad \frac{ds_2}{dt} = \frac{\sqrt{P(s_2)}}{s_2 - s_1}, \tag{11}
$$

где

$$
P(s) = \left[(2s + \tfrac{1}{2}h)^2 - \tfrac{1}{16}k^2\right]\left[4s^3 + 2hs^2 + \tfrac{1}{16}(4h^2 - k^2 + 4)s + \tfrac{1}{16}c^2\right].
$$

Исключив t, систему (11) можно свести к одному ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными, которое легко интегрируется. В результате уравнения системы (11) также преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными.

Литература к главе 3

Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела.* Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

Журавлев В. Ф. Теорема о телесном угле в динамике твёрдого тела. *Прикл. математика и механика*, 1996, т. 66, № 2, с. 323–326.

Журавлев В. Ф. *Основы теоретической механики, 2-е изд.* М.: Физматлит, 2001.

Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 5-е изд.* М.: Наука, 1976.

Маркеев А. П. *Теоретическая механика.* Москва—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

Jacobi C. G. J. *Vorlesungen über Dynamik.* Berlin: G. Reimer, 1884.

Kowalewsky S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta. Math.,* 1889, Vol. 12, No. 2, pp. 177–232.

Kowalewsky S. Mémoires sur un cas particulies du problème de la rotation d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des seiences de l'Institut national de France*, Paris, 1890, Vol. 31, pp. 1–62.

Lagrange J.-L. *Mécanique Analytique. Œuvres de Lagrange, Vol. 12*. Paris: Gauthier–Villars, 1889.

Klein F., Sommerfeld A. *Über die Theorie des Kreisels*, New York: Johnson Reprint corp., 1965.

Ray J. R. and Reid, J. L., More exact invariants for the time dependent harmonic oscillator, *Phys. Letters*, 1979, Vol. 71, pp. 317–319.

Klimov D. M., Zhuravlev V. Ph., *Group-Theoretic Methods in Mechanics and Applied Mathematics*. London: Taylor & Francis, 2002.

Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*. Boca Raton — London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton — London: CRC Press, 2018.

4. Уравнения с частными производными первого порядка

► **Предварительные замечания.** Уравнения в частных производных (УрЧП) первого порядка являются математическими уравнениями, которые содержат две или более частных производных первого порядка искомой функции.

В данной главе приведены точные решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными. Кратко описаны наиболее распространенные методы решения таких уравнений, основанные на интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Вырожденные решения нелинейных УрЧП первого порядка, которые зависят только от одной из независимых переменных, здесь не рассматриваются.

4.1. Линейные уравнения с частными производными с двумя независимыми переменными

4.1.1. Предварительные замечания. Методы решения

► **Представление общего решения через частные решения.**

В общем случае *линейное неоднородное уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными* имеет вид

$$f(x,y)u_x + g(x,y)u_y = h_1(x,y)u + h_0(x,y). \qquad (1)$$

Общее решение линейного неоднородного УрЧП (1) может быть представлено в виде суммы любого частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего линейного однородного УрЧП (при $h_0 = 0$). Ниже дано более детальное описание представления общего решения через частные решения.

Общее решение УрЧП (1) может быть представлено в виде

$$u = u_2 + u_1\Phi(u_0),$$

где $u_0 = u_0(x,y)$ — любое отличное от константы решение «укороченного» однородного УрЧП (1) при $h_0 = h_1 = 0$; $u_1 = u_1(x,y)$ — нетривиальное частное решение укороченного однородного УрЧП (1) при $h_0 = 0$; $u_2 = u_2(x,y)$ — любое частное решение исходного неоднородного УрЧП (1); $\Phi = \Phi(u_0)$ — произвольная функция.

▶ Метод характеристик, основанный на решении системы ОДУ.

Пусть известны два различных (функционально независимых) интеграла

$$z_1(x, y) = C_1, \qquad z_2(x, y, u) = C_2 \tag{2}$$

характеристической системы ОДУ

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{g(x, y)} = \frac{du}{h_1(x, y)u + h_0(x, y)}. \tag{3}$$

Тогда общее решение линейного неоднородного УрЧП (1) можно представить в виде

$$\Psi(z_1, z_2) = 0, \tag{4}$$

где Ψ — произвольная функция двух аргументов. Разрешив соотношение (4) относительно z_1 или z_2, часто записывают общее решение в виде

$$z_k = \Phi(z_{3-k}),$$

где $k = 1$, 2, а $\Phi(z)$ — произвольная функция одного аргумента.

Замечание 4.1. *Специальному частному случаю $h_0 = h_1 = 0$ в (3) соответствует простейший второй интеграл $z_2 = C_2$ в (2). В этом случае общее решение УрЧП (3) имеет вид $u = \Phi(z_1)$, где $\Phi(z)$ — произвольная функция.*

Замечание 4.2. *В общем случае второй интеграл (2) может быть представлен в виде $p_1(x, y)u + p_0(x, y) = C_2$, где $p_0(x, y)$ и $p_1(x, y)$ — некоторые функции.*

▶ Решение, основанное на переходе к новым переменным.

Пусть известно частное решение $z = z(x, y)$ (*главный интеграл*) соответствующего линейного однородного уравнения

$$f(x, y)z_x + g(x, y)z_y = 0 \qquad (z \not\equiv \text{const}). \tag{5}$$

Переходя в (1) от x, y к новым переменным x, $z = z(x, y)$, получим

$$\bar{f}(x, z)u_x = \bar{h}_1(x, z)u + \bar{h}_0(x, z), \tag{6}$$

где $\bar{f}(x, z) = f(x, y)$, $\bar{h}_1(x, z) = h_1(x, y)$, $\bar{h}_0(x, z) = h_0(x, y)$ — коэффициенты исходного уравнения (1), записанные в переменных x, z.

Уравнение (6) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для $u = u(x)$ с параметром z. Его общее имеет вид

$$u = E\biggl[\int \frac{\bar{h}_0(x, z)}{\bar{f}(x, z)}\frac{dx}{E} + \Phi(z)\biggr], \qquad E = \exp\biggl[\int \frac{\bar{h}_1(x, z)}{\bar{f}(x, z)}\,dx\biggr],$$

где Φ — произвольная функция; при интегрировании z рассматривается как параметр. Для нахождения общего интеграла УрЧП (1) необходимо в последней формуле после интегрирования перейти к исходным переменным x, y.

4.1.2. Уравнения вида $f(x,y)u_x + g(x,y)u_y = 0$

1. $\boldsymbol{au_x + bu_y = 0.}$

Общее решение: $u = \Phi(bx - ay)$, где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

2. $\boldsymbol{axu_x + byu_y = 0.}$

При $a = b$ это *уравнение коноида.* Общее решение: $u = \Phi\bigl(|x|^b|y|^{-a}\bigr)$, где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

3. $\boldsymbol{ayu_x + bxu_y = 0.}$

Общее решение: $u = \Phi\bigl(bx^2 - ay^2\bigr)$, где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

► *В уравнениях 4.1.2.4–4.1.2.23 общее решение выражается через главный интеграл $z = z(x,y)$ по формуле $u = \Phi(z)$, где $\Phi(z)$ — произвольная функция.*

4. $\boldsymbol{(a_1x + b_1y + c_1)u_x + (a_2x + b_2y + c_2)u_y = 0.}$

Главный интеграл определяется решениями вспомогательной системы алгебраических уравнений для параметров s, λ, μ, α, β, γ:

$$(a_1 - s)(b_2 - s) = a_2b_1, \tag{1}$$

$$a_1\lambda + a_2\mu = s\lambda, \qquad b_1\lambda + b_2\mu = s\mu, \tag{2}$$

$$c_1\alpha + c_2\beta - s\gamma = c_1\lambda + c_2\mu, \tag{3}$$

$$(a_1 - s)\alpha + a_2\beta = \lambda s, \quad b_1\alpha + (b_2 - s)\beta = \mu s. \tag{4}$$

Случай 1: $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 \neq 0$. Квадратное уравнение (1) имеет два различных корня s_1 и s_2, которым соответствуют два набора решений системы (2): λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2.

1.1. Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то $s_1 \neq 0$ и $s_2 \neq 0$. Главный интеграл имеет вид

$$z = \frac{|s_1(\lambda_1x + \mu_1y) + \lambda_1c_1 + \mu_1c_2|^{s_2}}{|s_2(\lambda_2x + \mu_2y) + \lambda_2c_1 + \mu_2c_2|^{s_1}}.$$

1.2. Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то $s_1 = s = a_1 + b_2$ и $s_2 = 0$.

Главный интеграл при $\lambda_2c_1 + \mu_2c_2 \neq 0$:

$$z = s\frac{\lambda_2x + \mu_2y}{\lambda_2c_1 + \mu_2c_2} - \ln|s_1(\lambda_1x + \mu_1y) + \lambda_1c_1 + \mu_1c_2|.$$

Главный интеграл при $\lambda_2c_1 + \mu_2c_2 = 0$:

$$z = \lambda_2x + \mu_2y.$$

Случай 2: $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = 0$. Квадратное уравнение (1) имеет кратный корень $s = \frac{1}{2}(a_1 + b_2)$, а система (2) дает значения λ и μ, не равные нулю одновременно.

2.1. Если $s \neq 0$, то находим γ из (3) и выбираем не равные нулю α и β, удовлетворяющие соотношениям (4). Главный интеграл имеет вид

$$z = \ln|s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu| - \frac{s(\alpha x + \beta y + \gamma)}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu}.$$

2.2. Если $s = 0$, то $b_2 = -a_1$. Главный интеграл имеет вид

$$z = a_2x^2 - 2a_1xy - b_1y^2 + 2c_2x - 2c_1y.$$

5. $\boldsymbol{(a_1y^2 + b_1xy + c_1x^2)u_x + (a_2y^2 + b_2xy + c_2x^2)u_y = 0.}$

Главный интеграл:

$$z = \int \frac{(a_1v^2 + b_1v + c_1)\,dv}{a_1v^3 + (b_1 - a_2)v^2 + (c_1 - b_2)v - c_2} + \ln|x|, \qquad v = \frac{y}{x}.$$

6. $\boldsymbol{u_x + (ay + bx^k)u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = ye^{-ax} - b\int x^k e^{-ax}\,dx.$

7. $\boldsymbol{u_x + (ax^ky + bx^n)u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = y\exp\Bigl(-\frac{a}{k+1}x^{k+1}\Bigr) - b\int x^n \exp\Bigl(-\frac{a}{k+1}x^{k+1}\Bigr)\,dx.$

8. $\boldsymbol{u_x + \bigl(ae^{\lambda x} + b\bigr)u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = \lambda(bx - y) + ae^{\lambda x}.$

9. $\boldsymbol{u_x + \bigl(ae^{\lambda y} + b\bigr)u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = \lambda(bx - y) + \ln\bigl|b + ae^{\lambda y}\bigr|.$

10. $\boldsymbol{ae^{\lambda x}u_x + be^{\beta y}u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = \frac{1}{\beta b}e^{-\beta y} - \frac{1}{\lambda a}e^{-\lambda x}.$

11. $\boldsymbol{u_x + \bigl[f(x)y + g(x)\bigr]u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = e^{-F}y - \int e^{-F}g(x)\,dx$, где $F = \int f(x)\,dx.$

12. $\boldsymbol{u_x + \bigl[f(x)y + g(x)y^k\bigr]u_y = 0.}$

Главный интеграл:

$$z = e^{-F}y^{1-k} - (1-k)\int e^{-F}g(x)\,dx, \qquad \text{где} \quad F = (1-k)\int f(x)\,dx.$$

13. $\boldsymbol{u_x + \bigl[f(x)e^{\lambda y} + g(x)\bigr]u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = e^{-\lambda y}E + \lambda\int f(x)E\,dx$, где $E = \exp\Bigl[\lambda\int g(x)\,dx\Bigr].$

14. $\boldsymbol{f(x)u_x + g(y)u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = \int \frac{dx}{f(x)} - \int \frac{dy}{g(y)}$.

15. $\boldsymbol{\bigl[f(x) + g(y)\bigr]u_x + f'_x(x)u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = f(x)e^{-y} - \int e^{-y} g(y)\, dy$.

16. $\boldsymbol{\bigl[x^k f(y) + xg(y)\bigr]u_x + h(y)u_y = 0.}$

Главный интеграл:

$$z = x^{1-k}E + (k-1)\int \frac{f(y)E}{h(y)}\, dy, \qquad \text{где} \qquad E = \exp\biggl[(k-1)\int \frac{g(y)}{h(y)}\, dy\biggr].$$

17. $\boldsymbol{\bigl[f(y) + amx^k y^{m-1}\bigr]u_x - \bigl[g(x) + akx^{k-1}y^m\bigr]u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = \int f(y)\, dy + \int g(x)\, dx + ax^k y^m$.

18. $\boldsymbol{\bigl[e^{\alpha x} f(y) + c\beta\bigr]u_x - \bigl[e^{\beta y} g(x) + c\alpha\bigr]u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = \int e^{-\beta y} f(y)\, dy + \int e^{-\alpha x} g(x)\, dx - ce^{-\alpha x - \beta y}$.

19. $\boldsymbol{u_x + f(ax + by + c)u_y = 0, \qquad b \neq 0.}$

Главный интеграл: $z = \int \frac{dv}{a + bf(v)} - x$, где $v = ax + by + c$.

20. $\boldsymbol{u_x + f(y/x)u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = \int \frac{dv}{f(v) - v} - \ln|x|$, где $v = \frac{y}{x}$.

21. $\boldsymbol{xu_x + yf(x^n y^m)u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = \int \frac{dv}{v[mf(v) + n]} - \ln|x|$, где $v = x^n y^m$.

22. $\boldsymbol{u_x + yf(e^{\alpha x} y^m)u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = \int \frac{dv}{v[\alpha + mf(v)]} - x$, где $v = e^{\alpha x} y^m$.

23. $\boldsymbol{xu_x + f(x^n e^{\alpha y})u_y = 0.}$

Главный интеграл: $z = \int \frac{dv}{v[n + \alpha f(v)]} - \ln|x|$, где $v = x^n e^{\alpha y}$.

4.1.3. Уравнения вида $f(x,y)u_x+g(x,y)u_y=h(x,y)$

▶ *В общие решения уравнений 4.1.3.1–4.1.3.18 входит произвольная функция $\Phi(z)$, аргумент z которой зависит от переменных x и y.*

1. $\boldsymbol{au_x+bu_y=c.}$

Уравнение цилиндрической поверхности. Две формы представления общего решения:

$$u=\frac{c}{a}x+\Phi(bx-ay),\qquad u=\frac{c}{b}y+\Phi(bx-ay).$$

2. $\boldsymbol{au_x+bu_y=f(x).}$

Общее решение: $u=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int f(x)\,dx+\Phi(bx-ay).$

3. $\boldsymbol{u_x+au_y=f(x)y^k.}$

Общее решение: $u=\displaystyle\int_{x_0}^{x}(y-ax+at)^k f(t)\,dt+\Phi(y-ax)$, где x_0 — любое.

4. $\boldsymbol{u_x+au_y=f(x)e^{\lambda y}.}$

Общее решение: $u=e^{\lambda(y-ax)}\displaystyle\int f(x)e^{a\lambda x}\,dx+\Phi(y-ax).$

5. $\boldsymbol{au_x+bu_y=f(x)+g(y).}$

Общее решение: $u=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int f(x)\,dx+\dfrac{1}{b}\int g(y)\,dy+\Phi(bx-ay).$

6. $\boldsymbol{u_x+au_y=f(x)g(y).}$

Общее решение: $u=\displaystyle\int_{x_0}^{x}f(t)g(y-ax+at)\,dt+\Phi(y-ax)$, где x_0 — любое.

7. $\boldsymbol{u_x+au_y=f(x,y).}$

Общее решение: $u=\displaystyle\int_{x_0}^{x}f(t,y-ax+at)\,dt+\Phi(y-ax)$, где x_0 — любое.

8. $\boldsymbol{u_x+[ay+f(x)]u_y=g(x).}$

Общее решение: $u=\displaystyle\int g(x)\,dx+\Phi(z)$, где $z=e^{-ax}y-\displaystyle\int f(x)e^{-ax}\,dx.$

9. $\boldsymbol{u_x+\big[ay+f(x)\big]u_y=g(x)h(y).}$

Общее решение:

$$u=\int g(x)\,h\Big(e^{ax}z+e^{ax}\int f(x)e^{-ax}\,dx\Big)\,dx+\Phi(z),\ \text{ где }\ z=e^{-ax}y-\int f(x)e^{-ax}\,dx.$$

При интегрировании z рассматривается как параметр.

10. $\boldsymbol{u_x + \big[f(x)y + g(x)y^k\big]u_y = h(x).}$

Общее решение: $u = \int h(x)\,dx + \Phi(z)$, где

$$z = e^{-F}y^{1-k} - (1-k)\int e^{-F}g(x)\,dx, \quad F = (1-k)\int f(x)\,dx.$$

11. $\boldsymbol{u_x + \big[f(x) + g(x)e^{\lambda y}\big]u_y = h(x).}$

Общее решение: $u = \int h(x)\,dx + \Phi(z)$, где

$$z = e^{-\lambda y}F(x) + \lambda\int g(x)F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Big[\lambda\int f(x)\,dx\Big].$$

12. $\boldsymbol{axu_x + byu_y = f(x,y).}$

Общее решение:

$$u = \frac{1}{a}\int \frac{1}{x} f\big(x,\, z^{1/a}x^{b/a}\big)\,dx + \Phi(z), \text{ где } z = y^a x^{-b}.$$

При интегрировании z рассматривается как параметр.

13. $\boldsymbol{f(x)u_x + g(y)u_y = h_1(x) + h_2(y).}$

Общее решение: $u = \int \frac{h_1(x)}{f(x)}dx + \int \frac{h_2(y)}{g(y)}dy + \Phi\Big(\int\frac{dx}{f(x)} - \int\frac{dy}{g(y)}\Big)$.

14. $\boldsymbol{f(x)u_x + g(y)u_y = h(x,y).}$

Преобразование $\xi = \int\frac{dx}{f(x)}$, $\eta = \int\frac{dy}{g(y)}$ приводит к уравнению вида 4.1.3.7 для $u = u(\xi,\eta)$.

15. $\boldsymbol{f(y)u_x + g(x)u_y = h(x,y).}$

Преобразование $\xi = \int g(x)\,dx$, $\eta = \int f(y)\,dy$ приводит к уравнению вида 4.1.3.7 для $u = u(\xi,\eta)$.

16. $\boldsymbol{f(x)u_x + \big[g_1(x)y + g_0(x)\big]u_y = h(x,y).}$

Общее решение:

$$u = \Phi(z) + \int\frac{h(x,\, zG + Q)}{f}\,dx, \qquad z = \frac{y - Q}{G},$$

где $G = \exp\Big(\int\frac{g_1}{f}\,dx\Big)$ и $Q = G\int |!\frac{g_0\,dx}{fG}$. При интегрировании z рассматривается как параметр.

17. $\boldsymbol{f(x)u_x + \big[g_1(x)y + g_0(x)y^k\big]u_y = h(x,y).}$

При $k = 1$ см. уравнение 4.1.3.16. При $k \neq 1$ подстановка $\xi = y^{1-k}$ приводит к уравнению вида 4.1.3.16:

$$f(x)u_x + (1-k)\big[g_1(x)\xi + g_0(x)\big]u_\xi = h\big(x,\, \xi^{\frac{1}{1-k}}\big).$$

18. $\boldsymbol{f(x)u_x + \big[g_1(x) + g_0(x)e^{\lambda y}\big]u_y = h(x,y).}$

Подстановка $\xi = e^{-\lambda y}$ приводит к уравнению вида 4.1.3.16:

$$f(x)u_x - \lambda\big[g_1(x)\xi + g_0(x)\big]u_\xi = h\Big(x,\, -\frac{1}{\lambda}\ln\xi\Big).$$

4.1.4. Уравнения вида $f(x,y)u_x + g(x,y)u_y = h(x,y)u + r(x,y)$

► *В общие решения уравнений 4.1.4.1–4.1.4.12 и 4.1.4.15 входит произвольная функция $\Phi(z)$, аргумент z которой зависит от переменных от x и y.*

1. $\boldsymbol{au_x + bu_y = cu.}$

Две формы представления общего решения:

$$u = \exp\Big(\frac{c}{a}x\Big)\Phi(bx - ay), \qquad u = \exp\Big(\frac{c}{b}y\Big)\Phi(bx - ay).$$

2. $\boldsymbol{au_x + bu_y = f(x)u.}$

Общее решение: $u = \exp\Big[\dfrac{1}{a}\displaystyle\int f(x)\,dx\Big]\Phi(bx - ay)$.

3. $\boldsymbol{au_x + bu_y = f(x)u + g(x).}$

Общее решение:

$$u = \exp\Big[\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\Big]\Big\{\Phi(bx - ay) + \frac{1}{a}\int g(x)\exp\Big[-\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\Big]dx\Big\}.$$

4. $\boldsymbol{au_x + bu_y = \big[f(x) + g(y)\big]u.}$

Общее решение: $u = \exp\Big[\dfrac{1}{a}\displaystyle\int f(x)\,dx + \dfrac{1}{b}\displaystyle\int g(y)\,dy\Big]\Phi(bx - ay)$.

5. $\boldsymbol{u_x + au_y = f(x,y)u.}$

Общее решение: $u = \exp\Big[\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y - ax + at)\,dt\Big]\Phi(y - ax)$, где x_0 — любое.

6. $\boldsymbol{u_x + au_y = f(x,y)u + g(x,y).}$

Общее решение:

$$u = F(x,z)\Big[\Phi(z) + \int \frac{g(x,\, z + ax)}{F(x,z)}\,dx\Big], \quad F(x,z) = \exp\Big[\int f(x,\, z + ax)\,dx\Big],$$

где $z = y - ax$. При интегрировании z рассматривается как параметр.

7. $\boldsymbol{axu_x + byu_y = f(x)u + g(x).}$

Общее решение:

$$u = \exp\Big[\frac{1}{a}\int \frac{f(x)\,dx}{x}\Big]\Big\{\Phi\big(x^{-b/a}y\big) + \frac{1}{a}\int \frac{g(x)}{x}\exp\Big[-\frac{1}{a}\int \frac{f(x)\,dx}{x}\Big]dx\Big\}.$$

8. $\boldsymbol{axu_x + byu_y = f(x,y)u.}$

Общее решение:

$$u = \exp\biggl[\frac{1}{a}\int \frac{1}{x} f\bigl(x,\, z^{1/a}x^{b/a}\bigr)\,dx\biggr]\Phi(z), \quad \text{где} \quad z = y^a x^{-b}.$$

При интегрировании z рассматривается как параметр.

9. $\boldsymbol{xu_x + ayu_y = f(x,y)u + g(x,y).}$

Общее решение:

$$u = F(x,z)\biggl[\Phi(z) + \int \frac{g(x,\, zx^a)}{xF(x,z)}\,dx\biggr], \quad F(x,z) = \exp\biggl[\int \frac{1}{x} f(x,\, zx^a)\,dx\biggr],$$

где $z = yx^{-a}$. При интегрировании z рассматривается как параметр.

10. $\boldsymbol{(x-a)u_x + (y-b)w_y = w.}$

Дифференциальное уравнение конической поверхности с вершиной в точке $(a,b,0)$.

Общее решение: $u = (x-a)\Phi\Bigl(\dfrac{y-b}{x-a}\Bigr)$.

11. $\boldsymbol{f(x)u_x + g(y)u_y = \bigl[h_1(x) + h_2(y)\bigr]u.}$

Общее решение: $u = \exp\Bigl[\displaystyle\int \frac{h_1(x)}{f(x)}\,dx + \int \frac{h_2(y)}{g(y)}\,dy\Bigr]\Phi\Bigl(\int \frac{dx}{f(x)}\,dx - \int \frac{dy}{g(y)}\,dy\Bigr)$.

12. $\boldsymbol{f_1(x)u_x + f_2(y)u_y = au + g_1(x) + g_2(y).}$

Общее решение:

$$u = E_1(x)\Phi(z) + E_1(x)\int \frac{g_1(x)\,dx}{f_1(x)E_1(x)} + E_2(y)\int \frac{g_2(y)\,dy}{f_2(y)E_2(y)},$$

где

$$E_1(x) = \exp\biggl[a\int \frac{dx}{f_1(x)}\biggr], \quad E_2(y) = \exp\biggl[a\int \frac{dy}{f_2(y)}\biggr], \quad z = \int \frac{dx}{f_1(x)} - \int \frac{dy}{f_2(y)}.$$

13. $\boldsymbol{f(x)u_x + g(y)u_y = h(x,y)u + r(x,y).}$

Преобразование $\xi = \displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$, $\eta = \displaystyle\int \frac{dy}{g(y)}$ приводит к уравнению вида 4.1.4.6 для $u = u(\xi,\eta)$.

14. $\boldsymbol{f(y)u_x + g(x)u_y = h(x,y)u + r(x,y).}$

Преобразование $\xi = \displaystyle\int g(x)\,dx$, $\eta = \displaystyle\int f(y)\,dy$ приводит к уравнению вида 4.1.4.6 для $u = u(\xi,\eta)$.

15. $\boldsymbol{f(x)u_x + \bigl[g_1(x)y + g_0(x)\bigr]u_y = h(x,y)u + r(x,y).}$

Общее решение:

$$u = H(x,z)\biggl[\Phi(z) + \int \frac{r(x,\, zG+Q)}{f(x)H(x,z)}\,dx\biggr],$$

где

$$z = \frac{y-Q}{G}, \quad H(x,z) = \exp\Bigl[\int \frac{h(x,\, zG+Q)}{f(x)}dx\Bigr],$$
$$G = G(x) = \exp\Bigl[\int \frac{g_1(x)}{f(x)}dx\Bigr], \quad Q = Q(x) = G(x)\int \frac{g_0(x)\,dx}{f(x)G(x)}.$$

При интегрировании z рассматривается как параметр.

16. $\boldsymbol{f(x)u_x + \bigl[g_1(x)y + g_0(x)y^k\bigr]u_y = h(x,y)u + r(x,y).}$

При $k=0$ и $k=1$ см. уравнение 4.1.4.15. При $k \neq 1$ подстановка $\xi = y^{1-k}$ приводит к уравнению вида 4.1.4.15:

$$f(x)u_x + (1-k)\bigl[g_1(x)\xi + g_0(x)\bigr]u_\xi = h\Bigl(x,\, \xi^{\frac{1}{1-k}}\Bigr)u + r\Bigl(x,\, \xi^{\frac{1}{1-k}}\Bigr).$$

17. $\boldsymbol{f(x)u_x + \bigl[g_1(x) + g_0(x)e^{\lambda y}\bigr]u_y = h(x,y)u + r(x,y).}$

Подстановка $\xi = e^{-\lambda y}$ приводит к уравнению вида 4.1.4.15:

$$f(x)u_x - \lambda\bigl[g_1(x)\xi + g_0(x)\bigr]u_\xi = h\Bigl(x,\, -\frac{1}{\lambda}\ln\xi\Bigr)u + r\Bigl(x,\, -\frac{1}{\lambda}\ln\xi\Bigr).$$

4.2. Квазилинейные уравнения с частными производными с двумя независимыми переменными

4.2.1. Предварительные замечания. Методы решения

▶ Метод характеристик, основанный на решении системы ОДУ.

В общем случае *квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными* имеет вид

$$f(x,y,u)u_x + g(x,y,u)u_y = h(x,y,u). \qquad (1)$$

Такие уравнения используются для описания различных явлений и процессов в механике сплошных сред, газовой динамике, гидродинамике, теории тепло- и массообмена, теории волн, акустике и других областях науки.

Пусть известны два различных (функционально независимых) интеграла

$$z_1(x,y,u) = C_1, \qquad z_2(x,y,u) = C_2, \qquad (2)$$

характеристической системы ОДУ

$$\frac{dx}{f(x,y,u)} = \frac{dy}{g(x,y,u)} = \frac{du}{h(x,y,u)}. \qquad (3)$$

Тогда общее решение квазилинейного УрЧП (1) можно представить в виде

$$\Psi(z_1, z_2) = 0, \qquad (4)$$

где Ψ — произвольная функция двух аргументов. Разрешив соотношение (4) относительно z_1 или z_2, часто записывают общее решение в виде

$$z_k = \Phi(z_{3-k}),$$

где $k = 1,\ 2$, а $\Phi(z)$ — произвольная функция одного аргумента.

Замечание 4.3. *Как правило, общее решение уравнения (1) не может быть представлено в явном виде, разрешенном относительно искомой функции u.*

Замечание 4.4. *Специальному частному случаю $h = 0$ в (3) соответствует простейший второй интеграл $z_2 = C_2$ в (2).*

▶ **Квазилинейные УрЧП первого порядка специального вида.**

Рассмотрим *квазилинейное УрЧП первого порядка специального вида*

$$f(x,y)u_x + g(x,y)u_y = h(x,y)\varphi(u).$$

Подстановка $w = \displaystyle\int \frac{du}{\varphi(u)}$ приводит это уравнение к более простому линейному УрЧП первого порядка

$$f(x,y)w_x + g(x,y)w_y = h(x,y).$$

О решении этого уравнения см. разд. 4.1.3.

4.2.2. Уравнения вида $f(x,y)u_x + g(x,y)u_y = h(x,y,u)$

▶ *В общие решения уравнений 4.2.2.1–4.2.2.18 входит произвольная функция $\Phi(z)$, аргумент z которой зависит от переменных x и y.*

1. $\boldsymbol{u_x + au_y = bu^k.}$

При $k = 1$ см. уравнение 4.1.4.1. Общее решение при $k \neq 1$:

$$u = \bigl[\Phi(y - ax) + b(1-k)x\bigr]^{\frac{1}{1-k}}.$$

2. $\boldsymbol{u_x + au_y = be^{-\lambda u}.}$

Общее решение: $u = \dfrac{1}{\lambda}\ln\bigl[\Phi(y - ax) + b\lambda x\bigr]$.

3. $\boldsymbol{u_x + au_y = f(x)u + g(x)u^k.}$

Общее решение:

$$u^{1-k} = F(x)\Phi(y-ax) + (1-k)F(x)\int \frac{g(x)}{F(x)}\,dx, \quad \text{где } F(x) = \exp\Bigl[(1-k)\int f(x)\,dx\Bigr].$$

4. $\boldsymbol{u_x + au_y = f(x) + g(x)e^{-\lambda u}.}$

Общее решение:

$$e^{\lambda u} = F(x)\Phi(y - ax) + \lambda F(x)\int \frac{g(x)}{F(x)}\,dx, \quad \text{где } F(x) = \exp\Bigl[\lambda\int f(x)\,dx\Bigr].$$

5. $\boldsymbol{au_x + bu_y = f(u)}$.

Общее решение: $\displaystyle\int \frac{du}{f(u)} = \frac{x}{a} + \Phi(bx - ay)$.

6. $\boldsymbol{au_x + bu_y = f(x)g(u)}$.

Общее решение: $\displaystyle\int \frac{du}{g(u)} = \frac{1}{a}\int f(x)\,dx + \Phi(bx - ay)$.

7. $\boldsymbol{u_x + au_y = f(x)g(y)h(u)}$.

Общее решение: $\displaystyle\int \frac{du}{h(u)} = \int_{x_0}^{x} f(t)g(y-ax+at)\,dt + \Phi(y-ax)$, где x_0 — любое.

8. $\boldsymbol{axu_x + bxu_y = cu^k}$.

Общее решение:

$$\frac{c}{a}\ln|x| + \Phi(bx - ay) = \begin{cases} \frac{1}{1-k}u^{1-k} & \text{при } k \neq 1, \\ \ln|u| & \text{при } k = 1. \end{cases}$$

9. $\boldsymbol{axu_x + byu_y = cu^k}$.

Общее решение:

$$\frac{c}{a}\ln|x| + \Phi\bigl(|x|^b|y|^{-a}\bigr) = \begin{cases} \frac{1}{1-k}u^{1-k} & \text{при } k \neq 1, \\ \ln|u| & \text{при } k = 1. \end{cases}$$

10. $\boldsymbol{ayu_x + bxu_y = cu^k}$.

Общее решение при $ab > 0$:

$$\frac{c}{\sqrt{ab}}\ln\bigl|\sqrt{ab}\,x + ay\bigr| + \Phi\bigl(ay^2 - bx^2\bigr) = \begin{cases} \frac{1}{1-k}u^{1-k} & \text{при } k \neq 1, \\ \ln|u| & \text{при } k = 1. \end{cases}$$

11. $\boldsymbol{axu_x + byu_y = f(u)}$.

Общее решение: $\displaystyle\int \frac{du}{f(u)} = \frac{1}{a}\ln|x| + \Phi\bigl(|x|^b|y|^{-a}\bigr)$.

12. $\boldsymbol{ayu_x + bxu_y = f(u)}$.

Общее решение: $\displaystyle\int \frac{du}{f(u)} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\bigl|\sqrt{ab}\,x + ay\bigr| + \Phi\bigl(ay^2 - bx^2\bigr), \qquad ab > 0.$

13. $\boldsymbol{ax^n u_x + by^k u_y = f(u)}$.

Общее решение:

$$\int \frac{du}{f(u)} = \frac{1}{a(1-n)}x^{1-n} + \Phi(z), \quad \text{где} \quad z = \frac{1}{a(1-n)}x^{1-n} - \frac{1}{b(1-k)}y^{1-k}.$$

14. $\boldsymbol{ay^n u_x + bx^k u_y = f(u).}$

Общее решение:

$$a\int\frac{du}{f(u)}=\int\Big(\frac{b}{a}\frac{n+1}{k+1}x^{k+1}-z\Big)^{-\frac{n}{n+1}}dx+\Phi(z),\ \text{ где }\ z=\frac{b}{a}\frac{n+1}{k+1}x^{k+1}-y^{n+1}.$$

При интегрировании z рассматривается как параметр.

15. $\boldsymbol{ae^{\lambda x}u_x + be^{\beta y}u_y = f(u).}$

Общее решение: $\displaystyle\int\frac{du}{f(u)}=-\frac{1}{a\lambda}e^{-\lambda x}+\Phi(z)$, где $z=a\lambda e^{-\beta y}-b\beta e^{-\lambda x}$.

16. $\boldsymbol{ae^{\lambda y}u_x + be^{\beta x}u_y = f(u).}$

Общее решение: $\displaystyle\int\frac{du}{f(u)}=\frac{c(\beta x-\lambda y)}{z}+\Phi(z)$, где $z=a\beta e^{\lambda y}-b\lambda e^{\beta x}$.

17. $\boldsymbol{f(x)u_x + g(y)u_y = h(u).}$

Общее решение: $\displaystyle\int\frac{du}{h(u)}=\int\frac{dx}{f(x)}+\Phi(z)$, где $\displaystyle z=\int\frac{dx}{f(x)}-\int\frac{dy}{g(y)}$.

18. $\boldsymbol{f(y)u_x + g(x)u_y = h(u).}$

Преобразование $\displaystyle\xi=\int g(x)\,dx,\ \ \eta=\int f(y)\,dy$ приводит к уравнению вида 4.2.2.7:

$$u_\xi+u_\eta=F(\xi)G(\eta)h(u),\quad \text{где}\quad F(\xi)=\frac{1}{g(x)},\ \ G(\eta)=\frac{1}{f(y)}.$$

4.2.3. Уравнения вида $u_x + f(x,y,u)u_y = 0$

► *В решения уравнений 4.2.3.1–4.2.3.17 входит произвольная функция* $\Phi(u)$.

1. $\boldsymbol{u_x + auu_y = 0.}$

Уравнение Хопфа. Используется как модельное уравнение нелинейной теории волн и газовой динамики, где независимые переменные x и y играют соответственно роль времени и пространственной координаты.

1°. Общее решение:

$$\Phi(axu-y,u)=0\qquad \text{или}\qquad y=axu+\tilde\Phi(u),$$

где Φ и $\tilde\Phi$ — произвольные функции.

2°. Решение задачи Коши с начальным условием

$$u=\varphi(y)\quad\text{при}\quad x=0$$

можно записать в параметрическом виде

$$y=\xi+a\varphi(\xi)x,\qquad u=\varphi(\xi).$$

При $a>0$ и $\varphi'(\xi)>0$ эти формулы описывают классическое однозначное решение.

3°. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Хопфа с разрывным начальным условием
$$u(0,y)=\begin{cases} u_1 & \text{при } y<0,\\ u_2 & \text{при } y>0.\end{cases}$$
Считаем, что $a>0$, $u_1>0$, $u_2>0$.

При $u_1<u_2$ решение (обобщенное) имеет вид
$$u(x,y)=\begin{cases} u_1 & \text{при } y/x<V_1,\\ y/(ax) & \text{при } V_1\leqslant y/x\leqslant V_2,\\ u_2 & \text{при } y/x>V_2,\end{cases}\qquad \text{где}\quad V_1=au_1,\quad V_2=au_2.$$
Это решение является непрерывным в полуплоскости $x>0$ и описывает *волну разрежения*.

При $u_1>u_2$ решение (обобщенное) имеет вид
$$u(x,y)=\begin{cases} u_1 & \text{при } y/x<V,\\ u_2 & \text{при } y/x>V,\end{cases}\qquad \text{где}\quad V=\tfrac{1}{2}a(u_1+u_2).$$
Это решение терпит разрыв на линии $y=Vx$ и описывает *ударную волну*.

2. $\boldsymbol{u_x+(au+bx)u_y=0.}$

Общее решение: $y=axu+\frac{1}{2}bx^2+\Phi(u)$.

3. $\boldsymbol{u_x+(au+by)u_y=0.}$

Общее решение: $x=\dfrac{1}{b}\ln|au+by|+\Phi(u)$.

4. $\boldsymbol{u_x+\bigl[au+yf(x)\bigr]u_y=0.}$

Общее решение: $yF(x)-au\displaystyle\int F(x)\,dx=\Phi(u)$, где $F(x)=\exp\Bigl[-\displaystyle\int f(x)\,dx\Bigr]$.

5. $\boldsymbol{u_x+\bigl[au+f(y)\bigr]u_y=0.}$

Общее решение: $x=\displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{f(t)+au}+\Phi(u)$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

6. $\boldsymbol{u_x+(au^k+b)u_y=0.}$

Общее решение: $y=axu^k+bx+\Phi(u)$.

7. $\boldsymbol{u_x+(au^k+bx)u_y=0.}$

Общее решение: $y=axu^k+\frac{1}{2}bx^2+\Phi(u)$.

8. $\boldsymbol{u_x+(ae^{\lambda u}+b)u_y=0.}$

Общее решение: $y=x(ae^{\lambda u}+b)+\Phi(u)$.

9. $\boldsymbol{u_x + (ae^{\lambda u} + bx)u_y = 0}$**.**

Общее решение: $y = axe^{\lambda u} + \frac{1}{2}bx^2 + \Phi(u)$.

10. $\boldsymbol{u_x + f(u)u_y = 0}$**.**

Модельное уравнение газовой динамики. Встречается также в гидродинамике, теории фильтрации, теории волн, акустике, химической технологии и других приложениях.

1°. Общее решение:

$$y = xf(u) + \Phi(u),$$

где Φ — произвольная функция.

2°. Решение задачи Коши с начальным условием

$$u = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0$$

можно записать в параметрическом виде

$$y = \xi + \mathcal{F}(\xi)x, \quad u = \varphi(\xi),$$

где $\mathcal{F}(\xi) = f\bigl(\varphi(\xi)\bigr)$.

3°. Рассмотрим задачу Коши с разрывным начальным условием

$$u(0, y) = \begin{cases} u_1 & \text{при } y < 0, \\ u_2 & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Считаем, что $x \geqslant 0$; $f > 0$ и $f' > 0$ при $u > 0$; $u_1 > 0$ и $u_2 > 0$.

При $u_1 < u_2$ решение (обобщенное) имеет вид

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1 & \text{при } y/x < V_1, \\ f^{-1}(y/x) & \text{при } V_1 \leqslant y/x \leqslant V_2, \\ u_2 & \text{при } y/x > V_2, \end{cases} \qquad \text{где} \quad V_1 = f(u_1), \quad V_2 = f(u_2).$$

Здесь f^{-1} — обратная функция к f, т. е. $f^{-1}\bigl(f(u)\bigr) \equiv u$. Это решение является непрерывным в полуплоскости $x > 0$ и описывает *волну разрежения.*

При $u_1 > u_2$ решение (обобщенное) имеет вид

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1 & \text{при } y/x < V, \\ u_2 & \text{при } y/x > V, \end{cases} \qquad \text{где} \quad V = \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du.$$

Это решение терпит разрыв на линии $y = Vx$ и описывает *ударную волну.*

11. $\boldsymbol{u_x + [f(u) + ax]u_y = 0}$**.**

Общее решение: $y = xf(u) + \frac{1}{2}ax^2 + \Phi(u)$.

12. $\boldsymbol{u_x + \left[f(u) + ay\right]u_y = 0.}$

Общее решение при $a \neq 0$: $x = \dfrac{1}{a}\ln\left|ay + f(u)\right| + \Phi(u)$.

13. $\boldsymbol{u_x + \left[f(u) + g(x)\right]u_y = 0.}$

Общее решение: $y = xf(u) + \displaystyle\int g(x)\,dx + \Phi(u)$.

14. $\boldsymbol{u_x + \left[f(u) + g(y)\right]u_y = 0.}$

Общее решение: $x = \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t) + f(u)} + \Phi(u)$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

15. $\boldsymbol{u_x + \left[yf(u) + g(x)\right]u_y = 0.}$

Общее решение: $y\exp\left[-xf(u)\right] - \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)\exp\left[-tf(u)\right]dt = \Phi(u)$, где x_0 — любое.

16. $\boldsymbol{u_x + \left[xf(u) + yg(u) + h(u)\right]u_y = 0.}$

Общее решение: $y + \dfrac{xf(u) + h(u)}{g(u)} + \dfrac{f(u)}{g^2(u)} = \exp\left[g(u)x\right]\Phi(u)$.

17. $\boldsymbol{u_x + f(x)g(y)h(u)u_y = 0.}$

Общее решение: $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} - h(u)\int f(x)\,dx = \Phi(u)$.

4.2.4. Уравнения вида $u_x + f(x, y, u)u_y = g(x, y, u)$

▶ *В общие решения уравнений 4.2.4.1–4.2.4.18 входит произвольная функция $\Phi(z)$, аргумент z которой может зависеть от переменных x, y, u.*

1. $\boldsymbol{u_x + auu_y = b.}$

Общее решение: $\Phi\bigl(u - bx,\ au^2 - 2by\bigr) = 0$.

2. $\boldsymbol{u_x + auu_y = bx.}$

Общее решение: $y = axu - \frac{1}{3}abx^3 + \Phi\bigl(u - \frac{1}{2}bx^2\bigr)$.

3. $\boldsymbol{u_x + auu_y = by.}$

Общее решение: $x = \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{\sqrt{ab(t^2 - y^2) + a^2u^2}} + \Phi\bigl(au^2 - by^2\bigr)$, где y_0 — любое.

4. $\boldsymbol{u_x + auu_y + bu = 0.}$

Модельное уравнение нелинейных волн с затуханием (a, $b > 0$).

1°. Общее решение: $\Phi\bigl(au + by,\ ue^{bx}\bigr) = 0$.

2°. Решение задачи Коши для этого УрЧП с начальным условием $u(0,y) = f(y)$ может быть представлено в параметрическом виде

$$y = \xi + \frac{a}{b}\bigl(1 - e^{-bx}\bigr)f(\xi), \qquad u = e^{-bx}f(\xi).$$

5. $\boldsymbol{u_x + auu_y = f(x).}$

Общее решение:

$$y = ax\bigl[u - F(x)\bigr] + a\int F(x)\,dx + \Phi\bigl(u - F(x)\bigr),\ \text{где}\ F(x) = \int f(x)\,dx.$$

6. $\boldsymbol{u_x + auu_y = f(y).}$

Общее решение:

$$x = \pm\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{\sqrt{2aF(t) - 2az}} + \Phi(z), \qquad z = F(y) - \frac{1}{2}au^2,$$

где $F(y) = \int f(y)\,dy$. При интегрировании z рассматривается как параметр.

7. $\boldsymbol{u_x + auu_y = f(y - bx).}$

Модельное уравнение, описывающее нелинейные волны от движущегося источника (переменные x и y играют соответственно роль времени и пространственной координаты, b — скорость источника).

1°. Общее решение:

$$x = \pm\int_{t_0}^{y-bx} \frac{dt}{\sqrt{b^2 + 2aF(t) - 2az}} + \Phi(z), \qquad z = F(y - bx) - \frac{1}{2}au^2 + bu,$$

где $F(t) = \int f(t)\,dt$. При интегрировании z рассматривается как параметр, t_0 — любое.

2°. Решение со стационарным профилем:

$$u = b - \left[(b - u_0)^2 - 2\int_{\xi}^{\infty} f(t)\,dt\right]^{1/2}, \qquad \xi = y - bx,$$

где u_0 — константа интегрирования.

8. $\boldsymbol{u_x + \bigl[au + f(x)\bigr]u_y = g(x).}$

Общее решение:

$$y = ax\bigl[u - G(x)\bigr] + a\int G(x)\,dx + F(x) + \Phi\bigl(u - G(x)\bigr),$$

где

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \quad G(x) = \int g(x)\,dx.$$

9. $\boldsymbol{u_x + f(u)u_y = g(x)}$.

Общее решение:

$$y = \int_{x_0}^{x} f\big(G(t) - G(x) + u\big)\,dt + \Phi\big(u - G(x)\big), \quad \text{где} \quad G(x) = \int g(x)\,dx.$$

10. $\boldsymbol{u_x + f(u)u_y = g(y)}$.

Общее решение:

$$x = \int_{y_0}^{y} \psi\big(G(t) - G(y) + F(u)\big)\,dt + \Phi\big(F(u) - G(y)\big),$$

где $G(y) = \int g(y)\,dy$ и $F(u) = \int f(u)\,du$. Функция $\psi = \psi(z)$ задается в параметрической форме с помощью соотношений $\psi = \dfrac{1}{f(u)}$, $z = F(u)$.

11. $\boldsymbol{u_x + f(u)u_y = g(u)}$.

Общее решение: $y = \displaystyle\int \frac{f(u)}{g(u)} du + \Phi\Big(x - \int \frac{du}{g(u)}\Big)$.

12. $\boldsymbol{u_x + \big[f(u) + g(x)\big]u_y = h(x)}$.

Общее решение:

$$y = \int_{x_0}^{x} f\big(H(t) - H(x) + u\big)\,dt + G(x) + \Phi\big(u - H(x)\big),$$

где

$$G(x) = \int g(x)\,dx, \quad H(x) = \int h(x)\,dx.$$

13. $\boldsymbol{u_x + \big[f(u) + g(x)\big]u_y = h(u)}$.

Общее решение:

$$y = \int \frac{f(u)}{h(u)}\,du + \int_{u_0}^{u} \frac{g\big(H(t) - H(u) + x\big)}{h(t)}\,dt + \Phi\big(x - H(u)\big), \quad \text{где} \quad H(u) = \int \frac{du}{h(u)}.$$

14. $\boldsymbol{u_x + \big[f(u) + yg(x)\big]u_y = h(x)}$.

Общее решение:

$$yG(x) - \int_{x_0}^{x} G(t) f\big(H(t) - H(x) + u\big)\,dt = \Phi\big(u - H(x)\big),$$

где $G(x) = \exp\Big[-\int g(x)\,dx\Big]$, $H(x) = \int h(x)\,dx$, а x_0 — любое. При интегрировании u рассматривается как параметр.

15. $\boldsymbol{u_x + f(x)g(y)h(u)u_y = p(x)}$.

Общее решение:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(t) h\big(P(t) - P(x) + u\big)\,dt + \Phi\big(u - P(x)\big), \quad \text{где} \quad P(x) = \int p(x)\,dx.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр, x_0 — любое.

16. $\boldsymbol{u_x + f(x)g(y)h(u)u_y = p(u).}$

Общее решение:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int_{u_0}^{u} \frac{h(t)}{p(t)} f\bigl(P(t) - P(u) + x\bigr)\,dt + \Phi\bigl(x - P(u)\bigr), \quad \text{где} \quad P(u) = \int \frac{du}{p(u)}.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр, u_0 — любое.

17. $\boldsymbol{u_x + f(x,u)u_y = g(x).}$

Общее решение:

$$y = \int_{x_0}^{x} f\bigl(t,\, G(t) - G(x) + u\bigr)\,dt + \Phi\bigl(u - G(x)\bigr), \quad \text{где} \quad G(x) = \int g(x)\,dx.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр, x_0 — любое.

18. $\boldsymbol{u_x + f(x,u)u_y = g(u).}$

Общее решение:

$$y = \int_{u_0}^{u} \frac{f\bigl(G(t) - G(u) + x,\, t\bigr)}{g(t)}\,dt + \Phi\bigl(x - G(u)\bigr), \quad \text{где} \quad G(u) = \int \frac{du}{g(u)}.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр, u_0 — любое.

4.3. Нелинейные уравнения с частными производными с двумя независимыми переменными

4.3.1. Предварительные замечания

В общем случае *нелинейное уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными* имеет вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{1}$$

Такие уравнения часто встречаются в аналитической механике, вариационном исчислении, оптимальном управлении, дифференциальных играх, динамическом программировании, геометрической оптике, дифференциальной геометрии и других областях.

1°. Пусть известно частное решение уравнения (1):

$$u = \Theta(x, y, C_1, C_2), \tag{2}$$

зависящее от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Двухпараметрическое семейство решений (2) называется полным интегралом уравнения (1), если в рассматриваемой области ранг матрицы

$$M = \begin{pmatrix} \Theta_1 & \Theta_{x1} & \Theta_{y1} \\ \Theta_2 & \Theta_{x2} & \Theta_{y2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

равен двум (это справедливо, например, если $\Theta_{x1}\Theta_{y2} - \Theta_{x2}\Theta_{y1} \neq 0$). В матрице (3) Θ_n обозначает частную производную Θ по C_n ($n = 1, 2$), Θ_{xn} — вторую частную производную по аргументам x и C_n, Θ_{yn} — вторую частную производную по аргументам y и C_n.

В ряде случаев полный интеграл удается найти методом неопределенных коэффициентов, задав подходящим образом структуру частного решения. (Полный интеграл определяется дифференциальным уравнением не однозначно.)

Полный интеграл уравнения (2) часто записывается в неявном виде:

$$\Theta(x, y, u, C_1, C_2) = 0. \tag{4}$$

2°. Общий интеграл уравнения (1) можно представить в параметрическом виде с помощью полного интеграла (2) (или (4)) и двух уравнений

$$\begin{aligned} &C_2 = \Phi(C_1), \\ &\frac{\partial\Theta}{\partial C_1} + \frac{\partial\Theta}{\partial C_2}\Phi'(C_1) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где Φ — произвольная функция, а штрих обозначает производную. Общий интеграл в определенном смысле играет роль общего решения, зависящего от произвольной функции (вопрос о том, все ли решения он описывает, требует дополнительного анализа).

3°. *Особые (сингулярные) интегралы* УрЧП (1) можно найти без определения полного интеграла, исключив p и q из следующей системы трех алгебраических (или трансцендентных) уравнений:

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u_x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u_y} = 0,$$

где первое уравнение совпадает с уравнением (1).

Замечание 4.5. *Более подробно методы решения нелинейных УрЧП вида (1) описываются в книгах Камке (1966), Зайцев & Полянин (2003), Polyanin & Manzhirov (2007), Polyanin & Zaitsev (2012).*

4.3.2. Уравнения, квадратичные по одной производной

► *В данном разделе, а также в двух последующих разделах, как правило, представлены только полные интегралы. Чтобы построить соответствующее общее решение, следует использовать формулы из разд. 4.3.1.*

1. $\boldsymbol{u_x + au_y^2 = by.}$

Это уравнение описывает свободное вертикальное падение материальной точки массы $m=1/(2a)$ у поверхности Земли (y — координата, направленная вниз, x — время, $g=2ab$ — ускорение свободного падения).

Полный интеграл: $u=-C_1x \pm \dfrac{2a}{3b}\left(\dfrac{by+C_1}{a}\right)^{3/2}+C_2.$

2. $\boldsymbol{u_x + au_y^2 + by^2 = 0.}$

Это уравнение описывает свободные колебания материальной точки массы $m=1/(2a)$ в упругом поле с коэффициентом упругости $k=2b$ (y — отклонение от положения равновесия, x — время).

Полный интеграл: $u=-C_1x+C_2 \pm \displaystyle\int\sqrt{\frac{C_1-by^2}{a}}\,dx+C_2.$

3. $\boldsymbol{u_x + au_y^2 = f(x) + g(y).}$

Полный интеграл: $u=-C_1x+\displaystyle\int f(x)\,dx+\int\sqrt{\frac{g(y)+C_1}{a}}\,dy+C_2.$

4. $\boldsymbol{u_x + au_y^2 = f(x)y + g(x).}$

Полный интеграл:

$$u=\varphi(x)y+\int\big[g(x)-a\varphi^2(x)\big]\,dx+C_1,\ \text{ где } \varphi(x)=\int f(x)\,dx+C_2.$$

5. $\boldsymbol{u_x + au_y^2 = f(x)u + g(x).}$

Полный интеграл:

$$u=F(x)(C_1+C_2y)+F(x)\int\big[g(x)-aC_2^2F^2(x)\big]\frac{dx}{F(x)},\ \text{ где } F(x)=\exp\Big[\int f(x)\,dx\Big].$$

6. $\boldsymbol{u_x + au_y^2 + bu_y = f(x) + g(y).}$

Полный интеграл:

$$u=-C_1x+C_2+\int f(x)\,dx-\frac{b}{2a}y\pm\frac{1}{2a}\int\sqrt{4ag(y)+b^2+4aC_1}\,dy.$$

7. $\boldsymbol{u_x + au_y^2 + bu_y = f(x)y + g(x).}$

Полный интеграл:

$$u=\varphi(x)y+\int\big[g(x)-a\varphi^2(x)-b\varphi(x)\big]\,dx+C_1,\ \text{ где } \varphi(x)=\int f(x)\,dx+C_2.$$

8. $\boldsymbol{u_x + au_y^2 + bu_y = f(x)u + g(x).}$

Полный интеграл:

$$u=(C_1y+C_2)F(x)+F(x)\int\big[g(x)-aC_1^2F^2(x)-bC_1F(x)\big]\frac{dx}{F(x)},$$

где $F(x) = \exp\Bigl[\int f(x)\,dx\Bigr]$.

9. $\boldsymbol{u_x - f(x)u_y^2 = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = C_1^2 \int f(x)\,dx + C_1 y + C_2.$$

10. $\boldsymbol{u_x + f(x)u_y^2 + g(x)u_y = h(x).}$

Полный интеграл: $u = C_1 y + C_2 + \int \bigl[h(x) - C_1^2 f(x) - C_1 g(x)\bigr]\,dx$.

11. $\boldsymbol{u_x + f(x)u_y^2 + g(x)u_y = h(x)u + p(x)y + s(x).}$

Полный интеграл:

$$u = y\varphi(x) + \psi(x),$$

где

$$\varphi(x) = C_1 H(x) + H(x)\int \frac{p(x)}{H(x)}\,dx, \quad H(x) = \exp\Bigl[\int h(x)\,dx\Bigr],$$
$$\psi(x) = C_2 H(x) + H(x)\int \bigl[s(x) - f(x)\varphi^2(x) - g(x)\varphi(x)\bigr]\frac{dx}{H(x)}.$$

12. $\boldsymbol{u_x + \bigl[f(x)y + g(x)\bigr]u_y^2 = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = \varphi(x)y - \int g(x)\varphi^2(x)\,dx + C_1, \qquad \varphi(x) = \Bigl[C_2 + \int f(x)\,dx\Bigr]^{-1}.$$

13. $\boldsymbol{u_x - f(y)u_y^2 = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = \pm C_1^2 x + C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{|f(y)|}} + C_2.$$

Здесь верхний знак берется, если $f(y) > 0$, а нижний знак — если $f(y) < 0$.

14. $\boldsymbol{u_x + f(y)u_y^2 + g(y)u_y = h(x) + r(y).}$

Полный интеграл:

$$u = -C_1 x + C_2 + \int h(x)\,dx + \int \frac{-g(y) \pm \sqrt{g^2(y) + 4f(y)r(y) + 4C_1 f(y)}}{2f(y)}\,dy.$$

15. $\boldsymbol{u_x - f(u)u_y^2 = 0.}$

Полный интеграл в неявном виде: $\int f(u)\,du = C_1^2 x + C_1 y + C_2$.

16. $\boldsymbol{u_x + f(u)u_y^2 + g(u)u_y = h(u).}$

Полный интеграл в неявном виде:

$$C_1x + C_2y + \int \frac{2C_2^2 f(u)\,du}{C_1 + C_2g(u) \pm \sqrt{[C_1 + C_2g(u)]^2 + 4C_2^2 f(u)h(u)}} = C_3.$$

Одну из трех констант C_1, C_2, C_3 можно положить равной ± 1.

17. $\boldsymbol{u_x - f(u)u_y^2 - \big[yg(x) + h(x)\big]u_y = 0.}$

Преобразование

$$t = \int \varphi^2(x)\,dx, \quad z = \varphi(x)y + \int h(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi(x) = \exp\Big[\int g(x)\,dx\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 4.3.2.15:

$$u_t - f(u)u_z^2 = 0.$$

18. $\boldsymbol{u_x + f(y)g(u)u_y^2 = h(u).}$

Полный интеграл в неявном виде при $f(y) > 0$:

$$x + C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} + \int \frac{2C_1^2 g(u)\,du}{1 + \sqrt{1 + 4C_1^2 g(u)h(u)}} = C_2.$$

19. $\boldsymbol{u_x - f(x)g(y)h(u)u_y^2 = 0.}$

Полный интеграл в неявном виде:

$$\int h(u)\,du = \pm C_1^2 \int f(x)\,dx + C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{|g(y)|}} + C_2.$$

Здесь верхний знак берется, если $f(y) > 0$, а нижний знак — если $f(y) < 0$.

20. $\boldsymbol{f_1(x)u_x + f_2(y)u_y^2 = g_1(x) + g_2(y).}$

Полный интеграл: $u = \displaystyle\int \frac{g_1(x) - C_1}{f_1(x)}\,dx + \int \sqrt{\frac{g_2(y) + C_1}{f_2(y)}}\,dy + C_2.$

4.3.3. Уравнения, квадратичные по двум производным

1. $\boldsymbol{au_x^2 + bu_y^2 = c.}$

Дифференциальное уравнение световых лучей (при $a = b$).

Полный интеграл: $u = C_1x + C_2y + C_3$, где $aC_1^2 + bC_2^2 = c$.

Другой первый интеграл: $\dfrac{u^2}{c} = \dfrac{(x - C_1)^2}{a} + \dfrac{(y - C_2)^2}{b}.$

2. $\boldsymbol{u_x^2 + u_y^2 = a - 2by.}$

Это уравнение описывает параболическое движение материальной точки в пустоте (координата x отсчитывается вдоль поверхности Земли, координата y отсчитывается по вертикали от поверхности Земли, a — ускорение силы тяжести).

Полный интеграл: $u = C_1 x \pm \frac{1}{3b}(a - C_1^2 - 2by)^{3/2} + C_2$.

3. $\boldsymbol{u_x^2 + u_y^2 = (a/u)^2 - 1.}$

Это уравнение описывает семейство сферических поверхностей радиуса a, центры которых расположены на плоскости x, y.

Полный интеграл в неявном виде: $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 + u^2 = a^2$.

Другой полный интеграл: $\dfrac{(y - C_1 x - C_2)^2}{1 + C_1^2} + u^2 = a^2$.

4. $\boldsymbol{u_x^2 + u_y^2 = \dfrac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b.}$

К решению этого уравнения сводится задача о движении двух тел в небесной механике.

Полный интеграл:

$$u = \pm \int \sqrt{b + \frac{a}{r} - \frac{C_1^2}{r^2}}\, dr + C_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_2, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

5. $\boldsymbol{u_x^2 + u_y^2 = f(x).}$

Полный интеграл: $u = C_1 y + C_2 \pm \int \sqrt{f(x) - C_1^2}\, dx$.

6. $\boldsymbol{u_x^2 + u_y^2 = f(x) + g(y).}$

Полный интеграл: $u = \pm \int \sqrt{f(x) + C_1}\, dx \pm \int \sqrt{g_2(y) - C_1}\, dy + C_2$. Знаки перед каждым из интегралов могут быть выбраны независимо друг от друга.

7. $\boldsymbol{u_x^2 + u_y^2 = f(x^2 + y^2).}$

Уравнение Гамильтона для плоского движения точки под действием центральной силы.

Полный интеграл:

$$u = C_1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C_2 \pm \frac{1}{2} \int \sqrt{z f(z) - C_1^2}\, \frac{dz}{z}, \qquad z = x^2 + y^2.$$

8. $\boldsymbol{u_x^2 + u_y^2 = f(u).}$

Полный интеграл в неявном виде: $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \pm\sqrt{(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2}$.

9. $\boldsymbol{u_x^2 + \frac{1}{x^2} u_y^2 = f(x).}$

Это уравнение описывает движение материальной точки в центральном поле сил, где x и y — полярные координаты.

Полный интеграл: $u = C_1 y \pm \displaystyle\int \sqrt{f(x) - \frac{C_1^2}{x^2}}\, dx + C_2$.

10. $\boldsymbol{u_x^2 + f(x)u_y^2 = g(x).}$

Полный интеграл: $u = C_1 y + C_2 + \int \sqrt{g(x) - C_1^2 f(x)}\, dx.$

11. $\boldsymbol{u_x^2 + f(y)u_y^2 = g(y).}$

Полный интеграл: $u = C_1 x + C_2 + \int \sqrt{\dfrac{g(y) - C_1^2}{f(y)}}\, dy.$

12. $\boldsymbol{u_x^2 + f(u)u_y^2 = g(u).}$

Полный интеграл в неявном виде: $\displaystyle\int \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2 f(u)}{g(u)}}\, du = C_1 x + C_2 y + C_3.$ Одну из констант C_1 или C_2 можно положить равной ± 1.

13. $\boldsymbol{f_1(x)u_x^2 + f_2(y)u_y^2 = g_1(x) + g_2(y).}$

УрЧП первого порядка с разделяющимися переменными, встречается в дифференциальной геометрии при изучении геодезических линий поверхностей Лиувилля.

Полный интеграл:

$$u = \pm \int \sqrt{\frac{g_1(x) + C_1}{f_1(x)}}\, dx \pm \int \sqrt{\frac{g_2(y) - C_1}{f_2(y)}}\, dy + C_2.$$

Знаки перед каждым из интегралов могут быть выбраны независимо друг от друга.

14. $\boldsymbol{f_1(x,y)u_x^2 + f_2(x,y)u_y^2 = g(x,y)h(u).}$

Подстановка $w = \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{h(u)}}$ приводит к более простому УрЧП: $f_1(x,y)w_x^2 + f_2(x,y)w_y^2 = g(x,y)$. О решениях этого уравнения для некоторых типов правой части см. 4.3.3.1, 4.3.3.2, 4.3.3.4–4.3.3.7, 4.3.3.9–4.3.3.11, 4.3.3.13.

4.3.4. Уравнения, содержащие произвольные нелинейности относительно производных

1. $\boldsymbol{u_x + f(u_y) = 0.}$

Это уравнение встречается в теории оптимального управления и дифференциальных играх.

1°. Полный интеграл: $u = C_1 y - f(C_1)x + C_2$.

2°. Дифференцируя исходное УрЧП по y, получим квазилинейное уравнение вида 4.2.3.10:

$$w_x + f'(w)w_y = 0, \qquad w = u_y.$$

3°. Решение задачи Коши с начальным условием $u(0,y)=\varphi(y)$ может быть представлено в параметрическом виде

$$y=f'(\zeta)x+\xi, \quad u=\bigl[\zeta f'(\zeta)-f(\zeta)\bigr]x+\varphi(\xi), \qquad \text{где} \quad \zeta=\varphi'(\xi).$$

2. $\boldsymbol{u_x+f(u_y)=g(x).}$

Полный интеграл: $u=C_1y-f(C_1)x+\int g(x)\,dx+C_2.$

3. $\boldsymbol{u_x+f(u_y)=g(x)y+h(x).}$

Полный интеграл:

$$u=\varphi(x)y+\int\bigl[h(x)-f\bigl(\varphi(x)\bigr)\bigr]\,dx+C_1, \quad \text{где} \quad \varphi(x)=\int g(x)\,dx+C_2.$$

4. $\boldsymbol{u_x+f(u_y)=g(x)u+h(x).}$

Полный интеграл:

$$u=(C_1y+C_2)\varphi(x)+\varphi(x)\int\bigl[h(x)-f(C_1\varphi(x))\bigr]\frac{dx}{\varphi(x)}, \quad \text{где} \quad \varphi(x)=\exp\Bigl[\int g(x)\,dx\Bigr].$$

5. $\boldsymbol{u_x-[g(x)y+h(x)]f(u_y)=0.}$

Полный интеграл:

$$u=\varphi(x)y+\int f\bigl(\varphi(x)\bigr)h(x)\,dx+C_1,$$

где функция $\varphi(x)$ задается неявно соотношением $\displaystyle\int\frac{d\varphi}{f(\varphi)}=\int g(x)\,dx+C_2.$

6. $\boldsymbol{u_x+[g_1(x)y+g_0(x)]f(u_y)+h_2(x)u+h_1(x)y+h_0(x)=0.}$

1°. Полный интеграл:

$$u=\varphi(x)y+\psi(x),$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(x)$ определяются путем решения системы ОДУ:

$$\varphi'_x+g_1(x)f(\varphi)+h_2(x)\varphi+h_1(x)=0, \tag{1}$$
$$\psi'_x+g_0(x)f(\varphi)+h_2(x)\psi+h_0(x)=0. \tag{2}$$

2°. При $g_1(x)\equiv 0$ общие решения ОДУ (1) и (2) имеют вид

$$\varphi(x)=C_1H(x)-H(x)\int\frac{h_1(x)}{H(x)}\,dx, \qquad H(x)=\exp\Bigl[-\int h_2(x)\,dx\Bigr],$$
$$\psi(x)=C_2H(x)-H(x)\int\frac{h_0(x)+g_0(x)f(\varphi(x))}{H(x)}\,dx.$$

7. $\boldsymbol{u_x-uf(u_y)=0.}$

Полный интеграл:

$$u=(y+C_1)\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ определяется неявно с помощью равенства $\displaystyle\int \frac{d\varphi}{\varphi f(\varphi)} = x + C_2$.

8. $\boldsymbol{u_x - uf(u_y/u) = 0.}$

Полный интеграл: $u = C_1 \exp\bigl[C_2 y + f(C_2)x\bigr]$.

9. $\boldsymbol{u_x - uf(u^\beta u_y) = 0.}$

При $\beta = -1$ см. уравнение 4.3.4.8. Полный интеграл при $\beta \neq -1$:

$$u = \bigl[(1+\beta)y + C_1\bigr]^{\frac{1}{1+\beta}} \varphi(x + C_2).$$

Функция $\varphi(x)$ определяется неявно с помощью соотношения $\displaystyle x = \int \frac{d\varphi}{\varphi f\bigl(\varphi^{\beta+1}\bigr)}$.

10. $\boldsymbol{u_x - f(e^{\beta u} u_y) = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = \frac{1}{\beta} \ln(\beta y + C_1) + \varphi(x + C_2),$$

где функция $\varphi(x)$ определяется неявно с помощью соотношения $\displaystyle x = \int \frac{d\varphi}{f\bigl(e^{\beta\varphi}\bigr)}$.

11. $\boldsymbol{u_x - g(x)u^\beta f(u_y/u) = h(x)u.}$

Преобразование

$$u(x,y) = H(x)z(t,y), \quad t = \int g(x)H^{\beta-1}(x)\,dx, \qquad H(x) = \exp\Bigl[\int h(x)\,dx\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению $z_t - z^\beta f(z_y/z) = 0$, которое после разрешения относительно производной z_y сводится к уравнению вида 4.3.4.9.

12. $\boldsymbol{u_x - g(x)e^{\beta u} f(u_y) = h(x).}$

Преобразование

$$u(x,y) = z(t,y) + H(x), \quad t = \int g(x)\exp\bigl[\beta H(x)\bigr]\,dx, \qquad H(x) = \int h(x)\,dx,$$

приводит к более простому уравнению $z_t - e^{\beta z} f(z_y) = 0$, которое после разрешения относительно производной z_y сводится к уравнению вида 4.3.4.10.

13. $\boldsymbol{u_x - F\bigl(x, u_y\bigr) = 0.}$

Полный интеграл: $\displaystyle u = \int F(x, C_1)\,dx + C_1 y + C_2$.

14. $\boldsymbol{u_x + F\bigl(x, u_y\bigr) = au.}$

Полный интеграл: $\displaystyle u = e^{ax}(C_1 y + C_2) - e^{ax} \int e^{-ax} F(x, C_1 e^{ax})\,dx$.

15. $\boldsymbol{u_x + F(x, u_y) = g(x)u.}$

Полный интеграл:

$$u = \varphi(x)(C_1y + C_2) - \varphi(x)\int F\bigl(x, C_1\varphi(x)\bigr)\,\frac{dx}{\varphi(x)}, \text{ где } \varphi(x) = \exp\Bigl[\int g(x)\,dx\Bigr].$$

16. $\boldsymbol{F(u_x, u_y) = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = C_1x + C_2y + C_3,$$

где C_1 и C_3 — произвольные постоянные, а постоянная C_2 связана с C_1 алгебраическим (трансцендентным) уравнением $F(C_1, C_2) = 0$.

17. $\boldsymbol{u = xu_x + yu_y + F(u_x, u_y).}$

Уравнение Клеро. Полный интеграл: $u = C_1x + C_2y + F(C_1, C_2)$.

18. $\boldsymbol{F_1(x, u_x) = F_2(y, u_y).}$

УрЧП первого порядка с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$u = \varphi(x) + \psi(y) + C_1,$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$ определяются из двух независимых ОДУ:

$$F_1\bigl(x, \varphi'_x\bigr) = C_2, \qquad F_2\bigl(y, \psi'_y\bigr) = C_2.$$

19. $\boldsymbol{F_1(x, u_x) + F_2(y, u_y) + au = 0.}$

УрЧП первого порядка с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$u = \varphi(x) + \psi(y),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$ определяются из двух независимых ОДУ:

$$F_1\bigl(x, \varphi'_x\bigr) + a\varphi = C_1, \quad F_2\bigl(y, \psi'_y\bigr) + a\psi = -C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Если $a \neq 0$, то в полученных ОДУ можно положить $C_1 = 0$.

20. $\boldsymbol{F_1\left(x, \frac{1}{u}u_x\right) + u^kF_2\left(y, \frac{1}{u}u_y\right) = 0.}$

УрЧП первого порядка с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$ определяются из двух независимых ОДУ:

$$\varphi^{-k}F_1\bigl(x, \varphi'_x/\varphi\bigr) = C, \quad \psi^kF_2\bigl(y, \psi'_y/\psi\bigr) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

21. $\boldsymbol{F_1\big(x, u_x\big) + e^{\lambda u} F_2\big(y, u_y\big) = 0.}$

УрЧП первого порядка с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$ определяются из двух независимых ОДУ:

$$e^{-\lambda\varphi} F_1\big(x, \varphi'_x\big) = C, \qquad e^{\lambda\psi} F_2\big(y, \psi'_y\big) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

22. $\boldsymbol{F_1\Big(x, \frac{1}{u} u_x\Big) + F_2\Big(y, \frac{1}{u} u_y\Big) = k \ln u.}$

УрЧП первого порядка с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$ определяются из двух независимых ОДУ:

$$F_1\big(x, \varphi'_x/\varphi\big) - k \ln \varphi = C, \qquad F_2\big(y, \psi'_y/\psi\big) - k \ln \psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

23. $\boldsymbol{u_x + y F_1\big(x, u_y\big) + F_2\big(x, u_y\big) = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = \varphi(x) y - \int F_2\big(x, \varphi(x)\big)\, dx + C_1,$$

где функция $\varphi(x)$ определяется путем решения ОДУ: $\varphi'_x + F_1(x, \varphi) = 0$.

24. $\boldsymbol{F\big(u_x + ay,\ u_y + ax\big) = 0.}$

Полный интеграл: $u = -axy + C_1 x + C_2 y + C_3$, где $F(C_1, C_2) = 0$.

25. $\boldsymbol{u_x^2 + u_y^2 = F\big(x^2 + y^2,\ y u_x - x u_y\big).}$

Полный интеграл:

$$u = -C_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \int \sqrt{\xi F(\xi, C_1) - C_1^2}\, \frac{d\xi}{\xi} + C_2, \ \text{ где } \xi = x^2 + y^2.$$

26. $\boldsymbol{F\big(x, u_x, u_y\big) = 0.}$

Полный интеграл: $u = C_1 y + \varphi(x, C_1) + C_2$, где функция $\varphi = \varphi(x, C_1)$ описывается ОДУ: $F\big(x, \varphi'_x, C_1\big) = 0$.

27. $\boldsymbol{F\big(ax + by, u_x, u_y\big) = 0.}$

При $b = 0$ см. уравнение 4.3.4.26. Полный интеграл при $b \neq 0$:

$$u = C_1 x + \varphi(z, C_1) + C_2, \qquad z = ax + by,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ: $F\bigl(z, a\varphi'_z + C_1, b\varphi'_z\bigr) = 0$.

28. $\boldsymbol{F\bigl(u, u_x, u_y\bigr) = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = u(z), \qquad z = C_1 x + C_2 y,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а $u = u(z)$ описывается автономным ОДУ: $F\bigl(u, C_1 u'_z, C_2 u'_z\bigr) = 0$.

29. $\boldsymbol{F\bigl(ax + by + cu,\ u_x,\ u_y\bigr) = 0.}$

При $c = 0$ см. уравнение 4.3.4.27. При $c \neq 0$ подстановка $cu = ax + by + cu$ приводит к уравнению вида 4.3.4.28: $F\bigl(cu,\ u_x - a/c,\ u_y - b/c\bigr) = 0$.

30. $\boldsymbol{F\bigl(x,\ u_x + ay,\ u_y + ax\bigr) = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = -axy + C_1 y + \varphi(x) + C_2,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается ОДУ: $F\bigl(x, \varphi'_x, C_1\bigr) = 0$.

31. $\boldsymbol{F\bigl(x, u_x, u_y, u - yu_y\bigr) = 0.}$

Полный интеграл: $u = C_1 y + \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ описывается ОДУ: $F\bigl(x, \varphi'_x, C_1, \varphi\bigr) = 0$.

32. $\boldsymbol{F\bigl(u,\ u_x,\ u_y,\ xu_x + yu_y\bigr) = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = \varphi(\xi), \quad \xi = C_1 x + C_2 y,$$

где функция $\varphi(\xi)$ описывается ОДУ: $F\bigl(\varphi,\ C_1\varphi'_\xi,\ C_2\varphi'_\xi,\ \xi\varphi'_\xi\bigr) = 0$.

33. $\boldsymbol{F\bigl(ax + by,\ u_x,\ u_y,\ u - xu_x - yu_y\bigr) = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = C_1 x + C_2 y + \varphi(\xi), \quad \xi = ax + by,$$

где функция $\varphi(\xi)$ описывается ОДУ: $F\bigl(\xi,\ a\varphi'_\xi + C_1,\ b\varphi'_\xi + C_2,\ \varphi - \xi\varphi'_\xi\bigr) = 0$.

34. $\boldsymbol{F\bigl(x, u_x, G\bigl(y, u_y\bigr)\bigr) = 0.}$

Полный интеграл:

$$u = \varphi(x, C_1) + \psi(y, C_1) + C_2,$$

где функции φ и ψ описываются двумя независимыми ОДУ

$$F(x, \varphi'_x, C_1) = 0, \qquad G(y, \psi'_y) = C_1.$$

Решив эти уравнения относительно производных, можно получить линейные ОДУ, которые легко интегрируются.

► *Больше точных решений линейных и нелинейных уравнений с частными производными первого порядка можно найти в специализированных справочниках Камке (1966), Зайцев & Полянин (2003), Polyanin, Zaitsev, Moussiaux (2002). В этих книгах описаны также основные аналитические методы решения таких уравнений.*

Литература к главе 4

Камке Э. *Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.*

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка*. М.: Физматлит, 2003.

Lopez G. *Partial Differential Equations of First Order and Their Applications to Physics*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2000.

Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists* (Chapters 13 and T17). Boca Raton — London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed.* (Chapters 1 and 24). Boca Raton — London: Chapman & Hall/CRC Press, 2012.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Moussiaux A. *Handbook of First Order Partial Differential Equations*. London: Taylor & Francis, 2002.

Rhee H., Aris R., Amundson N. R., *First Order Partial Differential Equations, Vols. 1 and 2*. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1986 and 1989.

Tran D. V., Tsuji M., Nguyen D. T. S., *The Characteristic Method and Its Generalizations for First-Order Nonlinear Partial Differential Equations*. London: Chapman & Hall, 1999.

Whitham G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley, 1974.

5. Линейные уравнения и задачи математической физики

▶ **Предварительные замечания.** Линейными уравнениями математической физики обычно называются линейные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков, которые используются для описания природных явлений или процессов.

Линейные однородные УрЧП с постоянными коэффициентами, включая линейные уравнения математической физики, а также некоторые линейные УрЧП с переменными коэффициентами, допускают частные *решения с мультипликативным разделением переменных* в виде произведения функций, зависящих от разных независимых переменных. Для произвольного линейного однородного УрЧП справедлив *принцип линейной суперпозиции*: любая линейная комбинация его частных (точных) решений также является решением рассматриваемого уравнения. Наиболее распространенными методами решения линейных УрЧП являются методы разделения переменных и интегральных преобразований, позволяющие представлять решения многих задач математической физики в виде бесконечных рядов и определенных интегралов.

В данной главе дается описание точных решений наиболее распространенных линейных уравнений и задач математической физики с двумя независимыми переменными и других линейных УрЧП второго и более высоких порядков.

5.1. Уравнения параболического типа

5.1.1. Уравнение теплопроводности (диффузии) $u_t = au_{xx}$

▶ **Частные решения:**

$$
\begin{aligned}
&u = Ax + B,\\
&u = A(x^2 + 2at) + B,\\
&u = A(x^3 + 6atx) + B,\\
&u = A(x^4 + 12atx^2 + 12a^2t^2) + B,\\
&u = x^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)(2n-1)\ldots(2n-2k+1)}{k!}(at)^k x^{2n-2k},\\
&u = x^{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)(2n)\ldots(2n-2k+2)}{k!}(at)^k x^{2n-2k+1},
\end{aligned}
$$

$$u = A\exp(a\mu^2 t \pm \mu x) + B,$$
$$u = A\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at}\Bigr) + B,$$
$$u = A\frac{x}{t^{3/2}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at}\Bigr) + B,$$
$$u = A\exp(-a\mu^2 t)\cos(\mu x) + B,$$
$$u = A\exp(-a\mu^2 t)\sin(\mu x) + B,$$
$$u = A\exp(-\mu x)\cos(\mu x - 2a\mu^2 t) + B,$$
$$u = A\exp(-\mu x)\sin(\mu x - 2a\mu^2 t) + B,$$
$$u = A\operatorname{erf}\Bigl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\Bigr) + B,$$
$$u = A\operatorname{erfc}\Bigl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\Bigr) + B,$$

где A, B, μ — произвольные постоянные, n — произвольное целое положительное число, $\operatorname{erf} z \equiv \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z \exp(-\xi^2)\,d\xi$ — интеграл вероятности (функция ошибок), $\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z$ — дополнительный интеграл вероятности.

► Формулы, позволяющие строить частные решения.

Пусть $u = u(x,t)$ — некоторое решение уравнения теплопроводности. Тогда функции

$$u_1 = Au(\pm\lambda x + C_1,\ \lambda^2 t + C_2) + B,$$
$$u_2 = A\exp(\lambda x + a\lambda^2 t)u(x + 2a\lambda t + C_1,\ t + C_2),$$
$$u_3 = \frac{A}{\sqrt{|\delta + \beta t|}}\exp\Bigl[-\frac{\beta x^2}{4a(\delta + \beta t)}\Bigr]u\Bigl(\pm\frac{x}{\delta + \beta t},\ \frac{\gamma + \lambda t}{\delta + \beta t}\Bigr), \qquad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,$$

где A, B, C_1, C_2, β, δ, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Последняя формула обычно используется при $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = \lambda = 0$.

► Частные решения в виде функциональных рядов.

Решение, содержащее произвольную функцию пространственной переменной:

$$u(x,t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}f_x^{(2n)}(x), \qquad f_x^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}f(x),$$

где $f(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = f(x)$. Сумма будет конечной, если $f(x)$ является полиномом.

Решения, содержащие произвольные функции времени:

$$u(x,t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n(2n)!} x^{2n} g_t^{(n)}(t),$$

$$u(x,t) = xh(t) + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n(2n+1)!} x^{2n} h_t^{(n)}(t),$$

где $g(t)$ и $h(t)$ — любые бесконечно дифференцируемые функции. Суммы будут конечными, если $g(t)$ и $h(t)$ являются полиномами. Первое решение удовлетворяет граничному условию первого рода $u|_{x=0} = g(t)$, а второе — граничному условию второго рода $u_x|_{x=0} = h(t)$.

► **Задача Коши и начально-краевые задачи.**

О решениях задачи Коши и различных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности см. разд. 5.1.2 при $\Phi(x,t) \equiv 0$.

5.1.2. Неоднородное уравнение теплопроводности $u_t = au_{xx} + \Phi(x,t)$

► **Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.**

Задано начальное условие:

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right].$$

► **Представление решений краевых задач с помощью функции Грина.**

Будем рассматривать краевые задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ с общим начальным условием

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение этих задач может быть представлено с помощью функции Грина в виде

$$u = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь верхний предел l может быть конечным или бесконечным; если $l = \infty$, то соответствующее ему граничное условие не ставится.

Ниже приведены функции Грина для уравнения теплопроводности для различных типов однородных граничных условий.

► **Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Функция Грина:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] \right\}.$$

► **Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Функция Грина:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] \right\}.$$

► **Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u_x - ku = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Функция Грина:

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \biggl\{ &\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - \\ &- 2k \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - k\eta\right] d\eta \biggr\}. \end{aligned}$$

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.**

Заданы граничные условия:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Две формы представления функции Грина:

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t) &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Первый ряд быстро сходится при больших t, а второй ряд при малых t.

▶ **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.**

Заданы граничные условия:

$$u_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Две формы представления функции Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\}.$$

Первый ряд быстро сходится при больших t, а второй ряд при малых t.

▶ **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$).**

Заданы граничные условия:

$$u_x - k_1 u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_x + k_2 u = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\xi)\exp(-a\mu_n^2 t),$$

$$y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \quad \|y_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2 + k_1^2}{\mu_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2}\Bigl(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \frac{k_1+k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}$.

▶ **Решения краевых задач с неоднородными граничными условиями.**

Любая линейная задача с произвольными неоднородными краевыми условиями может быть сведена к линейной задаче с однородными краевыми условиями. Для этого надо сделать замену переменной

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x,t),$$

где v — новая неизвестная функция, а φ — любая функция, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям.

В табл. 5.1 приведены примеры таких преобразований для линейных краевых задач с одной пространственной переменной для параболических и гиперболических уравнений. Функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$, входящие в неоднородные краевые условия, могут быть выбраны произвольно. В третьей краевой задаче предполагается, что $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$.

Заметим, что выбор функции φ носит чисто алгебраический характер и не связан с рассматриваемым уравнением; существует бесконечно много подходящих функций φ, удовлетворяющих неоднородным граничным условиям.

Таблица 5.1. Простые преобразования вида $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x,t)$, приводящие к однородным граничным условиям в задачах с одной пространственной переменной $(0 \leqslant x \leqslant l)$.

№	Задача	Граничные условия	Функция $\varphi = \varphi(x,t)$
1	Первая краевая задача	$u = g_1(t)$ при $x = 0$ $u = g_2(t)$ при $x = l$	$\varphi = g_1(t) + \dfrac{x}{l}\big[g_2(t) - g_1(t)\big]$
2	Вторая краевая задача	$u_x = g_1(t)$ при $x = 0$ $u_x = g_2(t)$ при $x = l$	$\varphi = xg_1(t) + \dfrac{x^2}{2l}\big[g_2(t) - g_1(t)\big]$
3	Третья краевая задача	$u_x - k_1 u = g_1(t)$ при $x = 0$ $u_x + k_2 u = g_2(t)$ при $x = l$	$\varphi = \dfrac{(k_2 x - 1 - k_2 l)g_1(t) + (1 + k_1 x)g_2(t)}{k_2 + k_1 + k_1 k_2 l}$
4	Смешанная краевая задача	$u = g_1(t)$ при $x = 0$ $u_x = g_2(t)$ при $x = l$	$\varphi = g_1(t) + xg_2(t)$
5	Смешанная краевая задача	$u_x = g_1(t)$ при $x = 0$ $u = g_2(t)$ при $x = l$	$\varphi = (x - l)g_1(t) + g_2(t)$

5.1.3. Уравнение вида $u_t = au_{xx} + bu_x + cu + \Phi(x,t)$

Подстановка

$$u = \exp(\beta t + \mu x)v(x,t), \qquad \beta = c - \frac{b^2}{4a}, \quad \mu = -\frac{b}{2a}$$

приводит к неоднородному уравнению теплопроводности

$$v_t = av_{xx} + \exp(-\beta t - \mu x)\Phi(x,t),$$

которое рассматривается в разд. 5.1.1 и 5.1.2.

5.1.4. Уравнение теплопроводности с осевой симметрией $u_t = a(u_{rr} + r^{-1}u_r)$

Это *двумерное уравнение теплопроводности (диффузии), описывающее нестационарные тепловые процессы с осевой симметрией*, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — радиальная координата.

► **Частные решения.**

$$u = A + B\ln r,$$
$$u = A + B(r^2 + 4at),$$
$$u = A + B(r^4 + 16atr^2 + 32a^2t^2),$$

$$
\begin{aligned}
&u = A + B\Big[r^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k [n(n-1)\dots(n-k+1)]^2}{k!}(at)^k r^{2n-2k}\Big],\\
&u = A + B\big(4at\ln r + r^2\ln r - r^2\big),\\
&u = A + \frac{B}{t}\exp\Big(-\frac{r^2}{4at}\Big),\\
&u = A + B\int_1^{\zeta} e^{-z}\frac{dz}{z}, \quad \zeta = \frac{r^2}{4at},\\
&u = A + B\exp(-a\mu^2 t)J_0(\mu r),\\
&u = A + B\exp(-a\mu^2 t)Y_0(\mu r),\\
&u = A + \frac{B}{t}\exp\Big(-\frac{r^2+\mu^2}{4t}\Big)I_0\Big(\frac{\mu r}{2t}\Big),\\
&u = A + \frac{B}{t}\exp\Big(-\frac{r^2+\mu^2}{4t}\Big)K_0\Big(\frac{\mu r}{2t}\Big),
\end{aligned}
$$

где A, B, μ — произвольные постоянные, n — произвольное целое положительное число, $J_0(z)$ и $Y_0(z)$ — функции Бесселя, $I_0(z)$ и $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

► Формулы, позволяющие строить частные решения.

Пусть $u = u(r,t)$ — некоторое решение уравнения теплопроводности с осевой симметрией. Тогда функции

$$
\begin{aligned}
&u_1 = Au(\pm\lambda r,\ \lambda^2 t + C) + B,\\
&u_2 = \frac{A}{\delta+\beta t}\exp\Big[-\frac{\beta r^2}{4a(\delta+\beta t)}\Big]u\Big(\pm\frac{r}{\delta+\beta t},\ \frac{\gamma+\lambda t}{\delta+\beta t}\Big), \qquad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,
\end{aligned}
$$

где A, B, C, β, δ, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Последняя формула обычно используется при $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = \lambda = 0$.

► Начально-краевые задачи.

О решениях различных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с осевой симметрией см. разд. 5.1.5 при $\Phi(r,t) \equiv 0$.

5.1.5. Неоднородное уравнение теплопроводности с осевой симметрией $u_t = a(u_{rr} + r^{-1}u_r) + \Phi(r,t)$

► Представление решений краевых задач с помощью функции Грина.

Будем рассматривать краевые задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с осевой симметрией в области $0 \leqslant x \leqslant R$ с общим начальным условием

$$u = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями (ищутся решения, ограниченные при $r=0$). Решение этих задач может быть представлено с помощью функции Грина в виде

$$u=\int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi+\int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Ниже приведены функции Грина для уравнения теплопроводности с осевой симметрией для различных типов однородных граничных условий.

► Область: $0\leqslant r\leqslant R$. Первая краевая задача.

Задано граничное условие:

$$u=0 \quad \text{при} \quad r=R.$$

Функция Грина:

$$G(r,\xi,t)=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi}{J_1^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\mu_n\frac{r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\mu_n\frac{\xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu)=0$, где $J_0(\mu)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Ниже приведены численные значения первых десяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой):

$\mu_1=2.4048,\quad \mu_2=5.5201,\quad \mu_3=8.6537,\quad \mu_4=11.7915,\quad \mu_5=14.9309,$
$\mu_6=18.0711,\quad \mu_7=21.2116,\quad \mu_8=24.3525,\quad \mu_9=27.4935,\quad \mu_{10}=30.6346.$

Нули функции Бесселя $J_0(\mu)$ могут быть аппроксимированы формулой

$$\mu_n=2.4+3.13(n-1) \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots),$$

погрешность которой составляет около 0.3%. При $n\to\infty$ имеем $\mu_{n+1}-\mu_n\to\pi$.

► Область: $0\leqslant r\leqslant R$. Вторая краевая задача.

Задано граничное условие:

$$u_r=0 \quad \text{при} \quad r=R.$$

Функция Грина:

$$G(r,\xi,t)=\frac{2}{R^2}\xi+\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu)=0$, где $J_1(\mu)$ — функция Бесселя первого порядка. Ниже приведены численные значения первых десяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой):

$\mu_1=3.8317,\quad \mu_2=7.0156,\quad \mu_3=10.1735,\quad \mu_4=13.3237,\quad \mu_5=16.4706,$
$\mu_6=19.6159,\quad \mu_7=22.7601,\quad \mu_8=25.9037,\quad \mu_9=29.0468,\quad \mu_{10}=32.1897.$

При $n\to\infty$ имеем $\mu_{n+1}-\mu_n\to\pi$.

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u_r + ku = g(t) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r,\xi,t) = \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2\xi}{(k^2R^2+\mu_n^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu) - kRJ_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n можно найти в книге Карслоу & Егер (1964).

5.1.6. Уравнение теплопроводности с центральной симметрией $u_t = a(u_{rr} + 2r^{-1}u_r)$

Это *трехмерное уравнение теплопроводности (диффузии), описывающее нестационарные тепловые процессы с центральной (радиальной) симметрией*, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — радиальная координата.

► **Частные решения.**

$$\begin{aligned}
u &= A + Br^{-1},\\
u &= A + B(r^2 + 6at),\\
u &= A + B(r^4 + 20atr^2 + 60a^2t^2),\\
u &= A + B\Big[r^{2n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)(2n)\dots(2n-2k+2)}{k!}(at)^k r^{2n-2k}\Big],\\
u &= A + 2aBtr^{-1} + Br,\\
u &= Ar^{-1}\exp(a\mu^2 t \pm \mu r) + B,\\
u &= A + \frac{B}{t^{3/2}}\exp\Big(-\frac{r^2}{4at}\Big),\\
u &= A + \frac{B}{r\sqrt{t}}\exp\Big(-\frac{r^2}{4at}\Big),\\
u &= Ar^{-1}\exp(-a\mu^2 t)\cos(\mu r + B) + C,\\
u &= Ar^{-1}\exp(-\mu r)\cos(\mu r - 2a\mu^2 t + B) + C,\\
u &= \frac{A}{r}\operatorname{erf}\Big(\frac{r}{2\sqrt{at}}\Big) + B,
\end{aligned}$$

где A, B, C, μ — произвольные постоянные, n — произвольное целое положительное число, $\operatorname{erf} z$ — функция ошибок.

► **Формулы, позволяющие строить частные решения.**

Пусть $u = u(r,t)$ — некоторое решение уравнения теплопроводности с центральной симметрией. Тогда функции

$$u_1 = Au(\pm\lambda r,\ \lambda^2 t + C) + B,$$
$$u_2 = \frac{A}{|\delta+\beta t|^{3/2}} \exp\Big[-\frac{\beta r^2}{4a(\delta+\beta t)}\Big] u\Big(\pm\frac{r}{\delta+\beta t},\ \frac{\gamma+\lambda t}{\delta+\beta t}\Big), \qquad \lambda\delta-\beta\gamma=1,$$

где A, B, C, β, δ, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Последняя формула обычно используется при $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = \lambda = 0$.

► **Преобразование к уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами.**

Замена $u = v(r,t)/r$ приводит рассматриваемое уравнение с переменными коэффициентами к обычному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами $v_t = av_{rr}$, которое рассматривается в разд. 5.1.1.

► **Начально-краевые задачи.**

О решениях различных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с центральной симметрией см. разд. 5.1.7 при $\Phi(r,t) \equiv 0$.

5.1.7. Неоднородное уравнение теплопроводности с центральной симметрией $u_t = a(u_{rr} + 2r^{-1}u_r) + \Phi(r,t)$

► **Представление решений краевых задач с помощью функции Грина.**

Будем рассматривать краевые задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с центральной симметрией в области $0 \leqslant x \leqslant R$ с общим начальным условием

$$u = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями (ищутся решения, ограниченные при $r = 0$). Решение этих задач может быть представлено с помощью функции Грина в виде

$$u = \int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Ниже приведены функции Грина для уравнения теплопроводности с центральной симметрией для различных типов однородных граничных условий.

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r, \xi, t) = \frac{2\xi}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\Bigl(\frac{n\pi r}{R}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{R}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{R^2}\Bigr).$$

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r, \xi, t) = \frac{3\xi^2}{R^3} + \frac{2\xi}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + 1}{\mu_n^2} \sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu - \mu = 0$. Ниже приведены численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой):

$$\mu_1 = 4.4934, \quad \mu_2 = 7.7253, \quad \mu_3 = 10.9041, \quad \mu_4 = 14.0662, \quad \mu_5 = 17.2208.$$

При $n \geqslant 2$ для вычисления корней уравнения $\operatorname{tg}\mu - \mu = 0$ целесообразно использовать приближенную формулу

$$\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} - \frac{2}{(2n+1)\pi},$$

максимальная погрешность которой составляет меньше 0.02% (при $n = 2$) и уменьшается при увеличении n.

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u_r + ku = g(t) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r, \xi, t) = \frac{2\xi}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + (kR-1)^2}{\mu_n^2 + kR(kR-1)} \sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{ctg}\mu + kR - 1 = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n можно найти в книге Карслоу & Егер (1964).

5.1.8. Уравнение вида $u_t = u_{xx} + (1-2\beta)x^{-1}u_x$

Это уравнение типа теплопроводности встречается в задачах диффузионного пограничного слоя. При $\beta = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ см. уравнения в разд. 5.1.4, 5.1.1, 5.1.6 соответственно.

► **Частные решения.**

$$u = A + Bx^{2\beta},$$
$$u = A + 4(1-\beta)Bt + Bx^2,$$
$$u = A + 16(2-\beta)(1-\beta)Bt^2 + 8(2-\beta)Btx^2 + Bx^4,$$
$$u = x^{2n} + \sum_{p=1}^{n} \frac{4^p}{p!} s_{n,p} s_{n-\beta,p} t^p x^{2(n-p)}, \qquad s_{q,p} = q(q-1)\ldots(q-p+1),$$
$$u = A + 4(1+\beta)Btx^{2\beta} + Bx^{2\beta+2},$$
$$u = A + Bt^{\beta-1}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4t}\Bigr),$$
$$u = A + B\frac{x^{2\beta}}{t^{\beta+1}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4t}\Bigr),$$
$$u = A + B\gamma\Bigl(\beta, \frac{x^2}{4t}\Bigr),$$
$$u = A + B\exp(-\mu^2 t)x^\beta J_\beta(\mu x),$$
$$u = A + B\exp(-\mu^2 t)x^\beta Y_\beta(\mu x),$$
$$u = A + B\frac{x^\beta}{t}\exp\Bigl(-\frac{x^2+\mu^2}{4t}\Bigr) I_{\pm\beta}\Bigl(\frac{\mu x}{2t}\Bigr),$$
$$u = A + B\frac{x^\beta}{t}\exp\Bigl(-\frac{x^2+\mu^2}{4t}\Bigr) K_\beta\Bigl(\frac{\mu x}{2t}\Bigr),$$

где A, B, μ — произвольные постоянные, n — произвольное положительное целое число, $\gamma(\beta,z) = \int_0^z e^{-\xi}\xi^{\beta-1}\,d\xi$ — неполная гамма-функция, $\Gamma(\beta) = \gamma(\beta,\infty)$ — гамма-функция, $J_\beta(z)$ и $Y_\beta(z)$ — функции Бесселя, $I_\beta(z)$ и $K_\beta(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

► **Формулы, позволяющие строить частные решения.**

Пусть $u = u(x,t)$ — некоторое решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$u_1 = Au(\pm\lambda x,\, \lambda^2 t + C),$$
$$u_2 = A|a+bt|^{\beta-1}\exp\Bigl[-\frac{bx^2}{4(a+bt)}\Bigr] u\Bigl(\pm\frac{x}{a+bt},\, \frac{c+kt}{a+bt}\Bigr), \qquad ak - bc = 1,$$

где A, C, a, b, c — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Последняя формула обычно используется при $a = k = 0$, $b = 1$, $c = -1$.

2°. Замена $u = x^{2\beta} v(x,t)$ приводит уравнение с параметром β к уравнению такого же вида с параметром $-\beta$:

$$v_t = v_{xx} + (1+2\beta)x^{-1}v_x.$$

▶ **Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.**

Заданы начальное и граничное условия:

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$u = \frac{x^\beta}{2t}\int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta}\exp\Bigl(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\Bigr)I_\beta\Bigl(\frac{\xi x}{2t}\Bigr)\,d\xi + \\ + \frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta+1}\Gamma(\beta+1)}\int_0^t g(\tau)\exp\Bigl[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Bigr]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}}.$$

▶ **Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.**

Заданы начальное и граничное условия:

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad (x^{1-2\beta}u_x) = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$u = \frac{x^\beta}{2t}\int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta}\exp\Bigl(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\Bigr)I_{-\beta}\Bigl(\frac{\xi x}{2t}\Bigr)\,d\xi - \\ - \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t g(\tau)\exp\Bigl[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Bigr]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}.$$

5.1.9. Уравнение теплопроводности вида $u_t = [f(x)u_x]_x$

Это уравнение описывает распространение тепла в неподвижной среде (твердом теле), когда зависимость коэффициента температуропроводности от координаты x задается функцией $f(x)$.

1°. Для любой $f(x)$ рассматриваемое уравнение допускает точные решения полиномиального вида по t:

$$u_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \varphi_{n,k}(x),$$

где n — любое положительное целое число.

Ниже приведены примеры частных решений такого типа:

$$u = A + B\int \frac{dx}{f(x)},$$

$$u = At + A\int \frac{x\,dx}{f(x)} + B,$$

$$u = At\varphi(x) + A\int\Bigl(\int\varphi(x)\,dx\Bigr)\frac{dx}{f(x)} + B, \quad \varphi(x) = \int\frac{dx}{f(x)},$$

$$u = At^2 + 2At\psi(x) + 2A\int\Bigl(\int\psi(x)\,dx\Bigr)\frac{dx}{f(x)} + B, \quad \psi(x) = \int\frac{x\,dx}{f(x)},$$

$$u = At^2\varphi(x) + 2AtI(x) + 2A\int\Bigl(\int I(x)\,dx\Bigr)\frac{dx}{f(x)} + B, \quad I(x) = \int\Bigl(\int\varphi(x)\,dx\Bigr)\frac{dx}{f(x)},$$

где A и B — произвольные постоянные.

2°. Имеются частные решения с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = e^{-\lambda t}w(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(x)$ определяется путем решения следующего линейного ОДУ второго порядка:

$$[f(x)w'_x]'_x + \lambda w = 0.$$

3°. Решение в виде бесконечного ряда:

$$u = \Theta(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n L^n\bigl[\Theta(x)\bigr], \qquad L \equiv \frac{d}{dx}\Bigl[f(x)\frac{d}{dx}\Bigr],$$

содержащее произвольную функцию пространственной переменной $\Theta = \Theta(x)$. Это решение удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = \Theta(x)$.

5.1.10. Уравнение вида $s(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + \Phi(x,t)$

Уравнения этого вида часто встречаются в теории тепло- и массопереноса и химической технологии. Далее считается, что функции s, p, p'_x, q — непрерывны, $s > 0$, $p > 0$ и $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

► **Общие формулы для решения линейных неоднородных краевых задач.**

Решение данного уравнения с начальным условием

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями

$$a_1u_x + b_1u = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$

$$a_2u_x + b_2u = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2,$$

можно записать в виде суммы

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(\xi,\tau)\mathcal{G}(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_{x_1}^{x_2} s(\xi)f(\xi)\mathcal{G}(x,\xi,t)\,d\xi + \\ + p(x_1)\int_0^t g_1(\tau)\Lambda_1(x,t-\tau)\,d\tau + p(x_2)\int_0^t g_2(\tau)\Lambda_2(x,t-\tau)\,d\tau. \qquad (1)$$

Здесь модифицированная функция Грина определяется по формуле

$$\mathcal{G}(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)y_n(\xi)}{\|y_n\|^2} \exp(-\lambda_n t), \qquad \|y_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} s(x)y_n^2(x)\,dx, \qquad (2)$$

где λ_n и $y_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для линейного однородного ОДУ второго порядка:

$$\begin{aligned} &[p(x)y'_x]'_x + [\lambda s(x) - q(x)]y = 0, \\ &a_1 y'_x + b_1 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1, \\ &a_2 y'_x + b_2 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Функции $\Lambda_1(x,t)$ и $\Lambda_2(x,t)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (1), выражаются через функцию Грина (2). Соответствующие формулы для основных типов граничных условий приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2. Формулы для определения функций $\Lambda_1(x,t)$ и $\Lambda_2(x,t)$, входящих в подынтегральные выражения двух последних членов решения (1).

Краевая задача	Граничные условия	Функции $\Lambda_m(x,t)$
Первая краевая задача $(a_1 = a_2 = 0,\ b_1 = b_2 = 1)$	$u = g_1(t)$ при $x = x_1$ $u = g_2(t)$ при $x = x_2$	$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\big\vert_{\xi=x_1}$ $\Lambda_2(x,t) = -\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\big\vert_{\xi=x_2}$
Вторая краевая задача $(a_1 = a_2 = 1,\ b_1 = b_2 = 0)$	$u_x = g_1(t)$ при $x = x_1$ $u_x = g_2(t)$ при $x = x_2$	$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t)$ $\Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t)$
Третья краевая задача $(a_1 = a_2 = 1,\ b_1 < 0,\ b_2 > 0)$	$u_x + b_1 u = g_1(t)$ при $x = x_1$ $u_x + b_2 u = g_2(t)$ при $x = x_2$	$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t)$ $\Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t)$
Смешанная краевая задача $(a_1 = b_2 = 0,\ a_2 = b_1 = 1)$	$u = g_1(t)$ при $x = x_1$ $u_x = g_2(t)$ при $x = x_2$	$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\big\vert_{\xi=x_1}$ $\Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t)$
Смешанная краевая задача $(a_1 = b_2 = 1,\ a_2 = b_1 = 0)$	$u_x = g_1(t)$ при $x = x_1$ $u = g_2(t)$ при $x = x_2$	$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t)$ $\Lambda_2(x,t) = -\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\big\vert_{\xi=x_2}$

► **Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (3).**

1°. Существует бесконечное множество собственных значений. Все собственные значения вещественны и могут быть упорядочены $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 <$

$\cdots$, причем $\lambda_n \to \infty$ $n \to \infty$ (поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений). Каждое собственное значение имеет кратность 1.

2°. Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Каждая собственная функция $y_n(x)$ имеет в открытом интервале (x_1, x_2) ровно $n-1$ нулей.

3°. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ при $n \neq m$ ортогональны между собой с весом $s(x)$ на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$:

$$\int_{x_1}^{x_2} s(x) y_n(x) y_m(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

4°. Произвольная функция $F(x)$, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая граничным условиям задачи Штурма—Лиувилля, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x), \qquad F_n = \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} s(x) F(x) y_n(x)\, dx,$$

где формула для нормы $\|y_n\|^2$ приведена в (2).

5°. При выполнении условий

$$q(x) \geqslant 0, \quad a_1 b_1 \leqslant 0, \quad a_2 b_2 \geqslant 0 \tag{4}$$

отрицательных собственных значений нет. Если $q \equiv 0$ и $b_1 = b_2 = 0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_1 = 0$, которому отвечает собственная функция $\varphi_1 = \text{const}$. В остальных случаях при выполнении условий (4) все собственные значения положительны.

6°. Для собственных значений справедлива асимптотическая формула при $n \to \infty$:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\Delta^2} + O(1), \quad \Delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx.$$

5.1.11. Уравнение массопереноса в жидкой пленке $(1-y^2)u_x = a u_{yy}$

Это уравнение описывает установившийся тепло- и массообмен в пленке жидкости с параболическим профилем скорости. Переменные имеют следующий физический смысл: u — безразмерная температура (концентрация); x и y — безразмерные координаты, отсчитываемые соответственно вдоль и поперек пленки ($y = 0$ соответствует свободной поверхности пленки, а $y = 1$ — твердой поверхности, по которой пленка стекает); $\mathrm{Pe} = 1/a$ — число Пекле. В практических приложениях обычно встречаются смешанные граничные условия.

► **Частные решения:**

$$u(x,y) = kx - \frac{k}{12a}y^4 + \frac{k}{2a}y^2 + Ay + B,$$
$$u(x,y) = A\exp\bigl(-a\lambda^2 x\bigr)\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda y^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda y^2\bigr),$$
$$u(x,y) = A\exp\bigl(-a\lambda^2 x\bigr)y\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda y^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda,\ \tfrac{3}{2};\ \lambda y^2\bigr),$$
$$\Phi(\alpha,\beta;z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}\,\frac{z^m}{m!},$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а $\Phi(\alpha,\beta;z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

► **Массообмен между пленкой жидкости и газом.**

Массообмен между пленкой жидкости и газом над свободной поверхностью при постоянной концентрации примеси у поверхности пленки и отсутствии массопереноса через твердую поверхность характеризуется граничными условиями

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (0 < y < 1),\\ u &= 1 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (x > 0),\\ u_y &= 0 \quad \text{при} \quad y = 1 \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Решение исходного уравнения с учетом этих граничных условий имеет вид

$$\begin{gathered} u(x,y) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} A_m\exp\bigl(-a\lambda_m^2 x\bigr)F_m(y),\\ F_m(y) = y\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda_m y^2\bigr)\Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{3}{2};\ \lambda_m y^2\bigr), \end{gathered} \tag{1}$$

где функции F_m и коэффициенты A_m и λ_m не зависят от параметра a.

Собственные значения λ_m определяются из трансцендентного уравнения

$$\lambda_m\Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{3}{2};\ \lambda_m\bigr) - \Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_m\bigr) = 0,$$

а коэффициенты ряда A_m вычисляются по формулам

$$A_m = \frac{\displaystyle\int_0^1 (1-y^2)F_m(y)\,dy}{\displaystyle\int_0^1 (1-y^2)\bigl[F_m(y)\bigr]^2\,dy}, \qquad \text{где} \quad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

В табл. 5.3 приведены первые десять собственных значений λ_m и коэффициентов A_m (по данным Rotem & Neilson, 1966).

Главный член асимптотического разложения решения при $ax \to 0$ имеет вид

$$u = \operatorname{erfc}\Bigl(\frac{y}{2\sqrt{ax}}\Bigr),$$

где $\operatorname{erfc} z = \displaystyle\int_z^\infty \exp\bigl(-\xi^2\bigr)\,d\xi$ — дополнительная функция ошибок.

Таблица 5.3. Собственные значения λ_m и коэффициенты A_m в решении (1).

m	λ_m	A_m	m	λ_m	A_m
1	2.2631	1.3382	6	22.3181	−0.1873
2	6.2977	−0.5455	7	26.3197	0.1631
3	10.3077	0.3589	8	30.3209	−0.1449
4	14.3128	−0.2721	9	34.3219	0.1306
5	18.3159	0.2211	10	38.3227	−0.1191

► **Растворение пластины ламинарной пленкой жидкости.**

Растворение пластины ламинарной пленкой жидкости, при условии, что концентрация у твердой поверхности постоянна и отсутствует поток массы из пленки в газ, характеризуется граничными условиями

$$
\begin{aligned}
u &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (0 < y < 1),\\
u_y &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (x > 0),\\
u &= 1 \quad \text{при} \quad y = 1 \quad (x > 0).
\end{aligned}
$$

Решение исходного уравнения, удовлетворяющее этим граничным условиям, имеет вид

$$
\begin{gathered}
u(x,y) = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \exp\bigl(-a\lambda_m^2 x\bigr) G_m(y),\\
G_m(y) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda_m y^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_m y^2\bigr),
\end{gathered} \tag{2}
$$

где функции G_m и коэффициенты A_m и λ_m не зависят от параметра a.

Собственные значения λ_m определяются из трансцендентного уравнения

$$
\Phi\bigl(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_m\bigr) = 0.
$$

Для приближенного вычисления λ_m можно использовать простую формулу

$$
\lambda_m = 4m + 1.68 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}
$$

максимальная погрешность которой меньше 0.2%. Коэффициенты A_m хорошо аппроксимируются выражениями

$$
A_0 = 1.2, \quad A_m = (-1)^m 2.27\,\lambda_m^{-7/6} \qquad \text{для} \quad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{4}
$$

где собственные значения λ_m определяются с помощью (3). Максимальная погрешность формул (4) составляет менее 0.1%.

Главный член асимптотического разложения решения при $ax \to 0$ имеет вид

$$
u = \frac{1}{\Gamma\bigl(\frac{1}{3}\bigr)}\Gamma\bigl(\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{9}\zeta\bigr), \qquad \zeta = \frac{(1-y)^3}{ax},
$$

где $\Gamma(\alpha, z) = \displaystyle\int_z^{\infty} e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}\,d\xi$ — неполная гамма-функция, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha, 0)$ — гамма-функция, $\Gamma\bigl(\frac{1}{3}\bigr) \approx 2.679$.

5.1.12. Уравнения диффузионного (теплового) пограничного слоя

1. $\boldsymbol{f(x)u_x + g(x)yu_y = u_{yy}}$.

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные функции. Уравнения этого вида встречаются в задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен капель и пузырей с потоком),

Преобразование

$$t = \int \frac{h^2(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Bigr],$$

где A и B — произвольные постоянные, приводит к обычному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами $u_t = u_{zz}$, которое рассматривается в разд. 5.1.1.

2. $\boldsymbol{f(x)y^{n-1}u_x + g(x)y^n u_y = u_{yy}}$.

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные функции. Уравнения этого вида встречаются в задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен твердых частиц, капель и пузырей с потоком).

Преобразование

$$t = \frac{1}{4}(n+1)^2 \int \frac{h^2(x)}{f(x)}dx, \quad z = h(x)y^{\frac{n+1}{2}}, \quad \text{где} \quad h(x) = \exp\Bigl[-\frac{n+1}{2}\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению

$$u_t = u_{zz} + \frac{1-2k}{z}u_z, \qquad k = \frac{1}{n+1},$$

которое рассматривается в разд. 5.1.8.

5.1.13. Уравнение Шредингера $\boldsymbol{i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}u_{xx} + U(x)u}$

► **Задача на собственные значения. Задача Коши.**

Уравнение Шредингера является основным уравнением квантовой механики, где u — волновая функция, $i^2 = -1$, $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса частицы, $U(x)$ — ее потенциальная энергия в силовом поле.

1°. В задачах с дискретным спектром решения ищутся в виде

$$u = \exp\Bigl(-\frac{iE_n}{\hbar}t\Bigr)\psi_n(x),$$

где собственные функции ψ_n и соответствующие им значения энергии E_n должны определятся путем решения задачи для ОДУ на собственные значения

$$\begin{gathered} \frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\bigl[E_n - U(x)\bigr]\psi_n = 0, \\ \psi_n \to 0 \text{ при } x \to \pm\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2\,dx = 1. \end{gathered} \tag{1}$$

Последнее условие является условием нормировки для функций ψ_n.

2°. В тех случаях, когда собственные функции $\psi_n(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$, решение задачи Коши для уравнения Шредингера с начальным условием

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{2}$$

дается формулой

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi, \qquad G(x,\xi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n(\xi) \exp\Bigl(-\frac{iE_n}{\hbar}t\Bigr).$$

Ниже рассматриваются различные потенциалы $U(x)$, приводятся решения задачи на собственные значения (1) или решения задачи Коши для уравнения Шредингера.

► Свободная частица: $U(x) = 0$.

Решение задачи Коши с начальным условием (2) имеет вид

$$u = \frac{1}{2\sqrt{i\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4i\tau}\Bigr] f(\xi)\,d\xi,$$

$$\tau = \frac{\hbar t}{2m}, \qquad \sqrt{ia} = \begin{cases} e^{\pi i/4}\sqrt{|a|} & \text{при } a > 0, \\ e^{-\pi i/4}\sqrt{|a|} & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

► Линейный потенциал (движение в однородном внешнем поле): $U(x) = ax$.

Решение задачи Коши с начальным условием (2) имеет вид

$$u = \frac{1}{2\sqrt{i\pi\tau}} \exp\bigl(-ib\tau x - \tfrac{1}{3}ib^2\tau^3\bigr) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl[-\frac{(x+b\tau^2-\xi)^2}{4i\tau}\Bigr] f(\xi)\,d\xi,$$

$$\tau = \frac{\hbar t}{2m}, \qquad b = \frac{2am}{\hbar^2}.$$

► Линейный гармонический осциллятор: $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$.

Собственные значения:

$$E_n = \hbar\omega\bigl(n + \tfrac{1}{2}\bigr), \qquad n = 0,\,1,\,\ldots$$

Нормированные собственные функции:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!\,x_0}} \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\xi^2\bigr) H_n(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{x_0}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

где $H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n}{d\xi^n} \exp(-\xi^2)$ — многочлены Эрмита, $n = 0,\,1,\,\ldots$ Функции $\psi_n(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$.

▶ **Изотропная свободная частица: $U(x) = a/x^2$.**

Здесь переменная $x \geqslant 0$ играет роль радиальной координаты, $a > 0$. Это уравнение получается из уравнения Шредингера для свободной частицы с n пространственными переменными после перехода к сферическим (цилиндрическим) координатам и последующим отделением угловых переменных.

Решение уравнения Шредингера, которое удовлетворяет начальному условию (2), имеет вид

$$u = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}i\pi(\mu+1)\operatorname{sign} t\right]}{2|\tau|}\int_0^\infty \sqrt{xy}\,\exp\Big(i\frac{x^2+y^2}{4\tau}\Big)J_\mu\Big(\frac{xy}{2|\tau|}\Big)f(y)\,dy,$$
$$\tau = \frac{\hbar t}{2m},\qquad \mu = \sqrt{\frac{2am}{\hbar^2}+\frac{1}{4}} \geqslant 1,$$

где $J_\mu(\xi)$ — функция Бесселя.

