

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Ю.Н. Радаев

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

САМАРА  
2004



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"  
Кафедра механики сплошных сред

Ю.Н. Радаев

# ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рекомендовано НМС по математике и механике УМО по классическому  
университетскому образованию  
в качестве учебного пособия по специальности 01 05 00 — механика



Издательство "Самарский университет"  
2004



САМАРСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

*Печатается по решению  
Редакционно-издательского совета  
Самарского государственного университета*

УДК 539.375

ББК 22.251

Р 15

**Радаев Ю.Н.** Пространственная задача математической теории пластичности: Учебное пособие. Самара: Издательство "Самарский университет", 2004. 142 с.

**ISBN 5-86465-300-4**

Представляемая работа — попытка изложить современное состояние исследований пространственных задач математической теории пластичности. В книге содержится полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности. При изложении материала акцент делается на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач математической теории пластичности.

Включен ряд новых результатов, касающихся трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. Найдена замечательная инвариантная векторная форма уравнений равновесия, позволяющая исследовать геометрию поля главных направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Дана классификация решений трехмерных статических уравнений в зависимости от завихренности указанного поля главных направлений. Найдены инварианты, сохраняющие свои значения вдоль линий главных напряжений. Дан анализ трехмерных уравнений математической теории пластичности для приращений напряжений и деформаций в ортогональных изостатических координатах. С помощью новых подходов проведен анализ плоской и осесимметричной задачи. Исследованы автомодельные решения осесимметричной задачи математической теории пластичности и получены новые автомодельные решения, обобщающие известные решения Шилда.

Предназначено для студентов механико-математических факультетов университетов специальностей "Механика" и "Прикладная математика", специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела, ставящих своей целью ознакомление с современным состоянием этой науки и перспективами ее развития.

**Научный редактор** д-р физ.-мат. наук, проф. Д.Д. Ивлев

**Рецензент** чл.-корр. РАН Б.Д. Аннин

ISBN 5-86465-300-4

© Издательство "Самарский университет", 2004

© Радаев Ю.Н., 2004

# Оглавление

|  |            |
|--|------------|
| <b>Предисловие</b>   | <b>5</b>   |
| <b>Введение</b>  | <b>11</b>  |
| <b>1. Уравнения математической теории пластичности для ребра призмы Треска</b>                               | <b>16</b>  |
| 1.1. Вырожденные решения пространственной задачи для ребра призмы Треска                                     | 23         |
| 1.2. Невырожденные решения пространственной задачи для ребра призмы Треска . . . . .                         | 28         |
| 1.3. Уравнения обобщенного ассоциированного закона течения . . . . .   | 30         |
| <b>2. Уравнения математической теории пластичности для грани призмы Треска</b>                               | <b>34</b>  |
| <b>3. Расслоенные невырожденные пластические поля напряжений</b>   | <b>39</b>  |
| <b>4. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений</b>                                    | <b>45</b>  |
| <b>5. Классы пространственных задач с расслоенными полями напряжений</b>                                     | <b>47</b>  |
| <b>6. Канонические координаты пространственной, плоской и осесимметричной задачи</b>                         | <b>52</b>  |
| 6.1. Канонические координаты задачи о плоской пластической деформации .                                      | 55         |
| 6.2. Канонические координаты осесимметричной задачи . . . . .  | 63         |
| <b>7. Трехмерные уравнения математической теории пластичности в ортогональных изостатических координатах</b> | <b>71</b>  |
| 7.1. Трехмерные уравнения равновесия в ортогональных изостатических координатах . . . . .                    | 72         |
| 7.2. Деривационные формулы . . . . .   | 76         |
| 7.3. Уравнения равновесия в приращениях главных напряжений . . . . .   | 77         |
| 7.4. Уравнения совместности деформаций в приращениях . . . . .   | 79         |
| 7.5. Плоская деформация . . . . .  | 88         |
| 7.6. Осесимметричная деформация . . . . .  | 92         |
| <b>Приложение I: Преобразования Лежандра и Ампера</b>  | <b>97</b>  |
| <b>Библиографический список</b>  | <b>102</b> |
| <b>Приложение II: Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности</b>                       | <b>105</b> |
| Вводные замечания . . . . .  | 105        |
| 1. Трехмерные уравнения математической теории пластичности для ребра призмы Треска . . . . .                 | 107        |
| 2. Разделение переменных в пространственных уравнениях математической теории пластичности . . . . .          | 109        |

|    |   |            |
|----|---|------------|
| 3. | Автомодельные решения осесимметричной задачи математической теории пластичности . . . . . | 112        |
| 4. | Распределение главных напряжений в области автомодельного решения .                       | 129        |
|    | <b>Библиографический список к приложению II . . . . .</b>                                 | <b>139</b> |

## Предисловие

Пластичность — свойство твердых тел приобретать необратимые остаточные деформации, не изменяющиеся при постоянных внешних нагрузках. Основные эксперименты по изучению пластических свойств материалов проводятся над металлами, поэтому современная теория пластичности особенно связана со свойствами последних, хотя возможно ее применение к таким материалам, как горные породы, грунты, лед, сыпучие среды и т.д.

Теория пластичности — раздел механики деформируемого твердого тела, в котором изучаются общие законы реакции твердых тел на внешние силовые воздействия с учетом необратимости деформаций. Необратимые пластические деформации в элементах тела могут возникать только при определенном уровне напряжений, количественная мера которого выражается в форме условия (критерия) пластичности. Необратимые деформации в теории пластичности предполагаются не зависящими от скорости нагружения. Необратимое деформирование твердых тел, существенно зависящее от скорости нагружения, является предметом исследования теории ползучести, учитывающей эффекты нелинейно-вязкого течения при нагружении твердых тел. Теория пластичности, вместе с теорией упругости и теорией ползучести, составляет основное содержание современной механики деформируемого твердого тела и в широком смысле направлена на исследование всего круга проблем механики реальных твердых тел.

Тела, способные приобретать достаточно большие (по сравнению с упругими) остаточные деформации, без признаков разрушения, называют пластическими. Пластические свойства проявляют практически все прочные металлы в условиях нормальной температуры (сталь, медь, алюминий).<sup>1</sup> Свойства пластических тел чрезвычайно разнообразны и существенно зависят от различных внешних факторов. Существенным оказывается влияние скорости нагружения и температуры. В своем простейшем варианте теория пластичности должна формулироваться в квазистатическом (причем элемент времени может быть исключен из всех соотношений теории так, что масштаб времени оказывается несущественным и сами соотношения могут быть представлены в инкрементальной форме) и изотермическом приближениях. Для учета возрастающего многообразия явлений, сопровождаю-

---

<sup>1</sup>Пластические свойства различных материалов были известны очень давно и изучались еще Кулоном (С.А. Coulomb, 1776 г.). Первые систематические исследования пластического течения металлов были выполнены Треска (Н. Tresca, 1864 г.), когда им были опубликованы результаты экспериментальных исследований по истечению металлов из отверстий и сформулирован исторически первый критерий пластичности. Треска установил, что текучесть металлов наступает тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает некоторого критического значения.

щих пластическое течение, в теории пластичности применяются определяющие уравнения различного уровня сложности. Сен-Венану (B. Saint-Venant, 1870 г.) первому<sup>2</sup> удалось сформулировать уравнения, удовлетворительно описывающие законы пластического течения металлов на языке механики сплошных сред. Этот успех во многом был обязан экспериментальным исследованиям Треска. Ключевым положением теории пластичности Сен-Венана выступала гипотеза о пропорциональности девиатора напряжений и скорости пластических деформаций.

Математическая теория пластичности имеет важные приложения во многих областях техники (оценка прочности и несущей способности конструкций, обработка металлов), в геофизике и геологии.

Целью математической теории пластичности является построение закона, определяющего реакцию пластического тела на внешние воздействия и позволяющего вместе с другими основными законами механики деформируемых сред вычислить распределение напряжений и перемещений в пластически деформированных телах. Таким образом, должны быть решены фактически две взаимосвязанные задачи: 1) нахождение определяющего закона и формулировка замкнутой граничной задачи; 2) решение граничной задачи в случаях, представляющих прикладной интерес.

Первая проблема решается традиционным для механики деформируемых сред методом. Экспериментальные данные обобщаются и вводятся в теорию в форме принципов, на основании которых устанавливается возможный вид определяющего закона (определяющего уравнения). Определяющие уравнения теории пластичности имеют большую и сложную историю.<sup>3</sup> В настоящее время существует несколько различных подходов к

<sup>2</sup>Saint-Venant B. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état// Liouville J. Math. 1871. V. 16. P. 308-316, 373-382.

<sup>3</sup>История развития теории пластичности, начиная с основополагающих работ Сен-Венана и Леви (M. Levy, 1871 г.), может быть прослежена по русским переводам оригинальных статей, опубликованным в сборнике: Теория пластичности: Сб. статей (ред. Ю.Н. Работнов). М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948. 452 с.

Этот сборник состоит из 28 статей, принадлежащих перу Сен-Венана, Леви, Мизеса (R. von Mises), Прандтля (L. Prandtl), Генки (H. Hencky), Рейсса (A. Reuss), Прагера (W. Prager). Эти работы отражают процесс становления и развития математической теории пластичности и дают возможность в подлиннике ознакомиться с ее основными концепциями, методами и результатами, оригинальность и своеобразие которых уже к 1948 г. позволили редактору сборника утверждать: "Эта теория, которую называют теорией пластичности (в узком смысле слова), не может считаться окончательно установленной; однако исследования последних лет выяснили с несомненностью некоторые основные законы, позволяющие считать многие результаты совершенно достоверными."

Считается, что первые работы по теории пластичности в нашей стране появились в 1936 г. и они обычно связываются с именами А.А. Ильюшина и С.А. Христиановича: Ильюшин А.А. К вопросу о вязко-пластическом течении материала// Тр. конф. по пластическим деформациям (1936). М.: Изд-во АН СССР, 1938; Христианович С.А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре// Мат. сб. Новая серия. 1936. Т. 1. Вып. 4. С. 511-534.

Справедливости ради следует отметить, что известны две более ранних работы С.Л. Соболева и С.Г. Михлина: Sobolev S. The problem of propagation of plastical state// Тр. Сейсмологического ин-та АН



формулировке определяющих законов теории пластичности, следствием которых является разделение теории пластичности на теории типа течения, теории деформационного типа, теории скольжения, статистические теории пластичности, эндохронные теории пластичности. Предлагаются также подходы общего описания процессов малых деформаций начально изотропных тел<sup>4</sup> независимо от их реологических свойств. Сопоставление указанных теорий должно, конечно же, являться предметом особого исследования и в настоящей публикации по существу не обсуждается, так как изложение по существу базируется только на теории течения идеально пластических тел.

Чрезвычайно большое многообразие определяющих законов современной теории пластичности отнюдь не лишает эту науку логики и непротиворечивости. Выбор того или иного варианта теории пластичности диктуется теми пределами точности, которых стремится достичь исследователь. В подавляющем большинстве случаев удовлетворительными оказываются наиболее простые теории и приближенные метода расчета. Так, например, многочисленные процессы обработки металлов давлением (прессование, выдавливание, волочение, прокатка) рассчитываются инженерами при помощи простейших законов пластического течения, однако полученные результаты, имеющие к тому же вид простых и удобных формул, подтверждаются многочисленными экспериментальными фактами.

Теория пластичности, как собственно математическая теория, обладает набором аналитических и численных методов решения соответствующих нелинейных граничных задач. Многие из них (задачи кручения и антиплоского сдвига, плоская деформация и плоское напряженное состояние) наряду с методами, развитыми для их исследования, уже давно стали неотъемлемой частью самой теории.

Основным объектом математического исследования в теории пластичности являются нелинейные гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных и краевые задачи для них, сформулированные для областей с неизвестными границами. Для понимания содержания от читателя требуется достаточно свободное владение основами современной механики сплошных сред, включая понимание тензорного формализма, а также — дифференциальной геометрии и теории уравнений с частными производными.

Представляемая работа посвящена одному из самых сложных и наи-

---

СССР. Л. 1935. №49. С. 28-39; Михлин С.Г. Основные уравнения математической теории пластичности. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. 71 с.

В послевоенные годы только в изданиях Академии наук было опубликовано свыше двухсот работ, обзор которых дан в статье: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 79-118.

<sup>4</sup>Речь идет о постулате изотропии, см.: Ильющин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.

менее изученных разделов механики деформируемого твердого тела — пространственной задаче математической теории пластичности. Основопологающие результаты в этой области принадлежат Д.Д. Ивлеву. Они подытожены в фундаментальной двухтомной монографии "Механика пластических сред".<sup>5</sup>

В работе содержится полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности. При изложении материала акцент делается на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач математической теории пластичности. Включен ряд новых результатов, касающихся трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести.<sup>6</sup> Найдена замечательная инвариантная векторная форма уравнений равновесия, позволяющая исследовать геометрию поля главных направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Разработана классификация решений трехмерных статических уравнений в зависимости от завихренности указанного поля главных направлений. Найдены инварианты, сохраняющие свои значения вдоль линий главных напряжений. Дан анализ трехмерных уравнений математической теории пластичности для приращений напряжений и деформаций в ортогональных изостатических координатах. С помощью новых подходов проведен анализ плоской и осесимметричной задачи. Исследованы автомодельные решения осесимметричной задачи математической теории пластичности и получены новые автомодельные решения, обобщающие известные решения Шилда (R.T. Shield).

Представляемая книга<sup>7</sup> написана на основе лекций по математической

---

<sup>5</sup>См.: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 448 с.

Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: Физматлит, 2002. 448 с.

<sup>6</sup>Согласно современным представлениям, идеально пластическое течение возникает как результат малых скольжений по определенным площадкам скольжения, и линии скольжения, наблюдаемые при пластическом течении металлов, суть частное проявление физического механизма скольжения. Именно условие пластичности Треска, как известно, позволяет развить математическую теорию пластичности, вполне соответствующую сдвиговому механизму пластического течения. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, обобщенный ассоциированный закон течения не устанавливает никаких ограничений на тензор скоростей пластических деформаций (помимо условий несжимаемости и соосности тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций), следовательно, пластическое течение имеет наибольшую свободу и именно поэтому возрастает вероятность построить решения ряда важнейших прикладных задач, рассматривая ребро условия текучести Треска. Ясно, что напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку при этом имеется весьма сильное кинематическое ограничение: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю.

<sup>7</sup>Е-версия настоящего издания располагается на сервере Самарского государственного университета

теории пластичности, которые, начиная с 1989 г., читаются автором на механико-математическом факультете Самарского государственного университета для студентов специальностей "механика" и "прикладная математика", специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела. Это — попытка изложить современное состояние исследований пространственных задач математической теории пластичности, в том числе и с целью восполнить известный пробел в учебной литературе.<sup>8</sup>

Преподавание математической теории пластичности в Самарском государственном университете имеет свою историю и традиции, связанные прежде всего с именем известного специалиста в теории упрочняющихся идеально пластических тел — Г.И. Быковцева. Для него всегда было характерно сочетание собственно механического содержания теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения.<sup>9</sup> Такой синтез требовал также особого курса по теории дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, в котором излагались такие редко освещаемые в современной учебной литературе темы, как общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования. Естественно, что в представляемом издании мы в целом стремились сохранить такую направленность при изложении теории пространственных уравнений математической теории пластичности.

Автор считает своим долгом поблагодарить коллег по кафедре механи-

---

и может быть найдена по web-адресу: <http://www.ssu.samara.ru/~radayev/3dPl.html>

<sup>8</sup> Дело в том, что имеется ряд прекрасных монографий и учебников по теории пластичности, написанных советскими учеными — механиками, отражающих все важнейшие достижения этой теории, которые по мастерству изложения и богатству результатов до сих пор остаются непревзойденными образцами:

Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с. (это последнее третье издание; второе издание: Соколовский В.В. Теория пластичности. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 396 с.; первое издание книги было выпущено в свет издательством АН СССР в 1946 г.);

Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.;

Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с. (первое издание этой книги: Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 324 с. Более ранний источник:

Качанов Л.М. Механика пластических сред. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 216 с.);

Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.;

Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.;

Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 240 с.;

Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.

Однако в них сравнительно мало освещаются или вовсе не затрагиваются вопросы пространственного напряженного состояния пластических тел. В настоящее время остро ощущается также потребность в изданиях, обобщающих исследования в этом направлении.

<sup>9</sup> С избранными научными статьями Г.И. Быковцева заинтересованный читатель может познакомиться по книге: Быковцев Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сборник статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.

ки сплошных сред за многочисленные и плодотворные обсуждения многообразных аспектов математической теории пластичности.

Автор признателен научному редактору книги д-ру физ.-мат. наук, проф. Д.Д. Ивлеву и рецензенту, чл.-корр. РАН Б.Д. Аннину за внимательный просмотр рукописи и ценные замечания, существенно повлиявшие на ее окончательную форму и содержание.

## Введение

Теория идеальной пластичности, преодолевая трудности начального периода развития, относящегося к 70-м годам XIX в., в 50-е годы XX в. сформировалась как важнейшее самостоятельное направление механики деформируемого твердого тела.

Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном (B. Saint-Venant, 1870 г.) на основе гипотезы о пропорциональности девиатора напряжений и скорости пластических деформаций при условии текучести Треска (H. Tresca).

Уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (M. Levy, 1871 г.) [1], который принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скорости деформации. Теория Леви не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес. Длительное время уравнения пространственной задачи оставались неизученными. И в настоящее время теория трехмерной задачи математической теории пластичности далека от завершения. Имеется весьма ограниченный круг методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния.<sup>10</sup>

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны.<sup>11</sup> Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования (см. [3]–[7]), развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения.

---

<sup>10</sup>Оценивая состояние пространственной задачи теории идеальной пластичности Л. Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. указывал, что для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения.

<sup>11</sup>“Задачи трехмерного пластического течения трудны и мало изучены.” Так сформулировано отношение к вопросам пространственной задачи математической теории пластичности авторов известной обзорной статьи: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 79-118.

Три десятилетия развития механики деформируемого твердого тела в принципе не изменили ситуацию и эта оценка, по-прежнему, соответствует действительному положению дел.

<sup>11</sup>Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений (см., например, [2], с. 144-146).

Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими. Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса. Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Линии скольжения играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние. На этот факт, по-видимому, впервые указал Д.К. Чернов.<sup>12</sup>

Однако экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса значительно лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Треска.<sup>13</sup> Сомневаться в достоверности данных многочисленных экспериментов не приходится, тем более, что они указывают на систематическое отклонение поведения металлов в состоянии текучести от условия Треска. Тем не менее, можно предположить, что лучшее соответствие условия Мизеса опытными данным объясняется влиянием различных посторонних факторов, таких как упрочнение, деформационная анизотропия, поврежденность, элиминировать которые при проведении экспериментов не удастся. Известно также, что чем ярче у материала на диаграмме одноосного растяжения выражена площадка текучести (т.е. чем ближе его поведение к идеально пластическому), тем лучше данные испытаний согласуются с критерием пластичности Треска. Таким образом, критерий текучести Треска, по-видимому, действительно, лучше чем все остальные мыслимые критерии, выражает сущность идеальной пластичности. В пользу этого вывода, т.е. большего соответствия условия Треска физике пластической деформации, высказывались многие авторы.<sup>14</sup>

---

<sup>12</sup>Дмитрий Константинович Чернов (1839–1921 гг.) — великий русский инженер и ученый, основатель металлографии, разработавший учение о кристаллах и кристаллографии, создатель научных основ обработки металлов давлением. Как ученый Д.К. Чернов оставался вне поля зрения официальной русской науки, даже когда его заслуги в области металлургии и металловедения были признаны всем миром. Его биография и список научных трудов опубликованы в книге: Гумилевский Л.И. Чернов. (Научн. ред. проф. И.Я. Конфедератов.) М.: Молодая гвардия, 1975. 208 с. По поводу вклада Д.К. Чернова в теорию пластичности см. предисловие к книге: Томленов А.Д. Теория пластических деформаций металлов. М.: Машгиз, 1951. 200 с.

<sup>13</sup>См., например, [3], с. 29–34.

<sup>14</sup>Дискуссия по этому поводу имеется на стр. 86, 87 упомянутой выше обзорной статьи А.А. Вакуленко и Л.М. Качанова.



Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (A. Haar, Th. von Karman) выдвинули условие полной пластичности [8], которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Треска,<sup>15</sup> и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определимыми.

В 1923 г. Генки (H. Hencky) [9] предложил использовать условие полной пластичности Хаара—Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определимой системе уравнений равновесия, которая, как он установил, оказывается гиперболической. Позднее уравнения осесимметричной задачи с условием текучести Треска исследовались Р. Шилдом (R.T. Shield) [10] для ребер и граней призмы Треска. Осесимметричные автомодельные решения, соответствующие течению на ребре призмы Треска, были построены Р. Шилдом (R.T. Shield) в той же самой работе [10]; в частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы.

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский [11] исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности, доказав статическую определимость и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара—Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским [12], который также использовал обобщенный закон пластического течения, не предполагающий столь жесткие ограничения на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений.

Результаты А.Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [13], [14], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара—Кармана для всей теории пластичности и был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Треска) и обобщенный ассоциированный закон пластического течения. Было установле-

---

<sup>15</sup>Сформулируем ту же самую мысль, но в более отчетливой форме: состояние полной пластичности описывается в рамках условия пластичности Треска и соответствует ребру призмы Треска.

но, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определяемыми и принадлежат к гиперболическому типу. Характеристические направления (нормали к характеристическим поверхностям) уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также направления, ортогональные главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, также гиперболически и имеют точно такие же характеристические направления, как и статические уравнения.<sup>16</sup>

Было таким образом доказано, что именно условие полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определяемых уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования.<sup>17</sup>

В дальнейшем Д.Д. Ивлевым была исследована пространственная задача при произвольном кусочно-линейном условии текучести и в результате показано, что как в пространственном, так и в осесимметричном случае на ребре кусочно-линейного условия текучести уравнения математической

---

<sup>16</sup>Этот результат был получен в работе [15]. Полное изложение теории пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, имеется в монографии [7], с. 205-246.

<sup>17</sup>Эта точка зрения разделяется далеко не всеми. Так, А.А. Вакуленко и Л.М. Качанов полагают, что доводы физического характера в пользу схемы полной пластичности "продиктованы скорее заманчивой простотой математического анализа, нежели существом вопроса" (см.: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 100). Тем не менее они замечают, что решения, полученные по схеме полной пластичности, могут иметь несомненный интерес, полемизируя при этом с Р. Хиллом, критически оценившим условие полной пластичности Хаара—Кармана как "искусственное и нереальное условие текучести" (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. С. 320, 321). Не вызывает возражений высказываемая ими мысль о том, что ценность того или иного решения пространственной задачи устанавливается возможностью либо построить согласованное кинематически допустимое поле, либо продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. В противном случае вопрос о значимости решения остается открытым. Ясно, что исключительную ценность представляют полные решения, когда удастся построить согласованное кинематически допустимое поле и продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. Таким образом, неполные решения обладают лишь относительной ценностью, а полные — абсолютной. На практике, однако, чаще всего удастся построить неполное поле напряжений (поле напряжений в пластической зоне) и возникает проблема его продолжения в жесткую зону так, чтобы в жесткой зоне и на границе раздела выполнялись условия равновесия и не превышался предел текучести. Общая процедура такого продолжения (или хотя бы существование такого продолжения) для сколько-нибудь широкого класса задач в настоящее время неизвестны. Учитывая все сказанное, нетрудно заключить, что по большому счету неполные решения с теоретической точки зрения вообще никакой ценности не представляют. Однако их практическая ценность часто может быть очень высокой. Так, или иначе, но большинство прикладных задач решены по жесткопластической схеме не полно.



теории пластичности являются гиперболическими и имеют характеристические элементы, совпадающие с площадками максимальных касательных напряжений.

Любопытно отметить, что как статические, так и кинематические уравнения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности для граней призмы Треска, соответствующих кинематически определенным режимам течения, также являются гиперболическими; характеристические направления ориентированы так же, как и главные направления тензора напряжений, т.е. характеристики касаются главных направлений тензора напряжений.<sup>18</sup>

Подобным же образом дело обстоит и в пространственной задаче: в случае грани произвольного кусочно-линейного условия текучести характеристические поверхности касаются главных направлений тензора напряжений.

Ниже развиваются общая теория трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести, и возможная общая схема интегрирования пространственных статических уравнений. Основой теории выступает ряд геометрических результатов по исследованию поля главных направлений тензора напряжений, характеризующихся наибольшим (или наименьшим) главным нормальным напряжением, полученных в [17] и [18].

Работа состоит из введения, семи разделов и двух приложений. **Введение** содержит обзор основных результатов, относящихся к теории пространственной задачи математической теории пластичности. В первом разделе рассматриваются трехмерные уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру условия текучести Треска, и дается их классификация. Здесь же выводится замечательная инвариантная векторная форма указанных уравнений, анализ которой позволяет сделать заключение о расслоенности поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению. В этом же разделе рассматриваются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения. Во втором разделе анализируются уравнения математической теории пластичности для грани призмы Треска. Затем, в **разделе 3**, изучаются те свойства поля напряжений, которые непосредственно следуют из его расслоенности. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений вдоль изостатических траекторий выводятся в **разделе 4**. Здесь также устанавливается возможность отделения одной из изостатических координат. В **разделе 5** указываются достаточные признаки того,

---

<sup>18</sup>См. работу [16]. Полное исследование характеристик уравнений осесимметричной задачи при условии пластичности Треска для различных режимов пластического течения читатель может найти в [4], с. 258-268.

что расслоенное поле напряжений, соответствующее ребру призмы Треска, действительно может реализоваться в некоторых случаях пространственного пластического состояния. Анализ плоской и осесимметричной задач выполнен в **разделе 6** с использованием аппарата производящих функций, определяющих канонические преобразования пространственных координат. Необходимые для понимания этого раздела сведения вынесены в **приложение I** и касаются свойств преобразований Лежандра и Ампера. Исследование трехмерных уравнений математической теории пластичности в ортогональных изостатических координатах включено в **раздел 7**. Основным интерес здесь представляют уравнения совместности деформаций. **Приложение II** посвящено поиску автомодельных решений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при использовании критерия текучести Треска для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. Разыскание осесимметричных автомодельных решений осуществлено на основе соотношений пространственной задачи, сформулированных в изостатических координатах, с учетом осевой симметрии и возможности отделения еще одной неугловой изостатической координаты.

## 1. Уравнения математической теории пластичности для ребра призмы Треска

Условие текучести Треска или условие максимального касательного напряжения имеет следующий вид:

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} = Y, \quad (1.1)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — собственные значения тензора напряжений (главные напряжения);  $Y$  — предел текучести при одноосном растяжении. Условие текучести Треска устанавливает, что величина  $Y$  связана с величиной  $k$  (пределом текучести при чистом сдвиге) соотношением  $Y = 2k$ .

В пространстве главных напряжений поверхность текучести, определяемая уравнением (1.1), представляет собой правильную шестигранную призму, ось которой равнонаклонена к декартовым осям этого пространства.

Уравнение призмы Треска (1.1), очевидно, можно также представить в форме

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - Y^2] [(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - Y^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - Y^2] = 0. \quad (1.2)$$

Это же уравнение, выраженное через главные инварианты девиатора

тензора напряжений

$$\begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2), \\ J_3' &= \frac{1}{27}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2), \end{aligned} \quad (1.3)$$

будет иметь вид

$$4J_2'^3 - 27J_3'^2 - 9Y^2 J_2'^2 + 6Y^4 J_2' = Y^6. \quad (1.4)$$

Кривая текучести (сечение призмы девиаторной плоскостью  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ) представляет собой правильный шестиугольник с центром в начале координат и стороной, равной  $\sqrt{2/3}Y$  (см. рис. 1).

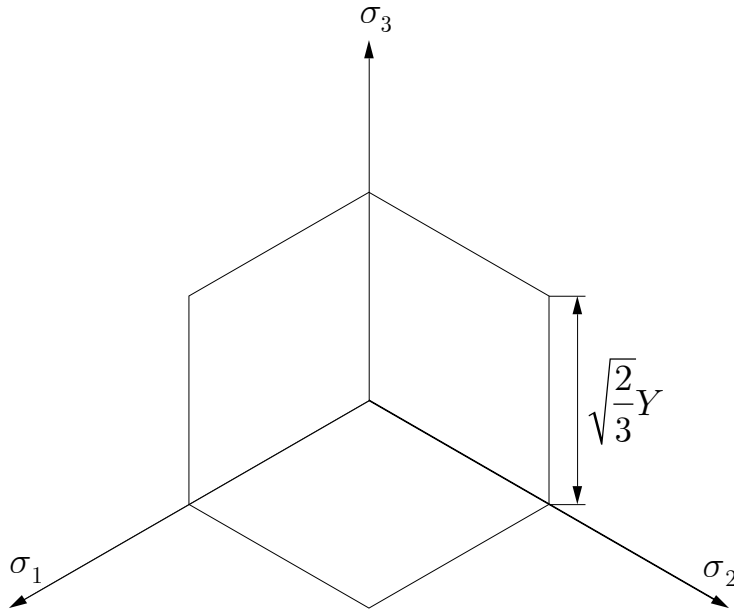


Рис. 1. Кривая текучести, соответствующая условию максимального касательного напряжения

Рассмотрим уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска. Обозначим через  $\boldsymbol{\sigma}$  тензор напряжений;  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений.

Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.5)$$

В пространстве главных напряжений ребра призмы Треска определяются уравнениями

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Последнее условие означает, что главное напряжение  $\sigma_3$  является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Так как  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  — ортонормированный базис, то

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

Учитывая (1.5), (1.6) и уравнение ребра призмы  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ , получим:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I} \mp 2k\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.7)$$

Таким образом, тензор напряжений определяется скалярным полем  $\sigma_3$  и единичным векторным полем  $\mathbf{n}$ .

Уравнение равновесия  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  после подстановки в него разложения (1.7) можно представить в следующем виде:

$$\operatorname{grad} \sigma_3 \mp 2k \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (1.8)$$

Следовательно, задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Треска, формально статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения  $\sigma_3$  и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора  $\mathbf{n}$ ), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений.<sup>19</sup>

<sup>19</sup>По поводу термина "статически определимая задача" и смысла, который в него вкладывается разными авторами см. [3], с. 158-159, с. 278-280. В известной книге [4] (с. 135) статически определимыми называются такие задачи, когда имеется полная система уравнений и граничных условий для определения напряженного состояния (притом независимо от деформаций). В [4] (с. 259) используется также термин "локально статически определимая задача".

Термин "статически определимая задача" был введен Генки в 1923 г., чтобы охарактеризовать такие случаи, когда независимо от граничных условий имеется столько уравнений, сформулированных относительно напряжений, сколько неизвестных компонент напряжений. Мы используем термин "формально статически определимая задача", смысл которого в точности такой же. Формальная статическая определимость еще не гарантирует того, что действительно можно определить поле напряжений (даже если граничные условия сформулированы в напряжениях), не привлекая кинематических уравнений. В тех случаях, когда это действительно удастся сделать мы будем вести речь о фактической статической определимости. Различие между формальной и фактической статической определимостью было блестяще продемонстрировано Хиллом на примере формально статически определимой задачи плоского неустановившегося пластического течения: если найдется линия скольжения, пересекающая дважды границу раздела упругой и пластической зон, то одних лишь уравнений в напряжениях недостаточно для их определения единственным образом.

Обозначим через  $\Sigma$  отношение  $\sigma_3$  к  $\mp 2k$  и приведем уравнение (1.8) к виду:

$$\text{grad}\Sigma + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (1.9)$$

В декартовых координатах векторное уравнение (1.9) эквивалентно системе трех скалярных уравнений ( $i, k = 1, 2, 3$ ):

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} + n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} + n_i \frac{\partial n_k}{\partial x_k} = 0 \quad (n_k n_k = 1).$$

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (1.9):

$$\nabla \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad (1.10)$$

где  $\nabla$  — пространственный оператор Гамильтона.

Для единичного векторного поля справедлива формула

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}, \quad (1.11)$$

с помощью которой векторное уравнение (1.10) может быть также представлено в виде

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{div} \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.12)$$

Это уравнение в силу своего инвариантного характера служит основой для всех последующих рассмотрений и оказывается исключительно удобным для геометрического исследования поля  $\mathbf{n}$ .

В дальнейшем мы будем использовать также следующие равенства:

$$((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}) \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0, \quad ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

вытекающие из (1.11).

Исследуем характеристики уравнения (1.12). Для этого будем трактовать характеристические поверхности уравнения (1.12) как поверхности слабого разрыва  $\Sigma$  и  $\mathbf{n}$  и воспользуемся условиями совместности Адама—Томаса [2]:

$$[\nabla \Sigma] = B\mathbf{N}, \quad [\nabla \otimes \mathbf{n}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{b}, \quad (1.13)$$

где  $[ ]$  обозначает скачок при переходе через поверхность слабого разрыва;  $\mathbf{N}$  — единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва;  $B, \mathbf{b}$  — некоторые поля, определенные на этой поверхности, причем равенства  $B = 0$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность есть действительно поверхность слабого разрыва.

На основании уравнения (1.12) имеем:

$$[\nabla \Sigma] - \mathbf{n} \times [\text{rot } \mathbf{n}] + \mathbf{n} [\text{div} \mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad (1.14)$$

и, применяя условия совместности (1.13), получим

$$B\mathbf{N} - \mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.15)$$

Кроме того, так как  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ , то  $\mathbf{n} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{n})^T = \mathbf{0}$  и, следовательно,  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})\mathbf{N} = \mathbf{0}$ , что приводит к следующему соотношению на поверхности слабого разрыва:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.16)$$

Замечая, что

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b}$$

и учитывая (1.16), уравнение (1.15) приводим к виду

$$B\mathbf{N} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.17)$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор  $\mathbf{N}$ :

$$B + 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{b}) = 0. \quad (1.18)$$

Умножая обе части уравнения (1.17) скалярно на вектор  $\mathbf{n}$ , получим также

$$B(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1.19)$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $B$ , полученное с помощью предыдущего уравнения, находим, что

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})(1 - 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})^2) = 0. \quad (1.20)$$

Это уравнение распадается на два. Если  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ , то необходимо

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.21)$$

Если  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0$ , то на основании (1.18)  $B = 0$ , и тогда уравнение (1.17) дает

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

откуда в силу того, что равенства  $B = 0$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  не могут выполняться одновременно,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.22)$$

Итак, уравнение (1.12) принадлежит к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям в силу (1.21) образуют конус с углом полураствора  $\pi/4$  и осью, ориентированной вдоль вектора  $\mathbf{n}$  (см. рис. 2). Ясно, что характеристические поверхности являются также и по-

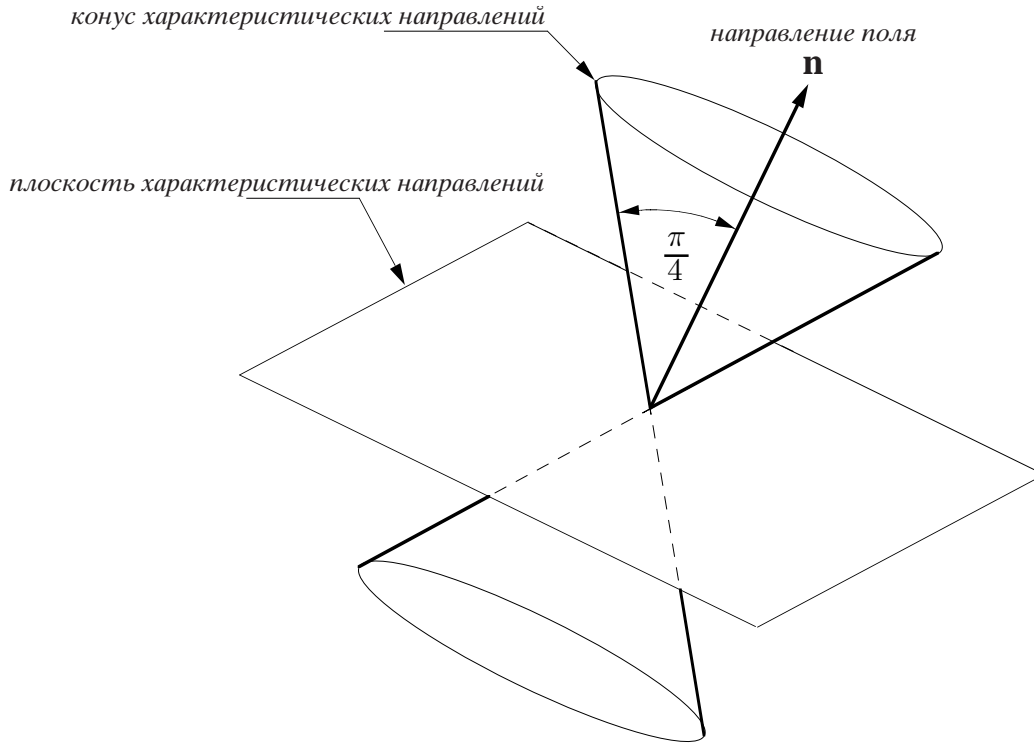


Рис. 2. Конус характеристических направлений в пространственной задаче теории пластичности (течение на ребре призмы Треска)

верхностями максимального касательного напряжения (поверхностями скольжения). Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и, согласно (1.22), интегральные поверхности поля  $\mathbf{n}$  (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля  $\mathbf{n}$ ).

Уравнение (1.9) было получено при условии, что напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска. Тем не менее удастся показать, что этим же самым уравнением определяется поле напряжений в условиях пластического плоского деформированного состояния.

В случае плоской деформации любой критерий текучести изотропной среды приводится к виду

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \quad (1.23)$$

и, следовательно, описывается в рамках критерия текучести Треска. Ясно, что пластическому плоскому деформированному состоянию отвечает грань призмы Треска, определяемая уравнением (1.23). Условие текучести (1.23) может быть сформулировано в компонентах тензора напряжений:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2. \quad (1.24)$$

Поле напряжений в пластической зоне можно представить в форме,



предложенной Леви:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= p + k \cos 2\theta, \\ \sigma_{22} &= p - k \cos 2\theta, \\ \sigma_{12} &= k \sin 2\theta,\end{aligned}\tag{1.25}$$

где  $p = 1/2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2)$ ,  $\theta$  — угол наклона к оси  $x_1$  главной оси напряжений, соответствующей наибольшему главному напряжению  $\sigma_1$ .

Уравнения равновесия жесткопластического тела в случае плоской деформации имеют вид (см., например, [5])

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x_1} - 2k(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2}) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + 2k(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2}) &= 0,\end{aligned}\tag{1.26}$$

и получаются подстановкой соотношений Леви (1.25) в уравнения равновесия.

Если ввести обозначение  $\Sigma = p/(2k)$  и плоское векторное поле  $\mathbf{n}$  с компонентами  $n_1 = \cos \theta$ ,  $n_2 = \sin \theta$ , то уравнения (1.26) приводятся к двумерному уравнению (1.9). Тем самым устанавливается аналогия между статическими уравнениями плоского деформированного состояния и пространственными уравнениями для ребра призмы Треска, и находит объяснение гиперболичность соответствующих систем уравнений.

Дифференциальные уравнения характеристик в случае плоской деформации (линий скольжения) есть:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right), \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right).$$

Итак, уравнение (1.9) обладает необходимой степенью общности, описывая также напряженные состояния, соответствующие грани призмы Треска.

В связи с тем, что характеристические направления существенно зависят от ориентации вектора  $\mathbf{n}$ , в дальнейшем исследовании уравнений пространственной задачи математической теории пластичности будут использоваться некоторые результаты из геометрической теории векторных полей, изложенные, например, в [19], или в более раннем и полном источнике [20], с. 177-181.

Геометрия единичного векторного поля  $\mathbf{n}$  полностью описывается его интегральными линиями (векторными линиями поля). С каждой интегральной линией связан триэдр Френе (касательный вектор  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}$ , вектор главной нормали  $\boldsymbol{\nu}$ , вектор бинормали  $\boldsymbol{\beta}$ ) и два инварианта: кривизна  $\kappa$  и кручение  $\sigma$ .



Производные вдоль линии поля векторов триэдра Френе определяются формулами Френе:

$$\begin{aligned}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} &= \kappa \boldsymbol{\nu}, \\(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\nu} &= -\kappa \mathbf{n} + \sigma \boldsymbol{\beta}, \\(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\beta} &= -\sigma \boldsymbol{\nu}.\end{aligned}\tag{1.27}$$

Кривизна и кручение векторной линии вычисляются как

$$\begin{aligned}\kappa &= |(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}|, \\ \sigma &= \frac{\langle \mathbf{n}, (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}, (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \nabla \otimes \nabla) \mathbf{n} \rangle}{|(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}|^2}.\end{aligned}\tag{1.28}$$

Здесь треугольными скобками обозначается смешанное произведение векторов.

Первая из формул Френе (1.27) с помощью соотношения (1.11) позволяет получить формулу Гамильтона (W.R. Hamilton) для кривизны векторной линии единичного поля  $\mathbf{n}$  (см. также [19], с. 23, 24). Согласно этой формуле, вектор кривизны  $\boldsymbol{\kappa}$  векторной линии поля  $\mathbf{n}$  вычисляется как

$$\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}.\tag{1.29}$$

Напомним, что вектор кривизны  $\boldsymbol{\kappa}$  по модулю равен кривизне линии и направлен по главной нормали.

Из формулы Гамильтона следует, что вектор  $\text{rot } \mathbf{n}$  принадлежит спрямляющей плоскости векторной линии поля  $\mathbf{n}$ . Скалярным умножением (1.29) на  $\boldsymbol{\nu}$  находится следующее выражение для кривизны линии поля:

$$\kappa = \boldsymbol{\beta} \cdot \text{rot } \mathbf{n},\tag{1.30}$$

т.е. кривизна векторной линии поля  $\mathbf{n}$  есть проекция вектора  $\text{rot } \mathbf{n}$  на бинормаль.

## 1.1. Вырожденные решения пространственной задачи для ребра призмы Треска

Исследуем уравнение (1.12) сначала в предположении, что  $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} = \mathbf{0}$  всюду в области пластического течения. Выполнение приведенного условия возможно только при условии, что  $\mathbf{n}$  — безвихревое векторное поле:  $\mathbf{n} = \nabla f$ , где  $f$  — потенциал поля.<sup>20</sup>

Воспользуемся далее формулой Гамильтона (1.29) для кривизны векторной линии единичного поля  $\mathbf{n}$ . Ясно, что в рассматриваемом случае  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$

<sup>20</sup>Доказательство этого утверждения будет дано в разделе 3.

и, следовательно, все векторные линии поля  $\mathbf{n}$  есть прямые. Мы называем этот случай вырожденным, подразумевая под этим как раз тот факт, что вырожденному решению уравнений теории пластичности соответствуют прямолинейные векторные линии поля  $\mathbf{n}$ .

Так как  $\mathbf{n}$  — единичное векторное поле, то его потенциал должен удовлетворять уравнению  $|\nabla f| = 1$ , известному как уравнение эйконала.<sup>21</sup> Полный интеграл этого уравнения известен, поэтому нахождение решений этого уравнения теоретически не представляет затруднений.

Уравнение (1.12) при условии  $\text{rot } \mathbf{n} = \mathbf{0}$  существенно упрощается

$$\nabla \sigma_3 \mp 2k \Delta f \nabla f = \mathbf{0} \quad (1.31)$$

и может быть проинтегрировано, если

$$\nabla \times (\Delta f \nabla f) = (\nabla \Delta f) \times \nabla f = \mathbf{0}. \quad (1.32)$$

В результате наибольшее (или наименьшее) главное напряжение определяется в виде:

$$\sigma_3 = \pm 2k \int_{\tilde{x}_s}^{x_s} \Delta f df. \quad (1.33)$$

Это соотношение вместе с  $\mathbf{n} = \nabla f$ , где  $f$  — совместный интеграл уравнения эйконала  $|\nabla f| = 1$  и уравнения  $(\nabla \Delta f) \times \nabla f = \mathbf{0}$ , представляет все решения уравнения (1.12) при предположении, что  $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Заметим, что полный интеграл уравнения эйконала (за вычетом аддитивной постоянной)  $f(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, заведомо удовлетворяет условию  $\Delta f = 0$ , и, следовательно, будет представлять собой совместный интеграл указанных уравнений. Ясно, что полному интегралу уравнения эйконала отвечает равномерное пространственное напряженное состояние: вектор  $\mathbf{n}$  не изменяется и совпадает с вектором  $\mathbf{k}$ , главные напряжения также постоянны.

