

МЕТОД ГЕЛЬМГОЛЬЦА–КИРХГОФА (ГК-метод)*

А.С. Демидов†

"Ich will hier . . . ein Beispiel zu geben für eine Methode, durch welche einige Probleme der Lehre von den Potential-functionen gelöst werden können, die bisher Schwierigkeiten machten.

H. Helmholtz [145]

Я хотел бы здесь . . . дать пример применения этого метода, позволяющего решать некоторые задачи о потенциальных функциях, ранее представлявшие затруднения." Г. Гельмгольц

Аннотация. ГК-метод базируется на двух идеях Гельмгольца и Кирхгофа. Более 100 лет потенциал этих идей был скован техникой конформных отображений плоскости годографа. Показывается, что освобожденный от оков этой техники, ГК-метод имеет весьма широкую область применения. Это иллюстрируется на примере семи различных тем. Представлены теоремы существования и несуществования, единственности и неединственности, а также некоторые явные конструкции и формулы, задающие решения двумерных задач со свободной границей для гармонических функций. Среди полученных результатов: формулы, выражающие зависимость от граничного управления силы лобового сопротивления при обтекании тела нестационарным потоком с вихревыми особенностями; экспоненциально точные высокочастотные асимптотики; оценка КПД турбин в открытом потоке; теоремы, относящиеся к прямой и обратной задачам о равновесии плазмы в токамаке и пр.

Содержание

Введение..... 2

§ 1. Явная формула, выражающая зависимость лобового сопротивления от геометрии препятствия при обтекании его плоским нестационарным потенциальным потоком с вихревыми особенностями 18

§ 2. Прямая задача о равновесии плазмы в токамаке..... 26

§ 3. Конформное σ -изометрическое отображение заданных аналитических кривых и векторные поля, определяющие экспоненциально точные асимптотики решений двумерного уравнения Лапласа, быстро осциллирующих на границе..... 41

§ 4. Обратная задача о равновесии плазмы в токамаке..... 48

§ 5. Задача Стокса–Лейбензонана..... 53

§ 6. Плоские течения с минимальным отношением экстремальных значений давления на свободной границе..... 62

§ 7. Обтекание по схеме Кирхгофа криволинейного частично абсорбируемого препятствия и оценка максимально возможного КПД турбин в открытом потоке и, в частности, турбины Горлова 65

Литература..... 71

Особое замечание..... 81

*Частично поддержано РФФИ (гранты 05-01-22001, 07-01-00500)

†Мехмат МГУ; asd@math.msu.su

1. Точные математические результаты, о которых пойдет речь в этой статье¹, – это теоремы существования и несуществования, единственности и неединственности, а также некоторые явные конструкции и формулы, задающие решения двумерных задач со *свободной границей*² для гармонических функций.

Первой работой в этом направлении была статья Гельмгольца [145] о форме плоской струи, вытекающей из щели, прорезанной в основании полуплоскости. За ней последовала развивающая идеи Гельмгольца публикация Кирхгофа [151] об обтекании препятствия плоским потоком³. Эти работы были инициированы, в частности, желанием разрешить так называемый *парадокс Эйлера–Даламбера* о нулевой силе сопротивления при обтекании препятствия идеальной жидкостью⁴. В задаче Гельмгольца о форме струи таким препятствием к плоскому потоку служила прямая с выброшенным отрезком-щелью, через которую истекала струя. У Кирхгофа препятствием был сам этот отрезок, огибаемый набегающим на него плоским потоком.

В этих работах Гельмгольц и Кирхгоф выдвинули несколько важных идей. Две из них, по существу, и составляют ГК-метод. Эти идеи формулируются в следующем пункте⁵.

Третья идея, принадлежащая Кирхгофу, носит вспомогательный (технический) характер. Она связана с так называемой *плоскостью годографа* (от гр. hodos — путь), являющейся множеством на комплексной плоскости, которое кончик вектора комплексно-сопряженной скорости

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

проходит, двигаясь по пути, определяемому точкой (x, y) , пробегающей всю искомую область течения.

Особое внимание заслуживает выдвинутая в [145] идея Гельмгольца о допущении разрывов скорости течений. По существу, речь впервые идет не об отдельном обобщенном (имеющем скачок производных) решении дифференциального уравнения (что было предметом знаменитого спора Даламбера–Эйлера–Д.Бернулли–Лагранжа о звучащей струне [47, 72]), а о *пространстве* обобщенных решений. Само название статьи Гельмгольца [145] “О прерывном движении жидкости”, т.е. о течении, в котором скорость может иметь разрыв, отражает этот факт. В задаче об истечении струи (из верхней полуплоскости в нижнюю через отверстие в разделяющих их прямой), Гельмгольц ввел априори искомую (не заданную заранее) зону застоя, заполненную неподвижной жидкостью. Эта зона дополняет в нижней полуплоскости область, занимаемую вытекающей струей. Тем самым, возникает разрыв скорости на искомой границе струи, которая отделяет струю от зоны застоя. Введение такой зоны неподвижной жидкости позволяет выписать компенсирующее условие на свободу

¹Эти результаты ограничены рамками анализа функций одной комплексной переменной. Однако, надеюсь, они смогут послужить точками опоры как в “болоте физики”, так и при тестировании численных алгоритмов для более сложных (например, трехмерных) задач.

²Этот термин ввел Кирхгоф [151]. Обычно под *свободной границей* понимается заранее не заданная граница (или часть границы) искомого многообразия, априорная свобода выбора которого ограничена некоторым компенсирующим условием на искомую функцию. Эта функция должна быть определена на искомом многообразии как решение той или иной, например, дифференциальной задачи, которая была бы корректной без упомянутого компенсирующего условия, если бы многообразие было фиксированным.

³Решение этих задач изложено во многих учебниках и монографиях, в том числе в [9, 10, 59, 158].

⁴В 1768 году в 5-ом томе “Математических заметок” Даламбера (D’Alembert J., Opuscles mathématiques, V. 5) появилась работа, в которой было доказано отсутствие силы сопротивления при обтекании симметричного тела потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Этот результат, абсурдный для *реальных* жидкостей, верен при обтекании идеальной жидкостью тела любой формы (это доказывается почти в любом учебнике гидродинамики). Рассуждения Даламбера, основанные на симметрии, еще ранее в 1745 году применил Эйлер в его работе по баллистике (поэтому и говорят: парадокс Эйлера–Даламбера).

⁵Они формулируются чуть позже по двум причинам: 1) надо предварительно обозначить круг задач, где эти идеи могут быть плодотворны; 2) надо дать немного времени читателю поразмыслить над обозначенными выше задачами об обтекании, чтобы он смог по достоинству оценить “простоту” базовых идей ГК-метода.

выбора искомой границы. Действительно, в силу так называемого интеграла Бернулли

$$\frac{1}{2}|\vec{V}(x, y)|^2 + p(x, y) = \text{const},$$

устанавливающего связь между давлением p и модулем скорости $|\vec{V}|$ течения, давление постоянно в зоне застоя, а потому и на свободной границе. Это дополнительное условие на искомой границе струи ограничивает (компенсирует) свободу ее выбора и потому позволяет ее найти.

Кирхгоф, следуя идее Гельмгольца [145] о пространстве обобщенных потенциальных течений, имеющих разрыв скорости, рассмотрел схему течения (называемую теперь схемой Кирхгофа), в которой за пластиной-препятствием возникает (простирающаяся в бесконечность) зона застоя. Опираясь на две базовые идеи ГК-метода и применив технику конформных преобразований плоскости годографа, Кирхгоф показал, что в предложенной им схеме течения лобовое сопротивление отлично от нуля. Тем самым, парадокс Эйлера–Даламбера получил разрешение. Другие схемы обтекания (в рамках потенциальных течений с разрывом скорости), которые лучше соответствовали экспериментальным данным, были рассмотрены в дальнейшем последователями Кирхгофа. Среди них были Д.П. Рябушинский [171], Д.А. Эфрос [95], Д. Гилбарг и Дж. Серрин [25], М. Тулин [185] и многие др. Существенный вклад в развитие идей Гельмгольца и Кирхгофа внесли Н.Е. Жуковский [51] и С.А. Чаплыгин [92]. Знаменательными вехами, связанными с ГК-методом, стали работы Леви-Чевита [152], Вилля [188], А.И. Некрасова [80], А. Вайнштейна [189], Лере [155], М.А. Лаврентьева [64], П.Я. Полубариновой-Кочиной [60] и многих других авторов (см., в частности, монографии [9, 10, 19, 26, 29] и цитируемую там литературу).

Две основные цели обзора:

- 1) объяснить, что такое ГК-метод;
- 2) обозначить широту его возможностей.

Объяснение сводится к высвобождению сути метода от скрывающих ее технических наслоений.

Структурная особенность статьи такова: большая часть Введения может рассматриваться как самостоятельное популярное изложение сути ГК-метода. Она иллюстрируется применительно к наиболее простым задачам, относящимся к проблематике равновесных плазменных конфигураций. Остальные темы обзора лишь едва обозначены во Введении. Основной текст, представленный в семи параграфах, я старался изложить, не обременяя читателя более общими и/или технически трудными результатами. Относительно них сделаны библиографические указания. В конце каждого параграфа приведены открытые вопросы.

В статье немало примечаний в виде сносок. Их можно пропустить без особого ущерба для понимания основного текста, поскольку в них даны либо краткие примечания исторического характера, либо разъяснения почти очевидных фактов, либо, наоборот, замечания, адресованные специалисту.

В тексте имеются также пассажи, набранные петитом. Хотя они имеют вспомогательный характер, я бы не сказал, что их следует игнорировать. Это относится, прежде всего, к Особому замечанию, помещенному в конце статьи.

2. Если абстрагироваться от упомянутой выше конкретной задачи, рассмотренной Гельмгольцем⁶ в [145], то зарождающийся в этой работе ГК-метод относится (в гидродинамической интерпретации) к плоскому течению несжимаемой жидкости с таким комплексным потенциалом $w = u + iv$, для которого выполнено

Условие Гельмгольца. Отображение

$$w : \Omega \ni z = x + iy \mapsto w(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in Q \quad (0.1)$$

однолистно отображает *искомую* (со свободной границей) область течения Ω на односвязную **фиксированную** область Q .

Это есть характерное свойство тех задач, назовем их **ГК-задачами**, которые Гельмгольц предложил вниманию исследователей⁷.

⁶Гельмгольц подчеркивал [145], что он дает лишь “набросок математической обработки” задач нового типа.

⁷На самом деле, ГК-метод применим и в ситуациях, когда область Q в (0.1) может быть многосвязной и/или с заранее не заданной границей (см., в частности, §3 и §4).

Следует сказать, что сам Гельмгольц не имел времени для разработки предложенной им темы. Его ум работал во многих направлениях: физиологическая оптика и акустика, электродинамика и термодинамика, закон сохранения энергии и принцип наименьшего действия, теория вихрей и т.д. Значимость его работ в этих направлениях была столь велика, что постоянно цитируемая здесь работа [145] представлялась на их фоне как бы незначительной заметкой (биографы упоминают о ней вскользь, работа [145] не вошла в собрание [146] его сочинений). Примечательно одно обстоятельство, которое в какой-то мере явилось причиной необычайной широты научных исследований Гельмгольца. О нем Гельмгольц поведал в застольной речи на праздновании своего 70-летия (перевод по книге А.Г. Столетова, Общедоступные лекции и речи, стр.188, Москва, 1902): “Наступало время перехода в университет. В ту пору физика еще не считалась в числе хлебных занятий. Мои родители были вынуждены жить крайне бережливо. Отец объявил, что может помочь мне в изучении физики не иначе как под условием, что я возьму и медицину в придачу. Я был ничуть не против того, чтобы изучать живую природу, и согласился без затруднений”.

Проверка выполнения условия Гельмгольца осуществляется, естественно, при априорном предположении существования комплексного потенциала $w = u + iv$. Затем, ГК-методом (что это такое объяснено чуть ниже) выводятся необходимые условия существования решения задачи. После этого, несколько суживая необходимые условия, доказываются теоремы существования, дополненные порой присущими ГК-методу явными конструкциями или формулами,

либо, напротив, выясняется, что в данной задаче установленные ГК-методом необходимые условия не реализуются (т.е. доказываются теоремы несуществования).

Проверим, что к ГК-задаче сводится следующая В-задача⁸, которая относится к проблеме управляемого термоядерного синтеза. С изучения В-задачи собственно и начались исследования, представленные в этом обзоре.

В-задача формулируется так. *Заданы число $M > 0$ и плоская спрямляемая кривая Γ , “гитарообразной” формы (см. рис. 1), ограничивающая односвязную область \mathfrak{S} , симметричную относительно прямоугольной системы координат x и y . Требуется выяснить существует ли в \mathfrak{S} две спрямляемые кривые, а именно: кривая γ_1 и кривая γ_2 , которые симметричны относительно координатных осей x и y , причем*

во-первых, γ_1 гомеоморфна окружности, а $\gamma_2 = \gamma_2^+ \cup \gamma_2^-$ гомеоморфна двум окружностям (т.е. γ_k ограничивает область ω_k , состоящую из k односвязных компонент связности);

во-вторых, как в области $\Omega_1 = \mathfrak{S} \setminus (\omega_1 \cup \gamma_1)$, так и в области $\Omega_2 = \mathfrak{S} \setminus (\omega_2 \cup \gamma_2)$, т.е. в областях лежащих между кривой Γ и кривыми $\gamma = \gamma_k$ при $k = 1$ и $k = 2$ соответственно, существует определенная в Ω_k гармоническая функция⁹ $u = u_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая таким граничным условиям¹⁰

$$1) \text{ на } \underline{\Gamma}: u = M; \quad 2) \text{ на } \underline{\gamma}: u = 0, \quad \text{а} \quad \partial u / \partial \nu = I / |\gamma|, \quad (0.2)$$

где $|\gamma|$ – не заданная заранее длина искомой кривой γ , а I – фиксированная положительная константа (при наличии двух осей симметрии удобно взять $I = 4$).

В-задача была поставлена в связи с высказанной в начале 70-х годов гипотезой о возможности увеличить плотность высокотемпературной плазмы в спецустановках посредством поджата плазмы в процессе деформации (за счет управляющих токов) контура Γ в гитарообразную кривую. Но останется ли плазма в центральной части такой “гитары”? А что если равновесная конфигурация плазмы, расположенная в центральной части “гитары”, — неустойчива и есть другая (более устойчивая) ее равновесная конфигурация, например, состоящая из двух компонент связности¹¹? В связи с этим, Е.П. Велихов предложил своему ученику В.А. Намиоту ответить на следующий вопрос: существуют ли при одинаковых внешних условиях¹² равновесные плазменные конфигурации,

⁸Эта Вegin-задача идет от Велихова. Физическая интерпретация полученного решения этой задачи дана чуть ниже.

⁹Подчеркнем, что априори неясен не только вопрос существования, но и вопрос единственности каждой из этих кривых γ_1 , γ_2 и, соответственно, функций u_1 , u_2 . Ниже будут приведены примеры несуществования и неединственности. Это одна из причин, почему в формулах (0.2) опущен индекс k , который должен относиться к функции $u = u_k$, соответствующей кривой $\gamma = \gamma_k$. Другая причина в желании не перегружать формулы индексами.

¹⁰Здесь $\partial / \partial \nu$ – дифференцирование вдоль внешней единичной нормали ν . В силу спрямляемости кривой γ , нормаль к ней определена почти всюду. Условие (0.2) подразумевает, конечно, что функция u непрерывна вплоть до границы $\partial \Omega_k = \gamma_k \cup \Gamma$ области Ω_k ; в этом случае нормальная производная $\partial u / \partial \nu$ определена на $\gamma = \gamma_k$ почти всюду.

¹¹Как показано в [120] (см. также §2), в некоторых случаях существуют кривые γ , которые несимметричны относительно одной из осей симметрии контура Γ (например имеются равновесные конфигурации плазмы, которые расположена лишь в одной из “половинок” гитары).

¹²Это означает, что

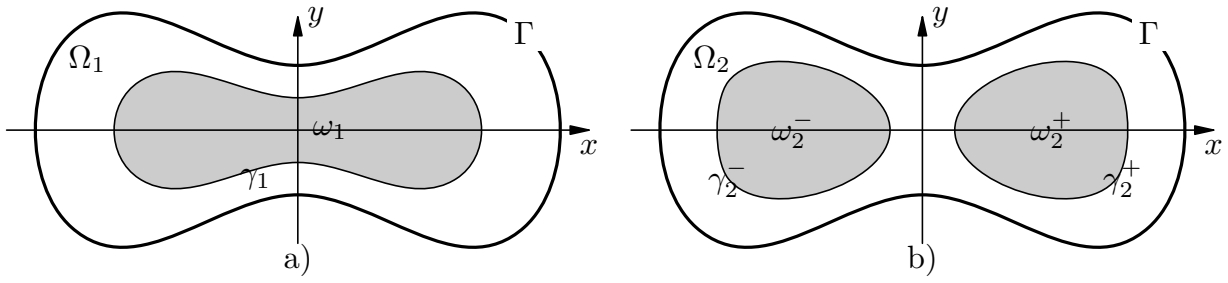


Рис. 1. Область Ω_k (для $k = 1$ и $k = 2$) заключена между заданной кривой Γ и лежащей внутри нее искомой кривой γ_k : а) кривая γ_1 ограничивает односвязную область ω_1 ; б) кривая $\gamma_2 = \gamma_2^+ \cup \gamma_2^-$ ограничивает область $\omega_2 = \omega_2^+ \cup \omega_2^-$, состоящую из двух односвязных компонент связности.

ограниченные кривыми γ , одна из которых гомеоморфна окружности, а другая объединению двух окружностей.

Для физиков положительный ответ на заданный вопрос означал бы, что идея удержать плазму в центральной части гитарообразной конфигурации Γ несостоятельна: равновесная плазма может рассыпаться на две компоненты связности. Весной 1972 г. Намиот изложил вопрос Велихова на семинаре В.Ф. Дьяченко в МГУ. Участником этого семинара был автор этих строк. Он и доложил в ноябре 1973 г. положительное решение этого вопроса на семинаре Б.Б. Кадомцева и М.А. Леонтовича в Курчатовском институте. По предложению В.Д. Шафранова изложение доклада было опубликовано [119] (см. также резюме [43] совместного с Л.Е. Захаровым доклада на семинаре им. И.Г. Петровского). В дальнейшем (см., в частности, [120]–[122], а также §2) для некоторого специального гитарообразного семейства контуров $\Gamma = \Gamma_a$ было дано полное описание (включая топологическую перестройку и бифуркацию¹³ при изменении параметров M и a) всех удовлетворяющих условию В-задачи конфигураций $\gamma = \gamma_k$, а также тех кривых γ , гомеоморфных окружности, которые несимметричны относительно одной из двух осей симметрии Γ .

Поясним смысл условия

$$\partial u / \partial \nu|_{\gamma} = \frac{I}{|\gamma|}, \quad I = \text{const}, \quad (0.3)$$

входящего в (0.2). Это условие компенсирует свободу выбора кривой γ . Если его опустить, то для любой фиксированной кривой γ , лежащей внутри Γ , найдется (причем, единственная) искомая функция u – решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Но кривая γ не задана, ее надо найти! Трудность в том, что априори неясно даже насколько условие (0.3) позволяет судить как о существовании кривой $\gamma = \gamma_k$, так и о ее единственности. Несколько ниже даны ответы, в частности, и на эти вопросы.

В предположении, что $\partial u / \partial \nu|_{\gamma}$ есть константа, условие (0.3) эквивалентно заданию полного тока I , протекающего по плазме (см. пункт iv) в Примечании 12). Это так, поскольку (в рассматриваемом здесь так называемом цилиндрическом приближении токамака; см. ниже (2.17)), функция $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$, являющаяся z -компонентой векторного потенциала магнитного поля, удовлетворяет уравнению $\Delta u = j(u)$ в области, лежащей внутри Γ . (Здесь и ниже Δ — это оператор Лапласа). Что же касается предположения $\partial u / \partial \nu|_{\gamma} = \text{const}$, то оно выполнено, например, в случае, когда плазма, как говорят, скинирована, т.е. когда по ней течет только поверхностный ток $j(u) = \frac{I}{|\gamma|} \delta|_{\gamma}$, распределенный вдоль ее границы γ с плотностью $I/|\gamma|$.

Условие (0.3) связано, конечно, с анализом размерности (см. ниже уравнение (2.6)). Если пренебречь этой физической аргументацией и заменить условие (0.3) на более “простое”

$$\partial u / \partial \nu|_{\gamma} = C, \quad C = \text{const} \quad (0.4)$$

-
- i) кривая Γ одна и та же;
 - ii) один и тот же потенциал M магнитного поля (точнее его перепад) в “вакуумной” области Ω_k , отделяющей горячую плазму, занимающую “плазменную” область ω_k с границей γ_k , от кривой Γ ;
 - iii) один и тот же закон распределения тока в плазме $j : u \mapsto j(u)$ (например, скинированный ток, т.е. распределенный лишь на границе “плазменной” области ω , как в случае В-задачи) и
 - iv) один и тот же полный ток $I = \int_{\mathfrak{S}} j(u(x, y)) dx dy$ (через \mathfrak{S} обозначено сечение функциональной камеры, т.е. область, лежащая внутри $\Gamma = \partial \mathfrak{S}$.)

¹³Ср. с [175].

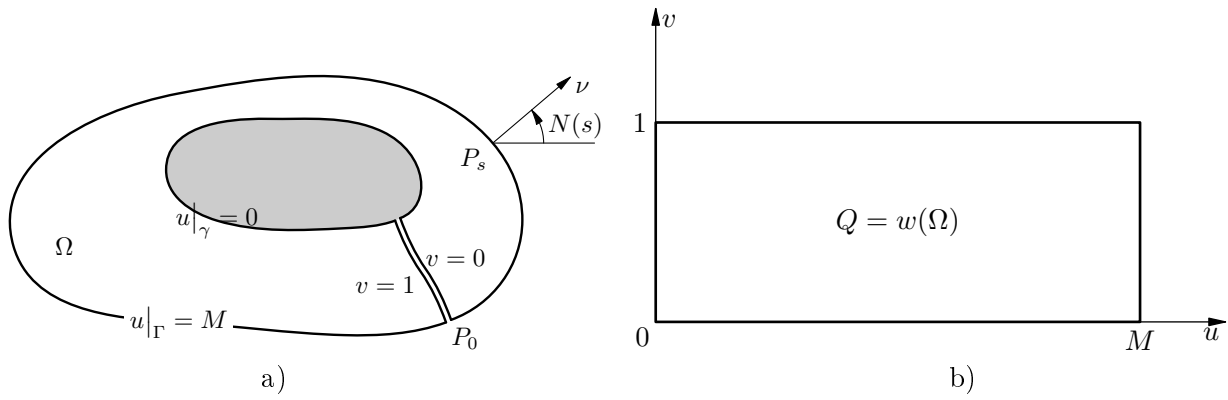


Рис. 2. а) Область $\Omega = \Omega(\gamma)$; $N(s)$ — угол между осью x и нормалью ν к Γ в точке $P_s \in \Gamma$. б) Образ Q области Ω при однолистом отображении $w = u + iv$, подчиненном условию (0.2).

(т.е. того типа, что фигурирует, к примеру, в [31]), то возникнут математические трудности даже в случае полярной симметрии: если Γ — окружность единичного радиуса, а $\rho < 1$ — искомый радиус окружности γ , концентричной с Γ , то при $C > Me$ задача имеет два решения, определяемых из уравнения $C\rho \ln(1/\rho) = M$, но не имеет ни одного решения, если $C < Me$. К сожалению, такого рода трудности задач с условием (0.4) иногда не замечают, когда проводят численные расчеты (см., например, [13]).

Впрочем, таких трудностей не возникает, если свободная граница γ (гомеоморфная окружности) является внешней по отношению к заданной границе Γ . В частности, при полярной симметрии однозначная разрешимость есть следствие того, что функция $\rho \ln(1/\rho)$ строго монотонно убывает при $\rho > 1$. Анализ размерностей соответствующей этому случаю физической задачи приводит [108] к условию (0.4) и в этом случае справедлива теорема об однозначной разрешимости [97].

Некоторые дополнительные сведения, а также другие задачи, относящиеся к равновесным плазменным конфигурациям, приведены в §2 и §4. Там же дан краткий обзор имеющихся результатов, включая доказательства (с той или иной степенью подробности). Здесь же акцент будет сделан лишь на основных моментах, относящихся к сути ГК-метода.

Прежде всего, проверим, что В-задача в каждом из двух случаев $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_2$ сводится к ГК-задаче, т.е. к задаче, для которой выполнено сформулированное выше условие Гельмгольца. Более того, проверим, что к ГК-задаче сводится и

Задача 0.1 *Заданы число $M > 0$ и плоская спрямляемая кривая Γ , гомеоморфная окружности (см. рис. 2а). Требуется выяснить существует ли внутри Γ гомеоморфная ей спрямляемая кривая γ , такая, что в образовавшейся между ними кольцевой области Ω_0 нашлась бы гармоническая функция $u : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая таким условиям*

$$1) \text{ на } \Gamma \quad u = M; \quad 2) \text{ на } \gamma \quad u = 0, \quad \text{а} \quad \partial u / \partial \nu = 1/|\gamma|, \quad (0.5)$$

где $|\gamma|$ — не заданная заранее длина искомой кривой γ .

Отметим, что выполнение условия Гельмгольца для задачи 0.1 влечет выполнение этого условия и для В-задачи в том случае, когда $\gamma = \gamma_1$.

В [131] рассмотрена более общая задача, в которой нормальная производная $\partial u / \partial \nu|_{\gamma}$ не константа (зависящая от длины кривой γ), а достаточно произвольная положительная функция на γ , моделирующая то или иное распределение тока в плазме. В частности, справедлива

Теорема 0.1 [131] *Задача 0.1 разрешима, если спрямляемая кривая Γ выпукла. При этом искомая кривая γ оказывается тоже выпуклой. Кроме того, γ аналитична.*

Доказательство начинается с проверки того, что данная задача сводится к ГК-задаче.

Установим это. Возьмем произвольную точку $P_0 \in \Gamma$ (см. рис. 2а). От нее отложим в положительном направлении натуральный параметр s , т.е. длину дуги $\smile P_0 P_s$ кривой Γ . Обозначим через $N(s)$ угол между осью x и нормалью ν к Γ в точке $P_s \in \Gamma$. Кривая Γ полностью определяется так называемой *угловой функцией* $N : [0, |\Gamma|] \ni s \mapsto N(s)$.

Предположим, что задача 0.1 имеет решение. Проведем через точку P_0 кривую l , которой касается ∇u . Кривая l пересечет¹⁴ свободную границу γ . Сделаем разрез вдоль кривой l и в образовавшейся односвязной области $\Omega = \Omega_0 \setminus l$ введем функцию v , гармонически-сопряженную с u . Функция v определена с точностью до константы, а на каждом берегу разреза вдоль кривой l она постоянна (в силу условий Коши–Римана). Можно считать, что $v \geq 0$ и что на одном из берегов разреза она равна нулю. Выбрав тот (определенный почти всюду) единичный касательный вектор τ к (спрямляемой) кривой γ , при котором пара (τ, ν) положительно ориентирована, и проинтегрировав производную $\partial v / \partial \tau$ вдоль γ (от точки пересечения кривых l и γ , в которой $v = 0$), получим значение функции v на другом берегу разреза. Оно, в силу условия (0.5), равно единице (т.к. $\partial v / \partial \tau = \partial u / \partial \nu$). Положим (см. рис. 2b)

$$Q = \{w = u + iv \in \mathbb{C} \mid 0 < u < M, \quad 0 < v < 1\}. \quad (0.6)$$

Мы видим, что условие Гельмгольца выполнено, поскольку функция

$$w : \Omega \ni z = x + iy \mapsto w(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in Q$$

однолистно¹⁵ отображает искомую область Ω со свободной границей γ на односвязную фиксированную область Q .

Что касается В-задачи в случае $\gamma = \gamma_2$, то достаточно рассмотреть область Ω , которая есть пересечение области Ω_2 с $\mathbb{R}_{++}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x > 0, y > 0\}$. Очевидно, что комплексный потенциал $w = u + iv$ однолистно отображает Ω на прямоугольник (0.6).

Итак, мы проверили, что В-задача и задача 0.1 сводятся к некоторым ГК-задачам.

Но как исследовать ГК-задачи?

Как было уже сказано, Гельмгольц и Кирхгоф предложили три идеи для их изучения: две из них мы назвали базовыми, а третью технической. Чуть ниже мы увидим, что базовые идеи позволяют свести исходную задачу со свободной границей к некоторой задаче Римана–Гильберта в фиксированной области. Техническая идея (предложенная, по-существу, Кирхгофом) позволяет в ряде случаев получить решение возникающей задачи Римана–Гильберта в так называемой замкнутой форме, т.е. виде интеграла или, тем паче, явной формулы, содержащей лишь элементарные функции. Это дает возможность получить в этих случаях качественный или даже числовой ответ для исходной задачи. Техническая идея связана с тем или иным набором конформных отображений плоскости годографа, точнее, области $\{\zeta = dw/dz, z \in \Omega\}$. Раньше этот технический прием был практически единственным средством, позволяющим завершать анализ некоторых ГК-задач. Комментарии по поводу его модификаций в книгах по гидродинамике мало отличаются от тех, что имеются в известном учебнике [59]: “Для решения основной задачи отображения области течения z на плоскость ζ Леви-Чивита предложил рассматривать вместо переменной Кирхгофа $\frac{1}{dw/dz}$ и переменной Жуковского $\ln \frac{dw/dz|_{\infty}}{dw/dz}$ комплексную переменную $i \ln dw/dz$ ”. Однако такая “устаревшая” техника (метод Кирхгофа, метод Жуковского–Митчеля, метод Леви-Чевита, ...) позволяет только в сравнительно простых случаях преодолевать трудности, связанные с сопутствующей ГК-методу краевой задачей, являющейся в общем случае весьма специфической нелинейной задачей Римана–Гильберта. Если учесть при этом, что упомянутая техника долгое время воспринималась (даже Чаплыгиным; см. его примечание на стр. 74 к переводу статьи Гельмгольца [145]) как главное в развитии исходных идей Гельмгольца–Кирхгофа и затусневывала их базовую суть, то станет понятным, почему базовые идеи Гельмгольца и Кирхгофа как бы затерялись за их техническим обрамлением. А если учесть, что эта техника абсолютно уступает современным вычислительным средствам и методам численного анализа в вопросе доведения решения задачи “до числа”, то станет понятной и причина часто встречающегося

¹⁴При конформном отображении области Ω_0 на кольцо линии уровня функции u перейдут в концентрические окружности, а образ кривой l будет им ортогонален.

¹⁵Однолистность следует из теоремы, обратной к принципу соответствия границ [66]. Согласно этой теореме, достаточно проверить, что аналитическое отображение непрерывно вплоть до границы области и гомеоморфно с сохранением ориентации отображает границу. Последнее вытекает из леммы Жиро-Хопфа-Олейник (см., например, [124]), влекущей положительность нормальной производной гармонической функции u почти всюду на Γ (ибо в данной задаче на Γ достигается максимум u). Поскольку здесь речь идет о гармонической функции можно воспользоваться и теоремой Келлога [66].

в наши дни мнения, будто идеи Гельмгольца–Кирхгофа уже исчерпали свои возможности. Однако, если абстрагироваться от технической составляющей идей Гельмгольца–Кирхгофа (игравшей в прошлом важную роль), то можно существенно расширить область применения ГК-метода [123], т.е. собственно базовых идей Гельмгольца и Кирхгофа. Формулировка этих идей и их пропаганда – цель данного обзора.

В современных условиях нет резона ограничивать себя рамками техники конформных отображений плоскости годографа в попытке проанализировать задачу Римана–Гильберта, возникающую при исследовании ГК-задач. Поэтому естественно прийти к определению ГК-метода, как метода, который опирается на следующие

Две базовые идеи¹⁶.

Первая идея, непосредственно связанная с самим понятием ГК-задачи, принадлежит Гельмгольцу [145]. Он выразил ее следующим образом: “Die bisher gefundenen Lösungen drücken in der Regel u und v als eine Summe von Gliedern aus, die selbst Functionen von x und y sind. Aber auch umgekehrt kann man $x + iy$ als Function von $u + iv$ betrachten und entwickeln. Величины u и v рассматривают обычно как функции переменных x и y . Но можно, наоборот, $x + iy$ выражать как функцию от $u + iv$ и разыскивать решение в такой форме.”

Суть этой идеи Гельмгольца состоит в сведении ГК-задачи к задаче в *фиксированной* области. Рецепт, позволяющий ее изучить, дает

Вторая идея. Едва уловимая в формулах, полученных Гельмгольцем [145], эта идея отчетливо сформулирована Кирхгофом [151]. Она состоит в предложении изучать в *фиксированной* области Q функцию¹⁷

$$A + iB : Q \ni w = u + iv \mapsto A(u, v) + iB(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{dz}{dw} \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy. \quad (0.7)$$

На то есть две причины:

1). Искомая область Ω легко определяется с помощью функции (0.7) как множество точек

$$z = z(w_0) + \int_{w_0}^w e^{A(\xi, \eta) + iB(\xi, \eta)} d\zeta, \quad w \in Q, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (0.8)$$

2). Функция (0.7), назовем ее *ГК-функцией* (или функцией Гельмгольца–Кирхгофа), имеет простой геометрический смысл: вещественная ее часть, т.е. функция A , локально есть логарифм растяжения, а мнимая часть, т.е. функция B , локально — это угол поворота при отображении $w : \Omega \rightarrow Q$.

Это геометрическое свойство ГК-функции позволяет выписать на определенных частях границы ∂Q области Q те или иные соотношения, которым необходимо должны удовлетворять вещественная или мнимая часть ГК-функции, или же соотношения, связывающие эти функции A и B на соответствующей части ∂Q . Если возникающая таким образом (вообще говоря, нелинейная) зада-

¹⁶ Именно эти идеи послужили ключом к решению представленных в этом обзоре задач, в том числе и В-задачи. Конечно, вполне возможно, что читатели (речь идет о тех, кто с этими идеями не был раньше знаком) без особых усилий увидят путь к решению этих задач. Что же касается меня, то должен признать, что сам я вряд ли бы смог сформулировать базовые идеи ГК-метода, если бы в свое время В.Ф. Дьяченко не подсказал мне, что в “Механике сплошных сред” Ландау и Лившица [158] рассмотрена интересная задачка со свободной границей. Ею оказалась уже упомянутая задача Гельмгольца о форме струи, вытекающей из щели в основании полупространства. (Заметим в скобках, что в 1686 году эту задачу о форме истекающей струи рассматривал Ньютон в Предложении 36 книги II Principia Mathematica (опубликованной в 1687 г.). Однако попытка Ньютона решить эту задачу оказалась несостоятельной (см. комментарии А.Н. Крылова на стр. 436 и 442 в издании [81]). Неудача Ньютона, конечно, связана с тем, что еще не родились Эйлер, Даламбер, Коши, Риман, ..., которым Ньютон передал право созидания на фундаменте его Начал математических основ механики сплошных сред и комплексного анализа).

¹⁷ Функция (0.7) определена ввиду односвязности Q . В самом деле, при отображении $\zeta : Q \ni w \mapsto \zeta(w) \stackrel{\text{def}}{=} dz/dw \in \mathbb{C}_* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$ образ $\zeta(C)$ любой кривой $C \subset Q$, гомеоморфной окружности, не охватывает нуль, т.к. иначе, стягивая C в точку, приходим к противоречию с конформностью отображения $z : Q \rightarrow \Omega$ ($0 \notin \zeta(w) = dz/dw$). Поэтому определена однозначная ветвь логарифма $\ln(dz/dw)$, которая и принимается за функцию $A + iB$.

ча (называемая задачей Римана-Гильберта¹⁸) разрешима, то формула (0.8) дает решение исходной задачи¹⁹. Таким образом, ГК-метод сводит исходную задачу в области Ω со *свободной границей* к (вообще говоря, нелинейной) задаче Римана-Гильберта в известной (фиксированной) области Q . Отметим, что эта задача Римана-Гильберта может быть сформулирована в терминах операторного уравнения.

Таким операторным уравнением является, например, уравнение Вилля (Villat) [188], относящееся к задаче обтекания криволинейного препятствия. Здесь уместно напомнить слова благодарности, которые в [155] Лере выразил Вилля, представившему в своем лекционном курсе 1933 года его диссертацию [153]. Именно это признание самим мэтром первых достижений 26-летнего Лере вдохновило его на дальнейшие исследования [154], которые, заметим, послужили импульсом для создания теории степени отображения Лере-Шаудера [156, 157]. В [155] Лере отмечает, что функциональные уравнения, разрешимость которых он доказывает с помощью теории степени отображения, принадлежат Вилля. В §2 принцип Лере-Шаудера применяется для доказательства разрешимости некоторого аналога уравнения Вилля.