▶ **Потенциал Морзе: $U(x) = U_0(e^{-2x/a} - 2e^{-x/a})$.**

Собственные значения:

$$E_n = -U_0\Big[1 - \frac{1}{\beta}(n+\tfrac{1}{2})\Big]^2,\quad \beta = \frac{a\sqrt{2mU_0}}{\hbar},\qquad 0 \leqslant n < \beta - 2.$$

Собственные функции:

$$\psi_n(x) = \xi^s e^{-\xi/2}\Phi(-n,\,2s+1,\,\xi),\qquad \xi = 2\beta e^{-x/a},\quad s = \frac{a\sqrt{-2mE_n}}{\hbar},$$

где $\Phi(a,b,\xi)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

В данном случае число собственных значений (уровней энергии) E_n и собственных функций ψ_n конечно: $n = 0,\,1,\,\ldots,\,n_{\max}$.

5.2. Уравнения гиперболического типа

5.2.1. Волновое уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

Это уравнение называют также *уравнением колебаний струны*. Оно часто встречается в теории упругости, аэродинамике, акустике, электродинамике.

▶ **Общее решение. Некоторые формулы.**

1°. Общее решение:

$$u = \varphi(x+at) + \psi(x-at),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции.

2°. Если $u(x,t)$ — некоторое решение волнового уравнения, то функции

$$\begin{aligned} u_1 &= Au(\pm\lambda x + C_1, \pm\lambda t + C_2) + B, \\ u_2 &= Au\biggl(\frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/a)^2}}, \frac{t - va^{-2}x}{\sqrt{1-(v/a)^2}}\biggr), \\ u_3 &= Au\biggl(\frac{x}{x^2 - a^2t^2}, \frac{t}{x^2 - a^2t^2}\biggr) \end{aligned}$$

также являются решениями всюду, где они определены (A, B, C_1, C_2, v, λ — произвольные постоянные). Знаки λ в формуле для u_1 берутся произвольно. Функция u_2 является следствием инвариантности волнового уравнения относительно *преобразования Лоренца*.

► Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение (*формула Даламбера*):

$$u = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi.$$

► Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы начальные и граничное условия:

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u = h(t) \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Решение:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t < \frac{x}{a}, \\ \frac{1}{2}[f(x+at) - f(at-x)] + \frac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} g(\xi)\,d\xi + h\Bigl(t - \frac{x}{a}\Bigr) & \text{при } t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$

В области $t < x/a$ влияние граничного условия не сказывается и выражение для u совпадает с решением Даламбера для бесконечной прямой (см. выше).

► Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы начальные и граничное условия:

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_x = h(t) \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Решение:

$$u = \begin{cases} \text{при } t < \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(at-x)] + \dfrac{1}{2a}[G(x+at) + G(at-x)] - aH\Bigl(t - \dfrac{x}{a}\Bigr) \quad \text{при } t > \dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

где $G(z) = \displaystyle\int_0^z g(\xi)\,d\xi$ и $H(z) = \displaystyle\int_0^z h(\xi)\,d\xi$.

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Начально-краевые задачи.**

О решениях различных начально-краевых задач см. разд. 5.2.2 при $\Phi(x,t) \equiv 0$.

5.2.2. Неоднородное волновое уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Phi(x,t)$

► **Представление решений краевых задач с помощью функции Грина.**

Будем рассматривать краевые задачи для неоднородного волнового уравнения на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ с общими начальными условиями

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение этих задач может быть представлено с помощью функции Грина в виде

$$u = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l g(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь верхний предел интегрирования l может принимать любые конечные значения.

Ниже приведены функции Грина для волнового уравнения для различных типов однородных граничных условий.

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.**

Заданы граничные условия:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi a t}{l}\right).$$

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.**

Заданы граничные условия:

$$u_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{t}{l} + \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi a t}{l}\right).$$

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$).**

Заданы граничные условия:

$$u_x - k_1 u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_x + k_2 u = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\|u_n\|^2}\sin(\lambda_n x + \varphi_n)\sin(\lambda_n\xi + \varphi_n)\sin(\lambda_n at),$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_n}{k_1}, \qquad \|u_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{(\lambda_n^2 + k_1k_2)(k_1+k_2)}{2(\lambda_n^2+k_1^2)(\lambda_n^2+k_2^2)};$$

где λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ctg}(\lambda l) = \dfrac{\lambda^2 - k_1k_2}{\lambda(k_1+k_2)}$.

► **Решения краевых задач с неоднородными граничными условиями.**

Любая линейная задача для волнового уравнения с произвольными неоднородными граничными условиями может быть сведена к линейной задаче с однородными краевыми условиями (см. табл. 5.1 и пояснительный текст к ней).

5.2.3. Уравнение Клейна — Гордона $u_{tt} = a^2u_{xx} - bu$

Это уравнение встречается в квантовой теории поля и ряде приложений.

► **Частные решения.**

$$u = \cos(\lambda x)[A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)], \quad b = -a^2\lambda^2 + \mu^2,$$
$$u = \sin(\lambda x)[A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)], \quad b = -a^2\lambda^2 + \mu^2,$$
$$u = \exp(\pm\mu t)[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)], \quad b = -a^2\lambda^2 - \mu^2,$$
$$u = \exp(\pm\lambda x)[A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)], \quad b = a^2\lambda^2 + \mu^2,$$
$$u = \exp(\pm\lambda x)[A\exp(\mu t) + B\exp(-\mu t)], \quad b = a^2\lambda^2 - \mu^2,$$
$$u = AJ_0(\xi) + BY_0(\xi), \quad \xi = \frac{\sqrt{b}}{a}\sqrt{a^2(t+C_1)^2 - (x+C_2)^2}, \quad b > 0,$$
$$u = AI_0(\xi) + BK_0(\xi), \quad \xi = \frac{\sqrt{-b}}{a}\sqrt{a^2(t+C_1)^2 - (x+C_2)^2}, \quad b < 0,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные, $J_0(\xi)$ и $Y_0(\xi)$ — функции Бесселя, и $I_0(\xi)$ и $K_0(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

► **Формулы, позволяющие строить частные решения.**

Пусть $u = u(x,t)$ — некоторое решение уравнения Клейна — Гордона. Тогда функции

$$u_1 = Au(\pm x + C_1, \pm t + C_2) + B,$$
$$u_2 = Au\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/a)^2}}, \frac{t - va^{-2}x}{\sqrt{1-(v/a)^2}}\right),$$

где A, B, C_1, C_2, v — произвольные постоянные, также являются решениями этого уравнения. Знаки в формуле для u_1 берутся произвольно.

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Начально-краевые задачи.**

Решения начально-краевых задач см. в разд. 5.2.4 при $\Phi(x,t) \equiv 0$.

5.2.4. Неоднородное уравнение Клейна — Гордона $u_{tt} = a^2 u_{xx} - bu + \Phi(x,t)$

► **Представление решений краевых задач с помощью функции Грина.**

Будем рассматривать краевые задачи для неоднородного уравнения Клейна — Гордона на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ с общими начальными условиями

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение этих задач может быть представлено с помощью функции Грина в виде

$$u = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l g(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь верхний предел интегрирования l может принимать любые конечные значения.

Ниже приведены функции Грина для уравнения Клейна — Гордона для различных типов однородных граничных условий.

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.**

Заданы граничные условия:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина при $b > 0$:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2 + b}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^2 + b}}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.**

Заданы граничные условия:

$$u_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина при $b > 0$:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{l\sqrt{b}}\sin\bigl(t\sqrt{b}\,\bigr) + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_n \xi)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2 + b}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^2 + b}}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.**

Заданы граничные условия:

$$u_x - k_1 u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_x + k_2 u = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n(\xi) \sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2 + b}\,\bigr)}{\|y_n\|^2 \sqrt{a^2\lambda_n^2 + b}},$$

$$y_n(x) = \cos(\lambda_n x) + \frac{k_1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x), \quad \|y_n\|^2 = \frac{k_2}{2\lambda_n^2}\,\frac{\lambda_n^2 + k_1^2}{\lambda_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\lambda_n^2} + \frac{l}{2}\Bigl(1 + \frac{k_1^2}{\lambda_n^2}\Bigr),$$

где λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \dfrac{k_1 + k_2}{\lambda^2 - k_1 k_2}$.

5.2.5. Волновое уравнение с осевой симметрией $u_{tt} = a^2(u_{rr} + r^{-1}u_r) + \Phi(r,t)$

Это *двумерное линейное неоднородное волновое уравнение с осевой симметрией*, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — радиальная координата.

► **Представление решений краевых задач с помощью функции Грина.**

Будем рассматривать краевые задачи для неоднородного волнового уравнения с осевой симметрией в области $0 \leqslant x \leqslant R$ с общими начальными условиями

$$u = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = g(r) \quad \text{при} \quad t = 0,$$

и различными однородными граничными условиями при $r = R$ (ищутся решения, ограниченные при $r = 0$). Решение этих задач может быть представлено с помощью функции Грина в виде

$$u = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f(\xi) G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^R g(\xi) G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\!\int_0^R \Phi(\xi,\tau) G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Ниже приведены функции Грина для волнового уравнения с осевой симметрией для различных типов однородных граничных условий.

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{aR}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n J_1^2(\lambda_n)} J_0\Bigl(\frac{\lambda_n r}{R}\Bigr) J_0\Bigl(\frac{\lambda_n \xi}{R}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{\lambda_n a t}{R}\Bigr),$$

где λ_n — положительные корни функции Бесселя $J_0(\lambda) = 0$. Численные значения первых десяти собственных значений λ_m приведены в разд. 5.1.5 (см. подраздел “Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.”)

▶ **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r, \xi, t) = \frac{2t\xi}{R^2} + \frac{2\xi}{aR} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n J_0^2(\lambda_n)} J_0\Big(\frac{\lambda_n r}{R}\Big) J_0\Big(\frac{\lambda_n \xi}{R}\Big) \sin\Big(\frac{\lambda_n at}{R}\Big),$$

где λ_n — положительные корни функции Бесселя первого порядка $J_1(\lambda) = 0$. Численные значения первых десяти собственных значений λ_m приведены в разд. 5.1.5 (см. подраздел "Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.")

▶ **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u_r + ku = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r, \xi, t) = \frac{2\xi}{aR} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{(k^2R^2 + \lambda_n^2) J_0^2(\lambda_n)} J_0\Big(\frac{\lambda_n r}{R}\Big) J_0\Big(\frac{\lambda_n \xi}{R}\Big) \sin\Big(\frac{\lambda_n at}{R}\Big),$$

где λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda J_1(\lambda) - kRJ_0(\lambda) = 0.$$

5.2.6. Волновое уравнение с центральной симметрией $u_{tt} = a^2(u_{rr} + 2r^{-1}u_r) + \Phi(r, t)$

Это *трехмерное линейное неоднородное волновое уравнение с центральной симметрией* (*уравнение колебаний газа с центральной симметрией*), где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — радиальная координата.

▶ **Общее решение при $\Phi(r, t) \equiv 0$.**

$$u(t, r) = \frac{\varphi(r + at) + \psi(r - at)}{r},$$

где $\varphi(r_1)$ и $\psi(r_2)$ — произвольные функции.

▶ **Преобразование к волновому уравнению с постоянными коэффициентами.**

Подстановка $v(r, t) = ru(r, t)$ приводит к приводит к волновому уравнению с постоянными коэффициентами

$$v_{tt} = a^2 v_{rr} + r\Phi(r, t),$$

которое рассматривается в разд. 5.2.2.

► **Область: $0 \leqslant r < \infty$. Задача Коши.**

Заданы начальные условия:

$$u = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = g(r) \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{1}$$

Решение:

$$u = \frac{1}{2r}\bigl[(r - at)f\bigl(|r - at|\bigr) + (r + at)f\bigl(|r + at|\bigr)\bigr] + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at} \xi g\bigl(|\xi|\bigr)\,d\xi + {}$$
$$+ \frac{1}{2ar}\int_0^t d\tau \int_{r-a(t-\tau)}^{r+a(t-\tau)} \xi\Phi\bigl(|\xi|, \tau\bigr)\,d\xi.$$

► **Представление решений краевых задач с помощью функции Грина.**

Будем рассматривать краевые задачи для неоднородного волнового уравнения в области $0 \leqslant r \leqslant R$ с общими начальными условиями (1) и различными однородными граничными условиями (ищутся решения, ограниченные при $r = 0$). Решение этих задач может быть представлено с помощью функции Грина в виде

$$u = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f(\xi)G(r, \xi, t)\,d\xi + \int_0^R g(\xi)G(r, \xi, t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^R \Phi(\xi, \tau)G(r, \xi, t - \tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Ниже приведены функции Грина для волнового уравнения с центральной симметрией для различных типов однородных граничных условий.

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r, \xi, t) = \frac{2\xi}{\pi a r}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\Bigl(\frac{n\pi r}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{an\pi t}{R}\Bigr).$$

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r, \xi, t) = \frac{3t\xi^2}{R^3} + \frac{2\xi}{ar}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + 1}{\mu_n^3}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\mu_n a t}{R}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu - \mu = 0$. Ниже приведены численные значения первых пяти коней этого уравнения

$$\mu_1 = 4.4934, \quad \mu_2 = 7.7253, \quad \mu_3 = 10.9041, \quad \mu_4 = 14.0662, \quad \mu_5 = 17.2208.$$

Простая приближенная формула, позволяющая с высокой точностью вычислять корни уравнения $\operatorname{tg}\mu - \mu = 0$, приведена в разд. 5.1.7 (см. подраздел “Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.”).

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.**

Задано граничное условие:

$$u_r + ku = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + (kR-1)^2}{\mu_n\left[\mu_n^2 + kR(kR-1)\right]} \sin\!\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \sin\!\left(\frac{\mu_n \xi}{R}\right) \sin\!\left(\frac{\mu_n at}{R}\right).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{ctg}\mu + kR - 1 = 0.$$

5.2.7. Уравнения вида $s(x)u_{tt} = [p(x)u_x]_x - q(x)u + \Phi(x,t)$

► **Общие формулы для решения линейных неоднородных краевых задач.**

Далее считается, что функции s, p, p'_x, q — непрерывны, $s>0$, $p>0$ и $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Решение данного уравнения с начальными условиями общего вида

$$u = f_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = f_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями

$$a_1 u_x + b_1 u = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$a_2 u_x + b_2 u = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

можно записать в виде суммы

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(\xi,\tau)\mathcal{G}(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ & + \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} s(\xi)f_0(\xi)\mathcal{G}(x,\xi,t)\,d\xi + \int_{x_1}^{x_2} s(\xi)f_1(\xi)\mathcal{G}(x,\xi,t)\,d\xi + \\ & + p(x_1)\int_0^t g_1(\tau)\Lambda_1(x,t-\tau)\,d\tau + p(x_2)\int_0^t g_2(\tau)\Lambda_2(x,t-\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь модифицированная функция Грина определяется по формуле

$$\mathcal{G}(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin\left(t\sqrt{\lambda_n}\,\right)}{\|y_n\|^2\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \|y_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} s(x)y_n^2(x)\,dx, \tag{2}$$

где λ_n и $y_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для линейного однородного ОДУ второго порядка:

$$\begin{aligned} &[p(x)y'_x]'_x + [\lambda s(x) - q(x)]y = 0, \\ &a_1 y'_x + b_1 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1, \\ &a_2 y'_x + b_2 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Функции $\Lambda_1(x,t)$ и $\Lambda_2(x,t)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (1), выражаются через функцию Грина (2). Соответствующие формулы для основных типов граничных условий приведены в табл. 5.2.

Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (3) описаны в разд. 5.1.10, где рассматривалась точно такая же задача на собственные значения.

5.2.8. Уравнения телеграфного типа $u_{tt} + ku_t = a^2u_{xx} + bu_x + cu + \Phi(x,t)$

1. $\boldsymbol{u_{tt} + ku_t = a^2u_{xx} + bu.}$

Телеграфное уравнение (при $k > 0$ и $b < 0$).

Подстановка $u = \exp\bigl(-\frac{1}{2}kt\bigr)v(x,t)$ приводит к уравнению Клейна — Гордона

$$v_{tt} = a^2v_{xx} + \bigl(b + \tfrac{1}{4}k^2\bigr)v,$$

которое рассматривается в разд. 5.2.3.

2. $\boldsymbol{u_{tt} + ku_t = a^2u_{xx} + bu_x + cu + \Phi(x,t).}$

Подстановка $u = \exp\bigl(-\frac{1}{2}a^{-2}bx - \frac{1}{2}kt\bigr)v(x,t)$ приводит к уравнению

$$v_{tt} = a^2v_{xx} + \bigl(c + \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{1}{4}a^{-2}b^2\bigr)v + \exp\bigl(\tfrac{1}{2}a^{-2}bx + \tfrac{1}{2}kt\bigr)\Phi(x,t),$$

которое рассматривается в разд. 5.2.4.

5.3. Уравнения эллиптического типа

5.3.1. Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$

Уравнение Лапласа часто встречается в теории тепло- и массопереноса, гидро- и аэромеханике, теории упругости, электростатике и других областях механики и физики. В частности, оно описывает стационарное распределение температуры при отсутствии источников тепла в рассматриваемой области.

Двумерное уравнение Лапласа имеет вид

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{в декартовой системе координат,} \\ r^{-1}(ru_r)_r + r^{-2}u_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{в полярной системе координат,} \end{aligned}$$

где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

► **Частные решения.**

1°. Частные решения в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}
&u = Ax + By + C,\\
&u = A(x^2 - y^2) + Bxy,\\
&u = A(x^3 - 3xy^2) + B(3x^2y - y^3),\\
&u = \frac{Ax + By}{x^2 + y^2} + C,\\
&u = \exp(\pm\mu x)(A\cos\mu y + B\sin\mu y),\\
&u = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)\exp(\pm\mu y),\\
&u = (A\operatorname{sh}\mu x + B\operatorname{ch}\mu x)(C\cos\mu y + D\sin\mu y),\\
&u = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)(C\operatorname{sh}\mu y + D\operatorname{ch}\mu y),
\end{aligned}$$

где A, B, C, D, μ — произвольные постоянные.

2°. Частные решения в полярной системе координат:

$$\begin{aligned}
&u = A\ln r + B,\\
&u = (Ar^m + Br^{-m})(C\cos m\varphi + D\sin m\varphi),
\end{aligned}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, $m = 1,\ 2,\ \ldots$

► **Формулы, позволяющие строить частные решения.**

Если $u(x,y)$ — некоторое решение уравнения Лапласа, то функции

$$\begin{aligned}
&u_1 = Au(\pm\lambda x + C_1, \pm\lambda y + C_2) + B,\\
&u_2 = Au(x\cos\beta + y\sin\beta,\ -x\sin\beta + y\cos\beta),\\
&u_3 = Au\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\Big)
\end{aligned}$$

также являются решениями этого уравнения всюду, где они определены; A, B, C_1, C_2, β, λ — произвольные постоянные. Знаки перед λ в формуле для u_1 выбираются произвольно независимо друг от друга.

► **Метод построения частных решений.**

Достаточно общий метод построения точных решений заключается в следующем. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — любая аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ (u и v — вещественные функции вещественных переменных x и y, $i^2 = -1$). Тогда действительная и мнимая части функции f удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta v = 0.$$

Таким образом, задавая любые аналитические функции $f(z)$ и выделяя их действительные и мнимые части, можно получать различные решения двумерного уравнения Лапласа.

Ниже приведены решения двумерного уравнения Лапласа различными однородными граничными условиями.

Замечание 5.1. *Для уравнения Лапласа и других эллиптических уравнений первую краевую задачу часто называют задачей Дирихле, а вторую краевую задачу — задачей Неймана.*

► Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x + y \operatorname{tg}\theta)\,d\theta.$$

► Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$u_y = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \ln\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}\,d\xi + C,$$

где C — произвольная постоянная.

► Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается квадрант плоскости. Заданы граничные условия:

$$u = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi}xy\int_0^{\infty} \frac{f_1(\eta)\eta\,d\eta}{[x^2 + (y-\eta)^2][x^2 + (y+\eta)^2]} + \\ + \frac{4}{\pi}xy\int_0^{\infty} \frac{f_2(\xi)\xi\,d\xi}{[(x-\xi)^2 + y^2][(x+\xi)^2 + y^2]}.$$

► **Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Первая краевая задача.**

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$u = f_1(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$u(x,y) = \frac{1}{2a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a] - \cos(\pi y/a)} + \\ + \frac{1}{2a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_2(\xi)\,d\xi}{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a] + \cos(\pi y/a)}.$$

► **Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Вторая краевая задача.**

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$u_y = f_1(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u_y = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\ln\bigl\{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a] - \cos(\pi y/a)\bigr\}\,d\xi - \\ - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi)\ln\bigl\{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a] + \cos(\pi y/a)\bigr\}\,d\xi + C,$$

где C — произвольная постоянная.

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Первая краевая задача.**

Рассматривается прямоугольник. Заданы граничные условия:

$$u = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$u = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sh}\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right),$$

где коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются по формулам

$$A_n = \frac{2}{\lambda_n}\int_0^b f_1(\xi)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi, \qquad B_n = \frac{2}{\lambda_n}\int_0^b f_2(\xi)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi,$$
$$C_n = \frac{2}{\mu_n}\int_0^a f_3(\xi)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi, \qquad D_n = \frac{2}{\mu_n}\int_0^a f_4(\xi)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi,$$
$$\lambda_n = b\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right), \qquad \mu_n = a\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right).$$

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.**

Рассматривается круг. Задано граничное условие:

$$u = f(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Решение в полярных координатах:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + R^2}\, d\psi.$$

Эту формулу принято называть *интегралом Пуассона*.

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.**

Рассматривается круг. Задано граничное условие:

$$u_r = f(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R,$$

где функция $f(\varphi)$ должна удовлетворять условию разрешимости этой задачи $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0$.

Решение в полярных координатах:

$$u(r, \varphi) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \ln \frac{r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + R^2}{R^2}\, d\psi + C,$$

где C — произвольная постоянная; эту формулу часто называют *интегралом Дини*.

5.3.2. Уравнение Пуассона $\Delta u + \Phi(x, y) = 0$

Двумерное уравнение Пуассона имеет вид

$$u_{xx} + u_{yy} + \Phi(x, y) = 0 \quad \text{в декартовой системе координат,}$$
$$r^{-1}(ru_r)_r + r^{-2}u_{\varphi\varphi} + \Phi(r, \varphi) = 0 \quad \text{в полярной системе координат.}$$

Ниже приведены решения двумерного уравнения Пуассона с различными однородными граничными условиями.

► **Область: $-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty$.**

Решение:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}\, d\xi\, d\eta.$$

► **Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.**

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi)\, d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta) \ln \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}\, d\xi\, d\eta.$$

► **Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.**

Рассматривается квадрант плоскости. Заданы граничные условия:

$$u = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi}xy\int_0^\infty \frac{f_1(\eta)\eta\,d\eta}{[x^2+(y-\eta)^2][x^2+(y+\eta)^2]} + \frac{4}{\pi}xy\int_0^\infty \frac{f_2(\xi)\xi\,d\xi}{[(x-\xi)^2+y^2][(x+\xi)^2+y^2]} +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Phi(\xi,\eta)\ln\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta.$$

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Первая краевая задача.**

Рассматривается прямоугольник. Заданы граничные условия:

$$u = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$u = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:

$$u(x,y) = \int_0^a\!\!\int_0^b \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi +$$
$$+\int_0^b f_1(\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\xi=0}d\eta - \int_0^b f_2(\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\xi=a}d\eta +$$
$$+\int_0^a f_3(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\eta=0}d\xi - \int_0^a f_4(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\eta=b}d\xi.$$

Две формы представления функции Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(p_n x)\sin(p_n\xi)}{p_n\operatorname{sh}(p_n b)}H_n(y,\eta) = \frac{2}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(q_m y)\sin(q_m\eta)}{q_m\operatorname{sh}(q_m a)}Q_m(x,\xi),$$

где

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \qquad H_n(y,\eta) = \begin{cases}\operatorname{sh}(p_n\eta)\operatorname{sh}[p_n(b-y)] & \text{при } b \geqslant y > \eta \geqslant 0,\\ \operatorname{sh}(p_n y)\operatorname{sh}[p_n(b-\eta)] & \text{при } b \geqslant \eta > y \geqslant 0;\end{cases}$$

$$q_m = \frac{\pi m}{b}, \qquad Q_m(x,\xi) = \begin{cases}\operatorname{sh}(q_m\xi)\operatorname{sh}[q_m(a-x)] & \text{при } a \geqslant x > \xi \geqslant 0,\\ \operatorname{sh}(q_m x)\operatorname{sh}[q_m(a-\xi)] & \text{при } a \geqslant \xi > x \geqslant 0.\end{cases}$$

► **Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.**

Рассматривается круг. Задано граничное условие:

$$u = f(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Решение в полярной системе координат:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\eta)\frac{R^2-r^2}{r^2-2Rr\cos(\varphi-\eta)+R^2}\,d\eta + \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R \Phi(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta)\xi\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(r,\varphi,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{r^2\xi^2-2R^2r\xi\cos(\varphi-\eta)+R^4}{R^2[r^2-2r\xi\cos(\varphi-\eta)+\xi^2]}.$$

5.3.3. Уравнение Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = -\Phi(x, y)$

К двумерному уравнению Гельмгольца при $\lambda > 0$ приводит широкий класс задач, связанных с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, тепловыми, электромагнитными и др.). При $\lambda < 0$ и $\Phi = 0$ это уравнение описывает процессы массопереноса с объемной химической реакцией первого порядка.

Двумерное уравнение Гельмгольца имеет вид

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = -\Phi(x, y) \quad \text{в декартовой системе координат,}$$
$$r^{-1}(ru_r)_r + r^{-2}u_{\varphi\varphi} + \lambda u = -\Phi(r, \varphi) \quad \text{в полярной системе координат.}$$

► Частные решения однородного уравнения Гельмгольца при $\Phi \equiv 0$.

1°. Частные решения однородного уравнения Гельмгольца в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}
&u = (Ax + B)(C\cos\mu y + D\sin\mu y), \quad \lambda = \mu^2,\\
&u = (Ax + B)(C\operatorname{ch}\mu y + D\operatorname{sh}\mu y), \quad \lambda = -\mu^2,\\
&u = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)(Cy + D), \quad \lambda = \mu^2,\\
&u = (A\operatorname{ch}\mu x + B\operatorname{sh}\mu x)(Cy + D), \quad \lambda = -\mu^2,\\
&u = (A\cos\mu_1 x + B\sin\mu_1 x)(C\cos\mu_2 y + D\sin\mu_2 y), \quad \lambda = \mu_1^2 + \mu_2^2,\\
&u = (A\cos\mu_1 x + B\sin\mu_1 x)(C\operatorname{ch}\mu_2 y + D\operatorname{sh}\mu_2 y), \quad \lambda = \mu_1^2 - \mu_2^2,\\
&u = (A\operatorname{ch}\mu_1 x + B\operatorname{sh}\mu_1 x)(C\cos\mu_2 y + D\sin\mu_2 y), \quad \lambda = -\mu_1^2 + \mu_2^2,\\
&u = (A\operatorname{ch}\mu_1 x + B\operatorname{sh}\mu_1 x)(C\operatorname{ch}\mu_2 y + D\operatorname{sh}\mu_2 y), \quad \lambda = -\mu_1^2 - \mu_2^2,
\end{aligned}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Частные решения однородного уравнения Гельмгольца в полярной системе координат:

$$\begin{aligned}
&u = [AJ_0(\mu r) + BY_0(\mu r)](C\varphi + D), \quad \lambda = \mu^2,\\
&u = [AI_0(\mu r) + BK_0(\mu r)](C\varphi + D), \quad \lambda = -\mu^2,\\
&u = [AJ_m(\mu r) + BY_m(\mu r)](C\cos m\varphi + D\sin m\varphi), \quad \lambda = \mu^2,\\
&u = [AI_m(\mu r) + BK_m(\mu r)](C\cos m\varphi + D\sin m\varphi), \quad \lambda = -\mu^2,
\end{aligned}$$

где $m = 1,\ 2,\ \ldots$; A, B, C, D — произвольные постоянные; $J_m(\mu)$ и $Y_m(\mu)$ — функции Бесселя; $I_m(\mu)$ и $K_m(\mu)$ — модифицированные функции Бесселя.

► Формулы, позволяющие строить частные решения.

Если $u(x, y)$ — некоторое решение однородного уравнения Гельмгольца, то функции

$$\begin{aligned}
&u_1 = u(\pm x + C_1, \pm y + C_2),\\
&u_2 = u(x\cos\theta + y\sin\theta + C_1,\ -x\sin\theta + y\cos\theta + C_2),
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, θ — произвольные постоянные, также являются решениями этого уравнения. Знаки в формуле для u_1 выбираются произвольно независимо друг от друга.

Ниже приведены решения двумерного неоднородного уравнения Гельмгольца с различными однородными граничными условиями.

► **Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.**

1°. Решение при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)K_0(s\varrho)\,d\xi\,d\eta, \qquad \varrho = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

Здесь и далее $K_0(z) = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(zt)}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

2°. Решение при $\lambda = k^2 > 0$:

$$u(x,y) = -\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)H_0^{(2)}(k\varrho)\,d\xi\,d\eta, \qquad \varrho = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

Здесь и далее $H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iY_0(z)$ — функция Ханкеля второго рода, $i^2 = -1$.

Замечание 5.2. *В этом разделе для получения решений в неограниченной области при $\lambda > 0$ использовались условия излучения на бесконечности (условия Зоммерфельда), которые записываются так:*

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}u = \mathit{const}, \qquad \lim_{r\to\infty}(u_r + i\sqrt{\lambda}\,u) = 0.$$

Подробности см. в книгах Тихонов & Самарский (1972), Polyanin & Nazaikinskii (2016).

► **Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.**

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\eta=0}d\xi + \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

1°. Функция Грина при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\big[K_0(s\varrho_1) - K_0(s\varrho_2)\big],$$
$$\varrho_1 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \quad \varrho_2 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}.$$

2°. Функция Грина при $\lambda = k^2 > 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{i}{4}\big[H_0^{(2)}(k\varrho_1) - H_0^{(2)}(k\varrho_2)\big].$$

Замечание 5.3. *Для получения решения при $\lambda > 0$ использовались условия излучения на бесконечности (условия Зоммерфельда), см. замечание 5.2.*

► Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$u_y = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) G(x,y,\xi,0)\,d\xi + \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

1°. Функция Грина при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\bigl[K_0(s\varrho_1) + K_0(s\varrho_2)\bigr],$$
$$\varrho_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \varrho_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

2°. Функция Грина при $\lambda = k^2 > 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{i}{4}\bigl[H_0^{(2)}(k\varrho_1) + H_0^{(2)}(k\varrho_2)\bigr].$$

Замечание 5.4. *Для получения решения при $\lambda > 0$ использовались условия излучения на бесконечности (условия Зоммерфельда), см. замечание 5.2.*

► Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается квадрант плоскости. Заданы граничные условия:

$$u = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u(x,y) = \int_0^{\infty} f_1(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=0} d\eta + \int_0^{\infty} f_2(\xi)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0} d\xi + \\ + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

1°. Функция Грина при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\bigl[K_0(s\varrho_1) - K_0(s\varrho_2) - K_0(s\varrho_3) + K_0(s\varrho_4)\bigr],$$
$$\varrho_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \varrho_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2},$$
$$\varrho_3 = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \varrho_4 = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

2°. Функция Грина при $\lambda = k^2 > 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{i}{4}\bigl[H_0^{(2)}(k\varrho_1) - H_0^{(2)}(k\varrho_2) - H_0^{(2)}(k\varrho_3) + H_0^{(2)}(k\varrho_4)\bigr].$$

► **Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.**

Рассматривается квадрант плоскости. Заданы граничные условия:

$$u_x = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_y = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u(x,y) = -\int_0^\infty f_1(\eta)G(x,y,0,\eta)\,d\eta - \int_0^\infty f_2(\xi)G(x,y,\xi,0)\,d\xi + \\ + \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

1°. Функция Грина при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\bigl[K_0(s\varrho_1) + K_0(s\varrho_2) + K_0(s\varrho_3) + K_0(s\varrho_4)\bigr],$$
$$\varrho_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad \varrho_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2},$$
$$\varrho_3 = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad \varrho_4 = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

2°. Функция Грина при $\lambda = k^2 > 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{i}{4}\bigl[H_0^{(2)}(k\varrho_1) + H_0^{(2)}(k\varrho_2) + H_0^{(2)}(k\varrho_3) + H_0^{(2)}(k\varrho_4)\bigr].$$

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Первая краевая задача.**

Рассматривается прямоугольник. Заданы граничные условия:

$$u = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$u = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

1°. Собственные значения однородной краевой задачи при $\Phi \equiv 0$ (для удобства используется двойной нижний индекс):

$$\lambda_{nm} = \pi^2\Bigl(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\Bigr); \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots; \quad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

Собственные функции и квадрат нормы этих функций:

$$u_{nm} = \sin\Bigl(\frac{n\pi x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{m\pi y}{b}\Bigr), \qquad \|u_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}.$$

2°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{nm}$:

$$u(x,y) = \int_0^a\int_0^b \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi + \\ + \int_0^b f_1(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=0}d\eta - \int_0^b f_2(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=a}d\eta + \\ + \int_0^a f_3(\xi)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0}d\xi - \int_0^a f_4(\xi)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=b}d\xi.$$

Две формы представления функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(p_n x)\sin(p_n\xi)}{\beta_n\operatorname{sh}(\beta_n b)}H_n(y,\eta)=\frac{2}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(q_k y)\sin(q_k\eta)}{\mu_k\operatorname{sh}(\mu_k a)}Q_k(x,\xi),$$

где

$$p_n=\frac{\pi n}{a},\quad \beta_n=\sqrt{p_n^2-\lambda},\quad H_n(y,\eta)=\begin{cases}\operatorname{sh}(\beta_n\eta)\operatorname{sh}[\beta_n(b-y)] & \text{при } b\geqslant y>\eta\geqslant 0,\\ \operatorname{sh}(\beta_n y)\operatorname{sh}[\beta_n(b-\eta)] & \text{при } b\geqslant \eta>y\geqslant 0;\end{cases}$$

$$q_k=\frac{\pi k}{b},\quad \mu_k=\sqrt{q_k^2-\lambda},\quad Q_k(x,\xi)=\begin{cases}\operatorname{sh}(\mu_k\xi)\operatorname{sh}[\mu_k(a-x)] & \text{при } a\geqslant x>\xi\geqslant 0,\\ \operatorname{sh}(\mu_k x)\operatorname{sh}[\mu_k(a-\xi)] & \text{при } a\geqslant \xi>x\geqslant 0.\end{cases}$$

► **Область: $0\leqslant r\leqslant R$. Первая краевая задача.**

Рассматривается круг. Задано граничное условие:

$$u=0 \quad \text{при} \quad r=R.$$

Собственные значения однородной задачи при $\Phi\equiv 0$:

$$\lambda_{nm}=\frac{\mu_{nm}^2}{R^2};\qquad n=0,\,1,\,2,\,\ldots\,;\ m=1,\,2,\,3,\,\ldots$$

Здесь μ_{nm} — положительные корни функции Бесселя $J_n(\mu)=0$.

Собственные функции:

$$u_{nm}^{(1)}=J_n\bigl(r\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)\cos n\varphi,\quad u_{nm}^{(2)}=J_n\bigl(r\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)\sin n\varphi.$$

Собственные функции, обладающие осевой симметрией: $u_{0m}^{(1)}=J_0\bigl(r\sqrt{\lambda_{0m}}\,\bigr)$.

► **Область: $0\leqslant r\leqslant R$. Вторая краевая задача.**

Рассматривается круг. Задано граничное условие:

$$u_r=0 \quad \text{при} \quad r=R.$$

Собственные значения однородной краевой задачи при $\Phi\equiv 0$:

$$\lambda_{nm}=\frac{\mu_{nm}^2}{R^2},$$

где μ_{nm} — корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu)=0$.

Собственные функции:

$$u_{nm}^{(1)}=J_n(r\sqrt{\lambda_{nm}}\,)\cos n\varphi,\quad u_{nm}^{(2)}=J_n(r\sqrt{\lambda_{nm}}\,)\sin n\varphi.$$

В этих формулах $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$; при $n\neq 0$ параметр m принимает значения $m=1,\,2,\,3,\,\ldots$; при $n=0$ имеется корень $\mu_{00}=0$ (соответствующая ему собственная функция $u_{00}=1$).

Собственные функции, обладающие осевой симметрией: $u_{0m}^{(1)}=J_0\bigl(r\sqrt{\lambda_{0m}}\,\bigr)$.

5.3.4. Уравнения конвективного тепло- и массопереноса

1. $u_{xx} + u_{yy} = au_x + bu_y + cu.$

Это уравнение описывает стационарное поле температуры в среде, движущейся с постоянной скоростью, при наличии объемного тепловыделения (или поглощения), пропорционального температуре. При $b = c = 0$ оно описывает температурное поле в сплошной среде, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси x (это происходит, например, при обтекании плоской пластины жидкометаллическим теплоносителем или при фильтрационном обтекании пластины, находящейся в гранулированной среде).

1°. Подстановка

$$u(x,y) = \exp\bigl[\tfrac{1}{2}(ax+by)\bigr]w(x,y)$$

приводит исходное уравнение к уравнению Гельмгольца

$$w_{xx} + w_{yy} = \bigl(c + \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2\bigr)w,$$

которое обсуждается в разд. 5.3.3.

2°. Пусть $b = c = 0$. Рассмотрим вторую краевую задачу для данного уравнения в верхней полуплоскости ($-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$). Считаем, что на поверхности пластины конечной длины задан тепловой поток, а среда имеет постоянную температуру вдали от пластины:

$$\begin{aligned} u_y &= f(x) &&\text{при}\quad y=0,\ \ |x|<1,\\ u_y &= 0 &&\text{при}\quad y=0,\ \ |x|>1,\\ u &\to u_\infty &&\text{при}\quad x^2+y^2\to\infty. \end{aligned}$$

Решение этой задачи в декартовой системе координат имеет вид

$$u(x,y) = u_\infty - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(\xi)\exp\bigl[\tfrac{1}{2}a(x-\xi)\bigr]K_0\Bigl(\tfrac{1}{2}a\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\Bigr)\,d\xi,$$

где $K_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

2. $u_{xx} + u_{yy} = \mathrm{Pe}\,(1-y^2)u_x.$

Уравнение Греца — Нуссельта. Оно описывает стационарный теплоперенос при ламинарном течении жидкости с параболическим профилем скорости в плоском канале. Уравнение записано в безразмерных декартовых координатах x, y; $\mathrm{Pe} = Uh/a$ — число Пекле, U — скорость жидкости на оси канала (при $y = 0$), h — полуширина канала, a — коэффициент температуропроводности. Стенки канала определяются значениями $y = \pm 1$.

1°. Частные решения:

$$\begin{aligned} u(y) &= A + By,\\ u(x,y) &= 12Ax + A\,\mathrm{Pe}\,(6y^2 - y^4) + B,\\ u(x,y) &= \sum_{n=1}^{m} A_n \exp\Bigl(-\frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pe}}x\Bigr)f_n(y). \end{aligned}$$

Здесь A, B, A_n, λ_n — произвольные постоянные, а функции f_n определяются формулами

$$f_n(y) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda_n y^2\right)\Phi\left(\alpha_n,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_n y^2\right), \quad \alpha_n = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_n - \tfrac{1}{4}\lambda_n^3 \operatorname{Pe}^{-2}, \tag{1}$$

где $\Phi(\alpha,\beta;\xi) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)} \frac{\xi^k}{k!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

2°. Будем считать, что на стенках канала поддерживается кусочно-постоянная температура: $u = 0$ при $x < 0$ и $u = u_0$ при $x > 0$. В силу симметрии задачи относительно оси x достаточно рассмотреть только половину области $0 \leqslant y \leqslant 1$. Граничные условия записываются так:

$$y = 0, \qquad u_y = 0; \qquad y = 1, \qquad u = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ u_0 & \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$$

$$x \to -\infty, \quad u \to 0; \qquad x \to \infty, \quad u \to u_0.$$

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями ищется в виде

$$u(x,y) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Pe}}x\right) g_n(y) \qquad \text{при} \quad x < 0,$$

$$u(x,y) = u_0 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{\operatorname{Pe}}x\right) f_n(y)\right] \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Коэффициенты рядов должны удовлетворять условиям согласования на границе:

$$u(x,y)\big|_{x\to 0,\, x<0} - u(x,y)\big|_{x\to 0,\, x>0} = 0,$$

$$u_x(x,y)\big|_{x\to 0,\, x<0} - u_x(x,y)\big|_{x\to 0,\, x>0} = 0.$$

При $x > 0$ функция $f_n(y)$ определяются соотношениями (1), где собственные значения λ_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$\Phi\left(\alpha_n,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_n\right) = 0, \quad \text{где} \quad \alpha_n = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_n - \tfrac{1}{4}\lambda_n^3 \operatorname{Pe}^{-2}.$$

При $\operatorname{Pe} \to \infty$ можно использовать следующую приближенную формулу для λ_n:

$$\lambda_n = 4(n-1) + 1.68 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{2}$$

максимальная погрешность которой не превышает 0.2%. Соответствующие численные значения коэффициентов A_n достаточно хорошо аппроксимируются выражениями

$$A_1 = 1.2, \quad A_n = 2.27\,(-1)^{n-1}\lambda_n^{-7/6} \qquad \text{при} \quad n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$

максимальная погрешность которых меньше 0.1%, если λ_n вычисляются с помощью (2).

При $\mathrm{Pe} \to 0$ имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$\lambda_n = \sqrt{\pi\left(n - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{Pe}}, \quad A_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{\pi^2(2n-1)^2}, \quad f_n(y) = \cos\left[\pi\left(n - \tfrac{1}{2}\right)y\right], \quad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Здесь не приводятся результаты для области $x < 0$, так как они имеют второстепенное значение для приложений.

3°. Пусть при $x > 0$ на стенках канала задан постоянный тепловой поток, а при $x < 0$ стенки теплоизолированы и температура обращается в нуль при $x \to -\infty$. В этом случае граничные условия записываются так:

$$y = 0, \quad u_y = 0; \qquad y = 1, \quad u_y = \begin{cases} 0 & \text{при } \; x < 0, \\ q & \text{при } \; x > 0; \end{cases} \qquad x \to -\infty, \quad u \to 0.$$

В области тепловой стабилизации главные члены асимптотического разложения решения (при $x \to \infty$) имеют вид

$$u(x,y) = q\left(\frac{3}{2}\frac{x}{\mathrm{Pe}} + \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{8}y^4 + \frac{9}{4\,\mathrm{Pe}^2} - \frac{39}{280}\right).$$

3. $u_{xx} + u_{yy} = f(y)u_x$.

Это уравнение описывает стационарный теплоперенос в ламинарном потоке жидкости с произвольным профилем скорости $f = f(y)$ в плоском канале.

1°. Частные решения:

$$u(x,y) = Ax + A\int_{y_0}^{y}(y - \xi)f(\xi)\,d\xi + By + C,$$

$$u(x,y) = B + \sum_{n=1}^{m} A_n \exp(-\beta_n x) w_n(y).$$

Здесь A, B, C, y_0, A_n, β_n — произвольные постоянные, а функции $w_n = w_n(y)$ описываются линейными ОДУ второго порядка

$$w_n'' + \left[\beta_n f(y) + \beta_n^2\right] w_n = 0.$$

2°. Первое решение в п. 1° описывает распределение температуры вдали от входного сечения трубы, в области тепловой стабилизации, при условии, что на стенках канала задан постоянный тепловой поток.

4. $u_{rr} + r^{-1}u_r + u_{zz} = \mathrm{Pe}\,(1 - r^2)u_z$.

Это уравнение описывает стационарный теплоперенос в ламинарном потоке жидкости с параболическим профилем скорости (течение Пуазейля) в круглой трубе. Уравнение записано в безразмерных цилиндрических координатах r, z; $\mathrm{Pe} = UR/a$ — число Пекле, U — скорость жидкости на оси трубы (при $r = 0$), R — радиус трубы, a — коэффициент температуропроводности. Стенкам трубы соответствует значение $r = 1$.

1°. Частные решения:

$$u(r) = A + B\ln r,$$

$$u(r,z) = 16Az + A\,\mathrm{Pe}\,(4r^2 - r^4) + B,$$

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{m} A_n \exp\Bigl(-\frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pe}} z\Bigr) f_n(r).$$

Здесь A, B, A_n, λ_n — произвольные постоянные, а функции f_n определяются формулами

$$f_n(r) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda_n r^2\bigr)\Phi\bigl(\alpha_n,\ 1;\ \lambda_n r^2\bigr), \quad \alpha_n = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\lambda_n - \tfrac{1}{4}\lambda_n^3\,\mathrm{Pe}^{-2}, \tag{1}$$

где $\Phi(\alpha,\beta;\xi)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

2°. Будем считать, что на стенке трубы поддерживается кусочно-постоянная температура: $u=0$ при $z<0$ и $u=u_0$ при $z>0$. Соответствующие граничные условия записываются так:

$$r=0, \qquad u_r = 0; \qquad r=1, \qquad u = \begin{cases} 0 & \text{при} \ \ z<0, \\ u_0 & \text{при} \ \ z>0; \end{cases}$$

$$z \to -\infty, \quad u \to 0; \qquad z \to \infty, \quad u \to u_0.$$

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями ищется в виде

$$u(r,z) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\Bigl(\frac{\mu_n^2}{\mathrm{Pe}} z\Bigr) g_n(r) \qquad \text{при} \quad z<0,$$

$$u(r,z) = u_0 \Bigl[1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\Bigl(-\frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pe}} z\Bigr) f_n(r)\Bigr] \quad \text{при} \quad z>0.$$

Коэффициенты рядов должны удовлетворять условиям согласования на границе:

$$u(r,z)\big|_{z\to 0,\,z<0} - u(r,z)\big|_{z\to 0,\,z>0} = 0,$$

$$u_z(r,z)\big|_{z\to 0,\,z<0} - u_z(r,z)\big|_{z\to 0,\,z>0} = 0.$$

При $z>0$ функции $f_n(r)$ определяются соотношениями (1), где собственные значения λ_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$\Phi\bigl(\alpha_n,\ 1;\ \lambda_n\bigr) = 0, \quad \text{где} \quad \alpha_n = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\lambda_n - \tfrac{1}{4}\lambda_n^3\,\mathrm{Pe}^{-2}.$$

При $\mathrm{Pe} \to \infty$ можно использовать следующую приближенную формулу для λ_n:

$$\lambda_n = 4\,(n-1) + 2.7 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{2}$$

максимальная погрешность которой не превышает 0.3%. Соответствующие численные значения коэффициентов A_n достаточно хорошо аппроксимируются выражениями

$$A_n = 2.85\,(-1)^{n-1}\lambda_n^{-2/3} \qquad \text{при} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

максимальная погрешность которых составляет 0.5%,

Здесь не приводятся результаты для области $z<0$, так как они имеют второстепенное значение для приложений.

3°. Пусть при $z > 0$ на стенке трубы задан постоянный тепловой поток, а при $z < 0$ стенка теплоизолирована и температура обращается в нуль при $x \to -\infty$. В этом случае граничные условия записываются так:

$$r = 0, \quad u_r = 0; \qquad r = 1, \quad u_r = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ q & \text{при } z > 0; \end{cases} \qquad z \to -\infty, \quad u \to 0.$$

В области тепловой стабилизации главные члены асимптотического разложения решения (при $z \to \infty$) имеют вид

$$u(r, z) = q\Bigl(4\frac{z}{\text{Pe}} + r^2 - \frac{1}{4}r^4 + \frac{8}{\text{Pe}^2} - \frac{7}{24}\Bigr).$$

5. $a(u_{xx} + u_{yy}) = v_1(x, y)u_x + v_2(x, y)u_y$.

Это уравнение стационарного конвективного тепло- и массопереноса в декартовой системе координат. Здесь $v_1 = v_1(x, y)$ и $v_2 = v_2(x, y)$ — компоненты скорости жидкости, которые предполагаются известными из решения соответствующей гидродинамической задачи.

1°. В плоских задачах конвективного теплообмена в жидких металлах, моделируемых идеальной невязкой жидкостью, а также при описании фильтрационных течений в рамках модели потенциальных течений компоненты скорости жидкости $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$ можно выразить через потенциал $\varphi = \varphi(x, y)$ и функцию тока $\psi = \psi(x, y)$ следующим образом:

$$v_1 = \varphi_x = -\psi_y, \qquad v_2 = \varphi_y = \psi_x. \tag{1}$$

Функция φ определяется путем решения уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

2°. Переходя в уравнении конвективного теплообмена от x, y к новым независимым переменным φ, ψ (это *преобразование Буссинеска*), с учетом (1) приходим к более простому УрЧП с постоянными коэффициентами:

$$u_{\varphi\varphi} + u_{\psi\psi} = \frac{1}{a}u_\varphi. \tag{2}$$

Преобразование Буссинеска переводит любой плоский контур в потенциальном потоке в разрез по оси φ одновременно с приведением исходного уравнения к более простому виду (2). Следовательно, задача теплообмена потенциального обтекания этого контура сводится к задаче теплообмена продольного обтекания идеальной жидкостью плоской пластины (см. линейное УрЧП 5.3.4.1, в котором a следует переобозначить на $1/a$ и положить $b = c = 0$).

6. $\dfrac{1}{r^2}(r^2u_r)_r + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta u_\theta)_\theta = \cos\theta\, u_r - \dfrac{\sin\theta}{r}u_\theta$.

Это УрЧП получается из уравнения $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_x$ путем перехода к сферической системе координат в осесимметричном случае.

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее условию затухания решения при $r\to\infty$ имеет вид

$$u(r,\theta)=\Bigl(\frac{\pi}{r}\Bigr)^{1/2}\exp\Bigl(\frac{r\cos\theta}{2}\Bigr)\sum_{n=0}^{\infty}A_nK_{n+\frac12}\Bigl(\frac{r}{2}\Bigr)P_n(\cos\theta),$$

где A_n — произвольные постоянные. Многочлены Лежандра $P_n(\xi)$ и модифицированные функции Бесселя $K_{n+\frac12}(z)$ определяются формулами

$$P_n(\xi)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi^2-1)^n,\qquad K_{n+\frac12}\Bigl(\frac{r}{2}\Bigr)=\Bigl(\frac{\pi}{r}\Bigr)^{1/2}\exp\Bigl(-\frac{r}{2}\Bigr)\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!\,m!\,r^m}.$$

5.3.5. Уравнения тепло- и массопереноса в анизотропных средах

1. $\boldsymbol{(ax^nu_x)_x+(by^mu_y)_y=0.}$

Двумерное уравнение тепло- и массопереноса в неоднородной анизотропной среде, где $a_1(x)=ax^n$ и $a_2(y)=by^m$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. Частные решения (A, B, C — произвольные постоянные):

$$u=Ax^{1-n}+By^{1-m}+C,$$
$$u=A\Bigl[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)}-\frac{y^{2-m}}{b(2-m)}\Bigr]+B,$$
$$u=Ax^{1-n}y^{1-m}+B.$$

2°. При $n\neq2$ и $m\neq2$ имеются частные решения вида

$$u=u(\xi),\qquad \xi=\bigl[b(2-m)^2x^{2-n}+a(2-n)^2y^{2-m}\bigr]^{1/2},$$

где функция $u=u(\xi)$ описывается линейным ОДУ второго порядка

$$u''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}u'_\xi=0,\qquad A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}.\tag{1}$$

Общее решение ОДУ (1) определяется формулами

$$u(\xi)=\begin{cases}C_1\xi^{1-A}+C_2 & \text{при}\ \ A\neq1,\\ C_1\ln\xi+C_2 & \text{при}\ \ A=1,\end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. Имеются решения в виде произведения функций разных аргументов

$$u=\varphi(x)\psi(y),\tag{2}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются следующими линейными ОДУ второго порядка (A_1 — произвольная постоянная):

$$(ax^n\varphi'_x)'_x=-A_1\varphi,\tag{3}$$
$$(by^m\psi'_y)'_y=A_1\psi.\tag{4}$$

Общее решение ОДУ (3) записывается так:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{\frac{1-n}{2}}\Big[C_1 J_\nu\Big(\beta x^{\frac{2-n}{2}}\Big) + C_2 Y_\nu\Big(\beta x^{\frac{2-n}{2}}\Big)\Big] & \text{при } A_1 > 0, \\ x^{\frac{1-n}{2}}\Big[C_1 I_\nu\Big(\beta x^{\frac{2-n}{2}}\Big) + C_2 K_\nu\Big(\beta x^{\frac{2-n}{2}}\Big)\Big] & \text{при } A_1 < 0, \end{cases}$$

$$\nu = \frac{|1-n|}{2-n}, \qquad \beta = \frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{|A_1|}{a}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Общее решение ОДУ (4) имеет вид

$$\psi(y) = \begin{cases} y^{\frac{1-m}{2}}\Big[C_1 J_\sigma\Big(\mu y^{\frac{2-m}{2}}\Big) + C_2 Y_\sigma\Big(\mu y^{\frac{2-m}{2}}\Big)\Big] & \text{при } A_1 < 0, \\ y^{\frac{1-m}{2}}\Big[C_1 I_\sigma\Big(\mu y^{\frac{2-m}{2}}\Big) + C_2 K_\sigma\Big(\mu y^{\frac{2-m}{2}}\Big)\Big] & \text{при } A_1 > 0, \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{|1-m|}{2-m}, \qquad \mu = \frac{2}{2-m}\sqrt{\frac{|A_1|}{b}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Сумма решений вида (2), соответствующих различным значениям параметра A_1, также является решением исходного уравнения; решения некоторых краевых задач могут быть получены с помощью таких решений методом разделения переменных.

4°. См. также п. 4° уравнения 5.3.5.3 при $c = 0$.

2. $\boldsymbol{(ax^n u_x)_x + (by^m u_y)_y = c.}$

Подстановка

$$u = w(x,y) + \frac{c}{a(2-n)}x^{2-n}$$

приводит к линейному однородному УрЧП вида 5.3.5.1:

$$(ax^n w_x)_x + (by^m w_y)_y = 0.$$

3. $\boldsymbol{(ax^n u_x)_x + (by^m u_y)_y = cu.}$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с линейным источником в неоднородной анизотропной среде.

1°. При $n \neq 2$ и $m \neq 2$ имеются частные решения вида

$$u = u(\xi), \qquad \xi = \big[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

Здесь функция $u = u(\xi)$ описывается линейным ОДУ второго порядка

$$u''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi}u'_\xi = Bu, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

Общее решение ОДУ (1) определяется формулами

$$u(\xi) = \xi^{\frac{1-A}{2}} \Big[C_1 J_\nu\big(\xi\sqrt{|B|}\,\big) + C_2 Y_\nu\big(\xi\sqrt{|B|}\,\big) \Big] \quad \text{при } B < 0,$$

$$u(\xi) = \xi^{\frac{1-A}{2}} \Big[C_1 I_\nu\big(\xi\sqrt{B}\,\big) + C_2 K_\nu\big(\xi\sqrt{B}\,\big) \Big] \qquad \text{при } B > 0,$$

где $\nu = \frac{1}{2}|1-A|$; C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя; $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2°. Имеются решения в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi(x)\psi(y),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются следующими линейными ОДУ второго порядка (A_1 — произвольная постоянная):

$$(ax^n\varphi'_x)'_x = A_1\varphi, \qquad (by^m\psi'_y)'_y = (c - A_1)\psi. \tag{2}$$

Общие решения ОДУ (2) выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя; см. п. 3° уравнения 5.3.5.1.

3°. Имеются решения в виде суммы функций разных аргументов

$$u = f(x) + g(y),$$

где $f(x)$ и $g(y)$ описываются следующими линейными ОДУ второго порядка (A_2 — произвольная постоянная):

$$(ax^n f'_x)'_x - cf = A_2, \qquad (by^m g'_y)'_y - cg = -A_2. \tag{3}$$

Общие решения ОДУ (3) выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя.

4°. Преобразование

$$x^{\frac{2-n}{2}} = Ar\cos\theta, \qquad y^{\frac{2-m}{2}} = Br\sin\theta,$$

где $A^2 = a(2-n)^2$ и $B^2 = b(2-m)^2$, приводит к линейному УрЧП

$$u_{rr} + \frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}\,\frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} - \frac{2}{r^2}\,\frac{(nm-n-m)\cos 2\theta + (n-m)}{(2-n)(2-m)\sin 2\theta}u_\theta = 4cu,$$

которое допускает решения с мультипликативным разделением переменных вида $u = F_1(r)F_2(\theta)$.

4. $(ae^{\beta x}u_x)_x + (be^{\mu y}u_y)_y = 0.$

Двумерное уравнение тепло- и массопереноса в неоднородной анизотропной среде, где $a_1(x) = ae^{\beta x}$ и $a_2(y) = be^{\mu y}$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. Частные решения (A, B, C — произвольные постоянные):

$$u = Ae^{-\beta x} + Be^{-\mu y} + C,$$
$$u = \frac{A}{a\beta^2}(\beta x + 1)e^{-\beta x} - \frac{A}{b\mu^2}(\mu y + 1)e^{-\mu y} + B,$$
$$u = Ae^{-\beta x - \mu y} + B.$$

2°. Имеются решения в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi(x)\psi(y), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются следующими линейными ОДУ второго порядка (A_1 — произвольная постоянная):

$$(ae^{\beta x}\varphi'_x)'_x = -A_1\varphi, \tag{2}$$
$$(be^{\mu y}\psi'_y)'_y = A_1\psi. \tag{3}$$

Общее решение ОДУ (2) определяется формулами

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\beta x/2}\bigl[C_1 J_1\bigl(ke^{-\beta x/2}\bigr) + C_2 Y_1\bigl(ke^{-\beta x/2}\bigr)\bigr] & \text{при } \ A_1 > 0, \\ e^{-\beta x/2}\bigl[C_1 I_1\bigl(ke^{-\beta x/2}\bigr) + C_2 K_1\bigl(ke^{-\beta x/2}\bigr)\bigr] & \text{при } \ A_1 < 0, \end{cases}$$

где $k = -(2/\beta)\sqrt{|A_1|/a}$; C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $J_1(z)$ и $Y_1(z)$ — функции Бесселя; $I_1(z)$ и $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Общее решение ОДУ (3) имеет вид

$$\psi(y) = \begin{cases} e^{-\mu y/2}\bigl[C_1 J_1\bigl(se^{-\mu y/2}\bigr) + C_2 Y_1\bigl(se^{-\mu y/2}\bigr)\bigr] & \text{при } \ A_1 < 0, \\ e^{-\mu y/2}\bigl[C_1 I_1\bigl(se^{-\mu y/2}\bigr) + C_2 K_1\bigl(se^{-\mu y/2}\bigr)\bigr] & \text{при } \ A_1 > 0, \end{cases}$$

где $s = -(2/\mu)\sqrt{|A_1|/b}$; C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Суммы решений вида (1) для различных значений параметра A_1 также являются решениями исходного УрЧП.

3°. См. также п. 3° уравнения 5.3.5.6 при $c = 0$.

5. $\boldsymbol{(ae^{\beta x}u_x)_x + (be^{\mu y}u_y)_y = c.}$

Подстановка

$$u = w(x, y) - \frac{c}{a\beta^2}(\beta x + 1)e^{-\beta x}$$

приводит к линейному однородному уравнению вида 5.3.5.4:

$$(ae^{\beta x}w_x)_x + (be^{\mu y}w_y)_y = 0.$$

6. $\boldsymbol{(ae^{\beta x}u_x)_x + (be^{\mu y}u_y)_y = cu.}$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с линейным источником в неоднородной анизотропной среде.

1°. При $\beta\mu \neq 0$ имеются частные решения вида

$$u = u(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где $u = u(\xi)$ описывается линейным ОДУ

$$u''_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi} u'_{\xi} = Bu, \qquad B = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}.$$

О решении этого ОДУ см. п. 1° уравнения 5.3.5.3 при $A = -1$.

2°. Исходное УрЧП допускает решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных, см. уравнение 5.3.5.11 при $f(x) = ae^{\beta x}$ и $g(y) = = be^{\mu y}$.

3°. Преобразование

$$e^{-\beta x/2} = Ar\cos\theta, \quad e^{-\mu y/2} = Br\sin\theta,$$

где $A^2 = a\beta^2$ и $B^2 = b\mu^2$ приводит к УрЧП

$$u_{rr} - \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} - \frac{2}{r^2} \operatorname{ctg} 2\theta \, u_\theta = 4cu,$$

которое имеет решения с разделением переменных вида $u(r,\theta) = F_1(r)F_2(\theta)$.

7. $\boldsymbol{(ax^n u_x)_x + (be^{\beta y} u_y)_y = cu.}$

1°. При $n \neq 2$ и $\beta \neq 0$ имеются частные решения вида

$$u = u(r), \qquad r^2 = \frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2},$$

где функция $u = u(r)$ описывается линейным ОДУ

$$u''_{rr} + \frac{n}{2-n} \frac{1}{r} u'_r = 4cu.$$

О решении этого ОДУ см. п. 1° уравнения 5.3.5.3.

2°. Исходное УрЧП допускает решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных, см. уравнение 5.3.5.11 при $f(x) = ax^n$ и $g(y) = = be^{\beta y}$.

3°. Преобразование

$$x^{1-\frac{1}{2}n} = Ar\cos\theta, \quad e^{-\frac{1}{2}\beta y} = Br\sin\theta,$$

где $A^2 = a(2-n)^2$ и $B^2 = b\beta^2$, приводит к УрЧП

$$u_{rr} + \frac{n}{2-n} \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} - \frac{2}{r^2} \frac{(1-n)\cos 2\theta + 1}{(2-n)\sin 2\theta} u_\theta = 4cu,$$

которое имеет решения с разделением переменных вида $u = F_1(r)F_2(\theta)$.

8. $\boldsymbol{[f(x)u_x]_x + u_{yy} = 0.}$

1°. Частные решения:

$$u = C_1 y^2 + C_2 y - 2\int \frac{C_1 x + C_3}{f(x)}\,dx + C_4,$$
$$u = C_1 y^3 + C_2 y - 6y\int \frac{C_1 x + C_3}{f(x)}\,dx + C_4,$$
$$u = [C_1\Phi(x) + C_2]y + C_3\Phi(x) + C_4, \quad \Phi(x) = \int \frac{dx}{f(x)},$$
$$u = [C_1\Phi(x) + C_2]y^2 + C_3\Phi(x) + C_4 - 2\int\left\{\frac{1}{f(x)}\int [C_1\Phi(x) + C_2]\,dx\right\}dx,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y})H(x),$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $H = H(x)$ описывается линейным ОДУ: $[f(x)H'_x]'_x + \lambda^2 H = 0$.

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных, периодическое по y:

$$u = [C_1\sin(\lambda y) + C_2\cos(\lambda y)]Z(x),$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $Z = Z(x)$ описывается линейным ОДУ: $[f(x)Z'_x]'_x - \lambda^2 Z = 0$.

4°. Частные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие четные степени y:

$$u = \sum_{k=0}^{n} \zeta_k(x) y^{2k},$$

где функции $\zeta_k = \zeta_k(x)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\zeta_n(x) = A_n\Phi(x) + B_n, \qquad \Phi(x) = \int \frac{dx}{f(x)},$$
$$\zeta_{k-1}(x) = A_k\Phi(x) + B_k - 2k(2k-1)\int \frac{1}{f(x)}\left\{\int \zeta_k(x)\,dx\right\}dx,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные ($k = n, \ldots, 1$).

5°. Частные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие нечетные степени y:

$$u = \sum_{k=0}^{n} \eta_k(x) y^{2k+1},$$

где функции $\eta_k = \eta_k(x)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\eta_n(x) = A_n\Phi(x) + B_n, \qquad \Phi(x) = \int \frac{dx}{f(x)},$$
$$\eta_{k-1}(x) = A_k\Phi(x) + B_k - 2k(2k+1)\int \frac{1}{f(x)}\left\{\int \eta_k(x)\,dx\right\}dx,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные ($k = n, \ldots, 1$).

9. $[f(x)u_x]_x + [g(y)u_y]_y = 0.$

Двумерное уравнение тепло- и массопереноса в неоднородной анизотропной среде, где $f = f(x)$ и $g = g(y)$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. Частные решения:

$$
\begin{aligned}
u &= A_1 \int \frac{dx}{f(x)} + B_1 \int \frac{dy}{g(y)} + C_1,\\
u &= A_2 \int \frac{x\,dx}{f(x)} - A_2 \int \frac{y\,dy}{g(y)} + B_2,\\
u &= A_3 \int \frac{dx}{f(x)} \int \frac{dy}{g(y)} + B_3,
\end{aligned}
$$

где A_k, B_k, C_1 — произвольные постоянные. Линейные комбинации этих решений также являются решениями исходного УрЧП.

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(y), \tag{1}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются линейными ОДУ второго порядка (A — произвольная постоянная):

$$
\begin{aligned}
(f\varphi'_x)'_x &= A\varphi, \quad & f &= f(x),\\
(g\psi'_y)'_y &= -A\psi, \quad & g &= g(y).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Суммы решений вида (1) для различных значений параметра A_1 также являются решениями исходного УрЧП (используя метод разделения переменных, можно получить решения некоторых краевых задач).

10. $[f(x)u_x]_x + [g(y)u_y]_y = \beta.$

Подстановка

$$u = w(x, y) + \beta \int \frac{x\,dx}{f(x)}$$

приводит к линейному однородному УрЧП вида 5.3.5.9:

$$[f(x)w_x]_x + [g(y)w_y]_y = 0.$$

11. $[f(x)u_x]_x + [g(y)u_y]_y = \beta u.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с линейным источником в неоднородной анизотропной среде, где $f = f(x)$ и $g = g(y)$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(y), \tag{1}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются линейными ОДУ второго порядка (A — произвольная постоянная):

$$\begin{aligned} &(f\varphi'_x)'_x = A\varphi, && f = f(x),\\ &(g\psi'_y)'_y = (\beta - A)\psi, && g = g(y). \end{aligned} \tag{2}$$

Суммы решений вида (1) для различных значений параметра A в (2) также являются решениями исходного УрЧП (используя метод разделения переменных, можно получить решения некоторых краевых задач).

2°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \Phi(x) + \Psi(y),$$

где функции $\Phi(x)$ и $\Psi(y)$ описываются линейными ОДУ второго порядка (C — произвольная постоянная):

$$\begin{aligned} &(f\Phi'_x)'_x - \beta\Phi = C, && f = f(x),\\ &(g\Psi'_y)'_y - \beta\Psi = -C, && g = g(y). \end{aligned}$$

В частном случае $\beta = 0$ решения этих уравнений могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= C\int\frac{x\,dx}{f(x)} + A_1\int\frac{dx}{f(x)} + B_1,\\ \Psi(y) &= -C\int\frac{y\,dy}{g(y)} + A_2\int\frac{dy}{g(y)} + B_2, \end{aligned}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

5.3.6. Уравнение Трикоми и родственные уравнения

1. $\boldsymbol{yu_{xx} + u_{yy} = 0}$**.**

Уравнение Трикоми. Используется для описания околозвуковых течений газа.

1°. Частные решения:

$$\begin{aligned} u &= Axy + Bx + Cy + D,\\ u &= A(3x^2 - y^3) + B(x^3 - xy^3) + C(6yx^2 - y^4), \end{aligned}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Частные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие четные степени x:

$$u = \sum_{k=0}^{n}\varphi_k(y)x^{2k},$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(y)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\varphi_n(y) = A_n y + B_n, \quad \varphi_{k-1}(y) = A_k y + B_k - 2k(2k-1)\int_0^y (y-t)t\varphi_k(t)\,dt;$$

A_k и B_k — произвольные постоянные ($k = n, \ldots, 1$).

3°. Частные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие нечетные степени x:

$$u = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(y) x^{2k+1},$$

где функции $\psi_k = \psi_k(y)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\psi_n(y) = A_n y + B_n, \quad \psi_{k-1}(y) = A_k y + B_k - 2k(2k+1) \int_0^y (y-t) t \psi_k(t)\, dt;$$

A_k и B_k — произвольные постоянные ($k = n, \ldots, 1$).

4°. Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \bigl[A \operatorname{sh}(3\lambda x) + B \operatorname{ch}(3\lambda x)\bigr] \sqrt{y}\, \bigl[C J_{1/3}(2\lambda y^{3/2}) + D Y_{1/3}(2\lambda y^{3/2})\bigr],$$
$$u = \bigl[A \sin(3\lambda x) + B \cos(3\lambda x)\bigr] \sqrt{y}\, \bigl[C I_{1/3}(2\lambda y^{3/2}) + D K_{1/3}(2\lambda y^{3/2})\bigr],$$

где A, B, C, D, λ — произвольные постоянные, $J_{1/3}(z)$ и $Y_{1/3}(z)$ — функции Бесселя, $I_{1/3}(z)$ и $K_{1/3}(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

5°. При $y > 0$ см. также уравнение 5.3.6.2 при $n = 1$.

2. $\boldsymbol{y^n u_{xx} + u_{yy} = 0.}$

1°. Частные решения:

$$u = Axy + Bx + Cy + D,$$
$$u = Ax^2 - \frac{2A}{(n+1)(n+2)} y^{n+2},$$
$$u = Ax^3 - \frac{6A}{(n+1)(n+2)} x y^{n+2},$$
$$u = Ayx^2 - \frac{2A}{(n+2)(n+3)} y^{n+3},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Частные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие четные степени x:

$$u = \sum_{k=0}^{m} \varphi_k(y) x^{2k},$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(y)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\varphi_m(y) = A_m y + B_m, \quad \varphi_{k-1}(y) = A_k y + B_k - 2k(2k-1) \int_a^y (y-t) t^n \varphi_k(t)\, dt;$$

A_k и B_k — произвольные постоянные ($k = m, \ldots, 1$), a — любое число.

3°. Частные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие нечетные степени x:

$$u = \sum_{k=0}^{m} \psi_k(y) x^{2k+1},$$

где функции $\psi_k = \psi_k(y)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\psi_m(y) = A_m y + B_m, \quad \psi_{k-1}(y) = A_k y + B_k - 2k(2k+1)\int_a^y (y-t)t^n \psi_k(t)\,dt;$$

A_k и B_k — произвольные постоянные ($k = m, \ldots, 1$), a — любое число.

4°. Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \bigl[A\,\mathrm{sh}(\lambda qx) + B\,\mathrm{ch}(\lambda qx)\bigr]\sqrt{y}\,\bigl[CJ_{\frac{1}{2q}}(\lambda y^q) + DY_{\frac{1}{2q}}(\lambda y^q)\bigr], \quad q = \tfrac{1}{2}(n+2),$$
$$u = \bigl[A\sin(\lambda qx) + B\cos(\lambda qx)\bigr]\sqrt{y}\,\bigl[CI_{\frac{1}{2q}}(\lambda y^q) + DK_{\frac{1}{2q}}(\lambda y^q)\bigr],$$

где A, B, C, D, λ — произвольные постоянные, $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

5°. Фундаментальные решения (при $y > 0$):

$$u_1(x, y, x_0, y_0) = k_1(r_1^2)^{-\beta} F(\beta,\, \beta,\, 2\beta;\, 1-\xi), \quad \beta = \frac{n}{2(n+2)}, \quad \xi = \frac{r_2^2}{r_1^2},$$
$$u_2(x, y, x_0, y_0) = k_2(r_1^2)^{-\beta}(1-\xi)^{1-2\beta} F(1-\beta,\, 1-\beta,\, 2-2\beta;\, 1-\xi).$$

Здесь $F(a, b, c; \xi)$ — гипергеометрическая функция и использованы обозначения

$$r_1^2 = (x-x_0)^2 + \frac{4}{(n+2)^2}\Bigl(y^{\frac{n+2}{2}} + y_0^{\frac{n+2}{2}}\Bigr), \quad k_1 = \frac{1}{4\pi}\Bigl(\frac{4}{n+2}\Bigr)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},$$
$$r_2^2 = (x-x_0)^2 + \frac{4}{(n+2)^2}\Bigl(y^{\frac{n+2}{2}} - y_0^{\frac{n+2}{2}}\Bigr), \quad k_2 = \frac{1}{4\pi}\Bigl(\frac{4}{n+2}\Bigr)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)},$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция, x_0 и y_0 — произвольные постоянные.

Фундаментальные решения удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad u_2\big|_{y=0} = 0 \qquad (x \text{ и } x_0 \text{ — любое, } y_0 > 0).$$

3. $\boldsymbol{u_{xx} + f(x)u_{yy} = 0.}$

1°. Частные решения:

$$u = C_1xy + C_2y + C_3x + C_4,$$
$$u = C_1y^2 + C_2xy + C_3y + C_4x - 2C_1\int_a^x (x-t)f(t)\,dt + C_5,$$
$$u = C_1y^3 + C_2xy + C_3y + C_4x - 6C_1y\int_a^x (x-t)f(t)\,dt + C_5,$$
$$u = (C_1x + C_2)y^2 + C_3xy + C_4y + C_5x - 2\int_a^x (x-t)(C_1t + C_2)f(t)\,dt + C_6,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — произвольные постоянные, a — любое число.

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (C_1e^{\lambda y} + C_2e^{-\lambda y})H(x),$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $H = H(x)$ описывается линейным ОДУ: $H''_{xx} + \lambda^2 f(x)H = 0$.

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [C_1 \sin(\lambda y) + C_2 \cos(\lambda y)] Z(x),$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $Z = Z(x)$ описывается линейным ОДУ: $Z''_{xx} - \lambda^2 f(x) Z = 0$.

4°. Частные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие четные степени y:

$$u = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) y^{2k},$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(x)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\varphi_n(x) = A_n x + B_n, \quad \varphi_{k-1}(x) = A_k x + B_k - 2k(2k-1) \int_a^x (x-t) f(t) \varphi_k(t)\, dt;$$

A_k и B_k — произвольные постоянные ($k = n, \ldots, 1$), a — любое число.

5°. Частные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие нечетные степени y:

$$u = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(x) y^{2k+1},$$

где функции $\psi_k = \psi_k(x)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\psi_n(x) = A_n x + B_n, \quad \psi_{k-1}(x) = A_k x + B_k - 2k(2k+1) \int_a^x (x-t) f(t) \psi_k(t)\, dt;$$

A_k и B_k — произвольные постоянные ($k = n, \ldots, 1$), a — любое число.

4. $\boldsymbol{[f_1(x) u_x]_x + [f_2(y) u_y]_y + \lambda \big[g_1(x) + g_2(y)\big] u = 0.}$

Это уравнение встречается в теории колебаний неоднородных мембран. Его решения ищутся методом разделения переменных в виде $u = \varphi(x)\psi(y)$.

5.4. Линейные уравнения четвертого порядка

5.4.1. Уравнение поперечных колебаний упругого стержня $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0$

Это уравнение встречается в задачах о свободных поперечных колебаниях тонкого упругого стержня.

► **Частные решения.**

$$\begin{aligned}
u &= (C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4) t + C_5 x^3 + C_6 x^2 + C_7 x + C_8,\\
u &= 12 a^2 C_1 t^2 + C_2 t - C_1 x^4 + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6,\\
u &= \big[C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \operatorname{sh}(\lambda x) + C_4 \operatorname{ch}(\lambda x)\big] \sin(\lambda^2 a t),\\
u &= \big[C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \operatorname{sh}(\lambda x) + C_4 \operatorname{ch}(\lambda x)\big] \cos(\lambda^2 a t),
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_8$ и λ — произвольные постоянные. Здесь первое решение является вырожденным, второе решение является решением с аддитивным разделением переменных, а последние два решения являются решениями с мультипликативным разделением переменных.

► **Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.**

Заданы начальные условия:

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = ag''(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение Буссинеска:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\bigl(x - 2\xi\sqrt{at}\,\bigr)\bigl(\cos\xi^2 + \sin\xi^2\bigr)\,d\xi + \\ + \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g\bigl(x - 2\xi\sqrt{at}\,\bigr)\bigl(\cos\xi^2 - \sin\xi^2\bigr)\,d\xi.$$

► **Область: $0 \leqslant x < \infty$. Свободные колебания полубесконечного стержня.**

Следующие условия заданы:

$$\begin{aligned} &u = 0 && \text{при} \quad t = 0, && u_t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальные условия)},\\ &u = f(t) && \text{при} \quad x = 0, && u_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничные условия)}. \end{aligned}$$

Решение Буссинеска:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2at}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{2a\xi^2}\right)\left(\sin\frac{\xi^2}{2} + \cos\frac{\xi^2}{2}\right)d\xi.$$

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Различные начально-краевые задачи.**

Решения уравнения поперечных колебаний упругого стержня для различных краевых задач см. в разд. 5.4.2 при $\Phi \equiv 0$.

5.4.2. Неоднородное уравнение вида $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = \Phi(x,t)$

Это уравнение встречается в задачах о вынужденных колебаниях тонкого упругого стержня.

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Представление решения через функцию Грина.**

Будем рассматривать краевые задачи о вынужденных колебаниях упругого стержня в области $0 \leqslant x \leqslant l$ с начальными условиями общего вида

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение этих задач можно представить с помощью функции Грина следующим образом:

$$u=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^l g(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Ниже приведены функции Грина для уравнения поперечных колебаний упругого стержня для однородных граничных условий.

► Оба конца стержня жестко закреплены.

Заданы граничные условия:

$$u=u_x=0 \quad \text{при} \quad x=0, \qquad u=u_x=0 \quad \text{при} \quad x=l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t)=\frac{4}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2}{\left[\varphi_n''(l)\right]^2}\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)\sin(\lambda_n^2 at),$$

где

$$\varphi_n(x)=\left[\operatorname{sh}(\lambda_n l)-\sin(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{ch}(\lambda_n x)-\cos(\lambda_n x)\right]-\\ -\left[\operatorname{ch}(\lambda_n l)-\cos(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{sh}(\lambda_n x)-\sin(\lambda_n x)\right]$$

а λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l)=1$. Численные значения корней можно определять по формулам

$$\lambda_n=\frac{\mu_n}{l}, \quad \text{где} \quad \mu_1=4.730, \quad \mu_2=7.859, \quad \mu_n=\frac{\pi}{2}(2n+1) \quad \text{при} \quad n\geqslant 3.$$

► Оба конца стержня закреплены на шарнирах.

Заданы граничные условия:

$$u=u_{xx}=0 \quad \text{при} \quad x=0, \qquad u=u_{xx}=0 \quad \text{при} \quad x=l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t)=\frac{2l}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n\xi)\sin(\lambda_n^2 at), \qquad \lambda_n=\frac{\pi n}{l}.$$

► Один конец стержня закреплен жестко, а другой — шарнирно.

Заданы граничные условия:

$$u=u_x=0 \quad \text{при} \quad x=0, \qquad u=u_{xx}=0 \quad \text{при} \quad x=l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{|\varphi_n'(l)\varphi_n'''(l)|}\sin(\lambda_n^2 at),$$

где

$$\varphi_n(x)=\left[\operatorname{sh}(\lambda_n l)-\sin(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{ch}(\lambda_n x)-\cos(\lambda_n x)\right]-\\ -\left[\operatorname{ch}(\lambda_n l)-\cos(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{sh}(\lambda_n x)-\sin(\lambda_n x)\right]$$

а λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\lambda l)-\operatorname{th}(\lambda l)=0$.

► **Один конец стержня закреплен жестко, а другой — свободен.**

Заданы граничные условия:

$$u = u_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_{xx} = u_{xxx} = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{4}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2\varphi_n^2(l)}\sin(\lambda_n^2 at),$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) = \bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n l) + \sin(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)\bigr] - \\ - \bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n l) + \cos(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)\bigr]\end{aligned}$$

а λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = -1$.

► **Один конец стержня закреплен шарнирно, а другой — свободен.**

Заданы граничные условия:

$$u = u_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_{xx} = u_{xxx} = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{4}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2\varphi_n^2(l)}\sin(\lambda_n^2 at),$$

где

$$\varphi_n(x) = \sin(\lambda_n l)\operatorname{sh}(\lambda_n x) + \operatorname{sh}(\lambda_n l)\sin(\lambda_n x)$$

а λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\lambda l) - \operatorname{th}(\lambda l) = 0$.

5.4.3. Бигармоническое уравнение $\Delta\Delta u = 0$

Бигармоническое уравнение встречается в плоских задачах теории упругости (u — функция напряжения Эйри). Оно используется также для описания медленных течений вязкой несжимаемой жидкости (u — функция тока).

В прямоугольной декартовой системе координат двумерное бигармоническое уравнение имеет вид

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0.$$

► **Частные решения.**

$$u = (A\operatorname{ch}\beta x + B\operatorname{sh}\beta x + Cx\operatorname{ch}\beta x + Dx\operatorname{sh}\beta x)(a\cos\beta y + b\sin\beta y),$$
$$u = (A\cos\beta x + B\sin\beta x + Cx\cos\beta x + Dx\sin\beta x)(a\operatorname{ch}\beta y + b\operatorname{sh}\beta y),$$
$$u = Ar^2\ln r + Br^2 + C\ln r + D, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

где A, B, C, D, a, b, β — произвольные постоянные.

► Различные представления общего решения.

1°. Различные способы представления общего решения через гармонические функции:

$$u = xu_1 + u_2,$$
$$u = yu_1 + u_2,$$
$$u = (x^2 + y^2)u_1 + u_2,$$

где $u_1 = u_1(x, y)$ и $u_2 = u_2(x, y)$ — произвольные функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta u_k = 0$ $(k = 1,\ 2)$.

2°. Комплексная форма представления общего решения:

$$u = \mathrm{Re}\bigl[\overline{z} f(z) + g(z)\bigr],$$

где $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$; $\overline{z} = x - iy$, $i^2 = -1$. Символ $\mathrm{Re}[A]$ обозначает действительную часть комплексной величины A.

► Краевые задачи для полуплоскости.

1°. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. На границе задана искомая функция и ее производная по нормали:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u_y = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) G(x - \xi, y)\, d\xi, \qquad G(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

2°. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. На границе заданы производные искомой величины:

$$u_x = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u_y = g(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x - \xi}{y}\right) + \frac{y(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + y^2}\right] d\xi + \frac{y^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi)\, d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

► Краевая задача для круга.

Область: $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Заданы граничные условия в полярной системе координат:

$$u = f(\varphi) \quad \text{при} \quad r = a, \qquad u_r = g(\varphi) \quad \text{при} \quad r = a.$$

Решение:

$$u = \frac{1}{2\pi a}(r^2 - a^2)^2 \left[\int_0^{2\pi} \frac{[a - r\cos(\eta - \varphi)] f(\eta)\, d\eta}{[r^2 + a^2 - 2ar\cos(\eta - \varphi)]^2} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{g(\eta)\, d\eta}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\eta - \varphi)}\right].$$

5.4.4. Неоднородное бигармоническое уравнение $\Delta\Delta u = \Phi(x, y)$

► **Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.**

Решение:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta)\mathscr{E}(x-\xi, y-\eta)\,d\xi\,d\eta, \qquad \mathscr{E}(x,y) = \frac{1}{8\pi}(x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

► **Область: $-\infty < x < \infty, 0 \leqslant y < \infty$. Краевая задача.**

Рассматривается полуплоскость. На границе заданы производные:

$$u_x = f(x) \quad \text{при} \quad y=0, \qquad u_y = g(x) \quad \text{при} \quad y=0.$$

Решение:

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\xi}{y}\right) + \frac{y(x-\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\right]d\xi + \frac{y^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} +$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{2}(R_+^2 - R_-^2) - R_-^2 \ln\frac{R_+}{R_-}\right]\Phi(\xi,\eta)\,d\eta + C,$$

где C — произвольная постоянная,

$$R_+^2 = (x-\xi)^2 + (y+\eta)^2, \qquad R_-^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

► **Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Края пластинки шарнирно закреплены.**

Рассматривается прямоугольник. Заданы граничные условия:

$$u = u_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u = u_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$u = u_{yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u = u_{yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Решение:

$$u(x,y) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(p_n x)\sin(q_k y)\sin(p_n\xi)\sin(q_k\eta)}{(p_n^2+q_k^2)^2}, \quad p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_k = \frac{\pi k}{l_2}.$$

► *Больше точных решений линейных уравнений и задач математической физики можно найти в специализированных справочниках Полянин (2017), Polyanin (2002), Polyanin & Nazaikinskii (2016). Основные методы поиска точных решений линейных УрЧП описаны, например, в книгах Тихонов & Самарский (1972), Polyanin & Nazaikinskii (2016).*

Литература к главе 5

Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. *Сборник задач по математической физике*. М.: Наука, 1972.

Бутковский А. Г. *Характеристики систем с распределенными параметрами*. М.: Наука, 1979.

Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. М.: Наука, 1964.

Миллер У. (мл.). *Симметрия и разделение переменных*. М.: Мир, 1981.

Полянин А. Д. *Уравнения и задачи математической физики* (*части 1 и 2*). М.: Юрайт, 2017.

Смирнов М. М. *Задачи по уравнениям математической физики*. М.: Наука, 1975.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

Davis E. J. Exact solutions for a class of heat and mass transfer problems. *Can. J. Chem. Eng.,* 1973, Vol. 51, No. 5, pp. 562–572.

Polyanin A. D. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2002.

Polyanin A. D., Kutepov A. M., Vyazmin A. V., Kazenin D. A. *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*. London: Taylor & Francis, 2002.

Polyanin A. D., Nazaikinskii V. E. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed.* Boca Raton — London, Chapman & Hall/CRC Press, 2016.

Rotem Z., Neilson J. E., Exact solution for diffusion to flow down an incline. *Can. J. Chem. Eng.,* 1966, Vol. 47, pp. 341–346.

Sutton W. G. L. On the equation of diffusion in a turbulent medium. *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 1943, Vol. 138, No. 988, pp. 48–75.

Zwillinger D. *Handbook of Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1989.

6. Нелинейные уравнения математической физики

▶ **Предварительные замечания.** Нелинейными уравнениями математической физики обычно называются нелинейные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков, которые используются для описания природных явлений или процессов.

Под точными решениями нелинейных уравнений математической физики понимаются следующие решения:

- решения, которые выражаются через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, когда рассматриваемое уравнение зависит от произвольных функций), и неопределенные интегралы,
- решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем таких уравнений.

Отметим, что точные решения могут быть представлены в явной, неявной или параметрической форме. Иногда точное решение дополнительно может содержать произвольные функции (аналогичные постоянным интегрирования в решениях ОДУ), которые не входят в рассматриваемое уравнение.

В данной главе дается краткое описание точных решений различных нелинейных уравнений математической физики с двумя независимыми переменными и некоторых других нелинейных УрЧП второго и более высоких порядков.

6.1. Уравнения параболического типа

6.1.1. Квазилинейные уравнения теплопроводности с источником вида $u_t = u_{xx} + f(u)$

▶ *Уравнения этого вида допускают точные решения типа бегущей волны* $u = u(z)$, $z = \kappa x + \lambda t$, *где* κ *и* λ *— произвольные постоянные, а функция* $u(z)$ *описывается автономным ОДУ второго порядка* $a\kappa^2 u''_{zz} - \lambda u'_z + f(u) = 0$.

1. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} - bu^2}$**.**

1°. Точные решения:

$$u = \frac{a}{b}\,\frac{12(4-\sqrt{6}\,)x^2 + 12(4-\sqrt{6}\,)C_1x + 120(12-5\sqrt{6}\,)at + 12(2-\sqrt{6}\,)C_2 + 6C_1^2}{\bigl[x^2 + C_1x + 10(3-\sqrt{6}\,)at + C_2\bigr]^2},$$

$$u = \frac{a}{b}\,\frac{12(4+\sqrt{6}\,)x^2 + 12(4+\sqrt{6}\,)C_1x + 120(12+5\sqrt{6}\,)at + 12(2+\sqrt{6}\,)C_2 + 6C_1^2}{\bigl[x^2 + C_1x + 10(3+\sqrt{6}\,)at + C_2\bigr]^2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. Автомодельное решение:

$$u = t^{-1}U(\xi), \qquad \xi = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается ОДУ второго порядка

$$aU''_{\xi\xi} + \tfrac{1}{2}\xi U'_\xi + U - bU^2 = 0$$

2. $\boldsymbol{u_t = u_{xx} + au(1-u)}$**.**

Уравнение Фишера. Это уравнение встречается в теории массо- и теплообмена, биологии и экологии.

Решения типа бегущей волны (C — произвольная постоянная):

$$u(x,t) = \left[1 + C\exp\left(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\right)\right]^{-2},$$
$$u(x,t) = \frac{1 + 2C\exp\left(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{-6a}\,x\right)}{\left[1 + C\exp\left(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{-6a}\,x\right)\right]^2}.$$

3. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} - bu^3}$**.**

1°. Точные решения:

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{2a}{b}}\,\frac{2C_1x + C_2}{C_1x^2 + C_2x + 6aC_1t + C_3}.$$

2°. Автомодельное решение:

$$u = t^{-1/2}\theta(\xi), \qquad \xi = xt^{-1/2},$$

где функция $\theta(\xi)$ описывается ОДУ:

$$a\theta''_{\xi\xi} + \tfrac{1}{2}\xi\theta'_\xi + \tfrac{1}{2}\theta - b\theta^3 = 0.$$

3°. Решение:

$$u = xU(\zeta), \qquad \zeta = t + \frac{1}{6a}x^2,$$

где функция $U(\zeta)$ описывается ОДУ: $U''_{\zeta\zeta} - 9abU^3 = 0$.

4. $\boldsymbol{u_t = u_{xx} + au - bu^3}$**.**

1°. Точные решения при $a > 0$ и $b > 0$:

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{C_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a}\,x\right) - C_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2a}\,x\right)}{C_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a}\,x\right) + C_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2a}\,x\right) + C_3\exp\left(-\frac{3}{2}at\right)},$$
$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}\left[\frac{2C_1\exp\left(\sqrt{2a}\,x\right) + C_2\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a}\,x - \frac{3}{2}at\right)}{C_1\exp\left(\sqrt{2a}\,x\right) + C_2\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a}\,x - \frac{3}{2}at\right) + C_3} - 1\right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Точные решения при $a<0$ и $b>0$:

$$u(x,t)=\pm\sqrt{\frac{|a|}{b}}\,\frac{\sin\bigl(\frac12\sqrt{2|a|}\,x+C_1\bigr)}{\cos\bigl(\frac12\sqrt{2|a|}\,x+C_1\bigr)+C_2\exp\bigl(-\frac32 at\bigr)}.$$

3°. Решение при $a>0$ (обобщает решение из п. 1°):

$$u=\bigl[C_1\exp\bigl(\tfrac12\sqrt{2a}\,x+\tfrac32 at\bigr)-C_2\exp\bigl(-\tfrac12\sqrt{2a}\,x+\tfrac32 at\bigr)\bigr]U(z),$$
$$z=C_1\exp\bigl(\tfrac12\sqrt{2a}\,x+\tfrac32 at\bigr)+C_2\exp\bigl(-\tfrac12\sqrt{2a}\,x+\tfrac32 at\bigr)+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $U=U(z)$ описывается автономным ОДУ: $aU''_{zz}=2bU^3$, решение которого можно записать в неявной форме.

4°. Решение при $a<0$ (обобщает решение из п. 2°):

$$u=\exp\bigl(\tfrac32 at\bigr)\sin\bigl(\tfrac12\sqrt{2|a|}\,x+C_1\bigr)V(\xi),$$
$$\xi=\exp\bigl(\tfrac32 at\bigr)\cos\bigl(\tfrac12\sqrt{2|a|}\,x+C_1\bigr)+C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $V=V(\xi)$ описывается автономным ОДУ: $aV''_{\xi\xi}=-2bV^3$, решение которого можно записать в неявной форме.

5. $\boldsymbol{u_t=u_{xx}-u(1-u)(a-u)}$.

Уравнение ФитцХью — Нагумо. Это уравнение встречается генетике, биологии и биофизике.

Решения:

$$u(x,t)=\frac{A\exp(z_1)+aB\exp(z_2)}{A\exp(z_1)+B\exp(z_2)+C},$$
$$z_1=\pm\frac{\sqrt2}{2}\,x+\bigl(\tfrac12-a\bigr)t,\qquad z_2=\pm\frac{\sqrt2}{2}\,ax+a\bigl(\tfrac12 a-1\bigr)t,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

6. $\boldsymbol{u_t=u_{xx}+au+bu^k}$.

Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова (частный случай). Это уравнение встречается в теории массо- и теплообмена, теории горения, биологии и экологии.

1°. Решения типа бегущей волны (знаки выбираются произвольным образом):

$$u(x,t)=\bigl[\pm\beta+C\exp(\lambda t\pm\mu x)\bigr]^{\frac{2}{1-k}},$$
$$\beta=\sqrt{-\frac{b}{a}},\qquad \lambda=\frac{a(1-k)(k+3)}{2(k+1)},\qquad \mu=\sqrt{\frac{a(1-k)^2}{2(k+1)}}.$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Автомодельное решение при $a=0$:

$$u(x,t)=t^{1/(1-k)}U(z), \qquad z=xt^{-1/2},$$

где функция $U=U(z)$ описывается ОДУ:

$$U''_{zz}+\frac{1}{2}zU'_z+\frac{1}{1-k}U+bU^k=0.$$

7. $u_t=u_{xx}+au+bu^k+cu^{2k-1}$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$\begin{gathered}u(x,t)=\bigl[\beta+C\exp(\lambda t+\mu x)\bigr]^{\frac{1}{1-k}},\\ \lambda=\frac{1-k}{k}\Bigl[a(1+k)+\frac{b}{\beta}\Bigr], \qquad \mu=\pm(1-k)\sqrt{\frac{1}{k}\Bigl(a+\frac{b}{\beta}\Bigr)},\end{gathered} \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная, а β — любой корень квадратного уравнения

$$a\beta^2+b\beta+c=0. \tag{2}$$

В общем случае формулы (1)–(2) дают четыре точных решения исходного УрЧП.

2°. Подстановка

$$v=u^{1-k}$$

приводит к УрЧП с квадратичной нелинейностью

$$vv_t=vv_{xx}+\frac{k}{1-k}v_x^2+a(1-k)v^2+b(1-k)v+c(1-k). \tag{3}$$

Решениям (1) соответствуют частные решения УрЧП (3), которые имеют вид $v=\beta+C\exp(\lambda t+\mu x)$.

При $a=0$ уравнение (3) имеет также другие решения типа бегущей волны:

$$v(x,t)=(1-k)\Bigl(bt\pm\sqrt{-\frac{c}{k}}\,x\Bigr)+C.$$

8. $u_t=u_{xx}+a+be^{\lambda u}$.

1°. Решения типа бегущей волны при $a\neq 0$ (знаки плюс или минус выбираются произвольно):

$$u(x,t)=-\frac{2}{\lambda}\ln\bigl[\pm\beta+C\exp\bigl(\pm\mu x-\tfrac{1}{2}a\lambda t\bigr)\bigr], \qquad \beta=\sqrt{-\frac{b}{a}},\ \mu=\sqrt{\frac{a\lambda}{2}},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. При $a=0$ существует точное решение вида

$$u = w(z) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \qquad z = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $w=w(z)$ описывается ОДУ:

$$w''_{zz} + \frac{1}{2}zw'_z + \frac{1}{\lambda} + be^{\lambda w} = 0.$$

9. $\boldsymbol{u_t = u_{xx} + a + be^{\lambda u} + ce^{2\lambda u}.}$

Уравнения такого вида встречаются в задачах массо- и теплообмена и теории горения.

1°. Решения типа бегущей волны при $a \neq 0$:

$$u(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\bigl[\beta + C\exp(\pm\mu x - a\lambda t)\bigr], \qquad \mu = \frac{1}{\beta}\sqrt{-c\lambda},$$

где C — произвольная постоянная, а β определяется из квадратного уравнения

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0.$$

2°. Решения типа бегущей волны при $a=0$:

$$u(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\bigl(\pm\sqrt{-c\lambda}\,x - b\lambda t + C\bigr).$$

10. $\boldsymbol{u_t = u_{xx} + au\ln u.}$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t) = \exp\Bigl(Ae^{at}x + \frac{A^2}{a}e^{2at} + Be^{at}\Bigr),$$
$$u(x,t) = \exp\bigl[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}a(x+A)^2 + Be^{at}\bigr],$$
$$u(x,t) = \exp\Bigl[-\frac{a(x+A)^2}{4(1+Be^{-at})} + \frac{1}{2B}e^{at}\ln(1+Be^{-at}) + Ce^{at}\Bigr],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

11. $\boldsymbol{u_t = u_{xx} + au\ln^2 u.}$

1°. Подстановка $u = e^w$ приводит к УрЧП с квадратичной нелинейностью

$$w_t = w_{xx} + w_x^2 + aw^2. \tag{1}$$

2°. Точные решения уравнения (1) при $a<0$:

$$w(x,t) = C_1\exp\bigl(-at \pm x\sqrt{-a}\,\bigr),$$
$$w(x,t) = \frac{1}{C_1 - at} + \frac{C_2}{(C_1-at)^2}\exp\bigl(-at \pm x\sqrt{-a}\,\bigr),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Первое решение — это решение типа бегущей волны, а второе — решение с обобщенным разделением переменных.

3°. Уравнение (1) имеет также решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[C_1\exp(-x\sqrt{-a}\,) + C_2\exp(x\sqrt{-a}\,)\bigr] \quad \text{при} \quad a<0,$$
$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[C_1\sin(x\sqrt{a}\,) + C_2\cos(x\sqrt{a}\,)\bigr] \quad \text{при} \quad a>0,$$

где функции φ и ψ описываются некоторыми ОДУ.

6.1.2. Реакционно-диффузионные уравнения вида $u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)$

► *Уравнения этого вида допускают точные решения типа бегущей волны $u = u(z)$, $z = \varkappa x + \lambda t$, где $\varkappa$ и λ — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным ОДУ второго порядка* $\varkappa^2[f(u)u'_z]'_z - \lambda u'_z + f(u) = 0$.

1. $u_t = a(u^k u_x)_x$.

Это уравнение встречается в нелинейных задачах теплопроводности, диффузии и фильтрации. Значения $k>0$ соответствуют *медленной диффузии*, а $k<0$ — *быстрой диффузии*.

1°. Решения:

$$u(x,t) = \left[\frac{k\lambda}{a}(\pm x + \lambda t) + A\right]^{\frac{1}{k}},$$

$$u(x,t) = \left[\frac{k(x-A)^2}{2a(k+2)(B-t)}\right]^{\frac{1}{k}},$$

$$u(x,t) = \left[A|t+B|^{-\frac{k}{k+2}} - \frac{k}{2a(k+2)}\frac{(x+C)^2}{t+B}\right]^{\frac{1}{k}},$$

$$u(x,t) = \left[\frac{k(x+A)^2}{\varphi(t)} + B|x+A|^{\frac{k}{k+1}}|\varphi(t)|^{-\frac{k(2k+3)}{2(k+1)^2}}\right]^{\frac{1}{k}}, \quad \varphi(t) = C - 2a(k+2)t,$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные. Второе решение при $B > 0$ соответствует *режиму с обострением* (это решение неограниченно возрастает на конечном интервале времени).

2°. Существуют решения следующих видов:

$u(x,t) = (t+C)^{-1/k}F(x)$ (решение с разделением переменных);

$u(x,t) = t^{\lambda}G(\xi), \quad \xi = xt^{-\frac{k\lambda+1}{2}}$ (автомодельное решение);

$u(x,t) = e^{-2\lambda t}H(\eta), \quad \eta = xe^{k\lambda t}$ (обобщенное автомодельное решение);

$u(x,t) = t^{-1/k}U(\zeta), \quad \zeta = x + \lambda \ln t,$

где C и λ — произвольные постоянные.

2. $u_t = a(u^k u_x)_x + bu$.

Преобразование $u(x,t) = e^{bt}v(x,\tau)$, $\tau = \dfrac{1}{bk}e^{bkt} + C$ приводит рассматриваемое уравнение к УрЧП вида 6.1.2.1:

$$v_\tau = a(v^k v_x)_x.$$

3. $u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1}$.

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $a = b = 1$,

$k > 0$:

$$u(x,t) = \begin{cases} \left[\dfrac{2(k+1)}{k(k+2)} \dfrac{\cos^2(\pi x/L)}{(t_0 - t)}\right]^{1/k} & \text{при} \quad |x| \leqslant \dfrac{L}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > \dfrac{L}{2}, \end{cases}$$

где $L = 2\pi(k+1)^{1/2}/k$. Это решение локализовано на интервале $|x| < L/2$ и описывает режим с обострением, который существует на конечном интервале времени $t \in [0,\, t_0)$.

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \left(\frac{Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} + D}{k\lambda t + C}\right)^{1/k},$$

$$B = \frac{\lambda^2(k+1)^2}{4b^2 A(k+2)^2}, \quad D = -\frac{\lambda(k+1)}{b(k+2)}, \quad \mu = k\sqrt{-\frac{b}{a(k+1)}},$$

где A, C, λ — произвольные постоянные, $ab(k+1) < 0$.

3°. Решения с функциональным разделением переменных (считается, что $ab(k+1) < 0$):

$$u(x,t) = \Big[F(t) + C_2|F(t)|^{\frac{k+2}{k+1}} e^{\lambda x}\Big]^{1/k}, \qquad F(t) = \frac{1}{C_1 - bkt}, \qquad \lambda = \pm k\sqrt{\frac{-b}{a(k+1)}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

4°. Существуют решения с функциональным разделением переменных следующих видов:

$$u(x,t) = \big[f(t) + g(t)(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})\big]^{1/k}, \quad \lambda = k\sqrt{\frac{-b}{a(k+1)}};$$

$$u(x,t) = \big[f(t) + g(t)\cos(\lambda x + C)\big]^{1/k}, \qquad \lambda = k\sqrt{\frac{b}{a(k+1)}},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

4. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + cu.}$

1°. Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = e^{ct}\big[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\big]^{\frac{1}{k+1}} \qquad \text{при} \quad b(k+1)/a = \beta^2 > 0,$$

$$u(x,t) = e^{ct}\big[A\exp(\beta x) + B\exp(-\beta x)\big]^{\frac{1}{k+1}} \quad \text{при} \quad b(k+1)/a = -\beta^2 < 0,$$

где A и B — произвольные постоянные.

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $k = -1$:

$$u = A\exp\Big(ct - \frac{b}{2a}x^2 + Bx\Big),$$

где A и B — произвольные постоянные.

3°. Преобразование

$$u = e^{ct} w(x,\tau), \quad \tau = \frac{1}{ck} e^{ckt} + \mathrm{const}$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.2.3:

$$w_\tau = a(w^k w_x)_x + b w^{k+1}.$$

5. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + b u^{1-k}}$**.**

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t) = \left[\frac{(x+A)^2}{F(t)} + B|F(t)|^{-\frac{k}{k+2}} - \frac{bk^2}{4a(k+1)} F(t)\right]^{1/k}, \quad F(t) = C - \frac{2a(k+2)}{k} t,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

6. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + b + c u^{-k}}$**.**

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \left[c(k+1)t - \frac{b(k+1)}{2a} x^2 + C_1 x + C_2\right]^{\frac{1}{k+1}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

7. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + b u^{k+1} + cu + d u^{1-k}}$**.**

Решения с функциональным разделением переменных:

$$\begin{aligned} u &= \bigl\{\varphi(t)\bigl[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\bigr] + \psi(t)\bigr\}^{1/k} \quad &&\text{при } ab(k+1) > 0,\\ u &= \bigl\{\varphi(t)\bigl[C_1 \operatorname{ch}(\beta x) + C_2 \operatorname{sh}(\beta x)\bigr] + \psi(t)\bigr\}^{1/k} \quad &&\text{при } ab(k+1) < 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные,

$$\beta = \sqrt{\frac{|b|k^2}{|a(k+1)|}},$$

а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ:

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= \frac{bk(k+2)}{k+1} \varphi\psi + ck\varphi,\\ \psi'_t &= k(b\psi^2 + c\psi + d) + \frac{bk}{k+1}(C_1^2 \pm C_2^2)\varphi^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь верхний знак во втором уравнении соответствует первому решению в (1), а нижний — второму решению в (1).

При $C_1 = C_2$ последнее уравнение в (2) (для нижнего знака) может быть удовлетворено, если положить $\psi = \mathrm{const}$, где ψ — корень квадратного уравнения $b\psi^2 + c\psi + d = 0$. В этом случае общее решение первого уравнения (2) имеет вид

$$\varphi = C_3 \exp\left[\left(\frac{bk(k+2)}{k+1}\psi + ck\right)t\right],$$

где C_3 — произвольная постоянная.

8. $\boldsymbol{u_t = a(u^{2k}u_x)_x + bu^{1-k}}$**.**

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$u(x,t) = \left[\pm\frac{x+C_1}{\sqrt{C_2-st}} - \frac{bk^2}{3a(k+1)}(C_2-st)\right]^{1/k}, \qquad s = \frac{2a(k+1)}{k},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

9. $\boldsymbol{u_t = a(u^{2k}u_x)_x + bu + cu^{1-k}}$**.**

Решения типа обобщенной бегущей волны при $b \neq 0$:

$$u(x,t) = \left[\varphi(t)(\pm x + C_1) + ck\varphi(t)\int\frac{dt}{\varphi(t)}\right]^{1/k}, \qquad \varphi(t) = \left[C_2e^{-2bkt} - \frac{a(k+1)}{bk^2}\right]^{-1/2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

10. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + bu^m}$**.**

Существуют решения следующих видов:

$$u(x,t) = U(z), \quad z = \pm x + \lambda t \qquad \text{(решение типа бегущей волны);}$$

$$u(x,t) = t^{\frac{1}{1-m}}V(\xi), \quad \xi = xt^{\frac{m-k-1}{2(1-m)}} \qquad \text{(автомодельное решение).}$$

11. $\boldsymbol{u_t = [(au^{2k} + bu^k)u_x]_x}$**.**

Частный случай УрЧП 6.1.2.24 при $f(u) = au^{2k} + bu^k$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$u(x,t) = \left(\pm\sqrt{2C_1kx + 2aC_1^2kt + C_2} - \frac{b}{a}\right)^{1/k},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. Автомодельные решения:

$$u(x,t) = \left[\pm\frac{x+C_1}{\sqrt{C_2-st}} - \frac{b}{a(k+1)}\right]^{1/k}, \qquad s = \frac{2a(k+1)}{k}.$$

12. $\boldsymbol{u_t = [(au^{2k} + bu^k)u_x]_x + cu^{1-k}}$**.**

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$u(x,t) = \left[\pm\frac{x+C_1}{\sqrt{C_2-st}} - \frac{ck^2}{3a(k+1)}(C_2-st) - \frac{b}{a(k+1)}\right]^{1/k}, \qquad s = \frac{2a(k+1)}{k},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

13. $\boldsymbol{u_t = [(au^{2k} + bu^k)u_x]_x + cu + du^{1-k}.}$

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$u(x,t) = \Big[\varphi(t)(\pm x + C_1) + \frac{b}{k}\varphi(t)\int \varphi(t)\,dt + dk\varphi(t)\int \frac{dt}{\varphi(t)}\Big]^{1/k},$$
$$\varphi(t) = \Big[C_2 e^{-2ckt} - \frac{a(k+1)}{ck^2}\Big]^{-1/2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

14. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x.}$

1°. Точные решения:

$$u(x,t) = \frac{2}{\lambda}\ln\Big(\frac{\pm x + A}{\sqrt{B - 2at}}\Big),$$
$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{A + Bx - Cx^2}{D + 2aCt},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Существуют решения следующих видов:

$$u(x,t) = F(z), \quad z = kx + \beta t \qquad \text{(решение типа бегущей волны);}$$
$$u(x,t) = G(\xi), \quad \xi = xt^{-1/2} \qquad \text{(автомодельное решение);}$$
$$u(x,t) = H(\eta) + 2kt, \quad \eta = xe^{-k\lambda t};$$
$$u(x,t) = U(\zeta) - \lambda^{-1}\ln t, \quad \zeta = x + k\ln t,$$

где k и β — произвольные постоянные.

15. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + b.}$

1°. Решения с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1x + C_2) + bt + C_3,$$
$$u(x,t) = \frac{2}{\lambda}\ln(x + C_1) - \ln\Big(C_2e^{-b\lambda t} - \frac{2a}{b\lambda}\Big).$$

2°. Преобразование

$$u(x,t) = w(x,\tau) + bt, \qquad \tau = \frac{1}{b\lambda}e^{b\lambda t} + C$$

приводит рассматриваемое УрЧП к уравнению вида 6.1.2.14:

$$w_\tau = a(e^{\lambda w}w_x)_x.$$

16. $\boldsymbol{u_t = (ae^{\lambda u}u_x)_x + be^{\beta u}.}$

1°. Решение типа бегущей волны:

$$u = u(z), \qquad z = k_2x + k_1t,$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным ОДУ:

$$ak_2^2(e^{\lambda u}u'_z)'_z - k_1 u'_z + be^{\beta u} = 0.$$

2°. Решение:

$$u = U(\xi) - \frac{1}{\beta}\ln t, \qquad \xi = xt^{\frac{\lambda-\beta}{2\beta}},$$

где функция $U(\xi)$ описывается ОДУ:

$$\frac{\lambda-\beta}{2\beta}\xi U'_\xi - \frac{1}{\beta} = (ae^{\lambda U}U'_\xi)'_\xi + be^{\beta U}.$$

17. $u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + be^{\lambda u} + c + de^{-\lambda u}$.

Решения с функциональным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\bigl\{e^{\sigma t}\bigl[C_1\cos(x\sqrt{\beta}\,) + C_2\sin(x\sqrt{\beta}\,)\bigr] + \gamma\bigr\} \quad \text{при } ab\lambda > 0,$$
$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\bigl\{e^{\sigma t}\bigl[C_1\operatorname{ch}(x\sqrt{-\beta}\,) + C_2\operatorname{sh}(x\sqrt{-\beta}\,)\bigr] + \gamma\bigr\} \quad \text{при } ab\lambda < 0.$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные,

$$\sigma = \lambda(b\gamma + c), \qquad \beta = b\lambda/a,$$

где $\gamma = \gamma_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $b\gamma^2 + c\gamma + d = 0$.

18. $u_t = a(ue^{\lambda u}u_x)_x$.

Частный случай УрЧП 6.1.2.24 при $f(u) = aue^{\lambda u}$.

Решение типа бегущей волны:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\Bigl(C_1x + \frac{a}{\lambda}C_1^2t + C_2\Bigr),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

19. $u_t = a(ue^{\lambda u}u_x)_x + b$.

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\Bigl(C_1e^{b\lambda t}x + \frac{aC_1^2}{b\lambda^2}e^{2b\lambda t} + C_2e^{b\lambda t}\Bigr),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

20. $u_t = a(ue^{\lambda u}u_x)_x + be^{-\lambda u}$.

Решение типа бегущей волны:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\Bigl[C_1x + \Bigl(\frac{aC_1^2}{\lambda} + b\lambda\Bigr)t + C_2\Bigr],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

21. $\boldsymbol{u_t = a(ue^{\lambda u}u_x)_x + b + ce^{-\lambda u}}$.

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\Bigl(C_1 e^{b\lambda t}x + \frac{aC_1^2}{b\lambda^2}e^{2b\lambda t} + C_2 e^{b\lambda t} - \frac{c}{b}\Bigr),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

22. $\boldsymbol{u_t = [(ae^{2\lambda u} + bue^{\lambda u})u_x]_x}$.

Частный случай УрЧП 6.1.2.24 при $f(u) = ae^{2\lambda u} + bue^{\lambda u}$.

Автомодельные решения:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\Bigl(\frac{\pm x + C_1}{\sqrt{C_2 - 2at}} - \frac{b}{a\lambda}\Bigr),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

23. $\boldsymbol{u_t = [(ae^{2\lambda u} + bue^{\lambda u})u_x]_x + c}$.

Решения типа обобщенной бегущей волны:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\Bigl[\pm\varphi(t)x + C_1\varphi(t) + \frac{b}{\lambda}\varphi(t)\int\varphi(t)\,dt\Bigr], \quad \varphi(t) = \Bigl(C_2 e^{-2c\lambda t} - \frac{a}{c\lambda}\Bigr)^{-1/2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

24. $\boldsymbol{u_t = [f(u)u_x]_x}$.

Это уравнение встречается в нелинейных задачах теплопроводности, диффузии и фильтрации.

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$k^2\int\frac{f(u)\,du}{\lambda u + C_1} = kx + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение.

2°. Автомодельное решение:

$$u = u(z), \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $u(z)$ описывается ОДУ: $[f(u)u'_z]'_z + \frac{1}{2}zu'_z = 0$.

25. $\boldsymbol{u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)}$.

Реакционно-диффузионное уравнение общего вида. Это УрЧП часто встречается в задачах массо- и теплообмена с объемной реакцией и математической биологии.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$u = u(z), \quad z = \pm x + \lambda t,$$

где функция $u(z)$ описывается автономным ОДУ: $[f(u)u'_z]'_z - \lambda u'_z + g(u) = 0$.

2°. Пусть функция $f = f(u)$ произвольна, а функция $g = g(u)$ определяется выражением

$$g(u) = \frac{A}{f(u)} + B,$$

где A и B — свободные параметры. В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое можно представить в неявном виде

$$\int f(u)\,du = At - \tfrac{1}{2}Bx^2 + C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. Пусть функция $f = f(u)$ произвольна, а функция $g = g(u)$ определяется выражением

$$g(u) = \frac{aF(u) + b}{f(u)} + c[aF(u) + b], \qquad F(u) = \int f(u)\,du,$$

где a, b, c — свободные параметры. Тогда существует решение с функциональным разделением переменных, которое можно представить в неявном виде

$$\int f(u)\,du = e^{at}\big[C_1\cos(x\sqrt{ac}\,) + C_2\sin(x\sqrt{ac}\,)\big] - \frac{b}{a} \qquad \text{при}\ \ ac > 0,$$
$$\int f(u)\,du = e^{at}\big[C_1\operatorname{ch}(x\sqrt{-ac}\,) + C_2\operatorname{sh}(x\sqrt{-ac}\,)\big] - \frac{b}{a} \quad \text{при}\ \ ac < 0.$$

4°. Пусть функция $g = g(u)$ произвольна, а функция $f = f(u)$ определяется выражением

$$f(u) = \frac{A_1A_2u + B}{g(u)} + \frac{A_2A_3}{g(u)}\int Z\,du, \tag{1}$$
$$Z = -A_2\int\frac{du}{g(u)}, \tag{2}$$

где A_1, A_2, A_3, B — свободные параметры. Тогда существуют решения типа обобщенной бегущей волны вида

$$u = u(Z), \quad Z = \frac{\pm x + C_2}{\sqrt{2A_3t + C_1}} - \frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{3A_3}(2A_3t + C_1),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $u(Z)$ определяется путем обращения зависимости (2).