Потенциальность поля  $\mathbf{n}$  означает также, что его можно рассматривать как поле нормалей к семейству поверхностей уровня потенциала  $f(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ . Так как векторные линии поля  $\mathbf{n}$  прямолинейны, то каждая индивидуальная векторная линия будет нормально пересекать каждую из поверхностей семейства  $f(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ . Но это может быть только тогда, когда поверхности уровня образуют семейство эквидистантных по отношению к некоторой фиксированной (базовой) поверхности уровня  $f(x_1, x_2, x_3) = \tilde{c}$  поверхностей.

<sup>21</sup>Двумерное уравнение эйконала в математической теории пластичности обычно называется уравнением песчаной насыпи. Решения граничных задач для уравнения эйконала имеют характерные для идеальной пластичности разрывы первых производных.

Продолжить исследование вырожденного поля  $\mathbf{n}$  оказывается удобным в специальном образом подобранной криволинейной координатной системе. На базовой поверхности  $f(x_1, x_2, x_3) = \tilde{c}$  выберем некоторые Гауссовы параметры  $\xi^1, \xi^2$ . Тогда параметризация этой поверхности будет иметь вид:  $x_i = \tilde{x}_i(\xi^1, \xi^2)$ . Обозначим через  $\xi^3$  расстояние от рассматриваемой поверхности до типичной эквидистантной поверхности  $f(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ , измеренное вдоль нормали. Ясно, что в области вырожденного поля переменные  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  можно принять в качестве криволинейных координат:

$$x_i = \tilde{x}_i(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 n_i. \quad (1.34)$$

Метрический тензор, введенной таким образом в области вырожденного поля криволинейной сетки, вычисляется как (см., например, [21], с. 212-215)

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \tilde{a}_{\alpha\beta}(1 - (\xi^3)^2 \tilde{K}) - 2\xi^3 \tilde{b}_{\alpha\beta}(1 - \xi^3 \tilde{H}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \\ g_{\alpha 3} &= 0, \quad g_{33} = 1, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где  $\tilde{a}_{\alpha\beta}$  — коэффициенты первой квадратичной формы базовой поверхности,  $\tilde{b}_{\alpha\beta}$  — коэффициенты второй квадратичной формы базовой поверхности,  $\tilde{K}$  — полная (Гауссова) кривизна,  $\tilde{H}$  — средняя кривизна базовой поверхности.<sup>22</sup>

В новых координатах потенциал  $f$  поля  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющий уравнению эйконала  $|\nabla f| = 1$ , примет наиболее простой вид:  $f = \xi^3$ .

Условие интегрируемости (1.32), т.е. условие независимости интеграла (1.33) от пути интегрирования, в силу ([21], с. 105)

$$\Delta f = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln g,$$

где  $g$  — детерминант матрицы, составленной из компонент метрического тензора криволинейной координатной системы (1.34), можно представить в форме

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln g = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (1.36)$$

Заметим что в этом уравнении после дифференцирования по  $\xi^3$  можно положить  $\xi^3 = 0$ , поскольку условие интегрируемости (1.36) имеет геометрический характер и относится ко всему семейству поверхностей, а выбор

<sup>22</sup>См. монографию [22] и фундаментальное двухтомное сочинение [23], [24] по поводу основных понятий дифференциальной геометрии поверхностей. Здесь только отметим формулы

$$\tilde{K} = \frac{\det \|\tilde{b}_{\alpha\beta}\|}{\det \|\tilde{a}_{\alpha\beta}\|}, \quad \tilde{H} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{b}_{\alpha\beta}.$$

базовой поверхности  $\xi^3 = 0$  чисто условен. Поэтому, положив в (1.36)  $\xi^3 = 0$  и получив то или иное условие, его надо будет затем распространить на все поверхности семейства.

Подсчитывая величину  $g$  с помощью (1.35), выполняя дифференцирование в (1.36) по  $\xi^3$  и полагая  $\xi^3 = 0$ , приходим к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{\tilde{g}_{11}\tilde{b}_{22} + \tilde{g}_{22}\tilde{b}_{11} - 2\tilde{g}_{12}\tilde{b}_{12}}{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\tilde{g}^{11}\tilde{b}_{11} + \tilde{g}^{22}\tilde{b}_{22} + 2\tilde{g}^{12}\tilde{b}_{12}) = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

что означает

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi^\alpha} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Распространяя полученный результат на все поверхности семейства, приходим к заключению, что в области вырожденного поля средняя кривизна каждой поверхности эквидистантного семейства должна быть постоянной величиной, возможно, изменяющейся при переходе от одной поверхности к другой:  $H = H(\xi^3)$ . Но средняя и полные кривизны семейства эквидистантных поверхностей связаны согласно (см., например, [22], с. 203)

$$\begin{aligned} H &= \frac{\tilde{H} - \xi^3 \tilde{K}}{1 + (\xi^3)^2 \tilde{K} - 2\xi^3 \tilde{H}}, \quad K = \frac{\tilde{K}}{1 + (\xi^3)^2 \tilde{K} - 2\xi^3 \tilde{H}}, \\ \frac{H^2 - 4K}{K^2} &= \frac{\tilde{H}^2 - 4\tilde{K}}{\tilde{K}^2}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

причем эти формулы справедливы для значений  $\xi^3$ , удовлетворяющих неравенствам

$$1 - \tilde{\kappa}_1 \xi^3 > 0, \quad 1 - \tilde{\kappa}_2 \xi^3 > 0,$$

где  $\tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2$  — главные кривизны базовой поверхности.

Условие интегрируемости  $H = H(\xi^3)$  с учетом (1.37) сводится к тому, что отношение

$$\frac{1 - \xi^3 \tilde{H}}{\tilde{H} - \xi^3 \tilde{K}}$$

зависит только от  $\xi^3$ , что возможно, только если полная и средняя кривизны базовой поверхности есть некоторые постоянные.<sup>23</sup> Ясно, что плоскость, круговой цилиндр и сфера — простейшие поверхности, удовлетворяющие этому условию. Выясним, возможны ли другие формы поверхностей

<sup>23</sup>То же самое, естественно, относится и к любой поверхности уровня потенциала вырожденного поля. Отметим также, что если уравнение  $x_3 = x_3(x_1, x_2)$  задает поверхность с постоянной полной и

уровня потенциала вырожденного поля. Для этого воспользуемся тем, что первую квадратичную форму поверхности постоянной средней кривизны, отличной от сферы, можно в изометрических координатах  $\xi, \eta$  представить в виде ([22], с. 196, 197):

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{E}}(d\xi^2 + d\eta^2),$$

где  $E = H^2 - K > 0$  — Эйлерова разность поверхности.<sup>24</sup>

Так как  $H$  и  $K$  постоянны, то трансформацией растяжения можно ввести координаты  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ , в которых

$$ds^2 = d\bar{\xi}^2 + d\bar{\eta}^2.$$

Но это означает, что поверхность разворачивается на плоскость, т.е. имеет нулевую полную кривизну.

Итак, поверхности уровня потенциала вырожденного поля (за исключением сферической поверхности) имеют нулевую полную кривизну и постоянную среднюю кривизну. Как известно ([22], с. 181), всякая поверхность нулевой полной кривизны есть часть плоскости или цилиндра, или конуса, или поверхности касательных к пространственной кривой. Ясно, что плоскость имеет постоянную среднюю кривизну, равную нулю. Среди цилиндров постоянной средней кривизной обладает только круговой цилиндр. Средняя кривизна конической поверхности не является постоянной. В случае когда поверхность уровня образуется касательными к пространственной кривой, которая называется стрикционной линией поверхности, параметрическое уравнение поверхности имеет вид

$$x_k = x_k^*(\xi^1) + \xi^2 \tau_k^*(\xi^1),$$

---

средней кривизной, то одновременно должны удовлетворяться уравнения

$$2H = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} = \text{const},$$

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} = \text{const},$$

где использованы обозначения Монжа (G. Monge)

$$p = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \quad q = \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \quad r = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2}, \quad s = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad t = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2}.$$

<sup>24</sup>Здесь еще необходимо предполагать, что на поверхности отсутствуют омбилические точки, т.е. такие точки, в которых Эйлерова разность поверхности становится нулевой. Можно показать, что омбилические точки на поверхности постоянной средней кривизны, если она отлична от плоскости и сферы, изолированы. Для плоскости и сферы  $E = 0$  всюду на поверхности. Только плоскость и сфера сплошь состоят из омбилических точек.

где  $x_k = x_k^*(\xi^1)$  — параметризация стрикционной линии,  $\tau_k^*$  — компоненты касательного вектора к стрикционной линии. Расчет средней кривизны поверхности приводит к формуле ( $\kappa^*$ ,  $\sigma^*$  — соответственно кривизна и кручение стрикционной линии)

$$2H = -\frac{\sigma^*}{\xi^2 \kappa^*},$$

с помощью которой можно заключить, что постоянство средней кривизны обеспечивается только условием  $\sigma^* = 0$ , т.е. стрикционная линия — плоская кривая, а это означает, что поверхность, образуемая касательными, есть некоторая область на плоскости.

Итак, поверхность уровня вырожденного поля есть часть плоскости, кругового цилиндра или сферы и никакой другой формы эта поверхность иметь не может.

Обращаясь к уравнению (1.33), замечаем, что на каждой из поверхностей уровня потенциала  $f$  наибольшее (наименьшее) главное напряжение  $\sigma_3$  постоянно, в силу чего значение  $\sigma_3$  зависит только от координаты  $\xi^3$ .

## 1.2. Невырожденные решения пространственной задачи для ребра призмы Треска

Исследуем уравнение (1.12) в предположении, что  $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  всюду в пластической зоне. В этом случае векторные линии поля  $\mathbf{n}$  заведомо не будут прямолинейными.

Умножая обе части уравнения (1.10) скалярно на  $\mathbf{n}$ ,  $\text{rot } \mathbf{n}$  и  $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}$ , получим

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad } \Sigma + \text{div } \mathbf{n} = 0, \quad (1.38)$$

$$\text{rot } \mathbf{n} \cdot \text{grad } \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n}) \text{div } \mathbf{n} = 0, \quad (1.39)$$

$$(\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}) \cdot \text{grad } \Sigma - |\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}|^2 = 0. \quad (1.40)$$

Уравнения (1.38)–(1.40) позволяют найти траектории, вдоль которых главное напряжение  $\sigma_3$  не изменяется.

Пусть  $\mathbf{s}$  — орт, направленный вдоль вектора  $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}$ . В плоскости, образованной векторами  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$ , рассмотрим орт  $\mathbf{t}$ , наклоненный к  $\mathbf{s}$  под некоторым углом  $\alpha$ :

$$\mathbf{t} = \cos \alpha \mathbf{s} + \sin \alpha \mathbf{n}.$$

Умножив уравнение (1.38) на  $\sin \alpha$ , а уравнение (1.40) — на  $\cos \alpha$  и сложив, приходим к

$$\mathbf{t} \cdot \nabla \Sigma + \sin \alpha \text{div } \mathbf{n} - \cos \alpha |\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}| = 0.$$

Следовательно, если траектория касается направлений  $\mathbf{t}$ , составляющих угол  $\alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}|}{\operatorname{div} \mathbf{n}} = \frac{|\operatorname{rot} \mathbf{n}|}{\operatorname{div} \mathbf{n}} \sin \gamma,$$

где  $\gamma$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$ , с направлением  $\mathbf{s}$ , то вдоль этой траектории

$$\mathbf{t} \cdot \nabla \sigma_3 = 0, \quad (1.41)$$

это означает, что главное напряжение  $\sigma_3$  не изменяется вдоль рассматриваемой траектории.

В плоскости, образованной векторами  $\mathbf{s}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$ , рассмотрим орт  $\mathbf{h}$ , наклоненный к  $\mathbf{s}$  под некоторым углом  $\beta$ :

$$\mathbf{h} = \cos \beta \mathbf{s} + \sin \beta \frac{\operatorname{rot} \mathbf{n}}{|\operatorname{rot} \mathbf{n}|}.$$

Умножив уравнение (1.39) на  $\sin \beta$ , а уравнение (1.40) — на  $\cos \beta$  и сложив, приходим к

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \Sigma + \sin \beta \frac{\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n}}{|\operatorname{rot} \mathbf{n}|} \operatorname{div} \mathbf{n} - \cos \beta |\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}| = 0.$$

Следовательно, если траектория касается направлений  $\mathbf{h}$ , составляющих угол  $\beta$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma \frac{|\operatorname{rot} \mathbf{n}|}{\operatorname{div} \mathbf{n}},$$

где  $\gamma$  есть по-прежнему угол между векторами  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}$ , с направлением  $\mathbf{s}$ , то вдоль этой траектории

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \sigma_3 = 0, \quad (1.42)$$

это означает, что главное напряжение  $\sigma_3$  не изменяется вдоль рассматриваемой траектории.

Можно указать еще одно направление  $\mathbf{p}$ , производная от  $\sigma_3$  вдоль которого равна нулю: если ориентировать вектор  $\mathbf{p}$  ортогонально векторам  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$  так, что

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}}{|\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}|} \times \mathbf{n},$$

то с помощью уравнений (1.38), (1.39) можно найти, что

$$\mathbf{p} \cdot \nabla \sigma_3 = 0. \quad (1.43)$$

Нетрудно заметить, что направления  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{p}$  некопланарны, если  $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq 0$ . Таким образом, если  $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  и  $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq 0$ , то через



каждую точку зоны пластического течения можно провести три различных траектории (касающиеся трех некомпланарных направлений  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{p}$ ), вдоль которых наибольшее главное напряжение  $\sigma_3$  не изменяется. Но это означает, что  $\nabla \sigma_3 = \mathbf{0}$  всюду в пластической зоне и, следовательно, все главные напряжения постоянны. Но тогда уравнение (1.12) приобретает вид

$$\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} = \mathbf{n}(\operatorname{div} \mathbf{n}), \quad (1.44)$$

откуда сразу же следует, что  $\nabla \cdot \mathbf{n} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , что противоречит предположению  $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ , следовательно, никаких решений уравнения (1.12) при одновременном выполнении условий  $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  и  $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq 0$  получить нельзя.

Поэтому наибольший интерес представляет тот случай, когда  $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  в пластической зоне. В этом случае, который будет в деталях рассмотрен ниже, в каждой точке имеется два различных направления,<sup>25</sup> вдоль которых главное напряжение  $\sigma_3$  не изменяется, причем вдоль любого третьего направления, некомпланарного указанным двум, главное напряжение  $\sigma_3$  будет заведомо переменным. Ясно, что два направления, о которых идет речь, касаются поверхности уровня главного напряжения  $\sigma_3$ .

Как будет показано ниже, условие  $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} = 0$  допускает замечательную геометрическую интерпретацию, пользуясь которой можно существенно развить исследование невырожденных решений пространственных уравнений математической теории пластичности.

### 1.3. Уравнения обобщенного ассоциированного закона течения

Ассоциированный закон течения является фундаментальным принципом математической теории пластичности и устанавливает, что в пространстве напряжений вектор, представляющий приращения пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^P$ , ортогонален поверхности текучести  $f(\sigma_{ij}) = 0$  в данном напряженном состоянии:

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda. \quad (1.45)$$

Величина  $d\lambda$ , называемая неопределенным множителем, положительна при активном пластическом нагружении, признаком которого является выполнение условий  $f = 0$ ,  $df = 0$ .

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или

<sup>25</sup>Поскольку ориентации векторов  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{p}$  совпадают.



конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W.T. Koiter, 1953 г.). Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа  $p$  гладких поверхностей текучести  $f_\gamma(\sigma_{ij}) = 0$ .

Активное нагружение, сопровождающееся изменением пластических деформаций, определяется условиями

$$\begin{aligned} f_\omega &= 0, & df_\omega &= 0, \\ f_\kappa &= 0, & df_\kappa &< 0 \text{ или } f_\kappa < 0, \end{aligned}$$

где индексы  $\omega$  и  $\kappa$  — различны и их значения в совокупности исчерпывают все значения индекса  $\gamma = 1, 2, \dots, p$ , причем индекс  $\omega$  пробегает непустое множество значений.

Полное приращение  $d\varepsilon_{ij}^P$  есть сумма соответствующих всем индексам  $\omega$  приращений  $d\varepsilon_{ij}^{P(\omega)}$ :

$$d\varepsilon_{ij}^P = \sum_{\omega} d\varepsilon_{ij}^{P(\omega)},$$

где каждое приращение  $d\varepsilon_{ij}^{P(\omega)}$  вычисляется согласно ассоциированному закону течения

$$d\varepsilon_{ij}^{P(\omega)} = \frac{\partial f_\omega}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda_\omega,$$

а величины  $d\lambda_\omega$  должны быть положительными.

Окончательно обобщенный ассоциированный закон течения принимает вид

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^P &= \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial f_\gamma}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda_\gamma, \\ d\lambda_\gamma &> 0 \quad (f_\gamma = 0, \quad df_\gamma = 0), \\ d\lambda_\gamma &= 0 \quad (f_\gamma = 0, \quad df_\gamma < 0 \text{ или } f_\gamma < 0). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Геометрически ассоциированный закон течения устанавливает, что в угловой точке поверхности текучести вектор, представляющий приращения пластических деформации в пространстве напряжений, является линейной комбинацией нормальных к поверхностям  $f_\omega = 0$  в указанной точке векторов, причем направление указанного вектора в угловой точке поверхности нагружения обобщенным ассоциированным законом течения не фиксируется, а остается неопределенным.

Обратимся к уравнениям обобщенного ассоциированного закона течения, предполагая, что напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска так, что третье главное напряжение является максимальным:

$\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$ ,  $\sigma_3 - \sigma_2 = 2k$ . Обозначая через  $d\varepsilon_j^P$  собственные значения тензора приращения пластической деформации, соотношения обобщенного ассоциированного закона течения представим в виде

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda_1, \quad d\varepsilon_2^P = d\lambda_2, \quad d\varepsilon_3^P = -d\lambda_1 - d\lambda_2, \quad (1.47)$$

где  $d\lambda_\beta$  — неопределенные множители теории идеальной пластичности.

Если через  $d\varepsilon_j^E$  обозначить приращение главного упругого удлинения  $\varepsilon_j^E$ , то на основании определяющего закона упругости находим

$$d\varepsilon_j^E - \frac{d\varepsilon}{3} = \frac{ds_j}{2G}, \quad (1.48)$$

где  $d\varepsilon = d\varepsilon_1^E + d\varepsilon_2^E + d\varepsilon_3^E$ ,  $ds_j$  — приращение главного значения  $s_j$  девиатора тензора напряжений,  $G$  — упругий модуль сдвига.

Так как при нагружении вдоль ребра призмы Треска

$$ds_1 = ds_2 = ds_3 = 0, \quad (1.49)$$

то соотношения (1.48) приводят к

$$d\varepsilon_j^E - \frac{d\varepsilon}{3} = 0. \quad (1.50)$$

Далее, замечая, что

$$d\varepsilon = \frac{d(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3K} = \frac{d\sigma_3}{K},$$

где  $d\sigma_j$  — приращения главных напряжений  $\sigma_j$ ,  $K$  — объемный модуль упругости, и вводя обозначение

$$d\varepsilon_j = d\varepsilon_j^E + d\varepsilon_j^P, \quad (1.51)$$

получаем полные соотношения в приращениях

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 - \frac{d\sigma_3}{3K} &= d\lambda_1, \\ d\varepsilon_2 - \frac{d\sigma_3}{3K} &= d\lambda_2, \\ d\varepsilon_3 - \frac{d\sigma_3}{3K} &= -d\lambda_1 - d\lambda_2, \end{aligned} \quad (1.52)$$

устанавливающие единственное соотношение, связывающее приращения  $d\varepsilon_j$  и  $d\sigma_j$ :

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = \frac{d\sigma_3}{K}. \quad (1.53)$$

При использовании этих соотношений не следует забывать о точном определении величин  $d\varepsilon_j$ ,  $d\varepsilon_j^E$ ,  $d\varepsilon_j^P$  и  $d\sigma_j$  и о том, что  $d\varepsilon_j$ , вообще говоря, не являются приращениями главных полных деформаций, а используются лишь для обозначения суммы (1.51).<sup>26</sup> Именно в этом смысле величины  $d\varepsilon_j$  входят в запись уравнений совместности полных деформаций, рассмотренных в разделе 7.4.

Уравнение (1.53) может быть проинтегрировано вдоль траектории нагружения. Предполагая, что напряжения и упругие деформации изменяются непрерывно при переходе элемента тела в состояние текучести, и актуальное напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, находим

$$\sigma_3 = \frac{4}{3}k + K(\varepsilon_1^E + \varepsilon_2^E + \varepsilon_3^E), \quad (1.54)$$

и, поскольку относительное изменение объема — идеально обратимая часть деформации, —

$$\sigma_3 = \frac{4}{3}k + K(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (1.55)$$

Если пренебрегать упругой составляющей деформации, то, согласно (1.54), разность  $\sigma_3 - \frac{4}{3}k$  становится неопределенным выражением типа  $\infty \cdot 0$ .

Уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, сформулированного для ребра призмы Треска, позволяют найти помимо условия соосности тензоров  $d\varepsilon^P$  и  $\sigma$  еще только одно существенное соотношение, следующее из (1.47), — условие несжимаемости:

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P + d\varepsilon_3^P = 0. \quad (1.56)$$

Его можно также представить в форме

$$d\varepsilon_{jj}^P = 0. \quad (1.57)$$

Последнее обстоятельство имеет принципиально важное значение: для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, пластическое течение имеет наибольшую свободу и именно поэтому возрастает вероятность построить решения ряда важнейших прикладных задач, привлекая схему полной пластичности Хаара—Кармана.<sup>27</sup> Ясно, что напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку при этом имеется весьма сильное кинематическое ограничение: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю.

<sup>26</sup>Тем не менее мы будем иногда говорить о величинах  $d\varepsilon_j$  как о приращениях.

<sup>27</sup>Эта гипотеза принадлежит Д.Д. Ивлеву.

Условие соосности в силу (1.5) может быть сформулировано как

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1^P + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2^P + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3^P. \quad (1.58)$$

Последнее соотношение позволяет заключить, что

$$\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{n} d\varepsilon_3^P,$$

или также

$$\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot \mathbf{n} = d\varepsilon_3^P$$

и кроме того (см. [7], с. 208)

$$\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \text{ntr}((\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P). \quad (1.59)$$

Проектируя векторное уравнение (1.59) на оси некоторой прямоугольной системы координат, можно получить три скалярных уравнения<sup>28</sup>

$$n_j d\varepsilon_{ij}^P = n_i n_k n_l d\varepsilon_{kl}^P. \quad (1.60)$$

Только два из них будут независимыми. Действительно, свернутые с  $n_i$  соотношения (1.60) удовлетворяются тождественно, что указывает на их линейную зависимость.

Два независимых уравнения из (1.60) вместе с уравнением несжимаемости (1.57) образуют систему трех уравнений, которые после подстановки в них вместо приращений пластической деформации приращений перемещений позволяют исследовать кинематику пластического течения, если поле напряжений уже определено. Система кинематических уравнений (1.57), (1.60) гиперболична. Характеристические направления этой системы как показывает несложный расчет совпадают с характеристическими направлениями системы трехмерных статических уравнений.

## 2. Уравнения математической теории пластичности для грани призмы Треска

Ради полноты изложения рассмотрим также основные уравнения теории идеальной пластичности для грани призмы Треска. Как было отмечено выше напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку ассоциированный закон течения в этом случае устанавливает весьма сильное

<sup>28</sup>См. также: Быковцев Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сборник статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. С. 153.

кинематическое ограничение: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю. Принципиально иная ситуация наблюдается в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска: приращение пластической деформации здесь определить нельзя ни по величине, ни по направлению.

Для грани призмы Треска, задаваемой уравнением  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ , тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} - (\sigma_2 - \sigma_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + 2k \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}. \quad (2.1)$$

Поэтому уравнения равновесия получаются в виде (ср. (1.9))

$$\begin{aligned} \text{grad} \Sigma_2 + \text{div}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \\ + [\mathbf{n} \cdot \text{grad}(\Sigma_3 - \Sigma_2)] \mathbf{n} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\Sigma_2 = \sigma_2/(2k)$ ,  $\Sigma_3 = \sigma_3/(2k)$ , или

$$\begin{aligned} \nabla \Sigma_2 + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l} + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})] + \\ + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} (\Sigma_3 - \Sigma_2) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Проектируя векторное уравнение (2.3) на главные оси тензора напряжений, находим

направление  $\mathbf{n}$ :

$$\frac{\partial \Sigma_3}{\partial n} + \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(\nabla \cdot \mathbf{n}) = 0; \quad (2.4)$$

направление  $\mathbf{l}$ :

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial l} + (\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \{ \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] \} = 0; \quad (2.5)$$

направление  $\mathbf{m}$ :

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial m} + \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \{ \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] \} = 0. \quad (2.6)$$

Ассоциированный закон течения, сформулированный для грани призмы Треска  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ , устанавливает соосность тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $d\boldsymbol{\sigma}$  и еще соотношения для главных значений тензора приращения пластических деформаций

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda, \quad d\varepsilon_2^P = -d\lambda, \quad d\varepsilon_3^P = 0,$$

откуда следует соотношение несжимаемости

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P = 0.$$

Условие соосности имеет форму

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) d\varepsilon_1^P$$

или также

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = -\mathbf{I} d\varepsilon_1^P + 2\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1^P + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_1^P.$$

Таким образом, система кинематических уравнений для рассматриваемой грани может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \mathbf{l} \operatorname{tr}((\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P), \\ \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь содержится шесть независимых скалярных уравнений, т.к. первое векторное уравнение дает только два независимых скалярных.

Проектируя уравнения (2.7) на оси некоторой прямоугольной системы координат, находим

$$\begin{aligned} l_j d\varepsilon_{ij}^P &= l_i l_k l_s d\varepsilon_{ks}^P, \\ n_j d\varepsilon_{ij}^P &= 0, \\ d\varepsilon_{jj}^P &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Обратимся теперь к соотношениям, связывающим приращения напряжений и деформаций в случае, когда учитывается упругая составляющая деформаций. Известно, что одним из важнейших преимуществ кусочно-линейных условий пластичности (к которым относится и условие пластичности Треска) является возможность для напряженных состояний, соответствующих грани поверхности текучести, выразить главные значения тензора приращения пластических деформаций  $d\varepsilon_i^P$  через "полные" приращения  $de_i = de_i^E + d\varepsilon_i^P$ . Здесь  $de_i^E$  — приращение главного значения девиатора тензора упругих деформаций  $e_{ij}^E$ . Тогда определяющий закон упругости позволит выразить приращения главных значений девиатора тензора напряжений  $ds_k$  через "полные" приращения  $de_i$  и получить так называемые "полные" соотношения для приращений.

Искомые соотношения без труда выводятся с помощью разложения приращения пластической деформации на три части

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\varepsilon_{ij}^{P(1)} + d\varepsilon_{ij}^{P(2)} + d\varepsilon_{ij}^{P(3)}, \quad (2.9)$$

каждая из которых соответствует одной из трех функций текучести

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k, \\ f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k, \\ f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_3 - \sigma_1| - 2k, \end{aligned}$$

составляющих условие пластичности Треска, и обобщенного ассоциированного закона течения

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{P(\alpha)} = 0, & f^{(\alpha)} < 0 \text{ или } f^{(\alpha)} = 0 \text{ и } \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \\ d\varepsilon_{ij}^{P(\alpha)} = \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda^{(\alpha)}, & f^{(\alpha)} = 0 \text{ и } \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad d\lambda^{(\alpha)} > 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ясно также, что достаточно получить только три соотношения, связывающих приращения главных напряжений и деформаций, поскольку ассоциированный закон течения устанавливает лишь соосность приращения тензора пластических деформаций и тензора напряжений и не дает никаких дополнительных соотношений для определения ориентаций  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  в пространстве.<sup>29</sup>

Опуская детали вывода, приведем итоговые ”полные” соотношения для приращений (см. [25], с. 412-418), справедливые на любой грани призмы Треска:

$$\begin{aligned} ds_1 &= 2G\Delta \left[ (4 - 2\gamma^{(1)} - 2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_1 + \right. \\ &\quad + (2\gamma^{(1)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_2 + \\ &\quad \left. + (2\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_3 \right], \\ ds_2 &= 2G\Delta \left[ (2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_1 + \right. \\ &\quad + (4 - 2\gamma^{(1)} - 2\gamma^{(2)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_2 + \\ &\quad \left. + (2\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_3 \right], \\ ds_3 &= 2G\Delta \left[ (2\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_1 + \right. \\ &\quad + (2\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_2 + \\ &\quad \left. + (4 - 2\gamma^{(2)} - 2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_3 \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $G$  есть по-прежнему упругий модуль сдвига,

$$\gamma^{(1)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \text{ и } d\sigma_1 - d\sigma_2 = 0 \\ 0, & |\sigma_1 - \sigma_2| < 2k \text{ или } |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \text{ и } (d\sigma_1 - d\sigma_2)\text{sgn}(\sigma_1 - \sigma_2) < 0, \end{cases}$$

<sup>29</sup>Напомним, что векторы, задающие ориентацию главных осей тензора напряжений, присутствуют в уравнениях равновесия для ребра (1.10) и грани (2.3) и неизбежно появляются в кинематических уравнениях — уравнениях совместности для приращений полной деформации.

$$\gamma^{(2)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \text{ и } d\sigma_2 - d\sigma_3 = 0 \\ 0, & |\sigma_2 - \sigma_3| < 2k \text{ или } |\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \text{ и } (d\sigma_2 - d\sigma_3)\text{sgn}(\sigma_2 - \sigma_3) < 0, \end{cases}$$

$$\gamma^{(3)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_1 - \sigma_3| = 2k \text{ и } d\sigma_1 - d\sigma_3 = 0 \\ 0, & |\sigma_1 - \sigma_3| < 2k \text{ или } |\sigma_1 - \sigma_3| = 2k \text{ и } (d\sigma_1 - d\sigma_3)\text{sgn}(\sigma_1 - \sigma_3) < 0, \end{cases}$$

$$\Delta = (4 - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})^{-1}.$$

Для нагружений, соответствующих смещению изображающей напряжения точки вдоль грани призмы

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k = 0, \\ f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k < 0, \\ f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_3 - \sigma_1| - 2k < 0, \\ d\sigma_1 - d\sigma_2 &= 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

получим полные соотношения в форме

$$\begin{aligned} ds_1 &= ds_2 = G(de_1 + de_2), \\ ds_3 &= 2Gde_3. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Интересно отметить, что для нагружений вдоль ребра призмы Треска, которое определяется условиями

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k = 0, \\ f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k = 0, \\ f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_3| - 2k < 0, \\ d\sigma_1 - d\sigma_2 &= 0, \quad d\sigma_2 - d\sigma_3 = 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

из уравнений (2.11) находим

$$ds_1 = 0, \quad ds_2 = 0, \quad ds_3 = 0,$$

что совпадает с (1.49). Следовательно, на ребре призмы Треска "полные" соотношения (2.11) не дают никаких дополнительных уравнений, связывающих приращения деформаций. Поэтому можно считать, что "полные" соотношения (2.11) оказываются справедливыми не только для любой грани, но и для ребер призмы Треска.

К уравнениям равновесия и "полным" соотношениям (2.11), очевидно, необходимо присоединить еще кинематические уравнения. В качестве таких вместо уравнений для скоростей перемещений, традиционно используемых в теории пластичности, для наших целей более удобными оказываются уравнения совместности для "полных" приращений главных деформаций, сформулированные в изостатической криволинейной сетке. Уравнения кинематики в изостатических координатах будут рассмотрены ниже, в разделе 7.4.



### 3. Расслоенные невырожденные пластические поля напряжений

Возвращаясь к исследованию невырожденных решений уравнений теории пластичности, рассмотрим прежде всего условие  $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0$ , которое выполняется для любого невырожденного решения.

В дальнейшем исследовании особую роль будут играть расслоенные векторные поля  $\mathbf{n}$ .

Поле напряжений в области  $G$  назовем расслоенным (или слоистым), если существует семейство поверхностей  $\mathcal{S}$ , заполняющее область  $G$ , такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям семейства  $\mathcal{S}$  совпадает с полем  $\mathbf{n}$  собственных векторов тензора напряжений.

Для того чтобы векторное поле  $\mathbf{n}$  было расслоенным в области  $G$ , необходимо и достаточно, чтобы всюду в этой области выполнялось следующее соотношение:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0. \quad (3.1)$$

Сформулированное утверждение известно как теорема Якоби (см., например, [19], с. 10, 11). Векторное поле  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющее условию (3.1), часто называют голономным.<sup>30</sup>

Здесь мы опускаем детали вывода этого условия, но заметим, что оно выражает также тот факт, что дифференциальная форма  $n_1 dx_1 + n_2 dx_2 + n_3 dx_3$  после умножения на интегрирующий множитель  $\mu$  превращается в полный дифференциал (см., например, [26]; [27], с. 366-368):

$$\mu(n_1 dx_1 + n_2 dx_2 + n_3 dx_3) = d\Psi.$$

Ясно, что для интегрирующего множителя справедливо соотношение

$$\mu = |\nabla \Psi|.$$

Кроме того, можно утверждать, что если векторное поле  $\mathbf{n}$  не является расслоенным, то его можно "подправить" безвихревым векторным полем  $\nabla \Phi$  так, что условие (3.1) будет выполняться для поля  $\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \nabla \Phi$  и, следовательно, векторное поле  $\mathbf{n}$  всегда можно представить в виде суммы безвихревого  $\nabla \Phi$  и расслоенного (и притом вихревого, т.е. с ненулевым вихрем) векторного поля  $\mathbf{n}'$ .<sup>31</sup>

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}' + \nabla \Phi. \quad (3.2)$$

<sup>30</sup>Для произвольного векторного поля  $\mathbf{n}$ , следовательно, можно ввести меру неголономности, определяя ее как скалярное произведение  $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n}$ .

<sup>31</sup>Это утверждение следует из того факта, что дифференциальная форма  $n_1 dx_1 + n_2 dx_2 + n_3 dx_3$  всегда может быть приведена к каноническому виду

$$n_1 dx_1 + n_2 dx_2 + n_3 dx_3 = d\Phi + \mu^{-1} d\Psi.$$

Поскольку безвихревое векторное поле заведомо является расслоенным, то из приведенного рассуждения следует, что произвольное единичное векторное поле всегда можно представить в виде суммы двух расслоенных полей, первое из которых вихревое, а второе — безвихревое.

Теперь представляется возможным обосновать утверждение, сформулированное в разделе 1.1, о том, что для единичного векторного поля условие  $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} = \mathbf{0}$  выполняется, только если векторное поле  $\mathbf{n}$  безвихревое.

Воспользуемся представлением (3.2), в котором можно считать, что  $\mathbf{n}' \cdot \text{rot } \mathbf{n}' = 0$ . Так как  $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , то  $\text{rot } \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$ . Предположим обратное, т.е. векторное поле  $\mathbf{n}$  — вихревое, следовательно, существует такая точка, где вихрь  $\mathbf{n}$  ненулевой. Тогда можно считать, что  $\lambda > 0$  всюду в окрестности указанной точки. Последнее неравенство должно выполняться одновременно с неравенством  $|\mathbf{n}'| > 0$  в той же самой окрестности. Действительно, если в упомянутой окрестности  $|\mathbf{n}'| = 0$ , то в силу (3.2) необходимо  $\text{rot } \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , что противоречит предположению о том, что поле  $\mathbf{n}$  — вихревое в рассматриваемой окрестности.

Построим достаточно малый элемент  $S$  слоя поля  $\mathbf{n}'$ , проходящий через вихревую точку поля  $\mathbf{n}$ . На указанном элементе поверхности построим замкнутый контур  $L$ , окружающий выбранную точку. На основании теоремы Стокса заключаем, что циркуляцию вдоль контура  $L$  слоистого поля  $\mathbf{n}'$ , заведомо равную нулю, можно также вычислить в виде

$$0 = \oint_L \mathbf{n}' \cdot d\mathbf{r} = \oint_L \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S |\mathbf{n}'|^{-1} \mathbf{n}' \cdot \text{rot } \mathbf{n} dS = \iint_S \lambda |\mathbf{n}'|^{-1} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} dS,$$

следовательно, справедливо равенство

$$\iint_S \lambda |\mathbf{n}'| dS + \iint_S \lambda |\mathbf{n}'|^{-1} \mathbf{n}' \cdot \nabla \Phi dS = 0. \quad (3.3)$$

Так как  $\mathbf{n}$  — единичное векторное поле и имеет место разложение (3.2), то

$$|\nabla \Phi|^2 + |\mathbf{n}'|^2 + 2\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}' = 1. \quad (3.4)$$

Учитывая это соотношение, равенство (3.3) преобразуем к виду

$$\iint_S \lambda |\mathbf{n}'| dS + \iint_S \lambda |\mathbf{n}'|^{-1} (1 - |\nabla \Phi|^2) dS = 0.$$

В силу  $\lambda > 0$  и  $|\mathbf{n}'| > 0$  из последнего уравнения следует, что

$$|\nabla \Phi|^2 + |\mathbf{n}'|^2 = 1,$$

так как в противном случае сумма интегралов не будет равна нулю. Но тогда на основании (3.4) приходим к выводу, что

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}' = 0.$$

Поэтому соотношение (3.3) сводится к следующему:

$$\iint_S \lambda |\mathbf{n}'| dS = 0.$$

Выполнение этого соотношения оказывается невозможным, так как одновременно  $\lambda > 0$  и  $|\mathbf{n}'| > 0$  на поверхности  $S$ . Полученное противоречие и доказывает сформулированное утверждение.

Как следует из результатов, полученных в разделе 1, единичное векторное поле  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющее уравнению (1.12), может быть либо безвихревым расслоенным, либо вихревым расслоенным, т.е. векторное поле  $\mathbf{n}$  представляется либо только первым, либо только вторым слагаемыми в (3.2).

Расслоенность векторного поля  $\mathbf{n}$  и его ненулевая завихренность гарантируют исключение всех вырожденных случаев, рассмотренных в разделе 1.1. Завихренность поля  $\mathbf{n}$  выступает, таким образом, как признак невырожденности напряженного состояния.

При выполнении условия (3.1) слои поля  $\mathbf{n}$ , то есть поверхности семейства  $\mathcal{S}$ , образуются векторными линиями поля  $\text{rot } \mathbf{n}$  следующим образом: сначала выбирается некоторая поверхность  $S$  так, чтобы поле  $\mathbf{n}$  касалось ее в каждой точке, и на поверхности  $S$  строится однопараметрическое семейство ортогональных к  $\mathbf{n}$  траекторий, затем из каждой точки ортогональной траектории выпускаются векторные линии поля  $\text{rot } \mathbf{n}$  и составляется слой поля  $\mathbf{n}$ .

Условие расслоенности поля  $\mathbf{n}$  (3.1) наряду с формулой Гамильтона (1.29) позволяют однозначно найти ротор поля  $\mathbf{n}$ :

$$\text{rot } \mathbf{n} = \kappa \boldsymbol{\beta}, \quad \kappa = |\text{rot } \mathbf{n}|. \quad (3.5)$$

Для слоистого векторного поля  $\mathbf{n}$ , слои которого есть поверхности уровня функции  $\omega(x_1, x_2, x_3)$ , вектор кривизны  $\boldsymbol{\kappa}$  векторной линии поля  $\mathbf{n}$  может быть вычислен по формуле Дарбу (G. Darboux) (см. [19], с. 24):

$$\boldsymbol{\kappa} = -\nabla \ln |\nabla \omega|^{-1} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla \ln |\nabla \omega|^{-1}). \quad (3.6)$$

Средняя кривизна  $H$  поверхности  $\omega(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$  вычисляется как поверхностная дивергенция единичного вектора нормали (см. [28], с. 272):

$$2H = \nabla_{\omega=\text{const}} \cdot \left( \frac{\nabla \omega}{|\nabla \omega|} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \omega}{|\nabla \omega|} \right) = \frac{\Delta \omega}{|\nabla \omega|} - \frac{1}{|\nabla \omega|^2} (\nabla \omega) \cdot \nabla |\nabla \omega|, \quad (3.7)$$

или

$$2H = \frac{\Delta \omega}{|\nabla \omega|} + \frac{\nabla \omega}{|\nabla \omega|} \cdot \nabla \ln |\nabla \omega|^{-1}. \quad (3.8)$$

Здесь  $\nabla_{\omega=\text{const}}$  — поверхностный оператор Гамильтона. Если  $\xi^1, \xi^2$  — Гауссовы координаты на поверхности  $\omega = \text{const}$ , то

$$\nabla_{\omega=\text{const}} = \mathbf{i}^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \mathbf{i}^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2},$$

где  $\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2$  — локальные контравариантные базисные векторы на поверхности.

Если  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\omega(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ , то оказывается, что его поверхностная дивергенция совпадает с пространственной:  $\nabla_{\omega=\text{const}} \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \mathbf{n}$ .

Действительно, на каждом слое векторного поля  $\mathbf{n}$  имеется система из двух взаимно перпендикулярных семейств кривых, касательные к которым есть главные нормали и бинормали линий поля. Обозначая через  $\kappa_1, \kappa_2$  нормальные кривизны указанных линий, находим

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}, \text{rot } \boldsymbol{\nu} \rangle = \boldsymbol{\beta} \cdot \text{rot } \boldsymbol{\nu}, \\ \kappa_2 &= \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\beta}, \text{rot } \boldsymbol{\beta} \rangle = -\boldsymbol{\nu} \cdot \text{rot } \boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Учитывая далее, что

$$2H = \kappa_1 + \kappa_2 = \boldsymbol{\beta} \cdot \text{rot } \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu} \cdot \text{rot } \boldsymbol{\beta}, \quad (3.10)$$

находим

$$2H = \text{div}(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta}) = \text{div } \mathbf{n}. \quad (3.11)$$

Обратим внимание читателя также на следующие формулы:

$$\text{rot } \mathbf{n} = \frac{(\nabla \omega) \times (\nabla |\nabla \omega|)}{|\nabla \omega|^2}, \quad (3.12)$$

$$\kappa \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{n} \times (\nabla |\nabla \omega|)}{|\nabla \omega|}, \quad (3.13)$$

$$\kappa = \frac{(\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla) |\nabla \omega|}{|\nabla \omega|} = (\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla) \ln |\nabla \omega|, \quad (3.14)$$

$$(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) |\nabla \omega| = 0. \quad (3.15)$$

Обозначая через  $\partial/\partial s_1, \partial/\partial s_2$  соответственно дифференцирования по направлениям главной нормали и бинормали линий поля, нетрудно видеть, что

$$\kappa = \frac{\partial \ln |\nabla \omega|}{\partial s_1}, \quad 0 = \frac{\partial \ln |\nabla \omega|}{\partial s_2}. \quad (3.16)$$

Для единичного векторного поля  $\mathbf{n}$  введем углы  $\vartheta$  и  $\psi$ , определяющие его ориентацию в пространстве:

$$\mathbf{n} = \sin \psi \sin \vartheta \mathbf{i} - \cos \psi \sin \vartheta \mathbf{j} + \cos \psi \mathbf{k}.$$

Тогда условие расслоенности поля напряжений можно получить из (3.1) в следующем виде:

$$\cos \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \sin \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sin^2 \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0.$$

Таким образом, для напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, поле собственных векторов тензора напряжений с наибольшим (или наименьшим) собственным значением должно удовлетворять уравнениям:

$$\operatorname{rot} \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (3.17)$$

В силу условия (3.1) векторы  $\mathbf{n}$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}$  взаимно ортогональны, и уравнения (1.38)–(1.40) приобретают следующий вид:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Sigma + \nabla \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.18)$$

$$(\nabla \times \mathbf{n}) \cdot \nabla \Sigma = 0, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{s} \cdot \nabla \Sigma - |\nabla \times \mathbf{n}| = 0, \quad (3.20)$$

где  $\mathbf{s}$  — орт, направленный вдоль вектора  $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}$ . Напомним, что для расслоенного поля напряжений направления  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$  и  $\mathbf{s}$  — характеристические, ориентации векторов  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$  и  $\mathbf{h}$  совпадают.