3. Проиллюстрируем на примере задачи 0.1 характерный тип нелинейных задач Римана-Гильберта, сопутствующих ГК-методу. Но прежде чем это делать, рассмотрим один частный случай: тот, когда Γ – окружность, а искомая в этой задаче кривая γ – тоже окружность²⁰, причем концентричная с Γ . При таких предположениях

$$u : r \mapsto u(r) = C \ln r + M$$

есть функция полярного радиуса $r \in [\rho, 1]$, где искомый радиус окружности γ определяется по формуле $\rho = \exp(-2\pi M)$, что следует из соотношений $C \ln \rho + M = 0$, $2\pi C = 1$.

Рассмотрим теперь задачу 0.1 в общей ситуации. Применим ГК-метод. Выше формулой (0.7) была определена функция Гельмгольца-Кирхгофа $A + iB = \ln(dz/dw)$ в прямоугольнике Q .

Заметим, учитывая геометрический смысл функций A и B , что

$$B(M, v) = N(s(v)), \quad 0 < v < 1, \quad (0.9)$$

где N – угловая функция контура Γ , другими словами, $N(s)$ – угол между осью x и нормалью к Γ в точке $P_s \in \Gamma$ (см. рис. 2), а $s(v)$ – длина дуги $\smile P_0 P_s$, параметризованная линиями уровня функции v , т.е.

$$s(v) = \int_0^v e^{A(M, \eta)} d\eta, \quad s(1) = |\Gamma|. \quad (0.10)$$

Вспомним, что $u|_\gamma \stackrel{(0.5)}{=} 0$, $\partial u / \partial \nu|_\gamma \stackrel{(0.5)}{=} \text{const}$. Отсюда $|dw/dz|_\gamma = \text{const}$ (в силу условий Коши-Римана). Тем самым

$$A(0, \cdot) = \text{const}. \quad (0.11)$$

Поэтому (опять таки в силу условий Коши-Римана)

$$\partial_u B(u, v)|_{u=0} = 0, \quad (0.12)$$

Кроме того, из очевидных геометрических соображений (см. рис. 2) следует, что при обходе по эквипотенциальной линии $u \in (0, M)$ от берега разреза, соответствующего $v = 0$, до другого берега разреза, где $v = 1$, функция B получает приращение 2π , т.е.

$$B(u, 1) = B(u, 0) + 2\pi, \quad \text{при } 0 < u < M. \quad (0.13)$$

Очевидно также равенство

$$B_v(u, v)|_{v=0} = B_v(u, v)|_{v=1} \quad \text{при } 0 < u < M, \quad (0.14)$$

¹⁸Некоторые линейные задачи Римана-Гильберта хорошо изучены; см., например, [24, 27]. Заслуживает пристального внимания работа [7], в которой получены важные результаты для линейной задачи Римана-Гильберта с кусочно-гёльдеровыми коэффициентами и условиями роста решения, включая новое, удобное для вычислений представление решения для случая кусочно-постоянных коэффициентов. Яркое применение этих результатов к актуальной прикладной проблеме представлено в работе [6].

¹⁹Конечно, при условии, что формула (0.8) определяет однолистное отображение. Это надо проверять отдельно.

²⁰В §2 приведены достаточные условия, при которых задача 0.1 имеет единственное решение. Из этих условий следует, что в случае, когда Γ – окружность, а область Ω_0 имеет две взаимно-ортогональные оси симметрии, кривая γ необходимо должна быть окружностью, концентричной с Γ .

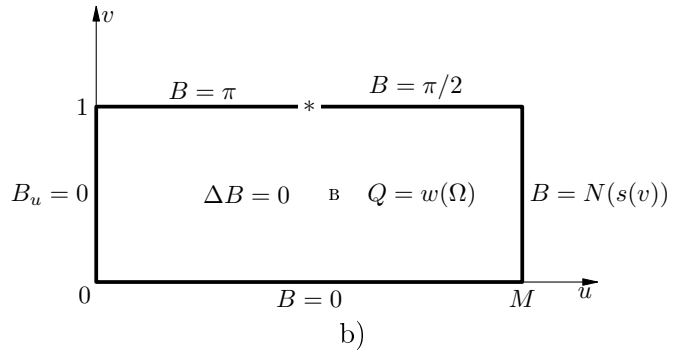
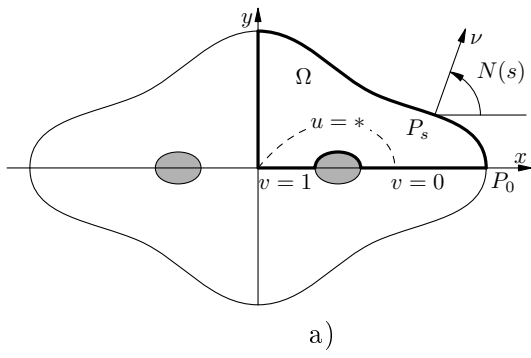


Рис. 3. а) Область $\Omega = \Omega(\gamma)$; $N(s)$ - угол между осью x и нормалью ν к Γ в точке $P_s \in \Gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2$. б) Нелинейная задача Римана-Гильберта для $A+iB$ в $Q = w(\Omega)$, где $w = u+iv$ - однолистное отображение Ω на Q , подчиненное условию (0.16); $s(v) = \int_0^v e^{A(M,\eta)} d\eta$, $s(1) = |\Gamma|$.

которое следует из условия $A(u, 0) = A(u, 1)$, выражающего равенство длин дуг вдоль обоих берегов разреза, пересекаемых одними и теми же эквипотенциальными линиями u (ибо локально A есть логарифм растяжения).

Краевая задача (0.9)–(0.14) в области Q для гармонической функции B (которая связана нелинейными соотношениями (0.9)–(0.10) с гармонически-сопряженной с ней функцией A) – это и есть та характерная нелинейная задача Римана-Гильберта, которая сопутствует ГК-методу.

В частном случае, когда Γ есть окружность и, следовательно, $N(s) = 2\pi s$, решение очевидно: $B(u, v) = 2\pi v$. Поэтому $A(u, v) = A_0 + 2\pi u$, где A_0 – некоторая константа. Это означает, что γ является окружностью, концентричной с Γ . Ее радиус ρ определяется из соотношений

$$|\gamma| = \int_0^1 e^{A_0} dv, \quad |\Gamma| = \int_0^1 e^{A_0 + 2\pi M} dv. \quad (0.15)$$

Если $|\Gamma| = 2\pi$, то это дает уже отмеченный выше результат $\rho = e^{-2\pi M}$.

В §2 представлен метод исследования нелинейной задачи (0.9)–(0.14). Там же доказывается аналог теоремы 0.1 для области, имеющей две оси симметрии.

4. Проиллюстрируем возможности ГК-метода для доказательства теорем несуществования.

Задача 0.2 отличается от задачи 0.1 только тем, что кривая γ ищется в классе кривых, гомеоморфных объединению двух окружностей (каждая из которых лежит вне другой).

Исследуем здесь эту задачу ГК-методом при таком дополнительном предположении: область Ω_0 , лежащая между Γ и γ , симметрична относительно координатных осей x и y . В этом случае достаточно рассмотреть ту часть области Ω_0 , которая лежит в $\mathbb{R}_{++}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x > 0, y > 0\}$. Обозначим ее через Ω (см. рис. 3а).

Для удобства изменим в соответствии с предположенной симметрией нормировку в условии (0.5), записав это условие в виде²¹

$$u|_{\Gamma} = M, \quad u|_{\gamma} = 0, \quad \partial u / \partial \nu|_{\gamma} = 4/|\gamma|. \quad (0.16)$$

Тогда в области $Q = \{0 < u < M, 0 < v < 1\}$, являющейся образом однолистного отображения $w = u + iv$, определена, согласно (0.7), функция Гельмгольца-Кирхгофа $A + iB$. Обозначая через \star число $u(0, 0)$, получим, учитывая (аналогично предыдущему) геометрические свойства функции $A + iB$, задачу Римана-Гильберта, представленную на рис. 3б.

Удивительно (и в этом одно из проявлений силы ГК-метода), что проведенный здесь с помощью ГК-метода столь простой анализ задачи 0.2 позволяет неожиданно легко доказать следующую теорему о неразрешимости.

²¹Конечно, при такой нормировке имеем: $s(1) = |\Gamma|/4$.

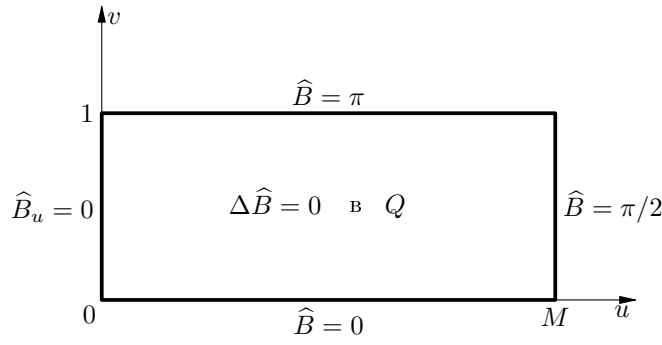


Рис. 4. Задача для функции \hat{B} .

Теорема 0.2 [34] При сделанных предположениях о симметрии области Ω_0 задача 0.2 не имеет решения, если²²

$$0 \leq N(s) \leq \pi/2 \quad \text{при } s \in [0, 1], \quad \text{т.е. при } P_s \in \Gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2. \quad (0.17)$$

♡²³ В самом деле, рассмотрим ГК-отображение

$$z(w) = z(0) + \int_0^w \exp(A + iB) dw, \quad w \in Q.$$

Заметим, что мнимая часть $z(iv)$ пропорциональна интегралу

$$J(v) = \int_0^v \cos B(0, \eta) d\eta, \quad (0.18)$$

точнее,

$$\Im z(iv) = cJ(v), \quad \text{где } c = e^{A(0,v)} \stackrel{(0.11)}{=} \text{const} > 0, \quad v \in [0, 1]. \quad (0.19)$$

Из очевидных геометрических соображений (см. рис. 3а) с необходимостью следует, что если задача 0.2 имеет решение, то $\Im z(i) = 0 \Leftrightarrow J(1) = 0$. Но, как мы сейчас увидим,

$$J(1) > 0, \quad \text{если } 0 \leq N(s) \leq \pi/2 \quad \text{при } s \in [0, 1]. \quad (0.20)$$

Действительно, определим функцию \hat{B} как решение задачи, представленной на рис. 4.

В силу имеющейся здесь симметрии граничных условий, $\int_0^1 \cos \hat{B}(0, \eta) d\eta = 0$, а в силу принципа максимума для гармонических функций, $0 \leq B(0, \eta) < \hat{B}(0, \eta) \leq \pi$. Потому, учитывая монотонное убывание косинуса на интервале $(0, \pi)$, получаем

$$0 = \int_0^1 \cos \hat{B}(0, \eta) d\eta < \int_0^1 \cos B(0, \eta) d\eta,$$

что влечет нужное нам неравенство (0.20), т.е. противоречие необходимому условию $J(1) = 0$. □

“Физическая” интерпретация теоремы 0.2 такова: при сделанных предположениях (в частности, если Γ – выпуклый контур) равновесная (скинированная) плазма, охватываемая свободной границей γ , не может развалиться на две компоненты связности. Существование же односвязной плазменной конфигурации (при тех же предположениях) доказано в §2, а с большими подробностями в [34] и [122]. Более того, там же (а также в [43, 119, 121]) и в более общей ситуации в [5], показано, что при некоторых геометрических условиях возможна разрешимость как задачи 0.1, так

²²Отметим здесь сразу же, что задача 0.1, напротив, при этих предположениях (симметрии области Ω_0 и условии (0.17)) имеет решение (см. §2). Условие (0.17), конечно, слабее требования выпуклости. Оно означает, что в первой четверти \mathbb{R}_{++}^2 контур Γ пересекается любой вертикалью или горизонталью лишь один раз.

²³Иногда начало и конец доказательств отмечаются соответственно такими символами: ♡ и □.

и задачи 0.2, что дает, как было отмечено выше, положительный ответ на вопрос, поставленный Е.П. Велиховым.

Обсуждавшиеся здесь задачи 0.1 и 0.2, а также их обобщения в [5] и [131] имеют отношение к так называемой *прямой задаче о равновесии плазмы* в токамаке. Более детально об этой, а также о значительно более важной и трудной *обратной задаче о равновесии плазмы* сказано, соответственно, в §2 и в §4.

5. В §3 рассматривается построение асимптотики тех гармонических функций, заданных в плоской области, которые быстро осциллируют на границе этой области. Эта задача изучалась в той или иной мере в разных работах, в том числе, и в заметке [35], написание которой было инициировано вопросом, на который мое внимание обратила О.А. Олейник. В §3 дается развернутое изложение той части этой заметки, которая имеет отношение к ГК-методу. Исходная идея весьма проста. Она опирается на то, что все сводится к построению асимптотики функции, экспоненциально быстро стабилизирующейся при отходе от границы вглубь области. Поэтому если для заданной осцилляции граничного следа этой гармонической функции асимптотика известна в том случае, когда область Ω есть диск (круг) D , то асимптотика в любой другой, скажем, односвязной области Ω может быть построена с помощью такого конформного преобразования приграничных окрестностей диска и этой области Ω , которое изометрично трансформирует границы диска D и области Ω (будто бы эти границы ∂D и $\partial\Omega$ сделаны из нерастяжимой гибкой проволоочки).

Ясное дело, что необходимым условием существования такого отображения является равенство длин границ ∂D и $\partial\Omega$, а также аналитичность кривой $\Gamma = \partial\Omega$. Оказывается, что при выполнении этих необходимых условий, ГК-метод позволяет выписать сравнительно простые явные формулы для такого рода отображений.

Вопрос, поставленный О.А. Олейник, имел отношение (ср. с проблемой, изложенной в [50] на стр. 38) к построению равномерной вплоть до границы области $\Omega \in \mathbb{R}^2$ достаточно точной асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ для решения U_ε следующей краевой задачи

$$\Delta U_\varepsilon|_\Omega = 0, \quad \left(U_\varepsilon + \lambda \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} \right) \Big|_{P_s \in \Gamma = \partial\Omega} = f_\varepsilon(s). \quad (0.21)$$

Здесь $\lambda = \text{const} \geq 0$, $\partial/\partial\nu$ — дифференцирование по внешней нормали к Γ . Граница Γ области $\Omega \in \mathbb{R}^2$ (для простоты, односвязная) предполагается *аналитической*²⁴. Ее длина $|\Gamma|$ равна 2π . Точка $P_s \in \Gamma$ отождествляется с соответствующим ей натуральным параметром границы (т.е. длиной дуги вдоль Γ). Что касается функции f_ε , то интерес представляют, по крайней мере, следующие два случая.

Случай 1. На окружности $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})\}$ задана быстро осциллирующая функция

$$f_\varepsilon : \mathbb{T} \ni e^{i\theta} \mapsto f(M\sigma(\theta)) = \sum_{k \geq 1} \left(a_k \cos k \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon} + b_k \sin k \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon} \right),$$

которая характеризуется тремя величинами:

- 1) параметром $\varepsilon = 1/(2\pi M)$ с $M \in \mathbb{N}$,
- 2) аналитическим автоморфизмом σ окружности \mathbb{T} и, вообще говоря,
- 3) *обобщенной*²⁵ функцией $f \in H^\beta(\mathbb{T})$, где $\beta = \alpha - 1/2 - \text{sign } \lambda$, а $\alpha \geq 0$. Это означает, что

$$\sum_{k \geq 1} k^{2\beta} (|a_k|^2 + |b_k|^2) < \infty.$$

²⁴К этому случаю сводится построение асимптотики, когда граница является кусочно-аналитической. Строящееся с помощью ГК-метода некоторое поле трансверсалей к границе, позволяет выделить такую окрестность угловой точки границы, в которой можно выписать экспоненциально точную асимптотику для исследуемой функции.

²⁵Через $H^s(\mathcal{M})$ обозначено соболевское пространство функций на многообразии \mathcal{M} с показателем гладкости $s \in \mathbb{R}$. (см., например, [124]). Задание граничных данных из класса обобщенных функций абсолютно физично: на границе Γ вовсе не поточечно измеряют значения нормальной производной $\partial u/\partial\nu$ решения u стационарного уравнения теплопроводности, а тепловой поток через границу в пределах локализации, определяемой измерительным прибором. Иначе говоря, измеряют интеграл $\int_\Gamma \varphi \partial u/\partial\nu d\Gamma$, где φ — это δ -образная (колокообразная) пробная функция, характеризующая измерительный прибор. Таким образом, речь идет о задании мер на границе Γ . Эта точка зрения выражена в работе [18], послужившей (по словам Э. Мадженеса) импульсом для известных исследований Ж.-Л. Лионса и Э. Мадженеса по неоднородным граничным задачам (см., например, [73, 159]).

Без ограничения общности, будем считать, что $\int_{\Gamma} f(s) ds = 0$.

Случай 2.

$$f_{\varepsilon} : \Gamma \ni s = (x, y) \mapsto f_{\varepsilon}(s) = F(x/\varepsilon, y/\varepsilon), \quad (0.22)$$

где функция $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$ нечетна по каждому переменному и $(1,1)$ -периодична, т.е.

$$F((-1)^j x, (-1)^k y) = (-1)^{j+k} F(x, y) \quad \text{и} \quad F(x+j, y+k) = F(x, y) \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}. \quad (0.23)$$

Понятно, что к этому случаю сводится вопрос о решении однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона с правой частью вида $G(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$, где функция $G \in H^s(\mathbb{R}^2)$ с показателем гладкости $s > -1/2$ также, как и F , нечетна по каждому переменному и $(1,1)$ -периодична. В §3 на примере двузначной функции $F \in L^2(\mathbb{T}^2)$ обозначено сведение случая 2 к случаю 1. Что же касается случая 1, то для него построено асимптотически экспоненциально близкое приближение $u_{\varepsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ к решению задачи (0.21), т.е. такое, для которого справедлива оценка

$$\|u_{\varepsilon} - U_{\varepsilon}\|_{H^{\alpha}(\Omega)} \leq C_{\alpha} e^{-\tau/\varepsilon}, \quad \text{где} \quad \tau > 0. \quad (0.24)$$

Экспоненциальная малость по малому параметру в полученной оценке для погрешности приближения — одно из отличий данной асимптотики от традиционных (связанных, скажем, с рекуррентными разложениями по малому параметру). В традиционных — порядок малости погрешности приближения зависит от числа членов асимптотического разложения, которое, в свою очередь, может зависеть от гладкости граничной функции. А в данном случае, асимптотика предъявлена даже для обобщенных граничных данных из $H^{\beta}(\Gamma)$ с $\beta > -1/2$ (т.е. почти вплотную к максимальному классу в шкале соболевских пространств, в которых имеется единственность решения краевой задачи). Отметим также, что в отличие от традиционных построений оценка погрешности дается в наиболее сильной норме, в которой ограничено само решение. Причина таких различий раскрывается в §3. Вкратце, она связана с двумя фактами:

- 1) существует поле трансверселей π_{Γ} к аналитической границе Γ , вдоль которого в некотором смысле (раскрываемом в §3) распространяются вглубь области значения граничной функции;
- 2) поле π_{Γ} определяется по решению некоторой задачи Коши для уравнения Лапласа, а эта задача некорректна по Адамару (поле π_{Γ} неустойчиво даже относительно аналитических возмущений границы).

Традиционные построения асимптотик (в том числе и в моих работах [32, 33]) эти факты игнорируют. Но когда их можно учесть, возникает возможность получить более сильные результаты. *Главный вывод* (ради него собственно и написан §3) состоит, на мой взгляд, в следующем: при построении асимптотик подобного рода сингулярно возмущенных краевых задач для эллиптических уравнений есть резон попытаться найти некоторый аналог поля π_{Γ} , предполагая границу области кусочно-аналитической (именно таков класс границ у большинства реальных задач). Затем, с помощью построенного поля трансверселей можно пытаться получить более качественную асимптотику. В пункте 6 параграфа 3 изложен вариант такой конструкции для двумерного квазилинейного эллиптического уравнения 2-го порядка. Что же касается обобщений на многомерный случай, то мне не удалось здесь хоть как-то продвинуться²⁶. Впрочем, возможно, второй из изложенных в заметке [35] метод построения асимптотики решения задачи (0.21) может помочь найти ключ к такому обобщению. Не исключено, что успех может быть достигнут с помощью разработанного в [19, 186, 21] метода построения асимптотик в сингулярно деформируемых областях.

В §3 отмечено также простое следствие предложенного в заметке [35] метода. Оно касается (возможно, неожиданного для специалистов) способа построения асимптотики решения краевой задачи для уравнения Лапласа в областях с сильно гофрированной границей. Хотя здесь речь идет только о плоских областях и уравнении Лапласа, однако в отличие от всех (известных мне) работ по

²⁶Конечно, любая достаточно малая приграничная окрестность может быть представлена в такой системе координат, в которой она будет являться приграничной окрестностью канонической области и при такой замене соответствующая часть границы области преобразовывалась бы изометрично. Однако трудно рассчитывать на то, что среди таких замен координат найдется хотя бы одна, в которой исходное эллиптическое уравнение примет канонический вид, позволяющий в новой системе координат выписать в этой приграничной окрестности явную формулу для решения, хотя, конечно, можно построить традиционные рекуррентные формулы асимптотики (со степенной оценкой остатка в норме, более слабой относительно той сильной нормы, в которой ограничено решение).

асимптотике решений эллиптических задач в (n -мерных, $n \geq 2$) областях с сильно гофрированной границей²⁷, предлагаемая в §3 асимптотика является экспоненциально точной, т.е. она экспоненциально близка к решению (в смысле аналогичной оценке (0.24)), причем в наиболее сильной норме, в которой ограничено само решение.

6. Рассматриваемая в §5 задача Стокса–Лейбензона относится к тому кругу задач со свободной границей, где ставится вопрос об эволюции области потенциального течения несжимаемой жидкости при наличии того или иного источника движения (и, возможно, при наличии препятствия на пути этого течения). Этот круг задач имеет необычайно много важных приложений. Здесь, например, проблема нелинейной динамики свободной поверхности идеальной жидкости, включая проблему цунами (см., в частности, [49, 132]). Здесь и потенциальные течения двух жидкостей разной вязкости, разделенных одна от другой движущейся свободной границей. Такие границы подвержены порой причудливым геометрическим эффектам, например, проникновением так называемых “языков” [61], или иначе говоря, “пальцев” [173] одной жидкости в среду другой жидкости.

В ряде работ, в частности, в [115, 116, 178] рассматривались вопросы асимптотического и численного анализа эволюции “языков” (“пальцев”). Ответ на вопрос о математической подоплеке этого явления обозначен (на основе работ [15, 36, 38], [125]–[129]) в пункте 3 параграфа 5. Данный вопрос рассматривается здесь в рамках двумерной однофазной²⁸ задачи Стокса–Лейбензона. Это есть задача о течении вязкой жидкости в так называемой ячейке (см. ниже) Хиле-Шоу²⁹ или о течении в срезе пористой среды [60]. Задача Стокса–Лейбензона может быть интерпретирована и как задача, описывающая разнообразные технологические, а также биологические процессы (включая некроз опухолей), и даже процесс выбора оптимального времени реализации опциона (см. библиографию в [83]).

Последние десятилетия такого рода задачи довольно часто стали называть задачами о течении Хиле-Шоу, или просто задачей Хиле-Шоу со свободной границей. Этот термин вошел в обиход с середины 70-х годов прошлого века благодаря, прежде всего, замечательно сыгранной команде англичан, возглавлявшейся до недавнего времени ныне ее почетным капитаном Дж.Р. Окендоном. Именно эта команда с ее выдающимся защитником (нынешним капитаном) Сэмом Хауисоном, форвардом С. Ричарсоном прочно вписала с подачи легионера Б.У. Томсона имя своего соотечественника в ворота истории английской науки³⁰.

Вот как описывает А.Н. Крылов (в предисловии к первому изданию книги [77]) исходную предысторию этой истории: “. . . я невольно вспомнил весеннее собрание Общества корабельных инженеров в 1898 г. На этом собрании проф. Hele-Shaw показывал в первый раз свой прибор, которым проектируется на экран с удивительной отчетливостью струйное течение жидкости и показывается обтекание этими струями разного рода препятствий. . .”. То, что прибор Хиле-Шоу предназначен, как пишет Ламб [68], для демонстрации “прекрасных экспериментальных проверок форм линий тока

²⁷Я благодарен Г.П. Панасенко, приславшего мне оттиск одной из последних работ на эту тему; в этой работе [166] даны также указания на историю (достаточно долгую) исследования такого рода задач.

²⁸Если вязкости жидкостей сильно разнятся, то поиск ответа на подобные вопросы зачастую разумно искать, приняв равным бесконечности отношение вязкостей двух жидкостей. В этом случае задача сводится к однофазной, а именно, к течению более вязкой жидкости в некоторой искомой области со свободной границей, которая подчинена кинематическому и тому или иному динамическому условию. Есть немало важных примеров даже таких упрощенных моделей и даже в двумерном случае.

²⁹Здесь я следую транскрипции фамилии английского инженера Hele-Shaw, которой придерживалась П.Я. Кочина [60]. Написание «Хиле» (в силу ударного «и», мягкого «л» и не ударного «е») соответствует и той рекомендации, которую мне на мой запрос любезно прислал Хауисон (Howison): “I think Hele-Shaw was English – but British is a safe description! His first name would be Hili in Russian. But the british «h» is less aspirated than the russian one [the one that looks like an «x» in handwriting]”. Я также, следуя классике [60], пишу Хауисон, хотя встречаются иные начертания: Ховисон, Хевисон, аналогично тому, как пишут Уильям или Вильям Шекспир, и как во Франции пишут Petrov или Petroff. Кстати, я когда-то начинал писать этот обзор в исключительно благоприятных условиях, находясь в гостях именно у семейства Petroff (об этой замечательной французской семье тепло отзывался Зеликин в своих “Путевых и непутевых заметках с атомной начинкой”, помещенных на общедоступном сайте <http://www.caravan.ru/~remizov/index.html>, где читатель (я уверен) найдет для себя много интересного: о роли математиков в героической борьбе против поворота рек в России, об истории русской иконы, . . .).

³⁰Парадокс в том, что сами основные пропагандисты этого термина отмечают в [83] “явную неуместность такого наименования”. Печально-противоположная ситуация побудила меня написать *Особое замечание*, которым завершается эта статья.

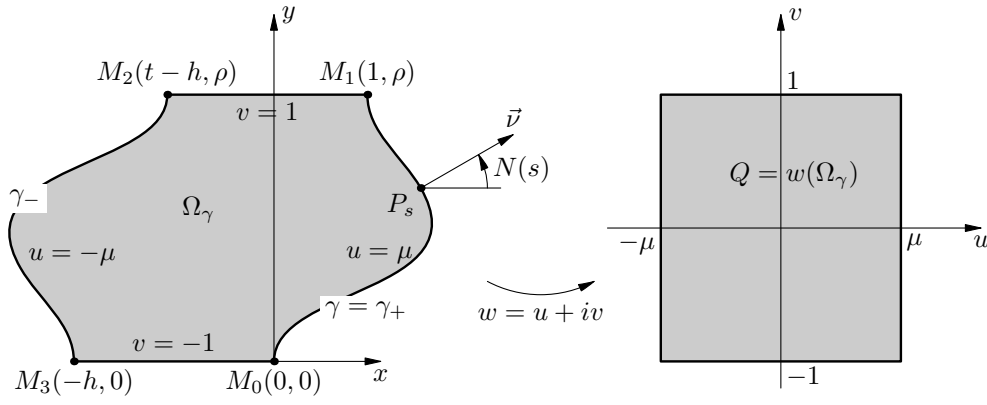


Рис. 5. а) Область $\Omega = \Omega_\gamma$; $N(s)$ - угол между осью x и нормалью ν к Γ в точке $P_s \in \gamma$. б) Прямоугольник $Q = w(\Omega)$ — это образ области Ω при однолистном отображении $w = u + iv$, подчиненном условию (0.26).

для некоторых случаев стационарного безвихревого плоского движения”, показал в том же 1898 г. Стокс в приложении к заметке Хиле-Шоу [144] (см. также [180]).

Основным элементом прибора Хиле-Шоу является так называемая ячейка из двух стеклянных пластин, в узком просвете между которыми движется вязкая жидкость, например, глицерин. Определенный интерес представляет эволюция пятна такой жидкости в результате подвода (или, наоборот, отвода) глицерина через маленькое отверстие в одной из пластин. Воздух, окружающий глицерин в приборе Хиле-Шоу (или, скажем, вода, окружающая нефть в срезе нефтеносного пласта,³¹), — это та жидкость, которая имеет пренебрежимо малую вязкость. В идеализации, которую предложил Л.С. Лейбензон [71] (в связи с задачей об эволюции контура нефтеносности), эта вязкость равна нулю, что соответствует постоянству давления на границе пятна (более вязкой) жидкости.

7. В качестве одного из примеров задачи о плоском стационарном потенциальном течении несжимаемой жидкости (или, в другой интерпретации, о стационарном тепловом потоке) с минимальным отношением экстремальных значений модуля скорости на свободной границе γ , в параграфе 6 вкратце излагается та часть работы [40], которая посвящена задаче, возникшей в АНТК (авиационном научно-техническом комплексе) им. А.Н. Туполева. Эта задача³² была связана с проблемой обледенения элементов корпуса летательных аппаратов.

Суть дела сводилась к поиску такой (схематично изображенной на рис. 5а) односвязной центрально-симметричной области Ω_γ , ограниченной отрезками M_3M_0, M_1M_2 и кривыми $\gamma = \gamma_+$ и γ_- , для которой была бы минимальна следующая величина

$$\Phi(\gamma) = \max_{P \in \gamma} \left| \frac{dw}{dz}(P) \right| / \min_{P \in \gamma} \left| \frac{dw}{dz}(P) \right|, \quad (0.25)$$

где $w = u + iv$ — такое однолистное отображение области $\Omega = \Omega_\gamma \subset \mathbb{C}$ на прямоугольник $Q = \{|u| < \mu, |v| < 1\}$, которое подчинено условию

$$u = \pm \mu \quad \text{на } \gamma_\pm, \quad v = -1 \quad \text{на } M_3M_0 \quad \text{и} \quad v = 1 \quad \text{на } M_1M_2, \quad (0.26)$$

³¹ Движение вязкой жидкости (например, нефти) и ее границы в срезе пористой среды (нефтеносного пласта) описывается теми же уравнениями, что и в приборе Хиле-Шоу, поскольку, согласно закону Дарси, скорость течения в пористой среде пропорциональна градиенту давления.

³² Можно рассмотреть и другие подобные задачи. Вот два примера: 1) задача о выборе такой формы искривления (вызванного технологическими причинами) плоского канала, при котором на стенках канала минимально отношение экстремальных значений давления установившегося течения идеальной жидкости; 2) задача о той форме пористой структуры (скажем, каталитического фильтра), при которой минимально отношение экстремальных отклонений от (допустим, равномерного) распределения потока через искомую (свободную) часть границы этой пористой структуры. Конечно, ГК-метод применим и к задачам со свободной границей на экстремум, например, дифференцируемых (т.е. более простых) функционалов. Одна из таких задач (имеющая отношение к вопросу о КПД турбины в открытом потоке) представлена в §7 и соответствует второй части работы [40].

где кривая $\gamma = \gamma_+$ соединяет точки $M_0 = (0, 0)$, $M_1 = (1, \rho)$, а центрально-симметричная ей кривая γ_- — точки $M_2 = (1 - h, \rho)$ и $M_3 = (-h, 0)$. Здесь $h = h_\gamma$ — положительное число, зависящее от заданного параметра μ и кривой³³ γ .

Если зеркально отразить область Ω_γ относительно отрезков M_3M_0 , M_1M_2 и последовательно так отражать возникающие области, то получится криволинейная периодическая полоска «ширины» h . Ее полупериод равен ρ . По такой полоске, вырезанной из фольги, можно пропустить электрический ток $J = \nabla v$. При прохождении тока по полоске фольги в ней возникает тепловой поток. В точке $P_0 \in \Omega$ величина этого теплового потока пропорциональна $|\nabla u(P_0)|$. Рассмотрим в Ω криволинейную систему координат (ν, τ) , порожденную градиентами функций u и v . Функция $\partial u / \partial \nu$ гармонична в Ω_γ и непрерывна в ее замыкании. Поэтому экстремальные значения теплового потока достигаются на границе полоски. Таким образом, чтобы максимально сократить риск перегорания полоски фольги, нужно так подобрать кривую γ , чтобы на (порожденной ею) границе полоски фольги, которую мы обозначим через Γ , была минимальна следующая величина:

$$\Phi(\Gamma) = \max_{P \in \Gamma} |\nabla u(P)| / \min_{P \in \Gamma} |\nabla u(P)|. \quad (0.27)$$

Уточнение классов кривых Γ , на которых рассматривается эта экстремальная задача, дано в §6. Там же излагаются основные моменты проведенного в [40] доказательства существования кривой $\hat{\Gamma}$, доставляющей минимум функционалу (0.27). Кроме того, в §6 приводится вывод формулы, представляющей кривую $\hat{\Gamma}$, и предьявлена асимптотика $\Phi(\hat{\Gamma})$ при $\mu \rightarrow 0$.

8. Вспомним теперь, что одной из составляющей успеха в разрешении парадокса Эйлера–Даламбера явилось предложение Гельмгольца [145] допустить наличие разрывов скорости потенциального течения. Это смелое предложение было развито в дальнейшем Фёпплом, Чаплыгиным и др. Как показывают многочисленные работы по струйным и кавитационным течениям, допущение особенностей скорости течения, основанное на идеализации визуальных наблюдений, позволяет в ряде случаев достаточно точно описывать течения реальных (обладающих вязкостью) несжимаемых жидкостей, оставаясь при этом в рамках уравнения Эйлера

$$\frac{d\vec{V}(t; x(t), y(t))}{dt} = \left(-\nabla_{x,y} p(t; x, y) + \vec{F}(t; x, y) \right) \Big|_{x=x(t), y=y(t)}. \quad (0.28)$$

Здесь, как обычно, $\vec{V}(t; x, y)$, $p(t; x, y)$ и $\vec{F}(t; x, y)$ — это, соответственно, скорость течения, давление и плотность массовых сил в момент времени t в точке, имеющей декартовы координаты (x, y) . Через $(x(t), y(t))$ обозначены координаты в момент времени t того центра элементарного объема жидкости, который при $t = 0$ находился в точке с координатами $(x(0), y(0))$.

Идея Гельмгольца о допущении особенностей скорости потенциального течения применяется в §1. В нем в рамках нестационарного уравнения (0.28) рассматриваются следующие вопросы, которые мы оформим, как

Задача 0.3 *Каково влияние на вихревой след, возникающий за обтекаемым телом, тех управляющих параметров (зависящих, вообще говоря, от времени), которые непосредственно связаны с обтекаемым телом³⁴? Можно ли выразить явной ФОРМУЛОЙ зависимость лобового сопротивления от этих параметров?*

В качестве сравнительно простого примера, в §1 рассматриваются лишь те управляющие параметры, которые позволяют варьировать форму тела. При этом мы ограничимся здесь самой простейшей из рассмотренных в [41] схем вихревого следа за обтекаемым препятствием.

В §7 рассмотрена задача об обтекании препятствия, которое частично поглощает набегающий поток; при этом, в качестве управления фигурируют как форма криволинейного препятствия $S = S(t)$, так и направление вектора

³³При заданном μ такое $h = h_\gamma$ существует, если при уменьшении h (до тех пор пока γ и γ_- не соприкоснутся) интеграл $I(h, \gamma) = \int_\gamma (\partial u / \partial \nu) d\gamma$, равный $v(M_1) - v(M_0)$, превысит значение 2. Действительно, интеграл $I(h, \gamma)$ непрерывно зависит от h и стремится к нулю при $h \rightarrow \infty$. Отметим, что если h можно уменьшать до нуля, то $\sup_{(h, \gamma)} I(h, \gamma) = \infty$.

³⁴Дельфины говорят, что им удалось найти то граничное управление, которое позволяет уменьшать вихревой след и, тем самым, уменьшать силу лобового сопротивления. Люди тоже хотят этому научиться (см., например, §33 в [67]).

скорости на его границе $\Gamma = \Gamma(t)$. Отметим также, что если в качестве параметра управления взят модуль скорости³⁵ на $\Gamma = \partial S$, то риманова поверхность Q (см. §1), на которой определена функция Гельмгольца-Кирхгофа, имеет свободную границу, характеризуемую заданным модулем скорости.

9. Задача, которая завершает обзор, была инициирована публикациями [136]–[138] на тему оценки максимально возможного КПД турбин, предназначенных для установки в открытом потоке рек, океанских приливов и течений (например, таких, как Gulf Stream).

