

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА В МЕХАНИКЕ

Новые результаты

В.И. Фабрикант

Моим родителям посвящается

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нелегко найти что—то новое в математике. Трудно найти нечто новое в чём—то очень старом, как например, теория потенциала, которую изучали великие учёные прошлых веков. Особенно трудно найти что—то новое на элементарном уровне, используя только математический аппарат, который был хорошо известен даже во времена Пуассона. Это как раз то, что автор книги смог сделать: новый и элементарный метод описан в книге, который позволяет решать смешанные граничные задачи, с различными приложениями в технике. Метод позволяет решать несимметричные задачи так же легко, как симметричные, *точно и в замкнутой форме*.

Аналитическое решение задач для неклассических областей теперь становится возможным. Основные достижения метода включают вывод явных и элементарных выражений для функций Грина, относящихся к круглой трещине и круглому штампу; разработку *теории трещин и контактных задач для областей общего вида*; исследования различных *взаимодействий* между трещинами, штампами и внешними нагрузками. Как дополнительное полезное приложение, метод даёт нам инструмент для точного вычисления различных двумерных интегралов от выражений, содержащих расстояния между двумя и более точками. Большая часть этих результатов не может быть

достигнута другими методами.

Со времён аспирантуры в Москве, автор не переставал удивляться простоте многих решений в теории потенциала и колоссальной сложностью методов, которыми эти решения были получены — использование различных интегральных преобразований и разложений по специальным функциям — аппарат недоступный обычному инженеру. Авторский поиск базировался на убеждении, что простые результаты должны быть получены простыми методами. Теперь этот метод найден и представлен здесь в деталях. Остаётся только удивляться, почему этот метод не был найден по крайней мере 100 лет назад.

Книга адресована широкой аудитории читателей, начиная с инженеров, занимающихся упругим анализом и кончая физиками и математиками. Инженер может найти в книге элементарные готовые к использованию формулы, в то время, как специалист в математической физике может заинтересоваться новыми приложениями излагаемого математического аппарата, специалист в чистой математике может исследовать групповые свойства используемых операторов или, заметив, что автор не даёт строгого обоснования для излагаемого метода, захочет исправить ситуацию.

Благодаря существующей аналогии между смешанными задачами теории упругости и другими областями науки, *книга должна быть интересна специалистам в электромагнетизме, акустике, диффузии, механике жидкости*, и так далее. Несмотря на то, что некоторые приложения подобного рода были опубликованы автором, ограничения на объём книги не позволили включить их здесь, тем не менее соответствующие ссылки сделаны в нужных местах книги.

Книга доступна любому читателю с высшим техническим образованием, но должна быть также интересна маститым учёным. Метод, как таковой, элементарен, но преобразования иногда очень сложны, в то время, как окончательный результат обычно очень простой. Читатель, который интересуется

приложениями общих результатов, может пропустить вывод и использовать окончательные формулы, что обычно не требует больших усилий. Читатель, который хочет освоить метод для решения новых задач, должен повторить выводы формул во всех деталях. Предлагаемые упражнения очень важны для таких читателей. Упражнения даны различной степени трудности, начиная с очень простых и кончая очень сложными, некоторые могут быть основой для диссертации.

Содержание книги полностью базируется на результатах автора; по этой причине работы других авторов упоминаются только тогда, когда это абсолютно необходимо, например, численные результаты нужны для сравнения, для оценки точности приближённого решения или чтобы показать ошибки в существующих решениях. Существуют различные книги и обзорные статьи, которые дают полное представление о достижениях в теории упругости. Данная книга не ставила своей целью повторять их или вступать в соревнование с ними.

Развитие нового метода ни в коей мере не может считаться законченным, это только начало: результаты, представленные в книге, можно сравнить с верхушкой айсберга, принимая во внимание многочисленные приложения предлагаемого метода к различным областям науки, которые будут воплощены в будущем. Решение фундаментальных задач в простой форме позволяет нам рассматривать более сложные задачи, которые никто не осмеливался даже попробовать раньше. *Метод может быть расширен* приложениями к сферическим, тороидальным и другим системам координат, так что более сложные конфигурации могут быть рассмотрены. Метод оказался полезным также в обобщённой теории потенциала. Некоторые результаты в этой области были опубликованы автором, но не включены в эту книгу по причине ограничений на объём.

Для удобства читателей, каждая глава (и каждый подраздел, где возможно) были сделаны взаимно независимыми. Читатель может пропустить несколько подразделов и продолжать читать, не теряя возможности понимать материал. С другой стороны, результатом такого подхода явилось повторение описаний и

определений. Автор считает, что добавочные удобства оправдывают несколько лишних страниц в книге.

Книга содержит так много нового материала, что некоторые ошибки и опечатки неизбежны, несмотря на все усилия автора. Автор будет благодарен за информацию о них. Читательские комментарии могут быть посланы автору по адресу:

*V.I. Fabrikant
prisoner #167932D
Archambault jail
Ste-Anne-des-Plaines
Quebec, Canada J0N 1H0*

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	9
ГЛАВА 1. ОПИСАНИЕ НОВОГО МЕТОДА	
1.1 Интегральное представление для величины, обратной расстоянию между двумя точками	17
1.2 Свойства \mathcal{L} —операторов	24
1.3 Некоторые дальнейшие интегральные представления	27
1.4 Внутренняя смешанная граничная задача для полупространства	33
1.5 Внешняя смешанная граничная задача для для полупространства	45
1.6 Некоторые фундаментальные интегралы	65
ГЛАВА 2. СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	
2.1 Общее решение	75
2.2 Решения для точечных сил	80
2.3 Внутренняя смешанная задача первого рода	84
2.4 Внешняя смешанная задача первого рода	95
2.5 Интегральное представление для q^2/R^3	104
2.6 Внутренняя смешанная задача второго рода	108
2.7 Внешняя смешанная задача второго рода	114
2.8 Обратная задача теории трещин в линейной упругости	133

ГЛАВА 3. ОСНОВНЫЕ СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ	
3.1	Общая формулировка задач 146
3.2	Внутренняя осесимметричная основная смешанная задача 148
3.3	Внешняя осесимметричная основная смешанная задача 174
3.4	Обобщение на неоднородные полупространства 181
3.5	Влияние сдвигающей силы и опрокидывающего момента на круглый штамп, сцеплённый с основанием 185
3.6	Неосесимметричная внутренняя основная смешанная задача 191
3.7	Неосесимметричная внешняя основная смешанная задача 203
	Аппендикс А3.1 210
	Аппендикс А3.2 214
	Аппендикс А3.3 218
ГЛАВА 4. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ТРЕЩИН	
4.1	Плоская трещина под произвольным нормальным давлением 225
4.2	Точечная нагрузка на круглую трещину 232
4.3	Сосредоточенная сила, действующая вне круглой трещины 234
4.4	Плоская трещина под действием произвольной сдвигающей нагрузки 236
4.5	Круглая трещина под однородной нормальной нагрузкой 248
4.6	Круглая трещина под однородной сдвигающей нагрузкой 253
4.7	Асимптотическое поведение напряжений и перемещений около края трещины 257
4.8	Плоская трещина произвольной формы 264
4.9	Трещина произвольной формы под действием однородного сдвига 278
4.10	Близкие взаимодействия компланарных круглых трещин под действием нормального давления 280
4.11	Близкие взаимодействия компланарных круглых трещин

под действием сдвигающих напряжений	297
Аппендикс А4.1	312
Аппендикс А4.2	316
Аппендикс А4.3	317
Аппендикс А4.4	322
ГЛАВА 5. ПРИЛОЖЕНИЯ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ	
5.1 Контактная задача для гладкого штампа	329
5.2 Плоский центрально нагруженный круглый штамп	333
5.3 Наклонный круглый штамп на упругом полупространстве	337
5.4 Плоский штамп произвольной формы под действием нормальной центрально приложенной силы	341
5.5 Наклонный штамп общей формы в плане	352
5.6 Неплоский штамп общей формы в плане	372
5.7 Плоский гибкий штамп общей формы в плане под сдвигающей нагрузкой	392
5.8 Задача Рейсснера—Сагоци для областей общей формы	398
5.9 Взаимодействие между нормально нагруженными штампами	407
5.10 Взаимодействие между гибкими штампами под сдвигающими нагрузками	417
5.11 Контактная задача для негладкого штампа	427
Аппендикс А5.1	430
ЛИТЕРАТУРА	447

ВВЕДЕНИЕ

Мы даём здесь короткий обзор методов решения смешанных граничных задач теории потенциала с указанием присущих им ограничений. Из этого следует необходимость нового метода. Краткое описание содержания каждой главы дано для удобства читателей.

Разные приложения теории потенциала в электростатике, теплопроводности, упругости, диффузии, и других областях науки хорошо известны и привлекли внимание таких учёных, как Лаплас, Пуассон, Грин, Бельтрами, Кирхгоф, лорд Кельвин, Гобсон и других, которые сделали значительный вклад в этой области в течении нескольких столетий.

Граничные задачи со смешанными условиями принадлежат к категории наиболее трудных для решения и в то же время, наиболее важных в технике. Вспомним знаменитую задачу электрически заряженного диска. Почти невозможно упомянуть каждого учёного, кто решил эту задачу тем или другим методом. Все методы можно разделить на две категории. Первая требует построения функции Грина, после чего каждое решение может быть выражено в квадратурах. Вторая категория требует использования различных интегральных преобразований.

Гобсон (1899) построил функцию Грина для круглого диска и сферического сегмента используя метод Зоммерфельда. Он использовал тороидальные координаты τ , σ , ϕ (в наших обозначениях), которые могут быть выражены через декартовы x , y и z следующим образом:

$$x = \frac{a \sinh \tau \cos \phi}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad y = \frac{a \sinh \tau \sin \phi}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad z = \frac{a \sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma}.$$

Здесь a радиус диска. Потенциальная функция V во внешней к диску

точке $(\tau_0, \sigma_0, \phi_0)$, которая на диске принимает значения $v(\tau, \phi)$, может быть выражена

$$V(\tau_0, \sigma_0, \phi_0) = \frac{1}{\pi^2} \int \int_S \left\{ \frac{(1 + \cosh \tau) \cos(\sigma_0/2)}{2aR[\cosh^2(\alpha/2) - \sin^2(\sigma_0/2)]^{1/2}} + \frac{z}{R^3} \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \sigma_0)^{1/2}}{(\cosh \alpha + \cos \sigma_0)^{1/2}} \right\} v(\tau, \phi) dS, \quad (0.1)$$

где R — расстояние между точками $(\tau_0, \sigma_0, \phi_0)$ и (τ, σ, ϕ) ; α определена уравнением $\cosh \alpha = \cosh \tau_0 \cosh \tau - \sinh \tau_0 \sinh \tau \cos(\phi - \phi_0)$. Практическое значение выражения (0.1) очень ограничено, так как нет возможности вычислить точно интеграл даже в простейшем случае, когда $v(\tau, \phi)$ постоянен. Гобсон использовал очень своеобразный метод, чтобы найти потенциальную функцию для $v = \text{const}$ и $v = \mu x, \mu = \text{const}$.

С другой стороны, мы знаем, что интеграл в (0.1) может быть выражен через элементарные функции для любого полинома (в декартовых координатах). Это была одна из причин, которая заставила автора искать альтернативный подход, который был бы таким же общим, как (0.1), и в то же время, позволил бы простое и элементарное вычисление нужных интегралов.

Рассмотрение математически эквивалентной задачи о круглом штампе прижатом к упругому полупространству приводит к следующему интегральному уравнению (Галин, 1953)

$$\omega(\rho, \phi) = H \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0)}{R} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (0.2)$$

Здесь a радиус штампа, H упругая константа, ω — нормальное перемещение под штампом (известная функция), σ обозначает давление под штампом (неизвестная функция), и R — расстояние между точками (ρ, ϕ) и (ρ_0, ϕ_0) . Леонов (1953) получил точное замкнутое решение интегрального уравнения (0.2) используя очень изобретательный метод. Его результат в наших обозначениях может быть записан:

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{1}{4\pi^2 H} \left\{ \Delta \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\omega(\rho_0, \phi_0)}{R} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \right.$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{R}{\eta} - \tan^{-1} \left(\frac{R}{\eta} \right) \right] \frac{\omega(\rho_0, \phi_0)}{R^3} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \Bigg\}. \quad (0.3)$$

Здесь $\eta = [(a^2 - \rho^2)(a^2 - \rho_0^2)]^{1/2}/a$ и Δ обозначает двумерный оператор Лапласа. Можно заметить один недостаток в (0.3): трудность прямого вычисления интегралов, даже в простейшем случае, когда ω постоянна. Очевидно, что эти интегралы могут быть вычислены в элементарных функциях для любого полиномиального перемещения. Это указывает на недостаток в наших знаниях, который должен быть восполнен.

Метод интегральных преобразований, приводящий к интегральным уравнениям, был введен Вебером (1873) и Бельтрами (1881), и получил дальнейшее развитие в работах Басбриджа (1938) и других. Значительные достижения в систематическом применении этого метода к различным задачам принадлежат Снеддону. Мы можем упомянуть две книги Снеддона (1951, 1966). Некоторые замечательные результаты были получены Уфляндом (1966, 1977). Несмотря на этот успех, автор всегда был убежден, что использование интегральных преобразований указывает на нашу неспособность решать задачи прямо. Мы можем представить два примера.

Вот как задача о круглом диске, заряженном постоянным потенциалом $v_0 = \text{const}$, решается при помощи дуальных интегральных уравнений. Нам нужно найти гармоническую функцию V , исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую смешанным граничным условиям в плоскости $z=0$:

$$V = v_0, \quad \text{для } \rho \leq a; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для } \rho > a. \quad (0.4)$$

Решение представлено в форме

$$V(\rho, z) = \int_0^\infty A(t) e^{-tz} J_0(t\rho) \frac{dt}{t}. \quad (0.5)$$

Здесь J_0 обозначает Бесселеву функцию нулевого порядка и $A(t)$ обозначает пока неизвестную функцию, которая должна быть выбрана так, чтобы удовлетворить (0.4). Подстановка граничных условий (0.4) в (0.5) приводит к дуальному интегральному уравнению

$$\int_0^{\infty} A(t) J_0(t\rho) \frac{dt}{t} = v_0, \quad \text{для } 0 \leq \rho \leq a;$$

$$\int_0^{\infty} A(t) J_0(t\rho) dt = 0, \quad \text{для } \rho > a. \quad (0.6)$$

Используя разрывные интегралы Вебера—Шафхейтлина, мы можем заключить, что

$$A(t) = \frac{2}{\pi} v_0 \sin(at). \quad (0.7)$$

Решение (0.5) может теперь быть переписано как

$$V(\rho, z) = \frac{2}{\pi} v_0 \int_0^{\infty} e^{-tz} \sin(at) J_0(t\rho) \frac{dt}{t}, \quad \text{для } z \geq 0, \quad (0.8)$$

и плотность заряда на диске σ даётся выражением

$$\sigma(\rho) = \frac{v_0}{\pi^2} \int_0^{\infty} J_0(t\rho) \sin(at) dt. \quad (0.9)$$

Оба интеграла (0.8) и (0.9) могут быть выражены через элементарные функции. Например, последний интеграл даёт

$$\sigma(\rho) = \frac{v_0}{\pi^2 (a^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (0.10)$$

Есть несоответствие между простотой окончательного результата и сложностью аппарата использованного для его получения. Общая идея, что элементарный результат должен быть получен элементарным способом, требует искать этот новый и простой метод.

Второй иллюстративный пример взят из рассмотрения простейшего случая круглой трещины радиуса a , под действием осесимметричного давления $p(\rho)$. Соответствующая потенциальная функция f представлена в книге (Kassir and Sih, 1975):

$$f(\rho, z) = \int_0^{\infty} A(s) J_0(\rho s) \exp(-sz) \frac{ds}{s}, \quad (0.11)$$

где

$$A(s) = -\frac{1}{\pi\mu} \int_0^a \sin st \, dt \int_0^t \frac{rp(r) \, dr}{(t^2 - r^2)^{1/2}}. \quad (0.12)$$

Читатель должен подставить явное выражение для p в (0.12), и вычислить два последовательных интеграла. Результат следует подставить в (0.11), и несобственный интеграл от Бесселевой функции должен быть определён. Представляется естественным сэкономить одно интегрирование путём подстановки (0.12) в (0.11), изменения порядка интегрирования и вычисления получившегося интеграла (Градштейн и Рыжик, 1963, формула 6.752.1):

$$\int_0^{\infty} \sin(st) J_0(\rho s) \exp(-sz) \frac{ds}{s} = \sin^{-1} \frac{t}{l_2(t)}, \quad (0.13)$$

где обозначение

$$l_2(t) = \frac{1}{2} \{[(\rho + t)^2 + z^2]^{1/2} + [(\rho - t)^2 + z^2]^{1/2}\} \quad (0.14)$$

было введено. Формулы (0.11) и (0.12) могут быть объединены, с результатом

$$f(\rho, z) = -\frac{1}{\pi\mu} \int_0^a \sin^{-1} \frac{t}{l_2(t)} \, dt \int_0^t \frac{p(\rho_0) \rho_0 \, d\rho_0}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2}}. \quad (0.15)$$

Заметим, что выражение (0.15) не содержит никаких следов использованного интегрального преобразования, и это подсказывает нам, что прямое и элементарное решение возможно. Например, в случае постоянной нагрузки $p = \text{const.}$, и потенциальная функция (0.15) принимает форму:

$$f(\rho, z) = -\frac{p}{\pi\mu} \int_0^a t \sin^{-1} \frac{t}{l_2(t)} \, dt. \quad (0.16)$$

Интеграл в (0.16), несмотря на то, что выглядит очень трудным, из—за (0.14), может быть выражен через элементарные функции, а именно,

$$f(\rho, z) = -\frac{\rho}{4\pi\mu} \left[(2a^2 + 2z^2 - \rho^2) \sin^{-1} \left(\frac{a}{l_2} \right) + l_1(\rho^2 - l_1^2)^{1/2} - 2z(a^2 - l_1^2)^{1/2} \right]. \quad (0.17)$$

Здесь сокращения l_1 и l_2 обозначают $l_1(a)$ и $l_2(a)$ соответственно, l_2 определена в (0.14), и

$$l_1(t) = \frac{1}{2} \{ [(\rho + t)^2 + z^2]^{1/2} - [(\rho - t)^2 + z^2]^{1/2} \}. \quad (0.18)$$

Легко показать, что произвольная полиномиальная нагрузка в (0.15) приводит к элементарным выражениям для потенциальной функции, и таким образом, к элементарному полному решению.

Мы можем просуммировать ситуацию следующим образом. Метод функций Грина является наиболее общим; основной недостаток — трудности вывода результатов, которые обычно *строятся* очень нетривиальным способом. Метод интегральных преобразований позволяет прямой вывод результатов, но является наименее общим, так как каждую новую задачу приходится решать с начала до конца. Метод наиболее эффективен для решения осесимметричных задач; в общем случае приходится рассматривать каждую гармонику отдельно. Неосесимметричные задачи о взаимодействиях (несколько *произвольно расположенных* заряженных дисков, взаимодействия между штампами и трещинами, и т.д.) очень трудно решать методом интегральных преобразований. Требуется найти новый метод, который был бы таким же общим, как и метод функций Грина и, в то же время, был бы прямым и элементарным, без использования интегральных преобразований или разложений по специальным функциям.

Когда какая—то задача уже решена одним способом, обычно нетрудно найти другой, более простой способ решения. Новый метод должен делать больше, чем давать более простое решение уже решённых задач, он должен дать нам возможность решать новые задачи. Основное преимущество излагаемого здесь метода заключается в том, что он позволяет решать неосесимметричные задачи так же легко, как и симметричные. Это в свою очередь открывает новые горизонты и позволяет нам решать некоторые задачи, которые не были рассмотрены ранее, а именно, аналитическое решение для неклассических областей, а также решение различных задач взаимодействий.

Общее описание метода дано в первой главе. Она начинается с вывода интегрального представления для величины обратной расстоянию между двумя точками и сопровождается несколькими обобщениями. Точное

замкнутое решение даётся для неосесимметричной смешанной задачи с условиями Дирихле внутри круга и условиями Неймана вне круга и наоборот. Некоторые интегралы, имеющие фундаментальное значение для нашего метода, также вычислены через элементарные функции.

Вторая глава посвящена смешанным граничным задачам для упругого полупространства. Общее решение выражено через три гармонические функции. Введена классификация внутренних и внешних смешанных задач первого и второго рода. Проблемы первого рода характеризуются смешанными условиями для нормальных параметров (давление или нормальное перемещение), в то время как касательные напряжения известны на всей границе. Эти задачи решены для неоднородного полупространства, с модулем упругости представленным как степенная функция глубины. Случай, когда смешанные граничные условия даны относительно тангенциальных напряжений и перемещений с нормальным давлением известным на всей границе, называется граничной задачей второго рода. Каждый род граничных задач рассмотрен отдельно. Точные решения даны и различные примеры контактных задач и трещин рассмотрены.

Основная смешанная задача — это такая задача, где смешанные условия предписаны относительно нормальных и касательных параметров. Решение таких задач представляется наиболее трудным, потому что вместо одного интегрального уравнения, мы теперь должны решить систему интегральных уравнений.

Осесимметричные и неосесимметричные основные смешанные задачи рассмотрены в третьей главе. Точное решение дано для каждой гармоники отдельно. Плоский штамп, сцеплённый с трансверсально изотропным полупространством под действием произвольной нагрузки рассмотрен в деталях. Изучено влияние сосредоточенных сил, приложенных к полупространству, на сцеплённый штамп.

В то время, как задачи, решённые во второй главе, дают значения напряжений и перемещений только в плоскости $z=0$, *полное* решение различных задач теории трещин дано в четвёртой главе. Решение называется *полным*, когда даются выражения для всех напряжений и перемещений в произвольной точке пространства. Случаи круглой трещины под действием произвольной нормальной и касательной нагрузки рассмотрены отдельно. Явные выражения получены для всех функций Грина. Все результаты даны в элементарных функциях. Эти результаты позволяют нам решить более сложные задачи взаимодействия круглой трещины с внешними нагрузками. Система несингулярных интегральных уравнений описывает взаимодействие между копланарными круглыми трещинами под действием нормальных и касательных напряжений.

Приближённое аналитическое решение дано для случая плоской трещины произвольной формы под действием постоянного нормального или

касательного напряжения. Решение становится точным в случае эллипса, и есть основания предполагать, что оно будет достаточно точным для широкого диапазона трещин разной формы. Сравнение с численными результатами в опубликованной литературе показывает хорошую точность наших результатов. Точность наших формул ухудшается в случае трещин с острыми углами и отношением длины к ширине $\gg 1$.

В 5 главе дано общее решение, выраженное через одну гармоническую функцию, для задачи о плоском штампе, действующем на трансверсально—изотропное полупространство. Главная потенциальная функция и все функции Грина выражены через элементарные функции для круглого штампа произвольного профиля. Показано также, что полное решение в случае полиномиального профиля общего вида также может быть выражено в элементарных функциях. Знание полного решения в комбинации с теоремой взаимности позволяет нам решить более сложные задачи взаимодействия штампов с внешними нагрузками и взаимодействий между штампами.

Общий метод может быть использован для аналитического решения неклассических контактных задач. Это решение становится точным в случае эллиптического штампа и даёт удовлетворительную точность для штампа произвольной формы. Случаи плоского центрально и нецентрально нагруженного штампа рассмотрены в деталях. Во всех случаях наши результаты сравниваются с многими ранее опубликованными в литературе. Так же, как и в случае трещин, результаты весьма удовлетворительны всюду, кроме областей с острыми углами или с отношением длины к ширине $\gg 1$. Аналитическое решение предложено для задачи о шероховатом штампе под действием нормальной и касательной нагрузки, с трением между базой и штампом, подчиняющимся закону Кулона.

Легче всего освоить новый метод через упражнения. Каждая глава содержит определённое количество упражнений, в большинстве случаев дан ответ, совет или полное решение. Читателю следует решить все примеры. Алгебраические преобразования элементарны, но требуют некоторую оригинальность и сообразительность.

ГЛАВА 1

ОПИСАНИЕ НОВОГО МЕТОДА

Некоторые интегральные представления, которые имеют фундаментальное значение для нового метода, представлены здесь. Точное решение в замкнутой форме дано для смешанной граничной задачи с круговой линией раздела граничных условий.

1.1 Интегральное представление величины обратной расстоянию между двумя точками

Автор решил начать вывод нового интегрального представления величины обратной расстоянию между двумя точками расположенными в плоскости $z=0$, так как эта величина очень важна в теории потенциала. Здесь мы повторяем вывод этого представления так, как это было сделано в (Фабрикант, 1971e). Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{R^{1+u}} = \frac{1}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi - \phi_0))^{(1+u)/2}}, \quad (1.1.1)$$

где u константа и $-1 < u < 1$. Стандартное разложение (1.1.1) в ряд Фурье имеет вид

$$\frac{1}{R^{1+u}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\phi-\phi_0)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-in\psi} d\psi}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos\psi)^{(1+u)/2}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\phi-\phi_0)}}{2\pi\rho_0^{1+u}} \frac{2\pi\Gamma[n+(1+u)/2]}{\Gamma[(1+u)/2]\Gamma(n+1)} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n F\left(\frac{1+u}{2}, n+\frac{1+u}{2}, n+1; \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right). \quad (1.1.2)$$

Здесь F обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса. Используя другое интегральное представление

$$F\left(\frac{1+u}{2}, n+\frac{1+u}{2}, n+1; z\right) = \frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma[n+(1+u)/2]\Gamma[1-(1+u)/2]} \int_0^1 \frac{t^{2n+u}(1-t^2)^{-(1+u)/2}}{(1-zt^2)^{(1+u)/2}} dt,$$

выражение (1.1.2) может быть преобразовано в

$$\frac{1}{R^{1+u}} = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi u}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\phi-\phi_0)}}{(\rho\rho_0)^n} \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{x^{2n+u} dx}{\left[(\rho^2 - x^2)(\rho_0^2 - x^2)\right]^{(1+u)/2}}. \quad (1.1.3)$$

Суммирование (1.1.3) окончательно даёт

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^{1+u}} &= \frac{1}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi - \phi_0))^{(1+u)/2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi u}{2} \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0\right) x^u dx}{\left[(\rho^2 - x^2)(\rho_0^2 - x^2)\right]^{(1+u)/2}}. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Здесь обозначено

$$\lambda(k, \psi) = \frac{1 - k^2}{1 + k^2 - 2k \cos \psi}. \quad (1.1.5)$$

После того, как сложный вывод закончен, мы всегда можем найти более простой способ получить тот же результат. Действительно, мы можем

ввести новую переменную

$$\eta(x) = [(\rho^2 - x^2)(\rho_0^2 - x^2)]^{1/2}/x, \quad (1.1.6)$$

после чего выражение (1.1.4) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{R^{1+u}} = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi u}{2} \int_0^\infty \frac{\eta^{-u} d\eta}{R^2 + \eta^2}. \quad (1.1.7)$$

Интеграл в (1.1.7) может быть найден, используя формулу (3.241.4) из (Градштейн и Рыжик, 1963), таким образом подтверждая равенство. Отмечаем, что параметр η будет использован во всей книге также для случая, когда $x > \max(\rho, \rho_0)$, и выражение (1.1.6) в этом случае интерпретируется как

$$\eta(x) = (x^2 - \rho^2)^{1/2}(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}/x.$$

Из (1.1.7) следует, что когда $u=0$, интеграл (1.1.4) может быть вычислен, как неопределённый и мы имеем очень важное представление

$$\int \frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} = -\frac{1}{R} \tan^{-1} \left[\frac{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}{xR} \right]. \quad (1.1.8)$$

Все вышеприведённые результаты относятся к расстоянию между двумя точками на плоскости $z=0$. Нам нужно обобщить их, чтобы представлять

$$\frac{1}{R_0^{1+u}} = \frac{1}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{(1+u)/2}}. \quad (1.1.9)$$

Можно заметить, что представление (1.1.4) остаётся справедливым если мы формально заменим ρ и ρ_0 произвольными параметрами l_1 и l_2 . Мы должны определить их так, чтобы

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\phi - \phi_0). \quad (1.1.10)$$

Это условие приводит к двум уравнениям

$$l_1^2 + l_2^2 = \rho^2 + \rho_0^2 + z^2, \quad l_1 l_2 = \rho\rho_0. \quad (1.1.11)$$

Решение принимает вид

$$l_1(\rho_0, \rho, z) = \frac{1}{2} \{ [(\rho + \rho_0)^2 + z^2]^{1/2} - [(\rho - \rho_0)^2 + z^2]^{1/2} \}, \quad (1.1.12)$$

$$l_2(\rho_0, \rho, z) = \frac{1}{2} \{ [(\rho + \rho_0)^2 + z^2]^{1/2} + [(\rho - \rho_0)^2 + z^2]^{1/2} \}. \quad (1.1.13)$$

Здесь и в будущем, следующие сокращённые обозначения будут использованы:

$$l_1(x) \equiv l_1(x, \rho, z), \quad l_2(x) \equiv l_2(x, \rho, z), \quad (1.1.14)$$

$$l_1 \equiv l_1(a, \rho, z), \quad l_2 \equiv l_2(a, \rho, z). \quad (1.1.15)$$

Заметим следующие предельные значения

$$\lim_{z \rightarrow 0} l_1(x) = \min(x, \rho), \quad \lim_{z \rightarrow 0} l_2(x) = \max(x, \rho). \quad (1.1.16)$$

Принимая во внимание вышеуказанные свойства, представление (1.1.4) может быть обобщено:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0^{1+u}} &= \frac{1}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{(1+u)/2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi u}{2} \int_0^{l_1(\rho_0)} \frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0\right) x^u dx}{\{[l_1^2(\rho_0) - x^2][l_2^2(\rho_0) - x^2]\}^{(1+u)/2}}. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Формула (1.1.17) упрощается, когда $u=0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0} &= \frac{1}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{l_1(\rho_0)} \frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0\right) dx}{\{[l_1^2(\rho_0) - x^2][l_2^2(\rho_0) - x^2]\}^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Опять мы можем заметить, что интеграл в (1.1.18) может быть вычислен как неопределённый

$$\int \frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0) dx}{\{[l_1^2(\rho_0)-x^2][l_2^2(\rho_0)-x^2]\}^{1/2}} = -\frac{1}{R_0} \tan^{-1} \frac{\{[l_1^2(\rho_0)-x^2][l_2^2(\rho_0)-x^2]\}^{1/2}}{xR_0}. \quad (1.1.19)$$

Последнее представление очень важно и будет широко использоваться в книге.

Много других полезных формул может быть получено из вышеприведённых при помощи простой замены переменных, а именно,

$$\int \frac{\lambda(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0) dx}{\{[x^2-l_1^2(\rho_0)][x^2-l_2^2(\rho_0)]\}^{1/2}} = \frac{1}{R_0} \tan^{-1} \frac{\{[x^2-l_1^2(\rho_0)][x^2-l_2^2(\rho_0)]\}^{1/2}}{xR_0}, \quad (1.1.20)$$

$$\frac{1}{R_0^{1+u}} = \frac{1}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi-\phi_0) + z^2]^{(1+u)/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi u}{2} \int_{l_2(\rho_0)}^{\infty} \frac{\lambda(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0) x^u dx}{\{[x^2-l_1^2(\rho_0)][x^2-l_2^2(\rho_0)]\}^{(1+u)/2}}, \quad (1.1.21)$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi-\phi_0) + z^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{l_2(\rho_0)}^{\infty} \frac{\lambda(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0) dx}{\{[x^2-l_1^2(\rho_0)][x^2-l_2^2(\rho_0)]\}^{1/2}}, \quad (1.1.22)$$

$$\int \frac{\lambda(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0) dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} = \frac{1}{R} \tan^{-1} \left[\frac{(x^2-\rho^2)^{1/2}(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}{xR} \right]. \quad (1.1.23)$$

Полученные представления будут полезны для решения внешних смешанных граничных задач.

Можно получить несколько модификаций формулы (1.1.19). Например, мы можем написать

$$\int \frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0\right) dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}} = -\frac{1}{R_0} \tan^{-1} \frac{(\rho^2-x^2)^{1/2}[\rho_0^2-g^2(x)]^{1/2}}{xR_0}. \quad (1.1.24)$$

Здесь

$$g(x) = x[1 + z^2/(\rho^2 - x^2)]^{1/2}. \quad (1.1.25)$$

Важно отметить, что функция $g(x)$ обратна l_1 для $x^2 < \rho^2$, и обратна l_2 для $x^2 > \rho^2 + z^2$. Введение новой переменной $x = l_1(y)$, $y = g(x)$ преобразует (1.1.24) в

$$\begin{aligned} & \int \frac{[l_2^2(y) - y^2]^{1/2}}{(\rho_0^2 - y^2)^{1/2}[l_2^2(y) - l_1^2(y)]} \lambda\left(\frac{l_1^2(y)}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0\right) dy \\ &= -\frac{1}{R_0} \tan^{-1} \frac{(\rho_0^2 - y^2)^{1/2}[l_2^2(y) - y^2]^{1/2}}{yR_0} \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

Когда $z = 0$, формула (1.1.18) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi-\phi_0)]^{1/2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi-\phi_0\right) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Тот же самый результат принимает другую форму из-за (1.1.22)

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\pi} \int_{\max(\rho_0, \rho)}^{\infty} \frac{\lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi-\phi_0\right) dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}}. \quad (1.1.28)$$

Интегральные представления в этом разделе могут быть обобщены для

сферы (Fabrikant, 1987d), и другая модификация в тороидальных координатах также возможна. Ограничения на объём книги не позволяют нам описывать детали.

Упражнение 1.1

1. Доказать справедливость формулы (η определена в 1.1.6)

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{\rho^2 \rho_0^2 - x^4}{x^3 \eta}.$$

2. Доказать справедливость формулы (R определён в первой строке 1.1.27)

$$\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0\right) = -\frac{x\eta}{R^2 + \eta^2} \frac{d\eta}{dx}.$$

Совет: используйте формулу: $x^2 + \rho^2 \rho_0^2 / x^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) = R^2 + \eta^2$, и результат выше.

3. Доказать справедливость формулы

$$\lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}, \phi - \phi_0\right) = \frac{x\eta}{R^2 + \eta^2} \frac{d\eta}{dx}.$$

4. Доказать справедливость формул

$$(l_2^2 - \rho^2)^{1/2} (l_2^2 - a^2)^{1/2} = z l_2, \quad (a^2 - l_1^2)^{1/2} (\rho^2 - l_1^2)^{1/2} = z l_1,$$

$$(a^2 - l_1^2)^{1/2} (l_2^2 - a^2)^{1/2} = z a, \quad (l_2^2 - \rho^2)^{1/2} (\rho^2 - l_1^2)^{1/2} = z \rho.$$

Напоминание: l_1 и l_2 обозначают $l_1(a, \rho, z)$ и $l_2(a, \rho, z)$ соответственно.

Совет: используйте (1.1.11)

5. Докажите, что $g(x)$ обратна обоим l_1 и l_2 , а именно, докажите, что $g(l_1) = a$, и $g(l_2) = a$.

6. Доказать справедливость формул

$$\frac{\partial l_1}{\partial z} = -\frac{z l_1}{l_2^2 - l_1^2}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial z} = \frac{z l_2}{l_2^2 - l_1^2},$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial \rho} = \frac{a l_2 - \rho l_1}{l_2^2 - l_1^2} = \frac{\rho(a^2 - l_1^2)}{l_1(l_2^2 - l_1^2)}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial \rho} = \frac{\rho l_2 - a l_1}{l_2^2 - l_1^2} = \frac{\rho(l_2^2 - a^2)}{l_2(l_2^2 - l_1^2)}.$$

Совет: используйте результаты предыдущих упражнений.

7. Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda \left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)\rho_0}, \phi - \psi \right)$$

Ответ: $-\frac{1}{R_0} \tan^{-1} \frac{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2} [l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{xR_0}.$

Совет: используйте (1.1.26)

8. Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \frac{(x^2 - l_1^2(x))^{1/2}}{[l_2^2(x) - l_1^2(x)]} \lambda \left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(x)}, \phi - \phi_0 \right)$$

Ответ: $\frac{1}{R_0} \tan^{-1} \frac{(x^2 - l_1^2(x))^{1/2} (x^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{xR_0}.$

Совет: используйте (1.1.20)

9. Докажите справедливость интегрального представления

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{\cos[\kappa(\rho^2 - x^2)^{1/2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}/x + (\pi\nu/2)]}{[(\rho^2 - x^2)(\rho_0^2 - x^2)]^{(1+\nu)/2}} \lambda \left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0 \right) x^\nu dx = \frac{e^{-\kappa R}}{R^{1+\nu}}.$$

Совет: попробуйте использовать это интегральное представление для решения уравнения Клейна—Гордона.

1.2 Свойства \mathcal{L} —операторов

Введём интегральный \mathcal{L} —оператор следующим образом:

$$\mathcal{L}(k)f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k^{|n|} e^{in\phi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi_0} f(\phi_0) d\phi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k^{|n|} f_n e^{in\phi}. \quad (1.2.1)$$

Здесь f_n обозначает n —ный коэффициент Фурье функции f . В случае, когда $k < 1$, формула (1.2.1) может быть переписана как

$$\mathcal{L}(k)f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(k, \phi - \phi_0) f(\phi_0) d\phi_0, \quad (1.2.2)$$

где $\lambda(\cdot, \cdot)$ определена в (1.1.5). \mathcal{L} -оператор может также быть назван оператором Пуассона, так как он был введён Пуассоном для решения двумерных задач Дирихле для круга.

Следующие свойства \mathcal{L} -операторов справедливы

$$\mathcal{L}(k_1)\mathcal{L}(k_2) = \mathcal{L}(k_1 k_2), \quad \lim_{k \rightarrow 1} \mathcal{L}(k)f = f. \quad (1.2.3)$$

Доказательство этих свойств элементарно, и оставлено читателю. Эти свойства будут широко использоваться в различных преобразованиях повсюду в книге и имеют большое значение для понимания нового метода.

Упражнение 1.2

1. Докажите справедливость формулы $\mathcal{L}(k)\lambda(m, \phi) = \lambda(km, \phi)$, для $k < 1$ и $m < 1$.

Совет: используйте (1.2.3)

2. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)][r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \psi)]}, \quad \text{для } \rho > \rho_0 \text{ и } r > r_0.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi(\rho^2 r^2 - \rho_0^2 r_0^2)}{(\rho^2 - \rho_0^2)(r^2 - r_0^2)[\rho^2 r^2 + \rho_0^2 r_0^2 - 2\rho\rho_0 r r_0 \cos(\phi_0 - \psi)]}.$$

3. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{[1 + k^2 - 2k \cos(\phi - \phi_0)]^2 [1 + k_1^2 - 2k_1 \cos(\phi - \psi)]}, \quad \text{для } k < 1 \text{ и } k_1 < 1.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi}{1+k^2k_1^2-2kk_1\cos(\phi_0-\psi)} \left\{ \frac{2k^2}{(1-k^2)^3} + \frac{1}{1+k^2k_1^2-2kk_1\cos(\phi_0-\psi)} \left[\frac{k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1-k^4k_1^2}{(1-k^2)^2} \right] \right\}.$$

4. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\phi} d\phi}{[1+k^2-2k\cos(\phi-\phi_0)]^2[1+k_1^2-2k_1\cos(\phi-\psi)]}, \quad \text{для } k < 1 \text{ и } k_1 < 1.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi}{[1+k^2k_1^2-2kk_1\cos(\phi_0-\psi)]^2} \left\{ \frac{k_1^3 e^{i\psi}}{1-k_1^2} + \frac{k e^{i\phi_0} [2(1+k^4k_1^2)-kk_1(1+k^2)e^{-i(\psi-\phi_0)}] + k_1 e^{i\psi}(1-3k^2)}{(1-k^2)^3} \right\}.$$

5. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\phi} d\phi}{[1+k^2-2k\cos(\phi-\phi_0)]^2[1+k_1^2-2k_1\cos(\phi-\psi)]}, \quad \text{для } k < 1 \text{ и } k_1 < 1.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi}{[1+k^2k_1^2-2kk_1\cos(\phi_0-\psi)]^2} \left\{ \frac{k_1^2 e^{2i\psi}}{1-k_1^2} + \frac{2kk_1 e^{-i(\psi-\phi_0)} [e^{2i\psi}(k^4-3k^2+1)-k^2 e^{2i\phi_0}] - k^2 e^{2i\phi_0}(k^2+k_1^2-3-3k^2k_1^2)}{(1-k^2)^3} \right\}.$$

1.3 Дальнейшие интегральные представления

Здесь выведено интегральное представление для z/R_0^3 , где $R_0 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi-\phi_0) + z^2]^{1/2}$. Рассмотрим интеграл:

$$I_1 = \frac{1}{\rho_0} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \frac{d}{d\rho_0} \int_0^{\rho_0} \frac{x dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)}, \phi - \phi_0\right) \quad (1.3.1)$$

Интеграл (1.3.1) выглядит громоздким, и первое впечатление, что он может в лучшем случае быть выражен в эллиптических интегралах. В действительности, интеграл является квази-эллиптическим и может быть выражен через элементарные функции. Используя правило дифференцирования

$$\frac{d}{d\rho_0} \int_0^{\rho_0} \frac{f(x) dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} \right] + \rho_0 \int_0^{\rho_0} \frac{dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{x} \right], \quad (1.3.2)$$

интеграл (1.3.1) может быть переписан в виде

$$I_1 = \int_0^{\rho_0} \frac{dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[\frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)\rho_0}, \phi - \phi_0\right) \right]. \quad (1.3.3)$$

Введём новую переменную:

$$j = \frac{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2} [l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{x},$$

$$j' = \frac{dj}{dx} = - \frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2} [\rho_0^2 l_2^2(x) - x^2 l_1^2(x)]}{x^2 [l_2^2(x) - l_1^2(x)] (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}. \quad (1.3.4)$$

Преобразуем выражение для λ :

$$\lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)\rho_0}, \phi - \phi_0\right) = \lambda\left(\frac{l_1^2(x)}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0\right) = - \frac{l_1^2(x) - \rho^2 \rho_0^2 / l_1^2(x)}{l_1^2(x) + \rho^2 \rho_0^2 / l_1^2(x) - 2\rho\rho_0\cos(\phi - \phi_0)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-l_1^2(x) + \rho^2 \rho_0^2 / l_1^2(x)}{l_1^2(x) + \rho^2 \rho_0^2 / l_1^2(x) - 2\rho \rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + \rho^2 + \rho_0^2 + z^2 - l_1^2(x) - l_2^2(x) + x^2 - \rho_0^2} \\
&= -\frac{x^2 l_1^2(x) - \rho_0^2 l_2^2(x)}{x^2(R_0^2 + j^2)} = -\frac{[l_2^2(x) - l_1^2(x)](\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}} \frac{j'}{R_0^2 + j^2} \quad (1.3.5)
\end{aligned}$$

Подстановка (1.3.4) и (1.3.5) в (1.3.3) позволяет нам продолжать преобразования:

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \int_0^{\rho_0} \frac{dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[\frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}} \frac{j'}{R_0^2 + j^2} \right] \\
&= - \int_0^{\rho_0} \frac{dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[\frac{xz(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}{l_2^2(x) - x^2} \frac{j'}{R_0^2 + j^2} \right] \\
&= -z \int_0^{\rho_0} \frac{dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[\frac{(\rho_0^2 - x^2)^{3/2} j'}{x j^2 (R_0^2 + j^2)} \right] \\
&= -z \left\{ \left[\frac{(\rho_0^2 - x^2) j'}{x j^2 (R_0^2 + j^2)} \right]_0^{\rho_0} - \int_0^r \frac{dj(x)}{j^2 (R_0^2 + j^2)} \right\} \\
&= -z \left[\frac{(\rho_0^2 - x^2) j'}{x j^2 (R_0^2 + j^2)} + \frac{1}{R_0^2 j} + \frac{1}{R_0^3} \tan^{-1} \frac{j}{R_0} \right]_0^{\rho_0} = \frac{\pi}{2} \frac{z}{R_0^3} \quad (1.3.6)
\end{aligned}$$

Наконец, (1.3.6) позволяет написать нужное представление:

$$\frac{z}{R_0^3} = \frac{2}{\pi \rho_0} \mathcal{L} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \frac{d}{d\rho_0} \int_0^{\rho_0} \frac{x dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda \left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)}, \phi - \phi_0 \right) \quad (1.3.7)$$

Теперь мы рассмотрим второй интеграл:

$$I_2 = -\frac{1}{\rho_0} \mathcal{L}(\rho_0) \frac{d}{d\rho_0} \int_{\rho_0}^a \frac{x dx}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{\rho}{l_2^2(x)}, \phi - \phi_0\right) \quad (1.3.8)$$

Мы используем следующее правило дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{F(\rho) d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} &= -\frac{F(a)x}{a(a^2 - x^2)^{1/2}} + x \int_x^a \frac{d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{F(\rho)}{\rho} \right] \\ &= -\frac{F(a)a}{x(a^2 - x^2)^{1/2}} + \frac{1}{x} \int_x^a \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho} F(\rho). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Выражение (1.3.8) примет вид:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} (l_2^2 - l_1^2)} \lambda\left(\frac{\rho \rho_0}{l_2^2}, \phi - \phi_0\right) \\ &\quad - \int_{\rho_0}^a \frac{dx}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[\frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{\rho \rho_0}{l_2^2(x)}, \phi - \phi_0\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Введём новую переменную

$$\begin{aligned} h &= \frac{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2} [x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{x}, \\ h' &= \frac{dh}{dx} = \frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2} [x^2 l_2^2(x) - \rho_0^2 l_1^2(x)]}{x^2 (x^2 - \rho_0^2)^{1/2} [l_2^2(x) - l_1^2(x)]}. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Выражение для λ может быть представлено в виде, аналогичном (1.3.5), а именно,

$$\lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(x)}, \phi-\phi_0\right) = \frac{[l_2^2(x)-l_1^2(x)](x^2-\rho_0^2)^{1/2}}{[x^2-l_1^2(x)]^{1/2}} \frac{h'}{R_0^2+h^2}. \quad (1.3.12)$$

Подстановка (1.3.11) и (1.3.12) в (1.3.10) даёт

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{(l_2^2-a^2)^{1/2}}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}(l_2^2-l_1^2)} \lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2}, \phi-\phi_0\right) \\ &- \int_{\rho_0}^a \frac{dx}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[\frac{xz(x^2-\rho_0^2)^{1/2}h'}{[x^2-l_1^2(x)](R_0^2+h^2)} \right] \\ &= \frac{(l_2^2-a^2)^{1/2}}{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}(l_2^2-l_1^2)} \lambda\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2}, \phi-\phi_0\right) \\ &- z \int_{\rho_0}^a \frac{dx}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[\frac{(x^2-\rho_0^2)^{3/2}h'}{xh^2(R_0^2+h^2)} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

После интегрирования по частям в (1.3.13) мы получаем

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\rho_0} \mathcal{L}(\rho_0) \frac{d}{d\rho_0} \int_{\rho_0}^a \frac{x dx}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{\rho}{l_2^2(x)}, \phi-\phi_0\right) = \\ &= \frac{z}{R_0^3} \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Здесь h обозначает $h(a)$, в соответствии с определением в первом выражении (1.3.11). В предельном случае, когда $a \rightarrow \infty$, выражение (1.3.14) даёт ещё одно представление для z/R_0^3 , а именно,

$$\frac{z}{R_0^3} = -\frac{2}{\pi\rho_0} \mathcal{L}(\rho_0) \frac{d}{d\rho_0} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{\rho}{l_2^2(x)}, \phi-\phi_0\right)$$

(1.3.15)

Последнее выражение полезно для решения внешней задач, в то время, как его эквивалент (1.3.6) нужен для решения внутренних задач. После вычисления интеграла в (1.3.1) как неопределённого, мы можем рассмотреть его обобщение

$$I_3 = \frac{1}{\rho_0} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \frac{d}{d\rho_0} \int_a^{\rho_0} \frac{x dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)}, \phi - \phi_0\right) \quad (1.3.16)$$

Мы используем следующее правило дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{F(\rho) d\rho}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} &= \frac{F(a)x}{a(x^2 - a^2)^{1/2}} + x \int_a^x \frac{d\rho}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{F(\rho)}{\rho} \right] \\ &= \frac{F(a)a}{x(x^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{1}{x} \int_a^x \frac{\rho d\rho}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho} F(\rho). \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Выражение (1.3.16) примет вид:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2} [l_2^2 - l_1^2]} \lambda\left(\frac{l_1^2}{\rho \rho_0}, \phi - \phi_0\right) \\ &+ \int_a^{\rho_0} \frac{dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[\frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)\rho_0}, \phi - \phi_0\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

Путём введения обозначения

$$F(y) = \frac{z}{R_0^3} \left[\frac{R_0}{j(y)} + \tan^{-1} \left(\frac{j(y)}{R_0} \right) \right], \quad (1.3.19)$$

где $j(y)$ определён в (1.3.4), выражение (1.3.18) может быть переписано как

$$I_3 = \frac{\rho_0^2 - a^2}{a} \frac{dF(a)}{da} + \int_a^{\rho_0} \frac{dy}{(\rho_0^2 - y^2)^{1/2}} \frac{d}{dy} \left[\frac{(\rho_0^2 - y^2)^{3/2}}{y} \frac{dF(y)}{dy} \right]. \quad (1.3.20)$$

Интегрирование (1.3.20) может быть выполнено по частям, с очень простым результатом $F(a)$, что означает вывод ещё одного интегрального представления

$$\begin{aligned} & \frac{z}{R_0^3} \left[\frac{R_0}{j} + \tan^{-1} \left(\frac{j}{R_0} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{\rho_0} \mathcal{L} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \frac{d}{d\rho_0} \int_a^{\rho_0} \frac{x dx}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda \left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)}, \phi - \phi_0 \right) \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Упражнение 1.3

1. Докажите, что h в (1.3.14) может быть определён любым из следующих выражений

$$\begin{aligned} h \equiv h(a) &= \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} = \frac{z(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \\ &= \frac{[l_2^2 - l_1^2(\rho_0)]^{1/2} [l_2^2 - l_2^2(\rho_0)]^{1/2}}{l_2} = \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}}{l_2}. \end{aligned}$$

2. Докажите, что j в (1.3.4) может быть определён одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} j \equiv j(a) &= \frac{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2} (l_2^2 - a^2)^{1/2}}{a} = \frac{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2} (\rho^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_1} \\ &= \frac{z(\rho_0^2 - a^2)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}} = \frac{[l_1^2(\rho_0) - l_1^2]^{1/2} [l_2^2(\rho_0) - l_1^2]^{1/2}}{l_1}. \end{aligned}$$

3. Докажите справедливость (1.3.15).

1.4 Внутренняя смешанная граничная задача для полупространства

Материал в этом разделе следует статье (Fabrikant, 1986h). Введём цилиндрические координаты (ρ, ϕ, z) . Рассмотрим задачу нахождения потенциальной функции V , гармоническую в полупространстве $z \geq 0$, исчезающую на бесконечности, и удовлетворяющую граничным условиям на плоскости $z = 0$

$$\begin{aligned} V &= v(\rho, \phi), \quad \text{для } \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= 0, \quad \text{для } \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Задача (1.4.1) может быть истолкована, как электростатическая задача о заряженном диске, с потенциалом предписанным на его поверхности или она может быть интерпретирована как упругая контактная задача о круглом штампе прижатом к упругому полупространству; другие интерпретации тоже возможны. Мы называем задачу внутренней, потому что ненулевые граничные условия заданы внутри диска. Потенциальная функция V может быть представлена через потенциал простого слоя следующим образом:

$$V(\rho, \phi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0)}{R_0} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 + \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0)}{R_0} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (1.4.2)$$

Здесь

$$R_0 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}, \quad \text{и} \quad \sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Подстановка (1.1.18) и (1.1.22) в (1.4.2) даёт, после изменения порядка интегрирования

$$\begin{aligned} V(\rho, \phi, z) &= 4 \int_0^{l_1} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\ &+ 4 \int_{l_2}^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^{g(x)} \frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi). \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Здесь \mathcal{L} —оператор определён в (1.2.1), g дан в (1.1.25), сокращения l_1 и l_2 понимаются, как $l_1(a, \rho, z)$ и $l_2(a, \rho, z)$ соответственно; и следующее правило было использовано для изменения порядка интегрирования:

$$\int_0^a d\rho_0 \int_0^{l_1(\rho_0)} dx = \int_0^{l_1} dx \int_{g(x)}^a d\rho_0, \quad \int_a^\infty d\rho_0 \int_{l_2(\rho_0)}^\infty dx = \int_{l_2}^\infty dx \int_a^{g(x)} d\rho_0. \quad (1.4.4)$$

Это правило проиллюстрировано на рисунке 1.4.1, где области интегрирования заштрихованы.

Рис. 1.4.1 Области интегрирования.

Подстановка граничных условий (1.4.1) в (1.4.3) ведёт к основному интегральному уравнению

$$4 \int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) = v(\rho, \phi). \quad (1.4.5)$$

Выражение (1.4.5) теперь представлено, как последовательность двух операторов Абеля и один \mathcal{L} —оператор. Мы вспомним, что общее интегральное уравнение Абеля

$$\int_x^a \frac{F(y) dy}{(y^2 - x^2)^{(1+u)/2}} = f(x) \quad (1.4.6)$$

имеет решение

$$F(r) = -\frac{2\cos(\pi u/2)}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{f(x) x dx}{(x^2 - r^2)^{(1+u)/2}}. \quad (1.4.7)$$

Так как параметры в Абелевых операторах (1.4.5) смешаны с параметрами \mathcal{L} -оператора, мы должны использовать их комбинации, чтобы обратить (1.4.5). Первый оператор, приложенный к обеим сторонам (1.4.5), имеет вид

$$\mathcal{L}\left(\frac{\zeta}{t}\right) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right) \quad (1.4.8)$$

Здесь мы ввели фиктивный параметр ζ , чтобы сделать параметр \mathcal{L} -оператора безразмерным, и также чтобы обеспечить требование, чтобы этот параметр был меньше, чем 1 почти всюду на интервале интегрирования, так как это условие обязательно для использования свойств (1.2.3). Мы называем параметр ζ «фиктивным», потому что он был введён только по формальным причинам; он исчезнет в окончательном результате и никак не влияет на преобразования.

Конечно, введение фиктивного параметра не даёт строгого обоснования для использования свойств (1.2.3). Такое обоснование выходит за рамки целей данной книги: автор удовлетворён тем фактом, что окончательный результат везде правилен. Чтобы строго обосновать промежуточные преобразования, нужно доказать теорему следующего содержания: свойства (1.2.3) могут быть использованы в математических преобразованиях в выражениях типа $\mathcal{L}(k_1)\mathcal{M}_1\mathcal{L}(k_2)\mathcal{M}_2\mathcal{L}(k_3)\dots$, где \mathcal{M} обозначает линейные операторы, если произведение $k_1k_2k_3\dots$ меньше, чем 1, в то же время позволяя некоторым k быть больше, чем 1. Мы надеемся, что некоторые читатели пожелают и смогут доказать теорему.

Результат приложения (1.4.8) к обеим сторонам (1.4.5) есть

$$2\pi \int_t^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - t^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{t}{\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) = \mathcal{L}\left(\frac{\zeta}{t}\right) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right) v(\rho, \phi). \quad (1.4.9)$$

Второй оператор, нужный для преобразования (1.4.9), есть

$$\mathcal{L}\left(\frac{y}{\zeta}\right) \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{t dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\zeta}{t}\right)$$

с результатом

$$\sigma(y, \phi) = -\frac{1}{\pi^2 y} \mathcal{L}\left(\frac{y}{\zeta}\right) \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{t dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\zeta}{t}\right) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right) v(\rho, \phi). \quad (1.4.10)$$

Правила дифференцирования под знаком интеграла и свойства \mathcal{L} -операторов позволяют нам переписать (1.4.10) в виде

$$\sigma(y, \phi) = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{\Phi(a, y, \phi)}{(a^2 - y^2)^{1/2}} - \int_y^a \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \Phi(t, y, \phi) \right]. \quad (1.4.11)$$

Здесь

$$\Phi(t, y, \phi) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \mathcal{L}\left(\frac{\rho y}{t^2}\right) v(\rho, \phi) \right]. \quad (1.4.12)$$

Заметим, что фиктивный параметр ζ исчез из окончательного решения, и параметр \mathcal{L} -оператора меньше, чем единица, как и должен быть. В будущем, мы не будем больше использовать фиктивный параметр, предполагая, что использование свойств (1.2.3) оправдано. Используя интегрирование по частям и факт, что $\lambda(k, \psi)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа в полярных координатах, мы можем вывести следующее равенство

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, y, \phi) = \int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho y}{t^2}\right) \Delta v(\rho, \phi), \quad (1.4.13)$$

где Δ обозначает двумерный оператор Лапласа в полярных координатах. Подстановка (1.4.13) в (1.4.12) ведёт к другой форме решения, а именно,

$$\sigma(y, \phi) = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{\Phi(a, y, \phi)}{(a^2 - y^2)^{1/2}} - \int_y^a \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{\rho y}{t^2} \right) \Delta v(\rho, \phi) \right], \quad (1.4.14)$$

Изменение порядка интегрирования в (1.4.14) и интегрирование по t (смотри (1.1.23)) даёт

$$\sigma(y, \phi) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\Phi(a, y, \phi)}{(a^2 - y^2)^{1/2}} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \tan^{-1} \left[\frac{(a^2 - \rho^2)^{1/2} (a^2 - y^2)^{1/2}}{a[\rho^2 + y^2 - 2\rho y \cos(\phi - \psi)]^{1/2}} \right] \frac{\Delta v(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi}{[\rho^2 + y^2 - 2\rho y \cos(\phi - \psi)]^{1/2}} \right\}. \quad (1.4.15)$$

Полученное здесь решение состоит из двух частей: первая часть сингулярна на границе, в то время, как вторая исчезает на границе. В различных приложениях требуется, чтобы решение было несингулярно на границе. Необходимое и достаточное условие этого есть $\Phi(a, a, \phi) = 0$. В упругих контактных задачах это условие определяет радиус области контакта. Отметим также, что в случае, когда v является двумерной гармонической функцией, нетривиальное решение сингулярно.

Представляет интерес выразить потенциал V в полупространстве непосредственно через его значение v предписанное внутри диска $\rho = a$. Подстановка (1.4.10) в (1.4.3) даёт после интегрирования

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{l_1} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{x^2}{\rho g^2(x)} \right) \frac{d}{dg(x)} \int_0^{g(x)} \frac{r dr}{[g^2(x) - r^2]^{1/2}} \mathcal{L}(r) v(r, \phi). \quad (1.4.16)$$

Здесь следующее свойство Абелевых операторов было использовано:

$$\int_y^a \frac{dr}{(r^2 - y^2)^{1/2}} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{tf(t) dt}{(t^2 - r^2)^{1/2}} = -\frac{\pi}{2} f(y). \quad (1.4.17)$$

Введение новой переменной $t = g(x)$, $x = l_1(t)$, превращает (1.4.16) в

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{dl_1(t)}{[\rho^2 - l_1^2(t)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{l_1^2(t)}{\rho t^2}\right) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}(\rho_0) v(\rho_0, \phi). \quad (1.4.18)$$

Изменяя порядок интегрирования в (1.4.18) согласно правилу

$$\int_0^a F(r) dr \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{\rho f(\rho) d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}} = - \int_0^a f(\rho) d\rho \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{F(r) r dr}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad (1.4.19)$$

мы получаем следующее выражение

$$V(\rho, \phi, z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \left\{ \mathcal{L}(\rho_0) \frac{d}{d\rho_0} \int_{\rho_0}^a \frac{t dl_1(t)}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2} [\rho^2 - l_1^2(t)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{l_2^2(t)}\right) \right\} v(\rho_0, \phi) d\rho_0. \quad (1.4.20)$$

Интеграл в фигурных скобках может быть вычислен согласно (1.3.14), с результатом

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) \right] \frac{z}{R_0^3} v(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (1.4.21)$$

Здесь

$$R_0 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}, \quad h = (a^2 - l_1^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} / a. \quad (1.4.22)$$

Формулы (1.4.18) и (1.4.21) определяют потенциальную функцию V в полупространстве $z \geq 0$, выраженную непосредственно через его значения v предписанном на диске $\rho \leq a$, $z = 0$. Выражение (1.4.18) полезно, когда явное вычисление интегралов возможно, в то время, как выражение (1.4.21) более удобно для численного интегрирования.

Заметим, что в предельном случае, когда $z=0$, уравнение (1.4.21) переходит в хорошо известный результат, а именно,

$$V(\rho, \phi, 0) = v(\rho, \phi), \quad \text{для } \rho \leq a; \text{ и}$$

$$V(\rho, \phi, 0) = \frac{(\rho^2 - a^2)^{1/2}}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{v(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]}, \quad \text{для } \rho > a.$$

Решение смешанной граничной задачи первого типа закончено. Основные результаты даются формулами (1.4.10) и (1.4.18).

Рассмотрим теперь другую внутреннюю задачу, со следующими смешанными условиями на границе $z=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= -2\pi\sigma(\rho, \phi), \quad \text{для } \rho \leq a, \text{ и } 0 \leq \phi < 2\pi; \\ V &= 0, \quad \text{для } \rho > a, \text{ и } 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

Задача (1.4.23) может быть интерпретирована как электростатическая задача о заряженном диске $\rho \leq a$ внутри бесконечной заземлённой диафрагмы $\rho > a$. Математически аналогичная задача возникает при рассмотрении круглой трещины под действием произвольного нормального давления σ .

Подстановка (1.4.23) в (1.4.3) ведёт к интегральному уравнению для $\rho > a$,

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\ & + \int_\rho^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi) = 0. \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

Отметим, что σ в первом члене (1.4.24) известна из (1.4.23), в то время, как σ во втором члене пока неизвестна. Используя интегральное представление (1.1.27) и (1.1.28), уравнение (1.4.24) может быть переписано в виде

$$\int_\rho^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi)$$

$$= - \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi). \quad (1.4.25)$$

Действие на обе стороны (1.4.25) оператором

$$\mathcal{L}(t) \frac{d}{dt} \int_t^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

ведёт к

$$\int_a^t \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{t}\right) \sigma(\rho_0, \phi) = - \int_0^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{t}\right) \sigma(\rho_0, \phi). \quad (1.4.26)$$

Следующий оператор есть

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho} \int_a^{\rho} \frac{t dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \mathcal{L}(t),$$

и окончательный результат принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, \phi) &= - \frac{2}{\pi(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \rho_0 d\rho_0}{\rho^2 - \rho_0^2} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\ &= - \frac{1}{\pi^2(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}. \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Формула (1.4.27) определяет значение σ вне круга $\rho=a$ непосредственно через её значения внутри. Теперь σ известна по всей плоскости $z=0$, и подстановка (1.4.27) во второй член (1.4.3) позволяет нам выразить потенциальную функцию V прямо через заданные значения σ . Первое интегрирование даёт

$$\begin{aligned}
V(\rho, \phi, z) = & 4 \int_0^{l_1} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\
& - 4 \int_{l_2}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi).
\end{aligned} \tag{1.4.28}$$

Здесь мы использовали следующий интеграл

$$\int_a^{\rho} \frac{y dy}{(\rho^2 - y^2)^{1/2} (y^2 - a^2)^{1/2} (y^2 - r^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2(\rho^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - r^2)^{1/2}}, \quad \text{для } r < a. \tag{1.4.29}$$

Первый член в (1.4.29) может быть преобразован, используя (1.1.22), следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{l_1} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\
& = \int_0^a \rho_0 d\rho_0 \int_{l_2(\rho_0)}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2} [g^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\
& = \int_{l_2(0)}^{l_2} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^{g(x)} \frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\
& + \int_{l_2}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi).
\end{aligned} \tag{1.4.30}$$

Подстановка (1.4.30) в (1.4.29) даёт:

$$V(\rho, \phi, z) = 4 \int_{l_2(0)}^{l_2} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^{g(x)} \frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi). \quad (1.4.31)$$

Введение новой переменной $t = g(x)$, $x = l_2(t)$, превращает (1.4.31) в

$$V(\rho, \phi, z) = 4 \int_0^a \frac{dl_2(t)}{[l_2^2(t) - \rho^2]^{1/2}} \int_0^t \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(t)}\right) \sigma(\rho_0, \phi). \quad (1.4.32)$$

Изменение порядка интегрирования в (1.4.32), и интегрирование по t (смотри 1.1.23), даёт:

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{R_0} \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (1.4.33)$$

Формулы (1.4.31–33) дают три эквивалентные представления потенциальной функции V , первая более удобна для явного вычисления интегралов, в то время, как третья имеет некоторые преимущества для численного интегрирования. Два примера рассмотрены ниже.

Пример 1. Пусть следующий потенциал дан внутри диска $v(\rho, \phi) = v_n \rho^n \cos n\phi$, $v_n = \text{const}$. Решение согласно (1.4.16) есть

$$\begin{aligned} V(\rho, \phi, z) &= \frac{2v_n}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n+1)}{\rho^n \Gamma(n+\frac{1}{2})} \cos n\phi \int_0^{l_1} \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \\ &= v_n \rho^n \cos n\phi \left[1 - \frac{2\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2} F\left(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{l_2^2 - a^2}{l_2^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.4.34)$$

Гипергеометрическая функция в (1.4.34) может быть выражена через элементарные (Bateman and Erdelyi, 1955)

$$F\left(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \zeta\right) = \frac{(1-\zeta)^{n+1/2}}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left[\frac{\zeta^{n-1/2}}{\sqrt{1-\zeta}} \sin^{-1} \sqrt{\zeta} \right]. \quad (1.4.35)$$

Пример 2. Пусть распределение электрического заряда дано в форме $\sigma(\rho, \phi) = \sigma_n \rho^n \cos n\phi$, $\sigma_n = \text{const}$. Решение даётся (1.4.32)

$$\begin{aligned} V(\rho, \phi, z) &= 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \sigma_n \rho^n \cos n\phi \int_0^b \frac{x^{2n+2} dx}{(x^2 + z^2)^{n+1}} \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{5}{2})} \sigma_n \rho^n \cos n\phi \frac{b^{2n+3}}{z^{2n+2}} F(n+1, n+\frac{3}{2}; n+\frac{5}{2}; -\frac{b^2}{z^2}), \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

где $b=(a^2 - l_1^2)^{1/2}$, и гипергеометрическая функция может быть выражена через элементарные (Bateman and Erdelyi, 1955)

$$F(n+1, n+\frac{3}{2}; n+\frac{5}{2}; \zeta) = \frac{2n+3}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left\{ \frac{1}{\zeta} \left[\frac{1}{2\sqrt{\zeta}} \ln \frac{1+\sqrt{\zeta}}{1-\sqrt{\zeta}} - 1 \right] \right\}. \quad (1.4.37)$$

Библиографическая заметка. Степень эффективности нового метода может быть оценена путём сравнения с результатами опубликованными в литературе. Формулы аналогичные (1.4.21) могут быть найдены в работах лорда Кельвина, Гейне, Гобсона и других. Как упоминалось раньше, их практическое использование было весьма ограничено. Эквивалентные выражения, как (1.4.18), позволяют нам вычислять интегралы непосредственным и элементарным образом. Это было показано на двух примерах выше. Общее решение теперь стало рабочим инструментом, доступным любому с инженерным образованием в математике.

Копсон (1947) был очень близок к открытию нового метода. Он установил равенство

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{\cos n(\phi - \psi) d\phi}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}} \\ &= \frac{4\cos n(\phi_0 - \psi)}{(\rho\rho_0)^n} \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

Копсон получил решение, аналогичное (1.4.10), в виде ряда Фурье. Остаётся неясным, почему на не сделал суммирования в (1.4.38), которое бы привело

к (1.1.27), что служит фундаментом нового метода.

Галин (1953) получил несингулярную часть (соответствующую второму члену общего решения (1.4.15) уравнения (1.4.5). Леонов (1953) получил замкнутое решение (0.3). Оба решения имели то же самое ограничение, как и предыдущие классические решения: трудность практического использования.

Другой тип решения уравнения (1.4.5) может быть выражен через z -производную (1.4.21) для $z=0$, согласно соотношению

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (1.4.39)$$

Результат есть

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, \phi) = & \frac{1}{2\pi^3} \left\{ -\Delta \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{R} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{R} \right) \omega(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \right. \\ & \left. - \frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1 - t\bar{t}}{(1-t)(1-\bar{t})} \frac{\omega(\rho_0, \phi_0)}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \right\} \\ = & \frac{1}{\pi^2} \left\{ -\Delta \int_{\rho}^a \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{\rho \rho_0}{x^2} \right) \omega(\rho_0, \phi) \right. \\ & \left. - \frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{3/2}} \int_0^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{\rho \rho_0}{a^2} \right) \omega(\rho_0, \phi_0) \right\}, \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

где

$$t = \frac{\rho \rho_0}{a^2} e^{i(\phi - \phi_0)}, \quad (1.4.41)$$

и черта над буквой обозначает комплексное сопряжение. Формула (1.4.40) соответствует решению Моссаковского и других (1985). Разработанный аппарат может быть использован для решения задач о нескольких заряженных коаксиальных (Fabrikant, 1987e) и произвольно расположенных (Fabrikant, 1988a) круглых дисках.

Упражнение 1.4

1. Круглый проводящий диск заряжен до потенциала v_0 . Требуется найти потенциальную функцию V .

Ответ: $V(\rho, z) = \frac{2}{\pi} v_0 \sin^{-1}(l_1/\rho) = \frac{2}{\pi} v_0 \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right).$

Совет: используйте формулу (1.4.18)

2. В условиях предыдущей задачи, найти распределение заряда σ используя формулы (1.4.10) и (1.4.39). Доказать, что в обоих случаях результат тот же самый.

Ответ: $\sigma = \frac{v_0}{\pi^2(a^2 - \rho^2)^{1/2}}.$

3. Решите задачи 1 и 2 для $v = v_1 \rho \cos \phi$, $v_1 = \text{const}$.

Ответ: $V(\rho, \phi, z) = \frac{2}{\pi} v_1 \rho \cos \phi \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{a}{l_2} \sqrt{1 - (a/l_2)^2} \right],$

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{2v_1 \rho \cos \phi}{\pi^2(a^2 - \rho^2)^{1/2}}.$$

4. Однородное распределение плотности заряда $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ предписано на круглом диске радиуса a . Требуется найти потенциальную функцию.

Ответ: $V(\rho, z) = 4\sigma_0 \left[(a^2 - l_1^2)^{1/2} - z \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \right].$

5. Решите предыдущую задачу для случая, где $\sigma = \sigma_1 \rho \cos \phi$, $\sigma_1 = \text{const}$.

Ответ: $V(\rho, \phi, z) = \frac{8}{3} \sigma_1 \rho \cos \phi \left[(a^2 - l_1^2)^{1/2} \left(\frac{3}{2} - \frac{a^2}{2l_2^2} \right) - \frac{3}{2} z \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \right].$

6. Потенциальная функция задана выражением

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{8}{3} \sigma_1 \rho \cos \phi \left[(a^2 - l_1^2)^{1/2} \left(\frac{3}{2} - \frac{a^2}{2l_2^2} \right) - \frac{3}{2} z \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \right].$$

Найдите распределение заряда на плоскости $z = 0$.

Ответ: $\sigma = \sigma_1 \rho \cos \phi$, для $\rho \leq a$; $\sigma = 0$, для $\rho > a$.

Sovet: используйте (1.4.39).

7. Решите смешанную граничную задачу теории потенциала для сферы.

Совет: смотри (Fabrikant, 1987i).

1.5 Внешняя смешанная граничная задача для полупространства

Материал в этой секции следует статье (Fabrikant, 1986f). Задача называется внешней, когда ненулевые граничные условия предписаны вне диска. Как и в предыдущей секции, мы рассматриваем два типа задач.

Задача 1. Необходимо найти функцию, гармоническую в полупространстве $z \geq 0$, исчезающую на бесконечности, и удовлетворяет смешанным граничным условиям на плоскости $z=0$, а именно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0, \text{ для } \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ V &= v(\rho, \phi), \text{ для } \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Задача (1.5.1) может быть интерпретирована, как электростатическая о заряженной диафрагм, или как внешняя контактная задача теории упругости. Потенциал V представлен через распределение простого слоя (1.4.3). Подстановка граничных условий (1.5.1) в (1.4.3) приводит к основному интегральному уравнению

$$4 \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi) = v(\rho, \phi). \quad (1.5.2)$$

Его решение получается точно также, как и решение (1.4.5), а именно

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{1}{\pi^2 \rho} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho} \int_a^{\rho} \frac{x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}(x^2) \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right) v(\rho_0, \phi). \quad (1.5.3)$$

Правила дифференцирования (1.3.2) и (1.3.9) позволяют нам переписать (1.5.3) следующим образом

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\chi(a, \rho, \phi)}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} + \int_a^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \chi(x, \rho, \phi) \right\}, \quad (1.5.4)$$

где

$$\chi(x, \rho, \phi) = x \int_x^\infty \frac{d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left[\mathcal{L} \left(\frac{x^2}{\rho \rho_0} \right) v(\rho_0, \phi) \right]. \quad (1.5.5)$$

Выполним следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \chi(x, \rho, \phi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[x \int_x^\infty \frac{d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} (\mathcal{L}v)' \right] \\ &= \int_x^\infty \frac{d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} [(\mathcal{L}v)' + \rho_0 (\mathcal{L}v)'' - 2(\mathcal{L}' \rho_0 v)'] \\ &= \int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \left[\mathcal{L} \left(v'' + \frac{1}{\rho_0} v' \right) - \left(\mathcal{L}'' + \frac{1}{\rho_0} \mathcal{L}' \right) v \right]. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Здесь для краткости знак $(\cdot)'$ обозначает частную производную по ρ_0 , \mathcal{L} обозначает $\mathcal{L}(x^2/\rho\rho_0)$, $v \equiv v(\rho_0, \phi)$, и следующее равенство было использовано

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L} \left(\frac{x^2}{\rho \rho_0} \right) = -2 \left(\frac{\rho_0}{x} \right) \frac{\partial}{\partial \rho_0} \mathcal{L} \left(\frac{x^2}{\rho \rho_0} \right).$$

Так как

$$\mathcal{L} \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^2} v,$$

его добавление и вычитание из (1.5.6) даёт:

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(x, \rho, \phi) = \int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \left[\mathcal{L} \Delta v - (\Delta \mathcal{L}) v \right], \quad (1.5.7)$$

где Δ является двумерным оператором Лапласа в полярных координатах. Так как λ является гармонической функцией, $\Delta \mathcal{L} = 0$, и (1.5.7) упрощается

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(x, \rho, \phi) = \int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L} \Delta v. \quad (1.5.8)$$

Подстановка (1.5.8) в (1.5.4) даёт

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\chi(a, \rho, \phi)}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} + \int_a^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{x^2}{\rho \rho_0} \right) \Delta v(\rho_0, \phi) \right\}. \quad (1.5.9)$$

Следует заметить, что первый член в (1.5.9) становится сингулярным, когда $\rho \rightarrow a$, в то время, как второй член исчезает на краю диска. В случае, когда v является гармонической функцией, второй член в (1.5.9) исчезает, и решение представляется первым членом. Последующее интегрирование по x становится возможным в (1.5.9), используя (1.1.8) после изменения порядка интегрирования. Следующий результат получен

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, \phi) = & -\frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\chi(a, \rho, \phi)}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\Delta v(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}} \tan^{-1} \frac{(\rho^2 - a^2)^{1/2} (\rho_0^2 - a^2)^{1/2}}{a[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Решения, подобные (1.5.3) и (1.5.9), удобны в тех случаях, когда точное вычисление интегралов возможно, в то время, как решение в форме (1.5.10) имеет некоторые преимущества, когда численное интегрирование становится необходимым.

Теперь мы можем выразить потенциальную функцию V непосредственно через её граничное значение v . Так как $\sigma = 0$ внутри круга $\rho = a$, потенциальная функция (1.4.3) принимает вид

$$V(\rho, \phi, z) = 4 \int_{l_2}^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^{g(x)} \frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{\rho \rho_0}{x^2} \right) \sigma(\rho_0, \phi). \quad (1.5.11)$$

Подстановка (1.5.3) в (1.5.11) даёт после первого интегрирования

$$V(\rho, \phi, z) = -\frac{2}{\pi} \int_{l_2}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{\rho g^2(x)}{x^2} \right) \frac{\partial}{\partial g(x)} \int_{g(x)}^{\infty} \frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \nu(\rho_0, \phi). \quad (1.5.12)$$

Здесь свойства \mathcal{L} —операторов (1.2.3) были использованы, вместе со следующим равенством, которое действительно для Абелевых операторов

$$\int_a^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) t dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} f(\rho). \quad (1.5.13)$$

Введение новой переменной $y = g(x)$, $x = l_2(y)$, в (1.5.12), позволяет нам переписать (1.5.12) в виде

$$V(\rho, \phi, z) = -\frac{2}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{dl_2(y)}{[l_2^2(y) - \rho^2]^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{l_1^2(y)}{\rho} \right) \frac{d}{dy} \int_y^{\infty} \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - y^2)^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \nu(\rho_0, \phi). \quad (1.5.14)$$

Изменение порядка интегрирования в (1.5.14) даёт

$$V(\rho, \phi, z) = -\frac{2}{\pi} \int_a^{\infty} \left\{ \mathcal{L} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \frac{d}{d\rho_0} \int_a^{\rho_0} \frac{y dl_2(y)}{(\rho_0^2 - y^2)^{1/2} [l_2^2(y) - \rho^2]^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{l_1^2(y)}{\rho} \right) \right\} \nu(\rho_0, \phi) d\rho_0. \quad (1.5.15)$$

Здесь следующая общая формула была использована

$$\int_a^{\infty} F(\rho) d\rho \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{x f(x) dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} = - \int_a^{\infty} f(x) dx \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\rho F(\rho) d\rho}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (1.5.16)$$

Интеграл в фигурных скобках (1.5.15) может быть вычислен, согласно (1.3.21), с результатом

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \frac{z}{R_0^3} \left[\frac{R_0}{j} + \tan^{-1} \left(\frac{j}{R_0} \right) \right] \nu(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (1.5.17)$$

Здесь R_0 определено в (1.4.22), и

$$j(x) = \frac{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2} [I_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{x}. \quad (1.5.18)$$

Сокращение j в (1.5.17) обозначает $j(a)$. В особом случае, когда $z=0$, выражение (1.5.17) упрощается

$$V(\rho, \phi, 0) = \frac{1}{\pi^2} (a^2 - \rho^2)^{1/2} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{v(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2} [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]},$$

для $\rho < a$;

$$V(\rho, \phi, 0) = v(\rho, \phi), \text{ для } \rho \geq a. \quad (1.5.19)$$

Общее решение закончено. Плотность заряда σ даётся двумя эквивалентными выражениями (1.5.3) и (1.5.10), потенциал определён в (1.5.14) и (1.5.17), первое выражение более удобно для точного вычисления интегралов, в то время, как второй лучше для численного интегрирования.

Задача 2. Рассмотрим задачу нахождения гармонической функции, исчезающей на бесконечности, и удовлетворяющую следующим смешанным граничным условиям в плоскости $z=0$

$$V=0, \text{ для } \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\sigma(\rho, \phi), \text{ для } \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (1.5.20)$$

Задача может быть интерпретирована как электростатическая задача о заряженной бесконечной диафрагме, с заземлённым диском внутри, или как задачу о внешней круглой трещине в линейной теории упругости. Подстановка граничных условий (1.5.20) в (1.4.3) приводит к основному интегральному уравнению

$$\int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi)$$

$$= - \int_a^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi). \quad (1.5.21)$$

Следует отметить, что σ во втором члене (1.5.21) известна из граничных

условий (1.5.20), в то время, как значение σ в первом члене подлежит определению. Правая сторона (1.5.21) может быть преобразована, используя (1.1.26),

$$\begin{aligned} & \int_0^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\ &= - \int_0^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_a^{\infty} \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi), \end{aligned}$$

с немедленным результатом

$$\int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) = - \int_a^{\infty} \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi). \quad (1.5.22)$$

Приложение оператора

$$\mathcal{L}(\rho) \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{x dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{x}\right)$$

к обеим сторонам (1.5.22) даёт, после необходимых преобразований

$$\sigma(\rho, \phi) = - \frac{2}{\pi(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^{\infty} \frac{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2}}{\rho_0^2 - \rho^2} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \rho_0 d\rho_0, \quad \text{для } \rho < a, \quad (1.5.23)$$

или, интерпретируя \mathcal{L} —оператор, мы получим

$$\sigma(\rho, \phi) = - \frac{1}{\pi^2(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \frac{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2} \sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (1.5.24)$$

Теперь значение σ известно на всей плоскости $z=0$, и (1.4.3) может быть использовано для выражения потенциала V непосредственно через заданные значения σ . Подстановка (1.5.23) в (1.4.3) даёт, после первого интегрирования:

$$\begin{aligned}
V(\rho, \phi, z) = & -4 \int_0^{l_1} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_a^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\
& + 4 \int_{l_2}^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^{g(x)} \frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi).
\end{aligned} \tag{1.5.25}$$

Второй член в (1.5.25) эквивалентен второму члену в (1.4.2), который, в свою очередь, может быть представлен, используя (1.1.18), как

$$4 \int_a^\infty \left\{ \int_0^{l_1(\rho_0)} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} [\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \right\} \sigma(\rho_0, \phi) \rho_0 d\rho_0.$$

Следующая схема изменения порядка интегрирования была использована

$$\int_a^\infty d\rho_0 \int_0^{l_1(\rho_0)} dx = \int_0^{l_1} dx \int_a^\infty d\rho_0 + \int_{l_1}^{l_1(\infty)} dx \int_{g(x)}^\infty d\rho_0,$$

и второй член в (1.5.25) может быть переписан в виде

$$\begin{aligned}
& 4 \int_0^{l_1} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_a^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\
& + 4 \int_{l_1}^{l_1(\infty)} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi).
\end{aligned} \tag{1.5.26}$$

Подстановка (1.5.26) в (1.5.25) даёт, используя $l_1(\infty) = \rho$,

$$V(\rho, \phi, z) = 4 \int_{l_1}^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{[\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi). \tag{1.5.27}$$

Изменение порядка интегрирования в (1.5.27), и интегрирование по x ,

согласно (1.1.24), приводит к результату

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{1}{R_0} \tan^{-1}\left(\frac{j}{R_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \quad (1.5.28)$$

где R_0 определён в (1.4.22), и j обозначает $j(a)$, согласно (1.3.4).

Вторая задача теперь решена. Выражение (1.5.24) определяет плотность распределения заряда σ внутри круга непосредственно через её значения вне круга. Потенциал V даётся двумя эквивалентными выражениями (1.5.27) и (1.5.28), первое для точного вычисления интегралов, в то время, как второе имеет определённые преимущества в случае численного интегрирования. Некоторые специфические примеры рассмотрены ниже.

Пример 1. Рассмотрим внешнюю смешанную задачу со следующими граничными условиями на плоскости $z=0$

$$\begin{aligned} V &= v_0/\rho^n, \quad \text{для } \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= 0, \quad \text{для } \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (1.5.29)$$

Условия (1.5.29) соответствуют Задаче 1. Решение даётся формулами (1.5.14) и (1.5.3). Подстановка (1.5.29) в (1.5.14) даёт после интегрирования

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)} \int_{l_2}^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2} g^n(x)}, \quad (1.5.30)$$

где $g(x)$ определен в (1.1.25), и следующий интеграл был использован (Градштейн и Рыжик, 1963)

$$\int_x^\infty \frac{dp}{\rho^n (\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n/2)}{2\Gamma[(n+1)/2] x^n}. \quad (1.5.31)$$

Интеграл (1.5.30) может быть вычислен в элементарных функциях для любого целого n , но процедура частично различается для чётных и нечётных значений n . Например, для чётных $n=2k$, задача сводится к вычислению интеграла

$$\int_{l_2}^{\infty} \frac{(x^2 - \rho^2)^{k-1/2} dx}{x^{2k}(x^2 - \rho^2 - z^2)^k},$$

который может быть вычислен введением новой переменной $t = x/(x^2 - \rho^2)^{1/2}$.
Окончательный результат есть

$$\begin{aligned} V(\rho, \phi, z) = & \frac{2\nu_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)z^n} \left\{ \sum_{m=1}^k \frac{A_m}{2m-1} [1 - Q_0^{2m-1}] \right. \\ & \left. + 2B_1 \ln Q + \sum_{m=2}^k \frac{B_m}{1-m} \left[(Q_1^{m-1} - Q_2^{m-1}) - (Q_3^{m-1} - Q_4^{m-1}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.5.32)$$

где

$$A_{k-m+1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\eta^{m-1}} \left[\frac{(\eta-1)^{k-1}}{(r^2 - \eta)^k} \right], \quad \text{для} \quad \eta=0, \quad \text{и} \quad r^2 = 1 + \rho^2/z^2;$$

$$B_{k-m+1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{(t^2-1)^{k-1}}{t^{2k}(r^2+t)^k} \right], \quad \text{для} \quad t = \sqrt{1 + \rho^2/z^2};$$

$$Q_0 = \frac{(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}}{l_2}, \quad Q = \frac{l_2[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{a[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + z]},$$

$$Q_1 = \frac{z[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{l_1^2}, \quad Q_2 = \frac{z[(\rho^2 + z^2)^{1/2} - (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{l_1^2},$$

$$Q_3 = \frac{z[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + z]}{\rho^2}, \quad Q_4 = \frac{z[(\rho^2 + z^2)^{1/2} - z]}{\rho^2}. \quad (1.5.33)$$

Для случая нечётных $n = 2k+1$, интегрирование может быть выполнено при помощи подстановки $t = (x^2 - \rho^2 - z^2)^{1/2}$, и окончательный результат есть

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{\nu_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)} \left\{ \sum_{m=1}^k \frac{C_m}{(2m-1)(a^2 - l_1^2)^{m-1/2}} + \sum_{m=1}^{k+1} D_m E_m \right\}, \quad (1.5.34)$$

где

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{(k-m)!} \frac{d^{k-m}}{dt^{k-m}} \left[\frac{(t+z^2)^k}{(t+\rho^2+z^2)^{k+1}} \right], \text{ для } t=0; \\ D_m &= \frac{1}{(k+1-m)!} \frac{d^{k+1-m}}{dt^{k+1-m}} \left[\frac{(t+z^2)^k}{t^k} \right], \text{ для } t=-(\rho^2+z^2); \\ E_m &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{t}}{(a^2-t_1^2)^{1/2}} \right], \text{ для } t=\rho^2+z^2. \end{aligned} \quad (1.5.35)$$

Подстановка (1.5.29) в (1.5.3) даёт после интегрирования

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{\nu_0 \Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{3/2} \Gamma(n/2)} \left\{ \frac{1}{a^n (\rho^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{n(\rho^2 - a^2)^{1/2}}{\rho^{n+2}} F\left(\frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \right\}, \quad (1.5.36)$$

и гипергеометрическая функция может быть выражена в элементарных функциях (Bateman and Erdelyi, 1955), а именно, для чётных $n=2k$, $k=1,2,3, \dots$,

$$F\left(k+1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; t\right) = \frac{1}{2k!} \frac{d^k}{dt^k} \left[t^{k-1/2} \ln \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right],$$

и для нечётных $n=2k+1$, $k=0,1,2, \dots$,

$$F\left(k+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; t\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}\Gamma(k+\frac{3}{2})} \frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{t^{k+1/2}}{\sqrt{1-t}} \right]. \quad (1.5.37)$$

распределение плотности заряда, вычисленное по (1.5.36), неотрицательно для $n=1$, и меняет знак когда $n \geq 2$, с отрицательным максимумом увеличивающимся с n , в то время, как полный заряд остаётся равным нулю.

Пример 2. Рассмотрим граничные условия при $z=0$

$$\begin{aligned} V &= (\nu_n/\rho^n) e^{in\phi}, \text{ для } \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= 0, \text{ для } \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \end{aligned} \quad (1.5.38)$$

где ν_n является константой. Решение даётся в (1.5.3) и (1.5.14). Подстановка (1.5.38) в (1.5.14) даёт, после интегрирования

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{2\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n)} \rho^n e^{in\phi} \int_{l_2}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}(x^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (1.5.39)$$

и окончательное интегрирование ведёт к

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{2v_n}{\sqrt{\pi}\rho^n} e^{in\phi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \Gamma(n+1/2)}{(2k-1)\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)} (1 - Q_0^{2k-1}), \quad (1.5.40)$$

где Q_0 определено в (1.5.33). Подставляя (1.5.38) в (1.5.3), мы получим, после интегрирования

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\pi^{3/2}\Gamma(n)} \frac{v_n e^{in\phi}}{\rho^n (\rho^2 - a^2)^{1/2}}. \quad (1.5.41)$$

Очевидно, выражение (1.5.41) может также быть получено дифференцированием (1.5.40) по z для $z=0$.

Пример 3. Рассмотрим случай, относящийся Задаче 2, с граничными условиями

$$V=0, \text{ для } \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi \frac{\sigma_0}{\rho^n} \text{ для } \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \quad (1.5.42)$$

решение даётся в (1.5.23) и (1.5.27). Подстановка (1.5.42) в (1.5.27) даёт, после интегрирования с использованием (1.5.31),

$$V(\rho, \phi, z) = 2\sqrt{\pi}\sigma_0 \frac{\Gamma[(n-1)/2]}{\Gamma(n/2)} \int_{l_1}^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} g^{n-1}(x)}, \quad (1.5.43)$$

где $g(x)$ определено в (1.1.25). Техника, использованная в предыдущем примере может быть использована здесь для дальнейшего интегрирования. Окончательный результат зависит от чётности n . Для чётных $n=2k$, $k=1,2,3, \dots$, потенциал есть

$$\begin{aligned}
V(\rho, \phi, z) = & 2\sqrt{\pi}\sigma_0 \frac{\Gamma[(n-1)/2]}{\Gamma(n/2)} \left\{ 2B_1 \ln Q \right. \\
& + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{A_m}{(2m-1)z^{2m-1}} \left[1 - \left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right)^{2m-1} \right] \\
& \left. + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{B_{m+1}}{mz^m} [Q_1^m - Q_2^m - (Q_3^m - Q_4^m)] \right\}.
\end{aligned} \tag{1.5.44}$$

Здесь Q , Q_1 , Q_2 , Q_3 , и Q_4 определены в (1.5.33), и

$$\begin{aligned}
A_{k-m} &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{(t-z^2)^{k-1}}{(\rho^2 + z^2 - t)^k} \right] \quad \text{для} \quad t=0; \\
B_{k-m+1} &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{(t^2 - z^2)^{k-1}}{t^{2k-2}[(\rho^2 + z^2)^{1/2} - t]^k} \right], \quad \text{для} \quad t = -(\rho^2 + z^2)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{1.5.45}$$

Для нечётных $n=2k+1$, результатом является

$$V(\rho, \phi, z) = 2\sqrt{\pi} \frac{\sigma_0 \Gamma[(n-1)/2]}{\Gamma(n/2) z^{n-1}} \sum_{m=1}^k \left\{ \frac{G_m}{2m-1} \left(\frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{a} \right)^{2m-1} - H_m L_m \right\}. \tag{1.5.46}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G_{k-m+1} &= \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{(1+t)^{k-1}}{(\xi + t)^k} \right], \quad \text{для} \quad t=0, \quad \xi = (\rho^2 + z^2)/z^2; \\
H_{k-m+1} &= \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{(1+t)^{k-1}}{t^k} \right], \quad \text{для} \quad t = -(\rho^2 + z^2)/z^2; \\
L_m &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m)} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{t}}{a} (l_2^2 - a^2)^{1/2} \right) \right], \quad \text{для} \quad t = (\rho^2 + z^2)/z^2.
\end{aligned} \tag{1.5.47}$$

Пример 4. Рассмотрим граничные условия на плоскости $z=0$:

$$V=0, \quad \text{для} \quad \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi(\sigma_n/\rho^n)e^{in\phi}, \quad \text{для } \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \quad (1.5.48)$$

Подстановка (1.5.48) в (1.5.27) даёт после интегрирования,

$$V(\rho, \phi, z) = 2\sqrt{\pi} \frac{\sigma_n \Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)\rho^n} e^{in\phi} \left\{ (l_2^2 - a^2)^{1/2} - z - z \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k \Gamma(n)}{\Gamma(k) \Gamma(n-k+1)(2k-3)} [1 - (1 - l_1^2/a^2)^{k-3/2}] \right\}, \quad (1.5.49)$$

и на плоскости $z=0$

$$V(\rho, \phi, 0) = 2\sqrt{\pi} \frac{\sigma_n \Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)\rho^n} e^{in\phi} \Re(\rho^2 - a^2)^{1/2}.$$

Символ \Re обозначает действительную часть комплексного параметра. Плотность заряда определена согласно (1.5.23),

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{\sigma_n \Gamma(n-1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n)\rho^n} e^{in\phi} \Re \left\{ 1 - \frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k \Gamma(n)}{\Gamma(k) \Gamma(n-k+1)(2k-3)} [1 - (1 - \rho^2/a^2)^{k-3/2}] \right\}. \quad (1.5.50)$$

Более общий случай граничных условий, а именно,

$$V=0, \quad \text{для } \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi(\sigma_{jn}/\rho^j)e^{in\phi}, \quad \text{для } \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \quad (1.5.51)$$

также может быть рассмотрен, используя ту же технику, как и в предыдущих примерах, и окончательный результат может всегда быть выражен в элементарных функциях. Форма результата будет различна для $(j+n)$ чётного и для $(j+n)$ нечётного. Как пример, следующее выражение может быть получено при помощи подстановки (1.5.51) в (1.5.23), для случая когда $j+n=2k$

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{\sigma_{jn}}{\rho^j} e^{in\phi} \Re \left\{ 1 - \frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[1 - \sum_{m=2}^k \frac{\Gamma(m-3/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(m)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2m-2} \right] \right\}, \quad (1.5.52)$$

и для нечётных $j+n=2k+1$

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{2\sigma_{jn}}{\pi\rho^j} e^{in\phi} \Re \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{\rho}{a} \right) - \frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[1 - \sum_{m=2}^k \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(m-1)}{4\Gamma(m+1/2)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2m-2} \right] \right\}, \quad (1.5.53)$$

Выражения (1.5.52) и (1.5.53) представляют общие формулы, которые покрывают все особые случаи рассмотренные в Примерах 3 и 4.

Рассмотренные выше примеры продемонстрировали простоту метода. Процесс решения теперь стал простой и элементарной процедурой.

Упражнение 1.5

1. Следующие граничные условия заданы на $z=0$

$$V = v_0/\rho, \quad \text{для} \quad \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

$$\text{Ответ: } V(\rho, \phi, z) = \frac{2v_0}{\pi(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \sin^{-1} \left(\frac{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}{l_2} \right)$$

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{v_0 a}{\pi^2 \rho^2 (\rho^2 - a^2)^{1/2}}.$$

полный заряд равен v_0 .

2. Следующие граничные условия заданы на $z=0$

$$V = v_0/\rho^2, \quad \text{для} \quad \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

$$\text{Ответ: } V(\rho, \phi, z) = \frac{v_0}{\rho^2 + z^2} \left[1 - \frac{(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}}{l_2} \right]$$

$$+ \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \ln \frac{l_2[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{a[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + z]} \Big],$$

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{v_0}{2\pi\rho^2} \left[\frac{1}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{1}{\rho} \ln \frac{\rho + (\rho^2 - a^2)^{1/2}}{a} \right].$$

3. Следующие граничные условия заданы на $z=0$

$$V = v_0/\rho^3, \quad \text{для} \quad \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ:
$$V(\rho, \phi, z) = \frac{4v_0}{(\rho^2 + z^2)^2} \left[\frac{z^2}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}} - \frac{l_1^2(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{2a^2} + \frac{\rho^2 - 2z^2}{2(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \sin^{-1} \left(\frac{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}{l_2} \right) \right].$$

Заметьте, что потенциал в начале координат конечен, а именно, $V(0,0,0) = 4v_0/(3\pi a^3)$.

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{2v_0(2a^2 - \rho^2)}{\pi^2 a \rho^4 (\rho^2 - a^2)^{1/2}}.$$

4. Следующие граничные условия заданы на $z=0$

$$V = v_0/\rho^4, \quad \text{для} \quad \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ:
$$V(\rho, \phi, z) = \frac{3v_0}{2(\rho^2 + z^2)^2} \left\{ \frac{\rho^2 - z^2}{\rho^2 + z^2} \left[1 - \frac{(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}}{l_2} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}}{l_2} \right)^3 \right] + \frac{z}{2(\rho^2 + z^2)} \left[\frac{l_2^2}{a^2} (l_2^2 - a^2)^{1/2} - z \right] \right\}$$

$$-\frac{z(2z^2-3\rho^2)}{2(\rho^2+z^2)^{3/2}} \ln \frac{l_2[(\rho^2+z^2)^{1/2}+(l_2^2-a^2)^{1/2}]}{a[(\rho^2+z^2)^{1/2}+z]},$$

последнее выражение упрощается при $z=0$:

$$V(\rho, \phi, 0) = \frac{v_0}{\rho^4} \left[1 - \frac{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}{a} - \frac{\rho^2(a^2 - \rho^2)^{1/2}}{2a^3} \right], \quad \text{для } \rho \leq a;$$

и $V(\rho, \phi, 0) = v_0/\rho^4$, для $\rho > a$. Заметьте, что потенциал в начале координат конечен, а именно, $V(0, 0, 0) = 3v_0/(8a^4)$.

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{3v_0}{8\pi\rho^4} \left\{ \frac{3a^2 - \rho^2}{a^2(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{3}{\rho} \ln \left[\frac{\rho + (\rho^2 - a^2)^{1/2}}{a} \right] \right\}.$$

5. Следующие граничные условия заданы на $z=0$

$$V = (v_1/\rho) e^{i\phi}, \quad \text{для } \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для } \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию.

Ответ: $V(\rho, \phi, z) = \frac{v_1}{\rho} e^{i\phi} \left[1 - \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right]$

6. Следующие граничные условия заданы на $z=0$

$$V = (v_2/\rho^2) e^{2i\phi}, \quad \text{для } \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для } \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию.

Ответ: $V(\rho, \phi, z) = \frac{3v_2}{2\rho^2} e^{2i\phi} \left\{ \left[1 - \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right] - \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right)^3 \right] \right\}.$

7. Следующие граничные условия заданы на $z=0$

$$V = (v_3/\rho^3) e^{3i\phi}, \quad \text{для} \quad \rho \geq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию.

$$\text{Ответ: } V(\rho, \phi, z) = \frac{15v_3}{4\rho^3} e^{3i\phi} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right] - \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right)^3 \right] + \frac{1}{10} \left[1 - \left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right)^5 \right] \right\}.$$

8. Пусть следующие граничные условия заданы на $z=0$:

$$V = 0, \quad \text{для} \quad \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\sigma_0/\rho^2, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad \text{для} \quad \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

$$\text{Ответ: } V(\rho, \phi, z) = \frac{2\pi\sigma_0}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \ln \frac{l_2[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{a[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + z]},$$

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{\sigma_0}{\rho^2} \Re \left[1 - \frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right], \quad \sigma(0, 0) = -\frac{\sigma_0}{2a^2}.$$

9. Пусть следующие граничные условия заданы на $z=0$:

$$V = 0, \quad \text{для} \quad \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\sigma_0/\rho^3, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad \text{для} \quad \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

$$\text{Ответ: } V(\rho, \phi, z) = \frac{4\sigma_0}{\rho^2 + z^2} \left[\frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{a} - \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \sin^{-1} \left(\frac{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}{l_2} \right) \right],$$

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{2\sigma_0}{\pi\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} \sin^{-1}\left(\frac{\rho}{a}\right) - \frac{1}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right], \quad \text{для } \rho < a; \quad \sigma(0,0) = -2\sigma_0/(3\pi a^3).$$

10. Пусть следующие граничные условия заданы на $z=0$:

$$V=0, \quad \text{для } \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\sigma_0/\rho^4, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad \text{для } \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

$$\text{Ответ: } V(\rho, \phi, z) = \frac{\pi\sigma_0}{2(\rho^2 + z^2)^2} \left\{ \frac{2z}{a} (a^2 - l_1^2)^{1/2} - 3z + \frac{l_2^2}{a^2} (l_2^2 - a^2)^{1/2} \right.$$

$$\left. \frac{\rho^2 - 2z^2}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \ln \frac{l_2[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + (l_2^2 - a^2)^{1/2}]}{a[(\rho^2 + z^2)^{1/2} + z]} \right\},$$

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{\sigma_0}{\rho^4} \Re \left[1 - \frac{2a^2 - \rho^2}{2a(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right], \quad \sigma(0,0) = -\frac{\sigma_0}{8a^4}.$$

11. Рассмотрим граничные условия на плоскости $z=0$:

$$V=0, \quad \text{для } \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi(\sigma_1/\rho)e^{i\phi}, \quad \text{для } \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

$$\text{Ответ: } V(\rho, \phi, z) = 2\pi(\sigma_1/\rho) e^{i\phi} [(l_2^2 - a^2)^{1/2} - z],$$

$$\sigma(\rho, \phi) = (\sigma_1/\rho) e^{i\phi} \Re [1 - a/(a^2 - \rho^2)^{1/2}].$$

12. Рассмотрим граничные условия на плоскости $z=0$:

$$V=0, \quad \text{для } \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi(\sigma_2/\rho^2)e^{2i\phi}, \quad \text{для } \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $V(\rho, \phi, z) = \pi(\sigma_2/\rho^2) e^{2i\phi} [(l_2^2 - a^2)^{1/2} - 2z + z(a^2 - l_1^2)^{1/2}/a]$,

$$\sigma(\rho, \phi) = (\sigma_2/\rho^2) e^{i\phi} \Re \left[1 - \frac{2a^2 - \rho^2}{2a(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right].$$

13. Рассмотрим граничные условия на плоскости $z=0$:

$$V=0, \quad \text{для } \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi(\sigma_3/\rho^3) e^{3i\phi}, \quad \text{для } \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Найдите потенциальную функцию и распределение заряда.

Ответ: $V(\rho, \phi, z) = \frac{3\pi\sigma_3}{4\rho^3} e^{3i\phi} \left[(l_2^2 - a^2)^{1/2} - \frac{8}{3}z \right.$

$$\left. + 2\frac{z}{a}(a^2 - l_1^2)^{1/2} - \frac{1}{3}z \left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right)^3 \right],$$

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{\sigma_3}{\rho^3} e^{3i\phi} \Re \left[1 - \frac{3a}{8(a^2 - \rho^2)^{1/2}} - \frac{3(a^2 - \rho^2)^{1/2}}{4a} + \frac{(a^2 - \rho^2)^{3/2}}{8a^3} \right].$$

14. Докажите, что полный заряд Q_T в Задаче 2 (1.5.20) может быть выражено прямо через заданную плотность заряда σ как

$$Q_T = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \sigma(\rho, \phi) \cos^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) \rho d\rho d\phi.$$

Совет: интегрируйте (1.5.23).

15. Решите задачу 14 в случае, когда $\sigma = \sigma_0/\rho^n$.

Ответ: $Q_T = \frac{2\sigma_0\sqrt{\pi}\Gamma[(n-1)/2]}{(n-2)\Gamma(n/2)a^{n-2}}.$

1.6 Некоторые фундаментальные интегралы

Рассмотренные здесь интегралы названы фундаментальными, потому что они особо важны для нового метода, и также потому что почти все интегральные представления, выведенные раньше, представляют собой особый случай фундаментальных. Рассмотрим три точки в системе цилиндрических координат, а именно, $M(\rho, \phi, z)$, $M_0(\rho_0, \phi_0, z_0)$, и $N(r, \psi, 0)$. Введём следующие обозначения:

$$l_1(t) = \frac{1}{2} \{[(\rho + t)^2 + z^2]^{1/2} - [(\rho - t)^2 + z^2]^{1/2}\}, \quad (1.6.1)$$

$$l_2(t) = \frac{1}{2} \{[(\rho + t)^2 + z^2]^{1/2} + [(\rho - t)^2 + z^2]^{1/2}\}, \quad (1.6.2)$$

$$l_{10}(t) = \frac{1}{2} \{[(\rho_0 + t)^2 + z_0^2]^{1/2} - [(\rho_0 - t)^2 + z_0^2]^{1/2}\}, \quad (1.6.3)$$

$$l_{20}(t) = \frac{1}{2} \{[(\rho_0 + t)^2 + z_0^2]^{1/2} + [(\rho_0 - t)^2 + z_0^2]^{1/2}\}. \quad (1.6.4)$$

Согласно предыдущему, l_{10} обозначает сокращение для $l_{10}(a)$, и так далее; $R(\cdot, \cdot)$ обозначает расстояние между двумя точками.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{z}{R^3(M, N)} \frac{1}{R(N, M_0)} \tan^{-1} \left[\frac{h_0}{R(N, M_0)} \right] r dr d\psi, \quad (1.6.5)$$

где

$$h_0 = [a^2 - l_{10}]^{1/2} [a^2 - r^2]^{1/2} / a \quad (1.6.6)$$

Мы используем интегральное представление (1.1.23)

$$\frac{1}{R(N, M_0)} \tan^{-1} \left[\frac{h_0}{R(N, M_0)} \right] = \int_r^a \frac{dl_{20}(x)}{[l_{20}^2(x) - \rho_0^2]^{1/2} (x^2 - r^2)^{1/2}} \lambda \left(\frac{\rho_0 r}{l_{20}^2(x)}, \psi - \phi_0 \right) \quad (1.6.7)$$

где $\lambda(\cdot, \cdot)$ определена в (1.1.5).

Подстановка (1.6.7) в (1.6.5) даёт, после изменения порядка интегрирования:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^a \frac{dl_{20}(x)}{[l_{20}^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \int_0^x \frac{rdr}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \lambda\left(\frac{\rho_0 r}{l_{20}^2(x)}, \psi - \phi_0\right) \frac{z}{R^3(M, N)}. \quad (1.6.8)$$

Подставляя интегральное представление (1.3.7),

$$\begin{aligned} \frac{z}{R^3(M, N)} &\equiv \frac{z}{[\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\phi - \psi) + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{2}{\pi r} \mathcal{L}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{tdt}{(r^2 - t^2)^{1/2}} \frac{[t^2 - l_1^2(t)]^{1/2}}{l_2^2(t) - l_1^2(t)} \lambda\left(\frac{l_1(t)t}{l_2(t)}, \phi - \psi\right) \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

в (1.6.8), следующий результат может быть получен после интегрирования по ψ :

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \int_0^a \frac{dl_{20}(x)}{[l_{20}^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \int_0^x \frac{dr}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{tdt}{(r^2 - t^2)^{1/2}} \\ &\quad \times \frac{[t^2 - l_1^2(t)]^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} \lambda\left(\frac{l_1(t)t\rho_0}{l_{20}^2(x)l_2(t)}, \phi - \phi_0\right) \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

Здесь следующие свойства \mathcal{L} -операторов были использованы:

$$\mathcal{L}(k) \lambda(k_1, \cdot) = \lambda(kk_1, \cdot), \quad \text{для } k, k_1 < 1 \quad (1.6.11)$$

Хорошо известные свойства Абелевых операторов, а именно,

$$\int_0^x \frac{dr}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{f(t)tdt}{(r^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} f(x), \quad (1.6.12)$$

позволяют нам значительно упростить (1.6.10):

$$I_1 = 2\pi \int_0^a \frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \frac{[x^2 - l_{10}^2(x)]^{1/2}}{l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)l_{10}(x)}{l_2(x)l_{20}(x)}, \phi - \phi_0\right) dx.$$

(1.6.13)

Следует отметить, что подинтегральное выражение в (1.6.13) симметрично по отношению к точкам M и M_0 в то время как это не было заметно в начальном выражении (1.6.5). Подинтегральное выражение в (1.6.13) является полным дифференциалом, так что интеграл может быть вычислен как неопределённый:

$$\begin{aligned} & \int \frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2} [x^2 - l_{10}^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x) \quad l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)} \lambda \left(\frac{l_1(x) l_{10}(x)}{l_2(x) l_{20}(x)}, \phi - \phi_0 \right) dx \\ &= \frac{1}{2R_1} \tan^{-1} \frac{\Theta_1(x)}{R_1} + \frac{1}{2R_2} \tan^{-1} \frac{\Theta_2(x)}{R_2}, \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0)^2]^{1/2}, \\ R_2 &= [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z + z_0)^2]^{1/2}, \\ \Theta_1(x) &= \Theta(x) + zz_0/\Theta(x), \quad \Theta_2(x) = \Theta(x) - zz_0/\Theta(x), \\ \Theta(x) &= [x^2 - l_1^2(x)]^{1/2} [x^2 - l_{10}^2(x)]^{1/2}/x. \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

Заметим, что когда $z_0 = 0$, $\Theta(x)$ преобразуется в $h(x)$, как эта величина определена в (1.3.11), и интеграл (1.6.14) сводится к интегралу, рассмотренному в Упражнение 1.1.8. Правильность интеграла в (1.6.14) может быть проверена дифференцированием. Нужные для этого алгебраические преобразования очень нетривиальны. Мы приводим здесь некоторые промежуточные преобразования:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta(x) = \frac{\Theta(x) [l_2^2(x) l_{20}^2(x) - l_1^2(x) l_{10}^2(x)]}{x [l_2^2(x) - l_1^2(x)] [l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)]}, \quad (1.6.16)$$

$$\lambda \left(\frac{l_1(x) l_{10}(x)}{l_2(x) l_{20}(x)}, \phi - \phi_0 \right) = \frac{l_2^2(x) l_{20}^2(x) - l_1^2(x) l_{10}^2(x)}{2x^2} \left[\frac{1}{R_1^2 + \Theta_1^2(x)} + \frac{1}{R_2^2 + \Theta_2^2(x)} \right] \quad (1.6.17)$$

Формула (1.6.14) позволяет нам вычислить интеграл (1.6.5):

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{z}{R^3(M,N)} \frac{1}{R(N,M_0)} \tan^{-1} \left[\frac{h_0}{R(N,M_0)} \right] r dr d\psi \\
&= \pi \frac{|z|}{z} \left\{ \frac{1}{R_1} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\Theta_1}{R_1} \right) - \frac{\pi}{2} \frac{|zz_0|}{zz_0} \right] + \frac{1}{R_2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\Theta_2}{R_2} \right) + \frac{\pi}{2} \frac{|zz_0|}{zz_0} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{1.6.18}$$

где сокращения Θ_1 и Θ_2 обозначают соответственно $\Theta_1(a)$ и $\Theta_2(a)$. Заметим важный особый случай, когда $z_0=0$. Формула (1.6.18) в этом случае преобразуется в:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{z}{R^3(M,N)} \frac{1}{R(N,N_0)} \tan^{-1} \left[\frac{(a^2-r^2)^{1/2} (a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{aR(N,N_0)} \right] r dr d\psi \\
&= \frac{2\pi}{R(M,N_0)} \tan^{-1} \left[\frac{h}{R(M,N_0)} \right], \quad \text{для} \quad \rho_0 < a,
\end{aligned} \tag{1.6.19}$$

и интеграл исчезает когда $\rho_0 \geq a$. Здесь точка N_0 имеет цилиндрические координаты $(\rho_0, \phi_0, 0)$, и h определён в (1.4.22).