5°. Пусть функция $g = g(u)$ произвольна, а функция $f = f(u)$ определяется выражением

$$f(u) = \frac{1}{g(u)}\Big(A_1u + A_3\int Z\,du\Big)\exp\Big[-A_4\int\frac{du}{g(u)}\Big], \tag{3}$$
$$Z = \frac{1}{A_4}\exp\Big[-A_4\int\frac{du}{g(u)}\Big] - \frac{A_2}{A_4}, \tag{4}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — свободные параметры ($A_4 \neq 0$). Тогда существуют решения типа обобщенной бегущей волны вида

$$u = u(Z), \quad Z = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функция $u(Z)$ определяется путем обращения зависимости (4), а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются формулами

$$\varphi(t) = \pm\Bigl(C_1 e^{2A_4 t} - \frac{A_3}{A_4}\Bigr)^{-1/2}, \qquad \psi(t) = -\varphi(t)\Bigl[A_1\int \varphi(t)\,dt + A_2\int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\Bigr],$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

6°. Пусть функции $f(u)$ и $g(u)$ заданы формулами

$$f(u) = u\varphi'_u(u), \qquad g(u) = a\Bigl[u + 2\frac{\varphi(u)}{\varphi'_u(u)}\Bigr],$$

где $\varphi(u)$ — произвольная функция, a — свободный параметр. Тогда существуют решения с функциональным разделением переменных, которые можно представить в неявном виде

$$\varphi(u) = C_1 e^{2at} - \tfrac{1}{2}a(x + C_2)^2.$$

7°. Пусть функции $f(u)$ и $g(u)$ заданы формулами

$$f(u) = A\frac{V(z)}{V'_z(z)}, \qquad g(u) = B\bigl[2z^{-1/2}V'_z(z) + z^{-3/2}V(z)\bigr],$$

где $V(z)$ — произвольная функция, A и B — свободные параметры $(AB \neq 0)$, а функция $z = z(u)$ определяется неявно

$$u = \int z^{-1/2}V'_z(z)\,dz + C_1; \tag{5}$$

C_1 — произвольная постоянная. Тогда существует решение с функциональным разделением переменных вида (5), где

$$z = -\frac{(x + C_3)^2}{4At + C_2} + 2Bt + \frac{BC_2}{2A},$$

C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

6.1.3. Другие нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа

1. $\boldsymbol{u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u + cu\ln u.}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \exp\bigl(Ae^{ct}\bigr)\varphi(x),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка $[a(x)\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi + c\varphi\ln\varphi = 0$.

2. $\boldsymbol{u_t = [a(x)u_x]_x + \dfrac{x^2}{a(x)}f(u).}$

Решение:

$$u = U(z), \qquad z = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)},$$

где функция $U = U(z)$ описывается автономным ОДУ второго порядка вида 2.3.1.1: $U''_{zz} + f(U) = 0$.

3. $u_t = x^{-n}[x^n f(u) u_x]_x + g(u)$.

Это нелинейное уравнение массо- и теплопереноса в радиально-симметричном случае (значения $n = 1$ и $n = 2$ соответствуют плоской и пространственной задачам). При $n = 0$ см. уравнение 6.1.2.25.

1°. Пусть функция $f = f(u)$ произвольна, а функция $g = g(u)$ определяется выражением

$$g(u) = \Bigl(\frac{a}{f(u)} + b\Bigr)\Bigl(\int f(u)\,du + c\Bigr),$$

где a, b, c — свободные параметры. В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое можно представить в неявном виде

$$\int f(u)\,du + c = e^{at} z(x),$$

где функция $z = z(x)$ описывается линейным ОДУ:

$$z''_{xx} + \frac{n}{x} z'_x + bz = 0.$$

Общее решение этого уравнения может быть выражено через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя.

2°. Пусть функции $f(u)$ и $g(u)$ заданы формулами

$$f(u) = u\varphi'_u(u), \qquad g(u) = a(n+1)u + 2a\frac{\varphi(u)}{\varphi'_u(u)},$$

где $\varphi(u)$ — произвольная функция (штрих означает производную по u). В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое можно представить в неявном виде

$$\varphi(u) = Ce^{2at} - \tfrac{1}{2}ax^2,$$

где C — произвольная постоянная.

3°. Пусть функции $f(u)$ и $g(u)$ заданы формулами

$$f(u) = a\varphi^{-\frac{n+1}{2}}\varphi' \int \varphi^{\frac{n+1}{2}}\,du, \qquad g(u) = b\frac{\varphi}{\varphi'},$$

где $\varphi = \varphi(u)$ — произвольная функция (штрих означает производную по u). В этом случае существует решение с функциональным разделением переменных, которое можно представить в неявном виде

$$\varphi(u) = \frac{bx^2}{Ce^{-bt} - 4a}.$$

4°. Пусть функции $f(u)$ и $g(u)$ заданы формулами

$$f(u) = A\frac{V(z)}{V'_z(z)}, \qquad g(u) = B\Bigl[2z^{-\frac{n+1}{2}}V'_z(z) + (n+1)z^{-\frac{n+3}{2}}V(z)\Bigr],$$

где $V(z)$ — произвольная функция, A и B — произвольные постоянные ($AB \neq 0$), а функция $z = z(u)$ задается неявно с помощью выражения

$$u = \int z^{-\frac{n+1}{2}} V'_z(z)\,dz + C_1; \qquad (*)$$

C_1 — произвольная постоянная. Тогда существует решение с функциональным разделением переменных вида $(*)$, где

$$z = -\frac{x^2}{4At + C_2} + 2Bt + \frac{BC_2}{2A},$$

C_2 — произвольная постоянная.

5°. Автомодельное решение при $g(u) \equiv 0$:

$$u = u(z), \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $u(z)$ описывается ОДУ: $z^{-n}[z^n f(u)u'_z]'_z + \frac{1}{2}zu'_z = 0$.

4. $\boldsymbol{u_t = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^{k+1}.}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (t + C)^{-1/k}\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ: $[a(x)\varphi^k\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi^{k+1} + (1/k)\varphi = 0$.

5. $\boldsymbol{u_t = [x^k f(u)u_x]_x + x^{k-2}g(u), \quad k \neq 2.}$

Автомодельное решение:

$$u = U(z), \quad z = x(t + C)^{\frac{1}{k-2}},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка

$$[z^k f(U)U'_z]'_z + \frac{1}{2-k}zU'_z + z^{k-2}g(U) = 0.$$

6. $\boldsymbol{u_t = [x^2 f(u)u_x]_x + g(u).}$

Решение:

$$u = U(z), \quad z = \ln x + \lambda t$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ: $[f(U)U'_z]'_z + [f(U) - \lambda]U'_z + g(U) = 0$.

7. $\boldsymbol{u_t = [a(x)e^{\lambda u}u_x]_x + b(x)e^{\lambda u}.}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\varphi(x) - \frac{1}{\lambda}\ln(t + C),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается линейным ОДУ: $[a(x)\varphi'_x]'_x + \lambda b(x)\varphi + 1 = 0$.

8. $\boldsymbol{u_t = [e^{\lambda x} f(u) u_x]_x + e^{\lambda x} g(u), \quad \lambda \neq 0.}$

Решение:

$$u = U(z), \qquad z = \lambda x + \ln t$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ: $\lambda^2 [e^z f(U) U'_z]'_z - U'_z + e^z g(U) = 0$.

9. $\boldsymbol{u_t = [a(x) f(u) u_x]_x + b(x) + \dfrac{k}{f(u)}.}$

Решение в неявном виде:

$$\int f(u)\,du = kt - \int \frac{1}{a(x)} \Bigl(\int b(x)\,dx\Bigr) dx + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

10. $\boldsymbol{u_t = [a(x) f(u) u_x]_x + k \dfrac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}} u.}$

Решение в неявном виде:

$$\int \frac{f(u)}{u}\,du = 4k^2 t - 2k \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

6.1.4. Уравнение Бюргерса и другие уравнения конвективно-диффузионного типа

1. $\boldsymbol{u_t = u_{xx} + u u_x.}$

Уравнение Бюргерса, используется для описания волновых процессов в акустике и гидродинамике.

1°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \lambda + \frac{2}{x + \lambda t + A},\\
u(x,t) &= \frac{4x + 2A}{x^2 + Ax + 2t + B},\\
u(x,t) &= \frac{6(x^2 + 2t + A)}{x^3 + 6xt + 3Ax + B},\\
u(x,t) &= \frac{2\lambda}{1 + A\exp(-\lambda^2 t - \lambda x)},\\
u(x,t) &= -\lambda + A\frac{\exp\bigl[A(x - \lambda t)\bigr] - B}{\exp\bigl[A(x - \lambda t)\bigr] + B},\\
u(x,t) &= \frac{2\lambda\cos(\lambda x + A)}{B\exp(\lambda^2 t) + \sin(\lambda x + A)},
\end{aligned}$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

2°. Другие решения можно получить, используя следующую формулу (*преобразование Хопфа — Коула*):

$$u(x,t) = \frac{2}{Z} Z_x,$$

где $Z = Z(x,t)$ — любое решение линейного уравнения теплопроводности $Z_t = Z_{xx}$ (см. разд. 5.1.1).

3°. Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса с начальным условием

$$u = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

можно представить в виде

$$u(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial x} \ln Z(x,t), \quad Z(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4t} - \frac{1}{2}\int_0^{\xi} f(\zeta)\,d\zeta\Big]\,d\xi.$$

2. $u_t = ax^{-n}(x^n u^k u_x)_x$.

Это уравнение встречается в нелинейных задачах тепло- и массообмена и других приложениях. При $n = 0$ см. уравнение 6.1.2.1. Значению $n = 1$ соответствуют двумерные задачи с осевой симметрией, а $n = 2$ — трехмерные задачи с радиальной симметрией. При $n = 5$ данное уравнение встречается в теории статической турбулентности.

1°. Точные решения:

$$u(x,t) = \Big(\frac{kx^2}{A - st}\Big)^{\frac{1}{k}}, \quad s = 2a(nk + k + 2),$$

$$u(x,t) = \Big(A|st + B|^{-\frac{k(n+1)}{nk+k+2}} - \frac{kx^2}{st + B}\Big)^{\frac{1}{k}}, \quad s = 2a(nk + k + 2),$$

$$u(x,t) = \Big[A\exp\Big(-\frac{4a\lambda}{k}t\Big) + \lambda x^2\Big]^{\frac{1}{k}}, \quad n = -\frac{k+2}{k},$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

2°. Точные решения при $k = -\dfrac{2}{n+1}$:

$$u(x,t) = e^{-a\lambda(n+1)t}\Big[\frac{\lambda}{n+1}\big(C + x^2 e^{-2a\lambda t}\big)\Big]^{-\frac{n+1}{2}},$$

$$u(x,t) = t^{\frac{1+n}{1-n}}\Big(\frac{\xi^2}{n-1}\ln\frac{\xi}{C}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \xi = xt^{\frac{1+n}{2(1-n)}},$$

где C и λ — произвольные постоянные.

3. $u_t = [a(x)u_x]_x - xf(u)u_x$.

Решение в неявном виде:

$$\int\Big(\int f(u)\,du + C_1\Big)^{-1} du = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

4. $\boldsymbol{u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \frac{1}{2}a'_x(x)f(u)u_x}$**.**

Решение в неявном виде:

$$\int \frac{f(u)}{u}\,du = C_1^2 t + C_1 \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

5. $\boldsymbol{u_t = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^k u_x}$**.**

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (t + C)^{-1/k}\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ: $[a(x)\varphi^k \varphi'_x]'_x + b(x)\varphi^k\varphi'_x + (1/k)\varphi = 0$.

6. $\boldsymbol{u_t = [x^k f(u)u_x]_x + x^{k-1}g(u)u_x, \quad k \neq 2}$**.**

Автомодельное решение:

$$u = U(z), \qquad z = x(t + C)^{\frac{1}{k-2}},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ:

$$[z^k f(U)U'_z]'_z + \frac{1}{2-k} zU'_z + z^{k-1}g(U)U'_z = 0.$$

7. $\boldsymbol{u_t = [x^2 f(u)u_x]_x + xg(u)u_x}$**.**

Решение:

$$u = U(z), \qquad z = \ln x + \lambda t$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ: $[f(U)U'_z]'_z + [f(U) + g(U) - \lambda]U'_z = 0$. Это уравнение подстановкой $U'_z = \theta(U)$ сводится к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными.

8. $\boldsymbol{u_t = [a(x)e^{\lambda u}u_x]_x + b(x)e^{\lambda u}u_x}$**.**

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\varphi(x) - \frac{1}{\lambda}\ln(t + C),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ: $[a(x)\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi'_x + 1 = 0$. Это уравнение подстановкой $\varphi'_x = \theta(x)$ сводится к линейному ОДУ первого порядка.

9. $\boldsymbol{u_t = [e^{\lambda x} f(u)u_x]_x + e^{\lambda x}g(u)u_x, \quad \lambda \neq 0}$**.**

Решение:

$$u = U(z), \qquad z = \lambda x + \ln t$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ: $\lambda^2[e^z f(U)U'_z]'_z + [\lambda e^z g(U) - 1]U'_z = 0$.

6.1.5. Нелинейные уравнения Шредингера

► *В уравнениях 6.1.5.1–6.1.5.3 искомая переменная u является комплексной функцией действительных переменных x и t;* $i^2 = -1$.

1. $iu_t + u_{xx} + a|u|^2 u = 0$.

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью. Здесь a — действительное число. Данное уравнение встречается в различных областях физики, включая нелинейную оптику, сверхпроводимость и физику плазмы.

1°. Точные решения:

$$u(x,t) = C_1 \exp\bigl\{i\,[C_2 x + (aC_1^2 - C_2^2)t + C_3]\bigr\},$$

$$u(x,t) = \pm C_1 \sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{\exp[i(C_1^2 t + C_2)]}{\operatorname{ch}(C_1 x + C_3)},$$

$$u(x,t) = \pm A \sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{\exp[iBx + i(A^2 - B^2)t + iC_1]}{\operatorname{ch}(Ax - 2ABt + C_2)},$$

$$u(x,t) = \frac{C_1}{\sqrt{t}} \exp\Bigl[i\frac{(x + C_2)^2}{4t} + i(aC_1^2 \ln t + C_3)\Bigr],$$

где A, B, C_1, C_2, C_3 — произвольные вещественные константы. Второе и третье решения справедливы при $a > 0$.

2°. N-солитонные решения при $a > 0$:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{\det \mathbf{R}(x,t)}{\det \mathbf{M}(x,t)}.$$

Здесь $\mathbf{M}(x,t)$ — матрица размерности $N \times N$ с элементами

$$M_{n,m}(x,t) = \frac{1 + \overline{g}_n(x,t) g_n(x,t)}{\overline{\lambda}_n - \lambda_m}, \quad g_n(x,t) = \gamma_n e^{i(\lambda_n x - \lambda_n^2 t)}, \quad n,\, m = 1,\, \ldots,\, N,$$

где λ_n и γ_n — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие ограничениям $\operatorname{Im}\lambda_n > 0$ ($\lambda_n \neq \lambda_m$, если $n \neq m$) и $\gamma_n \neq 0$; черта над символом обозначает комплексное сопряжение. Квадратная матрица $\mathbf{R}(x,t)$ имеет размерность $N + 1$; она получается путем добавления к $\mathbf{M}(x,t)$ столбца справа и строки внизу. Элементы матрицы $\mathbf{R}$ определяются так:

$R_{n,m}(x,t) = M_{n,m}(x,t)$	при	$n, m = 1,\, \ldots,\, N$	(основная часть матрицы),
$R_{n,N+1}(x,t) = g_n(x,t)$	при	$n = 1,\, \ldots,\, N$	(крайний правый столбец),
$R_{N+1,n}(x,t) = 1$	при	$n = 1,\, \ldots,\, N$	(нижняя строка),
$R_{N+1,N+1}(x,t) = 0$			(нижний правый элемент).

Приведенное выше решение можно представить при $t \to \pm\infty$ как сумму N односолитонных решений.

3°. О других точных решениях см. уравнение 6.1.5.2 при $n=1$ и уравнение 6.1.5.3 при $f(u)=au^2$.

2. $\boldsymbol{iu_t+u_{xx}+a|u|^{2k}u=0.}$

Уравнение Шредингера со степенной нелинейностью. Здесь a и k — действительные числа.

1°. Точные решения:

$$u(x,t)=C_1\exp\bigl\{i\,[C_2x+(a|C_1|^{2k}-C_2^2)t+C_3]\bigr\},$$
$$u(x,t)=\pm\Bigl[\frac{(k+1)C_1^2}{a\operatorname{ch}^2(C_1kx+C_2)}\Bigr]^{\frac{1}{2k}}\exp[i(C_1^2t+C_3)],$$
$$u(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl[i\frac{(x+C_2)^2}{4t}+i\Bigl(\frac{aC_1^{2k}}{1-k}t^{1-k}+C_3\Bigr)\Bigr],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные вещественные константы.

2°. Имеется автомодельное решение вида $u=t^{-1/(2k)}Z(\xi)$, где $\xi=xt^{-1/2}$.

3°. О других точных решения см. уравнение 6.1.5.3 при $f(u)=au^{2k}$.

3. $\boldsymbol{iu_t+u_{xx}+f(|u|)u=0.}$

Уравнение Шредингера общего вида. Здесь $f(w)$ — действительная функция действительной переменной.

1°. Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения Шредингера. Тогда функция

$$u_1=e^{-i(\lambda x+\lambda^2t+C_1)}u(x+2\lambda t+C_2,t+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные вещественные константы, также является решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$u(x,t)=C_1\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\qquad \varphi(x,t)=C_2x-C_2^2t+f(|C_1|)t+C_3.$$

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t)=Z(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где функция $Z=Z(x)$ определяется неявно с помощью соотношения

$$\int\frac{dZ}{\sqrt{C_1Z^2-2F(Z)+C_3}}=C_4\pm x,\qquad F(Z)=\int Zf(|Z|)\,dZ.$$

Здесь $C_1,\,\ldots,\,C_4$ — произвольные вещественные константы.

4°. Решение:

$$u(x,t)=U(\xi)e^{i(Ax+Bt+C)},\qquad \xi=x-2At, \tag{1}$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается автономным ОДУ:

$$U''_{\xi\xi} + f(|U|)U - (A^2 + B)U = 0.$$

Интегрируя, получим общее решение в неявном виде:

$$\int \frac{dU}{\sqrt{(A^2+B)U^2 - 2F(U) + C_1}} = C_2 \pm \xi, \qquad F(U) = \int U f(|U|)\, dU. \qquad (2)$$

Соотношения (1) и (2) содержат произвольные действительные константы A, B, C, C_1, C_2.

5°. Решение (A, B, C — произвольные постоянные):

$$u(x,t) = \psi(z) \exp\bigl[i(Axt - \tfrac{2}{3}A^2t^3 + Bt + C)\bigr], \qquad z = x - At^2,$$

где функция $\psi = \psi(z)$ описывается ОДУ: $\psi''_{zz} + f(|\psi|)\psi - (Az + B)\psi = 0$.

6°. Точные решения:

$$u(x,t) = \pm\frac{1}{\sqrt{C_1 t}} \exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \qquad \varphi(x,t) = \frac{(x+C_2)^2}{4t} + \int f\bigl(|C_1 t|^{-1/2}\bigr)\, dt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные вещественные константы.

7°. Решение:

$$u(x,t) = \theta(x) \exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \qquad \varphi(x,t) = C_1 t + C_2 \int \frac{dx}{\theta^2(x)} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные вещественные константы, а функция $\theta = \theta(x)$ описывается автономным ОДУ: $\theta''_{xx} - C_1\theta - C_2^2\theta^{-3} + f(|\theta|)\theta = 0$.

8°. Существует точное решение вида

$$u(x,t) = \varphi(z) \exp\bigl[iAt + i\psi(z)\bigr], \qquad z = \kappa x + \lambda t,$$

где A, κ, λ — произвольные вещественные константы, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются системой ОДУ (которая здесь не приводится).

6.2. Уравнения гиперболического типа

6.2.1. Нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона вида $u_{tt} = au_{xx} + f(u)$

1. $u_{tt} = u_{xx} + au^k$.

1°. Точные решения:

$$u(x,t) = \left[\frac{a(1-k)^2}{2(1+k)(C_2^2 - C_1^2)}(C_1x + C_2t + C_3)^2\right]^{\frac{1}{1-k}};$$

$$u(x,t) = \bigl\{\tfrac{1}{4}a(1-k)^2[(t+C_1)^2 - (x+C_2)^2]\bigr\}^{\frac{1}{1-k}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Решения из п. 1° являются частными случаями более общих решений вида

$$u(x,t) = F(z), \qquad z = C_1 x + C_2 t;$$
$$u(x,t) = G(\rho), \qquad \rho = (t + C_1)^2 - (x + C_2)^2.$$

3°. Автомодельное решение:

$$u(x,t) = (t + C_1)^{\frac{2}{1-k}}\theta(\zeta), \qquad \zeta = \frac{x + C_2}{t + C_1},$$

где функция $\theta(\zeta)$ описывается ОДУ:

$$(1 - \zeta^2)\theta''_{\zeta\zeta} + \frac{2(1+k)}{1-k}\zeta\theta'_\zeta - \frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\theta + a\theta^k = 0.$$

2. $\boldsymbol{u_{tt} = u_{xx} + au + bu^k.}$

1°. Решения типа бегущей волны при $a > 0$:

$$u = \left[\frac{2b\operatorname{sh}^2 z}{a(k+1)}\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad z = \frac{\sqrt{a}}{2}(1-k)(x\operatorname{sh}C_1 \pm t\operatorname{ch}C_1) + C_2 \quad \text{при} \ \ b(k+1) > 0,$$
$$u = \left[-\frac{2b\operatorname{ch}^2 z}{a(k+1)}\right]^{\frac{1}{1-k}}, \quad z = \frac{\sqrt{a}}{2}(1-k)(x\operatorname{sh}C_1 \pm t\operatorname{ch}C_1) + C_2 \quad \text{при} \ \ b(k+1) < 0,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решения типа бегущей волны при $a < 0$ и $b(k+1) > 0$:

$$u = \left[-\frac{2b\cos^2 z}{a(k+1)}\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad z = \frac{\sqrt{|a|}}{2}(1-k)(x\operatorname{sh}C_1 \pm t\operatorname{ch}C_1) + C_2.$$

3°. О других точных решениях рассматриваемого УрЧП см. уравнение 6.2.1.8 при $f(u) = au + bu^k$.

3. $\boldsymbol{u_{tt} = u_{xx} + au^k + bu^{2k-1}.}$

Точные решения:

$$u(x,t) = \left[\frac{a(1-k)^2}{2(k+1)}(x\operatorname{sh}C_1 \pm t\operatorname{ch}C_1 + C_2)^2 - \frac{b(k+1)}{2ak}\right]^{\frac{1}{1-k}},$$
$$u(x,t) = \left\{\frac{1}{4}a(1-k)^2\big[(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2\big] - \frac{b}{ak}\right\}^{\frac{1}{1-k}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

4. $\boldsymbol{u_{tt} = a^2 u_{xx} + be^{\beta u}.}$

1°. Решения типа бегущей волны:

$$u(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(B^2 - a^2A^2)}{b\beta(Ax + Bt + C)^2}\right],$$
$$u(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(a^2A^2 - B^2)}{b\beta\operatorname{ch}^2(Ax + Bt + C)}\right],$$
$$u(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(B^2 - a^2A^2)}{b\beta\operatorname{sh}^2(Ax + Bt + C)}\right],$$
$$u(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(B^2 - a^2A^2)}{b\beta\cos^2(Ax + Bt + C)}\right],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Решения с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t) = \frac{1}{\beta}\ln\Bigl(\frac{8a^2C}{b\beta}\Bigr) - \frac{2}{\beta}\ln\bigl|(x+A)^2 - a^2(t+B)^2 + C\bigr|,$$
$$u(x,t) = -\frac{2}{\beta}\ln\Bigl[C_1e^{\lambda x} \pm \frac{\sqrt{2b\beta}}{2a\lambda}\,\mathrm{sh}(a\lambda t + C_2)\Bigr],$$
$$u(x,t) = -\frac{2}{\beta}\ln\Bigl[C_1e^{\lambda x} \pm \frac{\sqrt{-2b\beta}}{2a\lambda}\,\mathrm{ch}(a\lambda t + C_2)\Bigr],$$
$$u(x,t) = -\frac{2}{\beta}\ln\Bigl[C_1e^{a\lambda t} \pm \frac{\sqrt{-2b\beta}}{2a\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x + C_2)\Bigr],$$
$$u(x,t) = -\frac{2}{\beta}\ln\Bigl[C_1e^{a\lambda t} \pm \frac{\sqrt{2b\beta}}{2a\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda x + C_2)\Bigr],$$

где A, B, C, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Общее решение:

$$u(x,t) = \frac{1}{\beta}\bigl[f(z) + g(y)\bigr] - \frac{2}{\beta}\ln\Bigl|k\int\exp\bigl[f(z)\bigr]\,dz - \frac{b\beta}{8a^2k}\int\exp\bigl[g(y)\bigr]\,dy\Bigr|,$$
$$z = x - at, \qquad y = x + at,$$

где $f = f(z)$ и $g = g(y)$ — произвольные функции, k — произвольная постоянная.

5. $u_{tt} = u_{xx} + ae^{\beta u} + be^{2\beta u}$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$u(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln\Bigl[\frac{a\beta}{C_1^2 - C_2^2} + C_3E + \frac{a^2\beta^2 + b\beta(C_1^2 - C_2^2)}{4C_3(C_1^2 - C_2^2)^2E}\Bigr], \qquad E = \exp(C_1x + C_2t);$$
$$u(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln\Bigl[\frac{a\beta}{C_2^2 - C_1^2} + \frac{\sqrt{a^2\beta^2 + b\beta(C_2^2 - C_1^2)}}{C_2^2 - C_1^2}\,\sin(C_1x + C_2t + C_3)\Bigr],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. О других точных решениях рассматриваемого УрЧП см. уравнение 6.2.1.8 при $f(u) = ae^{\beta u} + be^{2\beta u}$.

6. $u_{tt} = au_{xx} + b\,\mathrm{sh}(\lambda u)$.

Уравнение sh-Гордона.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$u(x,t) = \pm\frac{2}{\lambda}\ln\Bigl[\mathrm{tg}\,\frac{b\lambda(kx + \mu t + \theta_0)}{2\sqrt{b\lambda(\mu^2 - ak^2)}}\Bigr],$$
$$u(x,t) = \pm\frac{4}{\lambda}\,\mathrm{Arth}\Bigl[\exp\frac{b\lambda(kx + \mu t + \theta_0)}{\sqrt{b\lambda(\mu^2 - ak^2)}}\Bigr],$$

где k, μ, θ_0 — произвольные постоянные. В обеих формулах считается, что $b\lambda(\mu^2 - ak^2) > 0$.

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t)=\frac{4}{\lambda}\operatorname{Arth}\bigl[f(t)g(x)\bigr],\qquad \operatorname{Arth}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},$$

где функции $f=f(t)$ и $g=g(x)$ описываются автономными ОДУ первого порядка

$$(f_t')^2=Af^4+Bf^2+C,\qquad a(g_x')^2=Cg^4+(B-b\lambda)g^2+A,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. О других точных решениях рассматриваемого УрЧП см. уравнение 6.2.1.8 with $f(u)=b\operatorname{sh}(\lambda u)$.

7. $u_{tt}=au_{xx}+b\sin(\lambda u)$.

Уравнение синус-Гордона. Встречается в дифференциальной геометрии и различных областях физики.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$u(x,t)=\frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\Bigl\{\exp\Bigl[\pm\frac{b\lambda(kx+\mu t+\theta_0)}{\sqrt{b\lambda(\mu^2-ak^2)}}\Bigr]\Bigr\}\qquad\text{при}\quad b\lambda(\mu^2-ak^2)>0,$$

$$u(x,t)=-\frac{\pi}{\lambda}+\frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\Bigl\{\exp\Bigl[\pm\frac{b\lambda(kx+\mu t+\theta_0)}{\sqrt{b\lambda(ak^2-\mu^2)}}\Bigr]\Bigr\}\quad\text{при}\quad b\lambda(\mu^2-ak^2)<0,$$

где k, μ, θ_0 — произвольные постоянные. Первое решение соответствует односолитонному решению.

2°. Решения с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t)=\frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\Bigl[\frac{\mu\operatorname{sh}(kx+A)}{k\sqrt{a}\operatorname{ch}(\mu t+B)}\Bigr],\quad \mu^2=ak^2+b\lambda>0;$$

$$u(x,t)=\frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\Bigl[\frac{\mu\sin(kx+A)}{k\sqrt{a}\operatorname{ch}(\mu t+B)}\Bigr],\quad \mu^2=b\lambda-ak^2>0;$$

$$u(x,t)=\frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\Bigl[\frac{\gamma}{\mu}\,\frac{e^{\mu(t+A)}+ak^2e^{-\mu(t+A)}}{e^{k\gamma(x+B)}+e^{-k\gamma(x+B)}}\Bigr],\quad \mu^2=ak^2\gamma^2+b\lambda>0,$$

где A, B, k, γ — произвольные постоянные.

3°. Двухсолитонное периодическое решение имеет вид (при $a=1$, $b=-1$, $\lambda=1$):

$$w=4\operatorname{arctg}\Bigl[\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega\operatorname{ch}\bigl(\sqrt{1-\omega^2}\,x\sin\omega t\bigr)}\Bigr],$$

где ω — произвольная постоянная ($0<\omega<1$).

4°. *N-солитонное решение* описывается формулами (при $a=1$, $b=-1$, $\lambda=1$):

$$u(x,t)=\arccos\Bigl[1-2\Bigl(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Bigr)(\ln F)\Bigr],\qquad F=\det\bigl[M_{ij}\bigr],$$

$$M_{ij}=\frac{2}{a_i+a_j}\operatorname{ch}\Bigl(\frac{z_i+z_j}{2}\Bigr),\quad z_i=\pm\frac{x-\mu_i t+C_i}{\sqrt{1-\mu_i^2}},\quad a_i=\pm\sqrt{\frac{1-\mu_i}{1+\mu_i}},$$

где μ_i и C_i — произвольные постоянные.

5°. О других точных решений исходного УрЧП см. уравнение 6.2.1.8 при $f(u) = b\sin(\lambda u)$.

6°. Уравнение синуса-Гордона интегрируется методом обратной задачи рассеяния, см. книгу Захарова и др. (1980).

8. $\boldsymbol{u_{tt} = u_{xx} + f(u)}$.

Нелинейное уравнение Клейна—Гордона общего вида.

1°. Пусть $u = u(x, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$u_1 = u(\pm x + C_1, \pm t + C_2),$$
$$u_2 = u(x\operatorname{ch}\beta + t\operatorname{sh}\beta,\, t\operatorname{ch}\beta + x\operatorname{sh}\beta),$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, также являются решениями этого уравнения (знаки плюс или минус в u_1 выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int\left[C_1 + \frac{2}{\lambda^2 - \kappa^2}\int f(u)\,du\right]^{-1/2} du = \kappa x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, κ, λ — произвольные постоянные.

3°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = u(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{4}(t + C_1)^2 - \tfrac{1}{4}(x + C_2)^2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi)$ описывается ОДУ: $\xi u''_{\xi\xi} + u'_\xi - f(u) = 0$.

6.2.2. Другие нелинейные уравнения волнового типа

1. $\boldsymbol{u_{tt} = a(uu_x)_x}$.

1°. Точные решения:

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2}aA^2t^2 + Bt + Ax + C,$$
$$u(x, t) = \tfrac{1}{12}aA^{-2}(At + B)^4 + Ct + D + x(At + B),$$
$$u(x, t) = \frac{1}{a}\left(\frac{x + A}{t + B}\right)^2,$$
$$u(x, t) = (At + B)\sqrt{Cx + D},$$
$$u(x, t) = \pm\sqrt{A(x + a\lambda t) + B} + a\lambda^2,$$

где A, B, C, D, λ — произвольные постоянные.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по x:

$$u(x, t) = \frac{1}{at^2}x^2 + \left(\frac{C_1}{t^2} + C_2t^3\right)x + \frac{aC_1^2}{4t^2} + \frac{C_3}{t} + C_4t^2 + \frac{1}{2}aC_1C_2t^3 + \frac{1}{54}aC_2^2t^8,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

3°. Решение:

$$u = U(z) + 4aC_1^2t^2 + 4aC_1C_2t, \qquad z = x + aC_1t^2 + aC_2t,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается ОДУ первого порядка $(U - aC_2^2)U'_z - 2C_1U = 8C_1^2z + C_3$.

4°. См. также уравнение 6.2.2.11 при $f(u) = au$.

2. $\boldsymbol{u_{tt} = a(u^k u_x)_x + bu^m}$**.**

Существуют решения следующих видов:

$$u(x,t) = U(z), \quad z = C_1x + C_2t \qquad \text{(решение типа бегущей волны);}$$
$$u(x,t) = t^{\frac{2}{1-m}}V(\xi), \quad \xi = xt^{\frac{m-k-1}{1-m}} \qquad \text{(автомодельное решение),}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. $\boldsymbol{u_{tt} = a(e^{\lambda u}u_x)_x, \qquad a > 0}$**.**

1°. Решения с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln|Ax + B| + Ct + D,$$
$$u(x,t) = \frac{2}{\lambda}\ln|Ax + B| - \frac{2}{\lambda}\ln|\pm A\sqrt{a}\,t + C|,$$
$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(aA^2x^2 + Bx + C) - \frac{2}{\lambda}\ln(aAt + D),$$
$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{p^2}{aA\cos^2(pt+q)}\right],$$
$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{p^2}{aA\,\mathrm{sh}^2(pt+q)}\right],$$
$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-p^2}{aA\,\mathrm{ch}^2(pt+q)}\right],$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные.

2°. Существуют решения следующих видов:

$$u(x,t) = F(z), \quad z = kx + \beta t \qquad \text{(решение типа бегущей волны);}$$
$$u(x,t) = G(\xi), \quad \xi = x/t \qquad \text{(автомодельное решение);}$$
$$u(x,t) = H(\eta) + 2(k-1)\lambda^{-1}\ln t, \quad \eta = xt^{-k};$$
$$u(x,t) = U(\zeta) - 2\lambda^{-1}\ln|t|, \quad \zeta = x + k\ln|t|;$$
$$u(x,t) = V(\zeta) - 2\lambda^{-1}t, \quad \eta = xe^t,$$

где k и β — произвольные постоянные.

4. $\boldsymbol{u_{tt} = (ae^{\lambda u}u_x)_x + be^{\beta u}}$**.**

1°. Решение типа бегущей волны:

$$u = u(z), \qquad z = k_2x + k_1t,$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным ОДУ второго порядка

$$k_1^2 u''_{zz} - ak_2^2 (e^{\lambda u} u'_z)'_z = be^{\beta u}.$$

Подстановка $\Theta(u) = (u'_z)^2$ приводит к линейному ОДУ первого порядка

$$(k_1^2 - ak_2^2 e^{\lambda u})\Theta'_u - 2ak_2^2 \lambda e^{\lambda u}\Theta = 2be^{\beta u}.$$

2°. Решение:

$$u = U(\xi) - \frac{2}{\beta}\ln t, \qquad \xi = xt^{\frac{\lambda-\beta}{\beta}},$$

где функция $U(\xi)$ описывается ОДУ второго порядка

$$\frac{2}{\beta} + \frac{(\lambda-\beta)(\lambda-2\beta)}{\beta^2}\xi U'_\xi + \frac{(\lambda-\beta)^2}{\beta^2}\xi^2 U''_{\xi\xi} = (ae^{\lambda U} U'_\xi)'_\xi + be^{\beta U}.$$

5. $u_{tt} = (ax^k u_x)_x + f(u)$.

Это уравнение описывает распространение нелинейных волн в неоднородной среде.

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $k \neq 2$:

$$u = U(\zeta), \qquad \zeta^2 = s\left[\frac{1}{4}(t+C)^2 - \frac{x^{2-k}}{a(2-k)^2}\right],$$

где постоянная s и выражение в квадратных скобках должны иметь одинаковые знаки, C — произвольная постоянная, а функция $U(\zeta)$ описывается ОДУ:

$$U''_{\zeta\zeta} + \frac{2}{(2-k)\zeta}U'_\zeta = \frac{4}{s}f(U).$$

2°. Решение при $k = 2$:

$$u = u(z), \quad z = At + B\ln|x|,$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $u = u(z)$ описывается автономным ОДУ:

$$(aB^2 - A^2)u''_{zz} + aBu'_z + f(u) = 0.$$

Решение этого уравнения при $A = \pm B\sqrt{a}$ в неявном виде:

$$aB\int\frac{du}{f(u)} = -z + C,$$

где C — произвольная постоянная.

6. $u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + f(u), \qquad a > 0$.

Значения $n = 1$ и $n = 2$ соответствуют нелинейным волнам с осевой и радиальной симметрией.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = u(\xi), \quad \xi = \sqrt{ak(t+C)^2 - kx^2},$$

где $u(\xi)$ описывается ОДУ: $u''_{\xi\xi} + (1+n)\xi^{-1}u'_\xi = (ak)^{-1}f(u)$.

7. $u_{tt} = (ae^{\lambda x}u_x)_x + f(u)$.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = U(z), \quad z = \left[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t+C)^2\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается автономным ОДУ второго порядка вида 2.3.1.1:

$$U''_{zz} + \frac{1}{ak\lambda^2}f(U) = 0.$$

8. $u_{tt} = [a(x)u_x]_x + b(x)u + cu\ln u$.

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned}[a(x)\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi + c\varphi\ln\varphi &= 0,\\ \psi''_{tt} - c\psi\ln\psi &= 0.\end{aligned}$$

9. $u_{tt} = [a(x)u_x]_x - \dfrac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}f(u)$.

Решения в неявном виде:

$$\int\frac{du}{f(u)} = \pm 2t + 2\int\frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

10. $u_{tt} = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^{k+1}$.

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned}[a(x)\varphi^k\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi^{k+1} &= C\varphi,\\ \psi''_{tt} &= C\psi^{k+1},\end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

11. $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$.

Это уравнение встречается в задачах волновой и газовой динамики.

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\lambda^2 u - \int f(u)\,du = A(x+\lambda t) + B,$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

2°. Автомодельное решение:

$$u = u(z), \quad z = \frac{x+A}{t+B},$$

где функция $u(z)$ описывается ОДУ: $(z^2 u'_z)'_z = [f(u)u'_z]'_z$, которое допускает первый интеграл

$$\big[z^2 - f(u)\big]u'_z = C.$$

В частном случае $C=0$ получим решение в неявном виде: $z^2 = f(u)$.

3°. Решения в неявном виде:

$$x - t\sqrt{f(u)} = \varphi_1(u),$$
$$x + t\sqrt{f(u)} = \varphi_2(u),$$

где $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ — произвольные функции.

4°. Исходное уравнение можно представить в виде системы УрЧП первого порядка

$$f(u)u_x = v_t, \quad u_t = v_x. \tag{1}$$

Преобразование годографа

$$x = x(u,v), \quad t = t(u,v),$$

где u и v принимаются за независимые переменные, а x и t — за зависимые переменные, приводит (1) к линейной системе УрЧП первого порядка

$$f(u)t_v = x_u, \quad x_v = t_u. \tag{2}$$

Исключая t, приходим к линейному УрЧП второго порядка для $x = x(u,v)$:

$$[x_u/f(u)]_u - x_{vv} = 0.$$

Аналогично из системы (2) получаем другое линейное УрЧП для $t = t(u,v)$:

$$t_{uu} - f(u)t_{vv} = 0.$$

12. $\boldsymbol{u_{tt} = [x^k f(u)u_x]_x + x^{k-2}g(u), \quad k \neq 2.}$

Автомодельное решение:

$$u = U(z), \quad z = x(t+C)^{\frac{2}{k-2}},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка

$$\frac{4}{(2-k)^2} z(zU'_z)'_z + \frac{2}{2-k} zU'_z = [z^k f(U)U'_z]'_z + z^{k-2} g(U).$$

13. $\boldsymbol{u_{tt} = [x^2 f(u) u_x]_x + g(u).}$

Решение:

$$u = U(z), \qquad z = \ln x + \lambda t$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается автономным ОДУ второго порядка $[f(U)U'_z]'_z + [f(U) - \lambda^2]U'_z + g(U) = 0$.

14. $\boldsymbol{u_{tt} = [a(x)e^{\lambda u} u_x]_x + b(x)e^{\lambda u}.}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln \varphi(x) - \frac{2}{\lambda} \ln(t + C),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается линейным ОДУ второго порядка $[a(x)\varphi'_x]'_x + \lambda b(x)\varphi - 2 = 0$.

15. $\boldsymbol{u_{tt} = [e^{\lambda x} f(u) u_x]_x + e^{\lambda x} g(u), \qquad \lambda \neq 0.}$

Решение:

$$u = U(z), \qquad z = \lambda x + 2 \ln t$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка $4U''_{zz} - 2U'_z = \lambda^2 [e^z f(U) U'_z]'_z + e^z g(U)$.

16. $\boldsymbol{u_{tt} = a u_x u_{xx}.}$

Уравнение Гудерлея. Это уравнение используется для описания трансзвуковых течений газа, где $\gamma = a - 1$ — *показатель адиабаты*.

1°. Вырожденное решение:

$$u = (C_1 t + C_2)x + C_3 t + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные. В этом случае $u_{tt} = u_{xx} = 0$.

2°. Решения с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{2} a C_1 t^2 + C_2 t + C_3 \pm \frac{1}{3C_1} (2C_1 x + C_4)^{3/2}.$$

3°. *Решение Титова*:

$$u = \varphi_1(t) x^3 + \varphi_2(t) x^{3/2} + \varphi_3(t),$$

где функция $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описывается системой ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} \varphi''_1 - 18a\varphi_1^2 &= 0, \\ \varphi''_2 - \tfrac{45}{4} a\varphi_1\varphi_2 &= 0, \\ \varphi''_3 - \tfrac{9}{8} a\varphi_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Можно показать, что эта система допускает точное решение

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \frac{1}{3a}(t+C_1)^{-2},\\
&\varphi_2 = C_2(t+C_1)^{5/2} + C_3(t+C_1)^{-3/2},\\
&\varphi_3 = \frac{3a}{112}C_2^2(t+C_1)^7 + \frac{3}{8}aC_2C_3(t+C_1)^3 + \frac{9}{16}aC_3^2(t+C_1)^{-1} + C_4t + C_5,
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных в виде кубического многочлена по x:

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2 + \psi_4(t)x^3,$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описывается системой ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned}
\psi_1'' &= 2a\psi_2\psi_3,\\
\psi_2'' &= 2a(3\psi_2\psi_4 + 2\psi_3^2),\\
\psi_3'' &= 18a\psi_3\psi_4,\\
\psi_4'' &= 18a\psi_4^2.
\end{aligned}$$

Эту систему легко проинтегрировать при $\psi_4 = 0$, что дает два простых решения, квадратичных по x:

$$\begin{aligned}
u &= C_1x^2 + 2aC_1^2t^2x + \tfrac{1}{3}a^2C_1^3t^4,\\
u &= C_1tx^2 + \left(\tfrac{1}{3}aC_1^2t^4 + C_2t + C_3\right)x +\\
&\quad + \tfrac{1}{63}a^2C_1^3t^7 + \tfrac{1}{6}aC_1C_2t^4 + \tfrac{1}{3}aC_1C_3t^3 + C_4t + C_5.
\end{aligned}$$

5°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются автономными ОДУ первого порядка

$$(\varphi_x')^3 = \tfrac{3}{2}C_1\varphi^2 + C_3, \qquad (\psi_t')^2 = \tfrac{2}{3}aC_1\psi^3 + C_2,$$

C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Разрешив эти уравнения относительно производных, получим ОДУ с разделением переменных. Общие решения этих ОДУ могут быть записаны в неявном виде.

6°. Автомодельное решение:

$$u = t^{-3\beta-2}U(z), \qquad z = t^\beta x,$$

где β — произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается ОДУ:

$$3(\beta+1)(3\beta+2)U - 5\beta(\beta+1)zU_z' + \beta^2z^2U_{zz}'' = aU_z'U_{zz}''.$$

17. $\boldsymbol{u_{tt} = f(u_x)u_{xx}}$**.**

1°. Вырожденное решение:

$$u(x,t) = Axt + Bx + Ct + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = At^2 + Bt + \varphi(x),$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ: $2A = f(\varphi'_x)\varphi''_{xx}$. Его общее решение можно представить в параметрической форме

$$x = \frac{1}{2A}\int f(\xi)\,d\xi + C_1, \qquad \varphi = \frac{1}{2A}\int \xi f(\xi)\,d\xi + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. Решение более общего вида

$$u(x,t) = At^2 + Bt + \varphi(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ: $2A = \bigl[f(\varphi'_z) - \lambda^2\bigr]\varphi''_{zz}$. Его общее решение можно представить в параметрической форме

$$z = \frac{1}{2A}\int f(\xi)\,d\xi - \frac{\lambda^2}{2A}\xi + C_1, \qquad \varphi = \frac{1}{2A}\int \xi f(\xi)\,d\xi - \frac{\lambda^2}{4A}\xi^2 + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

4°. Автомодельное решение:

$$u = x\psi(y), \quad y = x/t,$$

где функция $\psi = \psi(y)$ описывается ОДУ:

$$[f(y\psi'_y + \psi) - y^2](y\psi''_{yy} + 2\psi'_y) = 0.$$

Приравнивая выражение в квадратных скобках к нулю, получим ОДУ первого порядка

$$f(y\psi'_y + \psi) - y^2 = 0.$$

Общее решение этого уравнения в параметрической форме:

$$y = \pm\sqrt{f(\tau)}, \qquad \psi = \frac{1}{2\sqrt{f(\tau)}}\int \frac{\tau f'_\tau(\tau)}{\sqrt{f(\tau)}}\,d\tau + C.$$

5°. *Преобразование Лежандра*

$$w(z,\tau) = tz + x\tau - u(x,t), \quad z = u_t, \quad \tau = u_x,$$

где w — новая зависимая переменная, z и τ — новые независимые переменные, приводит к линейному УрЧП

$$w_{\tau\tau} = f(\tau)w_{zz}.$$

6°. Подстановка $v(x,t) = u_x$ приводит к УрЧП вида 6.2.2.11:

$$v_{tt} = [f(v)v_x]_x.$$

6.3. Уравнения эллиптического типа

6.3.1. Уравнение теплопроводности с нелинейным источником вида $u_{xx} + u_{yy} = f(u)$

1. $\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = au + bu^k}$**.**

1°. Решение типа бегущей волны при $a > 0$ и $b(k+1) > 0$:

$$u(x,y) = \left[\frac{2b\,\mathrm{sh}^2 z}{a(k+1)}\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\,(1-k)(x\sin A + y\cos A) + B,$$

где A и B — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны при $a > 0$ и $b(k+1) < 0$:

$$u(x,y) = \left[-\frac{2b\,\mathrm{ch}^2 z}{a(k+1)}\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\,(1-k)(x\sin A + y\cos A) + B.$$

3°. Решение типа бегущей волны при $a < 0$ и $b(k+1) > 0$:

$$u(x,y) = \left[-\frac{2b\cos^2 z}{a(k+1)}\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{|a|}\,(1-k)(x\sin A + y\cos A) + B.$$

4°. При $a = 0$ имеется автомодельное решение вида $u = x^{\frac{2}{1-k}}F(z)$, где $z = y/x$.

5°. О других точных решениях рассматриваемого УрЧП см. уравнение 6.3.1.7 при $f(u) = au + bu^k$.

2. $\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = au^k + bu^{2k-1}}$**.**

Точные решения:

$$u(x,y) = \left[\frac{a(1-k)^2}{2(k+1)}(x\sin C_1 + y\cos C_1 + C_2)^2 - \frac{b(k+1)}{2ak}\right]^{\frac{1}{1-k}},$$

$$u(x,y) = \left\{\frac{1}{4}a(1-k)^2\big[(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2\big] - \frac{b}{ak}\right\}^{\frac{1}{1-k}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. $\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = ae^{\beta u}}$**.**

Это уравнение встречается в теории горения и является частным случаем уравнения 6.3.1.7 при $f(u) = ae^{\beta u}$.

1°. Точные решения:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2(A^2+B^2)}{a\beta(Ax+By+C)^2}\Big] && \text{при}\ \ a\beta>0,\\
u(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2(A^2+B^2)}{a\beta\operatorname{sh}^2(Ax+By+C)}\Big] && \text{при}\ \ a\beta>0,\\
u(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{-2(A^2+B^2)}{a\beta\operatorname{ch}^2(Ax+By+C)}\Big] && \text{при}\ \ a\beta<0,\\
u(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2(A^2+B^2)}{a\beta\cos^2(Ax+By+C)}\Big] && \text{при}\ \ a\beta>0,\\
u(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\Big(\frac{8C}{a\beta}\Big)-\frac{2}{\beta}\ln\big|(x+A)^2+(y+B)^2-C\big|,
\end{aligned}
$$

где A, B, C — произвольные постоянные. Первые четыре решения относятся к решениям типа бегущей волны, а последнее является радиально-симметричным решением с центром в точке $(-A,-B)$.

2°. Решения с функциональным разделением переменных:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= -\frac{2}{\beta}\ln\Big[C_1e^{ky}\pm\frac{\sqrt{2a\beta}}{2k}\cos(kx+C_2)\Big],\\
u(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\frac{2k^2(B^2-A^2)}{a\beta[A\operatorname{ch}(kx+C_1)+B\sin(ky+C_2)]^2},\\
u(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\frac{2k^2(A^2+B^2)}{a\beta[A\operatorname{sh}(kx+C_1)+B\cos(ky+C_2)]^2},
\end{aligned}
$$

где A, B, C_1, C_2, k — произвольные постоянные (x и y можно поменять местами, что дает еще три решения).

3°. Общее решение:

$$
u(x,y) = -\frac{2}{\beta}\ln\frac{\big|1-2a\beta\Phi(z)\overline{\Phi(z)}\,\big|}{4|\Phi'_z(z)|},
$$

где $\Phi=\Phi(z)$ — произвольная аналитическая функция комплексной переменной $z=x+iy$ с ненулевой производной, черта над символом обозначает комплексно-сопряженную функцию.

4. $\boldsymbol{u_{xx}+u_{yy}=ae^{\beta u}+be^{2\beta u}}$**.**

1°. Решения типа бегущей волны:

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{\beta}\ln\Big[-\frac{a\beta}{A^2+B^2}+C\exp(Ax+By)+\frac{a^2\beta^2-b\beta(A^2+B^2)}{4C(A^2+B^2)^2}\exp(-Ax-By)\Big],\\
u &= -\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{a\beta}{A^2+B^2}+\frac{\sqrt{a^2\beta^2+b\beta(A^2+B^2)}}{A^2+B^2}\,\sin(Ax+By+C)\Big],
\end{aligned}
$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. О других точных решениях рассматриваемого УрЧП см. уравнение 6.3.1.7 при $f(u)=ae^{\beta u}+be^{2\beta u}$.

5. $\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = au\ln(\beta u)}$**.**

1°. Точные решения:

$$u = \frac{1}{\beta}\exp\Bigl[\tfrac{1}{4}a(x+A)^2 + \tfrac{1}{4}a(y+B)^2 + 1\Bigr],$$
$$u = \frac{1}{\beta}\exp\Bigl[A(x+B)^2 \pm \sqrt{Aa-4A^2}\,(x+B)(y+C) + (\tfrac{1}{4}a - A)(y+C)^2 + \tfrac{1}{2}\Bigr],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Имеются точные решения вида

$$u(x,y) = F(z), \quad z = C_1x + C_2y,$$
$$u(x,y) = G(r), \quad r = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$
$$u(x,y) = f(x)g(y).$$

6. $\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = a\sin(\beta u)}$**.**

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $a = \beta = 1$:

$$u(x,y) = 4\,\mathrm{arctg}\Bigl(\mathrm{ctg}\,A\frac{\mathrm{ch}\,F}{\mathrm{ch}\,G}\Bigr), \quad F = \frac{\cos A}{\sqrt{1+B^2}}(x - By), \quad G = \frac{\sin A}{\sqrt{1+B^2}}(y + Bx),$$

где A и B — произвольные постоянные.

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$u(x,y) = \frac{4}{\beta}\,\mathrm{arctg}\bigl[f(x)g(y)\bigr],$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(y)$ описываются автономными ОДУ первого порядка

$$(f'_x)^2 = Af^4 + Bf^2 + C, \qquad (g'_y)^2 = Cg^4 + (a\beta - B)g^2 + A,$$

A, B, C — произвольные постоянные.

3°. О других точных решениях рассматриваемого УрЧП см. уравнение 6.3.1.7 при $f(u) = a\sin(\beta u)$.

7. $\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = f(u)}$**.**

Стационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником общего вида.

1°. Пусть $u = u(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$u_1 = u(\pm x + C_1, \pm y + C_2),$$
$$u_2 = u(x\cos\beta - y\sin\beta,\ x\sin\beta + y\cos\beta),$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, также являются решениями этого уравнения (знаки плюс или минус в u_1 выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \left[C + \frac{2}{A^2+B^2} F(u) \right]^{-1/2} du = Ax + By + D, \qquad F(u) = \int f(u)\, du,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Решение с центральной симметрией относительно точки $(-C_1, -C_2)$:

$$u = u(\zeta), \qquad \zeta = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $u = u(\zeta)$ описывается ОДУ: $u''_{\zeta\zeta} + \zeta^{-1} u'_\zeta = f(u)$.

6.3.2. Стационарные уравнения анизотропной теплопроводности вида $[f(x)u_x]_x + [g(y)u_y]_y = h(u)$

1. $(ax^n u_x)_x + (by^m u_y)_y = f(u), \qquad ab > 0.$

Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$ и $m \neq 2$:

$$u = u(r), \qquad r = \left[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m} \right]^{1/2}.$$

Здесь функция $u(r)$ описывается ОДУ второго порядка

$$u''_{rr} + Ar^{-1} u'_r = Bf(u),$$

где $A = \dfrac{4-nm}{(2-n)(2-m)}$, $B = \dfrac{4}{ab(2-n)^2(2-m)^2}$.

2. $au_{xx} + (be^{\mu y} u_y)_y = f(u), \qquad ab > 0.$

Решение с функциональным разделением переменных при $\mu \neq 0$:

$$u = u(\xi), \qquad \xi = \left[b\mu^2 (x+C_1)^2 + 4ae^{-\mu y} \right]^{1/2},$$

где C_1 — произвольная постоянная, а функция $u(\xi)$ задается неявно с помощью выражений

$$\int \left[C_2 + \frac{2}{ab\mu^2} F(u) \right]^{-1/2} du = C_3 \pm \xi, \qquad F(u) = \int f(u)\, du,$$

C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

3. $(ae^{\beta x} u_x)_x + (be^{\mu y} u_y)_y = f(u), \qquad ab > 0.$

Решение с функциональным разделением переменных при $\beta\mu \neq 0$:

$$u = u(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y} \right)^{1/2},$$

где функция $u(\xi)$ описывается ОДУ второго порядка

$$u''_{\xi\xi} - \xi^{-1} u'_\xi = Af(u), \qquad A = 4/(ab\beta^2\mu^2).$$

4. $[f(x)u_x]_x + [g(y)u_y]_y = ku\ln u.$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются ОДУ второго порядка

$$[f(x)\varphi'_x]'_x = k\varphi\ln\varphi + C\varphi, \qquad [g(y)\psi'_y]'_y = k\psi\ln\psi - C\psi,$$

C — произвольная постоянная.

6.3.3. Стационарные уравнения анизотропной теплопроводности вида $[f(u)u_x]_x + [g(u)u_y]_y = h(u)$

1. $u_{xx} + [(au+b)u_y]_y = 0.$

Стационарное уравнение Хохлова—Заболоцкой. Встречается в акустике и нелинейной механике.

1°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= Ay - \tfrac{1}{2}A^2ax^2 + C_1x + C_2,\\
u(x,y) &= (Ax+B)y - \frac{a}{12A^2}(Ax+B)^4 + C_1x + C_2,\\
u(x,y) &= -\frac{1}{a}\left(\frac{y+A}{x+B}\right)^2 + \frac{C_1}{x+B} + C_2(x+B)^2 - \frac{b}{a},\\
u(x,y) &= -\frac{1}{a}\bigl[b + \lambda^2 \pm \sqrt{A(y+\lambda x)+B}\,\bigr],\\
u(x,y) &= (Ax+B)\sqrt{C_1y+C_2} - \frac{b}{a},
\end{aligned}$$

где A, B, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по y (обобщает третье решение в п. 1°):

$$\begin{aligned}
u(x,y) = -\frac{1}{a(x+A)^2}y^2 + \left[\frac{B_1}{(x+A)^2} + B_2(x+A)^3\right]y + \frac{C_1}{x+A} + {}\\
+ C_2(x+A)^2 - \frac{b}{a} - \frac{aB_1^2}{4(x+A)^2} - \frac{1}{2}aB_1B_2(x+A)^3 - \frac{1}{54}aB_2^2(x+A)^8,
\end{aligned}$$

где A, B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. См. также уравнение 6.3.3.5 при $f(u)=1$ и $g(u)=au+b$.

2. $a(u^ku_x)_x + b(u^mu_y)_y = 0.$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,y) = f(x)g(y).$$

Функции $f(x)$ и $g(y)$ описываются автономными ОДУ второго порядка

$$(f^kf'_x)'_x = Abf^{m+1}, \qquad (g^mg'_y)'_y = -Aag^{k+1},$$

где A — произвольная постоянная.

2°. Имеются точные решения вида

$u(x,y) = F(z), \quad z = C_1 x + C_2 y$ — решение типа бегущей волны,

$u(x,y) = x^{-2s} G(\xi), \quad \xi = y x^{(m-k)s-1}$ — автомодельное решение,

$$u(x,y) = x^{\frac{2}{k-m}} H(\eta), \quad \eta = y + s\ln x,$$

$$u(x,y) = e^{2x} Q(\zeta), \quad \zeta = y e^{(k-m)x},$$

где C_1, C_2, s — произвольные постоянные.

3°. См. также УрЧП 6.3.3.5 при $f(u) = au^k$ и $g(u) = bu^m$.

3. $\boldsymbol{a(u^k u_x) + b(u^m u_y)_y = cu^n.}$

Имеются точные решения вида

$u(x,y) = F(z), \quad z = C_1 x + C_2 y$ — решение типа бегущей волны;

$u(x,y) = x^{\frac{2}{k-n+1}} U(z), \quad z = y x^{\frac{n-m-1}{k-n+1}}$ — автомодельное решение.

4. $\boldsymbol{u_{xx} + (ae^{\beta u} u_y)_y = 0, \qquad a > 0.}$

1°. Решения с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln(Ay + B) + Cx + D,$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln(-aA^2y^2 + By + C) - \frac{2}{\beta}\ln(-aAx + D),$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{p^2}{aA\operatorname{ch}^2(px+q)}\right],$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{p^2}{-aA\cos^2(px+q)}\right],$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{p^2}{-aA\operatorname{sh}^2(px+q)}\right],$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные.

2°. Имеются точные решения вида

$$u(x,y) = F(r), \quad r = C_1 x + C_2 y;$$

$$u(x,y) = G(z), \quad z = y/x;$$

$$u(x,y) = H(\xi) - 2(k+1)\beta^{-1}\ln|x|, \quad \xi = y|x|^k;$$

$$u(x,y) = U(\eta) - 2\beta^{-1}\ln|x|, \quad \eta = y + k\ln|x|;$$

$$u(x,y) = V(\zeta) - 2\beta^{-1}x, \quad \zeta = ye^x,$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные.

3°. О других решениях этого УрЧП см. уравнение 6.3.3.5 при $f(u) = 1$ и $g(u) = ae^{\beta u}$.

5. $\boldsymbol{[f(u)u_x]_x + [g(u)u_y]_y = 0.}$

Стационарное уравнение анизотропной теплопроводности (диффузии).

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \left[A^2 f(u) + B^2 g(u)\right] du = C_1(Ax + By) + C_2,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Автомодельное решение:

$$u = u(\zeta), \quad \zeta = \frac{x + A}{y + B},$$

где функция $u(\zeta)$ описывается ОДУ:

$$[f(u)u'_\zeta]'_\zeta + [\zeta^2 g(u)u'_\zeta]'_\zeta = 0. \tag{1}$$

Интегрируя (1) и принимая u за независимую переменную, получим уравнение Риккати $C\zeta'_u = g(u)\zeta^2 + f(u)$, где C — произвольная постоянная.

3°. Исходное уравнение можно представить в виде системы УрЧП первого порядка

$$f(u)u_x = v_y, \quad -g(u)u_y = v_x. \tag{2}$$

Преобразование годографа

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

где u, v рассматриваются как независимые переменные, а x, y — как зависимые, приводит (2) к линейной системе УрЧП

$$f(u)y_v = x_u, \quad -g(u)x_v = y_u. \tag{3}$$

Исключая y, приходим к линейному УрЧП второго порядка для $x = x(u, v)$:

$$[x_u/f(u)]_u + g(u)x_{vv} = 0.$$

Точно так же из системы (3) можно получить другое линейное УрЧП второго порядка для $y = y(u, v)$.

4°. Для специального частного случая $g(u) = kf(u)$ преобразование

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = k^{-1/2}y, \quad \bar{u} = \int f(u)\,du$$

приводит к уравнению Лапласа $\Delta\bar{u} = 0$, где Δ — оператор Лапласа в переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

6.4. Другие нелинейные уравнения второго порядка

6.4.1. Уравнения околозвукового течения газа

1. $\boldsymbol{a u_x u_{xx} + u_{yy} = 0.}$

Уравнение стационарного околозвукового течения газа.

1°. Пусть $u(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$u_1 = C_1^{-3}C_2^2 u(C_1x + C_3, C_2y + C_4) + C_5y + C_6,$$

где C_1, …, C_6 — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
&u = C_1xy + C_2x + C_3y + C_4,\\
&u = -\frac{(x+C_1)^3}{3a(y+C_2)^2} + C_3y + C_4,\\
&u = \frac{a^2C_1^3}{39}(y+A)^{13} + \frac{2}{3}aC_1^2(y+A)^8(x+B) + 3C_1(y+A)^3(x+B)^2 - \frac{(x+B)^3}{3a(y+A)^2},\\
&u = -aC_1y^2 + C_2y + C_3 \pm \frac{4}{3C_1}(C_1x + C_4)^{3/2},\\
&u = -aA^3y^2 - \frac{B^2}{aA^2}x + C_1y + C_2 \pm \frac{4}{3}(Ax + By + C_3)^{3/2},\\
&u = \frac{1}{3}(Ay+B)(2C_1x + C_2)^{3/2} - \frac{aC_1^3}{12A^2}(Ay+B)^4 + C_3y + C_4,\\
&u = -\frac{9aA^2}{y+C_1} + 4A\left(\frac{x+C_2}{y+C_1}\right)^{3/2} - \frac{(x+C_2)^3}{3a(y+C_1)^2} + C_3y + C_4,\\
&u = -\frac{3}{7}aA^2(y+C_1)^7 + 4A(x+C_2)^{3/2}(y+C_1)^{5/2} - \frac{(x+C_2)^3}{3a(y+C_1)^2} + C_3y + C_4,
\end{aligned}$$

где A, B, C_1, …, C_4 — произвольные постоянные (первое решение является вырожденным).

3°. Существуют решения следующих видов:

$$\begin{aligned}
&u = y^{-3k-2}U(z), \quad z = xy^k;\\
&u = \varphi_1(y) + \varphi_2(y)x^{3/2} + \varphi_3(y)x^3;\\
&u = \psi_1(y) + \psi_2(y)x + \psi_3(y)x^2 + \psi_4(y)x^3;\\
&u = \psi_1(y)\varphi(x) + \psi_2(y),
\end{aligned}$$

где k — произвольная постоянная. Здесь первое решение является автомодельным, а остальные три решения — решениями с обобщенным разделением переменных.

2. $\boldsymbol{u_{yy} + \dfrac{a}{y}u_y + bu_xu_{xx} = 0.}$

1°. Пусть $u(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$u_1 = C_1^{-3}C_2^2 u(C_1x + C_3, C_2y) + C_4y^{1-a} + C_5,$$

где C_1, …, C_5 — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

2°. Решения с аддитивным разделением переменных:

$$u = -\frac{bC_1}{4(a+1)}y^2 + C_2 y^{1-a} + C_3 \pm \frac{2}{3C_1}(C_1 x + C_4)^{3/2},$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

3°. Решения с обобщенным разделением переменных:

$$u = -\frac{9A^2 b}{16(k+1)(2k+1+a)}y^{2k+2} + Ay^k(x+C)^{3/2} + \frac{a-3}{9b}\frac{(x+C)^3}{y^2},$$

где A и C — произвольные постоянные, а $k = k_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $k^2 + (a-1)k + \frac{5}{4}(a-3) = 0$.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = (Ay^{1-a} + B)(2C_1 x + C_2)^{3/2} + 9bC_1^3\theta(y),$$

$$\theta(y) = -\frac{B^2}{2(a+1)}y^2 - \frac{AB}{3-a}y^{3-a} - \frac{A^2}{2(2-a)(3-a)}y^{4-2a} + C_3 y^{1-a} + C_4,$$

где A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

5°. Существуют решения следующих видов:

$$u = y^{-3m-2}U(z), \quad z = xy^m;$$

$$u = \varphi_1(y) + \varphi_2(y)x^{3/2} + \varphi_3(y)x^3;$$

$$u = \psi_1(y) + \psi_2(y)x + \psi_3(y)x^2 + \psi_4(y)x^3;$$

$$u = \psi_1(y)\varphi(x) + \psi_2(y),$$

где m — произвольная постоянная. Здесь первое решение является автомодельным, а остальные три решения — решениями с обобщенным разделением переменных.

6.4.2. Уравнения типа Монжа — Ампера

1. $\boldsymbol{u_{xy} - u_{xx}u_{yy} = 0.}$

Однородное уравнение Монжа — Ампера.

1°. Общее решение в параметрическом виде:

$$u = tx + \varphi(t)y + \psi(t),$$

$$x + \varphi'(t)y + \psi'(t) = 0,$$

где t — параметр, $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, штрих означает производную по t.

2°. Точные решения, содержащие одну произвольную функцию:

$$u = \varphi(C_1 x + C_2 y) + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

$$u = (C_1 x + C_2 y)\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

$$u = (C_1 x + C_2 y + C_3)\varphi\left(\frac{C_4 x + C_5 y + C_6}{C_1 x + C_2 y + C_3}\right) + C_7 x + C_8 y + C_9,$$

где $C_1, \ldots, C_9$ — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

3°. См. также Гурса (1933), Хабиров (1990), Ibragimov (1994), Polyanin & Zaitsev (2012).

2. $u_{xy} - u_{xx}u_{yy} = A$.

Неоднородное уравнение Монжа—Ампера.

1°. Общее решение в параметрическом виде при $A = a^2 > 0$ (Гурса, 1933):

$$x = \frac{\beta - \lambda}{2a}, \quad y = \frac{\psi'(\lambda) - \varphi'(\beta)}{2a}, \quad u = \frac{(\beta + \lambda)[\psi'(\lambda) - \varphi'(\beta)] + 2\varphi(\beta) - 2\psi(\lambda)}{4a},$$

где β и λ—параметры, $\varphi = \varphi(\beta)$ и $\psi = \psi(\lambda)$—произвольные функции.

2°. Точные решения:

$$u = \pm\frac{\sqrt{A}}{C_2}x(C_1x + C_2y) + \varphi(C_1x + C_2y) + C_3x + C_4y,$$
$$u = C_1y^2 + C_2xy + \frac{1}{4C_1}(C_2^2 - A)x^2 + C_3y + C_4x + C_5,$$
$$u = \frac{1}{x + C_1}\left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) - \frac{A}{12C_2}(x^3 + 3C_1x^2) + C_4y + C_5x + C_6,$$
$$u = \pm\frac{2\sqrt{A}}{3C_1C_2}(C_1x - C_2^2y^2 + C_3)^{3/2} + C_4x + C_5y + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$—произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$—произвольная функция.

3. $u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = f(x)$.

1°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по y:

$$u = C_1y^2 + C_2xy + \frac{C_2^2}{4C_1}x^2 - \frac{1}{2C_1}\int_0^x (x - t)f(t)\,dt + C_3y + C_4x + C_5,$$
$$u = \frac{1}{x + C_1}\left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) - \frac{1}{2C_2}\int_0^x (x - t)(t + C_1)f(t)\,dt + C_4y + C_5x + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$—произвольные постоянные.

2°. Решения с обобщенным разделением переменных при $f(x) > 0$:

$$u = \pm y\int\sqrt{f(x)}\,dx + \varphi(x) + C_1y,$$

где $\varphi(x)$—произвольная функция.

4. $u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = f(x)y^k$.

1°. Решения с обобщенным разделением переменных:

$$u = \frac{C_1y^{k+2}}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{C_1}\int_a^x (x - t)f(t)\,dt + C_2x + C_3y + C_4,$$
$$u = \frac{y^{k+2}}{(C_1x + C_2)^{k+1}} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_a^x (x - t)(C_1t + C_2)^{k+1}f(t)\,dt + C_3x + C_4y + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$—произвольные постоянные.

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x) y^{\frac{k+2}{2}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ:

$$k(k+2)\varphi\varphi''_{xx} - (k+2)^2(\varphi'_x)^2 + 4f(x) = 0.$$

5. $\boldsymbol{u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = f(x)e^{\lambda y}}$**.**

1°. Решения с обобщенным разделением переменных:

$$u = C_1 \int_a^x (x-t) f(t)\,dt + C_2 x - \frac{1}{C_1\lambda^2} e^{\lambda y} + C_3 y + C_4,$$
$$u = C_1 e^{\beta x + \lambda y} - \frac{1}{C_1\lambda^2} \int_a^x (x-t) e^{-\beta t} f(t)\,dt + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ и β — произвольные постоянные.

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x) \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\lambda y\bigr),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ:

$$\varphi\varphi''_{xx} - (\varphi'_x)^2 + 4\lambda^{-2} f(x) = 0.$$

6. $\boldsymbol{u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = f(u)}$**.**

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = U(z), \quad z = ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy,$$

где a, b, c, k, s — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается ОДУ:

$$2\bigl[(4ac - b^2)z + as^2 + ck^2 - bks\bigr] U'_z U''_{zz} + (4ac - b^2)(U'_z)^2 + f(U) = 0.$$

6.5. Нелинейные уравнения старших порядков

6.5.1. Уравнения третьего порядка

► **Уравнение Кортевега — Фриза и родственные уравнения.**

1. $\boldsymbol{u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0}$**.**

Уравнение Кортевега — Фриза. Встречается во многих разделах нелинейной механики и теоретической физики.

1°. Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения Кортевега — Фриза. Тогда функция

$$u_1 = C_1^2 u(C_1 x + 6C_1C_2 t + C_3, C_1^3 t + C_4) + C_2,$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

2°. Односолитонное решение (это решение типа бегущей волны):

$$u(x,t) = -\frac{a}{2\operatorname{ch}^2\bigl[\frac{1}{2}\sqrt{a}\,(x-at-b)\bigr]},$$

где a и b — произвольные постоянные.

3°. Двухсолитонное решение:

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\bigl(1 + B_1e^{\theta_1} + B_2e^{\theta_2} + AB_1B_2e^{\theta_1+\theta_2}\bigr),$$
$$\theta_1 = a_1x - a_1^3t, \quad \theta_2 = a_2x - a_2^3t, \quad A = \Bigl(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\Bigr)^2,$$

где B_1, B_2, a_1, a_2 — произвольные постоянные.

4°. N-солитонное решение:

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bigl\{\ln\det[\mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{t})]\bigr\}.$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица размерности $N\times N$ и $\mathbf{C}(x,t)$ — симметричная матрица размерности $N\times N$ с элементами

$$C_{mn}(x,t) = \frac{\sqrt{\rho_m(t)\rho_n(t)}}{p_m+p_n}\exp\bigl[-(p_m+p_n)x\bigr],$$

где нормирующие функции $\rho_n(t)$ определяются формулами

$$\rho_n(t) = \rho_n(0)\exp\bigl(8p_n^3t\bigr), \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$

которые содержат $2N$ произвольных констант p_n и $\rho_n(0)$.

Приведенное выше решение при $t\to\pm\infty$ приближено можно представить в виде суммы N односолитонных решений.

5°. Решение типа «один солитон + один полюс»:

$$u(x,t) = -2p^2\bigl[\operatorname{ch}^{-2}(pz) - (1+px)^{-2}\operatorname{th}^2(pz)\bigr]\bigl[1 - (1+px)^{-1}\operatorname{th}(pz)\bigr]^{-2},$$
$$z = x - 4p^2t - c,$$

где p и c — произвольные постоянные.

6°. Рациональные решения (алгебраические солитоны):

$$u(x,t) = \frac{6x(x^3-24t)}{(x^3+12t)^2},$$
$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln(x^6 + 60x^3t - 720t^2).$$

7°. Существует автомодельное решение вида $u = t^{-2/3}U(z)$, где $z = t^{-1/3}x$.

8°. Решение:

$$u(x,t) = 2\varphi(z) + 2C_1t, \qquad z = x + 6C_1t^2 + C_2t,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается ОДУ второго порядка $\varphi''_{zz} = 6\varphi^2 - C_2\varphi - C_1z + C_3$.

9°. Уравнение Кортевега — де Фриза интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Любая достаточно быстро убывающая функция $F = F(x, y; t)$ при $x \to +\infty$, одновременно удовлетворяющая двум линейным уравнениям в частных производных

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 F = 0$$

порождает решение уравнения Кортевега–де Фриза в виде

$$u = -2\frac{d}{dx}K(x, x; t),$$

где $K(x, y; t)$ является решением линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x, y; t) + F(x, y; t) + \int_x^\infty K(x, z; t)F(z, y; t)\,dz = 0.$$

Время t фигурирует в этом уравнении как параметр.

10°. См. также Захаров и др. (1980), Калоджеро & Дегасперис (1985), Ablowitz & Segur (1981), Bullough & Caudrey (1980), Dodd et al. (1982), Gardner et al. (1967), Hirota (1971).

2. $u_t + u_{xxx} - 6uu_x + \frac{1}{2t}u = 0.$

Цилиндрическое уравнение Кортевега — Фриза.

Преобразование

$$u(x, t) = -\frac{x}{12t} - \frac{1}{2t}u(z, \tau), \quad x = \frac{z}{\tau}, \quad t = -\frac{1}{2\tau^2}$$

приводит к уравнению Кортевега — Фриза 6.5.1.1:

$$u_\tau + u_{zzz} - 6uu_z = 0.$$

3. $u_t + u_{xxx} + 6u^2u_x = 0.$

Модифицированное уравнение Кортевега — Фриза.

1°. Односолитонное решение:

$$u(x, t) = a + \frac{k^2}{\sqrt{4a^2 + k^2}\,\operatorname{ch} z + 2a}, \qquad z = kx - (6a^2k + k^3)t + b,$$

где a, b, k — произвольные постоянные.

2°. Двухсолитонное решение:

$$u(x, t) = 2\frac{a_1e^{\theta_1} + a_2e^{\theta_2} + Aa_2e^{2\theta_1+\theta_2} + Aa_1e^{\theta_1+2\theta_2}}{1 + e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2} + 2(1 - A)e^{\theta_1+\theta_2} + A^2e^{2(\theta_1+\theta_2)}},$$

$$\theta_1 = a_1x - a_1^3t + b_1, \quad \theta_2 = a_2x - a_2^3t + b_2, \quad A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — произвольные постоянные.

3°. Рациональные решения (алгебраические солитоны):

$$u(x,t) = a - \frac{4a}{4a^2z^2+1}, \qquad z = x - 6a^2t,$$
$$u(x,t) = a - \frac{12a\left(z^4 + \frac{3}{2}a^{-2}z^2 - \frac{3}{16}a^{-4} - 24tz\right)}{4a^2\left(z^3 + 12t - \frac{3}{4}a^{-2}z\right)^2 + 3\left(z^2 + \frac{1}{4}a^{-2}\right)^2},$$

где a — произвольная постоянная.

4°. Имеется автомодельное решение вида $u = t^{-1/3}U(z)$, где $z = t^{-1/3}x$.

5°. Решения типа бегущей волны, содержащие гиперболические функции:

$$u = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{c}\left\{2 - \operatorname{th}^2\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{c}\,(x-ct+b)\right] - \operatorname{cth}^2\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{c}\,(x-ct+b)\right]\right\}^{1/2},$$

где b и $c > 0$ — произвольные постоянные.

6°. Решения типа бегущей волны, содержащие тригонометрические функции:

$$u = \pm\frac{2\sqrt{c/3}\,\cos^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}\,(x-ct+b)\right]}{3 - 2\cos^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}\,(x-ct+b)\right]}.$$

Полагая $u = 0$ при $\frac{1}{2}\sqrt{c}\,|x-ct+b| \geqslant \frac{\pi}{2}$, получим решения, локализованные на интервале длины $2\pi/\sqrt{c}$.

4. $u_t = [f(u)u_x]_{xx} + \dfrac{a}{f(u)} + b.$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(u)\,du = at - \frac{1}{6}bx^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

5. $u_t = [f(u)u_x]_{xx} + \dfrac{aF(u)+b}{f(u)} + c[aF(u)+b], \quad F(u) = \int f(u)\,du.$

1°. Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде при $a \neq 0$:

$$\int f(u)\,du = \frac{1}{a}[\rho(x)e^{at} - b],$$

где

$$\rho(x) = \begin{cases} C_1 + C_2x + C_3x^2 & \text{при } c = 0, \\ C_1e^{-kx} + e^{kx/2}\left(C_2\cos\dfrac{kx\sqrt{3}}{2} + C_3\sin\dfrac{kx\sqrt{3}}{2}\right), \quad k = (ac)^{1/3} & \text{при } c \neq 0, \end{cases}$$

C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде при $a = 0$:

$$\int f(u)\,du = bt + C_1 + C_2x + C_3x^2 - \tfrac{1}{6}bcx^3.$$

► **Уравнения гидродинамики.**

6. $\boldsymbol{u_{xt} + u_x^2 - uu_{xx} = au_{xxx} + f(t).}$

Это уравнение описывает некоторые классы точных решений двумерных уравнений Навье — Стокса. Функция $f = f(t)$ может быть задана произвольно.

1°. Пусть $u = u(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$u_1 = u(x+\psi(t),t) + \psi'_t(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, также является решением этого уравнения.

2°. Точные решения при $f(t) \equiv 0$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{C_1 x}{C_1 t + C_2} + \psi(t), \\ u(x,t) &= \frac{6a}{x+\psi(t)} + \psi'_t(t), \\ u(x,t) &= C_1 \exp\bigl[-\lambda x + \lambda\psi(t)\bigr] - \psi'_t(t) + a\lambda, \end{aligned}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Первое решение является «невязким» (не зависит от a).

3°. Решения с обобщенным разделением переменных при $f(t) = Ae^{-\beta t}$, $A > 0$, $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= Be^{-\frac{1}{2}\beta t} \sin[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \\ u(x,t) &= Be^{-\frac{1}{2}\beta t} \cos[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \end{aligned} \qquad B = \pm\sqrt{\frac{2Aa}{\beta}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2a}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

4°. Решения с обобщенным разделением переменных при $f(t) = Ae^{\beta t}$, $A > 0$, $\beta > 0$:

$$u(x,t) = Be^{\frac{1}{2}\beta t} \operatorname{sh}[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \qquad B = \pm\sqrt{\frac{2Aa}{\beta}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2a}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

5°. Решения с обобщенным разделением переменных при $f(t) = Ae^{\beta t}$, $A < 0$, $\beta > 0$:

$$u(x,t) = Be^{\frac{1}{2}\beta t} \operatorname{ch}[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \qquad B = \pm\sqrt{\frac{2|A|a}{\beta}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2a}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

6°. Решения с обобщенным разделением переменных при $f(t) = Ae^{\beta t}$, A — любое, $\beta > 0$:

$$u(x,t) = \psi(t)e^{\lambda x} - \frac{Ae^{\beta t - \lambda x}}{4\lambda^2\psi(t)} + \frac{\psi'_t(t)}{\lambda\psi(t)} - a\lambda, \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{\beta}{2a}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

7°. Автомодельное решение при $f(t) = At^{-2}$:

$$u(x,t) = t^{-1/2}\bigl[\theta(z) - \tfrac{1}{2}z\bigr], \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается автономным ОДУ:

$$\tfrac{3}{4} - A - 2\theta'_z + (\theta'_z)^2 - \theta\theta''_{zz} = a\theta'''_{zzz},$$

порядок которого можно понизить на единицу.

8°. Решение типа бегущей волны при $f(t) = A$:

$$u = U(\xi), \quad \xi = x + \lambda t,$$

где функция $U(\xi)$ описывается автономным ОДУ:

$$-A + \lambda U''_{\xi\xi} + (U'_\xi)^2 - UU''_{\xi\xi} = aU'''_{\xi\xi\xi},$$

порядок которого можно понизить на единицу.

9°. Рассматриваемое уравнение допускает понижение порядка. Обозначим

$$\eta = u_x, \quad \Phi = u_{xx}. \tag{3}$$

Перенесем член $-u_x^2$ в правую часть исходного УрЧП, затем поделим полученное уравнение на $u_{xx} = \Phi$ и продифференцируем по x. Учитывая (3), получим

$$\frac{\Phi_t}{\Phi} - \frac{u_{xt}\Phi_x}{\Phi^2} + \eta = \frac{\partial}{\partial x}\frac{a\Phi_x + \eta^2 + q(t)\eta + p(t)}{\Phi}. \tag{4}$$

Заменим в (4) старые переменные t, x, $u = u(x,t)$ на новые переменные t, η, $\Phi = \Phi(t,\eta)$, где η и Φ определены формулами (3) (это *преобразование Крокко*). При этом производные преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta} = u_{xx}\frac{\partial}{\partial\eta} = \Phi\frac{\partial}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial\eta}.$$

В результате уравнение (4) сводится к нелинейному УрЧП второго порядка

$$\Phi_t + [f(t) - \eta^2]\Phi_\eta + \eta\Phi = a\Phi^2\Phi_{\eta\eta}. \tag{5}$$

Отметим, что в вырожденном случае (невязкая жидкость при $a = 0$) исходное нелинейное УрЧП второго порядка сводится к линейному УрЧП первого порядка (5), которое можно проинтегрировать методом характеристик.

7. $u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = a u_{yyy}$.

Уравнение стационарного ламинарного пограничного слоя на плоской пластине (u — функция тока, a — кинематическая вязкость жидкости).

1°. Пусть $u(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$u_1 = C_1 u\bigl(C_2 x + C_3, C_1 C_2 y + \varphi(x)\bigr) + C_4,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

2°. Точные решения, содержащие произвольные функции:

$$
\begin{aligned}
&u(x,y) = C_1 y + \varphi(x),\\
&u(x,y) = C_1 y^2 + \varphi(x) y + \frac{1}{4C_1}\varphi^2(x) + C_2,\\
&u(x,y) = \frac{6ax + C_1}{y + \varphi(x)} + \frac{C_2}{[y+\varphi(x)]^2} + C_3,\\
&u(x,y) = \varphi(x)\exp(-C_1 y) + aC_1 x + C_2,\\
&u(x,y) = C_1 \exp\bigl[-C_2 y - C_2\varphi(x)\bigr] + C_3 y + C_3\varphi(x) + aC_2 x + C_4,\\
&u(x,y) = 6aC_1 x^{1/3}\operatorname{th}\xi + C_2, \qquad \xi = C_1\frac{y}{x^{2/3}} + \varphi(x),\\
&u(x,y) = -6aC_1 x^{1/3}\operatorname{tg}\xi + C_2, \qquad \xi = C_1\frac{y}{x^{2/3}} + \varphi(x),
\end{aligned}
$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция. Первые два решения являются вырожденными — они не зависят от a и соответствуют течениям невязкой жидкости.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$u(x,y) = xF(y) + G(y), \tag{1}$$

где функции $F = F(y)$ и $G = G(y)$ описываются системой автономных ОДУ:

$$(F'_y)^2 - FF''_{yy} = aF'''_{yyy}, \tag{2}$$

$$F'_y G'_y - FG''_{yy} = aG'''_{yyy}. \tag{3}$$

Уравнение (2) имеет частные решения

$$
\begin{aligned}
&F = 6a(y+C)^{-1},\\
&F = Ce^{\lambda y} - a\lambda,
\end{aligned}
$$

где C и λ — произвольные постоянные.

Пусть $F = F(y)$ — некоторое решение уравнения (2) ($F \not\equiv \mathrm{const}$). Тогда соответствующее общее решение уравнения (3) имеет вид

$$G(y) = C_1 + C_2 F + C_3\Bigl(F\int\psi\,dy - \int F\psi\,dy\Bigr), \quad \text{где} \quad \psi = \frac{1}{(F'_y)^2}\exp\Bigl(-\frac{1}{a}\int F\,dy\Bigr).$$

4°. В табл. 6.1 приведены некоторые другие точные решения уравнения гидродинамического пограничного слоя. Решение 1 является автомодельным, а решение 2 — обобщенно-автомодельным. Решение 3 при $\beta = 0$ вырождается в автомодельное решение (см. решение 1 при $\lambda = -1$). ОДУ 1-3 для функции F являются автономными и обобщенно-однородными, поэтому их порядок можно понизить на две единицы.

8. $\boldsymbol{u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = a u_{yyy} + f(x)}$.

Уравнение гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления. При $f(x) \equiv 0$ см. уравнение 6.5.1.7.

Таблица 6.1. Точные решения уравнения ламинарного пограничного слоя (C_1, C_2, C_3, β, λ — произвольные постоянные).

No.	Вид решения $u = u(x,y)$	ОДУ для функции $U = U(z)$
1	$u = x^{\lambda+1}U(z),\ \ z = x^{\lambda}y$	$(2\lambda+1)(U'_z)^2 - (\lambda+1)UU''_{zz} = aU'''_{zzz}$
2	$u = e^{\lambda x}U(z),\ \ z = e^{\lambda x}y$	$2\lambda(U'_z)^2 - \lambda UU''_{zz} = aU'''_{zzz}$
3	$u = U(z) + \beta\ln\lvert x\rvert,\ \ z = y/x$	$-(U'_z)^2 - \beta U''_{zz} = aU'''_{zzz}$

1°. Пусть $u(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$u_1 = \pm u(x, \pm y + \varphi(x)) + C,$$

где берутся либо верхние, либо нижние знаки, $\varphi(x)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная, также являются решениями этого уравнения.

2°. Вырожденные решения (линейные и квадратичные по y) для произвольной $f(x)$:

$$u(x,y) = \pm y\Big[2\int f(x)\,dx + C_1\Big]^{1/2} + \varphi(x),$$
$$u(x,y) = C_1y^2 + \varphi(x)y + \frac{1}{4C_1}\Big[\varphi^2(x) - 2\int f(x)\,dx\Big] + C_2,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Эти решения не зависят от a и соответствуют течениям невязкой жидкости.

3°. Решение с аддитивным разделением переменных при $f(x) = b$:

$$u = kx + U(y), \qquad U(y) = \begin{cases} C_1\exp\Big(-\dfrac{k}{a}y\Big) - \dfrac{b}{2k}y^2 + C_2y + C_3 & \text{при } \ k \neq 0, \\ -\dfrac{b}{6a}y^3 + C_1y^2 + C_2y + C_3 & \text{при } \ k = 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3, k — произвольные постоянные.

4°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(x) = bx + c$:

$$u(x,y) = xF(y) + G(y),$$

где функции $F = F(y)$ и $G = G(y)$ описываются системой автономных ОДУ:

$$(F'_y)^2 - FF''_{yy} = aF'''_{yyy} + b, \qquad F'_yG'_y - FG''_{yy} = aG'''_{yyy} + c.$$

5°. Точные решения при $f(x) = -bx^{-5/3}$:

$$u(x,y) = \frac{6ax}{y + \varphi(x)} \pm \frac{\sqrt{3b}}{x^{1/3}}[y + \varphi(x)],$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

6°. Точные решения при $f(x) = bx^{-1/3} - cx^{-5/3}$:

$$u(x,y) = \pm\sqrt{3c}\,z + x^{2/3}\theta(z), \qquad z = yx^{-1/3},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается автономным ОДУ: $\frac{1}{3}(\theta'_z)^2 - \frac{2}{3}\theta\theta''_{zz} = a\theta'''_{zzz} + b$.

7°. Решение с обобщенным разделением переменных при $f(x) = be^{\beta x}$:

$$u(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \frac{b}{2\beta\lambda^2\varphi(x)}e^{\beta x - \lambda y} - a\lambda x + \frac{2a\lambda^2}{\beta}y + \frac{2a\lambda}{\beta}\ln|\varphi(x)|,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, λ — произвольная постоянная.

8°. В табл. 6.2 приведены некоторые другие точные решения уравнения пограничного слоя с градиентом давления.

Таблица 6.2. Точные решения уравнения гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления (b, k, β — произвольные постоянные).

No.	Функция $f(x)$	Вид решения $u = u(x,y)$	ОДУ для функции $U = U(z)$
1	$f(x) = bx^k$	$u = x^{\frac{k+3}{4}}U(z),\ z = x^{\frac{k-1}{4}}y$	$\frac{k+1}{2}(U'_z)^2 - \frac{k+3}{4}UU''_{zz} = aU'''_{zzz} + b$
2	$f(x) = be^{\beta x}$	$u = e^{\frac{1}{4}\beta x}U(z),\ z = e^{\frac{1}{4}\beta x}y$	$\frac{1}{2}\beta(U'_z)^2 - \frac{1}{4}\beta UU''_{zz} = aU'''_{zzz} + b$
3	$f(x) = bx^{-3}$	$u = U(z) + \beta\ln\lvert x\rvert,\ z = y/x$	$-(U'_z)^2 - \beta U''_{zz} = aU'''_{zzz} + b$

9°. Ниже приведены два преобразования, понижающие порядок уравнения пограничного слоя.

Преобразование Мизеса

$$\xi = x, \quad \eta = u, \quad \Phi(\xi,\eta) = u_y, \qquad \text{где} \quad u = u(x,y),$$

приводит к нелинейному УрЧП второго порядка

$$\Phi\Phi_\xi = a\Phi(\Phi\Phi_\eta)_\eta + f(\xi).$$

Преобразование Крокко

$$\xi = x, \quad \zeta = u_y, \quad \Psi(\xi,\zeta) = u_{yy}, \qquad \text{где} \quad u = u(x,y),$$

приводит к нелинейному УрЧП второго порядка

$$\zeta\Psi_\xi = f(\xi)\Psi_\zeta + a\Psi^2\Psi_{\zeta\zeta}.$$

10°. См. также Павловский (1961), Burde (1996), Polyanin & Zaitsev (2012).

9. $\boldsymbol{u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = 0, \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}.}$

Уравнение движения идеальной жидкости. К этому УрЧП сводятся двумерные стационарные уравнения Эйлера (u — функция тока).

1°. Пусть $u(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$u_1 = C_1 u(C_2 x + C_3, C_2 y + C_4) + C_5,$$
$$u_2 = u(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha),$$

где $C_1, \ldots, C_5$ и α — произвольные постоянные, также являются решениями этого уравнения.

2°. Точные решения общего вида, содержащие одну произвольную функцию:

$$u(x,y) = \varphi_1(\xi), \quad \xi = a_1 x + b_1 y;$$
$$u(x,y) = \varphi_2(r), \quad r = \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2};$$

где $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(r)$ — произвольные функции, a_1, b_1, a_2, b_2 — произвольные постоянные.

3°. Любые решения следующих линейных УрЧП:

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{(уравнение Лапласа)}, \\ \Delta u = C & \text{(уравнение Пуассона)}, \\ \Delta u = \lambda u & \text{(уравнение Гельмгольца)}, \\ \Delta u = \lambda u + C & \text{(неоднородное уравнение Гельмгольца)}, \end{array}$$

где C и λ — произвольные постоянные, также являются решениями рассматриваемого уравнения.

Решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ соответствуют безвихревым (потенциальным) решениям исходного уравнения.

4°. В левой части рассматриваемого уравнения стоит якобиан функций u и $v = \Delta u$. Равенство якобиана нулю означает, что эти величины функционально зависимы, т. е. v должна выражаться через u:

$$\Delta u = f(u), \tag{1}$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Любое решение нелинейного УрЧП второго порядка (1) для любой функции $f(u)$ является решением исходного уравнения.

5°. Решения с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,y) = A_1 x^2 + A_2 x + B_1 y^2 + B_2 y + C,$$
$$u(x,y) = A_1 \exp(\lambda x) + A_2 \exp(-\lambda x) + B_1 \exp(\lambda y) + B_2 \exp(-\lambda y) + C,$$
$$u(x,y) = A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda y) + B_2 \cos(\lambda y) + C,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C, λ — произвольные постоянные. Эти решения являются частными случаями решений из п. 3°.

6°. Решения с обобщенным разделением переменных:

$$
\begin{aligned}
&u(x,y) = (Ax+B)e^{-\lambda y} + C,\\
&u(x,y) = \bigl[A_1\sin(\beta x) + A_2\cos(\beta x)\bigr]\bigl[B_1\sin(\lambda y) + B_2\cos(\lambda y)\bigr] + C,\\
&u(x,y) = \bigl[A_1\sin(\beta x) + A_2\cos(\beta x)\bigr]\bigl[B_1\operatorname{sh}(\lambda y) + B_2\operatorname{ch}(\lambda y)\bigr] + C,\\
&u(x,y) = \bigl[A_1\operatorname{sh}(\beta x) + A_2\operatorname{ch}(\beta x)\bigr]\bigl[B_1\sin(\lambda y) + B_2\cos(\lambda y)\bigr] + C,\\
&u(x,y) = \bigl[A_1\operatorname{sh}(\beta x) + A_2\operatorname{ch}(\beta x)\bigr]\bigl[B_1\operatorname{sh}(\lambda y) + B_2\operatorname{ch}(\lambda y)\bigr] + C,\\
&u(x,y) = Ae^{\alpha x+\beta y} + Be^{\gamma x+\lambda y} + C, \qquad \alpha^2+\beta^2 = \gamma^2+\lambda^2,
\end{aligned}
$$

где A, B, C, D, k, β, λ — произвольные постоянные. Эти решения являются частными случаями решений из п. 3°.

7°. Решение:

$$u(x,y) = F(z)x + G(z), \qquad z = y+kx,$$

где k — произвольная постоянная, а функции $F=F(z)$ и $G=G(z)$ описываются автономной системой ОДУ третьего порядка

$$F'_z F''_{zz} - FF'''_{zzz} = 0, \tag{2}$$

$$G'_z F''_{zz} - FG'''_{zzz} = \frac{2k}{(k^2+1)}FF''_{zz}. \tag{3}$$

В результате однократного интегрирования получим систему ОДУ второго порядка

$$(F'_z)^2 - FF''_{zz} = A_1, \tag{4}$$

$$G'_z F'_z - FG''_{zz} = \frac{2k}{k^2+1}\int FF''_{zz}\,dz + A_2, \tag{5}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Автономное уравнение (4) с заменой переменной $Q(F) = (F'_z)^2$ сводится к линейному ОДУ первого порядка.

Общее решение ОДУ (2) (или (4)) можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&F(z) = B_1 z + B_2, && A_1 = B_1^2;\\
&F(z) = B_1\exp(\lambda z) + B_2\exp(-\lambda z), && A_1 = -4\lambda^2 B_1B_2;\\
&F(z) = B_1\sin(\lambda z) + B_2\cos(\lambda z), && A_1 = \lambda^2(B_1^2+B_2^2),
\end{aligned}
$$

где B_1, B_2, λ — произвольные постоянные.

Общее решение ОДУ (3) (или (5)) описывается формулами

$$
\begin{aligned}
&G = C_1\int F\,dz - \int F\Bigl(\int\frac{\psi\,dz}{F^2}\Bigr)dz + C_2,\\
&F = F(z), \qquad \psi = \frac{2k}{k^2+1}\int FF''_{zz}\,dz + A_2,
\end{aligned}
$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

8°. Рассматриваемое УрЧП имеет также точные решения вида

$$\begin{aligned}
&u(x,y) = x^a U(\zeta), && \zeta = y/x;\\
&u(x,y) = e^{ax} V(\rho), && \rho = bx + cy;\\
&u(x,y) = W(\zeta) + a\ln|x|, && \zeta = y/x,
\end{aligned}$$

где a, b, c — произвольные постоянные.

6.5.2. Уравнения четвертого порядка

1. $\boldsymbol{u_{tt} + (uu_x)_x + u_{xxxx} = 0.}$

Уравнение Буссинеска. Это уравнение встречается в гидродинамике и некоторых физических приложениях.

1°. Пусть $u(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$u_1 = C_1^2 u(C_1 x + C_2, \pm C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также являются решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= 2C_1 x - 2C_1^2 t^2 + C_2 t + C_3,\\
u(x,t) &= (C_1 t + C_2)x - \frac{1}{12C_1^2}(C_1 t + C_2)^4 + C_3 t + C_4,\\
u(x,t) &= -\frac{(x+C_1)^2}{(t+C_2)^2} + \frac{C_3}{t+C_2} + C_4(t+C_2)^2,\\
u(x,t) &= -\frac{x^2}{t^2} + C_1 t^3 x - \frac{C_1^2}{54} t^8 + C_2 t^2 + \frac{C_4}{t},\\
u(x,t) &= -\frac{(x+C_1)^2}{(t+C_2)^2} - \frac{12}{(x+C_1)^2},\\
u(x,t) &= -3\lambda^2 \cos^{-2}\bigl[\tfrac{1}{2}\lambda(x \pm \lambda t) + C_1\bigr],
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ и λ — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны (обобщает последнее решение из п. 2°):

$$u(x,t) = U(\zeta), \qquad \zeta = x + \lambda t,$$

где функция $U(\zeta)$ описывается ОДУ: $U''_{\zeta\zeta} + U^2 + 2\lambda^2 U + C_1\zeta + C_2 = 0$.

4°. Автомодельное решение:

$$u(x,t) = t^{-1}\theta(z), \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается ОДУ: $\theta''''_{zzzz} + (\theta\theta'_z)'_z + \frac{1}{4}z^2\theta''_{zz} + \frac{7}{4}z\theta'_z + 2\theta = 0$.

5°. Имеются точные решения вида

$$u(x,t) = (x+C)^2F(t) - 12(x+C)^{-2};$$
$$u(x,t) = G(\xi) - 4C_1^2t^2 - 4C_1C_2t, \quad \xi = x - C_1t^2 - C_2t;$$
$$u(x,t) = \frac{1}{t}H(\eta) - \frac{1}{4}\Big(\frac{x}{t} + Ct\Big)^2, \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{t}} - \frac{1}{3}Ct^{3/2};$$
$$u(x,t) = (a_1t + a_0)^2U(\zeta) - \Big(\frac{a_1x + b_1}{a_1t + a_0}\Big)^2, \quad \zeta = x(a_1t + a_0) + b_1t + b_0,$$

где C, C_1, C_2, a_1, a_0, b_1, b_0 — произвольные постоянные.

6°. Уравнение Буссинеска интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Любая быстро убывающая функция $F = F(x,y;t)$ при $x \to +\infty$, удовлетворяющая одновременно двум линейным УрЧП

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0$$

порождает решение уравнения Буссинеска, которое можно представить в виде

$$u = 12\frac{d}{dx}K(x,x;t),$$

где $K(x,y;t)$ является решением линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x,y;t) + F(x,y;t) + \int_x^\infty K(x,s;t)F(s,y;t)\,ds = 0.$$

Время t фигурирует в этом уравнении как параметр.

7°. См. также Захаров & Шабат (1974), Ablowitz & Segur (1981), Clarkson & Kruskal (1989).

2. $\boldsymbol{u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = a\Delta\Delta u, \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}.}$

Двумерное стационарное уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости. Оно выводится из уравнений Навье — Стокса путем перехода от компонент скоростей к функции тока u.

1°. Пусть $u(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$u_1 = -u(y,\, x),$$
$$u_2 = u(C_1x + C_2,\, C_1y + C_3) + C_4,$$
$$u_3 = u(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\, -x\sin\alpha + y\cos\alpha),$$

где C_1, …, C_4 и α — произвольные постоянные, также являются решениями этого уравнения.

2°. Любое решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = C,$$

где C — произвольная постоянная, также является решением рассматриваемого УрЧП (это «невязкие» решения).

3°. Решения с аддитивным разделением переменных:

$$\begin{aligned}
u(y) &= C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4,\\
u(x,y) &= C_1 x^2 + C_2 x + C_3 y^2 + C_4 y + C_5,\\
u(x,y) &= C_1 \exp(-\lambda y) + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 + a\lambda x,\\
u(x,y) &= C_1 \exp(\lambda x) - a\lambda x + C_2 \exp(\lambda y) + a\lambda y + C_3,\\
u(x,y) &= C_1 \exp(\lambda x) + a\lambda x + C_2 \exp(-\lambda y) + a\lambda y + C_3,
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_5$, λ — произвольные постоянные.

4°. Решения с обобщенным разделением переменных:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= A(kx+\lambda y)^3 + B(kx+\lambda y)^2 + C(kx+\lambda y) + D,\\
u(x,y) &= Ae^{-\lambda(y+kx)} + B(y+kx)^2 + C(y+kx) + a\lambda(k^2+1)x + D,\\
u(x,y) &= 6ax(y+\lambda)^{-1} + A(y+\lambda)^3 + B(y+\lambda)^{-1} + C(y+\lambda)^{-2} + D,\\
u(x,y) &= (Ax+B)e^{-\lambda y} + a\lambda x + C,\\
u(x,y) &= \bigl[A\operatorname{sh}(\beta x) + B\operatorname{ch}(\beta x)\bigr]e^{-\lambda y} + \frac{a}{\lambda}(\beta^2+\lambda^2)x + C,\\
u(x,y) &= \bigl[A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)\bigr]e^{-\lambda y} + \frac{a}{\lambda}(\lambda^2-\beta^2)x + C,\\
u(x,y) &= Ae^{\lambda y+\beta x} + Be^{\gamma x} + a\gamma y + \frac{a}{\lambda}\gamma(\beta-\gamma)x + C, \qquad \gamma = \pm\sqrt{\lambda^2+\beta^2},
\end{aligned}$$

где A, B, C, D, k, β, λ — произвольные постоянные.

5°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по x:

$$u(x,y) = F(y)x + G(y),$$

где функции $F = F(y)$ и $G = G(y)$ определяются автономной системой ОДУ четвертого порядка

$$F'_y F''_{yy} - FF'''_{yyy} = aF''''_{yyyy}, \tag{1}$$
$$G'_y F''_{yy} - FG'''_{yyy} = aG''''_{yyyy}. \tag{2}$$

Уравнение (1) имеет следующие частные решения:

$$\begin{aligned}
F &= by + c,\\
F &= 6a(y+b)^{-1},\\
F &= be^{-\lambda y} + a\lambda,
\end{aligned}$$

где b, c, λ — произвольные постоянные.

Пусть $F = F(y)$ — некоторое решение уравнения (1) ($F \not\equiv \mathrm{const}$). Тогда соответствующее общее решение ОДУ (2) можно записать в виде

$$G = \int U\,dy + C_4, \qquad U = C_1U_1 + C_2U_2 + C_3\Bigl(U_2\int\frac{U_1}{\Phi}\,dy - U_1\int\frac{U_2}{\Phi}\,dy\Bigr),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, и

$$U_1 = \begin{cases} F''_{yy} & \text{при } F''_{yy} \not\equiv 0, \\ F & \text{при } F''_{yy} \equiv 0, \end{cases} \qquad U_2 = U_1 \int \frac{\Phi\, dy}{U_1^2}, \qquad \Phi = \exp\Bigl(-\frac{1}{a}\int F\, dy\Bigr).$$

6°. Имеется точное решение вида (обобщает решение из п. 5°):

$$u(x, y) = F(z)x + G(z), \qquad z = y + kx, \qquad k \text{ — любое число.}$$

7°. Автомодельное решение:

$$u = \int F(z)\, dz + C_1, \qquad z = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{x}{y}\Bigr),$$

где функция F описывается автономным ОДУ первого порядка $3a(F'_z)^2 - 2F^3 + 12aF^2 + C_2F + C_3 = 0$ (C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные).

8°. Имеется точное решение вида (обобщает решение из п. 7°):

$$u = C_1 \ln|x| + \int V(z)\, dz + C_2, \qquad z = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{x}{y}\Bigr).$$

► *Больше точных решений нелинейных уравнений математической физики и других нелинейных УрЧП можно найти в специализированных справочниках Полянин & Зайцев (2017), Polyanin & Zaitsev (2004, 2012). Основные методы поиска точных решений нелинейных УрЧП второго и более высоких порядков описаны, например, в книгах Овсянников (1978), Полянин & Журов (2020), Полянин, Зайцев, Журов (2005), Galaktionov & Svirshchevskii (2007), Ibragimov (1994), Polyanin & Zaitsev (2012).*

Литература к главе 6

Гурса Э. *Курс математического анализа, т. 3, часть 1.* М.-Л.: Гос. тех.-теор. издат, 1933.

Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1982, т. 22, № 6, с. 1393–1400.

Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов. Метод обратной задачи.* М.: Наука, 1980.

Захаров В. Е., Шабат А. Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. *Функц. анализ и его прил.*, 1974, т. 8, № 3, с. 43–53.

Калоджеро Ф., Дегасперис А. *Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений.* М.: Мир, 1985.

Кудряшов Н. А. *Методы нелинейной математической физики.* Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2010.

Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978.

Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1961, т. 1, № 2, с. 280–294.

Полянин А. Д., Журов А. И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики.* М.: Институт проблем механики РАН, 2020.

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. *Нелинейные уравнения математической физики* (*части 1 и 2*). М.: Юрайт, 2017.

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье — Стокса в плоском случае. *Прикл. мат. и техн. физика*, 1960, № 1, с. 83–90.

Хабиров С. В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа — Ампера. *Матем. сборник*, 1990, т. 181, № 12, с. 1607–1622.

Ablowitz M. J., Segur H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981.

Aksenov A. V., Polyanin A. D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, No. 4, 345.

Andreev V. K., Kaptsov O. V., Pukhnachov V. V., Rodionov A. A. *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

Bullough R. K., Caudrey P. J. (eds.) *Solitons*. Berlin: Springer–Verlag, 1980.

Burde G. I. New similarity reductions of the steady-state boundary-layer equations. *J. Physica A: Math. Gen.,* 1996, Vol. 29, No. 8, pp. 1665–1683.

Cariello F., Tabor M. Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations. *Physica D*, 1989, Vol. 39, No. 1, pp. 77–94.

Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.

Clarkson P. A., Kruskal M. D. New similarity reductions of the Boussinesq equation. *J. Math. Phys.*, 1989, Vol. 30, No. 10, pp. 2201–2213.

Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London: Academic Press, 1982.

Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 1967, Vol. 19, No. 19, pp. 1095–1097.

Grundland A. M., Infeld E. A family of non-linear Klein–Gordon equations and their solutions. *J. Math. Phys.,* 1992, Vol. 33, pp. 2498–2503.

Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solutions. *Phys. Rev. Lett.,* 1971, Vol. 27, pp. 1192–1194.

Ibragimov N. H. (ed.) *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*. Boca Raton: CRC Press, 1994.

Kawahara T., Tanaka M. Interactions of traveling fronts: an exact solution of a nonlinear diffusion equation. *Phys. Lett.,* 1983, Vol. 97, No. 8, pp. 311–314.

Kersner R. On some properties of weak solutions of quasilinear degenerate parabolic equations. *Acta Math. Academy of Sciences, Hung.,* 1978, Vol. 32, No. 3–4, pp. 301–330.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton–London: Chapman & Hall/CRC Press, 2004 (1st ed.) and 2012 (2nd ed.).

Polyanin A. D., Zhurov A. I. *Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs*. Boca Raton–London: CRC Press, 2021.

Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. *Blow-Up in Problems for Quasilinear Parabolic Equations*. Berlin: Walter de Gruyter, 1995.

Svirshchevskii S. R. Lie–Bäcklund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations. *Phys. Lett. A*, 1995, Vol. 199, pp. 344–348.

7. Системы уравнений с частными производными

Предварительные замечания. В данной главе описаны точные решения различных линейных и нелинейных систем, состоящих из двух связанных уравнений с частными производными первого и второго порядков, а также некоторых нелинейных систем УрЧП общего вида. Рассматриваются также редукции, приводящие к одному ОДУ, к системам ОДУ, к одному УрЧП или к двум независимым УрЧП.

7.1. Системы двух УрЧП первого порядка

7.1.1. Линейные системы двух УрЧП первого порядка

1. $\boldsymbol{u_t = au_x + f_1(t)u + g_1(t)w, \quad w_t = aw_x + f_2(t)u + g_2(t)w.}$

Линейная однородная система УрЧП первого порядка с переменными коэффициентами.

Общее решение:

$$u = \varphi_1(t)U(x+at) + \varphi_2(t)W(x+at),$$
$$w = \psi_1(t)U(x+at) + \psi_2(t)W(x+at),$$

где $U = U(z)$ и $W = W(z)$ — произвольные функции, а пары функций $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ являются линейно независимыми (фундаментальными) решениями линейной однородной системы ОДУ первого порядка

$$\varphi'_t = f_1(t)\varphi + g_1(t)\psi, \qquad \psi'_t = f_2(t)\varphi + g_2(t)\psi.$$

2. $\boldsymbol{u_t = a(t)u_x + f_1(t)u + g_1(t)w + h_1(t),}$
$\boldsymbol{w_t = a(t)w_x + f_2(t)u + g_2(t)w + h_2(t).}$

Линейная неоднородная система УрЧП первого порядка с переменными коэффициентами.

Общее решение:

$$u = \varphi_1(t)U(z) + \varphi_2(t)W(z) + u_0(t), \qquad z = x + \int a(t)\,dt,$$
$$w = \psi_1(t)U(z) + \psi_2(t)W(z) + w_0(t),$$

где $U = U(z)$ и $W = W(z)$ — произвольные функции, пары функций $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ являются линейно независимыми (фундаментальными) решениями линейной однородной системы ОДУ первого порядка

$$\varphi_t' = f_1(t)\varphi + g_1(t)\psi, \qquad \psi_t' = f_2(t)\varphi + g_2(t)\psi.$$

а $u_0 = u_0(t)$, $w_0 = w_0(t)$ — любое решение линейной неоднородной системы ОДУ

$$u_0' = f_1(t)u_0 + g_1(t)w_0 + h_1(t), \qquad w_0' = f_2(t)u_0 + g_2(t)w_0 + h_2(t).$$

7.1.2. Нелинейные системы вида $u_x = F(u,w)$, $w_t = G(u,w)$

Предварительные замечания. Такие системы уравнений возникают в теории химических реакторов, теории массопереноса в пористых средах и хроматографии.

Отметим, что более общие системы УрЧП первого порядка

$$u_\tau + a_1 u_\xi = F(u,w), \qquad w_\tau + a_2 w_\xi = G(u,w),$$

описывающие конвективный массоперенос в двухкомпонентной среде с объемной химической реакцией, где диффузией обоих компонентов можно пренебречь, сводится к рассматриваемой системе путем перехода от ξ и τ к характеристическим переменным x и t, которые определяются так:

$$x = \frac{\xi - a_2\tau}{a_1 - a_2}, \qquad t = \frac{\xi - a_1\tau}{a_2 - a_1} \qquad (a_1 \neq a_2).$$

Если первая (соответственно вторая) компонента неподвижна, то $a_1 = 0$ (соответственно, $a_2 = 0$).

Рассматриваемые системы УрЧП инвариантны относительно переносов по независимым переменным и, следовательно, допускают решения типа бегущей волны: $u = u(kx - \lambda t)$, $w = w(kx - \lambda t)$. Такие решения, а также вырожденные решения, когда одна из искомых функций тождественно равна нулю или постоянна, в дальнейшем не рассматриваются.

Ниже $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$, $r(z)$ — произвольные функции своего аргумента, $z = z(u,w)$. Системы УрЧП расположены в порядке усложнения их аргументов.

1. $\quad u_x = auw, \qquad w_t = buw.$

Общее решение:

$$u = -\frac{\psi_t'(t)}{a\varphi(x) + b\psi(t)}, \qquad w = -\frac{\varphi_x'(x)}{a\varphi(x) + b\psi(t)},$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции.

2. $\quad u_x = auw, \qquad w_t = bu^k.$

Общее решение ($\varphi(x)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции):

$$u = \left[\frac{1}{b}\psi_t'(t)E(x)\right]^{1/k}\left[\psi(t) + \frac{1}{2}ak\int E(x)\,dx\right]^{-2/k},$$

$$w = \varphi(x) - E(x)\left[\psi(t) + \frac{1}{2}ak\int E(x)\,dx\right]^{-1}, \qquad E(x) = \exp\left[ak\int \varphi(x)\,dx\right].$$

3. $\boldsymbol{u_x = auw^n, \quad w_t = bu^k w.}$

Общее решение:

$$u = \left(\frac{-\psi'_t(t)}{bn\psi(t) - ak\varphi(x)} \right)^{1/k}, \qquad w = \left(\frac{\varphi'_x(x)}{bn\psi(t) - ak\varphi(x)} \right)^{1/n},$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции.

4. $\boldsymbol{u_x = au^{1-k} w^n, \quad w_t = bu^k w^{1-n}.}$

Преобразование $U = u^k$, $W = w^n$ приводит к линейной системе УрЧП с постоянными коэффициентами:

$$U_x = akW, \qquad W_t = bnU.$$

Исключив функцию W, получим линейное уравнение гиперболического типа $U_{xt} = abknU$.

5. $\boldsymbol{u_x = aw, \quad w_t = be^{\lambda u}.}$

Исключая w, получим *уравнение Лиувилля*

$$u_{xt} = abe^{\lambda u},$$

общее решение которого имеет вид

$$u = \frac{1}{\lambda} \bigl[\varphi(x) + \psi(y)\bigr] - \frac{2}{\lambda} \ln \left| k \int \exp\bigl[\varphi(x)\bigr]\, dx + \frac{ab\lambda}{2k} \int \exp\bigl[\psi(y)\bigr]\, dy \right|,$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольные функции, k — произвольная постоянная.

6. $\boldsymbol{u_x = uf(w), \quad w_t = u^k g(w).}$

1°. Преобразование зависимых переменных

$$U = u^k, \qquad W = \int \frac{dw}{g(w)} \tag{1}$$

приводит к более простой системе УрЧП

$$U_x = \Phi(W)U, \qquad W_t = U, \tag{2}$$

где функция $\Phi(W)$ определяется параметрически формулами

$$\Phi = kf(w), \qquad W = \int \frac{dw}{g(w)}, \tag{3}$$

в которых w играет роль параметра. Заменив U в первом уравнении системы (2) левой частью второго уравнения, приходим к УрЧП второго порядка для W:

$$W_{xt} = \Phi(W)W_t.$$

Интегрирование по t дает

$$W_x = \int \Phi(W)\,dW + \theta(x), \tag{4}$$

где $\theta(x)$ — произвольная функция.

Возвращаясь в (4) к исходной переменной w по формулам (1) и (3), получим

$$w_x = kg(w)\int \frac{f(w)}{g(w)}\,dw + \theta(x)g(w). \tag{5}$$

Первый интеграл (5) можно рассматривать как ОДУ первого порядка относительно x. При нахождении ее общего решения константу интегрирования C следует заменить произвольной функцией времени $\psi(t)$, так как w зависит от x и t.