Турбина представляет собой препятствие для потока. Однако, если сопротивление, которое турбина оказывает потоку, слишком мало, то поток почти беспрепятственно просачивается и не отдает большую часть своей энергии на вращение турбины. Если же сопротивление потоку слишком велико, то поток стремится обойти турбину-препятствие (так как в открытом потоке нельзя заставить набегающий поток полностью проходить через турбину). Какова же золотая середина? Ее искали многие инженеры. Оказалось, что турбины типа пропеллера эффективнее иных. Однако у турбины-пропеллера есть недостаток: неравномерность оказываемого потоку сопротивления вдоль радиуса пропеллера. В какой-то мере этот дефект отсутствует в конструкции Горлова [139, 140]. Эксперименты показали, что КПД турбины Горлова выше по сравнению с другими конструкциями. Но каков максимально возможный КПД любой турбины в открытом потоке вне зависимости от ее конструкции? Чтобы ответить на этот вопрос, следует рассмотреть турбину, как препятствие (с той или иной геометрией), которое снабжено системой управления углами входа потока в само препятствие. Далее, нужно максимизировать долю отбираемой (абсорбируемой) у потока энергии, варьируя геометрию препятствия и углы входа в него потока.

Развивая предложенный в [136]–[138] подход к рассмотрению этого вопроса, в которой турбина любой конструкции заменяется частично абсорбируемым препятствием (отбирающим, тем самым, часть энергии потока), я прекрасно осознавал, что несмотря на весьма существенное обобщение предложенной ранее модели (не пластина, ортогональная симметричному потоку, а достаточно произвольная геометрия криволинейного препятствия, не один варьируемый угол входа течения в частично абсорбируемое препятствие, а весьма общее распределение таких углов), тем не менее, это более общая задача все еще слишком схематично моделирует реальную ситуацию. Существенные дефекты рассматриваемой модели таковы: стационарность течения, отсутствие вихревых особенностей, кавитационное обтекание. Желание устранить эти дефекты и побудило рассмотреть задачу, с рассмотрения которой начинается в §1 этот обзор.

Такова связь между α и ω обзора. Их развитию, а также развитию и расширению представленного в обзоре “алфавита” (пока из семи “ног”-параграфов), надеюсь, помогут приводимые в конце каждого параграфа перечни открытых вопросов. Частично они снабжены комментариями.

Есть и один общий вопрос: как обобщать ГК-метод на двумерные эллиптические системы? Возможно, здесь целесообразно не прямое обобщение, соответствующее так называемым производным системам М.А. Лаврентьева [65] (к сожалению, как правило, причудливо нелинейным), а изучение линейных (или менее экзотичных нелинейных) систем этого типа для функций, обобщающих ГК-функцию $w = u + iv \mapsto A(u, v) + iB(u, v)$, а затем уже рассмотрение тех (быть может, небезынтересных новых) задач в физической плоскости $z = z(w)$, которые будут ей соответствовать.

10. Благодарности. Прежде всего я благодарен В.Ф. Дьяченко, интуицию и самобытность которого высоко оценили еще в 50-ые годы А.Д. Сахаров и И.М. Гельфанд. Эти его качества мне тоже посчастливилось ощутить: именно Владимир Федотович обратил мое внимание на задачу Гельмгольца о форме истекающей струи, что и дало начальный импульс к исследованиям, представленным в этом обзоре.

Ряд вопросов, относящихся к физике плазмы, я осознал благодаря Ж. Блуму, К.В. Брушлинскому, Ф.С. Зайцеву, Л.Е. Захарову, Д.П. Костомарову, А.М. Попову, В.Д. Пустовитову и В.Д. Шафранову. Я признателен М. Фогелиусу за приглашение посетить Rutgers University, где я познакомился с его важной работой [187], связанной с обратной задачей о равновесии плазмы.

К тематике, относящейся к задаче Стокса-Лейбензона мое внимание привлек Е.В. Радкевич. Я признателен Е.П. Долженко за консультацию, а также участникам руководимого А.К. Гуциным, А.А. Дезиным и В.П. Михайловым семинара в МИАН РАН за скрупулезное обсуждение начального варианта первой части работы [40] (частично представленной в этом обзоре). Это обсуждение позволило устранить ряд неточностей.

³⁵В частности, такого рода управлением можно пытаться воплотить идею Б.А. Луговцова (см. §37 книги [67]) о снижении лобового сопротивления посредством частичной реализации условия прилипания при потенциальном обтекании вязкой жидкостью.

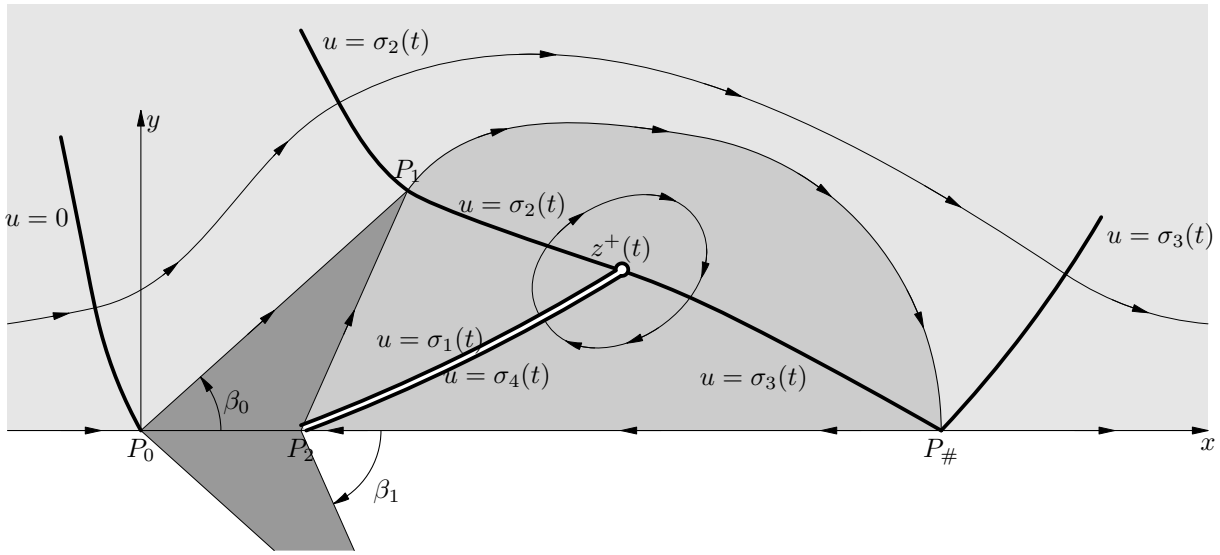


Рис. 6. Симметричная относительно оси x часть $\Omega(t) = (\tilde{\Omega}(t) \cap \mathbb{R}_+^2) \setminus \gamma(t)$ области течения в данный (фиксированный) момент времени t .

Мне очень помогли М.С. Агранович, С.Ю. Доброхотов, М.И. Зеликин, В.Ю. Протасов, Е.В. Радкевич, В.М. Тихомиров, И.Г. Царьков и Э.Э. Шноль, которые согласились прочесть предварительные варианты этой статьи на предмет ясности изложения. В результате были исправлены некоторые неточности и изложение ряда мест удалось существенно улучшить. Большую дружескую помощь в оформлении статьи (и, прежде всего, рисунков) мне оказал Е.В. Панкратьев.

Я глубоко благодарен моему учителю М.И. Вишику, а также моим старшим коллегам М.И. Зеликину и В.М. Тихомирову за доброе отношение ко мне, дополненное настойчивыми требованиями написать этот обзор.

§ 1 Явная формула зависимости лобового сопротивления от геометрии препятствия при обтекании его плоским нестационарным потенциальным потоком с вихревыми особенностями

В этом параграфе рассматривается плоская задача о нестационарном (при $t \geq 0$) обтекании препятствия $S(t) \subset \mathbb{R}^2$ таким потоком несжимаемой жидкости, который вне некоторых искомых вихревых центров, является потенциальным. Ограничимся здесь случаем симметричного обтекания четырехугольника (с одной осью симметрии) при наличии простейшего вихревого следа в виде двух точечных вихрей с искомыми центрами $z^\pm(t)$. Схема течения представлена на рис. 6. Более общая ситуация рассмотрена в [41].

Наша цель — получить формулу для эволюции течения, задаваемого траекторией

$$z : t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$$

центра $z(t)$ элементарного объема жидкости, в которой бы явно фигурировали параметры, характеризующие динамику границы $\Gamma = \Gamma(t)$ препятствия. Такая формула позволит явно выразить зависимость скорости течения $\vec{V} = dz(t)/dt$ от этих параметров и потому эффективно решать задачи минимизации интегралов вида³⁶

$$\int_{s \in \Gamma} F(s, \vec{V}(s)) ds, \quad F \in C^1(\Gamma \times \mathbb{R}^2).$$

³⁶В частности, если скорость течения подчинена гидродинамическому уравнению Эйлера (0.28), а массовые силы потенциальны, то речь может идти о минимизации лобового сопротивления, поскольку в этом случае давление определяется из интеграла Коши–Лагранжа (см., например, [10]).

1. Уточним постановку задачи. Полигональное препятствие (четырёхугольник) $S = S(t)$ задается своими вершинами

$$P_0(t) = (0, 0), \quad P_1(t) = (x_1(t), y_1(t)), \quad P_2(t) = (x_2(t), 0), \quad P_3(t) = (x_1(t), -y_1(t)),$$

где $x_1(t) \in \mathbb{R}$, $y_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$. Координаты этих точек, представленные тремя функциями

$$x_1 : t \mapsto x_1(t), \quad y_1 : t \mapsto y_1(t) \quad \text{и} \quad x_2 : t \mapsto x_2(t), \quad (1.1)$$

определяют геометрию препятствия и рассматриваются в качестве граничного управления. С точностью до задания линейных размеров препятствия, его геометрия определяется углами наклона сегментов P_0P_1 и P_2P_1 к оси x , т.е. углами $\beta_0(t) \in (0, \pi)$ и $\beta_1(t) \in (\beta_0(t), \pi)$, для которых

$$\tan \beta_k(t) = \frac{y_1(t)}{x_1(t) - kx_2(t)}. \quad (1.2)$$

Проведем в области течения

$$\tilde{\Omega}(t) = \mathbb{R}^2 \setminus (S(t) \cup z^+(t) \cup z^-(t)) \subset \mathbb{C},$$

разрез $\gamma(t)$, идущий (см. рис. 6) от середины задней границы препятствия $S(t)$ до искомого вихревого центра $z^+(t)$ вдоль задающих берега разреза $\gamma(t)$ линий уровня $\sigma_1(t)$ и $\sigma_4(t)$ потенциала $u(t, \cdot, \cdot)$ скорости течения $\vec{V}(t, x + iy) = \nabla_{x,y} u(t; x, y)$. Стрелки на гладких кривых, изображенных на рис. 6, указывают направление касательных к ней векторов $\vec{V}(t, z)$. Это (в нестационарном случае) отнюдь не траектории $t \mapsto z(t)$ частиц жидкости, но (как и в стационарном случае) эти кривые, называемые в гидродинамике линиями тока, ортогональны эквипотенциальным линиям $\{(x, y) \in \Omega(t) \mid u(t; x, y) = \text{const}\}$ и, в частности (см. рис. 6), к линиям

$$\{(x, y) \in \Omega(t) \mid u(t; x, y) = \sigma_k(t)\}$$

с искомыми функциями σ_k ($k = 1, \dots, 4$). Эквипотенциальные линии, отвечающие σ_2 и σ_3 , проходят соответственно через точку P_1 срыва с препятствия линии тока (в постулируемой здесь схеме течения этой точкой считается кромка препятствия) и точку $P_{\#}$ бифуркации этой линии, лежащей на оси x за препятствием.

Будем предполагать, что для некоторого $T > 0$ при $t \in [0, T]$ выполнены следующие условия.

1). Скорость течения потенциальна вне искоемых вихревых центров $z^{\pm}(t) = x^*(t) \pm iy^*(t)$ с $y^* > 0$, расположенных в следе за препятствием $S(t)$. Итак,

$$\vec{V}(t; x, y) = \nabla_{x,y} u(t; x, y) \quad \text{в} \quad \tilde{\Omega}(t) = \mathbb{R}^2 \setminus (S(t) \cup z^+(t) \cup z^-(t)) \subset \mathbb{C}. \quad (1.3)$$

При этом потенциал u имеет в точках $z^+ = x^* + iy^*$ и $z^- = x^* - iy^*$ особенность, а именно, с точностью до аддитивной константы,

$$u(t; x, y) \sim \mp \frac{\omega}{2\pi} \arg(z - z^{\pm}) \quad \text{при} \quad |z - z^{\pm}| \sim 0. \quad (1.4)$$

2). Жидкость несжимаема, т.е. $\text{div}_{x,y} \vec{V}(t; x, y) = 0$. В силу (1.3), это влечет гармоничность потенциала u в области $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(t)$ при каждом t .

3). Поток стационарен на бесконечности, более того: для любого $t \in [0, T]$

$$\vec{V}(t; x, y) = (V_x, V_y) \rightarrow (V_{\infty}, 0) = (1, 0) \quad \text{при} \quad z = x + iy \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

4). Препятствие непроницаемо, в силу чего на границе препятствия равна нулю нормальная к границе тела компонента скорости потока.

Отметим, что предположение (1.4) влечет разрыв скорости течения³⁷. Поэтому рассматриваемый здесь класс скоростей искомого течения имеет пустое пересечение с теми классами *непрерывных*

³⁷ Действительно, в силу (1.3) и (1.4),

$$\vec{V}(t; x, y) \sim \pm \frac{\omega}{2\pi} \frac{((y \mp y^*), -(x - x^*))}{|z - z^{\pm}|^2} \quad \text{при} \quad |z - z^{\pm}| \sim 0.$$

функций $(t; x, y) \mapsto \vec{V}(t; x, y)$, для которых (при том же условии стационарности на бесконечности (1.5), по-видимому, могут быть) установлены теоремы существования и/или единственности обобщенных [96] (ср. также [117, 133]) или классических [148, 190] решений гидродинамического уравнения Эйлера (0.28). По сравнению с течениями, которые имеют непрерывную скорость, строящееся здесь (с помощью ГК-метода) течение имеет свои плюсы и минусы. Минусы такие: 1). Пока не вполне завершено доказательство существования решения даже при малых временах, а именно, нужно еще доказать разрешимость параметризованную временным параметром алгебраической (точнее, трансцендентной) системы (1.12)–(1.14) из трех уравнений с тремя неизвестными. 2). Решение зависит от параметра ω , т.е. от интенсивности вихря. Этот параметр следует выбирать из тех или иных соображений (например, из данных численного или натурного эксперимента). Впрочем, зависимость от физического параметра может оказаться плюсом, т.к. возможно позволит лучше адаптировать решение к реальным жидкостям. Плюс, и весьма существенный, в том, что может быть предъявлена формула для решения, явно выражающая его зависимость от параметров граничного управления. Это важно при решении, например, вопроса о поиске граничного управления, при котором минимально лобовое сопротивление.

2. Рассмотрим односвязную область $\Omega(t) = (\tilde{\Omega}(t) \cap \mathbb{R}_+^2) \setminus \gamma(t)$, где область $\tilde{\Omega}(t)$ определена в формуле (1.3), а $\gamma(t)$ — та кривая (см. рис. 6), которая выходит из точки $P_2(t)$ (являющейся серединой задней границы препятствия) и идет до искомого вихревого центра $z^+(t)$ вдоль эквипотенциальной линии, т.е. вдоль линии уровня³⁸ потенциала $u(t; \cdot, \cdot)$. Для краткости будем называть эквипотенциальную линию *эквипотенциалью*. Кривая $\gamma(t)$ — это свободная граница области $\Omega(t)$. Компенсирующим условием, определяющим эту границу, является задание интенсивности вихря (см. Примечание 37), другими словами, задание коэффициента ω в формуле (1.4) для потенциала в окрестности центра z^+ , т.е. в формуле

$$u(t; x, y) \sim -\frac{\omega}{2\pi} \arg(z - z^+) \quad \text{при} \quad |z - z^+| \sim 0.$$

Кривая $\gamma(t)$ разрезает двусвязную область $\tilde{\Omega} \cap \mathbb{R}_+^2$. Берега разреза — эквипотенциали. Значения потенциала на них обозначим через $\sigma_1(t)$ и $\sigma_4(t)$ ($\sigma_1 < \sigma_4$), зарезервировав за обозначениями $\sigma_2(t)$ и $\sigma_3(t)$ те значения³⁹ потенциала $u(t; \cdot, \cdot)$, которые задают эквипотенциали

$$\{(x, y) \in \Omega(t) \mid u(t; x, y) = \sigma_k(t)\},$$

проходящие соответственно через точку P_1 срыва с препятствия линии тока⁴⁰ и точку бифуркации $P_{\#}$ этой линии, лежащей на оси x за препятствием. Согласно теореме Уильяма Томсона (см., например, [88]), иначе называемой (например, в [89]) теоремой Кельвина (в соответствии с его пэровским титулом), величина $\omega = \sigma_4(t) - \sigma_1(t)$ (равная интенсивности вихря с противоположным знаком) не зависит⁴¹ от t . Будем считать, что ω — заданный параметр-управление.

В односвязной области $\Omega(t)$ определена гармонически-сопряженная к u функция v . В силу предположения о симметрии течения, функция v постоянна на полуоси $\{x < 0\}$. Удобно считать, что эта постоянная равна нулю. Поэтому линию тока $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v(t; x, y) = 0\}$ будем называть

Тем самым, в точке z^{\pm} такое течение порождает (см., например, [58] стр. 25) вихрь интенсивности $\mp\omega$, т.к.

$$\int \int_{\xi^2 + \eta^2 < \varepsilon^2} \frac{\text{rot}(\eta, -\xi)}{\xi^2 + \eta^2} d\xi d\eta = \int_{\xi^2 + \eta^2 = \varepsilon^2} \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2} = -2\pi.$$

³⁸ Пусть Ω^* — двусвязная область, отличающаяся от той односвязной, которую охватывает срывающаяся с препятствия линия тока $P_1 P_{\#} P_2 P_1$ (см. рис. 6), тем, что из последней удалена точка z^+ . При конформном отображении области Ω^* на диск с вынутым центром эквипотенциальные линии есть образы радиусов диска.

³⁹ Для определенности, для каждого конкретного t мы соотносим нулевое значение потенциала $u(t; \cdot, \cdot)$ с точкой $z = 0$ (носовой кромкой препятствия).

⁴⁰ Выбор точки P_1 , т.е. кромки препятствия, наиболее удаленной от оси абсцисс, в качестве точки срыва линии тока, продиктован и наиболее типичными натурными данными, и наибольшей простотой математической модели.

⁴¹ В том случае, когда ставится также и вопрос о зарождении и/или развитии вихря (см., например, [26, 41]) параметр ω монотонно растет до тех пор, пока имеется его связь с поверхностью препятствия.

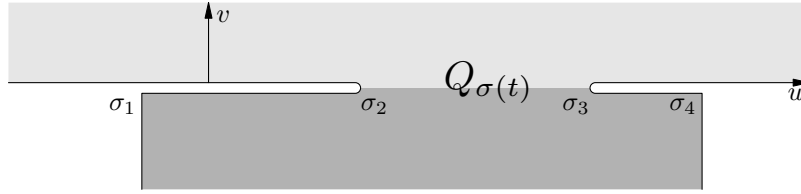


Рис. 7. Образ $Q_{\sigma(t)}$ области $\Omega(t)$ (см. рис. 6) при однолистом отображении $w = u + iv$ (сохраняющем закраску отображаемых подобластей). Этот образ параметризован вектор-функцией $t \mapsto (\sigma_1(t), \dots, \sigma_4(t))$, где $\sigma_k(t)$ – значения потенциала $u(t; \cdot, \cdot)$, задающие эквипотенциали $\{(x, y) \in \Omega(t) / u(t; x, y) = \sigma_k(t)\}$.

нулевой линией тока. Эта линия тока разветвляется в точке P_0 и (согласно условиям Коши-Римана) идет вдоль контура (непроницаемого) препятствия. Сорвавшись с препятствия, она дугой

$$l(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \sigma_2(t) < u(t; x, y) < \sigma_3(t), \quad v(t; x, y) = 0\}$$

отделяет вихревую зону

$$\Omega_1(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \sigma_1(t) < u(t; x, y) < \sigma_4(t), \quad v(t; x, y) < 0\}$$

от, так сказать, ламинарной части течения

$$\Omega_0(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid -\infty < u(t; x, y) < \infty, \quad v(t; x, y) > 0\}.$$

В области Ω_0 функция v монотонно возрастает от 0 до ∞ вдоль любой эквипотенциали $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid u(x, y) = \text{const} \in (-\infty, \infty)\}$ по мере удаления от нулевой линии тока. Поэтому ламинарная область течения Ω_0 отображается функцией $w = u + iv$ на верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ . В области Ω_1 функция v монотонно убывает от 0 до $-\infty$ вдоль любой эквипотенциали $u = \text{const} \in (\sigma_1, \sigma_4)$ по мере приближения к вихревой центру z^+ . Поэтому функция $w = u + iv$ отображает вихревую область течения Ω_1 на полуполосу $\Pi = \{\sigma_1(t) < u < \sigma_4(t), \quad v < 0\}$.

Обозначим через $Q = Q_{\sigma(t)}$ область, изображенную на рис. 7. Область Q параметризована вектор-функцией⁴² $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и состоит из верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ и подклеенной к ней вдоль интервала $w(l(t)) = \{\sigma_2(t) < u < \sigma_3(t), \quad v = 0\}$ полуполосы Π .

Мы видим, что выполнено

Условие Гельмгольца: функция

$$w(t, \cdot) : \Omega \ni z = x + iy \mapsto w(t, z) = u(t; x, y) + iv(t; x, y) \in Q \quad (1.6)$$

отображает однолистно область Ω на односвязную фиксированную область Q . Тем самым, определена (см. Введение, формула (0.7)) функция Гельмгольца–Кирхгофа

$$A + iB : Q \ni w = u + iv \mapsto A(u, v) + iB(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{dz}{dw} \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy. \quad (1.7)$$

3. Применим теперь ГК-метод. В данном случае (в отличие от задач других параграфов) сопутствующая ГК-методу задача Римана–Гильберта совсем простая. Она сводится к линейной краевой задаче⁴³ для гармонической функции $B : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Вспоминая, что локально эта функция характеризует угол поворота при отображении $w : \Omega \rightarrow Q$, выпишем для нее граничные условия. Имеем при $v = \pm 0$

$$B(u, +0) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \in (-\infty, 0), \\ \beta_0(t) & \text{при } u \in (0, \sigma_2(t)), \\ 0 & \text{при } u \in (\sigma_3(t), \infty), \end{cases} \quad (1.8)$$

⁴²Напомним, что $\sigma_4 = \sigma_1 + \omega$, где ω – заданный параметр.

⁴³Несколько ниже, в пункте 4 приведены формулы для решения этой задачи. Доказательство единственности решения, опирающееся на лемму Жиро-Хопфа-Олейник, изложено в курсовой работе 2006 года студента 3-го курса мех-мата МГУ Горичкого М.А.

$$B(u, -0) = \begin{cases} \beta_1(t) & \text{при } u \in (\sigma_1(t), \sigma_2(t)), \\ -\pi & \text{при } u \in (\sigma_3(t), \sigma_4(t)), \end{cases} \quad (1.9)$$

а при $v < 0$

$$B(u, v)|_{u=\sigma_1} = B(u, v)|_{u=\sigma_4} + 2\pi, \quad \partial_u B(u, v)|_{u=\sigma_1} = \partial_u B(u, v)|_{u=\sigma_4}. \quad (1.10)$$

♡ В самом деле, возьмем элемент (вектор) dz на границе области Q , например, вдоль нулевой линии тока. Подсчитаем $\arg dz$. Если, скажем, вектор dz приложен к точке с координатами $(x, 0)$ с $x < 0$, то $\arg dz = 0$, а если этот вектор приложен к передней (соответственно, задней) части препятствия S , то $\arg dz = \beta_0$ (соответственно, $\arg dz = \beta_1$). Затем найдем соответствующий вектору dz элемент (вектор) $w(dz)$ и, воспользовавшись тем, что $w(dz) = dw + o(|dw|)$ при $|dw| \rightarrow 0$, или, что то же самое, $z(dw) = dz(dw) + o(|dz|)$ при $|dz| \rightarrow 0$, найдем $B(u, v) = \arg dz(dw) - \arg dw$ (учитывая при этом, что на нулевой линии тока $\arg dw = 0$). Что касается той части границы области Q , которая соответствует берегам разреза γ , то следует учесть следующее. В точках, принадлежащих одной линии тока, т.е. отстоящих на одинаковом расстоянии от вихревого центра вдоль обоих берегов разреза, иначе говоря, в точках с координатами (σ_1, v) и (σ_1, v) , где $v < 0$, значения функции B отличаются на 2π , а длины соответствующих дуг выражаются через гармонически-сопряженную к B функцию, что в итоге приводит к равенству в этих точках производных функции B по переменной v . □

Что же касается функции A , гармонически-сопряженной к B , то она определяется по B однозначно, поскольку $A \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. Последнее следует из сделанного предположения о стационарности потока на бесконечности, ибо

$$\vec{V} \stackrel{(1.3)}{=} (u_x, u_y) \stackrel{(1.6)}{=} (u_x, -v_x) \stackrel{(1.6)}{=} \frac{dw}{dz} = \overline{\frac{1}{dz/dw}} \stackrel{(1.7)}{=} e^{-A} e^{iB}. \quad (1.11)$$

Функция Гельмгольца–Кирхгофа $A + iB$, как и область $Q = Q_{\sigma(t)}$, параметризована вектор-функцией $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Ее компоненты нам не заданы. Но они связаны следующими тремя соотношениями

$$x_1(t) \stackrel{(0.8)}{=} \Re \int_0^{\sigma_2(t)} \exp \{A(\xi, \eta; \sigma(t), \beta(t)) + iB(\xi, \eta; \sigma(t), \beta(t))\} \Big|_{\beta \stackrel{(1.2)}{=} \beta(x_1, y_1, x_2)} d\zeta, \quad (1.12)$$

$$y_1(t) \stackrel{(0.8)}{=} \Im \int_0^{\sigma_2(t)} \exp \{A(\xi, \eta; \sigma(t), \beta(t)) + iB(\xi, \eta; \sigma(t), \beta(t))\} \Big|_{\beta \stackrel{(1.2)}{=} \beta(x_1, y_1, x_2)} d\zeta, \quad (1.13)$$

$$x_2(t) \stackrel{(0.8)}{=} \Re \int_0^{\sigma_1(t)} \exp \{A(\xi, \eta; \sigma(t), \beta(t)) + iB(\xi, \eta; \sigma(t), \beta(t))\} \Big|_{\beta \stackrel{(1.2)}{=} \beta(x_1, y_1, x_2)} d\zeta. \quad (1.14)$$

Если эта система разрешима относительно вектор-функции $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, то имеет место

Теорема 1.1 [41]. *Функция $z : t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$, задающая траекторию центра элементарного объема жидкости и его скорость $\vec{V}(t, x(t) + iy(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} z(t)$, вычисляется по явной формуле*

$$z(t) = \int_0^{w(t)} \exp \{A(\xi, \eta) + iB(\xi, \eta)\} d\zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (1.15)$$

в которой $w(t) = u(t) + iv(t)$ есть образ $w(t; z(t))$ траектории $t \mapsto z(t)$ при отображении w . Эта функция $t \mapsto w(t) = u(t) + iv(t)$ выражается через решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \sum_{j=1}^{j=3} F_{1j}(u, v, \sigma, \beta) \dot{\sigma}_j + \sum_{k=0}^{k=1} G_{1k}(u, v, \sigma, \beta) \dot{\beta}_k + H_1(u, v, \sigma, \beta), \\ \dot{v} &= \sum_{j=1}^{j=3} F_{2j}(u, v, \sigma, \beta) \dot{\sigma}_j + \sum_{k=0}^{k=1} G_{2k}(u, v, \sigma, \beta) \dot{\beta}_k + H_2(u, v, \sigma, \beta) \end{aligned} \quad (1.16)$$

с явно заданными, согласно приведенным ниже формулам (1.23), коэффициентами F_{lj}, G_{lk}, H_l .

Задача Коши для системы (1.16) определяет скорость $\vec{V}(t, x + iy) = \nabla_{x,y} u(t; x, y)$.

4. Проведем доказательство теоремы. Имеем

$$\vec{V} \stackrel{(1.3)}{=} (u_x, u_y) \stackrel{(1.6)}{=} (u_x, -v_x) \stackrel{(1.6)}{=} \frac{\overline{dw}}{dz} = \frac{1}{dz/dw} \stackrel{(0.8)}{=} e^{-A} e^{iB} \implies \vec{V}(t, x(t), y(t)) = [E^-]^{u(t), v(t)}, \quad (1.17)$$

где

$$E^\pm = e^{\pm A + iB}, \quad \text{а} \quad [F]^{u, v} \stackrel{def}{=} F(u, v). \quad (1.18)$$

С другой стороны, $\vec{V}(t; x(t) + iy(t)) = \frac{d}{dt} z(t)$. Функция $z(t)$ представлена формулой (1.15). Учитывая геометрию области Q , запишем интеграл в этой формуле в виде суммы интегралов

$$\int_{0+i0}^{u_*+i0} + \int_{u_*+i0}^{u_*+iv(t)} + \int_{u_*+iv(t)}^{w(t)=u(t)+iv(t)}, \quad \text{где} \quad u_* \in (\sigma_2, \sigma_3), \quad (1.19)$$

и продифференцируем $z(t)$. В результате получим

$$\vec{V}(t, x(t), y(t)) = \frac{d}{dt} \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [E^+]^{\xi, v(t)} d\xi \right\} + \frac{d}{dt} \left\{ i \int_0^{v(t)} [E^+]^{u_*, \eta} d\eta \right\},$$

т.е.

$$\vec{V}(t, x(t), y(t)) = \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} \frac{d}{dt} [E^+]^{\xi, v(t)} d\xi + \dot{u}(t) [E^+]^{u(t), v(t)} \right\} + i \left\{ \int_0^{v(t)} \frac{d}{dt} [E^+]^{u_*, \eta} d\eta + \dot{v}(t) [E^+]^{u_*, v(t)} \right\}. \quad (1.20)$$

Правая часть соотношения (1.20) равна

$$\begin{aligned} & \dot{u}(t) \left\{ [E^+]^{u(t), v(t)} \right\} + \dot{v}(t) \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [E_v^+]^{\xi, v(t)} d\xi + i [E^+]^{u_*, v(t)} \right\} + \\ & \dot{\sigma}(t) \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [E_\sigma^+]^{\xi, v(t)} d\xi + i \int_0^{v(t)} [E_\sigma^+]^{u_*, \eta} d\eta \right\} + \dot{\beta}(t) \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [E_\beta^+]^{\xi, v(t)} d\xi + i \int_0^{v(t)} [E_\beta^+]^{u_*, \eta} d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Преобразуем это выражение, учитывая, что $E^+ = e^A \cos B + ie^A \sin B$,

$$E_v^+ = e^{A+iB} \left(\frac{\partial A}{\partial v} + i \frac{\partial B}{\partial v} \right) = e^A \left(A_v \cos B - B_v \sin B \right) + ie^A \left(A_v \sin B + B_v \cos B \right),$$

а также то, что аналогичные формулы верны для E_σ^+ и E_β^+ . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \dot{u}(t) \left\{ [e^A \cos B + ie^A \sin B]^{u(t), v(t)} \right\} + \\ & \dot{v}(t) \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [e^A (A_v \cos B - B_v \sin B) + ie^A (A_v \sin B + B_v \cos B)]^{\xi, v(t)} d\xi + i [e^A \cos B + ie^A \sin B]^{u_*, v(t)} \right\} + \\ & \dot{\sigma}(t) \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [e^A (A_\sigma \cos B - B_\sigma \sin B) + ie^A (A_\sigma \sin B + B_\sigma \cos B)]^{\xi, v(t)} d\xi + \right. \\ & \left. i \int_0^{v(t)} [e^A (A_\sigma \cos B - B_\sigma \sin B) + ie^A (A_\sigma \sin B + B_\sigma \cos B)]^{u_*, \eta} d\eta \right\} + \\ & \dot{\beta}(t) \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [e^A (A_\beta \cos B - B_\beta \sin B) + ie^A (A_\beta \sin B + B_\beta \cos B)]^{\xi, v(t)} d\xi + \right. \\ & \left. i \int_0^{v(t)} [e^A (A_\beta \cos B - B_\beta \sin B) + ie^A (A_\beta \sin B + B_\beta \cos B)]^{u_*, \eta} d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Так преобразованную правую часть равенства (1.20) сопоставим с ее левой частью

$$\vec{V}(t, x(t), y(t)) \stackrel{(1.17)}{\stackrel{(1.18)}{=}} [e^{-A} (\cos B + i \sin B)]^{u(t), v(t)}$$

и распишем раздельно вещественную и мнимую компоненты равенства (1.20). Тогда получим

$$\begin{aligned} h_1 &= e_{11}\dot{u}(t) + e_{12}\dot{v}(t) + \sum_{j=1}^{j=3} f_{1j}\dot{\sigma}_j(t) + \sum_{k=0}^{k=1} g_{1k}\dot{\beta}_k(t), \\ h_2 &= e_{21}\dot{u}(t) + e_{22}\dot{v}(t) + \sum_{j=1}^{j=3} f_{2j}\dot{\sigma}_j(t) + \sum_{k=0}^{k=1} g_{2k}\dot{\beta}_k(t), \end{aligned} \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= [e^{-A} \cos B]^{u(t), v(t)}, \quad h_2 = [e^{-A} \sin B]^{u(t), v(t)}, \\ e_{11} &= \left\{ [e^A \cos B]^{u(t), v(t)} \right\}, \quad e_{12} = \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [e^A (A_v \cos B - B_v \sin B)]^{\xi, v(t)} d\xi - [e^A \sin B]^{u_*, v(t)} \right\}, \\ e_{21} &= \left\{ [e^A \sin B]^{u(t), v(t)} \right\}, \quad e_{22} = \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [e^A (A_v \sin B + B_v \cos B)]^{\xi, v(t)} d\xi + [e^A \cos B]^{u_*, v(t)} \right\}, \\ f_{1j} &= \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [e^A (A_{\sigma_j} \cos B - B_{\sigma_j} \sin B)]^{\xi, v(t)} d\xi - \int_0^{v(t)} [e^A (A_{\sigma_j} \sin B + B_{\sigma_j} \cos B)]^{u_*, \eta} d\eta \right\}, \\ f_{2j} &= \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [e^A (A_{\sigma_j} \sin B + B_{\sigma_j} \cos B)]^{\xi, v(t)} d\xi + \int_0^{v(t)} [e^A (A_{\sigma_j} \cos B - B_{\sigma_j} \sin B)]^{u_*, \eta} d\eta \right\}, \\ g_{1k} &= \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [e^A (A_{\beta_k} \cos B - B_{\beta_k} \sin B)]^{\xi, v(t)} d\xi - \int_0^{v(t)} [e^A (A_{\beta_k} \sin B + B_{\beta_k} \cos B)]^{u_*, \eta} d\eta \right\}, \\ g_{2k} &= \left\{ \int_{u_*}^{u(t)} [e^A (A_{\beta_k} \sin B + B_{\beta_k} \cos B)]^{\xi, v(t)} d\xi + \int_0^{v(t)} [e^A (A_{\beta_k} \cos B - B_{\beta_k} \sin B)]^{u_*, \eta} d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Будем предполагать⁴⁴ что

$$E \stackrel{def}{=} e_{11}e_{22} - e_{21}e_{12} \neq 0. \quad (1.22)$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (1.21) может быть переписана в виде (1.16) с такими формулами для F_{lj}, G_{lk}, H_l :

$$\begin{aligned} F_{1j} &= (f_{2j}e_{12} - f_{1j}e_{22})/E, & F_{2j} &= (f_{1j}e_{21} - f_{2j}e_{11})/E, \\ G_{1k} &= (g_{2k}e_{12} - g_{1k}e_{22})/E, & G_{2k} &= (g_{1k}e_{21} - g_{2k}e_{11})/E, \\ H_1 &= (h_1e_{22} - h_2e_{12})/E, & H_2 &= (h_2e_{11} - h_1e_{21})/E. \end{aligned} \quad (1.23)$$

5. В приводимых ниже формулах для функций A и B фигурирует определенная на замыкании \bar{I} интервала $I = \{\sigma_2 < u < \sigma_3; v = 0\}$ функция $b \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$, которая определяет след $B|_I$ функции B на интервале I . Нетрудно проверить, что

$$b(\sigma_2 + 0) = \frac{\beta_0 + \beta_1}{2}, \quad b(\sigma_3 - 0) = -\frac{\pi}{2}, \quad B(\sigma_1, -0) = -\frac{\pi + \beta_1}{2}, \quad B(\sigma_4, -0) = -\frac{\pi + \beta_1}{2} - 2\pi. \quad (1.24)$$

Для функции b ниже выписано интегральное уравнение (1.27), выражающее следующее равенство

$$\frac{\partial B_0}{\partial v} \Big|_{v=+0} = \frac{\partial B_1}{\partial v} \Big|_{v=-0} \quad \sigma_2 < u < \sigma_3, \quad (1.25)$$

которое характеризует связь между гармоническими функциями $B_0 = B|_{v>0}$ и $B_1 = B|_{v<0}$ (принимающими на интервале I одно и тоже предельное значение, задаваемое непрерывной функцией b).