Рассмотрим второй фундаментальный интеграл:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{z_0}{R^3(N,M_0)} \left[\frac{R(N,M_0)}{h_0} + \tan^{-1} \frac{h_0}{R(N,M_0)} \right] \frac{r dr d\psi}{R(M,N)}, \tag{1.6.20}$$

где h_0 определено в (1.6.6). Мы используем интегральное представление для величины обратной расстоянию

$$\frac{1}{R(M,N)} = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{dx}{(r^2-x^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(x)-x^2]^{1/2}}{l_2^2(x)-l_1^2(x)} \lambda \left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)r}, \phi-\psi \right) \tag{1.6.21}$$

что представляет собой вариацию (1.1.26). Подставляя (1.6.21) в (1.6.20), следующее выражение получается, после изменения порядка интегрирования:

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^a \frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} dx \int_x^a \frac{r dr}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \times \lambda\left(\frac{l_1(x)x}{l_2(x)r}, \phi - \psi\right) \frac{z_0}{R^3(N, M_0)} \left[\frac{R(N, M_0)}{h_0} + \tan^{-1} \frac{h_0}{R(N, M_0)} \right], \quad (1.6.22)$$

Мы используем интегральное представление (1.3.14):

$$\begin{aligned} & \frac{z_0}{R^3(N, M_0)} \left[\frac{R(N, M_0)}{h_0} + \tan^{-1} \frac{h_0}{R(N, M_0)} \right] \\ &= -\frac{\mathcal{L}(r)}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{t dt}{(t^2 - r^2)^{1/2}} \frac{[l_{20}^2(t) - t^2]^{1/2}}{l_{20}^2(t) - l_{10}^2(t)} \lambda\left(\frac{l_{10}(t)}{t l_{20}(t)}, \phi_0 - \psi\right) \end{aligned} \quad (1.6.23)$$

Подстановка (1.6.23) в (1.6.22) даёт, после интегрирования по ψ :

$$\begin{aligned} I_2 &= -4 \int_0^a \frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} dx \int_x^a \frac{dr}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{t dt}{(t^2 - r^2)^{1/2}} \\ & \quad \times \frac{[l_{20}^2(t) - t^2]^{1/2}}{l_{20}^2(t) - l_{10}^2(t)} \lambda\left(\frac{l_1(x) l_{10}(t) x}{l_2(x) l_{20}(t) t}, \phi - \phi_0\right) \end{aligned} \quad (1.6.24)$$

Мы припоминаем хорошо известные свойства Абелевых операторов:

$$\int_x^a \frac{dr}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{f(t) t dt}{(t^2 - r^2)^{1/2}} = -\frac{\pi}{2} f(x). \quad (1.6.25)$$

Приложение (1.6.25) к (1.6.24) даёт:

$$I_2 = 2\pi \int_0^a \frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \frac{[l_{20}^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x) l_{10}(x)}{l_2(x) l_{20}(x)}, \phi - \phi_0\right) dx. \quad (1.6.26)$$

Отметим определённое сходство между (1.6.26) и (1.6.13). Подинтегральное выражение в (1.6.26) есть полный дифференциал, и может быть вычислен в элементарных функциях:

$$\begin{aligned} & \int \frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2} [l_{20}^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \frac{[l_{20}^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)} \lambda \left(\frac{l_1(x) l_{10}(x)}{l_2(x) l_{20}(x)}, \phi - \phi_0 \right) dx \\ &= -\frac{1}{2R_1} \tan^{-1} \frac{\Xi_1(x)}{R_1} - \frac{1}{2R_2} \tan^{-1} \frac{\Xi_2(x)}{R_2}, \end{aligned} \quad (1.6.27)$$

где R_1 и R_2 определены в (1.6.15), и

$$\begin{aligned} \Xi_1(x) &= \xi(x) + zz_0/\xi(x), & \Xi_2(x) &= \xi(x) - zz_0/\xi(x), \\ \xi(x) &= [l_2^2(x) - x^2]^{1/2} [l_{20}^2(x) - x^2]^{1/2}/x \end{aligned} \quad (1.6.28)$$

Опять мы можем заметить, что в случай, когда $z_0 = 0$, $\xi(x)$ преобразуется в $j(x)$, согласно определению этой величины в (1.3.4), и интеграл (1.6.27) совпадает с (1.1.26). Как и раньше, правильность интегрирования может быть проверена дифференцированием, используя (1.6.17) и свойства:

$$\frac{\partial}{\partial x} \xi(x) = -\frac{\xi(x) [l_2^2(x) l_{20}^2(x) - l_1^2(x) l_{10}^2(x)]}{x [l_2^2(x) - l_1^2(x)] [l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)]}, \quad (1.6.29)$$

Окончательно, интеграл (1.6.20) может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{z_0}{R^3(N, M_0)} \left[\frac{R(N, M_0)}{h_0} + \tan^{-1} \frac{h_0}{R(N, M_0)} \right] \frac{r dr d\psi}{R(M, N)} \\ &= \pi \frac{|z_0|}{z_0} \left\{ \frac{1}{R_1} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\Xi_1}{R_1} \right] + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\Xi_2}{R_2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.6.30)$$

Согласно нашим правилам, Ξ_1 и Ξ_2 обозначает $\Xi_1(a)$ и $\Xi_2(a)$ соответственно.

Рассмотрим особый случай, когда $z_0 = 0$, и $\rho_0 > a$. Согласно соотношению

$$\frac{az_0}{(a^2 - l_{10}^2)^{1/2}} \rightarrow (\rho_0^2 - a^2)^{1/2}, \quad \text{для } z_0 \rightarrow 0,$$

интеграл (1.6.30) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2}}{(a^2 - r^2)^{1/2}} \frac{r dr d\psi}{R(M, N) R^2(N_0, N)} \\ &= \frac{2\pi}{R_0} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2} (\rho_0^2 - a^2)^{1/2}}{a R_0} \right]. \end{aligned} \quad (1.6.31)$$

Здесь $R_0 = R(M, N_0) = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}$. Интегрирование в (1.6.30) для $z_0 = 0$ и $\rho_0 < a$ даёт π^2/R_0 . Случай $z = 0$ может быть рассмотрен аналогичным образом.

Вычисленные выше интегралы могут быть названы внутренними, потому что область интегрирования была внутренность диска. Мы можем также вычислить соответствующие внешние интегралы. Например, рассмотрим интеграл

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{z}{R^3(M, N)} \frac{1}{R(N, M_0)} \tan^{-1} \frac{j_0}{R(N, M_0)} r dr d\psi, \quad (1.6.32)$$

$$\text{где } j_0 = (r^2 - a^2)^{1/2} (l_{20}^2 - a^2)^{1/2} / a. \quad (1.6.33)$$

Интегральные представления (1.1.26) и (1.3.15), а именно,

$$\frac{1}{R(N, M_0)} \tan^{-1} \frac{j_0}{R(N, M_0)} = \int_a^r \frac{[l_{20}^2(x) - x^2]^{1/2} dx}{(r^2 - x^2)^{1/2} [l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)]} \lambda \left(\frac{l_{10}^2(x)}{\rho_0 r}, \phi_0 - \psi \right) \quad (1.6.34)$$

$$\frac{z}{R^3(M, N)} = -\frac{2}{\pi r} \mathcal{L}(r) \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{t dt}{(t^2 - r^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(t) - t^2]^{1/2}}{l_2^2(t) - l_1^2(t)} \lambda \left(\frac{\rho}{l_2^2(t)}, \phi - \psi \right) \quad (1.6.35)$$

могут быть подставлены в (1.6.32), с результатом

$$\begin{aligned}
I_3 &= -4 \int_a^\infty \frac{[l_{20}^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)} dx \int_x^\infty \frac{dr}{(t^2 - r^2)^{1/2}} \frac{[l_2^2(t) - t^2]^{1/2}}{l_2^2(t) - l_1^2(t)} \lambda \left(\frac{l_{10}^2(x) \rho}{l_2^2(t) \rho_0}, \phi - \phi_0 \right) \\
&= 2\pi \int_a^\infty \frac{[l_2^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \frac{[l_{20}^2(x) - x^2]^{1/2}}{l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)} \lambda \left(\frac{l_1(x) l_{10}(x)}{l_2(x) l_{20}(x)}, \phi - \phi_0 \right) dx.
\end{aligned} \tag{1.6.36}$$

Этот интеграл уже был вычислен в (1.6.27), так что мы можем написать окончательный результат

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{z}{R^3(M, N)} \frac{1}{R(N, M_0)} \tan^{-1} \frac{j_0}{R(N, M_0)} r dr d\psi \\
&= \pi \frac{|z|}{z} \left\{ \frac{1}{R_1} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\Xi_1}{R_1} \right) - \frac{\pi}{2} \frac{|zz_0|}{zz_0} \right] + \frac{1}{R_2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\Xi_2}{R_2} \right) + \frac{\pi}{2} \frac{|zz_0|}{zz_0} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{1.6.37}$$

Сравнение с соответствующим внутренним интегралом (1.6.18) указывает на сходство, если мы заменим Θ на Ξ .

Второй внешний интеграл есть

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{z_0}{R^3(N, M_0)} \left[\frac{R(N, M_0)}{j_0} + \tan^{-1} \frac{j_0}{R(N, M_0)} \right] \frac{r dr d\psi}{R(M, N)}, \tag{1.6.38}$$

где j_0 определено в (1.6.33). Мы используем интегральные представления (смотри Упражнение 1.1.8 и (1.3.21))

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R(M, N)} &= \frac{2}{\pi} \int_r^\infty \frac{dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x)} \lambda \left(\frac{l_1(x) r}{l_2(x) x}, \phi - \psi \right) \\
&\frac{z_0}{R^3(N, M_0)} \left[\frac{R(N, M_0)}{j_0} + \tan^{-1} \frac{j_0}{R(N, M_0)} \right]
\end{aligned} \tag{1.6.39}$$

$$= \frac{1}{r} \mathcal{L}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d}{dr} \int_a^r \frac{x dx}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \frac{[x^2 - l_{10}^2(x)]^{1/2}}{l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)} \lambda\left(\frac{l_{10}(x)x}{l_{20}(x)}, \Psi - \Phi_0\right) \quad (1.6.40)$$

Подстановка (1.6.39) и (1.6.40) в (1.6.38) приводит к

$$I_4 = 2\pi \int_a^\infty \frac{[x^2 - l_1^2(x)]^{1/2} [x^2 - l_{10}^2(x)]^{1/2}}{l_2^2(x) - l_1^2(x) l_{20}^2(x) - l_{10}^2(x)} \lambda\left(\frac{l_1(x)l_{10}(x)}{l_2(x)l_{20}(x)}, \Phi - \Phi_0\right) dx. \quad (1.6.41)$$

Этот интеграл был вычислен в (1.6.14), и окончательный результат есть

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{z_0}{R^3(N, M_0)} \left[\frac{R(N, M_0)}{j_0} + \tan^{-1} \frac{j_0}{R(N, M_0)} \right] \frac{r dr d\psi}{R(M, N)} \\ &= \pi \frac{|z_0|}{z_0} \left\{ \frac{1}{R_1} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\Theta_1}{R_1} \right] + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\Theta_2}{R_2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.6.42)$$

Мы можем заметить то же сходство между внутренним (1.6.30) и внешним (1.6.42) интегралами. Сходство идёт дальше. Используя свойства

$$(l_2^2(x) - x^2)(x^2 - l_1^2(x)) = x^2 z^2,$$

мы можем заключить, что для $zz_0 > 0$,

$$\begin{aligned} \Xi_1(x) &= \xi(x) + \Theta(x), & \Xi_2(x) &= \xi(x) - \Theta(x), \\ \Theta_1(x) &= \Theta(x) + \xi(x), & \Theta_2(x) &= \Theta(x) - \xi(x). \end{aligned} \quad (1.6.43)$$

Это означает, что $\Xi_1 = \Theta_1$ и $\Xi_2 = -\Theta_2$ для $zz_0 > 0$. В случае, когда $zz_0 < 0$, соотношения меняются, а именно, $\Xi_1 = -\Theta_1$ и $\Xi_2 = \Theta_2$.

Упражнение 1.6

Введём следующие точки: $M(\rho, \phi, z)$, $M_0(\rho_0, \phi_0, z_0)$, $N(r, \psi, 0)$, $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$, $P(\rho, \phi, 0)$; как и раньше, $R(\cdot, \cdot)$ обозначает расстояние между двумя точками.

1. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{z_0}{R^3(N, M_0)} \left[\frac{R(N, M_0)}{h_0} + \tan^{-1} \frac{h_0}{R(N, M_0)} \right] \frac{r dr d\psi}{R(P, N)}, \text{ for } \rho > a.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi}{R(M_0, P)} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{(l_{20}^2 - a^2)^{1/2} (\rho^2 - a^2)^{1/2}}{aR(M_0, P)} \right].$$

Совет: используйте (1.6.30) для $z=0$.

2. Вычислите интеграл выше для $\rho < a$.

$$\text{Ответ: } \pi^2 / R(M_0, P).$$

3. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{z}{R^3(M, N)} \frac{1}{R(N, N_0)} \tan^{-1} \left[\frac{(r^2 - a^2)^{1/2} (\rho_0^2 - a^2)^{1/2}}{aR(N, N_0)} \right] r dr d\psi.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi}{R(M, N_0)} \tan^{-1} \left[\frac{(\rho_0^2 - a^2)^{1/2} (l_2^2 - a^2)^{1/2}}{aR(M, N_0)} \right].$$

4. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \frac{r dr d\psi}{R(M, N) R^2(N_0, N)}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi}{R(M, N_0)} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{aR(M, N_0)} \right].$$

ГЛАВА 2

СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Упругое полупространство является полезной математической моделью для рассмотрения различных контактных задач и задач теории трещин в телах конечных размеров, в случаях, когда область контакта или размер трещины намного меньше, чем характеристические размеры тела. Общее решение, выраженное через три гармонические функции, представлено для случая трансверсальной изотропии. Точные замкнутые решения даны для смешанных задач первого и второго типа. Различные приложения этих решений рассмотрены в деталях. Материал этой главы базируется на статьях (Fabrikant, 1970, 1971b, 1971c, 1985b, 1986g).

2.1 Общее решение

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое тело, которое характеризуется пятью упругими константами A_{ik} . Закон Гука для такого тела имеет вид:

$$\sigma_x = A_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\sigma_y = (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\sigma_z = A_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= A_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = A_{44} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \tau_{zx} &= A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right).\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Подстановка (2.1.1) в (2.1.2) даёт:

$$\begin{aligned}A_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (A_{11} - A_{66}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= 0, \\ A_{66} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + (A_{11} - A_{66}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} &= 0, \\ A_{44} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (A_{44} + A_{13}) \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} \right] &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

Введём комплексные тангенциальные перемещения $u = u_x + i u_y$, и $\bar{u} = u_x - i u_y$.

Это позволит нам уменьшить число уравнений в (2.1.3) на один, и переписать эти уравнения в более компактном виде, а именно,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(A_{11} + A_{66})\Delta u + A_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(A_{11} - A_{66})\Delta^2 \bar{u} + (A_{13} + A_{44})\Lambda \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ A_{44}\Delta w + A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(A_{13} + A_{44}) \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\Lambda} u + \Lambda \bar{u}) &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

Здесь следующие дифференциальные операторы были использованы:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Lambda = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.1.5)$$

Заметим также, что $\Delta = \Lambda \bar{\Lambda}$, и черта сверху означает везде комплексно сопряжённый параметр. Мы можем проверить, что уравнения (2.1.4) могут быть удовлетворены, если

$$u = \Lambda(F_1 + F_2 + iF_3), \quad w = m_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} + m_2 \frac{\partial F_2}{\partial z} \quad (2.1.6)$$

где все три функции F_k удовлетворяют уравнению (Elliott, 1948):

$$\Delta F_k + \gamma_k^2 \frac{\partial^2 F_k}{\partial z^2} = 0, \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.1.7)$$

и параметры m_k и γ_k связаны следующими соотношениями (Elliott, 1948):

$$\frac{A_{44} + m_k(A_{13} + A_{44})}{A_{11}} = \frac{m_k A_{33}}{m_k A_{44} + A_{13} + A_{44}} = \gamma_k^2, \quad \text{для} \quad k = 1, 2;$$

$$\gamma_3 = \left(A_{44}/A_{66} \right)^{1/2}. \quad (2.1.8)$$

Вводя обозначения $z_k = z/\gamma_k$, для $k = 1, 2, 3$, мы можем называть функции $F_k = F(x, y, z_k)$ гармоническими. Заметим свойство $m_1 m_2 = 1$, которое как-то ускользнуло внимания других исследователей, и которое поможет нам упрощать различные выражения. Другие упругие константы использованы в этой книге:

$$G_1 = \beta + \gamma_1 \gamma_2 H, \quad G_2 = \beta - \gamma_1 \gamma_2 H,$$

$$H = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) A_{11}}{2\pi(A_{11} A_{33} - A_{13}^2)}, \quad \alpha = \frac{(A_{11} A_{33})^{1/2} - A_{13}}{A_{11}(\gamma_1 + \gamma_2)}, \quad \beta = \frac{\gamma_3}{2\pi A_{44}}. \quad (2.1.9)$$

Введём следующие комбинации напряжений:

$$\sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y, \quad \sigma_2 = \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}, \quad \tau_z = \tau_{zx} + i\tau_{yz}. \quad (2.1.10)$$

Эти обозначения упростят (2.1.1), а именно,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (A_{11} - A_{66})(\bar{\Lambda}u + \Lambda\bar{u}) + 2A_{13}\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_2 = 2A_{66}\Lambda u, \\ \sigma_z &= \frac{1}{2}A_{13}(\bar{\Lambda}u + \Lambda\bar{u}) + A_{33}\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_z = A_{44}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \Lambda w\right].\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

Мы имеем только четыре компонента напряжений, вместо шести, как это было в (2.1.1). Подстановка (2.1.6) в (2.1.11) даёт:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2A_{66}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{[\gamma_1^2 - (1+m_1)\gamma_3^2]F_1 + [\gamma_2^2 - (1+m_2)\gamma_3^2]F_2\}, \\ \sigma_2 &= 2A_{66}\Lambda^2(F_1 + F_2 + iF_3), \\ \sigma_z &= A_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(1+m_1)\gamma_1^2 F_1 + (1+m_2)\gamma_2^2 F_2] \\ &= -A_{44}\Delta[(1+m_1)F_1 + (1+m_2)F_2], \\ \tau_z &= A_{44}\Lambda\frac{\partial}{\partial z}[(1+m_1)F_1 + (1+m_2)F_2 + iF_3].\end{aligned}\tag{2.1.12}$$

Здесь мы использовали тот факт, что каждый F_k удовлетворяет уравнению (2.1.7), и соотношение: $A_{11}\gamma_k^2 - A_{13}m_k = A_{44}(1+m_k)$, (для $k=1,2$) который является непосредственным следствием (2.1.8). Выражения (2.1.6) и (2.1.12) дают общее решение, выраженное через три гармонические функции F_k . Было бы очень желательно выразить каждую функцию F_k через только одну гармоническую функцию следующим образом:

$$F_k(x, y, z) = c_k F(x, y, z_k),\tag{2.1.13}$$

где $z_k = z/\gamma_k$, и c_k является пока неизвестной комплексной постоянной. Как мы увидим дальше, это вполне возможно. Все результаты, полученные в книге действительны для изотропных тел, если мы примем

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \quad H &= \frac{1-\nu^2}{\pi E}, \quad \alpha = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \\ \beta &= \frac{1+\nu}{\pi E}, \quad G_1 = \frac{(2-\nu)(1+\nu)}{\pi E}, \quad G_2 = \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E},\end{aligned}$$

$$(2.1.14)$$

где E упругий модуль, и ν коэффициент Пуассона.

Упражнение 2.1

1. Проверьте эквивалентность (2.1.3) и (2.1.4)
2. Докажите, что решение (2.1.6) удовлетворяет (2.1.3), если условие (2.1.7) удовлетворено.
3. Докажите равенство $m_1 m_2 = 1$.
4. Докажите равенство $A_{11} \gamma_k^2 - A_{13} m_k = A_{44} (1 + m_k)$.

2.2 Решения для точечных сил

Поле напряжений и перемещений, вызываемых сосредоточенными нагрузками, очень важно для формулирования интегральных уравнений различных смешанных граничных задач. Два случая рассмотрены здесь: произвольная сосредоточенная нагрузка, действующая внутри трансверсально изотропного упругого пространства, и действие произвольной сосредоточенной силы на границу аналогичного полупространства. Хотя эти задачи были решены многими авторами, мы следуем здесь результатам данным в (Фабрикант, 1970). Основная причина этого в упрощении упругих коэффициентов, которое ускользнуло от внимания других авторов. Вот один такой пример: один из коэффициентов в (Chen, 1966) имеет вид

$$\frac{A_{13} + A_{44}}{A_{11} A_{44} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \left(\frac{A_{33} m_1}{\gamma_1^2} - A_{13} \right)$$

Это выражение после упрощения сводится к $1/(1 - m_2)$.

Пусть сосредоточенная сила, с компонентами T_x , T_y , и P в декартовых координатах приложена в точке N_0 внутри трансверсально изотропного упругого пространства. Мы можем положить, без потери общности, что полярные цилиндрические координаты точки N_0 являются $(\rho_0, \phi_0, 0)$. Нам нужно найти поля напряжений и перемещений в произвольной точке $M(\rho, \phi, z)$. Введём комплексную тангенциальную силу $T = T_x + iT_y$. Общее решение может быть выражено через три потенциальные функции:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{4\pi A_{44}(m_1 - m_2)} \left[\frac{1}{2} \gamma_1 m_2 (\bar{\Lambda} \chi_1 + \Lambda \bar{\chi}_1) + P \ln(R_1 + z_1) \right], \\
F_2 &= -\frac{1}{4\pi A_{44}(m_1 - m_2)} \left[\frac{1}{2} \gamma_2 m_1 (\bar{\Lambda} \chi_2 + \Lambda \bar{\chi}_2) + P \ln(R_2 + z_2) \right], \\
F_3 &= i \frac{\gamma_3}{8\pi A_{44}} (\bar{\Lambda} \chi_3 - \Lambda \bar{\chi}_3).
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Здесь было введено обозначение

$$\begin{aligned}
\chi_k(z) &= \chi(z_k), \quad R_k = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z_k^2]^{1/2}, \quad \text{для } k=1,2,3; \\
\chi(z) &= T[z \ln(R_0 + z) - R_0].
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Перемещения определены благодаря (2.1.6) следующим образом:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{4\pi A_{44}(m_1 - m_2)} \left\{ \frac{1}{2} \gamma_1 m_2 \left[-\frac{T}{R_1} + \frac{q^2 \bar{T}}{R_1(R_1 + z_1)^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \gamma_2 m_1 \left[-\frac{T}{R_2} + \frac{q^2 \bar{T}}{R_2(R_2 + z_2)^2} \right] - \frac{P}{q} \left[\frac{z_1}{R_1} - \frac{z_2}{R_2} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\gamma_3}{8\pi A_{44}} \left[\frac{T}{R_3} + \frac{q^2 \bar{T}}{R_3(R_3 + z_3)^2} \right],
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

$$w = \frac{1}{4\pi A_{44}(m_1 - m_2)} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{T}{q} + \frac{\bar{T}}{q} \right] \left(-\frac{z_1}{R_1} + \frac{z_2}{R_2} \right) + P \left[\frac{m_1}{\gamma_1 R_1} - \frac{m_2}{\gamma_2 R_2} \right] \right\}. \tag{2.2.4}$$

Здесь

$$q = \rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}. \tag{2.2.5}$$

Поле напряжений определено согласно (2.1.12). Нам нужны только выражения для σ_z и τ_z . Вот они:

$$\begin{aligned} \sigma_z = & -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} (T\bar{q} + \bar{T}q) \left[\frac{\gamma_1}{(m_1-1)R_1^3} + \frac{\gamma_2}{(m_2-1)R_2^3} \right] \right. \\ & \left. + P \left[\frac{m_1 z_1}{(m_1-1)R_1^3} + \frac{m_2 z_2}{(m_2-1)R_2^3} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$\begin{aligned} \tau_z = & \frac{T}{8\pi} \left[\frac{z_1}{(m_1-1)R_1^3} + \frac{z_2}{(m_2-1)R_2^3} - \frac{z_3}{R_3^3} \right] \\ & - \frac{\bar{T}q^2}{8\pi} \left[\frac{2R_1+z_1}{(m_1-1)R_1^3(R_1+z_1)^2} + \frac{2R_2+z_2}{(m_2-1)R_2^3(R_2+z_2)^2} + \frac{2R_3+z_3}{R_3^3(R_3+z_3)^2} \right] \\ & - \frac{Pq}{4\pi} \left[\frac{m_1}{\gamma_1(m_1-1)R_1^3} + \frac{m_2}{\gamma_2(m_2-1)R_2^3} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть сосредоточенная сила, с компонентами T_x , T_y , и P , приложена в точке $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$. Нам нужно найти поля напряжений и перемещений в полупространстве. Потенциальные функции определяются в виде

$$\begin{aligned} F_1 = & \frac{H\gamma_1}{m_1-1} \left[\frac{1}{2} \gamma_2 (\bar{\Lambda}\chi_1 + \Lambda\bar{\chi}_1) + P \ln(R_1+z_1) \right], \\ F_2 = & \frac{H\gamma_2}{m_2-1} \left[\frac{1}{2} \gamma_1 (\bar{\Lambda}\chi_2 + \Lambda\bar{\chi}_2) + P \ln(R_2+z_2) \right], \\ F_3 = & i \frac{\gamma_3}{4\pi A_{44}} (\bar{\Lambda}\chi_3 - \Lambda\bar{\chi}_3). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Подстановка (2.2.8) в (2.1.6) даёт

$$u = \frac{\gamma_3}{4\pi A_{44}} \left[\frac{T}{R_3} + \frac{q^2 \bar{T}}{R_3(R_3+z_3)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{H\gamma_2}{m_2 - 1} \left\{ \frac{1}{2} \gamma_1 \left[-\frac{T}{R_2} + \frac{q^2 \bar{T}}{R_2(R_2 + z_2)^2} \right] + \frac{Pq}{R_2(R_2 + z_2)} \right\} \\
& + \frac{H\gamma_1}{m_1 - 1} \left\{ \frac{1}{2} \gamma_2 \left[-\frac{T}{R_1} + \frac{q^2 \bar{T}}{R_1(R_1 + z_1)^2} \right] + \frac{Pq}{R_1(R_1 + z_1)} \right\},
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

$$\begin{aligned}
w = H & \left\{ \frac{1}{2} (T\bar{q} + \bar{T}q) \left[\frac{\gamma_2 m_1}{(m_1 - 1)R_1(R_1 + z_1)} + \frac{\gamma_1 m_2}{(m_2 - 1)R_2(R_2 + z_2)} \right] \right. \\
& \left. + P \left[\frac{m_1}{(m_1 - 1)R_1} + \frac{m_2}{(m_2 - 1)R_2} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Нам нужны выражения для следующих компонентов напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \frac{1}{2\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left\{ \left[\frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 (T\bar{q} + \bar{T}q) + Pz \right] \left(-\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} \right) \right\}, \\
\tau_z &= \frac{\gamma_2}{4\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{Tz_1}{R_1^3} - \frac{\bar{T}q^2(2R_1 + z_1)}{R_1^3(R_1 + z_1)^2} \right] - \frac{\gamma_1}{4\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{Tz_2}{R_2^3} - \frac{\bar{T}q^2(2R_2 + z_2)}{R_2^3(R_2 + z_2)^2} \right] \\
& - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{Tz_3}{R_3^3} + \frac{\bar{T}q^2(2R_3 + z_3)}{R_3^3(R_3 + z_3)^2} \right] + \frac{Pq}{2\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[-\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} \right].
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Выражения (2.2.9) и (2.2.10) упрощаются для случая, когда $z=0$:

$$u = \frac{1}{2} G_1 \frac{T}{R} + \frac{1}{2} G_2 \frac{\bar{T}q^2}{R^3} - H\alpha \frac{P}{q}, \tag{2.2.12}$$

$$w = H\alpha \Re\left(\frac{T}{q}\right) + H\frac{P}{R}. \tag{2.2.13}$$

Здесь H , α , G_1 , и G_2 определены в (2.1.9), и

$$R = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}. \quad (2.2.14)$$

Выражения (2.2.12) и (2.2.13) будут использованы для вывода интегральных уравнений различных смешанных граничных задач для упругого полупространства.

Мы предлагаем следующее классификацию смешанных граничных задач. Задача называется *внутренней смешанной* когда нормальные/тангенциальные перемещения даны *внутри* конечной области, в то время как соответствующие напряжения предписаны на остальной части границы полупространства. В случае, когда перемещения заданы *вне* конечной области, задача называется *внешней*. Мы можем различить два типа внутренних задач. Внутренняя задача *типа I* : нормальные перемещения предписаны *внутри* конечной области S , нормальное напряжение задано *вне* области S , в то время, как тангенциальные напряжения известны на всей плоскости $z=0$. Внутренняя задача *типа II* : тангенциальные перемещения заданы *внутри* S , и сдвигающие напряжения предписаны *вне*, в то время, как нормальное напряжение известно на всей плоскости $z=0$.

Внешние задачи типа I и II определяются точно так же, как и внутренние, с той только разницей, что термин *напряжение* заменяется на *перемещение* и наоборот. Таким образом, мы имеем четыре типа смешанных задач, которые будут рассмотрены в этой главе. Мы будем называть задачу основной смешанной когда граничные условия смешаны по отношению к обоим нормальным и тангенциальным компонентам. Такие задачи будут рассмотрены в следующей главе.

Упражнение 2.2

1. Выведите (2.2.3) и (2.2.4).
2. Проверьте справедливость (2.2.6) и (2.2.7).
3. Выведите выражения для σ_1 и σ_2 в обоих случаях сосредоточенной силы, рассмотренных в секции 2.2.
4. Выведите эквивалентные решения для изотропного тела.
5. Рассмотрите случай, когда произвольная сосредоточенная сила приложена *внутри* упругого полупространства.

2.3 Внутренняя смешанная задача типа I

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Введём полярные цилиндрические координаты (ρ, ϕ, z) . Пусть следующие граничные условия предписаны на границе $z=0$:

$$\begin{aligned} w &= w(\rho, \phi), \quad \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \\ \sigma &= \sigma(\rho, \phi), \quad \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \\ \tau &= \tau(\rho, \phi), \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Здесь σ обозначает нормальную нагрузку, и τ — комплексную сдвигающую нагрузку, а именно, $\tau = \tau_{zx} + i\tau_{yz}$. Основное интегральное уравнение может быть написано используя (2.2.13), а именно,

$$H \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}} = f(\rho, \phi). \quad (2.3.2)$$

Мы используем то же обозначение σ для пока неизвестной нормальной нагрузки внутри круга $\rho \leq a$, а также для известной функции σ вне круга. Это не должно создавать какую-либо путаницу, так как аргумент (ρ_0, ϕ_0) позволяет различить одно от другого. Функция f известна из условий (2.3.1), а именно,

$$\begin{aligned} f(\rho, \phi) &= w(\rho, \phi) - \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}} \\ &\quad - H\alpha \Re \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Как только уравнение (2.3.2) решено, и значение σ внутри круга становится известным, тангенциальные перемещения в плоскости $z=0$ может быть найдено из (2.2.12):

$$u = \frac{1}{2} G_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}}$$

$$+ \frac{1}{2} G_2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{[\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}]^2 \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{3/2}} - H\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}}. \quad (2.3.4)$$

Интегральное уравнение (2.3.2) было решено в секции 1.4. Представляется полезным рассмотреть здесь более общий случай:

$$H \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{(1+\kappa)/2}} = f(\rho, \phi), \quad (2.3.5)$$

где $-1 < \kappa < 1$. Этот тип уравнения появляется в задачах о неоднородном упругом полупространстве с модулем упругости E являющимся степенной функцией от z , а именно, $E = E_0 z^\kappa$. Конечно, в неоднородном случае H не будет больше представлен формулой (2.1.9). Читателю следует обратиться к статье Ростовцева (1964) для ознакомления с деталями. Ростовцев (1964) получил точное решение (2.3.5) в рядах Фурье. Здесь мы представляем замкнутое решение.

Используя интегральное представление (1.1.4), интегральное уравнение (2.3.5) может быть переписан в виде

$$4H \cos \frac{\pi\kappa}{2} \int_0^\rho \frac{x^\kappa dx}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) = f(\rho, \phi). \quad (2.3.6)$$

Интегральное уравнение (2.3.6) представляет последовательность двух операторов Абеля и один \mathcal{L} -оператор. Процедура решения аналогична (1.4.5). Первый оператор есть

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}} \mathcal{L}(\rho). \quad (2.3.7)$$

Результат приложения оператора (2.3.7) к обоим сторонам (2.3.6) даёт

$$2\pi H t^\kappa \int_t^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - t^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{t}{\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}} \mathcal{L}(\rho) f(\rho, \phi). \quad (2.3.8)$$

Приложение второго оператора

$$\mathcal{L}(y) \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{t^{1-\kappa} dt}{(t^2 - y^2)^{(1-\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\right)$$

к обеим сторонам (2.3.8) даёт:

$$\begin{aligned} \sigma(y, \phi) = & -\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H y} \mathcal{L}(y) \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{t^{1-\kappa} dt}{(t^2 - y^2)^{(1-\kappa)/2}} \\ & \times \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}} \mathcal{L}(\rho) f(\rho, \phi). \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Правила дифференцирования под знаком интеграла и свойства \mathcal{L} -операторов позволяют нам переписать (2.3.9) в виде

$$\sigma(y, \phi) = \frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H} \left[\frac{\Phi(a, y, \phi)}{(a^2 - y^2)^{(1-\kappa)/2}} - \int_y^a \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{(1-\kappa)/2}} \frac{d}{dt} \Phi(t, y, \phi) \right]. \quad (2.3.10)$$

Здесь

$$\Phi(t, y, \phi) = \frac{1}{t^{1+\kappa}} \int_0^t \frac{\rho^{1-\kappa} d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^{1+\kappa} \mathcal{L}\left(\frac{\rho y}{t^2}\right) f(\rho, \phi) \right]. \quad (2.3.11)$$

Другая форма решения может быть найдена в (Фабрикант, 1971e). Решённая выше задача имеет два основных приложения: контактные задачи о гладких штампах, действующих на упругое полупространство, и задачи о внешних круглых трещинах в бесконечных упругих телах. Мы рассмотрим оба случая в деталях ниже.

Пример 1. Задача о гладком штампе. В упругих контактных задачах, мы имеем $\sigma = 0$, для $\rho > a$, и $\tau = 0$ на всей плоскости $z = 0$, так

что функция $f=w$ (смотри 2.3.9). Теперь становится возможным вычислить главный вектор P и опрокидывающие моменты M_x и M_y непосредственно через заданное перемещение w . Так как

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi, \quad (2.3.12)$$

подстановка (2.3.9) в (2.3.12) даёт главный вектор

$$P = \frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{w(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi}{(a^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}}. \quad (2.3.13)$$

Для вычисления опрокидывающих моментов M_x и M_y , представляется удобным ввести комплексный параметр

$$M = M_x + iM_y = -i \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma(\rho, \phi) e^{i\phi} \rho^2 d\rho d\phi. \quad (2.3.14)$$

Используя (2.3.9), мы выразим опрокидывающий момент

$$M = -i \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H(1+\kappa)} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{w(\rho, \phi) e^{i\phi} \rho^2 d\rho d\phi}{(a^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}}. \quad (2.3.15)$$

Выражения (2.3.14) и (2.3.15) находятся в соответствии с аналогичными результатами Ростовцева (1964).

Обозревая процесс вывода (2.3.6), мы можем заключить, что оно действительно для вычисления нормального перемещения *вне* области контакта, если верхний предел интегрирования ρ заманён на a . Подстановка (2.3.9) в модифицированную формулу (2.3.6) даёт следующий результат

$$w(\rho, \phi) = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi} \int_0^a \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{(1-\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) w(\rho_0, \phi),$$

для $\rho > a$. (2.3.16)

Дифференцируя под знаком интеграла и затем интегрируя по частям, мы получим

$$w(\rho, \phi) = \frac{1}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right) (\rho^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{w(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(a^2 - \rho_0^2)^{(1-\kappa)/2} [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]},$$

для $\rho > a$. (2.3.17)

Следующие равенства были использованы здесь (Bateman and Erdélyi, 1955)

$$\frac{d}{d\zeta} \left[\zeta^{(1+\kappa)/2} F\left(\frac{1+\kappa}{2}, \frac{1+\kappa}{2}, \frac{3+\kappa}{2}, \zeta\right) \right] = \frac{1+\kappa}{2} \zeta^{-(1-\kappa)/2} (1-\zeta)^{-(1+\kappa)/2},$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t) t dt}{(x^2 - t^2)^{(1-\kappa)/2}} = f(0) x^\kappa + x \int_0^x \frac{df(t)}{(x^2 - t^2)^{(1-\kappa)/2}}. \quad (2.3.18)$$

Все параметры, которые нам нужно найти, а именно, давление под штампом σ , главный вектор P , опрокидывающий момент M , и нормальное перемещение вне штампа, могут быть выражены прямо через заданное нормальное перемещение w при помощи формул (2.3.9), (2.3.13), (2.3.15), и (2.3.17).

Пример 2. Внешняя трещина в неоднородной упругости. Рассмотрим неоднородное упругое пространство с модулем упругости $E = E_0 |z|^\kappa$, $E_0 = \text{const}$, $|\kappa| < 1$. Это пространство ослаблено круглой внешней трещиной $\rho \geq a$. Произвольное давление $\sigma(\rho, \phi)$ приложенное к обеим сторонам трещины в противоположных направлениях. Требуется найти нормальное напряжение в шейке трещины, нормальные перемещения сторон трещины, коэффициент концентрации напряжений, и работу, требующейся для открытия трещины.

Благодаря симметрии задачи, она может быть сведена к смешанной граничной задаче для полупространства, со следующими граничными условиями на плоскости $z = 0$:

$$w = 0, \quad \tau = 0, \quad \text{для} \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi;$$

$$\sigma = \sigma(\rho, \phi), \quad \tau = 0, \quad \text{для} \quad a < \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (2.3.19)$$

Основное интегральное уравнение принимает вид (2.3.5), с известной функцией

$$f(\rho, \phi) = -H \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{(1+\kappa)/2}}. \quad (2.3.20)$$

Его решение может быть найдено точно так же, как (1.5.21), а именно,

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2(a^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{(\rho_0^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2} \sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (2.3.21)$$

Выражение (2.3.21) даёт нормальное напряжение в шейке трещины через давление приложенное к сторонам трещины. Заметим, что мы можем рассматривать (1.5.24) как особый случай формулы (2.3.21), когда $\kappa=0$.

Нормальное перемещение сторон трещины может быть вычислено, как суперпозиция перемещения, вызванного приложенным давлением, и перемещения, вызванного нормальным напряжением в шейке трещины. Используя процедуру, аналогичную той, которая была описана в секции 1.5, мы можем получить выражение

$$w(\rho, \phi) = 4H \cos \frac{\pi\kappa}{2} \left\{ \int_\rho^\infty \frac{x^\kappa dx}{(x^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \int_a^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \right. \\ \left. + \int_0^a \frac{x^\kappa dx}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \right\}, \quad \text{для } \rho > a. \quad (2.3.22)$$

Подстановка (2.3.21) в (2.3.22) приводит после упрощения к

$$w(\rho, \phi) = 4H \cos \frac{\pi\kappa}{2} \int_a^\rho \frac{x^\kappa dx}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi), \\ \text{для } \rho > a. \quad (2.3.23)$$

Нормальные перемещения сторон трещины теперь выражены через приложенное давление.

Введём коэффициент концентрации напряжений как

$$k_1(\phi) = \lim_{\rho \rightarrow a} [(a - \rho)^{(1-\kappa)/2} \sigma(\rho, \phi)]. \quad (2.3.24)$$

Подстановка (2.3.21) в (2.3.24) даёт

$$k_1(\phi) = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(2a)^{(1-\kappa)/2}} \int_a^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - a^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{a}{\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi).$$

Введём функцию интенсивности напряжений:

$$K_1(\rho, \phi) = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(2\rho)^{(1-\kappa)/2}} \int_\rho^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi). \quad (2.3.25)$$

Очевидно, что предельный случай функции интенсивности напряжений, когда $\rho \rightarrow a$, есть коэффициент концентрации напряжений. Используя свойство \mathcal{L} -операторов (1.2.3), мы можем переписать (2.3.23) в виде

$$\begin{aligned} w(\rho, \phi) &= 4H\cos\frac{\pi\kappa}{2} \int_a^\rho \frac{x^\kappa dx}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right) \int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\ &= 2^{(3-\kappa)/2} \pi H \int_a^\rho \frac{x^{(1+\kappa)/2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right) K_1(x, \phi). \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Энергия W может быть определена интегралом

$$W = \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \sigma(\rho, \phi) w(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi. \quad (2.3.27)$$

Подстановка (2.3.26) в (2.3.27) даёт

$$\begin{aligned} W &= 2^{(3-\kappa)/2} \pi H \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^\infty \sigma(\rho, \phi) \rho d\rho \int_a^\rho \frac{x^{(1+\kappa)/2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right) K_1(x, \phi) \\ &= 2^{(3-\kappa)/2} \pi H \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^\infty x^{(1+\kappa)/2} dx \int_x^\infty \frac{\sigma(\rho, \phi) \rho d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right) K_1(x, \phi) \end{aligned}$$

$$= 2^{(3-\kappa)/2} \pi H \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^\infty K_1(x, \phi) x^{(1+\kappa)/2} dx \int_x^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right) \sigma(\rho, \phi).$$

Здесь замена порядка интегрирования была использована дважды. Теперь сравнение последнего выражения с (2.3.25) даёт результат

$$W = \frac{2^{1-\kappa} \pi^2 H}{\cos(\pi\kappa/2)} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty [K_1(\rho, \phi)]^2 \rho d\rho d\phi. \quad (2.3.28)$$

Выражение (2.3.28) показывает, что квадрат функции интенсивности напряжений пропорционален плотности энергии (энергии, приходящейся на единицу площади) необходимой для открытия трещины. В случае осевой симметрии, формула (2.3.28) упрощается:

$$W = \frac{2^{2-\kappa} \pi^3 H}{\cos(\pi\kappa/2)} \int_a^\infty [K_1(\rho)]^2 \rho d\rho,$$

с

$$K_1(\rho) = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(2\rho)^{(1-\kappa)/2}} \int_\rho^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}}.$$

Все полученные результаты становятся действительными для трансверсально изотропного пространства, если $\kappa=0$, и H определён согласно (2.1.9). Когда H определён согласно (2.1.14), мы имеем результат для изотропного тела, а именно,

$$W = 2\pi \frac{1-\nu^2}{E} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty [K_1(\rho, \phi)]^2 \rho d\rho d\phi, \quad (2.3.29)$$

с

$$K_1(\rho, \phi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\rho}} \int_\rho^\infty \frac{x dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right) \sigma(x, \phi). \quad (2.3.30)$$

В случае осевой симметрии, (2.3.29) и (2.3.30) упрощаются следующим образом:

$$W = 4\pi^2 \frac{1-\nu^2}{E} \int_a^\infty [K_1(\rho)]^2 \rho \, d\rho, \quad (2.3.31)$$

где

$$K_1(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\rho}} \int_\rho^\infty \frac{\sigma(x)x \, dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (2.3.32)$$

Упражнение 2.3.

1. Нормальные перемещения под плоским круглым штампом даются формулой $w(\rho, \phi) = w_0 + \theta \rho \cos \phi$, с $w_0 = \text{const}$, и $\theta = \text{const}$. Найдите распределение напряжений σ под штампом.

Ответ: $\sigma(\rho, \phi) = \frac{\cos(\pi\kappa/2) w_0 + (2\theta \rho \cos \phi)/(1 + \kappa)}{\pi^2 H (a^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}}.$

2. В предыдущей задаче найдите взаимоотношение между приложенной силой P , опрокидывающим моментом M , и осадкой штампа w_0 углом наклона θ .

Ответ: $P = \frac{2w_0 a^{1+\kappa} \cos(\pi\kappa/2)}{\pi H (1 + \kappa)}, \quad M = \frac{4\theta a^{3+\kappa} \cos(\pi\kappa/2)}{\pi H (1 + \kappa)(3 + \kappa)}.$

3. Нормальные перемещения под параболаидальным штампом $w(\rho, \phi) = w_0 - c\rho^2$, с $w_0 = \text{const}$, и $c = \text{const}$. Найдите распределение напряжений σ и радиус области контакта a .

Решение: использование (2.3.9) даёт

$$\sigma(\rho) = \frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H (a^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}} \left\{ w_0 + \frac{2c[a^2(1 - \kappa) - 2\rho^2]}{(1 + \kappa)^2} \right\}.$$

Радиус области контакта a определяется из условия $\sigma(a) = 0$. Окончательный результат есть $a = [(1 + \kappa) w_0 / (2c)]^{1/2}$, выражение для напряжения есть

$$\sigma(\rho) = \frac{2w_0 \cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 a^2 H (1 + \kappa)} (a^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}.$$

4. В предыдущей задаче найдите взаимоотношение между осадкой штампа w_0 и приложенной силой P .

Ответ: $P = \frac{4a^{1+\kappa} \cos(\pi\kappa/2)}{\pi H(1+\kappa)(3+\kappa)}$.

5. Рассмотрим внешнюю круглую трещину $\rho > a$. Найдите распределение напряжения σ в шейке трещины вызванное двумя равными сосредоточенными силами P , приложенными нормально к поверхностям трещины в противоположных направлениях в точке (b, ψ) .

Ответ: $\sigma(\rho, \phi) = -\frac{P}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right) \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 - \rho^2}\right)^{(1-\kappa)/2} \frac{1}{\rho^2 + b^2 - 2b\rho \cos(\phi - \psi)}$.

6. Рассмотрим внешнюю круглую трещину $\rho > a$. Однородное давление σ_0 приложено в противоположных направлениях к кольцу $b \leq \rho \leq c$, ($b > a$), остальная часть поверхности трещины свободна от напряжений. Найдите распределение напряжений σ в шейке трещины и коэффициент концентрации напряжений k_1 .

Ответ: $\sigma(\rho) = -\frac{2\sigma_0 \cos(\pi\kappa/2)}{\pi(a^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}} \int_b^c \frac{(\rho_0^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2} \rho_0 d\rho_0}{\rho_0^2 - \rho^2}, \quad \text{для } \rho < a.$

В общем случае, последний интеграл может быть вычислен через гипергеометрические функции. В особом случае изотропного тела ($\kappa = 0$), интеграл вычисляется в элементарных функциях:

$$\sigma(\rho) = -\frac{2}{\pi} \sigma_0 \left[\frac{(c^2 - a^2)^{1/2} - (b^2 - a^2)^{1/2}}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} - \tan^{-1} \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2 - \rho^2} \right)^{1/2} + \tan^{-1} \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 - \rho^2} \right)^{1/2} \right].$$

Коэффициент концентрации напряжений есть

$$k_1 = -\frac{2\sigma_0 \cos(\pi\kappa/2) [(c^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2} - (b^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2}]}{\pi(2a)^{(1-\kappa)/2} (1 - \kappa)}.$$

7. В предыдущей задаче найдите величину открытия трещины w .

Ответ: $w(\rho) = \frac{4\cos(\pi\kappa/2)}{1 - \kappa} \sigma_0 \left\{ \int_a^{\min(\rho, c)} \frac{(c^2 - x^2)^{(1-\kappa)/2}}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} x^\kappa dx \right.$

$$\left. - \int_a^{\min(\rho, b)} \frac{(b^2 - x^2)^{(1-\kappa)/2}}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} x^\kappa dx \right\}, \quad \text{для } \rho > a.$$

8. Используя формулу (2.3.9), докажите равенство

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma(\rho, \phi) \rho^{1+|n|} e^{in\phi} d\rho d\phi = \frac{(1+\kappa)\Gamma(1+|n|)}{2\pi^2\Gamma[|n|+(1+\kappa)/2]} \cos \frac{\pi\kappa}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{f(\rho, \phi) \rho^{1+|n|} e^{in\phi} d\rho d\phi}{(a^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}}.$$

Заметьте: в особом случае $n=0$ и $n=-1$, последнее равенство превращается соответственно в (2.3.13) и (2.3.15).

9. Выразите функцию интенсивности напряжений $K_1(\rho, \phi)$ через перемещение w .

$$\text{Ответ: } K_1(\rho, \phi) = \frac{\cos(\pi\kappa/2)}{2^{(1-\kappa)/2} \pi^2 H \rho^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho} \int_a^\rho \frac{x dx}{(\rho^2 - x^2)^{(1-\kappa)/2}} \mathcal{L}(x) w(x, \phi).$$

Совет: выполните обращение формулы (2.3.26).

10. Докажите равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow a} \left\{ \frac{d}{d\rho} \int_a^\rho \frac{(x^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2}}{(\rho^2 - x^2)^{(1-\kappa)/2}} f(x) dx \right\} = \frac{\pi(1-\kappa)f(a)}{2\cos(\pi\kappa/2)}.$$

Совет: используйте подстановку $t=(\rho^2-x^2)/(x^2-a^2)$.

11. Используйте равенство выше, чтобы выразить коэффициент концентрации напряжений через перемещение w .

$$\text{Ответ: } k_1(\phi) = \frac{1-\kappa}{2^{2-\kappa} \pi H} \lim_{\rho \rightarrow a} \left[\frac{w(\rho, \phi)}{(\rho - a)^{(1-\kappa)/2}} \right].$$

Совет: вычислите предел при $\rho \rightarrow a$ результата в Упражнении 9.

2.4 Внешняя смешанная задача типа I.

Задача характеризуется следующими смешанными граничными условиями в плоскости $z=0$:

$$\begin{aligned} w &= w(\rho, \phi), \quad \rho > a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \\ \sigma &= \sigma(\rho, \phi), \quad \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \\ \tau &= \tau(\rho, \phi), \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Здесь те же обозначения использованы, как и в предыдущей секции. Основное интегральное уравнение может быть написано, используя (2.2.13), а именно,

$$H \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}} = f(\rho, \phi). \quad (2.4.2)$$

Мы используем опять σ для неизвестной нормальной нагрузки внутри круга $\rho \leq a$, а также для заданной функции σ вне круга. Функция f известна из второго условия (2.4.1):

$$\begin{aligned} f(\rho, \phi) &= w(\rho, \phi) - \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}} \\ &\quad - H\alpha \Re \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Как только уравнение (2.4.2) решено, и значение σ внутри круга становится известным, тангенциальные перемещения в плоскости $z=0$ могут быть определены из (2.3.4). Интегральное уравнение (2.4.2) было решено в секции 1.5. Мы рассмотрим опять более общий случай:

$$H \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{(1+\kappa)/2}} = f(\rho, \phi), \quad (2.4.4)$$

где $-1 < \kappa < 1$. Новый метод позволяет нам представить замкнутое решение.

Используя интегральное представление (1.1.21) для $z=0$, интегральное уравнение (2.4.4) может быть переписано как

$$4H\cos\frac{\pi\kappa}{2}\int_{\rho}^{\infty}\frac{x^{\kappa}dx}{(x^2-\rho^2)^{(1+\kappa)/2}}\int_a^x\frac{\rho_0d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right)\sigma(\rho_0,\phi)=f(\rho,\phi). \quad (2.4.5)$$

Интегральное уравнение (2.4.5) представляет последовательность двух операторов Абеля и один \mathcal{L} -оператор. Процедура решения аналогична (1.5.2). Мы приложим оператор

$$\mathcal{L}(t)\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.4.6)$$

к обеим сторонам (2.4.5), с результатом

$$\begin{aligned} & -2\pi Ht^{\kappa}\int_a^t\frac{\rho_0d\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{t}\right)\sigma(\rho_0,\phi) \\ & =\mathcal{L}(t)\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)f(\rho,\phi). \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Второй оператор имеет вид:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{d}{dy}\int_a^y\frac{t^{1-\kappa}dt}{(y^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}(t),$$

и его приложение к обоим сторонам уравнения (2.4.7) даёт

$$\begin{aligned} \sigma(y,\phi) & = -\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 Hy}\mathcal{L}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{d}{dy}\int_a^y\frac{t^{1-\kappa}dt}{(y^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}} \\ & \times \mathcal{L}(t^2)\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2-t^2)^{(1-\kappa)/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)f(\rho,\phi). \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Правила дифференцирования под знаком интеграла и свойства \mathcal{L} —операторов позволяют нам переписать (2.4.8) в форме

$$\sigma(y, \phi) = -\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H} \left[\frac{\Phi(a, y, \phi)}{(y^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2}} - \int_a^y \frac{dt}{(y^2 - t^2)^{(1-\kappa)/2}} \frac{d}{dt} \Phi(t, y, \phi) \right]. \quad (2.4.9)$$

Здесь

$$\Phi(t, y, \phi) = t^{1-\kappa} \int_t^\infty \frac{d\rho}{(\rho^2 - t^2)^{(1-\kappa)/2}} \frac{d}{d\rho} \left[\mathcal{L} \left(\frac{t^2}{\rho y} \right) f(\rho, \phi) \right]. \quad (2.4.10)$$

Мы можем рассмотреть два основных приложения: контактные задачи о гладких штампах прижатых к упругому полупространству, и задачи о круглых трещинах в бесконечном упругом теле. Мы рассмотрим оба случая в деталях ниже.

Пример 1. Задача о гладких штампах. В контактных задачах теории упругости мы имеем $\sigma = 0$, для $\rho < a$, и $\tau = 0$ на всей плоскости $z = 0$, так что функция $f = w$. Становится возможным выразить главный вектор P и опрокидывающие моменты M_x и M_y прямо через заданное перемещение w . Так как

$$P = \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \sigma(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi, \quad (2.4.11)$$

подстановка (2.4.8) в (2.4.11) даёт главный вектор

$$P = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2 H} \int_a^y \frac{t^{2-\kappa} dt}{(y^2 - t^2)^{(1-\kappa)/2}} \int_t^\infty \frac{d\rho}{(\rho^2 - t^2)^{(1-\kappa)/2}} \frac{d}{d\rho} \int_0^{2\pi} w(\rho, \phi) d\phi \right\}. \quad (2.4.12)$$

Опрокидывающий момент может быть найден аналогичным образом. Мы можем также выразить нормальное перемещение внутри круга $\rho \leq a$ прямо через заданные перемещения w вне круга. Мы подставляем (2.4.8) в (2.4.5) помня, что для $\rho \leq a$, нижний предел интегрирования в первом интеграле будет a вместо ρ . Используя свойства Абелевых операторов и \mathcal{L} —операторов, следующее выражение может быть получено

$$w(\rho, \phi) = -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi \kappa}{2} \int_a^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{(1-\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) w(\rho_0, \phi). \quad (2.4.13)$$

Дифференцируя под знаком интеграла, изменяя порядок интегрирования, и затем интегрируя по x , мы получим

$$w(\rho, \phi) = -\frac{2 \cos(\pi \kappa / 2)}{\pi(1 + \kappa)} \int_a^\infty \left(\frac{\rho_0^2 - a^2}{\rho_0^2 - \rho^2} \right)^{(1+\kappa)/2} \times F\left(\frac{1+\kappa}{2}, \frac{1+\kappa}{2}, \frac{3+\kappa}{2}; \frac{\rho_0^2 - a^2}{\rho_0^2 - \rho^2}\right) \frac{d}{d\rho_0} \left[\mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) w(\rho_0, \phi) \right] d\rho_0.$$

Интегрирование по частям и использование дифференциальных свойств гипергеометрической функции Гаусса (2.3.18) позволяют нам упростить последнее выражение, а именно,

$$\begin{aligned} w(\rho, \phi) &= -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi \kappa}{2} (a^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2} \int_a^\infty \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2} (\rho_0^2 - \rho^2)} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) w(\rho_0, \phi) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi \kappa}{2}\right) (a^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{w(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(\rho_0^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2} [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]}. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Выражение (2.4.14) даёт нормальное перемещения внутри круга $\rho \leq a$ прямо через заданные перемещения вне круга. Мы замечаем определённую аналогию между (2.3.17) и (2.4.14).

Пример 2. Круглая трещина в неоднородной упругости. Рассмотрим неоднородное упругое пространство с модулем упругости $E = E_0 |z|^\kappa$, $E_0 = \text{const}$, $|\kappa| < 1$. Это пространство ослаблено круглой трещиной $\rho \leq a$. Трещина открывается произвольным давлением $\sigma(\rho, \phi)$. Требуется найти нормальное напряжение на плоскости $z=0$ вне трещины, нормальные перемещения сторон трещины, коэффициент концентрации напряжений и работу необходимую для открытия трещины.

Благодаря симметрии задачи, она может быть сведена к смешанной граничной задаче для полупространства, со следующими граничными

условиями на плоскости $z=0$:

$$\begin{aligned} w &= 0, \quad \tau = 0, \quad \text{для} \quad a < \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \sigma &= \sigma(\rho, \phi), \quad \tau = 0, \quad \text{для} \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Основное интегральное уравнение принимает вид (2.4.2), с известной функцией

$$f(\rho, \phi) = -H \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{(1+\kappa)/2}}. \quad (2.4.16)$$

Его решение может быть найдено точно так же, как (1.4.25), а именно,

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{\pi^2(\rho^2 - a^2)^{(1-\kappa)/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{(1-\kappa)/2} \sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (2.4.17)$$

Опять, мы можем заметить аналогию между (2.3.21) и (2.4.17). Выражение (2.4.17) даёт нормальное напряжение в плоскости $z=0$ вне трещины, выраженное через давление, приложенное к поверхности трещины. Заметим что (1.4.27) может быть рассмотрен, как особый случай формулы (2.4.17), когда $\kappa=0$.

Величина открытия трещины может быть вычислена, как суперпозиция перемещения, вызванного приложенным давлением, и перемещения вызванным нормальным напряжением (2.4.17) вне трещины. Используя процедуру, аналогичную той, которая была описана в секции 1.4, мы получим выражение

$$\begin{aligned} w(\rho, \phi) &= 4H \cos \frac{\pi\kappa}{2} \left\{ \int_a^\infty \frac{x^\kappa dx}{(x^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \int_a^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\rho \frac{x^\kappa dx}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \right\}, \quad \text{для} \quad \rho < a. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Подстановка (2.4.17) в (2.4.18) приводит, после упрощения, к

$$w(\rho, \phi) = 4H \cos \frac{\pi \kappa}{2} \int_{\rho}^a \frac{x^{\kappa} dx}{(x^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \int_0^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho \rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi),$$

(2.4.19)

для $\rho < a$.

Величина открытия трещины теперь определена через приложенное давление.

Введём коэффициент концентрации напряжений

$$k_1(\phi) = \lim_{\rho \rightarrow a} [(\rho - a)^{(1-\kappa)/2} \sigma(\rho, \phi)].$$

(2.4.20)

Подстановка (2.4.17) в (2.4.20) даёт

$$k_1(\phi) = \frac{2 \cos(\pi \kappa / 2)}{\pi (2a)^{(1-\kappa)/2}} \int_0^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(a^2 - \rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{a}\right) \sigma(\rho_0, \phi).$$

(2.4.21)

Введём функцию интенсивности напряжений:

$$K_1(\rho, \phi) = \frac{2 \cos(\pi \kappa / 2)}{\pi (2\rho)^{(1-\kappa)/2}} \int_0^{\rho} \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho^2 - \rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \sigma(\rho_0, \phi).$$

(2.4.22)

Мы можем видеть, что предельный случай функции интенсивности напряжений, когда $\rho \rightarrow a$, есть коэффициент концентрации напряжений. Используя свойство \mathcal{L} -операторов (1.2.3) мы можем переписать (2.4.19) в виде

$$\begin{aligned} w(\rho, \phi) &= 4H \cos \frac{\pi \kappa}{2} \int_{\rho}^a \frac{x^{\kappa} dx}{(x^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right) \int_0^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{x}\right) \sigma(\rho_0, \phi) \\ &= 2^{(3-\kappa)/2} \pi H \int_{\rho}^a \frac{x^{(1+\kappa)/2} dx}{(x^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right) K_1(x, \phi). \end{aligned}$$

(2.4.23)

Энергия W может быть определена интегралом

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma(\rho, \phi) w(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi.$$

(2.4.24)

Подстановка (2.4.23) в (2.4.24) даёт

$$\begin{aligned}
 W &= 2^{(3-\kappa)/2} \pi H \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \sigma(\rho, \phi) \rho d\rho \int_{\rho}^a \frac{x^{(1+\kappa)/2} dx}{(x^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right) K_1(x, \phi) \\
 &= 2^{(3-\kappa)/2} \pi H \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a x^{(1+\kappa)/2} dx \int_0^x \frac{\sigma(\rho, \phi) \rho d\rho}{(x^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right) K_1(x, \phi) \\
 &= 2^{(3-\kappa)/2} \pi H \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a K_1(x, \phi) x^{(1+\kappa)/2} dx \int_0^x \frac{\rho d\rho}{(x^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho}{x}\right) \sigma(\rho, \phi).
 \end{aligned}$$

Здесь изменение порядка интегрирования было использовано дважды. Теперь сравнение последнего выражения с (2.4.22) даёт результат

$$W = \frac{2^{1-\kappa} \pi^2 H}{\cos(\pi\kappa/2)} \int_0^{2\pi} \int_0^a [K_1(\rho, \phi)]^2 \rho d\rho d\phi. \quad (2.4.25)$$

Выражение (2.4.25) показывает, что квадрат функции интенсивности напряжений пропорционален плотности энергии необходимой для открытия трещины. В случае осевой симметрии, формула (2.4.25) упрощается:

$$W = \frac{2^{2-\kappa} \pi^3 H}{\cos(\pi\kappa/2)} \int_0^a [K_1(\rho)]^2 \rho d\rho,$$

с

$$K_1(\rho) = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(2\rho)^{(1-\kappa)/2}} \int_0^{\rho} \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0}{(\rho^2 - \rho_0^2)^{(1+\kappa)/2}}.$$

Все полученные результаты действительны для трансверсально изотропного пространства, если мы возьмём $\kappa=0$, и H таким, как определено в (2.1.9).

Упражнение 2.4

1. Найдите изотропный эквивалент формулы (2.4.25).

$$\text{Ответ: } W = 2\pi \frac{1-\nu^2}{E} \int_0^a \int_0^{2\pi} [K_1(\rho, \phi)]^2 \rho \, d\rho \, d\phi,$$

с

$$K_1(\rho, \phi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\rho}} \int_0^\rho \frac{x \, dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\rho}\right) \sigma(x, \phi).$$

2. Решите задачу, приведённую выше, для случая осевой симметрии.

$$\text{Ответ: } W = 4\pi^2 \frac{1-\nu^2}{E} \int_0^a [K_1(\rho)]^2 \rho \, d\rho,$$

где

$$K_1(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\rho}} \int_0^\rho \frac{\sigma(x)x \, dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}.$$

Заметьте: эти результаты были получены Снеддоном (1965).

3. Круглая трещина в неоднородном упругом пространстве открывается давлением $\sigma(\rho, \phi) = \sigma_0 + \sigma_1 \rho \cos \phi$, с $\sigma_0 = \text{const}$ и $\sigma_1 = \text{const}$. Найдите нормальное напряжение на плоскости $z=0$ вне трещины.

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } \sigma(\rho, \phi) = & -\frac{2\cos(\pi\kappa/2)}{\pi(3-\kappa)} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{3-\kappa} \left\{ \sigma_0 F\left(\frac{3-\kappa}{2}, \frac{3-\kappa}{2}, \frac{5-\kappa}{2}, \left(\frac{a}{\rho}\right)^2\right) \right. \\ & \left. + \frac{2}{5-\kappa} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 F\left(\frac{3-\kappa}{2}, \frac{5-\kappa}{2}, \frac{7-\kappa}{2}, \left(\frac{a}{\rho}\right)^2\right) \sigma_1 \rho \cos \phi \right\}, \quad \text{для } \rho > a. \end{aligned}$$

Результат может быть выражен в элементарных функциях для однородного тела:

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, \phi) = & -\frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{a}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) \right] \sigma_0 \right. \\ & \left. + \left[\frac{3\rho^2 - a^2}{3\rho(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - 3\frac{\rho}{a} \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) \right] \sigma_1 \rho \cos \phi \right\}. \end{aligned}$$

4. В предыдущей задаче найдите нормальные перемещения поверхности трещины w .

Ответ: $w = \frac{4\cos(\pi\kappa/2)}{(1-\kappa)^2} (a^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2} \left[\sigma_0 + \frac{2}{3-\kappa} \sigma_1 \rho \cos\phi \right]$.

5. Рассмотрим круглую трещину $\rho \leq a$. Найдите распределение напряжений σ в плоскости $z=0$ вне трещины, вызванное действием пары равных сосредоточенных сил P , приложенных нормально к поверхностям трещины в противоположных направлениях в точке (b, ψ) , $b < a$.

Ответ: $\sigma(\rho, \phi) = -\frac{P}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right) \left(\frac{a^2 - b^2}{\rho^2 - a^2}\right)^{(1-\kappa)/2} \frac{1}{\rho^2 + b^2 - 2b\rho\cos(\phi - \psi)}$.

6. Докажите равенство для круглой трещины:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma(\rho, \phi) \rho^{|\kappa|+1} e^{in\phi} d\rho d\phi = - \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \sigma(\rho, \phi) \rho^{|\kappa|+1} e^{in\phi} d\rho d\phi.$$

Заметьте: равенство означает, что нормальное напряжение в плоскости $z=0$ находится в равновесии, это свойство не справедливо для внешней трещины.

7. Выразите функцию интенсивности напряжений $K_I(\rho, \phi)$ через перемещение w .

Ответ: $K_I(\rho, \phi) = -\frac{\cos(\pi\kappa/2)}{2^{(1-\kappa)/2} \pi^2 H \rho^{(1+\kappa)/2}} \mathcal{L}(\rho) \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{x dx}{(x^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{x}\right) w(x, \phi)$.

Совет: выполните инверсию формулы (2.4.23).

8. Докажите равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow a} \left\{ \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{(a^2 - x^2)^{(1-\kappa)/2}}{(x^2 - \rho^2)^{(1-\kappa)/2}} f(x) dx \right\} = -\frac{\pi(1-\kappa)f(a)}{2\cos(\pi\kappa/2)}.$$

Совет: используйте подстановку $t = (x^2 - \rho^2)/(a^2 - x^2)$.

9. Используйте равенство выше и выразите коэффициент концентрации напряжений через перемещение w .

Ответ: $k_I(\phi) = \frac{1-\kappa}{2^{2-\kappa} \pi H} \lim_{\rho \rightarrow a} \left[\frac{w(\rho, \phi)}{(a - \rho)^{(1-\kappa)/2}} \right]$.

Совет: вычислите предел $\rho \rightarrow a$ результата в Упражнении 7.

10. Рассмотрите трансверсально изотропное упругое пространство ослабленное круглой трещиной $\rho \leq a$ в плоскости $z = 0$, под действием

произвольного давления $\sigma(\rho, \phi)$. Найдите комплексное тангенциальное перемещение u в плоскости $z=0$.

$$\text{Ответ: } u = -H\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - \rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})^{1/2}} \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}}, \quad \text{для } \rho \leq a;$$

$$u = -\frac{2}{\pi} H\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - \rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})^{1/2}} \times \tan^{-1} \left[\frac{(a^2 - \rho\rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})^{1/2}}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \right] \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}}, \quad \text{для } \rho > a.$$

Совет: смотри (Fabrikant, 1987a).

2.5 Интегральное представление для q^2/R^3

В то время, как знание интегрального представления для $1/R$ было достаточно, чтобы решить смешанную граничную задачу типа I, это недостаточно для решения задачи типа II. Необходимость знания интегрального представления для q^2/R^3 очевидна из (2.2.12). Мы припоминаем, что q определён в (2.2.5), и R даётся в (2.2.14). Оригинальный вывод был сделан автором много лет назад. Вывод был очень длинным и сложным. Здесь мы представляем только использованные идеи и окончательный результат.

Так как

$$q^2/R^3 = q/(\bar{q}R), \quad (2.5.1)$$

мы можем использовать следующее разложение:

$$\frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} = e^{2i\phi_0} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k e^{-ik(\phi-\phi_0)} - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\phi-\phi_0)} \right\}, \quad \text{для } \rho < \rho_0;$$

$$\frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} = e^{2i\phi} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \right] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^k e^{ik(\phi-\phi_0)} - \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\phi-\phi_0)} \right\}, \quad \text{для } \rho > \rho_0;$$

(2.5.2)

Теперь мы должны подставить (2.5.2) и (1.1.27) в (2.5.1). Эта процедура даёт для $\rho < \rho_0$,

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{R^3} = & e^{2i\Phi_0} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k e^{-ik(\Phi - \Phi_0)} - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\Phi - \Phi_0)} \right\} \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} e^{in(\Phi - \Phi_0)} \int_0^{\rho} \frac{(x^2/\rho\rho_0)^{|n|} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Дальше идёт громоздкая процедура группировки членов, принадлежащих к каждой гармонике. Вывод не заканчивается на этом: нам также нужно использовать следующие равенства:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{(\rho_0^2 - x^2) \sum_{k=0}^n \rho^{2(n-k)} x^{2k} - \rho^{2n} x^2}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} dx \\ &= \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{x^{2n} [(2n+1)\rho_0^2 - (2n+2)x^2]}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} dx, \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

и

$$\begin{aligned} & \rho_0^2 \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{(2n-1)\rho^2 - 2nx^2}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} x^{2n-2} dx \\ &= \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{2n\rho^2 - (2n+1)x^2}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} x^{2n} dx, \quad \text{для } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Первое равенство может быть доказано методом математической индукции, справедливость второго может быть показана, используя свойство

$$\int_0^{\min(\rho_0, \rho)} d[x^{2n-1}(\rho^2 - x^2)^{1/2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}] = 0.$$

Аналогичная процедура требуется для случая $\rho > \rho_0$. Окончательный результат есть

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{R^3} = & \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2i\phi}}{\rho^2} \left[\frac{e^{in(\phi-\phi_0)}}{(\rho\rho_0)^n} \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{(2n+1)\rho^2 - (2n+2)x^2}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} x^{2n} dx \right] \right. \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2i\phi_0}}{\rho_0^2} \left[\frac{e^{-in(\phi-\phi_0)}}{(\rho\rho_0)^n} \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{(2n+1)\rho_0^2 - (2n+2)x^2}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} x^{2n} dx \right] \\ & \left. - \frac{e^{i(\phi+\phi_0)}}{\rho\rho_0} \int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Выражение (2.5.6), хотя и выглядит громоздким, покажет себя очень полезным для решения внутренних смешанных граничных задач типа II. Нам нужно ещё одно интегральное представление, которое будет полезно для решения внешних задач. Процедура так же сложна, как и предыдущая, и окончательный результат есть

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{R^3} = & \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\phi} \left[\frac{e^{i(\phi-\phi_0)}}{\rho\rho_0} \int_{\max(\rho_0, \rho)}^{\infty} \frac{(2n+1)x^2 - (2n+2)\rho_0^2}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} dx \right] \right. \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\phi_0} \left[\frac{e^{-i(\phi-\phi_0)}}{\rho\rho_0} \int_{\max(\rho_0, \rho)}^{\infty} \frac{(2n+1)x^2 - (2n+2)\rho^2}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} dx \right] \\ & \left. - e^{i(\phi+\phi_0)} \rho\rho_0 \int_{\max(\rho_0, \rho)}^{\infty} \frac{dx}{x^2(x^2 - \rho^2)^{1/2}(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Здесь следующие равенства были использованы:

$$\begin{aligned}
& \int_{\max(\rho_0, \rho)}^{\infty} \frac{(x^2 - \rho^2) \sum_{k=0}^n x^{2k} \rho_0^{2(n-k)} - \rho^2 x^{2n}}{x^{2n+2} (x^2 - \rho^2)^{1/2} (x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} dx \\
&= \rho_0^{2n} \int_{\max(\rho_0, \rho)}^{\infty} \frac{(2n+1)x^2 - (2n+2)\rho^2}{x^{2n+2} (x^2 - \rho^2)^{1/2} (x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} dx,
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& \int_{\max(\rho_0, \rho)}^{\infty} \frac{2n\rho_0^2 - (2n-1)x^2}{x^{2n} (x^2 - \rho^2)^{1/2} (x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} dx \\
&= \rho^2 \int_{\max(\rho_0, \rho)}^{\infty} \frac{(2n+1)\rho_0^2 - 2nx^2}{x^{2n+2} (x^2 - \rho^2)^{1/2} (x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} dx.
\end{aligned}$$

Эти равенства могут быть выведены из (2.5.4) и (2.5.5) путём формальной замены x на $\rho\rho_0/x$. Как обычно, когда один результат получен, всегда можно найти более лёгкий способ вывода. Мы обсудим далее некоторые обобщения интегральных представлений выведенных выше (смотри секцию 2.7).

Упражнение 2.5

1. Докажите равенства (2.5.4) и (2.5.5).
2. Покажите правильность представления (2.5.6).
3. Покажите правильность представления (2.5.7).

2.6 Внутренняя смешанная задача типа II

Материал в этой секции следует в основном статье (Фабрикант, 1971ц). Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть нормальное напряжение σ задано на всей плоскости $z = 0$. Произвольное тангенциальное перемещение $u = u_x + iu_y$ предписано внутри круга $\rho = a$, в то время, как комплексная сдвигающая нагрузка τ известна вне круга. Требуется найти сдвигающее напряжение внутри круга. Математическая формулировка граничных условий имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(\rho, \phi), & \text{для } 0 \leq \rho < \infty, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \tau &= \tau(\rho, \phi), & \text{для } a < \rho < \infty, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ u &= u(\rho, \phi), & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Основное интегральное уравнение может быть написано согласно (2.2.12):

$$\frac{1}{2}G_1 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} + \frac{1}{2}G_2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{q\bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R} = \chi(\rho, \phi). \quad (2.6.2)$$

Функция χ известна из граничных условий (2.6.1):

$$\begin{aligned} \chi(\rho, \phi) &= u + H\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \\ &\quad - \frac{1}{2}G_1 \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} - \frac{1}{2}G_2 \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{q\bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R}. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Хотя точное решение (2.6.2) в замкнутой форме возможно, мы представим вначале точное решение в рядах Фурье. Пусть следующие разложения справедливы:

$$\tau(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_n(\rho) e^{in\phi}, \quad \chi(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n(\rho) e^{in\phi}. \quad (2.6.4)$$

Подстановка (2.5.6) и (2.6.4) в (2.6.2) приводит к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{2G_1}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n+2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \\
& + \frac{2G_2}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{(2n-1)\rho^2 - 2nx^2}{\rho_0^{n-2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0 = \chi_{n+1}(\rho),
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2G_1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \\
& + \frac{2G_2}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{(2n-1)\rho_0^2 - 2nx^2}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0) d\rho_0 = \chi_{-n+1}(\rho),
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Уравнения (2.6.5) и (2.6.6) действительны для $n = 1, 2, 3, \dots$. В случае осевой симметрии, $n=0$, и интегральное уравнение принимает вид

$$\frac{2}{\rho} \int_0^\rho \frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{G_1 \tau_1(\rho_0) - G_2 \bar{\tau}_1(\rho_0)}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0 = \chi_1(\rho). \tag{2.6.7}$$

Его решение элементарно, а именно,

$$\tau_1(\rho) = -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left[x \int_0^x \frac{G_1 \chi_1(\rho_0) + G_2 \bar{\chi}_1(\rho_0)}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} d\rho_0 \right]. \tag{2.6.8}$$

Общее решение системы (2.6.5) и (2.6.6) может быть представлено в форме

$$\tau_{-n+1}(\rho) = \rho^{n-1} \int_\rho^a \frac{f_{-n+1}(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + \left(\frac{G_2}{G_1} \bar{C}_n + D_n \right) \frac{\rho^{n-1}}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}},$$

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1}(\rho) = & \rho^{n-1} \int_{\rho}^a \frac{f_{n+1}(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{2n}{\rho^{n+1}} \int_{\rho}^a y^{2n-1} dy \int_y^a \frac{f_{n+1}(t) dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \\
& + C_n \left[\frac{\rho^{n-1}}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{2n}{\rho^{n+1}} \int_{\rho}^a \frac{y^{2n-1} dy}{(a^2 - y^2)^{1/2}} \right].
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Здесь f_{κ} пока неизвестные комплексные функции, и C_n и D_n пока неизвестные константы. Подстановка (2.6.9) в (2.6.5) и (2.6.6), даёт после изменения порядка интегрирования и интегрирования по ρ_0 ,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi G_1}{\rho^{n+1}} \left[\rho \int_0^a t^{2n-1} f_{n+1}(t) dt + C_n \rho a^{2n-1} - \int_0^{\rho} (\rho^2 - t^2)^{1/2} t^{2n-1} f_{n+1}(t) dt \right] \\
+ \frac{\pi G_2}{\rho^{n+1}} \int_0^{\rho} (\rho^2 - t^2)^{1/2} t^{2n-1} \bar{f}_{-n+1}(t) dt = \chi_{n+1}(\rho),
\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi G_1}{\rho^{n-1}} \left[\int_0^{\rho} \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a f_{-n+1}(t) dt + D_n \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n - \frac{1}{2})}{2\Gamma(n)} \rho^{2n-2} \right] \\
- \frac{\pi G_2}{\rho^{n-1}} \int_0^{\rho} \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \bar{f}_{n+1}(t) dt = \chi_{-n+1}(\rho).
\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

Выражение (2.6.10) может быть упрощено, если мы определим C_n как

$$C_n = -a^{2n+1} \int_0^a t^{2n-1} f_{n+1}(t) dt. \tag{2.6.12}$$

Приложение оператора

$$r^{-2n+2} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{\rho^n d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}$$

к обеим сторонам (2.6.11) даёт

$$\frac{\pi^2}{2} \left[G_1 \int_r^a f_{-n+1}(t) dt - G_2 \int_r^a \bar{f}_{n+1}(t) dt + G_1 D_n \right] = r^{-2n+2} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{\chi_{-n+1}(\rho) \rho^n d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (2.6.13)$$

Так как выражение (2.6.13) должно оставаться действительным в предельном случае $r \rightarrow a$, это определяет D_n следующим образом:

$$D_n = \frac{2}{\pi^2 G_1 a^{2n-2}} \frac{d}{da} \int_0^a \frac{\chi_{-n+1}(\rho) \rho^n d\rho}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (2.6.14)$$

Обе константы теперь определены. Инверсия (2.6.10) и дифференцирование (2.6.13) приводит к системе

$$\begin{aligned} -G_1 f_{n+1}(r) + G_2 \bar{f}_{-n+1}(r) &= \psi_{n+1}(r), \\ -G_1 \bar{f}_{-n+1}(r) + G_2 f_{n+1}(r) &= \psi_{-n+1}(r). \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

Здесь были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(r) &= \frac{2}{\pi^2 r^{2n-1}} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{d[\rho^{n+1} \chi_{n+1}(\rho)]}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}, \\ \psi_{-n+1}(r) &= \frac{2}{\pi^2} \frac{d}{dr} \left[r^{-2n+2} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{\rho^n \chi_{-n+1}(\rho) d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

Решение системы (2.6.15) даёт

$$f_{-n+1}(r) = - \frac{G_1 \psi_{-n+1}(r) + G_2 \bar{\psi}_{n+1}(r)}{G_1^2 - G_2^2},$$

$$f_{n+1}(r) = -\frac{G_1 \Psi_{n+1}(r) + G_2 \bar{\Psi}_{-n+1}(r)}{G_1^2 - G_2^2}. \quad (2.6.17)$$

Общее решение теперь закончено. Оно даётся формулами (2.6.9), с константами C и D согласно (2.6.12) и (2.6.14), и функциями f определёнными в (2.6.17) и (2.6.16).

Пример. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое пространство ослабленное внешней круглой трещиной $\rho \geq a$ в плоскости $z=0$. Две *одинаково направленные* равные сосредоточенные силы P приложены нормально к обеим сторонам трещины в точках $(\rho_0, \phi_0, 0^\pm)$, $\rho_0 > a$. Нам нужно найти тангенциальное напряжение в шейке трещины. Благодаря антисимметрии приложенной нагрузки, задача может быть сведена к задаче о полупространстве, с тангенциальными перемещениями и нормальным напряжением исчезающим в шейке трещины. Математическая формулировка граничных условий есть:

$$\begin{aligned} \sigma &= P \delta(\rho - \rho_0) \delta(\phi - \phi_0) / \rho \quad \text{для} \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \tau &= 0, \quad \text{для} \quad a < \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ u &= 0, \quad \text{для} \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

Здесь $\delta(\cdot)$ есть дельта-функция Дирака. Основное интегральное уравнение соответствует (2.6.2), с правой стороной χ , определённой в (2.6.3), то есть,

$$\chi(\rho, \phi) = \frac{PH\alpha}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} = -\frac{PH\alpha}{\rho_0 e^{-i\phi_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-i(\phi-\phi_0)} \frac{\rho}{\rho_0})^n.$$

Общее решение, представленное выше, даёт следующие результаты

$$\begin{aligned} \chi_{-n+1}(\rho) &= -\frac{PH\alpha e^{i\phi_0}}{\rho_0} (e^{i\phi_0} \frac{\rho}{\rho_0})^{n-1}, \quad \chi_{n+1}(\rho) = 0, \\ f_{-n+1} &= f_{n+1} = C_n = 0, \quad D_n = -\frac{2PH\alpha \Gamma(n)}{\pi^{3/2} G_1 \Gamma(n - \frac{1}{2}) (\rho_0 e^{-i\phi_0})^n} \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

Подстановка (2.6.19) в (2.6.17) и (2.6.9) приводит к решению

$$\tau(\rho, \phi) = -\frac{2PH\alpha}{\pi^{3/2}G_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{(\rho_0 e^{-i\phi_0})^{n+1} \Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{\rho^n e^{-in\phi}}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}.$$

Суммирование может быть выполнено согласно схеме

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \zeta^n = \pi^{-1/2} F(1, 1; \frac{1}{2}; \zeta) = \frac{\pi^{-1/2}}{1-\zeta} \left[1 + \left(\frac{\zeta}{1-\zeta} \right)^{1/2} \sin^{-1} \sqrt{\zeta} \right].$$

Здесь мы использовали хорошо известное свойство гипергеометрических функций (Bateman and Erdélyi, 1955). Теперь результат примет вид

$$\tau(\rho, \phi) = -\frac{2PH\alpha}{\pi^2 G_1 \rho_0 e^{-i\phi_0} (a^2 - \rho^2)^{1/2}} \frac{1}{1-b} \left[1 + \left(\frac{b}{1-b} \right)^{1/2} \sin^{-1} \sqrt{b} \right],$$

где $b = (\rho/\rho_0) e^{-i(\phi-\phi_0)}$. В случае изотропии, последняя формула совпадает с результатом Уфлянда (1967).

Упражнение 2.6

1. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Тангенциальное перемещение $u = u_0 = \text{const}$ задано внутри круга $\rho = a$. Сдвигающее напряжение вне круга равно нулю, и нормальное давление исчезает на всей плоскости $z = 0$. Найдите сдвигающее напряжение внутри круга.

Ответ: $\tau(\rho) = \frac{2u_0}{\pi^2 G_1 (a^2 - \rho^2)^{1/2}}.$

2. В задаче выше найдите нормальное перемещение w в плоскости $z = 0$.

Ответ: $w = \frac{4\Re(u_0 e^{-i\phi}) H\alpha a}{\pi G_1 \rho}, \quad \text{для} \quad \rho > a;$

$$w = \frac{4\Re(u_0 e^{-i\phi}) H\alpha [a - (a^2 - \rho^2)^{1/2}]}{\pi G_1 \rho}, \quad \text{для} \quad \rho \leq a;$$

3. Согласно условиям первой задачи, найдите тангенциальное перемещение вне круга $\rho = a$.

$$\text{Ответ: } u = \frac{2}{\pi} \left[u_0 \sin^{-1} \left(\frac{a}{\rho} \right) + \bar{u}_0 \frac{G_2}{G_1} \frac{a(\rho^2 - a^2)^{1/2}}{\rho^2} e^{2i\phi} \right].$$

2.7 Внешняя смешанная задача типа II

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть нормальное напряжение σ задано на всей плоскости $z = 0$. Произвольное тангенциальное перемещение $u = u_x + iu_y$ задано вне круга $\rho = a$, в то время, как комплексная сдвигающая нагрузка τ известна внутри круга. Требуется найти сдвигающее напряжение вне круга, тангенциальное перемещение внутри, и нормальное перемещение в плоскости $z = 0$. Математическая формулировка граничных условий есть:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(\rho, \phi), & \text{для } 0 \leq \rho < \infty, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \tau &= \tau(\rho, \phi), & \text{для } 0 \leq \rho < a, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ u &= u(\rho, \phi), & \text{для } a \leq \rho < \infty, & & 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Основное интегральное уравнение может быть написано согласно (2.2.12):

$$\frac{1}{2} G_1 \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} + \frac{1}{2} G_2 \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{q\bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R} = \chi(\rho, \phi). \quad (2.7.2)$$

Функция χ известна из граничных условий (2.7.1):

$$\begin{aligned} \chi(\rho, \phi) &= u + H\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \\ &\quad - \frac{1}{2} G_1 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} - \frac{1}{2} G_2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{q\bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q}R}. \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

После того, как уравнение (2.7.2) решено, нормальное перемещение находится следующим образом

$$w(\rho, \phi) = H\alpha \Re \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}} \right\} + H \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R}. \quad (2.7.4)$$

Мы представляем точное решение (2.7.2) в рядах Фурье. Пусть действительны разложения:

$$\tau(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_n(\rho) e^{in\phi}, \quad \chi(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n(\rho) e^{in\phi}. \quad (2.7.5)$$

Подстановка интегральных представлений (2.5.7) и (2.7.5) в (2.7.2) приводит к системе парных интегральных уравнений

$$2G_1 \rho^{n+1} \int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) \rho_0^{n+2} d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} + 2G_2 \rho^{n+1} \int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \times \int_a^x \frac{2nx^2 - (2n+1)\rho_0^2}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0 = \chi_{n+1}(\rho), \quad \text{для } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7.6)$$

$$2G_1 \rho^{n-1} \int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n-2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} + 2G_2 \rho^{n-1} \int_\rho^\infty \frac{(2n-1)x^2 - 2n\rho^2}{x^{2n}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} dx \times \int_a^x \frac{\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} = \chi_{-n+1}(\rho), \quad \text{для } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.7.7)$$

Здесь

$$\chi_{n+1}(\rho) = u_{n+1}(\rho) + 2\pi H\alpha \rho^{-n-1} \int_0^\rho \sigma_n(\rho_0) \rho_0^{n+1} d\rho_0 - \frac{2}{\rho^{n+1}} \int_0^a \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \times \int_x^a \frac{G_1 x^2 \tau_{n+1}(\rho_0) + G_2 [2n\rho^2 - (2n+1)x^2] \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0, \quad (2.7.8)$$

и

$$\chi_{-n+1}(\rho) = u_{-n+1}(\rho) + 2\pi H\alpha\rho^{n-1} \int_{\rho}^{\infty} \sigma_{-n}(\rho_0) \rho_0^{-n+1} d\rho_0 - \frac{2}{\rho^{n-1}} \int_0^a \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \\ \times \int_x^a \frac{G_1 \rho_0^2 \tau_{-n+1}(\rho_0) + G_2 [(2n-1)\rho_0^2 - 2nx^2] \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0, \quad (2.7.9)$$

Случай осевой симметрии соответствует $n=0$, и мы должны решить только одно уравнение (2.7.6). Общее решение системы (2.7.6) и (2.7.7) может быть представлено в форме

$$\tau_{n+1}(\rho) = \frac{1}{\rho^{n+1}} \left[\int_a^{\rho} \frac{f_{n+1}(t) dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} + \frac{D_n}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \right], \quad \text{для } n=0, 1, 2, \dots \\ \tau_{-n+1}(\rho) = \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_a^{\rho} \frac{y dy}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} \frac{d}{dy} \left[y^{2n} \int_a^y \frac{f_{-n+1}(t)}{t^{2n+1}} dt \right] \\ + C_n \left[\frac{1}{\rho^{n+1} (\rho^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{2n}{\rho^{n+1} a^{2n+1}} \int_a^{\rho} \frac{y^{2n} dy}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} \right], \quad \text{для } n=1, 2, 3, \dots \quad (2.7.10)$$

Здесь функции f подлежат определению, и C и D пока неизвестные комплексные константы. Мы используем те же обозначения, как в предыдущей секции, надеясь, что это не вызовет путаницу, и что читатель легко разберётся, что, например, C_n в этой секции не равно C_n в предыдущей секции. Подстановка (2.7.10) в уравнения (2.7.6) даёт после упрощения,

$$\pi\rho^{n+1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n+2} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[G_1 \left(\int_a^x f_{n+1}(t) dt + D_n \right) \right. \\ \left. - G_2 \left(\int_a^x \bar{f}_{-n+1}(t) dt + \bar{C}_n \right) \right] = \chi_{n+1}(\rho), \quad (2.7.11)$$

$$\begin{aligned}
& \pi \rho^{n-1} G_1 \int_{\rho}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[\int_a^x \frac{f_{-n+1}(t) dt}{t^{2n+1}} + \frac{C_n}{a^{2n+1}} \right] \\
& + \pi \rho^{n-1} G_2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}{x^{2n+1}} \bar{f}_{n+1}(x) dx = \chi_{-n+1}(\rho).
\end{aligned} \tag{2.7.12}$$

Следующее равенство было использовано в процедуре интегрирования по частям:

$$-\frac{d}{dx} \left[\frac{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}{x^{2n}} \right] = \frac{(2n-1)x^2 - 2n\rho^2}{x^{2n+1}(x^2 - \rho^2)^{1/2}}.$$

Глядя на первый интеграл в (2.7.12), мы можем заключить, что он сходится только, если член в квадратных скобках стремится к нулю, когда $x \rightarrow \infty$. Это условие определяет C_n следующим образом:

$$C_n = -a^{2n+1} \int_a^{\infty} f_{-n+1}(t) t^{-2n-1} dt. \tag{2.7.13}$$

Мы разделим обе стороны (2.7.11) на $\rho^n(\rho^2 - r^2)^{1/2}$, интегрируем по ρ от r до ∞ , дифференцируем по r , и умножаем результат на r^{2n+2}/π . Мы получим

$$\begin{aligned}
& G_1 \left[\int_a^r f_{n+1}(t) dt + D_n \right] - G_2 \left[\int_a^r \bar{f}_{-n+1}(t) dt + \bar{C}_n \right] \\
& = -\frac{2}{\pi^2} r^{2n+2} \frac{d}{dr} \int_r^{\infty} \frac{\chi_{n+1}(\rho) d\rho}{\rho^n(\rho^2 - r^2)^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{2.7.14}$$

Переход к пределу $r \rightarrow a$ в (2.7.14) даёт нам формулу для вычисления D_n , а именно,

$$D_n = \frac{1}{G_1} \left[G_2 \bar{C}_n - \frac{2}{\pi^2} a^{2n+2} \frac{d}{da} \int_a^\infty \frac{\chi_{n+1}(\rho) d\rho}{\rho^n (\rho^2 - a^2)^{1/2}} \right]. \quad (2.7.15)$$

Инверсия (2.7.12) и дифференцирование (2.7.14) ведёт к системе уравнений

$$\begin{aligned} G_1 f_{-n+1}(r) - G_2 \bar{f}_{n+1}(r) &= \Psi_{-n+1}(r), \\ G_1 f_{n+1}(r) - G_2 \bar{f}_{-n+1}(r) &= \Psi_{n+1}(r). \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Psi_{-n+1}(r) &= -\frac{2}{\pi^2} r^{2n+1} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{d\rho}{(\rho^2 - r^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\chi_{-n+1}(\rho)}{\rho^{n-1}} \right], \\ \Psi_{n+1}(r) &= -\frac{2}{\pi^2} \frac{d}{dr} \left[r^{2n+2} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{\chi_{n+1}(\rho) d\rho}{\rho^n (\rho^2 - r^2)^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

Следующее правило дифференцирования было использовано выше:

$$\frac{d}{d\rho} \int_\rho^\infty \frac{f(x) dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} = \rho \int_\rho^\infty \frac{d[f(x)/x]}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (2.7.18)$$

Решение системы (2.7.16) есть

$$\begin{aligned} f_{n+1}(r) &= \frac{G_1 \Psi_{n+1}(r) + G_2 \bar{\Psi}_{-n+1}(r)}{G_1^2 - G_2^2}, \\ f_{-n+1}(r) &= \frac{G_1 \Psi_{-n+1}(r) + G_2 \bar{\Psi}_{n+1}(r)}{G_1^2 - G_2^2}. \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

Формулы (2.7.10), (2.7.13), (2.7.15), (2.7.17), и (2.7.19) дают полное решение задачи. Так как сдвигающее напряжение теперь известно на всей плоскости $z=0$, тангенциальные перемещения внутри круга может быть определено по (2.7.2), и нормальное перемещение определяется по (2.7.4). Мы рассмотрим

далее случай круглой трещины более подробно, включая вывод решения в замкнутой форме.

Пример: Круглая трещина. Пусть трещина радиуса a расположена в плоскости $z=0$. Обе стороны трещины нагружены произвольной сдвигающей нагрузкой действующей в противоположных направлениях. Граничные условия антисимметричны, так что задача может быть сведена к смешанной задаче для полупространства, со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}\sigma &= 0, \quad \text{для} \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \tau &= \tau(\rho, \phi), \quad \text{для} \quad 0 \leq \rho < a, \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ u &= 0, \quad \text{для} \quad a \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.\end{aligned}\tag{2.7.20}$$

Сдвигающее напряжение вне трещины, тангенциальное перемещение внутри и нормальное перемещение в плоскости $z=0$ должны быть определены. Задача о трещине может быть рассмотрена как особый случай более общей задачи, которая была решена выше. Однако, мы можем показать, что задача о трещине имеет более простое решение. Действительно, интегральные уравнения (2.7.6) и (2.7.7) остаются теми же, но вместо (2.7.8) и (2.7.9) мы имеем

$$\chi_{n+1}(\rho) = -\frac{2}{\rho^{n+1}} \int_0^a \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{G_1 x^2 \tau_{n+1}(\rho_0) + G_2 [2n\rho^2 - (2n+1)x^2] \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0,\tag{2.7.21}$$

и

$$\chi_{-n+1}(\rho) = -\frac{2}{\rho^{n+1}} \int_0^a \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{G_1 \rho_0^2 \tau_{-n+1}(\rho_0) + G_2 [(2n-1)\rho_0^2 - 2nx^2] \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0.\tag{2.7.22}$$

Структура интегрального уравнения указывает на возможность выразить неизвестное τ вне трещины через заданное τ внутри. Такое представление имеет вид:

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}(\rho) &= -\frac{2}{\pi \rho^{n+1} (\rho^2 - a^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{(a^2 - t^2)^{1/2} \tau_{n+1}(t) t^{n+2} dt}{\rho^2 - t^2} + \frac{A_n}{\rho^{n+1} (\rho^2 - a^2)^{1/2}}, \\ &\quad \text{для} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \tau_{-n+1}(\rho) &= -\frac{2}{\pi \rho^{n+1} (\rho^2 - a^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{(a^2 - t^2)^{1/2} \tau_{-n+1}(t) t^n dt}{\rho^2 - t^2}, \quad \text{для} \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

(2.7.23)

Здесь A_n есть пока неизвестные комплексные константы. Подстановка (2.7.23) в (2.7.6) даёт, после промежуточного интегрирования,

$$\begin{aligned}
& 2G_1 \rho^{n+1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[- \int_0^a \frac{\tau_{n+1}(t) t^{n+2} dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} + \frac{\pi}{2} A_n \right] \\
& + 2G_2 \rho^{n+1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[- \int_0^a \frac{2nx^2 - (2n+1)t^2}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(t) t^n dt \right. \\
& \left. + (2n+1) \int_0^a (a^2 - t^2)^{1/2} \bar{\tau}_{-n+1}(t) t^n dt \right] = \chi_{n+1}(\rho).
\end{aligned} \tag{2.7.24}$$

Следующее равенство может быть проверено формальной заменой x на $\rho t/x$:

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}(x^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{1}{(\rho t)^{2n+2}} \int_0^t \frac{x^{2n+2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(t^2 - x^2)^{1/2}}. \tag{2.7.25}$$

Изменение порядка интегрирования в (2.7.24), использование (2.7.25) и ещё одно изменение порядка ведёт к выражению

$$\begin{aligned}
& - \frac{2G_1}{\rho^{n+1}} \int_0^a \frac{x^{2n+2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_{n+1}(t) dt}{t^n (t^2 - x^2)^{1/2}} \\
& - \frac{2G_2}{\rho^{n+1}} \int_0^a \frac{2n\rho^2 - (2n+1)x^2}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} x^{2n} dx \int_x^a \frac{\bar{\tau}_{-n+1}(t) dt}{t^n (t^2 - x^2)^{1/2}} \\
& + \rho^{n+1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[\pi G_1 A_n \right.
\end{aligned}$$

$$+ 2G_2(2n+1) \int_0^a (a^2 - t^2)^{1/2} \bar{\tau}_{-n+1}(t) t^n dt \Big] = \chi_{n+1}(\rho). \quad (2.7.26)$$

Сравнение (2.7.26) и (2.7.21) показывает, что уравнение будет удовлетворено, если A_n определено как

$$A_n = -\frac{2}{\pi}(2n+1)(G_2/G_1) \int_0^a \bar{\tau}_{-n+1}(\rho) \rho^n (a^2 - \rho^2)^{1/2} d\rho. \quad (2.7.27)$$

Так как τ_{-n+1} определено для $n \geq 1$ только, мы можем заключить, что $A_0 = 0$. Аналогичная процедура подстановки (2.7.23) в (2.7.7) приводит к

$$\begin{aligned} & 2G_1 \rho^{n-1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n-2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[- \int_0^a \frac{\tau_{-n+1}(t) t^n dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \right] \\ & + 2G_2 \rho^{n-1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{(2n-1)x^2 - 2n\rho^2}{x^{2n}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} dx \left[- \int_0^a \frac{\bar{\tau}_{-n+1}(t) t^n}{(x^2 - t^2)^{1/2}} dt \right. \\ & \left. + \frac{1}{ax} \left(\int_0^a (a^2 - t^2)^{1/2} \bar{\tau}_{-n+1}(t) t^{n+2} dt + \frac{\pi}{2} A_n \right) \right] = \chi_{-n+1}(\rho). \end{aligned} \quad (2.7.28)$$

Следует заметить, что интеграл

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{(2n-1)x^2 - 2n\rho^2}{x^{2n+1}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} dx = \int_{\rho}^{\infty} d \left[- \frac{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}{x^{2n}} \right] = 0, \quad \text{для } n \geq 1. \quad (2.7.29)$$

Используя (2.7.25) и (2.7.29), уравнение (2.7.28) может быть преобразовано в

$$-\frac{2G_1}{\rho^{n-1}} \int_0^a \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(t) dt}{t^{n-2}(t^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$-\frac{2G_2}{\rho^{n-1}} \int_0^a \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{(2n-1)t^2 - 2nx^2}{t^n(t^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{n+1}(t) dt = \chi_{-n+1}(\rho).$$

Сравнение последнего выражения с (2.7.22) доказывает, что уравнение (2.7.7) удовлетворено, и что (2.7.23) является решением нашей задачи. Решение в замкнутой форме может быть получено при помощи суммирования (2.7.23) и (2.7.27), с результатом:

$$\begin{aligned} \tau(\rho, \phi) = & -\frac{1}{\pi^2(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)} \\ & - \frac{G_2 e^{2i\phi}}{\pi^2 G_1 \rho^2 (\rho^2 - a^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{3 - (\rho_0/\rho) e^{i(\phi - \phi_0)}}{[1 - (\rho_0/\rho) e^{i(\phi - \phi_0)}]^2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \end{aligned} \quad (2.7.30)$$

Мы можем заметить, что первый интеграл в (2.7.30) соответствует решению для случая нормальной нагрузки круглой трещины. Определим комплексный коэффициент концентрации напряжений как

$$k(\phi) = \lim_{\rho \rightarrow a} [(\rho - a)^{1/2} \tau(\rho, \phi)]. \quad (2.7.31)$$

Подстановка (2.7.30) в (2.7.31) даёт:

$$\begin{aligned} k(\phi) = & -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{2a}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)} \\ & - \frac{G_2 e^{2i\phi}}{\pi^2 G_1 a^2 \sqrt{2a}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{3 - (\rho_0/a) e^{i(\phi - \phi_0)}}{[1 - (\rho_0/a) e^{i(\phi - \phi_0)}]^2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \end{aligned} \quad (2.7.32)$$

Так как наше определение τ содержит обе x - и y -компоненты, то выражение для коэффициента концентрации напряжений тоже будет содержать две компоненты $k = k_x + ik_y$. Если нам нужно разложить коэффициент на радиальную и тангенциальную компоненты, мы используем соотношение

$$\tau_{zx} + i\tau_{yz} = (\tau_{z\rho} + i\tau_{\phi z})e^{i\phi}.$$

Это позволяет нам переписать (2.7.32) через второй и третий мод коэффициент концентрации напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} k_2 + ik_3 = & -\frac{e^{-i\phi}}{\pi^2\sqrt{2a}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)} \\ & - \frac{G_2 e^{i\phi}}{\pi^2 G_1 a^2 \sqrt{2a}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{3 - (\rho_0/a) e^{i(\phi - \phi_0)}}{[1 - (\rho_0/a) e^{i(\phi - \phi_0)}]^2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \end{aligned} \quad (2.7.33)$$

Используя (2.7.33), нам следует помнить, что τ определено через декартовы компоненты.

Чтобы найти тангенциальные перемещения внутри трещины прямо через заданную сдвигающую нагрузку, уравнения (2.7.6) и (2.7.7) должны быть переписаны для $\rho \leq a$. Они будут иметь ту же форму, с единственной разницей в пределах интегрирования, а именно,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(\rho) = & 2G_1 \rho^{n+1} \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) \rho_0^{n+2} d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \\ & + 2G_2 \rho^{n+1} \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{2nx^2 - (2n+1)\rho_0^2}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0 \\ & + \frac{2G_1}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n+2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \\ & + \frac{2G_2}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{2n\rho^2 - (2n+1)x^2}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0, \\ & \text{для } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.7.34)$$

$$u_{-n+1}(\rho) = 2G_1 \rho^{n-1} \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n-2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
& + 2G_2 \rho^{n-1} \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{(2n-1)x^2 - 2n\rho^2}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0 \\
& + \frac{2G_1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \\
& + \frac{2G_2}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{(2n-1)\rho_0^2 - 2nx^2}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0) d\rho_0,
\end{aligned}$$

(2.7.35)

для $n = 1, 2, 3, \dots$

Первые два члена в (2.7.34) и (2.7.35) представляют перемещение внутри трещины, вызванное сдвигающим напряжением вне, в то время, как остальные члены дают перемещение, вызванное действием сдвигающих напряжений внутри. Подстановка (2.7.23) в (2.7.34) даёт, после интегрирования по ρ_0 ,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(\rho) = & -2G_1 \rho^{n+1} \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\tau_{n+1}(t) t^{n+2} dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \\
& - 2G_2 \rho^{n+1} \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{2nx^2 - (2n+1)t^2}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(t) t^n dt \\
& + \frac{2G_1}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n+2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \\
& + \frac{2G_2}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{2n\rho^2 - (2n+1)x^2}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0.
\end{aligned}$$

(2.7.36)

Преобразуем третий член в (2.7.36) используя (2.7.25). Процедура протекает следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{2G_1}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n+2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \\
&= \frac{2G_1}{\rho^{n+1}} \left[\int_0^\rho \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n} \int_0^{\rho_0} \frac{x^{2n+2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. + \int_\rho^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n} \int_0^\rho \frac{x^{2n+2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right] \\
&= \frac{2G_1}{\rho^{n+1}} \left[\int_0^\rho \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n} \int_\rho^\infty \frac{(\rho\rho_0)^{2n+2} dx}{x^{2n+2} (x^2 - \rho^2)^{1/2} (x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. + \int_\rho^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n} \int_{\rho_0}^\infty \frac{(\rho\rho_0)^{2n+2} dx}{x^{2n+2} (x^2 - \rho^2)^{1/2} (x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \right] \\
&= 2G_1 \rho^{n+1} \left[\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) \rho_0^{n+2} d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. + \int_\rho^a \frac{dx}{x^{2n+2} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) \rho_0^{n+2} d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \right]. \tag{2.7.37}
\end{aligned}$$

Аналогичное преобразование последнего члена в (2.7.36) приводит к равенству

$$\frac{2G_2}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{2n\rho^2 - (2n+1)x^2}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0$$

$$\begin{aligned}
&= 2G_2\rho^{n+1} \left[\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{2nx^2-(2n+1)\rho_0^2}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0 \right. \\
&\quad \left. + \int_\rho^a \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{2nx^2-(2n+1)\rho_0^2}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0 \right]. \quad (2.7.38)
\end{aligned}$$

Подстановка (2.7.37) и (2.7.38) в (2.7.36) ведёт к результату:

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(\rho) &= 2G_1\rho^{n+1} \int_\rho^a \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) \rho_0^{n+2} d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \\
&\quad + 2G_2\rho^{n+1} \int_\rho^a \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{2nx^2-(2n+1)\rho_0^2}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0, \\
&\quad \text{для } n=0,1,2, \dots, \text{ и } \rho \leq a. \quad (2.7.39)
\end{aligned}$$

Аналогичная процедура может быть применена к (2.7.35). Подстановка (2.7.23) в (2.7.35) даёт после интегрирования по ρ_0 ,

$$\begin{aligned}
u_{-n+1}(\rho) &= -2G_1\rho^{n-1} \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n-2}(x^2-\rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\tau_{-n+1}(t) t^n dt}{(x^2-t^2)^{1/2}} \\
&\quad + 2G_2\rho^{n-1} \int_a^\infty \frac{(2n-1)x^2-2n\rho^2}{x^{2n}(x^2-\rho^2)^{1/2}} dx \left[- \int_0^a \frac{\bar{\tau}_{n+1}(t) dt}{(x^2-t^2)^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{ax} \left(\int_0^a (a^2-t^2)^{1/2} \bar{\tau}_{n+1}(t) t^{n+2} dt + \frac{\pi}{2} A_n \right) \right] \\
&\quad + \frac{2G_1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2G_2}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{(2n-1)\rho_0^2 - 2nx^2}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0) d\rho_0. \quad (2.7.40)$$

Следующие равенства могут быть установлены, используя процедуры, идентичные тем, которые были использованы для вывода (2.7.37) и (2.7.38)

$$\begin{aligned} & \frac{2G_1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \\ &= 2G_1 \rho^{n-1} \left[\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n-2} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} d\rho_0 \right. \\ & \left. + \int_\rho^a \frac{dx}{x^{2n-2} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} d\rho_0 \right], \end{aligned} \quad (2.7.41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2G_2}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{(2n-1)\rho_0^2 - 2nx^2}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0) d\rho_0 \\ &= 2G_2 \rho^{n-1} \left[\int_a^\infty \frac{(2n-1)x^2 - 2n\rho^2}{x^{2n} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} dx \int_0^a \frac{\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0) \rho_0^n}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} d\rho_0 \right. \\ & \left. + \int_\rho^a \frac{(2n-1)x^2 - 2n\rho^2}{x^{2n} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} dx \int_0^x \frac{\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0) \rho_0^n}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} d\rho_0 \right]. \end{aligned} \quad (2.7.42)$$

Подстановка (2.7.41) и (2.7.42) в (2.7.40) даёт:

$$u_{-n+1}(\rho) = 2G_1 \rho^{n-1} \int_\rho^a \frac{dx}{x^{2n-2} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} d\rho_0$$

$$+ 2G_2\rho^{n-1} \left[\int_{\rho}^a \frac{(2n-1)x^2 - 2n\rho^2}{x^{2n}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} dx \int_0^x \frac{\bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)\rho_0^n d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} + B_n(a^2 - \rho^2)^{1/2} \right]. \quad (2.7.43)$$

Здесь

$$B_n = a^{-2n-1} \int_0^a t^n (a^2 - t^2)^{1/2} [\bar{\tau}_{n+1}(t) - (2n+1)(G_2/G_1)\tau_{-n+1}(t)] dt. \quad (2.7.44)$$

Формулы (2.7.39), (2.7.43), и (2.7.44) дают тангенциальные перемещения поверхностей трещины через заданные сдвигающие напряжения. Заметим, что перемещение исчезает вне трещины. Комплексное тангенциальное перемещение u может быть представлено в гармониках как

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}(\rho) e^{i(n+1)\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n+1}(\rho) e^{-i(n-1)\phi}, \quad (2.7.45)$$

где u_{n+1} и u_{-n+1} определены в (2.7.39) и (2.7.44). Суммирование будет выполнено для членов, содержащих G_1 и G_2 отдельно. Подстановка (2.7.39) в (2.7.45) и суммирование членов с G_1 даёт:

$$\frac{G_1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_{\rho}^a \frac{\lambda(\rho\rho_0/x^2, \phi - \phi_0) dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}}. \quad (2.7.46)$$

Здесь мы должны изменить порядок интегрирования согласно схеме:

$$\int_{\rho}^a dx \int_0^x d\rho_0 = \int_{\rho}^a d\rho_0 \int_{\rho_0}^a dx + \int_0^{\rho} d\rho_0 \int_{\rho}^a dx. \quad (2.7.47)$$

Интегрирование по x в (2.7.46) может быть выполнено согласно (1.1.23) и даёт:

$$\frac{G_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{1}{R} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{R} \right) \right] \tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (2.7.48)$$

где R и $\eta(x)$ определены в (2.2.14) и (1.1.6) соответственно. Мы вспоминаем, что, согласно нашей конвенции, сокращение η обозначает $\eta(a)$. Суммирование членов с G_2 в (2.7.39) и (2.7.43) несколько более сложно, но вобщем сводится к ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Результат суммирования есть

$$\begin{aligned} & \frac{G_2}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{2i\phi_0} d\phi_0 \int_{\rho}^a \frac{\lambda(\rho\rho_0/x^2, \phi-\phi_0) dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} \\ & \times \int_0^x \left\{ 1 + \frac{4iq\rho e^{-i\phi_0} \sin(\phi-\phi_0)}{x^2(1-\zeta)(1-\bar{\zeta})} \right\} \frac{\bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0}{(x^2-\rho_0^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.7.49)$$

Здесь $\zeta = (\rho\rho_0/x^2)e^{i(\phi-\phi_0)}$, и $\bar{\zeta}$ есть комплексно сопряжённое ζ . Интеграл в (2.7.49), хотя и выглядит очень трудным, является полным дифференциалом и может быть вычислен как неопределённый

$$\begin{aligned} & \int \frac{\lambda(\rho\rho_0/x^2, \phi-\phi_0) dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2} (x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{4iq\rho e^{-i\phi_0} \sin(\phi-\phi_0)}{x^2(1-\zeta)(1-\bar{\zeta})} \right\} \\ & = e^{-2i\phi_0} \frac{q}{qR} \tan^{-1} \left(\frac{\eta(x)}{R} \right) + \frac{2i\rho e^{-i\phi_0} \sin(\phi-\phi_0) \eta(x)}{x^2 \bar{q} (1-\zeta)(1-\bar{\zeta})}. \end{aligned} \quad (2.7.50)$$

Следует отметить, что (2.7.50) может рассматриваться как обобщение интегрального представления для q^2/R^3 , данное в (2.5.7). Действительно, такое представление может быть получено из (2.7.50) вычисляя его как определённый интеграл, а именно,

$$\frac{2}{\pi} \int_{\max(\rho_0, \rho)}^{\infty} \frac{e^{2i\phi_0} \lambda(\rho\rho_0/x^2, \phi-\phi_0) dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2} (x^2-\rho_0^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{4iq\rho e^{-i\phi_0} \sin(\phi-\phi_0)}{x^2(1-\zeta)(1-\bar{\zeta})} \right\} = \frac{q}{qR}.$$

Изменяя порядок интегрирования в (2.7.49) и интегрируя по x согласно (2.7.50), мы получим:

$$\frac{G_2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{q}{qR} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{R} \right) + \frac{2i\rho e^{i\phi_0} \sin(\phi - \phi_0) \eta}{a^2 \bar{q} (1-t)(1-\bar{t})} \right] \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \quad (2.7.51)$$

где t определено в (1.4.41). Оставшийся шаг — суммирование B_n (2.7.44), с результатом

$$\frac{G_2}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{\bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) e^{2i\phi_0}}{(1-\bar{t})} - \frac{G_2 (3-\bar{t}) \tau(\rho_0, \phi_0)}{G_1 (1-\bar{t})^2} \right] \eta \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (2.7.52)$$

Окончательно, суммирование (2.7.48), (2.7.51) и (2.7.52) приводит к

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) = & \frac{G_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{1}{R} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{R} \right) - \frac{G_2^2 (3-\bar{t}) \eta}{G_1^2 a^2 (1-\bar{t})^2} \right] \tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \\ & + \frac{G_2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{q}{qR} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{R} \right) + \frac{\eta [(q/\bar{q}) - t e^{2i\phi_0}]}{a^2 (1-t)(1-\bar{t})} \right] \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \end{aligned} \quad (2.7.53)$$

Так как нормальное напряжение исчезает в плоскости $z = 0$, нормальное перемещение w может быть определено согласно (2.7.4) как

$$w(\rho, \phi) = H\alpha \Re \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}},$$

который эквивалентен следующему разложению в ряд

$$w(\rho, \phi) = 2\pi H\alpha \Re \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-i(n+1)\phi}}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \tau_{-n}(\rho_0) \rho_0^{n+1} d\rho_0 \right.$$

$$-e^{in\phi}\rho^n\left[\int_{\rho}^a\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n}d\rho_0+\int_a^{\infty}\frac{\tau_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n}d\rho_0\right]\Bigg\}, \quad \text{для } \rho \leq a; \quad (2.7.54)$$

$$w(\rho, \phi) = 2\pi H\alpha \Re \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-i(n+1)\phi}}{\rho^{n+1}} \left[\int_0^a \tau_{-n}(\rho_0) \rho_0^{n+1} d\rho_0 + \int_a^{\rho} \tau_{-n}(\rho_0) \rho_0^{n+1} d\rho_0 \right] - e^{in\phi} \rho^n \int_{\rho}^{\infty} \frac{\tau_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n} d\rho_0 \right\}, \quad \text{для } \rho \geq a. \quad (2.7.55)$$

Подставляя формулы (2.7.23) и (2.7.27) в (2.7.54) и (2.7.55), и выполняя суммирование и интегрирование, мы получим:

$$w = H\alpha \Re \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a(1-t)^{1/2}} \frac{\tau(\rho_0, \phi_0)}{q} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 + \frac{G_2}{G_1 a} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{1}{(1-t)^{3/2}} - 1 \right) (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) e^{i\phi_0} d\rho_0 d\phi_0 \right\}, \quad \text{для } \rho \leq a;$$

и

$$w = \frac{2}{\pi} H\alpha \Re \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a(1-t)^{1/2}} \tan^{-1} \left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \right) \frac{\tau(\rho_0, \phi_0)}{q} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 + \frac{G_2}{G_1} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{1}{a(1-t)^{3/2}} \tan^{-1} \left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \right) - \frac{1}{a} \sin^{-1} \frac{a}{\rho} - \frac{\rho_0 e^{-i\phi_0} (\rho^2 - a^2)^{1/2}}{\bar{q} a^2 (1-t)} \right] (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) e^{i\phi_0} d\rho_0 d\phi_0 \right\}, \quad \text{для } \rho > a.$$

Упражнение 2.7

1. Однородные сдвигающие напряжения $\tau = \tau_0$, где τ_0 есть комплексная константа, приложены антисимметрично внутри круглой трещины радиуса a . Требуется найти тангенциальные перемещения сторон трещины.