На основании (3.19) заключаем, что для вихревого расслоенного поля напряжений, соответствующего ребру призмы Треска, величина  $\sigma_3$  не изменяется вдоль векторной линии вихря вектора  $\mathbf{n}$ .

Учитывая (1.55), можно сделать также вывод о том, что относительное изменение объема элементов, составляющих векторную линию  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$ , одно и то же.

Вдоль траектории, касающейся вектора  $\mathbf{t}$ , величина главного напряжения  $\sigma_3$  не изменяется (см. (1.41)). Вектор  $\mathbf{t}$  ортогонален  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$  и составляет с вектором  $\mathbf{s}$  угол  $\alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\operatorname{rot} \mathbf{n}|}{\operatorname{div} \mathbf{n}} = \frac{\kappa}{\kappa_1 + \kappa_2}. \quad (3.21)$$

Таким образом, в случае вихревого расслоенного поля напряжений через каждую точку зоны пластического течения проходят две ортогональные друг другу траектории, вдоль которых величина главного напряжения  $\sigma_3$  не изменяется, причем вдоль любого третьего направления, некомпланарного указанным двум, главное напряжение  $\sigma_3$  будет заведомо переменным. Эти траектории касаются векторов  $\mathbf{t}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{n}$ , располагающихся, очевидно, в плоскости, касательной к поверхности уровня главного напряжения  $\sigma_3$ .

Ясно, что  $\nabla\sigma_3 \times (\mathbf{h} \times \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ , поэтому вместо системы (3.18)–(3.20) удобнее рассматривать соответствующую систему в проекциях на оси ортогонального триэдра  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{h} \times \mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} \cdot \nabla\sigma_3 = 0, \quad \mathbf{h} \cdot \nabla\sigma_3 = 0, \quad |\nabla\sigma_3| \pm 2k \frac{\nabla \cdot \mathbf{n}}{\cos \alpha} = 0. \quad (3.22)$$

Анализируя эту систему, заключаем, что вектор  $\nabla\Sigma$  располагается в плоскости, ортогональной вектору  $\text{rot } \mathbf{n}$  и составляет с главным направлением  $\mathbf{n}$  угол  $\alpha$ . Поэтому слои векторного поля  $\mathbf{n}$  и поверхности уровня наибольшего (наименьшего) главного напряжения пересекаются под углом  $\alpha$  (см. рис. 3).

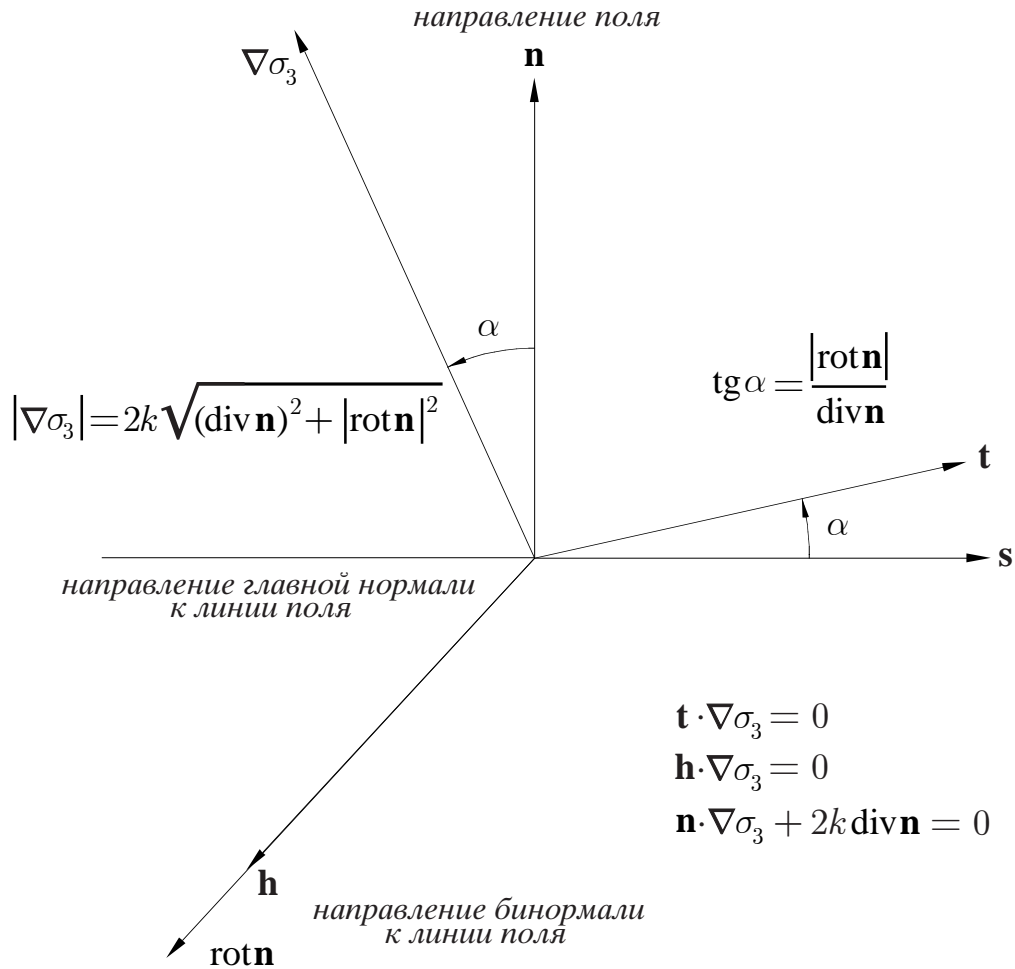


Рис. 3. Ориентации характерных векторов в случае пространственного пластического течения на ребре призмы Треска

Несложные вычисления приводят также к следующей замечательной формуле, впервые полученной в работе [18]:

$$|\nabla\sigma_3| = 2k \sqrt{(\text{div } \mathbf{n})^2 + |\text{rot } \mathbf{n}|^2} = 2k \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_2)^2 + \kappa^2}, \quad (3.23)$$

т.е. распределение  $\sigma_3$ , если поле  $\mathbf{n}$  известно, может быть найдено интегрированием уравнения эйконала.<sup>32</sup> Здесь по-прежнему  $\kappa_1$  — нормальная кривизна линий, расположенных на слое поля  $\mathbf{n}$  и касающихся поля главных нормалей векторных линий поля  $\mathbf{n}$ ,  $\kappa_2$  — нормальная кривизна линий, расположенных на слое поля  $\mathbf{n}$  и касающихся поля бинормалей векторных линий поля  $\mathbf{n}$ .

Заклучая этот раздел работы, следует отметить, что любое плоское векторное поле в трехмерном пространстве будет расслоенным. Поэтому поле напряжений, возникающее при плоской деформации тела, как частный случай входит в рассматриваемый класс расслоенных полей напряжений.

## 4. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений

Векторное уравнение (1.9) имеет инвариантную форму. Преобразуем его к криволинейным координатам  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ . Ковариантные компоненты поля  $\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$  равны (см., например, [28], с. 208; [29], с. 45):

$$(\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))_l = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{kl} \frac{\partial(\sqrt{g} n^k n^m)}{\partial \xi^m} + n^r n^s [rs, l] \quad (l = 1, 2, 3), \quad (4.1)$$

где  $g_{ij}$  — компоненты метрического тензора,  $g = \det||g_{ij}||$ ,  $[rs, l]$  — символы Кристоффеля первого рода. Через  $n^m$  обозначены контравариантные компоненты векторного поля  $\mathbf{n}$ .

Используя формулу (4.1), представим уравнение (1.9) в ковариантной форме:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^l} + \frac{1}{\sqrt{g}} g_{kl} \frac{\partial}{\partial \xi^m} (\sqrt{g} n^k n^m) + n^r n^s [rs, l] = 0. \quad (4.2)$$

Воспользуемся расслоенностью векторного поля  $\mathbf{n}$  и выберем криволинейные координаты  $\xi^m$  специальным образом: координатные поверхности  $\xi^3 = \text{const}$  есть слои поля  $\mathbf{n}$ , а поверхности  $\xi^1 = \text{const}$  и  $\xi^2 = \text{const}$  — интегральные поверхности поля  $\mathbf{n}$  (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых векторного поля  $\mathbf{n}$ ). Строго регламентированным, таким образом, является лишь выбор координатных поверхностей  $\xi^3 = \text{const}$ . Остальные координатные поверхности могут быть выбраны с известной долей произвола.<sup>33</sup> Дополнительно заметим, что поверхности  $\xi^1 = \text{const}$  и  $\xi^2 = \text{const}$  — характеристические для уравнения (1.9).

<sup>32</sup>Как уже отмечалось при изучении вырожденного случая, решения граничных задач для уравнения эйконала имеют характерные для теории пластичности разрывы первых производных.

<sup>33</sup>Необходимо отметить, что возможность до известной степени произвольно выбирать координатные поверхности  $\xi^1 = \text{const}$  и  $\xi^2 = \text{const}$  позволяет констатировать, что криволинейная сетка  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , вообще говоря, отличается от ортогональной изостатической сетки. Напомним, что изостатой (или



При таком выборе криволинейных координат имеем:  $g_{13} = 0$ ,  $g_{23} = 0$ ,  $n^1 = 0$ ,  $n^2 = 0$ , что позволяет существенно упростить уравнения (4.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^1} - \frac{1}{2}(n^3)^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^1} &= 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2}(n^3)^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^2} = 0, \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^3} + g_{33} \frac{\partial (n^3)^2}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2} g_{33} (n^3)^2 \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln(g_{33}g) &= 0. \end{aligned}$$

Так как  $(n^3)^2 = 1/g_{33}$ , то последние уравнения эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^1} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^3} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}} + \ln \sqrt{g}) &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Уравнения (4.3) интегрируются вдоль линий главных напряжений. Инвариант  $I_1 = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}$  сохраняет свое значение на каждом из слоев поля  $\mathbf{n}$ . Инвариант  $I_2 = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}} + \ln \sqrt{g}$  не изменяется вдоль векторной линии поля  $\mathbf{n}$ . Таким образом, если напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, то поле главных направлений, определяющих ориентацию  $\mathbf{n}$ , необходимо является расслоенным и, следовательно, в новых специальным образом подобранных координатах уравнения равновесия приводятся к трем интегрируемым соотношениям (4.3).

Отметим, что пространственная задача для жесткопластической среды с критерием текучести Мизеса исследовалась [30] в координатной сетке линий главных напряжений. Осесимметричная жесткопластическая задача также анализировалась при помощи криволинейной сетки линий главных напряжений в [31], [32].

Инварианты пространственных уравнений теории пластичности были получены в работе [17]. В этой же работе была установлена связь между преобразованием области пластического течения с помощью координат

---

линией главного напряжения) называется кривая, касательная к которой направлена вдоль главной оси тензора напряжений. Однако все три координатные линии системы координат  $\xi^1$ ,  $\xi^2$ ,  $\xi^3$  являются изостатами, правда, координатные линии, соответствующие координатам  $\xi^1$ ,  $\xi^2$ , могут не быть ортогональными друг другу. Это обусловлено тем, что в силу  $\sigma_1 = \sigma_2$  любое направление на слое  $\xi^3 = \text{const}$  является главным и, следовательно, любая траектория на этом слое будет изостатой. Поэтому выбор тех или иных направлений на слое  $\xi^3 = \text{const}$  в качестве координатных диктуется прежде всего тем, чтобы в результате получалась бы такая локальная система трех ориентаций, для которой был бы осуществим подбор криволинейных координат с локальным базисом, ориентированным точно также.

Ортогональная изостатическая криволинейная координатная сетка (т.е. сетка, координатные линии которой касаются трех взаимно ортогональных главных осей тензора напряжений) даже для расслоенного поля напряжений существует далеко не всегда. Ниже, в разделе 7, будут приведены условия, обеспечивающие возможность введения ортогональной изостатической системы координат. Если ортогональные изостатические координаты все же можно ввести, то поле напряжений необходимо является расслоенным. Обратное утверждение, конечно же, не является справедливым.

$\xi^1, \xi^2, \xi^3$  и каноническими преобразованиями, изучавшимися в свое время Пуанкаре (H. Poincare) [33], [34] (см. также [26], [35]). Канонические преобразования можно эффективно анализировать с помощью производящих функций. Как было показано в [36], [17], уравнения для производящих функций, которые подлежат определению в плоских и осесимметричных задачах теории пластичности, обладают важными свойствами инвариантности относительно преобразований Лежандра и Ампера.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (4.3) состоит, как нетрудно заметить, в возможности разложения детерминанта  $g$  на произведение двух положительных функций:

$$g = G_1(\xi^3)G_2(\xi^1, \xi^2). \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) является одновременно и общим интегралом уравнений (3.17): если задаться криволинейными координатами  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  так, чтобы  $g_{13} = 0$  и  $g_{23} = 0$  и выполнялось (4.4), то векторное поле

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \xi^3}{|\nabla \xi^3|}$$

будет тождественно удовлетворять уравнениям (3.17).

В качестве примеров расслоенного поля напряжений можно привести осесимметричную задачу и задачу о плоской деформации. Действительно, любое осесимметричное, или плоское, векторное поле является расслоенным. Если ввести цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$ , то слоями осесимметричного поля  $\mathbf{n}$  будут поверхности, образованные вращением вокруг оси симметрии ортогональных полю  $\mathbf{n}$  траекторий, расположенных в плоскости  $\varphi = 0$ . Слоями плоского векторного поля являются цилиндрические поверхности над ортогональными линиями поля  $\mathbf{n}$ .

Ясно также, что если поле напряжений допускает ортогональную изостатическую координатную сетку  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , то оно является расслоенным, и соотношения (4.3) следует рассматривать как интегрируемые соотношения вдоль взаимно ортогональных линий главных напряжений.

## 5. Классы пространственных задач с расслоенными полями напряжений

Выше было показано, что напряженные состояния, соответствующие ребру призмы Треска, необходимо имеют расслоенные поля главных направлений напряжений, которые отвечают наибольшим (или наименьшим) главным напряжениям. Ниже указываются достаточные признаки того, что расслоенное поле напряжений, соответствующее ребру призмы Треска,

действительно может реализоваться в том или ином состоянии равновесия твердого тела.

Рассмотрим тело  $\Omega$ , часть границы  $A$  которого свободна, или на нее действует нормальная поверхностная нагрузка  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ .

В этом случае, как известно, "физическая задача Коши", если ограничиться только напряженными состояниями, соответствующими ребру призмы Треска,<sup>34</sup> приводится к двум математическим задачам Коши с начальными данными на поверхности  $A$  ( $\boldsymbol{\nu}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $A$ ): 1)  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$ ,  $\Sigma = p/(\pm 2k)$  на поверхности  $A$ ; 2)  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ ,  $\Sigma = 1 + p/(\pm 2k)$  на поверхности  $A$ . Здесь  $p$  — модуль вектора  $\mathbf{p}$ , т.е.  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \pm p(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}$ .

Рассмотрим первую из указанных задач<sup>35</sup> и покажем, что она разрешима, что и будет означать, что поле напряжений, примыкающее к поверхности  $A$ , соответствует ребру призмы Треска и является расслоенным независимо от характера распределения нормальной поверхностной нагрузки  $p = p(\mathbf{x})$ . Однако прежде выделим еще один класс задач пространственного равновесия с соответствующими ребру призмы Треска расслоенными полями напряжений.

Пусть тело  $\Omega$  симметрично относительно некоторой плоскости  $\Pi$  и подвергается действию симметричной поверхностной нагрузки так, что материал, расположенный в плоскости симметрии, переходит в состояние пластического течения. Плоскую область, являющуюся сечением тела  $\Omega$  плоскостью  $\Pi$ , обозначим через  $A$ . В силу симметрии плоская область  $A$  будет слоем векторного поля  $\mathbf{n}$ , имеющего ориентацию главного направления. Предположим, что в сечении тела рассматриваемой плоскостью касательные напряжения отсутствуют. Если через  $\boldsymbol{\nu}$  обозначить единичную нормаль к  $A$ , имеющую направление поля  $\mathbf{n}$ , а через  $p(\mathbf{x})$  — абсолютную величину вектора напряжений на площадке с нормалью  $\boldsymbol{\nu}$ , то на поверхности  $A$ , если считать напряженное состояние соответствующим ребру призмы Треска, имеем следующее условие:  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$ ,  $\Sigma = p/(\pm 2k)$ . Это условие формально (фактически, не зная характера распределения  $p = p(\mathbf{x})$ ) можно

<sup>34</sup>Что представляется естественным, так как в этом случае имеется меньше всего кинематических ограничений.

<sup>35</sup>Вторая из математических задач Коши (если бы вектор  $\mathbf{n}$  однозначно определялся на граничной поверхности) ставилась бы, как это следует из условия  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ , на характеристической поверхности и, следовательно, ее формулировка была бы некорректной: решения такой задачи либо вообще бы не существовало, либо если бы решение существовало, то оно было бы заведомо неединственным. Однако физическое краевое условие не определяет однозначно вектор  $\mathbf{n}$ , устанавливая лишь только то, что вектор  $\mathbf{n}$  ориентирован произвольно в касательной к граничной поверхности плоскости. Подобная неопределенность ориентации вектора  $\mathbf{n}$  на граничной поверхности часто позволяет использовать начальное условие именно второго типа при решении краевых задач математической теории пластичности. Подробное исследование этой ситуации имеется в [7], с. 242, 243. Однако даже в этом случае, если удастся построить поле напряжений, соответствующее ребру призмы Треска, то, как следует из результатов раздела 1, поле напряжений необходимо будет расслоенным, правда, сама граничная поверхность уже не будет слоем поля  $\mathbf{n}$ .

принять в качестве краевого и исследовать поле напряжений в пространственных областях, примыкающих к  $A$ .

Таким образом, для  $\mathbf{n}$  и  $\Sigma$  в каждом из рассматриваемых случаев имеем формально эквивалентные математические задачи Коши: в области, примыкающей к поверхности  $A$ , требуется определить единичное векторное поле  $\mathbf{n}$  и скалярное поле  $\Sigma$ , удовлетворяющие уравнению (1.9) и начальным условиям  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$ ,  $\Sigma = \Sigma_A(\mathbf{x})$  на поверхности  $A$ .

Оказывается, что всегда существуют векторное поле  $\mathbf{n}$  и скалярное поле  $\Sigma$ , являющиеся решением сформулированной задачи Коши, независимо от характера распределения  $\Sigma_A(\mathbf{x})$ , причем поле  $\mathbf{n}$  будет расслоенным в некоторой области, примыкающей к поверхности  $A$ . Именно справедливо следующее утверждение: в некоторой области  $\mathcal{D}$ , примыкающей к аналитической поверхности  $A$ , существует единственное аналитическое решение задачи Коши для уравнения

$$\text{grad}\Sigma + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1)$$

с аналитическими начальными данными  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$ ,  $\Sigma = \Sigma_A(\mathbf{x})$  на поверхности  $A$  ( $\boldsymbol{\nu}$  — вектор единичной нормали к поверхности  $A$ ), причем векторное поле  $\mathbf{n}$  будет расслоенным в области  $\mathcal{D}$ .

Докажем сформулированное утверждение. Параметризуем поверхность  $A$  при помощи аналитических функций  $x_i = \lambda_i(\xi^1, \xi^2)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Здесь  $\xi^1, \xi^2$  — Гауссовы параметры. По крайней мере один из миноров второго порядка матрицы  $||\partial\lambda_i/\partial\xi^\alpha||$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 1, 2$ ) должен быть отличен от нуля, иначе параметризуемый объект не будет двумерной поверхностью. Предположим ради определенности, что

$$W = \det||\partial\lambda_\alpha/\partial\xi^\beta|| \neq 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (5.1)$$

На множестве расслоенных полей  $\mathbf{n}$  уравнение (1.9) в специальных криволинейных координатах  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  эквивалентно уравнениям (4.3). Первые два уравнения системы (4.3) и начальные условия для функции  $\Sigma$  дают возможности найти компоненту  $g_{33}$  на поверхности  $A$  ( $C$  — постоянная)

$$g_{33}|_A = Ce^{2\Sigma_A(\xi^1, \xi^2)}. \quad (5.2)$$

Пусть начальному слою  $A$  векторного поля  $\mathbf{n}$  соответствует значение  $\xi^3 = 0$ . Этого всегда можно добиться преобразованием трансляции координаты  $\xi^3$ , относительно которого система уравнений (4.3) инвариантна. Так как  $g|_A = a(\xi^1, \xi^2) g_{33}|_A$ , где  $a(\xi^1, \xi^2)$  — детерминант первой квадратичной формы поверхности  $A$ , то, учитывая равенство (5.2), получим:

$$g|_A = Ca(\xi^1, \xi^2)e^{2\Sigma_A(\xi^1, \xi^2)}. \quad (5.3)$$

Координатная система  $\xi^k$  такова, что  $g$  разлагается в виде произведения (4.4). Сравнивая (4.4) и (5.3) при  $\xi^3 = 0$ , получим, что  $G_2(\xi^1, \xi^2) = CG_1^{-1}(0)a(\xi^1, \xi^2)e^{2\Sigma_A(\xi^1, \xi^2)}$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $G_1(\xi^3) = C_1^{-1}e^{2\xi^3}$ , так как любая замена вида  $\xi^3 = \xi^3(\xi'^3)$  не изменяет слоев поля  $\mathbf{n}$ .

Таким образом, положив  $CG_1^{-1}(0) = C_1$ , имеем следующее равенство:

$$g = a(\xi^1, \xi^2)e^{2(\Sigma_A(\xi^1, \xi^2) + \xi^3)}. \quad (5.4)$$

Утверждение будет доказано, если доказать разрешимость следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} &= 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} &= 0, \\ \left( \frac{\partial f_k}{\partial \xi^3} \frac{\partial f_k}{\partial \xi^3} \right) \left[ \left( \frac{\partial f_p}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_p}{\partial \xi^1} \right) \left( \frac{\partial f_r}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_r}{\partial \xi^2} \right) - \left( \frac{\partial f_s}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_s}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] &= \\ &= a(\xi^1, \xi^2)e^{2(\Sigma_A(\xi^1, \xi^2) + \xi^3)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

с аналитическими начальными данными на плоскости  $\xi^3 = 0$ :

$$f_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)|_{\xi^3=0} = \lambda_i(\xi^1, \xi^2) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.6)$$

Тогда поверхности  $\xi^3 = \text{const}$  криволинейной системы координат  $x_i = f_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) можно будет принять в качестве слоев векторного поля  $\mathbf{n}$ , причем начальные условия на поверхности  $A$  также будут удовлетворены как для  $\mathbf{n}$ , так и для  $\Sigma$ .

Теорема Коши—Ковалевской<sup>36</sup> приводит к заключению о разрешимости задачи Коши (5.5), (5.6), если доказать, что система уравнений (5.5) может быть приведена к нормальному по переменной  $\xi^3$  виду. Для этого разрешим систему относительно частных производных  $\partial f_i / \partial \xi^3$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Введем следующие обозначения:

$$\Delta_1 = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial f_3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial f_3}{\partial \xi^2} \end{array} \right\|, \quad \Delta_2 = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} \end{array} \right\|, \quad \Delta_3 = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \end{array} \right\|.$$

<sup>36</sup>Эта классическая теорема устанавливает разрешимость в классе аналитических функций системы уравнений в частных производных, имеющей нормальную форму по той из переменных, при заданном значении которой формулируются начальные данные, при условии, что правые части нормальной системы являются аналитическими функциями всех своих аргументов и начальные данные также аналитичны. По поводу доказательства см., например, [37], с. 20-24; [38], с. 30-37.

Кроме того, обозначим через  $Z$  выражение, расположенное в квадратных скобках (5.5). После ряда алгебраических преобразований получим систему уравнений в частных производных (5.5) в нормальной по переменной  $\xi^3$  форме

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi^3} = \pm a^{1/2} Z^{-1/2} e^{\Sigma_A + \xi^3} \Delta_i (\Delta_k \Delta_k)^{-1/2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.7)$$

Знак в уравнениях (5.7) выберем так, чтобы при возрастании переменной  $\xi^3$  от нуля в сторону положительных значений точка с координатами  $x_i = f_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  физического пространства двигалась от поверхности  $A$  внутрь тела  $\Omega$ , если  $A$  — часть граничной поверхности тела.

Осталось еще показать, что правые части в (5.7) аналитичны при  $\xi^3 = 0$  для всех допустимых значений остальных аргументов

$$\xi^1, \xi^2, \frac{\partial f_k}{\partial \xi^\alpha}.$$

На начальной плоскости  $\xi^3 = 0$  имеем следующие равенства (см. (5.1), (5.3)):  $\Delta_3|_{\xi^3=0} = W(\xi^1, \xi^2)$ ,  $Z|_{\xi^3=0} = a(\xi^1, \xi^2)$ . Так как для любой точки  $(\xi^1, \xi^2)$  справедливо  $aW \neq 0$ , то правые части системы (5.7) будут аналитическими функциями аргументов  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \partial f_k / \partial \xi^\alpha$  ( $k = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2$ ) в окрестности любой точки

$$\xi^1 = \xi_{(0)}^1, \quad \xi^2 = \xi_{(0)}^2, \quad \xi^3 = 0, \quad \frac{\partial f_k}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial \xi^\alpha} \Big|_{\xi^1 = \xi_{(0)}^1, \xi^2 = \xi_{(0)}^2}$$

$$(k = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2).$$

На основании теоремы Коши—Ковалевской можно сделать заключение о разрешимости задачи Коши (5.5), (5.6) и справедливости доказываемого утверждения.

Таким образом, для тела  $\Omega$ , имеющего плоскость симметрии  $\Pi$ , подверженного действию симметричной поверхностной нагрузки, такой, что материал, расположенный в плоскости  $\Pi$  переходит в состояние пластического течения, не подвергаясь действию касательных напряжений, соответствующее ребру призмы Треска расслоенное поле напряжений является статически допустимым в пластической зоне, примыкающей к сечению тела плоскостью  $\Pi$ .

Внимательный анализ приведенного выше доказательства позволяет, практически не изменяя его, несколько обобщить формулировку утверждения о существовании соответствующего ребру призмы Треска, расслоенного поля напряжений. Заключение о существовании соответствующего ребру призмы Треска расслоенного поля напряжений оказывается справедливым при следующих условиях: существует хотя бы одна аналитическая поверхность, в каждой точке которой нормаль имеет направление главной оси



тензора напряжений, соответствующей главному напряжению, распределение которого на указанной поверхности аналитично. При этих условиях в некоторой области, примыкающей к поверхности, поле напряжений будет соответствовать ребру призмы Треска и необходимо будет расслоенным. Если поверхность, о которой идет речь, имеет нулевую полную кривизну и постоянную среднюю кривизну, а распределение главного напряжения на поверхности постоянно, то в примыкающей к этой поверхности области пространства решение будет вырожденным.

Заметим, что сформулированные условия должны иметь и важное практическое значение, поскольку они явно указывают на ситуации, когда напряженное состояние будет соответствовать ребру призмы Треска.

## 6. Канонические координаты пространственной, плоской и осесимметричной задачи

Существует связь между интегралами уравнений пластического равновесия (1.9) и отображениями пространственных областей, сохраняющими объем. Такие отображения будем называть каноническими. Более точно: отображение  $y_i = y_i(x_1, x_2, x_3)$  называется каноническим в области  $G$ , если оно взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо, и объем любой подобласти  $B$  области  $G$  при отображении сохраняется.

Аналогично определяется каноническое отображение в  $n$ -мерном пространстве. Следует отметить, что термин "каноническое отображение" обычно употребляется для характеристики отображений областей четномерных пространств

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_s, x'_1, x'_2, \dots, x'_s), \quad y'_i = y'_i(x_1, x_2, \dots, x_s, x'_1, x'_2, \dots, x'_s) \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

для которых интеграл

$$\oint_{\gamma} \sum_{i=1}^s x_i dx'_i,$$

где  $\gamma$  — произвольный замкнутый контур в  $2s$ -мерном пространстве, арифметизированном переменными  $x_1, x_2, \dots, x_s, x'_1, x'_2, \dots, x'_s$ , является инвариантом. Последнее означает, что для произвольного замкнутого контура  $\gamma$

$$\oint_{\gamma} \left( \sum_{i=1}^s x_i dx'_i - \sum_{i=1}^s y_i dy'_i \right) = 0$$

и, следовательно, существует функция  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_s, x'_1, x'_2, \dots, x'_s)$  такая, что

$$\sum_{i=1}^s x_i dx'_i - \sum_{i=1}^s y_i dy'_i = d\Phi(x_k, x'_k).$$

Можно показать, что инвариантность указанного интеграла есть достаточное условие того, что объемы образа в пространстве  $y_1, y_2, \dots, y_s, y'_1, y'_2, \dots, y'_s$  и соответствующего прообраза при отображении равны.



Для отображений двумерных областей всякое каноническое (в смысле инвариантности приведенного интеграла) отображение сохраняет площадь и обратно, если отображение сохраняет площадь, то указанный интеграл будет инвариантом отображения.

Канонические отображения в четномерных пространствах исследовались Пуанкаре в связи с интегрированием уравнений Гамильтона и теорией интегральных инвариантов [33]. Особые свойства плоских канонических отображений были отмечены в [34]. Изложение теории канонических отображений читатель может найти в классической монографии [26].

Расслоенное статически допустимое поле напряжений в области  $G$  порождает каноническое отображение

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.1)$$

некоторой области пространства, арифметизированного переменными  $\omega^j$ , на область пластического течения  $G$ . Заметим, что  $\omega^j$  — специальные криволинейные координаты, определяемые ниже по векторному полю  $\mathbf{n}$ .

Действительно, выделим слой  $A$  векторного поля  $\mathbf{n}$ . Поскольку Гауссову параметризацию поверхности  $A$  можно выбирать в достаточной мере произвольно, то выберем ее таким образом, чтобы детерминант  $a$  первой квадратичной формы поверхности  $A$  принимал в точках поверхности заданные значения, равные  $e^{-2\Sigma_A}$ , где  $\Sigma_A = \Sigma_A(x_1, x_2, x_3)$  — значения  $\Sigma$  на слое  $A$ .

С целью обоснования возможности подобного выбора (по крайней мере для аналитического слоя) рассмотрим Гауссову геодезическую параметризацию поверхности  $A$  ([28], с. 252)

$$x_1 = x_1(u^1, u^2), \quad x_2 = x_2(u^1, u^2), \quad x_3 = x_3(u^1, u^2)$$

такую, что элемент длины поверхности есть

$$ds^2 = (du^1)^2 + a_{22}(u^1, u^2)(du^2)^2,$$

где можно считать, что

$$a_{22}(0, u^2) = 1, \quad \left( \frac{\partial a_{22}}{\partial u^1} \right)_{u^1=0} = 0.$$

Гауссова геодезическая параметризация поверхности получается, если зафиксировать на поверхности некоторую геодезическую кривую  $C$ , затем провести через каждую ее точку ортогональную геодезическую и в качестве параметра  $u^2$  выбрать переменную длину дуги вдоль  $C$ , а в качестве  $u^1$  — расстояние, измеряемое от кривой  $C$  вдоль геодезической.

Ясно, что  $a = \det \|a_{\alpha\beta}\| = a_{22}$ . Кроме того, можно считать заданной функцию

$$f(u^1, u^2) = \Sigma_A(x_1(u^1, u^2), x_2(u^1, u^2), x_3(u^1, u^2)).$$

Заменим далее параметризацию поверхности

$$\tilde{u}^1 = \tilde{u}^1(u^1, u^2), \quad \tilde{u}^2 = \tilde{u}^2(u^1, u^2)$$

и потребуем, чтобы новая координатная сетка на поверхности была ортогональна, кривая  $C$  в новых координатах задавалась уравнением  $\tilde{u}^1 = 0$ , параметр  $\tilde{u}^2$  вдоль  $C$  совпадал с  $u^2$  и выполнялось условие

$$\tilde{a} = e^{-2f(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))}.$$

В силу

$$\sqrt{\tilde{a}} = \left| \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} \right| \sqrt{a}$$

это возможно, только если

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} &= \sqrt{a_{22}(u^1, u^2)} e^{f(u^1, u^2)}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} &= 0, \end{aligned}$$

наряду с условиями

$$\tilde{u}^1(0, u^2) = 0, \quad \tilde{u}^2(0, u^2) = u^2.$$

Полученная система уравнений приводится к нормальному по переменной  $u^1$  виду с аналитической в окрестности кривой  $C$  правой частью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} &= \frac{\sqrt{a_{22}(u^1, u^2)} e^{f(u^1, u^2)} \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2}}{\left( \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \right)^2}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} &= - \frac{\sqrt{a_{22}(u^1, u^2)} e^{f(u^1, u^2)} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2}}{\left( \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \right)^2}, \end{aligned}$$

поэтому задача Коши с данными  $\tilde{u}^1(0, u^2) = 0$ ,  $\tilde{u}^2(0, u^2) = u^2$  на основании теоремы Коши—Ковалевской имеет аналитическое решение, что и устанавливает существование нужной параметризации поверхности  $A$ .

Пусть  $\omega^1, \omega^2$  — Гауссовы параметры поверхности  $A$ , удовлетворяющие указанному условию на детерминант  $a$ . После замены переменной  $\omega^3 = e^{\xi^3}$  уравнения (5.5) приводятся к следующему виду ( $k, r, p, s = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} &= 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} &= 0, \\ \left( \frac{\partial f_k}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_k}{\partial \omega^3} \right) \left[ \left( \frac{\partial f_p}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_p}{\partial \omega^1} \right) \left( \frac{\partial f_r}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_r}{\partial \omega^2} \right) - \left( \frac{\partial f_s}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_s}{\partial \omega^2} \right)^2 \right] &= 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Если через  $J$  обозначить определитель Якоби отображения (6.1), то последнее уравнение системы (6.2) эквивалентно уравнению  $J^2 = 1$ . Таким образом, приходим к заключению, что отображение (6.1) является каноническим.

Обратно, если отображение (6.1) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (6.2), то поверхности  $\omega^3 = \text{const}$  можно принять в качестве слоев поля  $\mathbf{n}$  и затем с помощью интегралов (4.3) восстановить поле напряжений.

Криволинейные координаты  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$  будем называть каноническими координатами пространственной задачи теории пластичности. В канонических координатах инварианты  $I_1$  и  $I_2$  совпадают. Имеется три интегрируемых соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \omega^1} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \omega^2} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \omega^3} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Следовательно, разность  $\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}$  является постоянной величиной всюду в области пластического течения.

Ниже рассматривается построение канонических координат  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$  для задачи о плоской и осесимметричной пластической деформации.

## 6.1. Канонические координаты задачи о плоской пластической деформации

Теория плоской деформации является одним из наиболее полно разработанных разделов математической теории пластичности. Методы интегрирования уравнений плоской задачи теории идеальной пластичности достаточно развиты и изложены, например, в монографиях [3], [4], [5], [6]. Имеется широкий арсенал аналитических, приближенных и численных методов решения краевых задач, к которым приводит расчет плоской пластической деформации.

В условиях плоского деформированного состояния в пределах пластической зоны компоненты тензора напряжений определяются соотношениями Леви:

$$\sigma_{11} = p + k \cos 2\theta, \quad \sigma_{22} = p - k \cos 2\theta, \quad \sigma_{12} = k \sin 2\theta,\tag{6.4}$$

где  $p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ ,  $\theta$  — угол наклона главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему собственному значению тензора напряжений, к оси  $x_1$ .

Уравнения равновесия имеют вид (1.26) и эквивалентны двумерному уравнению (1.9).

Каноническое отображение (6.1) следует искать в форме:

$$x_1 = f_1(\omega^1, \omega^3), \quad x_2 = f_2(\omega^1, \omega^3), \quad x_3 = \omega^2.$$

Естественно рассмотреть двумерное каноническое отображение, определяемое первыми двумя уравнениями. Ясно, что координатные линии, соответствующие криволинейным координатам  $\omega^1, \omega^3$ , есть взаимно ортогональные изостаты в плоскости течения.

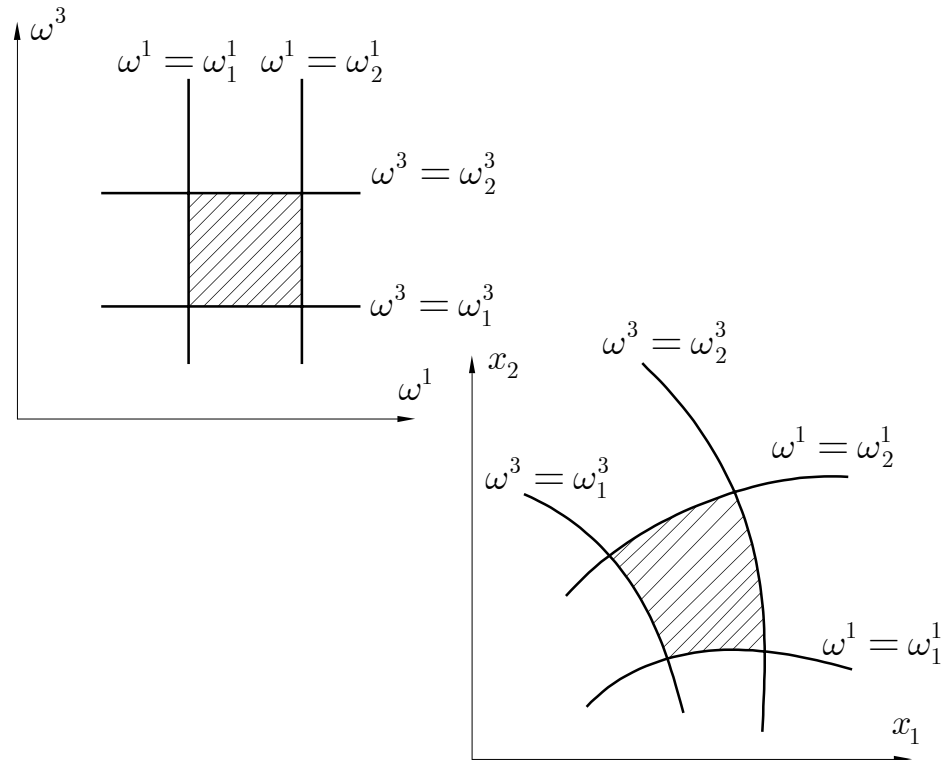
Система (6.2) сводится к следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} = \pm 1. \quad (6.5)$$

Второе уравнение этой системы устанавливает, что абсолютная величина якобиана преобразования

$$x_1 = f_1(\omega^1, \omega^3), \quad x_2 = f_2(\omega^1, \omega^3)$$

равна единице, т.е. оно сохраняет площадь. Этот факт иллюстрируется рис. 4. Положительность якобиана гарантирует сохранение направлений обхода четырехугольников, изображенных на рисунке.



$$\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = (\omega_2^1 - \omega_1^1)(\omega_2^3 - \omega_1^3)$$

Рис. 4. Сохранение площади при каноническом преобразовании  $x_1 = f_1(\omega^1, \omega^3)$ ,  $x_2 = f_2(\omega^1, \omega^3)$ . Криволинейный четырехугольник ограничен контуром  $\Gamma$ , составленным из отрезков изостатических траекторий. Площади заштрихованных фигур равны

Итак, при плоском пластическом течении имеется основной канонический инвариант

$$\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = (\omega_2^1 - \omega_1^1)(\omega_2^3 - \omega_1^3),$$

непосредственно связанный с геометрией поля изостатических траекторий.

Введем производящую функцию  $\Phi(x_1, \omega^1)$  плоского канонического отображения [35]:

$$x_2 = \frac{\partial \Phi(x_1, \omega^1)}{\partial x_1}, \quad \omega^3 = -\frac{\partial \Phi(x_1, \omega^1)}{\partial \omega^1}. \quad (6.6)$$

Тогда первое уравнение системы (6.5) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\omega^1)^2} = \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial \omega^1} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\omega^1)^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}. \quad (6.7)$$

Второе уравнение системы (6.5) удовлетворяется тождественно в силу (6.6).<sup>37</sup>

Нелинейное уравнение (6.7) инвариантно относительно преобразования Лежандра (А.М. Legendre): вводя тангенциальные координаты

$$x_1^* = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \omega^{1*} = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega^1}, \quad \Phi^* = x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \omega^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \omega^1} - \Phi,$$

имеем

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial (\omega^{1*})^2} = \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_1^* \partial \omega^{1*}} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_1^{*2}} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial (\omega^{1*})^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_1^{*2}}. \quad (6.8)$$

Действительно, в обозначениях Монжа

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega^1}, \\ R = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad S = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial \omega^1}, \quad T = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\omega^1)^2}$$

---

<sup>37</sup>Причем во втором уравнении системы (6.5) следует выбрать положительный знак. Если поменять ролями переменные  $\omega^1$  и  $\omega^3$  и ввести производящую функцию  $\Phi(x_1, \omega^3)$ , согласно

$$x_2 = \frac{\partial \Phi(x_1, \omega^3)}{\partial x_1}, \quad \omega^1 = -\frac{\partial \Phi(x_1, \omega^3)}{\partial \omega^3},$$

то второе уравнение системы (6.5) будет тождественно удовлетворяться при выборе отрицательного знака. Уравнение для производящей функции при этом в точности совпадает с (6.7), если в нем заменить  $\omega^1$  на  $\omega^3$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\omega^3)^2} = \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial \omega^3} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\omega^3)^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}.$$

формулы, связывающие вторые частные производные, можно представить в виде (см. **Приложение I**)

$$R^* = \frac{T}{RT - S^2}, \quad S^* = \frac{-S}{RT - S^2}, \quad T^* = \frac{R}{RT - S^2}$$

и обратно —

$$R = \frac{T^*}{R^*T^* - S^{*2}}, \quad S = \frac{-S^*}{R^*T^* - S^{*2}}, \quad T = \frac{R^*}{R^*T^* - S^{*2}}.$$

Подстановка последних формул в уравнение (6.7) приводит к уравнению (6.8), форма которого не отличима от (6.7).

Уравнение (6.7) существенно нелинейно и нелинейность даже сильнее выражена, чем в классическом уравнении Монжа—Ампера.<sup>38</sup> Несложные вычисления показывают, что дискриминант характеристического уравнения для (6.7) в точности равен

$$4[(1 + R^2)(S^2 - RT) - S^2].$$

Поэтому для гиперболичности уравнения (6.7) достаточно выполнения неравенства

$$RT < 0.$$

Эллиптичность уравнения (6.7) гарантирована при выполнении условия

$$S^2 - RT < 0.$$

Вводя функцию  $U(x_1, \omega^1) = \partial\Phi/\partial x_1$ , уравнение (6.7) можно преобразовать к квазилинейному уравнению, которое после преобразования Лежандра

$$X = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial \omega^1}, \quad Z = x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \omega^1 \frac{\partial U}{\partial \omega^1} - U$$

приводится к линейному уравнению второго порядка в частных производных относительно функции  $Z = Z(X, Y)$

$$(1 + X^2) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2XY \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} - Y^2 \frac{1 - X^2}{1 + X^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0. \quad (6.9)$$

Это уравнение, как нетрудно проверить, принадлежит к гиперболическому типу.

Преобразуем полученное уравнение к характеристическим переменным  $u$ ,  $v$  и новой неизвестной функции  $F(u, v)$  по формулам:

$$u = \operatorname{arctg} X, \quad v = \frac{1}{2} \ln(1 + X^2) - \ln Y, \quad F = Z \cos u. \quad (6.10)$$

<sup>38</sup>Теория уравнения Монжа—Ампера изложена, например, в [39], с. 51-65.