⁴⁴Это предположение (его апостериори можно и нужно проверить!) физически оправдано: в каждый момент времени однозначно определен потенциал $u(t) = u(t, x(t), y(t))$ скорости движения $t \mapsto (x(t), y(t))$ элементарного объема жидкости, а потому однозначно определена и скорость изменения этого потенциала, т.е. $\dot{u}(t)$.

Функции $B_0 = B|_{v>0}$ и $B_1 = B|_{v<0}$ находятся с помощью формулы Пуассона для задачи Дирихле в полупространстве. Предварительно, при получении формулы для функции B_1 мы конформно отображаем полуполосу $\{\sigma_1 < u < \sigma_4; v < 0\}$ на полупространство, вводя следующие обозначения

$$\begin{aligned}\omega &= \sigma_4 - \sigma_1, \quad \lambda_1 = -\cos \frac{\pi}{\omega}(\sigma_4 - \sigma_2), \quad \lambda_2 = -\cos \frac{\pi}{\omega}(\sigma_4 - \sigma_3) \\ \xi &= -\cosh \frac{\pi}{\omega}v \cdot \cos \frac{\pi}{\omega}(\sigma_4 - u), \quad \eta = -\sinh \frac{\pi}{\omega}v \cdot \sin \frac{\pi}{\omega}(\sigma_4 - u),\end{aligned}\tag{1.26}$$

где $u \in [\sigma_1, \sigma_4]$, а $v < 0$.

Функция A задается своими ограничениями $A_0 = A|_{v>0}$ и $A_1 = A|_{v<0}$. Формулы для них получены из условия аналитичности функции $A + iB$ и нормировки $A|_{u=\infty} = 0$, которая соответствует, в силу (1.11), условию (1.5).

В итоге (благодаря, прежде всего, усилиям А.С. Кочурова и В.Ю. Протасова⁴⁵), получены следующие формулы

$$\begin{aligned}A_0(u, v) &= \frac{\beta_0}{2\pi} \ln \frac{v^2 + (u - \sigma_2)^2}{v^2 + u^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} b(\tau) \frac{(\tau - u) d\tau}{v^2 + (u - \tau)^2}, \\ B_0(u, v) &= \frac{\beta_0}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{v} + \operatorname{arctg} \frac{\sigma_2 - u}{v} \right) + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} b(\tau) \frac{v d\tau}{v^2 + (u - \tau)^2} \\ A_1(u, v) &= \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(F_1(\sigma_3 - u, v) F_2(\sigma_4 - u, v) \right) + \frac{\beta_1}{2\pi} \ln \left(F_1(\sigma_4 - u, v) / F_2(u - \sigma_2, v) \right) + \\ &+ \frac{1}{\omega} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} b(\tau) K_A(u - \tau, v) d\tau + A_0\left(\frac{\sigma_3 + \sigma_2}{2}, 0\right) - \frac{1}{\omega} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} b(\tau) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\omega}(\sigma_3 + \sigma_2 - 2\tau) d\tau, \\ B_1(u, v) &= - \left(\operatorname{arctg} \frac{\lambda_2 - \xi}{\eta} + \frac{\beta_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 - \xi}{\eta} \right) + \frac{\beta_1 - \pi}{2\pi} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{1 + \xi}{\eta} + \operatorname{arctg} \frac{1 - \xi}{\eta} \right) \\ &- \operatorname{arctg} G(u, v, \sigma_4 - \sigma_3) - \frac{\beta_1}{\pi} \operatorname{arctg} G(u, v, \sigma_4 - \sigma_2) - \frac{1}{\omega} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} b(\tau) K_B(u - \tau, v) d\tau,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}F_1(s, v) &= \frac{\cosh \frac{2\pi}{\omega}v - \cos \frac{2\pi}{\omega}s}{\sin^2 \frac{\pi}{2\omega}(\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_4)}, \quad F_2(s, v) = \frac{\cosh \frac{2\pi}{\omega}v - \cos \frac{2\pi}{\omega}s}{\sin^2 \frac{\pi}{2\omega}(\sigma_3 - \sigma_2)}, \\ G(u, v, s) &= \frac{\sinh \frac{\pi}{\omega}v \cdot \cos \frac{\pi}{\omega}s}{\sin \frac{\pi}{\omega}(\sigma_4 - u) + \cosh \frac{\pi}{\omega}v \sin \frac{\pi}{\omega}s},\end{aligned}$$

а

$$K_A(s, v) = \frac{\sin \frac{2\pi}{\omega}s}{\cosh \frac{2\pi}{\omega}v - \cos \frac{2\pi}{\omega}s}, \quad K_B(s, v) = \frac{\sinh \frac{2\pi}{\omega}v}{\cosh \frac{2\pi}{\omega}v - \cos \frac{2\pi}{\omega}s}.$$

Что же касается функции b , т.е. следа $B|_I$ функции B на интервале $I = \{\sigma_2 < u < \sigma_3; v = 0\}$, то эта функции $b \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$, подчиненная условию (1.24), есть решение интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} b(s) \left[\frac{1}{\tau - s} + \frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(\tau - s) \right] ds + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} (b(s) - b(\sigma_2)) \left[\frac{1}{s - \sigma_2} + \frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(s - \sigma_2) \right] ds = q(\tau),\tag{1.27}$$

в котором интеграл понимается в смысле главного значения, $\tau \in (\sigma_2, \sigma_3)$, а

$$q(\tau) = \ln \frac{\sigma_3 - \tau}{\sigma_3 - \sigma_2} + \frac{\beta_1 + \beta_0}{2\pi} \ln \frac{(\tau - \sigma_2) \sin \frac{\pi}{\omega}(\tau - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_2) \sin \frac{\pi}{\omega}(\sigma_3 - \sigma_2)} - \frac{\beta_1 - \beta_0}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{\omega}(\tau - \sigma_2)}{\frac{\pi}{\omega}(\tau - \sigma_2)} -$$

⁴⁵Ими же получены аналогичные формулы для производных функций A и B по параметру β . Получены также формулы для приближенного решения интегрального уравнения (1.27) и его производной $\partial b / \partial \beta$.

$$-\frac{\beta_1 - \pi}{\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{\omega}(\sigma_4 - \tau)}{\sin \frac{\pi}{\omega}(\sigma_4 - \sigma_2)} + \frac{\beta_0}{\pi} \ln \frac{\tau}{\sigma_2}.$$

Решение b уравнения (1.27) целесообразно представить в виде

$$b(s) \stackrel{(1.24)}{=} \frac{\beta_0 + \beta_1}{2} + \int_{\sigma_2}^s b'(s) ds.$$

Дело в том, что функция $\varphi = b'$ представима в виде линейной комбинации трех функций, которые с точностью до линейной замены аргумента являются решениями φ_j уравнения

$$\int_0^{\xi_1} \varphi_j(s) \left[\cot(u - s) + \frac{1}{u - s} \right] ds = f_k(u, \xi_2, \xi_3), \quad (1.28)$$

где $0 < u < \xi_1 < \xi_2 < \pi$, $\xi_3 > 0$, а

$$f_1(u, \xi_2, \xi_3) = \cot u - \frac{1}{u}, \quad f_2(u, \xi_2, \xi_3) = \cot(u - \xi_2), \quad f_3(u, \xi_2, \xi_3) = -\frac{1}{u + \xi_3}.$$

6. Некоторые открытые вопросы.

1. Как уже было отмечено, для завершения доказательства теоремы существования решения задачи 0.3, параметризованного данными Коши, требуется установить разрешимость алгебраической системы (1.12)–(1.14). Пока это не сделано. Не исключено, что теорема существования для задачи 0.3 может быть получена с использованием методов, разработанных в работах [49, 192] (см. также [93]).

2. Было бы полезно получить явную формулу для решения интегрального уравнения

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)M(\tau - s)}{\tau - s} ds = q(\tau), \quad (1.29)$$

где Γ — отрезок прямой, а $\tau \mapsto M(\tau)$ — функция, голоморфная в окрестности Γ . Интерес представляет, в частности, решение, неограниченное на концах отрезка. Это позволило бы выписать в явном виде решение уравнения (1.28). Отметим, что явные формулы для решения уравнения (1.29) известны (см., например, [24, 78]) в тех случаях, когда $M = \text{const}$ или же когда Γ — замкнутая кривая (а не отрезок).

3. Рассмотренная здесь схема вихревой дорожки состоит из пары симметричных относительно оси x вихревых зон. Эти зоны разделены осью симметрии. Поэтому сопутствующая ГК-методу задача Римана–Гильберта для функции $A + iB$ — линейна. В случае же несимметричного обтекания или наличия нескольких соприкасающихся пар вихревых зон [41], граница между вихревыми зонами (полностью или частично) криволинейна и априори не задана. Соответствующая задача Римана–Гильберта оказывается нелинейной [41]. Существование решения этой нелинейной задачи — достаточно серьезный вопрос. При его разрешении может помочь техника, представленная в работах [5, 122, 131] и частично изложенная в §2 при доказательстве теоремы 2.1.

4. Выше задача 0.3 интерпретировалась как задача Коши. Однако не меньший интерес представляет подробный анализ ее цикло-периодической постановки [39], когда периодически наиболее удалившийся вихрь принудительно угасает, а с препятствия срывается зародившийся новый вихрь.

5. Было бы очень интересно обобщить представленную в §1 конструкцию на случаи, обозначенные в Примечании 35.

6. Было бы полезно выявить математическую суть условия (1.22) в терминах входящих в него параметров.

§ 2 Прямая задача о равновесии плазмы в токамаке

1. ТОКАМАК — это ТОроидальная КАмера с МАгнитными КАтушками (см. рис. 8).

Основными элементами токамака являются вакуумная тороидальная камера, трансформатор и катушки тороидального магнитного поля. Камера, в которую запускают водород, например, его изотопы дейтерий и тритий, служит также вторичной обмоткой (катушкой) трансформатора. Через первичную обмотку трансформатора пропускают большой импульсный (переменный) ток, который возбуждает тороидальное (направленное вдоль большой окружности тора) вихревое электрическое поле. Оно осуществляет пробой (поджог) водорода, превращая его в ионно-электронный газ, т.е. в плазму. Ионы водорода (протон у обычного водорода, протон-нейтрон у дейтерия, протон-2нейтрона у трития) — это его ядра. Неопределенность δE энергии разогретых ядер водорода, соответствующая неопределенности δr расстояния между сближающимися ядрами (на расстояние порядка 1 ферми = 10^{-15} м, т.е. порядка радиуса действия ядерных сил) достаточно высока в силу принципа неопределенности Гейзенберга $\delta E \geq \frac{1}{\pi m} \left(\frac{\hbar}{2 \cdot \delta r} \right)^2$, поскольку мала приведенная масса $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ реагирующих ядер водорода. Это позволяет ядрам водорода преодолеть с ненулевой вероятностью (за счет туннельного эффекта) электростатический

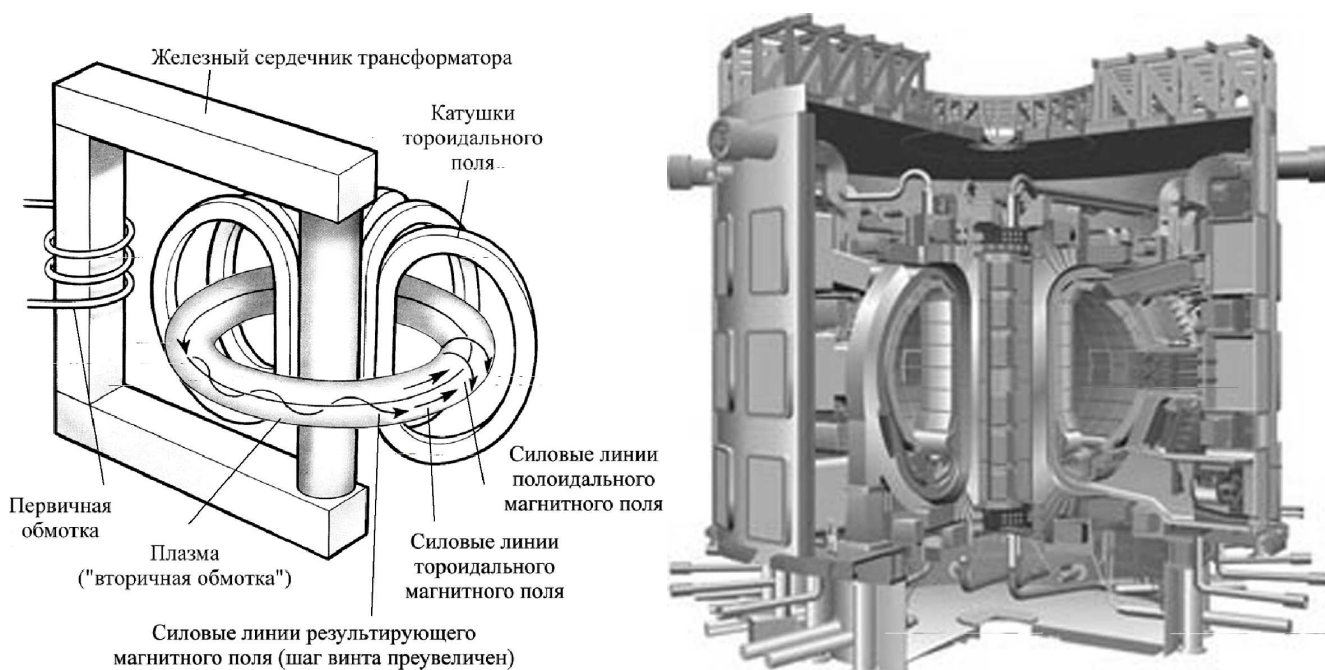


Рис. 8. *Схема токамака и вид реактора ИТЭР* — этого международного (ЕС, Россия, США, Япония и недавно присоединившиеся к проекту Индия, КНР и Республика Корея) экспериментального термоядерного реактора (International Thermonuclear Experimental Reactor) [101, 161], который предполагается построить в двухстах километрах от Марселя (в местечке Кадараш Cadarache). Большой радиус тороидальной камеры ~ 6 м, объем камеры ~ 840 м³. Запланированная плотность плазмы невысока (в 1000 раз меньше атмосферного воздуха). Однако ее будет достаточно, чтобы впервые достичь уровня выделяемой энергии, необходимого для самоподдержания реакции синтеза, поскольку расчетная температура плазмы составляет $150 \div 200$ млн. градусов (что на порядок выше температуры в центре Солнца), а разряд должен длиться около 7 минут.

кулоновский барьер их взаимного отталкивания и, находясь уже в зоне действия ядерных сил, вступить в реакцию синтеза. В DT-реакции синтеза одного ядра дейтерия и одного ядра трития образуется атом гелия, один нейтрон и освобождается (за счет дефекта масс) энергия порядка $7 \cdot 10^{-18}$ квт час (1 кг DT-топлива эквивалентен 250 кг обогащенного урана). Проблема теплоизоляции плазменного шнура решается за счет ее удержания от соприкосновения с камерой посредством магнитного поля. Индуцированный в плазме продольный (вдоль большой окружности тора) электрический ток создает магнитное поле, силовые линии которого ортогональны большой окружности тора и, будучи концентрическими, имеют полюс. Поэтому это поле называется полоидальным. Оно и тороидальное магнитные поля образуют результирующее магнитное поле, силовые линии которого спиралями обматывают тор. Вдоль них движутся (в магнитогидродинамическом приближении) заряженные частицы плазмы, т.е. ионы и оторванные от них электроны, изолируясь тем самым от соприкосновения с камерой. Тороидальное поле играет к тому же главную роль в подавлении магнитогидродинамической неустойчивости плазмы.

Равновесие плазмы (как в магнитных ловушках [12], к которым относятся токамаки, так и в астрофизике [11, 87]) описывается уравнением Грэда–Шафранова, называемого иногда SLSC-Equation⁴⁶.

Приведем вывод этого уравнения для случая токамака.

В плоскости большой окружности тороидальной камеры введем полярные координаты: радиус r и угол θ . Ортогональную этой плоскости координату обозначим через z . Поля вдоль координаты θ называются тороидальными (или продольными), а в координатной плоскости (r, z) они поперечны к продольной оси тора, являющейся полюсом для этих полей. Поэтому называются полоидальными. Магнитогидродинамическое равновесие плазмы в токамаке описывается в терминах магнитного поля $\mathbf{B} = (B_r, B_\theta, B_z)$, тока $\mathbf{j} = (j_r, j_\theta, j_z)$ и давления p .

Равновесие характеризуется тем, что давление одинаково с обеих (внешней и внутренней) сторон границы γ плазменного шнура. С внешней стороны, где нет тока, оно постоянно в силу уравнения движения

$$\nabla p = [\mathbf{j}, \mathbf{B}]. \quad (2.1)$$

⁴⁶Это уравнение было независимо получено Грэдом и Шафрановым в начале 50-х годов, а в открытых публикациях появилось сначала в работе Шафранова [94], а затем в работах Люста&Шлютера [162] и Грэда&Рубина [141] после рассекречивания программ управляемого термоядерного синтеза (чему способствовал доклад в 1956 г. И.В. Курчатова в Harewell).

Поэтому равновесие выражается следующим условием

$$p \Big|_{\gamma} = \text{const} . \quad (2.2)$$

Проанализируем стационарные уравнения (одножидкостной⁴⁷) магнитной гидродинамики в условиях токамака, т.е. когда

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 . \quad (2.3)$$

В этом случае первое уравнение Максвелла $\text{div } \mathbf{B} = 0$ (уравнение неразрывности) приобретает вид

$$\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rB_z)}{\partial z} = 0 , \quad \text{поскольку} \quad \text{div } \mathbf{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial B_z}{\partial z} . \quad (2.4)$$

Тем самым, существует такая функция $\psi : (r, z) \mapsto \psi(r, z)$, что

$$rB_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z} , \quad rB_z = \frac{\partial \psi}{\partial r} , \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z} , q , \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) , \quad \text{где} \quad q(r, z) \stackrel{\text{def}}{=} rB_\theta(r, z) . \quad (2.5)$$

В силу (2.3) и (2.5), второе векторное уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j}$ имеет такие компоненты⁴⁸

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial z} = j_r , \quad -\tilde{\Delta} \psi = j_\theta , \quad \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} = j_z , \quad (2.6)$$

где⁴⁹

$$\tilde{\Delta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (2.7)$$

Наконец, ввиду (2.3), (2.5) и (2.6), уравнение движения $\nabla p = [\mathbf{j}, \mathbf{B}]$ записывается в виде следующей системы

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \tilde{\Delta} \psi - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial q^2}{\partial r} , \quad (2.8)$$

$$0 = \frac{1}{r^2} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) , \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \tilde{\Delta} \psi - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial f^2}{\partial z} . \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) означает, что вектора $\nabla q = (\partial q / \partial r, 0, \partial q / \partial z)$ и $\nabla \psi = (\partial \psi / \partial r, 0, \partial \psi / \partial z)$ параллельны. Отсюда получаем *первое замечательное следствие*

$$q = Q(\psi) , \quad \text{т.е.} \quad q(r, z) = Q(\psi(r, z)) . \quad (2.11)$$

В силу этого следствия, уравнения (2.8), (2.10) представимы в виде

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \left(-\frac{1}{r} \tilde{\Delta} \psi - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial Q^2(\psi)}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \left(-\frac{1}{r} \tilde{\Delta} \psi - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial Q^2(\psi)}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} . \quad (2.12)$$

Это означает, что

$$\nabla p = \left(-\frac{1}{r} \tilde{\Delta} \psi - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial Q^2(\psi)}{\partial \psi} \right) \nabla \psi . \quad (2.13)$$

Отсюда вытекает параллельность векторов $\nabla p = (\partial p / \partial r, 0, \partial p / \partial z)$ и $\nabla \psi = (\partial \psi / \partial r, 0, \partial \psi / \partial z)$, что влечет *второе замечательное следствие*

$$p = P(\psi) , \quad \text{т.е.} \quad p(r, z) = P(\psi(r, z)) , \quad (2.14)$$

в силу которого

$$\nabla p = \frac{\partial P(\psi)}{\partial \psi} \nabla \psi . \quad (2.15)$$

В итоге, из (2.13), (2.15) вытекает *уравнение Грэда-Шафранова*

$$-\tilde{\Delta} \psi = r \frac{\partial P(\psi)}{\partial \psi} + \frac{1}{r} Q(\psi) \frac{\partial Q(\psi)}{\partial \psi} , \quad (2.16)$$

правая часть которого имеет конкретную структуру, соответствующую тороидальной геометрии магнитных силовых линий.

Аналогичные выкладки показывают, что в случае цилиндрической геометрии магнитных силовых линий уравнение Грэда-Шафранова принимает такой вид

$$-\Delta \psi = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(P(\psi) + \frac{1}{2} Q^2(\psi) \right) . \quad (2.17)$$

⁴⁷ Это, конечно, идеализация. Реальная плазма — это две “жидкости”: одна из электронов, другая из ионов.

⁴⁸ Напомним, что $\text{rot } \mathbf{B} = \left(\frac{1}{r} \partial_\theta(B_z) - \partial_z(B_\theta) , \partial_z(B_r) - \partial_r(B_z) , \frac{1}{r} [\partial_r(rB_\theta)] - \partial_\theta(B_r) \right)$.

⁴⁹ Волна над $\tilde{\Delta}$ подчеркивает близость оператора $\tilde{\Delta}$ к оператору Лапласа. Подчеркнем, что коэффициенты оператора $\tilde{\Delta}$ не имеют особенностей, поскольку переменная r подчинена условию $0 < R_1 < r < R_2 < \infty$.

Вспомним теперь, что, согласно (2.2), условие равновесия плазменной области ω выражается постоянством давления p на ее границе $\gamma = \partial\omega$. Отсюда и (2.14) вытекает *третье замечательное следствие*: кривая γ есть одна из линий уровня⁵⁰ функции ψ .

Из данного в (2.5) определения функции ψ следует, что она определена с точностью до аддитивной постоянной. Удобно выбрать эту постоянную, считая, что кривая γ есть нулевая линия уровня функции ψ . При такой фиксации аддитивной постоянной искомые плазменная область ω и окружающая ее вакуумная область Ω_0 (в сечении) функциональной камеры токамака очень просто идентифицируются, а именно, знаком функции ψ . В силу принципа максимума, функция⁵¹

$$u = -\psi < 0$$

в ω и $u > 0$ в Ω_0 , т.к. ток $j_\theta \geq 0$. Дополнительно известно, что $j_\theta = 0$ в вакуумной области Ω_0 . Однако в плазменной области ω относительно функции j_θ физикам реально известна лишь ее представление через функции P и Q , задаваемое формулами (2.16) или (2.17), и, кроме того, известен полный ток I . Иными словами, известно, что

$$\int_{\omega} j_\theta(x, y) dx dy = I, \quad j_\theta|_{\omega} \geq 0, \quad j_\theta|_{\Omega} = 0. \quad (2.18)$$

Что же такое *прямая задача о равновесии плазмы в токамаке*? Это, так сказать, задача на прямую подстановку функции

$$(r, u) \rightarrow j_\theta \stackrel{(2.16)}{=} r \frac{\partial P(u)}{\partial u} + \frac{1}{r} Q(u) \frac{\partial Q(u)}{\partial u} \quad \text{или} \quad j_\theta \stackrel{(2.17)}{=} \frac{\partial}{\partial u} \left(P(u) + \frac{1}{2} Q^2(u) \right) \quad (2.19)$$

в правую часть уравнения Грэда–Шафранова для так или иначе задаваемых функций P и Q , подчиненных лишь условию (2.18), и нахождение функции $u = -\psi$, а также ее нулевой линии уровня, т.е. свободной границы γ , ограничивающей плазменную область ω .

Исследованию прямой задачи равновесия посвящено, образно говоря, бесчисленное множество вычислительных работ физиков (см., в частности, библиографию в книгах [48, 52, 109, 135]). Математики тоже, начиная с работ [43, 103, 119, 181] середины 70-х годов внесли свой посильный вклад в изучение этой задачи со свободной границей. Здесь следует выделить два направления.

Имеется и третье направление, представленное (прежде всего) чрезвычайно оригинальными и интересными работами Жаклин Моссино (см., в частности, [164, 165]). Однако, вопреки интерпретации, данной ею самой, и особенно вопреки библиографическому замечанию к 4-ой главе книги А. Фридмана [91], эти работы, по-видимому, лишь номинально относятся к задаче о равновесии плазмы. Дело в том, что нелинейности, которые Ж. Моссино рассматривает в правой части уравнения $\Delta u = \lambda f(u)$ для функции $u \in H^1(\mathfrak{S})$ (и $\lambda \in \mathbb{R}$), являются композицией $g \circ \alpha$ непрерывной функции g с оператором

$$\alpha : L^1(\mathfrak{S}) \ni u(\cdot) \mapsto \alpha(u)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \text{mes}\{y \in \mathfrak{S} \mid u(\cdot) < u(y) < 0\}.$$

Этот оператор не является ни монотонным, ни локальным, ни непрерывным. Возникает вопрос: почему нелинейности в уравнении Грэда–Шафранова–(Мерсье) допускают сколько-нибудь приемлемое представление вида $f(u) = g(\alpha(u))$? Разъяснение (или обсуждение) этого вопроса мне не удалось обнаружить в работах третьего направления.

В одном из выделяемых здесь двух направлений, представленном первоначально в работах Темама [181, 182], Берестики и Брезиса [103, 104], а затем и их последователями⁵², задается пара (P, Q) и анализируется вопрос существования решения u уравнения Грэда–Шафранова. Однако при этом возникает (отнодь не простой) вопрос: чем является множество \mathfrak{N} нулей этого решения? По физике дела это должна быть кривая γ , вмороженная в силовую линию магнитного поля. Но из указанных работ это вовсе не следует. Основная причина заключается в том, что методы работ этого направления слабо ориентированы на геометрию внешней (заданной) границы и особенно на топологический тип искомого множества \mathfrak{N} , т.е. на то, что составляет важнейшие показатели исходной физической

⁵⁰Физики при этом добавляют, что линии уровня функции ψ вморожены в силовые линии магнитного поля, ибо поле $\mathbf{B} \stackrel{(2.5)}{=} (-r^{-1} \partial\psi/\partial z, B_\theta, r^{-1} \partial\psi/\partial r)$ ортогонально $\nabla\psi = (\partial\psi/\partial r, 0, \partial\psi/\partial z)$,

⁵¹При рассмотрении математических вопросов перейдем для обозначения решения дифференциального уравнения от любимой физиками буквы ψ к любимой математиками букве u , сохраняя при этом обозначения P и Q для функций $u \mapsto -P(-u)$ и $u \mapsto -Q(-u)$. При этом, буква ψ будет зарезервирована для других целей.

⁵²См., в частности, [169, 176], а также библиографию в книге А. Фридмана [91]

задачи. В этих условиях (не обремененных априорными требованиями к геометрическим характеристикам решения) проще доказывать теоремы существования (какого-то) слабого решения, но почти невозможно получить достаточно содержательную информацию о геометрии искомой “свободной границы”, точнее, о множестве \mathfrak{N} нулей искомой функции. Прояснению геометрических характеристик множества \mathfrak{N} , в какой-то мере, иногда помогают такие работы (частично инициированные задачей о равновесии плазмы), как Киндерлерер и Ниренберг [149], Киндерлерер и⁵³ Спрук [150], Каффарелли и Спрук [112] (см. также библиографию в [91]).

Другое направление исследований, назовем его *первым* (в силу того, что оно было начато ранее других⁵⁴), имеет непосредственное отношение к физике дела.

Во-первых, (в соответствии с отмеченным выше третьим замечательным следствием о вмерзженности γ в силовую линию магнитного поля) здесь речь заранее идет о (спрямляемой) нулевой линии уровня функции $u = -\psi$, а вовсе не о каком-то множестве нулей этой функции.

Во-вторых, в качестве аргумента прямой задачи здесь предъявляется не пара (P, Q) (как в работах второго и третьего направлений), а та или иная функциональная зависимость нормальной производной функции u на γ . Например, в [5, 131] такая зависимость задается в виде

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{p \in \gamma} = \frac{q(r(p))}{|\gamma|}, \quad \text{где } q \in C^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \quad q > 0, \quad \int_0^1 q(r) dr = 1. \quad (2.20)$$

Здесь $|\gamma|$ заранее не заданная длина искомой кривой γ , $r(p) = |p_\gamma p|/|\gamma|$, а $|p_\gamma p|$ длина дуги $p_\gamma p$, отсчитываемая от некоторой точки $p_\gamma \in \gamma$ (например, имеющей максимальную ординату среди всех точек кривой γ с максимальной абсциссой).

Ясно, что с точки зрения физики поиск кривой γ предпочтительнее исследования вопроса о множестве нулей решения эллиптического уравнения Грэда–Шафранова. А почему принципиально более важной (опять таки с точки зрения физики) является та постановка задачи, в которой задается нормальная производная функции u на γ , а не функции P и Q , объяснено в §4, посвященном *обратной задаче о равновесии плазмы* (см. также [46]).

Основные результаты первого направления исследований получены, за исключением работы [160], с использованием ГК-метода. К сожалению, этот метод трудно обобщается на уравнения, отличные от двумерного однородного уравнения Лапласа. Поэтому этим методом рассматривалась задача о равновесии плазмы только в цилиндрическом (или почти цилиндрическом⁵⁵) приближении. Прогресс здесь, по-видимому, может быть достигнут при сочетании идей и методов обоих направлений, включающих, в частности, вариационные неравенства. Так, например, Авнер Фридман, предложил своему ученику Йонгу Лю доказать с помощью вариационных неравенств теорему 2.1, представленную в §2. Доказательство, полученное Лю [160], может быть распространено на случай тороидальной геометрии. Правда, остается невыясненным вопрос о возможном топологическом типе свободной границы γ , существование которой доказывается в [160]. Кроме того, пока не ясно как распространить такой подход на случай, когда задаваемая нормальная производная на γ отлична от константы (т.е. когда, как в [5, 131], функция q в (2.20) отлична от единицы).

Ниже речь пойдет о прямой задаче в рамках первого направления исследования, в котором основным объектом изучения является вопрос влияния геометрии заданной границы⁵⁶ Γ на существование (или несуществование) свободной границы γ того или иного топологического типа, а также анализ геометрии и гладкости кривой γ .

2. В этом пункте рассматривается

⁵³Steinitz Transkription рекомендует ту транскрипцию фамилии математика Spruck, которая бы соответствовала английскому (а не немецкому) произношению, т.е. Спрук (а не Шпрук).

⁵⁴Начальная публикация [43] *первого* направления исследований была на год раньше начальной публикации [181] *второго* направления.

⁵⁵В работе К.С. Славина [90], с помощью рассмотренного им обобщения ГК-метода, использующего производные системы М.А. Лаврентьева [65], установлены аналоги теоремы 2.1 (см. §2) о разрешимости для случая тороидальной геометрии магнитных силовых линий, правда, при условии, что большой радиус тора достаточно велик, т.е. в случае, когда тор является почти цилиндром.

⁵⁶В работах [5, 131] в качестве аргументов влияния добавляется также и характеристика, относящаяся к распределению тока и давления в плазме (см. (2.20)).

Задача 2.1 Заданы число $M > 0$ и плоская спрямляемая кривая Γ , гомеоморфная окружности и симметричная относительно прямоугольной системы координат. Пусть в $\mathbb{R}_{++}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x > 0, y > 0\}$ эта кривая Γ пересекается любой вертикалью или горизонталью лишь один раз, иными словами, (см. рис. 3а)

$$0 \leq N(s) \leq \pi/2 \quad \text{при} \quad P_s \in \Gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2. \quad (2.21)$$

Требуется выяснить существует ли внутри Γ такая спрямляемая кривая $\gamma = \gamma_1$, гомеоморфная окружности и симметричная относительно координатных осей, которая расположена внутри контура Γ и для которой в образовавшейся между кривыми Γ и γ области Ω_1 существует гармоническая функция u , непрерывная в $\overline{\Omega}_1$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$u|_{\Gamma} = M, \quad u|_{\gamma} = 0, \quad \partial u / \partial \nu|_{\gamma} = 4/|\gamma|, \quad (2.22)$$

где через $|\gamma|$ обозначена заранее не заданная длина искомой кривой γ .

Теорема 2.1 ⁵⁷ [34, 160] Существует, причем единственная кривая γ , удовлетворяющая условиям задачи 2.1. Кроме того, эта кривая γ аналитична.

Доказательство. Единственность установлена Йонгом Лю [160]. Его доказательство базируется на предположении о гладкости кривой γ (устанавливаемой чуть ниже), методе симметризации Штейнера и теореме Серрина [177] о симметрии в теории потенциала.

Доказательство существования проведем ГК-методом. Задача 2.1 является подслучаем В-задачи из п. 2 Введения. Там были установлены два факта: 1) эта задача сводится к ГК-задаче; 2) справедливы нижеследующие необходимые условия разрешимости.

Во-первых, область $\Omega = \Omega_1 \cap \mathbb{R}_{++}^2$ однолистно отображается функцией $w = u + iv$ на прямоугольник

$$Q = \{w = u + iv \in \mathbb{C} \mid 0 < u < M, \quad 0 < v < 1\}.$$

Во-вторых, ГК-функция

$$A + iB : Q \ni w = u + iv \mapsto A(u, v) + iB(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{dz}{dw} \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy, \quad (2.23)$$

определяет формулой

$$z(w) = z(0) + \int_0^w \exp(A + iB) dw, \quad w \in Q \quad (2.24)$$

область $\Omega = \Omega_1 \cap \mathbb{R}_{++}^2$, а формулой

$$[0, 1] \ni v \mapsto z(iv) = z(0) + i \int_0^{iv} e^{A(0, \eta) + iB(0, \eta)} d\eta \quad (2.25)$$

кривую γ (точнее, ее характеризующую четверть $\gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2$).

В-третьих, мнимая часть ГК-функции, т.е. функция B , ограничена и удовлетворяет (в силу (0.18)–(0.19)) следующему условию:

$$J(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^v \cos B(0, \eta) d\eta > 0 \quad \forall v \in (0, 1]. \quad (2.26)$$

Наконец, в-четвертых,

$$\Delta B(u, v) = 0 \quad \text{в} \quad Q, \quad B(u, 0) = 0, \quad B(u, 1) = \pi/2, \quad B_u(0, v) = 0, \quad B(M, v) = \varphi(v), \quad (2.27)$$

где $\varphi(v) = N(s(v))$, а $s(v) = \int_0^v e^{A(M, \eta)} d\eta$, $s(1) = |\Gamma|/4$.

Приведенные необходимые условия подсказывают план доказательства теоремы: сначала следует установить существование решения *нелинейной!* (ввиду нелинейности условия $\varphi(v) = N(s(v))$)

⁵⁷Эта теорема дополняет доказанную во Введении теорему 0.2 о том, что при тех же предположениях на контур Γ не существует кривой $\gamma = \gamma_2$ гомеоморфной двум окружностям, для которой справедливы условия (2.22).

задачи⁵⁸ (2.27), затем надо проверить, что отображение (2.24) однолистно отображает прямоугольник Q на область Ω и, кроме того, выполнено условие (2.26). Этот план мы реализуем сначала для случая, когда Γ — полигональный контур, после чего предельным переходом получим теорему и для случая спрямляемого контура⁵⁹.

Итак, докажем сначала теорему 2.1 для базового случая, т.е. когда Γ — полигональный контур. В этом случае функция φ , фигурирующая в задаче (2.27), задается следующей формулой:

$$\varphi(v) = \sum_{j=1}^{m+1} N_j 1_{(\sigma_{j-1}, \sigma_j)}(v). \quad (2.28)$$

Здесь N_j — угол между осью x и внешней нормалью к j -ой ($j = 1, 2, \dots, m, m+1$) стороне полигона $\Gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2$, функция $[0, 1] \ni v \mapsto 1_{(\sigma_{j-1}, \sigma_j)}(v)$ равна 1 при $\sigma_{j-1} < v < \sigma_j$ и нулю вне этого интервала, а мультипараметр $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ удовлетворяет условию

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathfrak{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in \mathbb{R}^m \mid 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_m < \sigma_{m+1} = 1\}, \quad (2.29)$$

причем

$$l_j = \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} e^{A(M, v)} dv, \quad (2.30)$$

где l_j — длина j -го сегмента ломанной $\Gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2$.

Наша первая цель — доказать, что задача (2.27)–(2.30) имеет ограниченное решение $B : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Доказательство проведем в два этапа.

Этап 1. Для мультипараметра $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, удовлетворяющего условию (2.29), обозначим через B^σ — ограниченное решение задачи (2.27)–(2.28), а гармонически-сопряженную к ней функцию (определенную с точностью до аддитивной постоянной) обозначим через A^σ .

Лемма 2.1 *Для любого $\sigma \in \mathfrak{D}$ отображение*

$$Q \ni w \mapsto z^\sigma(w) = z^\sigma(0) + \int_0^w \exp(A^\sigma + iB^\sigma) dw, \quad (2.31)$$

голоморфно в Q и непрерывно в \overline{Q} .