Ответ: $u = 2\tau_0[(G_1^2 - G_2^2)/G_1](a^2 - \rho^2)^{1/2}$.

2. В условиях предыдущей задачи, найдите сдвигающее напряжение в плоскости $z=0$ вне трещины.

Ответ: $\tau(\rho, \phi) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) - \frac{a}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \right] \tau_0 - \frac{G_2 a^3 e^{2i\phi}}{G_1 \rho^2 (\rho^2 - a^2)^{1/2}} \bar{\tau}_0 \right\}$.

3. Согласно условиям первой задачи, найдите нормальное перемещение w в плоскости $z=0$.

Ответ: $w(\rho, \phi) = \pi H \alpha \rho \Re \left[\tau_0 e^{-i\phi} + (G_2/G_1) \bar{\tau}_0 e^{i\phi} \right]$, для $\rho \leq a$;

$w(\rho, \phi) = 2H \alpha \Re \left[\tau_0 e^{-i\phi} + (G_2/G_1) \bar{\tau}_0 e^{i\phi} \right] \left[\rho \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) - \frac{a}{\rho} (\rho^2 - a^2)^{1/2} \right]$, для $\rho \geq a$.

2.8 Обратная задача линейной теории трещин

В прямых задачах теории трещин распределение напряжений на трещине известно и требуется определить перемещения. Изучение материалов с твёрдыми включениями приводит к задаче другого вида, а именно, перемещения заданы на поверхностях трещины, в то время, как распределение напряжений подлежит определению. Таким образом сформулированная задача называется *обратной задачей*. Мы рассмотрим два типа задач: случай гладких твёрдых включений (нормальные перемещения заданы, тангенциальные напряжения отсутствуют) называется внешней задачей типа I. Второй тип соответствует случаю, когда нормальное напряжение равно нулю на плоскости $z=0$, и антисимметричные тангенциальные перемещения заданы внутри трещины. Распределение напряжений подлежит определению в каждом случае. Строго говоря, обратная задача теории трещин не принадлежит классу смешанных задач, её точное решение известно для произвольной трещины. Мы покажем ниже, как некоторые специфические результаты могут быть получены при помощи нового метода.

Задача о твёрдом гладком включении. Рассмотрим круглую трещину радиуса a в трансверсально изотропном пространстве. Пусть эта трещина

открывается твёрдым гладким включением. Открывающие перемещения на трещине заданы как

$$w = w(\rho, \phi), \quad \text{для} \quad z = 0^+, \quad 0 \leq \rho \leq a;$$

$$w = -w(\rho, \phi), \quad \text{для} \quad z = 0^-, \quad 0 \leq \rho \leq a;$$

Благодаря симметрии, задача может быть сведена к задаче для полупространства, с граничными условиями на плоскости $z = 0$

$$\begin{aligned} w &= w(\rho, \phi), & \text{для } \rho \leq a, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ w &= 0, & \text{для } \rho \geq a, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \tau &= 0, & \text{для } 0 \leq \rho < \infty, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

Общее взаимоотношение между открывающим перемещением трещины w и приложенным давлением σ было установлено в (2.4.19), и в этом случае может быть написано как

$$w(\rho, \phi) = 4H \int_{\rho}^a \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma(\rho_0, \phi). \quad (2.8.2)$$

Так как в нашем случае перемещение w известно, и σ неизвестна, мы можем интерпретировать (2.8.2) как интегральное уравнение. Оно может быть решено точно. Мы используем первый оператор

$$\mathcal{L}(t) \frac{d}{dt} \int_t^a \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

с результатом

$$2\pi H \int_0^t \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_0}{t}\right) \sigma(\rho_0, \phi) = -\mathcal{L}(t) \frac{d}{dt} \int_t^a \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) w(\rho, \phi). \quad (2.8.3)$$

Приложенное следующего оператора

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{t\,dt}{(y^2-t^2)^{1/2}}\mathcal{L}(t).$$

даёт

$$\sigma(y,\phi)=-\frac{1}{\pi^2Hy}\mathcal{L}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{t\,dt}{(y^2-t^2)^{1/2}}\mathcal{L}(t^2)\frac{d}{dt}\int_t^a\frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2-t^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right)w(\rho,\phi). \quad (2.8.4)$$

Формула (2.8.4) действительна только внутри трещины. Нормальное напряжение вне трещины может быть выражено прямо через заданное открывающее перемещение трещины, благодаря взаимоотношению между нормальным напряжением внутри и вне трещины (2.4.17), которое в этом случае принимает вид

$$\sigma(\rho,\phi)=-\frac{2}{\pi(\rho^2-a^2)^{1/2}}\int_0^a\frac{(a^2-y^2)^{1/2}}{\rho^2-y^2}\mathcal{L}\left(\frac{y}{\rho}\right)\sigma(y,\phi)y\,dy, \quad \text{для} \quad \rho > a. \quad (2.8.5)$$

Подстановка (2.8.4) в (2.8.5) даёт после интегрирования по y ,

$$\begin{aligned} \sigma(\rho,\phi) &= \frac{\mathcal{L}(1/\rho)}{\pi^2H\rho^2(\rho^2-a^2)^{1/2}}\int_0^a\left[a-t\left(\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2-t^2}\right)^{1/2}\right]dt \\ &\times \frac{d}{dt}\left[t\mathcal{L}(t^2)\frac{d}{dt}\int_t^a\frac{\rho_0\,d\rho_0}{(\rho_0^2-t^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)w(\rho_0,\phi)\right]. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям в последнем выражении приводит к

$$\sigma(\rho,\phi)=\frac{\mathcal{L}(1/\rho)}{\pi^2H}\int_0^a\frac{x\,dx}{(\rho^2-x^2)^{3/2}}\mathcal{L}(x^2)\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{\rho_0\,d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)w(\rho_0,\phi). \quad (2.8.6)$$

Выражение (2.8.6) может также быть представлено в форме

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{\mathcal{L}(1/\rho)}{\pi^2 H \rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^a \frac{x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}(x^2) \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right) w(\rho_0, \phi). \quad (2.8.7)$$

Сравнение (2.8.7) и (2.8.4) показывает, что напряжение вне трещины может быть представлено почти в той же форме, как и напряжение внутри, с одной только разницей в верхнем пределе первого интеграла. Используя правило (1.3.9) и условие $w(a, \phi) = 0$, выражение (2.8.6) может быть переписано как

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{1}{\pi^2 H} \int_0^a \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{3/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho_0} \left[\rho_0 \mathcal{L}\left(\frac{x^2}{\rho \rho_0}\right) w(\rho_0, \phi) \right]. \quad (2.8.8)$$

Замена порядка интегрирования и интегрирование по частям дают

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{1}{4\pi^2 H} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{w(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{3/2}}. \quad (2.8.9)$$

Последнее выражение может также быть переписано как

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{1}{4\pi^2 H} \Delta \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{w(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}}. \quad (2.8.10)$$

Здесь Δ обозначает двумерный оператор Лапласа. Мы покажем позже, что формула (2.8.10) является общей: она действительна для плоской трещины произвольной формы в плоскости $z = 0$.

Мы можем также выразить некоторые интегральные характеристики через нормальные перемещения трещины. Главный вектор P определён ниже

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi. \quad (2.8.11)$$

Подстановка (2.8.4) в (2.8.11) приводит к

$$P = -\frac{1}{\pi^2 H} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{w(\rho, \phi) \rho d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}. \quad (2.8.12)$$

Интегрирование по частям в (2.8.12) даёт ещё одно представление

$$P = \frac{a^2}{\pi^2 H} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} \int_x^a \frac{w(\rho, \phi) \rho d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}. \quad (2.8.13)$$

Несколько дополнительных форм может быть получено интегрированием (2.8.13) по x , с последующим использованием различных интегральных представлений для полных эллиптических интегралов (смотри Упражнение 2.8.2).

Мы можем также вычислить главный момент напряжений вызванных твёрдым включением. Вводя комплексный момент $M = M_x + iM_y$, мы можем заключить, что

$$M = -i \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma(\rho, \phi) e^{i\phi} \rho^2 d\rho d\phi. \quad (2.8.14)$$

Подстановка (2.8.4) в (2.8.14) даёт

$$M = \frac{i}{\pi^2 H} \int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi \int_0^a \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{w(\rho, \phi) d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}. \quad (2.8.15)$$

Ещё одно представление может быть получено из (2.8.15) (смотрите Упражнение 2.8.3).

Пример. Представляется интересным рассмотреть общий случай, где перемещения могут быть представлены как разложение

$$w(\rho, \phi) = (a^2 - \rho^2)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n \rho^{|n|} e^{in\phi}. \quad (2.8.16)$$

Подстановка (2.8.16) в (2.8.4) и (2.8.7) даёт

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}H} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(|n| + 3/2)}{\Gamma(|n| + 1)} w_n \rho^{|n|} e^{in\phi}, \quad \text{для} \quad \rho \leq a.$$

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{1}{2\pi H} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a^{2|n|+3} w_n e^{in\phi}}{(2|n| + 3) \rho^{|n|+3}} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + |n|; \frac{5}{2} + |n|; \frac{a^2}{\rho^2}\right), \quad \text{для} \quad \rho > a. \quad (2.8.17)$$

Гипергеометрическая функция Гаусса может быть выражена через элементарные функции (Bateman i Erdélyi, 1955)

$$F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + n; \frac{5}{2} + n; \zeta\right) = \frac{(-1)^n (3 + 2n)}{n! (1 - \zeta)^{1/2}} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left\{ \frac{(1 - \zeta)^n}{\zeta} \left[1 - \left(\frac{1 - \zeta}{\zeta}\right)^{1/2} \sin^{-1} \sqrt{\zeta} \right] \right\}. \quad (2.8.18)$$

Напряжение в (2.8.17) становится сингулярным, когда $\rho \rightarrow a^+$. Используя интегрирование по частям в (2.8.6), сингулярная и несингулярная части могут быть разделены следующим образом:

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{1}{2\pi H} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a^{2|n|+1}}{\rho^{|n|+1}} \left[\frac{\rho}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + |n|; \frac{3}{2} + |n|; \frac{a^2}{\rho^2}\right) \right] w_n e^{in\phi}, \quad (2.8.19)$$

и в результате, мы можем получить коэффициент концентрации напряжений как

$$k_1 = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}\pi H} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n a^{|n|} e^{in\phi}. \quad (2.8.20)$$

Гипергеометрическая функция в (2.8.19) может быть выражена в элементарных функциях:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + |n|; \frac{3}{2} + |n|; \zeta\right) = (-1)^n \frac{2n + 1}{n!} \sqrt{1 - \zeta} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left[\frac{(1 - \zeta)^{n-1/2}}{\sqrt{\zeta}} \sin^{-1} \sqrt{\zeta} \right]. \quad (2.8.21)$$

Главный вектор P и опрокидывающий момент M могут быть определены из (2.8.12) и (2.8.15) соответственно:

$$P = \frac{\pi a^2}{4H} w_0,$$

$$M = -i \frac{3\pi a^4}{16H} w_{-1}$$

Обратная задача теории трещин типа II. Пусть тангенциальное перемещение задано на поверхностях трещины

$$\begin{aligned} u &= u(\rho, \phi), & \text{для } \rho \leq a & \quad z = 0^+; \\ u &= -u(\rho, \phi), & \text{для } \rho \leq a & \quad z = 0^-. \end{aligned} \quad (2.8.22)$$

Требуется найти распределение сдвигающего напряжения в плоскости $z = 0$. Благодаря антисимметрии, задача может быть сведена к задаче для полупространства, удовлетворяющей граничным условиям:

$$\begin{aligned} u &= u(\rho, \phi), & \text{для } \rho \leq a, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ u &= 0, & \text{для } \rho \geq a, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \sigma &= 0, & \text{для } 0 \leq \rho < \infty, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (2.8.23)$$

Взаимоотношение между тангенциальным перемещением u и сдвигающим напряжением τ было установлено в (2.7.39) и (2.7.43). Так как в обратной задаче u известно, и τ подлежит определению, мы должны рассматривать эти выражения как систему интегральных уравнений, которую нужно решить относительно двух неизвестных τ_{n+1} и τ_{-n+1} . Положим решение в форме

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(\rho) &= G_1 f_{n+1}(\rho) + G_2 \left[\bar{f}_{-n+1}(\rho) - \frac{2n}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \bar{f}_{-n+1}(x) x^n dx \right], & \text{для } n = 0, 1, 2 \dots \\ \tau_{-n+1}(\rho) &= G_1 f_{-n+1}(\rho) + G_2 \left[\bar{f}_{n+1}(\rho) + 2n \rho^{n-1} \int_0^\rho \frac{\bar{f}_{n+1}(x)}{x^n} dx \right] + C_n \rho^{n-1}, & \text{для } n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (2.8.24)$$

Здесь f есть пока неизвестная комплексная функция и C_n — пока неизвестная комплексная постоянная. Подстановка (2.8.24) в уравнение (2.7.39) и последующее интегрирование дают:

$$u_{n+1}(\rho) = 2(G_1^2 - G_2^2) \rho^{n+1} \int_\rho^a \frac{dx}{x^{2n+2} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{f_{n+1}(\rho_0) \rho_0^{n+2} d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \quad (2.8.25)$$

и отсюда величина f_{n+1} может быть найдена как

$$f_{n+1}(\rho) = -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)\rho^{n+2}} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x^{2n+3} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{u_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \quad (2.8.26)$$

Подстановка (2.8.24) в уравнение (2.7.43) даёт после упрощения

$$u_{-n+1}(\rho) = 2(G_1^2 - G_2^2)\rho^{n-1} \int_\rho^a \frac{dx}{x^{2n-2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{f_{-n+1}(\rho_0)\rho_0^n d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} + 2D_n \rho^{n-1} (a^2 - \rho^2)^{1/2} \quad (2.8.27)$$

Здесь D_n есть комплексная постоянная, определённая в виде:

$$D_n = G_2 \left[2nG_1 \int_0^a \frac{dx}{x^{2n}} \int_0^x \frac{\tilde{f}_{n+1}(\rho)\rho^n d\rho}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} + 2nG_2 \int_0^a f_{-n+1}(\rho) \frac{\rho^n}{a^{2n}} \cosh^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) d\rho + B_n \right] + G_1 C_n \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n)}{2\Gamma(n+1/2)} \quad (2.8.28)$$

Теперь цель введения постоянной C_n в (2.8.24) становится ясной: мы можем выбрать C_n так, что D_n исчезнет. В этом случае выражение (2.8.27) может быть обращено с результатом:

$$f_{-n+1}(\rho) = -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x^{2n-1} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{u_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \quad (2.8.29)$$

Мы можем подставить (2.8.26) и (2.8.29) в (2.8.28) чтобы найти величину пока неизвестной постоянной C_n из условия $D_n = 0$. Математические преобразования здесь довольно громоздки, хотя и элементарны. Некоторые интегралы представлены ниже.

$$\int_0^a \frac{dx}{x^{2n}} \int_0^x \frac{\tilde{f}_{n+1}(\rho)\rho^n d\rho}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} = \frac{1}{\pi(G_1^2 - G_2^2)} \left[\frac{2n+1}{2n} \int_0^a \frac{u_{n+1}(\rho) d\rho}{\rho^{n+1}} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n)}{2a^{2n} \Gamma(n+1/2)} \int_0^a u_{n+1}(\rho) \rho^{n-1} d\rho \right], \quad (2.8.30)$$

$$\int_0^a f_{-n+1}(\rho) \rho^n \cosh^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) d\rho = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n)}{\pi(G_1^2 - G_2^2) \Gamma(n-1/2)} \int_0^a u_{-n+1}(\rho) \rho^{n-1} d\rho. \quad (2.8.31)$$

Подстановка (2.8.24) в (2.7.44) даёт следующее выражение для B_n

$$B_n = \frac{1}{a^{2n+1}} \int_0^a \left\{ -2nG_2 f_{-n+1}(\rho) + \left[G_1 - (2n+1) \frac{G_2^2}{G_1} \right] f_{n+1}(\rho) \right. \\ \left. - \frac{2nG_2}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho x^n f_{-n+1}(x) dx - 2n(2n+1) \frac{G_2^2}{G_1} \rho^{n-1} \int_0^\rho \frac{\bar{f}_{n+1}(x)}{x^n} dx \right\} (a^2 - \rho^2)^{1/2} \rho^n d\rho \quad (2.8.32)$$

Следующие интегралы должны быть вычислены:

$$\int_0^a f_{-n+1}(\rho) \rho^n (a^2 - \rho^2)^{1/2} d\rho = \frac{1}{\pi(G_1^2 - G_2^2)} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)} \int_0^a u_{-n+1}(\rho) \rho^n d\rho \quad (2.8.33)$$

$$\int_0^a f_{n+1}(\rho) \rho^n (a^2 - \rho^2)^{1/2} d\rho = \frac{a}{\pi(G_1^2 - G_2^2)} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \int_0^a u_{n+1}(\rho) \rho^{n-1} d\rho \quad (2.8.34)$$

$$\int_0^a (a^2 - \rho^2)^{1/2} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^\rho f_{-n+1}(x) x^n dx = \frac{1}{\pi(G_1^2 - G_2^2)} \left[\frac{a\sqrt{\pi} \Gamma(n)}{\Gamma(n-1/2)} \int_0^a u_{-n+1}(\rho) \rho^{n-1} d\rho \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)} \int_0^a u_{-n+1}(\rho) \rho^n d\rho \right] \quad (2.8.35)$$

$$\int_0^a \rho^{2n-1} (a^2 - \rho^2)^{1/2} d\rho \int_0^\rho \frac{f_{n+1}(x)}{x^n} dx = \frac{1}{\pi(G_1^2 - G_2^2)} \left[\frac{a^{2n+1}}{2n} \int_0^a \frac{u_{n+1}(\rho)}{\rho^{n+1}} d\rho - \right.$$

$$\left. -\frac{a\sqrt{\pi}\Gamma(n)}{2\Gamma(n+1/2)}\int_0^a u_{n+1}(\rho)\rho^{n-1}d\rho \right] \quad (2.8.36)$$

Подстановка (2.8.33–2.8.36) в (2.8.32) даёт

$$\begin{aligned} B_n = & \frac{1}{\pi a^{2n}(G_1^2 - G_2^2)} \left[-2G_2 \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-1/2)} \int_0^a u_{n+1}(\rho)\rho^{n-1}d\rho + G_1 \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \int_0^a \bar{u}_{n+1}(\rho)\rho^{n-1}d\rho \right. \\ & \left. - (2n+1)a^{2n} \frac{G_2^2}{G_1} \int_0^a \frac{\bar{u}_{n+1}(\rho)}{\rho^{n+1}}d\rho \right] - C_n \frac{G_2}{G_1} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n)}{2\Gamma(n+1/2)}. \end{aligned} \quad (2.8.37)$$

Подстановка (2.8.30), (2.8.31) и (2.8.37) в (2.8.28) даёт довольно простую формулу для C_n , а именно,

$$C_n = -\frac{4G_2\Gamma(n+3/2)}{\pi^{3/2}(G_1^2 - G_2^2)\Gamma(n)} \int_0^a \frac{\bar{u}_{n+1}(\rho)d\rho}{\rho^{n+1}} \quad (2.8.38)$$

Задача в принципе может считаться решённой, хотя определённое упрощение возможно, благодаря следующему интегралу:

$$\begin{aligned} \int_0^\rho \frac{\bar{f}_{n+1}(x)}{x^n} dx = & -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)} \left\{ \frac{1}{\rho^{2n}} \int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. \times \frac{d}{dx} \left[x^{2n+1} \int_x^a \frac{\bar{u}_{n+1}(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right] - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)} \int_0^a \frac{\bar{u}_{n+1}(\rho)d\rho}{\rho^{n+1}} \right\} \end{aligned} \quad (2.8.39)$$

Заметим, что последний член в (2.8.39) сократится с C_n , когда он будет подставлен в (2.8.24). Наконец, формулы (2.8.26), (2.8.29) и (2.8.38) ведут к

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(\rho) = & -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)} \left\{ \frac{G_1}{\rho^{n+2}} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x^{2n+3} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{u_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. + G_2 \rho^n \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho^{2n}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-1} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\bar{u}_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right] \right\} \\ & \text{dl} \} \quad \rho \leq a, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.8.40)$$

$$\begin{aligned} \tau_{-n+1}(\rho) = & -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)} \left[\frac{G_1}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x^{2n-1} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{u_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. + \frac{G_2}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left(x^{2n+1} \int_x^a \frac{\bar{u}_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right) \right] \\ & \text{для} \quad \rho \leq a, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.8.41)$$

Выражения (2.8.40) и (2.8.41) справедливы внутри трещины только. Чтобы выразить сдвигающее напряжение вне трещины, мы вспоминаем формулы (2.7.23) и (2.7.27) которые связывают одно с другим. Подстановка (2.8.41) в (2.7.27) позволяет нам вычислить

$$A_n = -\frac{4G_2\Gamma(n+3/2)}{\pi^{3/2}(G_1^2 - G_2^2)\Gamma(n)} \int_0^a \bar{u}_{-n+1}(\rho) \rho^n d\rho \quad (2.8.42)$$

Наконец, подстановка (2.8.40—2.8.42) в (2.7.23) даёт:

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(\rho) = & -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)} \left[\frac{G_1}{\rho^{n+2}} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x^{2n+3} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{u_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. + \frac{G_2}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x^{2n-1} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\bar{u}_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-2} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right] \\ & \text{для} \quad \rho > a, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.8.43)$$

$$\begin{aligned} \tau_{-n+1}(\rho) = & -\frac{2}{\pi^2(G_1^2 - G_2^2)} \left[\frac{G_1}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_0^a \frac{x^{2n-1} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{u_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. + \frac{G_2}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_0^a \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left(x^{2n+1} \int_x^a \frac{\bar{u}_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right) \right] \\ & \text{для } \rho > a, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.8.44)$$

Формулы (2.8.43) и (2.8.44) могут быть использованы для определения коэффициента концентрации напряжений непосредственно через тангенциальные перемещения, заданные *внутри* трещины. Мы припоминаем, что коэффициент концентрации напряжений был дан в (2.7.31). Используя свойства

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow a} \left[(\rho - a)^{1/2} \frac{d}{d\rho} \int_0^{\rho} \frac{f(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \right] &= -\frac{f(a)}{\sqrt{2a}}, \\ \lim_{\rho \rightarrow a} \frac{d}{d\rho} \int_0^a \frac{f(x) dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} &= -\frac{\pi}{2} \lim_{\rho \rightarrow a} \frac{f(\rho)}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2.8.45)$$

соответствующие гармоники коэффициента концентрации напряжений могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= -\frac{a}{\pi(G_1^2 - G_2^2)\sqrt{2a}} \lim_{\rho \rightarrow a} \left[\frac{G_1 u_{n+1}(\rho) + G_2 \bar{u}_{-n+1}(\rho)}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right], \\ k_{-n+1} &= -\frac{a}{\pi(G_1^2 - G_2^2)\sqrt{2a}} \lim_{\rho \rightarrow a} \left[\frac{G_1 u_{-n+1}(\rho) + G_2 \bar{u}_{n+1}(\rho)}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right]. \end{aligned}$$

Их суммирование может быть выполнено элементарно и окончательный результат есть:

$$k(\phi) = -\frac{a}{\pi(G_1^2 - G_2^2)\sqrt{2a}} \lim_{\rho \rightarrow a} \left[\frac{G_1 u(\rho, \phi) + G_2 e^{2i\phi} \bar{u}(\rho, \phi)}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right]. \quad (2.8.46)$$

Простое выражение (2.8.46) для коэффициента концентрации напряжений будет очень полезно для исследования взаимодействия трещин, так как решение интегральных уравнений в перемещениях намного легче, чем решение интегральных уравнений в напряжениях из-за сингулярности напряжений на границе трещины. Выражение (2.8.46) может быть сделано более симметрично путём введения полярных перемещений $u^{(p)} = u_\rho + iu_\phi = e^{-i\phi}u$, и аналогичное сдвигающее напряжение $\tau^{(p)} = \tau_{\rho z} + i\tau_{\phi z} = e^{-i\phi}\tau$. Соответствующий коэффициент концентрации напряжений $k^{(p)}$ примет вид:

$$k^{(p)} = -\frac{a}{\pi(G_1^2 - G_2^2)\sqrt{2a}} \lim_{\rho \rightarrow a} \left[\frac{G_1 u^{(p)}(\rho, \phi) + G_2 \bar{u}^{(p)}(\rho, \phi)}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right]. \quad (2.8.47)$$

Заметим, что $k^{(p)}$ пропорционален комбинации $k_2 + ik_3$ второго и третьего мода коэффициента концентрации напряжений.

Суммирование (2.8.40–2.8.41) и (2.8.43–2.8.44) ведёт к другой простой формуле

$$\tau = -\frac{1}{2\pi^2(G_1^2 - G_2^2)} \left[G_1 \Delta \int_S \frac{u}{R} dS + G_2 \Lambda^2 \int_S \frac{\bar{u}}{R} dS \right]. \quad (2.8.48)$$

Мы покажем далее, что последнее выражение действительно не только для круглой трещины, но и для плоской трещины произвольной формы везде на плоскости $z=0$.

Упражнение 2.8

1. Нормальное перемещение сторон трещины w задано выражением $w = w_0(a^2 - \rho^2)^{1/2}$, с $w_0 = \text{const.}$ Найдите распределение нормальных напряжений σ в плоскости $z=0$.

Ответ: $\sigma = w_0/(4H)$, для $\rho \leq a$;

$$\sigma = -\frac{w_0}{2\pi H} \left[\frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) \right], \text{ для } \rho > a$$

2. Докажите, что главный вектор P , вызванный включением, может быть определён как

$$P = \frac{1}{\pi^2 H} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a (a^2 - x^2)^{1/2} dx \int_x^a \frac{w(\rho, \phi) \rho d\rho}{(a^2 - \rho^2)(\rho^2 - x^2)^{1/2}}.$$

Совет: используйте (2.8.13)

3. Докажите, что сдвигающий момент M может быть определён в виде

$$M = -\frac{i}{\pi^2 H} \int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi \int_0^a \frac{x^2(3a^2 - 2x^2)}{(a^2 - x^2)^{3/2}} dx \int_x^a \frac{w(\rho, \phi) d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}.$$

Совет: интегрируйте (2.8.15) по частям.

ГЛАВА 3

ОСНОВНЫЕ СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Основные смешанные задачи в теории упругости являются наиболее трудными из—за взаимодействия между нормальными и тангенциальными параметрами. Следует упомянуть работы Моссаковского (1954) и Уфлянда (1956) среди первых опубликованных точных решений для *изотропного* полупространства, полученных использованием различных интегральных преобразований. Более компактное решение было опубликовано Капшивым и Маслюком (1967), которые использовали специальный аппарат *p*—аналитических функций. Первое *элементарное* точное решение для *трансверсально изотропного* упругого полупространства было опубликовано в (Фабрикант, 1971a).

Мы представляем здесь общую формулировку внутренней и внешней основной смешанной задачи как систему двумерных интегральных уравнений. Даны четыре вида точных решений внутренней осесимметричной задачи, и ещё один тип решения представлен для внешней осесимметричной задачи. Действие произвольной нагрузки на плоский круглый сцеплённый штамп рассмотрено в деталях. Общее решение неосесимметричной внутренней и внешней задач представлен как ряд Фурье. Материал в этой главе следует результатам опубликованным в статьях (Fabrikant, 1971d, 1972, 1974b, 1975, 1976, 1986j).

3.1 Общая формулировка задачи

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть следующие граничные условия предписаны на плоскости $z=0$:

$$\begin{aligned} u &= u(\rho, \phi), & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ w &= w(\rho, \phi), & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \sigma &= \sigma(\rho, \phi), & \text{для } a \leq \rho \leq \infty, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \tau &= \tau(\rho, \phi), & \text{для } a \leq \rho \leq \infty, & & 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Задача, определённая выше, называется *внутренней основной смешанной задачей*. Система основных интегральных уравнений формулируется благодаря (2.2.12) и (2.2.13), и имеет вид:

$$H\alpha \Re \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}} + H \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} = \omega_1(\rho, \phi), \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G_1 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} + \frac{1}{2} G_2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{q \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q} R} \\ - H\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} = \omega_2(\rho, \phi). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Мы напоминаем, что обозначения q и R определены в (2.2.5) и (2.2.14) соответственно. Функции ω_1 и ω_2 известны из граничных условий (3.1.1):

$$\begin{aligned} \omega_1(\rho, \phi) &= w(\rho, \phi) - H\alpha \Re \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}} \\ &\quad - H \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R}, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned}
\omega_2(\rho, \phi) = & u(\rho, \phi) + H\alpha \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \\
& - \frac{1}{2} G_1 \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} - \frac{1}{2} G_2 \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{q \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q} R}.
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Внешняя основная смешанная граничная задача для трансверсально изотропного упругого полупространства может быть сформулирована аналогичным способом. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
u &= u(\rho, \phi), & \text{для } a \leq \rho < \infty, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\
w &= w(\rho, \phi), & \text{для } a \leq \rho < \infty, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\
\sigma &= \sigma(\rho, \phi), & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\
\tau &= \tau(\rho, \phi), & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & & 0 \leq \phi < 2\pi.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Система основных интегральных уравнений в этом случае принимает вид:

$$H\alpha \Re \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}} + H \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} = \omega_1(\rho, \phi), \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} G_1 \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} + \frac{1}{2} G_2 \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{q \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q} R} \\
& - H\alpha \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} = \omega_2(\rho, \phi).
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Функции ω_1 и ω_2 известны из граничных условий, а именно,

$$\begin{aligned} \omega_1(\rho, \phi) = w(\rho, \phi) - H\alpha \Re \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}} \\ - H \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R}, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} \omega_2(\rho, \phi) = u(\rho, \phi) + H\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \\ - \frac{1}{2} G_1 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} - \frac{1}{2} G_2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{q \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\bar{q} R}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Точное решение в замкнутой форме этих уравнения неизвестно в настоящее время, хотя мы верим, что новый метод способен доставить такое решение. В последующих секциях мы рассмотрим отдельно осесимметричный и общий случаи. Точное решение обеих внутренней и внешней задач получено для n -ной гармоник, в предположении, что все участвующие функции могут быть представлены в рядах Фурье.

Упражнение 3.1

1. Проверьте вывод формул (3.1.2–3.1.5)
2. Проверьте вывод формул (3.1.7–3.1.10)
3. Выведите основные интегральные уравнения для внутренней основной смешанной задачи в случае изотропного полупространства.

3.2 Внутренняя осесимметричная основная смешанная задача

Чтобы продемонстрировать гибкость нашего метода, мы представляем здесь четыре вида точного решения. Первый вид более удобен для вычисления напряжений, в то время, как второй вид имеет определённые преимущества для вычисления перемещений вне круга $\rho = a$. Так как очень важно быть в состоянии легко переводить один вид решения в другой,

необходимые для этого взаимоотношения установлены. Приложение этой техники к плоскому круглому штампу, сцеплённому с полупространством, под действием нормальной силы и расширяющимся в радиальном направлении продемонстрировано на примерах. Исследовано влияние произвольной осесимметричной нормальной и тангенциальной нагрузки, приложенной вне штампа.

Граничные условия в случае осевой симметрии:

$$\begin{aligned} u &= u(\rho), & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ w &= w(\rho), & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \sigma &= \sigma(\rho), & \text{для } a \leq \rho \leq \infty, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \tau &= \tau(\rho), & \text{для } a \leq \rho \leq \infty, & & 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Система основных интегральных уравнений примет вид:

$$2H \left\{ -\pi\alpha \int_0^a \tau(\rho_0) d\rho_0 + 2 \int_0^a \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right\} = \omega_1(\rho), \quad (3.2.2)$$

$$\frac{2H}{\rho} \left\{ 2\gamma_1\gamma_2 \int_0^a \frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau(\rho_0) d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} - \pi\alpha \int_0^a \sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \right\} = \omega_2(\rho). \quad (3.2.3)$$

Функции ω_1 и ω_2 известны из граничных условий, и определены ниже:

$$\omega_1(\rho) = w(\rho) + 2H \left\{ \pi\alpha \int_a^\infty \tau(\rho_0) d\rho_0 - 2 \int_a^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \right\}, \quad (3.2.4)$$

$$\omega_2(\rho) = u(\rho) - 4H\gamma_1\gamma_2\rho \int_a^\infty \frac{dx}{x^2(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\tau(\rho_0) \rho_0^2 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}}. \quad (3.2.5)$$

Мы умножаем обе стороны уравнения (3.2.2) на $\rho(r^2 - \rho^2)^{-1/2} d\rho$, интегрируем по ρ от нуля до r и дифференцируем по r . Результат есть:

$$\frac{2}{\pi} \left[-\alpha \int_0^a \tau(\rho_0) d\rho_0 + \alpha r \int_0^r \frac{\tau(\rho_0) d\rho_0}{(r^2 - \rho_0^2)^{1/2}} + \int_r^a \frac{\sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - r^2)^{1/2}} \right] = \chi_1(r). \quad (3.2.6)$$

Здесь

$$\chi_1(r) = \frac{1}{\pi^2 H} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{\omega_1(\rho) \rho d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (3.2.7)$$

Аналогичное преобразование может быть приложено к уравнению (3.2.3), с результатом:

$$\frac{2}{\pi} \left[\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} r \int_0^a \frac{\tau(\rho_0) d\rho_0}{(\rho_0^2 - r^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \int_0^r \frac{\sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0}{(r^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \right] = \chi_2(r), \quad (3.2.8)$$

где

$$\chi_2(r) = \frac{1}{\pi^2 H \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{\omega_2(\rho) \rho^2 d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (3.2.9)$$

Система модифицированных интегральных уравнений (3.2.6) и (3.2.8) решена ниже четырьмя различными способами. Показано, что все решения эквивалентны и дают эффективно то же самое решение.

Решение первого вида. Положим решение системы уравнений (3.2.2) и (3.2.3) в виде:

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{f_1(t) t dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}, \quad \tau(\rho) = (\gamma_1 \gamma_2)^{-1/2} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{f_2(t) dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}. \quad (3.2.10)$$

Здесь f_1 и f_2 пока неизвестные функции напряжений. Подстановка (3.2.10) в (3.2.6) даёт после интегрирования

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} f_2(r) + \frac{2}{\pi} (a^2 - r^2)^{1/2} \int_0^a \frac{f_2(t) t dt}{(t^2 - r^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} = \chi_1(r) + b. \quad (3.2.11)$$

Здесь были введены следующие обозначения

$$b = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_0^a \frac{f_2(t) dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}}. \quad (3.2.12)$$

Позже будет показано, что мы можем предположить $b = 0$, без потери общности. Здесь и далее, следующие равенства используются:

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{dx}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{f(t) dt}{(t^2 - x^2)^{1/2}} &= r \int_0^a \frac{f(t) dt}{t(t^2 - r^2)}, \\ \int_r^a \frac{dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} &= (a^2 - r^2)^{1/2} \int_0^a \frac{f(t) dt}{(t^2 - r^2)(a^2 - t^2)^{1/2}}, \\ \int_r^a \frac{dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{f(t) dt}{(t^2 - x^2)^{1/2}} &= -\frac{\pi f(r)}{2r}, \\ \int_0^r \frac{dx}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{f(r) - f(0)}{r} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Равенство (3.2.13) может быть проверено, используя (1.3.2) и (1.3.9). Теперь подстановка (3.2.10) в (3.2.8) даёт после упрощения

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} f_1(r) + \frac{2}{\pi} r(a^2 - r^2)^{1/2} \int_0^a \frac{f_2(t) dt}{(t^2 - r^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} = \chi_2(r). \quad (3.2.14)$$

Пусть

$$f_1(t) = -f_1(-t), \quad f_2(t) = f_2(-t). \quad (3.2.15)$$

Эти предположения позволяют нам переписать уравнения (3.2.11) и (3.2.14) в форме:

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} f_2(r) + \frac{1}{\pi} (a^2 - r^2)^{1/2} \int_{-a}^a \frac{f_1(t) dt}{(t-r)(a^2 - t^2)^{1/2}} = \chi_1(r) + b, \\
& -\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} f_1(r) + \frac{1}{\pi} (a^2 - r^2)^{1/2} \int_{-a}^a \frac{f_2(t) dt}{(t-r)(a^2 - t^2)^{1/2}} = \chi_2(r).
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Вводя комплексные функции $f = f_1 + if_2$ и $\chi = \chi_1 + i\chi_2$, система, описанная в (3.2.16), может быть сведена к одному сингулярному интегральному уравнению, а именно,

$$-i \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} f(r) + \frac{1}{\pi} (a^2 - r^2)^{1/2} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{(t-r)(a^2 - t^2)^{1/2}} = \chi(r). \tag{3.2.17}$$

Умножим обе части уравнения (3.2.17) на $(a+r)^{-i\theta}(a-r)^{i\theta}(r-y)^{-1}dr$, где θ есть пока неизвестная постоянная, и интегрируем по r от $-a$ до a . Результат получается такой:

$$\begin{aligned}
& -i \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \frac{f(r) dr}{r-y} - \pi f(y) \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{i\theta} \\
& - i(a^2 - y^2)^{1/2} \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{i\theta} \tanh(\pi\theta) \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{(t-y)(a^2 - t^2)^{1/2}} \\
& + i \tanh(\pi\theta) \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{i\theta} \frac{f(t) dt}{t-y} = \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \frac{\chi(r) dr}{r-y}.
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Определяя

$$\tanh(\pi\theta) = \alpha / \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}, \tag{3.2.19}$$

уравнение (3.2.18) может быть упрощено следующим образом:

$$\begin{aligned}
& -\pi \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{i\theta} \left[f(y) + \frac{i}{\pi} \tanh(\pi\theta) (a^2 - y^2)^{1/2} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{(t-y)(a^2 - t^2)^{1/2}} \right] \\
& = \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \frac{\chi(r) dr}{r-y}.
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Сингулярный интеграл может быть исключен из (3.2.20), используя (3.2.17), и точное решение становится возможным в виде:

$$f(y) = -\cosh^2(\pi\theta) \left[i \tanh(\pi\theta) \chi(y) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{\theta} \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \frac{\chi(r) dr}{r-y} \right]. \tag{3.2.21}$$

Следующие правило изменения порядка интегрирования в сингулярных интегралах было использовано (Мусхелишвили, 1946)

$$\int_{-a}^a \frac{dr}{r-y} \int_{-a}^a \frac{f(r,t) dt}{t-r} = -\pi^2 f(y,y) + \int_{-a}^a dt \int_{-a}^a \frac{f(r,t) dr}{(r-y)(t-r)}. \tag{3.2.22}$$

Другие интегралы, использованные здесь, даны в Аппендиксе А3.1. Строго говоря, полное решение (3.2.17) дано формулой (3.2.21) плюс член $c(a+y)^{i\theta}(a-y)^{-i\theta}$, который представляет однородное решение (3.2.17), с c в качестве произвольной постоянной. Значение c должно быть выбрано так, чтобы удовлетворить условие $b = 0$, где b определено в (3.2.12). Соответственное интегрирование выражения (3.2.21) показывает, что условие $b = 0$ удовлетворяется, когда $c = 0$, и это объясняет, почему окончательное решение записано в форме (3.2.21).

Общее решение теперь закончено, и мы можем рассмотреть более детально случай сцеплённого осесимметричного штампа, и никаких нагрузок не приложено вне штампа. Главный вектор P может быть получен интегрированием

$$P = 2\pi \int_0^a \sigma(r) r dr = 2\pi \int_0^a \frac{f_1(t) t dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}}. \tag{3.2.23}$$

Мы напоминаем, что f_1 нечёткая функция, и что $f_1 = \Re f$. Принимая это во внимание, мы получим после подстановки (3.2.21) в (3.2.23):

$$P = \pi \cosh(\pi\theta) \Re \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \chi(r) dr. \quad (3.2.24)$$

Поле перемещений вне штампа может быть получено повторением вывода (3.2.2) и (3.2.3) для $\rho > a$, с результатом:

$$w(\rho) = 4H \int_0^a \frac{dy}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} \int_y^a \frac{\sigma(x) dx}{(x^2 - y^2)^{1/2}}, \quad \text{для } \rho > a;$$

$$u(\rho) = \frac{2H}{\rho} \left[2\gamma_1 \gamma_2 \int_0^a \frac{y^2 dy}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} \int_y^a \frac{\tau(x) dx}{(x^2 - y^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{2} P \right], \quad \text{для } \rho > a. \quad (3.2.25)$$

Подстановка (3.2.10) в (3.2.25) и интегрирование по x приводит к

$$w(\rho) = 4H \int_0^a \frac{(a^2 - y^2)^{1/2}}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} dy \int_0^a \frac{f_1(t) t dt}{(t^2 - y^2)(a^2 - t^2)^{1/2}},$$

$$u(\rho) = \frac{2H}{\rho} \left[2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \int_0^a \frac{(a^2 - y^2)^{1/2} y^2 dy}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{f_2(t) dt}{(t^2 - y^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{2} P \right]. \quad (3.2.26)$$

Сингулярные интегралы в (3.2.26) могут быть вычислены из (3.2.17) и (3.2.21), и окончательный результат может быть записан как

$$w(\rho) = 2H \int_0^a \frac{\Re \{Z(y)\}}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} dy,$$

$$u(\rho) = \frac{H}{\rho} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \left[2 \int_0^a \frac{y \Im \{Z(y)\}}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} dy - P \tanh(\pi\theta) \right], \quad \text{для } \rho > a. \quad (3.2.27)$$

Здесь

$$Z(y) = \pi \cosh^2(\pi\theta) \left[\chi(y) - \frac{i}{\pi} \tanh(\pi\theta) \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{i\theta} \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \frac{\chi(r) dr}{r-y} \right]. \quad (3.2.28)$$

Формулы (3.2.10) и (3.2.21) являются основными результатами этой секции.

Решение второго вида. Положим решение задачи в форме

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{F_1(t) t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad \tau(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{F_2(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (3.2.29)$$

Опять, F_1 и F_2 пока неизвестные функции напряжений. Подстановка (3.2.29) в (3.2.6) и (3.2.8) даёт результат:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \int_0^a \frac{F_2(t) dt}{t} + \frac{\alpha r^2}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \int_0^a \frac{F_2(t) dt}{t(t^2 - r^2)} - \frac{\pi}{2} F_1(r) \right] &= \chi_1(r), \\ \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2} F_2(r) - \frac{\alpha r}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \int_0^a \frac{F_1(t) dt}{t^2 - r^2} \right] &= \chi_2(r). \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Полагая, что

$$F_1(t) = F_1(-t), \quad F_2(t) = -F_2(-t), \quad (3.2.31)$$

уравнения (3.2.30) может быть переписано как

$$\begin{aligned} -F_1(r) + \frac{\alpha}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \int_{-a}^a \frac{F_2(t) dt}{t-r} &= \chi_1(r), \\ -F_2(r) - \frac{\alpha}{\pi \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \int_{-a}^a \frac{F_1(t) dt}{t-r} &= \chi_2(r). \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Вводя комплексные функции

$$F(r) = F_1(r) + iF_2(r), \quad \chi(r) = \chi_1(r) + i\chi_2(r), \quad (3.2.33)$$

система (3.2.32) может быть сведена к одному уравнению, а именно,

$$F(r) + \frac{i\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_{-a}^a \frac{F(t)dt}{t-r} = -\chi(r). \quad (3.2.34)$$

Умножение (3.2.34) на $(a+r)^{-i\theta}(a-r)^{\theta}(r-y)^{-1}$ и интегрирование по r от $-a$ до a приводит к

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \frac{F(r)dr}{r-y} + \frac{i\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \left[-\pi^2 \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{i\theta} F(y) + \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{i\theta} \frac{\pi}{i} \coth(\pi\theta) \right. \\ & \times \int_{-a}^a \frac{F(t)dt}{t-y} - \frac{\pi}{i} \coth(\pi\theta) \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{i\theta} \frac{F(t)dt}{t-y} \left. \right] = - \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \frac{\chi(r)dr}{r-y}. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Здесь формула (3.2.22) и интегралы из Аппендикса 3.1 были использованы. Принимая, как и раньше, $\tanh(\pi\theta) = \alpha/\sqrt{\gamma_1\gamma_2}$, уравнение (3.2.35) может быть упрощено значительно, а именно,

$$F(y) + \frac{i}{\pi} \coth(\pi\theta) \int_{-a}^a \frac{F(t)dt}{t-y} = -\frac{i}{\pi} \coth(\pi\theta) \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{\theta} \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \frac{\chi(r)dr}{r-y}. \quad (3.2.36)$$

Сингулярный интеграл может быть исключён из (3.2.36), используя (3.2.34), и окончательный результат есть:

$$F(y) = \cosh^2(\pi\theta) \left[-\chi(y) + \frac{i}{\pi} \tanh(\pi\theta) \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{\theta} \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \frac{\chi(r)dr}{r-y} \right]. \quad (3.2.37)$$

Мы можем считать общее решение законченным. Некоторые дополнительные результаты представлены для случая сцеплённого штампа. Главный вектор сил, действующих на штамп, получен путём интегрирования σ :

$$P = -2\pi \int_0^a F_1(t) dt = -\pi \int_{-a}^a F_1(t) dt. \quad (3.2.38)$$

Подстановка (3.2.37) в (3.2.38) даёт:

$$P = \pi \cosh(\pi\theta) \Re \int_{-a}^a \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^{i\theta} \chi(r) dr.$$

Как и ожидалось, этот результат идентичен (3.2.24). Перемещения вне штампа могут быть найдены подстановкой (3.2.37) и (3.2.29) в (3.2.25), с результатом:

$$w(\rho) = -2\pi H \int_0^a \frac{\Re\{F(y)\}}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} dy, \\ u(\rho) = -\frac{H}{\rho} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \left[2\pi \int_0^a \frac{y \Im\{F(y)\}}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} dy + P \tanh(\pi\theta) \right], \quad \text{для } \rho > a. \quad (3.2.39)$$

Сравнение (3.2.28) и (3.2.37) показывает, что $Z(y) = -\pi F(y)$, и это означает, что формулы (3.2.39) в действительности повторяют (3.2.27).

Решение третьего вида. Пусть напряжения могут быть выражены через две новых и пока неизвестных функции q_1 и q_2 :

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{q_1(t) t dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}, \quad \tau(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{q_2(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (3.2.40)$$

Подстановка (3.2.40) в (3.2.6) и (3.2.8) приводит к системе

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \int_0^a \frac{q_2(t) t dt}{t^2 - r^2} + (a^2 - r^2)^{1/2} \int_0^a \frac{q_1(t) t dt}{(t^2 - r^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \chi_1(r),$$

$$-q_2(r) - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} q_1(r) = \chi_2(r). \quad (3.2.41)$$

Функция q_2 может быть выражена из второго уравнения (3.2.41) как

$$q_2(r) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} q_1(r) - \chi_2(r). \quad (3.2.42)$$

Подстановка (3.2.42) в первое уравнение (3.2.41) даёт:

$$(a^2 - r^2)^{1/2} \int_0^a \frac{q_1(t) t dt}{(t^2 - r^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha^2}{\gamma_1 \gamma_2} \int_0^a \frac{q_1(t) t dt}{t^2 - r^2} = \psi(r). \quad (3.2.43)$$

Здесь

$$\psi(r) = \frac{\pi}{2} \chi_1(r) + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \int_0^a \frac{\chi_2(t) t dt}{t^2 - r^2}. \quad (3.2.44)$$

Точное решение интегрального уравнения (3.2.43) может быть получено следующим способом. Введём обозначение

$$Y_s(r) = \sin \left[\theta \ln \left| \frac{a+r}{a-r} \right| \right], \quad Y_c(r) = \cos \left[\theta \ln \left| \frac{a+r}{a-r} \right| \right]. \quad (3.2.45)$$

Умножим обе стороны (3.2.43) на $Y_c(r)/(r^2 - x^2)$ и интегрируем по r от 0 до a . Результат есть:

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi^2}{4x^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\gamma_1 \gamma_2} \right) q_1(x) Y_c(x) + \frac{\pi}{2} \tanh(\pi\theta) \int_0^a \left[\frac{Y_s(t)}{t} - \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 - t^2} \right)^{1/2} \frac{Y_s(x)}{x} \right] \frac{q_1(t) dt}{(x^2 - t^2)} \\ & - \frac{\pi \alpha^2}{2\gamma_1 \gamma_2} \coth(\pi\theta) \int_0^a \frac{q_1(t)}{x^2 - t^2} \left[\frac{Y_s(t)}{t} - \frac{Y_s(x)}{x} \right] dt = \chi_c \psi(x). \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Здесь и далее следующие интегральные операторы введены:

$$\chi_c \psi(x) = \int_0^a \frac{Y_c(r) \psi(r) dr}{r^2 - x^2}, \quad \chi_s \psi(x) = \int_0^a \frac{Y_s(r) \psi(r) r dr}{r^2 - x^2}. \quad (3.2.47)$$

Опять, полагая $\tanh(\pi\theta) = \alpha/\sqrt{\gamma_1\gamma_2}$, уравнение (3.2.46) может быть упрощено как

$$-\frac{\pi^2 q_1(x) Y_c(x)}{4x \cosh^2(\pi\theta)} + \frac{\pi}{2} \tanh(\pi\theta) Y_s(x) \int_0^a \left[1 - \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 - t^2} \right)^{1/2} \right] \frac{q_1(t) dt}{x^2 - t^2} = x \chi_c \psi(x). \quad (3.2.48)$$

Аналогичная процедура умножения (3.2.43) на $rY_s(r)/(r^2 - x^2)$ ведёт после упрощения к

$$-\frac{\pi^2 q_1(x) Y_s(x)}{4x \cosh^2(\pi\theta)} - \frac{\pi}{2} \tanh(\pi\theta) Y_c(x) \int_0^a \left[1 - \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 - t^2} \right)^{1/2} \right] \frac{q_1(t) dt}{x^2 - t^2} = \chi_s \psi(x). \quad (3.2.49)$$

Уравнения (3.2.48) и (3.2.49) окончательно дают решение

$$q_1(x) = -\frac{4}{\pi^2} \cosh^2(\pi\theta) \left[x Y_c(x) \chi_c \psi(x) + Y_s(x) \chi_s \psi(x) \right] + b_0 \frac{Y_c(x)}{x}. \quad (3.2.50)$$

Последний член в (3.2.50) представляет однородное решение, и b_0 есть произвольная постоянная. Если напряжения, определенные в (3.2.40), должны быть несингулярными в точке $\rho=0$, тогда b_0 должно быть равно нулю.

Подстановка (3.2.44) в (3.2.50) позволяет нам выразить решение через χ_1 и χ_2 :

$$q_1(x) = -\cosh^2(\pi\theta) \left[\frac{2}{\pi} x Y_c(x) \chi_c \chi_1(x) + \frac{2}{\pi} Y_s(x) \chi_s \chi_1(x) - \tanh(\pi\theta) \chi_2(x) \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} x Y_c(x) \chi_s \{ \chi_2(x)/x \} - \frac{2}{\pi} Y_s(x) \chi_c \{ x \chi_2(x) \} \right]. \quad (3.2.51)$$

Здесь модифицированная версия формулы (3.2.22) была использована:

$$\int_0^a \frac{dt}{t^2 - x^2} \int_0^a \frac{f(t, r) dr}{r^2 - t^2} = -\frac{\pi^2 f(x, x)}{4x^2} + \int_0^a dr \int_0^a \frac{f(t, r) dt}{(t^2 - x^2)(r^2 - t^2)}. \quad (3.2.52)$$

Вторая функция напряжений q_2 может быть получена из (3.2.42) и (3.2.51) в форме:

$$q_2(x) = \cosh^2(\pi\theta) \left\{ \frac{2}{\pi} \tanh(\pi\theta) [xY_c(x)X_c\chi_1(x) + Y_s(x)X_s\chi_1(x) + xY_c(x)X_s\{\chi_2(x)/x\} - Y_s(x)X_c\{x\chi_2(x)\}] - \chi_2(x) \right\}. \quad (3.2.53)$$

Общее решение закончено, и мы можем вывести некоторые добавочные результаты для случая сцеплённого штампа. Главный вектор P может быть получен интегрированием первого выражения в (3.2.40):

$$P = 2\pi \int_0^a \frac{q_1(t) t dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}}. \quad (3.2.54)$$

Подстановка (3.2.51) в (3.2.54) даёт, после интегрирования,

$$P = 2\pi \cosh(\pi\theta) \int_0^a [\chi_1(r)Y_c(r) + \chi_2(r)Y_s(r)] dr. \quad (3.2.55)$$

Результат (3.2.55) совпадает с (3.2.24) когда χ_1 есть чётная функция и χ_2 нечётная. Перемещения вне штампа могут быть найдены подстановкой (3.2.40) в (3.2.25), что даёт:

$$w(\rho) = 4H \int_0^a \left(\frac{a^2 - y^2}{\rho^2 - y^2} \right)^{1/2} dy \int_0^a \frac{q_1(t) t dt}{(t^2 - y^2)(a^2 - t^2)^{1/2}},$$

$$u(\rho) = -H\sqrt{\gamma_1\gamma_2} \frac{1}{\rho} \left[2\pi \int_0^a \frac{q_2(y)ydy}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} + P \tanh(\pi\theta) \right], \quad \text{для } \rho > a. \quad (3.2.56)$$

Мы можем доказать, что выражения (3.2.56) идентичны (3.2.28).

Решение четвёртого вида. Пусть решение может быть представлено в виде:

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^a \frac{Q_1(t)t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad \tau(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{Q_2(t)dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}. \quad (3.2.57)$$

Используя те же методы, как и раньше, следующая система уравнений может быть получена

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} Q_2(r) - Q_1(r) = \chi_1(r) + b, \quad (a^2 - r^2)^{1/2} \int_0^a \frac{Q_2(t)dt}{(t^2 - r^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_0^a \frac{Q_1(t)dt}{t^2 - r^2} = \frac{\pi}{2r} \chi_2(r), \quad (3.2.58)$$

где

$$b = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_0^a \frac{Q_2(t)dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}}. \quad (3.2.59)$$

Будет показано позже, что Q_2 может всегда быть выбрано таким образом, что $b = 0$. Теперь Q_1 может быть выражено из первого уравнения (3.2.58) и подставлено во второе, с результатом:

$$(a^2 - r^2)^{1/2} \int_0^a \frac{Q_2(t)dt}{(t^2 - r^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2} \int_0^a \frac{Q_2(t)dt}{t^2 - r^2} = \Psi(r). \quad (3.2.60)$$

Здесь

$$\Psi(r) = \frac{\pi}{2r} \chi_2(r) - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \int_0^a \frac{\chi_1(r) + b}{t^2 - r^2} dt. \quad (3.2.61)$$

Уравнение (3.2.60) аналогично (3.2.43), так что его решение может быть записано

$$Q_2(x) = -\frac{4}{\pi^2} \cosh^2(\pi\theta) \left[x^2 Y_c(x) \chi_c \Psi(x) + x Y_s(x) \chi_s \Psi(x) \right] + b_2 Y_c(x). \quad (3.2.62)$$

Последний член в (3.2.62) представляет однородное решение, и b_2 есть произвольная постоянная, которая выбирается из условия $b = 0$. Соответствующее интегрирование (3.2.62), используя интегралы из Аппендикса 3.1, позволяет нам определить b_2 :

$$b_2 = -\frac{4}{\pi^2} \cosh^2(\pi\theta) \int_0^a \Psi(x) Y_c(x) dx. \quad (3.2.63)$$

Подстановка (3.2.63) в (3.2.62) даёт:

$$Q_2(x) = -\frac{4}{\pi^2} \cosh^2(\pi\theta) \left[Y_c(x) \chi_c \{x^2 \Psi(x)\} + x Y_s(x) \chi_s \Psi(x) \right]. \quad (3.2.64)$$

Функция Q_2 может быть выражена через χ_1 и χ_2 , используя (3.2.61) и (3.2.59) в виде:

$$\begin{aligned} Q_2(x) = & -\cosh^2(\pi\theta) \{ \tanh(\pi\theta) \chi_1(x) + \frac{2}{\pi} [x Y_s(x) \chi_c \chi_1(x) \\ & - Y_c(x) \chi_s \chi_1(x) + Y_c(x) \chi_c (x \chi_2(x)) + x Y_s(x) \chi_s (\chi_2(x)/x)] \}. \end{aligned} \quad (3.2.65)$$

Соответственно, из первого выражения (3.2.58), мы имеем:

$$\begin{aligned} Q_1(x) = & -\cosh^2(\pi\theta) \{ \chi_1(x) + \frac{2}{\pi} \tanh(\pi\theta) [x Y_s(x) \chi_c \chi_1(x) \\ & - Y_c(x) \chi_s \chi_1(x) + Y_c(x) \chi_c (x \chi_2(x)) + x Y_s(x) \chi_s (\chi_2(x)/x)] \}. \end{aligned} \quad (3.2.66)$$

Главный вектор сил, действующих на сцеплённый штамп, определен как

$$P = -2\pi \int_0^a Q_1(t) dt.$$

Мы можем показать, что этот результат совпадает с (3.2.55). Перемещения вне штампа определяются:

$$w(\rho) = -2\pi H \int_0^a \frac{Q_1(y) dy}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}},$$

$$u(\rho) = \frac{2H}{\rho} \left[2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \int_0^a \left(\frac{a^2 - y^2}{\rho^2 - y^2} \right)^{1/2} y^2 dy \int_0^a \frac{Q_2(t) dt}{(t^2 - y^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{2} P \right].$$

(3.2.67)

Выражения (3.2.67) согласуются с (3.2.27).

Пример 1. Рассмотрим круглый плоский штамп радиуса a , сцеплённый с трансверсально изотропным полупространством, под действием осевой силы P . Граничные условия (3.2.1) в этом частном случае принимают вид:

$$u(\rho) = 0, \quad w(\rho) = w_0 = \text{const.}, \quad \text{для} \quad \rho < a;$$

$$\sigma(\rho) = 0, \quad \tau(\rho) = 0, \quad \text{для} \quad \rho > a.$$

Функции напряжений имеют вид:

$$f(y) = i \frac{w_0}{\pi^2 H} \coth(\pi\theta) \left[1 - \cosh(\pi\theta) \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^\theta \right],$$

$$F(y) = -\frac{w_0}{\pi^2 H} \cosh(\pi\theta) \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^\theta, \quad Q_1(y) = -\frac{w_0}{\pi^2 H} \cosh(\pi\theta) Y_c(y),$$

$$Q_2(y) = \frac{w_0}{\pi^2 H} \coth(\pi\theta) [1 - \cosh(\pi\theta) Y_c(y)].$$

$$q_1(y) = \frac{w_0 \cosh^2(\pi\theta)}{\pi^2 H \sinh(\pi\theta)} Y_s(y), \quad q_2(y) = -\frac{w_0}{\pi^2 H} \cosh(\pi\theta) Y_s(y),$$

Мы можем заметить что $q_1 = \Re f$, $q_2 = \Im F$, $Q_1 = \Re F$, и $Q_2 = \Im f$, и это объясняет, почему мы имеем только два различных представления для поверхностных напряжений, а именно,

$$\begin{aligned}\sigma(\rho) &= \frac{w_0 \cosh^2(\pi\theta)}{\pi^2 H \sinh(\pi\theta)} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{Y_s(t) t dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \\ &= -\frac{w_0}{\pi^2 H} \cosh(\pi\theta) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{Y_c(t) t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}, \\ \tau(\rho) &= -\frac{w_0 \cosh(\pi\theta)}{\pi^2 H \alpha} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{Y_c(t) dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} = -\frac{w_0 \cosh(\pi\theta)}{\pi^2 H \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{Y_s(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}.\end{aligned}$$

Эквивалентность этих представлений может быть проверена используя равенства

$$\int_0^\rho \frac{Y_c(t) dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} = \tanh(\pi\theta) \int_\rho^a \frac{Y_s(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{\pi}{2 \cosh(\pi\theta)}, \quad (3.2.68)$$

$$\int_0^\rho \frac{Y_s(t) t dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{\pi \theta a}{\cosh(\pi\theta)} - \tanh(\pi\theta) \int_\rho^a \frac{Y_c(t) t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (3.2.69)$$

Эти и другие аналогичные равенства могут быть установлены используя общее взаимоотношение:

$$\int_\rho^a \frac{f(x) dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{f(t) t dt}{t^2 - x^2} + \frac{\pi}{2\rho} \lim_{t \rightarrow 0} [t f(t)]. \quad (3.2.70)$$

Взаимоотношение между главным вектором P и осадкой штампа w_0 есть:

$$P = \frac{2w_0 a \theta}{H \tanh(\pi\theta)}. \quad (3.2.71)$$

Перемещения поверхности вне штампа даны как:

$$w(\rho) = \frac{2}{\pi} w_0 \cosh(\pi\theta) \int_0^a \frac{Y_c(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}},$$

$$u(\rho) = \frac{2}{\pi} w_0 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \cosh(\pi\theta) \left[\int_0^a \frac{Y_s(x) x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} - \frac{\pi a \theta}{\cosh(\pi\theta)} \right] \frac{1}{\rho}. \quad (3.2.72)$$

Интегралы в (3.2.72) могут быть вычислены (Градштейн и Рыжик, 1963)

$$I_c(\rho) = \int_0^a \frac{Y_c(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi\theta}{\sinh(\pi\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\rho^2/a^2 - 1)^{-k-1/2}}{(2k+1)(k!)^2} \prod_{m=1}^k (\theta^2 + m^2), \quad (3.2.73)$$

$$I_s(\rho) = \int_0^a \frac{Y_s(x) x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi a \theta^2}{\sinh(\pi\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\rho^2/a^2 - 1)^{-k-1/2}}{(2k+1)k!(k+1)!} \prod_{m=1}^k (\theta^2 + m^2). \quad (3.2.74)$$

Для реальных материалов, физическая постоянная $\theta < 1$. Например, для изотропного материала

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \ln(3 - 4\nu). \quad (3.2.75)$$

Так как коэффициент Пуассона $\nu \leq 0.5$, это означает, что $0 \leq \theta < 0.2$ для изотропных материалов. Используя приближение

$$(k!)^{-2} \prod_{m=1}^k (\theta^2 + m^2) = 1 + O(\theta^2),$$

суммирование в (3.2.73) и (3.2.74) может быть выполнено, и результат есть:

$$I_c(\rho) \approx \frac{\pi\theta}{\sinh(\pi\theta)} \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right), \quad (3.2.76)$$

$$I_s(\rho) \approx \frac{\pi\theta^2}{\sinh(\pi\theta)} \left[(\rho^2 - a^2)^{1/2} \ln\left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) + 2a \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) \right]. \quad (3.2.77)$$

Прямые вычисления показывают, что относительная ошибка формулы (3.2.76) меньше, чем 6%, когда $(\rho/a) > 1.01$, и $\theta \leq 0.2$; относительная ошибка (3.2.77) меньше, чем 4%. Та же точность может быть получена для $(\rho/a) > 1.1$, и $\theta \leq 0.3$. Относительная ошибка обеих формул (3.2.76) и (3.2.77) быстро уменьшается, когда ρ увеличивается, например, относительная ошибка меньше, чем 4% и 2% соответственно, для $\theta < 0.9$ и $(\rho/a) > 3$.

Пример 2. Рассмотрим случай, где никаких сил не приложено к штампу, сцеплённому с полупространством, но штамп сам расширяется, так что радиальное перемещение пропорционально радиусу, с коэффициентом пропорциональности k , а именно, внутри круга $\rho = a$ граничные условия имеют вид:

$$w(\rho) = w_0, \quad u(\rho) = k\rho.$$

Здесь w_0 есть пока неизвестная осадка штампа. Функции напряжения могут быть записаны как

$$f(y) = \frac{\coth(\pi\theta)}{\pi^2 H} \left\{ i w_0 - \frac{2ky}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} - i \cosh(\pi\theta) \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^\theta \left[\frac{2k}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} (2a\theta + iy) + w_0 \right] \right\},$$

$$F(y) = -\frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi^2 H} \left[w_0 + \frac{2k}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} (2a\theta + iy) \right] \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^\theta,$$

$$q_1(y) = \frac{\coth(\pi\theta)}{\pi^2 H} \left\{ w_0 \cosh(\pi\theta) Y_s(y) + \frac{2k}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} [\cosh(\pi\theta) (2a\theta Y_s(y) + y Y_c(y)) - y] \right\},$$

$$q_2(y) = -\frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi^2 H} \left\{ w_0 Y_s(y) + \frac{2k}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} [2a\theta Y_s(y) + y Y_c(y)] \right\},$$

$$Q_1(y) = -\frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi^2 H} \left\{ w_0 Y_c(y) + \frac{2k}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} [2a\theta Y_c(y) - y Y_s(y)] \right\},$$

$$Q_2(y) = \frac{\coth(\pi\theta)}{\pi^2 H} \left\{ w_0 [1 - \cosh(\pi\theta) Y_c(y)] - \cosh(\pi\theta) \frac{2k}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} [2a\theta Y_c(y) - y Y_s(y)] \right\}.$$

Напряжения могут быть определены двумя способами:

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{q_1(x)x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{Q_1(x)x dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}},$$

$$\tau(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{Q_2(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{q_2(x) dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}.$$

Главный вектор P определён выражением:

$$P = \frac{2a\theta}{H} \coth(\pi\theta) \left[w_0 + \frac{2ka\theta}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \right]. \quad (3.2.78)$$

Когда никаких сил не приложено к штампу, его нормальное перемещение равно

$$w_0 = -2ka\theta / \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}.$$

Сила, необходимая обеспечить нулевую осадку, есть

$$P = \frac{4ka^2\theta^2}{H\alpha}.$$

Перемещения вне штампа

$$w(\rho) = -2\pi H \int_0^a \frac{Q_1(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}},$$

$$u(\rho) = -H\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \left[2\pi \int_0^a \frac{q_2(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} + P \tanh(\pi\theta) \right] \frac{1}{\rho}.$$

Мы можем вычислить напряжения в точке $\rho=0$ в элементарных функциях:

$$\sigma(0) = \frac{\coth(\pi\theta)}{\pi H} \left\{ \frac{\theta}{a} w_0 \cosh(\pi\theta) + \frac{k}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} [(1+4\theta^2) \cosh(\pi\theta) - 1] \right\}, \quad \tau(0) = 0.$$

Дискуссия. Мы могли заметить, что четыре вида решения, рассмотренных выше, представляют все комбинации Абелевых интегралов с пределами от 0 до ρ и от ρ до a . Решения первого и второго вида более компактны, чем другие, но они удобны для использования только, когда $w(\rho)$ представляет собой чётную функцию и $u(\rho)$ — нечётная. Решение второго вида предпочтительней, когда нас интересуют только перемещения вне штампа, в то время, как решение первого вида имеет определённые преимущества, когда нас интересуют распределения напряжений. Формулы (3.2.10) более удобны для численного интегрирования, чем (3.2.29), особенно в области, близкой к $\rho = 0$ или $\rho = a$: (i) дифференцирование подинтегрального выражения может быть выполнено в (3.2.10), таким образом избегая численного дифференцирования, которое менее точно; дифференцирование в (3.2.29) довольно трудно, так как $F(a)$ обычно не определена; (ii) формулы (3.2.10) позволяют нам легко определить напряжения в $\rho = 0$, непосредственно через функцию напряжений, а именно,

$$\sigma(0) = \frac{\pi}{2} f_1'(0), \quad \tau(0) = f_2'(0) / \sqrt{\gamma_1 \gamma_2},$$

в то время, как результат (3.2.29) довольно трудно использовать, например,

$$\sigma(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^a \frac{F_1(x) x dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \right\} = \int_0^a \frac{F_1(x) - F_1(0)}{x^2} dx - \frac{F_1(0)}{a}. \quad (3.2.79)$$

Решения третьего и четвёртого вида более общие, так как они не требуют, чтобы $w(\rho)$ было чётной функцией или чтобы $u(\rho)$ было нечётной. Та же логика предпочтения применяется здесь: интегральные представления с пределами от 0 до ρ более удобны для вычисления напряжений, в то время, как представления с пределами от ρ до a более предпочтительны для вычисления перемещений.

Интересно установить взаимоотношения между различными видами решения. Некоторые из них очевидны, благодаря единственности решения, а именно,

$$f_1 = q_1, \quad f_2 = Q_2, \quad F_1 = Q_1, \quad F_2 = q_2. \quad (3.2.80)$$

Другие взаимоотношения могут быть найдены из (3.2.70) и следующего равенства

$$\int_0^{\rho} \frac{f(x)dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = -\frac{2}{\pi} \int_{\rho}^a \frac{x dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{(a^2 - y^2)^{1/2} f(y) dy}{(a^2 - x^2)^{1/2} (y^2 - x^2)}. \quad (3.2.81)$$

Сравнение (3.2.57) и (3.2.40) с (3.2.70) и (3.2.81) даёт:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - y^2)^{1/2} y q_1(y)}{(a^2 - t^2)^{1/2} (y^2 - t^2)} dy, \\ q_2(t) &= -\frac{2}{\pi} t \int_0^a \frac{(a^2 - y^2)^{1/2} Q_2(y)}{(a^2 - t^2)^{1/2} (y^2 - t^2)} dy, \end{aligned} \quad (3.2.82)$$

$$q_1(t) = \frac{2}{\pi t} \int_0^a \frac{y^2 Q_1(y)}{(y^2 - t^2)} dy, \quad Q_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{y q_2(y)}{(y^2 - t^2)} dy. \quad (3.2.83)$$

Сравнение (3.2.56) и (3.2.67) приводит к несколько отличному выражению:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - t^2)^{1/2} y q_1(y) dy}{(a^2 - y^2)^{1/2} (y^2 - t^2)}, \\ q_2(t) &= -\frac{2}{\pi} t \int_0^a \frac{(a^2 - t^2)^{1/2} Q_2(y) dy}{(a^2 - y^2)^{1/2} (y^2 - t^2)}. \end{aligned} \quad (3.2.84)$$

Выражения (3.2.84) отличаются от (3.2.82) членом $\text{const}/(a^2 - t^2)^{1/2}$ и $t \cdot \text{const}/(a^2 - t^2)^{1/2}$ соответственно. Мы можем заметить из (3.2.57) и (3.2.40), что добавка этих членов к Q_1 и q_2 соответственно не влияет на напряжения и следовательно, выражения (3.2.82) и (3.2.84) эквивалентны. Тот же аргумент справедлив для q_1 . Так как добавка к q_1 члена const/t никак не влияет на решение, альтернатива первому выражению из (3.2.83) может быть предложена

$$q_1(t) = \frac{2}{\pi} t \int_0^a \frac{Q_1(y) dy}{y^2 - t^2}. \quad (3.2.85)$$

Сравнение (3.2.39) с (3.2.26) позволяет нам построить взаимоотношение между комплексными функциями напряжений

$$F(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - t^2)^{1/2} f(y) dy}{(a^2 - y^2)^{1/2} (y - t)}. \quad (3.2.86)$$

Обратное взаимоотношение принимает вид:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{F(y) dy}{y - t}. \quad (3.2.87)$$

Мы можем также вывести из (3.2.82) следующие выражение, которое эквивалентно (3.2.86):

$$F(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - y^2)^{1/2} f(y) dy}{(a^2 - t^2)^{1/2} (y - t)}. \quad (3.2.88)$$

Значительные упрощения становятся возможными, когда $\theta = 0$. В случае изотропного тела это условие соответствует коэффициенту Пуассона $\nu = 1/2$. Функции напряжений будут определены в виде:

$$\begin{aligned} f(y) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(r) dr}{r - y}, & F(y) &= -\chi(y), \\ q_1(y) &= -\frac{2}{\pi} y \int_0^a \frac{\chi_1(r) dr}{r^2 - y^2} & q_2(y) &= -\chi_2(y), \\ Q_2(y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\chi_2(r) r dr}{r^2 - y^2} & Q_1(y) &= -\chi_1(y). \end{aligned}$$

Распределения напряжений:

$$\sigma(\rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{\chi_1(x)x dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad \tau(\rho) = -\frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{\chi_2(x) dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}}.$$

Перемещения вне штампа упрощаются следующим образом:

$$u(\rho) = 2\pi H \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \frac{1}{\rho} \int_0^a \frac{\chi_2(x)x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}, \quad w(\rho) = 2\pi H \int_0^a \frac{\chi_1(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}. \quad (3.2.89)$$

Заметим, что здесь нормальные параметры не связаны с тангенциальными, а именно, нормальное перемещение связано только с нормальным давлением, и тангенциальные перемещения влияют только на сдвигающие напряжения. Подстановка (3.2.7) и (3.2.9) в (3.2.89) приводит к прямому соотношению между перемещениями внутри и вне круга $\rho = a$

$$u(\rho) = \frac{2}{\pi} \frac{(\rho^2 - a^2)^{1/2}}{\rho} \int_0^a \frac{u(x)x^2 dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}(\rho^2 - x^2)}, \quad \text{для } \rho > a;$$

$$w(\rho) = \frac{2}{\pi} (\rho^2 - a^2)^{1/2} \int_0^a \frac{w(x)x dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}(\rho^2 - x^2)}, \quad \text{для } \rho > a.$$

Последние выражения демонстрируют определённую математическую аналогию между нормальными и тангенциальными перемещениями.

Упражнение 3.2

1. Докажите, что осадка гладкого плоского круглого штампа больше или равна осадке сцеплённого штампа.

Совет: Докажите, что $(\pi\theta) \geq \tanh(\pi\theta)$.

Заметьте: более общее свойство может быть доказано из рассмотрения энергии.

2. Осесимметричное давление $\sigma = \sigma(\rho)$ приложено к кольцу $b \leq \rho \leq c$ вне плоского сцеплённого штампа радиуса a . Исследуйте его влияние на осадку штампа w_0 и распределение напряжений под штампом.

Решение: Правая часть в интегральных уравнениях (3.2.2) и (3.2.3) примет

ВИД

$$\omega_1(\rho) = w_0 - 4H \int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_b^c \frac{\sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}, \quad \omega_2 = 0.$$

Теперь, из (3.2.7) и (3.2.9) мы получаем

$$\chi_1(r) = \frac{w_0}{\pi^2 H} - \frac{2}{\pi} \int_b^c \frac{\sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - r^2)^{1/2}}, \quad \chi_2 = 0.$$

Подстановка последних выражений в избранный тип решения даёт напряжения и перемещения. Главный вектор сил может быть определен как

$$P = 2 \cosh(\pi\theta) \left[\frac{w_0 a \theta}{H \sinh(\pi\theta)} - 2 \int_b^c I_c(\rho) \sigma(\rho) \rho d\rho \right],$$

где I_c определено в (3.2.73). Когда никакие прямые нагрузки не действуют на штамп, его осадка будет

$$w_0 = \frac{2H}{a\theta} \sinh(\pi\theta) \int_b^c I_c(\rho) \sigma(\rho) \rho d\rho.$$

Если штамп неподвижен, тогда сила должна быть приложена

$$P = -4 \cosh(\pi\theta) \int_b^c I_c(\rho) \sigma(\rho) \rho d\rho.$$

Используя приближение (3.2.76), результаты могут во многих случаях быть выражены в элементарных функциях. Например, в случае, когда $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$,

$$\int_b^c I_c(\rho) \sigma(\rho) \rho d\rho \approx \frac{\pi\theta\sigma_0}{2\sinh(\pi\theta)} \left\{ c^2 \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) - b^2 \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \right\}$$

$$+ a[(c^2 - a^2)^{1/2} - (b^2 - a^2)^{1/2}] \Big\}.$$

3. Исследуйте влияние радиальной тангенциальной нагрузки $\tau = \tau(\rho)$, приложенной к поверхности кольца $b \leq \rho \leq c$, вне сцеплённого штампа радиуса a .

Решение: Мы имеем из (3.2.2) и (3.2.3)

$$\omega_1(\rho) = w_0 + 2\pi H \alpha \int_b^c \tau(\rho) d\rho,$$

$$\omega_2(\rho) = -4H\gamma_1\gamma_2 \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_b^c \frac{\tau(\rho_0) d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}.$$

Подстановка в (3.2.7) и (3.2.9) даёт:

$$\chi_1(r) = \frac{w_0}{\pi^2 H} + \frac{2}{\pi} \alpha \int_b^c \tau(\rho) d\rho, \quad \chi_2(r) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} r \int_b^c \frac{\tau(x) dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}}.$$

Так как χ_1 чётная функция, и χ_2 нечётная, мы можем использовать любой из четырёх видов решения, рассмотренных выше. Главный вектор сил даётся согласно (3.2.55):

$$P = 2 \cosh(\pi\theta) \left\{ \frac{a\theta}{H \sinh(\pi\theta)} \left[w_0 + 2\pi H \alpha \int_b^c \tau(\rho) d\rho \right] - 2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \int_b^c I_s(\rho) \tau(\rho) d\rho \right\}.$$

Здесь I_s определено в (3.2.74). Когда штамп свободен от нагрузки, его осадка будет равна

$$w_0 = 2H \left[-\pi \alpha \int_b^c \tau(\rho) d\rho + \frac{\sinh(\pi\theta)}{a\theta} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \int_b^c I_s(\rho) \tau(\rho) d\rho \right].$$

Величина осевой силы, обеспечивающей нулевые перемещения штампа, есть:

$$P = 4\cosh(\pi\theta) \left\{ \frac{\pi a \theta \alpha}{\sinh(\pi\theta)} \int_b^c \tau(\rho) d\rho - \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \int_b^c I_s(\rho) \tau(\rho) d\rho \right\}.$$

4. Нормальная сосредоточенная нагрузка P приложена в точке $(0,0,z)$ под круглым штампом радиуса a , сцеплённым с трансверсально изотропным упругим полупространством. Найдите распределение напряжений под штампом и его осадку.

Ответ: в качестве иллюстрации, решение дано согласно (Фабрикант, 1971а). Напряжения определены в виде:

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left\{ \int_0^\rho \frac{f_1(t) t dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} + \int_\rho^a \frac{f_2(t) t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \right\},$$

$$\tau(\rho) = \frac{d}{d\rho} \left\{ -\frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2} \int_\rho^a \frac{f_1(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{1}{\alpha} \int_0^\rho \frac{f_2(t) dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \right\}.$$

Здесь

$$f_1(t) = \frac{\cosh^2 \pi \theta}{\pi^2} \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{(m_k - 1) \sinh \pi \theta} \left[\frac{t Y_c(t) \sinh \xi_k + z_k Y_s(t) \cosh \xi_k}{z_k^2 + t^2} \right],$$

$$f_2(t) = \frac{\cosh \pi \theta}{\pi^2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \left[\frac{z_k Y_c(t) \sinh \xi_k + t Y_s(t) \cosh \xi_k}{z_k^2 + t^2} \right], \quad \xi_k = 2\theta \tan^{-1} \left(\frac{a}{z_k} \right).$$

Главный вектор напряжений есть:

$$N = -P \coth \pi \theta \sum_{k=1}^2 \left[\frac{m_k \sinh \xi_k}{m_k - 1} + \frac{\gamma_k (\cosh \xi_k - 1)}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} (m_k - 1)} \right].$$

Когда никаких сил не приложено непосредственно к штампу, его осадка, вызванная нагрузкой P есть:

$$w = \frac{HP}{2a\theta} \sum_{k=1}^2 \left[\frac{m_k \sinh \xi_k}{m_k - 1} + \frac{\gamma_k (\cosh \xi_k - 1)}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} (m_k - 1)} \right].$$

Заметьте: можно проверить, что в случае $z \rightarrow 0$, $N = -P$.

3.3 Внешняя осесимметричная основная смешанная задача

Мы выбрали эту задачу, чтобы продемонстрировать ещё один вид решения, который использует две функции напряжений, введенные таким образом, что они делают интегральные уравнения независимыми, так что каждое уравнение может быть решено отдельно.

Граничные условия в случае осевой симметрии имеют вид:

$$\begin{aligned} u &= u(\rho), & \text{для } a \leq \rho \leq \infty, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ w &= w(\rho), & \text{для } a \leq \rho \leq \infty, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \sigma &= \sigma(\rho), & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & & 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \tau &= \tau(\rho), & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & & 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Система основных интегральных уравнений примет вид:

$$2H \left\{ -\pi\alpha \int_{\rho}^{\infty} \tau(\rho_0) d\rho_0 + 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \right\} = \omega_1(\rho), \quad (3.3.2)$$

$$\frac{2H}{\rho} \left\{ 2\gamma_1 \gamma_2 \rho^2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^2 (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\tau(\rho_0) \rho_0^2 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} - \pi\alpha \int_a^{\rho} \sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \right\} = \omega_2(\rho). \quad (3.3.3)$$

Функции ω_1 и ω_2 известны из граничных условий, и определены в

$$\omega_1(\rho) = w(\rho) - 4H \int_0^a \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}, \quad (3.3.4)$$

$$\omega_2(\rho) = u(\rho) - 4\gamma_1 \gamma_2 \frac{H}{\rho} \int_0^a \frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau(\rho_0) d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} + 2\pi \frac{H\alpha}{\rho} \int_0^a \sigma(\rho_0) \rho_0 d\rho_0. \quad (3.3.5)$$

Мы будем искать решение системы (3.3.2) и (3.3.3) в форме

$$\begin{aligned}\sigma(\rho) &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\int_{\rho}^{\infty} \frac{f_1(t)tdt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + \int_a^{\rho} \frac{f_2(t)tdt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \right], \\ \tau(\rho) &= \frac{d}{d\rho} \left[C_1 \int_a^{\rho} \frac{f_1(t)dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} + C_2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{f_2(t)dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \right] + \frac{C_1 Da}{\rho(\rho^2 - a^2)^{1/2}}.\end{aligned}\quad (3.3.6)$$

Здесь f_1 и f_2 пока неизвестные функции, и C_1 , C_2 , и D постоянные подлежащие определению. Подстановка (3.3.6) в (3.3.2) и (3.3.3) приводит к двум независимым уравнениям, которые могут быть решены отдельно, при условии, что постоянные определены как

$$C_1 = \alpha/\gamma_1\gamma_2, \quad C_2 = -1/\alpha. \quad (3.3.7)$$

Уравнения теперь имеют вид:

$$\begin{aligned}& 2H \left\{ -\frac{\pi\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2} \left[D \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) - \int_a^{\rho} \frac{f_1(t)dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \right] \right. \\ & \left. + 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{(x^2 - a^2)^{1/2}}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} dx \int_a^{\infty} \frac{f_1(t)tdt}{(t^2 - a^2)^{1/2}(t^2 - x^2)} \right\} = \omega_1(\rho). \\ & \frac{2\pi H\alpha}{\rho} \left\{ \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\pi\alpha^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}(x^2 - a^2)^{1/2}} \int_a^{\infty} \frac{\rho^2 a^2(t^2 - x^2) - x^4(t^2 - a^2)}{x^2(t^2 - a^2)^{1/2}(t^2 - x^2)} f_2(t)dt \right. \\ & \left. + \int_a^{\infty} \left[\frac{t}{(t^2 - a^2)^{1/2}} - 1 \right] f_1(t)dt + aD - \int_a^{\rho} \frac{f_2(t)tdt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \right\} = \omega_2(\rho).\end{aligned}\quad (3.3.8)$$

Мы решаем первое уравнение (3.3.8). Разделим обе стороны на $\rho(\rho^2 - r^2)^{1/2}$, интегрируем по ρ от r до ∞ , умножим результат на r , и дифференцируем по r . Результат есть:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma_1 \gamma_2} \int_a^\infty \frac{f_1(t) dt}{t^2 - r^2} - \int_a^\infty \frac{(r^2 - a^2)^{1/2} f_1(t) dt}{r(t^2 - a^2)^{1/2}(t^2 - r^2)} = \Psi_1(r). \quad (3.3.9)$$

Здесь

$$\Psi_1(r) = \frac{1}{2\pi H} \frac{d}{dr} \left[r \int_r^\infty \frac{\omega_1(\rho) d\rho}{\rho(\rho^2 - r^2)^{1/2}} \right] - \frac{\alpha^2}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{D}{2r} \ln \left(\frac{r+a}{r-a} \right) \quad (3.3.10)$$

Уравнение (3.3.9) может быть решено способом аналогичным (3.2.43). Умножим обе стороны формулы (3.3.9) на $Y_c(r)/(r^2 - x^2)$ и интегрируем по r от a до ∞ . Мы используем в этой секции обозначения Y_c и Y_s , как это было определено в (3.2.45). Результат интегрирования есть:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{4x^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\gamma_1 \gamma_2} \right) Y_c(x) f_1(x) - \frac{\pi a}{2x^2 \cosh(\pi\theta)} \int_a^\infty \frac{f_1(t) dt}{t(t^2 - a^2)^{1/2}} \\ & - \tanh(\pi\theta) \int_a^\infty \left[\frac{t(x^2 - a^2)^{1/2} Y_s(x)}{x^2(t^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{Y_s(t)}{t} \right] \frac{f_1(t) dt}{t^2 - x^2} \\ & + \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2}{\gamma_1 \gamma_2} \coth(\pi\theta) \int_a^\infty \left[\frac{Y_s(x)}{x} - \frac{Y_s(t)}{t} \right] \frac{f_1(t) dt}{t^2 - x^2} = \int_a^\infty \frac{\Psi_1(r) Y_c(r) dr}{r^2 - x^2}. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Опять, выражение (3.3.11) может быть упрощено значительно, полагая $\tanh(\pi\theta) = \alpha/\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$,

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2 Y_c(x)}{4x^2 \cosh^2(\pi\theta)} f_1(x) + \frac{\pi}{2} \tanh(\pi\theta) \frac{Y_s(x)}{x} \int_a^\infty \left[1 - \frac{t(x^2 - a^2)^{1/2}}{x(t^2 - a^2)^{1/2}} \right] \frac{f_1(t) dt}{t^2 - x^2} \\ & - \frac{\pi a}{2x^2 \cosh(\pi\theta)} \int_a^\infty \frac{f_1(t) dt}{t(t^2 - a^2)^{1/2}} = \int_a^\infty \frac{\Psi_1(r) Y_c(r) dr}{r^2 - x^2}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Умножение (3.3.9) на $rY_s(r)/(r^2 - x^2)$ и преобразования аналогичные

вышеприведённым приводят к

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2 Y_s(x)}{4x \cosh^2(\pi\theta)} f_1(x) - \frac{\pi}{2} \tanh(\pi\theta) Y_c(x) \int_a^\infty \left[1 - \frac{t(x^2 - a^2)^{1/2}}{x(t^2 - a^2)^{1/2}} \right] \frac{f_1(t) dt}{t^2 - x^2} \\ &= \int_a^\infty \frac{\Psi_1(r) Y_s(r) r dr}{r^2 - x^2}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Уравнения (3.3.12) и (3.3.13) дают окончательное решение:

$$f_1(x) = \frac{4}{\pi^2} \cosh^2(\pi\theta) x \left[x Y_c(x) \int_a^\infty \frac{\Psi_1(r) Y_c(r) dr}{r^2 - x^2} + Y_s(x) \int_a^\infty \frac{\Psi_1(r) Y_s(r) r dr}{r^2 - x^2} \right]. \quad (3.3.14)$$

Строго говоря, мы должны были добавить член $BY_c(x)$, представляющий однородное решение, где B есть произвольная постоянная. Мы покажем далее, что мы можем положить $B = 0$, так как постоянная D , введенная раньше, в действительности играет ту же роль.

Второе уравнение в (3.3.8) может быть решено аналогичным способом. Первый шаг — преобразовать его к виду

$$\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha^2} \left[\int_a^\infty \frac{r(r^2 - a^2)^{1/2} f_2(t) dt}{(t^2 - a^2)^{1/2} (t^2 - r^2)} + \int_a^\infty \frac{f_2(t) dt}{(t^2 - a^2)^{1/2}} \right] - \int_a^\infty \frac{f_2(t) t dt}{t^2 - r^2} = \Psi_2(r), \quad (3.3.15)$$

с

$$\Psi_2(r) = \frac{1}{2\pi H \alpha} \frac{d}{dr} \left[r \int_r^\infty \frac{\omega_2(\rho) d\rho}{(\rho^2 - r^2)^{1/2}} \right]. \quad (3.3.16)$$

Его решение есть:

$$f_2(x) = -\frac{4}{\pi^2} \sinh^2(\pi\theta) \left[x Y_c(x) \int_a^\infty \frac{\Psi_2(r) Y_c(r) dr}{r^2 - x^2} + Y_s(x) \int_a^\infty \frac{\Psi_2(r) Y_s(r) r dr}{r^2 - x^2} \right]. \quad (3.3.17)$$

Мы можем заметить, что члены вида $\text{const.}/\rho$ были потеряны в процессе преобразования второго уравнения (3.3.8), из-за дифференцирования. Это

означает, что решение (3.3.17) удовлетворяет второе уравнение (3.3.8), кроме вышеупомянутых членов. И здесь роль постоянной D становится ясной: она должна быть выбрана так, чтобы уравнение было удовлетворено. Мы покажем ниже, как это делается.

Пример. Пусть внешность круга $\rho = a$ заземлена, так что $w = u = 0$, для $\rho > a$. Постоянное давление σ_0 приложено внутри круга. Распределение напряжений вне круга и перемещения внутри подлежат определению. Общее решение, описанное выше, даёт для этого частного случая

$$\begin{aligned}\omega_1(\rho) &= -4H\sigma_0 \int_0^a \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}, \quad \omega_2(\rho) = \pi H \alpha \sigma_0 \frac{a^2}{\rho}; \\ \psi_1(r) &= 2\pi H \sigma_0 \left[1 - \frac{(r^2 - a^2)^{1/2}}{r} \right] - \frac{\alpha^2}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{D}{2r} \ln \left(\frac{r+a}{r-a} \right), \quad \psi_2(r) = 0; \\ f_1(t) &= \frac{2}{\pi} \coth(\pi\theta) \sigma_0 [tY_s(t) - 2a\theta Y_c(t)] - D[1 - Y_c(t)], \quad f_2(t) = 0.\end{aligned}\tag{3.3.18}$$

Подстановка (3.3.18) во второе уравнение (3.3.8) определяет постоянную D :

$$D = \frac{2}{\pi} a \theta \sigma_0 \coth(\pi\theta).\tag{3.3.19}$$

Формулы (3.3.6), (3.3.18) и (3.3.19) дают полное решение для распределения напряжений. Перемещения внутри круга даются

$$\begin{aligned}u(\rho) &= 2\pi H \alpha \sigma_0 \left\{ \frac{2}{\pi} \frac{\coth(\pi\theta)}{\rho} \left[\int_a^\infty \frac{tY_s(t) - a\theta[1 + Y_c(t)]}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} t dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a\theta(a^2 - \rho^2)^{1/2} \right] - \frac{\rho}{2} \right\}, \\ w(\rho) &= 4H\sigma_0 \left\{ \int_a^\infty \frac{(t^2 - a^2)^{1/2} - tY_c(t) - a\theta Y_s(t)}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} dt \right\}\end{aligned}$$

$$\left. + \int_0^{\rho} \frac{(a^2 - t^2)^{1/2}}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} dt - \frac{\pi}{2} a \theta \tanh(\pi \theta) \right\}.$$

Интегралы выше могут быть вычислены в элементарных функциях в центре $\rho=0$, а именно,

$$u(0)=0, \quad w(0)=4\pi H a \theta \sigma_0 \frac{1 + \cosh(\pi \theta)}{\sinh(2\pi \theta)}.$$

Читатель, который интересуется численными результатами, может посмотреть статью (Фабрикант, 1972), где поле напряжений и перемещения было вычислено для стали, цемента и песчаника.

Метод решения, представленный в этой секции, не является ни единственным возможным, ни самым простым. Читателю следует пробовать различные модификации подхода, представленного в секции 3.2.

Упражнение 3.3

1. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть внешность круга $\rho = a$ закреплена, так что $u = w = 0$, для $\rho > a$. Осесимметричное давление $\sigma(\rho)$ приложено на кольцо $b \leq \rho \leq c$, с $c \leq a$. Найдите распределение напряжений вне круга и перемещения внутри круга. *Совет:* используйте решение представленное в Упражнении 3.2 как пример.

2. В условиях предыдущей задачи, докажите, что напряжения в плоскости $z=0$ находятся в равновесии.

Заметьте: это свойство вообще не справедливо во внутренних задачах.

3. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть внешность круга $\rho = a$ закреплена, так что $u = w = 0$, для $\rho > a$. Осесимметричная тангенциальная нагрузка $\tau(\rho)$ приложена на кольцо $b \leq \rho \leq c$, с $c \leq a$. Найдите распределение напряжений вне круга и перемещения внутри.

4. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть внешность круга $\rho = a$ закреплена, так что $u = w = 0$, для $\rho > a$. Найдите распределение напряжений вне круга и перемещения внутри вызываемые сосредоточенной силой P приложенной в положительном Oz направлении в точке с декартовыми координатами $x=0$, $y=0$, $z=b$.

3.4 Обобщение для неоднородного полупространства

Попов (1973) рассмотрел внутреннюю основную смешанную задачу для случая неоднородного *изотропного* полупространства, с упругим модулем $E_\kappa = E_0 z^\kappa$, $E_0 = \text{const}$, и $0 \leq \kappa < 1$. Он свёл задачу к общему интегральному уравнению Абеля, которое он решил в форме разложения по полиномам Якоби. Заинтересованный читатель может найти детали в оригинальной статье. Мы представляем здесь только *решение в замкнутой форме* обобщённого интегрального уравнения Абеля, как это было дано в (Фабрикант, 1976).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_b^x \frac{F(t)dt}{(x-t)^\kappa} + A \int_x^a \frac{F(t)dt}{(t-x)^\kappa} = f(x), \quad \text{для } 0 < \kappa < 1, \quad b \leq x \leq a. \quad (3.4.1)$$

Здесь A известная постоянная, f известная функция, и функция F подлежит определению. Мы используем следующие интегральные представления (Градштейн и Рыжик, 1963)

$$\frac{1}{(x-t)^\kappa} = \frac{(x-b)^\delta (t-b)^{1-\delta-\kappa}}{B(\kappa, \delta)} \int_b^t \frac{(y-b)^{\kappa-1} (t-y)^{\delta-1}}{(x-y)^{\delta+\kappa}} dy, \quad (3.4.2)$$

$$\frac{1}{(t-x)^\kappa} = \frac{(x-b)^\delta (t-b)^{1-\delta-\kappa}}{B(\kappa, 1-\delta-\kappa)} \int_b^x \frac{(y-b)^{\kappa-1} (t-y)^{\delta-1}}{(x-y)^{\delta+\kappa}} dy. \quad (3.4.3)$$

Мы определим значение δ из условия:

$$\frac{B(\kappa, 1-\delta-\kappa)}{B(\kappa, \delta)} = A. \quad (3.4.4)$$

Используя свойства Бета-функций, выражение (3.4.4) может быть упрощено:

$$\frac{\sin(\pi\delta)}{\sin[\pi(\delta+\kappa)]} = A.$$

Значение δ может быть найдено из последнего выражения как

$$\delta = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{A \sin(\pi \kappa)}{1 - A \cos(\pi \kappa)} \right) \quad (3.4.5)$$

Подставим (3.4.2) и (3.4.3) в (3.4.1) и изменим порядок интегрирования. Результат получится:

$$\frac{(x-b)^\delta}{B(\kappa, \delta)} \int_b^x \frac{(y-b)^{\kappa-1} dy}{(x-y)^{\kappa+\delta}} \int_y^a \frac{F(t) dt}{(t-b)^{\delta+\kappa-1} (t-y)^{1-\delta}} = f(x). \quad (3.4.6)$$

Обобщенное интегральное уравнение Абеля теперь представлено как последовательность двух Абелевых операторов, и каждый может быть обращён. Решение примет вид:

$$F(t) = -B(\kappa, \delta) \frac{\sin(\pi \delta) \sin[\pi(\kappa + \delta)]}{\pi^2 (t-b)^{1-\delta-\kappa}} \frac{d}{dt} \int_t^a \frac{(r-b)^{1-\kappa} dr}{(r-t)^\delta} \\ \times \frac{d}{dr} \int_b^r \frac{f(x) dx}{(x-b)^\delta (r-x)^{1-\delta-\kappa}}. \quad (3.4.7)$$

Форма решения, данная в (3.4.7), не является единственной возможной. В самом деле, мы можем использовать интегральные представления:

$$\frac{1}{(x-t)^\kappa} = \frac{(a-t)^\delta (a-x)^{1-\delta-\kappa}}{B(\delta, \kappa)} \int_x^a \frac{(a-y)^{\kappa-1} (y-x)^{\delta-1}}{(y-t)^{\delta+\kappa}} dy, \quad (3.4.8)$$

$$\frac{1}{(t-x)^\kappa} = \frac{(a-t)^\delta (a-x)^{1-\delta-\kappa}}{B(1-\delta-\kappa, \kappa)} \int_t^a \frac{(a-y)^{\kappa-1} (y-x)^{\delta-1}}{(y-t)^{\delta+\kappa}} dy. \quad (3.4.9)$$

Подстановка (3.4.8) и (3.4.9) в (3.4.1) приводит к

$$\frac{(a-x)^{1-\delta-\kappa}}{B(\delta, \kappa)} \int_x^a \frac{(a-y)^{\kappa-1} dy}{(y-x)^{1-\delta}} \int_b^y \frac{(a-t)^\delta F(t) dt}{(y-t)^{\delta+\kappa}} = f(x). \quad (3.4.10)$$

Решение теперь примет форму:

$$F(t) = -B(\kappa, \delta) \frac{\sin(\pi\delta) \sin[\pi(\delta+\kappa)]}{\pi^2(a-t)^\delta} \frac{d}{dt} \int_b^t \frac{(a-r)^{1-\kappa} dr}{(t-r)^{1-\kappa-\delta}} \times \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{f(x) dx}{(a-x)^{1-\delta-\kappa} (x-r)^\delta}. \quad (3.4.11)$$

Мы оставляем желающему читателю установить эквивалентность решений (3.4.7) и (3.4.11).

Если мы сравним интегральные уравнения (3.2.30) и (3.4.1), первое впечатление, что они настолько различны, что просто невозможно установить взаимоотношение между ними. Это не так. Рассмотрим систему уравнений:

$$-\int_0^a \left[\frac{1}{(r+t)^\kappa} + \frac{\text{sign}(r-t)}{|r-t|^\kappa} \right] F_1(t) dt + \cot\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right) \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_0^a \left[\frac{1}{|r-t|^\kappa} - \frac{1}{(r+t)^\kappa} \right] F_2(t) dt = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)\Gamma(1-\kappa)}{\pi^2 H} \int_0^r \frac{\omega_1(\rho) \rho d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad (3.4.12)$$

$$-\cot\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right) \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_0^a \left[\frac{1}{|r-t|^\kappa} + \frac{1}{(r+t)^\kappa} - \frac{2}{t^\kappa} \right] F_1(t) dt + \int_0^a \left[\frac{1}{(r+t)^\kappa} - \frac{\text{sign}(r-t)}{|r-t|^\kappa} - \frac{1}{t^\kappa} + \frac{\text{sign}(t)}{t^\kappa} \right] F_2(t) dt = \frac{2\cos(\pi\kappa/2)\Gamma(1-\kappa)}{\pi^2 H \sqrt{\gamma_1\gamma_2}} r \int_0^r \frac{\omega_2(\rho) d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (3.4.13)$$

В предельном случае $\kappa \rightarrow 0$, уравнения (3.4.12) и (3.4.13) превращаются в

$$-\int_0^r F_1(t)dt + \frac{\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_0^a F_2(t) \ln \left| \frac{r+t}{r-t} \right| dt = \frac{1}{\pi^2 H} \int_0^r \frac{\omega_1(\rho)\rho d\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}, \quad (3.4.14)$$

$$-\frac{\alpha}{\pi\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_0^a F_1(t) \ln \frac{t^2}{|r^2-t^2|} dt - \int_0^r F_2(t)dt = \frac{1}{\pi^2 H\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} r \int_0^r \frac{\omega_2(\rho)d\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}. \quad (3.4.15)$$

Мы можем легко проверить, что дифференцирование (3.4.14) и (3.4.15) по r приводит к (3.2.30). Таким образом, связь установлена. Вводя комплексную функцию $F = F_1 + iF_2$, уравнения (3.4.12) и (3.4.13) могут быть объединены следующим образом:

$$\begin{aligned} & -\left(1 + \frac{i\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \cot\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)\right) \int_{-a}^r \frac{F(t)dt}{(r-t)^\kappa} + \left(1 - \frac{i\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \cot\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)\right) \int_r^a \frac{F(t)dt}{(t-r)^\kappa} \\ & = \frac{2\cos(\pi\kappa/2) \Gamma(1-\kappa)}{\pi^2 H\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \int_0^r \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\rho\omega_1(\rho) + i r\omega_2(\rho)}{(r^2-\rho^2)^{1/2}} d\rho \\ & + 2i \left[\int_0^a \frac{F_2(t)dt}{t^\kappa} - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \cot\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right) \int_0^a \frac{F_1(t)dt}{t^\kappa} \right]. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Мы получили обобщённое интегральное уравнение Абеля типа (3.4.1), с $b = -a$, решение которого известно из (3.4.7) и (3.4.11), с параметром δ , определенным как

$$\delta = -\frac{\kappa}{2} + i\theta, \quad (3.4.17)$$

и θ данным в (3.2.19). Функция напряжений для плоского круглого сцеплённого штампа есть

$$F(t) = -\frac{\sin(\pi\kappa) \cosh(\pi\theta) \Gamma(1-\kappa)}{\pi^3 \kappa H} w_0(a^2-t^2)^{\kappa/2} \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^\theta.$$

Последний результат согласуется с результатами секции 3.2. Читатель может вывести несколько новых модификаций основных интегральных

уравнений, используя интегральные представления

$$\int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{x^{\kappa+1} dx}{[(\rho^2 - x^2)(\rho_0^2 - x^2)]^{(\kappa+1)/2}}$$

$$= \frac{\Gamma(\kappa/2) \Gamma[(1-\kappa)/2]}{4\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{|\rho - \rho_0|^\kappa} - \frac{1}{(\rho + \rho_0)^\kappa} \right],$$

$$\int_0^{\min(\rho_0, \rho)} \frac{x^{\kappa-1} dx}{[(\rho^2 - x^2)(\rho_0^2 - x^2)]^{(\kappa+1)/2}}$$

$$= \frac{\Gamma(\kappa/2) \Gamma[(1-\kappa)/2]}{4\sqrt{\pi} \rho \rho_0} \left[\frac{1}{|\rho - \rho_0|^\kappa} + \frac{1}{(\rho + \rho_0)^\kappa} \right].$$

Некоторые добавочные представления могут быть получены простым сложением, вычитанием, интегрированием или дифференцированием тех, которые представлены выше.

Упражнение 3.4

1. Найдите решение обобщённого уравнения Абеля (3.4.1), с $f(x) = C = \text{const.}$

Ответ: $F(t) = \frac{C \sin[\pi(\delta + \kappa)]}{\pi(t-b)^{1-\delta-\kappa}(a-t)^\delta}$

2. Найдите решение обобщённого уравнения Абеля (3.4.1), с $f(x) = Cx$, с $C = \text{const.}$

Ответ: $F(t) = \frac{C \sin[\pi(\delta + \kappa)][t-b-\delta(a-b) + \kappa b]}{\pi \kappa(t-b)^{1-\delta-\kappa}(a-t)^\delta}$

3. Найдите решение обобщённого уравнения Абеля (3.4.1), с $f(x) = Cx^2$, с $C = \text{const.}$

Ответ: $F(t) = \frac{C \sin[\pi(\delta + \kappa)][2(t-b)(t+D) + D^2 - \delta(a^2 - b^2) + \kappa b^2]}{\pi \kappa(1 + \kappa)(t-b)^{1-\delta-\kappa}(a-t)^\delta}.$

Здесь $D = \kappa b - \delta(a-b).$

3.5 Влияние сдвигающей силы и опрокидывающего момента на сцеплённый круглый штамп.

Рассмотрим круглый плоский штамп радиуса a , сцеплённый с трансверсально изотропным упругим полупространством $z \geq 0$. Штамп подвержен действию сдвигающей силы T , действующей в направлении Ox , и опрокидывающего момента M . Мы можем предположить, без потери общности, что вектор момента направлен вдоль оси Oy . Мы должны найти распределение напряжений под штампом и получить взаимоотношения между линейными (u_0) и угловыми (δ) перемещениями штампа с параметрами приложенной нагрузки. Эта задача рассмотрена в отдельной секции из-за большой практической важности.

Задача характеризуется следующими граничными условиями на плоскости $z=0$:

$$\begin{aligned} u &= u_0, & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ w &= -\delta \rho \cos \phi, & \text{для } 0 \leq \rho \leq a, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \\ \sigma &= \tau = 0, & \text{для } a \leq \rho < \infty, & \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Основные интегральные уравнения, согласно (2.5.6), (3.1.2) и (3.1.3), примут вид:

$$\begin{aligned} & \frac{2G_1}{\rho^2} \int_0^\rho \frac{x^4 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_2(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} - \frac{2\pi H\alpha}{\rho^2} \int_0^\rho \sigma_1(\rho_0) \rho_0^2 d\rho_0 \\ & + \frac{2G_2}{\rho^2} \int_0^\rho \frac{\rho^2 - 2x^2}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} dx \int_x^a \frac{\bar{\tau}_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} = 0, \\ & 2G_2 \int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{(\rho_0^2 - 2x^2) \bar{\tau}_2(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} + 2\pi H\alpha \int_\rho^a \sigma_{-1}(\rho_0) d\rho_0 \\ & + 2G_1 \int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\tau_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} = u_0, \\ & 2\pi H\alpha \Re \left\{ \frac{e^{-i\phi}}{\rho} \int_0^\rho \tau_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 - \rho e^{i\phi} \int_\rho^a \tau_2(\rho_0) \frac{d\rho_0}{\rho_0} \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{4H}{\rho} \int_0^{\rho} \frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\sigma_1(\rho_0)e^{i\phi} + \sigma_{-1}(\rho_0)e^{-i\phi}}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0 = -\delta\rho \cos\phi. \quad (3.5.2)$$

Структура уравнений (3.5.2) такова, что мы можем предположить, что $\sigma_1 = \bar{\sigma}_{-1}$. Решение может быть представлено в форме:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\rho) = \bar{\sigma}_{-1}(\rho) &= \frac{d}{d\rho} \int_0^{\rho} \frac{\bar{f}(t)dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}, \\ \tau_0(\rho) &= -\frac{C}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{f(t)t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{D}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}, \\ \tau_2(\rho) &= -C\rho \frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{1}{\rho^2} \int_{\rho}^a \frac{\bar{f}(t)t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \right\} - \bar{D} \frac{2a^2 - \rho^2}{\rho^2(a^2 - \rho^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Здесь f пока неизвестная функция напряжений, и C и D постоянные подлежащие определению. Подстановка (3.5.3) в первые два уравнения (3.5.2) показывает, что они удовлетворяются, если следующие условия справедливы:

$$C = \frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2}, \quad D = \frac{C}{a} \int_0^a f(t) dt, \quad (3.5.4)$$

$$\frac{\pi^2 D}{2} (G_1 + G_2) + 2\pi H \alpha \int_0^a \frac{f(t) dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}} = u_0. \quad (3.5.5)$$

Выражения (3.5.4) и (3.5.5) выглядят противоречиво: мы имеем только две постоянные, чтобы удовлетворить три уравнения. Это обстоятельство будет прояснено далее. Добавочная постоянная, представляющая однородное решение, появится в выражении для f .

Подстановка (3.5.3) в третье уравнение (3.5.2) приводит к

$$\frac{2\pi H\alpha}{\rho} \left\{ -2C \int_{\rho}^a \frac{f(t)t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + C \int_0^a f(t) dt + aD \right\} + \frac{8H}{\rho} \int_0^{\rho} \frac{x^2(a^2 - x^2)^{1/2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{f(t) dt}{(t^2 - x^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} = -\delta\rho.$$

Умножим последнее выражение на $\rho^2(r^2 - \rho^2)^{-1/2}$, и интегрируем по ρ от 0 до r . Результат равен

$$(a^2 - r^2)^{1/2} \int_0^a \frac{f(t) dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}(t^2 - r^2)} - \frac{\alpha^2}{\gamma_1 \gamma_2} \int_0^a \frac{f(t) dt}{t^2 - r^2} = -\frac{\delta}{\pi H}. \quad (3.5.6)$$

Уравнение (3.5.6) аналогично (3.2.60), с общим решением (3.2.62). Решение в этом частном случае есть:

$$f(t) = -\frac{\delta \cosh^2(\pi\theta)}{\pi^2 H \sinh(\pi\theta)} \left[tY_s(t) - \theta aY_c(t) \right] + AY_c(t). \quad (3.5.7)$$

Последний член в (3.5.7) представляет однородное решение, с A в качестве произвольной постоянной. Подстановка (3.5.7) в (3.5.4) и (3.5.5) позволяет нам определить все постоянные, а именно,

$$D = \frac{\pi\theta\alpha}{\gamma_1\gamma_2 \sinh(\pi\theta)} A, \quad A = \left(u_0 + \frac{\delta a \theta \alpha}{\tanh(\pi\theta)} \left[\frac{\pi^2 H \alpha}{\cosh(\pi\theta)} \left(1 + \frac{\pi\theta(G_1 + G_2)}{\tanh(\pi\theta)(G_1 - G_2)} \right) \right] \right)^{-1}. \quad (3.5.8)$$

Формулы (3.5.7), (3.5.8) и (3.5.3) полностью определяют распределение напряжений под штампом. Теперь нам нужно получить взаимоотношение между нагрузкой, приложенной к штампу, и перемещениями. Мы используем условия равновесия:

$$T = 2\pi \int_0^a \tau_0(\rho) \rho d\rho, \quad M = - \int_0^{2\pi} \int_0^a [\sigma_1(\rho) e^{i\phi} + \sigma_{-1}(\rho) e^{-i\phi}] \rho^2 \cos\phi d\rho d\phi.$$

После выполнения всех вычислений, мы получим

$$T = 4\pi^2 A \frac{a\theta}{\sinh(\pi\theta)} \frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}, \quad M = \frac{4\delta a^3 \theta(1+\theta^2)}{3H \tanh(\pi\theta)} + \frac{4\pi^2 a^2 \theta^2}{\cosh(\pi\theta)} A. \quad (3.5.9)$$

Выражения (3.5.8) и (3.5.9) позволяет нам определить перемещения штампа

$$u_0 = \frac{1}{8a} \left[\pi(G_1 + G_2) + \frac{(1+4\theta^2)\tanh(\pi\theta)}{\theta(1+\theta^2)}(G_1 - G_2) \right] T - \frac{3H\alpha}{4a^2(1+\theta^2)} M, \\ \delta = \frac{3H\alpha}{4a^2(1+\theta^2)} \left[-T + \frac{M}{a\theta\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \right]. \quad (3.5.10)$$

В случае изотропии, формулы (3.5.10) согласуются (кроме некоторых знаков) с результатами Уфлянда (1967), который похоже использовал правила знаков, отличные от наших. Следует заметить, что опрокидывающий момент вызывает линейное перемещение штампа, даже в случае отсутствия сдвигающей силы. Сдвигающая сила, в свою очередь, наклоняет штамп, даже когда никакого опрокидывающего момента не приложено. Мы увидим далее (секция 5.11), что аналогичная ситуация имеет место в случае конечного трения между штампом и упругим полупространством.

Упражнение 3.5

1. Плоский круглый штамп радиуса a сцеплённый с трансверсально изотропным упругим полупространством $z \geq 0$. Сдвигающая сила T приложена в направлении Oy . Найдите угол наклона штампа δ .

Ответ: $\delta = \frac{3H\alpha}{4a^2(1+\theta^2)} T$, с наклоном относительно оси Ox . Заметьте, что угол положительный.

2. При условиях задачи 1, найдите опрокидывающий момент, нужный для предотвращения наклона штампа.

Ответ: $M = -a\theta\sqrt{\gamma_1\gamma_2}T$.

3. Опрокидывающий момент M относительно оси Ox приложен к плоскому круглому штампу, сцеплённому с трансверсально изотропным упругим полупространством. Найдите линейное перемещение u и его направление.

Ответ: $u = \frac{3H\alpha}{4a^2(1+\theta^2)} M$, в направлении оси Oy .