В результате приходим к телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + F = 0.$$

Так как преобразование Лежандра инволютивно<sup>39</sup> (см., например, [35], с. 59-61), то можно выразить переменные  $x_1, x_2, \omega^1$  через переменные  $X, Y, Z$ , совершая еще раз это же преобразование:

$$x_1 = \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad x_2 = X \frac{\partial Z}{\partial X} + Y \frac{\partial Z}{\partial Y} - Z, \quad \omega^1 = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

Преобразуя последние формулы к переменным  $u, v$  и функции  $F(u, v)$ , получим

$$x_1 = \cos u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin u \frac{\partial F}{\partial v} + F \sin u, \quad (6.11)$$

$$x_2 = \sin u \frac{\partial F}{\partial u} - \cos u \frac{\partial F}{\partial v} - F \cos u, \quad (6.12)$$

$$\omega^1 = -e^v \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Нетрудно заметить, что переменная  $u$  есть угол наклона первого главного направления тензора напряжений к оси  $x_1$ . Линии  $\omega^1 = \text{const}$  есть траектории первого (наибольшего) главного напряжения, поэтому

$$\text{tg} \theta = \left. \frac{\partial^2 \Phi(x_1, \omega^1)}{\partial x_1^2} \right|_{\omega^1 = \text{const}}. \quad (6.13)$$

Можно найти еще ряд замечательных соотношений, связанных с геометрией изостатических траекторий в плоскодеформированном теле. Так, если спроектировать уравнение (3.6) на направление нормали к траектории  $\omega^1 = \text{const}$ , то

$$\kappa |\nabla \omega^1| = (\nabla \omega^1) \cdot \nabla \ln |\nabla \omega^3|, \quad (6.14)$$

где

$$\kappa = \boldsymbol{\kappa} \cdot \frac{\nabla \omega^1}{|\nabla \omega^1|}$$

есть (с точностью до знака) кривизна траектории векторного поля  $\mathbf{n}$ , т.е. кривизна линии  $\omega^1 = \text{const}$ . Величину  $\kappa$  можно считать положительной, поскольку в противном случае (когда направления главной нормали и градиента функции  $\omega^1(x_1, x_2)$  противоположны) достаточно сделать замену канонической переменной  $\omega^1$  на  $-\omega^1$ . В дальнейшем будем считать, что вектор  $\nabla \omega^1$  имеет направление главной нормали векторной линии поля  $\mathbf{n}$ .

<sup>39</sup>Повторное применение преобразования Лежандра дает исходную функцию. Это свойство преобразования Лежандра часто называют свойством взаимности.



Замечая далее, что  $g^{11}g^{33} = 1$  и  $g^{11} = |\nabla\omega^1|^2$ ,  $g^{33} = |\nabla\omega^3|^2$ , на основании уравнения (6.14) находим

$$\kappa |\nabla\omega^1|^2 = -(\nabla\omega^1) \cdot \nabla |\nabla\omega^1|. \quad (6.15)$$

Учитывая это последнее соотношение и (3.8), а также то, что одна из главных кривизн координатной поверхности  $\omega^1 = \text{const}$  равна нулю,<sup>40</sup> а вторая —  $\kappa$ , приходим к следующей замечательной формуле:

$$-2\kappa = \frac{\Delta\omega^1}{|\nabla\omega^1|}. \quad (6.16)$$

Полученный результат помимо всего прочего означает, что каноническая переменная  $\omega^1(x_1, x_2)$  не может быть гармонической функцией, если только траектории векторного поля  $\mathbf{n}$  криволинейны. Этот же результат следует из известного результата теории аналитических функций: при конформном отображении круга посредством аналитической функции, производная которой в центре круга равна единице,<sup>41</sup> во всех случаях, за исключением тождественного отображения, получается область с большей, чем у круга, площадью.<sup>42</sup>

Аналогично может быть получена формула для кривизны линий, являющихся слоями поля  $\mathbf{n}$ :

$$-2\kappa_1 = \frac{\Delta\omega^3}{|\nabla\omega^3|}. \quad (6.17)$$

Распределение  $p$  вычисляется по формулам (опуская детали, сразу приведем результат [36]):

$$p = 2k \ln \sqrt{\left(\frac{\partial\omega^1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega^1}{\partial x_2}\right)^2} + C = 2k \ln |\nabla\omega^1| + C, \quad (6.18)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega^1}{\partial x_1} &= \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} \right|^{-1} \left( \frac{\partial\omega^1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial\omega^1}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial\omega^1}{\partial x_2} &= \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} \right|^{-1} \left( \frac{\partial\omega^1}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial\omega^1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

$|\partial(x_1, x_2)/\partial(u, v)|$  — якобиан отображения  $(u, v) \rightarrow (x_1, x_2)$ ,  $C$  есть постоянная интегрирования.

<sup>40</sup>Именно кривизна  $\kappa_2$ .

<sup>41</sup>Это означает, что малый элемент, локализованный в центре круга, сохраняет свою площадь при отображении.

<sup>42</sup>См., например: Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. II. Дальнейшее построение теории. М.: Наука, 1968. С. 52-55.

Поскольку  $g^{11}g^{33} = 1$ , то величина  $p$  вычисляется также в форме

$$p = -2k \ln \sqrt{\left(\frac{\partial \omega^3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega^3}{\partial x_2}\right)^2} + C = -2k \ln |\nabla \omega^3| + C \quad (6.20)$$

или в терминах производящей функции  $\Phi(x_1, \omega^1)$  —

$$p = -k \ln \frac{T^2(1 + R^2)}{R^2 S^2} + C = -k \ln(\cos^2 \theta S^2) + C. \quad (6.21)$$

С помощью уравнений (6.20) и (6.14) можно заключить, что

$$\kappa = -\frac{\nabla p}{2k} \cdot \frac{\nabla \omega^1}{|\nabla \omega^1|}. \quad (6.22)$$

Последнее соотношение позволяет вычислить вихрь векторного поля  $\mathbf{n}$  и угол наклона вектора  $\nabla p$  по отношению к направлению  $\mathbf{n}$ . Действительно, вектор  $\mathbf{s}$  — орт, направленный вдоль вектора  $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}$ , — располагается в плоскости течения и имеет направление  $-\nabla \omega^1$ . Орт  $\mathbf{t}$  также располагается в плоскости течения и, согласно (3.22), нормален вектору  $\nabla p$  и составляет угол  $\alpha$  с ортом  $\mathbf{s}$  (см. рис. 5). Угол  $\alpha$  вычисляется по формуле (3.21),

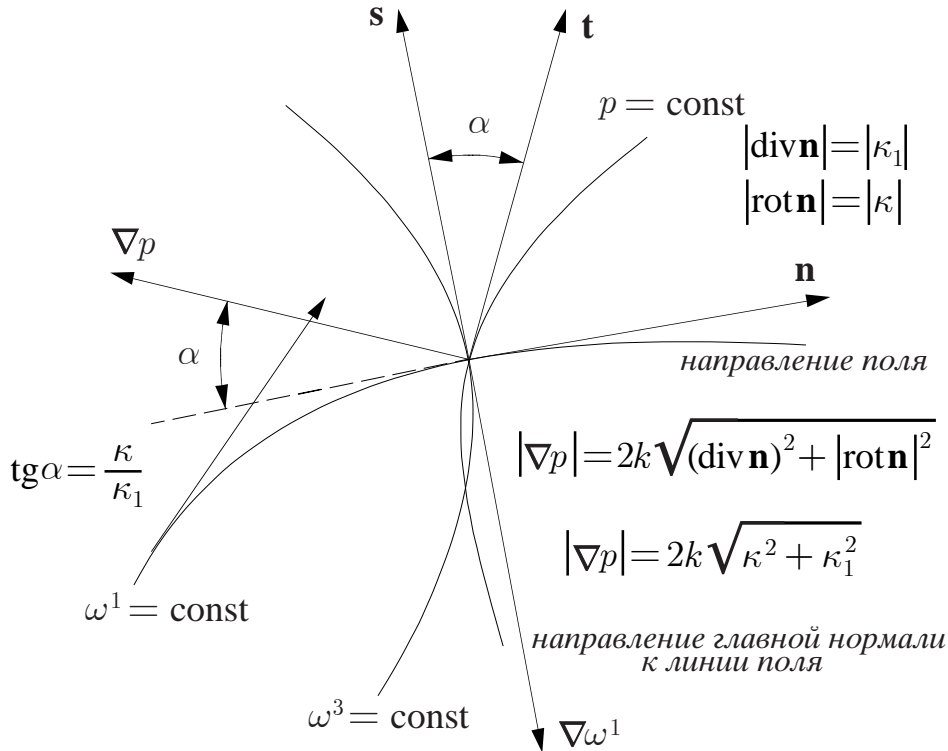


Рис. 5. Ориентации характерных векторов в плоскости течения

в которой следует положить  $\kappa_2 = 0$ . Поэтому в силу (6.22) справедлива формула

$$2k\kappa = |\nabla p| \sin \alpha$$

или, учитывая двумерный аналог (3.23)

$$|\nabla p| = 2k\sqrt{(\operatorname{div} \mathbf{n})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2},$$

и  $|\kappa_1| = |\operatorname{div} \mathbf{n}|$  ( $\kappa_1$  есть кривизна изостат, ортогональных полю  $\mathbf{n}$ ), —

$$\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2} \sin \alpha,$$

откуда определяется величина вихря поля  $\mathbf{n}$

$$|\operatorname{rot} \mathbf{n}| = |\kappa|. \quad (6.23)$$

С помощью (6.16), (6.17) заключаем также, что

$$2|\operatorname{rot} \mathbf{n}| = \frac{|\Delta \omega^1|}{|\nabla \omega^1|}, \quad 2|\operatorname{div} \mathbf{n}| = \frac{|\Delta \omega^3|}{|\nabla \omega^3|}.$$

Как было показано выше, каноническая координата  $\omega^1$  не может быть (за исключением того особого случая, когда траектории поля  $\mathbf{n}$  прямолинейны) гармонической функцией, т.е., как позволяет заключить последняя формула, поле  $\mathbf{n}$  должно иметь ненулевой вихрь.

Наклон  $\alpha$  изолинии распределения  $p$  к направлению  $\mathbf{s}$  вычисляется, следовательно, как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\kappa}{\kappa_1}. \quad (6.24)$$

Отметим также формулу

$$|\nabla p| = 2k\sqrt{\kappa^2 + \kappa_1^2}, \quad (6.25)$$

и, кроме того,

$$|\nabla p| = k\sqrt{\frac{(\Delta \omega^1)^2}{|\nabla \omega^1|^2} + \frac{(\Delta \omega^3)^2}{|\nabla \omega^3|^2}}. \quad (6.26)$$

Изложенный выше метод точной линеаризации уравнений теории плоской пластической деформации воспроизводится в справочном издании Rolyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Chapman&Hall/CRC. 2004. 840 pp. (см. pp. 471, 472). Иные методы линеаризации уравнений плоской деформации изложены, например, в [3], с. 181-187; [40], с. 265, 266.

Чрезвычайно интересен последний из упомянутых методов линеаризации уравнений плоской пластической деформации. Обычным способом вводится функция напряжений:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}.$$

Подстановка этих соотношений в условие пластичности (1.24) приводит к уравнению

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 4k^2,$$

которое после замены переменных

$$u = x_1 i + x_2, \quad v = x_1 + x_2 i$$

представляется в форме

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{k^2}{4} = 0.$$

Можно показать, что функция

$$Z(u, v) = \frac{\partial F}{\partial v}$$

необходимо удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} - \frac{k^2}{4} \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} = 0,$$

которое без труда приводится к линейному с помощью преобразования Лежандра.

## 6.2. Канонические координаты осесимметричной задачи

В случае осесимметричной задачи каноническое отображение (6.1) можно представить в форме:

$$x_1 = f(\omega^1, \omega^3) \cos \omega^2, \quad x_2 = f(\omega^1, \omega^3) \sin \omega^2, \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3). \quad (6.27)$$

При этом система (6.2) преобразуется к виду:<sup>43</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} &= 0, \\ \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \right) f &= \pm 1. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Сделаем замену  $f^2 = 2H$ , тогда второе уравнение системы (6.28) позволяет утверждать, что трехмерное каноническое отображение (6.27) порождает плоское каноническое отображение

$$\frac{1}{2}x_1^2 = H(\omega^1, \omega^3), \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3). \quad (6.29)$$

---

<sup>43</sup>Ясно, что координатные линии, соответствующие криволинейным координатам  $\omega^1, \omega^3$ , есть взаимно ортогональные изостаты, расположенные в плоскости  $\omega^2 = \text{const}$ .

Введем производящую функцию  $\Omega(x_3, \omega^1)$  канонического отображения (6.29):

$$H = \frac{\partial \Omega(x_3, \omega^1)}{\partial x_3}, \quad \omega^3 = \frac{\partial \Omega(x_3, \omega^1)}{\partial \omega^1}. \quad (6.30)$$

Формулы (6.30) соответствуют положительному знаку во втором уравнении (6.28).

Второе уравнение системы (6.28) удовлетворяется тождественно в силу (6.30). Первое уравнение системы (6.28) позволяет получить следующее нелинейное уравнение относительно производящей функции:

$$2 \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial (\omega^1)^2} = \left[ \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3 \partial \omega^1} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial (\omega^1)^2} \right] \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3^2}. \quad (6.31)$$

Уравнение (6.31) инвариантно относительно преобразования Ампера (А. Ampere).<sup>44</sup> Вводя переменные по формулам

$$x_3^* = x_3, \quad \omega^{1*} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \omega^1}, \quad \Omega^* = \Omega - \omega^1 \frac{\partial \Omega}{\partial \omega^1},$$

в обозначениях Монжа

$$P = \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}, \quad Q = \frac{\partial \Omega}{\partial \omega^1}, \\ R = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3^2}, \quad S = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3 \partial \omega^1}, \quad T = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial (\omega^1)^2}$$

имеем:

$$P^* = P, \quad Q^* = \omega^1, \quad \Omega^* = \Omega - \omega^1 Q, \quad R^* = \frac{S^2 - RT}{-T}, \quad S^* = \frac{-S}{T}, \quad T^* = \frac{-1}{T}$$

и обратно

$$P = P^*, \quad Q = -\omega^{1*}, \quad \Omega = \Omega^* - \omega^{1*} Q^*, \quad R = \frac{R^* T^* - S^{*2}}{T^*}, \quad S = \frac{S^*}{T^*}, \quad T = \frac{-1}{T^*}.$$

Подстановка этих формул в уравнение (6.31) приводит к уравнению

$$2 \frac{\partial \Omega^*}{\partial x_3^*} \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial (\omega^{1*})^2} = \left[ \left( \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial x_3^* \partial \omega^{1*}} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial x_3^{*2}} \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial (\omega^{1*})^2} \right] \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial x_3^{*2}},$$

не отличимому по форме от (6.31).

<sup>44</sup>По поводу преобразования Ампера см. [41], с. 141, 142. Преобразование Ампера обладает свойством взаимности (см. Приложение I). Дополнительно заметим, что уравнение (6.7) также инвариантно относительно преобразования Ампера.

Дискриминант характеристического уравнения для (6.31) в точности равен

$$8[(R^2 + 2P)(S^2 - RT) - PS^2].$$

Так как  $2P = x_1^2 \geq 0$ , то гиперболичность уравнения (6.31) гарантирована при выполнении условия

$$RT < 0,$$

а эллиптичность —

$$S^2 - RT < 0.$$

В плоскости  $x_1, x_3$  интегральные кривые поля  $\mathbf{n}$  определяются уравнением  $1/2x_1^2 = \partial\Omega(x_3, \omega^1)/\partial x_3$  при фиксированном значении  $\omega^1$ . Если  $\theta$  — наклон траектории поля  $\mathbf{n}$  к оси  $x_1$ , то

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{2 \frac{\partial\Omega(x_3, \omega^1)}{\partial x_3} \Big|_{\omega^1=\text{const}}}}{\frac{\partial^2\Omega(x_3, \omega^1)}{\partial x_3^2} \Big|_{\omega^1=\text{const}}}. \quad (6.32)$$

Кроме того, для канонических координат  $\omega^j$ :  $g = 1$ , следовательно, согласно формулам (4.3),  $2\Sigma = \ln g_{33} + C$  и, вводя в это выражение производящую функцию, получим:

$$2\Sigma = \ln \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3^2} \right)^2 \left( \frac{\partial\Omega}{\partial x_3} \right)^{-1} \right] \left( \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3 \partial \omega^1} \right)^{-2} \right\} + C,$$

или (ср. с (6.21))

$$\frac{\sigma_3}{\pm k} = \ln \left[ \sin^2 \theta \left( \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3 \partial \omega^1} \right)^2 \right] - C = \ln(\sin^2 \theta S^2) - C.$$

Поэтому поля  $\sigma_3$  и  $\mathbf{n}$  определяются только через посредство производной  $\partial\Omega/\partial x_3$ .

Для функции  $u = (2\partial\Omega/\partial x_3)^{1/2}$  имеем квазилинейное уравнение второго порядка, являющееся следствием уравнения (6.31):

$$q^2 \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} r - 2pq s + (p^2 + 1)t + \frac{q^2}{u} = 0, \quad (6.33)$$

где использованы обозначения Монжа:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial \omega^1}, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial \omega^1}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial (\omega^1)^2}.$$

Дискриминант уравнения (6.33) равен  $q^2$ , поэтому уравнение принадлежит к гиперболическому типу.

Уравнения характеристик имеют следующий вид [39]:

$$\begin{aligned} q(p-1)d\omega^1 + (p^2+1)dx_3 &= 0, \quad du - pdx_3 - qd\omega^1 = 0, \\ q(p^2-1)(p^2+1)^{-1}dp - (p-1)dq + qu^{-1}dx_3 &= 0; \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} q(p+1)d\omega^1 + (p^2+1)dx_3 &= 0, \quad du - pdx_3 - qd\omega^1 = 0, \\ q(p^2-1)(p^2+1)^{-1}dp - (p+1)dq + qu^{-1}dx_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{1}{2} \ln(1+p^2) - \ln|q| + \operatorname{arctg} p, \\ \Theta &= \frac{1}{2} \ln(1+p^2) - \ln|q| - \operatorname{arctg} p, \\ \Psi &= \ln u, \end{aligned}$$

то соотношения вдоль характеристик (третьи уравнения систем (6.34) и (6.35)) можно представить в форме:

$$d(\Xi - \Psi) + \operatorname{tg} \frac{\Xi - \Theta}{2} d\Xi = 0, \quad (6.36)$$

$$d(\Theta - \Psi) - \operatorname{tg} \frac{\Xi - \Theta}{2} d\Theta = 0. \quad (6.37)$$

Эти уравнения симметричны относительно переменных  $\Xi$ ,  $\Theta$ : уравнение (6.37) получается из уравнения (6.36) заменой  $\Xi$  на  $\Theta$  и, соответственно,  $\Theta$  на  $\Xi$ . Ни одно из характеристических соотношений (6.36), (6.37) не интегрируемо.

Следует отметить также, что симметрия соотношений вдоль характеристик здесь достигается вследствие перехода от физической плоскости  $\varphi = 0$  к плоскости переменных  $x_3$ ,  $\omega^1$  (соотношения (6.36), (6.37) справедливы вдоль характеристических линий, расположенных в плоскости  $x_3$ ,  $\omega^1$ ).

Уравнению (6.33) можно придать несколько более симметричную форму, если изменить роль зависимых и независимых переменных: будем полагать, что переменная  $u$  (которая по смыслу есть координата  $x_1$ ) является независимой и, следовательно,  $\omega^1 = \omega^1(x_1, x_3)$ .<sup>45</sup>

Введем обозначения Монжа:

$$P = \frac{\partial u}{\partial \omega^1}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad R = \frac{\partial^2 u}{\partial (\omega^1)^2}, \quad S = \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^1 \partial x_3}, \quad T = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}; \quad (6.38)$$

<sup>45</sup>До конца этого раздела изложение будет следовать статье: Радаев Ю.Н. Дополнительные теоремы теории плоской и осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №2(32). 2004. С. 41-61.



$$\tilde{P} = \frac{\partial \omega^1}{\partial x_1}, \quad \tilde{Q} = \frac{\partial \omega^1}{\partial x_3}, \quad \tilde{R} = \frac{\partial^2 \omega^1}{\partial x_1^2}, \quad \tilde{S} = \frac{\partial^2 \omega^1}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \tilde{T} = \frac{\partial^2 \omega^1}{\partial x_3^2}. \quad (6.39)$$

Учитывая следующие соотношения между производными

$$\begin{aligned} R &= -\frac{\tilde{R}}{\tilde{P}^3}, \quad S = \frac{\tilde{R}\tilde{Q} - \tilde{S}\tilde{P}}{\tilde{P}^3}, \quad T = -\frac{\tilde{R}\tilde{Q}^2 - 2\tilde{S}\tilde{P}\tilde{Q} + \tilde{T}\tilde{P}^2}{\tilde{P}^3}; \\ P &= \frac{1}{\tilde{P}}, \quad Q = -\frac{\tilde{Q}}{\tilde{P}}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

уравнение (6.33) можно представить в форме

$$(\tilde{P}^2 - \tilde{Q}^2)(\tilde{T} - \tilde{R}) - 4\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{S} + (\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2)\tilde{P}^{-4}x_1^{-1} = 0. \quad (6.41)$$

Это уравнение принадлежит к гиперболическому типу, так как его дискриминант в точности равен  $(\tilde{P} + \tilde{Q})^2$ . Нарушение гиперболичности возможно только при условии  $\tilde{P} + \tilde{Q} = 0$ , т.е. когда  $\omega^1 = \omega^1(x_1, x_3)$  является интегралом уравнения

$$\frac{\partial \omega^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega^1}{\partial x_3} = 0.$$

Последнее уравнение без труда интегрируется:  $\omega^1 = \omega^1(x_1 - x_3)$ .

Корни характеристического уравнения есть

$$\lambda_1 = \frac{\tilde{P} + \tilde{Q}}{\tilde{P} - \tilde{Q}}, \quad \lambda_2 = -\frac{\tilde{P} - \tilde{Q}}{\tilde{P} + \tilde{Q}},$$

и они удовлетворяют условию  $\lambda_1 = -\lambda_2^{-1}$ , что указывает на ортогональность характеристических направлений.

Составляя характеристические соотношения для уравнения (6.41), находим:

$$\begin{aligned} dx_3 &= \frac{\tilde{P} + \tilde{Q}}{\tilde{P} - \tilde{Q}} dx_1, \\ (\tilde{P}^2 - \tilde{Q}^2)d\tilde{P} - (\tilde{P} - \tilde{Q})^2 d\tilde{Q} - \frac{\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2}{x_1 \tilde{P}^4} dx_1 &= 0, \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$d\omega^1 - \tilde{P}dx_1 - \tilde{Q}dx_3 = 0;$$

$$\begin{aligned} dx_3 &= -\frac{\tilde{P} - \tilde{Q}}{\tilde{P} + \tilde{Q}} dx_1, \\ (\tilde{P}^2 - \tilde{Q}^2)d\tilde{P} + (\tilde{P} + \tilde{Q})^2 d\tilde{Q} - \frac{\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2}{x_1 \tilde{P}^4} dx_1 &= 0, \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$d\omega^1 - \tilde{P}dx_1 - \tilde{Q}dx_3 = 0.$$

Двумерный градиент (по переменным  $x_1, x_3$ ) канонической переменной  $\omega^1$  указывает направление главного напряжения  $\sigma_1$ . Если ввести угол  $\gamma$ , характеризующий наклон вектора  $\nabla\omega^1$  к оси  $x_1$ , то

$$\tilde{P} = |\nabla\omega^1| \cos \gamma, \quad \tilde{Q} = |\nabla\omega^1| \sin \gamma \quad (6.44)$$

и, следовательно,

$$\lambda_1 = \operatorname{tg}(\gamma + \pi/4), \quad \lambda_2 = \operatorname{tg}(\gamma - \pi/4). \quad (6.45)$$

Вдоль характеристик справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dx_1} = \operatorname{tg}(\gamma + \frac{\pi}{4}), \\ d|\nabla\omega^1| - |\nabla\omega^1| d\gamma - \frac{x_1^{-1} dx_1}{\cos^4 \gamma (\cos \gamma - \sin \gamma) |\nabla\omega^1|^2} = 0; \end{cases} \quad (6.46)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dx_1} = \operatorname{tg}(\gamma - \frac{\pi}{4}), \\ d|\nabla\omega^1| + |\nabla\omega^1| d\gamma - \frac{x_1^{-1} dx_1}{\cos^4 \gamma (\cos \gamma + \sin \gamma) |\nabla\omega^1|^2} = 0, \end{cases} \quad (6.47)$$

причем вторые соотношения из каждой группы могут быть несколько преобразованы с помощью следующих формул, выводимых из первого и третьего соотношений в (6.42) и (6.43)

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\cos \gamma - \sin \gamma}{|\nabla\omega^1|} d\omega^1, \\ dx_1 &= \frac{\cos \gamma + \sin \gamma}{|\nabla\omega^1|} d\omega^1, \end{aligned}$$

и соответственно представлены в форме:

$$d|\nabla\omega^1| - |\nabla\omega^1| d\gamma - \frac{x_1^{-1} d\omega^1}{|\nabla\omega^1|^3 \cos^4 \gamma} = 0, \quad (6.48)$$

$$d|\nabla\omega^1| + |\nabla\omega^1| d\gamma - \frac{x_1^{-1} d\omega^1}{|\nabla\omega^1|^3 \cos^4 \gamma} = 0. \quad (6.49)$$

Соотношения вдоль характеристических кривых уравнения (6.41) преобразуются к форме, допускающей их дальнейшее эффективное исследование. Условимся характеристики, отклоняющиеся от направления  $\nabla\omega^1$  на угол  $\pi/4$  против хода часовой стрелки, считать характеристиками первого семейства и обозначать их кривизну через  $\bar{\kappa}_1$ . Обозначим далее через  $\iota$  угол

наклона к оси  $x_1$  характеристик первого семейства.<sup>46</sup> Введем специальную параметризацию характеристик первого семейства, приняв угол  $\iota$  качестве параметра:

$$x_1 = \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota, \quad x_3 = \int \frac{\sin \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota,$$

где  $\overline{\kappa}_1 = \overline{\kappa}_1(\iota)$  — кривизна первой характеристической линии, выраженная в зависимости от угла  $\iota$ . Характеристическое соотношение (6.46) тогда представляется в виде

$$\frac{d}{d\iota} |\nabla \omega^1|^3 - 3 |\nabla \omega^1|^3 = \frac{6\sqrt{2}}{\cos \iota (\cos \iota + \sin \iota)^4} \frac{d}{d\iota} \ln \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota.$$

Полученное уравнение интегрируется вдоль первой характеристики:

$$|\nabla \omega^1| = \sqrt{2} \sqrt[3]{3} e^\iota \sqrt[3]{\text{const} + \int \frac{e^{-3\iota}}{\overline{\kappa}_1(\iota) (\cos \iota + \sin \iota)^4} \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota} d\iota, \quad (6.50)$$

это означает, что вдоль первой характеристики модуль градиента канонической переменной находится с помощью квадратур, если известна зависимость  $\overline{\kappa}_1 = \overline{\kappa}_1(\iota)$ .

Интеграл (6.50) позволяет найти инвариант, значения которого не изменяются вдоль первой характеристической линии:

$$\frac{e^{-3\iota} |\nabla \omega^1|^3}{6\sqrt{2}} - \int \frac{e^{-3\iota}}{\overline{\kappa}_1(\iota) (\cos \iota + \sin \iota)^4} \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota = \text{const}. \quad (6.51)$$

Принимая далее во внимание, что вдоль первой характеристической линии

$$|\nabla \omega^1|^2 = 2 \left( \frac{d\omega^1}{d\iota} \right)^2 \overline{\kappa}_1^2,$$

и предполагая, что каноническая переменная  $\omega^1$  возрастает с увеличением угла  $\iota$ , находим уравнение

$$\frac{d\omega^1}{d\iota} = \frac{\sqrt[3]{3} e^\iota}{\overline{\kappa}_1} \sqrt[3]{\text{const} + \int \frac{e^{-3\iota}}{\overline{\kappa}_1(\iota) (\cos \iota + \sin \iota)^4} \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota}, \quad (6.52)$$

<sup>46</sup> Ясно, что справедливо равенство  $\gamma + \frac{\pi}{4} = \iota$ .

из которого каноническая переменная вдоль характеристической линии первого семейства  $\omega^1$  определяется с помощью одной дополнительной квадратуры:

$$\omega^1 = \sqrt[3]{3} \int \sqrt[3]{\text{const} + \int \frac{e^{-3\iota}}{\overline{\kappa}_1(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota \frac{e^\iota}{\overline{\kappa}_1} d\iota}. \quad (6.53)$$

Аналогично выводятся соотношения вдоль характеристик второго семейства, параметрические уравнения которых удобно принять в форме

$$x_1 = - \int \frac{\sin \iota}{\overline{\kappa}_2(\iota)} d\iota, \quad x_3 = \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_2(\iota)} d\iota,$$

где угол  $\iota$  имеет прежний смысл и определяет угол наклона нормали характеристик второго семейства к оси  $x_1$ .

Модуль градиента канонической переменной вдоль второй характеристической линии находится квадратурами

$$|\nabla \omega^1| = \sqrt{2} \sqrt[3]{3} e^{-\iota} \sqrt[3]{\text{const} + \int \frac{e^{3\iota}}{\overline{\kappa}_2(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota \int \frac{\sin \iota}{\overline{\kappa}_2(\iota)} d\iota}. \quad (6.54)$$

Соответствующий инвариант, значения которого не изменяются вдоль второй характеристической линии, есть

$$\frac{e^{3\iota} |\nabla \omega^1|^3}{6\sqrt{2}} - \int \frac{e^{3\iota}}{\overline{\kappa}_2(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota \int \frac{\sin \iota}{\overline{\kappa}_2(\iota)} d\iota = \text{const}. \quad (6.55)$$

Учитывая соотношение

$$|\nabla \omega^1| = 2 \left( \frac{d\omega^1}{d\iota} \right)^2 \overline{\kappa}_2^2,$$

справедливое вдоль второй характеристической линии, и полагая, что каноническая переменная  $\omega^1$  убывает при возрастании угла  $\iota$ , приходим к следующей формуле:

$$-\omega^1 = \sqrt[3]{3} \int \sqrt[3]{\text{const} + \int \frac{e^{3\iota}}{\overline{\kappa}_2(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota \int \frac{\sin \iota}{\overline{\kappa}_2(\iota)} d\iota} \frac{e^{-\iota}}{\overline{\kappa}_2} d\iota, \quad (6.56)$$

справедливой вдоль линий второго семейства характеристик.

Анализируя соотношения вдоль характеристик, записанные для сторон криволинейного характеристического четырехугольника, диагоналями которого являются дуги изостатических траекторий, можно, учитывая, что переменные  $\omega^1, \omega^3$  не изменяются на соответствующих диагоналях, получить условия, характеризующие геометрию поля скольжения при осесимметричном течении. Эти условия, в отличие от таковых для плоского пластического течения, являются неизмеримо более сложными.

## 7. Трехмерные уравнения математической теории пластичности в ортогональных изостатических координатах

Поля напряжений, допускающие введение ортогональных изостатических координат, заведомо являются расслоенными, но возможность выбора изостат в качестве взаимно ортогональных координатных линий позволяет продвинуться несколько дальше в анализе общих трехмерных уравнений математической теории пластичности (см. [42]).

Изостаты отнюдь не всегда образуют сетку, которая допускает подбор ортогональных криволинейных координат  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  так, чтобы изостаты совпадали с координатными линиями. Необходимое и достаточное условие этого — одновременное выполнение равенств

$$\mathbf{l} \cdot \text{rot } \mathbf{l} = 0, \mathbf{m} \cdot \text{rot } \mathbf{m} = 0, \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0. \quad (7.1)$$

Если  $\mathbf{n}$  — слоистое векторное поле и поверхности уровня скалярного поля  $\omega(x_1, x_2, x_3)$  задают слои поля  $\mathbf{n}$ , то необходимое и достаточное условие того, чтобы семейство поверхностей уровня могло быть дополнено до трижды ортогональной системы поверхностей, выражается уравнением Кэли—Дарбу (A. Cayley, G. Darboux):<sup>47</sup>

$$\mathcal{L}[\omega] = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{22} & c_{33} & 2c_{12} & 2c_{23} & 2c_{31} \\ \partial_{11}^2 \omega & \partial_{22}^2 \omega & \partial_{33}^2 \omega & 2\partial_{12}^2 \omega & 2\partial_{23}^2 \omega & 2\partial_{31}^2 \omega \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 \omega & 0 & 0 & \partial_2 \omega & 0 & \partial_3 \omega \\ 0 & \partial_2 \omega & 0 & \partial_1 \omega & \partial_3 \omega & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \omega & 0 & \partial_2 \omega & \partial_1 \omega \end{vmatrix} = 0, \quad (7.2)$$

где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^3 [(\partial_k \omega)(\partial_{ijk}^3 \omega) - 2(\partial_{ik}^2 \omega)(\partial_{jk}^2 \omega)]$$

<sup>47</sup>См., например: Математическая энциклопедия. Т. 3. / Под ред. акад. И.М. Виноградова. М.: Сов. энциклопедия, 1982. С. 159. См. также [24], с. 62-70; [19], с. 92-100. Задача о включении однопараметрического семейства поверхностей в трижды ортогональную систему известна как проблема Кэли.

есть симметричный тензор второго ранга относительно преобразований декартовой системы координат  $x_1, x_2, x_3$ .

Таким образом, координата  $\xi^3 = \xi^3(x_1, x_2, x_3)$  должна удовлетворять уравнению<sup>48</sup>

$$\mathcal{L}[\xi^3] = 0. \quad (7.3)$$

Весьма примечательным свойством изостатической координатной сетки является то, что координатные линии  $\xi^1$  и  $\xi^2$ , расположенные на поверхности  $\xi^3 = \text{const}$ , будут линиями кривизны этой поверхности.<sup>49</sup>

### 7.1. Трехмерные уравнения равновесия в ортогональных изостатических координатах

Если изостатическая координатная система существует, то уравнения равновесия сводятся к трем соотношениям вдоль изостат, известным как уравнения Ламе (G. Lamé) (см., например, [43], с. 230-232; [45], р. 91; [44], с. 42, 43):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dL_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_{12}} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{r_{13}} &= 0, \\ \frac{d\sigma_2}{dL_2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{r_{23}} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{r_{21}} &= 0, \\ \frac{d\sigma_3}{dL_3} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{r_{31}} + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{r_{32}} &= 0, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $L_1, L_2, L_3$  — натуральные параметры, измеряемые вдоль взаимно ортогональных изостат;

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{13}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}}, & \frac{1}{r_{23}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}}, \\ \frac{1}{r_{31}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}}, & \frac{1}{r_{32}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}}, \\ \frac{1}{r_{12}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}}, & \frac{1}{r_{21}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Коэффициенты  $1/r_{ij}$  в уравнениях (7.4) могут быть выражены через кривизны изостат в соответствующих локальных координатных плоскостях.

Действительно, преобразуя уравнение равновесия

$$\nabla \cdot (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}\sigma_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\sigma_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\sigma_3) = \mathbf{0}$$

<sup>48</sup>То же самое относится и к канонической координате  $\omega^3 = \omega^3(x_1, x_2, x_3)$ .

<sup>49</sup>Доказательство этого факта приводится, например, в [19]. Вообще, если три поверхности пересекаются взаимно под прямыми углами, то кривые пересечения являются линиями кривизны на каждой поверхности.

к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \frac{\partial \sigma_1}{\partial l} + \mathbf{m} \frac{\partial \sigma_2}{\partial m} + \mathbf{n} \frac{\partial \sigma_3}{\partial n} + \sigma_1 [\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{l}] + \sigma_2 [\mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{m}) + (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{m}] + \\ + \sigma_3 [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}] = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

и учитывая, что

$$\nabla \cdot \mathbf{l} = \kappa_{32} + \kappa_{23}, \quad \nabla \cdot \mathbf{m} = \kappa_{13} + \kappa_{31}, \quad \nabla \cdot \mathbf{n} = \kappa_{12} + \kappa_{21}, \quad (7.7)$$

а также

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{m}] &= -\kappa_{23}, & \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}] &= -\kappa_{32}, \\ \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{l}] &= -\kappa_{13}, & \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}] &= -\kappa_{31}, \\ \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{l}] &= -\kappa_{12}, & \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{m}] &= -\kappa_{21}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где  $\kappa_{ij}$  есть кривизна изостаты с номером  $i$  в локальной координатной плоскости, перпендикулярной направлению  $j$ ,<sup>50</sup> находим

$$\frac{1}{r_{12}} = \kappa_{23}, \quad \frac{1}{r_{21}} = \kappa_{13}, \quad \frac{1}{r_{13}} = \kappa_{32}, \quad \frac{1}{r_{31}} = \kappa_{12}, \quad \frac{1}{r_{23}} = \kappa_{31}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \kappa_{21}. \quad (7.9)$$

Указанные коэффициенты выражаются также через  $\varkappa_{ij}$  — нормальную кривизну координатной линии  $j$  на координатной поверхности  $\xi^i = \text{const}$  — по формулам (см., например, [19]):

$$\varkappa_{ij} = -\frac{1}{r_{ij}}.$$

Заметим, что справедливы соотношения (см. [28], с. 271, 272)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{l} &= \nabla_{\xi^1=\text{const}} \cdot \mathbf{l} = -\varkappa_{13} - \varkappa_{12} = -2H_{(1)}, \\ \nabla \cdot \mathbf{m} &= \nabla_{\xi^2=\text{const}} \cdot \mathbf{m} = -\varkappa_{21} - \varkappa_{23} = -2H_{(2)}, \\ \nabla \cdot \mathbf{n} &= \nabla_{\xi^3=\text{const}} \cdot \mathbf{n} = -\varkappa_{31} - \varkappa_{32} = -2H_{(3)}, \end{aligned}$$

где  $\nabla_{\xi^i=\text{const}}$  — оператор Гамильтона на координатной поверхности  $\xi^i = \text{const}$ ,  $H_{(i)}$  — средняя кривизна поверхности  $\xi^i = \text{const}$ .

Доказательство соотношений (7.7) может быть в конце концов сведено к обоснованию того, что для плоского единичного векторного поля  $\mathbf{q}$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \kappa,$$

где  $\kappa$  — кривизна ортогональных полю  $\mathbf{q}$  траекторий.

Обоснование же приведенного равенства может быть дано прямым подсчетом дивергенции векторного поля  $\mathbf{q}$ , представленного как поле нормалей к семейству кривых  $\Phi(x_1, x_2) = c$ :

$$|\nabla \Phi| \mathbf{q} = \nabla \Phi.$$

<sup>50</sup> Речь идет о кривизне проекции изостаты с номером  $i$ , причем проектирование осуществляется параллельно направлению  $j$  на плоскость, ортогональную этому направлению.



Нетрудно видеть, что  $(\partial_k$  — частная производная по декартовой координате  $x_k$ )

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{(\partial_2 \Phi)^2 \partial_{11}^2 \Phi - 2(\partial_1 \Phi)(\partial_2 \Phi) \partial_{12}^2 \Phi + (\partial_1 \Phi)^2 \partial_{22}^2 \Phi}{\sqrt{[(\partial_1 \Phi)^2 + (\partial_2 \Phi)^2]^3}}.$$

Так как вдоль каждой кривой указанного семейства имеем  $x_2 = x_2(x_1, c)$  и

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{\partial_1 \Phi}{\partial_2 \Phi}, \\ \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} &= -\frac{(\partial_2 \Phi)^2 \partial_{11}^2 \Phi - 2(\partial_1 \Phi)(\partial_2 \Phi) \partial_{12}^2 \Phi + (\partial_1 \Phi)^2 \partial_{22}^2 \Phi}{(\partial_2 \Phi)^3}, \end{aligned}$$

то немедленно находим

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{-\frac{d^2 x_2}{dx_1^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2\right]^3}} = \kappa, \quad (7.10)$$

где  $\kappa$  — кривизна траектории  $x_2 = x_2(x_1, c)$ .

Покажем, например, что

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \kappa_{12} + \kappa_{21}. \quad (7.11)$$

Для этого поле  $\mathbf{n}$  представим как поле нормалей к семейству поверхностей  $\omega(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \Phi(x_1, x_2) = c$ :

$$|\nabla \omega| \mathbf{n} = \nabla \omega.$$

Подсчитывая дивергенцию  $\mathbf{n}$ , находим

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial_{11}^2 \Phi + \partial_{22}^2 \Phi + (\partial_2 \Phi)^2 \partial_{11}^2 \Phi + (\partial_1 \Phi)^2 \partial_{22}^2 \Phi - 2(\partial_1 \Phi)(\partial_2 \Phi) \partial_{12}^2 \Phi}{\sqrt{[1 + (\partial_1 \Phi)^2 + (\partial_2 \Phi)^2]^3}}.$$

Далее в той точке, где вычисляется значение  $\nabla \cdot \mathbf{n}$ , введем локальную декартову систему координат, ориентированную вдоль главных осей напряжений, сохранив за координатами прежние обозначения, что представляется естественным, поскольку приведенная формула сохраняет свой вид. Ясно, что

$$(\partial_1 \Phi)|_{x_1=0, x_2=0} = 0, \quad (\partial_2 \Phi)|_{x_1=0, x_2=0} = 0$$

и, следовательно,

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = -(\partial_{11}^2 \Phi + \partial_{22}^2 \Phi)|_{x_1=0, x_2=0}.$$

Рассмотрим проекцию первой и второй координатных линий на плоскость, ортогональную второму направлению, и соответственно — первому направлению. Уравнения этих проекций есть  $x_3 = \Phi(x_1, 0)$ ,  $x_3 = \Phi(0, x_2)$ . В начале локальной координатной системы имеем

$$\frac{dx_3}{dx_1} = (\partial_1 \Phi)|_{x_1=0, x_2=0} = 0, \quad \frac{dx_3}{dx_2} = (\partial_2 \Phi)|_{x_1=0, x_2=0} = 0,$$

а также

$$\frac{d^2 x_3}{dx_1^2} = (\partial_{11}^2 \Phi)|_{x_1=0, x_2=0}, \quad \frac{d^2 x_3}{dx_2^2} = (\partial_{22}^2 \Phi)|_{x_1=0, x_2=0}.$$

Учитывая результат (7.10), получаем  $\kappa_{12} = -(\partial_{11}^2 \Phi)|_{x_1=0, x_2=0}$ ,  $\kappa_{21} = -(\partial_{22}^2 \Phi)|_{x_1=0, x_2=0}$  и приходим к формуле (7.11).

Подобным же образом можно доказать справедливость формул (7.8). Рассмотрим, например, выражение  $\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}]$ . Пусть уравнения  $x_1 = x_1(L_1)$ ,  $x_2 = x_2(L_1)$ ,  $x_3 = \Phi(x_1(L_1), x_2(L_1))$  — натуральная параметризация первой изостатической траектории. Обозначая штрихом дифференцирование по натуральному параметру  $L_1$ , находим, что вдоль первой изостаты

$$\mathbf{l} = \frac{x'_1 \mathbf{i} + x'_2 \mathbf{j} + (x'_1 \partial_1 \Phi + x'_2 \partial_2 \Phi) \mathbf{k}}{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + (x'_1 \partial_1 \Phi + x'_2 \partial_2 \Phi)^2}},$$

где, очевидно  $x_1'^2 + x_2'^2 + (x'_1 \partial_1 \Phi + x'_2 \partial_2 \Phi)^2 = 1$ .

Принимая во внимание, что  $(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l} = \mathbf{l}'$ , и выполняя дифференцирование вектора  $\mathbf{l}$  вдоль первой изостаты, получаем

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] = (\partial_{11}^2 \Phi) x_1'^2 + (\partial_{22}^2 \Phi) x_2'^2 + 2(\partial_{12}^2 \Phi) x'_1 x'_2,$$

где значения всех производных должны вычисляться в начале локальной системы координат. Учитывая далее, что в начале локальной системы координат  $x'_1 = \pm 1$ ,  $x'_2 = 0$ ,  $x'_3 = 0$ , приходим к искомому равенству

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] = (\partial_{11}^2 \Phi)|_{x_1=0, x_2=0} = -\kappa_{12}.$$

Обозначая через  $d_k$  производную по направлению изостатической траектории

$$\frac{d}{dL_k} = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial \xi^k}$$

(по  $k$  не суммировать ( $k = 1, 2, 3$ ))

и вводя кривизны  $\kappa_{ij}$ , приведем уравнения Ламе (7.4) к виду (ср. [44], с. 43, уравнение (20))

$$\begin{aligned} d_1 \sigma_1 + \kappa_{23}(\sigma_1 - \sigma_2) + \kappa_{32}(\sigma_1 - \sigma_3) &= 0, \\ d_2 \sigma_2 + \kappa_{31}(\sigma_2 - \sigma_3) + \kappa_{13}(\sigma_2 - \sigma_1) &= 0, \\ d_3 \sigma_3 + \kappa_{12}(\sigma_3 - \sigma_1) + \kappa_{21}(\sigma_3 - \sigma_2) &= 0. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Система уравнений (4.3) может быть также выведена из уравнений Ламе (7.4) — уравнений равновесия, представленных в ортогональной криволинейной сетке изостат.

Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска с максимальным собственным значением  $\sigma_3$ , уравнения Ламе приобретают весьма простой вид:

$$\begin{aligned} d_1 \sigma_3 - \frac{2k}{\kappa_{32}^{-1}} &= 0, \\ d_2 \sigma_3 - \frac{2k}{\kappa_{31}^{-1}} &= 0, \\ d_3 \sigma_3 + \frac{2k}{\kappa_{12}^{-1}} + \frac{2k}{\kappa_{21}^{-1}} &= 0. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Чтобы преобразовать уравнения (7.13) к форме (4.3), достаточно воспользоваться (7.5) и (7.9).

Заметим, что в силу  $\sigma_1 = \sigma_2$  любое направление, ортогональное  $\mathbf{n}$ , является главным, поэтому на слое поля  $\mathbf{n}$  всегда можно выбрать изостатические траектории так, что первая из них будет касаться поля  $\mathbf{s} = -\boldsymbol{\nu}$ , а вторая — поля  $\text{rot } \mathbf{n}$ . Напомним, что вектор  $\mathbf{s}$  имеет направление, противоположное направлению главной нормали векторной линии поля  $\mathbf{n}$ ; поле  $\text{rot } \mathbf{n}$  направлено вдоль бинормали векторной линии поля  $\mathbf{n}$ . Тогда на основании (3.18)–(3.20) можно заключить, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_3}{\partial s_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial s_1} + 2k |\nabla \times \mathbf{n}| &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial s_3} + 2k \nabla \cdot \mathbf{n} &= 0,\end{aligned}\tag{7.14}$$

где  $\partial/\partial s_1$  — производная по направлению  $\boldsymbol{\nu}$  (по направлению главной нормали линии поля  $\mathbf{n}$ ),  $\partial/\partial s_2$  — производная по направлению  $\text{rot } \mathbf{n}$  (по направлению бинормали линии поля  $\mathbf{n}$ ),  $\partial/\partial s_3$  — производная по направлению  $\mathbf{n}$ .

Ясно, что наибольшее (наименьшее) главное напряжение не изменяется вдоль векторных линий поля бинормалей к линиям поля  $\mathbf{n}$ .

Соотношения (7.14), очевидно, могут быть представлены также в форме

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_3}{\partial s_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial s_1} + 2k\kappa &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial s_3} + 2k(\kappa_1 + \kappa_2) &= 0.\end{aligned}\tag{7.15}$$

## 7.2. Деривационные формулы

Деривационные формулы выражают перестановочность порядка частного дифференцирования единичных локальных базисных векторов ортогональной криволинейной координатной системы. В трехмерном пространстве таких формул будет шесть (см. [46], с. 33, или [47], р. 649). Это — соотношения вида

$$\frac{\partial}{\partial \xi^3} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^1} \right) + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^2} = 0$$

и вида

$$\frac{\partial^2 \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} = \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^3} + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^3} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^2}$$

и соотношения, получающиеся из написанных путем циклической перестановки индексов.

Полученные ранее формулы (7.5) и (7.9) позволяют ввести в деривационные формулы кривизны  $\kappa_{ij}$  и получить шесть деривационных уравнений

$$\begin{aligned} d_1\kappa_{32} + d_3\kappa_{12} + \kappa_{32}^2 + \kappa_{12}^2 + \kappa_{13}\kappa_{31} &= 0, & d_2\kappa_{12} &= \kappa_{13}(\kappa_{21} - \kappa_{12}), \\ d_1\kappa_{23} + d_2\kappa_{13} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{13}^2 + \kappa_{21}\kappa_{12} &= 0, & d_3\kappa_{23} &= \kappa_{21}(\kappa_{32} - \kappa_{23}), \\ d_1\kappa_{31} + d_3\kappa_{21} + \kappa_{31}^2 + \kappa_{21}^2 + \kappa_{32}\kappa_{23} &= 0, & d_1\kappa_{31} &= \kappa_{32}(\kappa_{13} - \kappa_{31}). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Заметим, что три уравнения справа из группы деривационных соотношений (7.16) могут быть также представлены в иной форме. Не останавливаясь на деталях, приведем альтернативные деривационные формулы:

$$\begin{aligned} d_1\kappa_{32} + d_3\kappa_{12} + \kappa_{32}^2 + \kappa_{12}^2 + \kappa_{13}\kappa_{31} &= 0, & d_3\kappa_{13} &= \kappa_{12}(\kappa_{31} - \kappa_{13}), \\ d_1\kappa_{23} + d_2\kappa_{13} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{13}^2 + \kappa_{21}\kappa_{12} &= 0, & d_1\kappa_{21} &= \kappa_{23}(\kappa_{12} - \kappa_{21}), \\ d_1\kappa_{31} + d_3\kappa_{21} + \kappa_{31}^2 + \kappa_{21}^2 + \kappa_{32}\kappa_{23} &= 0, & d_2\kappa_{32} &= \kappa_{31}(\kappa_{23} - \kappa_{32}). \end{aligned} \quad (7.17)$$

### 7.3. Уравнения равновесия в приращениях главных напряжений

Рассмотрим далее уравнения вдоль линий главных напряжений для приращений главных напряжений  $d\sigma_i$  при малом догружении. Эти уравнения представляют значительный интерес при численном анализе развития пластических зон в процессе нагружения.

Уравнение равновесия для приращений напряжений

$$\nabla \cdot (d\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$$

необходимо представить в изостатических координатах. Для этого требуется продифференцировать спектральное разложение тензора напряжений (1.5) вдоль процесса нагружения. Ясно, что базис  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  поворачивается в процессе нагружения.

С целью описания поворота главных осей напряжений  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  при малом догружении введем аксиальный вектор  $d\boldsymbol{\omega}$  такой, что

$$d\mathbf{l} = d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}, \quad d\mathbf{m} = d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}, \quad d\mathbf{n} = d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}. \quad (7.18)$$

Разложим вектор  $d\boldsymbol{\omega}$  по ортонормированному собственному локальному базису тензора напряжений  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ :

$$d\boldsymbol{\omega} = \mathbf{l}d\omega_1 + \mathbf{m}d\omega_2 + \mathbf{n}d\omega_3. \quad (7.19)$$

Изменение ориентаций базисных векторов на основании (7.18) и (7.19) вычисляется как

$$d\mathbf{l} = -\mathbf{n}d\omega_2 + \mathbf{m}d\omega_3, \quad d\mathbf{m} = \mathbf{n}d\omega_1 - \mathbf{l}d\omega_3, \quad d\mathbf{n} = -\mathbf{m}d\omega_1 + \mathbf{l}d\omega_2. \quad (7.20)$$

Дифференцируя спектральное разложение тензора напряжений (1.5) вдоль процесса нагружения и учитывая (7.20), получим

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}d\sigma_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}d\sigma_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}d\sigma_3 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega_3 + \\ & + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n}(\sigma_3 - \sigma_1)d\omega_2 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l}(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega_3 + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}(\sigma_2 - \sigma_3)d\omega_1 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}(\sigma_3 - \sigma_1)d\omega_2 + \\ & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}(\sigma_2 - \sigma_3)d\omega_1. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Для дальнейших преобразований будем использовать следующие типичные формулы вида:

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) = \mathbf{l} \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \varphi \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + \varphi(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l},$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{n} \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \varphi \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + \varphi(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{n},$$

а также (7.7) и (7.8).

После ряда довольно сложных преобразований в итоге можно получить следующее представление уравнения равновесия в приращениях  $\nabla \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  в ортогональных изостатических координатах:

$$\begin{aligned} d_1 d\sigma_1 + \kappa_{23}(d\sigma_1 - d\sigma_2) + \kappa_{32}(d\sigma_1 - d\sigma_3) + (2\kappa_{13} + \kappa_{31} + d_2) [(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega_3] + \\ + (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3) [(\sigma_3 - \sigma_1)d\omega_2] = 0, \\ d_2 d\sigma_2 + \kappa_{31}(d\sigma_2 - d\sigma_3) + \kappa_{13}(d\sigma_2 - d\sigma_1) + (2\kappa_{23} + \kappa_{32} + d_1) [(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega_3] + \\ + (2\kappa_{21} + \kappa_{12} + d_3) [(\sigma_2 - \sigma_3)d\omega_1] = 0, \\ d_3 d\sigma_3 + \kappa_{12}(d\sigma_3 - d\sigma_1) + \kappa_{21}(d\sigma_3 - d\sigma_2) + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1) [(\sigma_3 - \sigma_1)d\omega_2] + \\ + (2\kappa_{31} + \kappa_{13} + d_2) [(\sigma_2 - \sigma_3)d\omega_1] = 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Второе и третье уравнения получаются из первого путем циклической перестановки индексов.

При догружении вдоль ребра  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k$  приведенные выше уравнения несколько упрощаются

$$\begin{aligned} d_1 d\sigma_3 + 2k(2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)d\omega_2 &= 0, \\ d_2 d\sigma_3 - 2k(2\kappa_{21} + \kappa_{12} + d_3)d\omega_1 &= 0, \\ d_3 d\sigma_3 + 2k(2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1)d\omega_2 - 2k(2\kappa_{31} + \kappa_{13} + d_2)d\omega_1 &= 0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

образуя замкнутую систему относительно приращений  $d\sigma_3, d\omega_1, d\omega_2$ .

Характеристическое уравнение системы (7.23) есть

$$\begin{vmatrix} 0 & \nu_3 & \nu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_2 \\ -\nu_2 & \nu_1 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0,$$

где  $\nu_j$  — компоненты единичного вектора нормали к характеристической поверхности относительно базиса  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ . При условии  $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$  оно имеет три корня  $\nu_3 = 0$ ,  $\nu_3 = 1/\sqrt{2}$ ,  $\nu_3 = -1/\sqrt{2}$ , т.е. система (7.23) принадлежит к гиперболическому типу, направления, ортогональные третьей главной оси напряжений, — характеристические, а остальные характеристические направления расположены на конусе с углом полураствора  $\pi/4$  и осью, направленной вдоль третьей главной оси напряжений. Следовательно, система уравнений в приращениях имеет точно такие же характеристические направления, как и система (1.12).

## 7.4. Уравнения совместности деформаций в приращениях

Обратимся теперь к уравнениям кинематики пластического течения. В качестве таковых удобнее всего взять уравнения совместности главных приращений полных деформаций  $d\varepsilon_j$ , представленные в изостатической криволинейной координатной сетке, вместе с кинематическими уравнениями, следующими из ассоциированного закона течения, рассмотренными в разделе 1.3. Ассоциированный закон течения устанавливает соосность тензора напряжений и тензора приращения пластических деформаций, и в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, — единственное дополнительное кинематическое соотношение, выражающее несжимаемость пластического течения.<sup>51</sup>

Уравнения совместности деформаций пригодны при любой определяющей зависимости и в инвариантной форме для приращения тензора деформаций представляются тензорным уравнением (см. [43], с. 223)

$$\nabla \times d\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (7.24)$$

где тензор второго ранга  $d\mathbf{P}$  есть с точностью до знака ротор тензора приращения полных деформаций:  $d\mathbf{P} = -\text{rot}d\boldsymbol{\varepsilon} = -d\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla$ .

<sup>51</sup>Учет упругой деформации обуславливает несоосность тензоров  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ . Однако по-прежнему соотношения ассоциированного закона течения для ребра призмы Треска и определяющий закон упругости не регламентируют жестко приращения  $d\varepsilon_j$  (см. (1.52)), устанавливая единственное уравнение в главных осях напряжений, связывающее статические и кинематические поля (1.53). Здесь уместно также напомнить о точном определении величин  $d\varepsilon_j$ ,  $d\varepsilon_j^E$  и  $d\varepsilon_j^P$  и о том, что  $d\varepsilon_j$ , вообще говоря, не являются приращениями главных полных деформаций, а используются лишь для обозначения суммы (1.51).

Заметим, что для тензора  $d\mathbf{P}$  оказывается справедливой также следующая формула:  $d\mathbf{P} = (\nabla \times d\boldsymbol{\varepsilon})^T$ .<sup>52</sup>

Для удобства обозначим через  $d\mathbf{S}$  тензор второго ранга, определяемый соотношением

$$d\mathbf{S} = \nabla \times (d\boldsymbol{\varepsilon}) \times \nabla. \quad (7.25)$$

В этом уравнении безразличен порядок выполнения операции векторного умножения. Тензор  $d\mathbf{S}$  называется тензором несовместности.

Тензор несовместности  $d\mathbf{S}$  симметричен:

$$d\mathbf{S} = (d\mathbf{S})^T \quad (7.26)$$

и может быть вычислен также по формуле

$$\begin{aligned} -d\mathbf{S} = & ((\nabla \cdot \nabla) \text{tr} d\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \cdot (\nabla \cdot d\boldsymbol{\varepsilon})) \mathbf{I} + \nabla \otimes (\nabla \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}) + \\ & + (\nabla \otimes (\nabla \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}))^T - (\nabla \cdot \nabla) d\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \otimes \nabla \text{tr} d\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Поскольку  $(\nabla \times d\boldsymbol{\varepsilon})^T = -(d\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla)$ ,  $d\mathbf{P} = (\nabla \times d\boldsymbol{\varepsilon})^T = -(d\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla)$ , тензор  $-d\mathbf{S}$  в точности равен тензору  $\nabla \times d\mathbf{P}$ . Следовательно, условия совместности деформаций в приращениях представляются тензорным уравнением

$$d\mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (7.28)$$

Физические компоненты  $dS_{<jl>}$  тензора  $d\mathbf{S}$  в произвольной ортогональной криволинейной системе координат вычисляются по формулам ([47], с. 662-664)

$$\begin{aligned} dS_{<11>} = & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{g_{22}}d\varepsilon_{<32>})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial(\sqrt{g_{33}}d\varepsilon_{<33>})}{\partial \xi^2} \right] + \frac{d\varepsilon_{<12>}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^1} + \right. \\ & + \frac{d\varepsilon_{<23>}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^3} + \left. \frac{d\varepsilon_{<22>}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^2} \right\} - \\ & - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{g_{22}}d\varepsilon_{<22>})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial(\sqrt{g_{33}}d\varepsilon_{<23>})}{\partial \xi^2} \right] - \right. \\ & - \frac{d\varepsilon_{<32>}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^2} - \frac{d\varepsilon_{<13>}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^1} + \left. \frac{d\varepsilon_{<33>}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^3} \right\} + \\ & + \frac{1}{g_{11}\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^1} \left[ \frac{\partial(\sqrt{g_{11}}d\varepsilon_{<21>})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial(\sqrt{g_{22}}d\varepsilon_{<22>})}{\partial \xi^1} \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^1} \left[ \frac{d\varepsilon_{<31>}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{<12>}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^2} + \frac{d\varepsilon_{<11>}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^1} \right] - \\ & - \frac{1}{g_{11}\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^1} \left[ \frac{\partial(\sqrt{g_{33}}d\varepsilon_{<33>})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial(\sqrt{g_{11}}d\varepsilon_{<31>})}{\partial \xi^3} \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^1} \left[ \frac{d\varepsilon_{<21>}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^2} + \frac{d\varepsilon_{<13>}}{\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{<11>}}{\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^1} \right], \end{aligned}$$

<sup>52</sup>Дифференциальный оператор  $\text{Rot} = \nabla \times (\nabla \times)^T$  широко используется в теории дислокаций. Уравнение совместности для приращений тензора полных деформаций с использованием этого оператора записывается просто как  $\text{Rot} d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ .



$$\begin{aligned}
dS_{<12>} = & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{g_{33}}d\varepsilon_{<33>})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial(\sqrt{g_{11}}d\varepsilon_{<31>})}{\partial \xi^3} \right] - \frac{d\varepsilon_{<21>}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^2} - \right. \\
& \left. - \frac{d\varepsilon_{<13>}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{<11>}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^1} \right\} - \\
& - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left\{ \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{g_{33}}d\varepsilon_{<23>})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial(\sqrt{g_{11}}d\varepsilon_{<21>})}{\partial \xi^3} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{d\varepsilon_{<31>}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^2} - \frac{d\varepsilon_{<13>}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^2} \right\} + \\
& + \frac{1}{g_{22}\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^1} \left[ \frac{\partial(\sqrt{g_{22}}d\varepsilon_{<23>})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial(\sqrt{g_{33}}d\varepsilon_{<33>})}{\partial \xi^2} \right] + \\
& + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^1} \left[ \frac{d\varepsilon_{<12>}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^1} + \frac{d\varepsilon_{<23>}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{<22>}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^2} \right] + \\
& + \frac{1}{g_{22}\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial(\sqrt{g_{11}}d\varepsilon_{<21>})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial(\sqrt{g_{22}}d\varepsilon_{<22>})}{\partial \xi^1} \right] + \\
& + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \xi^2} \left[ \frac{d\varepsilon_{<31>}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{<12>}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^2} + \frac{d\varepsilon_{<11>}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^1} \right] + \\
& + \frac{1}{g_{22}\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^3} \left[ \frac{\partial(\sqrt{g_{11}}d\varepsilon_{<31>})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial(\sqrt{g_{22}}d\varepsilon_{<32>})}{\partial \xi^1} \right] + \\
& + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^3} \left[ \frac{d\varepsilon_{<12>}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^3} - \frac{d\varepsilon_{<21>}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi^3} \right],
\end{aligned}$$

причем компоненты  $dS_{<22>}$ ,  $dS_{<33>}$  получаются циклической перестановкой индексов в выражении для  $dS_{<11>}$ , а компоненты  $dS_{<23>}$ ,  $dS_{<31>}$  — в выражении для  $dS_{<12>}$ ;  $d\varepsilon_{<ij>}$  — физические компоненты приращения тензора деформаций.

В декартовой системе координат компоненты тензора несовместности  $d\mathbf{S}$  вычисляются по формулам

$$dS_{lp} = e_{nrl}e_{mkp}\partial_n\partial_k d\varepsilon_{rm},$$

где  $e_{nrl}$  — кососимметричные символы, или

$$\begin{aligned}
-dS_{33} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 d\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}, \\
-dS_{11} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 d\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3}, \\
-dS_{22} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2\frac{\partial^2 d\varepsilon_{31}}{\partial x_3\partial x_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-dS_{23} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\
-dS_{31} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\
-dS_{12} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right).
\end{aligned}$$

Это — известные формулы Сен-Венана.

Компоненты тензора несовместности  $d\mathbf{S}$  в декартовой системе координат могут быть найдены также в виде

$$\begin{aligned}
-dS_{il} &= (\partial_j \partial_j d\varepsilon_{kk} - \partial_j \partial_k d\varepsilon_{jk}) \delta_{il} + \partial_i \partial_k d\varepsilon_{lk} + \partial_l \partial_k d\varepsilon_{ki} - \\
&\quad - \partial_j \partial_j d\varepsilon_{li} - \partial_i \partial_l d\varepsilon_{kk}.
\end{aligned}$$

Обычно считается, что независимых уравнений совместности должно быть шесть (т.к. тензор  $-d\mathbf{S} = \nabla \times d\mathbf{P}$  симметричен).

На самом деле ситуация несколько сложнее.<sup>53</sup> Действительно, оказывается, что тензор  $d\mathbf{S}$  удовлетворяет, как это следует из его определения (7.25), уравнению<sup>54</sup>

$$\nabla \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (7.29)$$

Следовательно, независимых условий должно быть всего три.

Используя приведенные выше выражения для компонент тензора  $d\mathbf{S}$  в декартовой системе координат, прямым подсчетом можно показать, что векторное уравнение (7.29) эквивалентно трем скалярным:

$$\begin{aligned}
\partial_1 dS_{11} + \partial_2 dS_{12} + \partial_3 dS_{31} &= 0, \\
\partial_1 dS_{12} + \partial_2 dS_{22} + \partial_3 dS_{23} &= 0, \\
\partial_1 dS_{31} + \partial_2 dS_{23} + \partial_3 dS_{33} &= 0.
\end{aligned}$$

На первый взгляд может показаться, что три независимых условия в декартовой системе координат могут составить либо три уравнения  $dS_{11} = 0$ ,  $dS_{22} = 0$ ,  $dS_{33} = 0$ , либо три уравнения  $dS_{23} = 0$ ,  $dS_{31} = 0$ ,  $dS_{12} = 0$ . Однако ни три условия первой группы, ни три условия второй группы по отдельности использовать нельзя (см., например, [48]). Известно [49], что если три условия первой группы удовлетворяются внутри некоторой односвязной области, а вторая тройка условий — на границе этой области, то все три условия второй группы будут удовлетворяться внутри области. Аналогичное утверждение будет справедливо, если поменять группы условий местами.

<sup>53</sup>Хотя условия совместности деформаций были известны уже Сен-Венану, в настоящее время нет полной ясности в вопросе о числе независимых условий совместности.

<sup>54</sup>Приводимое ниже уравнение в тензорном анализе традиционно называется тождеством Бианки (L. Bianchi) (см. по этому поводу Схоутен А.Я. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. С. 146, 147).

Ясно, что главные оси тензора  $d\mathbf{S}$  ориентированы, вообще говоря, не так, как главные оси тензора напряжений. Поэтому преобразование уравнения (7.29) к главным осям напряжений следует проводить по схеме, изложенной в разделе 7.3.

В ортогональной изостатической координатной сетке уравнение (7.29) приобретает форму

$$\begin{aligned}
& d_1 dS_{\langle 11 \rangle} + \kappa_{23}(dS_{\langle 11 \rangle} - dS_{\langle 22 \rangle}) + \kappa_{32}(dS_{\langle 11 \rangle} - dS_{\langle 33 \rangle}) + \\
& \quad + (2\kappa_{13} + \kappa_{31} + d_2)dS_{\langle 12 \rangle} + (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)dS_{\langle 13 \rangle} = 0, \\
& d_2 dS_{\langle 22 \rangle} + \kappa_{31}(dS_{\langle 22 \rangle} - dS_{\langle 33 \rangle}) + \kappa_{13}(dS_{\langle 22 \rangle} - dS_{\langle 11 \rangle}) + \\
& \quad + (2\kappa_{23} + \kappa_{32} + d_1)dS_{\langle 21 \rangle} + (2\kappa_{21} + \kappa_{12} + d_3)dS_{\langle 23 \rangle} = 0, \\
& d_3 dS_{\langle 33 \rangle} + \kappa_{12}(dS_{\langle 33 \rangle} - dS_{\langle 11 \rangle}) + \kappa_{21}(dS_{\langle 33 \rangle} - dS_{\langle 22 \rangle}) + \\
& \quad + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1)dS_{\langle 31 \rangle} + (2\kappa_{31} + \kappa_{13} + d_2)dS_{\langle 32 \rangle} = 0,
\end{aligned} \tag{7.30}$$

где  $dS_{\langle ij \rangle}$  есть по-прежнему физические компоненты тензора  $d\mathbf{S}$  в изостатической системе координат.

Разложим приращение полной деформации на упругую и пластическую составляющие

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^E + d\boldsymbol{\varepsilon}^P. \tag{7.31}$$

Согласно соотношениям ассоциированного закона течения, приращение пластических деформаций есть тензор, соосный тензору напряжений, что оказывается, вообще говоря, неверным для приращения тензора упругих деформаций. Ясно поэтому, что преобразование уравнений совместности деформаций к главным осям напряжений проще всего осуществляется в том случае, когда упругими деформациями можно пренебречь. Мы поэтому сначала рассмотрим этот наиболее простой случай, не опираясь при этом на приведенные ранее общие формулы для физических компонент тензора  $d\mathbf{S}$ , а производя непосредственный расчет дифференциальных операторов, фигурирующих в (7.25).

Инвариантное представление уравнений совместности для главных приращений деформаций (приращениями упругих деформаций будем пренебрегать) имеет вид:

$$\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3))^T = \mathbf{0}. \tag{7.32}$$

Замечая, что<sup>55</sup>

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1) &= [(\nabla d\varepsilon_1) \times \mathbf{l}] \otimes \mathbf{l} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} (\Gamma_{11}^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \Gamma_{11}^3 \mathbf{m} \otimes \mathbf{l}) - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{12}^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \Gamma_{13}^3 \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \right\} d\varepsilon_1, \end{aligned}$$

а также два аналогичных выражения

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2) &= [(\nabla d\varepsilon_2) \times \mathbf{m}] \otimes \mathbf{m} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (-\Gamma_{22}^1 \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \Gamma_{22}^3 \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}) + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{21}^1 \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \Gamma_{23}^3 \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \right\} d\varepsilon_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3) &= [(\nabla d\varepsilon_3) \times \mathbf{n}] \otimes \mathbf{n} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} (\Gamma_{33}^1 \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} - \Gamma_{33}^2 \mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{31}^1 \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{32}^2 \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \right\} d\varepsilon_3, \end{aligned}$$

матрицу тензора

$$d\mathbf{P} = (\nabla \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3))^T$$

в главных осях напряжений можно получить в виде

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & d_3 d\varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{\kappa_{12}^{-1}} & -d_2 d\varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1}{\kappa_{13}^{-1}} \\ -d_3 d\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2}{\kappa_{21}^{-1}} & 0 & d_1 d\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1}{\kappa_{23}^{-1}} \\ d_2 d\varepsilon_3 + \frac{d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2}{\kappa_{31}^{-1}} & -d_1 d\varepsilon_3 + \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{\kappa_{32}^{-1}} & 0 \end{array} \right\|. \quad (7.33)$$

Тензор  $\nabla \times d\mathbf{P}$  в главных осях тензора напряжений представляется матрицей (мы опускаем детали вывода), элементы которой приводятся ниже:

$$(\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 11 \rangle} = d_2 dP_{\langle 31 \rangle} - d_3 dP_{\langle 21 \rangle} + \kappa_{31} dP_{\langle 31 \rangle} - \kappa_{21} dP_{\langle 21 \rangle} + \\ + \kappa_{32} dP_{\langle 23 \rangle} - \kappa_{23} dP_{\langle 32 \rangle},$$

$$(\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 12 \rangle} = d_2 dP_{\langle 32 \rangle} + \kappa_{31} (dP_{\langle 32 \rangle} + dP_{\langle 23 \rangle}) + \kappa_{23} dP_{\langle 31 \rangle},$$

$$(\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 13 \rangle} = -d_3 dP_{\langle 23 \rangle} - \kappa_{21} (dP_{\langle 23 \rangle} + dP_{\langle 32 \rangle}) - \kappa_{32} dP_{\langle 21 \rangle},$$

$$(\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 21 \rangle} = -d_1 dP_{\langle 31 \rangle} - \kappa_{32} (dP_{\langle 31 \rangle} + dP_{\langle 13 \rangle}) - \kappa_{13} dP_{\langle 32 \rangle},$$

$$(\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 22 \rangle} = d_3 dP_{\langle 12 \rangle} - d_1 dP_{\langle 32 \rangle} + \kappa_{12} dP_{\langle 12 \rangle} - \kappa_{32} dP_{\langle 32 \rangle} + \\ + \kappa_{13} dP_{\langle 31 \rangle} - \kappa_{31} dP_{\langle 13 \rangle},$$

$$(\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 23 \rangle} = d_3 dP_{\langle 13 \rangle} + \kappa_{12} (dP_{\langle 13 \rangle} + dP_{\langle 31 \rangle}) + \kappa_{31} dP_{\langle 12 \rangle},$$

---

<sup>55</sup>Для ортогональной криволинейной сетки мы определяем  $\Gamma$ -символы как коэффициенты в разложениях частных производных от единичных локальных базисных векторов  $\mathbf{i}_\alpha$ :

$$\frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \xi^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{i}_\gamma,$$

где

$$|\mathbf{i}_\gamma| = 1.$$

Тем самым мы отступаем от традиционного определения символов Кристоффеля.

$$(\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 31 \rangle} = d_1 dP_{\langle 21 \rangle} + \kappa_{23}(dP_{\langle 21 \rangle} + dP_{\langle 12 \rangle}) + \kappa_{12}dP_{\langle 23 \rangle},$$

$$(\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 32 \rangle} = -d_2 dP_{\langle 12 \rangle} - \kappa_{13}(dP_{\langle 12 \rangle} + dP_{\langle 21 \rangle}) - \kappa_{21}dP_{\langle 13 \rangle},$$

$$(\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 33 \rangle} = d_1 dP_{\langle 23 \rangle} - d_2 dP_{\langle 13 \rangle} + \kappa_{23}dP_{\langle 23 \rangle} - \kappa_{13}dP_{\langle 13 \rangle} + \\ + \kappa_{21}dP_{\langle 12 \rangle} - \kappa_{12}dP_{\langle 21 \rangle}.$$

Подставляя элементы матрицы (7.33) в матрицу тензора  $\nabla \times d\mathbf{P}$ , находим физические компоненты этого тензора в форме:

$$\begin{aligned} (\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 11 \rangle} &= d_2 d_2 d\varepsilon_3 + d_3 d_3 d\varepsilon_2 + d_2 [\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - d_3 [\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] + \\ &+ \kappa_{31}d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{21}d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{32}d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{23}d_1 d\varepsilon_3 + (\kappa_{31}^2 - \kappa_{21}^2)(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \\ &+ \kappa_{32}\kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_{32}\kappa_{23}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3), \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 12 \rangle} &= -d_2 d_1 d\varepsilon_3 + d_2 [\kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \kappa_{31}d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{31}d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{23}d_2 d\varepsilon_3 + \\ &+ \kappa_{31}\kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + \kappa_{31}\kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \kappa_{23}\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2), \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 13 \rangle} &= -d_3 d_1 d\varepsilon_2 - d_3 [\kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{21}d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{21}d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{32}d_3 d\varepsilon_2 - \\ &- \kappa_{23}\kappa_{21}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_{32}\kappa_{21}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \kappa_{21}\kappa_{32}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2), \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 21 \rangle} &= -d_1 d_2 d\varepsilon_3 - d_1 [\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{32}d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{13}d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{32}d_2 d\varepsilon_1 - \\ &- \kappa_{31}\kappa_{32}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \kappa_{13}\kappa_{32}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_{13}\kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3), \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 22 \rangle} &= d_1 d_1 d\varepsilon_3 + d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3 [\kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - d_1 [\kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] + \\ &+ \kappa_{12}d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{32}d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{13}d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{31}d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{12}^2(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \\ &- \kappa_{32}^2(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + \kappa_{13}\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \kappa_{31}\kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1), \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 23 \rangle} &= -d_3 d_2 d\varepsilon_1 + d_3 [\kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{12}d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{12}d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{31}d_3 d\varepsilon_1 + \\ &+ \kappa_{12}\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \kappa_{12}\kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \kappa_{31}\kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3), \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 31 \rangle} &= -d_1 d_3 d\varepsilon_2 + d_1 [\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{23}d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{23}d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{12}d_1 d\varepsilon_2 + \\ &+ \kappa_{23}\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \kappa_{23}\kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + \kappa_{23}\kappa_{12}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1), \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 32 \rangle} &= -d_2 d_3 d\varepsilon_1 - d_2 [\kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \kappa_{13}d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{13}d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{21}d_2 d\varepsilon_1 - \\ &- \kappa_{12}\kappa_{13}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \kappa_{21}\kappa_{13}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \kappa_{13}\kappa_{21}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1), \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{\langle 33 \rangle} &= d_1 d_1 d\varepsilon_2 + d_2 d_2 d\varepsilon_1 + d_1 [\kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - d_2 [\kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] + \\ &+ \kappa_{23}d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{13}d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{21}d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{12}d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{23}^2(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \\ &- \kappa_{13}^2(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \kappa_{12}\kappa_{21}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + \kappa_{12}\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что приведенные выше девять компонент тензора  $-d\mathbf{S} = \nabla \times d\mathbf{P}$  можно получить по следующей схеме: выражения для компонент с индексами 22 и 33 получаются циклической перестановкой индексов в выражении для компоненты 11; выражения для компонент с индексами 23 и 31 получаются циклической перестановкой индексов в выражении для компоненты 12.

Равенство нулю всех приведенных только что физических компонент тензора  $\nabla \times d\mathbf{P}$  и дает условия совместности деформаций в изостатической системе координат. Следует отметить, что полученные выражения для  $dS_{\langle 21 \rangle}$ ,  $dS_{\langle 31 \rangle}$ ,  $dS_{\langle 32 \rangle}$  отличаются по форме соответственно от  $dS_{\langle 12 \rangle}$ ,  $dS_{\langle 13 \rangle}$ ,  $dS_{\langle 23 \rangle}$ . Тем не менее в силу симметрии тензора  $d\mathbf{S}$  должны быть справедливы равенства  $dS_{\langle 21 \rangle} = dS_{\langle 12 \rangle}$ ,  $dS_{\langle 31 \rangle} = dS_{\langle 13 \rangle}$ ,  $dS_{\langle 32 \rangle} = dS_{\langle 23 \rangle}$ .

Для конкретных типов нагружений уравнения совместности упрощаются. Так, при нагружении вдоль грани призмы Треска

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = 2k, \quad |\sigma_2 - \sigma_3| < 2k, \quad |\sigma_3 - \sigma_1| < 2k$$

имеем  $d\varepsilon_3 = 0$ ,  $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = 0$ , следовательно, матрица (7.33) приобретает вид

$$\begin{vmatrix} 0 & d_3 d\varepsilon_1 + 2\kappa_{12} d\varepsilon_1 & -d_2 d\varepsilon_1 - 2\kappa_{13} d\varepsilon_1 \\ d_3 d\varepsilon_1 + 2\kappa_{21} d\varepsilon_1 & 0 & +d_1 d\varepsilon_2 - 2\kappa_{23} d\varepsilon_1 \\ \kappa_{31} d\varepsilon_1 & \kappa_{32} d\varepsilon_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вихрь тензора  $d\mathbf{P}$  при этом в главных осях напряжений имеет компоненты

$$\begin{aligned} (\nabla \times d\mathbf{P})_{<11>} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_2(\kappa_{31} d\varepsilon_1) - d_3(\kappa_{21} d\varepsilon_1) - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_1 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 + \\ &\quad + (\kappa_{31}^2 - 3\kappa_{32}\kappa_{23} - \kappa_{21}^2) d\varepsilon_1, \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{<12>} &= d_2(\kappa_{32} d\varepsilon_1) - \kappa_{31} d_1 d\varepsilon_1 + \kappa_{31}(\kappa_{32} - \kappa_{23}) d\varepsilon_1, \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{<13>} &= d_3 d_1 d\varepsilon_1 + 2d_3(\kappa_{23} d\varepsilon_1) + \kappa_{21} d_1 d\varepsilon_1 - \kappa_{32} d_3 d\varepsilon_1 + \\ &\quad + 2\kappa_{21}(\kappa_{23} - \kappa_{32}) d\varepsilon_1, \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{<21>} &= -d_1(\kappa_{31} d\varepsilon_1) - \kappa_{32} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{32}(\kappa_{13} - \kappa_{31}) d\varepsilon_1, \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{<22>} &= d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3(\kappa_{12} d\varepsilon_1) - d_1(\kappa_{32} d\varepsilon_1) + \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} d_2 d\varepsilon_1 + \\ &\quad + (\kappa_{12}^2 - \kappa_{32}^2 + 2\kappa_{31}\kappa_{13}) d\varepsilon_1, \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{<23>} &= -d_3 d_2 d\varepsilon_1 - 2d_3(\kappa_{13} d\varepsilon_1) - \kappa_{12} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} d_3 d\varepsilon_1 + \\ &\quad + 2\kappa_{12}(\kappa_{31} - \kappa_{13}) d\varepsilon_1, \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{<31>} &= d_1 d_3 d\varepsilon_1 + d_1(\kappa_{21} d\varepsilon_1) + 2\kappa_{23} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_1 d\varepsilon_1 + \\ &\quad + \kappa_{23}(\kappa_{21} - \kappa_{12}) d\varepsilon_1, \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{<32>} &= -d_2 d_3 d\varepsilon_1 - d_2(\kappa_{12} d\varepsilon_1) - 2\kappa_{13} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_2 d\varepsilon_1 + \\ &\quad + \kappa_{13}(\kappa_{21} - \kappa_{12}) d\varepsilon_1, \\ (\nabla \times d\mathbf{P})_{<33>} &= d_2 d_2 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_1 - 2d_1(\kappa_{23} d\varepsilon_1) + 2d_2(\kappa_{13} d\varepsilon_1) - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_1 + \\ &\quad + \kappa_{13} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 + 2(\kappa_{13}^2 - \kappa_{23}^2) d\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим вывод уравнений совместности деформаций в приращениях в криволинейной сетке изостат с учетом вклада упругой составляющей  $d\boldsymbol{\varepsilon}^E$ .

Поскольку тензор упругих деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}^E$  соосен тензору напряжений  $d\boldsymbol{\sigma}$ , то

$$\boldsymbol{\varepsilon}^E = \varepsilon_1^E \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \varepsilon_2^E \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \varepsilon_3^E \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (7.34)$$

где  $\varepsilon_j^E$  — собственные значения тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ .

Главные оси тензора  $d\boldsymbol{\varepsilon}^E$ , вообще говоря, отличаются от главных осей тензора напряжений. Поворот главных осей напряжений  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$  при малом

догружении определяется аксиальным вектором  $d\omega$  согласно (7.18). Дифференцируя спектральное разложение (7.34) и учитывая (7.20), находим матрицу тензора  $d\epsilon^E$  в главных осях напряжений

$$\left\| \begin{array}{ccc} d\epsilon_1^E & (\epsilon_1^E - \epsilon_2^E)d\omega_3 & (\epsilon_3^E - \epsilon_1^E)d\omega_2 \\ (\epsilon_1^E - \epsilon_2^E)d\omega_3 & d\epsilon_2^E & (\epsilon_2^E - \epsilon_3^E)d\omega_1 \\ (\epsilon_3^E - \epsilon_1^E)d\omega_2 & (\epsilon_2^E - \epsilon_3^E)d\omega_1 & d\epsilon_3^E \end{array} \right\|.$$

Вычисление дополнительного вклада от приращений упругих деформаций в тензор  $dS$  проще всего реализуется по данным выше общим формулам для компонент  $dS_{<ij>}$ .

В результате можно получить следующие формулы для вычисления компонент тензора  $dS$ :<sup>56</sup>

$$\begin{aligned} dS_{<11>} = & -d_2d_2d\epsilon_3 - d_3d_3d\epsilon_2 + (\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2)(d\epsilon_3 - d\epsilon_2) + \\ & + d_3[\kappa_{21}(d\epsilon_3 - d\epsilon_2)] - d_2[\kappa_{31}(d\epsilon_3 - d\epsilon_2)] - \\ & - \kappa_{23}\kappa_{32}(d\epsilon_2 + d\epsilon_3 - 2d\epsilon_1) - \\ & - \kappa_{31}d_2d\epsilon_3 - \kappa_{21}d_3d\epsilon_2 - \kappa_{32}d_1d\epsilon_2 - \kappa_{23}d_1d\epsilon_3 + \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} & + (4\kappa_{31}\kappa_{21} + 2d_2\kappa_{21} + 2d_3\kappa_{31} + d_2d_3 + d_3d_2 + 3\kappa_{31}d_3 + 3\kappa_{21}d_2) [(\epsilon_2^E - \epsilon_3^E)d\omega_1] + \\ & + (2\kappa_{23}\kappa_{12} + \kappa_{32}\kappa_{21} + \kappa_{23}\kappa_{21} + d_3\kappa_{23} + 2\kappa_{23}d_3) [(\epsilon_3^E - \epsilon_1^E)d\omega_2] + \\ & + (2\kappa_{32}\kappa_{13} + \kappa_{23}\kappa_{31} + \kappa_{31}\kappa_{32} + d_2\kappa_{32} + 2\kappa_{32}d_2) [(\epsilon_1^E - \epsilon_2^E)d\omega_3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dS_{<12>} = & d_2d_1d\epsilon_3 + d_2[\kappa_{32}(d\epsilon_3 - d\epsilon_1)] + \kappa_{31}d_1(d\epsilon_3 - d\epsilon_2) - \\ & - \kappa_{23}d_2d\epsilon_3 + \kappa_{31}(\kappa_{32} - \kappa_{23})(d\epsilon_3 - d\epsilon_1) + \\ & + (\kappa_{23}\kappa_{21} - \kappa_{21}\kappa_{32} - d_3\kappa_{32} - d_3d_1 + \kappa_{23}d_3 - 2\kappa_{21}d_1 - \kappa_{32}d_3) [(\epsilon_2^E - \epsilon_3^E)d\omega_1] + \\ & + (2\kappa_{21}\kappa_{13} - 2\kappa_{31}\kappa_{12} - 2d_2\kappa_{12} + d_3\kappa_{13} - d_3\kappa_{31} - d_2d_3 + \kappa_{21}d_2 - \\ & - 2\kappa_{31}d_3 - 2\kappa_{12}d_2 + \kappa_{13}d_3) [(\epsilon_3^E - \epsilon_1^E)d\omega_2] + \\ & + (\kappa_{23}\kappa_{32} + 2\kappa_{31}\kappa_{13} + 2\kappa_{21}\kappa_{12} - \kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2 + d_3\kappa_{12} - d_2\kappa_{31} + \\ & + d_3d_3 + \kappa_{21}d_3 + \kappa_{12}d_3) [(\epsilon_1^E - \epsilon_2^E)d\omega_3]. \end{aligned} \quad (7.36)$$

При догружении вдоль ребра  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2k$  в формулах (7.35), (7.36) следует положить:  $\epsilon_3^E - \epsilon_2^E = k/G$ ,  $\epsilon_3^E - \epsilon_1^E = k/G$ ,  $\epsilon_1^E - \epsilon_2^E = 0$ .

Уместно также напомнить о том, что величины  $d\epsilon_j$ , вообще говоря, не являются приращениями главных полных деформаций, а используются как обозначение для суммы  $d\epsilon_j^E$  и  $d\epsilon_j^P$ , причем  $d\epsilon_j^E$  — приращение главного значения  $\epsilon_j^E$  тензора упругих деформаций,  $d\epsilon_j^P$  — собственное значение тензора  $d\epsilon^P$ . Если пренебречь упругими деформациями, то величина  $d\epsilon_j$  представляет собой главное значение тензора приращения полной деформации.

<sup>56</sup> Мы опускаем детали вывода и приводим, как обычно, только выражения для физических компонент  $dS_{<11>}$  и  $dS_{<12>}$  в изостатической системе координат. Остальные компоненты можно получить, пользуясь следующей схемой: выражения для компонент с индексами 22 и 33 получаются циклической перестановкой индексов в выражении для компоненты  $dS_{<11>}$ ; выражения для компонент с индексами 23 и 31 получаются циклической перестановкой индексов в выражении для компоненты  $dS_{<12>}$ .



## 7.5. Плоская деформация

Плоское деформированное состояние характеризуется условием  $\varepsilon_{33} = 0$ . Любое условие пластичности в случае плоского деформированного состояния приводится к виду  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ . В плоскости течения  $x_1, x_2$  имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером 1, другое — номером 2.

Обозначая через  $\theta$  угол наклона к оси  $x_1$  изостаты первого семейства, получаем

$$\kappa_1 = \kappa_{13} = -d_1\theta, \quad \kappa_2 = \kappa_{23} = d_2\theta. \quad (7.37)$$

Имеется всего одно деривационное соотношение, которое имеет вид

$$d_1\kappa_2 + d_2\kappa_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 0 \quad (7.38)$$

и удовлетворяется тождественно в силу  $\kappa_1 = -d_1\theta, \kappa_2 = d_2\theta$ .

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе—Максвелла

$$\begin{aligned} d_1\sigma_1 + \kappa_2(\sigma_1 - \sigma_2) &= 0, \\ d_2\sigma_2 + \kappa_1(\sigma_2 - \sigma_1) &= 0, \end{aligned} \quad (7.39)$$

или (см., например, [50], с. 75):

$$d_1\sigma_1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0, \quad d_2\sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0, \quad (7.40)$$

где  $\rho_1, \rho_2$  — радиусы кривизны линий главных напряжений, причем эти величины считаются положительными, если с возрастанием натурального параметра вдоль кривой касательная вращается против часовой стрелки, при этом положительное направление вдоль первой траектории выбирается произвольно, а положительное направление вдоль второй траектории определяется вращением против хода часовой стрелки положительного направления первой траектории.