♡ Не очевидна лишь непрерывность функции $w \mapsto z(w)$ в точках вида $w = M + iv$, где $v \in [0, 1]$. Для простоты записи опустим индекс σ в обозначениях функций A^σ и B^σ . Положим $w_1 = M + iv_1$ и $w_2 = u_2 + iv_2$, где $u_2 \leq M$. Имеем

$$|z(w_1) - z(w_2)| \leq \left| \int_{v_2}^{v_1} e^{A(u_2, v)} dv \right| + \left| \int_{u_2}^M e^{A(u, v_1)} du \right|. \quad (2.32)$$

Так как $B_u(0, v) = 0$, то $A(0, \cdot) = A_0 = \text{const.}$ Поэтому $A(u, v) = A_0 + \int_0^u \frac{\partial B}{\partial v}(\xi, v) d\xi$. Представим функцию B в виде суммы

$$B = b + h, \quad (2.33)$$

где гармоническая функция b берет на себя все разрывы в граничных значениях функции B . Точнее,

$$b(u, v) = \frac{2N_1}{\pi} \arctg \frac{v}{M - u} + \sum_{j=1}^m \frac{N_{j+1} - N_j}{\pi} \text{arccctg} \frac{\sigma_j - v}{M - u} + \frac{\pi - 2N_{m+1}}{\pi} \text{arccctg} \frac{\sigma_j - v}{M - u}.$$

⁵⁸Сразу же заметим, что разрешимость этой задачи влечет *аналитичность* кривой γ , задаваемой формулой (2.25), поскольку в силу условия симметрии $B_u(0, v) = 0$, решение задачи (2.27) аналитически продолжается по $v \in (-M, 0]$.

⁵⁹Здесь уместно напомнить следующие заключительные слова работы Н.Е. Жуковского [51] о перспективе решения задачи обтекания плоского криволинейного препятствия: “Может быть, эта задача могла бы быть разрешена, как предельный случай задачи об ударе (т.е. обтекании — А.Д.) потока на многогранный контур”.

Поэтому функция $(u, v) \mapsto \int_0^u \frac{\partial h(\xi, v)}{\partial v} d\xi$ ограничена в \overline{Q} (ибо h аналитична в \overline{Q}), а

$$\frac{\partial b(\xi, v)}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\delta N_j (M - u)}{(\sigma_j - v)^2 + (M - u)^2}, \quad \text{где} \quad \delta N_j = \frac{N_{j+1} - N_j}{\pi}, \quad \text{а} \quad N_0 = -N_1, \quad N_{m+2} = \pi - N_{m+1}.$$

Отсюда

$$E(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \int_0^u \frac{\partial b(\xi, v)}{\partial \xi} d\xi = \prod_{j=1}^{m+1} \left(\frac{(\sigma_j - v)^2 + M^2}{(\sigma_j - v)^2 + (M - u)^2} \right)^{\frac{\delta N_j}{2}}. \quad (2.34)$$

Заметим, что

$$|\delta N_j| \stackrel{(2.21)}{\leq} 1/2 \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq m, \quad \text{а} \quad 0 \leq \delta N_0 < 1, \quad 0 \leq \delta N_{m+2} < 1, \quad (2.35)$$

т.к. $N_1 < \pi/2$, а $N_{m+1} > 0$. Поэтому функция

$$Q \ni (u, v) \mapsto e^{A(u, v)} = e^{A_0} E(u, v) \exp \int_0^u \frac{\partial h(\xi, v)}{\partial v} d\xi \quad (2.36)$$

интегрируема и, следовательно, ввиду (2.32), отображение (2.31) непрерывно в \overline{Q} . \square

Лемма 2. Как видно из доказательства леммы 2.1, функция $A^\sigma(M, \cdot)$ интегрируема на $[0, 1]$. Учитывая это, будем в дальнейшем считать, что функция $A = A^\sigma$ (определенная до сих пор с точностью до аддитивной постоянной) нормирована условием:

$$e^{A_0} \int_0^1 H(M, v) dv = |\Gamma|/4 \quad \text{где} \quad H(u, v) = E(u, v) \exp \int_0^u \frac{\partial h(\xi, v)}{\partial v} d\xi. \quad (2.37)$$

Зафиксируем также точку $z(0)$, положив

$$z(0) = \int_0^1 e^{A(0, v)} \sin B(0, v) dv. \quad (2.38)$$

Легко видеть, что в этом случае ломанная

$$\Gamma_\sigma^0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z^\sigma(M, v), \quad v \in [0, 1]\},$$

определяемая отображением (2.31), лежит в правой полуплоскости, а ее концы находятся на осях координат. Сегменты ломанной Γ_σ^0 имеют (по построению) те же углы наклона к оси x , что и соответствующие сегменты заданной ломаной $\Gamma^0 = \Gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2$. Однако длина

$$L_j(\sigma) = |z(M + i\sigma_j) - z(M + i\sigma_{j-1})| = \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} e^{A(M, v)} dv \quad (2.39)$$

j -го сегмента ломанной Γ_σ^0 , вообще говоря, отлична от длины l_j соответствующего, т.е. j -го сегмента заданной нам ломанной Γ^0 . Совпадение этих ломанных эквивалентно равенству длин соответствующих сегментов. Последнее означает, что мультипараметр $\sigma \in \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^m$ является решением такого уравнения

$$F(\sigma) = \sigma, \quad \text{где} \quad F : \mathfrak{D} \ni \sigma \mapsto F(\sigma) = (F_1(\sigma), \dots, F_m(\sigma)) \in \mathbb{R}^m, \quad \text{а} \quad F_j(\sigma) = \sigma_j \frac{L_j(\sigma)}{l_j}. \quad (2.40)$$

То, что искомая неподвижная точка σ отображения F существует, вытекает из нижеследующих четырех лемм и теоремы Лере–Шаудера.

В случае уравнения (2.40) теорема Лере–Шаудера (см., например, [82, 157]) утверждает, что существует решение $\hat{\sigma}$, принадлежащее *открытому* подмножеству \mathcal{D} множества \mathfrak{D} , если найдется непрерывное отображение

$$\mathcal{F} : \mathfrak{D} \times [0, 1] \ni (\sigma, t) \mapsto \mathcal{F}(\sigma, t) = F^\lambda(\sigma) \in \mathbb{R}^m, \quad (2.41)$$

для которого выполнены следующие условия:

- (А) для каждого $t \in [0, 1]$ любая неподвижная точка σ отображения F^λ принадлежит подмножеству \mathcal{D} ;
 (В) $F^0 = F$;
 (С) отображение F^1 имеет единственную неподвижную точку, в окрестности которой это отображение биективно.

При $m = 1$ эта теорема очевидна. Действительно, в силу свойства (С), на одном из интервалов $(a, b) \subset \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ функция $F^1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ принимает разные знаки на концах отрезка $[a, b]$, а в силу свойства (А) при непрерывной деформации графика функции F^λ знак произведения $F^\lambda(a)F^\lambda(b)$ остается отрицательным при любом $t \in [0, 1]$. В силу свойства (В) это означает наличие корня $\hat{\sigma} \in (a, b)$ уравнения $F(\sigma) = \sigma$.

Уже в двумерном случае такое рассуждение не проходит. Но, как замечают Лере и Шаудер в самом начале своей очень ясно написанной статьи [157], существует простой общий рецепт, позволяющий судить о наличии решения. Этот рецепт связан с целочисленным инвариантом для всего семейства отображений (2.41), удовлетворяющего условию (А). Этот инвариант, впервые введенный в науку Брауэром [111], называется топологической степенью отображения $F^\lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ относительно точки $y = 0 \in \mathbb{R}^m$ и обладает замечательным свойством: если для одного из представителя семейства отображений (2.41), скажем для F^1 , он отличен от нуля, то каждое из этих отображений имеет хотя бы одну неподвижную точку. В случае, когда отображение $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо, а точка $y \in \mathbb{R}^m$ не является критическим значением отображения F , т.е. множество $F^{-1}(y) = \{\sigma \in \mathcal{D} \mid F(\sigma) = y\}$ не содержит критических точек F (в критических точках якобиан J_F отображения F равен нулю), этот инвариант есть число

$$\deg(F^\lambda, \mathcal{D}, y) = \sum_{\hat{\sigma}_k \in F^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_F(\hat{\sigma}_k), \quad \text{где} \quad J_F(\hat{\sigma}_k) \stackrel{\text{def}}{=} \det \frac{\partial F(\hat{\sigma}_k)}{\partial \sigma} \neq 0. \quad (2.42)$$

Формула (2.42) корректна, т.к. множество $F^{-1}(y) = \{\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_K\}$ конечно, ибо оно дискретно (согласно теореме о невязной функции) и компактно (ввиду компактности $\mathcal{D} \supset F^{-1}(0)$).

Число, определяемое формулой (2.42), имеет прозрачный геометрический смысл, отраженный в самом названии “степень отображения”: $\deg(F^\lambda, \mathcal{D}, y)$ есть разность между числом прообразов окрестности точки $y \in \mathbb{R}^m$ с той же ориентацией и числом прообразов с противоположной ориентацией.

Можно проверить (см., например, [82]), что число $\deg(F^\lambda, \mathcal{D}, y)$ можно доопределить и для других (т.е. и не критических) значений y отображения F^λ , причем при всех $y \in \mathbb{R}^m$

- $\deg(F^\lambda, \mathcal{D}, y)$ есть целочисленная функция, которая постоянна для всего семейства отображений F^λ , удовлетворяющих условию (А),
- $\deg(F^\lambda, \mathcal{D}, y) = \deg(F^\lambda, \mathcal{D}, 0)$, если $\mathcal{C}(y) = \mathcal{C}(0)$, где $\mathcal{C}(y)$ — компонента связности множества $\mathbb{R}^m \setminus F^\lambda(\partial\mathcal{D})$, содержащая точку y ,
- если $\deg(F^\lambda, \mathcal{D}, y) \neq 0$, то уравнение $F^\lambda(\sigma) = y$ имеет хотя бы одно решение $\hat{\sigma} \in \mathcal{D}$

и

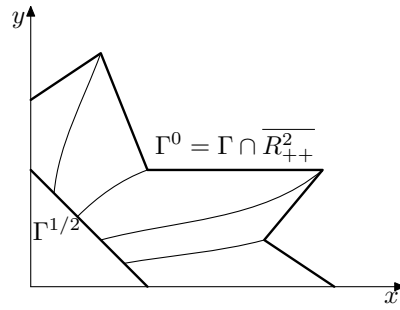
- $|\deg(F^1, \mathcal{D}, 0)| = 1$.

Эти свойства проверяются сначала для дифференцируемых отображений. Третье из них вытекает из теоремы Сарда (см., например, [82]), согласно которой в компоненте связности $\mathcal{C}(0) \ni 0$ множества $\mathbb{R}^m \setminus F^\lambda(\partial\mathcal{D})$ обязательно найдется не критическое значение y отображения F^λ . Четвертое свойство следует из предположения (С).

Все четыре свойства затем устанавливаются предельным переходом для непрерывных отображений. В совокупности они показывают, что уравнение $F(\sigma) = 0$ имеет хотя бы одно решение в \mathcal{D} .

Отметим еще одно обстоятельство. В том случае, когда \mathcal{D} есть открытое ограниченное подмножество банахова пространства X , теорема Лере–Шаудера о неподвижной точке отображения $F^\lambda : \mathcal{D} \rightarrow X$ предполагает компактность отображения $K^\lambda = I - F^\lambda : \mathcal{D} \rightarrow X$. Это эквивалентно тому, что K^λ является равномерным пределом конечномерных отображений. В приводимом здесь доказательстве теоремы 2.1 также применяются конечномерные аппроксимации, но они напрямую связаны с геометрическими характеристиками контура Γ (с его самонепересекаемостью). Это позволяет в данном случае снять обременительное ограничение компактности отображения $K^\lambda : \mathcal{D} \rightarrow X$, которое при непосредственном применении теоремы Лере–Шаудера в пространстве X гильбертовских функций (возникающих в случае криволинейного контура Γ) приводит к очень жестким ограничениям на геометрию Γ .

Лемма 2.2 *Существует семейство самонепересекающихся ломанных Γ^λ , состоящих из $m + 1$ сегментов $\{l_j^\lambda, N_j^\lambda\}_{j=1, \dots, m+1}$, имеющих длину l_j^λ и наклоненных к оси x под углом $(N_j^\lambda + \pi/2)$, которое обладает следующими свойствами:*



- (1) $\Gamma^0 = \Gamma$;
- (2) $\Gamma^\lambda \cap \partial(\overline{\mathbb{R}_{++}^2}) = \partial\Gamma^\lambda \quad \forall \lambda \in [0, 1]$;
- (3) $N_j^1 = \pi/4, \quad l_j^1 = 1/(m+1)$;
- (4) функции $\lambda \mapsto l_k^\lambda$ и $\lambda \mapsto N_k^\lambda$ достаточно гладкие;
- (5) $\exists \delta > 0$, такое, что

$$l_k^\lambda > \delta > 0 \quad \forall k, \quad \text{dist}(\Gamma, 0) > \delta, \quad (2.43)$$

где $\text{dist}(\Gamma, 0)$ — расстояние между Γ^λ и точкой $z = 0$.

♡ При $\lambda \in [0, 1/2]$ построение указанного семейства Γ^λ ясно из представленного здесь рисунка. Далее делается подходящая гомотетия. \square

Следуя В.Н. Монахову (см. [76], стр. 127), рассмотрим, семейство отображений

$$[0, 1] \ni \lambda \mapsto F^\lambda : \mathfrak{D} \ni \sigma \mapsto F^\lambda(\sigma) = (F_1^\lambda(\sigma), \dots, F_m^\lambda(\sigma)) \in \mathbb{R}^m,$$

где $F_j^\lambda(\sigma) = \sigma_j L_j^\lambda(\sigma)/l_j^\lambda$, а $L_j^\lambda(\sigma)$ определяется аналогично (2.39).

Лемма 2.3 Существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\lambda \in [0, 1]$ всякое решение уравнения $F^\lambda(\sigma) = \sigma$ удовлетворяет условию: $\sigma \in \mathcal{D}$, где

$$\mathcal{D} = \mathfrak{D}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in \mathfrak{D} \mid (\sigma_j - \sigma_{j+1}) > \varepsilon, j = 1, \dots, m+1\}.$$

♡ Предположим противное. Тогда $\forall n \geq 1 \exists \lambda_n \in [0, 1] \exists \sigma^n \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{D}_{1/n}$, что

$$F^{\lambda_n}(\sigma^n) = \sigma^n, \quad \text{т.е.} \quad L_j^{\lambda_n}(\sigma^n) = l_j^{\lambda_n} \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (2.44)$$

Согласно (2.36)–(2.39),

$$L_j^\lambda(\sigma) = \frac{|\Gamma^\lambda|}{4} \left(\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} H^{\sigma, \lambda}(M, v) dv \right) \left(\int_0^1 H^{\sigma, \lambda}(M, v) dv \right)^{-1}, \quad (2.45)$$

где зависимость функции

$$H^{\sigma, \lambda}(u, v) = \exp \int_0^u \frac{\partial B^{\sigma, \lambda}(\xi, v)}{\partial \xi} d\xi \quad (2.46)$$

от λ и σ иногда для упрощения записи не будет явно обозначаться.

Можно считать, что последовательности $\{\sigma^n\}_{n \geq 1}$ и $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ фундаментальны. Рассмотрим поведение интеграла $\int_0^1 H(M, v) dv$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $\sigma^n \notin \mathfrak{D}_{1/n}$, то $\exists j = j(n)$ такое, что $0 < \sigma_j^n - \sigma_{j-1}^n \leq 1/n$. Имеются две возможности: либо интеграл остается ограниченным, либо он стремится к бесконечности. В первом случае, $L_j^{\lambda_n}(\sigma^n) \rightarrow 0$, так как $|\Gamma^{\lambda_n}| \leq \text{const}$. Отсюда, в силу (2.44)–(2.45), $l_j^{\lambda_n} \rightarrow 0$, что невозможно по лемме 2.2. Во втором случае рассмотрим кривую $\gamma^n = \{z_n(iv), v \in [0, 1]\}$, где отображение z_n построено по формулам (2.24) и (2.38) для $A = A^{\sigma^n, \lambda_n}$ и $B = B^{\sigma^n, \lambda_n}$. Длина этой кривой определяется по формуле

$$|\gamma^n| = \int_0^1 e^{A_0} dv = e^{A_0} = \frac{|\Gamma^{\lambda_n}|}{4} \left(\int_0^1 H(M, v) dv \right)^{-1}, \quad (2.47)$$

из которой следует, что $|\gamma^n| \rightarrow 0$. Таким образом, γ^n стягивается в начало координат. Поэтому мы получим нужное нам противоречие с условием (2.43), если покажем, что

$$\text{dist}(\Gamma^{\lambda_n}, \gamma^n) \leq |\Gamma^{\lambda_n}| \left(\int_0^1 H(M, v) dv \right)^{-1} \inf_{v \in [0, 1]} \int_0^M H(u, v) du, \quad (2.48)$$

ибо $\inf_{v \in [0,1]} \int_0^M H(u, v) du \leq \int_0^M H(u, v_*) du \leq \text{const}$ при $v_* \in [0, 1] \setminus \overline{\cup_{j,n} \sigma_j^n}$. Что же касается неравенства (2.48), то вот его доказательство:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\Gamma^{\lambda_n}, \gamma^n) &= \inf_{v \in [0,1]} \inf_{\eta \in [0,1]} |z_n(V+iv) - z_n(i\eta)| \leq \inf_{v \in [0,1]} |z_n(M+iv) - z_n(iv)| \leq \inf_{v \in [0,1]} \left| \int_{iv}^{M+iv} e^{A+iB} dw \right| \leq \\ &\inf_{v \in [0,1]} e^{A_0} \int_0^M H(u, v) du \leq |\Gamma^{\lambda_n}| \left(\int_0^1 H(M, v) dv \right)^{-1} \inf_{v \in [0,1]} \int_0^M H(u, v) du. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 2.4 *Отображение $\mathfrak{D} \times [0, 1] \ni (\sigma, \lambda) \mapsto F^\lambda(\sigma)$ непрерывно.*

♡ В силу формулы (2.45) и того факта, что

$$\int_0^1 H^{(\sigma, \lambda)}(M, v) dv \stackrel{(2.46)}{>} 0 \quad \forall (\sigma, \lambda) \in \mathfrak{D} \times [0, 1],$$

достаточно проверить непрерывность двух отображений

$$\mathfrak{D} \times [0, 1] \ni (\sigma, \lambda) \mapsto \int_0^1 H^{\sigma, \lambda}(M, v) dv, \quad \mathfrak{D} \times [0, 1] \ni (\sigma, \lambda) \mapsto \int_0^1 1_{] \sigma_{j-1}, \sigma_j[}(v) H^{\sigma, \lambda}(M, v) dv. \quad (2.49)$$

Пусть $(\sigma^n, \lambda_n) \rightarrow (\sigma^*, \lambda_*)$. Имеем

$$\sigma^* = \{\sigma_1^*, \dots, \sigma_m^*\}, \quad \text{где} \quad 0 = \sigma_0^* \leq \sigma_1^* \leq \dots \leq \sigma_m^* \leq \sigma_{m+1}^* = 1.$$

Заметим, что для любого $\delta > 0$ существует такое открытое множество $C_\delta \subset \mathbb{R}$, меры меньшей δ , содержащее все точки σ_j^* , что при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ последовательность функций $H^{\sigma^n, \lambda_n}(M, \cdot)$ сходится поточечно к функции $H^{\sigma^*, \lambda_*}(M, \cdot)$, которая интегрируема в силу (2.35). В силу тех же соотношений (2.35), каждый элемент этой последовательности функций ограничен в $L^p(0, 1)$ с некоторым $p > 1$. Остается сослаться на теорему Витали (см., например, [79] стр. 144) и непрерывность отображений (2.49) доказана⁶⁰. \square

Лемма 2.5 *Уравнение $F^1(\sigma) = \sigma$ имеет единственное решение $\hat{\sigma} \in \mathcal{D}$, в окрестности которого отображение $I - F^1$ биективно.*

♡ При $\lambda = 1$ функции $A = A^1$ и $B = B^1$ не зависят от $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, так как (согласно лемме 2.2) $N_j^1 = \pi/4 \quad \forall j = 1, \dots, m+1$. При этом, $l_j^1 = 1/(m+1)$. Поэтому искомые компоненты неподвижной точки $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_m)$ отображения F^1 определяются последовательно из следующей системы уравнений

$$l_j^1 = 1/(m+1), \quad l_j^1 = \int_{\hat{\sigma}_{j-1}}^{\hat{\sigma}_j} e^{A(M, v)} dv, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{где} \quad \hat{\sigma}_0 = 0, \quad \hat{\sigma}_{m+1} = 1. \quad (2.50)$$

Якобиан $J(\sigma)$ отображения $I - F^1(\sigma)$ легко считается. Имеем $F_j^1(\sigma) \stackrel{(2.40)}{=} \sigma_j \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} e^{A(M, v)} dv / l_j^1$. При этом, функция $(0, 1) \ni v \mapsto A(M, v)$ аналитична, ибо

$$B(M, v) = \text{const} \quad \text{при} \quad 0 < v < 1 \quad \implies \quad \frac{\partial A(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=M} = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial F_j(\sigma)}{\partial \sigma_k} = 0 \quad \forall k > j, \quad \text{поэтому} \quad J(\sigma) = \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{\partial F_j(\sigma)}{\partial \sigma_j} \right).$$

Ясно, что

$$\frac{\partial F_j(\sigma)}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{l_j^1} \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} e^{A(M, v)} dv + \frac{\sigma_j}{l_j^1} e^{A(M, \sigma_j)}$$

⁶⁰На самом деле, можно утверждать большее: последовательность функций $H^{\sigma^n, \lambda_n}(M, \cdot)$ слабо сходится в $L^p(0, 1)$, что следует (согласно замечанию 1.1 в [5]) из ее сходимости почти всюду к функции из $L^p(0, 1)$.

Учитывая (2.50), получаем

$$J(\hat{\sigma}) = \prod_{j=1}^m \left(-\frac{\hat{\sigma}_j}{l_j^1} e^{A(M, \hat{\sigma}_j)} \right) \neq 0.$$

Остается отметить непрерывность якобиана J (что является следствием его аналитичности). \square

Подведем первый итог. Доказаны леммы 2.2–2.5. Поэтому, в силу теоремы Лере–Шаудера, задача (2.27)–(2.30) имеет ограниченное решение.

Замечание 2.1 Как видно из приведенного доказательства, задача (2.27)–(2.30) имеет ограниченное решение, если

$$|\delta N_j| < 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq j \leq m+1. \quad (2.51)$$

Условие (2.51) эквивалентно тому, что полигональный контур самонепересекается. Это условие существенно более слабое, чем условие (2.35). Последнее (в случае полигональности контура) является следствием условия (2.21) теоремы 2.1. Однако, как показывают примеры (см., в частности, следующий пункт этого параграфа) условие (2.35), а тем более условие (2.51), недостаточно для разрешимости задачи 2.1.

Причины этого позволяют осознать следующие две леммы, которые (согласно сформулированному выше плану доказательства теоремы 2.1) устанавливают, соответственно, однолиственность отображения $z : Q \rightarrow \Omega$ и выполнение неравенства (2.26).

Лемма 2.6 Пусть σ — неподвижная точка отображения (2.41) и пусть

$$0 \leq N(s) \leq \pi \quad \text{при} \quad P_s \in \Gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2. \quad (2.52)$$

Тогда функция z , определенная формулой (2.24) биективно отображает прямоугольник Q на односвязную область $\omega \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, граница которой есть замкнутая кусочно-гладкая кривая $\partial\omega$, состоящая из отрезка $[z(0), z(M)] \subset \mathbb{R}_x$, ломанной $\Gamma \cap \overline{\mathbb{R}_{++}^2}$, отрезка $[z(i), z(M+i)] \subset \mathbb{R}_y$ и кривой (2.25), соединяющей точки $z(0)$ и $z(i)$.

♡ В силу принципа максимума для гармонических функций, условие (2.52) влечет такие неравенства

$$0 \leq B(0, v) \leq \pi \quad \forall v \in [0, 1], \quad (2.53)$$

где B — решение задачи (2.27) (и потому $B(0, 0) = 0$, а $B(0, 1) = \pi/2$).

Из леммы 2.1 следует, что функция (2.24) биективно и с сохранением ориентации отображает на ∂Q вышеописанную кривую $\partial\omega$. Остается показать, что эта кривая самонепересекается. Для этого, ввиду (2.53), достаточно прийти к противоречию с таким предположением:

$$\text{“кривая (2.25) и ломанная } \Gamma \cap \overline{\mathbb{R}_{++}^2} \text{ имеют общую точку”}. \quad (2.54)$$

Для того, чтобы опровергнуть это предположение, покажем сначала, что

$$z(Q) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Lambda}, \quad (2.55)$$

где Λ — это неограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus z(\partial Q)$.

Достаточно проверить, что $z(Q) \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda$, т.к. множество $z(Q)$ открыто. Предположим вопреки (2.55), что существует точка $z_* \in z(Q) \cap \Lambda$. Поскольку область $z(Q)$ ограничена, то кривая, лежащая в Λ и соединяющая z_* и ∞ , пересекает $\partial z(Q)$. Таким образом, существует точка $y_* \in \partial z(Q) \cap \Lambda$. Но $y_* \notin z(\partial Q)$, т.к. $\Lambda \cap z(\partial Q) = \emptyset$. Мы получили противоречие с включением $\partial z(Q) \subset z(\partial Q)$, верным для любого открытого отображения (и, в частности, для голоморфной функции z). Другими словами, мы доказали включение (2.55). Покажем, что из него следует такой факт

$$\text{множество } \mathbb{C} \setminus \overline{\Lambda} \text{ связно.} \quad (2.56)$$

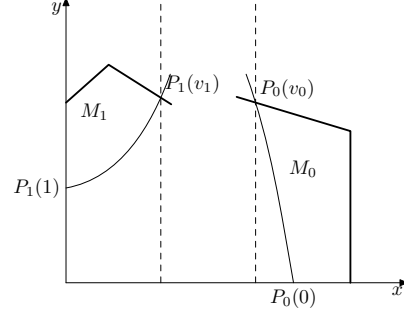
В самом деле, в противном случае найдутся две связные компоненты множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Lambda}$ (ограниченные в силу ограниченности $\mathbb{C} \setminus \overline{\Lambda}$), одна из которых, согласно (2.55), содержит множество $z(Q)$ (ввиду его связности), а граница другой содержит точку $p \notin \overline{z(Q)} = z(\overline{Q})$, что противоречит следующему факту

$$p \in \partial(\mathbb{C} \setminus \overline{\Lambda}) \subset z(\partial Q) \subset z(\overline{Q}).$$

Теперь легко установить требуемое для доказательства леммы опровержение предположения (2.54). Действительно, как мы сейчас увидим, справедлива импликация

$$(2.54) \implies \text{множество } \mathbb{C} \setminus \overline{\Lambda} \text{ не связно,} \quad (2.57)$$

которая противоречит уже установленному факту (2.56).



Докажем (2.57). Рассмотрим встречное движение вдоль кривой (2.25) двух точек $P_0(v) = z(0, v)$ и $P_1(v) = z(0, 1-v)$ при изменении параметра v от значения $v = 0$ до $v = 1$. Согласно предположению (2.54), каждая точка P_j при некотором $v_j \in (0, 1)$ впервые достигнет ломанную $\Gamma \cap \overline{\mathbb{R}_{++}^2}$. В силу (2.53), у ломанной $\Gamma \cap \overline{\mathbb{R}_{++}^2}$ и кривой (2.25) нет общих точек, лежащих правее $P_0(v_0)$ или левее $P_1(v_1)$. Поэтому получаем, что два непересекающихся множества M_0 и M_1 (см. рис.) должны принадлежать множеству $\mathbb{C} \setminus \overline{\Lambda}$. Тем самым, импликация (2.57) доказана. \square

Лемма 2.7 Неравенство (2.26) справедливо, если

$$|N(s)| \leq \pi/2 \quad \text{при } P_s \in \Gamma \cap \overline{\mathbb{R}_{++}^2}. \quad (2.58)$$

\heartsuit В силу принципа максимума, условие (2.58) влечет $|B(0, v)| \leq \pi/2$ при $v \in [0, 1]$. Поэтому $\cos B(0, v) \geq 0$ при $v \in [0, 1]$. Отсюда, учитывая непрерывность функции $v \mapsto B(0, v)$ и то, что $B(0, 0) = 0$, мгновенно получаем (2.26). \square

Подведем второй итог: теорема 2.1 доказана для полигональных контуров.

Докажем ее теперь для случая спрямляемого контура Γ . Пусть Γ_m — семейство таких симметричных относительно координатных осей полигональных контуров, вписанных в Γ , что длины всех $m + 1$ сегментов ломанной $\Gamma_m \cap \overline{\mathbb{R}_{++}^2}$ стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$. Пусть $A_m + iB_m$ — решение задачи (2.27) при $\varphi = N_m \circ s$, где N_m — угловая функция контура Γ_m . Обозначим через z_m функцию, определенную формулой (2.24). Функция z_m биективно отображает Q на область, описанную в лемме 2.6. По построению, Γ_m преобразуется в Γ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому существует такая константа C , что $|z_m(w)| \leq C \forall w \in Q, \forall m \geq 1$. Следовательно, существует такая подпоследовательность z_{m_k} , которая равномерно сходится на каждом компакте $K \subset Q$ к гармонической в Q функции.

Лемма 2.8 Функция $z = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{m_k} : Q \rightarrow \mathbb{C}$ отлична от константы.

\heartsuit Достаточно прийти к противоречию со следующим предположением

$$\int_0^1 \exp A_m(0, v) dv \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty,$$

которое, в силу (2.47), означает, что γ_m стягивается в начало координат и

$$\int_0^1 H_m(M, v) dv \rightarrow \infty \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (2.48) следует требуемое противоречие, поскольку, в силу (2.33), (2.34), (2.36) и (2.37), имеем

$$\inf_{v \in [0,1]} \int_0^M H_m(u, v) du \leq C \inf_{v \in [0,1]} \int_0^M E_m(u, v) du \leq C_* < \infty \quad \forall m. \quad \square$$

Подведем окончательный итог. Согласно известному свойству равномерного (на каждом компакте $K \subset Q$) предела однолистных отображений (см., например, в [57] предложение 2.2 в §1 главы V), из леммы 2.8 следует, что отображение $z : Q \rightarrow \mathbb{C}$ есть биекция на свой образ $\omega = z(Q)$, являющийся, очевидно, областью со свойствами, описанными в леммах 2.6 и 2.7. Теорема 2.1 полностью доказана.

3. Если нарушено условие (2.21) на контур Γ о том, что кривая $\Gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2$ пересекается любой вертикалью или горизонталью лишь один раз, то теорема 2.1, вообще говоря, неверна. Контрпримеры приведены в [5, 34, 119, 120, 121]. Там же показано, что для некоторых контуров Γ , ограничивающих односвязную область \mathfrak{S} , но не удовлетворяющих условию (2.21), могут существовать (при одном и том же параметре M) кривые $\gamma \subset \mathfrak{S}$ разных топологических типов ($\gamma = \gamma_k$ ограничивает область $\omega_k \subset \mathfrak{S}$, состоящую из k односвязных компонент связности), для которых найдутся гармонические в $\Omega_k = \mathfrak{S} \setminus \overline{\omega}_k$ функция $u = u_k \in C(\overline{\Omega}_k)$, удовлетворяющие условиям (2.22). Доказанные в [34] результаты для специального семейства контуров Γ_a иллюстрируются на рис. 9 и рис. 10.

В работе [5] получены также условия на геометрию контура Γ и функцию q в условии (2.20), при которых справедливы аналогичные результаты.

4. Скажем несколько слов о несимметричных односвязных “плазменных” областях для семейства симметричных контуров Γ_a , где $1/2 < a \leq 1$ (см. рис. 11). Теорема о существовании несимметричных конфигураций γ была доказана в [120] (ср. схожий результат в работе [174]). Доказательство, по-существу, сводилось к проверке возможности подобрать такой мульти-параметр $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, компоненты которого удовлетворяют неравенствам

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1 < \sigma_3 < \sigma_4 = 2 \quad (2.59)$$

и для которых

$$S_1 = S_4 > S_2 = S_3, \quad (2.60)$$

где

$$S_j(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \left(\exp \int_0^M \frac{\partial B}{\partial v}(u, v) du \right) dv, \quad (2.61)$$

а $B = B^\sigma$ — решение задачи

$$\Delta B(u, v) = 0 \quad \text{в } Q_2, \quad B(u, 0) = 0, \quad B(u, 1) = \pi, \quad B_u(0, v) = 0, \quad B(M, v) = \varphi(v), \quad (2.62)$$

в области $Q_2 = \{0 < u < M, 0 < v < 2\}$ с функцией $\varphi = \varphi^\sigma$, определяемой следующим образом:

$$\varphi(v) = \begin{cases} \pi/4 & \text{при } v \in (0, \sigma_1) \cup (\sigma_2, \sigma_3), \\ 3\pi/4 & \text{при } v \in (\sigma_1, \sigma_2) \cup (\sigma_3, 2). \end{cases} \quad (2.63)$$

Ясно, что формулы (2.60) выражают геометрические соотношения между длинами S_j последовательных четырех сегментов ломанной $\Gamma_a \cap \mathbb{R}_+^2$. Асимптотический анализ интегралов, представляющих функции S_j , показал, что при достаточно малом $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_2$ существуют такие параметры⁶¹ $\sigma_1 = O(\rho^2)$ и $\sigma_3 = \sigma_3(\rho)$, которые удовлетворяют условиям (2.59) и для которых выполнены соотношения (2.60). При этом, малость параметра ρ приводит к малости “перешейка” контура Γ_a (где $1/2 < a \leq 1$, см. рис. 11). Это означает, что наиболее длинная сторона контура Γ_a , равная $a(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} S_1(\sigma_1(\rho), \rho, \sigma_3(\rho))$, стремится к $1/2$ при $\rho \rightarrow 0$.

⁶¹Порядок малости $\sigma_1 = O(\rho^2)$ (в данном случае он — квадратичный) зависит от величины углов между сегментами контура Γ_a .

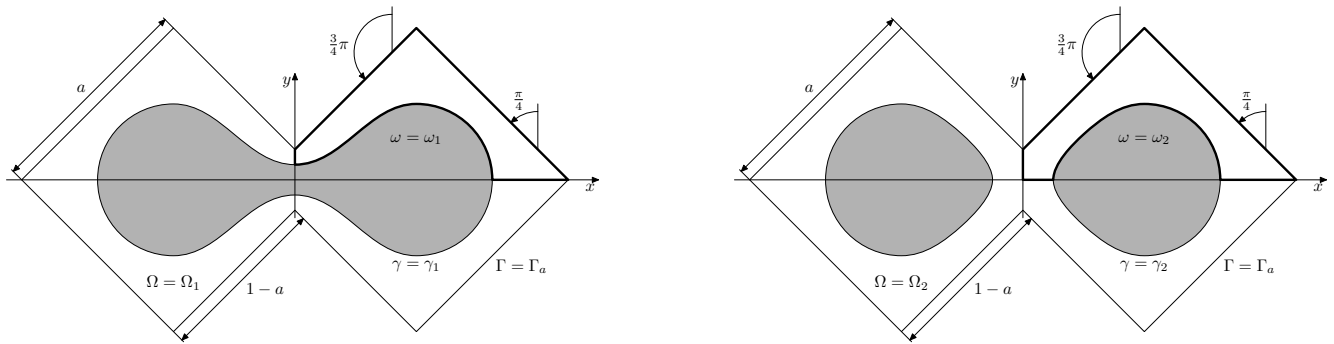


Рис. 9. “Плазменные” области с одно и двумя компонентами связности;

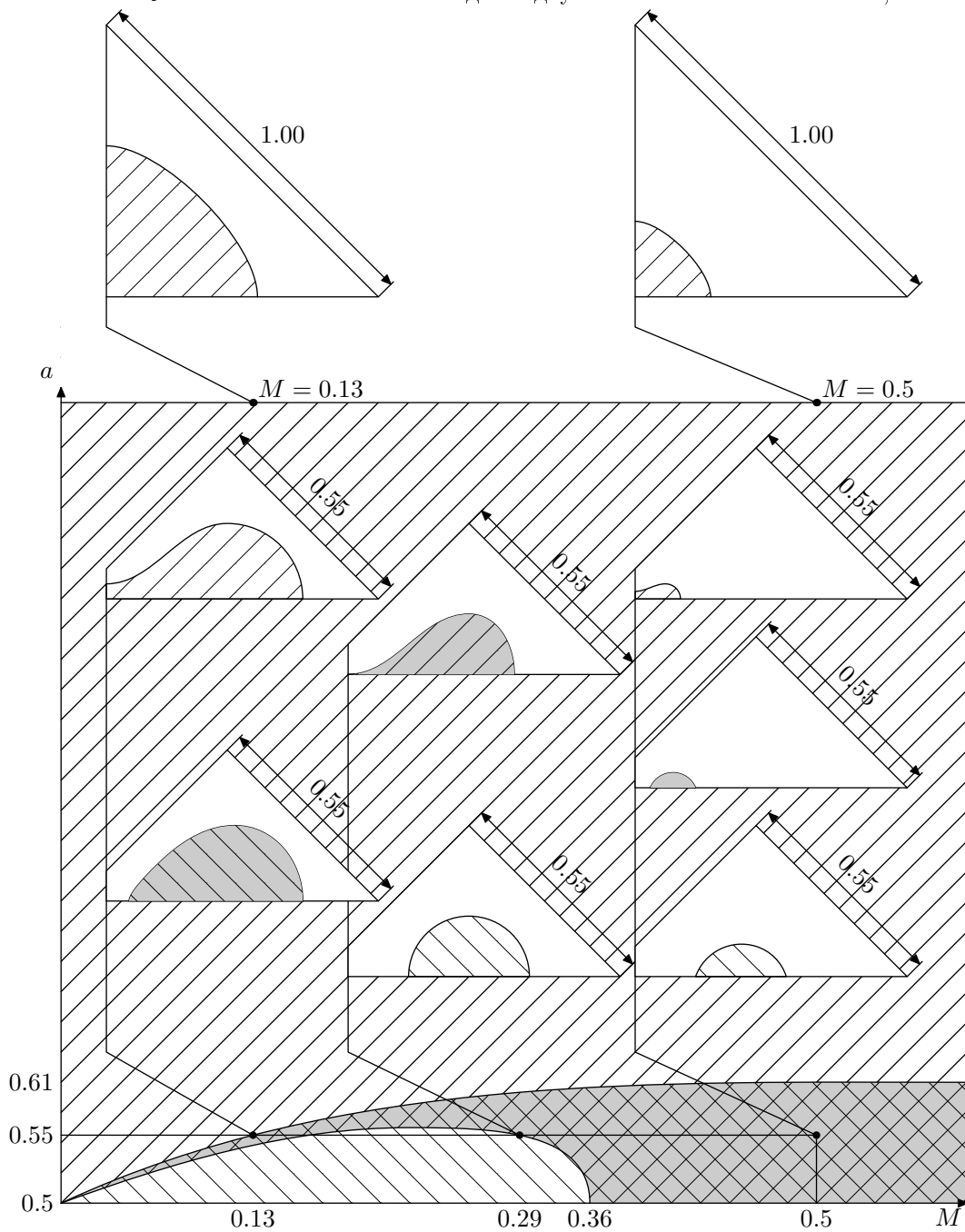


Рис. 10. Все типы симметричных “плазменных” конфигураций для семейства контуров Γ_a .