4. Плоский круглый сцеплённый штамп находится под действием сдвигающей силы T , действующей в направлении оси Ox , и

опрокидывающий момент M относительно оси Oy . Найдите нормальные перемещения вне штампа.

$$\text{Ответ: } w(\rho, \phi) = \left\{ -\frac{4\delta \cosh(\pi\theta)}{\pi\rho} \int_0^a \frac{x^2 Y_c(x) + \theta ax Y_s(x)}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} dx \right. \\ \left. + 4\pi H A \tanh(\pi\theta) \frac{1}{\rho} \left[\frac{\pi\theta a}{\cosh(\pi\theta)} - \int_0^a \frac{x Y_s(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \right] \right\} \cos\phi.$$

5. Выразите ответ в задаче 4 через сдвигающую силы T и опрокидывающий момент M .

$$\text{Ответ: } w(\rho, \phi) = \left\{ -\frac{3H\alpha \cosh(\pi\theta)}{\pi\rho a^2(1+\theta^2)} \left[\frac{M}{\theta a \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} - T \right] \int_0^a \frac{x^2 Y_c(x) + \theta ax Y_s(x)}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} dx \right. \\ \left. + \frac{H\alpha}{\rho} T \left[1 - \frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi\theta a} \int_0^a \frac{x Y_s(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \right] \right\} \cos\phi.$$

6. Выразите нормальное перемещение w вне штампа через функцию напряжений f .

$$\text{Ответ: } w(\rho, \phi) = \left\{ \frac{8H}{\rho} \int_0^a \frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} f(t) dt}{(a^2 - t^2)^{1/2} (t^2 - x^2)} \right. \\ \left. + 4\pi H \alpha D \frac{a}{\rho} \right\} \cos\phi.$$

7. Выразите тангенциальное перемещение u вне штампа через функцию напряжений f .

$$\text{Ответ: } u(\rho, \phi) = u_0(\rho) + u_2(\rho) e^{2i\phi},$$

где

$$u_0(\rho) = \pi(G_1 - G_2) \frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2} \int_0^a \frac{f(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} + \pi(G_1 + G_2) D \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right),$$

$$u_2(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left\{ 2\pi H\alpha \int_0^a f(x) dx \{x[(a^2 - x^2)^{1/2} - (\rho^2 - x^2)^{1/2}]\} + \pi(G_1 + G_2)Da(\rho^2 - a^2)^{1/2} \right\}.$$

8. Исследуйте взаимодействие произвольной сосредоточенной силы, приложенной в некоторой точке внутри трансверсально изотропного полупространства, с плоским сцеплённым круглым штампом.

3.6 Неосесимметричная внутренняя основная смешанная задача

Общая формулировка этой задачи дана в секции 3.1, с граничными условиями (3.1.1), и основные интегральные уравнения даны в (3.1.2–3.1.5). Точное решение *в замкнутой форме* неизвестно в настоящее время. Мы предполагаем, что все параметры задачи могут быть разложены в ряды Фурье. Точное решение для n -ной гармоники представлено ниже. Основные интегральные уравнения для n -ной гармоники имеют вид:

$$\frac{2}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{G_1 x^2 \tau_{n+1}(\rho_0) + G_2 [2n\rho^2 - (2n+1)x^2] \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0 - \frac{2\pi H\alpha}{\rho^{n+1}} \int_0^\rho \sigma_n(\rho_0) \rho_0^{n+1} d\rho_0 = F_{n+1}(\rho), \quad \text{для } n \geq 0.$$

$$\frac{2}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{G_1 \rho_0^2 \tau_{-n+1}(\rho_0) + G_2 [(2n-1)\rho_0^2 - 2nx^2] \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0 + 2\pi H\alpha \rho^{n-1} \int_\rho^a \frac{\sigma_{-n}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-1}} = F_{-n+1}(\rho), \quad \text{для } n \geq 1;$$

$$\begin{aligned}
& 2\pi H\alpha \Re \left\{ \frac{e^{-in\phi}}{\rho^n} \int_0^\rho \tau_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0 - \rho^n e^{in\phi} \int_\rho^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n} \right\} \\
& + \frac{4H}{\rho^n} \int_0^\rho \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\sigma_{-n}(\rho_0) e^{-in\phi} + \sigma_n(\rho_0) e^{in\phi}}{\rho_0^{n-1} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0 = \Re \{ e^{in\phi} \Phi_n(\rho) \}, \\
& \text{для } n \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Здесь правые части известны из граничных условий, а именно,

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(\rho) &= u_{n+1}(\rho) - 2\rho^{n+1} \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+2} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \\
& \int_a^x \frac{G_1 \rho_0^2 \tau_{n+1}(\rho_0) + G_2 [2nx^2 - (2n+1)\rho_0^2] \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \rho_0^n d\rho_0, \\
F_{-n+1}(\rho) &= u_{-n+1}(\rho) - 2\pi H\alpha \rho^{n-1} \int_a^\infty \frac{\sigma_{-n}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-1}} \\
& - 2\rho^{n-1} \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{G_1 x^2 \tau_{-n+1}(\rho_0) + G_2 [(2n-1)x^2 - 2n\rho^2] \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \rho_0^n d\rho_0, \\
\Re \{ \Phi_n(\rho) e^{in\phi} \} &= w_n(\rho) e^{in\phi} + w_{-n}(\rho) e^{-in\phi} + 2\pi H\alpha \Re \left\{ e^{in\phi} \rho^n \int_a^\infty \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n} \right\} \\
& - 4H\rho^n \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n} (x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\sigma_n(\rho_0) e^{in\phi} + \sigma_{-n}(\rho_0) e^{-in\phi}}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \rho_0^{n+1} d\rho_0.
\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Случай осевой симметрии ($n=0$) был рассмотрен в деталях в секции 3.2 и не обсуждается здесь. Решение ищется для $n \geq 1$. Мы можем предположить без потери общности, что первые два уравнения (3.6.1) однородные. Это может быть достигнуто добавлением некоторых специальных решений к

параметрам τ_{-n+1} и τ_{n+1} . Эти специальные решения, удовлетворяющие правым частям первых двух уравнений (3.6.1), могут быть получены из результатов секции 2.6. Конечно, эта процедура сделает правую часть третьего уравнения (3.6.1) более сложной.

Положим, что решение системы (3.6.1), с первыми двумя уравнениями превращёнными в однородные, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_n(\rho) &= \bar{\sigma}_{-n}(\rho) = \frac{1}{\rho^n} \int_0^\rho \frac{t^{2n-1} df_n(t)}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} \\
 &= -\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{t^{2n-2} [(2n-1)\rho^2 - 2nt^2]}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} f_n(t) dt; \\
 \tau_{-n+1}(\rho) &= -C\rho^{n-2} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{\bar{f}_n(t) t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{\bar{D}_n \rho^{n-1}}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}; \\
 \tau_{n+1}(\rho) &= C\rho^n \frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{1}{\rho^{2n}} \int_\rho^a y^{2n-2} dy \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{f_n(t) t dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right\} \\
 &\quad + D_n \rho^n \frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{1}{\rho^{2n}} \int_\rho^a \frac{t^{2n-1} dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}} \right\} \\
 &= -C\rho^n \frac{d}{d\rho} \left\{ \int_\rho^a \frac{f_n(t) dt}{t(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + (2n-1) \int_\rho^a \frac{dy}{y^{2n}(y^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_y^a f_n(t) t^{2n-2} dt \right\} \\
 &\quad - D_n \left[\frac{\rho^{n-1}}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{2n}{\rho^{n+1}} \int_\rho^a \frac{t^{2n-1} dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}} \right].
 \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Здесь f_n пока неизвестные комплексные функции напряжений, и C , D_n являются постоянными подлежащими определению. В нижеследующих преобразованиях мы даём в некоторых случаях два эквивалентных

выражения того же самого параметра, для удобства процедуры подстановки в основные уравнения (3.6.1). Мы представляем вначале некоторые промежуточные результаты относящиеся к подстановке (3.6.3) в первое уравнение (3.6.1):

$$\int_x^a \frac{\bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi C}{2x} \left[\frac{f_n(x)}{x} - \int_x^a \frac{f_n(t) dt}{t^2} \right] + \frac{\pi}{2ax} D_n, \quad (3.6.4)$$

$$\int_x^a \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi C}{2x} \left[\frac{f_n(x)}{x} + \frac{2n-1}{x^{2n}} \int_x^a f_n(t) t^{2n-2} dt \right] - \frac{\pi a^{2n-1}}{2x^{2n+1}} D_n. \quad (3.6.5)$$

Подстановка (3.6.4) и (3.6.5) в первое уравнение (3.6.1) даёт:

$$(G_1 - G_2) \frac{\pi C}{\rho^{n+1}} \int_0^{\rho} \frac{x^{2n-2} [2nx^2 - (2n-1)\rho^2]}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} f_n(x) dx - \frac{2\pi H\alpha}{\rho^{n+1}} \int_0^{\rho} \sigma_n(\rho_0) \rho_0^{n+1} d\rho_0 = 0, \quad (3.6.6)$$

если следующие условие справедливо:

$$D_n = \frac{(2n-1)C}{a^{2n-1}} \int_0^a f_n(t) t^{2n-2} dt. \quad (3.6.7)$$

Теперь легко проверить, что подстановка первого выражения (3.6.3) в (3.6.6) делает его тождеством, если

$$C = \frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2}. \quad (3.6.8)$$

Ниже представлены некоторые промежуточные результаты относящиеся к процедуре подстановки (3.6.3) во второе уравнение (3.6.1):

$$\int_x^a \frac{\tau_{-n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-2}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \left[C \bar{f}_n(x) + \bar{D}_n \right], \quad (3.6.9)$$

$$\int_x^a \frac{(2n-1)\rho_0^2 - 2nx^2}{\rho_0^n(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0) d\rho_0 = \frac{\pi}{2} \left[-C \bar{f}_n(x) + \bar{D}_n \right]. \quad (3.6.10)$$

Мы использовали в преобразованиях некоторые общие формулы из Аппендикса А3.3. Подстановка (3.6.9) и (3.6.10) во второе уравнение (3.6.1) даёт:

$$\frac{\pi}{\rho^{n-1}} \int_0^{\rho} \frac{[C(G_1 - G_2)\bar{f}_n(x) + (G_1 + G_2)\bar{D}_n]x^{2n-2}dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} + 2\pi H\alpha \rho^{n-1} \int_{\rho}^a \frac{\sigma_n(\rho_0)d\rho_0}{\rho_0^{n-1}} = 0. \quad (3.6.11)$$

Подстановка первого выражения (3.6.3) в (3.6.11) показывает, что равенство удовлетворяется, благодаря (3.6.8) и добавочному условию

$$(G_1 + G_2) \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1/2)}{2\Gamma(n)} D_n + \frac{2H\alpha}{a^{2n-2}} \int_0^a f_n(x) \frac{x^{2n-2}dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} = 0. \quad (3.6.12)$$

Условия (3.6.7) и (3.6.12) могут показаться противоречивыми. Мы покажем далее (смотри 3.6.14) что это не так, потому что добавочная постоянная появится в выражении для f_n , соответствующая однородному решению сингулярного интегрального уравнения (3.6.14).

Теперь мы удовлетворили первые два уравнения (3.6.1). Подстановка (3.6.3) в третье уравнение (3.6.1) требует следующие преобразование:

$$\int_x^a \frac{d\rho_0}{\rho_0^{2n-1}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{\rho_0} \frac{t^{2n-1}df_n(t)}{(\rho_0^2 - t^2)^{1/2}} = \int_0^a \left[(a^2 - x^2)^{1/2}(a^2 - t^2)^{1/2} Q_n(x, t) \right. \\ \left. + \psi_n(x, t) \ln \frac{a|t^2 - x^2|^{1/2}}{|t(a^2 - x^2)^{1/2} - x(a^2 - t^2)^{1/2}|} \right] t^{2n-1} df_n(t). \quad (3.6.13)$$

Здесь $Q_n(x, t)$ полином чётных отрицательных степеней x и t . Хотя мы не можем написать явные выражения для $Q_n(x, t)$, он может быть вычислен элементарным способом для любого частного n . Явное выражение для ψ_n есть:

$$\psi_n(x, t) = \frac{1}{\pi t x^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-k-1/2) \Gamma(k+1/2)}{\Gamma(n-k) \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{t}\right)^{2k}.$$

Умножим обе стороны третьего уравнения (3.6.1) на ρ^n , продифференцируем по ρ , разделим результат на $\rho^{2n-2}(r^2 - \rho^2)^{1/2}$ и проинтегрируем по ρ от 0

до r . Эта процедура позволяет нам разделить ядро интегрального уравнения на две части: сингулярную и вырожденную. Результат принимает вид:

$$(a^2 - r^2)^{1/2} \int_0^a \frac{f_n(t) dt}{(t^2 - r^2)(a^2 - t^2)^{1/2}} - \frac{\alpha^2}{\gamma_1 \gamma_2} \int_0^a \frac{f_n(t) dt}{t^2 - \rho^2} = \chi_n(r). \quad (3.6.14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi_n(r) = & \frac{1}{4\pi H r} \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{2n-2}(r^2 - \rho^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho} [\rho^n \Phi_n(\rho)] \\ & - \frac{2}{\pi r} \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{2n-2}(r^2 - \rho^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x^{2n}(a^2 - x^2)^{1/2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^a (a^2 - t^2)^{1/2} Q_n(x, t) t^{2n-1} df_n(t) \\ & - \frac{2}{\pi^{3/2} r} \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{2n-2}(r^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}(a^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^a q_n(\rho, x, t) (a^2 - t^2)^{1/2} t^{2n-2} df_n(t), \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

с

$$q_n(\rho, x, t) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma(n-k-1/2)}{\Gamma(n-k)} \left(\frac{\rho}{t}\right)^{2k} F\left(2-n+k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}-n+k; \frac{x^2}{t^2}\right). \quad (3.6.16)$$

Заметим, что гипергеометрическая функция в (3.6.16) есть, фактически, полином, и что все интегралы по x и ρ в вырожденной части ядра (3.6.15) могут быть вычислены в элементарных функциях для любого n . Интегральное уравнение (3.6.14) было решено в секции 3.2, и его решение есть:

$$\begin{aligned} f_n(t) = & -\frac{4}{\pi^2} \cosh^2(\pi\theta) t \left[t Y_c(t) \int_0^a \frac{\chi_n(r) Y_c(r) dr}{r^2 - t^2} \right. \\ & \left. + Y_s(t) \int_0^a \frac{\chi_n(r) Y_s(r) r dr}{r^2 - t^2} \right] + A_n Y_c(t). \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

Последний член в (3.6.17) представляет собой однородное решение, с A_n в

качестве произвольной постоянной. Его значение, вместе с постоянной D_n и другими, которые появляются из-за вырожденной части ядра, могут быть найдены из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений и условий (3.6.7) и (3.6.12). Общее решение может считаться законченным. Основной недостаток решения заключается в необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений, порядок которых увеличивается с n , таким образом делая точное решение для высших гармоник очень громоздким. Мы не знаем никакого другого решения для *трансверсально изотропного* твёрдого тела. Соответствующая задача для *изотропного* тела была решена Уфляндом (1967), который использовал метод интегрального преобразования Мечлера—Фока. Решение Уфлянда имеет тот же недостаток: необходимость решения системы линейных алгебраических уравнений, порядок которых увеличивается с n .

Пример. Рассмотрим действие нормальной сосредоточенной нагрузки P , приложенной вне плоского круглого штампа радиуса a , сцеплённого с трансверсально изотропным упругим полупространством $z \geq 0$. Мы можем предположить, без потери общности, что сила приложена в точке $\rho = b$, $\phi = 0$ ($b > a$). Таким образом, граничные условия могут быть записаны:

$$u = w = 0, \quad \text{для } \rho \leq a;$$

$$\sigma = P\delta(\rho - b)\delta(\phi - 0)/\rho, \quad \tau = 0, \quad \text{для } \rho > a.$$

Граничные условия дают:

$$F_{n+1}(\rho) = 0, \quad \text{для } n \geq 0; \quad F_{-n+1} = -PH\alpha \frac{\rho^{n-1}}{b^n}, \quad \text{для } n \geq 1;$$

$$\Phi_n(\rho) = -\frac{4PH}{\pi(\rho b)^n} \int_0^\rho \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} (b^2 - x^2)^{1/2}}. \quad (3.6.18)$$

Мы представляем теперь явное решение для некоторых специфических значений n . В осесимметричном случае $n = 0$, следующие результаты могут быть получены:

$$\sigma_0(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{f_0(t) t dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}, \quad \tau_1(\rho) = -\frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{f_0(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}},$$

$$\begin{aligned}
f_0(t) = \frac{2}{\pi^3} P \cosh^2(\pi\theta) & \left[t Y_c(t) \int_0^a \frac{Y_c(r) dr}{(b^2 - r^2)^{1/2} (r^2 - t^2)} \right. \\
& \left. + Y_s(t) \int_0^a \frac{Y_s(r) r dr}{(b^2 - r^2)^{1/2} (r^2 - t^2)} \right].
\end{aligned} \tag{3.6.19}$$

Результаты для $n = 1$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\rho) &= \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{f_1(t) dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}}, \\
\tau_0(\rho) &= -\frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{f_1(t) t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{D_1}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}, \\
\tau_2(\rho) &= -\frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2} \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho^2} \int_\rho^a \frac{f_1(t) t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \right] - D_1 \frac{2a^2 - \rho^2}{\rho^2 (a^2 - \rho^2)^{1/2}}, \\
f_1(t) &= \frac{t}{b} f_0(t) + A_1 Y_c(t), \\
D_1 &= -\frac{P\theta}{\pi b \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \left(1 - \frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi a \theta} I_s(b) \right) \left[1 + \frac{\pi\theta(G_1 + G_2)}{\tanh(\pi\theta)(G_1 - G_2)} \right]^{-1}, \\
A_1 &= -\frac{P \cosh^2(\pi\theta)}{\pi^3 \theta a b} [I_s(b) - 2a\theta I_c(b)] + \frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi\theta} D_1 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}.
\end{aligned} \tag{3.6.20}$$

Мы напоминаем, что обозначения $I_{c,s}$ определены в (3.2.73) и (3.2.74) соответственно.

Случай $n = 2$ более громоздок:

$$\sigma_2(\rho) = \frac{1}{\rho^3} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{4t^2 - 3\rho^2}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} t^2 f_2(t) dt,$$

$$\tau_1(\rho) = \frac{d}{d\rho} \left[-\frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2} \int_\rho^a \frac{f_2(t) t dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} - D_2 (a^2 - \rho^2)^{1/2} \right],$$

$$\tau_3(\rho) = \rho^2 \frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{1}{\rho^4} \left[\frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2} \int_\rho^a \frac{\rho^2 - 2t^2}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} f_2(t) t dt + D_2 \frac{2a^2 + \rho^2}{3} (a^2 - \rho^2)^{1/2} \right] \right\},$$

$$f_2(t) = -\frac{4}{\pi^2} \cosh^2(\pi\theta) t \left[t Y_c(t) \int_0^a \frac{\chi_2(r) Y_c(r) dr}{r^2 - t^2} + Y_s(t) \int_0^a \frac{\chi_2(r) Y_s(r) r dr}{r^2 - t^2} \right] \\ + A_2 Y_c(t) + \frac{2 \coth(\pi\theta)}{\pi a} \left[\frac{2\theta}{a} Y_c(t) - \frac{1}{t} Y_s(t) \right] B_2.$$

Постоянная B_2 соответствует вырожденной части ядра:

$$B_2 = \int_0^a \frac{2t^2 - a^2}{(a^2 - t^2)^{1/2}} f_2(t) dt.$$

Все постоянные определены следующим образом:

$$D_2 = \frac{3\alpha}{\gamma_1 \gamma_2 a^3} \left[L_1 + A_2 \frac{\pi a^3 \theta}{\sinh(\pi\theta)} \frac{1 - 2\theta^2}{3} - B_2 \frac{2a\theta^2(1 + 4\theta^2) \cosh(\pi\theta)}{3 \sinh^2(\pi\theta)} \right],$$

$$A_2 = \frac{\cosh(\pi\theta)}{2\pi a^2 \theta^2} \left[L_3 - B_2 \frac{4\theta(1 + 2\theta^2)}{\sinh(\pi\theta)} \right],$$

$$B_2 = \left\{ 2\theta^2 \left(\frac{Pa^2}{2\pi b^2} + L_2 + L_1 \frac{3\pi(G_1 + G_2)}{4a(G_1 - G_2)} \right) + L_3 \left[\frac{1}{4} - \theta^2 \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(G_1 + G_2)}{4(G_1 - G_2)}(1 - 2\theta^2) \Big] \Bigg\} \left[\frac{\theta}{\sinh(\pi\theta)} \left[1 + \frac{\pi\theta(1 + \theta^2)(G_1 + G_2)}{\tanh(\pi\theta)(G_1 - G_2)} \right] \right]^{-1}, \\
L_1 &= \frac{2\cosh^2(\pi\theta)}{\pi\sinh(\pi\theta)} \int_0^a \left[2a\theta \left(r^2 + a^2 \frac{1 - 2\theta^2}{3} \right) Y_c(r) \right. \\
& \quad \left. + r(2a^2\theta^2 - r^2) Y_s(r) \right] \chi_2(r) dr, \\
L_2 &= \frac{4}{\pi} \cosh(\pi\theta) \int_0^a \left\{ \left[a^2 \left(\frac{1}{4} - \theta^2 \right) + \frac{r^2}{2} \right] Y_c(r) + \theta ar Y_s(r) \right\} \chi_2(r) dr, \\
L_3 &= \frac{4}{\pi} \cosh(\pi\theta) \int_0^a [(r^2 - 2a^2\theta^2) Y_c(r) + 2\theta ar Y_s(r)] \chi_2(r) dr, \\
\chi_2(r) &= -\frac{P}{2\pi b^2} \left[\frac{1}{(b^2 - r^2)^{1/2}} + \frac{1}{b + (b^2 - r^2)^{1/2}} \right].
\end{aligned}$$

Чтобы обеспечить нулевые перемещения, штамп должен быть нагружен нормальной силой N , сдвигающей силой T , действующей в отрицательном направлении оси Ox , и опрокидывающим моментом M относительно оси Oy . Их взаимоотношение с силой P может быть установлено при помощи уравнений статики, а именно,

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi \int_0^a \tau_0(\rho) \rho d\rho = 2\pi \left[\frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2} \int_0^a f_1(t) dt + D_1 a \right], \\
N &= 2\pi \int_0^a \sigma_0(\rho) \rho d\rho = 2\pi \int_0^a \frac{f_0(t) t dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}},
\end{aligned}$$

$$M = - \int_0^{2\pi} \int_0^a [\sigma_1(\rho) e^{i\phi} + \sigma_{-1}(\rho) e^{-i\phi}] \rho^2 \cos \phi d\rho d\phi = 2\pi \int_0^a \frac{a^2 - 2t^2}{(a^2 - t^2)^{1/2}} f_1(t) dt.$$

Выполняя интегрирования, мы получим:

$$T = 4\pi a D_1, \quad N = -\frac{2P}{\pi} \cosh(\pi\theta) \int_0^a \frac{Y_c(r) dr}{(b^2 - r^2)^{1/2}},$$

$$M = \frac{4P}{\pi b} \cosh(\pi\theta) \int_0^a \frac{r^2 Y_c(r) + \theta a r Y_s(r)}{(b^2 - r^2)^{1/2}} dr + 4\pi a^2 \theta \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} D_1. \quad (3.6.21)$$

Если штамп не нагружен, то он испытает тангенциальное, нормальное и угловое перемещения. Их значения могут быть определены из (3.2.71), (3.5.10) и (3.6.21).

Упражнение 3.6

1. В условиях примера выше (страница 200), найдите нормальное напряжение в центре штампа.

$$\text{Ответ: } \sigma(0) = \frac{P \cosh^2(\pi\theta)}{\pi^2 ab} \left[\int_0^a \frac{[a Y_c(x) + 2\theta x Y_s(x)] dx}{[b + (b^2 - x^2)^{1/2}](b^2 - x^2)^{1/2}} - \frac{\pi\theta}{\sinh(\pi\theta)} \right].$$

2. В условиях того же примера, найдите сдвигающее напряжение в центре штампа.

$$\text{Ответ: } \tau(0) = \frac{P\alpha}{2\pi b^2 \gamma_1 \gamma_2} \left[1 - \frac{2}{\pi} b \coth(\pi\theta) \int_0^a \frac{Y_s(x) dx}{x(b^2 - x^2)^{1/2}} \right] + \frac{D_1}{a} + \frac{\pi\theta A_1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}.$$

3. В условиях того же примера, найдите распределение напряжений под штампом в предельном случае $\alpha = 0$.

$$\text{Ответ: } \sigma_n(\rho) = -\frac{P}{\pi^2} \frac{(b^2 - a^2)^{1/2}}{(a^2 - \rho^2)^{1/2} (b^2 - \rho^2)} \left(\frac{\rho}{b} \right)^n, \quad \tau_n(\rho) = 0.$$

4. Никакой нагрузки не приложено к плоскому круглому штампу радиуса

a сцеплённому с трансверсально изотропным полупространством. Нормальная сосредоточенная сила P приложена в точке $\rho = b$, $\phi = \pi/2$. Найдите нормальный компонент w перемещения штампа.

Ответ: $w = \frac{PH \sinh(\pi\theta)}{\pi\theta a} \int_0^a \frac{Y_c(r) dr}{(b^2 - r^2)^{1/2}}.$

Совет: используйте (3.2.71) и (3.6.21)

5. В условиях Упражнения 4, найдите тангенциальный компонент u перемещения штампа и его направление.

Ответ: $u = \frac{3PH\alpha \cosh(\pi\theta)}{\pi b a^2 (1 + \theta^2)} \int_0^a \frac{x^2 Y_c(x) + \theta a x Y_s(x)}{(b^2 - x^2)^{1/2}} dx + PH\alpha \frac{1}{b} \left[1 - \frac{\cosh(\pi\theta)}{\pi\theta a} \int_0^a \frac{x Y_s(x) dx}{(b^2 - x^2)^{1/2}} \right],$ в направлении Oy .

6. В условиях Упражнения 4, найдите угол наклона штампа δ и его направление.

Ответ: $\delta = \frac{3PH \sinh(\pi\theta)}{\pi a^3 b \theta (1 + \theta^2)} \int_0^a \frac{Y_c(x) x^2 + \theta a x Y_s(x)}{(b^2 - x^2)^{1/2}} dx,$ в положительном направлении

относительно оси Ox .

7. Никакой нагрузки не приложено к плоскому круглому штампу радиуса a , сцеплённому с трансверсально изотропным полупространством. Тангенциальная сосредоточенная сила T приложена в точке $\rho = b$, $\phi = 0$ в положительном Ox направлении. Найдите нормальный компонент w перемещения штампа.

Ответ: $w = \frac{TH \sinh(\pi\theta)}{\pi\theta ab} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \left[I_s(b) - \frac{\pi\theta a}{\cosh(\pi\theta)} \right],$ с I_s определенным в (3.2.74).

Совет: используйте (3.2.72) и теорему взаимности.

8. При общих граничных условиях (3.1.1), найдите тангенциальные перемещения для $\rho > a$, выраженные через функции напряжений f_n .

Ответ: $u_{-n+1}(\rho) = \frac{\pi}{\rho^{n-1}} \int_0^a \frac{(\alpha/\gamma_1 \gamma_2)(G_1 - G_2) \bar{f}_n(x) + (G_1 + G_2) \bar{D}_n}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} x^{2n-2} dx,$

$$u_{n+1}(\rho) = \frac{2\pi H\alpha}{\rho^{n+1}} \int_0^a f_n(x) dx \{x^{2n-1}[(a^2 - x^2)^{1/2} - (\rho^2 - x^2)^{1/2}]\} \\ + \pi(G_1 + G_2)D_n a^{2n-1} \frac{(\rho^2 - a^2)^{1/2}}{\rho^{n+1}}.$$

9. При общих граничных условиях (3.1.1), найдите нормальные перемещения для $\rho > a$, выраженные через функции напряжений f_n .

Ответ: $\Re\{w_n(\rho)e^{in\phi} + w_{-n}(\rho)e^{-in\phi}\} = 2\pi^{3/2}H\alpha \frac{\Gamma(n)a^{2n-1}}{\Gamma(n+1/2)\rho^n} \Re\{D_n e^{in\phi}\}$

$$+ \frac{8H}{\rho^n} \Re\left\{e^{in\phi} \int_0^a \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{d\rho_0}{\rho_0^{2n-1}(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{\rho_0} \frac{t^{2n-1} df_n(t)}{(\rho_0^2 - t^2)^{1/2}}\right\}.$$

10. Исследуйте взаимодействие произвольной тангенциальной силы со сцеплённым осесимметричным штампом.

3.7 Неосесимметричная внешняя основная смешанная задача

Общая формулировка задачи дана в секции 3.1, с граничными условиями (3.1.6), и основными интегральными уравнениями (3.1.7–3.1.10). Мы предположим, что все параметры могут быть разложены в ряды Фурье. Точное решение для n -ной гармонике представлено ниже. Основные интегральные уравнения для n -ной гармоники имеют вид:

$$2\rho^{n+1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n+2}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{G_1 \rho_0^2 \tau_{n+1}(\rho_0) + G_2 [2nx^2 - (2n+1)\rho_0^2] \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \rho_0^n d\rho_0 \\ - \frac{2\pi H\alpha}{\rho^{n+1}} \int_a^{\rho} \sigma_n(\rho_0) \rho_0^{n+1} d\rho_0 = F_{n+1}(\rho), \quad \text{для } n \geq 0.$$

$$\begin{aligned}
& 2\rho^{n-1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{G_1 x^2 \tau_{-n+1}(\rho_0) + G_2 [(2n-1)x^2 - 2n\rho^2] \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \rho_0^n d\rho_0 \\
& + 2\pi H \alpha \rho^{n-1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{\sigma_{-n}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^{n-1}} = F_{-n+1}(\rho), \quad \text{для } n \geq 1; \\
& 2\pi H \alpha \Re \left\{ \frac{e^{-in\phi}}{\rho^n} \int_a^{\rho} \tau_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0 - \rho^n e^{in\phi} \int_{\rho}^{\infty} \frac{\tau_{n+1}(\rho_0) d\rho_0}{\rho_0^n} \right\} \\
& + 4H \rho^n \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^x \frac{\sigma_{-n}(\rho_0) e^{-in\phi} + \sigma_n(\rho_0) e^{in\phi}}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \rho_0^{n+1} d\rho_0 = \Re \{ e^{in\phi} \Phi_n(\rho) \}, \\
& \text{для } n \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.7.1}$$

Правая часть (3.7.1) известна из граничных условий, а именно,

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(\rho) &= u_{n+1}(\rho) + \frac{2\pi H \alpha}{\rho^{n+1}} \int_0^a \sigma_n(\rho_0) \rho_0^{n+1} d\rho_0 \\
&- \frac{2}{\rho^{n+1}} \int_0^a \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{G_1 x^2 \tau_{n+1}(\rho_0) + G_2 [2n\rho^2 - (2n+1)x^2] \bar{\tau}_{-n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{-n+1}(\rho) &= u_{-n+1}(\rho) - \frac{2}{\rho^{n-1}} \int_0^a \frac{x^{2n-2} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \\
&\times \int_x^a \frac{G_1 \rho_0^2 \tau_{-n+1}(\rho_0) + G_2 [(2n-1)\rho_0^2 - 2nx^2] \bar{\tau}_{n+1}(\rho_0)}{\rho_0^n (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0, \\
\Re \{ \Phi_n(\rho) e^{in\phi} \} &= w_n(\rho) e^{in\phi} + w_{-n}(\rho) e^{-in\phi} + 2\pi H \alpha \Re \left\{ \frac{e^{-in\phi}}{\rho^n} \int_0^a \tau_{-n+1}(\rho_0) \rho_0^n d\rho_0 \right\}
\end{aligned}$$

$$-\frac{4H}{\rho^n} \int_0^a \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\sigma_n(\rho_0) e^{in\phi} + \sigma_{-n}(\rho_0) e^{-in\phi}}{\rho_0^{n-1} (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} d\rho_0. \quad (3.7.2)$$

Случай осевой симметрии ($n=0$) был рассмотрен в деталях в секции 3.3, и не обсуждается здесь. Решение ищется для $n \geq 1$. Мы можем предположить, без потери общности, что первые два уравнения (3.7.1) однородны. Это может быть достигнуто добавлением некоторых специальных решений к параметрам τ_{-n+1} и τ_{n+1} . Эти специальные решения, удовлетворяющие правым частям первых двух уравнений (3.7.1), могут быть получены из результатов секции 2.7. Конечно, эта процедура сделает правую часть третьего уравнения (3.7.1) более сложным.

Положим решение (3.7.1), с первыми двумя уравнениями преобразованными в однородные, в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma_n(\rho) &= \bar{\sigma}_{-n}(\rho) = \rho^n \int_{\rho}^{\infty} \frac{df_n(t)}{t^{2n}(t^2 - \rho^2)^{1/2}}, \\ \tau_{n+1}(\rho) &= \frac{C}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_a^{\rho} \frac{f_n(t) dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} - \frac{D_n}{\rho^{n+1}(\rho^2 - a^2)^{1/2}}, \\ \tau_{-n+1}(\rho) &= \frac{C}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho^{2n} \int_a^{\rho} \frac{dy}{y^{2n}} \frac{d}{dy} \int_a^y \frac{\bar{f}_n(t) dt}{(y^2 - t^2)^{1/2}} \right\} \\ &\quad + \frac{\bar{D}_n}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho^{2n} \int_a^{\rho} \frac{dt}{t^{2n+1}(t^2 - a^2)^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Здесь f_n пока неизвестные комплексные функции напряжений, и C , D_n постоянные, подлежащие определению. Подстановка (3.7.3) в первые два уравнения (3.7.1) удовлетворяет их тождественно, если следующие условия справедливы:

$$C = \frac{\alpha}{\gamma_1 \gamma_2}, \quad D_n = -2nC a^{2n+1} \int_a^\infty \frac{f_n(t)}{t^{2n+1}} dt. \quad (3.7.4)$$

$$(G_1 + G_2) \frac{\pi^{3/2} \Gamma(n+1)}{2\Gamma(n+3/2)} D_n + 2\pi H \alpha a^{2n+2} \int_a^\infty \left[x f_n(x) - \int_a^x f_n(t) dt \right] \frac{dx}{x^{2n+2} (x^2 - a^2)^{1/2}} = 0. \quad (3.7.5)$$

Некоторые общие формулы из Аппендикса А3.3 были использованы в преобразованиях. Условия (3.7.4) и (3.7.5) могут казаться противоречивым. Будет показано ниже (смотри 3.7.11), что это не так, потому что добавочная постоянная появится в выражении для f_n , из-за однородного решения интегрального уравнения (3.7.8).

Пока что, мы удовлетворили первые два уравнения (3.7.1). Подстановка (3.7.3) в третье уравнение (3.7.1) требует выполнения следующих преобразований:

$$\int_a^x \frac{\rho_0^{2n+1} d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \int_{\rho_0}^\infty \frac{df_n(t)}{t^{2n} (t^2 - \rho_0^2)^{1/2}} = \int_a^\infty \left[(x^2 - a^2)^{1/2} (t^2 - a^2)^{1/2} Q_n(x, t) + \psi_n(x, t) \ln \frac{|(x^2 - a^2)^{1/2} + (t^2 - a^2)^{1/2}|}{|t^2 - x^2|^{1/2}} \right] \frac{df_n(t)}{t^{2n}}. \quad (3.7.6)$$

Здесь $Q_n(x, t)$ есть полином чётных степеней по x и t . Хотя мы не можем написать явное выражение для $Q_n(x, t)$, он может быть вычислен элементарным способом для любого частного n . Явное выражение для ψ_n есть:

$$\psi_n(x, t) = \frac{x^{2n}}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n-k+1/2) \Gamma(k+1/2)}{\Gamma(n-k+1) \Gamma(k+1)} \left(\frac{t}{x} \right)^{2k}. \quad (3.7.7)$$

Разделим обе стороны третьего уравнения (3.7.1) на ρ^n , дифференцируем по

ρ , умножим результат на $\rho^{2n}/(\rho^2 - r^2)^{1/2}$ и интегрируем по ρ от r до ∞ . Эта процедура позволяет нам разделить ядро интегрального уравнения на две части: сингулярную и вырожденную. Результат принимает вид:

$$-\frac{(r^2 - a^2)^{1/2}}{r} \int_a^\infty \frac{f_n(t) dt}{(t^2 - r^2)(t^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{\alpha^2}{\gamma_1 \gamma_2} \int_a^\infty \frac{f_n(t) dt}{t^2 - \rho^2} = \chi_n(r). \quad (3.7.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi_n(r) = & \frac{1}{4\pi H} \int_r^\infty \frac{\rho^{2n} d\rho}{(\rho^2 - r^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\Phi_n(\rho)}{\rho^n} \right] \\ & - \frac{2}{\pi} \int_r^\infty \frac{\rho^{2n} d\rho}{(\rho^2 - r^2)^{1/2}} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^\infty \frac{(x^2 - a^2)^{1/2} dx}{x^{2n}(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_a^\infty (t^2 - a^2)^{1/2} Q_n(x, t) \frac{df_n(t)}{t^{2n}} \\ & + \frac{2}{\pi^{3/2}} \int_r^\infty \frac{\rho^{2n-1} d\rho}{(\rho^2 - r^2)^{1/2}} \int_\rho^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}(x^2 - a^2)^{1/2}} \int_a^\infty q_n(\rho, x, t) (t^2 - a^2)^{1/2} \frac{df_n(t)}{t^{2n-2}}, \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

с

$$q_n(\rho, x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-k+1/2)}{\Gamma(n-k+1)} \left(\frac{t}{\rho} \right)^{2k} F(1-n+k, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}-n+k; \frac{t^2}{x^2}). \quad (3.7.10)$$

Заметим, что гипергеометрическая функция в (3.7.10) есть, фактически, полином, и что все интегралы по x и ρ в вырожденной части ядра (3.7.9) могут быть вычислены в элементарных функциях для любого n . Интегральное уравнение (3.7.8) было решено в секции 3.3, и это решение есть:

$$f_n(t) = \frac{4}{\pi^2} \cosh^2(\pi\theta) t \left[t Y_c(t) \int_a^\infty \frac{\chi_n(r) Y_c(r) dr}{r^2 - t^2} + Y_s(t) \int_a^\infty \frac{\chi_n(r) Y_s(r) r dr}{r^2 - t^2} \right] + A_n Y_c(t). \quad (3.7.11)$$

Последний член в (3.7.11) представляет однородное решение, с A_n в качестве произвольной постоянной. Его значение, вместе с постоянной D_n и другими, которые появляются из-за вырожденной части ядра, может быть найдено из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений и

условий (3.7.4) и (3.7.5). Общее решение может считаться законченным.

Пример. Рассмотрим действие нормальной сосредоточенной силы P приложенной в некоторой точке внутри круга $\rho = a$, с защемлённой остальной частью плоскости $z = 0$. Мы можем предположить, без потери общности, что сила приложена в точке $\rho = b$, $\phi = 0$ ($b < a$). Таким образом, граничные условия имеют вид:

$$u = w = 0, \quad \text{для} \quad \rho > a;$$

$$\sigma = P\delta(\rho - b)\delta(\phi - 0)/\rho, \quad \tau = 0, \quad \text{для} \quad \rho < a.$$

Мы находим в этом случае:

$$F_{-n+1}(\rho) = 0, \quad \text{для} \quad n \geq 1; \quad F_{n+1} = PH\alpha \frac{b^n}{\rho^{n+1}}, \quad \text{для} \quad n \geq 0;$$

$$\Phi_n(\rho) = -\frac{4}{\pi} PH(\rho b)^n \int_{\rho}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}(x^2 - \rho^2)^{1/2}(x^2 - b^2)^{1/2}}. \quad (3.7.12)$$

Мы представляем теперь явные решения для некоторых специфических значений n . В осесимметричном случае $n = 0$, следующие результаты могут быть получены:

$$\sigma_0(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{df_0(t)}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{f_0(t)tdt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}},$$

$$\tau_1(\rho) = \frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2} \frac{d}{d\rho} \int_a^{\rho} \frac{f_0(t)dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} - \frac{D_0}{\rho(\rho^2 - a^2)^{1/2}},$$

$$f_0(t) = \frac{2P}{\pi^3} \cosh^2(\pi\theta) \int_a^{\infty} \frac{Y_c(t)rY_c(r) + tY_s(t)Y_s(r)}{(r^2 - t^2)(r^2 - b^2)^{1/2}} dr$$

$$- D_0 \frac{\gamma_1\gamma_2}{a\alpha} [1 - Y_c(t)],$$

$$D_0 = -\frac{P\alpha \sinh(\pi\theta)}{4\pi^2\theta\gamma_1\gamma_2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \coth(\pi\theta) \int_a^\infty \frac{Y_s(r)dr}{(r^2 - b^2)^{1/2}} \right].$$

Результаты для первой гармоники ($n=1$):

$$\sigma_1(\rho) = \bar{\sigma}_{-1}(\rho) = \rho \int_\rho^\infty \frac{df_1(t)}{t^2(t^2 - \rho^2)^{1/2}},$$

$$\tau_2(\rho) = \frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_a^\rho \frac{f_1(t)dt}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} - \frac{D_1}{\rho^2(\rho^2 - a^2)^{1/2}},$$

$$\tau_0(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho^2 \left[\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2} \int_a^\rho \frac{dy}{y^2} \frac{d}{dy} \int_a^y \frac{\bar{f}_1(t)dt}{(y^2 - t^2)^{1/2}} + \bar{D}_1 \int_a^\rho \frac{dy}{y^3(y^2 - a^2)^{1/2}} \right] \right\},$$

$$f_1(t) = \frac{4}{\pi^2} \cosh^2(\pi\theta) t \left[t Y_c(t) \int_a^\infty \frac{\chi_1(r) Y_c(r) dr}{r^2 - t^2} + Y_s(t) \int_a^\infty \frac{\chi_1(r) Y_s(r) r dr}{r^2 - t^2} \right] + A_1 Y_c(t),$$

$$\chi_1(r) = \frac{Pb}{2\pi r} \left[\frac{1}{(r^2 - b^2)^{1/2}} + \frac{1}{r + (r^2 - b^2)^{1/2}} \right] + \frac{2}{\pi} \left[1 - \frac{(r^2 - a^2)^{1/2}}{r} \right] B_1.$$

Постоянные D_1 , A_1 , и B_1 должны быть определены из системы линейных алгебраических уравнений

$$D_1 = -\frac{2\alpha a^3}{\gamma_1\gamma_2} \int_a^\infty \frac{f_1(t)dt}{t^3}, \quad B_1 = \int_a^\infty \frac{(t^2 - a^2)^{1/2}}{t^2} df_1(t),$$

$$-\frac{2\pi}{3H\alpha} (G_1 + G_2) D_1 + 2\pi \int_a^\infty \left[x f_1(x) - \int_a^x f_1(t) dt \right] \frac{dx}{x^4(x^2 - a^2)^{1/2}} - Pb = 0.$$

Следует отметить, что система напряжений в защемлённой части такова,

что её главный вектор точно равен P . Это может быть показано прямым интегрированием.

Упражнение 3.7

1. Найдите решение для примера выше (страница 211) в предельном случае $b=0$.

Ответ: единственная ненулевая функция напряжений есть:

$$f_0(t) = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{2\cosh^2(\pi\theta)Y_s(t)}{\pi\sinh(\pi\theta)t} - \frac{\sinh(2\pi\theta)[1 - Y_c(t)]}{2\pi\theta[1 + \cosh(\pi\theta)]a} \right\}.$$

2. Найдите решение для примера выше в предельном случае $\alpha=0$.

Ответ: $\sigma_n(\rho) = -\frac{P(a^2 - b^2)^{1/2}}{\pi^2(\rho^2 - a^2)^{1/2}(\rho^2 - b^2)} \left(\frac{b}{\rho}\right)^n, \quad \tau_n = 0.$

3. Докажите, что напряжения в плоскости $z=0$ находятся в равновесии, когда внешность штампа зашкреплена.

Заметьте: это свойство несправедливо в случае *внутренних* задач.

4. Попробуйте найти точное решение в замкнутой форме основной смешанной граничной задачи.

Аппендикс А3.1

Некоторые интегралы, относящиеся к решению внутренних основных смешанных задач, представлены здесь. Обозначения $Y_{c,s}$ определены в (3.2.45). Мы предполагаем, что $0 < r < a$. Интегралы, содержащие Y_c :

$$\int_0^a \frac{Y_c(x)dx}{x^2 - r^2} = -\frac{\pi}{2r} \coth(\pi\theta) Y_s(r),$$

$$\int_0^a \left(\frac{a^2 - r^2}{a^2 - x^2} \right)^{1/2} \frac{Y_c(x)dx}{x^2 - r^2} = -\frac{\pi}{2r} \tanh(\pi\theta) Y_s(r),$$

$$\int_0^a \frac{Y_c(x)x^2 dx}{x^2 - r^2} = \frac{\pi\theta a}{\sinh(\pi\theta)} - \frac{\pi}{2} r \coth(\pi\theta) Y_s(r),$$

$$\int_0^a \frac{Y_c(x)x^4 dx}{x^2 - r^2} = -\frac{\pi}{2} r^3 \coth(\pi\theta) Y_s(r) + \frac{\pi\theta a}{\sinh(\pi\theta)} \left[r^2 + a^2 \frac{1 - 2\theta^2}{3} \right],$$

$$\int_0^a \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} Y_c(x) dx}{x^2 - r^2} = -\frac{\pi}{2r} (a^2 - r^2)^{1/2} \tanh(\pi\theta) Y_s(r) - \frac{\pi}{2 \cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a \frac{x^2 (a^2 - x^2)^{1/2} Y_c(x) dx}{x^2 - r^2} = \frac{\pi a^2}{\cosh(\pi\theta)} \left(\frac{1}{4} + \theta^2 \right) - \frac{\pi}{2} \left[r (a^2 - r^2)^{1/2} \tanh(\pi\theta) Y_s(r) + \frac{r^2}{\cosh(\pi\theta)} \right],$$

$$\int_0^a \frac{x^2 Y_c(x) dx}{(a^2 - x^2)^{1/2} (x^2 - r^2)} = \frac{\pi}{2 \cosh(\pi\theta)} - \frac{\pi}{2} \tanh(\pi\theta) \frac{r}{(a^2 - r^2)^{1/2}} Y_s(r),$$

$$\int_0^a Y_c(x) dx = \frac{\pi\theta a}{\sinh(\pi\theta)}, \quad \int_0^a x^2 Y_c(x) dx = \frac{\pi\theta(1 - 2\theta^2)a^3}{3 \sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{1/2} Y_c(x) dx = \frac{\pi a^2}{\cosh(\pi\theta)} \left(\frac{1}{4} + \theta^2 \right), \quad \int_0^a \frac{Y_c(x) dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2 \cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_0^a \frac{x^2 Y_c(x) dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi a^2}{\cosh(\pi\theta)} \left(\frac{1}{4} - \theta^2 \right),$$

$$\int_0^a \frac{1 - Y_c(x)}{x^2} dx = \frac{\pi \theta \coth(\pi \theta) - 1}{a}.$$

Интегралы, содержащие Y_c :

$$\int_0^a \frac{x Y_s(x) dx}{x^2 - r^2} = \frac{\pi}{2} \coth(\pi \theta) Y_c(r) - \frac{\pi}{2 \sinh(\pi \theta)},$$

$$\int_0^a \frac{Y_s(x) dx}{x(x^2 - r^2)} = \frac{\pi}{2} \coth(\pi \theta) \frac{Y_c(r) - 1}{r^2},$$

$$\int_0^a \frac{x^3 Y_s(x) dx}{x^2 - r^2} = \frac{\pi \theta^2 a^2}{\sinh(\pi \theta)} + \frac{\pi r^2}{2 \sinh(\pi \theta)} [\cosh(\pi \theta) Y_c(r) - 1],$$

$$\int_0^a \frac{Y_s(x) dx}{x(a^2 - x^2)^{1/2}(x^2 - r^2)} = \frac{\pi}{2r^2} \tanh(\pi \theta) \left[\frac{Y_c(r)}{(a^2 - r^2)^{1/2}} - \frac{1}{a} \right],$$

$$\int_0^a \frac{x^3 Y_s(x) dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}(x^2 - r^2)} = \frac{\pi \theta a}{\cosh(\pi \theta)} + \frac{\pi r^2}{2(a^2 - r^2)^{1/2}} \tanh(\pi \theta) Y_c(r),$$

$$\int_0^a \left(\frac{a^2 - r^2}{a^2 - x^2} \right)^{1/2} \frac{x Y_s(x) dx}{x^2 - r^2} = \frac{\pi}{2} \tanh(\pi \theta) Y_c(r),$$

$$\int_0^a \frac{x(a^2 - x^2)^{1/2} Y_s(x) dx}{x^2 - r^2} = \frac{\pi}{2} \tanh(\pi \theta) (a^2 - r^2)^{1/2} Y_c(r) - \frac{\pi \theta a}{\cosh(\pi \theta)},$$

$$\int_0^a x Y_s(x) dx = \frac{\pi \theta^2 a^2}{\sinh(\pi \theta)}, \quad \int_0^a x^3 Y_s(x) dx = \frac{\pi \theta^2 (2 - \theta^2) a^4}{3 \sinh(\pi \theta)},$$

$$\int_0^a \frac{x Y_s(x) dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi \theta a}{\cosh(\pi \theta)}, \quad \int_0^a \frac{x^3 Y_s(x) dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi \theta (5 - 4\theta^2) a^3}{6 \cosh(\pi \theta)},$$

$$\int_0^a \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} Y_s(x) dx}{x} = \frac{\pi}{2} a \tanh(\pi \theta) - \frac{\pi \theta a}{\cosh(\pi \theta)},$$

$$\int_0^a \frac{Y_s(x) dx}{x(a^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2a} \tanh(\pi \theta), \quad \int_0^a x(a^2 - x^2)^{1/2} Y_s(x) dx = \frac{\pi \theta (1 + 4\theta^2) a^3}{6 \cosh(\pi \theta)},$$

$$\int_0^a \frac{Y_c(x) dx}{x^2 + r^2} = \frac{\pi \sinh[2\theta \tan^{-1}(a/r)]}{2r \sinh(\pi \theta)},$$

$$\int_0^a \frac{Y_s(x) x dx}{x^2 + r^2} = \frac{\pi \{ \cosh[2\theta \tan^{-1}(a/r)] - 1 \}}{2 \sinh(\pi \theta)},$$

Интегралы, содержащие комбинацию $Y_c + iY_s$:

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\theta \frac{dx}{x-r} = \frac{\pi}{i \sinh(\pi \theta)} \left[1 - \cosh(\pi \theta) \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^\theta \right],$$

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\theta \frac{dx}{(a+x)(x-r)} = \frac{\pi i \coth(\pi \theta)}{a+r} \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^\theta,$$

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\theta \frac{dx}{(x-r)(a^2-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi i \tanh(\pi\theta)}{(a^2-r^2)^{1/2}} \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^\theta,$$

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\theta \frac{(a^2-x^2)^{1/2} dx}{x-r} = \pi i \tanh(\pi\theta) (a^2-r^2)^{1/2} \left(\frac{a+r}{a-r} \right)^\theta - \frac{\pi(2ia\theta+r)}{\cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\theta dx = \frac{2\pi\theta a}{\sinh(\pi\theta)}, \quad \int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\theta x dx = \frac{2i\pi\theta^2 a^2}{\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\theta x^2 dx = \frac{2\pi\theta(1-2\theta^2)a^3}{3\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\theta \frac{dx}{x+a} = -\frac{i\pi}{\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\theta \frac{x dx}{x+a} = \frac{\pi a(i+2\theta)}{\sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\theta \frac{x^2 dx}{x+a} = -\frac{\pi a^2[2\theta+i(1-2\theta^2)]}{\sinh(\pi\theta)}.$$

Аппендикс А3.2

Некоторые интегралы, использованные при решении внешних основных смешанных граничных задач, представлены здесь. Предполагается, что $a < r < \infty$.

Интегралы, содержащие Y_c :

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)dx}{x^2 - r^2} = \frac{\pi}{2r} \coth(\pi\theta) Y_s(r),$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)dx}{x^2(x^2 - r^2)} = \frac{\pi}{2r^3} \coth(\pi\theta) Y_s(r) - \frac{\pi\theta}{ar^2 \sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty \frac{xY_c(x)dx}{(x^2 - a^2)^{1/2}(x^2 - r^2)} = \frac{\pi}{2} \tanh(\pi\theta) \frac{Y_s(r)}{(r^2 - a^2)^{1/2}}$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)dx}{x(x^2 - a^2)^{1/2}(x^2 - r^2)} = \frac{\pi}{2r^2} \left[-\frac{1}{a \cosh(\pi\theta)} + \tanh(\pi\theta) \frac{Y_s(r)}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \right],$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)dx}{x^3(x^2 - a^2)^{1/2}(x^2 - r^2)} = \frac{\pi}{2r^4} \left[-\frac{1}{a \cosh(\pi\theta)} + \tanh(\pi\theta) \frac{Y_s(r)}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \right] - \frac{\pi[(1/4) - \theta^2]}{a^3 r^2 \cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty \frac{(x^2 - a^2)^{1/2} Y_c(x)dx}{x(x^2 - r^2)} = \frac{\pi}{2r^2} \left[\frac{a}{\cosh(\pi\theta)} + \tanh(\pi\theta) (r^2 - a^2)^{1/2} Y_s(r) \right],$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)dx}{x^2} = \frac{\pi\theta}{a \sinh(\pi\theta)}, \quad \int_a^\infty \frac{Y_c(x)dx}{x(x^2 - a^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2a \cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_c(x)dx}{x^3(x^2 - a^2)^{1/2}} = \frac{\pi[(1/4) - \theta^2]}{a^3 \cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^{\infty} [1 - Y_c(x)] dx = a[\pi\theta \coth(\pi\theta) - 1],$$

$$\int_a^{\infty} [1 - Y_c(x)] \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^{1/2}} = \pi\theta a \tanh(\pi\theta),$$

$$\int_a^{\infty} \left[1 - \frac{x Y_c(x)}{(x^2 - a^2)^{1/2}} \right] dx = a[\pi\theta \tanh(\pi\theta) - 1],$$

$$\int_a^{\infty} (x^2 - a^2)^{1/2} d[Y_c(x)] = \pi\theta a \tanh(\pi\theta),$$

$$\int_a^{\infty} \left(\frac{x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - 1 \right) Y_c(x) dx = \frac{2\pi\theta a}{\sinh(2\pi\theta)},$$

$$\int_a^{\infty} \left(1 - \frac{(x^2 - a^2)^{1/2}}{x} \right) Y_c(x) dx = \frac{\pi a}{2 \cosh(\pi\theta)} - \frac{2\pi\theta a}{\sinh(2\pi\theta)},$$

Интегралы, содержащие Y_s :

$$\int_a^{\infty} \frac{x Y_s(x) dx}{x^2 - r^2} = \frac{\pi}{2} \coth(\pi\theta) [1 - Y_c(r)],$$

$$\int_a^{\infty} \frac{Y_s(x) dx}{x(x^2 - r^2)} = \frac{\pi}{2r^2} \left[\frac{1}{\sinh(\pi\theta)} - \coth(\pi\theta) Y_c(r) \right],$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_s(x)dx}{(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = -\frac{\pi \tanh(\pi\theta)}{2r(r^2-a^2)^{1/2}} Y_c(r),$$

$$\int_a^\infty \frac{x^2 Y_s(x)dx}{(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = \frac{\pi}{2} \tanh(\pi\theta) \left[1 - \frac{r}{(r^2-a^2)^{1/2}} Y_c(r) \right],$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_s(x)dx}{x^2(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-r^2)} = -\frac{\pi}{r^2} \left[\frac{\tanh(\pi\theta)}{2r(r^2-a^2)^{1/2}} Y_c(r) + \frac{\theta}{a^2 \cosh(\pi\theta)} \right],$$

$$\int_a^\infty \frac{(x^2-a^2)^{1/2} Y_s(x)dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{2} \tanh(\pi\theta) \left[1 - \frac{(r^2-a^2)^{1/2}}{r} Y_c(r) \right],$$

$$\int_a^\infty Y_s(x) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi\theta}{2}\right), \quad \int_a^\infty Y_s(x) \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi\theta^2}{a^2 \sinh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty Y_s(x) \frac{dx}{x^5} = \frac{\pi\theta^2(2-\theta^2)}{3a^4 \sinh(\pi\theta)}, \quad \int_a^\infty \frac{Y_s(x)dx}{(x^2-a^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \tanh(\pi\theta),$$

$$\int_a^\infty \frac{Y_s(x)dx}{x^2(x^2-a^2)^{1/2}} = \frac{\pi\theta}{a^2 \cosh(\pi\theta)},$$

$$\int_a^\infty (x^2-a^2)^{1/2} d[Y_s(x)] = \pi a^2 \tanh(\pi\theta)(\theta^2 - 1/4),$$

$$\int_a^\infty (x^2-a^2)^{1/2} Y_s(x) \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} \left[\tanh(\pi\theta) - \frac{2\theta}{\cosh(\pi\theta)} \right]$$

$$\int_a^{\infty} (x^2 - a^2)^{1/2} Y_s(x) \frac{dx}{x^4} = \frac{2\pi\theta(\theta^2 + 1/4)}{3a^2 \cosh(\pi\theta)}$$

$$\int_a^{\infty} \left[\frac{x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - 1 \right] Y_s(x) x dx = \frac{\pi a^2}{4} \left[\tanh(\pi\theta) + \frac{8\theta^2}{\sinh(2\pi\theta)} \right],$$

Интегралы, содержащие оба Y_c и Y_s :

$$\int_a^{\infty} [x Y_s(x) - 2a\theta Y_c(x)] dx = \pi a^2 \theta^2 \coth(\pi\theta),$$

$$\int_a^{\infty} [x Y_s(x) - 2a\theta Y_c(x)] \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^{1/2}} = \frac{\pi a^2}{4} \tanh(\pi\theta) (1 + 4\theta^2),$$

$$\int_a^{\infty} \left[1 - \frac{(x^2 - a^2)^{1/2}}{x} \right] [x Y_s(x) - 2a\theta Y_c(x)] dx$$

$$= \frac{2\pi\theta^2 a^2}{\sinh(2\pi\theta)} + \frac{\pi a^2}{4} \tanh(\pi\theta) - \frac{\pi\theta a^2}{\cosh(\pi\theta)}.$$

Аппендикс А3.3

Некоторые формулы, относящиеся к преобразованию и вычислению интегралов, представлены здесь.

Преобразования пределов интегрирования:

$$\int_0^{\rho} \frac{f(x) dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \rho \int_0^a \frac{dy}{\rho^2 - y^2} \int_y^a \frac{f(x) dx}{(x^2 - y^2)^{1/2}}$$

$$\int_{\rho}^a \frac{f(x)dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} (a^2 - \rho^2)^{1/2} \int_0^a \frac{ydy}{(y^2 - \rho^2)(a^2 - y^2)^{1/2}} \int_0^y \frac{f(x)dx}{(y^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\rho} \frac{dy}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{xf(x)dx}{x^2 - y^2} + \frac{\pi}{2\rho} \lim_{x \rightarrow 0} [xf(x)],$$

$$\int_0^a \frac{f(x)dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} (\rho^2 - a^2)^{1/2} \int_0^a \frac{ydy}{(\rho^2 - y^2)(a^2 - y^2)^{1/2}} \int_0^y \frac{f(x)dx}{(y^2 - x^2)^{1/2}}$$

Упрощения двух последовательных интегралов:

$$\int_{\rho}^a \frac{x^2 dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{f(y)dy}{(y^2 - x^2)^{1/2}} = -\frac{\pi}{2} \left[\rho f(\rho) + \int_{\rho}^a f(y)dy \right.$$

$$\left. - \frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \lim_{r \rightarrow a} [f(r)(a^2 - r^2)^{1/2}] \right];$$

$$\int_{\rho}^a \frac{dx}{x^2(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{f(y)dy}{(y^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2\rho} \left[-\frac{f(\rho)}{\rho^2} + \int_{\rho}^a \frac{f(y)dy}{y^3} \right].$$

$$\int_b^x \frac{tdt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \int_t^a \frac{f(y)dy}{(y^2 - t^2)^{1/2}} = \int_b^a f(y) \ln \frac{(x^2 - b^2)^{1/2} + (y^2 - b^2)^{1/2}}{|x^2 - y^2|^{1/2}} dy,$$

$$\int_x^a \frac{tdt}{(t^2 - x^2)^{1/2}} \int_b^t \frac{f(y)dy}{(t^2 - y^2)^{1/2}} = \int_b^a f(y) \ln \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} + (a^2 - y^2)^{1/2}}{|x^2 - y^2|^{1/2}} dy,$$

$$\int_{\rho}^a \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{(1+\kappa)/2}} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{f(r)rdr}{(r^2 - x^2)^{(1-\kappa)/2}} = -\frac{\pi}{2\cos(\pi\kappa/2)} f(\rho),$$

$$\int_0^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{(1+\kappa)/2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(r)rdr}{(x^2 - r^2)^{(1-\kappa)/2}} = \frac{\pi}{2\cos(\pi\kappa/2)} \left[f(\rho) - \frac{1}{\rho} \lim_{r \rightarrow 0} [rf(r)] \right]$$

$$\int_b^x \frac{dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \int_t^a \frac{f(y)dy}{(y^2 - t^2)^{1/2}} = (x^2 - b^2)^{1/2} \int_b^a \frac{f(y)dy}{(y^2 - x^2)(y^2 - b^2)^{1/2}},$$

$$\int_x^a \frac{dt}{(t^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \int_b^t \frac{f(y)dy}{(t^2 - y^2)^{1/2}} = (a^2 - x^2)^{1/2} \int_b^a \frac{f(y)dy}{(y^2 - x^2)(a^2 - y^2)^{1/2}},$$

$$\frac{d}{dx} \int_b^x \frac{tdt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \int_t^a \frac{f(y)dy}{(y^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{x}{(x^2 - b^2)^{1/2}} \int_b^a \frac{(y^2 - b^2)^{1/2} f(y)dy}{y^2 - x^2},$$

$$\frac{d}{dx} \int_x^a \frac{tdt}{(t^2 - x^2)^{1/2}} \int_b^t \frac{f(y)dy}{(t^2 - y^2)^{1/2}} = \frac{x}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \int_b^a \frac{(a^2 - y^2)^{1/2} f(y)dy}{y^2 - x^2},$$

$$\int_0^a \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(y)dy}{(x^2 - y^2)^{1/2}} = (\rho^2 - a^2)^{1/2} \int_0^a \frac{f(y)dy}{(\rho^2 - y^2)(a^2 - y^2)^{1/2}},$$

$$\int_a^\infty \frac{x dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_x^\infty \frac{df(t)}{(t^2 - x^2)^{1/2}} = \int_a^\infty \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{f(t)tdt}{(t^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$= (a^2 - \rho^2)^{1/2} \int_a^\infty \frac{f(t)tdt}{(t^2 - a^2)^{1/2}(t^2 - \rho^2)}.$$

Вычисление и/или преобразование некоторых интегралов:

$$\int_x^a \frac{d\rho}{\rho^{2n+1}(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_{\rho}^a \frac{t^{2n-1} dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{\pi(a^{2n} - x^{2n})}{4nax^{2n+1}},$$

$$\int_x^a \frac{d\rho}{\rho^{2n-1}(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_{\rho}^a \frac{t^{2n-1} dt}{(a^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{\pi(a^{2n-1} - x^{2n-1})}{2(2n-1)x^{2n-1}},$$

$$\begin{aligned} \int_x^a \frac{d\rho}{\rho^{2n-1}(a^2 - \rho^2)^{1/2}(\rho^2 - x^2)^{1/2}} &= \frac{1}{(ax)^{2n-1}} \int_x^a \frac{\rho^{2n-1} d\rho}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\pi}{2ax^{2n-1}} F(1-n, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1/2)}{2ax^{2n-1}\Gamma(n)} F(1-n, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}-n; \frac{x^2}{a^2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_x^a \frac{(a^2 - \rho^2)^{1/2} d\rho}{\rho^{2n+1}(\rho^2 - x^2)^{1/2}} &= \frac{1}{a^{2n+1}x^{2n+1}} \int_x^a \frac{(\rho^2 - x^2)^{1/2} \rho^{2n-1} d\rho}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} = \frac{\pi(a^2 - x^2)}{4ax^{2n+1}} \\ &\times F(1-n, \frac{1}{2}; 2; 1 - \frac{x^2}{a^2}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)(a^2 - x^2)}{2n!ax^{2n+1}} F(1-n, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}-n; \frac{x^2}{a^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_x^a \frac{(\rho^2 - x^2)^{1/2} d\rho}{\rho^{2n+1}(a^2 - \rho^2)^{1/2}} &= \frac{1}{a^{2n+1}x^{2n+1}} \int_x^a \frac{(a^2 - \rho^2)^{1/2} \rho^{2n-1} d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\pi(a^2 - x^2)}{4a^3x^{2n+1}} F(1-n, \frac{3}{2}; 2; 1 - \frac{x^2}{a^2}). \end{aligned}$$

$$\int_a^{\rho} \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = a^{2n+1} \rho^{2n} \int_a^{\rho} \frac{dx}{x^{2n+1}(x^2 - a^2)^{1/2}},$$

$$\int_{\rho}^a \frac{x^{2n} dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} = a^{2n+1} \rho^{2n} \int_{\rho}^a \frac{dx}{x^{2n+1}(a^2 - x^2)^{1/2}}.$$

$$\int_x^a \frac{d\rho}{\rho^{2n-1}(\rho^2-x^2)^{1/2}(\rho^2-t^2)^{1/2}} = \frac{(a^2-x^2)^{1/2}(a^2-t^2)^{1/2}}{a^2x^{2n-2}(x^2-t^2)} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{a^2-x^2}{a^2} \right)^m$$

$$\times \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-m)(m!)^2} \frac{d^m}{d\zeta^m} \left[(1-\zeta)^{m-1/2} \frac{\sin^{-1}\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} \right], \text{ s } \zeta = -\frac{t^2(a^2-x^2)}{a^2(x^2-t^2)}.$$

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n+1}(x^2-a^2)^{1/2}(x^2-\rho^2)} &= \frac{1}{a^{2n+1}\rho^{2n+2}} \int_0^\rho \frac{x^{2n+2}dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}(a^2-x^2)} \\ &= \frac{1}{a^{2n+1}\rho^{2n+2}} \left[\frac{\pi a^{2n+1}}{2(a^2-\rho^2)^{1/2}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)} a^{2(n-k)} \rho^{2k} \right], \end{aligned}$$

Правила изменения порядка интегрирования:

$$\int_0^a F(r)dr \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{f(\rho)\rho d\rho}{(r^2-\rho^2)^{1/2}} = - \int_0^a f(\rho)d\rho \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{F(r)rdr}{(r^2-\rho^2)^{1/2}} +$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \rho f(\rho) \frac{d}{d\rho} \int_\rho^a \frac{F(r)rdr}{(r^2-\rho^2)^{1/2}} \right\} + \lim_{\rho \rightarrow a} \left\{ f(\rho) \int_\rho^a \frac{F(r)rdr}{(r^2-\rho^2)^{1/2}} \right\},$$

$$\int_a^\infty F(\rho)d\rho \frac{d}{d\rho} \int_\rho^\infty \frac{f(x)x dx}{(x^2-\rho^2)^{1/2}} = - \int_a^\infty f(x)dx \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{F(\rho)\rho d\rho}{(x^2-\rho^2)^{1/2}},$$

$$\int_0^a \frac{dt}{t^2-x^2} \int_0^a \frac{f(t,r)dr}{r^2-t^2} = -\frac{\pi^2 f(x,x)}{4x^2} + \int_0^a dr \int_0^a \frac{f(t,r)dt}{(t^2-x^2)(r^2-t^2)},$$

$$\int_0^a dt \int_0^a \frac{f(t,r)dr}{r^2-t^2} = -\frac{\pi^2}{4}f(0,0) + \int_0^a dr \int_0^a \frac{f(t,r)dt}{(r^2-t^2)}.$$

ГЛАВА 4

ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН

Большинство решённых контактных задач и задач теории трещин имеет дело с напряжениями и перемещениями только в плоскости $z=0$. Некоторые решения этого типа были представлены в предыдущих главах. Существуют только несколько опубликованных *полных* решений (Sneddon, 1951; Elliott, 1949; Westmann, 1965), где явные выражения даны для поля перемещений и напряжений в простейших осесимметричных задачах (круглый штамп и круглая трещина). Явные выражения для поля перемещения около эллиптической трещины могут быть найдены в (Kassir and Sih, 1975). Знание полного решения очень важно для рассмотрения более сложных задач взаимодействий трещин, влияния внешних нагрузок на штампы и трещины, и т.д.

Мы представляем в этой главе *полное* решение задачи о круглой трещине в трансверсально изотропном упругом пространстве под действием произвольной нормальной и тангенциальной нагрузки. Все нужные функции Грина даны явно и в элементарных функциях. Приближённое аналитическое решение дано для плоской трещины произвольной формы. Точность решения высока, что достигнуто благодаря тому факту, что оно становится точным в случае эллиптической трещины. Вывод несингулярного основного интегрального уравнения позволяет нам рассмотреть очень близкие взаимодействия копланарных трещин. Некоторый материал, представленный в этой главе пока ещё не опубликованы. Остальная часть следует статьям (Fabrikant, 1987a, 1987b, 1987f, 1987g, 1988b, 1989).

4.1 Плоская трещина под действием произвольной нормальной нагрузки

Общее решение некоторых смешанных задач через три гармонические функции было дано в главе 2. Мы показываем здесь, что в случае плоской трещины под действием нормальной нагрузки, общее решение может быть выражено через только *одну* такую функцию. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое пространство ослабленное плоской трещиной S в плоскости $z=0$, с произвольным давлением p приложенным к обеим сторонам трещины. Благодаря симметрии, задача может быть сформулирована следующим образом: требуется найти решение системы дифференциальных уравнений (2.1.3) для полупространства $z \geq 0$, со смешанными граничными условиями на плоскости $z=0$:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -p(x,y), \text{ для } (x,y) \in S; \quad w=0, \text{ для } (x,y) \notin S; \\ \tau_z &= 0, \text{ для } -\infty < (x,y) < \infty.\end{aligned}\quad (4.1.1)$$

Эти условия могут быть удовлетворены представлением через одну гармоническую функцию. Положим, согласно (2.1.13),

$$F_1(z) = c_1 F(z_1), \quad F_2(z) = c_2 F(z_2), \quad F_3(z) = 0. \quad (4.1.2)$$

Выражения типа $F_1(z)$ и $F(z_1)$, и *т.д.*, везде в книге понимаются как $F_1(x,y,z)$ и $F(x,y,z_1)$ соответственно. Подстановка (4.1.2) и последнего из выражений (2.1.12) в третье условие (4.1.1) даёт:

$$c_1 = -c_2 \gamma_1 / m_1 \gamma_2 \quad (4.1.3)$$

Мы можем представить функцию F как потенциал простого слоя, то—есть

$$F(p, \phi, z) \equiv F(z) = \int \int_S \frac{\omega(N) dS}{R(M, N)}, \quad (4.1.4)$$

где ω обозначает перемещения сторон трещины $w(x,y,0)$, $R(M,N)$ — расстояние между точками $M(p, \phi, z)$ и $N(r, \psi, 0)$, и область интегрирования есть одна из поверхностей трещины S . Выражение (4.1.4) удовлетворяет второму условию (4.1.1) тождественно, благодаря хорошо известному свойству потенциала простого слоя. Внутри трещины то же свойство даёт:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=0} = -2\pi\omega = -2\pi w(x,y,0) \quad (4.1.5)$$

Теперь выражения (4.1.2), (4.1.4), (4.1.5), и (2.1.6) дают второе уравнение для c_1 и c_2 :

$$-m_1 c_1 / \gamma_1 - m_2 c_2 / \gamma_2 = 1/2\pi \quad (4.1.6)$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются из (4.1.3) и (4.1.6) в виде:

$$c_1 = -\frac{\gamma_1}{2\pi(m_1 - 1)}, \quad c_2 = -\frac{\gamma_2}{2\pi(m_2 - 1)}. \quad (4.1.7)$$

Потенциальные функции будут даны как

$$F_1(z) = -\frac{\gamma_1}{2\pi(m_1 - 1)} F(z_1), \quad F_2(z) = -\frac{\gamma_2}{2\pi(m_2 - 1)} F(z_2). \quad (4.1.8)$$

Подстановка (4.1.8) и (2.1.12) в первое условие (4.1.1) ведёт к основному интегральному уравнению:

$$p(N_0) = -\frac{1}{4\pi^2 H} \Delta \int \int_S \frac{\omega(N) dS}{R(N_0, N)}, \quad (4.1.9)$$

где, как и раньше, $R(N_0, N)$ обозначает расстояние между двумя точками N_0 и N , и оба $N_0, N \in S$. Следующие тождества были использованы:

$$m_1 m_2 = 1, \quad (m_1 - 1)/(m_1 + 1) = 2\pi A_{44} H (\gamma_1 - \gamma_2). \quad (4.1.10)$$

Мы рассмотрим ниже круглую трещину более подробно. Мы вернёмся к случаю общей трещины в секции 4.8.

Функции Грина для круглой трещины. Точное решение в элементарных функциях возможно, когда трещина круглая. Пусть a есть радиус трещины. Основное интегральное уравнение (4.1.9) может быть переписано в полярных координатах следующим образом (смотри секцию 2.8)

$$p(\rho, \phi) = -\frac{1}{\pi^2 H \rho} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}(x^2)$$

$$\times \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \omega(\rho_0, \phi). \quad (4.1.11)$$

Интегральный оператор, обратный к (4.1.11), определен в (2.8.2):

$$\omega(\rho, \phi) = 4H \int_{\rho}^a \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) p(\rho_0, \phi). \quad (4.1.12)$$

Другая форма решения может быть получена из (1.4.33), а именно,

$$\omega = \frac{2}{\pi} H \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{p(\rho_0, \phi_0)}{R} \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{R}\right) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \quad (4.1.13)$$

где

$$R = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}, \quad \eta = (a^2 - \rho^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} / a. \quad (4.1.14)$$

В этой главе мы не ограничиваем наше внимание плоскостью $z=0$: наша цель — получение *полного* решения. Мы будем называть $F(\rho, \phi, z)$, как она определена в (4.1.4), главной потенциальной функцией, так как обе функции F_1 и F_2 становятся сразу известными, когда функция F найдена. Подстановка (4.1.13) в (4.1.4) позволяет нам выразить главную потенциальную функцию следующим образом:

$$F(\rho, \phi, z) = \frac{2}{\pi} H \int_0^{2\pi} \int_0^a K(\rho, \phi, z; \rho_0, \phi_0) p(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \quad (4.1.15)$$

где функция Грина K есть:

$$K(M; N_\theta) = K(\rho, \phi, z; \rho_0, \phi_0)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{R(N, N_0)} \tan^{-1} \left[\frac{(a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{aR(N, N_0)} \right] \frac{r dr d\psi}{R(M, N)}.$$

(4.1.16)

Здесь $R(\cdot, \cdot)$ обозначает расстояние между соответствующими точками: $M(\rho, \phi, z)$, $N(r, \psi, 0)$, и $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$. Хотя мы не можем вычислить интеграл (4.1.16) в элементарных функциях, все его производные могут быть выражены в элементарных функциях, благодаря фундаментальному интегралу полученному в секции 1.6. Используя (1.6.19), мы можем записать:

$$\frac{\partial K}{\partial z} = -\frac{2\pi}{R(M, N_0)} \tan^{-1} \left[\frac{h}{R(M, N_0)} \right], \quad (4.1.17)$$

где

$$h = (a^2 - l_1^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} / a, \quad (4.1.18)$$

и сокращённое обозначение l_1 везде в книге обозначает $l_1(a)$, согласно определению (0.18). Заметим, что h стремится к η , как она определена в (4.1.14), когда $z \rightarrow 0$ и $\rho < a$. Выражения (4.1.15) и (4.1.17) позволяют нам записать:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -4H \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{R(M, N_0)} \tan^{-1} \left[\frac{h}{R(M, N_0)} \right] p(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (4.1.19)$$

Интеграл (4.1.19), хотя и выглядит трудным для вычисления даже для $p = \text{const}$, может быть выражен в элементарных функциях для любой полиномиальной нагрузки. Это становится очевидным, если мы используем эквивалентное представление через \mathcal{L} -оператор (смотри 1.4.31):

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -8\pi H \int_{l_2(0)}^{l_2} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^{g(x)} \frac{\rho_0 d\rho_0}{[g^2(x) - \rho_0^2]^{1/2}} \mathcal{L} \left(\frac{\rho \rho_0}{x^2} \right) p(\rho_0, \phi). \quad (4.1.20)$$

Здесь

$$g(x) = x \left[1 + \frac{z^2}{\rho^2 - x^2} \right]^{1/2}, \quad (4.1.21)$$

и сокращение l_2 всюду в книге обозначает $l_2(a)$, как определено в (0.14). Используя замену переменных $x = l_2(t)$, $t = g(x)$, выражение (4.1.20) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -8\pi H \int_0^a \frac{dl_2(t)}{[l_2^2(t) - \rho^2]^{1/2}} \int_0^t \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(t)}\right) p(\rho_0, \phi). \quad (4.1.22)$$

Функция F исчезает на бесконечности, она может быть определена из (4.1.22) в форме:

$$F(\rho, \phi, z) = -8\pi H \int_{-\infty}^z dz \int_0^a \frac{dl_2(t)}{[l_2^2(t) - \rho^2]^{1/2}} \int_0^t \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(t)}\right) p(\rho_0, \phi). \quad (4.1.23)$$

Используя свойство

$$\frac{\partial l_2(t)}{\partial t} = -\frac{[l_2^2(t) - \rho^2]^{1/2}}{[\rho^2 - l_1^2(t)]^{1/2}} \frac{\partial l_1(t)}{\partial z},$$

которое является следствием формулы (A4.1.28) и (A4.1.29) из Аппендикса A4.1, выражение (4.1.23) может быть модифицировано следующим образом:

$$F(\rho, \phi, z) = 8\pi H \int_0^a dt \int_0^t \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \int_0^{l_1(t)} \frac{dy}{(\rho^2 - y^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{y^2 \rho_0}{t^2 \rho}\right) p(\rho_0, \phi). \quad (4.1.24)$$

Выражение (4.1.24) удобно для точного вычисления потенциальной функции F и доказывает, что она может быть выражена в элементарных функциях для произвольной полиномиальной нагрузки. Простая замена переменных даёт другую формулу, эквивалентную (4.1.24):

$$F(\rho, \phi, z) = 8\pi H \int_0^a t dt \int_0^t \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \int_{l_2(t)}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2 - t^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) p(\rho_0, \phi). \quad (4.1.25)$$

Мы можем продолжать теперь с остальными производными функции Грина K , определённую в (4.1.16). Дифференцирование (4.1.16) даёт:

$$\Delta K(\rho, \phi, z; \rho_0, \phi_0) = - \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi}}{R^3(M, N)} \tan^{-1} \left[\frac{(a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a R(N, N_0)} \right] \frac{r dr d\psi}{R(N, N_0)}.$$

(4.1.26)

Этот интеграл вычислен в Аппендиксе А4.3. Используя (А4.3.11), мы можем написать:

$$\Lambda K(\rho, \phi, z; \rho_0, \phi_0) = \frac{2\pi}{\bar{q}} \left[\frac{z}{R_0} \tan^{-1} \frac{h}{R_0} - \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\bar{s}} \tan^{-1} \frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right], \quad (4.1.27)$$

где Λ дана в (2.1.5), h определён в (4.1.18), и

$$\bar{q} = \rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}, \quad \bar{s} = (a^2 - \rho \rho_0 e^{-i(\phi - \phi_0)})^{1/2},$$

$$R_0 = R(M, N_0) = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}. \quad (4.1.28)$$

Остальные производные, которые будут нужны для полного решения, имеют вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} K(\rho, \phi, z; \rho_0, \phi_0) = 2\pi \left\{ \frac{z}{R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) - \frac{h}{z[R_0^2 + h^2]} \left[\frac{\rho^2 - l_1^2}{l_2^2 - l_1^2} - \frac{z^2}{R_0^2} \right] \right\}, \quad (4.1.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \Lambda K(\rho, \phi, z; \rho_0, \phi_0) = 2\pi & \left\{ \frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) \right. \\ & \left. + \frac{h}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^2 K(\rho, \phi, z; \rho_0, \phi_0) = 2\pi & \left\{ \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\bar{q}\bar{s}} \left(\frac{2}{\bar{q}} - \frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) \right. \\ & - \frac{z(3R_0^2 - z^2)}{\bar{q}^2 R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) + \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} (l_2^2 - a^2)^{1/2} \rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{q}\bar{s}^2 [l_2^2 - \rho \rho_0 e^{-i(\phi - \phi_0)}]} \\ & \left. - \frac{zh}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{q}{\bar{q} R_0^2} - \frac{\rho^2 e^{2i\phi}}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - \rho^2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Этим заканчивается общее решение задачи о круглой трещине под действием произвольного давления. Формулы (4.1.17) и (4.1.24–4.1.31) представляют собой главные результаты этой секции.

Упражнение 4.1

1. Докажите тождество (4.1.10).
2. Подтвердите справедливость (4.1.19).
3. Проверьте вывод (4.1.27)–(4.1.31).
4. Найдите функции Грина для полу–бесконечной плоской трещины в трансверсально изотропном пространстве под действием нормальной нагрузки.
Совет: рассмотрите предельный случай (4.1.24–4.1.31), когда радиус $a \rightarrow \infty$, и начало координат двигается из центра круга к его границе.

4.2 Круглая трещина под действием сосредоточенной силы

Рассмотрим круглую трещину, открываемую двумя равными сосредоточенными силами P приложенными в противоположных направлениях в точках $(\rho_0, \phi_0, 0^\pm)$, $\rho_0 < a$. Формулы (2.1.6), (2.1.12), (4.1.8), (4.1.17), и (4.1.24–4.1.31) дают полное решение для поля перемещений и напряжений в элементарных функциях, а именно,

$$u = \frac{2}{\pi} HP \left[\frac{\gamma_1}{m_1 - 1} f_1(z_1) + \frac{\gamma_2}{m_2 - 1} f_1(z_2) \right], \quad (4.2.1)$$

$$w = \frac{2}{\pi} HP \left[\frac{m_1}{m_1 - 1} f_2(z_1) + \frac{m_2}{m_2 - 1} f_2(z_2) \right], \quad (4.2.2)$$

$$\sigma_1 = \frac{2P}{\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)} \left\{ \left[\frac{\gamma_1}{(m_1 + 1)\gamma_3^2} - \frac{1}{\gamma_1} \right] f_3(z_1) - \left[\frac{\gamma_2}{(m_2 + 1)\gamma_3^2} - \frac{1}{\gamma_2} \right] f_3(z_2) \right\}, \quad (4.2.3)$$

$$\sigma_2 = \frac{4}{\pi} HA_{66} P \left[\frac{\gamma_1}{m_1 - 1} f_4(z_1) + \frac{\gamma_2}{m_2 - 1} f_4(z_2) \right], \quad (4.2.4)$$

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\gamma_1 f_3(z_1) - \gamma_2 f_3(z_2) \right], \quad (4.2.5)$$

$$\tau_z = \frac{P}{\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[f_5(z_1) - f_5(z_2) \right], \quad (4.2.6)$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{q} \left[\frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\bar{s}} \tan^{-1} \frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z}{R_0} \tan^{-1} \frac{h}{R_0} \right], \quad (4.2.7)$$

$$f_2(z) = \frac{1}{R_0} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right), \quad (4.2.8)$$

$$f_3(z) = \left\{ -\frac{z}{R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) + \frac{h}{z(R_0^2 + h^2)} \left[\frac{\rho^2 - l_1^2}{l_2^2 - l_1^2} - \frac{z^2}{R_0^2} \right] \right\}, \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} f_4(z) = & \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\bar{q}\bar{s}} \left(\frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2} - \frac{2}{q} \right) \tan^{-1} \left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) \\ & + \frac{z(3R_0^2 - z^2)}{\bar{q}^2 R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) - \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} (l_2^2 - a^2)^{1/2} \rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{q}\bar{s}^2 [l_2^2 - \rho \rho_0 e^{-i(\phi - \phi_0)}]} \\ & + \frac{zh}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{q}{\bar{q} R_0^2} - \frac{\rho^2 e^{2i\phi}}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - \rho^2)} \right], \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$f_5(z) = - \left\{ \frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) + \frac{h}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^2} \right] \right\}. \quad (4.2.11)$$

Мы напоминаем, что $R_0 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}$. Выражение для σ_z (4.2.5) упрощается, когда $z=0$ и $\rho > a$, а именно,

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2} \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(\rho^2 - a^2)^{1/2} [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]}. \quad (4.2.12)$$

Определяя коэффициент концентрации напряжений

$$k_1 = \lim_{\rho \rightarrow a} \{(\rho - a)^{1/2} \sigma_z\},$$

следующий результат может быть получен из (4.2.12):

$$k_1 = \frac{P}{\pi^2 (2a)^{1/2}} \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (4.2.13)$$

Мы можем написать для произвольно распределённого давления:

$$k_1 = \frac{1}{\pi^2 (2a)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} p(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)},$$

который соответствует хорошо известному результату (Черепанов, 1974).

Упражнение 4.2

1. Выведите решение (4.2.1)–(4.2.6) для случая изотропного тела.
2. Проверьте вывод формул (4.2.7)–(4.2.11).

4.3 Сосредоточенная нагрузка вне круглой трещины

Рассмотрим трансверсально изотропное пространство, ослабленное круглой трещиной радиуса a в плоскости $z=0$. Пусть сосредоточенная сила P приложена в произвольной точке (ρ, ϕ, z) в направлении оси Oz . Стороны трещины свободны от напряжений. Нам требуется найти открывающие перемещения трещины и коэффициент концентрации напряжений первого мода k_1 .

Рассмотрим вторую систему в равновесии: две единичные сосредоточенные силы Q приложенные нормально к сторонам трещины в противоположных направлениях в точках $(\rho_0, \phi_0, 0^\pm)$. Обозначим нормальное перемещение в пространстве, вызываемое силами Q как w_Q ; в то время, как

w_p есть открывающее перемещение трещины, вызываемые силами P . Приложение теоремы взаимности к этим двум системам даёт:

$$Qw_p = Pw_Q,$$

который даёт открывающее перемещение трещины в виде:

$$w_p(\rho_0, \phi_0) = \frac{2}{\pi} HP \left[\frac{m_1}{m_1 - 1} f_2(z_1) + \frac{m_2}{m_2 - 1} f_2(z_2) \right], \quad (4.3.1)$$

с f_2 определенным в (4.2.8). Коэффициент концентрации напряжений может быть определен как

$$\begin{aligned} k_1(\phi_0) &= \frac{1}{8\pi H} \lim_{\rho_0 \rightarrow a} \frac{w_p(\rho_0, \phi_0)}{(a - \rho_0)^{1/2}} \\ &= \frac{P}{2(2a)^{1/2} \pi^2} \left[\frac{m_1}{m_1 - 1} f_6(z_1) + \frac{m_2}{m_2 - 1} f_6(z_2) \right], \end{aligned}$$

где

$$f_6(z) = (a^2 - l_1^2)^{1/2} / r_a^2, \quad r_a^2 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\phi - \phi_0) + z^2. \quad (4.3.2)$$

Коэффициент концентрации напряжений исчезает с z стремящимся к нулю для $\rho \geq a$.

В случае изотропного тела, выражение (4.3.1) превращается в

$$\begin{aligned} w_p(\rho_0, \phi_0) &= \frac{P}{\pi^2 \mu} \left\{ \frac{1 - \nu}{R_0} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{h}{R_0^2 + h^2} \left(\frac{\rho^2 - l_1^2}{l_2^2 - l_1^2} - \frac{z^2}{R_0^2} \right) - \frac{z^2}{R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Здесь μ есть модуль сдвига, и ν есть коэффициент Пуассона. Соответствующее выражение для коэффициента концентрации напряжений примет вид:

$$k_1(\phi_0) = \frac{P(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{(8a)^{1/2} \pi^2 r_a^2} \left[1 + \frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{z^2}{r_a^2} - \frac{\rho^2 - l_1^2}{2(l_2^2 - l_1^2)} \right) \right].$$

(4.3.4)

В случае осевой симметрии $\rho=0$, и формулы (4.3.3–4.3.4) упрощаются следующим образом:

$$w_p(\rho_0, \phi_0) = \frac{P}{\pi^2 \mu} \left\{ \left[\frac{1-\nu}{(\rho_0^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{z^2}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \right] \tan^{-1} \left(\frac{a^2 - \rho_0^2}{\rho_0^2 + z^2} \right)^{1/2} + \frac{z^2(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{2(\rho_0^2 + z^2)(a^2 + z^2)} \right\},$$

$$k_1 = \frac{Pa^{1/2}}{2\pi^2 \sqrt{2}(a^2 + z^2)} \left[1 + \frac{1}{1-\nu} \frac{z^2}{a^2 + z^2} \right],$$

что согласуется с результатами Collins (1962), который рассмотрел только осесимметричный случай.

Упражнение 4.3

1. Проверьте (4.3.2)
2. Выведите полное решение для случая произвольной сосредоточенной силы, приложенной вне круглой трещины в трансверсально изотропном пространстве.

4.4 Плоская трещина под действием произвольной сдвигающей нагрузки

Рассмотрим трансверсально изотропное упругое пространство ослабленное плоской трещиной S в плоскости $z=0$, с произвольной сдвигающей нагрузкой приложенной к обеим сторонам трещины антисимметрично. Задача может быть сформулирована следующим образом: найти решение системы дифференциальных уравнений (2.1.3) для полупространства $z \geq 0$, удовлетворяющее смешанным граничным условиям на плоскости $z=0$:

$$\tau_z = -\tau(x, y), \quad \text{для} \quad (x, y) \in S; \quad u = 0, \quad \text{для} \quad (x, y) \notin S;$$

$$\sigma_z = 0, \quad \text{для} \quad -\infty < (x, y) < \infty. \quad (4.4.1)$$

Решение этой задачи невозможно представить в форме (4.1.2). Более сложное представление необходимо, а именно,

$$F_1 = c_1(\Lambda\bar{\chi}_1 + \bar{\Lambda}\chi_1), \quad F_2 = c_2(\Lambda\bar{\chi}_2 + \bar{\Lambda}\chi_2), \quad F_3 = c_3(\Lambda\bar{\chi}_3 - \bar{\Lambda}\chi_3). \quad (4.4.2)$$

Здесь c_1 , c_2 и c_3 пока неизвестные постоянные; χ_1 , χ_2 и χ_3 пока неизвестные комплексные гармонические функции. Черта сверху обозначает комплексно сопряжённое значение везде в данной книге. Вводя обозначение $z_k = z/\gamma_k$, для $k=1, 2, 3$, мы положим также, что

$$\chi_1(z) = \chi(z_1), \quad \chi_2(z) = \chi(z_2), \quad \chi_3(z) = \chi(z_3). \quad (4.4.3)$$

Эти предположения позволяют нам свести задачу к отысканию только *одной* гармонической функции, что намного легче, чем поиск трёх функций. Подставляя (4.4.3) в третье уравнение (2.1.12), мы получаем первое уравнение для отыскания постоянных, а именно,

$$c_1 + m_2 c_2 = 0. \quad (4.4.4)$$

Третье условие в (4.4.1) таким образом удовлетворено. Подстановка (4.4.2) в (2.1.6) даёт:

$$u = c_1(\Lambda^2\bar{\chi}_1 + \Delta\chi_1) + c_2(\Lambda^2\bar{\chi}_2 + \Delta\chi_2) + ic_3(\Lambda^2\bar{\chi}_3 - \Delta\chi_3), \quad (4.4.5)$$

где дифференциальные операторы Λ и Δ определены в (2.1.5). Когда $z=0$, уравнение (4.4.5) превращается в

$$u = (c_1 + c_2 + ic_3)\Lambda^2\bar{\chi} + (c_1 + c_2 - ic_3)\Delta\chi. \quad (4.4.6)$$

Представляется удобным положить

$$c_1 + c_2 + ic_3 = 0. \quad (4.4.7)$$

Это предположение упрощает (4.4.6) следующим образом:

$$u = (c_1 + c_2 - ic_3)\Delta\chi, \quad (4.4.8)$$

и делает возможным представление

$$\chi(M) = \int \int_S \ln[R(M, N) + z] u(N) dS_N. \quad (4.4.9)$$

Представление (4.4.9) удовлетворяет второму условию (4.4.1) тождественно, и внутри трещины следующее уравнение становится справедливым:

$$c_1 + c_2 - ic_3 = 1/2\pi. \quad (4.4.10)$$

Решение системы уравнений (4.4.4), (4.4.7), и (4.4.10) даёт:

$$c_1 = -\frac{1}{4\pi(m_1 - 1)}, \quad c_2 = -\frac{1}{4\pi(m_2 - 1)}, \quad c_3 = \frac{i}{4\pi}. \quad (4.4.11)$$

Подстановка (4.4.2) и (4.4.11) в последнее выражение (2.1.12) даёт следующее выражение для тангенциального напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_z = & -\frac{A_{44}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{m_1 + 1}{m_1 - 1} (\Lambda^2 \bar{\chi}_1 + \Delta \chi_1) \right. \\ & \left. + \frac{m_2 + 1}{m_2 - 1} (\Lambda^2 \bar{\chi}_2 + \Delta \chi_2) + (\Lambda^2 \bar{\chi}_3 - \Delta \chi_3) \right]. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Выражение (4.4.12) упрощается для $z = 0$:

$$\tau_z = -\frac{A_{44}}{4\pi} \left[\left(\frac{m_1 + 1}{(m_1 - 1)\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_3} \right) \Lambda^2 \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial z} + \left(\frac{m_2 + 1}{(m_2 - 1)\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_3} \right) \Delta \frac{\partial \chi}{\partial z} \right]. \quad (4.4.13)$$

Наконец, удовлетворение первому условию (4.4.1) даёт основное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\tau(N_0) = -\frac{1}{2\pi^2(G_1^2 - G_2^2)} \left[G_1 \Delta \int \int_S \frac{u(N)}{R(N, N_0)} dS_N + G_2 \Lambda^2 \int \int_S \frac{\bar{u}(N)}{R(N, N_0)} dS_N \right], \quad (4.4.14)$$

где упругие константы G_1 и G_2 определены в (2.1.9).

Функции Грина в случае сдвигающей нагрузки. Интегро-дифференциальное уравнение (4.4.14) было решено точно для круглой трещины в секции 2.7. Замкнутое решение имеет вид: (смотри 2.7.53)

$$u(\rho, \phi) = \frac{G_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{1}{R} \tan^{-1} \frac{\eta}{R} - \frac{G_2}{G_1} \frac{(3 - \bar{t}) \eta}{a^2 (1 - \bar{t})^2} \right] \tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0$$

$$+ \frac{G_2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{q}{Rq} \tan^{-1} \frac{\eta}{R} + \frac{\eta [(q/\bar{q}) - t e^{2i\phi_0}]}{a^2(1-t)(1-\bar{t})} \right] \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \quad (4.4.15)$$

где R и η определены в (4.1.14), q определено в (4.1.28), черта сверху обозначает комплексно сопряжённое значение, и

$$t = \frac{\rho \rho_0}{a^2} e^{i(\phi - \phi_0)}. \quad (4.4.16)$$

Потенциальная функция может быть найдена подстановкой (4.4.15) и (4.4.9) в (4.4.2) и вычислением получившихся интегралов. Это выглядит, с первого взгляда, довольно трудно, тем не менее, далее будет показано, что все функции Грина могут быть выражены в элементарных функциях. Заметим следующее свойство:

$$\begin{aligned} & \Lambda \left[\frac{1}{R} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{R} \right) - \frac{(3-t)\eta}{a^2(1-t)^2} \right] \\ &= -\bar{\Lambda} \left[\frac{q}{Rq} \tan^{-1} \frac{\eta}{R} + \frac{\eta [(q/\bar{q}) - t e^{2i\phi_0}]}{a^2(1-t)(1-\bar{t})} \right]. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Введём следующее обозначение:

$$\begin{aligned} E_1(N, N_0) &= \frac{1}{R(N, N_0)} \tan^{-1} \left(\frac{(a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a R(N, N_0)} \right), \\ E_2(N, N_0) &= \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi - \phi_0)}) (a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi - \phi_0)})^2}, \\ E_3(N, N_0) &= \frac{r e^{i\psi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R(N, N_0)(r e^{-i\psi} - \rho_0 e^{-i\phi_0})} \tan^{-1} \left(\frac{(a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a R(N, N_0)} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{a(a^2 - r^2)^{1/2}(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi - \phi_0)})(a^2 - r\rho_0 e^{-i(\psi - \phi_0)})} \left[\frac{r e^{i\psi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{r e^{-i\psi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} - \frac{r\rho_0}{a^2} e^{i(\psi + \phi_0)} \right]. \quad (4.4.18)$$

Здесь точки N и N_0 характеризуются цилиндрическими координатами $(r, \psi, 0)$ и $(\rho_0, \phi_0, 0)$ соответственно. Заметим, следующие взаимоотношения симметрии:

$$E_1(N, N_0) = E_1(N_0, N), \quad E_2(N, N_0) = \bar{E}_2(N_0, N), \\ E_3(N, N_0) = E_3(N_0, N). \quad (4.4.19)$$

Пусть $R(M, N)$ обозначает расстояние между точками $M(\rho, \phi, z)$ и $N(r, \psi, 0)$. Используя (4.4.17) мы можем написать

$$\int_S \int \Lambda [E_1(N, N_0) - E_2(N, N_0)] \frac{dS_N}{R(M, N)} = - \int_S \int \bar{\Lambda} E_3(N, N_0) \frac{dS_N}{R(M, N)}. \quad (4.4.20)$$

Интегрирование по частям в (4.4.20) ведёт к важному свойству:

$$\int_S \int [E_1(N, N_0) - E_2(N, N_0)] \Lambda \left(\frac{1}{R(M, N)} \right) dS_N = - \int_S \int E_3(N, N_0) \bar{\Lambda} \left(\frac{1}{R(M, N)} \right) dS_N. \quad (4.4.21)$$

Ещё два свойства могут быть получены путём приложения Λ и $\bar{\Lambda}$ к обоим сторонам формулы (4.4.21), а именно,

$$\int_S \int [E_1(N, N_0) - E_2(N, N_0)] \Lambda^2 \left(\frac{1}{R(M, N)} \right) dS_N = - \int_S \int E_3(N, N_0) \Delta \left(\frac{1}{R(M, N)} \right) dS_N, \quad (4.4.22)$$

$$\int_S \int [E_1(N, N_0) - E_2(N, N_0)] \Delta \left(\frac{1}{R(M, N)} \right) dS_N = - \int_S \int E_3(N, N_0) \bar{\Lambda}^2 \left(\frac{1}{R(M, N)} \right) dS_N. \quad (4.4.23)$$

Свойства (4.4.21–4.4.23) позволят нам заменить вычисление различных интегралов от E_3 , которые выглядят очень трудными, вычислением интегралов от выражений, содержащих E_1 и E_2 , и некоторые из них уже были вычислены (4.1.27–4.1.31), в то время, как оставшиеся могут быть вычислены относительно легко (смотри Аппендикс А4.4).

Введём обозначения:

$$X = \Lambda \bar{\chi} + \bar{\Lambda} \chi, \quad Y = \Lambda \bar{\chi} - \bar{\Lambda} \chi. \quad (4.4.24)$$

Чтобы получить полное решение, нам будут нужны следующие выражения для различных производных X и Y : тангенциальные перемещения определены через ΛX и ΛY ; нормальные перемещения определены через $\partial X / \partial z$; поле напряжений может быть вычислен через $\partial^2 X / \partial z^2$, $\Lambda^2 X$, $\Lambda^2 Y$, $\Lambda(\partial X / \partial z)$, $\Lambda(\partial Y / \partial z)$. Все нужные функции Грина могут быть выражены как различные производные двух основных функций, а именно,

$$\begin{aligned} K_1(M, N_0) &= \int \int_S E_1(N, N_0) \ln[R(M, N) + z] dS_N, \\ K_2(M, N_0) &= \int \int_S E_2(N, N_0) \ln[R(M, N) + z] dS_N. \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

Мы переписываем формулу (4.4.15) как

$$\begin{aligned} u(N) &= \frac{G_1}{\pi} \int \int_S [E_1(N, N_0) - \frac{G_2^2}{G_1^2} \bar{E}_2(N, N_0)] \tau(N_0) dS_{N_0} \\ &+ \frac{G_2}{\pi} \int \int_S E_3(N, N_0) \bar{\tau}(N_0) dS_{N_0}. \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Подставляя (4.4.9) и (4.4.26) в (4.4.24) и используя свойства (4.4.21–4.4.23), мы получим следующие результаты:

$$\begin{aligned} X &= \frac{G_1 - G_2}{\pi} \left[\bar{\Lambda} \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau dS + \Lambda \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} dS \right], \\ Y &= \frac{G_1 + G_2}{\pi} \left[-\bar{\Lambda} \int \int_S \left(K_1 - \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau dS + \Lambda \int \int_S \left(K_1 - \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} dS \right]. \end{aligned}$$

Нам только будут нужны следующие производные X и Y для полного решения:

$$\Lambda X = \frac{G_1 - G_2}{\pi} \left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau \, dS + \Lambda^2 \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} \, dS \right], \quad (4.4.27)$$

$$\Lambda Y = \frac{G_1 + G_2}{\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \int_S \left(K_1 - \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau \, dS + \Lambda^2 \int \int_S \left(K_1 - \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} \, dS \right], \quad (4.4.28)$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{G_1 - G_2}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\Lambda} \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau \, dS + \Lambda \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} \, dS \right], \quad (4.4.29)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{G_1 + G_2}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\bar{\Lambda} \int \int_S \left(K_1 - \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau \, dS + \Lambda \int \int_S \left(K_1 - \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} \, dS \right], \quad (4.4.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Lambda X = \frac{G_1 - G_2}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau \, dS + \Lambda^2 \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} \, dS \right], \quad (4.4.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Lambda Y = \frac{G_1 + G_2}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \int_S \left(K_1 - \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau \, dS + \Lambda^2 \int \int_S \left(K_1 - \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} \, dS \right], \quad (4.4.32)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \frac{G_1 - G_2}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\bar{\Lambda} \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau \, dS + \Lambda \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} \, dS \right], \quad (4.4.33)$$

$$\Lambda^2 X = \frac{G_1 - G_2}{\pi} \Lambda \left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau \, dS + \Lambda^2 \int \int_S \left(K_1 + \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} \, dS \right], \quad (4.4.34)$$

$$\Lambda^2 Y = \frac{G_1 + G_2}{\pi} \Lambda \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \int_S \left(K_1 - \frac{G_2}{G_1} \bar{K}_2 \right) \tau \, dS + \Lambda^2 \int \int_S \left(K_1 - \frac{G_2}{G_1} K_2 \right) \bar{\tau} \, dS \right], \quad (4.4.35)$$

Все интегралы в (4.4.27–4.4.35) вычислены в элементарных функциях в Аппендиксе А4.4 и в (4.1.27–4.1.31).

Полученные выше результаты могут быть приложены к решению задачи о круглой трещине под действием тангенциальной сосредоточенной нагрузки. Решение даст нам все функции Грина, относящиеся к случаю. Рассмотрим бесконечное трансверсально изотропное пространство ослабленное круглой трещиной радиуса a в плоскости $z=0$. Пусть две равные сосредоточенные силы $T = T_x + iT_y$ приложены к сторонам трещины антисимметрично в точках $N_0(\rho_0, \phi_0, 0^\pm)$. Ранее полученные результаты дают полное решение в элементарных функциях:

$$u = \frac{\gamma_1 \gamma_2 H}{\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{m_k - 1} \left\{ \left[f_2(z_k) + \frac{G_2}{G_1} \bar{f}_7(z_k) \right] T + \left[f_{16}(z_k) + \frac{G_2}{G_1} f_8(z_k) \right] \bar{T} \right\} + \frac{\beta}{\pi} \left\{ \left[f_2(z_3) - \frac{G_2}{G_1} \bar{f}_7(z_3) \right] T + \left[f_{16}(z_3) - \frac{G_2}{G_1} f_8(z_3) \right] \bar{T} \right\}, \quad (4.4.36)$$

$$w = \frac{2}{\pi} H \gamma_1 \gamma_2 \Re \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{(m_k - 1) \gamma_k} \left[\bar{f}_1(z_k) + \frac{G_2}{G_1} \bar{f}_9(z_k) \right] T, \quad (4.4.37)$$

$$\sigma_1 = \Re \left\{ \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\pi^2 (\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left[\frac{1}{\gamma_3^2 (m_k + 1)} - \frac{1}{\gamma_k^2} \right] \left[\bar{f}_5(z_k) + \frac{G_2}{G_1} \bar{f}_{10}(z_k) \right] T \right\}, \quad (4.4.38)$$

$$\sigma_2 = -\frac{2}{\pi} A_{66} H \gamma_1 \gamma_2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{m_k - 1} \left\{ \left[f_5(z_k) + \frac{G_2}{G_1} \bar{f}_{13}(z_k) \right] T + \left[f_{11}(z_k) + \frac{G_2}{G_1} f_{12}(z_k) \right] \bar{T} \right\} - \frac{1}{\pi^2 \gamma_3} \left\{ \left[-f_5(z_3) + \frac{G_2}{G_1} \bar{f}_{13}(z_3) \right] T + \left[f_{11}(z_3) - \frac{G_2}{G_1} f_{12}(z_3) \right] \bar{T} \right\}, \quad (4.4.39)$$

$$\sigma_z = \Re \left\{ \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\pi^2 (\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left[\bar{f}_5(z_k) + \frac{G_2}{G_1} \bar{f}_{10}(z_k) \right] T \right\}, \quad (4.4.40)$$

$$\begin{aligned} \tau_z = & \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k}{\gamma_k} \left\{ \left[f_3(z_k) + \frac{G_2}{G_1} \bar{f}_{14}(z_k) \right] T + \left[-f_4(z_k) + \frac{G_2}{G_1} f_{15}(z_k) \right] \bar{T} \right\} \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \left[f_3(z_3) - \frac{G_2}{G_1} \bar{f}_{14}(z_3) \right] T + \left[f_4(z_3) + \frac{G_2}{G_1} f_{15}(z_3) \right] \bar{T} \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.41)$$

Здесь \Re обозначает действительную часть комплексного числа, упругие постоянные определены в (2.1.9), и функции f с индексом меньше, чем 6, даны формулами (4.2.7–4.2.11), и остальные функции вычислены в Аппендиксе А4.4, а именно,

$$f_7(z) = \frac{ha^2}{s^2} \left[\frac{3}{s^2} - \frac{t}{l_2^2 - a^2 t} - \frac{3(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{s^3} \tan^{-1} \left(\frac{s}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) \right], \quad (4.4.42)$$

$$\begin{aligned} f_8(z) = & \frac{1}{q} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left\{ \frac{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{\bar{q}} \left[\tan^{-1} \left(\frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{e^{i\phi}}{\rho} \left[\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \left(1 + \frac{\rho^2}{l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)}} \right) - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

$$\begin{aligned} f_9(z) = & -\rho e^{i\phi} \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a^3} \left\{ \frac{1}{t} \sin^{-1} \left(\frac{a}{l_2} \right) + \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{(1-t)(l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)})} \right. \\ & \left. - \frac{1}{t(1-t)^{3/2}} \tan^{-1} \left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.4.44)$$

$$f_{10}(z) = -\frac{h\rho e^{i\phi}(3l_2^2 - a^2 t)}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - a^2 t)^2}, \quad (4.4.45)$$

$$f_{11}(z) = \frac{1}{q} \left[\frac{3R_0^4 + 6R_0^2 z^2 - z^4}{R_0^3 q^2} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) - (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left[\frac{z}{s} \left(\frac{8}{q^2} - \frac{4\rho_0 e^{i\phi_0}}{s^2 q} \right) \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\rho_0^2 e^{2i\phi_0}}{\bar{s}^4} \left) \tan^{-1} \left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) - \frac{e^{i\phi}}{\rho} \left(\frac{2e^{i\phi}}{\rho} + \frac{3}{q} \right) \right. \\
& - \frac{3(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{\bar{q}^2} \left[\tan^{-1} \frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} - \tan^{-1} \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \right] \\
& + \frac{ha^2 e^{i\phi}}{\rho \bar{s}^2} \left[\frac{2\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2} - \frac{2e^{i\phi}}{\rho} - \frac{2}{\bar{q}} + \left(\frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2} - \frac{2}{\bar{q}} \right) \frac{(l_2^2 - a^2)\bar{t}}{l_2^2 - a^2 \bar{t}} \right] \\
& - \frac{h}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{\bar{q} \rho e^{3i\phi}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{e^{i\phi}(l_2^2 - \rho^2)}{\rho \bar{q}} - \frac{z^2 q}{R_0^2 \bar{q}} + 2e^{2i\phi} \right] \Bigg\}, \tag{4.4.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{12}(z) = & \frac{1}{q} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left\{ \frac{3(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{\bar{q}^2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \right) \right] \right. \\
& - \frac{e^{2i\phi}(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(l_2^2 - l_1^2)} \left[\frac{l_2^2 + \rho^2}{l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)}} + \frac{2\rho^2(l_2^2 - a^2)}{(l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)})^2} + 1 \right] \\
& \left. + \frac{e^{i\phi}}{\rho} \left[\frac{3}{\bar{q}} + \frac{2e^{i\phi}}{\rho} - \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \left(\frac{l_2^2 + 2\rho^2}{\bar{q}(l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)})} + 2 \left(\frac{1}{\bar{q}} + \frac{e^{i\phi}}{\rho} \right) \right) \right] \right\}, \tag{4.4.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{13}(z) = & -h \left\{ \frac{a^2}{\bar{s}^2} \rho_0 e^{i\phi_0} \left[\frac{15(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{\bar{s}^5} \tan^{-1} \left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) - \frac{15}{\bar{s}^4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{5}{\bar{s}^2(l_2^2 - a^2 \bar{t})} + \frac{2\bar{t}}{(l_2^2 - a^2 \bar{t})^2} \right] + \frac{\rho e^{i\phi}(3l_2^2 - a^2 \bar{t})}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - a^2 \bar{t})^2} \right\}, \tag{4.4.48}
\end{aligned}$$

$$f_{14}(z) = \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a^3(1-t)} \left\{ \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)})} \left[\frac{3(l_2^2 - l_1^2 t)}{1-t} \right. \right.$$

$$+ \frac{\rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)} (2l_2^2 + l_1^2 t - 3\rho^2)}{l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)}} \Big] - \frac{3}{(1-t)^{3/2}} \tan^{-1} \left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) \Big\}, \quad (4.4.49)$$

$$f_{15}(z) = \frac{\rho^2 e^{2i\phi} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} (l_2^2 - a^2)^{1/2} (3l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)})}{l_2^2 (l_2^2 - l_1^2) (l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)})^2}, \quad (4.4.50)$$

$$f_{16}(z) = \frac{1}{q} \left[\frac{R_0^2 + z^2}{R_0 \bar{q}} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) + (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left[\frac{z}{\bar{s}} \left(\frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2} - \frac{2}{q} \right) \tan^{-1} \left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{\bar{q}} \left(\tan^{-1} \frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} - \tan^{-1} \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \right) + \frac{e^{i\phi}}{\rho} \right] - \frac{e^{i\phi} h a^2}{\rho \bar{s}^2} \right]. \quad (4.4.51)$$

Решение (4.4.36–4.4.51) представляет, фактически, явные выражения для функций Грина, и позволяет нам записать полное решение для случая произвольной тангенциальной нагрузки в квадратурах. Общие результаты упрощаются значительно для $z=0$, а именно,

$$u = \frac{G_1}{\pi} \left[\frac{1}{R} \tan^{-1} \frac{\eta}{R} - \frac{G_2}{G_1 a^2 (1 - \bar{t})^2} \right] T \\ + \frac{G_2}{\pi} \left[\frac{q}{R \bar{q}} \tan^{-1} \frac{\eta}{R} + \frac{\eta [(q/\bar{q}) - t e^{2i\phi_0}]}{a^2 (1 - t)(1 - \bar{t})} \right] \bar{T}, \quad \text{для} \quad \rho < a, \quad (4.4.52)$$

$$w = H \alpha (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \Re \left\{ \left[\frac{1}{qs} + \frac{G_2 e^{-i\phi_0}}{G_1 \rho_0} \left(\frac{a^2}{s^3} - \frac{1}{a} \right) \right] T \right\} \quad \text{для} \quad \rho \leq a, \\ w = \frac{2}{\pi} H \alpha (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \Re \left\{ \left[\frac{1}{qs} \tan^{-1} \frac{s}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{G_2 (a^2 e^{-i\phi_0})}{G_1 \rho_0 s^3} \tan^{-1} \frac{\bar{s}}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(\rho^2 - a^2)^{1/2}}{\bar{s}^2 q} - \frac{e^{-i\phi_0}}{a \rho_0} \sin^{-1} \left(\frac{a}{\rho} \right) \right] T \right\}, \quad \text{для} \quad \rho > a \quad (4.4.53)$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{\pi^2} \Re \left\{ \left(2\pi H A_{66} \gamma_1 \gamma_2 - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2} \right) \left[\frac{1}{qR} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{R} \right) + \frac{\eta}{a^2(1-t)(1-\bar{t})} \left(\frac{1}{q} + \frac{\rho e^{-i\phi}}{a^2 - \rho^2} \right) + \frac{G_2}{G_1} \frac{\eta \rho e^{-i\phi} (3 - \bar{t})}{(a^2 - \rho^2) a^2 (1 - \bar{t})^2} \right] T \right\}, \quad \text{для } \rho < a,$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \text{для } \rho > a, \quad (4.4.54)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \left(2\pi A_{66} H \gamma_1 \gamma_2 + \frac{1}{\gamma_3} \right) \left[f_5(0) T + \frac{G_2}{G_1} f_{12}(0) \bar{T} \right] + \left(2\pi A_{66} H \gamma_1 \gamma_2 - \frac{1}{\gamma_3} \right) \left[f_{11}(0) \bar{T} + \frac{G_2}{G_1} \bar{f}_{13}(0) T \right] \right\},$$

$$\sigma_z = 0, \quad (4.4.55)$$

$$\tau_z = \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\pi^2 (\rho^2 - a^2)^{1/2}} \left[\frac{T}{R^2} + \frac{G_2}{G_1} \frac{e^{2i\phi} (3\rho - \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)}) \bar{T}}{\rho (\rho - \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)})^2} \right], \quad \text{для } \rho > a. \quad (4.4.56)$$

Здесь R и η определены в (4.1.14). Коэффициент концентрации напряжений второго и третьего мода может быть выражен через разложение $\tau^{(n)} = \tau_{zn} + i\tau_{tz}$, который связан с τ_z соотношением $\tau_z = \tau^{(n)} e^{i\phi}$. Вводя комплексный коэффициент концентрации напряжений

$$k_2 + ik_3 = \lim_{\rho \rightarrow a} \{ (\rho - a)^{1/2} \tau_z e^{-i\phi} \}, \quad (4.4.57)$$

мы получим из (4.4.56)

$$k_2 + ik_3 = \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\pi^2 (2a)^{1/2}} \left[\frac{T e^{-i\phi}}{\rho_0^2 + a^2 - 2a\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)} \right]$$

$$\left. + \frac{G_2 e^{i\Phi} (3a - \rho_0 e^{i(\Phi-\Phi_0)}) \bar{T}}{G_1 a (a - \rho_0 e^{i(\Phi-\Phi_0)})^2} \right]. \quad (4.4.58)$$

В общем случае произвольной распределённой нагрузки, коэффициент концентрации напряжений принимает вид:

$$k_2 + ik_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\pi^2 (2a)^{1/2}} \left[\frac{e^{-i\Phi} \tau(\rho_0, \Phi_0)}{\rho_0^2 + a^2 - 2a\rho_0 \cos(\Phi - \Phi_0)} + \frac{G_2 (3a - \rho_0 e^{i(\Phi-\Phi_0)}) e^{i\Phi} \bar{\tau}(\rho_0, \Phi_0)}{G_1 a (a - \rho_0 e^{i(\Phi-\Phi_0)})^2} \right] \rho_0 d\rho_0 d\Phi_0, \quad (4.4.59)$$

что согласуется с (2.7.30).