Так как в случае плоской пластической деформации  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ , то уравнения (7.40) приобретают следующий вид:

$$d_1\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_2} = 0, \quad d_2\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_1} = 0. \quad (7.41)$$

Эта система гиперболична. Характеристики делят пополам угол между главными направлениями напряжений. Вводя в систему (7.41) производные вдоль характеристических направлений (примем, что первая характеристика отклоняется от первого главного направления напряжений, соответствующего наибольшему главному напряжению, на угол  $\pi/4$  по ходу часовой

стрелки)

$$\overline{d_1} = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{2}}, \overline{d_2} = \frac{d_1 + d_2}{\sqrt{2}}, \quad (7.42)$$

складывая, а затем вычитая уравнения этой системы, получим интегрируемые соотношения Генки вдоль характеристик:

$$\overline{d_1}(\sigma_1 - 2k\theta) = 0, \quad \overline{d_2}(\sigma_1 + 2k\theta) = 0. \quad (7.43)$$

В случае плоской деформации уравнения равновесия в приращениях главных напряжений, сформулированные в изостатической сетке, можно получить в виде

$$\begin{aligned} d_1 d\sigma_1 + \kappa_2(d\sigma_1 - d\sigma_2) + (2\kappa_1 + d_2)[(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega] &= 0, \\ d_2 d\sigma_2 + \kappa_1(d\sigma_2 - d\sigma_1) + (2\kappa_2 + d_1)[(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega] &= 0, \end{aligned} \quad (7.44)$$

где  $d\omega = d\omega_3$  — малый поворот главных осей напряжений в плоскости течения при догружении, и, замечая, что  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ , —

$$\begin{aligned} d_1 d\sigma_1 + 2k(2\kappa_1 + d_2)d\omega &= 0, \\ d_2 d\sigma_1 + 2k(2\kappa_2 + d_1)d\omega &= 0. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Характеристики системы уравнений в приращениях делят пополам угол между главными направлениями напряжений, т.е. являются линиями скольжения.

Вводя производные по характеристическим направлениям  $\sqrt{2}\overline{d_1} = d_1 - d_2$ ,  $\sqrt{2}\overline{d_2} = d_1 + d_2$ , с помощью (7.45) находим соотношения вдоль характеристик

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\overline{d_1}(d\sigma_1 - 2kd\omega) + 4k(\kappa_1 - \kappa_2)d\omega &= 0, \\ \sqrt{2}\overline{d_2}(d\sigma_1 + 2kd\omega) + 4k(\kappa_1 + \kappa_2)d\omega &= 0. \end{aligned}$$

В случае плоской деформации условия совместности в приращениях деформаций сводятся к одному уравнению

$$\begin{aligned} dS_{<33>} &= -d_1 d_1 d\varepsilon_2 - d_2 d_2 d\varepsilon_1 - (d_1 \kappa_2 - d_2 \kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \\ &\quad - \kappa_2 d_1 (2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_1 d_2 (2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) + \\ &\quad + (d_1 d_2 + d_2 d_1 + 3\kappa_1 d_1 + 3\kappa_2 d_2)[(\varepsilon_1^E - \varepsilon_2^E)d\omega] + \\ &\quad + 2(2\kappa_1 \kappa_2 + d_1 \kappa_1 + d_2 \kappa_2)(\varepsilon_1^E - \varepsilon_2^E)d\omega = 0 \end{aligned} \quad (7.46)$$

и, в силу  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ , в этом уравнении следует положить  $\varepsilon_1^E - \varepsilon_2^E = k/G$ .

Интересно заметить, что в случае плоской деформации компонента  $dS_{<33>}$  тензора  $d\mathbf{S}$  может быть вычислена по формуле

$$dS_{<33>} = \nabla \cdot (\nabla \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}) - \Delta d\varepsilon_{jj}.$$

Тождества Бианки (7.29) не дают никаких новых нетривиальных соотношений.

Пренебрегая в (7.46) вкладом упругой деформации, находим

$$dS_{<33>} = -d_1 d_1 d\varepsilon_2 - d_2 d_2 d\varepsilon_1 - (d_1 \kappa_2 - d_2 \kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \\ - \kappa_2 d_1 (2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_1 d_2 (2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0. \quad (7.47)$$

С помощью условия несжимаемости  $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = 0$  из уравнения (7.47) исключается  $d\varepsilon_2$  так, что получается уравнение только относительно  $d\varepsilon_1$ . По главной части этого уравнения

$$d_1 d_1 d\varepsilon_1 - d_2 d_2 d\varepsilon_1 + \dots = 0$$

легко устанавливается, что кинематические уравнения принадлежат к гиперболическому типу и характеристики являются линиями скольжения.

Ясно, что уравнение второго порядка для  $d\varepsilon_1$  может быть заменено системой двух уравнений первого порядка. С этой целью введем обозначения:

$$u = \ln |d\varepsilon_1|, \quad p = d_1 u, \quad q = d_2 u. \quad (7.48)$$

Переменная  $u$  — логарифмическое приращение деформации.

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} d_1 d\varepsilon_1 &= p e^u, \\ d_2 d\varepsilon_1 &= q e^u, \\ d_1 d_1 d\varepsilon_1 &= e^u d_1 p + e^u p^2, \\ d_2 d_2 d\varepsilon_1 &= e^u d_2 q + e^u q^2, \end{aligned}$$

уравнение совместности деформаций представим в форме

$$d_2 q - d_1 p = p^2 - q^2 + 3(\kappa_2 p - \kappa_1 q) + 2(d_1 \kappa_2 - d_2 \kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2). \quad (7.49)$$

Заметим далее, что в силу

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = -\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2 \quad (7.50)$$

справедливо соотношение

$$d_2 p - d_1 q = -\kappa_1 p + \kappa_2 q. \quad (7.51)$$

Следовательно, относительно величин  $p$  и  $q$  имеем систему уравнений первого порядка (7.49), (7.51).

Вводя обозначения

$$P = d_1 \theta, \quad Q = d_2 \theta,$$

систему кинематических уравнений можно привести к следующему симметричному виду:

$$\begin{aligned} d_2q - d_1p &= p^2 - q^2 + 3(pQ + qP) + 2(d_1Q + d_2P + Q^2 - P^2), \\ d_2p - d_1q &= pP + qQ. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Напомним, что здесь величины  $p$  и  $q$  — производные вдоль линий главных напряжений от логарифмического приращения деформации.

Уравнения статики также преобразуются к симметричной форме относительно величин  $P$  и  $Q$ . Действительно, уравнения равновесия (7.41) с помощью обозначений  $P^* = d_1\sigma_1/(2k)$ ,  $Q^* = d_2\sigma_1/(2k)$  представляются как

$$P^* = -Q, \quad Q^* = -P. \quad (7.53)$$

На основании (7.50) находим

$$d_2P^* - d_1Q^* = -\kappa_1P^* + \kappa_2Q^* = PP^* + QQ^*$$

и в силу (7.53) —

$$d_1P - d_2Q = -2PQ.$$

Переписывая в новых обозначениях деривационную формулу (7.38), имеем

$$d_2P - d_1Q = P^2 + Q^2.$$

Таким образом получаем систему статических уравнений плоской задачи в форме:

$$\begin{aligned} d_1P - d_2Q &= -2PQ, \\ d_2P - d_1Q &= P^2 + Q^2. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Последняя система уравнений позволяет сформулировать ряд новых результатов, касающихся геометрии поля изостат.

Преобразуя систему уравнений (7.54) к характеристическим переменным (см. (7.42)), находим

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\overline{d_1}(P+Q) &= -(P+Q)^2, \\ \sqrt{2}\overline{d_2}(P-Q) &= (P-Q)^2, \end{aligned}$$

или

$$\overline{d_1} \frac{1}{P+Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{d_2} \frac{1}{P-Q} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7.55)$$

Вспоминая определение величин  $P$  и  $Q$ , получим следующие соотношения вдоль характеристик:

$$\overline{d_1} \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{d_2} \frac{1}{\kappa_2 + \kappa_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (7.56)$$

т.е. обратная разность (сумма) кривизн изостатических линий при продвижении вдоль первой (второй) характеристики изменяется пропорционально пройденному пути.<sup>57</sup>

## 7.6. Осесимметричная деформация

В случае осесимметричной деформации удобно ввести цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ . Окружное направление является главным. При этом этому главному направлению второй номер. В плоскости  $\varphi = \text{const}$  имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий, соответствующих первому и третьему главным направлениям. Введем угол  $\chi$  так, чтобы наклон (к горизонтальной оси) траекторий первого семейства был равен  $\pi - \chi$ .<sup>58</sup>

Ясно, что справедливы следующие соотношения:

$$d_2 = 0, \quad \kappa_{23} = \frac{\cos \chi}{r}, \quad \kappa_{21} = \frac{\sin \chi}{r}, \quad \kappa_{31} = 0, \quad \kappa_{13} = 0. \quad (7.57)$$

Деривационные соотношения выражаются либо группой уравнений

$$\begin{aligned} d_1 \kappa_{32} + d_3 \kappa_{12} + \kappa_{12}^2 + \kappa_{32}^2 &= 0, \\ d_1 \kappa_{23} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{12} \kappa_{21} &= 0, \\ d_3 \kappa_{21} + \kappa_{21}^2 + \kappa_{23} \kappa_{32} &= 0, \\ d_3 \kappa_{23} &= \kappa_{21} (\kappa_{32} - \kappa_{23}), \end{aligned}$$

либо группой —

$$\begin{aligned} d_1 \kappa_{32} + d_3 \kappa_{12} + \kappa_{12}^2 + \kappa_{32}^2 &= 0, \\ d_1 \kappa_{23} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{12} \kappa_{21} &= 0, \\ d_3 \kappa_{21} + \kappa_{21}^2 + \kappa_{23} \kappa_{32} &= 0, \\ d_1 \kappa_{21} &= \kappa_{23} (\kappa_{12} - \kappa_{21}). \end{aligned}$$

<sup>57</sup>Этот результат — аналог второй теоремы Генки о геометрии поля скольжения в состоянии плоской деформации (см., например, [5], с. 218). Вторая теорема Генки непосредственно следует из (7.56). Действительно, применяя (7.42) к  $\theta$ , находим

$$\overline{\kappa}_1 = \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}},$$

где  $\overline{\kappa}_1 = -\overline{d}_1 \theta$ ,  $\overline{\kappa}_2 = \overline{d}_2 \theta$  — кривизны характеристических линий, что означает

$$\overline{d}_1 \frac{1}{\overline{\kappa}_2} = 1, \quad \overline{d}_2 \frac{1}{\overline{\kappa}_1} = 1,$$

а эти соотношения как раз и составляют содержание второй теоремы Генки.

<sup>58</sup>Угол  $\chi$  связан с углом  $\gamma$  (см. раздел 6.2) соотношением  $\chi = \pi - \gamma$ .

Компоненты тензора напряжений можно задать в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{\langle rr \rangle} &= p + \tau \cos 2\chi, \\ \sigma_{\langle zz \rangle} &= p - \tau \cos 2\chi, \\ \sigma_{\langle \varphi\varphi \rangle} &= \sigma_2, \\ \sigma_{\langle rz \rangle} &= -\tau \sin 2\chi,\end{aligned}\tag{7.58}$$

где

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Главные напряжения определяются как

$$\sigma_1, \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_{\langle rr \rangle} + \sigma_{\langle zz \rangle}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{\langle rr \rangle} - \sigma_{\langle zz \rangle})^2 + 4\sigma_{\langle rz \rangle}^2}.\tag{7.59}$$

Уравнения равновесия, сформулированные относительно изостатической сетки, есть

$$\begin{aligned}d_1\sigma_1 + \kappa_{23}(\sigma_1 - \sigma_2) + \kappa_{32}(\sigma_1 - \sigma_3) &= 0, \\ d_3\sigma_3 + \kappa_{21}(\sigma_3 - \sigma_2) + \kappa_{12}(\sigma_3 - \sigma_1) &= 0,\end{aligned}\tag{7.60}$$

и при догрузении вдоль ребра призмы Треска  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k$  в этих уравнениях следует положить  $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$ ,  $\sigma_3 - \sigma_2 = 2k$ .

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}\kappa_{12} &= \frac{\text{ctg}\chi}{r}d_1r + d_1\chi - \frac{\cos\chi\text{ctg}\chi}{r} = d_1\chi, \\ \kappa_{32} &= \frac{\text{tg}\chi}{r}d_3r - d_3\chi - \frac{\sin\chi\text{tg}\chi}{r} = -d_3\chi,\end{aligned}\tag{7.61}$$

уравнения равновесия (7.60) можно также представить в форме

$$\begin{aligned}d_1\sigma_1 + \frac{\cos\chi}{r}(\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_1 - \sigma_3)d_3\chi &= 0, \\ d_3\sigma_3 + \frac{\sin\chi}{r}(\sigma_3 - \sigma_2) - (\sigma_1 - \sigma_3)d_1\chi &= 0.\end{aligned}$$

Уравнения равновесия в приращениях главных напряжений, сформулированные в изостатической сетке, можно получить в следующем виде:

$$\begin{aligned}d_1d\sigma_1 + \kappa_{23}(d\sigma_1 - d\sigma_2) + \kappa_{32}(d\sigma_1 - d\sigma_3) + \\ + (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3) [(\sigma_3 - \sigma_1)d\omega] &= 0, \\ d_3d\sigma_3 + \kappa_{21}(d\sigma_3 - d\sigma_2) + \kappa_{12}(d\sigma_3 - d\sigma_1) + \\ + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1) [(\sigma_3 - \sigma_1)d\omega] &= 0,\end{aligned}\tag{7.62}$$

где  $d\omega = d\omega_2$  — поворот главных осей напряжений 1 и 3 (в плоскости  $\varphi = \text{const}$ ) при догрузении.

Если догружение идет вдоль ребра призмы Треска  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k$ , то в этих уравнениях следует положить  $d\sigma_1 - d\sigma_2 = 0$ ,  $d\sigma_3 - d\sigma_1 = 0$ ,  $d\sigma_3 - d\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$ :

$$\begin{aligned} d_1 d\sigma_3 + 2k(2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)d\omega &= 0, \\ d_3 d\sigma_3 + 2k(2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1)d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Анализ главной части этой системы

$$\begin{aligned} d_1 d\sigma_3 + 2kd_3 d\omega + \dots &= 0, \\ d_3 d\sigma_3 + 2kd_1 d\omega + \dots &= 0 \end{aligned}$$

сразу же позволяет заключить, что уравнения в приращениях гиперболические, а характеристики делят пополам угол между главными осями 1 и 3, т.е. являются линиями скольжения.

Вдоль характеристических направлений  $\sqrt{2}\overline{d_1} = d_1 - d_3$ ,  $\sqrt{2}\overline{d_3} = d_1 + d_3$ , поэтому соотношения вдоль характеристик имеют вид

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\overline{d_1}(d\sigma_3 - 2kd\omega) + 2k(2\kappa_{12} + \kappa_{21} - 2\kappa_{32} - \kappa_{23})d\omega &= 0, \\ \sqrt{2}\overline{d_3}(d\sigma_3 + 2kd\omega) + 2k(2\kappa_{12} + \kappa_{21} + 2\kappa_{32} + \kappa_{23})d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Компоненты осесимметричного тензора приращения деформации можно задать в форме

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{\langle rr \rangle} &= d\lambda + d\mu \cos 2\chi, \\ d\varepsilon_{\langle \varphi\varphi \rangle} &= d\varepsilon_2, \\ d\varepsilon_{\langle zz \rangle} &= d\lambda - d\mu \cos 2\chi, \\ d\varepsilon_{\langle rz \rangle} &= -d\mu \sin 2\chi, \end{aligned} \tag{7.63}$$

где

$$d\lambda = \frac{1}{2}(d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3), \quad d\mu = \frac{1}{2}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3).$$

Главные приращения деформаций вычисляются по формуле

$$d\varepsilon_1, d\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(d\varepsilon_{\langle rr \rangle} + d\varepsilon_{\langle zz \rangle}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(d\varepsilon_{\langle rr \rangle} - d\varepsilon_{\langle zz \rangle})^2 + 4(d\varepsilon_{\langle rz \rangle})^2}. \tag{7.64}$$

Условия совместности приращений деформаций выражаются тремя уравнениями относительно изостатических координат

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{21}^2 (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + d_3 [\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{23}\kappa_{32}(d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\ &\quad - \kappa_{21}d_3 d\varepsilon_2 - \kappa_{32}d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23}d_1 d\varepsilon_3 + \\ &\quad + (2\kappa_{23}\kappa_{12} + \kappa_{21}\kappa_{32} + \kappa_{21}\kappa_{23} + d_3\kappa_{23} + 2\kappa_{23}d_3) [(\varepsilon_3^E - \varepsilon_1^E)d\omega] = 0, \\ dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_3 + (\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2)(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + d_1 [\kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \\ &\quad - \kappa_{12}d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{32}d_1 d\varepsilon_3 - d_3 [\kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] + \\ &\quad + (4\kappa_{32}\kappa_{12} + 2d_3\kappa_{32} + 2d_1\kappa_{12} + d_3d_1 + d_1d_3 + 3\kappa_{12}d_1 + 3\kappa_{32}d_3) [(\varepsilon_3^E - \varepsilon_1^E)d\omega] = 0, \end{aligned} \tag{7.65}$$



$$dS_{<33>} = -d_1 d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23}^2 (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - d_1 [\kappa_{23} (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{21} \kappa_{12} (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 - 2d\varepsilon_3) - \\ - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_2 + \\ + (2\kappa_{21} \kappa_{32} + \kappa_{12} \kappa_{23} + \kappa_{21} \kappa_{23} + d_1 \kappa_{21} + 2\kappa_{21} d_1) [(\varepsilon_3^E - \varepsilon_1^E) d\omega] = 0,$$

из которых, в силу тождества Бианки  $\nabla \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{0}$ , независимы только два, например, первое и третье. Действительно, условия  $dS_{<12>} = 0$ ,  $dS_{<23>} = 0$ ,  $dS_{<31>} = 0$  удовлетворяются тождественно в силу  $d\omega_1 = 0$ ,  $d\omega_3 = 0$ ,  $\kappa_{31} = 0$ ,  $\kappa_{13} = 0$ ,  $d_2 = 0$ . Это означает, что тензор  $d\mathbf{S}$  соосен тензору напряжений и  $dS_{<11>} = dS_1$ ,  $dS_{<22>} = dS_2$ ,  $dS_{<33>} = dS_3$ . Тождества Бианки при этом сводятся к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} d_1 dS_1 + \kappa_{23} (dS_1 - dS_2) + \kappa_{32} (dS_1 - dS_3) &= 0, \\ d_3 dS_3 + \kappa_{12} (dS_3 - dS_1) + \kappa_{21} (dS_3 - dS_2) &= 0. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Следовательно, если хотя бы одна из кривизн  $\kappa_{23}$  или  $\kappa_{21}$  отлична от нуля, то из условий  $dS_1 = 0$ ,  $dS_3 = 0$  необходимо  $dS_2 = 0$ .

Независимыми можно также считать два условия  $dS_{<11>} = 0$  и  $dS_{<22>} = 0$ . Если кривизна  $\kappa_{32}$  отлична от нуля, то из уравнений (7.66) необходимо следует  $dS_{<33>} = 0$ .

При догружении вдоль ребра  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k$  в формулах (7.65) следует положить  $\varepsilon_3^E - \varepsilon_1^E = k/G$ .

Пренебрегая вкладом упругих деформаций, уравнения совместности в приращении (7.65) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} dS_{<11>} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{21}^2 (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + d_3 [\kappa_{21} (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{23} \kappa_{32} (d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\ &\quad - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_2 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_3 = 0, \\ dS_{<22>} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_3 + (\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2) (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + d_1 [\kappa_{32} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \\ &\quad - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_3 - d_3 [\kappa_{12} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] = 0, \\ dS_{<33>} &= -d_1 d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23}^2 (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - d_1 [\kappa_{23} (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{21} \kappa_{12} (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 - 2d\varepsilon_3) - \\ &\quad - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_2 = 0. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Независимые условия совместности  $dS_{<11>} = 0$  и  $dS_{<22>} = 0$  после исключения из них величины  $d\varepsilon_2$  с помощью условия несжимаемости позволяют сформулировать систему двух уравнений второго порядка относительно  $d\varepsilon_1$  и  $d\varepsilon_3$ . Главная часть этой системы есть

$$\begin{aligned} d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3 d_3 d\varepsilon_3 + \dots &= 0, \\ -d_3 d_3 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_3 + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение при условии  $\nu_1^2 + \nu_3^2 = 1$  имеет три корня:  $\nu_3 = 0$  (корень кратности два),  $\nu_3 = 1/\sqrt{2}$ ,  $\nu_3 = -1/\sqrt{2}$ , т.е. система уравнений  $dS_{<11>} = 0$  и  $dS_{<22>} = 0$  принадлежит к гиперболическому типу, направления, ортогональные третьей главной оси напряжений, — характеристические, а остальные характеристические направления делят пополам углы между главными осями напряжений 1 и 3. Следовательно, характеристиками системы уравнений совместности приращений деформаций  $dS_{<11>} = 0$  и  $dS_{<22>} = 0$  будут изостаты, ортогональные третьему главному направлению, и линии скольжения.

Далее, учитывая, что

$$\kappa_{12} = d_1 \chi, \quad \kappa_{32} = -d_3 \chi, \quad \kappa_{21} = \frac{\sin \chi}{r}, \quad \kappa_{23} = \frac{\cos \chi}{r},$$

а также

$$\begin{aligned} d_3 \kappa_{21} &= \kappa_{23} d_3 \chi - \kappa_{21}^2, \\ d_1 \kappa_{23} &= -\kappa_{21} d_1 \chi - \kappa_{23}^2, \end{aligned}$$

получаем условия совместности (7.67) в виде

$$\begin{aligned}
 dS_{<11>} &= -d_3d_3d\varepsilon_2 + \kappa_{23}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)d_3\chi + \kappa_{21}(d_3d\varepsilon_3 - d_3d\varepsilon_2) - \kappa_{23}\kappa_{32}(d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\
 &\quad - \kappa_{21}d_3d\varepsilon_2 - \kappa_{32}d_1d\varepsilon_2 - \kappa_{23}d_1d\varepsilon_3 = 0, \\
 dS_{<22>} &= -d_3d_3d\varepsilon_1 - d_1d_1d\varepsilon_3 + (\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2 - d_1d_3\chi - d_3d_1\chi)(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \kappa_{12}d_3d\varepsilon_1 - \\
 &\quad - \kappa_{32}d_1d\varepsilon_3 + \kappa_{32}(d_1d\varepsilon_1 - d_1d\varepsilon_3) - \kappa_{12}(d_3d\varepsilon_1 - d_3d\varepsilon_3) = 0, \\
 dS_{<33>} &= -d_1d_1d\varepsilon_2 + \kappa_{21}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)d_1\chi - \kappa_{23}(d_1d\varepsilon_2 - d_1d\varepsilon_1) - \kappa_{21}\kappa_{12}(d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 - 2d\varepsilon_3) - \\
 &\quad - \kappa_{23}d_1d\varepsilon_2 - \kappa_{21}d_3d\varepsilon_1 - \kappa_{12}d_3d\varepsilon_2 = 0.
 \end{aligned}$$

## Приложение I

### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА И АМПЕРА

Ниже приводятся основные сведения, относящиеся к определению, свойствам и применению преобразований Лежандра и Ампера (см. также [41], с. 140-142; [51], с. 95-104). Эти преобразования широко используются в математической физике, в частности, для точной линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим достаточно гладкую функцию  $f(x_k)$ , определенную в некоторой области пространства  $n$  измерений.

Установим соответствие между переменными  $x_k$  и  $x_k^*$  на основании уравнений

$$\partial_i f(x_k) = x_i^*. \quad (\text{A})$$

Переменные  $x_i^*$  часто называют также тангенциальными координатами.

Если для некоторых значений переменных  $x_i^*$  решение системы уравнений (A) есть  $x_i$ , и в точке  $x_i$  определитель Гесса отличен от нуля

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| \neq 0,$$

то по теореме о неявных функциях существует некоторая окрестность точки  $x_i$ , в которой между переменными  $x_k$  и  $x_k^*$  имеется взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое соответствие:

$$x_i = x_i(x_k^*). \quad (\text{B})$$

Преобразованием Лежандра функции  $f(x_k)$  называется функция  $f^*(x_k^*)$ , определяемая уравнением

$$f^*(x_s^*) = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* - f(x_k), \quad (\text{C})$$

в котором переменные  $x_k$  выражены через переменные  $x_k^*$  с помощью соотношений (B).

Согласно построению преобразование Лежандра корректно определено только в достаточно малой окрестности точки  $x_k$ . Однако если функция  $f(x_k)$  строго выпукла в некоторой выпуклой области, то преобразование Лежандра корректно определено всюду в этой области.

Действительно, тогда между переменными  $x_k$  и  $x_k^*$  имеется взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое соответствие: если бы такого соответствия не было, то нашлись бы две различные точки  $x'_k$  и  $x''_k$ , в которых значения производных  $\partial_i f$  одинаковы и, следовательно,

$$((\partial_i f)_{x_s=x'_s} - (\partial_i f)_{x_s=x''_s})(x'_i - x''_i) = 0,$$

что противоречит строгой выпуклости функции  $f(x_k)$  :

$$((\partial_i f)_{x_s=x'_s} - (\partial_i f)_{x_s=x''_s})(x'_i - x''_i) > 0$$

при условии  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| \neq 0$ .

Одним из важнейших свойств преобразования Лежандра является свойство взаимности. Чтобы установить это свойство продифференцируем функцию  $f^*$ , определенную уравнением (С), по  $x_k$ , рассматривая ее как сложную функцию:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^*}{\partial x_i^*} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}.$$

В силу того, что определитель Гесса функции  $f$  отличен от нуля из последнего соотношения находим

$$\frac{\partial f^*}{\partial x_i^*} = x_i, \quad (\text{D})$$

и кроме того

$$f(x_s) = \sum_{i=1}^n x_i^* x_i - f^*(x_k^*). \quad (\text{E})$$

Таким образом, восстановить исходную функцию по ее преобразованию Лежандра очень просто: достаточно применить еще раз это же преобразование. Ясно, поэтому, что преобразование Лежандра инволютивно, т.е. его квадрат есть тождественное преобразование. Это свойство преобразования Лежандра обычно называют свойством взаимности.

Рассмотрим далее преобразование Лежандра от функции двух независимых переменных  $f(x_1, x_2)$ . Будем пользоваться классическими обозначениями Монжа  $p, q, r, s, t$  для первых и вторых частных производных от функции  $f$ . Соответствующие производные от  $f^*$  обозначим через  $p^*, q^*, r^*, s^*, t^*$ .

Согласно свойству взаимности имеем:

$$p^* = x_1, \quad q^* = x_2. \quad (\text{F})$$

Вычислим теперь вторые частные производные  $r^*, s^*, t^*$ .

Ясно, что

$$\begin{aligned} dp^* &= r^* dx_1^* + s^* dx_2^*, \\ dq^* &= s^* dx_1^* + t^* dx_2^*, \end{aligned}$$

или, благодаря свойству взаимности,

$$\begin{aligned} dx_1 &= r^*(rdx_1 + sdx_2) + s^*(sdx_1 + tdx_2), \\ dx_2 &= s^*(rdx_1 + sdx_2) + t^*(sdx_1 + tdx_2), \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности дифференциалов  $dx_1, dx_2$  можно заключить, что

$$\begin{aligned} r^*r + s^*s &= 1, & r^*s + s^*t &= 0, \\ s^*r + t^*s &= 0, & s^*s + t^*t &= 1. \end{aligned}$$

С помощью последней группы формул находим:

$$r^* = \frac{t}{rt - s^2}, \quad s^* = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad t^* = \frac{r}{rt - s^2} \quad (\text{G})$$

и обратно

$$r = \frac{t^*}{r^*t^* - s^{*2}}, \quad s = \frac{-s^*}{r^*t^* - s^{*2}}, \quad t = \frac{r^*}{r^*t^* - s^{*2}}. \quad (\text{H})$$

Из этих соотношений можно заключить, что

$$(rt - s^2)(r^*t^* - s^{*2}) = 1.$$

Формулы (А) и (Н) позволяют утверждать, что нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$A(p, q)r + 2B(p, q)s + C(p, q)t = 0 \quad (\text{I})$$

после применения преобразования Лежандра и при условии

$$rt - s^2 \neq 0 \quad (\text{J})$$

изображается как

$$A(x_1^*, x_2^*)t^* - 2B(x_1^*, x_2^*)s^* + C(x_1^*, x_2^*)r^* = 0, \quad (\text{K})$$

т.е. становится линейным.

Еще одним примером преобразования, обладающего свойством взаимности, является преобразование Ампера функции  $f$ :

$$f^*(x_1^*, x_2^*) = x_2x_2^* - f(x_1, x_2), \quad (\text{L})$$

где в правой части переменные  $x_1, x_2$  следует выразить через переменные  $x_1^*, x_2^*$  на основании уравнений

$$x_1^* = x_1, \quad x_2^* = \frac{\partial f}{\partial x_2}. \quad (\text{M})$$

Дифференцируя левую и правую части уравнения (L) по  $x_1$  и  $x_2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial f^*}{\partial x_2^*} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial f^*}{\partial x_2^*} - x_2 \right) &= 0, \end{aligned}$$

откуда, при условии

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \neq 0$$

сразу же находим

$$x_2 = \frac{\partial f^*}{\partial x_2^*}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial f^*}{\partial x_1^*}, \quad (\text{N})$$

т.е. — преобразование Ампера обладает свойством взаимности:

$$f(x_1, x_2) = x_2 x_2^* - f^*(x_1^*, x_2^*), \quad (\text{O})$$

$$x_1 = x_1^*, \quad x_2 = \frac{\partial f^*}{\partial x_2^*}. \quad (\text{P})$$

На основании (M) и (N) для первых производных от преобразования Ампера функции  $f$  имеем

$$p^* = -p, \quad q^* = x_2, \quad (\text{Q})$$

а также — обратные зависимости

$$p = -p^*, \quad q = x_2^*, \quad (\text{R})$$

а для вторых, как показывает несложный расчет, —

$$r^* = \frac{s^2 - rt}{t}, \quad s^* = -\frac{s}{t}, \quad t^* = \frac{1}{t}, \quad (\text{S})$$

и обратно

$$r = \frac{s^{*2} - r^* t^*}{t^*}, \quad s = -\frac{s^*}{t^*}, \quad t = \frac{1}{t^*}. \quad (\text{T})$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} dp^* &= r^* dx_1 + s^* dx_2^*, \\ dq^* &= s^* dx_1 + t^* dx_2^*, \end{aligned}$$

и кроме того

$$dp^* = -dp = -r dx_1 - s dx_2, \quad dq^* = dx_2, \quad dx_2^* = s dx_1 + t dx_2,$$

находим, что

$$\begin{aligned} (r + r^* + s s^*) dx_1 + (s + s^* t) dx_2 &= 0, \\ (s^* + t^* s) dx_1 + (t t^* - 1) dx_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда в силу независимости дифференциалов  $dx_1$  и  $dx_2$  сразу следуют формулы (S) и (T).

Изображение по Амперу уравнений в частных производных уже не требует выполнения условия (J), но, очевидно, возможно только при условии  $t \neq 0$ . Заметим также, что уравнение  $rt - s^2 = 0$  с успехом интегрируется с помощью преобразования Ампера (см., например, [41], с. 142).



## Библиографический список

- [1] Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости: Сб. ст. // Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 20-23.
- [2] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
- [3] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
- [4] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [5] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
- [6] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [7] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [8] Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах: Сб. ст.// Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 41-56.
- [9] Генки Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах: Сб. ст.// Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 80-101.
- [10] Шилд Р.Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии: Сб. переводов "Механика". 1957. №1. С. 102-122.<sup>59</sup>
- [11] Ишлинский А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля// Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201-224. (Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 17-42.)
- [12] Ишлинский А.Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости// Уч. зап. МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90-108. (См. там же: С. 62-83.)
- [13] Ивлев Д.Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред// Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90-96.
- [14] Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях// Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. №3. С. 546-549.
- [15] Ивлев Д.Д. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности// Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. №3. С. 137. (Статья воспроизводится также в книге: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 20-21.)
- [16] Ивлев Д.Д. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска// Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. №6. С. 112-114. (См. там же: С. 263-267.)
- [17] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86-94.

---

<sup>59</sup>Оригинальная работа: Shield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry// Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V. 233A. No. 1193. P. 267-287.

- [18] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. №5. С. 102-120.
- [19] Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990. 208 с.
- [20] Лагалли М. Векторное исчисление. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 344 с.
- [21] Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 374 с.
- [22] Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
- [23] Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. I. Аппарат исследования. Общие основания теории и внутренняя геометрия поверхностей. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947. 512 с.
- [24] Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. II. Поверхности в пространстве. Отображения и изгибания поверхностей. Специальные вопросы. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.
- [25] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 520 с.
- [26] Рапеевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.: Гостехтеоретиздат, 1947. 356 с.
- [27] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
- [28] Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
- [29] Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948. 316 с.
- [30] Jenne W. Raumliche Spannungsverteilungen in festen Korpern bei plastischer Deformation// ZAMM. 1928. Bd. 8. H. 1. S. 18-44.
- [31] Lippman H. Principal line theory of axially-symmetric plastic deformation// J. Mech. and Phys. Solids. 1962. V. 10. No. 2. P. 111-122.
- [32] Lippman H. Statics and dynamics of axially-symmetric plastic flow// J. Mech. and Phys. Solids. 1965. V. 13. No. 1. P. 29-39.
- [33] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики: В кн.// Пуанкаре А. Избранные труды: В 3 Т. М.: Наука, 1972. Т. 2. С. 9-445.
- [34] Пуанкаре А. Об одной геометрической теореме: В кн.// Пуанкаре А. Избранные труды: В 3 Т. М.: Наука, 1972. Т. 2. С. 775-807.
- [35] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
- [36] Радаев Ю.Н. Предельное состояние шейки произвольного очертания в жесткопластическом теле// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1988. №6. С. 69-75.
- [37] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [38] Положий Г.Н. Уравнения математической физики. М.: Высш. шк., 1964. 560 с.
- [39] Гурса Э. Курс математического анализа. Т. III. Ч. I. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 276 с.
- [40] Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
- [41] Гурса Э. Курс математического анализа. Т. I. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 592 с.
- [42] Радаев Ю.Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2000. №5. С. 27-45.
- [43] Блох В.И. Теория упругости. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1964. 484 с.
- [44] Папкович П.Ф. Теория упругости. М.; Л.: Оборонгиз, 1939. 640 с.

- [45] Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. New York: Dover Publications, 1944. 643 pp.
- [46] Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 492 с.
- [47] Malvern L. Introduction to the Mechanics of Continuous Medium. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice – Hall, 1969. 714 pp.
- [48] Washizu K. A note on the conditions of compatibility// J. Math. Phys. 1958. V. 36. P. 306-312.
- [49] Moriguti S. Fundamental theory of dislocations of elastic bodies// Oyo Sugaku Rikigaku. 1947. V. 1. P. 87-90.
- [50] Фрохт М.М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Т. I. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 432 с.
- [51] Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.

## Приложение II

# АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ<sup>1</sup>

### Вводные замечания

Настоящее приложение посвящено поиску автомодельных решений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при использовании критерия текучести Треска для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. Основополагающие результаты в этой области были получены в [1]–[4].

В [1] исследована осесимметричная задача теории пластичности в предположении выполнения условия полной пластичности; доказана формальная статическая определимость и гиперболичность основных уравнений и найдены характеристические кривые. Позднее в работах [2], [3] было показано, что именно состояние полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определимых уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Таким образом стала очевидной возможность обобщения (по крайней мере частичного) теории пластического плоского деформированного состояния на пространственный случай.

В дальнейшем была исследована пространственная задача при произвольном кусочно-линейном условии текучести и найдено, что как в пространственном, так и в осесимметричном случае на ребре кусочно-линейного условия текучести уравнения математической теории пластичности являются гиперболическими и имеют характеристические элементы, совпадающие с площадками максимальных касательных напряжений.

---

<sup>1</sup>Изложение в основном следует статьям: Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н., Рябова Ю.Н. Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественная серия. 2003. №2(28). С. 96-112; Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н. К теории осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественная серия. 2003. №4(30). С. 125-139; Радаев Ю.Н., Гудков В.А. О канонических формах автомодельных уравнений осесимметричной задачи теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественная серия. 2003. №4(30). С. 140-146.

Любопытно отметить, что уравнения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности для грани призмы Треска также являются гиперболическими, характеристические направления ориентированы так же, как и главные направления тензора напряжений, т.е. характеристики касаются главных направлений тензора напряжений.

Следующий шаг в исследовании уравнений математической теории пластичности сделан в [5]. Уравнения пространственной задачи также были рассмотрены при условии пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. Было показано, что поля собственных векторов тензора напряжений, отвечающих наибольшему (или наименьшему) главному напряжению, необходимо будут расслоенными. Это важнейшее геометрическое свойство поля напряжений в пространственном состоянии пластических тел, установленное в [5], позволило исследовать трехмерную задачу математической теории пластичности с совершенно новых позиций (см. также [6]). Были найдены такие криволинейные координаты, что уравнения равновесия, преобразованные к новым координатам, свелись к трем интегрируемым уравнениям вдоль линий главных напряжений. Получены инварианты, сохраняющие свои значения вдоль траекторий главных напряжений. Установлена возможность отделения одной из пространственных переменных в нелинейных уравнениях пространственного пластического равновесия. Выделены классы пространственных задач теории пластичности, для которых поля напряжений соответствуют ребру призмы Треска и необходимо являются расслоенными. Доказано, что интегрирование уравнений теории пластичности для задач этих классов сводится к отысканию канонических отображений пространственных областей. Был развит аппарат производящих функций в применении к плоскому и осесимметричному случаю.

В то время как теория плоского деформированного состояния достаточно хорошо развита и известны эффективные аналитические и численные методы решения задач, ничего подобного нельзя сказать об осесимметричной задаче.<sup>2</sup> Некоторые осесимметричные автомодельные решения, соответствующие течению на ребре призмы Треска, рассматривались Р. Шилдом (R.T. Shield) [7]; в частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы. Автомодельные решения для скоростей, соответствующие граням кусочно-линей-

---

<sup>2</sup>Это обстоятельство отмечалось еще Р. Хиллом (R. Hill) в 1950 г., правда, в применении к осесимметричной задаче, сформулированной на основе критерия текучести Мизеса, когда задача не является гиперболической (см. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 301, 302). Неясно, как в принципе строить решения смешанных краевых задач таких, как вдавливание конуса или волочение проволоки. Известные осесимметричные распределения напряжений или приближенны, или получены обратными методами, а затем приведены в соответствие с физической сущностью явления.

ных условий текучести, приводятся в монографии [4], с. 89-94. Известны также автомодельные решения осесимметричной задачи при условии текучести Мизеса.<sup>3</sup> Здесь также отметим ряд работ [8]–[11], посвященных осесимметричной задаче математической теории пластичности.

В настоящем исследовании поиск осесимметричных автомодельных решений реализован на основе соотношений пространственной задачи [5], сформулированных в изостатических координатах, с учетом осевой симметрии и возможности отделения еще одной неугловой изостатической координаты.

Ниже рассматриваются уравнения осесимметричной задачи математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. Гиперболические уравнения равновесия, которые формально могут быть исследованы независимо от соотношений кинематики, преобразованы к криволинейной координатной сетке с координатными линиями, совпадающими с траекториями главных напряжений. С помощью автомодельной замены изостатических переменных в условиях осевой симметрии вместо системы уравнений в частных производных получена система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем самым доказано существование автомодельных решений осесимметричной задачи в случае, когда автомодельная переменная является степенной функцией от специальным образом подобранных изостатических криволинейных координат. При некоторых значениях параметров, участвующих в представлении автомодельного решения, удастся понизить порядок этой системы еще на одну единицу и свести таким образом задачу к решению одного нелинейного неавтономного уравнения первого порядка. Это уравнение затем проанализировано численно внутри его естественной области определения.

## 1. Трехмерные уравнения математической теории пластичности для ребра призмы Треска

Общие уравнения трехмерной задачи математической теории пластичности для ребра призмы Треска исследованы, например, в работе [5]. Ниже приводятся необходимые для дальнейшего изложения уравнения в обозначениях, согласующихся с обозначениями указанной работы.

Рассмотрим уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска. Обозначим через  $\sigma$  тензор напряже-

---

<sup>3</sup>Не зависящее от радиальной координаты поле напряжений в задаче об осесимметричном радиальном пластическом течении при использовании условия текучести Мизеса было получено В.В. Соколовским: Соколовский В.В. Плоское и осесимметричное равновесие пластической массы между жесткими стенками // Прикл. матем. и механика. 1950. Т. 14. Вып. 1. С. 75-92.



ний;  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — соответствующие собственные значения (главные напряжения);  $k$  — предел текучести при чистом сдвиге. Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1)$$

В пространстве главных напряжений условие текучести Треска изображается поверхностью шестигранной призмы с ребрами

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k. \quad (2)$$

Последнее условие означает, что главное напряжение  $\sigma_3$  является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Так как  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  — ортонормированный базис, то

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

Учитывая соотношения (1), (3) и уравнение ребра призмы  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ , получим следующее выражение для тензора напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I} \mp 2k\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (4)$$

Таким образом тензор напряжений полностью определяется скалярным полем  $\sigma_3$  и единичным векторным полем  $\mathbf{n}$ .

Уравнение равновесия  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  после подстановки в него разложения (4) можно представить в следующем виде:

$$\operatorname{grad} \sigma_3 \mp 2k \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (5)$$

Следовательно, задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Треска, статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения  $\sigma_3$  и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора  $\mathbf{n}$ ), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть формально рассмотрены независимо от кинематических уравнений.



Обозначим через  $\Sigma$  безразмерное отношение  $\sigma_3$  к  $\mp 2k$  и приведем уравнение (5) к виду:

$$\text{grad}\Sigma + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (6)$$

Можно показать, что уравнение (6) принадлежит к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям образуют конус с углом полураствора  $\pi/4$  и осью, ориентированной вдоль вектора  $\mathbf{n}$ . Характеристические поверхности являются также и поверхностями максимального касательного напряжения (поверхностями скольжения). Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и интегральные поверхности поля  $\mathbf{n}$  (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля  $\mathbf{n}$ ).

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (6):

$$\nabla \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Для единичного векторного поля справедлива формула

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n}, \quad (8)$$

с помощью которой векторное уравнение (7) может быть также представлено в виде

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{div} \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Преобразуем уравнение (6) к криволинейным координатам  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ . Выбор координатной системы, наиболее подходящей для изучения трехмерных уравнений математической теории пластичности, будет указан ниже. Ковариантные компоненты векторного поля  $\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$  равны:

$$(\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))_l = g^{-1/2} g_{kl} \frac{\partial(g^{1/2} n^k n^m)}{\partial \xi^m} + n^r n^s [rs, l] \quad (l = 1, 2, 3), \quad (10)$$

где  $g_{ij}$  — компоненты метрического тензора,  $g = \det \|g_{ij}\|$ ,  $[rs, l]$  — символы Кристоффеля первого рода. Через  $n^m$  обозначены контравариантные компоненты векторного поля  $\mathbf{n}$ .