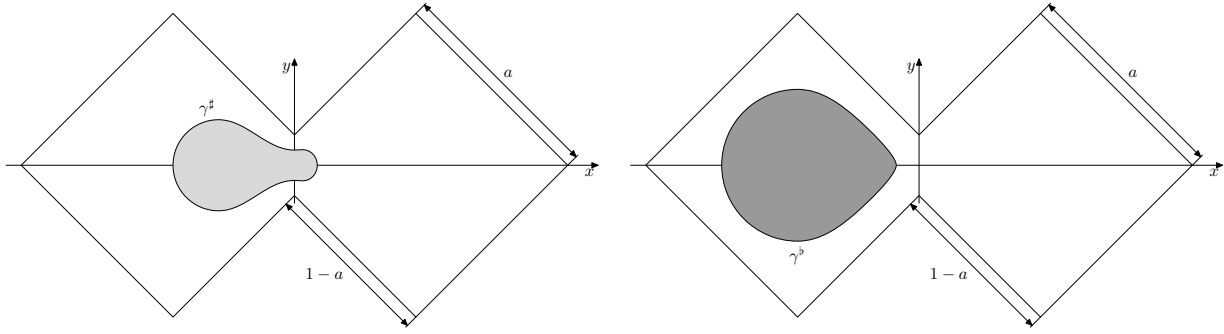


Рис. 11. Несимметричные “плазменные” конфигурации γ^\flat и $\gamma^\#$ (при $a = 0.54$ и $M = 0.13$).

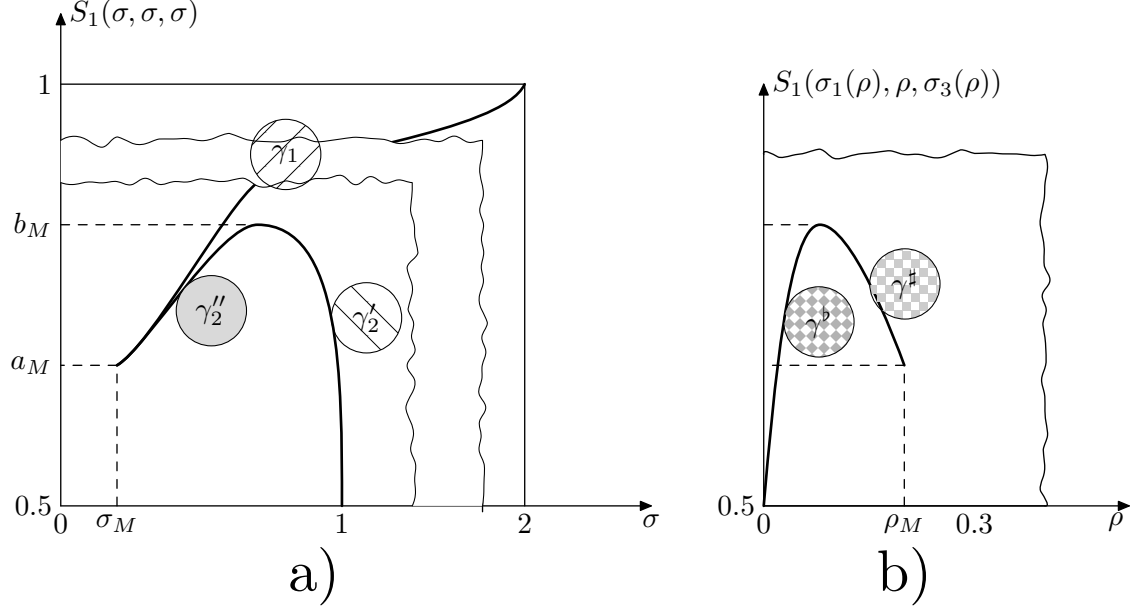


Рис. 12. Типичные (для всех значений M) графики функций а) $\sigma \mapsto S_1(\sigma, \sigma, \sigma)$ и б) $\rho \mapsto S_1(\sigma_1(\rho), \rho, \sigma_3(\rho))$. Корни уравнения $a = S_1(\sigma, \sigma, \sigma)$ определяют симметричные “плазменные” конфигурации $\gamma_1, \gamma_2', \gamma_2''$, а корни уравнения $a = S_1(\sigma_1(\rho), \rho, \sigma_3(\rho))$ определяют несимметричные конфигурации γ^\flat и $\gamma^\#$.

Функции $\sigma \mapsto S_1(\sigma, \sigma, \sigma)$ и $\rho \mapsto S_1(\sigma_1(\rho), \rho, \sigma_3(\rho))$ были численно проанализированы. Представленные на рис. 12 их графики для $M = 0.13$ типичны и для других значений M . Зависимость от параметра M величин b_M и a_M , фигурирующих на рис. 12, представлена их графиками на рис. 10. Несимметричные “плазменные” конфигурации γ^b и $\gamma^\#$, отвечающие, соответственно, точкам $(\rho^b, a(\rho^b))$ дуги подъема и точкам $(\rho^\#, a(\rho^\#))$ дуги спуска графика функции $\rho \mapsto a(\rho) = S_1(\sigma_1(\rho), \rho, \sigma_3(\rho))$ (см. рис. 12b), изображены на рис. 11.

5. Некоторые открытые вопросы.

1. Как было отмечено в начале параграфа, теорема единственности была доказана в работе [160] в классе искомых контуров γ , которые симметричны относительно двух координатных осей. Справедлива ли эта теорема в случае, если симметрия предполагается лишь относительно одной из осей координат? А если не предполагать какую-либо симметрию контура γ , например, в случае, когда внешний контур Γ является окружностью? Есть ли единственность для произвольного выпуклого контура Γ ?

2. Для произвольного выпуклого контура Γ в [131] доказана теорема существования свободной границы γ , гомеоморфной окружности, если на γ (нулевой линии потенциала) ставится условие (2.20) с некоторой функцией q . При каких условиях на функцию q справедлив аналог этой теоремы, если лапласиан заменен на оператор (2.7)?

§ 3 Конформное σ -изометрическое отображение заданных аналитических кривых и векторные поля, определяющие экспоненциально точные асимптотики решений двумерного уравнения Лапласа, быстро осциллирующих на границе

1. В этом пункте для малых значений параметра $\varepsilon = 1/M$ ($M \in \mathbb{N}$) строится такое асимптотическое приближение u_ε решения U_ε краевой задачи

$$\Delta U_\varepsilon|_\Omega = 0, \quad \left(U_\varepsilon + \lambda \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} \right) \Big|_{s \in \Gamma = \partial \Omega} = f(s/\varepsilon), \quad \text{где } f \in H^\beta(\Gamma), \text{ а } \beta \geq -1/2 - \text{sign } \lambda, \quad (3.1)$$

для которого справедлива следующая оценка

$$\|u_\varepsilon - U_\varepsilon\|_{H^\alpha(\Omega)} \leq C_\alpha e^{-\tau/\varepsilon}, \quad \text{где } \tau > 0, \text{ а } \alpha = \beta + 1/2 + \text{sign } \lambda \geq 0. \quad (3.2)$$

Здесь $\lambda = \text{const} \geq 0$, $\partial/\partial \nu$ — дифференцирование по внешней нормали к Γ , H^α — пространство Соболева с показателем гладкости α . Граница Γ области $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$ (для простоты, односвязная) предполагается *аналитической*. Ее длина $|\Gamma|$ равна 2π . Точка $s \in \Gamma$ отождествляется с натуральным параметром границы. Изометрично отображая Γ на единичную окружность $\mathbb{T} = \{e^{i\sigma}, \sigma \in R/2\pi\mathbb{Z}\}$ можно считать, что $f \in H^\alpha(\mathbb{T})$.

Без ограничения общности, можно считать, что, вообще говоря, обобщенная функция f , имеет нулевое среднее: $\int_{\mathbb{T}} f(s) ds = 0$. Эта функция определяет быстро осциллирующую около нулевого значения граничную функцию

$$f_\varepsilon : \mathbb{T} \ni e^{i\sigma} \mapsto f(M\sigma) = \sum_{k \geq 1} (a_k \cos Mk\sigma + b_k \sin Mk\sigma), \quad (3.3)$$

при этом

$$\|f\|_\beta^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 1} k^{2\beta} (|a_k|^2 + |b_k|^2) < \infty. \quad (3.4)$$

Если область Ω есть диск D , а (ρ, σ) — его полярные координаты, то функция

$$v_\varepsilon : (\rho, \sigma) \mapsto \sum_{k \geq 1} \rho^{Mk} (c_k \cos Mk\sigma + d_k \sin Mk\sigma), \quad \text{где } c_k = \frac{a_k}{1 + Mk\lambda} \quad d_k = \frac{b_k}{1 + Mk\lambda}, \quad (3.5)$$

есть, очевидно, точное решение⁶² задачи (3.1), для которого

$$\|v_\varepsilon(\rho, \cdot)\|_\alpha \stackrel{(3.4)}{\leq} C \rho^{1/\varepsilon} \|f\|_\beta, \quad \text{где } \alpha = \beta + 1/2 + \text{sign } \lambda \geq 0. \quad (3.6)$$

⁶²Это решение принадлежит (см., например, [73]) пространству Соболева $H^\alpha(\Omega)$ (с $\alpha \geq 0$) и оно единственно в этом классе, но не единственно в классе $H^{-\mu}(\Omega)$ при любом $\mu > 0$ (например, потому, что ядро Пуассона задачи Дирихле принадлежит $H^{-\mu}(\Omega)$ при $\mu > 0$).

Замечание 3.1 Даже в том случае, когда функция $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ является аналитической (т.е. когда коэффициенты a_k, b_k в разложении (3.3) экспоненциально быстро убывают с ростом k), число членов в ряде (3.3), которые следует учитывать для надлежащей аппроксимации функции f_ε (а тем самым, и функции v_ε), может быть довольно велико. Например, так будет для аналитической функции f , которая близка к такой ступенчатой функции

$$f_* : \mathbb{T} \ni s \mapsto 1_{[-\pi, -\frac{\pi}{2})}(s) - \frac{3}{11} \cdot 1_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{8}\pi)}(s) - 1_{[\frac{7}{8}\pi, \pi)}(s),$$

где $1_{[a,b)}$ — характеристическая функция $[a,b)$. Между тем, аналитическая функция f , близкая к ступенчатой функции f_* , может быть сравнительно хорошо приближена всего лишь одной функцией вида $f(s) = \sin(\sigma(s))$, где σ — подходящий аналитический автоморфизм окружности \mathbb{T} . Поскольку излагаемое здесь построение асимптотики решения задачи (3.1) допускает (как показано в пункте 3) аналитическую замену аргумента граничной функции, есть резон подобрать такой аналитический автоморфизм $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, для которого сумма

$$\sum_{k=1}^K (C_k \cos k\sigma(s) + D_k \sin k\sigma(s)) \quad (3.7)$$

хорошо бы приближала функцию $f : s \mapsto f(s)$ при небольших $K \in \mathbb{N}$.

В частности, такого рода аналитическая замена аргумента граничной функции позволяет построить асимптотику в том случае, когда граничное условие в задаче (3.1) имеет такой вид:

$$\left(U_\varepsilon + \lambda \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} \right) \Big|_{s \in \Gamma = \partial \Omega} = \chi(s) f(s/\varepsilon) + (1 - \chi(s)) g(s), \quad (3.8)$$

где χ — гладкая, почти характеристическая функция некоторой дуги Γ_0 кривой Γ , а $g \in H^\beta(\Gamma)$. Действительно, решение задачи (3.1) может быть представлено в виде двух слагаемых: одно берет на себя неосциллирующую часть граничной функции, т.е. функцию g , другое — осцилляцию на Γ_0 . После соответствующего автоморфизма окружности, растягивающего Γ_0 до Γ , построение асимптотики при граничном условии

$$\left(U_\varepsilon + \lambda \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} \right) \Big|_{s \in \Gamma = \partial \Omega} = \chi(s) f(s/\varepsilon), \quad (3.9)$$

сводится, по- существу, к построению асимптотики решения задачи (3.1).

Имея решение в диске D , трансформируем его в асимптотическое решение исходной задачи (3.1). Для этого построим конформное изометрическое отображение аналитической кривой Γ на единичную окружность $\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\}$. Иными словами, речь идет о таком однолистом отображении $\zeta : V_\Gamma \ni z \mapsto \zeta(z) \in V_\mathbb{T}$ некоторой окрестности V_Γ кривой Γ на соответствующую окрестность $V_\mathbb{T}$ окружности \mathbb{T} , которое изометрично отображает окружность на кривую Γ , т.е. удовлетворяет следующему условию:

$$|z'(\zeta)| \equiv 1 \quad \text{для } \zeta \in \mathbb{T}. \quad (3.10)$$

Такое отображение, как было отмечено в [35], может быть задано формулой

$$\zeta : V_\Gamma \ni z \mapsto \zeta(z) = 1 + \int_0^z \exp(A + iB) dz, \quad (3.11)$$

в которой функция Гельмгольца–Кирхгофа $A + iB : V_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ характеризуется такими условиями

$$B \Big|_{s \in \Gamma} = s - N(s), \quad A \Big|_{s \in \Gamma} = 0 \quad \left(\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = 0 \right), \quad (3.12)$$

где $N(s)$ — угол между осью и внешней нормалью к Γ в точке s . Равенство нулю нормальной производной функции B влечет постоянство функции A на Γ . Равенство нулю этой постоянной эквивалентно условию изометрии (3.10).

Поскольку функция $\Gamma \ni s \mapsto s - N(s)$ аналитична (и 2π -периодична), то согласно теореме Коши–Ковалевской в некоторой окрестности V_Γ существует (2π -периодическая по s) гармоническая функция B с данными Коши (3.12). Эта окрестность V_Γ есть та максимальная область, в которой не пересекаются прообразы радиусов к окружности \mathbb{T} . Исключая крайне редкие случаи, множество ∂V_Γ не дискретно и потому является препятствием для продолжения решения рассматриваемой задачи Коши вне V_Γ . Таково наглядное геометрическое объяснение причины (как правило) лишь локальной разрешимости задачи Коши для эллиптического уравнения.

Заметим, что гармоническая функция $v_\varepsilon \circ \zeta$, заданная формулой

$$v_\varepsilon \circ \zeta \Big|_{z=x+iy} = v_\varepsilon(\rho(x, y), \sigma(x, y)), \quad \zeta(x + iy) = \rho(x, y) e^{i\sigma(x, y)}, \quad (3.13)$$

удовлетворяет, в силу свойства изометрии (3.10), граничному условию задачи (3.1).

Возьмем две кольцевые области $V_\mathbb{T}^0$ и $V_\mathbb{T}^1 \subset V_\mathbb{T}^0 \subset V_\mathbb{T}$, определяемые радиусами ρ_k малой окружности кольца $V_\mathbb{T}^k = \{\rho_k < \rho < 1\}$, и рассмотрим их прообразы $V_\Gamma^k = z(V_\mathbb{T}^k) \subset V_\Gamma$ при отображении $\zeta : V_\Gamma \rightarrow V_\mathbb{T}$. Пусть $\chi \in C^\infty(\Omega)$ — так называемая срезающая функция, такая, что: $\chi = 1$ в V_Γ^1 и $\chi = 0$ вне V_Γ^0 .

Определим функцию u_ε формулой $u_\varepsilon = \chi \cdot v_\varepsilon \circ \zeta$. Точнее,

$$u_\varepsilon(x, y) = \chi(x, y) \cdot v_\varepsilon(\rho(x, y), \sigma(x, y)) \quad \text{для} \quad (x, y) \in V_\Gamma^0, \quad u_\varepsilon(x, y) = 0 \quad \text{для} \quad (x, y) \notin V_\Gamma^0. \quad (3.14)$$

Полагая $H_+^t(Q) = H^{t+}(Q)$, где $t_+ \stackrel{\text{def}}{=} \max\{t, 0\}$, имеем (по построению)

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{H_+^{\alpha-2}(V_\Gamma \setminus W)} = 0, \quad \text{где} \quad W = V_\Gamma^0 \setminus V_\Gamma^1 \quad \text{и} \quad \|\Delta u_\varepsilon\|_{H_+^{\alpha-2}(W)} \stackrel{(3.6)}{\leq} C_\alpha(\rho_1)^{1/\varepsilon}.$$

Тем самым, функция $R_\varepsilon = u_\varepsilon - U_\varepsilon$ удовлетворяет таким условиям:

$$\|\Delta R_\varepsilon\|_{H_+^{\alpha-2}(\Omega)} \leq C_\alpha(\rho_1)^{1/\varepsilon}, \quad \left(R_\varepsilon + \lambda \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial \nu} \right) \Big|_\Gamma = 0.$$

Отсюда, согласно известной эллиптической априорной оценке (см., например, [73, 159]), получаем анонсированное неравенство (3.2) с $\tau = \ln 1/\rho_1 > 0$.

Замечание 3.2 Формула (3.14), задающая искомое асимптотическое приближение u_ε , неудобна тем, что требует построения решения задачи Коши в окрестности границы Γ . Конечно, можно локально распрямлять границу, что обычно и делают при построении асимптотик в области с криволинейной границей, сводя исходную задачу к серии задач в полупространстве. В данном случае локальным распрямлением границы все можно свести к построению методом Коши–Ковалевской степенных рядов, локально задающих функцию B и, тем самым, отображение (3.11). Однако такая процедура, приемлемая в теории, достаточно трудоемка и потому неудобна на практике.

Основная цель, которую следует иметь ввиду при построении асимптотик, состоит не в том, чтобы выписать убопомрачительные формулы, а в том, чтобы дать ясно выраженное представление об основных (асимптотически точных) особенностях исследуемой функции.

Именно этой цели соответствует конструкция, изложенная в следующем пункте.

2. Не ограничивая общность, мы предположили, что функция f , заданная на окружности \mathbb{T} имеет нулевое среднее: $\int_\mathbb{T} f(s) ds = 0$. Рассмотрим случай задачи Дирихле и предположим дополнительно, что функция f нечетна относительно некоторой точки $t_* \in \mathbb{T}$. Даже если функция f разрывна в t_* , будем считать эту точку ее нулем, поскольку в эту точку упирается нулевая линия уровня функции $u_\varepsilon = v_\varepsilon \circ \zeta$. В силу нечетности, функция f обращается в нуль в двух диаметрально противоположных точках: в t_* и в $t_* + \pi$. Эти нули трансформируются в $2M$ равномерно распределенных вдоль Γ нулей граничной функции $f_\varepsilon : s \mapsto f(s/\varepsilon)$, где $1/\varepsilon = M \in \mathbb{Z}$.

Зададимся таким вопросом: вдоль каких кривых распространяются внутрь области эти нули функции f_ε , точнее: каковы нулевые линии уровня, проходящие через эти $2M$ граничных нулей, у построенной выше точной асимптотики u_ε решения U_ε ?

Ответ на этот вопрос позволяет получить содержательную информацию о графике функции u_ε . Его дает следующая очевидная

Теорема 3.1 Пусть функция $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ нечетна. Тогда искомые нулевые линии уровня функции $u_\varepsilon = v_\varepsilon \circ \zeta$, проходящие через $2M$ равномерно распределенных нулей граничной функции $f_\varepsilon : s \mapsto f(s/\varepsilon)$, вкладываются в векторное поле π_Γ трансверсалей к Γ , которые являются образом радиусов окружности при отображении $\zeta^{-1} : V_\mathbb{T} \rightarrow V_\Gamma$. Это отображение $z = \zeta^{-1}$, обратное к $\zeta : V_\Gamma \rightarrow V_\mathbb{T}$ задается формулой

$$z : V_\mathbb{T} \ni \zeta = \rho e^{i\sigma} \mapsto z(\zeta) = z_0 + \int_1^\zeta \exp(A + iB) d\zeta \in V_\Gamma, \quad z_0 \in \Gamma, \quad (3.15)$$

в которой функция Гельмгольца–Кирхгофа $A + iB$ определяется⁶³ по решению следующей задачи Коши:

$$B(\rho, \sigma) \Big|_{\rho=1} = N(\sigma) - \sigma, \quad A \Big|_{\rho=1} = 0 \quad \left(\Rightarrow B_\rho \Big|_{\rho=1} = 0 \right), \quad \rho = |\zeta|, \quad \sigma = \arg \zeta. \quad (3.16)$$

А именно,

$$A : V_S \ni \zeta = \rho e^{i\sigma} \mapsto A(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (\rho^k - \rho^{-k}) [G_k \cos k\sigma - F_k \sin k\sigma], \quad (3.17)$$

$$B : V_S \ni \zeta = \rho e^{i\sigma} \mapsto B(\rho, \sigma) = F_0 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (\rho^k + \rho^{-k}) [F_k \cos k\sigma + G_k \sin k\sigma], \quad (3.18)$$

где F_k и G_k — это те коэффициенты, которые фигурируют в следующем представлении функции

$$\mathbb{T} \ni \sigma \mapsto B(1, \sigma) = F_0 + \sum_{k \geq 1} (F_k \cos k\sigma + G_k \sin k\sigma).$$

3. Будем для удобства рассматривать два экземпляра окружности, а именно:

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi = \mu e^{i\theta}, \quad |\psi| = 1\} \quad \text{и} \quad \mathbb{T} = \mathbb{T}_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta = \rho e^{i\sigma}, \quad |\zeta| = 1\}.$$

Рассмотрим ту ситуацию, когда для функции $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ найдется такой *аналитический* (и, для определенности, сохраняющий ориентацию) автоморфизм

$$\sigma : \mathbb{T} \ni e^{i\theta} \mapsto e^{i\sigma(\theta)} \in \mathbb{T}, \quad (3.19)$$

а также такая константа $C \in \mathbb{R}$, что функция

$$g : \theta \mapsto g(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} f(\sigma(\theta)) - C \quad (3.20)$$

нечетна относительно, скажем, точки $\theta_0 = 0$, т.е. $g(-\theta) = -g(\theta)$.

Лемма 3.1 Пусть 2π -периодические функции $\theta \mapsto \sigma(\theta) - \theta$ и $\theta \mapsto -\frac{\sigma''(\theta)}{\sigma'(\theta)}$ представлены соответственно в виде

$$\sigma(\theta) - \theta = f_0 + \sum_{k \geq 1} (f_k \cos k\theta + g_k \sin k\theta) \quad (3.21)$$

и

$$-\frac{\sigma''(\theta)}{\sigma'(\theta)} = \sum_{k \geq 1} k(c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta). \quad (3.22)$$

Тогда для некоторой окрестности $V_\mathbb{T}^\theta$ окружности \mathbb{T}_θ отображение

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \zeta : V_\mathbb{T}^\theta \ni \psi = \mu e^{i\theta} \mapsto \zeta(\psi) = 1 + \int_1^\psi \exp(a + ib) d\psi \in \sigma(V_\mathbb{T}^\theta), \quad (3.23)$$

⁶³Требуемая изометрия отображения (3.15) на окружности эквивалентна тождеству $e^A|_{\rho=1} \stackrel{\text{def}}{=} ds(\sigma)/d\sigma \equiv 1$, где $s(\sigma)$ — длина дуги кривой Γ , параметризованная точкой $e^{i\sigma} \in \mathbb{T}$. Без ограничения общности можно считать, что $s(\sigma) = \sigma$. Отсюда $N(s(\sigma)) = N(\sigma)$ и потому $B|_{\rho=1} = N(\sigma) - \sigma$.

в котором⁶⁴

$$a(\mu, \theta) = a_0 + \sum_{k \geq 1} \left[\left(\frac{d_k + g_k}{2} \mu^k + \frac{d_k - g_k}{2} \mu^{-k} \right) \cos k\theta + \left(-\frac{c_k + f_k}{2} \mu^k - \frac{c_k - f_k}{2} \mu^{-k} \right) \sin k\theta \right], \quad (3.24)$$

$$b(\mu, \theta) = f_0 + \sum_{k \geq 1} \left[\left(\frac{c_k + f_k}{2} \mu^k - \frac{c_k - f_k}{2} \mu^{-k} \right) \cos k\theta + \left(\frac{d_k + g_k}{2} \mu^k - \frac{d_k - g_k}{2} \mu^{-k} \right) \sin k\theta \right]. \quad (3.25)$$

осуществляет такое однолистное отображение $V_{\mathbb{T}}^{\theta}$ на $\sigma(V_{\mathbb{T}}^{\theta})$, которое на $\mathbb{T} = \mathbb{T}^{\theta}$ совпадает с σ , т.е. $\sigma|_{\mathbb{T}} = \sigma$.

♡ При $\mu = 1$ отображение (3.23) должно совпадать с заданным автоморфизмом σ окружности $\mathbb{T} = \{|e^{i\theta}| = 1\}$, т.е. должно быть выполнено условие

$$\left| d\zeta/d\psi \right|_{\psi=e^{i\theta}} = \sigma'(\theta).$$

Это эквивалентно тому, что $a(\mu, \theta)|_{\mu=1} = \ln \sigma'(\theta)$. Отсюда следует (ср. с [5, 131]), что

$$b'_{\mu}(\mu, \theta)|_{\mu=1} = -a'_{\theta}(\mu, \theta)|_{\mu=1} = -[\ln \sigma'(\theta)]'_{\theta} = -\frac{\sigma''(\theta)}{\sigma'(\theta)}. \quad (3.26)$$

Остается заметить, что угловая функция N для окружности есть тождественное отображение (угол наклона нормали к оси x в любой точке окружности — это полярный угол этой точки). Поэтому

$$b(\mu, \theta)|_{\mu=1} = \sigma(\theta) - \theta. \quad (3.27)$$

Тем самым, аналитическая функция $a + ib$, задаваемая формулами (3.24)–(3.25), определяет в окрестности $V_{\mathbb{T}}^{\theta}$ единичной окружности \mathbb{T} отображение (3.23) с требуемыми свойствами. \square

По построению композиция $f \circ \sigma$ функции $f \in H^{\alpha}(\mathbb{T})$ с аналитическим автоморфизмом $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ есть нечетная функция с точностью до аддитивной константы

Рассмотрим однолистное отображение

$$z \circ \sigma : V_{\mathbb{T}}^{\theta} \ni \psi = \mu e^{i\theta} \mapsto z(\sigma(\psi)) \in V_{\Gamma}^{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} z(\sigma(V_{\mathbb{T}})). \quad (3.28)$$

Оно конформно и σ -изометрично отображает окружность \mathbb{T}_{θ} в аналитическую кривую Γ .

Обозначим через π_{Γ}^{σ} поле трансверсалей к Γ , которое является образом нормалей к окружности \mathbb{T}_{θ} при отображении (3.28). Поле π_{Γ}^{σ} позволяет получить полезную информацию о графике точной асимптотики u_{ε} . А именно, согласно предыдущим построениям, справедлива

Теорема 3.2 Пусть выполнены предположения, представленные в формулах (3.19) и (3.20). Тогда линии уровня $u_{\varepsilon}(x, y) = C$ функции u_{ε} (для указанной в (3.20) константы C) вкладываются в поле π_{Γ}^{σ} трансверсалей к Γ .

Заметим, что в случае кусочно-аналитической границы знание поля π_{Γ} (или в более общей ситуации поля π_{Γ}^{σ}) позволяет локализовать и выявить особенности асимптотики в окрестности угловых точек границы.

4. Перейдем теперь к намеченному в заметке [35] построению асимптотического приближения для решения задачи Дирихле

$$\Delta U_{\varepsilon} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \Subset \mathbb{R}^2, \quad U_{\varepsilon}|_{\partial\Omega} = F(x/\varepsilon, y/\varepsilon) \quad (3.29)$$

в случае аналитической кривой $\Gamma = \partial\Omega$. Ограничимся здесь⁶⁵ случаем двузначной функции F , которая (1,1)-периодична и нечетна по каждому переменному (см. (0.23)). Пусть для определенности область Ω односвязна, а длина $|\Gamma|$ кривой Γ равна 2π . Построение базируется на приведенных выше формулах (3.15), (3.23), задающих

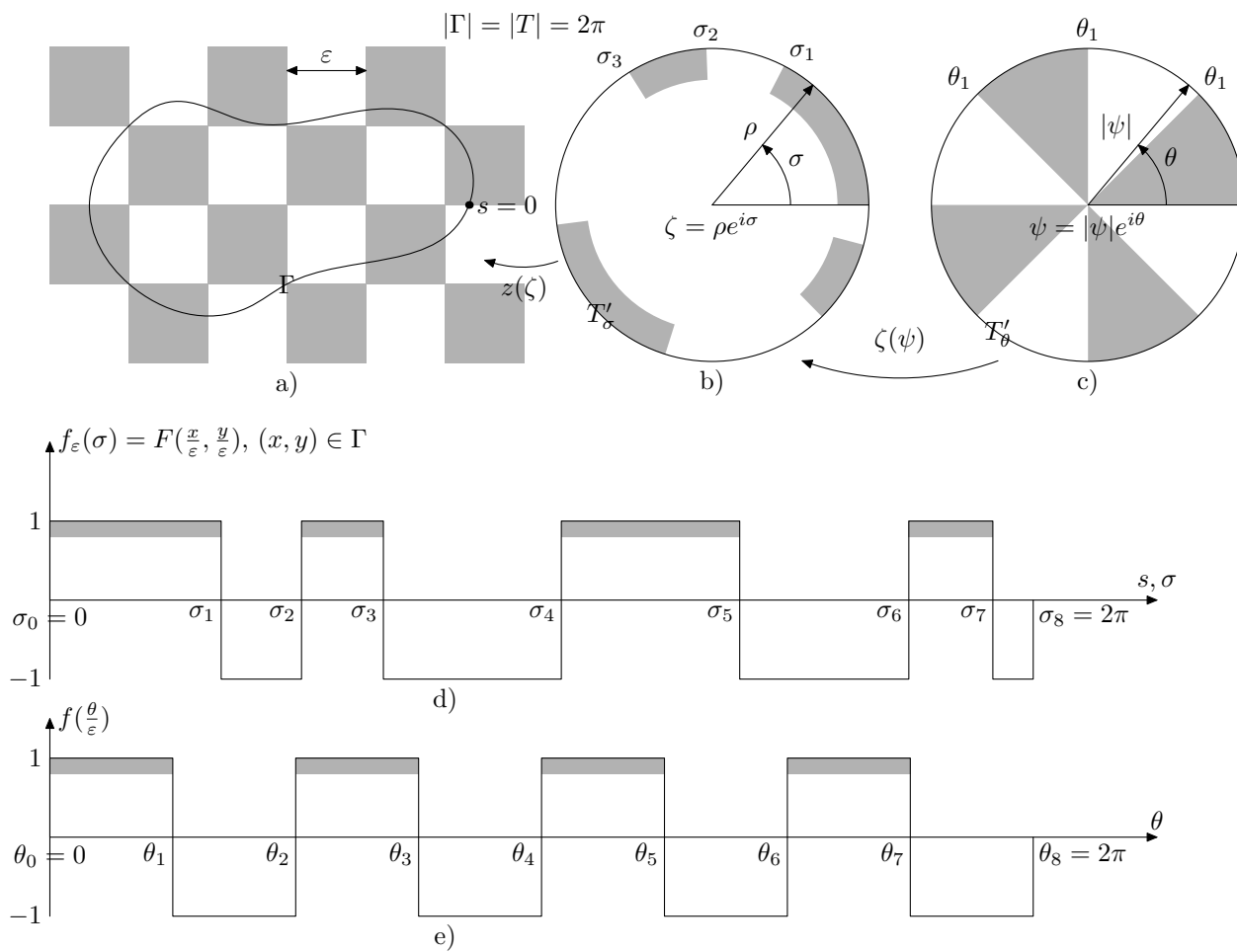


Рис. 13.

1) изометрическое конформное отображение окружности \mathbb{T}_σ на кривую Γ ;

2) конформное отображение $\sigma = \zeta : \mathbb{T}_\theta \ni \psi \mapsto \zeta(\psi) \in \mathbb{T}_\sigma$, которое на \mathbb{T}_θ совпадает с заданным аналитическим автоморфизмом $\sigma : \mathbb{T}_\theta \rightarrow \mathbb{T}_\sigma$.

Построение асимптотики осуществляется следующим образом. При заданных ε и аналитической кривой Γ (см. рис. 13а) на Γ фиксируется след функции $(x, y) \mapsto F(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$. Развертка этого следа, параметризованная точками σ_k (см. рис. 13d), переносится в виде графика функции $\sigma \mapsto f_\varepsilon(\sigma)$ на окружность⁶⁶ \mathbb{T}_σ (см. рис. 13b). В предположении, что⁶⁷

$$\max_k (\sigma_k - \sigma_{k-1}) \leq C\varepsilon, \quad \text{где } C = O(1) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.30)$$

сначала строится полином $\theta \mapsto \sigma(\theta)$, принимающий значение σ_k в соответствующей точке θ_k (см. рис. 13d,e). Затем строится решение v_ε задачи Дирихле для уравнения Лапласа в диске D_θ (см. рис. 13с) с данными Дирихле, представленными на рис. 13е в виде развертки графика функции $f(\theta/\varepsilon)$. Наконец, построенное решение v_ε трансформируется в искомую асимптотику с помощью σ -отображения (3.23), следуя теореме 3.1.

5. Коснемся, вкратце, вопроса построения асимптотики решения задачи

$$\Delta U_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon} = 0, \quad \left(U_\varepsilon + \lambda \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} \right) \Big|_{s \in \Gamma_\varepsilon} = f(s), \quad \text{где } f \in H^\beta(\Gamma_\varepsilon), \text{ а } \beta \geq -1/2 - \text{sign } \lambda, \quad (3.31)$$

в области Ω_ε (для простоты изложения, односвязной) с сильно гофрированной аналитической границей Γ_ε , угловая функция которой представима в виде

$$N_\varepsilon : [0, 2\pi] \ni s \mapsto N_\varepsilon(s) = N(s) + \sum_{k=1}^K \varepsilon^k \left(f_k \cos \frac{ks}{\varepsilon} + g_k \sin \frac{ks}{\varepsilon} \right), \quad 1/\varepsilon = M \in \mathbb{Z}. \quad (3.32)$$

Формула (3.32) означает, что длина кривой Γ_ε равна 2π , а угол между осью x и внешней нормалью к Γ_ε в точке, соответствующей натуральному параметру s этой кривой, равен $N_\varepsilon(s) = N(s) + n_\varepsilon(s)$, где N — угловая функция кривой Γ , фигурирующая в формулах (3.12) и (3.16).