Упражнение 4.4

1. Выведите общее решение в случае изотропии.
2. Найдите изотропный эквивалент формулы (4.4.14).
3. Проверьте свойство (4.4.17).
4. Выведите решение (4.4.36)–(4.4.51).
5. Выведите решение (4.4.36)–(4.4.51) для случая изотропии.

4.5 Круглая трещина под действием однородного давления

Пусть круглая трещина радиуса a открывается давлением $p = \text{const}$. В этом случае мы получаем из (4.1.12)

$$\omega(\rho, \Phi) = 4Hp(a^2 - \rho^2)^{1/2}. \quad (4.5.1)$$

Потенциальная функция F может быть получена подстановкой (4.5.1) в (4.1.4). Интеграл может быть вычислен в элементарных функциях (смотри А4.1.4), а именно,

$$F = 2\pi H p \left[(2a^2 + 2z^2 - \rho^2) \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{2a^2 - 3l_1^2}{a} (l_2^2 - a^2)^{1/2} \right]. \quad (4.5.2)$$

Полное решение может быть выражено через различные производные потенциальной функции, как предписано формулами (2.1.6) и (2.1.12). Все производные даны в Аппендиксе А4.1. Решение имеет вид:

$$u = 2Hp\rho e^{i\phi} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right) - \frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2} \right] \right\}, \quad (4.5.3)$$

$$w = 4Hp \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{m_k}{m_k - 1} \left[(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} - z \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right) \right] \right\}, \quad (4.5.4)$$

$$\sigma_1 = 8Hp A_{66} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\gamma_k^2 - (m_k + 1)\gamma_3^2}{\gamma_k(m_k - 1)} \left[\frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right) \right] \right\}, \quad (4.5.5)$$

$$\sigma_2 = -8Hp A_{66} a e^{2i\phi} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \left[\frac{l_{1k}^2 (l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 (l_{2k}^2 - l_{1k}^2)} \right] \right\}, \quad (4.5.6)$$

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 \left\{ (-1)^{k+1} \gamma_k \left[\frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 - l_{1k}^2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right) \right] \right\}, \quad (4.5.7)$$

$$\tau_z = \frac{2pa^2 \rho e^{i\phi}}{\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 \left\{ (-1)^k \frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 (l_{2k}^2 - l_{1k}^2)} \right\}, \quad (4.5.8)$$

Здесь обозначения были введены:

$$\begin{aligned} l_{1k} &= \frac{1}{2} \{ [(a + \rho)^2 + z_k^2]^{1/2} - [(a - \rho)^2 + z_k^2]^{1/2} \}, \\ l_{2k} &= \frac{1}{2} \{ [(a + \rho)^2 + z_k^2]^{1/2} + [(a - \rho)^2 + z_k^2]^{1/2} \}, \\ z_k &= z/\gamma_k, \quad \text{для} \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Задача была впервые решена Эллиоттом (1949) методом интегральных преобразований. Наши результаты в основном согласуются с результатами Эллиотта, который выразил их в форме интегралов, содержащих функции Бесселя, а именно,

$$C_n^m = \int_0^{\infty} x^{n-2} \cos(x) J_m(x \frac{\rho}{a}) \exp(-x \frac{z}{a}) dx,$$

$$S_n^m = \int_0^{\infty} x^{n-2} \sin(x) J_m(x \frac{\rho}{a}) \exp(-x \frac{z}{a}) dx.$$

Эти интегралы могут быть вычислены в элементарных функциях, и результаты в наших обозначениях запишутся

$$S_1^0 = \sin^{-1}(\frac{a}{l_2}), \quad S_2^0 = \frac{a(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2}, \quad C_2^0 = \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2},$$

$$C_3^0 = \frac{a(a^2 - l_1^2)^{1/2} [l_2^4 + a^2(\rho^2 - 2a^2 - 2z^2)]}{(l_2^2 - l_1^2)^3},$$

$$S_3^0 = \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2} [a^2(2a^2 + 2z^2 - \rho^2) - l_1^4]}{(l_2^2 - l_1^2)^3},$$

$$C_1^1 = \frac{z[a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}]}{\rho(a^2 - l_1^2)^{1/2}}, \quad S_1^1 = \frac{a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{\rho},$$

$$S_1^2 = \frac{z[a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}]^2}{\rho^2(a^2 - l_1^2)^{1/2}}, \quad S_2^1 = \frac{al_1(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)},$$

$$C_2^1 = \frac{a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{\rho} - \frac{al_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)},$$

$$C_3^1 = \frac{a^2 \rho (l_2^2 - a^2)^{1/2} (l_2^2 + 3l_1^2 - 4a^2)}{(l_2^2 - l_1^2)^3},$$

$$\begin{aligned}
S_3^1 &= \frac{a^2 \rho (a^2 - l_1^2)^{1/2} (3l_2^2 + l_1^2 - 4a^2)}{(l_2^2 - l_1^2)^3}, \\
C_2^2 &= \frac{2a[(l_2^2 - a^2)^{1/2} - z]}{\rho^2} - \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2}, \\
S_2^2 &= \frac{2a[a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}]}{\rho^2} - \frac{a(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2}, \\
C_3^2 &= \frac{2a}{\rho} \left[\frac{a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{\rho} - \frac{al_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)} \right] \\
&\quad - \frac{a(a^2 - l_1^2)^{1/2} [l_2^4 + a^2(\rho^2 - 2a^2 - 2z^2)]}{(l_2^2 - l_1^2)^3}.
\end{aligned}$$

Имеются некоторые опечатки (или ошибки) в статье Эллиотта. Например, согласно его формуле (4.2.5), тангенциальное перемещение u исчезает на плоскости $z=0$, что не может быть правильно; имеются некоторые пропущенные члены и очевидные опечатки в формуле (4.2.6).

В предельном случае $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_3 \rightarrow 1$, $m_1 \rightarrow m_2 \rightarrow 1$, $H = (1 - \nu)/2\pi\mu$, $A_{44} = A_{66} = \mu$, и формулы (4.5.3–4.5.8) дают полное решение для изотропного тела. Используя правило Лопиталя, мы получим

$$u = \frac{p \operatorname{Re}^{i\phi}}{2\pi\mu} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \right] + \frac{2a^2|z|(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)} \right\}, \quad (4.5.10)$$

$$\begin{aligned}
w = \frac{2p}{\pi\mu} \left\{ 2(1-\nu) \left[\frac{z}{|z|} (a^2 - l_1^2)^{1/2} - z \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \right] \right. \\
\left. + z \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} \right] \right\}, \quad (4.5.11)
\end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \frac{2p}{\pi} \left\{ (1+2\nu) \left[\frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \right] + \frac{az^2[l_1^4 + a^2(2a^2 + 2z^2 - 3\rho^2)]}{(l_2^2 - l_1^2)^3(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right\}, \quad (4.5.12)$$

$$\sigma_2 = \frac{2p}{\pi} \frac{al_1^2 e^{2i\phi} (l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 (l_2^2 - l_1^2)} \left\{ 1 - 2\nu + \frac{z^2[a^2(6l_2^2 - 2l_1^2 + \rho^2) - 5l_2^4]}{(l_2^2 - l_1^2)^2(l_2^2 - a^2)} \right\}, \quad (4.5.13)$$

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi} \left\{ \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{az^2[l_1^4 + a^2(2a^2 + 2z^2 - 3\rho^2)]}{(l_2^2 - l_1^2)^3(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right\}, \quad (4.5.14)$$

$$\tau_z = -\frac{2p}{\pi} \frac{zl_1 e^{i\phi} (l_2^2 - a^2)^{1/2} [a^2(4l_2^2 - 5\rho^2) + l_1^4]}{l_2(l_2^2 - l_1^2)^3}. \quad (4.5.15)$$

Эта задача была впервые решена Снеддоном (1951), используя метод интегральных преобразований. Похоже, он не смог вычислить потенциальную функцию (4.5.2), поэтому он прибег к дифференцированию под знаком интеграла, с последующим вычислением различных интегралов, содержащих функции Бесселя. Его окончательные результаты даны в элементарных функциях четырёх параметров:

$$r = (1 + (z/a)^2)^{1/2}, \quad R^2 = [(\rho/a)^2 + (z/a)^2 - 1]^2 + 4(z/a)^2,$$

$$\theta = \tan^{-1}(a/z), \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2az}{\rho^2 + z^2 - a^2}\right)$$

Этот выбор параметров явно не самый лучший. Вот одна иллюстрация. Выражение для S_1^0 в обозначениях Снеддона принимает вид (Снеддон, 1951, п.497):

$$S_1^0 = \tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta + \sqrt{R}\sin(\phi/2)}{r\cos\theta + \sqrt{R}\cos(\phi/2)}\right)$$

с ограничением $\rho \neq 0$, и никаких индикаторов, какой будет результат в

случае $\rho=0$. В наших обозначениях аналогичный результат есть $\sin^{-1}(a/l_2)$, и никаких ограничений не требуется. Введение параметров Снеддона r и θ не выглядит необходимым. Существует соотношение между его параметрами R и ϕ , и нашими l_1 и l_2 , а именно,

$$R^2 = (l_2^2 - l_1^2)/a^2, \quad \sin(\phi/2) = (a^2 - l_1^2)^{1/2}/(l_2^2 - l_1^2)^{1/2}.$$

Эти соотношения могут быть использованы, чтобы сравнить решения, которые находятся в хорошем согласии, если не считать некоторые опечатки: фактор ζ пропущен в формуле Снеддона (139, стр. 496), и последний член в его формуле (145, стр. 499) должен быть $-S_1^0$ вместо $+S_0^0$.

Упражнение 4.5

1. Подтвердите справедливость результатов (4.5.3)–(4.5.8).
2. Выведите (4.5.10)–(4.5.15).
3. Выведите выражения для полярных компонентов напряжений и перемещений эквивалентных (4.5.10)–(4.5.15).
4. Найдите полное решение в случае, где круглая трещина нагружена нормальным напряжением, пропорциональным x -координате.

4.6 Круглая трещина под действием однородной сдвигающей нагрузки

Рассмотрим круглую трещину радиуса a в трансверсально изотропном упругом пространстве, под действием однородной сдвигающей нагрузки τ , где τ — комплексная константа. Решение интегро-дифференциального уравнения (4.4.14) в этом случае есть:

$$u = \frac{2(G_1^2 - G_2^2)}{G_1} \tau (a^2 - \rho^2)^{1/2}, \quad \text{для } z=0 \text{ и } \rho \leq a. \quad (4.6.1)$$

Подстановка (4.6.1) в (4.4.9) ведёт к интегралу

$$\frac{2(G_1^2 - G_2^2)}{G_1} \tau \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \ln(R_0 + z) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0,$$

который был вычислен в Аппендиксе А4.1, со всеми необходимыми пропизводными. Полное решение примет вид:

$$u = \frac{2(G_1^2 - G_2^2)}{G_1} \left\{ \frac{1}{m_1 - 1} \left[f_{17}(z_1) \bar{\tau} + f_{18}(z_1) \tau \right] + \frac{1}{m_2 - 1} \left[f_{17}(z_2) \bar{\tau} + f_{18}(z_2) \tau \right] + f_{17}(z_3) \bar{\tau} - f_{18}(z_3) \tau \right\}, \quad (4.6.2)$$

$$w = \frac{G_1^2 - G_2^2}{2G_1} (\bar{\tau} e^{i\phi} + \tau e^{-i\phi}) \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{m_k - 1} \left[\sin^{-1} \left(\frac{a}{l_{2k}} \right) - \frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2} \right] \frac{1}{\gamma_k}, \quad (4.6.3)$$

$$\sigma_1 = \frac{2(G_1^2 - G_2^2)A_{66}}{G_1} a (\bar{\tau} e^{i\phi} + \tau e^{-i\phi}) \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k^2(m_k + 1) - \gamma_k^2 l_{1k}(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{\gamma_k^2(m_k - 1) l_{2k}(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)}, \quad (4.6.4)$$

$$\sigma_2 = \frac{2(G_1^2 - G_2^2)A_{66}}{G_1} \left\{ \frac{1}{m_1 - 1} \left[f_{19}(z_1) \bar{\tau} + f_{20}(z_1) \tau \right] + \frac{1}{m_2 - 1} \left[f_{19}(z_2) \bar{\tau} + f_{20}(z_2) \tau \right] + f_{19}(z_3) \bar{\tau} - f_{20}(z_3) \tau \right\}, \quad (4.6.5)$$

$$\sigma_z = \frac{2\gamma_1\gamma_2\beta(\tau e^{-i\phi} + \bar{\tau} e^{i\phi})}{\pi G_1(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{a l_{1k}(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)}, \quad (4.6.6)$$

$$\tau_z = \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\pi G_1} \left\{ \frac{\beta}{\gamma_1 - \gamma_2} \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k}{\gamma_k} [f_{21}(z_k) \tau + f_{22}(z_k) \bar{\tau}] + H[f_{21}(z_3) \tau - f_{22}(z_3) \bar{\tau}] \right\}. \quad (4.6.7)$$

Здесь

$$f_{17}(z) = e^{2i\phi} \frac{2a^3 - (l_1^2 + 2a^2)(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{3\rho^2}, \quad (4.6.8)$$

$$f_{18}(z) = z \sin^{-1} \left(\frac{a}{l_2} \right) - (a^2 - l_1^2)^{1/2}, \quad (4.6.9)$$

$$f_{19}(z) = e^{3i\phi} \frac{al_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)} - 4e^{i\phi} f_{17}(z), \quad (4.6.10)$$

$$f_{20}(z) = e^{i\phi} \frac{al_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)}, \quad (4.6.11)$$

$$f_{21}(z) = -\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2}, \quad (4.6.12)$$

$$f_{22}(z) = \frac{e^{2i\phi} al_1^2(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)}, \quad (4.6.13)$$

Полное решение этой задачи для случая *изотропии* может быть найдено в (Westmann, 1965).

В случае изотропии, формулы (4.6.2–4.6.7) превращаются в

$$u = \frac{1}{\pi\mu(2-\nu)} \left\{ \left[(-5+4\nu)z \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + 4(1-\nu)(a^2 - l_1^2)^{1/2} \right] \tau + \frac{za(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} \left(\tau + \bar{\tau} e^{2i\phi} \frac{l_1^2}{l_2^2} \right) \right\}, \quad (4.6.14)$$

$$w = \frac{(\bar{\tau} e^{i\phi} + \tau e^{-i\phi})\rho}{\pi\mu(2-\nu)} \left\{ \frac{1-2\nu}{2} \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2} \right] + \frac{za^2(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)} \right\}, \quad (4.6.15)$$

$$\sigma_1 = \frac{2(\bar{\tau} e^{i\phi} + \tau e^{-i\phi})}{\pi(2-\nu)} \left\{ -2(1+\nu) \frac{al_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)} + \frac{zl_1(l_2^2 - a^2)^{1/2} [a^2(4l_2^2 - 5\rho^2) + l_1^4]}{l_2(l_2^2 - l_1^2)^3} \right\}, \quad (4.6.16)$$

$$\sigma_2 = -\frac{2e^{i\phi}}{\pi(2-\nu)} \left\{ 4(1-\nu) \frac{al_1(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2-l_1^2)} \tau + \frac{zl_1(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2-l_1^2)} \left[\frac{4a^2}{l_2^2} \bar{\tau} e^{2i\phi} - \frac{a^2(4l_2^2-5\rho^2)+l_1^4}{(l_2^2-l_1^2)^2} (\tau + \bar{\tau} e^{2i\phi}) \right] \right\}, \quad (4.6.17)$$

$$\sigma_z = -\frac{2(\bar{\tau} e^{i\phi} + \tau e^{-i\phi})}{\pi(2-\nu)} \frac{zl_1(l_2^2-a^2)^{1/2} [a^2(4l_2^2-5\rho^2)+l_1^4]}{l_2(l_2^2-l_1^2)^3}, \quad (4.6.18)$$

$$\tau_z = \frac{2}{\pi(2-\nu)} \left\{ \left[(2-\nu) \left(\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \right) + \frac{z(a^2-l_1^2)^{1/2} [l_1^4+a^2(2a^2+2z^2-3\rho^2)]}{(l_2^2-l_1^2)^3} \right] \tau + \left[\nu a(l_2^2-a^2)^{1/2} + \frac{z(a^2-l_1^2)^{1/2} [a^2(6l_2^2-2l_1^2+\rho^2)-5l_2^4]}{(l_2^2-l_1^2)^2} \right] \frac{l_1^2 e^{2i\phi}}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)} \bar{\tau} \right\}. \quad (4.6.19)$$

Упражнение 4.6

1. Исследуйте круглую трещину радиуса a в трансверсально изотропном упругом теле, под действием сдвигающей нагрузки $\tau = c\rho e^{i\phi}$, где $c = \text{const}$.

Ответ: основная потенциальная функция будет пропорциональна интегралу

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a \ln(R_0+z)(a^2-\rho_0^2)^{1/2} e^{i\phi_0} \rho_0^2 d\rho_0 d\phi_0$$

$$= \frac{\pi}{8} \rho e^{i\phi} \left\{ (a^2-l_1^2)^{1/2} \left[\frac{4}{3} a^2 + 7\rho^2 - \frac{19}{3} l_1^2 - 4l_2^2 \right] \right.$$

$$+ \frac{2(8a^4 + 4a^2 l_1^2 + 3l_1^4)}{15\rho^2} \Big] + z(4a^2 - 3\rho^2 + 4z^2) \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{16a^5}{15\rho^2} \Big\}.$$

Это может быть хорошим упражнением для читателя выполнить дифференцирование и записать полное решение. В качестве примера, вот первые две производные:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \frac{\pi}{8} \rho e^{i\phi} \left\{ a(l_2^2 - a^2)^{1/2} \left[15 \frac{l_1^2}{a^2} - 12 - 2 \frac{l_1^2}{l_2^2} \right] + \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \left[4a^2 - 3\rho^2 + 12z^2 \right] \right\},$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \pi \rho e^{i\phi} \left[(a^2 - l_1^2)^{1/2} \left(\frac{a^2}{l_2^2} - 3 \right) + 3z \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \right].$$

Заметьте: $\partial I / \partial z$ пропорциональна основной потенциальной функций для случая линейной *нормальной* нагрузки круглой трещины.

2. Найдите выражения для плотности энергии используя процедуру, аналогичную той, что была использована в Kassir and Sih (1968).

Ответ: $G_1 = 2\pi^2 H k_1^2$, $G_2 = \pi^2 (G_1 - G_2) k_2^2$, $G_3 = \pi^2 (G_1 + G_2) k_3^2$.

3. Найдите функции Грина для полу-бесконечной плоской трещины в трансверсально изотропном пространстве, под действием сдвигающей нагрузки.

Совет: рассмотрите предельный случай (4.4.36–4.4.41), когда радиус $a \rightarrow \infty$, и начало координат двигается от центра круга к его границе.

4.7 Асимптотическое поведение напряжений и перемещений на краю трещины

Kassir and Sih (1975) вывели выражения для соотношений между коэффициентами концентрации напряжений и полем напряжений и перемещений на краю трещины, используя ихнее очень сложное решение для эллиптической трещины. Их вывод выглядит настолько сложным, что никто пока не смог повторить его и проверить их точность. Существует мнение в механике трещин, что асимптотическое поведение определено полностью тремя коэффициентами концентрации напряжений и является инвариантным для любой трещины с гладкой границей. Если это так, то мы можем получить те же результаты из более простого решения для

круглой трещины. Результаты, представленные здесь, проще и получены более простым способом, чем те, что были получены Кассиром и Сих.

Асимптотическое поведение для нагрузки мода I. Хотя формулы (4.5.3–4.5.8) действительны только для круглой трещины под действием *однородного* давления, они могут быть использованы для получения некоторых общих результатов, который действительны для произвольной трещины с гладкой границей под действием *произвольной* нагрузки, другими словами, мы можем исследовать асимптотическое поведение перемещений и напряжений около края произвольной трещины. Введём локальную систему сферических координат (r, θ, ϕ) , с началом координат на краю трещины. Следующие асимптотики действительны для основных параметров использованных в (4.5.3–4.5.8):

$$\begin{aligned} \rho &= a + r \cos \theta, \quad l_{1k} \approx a - \frac{1}{2} r S_k^2, \quad l_{2k} \approx a + \frac{1}{2} r T_k^2, \\ z &= r \sin \theta, \quad l_{2k}^2 - l_{1k}^2 \approx 2ar Q_k, \quad (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \approx (ar)^{1/2} S_k, \\ (l_{2k}^2 - a^2)^{1/2} &\approx (ar)^{1/2} T_k, \quad \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \approx -\left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} T_k. \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

Здесь были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Q_k &= [\cos^2 \theta + (1/\gamma_k^2) \sin^2 \theta]^{1/2}, \quad S_k = [Q_k - \cos \theta]^{1/2}, \\ T_k &= [Q_k + \cos \theta]^{1/2}, \quad \text{для } k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Вводя коэффициент концентрации напряжений мода I,

$$k_1 = \frac{p\sqrt{2a}}{\pi}, \quad (4.7.3)$$

следующие асимптотические выражения могут быть выведены подстановкой (4.7.1) и (4.7.3) в (4.5.3–4.5.8):

$$u = u_n = -2\pi H k_1 \sqrt{2r} \left[\frac{\gamma_1 T_1}{m_1 - 1} + \frac{\gamma_2 T_2}{m_2 - 1} \right] + 0(1), \quad (4.7.4)$$

$$w = 2\pi H k_1 \sqrt{2r} \left[\frac{m_1 S_1}{m_1 - 1} + \frac{m_2 S_2}{m_2 - 1} \right] + 0(r), \quad (4.7.5)$$

$$\sigma_1 = 2\pi A_{66} H k_1 \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k^2 - (m_k + 1)\gamma_3^2}{\gamma_k(m_k - 1)} \frac{T_k}{Q_k} + 0(1), \quad (4.7.6)$$

$$\sigma_2 = -2\pi A_{66} H k_1 \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k T_k}{(m_k - 1)Q_k} + 0(\sqrt{r}), \quad (4.7.7)$$

$$\sigma_z = \frac{k_1}{\sqrt{2r}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{\gamma_1 T_1}{Q_1} - \frac{\gamma_2 T_2}{Q_2} \right] + 0(1), \quad (4.7.8)$$

$$\tau_z = \tau_{zn} = -\frac{k_1}{\sqrt{2r}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{S_1}{Q_1} - \frac{S_2}{Q_2} \right] + 0(\sqrt{r}), \quad (4.7.9)$$

Эти результаты были вычислены для $\phi = 0$. Это предположение позволяет нам избежать громоздкого преобразования осей, без потери общности. Параметр σ_1 в этом случае интерпретируется как сумма $\sigma_n + \sigma_t$, и $\sigma_2 = \sigma_n - \sigma_t + 2i\tau_{nt}$. Вычисляя сумму и разность формул (4.7.6) и (4.7.7), мы получим:

$$\sigma_n = \frac{k_1}{\sqrt{2r}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[-\frac{T_1}{\gamma_1 Q_1} + \frac{T_2}{\gamma_2 Q_2} \right],$$

$$\sigma_t = \pi A_{66} H k_1 \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \left[\frac{[2\gamma_1^2 - (m_1 + 1)\gamma_3^2] T_1}{\gamma_1(m_1 - 1)Q_1} + \frac{[2\gamma_2^2 - (m_2 + 1)\gamma_3^2] T_2}{\gamma_2(m_2 - 1)Q_2} \right].$$

Формулы (4.7.4–4.7.9) в основном согласуются с результатами Kassir and Sih (1975), кроме некоторых опечаток, например, в знаменателе члена в фигурных скобках формулы (8.94с) должно быть $\sqrt{n_1}$ и $\sqrt{n_2}$ вместо n_1 и n_2 . Чтобы сравнить наши результаты с результатами Кассира и Сих, мы должны не забывать, что их определение коэффициента концентрации напряжений есть $\sqrt{2}$ раз больше, чем наш, их обозначения n_k соответствует нашим γ_k^2 ; Кассир и Сих похоже не заметили свойства (4.1.10) и взаимоотношения $S_k = (\sin\theta)/(\gamma_k T_k)$, которые в некоторых случаях могут быть использованы для значительного упрощения их результатов. Например, они имеют выражение $[A_{13}m_k - A_{11}\gamma_k^2]/[A_{44}(m_k + 1)]$ в формуле (8.95а), не понимая, что оно равно -1 для $k = 1, 2$.

Асимптотическое поведение перемещений и напряжений около края трещины в изотропном теле может быть найдено из (4.7.4–4.7.9) или (4.5.10–4.5.15). Результат равен

$$u = u_n = \frac{k_1 \sqrt{r}}{2\mu} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2(1-\nu) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + 0(1), \quad (4.7.10)$$

$$w = \frac{k_1 \sqrt{r}}{\mu} \sin\frac{\theta}{2} \left[2(1-\nu) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + 0(r), \quad (4.7.11)$$

$$\sigma_1 = \frac{k_1}{\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[1 + 2\nu - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right] + 0(1), \quad (4.7.12)$$

$$\sigma_2 = \frac{k_1}{\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right] + 0(\sqrt{r}), \quad (4.7.13)$$

$$\sigma_z = \frac{k_1}{\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right] + 0(1), \quad (4.7.14)$$

$$\tau_z = \tau_{zn} = \frac{k_1}{2\sqrt{r}} \sin\theta \cos\frac{3\theta}{2} + 0(\sqrt{r}), \quad (4.7.15)$$

что согласуется с результатами данными в (Sih and Liebowitz, 1968).

Асимптотическое поведение для мода II и III нагрузки. Мы можем вывести опять некоторые общие результаты, а именно, асимптотическое поведение поля напряжений и перемещений около края плоской трещины с гладкой границей. Мы напоминаем, что при $\phi=0$ декомпозиции $u = u_x + iu_y$ и $\tau_z = \tau_{zx} + i\tau_{yz}$ равны $u^{(n)} = u_n + iu_t$ и $\tau^{(n)} = \tau_{zn} + i\tau_{tz}$ соответственно; σ_1 понимается как $\sigma_n + \sigma_t$, и $\sigma_2 = \sigma_n - \sigma_t + 2i\tau_{nt}$. Это позволит нам избежать громоздких преобразований осей. Комплексный коэффициент концентрации напряжений, введённый в (4.4.57), может быть выражен через предписанную сдвигающую нагрузку τ как

$$k = k_2 + ik_3 = \frac{\sqrt{2a}}{\pi} \left[\tau + \frac{G_2}{G_1} \bar{\tau} \right], \quad (4.7.16)$$

и его обращение даёт:

$$\tau = \frac{\pi G_1(kG_1 - \bar{k}G_2)}{\sqrt{2a}(G_1^2 - G_2^2)}. \quad (4.7.17)$$

Подстановка (4.7.1) и (4.7.17) (4.6.2–4.6.13) приводит к

$$u_n + iu_t = \frac{k_2\gamma_1\gamma_2\sqrt{2r}}{A_{44}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[-\frac{S_1}{m_1 + 1} + \frac{S_2}{m_2 + 1} \right] + \frac{ik_3\gamma_3\sqrt{2r}}{A_{44}} S_3, \quad (4.7.18)$$

$$w = \frac{k_2\gamma_1\gamma_2\sqrt{2r}}{A_{44}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[-\frac{m_1 T_1}{\gamma_1(m_1 + 1)} + \frac{m_2 T_2}{\gamma_2(m_2 + 1)} \right], \quad (4.7.19)$$

$$\sigma_1 = 2\pi k_2\gamma_1\gamma_2 H A_{66} \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_3^2(m_k + 1) - \gamma_k^2}{\gamma_k^2(m_k - 1)} \frac{S_k}{Q_k}, \quad (4.7.20)$$

$$\sigma_2 = 2\pi k_2\gamma_1\gamma_2 H A_{66} \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \left[\frac{S_1}{(m_1 - 1)Q_1} + \frac{S_2}{(m_2 - 1)Q_2} \right] - \frac{ik_3\sqrt{2}S_3}{\gamma_3\sqrt{r}Q_3}, \quad (4.7.21)$$

$$\sigma_z = -\frac{k_2\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{2r}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{S_1}{Q_1} - \frac{S_2}{Q_2} \right], \quad (4.7.22)$$

$$\tau_{zn} + i\tau_{tz} = -\frac{k_2\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{2r}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{T_1}{\gamma_1 Q_1} - \frac{T_2}{\gamma_2 Q_2} \right] + \frac{ik_3 T_3}{\sqrt{2r}Q_3}. \quad (4.7.23)$$

Вычисляя сумму и разность (4.7.20) и (4.7.21), мы получим:

$$\sigma_n = \frac{k_2\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{2r}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{S_1}{\gamma_1^2 Q_1} - \frac{S_2}{\gamma_2^2 Q_2} \right], \quad (4.7.24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t = & \frac{k_2\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{2r}} \left\{ \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\left(\frac{1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\gamma_3^2} \right) \frac{S_1}{Q_1} - \left(\frac{1}{\gamma_2^2} - \frac{1}{\gamma_3^2} \right) \frac{S_2}{Q_2} \right] \right. \\ & \left. + 2\pi H A_{66} \left(\frac{S_1}{Q_1} + \frac{S_2}{Q_2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.7.25)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{k_3 S_3}{\sqrt{2r}\gamma_3 Q_3}. \quad (4.7.26)$$

Наши формулы (4.7.18–4.7.26) достаточно хорошо согласуются с аналогичными результатами Kassir and Sih (1975), кроме формулы (8.96b, стр.371) для u_t которая должна соответствовать мнимой части нашей формулы (4.7.18). Формула Кассира и Сих (8.96b) ошибочна, потому что она показывает u_t зависящим от k_2 , γ_1 , и γ_2 , что не может быть правильным: наш результат связывает u_t с k_3 и γ_3 только, как это и должно быть. Имеются также несколько опечаток в их формулах (8.96a) и (8.96c). Остальные формулы согласуются с нашими, хотя формулы Кассира и Сих выглядят более сложными, чем наши, в основном потому, что они не заметили свойства (4.1.10), которое могло сделать некоторые выражения намного проще.

Упражнение 4.7

1. Подтвердите справедливость (4.7.1).
2. Выведите (4.7.4)–(4.7.9).
3. Выведите (4.7.18)–(4.7.23).
4. Найдите асимптотическое поведение напряжений и перемещений около края трещины для случая мода II и III нагрузки в изотропных телах.

Ответ: $u_n + iu_t = \frac{\sqrt{r}}{\mu} \sin \frac{\theta}{2} \left\{ \left[2(1-\nu) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] k_2 + 2ik_3 \right\},$

$$w = k_2 \frac{\sqrt{r}}{\mu} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[-(1-2\nu) + \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right],$$

$$\sigma_1 = \frac{k_2}{\sqrt{r}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[-2(1+\nu) - \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right],$$

$$\sigma_2 = \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{r}} \left\{ \left[-2(1-\nu) - \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] k_2 - 2ik_3 \right\},$$

$$\sigma_z = \frac{k_2}{2\sqrt{r}} \sin\theta \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$\tau_{zn} + i\tau_{tz} = \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{r}} \left\{ \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] k_2 + ik_3 \right\}.$$

Заметьте: заинтересованный читатель может сравнить с результатами представленными в Sih and Liebowitz (1968).

4.8 Плоская трещина общей формы

Общий метод приложен здесь к анализу упругого пространства ослабленного плоской трещиной произвольной формы под действием однородного нормального давления. Простое, но точное взаимоотношение установлено между перемещениями поверхности трещины и приложенного давления для произвольной плоской трещины. Специфические формулы выведены для трещины в форме полигона, прямоугольника, ромба, креста, кругового сектора и кругового сегмента. Все формулы проверены путём сравнения с известными решениями опубликованными в литературе, и их точность подтверждена. Аналогичный подход может быть использован для анализа трещины под общей полиномиальной нагрузкой. Материал в этой секции следует статье (Fabrikant, 1987b).

Теория. Рассмотрим упругое пространство ослабленное в плоскости $z=0$ плоской трещиной, занимающей область S , граница которой дана в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi). \quad (4.8.1)$$

Пусть однородное давление p приложено нормально к поверхностям трещины в противоположных направлениях. Основное интегральное уравнение в этом случае дано в (4.1.9). Подход основан на интегральном представлении величины обратной расстоянию между двумя точками установленном в (1.1.27). Подстановка (1.1.27) в (4.1.9) даёт после изменения порядка интегрирования:

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{1}{2\pi^3 H} \Delta \int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_x^{a(\phi_0)} \frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0\right)}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} w(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0. \quad (4.8.2)$$

Следует отметить, что изменение порядка интегрирования, которое привело к (4.8.2), действительно только внутри круга $\rho \leq \min\{a(\phi)\}$, и это объясняет одну из причин, почему точность обычно ухудшается в случае областей с большой разницей между длиной и шириной. Тем не менее, мы можем получить из (4.8.2) *точное* решение для эллипса и достаточно точные формулы для трещины различных форм, как будет показано далее. Пусть нормальное перемещение поверхности трещины равно

$$w = \frac{\delta}{a(\phi)} \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}, \quad (4.8.3)$$

где δ — постоянная подлежащая определению. Теперь подставляя (4.8.3) в (4.8.2), мы можем проверить, как близко к постоянной будет нагрузка σ , производящая перемещения (4.8.3). Интегрирование по ρ_0 даёт:

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, \phi) = & -\frac{\delta}{8\pi^2 H} \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\rho \left(\frac{x}{\rho}\right)^{|n|} \frac{x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \frac{a^2(\phi_0) - x^2}{a^2(\phi_0)} \\ & \times F\left(2 - \frac{|n|}{2}, \frac{1}{2}; 2; 1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right) e^{i(\phi - \phi_0)} d\phi_0. \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

Здесь F обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса. Дальнейшее вычисление нормального напряжения может быть выполнено для каждого значения n отдельно. Нулевой член примет вид:

$$\sigma_0 = \frac{\delta B}{8\pi H} \quad (4.8.5)$$

где обозначение

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a(\phi)} \quad (4.8.6)$$

было введено. Очевидно, что значение интеграла в (4.8.6) будет зависеть не только от формы области интегрирования, но также от положения начала координат. Следующий аргумент может быть полезным, чтобы установить определённые правила в этом отношении. Согласно (4.8.3), начало координат соответствует точке, где перемещение сторон трещины достигает максимума. Мы будем называть эту точку *центром трещины*. В случае, когда область трещины имеет ось симметрии, мы можем заключить из физических соображений, что эта точка должна быть на оси симметрии. Когда область трещины имеет две оси симметрии, центр трещины расположен в точке их пересечения, то есть, в центре тяжести области.

Следует отметить, что интеграл (4.8.6) достигает своего минимума в этом случае. Мы можем распространить это правило для трещины произвольной формы, а именно, центр трещины должен быть расположен в точке внутри S где интеграл (4.8.6) достигает своего минимума. Прямые вычисления для различных областей показывают, что этот минимум является достаточно плоским, так что во многих случаях можно расположить центр трещины в центре тяжести, без значительной потери точности. Мы обсудим это более подробно далее, когда мы будем рассматривать область S в форме кругового сегмента и сектора.

Важно отметить, что вторая гармоника равна нулю для произвольного контура, и что все нечётные гармоники будут равны нулю, если выражение для $a(\phi)$ не содержит нечётных гармоник. Вот выражение для четвёртой гармоники:

$$\sigma_4 = -\frac{4\delta}{5\pi^2 H} p \int_0^{2\pi} \frac{\cos 4(\phi - \phi_0) d\phi_0}{a^2(\phi_0)} \quad (4.8.7)$$

Исследование четвёртой и следующих гармоник показывает, что их амплитуда уменьшается для областей общего вида, и они исчезают в случае эллипса. Если мы положим $p \approx \sigma_0$, тогда остальные гармоники могут быть названы ошибкой решения. Это предполагает справедливость следующего взаимоотношения между приложенным напряжением p и максимальным перемещением поверхностей трещины:

$$p = \frac{\delta B}{8\pi H} \quad (4.8.8)$$

Можно проверить, что в случае эллипса решение данное в (4.8.3) и (4.8.8) является *точным*. Мы ожидаем, что оно будет достаточно точным для трещины произвольной формы. Это предположение будет показано справедливым в следующей секции, где несколько частных случаев трещин

рассмотрены в деталях. Мы также ожидаем, что (4.8.3) будет достаточно точным около центра трещины, хотя относительная ошибка может быть довольно значительна близко к границе.

Энергия трещины может быть определена как

$$W = \int \int_S \sigma_w dS. \quad (4.8.9)$$

Подстановка (4.8.3) и (4.8.8) в (4.8.9) даёт:

$$W = \frac{16\pi H p^2 A}{3B}, \quad (4.8.10)$$

где A есть площадь трещины. Введём среднее перемещение δ_{av} как

$$\delta_{av} = \frac{1}{A} \int \int_S w dS.$$

Подстановка (4.8.3) в последнее выражение дают:

$$\delta_{av} = \frac{2}{3} \delta.$$

Определим безразмерный параметр τ в форме:

$$\tau = \frac{\delta_{av}}{2\pi H p \sqrt{A}} = \frac{W}{2\pi H p^2 A^{3/2}}. \quad (4.8.11)$$

Физический смысл τ может быть определён как отношение среднего перемещения к определённому зафиксированному перемещению, или как отношение энергии трещины к некоторой фиксированной энергии. Обе формы (4.8.11) приводят к следующему выражению для τ :

$$\tau = \frac{8}{3\sqrt{AB}}. \quad (4.8.12)$$

Можно заключить, что величина τ не зависит от размеров области S и определяется только её формой. Она достигает максимума в случае круга, так что $0 \leq \tau \leq 4/(3\pi^{3/2}) = 0.2394$. Табулирование коэффициента τ для трещин различных форм может оказаться очень полезным, так как знание этого коэффициента позволяет нам найти максимальное (или среднее)

перемещение поверхностей трещины и энергию трещины, используя (4.8.11).

Может показаться более логичным определить τ как отношение энергии данной трещины к энергии круговой трещины, имеющей ту же площадь. В этом случае величина τ будет заключена между нулём и единицей. Основной причиной принятия определения (4.8.12) было желание сохранить связь между задачами теории трещин в механике и математически эквивалентным задачам электростатики. Параметр τ , определённый в (4.8.11), в точности соответствует коэффициенту электрической поляризуемости в теории распространения волн через маленькие отверстия (Bethe 1944).

Мы не нашли в литературе по механике никаких публикаций, содержащих числовые данные для неэллиптических трещин, которые могли бы быть использованы для сравнения с результатами изложенными в этой секции. Ситуация несколько лучше в электрических науках. Cohn (1952) измерил экспериментально коэффициент электрической поляризуемости нескольких конфигураций отверстий. Численное решение той же задачи было дано De Meulenaere and Van Bladel (1977), и Okon and Harrington (1981). Эти численные и экспериментальные данные будут использованы для оценки точности предложенной теории.

Эмпирическая формула для коэффициента электрической поляризуемости была предложена в Фихманас и Фридберг (1973). Эта формула в наших обозначениях имеет вид:

$$\tau = \frac{8\sqrt{A}}{3\pi L}, \quad (4.8.13)$$

где L обозначает периметр области S . Формула (4.8.13) является точной для эллипса. Представляется интересным сравнить результаты согласно этой формуле с нашей (4.8.12). Трещины нескольких форм рассмотрены для этой цели. Высокая точность нашей формулы (4.8.12) подтверждена путём сравнения с имеющимися числовыми решениями.

Пример 1: Полигон. Рассмотрим плоскую трещину в форме полигона с n сторонами, с единственным ограничением, чтобы функция $a(\phi)$, описывающая его границу, была непрерывной и однозначной. Начало системы координат расположено в центре трещины, как этот центр был определён раньше. Пронумеруем стороны полигона в направлении против часовой стрелки от 1 до n , a_k обозначает длину k -ой стороны. Вершина, в которой стороны a_k и a_{k+1} пересекаются, пронумерована $k+1$. Очевидно, что значение индекса $n+1$ понимается как 1. Обозначим расстояние от центра трещины до k -ой вершины b_k . Пусть A_k обозначает площадь треугольника образуемого сторонами a_k , b_k и b_{k+1} , так что полная площадь полигона A равна сумме A_k . Тогда формулы (4.8.6) и (4.8.12) дают следующее выражение для коэффициента τ :

$$\tau = \frac{8}{3\sqrt{A}} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k^2}{4A_k^2} - \frac{1}{b_k^2} \right]^{1/2} + \left[\frac{a_k^2}{4A_k^2} - \frac{1}{b_{k+1}^2} \right]^{1/2} \right\}^{-1}. \quad (4.8.14)$$

В случае правильного полигона, формула (4.8.14) упрощается:

$$\tau = \frac{4\sqrt{\cot(\pi/n)}}{3n^{3/2}\sin(\pi/n)}. \quad (4.8.15)$$

Формула (4.8.13) даёт для правильного полигона:

$$\tau = \frac{4}{3\pi} \left[\frac{\cot(\pi/n)}{n} \right]^{1/2}. \quad (4.8.16)$$

Представляется интересным сравнить числовые результаты даваемые формулами (4.8.15) и (4.8.16). Ниже представлены результаты соответствующих вычислений

$n=$	3	4	5	6	7	8	∞
формула (4.8.15) $\tau=$	0.2251	0.2357	0.2380	0.2388	0.2391	0.2392	0.2394
формула (4.8.16) $\tau=$	0.1862	0.2122	0.2227	0.2280	0.2312	0.2331	0.2394
расхождение (%)	17.3	10.0	6.5	4.5	3.3	2.6	0.0

В то время, как обе формулы в предельном случае $n \rightarrow \infty$ дают тот же самый точный результат для круга, их расхождение для малых n довольно значительно, так что важно установить, которая формула более точная. Мы не обнаружили никаких данных для равностороннего треугольника. Если принять экспериментальные результаты Cohn для квадрата $\tau = 0.2274$ как точный, тогда наша формула (4.8.15) имеет ошибку 3.6%, в то время, как формула (4.8.16) Фихманаса и Фридберга имеет ошибку 6.7%. Численный результат Okon and Harrington для квадрата есть 0.2258, что также в пользу нашей формулы. В случае правильного шестиугольника, результат Okon and Harrington есть 0.2375, так что наш результат имеет расхождение только 0.5%, в то время, как ошибка формулы (4.8.16) есть 4%. Следует заметить, что величина τ не меняется значительно во всём промежутке $3 \leq n < \infty$.

Мы можем также сравнить нормальные перемещения вдоль центральной линии шестиугольника перпендикулярно его стороне, данное в (4.8.3) с численными данными в Okon and Harrington (1981). Результаты (w^* обозначает $w/2\pi Hp\sqrt{A}$)

$\rho/a=$	0.	0.1667	0.3333	0.5000	0.6667	0.8333
-----------	----	--------	--------	--------	--------	--------

Okon <i>et al</i> $w^*=$	0.351	0.346	0.331	0.305	0.263	0.210
формула (4.8.3) $w^*=$	0.357	0.352	0.3366	0.3092	0.266	0.1973
расхождение (%)	−1.7	−1.7	−1.4	−1.4	−1.2	6.0

Как мы и ожидали, результаты согласуются хорошо, кроме точек очень близко к границе.

Пример 2: Прямоугольник. Рассмотрим прямоугольную трещину, a и b — её полуоси вдоль осей Ox и Oy соответственно. Введём параметр $\varepsilon = b/a \leq 1$. Формула (4.8.15) в этом случае сводится к

$$\tau = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3(1 + \varepsilon^2)^{1/2}}. \quad (4.8.17)$$

Формула (4.8.13) в этом случае даёт:

$$\tau = \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{3\pi(1 + \varepsilon)}. \quad (4.8.18)$$

Мы представляем ниже результаты вычислений по формулам (4.8.17) и (4.8.18) в сравнении с экспериментальными результатами Cohn.

$\varepsilon =$	0.1000	0.1500	0.2000	0.3000	0.5000	0.7500	1.0000
эксперимент $\tau =$	0.1202	0.1411	0.1565	0.1789	0.2093	0.2251	0.2274
формула (4.8.17) $\tau =$	0.1049	0.1277	0.1462	0.1749	0.2108	0.2309	0.2357
расхождение (%)	12.7	9.5	6.6	2.3	−0.7	−2.6	−3.7
формула (4.8.18) $\tau =$	0.1220	0.1429	0.1582	0.1788	0.2001	0.2100	0.2122
расхождение (%)	−1.5	−1.3	−1.1	0.1	4.4	6.7	6.7

Если мы положим, что результаты Cohn точны, тогда наша формула более точна для $\varepsilon \geq 0.5$, в то время, как формула Фихманаса и Фридберга более точна для $\varepsilon < 0.5$. Если вместо этого мы предположим точными численные результаты полученные частным образом от де Смедта, тогда заключение может быть различным. Например, его значение τ для $\varepsilon = 0.1$ равно 0.1142; теперь наш результат имеет ошибку 8% в то время, как результат Фихманаса и Фридберга имеет ошибку −7%. В настоящее время похоже, что никто не знает, который результат правильный. Мы можем также сравнить безразмерные перемещения w^* даваемые формулой (4.8.3), с числовыми результатами де Смедта для прямоугольника параметром $\varepsilon = 0.5$ (как и раньше, w^* обозначает $w/2\pi H\rho\sqrt{A}$). Ниже приведены результаты, вычисленные вдоль оси Ox для $y/b = 0.025$.

$x/a =$	0.0250	0.2250	0.4250	0.6250	0.8250	0.9750
де Смедт $w^* =$	0.3161	0.3118	0.2989	0.2713	0.2107	0.0852

формула (4.8.3) $w =$	0.3158	0.3081	0.2862	0.2469	0.1787	0.0703
расхождение (%)	0.1	1.2	4.2	9.0	15.2	17.5

Согласование результатов удовлетворительно, кроме области $x/a > 0.625$. Нижеследующие данные были подсчитаны вдоль оси Oy для $x/a = 0.025$.

$y/b =$	0.0250	0.1250	0.2250	0.3250	0.4250	0.4750
де Смедт $w^* =$	0.3161	0.3067	0.2836	0.2424	0.1690	0.0976
формула (4.8.3) $w^* =$	0.3158	0.3062	0.2824	0.2403	0.1666	0.0987
расхождение (%)	0.1	0.2	0.4	0.8	1.4	−1.2

Мы замечаем довольно хорошее согласование даже близко к границе, что может быть объяснено тем фактом, что форма трещины в направлении оси Oy очень близка к двумерному случаю.

Пример 3: Ромб. Рассмотрим случай, где область S есть ромб, a и b — его полуоси вдоль осей Ox и Oy соответственно. Введём параметр $\epsilon = b/a \leq 1$. Формула (4.8.14) в этом случае сводится к

$$\tau = \frac{\sqrt{2}\epsilon}{3(1+\epsilon)}. \quad (4.8.19)$$

Соответствующий результат Фихманаса и Фридберга есть

$$\tau = \frac{2\sqrt{2}\epsilon}{3\pi(1+\epsilon^2)^{1/2}}. \quad (4.8.20)$$

Мы не нашли в литературе по механике никаких результатов относящихся к трещине в форме ромба. Коэффициент электрической поляризуемости для ромба с отношением осей $\epsilon = 0.5$ был найден численно в Okon and Harrington равным $\tau = 0.2082$. Наш результат равен 0.2222 (расхождение 6.7%), в то время как формула (4.8.20) даёт 0.1898 (расхождение 8.9%). Мы получили 2 комплекта результатов частным образом от де Смедта и Ли. Эти данные представлены ниже в сравнении с формулами (4.8.19) и (4.8.20)

$\epsilon =$	0.100	0.200	0.333	0.500	0.800	1.000
де Смедт $\tau =$	0.111	0.151	0.182	0.204	0.219	0.221
формула (4.8.19) $\tau =$	0.136	0.176	0.204	0.222	0.234	0.236
расхождение (%)	−21.9	−16.4	−12.0	−9.0	−6.8	−6.6
формула (4.8.20) $\tau =$	0.094	0.132	0.164	0.190	0.210	0.212
расхождение (%)	15.1	12.8	9.8	6.9	4.4	4.1

Данные, полученные от Ли, представлены как функция угла $\alpha = \tan^{-1}\epsilon$

$\alpha(\text{град.})=$	10.	15.	20.	25.	30.	40.	45.
Ли $\tau=$	0.147	0.174	0.193	0.207	0.216	0.226	0.228
формула (4.8.19) $\tau=$	0.168	0.192	0.209	0.220	0.227	0.235	0.236
расхождение (%)	−14.2	−10.6	−8.1	−6.3	−5.2	−3.8	−3.6
формула (4.8.20) $\tau=$	0.124	0.150	0.170	0.186	0.197	0.211	0.212
расхождение (%)	15.8	13.7	11.8	10.1	8.5	6.9	6.7

Мы представили обе совокупности данных, чтобы подчеркнуть тот факт, что по—настоящему надёжных данных попросту не существует. Первая совокупность данных полагает, что формула Фихманаса и Фридберга более точна, в то время, как вторая совокупность данных показывает большую точность нашей формулы. Следует также отметить, что формула (4.8.19), похоже, даёт верхний предел, и формула (4.8.20) даёт нижнюю границу, и их среднее арифметическое очень близко к числовым данным.

Мы можем также сравнить нормальные перемещения, даваемые нашей формулой (4.8.3), с аналогичными результатами в Okon and Harrington (1981). Ниже представлены данные, подсчитанные вдоль центральной линии, параллельной его стороне (w^* обозначает $w/2\pi H\rho\sqrt{A}$).

$\rho/a =$	0.	0.3333	0.6667
Okon <i>et al.</i> $w^* =$	0.335	0.304	0.257
формула (4.8.3) $w^* =$	0.3333	0.3142	0.2484
расхождение (%)	0.5	−3.4	3.3

Согласие результатов становится хуже, если сравнение делается вдоль главной оси. Это объясняется тем, что предположение об особенностях порядка квадратного корня в (4.8.3) не справедливо для областей с острыми углами.

Пример 4: Круговой сегмент. Пусть радиус r и угол 2α являются параметрами сегмента. Прямые численные расчёты показывают, что центр трещины может быть расположен в центре тяжести, с ошибкой того же порядка, как и точность нашей теории. Положение центра тяжести определяется координатой $x_c = kr$, где

$$k = \frac{2 \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)}.$$

Уравнение границы сегмента относительно центра тяжести принимает вид:

$$a(\phi) = r[-k \cos \phi + (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}], \text{ for } 0 \leq \phi \leq \pi - \gamma \text{ or } \pi + \gamma \leq \phi < 2\pi,$$

и

$$a(\phi) = r \frac{k - \cos \alpha}{\cos(\pi - \phi)}, \text{ for } \pi - \gamma \leq \phi \leq \pi + \gamma, \quad (4.8.21)$$

где $\gamma = \tan^{-1}(\sin\alpha/(k - \cos\alpha))$. Подстановка (4.8.21) в (4.8.6) и (4.8.12) ведёт к

$$\tau = \frac{4}{3(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)^{1/2}} \left[\frac{k\sin\gamma + E(\pi - \gamma, k)}{1 - k^2} + \frac{\sin\gamma}{k - \cos\alpha} \right]^{-1}. \quad (4.8.22)$$

где $E(\cdot, \cdot)$ обозначает неполный эллиптический интеграл второго рода. Формула согласно Фихманасу и Фридбергу даёт:

$$\tau = \frac{4(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)^{1/2}}{3\pi(\alpha + \sin\alpha)}. \quad (4.8.23)$$

Коэффициент электрической поляризуемости для полукруга был подсчитан Оконом и Харрингтоном как $\tau = 0.2161$. Наш результат согласно (4.8.22) равен $\tau = 0.2163$ что практически идентично предыдущему. Результат (4.8.23) равен $\tau = 0.2069$ (расхождение 4.3%). Дополнительное подтверждение правильности нового метода может быть получено рассмотрением графика распределения плотности электрической поляризуемости для полукруга, представленном в Okon and Harrington (1981). Его максимум расположен на расстоянии $\approx 0.47r$ от центра круга. Наше определение центра трещины, требующее минимизации интеграла (4.8.6), даёт его координату как $0.48r$, что очень близко. Центр тяжести полукруга расположен на расстоянии $0.42r$.

Пример 5: Круговой сектор. Пусть r и 2α обозначают его радиус и полярный угол. Центр трещины предполагается расположенным на оси симметрии на расстоянии kr от центра круга. Числовые расчёты показывают, что центр трещины может быть расположен в центре тяжести для $0.1\pi < \alpha < 0.6\pi$. В этом случае значение k равно $k = 2\sin\alpha/(3\alpha)$. В интервале $\alpha < 0.1\pi$ или $\alpha > 0.6\pi$, значение k должно быть определено из условий минимума для интеграла (4.8.6). Повторение процедуры, описанной в предыдущем параграфе, приводит к следующему результату:

$$\tau = \frac{4}{3\sqrt{\alpha}} \left[\frac{k\sin\gamma + E(\gamma, k)}{1 - k^2} + \frac{\cos\alpha + \cos(\alpha - \gamma)}{k\sin\gamma} \right]^{-1}. \quad (4.8.24)$$

Здесь $\gamma = \tan^{-1}(\sin\alpha/(\cos\alpha - k))$. Формула согласно Фихманасу и Фридбергу имеет вид:

$$\tau = \frac{4\sqrt{\alpha}}{3\pi(1 + \alpha)}. \quad (4.8.25)$$

Заметим, что ни (4.8.24) ни (4.8.25) не сводятся к точному значению для круга, когда $\alpha = \pi$. Это объясняется тем, что мы не имеем круглой трещины, когда α приближается к π : мы имеем круговую трещину, стороны которой соединены вдоль радиуса $\phi = \pi$. Такой случай никем не был рассмотрен, так что мы не можем сказать, какая формула более правильна. Окон и Харрингтон получили в случае квадранта $\tau = 0.2269$, формула (4.8.24) даёт $\tau = 0.2308$ (расхождение 1.7%), и формула (4.8.25) даёт $\tau = 0.2107$ (расхождение 7%). Следует заметить, что значение τ для квадранта больше, чем для полукруга. Общей впечатление создаётся, что наша теория в частном случае кругового сектора и сегмента обеспечивает верхнюю границу для τ , в то время, как формула согласно Фихманасу и Фридбергу даёт нижнюю границу.

Пример 6: Крест. Рассмотрим форму трещины полученной ортогональным пересечением двух равных прямоугольников со сторонами $2a$ и $2b$. Введём параметр $\varepsilon = b/a \leq 1$. Площадь креста может быть выражена как

$$A = 4a^2\varepsilon(2 - \varepsilon)$$

Следующее выражение может быть получено для τ :

$$\tau = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{6\sqrt{2-\varepsilon}\{[2(1+\varepsilon^2)]^{1/2} - 1\}} \quad (4.8.26)$$

Формула согласно Фихманасу и Фридбергу есть:

$$\tau = \frac{2\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}{3\pi}. \quad (4.8.27)$$

В таблице ниже, мы представляем результаты, полученные из формул (4.8.26) и (4.8.27), и сравниваем их с экспериментальными результатами Cohn и численными результатами De Meulenaere and Van Bladel (1977), а также с результатами, полученными частным образом от де Смедта.

$\varepsilon =$	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
эксперим. $\tau =$	0.0942	0.1333	0.1609	—	—	—	0.2274
De Meulenaere $\tau =$	—	—	—	0.19	0.22	0.23	0.238
де Смедт $\tau =$	0.0835	0.1183	—	0.1767	0.2084	0.2193	0.2212
формула (4.8.26) $\tau =$	0.1284	0.1777	0.2078	0.2252	0.2376	0.2372	0.2357
формула (4.8.27) $\tau =$	0.0925	0.1273	0.1515	0.1698	0.1944	0.2079	0.2122

Мы не вычисляли расхождение так как разногласие между данными слишком велико, так что все данные становятся ненадёжными. Общее

впечатление, что наша формула (4.8.26) даёт верхнюю границу для τ , в то время, как формула Фихманаса и Фридберга даёт нижнюю границу. Это заключение может быть неправильным, если численные результаты, полученные частным образом от де Смедта, правильны. Например, его результат для $\varepsilon=0.1$ равен $\tau=0.08347$, что отличается от экспериментального результата на 11%. Всё это доказывает, что существующие численные методы слишком грубы и необходимо разработать более надёжные и точные численные методы.

Следует отметить, что функция, определённая в (4.8.26), не монотонна: относительно плоский максимум существует около $\varepsilon \approx 0.7$. Данные других авторов монотонны. Мы не имеем строгого доказательства, что качественное поведение формулы (4.8.26) правильно, в то время, как данные других авторов неправильны, но мы можем указать, что значение τ для квадранта тоже больше, чем τ для полукруга, и это свойство в основном благодаря тому факту, что форма квадранта ближе к форме круга, чем полукруг. Аналогичный аргумент может быть использован для случая креста с параметром $\varepsilon \approx 0.7$ по сравнению с квадратом.

Дискуссия. Большинство рассмотренных примеров показывает, что точный результат находится между результатами формулы (4.8.12) и формулы Фихманаса и Фридберга (4.8.13). В этом смысле, формулы действуют, как верхняя и нижняя границы соответственно, что ведёт к утверждению: для произвольного контура одно из неравенств справедливо, а именно, или $\tau_{12} \leq \tau_{\text{exact}} \leq \tau_{13}$, или $\tau_{12} \geq \tau_{\text{exact}} \geq \tau_{13}$. Мы можем указать один способ отвергнуть наше утверждение. Простой взгляд на таблицу данных для прямоугольника в предыдущей секции указывает, что наша формула (4.8.17) должна давать нижнюю границу для маленького значения параметра ε , и она должна давать верхнюю границу для ε близкого к единице; обратное должно быть справедливо для формулы (4.8.18). Это означает, что должно существовать значение ε для которого обе формулы (4.8.17) и (4.8.18) *точные* и дают тот же самый результат. Приравнивая (4.8.17) и (4.8.18), мы получим значение параметра

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\pi^2 \pm 4(2\pi^2 - 16)^{1/2}}{16 - \pi^2},$$

что даёт $\varepsilon_1 = 0.3482$ и $\varepsilon_2 = 2.8716$, с очевидным свойством $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$. Соответствующее значение τ равно 0.18576. Из таблицы в предыдущей секции, мы можем видеть, что для $\varepsilon = 0.3$ точное значение τ должно быть между 0.1749 и 0.1788. Если бы мы могли быть уверены, что экспериментальное значение 0.1789 является точным, тогда наше утверждение может считаться отвергнутым, но в настоящий момент существующие экспериментальные или численные методы не могут обеспечить такую точность. Это может быть достигнуто на основании метода точного

вычисления сингулярных двумерных интегралов представленного в (Fabrikant, 1986e). Значительные усилия требуются, чтобы доказать или опровергнуть наше утверждение, и мы оставляем это интересующемуся читателю.

Точность формулы (4.8.12) может быть улучшена путём включения четвёртой гармоники (4.8.7) в комбинации с вариационным методом, описанном в (Noble, 1960). Следующий функционал является стационарным на точном решении (4.1.9)

$$I(w) = 2 \int_S \int \sigma(M) w(M) dS_M + \frac{1}{4\pi^2 H} \int_S \int w(M) \left[\Delta \int_S \int \frac{w(N)}{R(M,N)} dS_N \right] dS_M. \quad (4.8.28)$$

Принимая

$$-\frac{1}{4\pi^2 H} \Delta \int_S \int \frac{w(N)}{R(M,N)} dS_N \approx \sigma_0 + \sigma_4,$$

где σ_0 и σ_4 определены в (4.8.5) и (4.8.7) соответственно, и подставляя их в (4.8.28), мы получим функционал который может быть рассмотрен как функция δ . Из условий стационарности

$$\frac{\partial I}{\partial \delta} = 0$$

мы получим окончательно

$$\tau = \frac{8}{3B\sqrt{A}(1-c)}, \quad (4.8.29)$$

где

$$c = \frac{3(F_c E_c + F_s E_s)}{5AB},$$

и следующие геометрические характеристики были введены

$$F_c = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 4\phi \, d\phi}{a^2(\phi)},$$

$$F_s = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 4\phi \, d\phi}{a^2(\phi)},$$

$$E_c = \int_0^{2\pi} a^3(\phi) \cos 4\phi \, d\phi,$$

$$E_s = \int_0^{2\pi} a^3(\phi) \sin 4\phi \, d\phi.$$

Результаты вычислений согласно (4.8.29) для прямоугольника представлены ниже в сравнении с экспериментальными результатами Cohn.

$\varepsilon =$	0.1000	0.1500	0.2000	0.3000	0.5000	0.7500	1.0000
Cohn $\tau =$	0.1202	0.1411	0.1565	0.1789	0.2093	0.2251	0.2274
формула (4.8.29) $\tau =$	0.1054	0.1290	0.1484	0.1785	0.2125	0.2257	0.2278
расхождение (%)	12.3	8.6	5.2	0.2	-1.5	-0.3	-0.2

Сравнение этой таблицы с соответствующей таблицей представленной ранее показывает, что вариационный подход улучшает точность, хотя улучшение не достаточно для маленьких ε . Нет никаких доказательств, что вариационный подход будет всегда улучшать точность. Напротив, мы можем найти примеры, где точность ухудшается. Это обычно имеет место для областей с очень маленьким ε . Читатель должен решить для себя, прибегать или нет к более громоздким вычислениям, чтобы немножко улучшить точность.

В этой секции мы рассмотрели в деталях только случай трещины под действием однородного давления. Некоторые рассуждения могут быть представлены для общего случая. Хорошо известно (смотри, например, 4.1.13), что в случае круглой трещины, следующее взаимоотношение может быть установлено между перемещением w и внутренним давлением σ

$$w(\rho, \phi) = \frac{2}{\pi} H \int_0^{2\pi} \int_0^a \tan^{-1} \left[\frac{[(a^2 - \rho^2)(a^2 - \rho_0^2)]^{1/2}}{aR} \right] \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0)}{R} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0,$$

где $R = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)$. Следующее обобщение последней формулы представляется натуральным:

$$w(\rho, \phi) = \frac{2}{\pi} H \int_0^{2\pi} \int_0^{a(\phi_0)} \tan^{-1} \left[\frac{[(a^2(\phi) - \rho^2)(a^2(\phi_0) - \rho_0^2)]^{1/2}}{a(\phi)R} \right] \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0)}{R} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (4.8.30)$$

Хотя полное исследование формулы (4.8.30) находится вне рамок этой книги, есть основания верить, что он будет достаточно точным для общей нагрузки для трещин с параметром ε недалеко от единицы. Вот пример. Попробуем

подсчитать перемещение w_0 в центре эллиптической трещины (a и b — полуоси эллипса, $a > b$) под действием однородного давления p . Результат формулы (4.8.30) есть $w_0 = (8/\pi)HpbK(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого типа и $k = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$. Точный результат есть $w_0 = 2\pi Hpb/E(k)$. Оба результата близки один к другому для малых k , совпадая в случае круга ($k=0$). Прямые вычисления показывают, что ошибка приближённого выражения не превосходит 7% для эллипса с отношением $b/a \geq 0.5$. В случае квадрата, безразмерное перемещение w в его центре может быть вычислено из (4.8.30) как $(4/\pi^2)\ln(1 + \sqrt{2}) = 0.3572$, в то время, как аналогичный экспериментальный результат Cohn равен $(3/2)\tau = 0.3411$, и расхождение не превышает 5%. Конечно, эти примеры ничего строго не доказывают, но из них становится ясным, что выражение (4.8.30) стоит исследовать более детально. Аналогичное утверждение может быть сделано относительно следующего выражения:

$$\sigma(\rho, \phi) = -\frac{2}{\pi[\rho^2 - a^2(\phi)]^{1/2}} \int_0^{2\pi a(\phi_0)} \int_0^{[a^2(\phi_0) - \rho_0^2]^{1/2}} \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)},$$

которое даёт распределение нормального напряжения вне круговой трещины прямо через его значения внутри трещины. Будущие исследования покажут, насколько полезно последнее выражение для произвольной трещины.

Исследование коэффициента концентрации напряжений выходит за рамки этой секции, но мы можем показать, что некоторые простые формулы могут быть выведены и дают результаты, которые близки к (Weaver, 1977). Мы используем асимптотическое взаимоотношение между предельными значениями перемещений трещины и коэффициентом концентрации напряжений, а именно,

$$w = 2H(2\pi r)^{1/2} k_1.$$

Рассмотрим прямоугольную трещину размером $2a$ на $2b$ ($a > b$), под действием однородного давления p . Подставляя (4.8.3) в последнее выражение, следующие формулы получаются для безразмерного коэффициента концентрации напряжений $\kappa = k_1/[p(\pi b)^{1/2}]$: вдоль короткой стороны $\kappa = 3\tau$; вдоль длинной стороны $\kappa = 3\tau(a/b)^{1/2}$. В случае квадрата, наши формулы дают $\kappa = 3 \times 0.2357 = 0.7071$. Результат Weaver равен 0.73, с расхождением около 3%. В случае $b/a = 0.3$, наш результат в середине длинной стороны есть $\kappa = 0.98$, что очень близко к результату Weaver. Выражение (4.8.17) показывает, что предельное значение коэффициента концентрации напряжений, когда $(b/a) \rightarrow 0$, есть $\kappa \rightarrow 1$, как и должно быть в случае разреза в форме бесконечной полосы. Единственное расхождение с результатом Weaver (1977)

в значении безразмерного коэффициента концентрации напряжений вдоль короткой стороны: согласно нашей формуле, он должен *уменьшаться* с ростом b/a , стремясь к нулю как $(b/a)^{1/2}$; в статье Weaver (1977) его значение *увеличивается*. Мы можем также сделать ссылку на статью (Fabrikant, 1987f), где указаны противоречия (Kassir and Sih, 1975) в определении коэффициента концентрации напряжений для эллиптической трещины.

Математически эквивалентная задача проницаемости звука через отверстие общей формы в мягком экране решена в (Fabrikant, 1988d). Тот же аппарат использован в исследовании электрической поляризуемости малых отверстий произвольной формы (Fabrikant, 1987c).

Упражнение 4.8

1. Выведите (4.8.5).
2. Установите (4.8.14).
3. Попробуйте доказать справедливость (или несправедливость) утверждения, сделанного в секции "Дискуссия" выше.
4. Найдите область, где формула (4.8.30) справедлива для эллиптической трещины. (Найдите отношение между полуосями эллипса, для которых ошибка не превосходит 5%.)
5. Решите задачу общей плоской трещины под действием нормальной нагрузки, с его амплитудой пропорциональной x -координате. (Изгиб упругого пространства, с плоской трещиной общей формы).

4.9 Произвольная трещина под действием однородной сдвигающей нагрузки

Пусть граница трещина может быть описана в полярных координатах уравнением $\rho = a(\phi)$, где $a(\phi)$ есть однозначная непрерывная функция. Мы можем всегда выбрать ориентацию осей координат так, что первая гармоника исчезнет из разложения Фурье функции $a(\phi)$. Приближённое аналитическое решение (4.4.14) для общей трещины может быть получено методом, использованным в предыдущей секции. Метод использует следующее представление:

$$\int_S \int \frac{u(N)}{R(N, N_0)} dS_N = \int_0^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_x^{a(\phi_0)} \frac{\lambda(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0)}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} u(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0. \quad (4.9.1)$$

Рассмотрим случай однородной сдвигающей нагрузки. Пусть тангенциальные перемещения имеют форму:

$$u(\rho, \phi) = u_0 [a^2(\phi) - \rho^2]^{1/2} / a(\phi), \quad (4.9.2)$$

где u_0 есть пока неизвестная комплексная постоянная. Подстановка (4.9.2) в (4.9.1) даёт после интегрирования и сохранения только первых двух гармоник:

$$\begin{aligned} \int_S \int \frac{u(N)}{R(N, N_0)} dS_N \approx \frac{u_0}{16\pi(G_1^2 - G_2^2)} \int_0^{2\pi} \left\{ 2a(\phi_0) \right. \\ \left. - \frac{\rho^2}{a(\phi_0)} \left[1 + 3\cos 2(\phi - \phi_0) \right] \right\} d\phi_0. \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

Подставляя (4.9.3) в (4.4.14) и выполняя необходимое дифференцирование, мы получим взаимоотношение между сдвигающей нагрузкой и амплитудой тангенциального перемещения, а именно,

$$\tau = \frac{1}{4\pi(G_1^2 - G_2^2)} \left[u_0 G_1 B_1 + 3\bar{u}_0 G_2 B_2 \right], \quad (4.9.4)$$

где

$$B_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a(\phi)}, \quad B_2 = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\phi} d\phi}{a(\phi)}. \quad (4.9.5)$$

Уравнение (4.9.4) может быть решено:

$$u_0 = \frac{4\pi(G_1^2 - G_2^2)}{G_1^2 B_1^2 - 9G_2^2 B_2^2} [G_1 B_1 \tau - 3G_2 B_2 \bar{\tau}]. \quad (4.9.6)$$

Интегралы в (4.9.5) могут быть легко вычислены для различных форм трещин. Например, прямоугольная трещина со сторонами $2a_1$ и $2a_2$ характеризуется значениями:

$$B_1 = \frac{4(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}}{a_1 a_2}, \quad B_2 = \frac{4(a_2^2 - a_1^2)}{3a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}}. \quad (4.9.7)$$

Стоит отметить, что несмотря на тот факт, что интегральное представление (4.9.1) справедливо только внутри круга $\rho \leq \min\{a(\phi)\}$, и несмотря на приближённую структуру (4.9.3), решение, данное в (4.9.4–4.9.5), является *точным* для эллипса. Мы не нашли в литературе никаких надёжных данных для не—эллиптических трещин под действием сдвигающей нагрузки, поэтому трудно оценить точность нашего решения для трещин различных форм.

Упражнение 4.9

1. Выведите (4.9.3).
2. Установите (4.9.6).
3. Рассмотрите случай полукруговой трещины.
4. Решите задачу для трещины в форме креста.
5. Решите задачу общей плоской трещины под действием кручения.

4.10 Близкие взаимодействия копланарных круглых трещин под действием нормальной нагрузки

Общий метод приложен здесь для анализа напряжений в упругом пространстве, ослабленном несколькими произвольно расположенными копланарными круглыми трещинами под действием произвольного нормального давления. Выведены основные интегральные уравнения, которые имеют определённые преимущества по сравнению с другими методами: уравнения нелинейны, процедура итерации сходится быстро даже для очень близких взаимодействий; нет необходимости решать

интегральные уравнения, если нас интересуют только верхние и нижние границы для интересующих нас параметров. В случае трещин, которые далеко друг от друга, эти границы достаточно близки и дают, фактически, достаточно точное решение задачи. Метод позволяет нам также получить практически точное численное решение задачи очень близких взаимодействий. Рассмотрено несколько иллюстративных примеров.

Теория. Рассмотрим упругое пространство ослабленное в плоскости $z=0$ n произвольно расположенными круглыми трещинами. Трещины не пересекаются. Пусть центр k -ой трещины расположен в точке с декартовыми координатами x_k и y_k , её радиус обозначен a_k . Пусть произвольное давление σ_k приложено нормально к сторонам трещины в противоположных направлениях. Система основных интегральных уравнений может быть записана, благодаря (4.1.9), в виде:

$$\sigma_i(M_i) = -\frac{1}{4\pi^2 H} \Delta \sum_{k=1}^n \int_{S_k} \frac{w_k(M_k)}{R(M_i, M_k)} dS_k, \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.10.1)$$

где Δ есть двумерный оператор Лапласа, S_k есть область k -ой трещины, $R(M_i, M_k)$ обозначает расстояние между точками M_i и M_k , ($M_i \in S_i$ и $M_k \in S_k$); w_k обозначает нормальные перемещения сторон трещины (неизвестная функция), σ_i есть нормальное напряжение внутри i -ой трещины (известная функция). Мы можем выделить без потери общности трещину номер 1, и рассмотреть систему трещин в системе локальных полярных координат, с началом координат совпадающим с центром первой трещины. Используя интегральное представление (4.1.11), первое уравнение из системы (4.10.1) может быть переписано как

$$\begin{aligned} \sigma_1(\rho, \phi) = & -\frac{1}{\pi^2 H \rho} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}(x^2) \\ & \times \frac{d}{dx} \int_x^{a_1} \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right) w_1(\rho_0, \phi) - \frac{1}{4\pi^2 H} \sum_{k=2}^n \Delta \int_{S_k} \frac{w_k(M_k)}{R(M_1, M_k)} dS_k. \end{aligned} \quad (4.10.2)$$

Так как интегралы под знаком суммы в (4.10.2) несингулярны, дифференцирование может быть выполнено под знаком интеграла, с результатом:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\rho, \phi) = & -\frac{1}{\pi^2 H \rho} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}(x^2) \\ & \times \frac{d}{dx} \int_x^{a_1} \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho_0}\right) w_1(\rho_0, \phi) - \frac{1}{4\pi^2 H} \sum_{k=2}^n \int_{S_k} \frac{w_k(M_k)}{R^3(M_1, M_k)} dS_k. \end{aligned} \quad (4.10.3)$$

Формула (4.1.12) позволяет нам выразить w_1 из (4.10.3) при помощи обратного оператора, а именно,

$$\begin{aligned} w_1(\rho, \phi) = & 4H \int_\rho^{a_1} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho \rho_0}{x^2}\right) \sigma_1(\rho_0, \phi) \\ & + \frac{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2}}{\pi^2} \sum_{k=2}^n \int_{S_k} \frac{w_k(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(\rho_0^2 - a_1^2)^{1/2} [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]}. \end{aligned} \quad (4.10.4)$$

Здесь мы использовали следующее интегральное представление для $1/R^3$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0))^{3/2}} = & \frac{2}{\pi \rho} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho_0}, \phi - \phi_0\right) x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2} (\rho_0^2 - x^2)^{3/2}}, \\ & \text{для } \rho_0 > \rho. \end{aligned} \quad (4.10.5)$$

Представление (4.10.5) позволяет нам вычислить различные интегралы от Абелевых и \mathcal{L} -операторов. Например, следующий интеграл есть непосредственное следствие (4.10.5)

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{\rho d\rho}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \mathcal{L}(\rho) [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{-3/2} \\ & = \frac{x}{(\rho_0^2 - x^2)^{3/2}} \lambda\left(\frac{x^2}{\rho_0}, \phi - \phi_0\right). \end{aligned}$$

Аналогичная процедура может быть приложена к остальным $n-1$ трещинам,

чтобы получить дополнительные $n-1$ уравнений типа (4.10.4). Заметим, что каждое такое уравнение справедливо в локальной системе полярных координат, связанных с определённой трещиной. Система уравнений (4.10.4) может быть решена численно итерациями.

Теперь мы покажем, что можно получить верхнюю и нижнюю границы, а также достаточно точную центральную оценку для всех параметров, которые нас интересуют, без необходимости решения интегральных уравнений (4.10.4). Так как w_k не меняет знак в S_k , мы можем применить теорему о среднем ко второму интегралу в (4.10.4), с результатом:

$$w_1(\rho, \phi) = 4H \int_{\rho}^{a_1} \frac{dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \int_0^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \mathcal{L}\left(\frac{\rho\rho_0}{x^2}\right) \sigma_1(\rho_0, \phi) + \frac{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2}}{\pi^2} \sum_{k=2}^n \frac{V_k}{(r_{1k}^2 - a_1^2)^{1/2} [\rho^2 + r_{1k}^2 - 2\rho r_{1k} \cos(\phi - \phi_{1k})]}.$$
(4.10.6)

Здесь V_k обозначает половину объёма открытой k -ой трещины

$$V_k = \iint_{S_k} w_k dS_k,$$

и хотя точное местоположение точки R_{1k} с полярными координатами (r_{1k}, ϕ_{1k}) неизвестно, тот факт, что она принадлежит области S_k , ограничивает возможные вариации интересующих нас параметров и позволяет нам получить верхнюю и нижнюю границы, а также достаточно точную центральную оценку, что будет обсуждаться далее. Соображения симметрии могут также быть использованы, чтобы сделать оценки более точными. Мы покажем далее, что эти границы могут быть так близко друг к другу в случае далёких трещин, что они дают, фактически, достаточно точное решение задачи.

Объём трещины $2V_1$ может быть оценён путём интегрирования (4.10.4) по области S_1 . Результат есть:

$$V_1 = 4H \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \sigma(\rho, \phi) (a_1^2 - \rho^2)^{1/2} \rho d\rho d\phi$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \int \int_{S_k} \left[\frac{a_1}{(\rho^2 - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_1}{\rho} \right] w_k(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi. \quad (4.10.7)$$

Мы можем использовать опять теорему о среднем, с результатом:

$$V_1 = 4H \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \sigma_1(\rho, \phi) (a_1^2 - \rho^2)^{1/2} \rho d\rho d\phi + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \left[\frac{a_1}{(\rho_{1k}^2 - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_1}{\rho_{1k}} \right] V_k. \quad (4.10.8)$$

Опять, точка с полярными координатами ρ_{1k} принадлежит области S_k , таким образом ограничивая возможную вариацию. Интегрирование оставшихся $n-1$ уравнений по площади каждой трещины обеспечивает окончательно систему n линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена относительно неизвестных V_k . Их подстановка назад в (4.10.6) даёт полное решение задачи. Хотя точные значения координат r_{ik} , ϕ_{ik} и ρ_{ik} неизвестны, мы можем всегда использовать их максимальные и минимальные значения, чтобы получить верхнюю и нижнюю границы для всех параметров, интересующих нас.

Определяя коэффициент концентрации напряжений как

$$k_k(\phi) = \lim_{\rho \rightarrow a_k} \{(\rho - a_k)^{1/2} \sigma_k(\rho, \phi)\},$$

можно получить эквивалентное выражение через перемещения сторон трещины:

$$k_k(\phi) = \frac{1}{4\pi H} \lim_{\rho \rightarrow a_k} \frac{w_k(\rho, \phi)}{(\rho - a_k)^{1/2}}. \quad (4.10.9)$$

Подстановка (4.10.4) в (4.10.9) даёт:

$$k_1(\phi) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2} a_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \frac{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2} \sigma_1(\rho, \phi_0) \rho d\rho d\phi_0}{\rho^2 + a_1^2 - 2\rho a_1 \cos(\phi - \phi_0)}$$

$$+ \frac{\sqrt{a_1}}{2\sqrt{2}\pi^3 H} \sum_{k=2}^n \int_{S_k} \int \frac{w_k(\rho, \phi_0) \rho d\rho d\phi_0}{(\rho^2 - a_1^2)^{1/2} [\rho^2 + a_1^2 - 2\rho a_1 \cos(\phi - \phi_0)]}.$$

Используя опять теорему о среднем, следующее выражение для коэффициента концентрации напряжений может быть получено:

$$k_1(\phi) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2} a_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \frac{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2} \sigma_1(\rho, \phi_0) \rho d\rho d\phi_0}{\rho^2 + a_1^2 - 2\rho a_1 \cos(\phi - \phi_0)} + \frac{\sqrt{a_1}}{2\sqrt{2}\pi^3 H} \sum_{k=2}^n \frac{V_k}{(r_{1k}^2 - a_1^2)^{1/2} [r_{1k}^2 + a_1^2 - 2r_{1k} a_1 \cos(\phi - \phi_{1k})]}.$$

(4.10.10)

Аналогичные выражения могут быть выведены для остальных $n-1$ трещин. Первый член в (4.10.10) представляет коэффициент концентрации напряжений одинокой трещины, открываемой произвольной нормальной нагрузкой σ_1 , остальные члены отражают влияние взаимодействующих трещин. Ясно из (4.10.10), что коэффициент концентрации напряжений взаимодействующих копланарных трещин всегда больше, чем коэффициент концентрации напряжений одинокой трещины под тем же давлением. Это доказывает, что результаты Mastrojannis and Mura (1983) неправильны, так как они описывают уменьшение коэффициента концентрации напряжений вдоль части границы.

Пример 1: Две трещины. Рассмотрим случай двух копланарных круглых трещин с радиусами a_1 и a_2 под действием однородного нормального давления $\sigma_1 = p_1$ и $\sigma_2 = p_2$ соответственно. Пусть l обозначает расстояние между их центрами. Уравнения (4.10.8) в этом случае принимают форму:

$$V_1 = \frac{8}{3} \pi a_1^3 H p_1 + \frac{2}{\pi} V_2 \left[\frac{a_1}{(\rho_{12}^2 - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_1}{\rho_{12}} \right],$$

$$V_2 = \frac{8}{3} \pi a_2^3 H p_2 + \frac{2}{\pi} V_1 \left[\frac{a_2}{(\rho_{21}^2 - a_2^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_2}{\rho_{21}} \right].$$

Их решение есть:

$$V_1 = \frac{8}{3}\pi H \frac{a_1^3 p_1 + c_{12} a_2^3 p_2}{1 - c_{12} c_{21}}, \quad V_2 = \frac{8}{3}\pi H \frac{c_{21} a_1^3 p_1 + a_2^3 p_2}{1 - c_{12} c_{21}}, \quad (4.10.11)$$

где

$$c_{12} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{a_1}{(\rho_{12}^2 - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_1}{\rho_{12}} \right], \quad c_{21} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{a_2}{(\rho_{21}^2 - a_2^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_2}{\rho_{21}} \right]. \quad (4.10.12)$$

Здесь ρ_{12} находится в интервале между $l - a_2$ и $l + a_2$, и $l - a_1 \leq \rho_{21} \leq l + a_1$. Верхняя граница для V_k соответствует $\rho_{12} = l - a_2$ и $\rho_{21} = l - a_1$; нижняя граница достигается при $\rho_{12} = l + a_2$ и $\rho_{21} = l + a_1$. Эти оценки могут быть сближены, используя теорему взаимности, которая требует справедливость тождества $c_{12} a_2^3 = c_{21} a_1^3$. Это тождество сужает интервал допустимых значений для ρ (только в случае неравных трещин), таким образом делая оценки более узкими. Получается, что случай двух равных трещин является наименее точным. Мы также рассмотрим *центральную оценку*, которая соответствует $\rho_{12} = \rho_{21} = l$. Мы покажем, что центральная оценка даёт достаточно точное решение даже для довольно близких взаимодействий между трещинами.

Формулы (4.10.11–4.9.12) упрощаются в случае равных трещин, когда $a_1 = a_2 = a$, и если $p_1 = p_2 = p$, тогда

$$V_1 = V_2 = V = \frac{V_0}{1 - c}, \quad c = \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a}{\rho} \right]. \quad (4.10.13)$$

Здесь $V_0 = (8/3)\pi H a^3 p$ обозначает половину объёма одинокой трещины, и ρ заключено в интервале между $l - a$ и $l + a$. Заметим, что в случае однородного давления, энергия трещины W пропорциональна её объёму, а именно, $W = pV$. Становится ясно из (4.10.13), что взаимодействие трещин увеличивает их энергию. Подстановка (4.10.13) в (4.10.10) и использование теоремы о среднем даёт следующее выражение для коэффициента концентрации напряжений:

$$K(\phi) = K_0 \left\{ 1 + \frac{2\varepsilon^3}{\{3\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2} - 6[\varepsilon - (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \sin^{-1} \varepsilon]\} [1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \phi]} \right\}, \quad (4.10.14)$$

где $K_0 = p\sqrt{2a}/\pi$ соответствует коэффициенту концентрации напряжений для изолированной трещины под действием однородного нормального давления

ρ . Здесь верхняя граница для коэффициента концентрации напряжений даётся как $\varepsilon = a/(l-a)$, нижняя граница соответствует $\varepsilon = a/(l+a)$, и центральная оценка определена как $\varepsilon = a/l$. Теперь нам нужно точное численное решение, чтобы оценить точность выведенных приближённых формул. Положим перемещения сторон трещины в форме:

$$w(\rho, \phi) = 4Hp(a^2 - \rho^2)^{1/2} f(\rho, \phi), \quad (4.10.15)$$

где f пока неизвестная функция. Она может быть названа *функцией взаимодействия*, так как она равна отношению открывающего перемещения трещины к тому же значению для изолированной трещины. Значения $f(a, \phi)$ равны отношению коэффициента концентрации напряжений взаимодействующих трещин к коэффициенту концентрации напряжений изолированной трещины. Мы назовём $f(a, \phi)$ *фактором взаимодействия*. Подстановка (4.10.15) в (4.10.4) даёт удобное выражение для процедуры итерации:

$$w(\rho, \phi) = 4Hp(a^2 - \rho^2)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - r_0^2)^{1/2} f(r_0, \psi_0) r_0 dr_0 d\psi_0}{(l^2 + r_0^2 + 2lr_0 \cos \psi_0 - a^2)^{1/2} [r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos(\psi + \psi_0)]} \right\}. \quad (4.10.16)$$

Здесь мы ввели новые переменные: $r = (\rho^2 + l^2 - 2l\rho \cos \phi)^{1/2}$, $\psi = \sin^{-1}[(\rho/r) \sin \phi]$.

Интеграл в (4.10.16) имеет логарифмическую сингулярность при $r = l - a$, $\psi = 0$, когда $l \rightarrow 2a$, следовательно процедура итерации может расходиться для l очень близких к $2a$. Предельное значение l может быть найдено путём анализа интегрального оператора

$$Z(f) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - r_0^2)^{1/2} f(r_0, \psi_0) r_0 dr_0 d\psi_0}{(l^2 + r_0^2 + 2lr_0 \cos \psi_0 - a^2)^{1/2} [(l-a)^2 + r_0^2 + 2(l-a)r_0 \cos \psi_0]}. \quad (4.10.17)$$

Согласно теореме Банаха, достаточно доказать, что интегральный оператор (4.10.17) является сжимающим оператором. Мы определим расстояние в классе непрерывных функций

$$\delta(f, f_1) = \max |f(\rho, \phi) - f_1(\rho, \phi)|.$$

Мы измерим значение

$$\begin{aligned}
& |Z(f) - Z(f_1)| \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - r^2)^{1/2} |f(r, \psi) - f_1(r, \psi)| r dr d\psi}{(l^2 + r^2 + 2lr \cos \psi - a^2)^{1/2} [(l-a)^2 + r^2 + 2(l-a)r \cos \psi]} \\
&\leq \frac{\delta(f, f_1)}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - r^2)^{1/2} r dr d\psi}{(l^2 + r^2 + 2lr \cos \psi - a^2)^{1/2} [(l-a)^2 + r^2 + 2(l-a)r \cos \psi]} \\
&< \frac{2\delta(f, f_1)}{\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - r^2)^{1/2} r dr}{[(l-r)^2 - a^2]^{1/2} [(l-a)^2 - r^2]} < \frac{2a \delta(f, f_1)}{\pi [(l-a)^2 - a^2]^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Интегральный оператор (4.10.17) будет сжимающим оператором, если

$$\frac{2a}{\pi [(l-a)^2 - a^2]^{1/2}} < 1,$$

и это означает, что процедура итераций будет сходиться для $l > 2.18a$, который соответствует довольно близкому взаимодействию. Вышеуказанная оценка является грубой. Прямые вычисления показывают, что процедура итерации сходится даже для $l = 2.0005a$ (что соответствует случаю, когда кратчайшее расстояние между трещинами равно 0.0005 их радиуса), и сходится быстро: первая итерация с $f \equiv 1$ имеет максимальную относительную ошибку меньше, чем 2%, и шестая итерация может считаться практически точным решением, так как максимальная относительная ошибка меньше, чем 10^{-7} .

Точность первой итерации улучшается с увеличением расстояния между трещинами. Например, первая итерация для $l = 10$ практически точна, так как максимальная относительная ошибка меньше, чем 10^{-7} . Мы не смогли двинуться ближе, чем $l = 2.0005a$, но не из-за расхождения, а потому, что стандартная программа DBLIN из библиотеки IMSL, которая была использована для вычисления интегралов, просто перестала работать. Хотя мы не имеем строгого доказательства, не исключено, что процедура итераций теоретически сходится для произвольно малого расстояния между трещинами.

Результаты вычисления функции взаимодействия $f(\rho, \phi)$ представлены в (Fabrikant, 1987g) для различных значений l/a . Мы ограничиваемся здесь одной короткой таблицей, относящейся к наиболее близким взаимодействиям, с $l = 2.0005a$. Читатель может найти дополнительные числовые данные в

вышеназванной статье.

Таблица 4.10.1. Функция взаимодействия для $l = 2.0005a$

ρ ϕ	0.	30.	60.	90.	120.	150.	180.
1.00000	2.77577	1.18634	1.06686	1.03605	1.02471	1.02009	1.01881
0.91667	1.42135	1.16479	1.06729	1.03761	1.02614	1.02137	1.02003
0.83333	1.27366	1.14560	1.06728	1.03916	1.02766	1.02277	1.02139
0.75000	1.20176	1.12870	1.06682	1.04067	1.02928	1.02431	1.02289
0.66667	1.15812	1.11396	1.06593	1.04214	1.03102	1.02601	1.02455
0.58333	1.12865	1.10117	1.06464	1.04353	1.03287	1.02788	1.02642
0.50000	1.10743	1.09012	1.06299	1.04482	1.03483	1.02996	1.02850
0.41667	1.09146	1.08058	1.06103	1.04597	1.03692	1.03228	1.03086
0.33333	1.07903	1.07234	1.05883	1.04696	1.03911	1.03486	1.03353
0.25000	1.06913	1.06519	1.05646	1.04777	1.04142	1.03775	1.03657
0.16667	1.06108	1.05899	1.05396	1.04836	1.04382	1.04101	1.04007
0.08333	1.05442	1.05358	1.05141	1.04872	1.04630	1.04468	1.04411
0.00000	1.04884	1.04884	1.04884	1.04884	1.04884	1.04884	1.04884

Первая строка в Таблице 4.10.1 даёт отношение коэффициента концентрации напряжений взаимодействующих трещин к коэффициенту концентрации напряжений изолированной трещины под действием той же однородной нагрузки. Все вычисления были сделаны с относительной ошибкой не превышающей 10^{-6} . Было установлено, что формулы Collins (1963) имеют точность 1% для $l > 2.5a$. Относительная ошибка центральной оценки, соответствующей (4.10.14) не превышает 2% для $l > 2.5a$. Можно также заметить, что центральная оценка всегда несколько ниже точного результата, таким образом давая в случае двух трещин очень близкую к точной нижнюю границу для параметров представляющих интерес. То же самое может быть сказано про формулы Collins (1963). Точность центральной оценки быстро ухудшается с уменьшением l , например, максимальная ошибка в коэффициенте концентрации напряжений для $l = 2.2$ (расстояние между трещинами равно 0.2 от их радиуса) составляет около 10%. Точность центральной оценки энергии трещины, соответствующая (4.10.13) намного лучше, и обсуждается в деталях в следующей секции. В последующих примерах мы рассмотрим только центральную оценку для всех параметров.

Пример 2: Бесконечный ряд одинаковых трещин. Пусть трещины имеет радиус a , и расстояние между центрами соседних трещин равно l . Трещины открываются однородным давлением p . Центральная оценка для объёма открытой трещины $2V$ может быть определена согласно (4.10.8) одним уравнением:

$$V = \frac{8}{3}\pi H a^3 p + \frac{4}{\pi} V \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a}{(k^2 l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a}{kl} \right],$$

с результатом:

$$V = \frac{V_0}{1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a}{(k^2 l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a}{kl} \right]}, \quad (4.10.18)$$

где $V_0 = (8/3)\pi H p$ есть соответствующий результат для случая изолированной трещины. Открывающее перемещение трещины примет форму, согласно (4.10.6)

$$w(\rho, \phi) = (a^2 - \rho^2)^{1/2} \left[4pH + \frac{2V}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^2 + (kl)^2}{(k^2 l^2 - a^2)^{1/2} [\rho^4 + (kl)^4 - 2(\rho kl)^2 \cos 2\phi]} \right],$$

и, как прямое следствие предыдущего выражения, коэффициент концентрации напряжений будет определён как

$$K(\phi) = K_0 \left[1 + \frac{V}{2\pi^2 p H} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^2 + (kl)^2}{(k^2 l^2 - a^2)^{1/2} [a^4 + (kl)^4 - 2(akl)^2 \cos 2\phi]} \right],$$

где K_0 обозначает, как и раньше, коэффициент концентрации напряжений изолированной трещины.

Пример 3: Полигональная конфигурация. Рассмотрим круглую трещину радиуса b , с её центром, совпадающим с центром правильного полигона, окружённую n трещинами радиуса a , с их центрами расположенными в вершинах полигона. Пусть l есть расстояние от центра полигона до его вершины. Пусть однородное давление p_c открывает центральную трещину, и однородное давление p действует внутри трещин расположенных в вершинах полигона. Благодаря симметрии системы, открывающий объём трещины может быть определён двумя уравнениями:

$$V_c = \frac{8}{3} \pi H b^3 p_c + \frac{2}{\pi} n V \left[\frac{b}{(l^2 - b^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{b}{l} \right],$$

$$V = \frac{8}{3} \pi H a^3 p + \frac{2}{\pi} V_c \left[\frac{a}{(l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a}{l} \right]$$

$$+ \frac{2}{\pi} V \sum_{k=2}^n \left[\frac{a}{(l_k^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a}{l_k} \right],$$

где V_c и V обозначают половину объёма центральной трещины и трещин в вершинах соответственно, и $l_k = 2l \sin(\pi k/n)$. Решение есть:

$$V_c = \frac{8}{3} \pi H \frac{b^3 p_c c_{22} + a^3 p c_{12}}{c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}}, \quad V = \frac{8}{3} \pi H \frac{b^3 p_c c_{21} + a^3 p c_{11}}{c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}},$$

(4.10.19)

где

$$c_{11} = 1, \quad c_{22} = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \left[\frac{a}{(l_k^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a}{l_k} \right],$$

$$c_{21} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{(l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a}{l} \right], \quad c_{12} = \frac{2}{\pi} n \left[\frac{b}{(l^2 - b^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{b}{l} \right].$$

Открывающие перемещения центральной трещины, согласно (4.10.6), имеют вид:

$$w_c(\rho, \phi) = 4H p_c (b^2 - \rho^2)^{1/2} \left[1 + \frac{V}{4\pi^2 H p_c (l^2 - b^2)^{1/2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos(\phi - \phi_k)} \right]$$

(4.10.20)

Полагая $\phi_k = 2\pi k/n$, суммирование в (4.10.20) может быть выполнено, с результатом:

$$w_c(\rho, \phi) = 4H p_c (b^2 - \rho^2)^{1/2} \left[1 \right]$$

$$+ \frac{nV}{4\pi^2 H p_c (l^2 - b^2)^{1/2}} \frac{l^{2n} - \rho^{2n}}{(l^2 - \rho^2)(\rho^{2n} + l^{2n} - 2\rho^n l^n \cos n\phi)} \Big].$$

Коэффициент концентрации напряжений для центральной трещины имеют форму:

$$K_c = K_0 \left[1 + \frac{nV}{4\pi^2 H p_c (l^2 - b^2)^{3/2}} \frac{l^{2n} - b^{2n}}{(b^{2n} + l^{2n} - 2b^n l^n \cos n\phi)} \right].$$

Благодаря симметрии системы, все трещины, расположенные в вершинах, будут иметь одинаковые характеристики. Следующие выражения справедливы в локальной системе полярных координат, с началом в центре трещины и полярной осью совпадающей с линией, соединяющей центр полигона с его вершиной. Открывающие перемещения трещины равны

$$w(\rho, \phi) = 4Hp(a^2 - \rho^2)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi^2 Hp} \left[\frac{V_c}{(l^2 - a^2)^{1/2} (\rho^2 + l^2 + 2l\rho \cos \phi)} + \sum_{k=2}^n \frac{V}{(l_k^2 - a^2)^{1/2} [\rho^2 + l_k^2 + 2l_k \rho \cos(\phi + \psi_k)]} \right] \right\},$$

где V и V_c определены в (4.10.19); $l_k = 2l \sin[\pi(k-1)/n]$, и $\psi_k = 2\pi(k-1)/n$. Коэффициент концентрации напряжений может быть записан как:

$$K = K_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi^2 Hp} \left[\frac{V_c}{(l^2 - a^2)^{1/2} (a^2 + l^2 + 2la \cos \phi)} + \sum_{k=2}^n \frac{V}{(l_k^2 - a^2)^{1/2} [a^2 + l_k^2 + 2al_k \cos(\phi + \psi_k)]} \right] \right\}.$$

Дискуссия. Представляется интересным сравнить наши результаты с имеющимися в литературе. Статья Collins (1963), хотя и опубликована 23 года тому назад, похоже всё ещё является самым надёжным источником. Он не дал коэффициент концентрации напряжений явно, но он может быть легко выведен для случая двух равных трещина, и он примет вид в наших обозначениях:

$$\begin{aligned}
K = K_0 \left\{ 1 + \frac{2\epsilon^3}{3\pi} + \frac{8\epsilon^5}{5\pi} + \frac{4\epsilon^6}{9\pi^2} + \frac{30\epsilon^7}{7\pi} + \frac{12\epsilon^8}{5\pi^2} \right. \\
+ \frac{4\epsilon^4}{3\pi} \left[1 + 3\epsilon^2 + \frac{2\epsilon^3}{3\pi} + 9\epsilon^4 \right] \cos\phi + \frac{4\epsilon^5}{3\pi} \left[1 + \frac{18\epsilon^2}{5} + \frac{2\epsilon^3}{3\pi} \right] \cos 2\phi \\
\left. + \frac{4\epsilon^6}{3\pi} \left[1 + \frac{21\epsilon^2}{5} \right] \cos 3\phi + \frac{4\epsilon^7}{3\pi} \cos 4\phi + \frac{4\epsilon^8}{3\pi} \cos 5\phi \right\}. \quad (4.10.21)
\end{aligned}$$

Наш результат (4.10.14), если его разложить в ряд, имеет вид:

$$K = K_0 \left[1 + \frac{2\epsilon^3}{3\pi} (1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \cos k\phi) (1 + \frac{3}{2}\epsilon^2 + \frac{2\epsilon^3}{3\pi} + \frac{7}{4}\epsilon^4 + \dots) \right]. \quad (4.10.22)$$

Сравнение (4.10.21) с (4.10.22) выявляет довольно много общих членов. Хотя Коллинс сам полагал, что его результаты действительны только для трещин, чей радиус намного меньше, чем расстояние между их центрами, численные результаты указывают, что (4.10.21) является точным до 1% для $l \geq 2.5a$, что соответствует кратчайшему расстоянию описанному в литературе. Прямые вычисления показывают, что центральная оценка, соответствующая (4.10.14), не отличается от Collins (4.10.21) более, чем на 3% во всём интервале $2a < l < \infty$, и отличается меньше, чем на 0.9% для $l > 2.5a$. Коэффициент концентрации напряжений, полученный в (Андрейкив и Панасюк, 1971), есть

$$K = K_0 (1 + \frac{2\epsilon^3}{3\pi} + \frac{2\epsilon^4}{3\pi} \cos\phi).$$

Следует заметить фактор 2 пропущенный в третьем члене их результата.

Collins (1963) дал следующее выражение для энергии трещины в случае двух равных трещин:

$$W = W_0 \left[1 + \frac{2\epsilon^3}{3\pi} + \frac{6\epsilon^5}{5\pi} + \frac{4\epsilon^6}{9\pi^2} + \frac{18\epsilon^7}{7\pi} + \frac{32\epsilon^8}{15\pi^2} + \dots \right],$$

где $W_0 = (8/3)\pi N a^3 p^2$ есть энергия изолированной трещины. Наше выражение для энергии трещины имеет вид:

$$W = \frac{W_0}{1-c}, \quad (4.10.23)$$

где c определена согласно (4.10.13) как

$$c = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\epsilon}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \epsilon \right].$$

Разложение в ряд формулы (4.10.23) даёт:

$$W = W_0 \left[1 + \frac{2\epsilon^3}{3\pi} + \frac{3\epsilon^5}{5\pi} + \frac{4\epsilon^6}{9\pi^2} + \frac{15\epsilon^7}{28\pi} + \dots \right].$$

что очень близко к результату Коллинса, наш результат немного ниже.

Таблица 4.10.2. Увеличение энергии трещины (две равные трещины).

l/a	верхняя граница	нижняя граница	центр. оценка	результат Коллинса	точный результат	ошибка (%)
2.001	—	1.008800	1.035366	1.046308	1.062976	2.6
2.005	—	1.008762	1.035105	1.045921	1.061694	2.5
2.010	—	1.008714	1.034783	1.045444	1.060378	2.4
2.020	—	1.008621	1.034152	1.044510	1.058066	2.3
2.050	—	1.008349	1.032352	1.041861	1.052411	1.9
2.100	2.965366	1.007921	1.029637	1.037908	1.045276	1.5
2.200	1.498350	1.007150	1.025091	1.031413	1.035399	1.0
2.500	1.117132	1.005370	1.016120	1.019160	1.020067	0.4
3.000	1.035432	1.003526	1.008809	1.009900	1.010035	0.1
5.000	1.003526	1.001009	1.001764	1.001834	1.001835	0.0
10.000	1.000294	1.000161	1.000214	1.000216	1.000216	0.0

Таблица 4.10.2 показывает значения W/W_0 . Она подтверждает, что ошибка центральной оценки (4.10.23) меньше, чем 3%, даже для близких взаимодействий, когда кратчайшее расстояние между трещинами равно 0.001 их радиуса. Результаты Коллинса представлены, чтобы подчеркнуть точность нашего численного решения. Увеличение энергии трещин, высываемое их взаимодействием, относительно невелико даже для очень близких взаимодействий; это в основном благодаря узкой локализации эффектов взаимодействия (смотри, например, Таблицу 4.10.1.)

Представляет также интерес сравнить верхнюю границу для коэффициента концентрации напряжений, определённого в (4.10.14), с верхней границей выведенной Ioakimidis (1982). Его результат для двух равных

трещин записывается в наших обозначениях:

$$K = \frac{K_0}{1 - \frac{2a^3}{3\pi(l-2a)}} \quad (4.10.24)$$

Если мы разложим (4.10.13) в степенной ряд, сохраняя только первые члены, результат будет:

$$V = \frac{V_0}{1 - \frac{2a^3}{3\pi(l-a)}} \quad (4.10.25)$$

Сравнение (4.10.24) с (4.10.25) объясняет, почему наша оценка более узкая: мы имеем в знаменателе $l-a$ в то время, как Иоакимидис имеет $l-2a$.

Вот численный пример. Для $l=3a$ точный результат есть $K=1.0234K_0$. Наша верхняя граница даёт $K=1.127K_0$ с ошибкой 10%, в то время, как результат формулы (4.10.24) есть $K=1.269K_0$, с ошибкой около 25%.

Collins (1963) дал следующее выражение для энергии трещины в случае бесконечного ряда равных трещин

$$W = W_0(1 + 0.5102\varepsilon^3 + 0.7921\varepsilon^5 + 0.2603\varepsilon^6 + 1.6507\varepsilon^7 + 0.8083\varepsilon^8 + \dots) \quad (4.10.26)$$

Наше выражение согласно (4.10.18) есть:

$$W = \frac{W_0}{1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon}{(k^2 - \varepsilon^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{k} \right]} \quad (4.10.27)$$

Значения W/W_0 , вычисленные на основе (4.10.26) и (4.10.27), могут быть найдены в (Fabrikant, 1987g). Наш (4.10.27) не отличается от (4.10.26) более, чем на 2% во всём интервале $2.001a \leq l < \infty$. Конечно, это не означает, что центральная оценка так точна; это означает только, что наше простое приближённое решение почти так же точно, как очень сложные формулы Коллинса. Мы не знаем ни одного результата в литературе по механике, которые можно было бы сравнить с нашими результатами для полигональной конфигурации.

Некоторые хорошо известные результаты могут быть упрощены значительно, используя метод вычисления различных интегралов от расстояний между несколькими точками. Например, вот система основных интегральных уравнений, выведенных Панасюком и другими (1986, стр. 83) для задачи взаимодействия N копланарных тонких сфероидальных включений:

$$w_n(x_n, y_n) + H \Gamma w_n(x_n, y_n) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \int_{S_k} \int w_k(x_k, y_k) \Gamma[(x_n - x_k)^2 + (y_n - y_k)^2]^{-3/2} dx_k dy_k = f_n(x_n, y_n), \text{ for } n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.10.28)$$

Здесь f_n известная функция, w_n — нормальное перемещение на границе n -ого включения, S_n — поперечное сечение вдоль медианы, $(x_n, y_n) \in S_n$, и интегральный оператор Γ определён как

$$\begin{aligned} \Gamma \Phi(x_k, y_k) = & \int_{S_k} \int \frac{\Phi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x_k - \xi)^2 + (y_k - \eta)^2]^{1/2}} \\ & - \frac{1}{\pi^2} \int_{\bar{S}_k} \int \frac{d\xi d\eta}{\{[\xi^2 + \eta^2 - a_k^2][(x_k - \xi)^2 + (y_k - \eta)^2]\}^{1/2}} \\ & \times \int_{S_k} \int \frac{\Phi(\xi_1, \eta_1)(a_k^2 - \xi_1^2 - \eta_1^2)^{1/2}}{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} d\xi_1 d\eta_1. \end{aligned} \quad (4.10.29)$$

Здесь a_k радиус среднего поперечного сечения k -ого включения, и \bar{S}_k обозначает площадь вне S_k . Двойные и четверные интегралы в (4.10.29), которые являются ядром интегрального уравнения (4.10.28), делают численное решение почти невозможным. Панасюк и другие (1986) ухитрились дать приближённое решение для случая, когда включения далеки одно от другого, что имеет малую практическую ценность, так как взаимодействие на таких расстояниях между включениями почти отсутствует. Мы покажем, что (4.10.28) может быть упрощено, так что его ядро будет представлено в элементарных функциях. Мы используем интеграл

$$\int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \frac{1}{\rho_0^2 + r^2 - 2\rho_0 r \cos(\phi_0 - \psi)} \frac{r d\rho_0 d\psi}{[\rho_0^2 + r^2 - 2\rho_0 r \cos(\phi - \psi)]^{1/2}}$$

$$= \frac{2\pi}{R} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{(a^2 - \rho^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{aR} \right) \right],$$

Изменим порядок интегрирования во втором интеграле (4.10.29), выполним интегрирование в \bar{S}_k , и интегральный оператор Γ значительно упрощается в полярных координатах, а именно,

$$\Gamma \Phi(\rho, \phi) = \frac{2}{\pi} \int \int_{S_k} \frac{1}{R} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{R} \right) \Phi(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0,$$

что намного проще, чем (4.10.29). Следует напомнить, что R и η определены в (4.1.14). Мы можем также вычислить $\Gamma[(x_n - x_k)^2 + (y_n - y_k)^2]^{-3/2}$ в элементарных функциях. В самом деле, мы можем получить из (1.6.19)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{R} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{R} \right) \frac{\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{[\rho_0^2 + r^2 - 2r\rho_0 \cos(\phi_0 - \psi)]^{3/2}}$$

$$= \frac{2\pi(a^2 - \rho^2)^{1/2}}{(r^2 - a^2)^{1/2} [r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \psi)]}, \quad \text{для } r > a.$$

Вышеприведённые результаты упрощают (4.10.28) настолько, что теперь оно может быть решено численно итерациями или аналитически.

Упражнение 4.10

1. Выведите (4.10.4).
2. Выведите (4.10.4) используя другой подход: результаты секции 4.2 в сочетании с теоремой взаимности.
3. Исследуйте сходимость итеративного процесса, приложенного к интегральному уравнению (4.10.16).
4. Рассмотрите взаимодействие трещины с микротрещиной.

5. Рассмотрите взаимодействие двух трещин вызываемое изгибом упругого пространства. Положите пространство растянутым так, что трещины не закрываются из-за изгиба.

4.11 Близкие взаимодействия копланарных круглых трещин под действием сдвигающей нагрузки

В этой секции, общий метод приложен к анализу напряжений в упругом пространстве ослабленном несколькими произвольно расположенными копланарными круглыми трещинами под действием произвольной сдвигающей нагрузки. Задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма. Число уравнений равно числу трещин, и может быть уменьшено в случае симметричной конфигурации. Уравнения несингулярны. Показано, что процедура итераций сходится, и что сходимость настолько быстрая, что практически точное численное решение может быть получено даже для очень близко расположенных трещин. Можно получить приблизительное *аналитическое* решение без необходимости решения интегральных уравнений. Оно обеспечивает достаточно точную оценку для интересующих нас параметров, как коэффициент концентрации напряжений, энергия трещины, перемещение сторон трещины, и так далее. Случай двух трещин и бесконечный ряд равных трещин рассмотрены как иллюстративные примеры.

Теория. Рассмотрим упругое пространство, ослабленное в плоскости $z=0$ n произвольно расположенными круглыми трещинами. Трещины не пересекаются. Пусть центр k -ой трещины расположен в точке с декартовыми координатами x_k и y_k , и её радиус обозначен a_k . Мы введём комплексные тангенциальные перемещения $u = u_x + iu_y$, и комплексные сдвигающие напряжения $\tau = \tau_{zx} + i\tau_{yz}$. Пусть произвольные кососимметричные сдвигающие напряжения τ_k приложены к поверхностям k -ой трещины.