2°. Частному случаю $\theta(x) = \mathrm{const}$ в (5) соответствуют специальные решения вида

$$w = w(z), \quad u = [\psi'_t(t)]^{1/k} v(z), \quad z = x + \psi(t)$$

содержащие одну произвольную функцию $\psi(t)$, где штрих обозначает производную. Функции $w(z)$ и $v(z)$ описываются автономной системой ОДУ

$$v'_z = f(w)v, \qquad w'_z = g(w)v^k,$$

общее решение которой можно записать в неявном виде

$$\int \frac{dw}{g(w)[kF(w) + C_1]} = z + C_2, \qquad v = [kF(w) + C_1]^{1/k}, \qquad F(w) = \int \frac{f(w)}{g(w)}\,dw.$$

7. $\boldsymbol{u_x = f(a_1u + b_1w), \quad w_t = g(a_2u + b_2w).}$

Будем считать, что $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\Delta}[b_2\varphi(x) - b_1\psi(t)], \qquad w = \frac{1}{\Delta}[a_1\psi(t) - a_2\varphi(x)],$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются автономными ОДУ

$$\frac{b_2}{\Delta}\varphi'_x = f(\varphi), \qquad \frac{a_1}{\Delta}\psi'_t = g(\psi).$$

Интегрируя, получим

$$\frac{b_2}{\Delta}\int \frac{d\varphi}{f(\varphi)} = x + C_1, \qquad \frac{a_1}{\Delta}\int \frac{d\psi}{g(\psi)} = t + C_2.$$

8. $\boldsymbol{u_x = f(au + bw), \quad w_t = g(au + bw).}$

Точное решение:

$$u = b(k_1x - \lambda_1t) + y(\xi), \qquad w = -a(k_1x - \lambda_1t) + z(\xi), \qquad \xi = k_2x - \lambda_2t,$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные, а функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$k_2 y'_\xi + bk_1 = f(ay + bz), \qquad -\lambda_2 z'_\xi + a\lambda_1 = g(ay + bz).$$

Эта система имеет простое частное решение $y = y_0$, $z = z_0$, где y_0 и z_0 — некоторые константы.

9. $\boldsymbol{u_x = f(au - bw), \quad w_t = ug(au - bw) + wh(au - bw) + r(au - bw).}$

Здесь $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$, $r(z)$ — произвольные функции.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \varphi(t) + b\theta(t)x, \qquad w = \psi(t) + a\theta(t)x,$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ описываются смешанной системой, которая содержит одно алгебраическое (трансцендентное) уравнение и два ОДУ:

$$\begin{aligned} b\theta &= f(a\varphi - b\psi), \\ a\theta'_t &= b\theta g(a\varphi - b\psi) + a\theta h(a\varphi - b\psi), \\ \psi'_t &= \varphi g(a\varphi - b\psi) + \psi h(a\varphi - b\psi) + r(a\varphi - b\psi). \end{aligned}$$

10. $\boldsymbol{u_x = f(au - bw) + cw,}$
$\boldsymbol{w_t = ug(au - bw) + wh(au - bw) + r(au - bw).}$

Здесь $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$, $r(z)$ — произвольные функции.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \varphi(t) + b\theta(t)e^{\lambda x}, \quad w = \psi(t) + a\theta(t)e^{\lambda x}, \quad \lambda = ac/b,$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ описываются смешанной системой, которая содержит одно алгебраическое (трансцендентное) уравнение и два ОДУ:

$$\begin{aligned} &f(a\varphi - b\psi) + c\psi = 0, \\ &\psi'_t = \varphi g(a\varphi - b\psi) + \psi h(a\varphi - b\psi) + r(a\varphi - b\psi), \\ &a\theta'_t = b\theta g(a\varphi - b\psi) + a\theta h(a\varphi - b\psi). \end{aligned}$$

11. $\boldsymbol{u_x = e^{\lambda u} f(\lambda u - \sigma w), \quad w_t = e^{\sigma w} g(\lambda u - \sigma w).}$

Точное решение:

$$u = y(\xi) - \frac{1}{\lambda}\ln(C_1 t + C_2), \quad w = z(\xi) - \frac{1}{\sigma}\ln(C_1 t + C_2), \quad \xi = \frac{x + C_3}{C_1 t + C_2},$$

где функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$y'_\xi = e^{\lambda y} f(\lambda y - \sigma z), \qquad -C_1 \xi z'_\xi - (C_1/\sigma) = e^{\sigma z} g(\lambda y - \sigma z).$$

12. $\boldsymbol{u_x = u^k f(u^n w^m), \quad w_t = w^s g(u^n w^m).}$

Автомодельное решение при $s \neq 1$ и $n \neq 0$:

$$u = t^{\frac{m}{n(s-1)}} y(\xi), \quad w = t^{-\frac{1}{s-1}} z(\xi), \quad \xi = xt^{\frac{m(k-1)}{n(s-1)}},$$

где функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$y'_\xi = y^k f(y^n z^m), \qquad m(k-1)\xi z'_\xi - nz = n(s-1)z^s g(y^n z^m).$$

13. $\boldsymbol{u_x = u^k f(u^n w^m), \quad w_t = wg(u^n w^m).}$

1°. Точное решение:

$$u = e^{mt} y(\xi), \quad w = e^{-nt} z(\xi), \quad \xi = e^{m(k-1)t} x,$$

где функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$y'_\xi = y^k f(y^n z^m), \qquad m(k-1)\xi z'_\xi - nz = zg(y^n z^m).$$

2°. При $k \neq 1$ имеется точное решение

$$u = x^{-\frac{1}{k-1}} \varphi(\zeta), \quad w = x^{\overline{m(k-1)}^{\,n}} \psi(\zeta), \quad \zeta = t + a\ln|x|,$$

где a — произвольная постоянная, а функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ описываются системой ОДУ

$$a\varphi'_\zeta + \frac{1}{1-k}\varphi = \varphi^k f(\varphi^n \psi^m), \qquad \psi'_\zeta = \psi g(\varphi^n \psi^m).$$

14. $\boldsymbol{u_x = uf(u^n w^m), \quad w_t = wg(u^n w^m).}$

Точное решение:

$$u = e^{m(kx-\lambda t)} y(\xi), \quad w = e^{-n(kx-\lambda t)} z(\xi), \quad \xi = \alpha x - \beta t,$$

где k, α, β, λ — произвольные постоянные, а функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\alpha y'_\xi + kmy = yf(y^n z^m), \qquad -\beta z'_\xi + n\lambda z = zg(y^n z^m).$$

15. $\boldsymbol{u_x = uf(u^n w^m), \quad w_t = wg(u^k w^s).}$

Пусть $\Delta = sn - km \neq 0$.

Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \bigl[\varphi(x)\bigr]^{s/\Delta} \bigl[\psi(t)\bigr]^{-m/\Delta}, \qquad w = \bigl[\varphi(x)\bigr]^{-k/\Delta} \bigl[\psi(t)\bigr]^{n/\Delta},$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются автономными ОДУ

$$\frac{s}{\Delta}\varphi'_x = \varphi f(\varphi), \qquad \frac{n}{\Delta}\psi'_t = \psi g(\psi).$$

Интегрируя, получим

$$\frac{s}{\Delta}\int \frac{d\varphi}{\varphi f(\varphi)} = x + C_1, \qquad \frac{n}{\Delta}\int \frac{d\psi}{\psi g(\psi)} = t + C_2.$$

16. $\boldsymbol{u_x = au\ln u + uf(u^n w^m), \quad w_t = wg(u^n w^m).}$

Точное решение:

$$u = \exp\bigl(Cme^{ax}\bigr) y(\xi), \quad w = \exp\bigl(-Cne^{ax}\bigr) z(\xi), \quad \xi = kx - \lambda t,$$

где C, k, λ — произвольные постоянные, а функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$ky'_\xi = ay\ln y + yf(y^n z^m), \qquad -\lambda z'_\xi = zg(y^n z^m).$$

17. $\boldsymbol{u_x = uf(au^n + bw), \quad w_t = u^k g(au^n + bw).}$

Точное решение:

$$u = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{n-k}}\theta(x), \qquad w = \varphi(x) - \frac{a}{b}(C_1 t + C_2)^{\frac{n}{n-k}}[\theta(x)]^n,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $\theta = \theta(x)$ и $\varphi = \varphi(x)$ описываются смешанной системой дифференциально-алгебраических уравнений

$$\theta'_x = \theta f(b\varphi), \qquad \theta^{n-k} = \frac{b(k-n)}{aC_1 n}g(b\varphi).$$

7.1.3. Системы газодинамического типа, линеаризуемые преобразованием годографа

1. $\boldsymbol{u_t = w_x, \quad w_t = -uu_x.}$

Уравнения стационарного околозвукового плоскопараллельного течения газа. Это частный случай системы 7.1.3.6, где независимые переменные играют роль пространственных переменных x и $t = y$.

1°. Точные решения:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{(x+C_1)^2}{(t+C_2)^2}, & w &= \frac{2}{3}\frac{(x+C_1)^3}{(t+C_2)^3} + C_3, \\ u &= -\frac{1}{C_1^2}x^2\wp(C_1 t + C_2), & w &= -\frac{1}{3C_1}x^3\wp'(C_1 t + C_2) + C_3, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, $\wp(z) = \wp(z, 0, 4)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, штрих обозначает производную по аргументу.

3°. Решение:

$$u = u(z), \quad w = -C\ln t - \int zu'_z(z)\,dz, \quad z = \frac{x}{t},$$

где C — произвольная постоянная, а функция u описывается ОДУ первого порядка $(z^2 + u)u'_z = C$.

4°. Рассматриваемая система линеаризуется с помощью преобразования годографа

$$t_u - x_w = 0, \qquad x_u + ut_w = 0, \tag{1}$$

где u и w принимаются за независимые переменные, а x и t — за зависимые переменные. Исключая x из (1), получим линейное УрЧП второго порядка

$$t_{uu} + ut_{ww} = 0. \tag{2}$$

Это уравнение допускает полиномиальные решения по переменной w вида $t = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k(u) w^k$. Некоторые полиномиальные решения уравнения (2) и соответствующие решения системы (1) приведены ниже:

$$\begin{aligned}
&a)\quad t = C_1 uw + C_2 u + C_3 w + C_4,\\
&\qquad x = C_1(\tfrac{1}{2}w^2 - \tfrac{1}{3}u^3) + C_2(w - \tfrac{1}{2}u^2) + C_5;\\
&b)\quad t = C_1(w^2 - \tfrac{1}{3}u^3) + C_2 uw + C_3 u + C_4 w + C_5,\\
&\qquad x = -C_1 u^2 w + C_2(\tfrac{1}{2}w^2 - \tfrac{1}{3}u^3) + C_3 w - \tfrac{1}{2}C_4 u^2 + C_6;\\
&c)\quad t = C_1(w^3 - u^3 w) + C_2 uw + C_3 u + C_4 w + C_5,\\
&\qquad x = C_1(\tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{3}{2}u^2 w^2) + C_2(\tfrac{1}{2}w^2 - \tfrac{1}{3}u^3) + C_3 w - \tfrac{1}{2}C_4 u^2 + C_6,
\end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные. Эти решения определяют точные решения исходной системы в неявной форме.

2. $u_t - w_x = 0, \quad w_t - [f(u)]_x = 0.$

Частный случай системы 7.1.3.6. Данная система описывает нелинейные одномерные продольные колебания упругого стержня, где u — деформация, w — скорость деформации, $f(u)$ — напряжение. Условие $f'(u) > 0$ выражает гиперболичность системы, где штрих обозначает производную по u.

1°. Тривиальные решения:

$$u = C_1, \quad w = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Автомодельные решения, зависящие от отношения независимых переменных x/t:

$$\begin{aligned}
w - \int \sqrt{f'(u)}\,du &= C_1, \quad \sqrt{f'(u)} = -\frac{x}{t};\\
w + \int \sqrt{f'(u)}\,du &= C_2, \quad \sqrt{f'(u)} = \frac{x}{t},
\end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точные решения в неявном виде:

$$\begin{aligned}
w - \int \sqrt{f'(u)}\,du &= C_1, \quad x + t\sqrt{f'(u)} = \Phi_1(u);\\
w + \int \sqrt{f'(u)}\,du &= C_2, \quad x - t\sqrt{f'(u)} = \Phi_2(u),
\end{aligned}$$

где $\Phi_1(u)$ и $\Phi_2(u)$ — произвольные функции, C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Эти решения описывают простые волны Римана и характеризуются функциональной связью между неизвестными $u = u(w)$. В частных случаях $\Phi_m(w) \equiv 0$ эти формулы переходят в автомодельные решения из п. 2°.

4°. Систему можно линеаризовать, используя преобразование годографа (подробности см. в п. 5° системы 7.1.3.6). В результате получим

$$t_u - x_w = 0, \qquad x_u - f'(u)t_w = 0, \tag{1}$$

где u и w рассматриваются как независимые переменные, а x и t — как зависимые переменные.

Исключая x из (1), имеем

$$t_{uu} = f'(u)t_{ww}. \tag{2}$$

Это линейное УрЧП второго порядка допускает полиномиальные решения по w: $t = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k(u)w^k$. Некоторые полиномиальные решения уравнения (2) и соответствующие решения системы (1) приведены ниже:

$a)$ $t = C_1uw + C_2u + C_3w + C_4,$

$$x = \tfrac{1}{2}C_1w^2 + C_2w + (C_1u + C_3)f(u) - C_1\int f(u)\,du + C_5;$$

$b)$ $t = C_1w^2 + C_2uw + C_3w + C_4u + 2C_1\int f(u)\,du + C_5,$

$$x = 2C_1f(u)w + \tfrac{1}{2}C_2w^2 + C_4w + (C_2u + C_3)f(u) - C_2\int f(u)\,du + C_6;$$

$c)$ $t = C_1w^3 + C_2uw + C_3u + C_4w + 6C_1w\int f(u)\,du + C_5,$

$$x = 3C_1w^2f(u) + \tfrac{1}{2}C_2w^2 + C_3w + \int\Big[C_2u + C_4 + 6C_1\int f(u)\,du\Big]f'_u(u)\,du + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

5°. Исключение w из исходной системы приводит к нелинейному волновому уравнению вида 6.2.2.11:

$$u_{tt} = [f'(u)u_x]_x.$$

3. $\boldsymbol{u_t + uu_x + bw_x = 0, \qquad w_t + uw_x + wu_x = 0.}$

Уравнения мелкой воды. Частный случай уравнения 7.1.3.4 при $n = 2$ и $a = \frac{1}{2}b$, где u — усредненная горизонтальная скорость, w — высота уровня воды, b — ускорение свободного падения.

4. $\boldsymbol{u_t + uu_x + anw^{n-2}w_x = 0, \qquad w_t + wu_x + uw_x = 0.}$

Специальный случай системы 7.1.3.5 при $p(w) = aw^n + b$. Описывает *одномерное политропическое течение идеального газа*, где u — скорость газа, w — плотность газа.

Для $n \neq 1$ исходную систему УрЧП часто записывают в виде

$$u_t + uu_x + \frac{2}{n-1}cc_x = 0, \qquad c_t + uc_x + \frac{n-1}{2}cu_x = 0, \tag{1}$$

где $c = \sqrt{p'(w)} = \sqrt{anw^{n-1}}$ — скорость звука.

1°. Пусть $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемой системы. Тогда пара функций

$$u_1 = B_1^{n-1} u(B_1^{1-n} B_2 x + B_1^{1-n} B_2 B_3 t + B_4,\ B_2 t + B_5) - B_3,$$
$$w_1 = B_1^2 w(B_1^{1-n} B_2 x + B_1^{1-n} B_2 B_3 t + B_4,\ B_2 t + B_5),$$

где $B_1, \ldots, B_5$ — произвольные постоянные, также является решением этой системы.

2°. Тривиальные решения:

$$u = B_1, \quad w = B_2,$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельные решения, зависящие от отношения зависимых переменных x/t:

$$u = \frac{2}{n+1}\frac{x}{t} + B_1, \quad c = \frac{n-1}{n+1}\frac{x}{t} - B_1, \quad c = \sqrt{anw^{n-1}};$$
$$u = \frac{2}{n+1}\frac{x}{t} + B_2, \quad c = B_2 - \frac{n-1}{n+1}\frac{x}{t}, \quad c = \sqrt{anw^{n-1}},$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные.

Замечание 7.1. *Решения из пунктов* 2° *и* 3°, *которые соответствующим образом «склеены» вдоль прямых* $x/t = \mathrm{const}$, *позволяют строить решения многих задач газовой динамики.*

4°. Автомодельные решения более общего вида:

$$u = t^{k(1-n)} U(z), \quad w = t^{-2k} W(z), \quad z = t^{nk-k-1} x,$$

где k — произвольная постоянная а функции $U(z)$ и $W(z)$ описываются системой ОДУ

$$k(1-n)U + (nk-k-1)zU'_z + UU'_z + anW^{n-2}W'_z = 0,$$
$$-2kW + (nk-k-1)zW'_z + WU'_z + UW'_z = 0.$$

5°. Точные решения в неявной форме:

$$u = \frac{2}{n-1}c + B_1, \quad x - t\Bigl(\frac{n+1}{n-1}c + B_1\Bigr) = \Phi_1(w), \quad c = \sqrt{anw^{n-1}};$$
$$u = -\frac{2}{n-1}c - B_2, \quad x + t\Bigl(\frac{n+1}{n-1}c + B_2\Bigr) = \Phi_2(w), \quad c = \sqrt{anw^{n-1}},$$

где $\Phi_m(w)$ — произвольные функции, а B_m — произвольные постоянные ($m = 1,\ 2$). Эти решения описывают *простые волны Римана* и характеризуются функциональной связью между неизвестными функциями $u = u(w)$. В частных случаях $\Phi_m(w) \equiv 0$ эти формулы переходят в автомодельные решения из п. 3°.

6°. При $n = 3$ общее решение системы (1) можно представить в неявной форме

$$x = (u+c)t + F_1(u+c),$$
$$x = (u-c)t + F_2(u-c),$$

где $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ — произвольные функции.

7°. Рассматриваемую систему можно линеаризовать с помощью преобразования годографа (подробности см. в п. 5° системы 7.1.3.6):

$$ut_w - x_w - anw^{n-2}t_u = 0, \qquad wt_w - ut_u + x_u = 0. \tag{2}$$

Здесь в качестве независимых переменных приняты u и w, а в качестве искомых функций — x и t. Для произвольного n общее решение системы (2) выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса.

5. $\boldsymbol{u_t + uu_x + \frac{1}{w}[f(w)]_x = 0, \qquad w_t + wu_x + uw_x = 0.}$

Специальный случай системы 7.1.3.6. Данная система описывает *одномерные баротропные течения идеального сжимаемого газа*, где u — скорость газа, w — плотность газа, $f(w)$ — давление. Скорость звука определяется выражением $c = \sqrt{f'(w)}$, где штрих обозначает производную, а $c > 0$ указывает на гиперболичность системы.

1°. Пусть $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемой системы. Тогда пара функций

$$u_1 = u(C_1x + C_1C_2t + C_3,\ C_1t + C_4) - C_2, \qquad w_1 = w(C_1x + C_1C_2t + C_3,\ C_1t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также является решением этой системы.

2°. Тривиальные решения:

$$u = C_1, \qquad w = C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. Решение:

$$u = \frac{x + C_1}{t + C_2}, \qquad w = \frac{C_3}{t + C_2},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

4°. Автомодельные решения, зависящие от отношения независимых переменных x/t, в неявной форме:

$$u = \int \sqrt{f'(w)}\,\frac{dw}{w} + A_1, \qquad \int \sqrt{f'(w)}\,\frac{dw}{w} + \sqrt{f'(w)} + A_1 = \frac{x}{t};$$
$$u = -\int \sqrt{f'(w)}\,\frac{dw}{w} - A_2, \qquad \int \sqrt{f'(w)}\,\frac{dw}{w} + \sqrt{f'(w)} + A_2 = -\frac{x}{t},$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Замечание 7.2. *Решения из пп. 2° и 4°, которые соответствующим образом «склеены» вдоль прямых $x/t = \mathrm{const}$, позволяют строить решения многих задач газовой динамики и, в частности, позволяют получать решения задачи о распаде произвольного разрыва.*

5°. Решение:

$$u = C_1 t + C_2 + \theta(z), \quad w = \frac{C_3}{\theta(z)}, \quad z = x - \tfrac{1}{2} C_1 t^2 - C_2 t,$$

где функция $\theta = \theta(z)$ определяется неявно

$$C_1 z + \frac{1}{2}\theta^2 - \int g\Big(\frac{C_3}{\theta}\Big)\frac{d\theta}{\theta} = C_4, \qquad g(w) = f'(w),$$

C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

6°. Точные решения в неявной форме:

$$u = \int \sqrt{f'(w)}\,\frac{dw}{w} + A_1, \qquad x - t\Big[\int \sqrt{f'(w)}\,\frac{dw}{w} + \sqrt{f'(w)} + A_1\Big] = \Phi_1(w);$$
$$u = -\int \sqrt{f'(w)}\,\frac{dw}{w} - A_2, \quad x + t\Big[\int \sqrt{f'(w)}\,\frac{dw}{w} + \sqrt{f'(w)} + A_2\Big] = \Phi_2(w),$$

где $\Phi_1(w)$ и $\Phi_2(w)$ — произвольные функции, A_1 и A_2 — произвольные постоянные. Эти решения описывают *простые волны Римана* и характеризуются функциональной связью между неизвестными функциями $u = u(w)$. В частных случаях $\Phi_m(w) \equiv 0$ эти формулы переходят в автомодельные решения из п. 4°.

7°. Исходную систему можно линеаризовать с помощью преобразования годографа (подробности см. в п. 5° системы 7.1.3.6).

6. $\boldsymbol{f_1(u,w)u_t + g_1(u,w)w_t + h_1(u,w)u_x + k_1(u,w)w_x = 0,}$
$\boldsymbol{f_2(u,w)u_t + g_2(u,w)w_t + h_2(u,w)u_x + k_2(u,w)w_x = 0.}$

1°. Пусть $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемой системы. Тогда пара функций

$$u_1 = u(C_1 x + C_2,\, C_1 t + C_3), \qquad w_1 = w(C_1 x + C_2,\, C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также является решением этой системы.

2°. Для любых функций $f_j(u,w)$, $g_j(u,w)$, $h_j(u,w)$, $k_j(u,w)$ ($j = 1,\, 2$) рассматриваемая система допускает тривиальные решения

$$u = C_1, \qquad w = C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. Система допускает автомодельные решения вида

$$u = u(\xi), \qquad w = w(\xi), \qquad \xi = x/t.$$

4°. Ищем точные решения, которые обобщают решения из п. 3° и характеризуются функциональной связью между неизвестными величинами:

$$w = w(u). \tag{1}$$

Подставив (1) в исходную систему, получим два уравнения для одной функции $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned}(f_1 + g_1 w'_u)u_t + (h_1 + k_1 w'_u)u_x = 0,\\ (f_2 + g_2 w'_u)u_t + (h_2 + k_2 w'_u)u_x = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Соотношение (1) необходимо выбирать так, чтобы уравнения (2) были совместны. Это условие приводит к следующему нелинейному ОДУ первого порядка для $w(u)$:

$$(g_1k_2 - g_2k_1)(w'_u)^2 + (f_1k_2 + g_1h_2 - f_2k_1 - g_2h_1)w'_u + f_1h_2 - f_2h_1 = 0. \tag{3}$$

Рассматривая (3) как квадратное уравнение относительно производной w'_u, потребуем положительности его дискриминанта (что соответствует условию гиперболичности системы):

$$(f_1k_2 + g_1h_2 - f_2k_1 - g_2h_1)^2 - 4(f_1h_2 - f_2h_1)(g_1k_2 - g_2k_1) > 0. \tag{4}$$

В этом случае уравнение (3) имеет два различных действительных корня и эквивалентно двум различным ОДУ первого порядка, разрешенным относительно производной:

$$w'_u = \Lambda_m(u,w), \qquad m = 1,\, 2. \tag{5}$$

Определив решение $w = w(u)$ этого уравнения (каждому $m = 1,\, 2$ отвечает свое решение), подставим его в любое уравнение из (2), чтобы получить квазилинейное УрЧП для $u = u(x,t)$:

$$(f_1 + g_1\Lambda_m)u_t + (h_1 + k_1\Lambda_m)u_x = 0, \qquad w = w(u). \tag{6}$$

Общее решение этого уравнения можно получить методом характеристик (см. разд. 4.2.1).

Решения уравнений (5) и (6) при $m = 1,\, 2$, зависящие от произвольной функции и произвольной константы, называются *простыми волнами Римана*.

5°. Сделаем *преобразование годографа*

$$x = x(u,w), \qquad t = t(u,w). \tag{7}$$

Здесь u и w рассматриваются как независимые переменные, а x и t — как зависимые переменные. Дифференцируя соотношения (7) по x и t (как сложные функции) и исключая частные производные u_t, w_t, u_x и w_x из полученных уравнений, имеем

$$u_t = -Jx_w, \quad w_t = Jx_u, \quad u_x = Jt_w, \quad w_x = -Jt_u, \tag{8}$$

где $J = u_xw_t - u_tw_x$ — якобиан функций $u = u(x,t)$ и $w = w(x,t)$. Заменив в исходной системе производные с помощью (8), а затем разделив на J, приходим к линейной системе УрЧП первого порядка

$$\begin{aligned}g_1(u,w)x_u - k_1(u,w)t_u - f_1(u,w)x_w + h_1(u,w)t_w = 0,\\ g_2(u,w)x_u - k_2(u,w)t_u - f_2(u,w)x_w + h_2(u,w)t_w = 0.\end{aligned}$$

Замечание 7.3. *Преобразование годографа (7) неприменимо, если $J \equiv 0$. В этом вырожденном случае u и w будут функционально зависимы и, следовательно, не могут использоваться как независимые переменные. При $J \equiv 0$ выполняется соотношение (1), определяющее простые волны Римана. Следовательно, использование преобразование годографа (7) приводит к потере решений (1), описывающих простые волны Римана.*

7.2. Линейные системы двух УрЧП второго порядка

1. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + b_1 u + c_1 w, \quad w_t = aw_{xx} + b_2 u + c_2 w.}$

Линейная система УрЧП второго порядка параболического типа с постоянными коэффициентами.

Общее решение:

$$u = \frac{b_1 - \lambda_2}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_1 t} U - \frac{b_1 - \lambda_1}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_2 t} W, \qquad w = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\bigl(e^{\lambda_1 t} U - e^{\lambda_2 t} W\bigr),$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - (b_1 + c_2)\lambda + b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0,$$

а функции $U = U(x,t)$ и $W = W(x,t)$ описываются независимыми линейными уравнениями теплопроводности

$$U_t = aU_{xx}, \qquad W_t = aW_{xx}.$$

2. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + f_1(t)u + g_1(t)w, \quad w_t = aw_{xx} + f_2(t)u + g_2(t)w.}$

Линейная система УрЧП второго порядка параболического типа с переменными коэффициентами.

Общее решение:

$$u = \varphi_1(t)U(x,t) + \varphi_2(t)W(x,t), \qquad w = \psi_1(t)U(x,t) + \psi_2(t)W(x,t),$$

где пары функций $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ являются линейно независимыми (фундаментальными) решениями системы линейных ОДУ первого порядка

$$\varphi_t' = f_1(t)\varphi + g_1(t)\psi, \qquad \psi_t' = f_2(t)\varphi + g_2(t)\psi,$$

а функции $U = U(x,t)$ и $W = W(x,t)$ описываются независимыми линейными уравнениями теплопроводности

$$U_t = aU_{xx}, \qquad W_t = aW_{xx}.$$

3. $\boldsymbol{u_{tt} = ku_{xx} + a_1 u + b_1 w, \quad w_{tt} = kw_{xx} + a_2 u + b_2 w.}$

Линейная система УрЧП второго порядка гиперболического типа с постоянными коэффициентами.

Общее решение:

$$u = \frac{a_1 - \lambda_2}{a_2(\lambda_1 - \lambda_2)} U - \frac{a_1 - \lambda_1}{a_2(\lambda_1 - \lambda_2)} W, \qquad w = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (U - W),$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

а функции $\theta_n = \theta_n(x, t)$ описываются независимыми линейными уравнениями Клейна — Гордона

$$U_{tt} = kU_{xx} + \lambda_1 U, \qquad W_{tt} = kW_{xx} + \lambda_2 W.$$

4. $\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = a_1 u + b_1 w, \qquad w_{xx} + w_{yy} = a_2 u + b_2 w.}$

Линейная система УрЧП второго порядка эллиптического типа с постоянными коэффициентами.

Общее решение:

$$u = \frac{a_1 - \lambda_2}{a_2(\lambda_1 - \lambda_2)} U - \frac{a_1 - \lambda_1}{a_2(\lambda_1 - \lambda_2)} W, \qquad w = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (U - W),$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

а функции $\theta_n = \theta_n(x, y)$ описываются независимыми уравнениями Гельмгольца

$$U_{xx} + U_{yy} = \lambda_1 U, \qquad W_{xx} + W_{yy} = \lambda_2 W.$$

7.3. Нелинейные системы двух УрЧП второго порядка

7.3.1. Реакционно-диффузионные системы вида $u_t = au_{xx} + F(u, w)$, $w_t = bw_{xx} + G(u, w)$

Предварительные замечания. Реакционно-диффузионные системы данного вида часто используются в теории тепломассопереноса в химически активных средах, теории химических реакторов, теории горения, математической биологии, биофизике.

Рассматриваемые системы инвариантны относительно преобразований переноса по независимым переменным (а также при замене x на $-x$) и допускают решения типа бегущей волны $u = u(kx - \lambda t)$, $w = w(kx - \lambda t)$. Такие решения, а также решения, в которых одна из неизвестных функций тождественно равна нулю, далее в этом разделе не рассматриваются.

Приведенные ниже функции $f(\varphi)$, $g(\varphi)$, $h(\varphi)$ являются произвольными функциями своего аргумента $\varphi = \varphi(u, w)$; уравнения расположены в порядке усложнения этого аргумента.

► **Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.**

1. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + ue^{kw/u} f(u), \quad w_t = aw_{xx} + e^{kw/u}[wf(u) + g(u)].}$

Точное решение:

$$u = y(\xi), \quad w = -\frac{2}{k}\ln|bx|\,y(\xi) + z(\xi), \quad \xi = \frac{x + C_3}{\sqrt{C_1 t + C_2}},$$

где C_1, C_2, C_3, b — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} ay''_{\xi\xi} + \tfrac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{1}{b^2\xi^2} y\exp\Bigl(k\frac{z}{y}\Bigr) f(y) &= 0, \\ az''_{\xi\xi} + \tfrac{1}{2}C_1\xi z'_\xi - \frac{4a}{k\xi} y'_\xi + \frac{2a}{k\xi^2} y + \frac{1}{b^2\xi^2}\exp\Bigl(k\frac{z}{y}\Bigr)[zf(y) + g(y)] &= 0. \end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{u_t = a_1 u_{xx} + f(bu + cw), \quad w_t = a_2 w_{xx} + g(bu + cw).}$

Точное решение:

$$u = c(\alpha x^2 + \beta x + \gamma t) + y(\xi), \quad w = -b(\alpha x^2 + \beta x + \gamma t) + z(\xi), \quad \xi = kx - \lambda t,$$

где k, α, β, γ, λ — произвольные постоянные, а функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\begin{aligned} a_1 k^2 y''_{\xi\xi} + \lambda y'_\xi + 2a_1 c\alpha - c\gamma + f(by + cz) &= 0, \\ a_2 k^2 z''_{\xi\xi} + \lambda z'_\xi - 2a_2 b\alpha + b\gamma + g(by + cz) &= 0. \end{aligned}$$

3. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + f(bu + cw), \quad w_t = aw_{xx} + g(bu + cw).}$

Точное решение:

$$u = c\theta(x,t) + y(\xi), \quad w = -b\theta(x,t) + z(\xi), \quad \xi = kx - \lambda t,$$

где функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$ak^2 y''_{\xi\xi} + \lambda y'_\xi + f(by + cz) = 0, \quad ak^2 z''_{\xi\xi} + \lambda z'_\xi + g(by + cz) = 0,$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности

$$\theta_t = a\theta_{xx}.$$

4. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + c_2 f(b_1 u + c_1 w) + c_1 g(b_2 u + c_2 w),}$
$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} - b_2 f(b_1 u + c_1 w) - b_1 g(b_2 u + c_2 w).}$

Считается, что $b_1 c_2 - b_2 c_1 \neq 0$.

Умножая уравнения на подходящие константы и складывая, получим два независимых УрЧП:

$$\begin{aligned} U_t &= aU_{xx} + (b_1 c_2 - b_2 c_1) f(U), \qquad U = b_1 u + c_1 w; \\ W_t &= aW_{xx} - (b_1 c_2 - b_2 c_1) g(W), \qquad W = b_2 u + c_2 w. \end{aligned}$$

В общем случае эти УрЧП допускают решения типа бегущей волны, распространяющиеся с разными скоростями

$$U = U(k_1 x - \lambda_1 t), \qquad W = W(k_2 x - \lambda_2 t),$$

где k_m и λ_m — произвольные постоянные. Соответствующее решение исходной системы представляет собой суперпозицию (линейную комбинацию) двух нелинейных бегущих волн.

5. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(bu - cw) + g(bu - cw),}$
$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} + wf(bu - cw) + h(bu - cw).}$

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t) + c\exp\Big[\int f(b\varphi - c\psi)\,dt\Big]\theta(x,t),$$
$$w = \psi(t) + b\exp\Big[\int f(b\varphi - c\psi)\,dt\Big]\theta(x,t),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi'_t = \varphi f(b\varphi - c\psi) + g(b\varphi - c\psi), \qquad \psi'_t = \psi f(b\varphi - c\psi) + h(b\varphi - c\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности

$$\theta_t = a\theta_{xx}.$$

2°. Умножим первое уравнение на b, а второе уравнение — на $-c$, а затем сложим полученные УрЧП. В результате имеем

$$\zeta_t = a\zeta_{xx} + \zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta), \qquad \zeta = bu - cw. \tag{1}$$

Это уравнение будем рассматривать вместе с первым уравнением исходной системы

$$u_t = au_{xx} + uf(\zeta) + g(\zeta). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно исследовать отдельно. Большой перечень точных решений уравнений этого вида для различных кинетических функций $F(\zeta) = \zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta)$ можно найти в книге Polyanin & Zaitsev (2012). Получив решение $\zeta = \zeta(x,t)$ уравнения (1), функцию $u = u(x,t)$ можно найти путем решения линейного уравнения (2), после чего функция $w = w(x,t)$ определяется по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.

Отметим два важных случая, когда уравнение (1) допускает точные решения:

(i) В общем случае уравнение (1) имеет решения типа бегущей волны $\zeta = \zeta(z)$, где $z = kx - \lambda t$. Тогда соответствующие точные решения уравнения (2) можно искать в виде $u = u_0(z) + \sum e^{\beta_n t} u_n(z)$.

(ii) Если выполняется условие $\zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta) = k_1\zeta + k_0$, то уравнение (1) является линейным УрЧП

$$\zeta_t = a\zeta_{xx} + k_1\zeta + k_0,$$

которое подстановкой $\zeta = e^{k_1 t}\bar{\zeta} - k_0 k_1^{-1}$ можно свести к обычному линейному уравнению теплопроводности.

6. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + e^{\lambda u} f(\lambda u - \sigma w), \quad w_t = bw_{xx} + e^{\sigma w} g(\lambda u - \sigma w).}$

1°. Точное решение:

$$u = y(\xi) - \frac{1}{\lambda}\ln(C_1 t + C_2), \qquad w = z(\xi) - \frac{1}{\sigma}\ln(C_1 t + C_2), \qquad \xi = \frac{x + C_3}{\sqrt{C_1 t + C_2}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$ay''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1 \xi y'_\xi + \frac{C_1}{\lambda} + e^{\lambda y} f(\lambda y - \sigma z) = 0,$$
$$bz''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1 \xi z'_\xi + \frac{C_1}{\sigma} + e^{\sigma z} g(\lambda y - \sigma z) = 0.$$

2°. Точное решение при $b = a$:

$$u = U(x,t), \qquad w = \frac{\lambda}{\sigma}U(x,t) - \frac{k}{\sigma},$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda f(k) = \sigma e^{-k} g(k),$$

а функция $U(x,t)$ удовлетворяет УрЧП

$$U_t = aU_{xx} + f(k)e^{\lambda U}.$$

Это уравнение имеет частное решение вида

$$U = \theta(\xi) - \frac{1}{\lambda}\ln(C_1 t + C_2), \qquad \xi = \frac{x + C_3}{\sqrt{C_1 t + C_2}},$$

где функция $\theta(\xi)$ описывается ОДУ

$$a\theta''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1 \xi \theta'_\xi + \frac{C_1}{\lambda} + f(k)e^{\lambda\theta} = 0.$$

► **Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.**

7. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_t = bw_{xx} + wg\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\varphi(t), \qquad w = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi'_t = -ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi), \quad \psi'_t = -bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]U(t), \qquad w = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]W(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $U = U(t)$ и $W = W(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$U_t' = ak^2U + Uf(U/W), \qquad W_t' = bk^2W + Wg(U/W).$$

3°. Вырожденное решение:

$$u = (C_1x + C_2)U(t), \qquad w = (C_1x + C_2)W(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $U = U(t)$ и $W = W(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$U_t' = Uf(U/W), \qquad W_t' = Wg(U/W).$$

Эту автономную систему можно проинтегрировать, поскольку после исключения t она сводится к однородному ОДУ первого порядка. Системы, представленные в пп. 1° и 2°, могут быть проинтегрированы аналогичным образом.

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda t}y(x), \qquad w = e^{-\lambda t}z(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются автономной системой ОДУ

$$ay_{xx}'' + \lambda y + yf(y/z) = 0, \qquad bz_{xx}'' + \lambda z + zg(y/z) = 0.$$

5°. Решение (обобщение решения из п. 4°):

$$u = e^{kx-\lambda t}y(\xi), \qquad w = e^{kx-\lambda t}z(\xi), \qquad \xi = \beta x - \gamma t,$$

где k, λ, β, γ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$a\beta^2 y_{\xi\xi}'' + (2ak\beta + \gamma)y_\xi' + (ak^2 + \lambda)y + yf(y/z) = 0,$$
$$b\beta^2 z_{\xi\xi}'' + (2bk\beta + \gamma)z_\xi' + (bk^2 + \lambda)z + zg(y/z) = 0.$$

Частному случаю $k = \lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны. Полагая $k = \gamma = 0$, $\beta = 1$, получим решение из п. 4°.

8. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf\left(\frac{u}{w}\right), \quad w_t = aw_{xx} + wg\left(\frac{u}{w}\right).}$

Эта система УрЧП является частным случаем предыдущей системы 7.3.1.7 при $b = a$ и, следовательно, допускает все приведенные выше решения. Кроме того, у данной системы имеются интересные свойства и другие решения, которые приведены ниже.

1°. Пусть $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемой системы. Тогда функции

$$u_1 = Au(\pm x + C_1,\, t + C_2), \qquad w_1 = Aw(\pm x + C_1,\, t + C_2);$$
$$u_2 = \exp(\lambda x + a\lambda^2 t)u(x + 2a\lambda t,\, t), \quad w_2 = \exp(\lambda x + a\lambda^2 t)w(x + 2a\lambda t,\, t),$$

где A, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, также являются решениями этой системы.

2°. Решение типа точечного источника:

$$u = \exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at}\Bigr)\varphi(t), \qquad w = \exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at}\Bigr)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi'_t = -\frac{1}{2t}\varphi + \varphi f\Bigl(\frac{\varphi}{\psi}\Bigr), \qquad \psi'_t = -\frac{1}{2t}\psi + \psi g\Bigl(\frac{\varphi}{\psi}\Bigr).$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$\begin{aligned} u &= \exp\bigl(kxt + \tfrac{2}{3}ak^2t^3 - \lambda t\bigr)y(\xi),\\ w &= \exp\bigl(kxt + \tfrac{2}{3}ak^2t^3 - \lambda t\bigr)z(\xi), \end{aligned} \qquad \xi = x + akt^2,$$

где k и λ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$ay''_{\xi\xi} + (\lambda - k\xi)y + yf(y/z) = 0, \qquad az''_{\xi\xi} + (\lambda - k\xi)z + zg(y/z) = 0.$$

4°. Пусть k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(k) = g(k). \tag{1}$$

Точное решение:

$$u = ke^{\lambda t}\theta, \qquad w = e^{\lambda t}\theta, \qquad \lambda = f(k),$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности

$$\theta_t = a\theta_{xx}.$$

5°. Периодическое решение:

$$\begin{aligned} u &= Ak\exp(-\mu x)\sin(\beta x - 2a\beta\mu t + B),\\ w &= A\exp(-\mu x)\sin(\beta x - 2a\beta\mu t + B), \end{aligned} \qquad \beta = \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{a}f(k)},$$

где A, B, μ — произвольные постоянные, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения (1).

6°. Точное решение:

$$u = \varphi(t)\exp\Bigl[\int g(\varphi(t))\,dt\Bigr]\theta(x,t), \quad w = \exp\Bigl[\int g(\varphi(t))\,dt\Bigr]\theta(x,t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = [f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi, \tag{2}$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности

$$\theta_t = a\theta_{xx}.$$

Частному решению $\varphi = k = \mathrm{const}$ уравнения (2) соответствует решение, указанное в п. 4°. Общее решение уравнения (2) можно представить в неявном виде

$$\int \frac{d\varphi}{[f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi} = t + C.$$

7°. Преобразование

$$u = a_1U + b_1W, \quad w = a_2U + b_2W,$$

где a_n и b_n — произвольные постоянные $(n = 1, 2)$, приводит к системе аналогичного вида для U и W.

9. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf\Bigl(\dfrac{u}{w}\Bigr) + g\Bigl(\dfrac{u}{w}\Bigr), \quad w_t = aw_{xx} + wf\Bigl(\dfrac{u}{w}\Bigr) + h\Bigl(\dfrac{u}{w}\Bigr).}$

Пусть k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$g(k) = kh(k).$$

1°. Решение при $f(k) \neq 0$:

$$u(x,t) = k\Bigl(\exp[f(k)t]\theta(x,t) - \frac{h(k)}{f(k)}\Bigr), \quad w(x,t) = \exp[f(k)t]\theta(x,t) - \frac{h(k)}{f(k)},$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности

$$\theta_t = a\theta_{xx}. \tag{1}$$

2°. Решение при $f(k) = 0$:

$$u(x,t) = k[\theta(x,t) + h(k)t], \quad w(x,t) = \theta(x,t) + h(k)t,$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности (1).

10. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf\Bigl(\dfrac{u}{w}\Bigr) + \dfrac{u}{w}h\Bigl(\dfrac{u}{w}\Bigr), \quad w_t = aw_{xx} + wg\Bigl(\dfrac{u}{w}\Bigr) + h\Bigl(\dfrac{u}{w}\Bigr).}$

Точное решение:

$$u = \varphi(t)G(t)\Bigl[\theta(x,t) + \int \frac{h(\varphi)}{G(t)}\,dt\Bigr], \quad G(t) = \exp\Bigl[\int g(\varphi)\,dt\Bigr],$$

$$w = G(t)\Bigl[\theta(x,t) + \int \frac{h(\varphi)}{G(t)}\,dt\Bigr],$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = [f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi,$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности

$$\theta_t = a\theta_{xx}.$$

11. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf_1\Big(\frac{w}{u}\Big) + wg_1\Big(\frac{w}{u}\Big), \quad w_t = aw_{xx} + uf_2\Big(\frac{w}{u}\Big) + wg_2\Big(\frac{w}{u}\Big).}$

Точное решение:

$$u = \exp\Big\{\int [f_1(\varphi) + \varphi g_1(\varphi)]\,dt\Big\}\theta(x,t),$$
$$w = \varphi(t)\exp\Big\{\int [f_1(\varphi) + \varphi g_1(\varphi)]\,dt\Big\}\theta(x,t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = f_2(\varphi) + \varphi g_2(\varphi) - \varphi[f_1(\varphi) + \varphi g_1(\varphi)],$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности

$$\theta_t = a\theta_{xx}.$$

12. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u^3 f\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_t = aw_{xx} + u^3 g\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

Точное решение:

$$u = (x + C_1)\varphi(z), \quad w = (x + C_1)\psi(z), \quad z = t + \frac{1}{6a}(x + C_1)^2 + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(z)$ и $\psi = \psi(z)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi''_{zz} + 9a\varphi^3 f(\varphi/\psi) = 0, \quad \psi''_{zz} + 9a\varphi^3 g(\varphi/\psi) = 0.$$

13. $\boldsymbol{u_t = u_{xx} + au - u^3 f\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_t = w_{xx} + aw - u^3 g\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

1°. Решение при $a > 0$:

$$u = \big[C_1 \exp\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big) - C_2 \exp\big(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big)\big]\varphi(z),$$
$$w = \big[C_1 \exp\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big) - C_2 \exp\big(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big)\big]\psi(z),$$
$$z = C_1 \exp\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big) + C_2 \exp\big(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(z)$ и $\psi = \psi(z)$ описываются автономной системой ОДУ

$$a\varphi''_{zz} = 2\varphi^3 f(\varphi/\psi), \quad a\psi''_{zz} = 2\varphi^3 g(\varphi/\psi).$$

2°. Решение при $a < 0$:

$$u = \exp\left(\tfrac{3}{2}at\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2|a|}\,x + C_1\right)U(\xi),$$
$$w = \exp\left(\tfrac{3}{2}at\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2|a|}\,x + C_1\right)W(\xi),$$
$$\xi = \exp\left(\tfrac{3}{2}at\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2|a|}\,x + C_1\right) + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $U = U(\xi)$ и $W = W(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$aU''_{\xi\xi} = -2U^3 f(U/W), \quad aW''_{\xi\xi} = -2U^3 g(U/W).$$

14. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u^n f\left(\frac{u}{w}\right), \quad w_t = bw_{xx} + w^n g\left(\frac{u}{w}\right).}$

При $f(z) = kz^{-m}$ и $g(z) = -kz^{n-m}$ рассматриваемая система описывает химическую реакцию n-го порядка (порядка $n-m$ по компоненте u и порядка m по компоненте w).

1°. Автомодельное решение при $n \neq 1$:

$$u = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{1-n}} y(\xi), \quad w = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{1-n}} z(\xi), \quad \xi = \frac{x + C_3}{\sqrt{C_1 t + C_2}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$ay''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{n-1}y + y^n f\left(\frac{y}{z}\right) = 0, \quad bz''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1\xi z'_\xi + \frac{C_1}{n-1}z + z^n g\left(\frac{y}{z}\right) = 0.$$

2°. Решение при $b = a$:

$$u(x,t) = k\theta(x,t), \quad w(x,t) = \theta(x,t),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k^{n-1} f(k) = g(k),$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности с источником степенного вида

$$\theta_t = a\theta_{xx} + g(k)\theta^n.$$

15. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf\left(\frac{u}{w}\right)\ln u + ug\left(\frac{u}{w}\right),}$

$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} + wf\left(\frac{u}{w}\right)\ln w + wh\left(\frac{u}{w}\right).}$

Точное решение:

$$u(x,t) = \varphi(t)\psi(t)\theta(x,t), \quad w(x,t) = \psi(t)\theta(x,t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ первого порядка

$$\varphi'_t = \varphi[g(\varphi) - h(\varphi) + f(\varphi)\ln\varphi], \tag{1}$$
$$\psi'_t = \psi[h(\varphi) + f(\varphi)\ln\psi], \tag{2}$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет УрЧП

$$\theta_t = a\theta_{xx} + f(\varphi)\theta\ln\theta. \tag{3}$$

Решение ОДУ (1) можно представить в неявном виде. Уравнение (2) легко интегрируется, т. к. с заменой переменной $\psi = e^{\zeta}$ оно сводится к линейному ОДУ. УрЧП (3) допускает точные решения вида

$$\theta = \exp\bigl[\sigma_2(t)x^2 + \sigma_1(t)x + \sigma_0(t)\bigr],$$

где функции $\sigma_n(t)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned}
\sigma_2' &= f(\varphi)\sigma_2 + 4a\sigma_2^2,\\
\sigma_1' &= f(\varphi)\sigma_1 + 4a\sigma_1\sigma_2,\\
\sigma_0' &= f(\varphi)\sigma_0 + a\sigma_1^2 + 2a\sigma_2.
\end{aligned}$$

Эту систему можно последовательно проинтегрировать, т. к. первое уравнение является уравнением Бернулли, а второе и третье — линейны относительно неизвестной функции. Отметим внимание, что первое уравнение имеет частное решение $\sigma_2 = 0$.

Замечание 7.4. *Уравнение (1) имеет частное решение $\varphi = k = \mathrm{const}$, где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $g(k) - h(k) + f(k)\ln k = 0$.*

16. $$\begin{aligned}
u_t &= au_{xx} + uf\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) - wg\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + \frac{u}{\sqrt{u^2+w^2}}h\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr),\\
w_t &= aw_{xx} + wf\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + ug\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + \frac{w}{\sqrt{u^2+w^2}}h\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr).
\end{aligned}$$

Точное решение:

$$u = r(x,t)\cos\varphi(t), \qquad w = r(x,t)\sin\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi_t' = g(\operatorname{tg}\varphi),$$

а функция $r = r(x,t)$ описывается линейным УрЧП

$$r_t = ar_{xx} + rf(\operatorname{tg}\varphi) + h(\operatorname{tg}\varphi).$$

Замена

$$r = F(t)\Bigl[Z(x,t) + \int\frac{h(\operatorname{tg}\varphi)\,dt}{F(t)}\Bigr], \qquad F(t) = \exp\Bigl[\int f(\operatorname{tg}\varphi)\,dt\Bigr]$$

приводит полученное УрЧП к линейному уравнению теплопроводности

$$Z_t = aZ_{xx}.$$

17. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf\Big(\frac{w}{u}\Big) + wg\Big(\frac{w}{u}\Big) + \frac{u}{\sqrt{u^2-w^2}}h\Big(\frac{w}{u}\Big),}$

$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} + wf\Big(\frac{w}{u}\Big) + ug\Big(\frac{w}{u}\Big) + \frac{w}{\sqrt{u^2-w^2}}h\Big(\frac{w}{u}\Big).}$

Точное решение:

$$u = r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t), \qquad w = r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t),$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ определяется из ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = g(\operatorname{th}\varphi),$$

а функция $r = r(x,t)$ описывается линейным УрЧП

$$r_t = ar_{xx} + rf(\operatorname{th}\varphi) + h(\operatorname{th}\varphi).$$

Замена

$$r = F(t)\Big[Z(x,t) + \int \frac{h(\operatorname{th}\varphi)\,dt}{F(t)}\Big], \qquad F(t) = \exp\Big[\int f(\operatorname{th}\varphi)\,dt\Big]$$

приводит полученное УрЧП к линейному уравнению теплопроводности

$$Z_t = aZ_{xx}.$$

► **Произвольные функции зависят от произведения степеней искомых величин.**

18. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(u^n w^m), \qquad w_t = bw_{xx} + wg(u^n w^m).}$

Точное решение:

$$u = e^{m(kx-\lambda t)}y(\xi), \qquad w = e^{-n(kx-\lambda t)}z(\xi), \qquad \xi = \beta x - \gamma t,$$

где k, λ, β, γ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$a\beta^2 y''_{\xi\xi} + (2akm\beta + \gamma)y'_\xi + m(ak^2m + \lambda)y + yf(y^n z^m) = 0,$$
$$b\beta^2 z''_{\xi\xi} + (-2bkn\beta + \gamma)z'_\xi + n(bk^2n - \lambda)z + zg(y^n z^m) = 0.$$

Частному случаю $k = \lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

19. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u^{1+kn}f\big(u^n w^m\big), \qquad w_t = bw_{xx} + w^{1-km}g\big(u^n w^m\big).}$

Автомодельное решение:

$$u = (C_1t + C_2)^{-\frac{1}{kn}}y(\xi), \qquad w = (C_1t + C_2)^{\frac{1}{km}}z(\xi), \qquad \xi = \frac{x + C_3}{\sqrt{C_1t + C_2}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$ay''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{kn}y + y^{1+kn}f\big(y^n z^m\big) = 0,$$
$$bz''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1\xi z'_\xi - \frac{C_1}{km}z + z^{1-km}g\big(y^n z^m\big) = 0.$$

20. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + cu\ln u + uf(u^n w^m),}$
$\boldsymbol{w_t = bw_{xx} + cw\ln w + wg(u^n w^m).}$

Точное решение:

$$u = \exp(Ame^{ct})y(\xi), \quad w = \exp(-Ane^{ct})z(\xi), \quad \xi = kx - \lambda t,$$

где A, k, λ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$ak^2 y''_{\xi\xi} + \lambda y'_\xi + cy\ln y + yf(y^n z^m) = 0,$$
$$bk^2 z''_{\xi\xi} + \lambda z'_\xi + cz\ln z + zg(y^n z^m) = 0.$$

Частному случаю $A = 0$ соответствует решение типа бегущей волны. При $\lambda = 0$ имеем решение в виде произведения двух функций, зависящих от времени t и координаты x.

► Произвольные функции зависят от суммы или разности квадратов искомых величин.

21. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(u^2 + w^2) - wg(u^2 + w^2),}$
$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} + ug(u^2 + w^2) + wf(u^2 + w^2).}$

1°. Решение, периодическое по пространственной координате:

$$u = \psi(t)\cos\varphi(x,t), \quad w = \psi(t)\sin\varphi(x,t), \quad \varphi(x,t) = C_1 x + \int g(\psi^2)\,dt + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\psi'_t = \psi f(\psi^2) - aC_1^2\psi,$$

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int \frac{d\psi}{\psi f(\psi^2) - aC_1^2\psi} = t + C_3.$$

2°. Решение, периодическое по времени:

$$u = r(x)\cos\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr], \quad w = r(x)\sin\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются автономной системой ОДУ

$$ar''_{xx} - ar(\theta'_x)^2 + rf(r^2) = 0, \quad ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x - C_1 r + rg(r^2) = 0.$$

3°. Решение (обобщает решение из п. 2°):

$$u = r(z)\cos\bigl[\theta(z) + C_1 t + C_2\bigr], \quad w = r(z)\sin\bigl[\theta(z) + C_1 t + C_2\bigr], \quad z = x + \lambda t,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функции $r = r(z)$ и $\theta = \theta(z)$ описываются автономной системой ОДУ

$$ar''_{zz} - ar(\theta'_z)^2 - \lambda r'_z + rf(r^2) = 0, \qquad ar\theta''_{zz} + 2ar'_z\theta'_z - \lambda r\theta'_z - C_1 r + rg(r^2) = 0.$$

22. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(u^2 - w^2) + wg(u^2 - w^2),}$
$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} + ug(u^2 - w^2) + wf(u^2 - w^2).}$

1°. Точное решение:

$$u = \psi(t)\operatorname{ch}\varphi(x,t), \qquad w = \psi(t)\operatorname{sh}\varphi(x,t), \qquad \varphi(x,t) = C_1 x + \int g(\psi^2)\,dt + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\psi'_t = \psi f(\psi^2) + aC_1^2\psi,$$

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int \frac{d\psi}{\psi f(\psi^2) + aC_1^2\psi} = t + C_3.$$

2°. Точное решение:

$$u = r(x)\operatorname{ch}\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr], \qquad w = r(x)\operatorname{sh}\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются автономной системой ОДУ

$$ar''_{xx} + ar(\theta'_x)^2 + rf(r^2) = 0, \qquad ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x + rg(r^2) - C_1 r = 0.$$

3°. Решение (обобщает решение из п. 2°):

$$u = r(z)\operatorname{ch}\bigl[\theta(z) + C_1 t + C_2\bigr], \qquad w = r(z)\operatorname{sh}\bigl[\theta(z) + C_1 t + C_2\bigr], \qquad z = x + \lambda t,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функции $r = r(z)$ и $\theta = \theta(z)$ описываются автономной системой ОДУ

$$ar''_{zz} + ar(\theta'_z)^2 - \lambda r'_z + rf(r^2) = 0, \qquad ar\theta''_{zz} + 2ar'_z\theta'_z - \lambda r\theta'_z - C_1 r + rg(r^2) = 0.$$

► **Произвольные функции сложным образом зависят от искомых величин.**

23. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(u^2 + w^2) - wg\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr),}$
$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} + ug\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + wf(u^2 + w^2).}$

Точное решение:

$$u = r(x,t)\cos\varphi(t), \qquad w = r(x,t)\sin\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается автономным ОДУ

$$\varphi'_t = g(\operatorname{tg}\varphi), \tag{1}$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет УрЧП

$$r_t = ar_{xx} + rf(r^2). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) можно представить в неявном виде

$$\int \frac{d\varphi}{g(\operatorname{tg}\varphi)} = t + C.$$

УрЧП (2) имеет точное решение $r = r(x)$, не зависящее от времени. Кроме того, это уравнение допускает более сложное решение типа бегущей волны $r = r(z)$, где $z = kx - \lambda t$ (k и λ — произвольные постоянные), а функция $r(z)$ описывается автономным ОДУ

$$ak^2 r''_{zz} + \lambda r'_z + rf(r^2) = 0.$$

24. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(u^2 - w^2) + wg\Big(\frac{w}{u}\Big),}$

$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} + ug\Big(\frac{w}{u}\Big) + wf(u^2 - w^2).}$

Точное решение:

$$u = r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t), \quad w = r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается автономным ОДУ

$$\varphi'_t = g(\operatorname{th}\varphi), \tag{1}$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет УрЧП

$$r_t = ar_{xx} + rf(r^2). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) можно представить в неявном виде

$$\int \frac{d\varphi}{g(\operatorname{th}\varphi)} = t + C.$$

Уравнение (2) допускает точное решение типа бегущей волны $r = r(z)$, где $z = kx - \lambda t$ (k и λ — произвольные постоянные), а функция $r(z)$ описывается автономным ОДУ

$$ak^2 r''_{zz} + \lambda r'_z + rf(r^2) = 0.$$

О других точных решениях уравнения (2) для различных функций f см. книгу Polyanin & Zaitsev (2012).

25. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf\big(u^2+w^2\big) - wg\big(u^2+w^2\big) - w\operatorname{arctg}\Big(\frac{w}{u}\Big)h\big(u^2+w^2\big),}$

$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} + wf\big(u^2+w^2\big) + ug\big(u^2+w^2\big) + u\operatorname{arctg}\Big(\frac{w}{u}\Big)h\big(u^2+w^2\big).}$

Решение с функциональным разделением переменных (при фиксированном t оно определяет структуру, периодическую по x):

$$u = r(t)\cos\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big], \quad w = r(t)\sin\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big],$$

где функции $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$r'_t = -ar\varphi^2 + rf(r^2), \quad \varphi'_t = h(r^2)\varphi, \quad \psi'_t = h(r^2)\psi + g(r^2).$$

26. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf\big(u^2 - w^2\big) + wg\big(u^2 - w^2\big) + w\,\mathrm{arth}\Big(\frac{w}{u}\Big)h\big(u^2 - w^2\big),}$
$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} + wf\big(u^2 - w^2\big) + ug\big(u^2 - w^2\big) + u\,\mathrm{arth}\Big(\frac{w}{u}\Big)h\big(u^2 - w^2\big).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = r(t)\,\mathrm{ch}\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big], \quad w = r(t)\,\mathrm{sh}\big[\varphi(t)x + \psi(t)\big],$$

где функции $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$r'_t = ar\varphi^2 + rf(r^2), \quad \varphi'_t = h(r^2)\varphi, \quad \psi'_t = h(r^2)\psi + g(r^2).$$

27. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u^{k+1}f(\varphi), \quad \varphi = u\exp\Big(-\frac{w}{u}\Big),}$
$\boldsymbol{w_t = aw_{xx} + u^{k+1}[f(\varphi)\ln u + g(\varphi)].}$

Точное решение:

$$u = (C_1t + C_2)^{-\frac{1}{k}}y(\xi), \quad \xi = \frac{x + C_3}{\sqrt{C_1t + C_2}},$$
$$w = (C_1t + C_2)^{-\frac{1}{k}}\Big[z(\xi) - \frac{1}{k}\ln(C_1t + C_2)y(\xi)\Big],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$ay''_{\xi\xi} + \tfrac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{k}y + y^{k+1}f(\varphi) = 0, \qquad \varphi = y\exp\Big(-\frac{z}{y}\Big),$$
$$az''_{\xi\xi} + \tfrac{1}{2}C_1\xi z'_\xi + \frac{C_1}{k}z + \frac{C_1}{k}y + y^{k+1}[f(\varphi)\ln y + g(\varphi)] = 0.$$

7.3.2. Реакционно-диффузионные системы вида $u_t = ax^{-n}(x^nu_x)_x + F(u,w)$, $w_t = bx^{-n}(x^nw_x)_x + G(u,w)$

Предварительные замечания. Это нелинейные реакционно-диффузионные системы УрЧП в радиально-симметричном случае (значение $n = 1$ соответствует плоской задаче, а $n = 2$ — пространственной).

► **Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.**

1. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^nu_x)_x + uf(bu - cw) + g(bu - cw),}$
$\boldsymbol{w_t = ax^{-n}(x^nw_x)_x + wf(bu - cw) + h(bu - cw).}$

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t) + c\exp\Big[\int f(b\varphi - c\psi)\,dt\Big]\theta(x,t), \quad w = \psi(t) + b\exp\Big[\int f(b\varphi - c\psi)\,dt\Big]\theta(x,t),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi'_t = \varphi f(b\varphi - c\psi) + g(b\varphi - c\psi),$$
$$\psi'_t = \psi f(b\varphi - c\psi) + h(b\varphi - c\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\theta_t = ax^{-n}(x^n\theta_x)_x. \tag{1}$$

2°. Умножим первое уравнение на b, а второе уравнение — на $-c$, а затем сложим полученные УрЧП. В результате имеем

$$\zeta_t = ax^{-n}(x^n\zeta_x)_x + \zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta), \qquad \zeta = bu - cw. \tag{2}$$

Это уравнение будем рассматривать вместе с первым уравнением исходной системы

$$u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(\zeta) + g(\zeta). \tag{3}$$

Уравнение (2) можно исследовать отдельно. Получив решение $\zeta = \zeta(x,t)$ уравнения (2), функцию $u = u(x,t)$ можно найти путем решения линейного уравнения (3), после чего функция $w = w(x,t)$ определяется по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.

Отметим два важных случая, когда уравнение (2) допускает точные решения:

(i) В общем случае уравнение (2) имеет стационарные решения $\zeta = \zeta(x)$. Тогда соответствующие точные решения уравнения (3) можно искать в виде $u = u_0(x) + \sum e^{\beta_n t}u_n(x)$.

(ii) Если выполняется условие $\zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta) = k_1\zeta + k_0$, то уравнение (2) является линейным УрЧП

$$\zeta_t = ax^{-n}(x^n\zeta_x)_x + k_1\zeta + k_0,$$

которое подстановкой $\zeta = e^{k_1 t}\bar{\zeta} - k_0k_1^{-1}$ можно свести к более простому линейному уравнению теплопроводности вида (1).

2. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + e^{\lambda u} f(\lambda u - \sigma w),}$
$\boldsymbol{w_t = bx^{-n}(x^n w_x)_x + e^{\sigma w} g(\lambda u - \sigma w).}$

Точное решение:

$$u = y(\xi) - \frac{1}{\lambda}\ln(C_1t + C_2), \qquad w = z(\xi) - \frac{1}{\sigma}\ln(C_1t + C_2), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{C_1t + C_2}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$a\xi^{-n}(\xi^n y'_\xi)'_\xi + \tfrac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{\lambda} + e^{\lambda y}f(\lambda y - \sigma z) = 0,$$
$$b\xi^{-n}(\xi^n z'_\xi)'_\xi + \tfrac{1}{2}C_1\xi z'_\xi + \frac{C_1}{\sigma} + e^{\sigma z}g(\lambda y - \sigma z) = 0.$$

► **Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.**

3. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_t = bx^{-n}(x^n w_x)_x + wg\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx)]\varphi(t), \quad \nu = \tfrac{1}{2}|n-1|,$$
$$w = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi'_t = -ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi), \quad \psi'_t = -bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 I_\nu(kx) + C_2 K_\nu(kx)]\varphi(t), \quad \nu = \tfrac{1}{2}|n-1|,$$
$$w = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 I_\nu(kx) + C_2 K_\nu(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя, а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi'_t = ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi), \quad \psi'_t = bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda t}y(x), \quad w = e^{-\lambda t}z(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой ОДУ

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x + \lambda y + yf(y/z) = 0, \quad bx^{-n}(x^n z'_x)'_x + \lambda z + zg(y/z) = 0.$$

4°. Частный случай уравнения при $b = a$. Пусть k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(k) = g(k).$$

Точное решение:

$$u = ke^{\lambda t}\theta, \quad w = e^{\lambda t}\theta, \quad \lambda = f(k),$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности

$$\theta_t = ax^{-n}(x^n\theta_x)_x. \tag{1}$$

5°. Частный случай уравнения при $b = a$. Точное решение:

$$u = \varphi(t)\exp\Big[\int g(\varphi(t))\,dt\Big]\theta(x,t), \quad w = \exp\Big[\int g(\varphi(t))\,dt\Big]\theta(x,t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными
$$\varphi'_t = [f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi, \qquad (2)$$
а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности (1).

Частному решению $\varphi = k = \mathrm{const}$ уравнения (2) соответствует решение, представленное в п. 4°. Общее решение уравнения (2) можно записать в неявном виде
$$\int \frac{d\varphi}{[f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi} = t + C.$$

4. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf\Big(\frac{u}{w}\Big) + \frac{u}{w}h\Big(\frac{u}{w}\Big),}$
$\boldsymbol{w_t = ax^{-n}(x^n w_x)_x + wg\Big(\frac{u}{w}\Big) + h\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

Точное решение:
$$u = \varphi(t)G(t)\Big[\theta(x,t) + \int \frac{h(\varphi)}{G(t)}\,dt\Big], \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(\varphi)\,dt\Big],$$
$$w = G(t)\Big[\theta(x,t) + \int \frac{h(\varphi)}{G(t)}\,dt\Big],$$
где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными
$$\varphi'_t = [f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi,$$
а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности
$$\theta_t = ax^{-n}(x^n\theta_x)_x.$$

5. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf_1\Big(\frac{w}{u}\Big) + wg_1\Big(\frac{w}{u}\Big),}$
$\boldsymbol{w_t = ax^{-n}(x^n w_x)_x + uf_2\Big(\frac{w}{u}\Big) + wg_2\Big(\frac{w}{u}\Big).}$

Точное решение:
$$u = \exp\Big\{\int [f_1(\varphi) + \varphi g_1(\varphi)]\,dt\Big\}\theta(x,t),$$
$$w = \varphi(t)\exp\Big\{\int [f_1(\varphi) + \varphi g_1(\varphi)]\,dt\Big\}\theta(x,t),$$
где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными
$$\varphi'_t = f_2(\varphi) + \varphi g_2(\varphi) - \varphi[f_1(\varphi) + \varphi g_1(\varphi)],$$
а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворят линейному уравнению теплопроводности
$$\theta_t = ax^{-n}(x^n\theta_x)_x.$$

6. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + u^k f\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_t = bx^{-n}(x^n w_x)_x + w^k g\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

Автомодельное решение:

$$u = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{1-k}} y(\xi), \quad w = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{1-k}} z(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{C_1 t + C_2}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$a\xi^{-n}(\xi^n y'_\xi)'_\xi + \frac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{k-1}y + y^k f(y/z) = 0,$$
$$b\xi^{-n}(\xi^n z'_\xi)'_\xi + \frac{1}{2}C_1\xi z'_\xi + \frac{C_1}{k-1}z + z^k g(y/z) = 0.$$

7. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf\Big(\frac{u}{w}\Big)\ln u + ug\Big(\frac{u}{w}\Big),}$

$\boldsymbol{w_t = ax^{-n}(x^n w_x)_x + wf\Big(\frac{u}{w}\Big)\ln w + wh\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

Точное решение:

$$u = \varphi(t)\psi(t)\theta(x,t), \quad w = \psi(t)\theta(x,t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= \varphi[g(\varphi) - h(\varphi) + f(\varphi)\ln\varphi], \\ \psi'_t &= \psi[h(\varphi) + f(\varphi)\ln\psi], \end{aligned} \tag{1}$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет УрЧП

$$\theta_t = ax^{-n}(x^n\theta_x)_x + f(\varphi)\theta\ln\theta. \tag{2}$$

Первое уравнение в (1) является ОДУ с разделяющимися переменными, общее решение которого можно представить в неявном виде. Второе уравнение в (1) можно решить с помощью замены $\psi = e^\zeta$, что приводит к линейному ОДУ для ζ. УрЧП (2) допускает точное решение вида

$$\theta = \exp\bigl[\sigma_1(t)x^2 + \sigma_2(t)\bigr],$$

где функции $\sigma_n(t)$ описываются системой ОДУ

$$\sigma'_1 = f(\varphi)\sigma_1 + 4a\sigma_1^2,$$
$$\sigma'_2 = f(\varphi)\sigma_2 + 2a(n+1)\sigma_1.$$

Эту систему можно последовательно проинтегрировать, поскольку первое ОДУ является уравнением Бернулли, а второе — линейно относительно искомой функции.

Если $f = \mathrm{const}$, то уравнение (2) также имеет решение типа бегущей волны $\theta = \theta(kx - \lambda t)$.

► **Произвольные функции зависят от произведения степеней искомых величин.**

8. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(x, u^k w^m),}$
$\boldsymbol{w_t = bx^{-n}(x^n w_x)_x + wg(x, u^k w^m).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-m\lambda t} y(x), \quad w = e^{k\lambda t} z(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой ОДУ

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x + m\lambda y + yf(x, y^k z^m) = 0,$$
$$bx^{-n}(x^n z'_x)'_x - k\lambda z + zg(x, y^k z^m) = 0.$$

9. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + u^{1+kn} f\bigl(u^n w^m\bigr),}$
$\boldsymbol{w_t = bx^{-n}(x^n w_x)_x + w^{1-km} g\bigl(u^n w^m\bigr).}$

Автомодельное решение:

$$u = (C_1 t + C_2)^{-\frac{1}{kn}} y(\xi), \quad w = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{km}} z(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{C_1 t + C_2}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$a\xi^{-n}(\xi^n y'_\xi)'_\xi + \frac{1}{2} C_1 \xi y'_\xi + \frac{C_1}{kn} y + y^{1+kn} f\bigl(y^n z^m\bigr) = 0,$$
$$b\xi^{-n}(\xi^n z'_\xi)'_\xi + \frac{1}{2} C_1 \xi z'_\xi - \frac{C_1}{km} z + z^{1-km} g\bigl(y^n z^m\bigr) = 0.$$

10. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + cu\ln u + uf(x, u^k w^m),}$
$\boldsymbol{w_t = bx^{-n}(x^n w_x)_x + cw\ln w + wg(x, u^k w^m).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \exp(Ame^{ct}) y(x), \quad w = \exp(-Ake^{ct}) z(x),$$

где A — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой ОДУ

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x + cy\ln y + yf(x, y^k z^m) = 0,$$
$$bx^{-n}(x^n z'_x)'_x + cz\ln z + zg(x, y^k z^m) = 0.$$

► **Произвольные функции зависят от суммы или разности квадратов искомых функций.**

11. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(u^2 + w^2) - wg(u^2 + w^2),}$
$\boldsymbol{w_t = ax^{-n}(x^n w_x)_x + wf(u^2 + w^2) + ug(u^2 + w^2).}$

Решение, периодическое по времени:

$$u = r(x)\cos\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr], \quad w = r(x)\sin\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой ОДУ

$$ar''_{xx} - ar(\theta'_x)^2 + \frac{an}{x}r'_x + rf(r^2) = 0,$$
$$ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x + \frac{an}{x}r\theta'_x + rg(r^2) - C_1 r = 0.$$

12. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(u^2 - w^2) + wg(u^2 - w^2),}$
$\boldsymbol{w_t = ax^{-n}(x^n w_x)_x + wf(u^2 - w^2) + ug(u^2 - w^2).}$

Точное решение:

$$u = r(x)\,\mathrm{ch}\big[\theta(x) + C_1 t + C_2\big], \qquad w = r(x)\,\mathrm{sh}\big[\theta(x) + C_1 t + C_2\big],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой ОДУ

$$ar''_{xx} + ar(\theta'_x)^2 + \frac{an}{x}r'_x + rf(r^2) = 0,$$
$$ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x + \frac{an}{x}r\theta'_x + rg(r^2) - C_1 r = 0.$$

► **Произвольные функции имеют разные аргументы.**

13. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(u^2 + w^2) - wg\Big(\frac{w}{u}\Big),}$
$\boldsymbol{w_t = ax^{-n}(x^n w_x)_x + wf(u^2 + w^2) + ug\Big(\frac{w}{u}\Big).}$

Точное решение:

$$u = r(x,t)\cos\varphi(t), \quad w = r(x,t)\sin\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается автономным ОДУ

$$\varphi'_t = g(\mathrm{tg}\,\varphi), \tag{1}$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет УрЧП

$$r_t = ax^{-n}(x^n r_x)_x + rf(r^2). \tag{2}$$

Общее решение ОДУ (1) можно представить в неявном виде

$$\int \frac{d\varphi}{g(\mathrm{tg}\,\varphi)} = t + C.$$

УрЧП (2) допускает стационарное решение $r = r(x)$.

14. $\boldsymbol{u_t = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(u^2 - w^2) + wg\Big(\frac{w}{u}\Big),}$
$\boldsymbol{w_t = ax^{-n}(x^n w_x)_x + wf(u^2 - w^2) + ug\Big(\frac{w}{u}\Big).}$

Точное решение:

$$u = r(x,t)\,\mathrm{ch}\,\varphi(t), \quad w = r(x,t)\,\mathrm{sh}\,\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается автономным ОДУ

$$\varphi'_t = g(\operatorname{th}\varphi), \tag{1}$$

а функция $r = r(x, t)$ удовлетворяет УрЧП

$$r_t = ax^{-n}(x^n r_x)_x + rf(r^2). \tag{2}$$

Общее решение ОДУ (1) можно представить в неявном виде

$$\int \frac{d\varphi}{g(\operatorname{th}\varphi)} = t + C.$$

УрЧП (2) допускает стационарное решение $r = r(x)$.

7.3.3. Системы гиперболических УрЧП вида $u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + F(u, w)$, $w_{tt} = bx^{-n}(x^n w_x)_x + G(u, w)$

► **Произвольные функции зависят от линейной комбинации из искомых величин.**

1. $\boldsymbol{u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(bu - cw) + g(bu - cw),}$
$\boldsymbol{w_{tt} = ax^{-n}(x^n w_x)_x + wf(bu - cw) + h(bu - cw).}$

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t) + c\theta(x, t), \qquad w = \psi(t) + b\theta(x, t),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi''_{tt} = \varphi f(b\varphi - c\psi) + g(b\varphi - c\psi), \qquad \psi''_{tt} = \psi f(b\varphi - c\psi) + h(b\varphi - c\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x, t)$ описывается линейным УрЧП

$$\theta_{tt} = ax^{-n}(x^n \theta_x)_x + f(b\varphi - c\psi)\theta.$$

При $f = \mathrm{const}$ решения этого уравнения можно найти методом разделения переменных.

2°. Умножим первое УрЧП на b, а второе уравнение — на $-c$, а затем сложим полученные уравнения. В результате имеем

$$\zeta_{tt} = ax^{-n}(x^n \zeta_x)_x + \zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta), \qquad \zeta = bu - cw. \tag{1}$$

Это уравнение будем рассматривать вместе с первым уравнением исходной системы

$$u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(\zeta) + g(\zeta). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно исследовать отдельно. Получив решение $\zeta = \zeta(x, t)$ уравнения (1), функцию $u = u(x, t)$ можно найти путем решения линейного уравнения (2), после чего функция $w = w(x, t)$ определяется по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.

Отметим три важных случая, когда уравнение (1) допускает точные решения:

(i) В общем случае уравнение (1) имеет пространственно однородное решение $\zeta = \zeta(t)$. Соответствующее решение исходной системы в другой форме дано в п. 1°.

(ii) В общем случае уравнение (1) допускает стационарные решения $\zeta = \zeta(x)$. Тогда соответствующие точные решения уравнения (2) можно искать в виде $u = u_0(x) + \sum e^{-\beta_n t}u_n(x)$ или $u = u_0(x) + \sum \cos(\beta_n t)u_n^{(1)}(x) + \sum \sin(\beta_n t)u_n^{(2)}(x)$.

(iii) Если выполняется условие $\zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta) = k_1\zeta + k_0$, то уравнение (1) является линейным УрЧП

$$\zeta_{tt} = ax^{-n}(x^n\zeta_x)_x + k_1\zeta + k_0,$$

решения которого можно найти методом разделения переменных.

2. $\boldsymbol{u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + e^{\lambda u}f(\lambda u - \sigma w),}$
$\boldsymbol{w_{tt} = bx^{-n}(x^n w_x)_x + e^{\sigma w}g(\lambda u - \sigma w).}$

1°. Точное решение:

$$u = y(\xi) - \frac{2}{\lambda}\ln(C_1 t + C_2), \qquad w = z(\xi) - \frac{2}{\sigma}\ln(C_1 t + C_2), \qquad \xi = \frac{x}{C_1 t + C_2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$C_1^2(\xi^2 y'_\xi)'_\xi + 2C_1^2\lambda^{-1} = a\xi^{-n}(\xi^n y'_\xi)'_\xi + e^{\lambda y}f(\lambda y - \sigma z),$$
$$C_1^2(\xi^2 z'_\xi)'_\xi + 2C_1^2\sigma^{-1} = b\xi^{-n}(\xi^n z'_\xi)'_\xi + e^{\sigma z}g(\lambda y - \sigma z).$$

2°. Решение при $b = a$:

$$u = \theta(x,t), \qquad w = \frac{\lambda}{\sigma}\theta(x,t) - \frac{k}{\sigma},$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda f(k) = \sigma e^{-k}g(k),$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ описывается УрЧП

$$\theta_{tt} = ax^{-n}(x^n\theta_x)_x + f(k)e^{\lambda\theta}.$$

Это уравнение разрешимо при $n = 0$, о его точных решениях см. УрЧП 6.2.1.4.

▶ Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.

3. $\boldsymbol{u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf\Big(\frac{u}{w}\Big), \qquad w_{tt} = bx^{-n}(x^n w_x)_x + wg\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

1°. Периодическое решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt)]y(x), \qquad w = [C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt)]z(x),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой ОДУ

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x + k^2 y + yf(y/z) = 0, \qquad bx^{-n}(x^n z'_x)'_x + k^2 z + zg(y/z) = 0.$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [C_1 \exp(kt) + C_2 \exp(-kt)]y(x), \qquad w = [C_1 \exp(kt) + C_2 \exp(-kt)]z(x),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой ОДУ

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x - k^2 y + yf(y/z) = 0, \qquad bx^{-n}(x^n z'_x)'_x - k^2 z + zg(y/z) = 0.$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (C_1 t + C_2)y(x), \qquad w = (C_1 t + C_2)z(x),$$

где функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой ОДУ

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x + yf(y/z) = 0, \qquad bx^{-n}(x^n z'_x)'_x + zg(y/z) = 0.$$

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx)]\varphi(t), \qquad \nu = \tfrac{1}{2}|n-1|,$$
$$w = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi''_{tt} = -ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi), \qquad \psi''_{tt} = -bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

5°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 I_\nu(kx) + C_2 K_\nu(kx)]\varphi(t), \qquad \nu = \tfrac{1}{2}|n-1|,$$
$$w = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 I_\nu(kx) + C_2 K_\nu(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя, а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi''_{tt} = ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi),$$
$$\psi''_{tt} = bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

6°. Решение при $b = a$:

$$u = k\theta(x,t), \qquad w = \theta(x,t),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(k) = g(k)$, а функция $\theta = \theta(x,t)$ описывается линейным уравнением Клейна — Гордона

$$\theta_{tt} = ax^{-n}(x^n\theta_x)_x + f(k)\theta.$$

4. $\boldsymbol{u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf\Big(\frac{u}{w}\Big) + \frac{u}{w}h\Big(\frac{u}{w}\Big),}$
$\boldsymbol{w_{tt} = ax^{-n}(x^n w_x)_x + wg\Big(\frac{u}{w}\Big) + h\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

Точное решение:

$$u = k\theta(x,t), \qquad w = \theta(x,t),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(k) = g(k)$, а функция $\theta = \theta(x,t)$ описывается линейным УрЧП

$$\theta_{tt} = ax^{-n}(x^n\theta_x)_x + f(k)\theta + h(k).$$

5. $\boldsymbol{u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + u^k f\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_{tt} = bx^{-n}(x^n w_x)_x + w^k g\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

Автомодельное решение:

$$u = (C_1 t + C_2)^{\frac{2}{1-k}} y(\xi), \qquad w = (C_1 t + C_2)^{\frac{2}{1-k}} z(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{C_1 t + C_2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$C_1^2\xi^2 y''_{\xi\xi} + \frac{2C_1^2(k+1)}{k-1}\xi y'_\xi + \frac{C_1^2(k+1)}{(k-1)^2}y = \frac{a}{\xi^n}(\xi^n y'_\xi)'_\xi + y^k f\Big(\frac{y}{z}\Big),$$
$$C_1^2\xi^2 z''_{\xi\xi} + \frac{2C_1^2(k+1)}{k-1}\xi z'_\xi + \frac{C_1^2(k+1)}{(k-1)^2}z = \frac{b}{\xi^n}(\xi^n z'_\xi)'_\xi + z^k g\Big(\frac{y}{z}\Big).$$

► **Другие системы УрЧП гиперболического типа.**

6. $\boldsymbol{u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(x, u^k w^m),}$
$\boldsymbol{w_{tt} = bx^{-n}(x^n w_x)_x + wg(x, u^k w^m).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-m\lambda t}y(x), \quad w = e^{k\lambda t}z(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой ОДУ

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x - m^2\lambda^2 y + yf(x, y^k z^m) = 0,$$
$$bx^{-n}(x^n z'_x)'_x - k^2\lambda^2 z + zg(x, y^k z^m) = 0.$$

7. $\boldsymbol{u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(u^2+w^2) - wg(u^2+w^2),}$
$\boldsymbol{w_{tt} = ax^{-n}(x^n w_x)_x + wf(u^2+w^2) + ug(u^2+w^2).}$

1°. Решение, периодическое по t:

$$u = r(x)\cos\big[\theta(x) + C_1 t + C_2\big], \qquad w = r(x)\sin\big[\theta(x) + C_1 t + C_2\big],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $r=r(x)$ и $\theta(x)$ описываются системой ОДУ

$$
\begin{gathered}
ar''_{xx} - ar(\theta'_x)^2 + \frac{an}{x}r'_x + C_1^2 r + rf(r^2) = 0,\\
ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x + \frac{an}{x}r\theta'_x + rg(r^2) = 0.
\end{gathered}
$$

2°. При $n=0$ существует решение вида

$$u = r(z)\cos\bigl[\theta(z)+C_1t+C_2\bigr],\qquad w = r(z)\sin\bigl[\theta(z)+C_1t+C_2\bigr],\qquad z = kx-\lambda t.$$

8. $\boldsymbol{u_{tt} = ax^{-n}(x^n u_x)_x + uf(u^2-w^2) + wg(u^2-w^2),}$
$\boldsymbol{w_{tt} = ax^{-n}(x^n w_x)_x + wf(u^2-w^2) + ug(u^2-w^2).}$

1°. Точное решение:

$$u = r(x)\,\mathrm{ch}\bigl[\theta(x)+C_1t+C_2\bigr],\qquad w = r(x)\,\mathrm{sh}\bigl[\theta(x)+C_1t+C_2\bigr],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $r=r(x)$ и $\theta(x)$ описываются системой ОДУ

$$
\begin{gathered}
ar''_{xx} + ar(\theta'_x)^2 + \frac{an}{x}r'_x - C_1^2 r + rf(r^2) = 0,\\
ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x + \frac{an}{x}r\theta'_x + rg(r^2) = 0.
\end{gathered}
$$

2°. При $n=0$ существует решение вида

$$u = r(z)\,\mathrm{ch}\bigl[\theta(z)+C_1t+C_2\bigr],\qquad w = r(z)\,\mathrm{sh}\bigl[\theta(z)+C_1t+C_2\bigr],\qquad z = kx-\lambda t.$$

7.3.4. Системы эллиптических УрЧП вида $\Delta u = F(u,w)$, $\Delta w = G(u,w)$

► **Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.**

1. $\boldsymbol{u_{xx}+u_{yy} = uf(au-bw)+g(au-bw),}$
$\boldsymbol{w_{xx}+w_{yy} = wf(au-bw)+h(au-bw).}$

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(x) + b\theta(x,y),\qquad w = \psi(x) + a\theta(x,y),$$

где $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(x)$ описываются автономной системой ОДУ

$$
\begin{aligned}
\varphi''_{xx} &= \varphi f(a\varphi-b\psi) + g(a\varphi-b\psi),\\
\psi''_{xx} &= \psi f(a\varphi-b\psi) + h(a\varphi-b\psi),
\end{aligned}
$$

а функция $\theta=\theta(x,y)$ описывается линейным уравнением Шредингера специального вида

$$\theta_{xx}+\theta_{yy} = F(x)\theta,\qquad F(x) = f(a\varphi-b\psi).$$

Решения этого уравнения можно найти методом разделения переменных.

2°. Умножим первое УрЧП на a, второе УрЧП — на $-b$, а затем сложим полученные уравнения. В результате имеем

$$\zeta_{xx} + \zeta_{yy} = \zeta f(\zeta) + ag(\zeta) - bh(\zeta), \qquad \zeta = au - bw. \tag{1}$$

Это уравнение будем рассматривать вместе с первым уравнением исходной системы

$$u_{xx} + u_{yy} = uf(\zeta) + g(\zeta). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно исследовать отдельно.

Отметим два важных случая, когда уравнение (1) допускает точные решения:

(i) В общем случае уравнение (1) имеет точное решение типа бегущей волны $\zeta = \zeta(z)$, где $z = k_1 x + k_2 y$, а k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

(ii) При выполнении условия $\zeta f(\zeta) + ag(\zeta) - bh(\zeta) = c_1\zeta + c_0$ УрЧП (1) является линейным уравнением Гельмгольца.

Получив решение $\zeta = \zeta(x, y)$ уравнения (1), функцию $u = u(x, y)$ определяем путем решения линейного уравнения (2), а затем находим функцию $w = w(x, y)$ по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.

2. $\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = e^{\lambda u} f(\lambda u - \sigma w), \quad w_{xx} + w_{yy} = e^{\sigma w} g(\lambda u - \sigma w).}$

1°. Точное решение:

$$u = U(\xi) - \frac{2}{\lambda}\ln|x + C_1|, \qquad w = W(\xi) - \frac{2}{\sigma}\ln|x + C_1|, \qquad \xi = \frac{y + C_2}{x + C_1},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $U = U(\xi)$ и $W = W(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$(1 + \xi^2)U''_{\xi\xi} + 2\xi U'_\xi + \frac{2}{\lambda} = e^{\lambda U} f(\lambda U - \sigma W),$$
$$(1 + \xi^2)W''_{\xi\xi} + 2\xi W'_\xi + \frac{2}{\sigma} = e^{\sigma W} g(\lambda U - \sigma W).$$

2°. Точное решение:

$$u = \theta(x, y), \qquad w = \frac{\lambda}{\sigma}\theta(x, y) - \frac{k}{\sigma},$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda f(k) = \sigma e^{-k} g(k),$$

а функция $\theta = \theta(x, y)$ описывается интегрируем УрЧП

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = f(k)e^{\lambda\theta}.$$

Это уравнение встречается в теории горения, о его точных решениях см. уравнение 6.3.1.3.

► **Произвольные функции зависят от отношения неизвестных величин.**

3. $\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = uf\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_{xx} + w_{yy} = wg\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

1°. Пространственно-периодическое решение с мультипликативным разделением переменных (другое решение получается перестановкой x и y):

$$u = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\varphi(y), \qquad w = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\psi(y),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$ описываются автономной системой ОДУ

$$\varphi''_{yy} = k^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi), \qquad \psi''_{yy} = k^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]U(y), \qquad w = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]W(y),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные а функции $U = U(y)$ и $W = W(y)$ описываются автономной системой ОДУ

$$U''_{yy} = -k^2 U + Uf(U/W), \qquad W''_{yy} = -k^2 W + Wg(U/W).$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (C_1 x + C_2)U(y), \qquad w = (C_1 x + C_2)W(y),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $U = U(y)$ и $W = W(y)$ описываются автономной системой ОДУ

$$U''_{yy} = Uf(U/W), \qquad W''_{yy} = Wg(U/W).$$

4°. Решение мультипликативного типа:

$$u = e^{a_1 x + b_1 y}\xi(z), \qquad w = e^{a_1 x + b_1 y}\eta(z), \qquad z = a_2 x + b_2 y,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — произвольные постоянные, а функции $\xi = \xi(z)$ и $\eta = \eta(z)$ описываются автономной системой ОДУ

$$(a_2^2 + b_2^2)\xi''_{zz} + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)\xi'_z + (a_1^2 + b_1^2)\xi = \xi f(\xi/\eta),$$
$$(a_2^2 + b_2^2)\eta''_{zz} + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)\eta'_z + (a_1^2 + b_1^2)\eta = \eta g(\xi/\eta).$$

5°. Точное решение:

$$u = k\theta(x, y), \qquad w = \theta(x, y),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(k) = g(k)$, а функция $\theta = \theta(x, y)$ описывается уравнением Гельмгольца

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = f(k)\theta.$$

О решениях этого линейного УрЧП см. разд. 5.3.3.

4. $\boldsymbol{u_{xx}+u_{yy}=uf\Big(\frac{u}{w}\Big)+\frac{u}{w}h\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_{xx}+w_{yy}=wg\Big(\frac{u}{w}\Big)+h\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

Точное решение:

$$u=kw, \qquad w=\theta(x,y)-\frac{h(k)}{f(k)},$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(k)=g(k),$$

а функция $\theta=\theta(x,y)$ описывается уравнением Гельмгольца

$$\theta_{xx}+\theta_{yy}=f(k)\theta.$$

О решениях этого линейного УрЧП см. разд. 5.3.3.

5. $\boldsymbol{u_{xx}+u_{yy}=u^n f\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_{xx}+w_{yy}=w^n g\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

При $f(z)=kz^{-m}$ и $g(z)=-kz^{n-m}$ система описывает химическую реакцию n-го порядка (порядка $n-m$ по компоненте u и порядка m по компоненте w); Значениям $n=2$, $m=1$ соответствует реакция второго порядка, часто встречающаяся в приложениях.

1°. Точное решение:

$$u=r^{\frac{2}{1-n}}U(\theta), \quad w=r^{\frac{2}{1-n}}W(\theta), \quad r=\sqrt{(x+C_1)^2+(y+C_2)^2}, \quad \theta=\frac{y+C_2}{x+C_1},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $y=y(\xi)$ и $z=z(\xi)$ описываются автономной системой ОДУ

$$U''_{\theta\theta}+\frac{4}{(1-n)^2}U=U^n f\Big(\frac{U}{W}\Big), \qquad W''_{\theta\theta}+\frac{4}{(1-n)^2}W=W^n g\Big(\frac{U}{W}\Big).$$

2°. Точное решение:

$$u=k\zeta(x,y), \quad w=\zeta(x,y),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k^{n-1}f(k)=g(k),$$

а функция $\zeta=\zeta(x,y)$ удовлетворяет УрЧП со степенной нелинейностью

$$\zeta_{xx}+\zeta_{yy}=g(k)\zeta^n.$$

► **Другие системы УрЧП эллиптического типа.**

6. $\boldsymbol{u_{xx}+u_{yy}=uf(u^nw^m), \quad w_{xx}+w_{yy}=wg(u^nw^m).}$

Решение мультипликативного типа:

$$u=e^{m(a_1x+b_1y)}\xi(z), \quad w=e^{-n(a_1x+b_1y)}\eta(z), \quad z=a_2x+b_2y,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — произвольные постоянные, а функции $\xi=\xi(z)$ и $\eta=\eta(z)$ описываются автономной системой ОДУ

$$(a_2^2+b_2^2)\xi''_{zz}+2m(a_1a_2+b_1b_2)\xi'_z+m^2(a_1^2+b_1^2)\xi=\xi f(\xi^n\eta^m),$$
$$(a_2^2+b_2^2)\eta''_{zz}-2n(a_1a_2+b_1b_2)\eta'_z+n^2(a_1^2+b_1^2)\eta=\eta g(\xi^n\eta^m).$$

7. $\boldsymbol{u_{xx}+u_{yy}=uf(u^2+w^2)-wg(u^2+w^2),}$
$\boldsymbol{w_{xx}+w_{yy}=wf(u^2+w^2)+ug(u^2+w^2).}$

1°. Решение, периодическое по y:

$$u=r(x)\cos\bigl[\theta(x)+C_1y+C_2\bigr], \quad w=r(x)\sin\bigl[\theta(x)+C_1y+C_2\bigr],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $r=r(x)$ и $\theta=\theta(x)$ описываются автономной системой ОДУ

$$r''_{xx}=r(\theta'_x)^2+C_1^2r+rf(r^2),$$
$$r\theta''_{xx}=-2r'_x\theta'_x+rg(r^2).$$

2°. Решение (обобщает решение из п. 1°):

$$u=r(z)\cos\bigl[\theta(z)+C_1y+C_2\bigr], \quad w=r(z)\sin\bigl[\theta(z)+C_1y+C_2\bigr], \quad z=k_1x+k_2y,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функции $r=r(z)$ и $\theta=\theta(z)$ описываются автономной системой ОДУ

$$(k_1^2+k_2^2)r''_{zz}=k_1^2r(\theta'_z)^2+r(k_2\theta'_z+C_1)^2+rf(r^2),$$
$$(k_1^2+k_2^2)r\theta''_{zz}=-2\bigl[(k_1^2+k_2^2)\theta'_z+C_1k_2\bigr]r'_z+rg(r^2).$$

8. $\boldsymbol{u_{xx}+u_{yy}=uf(u^2-w^2)+wg(u^2-w^2),}$
$\boldsymbol{w_{xx}+w_{yy}=wf(u^2-w^2)+ug(u^2-w^2).}$

Точное решение:

$$u=r(z)\,\mathrm{ch}\bigl[\theta(z)+C_1y+C_2\bigr], \quad w=r(z)\,\mathrm{sh}\bigl[\theta(z)+C_1y+C_2\bigr], \quad z=k_1x+k_2y,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функции $r=r(z)$ и $\theta=\theta(z)$ описываются автономной системой ОДУ

$$(k_1^2+k_2^2)r''_{zz}+k_1^2r(\theta'_z)^2+r(k_2\theta'_z+C_1)^2=rf(r^2),$$
$$(k_1^2+k_2^2)r\theta''_{zz}+2\bigl[(k_1^2+k_2^2)\theta'_z+C_1k_2\bigr]r'_z=rg(r^2).$$

7.4. Системы УрЧП общего вида

7.4.1. Линейные системы

1. $\boldsymbol{u_t = L[u] + f_1(t)u + g_1(t)w, \quad w_t = L[w] + f_2(t)u + g_2(t)w.}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n, t$. Считается, что $L[\mathrm{const}] = 0$.

Точное решение:

$$u = \varphi_1(t)U(x_1, \ldots, x_n, t) + \varphi_2(t)W(x_1, \ldots, x_n, t),$$
$$w = \psi_1(t)U(x_1, \ldots, x_n, t) + \psi_2(t)W(x_1, \ldots, x_n, t),$$

где пары функций $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ являются линейно независимыми (фундаментальными) решениями линейной однородной системы ОДУ первого порядка

$$\varphi_t' = f_1(t)\varphi + g_1(t)\psi, \qquad \psi_t' = f_2(t)\varphi + g_2(t)\psi,$$

а функции $U = U(x_1, \ldots, x_n, t)$ и $W = W(x_1, \ldots, x_n, t)$ описываются независимыми линейными УрЧП

$$U_t = L[U], \qquad W_t = L[W].$$

2. $\boldsymbol{u_{tt} = L[u] + a_1u + b_1w, \quad w_{tt} = L[w] + a_2u + b_2w.}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным).

Точное решение:

$$u = \frac{a_1 - \lambda_2}{a_2(\lambda_1 - \lambda_2)}U - \frac{a_1 - \lambda_1}{a_2(\lambda_1 - \lambda_2)}W, \qquad w = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\bigl(U - W\bigr),$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

а функции $U = U(x_1, \ldots, x_n, t)$ и $W = W(x_1, \ldots, x_n, t)$ описываются независимыми линейными УрЧП

$$U_{tt} = L[U] + \lambda_1 U, \qquad W_{tt} = L[W] + \lambda_2 W.$$

7.4.2. Нелинейные системы двух УрЧП, содержащие первые производные по t

1. $\boldsymbol{u_t = L[u] + uf(t, bu - cw) + g(t, bu - cw),}$
$\boldsymbol{w_t = L[w] + wf(t, bu - cw) + h(t, bu - cw).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n$. Считается, что $L[\mathrm{const}] = 0$.

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t) + c\exp\Big[\int f(t, b\varphi - c\psi)\,dt\Big]\theta(x,t),$$
$$w = \psi(t) + b\exp\Big[\int f(t, b\varphi - c\psi)\,dt\Big]\theta(x,t),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ

$$\varphi'_t = \varphi f(t, b\varphi - c\psi) + g(t, b\varphi - c\psi),$$
$$\psi'_t = \psi f(t, b\varphi - c\psi) + h(t, b\varphi - c\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному УрЧП

$$\theta_t = L[\theta].$$

2°. Умножим первое УрЧП на b, а второе УрЧП — на $-c$, а затем сложим полученные уравнения. В результате имеем

$$\zeta_t = L[\zeta] + \zeta f(t,\zeta) + bg(t,\zeta) - ch(t,\zeta), \qquad \zeta = bu - cw. \tag{1}$$

Это уравнение будем рассматривать вместе с первым уравнением исходной системы

$$u_t = L[u] + uf(t,\zeta) + g(t,\zeta). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно исследовать отдельно. Получив пространственно однородное или стационарное решение этого уравнения в виде $\zeta = \zeta(t)$ или $\zeta = \zeta(x_1, \ldots, x_n, t)$, функцию $u = u(x_1, \ldots, x_n, t)$ определяем из линейного УрЧП (2), а затем находим функцию $w = w(x_1, \ldots, x_n, t)$ по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.

2. $\boldsymbol{u_t = L_1[u] + uf\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_t = L_2[w] + wg\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

Здесь L_1 и L_2 — произвольные линейные дифференциальные операторы (любого порядка) по переменной x с постоянными коэффициентами.

1°. Точное решение:

$$u = e^{kx-\lambda t}y(\xi), \quad w = e^{kx-\lambda t}z(\xi), \quad \xi = \beta x - \gamma t,$$

где k, λ, β, γ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$M_1[y] + \lambda y + yf(y/z) = 0, \quad M_2[z] + \lambda z + zg(y/z) = 0,$$
$$M_1[y] = e^{-kx}L_1[e^{kx}y(\xi)], \qquad M_2[z] = e^{-kx}L_2[e^{kx}z(\xi)].$$

Частному случаю $k = \lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

2°. Если операторы L_1 и L_2 содержат только четные производные, то существуют решения вида

$$u = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\varphi(t), \qquad w = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\psi(t);$$
$$u = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]\varphi(t), \quad w = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]\psi(t);$$
$$u = (C_1 x + C_2)\varphi(t), \qquad w = (C_1 x + C_2)\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные. Отметим, что третье решение является вырожденным.

3. $\boldsymbol{u_t = L[u] + uf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \quad w_t = L[w] + wg\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n$, t:

$$L[u] = \sum A_{k_1 \ldots k_n}(x_1, \ldots, x_n, t) \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t) \exp\Big[\int g(t, \varphi(t))\, dt\Big] \theta(x_1, \ldots, x_n, t),$$
$$w = \exp\Big[\int g(t, \varphi(t))\, dt\Big] \theta(x_1, \ldots, x_n, t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка

$$\varphi_t' = [f(t, \varphi) - g(t, \varphi)]\varphi,$$

а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному УрЧП

$$\theta_t = L[\theta].$$

2°. Преобразование

$$u = a_1(t)U + b_1(t)W, \quad w = a_2(t)U + b_2(t)W,$$

где $a_n(t)$ и $b_n(t)$ — произвольные функции $(n = 1, 2)$ приводит рассматриваемое уравнение к уравнению аналогичного вида для U и W.

4. $\boldsymbol{u_t = L[u] + uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + g\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad w_t = L[w] + wf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + h\Big(\dfrac{u}{w}\Big).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n$, t:

$$L[u] = \sum A_{k_1 \ldots k_n}(x_1, \ldots, x_n, t) \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

где $k_1 + \cdots + k_n \geqslant 1$.

Пусть λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$g(\lambda) = \lambda h(\lambda). \tag{1}$$

1°. Решение, если $f(\lambda) \neq 0$:

$$u(x,t) = \lambda\Big(\exp[f(\lambda)t]\theta(x,t) - \tfrac{h(\lambda)}{f(\lambda)}\Big), \quad w(x,t) = \exp[f(\lambda)t]\theta(x,t) - \tfrac{h(\lambda)}{f(\lambda)},$$

где функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному УрЧП

$$\theta_t = L[\theta]. \tag{2}$$

2°. Решение, если $f(\lambda) = 0$:

$$u(x,t) = \lambda[\theta(x,t) + h(\lambda)t], \quad w(x,t) = \theta(x,t) + h(\lambda)t,$$

где функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному УрЧП (2).

5. $\boldsymbol{u_t = L[u] + uf\Big(t, \frac{u}{w}\Big) + \frac{u}{w}h\Big(t, \frac{u}{w}\Big),}$
$\boldsymbol{w_t = L[w] + wg\Big(t, \frac{u}{w}\Big) + h\Big(t, \frac{u}{w}\Big).}$

Точное решение:

$$u = \varphi(t)G(t)\Big[\theta(x_1, \ldots, x_n, t) + \int \tfrac{h(t,\varphi)}{G(t)}\,dt\Big], \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t,\varphi)\,dt\Big],$$
$$w = G(t)\Big[\theta(x_1, \ldots, x_n, t) + \int \tfrac{h(t,\varphi)}{G(t)}\,dt\Big],$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка

$$\varphi'_t = [f(t,\varphi) - g(t,\varphi)]\varphi,$$

а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному УрЧП

$$\theta_t = L[\theta].$$

6. $\boldsymbol{u_t = L[u] + uf\Big(t, \frac{u}{w}\Big)\ln u + ug\Big(t, \frac{u}{w}\Big),}$
$\boldsymbol{w_t = L[w] + wf\Big(t, \frac{u}{w}\Big)\ln w + wh\Big(t, \frac{u}{w}\Big).}$

Точное решение:

$$u(x,t) = \varphi(t)\psi(t)\theta(x_1, \ldots, x_n, t), \quad w(x,t) = \psi(t)\theta(x_1, \ldots, x_n, t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= \varphi[g(t,\varphi) - h(t,\varphi) + f(t,\varphi)\ln\varphi], \\ \psi'_t &= \psi[h(t,\varphi) + f(t,\varphi)\ln\psi], \end{aligned} \tag{1}$$

а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет УрЧП

$$\theta_t = L[\theta] + f(t,\varphi)\theta\ln\theta. \tag{2}$$

Получив решение первого ОДУ в (1), второе ОДУ решается путем сведения его к линейному уравнению с помощью подстановки $\psi = e^{\zeta}$. Если L — одномерный оператор с постоянными коэффициентами ($n = 1$) и $f = \mathrm{const}$, то УрЧП (2) имеет решение типа бегущей волны $\theta = \theta(kx - \lambda t)$.

7. $\boldsymbol{u_t = L[u] + uf(au + bw) - bwg\Big(\frac{w}{u}\Big),}$

$\boldsymbol{w_t = L[w] + wf(au + bw) + awg\Big(\frac{w}{u}\Big).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x.

1°. Решение:

$$u = br(x,t)\cos^2\varphi(t), \quad w = ar(x,t)\sin^2\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = \frac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\,\varphi\, g\Big(\frac{a}{b}\,\mathrm{tg}^2\,\varphi\Big), \tag{1}$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет УрЧП

$$r_t = L[r] + rf(abr). \tag{2}$$

Общее решение ОДУ (1) можно представить в неявном виде

$$2\int \frac{d\varphi}{a\,\mathrm{tg}\,\varphi\, g(ab^{-1}\,\mathrm{tg}^2\,\varphi)} = t + C.$$

УрЧП (2) допускает стационарные решения $r = r(x)$. Если L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то уравнение (2) допускает решение типа бегущей волны $r = r(kx - \lambda t)$, где k и λ — произвольные постоянные.

2°. Решение:

$$u = br(x,t)\,\mathrm{ch}^2\,\psi(t), \quad w = -ar(x,t)\,\mathrm{sh}^2\,\psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\psi'_t = \frac{1}{2}a\,\mathrm{th}\,\psi\, g\Big(-\frac{a}{b}\,\mathrm{th}^2\,\psi\Big),$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2).

3°. Умножим первое УрЧП на a, второе УрЧП — на b, а затем сложим. В результате получим уравнение

$$z_t = L[z] + zf(z), \qquad z = au + bw.$$

Замечание 7.5. *Решения, представленные в пп.* 1° *и* 2°, *легко обобщаются на случай, когда линейный дифференциальный оператор* L *зависит от* n *пространственных переменных* $x_1, \ldots, x_n$.

8. $\boldsymbol{u_t = L[u] + uf(u^2 + w^2) - wg\Big(\frac{w}{u}\Big),}$

$\boldsymbol{w_t = L[w] + wf(u^2 + w^2) + ug\Big(\frac{w}{u}\Big).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x.

Решение:

$$u = r(x,t)\cos\varphi(t), \quad w = r(x,t)\sin\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = g(\operatorname{tg}\varphi), \tag{1}$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет УрЧП

$$r_t = L[r] + rf(r^2). \tag{2}$$

Общее решение ОДУ (1) можно представить в неявной форме:

$$\int \frac{d\varphi}{g(\operatorname{tg}\varphi)} = t + C.$$

Отметим, что УрЧП (2) допускает стационарное решение $r = r(x)$. Если L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то уравнение (2) имеет решение типа бегущей волны $r = r(kx - \lambda t)$, где k и λ — произвольные постоянные.

Замечание 7.6. *Описанное выше точное решение легко обобщается на случай, когда линейный дифференциальный оператор L зависит от n пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

9. $\boldsymbol{u_t = L[u] + uf(u^2 - w^2) + wg\Big(\frac{w}{u}\Big),}$

$\boldsymbol{w_t = L[w] + wf(u^2 - w^2) + ug\Big(\frac{w}{u}\Big).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x.

Решение:

$$u = r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t), \quad w = r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = g(\operatorname{th}\varphi), \tag{1}$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет УрЧП

$$r_t = L[r] + rf(r^2). \tag{2}$$

Общее решение ОДУ (1) можно представить в неявной форме:

$$\int \frac{d\varphi}{g(\operatorname{th}\varphi)} = t + C.$$

Отметим, что УрЧП (2) допускает стационарное решение $r = r(x)$. Если L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то уравнение (2) имеет решение типа бегущей волны $r = r(kx - \lambda t)$, где k и λ — произвольные постоянные.

Замечание 7.7. *Описанное выше точное решение легко обобщается на случай, когда линейный дифференциальный оператор L зависит от n пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

7.4.3. Нелинейные системы двух УрЧП, содержащие вторые производные по t

1. $\boldsymbol{u_{tt} = L[u] + uf(t, au - bw) + g(t, au - bw),}$
$\boldsymbol{w_{tt} = L[w] + wf(t, au - bw) + h(t, au - bw).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n$. Считается, что $L[\mathrm{const}] = 0$.

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t) + a\theta(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad w = \psi(t) + b\theta(x_1, \ldots, x_n, t),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ

$$\varphi''_{tt} = \varphi f(t, a\varphi - b\psi) + g(t, a\varphi - b\psi), \qquad \psi''_{tt} = \psi f(t, a\varphi - b\psi) + h(t, a\varphi - b\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ описывается линейным УрЧП

$$\theta_{tt} = L[\theta] + f(t, a\varphi - b\psi)\theta.$$

2°. Умножим первое уравнение на a, второе уравнение — на $-b$, а затем сложим полученные УрЧП. В результате имеем

$$\zeta_{tt} = L[\zeta] + \zeta f(t, \zeta) + ag(t, \zeta) - bh(t, \zeta), \qquad \zeta = au - bw. \tag{1}$$

Это уравнение будем рассматривать вместе с первым уравнением исходной системы

$$u_{tt} = L[u] + uf(t, \zeta) + g(t, \zeta). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно исследовать отдельно. Получив решение уравнения (1) в виде $\zeta = \zeta(x_1, \ldots, x_n, t)$, функцию $u = u(x_1, \ldots, x_n, t)$ можно найти путем решения линейного УрЧП (2), после чего функция $w = w(x_1, \ldots, x_n, t)$ определяется по формуле $w = (au - \zeta)/b$.

Отметим три важных случая, когда уравнения (1) допускает точное решение:

(i) Уравнение (1) имеет пространственно однородное решение $\zeta = \zeta(t)$.

(ii) Предположим, что коэффициенты оператора L и функции f, g, h не зависят явно от t. Тогда уравнение (1) допускает стационарное решение $\zeta = \zeta(x_1, \ldots, x_n)$.

(iii) Если выполняется условие $\zeta f(t,\zeta) + bg(t,\zeta) - ch(t,\zeta) = k_1\zeta + k_0$, то УрЧП (1) является линейным. Если коэффициенты линейного оператор L постоянны, то для получения решений уравнения можно использовать метод разделения переменных.

2. $\boldsymbol{u_t = L[u] + b_2 f(a_1u + b_1w) + b_1 g(a_2u + b_2w),}$
$\boldsymbol{w_t = L[w] - a_2 f(a_1u + b_1w) - a_1 g(a_2u + b_2w).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x и t. Считается, что $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

1°. Умножив уравнения на подходящие константы и сложив вместе, получается два независимых УрЧП

$$\begin{aligned} &U_t = L[U] + (a_1b_2 - a_2b_1)f(U), \qquad U = a_1u + b_1w;\\ &W_t = L[W] - (a_1b_2 - a_2b_1)g(W), \qquad W = a_2u + b_2w. \end{aligned} \tag{1}$$

2°. Если L — произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то УрЧП (1) допускают решения типа бегущей волны

$$U = U(k_1x - \lambda_1t), \qquad W = W(k_2x - \lambda_2t),$$

где k_m и λ_m — произвольные постоянные. Соответствующее решение исходной системы будет представлять собой суперпозицию (линейную комбинацию) двух нелинейных бегущих волн.

3°. Если коэффициенты линейного оператора L зависят только от x, то уравнения (1) имеют простые решения вида

$$U = U(t), \quad W = W(x); \qquad U = U(x), \quad W = W(t).$$

Замечание 7.8. *Аналогично рассматривается случай, когда линейный дифференциальный оператор L зависит от нескольких пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

3. $\boldsymbol{u_{tt} = L_1[u] + uf\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad w_{tt} = L_2[w] + wg\Big(\frac{u}{w}\Big).}$

Здесь L_1 и L_2 — произвольные линейные дифференциальные операторы по x с постоянными коэффициентами. Считается, что $L_1[\mathrm{const}] = 0$ и $L_2[\mathrm{const}] = 0$.

1°. Решение в виде произведения двух бегущих волн с различными скоростями:

$$u = e^{kx-\lambda t}y(\xi), \qquad w = e^{kx-\lambda t}z(\xi), \qquad \xi = \beta x - \gamma t,$$

где k, λ, β, γ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} &\gamma^2 y''_{\xi\xi} + 2\lambda\gamma y'_\xi + \lambda^2 y = M_1[y] + yf(y/z), \quad M_1[y] = e^{-kx}L_1[e^{kx}y(\xi)],\\ &\gamma^2 z''_{\xi\xi} + 2\lambda\gamma z'_\xi + \lambda^2 z = M_2[z] + zg(y/z), \quad M_2[z] = e^{-kx}L_2[e^{kx}z(\xi)]. \end{aligned}$$

Частному случаю $k = \lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

2°. Периодические решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)]\varphi(x), \qquad w = [C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)]\psi(x),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой ОДУ

$$L_1[\varphi] + k^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi) = 0, \qquad L_2[\psi] + k^2\psi + \psi g(\varphi/\psi) = 0.$$

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [C_1 \operatorname{sh}(kt) + C_2 \operatorname{ch}(kt)]\varphi(x), \qquad w = [C_1 \operatorname{sh}(kt) + C_2 \operatorname{ch}(kt)]\psi(x),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой ОДУ

$$L_1[\varphi] - k^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi) = 0, \qquad L_2[\psi] - k^2\psi + \psi g(\varphi/\psi) = 0.$$

4°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (C_1 t + C_2)\varphi(x), \qquad w = (C_1 t + C_2)\psi(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой ОДУ

$$L_1[\varphi] + \varphi f(\varphi/\psi) = 0, \qquad L_2[\psi] + \psi g(\varphi/\psi) = 0.$$

Замечание 7.9. *Коэффициенты операторов L_1 и L_2 и функции f и g в пп. 2°–4° могут зависеть от x.*

Замечание 7.10. *Если L_1 и L_2 содержат только четные производные, то существуют решения вида*

$$\begin{aligned}
&u = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]U(t), && w = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]W(t);\\
&u = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]U(t), && w = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]W(t);\\
&u = (C_1 x + C_2)U(t), && w = (C_1 x + C_2)W(t),
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные. Отметим, что последнее решение является вырожденным.

4. $\boldsymbol{u_{tt} = L[u] + uf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \qquad w_{tt} = L[w] + wg\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n$.

Точное решение:

$$u = \varphi(t)\theta(x_1, \ldots, x_n), \qquad w = \psi(t)\theta(x_1, \ldots, x_n),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейной системой ОДУ второго порядка

$$\varphi''_{tt} = a\varphi + \varphi f(t, \varphi/\psi), \qquad \psi''_{tt} = a\psi + \psi g(t, \varphi/\psi),$$

a — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет линейному стационарному УрЧП

$$L[\theta] = a\theta.$$

5. $\boldsymbol{u_{tt} = L[u] + uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + g\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad w_{tt} = L[w] + wf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + h\Big(\dfrac{u}{w}\Big).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n, t$.

Точное решение:

$$u = k\theta(x_1, \ldots, x_n, t), \quad w = \theta(x_1, \ldots, x_n, t),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $g(k) = kh(k)$, а функция $\theta = \theta(x, t)$ описывается линейным УрЧП

$$\theta_{tt} = L[\theta] + f(k)\theta + h(k).$$

6. $\boldsymbol{u_{tt} = L[u] + au\ln u + uf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \quad w_{tt} = L[w] + aw\ln w + wg\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).}$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n$.