Используя формулу (10), представим уравнение (6) в ковариантной форме:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^l} + g^{-1/2} g_{kl} \frac{\partial(g^{1/2} n^k n^m)}{\partial \xi^m} + n^r n^s [rs, l] = 0. \quad (11)$$

## 2. Разделение переменных в пространственных уравнениях математической теории пластичности

В работе [6] было исследовано уравнение (6) сначала в предположении, что  $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$  всюду в области пластического течения. Решение при

этом было классифицировано как вырожденное.<sup>4</sup> Было установлено, что выполнение условия  $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$  возможно только, если  $\mathbf{n}$  — безвихревое векторное поле,<sup>5</sup> т.е.

$$\mathbf{n} = \nabla f,$$

где  $f$  — потенциал поля. Оказалось также, что семейство поверхностей уровня потенциала  $f(x_1, x_2, x_3)$  есть семейство эквидистантных, по отношению к некоторой фиксированной (базовой) поверхности уровня  $f(x_1, x_2, x_3) = c$ , поверхностей. Более того, в области вырожденного поля единственно возможными базовыми поверхностями уровня являются плоскость, цилиндр или сфера (или их части). Решения пространственных уравнений математической теории пластичности классифицируются в [6] как невырожденные, когда  $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  всюду в пластической зоне. При одновременном выполнении условий  $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  и  $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} \neq 0$  никаких нетривиальных решений уравнения (9) получить нельзя. Следовательно, наибольший интерес представляет тот случай, когда  $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  всюду в пластической зоне. В этом случае векторные поля  $\mathbf{n}$  будут расслоенными, и в дальнейшем исследовании они будут играть особую роль.

Поле напряжений в некоторой области назовем расслоенным (или слоистым), если существует семейство поверхностей, заполняющее эту область, такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям данного семейства совпадает с полем  $\mathbf{n}$  собственных векторов тензора напряжений. Для того чтобы векторное поле  $\mathbf{n}$  было расслоенным в некоторой области, необходимо и достаточно, чтобы всюду в этой области выполнялось следующее соотношение:

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} = 0.$$

Сформулированное утверждение известно как теорема Якоби (см., например, [12], с. 10, 11).

Воспользуемся расслоенностью векторного поля  $\mathbf{n}$  и выберем криволинейные координаты  $\xi^m$  специальным образом: координатные поверхности  $\xi^3 = \text{const}$  есть слои поля  $\mathbf{n}$ , а поверхности  $\xi^1 = \text{const}$  и  $\xi^2 = \text{const}$  — интегральные поверхности поля  $\mathbf{n}$  (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых векторного поля  $\mathbf{n}$ ). Строго регламентированным, таким образом, является лишь выбор координатных поверхностей  $\xi^3 = \text{const}$ . Дополнительно заметим, что поверхности  $\xi^1 = \text{const}$  и  $\xi^2 = \text{const}$  — характеристические для уравнения (6). При таком выборе криволинейных координат имеем:  $g_{13} = 0$ ,  $g_{23} = 0$ ,  $n^1 = 0$ ,  $n^2 = 0$ , что позволяет существенно

<sup>4</sup>Мы называем этот случай вырожденным, подразумевая под этим тот факт, что вырожденному решению уравнений теории пластичности соответствуют прямолинейные векторные линии поля  $\mathbf{n}$ .

<sup>5</sup>Доказательство этого утверждения приводится в работе [6].

упростить уравнения (11):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi^1} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^3} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}} + \ln \sqrt{g}) &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Уравнения (12) интегрируются вдоль линий главных напряжений. Инвариант  $I_1 = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}$  сохраняет свое значение на каждом из слоев поля  $\mathbf{n}$ . Инвариант  $I_2 = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}} + \ln \sqrt{g}$  не изменяется вдоль векторной линии поля  $\mathbf{n}$ . Таким образом, если напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, то поле главных направлений, определяющих ориентацию  $\mathbf{n}$ , необходимо является расслоенным и, следовательно, в новых специальным образом подобранных координатах  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  уравнения равновесия приводятся к трем интегрируемым соотношениям (12).

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (12) состоит, как нетрудно заметить, в возможности разложения детерминанта  $g$  в произведение двух положительных функций:

$$g = G_1(\xi^1, \xi^2) G_2(\xi^3).\tag{13}$$

Три интегрируемых соотношения (12) эквивалентны одному соотношению (13). Таким образом, находится величина  $g$ , для которой разделяются пространственные переменные и которая представляет собой определитель, составленный из компонент метрического тензора специальным образом подобранной координатной системы  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , ее координатными линиями являются траектории главных нормальных напряжений.

В качестве примеров расслоенного поля напряжений можно привести осесимметричную задачу и задачу о плоской деформации. Действительно, любое осесимметричное, или плоское, векторное поле является расслоенным. Если ввести цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$ , то слоями осесимметричного поля  $\mathbf{n}$  будут поверхности, образованные вращением вокруг оси симметрии ортогональных полю  $\mathbf{n}$  траекторий, расположенных в плоскости  $\varphi = 0$ . Слоями плоского векторного поля являются цилиндрические поверхности над ортогональными линиями поля  $\mathbf{n}$ .

Ясно также, что если поле напряжений допускает ортогональную изостатическую сетку  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , то оно является расслоенным, и соотношения (12) следует рассматривать как интегрируемые соотношения вдоль взаимно ортогональных линий главных напряжений.

### 3. Автомодельные решения осесимметричной задачи математической теории пластичности

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа:<sup>6</sup> 1) тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести  $k$ . Первый случай исследуется элементарными средствами. Второй случай — состояние "полной пластичности" Хаара—Кармана. Если присвоить тангенциальному главному направлению второй номер и обозначить через  $\sigma_3$  наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению (2), характеризующему состояние "полной пластичности".

Автомодельные решения уравнений теории пластичности удобнее всего искать, используя специальные переменные  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  и учитывая возможность отделения координаты  $\xi^3$ .

В случае осевой симметрии формулы, связывающие декартовы координаты  $x_1, x_2, x_3$  и криволинейные координаты  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , следует, очевидно, искать в следующем виде:

$$x_1 = f(\xi^1, \xi^3) \cos \xi^2, \quad x_2 = f(\xi^1, \xi^3) \sin \xi^2, \quad x_3 = h(\xi^1, \xi^3). \quad (14)$$

Здесь  $\xi^i$  — специальные криволинейные координаты, определяемые по векторному полю  $\mathbf{n}$ , функции  $f$  и  $h$  подлежат определению,  $\xi^2$  — угловая координата.

Так как криволинейная координатная сетка характеризуется свойствами  $g_{13} = 0, g_{23} = 0$ , а детерминант  $g$  разлагается в произведение двух функций (см. формулу (13)), то отображающие функции (14) необходимо должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} = 0, \\ \left( \frac{\partial f_k}{\partial \xi^3} \frac{\partial f_k}{\partial \xi^3} \right) \left[ \left( \frac{\partial f_p}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_p}{\partial \xi^1} \right) \left( \frac{\partial f_r}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_r}{\partial \xi^2} \right) - \left( \frac{\partial f_s}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_s}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] = G_1(\xi^1, \xi^2) G_2(\xi^3), \end{cases} \quad (15)$$

<sup>6</sup>Тангенциальное напряжение всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии.

где  $f_1 = f(\xi^1, \xi^3) \cos \xi^2$ ,  $f_2 = f(\xi^1, \xi^3) \sin \xi^2$ ,  $f_3 = h(\xi^1, \xi^3)$ . Тогда поверхности  $\xi^3 = \text{const}$  можно принять в качестве слоев поля  $\mathbf{n}$  и затем с помощью интегралов (12) восстановить поле напряжений.

Подставим выражения (14) в систему дифференциальных уравнений (15). В результате находим:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \frac{\partial f}{\partial \xi^3} + \frac{\partial h}{\partial \xi^1} \frac{\partial h}{\partial \xi^3} = 0, \\ \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \xi^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \xi^1} \right)^2 \right] f^2 = G_1(\xi^1) G_2(\xi^3). \end{cases} \quad (16)$$

В этой системе уравнений у функции  $G_1$  исключается зависимость от угловой координаты  $\xi^2$  в силу осевой симметрии. Будем искать автомодельное решение осесимметричной задачи математической теории пластичности в форме

$$f = \xi^{1\alpha} \xi^{3\beta} F(\xi), \quad h = \xi^{1\alpha} \xi^{3\beta} H(\xi),$$

где  $\xi = \xi^1 / \xi^3$  — автомодельная переменная;  $\alpha, \beta$  — некоторые показатели. Тогда система уравнений в частных производных (16) сведется к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений (штрих обозначает дифференцирование по автомодельной переменной  $\xi$ ):

$$\begin{cases} \alpha\beta (F^2 + H^2) + \xi (\beta - \alpha) (FF' + HH') - \xi^2 (F'^2 + H'^2) = 0, \\ \left[ \xi^4 (F'^2 + H'^2)^2 + 2\xi^3 (\alpha - \beta) (F'^2 + H'^2) (FF' + HH') + \right. \\ \quad \left. + \xi^2 (\alpha^2 + \beta^2) (F^2 + H^2) (F'^2 + H'^2) + \right. \\ \quad \left. + 2\alpha\beta\xi (\beta - \alpha) (F^2 + H^2) (FF' + HH') - \right. \\ \quad \left. - 4\alpha\beta\xi^2 (FF' + HH')^2 + \alpha^2\beta^2 (F^2 + H^2)^2 \right] F^2 = \frac{\xi^2 G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)}{\xi^{1-6\alpha} \xi^{3-6\beta-4}}. \end{cases} \quad (17)$$

Анализ этой системы показывает, что при  $\alpha = \beta$  система (17) существенно упрощается и принимает форму:

$$\begin{cases} \alpha^2 (F^2 + H^2) - \xi^2 (F'^2 + H'^2) = 0, \\ \left[ \xi^4 (F'^2 + H'^2)^2 + 2\xi^2 \alpha^2 (F^2 + H^2) (F'^2 + H'^2) - \right. \\ \quad \left. - 4\alpha^2 \xi^2 (FF' + HH')^2 + \alpha^4 (F^2 + H^2)^2 \right] F^2 = \frac{G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)}{(\xi^1 \xi^3)^{6\alpha-2}}. \end{cases} \quad (18)$$

Так как  $G_1$  и  $G_2$  не конкретизированы, то при поиске автомодельных решений отношение  $[G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)] / (\xi^1 \xi^3)^{6\alpha-2}$  можно представить в виде  $C \xi^{\mu+2}$ , где  $C$  есть некоторая постоянная, а  $\mu$  — показатель.

Систему (18) можно несколько упростить. Производя необходимые преобразования и предполагая  $\alpha \neq 0$ , в результате приходим к

$$\begin{cases} \alpha^2 (F^2 + H^2) = \xi^2 (F'^2 + H'^2), \\ (F'H - FH')^2 = \frac{C\xi^\mu}{4\alpha^2 F^2}. \end{cases} \quad (19)$$

Исследуем последнюю систему, вводя в плоскости  $F, H$  полярные координаты:

$$F = \rho \cos \iota, \quad H = \rho \sin \iota. \quad (20)$$

Подставим выражения (20) в систему (19). После преобразований получим систему в полярных координатах  $\rho, \iota$ , которая подлежит интегрированию:

$$\begin{cases} \iota'^2 = \frac{C\xi^\mu}{4\alpha^2 \rho^6 \cos^2 \iota}, \\ \iota'^2 = \frac{\alpha^2}{\xi^2} - \frac{\rho'^2}{\rho^2}. \end{cases} \quad (21)$$

Если разделить первое уравнение полученной системы на второе уравнение этой же системы, то зависимость от автомодельной переменной  $\xi$  при  $\mu = -2$  будет устранена и останется одно уравнение первого порядка относительно полярных координат  $\rho$  и  $\iota$ :

$$1 + \left( \frac{d\rho}{\rho d\iota} \right)^2 = \frac{4\alpha^4 \rho^6 \cos^2 \iota}{C}. \quad (22)$$

Произведем далее замену переменной по формуле:  $\ln \rho = W$ . Тогда дифференциальное уравнение (22) примет вид

$$1 + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2 = \frac{4\alpha^4}{C} e^{6W} \cos^2 \iota. \quad (23)$$

Обозначив через  $l^2$  константу  $4\alpha^4/C$ , получим

$$1 + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2 = l^2 e^{6W} \cos^2 \iota. \quad (24)$$

Совершим еще раз замену переменных по формулам  $e^{6W} = v^s$  и  $\sin \iota = u$ , где показатель  $s$  будет определен ниже. Таким образом, вместо (24) имеем уравнение:

$$\frac{1}{\cos^2 \iota} + \frac{s^2}{36v^2} \left( \frac{dv}{du} \right)^2 = l^2 v^s. \quad (25)$$

С целью упрощения последнего дифференциального уравнения положим  $s = -2$  и получим

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 3^2 \left(l^2 - \frac{v^2}{1-u^2}\right). \quad (26)$$

Обозначим через  $\bar{v}$  безразмерное отношение  $v/l$ , тогда уравнение (26) примет вид

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du}\right)^2 = 3^2 \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{1-u^2}\right). \quad (27)$$

Полученное уравнение не содержит никаких параметров и в чистом виде определяет форму автомодельного решения. При приведении последнего уравнения к нормальной форме в правой части возникает иррациональность корневого типа. Изучим уравнение (27) в плане возможного преобразования его к форме, которая могла бы быть классифицирована, а само уравнение отнесено к одному из известных типов.

В уравнении (27) совершим замену переменных  $\bar{v} = \sin \tau \sqrt{1-u^2}$ . Тогда, возвращаясь к угловой переменной  $\iota$ , получаем наиболее простую и симметричную форму этого уравнения:

$$\frac{d\tau}{d\iota} = \pm \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \iota. \quad (28)$$

Исследование полученного уравнения проведем, ограничившись выбором отрицательного знака. Уравнение (28) иррациональное, с иррациональностью тригонометрического типа. Чтобы устранить эту иррациональность, вместо переменных  $\tau, \iota$  введем новые переменные:  $\lambda = \operatorname{tg} \tau, \mu = \operatorname{tg} \iota$ . В результате вместо уравнения (28) получим

$$(1 + \mu^2) \frac{d\lambda}{d\mu} = (1 + \lambda^2)(-3 + \lambda\mu). \quad (29)$$

Заменим в последнем уравнении неизвестную функцию по формуле

$$\lambda = a(\mu)\zeta + b(\mu).$$

Тогда уравнение (29) преобразуется к

$$\begin{aligned} (1 + \mu^2) a \frac{d\zeta}{d\mu} = & -(1 + \mu^2) \frac{db}{d\mu} + (1 + b^2)(-3 + b\mu) + \\ & + [a(\mu - 6b + 3\mu b^2) - (1 + \mu^2) \frac{da}{d\mu}] \zeta + \\ & + 3a^2(\mu b - 1)\zeta^2 + \mu a^3 \zeta^3. \end{aligned} \quad (30)$$



Попытаемся подобрать  $a(\mu)$  и  $b(\mu)$  так, чтобы вид уравнения стал максимально простым. Видно, что член с нулевой степенью  $\varsigma$  исчезает, если

$$-(1 + \mu^2)\frac{db}{d\mu} + (1 + b^2)(-3 + b\mu) = 0,$$

т.е. фактически, когда известно хотя бы одно частное решение уравнения (29). Так как разыскание частного решения (29) затруднительно, то остается вариант устранить член со второй степенью  $\varsigma$ , положив  $b = \mu^{-1}$ . Член с первой степенью  $\varsigma$  будет устранен, если в качестве  $a$  выбрать решение дифференциального уравнения

$$a(\mu - 3\mu^{-1}) = (1 + \mu^2)\frac{da}{d\mu}.$$

Это уравнение, к счастью, без труда интегрируется и поставленная цель легко достигается:

$$a = \frac{(1 + \mu^2)^2}{\mu^3},$$

после чего уравнение (30) приобретает вид

$$\frac{d\varsigma}{d\mu} = -\frac{\mu}{(1 + \mu^2)^2} + \frac{(1 + \mu^2)^3}{\mu^5}\varsigma^3.$$

Это уравнение заменой независимой переменной

$$v = \frac{1}{1 + \mu^2}$$

удаётся свести к

$$\frac{d\varsigma}{dv} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2v^2(1 - v)^3}\varsigma^3. \quad (31)$$

Здесь изменение независимой переменной  $v$  ограничивается интервалом  $(0, 1]$ .

Полученное уравнение классифицируется как уравнение Абеля первого рода<sup>7</sup> и сводится к уравнению Абеля второго рода, если известно хотя бы одно его частное решение. На рис. П1 изображены интегральные кривые уравнения (31) внутри полосы  $0 < v < 1$ . Они были получены численным интегрированием уравнения (31), задавая при  $\varsigma = \pm 1$  значения  $v$  на отрезке  $[0.1, 0.9]$  с шагом 0.1, а также, полагая  $v = 0$  при  $\varsigma = 0$ . Видно, что все интегральные кривые уравнения (31), расположенные внутри полосы  $0 < v < 1$ , проходят через точку  $v = 1, \varsigma = 0$ .

<sup>7</sup>См., например, Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. С. 44-47; Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. С. 80.

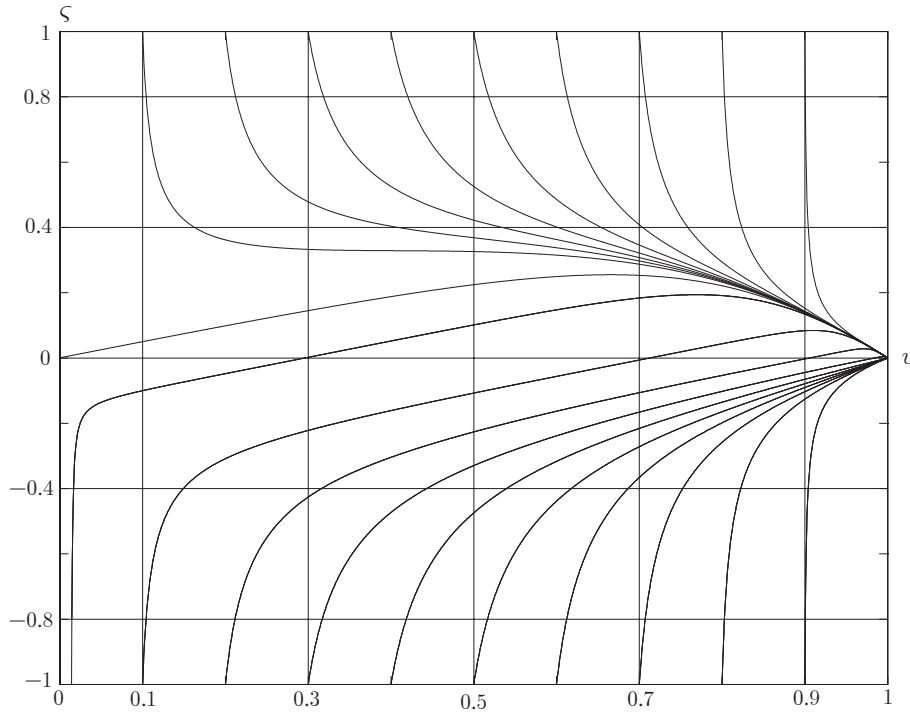


Рис. П1. Интегральные кривые уравнения (31)

Уравнение Абеля (31) не может иметь более двух существенно различных трансцендентных интегралов. Всякий однозначный интеграл уравнения (31) — рациональная функция.<sup>8</sup>

Покажем, что уравнение (31) не имеет однозначных интегралов.

Пусть уравнение (31), рассматриваемое в комплексной форме, обладает рациональным интегралом, т.е. решением, которое можно представить в виде отношения

$$\varsigma = \frac{P(v)}{Q(v)}, \quad (32)$$

где  $P(v)$ ,  $Q(v)$  — многочлены, причем дробь в (32) несократимая.

Подставляя выражение (32) в уравнение (31), получим

$$2 \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} = 1 - \frac{P^3}{Q^3 v^2 (1-v)^3}, \quad (33)$$

или после ряда преобразований

$$(Q^2 - 2P'Q + 2PQ')Qv^2(1-v)^3 = P^3. \quad (34)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной  $v$ .

<sup>8</sup>Все эти результаты читатель может найти в монографии: Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 436 с.

Так как в последнем равенстве справа и слева фигурируют многочлены, то из теоремы о единственности разложения многочлена на простейшие множители следует, что любой простейший множитель, входящий в разложение многочлена  $Q(v)$ , входит также и в разложение многочлена  $P(v)$ . Но дробь (32) несократимая, следовательно, многочлены  $Q(v)$  и  $P(v)$  не могут иметь одинаковых простейших множителей. Поэтому многочлен  $Q(v)$  не имеет в своем разложении простейших множителей и сводится просто к некоторой константе. Ясно, что тогда, положив  $Q = 1$ , дробь (32) можно считать просто многочленом:

$$\varsigma = P(v). \quad (35)$$

Подставляя затем  $Q = 1$  в (34), получим

$$(1 - 2P')v^2(1 - v)^3 = P^3. \quad (36)$$

На основании теоремы о единственности разложения многочлена на простейшие множители получим, что многочлен  $P(v)$  делится на  $v(1 - v)$ , т.е. его можно представить в форме

$$P(v) = v(1 - v)R(v) \quad (37)$$

где  $R(v)$  — многочлен.

Подставляя в уравнение (36) выражение (37), находим

$$1 - 2(1 - v)R + 2vR - 2v(1 - v)R' = vR^3. \quad (38)$$

Если степень многочлена  $R(v)$  равна  $n$ , то в уравнении (38) степень многочлена справа есть  $1 + 3n$ , а слева — не больше, чем  $1 + n$ . Но степени рассматриваемых многочленов должны быть равны, что невозможно при  $n \geq 1$ . Следовательно, степень  $n$  многочлена  $R(v)$  равна нулю, т.е.  $R(v) = \text{const}$ . С помощью (38) находим

$$1 - 2R + 4vR - vR^3 = 1 - 2R + (4R - R^3)v = 0. \quad (39)$$

Приравнявая коэффициенты при нулевой и первой степени  $v$  нулю, получим несовместную систему уравнений для определения постоянной. Таким образом, уравнение (31) не может иметь рациональных (и поэтому вообще однозначных) интегралов.

Обратимся снова к системе (17). После ряда преобразований ее можно представить как

$$\begin{cases} \alpha\beta(F^2 + H^2) + \xi(\beta - \alpha)(FF' + HH') - \xi^2(F'^2 + H'^2) = 0, \\ (FH' - HF')^2 = \frac{G_1(\xi^1)G_2(\xi^3)}{(\alpha + \beta)^2 \xi^1 6\alpha \xi^3 6\beta - 4F'^2}. \end{cases} \quad (40)$$

Здесь мы предполагаем, что  $\alpha + \beta \neq 0$ .

Удобно принять для  $G_1$  и  $G_2$  следующие выражения:

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^{1-6\alpha+\mu}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^{3-6\beta-\mu-4}, \quad (41)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  некоторые константы, а  $\mu$  — показатель. Положим  $C = C_1 C_2$ . Проведем рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены выше для случая  $\alpha = \beta$ . Снова положим  $\mu = -2$  с целью устранения переменной  $\xi$ . В результате<sup>9</sup> получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)^2 e^{6W} \cos^2 \iota}{C} + \frac{(\beta^2 - \alpha^2) e^{3W} \cos \iota}{\text{sign}(\alpha+\beta)\sqrt{C}} \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2. \quad (42)$$

Продолжим исследование этого дифференциального уравнения; введем следующие обозначения:

$$l_1 = \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)^2}{C}, \quad l_2 = \text{sign}(\alpha+\beta) \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\sqrt{C}},$$

получим уравнение

$$l_1 e^{6W} \cos^2 \iota + l_2 e^{3W} \cos \iota \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2, \quad (43)$$

в котором заменим переменную по формуле  $e^{3W} = z^s$  (показатель  $s$  будет определен ниже). Тогда дифференциальное уравнение (42) приобретает вид

$$l_1 z^{2s} \cos^2 \iota + l_2 z^s \cos \iota \frac{s}{3z} \frac{dz}{d\iota} = 1 + \frac{s^2}{3^2 z^2} \left( \frac{dz}{d\iota} \right)^2. \quad (44)$$

С целью упрощения (44), полагая  $s = -1$ , получим

$$l_1 \cos^2 \iota - \frac{l_2 \cos \iota}{3} \frac{dz}{d\iota} = z^2 + 3^{-2} \left( \frac{dz}{d\iota} \right)^2. \quad (45)$$

Совершим замену переменной по формуле  $\sin \iota = u$ , тогда последнее уравнение примет вид

$$\left( \frac{dz}{du} \right)^2 = 3^2 \left( l_1 - \frac{l_2}{3} \frac{dz}{du} - \frac{z^2}{1-u^2} \right). \quad (46)$$

Если  $\alpha$  и  $\beta$  одного знака, то  $l_1 > 0$ . Обозначим через  $\bar{v}$  безразмерное отношение  $z/\sqrt{l_1}$ , тогда уравнение (46) примет форму

$$\left( \frac{d\bar{v}}{du} \right)^2 = 3^2 \left( 1 - \frac{\beta - \alpha}{3\sqrt{\alpha\beta}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1-u^2} \right), \quad (47)$$

<sup>9</sup>Здесь мы ограничиваемся случаем, когда  $d\iota/d\xi > 0$ .

которая пригодна как для случая  $\alpha + \beta > 0$ , так и для случая  $\alpha + \beta < 0$ .

Разрешим это уравнение относительно производной:

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = -\frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} \pm \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha\beta} + 4 \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}\right)}. \quad (48)$$

Естественной областью определения полученного уравнения будет внутренность эллипса

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_1^2} < 1 \quad \left(\gamma_1 = \sqrt{1 + (\beta - \alpha)^2(4\alpha\beta)^{-1}}\right).$$

Уравнение (48) также может быть приведено к симметричной тригонометрической форме посредством замены  $\bar{v} = \gamma_1 \sin \tau \cos \iota$  и использования угла  $\iota$  в качестве независимой переменной:

$$\frac{d\tau}{d\iota} = 3 \left( \text{sign}(\alpha + \beta) \frac{\alpha - \beta}{(\alpha + \beta) \cos \tau} \pm 1 \right) + \text{tg} \iota \text{tg} \tau. \quad (49)$$

Если  $\alpha$  и  $\beta$  разных знаков, то  $l_1 < 0$ . Определяя в этом случае  $\bar{v}$  как безразмерное отношение  $z/\sqrt{-l_1}$ , приходим к уравнению

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du}\right)^2 = 3^2 \left( -1 - \frac{\beta - \alpha}{3\sqrt{-\alpha\beta}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2} \right), \quad (50)$$

разрешив которое относительно производной, получаем

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = -\frac{\beta - \alpha}{\sqrt{-\alpha\beta}} \pm \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{-\alpha\beta} - 4 \left(1 + \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}\right)}. \quad (51)$$

Естественной областью определения этого уравнения будет внутренность эллипса

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_2^2} < 1 \quad \left(\gamma_2 = \sqrt{-1 - (\beta - \alpha)^2(4\alpha\beta)^{-1}}\right).$$

Как и прежде, уравнение (51) приводится к симметричной тригонометрической форме с помощью замены  $\bar{v} = \gamma_2 \sin \tau \cos \iota$  и использования угла  $\iota$  в качестве независимой переменной. В результате получается уравнение, совпадающее с (49).

Уравнения (27) и (47) представляют собой нелинейные неавтономные уравнения, интегралы которых пока получить не удастся. Ясно, что эти уравнения могут быть проанализированы численно. Так, на рис. П2, П3

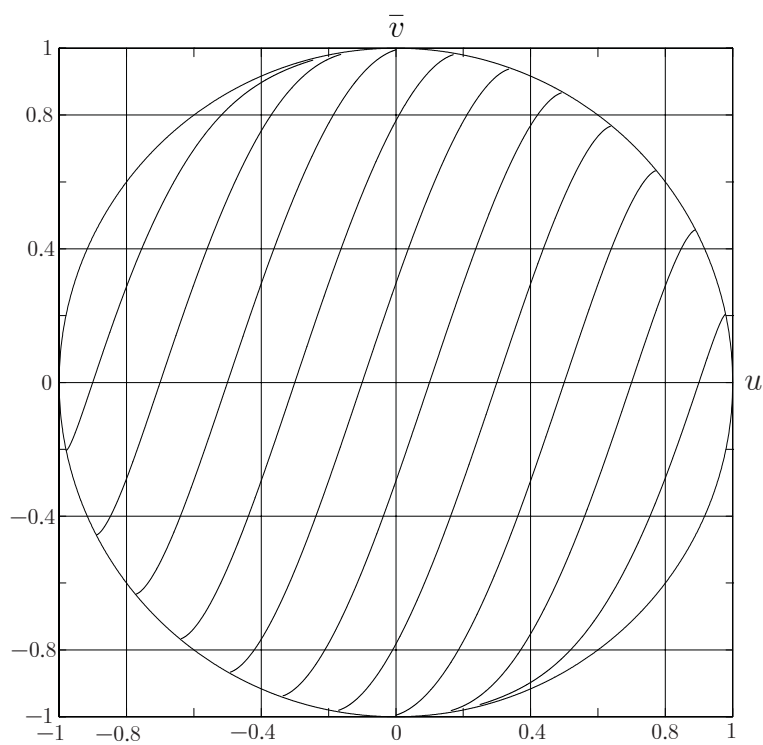


Рис. П2. Интегральные кривые уравнения (27), имеющие положительный наклон

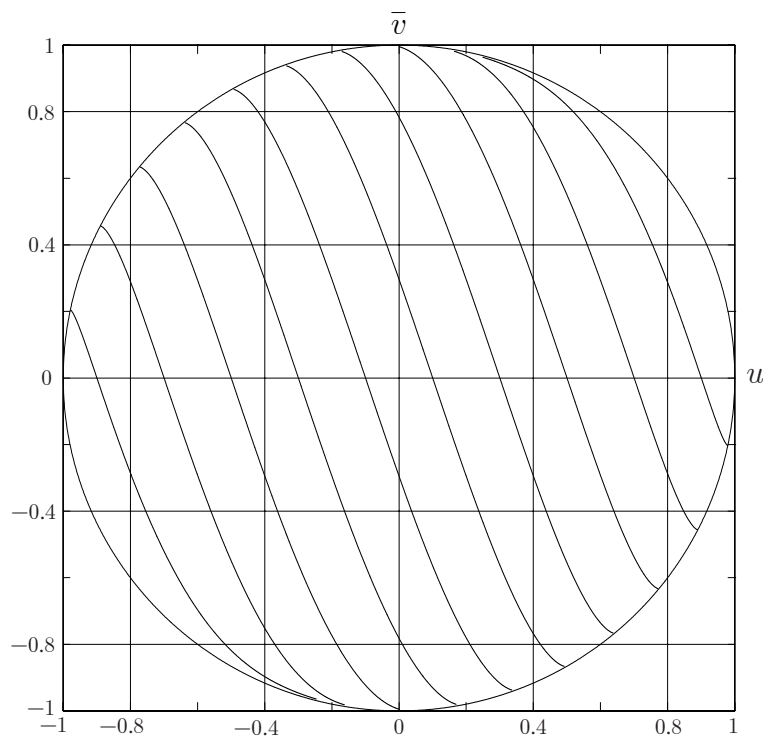


Рис. П3. Интегральные кривые уравнения (27), имеющие отрицательный наклон

изображены интегральные кривые уравнения (27) внутри естественной области определения  $u^2 + \bar{v}^2 < 1$ .

Теперь попытаемся найти другие возможные формы автономных решений. Будем искать решения системы (16) в предположении, что автономная переменная представляет собой произведение степеней изостатических переменных с различными показателями:

$$f = \xi^{1-\alpha} \xi^{3-\beta} F(\xi), \quad h = \xi^{1-\alpha_1} \xi^{3-\beta_1} H(\xi), \quad (52)$$

где  $\xi = \xi^1 \gamma \xi^3 \delta$  — автономная переменная;  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta$  — некоторые показатели.

Тогда при условии, что существует показатель  $\omega$  такой, что

$$\xi^\omega = \xi^{1-\alpha_1-\alpha} \xi^{3-\beta_1-\beta}, \quad (53)$$

система двух уравнений в частных производных (16) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha\beta F^2 + \xi(\alpha\delta + \gamma\beta) FF' + \xi^2\gamma\delta F'^2 + \\ + \xi^{2\omega} [\alpha_1\beta_1 H^2 + \xi(\alpha_1\delta + \beta_1\gamma) HH' + \xi^2\gamma\delta H'^2] = 0, \\ \left( FH' - HF' + \frac{\omega}{\xi} HF \right)^2 = \frac{G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \xi^{1-4\alpha+2\alpha_1-2} \xi^{3-4\beta+2\beta_1-2} \xi^2 F^2}, \end{cases} \quad (54)$$

где в силу условия (53)  $\alpha_1 = \alpha + \gamma\omega$ ,  $\beta_1 = \beta + \delta\omega$ , а остальные показатели независимы. Естественно предполагается выполнение условия  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ .

С целью устранения переменных  $\xi^1$  и  $\xi^3$  в (54) представим  $G_1$  и  $G_2$  в следующем виде:

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^{1-4\alpha+2\alpha_1+\gamma(\mu+2)-2}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^{3-4\beta+2\beta_1+\delta(\mu+2)-2}, \quad (55)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые положительные константы, а  $\mu$  — некоторый показатель.

Преобразуем полученную систему (54), вводя в плоскости  $\xi^{-\omega/2} F, \xi^{\omega/2} H$  полярные координаты:

$$\xi^{-\omega/2} F = \rho \cos \iota, \quad \xi^{\omega/2} H = \rho \sin \iota.$$

В меридиональной плоскости  $x_2 = 0$  справедливы соотношения

$$\xi^\omega \xi^{1-\alpha} \xi^{3-\beta} \rho^2 = x_1^2 + x_3^2, \quad \operatorname{tg} \iota = \frac{x_3}{x_1},$$

т.е. угол  $\iota$  — полярный угол в меридиональной плоскости, отсчитываемый от горизонтальной оси.



Положим  $C = C_1 C_2$ ; получим систему вида:

$$\begin{cases} 4\alpha\beta\rho^2 + 2(\alpha\delta + \gamma\beta)\omega\rho^2 + \gamma\delta\omega^2\rho^2 + \\ + 4\xi[(\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta)\rho\rho'] + 4\xi^2\gamma\delta(\rho'^2 + \rho^2\iota'^2) = 0, \\ \iota'^2 = \frac{C\xi^{\mu-\omega}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2\rho^6\cos^2\iota}. \end{cases} \quad (56)$$

Дальнейшие рассуждения в принципе не отличаются от приведенных выше. Автомодельную переменную  $\xi$  удастся устранить, положив  $\mu = \omega - 2$ ; в результате порядок системы понижается на одну единицу и получается<sup>10</sup> дифференциальное уравнение первого порядка, совпадающее с уравнением (43)

$$l_1 e^{6W} \cos^2 \iota + l_2 e^{3W} \cos \iota \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2, \quad (57)$$

но постоянные коэффициенты  $l_1$  и  $l_2$  определяются следующим образом:

$$l_1 = \frac{-(4\alpha\beta + 2\omega(\alpha\delta + \beta\gamma) + \omega^2\gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{4C\gamma\delta},$$

$$l_2 = \frac{-(\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\sqrt{C}\gamma\delta} \text{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Таким образом, одно уравнение (45) по существу описывает все рассмотренные выше автомодельные решения осесимметричной задачи, для которых существует универсальная зависимость между  $F$  и  $H$ , не включающая автомодельную переменную  $\xi$ .

Как и прежде, заменами  $e^{3W} = z^{-1}$  и  $\sin \iota = u$  уравнение (57) приводится к (46). Исследуем знак коэффициента  $l_1$ , для чего необходимо исследовать знак квадратного трехчлена  $4\alpha\beta + 2(\alpha\delta + \beta\gamma)\omega + \gamma\delta\omega^2$ . Подсчитывая его корни

$$\omega_{1,2} = \frac{-(\alpha\delta + \beta\gamma) \pm |\alpha\delta - \beta\gamma|}{\gamma\delta},$$

для  $l_1, l_2$  находим выражения

$$l_1 = -\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{4C},$$

$$l_2 = -\frac{(2\omega - \omega_1 - \omega_2)|\alpha\delta - \beta\gamma|}{2\sqrt{C}},$$

или также

$$l_1 = -\gamma^2\delta^2 \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{16C},$$

<sup>10</sup>Мы по-прежнему полагаем, что  $d\iota/d\xi > 0$ .

$$l_2 = -\gamma\delta \frac{(\omega_1 - \omega_2)(2\omega - \omega_1 - \omega_2)}{4\sqrt{C}}.$$

Предположим, что  $l_1 > 0$ , т.е. либо  $\gamma$  и  $\delta$  одного знака и  $\omega_2 < \omega < \omega_1$ , либо  $\gamma$  и  $\delta$  разных знаков и  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ . Тогда, поскольку  $\text{sign}(\gamma\delta)\text{sign}(\omega_1 - \omega_2) = 1$ , то

$$\frac{l_2}{\sqrt{l_1}} = -\frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega'\omega''|}},$$

где  $\omega' = \omega - \omega_1$ ,  $\omega'' = \omega - \omega_2$ . Обозначая, как и прежде,  $\bar{v} = z/\sqrt{l_1}$ , уравнение (46) представим в форме

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du}\right)^2 = 3^2 \left(1 + \frac{\omega' + \omega''}{3\sqrt{|\omega'\omega''|}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}\right),$$

или в форме, разрешенной относительно производной

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = \frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega'\omega''|}} \pm \sqrt{\frac{(\omega' + \omega'')^2}{|\omega'\omega''|} + 4 \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}\right)}. \quad (58)$$

Естественной областью определения этого уравнения служит внутренность эллипса

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_1^2} = 1,$$

большая полуось которого определяется как

$$\gamma_1 = \sqrt{1 + \frac{(\omega' + \omega'')^2}{4|\omega'\omega''|}}.$$

Нетрудно заметить, что при условии  $l_1 > 0$  необходимо  $\omega'\omega'' < 0$ , т.е.

$$\gamma_1^2 = -\frac{(\omega' - \omega'')^2}{4\omega'\omega''}.$$

Численный анализ уравнения (58) позволяет изучить поведение его интегральных кривых внутри естественной области определения (см. рис. П4).

Вводя вместо пары переменных  $\bar{v}$  и  $u$  пару  $\tau$ ,  $\iota$  по формулам  $\bar{v} = \gamma_1 \sin \tau \cos \iota$ ,  $u = \sin \iota$ , приходим к уравнению

$$\frac{d\tau}{d\iota} = \left( \frac{3}{2} \frac{\omega' + \omega''}{\gamma_1 \sqrt{|\omega'\omega''|} \cos \tau} \pm 3 \right) + \text{tg} \tau \text{tg} \iota, \quad (59)$$

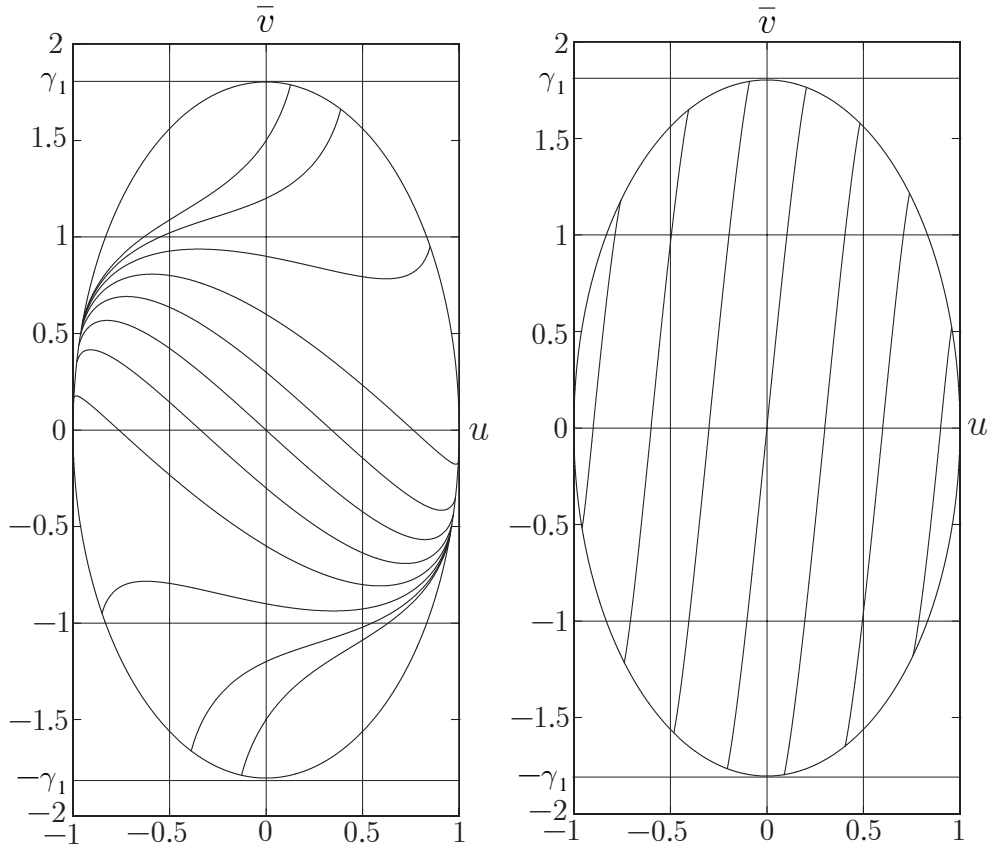


Рис. П4. Интегральные кривые уравнения (58). Рисунок слева соответствует отрицательному знаку в этом уравнении. Значение отношения  $\frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega' \omega''|}}$  выбрано равным трем

которое, учитывая, что  $\omega' \omega'' < 0$  при условии  $l_1 > 0$ , может быть преобразовано к

$$\frac{d\tau}{d\iota} = 3 \left( \frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''| \cos \tau} \pm 1 \right) + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \iota. \quad (60)$$

Предположим далее, что  $l_1 < 0$ , т.е. 1)  $\gamma$  и  $\delta$  одного знака и  $\omega > \omega_1$ ; 2)  $\gamma$  и  $\delta$  одного знака и  $\omega < \omega_2$ ; 3)  $\gamma$  и  $\delta$  разных знаков и  $\omega > \omega_2$ ; 4)  $\gamma$  и  $\delta$  разных знаков и  $\omega < \omega_1$ .

Обозначая  $\bar{v} = z/\sqrt{-l_1}$ , уравнение (46) представим в форме

$$\left( \frac{d\bar{v}}{du} \right)^2 = 3^2 \left( -1 + \frac{\omega' + \omega''}{3\sqrt{|\omega' \omega''|}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2} \right), \quad (61)$$

или в форме, разрешенной относительно производной

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = \frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega' \omega''|}} \pm \sqrt{\frac{(\omega' + \omega'')^2}{|\omega' \omega''|} - 4 \left( 1 + \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2} \right)}. \quad (62)$$

Естественной областью определения этого уравнения служит внутренность эллипса

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_2^2} = 1,$$

большая полуось которого определяется как

$$\gamma_2 = \sqrt{-1 + \frac{(\omega' + \omega'')^2}{4|\omega'\omega''|}}.$$

Нетрудно заметить, что при условии  $l_1 < 0$  необходимо  $\omega'\omega'' > 0$ , т.е.

$$\gamma_2^2 = \frac{(\omega' - \omega'')^2}{4\omega'\omega''}.$$

Поведение интегральных кривых уравнения (62) внутри естественной области определения представлено на рис. П5.