Мы можем выделить, без потери общности, трещину номер 1, и рассмотреть системы трещин в локальной полярной системе координат с началом координат совпадающим с центром первой трещины. Чтобы быть в состоянии использовать теорему взаимности, нам нужно рассмотреть вторую систему напряжений приложенных к той же самой системе трещин. Мы прикладываем две единичные сосредоточенные силы T_x к обеим поверхностям первой трещины в противоположных направлениях в точках полярными координатами (ρ, ϕ) , и параллельно оси Ox . Мы также прилагаем сдвигающие напряжения q_{kx} и q_{ky} к остальным трещинам. Эти напряжения выбраны таким образом, чтобы обеспечить нулевое взаимное перемещение на поверхностях трещин, так что вся система ведёт себя, как изолированная трещина (номер один) в бесконечном теле. Этот выбор

позволит нам использовать функции Грина для изолированной круглой трещины выведенные в секции 4.4. Следующее интегральное уравнение может быть получено, используя теорему взаимности:

$$u_{1x} + \sum_{k=2}^n \iint_{S_k} q_{kx} u_{kx} dS_k + \sum_{k=2}^n \iint_{S_k} q_{ky} u_{ky} dS_k = \iint_{S_1} (\tau_{1x} u_{xT_x} + \tau_{1y} u_{yT_x}) dS_1. \quad (4.11.1)$$

Здесь q_{kx} и q_{ky} обозначают сдвигающие напряжения в области k -ой трещины вызываемые парой единичных сосредоточенных сил, приложенных в произвольной точке первой трещины в направлении параллельном оси Ox ; u_{xT_x} и u_{yT_x} — тангенциальные перемещения поверхностей первой трещины, вызываемые теми же единичными силами; и u_{1x} , u_{kx} , и u_{ky} пока неизвестные тангенциальные перемещения поверхностей первой и k -ой трещин соответственно. Аналогичные соображения, с единичными сосредоточенными силами T_y приложенными параллельно оси Oy , дают второе интегральное уравнение

$$u_{1y} + \sum_{k=2}^n \iint_{S_k} s_{kx} u_{kx} dS_k + \sum_{k=2}^n \iint_{S_k} s_{ky} u_{ky} dS_k = \iint_{S_1} (\tau_{1x} u_{xT_y} + \tau_{1y} u_{yT_y}) dS_1. \quad (4.11.2)$$

Смысл обозначений в (4.11.2) аналогичен (4.11.1). Все интегралы в (4.11.1) и (4.11.2) вычисляются на одной стороне соответствующей трещины. Теперь нам нужны явные выражения для параметров q_{kx} , q_{ky} , s_{kx} , s_{ky} , u_{xT_x} , u_{yT_x} , u_{xT_y} , u_{yT_y} . Эти выражения были выведены в секции 4.4, а именно,

$$q_{kx} = -\zeta - \Re Z, \quad q_{ky} = -\Im Z = s_{kx}, \quad s_{ky} = -\zeta + \Re Z, \quad (4.11.3)$$

$$u_{xT_x} = \zeta_1 - \Re Z_1 + \zeta_2 + \Re Z_2, \quad u_{yT_x} = -\Im Z_1 + \Im Z_2,$$

$$u_{xT_y} = \Im Z_1 + \Im Z_2, \quad u_{yT_y} = \zeta_1 - \Re Z_1 - \zeta_2 - \Re Z_2, \quad (4.11.4)$$

где \Re и \Im обозначают действительную и мнимую части, и

$$\zeta = \frac{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2}}{\pi^2 (\rho_0^2 - a_1^2)^{1/2} R^2}, \quad Z = \frac{G_2 (a_1^2 - \rho^2)^{1/2} e^{i\phi_0} (3\rho_0 e^{-i\phi_0} - \rho e^{-i\phi})}{G_1 \pi^2 (\rho_0^2 - a_1^2)^{1/2} \rho_0 (\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0})^2},$$

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{G_1}{\pi R} \tan^{-1} \frac{\eta(a_1)}{R}, & Z_1 &= \frac{G_2^2}{\pi G_1} \frac{(3-t_1) \eta(a_1)}{a_1^2 (1-t_1)^2}, \\ \zeta_2 &= \frac{G_2 \xi}{\pi R} \tan^{-1} \frac{\eta(a_1)}{R}, & Z_2 &= \frac{G_2}{\pi a_1^2} \frac{\eta(a_1) (\xi - t_1 e^{2i\phi_0})}{(1-t_1)(1-\bar{t}_1)}.\end{aligned}\quad (4.11.5)$$

Здесь

$$R = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}, \quad \eta(x) = (x^2 - \rho^2)^{1/2} (x^2 - \rho_0^2)^{1/2} / x, \quad (4.11.6)$$

$$t_1 = (\rho\rho_0/a_1^2) e^{i(\phi-\phi_0)}, \quad \xi = (\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}) / (\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}). \quad (4.11.7)$$

Мы умножаем уравнение (4.11.2) на мнимую единицу i , добавляем результат к (4.11.1) и после подстановки (4.11.3), (4.11.4) и (4.11.5), получим:

$$\begin{aligned}u_1(\rho, \phi) &= \frac{G_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \left[\frac{1}{R} \tan^{-1} \frac{\eta(a_1)}{R} - \frac{G_2^2}{G_1^2} \frac{(3-\bar{t}_1) \eta(a_1)}{a_1^2 (1-\bar{t}_1)^2} \right] \tau_1(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \\ &+ \frac{G_2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \left[\frac{\xi}{R} \tan^{-1} \left(\frac{\eta(a_1)}{R} \right) + \frac{\eta(a_1) (\xi - t_1 e^{2i\phi_0})}{a_1^2 (1-t_1)(1-\bar{t}_1)} \right] \bar{\tau}_1(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \\ &+ \frac{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2}}{\pi^2} \sum_{k=2}^n \int_{S_k} \left[\frac{u_k(\rho_0, \phi_0)}{R^2} + \frac{G_2}{G_1} \frac{\bar{u}_k(\rho_0, \phi_0) (3\rho_0 e^{-i\phi_0} - \rho e^{-i\phi}) e^{i\phi_0}}{\rho_0 (\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0})^2} \right] \rho_0 d\rho_0 d\phi_0.\end{aligned}\quad (4.11.8)$$

Первая два интеграла в (4.11.8), хотя и выглядят очень трудными, могут быть вычислены точно и выражены в элементарных функциях для любой полиномиальной нагрузки. Они дают тангенциальные перемещения первой трещины, как будто она была бы изолирована, под действием заданной нагрузки τ_1 . Остальные интегралы представляют влияние других трещин. Аналогичная процедура может быть приложена к остальным $n-1$ трещинам, и добавочные $n-1$ уравнений типа (4.11.8) могут быть получены. Заметим, что каждое такое уравнение действительно в локальной системе полярных координат относящихся к конкретной трещине. Уравнения эти несингулярны. Они могут быть решены численно итерациями. Как будет

показано далее, они сходятся так быстро, что первая итерация имеет ошибку менее 2.5% даже для очень близких взаимодействий, когда две трещины разделены только расстоянием, равным 0.01 их радиуса.

В случае однородной сдвигающей нагрузки $\tau = \tau_0 = \text{const}$, и система уравнений (4.11.8) упрощается следующим образом

$$u_1 = 2\tau_0 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} (a^2 - \rho^2)^{1/2} + \frac{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2}}{\pi^2} \sum_{k=2}^n \int_{S_k} \int \left[\frac{u_k(\rho_0, \phi_0)}{R^2} + \frac{G_2}{G_1} \frac{\bar{u}_k(\rho_0, \phi_0) (3\rho_0 e^{-i\phi_0} - \rho e^{-i\phi}) e^{i\phi_0}}{\rho_0 (\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0})^2} \right] \frac{\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(\rho_0^2 - a_1^2)^{1/2}}. \quad (4.11.9)$$

В некоторых случаях мы можем получить достаточно точное *аналитическое* решение системы (4.11.8), прилагая теорему о среднем. Результат есть:

$$u_1(\rho, \phi) = \frac{G_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \left[\frac{1}{R} \tan^{-1} \left(\frac{\eta(a_1)}{R} \right) - \frac{G_2^2 (3 - \bar{t}_1) \eta(a_1)}{G_1^2 a_1^2 (1 - \bar{t}_1)^2} \right] \tau_1(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 + \frac{G_2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \left[\frac{\xi}{R} \tan^{-1} \frac{\eta(a_1)}{R} + \frac{\eta(a_1) (\xi - t_1 e^{2i\phi_0})}{a_1^2 (1 - t_1) (1 - \bar{t}_1)} \right] \bar{\tau}_1(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 + \sum_{k=2}^n \frac{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2}}{\pi^2 (\rho_k^2 - a_1^2)^{1/2}} \left[\frac{U_k}{\rho^2 + \rho_k^2 - 2\rho\rho_k \cos(\phi - \phi_k)} + \frac{G_2}{G_1} \frac{\bar{U}_k (3\rho_k e^{-i\phi_k} - \rho e^{-i\phi}) e^{i\phi_k}}{\rho_k (\rho e^{-i\phi} - \rho_k e^{-i\phi_k})^2} \right]. \quad (4.11.10)$$

Здесь

$$U_k = \int_{S_k} \int u_k dS_k,$$

и ρ_k и ϕ_k полярные координаты точки внутри S_k . Хотя точное положение точки неизвестно, тот факт, что она находится внутри области S_k , ограничивает возможные вариации интересующих нас параметров и позволяют конструировать верхних и нижних границ, а также достаточно точных *центральных оценок*, которые соответствуют предположению, что ρ_k

и ϕ_k расположены в *центре* k -ой трещины. Соображения симметрии также могут быть использованы, чтобы сузить интервал оценок. Будет показано далее, что центральная оценка обеспечивает в некоторых случаях достаточно точное решение задачи.

Значение U_1 может быть оценёно интегрированием (4.11.8) по области S_1 . Результат есть:

$$U_1 = 2 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \tau(\rho, \phi) (a_1^2 - \rho^2)^{1/2} \rho d\rho d\phi + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \int_{S_k} \left\{ \left[\frac{a_1}{(\rho^2 - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_1}{\rho} \right] u_k(\rho, \phi) + \frac{G_2}{G_1} a_1^3 \frac{\bar{u}_k(\rho, \phi) e^{2i\phi}}{\rho^2 (\rho^2 - a_1^2)^{1/2}} \right\} \rho d\rho d\phi. \quad (4.11.11)$$

Мы можем использовать опять теорему о среднем, с результатом для центральной оценки:

$$U_1 = 2 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \tau(\rho, \phi) (a_1^2 - \rho^2)^{1/2} \rho d\rho d\phi + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \left[\frac{a_1}{(l_{1k}^2 - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_1}{l_{1k}} \right] U_k + \frac{2G_2}{\pi G_1} a_1^3 \sum_{k=2}^n \frac{\bar{U}_k e^{2i\phi_{1k}}}{l_{1k}^2 (l_{1k}^2 - a_1^2)^{1/2}}. \quad (4.11.12)$$

Здесь (l_{1k}, ϕ_{1k}) полярные координаты центра k -ой трещины в системе координат, имеющей начало в центре первой трещины. Интегрирование остальных $n-1$ уравнений по области каждой трещины ведёт к системе n линейных алгебраических уравнений, которые могут быть решены относительно неизвестных U_k . Их обратная подстановка в (4.11.10) даёт полное решение задачи.

Определим коэффициент концентрации напряжений на краю первой трещины как

$$K_1(\phi) = \lim_{\rho \rightarrow a_1} \{(\rho - a_1)^{1/2} \tau_1(\rho, \phi)\}.$$

Важная черта настоящего метода — возможность вычислить коэффициент концентрации напряжений прямо через перемещения (смотри вывод (2.8.46)):

$$K_1(\phi) = -\frac{a_1}{\pi(G_1^2 - G_2^2)\sqrt{2a_1}} \lim_{\rho \rightarrow a_1} \left[\frac{G_1 u_1(\rho, \phi) + G_2 e^{2i\phi} \bar{u}_1(\rho, \phi)}{(a_1^2 - \rho^2)^{1/2}} \right]. \quad (4.11.13)$$

Коэффициент концентрации напряжений для остальных трещин может быть определён тем же образом. Подстановка (4.11.8) в (4.11.13) даёт, после упрощения:

$$\begin{aligned} K_1(\phi) = & -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{2a_1}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \frac{(a_1^2 - \rho_0^2)^{1/2} \tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{a_1^2 + \rho_0^2 - 2a_1 \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)} \right. \\ & + \frac{G_2 e^{i\phi}}{G_1 a_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \frac{3a_1 e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}}{[a_1 e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}]^2} (a_1^2 - \rho_0^2)^{1/2} \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \left. \right\} \\ & - \frac{a_1}{\pi^3 (G_1^2 - G_2^2) \sqrt{2a_1}} \sum_{k=2}^n \int \int_{S_k} \left\{ \left[\frac{G_1}{R_1^2} + \frac{G_2^2}{G_1} \bar{\Theta}_1 e^{2i\phi} \right] u_k(\rho_0, \phi_0) \right. \\ & \left. + G_2 \left[\frac{e^{2i\phi}}{R_1^2} + \Theta_1 \right] \bar{u}_k(\rho_0, \phi_0) \right\} \frac{\rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{(\rho_0^2 - a_1^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.11.14)$$

Здесь

$$\Theta_1 = \frac{3\rho_0 e^{-i\phi_0} - a_1 e^{-i\phi}}{\rho_0 e^{-i\phi_0} (a_1 e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0})^2}, \quad R_1 = [a_1^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0 a_1 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}.$$

Первые два интеграла в (4.11.14) дают коэффициент концентрации напряжений для изолированной трещины, в то время, как оставшиеся интегралы представляют влияние других трещин. Мы увидим далее, как эти общие выражения могут быть приложены к некоторым специфическим проблемам.

Пример: Две трещины. Рассмотрим случай двух копланарных круглых трещин с радиусами a_1 и a_2 под действием однородной сдвигающей нагрузки τ_1 и τ_2 соответственно. Пусть l есть расстояние между их центрами. Как было установлено в предыдущей секции, задача сведена к

вычислению интегральных характеристик U_1 и U_2 . Мы рассмотрим только центральную оценку. Уравнения (4.11.12) в этом случае примут вид:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{4}{3}\pi a_1^3 \tau_1 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} + \frac{2}{\pi} U_2 \left[\frac{a_1}{(l^2 - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_1}{l} \right] + \frac{2G_2}{\pi G_1} \frac{a_1^3 \bar{U}_2}{l^2 (l^2 - a_1^2)^{1/2}}, \\ U_2 &= \frac{4}{3}\pi a_2^3 \tau_2 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} + \frac{2}{\pi} U_1 \left[\frac{a_2}{(l^2 - a_2^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_2}{l} \right] + \frac{2G_2}{\pi G_1} \frac{a_2^3 \bar{U}_1}{l^2 (l^2 - a_2^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.11.15)$$

Строго говоря, теорема о среднем несправедлива в этом случае, так как мнимая часть u изменяет знак внутри трещины. Численное свидетельство будет представлено позже, чтобы оправдать пренебрежение мнимой части. Принимая это предположение, решение имеет вид:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{4}{3}\pi \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} \frac{a_1^3 \tau_1 + c_{12} a_2^3 \tau_2}{1 - c_{12} c_{21}}, \\ U_2 &= \frac{4}{3}\pi \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} \frac{c_{21} a_1^3 \tau_1 + a_2^3 \tau_2}{1 - c_{12} c_{21}}, \end{aligned} \quad (4.11.16)$$

где

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{a_1}{(l^2 - a_1^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_1}{l} + \frac{G_2}{G_1} \frac{a_1^3}{l^2 (l^2 - a_1^2)^{1/2}} \right], \\ c_{21} &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{a_2}{(l^2 - a_2^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a_2}{l} + \frac{G_2}{G_1} \frac{a_2^3}{l^2 (l^2 - a_2^2)^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.11.17)$$

Мы покажем, что центральная оценка даёт достаточно точное решение даже для относительно близких взаимодействий трещин.

Формулы (4.11.16–4.11.17) упрощаются в случае равных трещин как $a_1 = a_2 = a$, и если $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$, тогда

$$U_1 = U_2 = U = \frac{U_0}{1 - c},$$

$$c = \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{(l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a}{l} + \frac{G_2}{G_1} \frac{a^3}{l^2 (l^2 - a^2)^{1/2}} \right]. \quad (4.11.18)$$

Здесь $U_0 = (4/3)\pi a^3 \tau_0 (G_1^2 - G_2^2)/G_1$. Отметим, что в случае однородной нагрузки, энергия трещины W пропорциональна U , а именно, $W = \tau_0 U$.

Ясно из (4.11.18), что взаимодействие трещин увеличивает их энергию, когда приложенные нагрузки действуют в одном направлении, в противном случае, их энергия уменьшается. Перемещения поверхностей трещина примут вид, согласно (4.11.9) и (4.11.10),

$$\begin{aligned} u_1(\rho, \phi) = (a_1^2 - \rho^2)^{1/2} & \left\{ 2\tau_1 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} \right. \\ & \left. + \frac{U_2}{\pi^2 (l^2 - a_1^2)^{1/2}} \left[\frac{1}{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos \phi} + \frac{G_2}{G_1} \frac{3l - \rho e^{-i\phi}}{l(l - \rho e^{-i\phi})^2} \right] \right\}, \\ u_2(\rho, \phi) = (a_2^2 - \rho^2)^{1/2} & \left\{ 2\tau_2 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} \right. \\ & \left. + \frac{U_1}{\pi^2 (l^2 - a_2^2)^{1/2}} \left[\frac{1}{\rho^2 + l^2 + 2\rho l \cos \phi} + \frac{G_2}{G_1} \frac{3l + \rho e^{-i\phi}}{l(l + \rho e^{-i\phi})^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.11.19)$$

Мы вспоминаем, что каждое выражение в (4.11.19) действительно в *локальной* системе полярных координат, с началом координат расположенным в центре соответствующей трещины. Подстановка (4.11.19) в (4.11.13) даёт выражение для коэффициента концентрации напряжений.

Теперь нам нужно точное численное решение, чтобы оценить точность выведенных приближённых формул. Ради простоты, рассмотрим случай двух равных трещин. Представим перемещения поверхностей трещин в форме:

$$u(\rho, \phi) = 2\tau_0 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} (a^2 - \rho^2)^{1/2} f(\rho, \phi), \quad (4.11.20)$$

где f пока неизвестная комплексная функция. Она может быть названа *функцией взаимодействия*, так как она равна отношению перемещений

поверхностей взаимодействующих трещин к перемещениям изолированной трещины. Значения $f(a, \phi)$ связаны с коэффициентом концентрации напряжений взаимодействующих трещин через соотношение:

$$K(\phi) = -\frac{\sqrt{2a}}{\pi G_1} [G_1 \tau_0 f(a, \phi) + G_2 \bar{\tau}_0 \bar{f}(a, \phi) e^{2i\phi}]. \quad (4.11.21)$$

В случае, когда τ_0 есть действительная константа, мы можем пренебречь мнимую часть f , и коэффициент концентрации напряжений может быть выражен следующим образом:

$$K(\phi) = K_0(\phi) f(a, \phi), \quad (4.11.22)$$

где

$$K_0(\phi) = -\frac{\sqrt{2a}}{\pi G_1} \tau_0 [G_1 + G_2 e^{2i\phi}]$$

есть коэффициент концентрации напряжений для изолированной трещины. Мы назовём $f(a, \phi)$ *фактором взаимодействия*, так как его значение приблизительно равно отношению коэффициента концентрации напряжений взаимодействующих трещина к тому же параметру для изолированной трещины. Подстановка (4.11.20) в (4.11.9) даёт удобное выражение для процедуры итераций:

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) = & 2\tau_0 \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} (a^2 - \rho^2)^{1/2} \left\{ 1 \right. \\ & + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(a^2 - r_0^2)^{1/2} r_0 dr_0 d\psi_0}{(l^2 + r_0^2 + 2lr_0 \cos \psi_0 - a^2)^{1/2}} \left[\frac{f(r_0, \psi_0)}{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos(\psi - \psi_0)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{G_2 \bar{f}(r_0, \psi_0) (2l + r_0 e^{-i\psi_0} - r e^{-i\psi})(l + r_0 e^{i\psi_0})}{G_1 (r_0^2 + l^2 + 2lr_0 \cos \psi_0) (r_0 e^{-i\psi_0} - r e^{-i\psi})^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.11.23)$$

Здесь мы ввели новые переменные: $r = (\rho^2 + l^2 - 2l\rho \cos \phi)^{1/2}$, $\psi = \pi - \sin^{-1}[(\rho/r) \sin \phi]$.

Интеграл в (4.11.23) имеет логарифмическую сингулярность для $r = l - a$, $\psi = 0$, когда $l \rightarrow 2a$, следовательно процедура итерации может расходиться для l очень близких к $2a$.

Прямые вычисления показывают, что процедура итераций сходится для $l=2.01a$, (что соответствует случаю, когда кратчайшее расстояние между трещинами равно 0.01 от их радиуса), и сходится быстро: первая итерация с $f=1$ имеет максимум относительной ошибки меньше, чем 2.5%, и шестая итерация может считаться практически точным решением, так как ошибка становится меньше, чем 10^{-7} .

Точность первой итерации улучшается с увеличением расстояния между трещинами. Например, первая итерация для $l=10$ практически точна с максимумом относительной ошибки меньше, чем 10^{-7} . Мы не смогли идти ближе, чем $l=2.01a$, но не из-за расхождения, а потому, что стандартная программа DBLIN из библиотеки IMSL, которая была использована для вычисления интегралов, просто перестала работать. Хотя мы не имеем строгого доказательства, не исключено, что процедура итераций теоретически сходится для произвольно малого расстояния между трещинами.

В случае, когда $G_2=0$ (для изотропного тела это условие эквивалентно коэффициенту Пуассона равному $\nu=0$), взаимодействие трещин под действием сдвигающей нагрузки является тем же самым, как и взаимодействие трещина под действием нормальной нагрузки (сравни (4.1.9) с (4.4.14)). Максимальное значение отношения G_2/G_1 для изотропного тела равно $1/3$, и это значение было принято во всех численных процедурах, чтобы выявить максимально возможную разницу между взаимодействием трещин под действием нормальной нагрузки, и взаимодействием трещин под действием сдвигающей нагрузки.

Некоторые значения функции взаимодействия $f(\rho, \phi)$ представлены в Таблицах 4.11.1 и 4.11.2, для наиболее близких взаимодействий, соответствующих $l/a=2.01$. Читатель может найти добавочные числовые результаты в оригинальной статье (Fabrikant, 1989).

Таблица 4.11.1. Функция взаимодействия (действительная часть для $l=2.01a$)

ρ	ϕ	0	15	30	45	90	135	180
1.00		2.14189	1.52935	1.24944	1.14303	1.06042	1.04512	1.04195
0.75		1.32715	1.28240	1.20537	1.14660	1.07271	1.05393	1.04976
0.50		1.19220	1.18283	1.16050	1.13539	1.08451	1.06514	1.06027
0.25		1.13108	1.12916	1.12389	1.11649	1.09335	1.07930	1.07499
0.00		1.09668	1.09668	1.09668	1.09668	1.09668	1.09668	1.09668

Все вычисления были выполнены с относительной ошибкой не превышающей 10^{-6} . Первая строка в Таблице 4.11.1 приблизительно равна отношению коэффициента концентрации напряжений взаимодействующих

Таблица 4.11.2. Функция взаимодействия (мнимая часть) для $l=2.01a$

ρ	ϕ	0	15	30	45	90	135	180
1.00		0.00000	−0.11448	−0.09508	−0.06835	−0.02738	−0.01092	0.00000
0.75		0.00000	−0.04250	−0.05420	−0.04922	−0.02518	−0.01053	0.00000
0.50		0.00000	−0.01526	−0.02474	−0.02774	−0.01983	−0.00918	0.00000
0.25		0.00000	−0.00458	−0.00834	−0.01082	−0.01107	−0.00609	0.00000
0.00		0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

трещин к коэффициенту концентрации напряжений изолированной трещины под действием той же однородной нагрузки. Данные в Таблице 4.11.2 оправдывают наше пренебрежение мнимой части функции взаимодействия при выводе приблизительного аналитического решения: максимальное значение мнимой части не превосходит 8% от соответствующей действительной части, и оно быстро уменьшается с увеличением расстояния между трещинами. Данные в таблицах представлены для $0 \leq \phi \leq \pi$. Следующие правила должны соблюдаться, если нас интересует значение функции взаимодействия для $\phi > \pi$: $\Re f(\rho, \phi) = \Re f(\rho, 2\pi - \phi)$ и $\Im f(\rho, \phi) = -\Im f(\rho, 2\pi - \phi)$. Сравнение с результатами, данными в секции 4.10, показывает, что взаимодействие трещин под действием сдвигающей нагрузки (действующей на обе трещины в том же направлении) сильнее, чем взаимодействие под действием нормальной нагрузки. Например, максимальное значение фактора взаимодействия для случая $l=2.01a$ и $G_2/G_1=1/3$ равно 2.1419 (Таблица 4.11.1), в то время как соответствующее значение в случае нормальной нагрузки есть 1.8613.

Мы можем теперь оценить точность аналитического решения, данного в (4.11.18–4.11.19). Мы можем вычислить точное значение энергии трещины W , используя вычисленные данные и сравнить его с приблизительными результатами согласно формуле (4.11.18). Отношение W/W_0 (W_0 обозначает энергию изолированной трещины) дано в Таблице 4.11.3. Приближённые

Таблица 4.11.3. Отношение W/W_0 согласно точному и приближённому решениям.

l/a	10.0	3.0	2.5	2.1	2.05	2.02	2.01
точное	1.00043	1.01940	1.03817	1.08367	1.09621	1.10603	1.11000
приблиз.	1.00043	1.01736	1.03165	1.05802	1.06333	1.06684	1.06808
ошибка (%)	0.0	0.2	0.6	2.4	3.0	3.5	3.8

значения были вычислены как $W/W_0 = 1/(1-c)$, где c определено в (4.11.18).

Согласование результатов очень хорошее для $l/a \geq 2.5$. Даже для очень

близких взаимодействий ($l/a=2.01$) относительная ошибка не превышает 4%; конечно, это происходит благодаря тому факту, что увеличение энергии взаимодействующих трещин очень незначительно. Это может быть объяснено узкой локализацией эффектов взаимодействия (смотри Таблицу 4.11.1).

Аналитическое выражение для функции взаимодействия может быть записано согласно (4.11.19), в форме:

$$f(\rho, \phi) = 1 + \frac{G_1}{2\tau_0(G_1^2 - G_2^2)} \frac{U}{\pi^2(l^2 - a^2)^{1/2}} \left[\frac{1}{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos \phi} + \frac{G_2}{G_1} \frac{3l - \rho e^{-i\phi}}{l(l - \rho e^{-i\phi})^2} \right].$$

Мы вычислили только фактор взаимодействия $f(a, \phi)$ согласно последней формуле и сравнили его с точными значениями в Таблице 4.11.4.

Таблица 4.11.4. Сравнение точного и приближённого решений для фактора взаимодействия

l/a	ϕ (дег.)–	0	30	60	90	120	150	180
2.50	Действ. точное	1.11020	1.07479	1.04136	1.02764	1.02198	1.01959	1.01892
	приближённое	1.07927	1.05793	1.03465	1.02393	1.01925	1.01722	1.01664
	ошибка (%)	2.8	1.6	0.6	0.4	0.3	0.2	0.2
	Мним. точное	0.00000	–0.01875	–0.01485	–0.00936	–0.00547	–0.00254	0.00000
	приближённое	0.00000	–0.01439	–0.01210	–0.00782	–0.00461	–0.00215	0.00000
	ошибка (%)	0.0	23.3	18.5	16.5	15.7	15.4	0.0
2.05	Действ. точное	1.63484	1.21826	1.08826	1.05542	1.04397	1.03945	1.03821
	приближённое	1.21014	1.12652	1.06405	1.04226	1.03379	1.03029	1.02931
	ошибка (%)	26.0	7.5	2.2	1.2	1.0	0.9	0.9
	Мним. точное	0.00000	–0.07834	–0.04299	–0.02416	–0.01359	–0.00622	0.00000
	приближённое	0.00000	–0.04268	–0.02834	–0.01667	–0.00951	–0.00437	0.00000
	ошибка (%)	0.0	45.5	34.1	31.0	30.0	29.7	0.0

Относительная ошибка центральной оценки действительной части фактора взаимодействия не превышает 3% для $l > 2.5a$. Хотя относительная ошибка мнимой части велика, это происходит из-за того факта, что мнимая часть мала по сравнению с действительной частью; абсолютная ошибка очень мала, и мы можем считать аналитическое решение (4.11.18–4.11.19) достаточно точным, когда расстояние между взаимодействующими трещинами больше, чем половина их радиуса. Точность центральной

оценки быстро ухудшается с уменьшением расстояния l . Можно также заметить, что центральная оценка всегда несколько ниже точного значения, таким образом давая очень близкую нижнюю границу для интересующих нас параметров в случае двух взаимодействующих трещин.

Бесконечный ряд равных трещин. Пусть радиус трещин равен a , и расстояние между центрами соседних трещин l . Трещины находятся под действием однородной сдвигающей нагрузки τ . Центральная оценка для интегральных характеристик U может быть определена из (4.11.12) одним уравнением:

$$U = \frac{4}{3}\pi a^3 \tau \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{a}{(k^2 l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a}{kl} \right] U + \frac{G_2}{G_1} \frac{a^3 \bar{U}}{k^2 l^2 (k^2 l^2 - a^2)^{1/2}} \right\}.$$

Если мы пренебрежём мнимую часть U , тогда решение примет вид:

$$U = \frac{U_0}{1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a}{(k^2 l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \left(\frac{a}{kl} \right) + \frac{G_2}{G_1} \frac{a^3}{k^2 l^2 (k^2 l^2 - a^2)^{1/2}} \right\}}, \quad (4.11.24)$$

где $U_0 = (4/3)\pi a^3 \tau (G_1^2 - G_2^2)/G_1$ соответствует случаю изолированной трещины. Перемещение поверхностей трещины примет форму согласно (4.11.9) и (4.11.10):

$$u(\rho, \phi) = (a^2 - \rho^2)^{1/2} \left\{ 2\tau \frac{G_1^2 - G_2^2}{G_1} + \frac{U}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2(\rho^2 + k^2 l^2)}{\rho^4 + k^4 l^4 - 2\rho^2 k^2 l^2 \cos 2\phi} + \frac{G_2}{G_1} \frac{3k^2 l^2 - \rho^2 e^{-2i\phi}}{(k^2 l^2 - \rho^2 e^{-2i\phi})^2} \right] \frac{1}{(k^2 l^2 - a^2)^{1/2}} \right\}, \quad (4.11.25)$$

и подстановка (4.11.25) в (4.11.13) даст выражение для коэффициента концентрации напряжений.

Дискуссия. Представляется интересным сравнить наши результаты с теми, которые опубликованы в литературе. Мы нашли только одну статью (Fu and Keer, 1969) где проблема двух взаимодействующих копланарных круглых трещин была рассмотрена методом, аналогичным Collins (1963). Только случай, когда расстояние между центрами трещина l намного больше, чем радиус трещины a ($\epsilon = a/l \ll 1$) был рассмотрен. Fu and Keer рассмотрели в деталях две равные трещины под действием однородной сдвигающей нагрузки, действующей на обе трещины в том же направлении горизонтально (Случай a), и действующие в противоположных направлениях (Случай b). Мы нашли несколько мест в их решении, которые являются неправильными. Один из результатов (Fu and Keer, 1969, стр. 371) показывает, что абсолютное значение m -ой гармоники ($m=1,2,3, \dots$) вертикального перемещения u_y равен соответствующей гармонике горизонтального перемещения u_x . Это не может быть правильно, так как вертикальные перемещения зависят от отношения G_2/G_1 (в изотропном случае это отношение равно $\nu/(2-\nu)$, где ν есть коэффициент Пуассона), и вертикальные перемещения исчезают, когда $G_2=0$ ($\nu=0$)).

Возможно также вывести выражения для увеличения энергии деформации W трещин. Выражение, данное в Fu and Keer (1969), в наших обозначениях имеет вид:

$$W = W_0 \left[1 \mp \frac{4}{3\pi} \epsilon^3 \mp \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5\pi} \right) \epsilon^5 + \frac{16}{9\pi^2} \epsilon^6 \right], \quad (4.11.26)$$

где $\epsilon = a/l$; \mp знак соответствует случаям (a) и (b) соответственно, и $W_0 = (4/3)\pi a^3 \tau^2 (G_1^2 - G_2^2)/G_1$ обозначает энергию изолированной трещины. Заметим очевидную опечатку в (4.11.26): знак плюс должен соответствовать случаю (a) и минус случаю (b). Наше выражение для энергии трещина есть

$$W = \frac{W_0}{1-c}, \quad (4.11.27)$$

где c определён согласно (4.11.18) как

$$c = \frac{2}{\pi} \left[\frac{a}{(l^2 - a^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{a}{l} + \frac{G_2}{G_1} \frac{a^3}{l^2 (l^2 - a^2)^{1/2}} \right]. \quad (4.11.28)$$

Разложение (4.11.27) в ряд даёт результат:

$$W = W_0 \left[1 + \frac{2\epsilon^3}{\pi} \left(\frac{1}{3} + \frac{G_2}{G_1} \right) + \frac{\epsilon^5}{\pi} \left(\frac{3}{5} + \frac{G_2}{G_1} \right) + \frac{4\epsilon^6}{\pi^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{G_2}{G_1} \right)^2 + \frac{3\epsilon^7}{4\pi} \left(\frac{5}{7} + \frac{G_2}{G_1} \right) + \dots \right]. \quad (4.11.29)$$

Имеется явное разногласие между (4.11.26) и (4.11.29): каждый член в (4.11.29) зависит от отношения G_2/G_1 , в то время как каждый член в (4.11.26) не зависит от упругих констант. В случае изотропного тела $G_2/G_1 = \nu/(2-\nu)$ (как и должно быть), и мы можем заметить согласие между (4.11.26) и (4.11.29) только для $\nu = 1/2$ что является просто совпадением. Collins (1963) дал следующее выражение для случая двух трещин под действием *нормальной* нагрузки:

$$W = W_0 \left[1 + \frac{2\epsilon^3}{3\pi} + \frac{6\epsilon^5}{5\pi} + \frac{4\epsilon^6}{9\pi^2} + \frac{18\epsilon^7}{7\pi} + \frac{32\epsilon^8}{15\pi^2} + \dots \right]. \quad (4.11.30)$$

Как было отмечено ранее, в случае, когда $G_2 = 0$ ($\nu = 0$), взаимодействие трещин под действием сдвигающей нагрузки математически эквивалентно взаимодействию под действием нормальной нагрузки, это означает, что обе формулы (4.11.26) и (4.11.29) должны согласоваться с (4.11.30) для $\nu = 0$. Можно заметить, что это не соблюдается для выражения (4.11.26).

Упражнение 4.11

1. Выведите (4.11.8).
2. Установите (4.11.11).
3. Исследуйте сходимость процедуры итерации, приложенной к (4.11.8).
4. Рассмотрите случай полигональной конфигурации идентичных трещин.

Аппендикс A4.1

Здесь дана главная потенциальная функция, вместе с различными частными производными. Мы определяем потенциальную функцию как

$$\Psi = \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \ln(R_0 + z) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0,$$

где $R_0 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}$. Интеграл может быть вычислен в элементарных функциях:

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{\pi}{2} \left[z(2a^2 - \rho^2 + \frac{2}{3}z^2) \sin^{-1}(\frac{a}{l_2}) + \frac{1}{3}(a^2 - l_1^2)^{1/2} (5\rho^2 - \frac{10}{3}a^2 \right. \\ \left. - 2l_2^2 - \frac{11}{3}l_1^2) + \frac{4}{3}a^3 \ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}] \right] \end{aligned} \quad (\text{A4.1.1})$$

Следующие производные могут быть вычислены:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \pi x \left[-z \sin^{-1} \frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2} (1 - \frac{l_1^2 + 2a^2}{3\rho^2}) + \frac{2a^3}{3\rho^2} \right] \quad (\text{A4.1.2})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \pi y \left[-z \sin^{-1} \frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2} (1 - \frac{l_1^2 + 2a^2}{3\rho^2}) + \frac{2a^3}{3\rho^2} \right] \quad (\text{A4.1.3})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\pi}{2} \left[(2a^2 + 2z^2 - \rho^2) \sin^{-1} \frac{a}{l_2} - \frac{2a^2 - 3l_1^2}{a} (l_2^2 - a^2)^{1/2} \right] \quad (\text{A4.1.4})$$

$$\Lambda \Psi = \pi \rho e^{i\phi} \left[-z \sin^{-1} \frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2} (1 - \frac{l_1^2 + 2a^2}{3\rho^2}) + \frac{2a^3}{3\rho^2} \right] \quad (\text{A4.1.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \pi \left[-z \sin^{-1} \frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2} \right. \\ \left. + (1 - \frac{2x^2}{\rho^2}) \frac{2a^3 - (l_1^2 + 2a^2)(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{3\rho^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A4.1.6})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \pi \left[-z \sin^{-1} \frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2} \right]$$

$$+ (1 - \frac{2y^2}{\rho^2}) \frac{2a^3 - (l_1^2 + 2a^2)(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{3\rho^2} \Big] \quad (\text{A4.1.7})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -2\pi xy \frac{2a^3 - (l_1^2 + 2a^2)(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{3\rho^4} \quad (\text{A4.1.8})$$

$$\Lambda^2 \Psi = -2\pi e^{2i\phi} \frac{2a^3 - (l_1^2 + 2a^2)(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{3\rho^2} \quad (\text{A4.1.9})$$

$$\Delta \Psi = 2\pi \left[-z \sin^{-1} \frac{a}{l_2} + (a^2 - l_1^2)^{1/2} \right] \quad (\text{A4.1.10})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 2\pi \left[z \sin^{-1} \frac{a}{l_2} - (a^2 - l_1^2)^{1/2} \right] \quad (\text{A4.1.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Lambda \Psi = \pi e^{i\phi} \left[-\sin^{-1} \frac{a}{l_2} + \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2} \right] \quad (\text{A4.1.12})$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial z} = \pi \left\{ -\sin^{-1} \frac{a}{l_2} + \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2} \left[1 + \frac{2a^2 x^2}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)} \right] \right\} \quad (\text{A4.1.13})$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^2 \partial z} = \pi \left\{ -\sin^{-1} \frac{a}{l_2} + \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2} \left[1 + \frac{2a^2 y^2}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)} \right] \right\} \quad (\text{A4.1.14})$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} = 2\pi \left\{ \sin^{-1} \frac{a}{l_2} - \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} \right\} \quad (\text{A4.1.15})$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y \partial z} = 2\pi \frac{a^3 xy (l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^4 (l_2^2 - l_1^2)} \quad (\text{A4.1.16})$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial z^2} = 2\pi \frac{a^2 x (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 (l_2^2 - l_1^2)} \quad (\text{A4.1.17})$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y \partial z^2} = 2\pi \frac{a^2 y (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 (l_2^2 - l_1^2)} \quad (\text{A4.1.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Lambda^2 \Psi = 2\pi \rho^2 e^{2i\phi} \frac{a^3 (l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^4 (l_2^2 - l_1^2)} \quad (\text{A4.1.19})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Delta \Psi = 2\pi \left[-\sin^{-1} \frac{a}{l_2} + \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} \right] \quad (\text{A4.1.20})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Lambda \Psi = 2\pi a^2 \rho e^{i\phi} \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 (l_2^2 - l_1^2)} \quad (\text{A4.1.21})$$

$$\Lambda \Delta \Psi = -2\pi a^2 \rho e^{i\phi} \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 (l_2^2 - l_1^2)} \quad (\text{A4.1.22})$$

$$\Lambda^3 \Psi = -2\pi e^{3i\phi} \left\{ \frac{4[(l_1^2 + 2a^2)(a^2 - l_1^2)^{1/2} - 2a^3]}{3\rho^3} + \frac{al_1(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)} \right\} \quad (\text{A4.1.23})$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} = -2\pi \frac{za[l_1^4 + a^2(2a^2 + 2z^2 - 3\rho^2)]}{(l_2^2 - l_1^2)^3 (l_2^2 - a^2)^{1/2}} \quad (\text{A4.1.24})$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \rho \partial z^3} = -2\pi \frac{l_1(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2(l_2^2 - l_1^2)^3} [a^2(4l_2^4 - 5\rho^2) + l_1^4] \quad (\text{A4.1.25})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Lambda^2 \Psi = 2\pi \rho^2 e^{2i\phi} a^3 z \frac{a^2(6l_2^2 - 2l_1^2 + \rho^2) - 5l_2^4}{l_2^4 (l_2^2 - l_1^2)^3 (l_2^2 - a^2)^{1/2}} \quad (\text{A4.1.26})$$

Следующие тождества были использованы при выводе (A4.1.1–A4.1.26):

$$l_1 l_2 = a\rho, \quad l_1^2 + l_2^2 = a^2 + \rho^2 + z^2, \quad (\text{A4.1.27})$$

$$(l_2^2 - \rho^2)^{1/2} (l_2^2 - a^2)^{1/2} = z l_2, \quad (a^2 - l_1^2)^{1/2} (\rho^2 - l_1^2)^{1/2} = z l_1,$$

$$(a^2 - l_1^2)^{1/2}(l_2^2 - a^2)^{1/2} = za, \quad (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}(\rho^2 - l_1^2)^{1/2} = z\rho. \quad (\text{A4.1.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_1}{\partial z} &= -\frac{zl_1}{l_2^2 - l_1^2}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial z} = \frac{zl_2}{l_2^2 - l_1^2}, \\ \frac{\partial l_1}{\partial \rho} &= \frac{al_2 - \rho l_1}{l_2^2 - l_1^2} = \frac{\rho(a^2 - l_1^2)}{l_1(l_2^2 - l_1^2)}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial \rho} = \frac{\rho l_2 - al_1}{l_2^2 - l_1^2} = \frac{\rho(l_2^2 - a^2)}{l_2(l_2^2 - l_1^2)}. \end{aligned} \quad (\text{A4.1.29})$$

Аппендикс А4.2

Здесь мы представляем некоторые неопределённые интегралы от выражений, содержащих l_1 и l_2 .

$$\int (l_2^2 - a^2)^{1/2} dz = (a^2 - l_1^2)^{1/2} \frac{l_2^2 - 2a^2}{2a} + \frac{\rho^2}{2} \ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}], \quad (\text{A4.2.1})$$

$$\int (l_2^2 - a^2)^{1/2} l_1^2 dz = -a(a^2 - l_1^2)^{1/2} \frac{l_1^2 + 2a^2}{3} + a^2 \rho^2 \ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}], \quad (\text{A4.2.2})$$

$$\int (a^2 - l_1^2)^{1/2} dz = \frac{2a^2 - l_1^2}{2a} (l_2^2 - a^2)^{1/2} + \frac{\rho^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right), \quad (\text{A4.2.3})$$

$$\int (a^2 - l_1^2)^{1/2} l_1^2 dz = -\frac{l_1^2(2l_1^2 + 3\rho^2)}{8a} (l_2^2 - a^2)^{1/2} + \rho^2 \left(\frac{3}{8}\rho^2 - a^2\right) \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right), \quad (\text{A4.2.4})$$

$$\int (l_2^2 - a^2)^{1/2} \frac{l_1^2}{l_2^2} dz = a(a^2 - l_1^2)^{1/2} \left[1 - \frac{8a^2}{15\rho^2} - \frac{4a^2 + 3l_1^2}{15l_2^2} \right], \quad (\text{A4.2.5})$$

$$\int \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} dz = -\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right), \quad (\text{A4.2.6})$$

$$\int \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)} dz = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) \right], \quad (\text{A4.2.7})$$

$$\int \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) dz = z \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - (a^2 - l_1^2)^{1/2} + a \ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}], \quad (\text{A4.2.8})$$

$$\int z \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) dz = \frac{1}{4} (2a^2 + 2z^2 + \rho^2) \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + (l_2^2 - a^2)^{1/2} \frac{2a^2 + l_1^2}{4a}, \quad (\text{A4.2.9})$$

$$\int z^2 \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) dz = \frac{1}{3} z^3 \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{1}{18} (a^2 - l_1^2)^{1/2} (3l_2^2 + 6\rho^2 + 8a^2 - 2l_1^2) - \frac{1}{6} a (3\rho^2 + 2a^2) \ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}]. \quad (\text{A4.2.10})$$

Интегрирование в (А4.2.1–А4.2.10) было выполнено по частям, с соответствующей заменой переменных: $z = (a^2 - l_1^2)^{1/2}(\rho^2 - l_1^2)^{1/2}/l_1$ или $z = (l_2^2 - a^2)^{1/2}(l_2^2 - \rho^2)^{1/2}/l_2$.

$$\int \rho \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) d\rho = \frac{\rho^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{z(2a^2 - l_1^2)}{2(a^2 - l_1^2)^{1/2}}, \quad (\text{A4.2.11})$$

$$\int \rho^2 \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) d\rho = \frac{\rho^3}{3} \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{z\rho(2a^2 - l_1^2)}{6(a^2 - l_1^2)^{1/2}} + \frac{1}{6} a(a^2 - 3z^2) \cosh^{-1} \frac{l_2}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{6} z(3a^2 - z^2) \sin^{-1} \frac{l_1}{(a^2 + z^2)^{1/2}}, \quad (\text{A4.2.12})$$

$$\int a \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) da = \frac{1}{4} \left[(2a^2 + 2z^2 - \rho^2) \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + l_1(\rho^2 - l_1^2)^{1/2} - 2z(a^2 - l_1^2)^{1/2} \right]. \quad (\text{A4.2.13})$$

Интегрирование в (А4.2.11–А4.2.12) было выполнено по частям, с соответствующей заменой переменных: $\rho = y[1 + z^2/(a^2 - y^2)]^{1/2}$, которое соответствует подстановке $l_2 = y$. Аналогичное замечание справедливо для формулы (А4.2.13).

Аппендикс А4.3

Два важных интеграла вычислены здесь. Первый интеграл есть:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi}}{R^3(M, N)} \tan^{-1} \left[\frac{(a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a R(N, N_0)} \right] r dr d\psi. \quad (\text{A4.3.1})$$

Интеграл (А4.3.1) может быть вычислен, используя (40), что ведёт к эквивалентному выражению:

$$\int_{-\infty}^z \Lambda \left[\frac{1}{R(M, N_0)} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R(M, N_0)} \right) \right] dz \quad (\text{A4.3.2})$$

Мы можем использовать следующие тождества:

$$\Lambda h = -\frac{h \rho e^{i\phi}}{l_2^2 - l_1^2}, \quad (\text{A4.3.3})$$

$$\begin{aligned} & \Lambda \left[\frac{1}{R(M, N_0)} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R(M, N_0)} \right) \right] \\ &= -\frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^3} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) - \frac{h}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A4.3.4})$$

Обозначение R_0 в этом Аппендиксе использовано как сокращение для $R(M, N_0)$. Подстановка (А4.3.4) в (А4.3.2) даёт, после интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^z \Lambda \left[\frac{1}{R(M, N_0)} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R(M, N_0)} \right) \right] dz \\ &= -\frac{1}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \left[\frac{z}{R_0} \tan^{-1} \frac{h}{R_0} - \int_{-\infty}^z \frac{z}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\tan^{-1} \frac{h}{R_0} \right) dz \right] \end{aligned}$$

$$-\int_{\infty}^z \left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^2} \right] \frac{h dz}{R_0^2 + h^2}. \quad (\text{A4.3.5})$$

Следующие тождества будут использованы теперь:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{h(\rho^2 - l_1^2)}{z(l_2^2 - l_1^2)}, \quad (\text{A4.3.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) = \frac{hR_0}{z(R_0^2 + h^2)} \left[\frac{\rho^2 - l_1^2}{l_2^2 - l_1^2} - \frac{z^2}{R_0^2} \right]. \quad (\text{A4.3.7})$$

Подстановка (A4.3.7) в (A4.3.5) позволяет нам продолжить:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \left\{ \frac{z}{R_0} \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) - \int_{\infty}^z \frac{h}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{\rho^2 - l_1^2}{l_2^2 - l_1^2} - \frac{z^2}{R_0^2} \right] dz \right\} \\ & - \int_{\infty}^z \left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}{R_0^2} \right] \frac{h dz}{R_0^2 + h^2} = -\frac{z}{(\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0})R_0} \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) \\ & + \int_{\infty}^z \frac{h dz}{(R_0^2 + h^2)(l_2^2 - l_1^2)} \left[\frac{\rho^2 - l_1^2}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} - \rho e^{i\phi} \right] \\ & - \int_{\infty}^z \frac{h dz}{R_0^2(R_0^2 + h^2)} \left[\frac{z^2}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} + \rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0} \right] \\ & = \frac{1}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \left\{ -\frac{z}{R_0} \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + \int_{\infty}^z \left[\frac{\rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)} - l_1^2}{l_2^2 - l_1^2} - 1 \right] \frac{h dz}{R_0^2 + h^2} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \left\{ -\frac{z}{R_0} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) + \int_{\infty}^z \left[\frac{\rho \rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)} - l_2^2}{l_2^2 - l_1^2} \right] \frac{h dz}{R_0^2 + h^2} \right\} \quad (\text{A4.3.8})$$

Принимая во внимание тождество:

$$R_0^2 + h^2 = (l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}) (l_2^2 - \rho \rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)}) / l_2^2, \quad (\text{A4.3.9})$$

интеграл в (A4.3.8) может быть преобразован следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{h l_2^2 dz}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - \rho \rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})} &= \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a} \int \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2} l_2^2 dl_2}{z l_2 (l_2^2 - \rho \rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})} \\ &= (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \int \frac{l_2 dl_2}{(l_2^2 - a^2)^{1/2} (l_2^2 - \rho \rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})} = \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\bar{s}} \tan^{-1} \frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{\bar{s}}, \end{aligned} \quad (\text{A4.3.10})$$

где $\bar{s} = (a^2 - \rho \rho_0 e^{-i(\phi-\phi_0)})^{1/2}$. Наконец, формулы (A4.3.8) и (A4.3.10) позволяют нам вычислить начальный интеграл (A4.3.1):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi}}{R^3(M, N)} \tan^{-1} \left[\frac{(a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a R(N, N_0)} \right] \frac{r dr d\psi}{R(N, N_0)} \\ &= \frac{1}{\rho e^{-i\phi} - \rho_0 e^{-i\phi_0}} \left[\frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{\bar{s}} \tan^{-1} \frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z}{R(M, N_0)} \tan^{-1} \frac{h}{R(M, N_0)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A4.3.11})$$

Мы напоминаем, что h определён в (4.1.18), и $R(M, N_0) = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho \rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}$. Правая сторона в (A4.3.11) упрощается в предельном случае $\rho_0 \rightarrow \rho$ и $\phi_0 \rightarrow \phi$, а именно,

$$\frac{\rho e^{i\phi}}{2(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[\frac{1}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \tan^{-1} \frac{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - \rho^2} \right]. \quad (\text{A4.3.12})$$

Второй интеграл, который нужно вычислить, есть:

$$I_2 = \int \frac{z}{R_0^3} \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) \right] dz. \quad (\text{A4.3.13})$$

Мы начинаем с интегрирования по частям. Результат есть:

$$I_2 = \int \frac{z dz}{R_0^2 h} - \frac{1}{R_0} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) + \int \frac{dz}{R_0} \frac{d}{dz} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right). \quad (\text{A4.3.14})$$

Мы модифицируем (A4.3.7) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) &= \frac{R_0}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{h(\rho^2 - l_1^2)}{z(l_2^2 - l_1^2)} + \frac{z}{h} \right] - \frac{z}{h R_0} \\ &= \frac{R_0(l_2^2 - a^2)^{1/2}(l_2^4 - \rho^2 \rho_0^2)}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}(l_2^2 - l_1^2)l_2^2(R_0^2 + h^2)} - \frac{z}{h R_0}. \end{aligned} \quad (\text{A4.3.15})$$

Подставляя (A4.3.15) в (A4.3.14) и принимая во внимание (A4.3.9) и (A4.1.29), мы получим:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{R_0} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) \\ &+ \frac{1}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \int \frac{(l_2^4 - \rho^2 \rho_0^2) dl_2}{(l_2^2 - \rho^2)^{1/2} (l_2^2 - \rho \rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)}) (l_2^2 - \rho \rho_0 e^{-i(\phi - \phi_0)})} \end{aligned} \quad (\text{A4.3.16})$$

Интеграл в (A4.3.16) элементарен, то—есть:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{R_0} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) + \frac{1}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \left\{ \ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}] \right. \\ &- \left. \frac{1}{(\zeta - 1)^{1/2}} \tan^{-1} \left[\frac{a(\zeta - 1)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}} \right] - \frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \tan^{-1} \left[\frac{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}} \right] \right\}, \quad \zeta = \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\phi - \phi_0)} \end{aligned} \quad (\text{A4.3.17})$$

Так как интегрирование было неопределённым, мы могли потерять функцию других переменных, кроме z . Эта функция может быть найдена из

условия, что результат интегрирования не должен иметь логарифмическую сингулярность в точке $\rho=0$ или при $q=0$. Функции, удаляющие такую сингулярность, имеют вид: $\tan^{-1}[(\zeta-1)^{1/2}]$ и $\tan^{-1}[(\bar{\zeta}-1)^{1/2}]$. Окончательный результат может теперь быть представлен в форме:

$$\begin{aligned} & \int \frac{z}{R_0^3} \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) \right] dz \\ &= -\frac{1}{R_0} \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) + \frac{1}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \left\{ \ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}] \right. \\ & \left. - 2\Re \left(\frac{1}{(\zeta-1)^{1/2}} \left[\tan^{-1} \left(\frac{a(\zeta-1)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}} \right) - \tan^{-1}(\zeta-1)^{1/2} \right] \right) \right\}, \quad \zeta = \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\phi - \phi_0)}, \end{aligned}$$

что доказывает правильность формулы (5.1.13).

Аппендикс А4.4

Некоторые интегралы, относящиеся к задаче о круглой трещине под действием сдвигающей нагрузки, представлены здесь, без вывода. Первый интеграл, который может быть вычислен прямо, есть:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi - \phi_0)}) (a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi - \phi_0)})^2} \frac{r d r d \psi}{a R(M, N)} \\ &= \pi \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a^3} \left\{ \frac{\rho^2}{t} \sin^{-1} \left(\frac{a}{l_2} \right) + \frac{(l_2^2 - a^2)^{1/2} [l_1^2 (4 - t) - 3a^2]}{a(1 - t)^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(1 - t)^{3/2}} \left[\frac{3z^2}{1 - t} + a^2(3 - 2t) - \frac{\rho^2}{t} \right] \tan^{-1} \left(\frac{a(1 - t)^{1/2}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{A4.4.1}$$

Здесь t определено в (4.4.16). Приложение оператора Λ к обеим сторонам (A4.4.1) даёт:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)}) (a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2} \frac{1}{aR^3(M,N)} (\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi}) r dr d\psi \\
 &= -2\pi \rho e^{i\phi} \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a^3} \left\{ \frac{1}{t} \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{(1-t)(l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{t(1-t)^{3/2}} \tan^{-1}\left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}\right) \right\}. \tag{A4.4.2}
 \end{aligned}$$

Другое приложение Λ к обеим сторонам (A4.4.2) даёт:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)}) (a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2} \frac{1}{aR^5(M,N)} 3(\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi})^2 r dr d\psi \\
 &= 2\pi \frac{\rho^2 e^{2i\phi} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} (l_2^2 - a^2)^{1/2} (3l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)})^2}. \tag{A4.4.3}
 \end{aligned}$$

Дифференцирование по z обеих сторон (A4.4.1) ведёт к результату:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)}) z (a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2} \frac{1}{aR^3(M,N)} r dr d\psi \\
 &= 2\pi \frac{ha^2}{s^2} \left[\frac{3}{s^2} - \frac{t}{l_2^2 - a^2 t} - \frac{3(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{s^3} \tan^{-1}\left(\frac{s}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}\right) \right]. \tag{A4.4.4}
 \end{aligned}$$

Здесь h определен в (4.1.18). Другое дифференцирование обеих сторон (A4.4.4) по z даёт:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)}) (a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2} \frac{1}{aR^3(M,N)} \left(1 - \frac{3z^2}{R^2(M,N)}\right) r dr d\psi$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \frac{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a^3(1-t)} \left\{ \frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)})} \left[\frac{3(l_2^2 - l_1^2 t)}{1-t} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\rho\rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)}(2l_2^2 + l_1^2 t - 3\rho^2)}{l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)}} \right] - \frac{3}{(1-t)^{3/2}} \tan^{-1} \left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{A4.4.5}$$

Приложение оператора Λ к обеим сторонам (A4.4.4) даёт:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi - \phi_0)}) z (a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi - \phi_0)})^2} \frac{1}{aR^5(M, N)} 3(\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi}) r dr d\psi \\
&= 2\pi \frac{h\rho e^{i\phi}(3l_2^2 - a^2 t)}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - a^2 t)^2}.
\end{aligned} \tag{A4.4.6}$$

Различный результат получается если Λ приложена к комплексно сопряжённому выражению (A4.4.4), а именно,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{-i(\psi - \phi_0)}) z (a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{-i(\psi - \phi_0)})^2} \frac{1}{aR^5(M, N)} 3(\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi}) r dr d\psi \\
&= 2\pi h \left\{ \frac{a^2}{\bar{s}^2} \rho_0 e^{i\phi_0} \left[\frac{15(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{\bar{s}^5} \tan^{-1} \left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) - \frac{15}{\bar{s}^4} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{5}{\bar{s}^2(l_2^2 - a^2 \bar{t})} + \frac{2\bar{t}}{(l_2^2 - a^2 \bar{t})^2} \right] + \frac{\rho e^{i\phi}(3l_2^2 - a^2 \bar{t})}{(l_2^2 - l_1^2)(l_2^2 - a^2 \bar{t})^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{A4.4.7}$$

Интегрирование обеих сторон (A4.4.1) по z даёт:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi - \phi_0)}) (a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi - \phi_0)})^2} \frac{1}{a} \ln[R(M, N) + z] r dr d\psi$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi(a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left\{ 2 \ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}] - 2 + \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a^3(1-t)} \left[-\frac{z^2}{1-t} + \rho^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{3}(l_1^2 + 2a^2) \right] + \frac{z\bar{\zeta}}{a} \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) + \frac{z}{a^3(1-t)^{3/2}} \left[\frac{z^2}{1-t} + a^2(3-2t-\bar{\zeta}) \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \tan^{-1}\left(\frac{a(1-t)^{1/2}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}\right) + 2(\bar{\zeta} - 1)^{1/2} \left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}\right) \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{A4.4.8}$$

Здесь ζ определена в (А4.3.17), и черта, как обычно, указывает на комплексно сопряжённое значение. Аналогичное интегрирование (А4.4.3) по z даёт:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})(a^2 - r^2)^{1/2}(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2} \frac{\Lambda^2\{\ln[R(M,N) + z]\}}{a} r dr d\psi \\
 &= \frac{2\pi}{q} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left\{ -\frac{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{q} \left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{i\phi}}{\rho} \left[\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \left(1 + \frac{\rho^2}{l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi-\phi_0)}} \right) - 1 \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{A4.4.9}$$

Мы напоминаем, что q определён в (4.1.28), и

$$\Lambda^2 \ln[R(M,N) + z] = -(\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi})^2 \frac{2R(M,N) + z}{R^3(M,N) [R(M,N) + z]^2}
 \tag{A4.4.10}$$

Ещё одно приложение оператора Λ к (А4.4.9) даёт:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(3a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})(a^2 - r^2)^{1/2}(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{(a^2 - r\rho_0 e^{i(\psi-\phi_0)})^2} \frac{\Lambda^3\{\ln[R(M,N) + z]\}}{a} r dr d\psi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{q} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left\{ \frac{3(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{\bar{q}^2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \right) \right] \right. \\
&\quad - \frac{e^{2i\phi} (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(l_2^2 - l_1^2)} \left[\frac{l_2^2 + \rho^2}{l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)}} + \frac{2\rho^2(l_2^2 - a^2)}{(l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)})^2} + 1 \right] \\
&\quad \left. + \frac{e^{i\phi}}{\rho} \left[\frac{3}{\bar{q}} + \frac{2e^{i\phi}}{\rho} - \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \left(\frac{l_2^2 + 2\rho^2}{\bar{q}(l_2^2 - \rho\rho_0 e^{i(\phi - \phi_0)})} + 2 \left(\frac{1}{\bar{q}} + \frac{e^{i\phi}}{\rho} \right) \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A4.4.11}$$

Здесь

$$\Lambda^3 \ln[R(M, N) + z] = (\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi})^3 \frac{8R^2(M, N) + 9R(M, N)z + 3z^2}{R^5(M, N) [R(M, N) + z]^3}. \tag{A4.4.12}$$

Формула (4.1.27) может быть использована для получения некоторых дополнительных результатов. Интегрирование (4.1.27) по z даёт:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho e^{i\phi} - r e^{i\psi}}{R(M, N) [R(M, N) + z]} \tan^{-1} \left(\frac{(a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a R(N, N_0)} \right) \frac{r dr d\psi}{R(N, N_0)} \\
&= \frac{2\pi}{q} \left\{ R_0 \tan^{-1} \left(\frac{h}{R_0} \right) - (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left[\frac{\bar{z}}{\bar{s}} \tan^{-1} \left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\bar{\zeta} - 1)^{1/2} \left(\tan^{-1} \frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} - \tan^{-1} \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A4.4.13}$$

Следующие неопределённые интегралы были использованы здесь:

$$\begin{aligned}
&\int \tan^{-1} \left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) dz = z \tan^{-1} \left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}} \right) \\
&\quad + \bar{s} \left[\ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}] + (\zeta - 1)^{1/2} \tan^{-1} \left(\frac{a(\zeta - 1)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\int \frac{z}{R_0} \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) dz = R_0 \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) - (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left[-\ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}] \right. \\ \left. + (\bar{\zeta} - 1)^{1/2} \tan^{-1}\left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}\right) + (\zeta - 1)^{1/2} \tan^{-1}\left(\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\zeta - 1)^{1/2}}\right) \right]. \quad (\text{A4.4.14})$$

Прилагая оператор Λ к обеим сторонам (A4.4.13), мы получаем:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(\rho e^{i\phi} - r e^{i\Psi})^2 [2R(M, N) + z]}{R^3(M, N) [R(M, N) + z]^2} \tan^{-1}\left(\frac{(a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{aR(N, N_0)}\right) r dr d\psi \\ = \frac{2\pi}{q} \left\{ \frac{R_0^2 + z^2}{R_0 q} \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left[\frac{z}{s} \left(\frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2} - \frac{2}{q} \right) \tan^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{q} \left(\tan^{-1} \frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} - \tan^{-1} \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \right) + \frac{e^{i\phi}}{\rho} \right] - \frac{e^{i\phi} h a^2}{\rho \bar{s}^2} \right\}, \quad (\text{A4.4.15})$$

и ещё одно приложение Λ к (A4.4.15) даёт:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(\rho e^{i\phi} - r e^{i\Psi})^3 [8R^2(M, N) + 9R(M, N)z + 3z^2]}{R^5(M, N) [R(M, N) + z]^3} \\ \times \tan^{-1}\left(\frac{(a^2 - r^2)^{1/2} (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{aR(N, N_0)}\right) r dr d\psi \\ = \frac{2\pi}{q} \left\{ \frac{3R_0^4 + 6R_0^2 z^2 - z^4}{R_0^3 q^2} \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \frac{e^{i\phi}}{\rho} \left(\frac{2e^{i\phi}}{\rho} + \frac{3}{q} \right) \right. \\ \left. - (a^2 - \rho_0^2)^{1/2} \left[\frac{z}{s} \left(\frac{8}{q^2} - \frac{4\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2 q} + \frac{3\rho_0^2 e^{2i\phi_0}}{\bar{s}^4} \right) \tan^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{(l_2^2 - a^2)^{1/2}}\right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3(\bar{\zeta}-1)^{1/2}}{\bar{q}^2} \left(\tan^{-1} \frac{1}{(\bar{\zeta}-1)^{1/2}} - \tan^{-1} \frac{(a^2-l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta}-1)^{1/2}} \right) \Bigg] \\
& + \frac{ha^2 e^{i\phi}}{\rho \bar{s}^2} \left[\frac{2\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2} - \frac{2e^{i\phi}}{\rho} - \frac{2}{\bar{q}} + \left(\frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{\bar{s}^2} - \frac{2}{\bar{q}} \right) \frac{(l_2^2 - a^2)\bar{t}}{l_2^2 - a^2 \bar{t}} \right] \\
& - \frac{h}{R_0^2 + h^2} \left[\frac{\bar{q}\rho e^{3i\phi}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{e^{i\phi}(l_2^2 - \rho^2)}{\rho \bar{q}} - \frac{z^2 q}{R_0^2 \bar{q}} + 2e^{2i\phi} \right] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

(A4.4.16)

ГЛАВА 5

ПРИЛОЖЕНИЯ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ

Различные упругие контактные задачи, решённые в главах 2 и 3, имеют дело в основном с напряжениями и перемещениями в плоскости $z=0$. Мы концентрируемся здесь на *полном* решении. Решение называется полным, когда явные выражения даны для поля напряжений и перемещений во всём полупространстве. Полное решение, в совокупности с теоремой взаимности, позволяет нам решить более сложные задачи взаимодействия штампов, влияния внешних нагрузок на штампы, и так далее. Дано приближённое *аналитическое* решение неклассической контактной задачи. Значительная часть представленного здесь материала ещё не опубликована. Остальное следует статьям (Fabrikant, 1974a, 1986a, 1986c, 1986i, 1987h).

5.1 Контактная задача для гладкого штампа

Гладкий штамп прижимается к трансверсально изотропному упругому полупространству $z \geq 0$ нормальной силой P . Термин *гладкий* используется для обозначения штампа, который не вызывает сдвигающих напряжений под собой. Пусть S обозначает область контакта. Смешанные граничные условия на плоскости $z=0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_z = 0, \quad \text{для} \quad (\rho, \phi) \notin S; \quad w = \omega(\rho, \phi), \quad \text{для} \quad (\rho, \phi) \in S, \\ \tau_z = 0, \quad \text{для} \quad -\infty < (x, y) < \infty. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Как и в предыдущей главе, мы можем положить опять, что

$$F_1(z) = c_1 F(z_1), \quad F_2(z) = c_2 F(z_2), \quad F_3(z) = 0. \quad (5.1.2)$$

Подстановка (5.1.2) и (2.1.12) в третье условие (5.1.1) даёт:

$$c_1 = -c_2 \gamma_1 / m_1 \gamma_2. \quad (5.1.3)$$

Теперь нам нужно определить главную потенциальную функцию F так, что её вторая z -производная исчезает при $z=0$ вне области контакта. Сравнение с (4.1.4) приводит к

$$F(\rho, \phi, z) = F(M) = \int_S \int \ln[R(M, N) + z] \sigma(N) dS_N. \quad (5.1.4)$$

Свойство потенциала простого слоя даёт внутри области контакта:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = -2\pi\sigma, \quad (5.1.5)$$

что совместно с (2.1.12) даёт второе уравнение для постоянных c_1 и c_2

$$2\pi A_{44}[(1 + m_1)c_1 + (1 + m_2)c_2] = 1. \quad (5.1.6)$$

Уравнения (5.1.3) и (5.1.6) определяют постоянные

$$c_1 = H\gamma_1/(m_1 - 1), \quad c_2 = H\gamma_2/(m_2 - 1). \quad (5.1.7)$$

Упрощения в (5.1.7) сделаны, благодаря свойствам (4.1.10).

Наконец, подстановка (5.1.2), (5.1.4) и (5.1.7) во второе из уравнений (2.1.6) даёт для $z=0$ хорошо известное основное интегральное уравнение упругой контактной задачи для гладкого штампа:

$$\omega(N_0) = H \int_S \int \frac{\sigma(N)}{R(N, N_0)} dS_N. \quad (5.1.8)$$

Приближённое аналитическое решение (5.1.8) для штампа произвольной формы в плане будет дано позже. Мы рассматриваем более детально случай кругового штампа. Интегральное уравнение (5.1.8) может быть переписано для круговой области контакта радиуса a следующим образом (сравните с 1.4.5)

$$4H \int_0^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} L\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right) \sigma(\rho_0, \phi) = \omega(\rho, \phi)$$

Его точное замкнутое решение есть (сравните с 1.4.10):

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, \phi) = & -\frac{1}{\pi^2 H \rho} L(\rho) \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{x dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \\ & \times L\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\rho_0 d\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)^{1/2}} L(\rho_0) \omega(\rho_0, \phi). \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Потенциальная функция F может быть найдена в два этапа. Прежде всего, мы имеем из (5.1.4):

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(r, \psi) r dr d\psi}{[\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\phi - \psi) + z^2]^{1/2}} \quad (5.1.10)$$

Подстановка (5.1.9) в (5.1.10) даёт, после интегрирования (сравните с 1.4.21)

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{\pi^2 H} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) \right] \frac{z}{R_0^3} \omega(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (5.1.11)$$

Здесь $R_0 = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}$, и h определено в (4.1.18). Следующее интегрирование (5.1.11) по z даёт выражение для потенциальной функции непосредственно через заданные перемещения под штампом, а именно,

$$F(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\pi^2 H} \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathcal{K}(\rho, \phi, z; \rho_0, \phi_0) \omega(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \quad (5.1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\rho, \phi, z; \rho_0, \phi_0) = & -\frac{1}{R_0} \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) + \frac{1}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \left\{ \ln[l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}] \right. \\ & \left. - 2\Re \left(\frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \left[\tan^{-1}\left(\frac{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}(\bar{\zeta} - 1)^{1/2} \right] \right) \right\}, \quad \zeta = \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\phi - \phi_0)} \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Детали интегрирования представлены в Аппендиксе А4.3. Теперь все функции Грина, относящиеся к полям перемещений и напряжений, могут быть получены в элементарных функциях из (5.1.13) путём дифференцирования:

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial z} = \frac{z}{R_0^3} \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) \right], \quad (5.1.14)$$

$$\begin{aligned} \Lambda \mathcal{K} = & \frac{q}{R_0^3} \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) \right] - \frac{1}{hq} \left\{ 1 - \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a} \right. \\ & \left. - \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \left[\tan^{-1}\left(\frac{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}(\bar{\zeta} - 1)^{1/2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial z^2} = \frac{1}{R_0^3} \left(1 - \frac{3z^2}{R_0^2} \right) \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) \right] + \frac{1}{h(R_0^2 + h^2)} \left[\frac{z^2}{R_0^2} - \frac{\rho^2 - l_1^2}{l_2^2 - l_1^2} \right], \quad (5.1.16)$$

$$\Lambda \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial z} = -\frac{3zq}{R_0^5} \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) \right] + \frac{z}{h(R_0^2 + h^2)} \left[\frac{\rho e^{i\phi}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{q}{R_0^2} \right], \quad (5.1.17)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^2 \mathcal{K} = & -\frac{3q^2}{R_0^5} \left[\frac{R_0}{h} + \tan^{-1}\left(\frac{h}{R_0}\right) \right] + \frac{1}{h(R_0^2 + h^2)} \left[\frac{q^2}{R_0^2} - \frac{l_2^2 - \rho^2}{l_2^2 - l_1^2} e^{2i\phi} \right] \\ & + \frac{3}{q^2} \left\{ \frac{1}{h} - \frac{1}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}} \left[\tan^{-1}\left(\frac{a(\bar{\zeta} - 1)^{1/2}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}(\bar{\zeta} - 1)^{1/2} \right] \right) \right\} \\ & + \frac{e^{i\phi}}{\rho q (a^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \left[1 - \frac{a^3 \bar{\zeta}}{(a^2 - l_1^2)^{1/2} (a^2 \bar{\zeta} - l_1^2)} \right]. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Следующие тождества были использованы для упрощения (5.1.14–5.1.18):

$$\begin{aligned}
(l_2^2 - \rho_0^2)(a^2 - l_1^2) + a^2 q \bar{q} &= a^2(R_0^2 + h^2), \\
(a^2 \zeta - l_1^2)(a^2 \bar{\zeta} - l_1^2) &= (R_0^2 + h^2) l_1^2 a^2 / \rho_0^2, \\
(l_2^2 - \rho_0^2)(q \bar{q} + z^2) - q \bar{q}(a^2 - \rho_0^2) &= (l_2^2 - a^2)(R_0^2 + h^2).
\end{aligned}
\tag{5.1.19}$$

Формулы (5.1.13–5.1.18) являются главными новыми результатами этой секции. Они дают полное решение для рассматриваемой контактной задачи в сочетании с формулами (2.1.6), (2.1.12), (5.1.2) и (5.1.7). Когда заданное перемещение может быть выражено как сумма степеней от x и y , полное решение элементарно. Различные примеры будут рассмотрены далее.

Упражнение 5.1

1. Выведите 5.1.13.
2. Проверьте формулы (5.1.14)–(5.1.18).
3. Докажите тождества (5.1.19).
4. Выведите общее решение для случая изотропии.

5.2 Плоский центрально нагруженный круговой штамп

Мы рассматриваем трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$, под действием жёсткого кругового штампа радиуса a . Нагрузка на штамп статически эквивалентна центрально приложенной нормальной силе P . Обозначим осадку штампа $\omega = \text{const}$. Решение интегрального уравнения (5.1.8) дано в (5.1.9), и в этом специальном случае принимает форму:

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{\omega}{\pi^2 H (a^2 - \rho^2)^{1/2}}. \tag{5.2.1}$$

Интегрирование последнего выражения по кругу $\rho \leq a$ связывает осадку штампа ω с приложенной силой P как

$$P = \frac{2\omega a}{\pi H}.$$

Подстановка (5.2.1) в (5.1.4) ведёт к интегралу, который может быть вычислен путём дифференцирования выражения для основной потенциальной функции (A4.1.1) по a . Результат есть:

$$F = \frac{2\omega}{\pi H} \left[z \sin^{-1} \left(\frac{a}{l_2} \right) - (a^2 - l_1^2)^{1/2} + a \ln [l_2 + (l_2^2 - \rho^2)^{1/2}] \right]. \quad (5.2.2)$$

Соответствующее дифференцирование потенциальной функции (5.2.2) даёт полное решение:

$$u = \frac{2\omega a e^{i\phi}}{\pi \rho} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \left[1 - \frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{a} \right], \quad (5.2.3)$$

$$w = \frac{2\omega}{\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{m_k - 1} \sin^{-1} \left(\frac{a}{l_{2k}} \right), \quad (5.2.4)$$

$$\sigma_1 = -\frac{4\omega A_{66}}{\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k^2 - (m_k + 1)\gamma_3 (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{\gamma_k(m_k - 1) l_{2k}^2 - l_{1k}^2}, \quad (5.2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \frac{4\omega A_{66} e^{2i\phi}}{\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k}{(m_k - 1)} \left\{ \frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 - l_{1k}^2} \right. \\ \left. - \frac{2a}{\rho^2} \left[1 - \frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{a} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

$$\sigma_z = \frac{\omega}{\pi^2 H (\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \gamma_k \frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 - l_{1k}^2}, \quad (5.2.7)$$

$$\tau_z = \frac{\omega e^{i\phi}}{\pi^2 H (\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{l_{1k} (l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k} (l_{2k}^2 - l_{1k}^2)}. \quad (5.2.8)$$

Эта задача была впервые решена Elliott (1949). Его решение в основном согласуется с нашим. Тот факт, что он использует обозначение ρ как упругий параметр и также как полярный радиус одновременно, несколько затрудняет сравнение.

Введём коэффициент концентрации напряжений как

$$k_1 = \lim_{\rho \rightarrow a} \{(a - \rho)^{1/2} \sigma_z\}, \quad \text{для } z = 0. \quad (5.2.9)$$

Подстановка (5.2.7) в (5.2.9) даёт:

$$k_1 = -\frac{\omega}{\pi^2 H \sqrt{2a}} = -\frac{P}{2\pi} \left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}. \quad (5.2.10)$$

Асимптотическое поведение поля напряжений и перемещений около края штампа может быть выведено путём подстановки (4.7.1) и (5.2.10) в (5.2.3–5.2.8). В результате получим:

$$u = u_n = 2\pi H k_1 \sqrt{2r} \left[\frac{\gamma_1 S_1}{m_1 - 1} + \frac{\gamma_2 S_2}{m_2 - 1} \right] + 0(1), \quad (5.2.11)$$

$$w = -2\pi H k_1 \sqrt{2r} \left[\frac{m_1 T_1}{m_1 - 1} + \frac{m_2 T_2}{m_2 - 1} \right] + 0(1), \quad (5.2.12)$$

$$\sigma_1 = 2\pi A_{66} H k_1 \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k^2 - (m_k + 1)\gamma_3^2}{\gamma_k(m_k - 1)} \frac{S_k}{Q_k} + 0(1), \quad (5.2.13)$$

$$\sigma_2 = -2\pi A_{66} H k_1 \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k S_k}{(m_k - 1)Q_k} + 0(\sqrt{r}), \quad (5.2.14)$$

$$\sigma_z = \frac{k_1}{\sqrt{2r}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{\gamma_1 S_1}{Q_1} - \frac{\gamma_2 S_2}{Q_2} \right] + 0(1), \quad (5.2.15)$$

$$\tau_z = \tau_{zn} = -\frac{k_1}{\sqrt{2r}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{T_1}{Q_1} - \frac{T_2}{Q_2} \right] + 0(\sqrt{r}), \quad (5.2.16)$$

Сравнение (5.2.11–5.2.16) с (4.7.4–4.7.9) указывает, что они становятся идентичными, если мы формально заменим θ на $\pi - \theta$. Это легко объяснить. Контактная задача математически эквивалентна задаче о внешней трещине. Существует мнение, что асимптотическое поведение напряжений и перемещений около края произвольной плоской трещины с гладкой границей полностью определено тремя коэффициентами концентрации напряжений. Это означает, что асимптотики внутренней и внешней трещин должны быть одинаковы. Система локальных осей координат была введена в предыдущей секции, так что угол θ измерялся от направления вне круглой трещины. В случае контактной задачи ось On должна быть направлена в круг, и это сделает выражения (5.2.11–5.2.16) идентичными (4.7.4–4.7.9).

Упражнение 5.2

1. Найдите полное решение задачи о гладком плоском центрально нагруженном круговом штампе вдавливаемом в изотропное полупространство.

Ответ:

$$u = \frac{\omega e^{i\phi}}{\pi(1-\nu)} \left\{ -(1-2\nu) \left[\frac{a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{\rho} \right] + \frac{z l_1 (l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2 (l_2^2 - l_1^2)} \right\},$$

$$w = \frac{2\omega}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{a}{l_2} \right) + \frac{z(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{2(1-\nu)(l_2^2 - l_1^2)} \right],$$

$$\sigma_1 = -\frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)} \left[(1+2\nu) \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{z^2 [l_1^4 - a^2(2a^2 - \rho^2 + 2z^2)]}{(a^2 - l_1^2)^{1/2} (l_2^2 - l_1^2)^3} \right],$$

$$\sigma_2 = \frac{2\omega\mu e^{2i\phi}}{\pi(1-\nu)} \left\{ -(1-2\nu) \left[\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} - \frac{2[a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}]}{\rho^2} \right] - \frac{az(l_2^2 - a^2)^{1/2} [2l_1^4 + \rho^2(l_1^2 + 3l_2^2 - 6a^2)]}{l_2^2 (l_2^2 - l_1^2)^3} \right\},$$

$$\sigma_z = \frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} + \frac{z^2 [l_1^4 + a^2(\rho^2 - 2a^2 - 2z^2)]}{(a^2 - l_1^2)^{1/2} (l_2^2 - l_1^2)^3} \right\},$$

$$\tau_z = -\frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)} \frac{z \rho e^{i\phi} (a^2 - l_1^2)^{1/2} (3l_2^2 + l_1^2 - 4a^2)}{(l_2^2 - l_1^2)^3}.$$

Совет: используйте формулы (5.2.3–5.2.8).

2. Перепишите результат Упражнения 1 в полярных координатах.

Ответ:

$$u_\rho = \frac{\omega}{\pi(1-\nu)} \left\{ -(1-2\nu) \left[\frac{a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{\rho} \right] + \frac{z l_1 (l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2 (l_2^2 - l_1^2)} \right\},$$

$$\sigma_{\rho} = \frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \frac{a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{\rho^2} - \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} - \frac{az(l_2^2 - a^2)^{1/2}[l_1^4 - l_2^4 + \rho^2(l_1^2 + 3l_2^2 - 4a^2)]}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)^3} \right\},$$

$$\sigma_{\phi} = -\frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \frac{a - (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{\rho^2} + \frac{(a^2 - l_1^2)^{1/2}[a^2 - (1-2\nu)l_2^2]}{l_2^2(l_2^2 - l_1^2)} \right\},$$

$$\tau_{\rho z} = -\frac{2\omega\mu}{\pi(1-\nu)} \frac{z\rho(a^2 - l_1^2)^{1/2}(3l_2^2 + l_1^2 - 4a^2)}{(l_2^2 - l_1^2)^3}.$$

5.3 Наклонный круговой штамп на упругом полупространстве

Случай плоского кругового штампа, вдавливаемого в трансверсально изотропное упругое полупространство нецентральной приложенной силой P может быть рассмотрен как суперпозиция двух задач: центрально нагруженный штамп, который был рассмотрен раньше, и штамп под действием опрокидывающего момента \mathcal{M} , который будет рассмотрен здесь. Пусть перемещения под штампом имеют вид:

$$\omega = b_x y - b_y x. \quad (5.3.1)$$

Здесь b_x и b_y являются углами наклона относительно осей Ox и Oy соответственно. Введём комплексный угол наклона

$$b = b_x + ib_y. \quad (5.3.2)$$

Выражение (5.3.1) может быть теперь переписано как

$$\omega(\rho, \phi) = \Im \{ \bar{b} \rho e^{i\phi} \}. \quad (5.3.3)$$

Здесь \Im обозначает мнимую часть. Подстановка (5.3.3) в (5.1.9) даёт:

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{2\Im\{\bar{b}\rho e^{i\phi}\}}{\pi^2 H(a^2 - \rho^2)^{1/2}}. \quad (5.3.4)$$

Вычисление потенциальной функции (5.1.4) приводит к интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_0 e^{i\phi_0}}{(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \ln(R_0 + z) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0. \quad (5.3.5)$$

Принимая во внимание что

$$\frac{\rho e^{i\phi}}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} = -\Lambda(a^2 - \rho^2)^{1/2},$$

интеграл в (5.3.5) может быть вычислен по частям, с результатом данным в (A4.1.5). Потенциальная функция примет форму:

$$F = \frac{2\Im\{\bar{b}\rho e^{i\phi}\}}{\pi H} \left[z \sin^{-1} \frac{a}{l_2} - (a^2 - l_1^2)^{1/2} \left(1 - \frac{l_1^2 + 2a^2}{3\rho^2} \right) - \frac{2a^3}{3\rho^2} \right]. \quad (5.3.6)$$

Все нужные производные могут быть взяты из Аппендикса A4.1, и мы можем записать полное решение:

$$u = \frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \left\{ b \left[z_k \sin^{-1} \left(\frac{a}{l_{2k}} \right) - (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \right] - \bar{b} e^{2i\phi} \frac{2a^3 - (l_{1k}^2 + 2a^2)(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{3\rho^2} \right\}, \quad (5.3.7)$$

$$w = \frac{2}{\pi} (b_x y - b_y x) \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{m_k - 1} \left[\sin^{-1} \left(\frac{a}{l_{2k}} \right) - \frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2} \right], \quad (5.3.8)$$

$$\sigma_1 = -\frac{8A_{66}}{\pi} (b_x y - b_y x) a^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k^2 - (m_k + 1)\gamma_3^2}{\gamma_k(m_k - 1)} \frac{(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)}, \quad (5.3.9)$$

$$\sigma_2 = \frac{2A_{66}ie^{i\phi}}{\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \left\{ b \frac{al_{1k}(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)} - \bar{b}e^{2i\phi} \left[\frac{4[(l_{1k}^2 + 2a^2)(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} - 2a^3]}{3\rho^3} + \frac{al_{1k}(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)} \right] \right\}, \quad (5.3.10)$$

$$\sigma_z = \frac{2(b_x y - b_y x)}{\pi^2 H(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \gamma_k \frac{a^2(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2}}{l_{2k}^2(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)}, \quad (5.3.11)$$

$$\tau_z = \frac{i}{\pi^2 H(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 \left\{ b \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l_{2k}}\right) - \frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2 - l_{1k}^2} \right] + \bar{b}e^{2i\phi} \frac{al_{1k}^2(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2(l_{2k}^2 - l_{1k}^2)} \right\}. \quad (5.3.12)$$

Заметка. Некоторые интегралы от специальных функций могут теперь быть вычислены просто путём сравнения решения, полученного при помощи интегральных преобразований с соответствующим решением, полученным нашим методом. Например, сравнение (4.1.24) с формулами (1.42) и (1.43) из (Kassir and Sih, 1975) ведёт к

$$\int_0^\infty J_{n+1/2}(as) J_n(\rho s) e^{-sz} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \left(\frac{2}{\pi a}\right)^{1/2} (a\rho)^{-n} \int_0^{l_1} \frac{x^{2n} dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}}.$$

Мы проверили численно, что последняя формула правильна также и для нецелых n . Существует огромное количество материала о Бесселевых функциях в литературе, так что трудно доказать, что последний результат являются новым, но вполне вероятно, он есть новый, так как наши обозначения l_1 и l_2 никто не использовал раньше. Вот другой пример, показывающий просто, насколько полезны эти обозначения. Пусть нам нужно вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \sin ax J_1(\rho x) e^{-zx} \frac{dx}{x^2}. \quad (5.3.13)$$

Мы не смогли найти этот интеграл в таблицах, но мы нашли другой (Градштейн и Рыжик, 1963, формула 6.752.2)

$$\int_0^{\infty} \sin ax J_1(\rho x) e^{-zx} \frac{dx}{x} = \frac{a}{\rho} (1-r), \quad (5.3.14)$$

где параметр r является положительным корнем уравнения

$$a^2 = \frac{\rho^2}{1-r^2} - \frac{z^2}{r^2}. \quad (5.3.15)$$

Интеграл (5.3.13) может быть вычислен интегрированием обеих сторон (5.3.14) по z . Нам нужно получить явное выражение для r из алгебраического уравнения четвёртого порядка (5.3.15), подставить результат в (5.3.14) и интегрировать результат по z , что с первого взгляда не представляется возможным. Введение параметров l_1 и l_2 позволяет нам найти положительный корень (5.3.15) в очень простой форме, а именно, $r = (a^2 - l_1^2)^{1/2}/a$. Интегрирование по z может быть выполнено, используя (A4.2.3), и окончательный результат есть

$$\int_0^{\infty} \sin ax J_1(\rho x) e^{-zx} \frac{dx}{x^2} = \frac{(2a^2 - l_1^2)(l_2^2 - a^2)^{1/2} - 2a^2 z}{2a\rho} + \frac{\rho}{2} \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right). \quad (5.3.16)$$

Упражнение 5.3

1. Рассмотрите взаимодействие сосредоточенной нагрузки P_0 , приложенной в произвольной точке (ρ, ϕ, z) в направлении Oz , с плоским круговым штампом радиуса a .

Решение:

Можно заключить из (5.2.4), что нормальное перемещение w в точке (ρ, ϕ, z) , вызываемое единичной силой приложенной к штампу, есть

$$w = \frac{H}{a} \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{m_k - 1} \sin^{-1} \left(\frac{a}{l_{2k}} \right).$$

Приложение теоремы взаимности немедленно даёт осадку штампа ω , вызванную нагрузкой P_0

$$\omega = \frac{H}{a} P_0 \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{m_k - 1} \sin^{-1} \left(\frac{a}{l_{2k}} \right).$$

Угол наклона штампа δ может быть получен в той же манере из (5.3.8). Результат равен

$$\delta = \frac{3H}{2a^3} P_0 \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{m_k - 1} \left[\rho \sin^{-1} \left(\frac{a}{l_{2k}} \right) - \frac{l_{1k}(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}} \right].$$

Все другие параметры могут быть найдены аналогичным образом.

2. Исследуйте взаимодействие между плоским круговым штампом и произвольно расположенной тангенциальной силой $T = T_x + iT_y$.

Плоский штамп произвольной формы под действием нормальной центрально приложенной силы

Мы развиваем здесь общий метод решения неклассических контактных задач. Простое и достаточно точное взаимоотношение установлено между осадкой штампа и приложенной силой для произвольного плоского штампа. Специфические формулы выведены для штампа с основанием в форме полигона, треугольника, прямоугольника, ромба, кругового сектора и кругового сегмента. Все формулы проверены против известных решений в литературе, и их хорошая точность подтверждена.

Теория. Представление в этой секции будет сделано в терминах упругих контактных задач, но следует иметь в виду, что все результаты могут быть использованы в других технических дисциплинах. Мы описываем здесь идею аналитического подхода к упругим контактным задачам, которая позволяет нам вывести простые, но точные формулы для штампов различной формы. Основное интегральное уравнение дано в (5.1.8). Аналитический подход основан на интегральном представлении для величины обратной расстоянию, которая была выведена в (1.1.27).

Подстановка (1.1.27) в (5.1.8) даёт, после изменения порядка интегрирования:

$$w(\rho, \phi) = \frac{2}{\pi} H \int_0^\rho \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_x^{a(\phi_0)} \frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0\right)}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0. \quad (5.4.1)$$

Рассмотрим плоский штамп, занимающий область S в плане. Граница области определена в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi). \quad (5.4.2)$$

Пусть нормальное давление под штампом распределено согласно

$$\sigma = \frac{ca(\phi)}{\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}} \quad (5.4.3)$$

где c есть постоянная, которая может быть определена из условия, что интеграл от σ по площади S должен дать приложенную силу P .

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{a(\phi)} \frac{ca(\phi)}{\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}} \rho d\rho = c \int_0^{2\pi} a^2(\phi) d\phi = 2Ac = P, \quad (5.4.4)$$

где A есть площадь S . Важно заметить, что сила P не зависит от положения начала системы координат. Это положение может быть определено из условия, что распределение напряжений (5.4.3) не должно давать никаких опрокидывающих моментов относительно начала координат, что ведёт к двум уравнениям:

$$\int_0^{2\pi} a^3(\phi) \cos\phi d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} a^3(\phi) \sin\phi d\phi = 0.$$

Левая сторона обоих уравнений пропорциональна x и y координатам центра тяжести, это означает, что начало системы полярных координат должно быть расположено в центре тяжести области контакта S . Мы получаем немедленно из (5.4.4), что:

$$\sigma = \frac{P a(\phi)}{2A \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}}. \quad (5.4.5)$$

В случае плоского штампа $w = \delta = const$. Теперь подставляя (5.4.5) в (5.4.1), мы можем проверить, как близки к постоянной будут перемещения, вызываемые распределением напряжений (5.4.5). Интегрирование по ρ_0 даёт:

$$w(\rho, \phi) = \frac{HP}{2A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\rho} \left(\frac{x}{\rho} \right)^{|n|} \frac{x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \times \int_0^{2\pi} e^{in(\phi - \phi_0)} F\left(1 - \frac{|n|}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right) d\phi_0. \quad (5.4.6)$$

Здесь F Обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса. Последующее вычисление нормального перемещения может быть выполнено отдельно для каждой гармоники. Нулевая гармоника имеет вид:

$$w_0 = \frac{HP}{2A} \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} a(\phi) d\phi. \quad (5.4.7)$$

Важно заметить, что вторая гармоника равна нулю для произвольного контура, и что все нечётные гармоники будут равны нулю, если нечётные гармоники не входят в выражение для $a(\phi)$. Выражение для четвёртой гармоники есть:

$$w_4 = \frac{HP}{2A} \frac{8}{35} \rho^3 \int_0^{2\pi} e^{4i(\phi - \phi_0)} \frac{d\phi_0}{a^2(\phi_0)}. \quad (5.4.8)$$

Исследование последующих гармоник показывает, что их амплитуда уменьшается.

Теперь рассмотрим более детально случай квадрата со стороной $2l$. Уравнение границы в этом случае есть $a(\phi) = l/\cos\phi$ для $-\pi/4 < \phi < \pi/4$, и аналогичная логика повторяется вне этого интервала. Мы можем вычислить несколько ненулевых гармоник:

$$w_0 = \frac{HP}{2A} 4\pi l \ln(1 + \sqrt{2}), \quad w_4 = \frac{HP}{2A} \frac{32\rho^3 \cos 4\phi}{105l^2}, \quad (5.4.9)$$

$$w_8 = -\frac{HP}{2A} \frac{64}{3465} \rho \cos 8\phi \left[\left(\frac{\rho}{l}\right)^2 + \frac{12}{13} \left(\frac{\rho}{l}\right)^4 + \frac{20}{13} \left(\frac{\rho}{l}\right)^6 \right],$$

$$w_{12} = \frac{HP}{2A} \rho \cos 12\phi \left[\frac{6 \Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(\frac{17}{2})} \left(\frac{\rho}{l}\right)^2 + \frac{144 \Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{19}{2})} \left(\frac{\rho}{l}\right)^4 + \frac{1200 \Gamma(\frac{5}{2}) \Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{21}{2})} \left(\frac{\rho}{l}\right)^6 + \frac{1680 \Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{23}{2})} \left(\frac{\rho}{l}\right)^8 + \frac{3780 \Gamma(\frac{11}{2})}{\Gamma(\frac{25}{2})} \left(\frac{\rho}{l}\right)^{10} \right].$$

Если мы положим, что осадка штампа $\delta \approx w_0$, тогда оставшиеся гармоники могут быть названы невязкой решения. Прямые вычисления показывают, что ошибка меньше, чем 3% внутри круга $\rho \leq l$. Ошибка невелика вне круга достигая 20% в вершине, и уменьшаясь очень быстро с расстоянием от вершины. Принимая во внимание изменение знака ошибки, ошибка в главном векторе сил будет ещё меньше, и мы можем положить взаимоотношение между осадкой штампа и главным вектором сил в форме (5.4.7), которое может быть переписано как:

$$\delta \approx \frac{HP}{g\sqrt{A}}, \quad (5.4.10)$$

где A есть площадь основания, и g есть безразмерный коэффициент, зависящий только от геометрии штампа.

$$g = \frac{2\sqrt{A}}{\pi^2 r_a^2}, \quad (5.4.11)$$

где

$$r_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\phi) d\phi \quad (5.4.12)$$

может быть назван *средним радиусом* по отношению к центру тяжести. Если бы правильное распределение давления под штампом, требующееся для обеспечения $w = \delta$ можно было бы найти, то главный вектор сил P был бы

связан с δ формулой:

$$\delta = \frac{HP}{g_1 \sqrt{A}}.$$

Наше основное предположение — g из уравнения (5.4.10), которое мы можем вычислить, является хорошей аппроксимацией g_1 . Наша задача теперь — найти значение g для штампов различных форм. Мы можем вычислить коэффициент g для квадрата из (5.4.9) как

$$g = \frac{1}{\pi \ln(1 + \sqrt{2})} = 0.3611,$$

что очень близко к приближённому значению 0.3607 данному Максвеллом для ёмкости квадрата. Используя электростатическую аналогию, можно легко вывести, что наш коэффициент g связан с ёмкостью C плоской плиты соотношением:

$$g = \frac{C}{\sqrt{A}}. \quad (5.4.13)$$

Конечно, близость к результату Максвелла не означает, что наш результат такой уж точный. Значение g , которое представляется точным, было получено в (Noble, 1960) и (Solomon, 1964a), и равно 0.367, так что ошибка нашего результата есть 1.6%, что совсем неплохо. Теперь представляется разумным предположить, что формулы (5.4.10–5.4.12) действительны для произвольного плоского штампа, и нам нужно проверить, насколько они точны для каждого частного случая.

Мы нашли в литературе только одну *общую* формулу типа (5.4.10), предложенной в статье Solomon (1964b). Его результат, выраженный через коэффициент g читается:

$$g = \frac{2^{9/8} I_0^{1/8}}{\pi^{11/8} A^{1/4}}. \quad (5.4.14)$$

где I_0 обозначает полярный момент инерции. Можно легко проверить, что формула (5.4.14) точна для круга, так что мы можем ожидать, что она будет достаточно точна для областей с отношением длины к ширине недалеко от единицы, но ошибка может быть значительной для удлинённых областей. Например, в случае эллипса с полуосями a и b формула (5.4.14) даёт:

$$g = \frac{2^{7/8}}{\pi^{3/2}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^{1/8}.$$

Ошибка этой формулы может быть значительной для больших $\varepsilon = a/b$. Наши формулы (5.4.10–5.4.12) в случае эллипса точны.

Пример 1: Полигон. Рассмотрим плоский штамп, с базой в форме полигона с n сторонами, с единственным ограничением, что функция $a(\phi)$, описывающая его границу, является непрерывной и однозначной. Начало системы координат расположено в центре тяжести, как и раньше. Мы нумеруем стороны полигона против часовой стрелки от 1 до n , a_k обозначает длину k -ой стороны. Вершина, где стороны a_k и a_{k+1} пересекаются, пронумерована $k+1$. Ясно, что значение индекса равное $n+1$ понимается как 1. Мы обозначим расстояние от центра тяжести до k -ой вершины как b_k . Пусть A_k есть площадь треугольника, образованного сторонами a_k , b_k и b_{k+1} , полная площадь полигона A равна сумме A_k . Тогда формулы (5.4.11) и (5.4.12) дают следующее выражение для коэффициента g

$$g = \frac{2\sqrt{A}}{\pi \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{a_k} \ln \frac{b_k + b_{k+1} + a_k}{b_k + b_{k+1} - a_k}}. \quad (5.4.15)$$

Формула Соломона (5.4.14) в этом случае даёт:

$$g = \frac{2^{9/8}}{\pi^{11/8}} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{2A_k^3}{A^2 a_k^2} \left[1 + \frac{a_k^4 + 3(b_{k+1}^2 - b_k^2)^2}{48A_k^2} \right] \right\}^{1/8}. \quad (5.4.16)$$

В случае правильного полигона формулы (5.4.15) и (5.4.16) упрощаются:

$$g = \frac{4\sqrt{\tan(\pi/n)}}{\pi\sqrt{n} \ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}}, \quad (5.4.17)$$

и

$$g = \frac{2^{9/8}}{\pi^{11/8}} \left[\frac{2\cos^2(\pi/n) + 1}{3n\sin(2\pi/n)} \right]^{1/8} \quad (5.4.18)$$

соответственно. Формулы (5.4.17) и (5.4.18), хотя выглядят различными, дают практически те же самые результаты во всём интервале $3 \leq n < \infty$.

Рассмотрим несколько частных значений n . Для равностороннего

треугольника ($n=3$) формула (5.4.17) даёт $g = 0.3673$. Значение g , которое похоже является точным, может быть вычислено из (Solomon 1964a), и равно 0.3829, так что ошибка нашего результата равна 4.1%. Как мы видели ранее, ошибка (5.4.17) для квадрата есть 1.6%. Так как формула (5.4.17) в предельном случае $n \rightarrow \infty$ даёт точный результат для круга $g = 2/\pi^{3/2} = 0.35917$, мы можем ожидать, что ошибка (5.4.17) будет уменьшаться с ростом n . Для правильного пентагона $g = 0.3599$. Мы не нашли в литературе ничего, что можно было бы сравнить с этим результатом. Значение g для правильного гексагона равно 0.3595, что находится внутри границ данных в Pólya and Szegő (1951) $0.35917 < g < 0.3635$, и становится ясно, что максимум возможной ошибки действительно уменьшается с ростом n . Следует отметить, что значение g не изменяется значительно во всём интервале $3 \leq n < \infty$.

Пример 2: Треугольник. В случае треугольного штамп со сторонами a_1 , a_2 и a_3 , формула (5.4.15) упрощается следующим образом:

$$g = \frac{6}{\pi\sqrt{A}} \left[\frac{1}{a_1} \ln \frac{b_1 + b_2 + a_1}{b_1 + b_2 - a_1} + \frac{1}{a_2} \ln \frac{b_2 + b_3 + a_2}{b_2 + b_3 - a_2} + \frac{1}{a_3} \ln \frac{b_3 + b_1 + a_3}{b_3 + b_1 - a_3} \right]^{-1}. \quad (5.4.19)$$

Параметры в (5.4.19) могут быть определены из хорошо известных геометрических формул:

$$A = [p(p - a_1)(p - a_2)(p - a_3)]^{1/2}, \quad p = (a_1 + a_2 + a_3)/2,$$

$$b_1 = \frac{1}{3}[2(a_1^2 + a_3^2) - a_2^2]^{1/2}, \quad b_2 = \frac{1}{3}[2(a_2^2 + a_1^2) - a_3^2]^{1/2},$$

$$b_3 = \frac{1}{3}[2(a_3^2 + a_2^2) - a_1^2]^{1/2}.$$

Мы не знаем ни одной статьи, где бы задача о произвольном треугольном штампе была бы решена, но некоторые частные случаи были рассмотрены, так что мы можем сравнить результаты. Когда $a_1 = a_2 = l$, и угол между этими двумя сторонами равен α , формула для коэффициента g может быть переписана в форме:

$$g = \frac{6}{\pi} \sqrt{\tan(\alpha/2)} \left[2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ln\left(\cot\frac{2\gamma - \alpha}{4} \cot\frac{\alpha}{4}\right) + \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \right]^{-1}, \quad (5.4.22)$$

где $\gamma = \tan^{-1}(3 \tan(\alpha/2))$.

Равнобедренный треугольник был рассмотрен Рвачёвым и Проценко (1977) которые дали приближённое выражение для распределения напряжений, но по какой-то причине, они не дали соотношения между главным вектором сил и осадкой штампа. Они представили однако график иллюстрирующий положение точки приложения силы P как функция угла α . Их график указывает на малую вариацию (около 0.01 высоты треугольника) координаты около центра тяжести. Мы думаем, что Рвачёв и Проценко не поняли, что эти вариации объясняются приближённым характером их метода, и что точное положение точки — в центре тяжести. Конечно, предыдущее заявление должно пониматься как недоказанная теорема, так как наш метод тоже приближённый.

Случай $\alpha = \pi/2$ был рассмотрен в Pólya and Szegő (1951) которые дали следующее границы для g : $0.35917 < g < 0.4282$. Окон и Харрингтон (1970) получили $g = 0.3867$ как наиболее вероятный результат. Наш результат есть $g = 0.374$, внутри допустимого интервала и отличается на 3.3% от результата Окона и Харрингтона. Следующие границы были установлены в Pólya and Szegő для треугольника со сторонами a , $a/2$ и $a\sqrt{3}/2$: $0.35917 < g < 0.517$.

Наш результат $g = 0.3822$ расположен внутри этого интервала. Похоже, что нет другого источника, чтобы сравнить с этим результатом.

Пример 3: Прямоугольник. Рассмотрим штамп с прямоугольной базой, с полуосями a и b . Введём параметр $\epsilon = a/b$. Формула (5.4.15) в этом случае сводится к

$$g = \frac{2}{\pi \left[\sqrt{\epsilon} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sinh^{-1} \epsilon \right]}. \quad (5.4.21)$$

Howe (1920) предложил приближённую формулу для ёмкости прямоугольника, которая может быть выражена через коэффициент g следующим образом:

$$g = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon} \left[\frac{1}{\epsilon} \sinh^{-1} \epsilon + \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{3\epsilon^2} - \frac{(\epsilon^2 + 1)^{3/2}}{3\epsilon^2} \right]}. \quad (5.4.22)$$

Результат Соломона (5.4.16) в этом случае принимает форму:

$$g = \frac{2^{9/8}}{\pi^{11/8}} \left[\frac{\epsilon}{12} + \frac{1}{12\epsilon} \right]^{1/8}. \quad (5.4.23)$$

Мы нашли в литературе некоторые численные результаты, которые похожи на более или менее точные. Бородачёв и Галин (1974) рассмотрели случай узкого прямоугольного штампа, и Noble (1960) исследовал эквивалентную задачу о распределении электрического заряда на прямоугольной пластине. Их данные, выраженные через коэффициент g , представлены ниже и сравнены с нашими результатами из (5.4.21) и с результатами Howe (5.4.22) и Solomon (5.4.23). Следующее соотношение может быть установлено между коэффициентом γ Бородачёва—Галина и нашим g : $\gamma = 1/2\pi g\sqrt{\epsilon}$.

ϵ –	0.020	0.050	0.100	0.125	0.150	0.200	0.250	0.500	1.000
Бородачёв и Галин	0.7375	0.5661	0.4819	—	0.4458	0.4259	—	—	—
Noble	—	—	—	0.4543	—	—	0.4047	0.3762	0.3670
Формула (5.4.21)	0.8031	0.6072	0.5037	0.4771	0.4576	0.4306	0.4128	0.3742	0.3612
Howe (5.4.22)	0.6916	0.5317	0.4481	0.4268	0.4112	0.3899	0.3759	0.3462	0.3363
Соломон (5.4.23)	0.5402	0.4819	0.4423	0.4304	0.4211	0.4071	0.3969	0.3715	0.3613
Расхождение (%)									
Формула (5.4.21)	–8.9	–7.3	–4.5	–5.0	–2.6	–1.1	–2.0	0.5	1.6
Howe (5.4.22)	6.2	6.1	7.0	6.1	7.8	8.5	7.1	8.0	8.4
Соломон (5.4.23)	26.7	14.9	8.2	5.3	5.5	4.4	1.9	1.3	1.6

Несколько полезных заключений может быть сделано из представленных данных. Представляется логичным предположить, что ошибка приближённой формулы должна меняться монотонно (или иметь только один экстремум) по отношению к определённому параметру. Тот факт, что расхождение каждой формулы прыгает, когда база для сравнения движется с данных Noble к данным Бородачёва и Галина, указывает, что результаты по крайней мере одного автора не являются точными. Наша формула, похоже, лучше двух других в достаточно широком интервале отношений длины к ширине. Как и ожидалось, формула Соломона достаточно точна только тогда, когда отношение длины к ширине близко к единице. Ошибка формулы Howe (5.4.22) почти не меняется. Если это действительно так, то мы можем улучшить её точность весьма значительно путём умножения её на постоянную, скажем, 1.07.

Пример 4: Ромб. Пусть α будет углом в одной из вершин ромба. Формула (5.4.15) в этом случае даёт:

$$g = \frac{2}{\pi\sqrt{\sin\alpha} \ln \frac{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) + 1}{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) - 1}}. \quad (5.4.24)$$

Та же самая формула, выраженная через полуоси ромба a и b и параметр $\epsilon = a/b$ имеет вид:

$$g = \frac{[2(\epsilon + 1/\epsilon)]^{1/2}}{\pi \ln \frac{1 + \epsilon + (1 + \epsilon^2)^{1/2}}{1 + \epsilon - (1 + \epsilon^2)^{1/2}}}. \quad (5.4.25)$$

Мы не нашли в литературе по механике никаких результатов, относящихся к штампу в форме ромба. В электрических науках, сходная задача о ёмкости ромбовидной пластинки была решена численно в Okon and Harrington (1970). Их результат, выраженный через коэффициент g , для ромба с отношением полуосей $a:b=0.7:1.65$ равен $g=0.3855$. Формула (5.4.25) даёт $g=0.3744$, что отличается на 3% от результата Окона и Харрингтона. Они также рассмотрели ромб с отношением полуосей 1:2. Их результат, $g=0.3705$, почти совпадает с нашим $g=0.3698$.

Пример 5: Круговой сегмент. Пусть сегмент характеризуется радиусом r и углом 2α . Положение его центра тяжести определено как $x_c = kr$, где

$$k = \frac{2 \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)}. \quad (5.4.26)$$

Уравнение границы сегмента по отношению к его центру тяжести принимает форму:

$$a(\phi) = r[-k \cos \phi + (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}], \text{ для } 0 \leq \phi \leq \pi - \gamma \text{ или } \pi + \gamma \leq \phi < 2\pi;$$

и

$$a(\phi) = r \frac{k - \cos \alpha}{\cos(\pi - \phi)} \text{ для } \pi - \gamma \leq \phi \leq \pi + \gamma. \quad (5.4.27)$$

Подстановка (5.4.27) в (5.4.11–5.4.12) даёт:

$$g = \frac{2(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)^{1/2}}{\pi \left[2E(k) - E(\gamma, k) - k \sin \gamma + (k - \cos \alpha) \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \right]}. \quad (5.4.28)$$

где $\gamma = \tan^{-1}(\sin \alpha / (k - \cos \alpha))$. Мы нашли только один численный пример, чтобы проверить точность формулы (5.4.28): Okon and Harrington (1970) вычислили ёмкость полукруга. Их результат, выраженный через коэффициент g , есть 0.3724. Формула (5.4.28) даёт 0.3714 с расхождением 0.3%.

Пример 6: Круговой сектор. Повторение процедуры, описанной в предыдущем параграфе, приводит к следующему результату для кругового сектора, характеризуемого углом 2α :

$$g = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\pi \left[E(\gamma, k) - k \sin \gamma + k \sin \alpha \ln [\cot(\alpha/2) \cot((\gamma - \alpha)/2)] \right]}. \quad (5.4.29)$$

Здесь, $k = 2 \sin \alpha / (3\alpha)$, и $\gamma = \tan^{-1}(\sin \alpha / (\cos \alpha - k))$. Окон и Харрингтон (1970) получили $g = 0.3668$ для случая квадранта. Формула (5.4.29) для $\alpha = \pi/4$ даёт $g = 0.3639$, с расхождением 0.8%.

Дискуссия. Мы можем спросить, существует ли контур, отличный от эллипса, для которого выражение типа (5.4.5) будет *точным* решением интегрального уравнения (5.1.8). Выражение (5.4.6) обеспечивает достаточные условия:

$$\int_0^{2\pi} e^{in(\phi - \phi_0)} F\left(1 - \frac{|n|}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right) d\phi_0 \quad (5.4.30)$$

должен быть равен нулю для $n \neq 0$. Интеграл (5.4.30) исчезает для всех нечётных n , если $a(\phi)$ содержит только чётные гармоники. В случае чётных n , гипергеометрическая функция в (5.4.30) представляет конечный полином по $x/a(\phi)$ степени не выше, чем $n-2$, а это означает, что интеграл исчезнет, если $(a(\phi))^{-2}$ содержит гармоники не выше, чем вторая, что соответствует эллипсу. Вопрос, являются ли эти условия также необходимыми, требует дополнительного исследования.

Формула Соломона (5.4.14) может быть рассмотрена как частный случай от более общего, а именно

$$g = \frac{2}{\pi \sqrt{A}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a(\phi))^m d\phi \right]^{-1/2m} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a(\phi))^n d\phi \right]^{1/2n}. \quad (5.4.31)$$

для $m=2$ и $n=4$. Можно спросить, является ли этот выбор параметров m и n в каком-то смысле оптимальным. Прямые вычисления показывают, что для правильного полигона, $m=1$ и $n=9$ дают намного лучшую точность, чем (5.4.18). В случае прямоугольника $m=1$ и $n=7$ более точны, чем (5.4.23). Ясно, что формула, предложенная Соломоном (5.4.14) не является наилучшим частным случаем (5.4.31). Можно предложить множество формул типа (5.4.31), но это будет просто упражнение в аппроксимации кривых, что не входит в рамки данной книги.

Моссаковский (1972) рассмотрел случай плоского штампа, почти кругового в плане. Он предложил решение для контактных напряжений в форме:

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{F_0(\rho, \phi) + \alpha F_1(\rho, \phi) + \alpha^2 F_2(\rho, \phi) + \dots}{\left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}}, \quad (5.4.32)$$

где α есть малый параметр. Выражение (5.4.32) имеет два существенных недостатка по сравнению с (5.4.3): (i) даже в случае эллипса, выражение (5.4.32) даёт бесконечный ряд вместо точного решения в замкнутой форме; (ii) решение (5.4.32) в точке $\rho=0$ является функцией ϕ , что не имеет физического смысла. Хотя метод Моссаковского может дать достаточно точную оценку для взаимоотношения между осадкой штампа и приложенной силой, его заявление, что он мог вычислить распределение напряжений под штампом является неправильным из-за неправильного предположения о сингулярности типа квадратного корня на границе штампа (например, в случае квадратного штампа).

Математически аналогичная задача проникновения звука через отверстие общего вида в жёстком плоском экране была рассмотрена в (Fabrikant, 1986b). Тот же метод был использован для нахождения электрической ёмкости плоской плиты (Fabrikant, 1986k).

Упражнение 5.4

1. Подтвердите правильность (5.4.6).
2. Выведите (5.4.7).
3. Проверьте (5.4.15).
4. Выведите (5.4.19).
5. Обобщите теорию для случая неоднородного полупространства, с модулем упругости пропорциональным степенной функции глубины.

5.5 Наклонный плоский штамп общей формы

Приближённое аналитическое решение дано здесь для контактной задачи о плоском наклонном штампе произвольной формы в плане под действием нормальной нецентрально приложенной силы. Некоторые точные взаимоотношения установлены между опрокидывающим моментом и углом

наклона произвольного плоского штампа. Специфические формулы выведены для штампа с подошвой в форме полигона, треугольника, прямоугольника, ромба, кругового сектора и кругового сегмента. Все формулы проверены против решений известных в литературе, и их точность подтверждена.

Теория. Рассмотрим плоский штамп с подошвой S , чья граница дана в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi).$$

где функция $a(\phi)$ ограничена и однозначна. Штамп прижат к упругому полупространству нормальной силой P приложенной в точке с декартовыми координатами x_0 и y_0 . Эта нагрузка статически эквивалентна центрально приложенной силе P и двум опрокидывающим моментам $M_x = Py_0$ и $M_y = -Px_0$. Случай центрально приложенной силы был рассмотрен в предыдущей секции. Нам остаётся рассмотреть штамп под действием опрокидывающего момента, и наложить результаты. Повторяя процедуру секции 5.4, мы приходим к тому же основному интегральному уравнению, а именно,

$$w(\rho, \phi) = \frac{2}{\pi} H \int_0^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_x^{a(\phi_0)} \frac{\lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0\right)}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0. \quad (5.5.1)$$

Пусть нормальное перемещение под штампом равно

$$w = \alpha_x y - \alpha_y x, \quad (5.5.2)$$

где α_x и α_y обозначают углы наклона относительно осей Ox и Oy соответственно. Необходимо получить соотношение между этими углами и опрокидывающими моментами.