Рассмотрим однолистное отображение z_ε , определенное по формуле (3.15), в которой функция $A + iB$, заданная формулами (3.17)–(3.18), заменена на функцию $A^\varepsilon + iB^\varepsilon = (A + iB) + (a^\varepsilon + ib^\varepsilon)$, где

$$a^\varepsilon(\rho, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left(\frac{\rho^{2k} - \varepsilon^{2k}}{\rho^k} \right) [g_k \cos k\beta - f_k \sin k\beta],$$

$$b^\varepsilon(\rho, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left(\frac{\rho^{2k} + \varepsilon^{2k}}{\rho^k} \right) [f_k \cos k\beta + g_k \sin k\beta],$$

Пусть $\zeta_\varepsilon : V_{\Gamma_\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} z_\varepsilon(V_{\mathbb{T}}) \ni z \mapsto \zeta_\varepsilon(z) \in V_{\mathbb{T}}$ — отображение, обратное к z_ε (ср. (3.11)). Возьмем, как и выше две кольцевые области $V_{\mathbb{T}}^0$ и $V_{\mathbb{T}}^1 \subset V_{\mathbb{T}}^0 \subset V_{\mathbb{T}}$, определяемые радиусами ρ_k малой окружности кольца $V_{\mathbb{T}}^k = \{\rho_k < \rho < 1\}$, и рассмотрим их прообразы $V_{\Gamma_\varepsilon}^k = z_\varepsilon(V_{\mathbb{T}}^k) \subset V_{\Gamma_\varepsilon}$ при отображении $\zeta_\varepsilon : V_{\Gamma_\varepsilon} \rightarrow V_{\mathbb{T}}$. Пусть $\chi \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ — срезающая функция, такая, что: $\chi = 1$ в $V_{\Gamma_\varepsilon}^1$ и $\chi = 0$ вне $V_{\Gamma_\varepsilon}^0$.

Обозначим через v решение задачи (3.31) для случая, когда область Ω_ε есть единичный диск. Тогда функция $u_\varepsilon = \chi \cdot v \circ \zeta_\varepsilon$ есть точная асимптотика решения задачи (3.31), т.е. для нее справедлива оценка (3.2).

6. Представленные здесь построения можно в какой-то мере распространить на эллиптические уравнения вида

$$\mathfrak{A}(u) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (3.33)$$

⁶⁴Константа a_0 в формуле (3.24) определяется из условия такой нормировки: $\int_0^{2\pi} e^{a(1, \theta)} d\theta = 2\pi$.

⁶⁵Относительно общего случая см. подпункт 3 в разделе *Открытые вопросы*.

⁶⁶Образом окружности \mathbb{T}_σ при отображении (3.15) является кривая Γ .

⁶⁷Если условие (3.30) не выполнено, то надо действовать в соответствии с Замечанием 3.1 (см. (3.8)–(3.9)).

где функции $a_{ij} : (x, y) \mapsto a_{ij}(x, y)$ и F аналитичны. Допустим, речь идет о задаче (3.1), в которой оператор Лапласа заменен на оператор \mathfrak{A} и рассматривается, скажем, задача Дирихле. В этом случае, по-существу, все сводится к построению в окрестности границы Γ двух функций

$$(x, y) \mapsto \rho(x, y) \quad \text{и} \quad (x, y) \mapsto \varphi(x, y),$$

задающих полярные координаты в окрестности единичной окружности, и удовлетворяющих следующим условиям. Во-первых,

$$\rho_x = \beta\varphi_x + \gamma\varphi_y, \quad -\rho_y = \alpha\varphi_x + \beta\varphi_y, \quad (3.34)$$

где

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{ac - b^2}}, \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{ac - b^2}}, \quad \gamma = \frac{c}{\sqrt{ac - b^2}}. \quad (3.35)$$

Во-вторых,

$$\rho|_{(x,y) \in \Gamma} = 1 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}|_{(x,y) \in \Gamma} = 1, \quad (3.36)$$

где $\frac{\partial}{\partial \tau}$ — дифференцирование вдоль Γ .

Как известно (см., например, [62], гл. IV, §8), при замене переменных (3.34)–(3.35) уравнение (3.37) примет в окрестности границы Γ такой вид

$$\rho^2 v_{\rho\rho} + \rho v_\rho + v_{\varphi\varphi} + G(\rho, \varphi, v, v_\rho, v_\varphi) = 0, \quad (3.37)$$

где $v(\rho(x, y), \varphi(x, y)) = u(x, y)$. Данные Коши (3.36) для эллиптической системы (3.34)–(3.35) обеспечивают изометрическое преобразование границы Γ в окружность \mathbb{T} радиуса $\rho = 1$. Поэтому исходная задача сводится к построению в некоторой внутренней окрестности окружности \mathbb{T} такого решения уравнения (3.37), которое экспоненциально убывает в направлении внутренней нормали к границе и удовлетворяет условию Дирихле $v|_{s \in \Gamma} = f(s/\varepsilon)$, где $f \in H^\alpha(\mathbb{T})$ — граничная функция для исходной задачи. В том весьма частном случае, когда функция G линейна по (ρ, v, v_ρ) и не зависит от (φ, v_φ) , искомая асимптотика представима в виде суммы двух функций, одна из которых есть решение обыкновенного дифференциального уравнения $\rho^2 v_{\rho\rho} + \rho v_\rho + G(\rho, v, v_\rho) = 0$, а другая строится согласно изложенному выше рецепту.

7. Некоторые открытые вопросы.

1. Какой деформации подвергается поле π_Γ при аналитических возмущениях функции $N : [0, |\Gamma|] \ni s \mapsto N(s)$, задающей границу Γ ? Этот вопрос, по-видимому, нетрудный, особенно если учесть имеющиеся в этом направлении результаты, в частности, в [74]. Однако ответ на поставленный вопрос знать полезно (например, для случая возмущений в том или ином классе полиномов).

2. Для каких достаточно широких подклассов функций f из $H^\beta(\mathbb{T})$, где $\beta \geq -1/2$ выполнены предположения, представленные в формулах (3.19) и (3.20)? Какой можно предложить эффективный способ нахождения соответствующего отображения σ в каждом из этих подклассов?

3. Пусть заданы аналитическая кривая Γ , малое число $\varepsilon > 0$ и гладкая функция $F_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto F(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$, которая нечетна по каждому переменному и $(\varepsilon, \varepsilon)$ -периодична (см. пункт 4 этого параграфа). Требуется (см. Примечание 65) подобрать небольшое число $J \in \mathbb{N}$ аналитических автоморфизмов $\sigma_j : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, точки $e^{is_j} \in \mathbb{T}$, числа $C_j \in \mathbb{R}$ и положительные числа $\varepsilon_j = O(\varepsilon)$, для которых (при сравнительно малых $K_j \in \mathbb{N}$) функция вида

$$\mathbb{T} \ni e^{is} \mapsto \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{K_j} \left[\left(A_{kj} \cos k \frac{\sigma_j(s - s_j)}{\varepsilon_j} + B_{kj} \sin k \frac{\sigma_j(s - s_j)}{\varepsilon_j} \right) - C_j \right]$$

хорошо бы приближала при некоторых искомым $A_{kj} \in \mathbb{R}$, $B_{kj} \in \mathbb{R}$ быстро осциллирующую составляющую функции $F(x/\varepsilon, y/\varepsilon)|_\Gamma$, т.е. след на аналитическую кривую Γ гладкой функции $F_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto F(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$.

4. Каков аналог теоремы 3.2 для случая, когда $\lambda \neq 0$ в условии (3.1)?

§ 4 Обратная задача о равновесии плазмы в токамаке

Обратная задача о равновесии плазмы — это задача о реконструкции (идентификации) распределения тока и давления в плазме по данным магнитной диагностики. Для осуществления такой реконструкции целесообразно предварительно выявить все “существенно различные” правые части в уравнении Грэда-Шафранова, для которых справедливы диагностические данные о градиенте магнитного потенциала в ряде точек вне функциональной камеры. Такие “существенно различные” правые части будем называть решениями обратной задачи для уравнения Грэда-Шафранова. Сколько таких решений — один из труднейших вопросов в этой проблеме. Если имеется единственность, то дополнительного изучения не нужно: найденное решение определяет искомое распределение тока и давления. Если единственности нет, то нет никакой гарантии, что какое-то, так или иначе найденное решение обратной задачи для уравнения Грэда-Шафранова характеризует реальное распределение тока и давления.

1. В математической постановке обратной задачи для уравнения Грэда-Шафранова

$$x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u) + x^2 G(u) \geq 0 \quad \text{в } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \text{где } x > x_0 > 0, \quad (4.1)$$

которое в так называемом цилиндрическом приближении (см. (2.17)) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(u) \geq 0 \quad \text{в } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \text{где } x > x_0 > 0, \quad (4.2)$$

фигурируют следующие объекты, относящиеся к сечению функциональной камеры токамака (см. рис. 14):

- 1) “плазменная” область ω , ограниченная искомой кривой γ (на ней полоидальная компонента u векторного потенциала магнитного поля равна нулю: $u|_{\gamma} = 0$);
- 2) “вакуумная” область Ω , которая окружает область ω ;
- 3) Γ — внешняя граница области Ω (на ней⁶⁸ задан потенциал $M > 0$ магнитного поля, т.е.⁶⁹ $u|_{\Gamma} = M$);
- 4) Данные Ψ_j измерений $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{P_j}$ в ряде точек⁷⁰ $P_j \in \Gamma$ ($j = 1, \dots, n$) и точность ε этих измерений.

Относительно функций $F : u \mapsto F(u)$ и $G : u \mapsto G(u)$ в (4.1), а также функции $f : u \mapsto f(u)$ в (4.2) известно, что они равны нулю для $u > 0$, т.е. правые части уравнений (4.1) и (4.2) равны нулю в вакуумной области Ω (т.к. там, в силу принципа максимума, решение эллиптического уравнения Грэда-Шафранова положительно). В “плазменной” области ω функция u отрицательна и для таких ее значений функции F и G , а также f , вообще говоря, априори произвольны. Допустимы (как мы видели при обсуждении условия (0.3)) даже обобщенные функции. Однако вполне разумно ограничиться рассмотрением таких функций F и G в случае уравнения (4.1) (и функций f в случае уравнения (4.2)), которые при $u < 0$ являются аналитическими или даже полиномиальными.

В случае уравнения Грэда-Шафранова (4.1) (т.е. для тороидальной геометрии) обратная задача состоит в том, чтобы в априори заданном классе функций F и G выявить все “существенно

⁶⁸В токамаках старых конструкций в качестве кривой Γ можно взять контур медного кожуха, ограничивающего функциональную камеру. В современных токамаках с системой внешних управляющих токов, такую кривую, диффеоморфную окружности, можно выбрать, решая задачу Коши для однородного уравнения Грэда-Шафранова.

⁶⁹Кривая γ , как мы видели, является линией магнитного потенциала u . Если, как здесь, ее считать нулевой линией потенциала, то задав число M , как значение потенциала на фиксированной кривой Γ , мы характеризуем отдаленность γ от Γ . Физики это делают эквивалентным образом с помощью так называемого лимитора. Им является стержень, находящийся в функциональной камере токамака, конец которого, соприкасаясь с плазмой, определяет точку, принадлежащую ее границе, а потому и саму границу γ .

⁷⁰Выбор точек P_j лимитирован тем фиксированным набором мест, где могут быть установлены измерительные приборы. Отметим, что реально (согласно Примечанию 25) речь идет об измерении не чисел $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{P_j}$, а магнитного потока через маленькие дужки $\sim l_{P_j} \ni P_j$ кривой Γ .

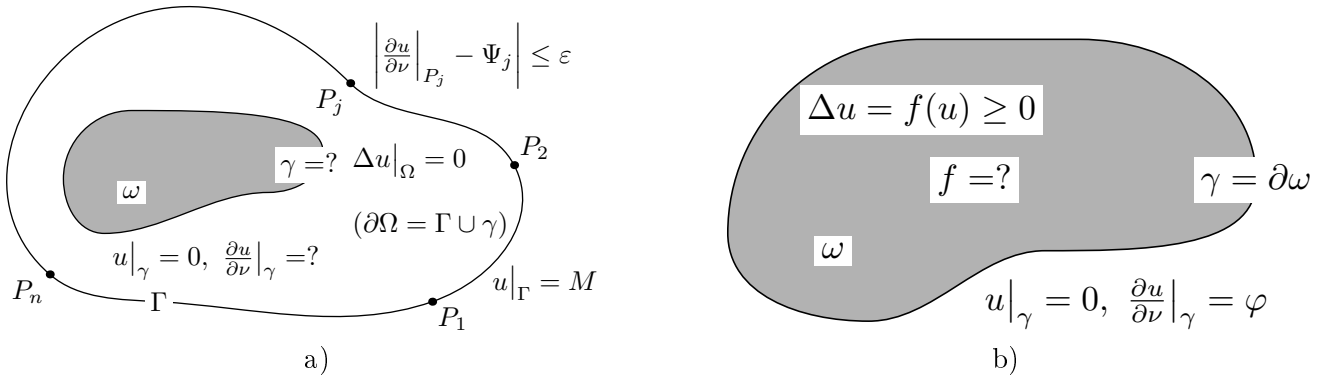


Рис. 14. Две подзадачи обратной задачи о равновесии плазмы (для случая “цилиндрического приближения”).

различные”⁷¹ правые части этого уравнения, для которых найдется соответствующее им решение $u = u_{F,G}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u|_{\Gamma=\partial\Omega} = 0 \quad \text{и} \quad |\Phi(P_j) - \Psi_j|_{P_j \in \Gamma} \leq \varepsilon, \quad \text{где} \quad \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}, \quad \int_{\Gamma} \Phi \neq 0. \quad (4.3)$$

При этом пары (F_1, G_1) и (F_2, G_2) считаются существенно различными, если “заметно” различаются функции

$$\omega \ni (x, y) \mapsto F_1(u_1(x, y)) + x^2 G_1(u_1(x, y)) \quad \text{и} \quad \omega \ni (x, y) \mapsto F_2(u_1(x, y)) + x^2 G_2(u_1(x, y)).$$

Аналогично ставится обратная задача в случае уравнения Грэда–Шафранова для цилиндрической геометрии (т.е. в случае уравнения (4.2)).

2. Чем продиктован интерес к этой задаче? Проблема реконструкции правой части уравнения Грэда–Шафранова была поднята в начале 70-х годов (см., например, [43]) и живо обсуждается физиками до сих пор (в частности, в [170]). Ее принципиальная важность заключается в том, что методы управления разрядом и, в частности, методы борьбы с неустойчивостью плазмы в существенной мере зависят от того, каково распределение протекающего по ней тока и каково распределение давления в плазме, т.е. от того, каковы функции F и G . Но эти функции физикам неизвестны. Как же их реконструировать? Для реконструкции правой части уравнения Грэда–Шафранова необходима дополнительная информация. Физики умеют замерять градиент функции u (в ряде точек P_j) вдоль некоторого контура Γ , внешнего относительно функциональной камеры токамака. Удобно считать, что кривая Γ есть линия уровня функции u — полоидальной компоненты векторного потенциала магнитного поля. В этом случае замеряются приближенные значения $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{P_j \in \Gamma}$, задаваемые числами Ψ_j . Пусть Ψ — функция, построенная с помощью той или иной интерполяции по данным магнитной диагностики, т.е. по числам Ψ_j . Тогда можно (в определенном смысле), скажем, численно решить подзадачу

а). Найти решение u однородного уравнения Грэда–Шафранова в “вакуумной” области Ω с такими данными Коши

$$u|_{\Gamma} = M, \quad \partial u / \partial \nu|_{\Gamma} = \Psi.$$

Если подзадача а) решена, то можно считать приближенно известными и свободную границу $\gamma = \gamma_{\Psi}$, ограничивающую “плазменную” область ω , и приближение ψ к функции $\varphi = \partial u / \partial \nu|_{\gamma}$.

Таким образом, возникает подзадача

б). Определить все те “существенно различные” функции F и G , для которых имеется решение уравнения Грэда–Шафранова (4.1) в фиксированной(!) области ω , удовлетворяющее (для некоторого $p \in [0, \infty]$) таким данным

$$u|_{\gamma=\partial\omega} = 0, \quad \|\rho (\partial u / \partial \nu|_{\gamma=\partial\omega} - \psi)\|_{L^p} \leq \varepsilon_{\gamma} \ll 1, \quad (4.4)$$

⁷¹Точная постановка задачи (см., например, [46]) предполагает, конечно, точные определения употребляемых здесь терминов: “существенно различные”, “заметно” и пр.

где ρ — характеристическая функция той части дуги кривой γ , которая несколько отделена от ее точек с чрезмерной кривизной⁷².

Введение подзадач а) и б) несколько облегчает⁷³ проблему реконструкции правой части уравнения Грэда–Шафранова. В случае “цилиндрического приближения” эти подзадачи схематично представлены на рис. 14.

Подзадача б) еще далеко не изучена, хотя вопросу реконструкции по данным (4.4) правой части уравнения (4.1) посвящены сотни вычислительных работ (см., в частности, библиографию в [52, 110]), в которых так или иначе определяют правую часть уравнения Грэда–Шафранова. Но кто может гарантировать, что найденная в численном эксперименте величина близка к той, которая соответствует реальному процессу? Именно ее и надо найти, чтобы корректировать режим разряда и подавлять неустойчивости плазмы. Поэтому при имеющихся приближенных данных Коши надо выявить все существенно различные правые части уравнения Грэда–Шафранова. Нельзя пропустить ни одну. Рецепт, численно позволяющий этот осуществить, предложен в [42, 46] (ср. с недавней работой [191]). Что же касается реконструкции нелинейностей по асимптотическому поведению нормальной производной при приближении к угловой точке, то такая процедура не может считаться приемлемой по двум причинам. Во-первых, с одной стороны, любая такая нормальная производная по модулю сколь угодно мала при приближении к угловой точке контура γ , а с другой стороны, согласно [105]–[107], множество этих нормальных производных находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех аналитических функций, задающих правую часть уравнения (4.1). Тем самым, любые равномерные приближения нормальной производной в окрестности угловой точки абсолютно не информативны для реконструкции правой части (даже в рамках ее аффинной аппроксимации, как это следует из [130]). Во-вторых, если нелинейность восстановлена по данным асимптотического поведения нормальной производной в окрестности угловой точки, то можно говорить о знании функции u , а потому и о ее нормальной производной на всей гладкой части границы. Но тогда получаем с вероятностью 1 несовпадение так вычисляемой нормальной производной с функцией Ψ , представляющей эту производную.

Рассматриваемая задача реконструкции абсолютно не банальна. Даже в том весьма частном случае, когда в оценке (4.4) $\varepsilon = 0$, а уравнение Грэда–Шафранова рассматривается в цилиндрическом приближении (тороидального плазменного шнура), т.е. когда оно принимает вид

$$\Delta u = f(u) \geq 0 \quad \omega \in \mathbb{R}^2 \quad (4.5)$$

и при этом функция f априори всего лишь аффинна ($f(u) = au + b$), до сих пор нет абсолютно точного ответа на такой вопрос: существует ли область ω с гладкой границей, отличная от диска или кольца, для которой рассматриваемая задача идентификации по данным Коши имеет более одного решения. Другими словами, возможно ли существование более одной пары чисел (a, b) , для которых при одних и тех же данных Коши уравнение (4.5) имеет решение? Не доказано и существование хотя бы одной *выпуклой* (в отличие от построенной в [46]) области ω с *гладкой* границей, для которой обратная задача имеет не более одного решения, т.е. не более одной пары чисел (a, b) .

Что касается случая, когда область ω является диском, то (как нетрудно убедиться) существует континуальное множество аффинных функций $f(u) = au + b$, для которых есть решение u задачи (4.5), (4.4) (это решение выражается через функции Бесселя; см., например, [187]). Однако [37, 130, 118, 187] таких аффинных функций $f(u) = au + b$ заведомо лишь конечное число, если односвязная область ω отлична от диска. Возможно, этот математический факт частично отражает внутреннюю причину тех физических доводов работы [4], которые и поставили в повестку дня изучение плазменного разряда с некруглым сечением.

3. Несмотря на то, что подзадача а) существенно проще подзадачи б), не следует забывать, что задача Коши для эллиптического уравнения Грэда–Шафранова неустойчива относительно того, как строится функция Ψ по ее значениям в точках $P_j \in \Gamma$, аппроксимирующим $\partial u / \partial \nu|_{P_j \in \Gamma}$ (не говоря уже о том, как аппроксимируется аналитическими кривыми контур Γ). Впрочем, наверняка известно, что функция $\Phi = \partial u / \partial \nu|_{\Gamma}$ положительна ввиду (упомянутой в Примечании 15) леммы Жиро–Хопфа–Олейник. Кроме того, в силу условия (2.18) Φ имеет заданное среднее значение (равное полному току). В заметке [14] приводятся 3 алгебраических описания всех таких функций Φ , являющихся интерполяционными тригонометрическими полиномами⁷⁴ степени $n - 1$. Ниже доказывается

Теорема 4.1 [131] *Справедлива оценка*

$$\Phi|_{P \in \Gamma} e^{-4M/\mu} \leq \varphi|_{p=p(P) \in \gamma} \leq \Phi|_{P \in \Gamma} e^{4M/\mu}. \quad (4.6)$$

⁷² У токамаков с так называемым дивертором “плазменная” область ω имеет форму половинки восьмерки, являющейся сепаратрисой магнитных силовых линий. Тем самым, ω имеет угловую точку. Однако вблизи точек с чрезмерной кривизной, а тем более в окрестности угловой точки реально невозможно получить данные о коэффициентах асимптотического поведения функции $\varphi = \partial u / \partial \nu|_{\gamma}$. Поэтому весовая функция ρ равна нулю вблизи угловой точки.

⁷³ Тяжелый груз проще поднять не сразу, а по частям (и проще нести два облегченных чемодана, чем один тяжелый).

⁷⁴ Одно из этих описаний устанавливает взаимно-однозначное соответствие между такими функциями Φ и точками на некотором эллипсоиде в \mathbb{C}^n .

Здесь μ — явно подсчитываемое положительное число⁷⁵, а $p(P)$ — та точка γ , в которую приходит выходящая из точки $P \in \Gamma$ линия, касающаяся градиента функции u .

Оценка (4.6) может быть полезна в качестве тестового контроля численного алгоритма вычисления значений функции φ .

♡ Доказательство теоремы 4.1 проведем, предполагая поначалу, что Γ аналитическая кривая длины $|\Gamma| = 2\pi$. Пусть $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ натуральный параметр на Γ , а $\theta_j = \theta(P_j)$ — координаты заданных на Γ точек P_1, \dots, P_n . Определим класс $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Gamma; P_1, \dots, P_n; \Phi_1, \dots, \Phi_n; \varepsilon)$ аналитических положительных функций

$$g : \Gamma \ni \theta \mapsto g(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k \geq 1} \Re(g_k e^{ik\theta}), \quad g_k \in \mathbb{C} \quad (\Re e^{ik\theta} = \cos k\theta)$$

на кривой Γ , таких, что $|g(\theta_j) - \Phi_j| \leq \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, n$.

Пусть $S = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\}$, а $\zeta : V_\Gamma \ni z = x + iy \mapsto \zeta(z) \in V_S \not\equiv \{0\}$ — однолистное отображение максимально возможной открытой окрестности V_Γ кривой Γ на окрестность V_S окружности S , удовлетворяющее (см. §3) условию $\zeta(\Gamma) = S$ и $|\zeta'(z)| \equiv 1$ на Γ . Функция

$$U_g(\zeta) = M + \frac{1}{2\pi} \ln r + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \Re\left(\frac{g_k}{k} \left(r^k - \frac{1}{r^k}\right) e^{ik\theta}\right), \quad r = |\zeta|, \quad \theta = \arg \zeta$$

(соотв., функция $u_g(z) = U_g(\zeta(z))$) — гармоническая в V_S (соотв., в V_Γ) и $U_g|_S = M$, $\partial U_g / \partial r|_S = g$ (соотв., $u_g|_\Gamma = M$, $\partial u_g / \partial \nu|_\Gamma = g$).

Введем еще положительные числа M_g и M_g^* , параметрически зависящие от функции $g \in \mathcal{G}$. А именно, $-M_g^*$ и M_g — это концевые значения максимального интервала $(-M_g^*, M_g)$, такого, что

$$(-M_g^*, M_g) \ni m \iff \text{линия уровня } \{\zeta \in V_S \mid U_g(\zeta) = M + m\} \text{ гомеоморфна окружности.}$$

Подведем первый итог. Мы проверили, что для любой функции $g \in \mathcal{G}$ и любого положительного числа $M < M_g^*$ существует такая кривая $\gamma = \gamma_g$, гомеоморфная окружности, что задача

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u|_\gamma = 0, \quad u|_\Gamma = M, \quad \partial u / \partial \nu|_\Gamma = g$$

имеет решение $u = u_g$.

Полагая $\mu = \min(1/2, m_g, M_g)$, где $m_g = M_g^* - M$, докажем теперь оценку (4.6). Заметим, прежде всего, что введенный класс функций удовлетворяет условию⁷⁶: $\int_\Gamma g = \int_\Gamma \partial u / \partial \nu = 1$. Поэтому функция v , гармонически сопряженная к u в односвязной области $V_\Gamma^* = V_\Gamma \setminus l(P^*)$ и равная (в силу условий Коши-Римана) константе на линии $l(P^*)$, удовлетворяет условию: $\max v - \min v = 1$. Можно считать, что функция v варьирует между $-1/2$ и $1/2$. Что касается точки $P^* = P^*(P)$, то она выбирается так, чтобы $v = 0$ на $l(P)$.

Заметим, что отображение $w = u + iv : V_\Gamma^* \ni z \mapsto w(z)$ обратимо, по крайней мере, на прямоугольнике

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \{M - M_g^* < u < M + M_g, \quad |v| < 1/2\} \subset w(V_\Gamma^*),$$

а обратная к w функция $z : w \mapsto z(w)$ однолистка на Q .

Поскольку $\partial u / \partial \nu = |dw/dz|$ как на Γ , так и на γ , оценим $|z'(w(p))|/|z'(w(P))|$. Заметим, что $w(p) = 0$, $w(P) = M$. Покроем отрезок $[0, M] \subset Q$ семейством дисков

$$\{w \in \mathbb{C} \mid |w - m_i| < \varrho\}; \quad m_i = m_{i-1} + \frac{m_N - m_0}{N}; \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь $m_0 = 0$, $m_N = M$, $\varrho < \mu = \min(1/2, M_g^* - M, M_g)$, $\varrho N > M$. Имеем

$$\left| \frac{z'(m_N)}{z'(m_0)} \right| = \prod_{i=1}^N \left| \frac{z'(m_i)}{z'(m_{i-1})} \right|, \quad \frac{z'(m_i)}{z'(m_{i-1})} = f' \left(\frac{m_i - m_{i-1}}{\varrho} \right)$$

⁷⁵Приведенная в доказательстве теоремы формула для параметра μ верна для любой конфигурации границы Γ . Учет геометрии конкретной кривой Γ , по-видимому, позволит уменьшить “вилку” в оценке (4.6).

⁷⁶Согласно сказанному во Введении и в §2, физическая интерпретация этого условия такова: полный ток, протекающий по плазме, равен единице (в соответствующей системе измерений).

где функция f определена на диске $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ формулой

$$f : D \ni w \mapsto f(w) = \frac{z(m_{i-1} + \varrho w) - z(m_{i-1})}{\varrho z'(m_{i-1})} = w + c_2 w^2 + \dots$$

Эта функция однолистка, т.к. $z : w \mapsto z(w)$ однолистка на Q .

По теореме Бибераха (см., например, [28]) имеем: $|f'(w)| \leq (1+|w|)/(1-|w|)^3 \quad \forall w \in D$. Возьмем $\tau = M/\varrho N$. Тогда $|m_i - m_{i-1}|/\varrho = \tau$. Поэтому

$$\left| \frac{z'(m_N)}{z'(m_0)} \right| \leq \left(\frac{1+\tau}{(1-\tau)^3} \right)^N = \left[\left(\frac{1+\tau}{(1-\tau)^3} \right)^{1/\tau} \right]^{M/\varrho} \leq \exp(4M/\varrho) \quad \forall \varrho < \mu.$$

Аналогичным образом $|z'(m_0)/z'(m_N)| \leq \exp(4M/\mu)$, откуда следует оценка (4.6).

Закончим доказательство теоремы 4.1 простым замечанием: случай $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ легко сводится к рассмотренному. Действительно, отобразив конформно область с границей $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ на область с (достаточно близкой к Γ) аналитической границей, мы получим, в силу теоремы Келлогга (см., например, [66]), уже рассмотренную задачу (лишь с немного иными константами Φ_j и немного иным параметром ε). \square

4. Некоторые открытые вопросы.

1. Как улучшить оценку (4.6), если учитывать данные о функции N , задающей геометрию контура Γ ? Какие в связи с этим можно дать рекомендации по расположению точек P_j , в которых устанавливаются приборы магнитной диагностики? Насколько оценка (4.6) может быть улучшена, если рассматривать лишь выпуклые кривые Γ ?

2. Главный вопрос в обратной задаче для уравнения Грэда–Шафранова — это вопрос о наличии или отсутствии существенно различных распределений тока в плазме и/или ее плотности при почти одинаковых данных о величине магнитного потока Φ_j , измеряемом с точностью ε на малых дугах-окрестностях заданных точек $P_j \in \Gamma$ ($j = 1, \dots, n$). Если ограничиться интерполяцией значений Φ_j в классе \mathcal{T}_n тригонометрических полиномов степени меньшей n , то, как уже было отмечено, в заметке [14] приведен алгебраический критерий того, что такой тригонометрический полином принадлежит введенному в этом параграфе классу $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Gamma; P_1, \dots, P_n; \Phi_1, \dots, \Phi_n; \varepsilon)$.

Естественно возникает вопрос⁷⁷ о возможности наличия нескольких (существенно различных) неотрицательных функций f , таких, что $f(u) = 0$ при $u > 0$, для каждой из которых найдется отвечающая ей функция $u = u_f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная в области $\mathfrak{S} \in \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\Gamma = \partial\mathfrak{S}$, удовлетворяющая таким условиям:

$$\Delta u = f(u) \quad \text{в } \mathfrak{S}, \quad u|_{\Gamma} = M, \quad \partial u / \partial \nu|_{\Gamma} = g, \quad (4.7)$$

где M — заданная положительная константа, а $g \in \mathcal{T}_n \cap \mathcal{G}$ (и, следовательно, $\int_{\Gamma} g = 1$).

Вакуумная область Ω (там, где $f = 0$), а потому и граница γ плазменной области $\omega = \mathfrak{S} \setminus \overline{\Omega}$ полностью определяются функцией g . Поэтому поднятый здесь вопрос содержит в себе в качестве подпунктов ряд экстремальных задач на множестве $\mathcal{T}_n \cap \mathcal{G}$, т.е. задач на поиск таких функций g_- и g_+ из $\mathcal{T}_n \cap \mathcal{G}$, для которых

$$R(g_-) \leq R(g) \leq R(g_+) \quad \forall g \in \mathcal{T}_n \cap \mathcal{G}. \quad (4.8)$$

В качестве целевой функции R могут быть выбраны, например, такие величины:

- а) $\int_{\gamma} |\kappa(s)|^2 d\gamma$, где $\kappa(s)$ — кривизна кривой $\gamma = \gamma_g$ в точке s ;
- б) та или иная норма функции $\varphi = \partial u / \partial \nu|_{\gamma_g}$.

Смысл рассмотрения таких экстремальных задач очевиден: чем больше (соотв. меньше) интегральная кривизна кривой γ_g или норма φ , тем с большей (соотв. с меньшей) вероятностью график соответствующей функции f может иметь крутые перегибы. Поэтому вполне правдоподобно, что функциям g_- и g_+ могут отвечать две существенно отличающиеся допустимые функции f^{g_-} и f^{g_+} .

§ 5 Задача Стокса–Лейбензона

1. Классическая постановка задачи Стокса–Лейбензона такова. Пусть Ω_0 — односвязная область в \mathbb{R}^2 , ограниченная достаточно гладкой кривой Γ_0 , окружающей начало координат $\{0\}$. Область Ω_0 соответствует пятну жидкости (глицерина) в начальный момент, а источник-сток локализован

⁷⁷Для простоты формулировки ограничимся здесь лишь случаем цилиндрического приближения геометрии тока-мака.

в начале координат $\{0\} \in \Omega_0$. Заданная область деформируется следующим образом: в момент t точка $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t))$ границы Γ_t области Ω_t движется со скоростью $\dot{\mathbf{s}} = (\dot{x}, \dot{y})$, определяемой кинематическим условием

$$\dot{\mathbf{s}} = \nabla u \quad \text{на} \quad \Gamma_t, \quad (5.1)$$

где $\nabla u = (u_x, u_y)$ — градиент функции $u(t; \cdot, \cdot) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию Стокса

$$u_{xx} + u_{yy} = q\delta(x, y) \quad \text{в} \quad \Omega_t \quad (5.2)$$

и динамическому условию Лейбензона

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_t. \quad (5.3)$$

Здесь $\delta(x, y)$ — это δ -функция Дирака, сосредоточенная в начале координат, а ненулевой коэффициент $q \in \mathbb{R}$ характеризует мощность источника-стока. В дальнейшем, мы будем предполагать, что область Ω_t симметрична относительно оси x . С учетом этого удобно считать, что $q = 2$. При этом $t > 0$ будет соответствовать случаю источника, а $t < 0$ — случаю стока.

Отметим, вкратце, некоторые результаты исследований задачи (5.1)–(5.3). Они начались с работ Л.А. Галина [22] и П.Я. Кочиной [85, 86], опубликованных в 1945 г. В этих работах было выведено уравнение

$$\Re[f(\zeta, t) \overline{\zeta f'(\zeta, t)}] = q/2\pi, \quad |\zeta| = 1 \quad (5.4)$$

для отображения $f(\cdot, t)$, однолистно отображающего единичный диск $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq 1\}$ на искомую область Ω_t .

Уравнение (5.4) на окружности $|\zeta| = 1$ эквивалентно (см., например, [17]) такому нелинейному интегральному уравнению в диске $|\zeta| < 1$:

$$\dot{f}(\zeta, t) = \zeta f'(\zeta, t) \frac{q}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(e^{i\theta}, t)|^2} \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta. \quad (5.5)$$

В предположении, что $f(\zeta, t) = a_1(t) + a_2(t)\zeta + \dots + a_n(t)\zeta^n$, была получена [22] система обыкновенных дифференциальных уравнений на коэффициенты $a_j(t)$. В случае $n = 2$ эта система принимает вид [86]

$$a_1^2(t)a_2(t) = a_1^2(0)a_2(0), \quad a_1^2(t) + 2a_2^2(t) = a_1^2(0) + 2a_2^2(0) - qt/\pi.$$

Если $|a_2/a_1| < 1/2$, то образ единичной окружности при отображении $f(\cdot, t)$ есть улитка Паскаля Γ_0 , задаваемая полярным радиусом $\{r(\theta) = a \cos \theta + b, b > a\}$. В случае стока (т.е. при $qt < 0$) она за конечное время трансформируется в кардиоиду Γ_{t*} , острие которой, как оказывается, не достигает точки стока. Далее (т.е. при $qt < qt_*$, когда $|a_2/a_1| > 1/2$), отображение $f(\cdot, t)$ перестает быть однолистным и решение $t \mapsto \Gamma_t$ прекращает свое существование⁷⁸. Аналогичный эффект с помощью мероморфного отображения $\zeta \mapsto f(\zeta, t) = A(t)\zeta/(\zeta - a(t)) + b(t)\zeta$ П.П. Куфарев [63] установил для окружности, центр которой сдвинут относительно точки стока. Первые теоремы о локальной разрешимости уравнения (5.4) были получены в работе [17].

В работах [17, 22, 85, 86] задача (5.1)–(5.3) интерпретировалась, как течение вязкой жидкости в срезе пористой среды. По указанным выше причинам теперь часто говорят о Хиле-Шоу течении [83]. Интерес к такого рода задачам за последние годы усилился (см., в частности, [60, 83, 142, 143, 147, 163, 179] и цитируемую там литературу). Это вызвано не только использованием такого рода течений в инженерной практике, материаловедении, в процессах, связанных с ростом кристаллов (отметим в связи с этим работы [1, 16, 55, 98, 99, 102, 184]), но и тем, что эти задачи являются хорошими моделями (см., например, [84, 113, 114]) некоторых весьма сложных двухфазных задач. Поэтому исследование таких моделей позволяет в какой-то мере предугадать особенности главного члена асимптотики (см., например, [30]) решения задач с фазовыми переходами.

2. Важным моментом в исследовании задачи (5.1)–(5.3) было осознание того неожиданного факта, что в случае стока ($qt < 0$) решение этой задачи не существует ни при каком сколько угодно малом t , если начальный контур Γ_0 не аналитичен хотя бы в одной точке. Другими словами, при

⁷⁸Это отражает идеализацию, связанную с динамическим условием Лейбензона о постоянстве давления на Γ_t . На самом деле, давление в точке $s \in \Gamma_t$ пропорционально (с малым коэффициентом, зависящим от поверхностного натяжения) кривизне Γ_t в этой точке.

таким начальном контуре сток невозможен: задача не имеет решения. А может ли такой (неаналитический) контур сдвинуться в случае источника? Ответ на этот вопрос был получен сравнительно недавно [134, 168], где было доказано, что при малых временах решение задачи (5.1)–(5.3) в случае источника существует⁷⁹. На первый взгляд, все это удивительно, ибо закон движения контура Γ_0 априори никак не зависит ни от его аналитичности, ни от типа “двигателя”: источник или сток.