Точное решение:

$$u = \varphi(t)\theta(x_1, \ldots, x_n), \qquad w = \psi(t)\theta(x_1, \ldots, x_n),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейной системой ОДУ второго порядка

$$\varphi''_{tt} = a\varphi\ln\varphi + b\varphi + \varphi f(t, \varphi/\psi), \qquad \psi''_{tt} = a\psi\ln\psi + b\psi + \psi g(t, \varphi/\psi),$$

b — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет стационарному УрЧП

$$L[\theta] + a\theta\ln\theta - b\theta = 0.$$

► *Точные решения многих нелинейных систем уравнений математической физики и других нелинейных систем УрЧП можно найти в справочнике Polyanin & Zaitsev (2012).*

Литература к главе 7

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. *Нелинейные уравнения математической физики* (*часть 2*). М.: Юрайт, 2017.

Barannyk T. Symmetry and exact solutions for systems of nonlinear reaction-diffusion equations. *Proc. of Inst. of Mathematics of NAS of Ukraine*, 2002, Vol. 43, Part 1, pp. 80–85.

Barannyk T. A., Nikitin A. G. Solitary wave solutions for heat equations. *Proc. of Inst. of Mathematics of NAS of Ukraine,* 2004, Vol. 50, Part 1, pp. 34–39.

Cherniha R., King J. R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I. *J. Phys. A: Math. Gen.,* 2000, Vol. 33, pp. 267–282, 7839–7841.

Cherniha R., King J. R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II. *J. Phys. A: Math. Gen.,* 2003, Vol. 36, pp. 405–425.

Cherniha R., Davydovych V. *Nonlinear Reaction-Diffusion Systems: Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology*. Cham: Springer, 2017.

Nikitin A. G., Wiltshire R. J. Systems of reaction-diffusion equations and their symmetry properties. *J. Math. Phys.,* 2001, Vol. 42, No. 4, pp. 1667–1688.

Polyanin A. D. Exact solutions of nonlinear sets of equations of the theory of heat and mass transfer in reactive media and mathematical biology. *Theor. Foundations of Chemical Engineering*, 2004, Vol. 38, No. 6, pp. 622–635.

Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*. Boca Raton — London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

Polyanin A. D., Vyaz'mina E. A. New classes of exact solutions to nonlinear systems of reaction-diffusion equations. *Doklady Mathematics*, 2006, Vol. 74, No. 1, pp. 597–602.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed.* Boca Raton — London: Chapman & Hall/CRC Press, 2012.

Rozhdestvenskii B. L., Yanenko N. N. *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics*. Providence: American Mathematical Society, 1983.

8. Интегральные уравнения

Предварительные замечания. Интегральные уравнения являются математическими уравнениями, которые содержат неизвестную функцию под знаком интеграла.

В данной главе описаны точные решения различных линейных и нелинейных интегральных уравнений первого и второго рода. Рассматриваются как уравнения с переменным пределом интегрирования, так и уравнения с постоянными пределами интегрирования. Указаны редукции, приводящие некоторые интегральные уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям (которые обычно решаются проще, чем интегральные уравнения).

8.1. Интегральные уравнения первого рода с переменным пределом интегрирования

8.1.1. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода

► **Уравнения, ядра которых содержат степенные функции.**

1. $\displaystyle\int_a^x y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

Решение: $y(x) = f'_x(x)$.

2. $\displaystyle\int_a^x (x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = f''_{xx}(x)$.

3. $\displaystyle\int_a^x (Ax+Bt+C)y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

1°. Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\biggl\{\bigl[(A+B)x+C\bigr]^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \bigl[(A+B)t+C\bigr]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\biggr\}.$$

2°. Решение при $B = -A$:

$$y(x) = \frac{1}{C}\frac{d}{dx}\biggl[\exp\Bigl(-\frac{A}{C}x\Bigr)\int_a^x \exp\Bigl(\frac{A}{C}t\Bigr) f'_t(t)\,dt\biggr].$$

4. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Предполагается, что правая часть уравнения удовлетворяет условиям $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{n!} f_x^{(n+1)}(x)$.

5. $\displaystyle \int_a^x (x^n - t^n) y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{n} \dfrac{d}{dx} \left[\dfrac{f'_x(x)}{x^{n-1}} \right]$.

6. $\displaystyle \int_a^x \sqrt{x-t}\, y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{d^2}{dx^2} \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}$.

7. $\displaystyle \int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = f(x).$

Уравнение Абеля.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{f(a)}{\pi\sqrt{x-a}} + \frac{1}{\pi} \int_a^x \frac{f'_t(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}.$$

8. $\displaystyle \int_a^x (x-t)^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$

Решение: $y(x) = \dfrac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} \dfrac{d^2}{dx^2} \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\lambda}$.

9. $\displaystyle \int_a^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^\lambda} = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Обобщенное уравнение Абеля.

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\lambda}} = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\lambda}} + \int_a^x \frac{f'_t(t)\,dt}{(x-t)^{1-\lambda}} \right].$$

► **Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции.**

10. $\displaystyle \int_a^x e^{\lambda(x-t)} y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

Решение: $y(x) = f'_x(x) - \lambda f(x)$.

11. $\displaystyle \int_a^x e^{\lambda x + \beta t} y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

Решение: $y(x) = e^{-(\lambda+\beta)x} \left[f'_x(x) - \lambda f(x) \right]$.

12. $\displaystyle \int_a^x \left[e^{\lambda(x-t)} - 1 \right] y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} f''_{xx}(x) - f'_x(x)$.

13. $\displaystyle \int_a^x \left[e^{\lambda(x-t)} + b \right] y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

При $b = -1$ см. уравнение 8.1.1.12.

Решение при $b \neq -1$:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} - \frac{\lambda}{(b+1)^2} \int_a^x \exp\Bigl[\frac{\lambda b}{b+1}(x-t)\Bigr] f'_t(t)\,dt.$$

14. $\displaystyle\int_a^x \bigl[e^{\lambda(x-t)} - e^{\mu(x-t)}\bigr] y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda-\mu}\bigl[f''_{xx} - (\lambda+\mu)f'_x + \lambda\mu f\bigr], \qquad f = f(x).$$

15. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{e^{\lambda x} - e^{\lambda t}}} = f(x), \qquad \lambda > 0.$

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t)\,dt}{\sqrt{e^{\lambda x} - e^{\lambda t}}}.$

16. $\displaystyle\int_a^x (e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^{\mu} y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \mu < 1.$

Решение:

$$y(x) = ke^{\lambda x}\Bigl(e^{-\lambda x}\frac{d}{dx}\Bigr)^2 \int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t)\,dt}{(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^{\mu}}, \qquad k = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu}.$$

17. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^{\mu}} = f(x), \qquad \lambda > 0, \quad 0 < \mu < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t)\,dt}{(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^{1-\mu}}.$$

18. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\lambda} e^{\mu(x-t)} y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = ke^{\mu x}\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x \frac{e^{-\mu t} f(t)\,dt}{(x-t)^{\lambda}}, \qquad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

► **Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции.**

19. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

Решение: $\displaystyle y(x) = f'_x(x) - \lambda^2 \int_a^x f(x)\,dx.$

20. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{\operatorname{ch}[\lambda(x-t)] - 1\bigr\} y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(x) = 0.$

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\lambda^2} f'''_{xxx}(x) - f'_x(x).$

21. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{\operatorname{ch}[\lambda(x-t)] + b\bigr\} y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

При $b = 0$ см. уравнение 8.1.1.19, при $b = -1$ см. уравнение 8.1.1.20.

1°. Решение при $b(b+1)<0$:

$$y(x)=\frac{f_x'(x)}{b+1}-\frac{\lambda^2}{k(b+1)^2}\int_a^x \sin[k(x-t)]f_t'(t)\,dt,\qquad \text{где}\quad k=\lambda\sqrt{\frac{-b}{b+1}}.$$

2°. Решение при $b(b+1)>0$:

$$y(x)=\frac{f_x'(x)}{b+1}-\frac{\lambda^2}{k(b+1)^2}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f_t'(t)\,dt,\qquad \text{где}\quad k=\lambda\sqrt{\frac{b}{b+1}}.$$

22. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{ch}^2[\lambda(x-t)]y(t)\,dt=f(x),\qquad f(a)=0.$

Решение:

$$y(x)=f_x'(x)-\frac{2\lambda^2}{k}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f_t'(t)\,dt,\qquad \text{где}\quad k=\lambda\sqrt{2}.$$

23. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt=f(x),\qquad f(a)=f_x'(a)=0.$

Решение: $y(x)=\dfrac{1}{\lambda}f_{xx}''(x)-\lambda f(x)$.

24. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]+b\bigr\}y(t)\,dt=f(x),\qquad f(a)=0.$

При $b=0$ см. уравнение 8.1.1.23.

Решение при $b\neq 0$:

$$y(x)=\frac{1}{b}f_x'(x)+\int_a^x R(x-t)f_t'(t)\,dt,$$

$$R(x)=\frac{\lambda}{b^2}\exp\Bigl(-\frac{\lambda x}{2b}\Bigr)\Bigl[\frac{\lambda}{2bk}\operatorname{sh}(kx)-\operatorname{ch}(kx)\Bigr],\quad k=\frac{\lambda\sqrt{1+4b^2}}{2b}.$$

25. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\,\bigr)y(t)\,dt=f(x),\qquad f(a)=0.$

Решение: $y(x)=\dfrac{2}{\pi\lambda}\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_a^x \frac{\cos\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\,\bigr)}{\sqrt{x-t}}f(t)\,dt.$

► **Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции.**

26. $\displaystyle\int_a^x (\ln x-\ln t)y(t)\,dt=f(x),\qquad f(a)=f_x'(a)=0.$

Решение: $y(x)=xf_{xx}''(x)+f_x'(x)$.

27. $\displaystyle\int_0^x \ln(x-t)y(t)\,dt=f(x).$

Решение:

$$y(x)=-\int_0^x f_{tt}''(t)\,dt\int_0^\infty \frac{(x-t)^z e^{-\mathcal{C}z}}{\Gamma(z+1)}\,dz-f_x'(0)\int_0^\infty \frac{x^z e^{-\mathcal{C}z}}{\Gamma(z+1)}\,dz,$$

где $\mathcal{C} = \lim\limits_{k\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1} - \ln k\Big) = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

28. $\displaystyle\int_a^x [\ln(x-t) + A]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

При $A = 0$ см. уравнение 8.1.1.27.

Решение при $A \neq 0$:

$$y(x) = -\frac{d}{dx}\int_a^x \nu_A(x-t)f(t)\,dt, \qquad \nu_A(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{x^z e^{(A-\mathcal{C})z}}{\Gamma(z+1)}\,dz,$$

где $\mathcal{C} = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

При $a = 0$ решение имеет вид

$$y(x) = -\int_0^x f''_{tt}(t)\,dt\int_0^\infty \frac{(x-t)^z e^{(A-\mathcal{C})z}}{\Gamma(z+1)}\,dz - f'_x(0)\int_0^\infty \frac{x^z e^{(A-\mathcal{C})z}}{\Gamma(z+1)}\,dz.$$

29. $\displaystyle\int_a^x (x-t)\big[\ln(x-t) + A\big]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

Решение:

$$y(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x \nu_A(x-t)f(t)\,dt, \qquad \nu_A(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{x^z e^{(A-\mathcal{C})z}}{\Gamma(z+1)}\,dz,$$

где $\mathcal{C} = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

► **Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции.**

30. $\displaystyle\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

Решение: $y(x) = f'_x(x) + \lambda^2\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx.$

31. $\displaystyle\int_a^x \big\{\cos[\lambda(x-t)] - 1\big\}y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$

Решение: $y(x) = -\dfrac{1}{\lambda^2}f'''_{xxx}(x) - f'_x(x).$

32. $\displaystyle\int_a^x \big\{\cos[\lambda(x-t)] + b\big\}y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

При $b = 0$ см. уравнение 8.1.1.30, при $b = -1$ см. уравнение 8.1.1.31.

1°. Решение при $b(b+1) > 0$:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} + \frac{\lambda^2}{k(b+1)^2}\int_a^x \sin[k(x-t)]f'_t(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \lambda\sqrt{\frac{b}{b+1}}.$$

2°. Решение при $b(b+1) < 0$:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} + \frac{\lambda^2}{k(b+1)^2}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f'_t(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \lambda\sqrt{\frac{-b}{b+1}}.$$

33. $\displaystyle\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\lambda} f''_{xx}(x) + \lambda f(x).$

34. $\displaystyle\int_a^x \sin\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\,\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{2}{\pi\lambda}\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_a^x \frac{\operatorname{ch}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\,\bigr)}{\sqrt{x-t}} f(t)\,dt.$

► **Уравнения, ядра которых содержат специальные функции.**

35. $\displaystyle\int_a^x J_0\bigl(\lambda(x-t)\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода и $f(a) = f'_x(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \int_a^x J_0\bigl(\lambda(x-t)\bigr)\Bigl(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2\Bigr) f(t)\,dt.$$

36. $\displaystyle\int_a^x J_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\,\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода и $f(a) = f'_x(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_a^x I_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\,\bigr) f(t)\,dt.$$

37. $\displaystyle\int_a^x I_0\bigl(\lambda(x-t)\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Здесь $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода и $f(a) = f'_x(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \int_a^x I_0\bigl(\lambda(x-t)\bigr)\Bigl(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2\Bigr) f(t)\,dt.$$

38. $\displaystyle\int_a^x I_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\,\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Здесь $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода и $f(a) = f'_x(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_a^x J_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\,\bigr) f(t)\,dt.$$

► **Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции.**

39. $\displaystyle\int_a^x [g(x) - g(t)]y(t)\,dt = f(x).$

Считаем, что $f(a) = f'_x(a) = 0$ и $f'_x/g'_x \neq \text{const}$.

Решение: $y(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'_x(x)}{g'_x(x)}\right].$

40. $\displaystyle\int_a^x [g(x) - g(t) + b]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

При $b = 0$ см. уравнение 8.1.1.39.

Решение при $b \neq 0$:

$$y(x) = \frac{1}{b}f'_x(x) - \frac{1}{b^2}g'_x(x)\int_a^x \exp\left[\frac{g(t) - g(x)}{b}\right] f'_t(t)\,dt.$$

41. $\displaystyle\int_a^x [g(x) + h(t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0.$

При $h(t) = -g(t)$ см. уравнение 8.1.1.40.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\Phi(x)}{g(x) + h(x)}\int_a^x \frac{f'_t(t)\,dt}{\Phi(t)}\right], \qquad \Phi(x) = \exp\left[\int_a^x \frac{h'_t(t)\,dt}{g(t) + h(t)}\right].$$

42. $\displaystyle\int_a^x \bigl[g(x) - g(t)\bigr]^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Предполагается, что правая часть уравнения удовлетворяет условиям $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{n!}g'_x(x)\left(\dfrac{1}{g'_x(x)}\dfrac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x)$.

43. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{g(x) - g(t)}\,y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0, \quad g'_x(x) > 0.$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}g'_x(x)\left(\frac{1}{g'_x(x)}\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{f(t)g'_t(t)\,dt}{\sqrt{g(x) - g(t)}}.$$

44. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{g(x) - g(t)}} = f(x), \qquad g'_x(x) > 0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)g'_t(t)\,dt}{\sqrt{g(x) - g(t)}}$.

45. $\displaystyle\int_a^x [g(x) - g(t)]^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = kg'_x(x)\left(\frac{1}{g'_x(x)}\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{g'_t(t)f(t)\,dt}{[g(x) - g(t)]^\lambda}, \qquad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

46. $\displaystyle\int_a^x \frac{h(t)y(t)\,dt}{[g(x) - g(t)]^\lambda} = f(x), \qquad g'_x > 0, \quad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi h(x)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)g'_t(t)\,dt}{[g(x) - g(t)]^{1-\lambda}}.$$

47. $\displaystyle\int_a^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x).$

1°. Пусть $K(0)=1$ и $f(a)=0$. Дифференцируя уравнение по x, приходим к уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x)+\int_a^x K'_x(x-t)y(t)\,dt = f'_x(x).$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$y(x)=f'_x(x)+\int_a^x R(x-t)f'_t(t)\,dt.$$

Здесь резольвента $R(x)$ определяется через ядро исходного уравнения $K(x)$ по формуле

$$R(x)=\mathfrak{L}^{-1}\Big[\frac{1}{p\tilde{K}(p)}-1\Big],\qquad \tilde{K}(p)=\mathfrak{L}\big[K(x)\big],$$

где $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^{-1}$ прямое и обратное преобразования Лапласа:

$$\tilde{K}(p)=\mathfrak{L}\big[K(x)\big]=\int_0^\infty e^{-px}K(x)\,dx,$$
$$R(x)=\mathfrak{L}^{-1}\big[\tilde{R}(p)\big]=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px}\tilde{R}(p)\,dp.$$

2°. Пусть $K(x)$ имеет интегрируемую степенную особенность при $x=0$. Обозначим через $w=w(x)$ решение вспомогательного более простого (чем исходное) уравнения при $a=0$ и постоянной правой части $f\equiv 1$:

$$\int_0^x K(x-t)w(t)\,dt=1.$$

Тогда решение исходного интегрального уравнения при произвольной правой части выражается через решение w вспомогательного уравнения по формуле

$$y(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x w(x-t)f(t)\,dt=f(a)w(x-a)+\int_a^x w(x-t)f'_t(t)\,dt.$$

8.1.2. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода

► **Уравнения с квадратичной нелинейностью.**

1. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = Ax+B, \qquad A,B>0.$

Решения:

$$y(x)=\pm\sqrt{B}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\exp\Big(-\frac{A}{B}x\Big)+\sqrt{\frac{A}{B}}\,\operatorname{erf}\Big(\sqrt{\frac{A}{B}\,x}\Big)\right],$$

где $\operatorname{erf} z=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z \exp\big(-t^2\big)\,dt$ — функция ошибок.

2. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2x^\lambda.$

Решения:

$$y(x) = \pm A\frac{\sqrt{\Gamma(\lambda+1)}}{\Gamma\bigl(\frac{\lambda+1}{2}\bigr)}x^{\frac{\lambda-1}{2}},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

3. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2e^{\lambda x}.$

Решения: $y(x) = \pm\frac{A}{\sqrt{\pi x}}e^{\lambda x}$.

4. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2\operatorname{ch}(\lambda x).$

Решения: $y(x) = \pm\frac{A}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{I_0(\lambda t)\,dt}{\sqrt{x-t}}$, где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

5. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x).$

Решения: $y = \pm\sqrt{A\lambda}\,I_0(\lambda x)$, где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

6. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda\sqrt{x}\,).$

Решения: $y = \pm\sqrt{A}\,\pi^{1/4}2^{-7/8}\lambda^{3/4}x^{-1/8}I_{-1/4}\Bigl(\lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}x}\,\Bigr)$, где $I_{-1/4}(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

7. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2\cos(\lambda x).$

Решения: $y(x) = \pm\frac{A}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{J_0(\lambda t)\,dt}{\sqrt{x-t}}$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя.

8. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A\sin(\lambda x).$

Решения: $y = \pm\sqrt{A\lambda}\,J_0(\lambda x)$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя.

9. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A\sin(\lambda\sqrt{x}\,).$

Решения: $y = \pm\sqrt{A}\,\pi^{1/4}2^{-7/8}\lambda^{3/4}x^{-1/8}J_{-1/4}\Bigl(\lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}x}\,\Bigr)$, где $J_{-1/4}(z)$ — функция Бесселя.

10. $\displaystyle\int_0^x t^k y(t)y(x-t)\,dt = Ax^\mu e^{\lambda x}.$

Решения:

$$y(x) = \pm\biggl[\frac{A\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\bigl(\frac{\mu+k+1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{\mu-k+1}{2}\bigr)}\biggr]^{1/2}x^{\frac{\mu-k-1}{2}}e^{\lambda x},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

11. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{ax+bt}\,dt = Ax^\mu e^{\lambda x}.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\mu/2}e^{\lambda x}, \qquad I = \int_0^1 z^{\mu/2}(1-z)^{\mu/2}\frac{dz}{a+bz}.$$

12. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(xt)\,dt = Ax^\mu.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}A(2\mu+1)}\,x^{\frac{\mu-1}{3}} \qquad (A>0,\ \mu\geqslant 0).$$

13. $\displaystyle\int_a^x K(t)y(x)y(t)\,dt = f(x).$

Решения:

$$y(x) = \pm f(x)\Big[2\int_a^x K(t)f(t)\,dt\Big]^{-1/2}.$$

14. $\displaystyle\int_0^x f\Big(\frac{t}{x}\Big)y(t)y(x-t)\,dt = Ax^\mu e^{\lambda x}.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\frac{\mu-1}{2}}e^{\lambda x}, \qquad I = \int_0^1 f(z)z^{\frac{\mu-1}{2}}(1-z)^{\frac{\mu-1}{2}}\,dz.$$

► **Другие интегральные уравнения.**

15. $\displaystyle\int_a^x f\big(t,y(t)\big)\,dt = g(x), \qquad g(a)=0.$

Решение в неявном виде:

$$f(x,y) - g'_x(x) = 0.$$

16. $\displaystyle\int_a^x (x-t)f\big(t,y(t)\big)\,dt = g(x), \qquad g(a)=g'(a)=0.$

Решение в неявном виде:

$$f(x,y) - g''_{xx}(x) = 0.$$

17. $\displaystyle\int_a^x e^{\lambda(x-t)}f\big(t,y(t)\big)\,dt = g(x), \qquad g(a)=0.$

Решение в неявном виде:

$$f(x,y) + \lambda g(x) - g'_x(x) = 0.$$

18. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]f\big(t,y(t)\big)\,dt = g(x), \qquad g(a)=g'(a)=0.$

Решение в неявном виде:

$$\lambda f(x,y) + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0.$$

19. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = g(x), \qquad g(a)=0.$

Решение в неявном виде:

$$f(x,y)+\lambda^2\int_a^x g(t)\,dt - g'_x(x)=0.$$

20. $\displaystyle\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = g(x), \qquad g(a)=g'(a)=0.$

Решение в неявном виде:

$$\lambda f(x,y)-\lambda^2 g(x)-g''_{xx}(x)=0.$$

21. $\displaystyle\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = g(x), \qquad g(a)=0.$

Решение в неявном виде:

$$f(x,y)-\lambda^2\int_a^x g(t)\,dt - g'_x(x)=0.$$

22. $\displaystyle\int_a^x [h(x)-h(t)]f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = g(x).$

Предполагается, что выполнены условия $g(a)=g'_x(a)=0$ и $g'_x/h'_x\neq\text{const}$.

Решение в неявном виде:

$$f(x,y)=\frac{d}{dx}\left[\frac{g'_x(x)}{h'_x(x)}\right].$$

8.2. Интегральные уравнения второго рода с переменным пределом интегрирования

8.2.1. Линейные интегральные уравнения Вольтерра второго рода

► **Уравнения, ядра которых содержат степенные функции.**

1. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^x y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt.$

2. $\displaystyle y(x)+\lambda\int_a^x (x-t)y(t)\,dt = f(x).$

1°. Решение при $\lambda>0$:

$$y(x)=f(x)-k\int_a^x \sin[k(x-t)]f(t)\,dt, \qquad k=\sqrt{\lambda}.$$

2°. Решение при $\lambda<0$:

$$y(x)=f(x)+k\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f(t)\,dt, \qquad k=\sqrt{-\lambda}.$$

3. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big[A + B(x-t)\big]\, y(t)\, dt = f(x).}$

1°. Решение при $A^2 > 4B$:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$
$$R(x) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}Ax\bigr)\Bigl[A \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{2B - A^2}{2\beta}\operatorname{sh}(\beta x)\Bigr], \quad \beta = \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - B}.$$

2°. Решение при $A^2 < 4B$:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$
$$R(x) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}Ax\bigr)\Bigl[A \cos(\beta x) + \frac{2B - A^2}{2\beta}\sin(\beta x)\Bigr], \quad \beta = \sqrt{B - \tfrac{1}{4}A^2}.$$

3°. Решение при $A^2 = 4B$:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt, \qquad R(x) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}Ax\bigr)\bigl(A - \tfrac{1}{4}A^2 x\bigr).$$

4. $\boldsymbol{y(x) + \lambda\int_a^x (x-t)^2 y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$
$$R(x) = \tfrac{2}{3}ke^{-2kx} - \tfrac{2}{3}ke^{kx}\bigl[\cos\bigl(\sqrt{3}\,kx\bigr) - \sqrt{3}\sin\bigl(\sqrt{3}\,kx\bigr)\bigr], \qquad k = \bigl(\tfrac{1}{4}\lambda\bigr)^{1/3}.$$

5. $\boldsymbol{y(x) + \lambda\int_a^x (x-t)^3 y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

где

$$R(x) = \begin{cases} k\bigl[\operatorname{ch}(kx)\sin(kx) - \operatorname{sh}(kx)\cos(kx)\bigr], \quad k = \bigl(\tfrac{3}{2}\lambda\bigr)^{1/4} & \text{при } \lambda > 0, \\ \tfrac{1}{2}s\bigl[\sin(sx) - \operatorname{sh}(sx)\bigr], \quad s = (-6\lambda)^{1/4} & \text{при } \lambda < 0. \end{cases}$$

6. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)^n y(t)\, dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

1°. Дифференцируя уравнение $n+1$ раз по x, для функции $y = y(x)$ получим линейное неоднородное ОДУ $(n+1)$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y_x^{(n+1)} + An!\, y = f_x^{(n+1)}(x).$$

Это уравнение с начальными условиями $y(a) = f(a)$, $y'_x(a) = f'_x(a)$, $\ldots$, $y_x^{(n)}(a) = f_x^{(n)}(a)$ определяет решение исходного интегрального уравнения.

2°. Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \exp(\sigma_k x)\bigl[\sigma_k \cos(\beta_k x) - \beta_k \sin(\beta_k x)\bigr],$$

где коэффициенты σ_k и β_k вычисляются по формулам

$$\sigma_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\Bigl(\frac{2\pi k}{n+1}\Bigr), \qquad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\Bigl(\frac{2\pi k}{n+1}\Bigr) \qquad \text{при} \quad A<0;$$

$$\sigma_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\Bigl(\frac{2\pi k+\pi}{n+1}\Bigr), \quad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\Bigl(\frac{2\pi k+\pi}{n+1}\Bigr) \qquad \text{при} \quad A>0.$$

7. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty (t-x)^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Уравнение Пикара—Гурса.

1°. Решение однородного уравнения при $f \equiv 0$:

$$y(x) = Ce^{-\lambda x}, \qquad \lambda = \bigl(-An!\bigr)^{\frac{1}{n+1}},$$

где C — произвольная постоянная и $A < 0$. Это решение единственно при $n = 0, 1, 2, 3$.

Общее решение однородного уравнения Пикара—Гурса при произвольном знаке A имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{s} C_k \exp(-\lambda_k x). \tag{1}$$

Здесь C_k — произвольные постоянные, а λ_k — корни алгебраического уравнения $\lambda^{n+1} + An! = 0$, удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$. Количество слагаемых в (1) определяется на основании неравенства $s \leqslant 2\bigl[\frac{n}{4}\bigr] + 1$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a.

2°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \exp(-\beta_k x)$, где $\beta_k > 0$, решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k \beta_k^{n+1}}{\beta_k^{n+1} + An!} \exp(-\beta_k x), \tag{2}$$

где $\beta_k^{n+1} + An! \neq 0$. При $A > 0$ эта формула может использоваться также для любых функций $f(x)$, которые разлагаются в сходящийся экспоненциальный ряд (что соответствует $m = \infty$).

3°. При $f(x) = e^{-\beta x} \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x^k$, где $\beta > 0$, решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{-\beta x} \sum_{k=0}^{m} B_k x^k, \tag{3}$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. При $f(x) = \cos(\beta x) \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \exp(-\mu_k x)$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\beta x) \sum_{k=1}^{m} B_k \exp(-\mu_k x) + \sin(\beta x) \sum_{k=1}^{m} C_k \exp(-\mu_k x), \qquad (4)$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. При $f(x) = \sin(\beta x) \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \exp(-\mu_k x)$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\beta x) \sum_{k=1}^{m} B_k \exp(-\mu_k x) + \sin(\beta x) \sum_{k=1}^{m} C_k \exp(-\mu_k x), \qquad (5)$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для получения общего решения в пп. 2°–5° к правым частям выражений (2)–(5) следует прибавить решение однородного уравнения (1).

8. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_0^x \frac{y(t)\,dt}{x+t} = f(x).}$

Уравнение Диксона.

1°. Решение однородного уравнения при $f \equiv 0$:

$$y(x) = Cx^{\beta} \qquad (\beta > -1,\ \lambda > 0). \qquad (1)$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из следующего трансцендентного уравнения:

$$\lambda I(\beta) = 1, \qquad \text{где} \quad I(\beta) = \int_0^1 \frac{z^{\beta}\,dz}{1+z}. \qquad (2)$$

2°. Для правой части полиномиального вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n x^n$$

ограниченное в нуле решение интегрального уравнения определяется формулами

$$y(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n + Cx^{\beta} & \text{при } \lambda > \lambda_0 \text{ и } \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{I(n)}, \qquad I(n) = (-1)^n \left[\ln 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{m}\right],$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения (2).

При специальных значениях параметра $\lambda = \lambda_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ решение отличается одним слагаемым и имеет вид

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{A_m}{1-(\lambda_n/\lambda_m)} x^m + \sum_{m=n+1}^{N} \frac{A_m}{1-(\lambda_n/\lambda_m)} x^m - A_n \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} x^n \ln x + Cx^n,$$

где $\bar{\lambda}_n = (-1)^{n+1}\Big[\frac{\pi^2}{12} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\Big]^{-1}$.

Замечание 8.1. *Для произвольной правой части $f(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 2°, в которых следует положить $N = \infty$. При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $f(x)$.*

3°. Для правой части логарифмически-полиномиального вида

$$f(x) = \ln x \Big(\sum_{n=0}^{N} A_n x^n\Big),$$

решение интегрального уравнения с логарифмической особенностью в нуле определяется формулами

$$y(x) = \begin{cases} \ln x \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n + \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{A_n D_n \lambda}{[1-(\lambda/\lambda_n)]^2} x^n & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \ln x \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n + \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{A_n D_n \lambda}{[1-(\lambda/\lambda_n)]^2} x^n + Cx^\beta & \text{при } \lambda > \lambda_0,\ \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{I(n)}, \quad I(n) = (-1)^n \Big[\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\Big], \quad D_n = (-1)^{n+1}\Big[\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\Big].$$

9. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) + \lambda \int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = f(x).}$

Уравнение Абеля второго рода. Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса.

Решение:

$$y(x) = F(x) + \pi\lambda^2 \int_a^x \exp[\pi\lambda^2(x-t)] F(t)\,dt,$$

где

$$F(x) = f(x) - \lambda \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}.$$

10. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) - \lambda \int_0^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \qquad 0 < \alpha < 1.}$

Обобщенное равнение Абеля второго рода.

1°. Пусть число α может быть представлено в виде правильной дроби:

$$\alpha = 1 - \frac{m}{n}, \qquad \text{где} \quad m = 1, 2, \ldots, \quad n = 2, 3, \ldots \quad (m < n).$$

В этом случае решение обобщенного уравнения Абеля второго рода может быть представлено в замкнутом виде (в виде квадратур):

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

где

$$R(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\lambda^\nu \Gamma^\nu(m/n)}{\Gamma(\nu m/n)} x^{(\nu m/n)-1} + \frac{b}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \varepsilon_\mu \exp\bigl(\varepsilon_\mu b x\bigr) +$$
$$+ \frac{b}{m} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\lambda^\nu \Gamma^\nu(m/n)}{\Gamma(\nu m/n)} \left[\sum_{\mu=0}^{m-1} \varepsilon_\mu \exp\bigl(\varepsilon_\mu b x\bigr) \int_0^x t^{(\nu m/n)-1} \exp\bigl(-\varepsilon_\mu b t\bigr)\, dt \right],$$
$$b = \lambda^{n/m} \Gamma^{n/m}(m/n), \quad \varepsilon_\mu = \exp\left(\frac{2\pi \mu i}{m}\right), \quad i^2 = -1, \quad \mu = 0, 1, \ldots, m-1.$$

2°. Решение при любых α на интервале $0 < \alpha < 1$:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\, dt, \qquad \text{где} \quad R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bigl[\lambda\Gamma(1-\alpha) x^{1-\alpha}\bigr]^n}{x\Gamma\bigl[n(1-\alpha)\bigr]}.$$

► **Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции.**

11. $\displaystyle y(x) + A\int_a^x e^{\lambda(x-t)} y(t)\, dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x) = f(x) - A\int_a^x e^{(\lambda-A)(x-t)} f(t)\, dt.$

12. $\displaystyle y(x) + A\int_a^x \bigl[e^{\lambda(x-t)} - 1\bigr] y(t)\, dt = f(x).$

1°. Решение при $D \equiv \lambda(\lambda - 4A) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{2A\lambda}{\sqrt{D}} \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt, \qquad R(x) = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\lambda x\bigr) \operatorname{sh}\bigl(\tfrac{1}{2}\sqrt{D}\, x\bigr).$$

2°. Решение при $D \equiv \lambda(\lambda - 4A) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{2A\lambda}{\sqrt{|D|}} \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt, \qquad R(x) = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\lambda x\bigr) \sin\bigl(\tfrac{1}{2}\sqrt{|D|}\, x\bigr).$$

3°. Решение при $\lambda = 4A$:

$$y(x) = f(x) - 4A^2 \int_a^x (x-t) \exp\bigl[2A(x-t)\bigr] f(t)\, dt.$$

13. $\displaystyle y(x) + \int_a^x \bigl[Ae^{\lambda(x-t)} + B\bigr]\, y(t)\, dt = f(x).$

1°. Структура решения этого уравнения зависит от знака дискриминанта

$$D \equiv (A - B - \lambda)^2 + 4AB \tag{1}$$

квадратного уравнения

$$\mu^2 + (A + B - \lambda)\mu - B\lambda = 0. \tag{2}$$

2°. При $D > 0$ уравнение (2) имеет различные действительные корни

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}(\lambda - A - B) + \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(\lambda - A - B) - \tfrac{1}{2}\sqrt{D}.$$

В этом случае решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \bigl[E_1 e^{\mu_1(x-t)} + E_2 e^{\mu_2(x-t)}\bigr] f(t)\,dt,$$

где

$$E_1 = A\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} + B\frac{\mu_1 - \lambda}{\mu_2 - \mu_1}, \qquad E_2 = A\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} + B\frac{\mu_2 - \lambda}{\mu_1 - \mu_2}.$$

3°. При $D < 0$ уравнение (2) имеет комплексно сопряженные корни

$$\mu_1 = \sigma + i\beta, \quad \mu_2 = \sigma - i\beta, \qquad \sigma = \tfrac{1}{2}(\lambda - A - B), \quad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{-D}.$$

В этом случае решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \Bigl\{E_1 e^{\sigma(x-t)}\cos[\beta(x-t)] + E_2 e^{\sigma(x-t)}\sin[\beta(x-t)]\Bigr\} f(t)\,dt,$$

где

$$E_1 = -A - B, \qquad E_2 = \frac{1}{\beta}(-A\sigma - B\sigma + B\lambda).$$

14. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[A_1 e^{\lambda_1(x-t)} + A_2 e^{\lambda_2(x-t)}\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Введем обозначения

$$I_1 = \int_a^x e^{\lambda_1(x-t)} y(t)\,dt, \qquad I_2 = \int_a^x e^{\lambda_2(x-t)} y(t)\,dt.$$

Продифференцируем дважды интегральное уравнение. В результате получаем (первым записано исходное уравнение):

$$y + A_1 I_1 + A_2 I_2 = f, \qquad f = f(x), \tag{1}$$
$$y'_x + (A_1 + A_2)y + A_1\lambda_1 I_1 + A_2\lambda_2 I_2 = f'_x, \tag{2}$$
$$y''_{xx} + (A_1 + A_2)y'_x + (A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)y + A_1\lambda_1^2 I_1 + A_2\lambda_2^2 I_2 = f''_{xx}. \tag{3}$$

Исключая величины I_1 и I_2 из (1)–(3), приходим к линейному неоднородному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + (A_1 + A_2 - \lambda_1 - \lambda_2)y'_x + (\lambda_1\lambda_2 - A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1)y = f''_{xx} - (\lambda_1 + \lambda_2)f'_x + \lambda_1\lambda_2 f. \tag{4}$$

Подставляя значение $x = a$ в равенства (1) и (2), получим начальные условия

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a) - (A_1 + A_2)f(a). \tag{5}$$

Решение дифференциального уравнения (4) с условиями (5) позволяет найти решение исходного интегрального уравнения.

2°. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\mu^2 + (A_1 + A_2 - \lambda_1 - \lambda_2)\mu + \lambda_1\lambda_2 - A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1 = 0, \tag{6}$$

которое соответствует линейному однородному ОДУ (4) при $f(x) \equiv 0$. Структура решения интегрального уравнения зависит от знака дискриминанта

$$D \equiv (A_1 - A_2 - \lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4A_1A_2$$

квадратного уравнения (6).

При $D > 0$ квадратное уравнение (6) различные действительные корни

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2) - \tfrac{1}{2}\sqrt{D}.$$

В этом случае решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \bigl[B_1 e^{\mu_1(x-t)} + B_2 e^{\mu_2(x-t)}\bigr] f(t)\,dt,$$

где

$$B_1 = A_1\frac{\mu_1 - \lambda_2}{\mu_2 - \mu_1} + A_2\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1}, \qquad B_2 = A_1\frac{\mu_2 - \lambda_2}{\mu_1 - \mu_2} + A_2\frac{\mu_2 - \lambda_1}{\mu_1 - \mu_2}.$$

При $D < 0$ уравнение (6) имеет комплексно сопряженные корни

$$\mu_1 = \sigma + i\beta, \quad \mu_2 = \sigma - i\beta, \qquad \sigma = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2), \quad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{-D}.$$

В этом случае решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \bigl\{B_1 e^{\sigma(x-t)}\cos[\beta(x-t)] + B_2 e^{\sigma(x-t)}\sin[\beta(x-t)]\bigr\} f(t)\,dt,$$

где

$$B_1 = -A_1 - A_2, \qquad B_2 = \frac{1}{\beta}\bigl[A_1(\lambda_2 - \sigma) + A_2(\lambda_1 - \sigma)\bigr].$$

15. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \Bigl[\sum_{k=1}^{n} A_k e^{\lambda_k(x-t)}\Bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Это интегральное уравнение можно привести к линейному неоднородному ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \Bigl[\sum_{k=1}^{n} B_k e^{\mu_k(x-t)}\Bigr] f(t)\,dt. \tag{1}$$

Неизвестные постоянные μ_k являются корнями дробно-рационального уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - \lambda_k} + 1 = 0, \tag{2}$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней характеристического многочлена n-й степени.

Коэффициенты B_k находятся после определения μ_k из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{\lambda_m - \mu_k} + 1 = 0, \qquad m = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Другой способ определения коэффициентов B_k описан ниже в п. 2°.

Если все корни μ_k уравнения (2) действительны и различны, то формула (1) дает решение исходного интегрального уравнения.

Паре комплексно сопряженных корней $\mu_{k,k+1} = \alpha \pm i\beta$ характеристического многочлена (2) отвечает пара комплексно сопряженных коэффициентов $B_{k,k+1}$ в уравнениях (3). В этом случае в решении (1) соответствующую пару слагаемых $B_k e^{\mu_k(x-t)} + B_{k+1} e^{\mu_{k+1}(x-t)}$ следует заменить на

$$\overline{B}_k e^{\alpha(x-t)} \cos[\beta(x-t)] + \overline{B}_{k+1} e^{\alpha(x-t)} \sin[\beta(x-t)],$$

где $\overline{B}_k$ и $\overline{B}_{k+1}$ — действительные коэффициенты.

2°. При $a = 0$ решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f(x) - \int_0^x R(x-t) f(t)\, dt, \qquad R(x) = \mathfrak{L}^{-1}\bigl[\overline{R}(p)\bigr],$$

где $\mathfrak{L}^{-1}\bigl[\overline{R}(p)\bigr]$ — обратное преобразование Лапласа следующей функции:

$$\overline{R}(p) = \frac{\overline{K}(p)}{1 + \overline{K}(p)}, \qquad \overline{K}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p - \lambda_k}.$$

Образ $\overline{R}(p)$ резольвенты $R(x)$ можно представить в виде правильной дробно-рациональной функции:

$$\overline{R}(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}, \qquad P(p) = (p-\mu_1)(p-\mu_2)\ldots(p-\mu_n),$$

где $Q(p)$ — полином относительно p, степень которого меньше n. Корни μ_k полинома $P(p)$ совпадают с корнями уравнения (2). Если все корни μ_k действительны и различны, то резольвента в решении определяется по формуле

$$R(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k e^{\mu_k x}, \qquad B_k = \frac{Q(\mu_k)}{P'(\mu_k)},$$

где штрих обозначает производную.

16. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t) e^{\lambda(x-t)} y(t)\, dt = f(x).}$

1°. Решение при $A > 0$:

$$y(x) = f(x) - k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \sin[k(x-t)] f(t)\, dt, \qquad k = \sqrt{A}.$$

2°. Решение при $A < 0$:

$$y(x) = f(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t)\, dt, \qquad k = \sqrt{-A}.$$

► **Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции.**

17. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x)\exp\Bigl\{\frac{A}{\lambda}\bigl[\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)\bigr]\Bigr\} f(t)\,dt.$$

18. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda t)\exp\Bigl\{\frac{A}{\lambda}\bigl[\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)\bigr]\Bigr\} f(t)\,dt.$$

19. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}Ax\bigr)\Bigl[\frac{A^2}{2k}\operatorname{sh}(kx) - A\operatorname{ch}(kx)\Bigr], \quad k = \sqrt{\lambda^2 + \tfrac{1}{4}A^2}.$$

20. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \Bigl\{\sum_{k=1}^n A_k \operatorname{ch}[\lambda_k(x-t)]\Bigr\} y(t)\,dt = f(x).}$

Это уравнение сводится к уравнению вида 8.2.1.15 путем замены гиперболических функций на экспоненциальные с помощью формулы $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\bigl(e^z + e^{-z}\bigr)$.

21. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x)\exp\Bigl\{\frac{A}{\lambda}\bigl[\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)\bigr]\Bigr\} f(t)\,dt.$$

22. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda t)\exp\Bigl\{\frac{A}{\lambda}\bigl[\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)\bigr]\Bigr\} f(t)\,dt.$$

23. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Решение при $\lambda(A-\lambda) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x \sin[k(x-t)] f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{\lambda(A-\lambda)}.$$

$2°$. Решение при $\lambda(A-\lambda)<0$:

$$y(x)=f(x)-\frac{A\lambda}{k}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k=\sqrt{\lambda(\lambda-A)}.$$

$3°$. Решение при $A=\lambda$:

$$y(x)=f(x)-\lambda^2\int_a^x (x-t)f(t)\,dt.$$

24. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^x \left\{\sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)]\right\} y(t)\,dt=f(x).}$

$1°$. Это уравнение сводится к уравнению вида 8.2.1.15 путем замены гиперболических функций на экспоненциальные с помощью формулы $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^z-e^{-z}\right)$.

$2°$. Найдем корни z_k дробно-рационального уравнения

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k A_k}{z-\lambda_k^2}+1=0. \tag{1}$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней алгебраического уравнения степени n.

Пусть все корни z_k уравнения (1) действительны, различны и не равны нулю. Все корни в зависимости от их знака разобьем на две группы:

$$\begin{array}{lllll} z_1>0, & z_2>0, & \ldots, & z_s>0 & \text{(положительные корни);} \\ z_{s+1}<0, & z_{s+2}<0, & \ldots, & z_n<0 & \text{(отрицательные корни).} \end{array}$$

Решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x)=f(x)+\int_a^x\left\{\sum_{k=1}^{s} B_k \operatorname{sh}\bigl[\mu_k(x-t)\bigr]+\sum_{k=s+1}^{n} C_k \sin\bigl[\mu_k(x-t)\bigr]\right\}f(t)\,dt, \tag{2}$$

где $\mu_k=\sqrt{|z_k|}$. Коэффициенты B_k и C_k в (2) находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{s}\frac{B_k\mu_k}{\lambda_m^2-\mu_k^2}+\sum_{k=s+1}^{n}\frac{C_k\mu_k}{\lambda_m^2+\mu_k^2}+1=0, \qquad \mu_k=\sqrt{|z_k|}, \quad m=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Случай с нулевым корнем $z_s=0$ рассматривается с помощью введения новой постоянной $D=B_s\mu_s$ и предельного перехода при $\mu_s\to 0$. В результате в решении (2) вместо члена $B_s \operatorname{sh}\bigl[\mu_s(x-t)\bigr]$ возникает слагаемое $D(x-t)$, а в системе (3) появляются соответствующие слагаемые $D\lambda_m^{-2}$.

► **Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции.**

25. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \cos(\lambda x) y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \cos(\lambda x) \exp\Big\{\frac{A}{\lambda}\big[\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)\big]\Big\} f(t)\, dt.$$

26. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \cos(\lambda t) y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \cos(\lambda t) \exp\Big\{\frac{A}{\lambda}\big[\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)\big]\Big\} f(t)\, dt.$$

27. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]\, y(t)\, dt = f(x).}$

Решение этого интегрального уравнения сводится к решению линейного неоднородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + Ay'_x + \lambda^2 y = f''_{xx} + \lambda^2 f, \qquad f = f(x),$$

с начальными условиями

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a) - Af(a).$$

1°. Решение при $|A| > 2|\lambda|$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

$$R(x) = \exp\big(-\tfrac{1}{2}Ax\big)\Big[\frac{A^2}{2k}\operatorname{sh}(kx) - A\operatorname{ch}(kx)\Big], \quad k = \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - \lambda^2}.$$

2°. Решение при $|A| < 2|\lambda|$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

$$R(x) = \exp\big(-\tfrac{1}{2}Ax\big)\Big[\frac{A^2}{2k}\sin(kx) - A\cos(kx)\Big], \quad k = \sqrt{\lambda^2 - \tfrac{1}{4}A^2}.$$

3°. Решение при $\lambda = \pm\frac{1}{2}A$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt, \qquad R(x) = \exp\big(-\tfrac{1}{2}Ax\big)\big(\tfrac{1}{2}A^2 x - A\big).$$

28. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \Big\{\sum_{k=1}^n A_k \cos[\lambda_k(x-t)]\Big\} y(t)\, dt = f(x).}$

Решение этого интегрального уравнения сводится к решению линейного неоднородного ОДУ $2n$-го порядка с постоянными коэффициентами. Обозначим

$$I_k(x) = \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)]\, y(t)\, dt. \tag{1}$$

Продифференцируем (1) дважды по x. В результате имеем

$$\begin{aligned} I_k' &= y(x) - \lambda_k \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]\, y(t)\, dt, \\ I_k'' &= y_x'(x) - \lambda_k^2 \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)]\, y(t)\, dt, \end{aligned} \tag{2}$$

где штрихи обозначают производные по x. Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k'' и I_k:

$$I_k'' = y_x'(x) - \lambda_k^2 I_k, \qquad I_k = I_k(x). \tag{3}$$

Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k I_k = f(x). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) дважды по x, с учетом равенств (3) имеем

$$y_{xx}''(x) + \sigma_n y_x'(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k^2 I_k = f_{xx}''(x), \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} A_k. \tag{5}$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y_{xx}''(x) + \sigma_n y_x'(x) + \lambda_n^2 y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) I_k = f_{xx}''(x) + \lambda_n^2 f(x). \tag{6}$$

Продифференцировав равенство (6) дважды по x и исключив интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования и формулы (3) последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, ..., придем в итоге к линейному неоднородному ОДУ с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

Начальные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования.

29. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \sin(\lambda x) y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \sin(\lambda x) \exp\biggl\{ \frac{A}{\lambda} \bigl[\cos(\lambda t) - \cos(\lambda x)\bigr] \biggr\} f(t)\, dt.$$

30. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \sin(\lambda t) y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \sin(\lambda t) \exp\biggl\{ \frac{A}{\lambda} \bigl[\cos(\lambda t) - \cos(\lambda x)\bigr] \biggr\} f(t)\, dt.$$

31. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\, y(t)\, dt = f(x).}$

1°. Решение при $\lambda(A+\lambda) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x \sin[k(x-t)] f(t)\, dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{\lambda(A+\lambda)}.$$

2°. Решение при $\lambda(A+\lambda) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t)\, dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{-\lambda(\lambda+A)}.$$

3°. Решение при $A = -\lambda$:

$$y(x) = f(x) + \lambda^2 \int_a^x (x-t) f(t)\, dt.$$

32. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \sin[\lambda_k(x-t)] \right\} y(t)\, dt = f(x).}$

1°. Решение этого интегрального уравнения сводится к решению линейного неоднородного ОДУ $2n$-го порядка с постоянными коэффициентами.

2°. Найдем корни z_k дробно-рационального уравнения

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k A_k}{z+\lambda_k^2} + 1 = 0, \tag{1}$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней алгебраического уравнения n-й степени.

Пусть все корни z_k уравнения (1) действительны, различны и не равны нулю. Все корни в зависимости от их знака разобьем на две группы:

$$\begin{aligned} &z_1 > 0, && z_2 > 0, && \ldots, && z_s > 0 && \text{(положительные корни)};\\ &z_{s+1} < 0, && z_{s+2} < 0, && \ldots, && z_n < 0 && \text{(отрицательные корни)}. \end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^s B_k \operatorname{sh}\bigl[\mu_k(x-t)\bigr] + \sum_{k=s+1}^n C_k \sin\bigl[\mu_k(x-t)\bigr] \right\} f(t)\, dt, \tag{2}$$

где $\mu_k = \sqrt{|z_k|}$. Коэффициенты B_k и C_k в (2) находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^s \frac{B_k \mu_k}{\lambda_m^2 + \mu_k^2} + \sum_{k=s+1}^n \frac{C_k \mu_k}{\lambda_m^2 - \mu_k^2} - 1 = 0, \qquad \mu_k = \sqrt{|z_k|} \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Случай с нулевым корнем $z_s = 0$ рассматривается с помощью введения новой постоянной $D = B_s \mu_s$ и предельного перехода при $\mu_s \to 0$. В результате в решении (2) вместо члена $B_s \operatorname{sh}\bigl[\mu_s(x-t)\bigr]$ возникает слагаемое $D(x-t)$, а в системе (3) появляются соответствующие слагаемые $D\lambda_m^{-2}$.

▶ **Интегральные уравнения, содержащие другие ядра.**

33. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_0^x J_0(x-t)y(t)\,dt = f(x).}$

Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t)f(t)\,dt,$$

где

$$R(x) = \lambda\cos\bigl(\sqrt{1-\lambda^2}\,x\bigr) + \frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin\bigl(\sqrt{1-\lambda^2}\,x\bigr) + \\ + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\int_0^x \sin\bigl[\sqrt{1-\lambda^2}\,(x-t)\bigr]\frac{J_1(t)}{t}\,dt.$$

34. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x g(x)h(t)y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad R(x,t) = g(x)h(t)\exp\Bigl[\int_t^x g(s)h(s)\,ds\Bigr].$$

35. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x (x-t)g(x)y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \bigl[Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)\bigr]g(x)f(t)\,dt, \qquad (*)$$

где $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два нетривиальных линейно независимых частных решения линейного однородного ОДУ второго порядка $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной: $W = Y_1(Y_2)'_x - Y_2(Y_1)'_x \equiv \text{const}$.

2°. Если известно только одно нетривиальное частное решение $Y_1 = Y_1(x)$ линейного однородного ОДУ второго порядка $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$, то решение интегрального уравнения можно найти по формуле (*), в которой следует положить

$$W = 1, \qquad Y_2(x) = Y_1(x)\int_b^x \frac{d\xi}{Y_1^2(\xi)},$$

где b — любая константа.

36. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x (x-t)g(t)y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \bigl[Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)\bigr]g(t)f(t)\,dt, \qquad (*)$$

где $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два нетривиальных линейно независимых частных решения линейного однородного ОДУ второго порядка $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной: $W = Y_1(Y_2)'_x - Y_2(Y_1)'_x \equiv \text{const}$.

2°. Если известно только одно нетривиальное частное решение $Y_1 = Y_1(x)$ линейного однородного ОДУ второго порядка $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$, то решение интегрального уравнения можно найти по формуле (*), в которой следует положить

$$W = 1, \qquad Y_2(x) = Y_1(x) \int_b^x \frac{d\xi}{Y_1^2(\xi)},$$

где b — любая константа.

37. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big[g(x) - g(t)\big]\, y(t)\, dt = f(x).}$

1°. Продифференцируем уравнение по x:

$$y'_x(x) + g'_x(x) \int_a^x y(t)\, dt = f'_x(x). \tag{1}$$

Введем новую переменную $Y(x) = \int_a^x y(t)\, dt$. В результате получим линейное неоднородное ОДУ второго порядка

$$Y''_{xx} + g'_x(x)Y = f'_x(x), \tag{2}$$

которое следует дополнить начальными условиями

$$Y(a) = 0, \quad Y'_x(a) = f(a).$$

Эти условия являются следствием исходного уравнения и способа определения новой переменной $Y(x)$.

Точные решения линейных однородных ОДУ второго порядка (2) при $f(x) \equiv 0$ для различных функций $g(x)$ см. в справочниках Камке (1976), Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003 и 2018). Решения соответствующих неоднородных ОДУ можно найти по формуле (4) из разд. 2.2.1.

2°. Пусть $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два нетривиальных линейно независимых частных решения линейного однородного ОДУ второго порядка $Y''_{xx} + g'_x(x)Y = 0$, которое получается из (2) при $f(x) \equiv 0$. В этом случае детерминант Вронского является постоянной величиной:

$$W = Y_1(Y_2)'_x - Y_2(Y_1)'_x \equiv \text{const}\,.$$

Решение линейного неоднородного ОДУ (2) с произвольной функцией $f = f(x)$ и начальными условиями (3) с учетом равенства $y(x) = Y'_x(x)$ приводит к решению рассматриваемого интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x \big[Y_1'(x)Y_2'(t) - Y_2'(x)Y_1'(t)\big] f(t)\, dt, \tag{4}$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным далее в круглых скобках.

38. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big[g(x) + h(t)\big]\, y(t)\, dt = f(x).}$

1°. Продифференцировав уравнение по x, имеем

$$y'_x(x) + \big[g(x) + h(x)\big]y(x) + g'_x(x)\int_a^x y(t)\,dt = f'_x(x).$$

Введем новую переменную $Y(x) = \int_a^x y(t)\,dt$. В результате получим линейное неоднородное ОДУ второго порядка:

$$Y''_{xx} + \big[g(x) + h(x)\big]Y'_x + g'_x(x)Y = f'_x(x), \qquad (1)$$

которое следует дополнить начальными условиями

$$Y(a) = 0, \quad Y'_x(a) = f(a). \qquad (2)$$

Эти условия являются следствием исходного уравнения и способа определения новой переменной $Y(x)$.

Точные решения линейных однородных ОДУ второго порядка (1) при $f(x) \equiv 0$ для различных функций $g(x)$ и $h(x)$ см. в справочниках Камке (1976), Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003 и 2018). Решения соответствующих неоднородных ОДУ можно найти по формуле (4) из разд. 2.2.1.

2°. Пусть $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два нетривиальных линейно независимых частных решения линейного однородного ОДУ второго порядка $Y''_{xx} + g'_x(x)Y = 0$, которое получается из (1) при $f(x) \equiv 0$.

Решение линейного неоднородного ОДУ (1) с произвольной функцией $f = f(x)$ и начальными условиями (2) с учетом равенства $y(x) = Y'_x(x)$ приводит к решению рассматриваемого интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left[\frac{Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)}{W(t)}\right], \quad W(x) = Y_1(x)Y'_2(x) - Y_2(x)Y'_1(x),$$

где $W(x)$ — детерминант Вронского, штрихи обозначают производные по аргументам, указанным после в круглых скобках.

39. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + g(x)y(x) + \lambda\int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f'_x(x), \qquad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + \big[g(x)y(x)\big]'_x + \lambda^2\int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \qquad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному неоднородному ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} + \big[g(x)y\big]'_x - \lambda^2 y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \qquad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a) - f(a)g(a). \tag{4}$$

ОДУ (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения.

40. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda g(x)y(x) + \lambda^2 \int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному неоднородному ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda\big[g(x) - \lambda\big]y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a). \tag{4}$$

Точные решения линейных однородных ОДУ второго порядка (3) при $f(x) \equiv 0$ для различных функций $g(x)$ см. в справочниках Камке (1976), Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003 и 2018). Решения соответствующих неоднородных ОДУ можно найти по формуле (4) из разд. 2.2.1.

2°. Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — два нетривиальных линейно независимых частных решения линейного однородного ОДУ второго порядка $y''_{xx} + \lambda\big[g(x) - \lambda\big]y = 0$, которое получается из (3) при $f(x) \equiv 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной:

$$W = y_1(y_2)'_x - y_2(y_1)'_x \equiv \mathrm{const}\,.$$

Решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) для произвольной функции $f = f(x)$ имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{W} \int_a^x \big[y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)\big]g(t)f(t)\,dt \tag{5}$$

и определяет решение исходного интегрального уравнения.

3°. Если известно только одно нетривиальное решение $y_1 = y_1(x)$ линейного однородного ОДУ $y''_{xx} + \lambda\big[g(x) - \lambda\big]y = 0$, то решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) можно найти по формуле (5), в которой следует положить

$$W = 1, \qquad y_2(x) = y_1(x) \int_b^x \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)},$$

где b — любая константа.

41. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + g(x)y(x) - \lambda\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \bigl[g(x)y(x)\bigr]'_x - \lambda^2\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному неоднородному ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} + \bigl[g(x)y\bigr]'_x + \lambda^2 y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x).$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a) - f(a)g(a).$$

42. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + \lambda\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda g(x)y(x) - \lambda^2\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному неоднородному ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda\bigl[g(x) + \lambda\bigr]y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a). \tag{4}$$

Точные решения линейных однородных ОДУ второго порядка (3) при $f(x) \equiv 0$ для различных функций $g(x)$ см. в справочниках Камке (1976), Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003 и 2018). Решения соответствующих неоднородных ОДУ можно найти по формуле (4) из разд. 2.2.1.

2°. Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — два нетривиальных линейно независимых частных решения линейного однородного ОДУ второго порядка $y''_{xx} + \lambda\bigl[g(x) - \lambda\bigr]y = 0$, которое получается из (3) при $f(x) \equiv 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной:

$$W = y_1(y_2)'_x - y_2(y_1)'_x \equiv \text{const}\,.$$

Решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) для произвольной функции $f = f(x)$ имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{W}\int_a^x \bigl[y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)\bigr]g(t)f(t)\,dt \tag{5}$$

и определяет решение исходного интегрального уравнения.

3°. Если известно только одно нетривиальное решение $y_1 = y_1(x)$ линейного однородного ОДУ $y''_{xx} + \lambda\big[g(x) + \lambda\big]y = 0$, то решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) можно найти по формуле (5), в которой следует положить

$$W = 1, \qquad y_2(x) = y_1(x) \int_b^x \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)},$$

где b — любая константа.

43. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x).}$

Уравнение восстановления.

1°. Для решения этого интегрального уравнения используют прямое и обратное преобразования Лапласа. Решение можно представить в виде

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t)f(t)\,dt. \tag{1}$$

Здесь резольвента $R(x)$ определяется через ядро исходного уравнения $K(x)$ по формулам

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{R}(p)e^{px}\,dp, \qquad \tilde{R}(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{1+\tilde{K}(p)}, \qquad \tilde{K}(p) = \int_0^\infty K(x)e^{-px}\,dx.$$

2°. Пусть $w = w(x)$ решение вспомогательного более простого (чем исходное) уравнения при $a = 0$ и постоянной правой части $f \equiv 1$:

$$w(x) + \int_0^x K(x-t)w(t)\,dt = 1. \tag{2}$$

Тогда решение исходного интегрального уравнения при произвольной правой части $f = f(x)$ выражается через решение вспомогательного уравнения (2) по формуле

$$y(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x w(x-t)f(t)\,dt = f(a)w(x-a) + \int_a^x w(x-t)f'_t(t)\,dt.$$

8.2.2. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра второго рода

► **Уравнения со степенной и экспоненциальной нелинейностью.**

1. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x f(t)y^2(t)\,dt = A.}$

Решение:

$$y(x) = A\Big[1 + A\int_a^x f(t)\,dt\Big]^{-1}.$$

2. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x g(x)h(t)y^2(t)\,dt = f(x).}$

Дифференцируя уравнение по x, получим

$$y'_x + g(x)h(x)y^2 + g'_x(x)\int_a^x h(t)y^2(t)\,dt = f'_x(x). \tag{1}$$

Исключая из (1) интегральный член с помощью исходного уравнения, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению Риккати

$$y'_x + g(x)h(x)y^2 - \frac{g'_x(x)}{g(x)}y = f'_x(x) - \frac{g'_x(x)}{g(x)}f(x), \tag{2}$$

которое надо дополнить начальным условием $y(a) = f(a)$. Уравнение (2) сводится к линейному ОДУ второго порядка. Точные решения ОДУ первого порядка (2) для различных функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ см. в справочниках Камке (1976), Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003 и 2018).

3. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x f(t)y^k(t)\,dt = A.}$

Решение:

$$y(x) = \Big[A^{1-k} + (k-1)\int_a^x f(t)\,dt\Big]^{\frac{1}{1-k}}.$$

4. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x f(x)g(t)y^k(t)\,dt = 0.}$

1°. Это интегральное уравнение путем дифференцирования по x с последующим исключением интегрального слагаемого (с помощью исходного уравнения) можно свести к дифференциальному уравнению Бернулли

$$y'_x - f(x)g(x)y^k - \frac{f'_x(x)}{f(x)}y = 0, \qquad y(a) = 0.$$

2°. Решение при $k < 1$:

$$y(x) = f(x)\Big[(1-k)\int_a^x f^k(t)g(t)\,dt\Big]^{\frac{1}{1-k}}.$$

Кроме того, при $k > 0$ существует также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

5. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x f(t)\exp[\lambda y(t)]\,dt = A.}$

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Big[\lambda\int_a^x f(t)\,dt + e^{-A\lambda}\Big].$$

6. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x g(t)\exp[\lambda y(t)]\,dt = f(x).}$

1°. Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к ОДУ первого порядка для функции $y = y(x)$:

$$y'_x + g(x)e^{\lambda y} = f'_x(x) \tag{$*$}$$

с начальным условием $y(a) = f(a)$. Подстановка $w = e^{-\lambda y}$ приводит $(*)$ к линейному ОДУ первого порядка

$$w'_x + \lambda f'_x(x)w - \lambda g(x) = 0, \qquad w(a) = \exp\big[-\lambda f(a)\big].$$

2°. Решение:

$$y(x) = f(x) - \frac{1}{\lambda}\ln\Big\{1 + \lambda\int_a^x g(t)\exp\big[\lambda f(t)\big]\,dt\Big\}.$$

► **Другие интегральные уравнения.**

7. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x g(t) f\big(y(t)\big)\, dt = A.}$

Решение в неявном виде:

$$\int_A^y \frac{du}{f(u)} + \int_a^x g(t)\, dt = 0.$$

8. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).}$

Решение этого интегрального уравнения определяется из ОДУ первого порядка

$$y'_x + f(x, y) - g'_x(x) = 0$$

с начальным условием $y(a) = g(a)$. Точные решения полученного нелинейного ОДУ для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в справочниках Камке (1976), Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003 и 2018).

9. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x (x - t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение по x, имеем

$$y'_x + \int_a^x f\big(t, y(t)\big)\, dt = g'_x(x). \tag{1}$$

Дифференцируя это равенство по x, получим нелинейное ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} + f(x, y) - g''_{xx}(x) = 0. \tag{2}$$

Полагая $x = a$ в исходном интегральном уравнении и равенстве (1), находим начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \qquad y'_x(a) = g'_x(a). \tag{3}$$

Уравнение (2) с условиями (3) определяет решение исходного интегрального уравнения. Точные решения нелинейных ОДУ второго порядка (2) для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в книгах Зайцева & Полянина (2001), Polyanin & Zaitsev (2003, 2018).

10. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение по x, имеем

$$y'_x + f\big(x, y(x)\big) + \lambda \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f\big(t, y(t)\big)\, dt = g'_x(x).$$

Исключая отсюда слагаемое с интегралом с помощью исходного уравнения, получим нелинейное ОДУ первого порядка

$$y'_x + f(x, y) - \lambda y + \lambda g(x) - g'_x(x) = 0.$$

Искомая функция $y = y(x)$ должна удовлетворять начальному условию $y(a) = g(a)$. Точные решения полученного нелинейного ОДУ для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в справочниках Камке (1976), Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003 и 2018).

11. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + f\big(x, y(x)\big) + \lambda \int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \big[f\big(x, y(x)\big)\big]'_x + \lambda^2 \int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного интегрального уравнения, приходим к нелинейному ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} + \big[f(x, y)\big]'_x - \lambda^2 y + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \qquad y'_x(a) = g'_x(a) - f\big(a, g(a)\big). \tag{4}$$

ОДУ (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения.

12. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda f\big(x, y(x)\big) + \lambda^2 \int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного интегрального уравнения, приходим к нелинейному ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda f(x, y) - \lambda^2 y + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \qquad y'_x(a) = g'_x(a). \tag{4}$$

ОДУ (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения. Точные решения нелинейного ОДУ второго порядка для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в справочниках Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003 и 2018).

13. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + f\big(x, y(x)\big) - \lambda \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g'_x(x), \qquad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + \big[f\big(x, y(x)\big)\big]'_x - \lambda^2 \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g''_{xx}(x). \qquad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного интегрального уравнения, приходим к нелинейному ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} + \big[f(x, y)\big]'_x + \lambda^2 y - \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \qquad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \qquad y'_x(a) = g'_x(a) - f\big(a, g(a)\big). \qquad (4)$$

ОДУ (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения.

14. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g'_x(x), \qquad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda f\big(x, y(x)\big) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g''_{xx}(x). \qquad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного интегрального уравнения, приходим к нелинейному ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda f(x, y) + \lambda^2 y - \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \qquad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \qquad y'_x(a) = g'_x(a). \qquad (4)$$

ОДУ (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения. Точные решения нелинейного ОДУ второго порядка для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в справочниках Зайцев & Полянин (2001), Polyanin & Zaitsev (2003 и 2018).

8.3. Интегральные уравнения первого рода с постоянными пределами интегрирования

8.3.1. Линейные интегральные уравнения Фредгольма первого рода

► **Уравнения, ядра которых содержат степенные функции.**

1. $\displaystyle\int_a^b |x-t|\,y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant a < b < \infty.$

Решение:
$$y(x) = \tfrac{1}{2} f''_{xx}(x).$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Общий вид правой части имеет вид
$$f(x) = F(x) + Ax + B,$$
$$A = -\tfrac{1}{2}\bigl[F'_x(a) + F'_x(b)\bigr], \quad B = \tfrac{1}{2}\bigl[aF'_x(a) + bF'_x(b) - F(a) - F(b)\bigr],$$
где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

2. $\displaystyle\int_0^a \frac{y(t)}{\sqrt{|x-t|}}\,dt = f(x), \qquad 0 < a \leqslant \infty.$

Решение:
$$y(x) = -\frac{A}{x^{1/4}}\frac{d}{dx}\biggl[\int_x^a \frac{dt}{(t-x)^{1/4}} \int_0^t \frac{f(s)\,ds}{s^{1/4}(t-s)^{1/4}}\biggr], \quad A = \frac{1}{\sqrt{8\pi}\,\Gamma^2(3/4)}.$$

3. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)}{|x-t|^k}\,dt = f(x), \qquad |a| + |b| < \infty, \quad 0 < k < 1.$

Решение (Гахов, 1977):
$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\bigl(\tfrac{1}{2}\pi k\bigr)\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-k}} - \frac{1}{\pi^2}\cos^2\bigl(\tfrac{1}{2}\pi k\bigr)\int_a^x \frac{Z(t)F(t)}{(x-t)^{1-k}}\,dt,$$
где
$$Z(t) = (t-a)^{\frac{1+k}{2}}(b-t)^{\frac{1-k}{2}}, \quad F(t) = \frac{d}{dt}\biggl[\int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^k}\int_\tau^b \frac{f(s)\,ds}{Z(s)(s-\tau)^{1-k}}\biggr].$$

4. $\displaystyle\int_0^b \frac{y(t)}{|x^\lambda - t^\lambda|^k}\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1, \quad \lambda > 0.$

Решение:
$$y(x) = -Ax^{\frac{\lambda(k-1)}{2}}\frac{d}{dx}\Biggl[\int_x^b \frac{t^{\frac{\lambda(3-2k)-2}{2}}\,dt}{(t^\lambda - x^\lambda)^{\frac{1-k}{2}}}\int_0^t \frac{s^{\frac{\lambda(k+1)-2}{2}} f(s)\,ds}{(t^\lambda - s^\lambda)^{\frac{1-k}{2}}}\Biggr],$$
$$A = \frac{\lambda^2}{2\pi}\cos\Bigl(\frac{\pi k}{2}\Bigr)\Gamma(k)\Bigl[\Gamma\Bigl(\frac{1+k}{2}\Bigr)\Bigr]^{-2},$$
где $\Gamma(k)$ — гамма-функция.

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(t)}{|x-t|^{1-\lambda}}\,dt=f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Решение (Самко, Килбас, Маричев, 1987):

$$\begin{aligned}y(x)&=\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi\lambda}{2}\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-f(t)}{|x-t|^{1+\lambda}}\,dt=\\&=\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi\lambda}{2}\Big)\int_{0}^{\infty}\frac{2f(x)-f(x+t)-f(x-t)}{t^{1+\lambda}}\,dt.\end{aligned}$$

Считается, что для некоторого p, где $1<p<1/\lambda$, выполняется условие $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx<\infty$.

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\lambda}}y(t)\,dt=f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Решение (Самко, Килбас, Маричев, 1987):

$$\begin{aligned}y(x)&=\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{ctg}\Big(\frac{\pi\lambda}{2}\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-f(t)}{|x-t|^{1+\lambda}}\operatorname{sign}(x-t)\,dt=\\&=\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{ctg}\Big(\frac{\pi\lambda}{2}\Big)\int_{0}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t^{1+\lambda}}\,dt.\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a+b\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\lambda}}y(t)\,dt=f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Решение (Самко, Килбас, Маричев, 1987):

$$\begin{aligned}y(x)&=c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a+b\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1+\lambda}}\big[f(x)-f(t)\big]dt=\\&=c\int_{0}^{\infty}\frac{2af(x)-(a+b)f(x-t)-(a-b)f(x+t)}{t^{1+\lambda}}\,dt,\end{aligned}$$

где

$$c=\frac{\lambda\sin(\pi\lambda)}{4\pi\big[a^2\cos^2\big(\frac{1}{2}\pi\lambda\big)+b^2\sin^2\big(\frac{1}{2}\pi\lambda\big)\big]}.$$

8. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{y(x+t)-y(x-t)}{t}\,dt=f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x)=-\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt.$

9. $\displaystyle\int_{0}^{1}y(xt)\,dt=f(x).$

Решение:

$$y(x)=xf'_x(x)+f(x).$$

Считается, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию $\big[xf(x)\big]_{x=0}=0$.

► *В уравнениях 8.3.1.10 и 8.3.1.11 и их решениях сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши:*

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-c}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-c}\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x-c}\,dx\right], \qquad a<c<b.$$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)\,dt}{t-x} = f(x).$

Решение (Диткин & Прудников, 1974):

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{t-x}.$$

Интегральное уравнение и выражение для его решения представляют собой *преобразование Гильберта* (в несимметричной форме).

11. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)\,dt}{t-x} = f(x).$

Это уравнение встречается в гидродинамике в задаче об обтекании тонкого профиля потоком идеальной жидкости ($a\leqslant x\leqslant b$). В зависимости от условий, выставляемых на концах отрезка $[a,b]$, где $|a|+|b|<\infty$, имеются следующие решения (Гахов, 1977):

1°. Решение, ограниченное на обоих концах:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{(x-a)(b-x)}\int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\,\frac{dt}{t-x}.$$

При этом должно выполняться условие $\displaystyle\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = 0.$

2°. Решение, ограниченное при $x=a$ и неограниченное при $x=b$:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\int_a^b \sqrt{\frac{b-t}{t-a}}\,\frac{f(t)}{t-x}\,dt.$$

3°. Решение, неограниченное на обоих концах:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{(x-a)(b-x)}}\left[\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x}f(t)\,dt + C\right],$$

где C — произвольная постоянная. В этом случае должно выполняться соотношение $\displaystyle\int_a^b y(t)\,dt = \frac{C}{\pi}.$

► **Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции.**

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|x-t|}y(t)\,dt = f(x), \qquad f(\pm\infty)=0.$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\left[\lambda^2 f(x) - f''_{xx}(x)\right].$$

13. $\displaystyle \int_0^\infty e^{-\lambda|x-t|} y(t)\,dt = f(x), \qquad f(\infty)=0.$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda x} \frac{d}{dx} e^{2\lambda x} \frac{d}{dx} e^{-\lambda x} f(x).$$

14. $\displaystyle \int_a^b e^{\lambda|x-t|} y(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < a < b < \infty.$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\bigl[f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x)\bigr].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$f'_x(a) + \lambda f(a) = 0, \qquad f'_x(b) - \lambda f(b) = 0. \qquad (*)$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, удовлетворяющей условиям (*), определяется формулой

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x) + Ax + B, \\ A &= \frac{1}{b\lambda - a\lambda - 2}\bigl[F'_x(a) + F'_x(b) + \lambda F(a) - \lambda F(b)\bigr], \\ B &= -\frac{1}{\lambda}\bigl[F'_x(a) + \lambda F(a) + Aa\lambda + A\bigr], \end{aligned}$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция.

15. $\displaystyle \int_a^b |e^{\lambda x} - e^{\lambda t}|\, y(t)\,dt = f(x), \qquad \lambda > 0.$

Частный случай уравнения 8.3.1.34 при $g(x) = e^{\lambda x}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx}\bigl[e^{-\lambda x} f'_x(x)\bigr].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 8.3.1.34).

16. $\displaystyle \int_{-\infty}^\infty e^{-(x-t)^2} y(t)\,dt = f(x).$

1°. Решение:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty e^{s^2/4}\,ds \int_{-\infty}^\infty \cos\bigl(s(t-x)\bigr) f(x)\,dx = \\ &= \exp\Bigl[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dt^2} f(t)\Bigr] \equiv \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\Bigl(-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Bigr)^k \frac{d^{2k} f(t)}{dt^{2k}}. \end{aligned}$$

2°. Решение (альтернативное представление):

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^\infty \frac{f_x^{(n)}(0)}{2^n n!} H_n(x),$$

где $H_n(x)$ — многочлены Эрмита

$$H_m(x) = (-1)^m \exp\bigl(x^2\bigr) \frac{d^m}{dx^m} \exp\bigl(-x^2\bigr).$$

17. $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-t)^2}{\lambda}\right] y(t)\,dt = f(x).$

Преобразование Гаусса (*преобразование Вейерштрасса* при $\lambda = 4$).

Решение:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\lambda s^2/4}\,ds \int_{-\infty}^{\infty} \cos\bigl(s(t-x)\bigr) f(x)\,dx =$$
$$= \exp\left[-\frac{\lambda}{4} \frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\lambda}{4}\right)^k \frac{d^{2k} f(t)}{dt^{2k}}.$$

► **Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции.**

18. $\displaystyle \int_a^b \ln|x-t|\, y(t)\,dt = f(x).$

Уравнение Карлемана.

1°. Решение при $b - a \neq 4$ (Гахов, 1997):

$$y(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(x-a)(b-x)}} \left[\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}\, f_t'(t)\,dt}{t-x} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\ln\bigl[\frac{1}{4}(b-a)\bigr]} \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \right].$$

2°. При $b-a=4$ для разрешимости уравнения должно выполняться условие

$$\int_a^b f(t)(t-a)^{-1/2}(b-t)^{-1/2}\,dt = 0.$$

В этом случае решение имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(x-a)(b-x)}} \left[\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}\, f_t'(t)\,dt}{t-x} + C \right],$$

где C — произвольная постоянная.

19. $\displaystyle \int_a^b \bigl(\ln|x-t| + \beta\bigr) y(t)\,dt = f(x).$

Положим

$$x = e^{-\beta} z, \quad t = e^{-\beta}\tau, \quad y(t) = Y(\tau), \quad f(x) = e^{-\beta} g(z).$$

В результате получим уравнение вида 8.3.1.18:

$$\int_A^B \ln|z-\tau|\, Y(\tau)\,d\tau = g(z), \qquad A = ae^{\beta},\ B = be^{\beta}.$$

20. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\Bigl(\ln\frac{A}{|x-t|}\Bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad -a \leqslant x \leqslant a.$

Решение при $0 < a < 2A$ (Гохберг & Крейн, 1967):

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \frac{1}{2M'(a)}\Bigl[\frac{d}{da}\int_{-a}^{a} w(t,a)f(t)\,dt\Bigr]w(x,a) - \\ & - \frac{1}{2}\int_{|x|}^{a} w(x,\xi)\frac{d}{d\xi}\Bigl[\frac{1}{M'(\xi)}\frac{d}{d\xi}\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi)f(t)\,dt\Bigr]\,d\xi - \\ & - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{|x|}^{a}\frac{w(x,\xi)}{M'(\xi)}\Bigl[\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi)\,df(t)\Bigr]\,d\xi, \end{aligned}$$

Здесь штрих соответствует производной и использованы следующие обозначения:

$$M(\xi) = \Bigl(\ln\frac{2A}{\xi}\Bigr)^{-1}, \qquad w(x,\xi) = \frac{M(\xi)}{\pi\sqrt{\xi^2 - x^2}}.$$

21. $\displaystyle\int_{0}^{a}\ln\left|\frac{x+t}{x-t}\right|y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = -\frac{2}{\pi^2}\frac{d}{dx}\int_{x}^{a}\frac{F(t)\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}}, \qquad F(t) = \frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\frac{sf(s)\,ds}{\sqrt{t^2-s^2}}.$$

► **Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции.**

22. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\cos(xt)y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos(xt)f(t)\,dt.$

Правая часть уравнения $f(x)$ и его решение представляют $y(t)$ собой пару прямого и обратного *косинус-преобразования Фурье* в несимметричной форме (Диткин & Прудников, 1974).

23. $\displaystyle\int_{a}^{b}\cos(xt)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant x < \infty.$

Решение:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\cos(xt)f(x)\,dx & \text{при } a < t < b, \\ 0 & \text{при } 0 < t < a \text{ или } t > b, \end{cases}$$

где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$.

24. $\displaystyle\int_{a}^{b}\bigl|\cos(\lambda x) - \cos(\lambda t)\bigr|\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 8.3.1.34 при $g(x) = \cos(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dx}\Bigl[\frac{f'_x(x)}{\sin(\lambda x)}\Bigr].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 8.3.1.34).

25. $\displaystyle\int_0^\infty \sin(xt)y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $y(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \sin(xt)f(t)\,dt.$

Правая часть уравнения $f(x)$ и его решение представляют $y(t)$ собой пару прямого и обратного *синус-преобразования Фурье* в несимметричной форме (Диткин & Прудников, 1974).

26. $\displaystyle\int_a^b \sin(xt)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant x < \infty.$

Решение:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \sin(xt)f(x)\,dx & \text{при } \ a < t < b, \\ 0 & \text{при } \ 0 < t < a \ \text{ или } \ t > b, \end{cases}$$

где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$.

27. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin\bigl(\lambda|x-t|\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad f(\pm\infty) = 0.$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\bigl[f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x)\bigr].$$

28. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \bigl[\cos(xt) + \sin(xt)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \bigl[\cos(xt) + \sin(xt)\bigr]f(t)\,dt.$$

Правая часть уравнения $f(x)$ и его решение представляют $y(t)$ собой пару прямого и обратного *преобразования Хартли* в несимметричной форме (Zwillinger, 1989).

29. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\Bigl(\frac{t-x}{2}\Bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$

Здесь сингулярный интеграл понимаются в смысле главного значения по Коши и считается, что правая часть уравнения удовлетворяет условию $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$.

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\Bigl(\frac{t-x}{2}\Bigr)f(t)\,dt + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Из решения следует, что $\displaystyle\int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 2\pi C$.

Правая часть уравнения $f(x)$ и его решение представляют $y(t)$ собой пару прямого и обратного *преобразования Гильберта* в несимметричной форме (Гахов, 1977).

► **Другие интегральные уравнения.**

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} y(\xi)\,dt = f(x), \qquad \xi = x\sin t.$

Уравнение Шлёмильха.

Решение (Гахов, 1977):

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\left[f(0) + x\int_0^{\pi/2} f'_\xi(\xi)\,dt\right], \qquad \xi = x\sin t.$$

31. $\displaystyle\int_0^{\infty} tJ_\nu(xt)y(t)\,dt = f(x), \qquad \nu > -1.$

Здесь $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода.

Решение:

$$y(x) = \int_0^{\infty} tJ_\nu(xt)f(t)\,dt.$$

Правая часть уравнения $f(x)$ и его решение представляют $y(t)$ собой пару прямого и обратного *преобразования Ханкеля* (Диткин & Прудников, 1974).

32. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K_0\bigl(|x-t|\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Здесь $K_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Решение (Zwillinger, 1989):

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)\int_{-\infty}^{\infty} K_0\bigl(|x-t|\bigr)f(t)\,dt.$$

33. $\displaystyle\int_a^b \bigl[g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Интегральное уравнение с вырожденным ядром. Оно имеет решения только тогда, когда его правая часть представима в виде

$$f(x) = A_1g_1(x) + A_2g_2(x), \qquad A_1 = \mathrm{const},\ A_2 = \mathrm{const}. \qquad (*)$$

В этом случае любая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая условиям типа нормировки

$$\int_a^b h_1(t)y(t)\,dt = A_1, \qquad \int_a^b h_2(t)y(t)\,dt = A_2,$$

будет решением интегрального уравнения.

Если правая часть уравнения имеет вид, отличный от (*), то интегральное уравнение не имеет решений.

34. $\displaystyle\int_a^b |g(x) - g(t)|\,y(t)\,dt = f(x).$

Пусть $a \leqslant x \leqslant b$ и $a \leqslant t \leqslant b$; в пп. 1° и 2° считаем, что $0 < g'_x(x) < \infty$.

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x \big[g(x) - g(t)\big] y(t)\,dt + \int_x^b \big[g(t) - g(x)\big] y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$g'_x(x) \int_a^x y(t)\,dt - g'_x(x) \int_x^b y(t)\,dt = f'_x(x). \tag{2}$$

Поделим обе части (2) на $g'_x(x)$ и продифференцируем полученное выражение. В итоге находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{g'_x(x)} \right]. \tag{3}$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия

$$\int_a^b \big[g(t) - g(a)\big] y(t)\,dt = f(a), \qquad \int_a^b \big[g(b) - g(t)\big] y(t)\,dt = f(b). \tag{4}$$

Подставим в равенства (4) функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} \big[g(b) - g(a)\big] \frac{f'_x(b)}{g'_x(b)} &= f(a) + f(b), \\ \big[g(a) - g(b)\big] \frac{f'_x(a)}{g'_x(a)} &= f(a) + f(b). \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим полезное следствие этих условий: $f'_x(b) g'_x(a) + f'_x(a) g'_x(b) = 0$.

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части рассматриваемого интегрального уравнения

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \tag{6}$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной), а коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A = -\frac{g'_x(a) F'_x(b) + g'_x(b) F'_x(a)}{g'_x(a) + g'_x(b)},$$
$$B = -\tfrac{1}{2} A(a + b) - \tfrac{1}{2} \big[F(a) + F(b)\big] - \frac{g(b) - g(a)}{2 g'_x(a)} \big[A + F'_x(a)\big].$$

3°. Если в окрестности граничной точки $x = a$ функцию $g(x)$ можно представить в виде $g(x) = O(x - a)^k$ при $0 < k < 1$ (т. е. производная g'_x неограничена при $x \to a$), то решение интегрального уравнения также описывается формулой (3). При этом правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(a) + f(b) = 0, \qquad f'_x(b) = 0. \tag{7}$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, как и ранее, определяется выражением (6), где коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A = -F'_x(b), \qquad B = \tfrac{1}{2}\big[(a+b)F'_x(b) - F(a) - F(b)\big].$$

4°. При $g'_x(a) = 0$ правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять условиям

$$f'_x(a) = 0, \qquad \big[g(b) - g(a)\big] f'_x(b) = \big[f(a) + f(b)\big] g'_x(b).$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, как и ранее, определяется выражением (6), где коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A = -F'_x(a), \qquad B = \tfrac{1}{2}\big[(a+b)F'_x(a) - F(a) - F(b)\big] + \frac{g(b) - g(a)}{2g'_x(b)}\big[F'_x(b) - F'_x(a)\big].$$

35. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x).$

Для решения этого уравнения используют преобразование Фурье (Диткин & Прудников, 1974).

1°. Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(u)}{\tilde{K}(u)} e^{iux}\,du,$$
$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx, \quad \tilde{K}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-iux}\,dx.$$

Пусть $f(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ и $K(x) \in L_1(-\infty,\infty)$. Для существования решения интегрального уравнения $y(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{f}(u)/\tilde{K}(u) \in L_2(-\infty,\infty)$.

2°. Пусть функция $P(s)$, определенная соотношением

$$\frac{1}{P(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}K(t)\,dt,$$

является многочленом степени n с вещественными корнями вида

$$P(s) = \Big(1 - \frac{s}{a_1}\Big)\Big(1 - \frac{s}{a_2}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{s}{a_n}\Big).$$

Тогда решение интегрального уравнения дается формулой

$$y(x) = P(D)f(x), \quad D = \frac{d}{dx}.$$

36. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x).$

Уравнение Винера — Хопфа первого рода. Об этом интегральном уравнении см. книги Гахов & Черский (1978), Mikhlin & Prössdorf (1986), Muskhelishvili (1992), Polyanin & Manzhirov (2008).

8.3.2. Нелинейные интегральные уравнения Фредгольма первого рода

1. $\displaystyle\int_a^b y(x) f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).$

Решение: $y(x) = \lambda g(x)$, где λ определяется из следующего алгебраического (трансцендентного) уравнения: $\lambda \int_a^b f\big(t, \lambda g(t)\big)\, dt = 1$ (число решений этого уравнения определяет число решений исходного интегрального уравнения).

2. $\displaystyle\int_a^b y^k(x) f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).$

Решение: $y(x) = \lambda [g(x)]^{1/k}$, где λ определяется из следующего алгебраического (трансцендентного) уравнения: $\lambda^k \int_a^b f\big(t, \lambda g^{1/k}(t)\big)\, dt = 1.$

3. $\displaystyle\int_a^b \varphi\big(y(x)\big) f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).$

Решение в неявном виде:

$$\lambda \varphi\big(y(x)\big) - g(x) = 0, \tag{1}$$

где λ определяется из следующего алгебраического (трансцендентного) уравнения:

$$\lambda - F(\lambda) = 0, \qquad F(\lambda) = \int_a^b f\big(t, y(t)\big)\, dt. \tag{2}$$

В уравнение (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \lambda)$, которая получается путем разрешения (1).

Число решений интегрального уравнения определяется числом решений, полученных из (1) и (2).

4. $\displaystyle\int_0^\infty [\sin(xt) y(t) + \varphi(x) \Psi(t, y(t))]\, dt = f(x).$

Решения:

$$y_m(t) = Y_f(t) + A_m Y_\varphi(t),$$

где

$$Y_f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(xt) f(x)\, dx, \quad Y_\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(xt) \varphi(x)\, dx,$$

а A_m — корни алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$A + \int_a^b \Psi(t, Y_f(t) + A Y_\varphi(t))\, dt = 0.$$

5. $\displaystyle\int_0^\infty [\cos(xt) y(t) + \varphi(x) \Psi(t, y(t))]\, dt = f(x).$

Решения:

$$y_m(t) = Y_f(t) + A_m Y_\varphi(t),$$

где

$$Y_f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(xt)f(x)\,dx, \quad Y_\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(xt)\varphi(x)\,dx,$$

а A_m — корни алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$A + \int_a^b \Psi(t, Y_f(t) + AY_\varphi(t))\,dt = 0.$$

6. $\displaystyle\int_0^\infty [tJ_\nu(xt)y(t) + \varphi(x)\Psi(t, y(t))]\,dt = f(x), \qquad \nu > -1.$

Здесь $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода.

Решения:

$$y_m(t) = Y_f(t) + A_m Y_\varphi(t),$$

где

$$Y_f(t) = \int_0^\infty xJ_\nu(xt)f(x)\,dx, \quad Y_\varphi(t) = \int_0^\infty xJ_\nu(xt)\varphi(x)\,dx,$$

а A_m — корни алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$A + \int_a^b \Psi(t, Y_f(t) + AY_\varphi(t))\,dt = 0.$$

8.4. Интегральные уравнения второго рода с постоянными пределами интегрирования

8.4.1. Линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода

► **Уравнения, ядра которых содержат степенные функции.**

1. $\displaystyle y(x) - \lambda\int_a^b (x - t)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x + A_2),$$

где

$$A_1 = \frac{12f_1 + 6\lambda\,(f_1\Delta_2 - 2f_2\Delta_1)}{\lambda^2\Delta_1^4 + 12}, \quad A_2 = \frac{-12f_2 + 2\lambda\,(3f_2\Delta_2 - 2f_1\Delta_3)}{\lambda^2\Delta_1^4 + 12},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b xf(x)\,dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b |x - t|\,y(t)\,dt = f(x).$

1°. При $A < 0$ решение имеет вид

$$y(x) = C_1\operatorname{ch}(kx) + C_2\operatorname{sh}(kx) + f(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[k(x - t)]f(t)\,dt, \quad k = \sqrt{-2A}, \quad (1)$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются из условий

$$\begin{gathered} y'_x(a) + y'_x(b) = f'_x(a) + f'_x(b), \\ y(a) + y(b) + (b-a)y'_x(a) = f(a) + f(b) + (b-a)f'_x(a). \end{gathered} \tag{2}$$

2°. При $A > 0$ решение имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + f(x) - k\int_a^x \sin[k(x-t)]f(t)\,dt, \quad k = \sqrt{2A}, \tag{3}$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются из условий (2).

3°. В частном случае $a = 0$ при $A > 0$ решение интегрального уравнения определяется по формуле (3), где

$$C_1 = k\frac{I_{\rm s}(1+\cos\lambda) - I_{\rm c}(\lambda + \sin\lambda)}{2 + 2\cos\lambda + \lambda\sin\lambda}, \qquad C_2 = k\frac{I_{\rm s}\sin\lambda + I_{\rm c}(1+\cos\lambda)}{2 + 2\cos\lambda + \lambda\sin\lambda},$$

$$k = \sqrt{2A}, \quad \lambda = bk, \quad I_{\rm s} = \int_0^b \sin[k(b-t)]f(t)\,dt, \quad I_{\rm c} = \int_0^b \cos[k(b-t)]f(t)\,dt.$$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{y(x) - y(t)}{|x-t|}\,dt = \lambda y(x).$

Собственные значения:

$$\lambda_n = 2\Bigl(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\Bigr), \quad \text{где} \quad n = 1,\,2,\,\dots$$

Собственные функции:

$$y_n(x) = P_n(x), \quad \text{где} \quad n = 1,\,2,\,\dots\,,$$

где $P_n(x) = \dfrac{1}{n!\,2^n}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ — полиномы Лежандра.

► *В уравнениях 8.4.1.4 и 8.4.1.5 их решениях сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.*

4. $\displaystyle y(x) - \lambda\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)\,dt}{t-x} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{1+\pi^2\lambda^2}\biggl[f(x) + \lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-x}\biggr].$$

5. $\displaystyle Ay(x) + \frac{B}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{y(t)\,dt}{t-x} = f(x), \qquad -1 < x < 1.$

Без потери общности будем считать, что $A^2 + B^2 = 1$.

1°. Решение, ограниченное на обоих концах отрезка (Лифанов, 1995):

$$y(x) = Af(x) - \frac{B}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{g(t)}\frac{f(t)\,dt}{t-x}, \qquad g(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^{1-\alpha}, \tag{1}$$

где α — решение тригонометрического уравнения

$$A + B\operatorname{ctg}(\pi\alpha) = 0, \tag{2}$$

удовлетворяющее условию $0 < \alpha < 1$. Это решение $y(x)$ существует тогда и только тогда, когда $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{g(t)}\,dt = 0.$

2°. Решение, ограниченное при $x=1$ и неограниченное при $x=-1$:

$$y(x) = Af(x) - \frac{B}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{g(t)}\frac{f(t)\,dt}{t-x}, \qquad g(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^{-\alpha}, \qquad (3)$$

где α — решение тригонометрического уравнения (2), удовлетворяющее условию $-1<\alpha<0$.

3°. Решение, неограниченное на обоих концах отрезка:

$$y(x) = Af(x) - \frac{B}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{g(t)}\frac{f(t)\,dt}{t-x} + Cg(x), \qquad g(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^{-1-\alpha},$$

где C — произвольная постоянная, а α — решение тригонометрического уравнения (2), удовлетворяющее условию $-1<\alpha<0$.

6. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_1^0\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt}\right)y(t)\,dt = f(x), \quad 0<x<1.}$

Уравнение Трикоми.

Решение (Забрейко, Кошелев и др., 1968):

$$y(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left[f(x) + \int_0^1\frac{t^\alpha(1-x)^\alpha}{x^\alpha(1-t)^\alpha}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt}\right)f(t)\,dt\right] + \frac{C(1-x)^\beta}{x^{1+\beta}},$$
$$\alpha = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(\lambda\pi) \ \ (-1<\alpha<1), \quad \operatorname{tg}\frac{\beta\pi}{2} = \lambda\pi \ \ (-2<\beta<0),$$

где C — произвольная постоянная.

► Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции.

7. $\boldsymbol{y(x) + \lambda\int_0^\infty e^{-|x-t|}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение (Гахов, Черский, 1978):

$$y(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+2\lambda}}\int_0^\infty \exp\bigl(-\sqrt{1+2\lambda}\,|x-t|\bigr)f(t)\,dt +$$
$$+\left(1 - \frac{\lambda+1}{\sqrt{1+2\lambda}}\right)\int_0^\infty \exp\bigl[-\sqrt{1+2\lambda}\,(x+t)\bigr]f(t)\,dt, \qquad \lambda > -\tfrac{1}{2}.$$

8. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_{-\infty}^\infty e^{-|x-t|}y(t)\,dt = 0, \qquad \lambda>0.}$

Уравнение Лалеско — Пикара.

Решение (Краснов, Киселев, Макаренко, 1968):

$$y(x) = \begin{cases} C_1\exp\bigl(x\sqrt{1-2\lambda}\,\bigr) + C_2\exp\bigl(-x\sqrt{1-2\lambda}\,\bigr) & \text{при } 0<\lambda<\frac{1}{2},\\ C_1 + C_2x & \text{при } \lambda = \frac{1}{2},\\ C_1\cos\bigl(x\sqrt{2\lambda-1}\,\bigr) + C_2\sin\bigl(x\sqrt{2\lambda-1}\,\bigr) & \text{при } \lambda>\frac{1}{2},\end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

9. $\boldsymbol{y(x) + \lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Решение при $\lambda > -\frac{1}{2}$ (Гахов, Черский, 1978):

$$y(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(-\sqrt{1+2\lambda}\,|x-t|\bigr) f(t)\,dt.$$

2°. При условии $\lambda \leqslant -\frac{1}{2}$ для разрешимости интегрального уравнения необходимо выполнение условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\,dx = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)\,dx = 0,$$

где $a = \sqrt{-1-2\lambda}$. В этом случае решение имеет вид

$$y(x) = f(x) - \frac{a^2+1}{2a} \int_0^{\infty} \sin(at) f(x+t)\,dt.$$

Если рассматривать решения, не принадлежащие $L_2(-\infty, \infty)$, то однородное уравнение при $f(x) \equiv 0$ имеет нетривиальное решение. В этом случае общее решение соответствующего неоднородного уравнения при $\lambda \leqslant -\frac{1}{2}$ имеет вид

$$y(x) = C_1\sin(ax) + C_2\cos(ax) + f(x) - \frac{a^2+1}{4a} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(a|x-t|) f(t)\,dt.$$

10. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{\lambda|x-t|} y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + \lambda(2A-\lambda)y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{1}$$

Граничные условия для уравнения (1) записываются так:

$$\begin{aligned} y'_x(a) + \lambda y(a) &= f'_x(a) + \lambda f(a),\\ y'_x(b) - \lambda y(b) &= f'_x(b) - \lambda f(b). \end{aligned} \tag{2}$$

ОДУ (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $\lambda(2A-\lambda) < 0$ общее решение ОДУ (1) имеет вид

$$\begin{gathered} y(x) = C_1\operatorname{ch}(kx) + C_2\operatorname{sh}(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]\,f(t)\,dt,\\ k = \sqrt{\lambda(\lambda-2A)}, \end{gathered} \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

При $\lambda(2A-\lambda) > 0$ общее решение ОДУ (1) имеет вид

$$\begin{gathered} y(x) = C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k}\int_a^x \sin[k(x-t)]\,f(t)\,dt,\\ k = \sqrt{\lambda(2A-\lambda)}. \end{gathered} \tag{4}$$

При $\lambda = 2A$ общее решение ОДУ (1) имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 x + f(x) - 4A^2 \int_a^x (x-t) f(t)\,dt. \tag{5}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 в решениях (3)–(5) определяются из условий (2).

3°. В частном случае $a = 0$ при $\lambda(2A - \lambda) > 0$ решение интегрального уравнения определяется по формуле (4), где

$$C_1 = \frac{A(kI_\text{c} - \lambda I_\text{s})}{(\lambda - A)\sin\mu - k\cos\mu}, \quad C_2 = -\frac{\lambda}{k}\,\frac{A(kI_\text{c} - \lambda I_\text{s})}{(\lambda - A)\sin\mu - k\cos\mu},$$

$$k = \sqrt{\lambda(2A - \lambda)}, \quad \mu = bk, \quad I_\text{s} = \int_0^b \sin[k(b-t)] f(t)\,dt, \quad I_\text{c} = \int_0^b \cos[k(b-t)] f(t)\,dt.$$

11. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)\,dt}{\operatorname{ch}[b(x-t)]} = f(x).}$

Решение при $b > \pi|\lambda|$ (Гахов, Черский, 1978):

$$y(x) = f(x) - \frac{2\lambda b}{\sqrt{b^2 - \pi^2\lambda^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[2k(x-t)]}{\operatorname{sh}[2b(x-t)]} f(t)\,dt, \qquad k = \frac{b}{\pi}\arccos\Bigl(\frac{\pi\lambda}{b}\Bigr).$$

12. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|)\, y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + \lambda(2A - \lambda) y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{1}$$

Граничные условия для уравнения (1) записываются так:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(b) = \lambda\varphi(a),\\ &\operatorname{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(a) = -\lambda\varphi(b), \end{aligned} \qquad \varphi(x) = y(x) - f(x). \tag{2}$$

ОДУ (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $\lambda(2A - \lambda) = -k^2 < 0$ общее решение ОДУ (1) имеет вид

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t)\,dt, \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

При $\lambda(2A - \lambda) = k^2 > 0$ общее решение ОДУ (1) имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \sin[k(x-t)] f(t)\,dt. \tag{4}$$

При $\lambda = 2A$ общее решение ОДУ (1) имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 x + f(x) - 4A^2 \int_a^x (x-t) f(t)\,dt. \tag{5}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 в решениях (3)–(5) определяются из условий (2).

► Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции.

13. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_0^\infty \cos(xt)y(t)\,dt = 0.}$

Характеристические значения: $\lambda = \pm\sqrt{2/\pi}$. При этих значениях интегральное уравнение имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций (Краснов, Киселев, Макаренко, 1968).

Собственные функции при $\lambda = +\sqrt{2/\pi}$:

$$y_+(x) = f(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(xt)\,dt, \tag{1}$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0,\infty)$.

Собственные функции при $\lambda = -\sqrt{2/\pi}$:

$$y_-(x) = f(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(xt)\,dt, \tag{2}$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0,\infty)$.

В частности, из (1) и (2) при $f(x) = e^{-ax}$, получим

$$y_+(x) = e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2} \qquad \text{при} \quad \lambda = +\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$
$$y_-(x) = e^{-ax} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2} \qquad \text{при} \quad \lambda = -\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

где a — любое положительное число.

14. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_0^\infty \cos(xt)y(t)\,dt = f(x).}$

Решение (Краснов, Киселев, Макаренко, 1968):

$$y(x) = \frac{f(x)}{1-\frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\frac{\pi}{2}\lambda^2}\int_0^\infty \cos(xt)f(t)\,dt, \qquad \lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}.$$

15. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_0^\infty \sin(xt)y(t)\,dt = 0.}$

Характеристические значения: $\lambda = \pm\sqrt{2/\pi}$. При этих значениях интегральное уравнение имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций (Краснов, Киселев, Макаренко, 1968).

Собственные функции при $\lambda = +\sqrt{2/\pi}$:

$$y_+(x) = f(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin(xt)\,dt,$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0,\infty)$.

Собственные функции при $\lambda = -\sqrt{2/\pi}$:

$$y_-(x) = f(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(xt)\, dt,$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0, \infty)$.

16. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_0^\infty \sin(xt) y(t)\, dt = f(x).}$

Решение (Краснов, Киселев, Макаренко, 1968):

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} \int_0^\infty \sin(xt) f(t)\, dt, \qquad \lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}.$$

17. $\boldsymbol{y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda|x - t|) y(t)\, dt = f(x).}$

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + \lambda(2A + \lambda)y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \tag{1}$$

Граничные условия для уравнения (1) записываются так:

$$\begin{aligned} &\sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda\cos[\lambda(b-a)]\varphi(b) = \lambda\varphi(a),\\ &\sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda\cos[\lambda(b-a)]\varphi(a) = -\lambda\varphi(b), \end{aligned} \qquad \varphi(x) = y(x) - f(x). \tag{2}$$

ОДУ (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $\lambda(2A + \lambda) = -k^2 < 0$ общее решение ОДУ (1) имеет вид

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]\, f(t)\, dt, \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

При $\lambda(2A + \lambda) = k^2 > 0$ общее решение ОДУ (1) имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \sin[k(x-t)]\, f(t)\, dt. \tag{4}$$

При $\lambda = 2A$ общее решение ОДУ (1) имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 x + f(x) + 4A^2 \int_a^x (x-t) f(t)\, dt. \tag{5}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 в решениях (3)–(5) определяются из условий (2).

18. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x-t)}{x-t} y(t)\, dt = f(x).}$

Решение (Гахов, Черский, 1978):

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi} - \pi\lambda} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x-t)}{x-t} f(t)\, dt, \qquad \lambda \neq \sqrt{2/\pi}.$$

19. $\boldsymbol{Ay(x) - \dfrac{B}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\Big(\frac{t-x}{2}\Big) y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.}$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Без потери общности будем считать, что $A^2 + B^2 = 1$.

Решение (Лифанов, 1995):

$$y(x) = Af(x) + \frac{B}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\Big(\frac{t-x}{2}\Big) f(t)\,dt + \frac{B^2}{2\pi A}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

20. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_0^{\infty} e^{\mu(x-t)} \cos(xt) y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2}\int_0^{\infty} e^{\mu(x-t)} \cos(xt) f(t)\,dt, \qquad \lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}.$$

21. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_0^{\infty} e^{\mu(x-t)} \sin(xt) y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2}\int_0^{\infty} e^{\mu(x-t)} \sin(xt) f(t)\,dt, \qquad \lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}.$$

► Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции.

22. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b g(x)h(t)y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Пусть $\lambda \neq \Big(\displaystyle\int_a^b g(t)h(t)\,dt\Big)^{-1}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda k g(x), \qquad \text{где} \quad k = \Big(1 - \lambda\int_a^b g(t)h(t)\,dt\Big)^{-1}\int_a^b h(t)f(t)\,dt.$$

2°. Пусть $\lambda = \Big(\displaystyle\int_a^b g(t)h(t)\,dt\Big)^{-1}$.

При $\displaystyle\int_a^b h(t)f(t)\,dt = 0$ решение имеет вид

$$y = f(x) + Cg(x),$$

где C — произвольная постоянная.

При $\displaystyle\int_a^b h(t)f(t)\,dt \neq 0$ интегральное уравнение не имеет решения.

Замечание 8.2. *При условии существования соответствующих несобственных интегралов пределы интегрирования могут принимать значения $a = -\infty$ и/или $b = \infty$.*

23. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b [g(x) + h(t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{s_1 + s_3 \pm \sqrt{(s_1 - s_3)^2 + 4(b-a)s_2}}{2[s_1 s_3 - (b-a)s_2]},$$

где
$$s_1 = \int_a^b g(x)\,dx, \quad s_2 = \int_a^b g(x)h(x)\,dx, \quad s_3 = \int_a^b h(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:
$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$
где постоянные A_1 и A_2 определяются по формулам
$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda[f_1 s_3 - (b-a)f_2]}{[s_1 s_3 - (b-a)s_2]\lambda^2 - (s_1+s_3)\lambda + 1},$$
$$A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 s_1 - f_1 s_2)}{[s_1 s_3 - (b-a)s_2]\lambda^2 - (s_1+s_3)\lambda + 1},$$
$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)h(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:
$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 s_1}{\lambda_1(b-a)},$$
где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ определяется формулами из п. 2°, в которых λ_1 и $y_1(x)$ следует заменить на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$, $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{s_1+s_3}$ — двукратное характеристическое значение и $s_1 \neq \pm s_3$, имеет вид
$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \qquad y_*(x) = g(x) - \frac{s_1 - s_3}{2(b-a)}.$$
Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*.

Уравнение не имеет кратных характеристических значений, если $s_1 = \pm s_3$.

24. $\boldsymbol{y(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)y(t)\,dt, \qquad K(x) = K(-x).}$

Характеристические значения:
$$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n}, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(x)\cos(nx)\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Соответствующие им собственные функции:
$$y_0(x) = 1, \quad y_n^{(1)}(x) = \cos(nx), \quad y_n^{(2)}(x) = \sin(nx) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Для каждого значения λ_n при $n \neq 0$ имеются две линейно независимые собственные функции $y_n^{(1)}(x)$ и $y_n^{(2)}(x)$.

25. $\boldsymbol{y(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x).}$

Здесь $-\infty < x < \infty$, $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$, $K(x) \in L_1(-\infty,\infty)$.

Для разрешимости интегрального уравнения (в L_1) необходимо и достаточно выполнения условия

$$1 - \sqrt{2\pi}\,\tilde{K}(u) \neq 0, \qquad -\infty < u < \infty,$$

где $\tilde{K}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-iux}\,dx$ — преобразование Фурье функции $K(x)$. В этом случае интегральное уравнение имеет единственное решение, представимое формулой (Диткин, Прудников, 1974):

$$y(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} R(x-t)f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(u)e^{iux}\,du, \qquad \tilde{R}(u) = \frac{\tilde{K}(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\,\tilde{K}(u)}.$$

26. $\boldsymbol{y(x) - \int_{0}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x).}$

Уравнение Винера — Хопфа второго рода. Об этом интегральном уравнении см. книги Гахов & Черский (1978), Noble (1958), Polyanin & Manzhirov (2008).

27. $\boldsymbol{y(x) + \int_{a}^{b} |x-t| g(t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_{a}^{x} (x-t)g(t)y(t)\,dt + \int_{x}^{b} (t-x)g(t)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$y'_x(x) + \int_{a}^{x} g(t)y(t)\,dt - \int_{x}^{b} g(t)y(t)\,dt = f'_x(x). \tag{2}$$

Дифференцируя (2), приходим к следующему ОДУ второго порядка для функции $y = y(x)$,

$$y''_{xx} + 2g(x)y = f''_{xx}(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для ОДУ (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая $x = a$ и $x = b$ в (1), имеем два соотношения:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_{a}^{b} (t-a)g(t)y(t)\,dt &= f(a),\\ y(b) + \int_{a}^{b} (b-t)g(t)y(t)\,dt &= f(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (4). После интегрирования по частям получим искомые граничные условия для функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(a) + y(b) + (b-a)[f'_x(b) - y'_x(b)] &= f(a) + f(b),\\ y(a) + y(b) + (a-b)[f'_x(a) - y'_x(a)] &= f(a) + f(b). \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим полезное следствие равенств (5):

$$y'_x(a) + y'_x(b) = f'_x(a) + f'_x(b), \tag{6}$$

которое можно использовать вместе с одним из условий (5).

ОДУ (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

28. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} g(t) y(t)\, dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} g(t) y(t)\, dt + \int_x^b e^{\lambda(t-x)} g(t) y(t)\, dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x) y(x) + \lambda^2 \int_a^x e^{\lambda(x-t)} g(t) y(t)\, dt + \lambda^2 \int_x^b e^{\lambda(t-x)} g(t) y(t)\, dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему ОДУ второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x) y - \lambda^2 y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для ОДУ (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая $x = a$ и $x = b$ в (1), имеем два соотношения:

$$\begin{aligned} &y(a) + e^{-\lambda a} \int_a^b e^{\lambda t} g(t) y(t)\, dt = f(a), \\ &y(b) + e^{\lambda b} \int_a^b e^{-\lambda t} g(t) y(t)\, dt = f(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через функции y и f и их вторые производные, а затем подставим в (4). После интегрирования по частям получим искомые граничные условия для функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} &e^{\lambda b} \varphi'_x(b) - e^{\lambda a} \varphi'_x(a) = \lambda e^{\lambda a} \varphi(a) + \lambda e^{\lambda b} \varphi(b), \\ &e^{-\lambda b} \varphi'_x(b) - e^{-\lambda a} \varphi'_x(a) = \lambda e^{-\lambda a} \varphi(a) + \lambda e^{-\lambda b} \varphi(b), \end{aligned} \qquad \varphi(x) = y(x) - f(x).$$

Отсюда после некоторых преобразований найдем граничные условия для функции $y(x)$:

$$\varphi'_x(a) + \lambda \varphi(a) = 0, \quad \varphi'_x(b) - \lambda \varphi(b) = 0; \qquad \varphi(x) = y(x) - f(x). \tag{5}$$

ОДУ (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

29. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|)g(t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt + \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)]g(t)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x)y(x) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt + \\ + \lambda^2 \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)]g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему ОДУ второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x)y - \lambda^2 y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для ОДУ (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая $x = a$ и $x = b$ в (1), имеем два соотношения:

$$\begin{aligned} &y(a) + \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(t-a)]g(t)y(t)\,dt = f(a), \\ &y(b) + \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(b-t)]g(t)y(t)\,dt = f(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через функции y и f и их вторые производные, а затем подставим в (4). После интегрирования по частям получим искомые граничные условия для функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(b) = \lambda\varphi(a), \\ &\operatorname{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(a) = -\lambda\varphi(b); \quad \varphi(x) = y(x) - f(x). \end{aligned} \tag{5}$$

ОДУ (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

30. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \sin(\lambda|x-t|)g(t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt + \int_x^b \sin[\lambda(t-x)]g(t)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x)y(x) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt - \\ - \lambda^2 \int_x^b \sin[\lambda(t-x)]g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему ОДУ второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x)y + \lambda^2 y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \quad (3)$$

2°. Выведем граничные условия для ОДУ (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая $x = a$ и $x = b$ в (1), имеем два соотношения:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b \sin[\lambda(t-a)]g(t)y(t)\,dt &= f(a), \\ y(b) + \int_a^b \sin[\lambda(b-t)]g(t)y(t)\,dt &= f(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через функции y и f и их вторые производные, а затем подставим в (4). После интегрирования по частям получим искомые граничные условия для функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} &\sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda\cos[\lambda(b-a)]\varphi(b) = \lambda\varphi(a), \\ &\sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda\cos[\lambda(b-a)]\varphi(a) = -\lambda\varphi(b); \quad \varphi(x) = y(x) - f(x). \end{aligned} \quad (5)$$

ОДУ (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

8.4.2. Нелинейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода

1. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g(t)y(x)y(t)\,dt = f(x).}$

Решения:

$$y_1(x) = \lambda_1 f(x), \qquad y_2(x) = \lambda_2 f(x),$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$I\lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \qquad I = \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

2. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g(x)h(t)y(x)y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 + \lambda g(x)},$$

где λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda - \int_a^b \frac{f(t)h(t)\,dt}{1+\lambda g(t)} = 0.$$

Разные корни этого уравнения определяют разные решения исходного интегрального уравнения.

3. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f\big(t, y(t)\big)\,dt = g(x).}$

Решение: $y(x) = g(x) + \lambda$, где λ определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda + F(\lambda) = 0, \qquad F(\lambda) = \int_a^b f\big(t,\, g(t)+\lambda\big)\,dt.$$

4. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b e^{\lambda(x-t)} f\big(t, y(t)\big)\,dt = g(x).}$

Решение: $y(x) = \beta e^{\lambda x} + g(x)$, где β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\beta + F(\beta) = 0, \qquad F(\beta) = \int_a^b e^{-\lambda t} f\big(t,\, \beta e^{\lambda t} + g(t)\big)\,dt.$$

5. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g(x) f\big(t, y(t)\big)\,dt = h(x).}$

Решение: $y(x) = \lambda g(x) + h(x)$, где λ определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda + F(\lambda) = 0, \qquad F(\lambda) = \int_a^b f\big(t,\, \lambda g(t) + h(t)\big)\,dt.$$

6. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b |x-t| f\big(t, y(t)\big)\,dt = g(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x (x-t) f\big(t, y(t)\big)\,dt + \int_x^b (t-x) f\big(t, y(t)\big)\,dt = g(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$y'_x(x) + \int_a^x f\big(t, y(t)\big)\,dt - \int_x^b f\big(t, y(t)\big)\,dt = g'_x(x). \tag{2}$$

Дифференцируя (2), приходим к следующему ОДУ второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2f(x, y) = g''_{xx}(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для ОДУ (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая $x = a$ и $x = b$ в (1), имеем два соотношения:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b (t-a) f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt &= g(a), \\ y(b) + \int_a^b (b-t) f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt &= g(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) функцию $f(x,y)$ через y''_{xx} и g''_{xx} и подставим в (4). После интегрирования по частям получим искомые граничные условия для функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(a) + y(b) + (b-a)\bigl[g'_x(b) - y'_x(b)\bigr] &= g(a) + g(b), \\ y(a) + y(b) + (a-b)\bigl[g'_x(a) - y'_x(a)\bigr] &= g(a) + g(b). \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим полезное следствие равенств (5):

$$y'_x(a) + y'_x(b) = g'_x(a) + g'_x(b), \tag{6}$$

которое можно использовать вместе с одним из условий (5).