Представим распределение нормального напряжения под штампом как

$$\sigma = \frac{a(\phi)\rho(p_1 \cos\phi + p_2 \sin\phi)}{\left[a^2(\phi) - \rho^2\right]^{1/2}}, \quad (5.5.3)$$

где p_1 и p_2 пока неизвестные постоянные. Используем условие, что интеграл от σ по площади S должен быть равен нулю. Так как p_1 и p_2

независимы, это ведёт к двум уравнениям:

$$\int_0^{2\pi} (a(\phi))^3 \cos \phi \, d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} (a(\phi))^3 \sin \phi \, d\phi = 0. \quad (5.5.4)$$

Уравнение (5.5.4) будет удовлетворено, если и только если начало координат расположено в центре тяжести области контакта. Направление осей координат будет оговорено далее.

Взаимоотношения между опрокидывающими моментами и параметрами p_1 и p_2 может быть установлено из условий статики:

$$M_x = Py_0 = \int_S \sigma y \, dS, \quad M_y = -Px_0 = - \int_S \sigma x \, dS,$$

что приводит к

$$M_x = \frac{8}{3}(p_1 I_{xy} + p_2 I_x), \quad M_y = -\frac{8}{3}(p_1 I_y + p_2 I_{xy}), \quad (5.5.5)$$

где I_x , I_y и I_{xy} — хорошо известные величины моментов инерции. Теперь необходимо найти взаимоотношения между параметрами p_1 , p_2 и углами α_x , α_y . Это может быть сделано путём подстановки (5.5.3) в (5.5.1) которое, после интегрирования по ρ_0 , даёт:

$$w(\rho, \phi) = H \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\rho} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{|n|} \frac{x^2 \, dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \times \int_0^{2\pi} e^{in(\phi-\phi_0)} F\left(\frac{3-|n|}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right) (p_1 \cos \phi_0 + p_2 \sin \phi_0) \, d\phi_0. \quad (5.5.6)$$

Здесь F обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса. Дальнейшее вычисление нормального перемещения может быть выполнено отдельно для каждой гармоники. Заметим, что нулевая и все чётные гармоники от w будут равны нулю, если $a(\phi)$ содержит только чётные гармоники. Первая гармоника примет форму:

$$w_1(\rho, \phi) = \frac{\pi}{2} H \rho \int_0^{2\pi} \cos(\phi - \phi_0) (p_1 \cos \phi_0 + p_2 \sin \phi_0) a(\phi_0) \, d\phi_0,$$

что может быть упрощено:

$$w_1(\rho, \phi) = \frac{\pi}{2} H \rho [(p_1 J_y + p_2 J_{xy}) \cos \phi + (p_1 J_{xy} + p_2 J_x) \sin \phi], \quad (5.5.7)$$

где следующие параметры были введены:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_0^{2\pi} a(\phi) \sin^2 \phi \, d\phi, & J_y &= \int_0^{2\pi} a(\phi) \cos^2 \phi \, d\phi, \\ J_{xy} &= \int_0^{2\pi} a(\phi) \sin \phi \cos \phi \, d\phi \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Похоже, что эти параметры не были ранее использованы в технике, так что они не имеют общепринятых названий. Так как их тензорные свойства аналогичны моментам инерции, мы назовём J_x и J_y *линейными моментами двумерной области относительно осей Ox и Oy* соответственно; J_{xy} назовём *смешанным линейным моментом двумерной области*.

Важно отметить, что третья гармоника равна нулю для любого контура. Вот выражение для пятой гармоники

$$w_5(\rho, \phi) = \frac{128}{315} H \rho^4 \int_0^{2\pi} \frac{\cos 5(\phi - \phi_0)}{a^2(\phi_0)} (p_1 \cos \phi_0 + p_2 \sin \phi_0) d\phi_0,$$

которое может быть преобразовано в

$$\begin{aligned} w_5(\rho, \phi) &= \frac{64}{315} H \rho^4 \{ [(A_{c6} + A_{c4}) p_1 + (A_{s6} - A_{s4}) p_2] \cos 5\phi \\ &\quad + [(A_{s6} + A_{s4}) p_1 + (A_{c4} - A_{c6}) p_2] \sin 5\phi \}. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Здесь следующие геометрические характеристики области контакта были введены:

$$A_{c4} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 4\phi \, d\phi}{(a(\phi))^2}, \quad A_{c6} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 6\phi \, d\phi}{(a(\phi))^2},$$

$$A_{s4} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 4\phi \, d\phi}{(a(\phi))^2}, \quad A_{s6} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 6\phi \, d\phi}{(a(\phi))^2}. \quad (5.5.10)$$

Исследование последующих гармоник показывает, что их амплитуда уменьшается.

Теперь рассмотрим более детально случай квадрата со стороной $2l$. Уравнение его границы в этом случае есть $a(\phi) = l/\cos\phi$ для $-\pi/4 < \phi < \pi/4$, с соответственным повторением вне этого интервала. Мы можем вычислить первые две ненулевые гармоники:

$$w_1 = \pi H l \rho \ln(1 + \sqrt{2})(p_1 \cos\phi + p_2 \sin\phi),$$

$$w_5 = \frac{128 H \rho^4}{945 l^2} (p_1 \cos 5\phi + p_2 \sin 5\phi).$$

Так как амплитуда w_5 значительно меньше, чем амплитуда w_1 , представляется естественным положить $w \approx w_1$, и назвать остальные гармоники ошибкой решения. Прямые вычисления показывают, что ошибка меньше, чем 3% внутри круга $\rho \leq l$. Ошибка относительно невелика вне круга, достигая 20% в вершине и быстро уменьшаясь с увеличением расстояния от вершины. Принимая во внимание знак ошибки меняется, мы можем заключить, что ошибка в интегральных характеристиках будет ещё меньше. Прямое сравнение (5.5.2) и (5.5.7) ведёт к

$$\alpha_x = \frac{\pi}{2} H (p_1 J_{xy} + p_2 J_x), \quad \alpha_y = -\frac{\pi}{2} H (p_1 J_y + p_2 J_{xy}). \quad (5.5.11)$$

Обращение (5.5.11) даёт:

$$p_1 = -\frac{2}{\pi H} \frac{J_{xy} \alpha_x + J_x \alpha_y}{J_x J_y - J_{xy}^2}, \quad p_2 = \frac{2}{\pi H} \frac{J_y \alpha_x + J_{xy} \alpha_y}{J_x J_y - J_{xy}^2}. \quad (5.5.12)$$

Подстановка (5.5.12) в (5.5.5) окончательно даёт требуемое соотношение:

$$M_x = \frac{16}{3\pi H} (m_{11} \alpha_x + m_{12} \alpha_y), \quad M_y = \frac{16}{3\pi H} (m_{21} \alpha_x + m_{22} \alpha_y) \quad (5.5.13)$$

где

$$m_{11} = \frac{J_y I_x - J_{xy} I_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2}, \quad m_{12} = \frac{J_{xy} I_x - J_x I_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2},$$

$$m_{21} = \frac{J_{xy} I_y - J_y I_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2}, \quad m_{22} = \frac{J_x I_y - J_{xy} I_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2}.$$

Ясно, что все эти результаты могут быть переписаны в матричной или тензорной форме. Можно проверить, что формулы (5.5.13) инвариантны по отношению к произвольному вращению осей. То же свойство справедливо для $m_{11} + m_{22}$ и $m_{12} - m_{21}$. Строго говоря, согласно теореме взаимности, m_{12} должно быть равно m_{21} , так что формулы (5.5.13) в общем случае не удовлетворяют этой теореме. Однако, мы можем заявить, что эта теорема удовлетворяется «приближённо». Мы понимаем под этим следующее свойство, которое было проверено путём прямых вычислений, а именно, $|m_{12} - m_{21}|/m_{11} \ll 1$ и $|m_{12} - m_{21}|/m_{22} \ll 1$. Эта теорема будет удовлетворена точно для любой области, которая имеет по крайней мере одну ось симметрии, потому что в этом случае $m_{12} = m_{21} = 0$, при условии, что оси координат совпадают с главными центральными осями области контакта. Так как мы не имеем численных данных для несимметричных областей, которые могли бы быть использованы, чтобы проверить точность (5.5.13), мы рассмотрим далее только случаи областей контакта с осью симметрии. В этом случае формулы (5.5.5), (5.5.11) и (5.5.13) упрощаются значительно, а именно,

$$M_x = \frac{8}{3} I_x p_2, \quad M_y = -\frac{8}{3} I_y p_1, \quad (5.5.14)$$

$$\alpha_x = \frac{\pi}{2} H J_x p_2, \quad \alpha_y = -\frac{\pi}{2} H J_y p_1, \quad (5.5.15)$$

$$M_x = \frac{16}{3\pi H J_x} I_x \alpha_x, \quad M_y = \frac{16}{3\pi H J_y} I_y \alpha_y. \quad (5.5.16)$$

Возвращаясь назад к задаче нецентрально нагруженного плоского штампа и используя результаты секции 5.4, мы можем написать следующее выражение для распределения напряжений под штампом через приложенную силу P и координаты точки её приложения x_0 и y_0 :

$$\sigma = \frac{Pa(\phi)}{2A \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}} \left[1 + \frac{3}{4} A \left(\frac{xx_0}{I_y} + \frac{yy_0}{I_x} \right) \right], \quad (5.5.17)$$

где A есть площадь S . Выражение, эквивалентное (5.5.17) может быть записано через нормальное перемещение δ и углы наклона α_x и α_y

$$\sigma = \frac{2a(\phi)}{\pi H \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}} \left[\frac{\delta}{J_0} + \frac{\alpha_x y}{J_x} - \frac{\alpha_y x}{J_y} \right], \quad (5.5.18)$$

где

$$J_0 = \int_0^{2\pi} a(\phi) d\phi$$

Параметр J_0 может быть назван *полярным линейным моментом*, благодаря аналогии с моментами инерции и свойству $J_0 = J_x + J_y$. Следует отметить также, что J_0 пропорционально среднему полярному радиусу. Выражения (5.5.17) и (5.5.18) *точные* для эллипса. Мы ожидаем, что они будут достаточно точны в области близкой к началу координат для штампа произвольной формы в плане с по крайней мере одной осью симметрии, в то время, как ошибка может стать довольно значительной близко к границе области S .

Перепишем формулы (5.5.16) в виде:

$$M_x = \frac{A^{3/2}}{2\pi H} h_x \alpha_x, \quad M_y = \frac{A^{3/2}}{2\pi H} h_y \alpha_y, \quad (5.5.19)$$

где

$$h_x = \frac{32I_x}{3A^{3/2}J_x}, \quad h_y = \frac{32I_y}{3A^{3/2}J_y}. \quad (5.5.20)$$

Мы ввели коэффициенты h_x и h_y по двум причинам: так как они безразмерные, то они характеризуют форму S и не зависят от её размеров; оба h_x и h_y равны соответствующим коэффициентам магнитной поляризуемости, что упростит сравнение наших результатов с данными из технической литературы. Формулы (5.5.19) имеют преимущества перед эквивалентными (5.5.16): факторы, зависящие от формы S отделены от факторов, зависящих от её размеров. Можно заключить из (5.5.19), что в

случае, когда область S увеличена так, что её линейные размеры удвоены, её площадь увеличивается в четыре раза, и опрокидывающий момент должен быть умножен на 8, чтобы произвести тот же самый угол наклона. Это заключение не очень ясно из (5.5.16). Оставшаяся часть этой секции будет посвящена вычислению коэффициентов h_x и h_y для штампов различных форм в плане. Несколько таких штампов рассмотрены. Каждая конфигурация связана с её главными центральными осями и имеет по крайней мере одну ось симметрии, совпадающей с осью Ox . Высокая точность формул (5.5.20) подтверждена путём сравнения с имеющимися в литературе численными решениями.

Пример 1: Полигон. Рассмотрим полигон с n сторонами. Функция $a(\phi)$, описывающая его границу, однозначна и ограничена. Начало системы координат расположено в центре тяжести, как и раньше. Пронумеруем стороны полигона против часовой стрелки от 1 до n , a_k обозначает длину k -ой стороны. Вершина, где пересекаются стороны a_k и a_{k+1} , имеет номер $k+1$. Ясно, что значение индекса $n+1$ понимается как 1. Мы обозначим расстояние от центра тяжести до k -ой вершины b_k ; ψ_k обозначает угол между осью Ox и перпендикуляром к стороне a_k . Пусть A_k есть площадь треугольника со сторонами a_k , b_k и b_{k+1} , суммарная площадь полигона A равна сумме A_k .

Следующие выражения могут быть получены для моментов инерции:

$$I_x = \sum_{k=1}^n \frac{2A_k^3}{a_k^2} \left[\sin^2 \psi_k + \frac{b_{k+1}^2 - b_k^2}{4A_k} \sin 2\psi_k + \frac{a_k^4 + 3(b_{k+1}^2 - b_k^2)^2}{48A_k^2} \cos^2 \psi_k \right], \quad (5.5.21)$$

$$I_y = \sum_{k=1}^n \frac{2A_k^3}{a_k^2} \left[\cos^2 \psi_k - \frac{b_{k+1}^2 - b_k^2}{4A_k} \sin 2\psi_k + \frac{a_k^4 + 3(b_{k+1}^2 - b_k^2)^2}{48A_k^2} \sin^2 \psi_k \right]. \quad (5.5.22)$$

Линейные моменты могут быть вычислены в форме:

$$J_x = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{a_k^2} \left[-\left(\frac{1}{b_k} + \frac{1}{b_{k+1}}\right) [a_k^2 - (b_k - b_{k+1})^2] \cos 2\psi_k + 4A_k \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right) \sin 2\psi_k + 2a_k \ln \frac{b_k + b_{k+1} + a_k}{b_k + b_{k+1} - a_k} \cos^2 \psi_k \right], \quad (5.5.23)$$

$$J_y = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{a_k^2} \left[\left(\frac{1}{b_k} + \frac{1}{b_{k+1}} \right) [a_k^2 - (b_k - b_{k+1})^2] \cos 2\psi_k - 4A_k \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}} \right) \sin 2\psi_k + 2a_k \ln \frac{b_k + b_{k+1} + a_k}{b_k + b_{k+1} - a_k} \sin^2 \psi_k \right]. \quad (5.5.24)$$

Подстановка (5.5.21–5.5.24) в (5.5.20) даёт коэффициенты h_x и h_y для произвольного полигона. В случае правильного полигона $a_k = a$, $b_k = b = a/[2\sin(\pi/n)]$, $\psi_k = 2\pi(k-1)/n$, $A_k = [a^2 \cot(\pi/n)]/4 = [b^2 \sin(2\pi/n)]/2$, $A = nA_k$, и формулы (5.5.21–5.5.24) упрощаются:

$$I_x = I_y = \frac{na^4}{64} \cot \frac{\pi}{n} \left[\cot^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) + \frac{1}{3} \right] = \frac{nb^4}{24} \sin \frac{2\pi}{n} \left[2 + \cos \frac{2\pi}{n} \right], \quad (5.5.25)$$

$$J_x = J_y = \frac{na}{4} \cot \frac{\pi}{n} \ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)} = \frac{nb}{2} \cos \frac{\pi}{n} \ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}. \quad (5.5.26)$$

Подставляя (5.5.25) и (5.5.26) в (5.5.20), мы получим:

$$h_x = h_y = \frac{16(2 + \cos \frac{2\pi}{n})}{9 \left(n^3 \sin \frac{\pi}{n} \cos^3 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)^{1/2} \ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}}. \quad (5.5.27)$$

Рассмотрим несколько частных значений n . Для равностороннего треугольника ($n=3$) формула (5.5.27) даёт $h_x = h_y = 3^{1/4} 16/[27 \ln(2 + \sqrt{3})] = 0.5922$. Мы не нашли никаких числовых данных, которые можно было бы сравнить с нашим результатом. В случае квадрата $n=4$, и $h_x = h_y = 4/[9 \ln(1 + \sqrt{2})] = 0.5043$ что находится внутри интервала от 0.4973 до 0.5162, данного в Okon and Harrington (1981) и отличается на 3% от результата de Smedt, (1979) который равен 0.5193. Так как формула (5.5.27) даёт точный результат для круга в предельном случае $n \rightarrow \infty$, а именно, $h_x = h_y = 8/(3\pi^{3/2}) = 0.4789$, мы должны ожидать, что ошибка (5.5.27) будет уменьшаться с ростом n . Значения коэффициентов для правильного гексагона равны $h_x = h_y = 40\sqrt{2}/(3^{1/4} 81 \ln 3) = 0.4830$, что отличается на 1.4% от результата 0.49 из Okon and Harrington (1981), и становится ясно, что максимум возможной ошибки действительно уменьшается с увеличением n . Следует отметить, что значения коэффициентов не изменяется значительно

во всём интервале $3 \leq n < \infty$.

Пример 2: Равнобедренный треугольник. В случае треугольника со сторонами $a_1 = a_2 = l$, и углом между ними равным α , формулы (5.5.20–5.5.23) дают:

$$I_x = \frac{1}{12} l^4 \sin \alpha \sin^2(\alpha/2), \quad I_y = \frac{1}{36} l^4 \sin \alpha \cos^2(\alpha/2),$$

$$J_x = \frac{2}{3} l \cos \frac{\alpha}{2} \left[\sin \alpha + \sin(\alpha + \gamma) - 2 \sin \gamma \right. \\ \left. + 2 \sin^3 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \ln \left(\cot \frac{2\gamma - \alpha}{4} \cot \frac{\alpha}{4} \right) + \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) \right],$$

$$J_y = \frac{2}{3} l \cos \frac{\alpha}{2} \left[-\sin \alpha - \sin(\alpha + \gamma) + 2 \sin \gamma \right. \\ \left. + \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \ln \left(\cot \frac{2\gamma - \alpha}{4} \cot \frac{\alpha}{4} \right) \right],$$

с результатами для коэффициентов:

$$h_x = 8(\tan(\alpha/2))^{3/2} \left\{ 3 \left[\sin \alpha + \sin(\alpha + \gamma) - 2 \sin \gamma \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sin^3 \frac{\alpha}{2} \ln \left(\cot \frac{2\gamma - \alpha}{4} \cot \frac{\alpha}{4} \right) + \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) \right] \right\}^{-1}, \quad (5.5.28)$$

$$h_y = 8\sqrt{\cot(\alpha/2)} \left\{ 9 \left[-\sin \alpha - \sin(\alpha + \gamma) + 2 \sin \gamma \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \ln \left(\cot \frac{2\gamma - \alpha}{4} \cot \frac{\alpha}{4} \right) \right] \right\}^{-1},$$

где $\gamma = \tan^{-1}(3 \tan(\alpha/2))$.

Равнобедренный прямоугольный треугольник был рассмотрен в Okon and Harrington (1981), которые дали интервал между 0.9829 и 1.021 для

одного из коэффициентов, который в наших обозначениях есть h_x . Наш результат для h_x равен 0.9255, что отличается меньше, чем 10% от ихнего. Вторая формула (5.5.28) даёт $h_y = 0.3995$, и мы не нашли в литературе ничего, чтобы сравнить с этим результатом.

Пример 3: Прямоугольник. Рассмотрим штамп с прямоугольным основанием и полуосями a_1 и a_2 . Введём параметр $\varepsilon = a_2/a_1$. Формулы (5.5.21–5.5.24) в этом случае сводятся к

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{4}{3} a_1 a_2^3, & I_y &= \frac{4}{3} a_1^3 a_2, \\ J_x &= 4 a_1 \sinh^{-1} \varepsilon, & J_y &= 4 a_2 \sinh^{-1} (1/\varepsilon). \end{aligned}$$

и формулы (5.5.20) дают:

$$h_x = \frac{4\varepsilon^{3/2}}{9\sinh^{-1} \varepsilon}, \quad h_y = \frac{4\varepsilon^{-3/2}}{9\sinh^{-1} (1/\varepsilon)}. \quad (5.5.29)$$

Коэффициенты магнитной поляризуемости были вычислены в de Smedt (1979) для прямоугольника с различными значениями ε . Здесь мы представляем его результаты вместе с результатами, данными формулой (5.5.29).

$\varepsilon =$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	0.8000	1.0000
de Smedt $h_x =$	0.1287	0.1881	0.2531	0.3249	0.4240	0.4436	0.5193
Формула (32) $h_x =$	0.1408	0.2001	0.2612	0.3265	0.4165	0.4341	0.5043
de Smedt $h_y =$	4.1070	2.0260	1.2600	0.8892	0.6426	0.6130	0.5193
Формула (32) $h_y =$	4.6876	2.1488	1.2701	0.8708	0.6228	0.5929	0.5043
Расхождение в h_x (%)	–9.4	–6.4	–3.2	–0.5	1.8	2.2	2.9
Расхождение в h_y (%)	–14.1	–6.1	–0.8	2.1	3.1	3.3	2.9

Наша формула (5.5.29) дала удовлетворительные результаты в достаточно широком диапазоне изменения ε . Приближённое выражение для распределения напряжений под штампом согласно (5.5.17) принимает форму:

$$\sigma = \frac{P a(\phi)}{8 a_1 a_2 \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}} \left[1 + \frac{9}{4} \left(\frac{x x_0}{a_1^2} + \frac{y y_0}{a_2^2} \right) \right]. \quad (5.5.30)$$

Выражение (5.5.30) может быть использовано для анализа процесса движения приложенной силы P , скажем, вдоль оси Ox . Этот анализ может быть

сделан, требуя, чтобы контактные напряжения исчезли на краю. Можно заключить из (5.5.17), что граница, на которой это преисходит, всегда будет прямая линия. Ясно из (5.5.30), что штамп будет в контакте с полупространством, пока $x_0 \leq 4a_1/9$, после чего штамп начнёт отделяться от полупространства. Полагая, что новая область контакта тоже является прямоугольником (конечно, с различным отношением сторон), мы можем опять приложить формулы этой секции, чтобы проанализировать процесс далее. Если мы обозначим ширину зоны отделения c , следующее соотношение справедливо:

$$c = \frac{2}{5}(9x_0 - 4a_1), \quad \text{для} \quad x_0 \geq \frac{4}{9}a_1.$$

Последняя формула показывает, например, что когда сила P приложена в $x_0 = 13a_1/18$ только половина штампа будет в контакте с полупространством. К сожалению, нет данных, чтобы проверить эти взаимоотношения. Дальнейший анализ проясняет, что ядро, внутри которого сила может быть приложена, не вызывая отделения от полупространства, является ромбом с полуосями $4a_1/9$ и $4a_2/9$ соответственно. Как известно, в случае кругового штампа ядро есть круг радиуса равного одной третьей радиуса штампа.

Результаты из (5.5.30) могут быть сравнены с численными данными полученными в частном сообщении от де Смедта. Чтобы сделать сравнение возможным, мы должны положить $P=0$, $M_x=0$ в (5.5.30) и заменить M_y на (5.5.19), с результатом:

$$\sigma H = \frac{9\sqrt{\epsilon} a(\phi) h_y x}{4a_1 \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}}. \quad (5.5.31)$$

Вычисления согласно (5.5.31) были сделаны для $\epsilon=0.5$ вдоль оси Ox , значение h_y было принято равным 0.8708 (смотри предыдущую Таблицу). Здесь представлены эти результаты в сравнении с полученными от де Смедта.

$x/a_1 =$	0.0833	0.2500	0.3333	0.5000	0.5833	0.6667	0.7500	0.8333	0.9167
де Смедт $\sigma H =$	0.1143	0.3501	0.4759	0.7523	0.9367	1.1460	1.4304	1.8303	2.8182
Формула (31) $\sigma H =$	0.1159	0.3577	0.4898	0.7999	0.9950	1.2392	1.5709	2.0886	3.1777
Расхождение (%)	-1.3	-2.2	-2.9	-6.3	-6.2	-8.1	-9.8	-14.1	-12.8

Так как численный метод де Смедта также является приближённым, мы используем слово *расхождение* вместо слова *ошибка* в таблицах в этой и соседних секциях. Мы можем также сравнить те же значения вдоль оси

Оу. Можно использовать формулу, аналогичную (5.5.31), заменяя все x на y и меняя местами a_1 и a_2 , значение h_x было принято равным 0.3265. Результаты получились такие:

$y/a_2 =$	0.1667	0.3333	0.5000	0.6667	0.8333
де Смедт $\sigma H =$	0.1756	0.3663	0.6011	0.9014	1.6413
наш результат $\sigma H =$	0.1756	0.3673	0.5998	0.9292	1.5662
Расхождение (%)	0.0	-0.3	0.2	-3.1	4.6

Согласование вполне удовлетворительное.

Пример 4: Ромб. Пусть α обозначает угол в одном из вершин ромба, и l есть сторона ромба. Формулы (5.5.21–5.5.24) в этом случае дают:

$$I_x = \frac{1}{6} l^4 \sin \alpha \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right), \quad I_y = \frac{1}{6} l^4 \sin \alpha \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right), \quad A = l^2 \sin \alpha,$$

$$J_x = 2 l \sin \alpha \left[\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \ln \frac{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) + 1}{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) - 1} \right],$$

$$J_y = 2 l \sin \alpha \left[-\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \ln \frac{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) + 1}{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) - 1} \right].$$

Коэффициенты определены как:

$$h_x = \frac{8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{9 (\sin \alpha)^{3/2} \left[\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \ln \frac{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) + 1}{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) - 1} \right]},$$

$$h_y = \frac{8 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{9 (\sin \alpha)^{3/2} \left[-\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \ln \frac{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) + 1}{\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) - 1} \right]}.$$

(5.5.32)

Те же формулы могут быть выражены через полуоси ромба a и b и их отношение $\varepsilon = b/a$, давая

$$h_x = \frac{2\sqrt{2}\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{9 \left[1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \ln \frac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \right]},$$

$$h_y = \frac{2\sqrt{2}(1+\varepsilon^2)}{9\varepsilon^{3/2} \left[\varepsilon - 1 + \frac{1}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \ln \frac{1+\varepsilon+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \right]}. \quad (5.5.33)$$

Мы не нашли в литературе по механике никаких результатов, относящихся к штампу с ромбовой подошвой. В электрических науках, математически эквивалентная задача о коэффициентах магнитной поляризуемости ромба была решена численно в статье de Smedt (1979). Здесь мы представляем его результаты в сравнении с данными из формулы (5.5.33).

$\varepsilon =$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	0.8000	1.0000
де Смедт $h_x =$	0.1181	0.1729	0.2341	0.3052	0.4101	0.4323	0.5193
Формула (5.5.33) $h_x =$	0.1078	0.1627	0.2258	0.2986	0.4026	0.4230	0.5043
де Смедт $h_y =$	6.1820	2.7060	1.5240	0.9946	0.6703	0.6323	0.5193
Формула (5.5.33) $h_y =$	4.5987	2.1982	1.3254	0.9095	0.6388	0.6052	0.5043
Расхождение h_x (%)	8.7	5.9	3.6	2.2	1.8	2.1	2.9
Расхождение h_y (%)	25.6	18.8	13.0	8.6	4.7	4.3	2.9

Ухудшение точности (5.5.33) для малых значений ε может быть объяснено ошибочным предположением о сингулярности типа квадратного корня в (5.5.3), которое особенно неверно для областей с острыми углами.

Распределение напряжения под штампом может быть выражено согласно (5.5.17) как

$$\sigma = \frac{P a(\phi)}{2A \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}} \left[1 + \frac{9}{2} \left(\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} \right) \right].$$

Дальнейший анализ последнего выражения проясняет, что ядро, внутри которого сила может быть приложенная, не вызывая отделения от полупространства, есть прямоугольник с полуосями $2a/9$ и $2b/9$ соответственно. В случае $\varepsilon=1$, ромб превращается в квадрат, и все результаты согласуются с Примером 3.

Пример 5: Круговой сегмент. Пусть радиус r и угол 2α являются параметрами сегмента. Положение его центра тяжести определено как $x_c = kr$, где k дано в (5.4.26). Уравнение границы сегмента по отношению к его центру тяжести принимает форму (5.4.27).

Вычисление площади и моментов (5.5.21–5.5.24) даёт:

$$A = r^2(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha), \quad I_x = \frac{1}{4}Ar^2(1 - k\cos\alpha), \quad I_y = \frac{1}{4}Ar^2(1 + 3k\cos\alpha - 4k^2), \quad (5.5.34)$$

$$J_x = \frac{2}{3}r \left\{ -k\sin^3\gamma + (1 - k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\sin\gamma\cos\gamma + \frac{1-k^2}{k^2}F(\pi-\gamma, k) \right. \\ \left. + \frac{2k^2-1}{k^2}E(\pi-\gamma, k) + 3(k - \cos\alpha) \left[-\sin\gamma + \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \right] \right\},$$

$$J_y = \frac{2}{3}r \left\{ \sin\gamma \left[k\sin^2\gamma - 3\cos\alpha - (1 - k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\cos\gamma \right] \right. \\ \left. - \frac{1-k^2}{k^2}F(\pi-\gamma, k) + \frac{1+k^2}{k^2}E(\pi-\gamma, k) \right\}, \quad (5.5.35)$$

где $\gamma = \tan^{-1}(\sin\alpha/(k - \cos\alpha))$, и функции $F(\cdot, \cdot)$ и $E(\cdot, \cdot)$ обозначают неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Подстановка в (5.5.20) ведёт к

$$h_x = \frac{4(1 - k\cos\alpha)}{\left[\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right]^{1/2}} \left\{ -k\sin^3\gamma + (1 - k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\sin\gamma\cos\gamma + \frac{1-k^2}{k^2}F(\pi-\gamma, k) \right. \\ \left. + \frac{2k^2-1}{k^2}E(\pi-\gamma, k) + 3(k - \cos\alpha) \left[-\sin\gamma + \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \right] \right\}^{-1},$$

$$h_y = \frac{4(1 + 3k\cos\alpha - 4k^2)}{\left[\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right]^{1/2}} \left\{ \sin\gamma \left[k\sin^2\gamma - 3\cos\alpha - (1 - k^2\sin^2\gamma)^{1/2}\cos\gamma \right] \right. \\ \left. - \frac{1-k^2}{k^2}F(\pi-\gamma, k) + \frac{1+k^2}{k^2}E(\pi-\gamma, k) \right\}^{-1}. \quad (5.5.36)$$

Мы можем использовать этот результат для исследования случая кругового штампа под действием нормальной силы P , приложенной на расстоянии $x_0 > r/3$ от центра. Из классической теории мы знаем, что штамп должен отделяться от полупространства. Полагая, что область контакта после отделения есть круговой сегмент, можно получить следующее взаимоотношение между координатой x_0 и размерами сегмента, характеризующимися углом α

$$x_0 = r \frac{(1-k)(1+4k)}{3(k-\cos\alpha)}. \quad (5.5.37)$$

Последнее выражение точно в двух предельных случаях: для полного круга $\alpha = \pi$ уравнение даёт $x_0 = r/3$, и для $\alpha \rightarrow 0$ мы имеем $x_0 = r$. Задача наклонного кругового штампа была рассмотрена численно в книге Рвачёва и Проценко (1977). Здесь мы сравниваем результаты.

α (град.)=	158.4	108.1	102.0
Рвачёв и др. x_0 =	0.3583	0.5833	0.6250
Формула (5.5.37) x_0 =	0.3543	0.5418	0.5750
Расхождение (%)	1.1	7.1	8.0

Согласие результатов должно считаться удивительно хорошим, особенно принимая во внимание что Рвачёв и Проценко рассматривали области контакта не в форме сегмента, а более сложной формы.

Пример 6: Крест. Рассмотрим штамп полученный путём ортогонального пересечения двух равных прямоугольников со сторонами $2a$ и $2b$. Введём параметр $\epsilon = b/a$. Площадь и моменты примут вид:

$$A = 4a^2\epsilon(2-\epsilon), \quad I_x = I_y = \frac{4}{3}a^4\epsilon(1+\epsilon^2-\epsilon^3),$$

$$J_x = J_y = 4a \left[\ln[\epsilon + (1+\epsilon^2)^{1/2}] + \epsilon \ln \frac{1+(1+\epsilon^2)^{1/2}}{(1+\sqrt{2})\epsilon} \right]. \quad (5.5.38))$$

Коэффициенты будут определены как

$$h_x = h_y = \frac{4\epsilon(1+\epsilon^2-\epsilon^3)}{9\epsilon(2-\epsilon)^{3/2}} \left[\ln[\epsilon + (1+\epsilon^2)^{1/2}] + \epsilon \ln \frac{1+(1+\epsilon^2)^{1/2}}{(1+\sqrt{2})\epsilon} \right]^{-1}. \quad (5.5.39)$$

Значения $h = h_x = h_y$ были вычислены из (5.5.39) и сравнены с данными de Smedt (1979). Результаты представлены ниже:

$\varepsilon =$	0.1000	0.2000	0.3333	0.4000	0.5000	0.6000	0.7500	0.8000	1.0000
де Сметт $h =$	1.5910	0.8720	0.6255	0.5725	0.5267	0.5069	0.4985	0.4997	0.5193
Формула (5.5.39) $h =$	1.7382	0.8758	0.6006	0.5465	0.5049	0.4890	0.4893	0.4926	0.5043
Расхождение (%)	-9.3	-0.4	4.0	4.5	4.1	3.5	1.9	1.4	2.9

Принимая во внимание сложность формы, мы должны считать согласование результатов удивительно хорошим, не только количественно, но и качественно: обе совокупности результатов демонстрируют плоский минимум вблизи $\varepsilon = 0.75$.

Дискуссия Следует отметить, что изменение порядка интегрирования, которое вело к (5.5.1), действительно только внутри круга $\rho \leq \min\{a(\phi)\}$. Тем не менее, мы можем получить из (5.5.1) *точное* решение для эллипса достаточно точные формулы для штампов различной формы, как это было показано в предыдущих примерах.

Точность формул (5.5.20) может быть улучшена, принимая во внимание пятую гармонику (5.5.9) в комбинации с вариационным подходом (Noble, 1960). Следующий функционал принимает максимальное значение на точном решении (5.1.8)

$$I(\sigma) = \frac{2}{H} \int_S \int \sigma(M) w(M) dS_M - \int_S \int \sigma(M) \left[\int_S \int \frac{\sigma(N)}{R(M,N)} dS_N \right] dS_M. \quad (5.5.40)$$

Принимая

$$H \int_S \int \frac{\sigma(N)}{R(M,N)} dS_N \approx w_1 + w_5, \quad (5.5.41)$$

и подставляя (5.5.3), (5.5.7), (5.5.9), и (5.5.41) в (5.5.40), мы получаем после интегрирования по ρ

$$I = \int_0^{2\pi} (a(\phi))^4 \left\{ (p_1 \cos \phi + p_2 \sin \phi) \left[\frac{4}{3H} (\alpha_x \sin \phi - \alpha_y \cos \phi) \right. \right. \\ - \frac{\pi}{3} (p_1 J_y + p_2 J_{xy}) \cos \phi - \frac{\pi}{3} (p_1 J_{xy} + p_2 J_x) \sin \phi - \frac{4}{63} (a(\phi))^3 ([p_1 (A_{c6} + A_{c4}) \\ + p_2 (A_{s6} - A_{s4})] \cos 5\phi + [p_1 (A_{s6} + A_{s4}) + p_2 (A_{c4} - A_{c6})] \sin 5\phi) \left. \right] \Big\} d\phi. \quad (5.5.42)$$

Рассматривая функционал I как функцию p_1 и p_2 , условия экстремума

$$\frac{\partial I}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial p_2} = 0,$$

дают два линейные алгебраические уравнения относительно неизвестных p_1 и p_2 . Полное решение довольно громоздко. Здесь мы представляем окончательный результат для коэффициентов h_x и h_y , которые действительны только для областей, имеющих по крайней мере одну ось симметрии, и главные центральные оси приняты за координатные оси:

$$h_x = \frac{32I_x}{3A^{3/2}J_x(1+\eta_x)}, \quad h_y = \frac{32I_y}{3A^{3/2}J_y(1+\eta_y)}, \quad (5.5.43)$$

где поправочные члены

$$\eta_x = \frac{(B_{c4} - B_{c6})(A_{c4} - A_{c6})}{42\pi I_x J_x}, \quad \eta_y = \frac{(B_{c4} + B_{c6})(A_{c4} + A_{c6})}{42\pi I_y J_y}, \quad (5.5.44)$$

параметры A_{c4} и A_{c6} определены в (5.5.10), и

$$B_{c6} = \int_0^{2\pi} (a(\phi))^7 \cos 6\phi \, d\phi, \quad B_{c4} = \int_0^{2\pi} (a(\phi))^7 \cos 4\phi \, d\phi.$$

Так как выражение (5.5.41) приближённое, нет никакой гарантии, что (5.5.43) будет более точным, чем (5.5.20). Мы выполнили необходимые вычисления для прямоугольника. Вот результаты в сравнении с данными de Smedt (1979)

$\varepsilon =$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	0.8000	1.0000
де Смедт $h_x =$	0.1287	0.1881	0.2531	0.3249	0.4240	0.4436	0.5193
Формула (5.5.43) $h_x =$	0.1405	0.1988	0.2577	0.3207	0.4165	0.4376	0.5331
де Смедт $h_y =$	4.1070	2.0260	1.2600	0.8892	0.6426	0.6130	0.5193
Формула (5.5.43) $h_y =$	4.5856	2.0985	1.2479	0.8714	0.6463	0.6190	0.5331
Расхождение в h_x (%)	−9.2	−5.7	−1.8	1.3	1.8	1.3	−2.7
Расхождение в h_y (%)	−11.7	−3.6	1.0	2.0	−0.6	−1.0	−2.7

Сравнение с аналогичными данными, вычисленными по формуле (5.5.29), показывает, что поправочные члены η_x и η_y в этом частном случае уменьшают расхождение, как положительное, так и отрицательное. Мы

однако опять предостерегаем, что нет никакой гарантии, что это будет действительно для произвольной области. Например, вот данные вычислений для ромба

$\varepsilon =$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	0.8000	1.0000
де Сметт $h_x =$	0.1181	0.1729	0.2341	0.3052	0.4101	0.4323	0.5193
Формула (5.5.43) $h_x =$	0.2268	0.1860	0.2351	0.3031	0.4058	0.4264	0.5091
де Сметт $h_y =$	6.1820	2.7060	1.5240	0.9946	0.6703	0.6323	0.5193
Формула (5.5.43) $h_y =$	8.5600	2.5916	1.4196	0.9408	0.6490	0.6138	0.5091
Расхождение h_x (%)	−92.0	−7.6	−0.4	0.7	1.0	1.4	2.0
Расхождение h_y (%)	−38.5	4.2	6.8	5.4	3.2	2.9	2.0

Сравнение с данными, вычисленными по формуле (5.5.33), показывают, что расхождение уменьшилось для $\varepsilon \geq 0.2$ в то время, как для $\varepsilon = 0.1$ оно подпрыгнуло в противоположном направлении на −92%. Основной причиной для этого является скачок в значениях коэффициентов η_x и η_y , когда ε становится очень маленьким. Следующее правило может быть предложено для пользователя, желающего улучшить точность: когда значение поправочных коэффициентов η_x и η_y не превышает, скажем, 0.2, их включение обычно улучшает точность, в противном случае, формулы (5.5.43) использовать не следует.

Представляется целесообразным дать решение (5.5.42) для случая, когда область контакта не имеет осей симметрии, и только первая гармоника перемещения w_1 принята во внимание. Результат есть

$$p_1 = \frac{\alpha_x(c_{22}I_{xy} - c_{12}I_x) + \alpha_y(c_{12}I_{xy} - c_{22}I_y)}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$

$$p_2 = \frac{\alpha_x(c_{11}I_x - c_{12}I_{xy}) + \alpha_y(c_{12}I_y - c_{11}I_{xy})}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$
(5.5.45)

где

$$c_{11} = \frac{\pi H}{2}(J_y I_y + J_{xy} I_{xy}), \quad c_{22} = \frac{\pi H}{2}(J_x I_x + J_{xy} I_{xy}),$$

$$c_{12} = \frac{\pi H}{4}(J_{xy}(I_x + I_y) + I_{xy}(J_x + J_y))$$

Формулы (5.5.45) отличаются от эквивалентных (5.5.12) выведенных раньше. В отсутствии каких-нибудь численных данных для области общего вида, невозможно сказать, являются ли формулы (5.5.45) более точными, чем

(5.5.12), но они явно сложнее. Отметим, что в случае области с осью симметрии оба (5.5.45) и (5.5.12) упрощаются к одним и тем же уравнениям (5.5.15).

Можно заметить определённую аналогию между выведенными формулами и теорией изгиба Сент–Венана. Эта аналогия становится более заметной, если, например, мы перепишем уравнение (5.5.17) в форме:

$$\sigma = \frac{a(\phi)}{2[a^2(\phi) - \rho^2]^{1/2}} \left[\frac{P}{A} + \frac{3}{4} \left(\frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} \right) \right].$$

Мы думаем, что эта аналогия не случайна, так как метод, использованный в этой секции, также может быть назван полубратным. Метод может быть развит далее в полную теорию упругих контактных задач Сент–Венановского типа, который сможет сочетать простоту и точность достаточную для инженера.

Математически тождественная задача о магнитной поляризуемости малых отверстий была решена в (Fabrikant, 1987j).

Упражнение 5.5

1. Найдите моменты инерции и J –моменты для кругового сектора характеризуемого радиусом r и полярным углом 2α .

Ответ:

$$I_x = \frac{1}{4} r^4 \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right), \quad I_y = r^4 \frac{9\alpha^2 + 9\alpha \sin \alpha \cos \alpha - 16 \sin^2 \alpha}{36\alpha},$$

$$J_x = \frac{2}{3} r^4 \left\{ \frac{2k^2 - 1}{k^2} E(\gamma, k) - k \sin^3 \gamma - (1 - k^2 \sin^2 \gamma)^{1/2} \sin \gamma \cos \gamma + \frac{1 - k^2}{k^2} F(\gamma, k) \right. \\ \left. + 3k \sin \alpha \left[\cos \alpha + \cos(\alpha + \gamma) + \sin^2 \alpha \ln \left(\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\gamma - \alpha}{2} \right) \right] \right\},$$

$$J_y = \frac{2}{3} r^4 \left\{ k \sin \gamma (\sin^2 \gamma - 3) + (1 - k^2 \sin^2 \gamma)^{1/2} \sin \gamma \cos \gamma - \frac{1 - k^2}{k^2} F(\gamma, k) \right\}$$

$$+ \frac{1+k^2}{k^2} E(\gamma, k) + 3k \sin \alpha \left[\cos^2 \alpha \ln \left(\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\gamma-\alpha}{2} \right) - \cos \alpha - \cos(\alpha+\gamma) \right] \Bigg\}.$$

Здесь $k = 2 \sin \alpha / (3 \alpha)$, и $\gamma = \tan^{-1}(\sin \alpha / (\cos \alpha - k))$.

2. Найдите коэффициенты формы h_x и h_y для кругового сектора, описанного в Упражнении 1.

Ответ:

$$h_x = \frac{2(2\alpha - \sin 2\alpha)}{\alpha^{3/2}} \left\{ \frac{1-k^2}{k^2} F(\gamma, k) - k \sin^3 \gamma - (1-k^2 \sin^2 \gamma)^{1/2} \sin \gamma \cos \gamma \right. \\ \left. + \frac{2k^2-1}{k^2} E(\gamma, k) + 3k \sin \alpha \left[\cos \alpha + \cos(\alpha+\gamma) + \sin^2 \alpha \ln \left(\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\gamma-\alpha}{2} \right) \right] \right\}^{-1},$$

$$h_y = \frac{4(9\alpha^2 + 9\alpha \sin \alpha \cos \alpha - 16 \sin^2 \alpha)}{9\alpha^{5/2}} \left\{ k \sin \gamma (\sin^2 \gamma - 3) \right. \\ \left. + (1-k^2 \sin^2 \gamma)^{1/2} \sin \gamma \cos \gamma - \frac{1-k^2}{k^2} F(\gamma, k) + \frac{1+k^2}{k^2} E(\gamma, k) \right. \\ \left. + 3k \sin \alpha \left[-\cos \alpha - \cos(\alpha+\gamma) + \cos^2 \alpha \ln \left(\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\gamma-\alpha}{2} \right) \right] \right\}^{-1}.$$

3. Проверьте (5.5.4).

4. Выведите (5.5.7).

5. Подтвердите правильность (5.5.14)–(5.5.16).

5.6 Неплоский штамп общей формы в плане

В этой секции мы анализируем упругие контактные задачи для неплоского штампа не эллиптической формы в плане под действием нормальной силы. Основание штампа представляется квадратичной поверхностью. Некоторые общие взаимоотношения установлены между приложенной силой и осадкой штампа. Специфические формулы выведены для штампа, чья форма в плане представляет полигон, прямоугольник, ромб и крест. Пример конечного жёсткого цилиндра, лежащего на его образующей и прижатого к упругому полупространству рассмотрен в деталях. Метод позволяет нам иметь сингулярные напряжения на краях цилиндра и нулевые напряжения на остальной части границы контактной области. Последнее условие служит для нахождения ширины области контакта. Все формулы проверены путём сравнения с ранее опубликованными решениями, и хорошая точность подтверждена для достаточно широкого диапазона отношений длины к ширине.

Теория. Рассмотрим штамп с неплоской базой и произвольной формой в плане. Штамп придавлен к упругому полупространству нормальной силой P . Пусть граница области контакта S дана в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi),$$

где функция $a(\phi)$ ограничена и однозначна. Здесь мы полагаем, что область контакта задана. Случай, когда область контакта неизвестна (или частично неизвестна), будет обсуждаться далее. Основание штампа является квадратичной поверхностью. Это ограничение не является существенным. Метод может быть применен также к поверхностям более высокого порядка. Трансформированное интегральное уравнение дано в (5.5.1).

Пусть нормальное перемещение под штампом есть:

$$w = g_0 + g_x y^2 + g_{xy} xy + g_y x^2, \quad (5.6.1)$$

где g_0 обозначает осадку штампа, и g_x , g_y и g_{xy} являются известными постоянными, определенными геометрией основания штампа. Пусть распределение давления под штампом есть

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{a(\phi)[\alpha_0 + \rho^2(\alpha_x \sin^2 \phi + \alpha_{xy} \sin \phi \cos \phi + \alpha_y \cos^2 \phi)]}{\left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}}, \quad (5.6.2)$$

где α_0 , α_x , α_y и α_{xy} — пока неизвестные постоянные. Мы используем условие, что интеграл от σ по S должен быть равен P . Это приводит к выражению

$$P = 2\alpha_0 A + \frac{8}{3}(\alpha_x I_x + \alpha_{xy} I_{xy} + \alpha_y I_y), \quad (5.6.3)$$

где A есть площадь области контакта S ; и I_x , I_y и I_{xy} — осевые моменты инерции и смешанный момент инерции соответственно. Положение начала координат может быть определено из условия, что опрокидывающие моменты, вызываемые напряжениями (5.6.2), должны исчезать. Эти условия дают следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} a^3(\phi) \left[\alpha_0 + \frac{3}{4} a^2(\phi) (\alpha_x \sin^2 \phi + \alpha_{xy} \sin \phi \cos \phi + \alpha_y \cos^2 \phi) \right] \sin \phi d\phi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} a^3(\phi) \left[\alpha_0 + \frac{3}{4} a^2(\phi) (\alpha_x \sin^2 \phi + \alpha_{xy} \sin \phi \cos \phi + \alpha_y \cos^2 \phi) \right] \cos \phi d\phi &= 0. \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Мы будем называть точку, координаты которой удовлетворяют (5.6.4), *центром штампа*. Когда область контакта имеет одну ось симметрии, центр штампа расположен на этой оси. В случае двух осей симметрии, центр штампа совпадает с центром тяжести. Теперь необходимо связать α_0 , α_x , α_y , и α_{xy} с параметрами g_0 , g_x , g_y , и g_{xy} . Это может быть сделано подстановкой (5.6.2) в (5.5.1) что даёт, после интегрирования по ρ_0 ,

$$\begin{aligned} w(\rho, \phi) = & H\alpha_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\rho} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{|n|} \frac{x dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} e^{in(\phi - \phi_0)} F\left(\frac{2-|n|}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right) d\phi_0 \\ & + H \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\rho} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{|n|} \frac{x^3 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} e^{in(\phi - \phi_0)} F\left(\frac{4-|n|}{2}, \frac{1}{2}; 1; \right. \\ & \left. 1 - \frac{x^2}{a^2(\phi_0)}\right) (\alpha_x \sin^2 \phi_0 + \alpha_{xy} \sin \phi_0 \cos \phi_0 + \alpha_y \cos^2 \phi_0) d\phi_0. \end{aligned}$$

Здесь F обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса. Дальнейшее

вычисление нормальных перемещений может быть выполнено отдельно для каждой гармоники. Отметим, что все нечётные гармоники w исчезают, если $a(\phi)$ содержит только чётные гармоники. Нулевая гармоника примет вид:

$$w_0(\rho, \phi) = \frac{\pi H}{4} \int_0^{2\pi} \left[2\alpha_0 + (a^2(\phi_0) + \frac{1}{2}\rho^2) \times (\alpha_x \sin^2 \phi_0 + \alpha_{xy} \sin \phi_0 \cos \phi_0 + \alpha_y \cos^2 \phi_0) \right] a(\phi_0) d\phi_0, \quad (5.6.5)$$

что может быть упрощено как

$$w_0(\rho, \phi) = \frac{\pi H}{4} \left[2\alpha_0 J_0 + \alpha_x B_x + \alpha_{xy} B_{xy} + \alpha_y B_y + \frac{\rho^2}{2} (\alpha_x J_x + \alpha_{xy} J_{xy} + \alpha_y J_y) \right], \quad (5.6.6)$$

где J —моменты были определены в предыдущей секции, и следующие дополнительные параметры были введены:

$$\begin{aligned} B_x &= \int_0^{2\pi} a^3(\phi) \sin^2 \phi d\phi, & B_y &= \int_0^{2\pi} a^3(\phi) \cos^2 \phi d\phi, \\ B_{xy} &= \int_0^{2\pi} a^3(\phi) \sin \phi \cos \phi d\phi. \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

Так как тензорные свойства B —моментов аналогичны свойствам моментов инерции, мы будем называть B_x и B_y *кубическими моментами двумерной области относительно осей Ox и Oy* соответственно, B_{xy} будем называть *смешанным кубическим моментом двумерной области относительно осей Ox и Oy* .

Вот выражение для второй гармоники:

$$w_2(\rho, \phi) = \frac{3}{8} \pi H \rho^2 \int_0^{2\pi} (\alpha_x \sin^2 \phi_0 + \alpha_{xy} \sin \phi_0 \cos \phi_0 + \alpha_y \cos^2 \phi_0) a(\phi_0) \cos 2(\phi - \phi_0) d\phi_0,$$

которое может быть модифицировано как

$$w_2(\rho, \phi) = \frac{3}{8} \pi H \rho^2 \{ -\alpha_x [(C_{xxxx} - C_{xxyy}) \cos 2\phi + 2C_{xxxy} \sin 2\phi] + \alpha_y [(C_{yyyy}$$

$$-C_{xxxy})\cos 2\phi + 2C_{xyyy}\sin 2\phi] + \alpha_{xy}[(C_{xyyy} - C_{xxxy})\cos 2\phi + 2C_{xxxy}\sin 2\phi]\}. \quad (5.6.8)$$

Здесь следующие геометрические характеристики области контакта были введены:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= \int_0^{2\pi} a(\phi) \sin^4 \phi d\phi, & C_{xxxy} &= \int_0^{2\pi} a(\phi) \sin^3 \phi \cos \phi d\phi, \\ C_{xyyy} &= \int_0^{2\pi} a(\phi) \sin^2 \phi \cos^2 \phi d\phi, & C_{xyxy} &= \int_0^{2\pi} a(\phi) \sin \phi \cos^3 \phi d\phi, \\ C_{yyyy} &= \int_0^{2\pi} a(\phi) \cos^4 \phi d\phi. \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

C —моменты будем называть *линейными моментами четвёртого порядка*. Их взаимоотношения с J —моментами легко установить, например, $J_x = C_{xxxx} + C_{xxxy}$, $J_{xy} = C_{xyyy} + C_{xxxy}$, и так далее. Важно отметить, что параметр α_0 не входит в (5.6.8), и параметры α_x , α_{xy} и α_y отсутствуют в выражении для четвёртой гармоники. Исследование следующих гармоник показывает, что их амплитуда уменьшается. В случае эллипса они исчезают, таким образом превращая решение в *точное*. Представляется натуральным положить $w \approx w_0 + w_2$, и оставшиеся гармоники могут называться ошибкой решения. Мы должны принимать во внимание, что чередование знака ошибки приведёт к более значительному уменьшению ошибки интегральных характеристик, как главный вектор P . Теперь мы имеем приближённое выражение для перемещения под штампом

$$\begin{aligned} w = \frac{\pi}{4} H \Big\{ & 2\alpha_0 J_0 + \alpha_x B_x + \alpha_{xy} B_{xy} + \alpha_y B_y + x^2 \Big[-\alpha_x (C_{xxxx} - 2C_{xxxy}) \\ & + \alpha_{xy} (2C_{xyyy} - C_{xxxy}) + \alpha_y (2C_{yyyy} - C_{xyxy}) \Big] + y^2 \Big[\alpha_x (2C_{xxxx} - C_{xxxy}) \\ & + \alpha_{xy} (2C_{xxxy} - C_{xyxy}) - \alpha_y (C_{yyyy} - 2C_{xyxy}) \Big] + 6xy \Big[\alpha_x C_{xxxy} + \alpha_{xy} C_{xyxy} + \alpha_y C_{xyyy} \Big] \Big\}. \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

Сравнение (5.6.1) и (5.6.10) ведёт к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} H(2\alpha_0 J_0 + \alpha_x B_x + \alpha_{xy} B_{xy} + \alpha_y B_y) &= g_0, \\
 \frac{\pi}{4} H \left[\alpha_x (2C_{xxxx} - C_{xxyy}) + \alpha_{xy} (2C_{xxxy} - C_{xyyy}) - \alpha_y (C_{yyyy} - 2C_{xxyy}) \right] &= g_x \\
 \frac{\pi}{4} H \left[-\alpha_x (C_{xxxx} - 2C_{xxyy}) + \alpha_{xy} (2C_{xxyy} - C_{xxxy}) + \alpha_y (2C_{yyyy} - C_{xxyy}) \right] &= g_y, \\
 \frac{3\pi}{2} H \left[\alpha_x C_{xxxy} + \alpha_{xy} C_{xxyy} + \alpha_y C_{xyyy} \right] &= g_{xy}.
 \end{aligned} \tag{5.6.11}$$

Последние 3 уравнения (5.6.11) могут быть решены относительно α_x , α_y , и α_{xy} . В случае упругой контактной задачи, когда g_0 задано, значение α_0 может быть найдено из первого уравнения (5.6.11), после чего приложенная сила P определена по (5.6.3), и решение закончено. Когда приложенная сила P дана, значение α_0 может быть определено из (5.6.3), после чего осадка штампа g_0 дана первым уравнением (5.6.11).

Значительные упрощения имеют место, когда область контакта S имеет по крайней мере одну ось симметрии. В этом случае $C_{xxxy} = C_{xxyy} = B_{xy} = 0$.

Последнее уравнение (5.6.11) становится несвязанным с предыдущими тремя. Решения могут быть тогда записаны явно

$$\begin{aligned}
 \alpha_x &= \frac{4[g_x(2C_{yyyy} - C_{xxyy}) + g_y(C_{yyyy} - 2C_{xxyy})]}{3\pi H(C_{xxxx} C_{yyyy} - C_{xxxy}^2)}, \\
 \alpha_y &= \frac{4[g_x(C_{xxxx} - 2C_{xxyy}) + g_y(2C_{xxxx} - C_{xxyy})]}{3\pi H(C_{xxxx} C_{yyyy} - C_{xxxy}^2)}, \\
 \alpha_{xy} &= \frac{2g_{xy}}{3\pi H C_{xxyy}}.
 \end{aligned} \tag{5.6.12}$$

Подстановка (5.6.12) в первое уравнение (5.6.11) даёт:

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi H J_0} \left[g_0 - \frac{g_x \beta_x + g_y \beta_y}{3(C_{xxxx} C_{yyyy} - C_{xxyy}^2)} \right], \quad (5.6.13)$$

где

$$\beta_x = B_x(2C_{yyyy} - C_{xxyy}) + B_y(C_{xxxx} - 2C_{xxyy}),$$

$$\beta_y = B_x(C_{yyyy} - 2C_{xxyy}) + B_y(2C_{xxxx} - C_{xxyy}).$$

Выражения (5.6.2), (5.6.3), (5.6.12), и (5.6.13) дают полное и *точное* решение для эллипса. Мы покажем, что они будут достаточно хороши для произвольного штампа. Мы ожидаем, что формула (5.6.2) будет достаточно точной вблизи начала координат, в то время как ошибка может стать весьма значительной вблизи границы области S .

Представляется удобным обсудить следующие частные случаи: $g_0 = 2\pi\sqrt{A}$, $g_x = g_y = g_{xy} = 0$; $g_y = 2\pi/\sqrt{A}$, $g_x = g_{xy} = g_0 = 0$; и случай $g_x = 2\pi/\sqrt{A}$, $g_y = g_{xy} = g_0 = 0$. В каждом случае мы должны вычислить интеграл:

$$p = \frac{H}{A} \int_S \sigma dS,$$

который пропорционален среднему значению σ , и является безразмерным, таким образом характеризуя форму S и будучи независимы от её размеров. Мы обозначим эти параметры p_0 , p_y и p_x для каждого случая соответственно. На это имеются 2 причины: *i*) они в точности соответствуют параметрам, которые были использованы в теории распространения звука через отверстия, так что будет легко сравнивать численные результаты; *ii*) табулирование этих параметров для различных форм значительно упростит решение любой частной контактной задачи. Действительно, взаимоотношение между приложенной силой P и осадкой штампа g_0 может быть записано как

$$P = \frac{A}{2\pi H} \left[\frac{p_0}{\sqrt{A}} g_0 + \sqrt{A} (p_y g_y + p_x g_x) \right].$$

Последнее выражение указывает, что знание коэффициентов формы и площади штампа достаточны для вывода взаимоотношения между приложенной силой и осадкой штампа. Формулы (5.6.3), (5.6.12) и (5.6.13) ведут к следующему выражению для параметров p_0 , p_y и p_x :

$$p_0 = \frac{8\sqrt{A}}{J_0}, \quad p_y = \frac{8\{8J_0[I_x(C_{yyyy} - 2C_{xxyy}) + I_y(2C_{xxxx} - C_{xxyy})] - 3A\beta_y\}}{9A^{3/2}J_0(C_{xxxx}C_{yyyy} - C_{xxyy}^2)}.$$

$$p_x = \frac{8\{8J_0[I_x(2C_{yyyy} - C_{xxyy}) + I_y(C_{xxxx} - 2C_{xxyy})] - 3A\beta_x\}}{9A^{3/2}J_0(C_{xxxx}C_{yyyy} - C_{xxyy}^2)}. \quad (5.6.14)$$

Дальнейшие упрощения имеют место, когда область S обладает такой симметрией, что все моменты относительно оси Ox равны аналогичным моментам относительно оси Oy . В этом случае

$$p_y = p_x = \frac{8(8I_0J_0 - 3AB_0)}{3A^{3/2}J_0^2}, \quad (5.6.15)$$

где моменты с индексом 0 обозначают соответствующие полярные моменты. Формула (5.6.13) также упрощается следующим образом:

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi H J_0} \left[g_0 - \frac{B_0}{J_0} (g_x + g_y) \right]. \quad (5.6.16)$$

Формулы (5.6.2), (5.6.3), (5.6.12) и (5.6.13) являются основными результатами этой секции. Упругие контактные задачи для широкого набора планформ могут теперь быть решены при помощи простого вычисления геометрических характеристик (моментов) области контакта.

Несколько примеров рассмотрено далее. Мы представляем только необходимые вычисления моментов. Области контакта полагаются заданными. Более сложный случай, когда область контакта частично неизвестна, обсуждается в контексте задачи о жёстком катке на упругом полупространстве.

Пример 1: Полигон. Рассмотрим полигон с n сторонами. Общие обозначения его параметров то же самое, как и в предыдущей секции, где моменты инерции и J —моменты были вычислены. Здесь представлены остальные моменты.

C —моменты могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
C_{xxxx} &= \sum_{k=1}^n -q_k \cos 2\psi_k - u_k \cos 4\psi_k + v_k \sin 4\psi_k + 4s_k \sin \psi_k \cos^3 \psi_k + 2t_k \cos^4 \psi_k, \\
C_{xxyy} &= \sum_{k=1}^n v_k \cos 4\psi_k + u_k \sin 4\psi_k + s_k \cos^2 \psi_k (1 - 4\sin^2 \psi_k) \\
&\quad + \frac{1}{2} q_k \sin 2\psi_k - 2t_k \sin \psi_k \cos^3 \psi_k,
\end{aligned} \tag{5.6.17}$$

$$C_{xyyy} = \sum_{k=1}^n u_k \cos 4\psi_k - v_k \sin 4\psi_k - \frac{1}{2} s_k \sin 4\psi_k + 2t_k \sin^2 \psi_k \cos^2 \psi_k, \tag{5.6.18}$$

$$\begin{aligned}
C_{xyyy} &= \sum_{k=1}^n -v_k \cos 4\psi_k - u_k \sin 4\psi_k - s_k \sin^2 \psi_k (1 - 4\cos^2 \psi_k) \\
&\quad + \frac{1}{2} q_k \sin 2\psi_k - 2t_k \sin^3 \psi_k \cos \psi_k,
\end{aligned} \tag{5.6.19}$$

$$C_{yyyy} = \sum_{k=1}^n q_k \cos 2\psi_k - u_k \cos 4\psi_k + v_k \sin 4\psi_k - 4s_k \sin^3 \psi_k \cos \psi_k + 2t_k \sin^4 \psi_k, \tag{5.6.20}$$

где

$$\begin{aligned}
t_k &= \frac{A_k}{a_k} \ln \frac{b_k + b_{k+1} + a_k}{b_k + b_{k+1} - a_k}, \quad s_k = 4 \frac{A_k^2}{a_k^2} \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}} \right), \\
q_k &= \frac{A_k}{a_k^2} \left(\frac{1}{b_k} + \frac{1}{b_{k+1}} \right) [a_k^2 + (b_k - b_{k+1})^2].
\end{aligned} \tag{5.6.21}$$

$$\begin{aligned}
u_k &= \frac{A_k}{12a_k^4} \left\{ \left[\frac{b_{k+1}^2 - b_k^2 + a_k^2}{b_{k+1}} \right]^3 + \left[\frac{b_k^2 - b_{k+1}^2 + a_k^2}{b_k} \right]^3 \right\}, \\
v_k &= \frac{16A_k^4}{3a_k^4} \left[\frac{1}{b_{k+1}^3} - \frac{1}{b_k^3} \right].
\end{aligned} \tag{5.6.22}$$

Следующие формулы может быть выведены для кубических моментов

$$\begin{aligned}
B_x &= \sum_{k=1}^n -j_k \cos 2\psi_k + r_k \sin 2\psi_k + 2f_k \cos^2 \psi_k, \\
B_y &= \sum_{k=1}^n j_k \cos 2\psi_k - r_k \sin 2\psi_k + 2f_k \sin^2 \psi_k, \\
B_{xy} &= \sum_{k=1}^n (j_k - f_k) \sin 2\psi_k + r_k \cos 2\psi_k,
\end{aligned} \tag{5.6.23}$$

где

$$\begin{aligned}
j_k &= \left(\frac{2A_k}{a_k} \right)^3 \ln \frac{b_k + b_{k+1} + a_k}{b_k + b_{k+1} - a_k}, \quad r_k = \left(\frac{2A_k}{a_k} \right)^2 (b_{k+1} - b_k), \\
f_k &= \frac{1}{4} (b_k + b_{k+1}) A_k \left[1 + \left(\frac{b_{k+1} - b_k}{a_k} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} j_k.
\end{aligned} \tag{5.6.24}$$

Подстановка (5.6.17–5.6.24) в (5.6.2, 5.6.3, 5.6.12 и 5.6.13) даёт полное решение для произвольного полигона. В случае правильного полигона, значительные упрощения имеют место. Моменты инерции и J –моменты принимают вид (5.5.25) и (5.5.26), и остальные моменты определены следующим образом:

$$B_x = B_y = \frac{nb^3}{4} \left[\sin \frac{2\pi}{n} + \cos^3 \left(\frac{\pi}{n} \right) \ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)} \right], \tag{5.6.25}$$

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = \frac{3nb}{8} \cos \frac{\pi}{n} \ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}$$

$$C_{xxyy} = \frac{nb}{8} \cos \frac{\pi}{n} \ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)} \tag{5.6.26}$$

Заметим, что формулы (5.6.26) действительны для любого правильного полигона, кроме квадрата, из-за того факта, что суммирование тригонометрического ряда

$$\sum_{k=1}^n \sin^4(k-1) \frac{2\pi}{n} = \sum_{k=1}^n \cos^4(k-1) \frac{2\pi}{n} = \frac{3n}{8}, \tag{5.6.27}$$

недействительно для квадрата. C –моменты для квадрата со стороной $2l$ могут быть выражены как

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = l \left[4 \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right], \quad C_{xyxy} = \frac{2\sqrt{2}}{3} l. \quad (5.6.28)$$

Формулы (5.6.3, 5.6.12, и 5.6.13) упрощаются для правильного полигона:

$$\alpha_x = \frac{4(5g_x + g_y)}{3\pi H J_0}, \quad \alpha_y = \frac{4(g_x + 5g_y)}{3\pi H J_0}, \quad \alpha_{xy} = \frac{16g_{xy}}{3\pi H J_0}. \quad (5.6.29)$$

Опять, следует заметить, что формулы (5.6.29) не действительны для квадрата. Следующие формулы действительно для любого правильного полигона, включая квадрат.

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi H J_0} \left[g_0 - \frac{B_0}{J_0} (g_x + g_y) \right],$$

$$P = \frac{4}{\pi H J_0} \left[A g_0 + \left(\frac{8}{3} I_0 - \frac{A B_0}{J_0} \right) (g_x + g_y) \right]. \quad (5.6.30)$$

Безразмерные коэффициенты p_y и p_x принимают вид:

$$p_y = p_x = \frac{8\sqrt{2}}{(n \sin \frac{2\pi}{n})^{1/2} n \cos \frac{\pi}{n} \ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}} \left[\frac{23 + 7 \cos \frac{2\pi}{n}}{36} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}} \right]. \quad (5.6.31)$$

Рассмотрим несколько частных значений n . Для равностороннего треугольника ($n=3$) формула (5.6.31) даёт $p_y = p_x = 0.3782$. Мы не нашли численные данные в литературе, чтобы сравнить с этим результатом. В случае квадрата, $n=4$, и $p_y = p_x = 0.2697$. Результат де Смедта равен 0.2645, с расхождением меньше, чем 2%. Так как формула (5.6.31) в предельном случае $n \rightarrow \infty$ даёт точный результат для круга $p_y = p_x = 4/(3\pi^{3/2}) = 0.2394$, мы ожидаем, что ошибка формулы (5.6.31) будет уменьшаться с увеличением n . Значение коэффициентов для правильного шестиугольника равно 0.2443, и опять, мы не нашли в литературе ничего, чтобы сравнить с этим результатом.

Пример 2: Прямоугольник. Рассмотрим штамп с прямоугольным основанием, a_1 и a_2 обозначают его полуоси вдоль направлений Ox и Oy соответственно. Введём параметр $\varepsilon = a_2/a_1$. Формулы (5.6.17–5.6.24) в этом

случай сводятся к

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{4}{3} a_1 a_2^3, & I_y &= \frac{4}{3} a_1^3 a_2, \\ J_x &= 4a_1 \sinh^{-1} \varepsilon, & J_y &= 4a_2 \sinh^{-1}(1/\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.6.32)$$

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= 4a_1 \left(\sinh^{-1} \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \right), & C_{xyxy} &= 4a_1 \frac{\varepsilon}{3(1+\varepsilon^2)^{1/2}}, \\ C_{yyyy} &= 4a_2 \left(\sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (5.6.33)$$

$$\begin{aligned} B_x &= 2a_1^3 \left[\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{1/2} - \sinh^{-1} \varepsilon + 2\varepsilon^3 \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right], \\ B_y &= 2a_1^3 \left[\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon^3 \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + 2\sinh^{-1} \varepsilon \right]. \end{aligned} \quad (5.6.34)$$

Коэффициенты p_y и p_x были вычислено de Smedt (1979) для прямоугольника с различными значениями параметра ε . Здесь мы представляем его результаты вместе с данными вычисленными нашим методом.

$\varepsilon =$	0.1000	0.2000	0.3330	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт $p_y =$	2.9980	1.3730	0.7942	0.5229	0.3491	0.2645
наш метод $p_y =$	3.2809	1.3959	0.7782	0.5100	0.3485	0.2697
Расхождение в p_y (%)	-9.4	-1.7	2.0	2.5	0.2	-2.0
де Смедт $p_x =$	0.0376	0.0639	0.0982	0.1399	0.2022	0.2645
наш метод $p_x =$	0.0284	0.0577	0.0963	0.1431	0.2086	0.2697
Расхождение в p_x (%)	24.6	9.7	1.9	-2.3	-3.2	-2.0

Наши формулы дают удовлетворительные результаты для широкого набора параметра ε . Распределение напряжений согласно (5.6.3) может быть сравнено с численными данными, полученными частным образом от де Смедта. Вычисления были сделаны для $\varepsilon = 0.5$, $g_y = 2\pi/\sqrt{A}$, $H = 1$, $g_0 = g_x = 0$. Вот результаты вдоль оси Ox , в сравнении с результатами де Смедта

$x/a_1 =$	0.0000	0.2500	0.3333	0.5000	0.5833	0.6667	0.7500	0.8333	0.9167
де Смедт $\sigma =$	-0.4715	-0.3933	-0.3249	-0.1238	0.0452	0.2515	0.5456	0.9462	2.0580
наш метод $\sigma =$	-0.4731	-0.3953	-0.3314	-0.1290	0.0232	0.2273	0.5141	0.9602	1.8556
Расхождение (%)	-0.3	-0.5	-2.0	-4.2	48.8	9.6	5.8	-1.5	9.8

Аналогичные результаты вдоль оси Oy даны ниже

$y/a_2 =$	0.0000	0.1667	0.3333	.5000	.6667	.8333
де Смедт $\sigma =$	−0.4715	−0.4765	−0.4774	−0.4837	−0.5063	−0.5311
наш метод $\sigma =$	−0.4731	−0.4744	−0.4791	−0.4907	−0.5198	−0.6138
Расхождение (%)	−0.3	0.5	−0.3	−1.4	−2.7	−15.6

Как мы предсказывали, расхождение становится значительным близко к границе.

Пример 3: Ромб. Пусть a_1 и a_2 обозначают его полуоси вдоль Ox и Oy соответственно. Мы обозначим его сторону $l = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$, и введём параметр $\varepsilon = a_2/a_1$. Формулы (5.6.17–5.6.24) в этом случае дают:

$$I_x = \frac{l^4 \varepsilon^3}{3(1 + \varepsilon^2)^2}, \quad I_y = \frac{l^4 \varepsilon}{3(1 + \varepsilon^2)^2}, \quad A = \frac{2l^2 \varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)}.$$

$$J_x = \frac{4l\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)} \left[\frac{1 - \varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)} \ln \frac{1 + \varepsilon + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}}{1 + \varepsilon - (1 + \varepsilon^2)^{1/2}} \right],$$

$$J_y = \frac{4l\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)} \left[-\frac{1 - \varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1 + \varepsilon^2)} \ln \frac{1 + \varepsilon + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}}{1 + \varepsilon - (1 + \varepsilon^2)^{1/2}} \right]. \quad (5.6.35)$$

$$B_x = \frac{2l^3 \varepsilon^3}{(1 + \varepsilon^2)^3} \left[\frac{\varepsilon^3 + 4\varepsilon - 3}{(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{2 - \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)} \ln \frac{1 + \varepsilon + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}}{1 + \varepsilon - (1 + \varepsilon^2)^{1/2}} \right],$$

$$B_y = \frac{2l^3 \varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^3} \left[\frac{1 + 4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3}{(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{\varepsilon^2(2\varepsilon^2 - 1)}{(1 + \varepsilon^2)} \ln \frac{1 + \varepsilon + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}}{1 + \varepsilon - (1 + \varepsilon^2)^{1/2}} \right]. \quad (5.6.36)$$

$$C_{xxxx} = \frac{4l\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^2} \left[\frac{2 - \varepsilon + 5\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3}{3(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{\varepsilon^4}{(1 + \varepsilon^2)} \ln \frac{1 + \varepsilon + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}}{1 + \varepsilon - (1 + \varepsilon^2)^{1/2}} \right],$$

$$C_{yyyy} = \frac{4l\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^2} \left[\frac{-4 + 5\varepsilon - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3}{3(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1 + \varepsilon^2)} \ln \frac{1 + \varepsilon + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}}{1 + \varepsilon - (1 + \varepsilon^2)^{1/2}} \right],$$

$$C_{xyxy} = \frac{4l\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^2} \left[\frac{1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{3(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)} \ln \frac{1 + \varepsilon + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}}{1 + \varepsilon - (1 + \varepsilon^2)^{1/2}} \right]. \quad (5.6.37)$$

Мы не нашли в литературе по механике никаких результатов для штампа с основанием в форме ромба. Математически эквивалентная задача распространения звука через отверстие в форме ромба была решена численно в de Smedt (1979). Здесь мы представляем его результаты в сравнении с

данными, вычисленными нашим методом:

$\epsilon =$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт $p_y =$	4.6520	1.8890	0.9844	0.5933	0.3655	0.2631
наш метод $p_y =$	3.7425	1.6605	0.9192	0.5770	0.3661	0.2697
Расхождение (%)	19.6	12.1	6.6	2.7	-0.2	-2.5
де Смедт $p_x =$	0.0314	0.0549	0.0862	0.1270	0.1923	0.2631
наш метод $p_x =$	0.1944	0.1435	0.1345	0.1532	0.2050	0.2697
Расхождение (%)	-518.4	-161.3	-56.0	-20.6	-6.6	-2.5

Хотя наши результаты удовлетворительны для p_y , они неприемлемы для p_x , когда $\epsilon \leq 0.5$. Несмотря на большую относительную ошибку p_y и p_x для малых ϵ , есть основания верить, что точность решения различных контактных задач будет весьма удовлетворительна по следующим причинам: разные знаки в расхождении будут компенсировать суммарную ошибку; член с p_0 обычно доминирует в реальных контактных задачах, и он обычно определяет суммарную ошибку решения. Мы увидим далее, что в случае жёсткого цилиндрического катка наша теория работает хорошо для значений ϵ далеко от единицы. Альтернативный подход, который использует вариационный принцип и несколько улучшает точность, будет обсуждаться далее.

Пример 4: Крест. Рассмотрим штамп с конфигурацией полученной путём ортогонального пересечения двух равных прямоугольников со сторонами $2a$ и $2b$, ($a \geq b$). Введём параметр $\epsilon = b/a$. Площадь и некоторые моменты даны в предыдущей секции. Остальные моменты даны ниже:

$$B_x = B_y = 2a^3 \left\{ 2\epsilon(1+\epsilon^2)^{1/2} + \ln[\epsilon + (1+\epsilon^2)^{1/2}] + \epsilon^3 \left[\ln \frac{1 + (1+\epsilon^2)^{1/2}}{\epsilon(1+\sqrt{2})} - \sqrt{2} \right] \right\}. \quad (5.6.38)$$

Сравнение между нашими результатами и данными в de Smedt (1979) представлены в таблице:

$\epsilon =$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт $p_y = p_x =$	0.9675	0.4854	0.3271	0.2671	0.2523	0.2645
наш метод $p_y = p_x =$	1.6943	0.6765	0.3716	0.2683	0.2517	0.2697
Расхождение(%)	-75.1	-39.4	-13.6	-0.5	0.3	-2.0

Принимая во внимание сложность формы, мы должны считать результаты сравнения удивительно хорошими, не только количественно, но и качественно: оба набора данных демонстрируют плоский минимум вблизи

$\varepsilon=0.75$. Расхождение становится слишком большим для $\varepsilon \leq 0.3$. Мы покажем далее, что вариационный подход несколько улучшает результаты.

Пример 5: Жёсткий каток. Рассмотрим жёсткий прямой цилиндр длины $2l$ и радиуса r_0 лежащий на своей образующей и прижатый к упругому полупространству нормальной центрально приложенной силой P . Этот случай соответствует $g_x = g_{xy} = 0$ и $g_y = -1/(2r_0)$. Все ранее выведенные формулы остаются действительными здесь. Формулы (5.6.12) дают:

$$\alpha_x = -\frac{2(C_{yyyy} - 2C_{xxyy})}{3\pi r_0 H(C_{xxxx} C_{yyyy} - C_{xxyy}^2)},$$

$$\alpha_y = -\frac{2(2C_{xxxx} - C_{xxyy})}{3\pi r_0 H(C_{xxxx} C_{yyyy} - C_{xxyy}^2)}, \quad \alpha_{xy} = 0. \quad (5.6.39)$$

Полагая область контакта близкой к прямоугольнику, мы можем использовать формулы (5.6.32–5.6.34) для всех нужных моментов. Мы обозначим ширину области контакта $2b$. В ранее рассмотренных контактных задачах область контакта была задана. Здесь, мы имеем часть области контакта неизвестной. Его длина $2l$ предписана, и напряжения должны быть сингулярны при $y = \pm l$, в то время, как его ширина $2b$ пока неизвестна и должна быть найдена из условия, что напряжения должны исчезнуть при $x = \pm b$.

Мы определим α_0 из условия

$$\alpha_0 = -\alpha_y b^2. \quad (5.6.40)$$

Возвращаясь назад к (5.6.2), мы можем видеть, что условие (5.6.40) обеспечит, что σ исчезнет вдоль части эллипса (смотри Рис. 5.6.1)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{\alpha_x y^2}{\alpha_y b^2} = 1, \quad (5.6.41)$$

в то время, как напряжения будут оставаться сингулярными при $y = \pm l$.

Прямые вычисления показывают, что полуось эллипса вдоль Oy по крайней мере в несколько раз длиннее другой полуоси, таким образом делая часть эллипса (5.6.41) очень близкой к прямой линии и оправдывая наше предположение о прямоугольной форме области контакта. Отношение полуосей эллипса достигает минимума для квадрата, где оно равно 2.4612. В этом смысле, случай $l = b$ является наименее точным и будет рассмотрен

Рис. 5.6.1. Геометрия задачи о жёстком катке.

более детально далее.

Формулы (5.6.3), (5.6.13) и (5.6.39) теперь дают следующие выражения для приложенной силы P и осадки штампа g_0 :

$$P = \frac{8}{3}(\alpha_x I_x + \alpha_y I_y) - 2\alpha_y b^2 A, \quad (5.6.42)$$

$$g_0 = \frac{1}{4} \pi H [\alpha_x B_x + \alpha_y (B_y - 2J_0 b^2)], \quad (5.6.43)$$

где α_x и α_y определены в (5.6.39) и моменты в (5.6.32–5.6.34), и это заканчивает решение. Мы нашли только один технический рапорт (Kalker, 1972) где некоторые формулы были представлены для случая очень узкой области контакта с параметром $\epsilon = l/b \gg 1$. Эти формулы в наших обозначениях примут вид:

$$P = \frac{l^3}{2\epsilon^2 r_0 H} \left[1 + \frac{1 - \ln 2}{2 \ln(4\epsilon) + 1} \right], \quad (5.6.44)$$

$$g_0 = \frac{l^2}{4r_0 \epsilon^2} \left[2 \ln(4\epsilon) + 1 \right]. \quad (5.6.45)$$

Мы получили частным образом от Калкера некоторые результаты, полученные его численным методом. Хотя его компьютерная программа не даёт значение параметра ϵ , мы ухитрились сравнить результаты путём следующей процедуры. Полагая равенство его осадки штампа с нашей (5.6.43), мы можем найти значение ϵ , которое, будучи подставленным в (5.6.42) позволяет нам сравнить приложенные силы. Результаты сравнения даны в Таблице 5.6.1. Согласование результатов в широком диапазоне

Таблица 5.6.1. Сравнение нашего метода с численными результатами Калкера

параметр ϵ	осадка штампа g^*	сила P^* (Калкер)	сила P^* формула (5.6.42)	расхождение (%)
23.31	0.2501E-03	0.5379E-04	0.6251E-04	-16.20
10.77	0.1000E-02	0.2590E-03	0.2891E-03	-11.65
6.799	0.2250E-02	0.6618E-03	0.7174E-03	-8.409
4.879	0.4000E-02	0.1298E-02	0.1377E-02	-6.118
3.757	0.6251E-02	0.2200E-02	0.2296E-02	-4.389
2.511	0.1225E-01	0.4934E-02	0.5019E-02	-1.729
1.843	0.2026E-01	0.9110E-02	0.9114E-02	-0.4892E-01
1.282	0.3603E-01	0.1853E-01	0.1835E-01	0.9399
0.9653	0.5633E-01	0.3240E-01	0.3208E-01	1.015
0.6741	0.1003	0.6748E-01	0.6719E-01	0.4326
0.4174	0.2263	0.1925	0.1952	-1.393
0.3018	0.4041	0.4122	0.4216	-2.279
0.2359	0.6351	0.7499	0.7717	-2.908
0.1933	0.9212	1.231	1.272	-3.335
0.1633	1.265	1.882	1.952	-3.703
0.1411	1.670	2.734	2.844	-4.043
0.1239	2.139	3.817	3.982	-4.323
0.1101	2.679	5.173	5.411	-4.612
0.9884E-01	3.297	6.847	7.185	-4.942
0.8939E-01	4.000	8.890	9.362	-5.306
0.6806E-01	6.771	18.40	19.30	-4.901

изменения параметра ϵ должно считаться очень хорошим, принимая во внимание приближённый характер нашей теории, и также тот факт, что программа Калкера игнорирует сингулярность напряжений на краях катка. Такое хорошее согласование позволяет нам заявить, что формулы (5.6.42–5.6.43) дают достаточно точное аналитическое решение задачи о жёстком катке на упругом полупространстве. Особенно удивительно, что наш метод показывает наибольшую точность вблизи $\epsilon=1$, несмотря на тот факт, что наше предположение о прямоугольной области контакта является наименее точным в этом случае. Мы сравнили результаты распределения напряжений по (5.6.2) с численными результатами Калкера. Типичная картина представили ниже для $r_0/l=20$, $\epsilon=0.9653$, $H=1$, $y/l=0.1$.

$x/l=$	0.1200	0.3600	0.6000	0.8400
Калкер $\sigma=$	0.7967E-02	0.7420E-02	0.6226E-02	0.3352E-02
наш метод $\sigma=$	0.7960E-02	0.7513E-02	0.6528E-02	0.4675E-02
расхождение(%)	0.09	-1.25	-4.84	-39.49

Как было предсказано, относительная ошибка становится весьма значительной близко к границе области контакта. Аналогичное поведение наблюдается вдоль линии параллельной оси Ox :

$y/l=$	0.1000	0.3000	0.5000	0.7000	0.9000
Калкер $\sigma=$	0.7967E-02	0.8146E-02	0.8623E-02	0.9498E-02	0.1819E-01
наш метод $\sigma=$	0.7960E-02	0.8177E-02	0.8762E-02	0.1018E-01	0.1570E-01
расхождение (%)	0.09	-0.38	-1.61	-7.17	13.67

Представляется интересным сравнить численные результаты Калкера с его приближёнными формулами (5.6.44–5.6.45). Это сравнение дано в Таблице 5.6.2. Мы ожидали, что формулы Калкера будут более точны для больших

Таблица 5.6.2. Сравнение формул Калкера с его численными результатами

параметр ϵ	осадка штампа g^*	сила P^* Калкер	сила P^* формула (5.6.44)	расхождение (%)
22.34	0.2501E-03	0.5379E-04	0.5163E-04	4.018
10.27	0.1000E-02	0.2590E-03	0.2459E-03	5.054
6.456	0.2250E-02	0.6618E-03	0.6243E-03	5.658
4.621	0.4000E-02	0.1298E-02	0.1223E-02	5.743
3.551	0.6251E-02	0.2200E-02	0.2079E-02	5.511
2.368	0.1225E-01	0.4934E-02	0.4706E-02	4.621
1.734	0.2026E-01	0.9110E-02	0.8838E-02	2.987
1.197	0.3603E-01	0.1853E-01	0.1873E-01	-1.103
0.8848	0.5633E-01	0.3240E-01	0.3471E-01	-7.126
0.5772	0.1003	0.6748E-01	0.8364E-01	-23.95

ϵ с точностью уменьшающейся с ϵ . Это не так: ошибка почти постоянна в интервале $2 < \epsilon < 22$, она уменьшается к нулю вблизи $\epsilon=1$, после чего ошибка меняет знак и быстро увеличивается. Это означает, что формулы Калкера (5.6.44–5.6.45) не точны асимптотически, или что его численная процедура имеет ошибку около 5%.

Дискуссия. Альтернативный метод может быть предложен, используя вариационный подход (Noble 1960). Мы можем использовать опять функционал (5.5.40), который становится стационарным на точном решении (5.1.8). Мы примем:

$$H \int_S \int \frac{\sigma(N)}{R(M,N)} dS_N \approx w_0 + w_2, \quad (5.6.46)$$

где σ определена в (5.6.2) и $w_0 + w_2$ дано в (5.6.10). Подстановка (5.6.1), (5.6.2), (5.6.10) и (5.6.46) в (5.5.40) делает возможным рассмотреть функционал I как функцию α_0 , α_x , α_y и α_{xy} . Условия экстремума

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha_x} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha_y} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha_{xy}} = 0,$$

дают четыре линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных α_0 , α_x , α_y и α_{xy} . Полное решение довольно громоздко. Здесь мы представляем систему уравнений для коэффициентов α_0 , α_x и α_y , которые действительны только для областей, имеющих по крайней мере одну ось симметрии.

$$\begin{aligned} c_{11}\alpha_0 + c_{12}\alpha_x + c_{13}\alpha_y &= 4[A g_0 + \frac{4}{3}(I_x g_x + I_y g_y)], \\ c_{12}\alpha_0 + c_{22}\alpha_x + c_{23}\alpha_y &= \frac{16}{3}[I_x g_0 + \frac{1}{5}(D_{xxxx} g_x + D_{xxyy} g_y)], \\ c_{13}\alpha_0 + c_{23}\alpha_x + c_{33}\alpha_y &= \frac{16}{3}[I_y g_0 + \frac{1}{5}(D_{xxyy} g_x + D_{yyyy} g_y)]. \end{aligned} \quad (5.6.47)$$

Здесь

$$c_{11} = 2\pi H J_0 A,$$

$$c_{12} = \frac{1}{2}\pi H [B_x A + \frac{4}{3}I_x (2J_0 + 2C_{xxxx} - C_{xxyy}) - \frac{4}{3}I_y (C_{xxxx} - 2C_{xxyy})],$$

$$c_{13} = \frac{1}{2}\pi H [B_y A + \frac{4}{3}I_y (2J_0 + 2C_{yyyy} - C_{xxyy}) - \frac{4}{3}I_x (C_{yyyy} - 2C_{xxyy})],$$

$$c_{22} = \frac{4}{15}\pi H [5B_x I_x + D_{xxxx} (2C_{xxxx} - C_{xxyy}) - D_{xxyy} (C_{xxxx} - 2C_{xxyy})],$$

$$c_{23} = \frac{2}{15}\pi H [5(B_x I_y + B_y I_x) - D_{xxxx} (C_{yyyy} - 2C_{xxyy})$$

$$+ 2D_{xxyy} (C_{xxxx} + C_{yyyy} - C_{xxyy}) - D_{yyyy} (C_{xxxx} - 2C_{xxyy})],$$

$$c_{33} = \frac{4}{15} \pi H [5B_y I_y + D_{yyyy} (2C_{yyyy} - C_{xxyy}) - D_{xxyy} (C_{yyyy} - 2C_{xxyy})]. \quad (5.6.48)$$

D —моменты введены аналогично (5.6.9) как

$$\begin{aligned} D_{xxxx} &= \int_0^{2\pi} a^6(\phi) \sin^4 \phi d\phi, \quad D_{xxyy} = \int_0^{2\pi} a^6(\phi) \sin^2 \phi \cos^2 \phi d\phi, \\ D_{yyyy} &= \int_0^{2\pi} a^6(\phi) \cos^4 \phi d\phi. \end{aligned} \quad (5.6.49)$$

Ясно, что решение, использующее вариационный подход, более громоздко, чем ранее полученное решение. Остаётся под вопросом, будет ли это решение более точным. Одно преимущество следует отметить: матрица (5.6.48) симметрична (как и требуется по теореме взаимности), в то время как матрица (5.6.11) в общем случае не симметрична.

Сравним результаты для нескольких частных конфигураций. Прежде всего, рассмотрим правильный полигон. В представленных далее таблицах слово *простое* относится к ранее описанному методу, в то время как слово *вариационный* относится к решению уравнений (5.6.47). В случае правильного полигона, нам нужны только полярные D —моменты.

$$D_0 = \frac{1}{5} b^6 n \sin \frac{2\pi}{n} \left[1 + \frac{4}{3} \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) + \frac{8}{3} \cos^4 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right].$$

Вот результаты вычислений для правильного полигона с n сторонами

$n=$	3	4	5	6	7	9	∞
простое $p_y=p_x=$	0.3782	0.2697	0.2502	0.2443	0.2420	0.2403	0.2394
вариационный $p_y=p_x=$	0.3409	0.2612	0.2472	0.2429	0.2412	0.2401	0.2394
Расхождение (%)	9.9	3.2	1.2	0.6	0.3	0.1	0.0

Оба метода работают хорошо. Если мы будем считать результат де Смедта для квадрата, 0.2645, как точный, тогда это может быть индикатором, что вариационный подход несколько более точный. В предельном случае $n \rightarrow \infty$ оба метода дают точный результат для круга.

D —моменты для прямоугольника примут вид:

$$D_{xxxx} = \frac{24}{5} a_1 a_2^5, \quad D_{yyyy} = \frac{24}{5} a_1^5 a_2, \quad D_{xxyy} = \frac{8}{3} a_1^3 a_2^3.$$

Вот численные результаты полученные для прямоугольника:

$\varepsilon =$	0.1000	0.2000	0.3330	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт $p_y =$	2.9980	1.3730	0.7942	0.5229	0.3491	0.2645
вариационный $p_y =$	3.4239	1.4523	0.8023	0.5166	0.3437	0.2612
Расхождение (%)	-14.2	-5.8	-1.0	1.2	1.5	1.2
де Смедт $p_x =$	0.0376	0.0639	0.0982	0.1399	0.2022	0.2645
вариационный $p_x =$	0.0316	0.0588	0.0939	0.1370	0.1997	0.2612
Расхождение (%)	15.9	7.9	4.3	2.1	1.2	1.2

Опять, общее впечатление, что вариационный подход более точен, но не всегда. Например, расхождение в p_y для $\varepsilon = 0.1$ увеличилось по сравнению с результатом простого метода. Мы оставляем пользователю решать, стоит ли несколько лучшая точность вариационного подхода больших усилий и более громоздких вычислений.

Математически эквивалентная задача аналитического определения квадратичных членов в низкочастотном разложении, относящимся к распространению звука через отверстие в жёстком экране, рассмотрена в (Fabrikant, 1986d).

Упражнение 5.6

1. Найдите D -моменты для ромба, с полуосями a_1 и a_2 .

Ответ:

$$D_{xxxx} = \frac{4}{5} a_1^5 a_2^5, \quad D_{yyyy} = \frac{4}{5} a_1^5 a_2^5, \quad D_{xxyy} = \frac{2}{15} a_1^3 a_2^3.$$

2. Найдите *вариационное* решение для ромба и сравните результаты с данными де Смедта, и с *простым* решением.

Ответ: смотри Таблицу ниже

$\varepsilon =$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт $p_y =$	4.6520	1.8890	0.9844	0.5933	0.3655	0.2631
вариационный $p_y =$	-0.5952	3.3549	0.9465	0.5580	0.3534	0.2612
Расхождение (%)	112.8	-77.6	3.8	6.0	3.3	0.7
де Смедт $p_x =$	0.0314	0.0549	0.0862	0.1270	0.1923	0.2631
вариационный $p_x =$	0.0090	0.1464	0.1110	0.1400	0.1971	0.2612
Расхождение (%)	71.5	-166.7	-28.8	-10.2	-2.5	0.7

Заключение: расхождение уменьшилось для $\varepsilon > 0.33$, но результаты неприемлемы для $\varepsilon < 0.33$.

3. Найдите D —моменты для штампа с основанием в форме креста.

Ответ:

$$D_{xxxx} = D_{yyyy} = \frac{24}{5} a^6 \epsilon (1 + \epsilon^4 - \epsilon^5), \quad D_{xxyy} = \frac{8}{3} a^6 \epsilon^3 (2 - \epsilon^3).$$

4. Найдите *вариационное* решение для креста и сравните его с данными де Смедта, и с *простым* решением.

Ответ: смотри Таблицу ниже

$\epsilon =$	0.1000	0.2000	0.3333	0.5000	0.7500	1.0000
де Смедт $p_y = p_x =$	0.9675	0.4854	0.3271	0.2671	0.2523	0.2645
вариационный $p_y = p_x =$	1.4346	0.5822	0.3397	0.2606	0.2482	0.2612
Расхождение (%)	—48.3	—19.9	—3.9	2.4	1.6	1.2

Закключение: Сравнение этой таблицы с данными из простого решения ведёт к тому же мнению: результаты становятся более точными в широком диапазоне изменения параметра ϵ , но теория не работает для очень малых ϵ .

5. Примените теорию к случаю катка, с параметром $\epsilon = 1$.

Ответ:

$$\sigma = \frac{a(\phi) l \left[\ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - 1}{2\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - 1} \frac{y^2}{l^2} \right] \right]}{\pi H r_0 \ln(1 + \sqrt{2}) [3 \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}] \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}}$$

$$\approx \frac{0.4869 a(\phi) l \left[1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{(2.4612 l)^2} \right]}{\pi H r_0 \left[a^2(\phi) - \rho^2 \right]^{1/2}}$$

$$P = \frac{2 l^3 [12 \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}]}{9 \pi H r_0 \ln(1 + \sqrt{2}) [3 \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}]} \approx \frac{1.878 l^3}{\pi H r_0},$$

$$g_0 = \frac{l^2 [13 \ln^2(1 + \sqrt{2}) - 6\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + 2]}{4r_0(1 + \sqrt{2}) [3 \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}]} \approx \frac{1.06558 l^2}{r_0}$$

5.7 Плоский гибкий штамп общей формы в плане под действием сдвигающей нагрузки

Рассмотрена следующая смешанная граничная задача для трансверсально изотропного упругого полупространства: однородное тангенциальное перемещение задано на конечной области общей формы, и остальная часть границы свободна от напряжений. Задача может быть интерпретирована как задача о внешней трещине, с отдалённой сдвигающей нагрузкой или как контактная задача о гибком штампе подверженному тангенциальному перемещению. Мы используем термин *гибкий* для обозначения особого типа штампа, который не производит никакого нормального давления. Общее взаимоотношение установлено между приложенной сдвигающей силой и перемещением. Сравнение с опубликованными в литературе результатами подтверждают удовлетворительную точность нашей теории.

Теория. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$, со следующими граничными условиями предписанными в плоскости $z = 0$:

$$\sigma_z = 0, \text{ для } -\infty < (x, y) < \infty; \quad \tau = 0, \text{ для } (x, y) \notin S;$$

$$u = u(x, y), \text{ для } (x, y) \in S. \quad (5.7.1)$$

Здесь S обозначает область контакта в упругих контактных задачах, или шейку трещины для случая внешних задач теории трещин. Пусть граница области S выражается в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi), \quad (5.7.2)$$

где $a(\phi)$ однозначная ограниченная функция. Основное интегральное уравнение может быть переписано из (2.6.2) следующим образом:

$$\frac{G_1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{a(\phi)_0} \frac{\tau(\rho_0, \phi_0)}{R} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 + \frac{G_2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{a(\phi)_0} \frac{q \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0)}{\bar{q} R} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 = u(\rho, \phi). \quad (5.7.3)$$

Здесь черта сверху обозначает комплексно—сопряжённое значение, и

$$q = \rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}, \quad R^2 = q \bar{q}. \quad (5.7.4)$$

Подход основан на интегральном представлении величины, обратной расстоянию между двумя точками установленной в (1.1.27). Нам также нужно интегральное представление ядра во втором члене выражения (5.7.3). Оно было выведено в (2.5.6). Мы рассматриваем далее только случай, где в правой стороне (5.7.3) $u = \text{const}$. Подстановка (1.1.27) и (2.5.6) в (5.7.3) даёт после изменения порядка интегрирования и сохранения только нулевой гармоники:

$$\begin{aligned} & \frac{G_1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_0^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^{a(\phi_0)} \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \\ & + \frac{G_2}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{2i\phi_0} d\phi_0 \int_0^{\rho} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_x^{a(\phi_0)} \frac{\rho_0^2 - 2x^2}{\rho_0(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \bar{\tau}(\rho_0, \phi_0) d\rho_0 = u. \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

Мы полагаем распределение сдвигающих напряжений в форме

$$\tau = \frac{ca(\phi)}{[a^2(\phi) - \rho^2]^{1/2}}, \quad (5.7.6)$$

где c есть комплексная константа. Эта нагрузка статически эквивалентна результирующей силе $T = T_x + iT_y$. Интегрирование (5.7.6) по S даёт:

$$T = 2Ac, \quad (5.7.7)$$

где A есть площадь области S . Интересно отметить, что соотношение (5.7.7) не зависит от положения начала системы координат. Это положение может быть определено из условия, что сдвигающие напряжения не должны производить крутящего момента. Это ведёт к двум уравнениям:

$$\int_0^{2\pi} (a(\phi))^3 \cos \phi \, d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} (a(\phi))^3 \sin \phi \, d\phi = 0. \quad (5.7.8)$$

Мы можем заметить, что левая сторона каждого уравнения (5.7.8) пропорциональна x или y координате центра тяжести. Это означает, что начало системы координат должно быть расположено в центре тяжести области S . Направление осей будет обсуждаться далее.

Теперь нам нужно получить соотношение между тангенциальной силой T и перемещением u . Это может быть достигнуто подстановкой (5.7.6–5.7.7) в (5.7.5), что даёт после интегрирования по ρ_0 :

$$u = \frac{\pi}{8A} \left[G_1 T \int_0^{2\pi} a(\phi_0) d\phi_0 + G_2 \bar{T} \int_0^{2\pi} e^{2i\phi_0} a(\phi_0) d\phi_0 \right]. \quad (5.7.9)$$

Комплексное выражение (5.7.9) эквивалентно двум действительным, а именно,

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\pi}{8A} \{ T_x [G_1 J_0 - G_2 (J_x - J_y)] + 2 T_y G_2 J_{xy} \}, \\ u_y &= \frac{\pi}{8A} \{ 2 T_x G_2 J_{xy} + T_y [G_1 J_0 - G_2 (J_y - J_x)] \}, \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

J —моменты были введены в (5.5.8) и некоторые из них были вычислены в секции 5.6. Теперь можно легко вывести специфические формулы для штампов рзличных форм. Мы оставляем это упражнение читателю.

Заметим, что изменение порядка интегрирования в (5.7.5) действительно только внутри круга $\rho = \min(a(\phi))$, тем не менее, решение, данное в (5.7.9) является *точным* в случае эллипса. Это можно легко объяснить. Хорошо известно (Willis, 1970), что распределение напряжений по эллипсу, данное полиномом, умноженным на $a(\phi)/[a^2(\phi) - \rho^2]^{1/2}$, приводит к полиномиальному перемещению. В нашем случае, перемещение постоянно. Так как выражение (5.7.9) даёт точные значения интегралов в (5.7.3) для $\rho=0$, результат становится точным по всему эллипсу. Действительно, формула (5.7.10) даёт для эллипса с полуосями a и b ($a \geq b$)

$$u_x = \frac{1}{2a} \left[G_1 K + G_2 \left(\frac{(2-k^2)K - 2E}{k^2} \right) \right] T_x,$$

$$u_y = \frac{1}{2a} \left[G_1 K - G_2 \left(\frac{(2-k^2)K - 2E}{k^2} \right) \right] T_y,$$

где K и E полные эллиптические интегралы первого и второго рода с аргументом $k = (1 - (b/a)^2)^{1/2}$. В изотропном случае $G_1 = (2-\nu)/(2\pi\mu)$, $G_2 = \nu/(2\pi\mu)$, и последний результат совпадает с Mindlin (1949).

Мы можем всегда выбрать направление осей координат так, чтобы J_{xy} исчезло. В этом случае формулы (5.7.9) упрощаются следующим образом:

$$u_x = \frac{\pi}{8A} [G_1 J_0 - G_2 (J_x - J_y)] T_x, \quad u_y = \frac{\pi}{8A} [G_1 J_0 - G_2 (J_y - J_x)] T_y. \quad (5.7.11)$$

Так как выражения (5.7.10) и (5.7.11) *точные* для эллипса, мы можем ожидать, что они будут достаточно точны для произвольной области S . Это предположение было оправдано в предыдущих секциях, когда сравнивалось с численными результатами известными в опубликованной литературе.

Чтобы проверить точность нашего метода, некоторые вычисления были выполнены Калкером. Уравнения (5.7.11) могут быть переписаны как

$$T_x = C_x u_x, \quad T_y = C_y u_y,$$

с

$$C_x = \frac{8A}{\pi [G_1 (J_x + J_y) - G_2 (J_x - J_y)]}, \quad C_y = \frac{8A}{\pi [G_1 (J_x + J_y) + G_2 (J_x - J_y)]}. \quad (5.7.12)$$

Значения C_x и C_y , вычисленные согласно формулам (5.7.12), даны в таблице ниже в сравнении с числовыми результатами Калкера.

$\epsilon =$	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
C_x наш метод	5.16	6.12	6.87	8.1	9.19	10.67
C_x Калкер	4.644	5.650	6.445	7.766	8.904	10.43
Расхождение (%)	10.	7.7	6.2	4.1	3.1	2.3
C_y наш метод	4.32	5.32	6.13	7.56	8.85	10.67
C_y Калкер	3.991	5.044	5.904	7.373	8.667	10.43
Расхождение (%)	7.6	5.2	3.7	2.5	2.1	2.3

Вычисления были сделаны для изотропного тела, с модулем сдвига $\mu = 0.5$, и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Точность вычислений оценивалась

путём подсчёта C_x и C_y для эллипса, где точное решение хорошо известно. Точное решение было около 4% *выше* численного результата Калкера. Все наши результаты тоже выше числовых результатов. Если мы предположим, что общее поведение ошибок для прямоугольника то же, что и для эллипса (это означает, например, что наш 10% расхождения переводится в $10-4=6(\%)$ ошибки), тогда наши формулы могут считаться удивительно точными в широком диапазоне изменения параметра ε . Мы ожидаем, что ошибка нашего метода будет увеличиваться монотонно с уменьшением ε , так как предположенное распределение напряжений (5.7.6) менее реалистично для узкого прямоугольника, чем для квадрата. Тот факт, что расхождение C_y с числовыми результатами не изменяется монотонно, указывает на некоторые дефекты в числовой процедуре Калкера. Мы также сравнили распределение сдвиговых напряжений согласно (5.7.6), (5.7.7) и (5.7.12) для квадрата с $a_1=4$, вдоль линии $y=0.5$. Тангенциальное перемещение u_x было положено равным единице, и $u_y=0$. Сравнение дано в таблице ниже:

$x=$	0.5	1.5	2.5	3.5
τ наш метод	0.084	0.090	0.107	0.172
τ Калкер	0.0863	0.0923	0.105	0.222
Расхождение (%)	-2.6	-2.5	1.7	-29.

Принимая во внимание приблизительную основу обоих методов, согласование результатов должно считаться удивительно хорошим, кроме точек вблизи границы, где ни один метод не претендует на точность.

Калкер сделал вычисления для креста, с $a=4$ и $\varepsilon=0.5$. Остальные параметры были приняты такими же, как и для прямоугольника. Его результат $C_x=C_y=9.033$, наш результат равен 9.26, с расхождением 2.4%. Мы также сравнили распределение сдвигающих напряжений вдоль линии $y=0.5$. Тангенциальное перемещение u_x было положено равным единице и $u_y=0$. Сравнение дано в таблице ниже.

$x=$	0.5	1.5	2.5	3.5
τ наш метод	0.0996	0.104	0.124	0.199
τ Калкер	0.0997	0.106	0.120	0.254
Расхождение (%)	-0.08	-1.9	2.9	-27.

Согласование результатов хорошее, кроме точек близко к границе.

Дискуссия. Мы даём здесь качественный анализ общего решения. Перепишем уравнения (5.7.11) следующим образом:

$$u_x = \frac{\pi G_1 J_0}{8A} [1 - \kappa] T_x, \quad u_y = \frac{\pi G_1 J_0}{8A} [1 + \kappa] T_y, \quad \kappa = \frac{G_2 (J_x - J_y)}{G_1 J_0}. \quad (5.7.13)$$

Прежде всего, рассмотрим случай $J_x = J_y$. Мы имеем из (5.7.13), что $\kappa = 0$, и поэтому упругая податливость будет одинаковой в любом направлении. Благодаря тому факту, что круг имеет наибольшее значение J_0 из всех областей, имеющих ту же площадь A , мы можем заключить, что наименьшая сила требуется для сдвига круговой области. Численное сравнение с квадратом показывает, что отношение линейных полярных моментов квадрата к моментам для круга равно $(2/\sqrt{\pi})\ln(1+\sqrt{2}) = 0.9945$, что очень близко к единице. Принимая во внимание, что наша теория имеет приближённый характер, весьма удивительно, что разница всё-же заметна. Сравнение креста с кругом показывает, что упругая податливость становится произвольно малой, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Мы теперь деформируем область S таким образом, что J_x становится неравной J_y , оставляя площадь области постоянной. Формулы (5.7.13) показывают, что в этом случае становится легче двигать область в направлении длины, чем в направлении ширины (длина всегда больше ширины). В частном случае «иглы», предельное значение для κ равно G_2/G_1 ; в случае изотропии, $(G_2/G_1) = \nu/(2-\nu) \leq 1/3$. Следует отметить, что для $G_2 = 0$, упругая податливость не зависит от направления сдвига. В случае изотропии, это соответствует коэффициенту Пуассона равным нулю.

Упражнение 5.7

1. Проверьте инвариантность формул (5.7.10) относительно вращения осей.
2. Найдите взаимоотношение между сдвигающей силой и переносным движением эллиптического штампа, когда его полуоси $a < b$.

Ответ: $u_x = \frac{1}{2a} \left[G_1 K(k_1) - G_2 \left(\frac{(2-k^2)K(k_1) - 2E(k_1)}{k_1^2} \right) \right] T_x,$

$$u_y = \frac{1}{2a} \left[G_1 K(k_1) + G_2 \left(\frac{(2-k^2)K(k_1) - 2E(k_1)}{k_1^2} \right) \right] T_y.$$

3. Найдите тангенциальную податливость крестовидного штампа, с длинной стороной $2a$ и отношением сторон ε .

Совет: используйте (5.7.12) и (5.5.38)

4. Найдите тангенциальную податливость в направлении осей симметрии для ромбовидного штампа.

5.8 Задача Рейсснера—Сагоци для областей общего вида

Задача кручения трансверсально изотропного упругого полупространства штампом общей формы в плане рассмотрена здесь. Приближённое аналитическое решение получено при помощи общего метода. Общее взаимоотношение установлено между крутящим моментом и углом поворота. Некоторые частные формулы выведены для штампов с базой в форме полигона, прямоугольника, и креста.

Теория. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство. Гибкий штамп общей формы S в плане сцеплён с поверхностью полупространства. Крутящий момент M_z приложен к штампу, производя угол кручения ω . Нам требуется найти взаимоотношение между крутящим моментом и углом кручения. Математическая формулировка задачи приводит к следующим смешанным граничным условиям в плоскости $z=0$:

$$\begin{aligned} \sigma_z = 0, \quad \text{для} \quad -\infty < (x, y) < \infty; \quad \tau_{zx} = 0 \quad \text{и} \quad \tau_{yz} = 0, \quad \text{для} \quad (x, y) \notin S; \\ u_x = -\omega y \quad \text{и} \quad u_y = \omega x, \quad \text{для} \quad (x, y) \in S. \end{aligned} \quad (5.8.1)$$

Здесь S обозначает область, подверженную кручению, и ω есть угол кручения.

Введём комплексные тангенциальные перемещения $u = u_x + iu_y$, и комплексные сдвигающие напряжения $\tau = \tau_{zx} + i\tau_{yz}$. Пусть граница области S выражается в полярных координатах как

$$\rho = a(\phi), \quad (5.8.2)$$

где $a(\phi)$ есть однозначная ограниченная функция. Основное интегральное уравнение дано в (5.7.3). Подход основан на интегральных представлениях установленных в (1.1.27) и (2.5.6). Подстановка (1.1.27) и (2.5.6) в (5.7.3) даёт, после изменения порядка интегрирования и сохранения только первой гармоники:

$$u = \frac{2}{\pi\rho} G_1 \int_0^\rho \frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \cos(\phi - \phi_0) d\phi_0 \int_x^{a(\phi_0)} \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi \rho} G_2 \left\{ -e^{i\phi} \int_0^{\rho} \frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} e^{i\phi_0} d\phi_0 \int_x^{a(\phi_0)} \frac{\tau(\rho_0, \phi_0) d\rho_0}{(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \right. \\
& \left. + e^{-i\phi} \int_0^{\rho} \frac{x^2 dx}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} e^{3i\phi_0} d\phi_0 \int_x^{a(\phi_0)} \frac{3\rho_0^2 - 4x^2}{\rho_0^2(\rho_0^2 - x^2)^{1/2}} \tau(\rho_0, \phi_0) d\rho_0 \right\}.
\end{aligned} \tag{5.8.3}$$

Отметим, что изменение порядка интегрирования в (5.8.3) действительно только внутри круга $\rho = \min[a(\phi)]$, и тот факт, что мы игнорировали все гармоники, кроме первой. Тем не менее, будет показано далее, что результаты *точные* для эллипса, и ожидаются быть достаточно точными для широкого набора неэллиптических форм.

Пусть распределение сдвигающих напряжений под штампом имеет вид:

$$\tau = \tau_{zx} + i\tau_{yz} = \frac{a(\phi) \rho (iq_y \cos\phi - q_x \sin\phi)}{[a^2(\phi) - \rho^2]^{1/2}}, \tag{5.8.4}$$

где q_y и q_x — пока неизвестные константы. Мы используем условие, что в случае чистого кручения, главный вектор должен быть равен нулю, это означает, что интеграл от τ по S равен нулю. Так как q_y и q_x независимы, это ведёт к двум уравнениям, а именно,

$$\int_0^{2\pi} (a(\phi))^3 \cos\phi d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} (a(\phi))^3 \sin\phi d\phi = 0. \tag{5.8.5}$$

Заметим, что левая сторона каждого уравнения (5.8.5) пропорциональна x или y координате центра тяжести. Это означает, что начало системы координат должно быть расположено в центре тяжести области контакта. Ориентация осей будет обсуждаться далее.

Взаимоотношения между крутящим моментом M_z и параметрами q_y и q_x могут быть установлены условий статики:

$$M_z = \int_S \int \tau_{yz} x dS - \int_S \int \tau_{zx} y dS,$$

которые ведут к

$$M_z = \frac{8}{3}(q_y I_y + q_x I_x). \quad (5.8.6)$$

где I_x и I_y моменты инерции.