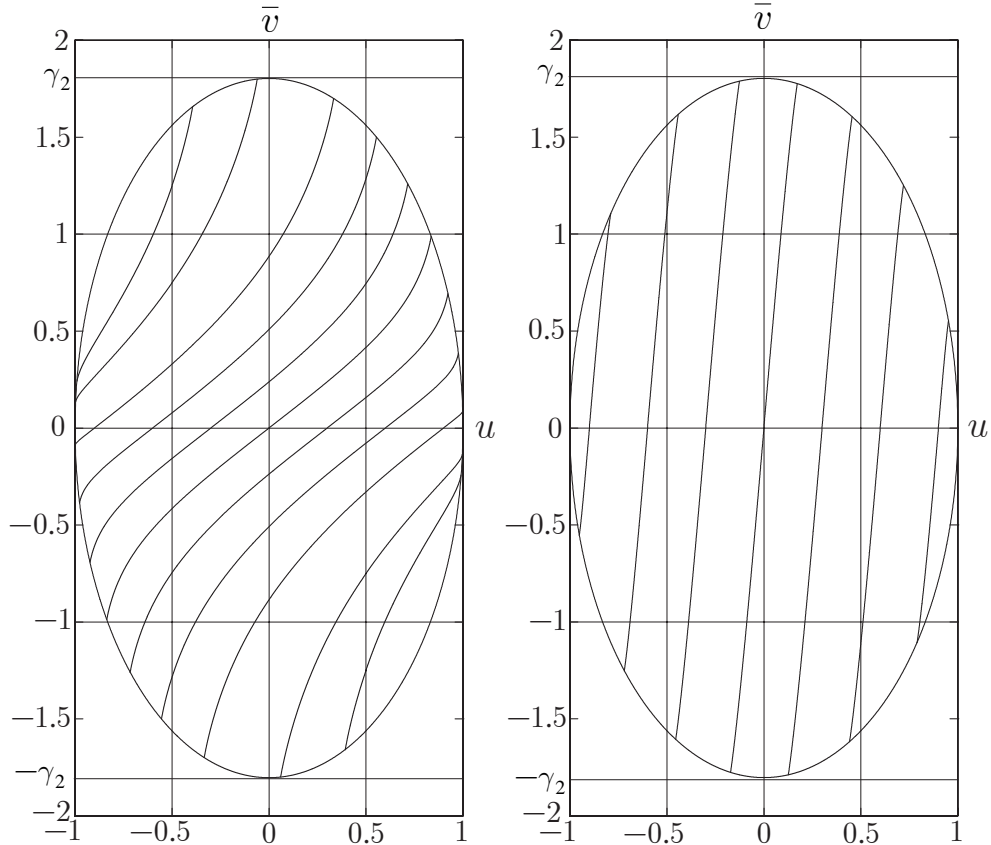


Рис. П5. Интегральные кривые уравнения (62). Рисунок слева соответствует отрицательному знаку в этом уравнении. Значение отношения  $\frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega'\omega''|}}$  принято равным  $\sqrt{17}$

Вводя вместо пары переменных  $\bar{v}$  и  $u$  пару  $\tau$ ,  $\iota$  по формулам  $\bar{v} = \gamma_2 \sin \tau \cos \iota$ ,  $u = \sin \iota$ , приходим к уравнению, совпадающему с (60).

Заметим, что уравнение (4.3), полученное в статье Р. Шилда [7],

$$\sin \chi \frac{d\chi}{d\psi} + 1 + 3 \sin \chi + \cos \chi \operatorname{tg} \psi = 0, \quad (63)$$

определяющее автомодельные поля напряжений в окрестности прямолинейных свободных границ, является частным случаем уравнения (60), если принять  $\frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''|} = \frac{1}{3}$ , произвести замены  $\tau = \pi/2 - \chi$ ,  $\iota = \psi$  и выбрать положительный знак.<sup>11</sup> Можно поэтому сделать вывод, что полученное выше уравнение (60) является обобщением уравнения Шилда (63) и, следовательно, определяет все известные к настоящему времени автомодельные решения осесимметричной задачи.

Уравнение (60) анализировалось численно. На рис. П6, П7 изображены интегральные кривые уравнения (60) внутри квадрата  $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$ .

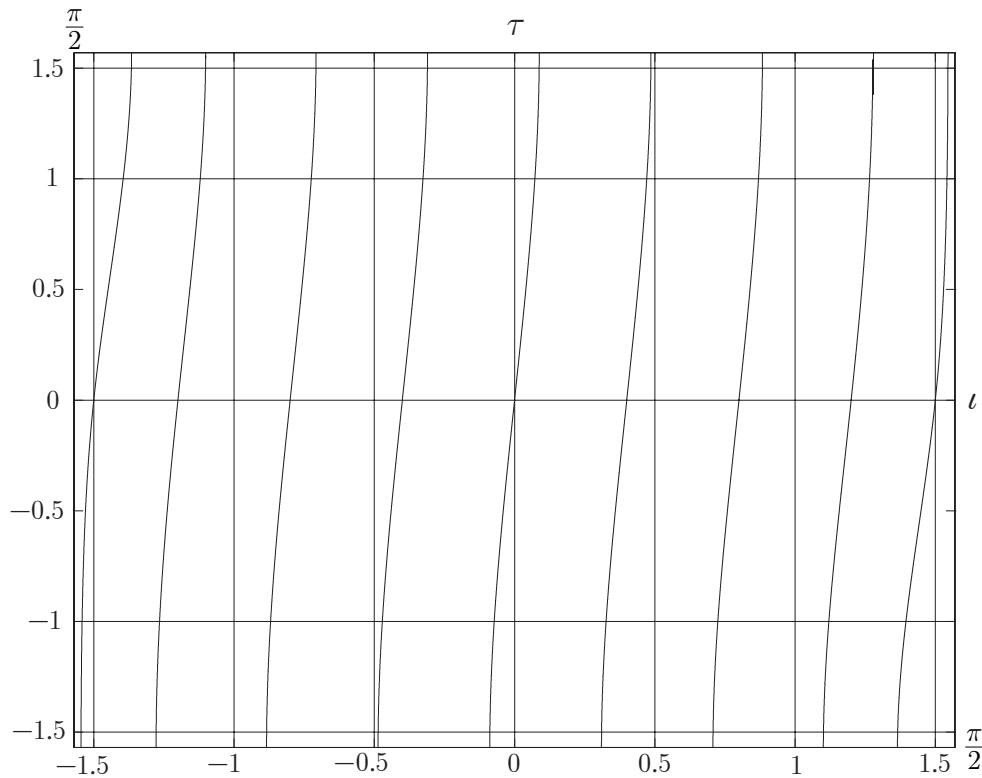


Рис. П6. Интегральные кривые уравнения  $\frac{d\tau}{d\iota} = 3 \left( \frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''| \cos \tau} + 1 \right) + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \iota$ . Значение параметра (64) выбрано равным трем

<sup>11</sup>Стоит отметить, что уравнение, весьма похожее, но не совпадающее с (60), было получено В.В. Соколовским при исследовании осесимметричного радиального пластического течения с использованием условия текучести Мизеса (см. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. С. 481).

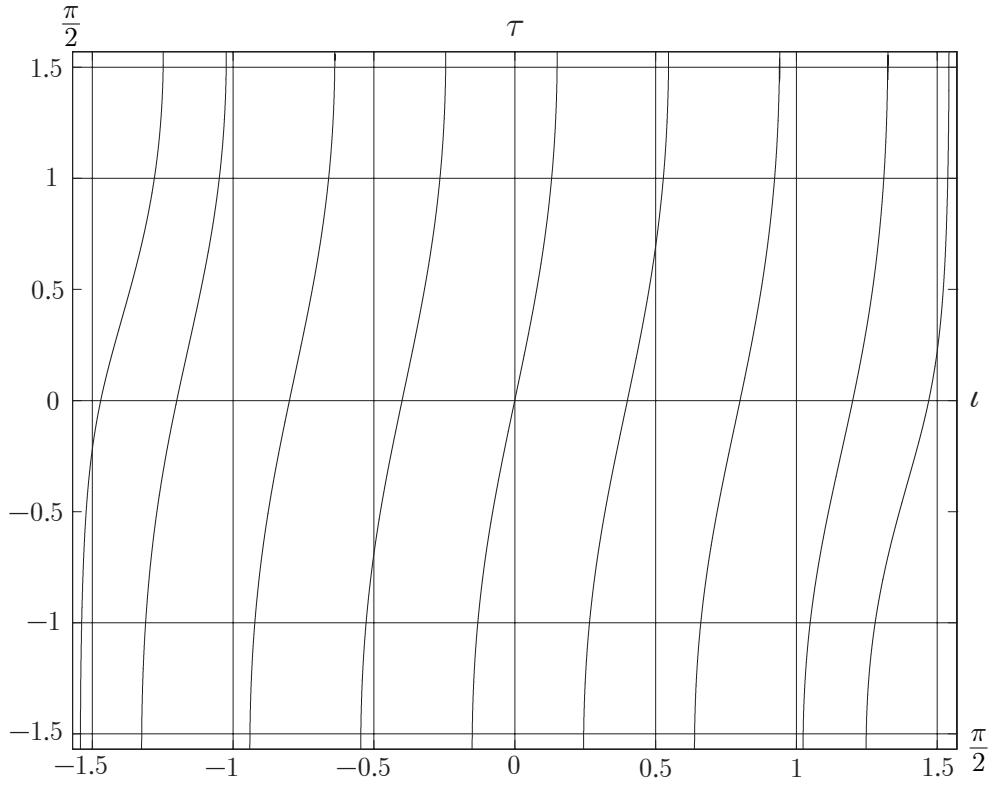


Рис. П7. Интегральные кривые уравнения  $\frac{d\tau}{dl} = 3 \left( \frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''| \cos \tau} - 1 \right) + \text{tg} \tau \text{tg} l$ . Значение параметра (64) выбрано равным трем

Форма автомодельного решения в переменных  $l, \tau$  определяется, как это следует из уравнения (60), единственным параметром

$$\frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''|}. \quad (64)$$

Этот параметр может быть выражен через показатели автомодельного решения:

$$\text{sign}(\gamma\delta) \frac{\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta}{|\alpha\delta - \beta\gamma|}. \quad (65)$$

Уравнение (60) упрощается, если  $\omega' + \omega'' = 0$ ,<sup>12</sup> т.е. когда показатель  $\omega$  подобран в соответствии с формулой

$$-\omega = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta}.$$

После того как определена зависимость функций  $F$  и  $H$  от автомодельной переменной  $\xi$ , разыскание главных осей напряжений и величин главных напряжений не представляет труда. Действительно, главное направление, соответствующее наибольшему (наименьшему) главному напряжению,

<sup>12</sup>Ясно, что при этом  $\omega'\omega'' < 0$  и об уравнении (61) речь не идет, поскольку вещественных решений оно не имеет.

определяется как касательное к траектории  $\xi^1 = \text{const}$  и вычисляется с помощью дифференцирования соотношений (14) по переменной  $\xi^3$ . Вычисляя далее метрику, соответствующую преобразованию координат (14), на основании (12) может быть найдено распределение главного напряжения  $\sigma_3$ .

#### 4. Распределение главных напряжений в области автомодельного решения

Вычисляя метрику, соответствующую преобразованию координат (14), на основании (12) может быть найдено распределение главного нормально-го напряжения  $\sigma_3$  в зоне автомодельного решения.

С помощью несложных расчетов компоненту  $g_{33}$  метрического тензора можно получить в форме

$$g_{33} = \xi^1 2\alpha + \gamma\omega \xi^3 2\beta + \delta\omega - 2 \left[ ((\beta + \delta\omega/2)\rho + \delta\xi\rho')^2 + (\delta\xi\rho\iota')^2 \right]. \quad (66)$$

Определитель  $g$  в соответствии с формулами (13), а также представлениями (см. (55))

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^1 6\alpha + 2\gamma\omega + \gamma(\mu+2) - 2, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^3 6\beta + 2\delta\omega + \delta(\mu+2) - 2, \quad (67)$$

вычисляется в виде

$$g = C \xi^1 6\alpha + 2\gamma\omega - 2 + \gamma(2+\mu) \xi^3 6\beta + 2\delta\omega - 2 + \delta(2+\mu). \quad (68)$$

Преобразуем выражение (66). Для этого воспользуемся первым уравнением системы (56), разрешим его относительно  $\rho'$ . Дискриминант квадратного относительно  $\rho'$  уравнения есть

$$D = \frac{\xi^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \rho^4 \cos^2 \iota} [(\alpha\delta - \beta\gamma)^4 \rho^6 \cos^2 \iota - 4C\gamma^2 \delta^2 \xi^{\mu-\omega+2}]. \quad (69)$$

Для дальнейших рассуждений удобно ввести обозначение:

$$D^* = (\alpha\delta - \beta\gamma)^4 \rho^6 \cos^2 \iota - 4C\gamma^2 \delta^2 \xi^{\mu-\omega+2}.$$

Тогда система уравнений (56) примет нормальную форму:

$$\begin{cases} \rho' = -\frac{\alpha\delta + \beta\gamma + \gamma\delta\omega}{2\gamma\delta} \frac{\rho}{\xi} \pm \frac{\sqrt{D^*}}{2\gamma\delta\xi(\alpha\delta - \beta\gamma)\rho^2 \cos \iota}, \\ \iota' = \text{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{\sqrt{C}\xi^{(\mu-\omega)/2}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)\rho^3 \cos \iota}. \end{cases} \quad (70)$$



Отметим, что из определения автомодельной переменной  $\xi$  следует, что  $\xi^1 = \xi^{1/\gamma} \xi^{3-\delta/\gamma}$ . Устранив таким образом переменную  $\xi^1$  и учитывая систему уравнений (70), на основании которой можно исключить производные  $\rho'$ ,  $\iota'$ , запишем соотношение (66) для  $g_{33}$  в форме

$$2\gamma^2 g_{33} = \xi^3 {}^{2(\beta-\alpha\delta/\gamma-1)} \xi^{2\alpha/\gamma+\omega} \left[ (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{\rho \cos \iota} \right]. \quad (71)$$

После этого, определив  $g_{33}$ , можно следующим образом найти выражение для  $\sigma_3$ . Из анализа первых двух уравнений системы (12) можно сделать вывод о том, что сумма  $\sigma_3/2k + \ln \sqrt{g_{33}}$  может зависеть только от координаты  $\xi^3$ :

$$\frac{\sigma_3}{2k} + \ln \sqrt{g_{33}} = f(\xi^3). \quad (72)$$

Тогда последнее уравнение этой системы позволяет заключить, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi^3} (f(\xi^3) - \ln \sqrt{g}) = 0. \quad (73)$$

Воспользуемся далее соотношением для определителя метрического тензора (68), устраним в нем переменную  $\xi^1$  (выразив ее через  $\xi$  и  $\xi^3$ ) и, интегрируя (73), установим вид функции  $f(\xi^3)$ :

$$f(\xi^3) = (3\beta + \delta\omega - 1 + \delta(2 + \mu)/2) \ln |\xi^3| + \text{const}. \quad (74)$$

Таким образом удастся определить главное напряжение  $\sigma_3$  в области автомодельного решения:

$$\sigma_3 = 2k \ln \left| \xi^{3 \cdot 3\beta + \delta(\omega+1+\mu/2)-1} g_{33}^{-1/2} \right| + \text{const}. \quad (75)$$

Остальные главные напряжения определяются в соответствии с равенствами

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 + 2k. \quad (76)$$

Отметим, что, согласно (75), главное напряжение  $\sigma_3$  зависит от  $\xi$ ,  $\xi^3$ ,  $\iota$  и  $\rho$ . Численно анализируя систему (70), можно получить зависимости  $\iota = \iota(\xi)$ ,  $\rho = \rho(\xi)$  и тем самым выразить главное напряжение  $\sigma_3$  только через переменные  $\xi$  и  $\xi^3$ . Мы будем избегать прямого анализа системы (70) и в целях простоты ограничимся лишь минимальным набором параметров, определяющих форму автомодельного решения.

Прежде всего, удобно, используя (75), подобрать такую величину, которая зависела бы только от автомодельной переменной  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \sigma_3 - k (4\beta + 2\delta\omega + 2\alpha\delta\gamma^{-1} + \delta(2 + \mu)) \ln |\xi^3| = \\ = -k \ln \left| \frac{\xi^{2\alpha/\gamma+\omega}}{2\gamma^2} \left[ (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{\rho \cos \iota} \right] \right| + \text{const}. \end{aligned} \quad (77)$$

Рассмотрим далее частный случай. В определении автомодельной переменной  $\xi$  положим  $\gamma = 1$  и  $\delta = -1$ , т.е.

$$\xi = \frac{\xi^1}{\xi^3}.$$

Предположим также, что все остальные параметры, определяющие, согласно (52), форму автомодельного решения осесимметричной задачи, равны друг другу:  $\alpha = \beta = \alpha_1 = \beta_1$ . Тогда на основании (53) заключаем, что показатель  $\omega = 0$ . Заметим, что  $\mu = -2$ ,  $\omega^* = 0$ .<sup>13</sup>

Необходимое для построения распределения главного напряжения  $\sigma_3$  соотношение (71) представляется тогда в виде следующей зависимости:

$$g_{33} = \xi^{2\alpha} \xi^{3-4\alpha-2} \left( 2\alpha^2 \rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{2\rho \cos \iota} \right), \quad (78)$$

где для  $D^*$  имеет место равенство:

$$D^* = 16\alpha^4 \rho^6 \cos^2 \iota - 4C.$$

Соотношение (77) с учетом сделанных выше предположений о значениях показателей перепишем в виде

$$\sigma_3 - 2k\alpha \ln |\xi^3| = -k \ln \left| \xi^{2\alpha} \left( 2\alpha^2 \rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{2\rho \cos \iota} \right) \right| + \text{const}, \quad (79)$$

а систему уравнений (70), ограничившись выбором положительных знаков, —

$$\begin{cases} \rho' = \frac{\sqrt{D^*}}{4\alpha\xi\rho^2 \cos \iota}, \\ \iota' = \frac{\sqrt{C}}{2|\alpha|\xi\rho^3 \cos \iota}. \end{cases} \quad (80)$$

Для рассматриваемого частного случая значения параметров  $l_1$  и  $l_2$  вычисляются как

$$l_1 = 4\alpha^4/C, \quad l_2 = 0.$$

Ясно, что  $l_1 > 0$ , и уравнение (58) для переменных  $u$ ,  $\bar{v}$  будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\bar{v}}{du} = \pm 3 \sqrt{1 - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}}. \quad (81)$$

Проинтегрируем это уравнение (выбрав положительный знак) численно, задавая при  $\bar{v} = 0.1$  значения  $u$  на отрезке  $[-0.8, 0.8]$  с шагом 0.1.

<sup>13</sup>Напомним, что автомодельным решениям Шилда соответствует значение  $\omega^* = 1/3$ .

Произведем затем обратные замены переменных. В результате получим функциональные зависимости  $\rho = \rho(\iota)$  вдоль каждой из 17 интегральных кривых уравнения (81) на плоскости  $u, \bar{v}$ . Используя второе уравнение системы (80) и разделяя в нем переменные, находим зависимости  $\xi = \xi(\iota)$  (или  $\iota = \iota(\xi)$ ) вдоль упомянутых интегральных кривых. В итоге можно найти зависимость разности  $k^{-1}\sigma_3 - 2\alpha \ln |\xi^3|$  от полярного угла  $\iota$  в меридиональной плоскости. Графические построения, соответствующие значению показателя  $\alpha = -1/2$ , приводятся на рис. П8, если  $\bar{v} > 0$ , и рис. П9, если  $\bar{v} < 0$ . Если  $\bar{v} = 0$ , то необходимо  $\rho = 0$  и, следовательно, производные  $\rho'$  и  $\iota'$  неограниченно возрастают. Зависимости  $k^{-1}\sigma_3 - 2\alpha \ln |\xi^3|$  от автомодельной переменной  $\xi$ , соответствующие значению показателя  $\alpha = -1/2$ , даны на рис. П10, если  $\bar{v} > 0$ , и рис. П11, если  $\bar{v} < 0$ .

Ясно, что (см. (77)), положив

$$4\beta + 2\delta\omega + 2\alpha\delta\gamma^{-1} + \delta(2 + \mu) = 0, \quad (82)$$

можно заключить, что наибольшее (наименьшее) главное нормальное напряжение в области автомодельного решения зависит только от автомодельной переменной  $\xi$  (или только от полярного угла в меридиональной плоскости).

Выше было отмечено, что автомодельное решение Шилда в рамках рассматриваемого подхода определяется условием

$$\frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''|} = \frac{1}{3} \quad (83)$$

или, учитывая, что  $\omega' = \omega - \omega_1$ ,  $\omega'' = \omega - \omega_2$ , — условием

$$\frac{2\omega - \omega_1 - \omega_2}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{1}{3}. \quad (84)$$

Проанализируем последнее условие, предполагая  $\omega = 0$ . В этом случае оно приобретает форму

$$\text{sgn}(\gamma\delta) \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{|\alpha\delta - \beta\gamma|} = \frac{1}{3}. \quad (85)$$

Далее условие (82) при  $\omega = 0$ ,  $\mu = -2$  сводится к

$$2\beta\gamma + \alpha\delta = 0, \quad (86)$$

сочетание которого с (85) приводит к

$$\text{sgn}(\gamma\delta)\text{sgn}(\beta\gamma) = -1$$

или

$$\operatorname{sgn}(\delta\beta) = -1. \quad (87)$$

Таким образом, имеется два условия (86) и (87), гарантирующих (при  $\omega = 0$ ,  $\mu = -2$ ) переход к автомодельному решению Шилда. Если принять автомодельную переменную  $\xi$  в форме простого отношения изостатических координат (это означает, что  $\gamma = 1$ ,  $\delta = -1$ ), то условия (86) и (87) можно представить как

$$\alpha = 2\beta, \quad \operatorname{sgn}(\beta) = 1.$$

Далее мы исследуем именно этот случай.

Компонента  $g_{33}$  метрического тензора вычисляется как

$$g_{33} = \frac{1}{2}\xi^{2\alpha}\xi^{3-3\alpha-2}\left(\frac{9\alpha^2}{4}\rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{2\rho\cos\iota}\right), \quad (88)$$

где

$$D^* = \frac{9\alpha^4}{4}\rho^6\cos^2\iota - 4C.$$

Главное напряжение  $\sigma_3$  находится как

$$\sigma_3 = -k \ln \left| \frac{\xi^{2\alpha}}{2} \left( \frac{9\alpha^2}{4}\rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{\rho\cos\iota} \right) \right| + \text{const.} \quad (89)$$

Система уравнений (70) приобретает вид

$$\begin{cases} \rho' = -\frac{\alpha\rho}{4\xi} + \frac{\sqrt{D^*}}{3\alpha\xi\rho^2\cos\iota}, \\ \iota' = \frac{2\sqrt{C}}{3|\alpha|\xi\rho^3\cos\iota}. \end{cases} \quad (90)$$

Значения параметров  $l_1$  и  $l_2$  есть

$$l_1 = \frac{9\alpha^4}{8C}, \quad l_2 = -\frac{3\alpha^2}{4\sqrt{C}}\operatorname{sgn}(\alpha).$$

Ясно, что  $l_1 > 0$ , и уравнение (58) для переменных  $u, \bar{v}$  будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\bar{v}}{du} = \sqrt{\frac{9\alpha}{8}} \pm \sqrt{\frac{9\alpha}{8} + 9\left(1 - \frac{\bar{v}^2}{1-u^2}\right)}. \quad (91)$$

Это уравнение (с положительным знаком в правой части) также анализировалось численно для значения  $\alpha = 1$ . При  $\bar{v} = 0.1$  задавались значения переменной  $u$  на отрезке  $[-0.8, 0.8]$  с шагом 0.1.

Распределения безразмерного главного напряжения  $\sigma_3/k$  в зависимости от угла  $\iota$ , соответствующие значению показателя  $\alpha = 2\beta = 1$ ,<sup>14</sup> приводятся на рис. П12 в области  $\bar{v} > 0$ , и рис. П13 в области  $\bar{v} < 0$ . Распределения безразмерного главного напряжения  $\sigma_3/k$  в зависимости от автомодельной переменной  $\xi$ , соответствующие значению показателя  $\alpha = 2\beta = 1$ , приводятся на рис. П14 в области  $\bar{v} > 0$ , и рис. П15 в области  $\bar{v} < 0$ .

Следовательно, удастся построить автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности, обобщающие решение Шилда, которые при некоторых значениях показателей, определяющих форму автомодельных решений, так же, как и решение Шилда, зависят только от полярного угла  $\iota$  в меридиональной плоскости.

---

<sup>14</sup>Напомним значения других показателей, определяющих форму рассматриваемых здесь автомодельных решений:  $\omega = 0$ ,  $\mu = -2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = -1$ .

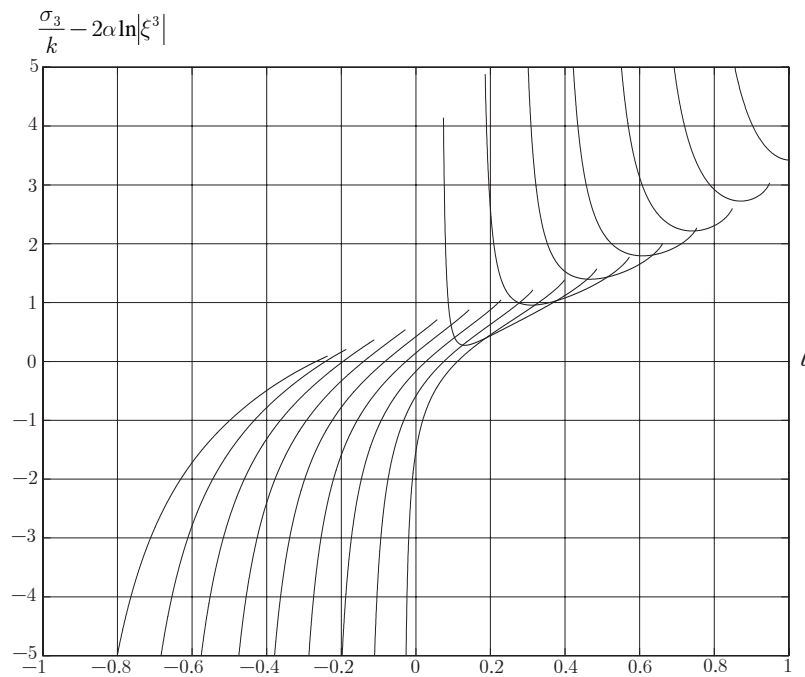


Рис. П8. Зависимость разности  $k^{-1}\sigma_3 - 2\alpha \ln|\xi^3|$  от полярного угла  $\iota$  в области автомодельного решения  $\bar{v} > 0$  для показателя  $\alpha = -1/2$

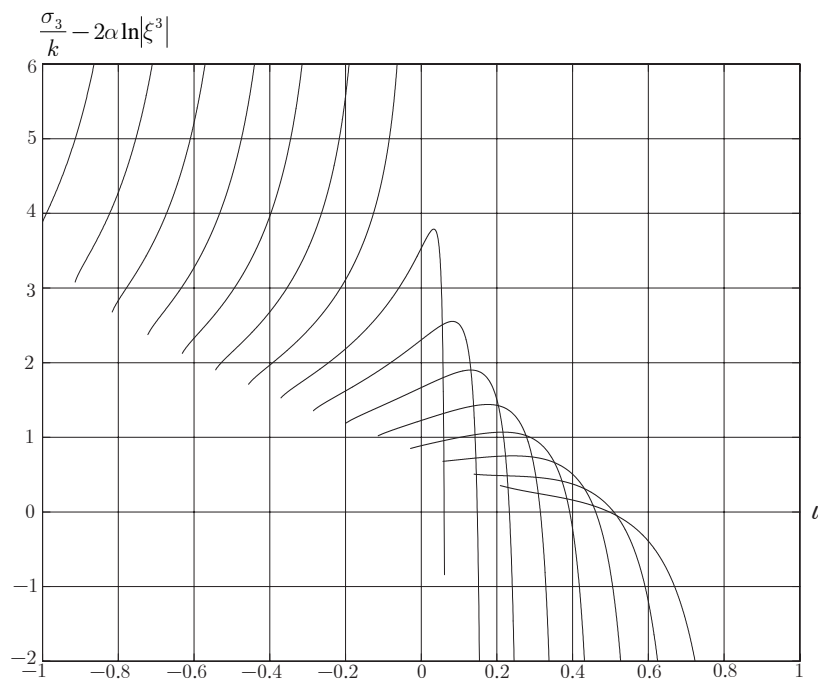


Рис. П9. Зависимость разности  $k^{-1}\sigma_3 - 2\alpha \ln|\xi^3|$  от полярного угла  $\iota$  в области автомодельного решения  $\bar{v} < 0$  для показателя  $\alpha = -1/2$

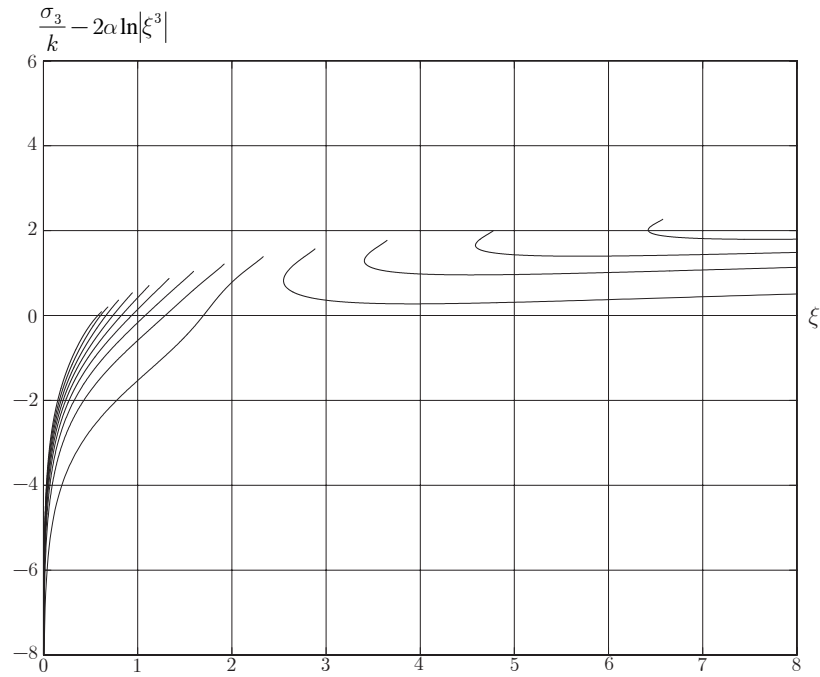


Рис. П10. Зависимость разности  $k^{-1}\sigma_3 - 2\alpha \ln|\xi^3|$  от автомодельной переменной  $\xi$  в области  $\bar{v} > 0$  для показателя  $\alpha = -1/2$

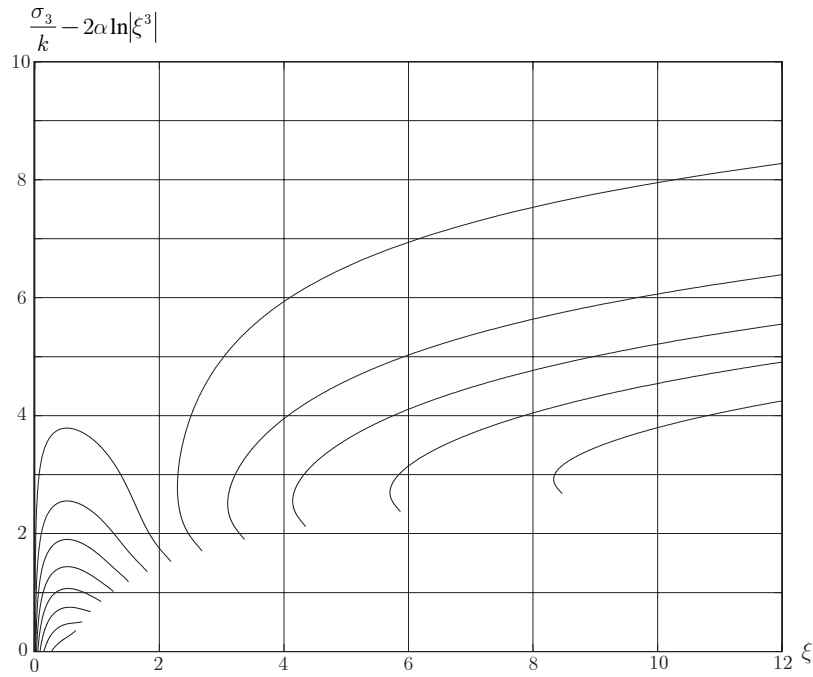


Рис. П11. Зависимость разности  $k^{-1}\sigma_3 - 2\alpha \ln|\xi^3|$  от автомодельной переменной  $\xi$  в области  $\bar{v} < 0$  для показателя  $\alpha = -1/2$



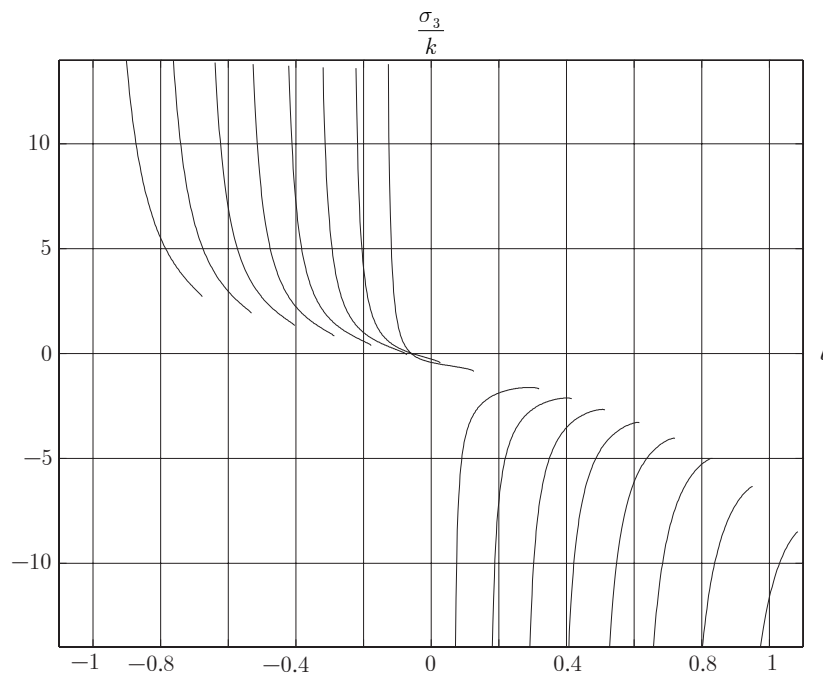


Рис. П12. Зависимость безразмерного главного напряжения  $\sigma_3/k$  от угла  $\iota$  в области  $\bar{v} > 0$  для показателей  $\alpha = 2\beta = 1$

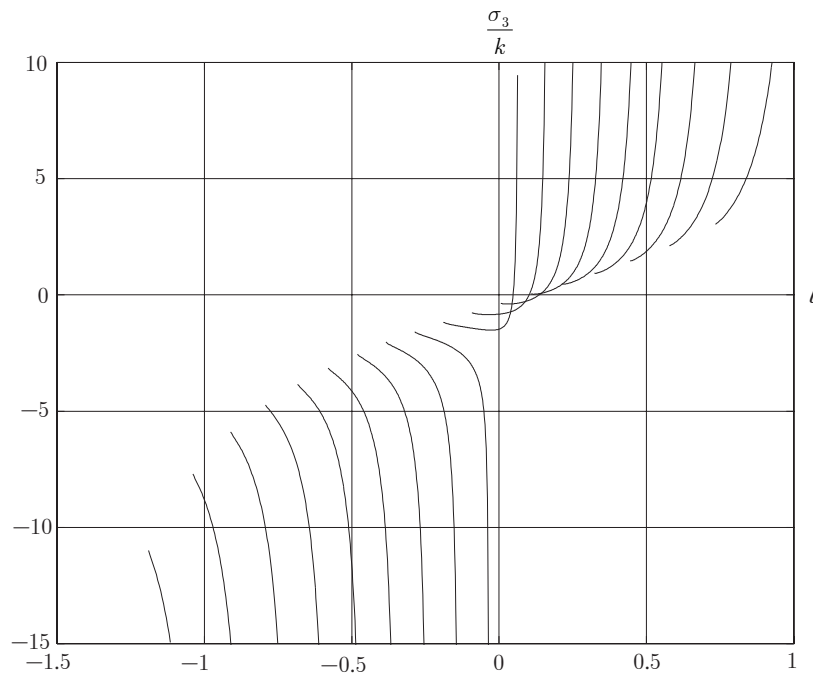


Рис. П13. Зависимость безразмерного главного напряжения  $\sigma_3/k$  от угла  $\iota$  в области  $\bar{v} < 0$  для показателей  $\alpha = 2\beta = 1$

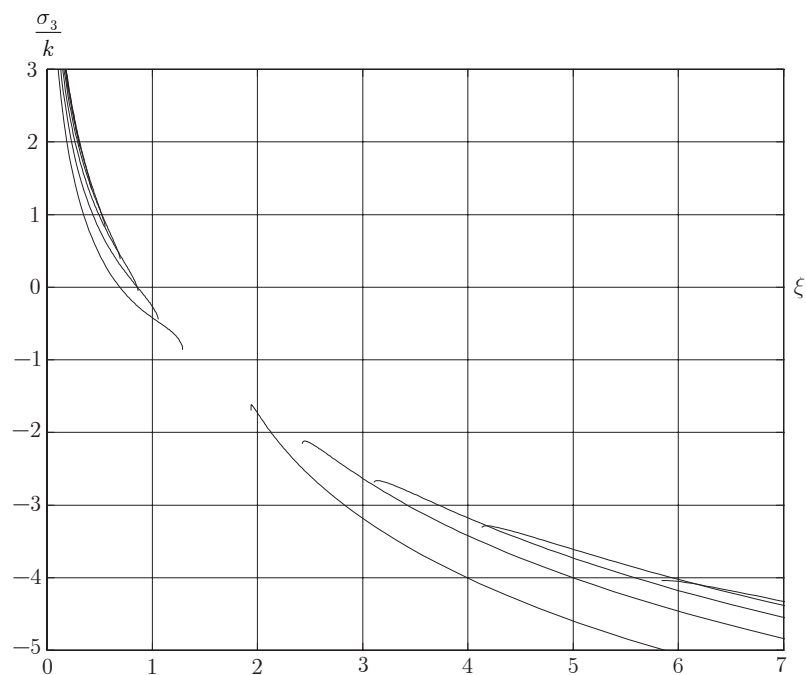


Рис. П14. Зависимость безразмерного главного напряжения  $\sigma_3/k$  от автомодельной переменной  $\xi = \xi^1/\xi^3$  в области  $\bar{v} > 0$  для показателей  $\alpha = 2\beta = 1$

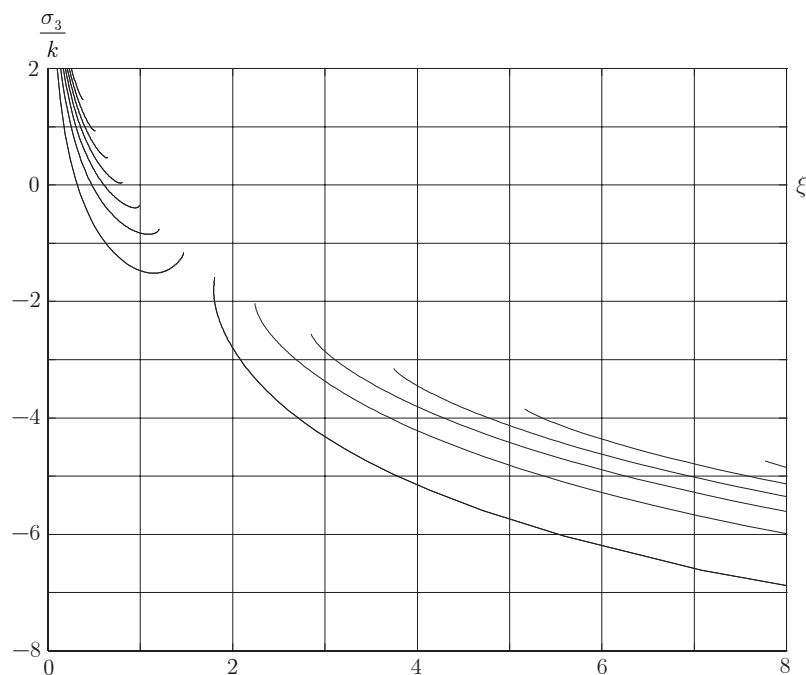


Рис. П15. Зависимость безразмерного главного напряжения  $\sigma_3/k$  от автомодельной переменной  $\xi = \xi^1/\xi^3$  в области  $\bar{v} < 0$  для показателей  $\alpha = 2\beta = 1$

## Библиографический список к приложению II

- [1] Ишлинский А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля// Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201-224. (Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 17-42.)
- [2] Ивлев Д.Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред// Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90-96.
- [3] Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях// Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. №3. С. 546-549.
- [4] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [5] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86-94.
- [6] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. №5. С. 102-120.
- [7] Шилд Р.Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии// Сб. переводов "Механика". 1957. №1. С. 102-122.<sup>15</sup>
- [8] Ивлев Д.Д. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска// Изв. АН СССР. ОТН мех. и машиностроения. 1959. №1. С. 132-133.
- [9] Ивлев Д.Д. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска// Изв. АН СССР. ОТН мех. и машиностроения. 1959. №6. С. 112-114.
- [10] Ивлев Д.Д. О вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство// Прикл. мех. и техн. физика. 1960. №4. С. 75-78.
- [11] Ивлев Д.Д., Мартынова Т.Н. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния// Прикл. мех. и техн. физика. 1963. №3. С. 102-104.
- [12] Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990. 208 с.

---

<sup>15</sup>Оригинальная работа: Shield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry// Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V. 233A. No. 1193. P. 267-287.

# THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PLASTICITY

*Y.N. Radayev, Department of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara  
443011, Russia*

Three-dimensional static and kinematic equations of the theory of perfect elastoplasticity are considered in an attempt to find approaches to analytical study of three-dimensional elastic-plastic problems. The Tresca yielding criterion and associated flow rule are employed to formulate the closed system of equations. If an actual stress state corresponds to an edge of the Tresca prism then the stress tensor are determined by the maximal (or minimal) principal stress and the unit vector field directed along the principal stress axis associated with that principal stress, thus allowing the static equilibrium equations to be formally considered independently of kinematic. As it is shown, these equations are of hyperbolic type that provides significant mathematical advantages for the present theory. An important geometrical property of that unit vector field can be derived by analyzing the static equilibrium equations: necessarily it is of complex-lamellar type. It is then found that the complex-lamellar unit vector field, co-oriented to the principal stress axis, determines a special curvilinear co-ordinate system (the Lamé isostatic co-ordinate net). The latter is the most appropriate for further considerations as transformed static equations can be readily integrated providing a remarkable development of the theory of three-dimensional plasticity. Since the curvilinear co-ordinate system generates a canonical transformation of spatial domains then the canonical transformation technique applicable to three-dimensional, plane strain and axially-symmetric problems can be developed. This is fully implemented in the present study. The closed system of static and kinematic incremental equations formulated in the local principal stress frame is obtained and analyzed. A number of self-similar solutions of the axially-symmetric problem is given by introducing a self-similar variable as the products of powers of the isostatic co-ordinates. For special values of parameters involved in the self-similar solution the problem is reduced to obtaining solution of a non-linear non-autonomous ordinary differential equation. Then this equation is numerically analyzed. The computation of principal stresses distributions within the self-similar solutions zone is implemented.

## Yuri N Radayev

[radayev@ssu.samara.ru](mailto:radayev@ssu.samara.ru)

<http://www.ssu.samara.ru/~radayev/>

Yuri N Radayev was born in Samara, Russia, on February 10, 1962.

He is a Mechanical Engineering graduate (1984) of Samara State University. After serving in the USSR Air Forces he joined (1986) the Laboratory of Viscoelastic Solids of the Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science. In 1989 he graduated from the Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science and received Ph.D. in Applied Mechanics from the Russian Academy of Science. Since then he has been working in Samara State University first as Assistant Prof. at Department of Solid Mechanics (1989–1995) and later as Associate Prof. at the same Department (1995–2000). He was also working as a visiting researcher at Department of Mechanical Engineering, Nagoya University (1993–1995) and Laboratoire de Modelisation en Mecanique, Universite Pierre et Marie Curie (Paris VI)/CNRS (1999–2000). In 2000 he received the Doctor of Science (Phys.&Math.) Degree from the Russian Academy of Science for his disseratation work "Continuum Models of the Material Damage". He is the Head of Department of Continuum Mechanics (since 2002) and Prof. of the same Department (since 2000).

The main area of his research is continuum mechanics and thermodynamics, the mathematical theory of plasticity, fracture and damage of materials. He has published nearly a hundred articles and books (both research and educational) on the subject.

Радаев Юрий Николаевич

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Учебное пособие

Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>

Редактор Т.И. Кузнецова  
Компьютерная верстка, макет Ю.Н. Радаев

Лицензия ИД №06178 от 01.11.2001. Подписано в печать . Формат 60 × 84/16.  
Бумага офсетная. Усл.-печ. л. . Уч.-изд. л. .  
Тираж 100 экз. Заказ .  
Издательство "Самарский университет", 443011, г. Самара. ул. Акад. Павлова, 1.  
Отпечатано в УОП СамГУ, ПЛД №67-43 от 19.02.98.