ОДУ (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

7. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt = g(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt + \int_x^b e^{\lambda(t-x)} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt = g(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx}(x) + 2\lambda f\bigl(x, y(x)\bigr) + \lambda^2 \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt &+ \\ + \lambda^2 \int_x^b e^{\lambda(t-x)} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt &= g''_{xx}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему ОДУ второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda f(x,y) - \lambda^2 y = g''_{xx}(x) - \lambda^2 g(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для ОДУ (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая $x = a$ и $x = b$ в (1), имеем два соотношения:

$$\begin{aligned} y(a) + e^{-\lambda a} \int_a^b e^{\lambda t} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt &= g(a), \\ y(b) + e^{\lambda b} \int_a^b e^{-\lambda t} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt &= g(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) функцию $f(x,y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$e^{\lambda b}\varphi'_x(b) - e^{\lambda a}\varphi'_x(a) = \lambda e^{\lambda a}\varphi(a) + \lambda e^{\lambda b}\varphi(b), \quad \varphi(x) = y(x) - g(x);$$
$$e^{-\lambda b}\varphi'_x(b) - e^{-\lambda a}\varphi'_x(a) = \lambda e^{-\lambda a}\varphi(a) + \lambda e^{-\lambda b}\varphi(b).$$

Отсюда находятся граничные условия для функции $y(x)$:

$$\varphi'_x(a) + \lambda\varphi(a) = 0, \quad \varphi'_x(b) - \lambda\varphi(b) = 0; \qquad \varphi(x) = y(x) - g(x). \tag{5}$$

ОДУ (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

8. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) + \int_a^b \mathrm{sh}\,\big(\lambda|x-t|\big) f\big(t, y(t)\big)\,dt = g(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)] f\big(t,y(t)\big)\,dt + \int_x^b \mathrm{sh}[\lambda(t-x)] f\big(t,y(t)\big)\,dt = g(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$y''_{xx}(x) + 2\lambda f\big(x,y(x)\big) + \lambda^2 \int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)] f\big(t,y(t)\big)\,dt + \\ + \lambda^2 \int_x^b \mathrm{sh}[\lambda(t-x)] f\big(t,y(t)\big)\,dt = g''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему ОДУ второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda f(x,y) - \lambda^2 y = g''_{xx}(x) - \lambda^2 g(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для ОДУ (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая $x = a$ и $x = b$ в (1), имеем два соотношения:

$$\begin{aligned} &y(a) + \int_a^b \mathrm{sh}[\lambda(t-a)] f\big(t,y(t)\big)\,dt = g(a),\\ &y(b) + \int_a^b \mathrm{sh}[\lambda(b-t)] f\big(t,y(t)\big)\,dt = g(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) функцию $f(x,y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda\,\mathrm{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(b) = \lambda\varphi(a), \quad \varphi(x) = y(x) - g(x);\\ &\mathrm{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda\,\mathrm{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(a) = -\lambda\varphi(b). \end{aligned} \tag{5}$$

ОДУ (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

9. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \sin(\lambda|x-t|)\, f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt + \int_x^b \sin[\lambda(t-x)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$y''_{xx}(x) + 2\lambda f\big(x, y(x)\big) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f\big(t, y(t)\big)\, dt - \\ - \lambda^2 \int_x^b \sin[\lambda(t-x)] f\big(t, y(t)\big)\, dt = g''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему ОДУ второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda f(x, y) + \lambda^2 y = g''_{xx}(x) + \lambda^2 g(x). \quad (3)$$

2°. Выведем граничные условия для ОДУ (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая $x = a$ и $x = b$ в (1), имеем два соотношения:

$$\begin{aligned} &y(a) + \int_a^b \sin[\lambda(t-a)]\, f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(a), \\ &y(b) + \int_a^b \sin[\lambda(b-t)]\, f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим из уравнения (3) функцию $f(x, y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} &\sin[\lambda(b-a)]\, \varphi'_x(b) - \lambda \cos[\lambda(b-a)]\, \varphi(b) = \lambda\varphi(a), \quad \varphi(x) = y(x) - g(x); \\ &\sin[\lambda(b-a)]\, \varphi'_x(a) + \lambda \cos[\lambda(b-a)]\, \varphi(a) = -\lambda\varphi(b). \end{aligned} \quad (5)$$

ОДУ (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

10. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \big[g_1(x) f_1\big(t, y(t)\big) + g_2(x) f_2\big(t, y(t)\big)\big]\, dt = h(x).}$

Решение:

$$y(x) = h(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x),$$

где постоянные λ_1 и λ_2 определяется путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\lambda_1 + \int_a^b f_1\big(t,\, h(t) + \lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t)\big)\, dt = 0,$$

$$\lambda_2 + \int_a^b f_2\big(t,\, h(t) + \lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t)\big)\, dt = 0.$$

► *Больше точных решений различных линейных и нелинейных интегральных уравнений можно найти в специализированных справочниках Полянин & Манжиров (1998 и 2003), Polyanin & Manzhirov (2008). Основные методы поиска точных решений интегральных уравнений описаны, например, в книгах Краснов, Киселев, Макаренко (1968), Манжиров & Полянин (1999), Полянин & Манжиров (2003), Polyanin & Manzhirov (2008).*

Литература к главе 8

Гахов Ф. Д. *Краевые задачи*. М.: Наука, 1977.

Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. *Уравнения типа свертки*. М.: Наука, 1978.

Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*. М.: Наука, 1967.

Диткин В. А., Прудников А. П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление*. М.: Наука, 1974.

Забрейко П. П., Кошелев А. И. и др. *Интегральные уравнения*. М.: Наука, 1968.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Физматлит, 2001.

Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. *Интегральные уравнения*. М.: Наука, 1968.

Лифанов И. К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент*. М.: Янус, 1995.

Манжиров А. В., Полянин А. Д. *Методы решения интегральных уравнений*. М.: Факториал, 1999.

Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения*. М.: Наука, 1968.

Полянин А. Д., Манжиров А. В. *Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения*. М.: Факториал, 1998.

Полянин А. Д., Манжиров А. В. *Справочник по интегральным уравнениям*. М.: Физматлит, 2003.

Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987.

Bitsadze A. V. *Integral Equation of the First Kind*. Singapore: World Scientific Publ., 1995.

Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Integral Transforms and Operational Calculus*. New York: Pergamon Press, 1965.

Gorenflo R., Vessella S. *Abel Integral Equations: Analysis and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

Mikhlin S. G., Prössdorf S., *Singular Integral Operators*. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

Noble B. *Methods Based on Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*. London: Pergamon Press, 1958.

Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of Integral Equations, 2nd ed.* Boca Raton–London: Chapman & Hall/CRC Press, 2008.

Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*. Boca Raton–London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition*. Boca Raton — London: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton — London: CRC Press, 2018.

Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series, Vol. 5, Inverse Laplace Transforms*. New York: Gordon & Breach, 1992.

Sakhnovich L. A. *Integral Equations with Difference Kernels on Finite Intervals*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1996.

Zwillinger D. *Handbook of Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1989.

9. Разностные и другие функциональные уравнения

► **Предварительные замечания.**

Функциональные уравнения являются математическими уравнениями, содержащими неизвестную функцию с разными аргументами. Разностные уравнения являются простейшими функциональными уравнениями, в которые входят величины $y(x+a_k)$, где a_k — заданные константы ($k=1,\ldots,m$), x — независимая переменная, а $y(z)$ — искомая функция.

Отметим, что одно функциональное уравнение может содержать несколько неизвестных функций.

В данной главе описаны точные решения разностных и более сложных функциональных уравнений различного типа.

9.1. Разностные уравнения

9.1.1. Разностные уравнения с дискретным аргументом

► **Предварительные замечания.**

Разностные уравнения с дискретным аргументом задаются на дискретном множестве целочисленных точек $x=n$, где $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Разностное уравнение содержит функцию целого аргумента $y_n=y(x)|_{x=n}$, которую требуется найти.

► **Линейные разностные уравнения первого порядка с дискретным аргументом.**

1. $\boldsymbol{y_{n+1}+a_ny_n=0.}$

Линейное однородное разностное уравнение первого порядка; $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Решение:

$$y_n=Cu_n,\quad u_n=(-1)^na_0a_1\ldots a_{n-1},\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $C=y_0$ — произвольная постоянная, а u_n — частное решение.

2. $\boldsymbol{y_{n+1}-ay_n=f_n.}$

Линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка.

Решение:

$$y_n = Ca^n + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} f_j.$$

3. $\boldsymbol{y_{n+1} + a_n y_n = f_n}$**.**

Линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка (обобщение предыдущего уравнения).

Решение:

$$y_n = Cu_n + \widetilde{y}_n, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots,$$

где C — произвольная постоянная и

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n a_0 a_1 \ldots a_{n-1}, \\ \widetilde{y}_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_n}{u_{j+1}} f_j = f_{n-1} - a_{n-1} f_{n-2} + a_{n-2} a_{n-1} f_{n-3} - \cdots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} f_0. \end{aligned}$$

► **Нелинейные разностные уравнения первого порядка с дискретным аргументом.**

4. $\boldsymbol{y_{n+1} = a y_n \Bigl(1 - \frac{y_n}{b}\Bigr)}$**.**

Логистическое разностное уравнение ($a > 0$, $b > 0$, $0 \leqslant y_0 \leqslant b$).

1°. Пусть

$$a = b = 4, \quad y_0 = 4\sin^2\theta \quad \bigl(0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{\pi}{2}\bigr).$$

Решение в замкнутом виде:

$$y_n = 4\sin^2(2^n\theta), \qquad n = 0,\, 1,\, \ldots$$

2°. Пусть

$$a = 4, \quad b = 1, \quad y_0 = \sin^2\theta \quad \bigl(0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{\pi}{2}\bigr).$$

Решение в замкнутом виде:

$$y_n = \sin^2(2^n\theta), \qquad n = 0,\, 1,\, \ldots$$

3°. Пусть $0 \leqslant a \leqslant 4$ и $b = 1$. В этом случае логистическое разностное уравнение имеет следующие свойства:

(a) Имеются два равновесных решения: $y_n = 0$ и $y_n = (a-1)/a$.

(b) Если $0 \leqslant y_0 \leqslant 1$, то $0 \leqslant y_n \leqslant 1$.

(c) Если $a = 0$, то $y_n = 0$.

(d) Если $0 < a \leqslant 1$, то $y_n \to 0$ при $n \to \infty$.

(e) Если $1 < a \leqslant 3$, то $y_n \to (a-1)/a$ при $n \to \infty$.

(f) Если $3 < a < 3.449\ldots$, то y_n колеблется между двумя точками:

$$y_{\pm} = \frac{1}{2a}\left(a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right).$$

5. $\boldsymbol{y_n y_{n+1} = a_n y_{n+1} + b_n y_n + c_n}$.

Разностное уравнение Риккати. Здесь $n = 0, 1, \ldots$ и постоянные a_n, b_n, c_n удовлетворяют условию $a_n b_n + c_n \neq 0$.

1°. Подстановка

$$y_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} + a_n$$

приводит к линейному разностному уравнению второго порядка вида 9.1.1.13:

$$u_{n+2} + (a_{n+1} - b_n)u_{n+1} - (a_n b_n + c_n)u_n = 0.$$

2°. Пусть y_n^* — частное решение разностного уравнения Риккати. Тогда подстановка

$$z_n = \frac{1}{y_n - y_n^*}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

приводит исходное уравнение к линейному неоднородному разностному уравнению первого порядка вида 9.1.1.3:

$$z_{n+1} + \frac{(y_n^* - a_n)^2}{a_n b_n + c_n} z_n + \frac{y_n^* - a_n}{a_n b_n + c_n} = 0.$$

3°. Пусть $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ — два частных решения разностного уравнения Риккати, таких, что $y_n^{(1)} \neq y_n^{(2)}$. Тогда подстановка

$$w_n = \frac{1}{y_n - y_n^{(1)}} + \frac{1}{y_n^{(1)} - y_n^{(2)}}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

приводит исходное уравнение к линейному однородному разностному уравнению первого порядка вида 9.1.1.1:

$$w_{n+1} + \frac{(y_n^{(1)} - a_n)^2}{a_n b_n + c_n} w_n = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

6. $\boldsymbol{y_{n+1} = a y_n^{\beta}}$.

Решение:

$$y_n = a^{\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}} C^{\beta^n},$$

где $C = y_0$ — произвольная постоянная.

7. $\boldsymbol{y_{n+1} = a_n y_n^{\beta_n}, \qquad a_n > 0}$.

Прологарифмируем обе части уравнения, а затем делаем замену $u_n = \ln y_n$. В результате приходим к линейному разностному уравнению первого порядка вида 9.1.1.3:

$$u_{n+1} - \beta_n u_n = \ln a_n.$$

8. $\boldsymbol{y_{n+1} = (a_n y_n^{\beta} + b_n)^{1/\beta}}$**.**

Подстановка $u_n = y_n^{\beta}$ приводит к линейному разностному уравнению первого порядка вида 9.1.1.3:

$$u_{n+1} - a_n u_n = b_n.$$

9. $\boldsymbol{y_{n+1} = f(y_n)}$**.**

Решение:

$$y_n = f^{[n]}(y_0).$$

Здесь используются обозначения: $f^{[1]}(y) = f(y)$, $f^{[2]}(y) = f\bigl(f(y)\bigr)$, $\ldots$, $f^{[n]}(y) = f\bigl(f^{[n-1]}(y)\bigr)$.

Любое постоянное решение y_* исходного уравнения, где y_* не зависит от n, называется *равновесным решением*. Равновесные решения находятся из алгебраического (трансцендентного) уравнения: $y_* = f(y_*)$.

10. $\boldsymbol{y_{n+1} = F(n, y_n)}$**.**

Разностное уравнение первого порядка общего вида, разрешенное относительно старшего члена. Здесь $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Задача Коши для разностного уравнения состоит в нахождении решения этого уравнения с заданным начальным значением y_0.

Следующее значение y_1 вычисляется путем подстановки начального значения в правую часть исходного уравнения при $n = 0$:

$$y_1 = F(0, y_0). \tag{1}$$

Затем, полагая $n = 1$ в исходном уравнении, получим

$$y_2 = F(1, y_1). \tag{2}$$

Подставив в (2) предыдущее значение (1), имеем $y_2 = F\bigl(1, F(0, y_0)\bigr)$. Подставив $n = 2$ в исходное уравнение и используя вычисленное значение y_2, определяем y_3 и т. д. Аналогичным образом можно найти последующие значения y_4, y_5, $\ldots$

Замечание 9.1. *Как правило, решения нелинейных разностных уравнений не могут быть представлены в замкнутом виде (т. е. записаны в виде одной, а не рекуррентной формулы).*

▶ Линейные разностные уравнения второго порядка с дискретным аргументом.

11. $\boldsymbol{y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0}$**.**

Линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Здесь $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Общее решение этого уравнения определяется корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{1}$$

1°. Пусть $a^2 - 4b > 0$. Тогда квадратное уравнение (1) имеет два разных действительных корня

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

а общее решение исходного разностного уравнения определяется формулой (Дёч, 1971):

$$y_n = -C_1 b \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2 \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}, \tag{2}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Решение (2) удовлетворяет начальным условиям $y_0 = C_1$, $y_1 = C_2$.

2°. Пусть $a^2 - 4b = 0$. Тогда квадратное уравнение (1) имеет один кратный действительный корень

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a}{2},$$

а общее решение исходного разностного уравнения имеет вид

$$y_n = -C_1(n-1)\lambda^n + C_2 n\lambda^{n-1}.$$

Эту формулу можно получить из (2), положив $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda(1-\varepsilon)$ и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$.

3°. Пусть $a^2 - 4b < 0$. Тогда квадратное уравнение (2) имеет два комплексно сопряженных корня

$$\lambda_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \lambda_2 = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$
$$\rho = \sqrt{b}, \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{a}\sqrt{4b - a^2},$$

а общее решение исходного разностного уравнения определяется формулой

$$y_n = C_1 \rho^n \frac{\sin[(n-1)\varphi]}{\sin\varphi} + C_2 \rho^{n-1} \frac{\sin(n\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Эту формулу можно получить из (2), выразив λ_1 и λ_2 через ρ и φ.

4°. Подстановка $u_n = y_{n+1}/y_n$ приводит исходное уравнение к разностному уравнению первого порядка вида 9.1.1.9:

$$u_{n+1} = -a - \frac{b}{u_n}.$$

12. $\boldsymbol{y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = f_n.}$

Линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

1°. При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ общее решение рассматриваемого разностного уравнения определяется формулой (Дёч, 1971):

$$y_n = y_1 \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - y_0 b \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \sum_{k=2}^{n} f_{n-k} \frac{\lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где y_1 и y_0 — произвольные константы, равные значениям y в первых двух точках.

В случае комплексно сопряженных корней в приведенном выше решении следует взять действительную (или мнимую) часть.

2°. При $\lambda_1 = \lambda_2$ общее решение рассматриваемого разностного уравнения имеет вид

$$y_n = y_1 n \lambda_1^{n-1} - y_0 b (n-1) \lambda_1^{n-2} + \sum_{k=2}^{n} f_{n-k} (k-1) \lambda_1^{k-2}.$$

3°. В краевых задачах задаются начальное и конечное значения неизвестной функции y_0 и y_N. Требуется найти y_n для $1 \leqslant n \leqslant N-1$.

При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ решение краевой задачи определяется формулой

$$\begin{aligned} y_n = {} & y_0 \frac{\lambda_1^N \lambda_2^n - \lambda_1^n \lambda_2^N}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} + y_N \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} + \\ & + \sum_{k=2}^{n} f_{n-k} \frac{\lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} \sum_{k=2}^{N} f_{N-k} \frac{\lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

При $n = 1$ первая сумма равна нулю.

13. $a_n y_{n+2} + b_n y_{n+1} + c_n y_n = 0.$

Линейное однородное разностное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами.

1°. Пусть $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ — частные решения исходного уравнения, удовлетворяющие условию

$$y_0^{(1)} y_1^{(2)} - y_0^{(2)} y_1^{(1)} \neq 0.$$

Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. Пусть y_n^* — нетривиальное частное решение исходного уравнения. Тогда подстановка

$$y_n = y_n^* u_n \tag{1}$$

приводит к уравнению

$$a_n y_{n+2}^* u_{n+2} + b_n y_{n+1}^* u_{n+1} + c_n y_n^* u_n = 0. \tag{2}$$

Учитывая, что исходное уравнение справедливо для y_n^* и подставив

$$b_n y_{n+1}^* = -a_n y_{n+2}^* - c_n y_n^*$$

в (2), после несложных преобразований получим

$$a_n y_{n+2}^* (u_{n+2} - u_{n+1}) - c_n y_n^* (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

Введя новую переменную

$$w_n = u_{n+1} - u_n, \tag{3}$$

приходим к линейному однородному разностному уравнению первого порядка вида 9.1.1.1:

$$a_n y_{n+2}^* w_{n+1} - c_n y_n^* w_n = 0.$$

Решив это уравнение, можно найти решение линейного неоднородного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами (3) (см. уравнение 9.1.1.2), а затем, используя (1), можно получить решение исходного уравнения.

3°. Подстановка $u_n = y_{n+1}/y_n$ приводит исходное уравнение к разностному уравнению первого порядка

$$u_{n+1} = -a_n - \frac{b_n}{u_n}.$$

Замечание 9.2. *Тривиальное решение $y_n = 0$ является частным решением исходного однородного разностного уравнения.*

14. $a_n y_{n+2} + b_n y_{n+1} + c_n y_n = f_n$.

Линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами.

1°. Общее решение линейного неоднородного разностного уравнения может быть представлено в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения 9.1.1.13 и частного решения $\widetilde{y}_n$ исходного неоднородного уравнения:

$$y_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \widetilde{y}_n,$$

где

$$\widetilde{y}_0 = \widetilde{y}_1 = 0, \quad \widetilde{y}_n = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{y_{j+1}^{(1)} y_n^{(2)} - y_n^{(1)} y_{j+1}^{(2)}}{y_{j+1}^{(1)} y_{j+2}^{(2)} - y_{j+2}^{(1)} y_{j+1}^{(2)}} \frac{f_j}{a_j}, \quad n = 2,\ 3,\ \ldots$$

2°. Пусть y_n^* — нетривиальное частное решение линейного однородного разностного уравнения 9.1.1.13. Тогда подстановка

$$y_n = y_n^* u_n, \qquad w_n = u_{n+1} - u_n$$

приводит к линейному неоднородному разностному уравнению первого порядка вида 9.1.1.3:

$$a_n y_{n+2}^* w_{n+1} - c_n y_n^* w_n = f_n.$$

► **Нелинейные разностные уравнения второго порядка с дискретным аргументом.**

15. $\boldsymbol{y_n y_{n+2} = a_n y_{n+1}^2 + b_n y_n y_{n+1} + c_n y_n^2.}$

Частный случай уравнения 9.1.1.18. Подстановка $u_n = y_{n+1}/y_n$ приводит к разностному уравнению первого порядка

$$u_n u_{n+1} = a_n u_n^2 + b_n u_n + c_n.$$

16. $\boldsymbol{y_{n+1} y_{n+2} = a_n y_n y_{n+2} + b_n y_{n+1}^2 + c_n y_n y_{n+1}.}$

Частный случай уравнения 9.1.1.18. Подстановка $u_n = y_{n+1}/y_n$ приводит к разностному уравнению Риккати 9.1.1.5:

$$u_n u_{n+1} = a_n u_{n+1} + b_n u_n + c_n.$$

17. $\boldsymbol{y_{n+2} = a^2 y_n + F(n, y_{n+1} + a y_n).}$

Подстановка $u_n = y_{n+1} + a y_n$ приводит к разностному уравнению первого порядка

$$u_{n+1} = a u_n + F(n, u_n).$$

При $F(n, u_n) = f(u_n)$ — это разностное уравнение вида 9.1.1.9.

18. $\boldsymbol{y_{n+2} = y_n F(n, y_{n+1}/y_n).}$

Однородное разностное уравнение второго порядка.

Подстановка $u_n = y_{n+1}/y_n$ приводит к разностному уравнению первого порядка

$$u_{n+1} = F(n, u_n)/u_n.$$

При $F(n, u_n) = f(u_n)$ — это разностное уравнение вида 9.1.1.9.

19. $\boldsymbol{y_{n+2} = y_n^{k^2} F(n, y_n^k y_{n+1}).}$

Обобщение разностного уравнения 9.1.1.18. Подстановка $u_n = y_n^k y_{n+1}$ приводит к разностному уравнению первого порядка

$$u_{n+1} = u_n^k F(n, u_n).$$

При $F(n, u_n) = f(u_n)$ — это разностное уравнение вида 9.1.1.9.

► Линейные разностные уравнения старших порядков с дискретным аргументом.

20. $\boldsymbol{y_{n+m} + a_{m-1} y_{n+m-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0.}$

Линейное однородное разностное уравнение m-го порядка.

Общее решение этого уравнения определяется корнями характеристического уравнения

$$\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{1}$$

Возможны следующие случаи:

1°. Все корни λ_1, λ_2, ..., λ_m характеристического уравнения (1) вещественны и различны. В этом случае общее решение исходного однородного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots + C_m\lambda_m^n, \tag{2}$$

где C_1, C_2, ..., C_m — произвольные постоянные.

Если все корни характеристического уравнения (1) вещественны и различны, то решение задачи Коши для исходного уравнения с начальными данными y_0, y_1, ..., y_m имеет вид (Дёч, 1971):

$$y_n = \sum_{i=0}^{m-1} y_i \sum_{j=0}^{m-i-1} a_{i+j+1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k^{n+1}}{P'(\lambda_k)},$$

где штрих обозначает производную.

2°. Имеется k равных действительных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ $(k \leqslant m)$, а остальные корни вещественны и различны. В этом случае общее решение дается формулой

$$y_n = (C_1 + C_2 n + \dots + C_k n^{k-1})\lambda_1^n + C_{k+1}\lambda_{k+1}^n + \dots + C_m\lambda_m^n.$$

3°. Имеется k пар различных комплексно сопряженных корней

$$\lambda_j = \rho_j(\cos\varphi_j \pm i\sin\varphi_j), \qquad j = 1, \dots, k \quad (2k \leqslant m),$$

а остальные корни вещественны и различны. В этом случае общее решение имеет вид

$$y_n = \rho_1^n[A_1\cos(n\varphi_1) + B_1\sin(n\varphi_1)] + \dots + \rho_k^n[A_k\cos(n\varphi_k) + B_k\sin(n\varphi_k)] + \\ + C_{2k+1}\lambda_{2k+1}^n + \dots + C_m\lambda_m^n,$$

где A_1, ..., A_k, B_1, ..., B_k, C_{2k+1}, ..., C_m — произвольные постоянные.

4°. В общем случае, когда имеется r различных корней λ_1, λ_2, ..., λ_r кратностей k_1, k_2, ..., k_r соответственно, левую часть характеристического уравнения (1) можно представить в виде произведения

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\dots(\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

где $k_1+k_2+\dots+k_r=m$. В этом случае общее решение исходного разностного уравнения записывается так:

$$y_n=\sum_{s=1}^{r}(C_{s,1}+C_{s,2}n+\dots+C_{s,k_s}n^{k_s-1})\lambda_s^n,$$

где $C_{s,k}$ — произвольные постоянные.

Если характеристическое уравнение (1) имеет комплексно сопряженные корни вида $\lambda=\rho e^{\pm i\varphi}$, то в приведенном выше решении нужно оставить вещественную часть, используя соотношение $\lambda^n=\rho^n e^{\pm in\varphi}=\rho^n[\cos(n\varphi)\pm i\sin(n\varphi)]$.

5°. Подстановка $u_n=y_{n+1}/y_n$ приводит исходное уравнение к разностному уравнению $(m-1)$-го порядка.

Замечание 9.3. *Тривиальное решение $y_n=0$ является частным решением исходного однородного разностного уравнения.*

21. $\boldsymbol{y_{n+m}+a_{m-1}y_{n+m-1}+\dots+a_1y_{n+1}+a_0y_n=f_n}$.

Линейное неоднородное разностное уравнение m-го порядка.

Общее решение разностного уравнения имеет вид $y(x)=Y(x)+\bar{y}(x)$, где $Y(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (при $f_n\equiv 0$) и $\bar{y}(x)$ — любое частное решение исходного неоднородного уравнения.

Пусть λ_1, λ_2, $\dots$, λ_m — корни характеристического уравнения

$$P(\lambda)\equiv\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0. \tag{1}$$

Если все корни характеристического уравнения (1) различны, то общее решение исходного разностного уравнения имеет вид (Дёч, 1971):

$$y_n=\sum_{i=0}^{m-1}y_i\sum_{j=0}^{m-i-1}a_{i+j+1}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^{n+1}}{P'(\lambda_k)}+\sum_{\nu=m}^{n}f_{n-\nu}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^{\nu-1}}{P'(\lambda_k)}, \tag{2}$$

где штрих обозначает производную.

В формулу (2) входят начальные значения y_0, y_1, $\dots$, y_m, которые можно задать произвольно.

В случае комплексно сопряженных корней в решении (2) следует взять действительную часть.

9.1.2. Разностные уравнения с непрерывным аргументом

► Линейные разностные уравнения первого порядка.

1. $\boldsymbol{y(x+1)-y(x)=0}$.

Это функциональное уравнение можно рассматривать как определение периодических функций с периодом единица.

1°. Решение:

$$y(x) = \Theta(x),$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом единица.

2°. Периодическая функция $\Theta(x)$ с периодом 1, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в ряд Фурье:

$$\Theta(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl[a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)\bigr],$$

где

$$a_n = 2\int_0^1 \Theta(x)\cos(2\pi nx)\,dx, \qquad b_n = 2\int_0^1 \Theta(x)\sin(2\pi nx)\,dx.$$

2. $\boldsymbol{y(x+1) - y(x) = f(x).}$

1°. Решение:

$$y(x) = \Theta(x) + \bar{y}(x),$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1, а $\bar{y}(x)$ — любое частное решение рассматриваемого неоднородного уравнения. В табл. 9.1 приведены частные решения неоднородного уравнения для некоторых функций $f(x)$.

2°. Если $g(x) = g(x+1)$ является заданной функцией с периодом 1, то решение имеет вид

$$y(x) = \Theta(x) + xg(x).$$

3°. Пусть $x \in (a, \infty)$, где a — любое число. Будем считать, что функция $f(x)$ монотонна, строго выпукла (или строго вогнута) и удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to\infty} \bigl[f(x+1) - f(x)\bigr] = 0,$$

и пусть $x_0 \in (a, \infty)$ — любая фиксированная точка. Тогда для каждого y_0 существует ровно одна функция $y(x)$ (монотонная и строго выпуклая/вогнутая), удовлетворяющая исходному уравнению и начальному условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Соответствующее решение можно представить в виде ряда

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)f(x_0) - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl\{f(x+n) - f(x_0+n) - (x-x_0)\bigl[f(x_0+n+1) - f(x_0+n)\bigr]\Bigr\}.$$

3. $\boldsymbol{y(x+1) + y(x) = f(x).}$

Преобразование

$$y(x) = u\Bigl(\frac{x+1}{2}\Bigr) - u\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr), \qquad \xi = \frac{x}{2},$$

Таблица 9.1. Частные решения линейного неоднородного разностного уравнения $y(x+1)-y(x)=f(x)$.

№	Функция $f(x)$	Частное решение $\bar{y}(x)$
1	1	x
2	x	$\frac{1}{2}x(x-1)$
3	x^2	$\frac{1}{6}x(x-1)(2x-1)$
4	$x^n,\ \ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{1}{n+1}B_n(x)$, где $B_n(x)$ — многочлены Бернулли Генерирующая функция: $\dfrac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}B_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$
5	$\dfrac{1}{x}$	$\psi(x)=-\mathcal{C}+\displaystyle\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{1-t}\,dt$ — логарифмическая производная гамма-функции, $\mathcal{C}=0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера
6	$\dfrac{1}{x(x+1)}$	$-\dfrac{1}{x}$
7	$a^{\lambda x},\ a\neq 1,\ \lambda\neq 0$	$\dfrac{1}{a^\lambda-1}a^{\lambda x}$
8	$\operatorname{sh}(a+2bx),\ b>0$	$\dfrac{\operatorname{ch}(a-b+2bx)}{2\operatorname{sh}b}$
9	$\operatorname{ch}(a+2bx),\ b>0$	$\dfrac{\operatorname{sh}(a-b+2bx)}{2\operatorname{sh}b}$
10	$xa^x,\ a\neq 1$	$\dfrac{1}{a-1}a^x\Bigl(x-\dfrac{a}{a-1}\Bigr)$
11	$\ln x,\ x>0$	$\ln\Gamma(x)$, где $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ — гамма-функция
12	$\sin(2ax),\ a\neq\pi n$	$-\dfrac{\cos[a(2x-1)]}{2\sin a}$
13	$\sin(2\pi nx)$	$x\sin(2\pi nx)$
14	$\cos(2ax),\ a\neq\pi n$	$\dfrac{\sin[a(2x-1)]}{2\sin a}$
15	$\cos(2\pi nx)$	$x\cos(2\pi nx)$
16	$\sin^2(ax),\ a\neq\pi n$	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin[a(2x-1)]}{4\sin a}$
17	$\sin^2(\pi nx)$	$x\sin^2(\pi nx)$
18	$\cos^2(ax),\ a\neq\pi n$	$\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin[a(2x-1)]}{4\sin a}$
19	$\cos^2(\pi nx)$	$x\cos^2(\pi nx)$
20	$x\sin(2ax),\ a\neq\pi n$	$\dfrac{\sin(2ax)}{4\sin^2 a}-x\dfrac{\cos[a(2x-1)]}{2\sin a}$
21	$x\sin(2\pi nx)$	$\frac{1}{2}x(x-1)\sin(2\pi nx)$
22	$x\cos(2ax),\ a\neq\pi n$	$\dfrac{\cos(2ax)}{4\sin^2 a}+x\dfrac{\sin[a(2x-1)]}{2\sin a}$
23	$x\cos(2\pi nx)$	$\frac{1}{2}x(x-1)\cos(2\pi nx)$
24	$a^x\sin(bx),\ a>0,\ a\neq 1$	$a^x\dfrac{a\sin[b(x-1)]-\sin(bx)}{a^2-2a\cos b+1}$
25	$a^x\cos(bx),\ a>0,\ a\neq 1$	$a^x\dfrac{a\cos[b(x-1)]-\cos(bx)}{a^2-2a\cos b+1}$

приводит к уравнению вида 9.1.2.2:

$$u(\xi+1)-u(\xi)=f(2\xi).$$

4. $\boldsymbol{y(x+1)-ay(x)=0.}$

Линейное однородное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

1°. Решение при $a>0$:

$$y(x)=\Theta(x)a^x,$$

где $\Theta(x)=\Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

При $\Theta(x)\equiv\mathrm{const}$ имеем частное решение $y(x)=Ca^x$, где C — произвольная постоянная.

2°. Решение при $a<0$:

$$y(x)=\Theta_1(x)|a|^x\sin(\pi x)+\Theta_2(x)|a|^x\cos(\pi x),$$

где $\Theta_k(x)=\Theta_k(x+1)$ — произвольные периодические функции с периодом 1 $(k=1,\ 2)$.

5. $\boldsymbol{y(x+1)-ay(x)=f(x).}$

Линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

1°. Решение:

$$y(x)=\begin{cases}\Theta(x)a^x+\bar y(x) & \text{при}\ \ a>0,\\ \Theta_1(x)|a|^x\sin(\pi x)+\Theta_2(x)|a|^x\cos(\pi x)+\bar y(x) & \text{при}\ \ a<0,\end{cases}$$

где $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$ — произвольные периодические функции с периодом 1, а $\bar y(x)$ — любое частное решение неоднородного уравнения.

2°. При $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kx^n$ и $a\neq1$ неоднородное уравнение имеет частное решение $\bar y(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^n$, где постоянные A_k определяются с помощью метода неопределенных коэффициентов.

3°. При $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}b_ke^{\lambda_kx}$ неоднородное уравнение имеет частное решение

$$\bar y(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{e^{\lambda_k}-a}e^{\lambda_kx} & \text{при}\ \ a\neq e^{\lambda_m},\\ \displaystyle b_mxe^{\lambda_m(x-1)}+\sum_{k=1,\,k\neq m}^{n}\frac{b_k}{e^{\lambda_k}-a}e^{\lambda_kx} & \text{при}\ \ a=e^{\lambda_m},\end{cases}$$

где $m=1,\ldots,n$.

4°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(\beta_k x)$ неоднородное уравнение имеет частное решение

$$\bar{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a^2 + 1 - 2a\cos\beta_k} \bigl[(\cos\beta_k - a)\cos(\beta_k x) + \sin\beta_k \sin(\beta_k x)\bigr].$$

5°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(\beta_k x)$ неоднородное уравнение имеет частное решение

$$\bar{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a^2 + 1 - 2a\cos\beta_k} \bigl[(\cos\beta_k - a)\sin(\beta_k x) - \sin\beta_k \cos(\beta_k x)\bigr].$$

6. $\boldsymbol{y(x+1) - xy(x) = 0.}$

Решение (Миролюбов & Солдатов, 1981):

$$y(x) = \Theta(x)\Gamma(x), \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

Простейшее частное решение соответствует $\Theta(x) \equiv 1$.

7. $\boldsymbol{y(x+1) - a(x-b)(x-c)y(x) = 0.}$

Решение (Миролюбов & Солдатов, 1981):

$$y(x) = \Theta(x) a^x \Gamma(x-b)\Gamma(x-c),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\Theta(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

8. $\boldsymbol{y(x+1) - R(x)y(x) = 0, \qquad R(x) = a\frac{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)\dots(x-\mu_m)}.}$

Решение (Миролюбов & Солдатов, 1981):

$$y(x) = \Theta(x) a^x \frac{\Gamma(x-\lambda_1)\Gamma(x-\lambda_2)\dots\Gamma(x-\lambda_n)}{\Gamma(x-\mu_1)\Gamma(x-\mu_2)\dots\Gamma(x-\mu_m)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\Theta(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

9. $\boldsymbol{y(x+1) - ae^{\lambda x}y(x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta(x) a^x \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\lambda x^2 - \tfrac{1}{2}\lambda x\bigr),$$

где $\Theta(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

10. $\boldsymbol{y(x+1) - ae^{\mu x^2+\lambda x}y(x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta(x)a^x \exp\bigl[\tfrac{1}{3}\mu x^3 + \tfrac{1}{2}(\lambda-\mu)x^2 + \tfrac{1}{6}(\mu-3\lambda)x\bigr],$$

где $\Theta(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

11. $\boldsymbol{y(x+1) - f(x)y(x) = 0.}$

Линейное однородное разностное уравнение первого порядка общего вида.

1°. Пусть $f(x)$ — заданная непрерывная функция в $[0,\infty)$, а $y_1 = y_1(x)$ — нетривиальное частное решение исходного уравнения. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = \Theta(x)y_1(x),$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

2°. Пусть $f(x) = f(x+1)$ — заданная непрерывная положительная периодическая функция с периодом 1. В этом случае решение исходного уравнения определяется формулой

$$y(x) = \Theta(x)\bigl[f(x)\bigr]^x,$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

При $\Theta(x) \equiv \mathrm{const}$ имеем частное решение $y(x) = C\bigl[f(x)\bigr]^x$, где C — произвольная постоянная.

3°. *Задача Коши*: требуется найти решение рассматриваемого уравнения в области $x \geqslant 1$ с начальным условием

$$y(x) = \varphi(x) \qquad \text{при} \qquad 0 \leqslant x < 1,$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение задачи Коши записывается так:

$$y(x) = \varphi(\{x\}) \prod_{k=1}^{[x]} f(x-k),$$

где $[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную части аргумента x ($x = [x] + \{x\}$) и произведение для $[x] = 0$ принимается равным единице. Это решение является непрерывным, если оно непрерывно в целых точках $x = 1, 2, \ldots,$ что приводит к условию

$$\varphi(1) = f(0)\varphi(0).$$

12. $\boldsymbol{y(x+1) - f(x)y(x) = g(x).}$

Линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка общего вида. Здесь $f(x)$ и $g(x)$ — заданные непрерывные функции, $0 \leqslant x < \infty$.

1°. Общее решение этого уравнения может быть представлено в виде суммы

$$y(x) = u(x) + \widetilde{y}(x),$$

где первый член $u(x)$ является общим решением соответствующего однородного уравнения (при $g \equiv 0$), а второй член $\widetilde{y}(x)$ — частное решение исходного уравнения.

2°. Пусть $g(x) = g(x+1)$ — периодическая функция с периодом 1, а $y_1(x)$ — решение исходного уравнения для частного случая $g(x) \equiv 1$. Тогда функция

$$y(x) = g(x) y_1(x)$$

является решением исходного уравнения.

3°. *Задача Коши*: требуется найти решение рассматриваемого уравнения в области $x \geqslant 1$ с начальным условием

$$y(x) = \varphi(x) \qquad \text{при} \qquad 0 \leqslant x < 1,$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение задачи Коши записывается так:

$$y(x) = \varphi(\{x\}) \prod_{j=1}^{[x]} f(x-j) + \sum_{i=1}^{[x]} g(x-i) \prod_{j=1}^{i-1} f(x-j),$$

где $[x]$ и $\{x\}$ обозначают целую и дробную части x $(x = [x] + \{x\})$, а произведение и сумма при $[x] = 0$ соответственно принимается равными 1 и 0.

Если известно нетривиальное частное решение $y_1(x)$ однородного уравнения с $g(x) \equiv 0$, то решение задачи Коши для исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = y_1(x) \left[\frac{\varphi(\{x\})}{y_1(0)} + \sum_{i=1}^{[x]} \frac{g(x-i)}{y_1(x-i+1)} \right].$$

13. $\boldsymbol{y(x+a) - by(x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta(x) b^{x/a},$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+a)$ — произвольная периодическая функция с периодом a.

При $\Theta(x) \equiv \mathrm{const}$ имеем частное решение $y(x) = Cb^{x/a}$, где C — произвольная постоянная.

14. $\boldsymbol{y(x+a) - by(x) = f(x).}$

1°. Решение:

$$y(x) = \Theta(x) b^{x/a} + \bar{y}(x),$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+a)$ — произвольная периодическая функция с периодом a, а $\bar{y}(x)$ — частное решение рассматриваемого неоднородного уравнения.

2°. При $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^n$ и $b \neq 1$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^n$, где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\lambda_k x)$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \exp(\lambda_k x)$, где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k \sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k \sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

15. $\boldsymbol{y(x+a) - bxy(x) = 0, \qquad a, b > 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta(x) \int_0^\infty t^{(x/a)-1} e^{-t/(ab)}\, dt,$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+a)$ — произвольная периодическая функция с периодом a.

16. $\boldsymbol{y(x+a) - f(x)y(x) = 0.}$

Здесь $f(x) = f(x+a)$ — заданная положительная периодическая функция с периодом a.

Решение:

$$y(x) = \Theta(x)\bigl[f(x)\bigr]^{x/a},$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+a)$ — произвольная периодическая функция с периодом a.

При $\Theta(x) \equiv \text{const}$ имеем частное решение $y(x) = C\bigl[f(x)\bigr]^{x/a}$, где C — произвольная постоянная.

► Нелинейные разностные уравнения первого порядка.

17. $\boldsymbol{y(x+a) = 2y(x) + by^2(x).}$

Решение (Пелюх & Шарковский, 1974):

$$y(x) = \frac{1}{b}\Bigl\{\exp\bigl[2^{\frac{x}{a}}\Theta(x)\bigr] - 1\Bigr\},$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+a)$ — произвольная периодическая функция с периодом a.

18. $\boldsymbol{y(x+a) - by^2(x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.1.2.23.

19. $\boldsymbol{y(x)y(x+1) + a[y(x+1) - y(x)] = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{a}{x+\Theta(x)},$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

20. $\boldsymbol{y(x)y(x+1) = f(x)y(x+1) + g(x)y(x) + h(x).}$

Разностное уравнение Риккати. Здесь функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ удовлетворяют условию $f(x)g(x) + h(x) \not\equiv 0$.

1°. Подстановка

$$y(x) = \frac{u(x+1)}{u(x)} + f(x)$$

приводит к линейному разностному уравнению второго порядка

$$u(x+2) + [a(x+1) - g(x)]u(x+1) - [f(x)g(x) + h(x)]u(x) = 0.$$

2°. Пусть $y_0(x)$ — частное решение разностного уравнения Риккати. Тогда подстановка

$$z(x) = \frac{1}{y(x) - y_0(x)}$$

приводит это уравнение к линейному неоднородному разностному уравнению первого порядка

$$z(x+1) + \frac{[y_0(x) - f(x)]^2}{f(x)g(x) + h(x)}z(x) + \frac{y_0(x) - f(x)}{f(x)g(x) + h(x)} = 0.$$

21. $\boldsymbol{y(x+a) - by^\lambda(x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.1.2.23.

22. $\boldsymbol{y(x+1) = f\big(y(x)\big).}$

Частный случай уравнения 9.1.2.23. Здесь $f(y)$ — заданная непрерывная функция, $0 \leqslant x < \infty$.

Решение:

$$y(x) = f^{[n]}\big(\varphi(\{x\})\big), \qquad n = [x].$$

Здесь $[x]$ и $\{x\}$ обозначают целую и дробную части x, а $\varphi(x)$ — любая непрерывная функция на $[0,1)$ такая, что $\varphi(0) = a$, $\varphi(1-0) = f(a)$, где a — произвольная постоянная.

23. $\boldsymbol{F\big(x,\, y(x),\, y(x+a)\big) = 0.}$

Пусть $a > 0$. Разрешив уравнение относительно $y(x+a)$, получим

$$y(x+a) = f\big(x,\, y(x)\big). \qquad (1)$$

1°. Сначала будем считать, что уравнение определено на дискретном множестве точек $x = x_0 + ak$, где k — целое число. Задав начальное значение $y(x_0)$, можно использовать (1) для последовательного нахождения $y(x_0 + a)$, $y(x_0 + 2a)$ и т. д.

Разрешив уравнение относительно $y(x)$, имеем

$$y(x) = g\big(x,\, y(x+a)\big). \qquad (2)$$

Положив $x = x_0 - a$, можно найти $y(x_0 - a)$, а затем аналогично $y(x_0 - 2a)$ и т. д.

Таким образом, задав начальные данные, можно с помощью уравнения найти функцию $y(x)$ во всех точках $x_0 + ak$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2°. Теперь будем считать, что аргумент x в уравнении изменяется непрерывно, а $y(x)$ является непрерывной функцией, произвольно заданной на полуинтервале $[0,\, a)$. Положив $x = 0$ в (1), можно найти $y(a)$. Затем, учитывая известные значения $y(x)$ на $[0,\, a]$, будем использовать (1), чтобы найти $y(x)$ на $x \in [a,\, 2a]$, затем на $x \in [2a,\, 3a]$ и т. д.

Замечание 9.4. *Случай $a < 0$ с помощью замены переменной $z = x + a$ можно свести к уравнению вида $F\big(z + b,\, y(z+b),\, y(z)\big) = 0$ при $b = -a > 0$, которое было рассмотрено выше.*

► Линейные разностные уравнения второго порядка.

24. $\boldsymbol{ay(x+2) + by(x+1) + cy(x) = 0, \qquad ac \neq 0.}$

Линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Это уравнение имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Общее решение исходного разностного уравнения определяется корнями характеристического уравнения

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \qquad (1)$$

1°. При $b^2 - 4ac > 0$ квадратное уравнение (1) имеет два разных действительных корня:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

В этом случае общее решение исходного разностного уравнения определяется формулами

$$\begin{aligned} &y(x) = \Theta_1(x)\lambda_1^x + \Theta_2(x)\lambda_2^x && \text{при} \quad ab < 0,\ ac > 0; \\ &y(x) = \Theta_1(x)\lambda_1^x + \Theta_2(x)|\lambda_2|^x \cos(\pi x) && \text{при} \quad ac < 0; \\ &y(x) = \Theta_1(x)|\lambda_1|^x \cos(\pi x) + \Theta_2(x)|\lambda_2|^x \cos(\pi x) && \text{при} \quad ab > 0,\ ac > 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ — произвольные периодические функции с периодом 1.

2°. При $b^2-4ac=0$ квадратное уравнение (1) имеет один кратный корень

$$\lambda=-\frac{b}{2a},$$

а общее решение исходного разностного уравнения записывается так:

$$\begin{aligned} &y=\bigl[\Theta_1(x)+x\Theta_2(x)\bigr]\lambda^x && \text{при}\quad ab<0,\\ &y=\bigl[\Theta_1(x)+x\Theta_2(x)\bigr]|\lambda|^x\cos(\pi x) && \text{при}\quad ab>0. \end{aligned} \tag{3}$$

3°. При $b^2-4ac<0$ квадратное уравнение (1) имеет комплексно сопряженные корни

$$\lambda_{1,2}=\rho(\cos\beta\pm i\sin\beta),\qquad \rho=\frac{c}{a},\qquad \beta=\arccos\Bigl(-\frac{b}{2\sqrt{ac}}\Bigr), \tag{4}$$

а общее решение исходного разностного уравнения имеет вид

$$y=\Theta_1(x)\rho^x\cos(\beta x)+\Theta_2(x)\rho^x\sin(\beta x),$$

где $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ — произвольные периодические функции с периодом 1.

25. $\boldsymbol{y(x+2)+ay(x+1)+by(x)=f(x).}$

Линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

1°. Решение:

$$y(x)=Y(x)+\bar{y}(x),$$

где $Y(x)$ — общее решение соответствующего однородного разностного уравнения $Y(x+2)+aY(x+1)+bY(x)=0$ (см. предыдущее уравнение), а $\bar{y}(x)$ — любое частное решение рассматриваемого неоднородного уравнения.

2°. При $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^n$ и $a+b+1\neq 1$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}B_kx^n$, где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. При $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\exp(\lambda_kx)$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}B_k\exp(\lambda_kx)$, где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. При $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\cos(\lambda_kx)$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_kx)+\sum\limits_{k=1}^{n}D_k\sin(\lambda_kx)$, где постоянные B_k и D_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k \sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

26. $\boldsymbol{y(x+2) + a(x+1)y(x+1) + bx(x+1)y(x) = 0.}$

Это разностное уравнение имеет частные решения вида

$$y(x;\lambda) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t/\lambda}\, dt, \tag{1}$$

где λ — корень квадратного уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{2}$$

Для сходимости интеграла в правой части (1) необходимо выбрать корни уравнения (2), удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Если оба корня λ_1 и λ_2 удовлетворяют этому условию, то общее решение исходного функционального уравнения имеет вид

$$y(x) = \Theta_1(x) y(x,\lambda_1) + \Theta_2(x) y(x,\lambda_2),$$

где $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ — произвольные периодические функции с периодом 1.

27. $\boldsymbol{y(x+2) = f(x)y(x+1) + a[f(x) + a]y(x) + g(x).}$

Подстановка

$$u(x) = y(x+1) + ay(x)$$

приводит к разностному уравнению первого порядка

$$u(x+1) = [f(x) + a]u(x) + g(x).$$

28. $\boldsymbol{y(x+2) + f(x)y(x+1) + g(x)y(x) = 0, \qquad g(x) \not\equiv 0.}$

Линейное однородное разностное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами общего вида.

Это уравнение имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

1°. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два частных решения этого уравнения, удовлетворяющие условию

$$D(x) \equiv y_1(x) y_2(x+1) - y_2(x) y_1(x+1) \neq 0. \tag{1}$$

Тогда общее решение исходного разностного уравнения имеет вид

$$y(x) = \Theta_1(x) y_1(x) + \Theta_2(x) y_2(x),$$

где $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ — произвольные периодические функции с периодом 1.

Условие (1) может нарушаться в особых точках исходного уравнения.

2°. Пусть $y_0(x)$ — нетривиальное частное решение исходного уравнения. Тогда подстановка
$$y(x) = y_0(x)u(x) \tag{2}$$
приводит к уравнению
$$y_0(x+2)u(x+2) + f(x)y_0(x+1)u(x+1) + g(x)y_0(x)u(x) = 0. \tag{3}$$
Учитывая, что $y_0(x)$ удовлетворяет исходному уравнению, подставим выражение
$$f(x)y_0(x+1) = -y_0(x+2) - g(x)y_0(x)$$
в (3). После элементарных преобразований получим
$$y_0(x+2)[u(x+2) - u(x+1)] - g(x)y_0(x)[u(x+1) - u(x)] = 0.$$
Введя новую переменную
$$w(x) = u(x+1) - u(x), \tag{4}$$
приходим к разностному уравнению первого порядка
$$y_0(x+2)w(x+1) - g(x)y_0(x)w(x) = 0.$$
После решения этого уравнения решается неоднородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами (4), а затем с помощью (2) находится решение исходного уравнения.

► Нелинейные разностные уравнения второго порядка.

29. $\boldsymbol{y(x)y(x+2) = f(x)y^2(x+1) + g(x)y(x)y(x+1) + h(x)y^2(x).}$

Частный случай уравнения 9.1.2.37. Подстановка $u(x) = y(x+1)/y(x)$ приводит к разностному уравнению первого порядка
$$u(x)u(x+1) = f(x)u^2(x) + g(x)u(x) + h(x).$$

30. $\boldsymbol{y(x+1)y(x+2) = f(x)y(x)y(x+2) + g(x)y^2(x+1) + h(x)y(x)y(x+1).}$

Частный случай уравнения 9.1.2.37. Подстановка $u(x) = y(x+1)/y(x)$ приводит к уравнению Риккати 9.1.2.20:
$$u(x)u(x+1) = f(x)u(x+1) + g(x)u(x) + h(x).$$

31. $\boldsymbol{y^{k-1}(x)y(x+2) = f(x)y^k(x+1) + g(x)y^{k-n}(x)y^n(x+1) + h(x)y^k(x).}$

Частный случай уравнения 9.1.2.37. Подстановка $u(x) = y(x+1)/y(x)$ приводит к разностному уравнению первого порядка
$$u(x)u(x+1) = f(x)u^k(x) + g(x)u^n(x) + h(x).$$

32. $\boldsymbol{y(x+2) = a^2 y(x) + F\big(x, y(x+1) - ay(x)\big)}$**.**

1°. Подстановка $u(x)=y(x+1)-ay(x)$ приводит к разностному уравнению первого порядка

$$u(x+1) = -au(x) + F\big(x, u(x)\big).$$

2°. При $F(x,u) = f(u)$ и $a > 0$ рассматриваемое уравнение имеет частное решение вида

$$y = \Theta(x)a^x + k,$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$(a^2-1)k + f\big((1-a)k\big) = 0.$$

33. $\boldsymbol{y(x+2) = x(x+1)y(x) + F\big(x, y(x+1) + xy(x)\big)}$**.**

Подстановка $u(x) = y(x+1) + xy(x)$ приводит к разностному уравнению первого порядка

$$u(x+1) = (x+1)u(x) + F\big(x, u(x)\big).$$

34. $\boldsymbol{y(x+2) = x(x+1)y(x) + F\big(x, y(x+1) - xy(x)\big)}$**.**

Подстановка $u(x) = y(x+1) - xy(x)$ приводит к разностному уравнению первого порядка

$$u(x+1) = -(x+1)u(x) + F\big(x, u(x)\big).$$

35. $\boldsymbol{y(x+2) = g(x)g(x+1)y(x) + F\big(x, y(x+1) + g(x)y(x)\big)}$**.**

Подстановка $u(x) = y(x+1) + g(x)y(x)$ приводит к разностному уравнению первого порядка

$$u(x+1) = g(x+1)u(x) + F\big(x, u(x)\big).$$

36. $\boldsymbol{y(x+2) = y(x)F\big(y(x+1)/y(x)\big)}$**.**

Частный случай уравнения 9.1.2.37.

Частное решение:

$$y(x) = \Theta(x)e^{\lambda x},$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $e^{2\lambda} = f(e^{\lambda})$.

37. $\boldsymbol{y(x+2) = y(x)F\big(x, y(x+1)/y(x)\big)}$**.**

Однородное разностное уравнение второго порядка.

Подстановка $u(x) = y(x+1)/y(x)$ приводит к разностному уравнению первого порядка

$$u(x)u(x+1) = F\big(x, u(x)\big).$$

38. $\boldsymbol{F\big(x,\ y(x),\ y(x+1),\ y(x+2)\big) = 0}$**.**

Нелинейное разностное уравнение второго порядка общего вида. Частный случай уравнения 9.1.2.45.

► Линейные разностные уравнения старших порядков.

39. $\boldsymbol{y(x+n)+a_{n-1}y(x+n-1)+\cdots+a_1y(x+1)+a_0y(x)=0.}$

Линейное однородное разностное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Это уравнение имеет тривиальное решение $y(x)\equiv 0$.

Общее решение исходного разностного уравнения определяется корнями характеристического уравнения

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0. \tag{1}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1°. Все корни λ_1, λ_2, …, λ_n уравнения (1) действительны и различны. В этом случае общее решение исходного разностного уравнения можно представить в виде

$$y(x)=\Theta_1(x)\lambda_1^x+\Theta_2(x)\lambda_2^x+\cdots+\Theta_n(x)\lambda_n^x, \tag{2}$$

где $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$, …, $\Theta_n(x)$ — произвольные периодические функции с периодом 1.

При $\Theta_k(x)\equiv C_k$ формула (2) дает частное решение

$$y(x)=C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x+\cdots+C_n\lambda_n^x,$$

где C_1, C_2, …, C_n — произвольные постоянные.

2°. Имеется m равных действительных корней, т. е. $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m$ ($m\leqslant n$), а остальные корни действительны и различны. В этом случае общее решение исходного разностного уравнения записывается так:

$$\begin{aligned}y=\bigl[\Theta_1(x)+x\Theta_2(x)+\cdots+x^{m-1}\Theta_m(x)\bigr]\lambda_1^x&\\+\Theta_{m+1}(x)\lambda_{m+1}^x+\Theta_{m+2}(x)\lambda_{m+2}^x+\cdots+\Theta_n(x)\lambda_n^x.&\end{aligned}$$

3°. Имеется m одинаковых комплексно сопряженных корней, т. е.

$$\lambda=\rho(\cos\beta\pm i\sin\beta)\qquad(2m\leqslant n),$$

а остальные корни действительны и различны. В этом случае общее решение исходного разностного уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned}y=\rho^x\cos(\beta x)\bigl[A_1(x)+xA_2(x)+\cdots+x^{m-1}A_m(x)\bigr]&+\\+\rho^x\sin(\beta x)\bigl[B_1(x)+xB_2(x)+\cdots+x^{m-1}B_m(x)\bigr]&+\\+C_{m+1}(x)\lambda_{m+1}^x+C_{m+2}(x)\lambda_{m+2}^x+\cdots+C_n(x)\lambda_n^x&,\end{aligned}$$

где $A_1(x),\ldots,A_m(x)$, $B_1(x),\ldots,B_m(x)$, $C_{2m+1}(x),\ldots,C_n(x)$ — произвольные периодические функции с периодом 1.

40. $\boldsymbol{y(x+n)+a_{n-1}y(x+n-1)+\cdots+a_1y(x+1)+a_0y(x)=f(x).}$

Линейное неоднородное разностное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами.

1°. Решение:

$$y(x) = Y(x) + \bar{y}(x),$$

где $Y(x)$ — общее решение соответствующего однородного разностного уравнения

$$Y(x+n) + a_{n-1}Y(x+n-1) + \dots + a_1 Y(x+1) + a_0 Y(x) = 0$$

(см. предыдущее уравнение), а $\bar{y}(x)$ — любое частное решение рассматриваемого неоднородного уравнения.

2°. При $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^n$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^n$, где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\lambda_k x)$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \exp(\lambda_k x)$, где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k \sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k \sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

41. $\boldsymbol{y(x+b_n) + a_{n-1}y(x+b_{n-1}) + \dots + a_1 y(x+b_1) + a_0 y(x) = 0.}$

Имеются частные решения вида $y(x) = \lambda_k^x$, где λ_k — корни алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda^{b_n} + a_{n-1}\lambda^{b_{n-1}} + \dots + a_1\lambda^{b_1} + a_0 = 0.$$

► Нелинейные разностные уравнения старших порядков.

42. $\boldsymbol{y(x+n) = a^n y(x) + F\bigl(x, y(x+1) - ay(x)\bigr).}$

1°. Подстановка $u(x) = y(x+1) - ay(x)$ приводит к разностному уравнению $(n-1)$-го порядка.

В частности, при $n = 3$ имеем

$$u(x+2) + au(x+1) + a^2 u(x) = F\bigl(x, u(x)\bigr).$$

2°. При $F(x,u) = f(u)$ и $a > 0$ исходное уравнение допускает частное решение вида

$$y = \Theta(x)a^x + k,$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$(a^n - 1)k + f\bigl((1-a)k\bigr) = 0.$$

43. $\boldsymbol{y(x+n) = y(x)F\Bigl(\dfrac{y(x+1)}{y(x)}, \dfrac{y(x+2)}{y(x)}, \ldots, \dfrac{y(x+n-1)}{y(x)}\Bigr).}$

Частный случай уравнения 9.1.2.44.

Частное решение:

$$y(x) = \Theta(x)e^{\lambda x},$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$e^{n\lambda} = F\bigl(e^{\lambda}, e^{2\lambda}, \ldots, e^{(n-1)\lambda}\bigr).$$

44. $\boldsymbol{y(x+n) = y(x)F\Bigl(x, \dfrac{y(x+1)}{y(x)}, \dfrac{y(x+2)}{y(x)}, \ldots, \dfrac{y(x+n-1)}{y(x)}\Bigr).}$

Нелинейное однородное разностное уравнение n-го порядка.

Подстановка $u(x) = y(x+1)/y(x)$ приводит к разностному уравнению $(n-1)$-го порядка.

45. $\boldsymbol{F\bigl(x,\, y(x),\, y(x+1),\, \ldots,\, y(x+n)\bigr) = 0.}$

Нелинейное разностное уравнение n-го порядка общего вида.

Разрешив уравнение относительно $y(x+n)$, получим

$$y(x+n) = f\bigl(x,\, y(x),\, y(x+1),\, \ldots,\, y(x+n-1)\bigr). \qquad (1)$$

1°. Сначала будем считать, что уравнение определено на дискретном множестве точек $x = x_0 + k$, где k — целое число. Задав начальные значения $y(x_0)$, $y(x_0+1)$, $\ldots$, $y(x_0+n-1)$, можно использовать (1) для последовательного нахождения $y(x_0+n)$, $y(x_0+n+1)$ и т. д.

Разрешив уравнение относительно $y(x)$, имеем

$$y(x) = g\bigl(x,\, y(x+1),\, y(x+2),\, \ldots,\, y(x+n)\bigr). \qquad (2)$$

Положив $x = x_0 - 1$, можно найти $y(x_0-1)$, а затем аналогично $y(x_0-2)$ и т. д.

Таким образом, задав начальные данные, можно с помощью уравнения найти функцию $y(x)$ во всех точках $x_0 + k$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

2°. Теперь будем считать, что аргумент x в уравнении изменяется непрерывно, а $y(x)$ является непрерывной функцией, произвольно заданной на полуинтервале $[0,\, n)$. Положив $x = 0$ в (1), можно найти $y(n)$. Затем, учитывая известные значения $y(x)$ на $[0,\, n]$, будем использовать (1), чтобы найти $y(x)$ на $x \in [n,\, n+1]$, затем на $x \in [n+1,\, n+2]$ и т. д.

9.2. Линейные функциональные уравнения с одной независимой переменной

9.2.1. Линейные функциональные уравнения, содержащие неизвестную функцию с двумя разными аргументами

► **Линейные функциональные уравнения, содержащие $y(x)$ и $y(ax)$.**

1. $\boldsymbol{y(ax) - by(x) = 0, \qquad a, b > 0.}$

Решение при $x > 0$ и $a \neq 1$:

$$y(x) = x^{\lambda}\Theta\Big(\frac{\ln x}{\ln a}\Big), \qquad \lambda = \frac{\ln b}{\ln a},$$

где $\Theta(z) = \Theta(z+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

Полагая $\Theta(z) \equiv \text{const}$, получим частное решение $y(x) = Cx^{\lambda}$, где C — произвольная постоянная.

2. $\boldsymbol{y(ax) - by(x) = f(x).}$

1°. Решение:

$$y(x) = Y(x) + \bar{y}(x),$$

где $Y(x)$ — общее решение однородного функционального уравнения $Y(ax) - bY(x) = 0$ (см. предыдущее уравнение), а $\bar{y}(x)$ — любое частное решение рассматриваемого неоднородного уравнения.

2°. При $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^n$ неоднородное уравнение имеет частное решение

$$\bar{y}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{a^k - b} x^k, \qquad a^k - b \neq 0.$$

3°. При $f(x) = \ln x \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ неоднородное уравнение имеет частное решение

$$\bar{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \big(B_k \ln x + C_k\big), \qquad B_k = \frac{A_k}{a^k - b}, \quad C_k = -\frac{A_k a^k \ln a}{(a^k - b)^2}.$$

3. $\boldsymbol{y(2x) - a\cos x\, y(x) = 0.}$

Решение при $a > 0$ и $x > 0$ (Пелюх & Шарковский, 1974):

$$y(x) = x^{\frac{\ln a}{\ln 2} - 1} \sin x\; \Theta\Big(\frac{\ln x}{\ln 2}\Big),$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

► Линейные возвратные функциональные уравнения, содержащие $y(x)$ и $y(a-x)$.

4. $\boldsymbol{y(x) = y(-x)}$.

Это функциональное уравнение можно рассматривать как определение четных функций.

Решение:

$$y(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2},$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

5. $\boldsymbol{y(x) = -y(-x)}$.

Это функциональное уравнение можно рассматривать как определение нечетных функций.

Решение:

$$y(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2},$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

6. $\boldsymbol{y(x) - y(a-x) = 0}$.

1°. Решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \Phi(x, a-x) = \\ &= \Psi(x, a-x) + \Psi(a-x, x), \end{aligned}$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов, а $\Psi(x,z)$ — любая функция двух аргументов.

2°. Специальные частные решения можно получить с помощью формулы

$$y(x) = \Omega\bigl(\varphi(x) + \varphi(a-x)\bigr),$$

задавая функции $\Omega(z)$ и $\varphi(x)$.

7. $\boldsymbol{y(x) + y(a-x) = 0}$.

1°. Решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \Phi(x, a-x) = \\ &= \Psi(x, a-x) - \Psi(a-x, x), \end{aligned}$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов, а $\Psi(x,z)$ — любая функция двух аргументов.

2°. Специальные частные решения можно получить с помощью формулы

$$y(x) = (2x-a)\Omega\bigl(\varphi(x) + \varphi(a-x)\bigr),$$

задавая функции $\Omega(z)$ и $\varphi(x)$.

8. $\boldsymbol{y(x) + y(a - x) = b.}$

Решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \tfrac{1}{2}b + \Phi(x, a - x) = \\ &= \tfrac{1}{2}b + \Psi(x, a - x) - \Psi(a - x, x), \end{aligned}$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов, а $\Psi(x, z)$ — любая функция двух аргументов.

Частные решения: $y(x) = b\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$ и $y(x) = b\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$.

9. $\boldsymbol{y(x) + y(a - x) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = f(a - x)$.

Решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi(x, a - x) = \\ &= \tfrac{1}{2}f(x) + \Psi(x, a - x) - \Psi(a - x, x), \end{aligned}$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов, а $\Psi(x, z)$ — любая функция двух аргументов.

10. $\boldsymbol{y(x) - y(a - x) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = -f(a - x)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi(x, a - x),$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

11. $\boldsymbol{y(x) + g(x)y(a - x) = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x) - g(x)f(a - x)}{1 - g(x)g(a - x)} \qquad [\text{при } g(x)g(a - x) \not\equiv 1].$$

► Линейные возвратные функциональные уравнения, содержащие $\boldsymbol{y(x)}$ и $\boldsymbol{y(a/x)}$.

12. $\boldsymbol{y(x) - y(a/x) = 0.}$

Решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \Phi(x, a/x) = \\ &= \Psi(x, a/x) + \Psi(a/x, x), \end{aligned}$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов, а $\Psi(x, z)$ — любая функция двух аргументов.

13. $\boldsymbol{y(x) + y(a/x) = 0.}$

Решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \Phi(x, a/x) = \\ &= \Psi(x, a/x) - \Psi(a/x, x), \end{aligned}$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов, а $\Psi(x, z)$ — любая функция двух аргументов.

14. $\boldsymbol{y(x) + y(a/x) = b.}$

Решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \tfrac{1}{2}b + \Phi(x, a/x) = \\ &= \tfrac{1}{2}b + \Psi(x, a/x) - \Psi(a/x, x), \end{aligned}$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов, а $\Psi(x, z)$ — любая функция двух аргументов.

15. $\boldsymbol{y(x) + y(a/x) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = f(a/x)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi(x, a/x),$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

16. $\boldsymbol{y(x) - y(a/x) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = -f(a/x)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi(x, a/x),$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

17. $\boldsymbol{y(x) + x^a y(1/x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = (1 - x^a)\Phi(x, 1/x),$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

18. $\boldsymbol{y(x) - x^a y(1/x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = (1 + x^a)\Phi(x, 1/x),$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

19. $\boldsymbol{y(x) + g(x)y(a/x) = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x) - g(x)f(a/x)}{1 - g(x)g(a/x)} \qquad [\text{при } g(x)g(a/x) \not\equiv 1].$$

► Линейные возвратные функциональные уравнения, содержащие неизвестную функцию с рациональным аргументом.

20. $\boldsymbol{y(x) - y\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Phi\Big(x, \frac{a-x}{1+bx}\Big),$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

21. $\boldsymbol{y(x) + y\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Phi\Big(x, \frac{a-x}{1+bx}\Big),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

22. $\boldsymbol{y(x) + y\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = f\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \Phi\Big(x,\ \frac{a-x}{1+bx}\Big),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

23. $\boldsymbol{y(x) - y\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = -f\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \Phi\Big(x,\ \frac{a-x}{1+bx}\Big),$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

24. $\boldsymbol{y(x) - cy\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big) = f(x), \qquad c \neq \pm 1.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{1-c^2} f(x) + \frac{c}{1-c^2} f\Big(\frac{a-x}{1+bx}\Big).$$

25. $\boldsymbol{y(x) + g(x)y\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big) = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x) - g(x)f(z)}{1 - g(x)g(z)}, \qquad z = \frac{a-x}{1+bx}.$$

26. $\boldsymbol{y(x) + cy\Big(\dfrac{ax-\beta}{x+b}\Big) = f(x), \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Частный случай уравнения 9.2.2.9.

27. $\boldsymbol{y(x) + g(x)y\Big(\dfrac{ax-\beta}{x+b}\Big) = f(x), \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Частный случай уравнения 9.2.2.10.

► Линейные функциональные уравнения, содержащие $y(x)$ и $y\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)$.

28. $\boldsymbol{y(x)-y\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)=0, \qquad 0\leqslant x\leqslant a.}$

Решение:

$$y(x)=\Phi\bigl(x,\,\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr),$$

где $\Phi(x,z)=\Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

29. $\boldsymbol{y(x)+y\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)=0, \qquad 0\leqslant x\leqslant a.}$

Решение:

$$y(x)=\Phi\bigl(x,\,\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr),$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

30. $\boldsymbol{y(x)+y\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)=b, \qquad 0\leqslant x\leqslant a.}$

Решение:

$$y(x)=\tfrac{1}{2}b+\Phi\bigl(x,\,\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr),$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

31. $\boldsymbol{y(x)+y\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)=f(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant a.}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x)=f\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)$.

Решение:

$$y(x)=\tfrac{1}{2}f(x)+\Phi\bigl(x,\,\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr),$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

32. $\boldsymbol{y(x)-y\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)=f(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant a.}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x)=-f\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)$.

Решение:

$$y(x)=\tfrac{1}{2}f(x)+\Phi\bigl(x,\,\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr),$$

где $\Phi(x,z)=\Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

33. $\boldsymbol{y(x)+g(x)y\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)=f(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant a.}$

Решение:

$$y(x)=\frac{f(x)-g(x)f\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)}{1-g(x)g\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)}.$$

► Линейные функциональные уравнения, содержащие $y(\sin x)$ и $y(\cos x)$.

34. $\boldsymbol{y(\sin x) - y(\cos x) = 0.}$

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \Phi(\sin x,\, \cos x),$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

35. $\boldsymbol{y(\sin x) + y(\cos x) = 0.}$

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \Phi(\sin x,\, \cos x),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

36. $\boldsymbol{y(\sin x) + y(\cos x) = a.}$

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \tfrac{1}{2}a + \Phi(\sin x,\, \cos x),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

37. $\boldsymbol{y(\sin x) + y(\cos x) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = f\bigl(\frac{\pi}{2} - x\bigr)$.

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi(\sin x,\, \cos x),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

38. $\boldsymbol{y(\sin x) - y(\cos x) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = -f\bigl(\frac{\pi}{2} - x\bigr)$.

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi(\sin x,\, \cos x),$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

39. $\boldsymbol{y(\sin x) + g(x)y(\cos x) = f(x).}$

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \frac{f(x) - g(x)f\bigl(\frac{\pi}{2} - x\bigr)}{1 - g(x)g\bigl(\frac{\pi}{2} - x\bigr)}.$$

► Другие уравнения, содержащие неизвестную функцию с двумя разными аргументами.

40. $y(x^a) - by(x) = 0, \qquad a, b > 0.$

Решение:

$$y(x) = |\ln x|^p \Theta\Big(\frac{\ln|\ln x|}{\ln a}\Big), \qquad p = \frac{\ln b}{\ln a},$$

где $\Theta(z) = \Theta(z+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

Полагая $\Theta(z) \equiv \mathrm{const}$, получим частное решение $y(x) = C|\ln x|^p$, где C — произвольная постоянная.

41. $y(x) - y\big(\omega(x)\big) = 0, \qquad$ **где** $\omega\big(\omega(x)\big) = x.$

Решение:

$$y(x) = \Phi\big(x,\, \omega(x)\big),$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

42. $y(x) + y\big(\omega(x)\big) = 0, \qquad$ **где** $\omega\big(\omega(x)\big) = x.$

Решение:

$$y(x) = \Phi\big(x,\, \omega(x)\big),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

43. $y(x) + y\big(\omega(x)\big) = b, \qquad$ **где** $\omega\big(\omega(x)\big) = x.$

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}b + \Phi\big(x,\, \omega(x)\big),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

44. $y(x) + y\big(\omega(x)\big) = f(x), \qquad$ **где** $\omega\big(\omega(x)\big) = x.$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = f\big(\omega(x)\big)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi\big(x,\, \omega(x)\big),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

45. $y(x) - y\big(\omega(x)\big) = f(x), \qquad$ **где** $\omega\big(\omega(x)\big) = x.$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = -f\big(\omega(x)\big)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi\big(x,\, \omega(x)\big),$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

46. $y(x) + g(x)y\big(\omega(x)\big) = f(x), \qquad$ **где** $\omega\big(\omega(x)\big) = x.$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x) - g(x)f\big(\omega(x)\big)}{1 - g(x)g\big(\omega(x)\big)}.$$

47. $\boldsymbol{y(f(x)) = y(x)}$.

Решения этого уравнения называются *автоморфными функциями*. Если $f(x)$ обратима на множестве I, то общее решение рассматриваемого уравнения может быть представлено в виде

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(f^{[n]}(x)),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция на I такая, что этот ряд сходится.

48. $\boldsymbol{y(f(x)) = y(x) + c, \qquad c \neq 0}$.

Функциональное уравнение Абеля.

Заметим, что без ограничения общности в рассматриваемом уравнении можно положить $c = \pm 1$ (для этого надо перейти к нормированной неизвестной функции $\bar{y} = \pm y/c$).

1°. Пусть $\bar{y}(x)$ — решение исходного уравнения. Тогда функция

$$y(x) = \bar{y}(x) + \Theta\Big(\frac{\bar{y}(x)}{c}\Big),$$

где $\Theta(z)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1, также является решением этого уравнения.

2°. Будем считать, что выполнены следующие условия:

(i) функция $f(x)$ строго возрастает и непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant a$;

(ii) $f(0) = 0$ и $f(x) < x$ при $0 < x < a$;

(iii) производная $f'(x)$ существует, имеет ограниченную вариацию на интервале $0 < x < a$ и $\lim\limits_{x\to+0} f'(x) = 1$.

Тогда для любых $x, x_0 \in (0, a]$ существует предел

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{[n]}(x) - f^{[n]}(x_0)}{f^{[n-1]}(x_0) - f^{[n]}(x_0)},$$

который определяет монотонно возрастающую функцию, удовлетворяющую уравнению Абеля при $c = -1$ (это *решение Леви*).

3°. Функциональное уравнение Абеля специального вида

$$y(x^k) = y(x) + c, \qquad k > 0,$$

где $0 < x < 1$ или $1 < x < \infty$, имеет частное решение

$$y(x) = \frac{c \ln|\ln x|}{\ln k}.$$

Более подробную информацию о функциональном уравнении Абеля можно найти в книгах Aczél (2002, 2006), Laitochová (2007), Polyanin & Manzhirov (2007).

49. $\boldsymbol{y(f(x)) = sy(x), \qquad s > 0}$.

Уравнение Шрёдера — Кёнигса.

1°. Пусть $s \neq 1$ и $\bar{y}(x)$ — решение рассматриваемого уравнения, удовлетворяющее условию $\bar{y}(x) \neq 0$. Тогда функция

$$y(x) = \bar{y}(x)\Theta\biggl(\frac{\ln|\bar{y}(x)|}{\ln s}\biggr),$$

где $\Theta(z)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1, также является решением этого уравнения.

2°. Подстановка $u(x) = \ln|y(x)|$ приводит к функциональному уравнению Абеля 9.2.1.48:

$$u(f(x)) = u(x) + c, \qquad c = \ln s.$$

3°. Уравнение Шрёдера — Кёнигса специального вида

$$y(x^k) = sy(x),$$

имеет частное решение

$$y(x) = A\ln^m x, \qquad m = \frac{\ln s}{\ln k},$$

где A — произвольная постоянная, $x > 1$.

Более подробную информацию об уравнении Шрёдера — Кёнигса можно найти в книгах Aczél (2002, 2006), Laitochová (2007), Polyanin & Manzhirov (2007).

9.2.2. Другие линейные функциональные уравнения

► **Линейные уравнения, содержащие функции $y\bigl(y(x)\bigr)$ или $y\bigl(y(y(x))\bigr)$.**

1. $y\bigl(y(x)\bigr) = 0.$

Решение:

$$y(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } x \leqslant a, \\ 0 & \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi_2(x) & \text{при } b \leqslant x, \end{cases}$$

где $a \leqslant 0$ и $b \geqslant 0$ — произвольные числа, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — произвольные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &\varphi_1(a) = 0, \quad a \leqslant \varphi_1(x) \leqslant b \quad \text{при} \quad x \leqslant a; \\ &\varphi_2(b) = 0, \quad a \leqslant \varphi_2(x) \leqslant b \quad \text{при} \quad b \leqslant x. \end{aligned}$$

2. $y\bigl(y(x)\bigr) - x = 0.$

Уравнение Бэббиджа (*уравнение инволютивных функций*).

1°. Частные решения:

$$y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = C - x, \qquad y_3(x) = \frac{C}{x}, \qquad y_4(x) = \frac{C_1 - x}{1 + C_2 x},$$

где C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. На интервале $x \in (a, b)$ существует убывающее решение, содержащее произвольную функцию:

$$y(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при} \quad x \in (a, c], \\ \varphi^{-1}(x) & \text{при} \quad x \in (c, b), \end{cases}$$

где c — произвольная точка, принадлежащая интервалу (a, b), а $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная убывающая функция на $(a, c]$ такая, что

$$\lim_{x \to a+0} \varphi(x) = b, \quad \varphi(c) = c.$$

3°. Решение в параметрической форме:

$$x = \Theta\Big(\frac{t}{2}\Big), \quad y = \Theta\Big(\frac{t+1}{2}\Big),$$

где $\Theta(t) = \Theta(t+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

4°. Решение в параметрической форме:

$$x = \Theta_1(t) + \Theta_2(t)\sin(\pi t),$$
$$y = \Theta_1(t) - \Theta_2(t)\sin(\pi t),$$

где $\Theta_1(t)$ и $\Theta_2(t)$ — — произвольные периодические функции с периодом 1.

5°. Исходное функциональное уравнение имеет единственное возрастающее решение: $y(x) = x$.

6°. Частные решения уравнения могут быть представлены в неявной форме с помощью алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\Phi(x, y) = 0,$$

где $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ — некоторая симметричная функция двух аргументов.

3. $\boldsymbol{y\big(y(x)\big) + ay(x) + bx = 0.}$

1°. Общее решение в параметрическом виде (Мат. энциклопедия, 1985):

$$x = \Theta_1(t)\lambda_1^t + \Theta_2(t)\lambda_2^t,$$
$$y = \Theta_1(t)\lambda_1^{t+1} + \Theta_2(t)\lambda_2^{t+1},$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

а $\Theta_1 = \Theta_1(t)$ и $\Theta_2 = \Theta_2(t)$ — произвольные периодические функции с периодом 1.

2°. Полагая $\Theta_1(t) = C_1 = \text{const}$ и $\Theta_2(t) = C_2 = \text{const}$, получим частное решение в неявном виде

$$\frac{\lambda_2 x - y(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} = C_1\left[\frac{\lambda_1 x - y(x)}{C_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\right]^k, \qquad k = \frac{\ln\lambda_1}{\ln\lambda_2}.$$

4. $\boldsymbol{y\bigl(y(y(x))\bigr) - x = 0.}$

1°. Частные решения:

$$y_1(x) = -\frac{C^2}{C+x}, \qquad y_2(x) = C - \frac{C^2}{x}, \qquad y_3(x) = C_1 - \frac{(C_1+C_2)^2}{C_2+x},$$

где C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решение в параметрической форме:

$$x = \Theta\Bigl(\frac{t}{3}\Bigr), \qquad y = \Theta\Bigl(\frac{t+1}{3}\Bigr),$$

где $\Theta(t) = \Theta(t+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

► Уравнения, содержащие неизвестную функцию с тремя разными аргументами.

5. $\boldsymbol{y(a^2x) = by(ax) + cy(x).}$

Здесь $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Решение (Пелюх & Шарковский, 1974):

$$y(x) = x^{\frac{\ln\lambda_1}{\ln a}}\Theta_1\Bigl(\frac{\ln x}{\ln a}\Bigr) + x^{\frac{\ln\lambda_2}{\ln a}}\Theta_2\Bigl(\frac{\ln x}{\ln a}\Bigr), \qquad \lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2+4c}}{2},$$

где $\Theta_1(z)$ и $\Theta_2(z)$ — произвольные периодические функции с периодом 1.

6. $\boldsymbol{Ay(ax) + By(bx) + y(x) = 0.}$

1°. Это функциональное уравнение имеет частные решения вида $y(x) = Cx^\beta$, где C — произвольная постоянная, а β — корень трансцендентного уравнения $Aa^\beta + Bb^\beta + 1 = 0$.

2°. Преобразование

$$z = \ln|x|, \qquad y(x) = u(z)$$

приводит к линейному разностному уравнению второго порядка

$$Au(z + \ln|a|) + Bu(z + \ln|b|) + u(z) = 0.$$

7. $\boldsymbol{Ay(x^a) + By(x^b) + y(x) = 0, \qquad x > 0.}$

1°. Это функциональное уравнение имеет частные решения вида $y(x) = C|\ln x|^p$, где C — произвольная постоянная, а p — корень трансцендентного уравнения $A|a|^p + B|b|^p + 1 = 0$.

2°. Преобразование

$$z = \ln x, \qquad y(x) = u(z)$$

приводит к функциональному уравнению вида 9.2.2.6:

$$Au(az) + Bu(bz) + u(z) = 0.$$

8. $\boldsymbol{y(x+1) = ay(x) + by(-x).}$

Решение (Пелюх & Шарковский, 1974):

$$y(x) = \Theta(x)\lambda^x + \frac{\lambda - a}{b}\Theta(-x)\lambda^{-x}, \tag{1}$$

где

$$\lambda = \frac{a^2 - b^2 + 1}{2a} + \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2 + 1}{2a}\right)^2 - 1}, \tag{2}$$

а $\Theta(t) = \Theta(t+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1. В решении (1) считается, что постоянная λ, которая определяется по формуле (2), является действительным положительным числом.

Если λ — отрицательное или комплексное число, то в (1) надо взять действительную часть.

9. $\boldsymbol{Ay(x) + By\Big(\dfrac{ax - \beta}{x + b}\Big) + Cy\Big(\dfrac{bx + \beta}{a - x}\Big) = f(x), \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Заменим в уравнении x сначала на $\dfrac{ax - \beta}{x + b}$, а затем на $\dfrac{bx + \beta}{a - x}$, чтобы получить еще два уравнения. Таким образом, приходим к следующей системе (сначала записано исходное уравнение):

$$\begin{aligned} Ay(x) + By(u) + Cy(w) &= f(x), \\ Ay(u) + By(w) + Cy(x) &= f(u), \\ Ay(w) + By(x) + Cy(u) &= f(w), \end{aligned} \tag{$*$}$$

где $u = \dfrac{ax - \beta}{x + b}$ и $w = \dfrac{bx + \beta}{a - x}$.

Исключив $y(u)$ и $y(w)$ из системы линейных алгебраических уравнений (*), можно найти решение $y = y(x)$ исходного функционального уравнения.

10. $\boldsymbol{f_1(x)y(x) + f_2(x)y\Big(\dfrac{ax - \beta}{x + b}\Big) + f_3(x)y\Big(\dfrac{bx + \beta}{a - x}\Big) = g(x).}$

Здесь $\beta = a^2 + ab + b^2$.

Заменим в уравнении x сначала на $\dfrac{ax - \beta}{x + b}$, а затем на $\dfrac{bx + \beta}{a - x}$, чтобы получить еще два уравнения. Таким образом, приходим к следующей системе (сначала записано исходное уравнение):

$$\begin{aligned} f_1(x)y(x) + f_2(x)y(u) + f_3(x)y(w) &= g(x), \\ f_1(u)y(u) + f_2(u)y(w) + f_3(u)y(x) &= g(u), \\ f_1(w)y(w) + f_2(w)y(x) + f_3(w)y(u) &= g(w), \end{aligned} \tag{$*$}$$

где

$$u = \frac{ax-\beta}{x+b}, \quad w = \frac{bx+\beta}{a-x}.$$

Исключив $y(u)$ и $y(w)$ из системы линейных алгебраических уравнений (*), можно найти решение $y = y(x)$ исходного функционального уравнения.

► Уравнения, содержащие неизвестную функцию со многими различными аргументами.

11. $\boldsymbol{y(a_n x) + b_{n-1} y(a_{n-1} x) + \dots + b_1 y(a_1 x) + b_0 y(x) = 0.}$

1°. Это функциональное уравнение имеет частные решения вида $y = Cx^\beta$, где C — произвольная постоянная, а β — корень трансцендентного уравнения

$$a_n^\beta + b_{n-1} a_{n-1}^\beta + \dots + b_1 a_1^\beta + b_0 = 0.$$

2°. Преобразование

$$z = \ln|x|, \quad y(x) = u(z)$$

приводит к линейному разностному уравнению

$$u(z+\alpha_n) + b_{n-1} u(z+\alpha_{n-1}) + \dots + b_1 y(z+\alpha_1) + b_0 y(x) = 0, \quad \alpha_k = \ln|a_k|.$$

12. $\boldsymbol{y\bigl(x^{a_n}\bigr) + b_{n-1} y\bigl(x^{a_{n-1}}\bigr) + \dots + b_1 y\bigl(x^{a_1}\bigr) + b_0 y(x) = 0.}$

1°. Это функциональное уравнение имеет частные решения вида $y(x) = C|\ln x|^p$, где C — произвольная постоянная, а p — корень трансцендентного уравнения

$$|a_n|^p + b_{n-1}|a_{n-1}|^p + \dots + b_1|a_1|^p + b_0 = 0.$$

2°. Преобразование

$$z = \ln x, \quad y(x) = u(z)$$

приводит к функциональному уравнению вида 9.2.2.11:

$$u\bigl(a_n z\bigr) + b_{n-1} u\bigl(a_{n-1} z\bigr) + \dots + b_1 u\bigl(a_1 z\bigr) + b_0 u(z) = 0.$$

13. $\boldsymbol{y^{[n]}(x) + a_{n-1} y^{[n-1]}(x) + \dots + a_1 y(x) + a_0 x = 0.}$

Используемые обозначения: $y^{[2]}(x) = y\bigl(y(x)\bigr), \dots, y^{[n]}(x) = y\bigl(y^{[n-1]}(x)\bigr)$.

1°. Решения ищутся в параметрической форме

$$x = w(t), \quad y = w(t+1).$$

В результате исходное функциональное уравнение сводится к линейному разностному уравнению n-го порядка вида 9.1.2.39:

$$w(t+n) + a_{n-1} w(t+n-1) + \dots + a_1 w(t+1) + a_0 w(t) = 0.$$

2°. В специальном случае $a_{n-1} = \dots = a_1 = 0$ и $a_0 = -1$, имеем следующее решение в параметрическом виде:

$$x = \Theta\Bigl(\frac{t}{n}\Bigr), \quad y = \Theta\Bigl(\frac{t+1}{n}\Bigr),$$

где $\Theta(t) = \Theta(t+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

9.3. Нелинейные функциональные уравнения с одной независимой переменной

9.3.1. Функциональные уравнения с квадратичной нелинейностью

► **Функциональные уравнения, содержащие $y(x)$ и $y(a-x)$.**

1. $\boldsymbol{y(x)y(a-x)=b^2.}$

Решения:

$$y(x)=\pm b\exp\bigl[\Phi(x,a-x)\bigr],$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

Полагая $\Phi(x,z)=C(x-z)$, получим частное решение

$$y(x)=\pm be^{C(2x-a)},$$

где C — произвольная постоянная.

2. $\boldsymbol{y(x)y(a-x)=-b^2.}$

Подставив $x=a/2$ в уравнение, получим соотношение $y^2(a/2)=-b^2$, которое не может выполняться при $b\neq 0$. Следовательно, это уравнение не имеет непрерывных решений.

Разрывные решения:

$$\pm y(x)=\begin{cases} b\varphi(x) & \text{при } x\geqslant a/2,\\ -\dfrac{b}{\varphi(a-x)} & \text{при } x<a/2,\end{cases}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

3. $\boldsymbol{y(x)y(a-x)=f^2(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x)=f(a-x)$ или $f(x)=-f(a-x)$.

1°. Подстановка $y(x)=f(x)u(x)$ приводит рассматриваемое уравнение к одному из двух более простых уравнений вида 9.3.1.1 или 9.3.1.2.

2°. При $f(x)=f(a-x)$ имеются решения вида

$$y(x)=\pm f(x)\exp\bigl[\Phi(x,a-x)\bigr],$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

Полагая $\Phi(x,z)=C(x-z)$, получим частные решения

$$y(x)=\pm e^{C(2x-a)}f(x),$$

где C — произвольная постоянная.

3°. При $f(x) = -f(a-x)$, полагая $x = a/2$, имеем $f(a/2) = 0$. В этом случае имеются решения

$$\pm y(x) = \begin{cases} f(x)\varphi(x) & \text{при } x \geqslant a/2, \\ -\dfrac{f(x)}{\varphi(a-x)} & \text{при } x \leqslant a/2, \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

4. $\boldsymbol{y^2(x) + y^2(a-x) = b^2.}$

1°. Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2 + \Phi(x, a-x)}\,,$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

2°. Частные решения:

$$y_{1,2}(x) = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}, \qquad y_{3,4}(x) = \pm b\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right), \qquad y_{5,6}(x) = \pm b\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right).$$

5. $\boldsymbol{y^2(x) + Ay(x)y(a-x) + By^2(a-x) + Cy(x) + Dy(a-x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.3.3.2.

Решение в параметрической форме:

$$\begin{aligned} &y^2 + Ayt + Bt^2 + Cy + Dt = f(x), \\ &t^2 + Ayt + By^2 + Ct + Dy = f(a-x). \end{aligned}$$

Исключение параметра t дает решение в неявной форме.

► Функциональные уравнения, содержащие $y(x)$ и $y(ax)$.

6. $\boldsymbol{y(2x) - ay^2(x) = 0.}$

Частный случай уравнения 9.3.3.1.

Частные решения:

$$y(x) = 0, \qquad y(x) = \frac{1}{a}e^{Cx},$$

где C — произвольная постоянная.

7. $\boldsymbol{y(2x) - 2y^2(x) + a = 0.}$

Частный случай уравнения 9.3.3.1.

Частные решения при $a = 1$:

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}, \qquad y(x) = 1, \qquad y(x) = \cos(Cx), \qquad y(x) = \operatorname{ch}(Cx),$$

где C — произвольная постоянная.

Более сложные решения данного уравнения при $a = 1$, содержащие произвольные периодические функции, приведены в книге Пелюха & Шарковского (1974).

8. $\boldsymbol{y(ax) = 2y(x) + by^2(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{b}\left\{\exp\left[x^{\frac{\ln 2}{\ln a}}\Theta\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)\right] - 1\right\},$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом единица.

9. $\boldsymbol{y(x)y(ax) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.3.3.1.

► Функциональные уравнения, содержащие $y(x)$ и $y(a/x)$.

10. $\boldsymbol{y(x)y(a/x) = b^2.}$

Решения:

$$y(x) = \pm b\exp\bigl[\Phi(x, a/x)\bigr],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

Полагая $\Phi(x,z) = C(\ln x - \ln z)$, получим частное решение

$$y = \pm b a^{-C} x^{2C},$$

где C — произвольная постоянная.

11. $\boldsymbol{y(x)y(a/x) = f^2(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = \pm f(a/x)$. Для определенности будем считать, что $f(x) = f(a/x)$.

Решения:

$$y(x) = \pm f(x)\exp\bigl[\Phi(x, a/x)\bigr],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

Полагая $\Phi(x,z) = C(\ln x - \ln z)$, получим частное решение

$$y = \pm a^{-C} x^{2C} f(x),$$

где C — произвольная постоянная.

12. $\boldsymbol{y^2(x) + Ay(x)y(a/x) + By^2(a/x) + Cy(x) + Dy(a/x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.3.3.3.

Решение в параметрической форме:

$$y^2 + Ayt + Bt^2 + Cy + Dt = f(x),$$
$$t^2 + Ayt + By^2 + Ct + Dy = f(a/x).$$

Исключение параметра t дает решение в неявном виде.

► Другие функциональные уравнения с квадратичной нелинейностью.

13. $\boldsymbol{y(x^2) - ay^2(x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{a}x^C,$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, непрерывным решением также является тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

14. $\boldsymbol{y(x)y(x^a) = f(x), \qquad a > 0.}$

Частный случай уравнения 9.3.3.6.

15. $\boldsymbol{y(x)y\Big(\frac{a-x}{1+bx}\Big) = A^2.}$

Решения:

$$y(x) = \pm A \exp\Big[\Phi\Big(x, \frac{a-x}{1+bx}\Big)\Big],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

16. $\boldsymbol{y(x)y\Big(\frac{a-x}{1+bx}\Big) = f^2(x).}$

Здесь правая часть уравнения должна удовлетворять следующему условию: $f(x) = \pm f\Big(\frac{a-x}{1+bx}\Big)$. Для определенности будем считать, что $f(x) = f\Big(\frac{a-x}{1+bx}\Big)$.

Решения:

$$y(x) = \pm f(x) \exp\Big[\Phi\Big(x, \frac{a-x}{1+bx}\Big)\Big],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

17. $\boldsymbol{y^2(x) + Ay(x)y\Big(\frac{a-x}{1+bx}\Big) + By(x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.3.3.4.

18. $\boldsymbol{y(x)y\big(\sqrt{a^2-x^2}\,\big) = b^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.}$

Решения:

$$y(x) = \pm b \exp\big[\Phi\big(x, \sqrt{a^2-x^2}\,\big)\big],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

19. $\boldsymbol{y(x)y\big(\sqrt{a^2-x^2}\,\big) = f^2(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.}$

Здесь правая часть уравнения должна удовлетворять следующему условию: $f(x) = \pm f\big(\sqrt{a^2-x^2}\,\big)$. Для определенности здесь будем считать, что $f(x) = f\big(\sqrt{a^2-x^2}\,\big)$.

Решения:

$$y(x) = \pm f(x) \exp\big[\Phi\big(x, \sqrt{a^2-x^2}\,\big)\big],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

20. $\boldsymbol{y(\sin x)y(\cos x) = a^2.}$

Решения в неявном виде:

$$y(\sin x) = \pm a \exp\bigl[\Phi(\sin x,\, \cos x)\bigr],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

21. $\boldsymbol{y(\sin x)y(\cos x) = f^2(x).}$

Здесь правая часть уравнения должна удовлетворять следующему условию: $f(x) = \pm f\bigl(\frac{\pi}{2} - x\bigr)$. Для определенности будем считать, что $f(x) = f\bigl(\frac{\pi}{2} - x\bigr)$.

Решения в неявном виде:

$$y(\sin x) = \pm f(x) \exp\bigl[\Phi(\sin x,\, \cos x)\bigr],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

22. $\boldsymbol{y(x)y\bigl(\omega(x)\bigr) = b^2,}$ **где** $\boldsymbol{\omega\bigl(\omega(x)\bigr) = x.}$

Решения:

$$y(x) = \pm b \exp\bigl[\Phi\bigl(x,\, \omega(x)\bigr)\bigr],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

23. $\boldsymbol{y(x)y\bigl(\omega(x)\bigr) = f^2(x),}$ **где** $\boldsymbol{\omega\bigl(\omega(x)\bigr) = x.}$

Здесь правая часть уравнения должна удовлетворять условию $f(x) = \pm f\bigl(\omega(x)\bigr)$. Для определенности будем считать, что $f(x) = f\bigl(\omega(x)\bigr)$.

Решения:

$$y(x) = \pm f(x) \exp\bigl[\Phi\bigl(x,\, \omega(x)\bigr)\bigr],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

9.3.2. Функциональные уравнения со степенной нелинейностью

1. $\boldsymbol{y^k(x)y(a - x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.3.3.2.

Решение:

$$y(x) = \bigl[f(x)\bigr]^{-\frac{k}{1-k^2}} \bigl[f(a - x)\bigr]^{\frac{1}{1-k^2}}.$$

2. $\boldsymbol{y^{2n+1}(x) + y^{2n+1}(a - x) = b,}$ $\boldsymbol{n = 1,\, 2,\, \ldots}$

Подстановка $w(x) = y^{2n+1}(x)$ приводит к линейному уравнению вида 9.2.1.8: $w(x) + w(a - x) = b$.

3. $\boldsymbol{y(ax) = by^k(x).}$

Решение при $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$ ($a \neq 1$ и $k \neq 1$):

$$y(x) = b^{\frac{1}{1-k}} \exp\biggl[x^{\frac{\ln k}{\ln a}} \Theta\biggl(\frac{\ln x}{\ln a}\biggr)\biggr],$$

где $\Theta(x) = \Theta(x + 1)$ — произвольная периодическая функция с периодом 1.

4. $\boldsymbol{y^k(x)y(a/x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.3.3.3.

Решение при $k \neq \pm 1$:

$$y(x) = \bigl[f(x)\bigr]^{-\frac{k}{1-k^2}} \bigl[f(a/x)\bigr]^{\frac{1}{1-k^2}}.$$

5. $\boldsymbol{y^k(x)y\Bigl(\dfrac{a-x}{1+bx}\Bigr) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.3.3.4.

6. $\boldsymbol{y^k(x)y\Bigl(\dfrac{ax-\beta}{x+b}\Bigr) = f(x), \qquad \beta = a^2+ab+b^2.}$

Частный случай уравнения 9.3.3.10.

7. $\boldsymbol{y^k(x)y(x^a) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.3.3.6.

8. $\boldsymbol{y^k(x)y\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.3.3.7.

9. $\boldsymbol{y^k(\sin x)y(\cos x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9.3.3.8.

9.3.3. Нелинейные функциональные уравнения общего вида

1. $\boldsymbol{F\bigl(x, y(x), y(ax)\bigr) = 0, \qquad a > 0.}$

Преобразование $z = \ln x$, $w(z) = y(x)$ приводит к уравнению вида 9.1.2.23:

$$F\bigl(e^z,\, w(z),\, w(z+b)\bigr) = 0, \qquad b = \ln a.$$

2. $\boldsymbol{F\bigl(x, y(x), y(a-x)\bigr) = 0.}$

Нелинейное возвратное (циклическое) функциональное уравнение.

Заменив x на $a-x$, имеем $F\bigl(a-x, y(a-x), y(x)\bigr) = 0$. Затем, исключив величину $y(a-x)$ из полученного и исходного уравнений (предполагается, что эти уравнения различаются), приходим к алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\bigl(x, y(x)\bigr) = 0$.

Иными словами, решение $y = y(x)$ исходного функционального уравнения задается параметрически системой двух алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$F(x, y, t) = 0, \qquad F(a-x, t, y) = 0,$$

где t — параметр.

3. $F\big(x, y(x), y(a/x)\big) = 0.$

Нелинейное возвратное (циклическое) функциональное уравнение.

Заменив x на a/x, имеем $F\big(a/x, y(a/x), y(x)\big) = 0$. Затем, исключив величину $y(a/x)$ из полученного и исходного уравнений (предполагается, что эти уравнения различаются), приходим к алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\big(x, y(x)\big) = 0$.

Иными словами, решение $y = y(x)$ исходного функционального уравнения задается параметрически системой двух алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$F(x, y, t) = 0, \quad F(a/x, t, y) = 0,$$

где t — параметр.

4. $F\left(x, y(x), y\left(\dfrac{a-x}{1+bx}\right)\right) = 0.$

Заменив x на $\dfrac{a-x}{1+bx}$, имеем

$$F\left(\frac{a-x}{1+bx},\, y\left(\frac{a-x}{1+bx}\right),\, y(x)\right) = 0.$$

Затем, исключив величину $y\left(\dfrac{a-x}{1+bx}\right)$ из полученного и исходного уравнений, приходим к алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\big(x, y(x)\big) = 0$.

Иными словами, решение $y = y(x)$ исходного функционального уравнения задается параметрически системой двух алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$F(x,\, y,\, t) = 0, \quad F\left(\frac{a-x}{1+bx},\, t,\, y\right) = 0,$$

где t — параметр.

5. $F\left(x,\, y(x),\, y\left(\dfrac{ax-\beta}{x+b}\right)\right) = 0, \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.$

Частный случай уравнения 9.3.3.10.

6. $F\big(x,\, y(x),\, y(x^a)\big) = 0.$

Преобразование $\xi = \ln x$, $u(\xi) = y(x)$ приводит к уравнению вида 9.3.3.1:

$$F\big(e^{\xi},\, u(\xi),\, u(a\xi)\big) = 0.$$

7. $F\big(x, y(x), y\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big)\big) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.$

Заменив x на $\sqrt{a^2 - x^2}$, имеем

$$F\big(\sqrt{a^2 - x^2},\, y\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big),\, y(x)\big) = 0.$$

Затем, исключив величину $y\big(\sqrt{a^2-x^2}\,\big)$ из полученного и исходного уравнений, приходим к алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\big(x, y(x)\big)=0$.

Иными словами, решение $y=y(x)$ исходного функционального уравнения задается параметрически системой двух алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$F(x,\,y,\,t)=0, \qquad F\big(\sqrt{a^2-x^2},\,t,\,y\big)=0,$$

где t — параметр.

8. $\boldsymbol{F\big(x, y(\sin x), y(\cos x)\big)=0.}$

Заменив x на $\frac{\pi}{2}-x$, имеем $F\big(\frac{\pi}{2}-x,\,y(\cos x),\,y(\sin x)\big)=0$. Затем, исключив величину $y(\cos x)$ из полученного и исходного уравнений, приходим к алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\big(x, y(\sin x)\big)=0$ для $y(\sin x)$.

9. $\boldsymbol{F\big(x, y(x), y(\omega(x))\big)=0,}$ **где** $\boldsymbol{\omega\big(\omega(x)\big)=x.}$

Заменив x на $\omega(x)$, имеем $F\big(\omega(x),\,y\big(\omega(x)\big),\,y(x)\big)=0$. Затем, исключив величину $y\big(\omega(x)\big)$ из полученного и исходного уравнений, приходим к алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\big(x, y(x)\big)=0$.

Иными словами, решение $y=y(x)$ исходного функционального уравнения задается параметрически системой двух алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$F(x,\,y,\,t)=0, \qquad F\big(\omega(x),\,t,\,y\big)=0,$$

где t — параметр.

10. $\boldsymbol{F\left(x,\,y(x),\,y\Big(\frac{ax-\beta}{x+b}\Big),\,y\Big(\frac{bx+\beta}{a-x}\Big)\right)=0, \qquad \beta=a^2+ab+b^2.}$

Заменим в уравнении x сначала на $\dfrac{ax-\beta}{x+b}$, а затем на $\dfrac{bx+\beta}{a-x}$, чтобы получить еще два уравнения. Таким образом, приходим к следующей системе (сначала записано исходное уравнение):

$$\begin{aligned} &F\big(x,\,y(x),\,y(u),\,y(w)\big)=0,\\ &F\big(u,\,y(u),\,y(w),\,y(x)\big)=0,\\ &F\big(w,\,y(w),\,y(x),\,y(u)\big)=0, \end{aligned} \qquad (*)$$

где аргументы u и w выражаются через x следующим образом:

$$u=\frac{ax-\beta}{x+b}, \qquad w=\frac{bx+\beta}{a-x}.$$

Исключив $y(u)$ и $y(w)$ из системы алгебраических (трансцендентных) уравнений $(*)$, можно найти решение $y=y(x)$ исходного функционального уравнения.

11. $\boldsymbol{F\big(x,\, y(a_1x),\, y(a_2x),\, \ldots,\, y(a_nx)\big) = 0.}$

Здесь $x > 0$ и $a_k > 0$, где $k = 1, \ldots, n$. Преобразование

$$y(x) = w(z), \qquad z = \ln x$$

приводит к разностному уравнению

$$F\big(e^z,\, w(z + b_1),\, w(z + b_2),\, \ldots,\, w(z + b_n)\big) = 0, \qquad b_k = \ln a_k.$$

12. $\boldsymbol{F\big(x,\, y(x^{a_1}),\, y(x^{a_2}),\, \ldots,\, y(x^{a_m})\big) = 0, \qquad x > 0.}$

Преобразование

$$y(x) = w(z), \qquad z = \ln x$$

приводит к разностному уравнению вида 9.3.3.11:

$$F\big(e^z,\, w(a_1z),\, w(a_2z),\, \ldots,\, w(a_nz)\big) = 0.$$

13. $\boldsymbol{F\big(x,\, y(e^{a_1x}),\, y(e^{a_2x}),\, \ldots,\, y(e^{a_nx})\big) = 0.}$

Подстановка $t = e^x$ приводит к разностному уравнению вида 9.3.3.12:

$$F\big(\ln t,\, y(t^{a_1}),\, y(t^{a_2}),\, \ldots,\, y(t^{a_n})\big) = 0.$$

14. $\boldsymbol{F\big(x,\, y(x),\, y^{[2]}(x),\, \ldots,\, y^{[n]}(x)\big) = 0.}$

Используемые обозначения: $y^{[2]}(x) = y\big(y(x)\big), \ldots, y^{[n]}(x) = y\big(y^{[n-1]}(x)\big)$.

Решение ищется в параметрическом виде (Мат. энциклопедия, 1985):

$$x = w(t), \quad y = w(t + 1). \tag{1}$$

В результате рассматриваемое уравнение сводится к разностному уравнению n-го порядка вида 9.1.2.45:

$$F\big(w(t),\, w(t + 1),\, w(t + 2),\, \ldots,\, w(t + n)\big) = 0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) имеет структуру

$$x = w(t) = \varphi(t;\, C_1, \ldots, C_n),$$
$$y = w(t + 1) = \varphi(t + 1;\, C_1, \ldots, C_n),$$

где $C_1 = C_1(t), \ldots, C_n = C_n(t)$ — произвольные периодические функции с периодом 1.

15. $\boldsymbol{F\big(\, x,\, y(\theta_0(x)),\, y(\theta_1(x)),\, \ldots,\, y(\theta_{n-1}(x))\,\big) = 0.}$

Используемые обозначения: $\theta_k(x) \equiv \theta\big(x + \frac{k}{n}T\big)$, где $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. Считается, что $\theta(x) = \theta(x + T)$ — периодическая функция с периодом T. Кроме того, предполагается, что левая часть уравнения удовлетворяет условию $F(x, \ldots) = F(x + T, \ldots)$.

В исходном функциональном уравнении последовательно заменим аргумент x на $x+\frac{k}{n}T$, где $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. В результате приходим к следующей системе (сначала записано исходное уравнение):

$$\begin{aligned} &F\bigl(x,\, y_0,\, y_1,\, \ldots,\, y_{n-1}\bigr)=0,\\ &F\bigl(x+\tfrac{1}{n}T,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_0\bigr)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &F\bigl(x+\tfrac{n-1}{n}T,\, y_{n-1},\, y_0,\, \ldots,\, y_{n-2}\bigr)=0, \end{aligned} \tag{$*$}$$

где для краткости использовано обозначение $y_k\equiv y\bigl(\theta_k(x)\bigr)$.

Исключая величины $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}$ из системы нелинейных алгебраических (или трансцендентных) уравнений (*), можно найти решения исходного функционального уравнения в неявной форме: $\Psi\bigl(x,\, y_0\bigr)=0$, где $y_0=y\bigl(\theta(x)\bigr)$.

16. $\boldsymbol{y(x)=F\bigl(x, y(\varphi(x))\bigr)}$**.**

Пусть выполнены следующие условия:

1) существуют числа a и b такие, что $\varphi(a)=a$, $F(a,b)=b$;

2) функция $\varphi(x)$ является аналитической в окрестности точки a, причем имеет место неравенство $|\varphi'(a)|<1$;

3) функция $F(x,y)$ является аналитической в окрестности точки (a,b) и $|F_y(a,b)|<1$.

Тогда формальное решение исходного уравнения в виде степенного ряда

$$y(x)=b+\sum_{k=1}^{\infty}c_k(x-a)^k, \tag{$*$}$$

имеет положительный радиус сходимости.

Формальное решение можно получить, подставив выражения

$$\varphi(x)=a+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-a)^k,\qquad F(x,y)=b+\sum_{i,j=1}^{\infty}b_{ij}(x-a)^i(y-b)^j,$$

и $(*)$, в рассматриваемое функциональное уравнение. Собирая слагаемые с одинаковыми степенями разности $\xi=(x-a)$ и затем приравнивая нулю коэффициенты при разных степенях ξ, получим треугольную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_k.

9.4. Функциональные уравнения с несколькими независимыми переменными

9.4.1. Линейные функциональные уравнения

► **Уравнения, содержащие неизвестные функции одного аргумента.**

1. $\boldsymbol{f(x+y)=f(x)+f(y)}$**.**

Уравнение Коши.

Решение (Фихтенгольц, 1969):

$$f(x) = Cx,$$

где C — произвольная постоянная.

2. $\boldsymbol{f\Bigl(\frac{x+y}{2}\Bigr) = \frac{f(x)+f(y)}{2}}$**.**

Уравнение Дженсена.

Решение:

$$f(x) = C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. $\boldsymbol{af(x) + bf(y) = f(ax+by) + c}$**.**

1°. Решение:

$$f(x) = \begin{cases} Ax + \dfrac{c}{a+b-1}, & \text{если} \quad a+b-1 \neq 0; \\ Ax + B, & \text{если} \quad a+b-1 = 0 \ \text{ и } \ c = 0, \end{cases}$$

где A и B — произвольные постоянные.

2°. Если $a+b-1=0$ и $c \neq 0$, то данное уравнение не имеет решения.

4. $\boldsymbol{k_1 f(a_1x+b_1y+c_1)+k_2 f(a_2x+b_2y+c_2)+k_3 f(a_3x+b_3y+c_3)=k_0}$**.**

1°. Все непрерывные решения этого уравнения, если они существуют, имеют вид $f(z) = \alpha z + \beta$, где константы α и β определяются путем подстановки этого выражения в исходное уравнение.

2°. Пусть выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 &= 0, \\ b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 &= 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 &\neq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда решение исходного уравнения определяется формулами

$$f(z) = \alpha z + \beta, \qquad \beta = \frac{k_0 - \alpha(c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3)}{k_1 + k_2 + k_3}, \tag{2}$$

где α — произвольная постоянная.

3°. Пусть первое и второе соотношение в (1) выполняются, а третье соотношение не выполняется (т. е. $k_1 + k_2 + k_3 = 0$). Тогда решение исходного уравнения имеет вид

$$f(z) = \alpha z + \beta, \qquad \alpha = \frac{k_0}{c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3},$$

где β — произвольная постоянная.

4°. Пусть первое или/и второе соотношение в (1) не выполняется, но выполняется третье соотношение. Тогда решением исходного уравнения будет константа, которая определяется подстановкой значения $\alpha = 0$ в (2).

5. $\boldsymbol{f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y).}$

Решение:

$$f(x) = Cx^2,$$

где C — произвольная постоянная.

6. $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} k_j f(a_j x + b_j y + c_j) = \alpha x + \beta y + \gamma.}$

Все непрерывные решения этого уравнения, если они существуют, имеют вид многочленов степени $(n-2)$, т. е. $f(z) = \sum_{m=0}^{n-2} \alpha_m z^m$, где константы α_m определяются путем подстановки этого выражения в исходное уравнение.

7. $\boldsymbol{f(x+y)=f(x)e^{ay}.}$

Решение:

$$f(x) = Ce^{ax},$$

где C — произвольная постоянная.

8. $\boldsymbol{f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\operatorname{ch} y.}$

Решение:

$$f(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

9. $\boldsymbol{f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\operatorname{ch}(ay)+2f(y).}$

Решение:

$$f(x) = C[2 - \operatorname{ch}(ax)],$$

где C — произвольная постоянная.

10. $\boldsymbol{f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y.}$

Решение (Мат. энциклопедия, 1985):

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

11. $\boldsymbol{f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos(ay)+2f(y).}$

Решение:

$$f(x) = C[2 - \cos(ax)],$$

где C — произвольная постоянная.

12. $\boldsymbol{f(xy) = f(x) + f(y).}$

Логарифмическое уравнение Коши.

Решение (Фихтенгольц, 1969):

$$f(x) = C \ln |x|,$$

где C — произвольная постоянная.

13. $\boldsymbol{f\big(\sqrt{x^2 + y^2}\,\big) = f(x) + f(y).}$

Решение:

$$f(x) = Cx^2,$$

где C — произвольная постоянная.

14. $\boldsymbol{f\big((x^a + y^a)^{1/a}\big) = f(x) + f(y), \qquad x > 0,\ y > 0.}$

Решение:

$$f(x) = Cx^a,$$

где C — произвольная постоянная.

15. $\boldsymbol{f(x) + f(y) = f\Big(\frac{x + y}{1 - xy}\Big), \qquad xy < 1.}$

Решение:

$$f(x) = C \operatorname{arctg} x,$$

где C — произвольная постоянная.

16. $\boldsymbol{f(x) + (1 - x) f\Big(\frac{y}{1 - x}\Big) = f(y) + (1 - y) f\Big(\frac{x}{1 - y}\Big).}$

Это уравнение встречается в теории информации. Аргументы x и y могут принимать значения от 0 до 1.

Решение:

$$f(x) = C[x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x)],$$

где C — произвольная постоянная.

17. $\boldsymbol{f(x) + (1 - x)^a f\Big(\frac{y}{1 - x}\Big) = f(y) + (1 - y)^a f\Big(\frac{x}{1 - y}\Big).}$

Аргументы x и y могут принимать значения от 0 до 1; $a \neq 0$, 1, 2.

Решение:

$$f(x) = C[x^a + (1 - x)^a - 1],$$

где C — произвольная постоянная.

18. $\boldsymbol{f\big(xy - \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}\big) = f(x) + f(y), \qquad |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1.}$

Решение:

$$f(x) = C \arccos x,$$

где C — произвольная постоянная.

19. $\boldsymbol{f\big(xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\big) = f(x) + f(y), \qquad |x| \geqslant 1,\ |y| \geqslant 1.}$

Решение:

$$f(x) = C \operatorname{arch} x,$$

где C — произвольная постоянная.

20. $\boldsymbol{f(x) + g(y) = h(x+y).}$

Уравнение Пексидера. Здесь $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — искомые функции.

Решение:

$$f(x) = C_1 x + C_2, \qquad g(y) = C_1 y + C_3, \qquad h(z) = C_1 z + C_2 + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

21. $\boldsymbol{f(a_1x + b_1y + c_1) + g(a_2x + b_2y + c_2) + h(a_3x + b_3y + c_3) = 0.}$

Обобщенное уравнение Пексидера. Здесь $f(z_1)$, $g(z_2)$, $h(z_3)$ — искомые функции.

Все непрерывные решения уравнения, если они существуют, имеют вид

$$f(z_1) = \alpha_1 z_1 + \beta_1, \qquad g(z_2) = \alpha_2 z_2 + \beta_2, \qquad h(z_3) = \alpha_3 z_3 + \beta_3,$$

где постоянные α_n и β_n ($n = 1,\ 2,\ 3$) определяются путем подстановки этого выражения в исходное уравнение.

22. $\boldsymbol{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j(a_jx + b_jy + c_j) = \alpha x + \beta y + \gamma.}$

Все непрерывные решения этого уравнения, если они существуют, имеют вид многочленов степени $(n-2)$, т. е. $f_j(z_j) = \sum_{m=0}^{n-2} \alpha_{jm} z_j^m$, где постоянные α_{jm} определяются путем подстановки этого выражения в исходное уравнение.