Следующий шаг: связать q_y и q_x с углом кручения ω . Это может быть сделано подстановкой (5.8.4) в (5.8.3), что даёт, после интегрирования по ρ_0 :

$$\begin{aligned} u = & \frac{\pi}{4} G_1 \rho \int_0^{2\pi} \cos(\phi - \phi_0) (i q_y \cos \phi_0 - q_x \sin \phi_0) d\phi_0 \\ & - \frac{\pi}{8} G_2 \rho e^{i\phi} \int_0^{2\pi} a(\phi_0) (-i \bar{q}_y \cos \phi_0 - \bar{q}_x \sin \phi_0) e^{i\phi_0} d\phi_0 \\ & + \frac{3\pi}{8} G_2 \rho e^{-i\phi} \int_0^{2\pi} a(\phi_0) (-i \bar{q}_y \cos \phi_0 - \bar{q}_x \sin \phi_0) e^{3i\phi_0} d\phi_0. \end{aligned} \quad (5.8.7)$$

Черта над буквой везде обозначает комплексно сопряжённое значение. Выражение (5.8.7) может также быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} u = & \frac{\pi}{4} G_1 \rho [(i q_y J_y - q_x J_{xy}) \cos \phi + (i q_y J_{xy} - q_x J_x) \sin \phi] \\ & - \frac{\pi}{8} G_2 \rho e^{i\phi} [-\bar{q}_y (i J_y - J_{xy}) - \bar{q}_x (J_{xy} + i J_x)] \\ & + \frac{3\pi}{8} G_2 \rho e^{-i\phi} \{-i \bar{q}_y [4C_{yyyy} - 3J_y + i(3J_{xy} - 4C_{xxx})] \\ & - \bar{q}_x [4C_{xyyy} - 3J_{xy} + i(3J_x - 4C_{xxx})]\} \end{aligned} \quad (5.8.8)$$

J —моменты были введены в (5.5.8), и C —моменты определены в (5.6.9). Подстановка последних двух условий (5.8.1) в (5.8.8) даёт:

$$\begin{aligned} \omega(-y + ix) = & \frac{\pi}{4} G_1 [(i q_y J_y - q_x J_{xy}) x + (i q_y J_{xy} - q_x J_x) y] \\ & - \frac{\pi}{8} G_2 (x + iy) [-\bar{q}_y (i J_y - J_{xy}) - \bar{q}_x (J_{xy} + i J_x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\pi}{8} G_2(x - iy) \{ -i\bar{q}_y [4C_{yyyy} - 3J_y + i(3J_{xy} - 4C_{xxxxy})] \\
& - \bar{q}_x [4C_{xyyy} - 3J_{xy} + i(3J_x - 4C_{xxxx})] \}
\end{aligned} \quad (5.8.9)$$

Разделение членов в (5.8.9), относящихся к x и y приведёт к двум линейным алгебраическим уравнениям для неизвестных q_y и q_x . В общем случае, параметры q_y и q_x являются комплексными, и их нахождение требует решения системы 4 линейных алгебраических уравнений. Эти уравнения могут быть упрощены, если положить $J_{xy} = 0$. Удовлетворить этому условию легко: нужно просто выбрать направление координатных осей соответственно. В случае симметрии, эти оси будут совпадать с главными осями инерции. Для простоты, мы положим также, что $C_{xyyy} = C_{xxxx} = 0$, что всегда будет выполняться, если область S имеет по крайней мере одну ось симметрии. Благодаря этим предположениям, выражение (5.8.9) даёт только два уравнения с действительными коэффициентами, а именно,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} G_1 q_y J_y + \pi G_2 [q_y (\frac{5}{4} J_y - \frac{3}{2} C_{yyyy}) + q_x (\frac{3}{2} C_{xxxx} - J_x)] &= \omega, \\
\frac{\pi}{4} G_1 q_x J_x + \pi G_2 [q_y (\frac{3}{2} C_{xyyy} - J_y) + q_x (\frac{5}{4} J_x - \frac{3}{2} C_{xxxx})] &= \omega.
\end{aligned} \quad (5.8.10)$$

Решение (5.8.10) есть:

$$\begin{aligned}
q_y &= \frac{4\omega [G_1 + 3G_2(3 - 4c_x)]}{\pi(G_1 + G_2)J_y [G_1 + 3G_2(3 - 2c_x - 2c_y)]}, \\
q_x &= \frac{4\omega [G_1 + 3G_2(3 - 4c_y)]}{\pi(G_1 + G_2)J_x [G_1 + 3G_2(3 - 2c_x - 2c_y)]}.
\end{aligned} \quad (5.8.11)$$

Здесь следующие параметры были введены:

$$c_x = C_{xxxx}/J_x, \quad c_y = C_{xyyy}/J_y. \quad (5.8.12)$$

Подставляя (5.8.11) в (5.8.6), найдём взаимоотношение между крутящим моментом и углом кручения в форме:

$$M_z = \frac{32\omega [(G_1 + 9G_2)(I_y/J_y + I_x/J_x) - 12G_2(c_x I_y/J_y + c_y I_x/J_x)]}{3\pi(G_1 + G_2)[G_1 + 3G_2(3 - 2c_x - 2c_y)]}.$$

(5.8.13)

Легко проверить, что решение (5.8.11) и (5.8.13) является *точным* для эллипса. Действительно, рассмотрим эллипс с полуосями a и b ($a \geq b$). Необходимые геометрические характеристики равны:

$$J_x = 4b[E(k) - (1 - k^2)K(k)]/k^2, \quad J_y = 4b[K(k) - E(k)]/k^2,$$

$$C_{xxxx} = 4b[2(2k^2 - 1)E(k) + (1 - k^2)(2 - 3k^2)K(k)]/(3k^4),$$

$$C_{yyyy} = 4b[(2 + k^2)K(k) - 2(1 + k^2)E(k)]/(3k^4), \quad k = [1 - (b/a)^2]^{1/2}.$$

(5.8.14)

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Подстановка (5.8.14) в (5.8.11) и (5.8.13) даёт:

$$q_y = \frac{\omega \{G_1 k^2 [E - (1 - k^2)K] + G_2 [(8 - 7k^2)E - (1 - k^2)(8 - 3k^2)K]\}}{\pi b (G_1 + G_2) \{G_1 (K - E)[E - (1 - k^2)K] + G_2 [k^2 K(K + E) - (K - E)(K + 3E)]\}},$$

$$q_x = \frac{\omega \{(G_1 k^2 - 8G_2)[K - E] + G_2 k^2 [5K - E]\}}{\pi b (G_1 + G_2) \{G_1 (K - E)[E - (1 - k^2)K] + G_2 [k^2 K(K + E) - (K - E)(K + 3E)]\}},$$

(5.8.15)

$$M_z = \frac{2\omega a^3 \{G_1 k^2 E - G_2 [8(1 - k^2)(2 - k^2)K - (k^4 - 16k^2 + 16)E]\}}{3(G_1 + G_2) \{G_1 (K - E)[E - (1 - k^2)K] + G_2 [k^2 K(K + E) - (K - E)(K + 3E)]\}}.$$

(5.8.16)

Сокращения E и K в (5.8.15) и (5.8.16) обозначают $E(k)$ и $K(k)$ соответственно. Те же результаты могут быть получены прямой подстановкой (5.8.4) в (5.7.3), с точным вычислением интегралов, используя соответствующие формулы из Аппендикса А5.1. В случае изотропии, $G_1 = (2 - \nu)/(2\pi\mu)$, $G_2 = \nu/(2\pi\mu)$, и формулы (5.8.15) и (5.8.16) упрощаются следующим образом:

$$q_y = \frac{\mu\omega \{k^2 [E - (1 - k^2)K] + 2\nu(1 - k^2)[2E - (2 - k^2)K]\}}{b \{[K - E][E - (1 - k^2)K] + \nu E[2E - (2 - k^2)K]\}},$$

$$q_x = \frac{\mu\omega \{k^2 [K - E] + 2\nu[2E - (2 - k^2)K]\}}{b \{[K - E][E - (1 - k^2)K] + \nu E[2E - (2 - k^2)K]\}}, \quad (5.8.17)$$

$$M_z = \frac{2\pi\mu\omega a^3 \{k^4 E + 4\nu(1 - k^2)[2E - (2 - k^2)K]\}}{3 \{[K - E][E - (1 - k^2)K] + \nu E[2E - (2 - k^2)K]\}}. \quad (5.8.18)$$

Формулы (5.8.17) и (5.8.18) согласуются с соответствующими результатами Миндлина (1949). Некоторые опечатки обнаружены в соответствующей формуле (Kassir and Sih, 1968). Результат Виллиса (1970) ошибочен, так как он показывает, что параметры q_y и q_x не зависят от упругих констант, что явно неправильно.

В случае, когда $J_x = J_y$ и $c_x = c_y$, формулы (5.8.11) и (5.8.13) упрощаются значительно, а именно,

$$q_y = q_x = \frac{8\omega}{\pi J_0(G_1 + G_2)}, \quad M_z = \frac{64I_0\omega}{3\pi J_0(G_1 + G_2)} \quad (5.8.19)$$

Формулы (5.8.11) и (5.8.13) являются основными результатами этой секции. Они точны для эллипса, и есть причины верить, что они будут достаточно точными для штампа произвольной формы. Вывод специфических формул для различных форм оставлен читателю.

Пример 1: Правильный полигон. Рассмотрим штамп в форме правильного полигона с n сторонами. Необходимые моменты были вычислены в секции 5.6. Мы можем использовать выражения (5.8.19), с результатом:

$$q_y = q_x = \frac{8\omega}{\pi n b(G_1 + G_2) \cos \frac{\pi}{n} \ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}},$$

$$M_z = \frac{32\omega b^3 \sin(\pi/n) [2 + \cos(2\pi/n)]}{9\pi(G_1 + G_2) \ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}}. \quad (5.8.20)$$

В предельном случае $n \rightarrow \infty$, формулы (5.8.20) дают результат для круглого штампа:

$$q_y = q_x = \frac{4\omega}{\pi^2 b(G_1 + G_2)}, \quad M_z = \frac{16\omega b^3}{3\pi(G_1 + G_2)} \quad (5.8.21)$$

Введём параметр жёсткости

$$D = M_z(G_1 + G_2)/\omega = 64I_0/(3\pi J_0), \quad (5.8.22)$$

который является геометрической характеристикой области S . Если мы возьмём отношение жёсткости правильного полигона D_p к жёсткости D_c

круга с той же площадью, результат будет:

$$\frac{D_p}{D_c} = \frac{2\sin(\pi/n)[2 + \cos(2\pi/n)]}{3\ln \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}}. \quad (5.8.23)$$

Элементарный анализ формулы (5.8.23) показывает, что равносторонний треугольник имеет жёсткость 1.24 раза выше, чем круг той же площади. Соответствующее отношение для квадрата равно 1.05, и дальнейшее увеличение n делает жёсткость полигона практически неразличимой от круга. Можно доказать теорему, что из всех односвязных областей, имеющих ту же площадь, круг имеет наименьшую жёсткость. Это противоположно соответствующей теореме в Сент–Венановской теории кручения стержней, где круг имеет наибольшую жёсткость. Это можно легко объяснить, так как в кручении полупространства требуется повернуть не только воображаемый стержень, но и всё, что его окружает тоже.

Пример 2: Прямоугольник. Рассмотрим штамп с прямоугольной базой, где a_1 и a_2 полуоси прямоугольника вдоль осей Ox и Oy соответственно. Введём параметр $\varepsilon = a_2/a_1$. Площадь и нужные моменты были вычислены в секции 5.6. Формулы (5.8.11) и (5.8.13) для прямоугольника принимают форму:

$$q_y = \frac{\omega[(G_1 - 3G_2)(1 + \varepsilon^2)^{1/2} \sinh^{-1} \varepsilon + 4G_2 \varepsilon]}{\pi a_1 \varepsilon (G_1 + G_2) \{ (G_1 - 3G_2)(1 + \varepsilon^2)^{1/2} \sinh^{-1} \varepsilon \sinh^{-1}(1/\varepsilon) + 2G_2 [\varepsilon \sinh^{-1}(1/\varepsilon) + \sinh^{-1} \varepsilon] \}},$$

$$q_x = \frac{\omega[(G_1 - 3G_2)(1 + \varepsilon^2)^{1/2} \sinh^{-1}(1/\varepsilon) + 4G_2]}{\pi a_1 (G_1 + G_2) \{ (G_1 - 3G_2)(1 + \varepsilon^2)^{1/2} \sinh^{-1} \varepsilon \sinh^{-1}(1/\varepsilon) + 2G_2 [\varepsilon \sinh^{-1}(1/\varepsilon) + \sinh^{-1} \varepsilon] \}}, \quad (5.8.24)$$

$$M_z = \frac{32\omega a_1^3 \{ (G_1 - 3G_2)(1 + \varepsilon^2)^{1/2} [\varepsilon^3 \sinh^{-1}(1/\varepsilon) + \sinh^{-1} \varepsilon] + 4G_2 \varepsilon (1 + \varepsilon^2) \}}{9(G_1 + G_2) \{ (G_1 - 3G_2)(1 + \varepsilon^2)^{1/2} \sinh^{-1} \varepsilon \sinh^{-1}(1/\varepsilon) + 2G_2 [\varepsilon \sinh^{-1}(1/\varepsilon) + \sinh^{-1} \varepsilon] \}}. \quad (5.8.25)$$

Чтобы проверить точность нашей теории, вычисления были выполнены Калкером для прямоугольника с $a_1 = 4$ и различных значений ε . Полупространство было взято изотропным с модулем сдвига $\mu = 0.5$, и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Величина $C_z = M_z/\omega$ была вычислена, используя универсальную программу, разработанную Калкером. Наши результаты согласно (5.8.25), в сравнении с числовыми результатами Калкера, представлены в таблице ниже.

$\varepsilon =$	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
C_z наш метод	48.3	62.9	77.9	113.7	160.6	258.
C_z Калкер	36.74	51.29	66.47	102.4	148.4	241.
Расхождение (%)	23.9	17.5	14.7	9.9	7.6	6.6

Точность числовой процедуры оценивалась вычислением C_z для эллипса, где точное решение хорошо известно. Точное решение было около 7% *выше* числового результата Калкера. Все наши результаты тоже выше Калкерových. Если мы положим характер ошибок для прямоугольника таким же, как и для эллипса, тогда наши формулы должны считаться удивительно точными в широком диапазоне изменения ε .

Мы также сравнили распределение сдвигающих напряжений согласно (5.8.4), и (5.8.24) для прямоугольника с $a_1 = 4$ и $\varepsilon = 0.3$, вдоль прямой $x = 0.5$. Угол кручения был взят равным единице. Сдвигающее напряжение представлено в полярной форме. Сравнение для модуля $|\tau|$ и его аргумента $\arg(\tau)$ в градусах дано в таблице ниже:

$y =$	0.15	0.45	0.75	1.05
$ \tau $ наш метод	0.139	0.219	0.375	0.806
$ \tau $ Калкер	0.145	0.228	0.366	1.11
Расхождение (%)	-1.9	-4.2	2.3	-37.7
$\arg(\tau)$ наш метод	112.57	141.27	154.3	161.03
$\arg(\tau)$ Калкер	112.14	140.72	152.94	161.15

Согласование аргумента τ очень хорошее. Согласование модуля удовлетворительно, кроме точек близких к границе, где ни один из методов не претендует на точность. Тот факт, что расхождение не меняется монотонно указывает на некоторые дефекты в числовой процедуре Калкера.

Пример 3: Крест. Рассмотрим штамп с конфигурацией, полученной путём ортогонального пересечения двух равных прямоугольников со сторонами $2a$ и $2b$ ($a \geq b$). Введём параметр $\varepsilon = b/a$. Площадь и моменты даны в секции 5.5.

Формулы (5.8.11) и (5.8.13) в этом случае дают:

$$q_y = q_x = \frac{\omega}{\pi a (G_1 + G_2) \left[\ln(\varepsilon + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}) + \varepsilon \ln \frac{1 + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}}{(1 + \sqrt{2})\varepsilon} \right]},$$

$$M_z = \frac{64\omega a^3 \varepsilon (1 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{9\pi(G_1 + G_2) \left[\ln[\varepsilon + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}] + \varepsilon \ln \frac{1 + (1 + \varepsilon^2)^{1/2}}{(1 + \sqrt{2})\varepsilon} \right]}.$$

Калкер сделал вычисления для креста с $a=4$ и $\varepsilon=0.5$. Остальные числовые данные были взяты такими же, как и для прямоугольника. Его результат $C_z=154.7$, наш результат равен 167.9, с расхождением 7.9%. Принимая во внимание предполагаемую ошибку программы Калкера около 7%, наш результат может считаться очень точным.

Мы также сравнили распределение сдвигающих напряжений вдоль прямой $y=0.5$. Угол кручения был принят равным единице. Сравнение результатов дано в таблице ниже:

$x=$	0.5	1.5	2.5	3.5
$ \tau $ наш метод	0.120	0.280	0.535	1.12
$ \tau $ Калкер	0.118	0.287	0.512	1.47
Расхождение (%)	1.5	-2.5	4.4	-23.
$arg(\tau)$ наш метод	135.	108.4	101.3	98.13
$arg(\tau)$ Калкер	135.	108.0	101.1	98.72

Согласование хорошее, кроме точек близких к границе.

Упражнение 5.8

1. Установите справедливость (5.8.3).
2. Выведите (5.8.8).
3. Проверьте (5.8.11) и (5.8.13).
4. Рассмотрите кручение полупространства ромбовидным штампом.
5. Сравните жёсткость на кручение прямоугольного штампа с жёсткостью на кручение ромбовидного штампа, имеющего ту же площадь и тот же параметр ε .

5.9 Взаимодействие между штампами под действием нормальной нагрузки

Установлена общая теорема, которая связывает силы, действующие на систему произвольных штампов, с их обобщёнными перемещениями через систему линейных алгебраических уравнений. Теорема приложена к случаю произвольно расположенных эллиптических штампов. Рассмотрены несколько специфических примеров.

Теория. Рассмотрим систему N произвольных штампов, вдавленных в упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть S_n есть область контакта для n -ного штампа, и P_n — нормальная сила, действующая на n -ый штамп. Мы пренебрегаем силами трения между штампами и полупространством. Требуется найти взаимоотношения между обобщёнными перемещениями штампов и действующими силами. Граничные условия для нашей задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} w &= w_n(M) & \text{для} & & M \in S_n, \\ \sigma_z(M) &= 0 & \text{для} & & M \notin S_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.9.1)$$

где w обозначает нормальное перемещение точки на границе $z=0$, и σ обозначает нормальное давление. Заданная функция w_n определена формой основания штампа. Используя известное решение задачи Буссинеска и принцип наложения, мы можем записать:

$$w(Q) = H \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \frac{\sigma_n(T_n)}{R(T_n, Q)} dS_n. \quad (5.9.2)$$

Подстановка граничных условий (5.9.1) в (5.9.2) ведёт к системе N интегральных уравнений. Точное решение этих уравнения неизвестно даже для случая нескольких кругов. Мы покажем далее, что нам не нужно знать эти решения, если нас интересуют только интегральные характеристики. Мы можем выделить, без потери общности, первый штамп, и рассмотреть соответствующее интегральное уравнение

$$w_1(Q_1) = H \iint_{S_1} \frac{\sigma_1(T_1)}{R(T_1, Q_1)} dS_1 + H \sum_{n=2}^N \iint_{S_n} \frac{\sigma_n(T_n)}{R(T_n, Q_1)} dS_n. \quad (5.9.3)$$

Положим, что функции σ_0 , σ_x и σ_y известны и удовлетворяют соответственно следующие интегральные уравнения внутри S_1 :

$$\int \int_{S_1} \frac{\sigma_0(Q_1)}{R(T_1, Q_1)} dS_1 = 1, \quad (5.9.4)$$

$$\int \int_{S_1} \frac{\sigma_x(Q_1)}{R(T_1, Q_1)} dS_1 = x, \quad (5.9.5)$$

$$\int \int_{S_1} \frac{\sigma_y(Q_1)}{R(T_1, Q_1)} dS_1 = y. \quad (5.9.6)$$

Умножение обеих сторон (5.9.3) на $\sigma_0(Q_1)$ и интегрирование по площади S_1 даёт:

$$\begin{aligned} \int \int_{S_1} \sigma_0(Q_1) w_1(Q_1) dS_1 &= H \int \int_{S_1} \sigma_0(Q_1) dS_1 \int \int_{S_1} \frac{\sigma_1(T_1)}{R(T_1, Q_1)} dS_1 + \\ &+ H \sum_{n=2}^N \int \int_{S_1} \sigma_0(Q_1) dS_1 \int \int_{S_n} \frac{\sigma_n(T_n)}{R(T_n, Q_1)} dS_n. \end{aligned} \quad (5.9.7)$$

Изменяя порядок интегрирования в (5.9.7) и принимая во внимание тот факт, что σ_0 удовлетворяет (5.9.4), следующий результат может быть получен:

$$\int \int_{S_1} \sigma_0(Q_1) w_1(Q_1) dS_1 = H \left[P_1 + \sum_{n=2}^N \int \int_{S_n} w_{1n}(T_n) \sigma_n(T_n) dS_n \right], \quad (5.9.8)$$

где P_1 есть главный вектор сил, действующих на первый штамп, и

$$w_{1n}(T_n) = \int \int_{S_1} \frac{\sigma_0(Q_1)}{R(T_n, Q_1)} dS_1, \quad (5.9.9)$$

который пропорционален нормальному перемещению в области S_n вызываемому плоским штампом в S_1 под действием единичной силы. Используя теорему о среднем, которая справедлива, если σ_n не меняет знак, мы получим линейное алгебраическое уравнение

$$\int_{S_1} \int \sigma_0(Q_1) w_1(Q_1) dS_1 = H \left[P_1 + \sum_{n=2}^N w_{1n}(C_n) P_n \right] \quad (5.9.10)$$

Точное положение точки C_n неизвестно, но тот факт, что $C_n \in S_n$ позволяет только ограниченную вариацию внутри S_n , и во многих случаях даёт достаточно близкую верхнюю и нижнюю границы для отыскиваемых параметров. Используя то же самую процедуру, $N-1$ добавочных линейных алгебраических уравнений могут быть выведены для остальных штампов. Эта система уравнений даёт необходимые взаимоотношения между нормальными перемещениями штампов и приложенными силами.

Теперь мы выведем аналогичные взаимоотношения для угловых перемещений. Умножение обеих сторон (5.9.3) на $\sigma_x(Q_1)$ и интегрирование по площади S_1 даёт:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \int \sigma_x(Q_1) w_1(Q_1) dS_1 &= H \int_{S_1} \int \sigma_x(Q_1) dS_1 \int_{S_1} \int \frac{\sigma_1(T_1)}{R(T_1, Q_1)} dS_1 + \\ &+ H \sum_{n=2}^N \int_{S_1} \int \sigma_x(Q_1) dS_1 \int_{S_n} \int \frac{\sigma_n(T_n)}{R(T_n, Q_1)} dS_n. \end{aligned} \quad (5.9.11)$$

Изменяя порядок интегрирования в (5.9.11) и принимая во внимание, что σ_x удовлетворяет (5.9.5), следующие результаты могут быть получены:

$$\int_{S_1} \int \sigma_x(Q_1) w_1(Q_1) dS_1 = H \left[-M_{1y} + \sum_{n=2}^N \int_{S_n} \int x \alpha_{1n}(T_n) \sigma_n(T_n) dS_n \right], \quad (5.9.12)$$

где M_{1y} есть опрокидывающий момент, действующий на первый штамп относительно оси Oy , и

$$\alpha_{1n}(T_n) = \frac{1}{x} \int_{S_1} \int \frac{\sigma_x(Q_1)}{R(T_n, Q_1)} dS_1. \quad (5.9.13)$$

Если σ_n не меняет знак, мы можем использовать опять теорему о среднем:

$$\int_{S_1} \int \sigma_x(Q_1) w_1(Q_1) dS_1 = H \left[-M_{ly} + \sum_{n=2}^N \alpha_{ln} (A_n) x_n P_n \right] \quad (5.9.14)$$

где $A_n(x_n, y_n) \in S_n$. Добавочные $N-1$ уравнений, связывающие повороты штампов относительно оси Oy с соответствующими опрокидывающими моментами могут быть получены аналогичным образом.

Умножим обе стороны (5.9.3) на $\sigma_y(Q_1)$ и проинтегрируем по области S_1 . Процедура приводит к уравнению:

$$\int_{S_1} \int \sigma_y(Q_1) w_1(Q_1) dS_1 = H \left[M_{lx} + \sum_{n=2}^N \int_{S_n} \int y \beta_{ln}(T_n) \sigma_n(T_n) dS_n \right], \quad (5.9.15)$$

где M_{lx} есть опрокидывающий момент относительно оси Ox , действующий на первый штамп, и

$$\beta_{ln}(T_n) = \frac{1}{y} \int_{S_1} \int \frac{\sigma_y(Q_1)}{R(T_n, Q_1)} dS_1. \quad (5.9.16)$$

Как и ранее, приложение теоремы о среднем даёт:

$$\int_{S_1} \int \sigma_y(Q_1) w_1(Q_1) dS_1 = H \left[M_{lx} + \sum_{n=2}^N \beta_{ln}(B_n) y_n P_n \right]. \quad (5.9.17)$$

Три системы линейных алгебраических уравнения типа (5.9.10), (5.9.14) и (5.9.17) являются основными результатами этой секции. Ясно, что каждое уравнение может быть интерпретировано в терминах взаимной работы. Чтобы их использовать, нужно знать нормальные перемещения внутри областей контакта для каждого штампа под действием трёх типов нагрузки, что в настоящий момент известно только для эллиптических штампов. Этот частный случай рассмотрен ниже.

Приложение к эллиптическим штампам. Рассмотрим взаимодействие системы N плоских эллиптических штампов расположенных произвольно на трансверсально изотропном упругом полупространстве. Пусть a_n и b_n являются большой и малой полуосями n -ного эллипса; X_n и Y_n определяют его центр, и θ_n являются углом между осью Ox и большой полуосью a_n ; и P_n есть нормальная сила, действующая на n -ный штамп.

Функции σ_0 , σ_x и σ_y имеют форму (Лурье, 1955):

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\pi b_1 K(k_1)} \left[1 - \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} \right]^{-1/2}$$

$$\sigma_x = \frac{x}{2\pi b_1 D(k_1)} \left[1 - \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} \right]^{-1/2}$$

$$\sigma_y = \frac{y}{2\pi b_1 B(k_1)} \left[1 - \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} \right]^{-1/2}$$

Граничные условия (5.9.1) в этом случае принимают вид:

$$w_n = \delta_n - \alpha_n x + \beta_n y, \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (5.9.18)$$

Подстановка (5.9.18) в (5.9.10), (5.9.14) и (5.9.17) даёт соответственно:

$$\frac{a_1}{K(k_1)} \delta_1 = H \left[P_1 + \sum_{n=2}^N \frac{F(\phi_{1n}, k_1)}{K(k_1)} P_n \right], \quad (5.9.19)$$

$$\frac{a_1^3}{3D(k_1)} \alpha_1 = H \left[M_{1y} - \sum_{n=2}^N \alpha_{1n} x_n P_n \right], \quad (5.9.20)$$

$$\frac{a_1 b_1^2}{3B(k_1)} \beta_1 = H \left[M_{1x} + \sum_{n=2}^N \beta_{1n} y_n P_n \right], \quad (5.9.21)$$

где

$$\alpha_{1n} = \frac{F(\phi_{1n}, k_1) - E(\phi_{1n}, k_1)}{K(k_1) - E(k_1)}, \quad (5.9.22)$$

$$\beta_{1n} = \frac{E(\phi_{1n}, k_1) - (1 - k_1^2) F(\phi_{1n}, k_1) - k_1^2 (\rho_{1n}^2 - 1)^{1/2} / \rho_{1n} (\rho_{1n}^2 - k_1^2)^{1/2}}{E(k_1) - (1 - k_1^2) K(k_1)}, \quad (5.9.23)$$

$$B(k_1) = \frac{E(k_1) - (1 - k_1^2) K(k_1)}{k_1^2}, \quad (5.9.24)$$

$$D(k_1) = \frac{K(k_1) - E(k_1)}{k_1^2}. \quad (5.9.25)$$

Здесь $K(k_1)$, $F(\phi_{\text{in}}, k_1)$, $E(k_1)$, $E(\phi_{\text{in}}, k_1)$ обозначают полные и неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; и ρ_{in} , ϕ_{in} определены как

$$\phi_{\text{in}} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\rho_{\text{in}}}\right), \quad \rho_{\text{in}} = [L + (L^2 - k_1^2 x_n^2 / a_1^2)^{1/2}]^{1/2},$$

$$L = \frac{1}{2}[k_1^2 + (x_n^2 + y_n^2)/a_1^2],$$

где x_n и y_n координаты некоторой точки внутри S_n , и k_1 есть эксцентricность первого эллипса

$$k_1 = [1 - b_1^2/a_1^2]^{1/2}.$$

Каждое уравнение (5.9.19), (5.9.20) и (5.9.21) представляет первое из системы N уравнений. Когда действующие силы известны, эти три системы уравнений определяют нормальные и угловые перемещения штампов. В случае, где перемещения известны, три системы линейных алгебраических уравнений должны быть решены относительно P_n , M_{nx} и M_{ny} . Важно отметить также, что каждое уравнение системы действительно в осях координат, расположенных в центре соответствующего эллипса.

Пример 1: Двое равных эллиптических штампов. Рассмотрим случай, где $N=2$, $a_1=a_2=a$, $b_1=b_2=b$, $X_1=Y_1=0$, $X_2=l$, $Y_2=0$, $\theta_1=\theta_2=0$. Если мы также имеем $P_1=P_2=P$ тогда, благодаря симметрии системы, система уравнений, эквивалентных (5.9.19), сводится к одному уравнению, а именно,

$$\frac{a}{K(k)} \delta = H \left[P + \frac{F(\phi, k)}{K(k)} P \right], \quad (5.9.26)$$

с немедленным результатом:

$$P = \frac{P_0}{1 + \frac{F(\phi, k)}{K(k)}}, \quad (5.9.27)$$

где $P_0 = \delta a / HK(k)$ обозначает силу, которая даёт осадку штампа равную δ , когда эта сила действует на изолированный штамп. Уравнение (5.9.27) показывает, что взаимодействие между штампами уменьшает значение силы, необходимой для обеспечения требуемой осадки. Верхние и нижние границы для P могут быть получены из (5.9.27), принимая

$$\phi = \sin^{-1} \left[\frac{a}{l-a} \right], \quad \text{и} \quad \phi = \sin^{-1} \left[\frac{a}{l+a} \right]. \quad (5.9.28)$$

соответственно. Мы рассмотрим также центральную оценку для P , определённую как

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{a}{l} \right). \quad (5.9.29)$$

Рисунок 5.9.1 даёт график отношения P/P_0 как функция от l/a для $a=2$, $b=1$. Сплошная линия даёт верхнюю границу, штриховая линия даёт нижнюю границу и кружки дают центральную оценку. Легко убедиться, что максимально возможная ошибка центральной оценки меньше, чем 9% для $l/a > 3.5$, она меньше, чем 5% для $l/a > 5$, она меньше, чем 2% для $l/a > 8$, и она меньше, чем 1% для $l/a > 12$. Так как не существует точных решений для этого случая, трудно сказать, какова настоящая ошибка центральной оценки, но есть основания верить, что эта ошибка намного меньше, чем указано выше. Эта уверенность основана на сравнении центральной оценки для двух равных *круглых* штампов с численным решением Kobayashi (1939). Значения отношения P/P_0 для различных $d = l/a$ даны в Таблице 5.9.1.

Если мы примем решение Кобаяши, как точное, то максимальная ошибка центральной оценки не превосходит 0.4% во всём интервале $2 \leq d < \infty$.

Даже если мы предположим, что точность в случае двух эллиптических штампов в 10 раз хуже, чем точность в случае круговых штампов, это всё ещё даст нам максимальную ошибку 4%, что очень даже неплохо. Имея это в виду, мы будем вычислять только центральную оценку в последующих примерах.

Если нормальные силы приложены в центрах штампов, тогда углы наклонов штампов будут определены согласно (5.9.20) и (5.9.21) как

Рис. 5.9.1. Взаимодействие между двумя эллиптическими штампами.

Таблица 5.9.1 Сравнение двух решений

d	верхняя граница	нижняя граница	центральная оценка	результат Кобаяши	ошибка (%)
2.0	0.82213	0.50000	0.75000	0.75272	0.36
2.2	0.83172	0.61457	0.76900	0.77014	0.15
2.4	0.84030	0.66379	0.78517	0.78545	0.04
2.6	0.84804	0.69940	0.79915	0.79898	−0.02
2.8	0.85505	0.72728	0.81136	0.81096	−0.05
3.0	0.86143	0.75000	0.82213	0.82162	−0.06
3.5	0.87515	0.79241	0.84427	0.84370	−0.07
4.0	0.88638	0.82213	0.86143	0.86093	−0.06
5.0	0.90367	0.86143	0.88638	0.88602	−0.04
7.0	0.92611	0.90367	0.91637	0.91619	−0.02
10.0	0.94522	0.93381	0.94005	0.93999	−0.007
∞	1.	1.	1.	1.	0.0

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = -\frac{3D(k)}{a_1^3} H\alpha_{12} lP, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad (5.9.30)$$

где

$$\alpha_{12} = \frac{F(\phi, k) - E(\phi, k)}{K(k) - E(k)}, \quad k = (1 - b^2/a^2)^{1/2}, \quad (5.9.31)$$

и ϕ определено в (5.9.29).

В случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, должны существовать опрокидывающие моменты, приложенные к штампам. Их значения могут быть определены из (5.9.20) как

$$M_{1y} = -M_{2y} = \alpha_{12} l P. \quad (5.9.32)$$

Пример 2: Четыре равных эллиптических штампов. Рассмотрим конфигурацию, оказанную на Рис. 5.9.2. Пусть равные вертикальные силы

Рис. 5.9.2. Геометрия четырёх взаимодействующих штампов

P приложены к каждому штампу. Штампы пронумерованы по часовой стрелке, начиная со штампа с центром в начале координат. Благодаря симметрии системы, достаточно рассмотреть только одно уравнение из каждой системы (5.9.19–5.9.21). Результат есть

$$\frac{a}{K(k)} \delta = H P \left[1 + \frac{F(\phi_{12}, k)}{K(k)} + \frac{F(\phi_{13}, k)}{K(k)} + \frac{F(\phi_{14}, k)}{K(k)} \right], \quad (5.9.33)$$

$$\frac{a^3}{3D(k)} \alpha_1 = H \left[M_{1y} - P l (\alpha_{13} + \alpha_{14}) \right], \quad (5.9.34)$$

$$\frac{ab^2}{3B(k)}\beta_1 = H \left[M_{1x} + Pc(\beta_{12} + \beta_{13}) \right], \quad (5.9.35)$$

где α_{1n} и β_{1n} определены в (5.9.22) и (5.9.23) соответственно, и

$$\phi_{1n} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\rho_{1n}}\right), \quad \text{для } n=2,3,4; \quad (5.9.36)$$

$$\rho_{12} = \left[1 + (c^2 - b^2)/a^2 \right]^{1/2}, \quad \rho_{14} = \frac{l}{a}$$

$$\rho_{13} = \left[L + (L^2 - k^2 l^2 / a^2)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad L = \frac{1}{2} \left[k^2 + (l^2 + c^2)/a^2 \right], \quad (5.9.37)$$

Когда силы и опрокидывающие моменты известны, уравнения (5.9.33–5.9.35) определяют нормальные и угловые перемещения штампов

Математически эквивалентная проблема диффузии через перфорированную мембрану была решена в (Fabrikant, 1985a, 1987k).

Упражнение 5.9

1. Рассмотрите взаимодействие между четырьмя эллиптическими штампами, описанное на Рис. 5.9.2. Найдите опрокидывающие моменты, если штампы не могут наклоняться.

Ответ: $M_{1x} = -Pc(\alpha_{12} + \alpha_{13})$, $M_{1y} = Pl(\alpha_{13} + \alpha_{14})$.

2. Найдите предельный вид формул (5.9.22–5.9.25) для случая круглых штампов.

$$\text{Ответ: } \alpha_{1n} \rightarrow \beta_{1n} \rightarrow \frac{2}{\pi} \left\{ \sin^{-1} \left[\frac{a_1}{r_{1n}} \right] - \frac{a_1}{r_{1n}} \left[1 - \frac{a_1^2}{r_{1n}^2} \right]^{1/2} \right\},$$

$$B(k_1) \rightarrow D(k_1) \rightarrow \pi/4, \quad \frac{F(\phi_{1n}, k_1)}{K(k_1)} \rightarrow \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left[\frac{a_1}{r_{1n}} \right],$$

и уравнения (5.9.19–5.9.21) примут вид:

$$\frac{2}{\pi} a_1 \delta_1 = H \left[P_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^N P_n \sin^{-1} \left(\frac{a_1}{r_{1n}} \right) \right],$$

$$\frac{4a_1^3}{3\pi} \alpha_1 = H \left[M_{ly} - \sum_{n=2}^N \alpha_{1n} x_n P_n \right],$$

$$\frac{4a_1^3}{3\pi} \beta_1 = H \left[M_{lx} + \sum_{n=2}^N \beta_{1n} y_n P_n \right],$$

где a_1 есть радиус первого штампа и r_{1n} есть расстояние между центром первого штампа и точкой внутри S_n .

3. Найдите обобщённые перемещения эллиптического штампа, вызванные несколькими сосредоточенными силами, приложенными нормально вне штампа.

Совет: Рассмотрим процедуру сжатия площадей S_n , $n=2,3,\dots,N$. Точность уравнений (5.9.19–5.9.21) будет увеличиваться. В предельном случае $S_n \rightarrow 0$ формулы (5.9.19–5.9.21) дают *точное* решение задачи о нескольких сосредоточенных силах действующих вне эллиптического штампа.

4. Рассмотрите взаимодействие нескольких штампов на неоднородном упругом полупространстве с модулем упругости пропорциональным степенной функции глубины.

5.10 Взаимодействие между гибкими штампами под действием сдвигающих нагрузок

Смешанная граничная задача для трансверсально изотропного упругого полупространства рассмотрена для случая, где однородные тангенциальные перемещения предписаны на нескольких областях произвольной формы, и остальная часть границы полупространства свободна от напряжений. Задача может быть интерпретирована или как взаимодействие между двумя упругими полупространствами, соединёнными через несколько областей и находящимися под действием отдалённого сдвига, или как контактная задача о нескольких гибких штампах, соединённых с полупространством, с различными тангенциальными перемещениями предписанными на них. Общая теорема установлена ниже, которая связывает тангенциальные силы, действующие на каждую область, с их обобщёнными перемещениями через систему линейных алгебраических уравнений. Теорема приложена к случаю произвольно расположенных эллиптических областей, подверженных однородному сдвигу. Рассмотрено несколько специфических примеров.

Теория. Рассмотрим трансверсально изотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Пусть тангенциальные перемещения заданы на нескольких односвязных областях S_n , в то время, как остальная часть границы полупространства свободна от напряжений. Математическая формулировка граничных условий на плоскости $z=0$ есть:

$$\begin{aligned} u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad \text{для} \quad (x, y) \in S_n, \\ \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad \text{для} \quad (x, y) \notin S_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.10.1)$$

Граничная задача (5.10.1) может быть интерпретирована или как взаимодействие между несколькими гибкими штампами S_n сцеплёнными с полупространством и подверженными тангенциальным перемещениям, или как случай двух упругих полупространств, соединённых через S_n и подверженных отдалённому сдвигу. Первая интерпретация является более общей, так как тангенциальные перемещения каждого штампа могут быть независимы друг от друга.

Мы будем называть S_n областью контакта для n -ного штампа. Штампы полагаются гибкими, так что они не вызывают никаких нормальных давлений. Пусть T_{nx} и T_{ny} компоненты тангенциальной силы, приложенной к n -ному штампу. Нам нужно найти взаимоотношения между обобщёнными перемещениями штампов и действующими силами.

Введём комплексные тангенциальные перемещения $u = u_x + iu_y$, и комплексные тангенциальные напряжения $\tau = \tau_{zx} + i\tau_{yz}$. Благодаря принципу суперпозиции, основное интегральное уравнение может быть переписано из (5.7.5) следующим образом:

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \frac{G_1}{2} \int \int_{S_n} \frac{\tau(\xi, \eta)}{R} d\xi d\eta + \frac{G_2}{2} \int \int_{S_n} \frac{q \bar{\tau}(\xi, \eta)}{\bar{q} R} d\xi d\eta \right\} = u(x, y). \quad (5.10.2)$$

Здесь

$$q = x - \xi + i(y - \eta), \quad \bar{q} = x - \xi - i(y - \eta), \quad R^2 = q\bar{q}. \quad (5.10.3)$$

Подстановка граничных условий (5.10.1) в (5.10.2) ведёт к системе N интегральных уравнений. Точное решение этих уравнений неизвестно даже для случая нескольких кругов. Мы покажем далее, что нам и не нужно знать эти решения, если нас интересуют только взаимоотношения между приложенными силами и перемещениями штампов. Мы можем выделить, без потери общности, первый штамп и рассмотреть соответствующее

интегральное уравнение

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{G_1}{2} \int_{S_1} \int \frac{\tau_1(\xi, \eta)}{R_{11}} d\xi d\eta + \frac{G_2}{2} \int_{S_1} \int \frac{q_{11} \bar{\tau}_1(\xi, \eta)}{\bar{q}_{11} R_{11}} d\xi d\eta + \sum_{n=2}^N \left\{ \frac{G_1}{2} \int_{S_n} \int \frac{\tau_n(\xi, \eta)}{R_{1n}} d\xi d\eta + \frac{G_2}{2} \int_{S_n} \int \frac{q_{1n} \bar{\tau}_n(\xi, \eta)}{\bar{q}_{1n} R_{1n}} d\xi d\eta \right\}. \quad (5.10.4)$$

Здесь u_n обозначает тангенциальное перемещение n -ного штампа, τ_n есть тангенциальные напряжения под штампом, точка $(x_n, y_n) \in S_n$, и

$$q_{kn} = x_k - \xi_n + i(y_k - \eta_n), \quad \bar{q}_{kn} = x_k - \xi_n - i(y_k - \eta_n), \\ R_{kn} = (q_{kn} \bar{q}_{kn})^{1/2}, \quad (\xi_n, \eta_n) \in S_n. \quad (5.10.5)$$

Для простоты, мы не пишем индексы в ξ_n и η_n в (5.10.4) и далее. Это не должно вызывать путаницу для читателя.

Уравнение (5.10.4) может быть переписано как

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{G_1}{2} \Delta \int_{S_1} \int R_{11} \tau_1(\xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{G_2}{2} \Lambda^2 \int_{S_1} \int R_{11} \bar{\tau}_1(\xi, \eta) d\xi d\eta + \sum_{n=2}^N \left\{ \frac{G_1}{2} \Delta \int_{S_n} \int R_{1n} \tau_n(\xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{G_2}{2} \Lambda^2 \int_{S_n} \int R_{1n} \bar{\tau}_n(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\}. \quad (5.10.6)$$

Пусть мы знаем функцию τ_0 , которая удовлетворяет следующему интегральному уравнению внутри S_1

$$\int_{S_1} \int \tau_0(\xi, \eta) R d\xi d\eta = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6, \quad (5.10.7)$$

где a_1, \dots, a_6 комплексные константы. Можно проверить, что

$$\Delta \int_{S_1} \tau_0(\xi, \eta) R_{11} d\xi d\eta = 2a_1 + 2a_2 = d_1 = \text{const},$$

$$\Lambda^2 \int_{S_1} \tau_0(\xi, \eta) R_{11} d\xi d\eta = 2a_1 - 2a_2 + 2ia_3 = -c_1 = \text{const}, \quad (5.10.8)$$

это означает, что функция τ_0 превращает в константы первые два интеграла в выражение (5.10.4). Это важное качество будет использоваться в последующих выводах. Умножение обеих сторон (5.10.4) на τ_0 и интегрирование по поверхности S_1 даёт:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} u_1(x_1, y_1) \tau_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 &= \frac{G_1}{2} \int_{S_1} \tau_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \int_{S_1} \frac{\tau_1(\xi, \eta)}{R_{11}} d\xi d\eta \\ &+ \frac{G_2}{2} \int_{S_1} \tau_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \int_{S_1} \frac{q_{11} \bar{\tau}_1(\xi, \eta)}{\bar{q}_{11} R_{11}} d\xi d\eta \\ &+ \sum_{n=2}^N \left\{ \frac{G_1}{2} \int_{S_1} \tau_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \int_{S_n} \frac{\tau_n(\xi, \eta)}{R_{1n}} d\xi d\eta \right. \\ &\left. + \frac{G_2}{2} \int_{S_1} \tau_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \int_{S_n} \frac{q_{1n} \bar{\tau}_n(\xi, \eta)}{\bar{q}_{1n} R_{1n}} d\xi d\eta \right\}. \end{aligned} \quad (5.10.9)$$

Изменяя порядок интегрирования в (5.10.9) и принимая во внимание свойство (5.10.8), следующий результат может быть получен:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} u_1(x_1, y_1) \tau_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 &= \frac{G_1}{2} d_1 T_1 + \frac{G_2}{2} c_1 \bar{T}_1 \\ &+ \sum_{n=2}^N \left\{ \frac{G_1}{2} \int_{S_n} \tau_n(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{S_1} \frac{\tau_0(x_1, y_1)}{R_{1n}} dx_1 dy_1 \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{G_2}{2} \int \int_{S_n} \bar{\tau}_n(\xi, \eta) d\xi d\eta \int \int_{S_1} \frac{q_{1n} \tau_0(x_1, y_1)}{\bar{q}_{1n} R_{1n}} dx_1 dy_1 \right\}. \quad (5.10.10)$$

где T_1 есть комплексное представление для тангенциальной силы, действующей на первый штамп. Введём обозначение

$$\Phi(\xi, \eta) = \int \int_{S_1} \frac{\tau_0(x_1, y_1)}{R_{1n}} dx_1 dy_1, \quad \Psi(\xi, \eta) = \int \int_{S_1} \frac{q_{1n} \tau_0(x_1, y_1)}{\bar{q}_{1n} R_{1n}} dx_1 dy_1. \quad (5.10.11)$$

Теперь выражение (5.10.10) может быть переписано как

$$\begin{aligned} \int \int_{S_1} u_1(x_1, y_1) \tau_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 &= \frac{G_1}{2} d_1 T_1 + \frac{G_2}{2} c_1 \bar{T}_1 \\ &+ \sum_{n=2}^N \left\{ \frac{G_1}{2} \int \int_{S_n} \Phi(\xi, \eta) \tau_n(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{G_2}{2} \int \int_{S_n} \Psi(\xi, \eta) \tau_n(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\}. \end{aligned} \quad (5.10.12)$$

Используя теорему о среднем, мы получим линейное алгебраическое уравнение для сил T_n , приложенных к каждому штампу.

$$\begin{aligned} \int \int_{S_1} u_1(x_1, y_1) \tau_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 &= \frac{G_1}{2} d_1 T_1 + \frac{G_2}{2} c_1 \bar{T}_1 \\ &+ \sum_{n=2}^N \left\{ \frac{G_1}{2} \Phi(x_n, y_n) T_n + \frac{G_2}{2} \Psi(\xi_n, \eta_n) \bar{T}_n \right\}. \end{aligned} \quad (5.10.13)$$

Точное местоположение точек (x_n, y_n) и (ξ_n, η_n) неизвестно, но тот факт, что они принадлежат области S_n , позволяет ограниченную вариацию и во многих случаях даёт достаточно близкие верхние и нижние границы для отыскиваемых параметров. Тем же самым методом $N-1$ добавочных линейных алгебраических уравнений могут быть выведены для остальных штампов. Эта система уравнений обеспечивает необходимые взаимоотношения между тангенциальными перемещениями штампов и

приложенными силами, и представляет основные результаты этой секции. Ясно, что каждое уравнение может быть интерпретировано в терминах взаимной работы. Чтобы использовать уравнения (5.10.13), нам нужно знать явное выражение для τ_0 , которое в настоящее время известно только для эллиптического штампа.

Приложение к эллиптическим штампам. Рассмотрим взаимодействие N гибких эллиптических штампов, произвольно расположенных на упругом полупространстве, с однородным тангенциальным перемещением $u_n = \text{const}$ предписанным в S_n . Пусть a_n и b_n являются большой и малой полуосями n -ного эллипса; X_n и Y_n определяют его центр, θ_n есть угол между осью Ox и большой полуосью a_n ; и T_n есть тангенциальная сила, действующая на n -ный штамп. Функция τ_0 для первого штампа есть:

$$\tau_0(x, y) = \left[1 - \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} \right]^{-1/2}. \quad (5.10.14)$$

Подстановка (5.10.14) в (5.10.10) даёт после вычисления интегралов (смотри детали в Аппендиксе А5.1):

$$2a_1 u_1 = G_1 K(k_1) T_1 + G_2 [(2 - k_1^2) K(k_1) - 2 E(k_1)] \bar{T}_1 / k_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \left\{ G_1 \int \int_{S_n} D_{1n} \tau_n dS_n + (G_2 / k_1^2) \int \int_{S_n} L_{1n} \bar{\tau}_n dS_n - i (G_2 / k_1^2) \int \int_{S_n} M_{1n} \bar{\tau}_n dS_n \right\}, \quad (5.10.15)$$

где

$$D_{1n} = [F(\phi_{1n}, k_1) - F(\psi_{1n}, k_1)],$$

$$L_{1n} = \{(2 - k_1^2)[F(\phi_{1n}, k_1) - F(\psi_{1n}, k_1)] - 2[E(\phi_{1n}, k_1) - E(\psi_{1n}, k_1)]\},$$

$$M_{1n} = [(1 - k_1^2 \sin^2 \phi_{1n})^{1/2} - (1 - k_1^2 \sin^2 \psi_{1n})^{1/2}]. \quad (5.10.16)$$

Здесь $k_1 = (1 - b_1^2/a_1^2)^{1/2}$, $K(k_1)$, $F(\phi_{1n}, k_1)$, $E(k_1)$, $E(\phi_{1n}, k_1)$ обозначают полные и неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; ψ_{1n} и ϕ_{1n} определены согласно формулам (А5.1.20–А5.1.21) из Аппендикса А5.1, а именно,

$$\begin{aligned}\phi_{1n} &= \tan^{-1} \frac{x_n y_n + (a_1^2 y_n^2 + b_1^2 x_n^2 - a_1^2 b_1^2)^{1/2}}{y_n^2 - b_1^2}, \\ \psi_{1n} &= \tan^{-1} \frac{x_n y_n - (a_1^2 y_n^2 + b_1^2 x_n^2 - a_1^2 b_1^2)^{1/2}}{y_n^2 - b_1^2}.\end{aligned}\quad (5.10.17)$$

В случае, когда $\phi_{1n} < \psi_{1n}$, оно должно быть заменено на $\pi + \phi_{1n}$. Мы помним, что точка $(x_n, y_n) \in S_n$. Если теорема о среднем справедлива, уравнение (5.10.15) преобразуется в

$$\begin{aligned}2a_1 u_1 &= G_1 K(k_1) T_1 + G_2 [(2 - k_1^2) K(k_1) - 2E(k_1)] \bar{T}_1 / k_1^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \left\{ G_1 [F(\phi_{1n}, k_1) - F(\psi_{1n}, k_1)] T_n + (G_2 / k_1^2) [(2 - k_1^2) (F(\phi_{1n}, k_1) \right. \\ &- F(\psi_{1n}, k_1)) - 2(E(\phi_{1n}, k_1) - E(\psi_{1n}, k_1))] \bar{T}_n \\ &\left. - i(G_2 / k_1^2) [(1 - k_1^2 \sin^2 \phi_{1n})^{1/2} - (1 - k_1^2 \sin^2 \psi_{1n})^{1/2}] \bar{T}_n \right\}.\end{aligned}\quad (5.10.18)$$

Важно отметить, что в случае симметричной конфигурации, некоторые члены в (5.10.18) исчезают; параметры ϕ_{1n} и ψ_{1n} не обязательно совпадают с той же самой точкой (x_n, y_n) ; они интерпретируются как размытые параметры, которые могут принимать любое значение, соответствующее $(x_n, y_n) \in S_n$. Уравнение (5.10.18) представляет собой первое из системы N линейных алгебраических уравнений с размытыми коэффициентами, которые могут быть получены таким же образом, как и первое. Решение тоже может быть интерпретировано как размытая область. Анализ этой области позволит нам найти верхнюю и нижнюю границу для отыскиваемых параметров. Как мы увидим далее, в некоторых случаях вариация между верхней и нижней границей становится достаточно малой, что позволяет нам получить достаточно точное решение задачи.

Когда действующие силы известны, система уравнений определяет тангенциальные перемещения штампов. В случае, когда перемещения известны, система линейных алгебраических уравнений должна быть решена относительно сил T_n . Важно также заметить, что каждое уравнение в

системе действительно в координатах с началом в центре эллипса.

Пример: Два равных эллиптических штампов. Рассмотрим случай, где $N=2$, $a_1=a_2=a$, $b_1=b_2=b$, $X_1=Y_1=0$, $X_2=l$, $Y_2=0$, $\theta_1=\theta_2=0$. Пусть тангенциальные перемещения заданы $u_1=u_2=u$, где u действительно. Благодаря симметрии системы, мы можем также положить $T_1=T_2=T$, и $\Im[T]=0$ (то—есть приложенная сила направлена вдоль оси Ox). Принимая во внимание свойства

$$\begin{aligned} D_{\text{ln}}(x,y) &= D_{\text{ln}}(-x,y) = D_{\text{ln}}(x,-y) = D_{\text{ln}}(-x,-y), \\ L_{\text{ln}}(x,y) &= L_{\text{ln}}(-x,y) = L_{\text{ln}}(x,-y) = L_{\text{ln}}(-x,-y), \\ M_{\text{ln}}(x,y) &= -M_{\text{ln}}(-x,y) = -M_{\text{ln}}(x,-y) = M_{\text{ln}}(-x,-y), \end{aligned} \quad (5.10.19)$$

мы имеем

$$\int_{S_n} \int M_{\text{ln}} \tau dS_n = 0, \quad (5.10.20)$$

и система уравнений, эквивалентных (5.10.15), сводится к только одному уравнению, а именно,

$$\begin{aligned} 2au &= 2\{G_1 K(k)T + (G_2/k^2)[(2-k^2)K(k) - 2E(k)]\bar{T}\} \\ &- \{G_1 F(k,\phi)T + (G_2/k^2)[(2-k^2)F(k,\phi) - 2E(k,\phi)]\bar{T}\}, \end{aligned} \quad (5.10.21)$$

где, благодаря симметрии, ϕ определено как

$$\phi = \cos^{-1} \left[\frac{b}{(x^2 - a^2 + b^2)^{1/2}} \right] \quad (5.10.22)$$

Введём обозначение:

$$T_0 = \frac{2au}{G_1 K(k) + (G_2/k^2)[(2-k^2)K(k) - 2E(k)]} \quad (5.10.23)$$

где T_0 может быть интерпретировано как сила, необходимая для сдвига изолированного штампа на величину u . Уравнение (5.10.21) может быть переписано следующим образом:

$$T = \frac{T_0}{2-B}, \quad B = \frac{G_1 F(k, \phi) + (G_2/k^2)[(2-k^2)F(k, \phi) - 2E(k, \phi)]}{G_1 K(k) + (G_2/k^2)[(2-k^2)K(k) - 2E(k)]} \quad (5.10.24)$$

Так как $B \geq 0$, мы можем заключить, что взаимодействие между штампами уменьшает силу, необходимую для обеспечения заданного перемещения u , по сравнению с изолированным штампом. Верхняя и нижняя граница для T могут быть получены из (5.10.24), принимая

$$\phi = \cos^{-1} \left\{ \frac{b}{[(l+a)^2 - a^2 + b^2]^{1/2}} \right\},$$

and

$$\phi = \cos^{-1} \left\{ \frac{b}{[(l-a)^2 - a^2 + b^2]^{1/2}} \right\}. \quad (5.10.25)$$

соответственно. Мы также рассмотрим центральную оценку для T , определённую как

$$\phi = \cos^{-1} \left\{ \frac{b}{(l^2 - a^2 + b^2)^{1/2}} \right\}.$$

Мы можем рассмотреть аналогичным образом случай, когда перемещение предписано в направлении оси Oy путём формальной замены u на iu , и T на iT в выражении (5.10.21). Результат имеет вид:

$$T = \frac{T_0}{2-C}, \quad C = \frac{G_1 F(k, \phi) - (G_2/k^2)[(2-k^2)F(k, \phi) - 2E(k, \phi)]}{G_1 K(k) - (G_2/k^2)[(2-k^2)K(k) - 2E(k)]}. \quad (5.10.26)$$

Рисунок 5.10.1 даёт график отношения T/T_0 в зависимости от l/a для $a=2$, $b=1$, $(G_2/G_1)=1/3$, с тангенциальными перемещениями вдоль оси Ox . Верхняя и нижняя граница дана кружками; центральная оценка дана сплошной линией. Как можно видеть, максимально возможная ошибка центральной оценки меньше, чем 15% для $l/a \geq 2.5$, она меньше, чем 10% для $l/a \geq 3$, она меньше, чем 7% для $l/a > 3.5$, и она меньше, чем 5% для $l/a \geq 4$. Так как точное решение не существует в этом случае, трудно сказать, насколько велика настоящая ошибка центральной оценки, но есть основания верить, что намного меньше, чем было указано выше. Эта вера

Рис. 5.10.1. Взаимодействие между двумя эллиптическими штампами, со сдвигающей нагрузкой в направлении оси Ox

основана на тех же аргументах, как и в секции 5.9.

Рисунок 5.10.2 даёт тот же самый график для случая, когда тангенциальные перемещения предписаны в направлении Oy . Соответствующие максимальные ошибки равны 12%, 7%, 5%, и 3.5%. Можно заметить, что точность центральной оценки здесь значительно лучше, чем в первом случае. Этого следовало ожидать, так как взаимодействие в случае перемещений, предписанных в направлении оси Ox , сильнее чем во втором случае.

Дискуссия. Целесообразно рассмотреть некоторые предельные случаи. В случае круглого штампа, эксцентricность $k_1 \rightarrow 0$, и формула (5.10.15) упрощается:

$$2a_1 u_1 = \frac{\pi}{2} G_1 T_1 + \sum_{n=2}^N \left\{ G_1 \int \int_{S_n} \sin^{-1} \left[\frac{a_1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right] \tau_n(x, y) dx dy \right. \\ \left. + G_2 \int \int_{S_n} \frac{a_1 (x^2 + y^2 - a_1^2)^{1/2}}{(x - iy)^2} \bar{\tau}_n(x, y) dx dy \right\}. \quad (5.10.27)$$

Рис. 5.10.2. Взаимодействие между двумя эллиптическими штампами, со сдвигающей нагрузкой в направлении оси Oy

Здесь мы использовали интегралы (A5.1.22–A5.1.23). Взаимодействие двух равных круглых штампов под действием нагрузки T в направлении Ox ведёт к следующему выражению для центральной оценки:

$$2au = \frac{\pi}{2} G_1 T + \left[G_1 T \sin^{-1}\left(\frac{a}{l}\right) + G_2 \frac{a(l^2 - a^2)^{1/2}}{l^2} \bar{T} \right]. \quad (5.10.28)$$

Вводя опять обозначение

$$T_0 = \frac{4au}{\pi G_1},$$

следующий результат может быть получен из (5.10.28)

$$T = \frac{T_0}{1 + \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l}\right) + \frac{G_2}{G_1} \frac{a(l^2 - a^2)^{1/2}}{l^2} \right]} \quad (5.10.29)$$

Если тангенциальные перемещения предписаны в направлении оси Oy , мы

получим:

$$T = \frac{T_0}{1 + \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1}\left(\frac{a}{l}\right) - \frac{G_2 a (l^2 - a^2)^{1/2}}{G_1 l^2} \right]} \quad (5.10.30)$$

Все результаты действительны для случая изотропного тела, если принять $G_1 = (2 - \nu)/(2\pi\mu)$ и $G_2 = \nu/(2\pi\mu)$, где μ есть модуль сдвига и ν есть коэффициент Пуассона.

Упражнение 5.10

1. Проверьте (5.10.6).
2. Выведите (5.10.12).
3. Рассмотрите взаимодействие двух равных эллиптических штампов, когда их большие полуоси взаимно перпендикулярны.
4. Найдите обобщённые перемещения эллиптического штампа, вызванные действием нескольких сосредоточенных сил, приложенных тангенциально вне штампа.

Совет: Рассмотрите процедуру сжатия областей S_n , $n = 2, 3, \dots, N$, в точки. Точность уравнений (5.10.18) будет увеличиваться. В предельном случае $S_n \rightarrow 0$, формула (5.10.18) даёт *точное* решение задачи о нескольких сосредоточенных силах, действующих вне эллиптического штампа.

5.11 Контактная задача для шероховатого штампа

Термин *шероховатый* штамп используется здесь как противоположный термину *гладкий* штамп, указывая на штамп, который производит сдвигающее напряжение в своём основании. Рассмотрим круглый штамп, с основанием общего вида, вдавливаемый в трансверсально изотропное упругое полупространство. Штамп находится под действием нормальной осевой силы P и тангенциальной силы $T = kP$, действующей направлении Ox , где k является коэффициентом трения. Пусть область контакта есть круг радиуса a . Сдвигающее напряжение τ_{zx} полагается пропорциональным давлению σ , а именно, $\tau_{zx} = k\sigma$. Основное интегральное уравнение примет вид (согласно (2.2.13)):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{R} = \frac{w(\rho, \phi)}{H} - \alpha k \Re \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(\rho_0, \phi_0) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{\rho e^{i\phi} - \rho_0 e^{i\phi_0}}. \quad (5.11.1)$$

Здесь $w(\rho, \phi)$ есть осадка штампа. Мы перепишем (5.11.1) в операторной форме:

$$\mathcal{N}\sigma = \frac{w}{H} - \alpha k \mathcal{M}\sigma, \quad (5.11.2)$$

где \mathcal{N} и \mathcal{M} интегральные операторы в левой и правой сторонах (5.11.1) соответственно.

Значения α и k для реальных тел меньше единицы, поэтому их произведение удобно использовать в качестве малого параметра. Пусть следующее разложение справедливо:

$$\sigma(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha k)^n \sigma_n(\rho, \phi). \quad (5.11.3)$$

Подставляя (5.11.3) в (5.11.2) и приравнивая члены с одинаковыми степенями малого параметра, следующая бесконечная система интегральных уравнений может быть получена:

$$\mathcal{N}\sigma_0 = \frac{w}{H}, \quad \mathcal{N}\sigma_1 = -\mathcal{M}\sigma_0, \dots, \quad \mathcal{N}\sigma_n = -\mathcal{M}\sigma_{n-1}, \dots \quad (5.11.4)$$

Оператор \mathcal{N}^{-1} , обратный к \mathcal{N} известен из (1.4.10), так что мы можем записать формальное решение задачи следующим образом:

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha k)^n (-\mathcal{N}^{-1} \mathcal{M})^n \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{w}{H} \right) \quad (5.11.5)$$

Пример. Рассмотрим случай плоского круглого штампа. Пусть ω являются осадкой в его центре, и δ есть его угол наклона относительно оси Oy . Тогда

$$w(\rho, \phi) = \omega + \delta \rho \cos \phi. \quad (5.11.6)$$

Подстановка (5.11.6) в первое из уравнений (5.11.4) даёт:

$$\sigma_0(\rho, \phi) = \frac{1}{\pi^2 H} \frac{\omega + 2\delta \rho \cos \phi}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad (5.11.7)$$

что есть, фактически, решение для наклонного *гладкого* штампа. Подстановка (5.11.7) во второе из уравнений (5.11.4) даёт второй член разложения:

$$\sigma_1(\rho, \phi) = \frac{2}{\pi^3 H} \left\{ \frac{\omega a \ln[(a^2 - \rho^2)^{1/2}/a]}{\rho(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \cos \phi + \delta \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{x^2 dx}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^{1/2} + \frac{a}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} + \left(\frac{a^3 \ln[(a^2 - \rho^2)^{1/2}/a]}{\rho^2(a^2 - \rho^2)^{1/2}} + \frac{a}{2(a^2 - \rho^2)^{1/2}} \right) \cos 2\phi \right] \right\}. \quad (5.11.8)$$

Процедура может быть продолжена, и дальнейшие члены разложения могут быть получены. Это оставлено заинтересованному читателю. Главный вектор P и опрокидывающий момент M могут быть получены интегрированием суммы (5.11.7) и (5.11.8) следующим образом:

$$P = \frac{2a}{\pi H} \left(\omega + \frac{\alpha k}{\pi} a \delta \right), \quad M = \frac{2a^2}{\pi H} \left(\frac{2}{3} a \delta - \frac{\alpha k}{\pi} \omega \right). \quad (5.11.9)$$

Если точка приложения нормальной силы P сдвинута вдоль оси Ox на расстояние b от центра штампа, тогда $M = Pb$, и следующее соотношение может быть установлено между осадкой штампа ω и углом наклона δ :

$$\delta = \frac{b + (\alpha k/\pi)a}{(2/3)a - (\alpha k/\pi)b} \frac{\omega}{a}. \quad (5.11.10)$$

Формула (5.11.10) показывает, что штамп наклоняется даже в случае центрального нагружения. Аналогичный эффект может быть обнаружен в случае сцеплённого штампа (Глава 3) и в двумерных контактных задачах (Мухелишвили, 1946). Чтобы предотвратить наклон штампа, нормальная сила должна быть приложена в точке $x = -\alpha k a/\pi$.

Упражнение 5.11

1. Проверьте (5.11.5).
2. Выведите (5.11.7)–(5.11.8).
3. Установите (5.11.9).

4. Найдите поправочный член в выражении для P (5.11.9), вызываемый σ_2 .

Ответ: $P = \frac{2a}{\pi H} \left[\omega \left(1 - \frac{1}{6} \alpha^2 k^2 \right) + \frac{\alpha k}{\pi} a \delta \right]$.

5. Найдите нормальное перемещение w вне штампа, принимая во внимание первые два члена в разложении решения.

Ответ: $w = \frac{2}{\pi} \left[\omega \sin^{-1} \left(\frac{a}{\rho} \right) + \delta \left(\rho \sin^{-1} \left(\frac{a}{\rho} \right) - \frac{a}{\rho} (\rho^2 - a^2)^{1/2} \right) \cos \phi \right]$

$$+ \frac{4\alpha k}{\pi^2} \left\{ \omega \left[\frac{a}{\rho} \cos^{-1} \left(\frac{a}{\rho} \right) + \frac{(\rho^2 - a^2)^{1/2}}{\rho} \ln \frac{\rho}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \right] \cos \phi \right.$$

$$+ \delta (\rho^2 - a^2)^{1/2} \ln \frac{\rho}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{\delta}{\rho^2} \left[\frac{2}{3} a^3 \cos^{-1} \left(\frac{a}{\rho} \right) \right.$$

$$\left. \left. + (\rho^2 - a^2)^{1/2} \left(\frac{\rho^2 + 2a^2}{3} \ln \frac{\rho}{(\rho^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{a^2}{6} \right) \right] \cos 2\phi \right\}.$$

6. Попробуйте найти точное замкнутое решение задачи.

Аппендикс А5.1

Метод вычисления нескольких интегралов по эллиптической области представлен здесь. Мы вводим обозначения:

$$R = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$$

$$Z_0 = \left[1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right]^{1/2}$$

Нам нужно вычислить следующий интеграл:

$$I = \iint_S \frac{f(x_0, y_0) dx_0 dy_0}{R Z_0}, \quad (\text{A5.1.1})$$

где S есть эллипс с полуосями a и b ($a \geq b$), и f — известная функция. Мы используем метод Ростовцева (1961), несколько модифицированный для

упрощения вычислений. Введём новую систему полярных координат (r, θ) , с началом координат в точке (x, y) , а именно,

$$x_0 = x + r \cos \theta, \quad y_0 = y + r \sin \theta. \quad (\text{A5.1.2})$$

Прежде всего, рассмотрим случай, когда $(x, y) \in S$. Подстановка (A5.1.2) в (A5.1.1) даёт:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{ab d\theta}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \int_0^{r_1} \frac{f(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) dr}{[(r_1 - r)(r + r_2)]^{1/2}}, \quad (\text{A5.1.3})$$

где r_1 и $-r_2$ корни алгебраических уравнений:

$$\frac{(x + r \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(y + r \sin \theta)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

а именно,

$$r_{1,2} = \frac{(Q^2 + PZ)^{1/2} \mp Q}{P}, \quad Q = \frac{x \cos \theta}{a^2} + \frac{y \sin \theta}{b^2},$$

$$P = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}, \quad Z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad (\text{A5.1.4})$$

Теперь мы можем представить интеграл (A5.1.3) как сумма двух, согласно схеме:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_1} dr = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{r_1} dr + \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^{r_1} dr. \quad (\text{A5.1.5})$$

Сделаем формальную замену θ на $\pi + \theta$ во втором интеграле из (A5.1.5). Принимая во внимание, что $r_1(\theta) = r_2(\pi + \theta)$, преобразование (A5.1.5) делается следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_1} dr = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{r_1} dr + \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{r_2} dr = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{r_1} dr + \int_0^{\pi} d\theta \int_{-r_2}^0 dr. \quad (\text{A5.1.6})$$

В последнем члене (А5.1.6) мы сделали формальную замену r на $-r$. Принимая во внимание, что выражение $f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)$ остаётся неизменённым с заменой θ на $\pi+\theta$ и r на $-r$, два интеграла в (А5.1.6) могут быть объединены в один, и окончательный результат будет иметь вид:

$$I = \int_0^\pi \frac{abd\theta}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{1/2}} \int_{-r_2}^{r_1} \frac{f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)dr}{[(r_1-r)(r+r_2)]^{1/2}}, \quad (\text{А5.1.7})$$

Мы вспоминаем интеграл

$$\int_{-r_2}^{r_1} \frac{r^n dr}{[(r_1-r)(r+r_2)]^{1/2}} = r_1^n \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}-k) \Gamma(\frac{1}{2}+k)}{\Gamma(n+1-k) \Gamma(k+1)} \left[-\frac{r_2}{r_1}\right]^k. \quad (\text{А5.1.8})$$

Теперь различные интегралы могут быть вычислены довольно легко. Вот результаты, которые использованы в основном тексте этой книги

$$\int_S \int \frac{dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi \int_0^\pi \frac{abd\theta}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{1/2}} = 2\pi bK(k), \quad (\text{А5.1.9})$$

$$\int_S \int \frac{q dx_0 dy_0}{qRZ_0} = \pi \int_0^\pi \frac{abe^{2i\theta} d\theta}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{1/2}} = 2\pi b[(2-k^2)K(k) - 2E(k)]/k^2. \quad (\text{А5.1.10})$$

Теперь рассмотрим случай, когда точка $(x,y) \notin S$. В этом случае подстановка (А5.1.2) в (А5.1.1) даёт:

$$I = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{abd\theta}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{1/2}} \int_{-r_2}^{r_1} \frac{f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) dr}{[(r_1-r)(r+r_2)]^{1/2}}, \quad (\text{А5.1.11})$$

где α_1 и α_2 углы между осью Ox и двумя прямыми, проходящими через точку (x,y) касательно к эллипсу. Мы можем найти эти углы, используя

классические формулы дифференциальной геометрии. Параметрическое уравнение эллипса может быть записано:

$$X = acost, \quad Y = bsint. \quad (\text{A5.1.12})$$

Уравнение прямых проходящих через точку (x, y) касательно к эллипсу есть

$$\frac{y - bsint}{bcost} = \frac{x - acost}{-asint}. \quad (\text{A5.1.13})$$

Уравнение (A5.1.13) может быть решено относительно $sint$, и два решения имеют вид:

$$(sint)_{1,2} = \frac{b[a^2y \mp x(x^2b^2 + y^2a^2 - a^2b^2)^{1/2}]}{x^2b^2 + y^2a^2}. \quad (\text{A5.1.14})$$

Это даёт следующие два выражения для $cost$:

$$(cost)_{1,2} = \frac{a[b^2x \pm y(x^2b^2 + y^2a^2 - a^2b^2)^{1/2}]}{x^2b^2 + y^2a^2}. \quad (\text{A5.1.15})$$

Теперь мы можем записать:

$$\tan\alpha_{1,2} = \frac{y - bsint}{x - acost}. \quad (\text{A5.1.16})$$

Подстановка (A5.1.14–A5.1.15) в (A5.1.16) даёт:

$$\tan\alpha_{1,2} = \frac{xy \mp (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)^{1/2}}{x^2 - a^2}. \quad (\text{A5.1.17})$$

Мы можем теперь вычислить интегралы:

$$\int_S \int \frac{dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{ab d\theta}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \pi b [F(\phi, k) - F(\psi, k)], \quad (\text{A5.1.18})$$

$$\int_S \int \frac{q dx_0 dy_0}{\bar{q} RZ_0} = \pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{abe^{2i\theta} d\theta}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi b \{ (2 - k^2) [F(\phi, k) - F(\psi, k)] - 2 [E(\phi, k) - E(\psi, k)] \\
&- 2i [(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} - (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2}] / k^2 \}.
\end{aligned} \tag{A5.1.19}$$

Здесь

$$\tan \phi = \cot \alpha_1 = \frac{xy + (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2)^{1/2}}{y^2 - b^2}. \tag{A5.1.20}$$

$$\tan \psi = \cot \alpha_2 = \frac{xy - (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2)^{1/2}}{y^2 - b^2}. \tag{A5.1.21}$$

В предельном случае круга, $b \rightarrow a$, $k \rightarrow 0$, и формулы (A5.1.18–A5.1.19) примут вид:

$$\int_S \int \frac{dx_0 dy_0}{RZ_0} = 2\pi a \sin^{-1} \frac{a}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \tag{A5.1.22}$$

$$\int_S \int \frac{q dx_0 dy_0}{\bar{q} RZ_0} = 2\pi a^2 \frac{(x^2 + y^2 - a^2)^{1/2}}{(x - iy)^2}. \tag{A5.1.23}$$

Более сложные интегралы могут быть вычислены тем же методом.

Вот некоторые дополнительные интегралы, где x и y расположены внутри области S .

$$\int_S \int \frac{x_0^2 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi b^3 \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{1 - k^2} \mathbf{E} - \mathbf{K} \right] + \pi b x^2 \frac{1}{k^4} \left[2\mathbf{K} - (2 + k^2) \mathbf{E} \right] + \pi b y^2 \frac{1}{k^4} \left[2\mathbf{E} - (2 - k^2) \mathbf{K} \right]$$

$$\int_S \int \frac{x_0 y_0 dx_0 dy_0}{RZ_0} = 2\pi b xy \frac{1 - k^2}{k^4} \left[\frac{2 - k^2}{1 - k^2} \mathbf{E} - 2\mathbf{K} \right]$$

$$\int_S \int \frac{y_0^2 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi b^3 \frac{1}{k^2} \left[\mathbf{K} - \mathbf{E} \right] + \pi b x^2 \frac{1 - k^2}{k^4} \left[2\mathbf{E} - (2 - k^2) \mathbf{K} \right]$$

$$+ \pi b y^2 \frac{1}{k^4} \left[2(1 - k^2)^2 \mathbf{K} - (2 - 3k^2) \mathbf{E} \right]$$

$$\int_S \int \frac{x_0^3 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi b^3 x \frac{1}{k^4} \left[\frac{2-k^2}{1-k^2} \mathbf{E} - 2\mathbf{K} \right] + \pi b xy^2 \frac{1}{k^6} \left[(-8+5k^2)\mathbf{K} + (8-k^2)\mathbf{E} \right] \\ + \pi b x^3 \frac{1}{3k^6} \left[(8-3k^2+k^4)\mathbf{K} - (8+k^2+2k^4)\mathbf{E} \right]$$

$$\int_S \int \frac{x_0^2 y_0 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi b^3 y \frac{1}{k^4} \left[(2-k^2)\mathbf{K} - 2\mathbf{E} \right] \\ + \pi b x^2 y \frac{1}{k^6} \left[(-8+9k^2-k^4)\mathbf{K} + (8-5k^2-k^4)\mathbf{E} \right] \\ + \pi b y^3 \frac{1}{3k^6} \left[(8-11k^2+3k^4)\mathbf{K} - (8-7k^2)\mathbf{E} \right]$$

$$\int_S \int \frac{x_0 y_0^2 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi b^3 x \frac{1}{k^4} \left[(2-k^2)\mathbf{K} - 2\mathbf{E} \right] \\ + \pi b xy^2 \frac{1}{k^6} \left[(8-15k^2+7k^4)\mathbf{K} + (-8+11k^2-2k^4)\mathbf{E} \right] \\ + \pi b x^3 \frac{1}{3k^6} \left[(8-9k^2+k^4)\mathbf{E} - (8-13k^2+5k^4)\mathbf{K} \right]$$

$$\int_S \int \frac{y_0^3 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi b^3 y \frac{1}{k^4} \left[(2-k^2)\mathbf{E} - 2(1-k^2)\mathbf{K} \right] \\ + \pi b y^3 \frac{1}{3k^6} \left[(8-17k^2+11k^4)\mathbf{E} + (-8+21k^2-19k^4+6k^6)\mathbf{K} \right] \\ + \pi b x^2 y \frac{1}{k^6} \left[(8-19k^2+14k^4-3k^6)\mathbf{K} - (8-15k^2+7k^4)\mathbf{E} \right]$$

$$\int_S \int \frac{x_0^4 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi b x^4 \frac{1}{12k^8} \left[(-48+8k^2-4k^4-6k^6)\mathbf{E} + (48-32k^2+5k^4+3k^6)\mathbf{K} \right]$$

$$\begin{aligned}
& +\pi b x^2 y^2 \frac{1}{2k^8} \left[(48-16k^2-k^4)E - (48-40k^2+4k^4)K \right] \\
& +\pi b y^4 \frac{1}{4k^8} \left[(16-16k^2+3k^4)K - (16-8k^2)E \right] \\
& +\pi b^3 x^2 \frac{1}{2k^6} \left[\frac{8-5k^2-k^4}{1-k^2} E - (8-k^2)K \right] + \pi b^3 y^2 \frac{1}{2k^6} \left[(8-3k^2)K - \frac{8-7k^2}{1-k^2} E \right] \\
& +\pi b^5 \frac{1}{4k^4(1-k^2)} \left[\frac{-2+4k^2}{1-k^2} E + (2-3k^2)K \right] \\
\int_S \int \frac{x_0^3 y_0^3 dx_0 dy_0}{RZ_0} &= \pi b x^3 y \frac{1}{3k^8} \left[(48-40k^2-2k^6)E - (1-k^2)(48-16k^2+k^4)K \right] \\
& +\pi b x y^3 \frac{1}{k^8} \left[(1-k^2)(16-8k^2)K - (16-16k^2+k^4)E \right] \\
& +\pi b^3 x y \frac{1}{k^6} \left[(8-5k^2)K - (8-k^2)E \right] \\
\int_S \int \frac{x_0^2 y_0^2 dx_0 dy_0}{RZ_0} &= \pi b x^4 \frac{(1-k^2)}{12k^8} \left[(48-16k^2-k^4)E - (48-40k^2+4k^4)K \right] \\
& +\pi b x^2 y^2 \frac{1}{2k^8} \left[(-48+72k^2-20k^4-2k^6)E + (1-k^2)(48-48k^2+5k^4)K \right] \\
& +\pi b y^4 \frac{1}{12k^8} \left[(48-80k^2+31k^4)E - (1-k^2)(48-56k^2+12k^4)K \right] \\
& +\pi b^3 x^2 \frac{1}{2k^6} \left[(8-7k^2+k^4)K - (8-3k^2)E \right] \\
& +\pi b^3 y^2 \frac{1}{2k^6} \left[(8-5k^2)E - (8-9k^2+2k^4)K \right] + \pi b^5 \frac{1}{4k^4} \left[\frac{2-k^2}{1-k^2} E - 2K \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{x_0 y_0^3 dx_0 dy_0}{RZ_0} &= \pi b x^3 y \frac{(1-k^2)}{k^8} \left[(1-k^2)(16-8k^2)K - (16-16k^2+k^4)E \right] \\
&+ \pi b x y^3 \frac{1}{3k^8} \left[(48-104k^2+64k^4-6k^6)E - (1-k^2)(48-80k^2+33k^4)K \right] \\
&+ \pi b^3 x y \frac{1}{k^6} \left[(8-7k^2)E - (1-k^2)(8-3k^2)K \right] \\
\int_S \frac{y_0^4 dx_0 dy_0}{RZ_0} &= \pi b x^4 \frac{(1-2k^2+k^4)}{4k^8} \left[(16-16k^2+3k^4)K - (16-8k^2)E \right] \\
&+ \pi b x^2 y^2 \frac{(1-k^2)}{2k^8} \left[(48-80k^2+31k^4)E - (1-k^2)(48-56k^2+12k^4)K \right] \\
&+ \pi b y^4 \frac{1}{12k} \left[(-48+136k^2-132k^4+50k^6)E + (1-k^2)(48-112k^2+85k^4-24k^6)K \right] \\
&+ \pi b^3 x^2 \frac{(1-k^2)}{2k^6} \left[(8-k^2)E - (8-5k^2)K \right] \\
&+ \pi b^3 y^2 \frac{1}{2k} \left[(-8+11k^2-2k^4)E + (1-k^2)(8-7k^2)K \right] + \pi b^5 \frac{1}{4k^4} \left[(2+k^2)K - (2+2k^2)E \right]
\end{aligned}$$

Вот случай где x и y расположены вне области S :

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{x_0 dx_0 dy_0}{RZ_0} &= \pi b x \frac{1}{k^2} \left[[F(\phi) - F(\psi)] - [E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
&+ \pi b x \left[\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right] + \pi b y \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{\Delta(\psi)} - \frac{1}{\Delta(\phi)} \right] \\
\int_S \frac{y_0 dx_0 dy_0}{RZ_0} &= \pi b y \frac{1}{k^2} \left[[E(\phi) - E(\psi)] - (1-k^2)[F(\phi) - F(\psi)] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\pi by \left[\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right] + \pi bx \frac{1-k^2}{k^2} \left[\frac{1}{\Delta(\psi)} - \frac{1}{\Delta(\phi)} \right] \\
 \int_S \int \frac{x_0^2 dx_0 dy_0}{RZ_0} = & \pi bx^2 \frac{1}{2k^4} \left[-(2+k^2)[E(\phi) - E(\psi)] + 2[F(\phi) - F(\psi)] \right] \\
 & + \pi bx^2 \frac{1}{2k^2} \left[(2+k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) - (1-k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) \right] \\
 & + \pi bxy \frac{1-k^2}{k^4} \left[\left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) - \frac{3-k^2}{1-k^2} \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) \right] \\
 & + \pi by^2 \frac{1}{2k^4} \left[2[E(\phi) - E(\psi)] - (2-k^2)[F(\phi) - F(\psi)] \right] \\
 & + \pi by^2 \frac{1}{2k^2} \left[-2 \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) + \frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right] \\
 & - \pi b^3 \frac{1}{2(1-k^2)} \left[\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right] \\
 \int_S \int \frac{x_0 y_0 dx_0 dy_0}{RZ_0} = & \pi bx^2 \frac{1-k^2}{2k^4} \left[-3 \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) + (1-k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) \right] \\
 & + \pi bxy \frac{1-k^2}{k^4} \left[\left(2 + \frac{k^2}{1-k^2} \right) [E(\phi) - E(\psi)] - 2[F(\phi) - F(\psi)] \right] \\
 & + \pi bxy \frac{1-k^2}{k^2} \left[\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} - \frac{2-k^2}{1-k^2} \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) \right] \\
 & + \pi by^2 \frac{1-k^2}{2k^4} \left[3 \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) - \frac{1}{\Delta^3(\phi)} + \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right] + \pi b^3 \frac{1}{2k^2} \left[\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right] \\
 \int_S \int \frac{y_0^2 dx_0 dy_0}{RZ_0} = & \pi bx^2 \frac{1-k^2}{2k^4} \left[2[E(\phi) - E(\psi)] - (2-k^2)[F(\phi) - F(\psi)] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi b x^2 \frac{1-k^2}{2k^2} \left[-2 \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) + (1-k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi b x y \frac{1-k^2}{k^4} \left[(k^2-1) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) + (3-2k^2) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi b y^2 \frac{1}{2k^4} \left[(3k^2-2)[E(\phi) - E(\psi)] + 2(1-k^2)^2[F(\phi) - F(\psi)] \right] \\
& + \pi b y^2 \frac{1}{2k^2} \left[(2-3k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) - (1-k^2) \frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right] \\
& - \pi b^3 \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right] \\
\int_S \int \frac{x_0^3 dx_0 dy_0}{R Z_0} & = \pi b x^3 \frac{1}{6k^6} \left[(8-3k^2+k^4)[F(\phi) - F(\psi)] - (8+k^2+2k^4)[E(\phi) - E(\psi)] \right] + \\
& + \pi b x^3 \frac{1}{6k^4} \left[(8+k^2+2k^4) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (-7+6k^2+k^4) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) + 3(1-k^2)^2 \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^5(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi b x^2 y \frac{1}{2k^6} \left[(9k^2-15) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (1-k^2)(10-3k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) - 3(1-k^2)^2 \left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)} - \frac{1}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi b x y^2 \frac{1}{2k^6} \left[(-8+5k^2)[F(\phi) - F(\psi)] - (8-k^2)[E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
& + \pi b x y^2 \frac{1}{2k^4(1-k^2)} \left[(-8+3k^2+2k^4) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (7-k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) - 3(1-k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^5(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi b y^3 \frac{1}{6k^6} \left[3(5 - 3k^2) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) + (10 - 8k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) + 3(1 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)} - \frac{1}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi x b^3 \frac{1}{2k^4(1 - k^2)} \left[-2[F(\phi) - F(\psi)] + (2 - k^2)[E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
& + \pi x b^3 \frac{1}{2k^2(1 - k^2)} \left[(-2 + k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) + (1 - k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi y b^3 \frac{1}{2k^4} \left[3 \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) - \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) \right] \\
\int_S \int \frac{x_0^2 y_0 dx_0 dy_0}{R Z_0} = & \pi b x^3 \frac{1}{6k^6} \left[-3(1 - k^2)(5 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) + \right. \\
& + (1 - k^2)^2(10 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) - 3(1 - k^2)^3 \left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)} - \frac{1}{\Delta^5(\psi)} \right) \Big] \\
& + \pi b x^2 y \frac{1}{2k^6} \left[-(8 - k^2)(1 - k^2)[F(\phi) - F(\psi)] + (8 - 5k^2 - k^4)[E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
& + \pi b x^2 y \frac{1}{2k^4} \left[(8 - 9k^2 + 3k^4) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (7 - k^2)(1 - k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) - 3(1 - k^2)^2 \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^5(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi b x y^2 \frac{1 - k^2}{2k^6} \left[(15 - 3k^2) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) - (10 - 6k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 3(1 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)} - \frac{1}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi b y^3 \frac{1}{6k^6} \left[(8 - 3k^2)(1 - k^2)[F(\phi) - F(\psi)] - (8 - 7k^2)[E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
& + \pi b y^3 \frac{1}{6k^4} \left[(8 - 7k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) - 7(1 - k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3(1 - k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^5(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^5(\psi)} \right) \Big] \\
& + \pi x b^3 \frac{1}{2k^4} \left[(3 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) - (1 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi y b^3 \frac{1}{2k^4} \left[(2 - k^2) [F(\phi) - F(\psi)] - 2[E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
& + \pi y b^3 \frac{1}{2k^2} \left[2 \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) - \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) \right] \\
& \int_S \int \frac{x_0 y_0^2 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi b x^3 \frac{1 - k^2}{6k^6} \left[-(8 - 5k^2) [F(\phi) - F(\psi)] + (8 - k^2) [E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
& + \pi b x^3 \frac{1 - k^2}{6k^4} \left[-(8 - k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) + 7(1 - k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) - 3(1 - k^2)^2 \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^5(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi b x^2 y \frac{1 - k^2}{2k^6} \left[(15 - 12k^2) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) - (1 - k^2)(10 - 4k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) + 3(1 - k^2)^2 \left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)} - \frac{1}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi b x y^2 \frac{1}{2k^6} \left[(8 - 7k^2)(1 - k^2) [F(\phi) - F(\psi)] + (-8 + 11k^2 - 2k^4) [E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
& + \pi b x y^2 \frac{1}{2k^4} \left[(8 - 11k^2 + 2k^4) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) - \right. \\
& \quad \left. - (7 - 5k^2)(1 - k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) + 3(1 - k^2)^2 \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^5(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
& + \pi b y^3 \frac{1 - k^2}{6k^6} \left[-3(5 - 4k^2) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) + (10 - 9k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) - 3(1 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)} - \frac{1}{\Delta^5(\psi)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \pi x b^3 \frac{1}{2k^4} \left[(2 - k^2)[F(\phi) - F(\psi)] - 2[E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
 & + \pi x b^3 \frac{1}{2k^2} \left[2 \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) - (1 - k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) \right] \\
 & + \pi y b^3 \frac{1}{2k^4} \left[-(3 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) + (1 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) \right] \\
 \int_S \int \frac{y_0^3 dx_0 dy_0}{R Z_0} = & \pi b x^3 \frac{(1 - k^2)^2}{6k^6} \left[3(5 - 2k^2) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) - (1 - k^2)(10 - 2k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) + 3(1 - k^2)^2 \left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)} - \frac{1}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
 & + \pi b x^2 y \frac{1 - k^2}{2k^6} \left[(8 - k^2)(1 - k^2)[F(\phi) - F(\psi)] - (8 - 7k^2)[E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
 & + \pi b x^2 y \frac{1 - k^2}{2k^4} \left[(8 - 7k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) - (7 - 3k^2)(1 - k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) \right. \\
 & \left. + 3(1 - k^2)^2 \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^5(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
 & + \pi b x y^2 \frac{(1 - k^2)^2}{2k^6} \left[-(15 - 6k^2) \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) + (10 - 7k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) - 3(1 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta^5(\phi)} - \frac{1}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
 & + \pi b y^3 \frac{1}{6k^6} \left[-(8 - 13k^2 + 6k^4)(1 - k^2)[F(\phi) - F(\psi)] + (8 - 17k^2 + 11k^4)[E(\phi) - E(\psi)] \right] \\
 & + \pi b y^3 \frac{1}{6k^4} \left[(-8 + 17k^2 - 11k^4) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) + (1 - k^2)(7 - 8k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) - \right. \\
 & \left. - 3(1 - k^2)^2 \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^5(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^5(\psi)} \right) \right] \\
 & + \pi x b^3 \frac{1 - k^2}{2k^4} \left[-3 \left(\frac{1}{\Delta(\phi)} - \frac{1}{\Delta(\psi)} \right) + (1 - k^2) \left(\frac{1}{\Delta^3(\phi)} - \frac{1}{\Delta^3(\psi)} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi y b^3 \frac{1}{2k^4} \left[-2(1-k^2)[F(\phi)-F(\psi)] + (2-k^2)[E(\phi)-E(\psi)] \right] \\
& + \pi y b^3 \frac{1}{2k^2} \left[-(2-k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} \right) + (1-k^2) \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta^3(\psi)} \right) \right]
\end{aligned}$$

В интегралах выше, сокращения $F(\phi)$, $E(\phi)$, $F(\psi)$, $E(\psi)$ были использованы для обозначения $F(\phi, k)$, $E(\phi, k)$, $F(\psi, k)$, $E(\psi, k)$ соответственно. $\Delta(\phi)$ обозначает

$$(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}$$

В случае круга радиуса a и x , y внутри области S , мы имеем:

$$\int_S \int \frac{x_0^2 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi^2 a \frac{1}{16} \left[4a^2 + 5x^2 - y^2 \right]$$

$$\int_S \int \frac{x_0 y_0 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi^2 a \frac{3}{8} xy$$

$$\int_S \int \frac{y_0^2 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi^2 a \frac{1}{16} \left[4a^2 - x^2 + 5y^2 \right]$$

$$\int_S \int \frac{x_0^3 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi^2 ax \frac{1}{32} \left[6a^2 + 7x^2 - 3y^2 \right]$$

$$\int_S \int \frac{x_0^2 y_0 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi^2 ay \frac{1}{32} \left[2a^2 + 9x^2 - y^2 \right]$$

$$\int_S \int \frac{x_0 y_0^2 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi^2 ax \frac{1}{32} \left[2a^2 - x^2 + 9y^2 \right]$$

$$\int_S \int \frac{y_0^3 dx_0 dy_0}{RZ_0} = \pi^2 ay \frac{1}{32} \left[6a^2 - 3x^2 + 7y^2 \right]$$

Так как русская литература даётся в обратном переводе с английского, заголовки статей могут быть неточны

Литература

А.Е. Андрейкив и В.В. Панасюк, Упругое равновесие тела, ослабленного системой круглых трещин, расположенных в одной плоскости. *Доклады АН СССР, Физика*, т. 16, 1971, стр. 255–256.

H. Bateman, A. Erdélyi, (Ed.), *Higher Transcendental Functions*. (3 Vols.). New York: McGraw-Hill, 1955.

E. Beltrami, Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche. *Mem. Accad. Sci. Inst. Bologna*, Ser. 4, Vol. 2, 1881, pp. 461-480.

H.A. Bethe, Theory of diffraction by small holes. *Physical Reviews*, Vol. 66, 1944, pp. 163-182.

Н.М. Бородачев и Л.А. Галин, Контактная задача для штампа с узкой прямоугольной базой. *Прикладная Математика и Механика (ПММ)*, т. 38, 1974, стр. 108–113.

I.W. Busbridge, Dual integral equations. *London Mathematical Society. Proceedings.*, Ser. 2, Vol. 44, 1938, pp. 115-129.

W.T. Chen, Some aspects of a flat elliptical crack under shear stress. *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 45, 1966, p.213-223.

Г.П. Черепанов, *Механика хрупкого разрушения*. Наука, Москва, 1974.

S.B. Cohn, The electric polarizability of apertures of arbitrary shape. *Proc. of the IRE*, Vol. 40, 1952, pp. 1069-1071.

W.D. Collins, Some coplanar punch and crack problems in three-dimensional elastostatics. *Proc. Roy. Soc., Series A*, Vol. 274, 1963, pp. 507-528.

W.D. Collins, Some axially symmetric stress distributions in elastic solids containing penny-shaped cracks. I. Cracks in an infinite solid and a thick plate. *Proc. Roy. Soc., Series A*, Vol. 266, 1962, pp. 359-386.

E.T. Copson, On the problem of the electrified disk. *Edinburgh Mathematical Society. Proceedings.*, Ser. 2, Vol. 8, 1947, pp. 14-19.

H.A. Elliott, Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic

crystals. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 44, 1948, pp. 522-533.

H.A. Elliott, Axial symmetric stress distributions in aeolotropic hexagonal crystals. The problem of the plane and related problems. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 45, 1949, pp. 621-630.

V.I. Fabrikant, Close interaction of coplanar circular cracks under shear loading. *Computational Mechanics*, Vol. 4, 1989, pp. 181-197.

V.I. Fabrikant, Potential of several arbitrarily located discs. *Journal of the Australian Mathematical Society, Series B*, Vol. 29, 1988a, pp. 342-351.

V.I. Fabrikant, Green's functions for a penny-shaped crack under normal loading. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 30, 1988b, pp. 87-104.

V.I. Fabrikant, Sound penetration through an arbitrarily shaped aperture in a soft screen: Analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 121, 1988d, pp. 1-12.

V.I. Fabrikant, Penny-shaped crack revisited: Closed form solutions. *Philosophical Magazine A*, Vol. 56, 1987a, pp. 191-207.

V.I. Fabrikant, Flat crack of arbitrary shape in an elastic space. *Philosophical Magazine A*, Vol. 56, 1987b, pp. 175-189.

V.I. Fabrikant, Electrical polarizability of small apertures: Analytical approach. *International Journal of Electronics*, Vol. 62, 1987c, pp. 533-545.

V.I. Fabrikant, Mixed problems of Potential Theory in spherical coordinates. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 67, 1987d, pp. 507-518.

V.I. Fabrikant, Electrostatic problem of several arbitrarily charged unequal coaxial discs. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 18, 1987e, pp. 129-147.

V.I. Fabrikant, The stress intensity factor for an external elliptical crack. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 23, 1987f, pp. 465-467.

V.I. Fabrikant, Close interaction of coplanar circular cracks in an elastic medium. *Acta Mechanica*, Vol. 67, 1987g, pp. 39-59.

V.I. Fabrikant, Frictionless elastic contact problem for a curved rigid punch of arbitrary shape. *Acta Mechanica*, Vol. 67, 1987h, pp. 1-25.

V.I. Fabrikant, Closed form solution to some mixed boundary value problems for a charged sphere. *Journal of the Australian Mathematical Society, Series B*, Vol. 28, 1987i, pp. 296-309.

V.I. Fabrikant, Magnetic polarizability of small apertures: Analytical approach. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 20, 1987j, pp. 323-338.

V.I. Fabrikant, Diffusion through perforated membranes. *Journal of Applied Physics*, Vol. 61, 1987k, pp. 813-816.

V.I. Fabrikant, Flat punch of arbitrary shape on an elastic half-space. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 24, 1986a, pp. 1731-1740.

V.I. Fabrikant, Sound transmission through an arbitrarily shaped aperture in a rigid screen: Analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 111, 1986b, pp. 489-498.

V.I. Fabrikant, Inclined flat punch of arbitrary shape on an elastic half-space. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, 1986c, pp. 798-806.

V.I. Fabrikant, Sound penetration through an arbitrarily shaped aperture in a rigid screen: Analytical determination of the quadratic terms in low-frequency expansion. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 50, 1986d, pp. 1438-1446.

V.I. Fabrikant, Computer evaluation of singular integrals and their applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986e, pp. 1439-1453.

V.I. Fabrikant, Exact solutions to some external mixed problems in potential theory. *Aplikace Matematiky*, Vol. 31, 1986f, pp. 224-246.

V.I. Fabrikant, Inverse crack problem in elasticity. *Acta Mechanica*, Vol. 61, 1986g, pp. 29-36.

V.I. Fabrikant, A new approach to some problems in Potential Theory. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 66, 1986h, pp. 363-368.

V.I. Fabrikant, Several elliptical punches on an elastic half-space. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, 1986i, pp. 390-394.

V.I. Fabrikant, Four types of exact solutions to the problem of an axisymmetric punch bonded to a transversely isotropic half-space. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 24, 1986j, pp. 785-801.

- V.I. Fabrikant, On the capacity of flat laminae. *Electromagnetics*, Vol. 6, 1986k, pp. 117-128.
- V.I. Fabrikant, On the potential flow through membranes. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 36, 1985a, pp. 616-623.
- V.I. Fabrikant, External crack in non-homogeneous elasticity. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 22, #5, pp. 855-858, 1985b.
- В.И. Фабрикант, Замкнутое решение одного интегрального уравнения. *Известия Академии Наук АрмССР, Механика*, No. 2, стр. 16–19, 1976.
- В.И. Фабрикант, Внутренняя основная смешанная задача для трансверсально изотропного полупространства. *Механика Твёрдого Тела*, No. 1, стр. 27–33, 1975
- В.И. Фабрикант, Пространственная контактная задача для шероховатого штампа. *Прикладная Механика*, Том. 10, No. 7, стр. 106–109, 1974a,
- В.И. Фабрикант, Точное решение основной внешней смешанной задачи. *Прикладная Математика и Механика*, т. 38, No. 3, стр. 534–538, 1974б.
- В.И. Фабрикант, Вешняя осесимметричная смешанная задача для трансверсально изотропного полупространства. *Прикладная Математика и Механика*, т. 36, стр. 947–951, 1972.
- В.И. Фабрикант, Осесимметричная задача о штампе на трансверсально изотропном полупространстве. *Механика Твёрдого Тела*, No. 6, стр. 141–146, 1971a.
- В.И. Фабрикант, Решение неосесимметричной граничной задачи с круговой линией раздела граничных условий для трансверсально изотропного полупространства. *Известия Академии Наук УзССР, Серия Технических Наук*, No. 3, стр. 93–96, 1971б.
- В.И. Фабрикант, Одна неосесимметричная смешанная задача для трансверсально изотропного полупространства. *Прикладная Механика*, т. 7, No 3, стр. 36–40, 1971ц,
- В.И. Фабрикант, Влияние сдвигающей силы и опрокидывающего момента на цилиндрический штамп сцеплённый с трансверсально изотропным полупространством. *Прикладная Математика и Механика*, т. 35, No. 1, стр. 178–182, 1971д,

В.И. Фабрикант, Замкнутое решение двумерного интегрального уравнения. *Известия Высших Учебных Заведений, Математика*, No. 2, стр. 102–104, 1971e.

В.И. Фабрикант, Влияние сосредоточенной силы на трансверсально изотропное упругое тело. *Известия Высших Учебных Заведений, Машиностроение* No. 3, 1970, стр. 9–12.

Р.Ф. Фихманас и П.Ш. Фридберг, Теория диффракции малыми отверстиями. Вычисление верхних и нижних границ для коэффициентов поляризуемости. *Радиотехника и Электрон. Физ.*, том. 18, 1973, стр. 824–829.

W.S. Fu and L.M. Keer, Coplanar circular cracks under shear loading. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 7, 1969, pp. 361-372.

Л.А. Галин, *Контактные задачи в теории упругости*, Гостехтеориздат, 1953.

И.С. Градштейн и И.М. Рыжик, *Таблицы Интегралов, Рядов и Произведений*. Москва, 1963.

E.W. Hobson, On Green's Function for a Circular Disc, with applications to Electrostatic Problems. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, Vol. 18, 1900, pp. 277-291.

G.W.O. Howe, The capacity of rectangular plates and a suggested formula for the capacity of aerials. *The Radio Review*, Vol. 1, Oct. 1919 – June 1920, pp. 710-714.

N.I. Ioakimidis, Upper bounds for the stress intensity factors along the boundaries of interacting coplanar cracks in three-dimensional elasticity. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 16, 1982, pp. 821-826.

J.J. Kalker, On elastic line contact. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, 1972, pp. 1125-1132.

А.А. Капшивый и Г.Ф. Маслюк, Решение осесимметричной смешанной задачи из теории упругости для полупространства методом p –аналитических функций. *Прикладная Механика*, том. 3, No. 7, 1967, стр. 21–27,

M.K. Kassir and G. Sih, Three-dimensional stresses around elliptical cracks in transversely isotropic solids. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 1, 1968, pp. 327-345.

M.K. Kassir and G. Sih, *Three-dimensional Crack Problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1975.

I. Kobayashi, Das electrostatische Potential um zwei auf derselben Ebene liegende und sich nicht schneidende gleichgroße Kreisscheiben. *Sc. Rep. Tôhoku Imp. Univ.*, Vol. 27, 1939, pp. 365-391.

М.Я. Леонов, Общая задача о круглом штампе придавленном к упругому полупространству. *Прикладная Математика и Механика*, том. 17, 1953, стр. 87—98.

А.И. Лурье, *Пространственные задачи теории упругости*. Москва: 1955.

E.N. Mastrojannis and T. Mura, On the problem of two coplanar cracks inside an infinite isotropic elastic solid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1983, pp. 27-35.

F. De Meulenaere and J. Van Bladel, Polarizability of some small apertures. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. **AP-25**, 1977, pp. 198-205.

R.D. Mindlin, Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics.*, 1949, Vol. 16, pp. 259-268.

В.И. Моссаковский, Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. *Прикладная Математика и Механика*, т. 18, 1954, стр. 187—196.

В.И. Моссаковский, Взаимоотношение между силой и осадкой для плоского штампа почти кругового поперечного сечения. *Гидроаэромеханика и Теория Упругости*, No. 14, Изд. Днепропетровск. Унив., 1972.

В.И. Моссаковский, Н.Е. Качаловская, и С.С. Голикова, *Контактные задачи в математической теории упругости*, "Наукова Думка", Киев, 1985.

Н.И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*. Москва 1946.

B. Noble, The numerical solution of the singular integral equation for the charge distribution on a flat rectangular lamina. *Sympos. Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-differential Equations*. (Proc. Rome Sympos. 20-24 September 1960) Birkhauser, Berlin-Stuttgart, 1960.

E.E. Okon and R.F. Harrington, The polarizabilities of electrically small apertures of arbitrary shape. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Vol. **EMC-23**, 1981, pp.359-366.

E.E. Okon and R.F. Harrington, The capacitance of discs of arbitrary shape. *Tech. Rep. No.10, Contract No. N00014-76-C-0225*. US Dep. Navy, Office

of Naval Research, Rep. No. TR-79-3, April, 1970.

В.В. Панасюк, М.М. Стадник, и В.П. Силованюк, *Концентрация напряжений в трёхмерных телах с тонкими включениями*. Наукова Думка, Киев, 1986.

G.Pólya and G.Szegö, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton University Press, 1951.

Г.Я. Попов, Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного полупространства в присутствии сцепления. *Прикладная Математика и Механика*, т. 37, 1973, стр. 1109–1116,

Н.А. Ростовцев, Интегральное уравнение, встречающееся в задаче жёсткого основания на неоднородной почве. *Прикладная Математика и Механика*, т. 25, 1961, стр. 164–168,

Н.А. Ростовцев, О некотором решении интегрального уравнения в теории линейно деформируемых оснований. *Прикладная Математика и Механика*, т. 28, 1964, стр. 111–127.

В.Л. Рвачев и В.С. Проценко, *Контактные задачи теории упругости для неклассических областей*. Киев, Наукова Думка, 1977.

G.C. Sih and H. Liebowitz, Mathematical theories of brittle fracture. *Fracture*, Vol. 2. Academic Press, New York, 1968.

R. De Smedt, Low-frequency Penetration through Apertures: Results for the Integral Equations. *Laboratorium voor Electromagnetisme en Acustica, Internal report 79-9*, University of Ghent, 1979.

I.N. Sneddon, *Fourier Transforms*. McGraw-Hill, New York, 1951.

I.N. Sneddon, A note on the problem of the penny-shaped crack. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 61, 1965, pp. 609-611.

I.N. Sneddon, *Mixed Boundary Value Problems in Potential, Theory*. Amsterdam: North Holland, 1966.

L. Solomon, Upon the geometrical punch-penetration rigidity. *Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e nat.*, Vol. 36, 1964a, pp. 832-835.

L. Solomon, Une solution approchée du problème du poinçon rigide à base plane bornée convexe non elliptique. *Compt. Rend. Acad. Sc. Paris*, Vol. 258, 1964b, pp. 64-66.

Я.С. Уфлянд, Контактная задача теории упругости для штампа круглого в плане, в присутствии сцепления. *Прикладная Математика и Механика*, т. 20, 1956, стр. 578—587.

Я.С. Уфлянд, *Интегральные преобразования в теории упругости*. Наука, Ленинград, 1967.

Я.С. Уфлянд, *Метод дуальных уравнений в задачах математической Физики*. Академия Наук СССР, "Наука", Ленинград, 1977.

J. Weaver, Three-dimensional crack analysis. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, 1977, pp. 321-330.

H. Weber, Ueber die Besselschen Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Strome. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 75, 1873, pp. 75-105.

R.A. Westmann, Asymmetric mixed boundary-value problem of the elastic half-space. *ASME Journal of Applied Mechanics*., Vol. 32, 1965, pp. 411-417.

J.R. Willis, The distribution of stress in anisotropic elastic body containing an exterior crack. *International Journal of Engineering Science*, 1970, Vol. 8, No. 7, pp. 559-574.

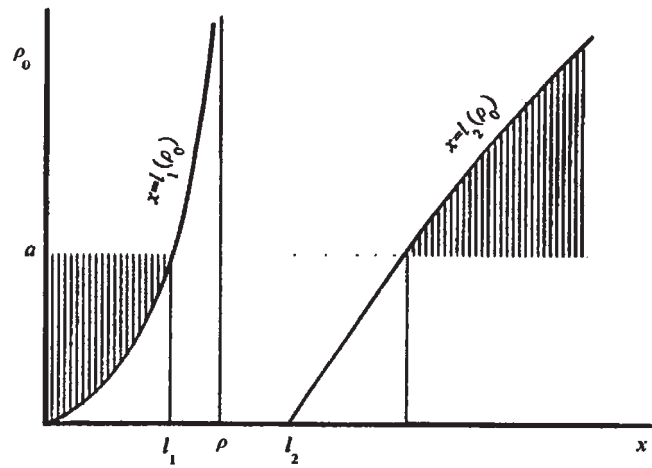


Fig. 1.4.1 Domains of integration

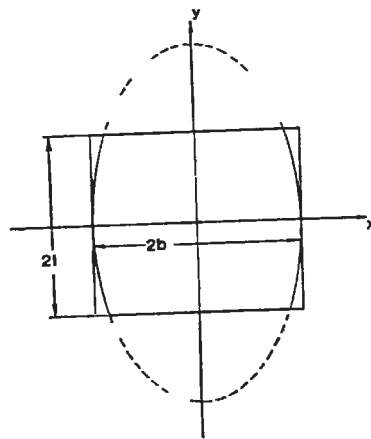


Fig. 5 6 1 The geometry pertinent to the rigid roller problem

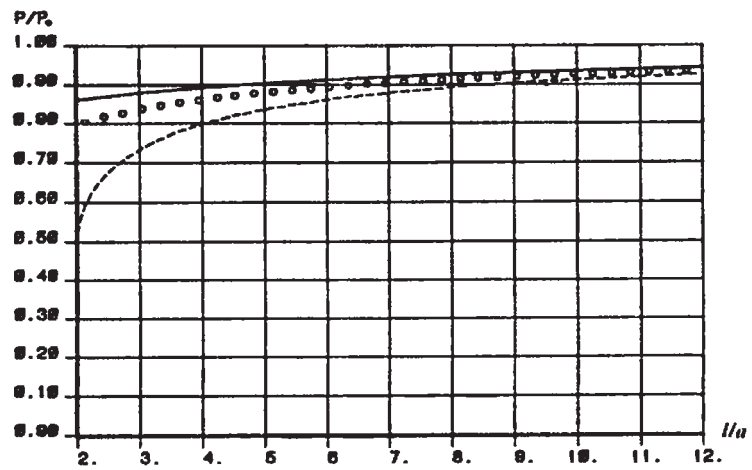


Fig 5.9.1. Interaction between two elliptical punches.

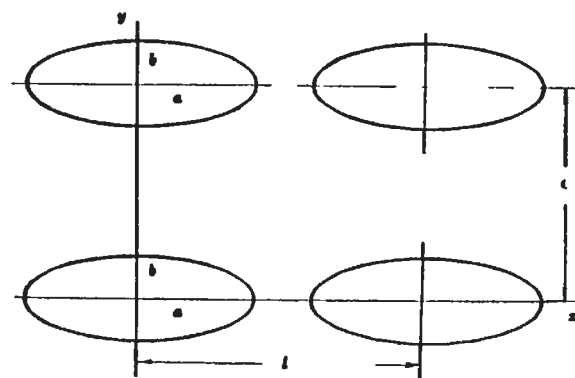


Fig 5.9.2 Geometry of four punches interaction

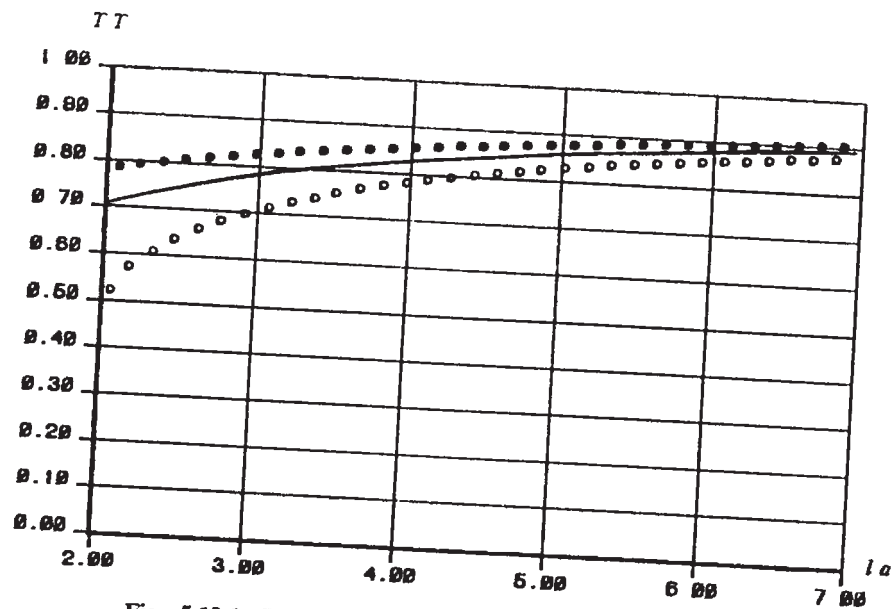


Fig. 5.10 1. Interaction between two elliptical punches, with shifting load in the Ox direction

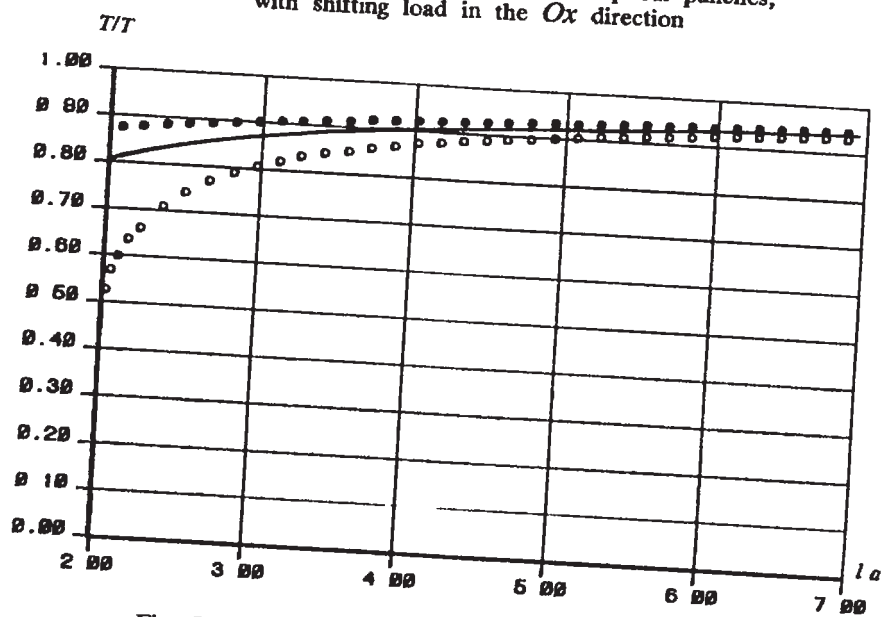


Fig. 5.10 2. Interaction between two elliptical punches with shifting load in the Oy direction