► Уравнения, содержащие неизвестные функции двух аргументов.

23. $\boldsymbol{f(x,y) = f(y,x).}$

Это уравнение можно рассматривать как определение функций, симметричных относительно перестановки аргументов.

1°. Решение:

$$f(x,y) = \Phi(x,y) + \Phi(y,x),$$

где $\Phi(x,y)$ — произвольная функция двух переменных.

2°. Частные решения можно получить с помощью формулы

$$f(x,y) = \Psi(\varphi(x) + \varphi(y)),$$

задавая различные функции $\Psi(z)$ и $\varphi(x)$.

24. $\boldsymbol{f(x,y) = -f(y,x)}$.

Это уравнение можно рассматривать как определение функций, антисимметричных относительно перестановки аргументов.

1°. Решение:

$$f(x,y) = \Phi(x,y) - \Phi(y,x),$$

где $\Phi(x,y)$ — произвольная функция двух переменных.

2°. Частные решения можно получить с помощью формул

$$f(x,y) = \varphi(x) - \varphi(y),$$
$$f(x,y) = (x-y)\Psi(\varphi(x) + \varphi(y)),$$

задавая различные функции $\varphi(x)$ и $\Psi(z)$.

25. $\boldsymbol{f(x,y) = f(x+ak_1, y+ak_2)}$.

Уравнение для функций типа бегущей волны. Здесь a — произвольная постоянная, а k_1 и k_2 — некоторые заданные константы.

Решение:

$$f(x,y) = \Phi(k_2x - k_1y),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

26. $\boldsymbol{f(x,y) = f(x+ak_1, y+ak_2) + ac}$.

Здесь a — произвольная постоянная, а k_1, k_2, c — некоторые заданные константы.

Решение:

$$f(x,y) = \Phi\bigl(k_1y - k_2x\bigr) - \frac{c}{k_1}x,$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

27. $\boldsymbol{f(x,y) = e^{ac} f(x+ak_1, y+ak_2)}$.

Здесь a — произвольная постоянная, а k_1, k_2, c — некоторые заданные константы.

Решение:

$$f(x,y) = \exp\Bigl(-\frac{c}{k_1}x\Bigr)\Phi\bigl(k_1y - k_2x\bigr),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

28. $\boldsymbol{f(ax,ay) = f(x,y)}$.

Здесь $a \neq 0$ — любое число.

Решение:

$$f(x,y) = \Phi(y/x),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

29. $\boldsymbol{f(ax,ay) = a^\beta f(x,y)}$.

Уравнение для однородных функций. Здесь a — произвольная положительная постоянная, а β — заданная константа, называемая порядком однородности.

Решение:

$$f(x,y) = x^{\beta}\Phi(y/x),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

30. $\boldsymbol{f(ax, a^{\beta}y) = f(x,y).}$

Здесь a — произвольная положительная постоянная, а β — некоторая константа.

Решение:

$$f(x,y) = \Phi\bigl(yx^{-\beta}\bigr),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

31. $\boldsymbol{f(ax, a^{\beta}y) = a^{\gamma}f(x,y).}$

Уравнение для автомодельных функций. Здесь a — произвольная положительная постоянная, а β и γ — некоторые константы.

Решение:

$$f(x,y) = x^{\gamma}\Phi\bigl(yx^{-\beta}\bigr),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

32. $\boldsymbol{f(x,y) = a^{n}f\bigl(x + (1-a)y,\ ay\bigr).}$

Здесь a — произвольная положительная постоянная, а n — некоторая константа.

Решение:

$$f(x,y) = y^{-n}\Phi(x+y),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

33. $\boldsymbol{f(x,y) = f(a^{n}x, a^{m}y) + k\ln a.}$

Здесь a — произвольная положительная постоянная, а n, m, k — некоторые константы.

Решение:

$$f(x,y) = \Phi\bigl(yx^{-m/n}\bigr) - \frac{k}{n}\ln x, \qquad x>0,$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

34. $\boldsymbol{f(x,y) = a^{n}f(a^{m}x, y + \ln a).}$

Здесь a — произвольная положительная постоянная, а n и m — некоторые константы.

Решение:

$$f(x,y) = e^{-ny}\Phi\bigl(xe^{-my}\bigr),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

35. $\boldsymbol{f(x,y) + f(y,z) = f(x,z).}$

Первое уравнение Кантора.

Решение (Мат. энциклопедия, 1985):

$$f(x,y) = \Phi(x) - \Phi(y),$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция.

36. $\boldsymbol{f(x+y,z) + f(y+z,x) + f(z+x,y) = 0.}$

Решение:

$$f(x,y) = (x-2y)\varphi(x+y),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

37. $\boldsymbol{f(xy,z) + f(yz,x) + f(zx,y) = 0.}$

Решение:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \varphi(xy)\ln\frac{x}{y^2} &&\text{при}\quad x>0,\quad y\neq 0;\\ f(x,y) &= \varphi(xy)\ln\frac{-x}{y^2} &&\text{при}\quad x<0,\quad y\neq 0;\\ f(x,y) &= A + B\ln|x| &&\text{при}\quad x\neq 0,\quad y=0;\\ f(x,y) &= A + B\ln|y| &&\text{при}\quad x=0,\quad y\neq 0, \end{aligned}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, A и B — произвольные постоянные.

9.4.2. Нелинейные функциональные уравнения

► Уравнения, содержащие неизвестные функции одного аргумента.

1. $\boldsymbol{f(x+y) = f(x)f(y).}$

Экспоненциальное уравнение Коши.

Решение (Фихтенгольц, 1969):

$$f(x) = e^{Cx},$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, функция $f(x)\equiv 0$ также является решением данного уравнения.

2. $\boldsymbol{f(x+y) = af(x)f(y).}$

Решение:

$$f(x) = \frac{1}{a}e^{Cx},$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, функция $f(x)\equiv 0$ также является решением данного уравнения.

3. $\boldsymbol{f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}.}$

Решение:

$$f(x) = Ca^x,$$

где a и C — произвольные положительные постоянные. Кроме того, функция $f(x) \equiv 0$ также является решением данного уравнения.

4. $\boldsymbol{f\Big(\dfrac{x+y}{n}\Big) = \big[f(x)f(y)\big]^{1/n}}$**.**

Решение:

$$f(x) = a^x,$$

где a — произвольная положительная постоянная.

5. $\boldsymbol{f(y+x)+f(y-x)=2f(x)f(y)}$**.**

Уравнение Даламбера.

Решения (Фихтенгольц, 1969):

$$f(x) = \cos(Cx), \qquad f(x) = \operatorname{ch}(Cx), \qquad f(x) \equiv 0,$$

где C — произвольная постоянная.

6. $\boldsymbol{f(y+x)+f(y-x)=af(x)f(y)}$**.**

Решения:

$$f(x) = \frac{2}{a}\cos(Cx), \qquad f(x) = \frac{2}{a}\operatorname{ch}(Cx), \qquad f(x) \equiv 0,$$

где C — произвольная постоянная.

7. $\boldsymbol{f(x+y)=a^{xy}f(x)f(y), \qquad a>0}$**.**

Решение:

$$f(x) = e^{Cx}a^{x^2/2},$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, функция $f(x) \equiv 0$ также является решением данного уравнения.

8. $\boldsymbol{f(x+y)=f(x)+f(y)-af(x)f(y), \qquad a\neq 0}$**.**

При $a=1$ это уравнение встречается в теории вероятностей.

Решение:

$$f(x) = \frac{1}{a}\big(1 - e^{-\beta x}\big),$$

где β — произвольная постоянная. Кроме того, функция $f(x) \equiv 0$ также является решением данного уравнения.

9. $\boldsymbol{f(x+y)f(x-y)=f^2(x)}$**.**

Уравнение Лобачевского.

Решение:

$$f(x) = C_1\exp(C_2x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

10. $\boldsymbol{f(x+y+a)f(x-y+a) = f^2(x) + f^2(y) - b^2}$**.**

Решения:

$$f(x) = \pm b, \qquad f(x) = \pm b\cos\frac{n\pi x}{a},$$

где $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Для тригонометрических решений a должно быть отлично от нуля.

11. $\boldsymbol{f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y)}$**.**

Решение:

$$f(x) = C_1\sin(C_2x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

12. $\boldsymbol{f(x+y+a)f(x-y+a) = f^2(x) - f^2(y)}$**.**

Решения:

$$f(x) = 0, \qquad f(x) = C\cos\frac{\pi nx}{a}, \qquad f(x) = C\sin\frac{\pi nx}{a},$$

где C — произвольная постоянная и $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Для тригонометрических решений a должно быть отлично от нуля.

13. $\boldsymbol{(x-y)f(x)f(y) = xf(x) - yf(y)}$**.**

Решения:

$$f(x) \equiv 1, \qquad f(x) = \frac{C}{x+C},$$

где C — произвольная постоянная.

14. $\boldsymbol{f(xy) = af(x)f(y)}$**.**

Степенное уравнение Коши (при $a = 1$).

Решение (Фихтенгольц, 1969):

$$f(x) = \frac{1}{a}|x|^C,$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, функция $f(x) \equiv 0$ также является решением данного уравнения.

15. $\boldsymbol{f(xy) = [f(x)]^y}$**.**

Решение:

$$f(x) = e^{Cx},$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, функция $f(x) \equiv 0$ также является решением данного уравнения при $y > 0$.

16. $\boldsymbol{f\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big) = f(x)f(y)}$**.**

Уравнение Гаусса.

Решение:

$$f(x) = \exp(Cx^2),$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, функция $f(x) \equiv 0$ также является решением данного уравнения.

17. $\boldsymbol{\left(\dfrac{f^2(x)+f^2(y)}{2}\right)^{1/2} = f\left(\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^{1/2}\right).}$

Решение:

$$f(x) = (ax^2+b)^{1/2},$$

где a и b — произвольные положительные постоянные.

18. $\boldsymbol{f\bigl((x^k+y^k)^{1/k}\bigr) = af(x)f(y),}$ **$\boldsymbol{k}$ — любое число.**

Решение:

$$f(x) = \frac{1}{a}\exp(Cx^k),$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, функция $f(x) \equiv 0$ также является решением данного уравнения.

19. $\boldsymbol{\left(\dfrac{f^k(x)+f^k(y)}{2}\right)^{1/k} = f\left(\left(\dfrac{x^k+y^k}{2}\right)^{1/k}\right),}$ **$\boldsymbol{k}$ — любое число.**

Решение:

$$f(x) = (ax^k+b)^{1/k},$$

где a и b — произвольные положительные постоянные.

20. $\boldsymbol{f\bigl(x+y\sqrt{f(x)}\,\bigr) + f\bigl(x-y\sqrt{f(x)}\,\bigr) = 2f(x)f(y).}$

Решения:

$$f(x) \equiv 0, \qquad f(x) = 1 + Cx^2,$$

где C — произвольная постоянная.

21. $\boldsymbol{f\Bigl(g^{-1}\bigl(g(x)+g(y)\bigr)\Bigr) = af(x)f(y).}$

Обобщенное уравнение Гаусса. Здесь $g(x)$ — произвольная монотонная функция, а $g^{-1}(x)$ — функция, обратная к $g(x)$.

Решение:

$$f(x) = \frac{1}{a}\exp\bigl[Cg(x)\bigr],$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, функция $f(x) \equiv 0$ также является решением данного уравнения.

22. $\boldsymbol{M\bigl(f(x), f(y)\bigr) = f\bigl(M(x,y)\bigr).}$

Здесь $M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\dfrac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right)$ — квазиарифметическое среднее для непрерывной строго монотонной функции φ, а φ^{-1} — функция, обратная к φ.

Решение:

$$f(x) = \varphi^{-1}\bigl(a\varphi(x) + b\bigr),$$

где a и b — произвольные постоянные.

23. $\boldsymbol{\Phi\bigl(x, y, f(x), f(x+y), f(x-y)\bigr) = 0.}$

1°. Полагая в уравнении $y = 0$, имеем

$$\Phi\bigl(x, 0, f(x), f(x), f(x)\bigr) = 0. \tag{1}$$

Если левая часть (1) тождественно не обращается в нуль для всех $f(x)$, то это уравнение можно разрешить относительно $f(x)$. После этого полученную функцию $f(x)$ следует подставить в исходное уравнение и найти условия, при которых эта функция является его решением.

Далее будем считать, что левая часть соотношения (1) тождественно равна нулю для всех $f(x)$.

2°. В исходное уравнение последовательно подставим следующие три однопараметрические пары аргументов:

$$x = 0, \quad y = t; \qquad x = t, \quad y = 2t; \qquad x = t, \quad y = -2t.$$

В результате получим систему алгебраических (трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} &\Phi\bigl(0, t, a, f(t), f(-t)\bigr) = 0,\\ &\Phi\bigl(t, 2t, f(t), f(3t), f(-t)\bigr) = 0,\\ &\Phi\bigl(t, -2t, f(t), f(-t), f(3t)\bigr) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

для неизвестных величин $f(t)$, $f(-t)$, $f(3t)$, где $a = f(0)$. Разрешив систему (2) относительно $f(t)$ (или относительно к $f(-t)$ или $f(3x)$) находим допустимое решение, которое для проверки необходимо подставить в исходное уравнение.

3°. В некоторых случаях можно использовать следующий прием. В исходном уравнении последовательно полагаем

$$x = 0, \quad y = t; \qquad x = t + a, \quad y = a; \qquad x = a, \quad y = t + a, \tag{3}$$

где a — свободный параметр. Получим систему алгебраических (трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} &\Phi\bigl(0, t, f(0), f(t), f(-t)\bigr) = 0,\\ &\Phi\bigl(t + a, a, f(t + a), f(t + 2a), f(t)\bigr) = 0,\\ &\Phi\bigl(a, t + a, f(a), f(t + 2a), f(-t)\bigr) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначив $f(0) = C_1$ и $f(a) = C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, исключим $f(t)$ и $f(t + 2a)$ из системы (4) (предполагается, что это возможно). В результате приходим к возвратному уравнению

$$\Psi\bigl(f(t + a), f(-t), t, a, C_1, C_2\bigr) = 0. \tag{5}$$

Чтобы найти решение уравнения (5), заменим t на $-t-a$. Имеем

$$\Psi\bigl(f(-t), f(t+a), -t-a, a, C_1, C_2\bigr) = 0. \qquad (6)$$

В итоге, исключив $f(t+a)$ из уравнений (5) и (6), получим алгебраическое (трансцендентное) уравнение для $f(-t)$.

Замечание 9.5. *При анализе иногда удобно выбрать подходящие значения параметра a для упрощения системы (4).*

24. $\boldsymbol{\Phi\bigl(x, y, f(x), f(y), f(x+y), f(x-y)\bigr) = 0.}$

Полагая в уравнении $y=0$, имеем

$$\Phi\bigl(x, 0, f(x), a, f(x), f(x)\bigr) = 0, \qquad (1)$$

где $a = f(0)$. Если левая часть (1) тождественно не обращается в нуль для всех $f(x)$, то это уравнение можно разрешить относительно $f(x)$. После этого полученную функцию $f(x)$ следует подставить в исходное уравнение и найти возможные значения параметра a, при которых эта функция является его решением (существуют случаи, когда нет решений).

2°. Далее будем считать, что левая часть соотношения (1) тождественно равна нулю для всех $f(x)$ и a. В исходное уравнение последовательно подставим следующие четыре однопараметрические пары аргументов:

$$x=0, \quad y=t; \qquad x=t, \quad y=2t; \qquad x=2t, \quad y=t; \qquad x=t, \quad y=t.$$

В результате получим систему алгебраических (трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned}
&\Phi\bigl(0, t, a, f(t), f(t), f(-t)\bigr) = 0,\\
&\Phi\bigl(t, 2t, f(t), f(2t), f(3t), f(-t)\bigr) = 0,\\
&\Phi\bigl(2t, t, f(2t), f(t), f(3t), f(t)\bigr) = 0,\\
&\Phi\bigl(t, t, f(t), f(t), f(2t), a\bigr) = 0,
\end{aligned} \qquad (2)$$

где $a = f(0)$. Исключив величины $f(-t)$, $f(2t)$, $f(3t)$ из системы (2), приходим к алгебраическому (трансцендентному) уравнению для $f(t)$. Полученное указанным способом решение следует подставить в исходное уравнение для проверки.

▶ Уравнения, содержащие несколько неизвестных функций одного аргумента.

25. $\boldsymbol{f(x)g(y) = h(x+y).}$

Здесь $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — искомые функции.

Решение:

$$f(x) = C_1\exp(C_3 x), \qquad g(y) = C_2\exp(C_3 y), \qquad h(z) = C_1C_2\exp(C_3 z),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

26. $\boldsymbol{f(x)g(y)+h(y)=f(x+y)}$.

Здесь $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — искомые функции.

Решения:

$$f(x)=C_1x+C_2,\quad g(x)=1,\quad h(x)=C_1x \qquad \text{(первое решение)};$$
$$f(x)=C_1e^{ax}+C_2,\quad g(x)=e^{ax},\quad h(x)=C_2(1-e^{ax}) \qquad \text{(второе решение)},$$

где a, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

27. $\boldsymbol{f_1(x)g_1(y)+f_2(x)g_2(y)+f_3(x)g_3(y)=0}$.

Трехчленное билинейное функциональное уравнение.

Два решения:

$$f_1(x)=C_1f_3(x),\quad f_2(x)=C_2f_3(x),\quad g_3(y)=-C_1g_1(y)-C_2g_2(y);$$
$$g_1(y)=C_1g_3(y),\quad g_2(y)=C_2g_3(y),\quad f_3(x)=-C_1f_1(x)-C_2f_2(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Функции в правой части решений задаются произвольным образом.

28. $\boldsymbol{f_1(x)g_1(y)+f_2(x)g_2(y)+f_3(x)g_3(y)+f_4(x)g_4(y)=0}$.

Билинейное функциональное уравнение. Функциональные уравнения этого типа часто возникают при построении точных решений нелинейных уравнений с частными производными методами обобщенного разделения переменных.

1°. Решение:

$$f_1(x)=C_1f_3(x)+C_2f_4(x),\qquad f_2(x)=C_3f_3(x)+C_4f_4(x),$$
$$g_3(y)=-C_1g_1(y)-C_3g_2(y),\quad g_4(y)=-C_2g_1(y)-C_4g_2(y),$$

содержащее четыре произвольных постоянных C_1, …, C_4. Функции в правой части решения задаются произвольным образом.

2°. Рассматриваемое уравнение также имеет два других решения:

$$f_1(x)=C_1f_4(x),\qquad f_2(x)=C_2f_4(x),\qquad f_3(x)=C_3f_4(x),$$
$$g_4(y)=-C_1g_1(y)-C_2g_2(y)-C_3g_3(y);$$
$$g_1(y)=C_1g_4(y),\qquad g_2(y)=C_2g_4(y),\qquad g_3(y)=C_3g_4(y),$$
$$f_4(x)=-C_1f_1(x)-C_2f_2(x)-C_3f_3(x),$$

содержащих три произвольных постоянных C_1, C_2, C_3. Функции в правой части решений задаются произвольным образом.

29. $\boldsymbol{f_1(x)g_1(y)+f_2(x)g_2(y)+\dots+f_k(x)g_k(y)=0}$.

Билинейное функциональное уравнение общего вида. Функциональные уравнения этого типа часто возникают при построении точных решений нелинейных уравнений с частными производными методами обобщенного разделения переменных. В уравнении в зависимости от поставленной цели некоторые функции f_i и g_i задаются, а остальные ищутся.

1°. *Принцип расщепления* (*метод расщепления*). Все решения билинейного функционального уравнения могут быть представлены в виде совокупности линейных комбинаций величин $f_1, \ldots, f_n$ и линейных комбинаций величин $g_1, \ldots, g_n$:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_{ir} f_i = 0, \quad r = 1, \ldots, l; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_{is} g_i = 0, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

где $1 \leqslant l \leqslant k-1$ и $1 \leqslant m \leqslant k-1$. Константы α_{ir} и β_{is} в (1)–(2) выбираются так, чтобы билинейное функциональное уравнение удовлетворялось тождественно (это всегда можно сделать).

Вырожденные случаи, когда одна или несколько функций f_k и/или g_k тождественно обращаются в нуль, необходимо рассматривать отдельно, используя для функций линейные соотношения вида (1)–(2).

2°. На практике для получения решений рассматриваемого билинейного функционального уравнения удобно поступать следующим образом. Сначала из множества функций $f_1, \ldots, f_k$ произвольно выбираем несколько первых величин $f_1, \ldots, f_p$ $(1 \leqslant p \leqslant k-1)$, а затем представляем их в виде линейных комбинаций оставшихся величин этого множества $f_{p+1}, \ldots, f_k$ (таким образом задаем первую группу соотношений (1)). Заменив в билинейном уравнении выбранные величины $f_1, \ldots, f_p$ линейными комбинациями оставшихся величин, после объединения членов, пропорциональных f_q $(q = p+1, \ldots, k)$, приходим к соотношению вида

$$\sum_{q=p+1}^{k} \Omega_q f_q = 0, \qquad \Omega_q = \sum_{j=1}^{k} c_{qj} g_j,$$

где c_{qj} — некоторые константы. Приравнивая нулю функциональные коэффициенты Ω_q $(q = p+1, \ldots, k)$, получим вторую группу соотношений (2).

Задавая различные значения p, находим различные решения рассматриваемого билинейного функционального уравнения (всего можно получить $k-1$ решений).

Замечание 9.6. *В силу симметрии билинейного функционального уравнения относительно перестановки функций $f_i \rightleftarrows g_i$ на первом этапе можно выбирать элементы из множества функций $g_1, \ldots, g_n$.*

3°. Для иллюстрации процедуры, описанной в п. 2°, рассмотрим билинейное функциональное уравнение, содержащее пять слагаемых:

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 + f_4 g_4 + f_5 g_5 = 0, \tag{3}$$

где $f_i = f_i(x)$ и $g_i = g_i(y)$. Будем считать, что первые три функциональных коэффициента f_1, f_2, f_3 являются линейными комбинациями двух последних коэффициентов f_4 и f_5:

$$f_1 = A_1 f_4 + B_1 f_5, \quad f_2 = A_2 f_4 + B_2 f_5, \quad f_3 = A_3 f_4 + B_3 f_5, \tag{4}$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Подставим выражения (4) в (3) и соберем члены, пропорциональные f_4 и f_5:

$$(A_1 g_1 + A_2 g_2 + A_3 g_3 + g_4) f_4 + (B_1 g_1 + B_2 g_2 + B_3 g_3 + g_5) f_5 = 0.$$

Приравнивая выражения в скобках нулю, получим

$$\begin{aligned} g_4 &= -A_1 g_1 - A_2 g_2 - A_3 g_3, \\ g_5 &= -B_1 g_1 - B_2 g_2 - B_3 g_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Формулы (4), (5) дают одно из решений уравнения (3), причем функции в левых частях этих соотношений считаются произвольными. Аналогичным образом находятся и другие решения.

4°. Подробности использования принципа расщепления для решения билинейных функциональных уравнений и связанных с ними функционально-дифференциальных уравнений (возникающих при построении решений нелинейных УрЧП) см. в книгах Полянина, Зайцева, Журова (2005), Polyanin & Zaitsev (2012), Полянина & Журова (2020).

30. $f(x) + g(y) = Q(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

Здесь одна из двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ задана, а другая считается неизвестной; также задана одна из функций $g(y)$ и $\psi(y)$, а другая неизвестна; функция $Q(z)$ считается неизвестной. (В подобных функциональных уравнениях со сложным аргументом предполагается, что $\varphi(x) \not\equiv \text{const}$ и $\psi(y) \not\equiv \text{const}$.)

Решение:

$$f(x) = A\varphi(x) + B, \quad g(y) = A\psi(y) - B + C, \quad Q(z) = Az + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

31. $f(x)g(y) = Q(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

Здесь одна из двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ задана, а другая считается неизвестной; также задана одна из функций $g(y)$ и $\psi(y)$, а другая неизвестна; функция $Q(z)$ считается неизвестной. (В подобных функциональных уравнениях со сложным аргументом предполагается, что $\varphi(x) \not\equiv \text{const}$ и $\psi(y) \not\equiv \text{const}$.)

Решение:

$$f(x) = Ae^{\lambda\varphi(x)}, \quad g(y) = Be^{\lambda\psi(y)}, \quad Q(z) = ABe^{\lambda z},$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

32. $\boldsymbol{f(x)+g(y)=Q(z)}$, **где** $\boldsymbol{z=\varphi(x)\psi(y)}$**.**

Здесь одна из двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ задана, а другая считается неизвестной; также задана одна из функций $g(y)$ и $\psi(y)$, а другая неизвестна; функция $Q(z)$ считается неизвестной. (В подобных функциональных уравнениях со сложным аргументом предполагается, что $\varphi(x)\not\equiv\text{const}$ и $\psi(y)\not\equiv\text{const}$.)

Решение:

$$f(x)=A\ln\varphi(x)+B,\quad g(y)=A\ln\psi(y)-B+C,\quad Q(z)=A\ln z+C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

33. $\boldsymbol{f(y)+g(x)+h(x)Q(z)+R(z)=0}$, **где** $\boldsymbol{z=\varphi(x)+\psi(y)}$**.**

Уравнения этого типа возникают при построении точных решений некоторых нелинейных УрЧП методом функционального разделения переменных, см. Полянин, Зайцев, Журов (2005) и Полянин & Журов (2020).

1°. Решение:

$$\begin{aligned}
f&=-\tfrac{1}{2}A_1A_4\psi^2+(A_1B_1+A_2+A_4B_3)\psi-B_2-B_1B_3-B_4,\\
g&=\tfrac{1}{2}A_1A_4\varphi^2+(A_1B_1+A_2)\varphi+B_2,\\
h&=A_4\varphi+B_1,\\
Q&=-A_1z+B_3,\\
R&=\tfrac{1}{2}A_1A_4z^2-(A_2+A_4B_3)z+B_4,
\end{aligned}$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные, $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(y)$ — произвольные функции.

2°. Решение:

$$\begin{aligned}
f&=-B_1B_3e^{-A_3\psi}+\Big(A_2-\frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\psi-B_2-B_4-\frac{A_1A_4}{A_3^2},\\
g&=\frac{A_1B_1}{A_3}e^{A_3\varphi}+\Big(A_2-\frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\varphi+B_2,\\
h&=B_1e^{A_3\varphi}-\frac{A_4}{A_3},\\
Q&=B_3e^{-A_3z}-\frac{A_1}{A_3},\\
R&=\frac{A_4B_3}{A_3}e^{-A_3z}+\Big(\frac{A_1A_4}{A_3}-A_2\Big)z+B_4,
\end{aligned}$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные, $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(y)$ — произвольные функции.

3°. Кроме того, рассматриваемое функциональное уравнение имеет два вырожденных решения (с меньшим числом произвольных постоянных):

$$f=A_1\psi+B_1,\quad g=A_1\varphi+B_2,\quad h=A_2,\quad R=-A_1z-A_2Q-B_1-B_2,$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$, $Q = Q(z)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, и

$$f = A_1\psi + B_1, \quad g = A_1\varphi + A_2 h + B_2, \quad Q = -A_2, \quad R = -A_1 z - B_1 - B_2,$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$, $h = h(x)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

34. $\boldsymbol{f(y) + g(x)Q(z) + h(x)R(z) = 0,}$ **где** $\boldsymbol{z = \varphi(x) + \psi(y).}$

Уравнения этого типа возникают при построении точных решений некоторых нелинейных УрЧП методом функционального разделения переменных, см. Полянин, Зайцев, Журов (2005) и Полянин & Журов (2020).

1°. Решение:

$$\begin{aligned} g(x) &= A_2 B_1 e^{k_1\varphi} + A_2 B_2 e^{k_2\varphi},\\ h(x) &= (k_1 - A_1)B_1 e^{k_1\varphi} + (k_2 - A_1)B_2 e^{k_2\varphi},\\ Q(z) &= A_3 B_3 e^{-k_1 z} + A_3 B_4 e^{-k_2 z},\\ R(z) &= (k_1 - A_1)B_3 e^{-k_1 z} + (k_2 - A_1)B_4 e^{-k_2 z}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $B_1, \ldots, B_4$ — произвольные постоянные, k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$(k - A_1)(k - A_4) - A_2 A_3 = 0.$$

В случае кратного корня $k_1 = k_2$ члены $e^{k_2\varphi}$ и $e^{-k_2 z}$ в (1) надо заменить соответственно на $\varphi e^{k_1\varphi}$ и $z e^{-k_1 z}$. В случае комплексных корней следует взять действительную часть в решении (1).

Функция $f(y)$ определяется по формулам

$$\begin{aligned} B_2 = B_4 = 0 &\implies f(y) = [A_2 A_3 + (k_1 - A_1)^2] B_1 B_3 e^{-k_1\psi},\\ B_1 = B_3 = 0 &\implies f(y) = [A_2 A_3 + (k_2 - A_1)^2] B_2 B_4 e^{-k_2\psi},\\ A_1 = 0 &\implies f(y) = (A_2 A_3 + k_1^2) B_1 B_3 e^{-k_1\psi} + (A_2 A_3 + k_2^2) B_2 B_4 e^{-k_2\psi}. \end{aligned} \tag{2}$$

В формулы (1) и (2) входят две произвольные функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$.

2°. Кроме того, рассматриваемое функциональное уравнение имеет два вырожденных решения (с меньшим числом произвольных постоянных):

$$f = B_1 B_2 e^{A_1\psi}, \quad g = A_2 B_1 e^{-A_1\varphi}, \quad h = B_1 e^{-A_1\varphi}, \quad R = -B_2 e^{A_1 z} - A_2 Q,$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$, $Q = Q(z)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, и

$$f = B_1 B_2 e^{A_1\psi}, \quad h = -B_1 e^{-A_1\varphi} - A_2 g, \quad Q = A_2 B_2 e^{A_1 z}, \quad R = B_2 e^{A_1 z},$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$, $g = g(x)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

► **Уравнения, содержащие неизвестные функции двух аргументов.**

35. $\boldsymbol{f(x,y)f(y,z) = f(x,z).}$

Второе уравнение Кантора.

Решение (Мат. энциклопедия, 1985):

$$f(x,y) = \Phi(y)/\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция.

36. $\boldsymbol{f(x,y)f(u,v) - f(x,u)f(y,v) + f(x,v)f(y,u) = 0.}$

Решение:

$$f(x,y) = \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции.

37. $\boldsymbol{f\bigl(f(x,y),z\bigr) = f\bigl(f(x,z),f(y,z)\bigr).}$

Решение:

$$f(x,y) = g^{-1}\bigl(g(x) + g(y)\bigr),$$

где $g(x)$ — произвольная непрерывная строго возрастающая функция.

► *Большинство приведенных в этой главе решений разностных и функциональных уравнений были взяты из справочника Polyanin & Manzhirov (2007). Ссылки на эту книгу в тексте, как правило, опускались. Основные методы решения таких уравнений излагаются в статьях и книгах, которые указаны ниже в списке литературы.*

Литература к главе 9

Ацель Я. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений. *Успехи мат. наук*, 1956, т. 11, № 3(69), с. 3–68.

Дёч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.*

Майстренко Ю. Л., Шарковский А. Н. О понижении числа преобразований аргумента в функциональных и дифференциально-функциональных уравнениях В сб.: *Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. Киев: Институт математики АН УССР, 1977, с. 57–70.

Математическая энциклопедия, т. 5 (гл. ред. Виноградов И. М.). М.: Советская энциклопедия, 1985, с. 699–705.

Миролюбов А. А., Солдатов М. А. *Линейные однородные разностные уравнения*. М.: Наука, 1981.

Миролюбов А. А., Солдатов М. А. *Линейные неоднородные разностные уравнения*. М.: Наука, 1986.

Нечепуренко М. И. *Итерации вещественных функций и функциональные уравнения*. Новосибирск: Ин-т вычисл. математики и мат. геофизики СО РАН, 1997.

Пелюх Г. П., Шарковский А. Н. *Введение в теорию функциональных уравнений*. Киев: Наукова Думка, 1974.

Полянин А. Д., Журов А. И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики.* М.: Институт проблем механики РАН, 2020.

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.* М.: Физматлит, 2005.

Полянин А. Д., Манжиров А. В. *Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения* (*Приложение. Некоторые функциональные уравнения*). М.: Факториал, 1998.

Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1.* М.: Наука, 1969, с. 157–160.

Aczél J. *Functional Equations: History, Applications and Theory*. Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

Aczél J. *Lectures on Functional Equations and Their Applications*. New York: Dover Publ., 2006.

Aczél J., Dhombres J. *Functional Equations in Several Variables*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

Agarwal R. P. *Difference Equations and Inequalities, 2nd ed.* New York: Marcel Dekker, 2000.

Belitskii G. R., Tkachenko V. *One-Dimensional Functional Equations*. Boston: Birkhäuser Verlag, 2003.

Castillo E., Ruiz-Cobo R. *Functional Equations in Science and Engineering*. New York: Marcel Dekker, 1992.

Czerwik S. *Functional Equations and Inequalities in Several Variables*. Singapore: World Scientific Publ., 2002.

Elaydi S. *An Introduction to Difference Equations, 3rd ed.* New York: Springer, 2005.

Goldberg S. *Introduction to Difference Equations*. New York: Dover Publications, 1986.

Kuczma M. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*. Warsaw: Polish Scientific Publ., 1985.

Kuczma M. *Functional Equations in a Single Variable*. Warsaw: Polish Scientific Publ., 1968.

Kuczma M., Choczewski B., Ger R. *Iterative Functional Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Laitochová J. Group iteration for Abel's functional equation. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2007, Vol. 1, No. 1, pp. 95–102.

Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists* (Chapters 17 and T12). Boca Raton–London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. (Sections 29.5 and 30.4)*. Boca Raton–London: CRC Press, 2012.

Sahoo P. K., Kannappan P. *Introduction to Functional Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2017.

Small C. G. *Functional Equation and How to Solve Them*. New York: Springer, 2007.

10. Обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения

► **Предварительные замечания.** Обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения являются математическими уравнениями, содержащими неизвестную функцию одной переменной с разными аргументами и производные этой функции.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием являются простейшими обыкновенными функционально-дифференциальными уравнениями, в которые входят величины $u(t)$ и $u(t-\tau)$ и их производные, где t — независимая переменная, $u(t)$ — искомая функция, $\tau > 0$ — время запаздывания.

Под точными решениями обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений понимаются следующие решения:

- решения, которые выражаются через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, когда рассматриваемое уравнение зависит от произвольных функций), и неопределенные интегралы,
- решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем таких уравнений.

Отметим, что одно функционально-дифференциальное уравнение может содержать несколько неизвестных функций.

В данной главе описаны точные решения линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и некоторых других обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений.

10.1. Линейные обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения первого порядка

10.1.1. ОДУ с постоянными запаздываниями

1. $\boldsymbol{u'_t = w, \quad w = u(t-\tau).}$

Частный случай уравнения 10.1.1.2. Решение задачи Коши для рассматриваемого линейного ОДУ с запаздыванием с начальным условием

$$u = a \quad \text{при} \quad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$$

может быть представлено в виде

$$u = a \exp_d(t - t_0, \tau), \qquad \exp_d(t, \tau) \equiv \sum_{k=0}^{[t/\tau]+1} \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!},$$

где $\exp_d(t, \tau)$ — экспонента с запаздыванием, а символ $[A]$ обозначает целую часть числа A.

2. $\boldsymbol{u'_t = au + bw, \qquad w = u(t - \tau).}$

1°. Это уравнение имеет решения экспоненциального вида

$$u = \exp(\lambda t), \tag{1}$$

где λ — корни трансцендентного уравнения

$$\lambda - a - b e^{-\lambda\tau} = 0. \tag{2}$$

2°. Показатель λ экспоненциального решения (1) характеристического уравнения (2) можно представить в виде

$$\lambda = a + \frac{1}{\tau} W(x), \quad x = b\tau e^{-a\tau}.$$

где $W = W(z)$ — *функция Ламберта* (эта функция многозначна), которая для комплексного аргумента $z = x + iy$ определяется неявно с помощью трансцендентного уравнения

$$We^W = z.$$

На действительной оси $z = x$ функция $W(x)$ однозначна при $x \geqslant 0$ и двузначна на отрезке $(-1/e, 0)$. Для $x \geqslant -1/e$ и $W \geqslant -1$ однозначную ветвь функции Ламберта, которую принято называть главной ветвью, будем обозначать $W_{\mathrm{p}}(x)$; вторую ветвь этой функции, характеризующуюся неравенствами $-1/e \leqslant x < 0$ и $W \leqslant -1$, обозначаем $W_{\mathrm{n}}(x)$. В параметрической форме действительные ветви $W_{\mathrm{p}}(x)$ и $W_{\mathrm{n}}(x)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} &x = se^s, \quad W_{\mathrm{p}} = s, \quad -1 \leqslant s < +\infty; \\ &x = se^s, \quad W_{\mathrm{n}} = s, \quad -\infty < s \leqslant -1. \end{aligned}$$

Имеет место разложение в ряд Тейлора, которое сходится при $|x| < 1/e$:

$$W_{\mathrm{p}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{4}x^5 - \cdots .$$

Справедливы асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{p}}(x) &= \zeta_1 - \ln\zeta_1 + \frac{\ln\zeta_1}{\zeta_1} + \frac{\ln^2\zeta_1}{2\zeta_1^2} - \frac{\ln\zeta_1}{\zeta_1^2} + O\Big(\frac{\ln^3\zeta_1}{\zeta_1^3}\Big) \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \\ W_{\mathrm{n}}(x) &= \zeta_2 - \ln\zeta_2 - \frac{\ln\zeta_2}{\zeta_2} - \frac{\ln^2\zeta_2}{2\zeta_2^2} - \frac{\ln\zeta_2}{\zeta_2^2} + O\Big(\frac{\ln^3\zeta_2}{\zeta_2^3}\Big) \quad \text{при} \quad x \to -0, \end{aligned}$$

где $\zeta_1 = \ln x$ и $\zeta_2 = \ln(-1/x)$.

В комплексной плоскости $z=x+iy$ ($i^2=-1$) функция Ламберта $W(z)$ имеет бесконечное число ветвей $W_m = W_m(z)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Справедлива асимптотическая формула

$$W_m = \ln z - \ln\ln z + 2\pi i m + (1+i)\,o(1) \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

3°. *Теорема Хейса.* Все корни уравнения характеристического уравнения (2) с действительными коэффициентами a и b ($\tau > 0$) имеют отрицательные действительные части ($\operatorname{Re}\lambda < 0$) тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие три неравенства:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad a\tau < 1,\\ &\text{(ii)} \quad a+b < 0,\\ &\text{(iii)} \quad b\tau + \sqrt{(a\tau)^2+\mu^2} > 0, \end{aligned}$$

где μ — корень трансцендентного уравнения $\mu = a\tau\operatorname{tg}\mu$, удовлетворяющий условию $0 < \mu < \pi$. При $a = 0$ следует положить $\mu = \pi/2$.

4°. Пусть

$$b = k(-1)^{n+1}e^{a\tau}, \quad k = \frac{(2n+1)\pi}{2\tau}, \quad n = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$$

Тогда рассматриваемое линейное ОДУ с запаздыванием имеет решения вида

$$u = e^{at}[C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt)],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. При $a = 0$ эти решения являются периодическими.

5°. Решение задачи Коши для рассматриваемого линейного однородного ОДУ с запаздыванием с начальным условием общего вида

$$u = \varphi(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0,$$

может быть представлено в замкнутой форме (см. Azizbekov & Khusainov, 2012):

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{a(t+\tau)}\exp_{\mathrm{d}}(\sigma t, \sigma\tau)\varphi(-\tau) + \\ &\quad + \int_{-\tau}^{0} e^{a(t-s)}\exp_{\mathrm{d}}(\sigma(t-\tau-s), \sigma\tau)[\varphi'_s(s) - a\varphi(s)]\,ds, \quad \sigma = e^{-a\tau}b, \end{aligned}$$

где $\exp_d(t,\tau)$ — экспонента с запаздыванием (см. уравнение 10.1.1.1).

3. $u'_t = au + bw + c, \quad w = u(t-\tau).$

1°. При $b \neq -a$ подстановка $u = v - \frac{c}{a+b}$ приводит к линейному однородному ОДУ с запаздыванием вида 10.1.1.2.

2°. При $b = -a$ для получения линейного однородного ОДУ с запаздыванием следует использовать замену $u = v + kt$, где $k = \frac{c}{1-a\tau}$.

4. $\boldsymbol{u'_t = au + bw + f(t), \quad w = u(t-\tau).}$

Решение задачи Коши для рассматриваемого линейного ОДУ с запаздыванием с однородным начальным условием

$$u = 0 \quad \text{при} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0$$

может быть представлено в следующем виде (Azizbekov & Khusainov, 2012):

$$u(t) = \int_0^t e^{a(t-s)} \exp_{\mathrm{d}}(\sigma(t-s), \sigma\tau) f(s)\, ds, \quad \sigma = e^{-a\tau} b,$$

где $\exp_d(t,\tau)$ — экспонента с запаздыванием, определенная в 10.1.1.1.

5. $\boldsymbol{u'_t = a(t)u + b(t)w + c(t), \quad w = u(t-\tau).}$

Частный случай уравнения 10.2.1.8 при $f(t,w) = a(t)$ и $g(t,w) = b(t)w + c(t)$.

10.1.2. ОДУ типа пантографа с пропорциональными аргументами

1. $\boldsymbol{u'_t = w, \quad w = u(pt).}$

Решение, удовлетворяющее начальному условию $u(0) = k$, в виде степенного ряда:

$$u(t) = k \exp_s(t,p), \quad \exp_s(t,p) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^n}{n!},$$

где $\exp_s(t,p)$ — экспонента с растяжением. При $0 < p < 1$ степенной ряд имеет бесконечный радиус сходимости.

2. $\boldsymbol{u'_t = au + bw, \quad w = u(pt).}$

Это уравнение при $p > 0$ и $p \neq 1$ называется *уравнением пантографа*.

Общее решение в виде степенного ряда:

$$u(t) = k\biggl(1 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n t^n\biggr), \quad s_n = \frac{1}{n!}\prod_{m=0}^{n-1}(a + bp^m),$$

где k — произвольная постоянная. Приведенное решение удовлетворяет начальному условию $u(0) = k$. При $0 < p < 1$ степенной ряд имеет бесконечный радиус сходимости. В этом случае при $a, b \geqslant 0$ имеют место неравенства $a^n < s_n < (a+b)^n$ и $e^{ax} < u < e^{(a+b)x}$.

3. $\boldsymbol{u'_t = au + bw + c, \quad w = u(pt).}$

Неоднородное уравнение пантографа.

1°. При $b \neq -a$ подстановка $u = v - \frac{c}{a+b}$ приводит к уравнению пантографа вида 10.1.2.2.

2°. Частное решение в виде степенного ряда:

$$u_*(t) = c\left(t + \sum_{n=2}^{\infty} s_n t^n\right), \qquad s_n = \frac{1}{n!}\prod_{m=1}^{n-1}(a + bp^m).$$

3°. Общее решение представляет собой сумму частного решения из п. 2° и общего решения однородного уравнения 10.1.2.2.

4. $\boldsymbol{u'_t = au + bw + (\lambda - a)e^{\lambda t} - be^{\lambda pt}, \quad w = u(pt); \quad u(0) = 1.}$

Решение: $u(t) = e^{\lambda t}$.

5. $\boldsymbol{u'_t = au + bw + \cos t - a\sin t - b\sin(pt), \quad w = u(pt); \quad u(0) = 0.}$

Решение: $u(t) = \sin t$ (Brunner, Huang, Xie, 2010).

6. $\boldsymbol{u'_t = au + be^{\lambda t}w, \quad w = u(pt); \quad u(0) = c.}$

Пусть $\lambda = (a+b)(1-p)$. Тогда решение имеет вид $u(t) = ce^{(a+b)t}$.

7. $\boldsymbol{u'_t = au + bw_1 + cw_2, \quad w_1 = u(pt), \quad w_2 = u(qt).}$

Общее решение в виде степенного ряда (Patade & Bhalekar, 2017):

$$u = k\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n t^n\right), \qquad s_n = \frac{1}{n!}\prod_{m=0}^{n-1}(a + bp^m + cq^m),$$

где k — произвольная постоянная. Приведенное решение удовлетворяет начальному условию $u(0) = k$. При $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ степенной ряд имеет бесконечный радиус сходимости. В этом случае при $a, b, c \geqslant 0$ имеют место неравенства $a^n < s_n < (a+b+c)^n$ и $e^{ax} < u < e^{(a+b+c)x}$.

10.1.3. Другие обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения

1. $\boldsymbol{u'(t) = au(-t).}$

Функционально-дифференциальное уравнение Бэббиджа. Обозначим $u_1 = u(t)$ и $u_2 = u(-t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на $-t$. В результате приходим к линейной системе ОДУ:

$$u'_1 = au_2, \qquad u'_2 = -au_1.$$

Исключив u_2 из этой системы, приходим к линейному ОДУ второго порядка $u''_1 = -a^2 u_1$, общее решение которого имеет вид $u_1 = C_1\cos(at) + C_2\sin(at)$, где

C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставив полученную функцию $u = u_1$ в исходное функциональное ОДУ, находим его решение

$$u = C[\cos(at) + \sin(at)] = C\sqrt{2}\sin\bigl(at + \tfrac{\pi}{4}\bigr),$$

где C — произвольная постоянная.

2. $\boldsymbol{u'(t) = au(b - t)}$**.**

Это обобщение предыдущего уравнения.

Обозначим $u_1 = u(t)$ и $u_2 = u(b - t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на $b - t$. В результате приходим к линейной системе ОДУ:

$$u_1' = au_2, \qquad u_2' = -au_1.$$

Интегрируя эту систему и подставляя полученную функцию $u = u_1$ в исходное функциональное ОДУ, находим его решение

$$u = C\cos(ab)\cos(at) + C[1 + \sin(ab)]\sin(at),$$

где C — произвольная постоянная.

3. $\boldsymbol{u'(t) = f(t)u(t) + g(t)u(b - t) + h(t)}$**.**

Специальный случай функционально-дифференциального уравнения 10.2.3.6 при $F(t, u(t), u(t - b)) = f(t)u(t) + g(t)u(b - t) + h(t)$.

4. $\boldsymbol{u'(t) = au(b/t)}$**.**

Обозначим $u_1 = u(t)$ и $u_2 = u(b/t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на b/t. В результате приходим к линейной системе ОДУ:

$$u_1' = au_2, \qquad u_2' = -abt^{-2}u_1.$$

Исключив u_2 из этой системы, приходим к линейному ОДУ второго порядка $u_1'' = -a^2bt^{-2}u_1$, общее решение которого имеет вид $u_1 = C_1t^{k_1} + C_2t^{k_2}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения $k^2 - k + a^2b = 0$. Подставив полученную функцию $u = u_1$ в исходное функциональное ОДУ, находим его решение

$$u = C(ab^{k_2}t^{k_1} + k_1t^{k_2}) = Cab^{\frac{1}{2}+\lambda}t^{\frac{1}{2}-\lambda} + C(\tfrac{1}{2} - \lambda)t^{\frac{1}{2}+\lambda},$$
$$k_1 = \tfrac{1}{2} - \lambda, \quad k_2 = \tfrac{1}{2} + \lambda, \quad \lambda = \sqrt{\tfrac{1}{4} - a^2b}.$$

где C — произвольная постоянная. Это решение справедливо для $\frac{1}{4} - a^2b \geqslant 0$. Если $\frac{1}{4} - a^2b < 0$, то решение определяется действительной частью функции u, указанной выше.

5. $\boldsymbol{u'(t) = f(t)u(t) + g(t)u(b/t) + h(t).}$

Частный случай функционально-дифференциального уравнения 10.2.3.7 при $F(t, u(t), u(t/b)) = f(t)u(t) + g(t)u(b/t) + h(t)$.

6. $\boldsymbol{[u(\sin t)]'_t = au(\cos t).}$

Обозначим $u_1 = u(\sin t)$ и $u_2 = u(\cos t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на $\frac{\pi}{2} - t$. В результате приходим к линейной системе ОДУ:

$$u'_1 = au_2, \qquad u'_2 = -au_1,$$

Исключив u_2 из этой системы, приходим к линейному ОДУ второго порядка $u''_1 = -a^2 u_1$, общее решение которого имеет вид $u_1 = u(\sin t) = C_1 \cos(at) + C_2 \sin(at)$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставив полученную функцию $u(\sin t)$ в исходное функциональное ОДУ, находим его решение в неявной форме

$$u(\sin t) = C[\cos\sigma\ \cos(at) + (1+\sin\sigma)\sin(at)] = C[\cos(at-\sigma) + \sin(at)], \qquad \sigma = \frac{a\pi}{2},$$

где C — произвольная постоянная.

7. $\boldsymbol{[u(\cos t)]'_t = au(\sin t).}$

Подстановка $t = \frac{\pi}{2} - x$ приводит к уравнению вида 10.1.3.6: $[u(\sin x)]'_x = -au(\cos x)$.

10.2. Нелинейные обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения первого порядка

10.2.1. ОДУ с постоянными запаздываниями

1. $\boldsymbol{u'_t = au + bu^{1/2} + cu^{1/2}w^{1/2}, \qquad w = u(t-\tau).}$

Подстановка $u = v^2$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием вида 10.1.1.3: $v'_t = \frac{1}{2}av + \frac{1}{2}c\bar{v} + \frac{1}{2}b$, где $\bar{v} = v(t-\tau)$.

2. $\boldsymbol{u'_t = au + bu^{1-k} + cu^{1-k}w^k, \qquad w = u(t-\tau).}$

Обобщение предыдущего уравнения. Подстановка $u = v^{1/k}$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием вида 10.1.1.3: $v'_t = akv + ck\bar{v} + bk$, где $\bar{v} = v(t-\tau)$.

3. $\boldsymbol{u'_t = a + be^{\lambda u} + ce^{\lambda(u-w)}, \qquad w = u(t-\tau).}$

Подстановка $v = e^{-\lambda u}$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием вида 10.1.1.3: $v'_t = -a\lambda v - c\lambda\bar{v} - b\lambda$, где $\bar{v} = v(t-\tau)$.

4. $\boldsymbol{u'_t = au\ln u + bu\ln w + cu, \quad w = u(t-\tau).}$

Подстановка $u=e^v$ приводит к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием вида 10.1.1.3: $v'_t=av+b\bar{v}+c$, где $\bar{v}=v(t-\tau)$.

5. $\boldsymbol{u'_t = f(u-w), \quad w = u(t-\tau).}$

Решение: $u(t)=a+bt$, где a — произвольная постоянная, а b — любой корень трансцендентного уравнения $b=f(b\tau)$.

6. $\boldsymbol{u'_t = uf(w/u), \quad w = u(t-\tau).}$

Решение: $u(t)=Ce^{\lambda t}$, где C — произвольная постоянная, а λ — любой корень трансцендентного уравнения $\lambda=f(e^{-\lambda\tau})$.

7. $\boldsymbol{u'_t = wf(u^2+w^2), \quad w = u(t-\tau).}$

Решения:

$$u=\pm a_n\cos(\beta_n t+C), \qquad \beta_n=\frac{1}{\tau}\Bigl(\frac{\pi}{2}+\pi n\Bigr), \qquad n=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots\,,$$

где C — произвольная постоянная, а a_n — корни алгебраических (трансцендентных) уравнений

$$(-1)^{n+1}\beta_n=f(a_n^2), \qquad n=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots$$

8. $\boldsymbol{u'_t = f(t,w)u+g(t,w), \quad w = u(t-\tau).}$

Задача типа Коши для исходного ОДУ с запаздыванием с начальным условием

$$\varphi=\varphi_0(t) \quad \text{при} \quad -\tau\leqslant t\leqslant 0 \tag{1}$$

может быть решена *методом шагов*. Для этого разобьем время t на отрезки длины τ и обозначим

$$u(t)=\varphi_m(t) \quad \text{при} \quad t_{m-1}\leqslant t\leqslant t_m, \tag{2}$$

где $t_m=m\tau$ и $m=0,1,2,\ldots$ Поскольку рассматриваемое уравнение является линейным относительно u, на каждом шаге имеем стандартную задачу Коши для линейного ОДУ первого порядка без запаздывания

$$\begin{aligned}&u'_t=f(t,\varphi_m(t-\tau))u+g(t,\varphi_m(t-\tau)), \quad m\tau\leqslant t\leqslant(m+1)\tau,\\&u(m\tau)=\varphi_m(m\tau),\end{aligned} \tag{3}$$

где $m=0,\,1,\,2,\,\ldots$, а $\varphi_m(t)$ — решение задачи Коши, полученное на предыдущем шаге, т. е. на отрезке $(m-1)\tau\leqslant t\leqslant m\tau$; $\varphi_0(t)\equiv\varphi(t)$.

Решение задачи (3) имеет вид

$$\begin{aligned}&u(t)=e^{F(t)}\Bigl[\varphi_m(m\tau)+\int_{m\tau}^t e^{-F(\xi)}g(\xi,\varphi_m(\xi-\tau))\,d\xi\Bigr],\\&F(t)=\int_{m\tau}^t f(z,\varphi_m(z-\tau))\,dz, \quad m\tau\leqslant t\leqslant(m+1)\tau,\end{aligned} \tag{4}$$

где $m=0,\,1,\,2,\,\ldots$

Функция $u = \varphi_{m+1}(t)$ в левой части формулы (4) ищется на интервале $[t_m, t_{m+1}]$, тогда как $\varphi_m(t)$ в правой части определено на предшествующем интервале $[t_{m-1}, t_m]$. Вычисления ведутся последовательно, начиная с $m = 0$, когда правая часть представляет собой известную функцию, заданную на начальном интервале (1). Этот шаг приводит к $\varphi_1(t)$. Затем задается $m = 1$ и функция $\varphi_2(t)$ находится с помощью (4) через уже известную функцию $\varphi_1(t)$. Далее процедура продолжается аналогичным образом.

9. $\boldsymbol{u'_t = f(t,w)u + g(t,w)u^k, \quad w = u(t-\tau).}$

Подстановка $v = u^{1-k}$ приводит к уравнению вида 10.2.1.8:

$$v'_t = (1-k)f(t, \bar{v}^{1/(1-k)})v + (1-k)g(t, \bar{v}^{1/(1-k)}), \qquad \bar{v} = v(t-\tau).$$

10. $\boldsymbol{u'_t = f(t,w) + g(t,w)e^{-\lambda u}, \quad w = u(t-\tau).}$

Подстановка $v = e^{\lambda u}$ приводит к уравнению вида 10.2.1.8:

$$v'_t = \lambda f\Bigl(t, \frac{1}{\lambda}\ln\bar{v}\Bigr)v + \lambda g\Bigl(t, \frac{1}{\lambda}\ln\bar{v}\Bigr), \qquad \bar{v} = v(t-\tau).$$

11. $\boldsymbol{u'_t = f(t,w)u + g(t,w)u\ln u, \quad w = u(t-\tau).}$

Подстановка $u = e^v$ приводит к уравнению вида 10.2.1.8:

$$v'_t = g(t, e^{\bar{v}})v + f(t, e^{\bar{v}}), \qquad \bar{v} = v(t-\tau).$$

12. $\boldsymbol{u'_t = F(u-w_1, \ldots, u-w_n), \quad w_k = u(t-\tau_k) \quad (k = 1, \ldots, n).}$

Решение: $u(t) = a + bt$, где a — произвольная постоянная, а b — любой корень трансцендентного уравнения $b = F(b\tau_1, \ldots, b\tau_n)$.

13. $\boldsymbol{u'_t = uF(w_1/u, \ldots, w_n/u), \quad w_k = u(t-\tau_k) \quad (k = 1, \ldots, n).}$

Решение: $u(t) = Ce^{\lambda t}$, где C — произвольная постоянная, а λ — любой корень трансцендентного уравнения $\lambda = F(e^{-\lambda\tau_1}, \ldots, e^{-\lambda\tau_n})$.

10.2.2. ОДУ типа пантографа с пропорциональными аргументами

1. $\boldsymbol{u'_t = a - bw^2, \quad w = u(\tfrac{1}{2}t); \quad u(0) = 0.}$

1°. Решение при $ab > 0$:

$$u(t) = \sqrt{\frac{2a}{b}}\sin\Bigl(b\sqrt{\tfrac{a}{2b}}\,t\Bigr).$$

2°. Решение при $ab < 0$:

$$u(t) = -\sqrt{-\frac{2a}{b}}\,\mathrm{sh}\Bigl(b\sqrt{-\tfrac{a}{2b}}\,t\Bigr).$$

2. $\boldsymbol{u'_t = au + bw^2, \quad w = u(\tfrac{1}{2}t); \quad u(0) = c.}$

Решение: $u(t) = ce^{(a+bc)t}$.

3. $\boldsymbol{u'_t + au = \varepsilon w^2, \quad w = u(pt); \quad u(0) = c.}$

1°. Асимптотическое решение при $p \neq 1/2$ и $\varepsilon \to 0$:

$$u = e^{-at} + \frac{\varepsilon c^2}{a(2p-1)}\left(e^{-at} - e^{-2apt}\right) + \\ + \frac{2\varepsilon^2 c^3}{a^2(p+1)(2p-1)^2}\left[pe^{-at} - (p+1)e^{-2pat} + e^{-p(2p+1)at}\right] + o(\varepsilon^2).$$

2°. Асимптотическое решение при $p = 1/2$ и $\varepsilon \to 0$:

$$u = e^{-at} + \varepsilon c^2 te^{-at} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 c^3 t^2 e^{-at} + o(\varepsilon^2).$$

4. $\boldsymbol{u'_t = au + bw_1 w_2, \quad w_1 = u(pt), \quad w_2 = u((1-p)t); \quad u(0) = c.}$

Решение: $u(t) = ce^{(a+bc)t}$.

5. $\boldsymbol{u'_t = au + bw^3, \quad w = u(\tfrac{1}{3}t).}$

Решения:

$$u(t) = \pm c \exp[(a + bc^2)t],$$

где c — произвольная постоянная.

6. $\boldsymbol{u'_t = au + bw^{1/p}, \quad w = u(pt); \quad u(0) = c.}$

Решение:

$$u(t) = c \exp(\lambda t), \qquad \lambda = a + bc^{(1-p)/p}.$$

7. $\boldsymbol{u'_t = au + bu^{1/2} + cu^{1/2}w^{1/2}, \quad w = u(pt).}$

Подстановка $u = v^2$ приводит к линейному ОДУ типа пантографа вида 10.1.2.3: $v'_t = \frac{1}{2}av + \frac{1}{2}c\bar{v} + \frac{1}{2}b$, где $\bar{v} = v(pt)$.

8. $\boldsymbol{u'_t = au + bu^{1-k} + cu^{1-k}w^k, \quad w = u(pt).}$

Обобщение предыдущего уравнения. Подстановка $u = v^{1/k}$ приводит к линейному ОДУ типа пантографа вида 10.1.2.3: $v'_t = akv + ck\bar{v} + bk$, где $\bar{v} = v(pt)$.

9. $\boldsymbol{u'_t = aw/u, \quad w = u(2t).}$

Решения:

$$u = 2at, \qquad u = \frac{2a}{C}\sin(Ct),$$

где $C > 0$ — произвольная постоянная.

10. $\boldsymbol{u'_t = a + be^{\lambda u} + ce^{\lambda(u-w)}, \quad w = u(pt).}$

Подстановка $v = e^{-\lambda u}$ приводит к линейному ОДУ типа пантографа вида 10.1.2.3: $v'_t = -a\lambda v - c\lambda\bar{v} - b\lambda$, где $\bar{v} = v(pt)$.

11. $\boldsymbol{u'_t = au\ln u + bu\ln w + cu, \quad w = u(pt).}$

Подстановка $u = e^v$ приводит к линейному ОДУ типа пантографа вида 10.1.2.3: $v'_t = av + b\bar{v} + c$, где $\bar{v} = v(pt)$.

12. $\boldsymbol{u'_t = f(u - 2w), \quad w = u(\frac{1}{2}t).}$

Здесь $f(z)$ — произвольная функция.

Решение: $u(t) = f(-C)t + C$, где C — произвольная постоянная.

13. $\boldsymbol{u'_t = f(u - pw), \quad w = u(t/p).}$

Решение: $u(t) = f(C - Cp)t + C$, где C — произвольная постоянная.

14. $\boldsymbol{u'_t = u^k f(w/u), \quad w = u(pt).}$

Решение при $k \neq 1$:

$$u = at^{\frac{1}{1-k}}, \qquad a = \Big[(1-k)f\Big(p^{\frac{1}{1-k}}\Big)\Big]^{\frac{1}{1-k}}.$$

Это решение при $0 \leqslant k < 1$ удовлетворяет начальному условию $u(0) = 0$.

15. $\boldsymbol{u'_t = uf(w/\sqrt{u}\,), \quad w = u(\frac{1}{2}t).}$

Решение:

$$u = ae^{\lambda t}, \qquad \lambda = f(\sqrt{a}\,),$$

где $a > 0$ — произвольная постоянная.

16. $\boldsymbol{u'_t = uf(w/u^p), \quad w = u(pt).}$

Решение:

$$u = ae^{\lambda t}, \qquad \lambda = f(a^{1-p}),$$

где a — произвольная постоянная.

17. $\boldsymbol{u'_t = f(t, u, w) - f(t, e^{\lambda t}, e^{p\lambda t}) + \lambda e^{\lambda t}, \quad w = u(pt); \quad u(0) = 1.}$

Решение: $u(t) = e^{\lambda t}$.

18. $\boldsymbol{u'_t = f(t, u, w) - f(t, \sin t, \sin(pt)) + \cos t, \quad w = u(pt); \quad u(0) = 0.}$

Решение: $u(t) = \sin t$.

19. $\boldsymbol{u'_t = F(w_1/u, \ldots, w_n/u), \quad w_k = u(p_k t) \quad (k = 1, \ldots, n).}$

Решение: $u(t) = at$, где $a = F(p_1, \ldots, p_n)$. Это решение удовлетворяет начальному условию $u(0) = 0$.

20. $\boldsymbol{u'_t = u^m F(w_1/u, \ldots, w_n/u), \quad w_k = u(p_k t) \quad (k = 1, \ldots, n).}$

Решение при $m \neq 1$:

$$u = at^{\frac{1}{1-m}}, \qquad a = \Big[(1-m)F\Big(p_1^{\frac{1}{1-m}}, \ldots, p_n^{\frac{1}{1-m}}\Big)\Big]^{\frac{1}{1-m}}.$$

Это решение при $0 \leqslant m < 1$ удовлетворяет начальному условию $u(0) = 0$.

21. $\boldsymbol{u'_t = uf(w_1 u^{-p_1}, \ldots, w_n u^{-p_n}), \quad w_k = u(p_k t).}$

Решение:

$$u = ae^{\lambda t}, \qquad \lambda = f(a^{1-p_1}, \ldots, a^{1-p_n}),$$

где a — произвольная постоянная.

10.2.3. Другие обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения

1. $\boldsymbol{u'_t = au + bw^2, \quad w = u(\tfrac{1}{2}(t-\tau)).}$

Решение:

$$u = A\exp(\lambda t), \qquad A = \frac{\lambda - a}{b} e^{\lambda\tau},$$

где λ — произвольная постоянная.

2. $\boldsymbol{u'_t = au + bw^{1/p}, \quad w = u(p(t-\tau)).}$

Решение:

$$u = A\exp(\lambda t), \qquad A = \left(\frac{\lambda - a}{b} e^{\lambda\tau}\right)^{\frac{p}{1-p}},$$

где λ — произвольная постоянная.

3. $\boldsymbol{u'_t = au + bw_1 w_2, \quad w_1 = u(p(t-\tau_1)), \quad w_2 = u((1-p)(t-\tau_2)).}$

Решение:

$$u = A\exp(\lambda t), \qquad A = \frac{\lambda - a}{b} e^{\lambda[p\tau_1 + (1-p)\tau_2]},$$

где λ — произвольная постоянная.

4. $\boldsymbol{u'_t = uf(wu^{-p}), \quad w = u(p(t-\tau)).}$

Решение: $u = Ae^{\lambda t}$, где A — произвольная постоянная, а λ — любой корень трансцендентного уравнения $\lambda - f(A^{1-p} e^{-p\lambda\tau}) = 0$.

5. $\boldsymbol{u'(t) = F(t, u(t), u(-t)).}$

Частный случай уравнения 10.2.3.6 при $b = 0$.

6. $\boldsymbol{u'(t) = F(t, u(t), u(b-t)).}$

1°. Обозначим $u_1 = u(t)$ и $u_2 = u(b-t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на $b - t$. В результате приходим к нелинейной системе ОДУ:

$$u'_1 = F(t, u_1, u_2), \qquad u'_2 = -F(b-t, u_2, u_1). \tag{1}$$

Решив эту систему, следует подставить функцию $u_1 = u(t)$ в исходное функциональное ОДУ, чтобы исключить лишнюю константу интегрирования.

2°. Если функция F не зависит явно от t, т. е. $F = F(u_1, u_2)$, и симметрична относительно своих аргументов $F(u_1, u_2) = F(u_2, u_1)$, то исключая F из системы (1), имеем

$$u_2 = C_1 - u_1.$$

В результате приходим к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$u' = F(u, C_1 - u).$$

Решение этого ОДУ следует подставить в исходное функциональное ОДУ, чтобы выразить дополнительную постоянную интегрирования через C_1 и b.

7. $u'(t) = F(t, u(t), u(b/t))$.

Обозначим $u_1 = u(t)$ и $u_2 = u(b/t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на b/t. В результате приходим к нелинейной системе ОДУ:

$$u_1' = F(t, u_1, u_2), \qquad u_2' = -bt^{-2}F(b/t, u_2, u_1).$$

Решив эту систему, следует подставить функцию $u_1 = u(t)$ в исходное функциональное ОДУ, чтобы исключить лишнюю константу интегрирования.

8. $u'(t) = F(t, u(t), u(\varphi(t)))$.

Здесь $\varphi(\varphi(t)) = t$. Это уравнение является обобщением двух предыдущих функциональных ОДУ. Обозначим $u_1 = u(t)$ и $u_2 = u(\varphi(t))$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на $\varphi(t)$. В результате приходим к нелинейной системе ОДУ:

$$u_1' = F(t, u_1, u_2), \qquad u_2' = \varphi'(t)F(\varphi(t), u_2, u_1).$$

Решив эту систему, следует подставить функцию $u_1 = u(t)$ в исходное функциональное ОДУ, чтобы исключить лишнюю константу интегрирования.

9. $a[u(\sin t)]_t' + b[u(\cos t)]_t' = F(t, u(\sin t), u(\cos t))$.

Обозначим $u_1 = u(\sin t)$ и $u_2 = u(\cos t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на $\frac{\pi}{2} - t$. В результате приходим к нелинейной системе ОДУ:

$$au_1' + bu_2' = F(t, u_1, u_2), \qquad au_2' + bu_1' = -F(\tfrac{\pi}{2} - t, u_2, u_1).$$

Решив эту систему, следует подставить функцию $u_1 = u(\sin t)$ в исходное функциональное ОДУ, чтобы исключить лишнюю константу интегрирования.

10.3. Линейные обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения второго порядка

10.3.1. ОДУ с постоянными запаздываниями

1. $u''(t)+a^2u(t-\tau)=f(t)$.

Решение задачи Коши для рассматриваемого линейного неоднородного ОДУ с запаздыванием с начальным условием общего вида

$$u=\varphi(t) \quad \text{при} \quad -\tau\leqslant t\leqslant 0$$

может быть представлено в замкнутой форме

$$u(t)=\varphi(0)\cos_{\mathrm{d}}(a(t-\tau),a\tau)+a^{-1}\varphi'_t(0)\sin_{\mathrm{d}}(a(t-\tau),a\tau)-\\ -a\int_{-\tau}^{0}\sin_{\mathrm{d}}(a(t-2\tau-s),a\tau)\varphi(s)\,ds+a^{-1}\int_0^t\sin_{\mathrm{d}}(a(t-\tau-s),a\tau)f(s)\,ds.$$

Здесь $\cos_{\mathrm{d}}(t,\tau)$ и $\sin_{\mathrm{d}}(t,\tau)$ — *косинус и синус с запаздыванием*, которые определяются с помощью формул

$$\cos_{\mathrm{d}}(t,\tau)=\begin{cases}0, & t<-\tau,\\ 1, & -\tau\leqslant t\leqslant 0,\\ 1-\dfrac{t^2}{2!}+\cdots+(-1)^k\dfrac{[t-(k-1)\tau]^{2k}}{(2k)!}, & (k-1)\tau<t\leqslant k\tau,\end{cases}$$

$$\sin_{\mathrm{d}}(t,\tau)=\begin{cases}0, & t<-\tau,\\ t+\tau, & -\tau\leqslant t\leqslant 0,\\ t+\tau-\dfrac{t^3}{3!}+\cdots+(-1)^k\dfrac{[t-(k-1)\tau]^{2k+1}}{(2k+1)!}, & (k-1)\tau<t\leqslant k\tau,\end{cases}$$

где $k=1,\,2,\,\ldots$

Подробности см. в статьях Khusainov et al. (2008) и Diblík et al. (2013).

2. $u''(t)=-a^2u(t)+bu(t-\tau), \quad a\neq 0$.

Решение задачи Коши для рассматриваемого линейного однородного ОДУ с запаздыванием с начальным условием общего вида

$$u=\varphi(t) \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant \tau$$

в области $t>\tau$ можно найти с помощью формулы (Rodríguez et al., 2012):

$$u(t)=\frac{\varphi(\tau)-\gamma\varphi(0)}{1-\gamma}u_1(t)-\frac{\varphi'(\tau)-\gamma\varphi'(0)}{1-\gamma}\Big(\frac{\tau}{1-\gamma}u_1(t)-u_2(t)\Big)+\\ +\frac{\gamma}{1-\gamma}\int_0^\tau\Big(\frac{\tau}{1-\gamma}u_1(t)-u_2(t)\Big)\varphi''(t)\,dt, \quad \gamma=\frac{b}{a^2},$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — решения двух более простых задач для рассматриваемого уравнения соответственно при $\varphi(t)\equiv 1$ и $\varphi(t)\equiv t$.

Ниже приведены вспомогательные функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$, входящие в указанное решение, которые были получены методом шагов (см. Rodríguez et al., 2012).

1°. На интервале $m\tau \leqslant t \leqslant (m+1)\tau$ решение первой вспомогательной задачи для $\varphi(t) \equiv 1$ можно представить в виде

$$u_1(t) = \gamma^m + (1-\gamma)\sum_{k=1}^{m}\gamma^{k-1}\sum_{n=0}^{k-1} A_{k,n}\frac{[a(t-k\tau)]^n}{n!}\cos\bigl[a(t-k\tau)-\tfrac{1}{2}\pi n\bigr], \qquad \gamma = \frac{b}{a^2},$$

где постоянные $A_{k,n}$ вычисляются по формулам

$$A_{k,0} = 1, \quad A_{k,n} = \sum_{j=0}^{k-n-1}\frac{n}{n+2j}2^{-n-2j}C_{n+2j}^{j}, \quad 1 \leqslant n < k,$$

$C_n^j = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$ — биномиальные коэффициенты. Отметим, что $0 < A_{k,n} \leqslant 1$.

2°. На интервале $m\tau \leqslant t \leqslant (m+1)\tau$ решение второй вспомогательной задачи для $\varphi(t) \equiv t$ можно представить в виде

$$u_2(t) = \gamma^m(t-m\tau) + \tau\sum_{k=1}^{m}\gamma^{k-1}\sum_{n=0}^{k-1} A_{k,n}\frac{[a(t-k\tau)]^n}{n!}\cos\bigl[a(t-k\tau)-\tfrac{1}{2}\pi n\bigr] +$$
$$+ \frac{1-\gamma}{a}\sum_{k=1}^{m}\gamma^{k-1}\sum_{n=0}^{k-1} B_{k,n}\frac{[a(t-k\tau)]^n}{n!}\sin\bigl[a(t-k\tau)-\tfrac{1}{2}\pi n\bigr], \qquad \gamma = \frac{b}{a^2},$$

где постоянные $A_{k,n}$ вычисляются по формулам из п. 1°, а постоянные $B_{k,n}$ определяются так:

$$B_{k,0} = 2^{1-2k}kC_{2k}^{k},$$
$$B_{k,n} = 2^{n+1-2k}\sum_{j=0}^{k-n-1}\frac{n(k-n-j)}{n+2j}C_{n+2j}^{j}C_{2(k-n-j)}^{k-n-j}, \quad 1 \leqslant n < k.$$

3. $u''(t) + au'(t-\tau) + bu(t-2\tau) = 0.$

Общее решение:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — любые решения ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$u_k'(t) = \lambda_k u_k(t-\tau), \qquad k = 1,\ 2, \tag{*}$$

а λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. О решениях ОДУ с запаздыванием (*) см. уравнение 10.1.1.2.

10.3.2. ОДУ типа пантографа с пропорциональными аргументами

1. $u''_{tt} = aw, \quad w = u(pt), \quad 0 < p < 1.$

1°. Общее решение при $a > 0$:

$$u(t) = C_1 \exp_s(-a^{1/2}p^{-1/4}t, p^{1/2}) + C_2 \exp_s(a^{1/2}p^{-1/4}t, p^{1/2}), \tag{1}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, $\exp_s(t,p) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^n}{n!}$ — экспонента с растяжением. При

$$C_1 = \tfrac{1}{2}(b - ca^{-1/2}p^{1/4}), \quad C_2 = \tfrac{1}{2}(b + ca^{-1/2}p^{1/4}),$$

решение (1) удовлетворяет начальным условиям $u(0) = b$, $u'_t(0) = c$.

2°. Общее решение при $a < 0$:

$$u(t) = C_1 \cos_s(|a|^{1/2}p^{-1/4}t, p^{1/2}) + C_2 \sin_s(|a|^{1/2}p^{-1/4}t, p^{1/2}), \tag{2}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, $\cos_s(t,p)$ и $\sin_s(t,p)$ — *косинус и синус с растяжением*, которые определяются по формулам

$$\cos_\mathrm{s}(t,p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^{n(2n-1)} \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin_\mathrm{s}(t,p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^{n(2n+1)} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

При

$$C_1 = b, \quad C_2 = c|a|^{-1/2}p^{1/4},$$

решение (2) удовлетворяет начальным условиям $u(0) = b$, $u'_t(0) = c$.

3°. Имеют место следующие соотношения между экспонентой с растяжением и тригонометрическими функциями с растяжением:

$$\exp_\mathrm{s}(it,p) = \cos_\mathrm{s}(t,p) + i\sin_\mathrm{s}(t,p), \quad i^2 = -1 \quad (0 < p < 1);$$
$$\cos_\mathrm{s}(t,p) = \frac{\exp_\mathrm{s}(it,p) + \exp_\mathrm{s}(-it,p)}{2}, \quad \sin_\mathrm{s}(t,p) = \frac{\exp_\mathrm{s}(it,p) - \exp_\mathrm{s}(-it,p)}{2i}.$$

Приведенные выше решения рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения были получены в работе Liu (2018).

2. $u''_{tt}(t) = au(t) + bu(pt), \quad 0 < p < 1.$

Частный случай уравнения 10.3.2.4 при $c = 0$.

3. $u''_{tt}(t) + au'_t(pt) + bu(p^2t) = 0, \quad 0 < p < 1.$

1°. Частные решения этого уравнения ищем в виде (Liu, 2018):

$$u(t) = \exp_s(\beta t, p), \tag{1}$$

где $\exp_s(t,p)$ — экспонента с растяжением (см. уравнение 10.1.2.1, п. 1°). Учитывая соотношения

$$[\exp_s(\beta t,p)]'_t = \beta \exp_s(\beta pt,p), \qquad [\exp_s(\beta t,p)]''_{tt} = \beta^2 p \exp_s(\beta p^2 t,p),$$

для определения постоянной β, которая входит в (1), получим квадратное уравнение

$$p\beta^2 + a\beta + b = 0. \tag{2}$$

2°. Общее решение:

$$u(t) = C_1 \exp_s(\beta_1 t,p) + C_2 \exp_s(\beta_2 t,p),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а β_1 и β_2 — корни квадратного уравнения (2).

4. $u''_{tt}(t) = au(t) + bu(pt) + cu(qt), \quad 0 < p,q < 1.$

Решение задачи типа Коши для данного ОДУ типа пантографа с начальными условиями

$$u(0) = A, \qquad u'_t(0) = B$$

ищется в виде степенного ряда и может быть представлено в виде линейной комбинации четной и нечетной функций

$$u(t) = Au_1(t) + Bu_2(t),$$

где

$$u_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n} t^{2n}, \qquad \gamma_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (a + bp^{2k} + cq^{2k}),$$

$$u_2(t) = t + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n+1} t^{2n+1}, \quad \gamma_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (a + bp^{2k+1} + cq^{2k+1}).$$

Функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$u_1(0) = 1, \quad u'_1(0) = 0; \quad u_2(0) = 0, \quad u'_1(0) = 1.$$

При $a=-1$, $b=c=0$ эти функции переходят в косинус и синус соответственно, а при $a=1$, $b=c=0$ — в гиперболический косинус и гиперболический синус.

10.3.3. Другие обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения

1. $u''(t) = au(-t).$

Обозначим $u_1 = u(t)$ и $u_2 = u(-t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на $-t$. В результате приходим к линейной системе ОДУ второго порядка:

$$u''_1 = au_2, \qquad u''_2 = au_1.$$

Исключив u_2 из этой системы, приходим к линейному ОДУ четвертого порядка $u_1'''' = a^2 u_1$, общее решение которого имеет вид

$$u_1 = C_1 \operatorname{ch}\bigl(\sqrt{|a|}\,t\bigr) + C_2 \operatorname{sh}\bigl(\sqrt{|a|}\,t\bigr) + C_3 \cos\bigl(\sqrt{|a|}\,t\bigr) + C_4 \sin\bigl(\sqrt{|a|}\,t\bigr),$$

где C_1, C_2, C_3, C_2 — произвольные постоянные. Подставив полученную функцию $u = u_1$ в исходное функциональное ОДУ, находим его решение

$$u = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch}\bigl(\sqrt{a}\,t\bigr) + C_4 \sin\bigl(\sqrt{a}\,t\bigr) & \text{при } \ a > 0, \\ C_2 \operatorname{sh}\bigl(\sqrt{|a|}\,t\bigr) + C_3 \cos\bigl(\sqrt{|a|}\,t\bigr) & \text{при } \ a < 0. \end{cases}$$

2. $\boldsymbol{u''(t) = au(t) + cu(b - t).}$

Частный случай уравнения 10.4.3.3 при $F(t, u_1, u_2) = au_1 + cu_2$.

3. $\boldsymbol{u''(t) = au(b/t).}$

Обозначим $u_1 = u(t)$ и $u_2 = u(b/t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на b/t. В результате приходим к линейной системе ОДУ второго порядка:

$$u_1'' = au_2, \qquad t^2(t^2 u_2')' = ab^2 u_1.$$

Исключив u_2 из этой системы, приходим к линейному ОДУ четвертого порядка

$$t^2(t^2 u_1''')' = a^2 b^2 u_1, \tag{1}$$

общее решение которого имеет вид

$$u_1 = C_1 t^{k_1} + C_2 t^{k_2} + C_3 t^{k_3} + C_4 t^{k_4}, \tag{2}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, а $k_1, \ldots, k_4$ — корни алгебраического уравнения четвертого порядка

$$k(k-1)^2(k-2) = a^2 b^2. \tag{3}$$

Подстановка $s = k^2 - 2k$ приводит уравнение (3) к биквадратному уравнению $s^2 - s - a^2 b^2 = 0$.

Решение (2) следует подставить в исходное функциональное ОДУ, чтобы исключить лишние константы интегрирования.

4. $\boldsymbol{u''(t) = au(t) + cu(b/t).}$

Частный случай уравнения 10.4.3.4 при $F(t, u_1, u_2) = au_1 + cu_2$.

5. $\boldsymbol{f(x)g_t'(t) = ag(t)f_{xx}''(x).}$

Здесь $f(x)$ и $g(t)$ — искомые функции. Данное функционально-дифференциальное уравнение возникает в результате использования метода разделения переменных для линейного уравнения теплопроводности $u_t = au_{xx}$, когда его частное решение ищется в виде произведения функций разных аргументов $u = f(x)g(t)$.

Решения:

$$f(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx), \qquad g(t) = \exp(-ak^2 t);$$
$$f(x) = C_1 \exp(-kx) + C_2 \exp(kx), \qquad g(t) = \exp(ak^2 t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные.

10.4. Нелинейные обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения второго порядка

10.4.1. ОДУ с постоянными запаздываниями

1. $\boldsymbol{u''_{tt} = -uf(w/u), \quad w = u(t-\tau).}$

Здесь $f(z)$ — произвольная функция.

1°. Решения экспоненциального вида: $u(t) = Ce^{\lambda t}$, где C — произвольная постоянная, а λ — любой корень трансцендентного уравнения $\lambda^2 + f(e^{-\lambda\tau}) = 0$.

2°. Для специальных времен запаздывания:

$$\tau = \tau_n = \frac{\pi n}{\lambda_n}, \qquad \lambda_n = \sqrt{f\big((-1)^n\big)}, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

существуют решения тригонометрического вида

$$u(t) = C_1 \cos(\lambda_n t + C_2),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2. $\boldsymbol{u''_{tt} = g(w/u)u'_t + uf(w/u), \quad w = u(t-\tau).}$

Решение: $u(t) = Ce^{\lambda t}$, где C — произвольная постоянная, а λ — любой корень трансцендентного уравнения $\lambda^2 = \lambda g(e^{-\lambda\tau}) + f(e^{-\lambda\tau})$.

3. $\boldsymbol{u''_{tt} = uF(w/u, u'_t/u, w'_t/u), \quad w = u(t-\tau).}$

Решение: $u = Ce^{\lambda t}$, где C — произвольная постоянная, а λ — любой корень трансцендентного уравнения $\lambda^2 = F(e^{-\lambda\tau}, \lambda, \lambda e^{-\lambda\tau})$.

4. $\boldsymbol{u''_{tt} = uF(u'_t/u, w'_t/w), \quad w = u(t-\tau).}$

Подстановка $\xi = u'_t/u$ приводит к ОДУ первого порядка с запаздыванием: $\xi'_t + \xi^2 = F(\xi, \bar{\xi})$, где $\bar{\xi} = \xi(t-\tau)$.

5. $\boldsymbol{u''_{tt} = uf(u^2 + w^2), \quad w = u(t-\tau).}$

Решения:

$$u(t) = \pm a_n \cos(\beta_n t + C), \qquad \beta_n = \frac{1}{\tau}\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big), \qquad n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

где C — произвольная постоянная, а a_n — корни алгебраического уравнения

$$-\beta_n^2 = f(a_n^2), \qquad n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots$$

6. $\boldsymbol{u''_{tt} = a^2 w_2 + F(t, u'_t + a w_1), \quad w_1 = u(t-\tau), \quad w_2 = u(t-2\tau).}$

Подстановка $\zeta = u'_t + a w_1$ приводит к ОДУ первого порядка с запаздыванием: $\zeta'_t = a\bar{\zeta} + F(t,\zeta)$, где $\bar{\zeta} = \zeta(t-\tau)$.

7. $\boldsymbol{u''_{tt} = w_2 f\bigl(u'_t/w_1, (w_1)'_t/w_2\bigr), \quad w_1 = u(t-\tau), \quad w_2 = u(t-2\tau).}$

Однофазное решение:

$$u = u_1(t),$$

где $u_1(t)$ — любое решение линейного ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$u_1(t) = \lambda u_1(t-\tau), \tag{*}$$

а λ — любой корень трансцендентного уравнения $\lambda^2 = f(\lambda,\lambda)$. О решениях ОДУ с запаздыванием (*) см. уравнение 10.1.1.2.

8. $\boldsymbol{u''_{tt} = uF(w_1/u, \ldots, w_n/u, u'_t/u, w'_1/u, \ldots, w'_n/u),}$
$\boldsymbol{w_k = u(t-\tau_k) \quad (k = 1, \ldots, n).}$

Решение: $u(t) = Ce^{\lambda t}$, где C — произвольная постоянная, а λ — любой корень трансцендентного уравнения $\lambda^2 = F(e^{-\lambda\tau_1}, \ldots, e^{-\lambda\tau_n}, \lambda, \lambda e^{-\lambda\tau_1}, \ldots, \lambda e^{-\lambda\tau_n})$.

10.4.2. ОДУ типа пантографа с пропорциональными аргументами

1. $\boldsymbol{u''_{tt} = au + bw^2, \quad w = u(\tfrac{1}{2}t).}$

Решения: $u(t) = c\exp(\pm\sqrt{a+bc}\,t)$, где c — произвольная постоянная, удовлетворяющая неравенству $a + bc > 0$. Имеется также тривиальное решение $u = 0$ (для любых a и b).

2. $\boldsymbol{u''_{tt} = au + bw^3, \quad w = u(\tfrac{1}{3}t).}$

Решения:

$$u(t) = c\exp(\pm\sqrt{a+bc^2}\,t),$$

где c — произвольная постоянная, удовлетворяющая неравенству $a + bc^2 > 0$. Имеется также тривиальное решение $u = 0$ (для любых a и b).

3. $\boldsymbol{u''_{tt} = aw + bw^3, \quad w = u(\tfrac{1}{3}t).}$

Решения:

$$\begin{aligned}
&u = \pm 2\sqrt{|a|/(3b)}\,\sin(\sqrt{|a|/3}\,t) && \text{при } a<0,\ b>0;\\
&u = \pm 2\sqrt{a/(3|b|)}\,\cos(\sqrt{a/3}\,t) && \text{при } a>0,\ b<0;\\
&u = \pm 2\sqrt{a/(3b)}\,\operatorname{sh}(\sqrt{a/3}\,t) && \text{при } a>0,\ b>0;\\
&u = \pm 2\sqrt{|a|/(3b)}\,\operatorname{ch}(\sqrt{|a|/3}\,t) && \text{при } a<0,\ b>0.
\end{aligned}$$

Имеется также тривиальное решение $u = 0$ (для любых a и b).

4. $\boldsymbol{u''_{tt} = au + bw^{1/p}, \quad w = u(pt), \quad 0 < p < 1.}$

Решения:

$$u(t) = c\exp(\pm\lambda t), \qquad \lambda = \sqrt{a + bc^{(1-p)/p}},$$

где $c > 0$ — произвольная постоянная при условии, что $a + bc^{(1-p)/p} > 0$. Имеется также тривиальное решение $u = 0$ (для любых a и b).

5. $\boldsymbol{u''_{tt} = au'_t + u(b\ln u + c\ln w), \quad w = u(pt).}$

Решение:

$$u(t) = \exp(At^2 + Bt + C),$$

$$A = \frac{1}{4}(b + cp^2), \quad B = -\frac{a(b + cp^2)}{2cp(1-p)}, \quad C = \frac{2A + B^2 - aB}{b + c}.$$

6. $\boldsymbol{u''_{tt} = F(w_1/u, \ldots, w_n/u), \quad w_k = u(p_k t) \quad (k = 1, \ldots, n).}$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = u'_t(0) = 0$, определяется по формуле $u(t) = at^2$, где $a = \frac{1}{2}F(p_1^2, \ldots, p_n^2)$.

7. $\boldsymbol{u''_{tt} = u^m F(w_1/u, \ldots, w_n/u), \quad w_k = u(p_k t) \quad (k = 1, \ldots, n).}$

Решение при $m \neq 1$:

$$u = at^{\frac{2}{1-m}}, \qquad a = \left[\frac{(1-m)^2}{2(1+m)} F\bigl(p_1^{\frac{2}{1-m}}, \ldots, p_n^{\frac{2}{1-m}}\bigr)\right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

При $0 \leqslant m < 1$ это решение удовлетворяет начальным условиям $u(0) = u'_t(0) = 0$.

10.4.3. Другие обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения

1. $\boldsymbol{u''_{tt} = au + bw^2, \quad w = u(\tfrac{1}{2}(t - \tau)).}$

Решение: $u(t) = \dfrac{\lambda^2 - a}{b} e^{\lambda\tau} e^{\lambda t}$, где λ — произвольная постоянная.

2. $\boldsymbol{u''_{tt} = au + bw^{1/p}, \quad w = u(p(t - \tau)).}$

Решение:

$$u(t) = A\exp(\lambda t), \qquad A = \left(\frac{\lambda^2 - a}{b} e^{\lambda\tau}\right)^{\frac{p}{1-p}},$$

где λ — произвольная постоянная.

3. $\boldsymbol{u''(t) = F(t, u(t), u(b - t)).}$

1°. Обозначим $u_1 = u(t)$ и $u_2 = u(b - t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на $b-t$. В результате приходим к нелинейной системе ОДУ:

$$u_1'' = F(t, u_1, u_2), \qquad u_2'' = F(b-t, u_2, u_1). \tag{1}$$

Решив эту систему, следует подставить функцию $u_1 = u(t)$ в исходное функциональное ОДУ, чтобы исключить лишние константы интегрирования.

2°. Если функция F не зависит явно от t, т. е. $F = F(u_1, u_2)$, и симметрична относительно своих аргументов $F(u_1, u_2) = F(u_2, u_1)$, то исключив F из системы (1), имеем

$$u_2 = u_1 + C_1 t + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В результате приходим к ОДУ второго порядка

$$u_{tt}'' = F(u, u + C_1 t + C_2).$$

Решение этого ОДУ следует подставить в исходное функциональное ОДУ, чтобы выразить дополнительные константы интегрирования через C_1, C_2 и b.

4. $\boldsymbol{u''(t) = F(t, u(t), u(b/t))}$**.**

Обозначим $u_1 = u(t)$ и $u_2 = u(b/t)$. В дополнение к исходному уравнению рассмотрим еще одно уравнение, полученное из исходного путем замены независимой переменной t на b/t. В результате приходим к нелинейной системе ОДУ:

$$u_1'' = F(t, u_1, u_2), \qquad t^2(t^2 u_2')' = b^2 F(b/t, u_2, u_1).$$

Решив эту систему, следует подставить функцию $u_1 = u(t)$ в исходное функциональное ОДУ, чтобы исключить лишние константы интегрирования.

10.5. Функционально-дифференциальные уравнения старших порядков

10.5.1. Линейные обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения

► **ОДУ с постоянными запаздываниями.**

1. $\boldsymbol{u_t^{(n)}(t) = au(t-\tau)}$**.**

1°. Частные решения экспоненциального вида:

$$u = \exp(\lambda t),$$

где λ — любой корень трансцендентного уравнения

$$\lambda^n e^{\tau\lambda} - a = 0. \tag{1}$$

2°. Для любого $a > 0$ уравнение (1) имеет действительный положительный корень, который выражается через функцию Ламберта (см. п. 2° уравнения 10.1.1.2) по формуле

$$\lambda_{\rm p} = \frac{n}{\tau} W_{\rm p}\Big(\frac{\tau a^{1/n}}{n}\Big).$$

3°. В общем случае трансцендентное уравнение (1) заменой $\zeta = \lambda e^{\tau\lambda/n}$ приводится к алгебраическому уравнению $\zeta^n - a = 0$, имеющему n комплексных корней

$$\zeta_k = \begin{cases} a^{1/n}\Big(\cos\frac{2(k-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k-1)\pi}{n}\Big) & \text{при}\ \ a > 0, \\ |a|^{1/n}\Big(\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\Big) & \text{при}\ \ a < 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $k = 1, \ldots, n$, $i^2 = -1$. Поэтому разность $\zeta^n - a$ допускает факторизацию и может быть представлена в виде произведения $\prod_{k=1}^n(\zeta - \zeta_k) = 0$, где $\zeta = \lambda e^{\tau\lambda/n}$, а трансцендентное уравнение (1) распадается на n более простых независимых трансцендентных уравнений

$$\lambda e^{\tau\lambda/n} - \zeta_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Решения этих уравнений выражаются через функцию Ламберта комплексного аргумента по формулам

$$\lambda_k = \frac{n}{\tau} W\Big(\frac{\tau\zeta_k}{n}\Big), \quad k = 1, \ldots, n,$$

где числа (комплексные в случае общего положения) ζ_k определены в (2), а $W(z)$ включает все ветви функции Ламберта.

2. $\boldsymbol{u_t^{(n)}(t) + a_1 u_t^{(n-1)}(t-\tau) + \cdots + a_{n-1} u_t'(t-(n-1)\tau) + a_n u(t-n\tau) = 0.}$

Общее решение:

$$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t),$$

где $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ — любые решения линейных ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$u_k'(t) = \lambda_k u_k(t-\tau), \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{*}$$

а λ_k — корни алгебраического уравнения $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ (в (*) считается, что все λ_k разные). О решениях линейных ОДУ с запаздыванием (*) см. уравнение 10.1.1.2.

3. $\displaystyle \boldsymbol{u_t^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} u_t^{(i)}(t-\tau_j) = 0.}$

Линейное однородное ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и m постоянными запаздываниями, $\tau_j > 0$ — времена запаздывания ($j \geqslant 1$), $\tau_0 = 0$.

Это уравнение имеет частные решения экспоненциального вида

$$u(t) = \exp(\lambda t),$$

где λ — любой корень трансцендентного уравнения

$$\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \lambda^i e^{-\lambda \tau_j} = 0.$$

► **ОДУ типа пантографа с пропорциональным аргументом.**

4. $\boldsymbol{u_t^{(n)}(t) + a_{n-1} u_t^{(n-1)}(pt) + \cdots + a_1 u_t'(p^{n-1}t) + a_0 u(p^n t) = 0.}$

Здесь $0 < p < 1$.

1°. Частные решения этого уравнения ищем в виде (Liu, 2018):

$$u(t) = \exp_s(\beta t, p), \qquad \exp_s(t, p) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^n}{n!}, \tag{1}$$

где $\exp_s(t, p)$ — экспонента с растяжением (см. уравнение 10.1.2.1, п. 1°), β — искомая постоянная. Учитывая соотношения

$$[\exp_s(\beta t, p)]_t^{(k)} = \beta^k p^{\frac{k(k-1)}{2}} \exp_s(\beta p^k t, p), \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n,$$

для определения константы β получим алгебраическое уравнение

$$p^{\frac{n(n-1)}{2}} \beta^n + a_{n-1} p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \beta^{n-1} + \cdots + a_1 \beta + a_0 = 0. \tag{2}$$

2°. Общее решение:

$$u(t) = C_1 \exp_s(\beta_1 t, p) + C_2 \exp_s(\beta_2 t, p) + \cdots + C_n \exp_s(\beta_n t, p),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, а $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — корни алгебраического уравнения (2) (здесь считается, что все β_k различны).

10.5.2. Нелинейные обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения

► **ОДУ с постоянными запаздываниями.**

1. $\boldsymbol{u_t^{(n)} = w_n f\big(u_t'/w_1\big), \quad w_1 = u(t-\tau), \quad w_n = u(t - n\tau).}$

Однофазные решения:

$$u = u(t),$$

где $u(t)$ — любое решение линейного ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$u(t) = \lambda u(t-\tau), \tag{*}$$

а λ — любой корень трансцендентного уравнения $\lambda^n = f(\lambda)$. О решениях линейного ОДУ с запаздыванием (*) см. уравнение 10.1.1.2.

2. $\boldsymbol{u_t^{(n)} = uF(w_1/u, \ldots, w_m/u), \quad w_k = u(t-\tau_k) \quad (k = 1, \ldots, m).}$

Решение: $u(t) = ae^{\lambda t}$, где a — произвольная постоянная, а λ — любой корень трансцендентного уравнения $\lambda^n = F(e^{-\lambda\tau_1}, \ldots, e^{-\lambda\tau_m})$.

► **ОДУ типа пантографа с пропорциональным аргументом.**

3. $\boldsymbol{u_t^{(n)} = F(w_1/u, \ldots, w_m/u), \quad w_k = u(p_k t) \quad (k = 1, \ldots, m).}$

Решение, которое удовлетворяет начальным условиям $u(0) = u'_t(0) = \cdots = u_t^{(n-1)}(0) = 0$, определяется формулой $u(t) = at^n$, где $a = \dfrac{1}{n!}F(p_1^n, \ldots, p_m^n)$.

► **Обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения с несколькими искомыми функциями.**

4. $\boldsymbol{f_1[X]g_1[Y] + f_2[X]g_2[Y] + \cdots + f_k[X]g_k[Y] = 0.}$

Здесь дифференциальные формы $f_i[X]$ и $g_i[Y]$ $(i = 1, \ldots, k)$ зависят соответственно от переменных x и y и содержат $2n$ искомых функций $\varphi_j = \varphi_j(x)$ и $\psi_j = \psi_j(y)$ $(j = 1, \ldots, n)$:

$$\begin{aligned} f_i[X] &\equiv f_i\bigl(x, \varphi_1, \varphi'_1, \varphi''_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_n, \varphi''_n\bigr),\\ g_i[Y] &\equiv g_i\bigl(y, \psi_1, \psi'_1, \psi''_1, \ldots, \psi_n, \psi'_n, \psi''_n\bigr), \end{aligned} \tag{1}$$

где штрихи обозначают производные. Отметим, что помимо вторых производных в выражения (1) могут входить также старшие производные функций φ_j и ψ_j.

Решение рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения удобно свести к последовательному решению билинейного функционального уравнения стандартного вида и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т. е. исходная задача расщепляется на две более простые задачи). Ниже дано краткое описание основных этапов этого метода.

1°. На первом этапе рассмотрим исходное функционально-дифференциальное уравнение как билинейное функциональное уравнение

$$\sum_{i=1}^{k} f_i g_i = 0, \tag{2}$$

где $f_i = f_i[X]$ и $g_i = g_i[Y]$ — искомые величины $(i = 1, \ldots, k)$, а X и Y — независимые переменные.

Принцип расщепления. Все решения билинейного функционального уравнения (2) могут быть представлены в виде совокупности линейных комбинаций величин $f_1, \ldots, f_k$ и линейных комбинаций величин $g_1, \ldots, g_k$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} \alpha_{ir} f_i = 0, \quad r = 1, \ldots, l; \\ &\sum_{i=1}^{k} \beta_{is} g_i = 0, \quad s = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{3}$$

где $1 \leqslant l \leqslant k-1$ и $1 \leqslant m \leqslant k-1$. Константы α_{ir} и β_{is} в (3) выбираются так, чтобы билинейное равенство (2) удовлетворялось тождественно (это всегда можно сделать, причем имеется $k-1$ различных решений). Важно отметить, что соотношения (3) носят чисто алгебраический характер и не зависят от конкретных выражений дифференциальных форм (1).

О решениях билинейного уравнения (2) при $k=3$, $k=4$, $k=5$ см. соответственно функциональные уравнения (9.4.2.27), (9.4.2.28), (9.4.2.29) (п. 3°).

2°. На втором этапе последовательно подставляем дифференциальные формы $f_i[X]$ и $g_i[Y]$ из (1) в решения (3). В результате получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений (эти системы часто являются переопределенными) для определения искомых функций $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(y)$. Решая эти системы, находим решения исходного функционально-дифференциального уравнения.

3°. Вырожденные случаи, когда одна или несколько дифференциальных форм f_i и/или g_i обращаются в нуль, необходимо рассматривать отдельно, используя для остальных форм линейные соотношения вида (3).

4°. Подробности использования принципа расщепления для решения обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений и связанных с ними нелинейных УрЧП см. в книгах Полянин & Журов (2020), Полянин, Зайцев, Журов (2005), Polyanin & Zaitsev (2012).

Литература к главе 10

Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* М.: Мир, 1967.

Мышкис А. Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* М.: Наука, 1972.

Пелюх Г. П., Шарковский А. Н. *Введение в теорию функциональных уравнений.* Киев: Наукова Думка, 1974.

Полянин А. Д., Журов А. И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики.* М.: Институт проблем механики РАН, 2020.

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.* М.: Физматлит, 2005.

Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Журов А. И. *Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели.* М.: Институт проблем механики РАН, 2022.

Сорокин В. Г. Точные решения некоторых нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений. *Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»*, 2015, т. 4, № 6, с. 493–500.

Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. М.: Наука, 1971.

Azizbekov E., Khusainov D. Y. Solution of one heat conduction equation with a delay. *Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv, Cybernetics*, 2012, No. 12, pp. 4–12.

Brunner H., Huang Q., Xie H. Discontinuous Galerkin methods for delay differential equations of pantograph type. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2010, Vol. 48, No. 5, pp. 1944–1967.

Diblík J., Fečkan M., Pospíšil M. Representation of a solution of the Cauchy problem for an oscillating system with two delays and permutable matrices. *Ukr. Math. J.*, 2013, Vol. 65, pp. 64–76.

Dorodnitsyn V. A., Kozlov R., Meleshko S. V., Winternitz P. Linear or linearizable first-order delay ordinary differential equations and their Lie point symmetries. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2018, Vol. 51, No. 20, 205203.

Khusainov D. Y., Diblík J., Růžičková M., Lukáčová J. Representation of a solution of the Cauchy problem for an oscillating system with pure delay. *Nonlinear Oscillations*, 2008, Vol. 11, pp. 276–285.

Khusainov D. Y., Ivanov A. F., Kovarzh I. V. Solution of one heat equation with delay. *Nonlinear Oscillations*, 2009, Vol. 12, No. 2, pp. 260–282.

Khusainov D. Y., Pokojovy M., Azizbayov E.I. On classical solvability for a linear 1D heat equation with constant delay. *Konstanzer Schriften in Mathematik*, 2013, No. 316, ISSN 1430-3558 (see also arXiv:1401.5662v1 [math.AP], 2014, https://arxiv.org/pdf/1401.5662.pdf).

Liu C.-S. Basic theory of a kind of linear functional differential equations with multiplication delay. *arXiv:1605.06734v4* [*math.CA*], 2018.

Patade J., Bhalekar S. Analytical solution of pantograph equation with incommensurate delay. *Phys. Sci. Rev.*, 2017, Vol. 2, No. 9, 20165103.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. (Sections 29.5 and 30.4)*. Boca Raton–London: CRC Press, 2012.

Rodríguez F., Roales M. Marín J. A. Exact solutions and numerical approximations of mixed problems for the wave equation with delay. *Appl. Math. Comput.,* 2012, Vol. 219, No. 6, pp. 3178–3186.

11. Функционально-дифференциальные уравнения с частными производными

► **Предварительные замечания.** Функционально-дифференциальные уравнения с частными производными являются математическими уравнениями, содержащими неизвестную функцию двух или более переменных с разными аргументами и частные производные этой функции. Уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными и постоянным запаздыванием являются простейшими функционально-дифференциальными уравнениями с частными производными, в которые входят величины $u = u(x,t)$, $w = u(x, t-\tau)$ и частные производные u по x и t, где x и t — независимые переменные, u — искомая функция, $\tau > 0$ — время запаздывания.

Под точными решениями функционально-дифференциальных уравнений с частными производными понимаются следующие решения:

- решения, которые выражаются через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, когда рассматриваемое уравнение зависит от произвольных функций), и неопределенные интегралы,
- решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений (или систем таких уравнений).

В данной главе описаны точные решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных с постоянным запаздыванием и других функционально-дифференциальных УрЧП второго порядка с двумя независимыми переменными.

11.1. Линейные функционально-дифференциальные уравнения с частными производными

11.1.1. УрЧП с постоянным запаздыванием

1. $\boldsymbol{u_t = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w + f(x,t), \quad w = u(x, t-\tau).}$

Линейное уравнение диффузионного типа с постоянным запаздыванием, где $a_1 > a_2 \geqslant 0$, $\tau > 0$.

► **Точные решения при $f(x,t) \equiv 0$.**

1°. Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]e^{-\lambda t}, \qquad k = \sqrt{(\lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau})/(a_1 + a_2 e^{\lambda\tau})} \quad \text{при} \quad \lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau} > 0; \tag{1}$$

$$u = [A\exp(kx) + B\exp(-kx)]e^{-\lambda t}, \quad k = \sqrt{-(\lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau})/(a_1 + a_2 e^{\lambda\tau})} \quad \text{при} \quad \lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau} < 0, \tag{2}$$

где A, B, λ — произвольные постоянные. Заметим, что эти решения являются частными случаями более сложных решений с мультипликативным разделением переменных $u = \varphi(x)\psi(t)$.

Решение (1) является периодическим по пространственной переменной x и затухает $t \to \infty$ (если $\lambda > 0$).

2°. Точные решения, периодические по времени t:

$$u = e^{-\gamma x}[A\cos(\omega t - \beta x) + B\sin(\omega t - \beta x)],$$

где A, B, ω — произвольные постоянные, а константы β и γ можно выразить через ω и параметры исходного уравнения путем решения алгебраической системы уравнений

$$[a_1 + a_2\cos(\omega\tau)](\gamma^2 - \beta^2) + 2a_2\sin(\omega\tau)\beta\gamma + c_1 + c_2\cos(\omega\tau) = 0,$$
$$a_2\sin(\omega\tau)(\gamma^2 - \beta^2) - 2[a_1 + a_2\cos(\omega\tau)]\beta\gamma + \omega + c_2\sin(\omega\tau) = 0.$$

Исключив γ (или β) из этой системы, можно получить биквадратное уравнение для β (или γ).

3°. При некоторых ограничениях на параметры исходного уравнения существуют решения, которые являются периодическими по обеим независимым переменным x и t, вида:

$$u = [A_1\cos(\gamma x) + B_1\sin(\gamma x)][A_2\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)],$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, а константы γ и ω определяются из трансцендентной системы уравнений

$$c_1 + c_2\cos(\omega\tau) = [a_1 + a_2\cos(\omega\tau)]\gamma^2,$$
$$\omega + c_2\sin(\omega\tau) = a_2\sin(\omega\tau)\gamma^2.$$

4°. Имеются решения полиномиального вида по x (содержащие соответственно четные и нечетные степени):

$$u = \sum_{k=0}^{n} A_k(t)x^{2k} \quad \text{и} \quad u = \sum_{k=0}^{n} B_k(t)x^{2k+1}.$$

► Формулировки начально-краевых задач.

Будем рассматривать исходное УрЧП параболического типа с запаздыванием с начальным условием (начальными данными) общего вида

$$u = \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0 \quad (0 < x < h), \tag{3}$$

и различными линейными неоднородными граничными условиями, которые для удобства запишем в компактной форме

$$\begin{aligned} \Gamma_1[u] &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (t > -\tau), \\ \Gamma_2[u] &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = h \quad (t > -\tau), \end{aligned} \tag{4}$$

где $0 < h < \infty$.

Будем считать, что линейные операторы $\Gamma_{1,2}[u]$, входящие в граничные условия (4), не зависят явно от времени t. Наиболее распространенные граничные условия приведены в третьем столбце табл. 11.1.

Таблица 11.1. Простейшие функции $u_0 = u_0(x,t)$, удовлетворяющие наиболее распространенным неоднородным граничным условиям на концах отрезка $0 \leqslant x \leqslant h$ $(k_1 > 0$, $k_2 > 0)$.

№	Задача	Граничные условия	Функция $u_0 = u_0(x,t)$
1	Первая краевая задача	$u = g_1(t)$ при $x = 0$ $u = g_2(t)$ при $x = l$	$u_0 = g_1(t) + \dfrac{x}{l}\big[g_2(t) - g_1(t)\big]$
2	Вторая краевая задача	$u_x = g_1(t)$ при $x = 0$ $u_x = g_2(t)$ при $x = l$	$u_0 = xg_1(t) + \dfrac{x^2}{2l}\big[g_2(t) - g_1(t)\big]$
3	Третья краевая задача	$u_x - k_1 u = g_1(t)$ при $x = 0$ $u_x + k_2 u = g_2(t)$ при $x = l$	$u_0 = \dfrac{(k_2 x - 1 - k_2 l)g_1(t) + (1 + k_1 x)g_2(t)}{k_2 + k_1 + k_1 k_2 l}$
4	Смешанная краевая задача	$u = g_1(t)$ при $x = 0$ $u_x = g_2(t)$ при $x = l$	$u_0 = g_1(t) + xg_2(t)$
5	Смешанная краевая задача	$u_x = g_1(t)$ при $x = 0$ $u = g_2(t)$ при $x = l$	$u_0 = (x - l)g_1(t) + g_2(t)$

► Представление решений начально-краевых задач в виде суммы трех функций.

Решение исходного уравнения с начальным условием (3) и граничными условиями (4) ищем в виде суммы

$$u = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{5}$$

где функции $u_n = u_n(x,t)$ ($n = 0,\ 1,\ 2$) будут определены ниже.

В качестве функции

$$u_0 = u_0(x,t) \tag{6}$$

можно взять любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию, удовлетворяющую неоднородным краевым условиям (4), т. е. должны выполняться соотношения

$$\Gamma_1[u_0] = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \Gamma_2[u_0] = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = h. \tag{7}$$

В табл. 11.1 приведены простейшие функции $u_0 = u_0(x,t)$, удовлетворяющие наиболее часто встречающимся неоднородным краевым условиям в начально-краевых задачах для уравнений параболического и гиперболического типов с одной пространственной переменной.

Две другие функции $u_1 = u_1(x,t)$ и $u_2 = u_2(x,t)$, входящие в (5), определяются путем решения описанных ниже более простых начально-краевых задач с однородными (нулевыми) краевыми условиями.

Задача 1. Функция u_1 удовлетворяет линейному однородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + a_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + c_1 u_1 + c_2 w_1, \qquad w_1 = u_1(x,t-\tau), \tag{8}$$

а также неоднородному начальному условию

$$u_1 = \Phi(x,t) \quad \text{при} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0 \quad (0 < x < h), \tag{9}$$

и однородным граничным условиям

$$\Gamma_1[u_1]=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad (t>-\tau), \qquad \Gamma_2[u_1]=0 \quad \text{при} \quad x=h \quad (t>-\tau). \tag{10}$$

Функция $\Phi(x,t)$, входящая в начальное условие (9), определяется так:

$$\Phi(x,t) \equiv \varphi(x,t) - u_0(x,t). \tag{11}$$

Задача 2. Функция u_2 удовлетворяет линейному неоднородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + a_2\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + c_1 u_2 + c_2 w_2 + F(x,t), \qquad w_2 = u_2(x,t-\tau), \tag{12}$$

а также однородным (нулевым) начальному и граничным условиям

$$u_2 = 0 \quad \text{при} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0 \quad (0 < x < h), \tag{13}$$

$$\Gamma_1[u_2] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (t > -\tau), \quad \Gamma_2[u_2] = 0 \quad \text{при} \quad x = h \quad (t > -\tau). \tag{14}$$

Функция $F(x,t)$, входящая в уравнение (12), определяется так:

$$F(x,t)\equiv f(x,t)-\frac{\partial u_0}{\partial t}+a_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+c_1 u_0+c_2 w_0, \quad w_0=u_0(x,t-\tau). \tag{15}$$

► **Решение задачи 1.**

Рассмотрим линейное однородное УрЧП с запаздыванием (8) с начальным и граничными условиями (9) и (10). Сначала ищем частные решения уравнения (8) в виде произведения функций разных аргументов

$$u_{1p} = X(x)T(t). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (8) и разделяя переменные стандартным образом, приходим к ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \tag{17}$$

$$T'(t) = (c_1 - a_1\lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2\lambda^2)T(t-\tau). \tag{18}$$

Требуя, чтобы функция (16) удовлетворяла однородным граничным условиям (10), приходим к однородным граничным условиям для функции X:

$$\Gamma_1[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \Gamma_2[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = h. \tag{19}$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (17), (19) существуют только для дискретного набора значений параметра λ:

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1,\, 2,\, \ldots \tag{20}$$

Собственные значения и собственные функции однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (17) для пяти наиболее распространенных граничных условий, приведены в табл. 11.2.

Подставляя собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (18), получаем соответствующие ОДУ с запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Используя принцип линейной суперпозиции, ищем решение линейной начально-краевой задачи (8)–(11) в виде ряда

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t), \tag{21}$$

где функции $u_{1n}(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ — частные решения уравнения (8), удовлетворяющие однородным граничным условиям (10).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с запаздыванием (18) при $\lambda = \lambda_n$, представим начальное условие (9) в виде разложения по собственным функциям:

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)X_n(x), \qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant h), \tag{22}$$

где

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^h \Phi(\xi,t)X_n(\xi)\,d\xi, \qquad \|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)\,d\xi, \tag{23}$$

Таблица 11.2. Собственные функции в задачах на собственные значения, описываемых линейным однородным ОДУ $X''_{xx} = -\lambda^2 X$ с наиболее распространенными однородными граничными условиями на концах отрезка $0 \leqslant x \leqslant h$ $(k_1 > 0,\ k_2 > 0)$.

№	Краевая задача	Граничные условия	Собственные значения λ_n и собственные функции $X_n = X_n(x)$, где $n = 1,\ 2,\ \ldots$
1	Первая краевая задача	$X = 0$ при $x = 0$ $X = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \dfrac{\pi n}{h};\quad X_n = \sin\dfrac{\pi n x}{h}$
2	Вторая краевая задача	$X'_x = 0$ при $x = 0$ $X'_x = 0$ при $x = h$	$\lambda_0 = 0,\quad X_0 = 1;$ $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{h},\quad X_n = \cos\dfrac{\pi n x}{h}$
3	Третья краевая задача	$X'_x - k_1 X = 0$ при $x = 0$ $X'_x + k_2 X = 0$ при $x = h$	λ_n — корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda h)}{\lambda} = \dfrac{k_1 + k_2}{\lambda^2 - k_1 k_2}\quad (\lambda_n > 0);$ $X_n = \cos(\lambda_n x) + \dfrac{k_1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x)$
4	Смешанная краевая задача	$X = 0$ при $x = 0$ $X'_x = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \dfrac{\pi(2n-1)}{2h};\quad X_n = \sin\dfrac{\pi(2n-1)x}{2h}$
5	Смешанная краевая задача	$X'_x = 0$ при $x = 0$ $X = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \dfrac{\pi(2n-1)}{2h};\quad X_n = \cos\dfrac{\pi(2n-1)x}{2h}$

а функция $\Phi(\xi, t)$ определяется формулой (11). Из соотношений (21) и (22) получаем начальные условия для ОДУ с запаздыванием (18) при $\lambda = \lambda_n$ в виде

$$T_n(t) = \Phi_n(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \tag{24}$$

где функции $\Phi_n(t)$ определяются выражениями (23).

Задача типа Коши (18), (24) с точностью до переобозначений совпадает с задачей, рассмотренной в разд. 10.1.1 (см. уравнение 10.1.1.2, п. 5°). Введя обозначения

$$\alpha_n = c_1 - a_1\lambda_n^2, \quad \beta_n = c_2 - a_2\lambda_n^2, \quad \sigma_n = e^{-\alpha_n\tau}\beta_n, \tag{25}$$

можно представить решение задачи (18), (24) в замкнутом виде

$$\begin{aligned} T_n(t) = e^{\alpha_n(t+\tau)}\exp_{\mathrm{d}}(\sigma_n t, \sigma_n\tau)\Phi_n(-\tau) &+ \\ + \int_{-\tau}^{0} e^{\alpha_n(t-s)}\exp_{\mathrm{d}}(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n\tau)&[\Phi'_n(s) - \alpha_n\Phi_n(s)]\,ds, \end{aligned} \tag{26}$$

где $\exp_{\mathrm{d}}(t,\tau) \equiv \sum_{k=0}^{[t/\tau]+1}\frac{[t-(k-1)\tau]^k}{k!}$ — экспонента с запаздыванием, а символ $[A]$ обозначает целую часть числа A.

Подставляя функции (26) в формулу (21), находим решение задачи (8)–(11):

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \Big\{ e^{\alpha_n(t+\tau)} \exp_{\mathrm{d}}(\sigma_n t, \sigma_n \tau) \Phi_n(-\tau) + \\ + \int_{-\tau}^{0} e^{\alpha_n(t-s)} \exp_{\mathrm{d}}(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n\tau)[\Phi'_n(s) - \alpha_n \Phi_n(s)]\, ds \Big\}, \quad (27)$$

где

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \big[\varphi(\xi,t) - u_0(\xi,t)\big] X_n(\xi)\, d\xi, \quad \|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)\, d\xi. \quad (28)$$

Для любой из пяти основных начально-краевых задач, граничные условия которых приведены в табл. 11.1, в формулы (26)–(27) следует подставить соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ из табл. 11.2.

► Решение задачи 2.

Рассмотрим теперь линейное неоднородное УрЧП с запаздыванием (12) с однородными начальным и граничными условиями (13) и (14).

Сначала разложим неоднородную составляющую уравнения (12) на ряд по собственным функциям (20):

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(x), \qquad F_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h F(\xi,t) X_n(\xi)\, d\xi, \quad (29)$$

где функция $F(x,t)$ определяется по формуле (15) и $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)\, d\xi$.

Решение задачи (12)–(15) ищем в виде ряда

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) X_n(x), \quad (30)$$

удовлетворяющего однородным краевым условиям (14). Подставляя (30) в (12) и учитывая (29), получаем линейные неоднородные ОДУ с запаздыванием для функций $U_n(t)$:

$$U'_n(t) = (c_1 - a_1\lambda_n^2) U_n(t) + (c_2 - a_2\lambda_n^2) U_n(t-\tau) + F_n(t), \quad (31)$$

где функции $F_n(t)$ определяются по второй формуле (29). Для завершения формулировки задачи уравнения (31) дополняются однородными начальными условиями

$$U_n(t) = 0 \quad \text{при} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad (32)$$

которые следуют из (13) и (30).

Задача типа Коши (31)–(32) с точностью до переобозначений совпадает с задачей, рассмотренной в разд. 10.1.1 (см. уравнение 10.1.1.4). Поэтому ее решение в области $t \geqslant 0$ можно представить в виде

$$U_n(t) = \int_0^t e^{\alpha_n(t-s)} \exp_{\rm d}(\sigma_n(t-s), \sigma_n\tau) F_n(s)\, ds, \quad \sigma_n = e^{-\alpha_n\tau}\beta_n, \tag{33}$$

где параметры α_n и β_n определены в (25). Подставив (33) в (30), получим решение задачи (12)–(15):

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl[\int_0^t e^{\alpha_n(t-s)} \exp_{\rm d}(\sigma_n(t-s), \sigma_n\tau) F_n(s)\, ds\Bigr] X_n(x). \tag{34}$$

Решения начально-краевых задач для исходного уравнения с общим начальным условием (4) и любыми граничными условиями (5), представленными в табл. 11.1, могут быть получены подстановкой функций (6), (27), (34) в (5), где функции $u_0 = u_0(x,t)$ берутся из табл. 11.1, а собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ — из табл. 11.2.

2. $\boldsymbol{u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, t-\tau).}$

Линейное УрЧП волнового типа с постоянным запаздыванием, где $a_1 > a_2 \geqslant 0$ и $\tau > 0$.

► **Точные решения.**

1°. Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]e^{-\lambda t}, \qquad k = \sqrt{(c_1 + c_2 e^{\lambda\tau} - \lambda^2)/(a_1 + a_2 e^{\lambda\tau})}$$
$$\text{при } \ c_1 + c_2 e^{\lambda\tau} - \lambda^2 > 0; \tag{1}$$

$$u = [A\exp(kx) + B\exp(-kx)]e^{-\lambda t}, \quad k = \sqrt{-(c_1 + c_2 e^{\lambda\tau} - \lambda^2)/(a_1 + a_2 e^{\lambda\tau})}$$
$$\text{при } \ c_1 + c_2 e^{\lambda\tau} - \lambda^2 < 0, \tag{2}$$

где A, B, λ — произвольные постоянные. Заметим, что эти решения являются частными случаями более сложных решений с мультипликативным разделением переменных $u = \varphi(x)\psi(t)$.

Решение (1) является периодическим по пространственной переменной x и затухает $t \to \infty$ (если $\lambda > 0$).

2°. При некоторых ограничениях на параметры исходного уравнения существуют решения, которые являются периодическими по обеим независимым переменным x и t, вида

$$u = [A_1\cos(\gamma x) + B_1\sin(\gamma x)][A_2\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)],$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, а константы γ и ω определяются из трансцендентной системы уравнений

$$\begin{aligned}\omega^2 + c_1 + c_2\cos(\omega\tau) &= [a_1 + a_2\cos(\omega\tau)]\gamma^2,\\ (c_2 - a_2\gamma^2)\sin(\omega\tau) &= 0.\end{aligned}$$

3°. При некоторых ограничениях на параметры исходного уравнения существуют решения, периодические по времени t, вида

$$u = [A_1\operatorname{ch}(\gamma x) + B_1\operatorname{sh}(\gamma x)][A_2\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)],$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, а константы γ и ω определяются из трансцендентной системы уравнений

$$\begin{aligned}\omega^2 + c_1 + c_2\cos(\omega\tau) &= -[a_1 + a_2\cos(\omega\tau)]\gamma^2,\\ (c_2 + a_2\gamma^2)\sin(\omega\tau) &= 0.\end{aligned}$$

4°. Существуют другие решения, периодические по времени t:

$$u = e^{-\gamma x}[A\cos(\omega t - \beta x) + B\sin(\omega t - \beta x)],$$

где A, B, ω — произвольные постоянные, а параметры β и γ могут быть выражены через ω и параметры исходного уравнения путем решения алгебраической системы уравнений, которая здесь не приводится.

5°. Имеются решения полиномиального вида по x (содержащие соответственно четные и нечетные степени):

$$u = \sum_{k=0}^{n} A_k(t)x^{2k} \quad \text{и} \quad u = \sum_{k=0}^{n} B_k(t)x^{2k+1}.$$

► Формулировки начально-краевых задач ($0 \leqslant x \leqslant h$).

Будем рассматривать начально-краевую задачу для исходного гиперболического УрЧП с постоянным запаздыванием при согласованных начальных условиях (начальных данных) общего вида

$$\begin{aligned}u &= \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0 \quad (0 < x < h),\\ u_t &= \varphi_t(x,t) \quad \text{при} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0 \quad (0 < x < h),\end{aligned} \tag{3}$$

и различными линейными однородными граничными условиями, которые для удобства запишем в компактной форме

$$\Gamma_1[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (t > -\tau), \qquad \Gamma_2[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = h \quad (t > -\tau), \tag{4}$$

где $0 < h < \infty$.

Предполагается, что линейные операторы $\Gamma_{1,2}[u]$, входящие в граничные условия (4), не зависят явно от времени t. Наиболее распространенные граничные условия приведены в третьем столбце табл. 11.1, где следует положить $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$. В частности, в случае граничных условий первого рода в (4) надо взять $\Gamma_1[u] = \Gamma_2[u] = u$.

► **Построение решения начально-краевой задачи.**

Сначала ищем частные решения исходного уравнения в виде произведения функций разных аргументов $u_p = X(x)T(t)$. Разделив переменные в полученном уравнении, приходим к линейному ОДУ второго порядка и линейному ОДУ второго порядка с запаздыванием:

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \tag{5}$$

$$T''(t) = (c_1 - a_1\lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2\lambda^2)T(t-\tau). \tag{6}$$

Требуя, чтобы функция $u_p = X(x)T(t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям (4), приходим к однородным граничным условиям для функции X:

$$\Gamma_1[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \Gamma_2[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = h. \tag{7}$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (5), (7) существуют только для дискретного набора значений параметра λ:

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1,\, 2,\, \ldots \tag{8}$$

Собственные значения и собственные функции однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (5) для пяти наиболее распространенных граничных условий, приведены в табл. 11.2.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (6), получим соответствующие ОДУ с запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Решение линейной начально-краевой задачи для исходного уравнения с начальными и граничными условиями (3) и (4) ищется в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t), \tag{9}$$

где функции $u_{1n}(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ — частные решения этого уравнения, удовлетворяющие однородным граничным условиям (4).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с запаздыванием (6) при $\lambda = \lambda_n$, представим начальное условие (3) в виде разложения по собственным функциям:

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)X_n(x), \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant h), \tag{10}$$

где

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^h \varphi(\xi,t)X_n(\xi)\,d\xi, \qquad \|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)\,d\xi. \tag{11}$$

Из условий (3) и соотношений (9) и (10) получаем начальные условия для ОДУ с запаздыванием (6) при $\lambda = \lambda_n$ в виде

$$T_n(t) = \varphi_n(t), \quad T_n'(t) = \varphi_n'(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \tag{12}$$

где функции $\varphi_n(t)$ определяются формулами (11).

Для построения аналитического решения задачи типа Коши для ОДУ с запаздыванием второго порядка (6) с начальными данными (12) можно использовать результаты Родригеса и др. (Rodríguez, Roles, Marín, 2012), где рассматривалась аналогичная задача для ОДУ с постоянным запаздыванием. Соответствующее решение для функции $T_n(t)$ (при $a_1\lambda_1^2 > c_1$), полученное методом шагов, очень громоздко и приведено в разд. 10.3.1 (см. уравнение 10.3.1.2). Кроме того, решение задачи (6), (12) можно найти с помощью преобразования Лапласа или с помощью численных методов.

После определения функций $T_n(t)$ решение задачи для исходного гиперболического УрЧП с запаздыванием с начальными и граничными условиями (3) и (4) определяется рядом (9), в котором собственные функции $X_n(x)$ и собственные значения λ_n для пяти наиболее распространенных граничных условий берутся из табл. 11.2.

11.1.2. УрЧП с пропорциональным запаздыванием

1. $\boldsymbol{u_t = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, pt).}$

Линейное уравнение диффузионного типа с пропорциональным запаздыванием, где $0 < p < 1$.

▶ **Точные решения.**

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных, периодическое по x:

$$u = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]\varphi(t),$$

где A, B, k — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается линейным ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\varphi'_t = (c_1 - a_1k^2)\varphi + (c_2 - a_2k^2)\bar{\varphi}, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(pt).$$

Это уравнение допускает аналитическое решение в виде степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости (см. решение уравнения 10.1.2.2).

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [A\operatorname{ch}(kx) + B\operatorname{sh}(kx)]\varphi(t),$$

где A, B, k — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается линейным ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\varphi'_t = (c_1 + a_1k^2)\varphi + (c_2 + a_2k^2)\bar{\varphi}, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(pt).$$

Это уравнение допускает аналитическое решение в виде степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости (см. решение уравнения 10.1.2.2).

3°. Имеются решения полиномиального вида по x (содержащие соответственно четные и нечетные степени):

$$u = \sum_{k=0}^{n} A_k(t)x^{2k} \quad \text{и} \quad u = \sum_{k=0}^{n} B_k(t)x^{2k+1}.$$

► Формулировки начально-краевых задач ($0 \leqslant x \leqslant h$).

Будем рассматривать начально-краевую задачу для исходного параболического УрЧП с пропорциональным запаздыванием с начальным условием общего вида

$$u = \varphi(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{1}$$

и различными линейными однородными граничными условиями, которые для удобства запишем в компактной форме

$$\Gamma_1[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \Gamma_2[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = h, \tag{2}$$

где $0 < h < \infty$.

Предполагается, что линейные операторы $\Gamma_{1,2}[u]$, входящие в граничные условия (4), не зависят явно от времени t. Наиболее распространенные граничные условия приведены в третьем столбце табл. 11.1, где следует положить $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$.

► Построение решения начально-краевой задачи.

Как обычно, сначала ищем частные решения исходного уравнения в виде произведения функций разных аргументов $u_p = X(x)T(t)$. Разделив переменные в полученном уравнении, приходим к линейному ОДУ второго порядка и линейному ОДУ первого порядка с пропорциональным запаздыванием:

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \tag{3}$$

$$T'(t) = (c_1 - a_1\lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2\lambda^2)T(pt). \tag{4}$$

Требуя, чтобы функция $u_p = X(x)T(t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям (2), приходим к однородным граничным условиям для функции X:

$$\Gamma_1[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \Gamma_2[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = h. \tag{5}$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (3), (5) существуют только для дискретного набора значений параметра λ:

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1,\, 2,\, \ldots \tag{6}$$

Собственные значения и собственные функции однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (3) для пяти наиболее распространенных граничных условий, приведены в табл. 11.2.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (4), получим соответствующие ОДУ с пропорциональным запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Используя принцип линейной суперпозиции, ищем решение линейной начально-краевой задачи для исходного уравнения с начальными и граничными условиями (1) и (2) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{7}$$

где функции $T_n(t)$ описываются уравнением (4) при $\lambda = \lambda_n$. По построению ряд (7) удовлетворяет исходному уравнению и однородным граничным условиям (2).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (4) при $\lambda = \lambda_n$, представим функцию $\varphi(x)$, входящую в начальное условие (1), в виде разложения по собственным функциям

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{8}$$

где

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \varphi(\xi) X_n(\xi)\, d\xi, \qquad \|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)\, d\xi. \tag{9}$$

Из соотношений (7) и (8) получаем начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (4) при $\lambda = \lambda_n$ в виде

$$T_n(0) = A_n, \tag{10}$$

где коэффициенты A_n определяются по формуле (9).

Линейная задача для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (4), (10) для $\lambda = \lambda_n$ и $A_n = 1$ с точностью до переобозначений совпадает с рассмотренной ранее задачей в разд. 10.1.2 (см. уравнение 10.1.2.2). Поэтому решение задачи (4), (10) можно представить в виде степенного ряда

$$\begin{gathered} T_n(t) = A_n\Big(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{mn} t^m\Big), \quad \gamma_{mn} = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (\alpha_n + \beta_n p^k), \\ \alpha_n = c_1 - a_1\lambda_n^2, \quad \beta_n = c_2 - a_2\lambda_n^2. \end{gathered} \tag{11}$$

Подставив выражения (11) в формулу (7), получим решение исходной задачи для УрЧП с пропорциональным запаздыванием в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{mn} t^m\Big) X_n(x), \tag{12}$$

где коэффициенты A_n и γ_{mn} определяются с использованием выражений (9) и (11).

Решение начально-краевых задач для исходного уравнения с пятью краевыми условиями, представленными в табл. 11.1, можно получить по формулам (9), (11), (12), взяв соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ из табл. 11.2.

2. $\boldsymbol{u_t = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx}, \quad w = u(px, qt).}$

Здесь $p > 0$ и $q > 0$ — коэффициенты пропорциональности аргументов.

Рассмотрим исходное функционально-дифференциальное УрЧП с двумя пропорциональными аргументами с начальными и граничными условиями специального вида

$$u = A \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u = B \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{1}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Решение начально-краевой задачи для исходного уравнения при условиях (1) является автомодельным и может быть представлено в виде

$$u = U(z), \qquad z = xt^{-1/2}, \tag{2}$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет следующей краевой задаче для ОДУ с пропорциональным аргументом:

$$-\tfrac{1}{2} z U'_z = a_1 U''_{zz} + a_2 W''_{zz}, \quad W = U(\sigma z), \quad \sigma = pq^{-1/2}; \tag{3}$$

$$U(0) = B, \quad U(\infty) = A. \tag{4}$$

Пусть масштабные коэффициенты p и q связаны параболическим соотношением $q = p^2$, тогда $\sigma = 1$ и $U = W$. В этом частном случае уравнение (3) легко интегрируется, и решение исходной задачи (3)-(4) определяется формулой

$$u = B + (A - B)\,\mathrm{erf}\Bigl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\Bigr), \quad a = a_1 + a_2,$$

где $\mathrm{erf}\,\zeta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta \exp(-\xi^2)\, d\xi$ — интеграл вероятностей.

3. $\boldsymbol{u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, pt).}$

Линейное уравнение волнового типа с пропорциональным запаздыванием, где $0 < p < 1$.

► Точные решения.

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных, периодическое по x:

$$u = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]\varphi(t),$$

где A, B, k — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается линейным ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\varphi''_{tt} = (c_1 - a_1 k^2)\varphi + (c_2 - a_2 k^2)\bar{\varphi}, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(pt).$$

Это уравнение допускает аналитическое решение в виде степенного ряда (см. решение уравнения 10.3.2.4 при $c = 0$).

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [A\operatorname{ch}(kx) + B\operatorname{sh}(kx)]\varphi(t),$$

где A, B, k — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается линейным ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\varphi''_{tt} = (c_1 + a_1 k^2)\varphi + (c_2 + a_2 k^2)\bar{\varphi}, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(pt).$$

Это уравнение допускает аналитическое решение в виде степенного ряда (см. решение уравнения 10.3.2.4 при $c = 0$).

3°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2)\varphi''_{xx} + (c_1 + c_2)\varphi = 0,\\ &\psi''_{tt} = c_1\psi + c_2\bar{\psi}, \qquad \bar{\psi} = \psi(pt).\end{aligned}$$

4°. Имеются решения полиномиального вида по x (содержащие соответственно четные и нечетные степени):

$$u = \sum_{k=0}^{n} A_k(t)x^{2k} \quad \text{и} \quad u = \sum_{k=0}^{n} B_k(t)x^{2k+1}.$$

► **Формулировки начально-краевых задач ($0 \leqslant x \leqslant h$).**

Будем рассматривать начально-краевую задачу для исходного гиперболического УрЧП с пропорциональным запаздыванием с начальными условиями общего вида

$$u = \varphi(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad u_t = \psi(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{1}$$

и различными линейными однородными граничными условиями, которые для удобства запишем в компактной форме

$$\Gamma_1[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \Gamma_2[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = h, \tag{2}$$

где $0 < h < \infty$. Наиболее распространенные граничные условия приведены в третьем столбце табл. 11.1, где следует положить $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$.

Частные решения исходного уравнения ищем в виде произведения функций разных аргументов $u_p = X(x)T(t)$. Используя стандартную процедуру разделения переменных, приходим к линейному ОДУ второго порядка и ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием:

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \tag{3}$$

$$T''(t) = (c_1 - a_1\lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2\lambda^2)T(pt). \tag{4}$$

Требуя, чтобы функция $u_p = X(x)T(t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям (2), получим однородные граничные условия для функции X:

$$\Gamma_1[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \Gamma_2[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = h. \tag{5}$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (3), (5) существуют только для дискретного набора значений параметра λ:

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Собственные значения и собственные функции однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (3) для пяти наиболее распространенных граничных условий, приведены в табл. 11.2.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (4), получим соответствующие ОДУ с пропорциональным запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Используя принцип линейной суперпозиции, ищем решение линейной начально-краевой задачи для исходного уравнения с начальными и граничными условиями (1) и (2) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{7}$$

где функции $T_n(t)$ описываются уравнением (4) при $\lambda = \lambda_n$. По построению ряд (7) удовлетворяет исходному уравнению и однородным граничным условиям (2).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием (4) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия (1), представим в виде разложений по собственным функциям

$$\begin{gathered} \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x), \\ A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \varphi(\xi) X_n(\xi)\, d\xi, \qquad B_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \psi(\xi) X_n(\xi)\, d\xi, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)\, d\xi$. Из соотношений (7) и (8) получим начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (4):

$$T_n(0) = A_n, \qquad T_n'(0) = B_n. \tag{9}$$

Линейная задача для ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием (4), (9) с точностью до переобозначений совпадает с задачей, рассмотренной в разд. 10.3.2 (см. уравнение 10.3.2.4 при $c = 0$). Учитывая изложенное, можно представить решение задачи (4), (9) в виде линейной комбинации двух степенных рядов

$$T_n(t) = A_n T_{n1}(t) + B_n T_{n2}(t), \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered}
T_{n1}(t)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{n,2m}t^{2m},\qquad \gamma_{n,2m}=\frac{1}{(2m)!}\prod_{k=0}^{m-1}(\alpha_n+\beta_n p^{2k});\\
T_{n2}(t)=t+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{n,2m+1}t^{2m+1},\qquad \gamma_{n,2m+1}=\frac{1}{(2m+1)!}\prod_{k=0}^{m-1}(\alpha_n+\beta_n p^{2k+1});\\
\alpha_n=c_1-a_1\lambda_n^2,\qquad \beta_n=c_2-a_2\lambda_n^2.
\end{gathered}\tag{11}$$

При $0<p<1$ оба ряда в (11) имеют бесконечный радиус сходимости.

Подставив выражения (10) в (7), получим решение рассматриваемой начально-краевой задачи в виде

$$\begin{gathered}
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\bigl[A_nT_{n1}(t)+B_nT_{n2}(t)\bigr]X_n(x),\\
T_{n1}(t)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{n,2m}t^{2m},\quad T_{n2}(t)=t+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{n,2m+1}t^{2m+1},
\end{gathered}\tag{12}$$

Решение начально-краевых задач для исходного уравнения с пятью граничными условиями, представленными в табл. 11.1, может быть получено по формулам (8) (для A_n и B_n), (11) (для $\gamma_{n,2m}$ и $\gamma_{n,2m+1}$) и (12), где соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ берутся из табл. 11.2.

11.2. Нелинейные УрЧП с постоянными запаздываниями

В этом разделе считается, что $f=f(z)$, $g=g(z)$, $h=h(z)$ — произвольные функции, $\tau>0$ и $\sigma>0$ — произвольные постоянные, $u=u(x,t)$ — искомая функция, $w=u(x,t-\tau)$.

11.2.1. Уравнения параболического типа

► Уравнения, линейные относительно производных.

Уравнения, содержащие произвольные параметры.

1. $\boldsymbol{u_t=au_{xx}+bu^3+cw^3,\quad w=u(x,t-\tau).}$

Частный случай уравнения 11.2.1.13 при $f(z)=a+bz^3$.

2. $\boldsymbol{u_t=au_{xx}+bu^kw^{3-k}+cu^mw^{3-m},\quad w=u(x,t-\tau).}$

Частный случай уравнения 11.2.1.13 при $f(z)=bz^{3-k}+cz^{3-m}$.

3. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u(b\ln u + c\ln w + d), \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)],$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned}
&\psi_2' = 4a\psi_2^2 + b\psi_2 + c\bar{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t-\tau),\\
&\psi_1' = 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_1 + c\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t-\tau),\\
&\psi_0' = a(\psi_1^2 + 2\psi_2) + b\psi_0 + c\bar{\psi}_0 + d, \quad \bar{\psi}_0 = \psi_0(t-\tau).
\end{aligned}$$

4. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u(b\ln^2 u + c\ln u + d\ln w + s), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab > 0$:

$$\begin{aligned}
&u(x,t) = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],\\
&\varphi(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{b/a},
\end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned}
&\psi_1' = 2b\psi_1\psi_2 + (c-b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t-\tau),\\
&\psi_2' = b(A^2 + B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t-\tau).
\end{aligned}$$

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab < 0$:

$$\begin{aligned}
&u(x,t) = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],\\
&\varphi(x) = A\,\mathrm{ch}(\lambda x) + B\,\mathrm{sh}(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},
\end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned}
&\psi_1' = 2b\psi_1\psi_2 + (c-b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t-\tau),\\
&\psi_2' = b(A^2 - B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t-\tau).
\end{aligned}$$

При $A = \pm B$ имеем $\varphi(x) = Ae^{\pm\lambda x}$. В этом случае второе уравнение системы становится независимым, а первое является линейным относительно ψ_1.

Уравнения, содержащие одну произвольную функцию.

5. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + f(u-w), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных, квадратичное по x:

$$u = C_2x^2 + C_1x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$\psi_t'(t) = 2C_2a + f\big(\psi(t) - \psi(t-\tau)\big).$$

Это ОДУ с запаздыванием имеет частное решение, линейное по t, вида $\psi(t) = \lambda t + C_3$, где C_3 — произвольная постоянная, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $2C_2a - \lambda + f(\tau\lambda) = 0$.

2°. Точное решение более сложного вида

$$u = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 t + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t,$$

где C_1, C_2, C_3, β, γ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a\beta^2 \theta''_{zz}(z) - \gamma\theta'_z(z) + 2C_1 a - C_3 + f\bigl(\theta(z) - \theta(z-\sigma) + C_3\tau\bigr) = 0, \quad \sigma = \gamma\tau.$$

6. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + f(u - v), \quad v = u(x - \sigma, t).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = Ct + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} - C + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(x - \sigma).$$

2°. Рассматриваемое уравнение имеет также более сложное решение с аддитивным разделением переменных смешанного типа:

$$u = \alpha x + \beta t + \theta(z), \quad z = \lambda x + \gamma t,$$

где α, β, γ, λ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a\lambda^2 \theta''_{zz} - \gamma\theta'_z - \beta + f(\theta - \bar{\theta} + \alpha\sigma) = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(z - \lambda\sigma).$$

7. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, t - \tau).}$

При $b = 0$ см. предыдущее уравнение.

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab > 0$, периодическое по x:

$$u = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$\psi'_t(t) = b\psi(t) + f\bigl(\psi(t) - \psi(t - \tau)\bigr). \tag{1}$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab < 0$:

$$u = C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием (1).

3°. Вырожденное решение с аддитивным разделением переменных при $b=0$:

$$u = C_1 x + C_2 + \psi(t),$$

где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с постоянным запаздыванием (1) при $b=0$.

4°. Точное решение при $ab > 0$, которое обобщает решение из п. 1°:

$$u = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t, \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где C_1, C_2, β, γ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$\gamma \theta'_z(z) = a\beta^2 \theta''_{zz}(z) + b\theta(z) + f(\theta(z) - \theta(z-\sigma)), \quad \sigma = \gamma\tau. \tag{2}$$

5°. Точное решение при $ab < 0$, которое обобщает решение из п. 2°:

$$u = C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x) + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t, \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где C_1, C_2, β, γ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием (2).

6°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = t\varphi(x) + \psi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} &a\varphi''_{xx} + b\varphi = 0,\\ &a\psi''_{xx} + b\psi + f(\tau\varphi) - \varphi = 0, \end{aligned}$$

которые последовательно легко интегрируются.

8. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu + f(u - kw), \quad w = u(x, t-\tau), \quad k > 0.}$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = e^{ct}\varphi(x) + \psi(x), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln k,$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются независимыми ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} a\varphi''_{xx} + (b-c)\varphi &= 0,\\ a\psi''_{xx} + b\psi + f(\eta) &= 0, \quad \eta = (1-k)\psi. \end{aligned}$$

2°. Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение исходного нелинейного УрЧП с запаздыванием, а функция $v = V_1(x,t;b)$ — любое τ-периодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником

$$v_t = av_{xx} + bv, \qquad v(x,t) = v(x, t-\tau).$$

Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + e^{ct} V_1(x,t;b-c), \qquad c = \frac{1}{\tau} \ln k,$$

также является решением исходного УрЧП с запаздыванием. Общий вид функции $V_1(x,t;b)$ определяется формулами

$$V_1(x,t;b) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_n x)\big[A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)\big] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x)\big[C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)\big],$$

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2} - b}{2a}\right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2} + b}{2a}\right)^{1/2},$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные.

Отметим, что в качестве частного решения $u_0(x,t)$ исходного уравнения можно взять пространственно однородное решение $u_0(t)$ или стационарное решение $u_0(x)$. Стационарные точки $u_0 = \text{const}$ также могут использоваться как простейшие частные решения.

9. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu + f(u + kw), \quad w = u(x, t-\tau), \quad k > 0.}$

Пусть $u_0(x,t)$ — некоторое решение исходного нелинейного УрЧП с запаздыванием, а функция $v = V_2(x,t;b)$ — любое τ-антипериодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником

$$v_t = av_{xx} + bv, \qquad v(x,t) = -v(x,t-\tau).$$

Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + e^{ct} V_2(x,t;b-c), \qquad c = \frac{1}{\tau} \ln k,$$

также является решением исходного УрЧП с запаздыванием. Общий вид функции $V_2(x,t;b)$ определяется формулами

$$V_2(x,t;b) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n x)\big[A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)\big] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n x)\big[C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)\big],$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2} - b}{2a}\right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2} + b}{2a}\right)^{1/2},$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные.

Отметим, что в качестве частного решения $u_0(x,t)$ исходного уравнения можно взять пространственно однородное решение $u_0(t)$ или стационарное решение $u_0(x)$.

10. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных, периодическое по x:

$$u = [C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$\psi_t'(t) = -a\beta^2\psi(t) + \psi(t)f\bigl(\psi(t-\tau)/\psi(t)\bigr). \tag{1}$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$\psi_t'(t) = a\beta^2\psi(t) + \psi(t)f\bigl(\psi(t-\tau)/\psi(t)\bigr). \tag{2}$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (C_1x + C_2)\psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (1) при $\beta = 0$.

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных смешанного типа:

$$u = e^{\alpha x+\beta t}\theta(z), \qquad z = \lambda x + \gamma t,$$

где α, β, γ, λ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$\begin{gathered} a\lambda^2\theta_{zz}''(z) + (2a\alpha\lambda - \gamma)\theta_z'(z) + (a\alpha^2 - \beta)\theta(z) + \\ + \theta(z)f\bigl(e^{-\beta\tau}\theta(z-\sigma)/\theta(z)\bigr) = 0, \quad \sigma = \gamma\tau. \end{gathered}$$

Замечание 11.1. *ОДУ с запаздыванием (1) и (2) допускают частные решения экспоненциального вида*

$$\psi(t) = Ae^{\lambda_n t}, \quad n = 1,\, 2,$$

где A — произвольная постоянная, а λ_1 и λ_2 — корни трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -a\beta^2 + f(e^{-\lambda_1\tau}) && \textit{для уравнения (1)},\\ &\lambda_2 = a\beta^2 + f(e^{-\lambda_2\tau}) && \textit{для уравнения (2)}. \end{aligned}$$

5°. Точное решение:

$$u = e^{ct}V_1(x, t; b), \quad b = f(e^{-c\tau}) - c,$$

где c — произвольная постоянная, а $V_1(x, t; b)$ — τ-периодическая функция, определяемая формулами, приведенными в п. 2° уравнения 11.2.1.8.

6°. Точное решение:

$$u = e^{ct} V_2(x, t; b), \quad b = f(-e^{-c\tau}) - c,$$

где c — произвольная постоянная, а $V_2(x, t; b)$ — τ-антипериодическая функция, определяемая формулами, приведенными в решении уравнения 11.2.1.9.

11. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(v/u), \quad v = u(x - \sigma, t).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(x - \sigma).$$

2°. Рассматриваемое уравнение имеет также более общее решение с мультипликативным разделением переменных смешанного типа:

$$u = e^{\alpha x + \beta t} \theta(z), \quad z = \lambda x + \gamma t,$$

где α, β, γ, λ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$a\lambda^2 \theta''_{zz} + (2a\alpha\lambda - \gamma)\theta' + a\alpha^2 \theta + \theta f(e^{-\alpha\sigma} \bar{\theta}/\theta) = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(z - \lambda\sigma).$$

12. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, t - \tau).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} &a\varphi''_{xx} = C_1\varphi - b\varphi \ln \varphi, \\ &\psi'_t(t) = C_1\psi(t) + \psi(t) f(\psi(t - \tau)/\psi(t)) + b\psi(t) \ln \psi(t), \end{aligned}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Заметим, что ОДУ для φ имеет частное однопараметрическое решение:

$$\varphi = \exp\left[-\frac{b}{4a}(x + C_2)^2 + \frac{C_1}{b} + \frac{1}{2}\right],$$

где C_2 — произвольная постоянная.

13. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u^3 f(w/u), \quad w = u(x, t - \tau).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = xU(z), \quad z = t + \frac{1}{6a} x^2,$$

где функция $U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$U''(z) + 9aU^3(z)f\big(U(z-\tau)/U(z)\big) = 0.$$

14. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} - cu\ln u + uf(w/u^k), \quad w = u(x,t-\tau), \quad k > 0.}$

1°. Рассматриваемое уравнение при $c = (\ln k)/\tau$ имеет решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \exp(Ae^{-ct})\varphi(x),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка автономного вида

$$a\varphi''_{xx} - c\varphi\ln\varphi + \varphi f(\varphi^{1-k}) = 0.$$

2°. Рассматриваемое уравнение при $c = (\ln k)/\tau$ имеет точное решение:

$$u = \exp(Axe^{-ct})\psi(t),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием

$$\psi'(t) = \psi(t)\big[A^2ae^{-2ct} - c\ln\psi(t) + f\big(\psi(t-\tau)\psi^{-k}(t)\big)\big].$$

Уравнения, содержащие две или три произвольные функции.

15. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(u-w) + wg(u-w) + h(u-w), \quad w = u(x,t-\tau).}$

Точные решения:

$$u = \sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)] + t\theta(x) + \xi(x), \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau},$$

где N — любое натуральное число, а функции $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\theta(x)$, $\xi(x)$ описываются системой ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} a\varphi_n'' + \varphi_n[f(\tau\theta) + g(\tau\theta)] - \beta_n\psi_n &= 0,\\ a\psi_n'' + \psi_n[f(\tau\theta) + g(\tau\theta)] + \beta_n\varphi_n &= 0,\\ a\theta'' + \theta[f(\tau\theta) + g(\tau\theta)] &= 0,\\ a\xi'' + \xi f(\tau\theta) + (\xi - \tau\theta)g(\tau\theta) + h(\tau\theta) - \theta &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что третье ОДУ является изолированным (т. е. не зависит от других уравнений) и допускает тривиальное решение $\theta = 0$; в этом случае остальные уравнения становятся линейными ОДУ с постоянными коэффициентами.

16. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(u - kw) + wg(u - kw) + h(u - kw), \quad k > 0.}$

Точные решения:

$$u = e^{ct}\Big\{\theta(x) + \sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)]\Big\} + \xi(x),$$
$$c = \frac{1}{\tau}\ln k, \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau},$$

где N — любое натуральное число, а функции $\theta(x)$, $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\xi(x)$ описываются системой ОДУ второго порядка

$$a\theta'' + \theta\Big[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - c\Big] = 0, \quad \eta = (1-k)\xi,$$
$$a\varphi_n'' + \varphi_n\Big[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - c\Big] - \beta_n\psi_n = 0,$$
$$a\psi_n'' + \psi_n\Big[f(\eta) + \frac{1}{k}g(\eta) - c\Big] + \beta_n\varphi_n = 0,$$
$$a\xi'' + \xi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta) = 0.$$

Заметим, что последнее ОДУ является изолированным (т. е. не зависит от других уравнений)

17. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(u + kw) + wg(u + kw) + h(u + kw), \quad k > 0.}$

Точные решения:

$$u = e^{ct}\sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\cos(\beta_n t) + \psi_n(x)\sin(\beta_n t)] + \xi(x),$$
$$c = \frac{1}{\tau}\ln k, \quad \beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau},$$

где N — любое натуральное число, а функции $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\xi(x)$ описываются системой ОДУ второго порядка

$$a\varphi_n'' + \varphi_n\Big[f(\eta) - \frac{1}{k}g(\eta) - c\Big] - \beta_n\psi_n = 0,$$
$$a\psi_n'' + \psi_n\Big[f(\eta) - \frac{1}{k}g(\eta) - c\Big] + \beta_n\varphi_n = 0,$$
$$a\xi'' + \xi[f(\eta) + g(\eta)] + h(\eta) = 0, \quad \eta = (1+k)\xi.$$

Заметим, что последнее ОДУ является изолированным (т. е. не зависит от других уравнений)

18. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(u^2 + w^2) + wg(u^2 + w^2), \quad w = u(x, t - \tau).}$

Решения с обобщенным разделением переменных:

$$u = \varphi_n(x)\cos(\lambda_n t) + \psi_n(x)\sin(\lambda_n t),$$
$$\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\tau}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

где функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ описываются системой ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} a\varphi_n'' + \varphi_n f(\varphi_n^2 + \psi_n^2) + (-1)^{n+1}\psi_n g(\varphi_n^2 + \psi_n^2) - \lambda_n\psi_n = 0, \\ a\psi_n'' + \psi_n f(\varphi_n^2 + \psi_n^2) + (-1)^n\varphi_n g(\varphi_n^2 + \psi_n^2) + \lambda_n\varphi_n = 0. \end{aligned}$$

19. $\boldsymbol{u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)f(u - w), \quad w = u(x, t - \tau).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = t + \int g(x)\,dx, \qquad g(x) = \frac{1}{a(x)}\Big[x - f(\tau)\int b(x)\,dx\Big].$$

2°. Более сложное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \varphi(x)t + \psi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} &[a(x)\varphi_x']_x' = 0, \\ &[a(x)\psi_x']_x' = \varphi - b(x)f(\tau\varphi). \end{aligned}$$

Эти уравнения последовательно легко интегрируются.

20. $\boldsymbol{u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)uf(w/u), \quad w = u(x, t - \tau).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается линейным ОДУ второго порядка

$$[a(x)\varphi_x']_x' + [f(e^{-\lambda\tau})b(x) - \lambda]\varphi = 0.$$

21. $\boldsymbol{u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u + uf(w/u), \quad w = u(x, t - \tau).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием:

$$\begin{aligned} &[a(x)\varphi_x']_x' + b(x)\varphi = C_1\varphi; \\ &\psi_t' = C_1\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(t - \tau), \end{aligned}$$

C_1 — произвольная постоянная. Нелинейное ОДУ с запаздыванием допускает частные решения экспоненциального вида $\psi = C_2 e^{\lambda t}$.

Уравнения, содержащие произвольные функции двух аргументов.

22. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + x^2 f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau).}$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$u = U(z), \qquad z = t + \frac{1}{2a}x^2,$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием автономного вида

$$U''_{zz} + af(U, W) = 0, \qquad W = U(z - \tau).$$

23. $\boldsymbol{u_t = u_{xx} + \operatorname{th}^2(kx) f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau).}$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$u = U(z), \qquad z = t + k^{-2} \ln \operatorname{ch}(kx),$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием автономного вида

$$U''_{zz} - k^2 U'_z + k^2 f(U, W) = 0, \qquad W = U(z - \tau).$$

24. $\boldsymbol{u_t = [a(x)u_x]_x + \dfrac{x^2}{a(x)} f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau).}$

Решение типа обобщенной бегущей волны:

$$u = U(z), \qquad z = t + \int \frac{x}{a(x)}\,dx,$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием автономного вида

$$U''_{zz} + f(U, W) = 0, \qquad W = U(z - \tau).$$

25. $\boldsymbol{u_t = [a(x)u_x]_x + uf(x, u - w) + g(x, u - w), \quad w = u(x, t - \tau).}$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)t + \psi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются ОДУ второго порядка

$$[a(x)\varphi'_x]'_x + \varphi f(x, \tau\varphi) = 0,$$
$$[a(x)\psi'_x]'_x + \psi f(x, \tau\varphi) + g(x, \tau\varphi) - \varphi = 0.$$

► **Уравнения, нелинейные относительно производных.**

Уравнения, содержащие произвольные параметры.

26. $\boldsymbol{u_t = [(a_1 u + a_0)u_x]_x + b_1 u + b_2 w, \quad w = u(x, t - \tau).}$

Решение с обобщенным разделением переменных полиномиального вида по x:

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2.$$

Здесь функции $\psi_j = \psi_j(t)$ ($j = 1,\, 2,\, 3$) описываются системой ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= 2a_1\psi_1\psi_3 + a_1\psi_2^2 + 2a_0\psi_3 + b_1\psi_1 + b_2\bar{\psi}_1,\\
\psi_2' &= 6a_1\psi_2\psi_3 + b_1\psi_2 + b_2\bar{\psi}_2,\\
\psi_3' &= 6a_1\psi_3^2 + b_1\psi_3 + b_2\bar{\psi}_3,
\end{aligned}$$

где $\bar{\psi}_j = \psi_j(t-\tau)$.

27. $\boldsymbol{u_t = [(a_1u + a_0)u_x]_x + ku^2 + b_1u + b_2w, \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных при $a_1k < 0$:

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\exp(-\lambda x) + \psi_3(t)\exp(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{-k/(2a_1)}.$$

Здесь функции $\psi = \psi_n(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= k\psi_1^2 + 2k\psi_2\psi_3 + b_1\psi_1 + b_2\bar{\psi}_1,\\
\psi_2' &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + a_0\lambda^2 + b_1)\psi_2 + b_2\bar{\psi}_2,\\
\psi_3' &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + a_0\lambda^2 + b_1)\psi_3 + b_2\bar{\psi}_3,
\end{aligned}$$

где $\bar{\psi}_j = \psi_j(t-\tau)$ ($i = 1,\, 2,\, 3$).

2°. Решение с обобщенным разделением переменных при $a_1k > 0$:

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(\lambda x) + \psi_3(t)\sin(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{k/(2a_1)},$$

где функции $\psi = \psi_n(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= k\psi_1^2 + \tfrac{1}{2}k(\psi_2^2 + \psi_3^2) + b_1\psi_1 + b_2\bar{\psi}_1,\\
\psi_2' &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + b_1 - a_0\lambda^2)\psi_2 + b_2\bar{\psi}_2,\\
\psi_3' &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + b_1 - a_0\lambda^2)\psi_3 + b_2\bar{\psi}_3.
\end{aligned}$$

28. $\boldsymbol{u_t = a(u^nu_x)_x + bu^{n+1} + cu + ku^{1-n} + mu^{1-n}w^n, \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$\begin{aligned}
u &= \bigl\{\varphi(t)\bigl[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\bigr] + \psi(t)\bigr\}^{1/n} &&\text{при } ab(n+1) > 0,\\
u &= \bigl\{\varphi(t)\bigl[C_1\operatorname{ch}(\beta x) + C_2\operatorname{sh}(\beta x)\bigr] + \psi(t)\bigr\}^{1/n} &&\text{при } ab(n+1) < 0,
\end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные,

$$\beta = \sqrt{\frac{|b|n^2}{|a(n+1)|}},$$

а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\varphi'_t = \frac{bn(n+2)}{n+1}\varphi\psi + cn\varphi + mn\bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = \varphi(t-\tau),$$
$$\psi'_t = n(b\psi^2 + c\psi + k) + \frac{bn}{n+1}(C_1^2 \pm C_2^2)\varphi^2 + mn\bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

Здесь верхний знак во втором уравнении соответствует случаю $ab(n+1) > 0$, а нижний — случаю $ab(n+1) < 0$.

29. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + be^{\lambda u} + c + ke^{-\lambda u} + me^{\lambda(w-u)}, \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\bigl\{e^{\alpha t}\bigl[C_1\cos\bigl(x\sqrt{b\lambda/a}\,\bigr) + C_2\sin\bigl(x\sqrt{b\lambda/a}\,\bigr)\bigr] + \gamma\bigr\} \qquad \text{при} \quad ab\lambda > 0,$$
$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\bigl\{e^{\alpha t}\bigl[C_1\operatorname{ch}\bigl(x\sqrt{-b\lambda/a}\,\bigr) + C_2\operatorname{sh}\bigl(x\sqrt{-b\lambda/a}\,\bigr)\bigr] + \gamma\bigr\} \quad \text{при} \quad ab\lambda < 0.$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные, α — корень трансцендентного уравнения

$$\alpha = \lambda(b\gamma + c) + m\lambda e^{-\alpha\tau},$$

а γ — корень квадратного уравнения $b\gamma^2 + (c+m)\gamma + k = 0$.

Уравнения, содержащие одну произвольную функцию.

30. $\boldsymbol{u_t = a(u^{-1/2}u_x)_x + bu^{1/2} + f(u^{1/2} - w^{1/2}), \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = [\varphi(x)t + \psi(x)]^2,$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются ОДУ второго порядка

$$2a\varphi''_{xx} + b\varphi - 2\varphi^2 = 0,$$
$$2a\psi''_{xx} + b\psi - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi) = 0.$$

Эти ОДУ допускают простое частное решение

$$\varphi = \frac{1}{2}b, \quad \psi = -\frac{1}{4a}f\Bigl(\frac{b\tau}{2}\Bigr)x^2 + Ax + B,$$

где A и B — произвольные постоянные.

31. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$a(\varphi^k\varphi'_x)'_x = C\varphi,$$
$$\psi'(t) = C\psi^{k+1}(t) + \psi(t)f\bigl(\psi(t-\tau)/\psi(t)\bigr),$$

C — произвольная постоянная.

2°. Точное решение при $k \neq 0$:

$$u = (x + C)^{2/k}\theta(\zeta), \quad \zeta = t + \lambda \ln(x + C),$$

где C и λ — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(\zeta)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\theta'(\zeta) = a\Big\{\frac{2(k+2)}{k^2}\theta^{k+1}(\zeta) + \frac{(3k+4)\lambda}{k}\theta^k(\zeta)\theta'(\zeta) + \\ + k\lambda^2\theta^{k-1}(\zeta)[\theta'(\zeta)]^2 + \lambda^2\theta^k(\zeta)\theta''(\zeta)\Big\} + \theta(\zeta)f\big(\theta(\zeta-\tau)/\theta(\zeta)\big).$$

32. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) > 0$:

$$u = [C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]^{1/(k+1)}\psi(t), \quad \beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = \psi(t)f\big(\psi(t-\tau)/\psi(t)\big). \qquad (*)$$

Это уравнение имеет частное решение экспоненциального вида

$$\psi(t) = Ae^{\lambda t},$$

где A — произвольная постоянная, а λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda - f(e^{-\lambda\tau}) = 0$.

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) < 0$:

$$u = [C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)]^{1/(k+1)}\psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (*).

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $k = -1$:

$$u = C_1\exp\Big(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x\Big)\psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (*).

33. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k}f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $k \neq -1$:

$$u = \Big[At - \frac{b(k+1)}{2a}x^2 + C_1 x + C_2\Big]^{1/(k+1)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A = (k+1)f(A\tau)$.

2°. Более сложное решение с функциональным разделением переменных при $k \neq -1$:

$$u = \Big[\psi(t) - \frac{b(k+1)}{2a}x^2 + C_1 x + C_2\Big]^{1/(k+1)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = (k+1) f\big(\psi(t) - \psi(t-\tau)\big).$$

34. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k-2n+1} + u^{1-n} f(u^n - w^n), \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решения типа обобщенной бегущей волны при $b(n-k-1) > 0$:

$$u = [\pm\lambda x + \psi(t)]^{1/n}, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{bn^2}{a(n-k-1)}},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t = nf(\psi - \bar\psi), \qquad \bar\psi = \psi(t-\tau).$$

35. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi(t)} + f\big(\psi(t) - \psi(t-\tau)\big).$$

2°. Точное решение:

$$u = \frac{2}{\lambda}\ln(x + C) + \theta(\zeta), \qquad \zeta = t + \beta\ln(x + C),$$

где C и β — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(\zeta)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\theta'(\zeta) = ae^{\lambda\theta(\zeta)}\Big\{\frac{2}{\lambda} + 3\beta\theta'(\zeta) + \beta^2\lambda[\theta'(\zeta)]^2 + \beta^2\theta''(\zeta)\Big\} + f\big(\theta(\zeta) - \theta(\zeta-\tau)\big).$$

36. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda > 0$:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)] + \psi(t), \qquad \beta = \sqrt{b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = f\big(\psi(t) - \psi(t-\tau)\big). \tag{*}$$

Отметим, что уравнение (*) имеет простое частное решение $\psi = A + kt$, где A — произвольная постоянная, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $k - f(k\tau) = 0$.

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda < 0$:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln[C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (*).

37. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + b + e^{-\lambda u}f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[At - \frac{b\lambda}{2a}x^2 + C_1x + C_2\Big],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - \lambda f(A\tau) = 0$.

2°. Более сложное решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\psi(t) - \frac{b\lambda}{2a}x^2 + C_1x + C_2\Big],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = \lambda f\big(\psi(t) - \psi(t-\tau)\big).$$

38. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + be^{(\lambda-2\gamma)u} + e^{-\gamma u}f(e^{\gamma u} - e^{\gamma w}), \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решения с функциональным разделением переменных при $b(\gamma - \lambda) > 0$:

$$u = \frac{1}{\gamma}\ln[\pm kx + \psi(t)], \quad k = \sqrt{\frac{b\gamma^2}{a(\gamma-\lambda)}},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t = \gamma f(\psi - \bar\psi), \quad \bar\psi = \psi(t-\tau).$$

39. $\boldsymbol{u_t = [(a\ln u + b)u_x]_x - cu\ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \exp(\pm\lambda x)\psi(t), \quad \lambda = \sqrt{c/a},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = \lambda^2(a+b)\psi(t) + \psi(t)f\big(\psi(t-\tau)/\psi(t)\big).$$

40. $\boldsymbol{u_t = [f'_u(u)u_x]_x + a_1f(u) + a_2f(w) + a_3 + \frac{b}{f'_u(u)}\big[f(u) - f(w)\big].}$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = e^{\lambda t}\varphi(x) - \frac{a_3}{a_1 + a_2},$$

где λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda = b(1 - e^{-\lambda\tau}),$$

а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается линейным ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} + (a_1 + a_2 e^{-\lambda\tau})\varphi = 0.$$

41. $\boldsymbol{u_t = [f'_u(u)u_x]_x + a[f(u) - f(w)] + \dfrac{1}{f'_u(u)}\big[b_1 f(u) + b_2 f(w) + b_3\big].}$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = e^{\lambda t}\varphi(x) - \frac{b_3}{b_1 + b_2},$$

где λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda - b_1 - b_2 e^{-\lambda\tau} = 0,$$

а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается линейным ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} + a(1 - e^{-\lambda\tau})\varphi = 0.$$

42. $\boldsymbol{u_t = [uf'_u(u)u_x]_x + \dfrac{1}{f'_u(u)}[af(u) + bf(w) + c], \qquad w = u(x, t-\tau).}$

Решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде:

$$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= a\varphi(t) + b\varphi(t-\tau),\\
\psi'(t) &= a\psi(t) + b\psi(t-\tau) + c + \varphi^2(t).
\end{aligned}$$

43. $\boldsymbol{u_t = [uf'_u(u)u_x]_x + (a+b)u + \dfrac{2}{f'_u(u)}[af(u) + bf(w) + c].}$

Решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде:

$$f(u) = -\tfrac{1}{2}(a+b)x^2 + \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -2b\varphi(t) + 2b\varphi(t-\tau),\\
\psi'(t) &= 2a\psi(t) + 2b\psi(t-\tau) + 2c + \varphi^2(t).
\end{aligned}$$

Первое ОДУ с запаздыванием имеет экспоненциальное частное решение

$$\varphi(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, λ — корень трансцендентного уравнения $\lambda + 2b(1 - e^{-\lambda\tau}) = 0$.

Уравнения, содержащие две произвольные функции.

44. $\boldsymbol{u_t = a(u^{-1/2}u_x)_x + f(u^{1/2} - w^{1/2}) + u^{1/2}g(u^{1/2} - w^{1/2})}$**.**

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = [\varphi(x)t + \psi(x)]^2,$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} 2a\varphi''_{xx} + \varphi g(\tau\varphi) - 2\varphi^2 &= 0,\\ 2a\psi''_{xx} + \psi g(\tau\varphi) - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет частное решение

$$\varphi = k, \quad \psi = -\frac{1}{4a}f(k\tau)x^2 + Ax + B,$$

где A и B — произвольные постоянные, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $g(k\tau) - 2k = 0$.

45. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + u^{k+1}g(w/u), \quad w = u(x, t-\tau)}$**.**

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda = f(e^{-\lambda\tau})$, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка

$$a(\varphi^k\varphi'_x)'_x + g(e^{-\lambda\tau})\varphi^{k+1} = 0.$$

При $k \neq -1$ замена $\theta = \varphi^{k+1}$ приводит это уравнение к линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. При $k = -1$ для линеаризации уравнения следует использовать замену $\theta = \ln|\varphi|$.

46. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + f(u^{k+1} - w^{k+1}) + u^{-k}g(u^{k+1} - w^{k+1})}$**.**

Решение с функциональным разделением переменных при $k \neq -1$:

$$u = (At + Bx^2 + C_1x + C_2)^{1/(k+1)}, \quad B = -\frac{(k+1)}{2a}f(A\tau),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - (k+1)g(A\tau) = 0$.

47. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u - w) + e^{\lambda u}g(u - w), \quad w = u(x, t-\tau)}$**.**

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \beta t + \varphi(x),$$

где β — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\beta = f(\beta\tau)$, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка

$$a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x + g(\beta\tau)e^{\lambda\varphi} = 0.$$

Подстановка $\theta = e^{\lambda\varphi}$ приводит это уравнение к линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами $a\theta''_{xx} + \lambda g(\beta\tau)\theta = 0$.

48. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u}g(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(At + Bx^2 + C_1x + C_2), \quad B = -\frac{\lambda}{2a}f(A\tau),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - \lambda g(A\tau) = 0$.

49. $\boldsymbol{u_t = a[g'(u)u_x]_x + b + \dfrac{1}{g'(u)}f\big(g(u) - g(w)\big), \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$g(u) = \psi(t) - \frac{b}{2a}x^2 + C_1x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = f\big(\psi(t) - \psi(t-\tau)\big).$$

Это уравнение имеет частное решение $\psi(t) = At$, где A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - f(A\tau) = 0$.

Уравнения, содержащие три и более произвольных функций.

50. $\boldsymbol{u_t = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$[a(x)\varphi^k\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi^{k+1} = C\varphi,$$
$$\psi'_t(t) = C\psi^{k+1}(t) + \psi(t)f\big(\psi(t-\tau)/\psi(t)\big),$$

C — произвольная постоянная.

51. $\boldsymbol{u_t = [a(x)e^{\beta u}u_x]_x + b(x)e^{\beta u} + f(u - w), \quad w = u(x, t-\tau).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\beta}\ln\varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ второго порядка и нелинейным ОДУ первого порядка с запаздыванием:

$$[a(x)\varphi'_x]'_x + \beta b(x)\varphi = C\beta,$$
$$\psi'_t(t) = Ce^{\beta\psi(t)} + f\bigl(\psi(t) - \psi(t-\tau)\bigr),$$

C — произвольная постоянная.

52. $\boldsymbol{u_t = a[f'_u(u)u_x]_x + g\bigl(f(u) - f(w)\bigr) + \frac{1}{f'_u(u)} h\bigl(f(u) - f(w)\bigr).}$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = At - \frac{g(A\tau)}{2a}x^2 + C_1x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - h(A\tau) = 0$.

53. $\boldsymbol{u_t = a[f'_u(u)u_x]_x + f(u)g\bigl(f(w)/f(u)\bigr) + \frac{f(u)}{f'_u(u)} h\bigl(f(w)/f(u)\bigr).}$

Пусть β — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\beta - h(e^{-\beta\tau}) = 0.$$

1°. Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде при $ag(e^{-\beta\tau}) > 0$:

$$f(u) = \bigl[C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x)\bigr]e^{\beta t}, \quad \lambda = \sqrt{g(e^{-\beta\tau})/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде при $ag(e^{-\beta\tau}) < 0$:

$$f(u) = \bigl[C_1\exp(-\lambda x) + C_2\exp(\lambda x)\bigr]e^{\beta t}, \quad \lambda = \sqrt{-g(e^{-\beta\tau})/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде при $g(e^{-\beta\tau}) = 0$:

$$f(u) = (C_1x + C_2)e^{\beta t}.$$

11.2.2. Уравнения гиперболического типа

► Уравнения, линейные относительно производных

1. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = C_2x^2 + C_1x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ второго порядка с запаздыванием

$$\psi''_{tt} = 2C_2 a + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(t - \tau).$$

2°. Точные решения:

$$u = Cx^2 + \varphi(z)x + \psi(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются разностными уравнениями

$$\varphi(z) = \varphi(z - \tau), \tag{1}$$

$$f\bigl(\psi(z) - \psi(z - \tau)\bigr) = \mp 2a^{1/2}\varphi'(z) - 2Ca. \tag{2}$$

Из уравнения (1) следует, что $\varphi(z)$ — это любая τ-периодическая функция, которую в общем случае можно представить в виде сходящегося ряда

$$\varphi(z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(A_n \cos\frac{2\pi nz}{\tau} + B_n \sin\frac{2\pi nz}{\tau}\Bigr), \tag{3}$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Подставив (3) в (2), получим уравнение, сводящееся к линейному неоднородному разностному уравнению вида $\pi(z) - \pi(z - \tau) = g_{\mp}(z)$ с известной правой частью.

3°. Точные решения:

$$u = Cxz + \varphi(x) + \psi(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(z)$ описываются соответственно линейным ОДУ и линейным разностным уравнением

$$a\varphi''_{xx} \pm 2Ca^{1/2} + f(C\tau x + B) = 0,$$

$$\psi(z) - \psi(z - \tau) = B,$$

B — произвольная постоянная. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(z)$ допускают представление в замкнутой форме.

2. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + f(u - v), \quad v = u(x - \sigma, t).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = C_1 t^2 + C_2 t + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка с запаздыванием

$$a\varphi''_{xx} - 2C_1 + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(x - \sigma).$$

3. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - w).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab > 0$:

$$u = C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x) + \psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(t - \tau). \qquad (*)$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab < 0$:

$$u = C_1\exp(-\lambda x) + C_2\exp(\lambda x) + \psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (*).

4. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - kw), \qquad k > 0.}$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = e^{ct}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)] + \psi(t),$$
$$c = \frac{1}{\tau}\ln k, \qquad \beta = [(b - c^2)/a]^{1/2}, \qquad b > c^2,$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - k\bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(t - \tau). \qquad (1)$$

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = e^{ct}(Ae^{-\beta x} + Be^{\beta x}) + \psi(t),$$
$$c = \frac{1}{\tau}\ln k, \qquad \beta = [(c^2 - b)/a]^{1/2}, \qquad c^2 > b,$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (1).

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = e^{ct}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)] + \varphi(x),$$
$$c = \frac{1}{\tau}\ln k, \qquad \beta = [(b - c^2)/a]^{1/2}, \qquad b > c^2,$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается ОДУ

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi + f\big((1 - k)\varphi\big) = 0. \qquad (2)$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = e^{ct}(Ae^{-\beta x} + Be^{\beta x}) + \varphi(x),$$
$$c = \frac{1}{\tau}\ln k, \qquad \beta = [(c^2 - b)/a]^{1/2}, \qquad c^2 > b,$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается ОДУ (2).

5°. Точные решения при $b = 0$:

$$u = \varphi(z)x + \psi(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(z)$ описываются разностными уравнениями

$$\varphi(z) - k\varphi(z-\tau) = 0, \tag{1}$$

$$f\bigl(\psi(z) - k\psi(z-\tau)\bigr) = \mp 2a^{1/2}\varphi'_z(z). \tag{2}$$

Уравнение (1) имеет общее решение

$$\varphi(z) = k^{z/\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(A_n\cos\frac{2\pi nz}{\tau} + B_n\sin\frac{2\pi nz}{\tau}\Bigr), \tag{3}$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Подставив (3) в (2), получим уравнение, которое можно свести к линейному неоднородному разностному уравнению вида $\psi(z) - k\psi(z-\tau) = g_{\mp}(z)$ с известной правой частью.

6°. Пусть $u_0(x,t)$ — решение исходного нелинейного УрЧП с запаздыванием, а $v = U_1(x,t;b,s)$ — любое τ-периодическое решение линейного уравнения телеграфного типа

$$v_{tt} + sv_t = av_{xx} + bv, \qquad v(x,t) = v(x,t-\tau),$$

где b и s — свободные параметры. Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}U_1(x,t;b-c^2,2c), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln k,$$

также является решением исходного уравнения.

Общий вид функции $U_1(x,t;b,s)$ определяется формулами

$$U_1(x,t;b,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\exp(-\lambda_n x)\bigl[A_n\cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n\sin(\beta_n t - \gamma_n x)\bigr] +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\exp(\lambda_n x)\bigl[C_n\cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n\sin(\beta_n t + \gamma_n x)\bigr],$$
$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad \gamma_n = \biggl[\frac{\sqrt{(b+\beta_n^2)^2 + s^2\beta_n^2} + b + \beta_n^2}{2a}\biggr]^{1/2}, \quad \lambda_n = \frac{s\beta_n}{2a\gamma_n},$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные.

Отметим, что в качестве частного решения $u_0(x,t)$ исходного уравнения можно взять пространственно однородное решение $u_0(t)$ или стационарное решение $u_0(x)$. Стационарные точки $u_0 = \text{const}$ также могут использоваться как простейшие частные решения.

5. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u+kw), \quad k > 0.}$

1°. Точные решения при $b = 0$:

$$u = \varphi(z)x + \psi(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(z)$ описываются разностными уравнениями

$$\varphi(z) + k\varphi(z-\tau) = 0, \tag{1}$$

$$f\big(\psi(z) + k\psi(z-\tau)\big) = \mp 2a^{1/2}\varphi'_z(z). \tag{2}$$

Уравнение (1) имеет общее решение

$$\varphi(z) = k^{z/\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n\cos\frac{(2n-1)\pi z}{\tau} + B_n\sin\frac{(2n-1)\pi z}{\tau}\Big], \tag{3}$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Подставив (3) в (2), получим уравнение, которое можно свести к линейному неоднородному разностному уравнению вида $\psi(z) + k\psi(z-\tau) = g_{\mp}(z)$ с известной правой частью.

2°. Пусть $u_0(x,t)$ — решение рассматриваемого нелинейного УрЧП с запаздыванием, а $v = U_2(x,t;b,s)$ — любое τ-антипериодическое решение линейного телеграфного уравнения

$$v_{tt} + sv_t = av_{xx} + bv, \quad v(x,t) = -v(x,t-\tau).$$

Тогда сумма

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}U_2(x,t;b-c^2,2c), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln k,$$

также является решением исходного уравнения.

Общий вид функции $U_2(x,t;b,s)$ определяется формулами

$$U_2(x,t;b,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\lambda_n x)\big[A_n\cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n\sin(\beta_n t - \gamma_n x)\big] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\exp(\lambda_n x)\big[C_n\cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n\sin(\beta_n t + \gamma_n x)\big],$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \quad \gamma_n = \left[\frac{\sqrt{(b+\beta_n^2)^2 + s^2\beta_n^2} + b + \beta_n^2}{2a}\right]^{1/2}, \quad \lambda_n = \frac{s\beta_n}{2a\gamma_n},$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные.

Отметим, что в качестве частного решения $u_0(x,t)$ исходного уравнения можно взять пространственно однородное решение $u_0(t)$ или стационарное решение $u_0(x)$. Стационарные точки $u_0 = \text{const}$ также могут использоваться как простейшие частные решения.

6. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + f(w/u), \quad w = u(x,t-\tau).}$

Точные решения:

$$u = (x+C)\varphi(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(z)$ описывается ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\pm 2a^{1/2}\varphi'_z(z) + f\big(\varphi(z-\tau)/\varphi(z)\big) = 0.$$

7. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]\psi(t),$$

где A, B, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi''_{tt} = -a\beta^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [A\exp(-\beta x) + B\exp(\beta x)]\psi(t),$$

где A, B, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi''_{tt} = a\beta^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (Ax + B)\psi(t),$$

где A, B, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi).$$

4°. Точное решение:

$$u = e^{\alpha x + \beta t}\theta(z), \qquad z = \lambda x + \gamma t,$$

где α, β, γ, λ — произвольные постоянные, а функция $\theta(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$(a\lambda^2 - \gamma^2)\theta''_{zz}(z) + 2(a\alpha\lambda - \beta\gamma)\theta'_z(z) + (a\alpha^2 - \beta^2)\theta(z) + \\ + \theta(z) f\big(e^{-\beta\tau}\theta(z-\sigma)/\theta(z)\big) = 0, \qquad \sigma = \gamma\tau.$$

5°. Точное решение:

$$u = e^{ct}U_1(x, t; b, s), \quad b = f(e^{-c\tau}) - c^2, \quad s = 2c,$$

где c — произвольная постоянная, а $U_1(x, t; b, s)$ — τ-периодическая функция, определенная в п. 6° уравнения 11.2.2.4. При $c = 0$ полученное решение является τ-периодической функцией.

6°. Точное решение:

$$u = e^{ct}U_2(x,t;b,s), \quad b = f(-e^{-c\tau}) - c^2, \quad s = 2c,$$

где c — произвольная постоянная, а $U_2(x,t;b,s)$ — τ-антипериодическая функция, определенная в п. 2° уравнения 11.2.2.5.

8. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bu\ln u + uf(w/u).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} a\varphi''_{xx} &= C\varphi - b\varphi\ln\varphi, \\ \psi''_{tt} &= C\psi + b\psi\ln\psi + \psi f(\bar\psi/\psi), \qquad \bar\psi = \psi(t-\tau), \end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

9. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + u^{1-2k}f(u^k - w^k), \quad k \neq 1.}$

Решения с функциональным разделением переменных:

$$u = [x + \theta(z)]^{1/k}, \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\pm 2a^{1/2}\theta'_z + a + \frac{k^2}{1-k}f(\theta - \bar\theta) = 0, \quad \bar\theta = \theta(z-\tau).$$

10. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + e^{bu+cw}f(u - w).}$

Точные решения:

$$u = \varphi(x) + \theta(z), \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка

$$\varphi''_{xx} = Ke^{(b+c)\varphi},$$

где K — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$aK + e^{b\theta + c\bar\theta}f(\theta - \bar\theta) = 0, \quad \bar\theta = \theta(z-\tau).$$

Заметим, что общее решение ОДУ для φ выражается в элементарных функциях.

11. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + e^{-2\beta u}f(be^{\beta u} + ce^{\beta w}).}$

Точные решения:

$$u = \frac{1}{\beta}\ln[\varphi(z)x + \psi(z)], \quad z = t \pm a^{-1/2}x,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет линейному разностному уравнению

$$b\varphi + c\bar{\varphi} = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(z-\tau),$$

а функция $\psi = \psi(z)$ описывается ОДУ первого порядка с запаздыванием

$$\pm 2a^{1/2}(\varphi'_z\psi - \varphi\psi'_z) - a\varphi^2 + \beta f(b\psi + c\bar{\psi}) = 0, \quad \bar{\psi} = \psi(z-\tau).$$

12. $\boldsymbol{u_{tt} = [a(x)u_x]_x + b(x)u + uf(w/u).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}&[a(x)\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi = C\varphi;\\ &\psi''_{tt} = C\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau),\end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

► **Уравнения, нелинейные относительно производных.**

13. $\boldsymbol{u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, t-\tau).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}&a(\varphi^k\varphi'_x)'_x = C\varphi,\\ &\psi''_{tt} = C\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).\end{aligned}$$

2°. Точное решение:

$$u = (x+C)^{2/k}\theta(z), \quad z = t + \lambda\ln(x+C),$$

где C и λ — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}\theta''(z) = a\Big\{&\frac{2(k+2)}{k^2}\theta^{k+1}(z) + \frac{(3k+4)\lambda}{k}\theta^k(z)\theta'(z) + \\ &+ k\lambda^2\theta^{k-1}(z)[\theta'(z)]^2 + \lambda^2\theta^k(z)\theta''(z)\Big\} + \theta(z)f\big(\theta(z-\tau)/\theta(z)\big).\end{aligned}$$

14. $\boldsymbol{u_{tt} = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) > 0$:

$$u = [C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]^{\frac{1}{k+1}}\psi(t), \quad \beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(t-\tau). \tag{*}$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) < 0$:

$$u = (C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x})^{\frac{1}{k+1}} \psi(t), \qquad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (*).

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $k = -1$:

$$u = C_1 \exp\Bigl(-\frac{b}{2a} x^2 + C_2 x\Bigr) \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (*).

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных, обобщающее три предыдущих решения:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} &a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C\varphi, \\ &\psi''_{tt} = C\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(t-\tau), \end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

15. $u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w)$.

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(C_1 \lambda x^2 + C_2 x + C_3) + \psi(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi''_{tt} = 2aC_1 e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(t-\tau).$$

16. $u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w)$.

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda > 0$:

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t), \qquad \beta = \sqrt{b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi''_{tt} = f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(t-\tau). \tag{*}$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda < 0$:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x}) + \psi(t), \qquad \beta = \sqrt{-b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (*).

3°. Решение с аддитивным разделением переменных, обобщающее два предыдущих решения:

$$u = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} &a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x + be^{\lambda\varphi} = C,\\ &\psi''_{tt} = Ce^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar\psi), \qquad \bar\psi = \psi(t-\tau), \end{aligned}$$

C — произвольная постоянная. Отметим, что первое ОДУ линеаризуется заменой $\xi = e^{\lambda\varphi}$.

17. $\boldsymbol{u_{tt} = [(a\ln u + b)u_x]_x - cu\ln u + uf(w/u).}$

Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \exp(\pm\lambda x)\psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{c/a},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi''_{tt} = \lambda^2(a+b)\psi + \psi f(\bar\psi/\psi), \qquad \bar\psi = \psi(t-\tau),$$

18. $\boldsymbol{u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + u^{k+1}g(w/u).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda^2 = f(e^{-\lambda\tau})$, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка

$$a(\varphi^k\varphi'_x)'_x + g(e^{-\lambda\tau})\varphi^{k+1} = 0.$$

Отметим, что это ОДУ линеаризуется заменой $\xi = \varphi^{k+1}$.

19. $\boldsymbol{u_{tt} = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^{k+1} + uf(w/u).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно ОДУ и ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} &[a(x)\varphi^k\varphi'_x]'_x + b(x)\varphi^{k+1} = C\varphi,\\ &\psi''_{tt}(t) = C\psi^{k+1}(t) + \psi(t)f\bigl(\psi(t-\tau)/\psi(t)\bigr), \end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

20. $\boldsymbol{u_{tt} = [a(x)e^{\beta u}u_x]_x + b(x)e^{\beta u} + f(u-w)}$.

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\beta}\ln\varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются соответственно линейным ОДУ и нелинейным ОДУ с запаздыванием

$$[a(x)\varphi'_x]'_x + \beta b(x)\varphi = C\beta,$$
$$\psi''_{tt}(t) = Ce^{\beta\psi(t)} + f\bigl(\psi(t) - \psi(t-\tau)\bigr),$$

C — произвольная постоянная.

11.3. Нелинейные УрЧП с пропорциональными аргументами

В этом разделе считается, что $f = f(z)$, $g = g(z)$, $h = h(z)$ — произвольные функции, $p > 0$ и $q > 0$ — произвольные постоянные, $u = u(x,t)$ — искомая функция.

11.3.1. Уравнения параболического типа

► Уравнения, линейные относительно производных

Уравнения, содержащие произвольные параметры.

1. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bw^2, \quad w = u(x, \tfrac{1}{2}t)}$.

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается автономным ОДУ второго порядка $a\varphi''_{xx} + b\varphi^2 + \lambda\varphi = 0$.

2°. Об автомодельном решении этого УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. далее уравнение 11.3.1.5 при $k = 2$, $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

2. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bw^{1/q}, \quad w = u(x, qt)}$.

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается автономным ОДУ второго порядка $a\varphi''_{xx} + b\varphi^{1/q} + \lambda\varphi = 0$.

2°. Об автомодельном решении этого УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. далее уравнение 11.3.1.5 при $k = 1/q$, $p = 1$.

3. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bw^2, \quad w = u(\tfrac{1}{2}x, t).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda x}\psi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными $\psi'_t = a\lambda^2\psi + b\psi^2$.

2°. Об автомодельном решении этого УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. далее уравнение 11.3.1.5 при $k = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$.

4. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bw^{1/p}, \quad w = u(px, t).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda x}\psi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными $\psi'_t = a\lambda^2\psi + b\psi^{1/p}$.

2°. Об автомодельном решении этого УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. далее уравнение 11.3.1.5 при $k = 1/p$, $q = 1$.

5. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bw^k, \quad w = u(px, qt).}$

1°. Автомодельное решение при $k \neq 1$:

$$u(x,t) = t^{\frac{1}{1-k}}U(z), \qquad z = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z - \frac{1}{1-k}U + bq^{\frac{k}{1-k}}W^k = 0, \qquad W = U(sz), \qquad s = pq^{-1/2}.$$

2°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x,t) = U(z), \qquad z = kx - \lambda t,$$

где k и λ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$ak^2U''_{zz} + \lambda U'_z + bW^k = 0, \qquad W = U(pz).$$

6. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu^m w^k, \quad w = u(px, qt).}$

1°. Автомодельное решение при $k \neq 1 - m$:

$$u(x,t) = t^{\frac{1}{1-m-k}}U(z), \qquad z = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$
\begin{aligned}
&aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z - \frac{1}{1-m-k}U + bq^{\frac{k}{1-m-k}}U^m W^k = 0,\\
&W = U(sz), \qquad s = pq^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

2°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$
u(x,t) = U(z), \qquad z = kx - \lambda t,
$$

где k и λ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$
ak^2 U''_{zz} + \lambda U'_z + bU^m W^k = 0, \qquad W = U(pz).
$$

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $m = 1 - kq$:

$$
u(x,t) = e^{\lambda t}\varphi(x),
$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$
a\varphi''_{xx} - \lambda\varphi + b\varphi^{1-kq}\bar{\varphi}^k = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(px).
$$

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $m = 1 - kp$:

$$
u(x,t) = e^{\lambda x}\psi(t),
$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$
\psi'_t = a\lambda^2\psi + b\psi^{1-kp}\bar{\psi}^k, \qquad \bar{\psi} = \psi(qt).
$$

7. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + be^{\lambda w}, \qquad w = u(px, qt).}$

Частный случай уравнения 11.3.1.8 при $\mu = 0$.

8. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + be^{\mu u + \lambda w}, \qquad w = u(px, qt).}$

Точное решение при $\mu \neq -\lambda$:

$$
u(x,t) = U(z) - \frac{1}{\mu+\lambda}\ln t, \qquad z = xt^{-1/2},
$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$
\begin{aligned}
&aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z + \frac{1}{\mu+\lambda} + bq^{-\frac{\lambda}{\mu+\lambda}}e^{\mu U + \lambda W} = 0,\\
&W = U(sz), \qquad s = pq^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

9. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u(b\ln u + c\ln w + d), \quad w = u(px, qt).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\begin{aligned} &a\varphi''_{xx} + \varphi(b\ln\varphi + c\ln\bar\varphi) = K\varphi, \quad \bar\varphi = \varphi(px);\\ &\psi'_t = \psi(b\ln\psi + c\ln\bar\psi) + (d+K)\psi, \quad \bar\psi = \psi(qt), \end{aligned}$$

K — произвольная постоянная.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $p=1$:

$$u(x,t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)],$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются системой ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\begin{aligned} &\psi'_2 = 4a\psi_2^2 + b\psi_2 + c\bar\psi_2, \quad \bar\psi_2 = \psi_2(qt),\\ &\psi'_1 = 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_1 + c\bar\psi_1, \quad \bar\psi_1 = \psi_1(qt),\\ &\psi'_0 = a(\psi_1^2 + 2\psi_2) + b\psi_0 + c\bar\psi_0 + d, \quad \bar\psi_0 = \psi_0(qt). \end{aligned}$$

3°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x,t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k и λ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$ak^2U''_{zz} + \lambda U'_z + U(b\ln U + c\ln W + d) = 0, \quad W = U(pz).$$

10. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u(b\ln^2 u + c\ln u + d\ln w + s), \quad w = u(x, qt).}$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab > 0$:

$$\begin{aligned} &u(x,t) = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],\\ &\varphi(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{b/a}, \end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются системой ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\begin{aligned} &\psi'_1 = 2b\psi_1\psi_2 + (c-b)\psi_1 + d\bar\psi_1, \quad \bar\psi_1 = \psi_1(qt),\\ &\psi'_2 = b(A^2+B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar\psi_2 + s, \quad \bar\psi_2 = \psi_2(qt). \end{aligned}$$

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab < 0$:

$$\begin{aligned} &u(x,t) = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],\\ &\varphi(x) = A\,\mathrm{ch}(\lambda x) + B\,\mathrm{sh}(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{-b/a}, \end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются системой ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\psi_1' = 2b\psi_1\psi_2 + (c-b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(qt),$$
$$\psi_2' = b(A^2 - B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(qt).$$

При $A = \pm B$ имеем $\varphi(x) = Ae^{\pm\lambda x}$. В этом случае второе уравнение системы становится независимым, а первое становится линейным по ψ_1.

Уравнения, содержащие произвольные функции.

13. $u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, qt).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = C_1x^2 + C_2x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi_t' = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

14. $u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(px, t).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = Ct + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi_{xx}'' - C + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

15. $u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, qt).$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab < 0$:

$$u(x,t) = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi_t' = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \qquad (*)$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab > 0$:

$$u(x,t) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом (*).

16. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(px, t).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = Ce^{bt} + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

17. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, qt).}$

Точное решение:

$$u(x,t) = U(z) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \qquad z = xt^{-1/2},$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z + \frac{1}{\lambda} + e^{\lambda U} f\Big(U - W + \frac{1}{\lambda}\ln q\Big) = 0,$$
$$W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}.$$

18. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, qt).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = [A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi'_t = a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt). \tag{*}$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = [A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi'_t = -a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = (Ax + B)\psi(t),$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом (*) при $a = 0$.

19. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(px,t).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda] = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

20. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu\ln u + uf(w/u), \quad w = u(x,qt).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} = C\varphi - b\varphi\ln\varphi,$$
$$\psi'_t = C\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + b\psi\ln\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C — произвольная постоянная.

21. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu\ln u + uf(w/u), \quad w = u(px,t).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \exp(Ce^{bt})\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi\ln\varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

► **Уравнения, нелинейные относительно производных.**

22. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x,qt).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$a(\varphi^k\varphi'_x)'_x = C\varphi,$$
$$\psi'_t = C\psi^{k+1} + \psi f\bigl(\bar{\psi}/\psi\bigr), \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C — произвольная постоянная.

23. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(px,t).}$

Точное решение:

$$u(x,t) = e^{2\lambda t} U(z), \quad z = e^{-k\lambda t} x,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$2\lambda U - k\lambda z U'_z = a(U^k U'_z)'_z + Uf(W/U), \quad W = U(pz).$$

24. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x,qt).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) > 0$:

$$u(x,t) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi'_t = \psi f\bigl(\bar{\psi}/\psi\bigr), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \qquad (*)$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) < 0$:

$$u(x,t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом (*).

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $k = -1$:

$$u(x,t) = C_1 \exp\Bigl(-\frac{b}{2a} x^2 + C_2 x\Bigr) \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом (*).

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных, обобщающее предыдущие решения:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\begin{aligned} &a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C\varphi, \\ &\psi'_t = C\psi^{k+1} + \psi f\bigl(\bar{\psi}/\psi\bigr), \quad \bar{\psi} = \psi(qt), \end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

25. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x,qt).}$

Точное решение:

$$u(x,t) = t^{-1/k} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a(\varphi^k \varphi_z')_z' - \lambda\varphi_z' + \frac{1}{k}\varphi + \varphi^{k+1} f(q^{-1/k}\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(z + \lambda \ln q).$$

26. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + u^n f(w/u), \quad w = u(px, qt).}$

1°. Автомодельное решение:

$$u(x,t) = t^{\frac{1}{1-n}} U(z), \qquad z = xt^{\frac{n-k-1}{2(1-n)}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\frac{1}{1-n}U + \frac{n-k-1}{2(1-n)} zU_z' = a(U^k U_z')_z' + U^n f(W/U), \quad W = U(sz), \quad s = pq^{\frac{n-k-1}{2(1-n)}}.$$

2°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x,t) = U(z), \qquad z = kx - \lambda t,$$

где k и λ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$ak^2(U^k U_z')_z' + \lambda U_z' + U^n f(W/U) = 0, \qquad W = U(pz).$$

27. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(x, qt).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t) = \left[\psi(t) - \frac{b(k+1)}{2a}x^2 + C_1 x + C_2\right]^{1/(k+1)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi_t' = (k+1) f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

28. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{-k} + f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad w = u(px, t).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \left[b(k+1)t + \varphi(x)\right]^{\frac{1}{k+1}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi_{xx}'' + (k+1) f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

29. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, qt).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi' = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

30. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w), \quad w = u(x, qt).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda > 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)] + \psi(t), \qquad \beta = \sqrt{b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi'_t = f\bigl(\psi - \bar{\psi}\bigr), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt). \tag{*}$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda < 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln[C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)] + \psi(t), \qquad \beta = \sqrt{-b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом (*).

31. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + e^{\lambda u}f(u - w), \quad w = u(px, t).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln t + \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x + \frac{1}{\lambda} + e^{\lambda\varphi}f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

32. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + e^{\mu u}f(u - w), \quad w = u(px, qt).}$

Точное решение:

$$u(x,t) = U(z) - \frac{1}{\mu}\ln t, \qquad z = xt^{\frac{\lambda-\mu}{2\mu}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda-\mu}{2\mu}zU'_z - \frac{1}{\mu} = a(e^{\lambda U}U'_z)'_z + e^{\mu U}f\Bigl(U - W + \frac{1}{\mu}\ln q\Bigr),\\ &W = U(sz), \qquad s = pq^{\frac{\lambda-\mu}{2\mu}}. \end{aligned}$$

33. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + b + e^{-\lambda u}f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \quad w = u(x, qt).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\Bigl[\psi(t) - \frac{b\lambda}{2a}x^2 + C_1x + C_2\Bigr],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi'_t = \lambda f\bigl(\psi - \bar{\psi}\bigr), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

34. $\boldsymbol{u_t = [(a \ln u + b)u_x]_x - cu \ln u + uf(w/u), \quad w = u(x, qt).}$

Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \exp(\pm\sqrt{c/a}\,x)\psi(t),$$

где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi'_t = c(1 + b/a)\psi + \psi f\bigl(\bar{\psi}/\psi\bigr), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

35. $\boldsymbol{u_t = a[f'_u(u)u_x]_x + b + \frac{1}{f'_u(u)} g\bigl(f(u) - f(w)\bigr), \qquad w = u(x, qt).}$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = \psi(t) - \frac{b}{2a}x^2 + C_1 x + C_2,$$

где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi'_t = g\bigl(\psi - \bar{\psi}\bigr), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

36. $\boldsymbol{u_t = [f'_u(u)u_x]_x + \frac{a}{f'_u(u)} + g(f(u) - f(w)), \qquad w = u(px, t).}$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = at + \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\varphi''_{xx} + g(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

37. $\boldsymbol{u_t = a[f'_u(u)u_x]_x + bf(u) + \frac{f(u)}{f'_u(u)} g\bigl(f(w)/f(u)\bigr), \qquad w = u(x, qt).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $ab > 0$:

$$f(u) = \bigl[C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)\bigr]\psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi'_t = \psi g\bigl(\bar{\psi}/\psi\bigr), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \tag{*}$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $ab < 0$:

$$f(u) = \bigl[C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)\bigr]\psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом (*).

38. $\boldsymbol{u_t = [uf'_u(u)u_x]_x + \frac{1}{f'_u(u)}[af(u) + bf(w) + c], \quad w = u(px, qt).}$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\varphi'_t = a\varphi + bp\bar{\varphi}, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(qt),$$
$$\psi'_t = a\psi + b\bar{\psi} + c + \varphi^2, \qquad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

11.3.2. Уравнения гиперболического типа

► **Уравнения, линейные относительно производных**

1. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bw^2, \quad w = u(x, \frac{1}{2}t).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ is described by the second-order autonomous ODE $a\varphi''_{xx} + b\varphi^2 - \lambda^2\varphi = 0$.

2°. Об автомодельном решении этого УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. далее уравнение 11.3.2.4 при $k = 2$, $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

2. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bw^{1/q}, \quad w = u(x, qt).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается автономным ОДУ второго порядка $a\varphi''_{xx} + b\varphi^{1/q} - \lambda^2\varphi = 0$.

2°. Об автомодельном решении этого УрЧП с пропорциональным запаздыванием см. далее уравнение 11.3.2.4 при $k = 1/q$, $p = 1$.

3. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bw^k, \quad w = u(px, qt).}$

Частный случай уравнения 11.3.2.4 при $m = 0$.

4. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bu^m w^k, \quad w = u(px, qt).}$

1°. Автомодельное решение при $k + m \neq 1$:

$$u(x,t) = t^{\frac{2}{1-k-m}}U(z), \qquad z = x/t,$$

где функция $U=U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\frac{2(1+k+m)}{(1-k-m)^2}U-\frac{2(1+k+m)}{1-k-m}zU'_z+z^2U''_{zz}=aU''_{zz}+bq^{\frac{2k}{1-k-m}}U^mW^k,$$
$$W=U(sz),\qquad s=p/q.$$

2°. Решение типа бегущей волны при $q=p$:

$$u(x,t)=U(z),\qquad z=kx-\lambda t,$$

где k и λ — произвольные постоянные, а функция $U=U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$(ak^2-\lambda^2)U''_{zz}+bU^mW^k=0,\qquad W=U(pz).$$

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $m=1-kq$:

$$u(x,t)=e^{-\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi=\varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx}-\lambda^2\varphi+b\varphi^{1-kq}\bar{\varphi}^k=0,\qquad \bar{\varphi}=\varphi(px).$$

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $m=1-kp$:

$$u(x,t)=e^{\beta x}\psi(t),$$

где β — произвольная постоянная, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi''_{tt}=a\beta^2\psi+b\psi^{1-kp}\bar{\psi}^k,\qquad \bar{\psi}=\psi(qt).$$

5. $\boldsymbol{u_{tt}=au_{xx}+be^{\lambda w},\qquad w=u(px,qt).}$

Точное решение:

$$u(x,t)=U(z)-\frac{2}{\lambda}\ln t,\qquad z=\frac{x}{t},$$

где функция $U=U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$(z^2U'_z)'_z+\frac{2}{\lambda}=aU''_{zz}+\frac{b}{q^2}e^{\lambda W},\qquad W=U(sz),\qquad s=\frac{p}{q}.$$

6. $\boldsymbol{u_{tt}=au_{xx}+be^{\mu u+\lambda w},\qquad w=u(px,qt).}$

Точное решение при $\mu+\lambda\neq 0$:

$$u(x,t)=U(z)-\frac{2}{\mu+\lambda}\ln t,\qquad z=\frac{x}{t},$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$(z^2 U'_z)'_z + \frac{2}{\mu+\lambda} = aU''_{zz} + bq^{-\frac{2\lambda}{\mu+\lambda}} e^{\mu U + \lambda W}, \qquad W = U(sz), \qquad s = \frac{p}{q}.$$

7. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + u(b\ln u + c\ln w), \qquad w = u(px, qt).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\begin{aligned} &a\varphi''_{xx} + \varphi(b\ln\varphi + c\ln\bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(px);\\ &\psi''_{tt} = \psi(b\ln\psi + c\ln\bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt). \end{aligned}$$

8. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \qquad w = u(x, qt).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = C_1x^2 + C_2x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi''_{tt} = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

9. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \qquad w = u(px, t).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = C_1t^2 + C_2t + \varphi(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} - 2C_1 + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

10. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - w), \qquad w = u(x, qt).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab < 0$:

$$u(x,t) = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x) + \psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt). \qquad (*)$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab > 0$:

$$u(x,t) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + \psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом (*).

11. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, qt).}$

Точное решение:

$$u(x,t) = U(z) - \frac{2}{\lambda}\ln t, \quad z = \frac{x}{t},$$

где функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\begin{aligned}&(z^2U'_z)'_z + \frac{2}{\lambda} = aU''_{zz} + e^{\lambda U} f\Bigl(U - W + \frac{2}{\lambda}\ln q\Bigr) = 0,\\ &W = U(sz), \qquad s = p/q.\end{aligned}$$

12. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(px, t).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = (Ae^{-\lambda t} + Be^{\lambda t})\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar\varphi/\varphi) - \lambda^2] = 0, \qquad \bar\varphi = \varphi(px).$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = [A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t)]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar\varphi/\varphi) + \lambda^2] = 0, \qquad \bar\varphi = \varphi(px).$$

► **Уравнения, нелинейные относительно производных.**

13. $\boldsymbol{u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, qt).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\begin{aligned}&a(\varphi^k\varphi'_x)'_x = b\varphi,\\ &\psi''_{tt} = b\psi^{k+1} + \psi f(\bar\psi/\psi), \qquad \bar\psi = \psi(qt),\end{aligned}$$

b — произвольная постоянная.

14. $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(px,t).$

Точное решение:

$$u(x,t) = e^{2\lambda t} U(z), \quad z = e^{-k\lambda t} x,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ с пропорциональным аргументом

$$4\lambda^2 U - 4k\lambda^2 z U'_z + k^2\lambda^2 z(zU'_z)'_z = a(U^k U'_z)'_z + Uf(W/U), \quad W = U(pz).$$

15. $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x,qt).$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) > 0$:

$$u(x,t) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi''_{tt} = \psi f\bigl(\bar{\psi}/\psi\bigr), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \qquad (*)$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) < 0$:

$$u(x,t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)]^{1/(k+1)} \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом (*).

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных with $k = -1$:

$$u(x,t) = C_1 \exp\Bigl(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x\Bigr)\psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом (*).

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных, обобщающее предыдущие решения:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = C\psi^{k+1} + \psi f\bigl(\bar{\psi}/\psi\bigr), \quad \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C — произвольная постоянная.

16. $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x,qt).$

Точное решение:

$$u(x,t) = t^{-2/k} \varphi(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием

$$\frac{2(k+2)}{k^2}\varphi - \lambda\frac{k+4}{k}\varphi'_z + \lambda^2\varphi''_{zz} = a(\varphi^k\varphi'_z)'_z + \varphi^{k+1}f(q^{-2/k}\bar{\varphi}/\varphi),$$
$$\bar{\varphi} = \varphi(z+\lambda\ln q) \qquad (\lambda\ln q < 0).$$

17. $\boldsymbol{u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u^n f(w/u), \quad w = u(px, qt).}$

1°. Автомодельное решение при $n \neq 1$:

$$u(x,t) = t^{\frac{2}{1-n}}U(z), \qquad z = xt^{\frac{n-k-1}{1-n}},$$

где функция $U=U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\frac{2(1+n)}{(1-n)^2}U + \frac{(n-k-1)(2n-k+2)}{(1-n)^2}zU'_z + \frac{(n-k-1)^2}{(1-n)^2}z^2U''_{zz} =$$
$$= a(U^kU'_z)'_z + U^n f(q^{\frac{2}{1-n}}W/U), \qquad W = U(sz), \quad s = pq^{\frac{n-k-1}{1-n}}.$$

2°. Решение типа бегущей волны при $q = p$:

$$u(x,t) = U(z), \qquad z = kx - \lambda t,$$

где k и λ — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$ak^2(U^kU'_z)'_z - \lambda^2U''_{zz} + U^n f(W/U) = 0, \qquad W = U(pz).$$

18. $\boldsymbol{u_{tt} = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u-w), \quad w = u(x, qt).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2+Bx+C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\psi''_{tt} = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi} + f\bigl(\psi-\bar{\psi}\bigr), \qquad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

19. $\boldsymbol{u_{tt} = a(e^{\lambda u}u_x)_x + e^{\mu u}f(u-w), \quad w = u(px, qt).}$

Точное решение:

$$u(x,t) = U(z) - \frac{2}{\mu}\ln t, \qquad z = xt^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}},$$

где функция $U=U(z)$ описывается ОДУ второго порядка с пропорциональным аргументом

$$\frac{2}{\mu} + \frac{\mu-\lambda}{\mu}zU'_z + \frac{(\lambda-\mu)^2}{\mu^2}z(zU'_z)'_z = a(e^{\lambda U}U'_z)'_z + e^{\mu U}f\Bigl(U - W + \frac{2}{\mu}\ln q\Bigr),$$
$$W = U(sz), \qquad s = pq^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}}.$$

11.4. Функционально-дифференциальные УрЧП с аргументами общего вида

В этом разделе предполагается, что $f = f(z)$ и $g = g(z)$ — произвольные функции, $\xi(x)$ и $\eta(t)$ — монотонно возрастающие функции, $u = u(x,t)$ — искомая функция.

11.4.1. Уравнения параболического типа

► Уравнения, линейные относительно производных

1. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u(b\ln u + c\ln w + d), \quad w = u(\xi(x), \eta(t)).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ с переменными аргументами

$$a\varphi''_{xx} + \varphi(b\ln\varphi + c\ln\bar\varphi - K) = 0, \qquad \bar\varphi = \varphi(\xi(x));$$
$$\psi'_t = \psi(b\ln\psi + c\ln\bar\psi + d + K), \qquad \bar\psi = \psi(\eta(t)),$$

K — произвольная постоянная.

2. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u(b\ln u + c\ln w + d), \quad w = u(x, \eta(t)).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)],$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описывается системой ОДУ с переменными аргументами

$$\psi'_2 = 4a\psi_2^2 + b\psi_2 + c\bar\psi_2, \qquad \bar\psi_2 = \psi_2(\eta(t)),$$
$$\psi'_1 = 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_1 + c\bar\psi_1, \qquad \bar\psi_1 = \psi_1(\eta(t)),$$
$$\psi'_0 = a(\psi_1^2 + 2\psi_2) + b\psi_0 + c\bar\psi_0 + d, \qquad \bar\psi_0 = \psi_0(\eta(t)).$$

3. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + u(b\ln^2 u + c\ln u + d\ln w + s), \quad w = u(x, \eta(t)).}$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab > 0$:

$$u(x,t) = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],$$
$$\varphi(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x), \qquad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описывается системой ОДУ с переменными аргументами

$$\psi'_1 = 2b\psi_1\psi_2 + (c - b)\psi_1 + d\bar\psi_1, \qquad \bar\psi_1 = \psi_1(\eta(t)),$$
$$\psi'_2 = b(A^2 + B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar\psi_2 + s, \quad \bar\psi_2 = \psi_2(\eta(t)).$$

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $ab < 0$:

$$u(x,t) = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],$$
$$\varphi(x) = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x), \qquad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описывается системой ОДУ с переменными аргументами

$$\psi_1' = 2b\psi_1\psi_2 + (c-b)\psi_1 + d\bar{\psi}_1, \qquad \bar{\psi}_1 = \psi_1(\eta(t)),$$
$$\psi_2' = b(A^2 - B^2)\psi_1^2 + b\psi_2^2 + c\psi_2 + d\bar{\psi}_2 + s, \qquad \bar{\psi}_2 = \psi_2(\eta(t)).$$

При $A = \pm B$ имеем $\varphi(x) = Ae^{\pm\lambda x}$. В этом случае второе уравнение системы становится независимым, а первое становится линейным по ψ_1.

4. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = C_1x^2 + C_2x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi_t' = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

5. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab < 0$:

$$u(x,t) = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x) + \psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi_t' = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)). \tag{*}$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab > 0$:

$$u(x,t) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + \psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*).

6. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = [A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi_t' = a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)). \tag{*}$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = [A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi'_t = -a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = (Ax + B)\psi(t),$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*) при $a = 0$.

7. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu\ln u + uf(w/u), \qquad w = u(x,\eta(t)).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} = C_1\varphi - b\varphi\ln\varphi,$$
$$\psi'_t = C_1\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + b\psi\ln\psi, \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

C_1 — произвольная постоянная. Первое ОДУ для φ автономно, его общее решение можно получить в неявном виде. Частное однопараметрическое решение этого уравнения может быть представлено в явном виде

$$\varphi = \exp\Bigl[-\frac{b}{4a}(x + C_2)^2 + \frac{C_1}{b} + \frac{1}{2}\Bigr],$$

где C_2 — произвольная постоянная.

8. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + f(u - w), \qquad w = u(\xi(x), t).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = Ct + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} - C + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

9. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu + f(u - w), \qquad w = u(\xi(x), t).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = Ce^{bt} + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

10. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(\xi(x), t).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\varphi(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + \varphi[f(\bar{\varphi}/\varphi) - \lambda] = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

11. $\boldsymbol{u_t = au_{xx} + bu\ln u + uf(w/u), \quad w = u(\xi(x), t).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \exp(Ce^{bt})\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi\ln\varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

► **Уравнения, нелинейные относительно производных.**

12. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с переменным аргументом

$$\begin{aligned}
&a(\varphi^k\varphi'_x)'_x = C\varphi,\\
&\psi'_t = C\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t));
\end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

13. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) > 0$:

$$u(x,t) = [C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]^{1/(k+1)}\psi(t), \qquad \beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi'_t = \psi f(\bar\psi)/\psi), \qquad \bar\psi = \psi(\eta(t)). \tag{*}$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1)<0$:

$$u(x,t) = [C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)]^{1/(k+1)}\psi(t), \qquad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*).

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $k=-1$:

$$u(x,t) = C_1\exp\Bigl(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2x\Bigr)\psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*).

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных, обобщающее предыдущие решения:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$\begin{aligned}&a(\varphi^k\varphi'_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C\varphi,\\ &\psi'_t = C\psi^{k+1} + \psi f\bigl(\bar\psi/\psi\bigr), \qquad \bar\psi = \psi(\eta(t)),\end{aligned}$$

C — произвольная постоянная.

14. $\boldsymbol{u_t = a(u^ku_x)_x + b + u^{-k}f(u^{k+1} - w^{k+1}), \qquad w = u(x,\eta(t)).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t) = \Bigl[\psi(t) - \frac{b(k+1)}{2a}x^2 + C_1x + C_2\Bigr]^{1/(k+1)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ первого порядка с переменным аргументом

$$\psi'_t = (k+1)f(\psi - \bar\psi), \qquad \bar\psi = \psi(\eta(t)).$$

15. $\boldsymbol{u_t = a(u^ku_x)_x + bu^{-k} + f(u^{k+1} - w^{k+1}), \qquad w = u(\xi(x),t).}$

Решение с функциональным разделением переменных

$$u = \bigl[b(k+1)t + \varphi(x)\bigr]^{\frac{1}{k+1}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ второго порядка с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + (k+1)f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

16. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k-2n+1} + u^{1-n} f(u^n - w^n), \qquad w = u(x, \eta(t)).}$

Решения типа обобщенной бегущей волны при $b(n-k-1) > 0$:

$$u = [\pm\lambda x + \psi(t)]^{1/n}, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{bn^2}{a(n-k-1)}},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi'_t = nf(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

17. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + f(u - w), \quad w = u(x, \eta(t)).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi'_t = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

18. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u - w), \qquad w = u(x, \eta(t)).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda > 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \psi(t), \qquad \beta = \sqrt{b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)). \tag{*}$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda < 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda} \ln[C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)] + \psi(t), \qquad \beta = \sqrt{-b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*).

19. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \qquad w = u(x, \eta(t)).}$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda} \ln\Big[\psi(t) - \frac{b\lambda}{2a}x^2 + C_1 x + C_2\Big],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi'_t=\lambda f(\psi-\bar{\psi}), \qquad \bar{\psi}=\psi(\eta(t)).$$

20. $\boldsymbol{u_t=a(e^{\beta u}u_x)_x+be^{(\beta-2\gamma)u}+e^{-\gamma u}f(e^{\gamma u}-e^{\gamma w}), \quad w=u(x,\eta(t)).}$

Решения с функциональным разделением переменных при $b(\gamma-\beta)>0$:

$$u=\frac{1}{\gamma}\ln[\lambda x+\psi(t)], \qquad \lambda=\pm\sqrt{\frac{b\gamma^2}{a(\gamma-\beta)}},$$

где функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi'_t=\gamma f(\psi-\bar{\psi}), \qquad \bar{\psi}=\psi(\eta(t)).$$

21. $\boldsymbol{u_t=[(a\ln u+b)u_x]_x-cu\ln u+uf(w/u), \quad w=u(x,\eta(t)).}$

Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t)=\exp(\pm\sqrt{c/a}\,x)\psi(t),$$

где функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi'_t=c(1+b/a)\psi+\psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi}=\psi(\eta(t)).$$

22. $\boldsymbol{u_t=a[f'_u(u)u_x]_x+b+\frac{1}{f'_u(u)}g\big(f(u)-f(w)\big), \quad w=u(x,\eta(t)).}$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u)=\psi(t)-\frac{b}{2a}x^2+C_1x+C_2,$$

где функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi'_t=g(\psi-\bar{\psi}), \qquad \bar{\psi}=\psi(\eta(t)).$$

23. $\boldsymbol{u_t=a[f'_u(u)u_x]_x+bf(u)+\frac{f(u)}{f'_u(u)}g\Big(\frac{f(w)}{f(u)}\Big), \quad w=u(x,\eta(t)).}$

1°. Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде при $ab>0$:

$$f(u)=\big[C_1\cos(\lambda x)+C_2\sin(\lambda x)\big]\psi(t), \qquad \lambda=\sqrt{b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi'_t=\psi g\big(\bar{\psi}/\psi\big), \qquad \bar{\psi}=\psi(\eta(t)). \tag{*}$$

2°. Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде при $ab<0$:

$$f(u)=\big[C_1\exp(-\lambda x)+C_2\exp(\lambda x)\big]\psi(t), \qquad \lambda=\sqrt{-b/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*).

24. $\boldsymbol{u_t = a[uf'_u(u)u_x]_x + \dfrac{1}{f'_u(u)}[bf(u)+cf(w)+d], \quad w = u(x,\eta(t)).}$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где функции $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ описываются ОДУ с переменным аргументом

$$\begin{aligned}&\varphi'_t = b\varphi + c\bar{\varphi}, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\eta(t)),\\ &\psi'_t = b\psi + c\bar{\psi} + d + a\varphi^2, \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).\end{aligned}$$

25. $\boldsymbol{u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + e^{\lambda u}f(u-w), \quad w = u(\xi(x),t).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = -\frac{1}{\lambda}\ln t + \varphi(x),$$

где функция $\varphi=\varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x + \frac{1}{\lambda} + e^{\lambda\varphi}f(\varphi-\bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

26. $\boldsymbol{u_t = a(u^k u_x)_x + u^{k+1}f(w/u), \quad w = u(\xi(x),t).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = t^{-1/k}\varphi(x),$$

где функция $\varphi=\varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$a(\varphi^k\varphi'_x)'_x + \frac{1}{k}\varphi + \varphi^{k+1}f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

27. $\boldsymbol{u_t = [f'_u(u)u_x]_x + \dfrac{a}{f'_u(u)} + g(f(u)-f(w)), \quad w = u(\xi(x),t).}$

Решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = at + \varphi(x),$$

где функция $\varphi=\varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\varphi''_{xx} + g(\varphi-\bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

11.4.2. Уравнения гиперболического типа

► Уравнения, линейные относительно производных

1. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + u(b\ln u + c\ln w + d), \quad w = u(\xi(x), \eta(t)).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + \varphi(b\ln\varphi + c\ln\bar{\varphi} - K) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x));$$
$$\psi''_{tt} = \psi(b\ln\psi + c\ln\bar{\psi} + d + K), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

K — произвольная постоянная.

2. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = [A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi''_{tt} = a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)). \tag{*}$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = [A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)]\psi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi''_{tt} = -a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

3°. Вырожденное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = (Ax + B)\psi(t),$$

где A и B, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*) with $\lambda = 0$.

3. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(\xi(x), t).}$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = [A\operatorname{ch}(\lambda t) + B\operatorname{sh}(\lambda t)]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} - \lambda^2\varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)). \tag{*}$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = [A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t)]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} + \lambda^2\varphi + \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

3°. Degenerate solution with multiplicative separation of variables:

$$u(x,t) = (At+B)\varphi(x),$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*) with $\lambda = 0$.

4. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + f(u-w), \quad w = u(x,\eta(t)).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = C_1x^2 + C_2x + \psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi''_{tt} = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

5. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bu\ln u + uf(w/u), \quad w = u(x,\eta(t)).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} = C_1\varphi - b\varphi\ln\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = C_1\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi) + b\psi\ln\psi, \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)),$$

C_1 — произвольная постоянная. Частное однопараметрическое решение первого ОДУ можно представить в явном виде

$$\varphi = \exp\Big[-\frac{b}{4a}(x+C_2)^2 + \frac{C_1}{b} + \frac{1}{2}\Big],$$

где C_2 — произвольная постоянная.

6. $\boldsymbol{u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u-w), \quad w = u(x,\eta(t)).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab<0$:

$$u(x,t) = A\,\mathrm{ch}(\lambda x) + B\,\mathrm{sh}(\lambda x) + \psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{-b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi''_{tt} = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)). \tag{*}$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $ab > 0$:

$$u(x,t) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + \psi(t), \qquad \lambda = \sqrt{b/a},$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*).

7. $u_{tt} = au_{xx} + f(u - w), \quad w = u(\xi(x), t).$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = C_1 t^2 + C_2 t + \varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$a\varphi''_{xx} - 2C_1 + f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

► Уравнения, нелинейные относительно производных.

8. $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с переменным аргументом

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = b\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = b\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t));$$

b — произвольная постоянная.

9. $u_{tt} = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x, \eta(t)).$

1°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) > 0$:

$$u(x,t) = [C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]^{1/(k+1)}\psi(t), \qquad \beta = \sqrt{b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi''_{tt} = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)). \tag{*}$$

2°. Решение с мультипликативным разделением переменных при условии $b(k+1) < 0$:

$$u(x,t) = [C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)]^{1/(k+1)}\psi(t), \qquad \beta = \sqrt{-b(k+1)/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*).

3°. Решение с мультипликативным разделением переменных при $k=-1$:

$$u(x,t) = C_1 \exp\Bigl(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x\Bigr)\psi(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*).

4°. Решение с мультипликативным разделением переменных, обобщающее предыдущие решения:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(t)$ описываются ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с пропорциональным аргументом

$$a(\varphi^k\varphi'_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = C\psi^{k+1} + \psi f\bigl(\bar\psi/\psi\bigr), \qquad \bar\psi = \psi(\eta(t)),$$

C — произвольная постоянная.

10. $\boldsymbol{u_{tt} = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u-w), \quad w = u(x,\eta(t)).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi''_{tt} = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar\psi), \qquad \bar\psi = \psi(\eta(t)).$$

11. $\boldsymbol{u_{tt} = a(e^{\lambda u}u_x)_x + be^{\lambda u} + f(u-w), \quad w = u(x,\eta(t)).}$

1°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda>0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)] + \psi(t), \qquad \beta = \sqrt{b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi''_{tt} = f(\psi - \bar\psi), \qquad \bar\psi = \psi(\eta(t)). \tag{*}$$

2°. Решение с аддитивным разделением переменных при $b\lambda<0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln[C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)] + \psi(t), \qquad \beta = \sqrt{-b\lambda/a},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi=\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом (*).

12. $\boldsymbol{u_{tt} = [(a\ln u + b)u_x]_x - cu\ln u + uf(w/u), \quad w = u(x,\eta(t)).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u(x,t) = \exp\bigl(\pm\sqrt{c/a}\,x\bigr)\,\psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$\psi''_{tt} = c(1 + b/a)\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \qquad \bar{\psi} = \psi(\eta(t)).$$

13. $\boldsymbol{u_{tt} = a(e^{\lambda u}u_x)_x + e^{\lambda u}f(u - w), \quad w = u(\xi(x), t).}$

Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = -\frac{2}{\lambda}\ln t + \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x - \frac{2}{\lambda} + e^{\lambda\varphi}f(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

14. $\boldsymbol{u_{tt} = a(u^k u_x)_x + u^{k+1}f(w/u), \quad w = u(\xi(x), t).}$

Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = t^{-2/k}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ с переменным аргументом

$$a(\varphi^k\varphi'_x)'_x - \frac{2(k+2)}{k^2}\varphi + \varphi^{k+1}f(\bar{\varphi}/\varphi) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varphi(\xi(x)).$$

Литература к главе 11

Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Журов А. И. *Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели.* М.: Институт проблем механики РАН, 2022.

Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Вязьмин А. В. Точные решения и качественные особенности нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. *Теор. основы хим. технол.*, 2015, т. 49, № 5, с. 527–541.

Сорокин В. Г. Точные решения некоторых нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием. *Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»*, 2016, т. 5, № 3, с. 199–219.

Khusainov D. Y., Ivanov A. F., Kovarzh I. V. Solution of one heat equation with delay. *Nonlinear Oscillations*, 2009, Vol. 12, No. 2, pp. 260–282.

Khusainov D. Y., Pokojovy M., Azizbayov E. I. On classical solvability for a linear 1D heat equation with constant delay. *Konstanzer Schriften in Mathematik*, 2013, No. 316, ISSN 1430–3558 (see also arXiv:1401.5662v1 [math.AP], 2014, https://arxiv.org/pdf/1401.5662.pdf).

Long F.-S., Meleshko S. V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay. *Math. Methods Appl. Sciences*, 2016, Vol. 39, No. 12, pp. 3255–3270.

Meleshko S. V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 338, pp. 448–466.

Polyanin A. D. Functional separable solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Applied Math. Comput.,* 2019, Vol. 347, pp. 282–292.

Polyanin A. D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Lett.*, 2019, Vol. 90, pp. 49–53.

Polyanin A. D. Sorokin V. G. Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.,* 2021, Vol. 95, 105634.

Polyanin A. D., Sorokin V. G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, No. 5, 511.

Polyanin A. D., Zhurov A. I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, Vol. 54, pp. 115–126.

Polyanin A. D., Zhurov A. I. Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, Vol. 19, No. 3, pp. 409–416.

Polyanin A. D., Zhurov A. I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, Vol. 19, No. 3, pp. 417–430.

Polyanin A. D., Zhurov A. I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.,* 2014, Vol. 59, pp. 16–22.

Polyanin A. D., Zhurov A. I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, Vol. 67, pp. 267–277.

Polyanin A. D., Zhurov A. I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, Vol. 19, No. 8, pp. 2676–2689.

Rodríguez F., Roales M., Marín J. A. Exact solutions and numerical approximations of mixed problems for the wave equation with delay. *Appl. Math. Comput.,* 2012, Vol. 219, No. 6, pp. 3178–3186.

Sorokin V. G., Vyzmin A. V. Nonlinear reaction-diffusion equations with delay: Partial survey, exact solutions, test problems, and numerical integration. *Mathematics*, 2022, Vol. 10, No. 11, 1886.

EqWorld

Мир математических уравнений

Точные решения
- Алгебраические ур-я
- Обыкновенные ДУ
- Системы ОДУ
- УрЧП 1-го порядка
- Линейные УрЧП
- Нелинейные УрЧП
- Системы УрЧП
- УрЧП с запазд. аргум.
- Интегральные ур-ния
- Функциональные ур-я
- Указатель уравнений
- Архив уравнений
- Справочники
- Интересные статьи

Методы решения
- Алгебраические ур-я
- Диофантовы ур-ния
- Обыкновенные ДУ
- УрЧП
- Интегральные ур-ния
- Функциональные ур-я

Мат. форумы
- Форум EqWorld
- Другие форумы

Вспом. разделы
- Интегралы
- Спец. функции
- Интеграл. преобраз.

Программы
- Maple
- Mathematica
- MATLAB
- Другие

Образование
- Алгебраические ур-я
- Диофантовы ур-ния
- Обыкновенные ДУ
- УрЧП
- Интегральные ур-ния
- Функциональные ур-я
- Типичные ошибки
- Выдающ. математики
- Университеты
- Сайты для студентов
- Для школьников

Библиотека
- Книги по математике
- Книги по механике
- Книги по физике
- Диссертации
- Ссылки на книги
- Другие библиотеки

Об этом сайте
- Характ. особенности
- Редколлегия
- Объявления
- Новое на сайте
- Контакты

Для авторов
- Добавить уравнение
- Добавить книгу
- Опубликовать книгу

Информация
- Математич. сайты
- Опечатки в справочн.
- Интернет-магазины
- Научн. издательства
- Научные журналы
- Конференции
- Задать вопрос
- Наука и образование
- Авторское право
- Разное

Развлечения
- Шахматы и шашки
- Головоломки и игры
- ФизМатЮмор

Русский | Английский | Немецкий | Французский | Итальянский | Испанский

Поиск по сайту >>

Редактор: А. Д. Полянин

Международный научно-образовательный сайт EqWorld содержит обширную информацию о различных классах обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений с частными производными (УрЧП), интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Особое внимание уделено уравнениям математической физики и механики. Приведены таблицы точных решений, описаны методы решения уравнений, есть интересные статьи, даны ссылки на математические программы, указаны адреса научных сайтов, издательств, журналов и др. Содержит учебную физико-математическую библиотеку, в которую авторы могут добавлять свои книги и диссертации.

EqWorld работает на русском и английском языках (главная стр. сайта переведена также на немецкий, французский, итальянский и испанский языки) и предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики, химии, биологии и инженерных наук. Все ресурсы сайта являются бесплатными для его пользователей.

EqWorld содержит около 2000 веб-страниц (книги библиотеки не учитываются), его посещают люди из 200 стран мира, средняя посещаемость сайта превышает 3000 человек в сутки.

Адреса сайта в Интернете: http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm (рус.), http://eqworld.ipmnet.ru (англ.)

Это может быть интересно:

А. Д. Полянин, А. И. Журов. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: Издательство «ИПМех РАН», 2021.

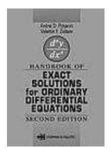
A. D. Polyanin, A. I. Zhurov. Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2022.

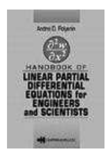
А. Д. Полянин, В. Г. Сорокин, А. И. Журов. Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. М.: Издательство «ИПМех РАН», 2022.

См. также англоязычную версию сайта EqWorld, которая во многом отличается от русскоязычной версии

Google | EqWorld | Найти

https://eqworld.ipmnet.ru/





Научное издание

ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И ДРУГИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Оригинал-макет: А.И. Журов, А.Д. Полянин

Формат 70x100/16.
Гарнитура «Times New Roman». Печать цифровая.
Учетн. печ. л. 36,25. Тираж 300 экз.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН)
119526 Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1
http://www.ipmnet.ru/

Отпечатано в типографии «Элис Групп»
105094, г. Москва, Семеновская Набережная, д. 3/1, корп. 6
http://www.alice-group.ru/

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И ДРУГИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ИПМех РАН

А. Д. ПОЛЯНИН

Книга посвящена точным решениям математических уравнений различных типов (алгебраических, тригонометрических, обыкновенных дифференциальных, с частными производными первого порядка, математической физики, интегральных, функциональных, дифференциальных с запаздыванием, функционально-дифференциальных и др.).

Особое внимание уделяется уравнениям, которые встречаются в различных областях естественных и инженерных наук (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, теории упругости, общей механике, теоретической физике, нелинейной оптике, биологии, химической технологии, экологии и др.) и уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от свободных параметров или произвольных функций. Рассматриваются также уравнения, которые изучаются в университетах и технических вузах.

Книга не имеет аналогов в мировой литературе и содержит много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался. Изложение ведется в соответствии с принципом “от простого к сложному”.

Для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях прикладной математики, математической физики, вычислительной математики, механики, теории управления, биологии, медицины, химической технологии, экологии и экономики. Отдельные уравнения и их решения могут быть использованы в качестве иллюстративного материала на лекциях и семинарах по прикладной и вычислительной математике, дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики и интегральным уравнениям.

ISBN 978-5-91741-281-8

9 785917 412818