Известные мне доказательства обоих этих фактов, к сожалению, не раскрывают (на мой взгляд) их внутреннюю причину. Мы ее сейчас выявим, рассмотрев эволюцию гармоник слабого возмущения окружности.

С этой целью, для каждого фиксированного t запараметризуем точку $\mathbf{s}(t) \in \Gamma_t^+ = \Gamma_t \cap \mathbb{R}_+^2$ той линией уровня $\{(x, y) \in \Omega_t \mid v(t; x, y) = \eta\}$ функции v , гармонически-сопряженной к u в $\Omega_t^+ = \Omega_t \cap \mathbb{R}_+^2$, которая содержит эту точку $\mathbf{s}(t)$. В силу симметрии Ω_t и (по этой причине) выбранного значения $q = 2$, параметр η меняется от нуля до единицы. Тем самым, определена непрерывная функция

$$s(t, \cdot) : [0, 1] \ni \eta \mapsto s(t, \eta) = |P_0 P_\eta| \in [0, |\Gamma_t^+|], \quad (5.6)$$

где $|P_0 P_\eta|$ — длина дуги $\smile P_0 P_\eta$ кривой Γ_t^+ , отсчитываемая в положительном направлении от точки P_0 ее пересечения с положительной полуосью x до точки P_η ее пересечения с линией уровня $\{v(t; x, y) = \eta\}$.

Применив стандартным образом ГК-метод, можно (см. §5) представить декартовы координаты (x, y) точки $P_v \in \Gamma_t$, как следующие функции аргументов t и v :

$$x(t, v) = x(t, 0) - \int_0^v e^{a(t, \eta)} \sin b(t, \eta) d\eta, \quad y(t, v) = \int_0^v e^{a(t, \eta)} \cos b(t, \eta) d\eta, \quad (5.7)$$

где $x(t, 0) = \int_{-\infty}^0 e^{A(t; u, 0)} du$, а

$$a(t, v) + ib(t, v) = A(t; 0, v) + iB(t, 0, v). \quad (5.8)$$

Здесь $A + iB$ — это функция Гельмгольца–Кирхгофа

$$w = u + iv \mapsto A(t; u, v) + iB(t; u, v) = \ln \left| \frac{\partial z(t; w)}{\partial w} \right| + i \arg \frac{\partial z(t; w)}{\partial w}, \quad z = x + iy \in \Omega_t^+ \quad (5.9)$$

определенная (при каждом t) в замыкании полуполосы $Q = \{u + iv \in \mathbb{C} \mid -\infty < u < 0, 0 < v < 1\}$.

Таким образом, задача (5.1)–(5.3) может быть переформулирована в терминах функций⁸⁰ a и b . Они подчинены условию (5.8). Это условие означает, что функции a и b при каждом t связаны между собой преобразованием Гильберта, а именно, являются следом при $u = 0$ гармонически-сопряженных в полуполосе Q функций A и B . Заметим, что $B(t, u, v) \equiv \pi v$ если (и только если) кривая Γ является окружностью $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R_0 > 0\}$, центр которой совпадает с точкой $z = 0$ (т.е. носителем стока–источника, другими словами, носителем δ -функции в уравнении (5.2)). Учитывая это, представим функцию b в виде

$$b(t, v) = \pi v + \beta(t, v) \quad (5.10)$$

Заметим, что $\beta(t, 0) = \beta(t, 1) = 0$ (в силу симметрии и дифференцируемости кривой Γ), и разложим функцию $\beta(t, \cdot) : [0, 1] \ni v \mapsto \beta(t, v)$ в ряд Фурье

$$\beta(t, v) = \sum_{k \geq 1} \beta_k(t) \sin \pi k v \quad (5.11)$$

по ортобазису

$$e_k : [0, 1] \ni v \mapsto \sin \pi k v, \quad k \in \mathbb{N} \quad (5.12)$$

⁷⁹Строго говоря, в [134] задача рассматривается не для точечного источника, а для чуть рассредоточенного. Однако предельным переходом результат распространяется и на случай точечного источника.

⁸⁰Вспомним геометрический смысл функции $b(t, v)$. Это угол между осью x и внешней к Γ_t нормалью $\boldsymbol{\nu}$ в точке $P_v \in \Gamma_t$. А величина $\text{exr} a(t, v)$ есть коэффициент продольной деформации контура Γ_t в точке $P_v \in \Gamma_t$ (вдоль касательной к Γ_t в точке P_v).

пространства $L^2(0, 1)$.

Легко видеть, что те же коэффициенты Фурье $\beta_k(t)$ определяют и функцию $a_0(t)$, задаваемую равенством

$$A(t; u, v) = a_0(t) + \pi u + \sum_{k \geq 1} \beta_k(t) e^{\pi k u} \cos \pi k v. \quad (5.13)$$

что, ясное дело, можно выразить и таким равенством:

$$a(t, v) = a_0(t) + \alpha(t, v), \quad \text{где} \quad \alpha(t, v) = \sum_{k \geq 1} \beta_k(t) \cos \pi k v. \quad (5.14)$$

Действительно, приращение площади $|\Omega_t| = 2|\Omega_t^+|$ области Ω_t за единицу времени равно

$$\int_{\Gamma} \dot{\mathbf{s}} d\Gamma \stackrel{(5.1)}{=} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma,$$

т.е. коэффициенту при δ -функции в уравнении (5.2). Другими словами,

$$\frac{d}{dt} |\Omega_t^+| = 1 \iff |\Omega_t^+| = t + t_0, \quad \text{где} \quad t_0 = |\Omega_0^+|. \quad (5.15)$$

В терминах функции Гельмгольца–Кирхгофа это условие принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^0 e^{2A(t; u, v)} du \right) dv = 1, \quad (5.16)$$

поскольку якобиан отображения $w \mapsto e^{A+iB}$ равен $|\partial z / \partial w| \stackrel{(5.9)}{=} e^{2A}$. Отсюда следует, что коэффициент (см. Примечание 80) $e^{a(t, v)}$ продольной деформации контура Γ определяется из уравнения (5.15). Поэтому он, а потому и функция $a_0(t)$, зависят от $|\Omega_0|$ и коэффициентов Фурье $\beta_k(t)$.

Если Γ_0 — окружность $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R_0\}$, центр которой совпадает с точечным источником–стоком, то, как нетрудно проверить,

$$e^{2a_0(t)} = 2\pi (|\Omega_0| + t) \implies \frac{d}{dt} e^{2a_0(t)} = 2\pi. \quad (5.17)$$

В [126] устанавливается аппроксимационная формула

$$\frac{d}{dt} e^{2a_0(t)} = 2\pi \left(1 - \sum_{k \geq 1} \frac{\beta_k^2 + 2(t + t_0)\beta_k \dot{\beta}_k}{k + 1} \right) + \dots \quad (t_0 = \frac{\pi}{2} R_0^2) \quad (5.18)$$

в случае, когда Γ_0 мало отличается от окружности $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R_0\}$.

Таким образом, искомая деформация начальной кривой Γ_0 полностью характеризуется эволюцией коэффициентов Фурье $\beta_k(\cdot)$. Справедлива

Теорема 5.1 [126] *Эволюция коэффициентов Фурье $\beta_k(\cdot)$ задается динамической системой вида*

$$\dot{\beta} - \mathbf{K}(\beta)\dot{\beta} = \frac{1}{2(t + t_0)} \mathbf{F}(\beta), \quad (5.19)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1$, а

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_0(\beta)\dot{\beta}](t, v) &= b'(t, v) e^{-\alpha(t, v)} \int_0^v e^{\alpha(t, \eta)} \dot{\alpha}(t, \eta) d\eta, \\ [\mathbf{K}_1(\beta)\dot{\beta}](t, v) &= \left(\sum_{j \geq 1} \frac{2\beta_j \dot{\beta}_j}{j + 1} \right) \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \pi k v + [\mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}](t, v), \\ [\mathbf{F}_0(\beta)](t, v) &= \frac{1}{\pi} \left\{ e^{-2\alpha} \alpha' - b' e^{-\alpha} \int_0^v e^{-\alpha} b' d\eta + \pi b' e^{-\alpha} \int_0^v e^{\alpha} d\eta \right\}, \\ [\mathbf{F}_1(\beta)](t, v) &= \left(\sum_{j \geq 1} \frac{2\beta_j^2}{j + 1} \right) \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \pi k v + [\mathbf{s}(\beta)](t, v). \end{aligned}$$

Покоординатно система (5.19) такова:

$$\left. \begin{aligned} 2(t+t_0)\left(\beta_1\dot{\beta}_1 + r_1(\beta)\dot{\beta}\right) &= \left(-\beta_1^2 + 2\sum_{j\geq 2}\beta_j^2\right) + s_1(\beta), \\ 2(t+t_0)\left(\dot{\beta}_k + r_k(\beta)\dot{\beta}\right) &= -(k+2)\beta_k + s_k(\beta) \quad \text{для } k \geq 2, \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

где

$$|r_k(\beta)\dot{\beta}| \leq C\|\beta\|_1^{1+\text{sgn}|k-1|}\|\dot{\beta}\|_0, \quad |s_k(\beta)| \leq C\|\beta\|_1^{2+\text{sgn}|k-1|},$$

а

$$\|\beta\|_1 = \max_t \sqrt{\sum_{k\geq 1} \left(k\beta_k(t)\right)^2}, \quad \|\dot{\beta}\|_0 = \max_t \sqrt{\sum_{k\geq 1} \left(\dot{\beta}_k(t)\right)^2}.$$

Отсюда, как объяснено несколько ниже, следует

Теорема 5.2 [38, 125] Если начальный контур Γ_0 есть малое (определяемое формулами (5.27)) возмущение окружности радиуса $R(0)$, то его эволюция Γ_t продолжается бесконечно долго и она единственна на любом временном интервале. Что же касается отклонения Γ_t от окружности радиуса $R(t) = \sqrt{R^2(0) + 2t/\pi}$, то, начиная с некоторого момента, оно почти монотонно стремится к нулю.

Точнее, существует число $\rho \in (0, 1/8)$, такое, что для любого $\mu \in (0, 1)$ функция

$$[0, 1] \ni v \mapsto b(t, v) = \pi v + \beta(t, v), \quad \text{где } \beta(t, v) = \sum_{n\geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n v, \quad (5.21)$$

определяющая контур Γ_t , существует⁸¹ при любом $t > 0$, если только начальная угловая функция, задающая контур Γ_0 , т.е. функция

$$[0, 1] \ni v \mapsto b(0, v) = \pi v + \sum_{n\geq 1} \beta_n^0 \sin \pi n v, \quad (5.22)$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{k\geq 2} (k\beta_k^0)^2 \leq (\mu\rho)^{1/2} |\beta_1^0|^{3/2}, \quad 0 < |\beta_1^0| \leq \mu\rho. \quad (5.23)$$

При этом

$$\left| \dot{\beta}_1(0) - \dot{\beta}_1(t) \right| \leq \mu, \quad \sqrt{\sum_{k\geq 2} \left| \dot{\beta}_k(0) - \dot{\beta}_k(t) \right|^2} \leq \mu, \quad (5.24)$$

где

$$\bar{\beta}_1^2(t) = \frac{1}{t+t_0} \left(t_0\beta_1^2(0) + 2\sum_{k\geq 2} \beta_k^2(0) \int_0^t \frac{d\tau}{(1+\tau/t_0)^{k+2}} \right), \quad (5.25)$$

$$\bar{\beta}_k(t) = \frac{\beta_k(0)}{(1+t/t_0)^{k/2+1}}. \quad (5.26)$$

Кроме того, существует константа C (немного превосходящая единицу), такая, что при любом $t \geq 0$ справедливы оценки

$$\left| \dot{\beta}_1(t) - \dot{\beta}_1(t) \right| \leq C\mu, \quad \sqrt{\sum_{k\geq 2} \left| \dot{\beta}_k(t) - \dot{\beta}_k(t) \right|^2} \leq C\mu.$$

⁸¹И единственна на любом временном интервале, точнее: функция β единственна в пространстве $C^1(0, T; H^1(0, 1))$ $\forall T > 0$ (см. §5).

Заметим, что формулы (5.26) объясняют природу отмеченного выше результата: если в случае стока(!) задача (5.1)–(5.3) разрешима хотя бы при сколь угодно малом t (когда $q = 2 > 0$, как в нашем случае, это означает, что речь идет о любом малом отрицательном t), то начальный контур Γ_0 необходимо аналитичен. Действительно, в силу (5.26), функции (5.46) будут определены при сколь угодно малом $t < 0$ лишь тогда, когда коэффициенты Фурье $\beta_k(0)$ функции (5.47) достаточно быстро убывают, а именно: определяют аналитическую функцию (см., например, §12 книги [2]).

Отметим также, что последнее утверждение (о бесконечном по времени “дрейфе” возмущенной окружности; ср. с [100]) согласуется с таким фактом: если при деформации $t \mapsto \Gamma_t$ кривая Γ_{t*} при некотором конечном $t_* \neq 0$ гомотетична окружности с центром в начале координат $\{0\}$, т.е. там, где локализован источник-сток, то кривая Γ_0 , а потому и все кривые Γ_t гомотетичны той же самой окружности.

Иными словами, справедлива

Теорема 5.3 *если Γ_0 стягивается к стоку, то Γ_0 есть окружность с центром в точке стока.*

♡ Согласно [172], при $n \geq 1$ все комплексные моменты $M_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_t} z^n \overline{dz} \wedge dz$ не зависят от t . Поэтому они равны нулю, поскольку $|\Omega_t| \rightarrow 0$ в процессе стягивания контура Γ_0 в точку стока. Далее, $M_0 = 2i|\Omega_t|$. Кроме того, $M_n = \int_{\Gamma_t} z^n \overline{z} dz = 2\pi i c_{-(n+1)}$, где c_k — коэффициенты в разложении в ряд Лорана $\sum c_k z^k$ функции f , аналитической в $\Omega_t \setminus \{z = 0\}$ и принимающей по непрерывности на Γ_t значения функции \overline{z} . Следовательно, $f(z) = c_{-1}/z + g(z)$, где g — аналитическая функция в Ω_t . Отсюда получаем цепочку импликаций на Γ_t :

$$\left(\overline{z} = c_{-1}/z + g(z)\right) \Rightarrow \left(|z|^2 - c_{-1} = zg(z)\right) \Rightarrow \left(\Im zg(z) = |\Omega_t|/\pi\right) \Rightarrow \left(zg(z) = (a + ib)|\Omega_t|\right).$$

А поскольку $zg(z)|_{z=0 \in \Omega} = 0$, то $a + ib = 0 \Rightarrow g(z) \equiv 0$. Тем самым, $|z|^2 = |\Omega_t|/\pi$ на Γ_t , а это значит, что Ω_t есть диск с центром в нуле. \square

Следствие. Если при деформации $t \mapsto \Gamma_t$ две кривые Γ_0 и Γ_{t*} с $t_* \neq 0$ оказались гомотетичными, то Γ_0 гомотетична окружности с центром в точке источника-стока. Действительно, Γ_{t*} , а потому и Γ_0 стягиваются в точку, ибо, предположив для определенности, что Γ_{t*} находится внутри Γ_0 , получаем, что кривая Γ_{nt*} попадает в сколь угодно малую окрестность начала координат при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$.

3. Теоремы 5.1 и 5.2 проясняют эволюцию слабых возмущений окружности. В случае произвольного начального контура уравнение (5.19) изучалось в рамках аппроксимационной так называемой квазиконтурной [127]–[129] (другие названия: полигональной [15], конечноточечной [36]) модели задачи (5.1)–(5.3). Квазиконтурная модель описывается матричным уравнением вида

$$Q(N, \sigma) \dot{N} = P(t, N, \sigma),$$

аппроксимирующим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (5.19). Здесь $N = (N_1, \dots, N_m)$, N_j — угол между осью x и внешней нормалью к j -ой стороне полигонального квазиконтура, а параметр $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ характеризует длины его сторон. Численный анализ [127]–[129] показал, что в пространстве квазиконтуров имеется гиперповерхность $\mathfrak{N}_m = \{(N, \sigma) \mid \det Q(N, \sigma) = 0\}$ коразмерности 1.

В случае источника (при $t > 0$) эта поверхность является притягивающим многообразием (аттрактором). При подходе к \mathfrak{N}_m скорость движения экспоненциально возрастает. Дальнейшее движение идет в виде сверхбыстрых осцилляций около \mathfrak{N}_m с бесконечно-малой амплитудой⁸² и весьма медленным продвижением в направлении одного из притягивающих центров на самом аттракторе. Один из этих центров — квазиокружность, т.е. правильный m -угольник $(\hat{N}, \hat{\sigma})$.

Если обратить время, т.е. рассмотреть случай стока, то эта гиперповерхность превращается в отталкивающее многообразие, как говорят, репеллер (анти-аттрактор). Было бы правильнее сказать, в супер-репеллер, поскольку вполне “приличный”, внешне ничем особо не выделяющийся контур Γ_0 , представленный точкой P_0 , расположенной очень близко к этой гиперповерхности, почти мгновенно изменяет свою форму. Дело в том, что точка P_0 с громадной скоростью “отлетает” от гиперповерхности и через мгновение находится вдали от нее, представляя контур, существенно отличный от

⁸²Квазиконтур есть конечно-точечная аппроксимация гладкого контура. Быстро осциллирующее движение с бесконечно-малой амплитудой естественно трактовать в рамках нестандартного анализа [53], как движение в ореоле гиперповерхности \mathfrak{N}_m . В пределе такое движение переходит в движение на самой бесконечномерной аттрактирующей поверхности \mathfrak{N}_∞ . Она характеризуется тем, что на ней вырождается оператор $\mathbf{I} - \mathbf{K}$, стоящий при β в уравнении (5.19).

Γ_0 . Отличие связано с тем, что сильно растут гармоники, которые отвечают соответствующему вырождению оператора $\mathbf{I} - \mathbf{K}$, стоящему при β в уравнении (5.19). При этом площадь, охватываемая контуром, за столь короткое время почти не уменьшается (т.к. мощность стока постоянна). Поэтому возникают “пальцы” [61, 173], компенсирующие сильное изменение кривизны контура при почти постоянной площади, которую он охватывает.

4. В этом пункте будут получены формулы для координат точки $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t))$ движущегося контура Γ_t , закон движения которого определяется формулой $\dot{\mathbf{s}} = \nabla u|_{\mathbf{s} \in \Gamma_t}$, где $\nabla u = (u_x, u_y)$ — градиент функции $u(t; \cdot, \cdot) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$, а $u(t; x, y)$ удовлетворяет таким условиям

$$u_{xx} + u_{yy} = 2\delta(x, y) \quad \text{в} \quad \Omega_t \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_t = \partial\Omega_t. \quad (5.27)$$

Коэффициент 2 при δ -функции отражает наше предположение о симметрии начального контура Γ_0 относительно оси x .

В каждый момент t мы можем параметризовать контур Γ_t , задав некоторый диффеоморфизм $e^{i\pi v} \ni v \mapsto \mathbf{s}(t, v) \in \Gamma_t$ единичной окружности на Γ_t . Соответственно, вектор $(\dot{x}(t, v), \dot{y}(t, v))$ скорости движения точки $\mathbf{s}(t, v)$ параметризован этим диффеоморфизмом. Однако, как легко видеть, нормальная компонента этой скорости, т.е. ее составляющая

$$\dot{\mathbf{s}}(t, v) \cdot \boldsymbol{\nu} = \nu_x \dot{x}(t, v) + \nu_y \dot{y}(t, v) \quad (5.28)$$

вдоль единичной внешней нормали $\boldsymbol{\nu} = (\nu_x, \nu_y)$ к Γ_t в точке $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t, v)$, не зависит от параметризации и совпадает с $|\nabla u| = \partial u / \partial \nu$ в точке $\mathbf{s} \in \Gamma$. Отсюда, ввиду условия Лейбнсона $u|_{\Gamma_t} = 0$, получаем такую форму

$$|\nabla u| \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}(t,v) \in \Gamma_t} = \nu_x \dot{x}(t, v) + \nu_y \dot{y}(t, v) \quad (5.29)$$

кинематического условия $\dot{\mathbf{s}} = \nabla u|_{\mathbf{s} \in \Gamma_t}$.

Преобразуем условие (5.29) с помощью функции Гельмгольца–Кирхгофа задачи (5.27). В односвязной области $\Omega^+ = \Omega_t^+ = \{(x, y) \in \Omega = \Omega_t \mid y > 0\}$ рассмотрим функцию $v = v(t; x, y)$, гармонически-сопряженную к $u = u(t; x, y)$ и удовлетворяющую условию $v(t; x, y) = 0$ при $x > 0$ (что корректно, т.к. Ω симметрична относительно оси x). Обозначив через $\partial/\partial \nu$ дифференцирование по нормали $\boldsymbol{\nu}$, а через $\partial/\partial \tau$ дифференцирование по касательной $\boldsymbol{\tau} = (-\nu_y, \nu_x)$, получим из (5.27), что $v(t; x, 0) = 1$ при $x < 0$, поскольку $\partial v / \partial \tau = \partial u / \partial \nu$ на

$$\Gamma^+ = \Gamma \cap \Omega^+, \quad \Omega^+ = \{(x, y) \in \Omega \mid y > 0\}. \quad (5.30)$$

Нетрудно показать, что функция

$$\begin{aligned} w = u + iv : \Omega^+ &\rightarrow \Pi = \{u + iv \in \mathbb{C} \mid u < 0, 0 < v < 1\} \\ z = x + iy &\mapsto w(z) = u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned} \quad (5.31)$$

однолистка и, тем самым, в односвязной области $\Pi \subset \mathbb{C}$ определена однолистная НК-функция

$$A + iB = \ln \frac{\partial z}{\partial w}, \quad A = A(t; u, v), \quad B = B(t; u, v), \quad (5.32)$$

где $z(t, \cdot) : \Pi \ni w \mapsto z(t, w) = x(t; u, v) + iy(t; u, v) \in \Omega_t^+$. Отсюда получаем, что кривая Γ^+ может быть параметризована точками полуокружности посредством диффеоморфизма

$$\{e^{i\pi v} \mid v \in (0, 1)\} \ni e^{i\pi v} \mapsto z(t; iv) = x(t, v) + iy(t, v) \in \Gamma^+,$$

где

$$x(t, v) = x(t, 0) - \int_0^v e^{a(t, \eta)} \sin b(t, \eta) d\eta, \quad y(t, v) = \int_0^v e^{a(t, \eta)} \cos b(t, \eta) d\eta. \quad (5.33)$$

Здесь $x(t, 0) = \int_{-\infty}^0 e^{A(t, u, 0)} du$, а

$$a(t, v) = A(t; 0, v), \quad b(t, v) = B(t; 0, v). \quad (5.34)$$

5. Переформулируем задачу Стокса–Лейбензона в терминах функций a и b . Замечая, что $|\nabla u| = e^{-a}$ на Γ^+ , а $b = b(t, v)$ — угол между осью x и нормалью $\boldsymbol{\nu}$ в точке $\mathbf{s}(t, v)$, перепишем условие (5.29) в виде

$$e^{-a} = \dot{x} \cos b + \dot{y} \sin b \quad \text{на} \quad \Gamma_t^+. \quad (5.35)$$

Положим

$$T = -\dot{x} \sin b + \dot{y} \cos b. \quad (5.36)$$

Учитывая формулы (5.33), перейдем от формул (5.35)–(5.36) к эквивалентным соотношениям:

$$\begin{aligned} e^{-a} \cos b - T \sin b &= \dot{x}(t, 0) - \int_0^v e^a \left[\dot{a} \sin b + \dot{b} \cos b \right] d\xi, \\ e^{-a} \sin b + T \cos b &= \int_0^v e^a \left[\dot{a} \cos b - \dot{b} \sin b \right] d\xi. \end{aligned}$$

Продифференцируем эти соотношения по v . Получим

$$\left. \begin{aligned} e^a \left[\dot{a} \sin b + \dot{b} \cos b \right] &= e^{-a} a' \cos b + e^{-a} b' \sin b + (T \sin b)', \\ e^a \left[\dot{a} \cos b - \dot{b} \sin b \right] &= -e^{-a} a' \sin b + e^{-a} b' \cos b + (T \cos b)'. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

Здесь и ниже $\dot{a} = \frac{\partial}{\partial t} a(t, v)$, $a' = \frac{\partial}{\partial v} a(t, v)$.

Принимая во внимание тождества

$$\begin{aligned} (T \sin b)' \sin b + (T \cos b)' \cos b &= T', \\ (T \sin b)' \cos b - (T \cos b)' \sin b &= b' T, \end{aligned}$$

выводим из (5.37) систему уравнений

$$e^a \dot{a} = e^{-a} b' + T', \quad e^a \dot{b} = e^{-a} a' + b' T,$$

исключив из которой T , получаем (ср. с (5.5)–(5.4)) основное уравнение

$$\dot{b}(t, v) = e^{-2a} a' + b' e^{-a} \int_0^v [e^a \dot{a} - e^{-a} b'] d\xi. \quad (5.38)$$

6. Изучим уравнение (5.38) вблизи угловой функции окружности

$$\widehat{b} : v \mapsto \widehat{b}(v) = \pi v, \quad v \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}. \quad (5.39)$$

Для этого представим функцию $b = b(t, v)$, задающую контур Γ_t , как возмущение \widehat{b} , т.е.

$$b(t, v) = \widehat{b}(v) + \beta(t, v). \quad (5.40)$$

Согласно (5.13)–(5.16), искомая деформация начальной кривой Γ_0 полностью характеризуется эволюцией коэффициентов Фурье $\beta_k(\cdot)$ возмущения

$$\beta(t, v) = \sum_{k \geq 1} \beta_k(t) \sin \pi k v. \quad (5.41)$$

Они удовлетворяют (см. [126]) такой бесконечномерной системе нелинейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2(t + t_0) \left(\beta_1 \dot{\beta}_1 + r_1(\beta) \dot{\beta} \right) &= \left(-\beta_1^2 + 2 \sum_{j \geq 2} \beta_j^2 \right) + s_1(\beta), \\ 2(t + t_0) \left(\dot{\beta}_k + R_k(\beta) \dot{\beta} \right) &= -(k + 2) \beta_k + S_k(\beta) \quad \text{для} \quad k \geq 2. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Здесь

$$|r_1(\beta) \dot{\beta}| \leq C \|\beta\|_1^2 \|\dot{\beta}\|_0, \quad |s_1(\beta)| \leq C \|\beta\|_1^3, \quad |R_k(\beta) \dot{\beta}| \leq C \|\beta\|_1 \|\dot{\beta}\|_0, \quad |S_k(\beta)| \leq C \|\beta\|_1^2, \quad (5.43)$$

а $\beta \in \mathcal{C}^1(0, T; H^1(0, 1))$ и $\dot{\beta} \in \mathcal{C}^0(0, T; H^0(0, 1))$ для любого $T > 0$, т.е. $\beta(\cdot, v) \in \mathcal{C}^1(0, T) \quad \forall v$ и

$$\|\beta\|_1 = \max_t \sqrt{\sum_{k \geq 1} (k\beta_k(t))^2}, \quad \|\dot{\beta}\|_0 = \max_t \sqrt{\sum_{k \geq 1} (\dot{\beta}_k(t))^2} \quad \forall t \in (0, T). \quad (5.44)$$

Доказательство формул (5.42)–(5.43) не обременено сколько-нибудь изысканными идеями, но технически сложно. Оно занимает почти все 14 страниц работы [126].

Еще технически более сложно доказывается

Теорема 5.4 [125] *Существует такое число $C_* > 1$, что для любых $\chi \geq 1$, $1/\varepsilon \geq C_*\chi^3$, $1/T \geq C_*\chi^2$ и функции*

$$\beta^0 : [0, 1] \ni \sigma \mapsto \beta^0(\sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n^0 \sin \pi n \sigma,$$

такой, что

$$|\beta_1^0| = \varepsilon/8\chi, \quad \sum_{k \geq 2} (k\beta_k^0)^2 \leq (\varepsilon/8)^2, \quad (5.45)$$

система уравнений (5.42) имеет в ε -окрестности нуля пространства $\mathcal{C}^1(0, T; H^1(0, 1))$ единственное решение

$$\beta : (t, \sigma) \mapsto \beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma, \quad (5.46)$$

такое, что $\beta(0, \cdot) = \beta^0$. При этом, решение (5.46) аппроксимируется функцией

$$\bar{\beta}(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \bar{\beta}_n(t) \sin \pi n \sigma \quad (5.47)$$

в том смысле, что

$$\left| \dot{\beta}_1(0) - \dot{\bar{\beta}}_1(0) \right| \leq C_*\varepsilon, \quad \sqrt{\sum_{k \geq 2} \left| \dot{\beta}_k(0) - \dot{\bar{\beta}}_k(0) \right|^2} \leq C_*\varepsilon/\chi, \quad (5.48)$$

Здесь $\dot{\bar{\beta}}_n(0) = \frac{d}{dt} \bar{\beta}_n(t) \Big|_{t=0}$, а функция $\bar{\beta}_n(t)$ определена в (5.25)–(5.26).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. При $\|\beta\|_1 \leq 1$ и $\beta_1(t) \neq 0$ система уравнений (5.42) представима в виде

$$(1 + P(\beta))\dot{\beta} = (\Lambda(\beta) + Q(\beta))/(t + t_0), \quad (5.49)$$

где покоординатные компоненты P , Λ , Q , а также R и S (см. ниже) таковы:

$$P_1(\beta)\dot{\beta} = \frac{1}{\beta_1} \left[\sum_{k \geq 2} \left(\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1} \right) R_k(\beta) \dot{\beta} + r_1(\beta) \dot{\beta} \right], \quad P_k(\beta)\dot{\beta} = -R_k(\beta)\dot{\beta},$$

$$\Lambda_1(\beta) = \frac{1}{2\beta_1} [-\beta_1^2 + 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2], \quad \Lambda_k(\beta) = -\frac{k+2}{2} \beta_k,$$

$$Q_1(\beta) = -\frac{1}{2\beta_1} [s_1(\beta) + \sum_{k \geq 2} \left(\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1} \right) S_k(\beta)], \quad Q_k(\beta) = \frac{1}{2} S_k(\beta).$$

При этом, существует такая константа $\widehat{C} > 0$, что $\|P(\beta)\| \leq 3\widehat{C} (\|\beta\|_0/|\beta_1| + 1) \|\beta\|_1$ и

$$\|R(\beta)\phi\|_0 \leq \widehat{C} \|\beta\|_1 \|\phi\|_0, \quad |r_1(\beta)\phi| \leq \widehat{C} \|\beta\|_0 \|\beta\|_1 \|\phi\|_0,$$

$$\|S(\beta)\|_0 \leq \widehat{C} \|\beta\|_1^2, \quad |s_1(\beta)| \leq \widehat{C} \|\beta\|_0 \|\beta\|_1^2.$$

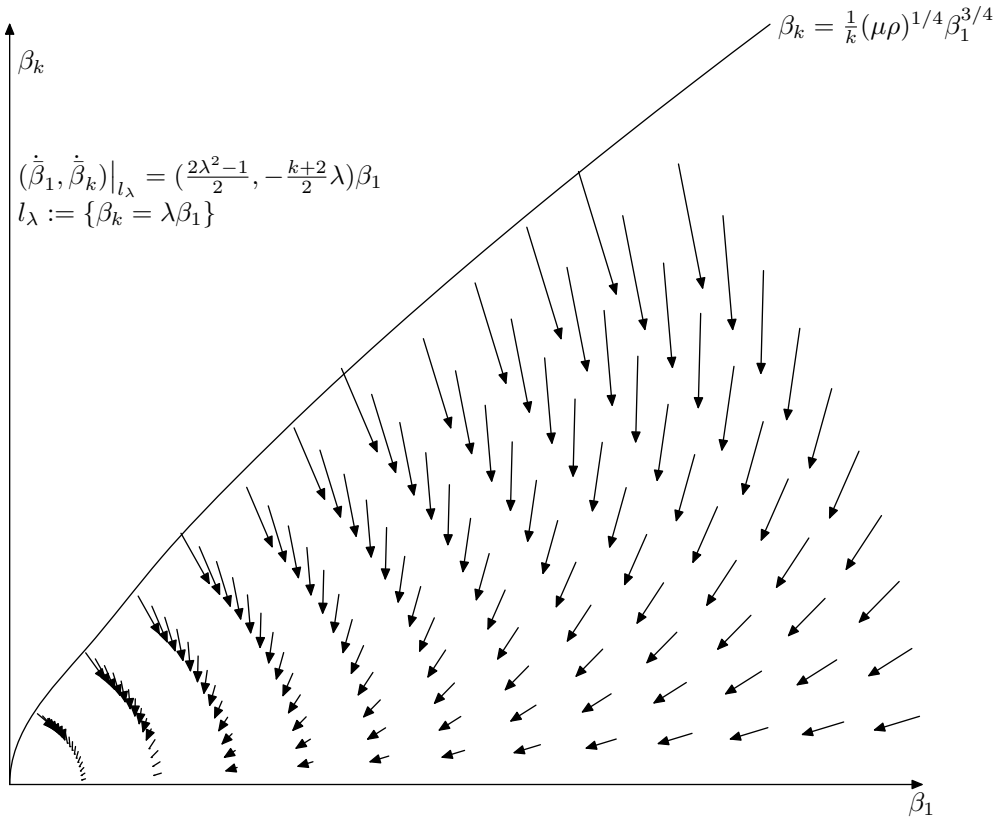


Рис. 15. Векторное поле $(\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_k)$ для случая, когда $\beta_j(0) = 0$ при $j \neq 1$ и $j \neq k$.

На замкнутом множестве⁸³

$$\mathfrak{M} \stackrel{def}{=} \{\beta \in X^1 \mid \|\beta\|_1 \leq \varepsilon; \beta(0, \cdot) = \beta^0(\cdot); \frac{\beta_1(t)}{\beta_1(0)} \geq 1/2\}$$

пространства $X^1 = C(0, T; H^1(0, 1))$ при $\varepsilon \leq (100\chi\hat{C})^{-1}$ (и, тем самым, при $\|P(\beta)\| \leq 1/2$) уравнение (5.49) стандартным образом преобразуется в функциональное $\beta = \Phi(\beta)$. Проверяется, что оператор Φ сжимаем на \mathfrak{M} при $1/\varepsilon \geq C_*\chi^3$, $1/T \geq C_*\chi^2$, где $C_* = C_*(\hat{C})$. Явно выписывается “главная” часть $\bar{\beta}$ построенного решения β .

Как это ни удивительно, но из теоремы 5.4 о разрешимости системы уравнений (5.42) при малых $t > 0$ чрезвычайно просто вытекает анонсированная выше теорема 5.2 о существовании решения на любом временном интервале. Секрет прост: речь идет о решении, подчиненном начальному условию (5.27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. В условиях теоремы 5.4 положим $\rho = (8C_*)^{-1}$ и $\varepsilon = \mu C_*^{-1} \chi^{-3}$, где $\mu \in (0, 1]$. Задав $|\beta_1^0| \in (0, \mu\rho]$, мы фиксируем $\chi = (\mu\rho/|\beta_1^0|)^{1/4} \geq 1$ и получаем (5.27) из (5.45). Далее, из (5.48) вытекает оценка (5.24). Она позволяет утверждать, что решение $t \mapsto \beta(t, \cdot)$, построенное при малых $t > 0$ (согласно теореме 5.4), продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ при условии $|\beta_1^0| \ll 1$. В самом деле, при оговоренном условии коэффициенты $\beta_n(t)$ “дрейфуют” (согласно (5.24)) вблизи траекторий векторного поля (см. рис. 14)

$$\{\dot{\beta}_n(t)\}_{n \geq 1} = \left\{ -\bar{\beta}_1(t)/2 + \sum_{k \geq 2} \bar{\beta}(t)_k^2, -\frac{3}{2}\bar{\beta}(t)_2, \dots, -\frac{k+2}{2}\bar{\beta}(t)_k, \dots \right\},$$

оставаясь, тем самым, в зоне (5.27). Из приведенных формул следует, что коэффициенты $\beta_n(t)$ в итоге обнуляются, но за бесконечное время.

7. Некоторые открытые вопросы.

⁸³Напомним, что функция β^0 удовлетворяет условиям (5.45).

1. Теорема 5.2 не охватывает все близлежащие к окружности начальные положения контура Γ_0 , точнее: данные Коши для возмущения функции $\hat{\beta}$ не принадлежат полной окрестности нуля пространства $H^1(0, 1)$. Исключен случай (см. рис. 14), когда

$$|\beta_1^0|^{3/2} = o(\beta^*) \quad \text{при} \quad \beta^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 2} (k\beta_k^0)^2 \rightarrow 0. \quad (5.50)$$

Как устроено векторное поле траекторий $(\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_k)$ в области, определяемой условием (5.50)?

2. Аттрагирующая (при $t \uparrow \infty$) поверхность \mathfrak{N}_∞ характеризуется тем (см. Примечание 82), что на ней возникает оператор $\mathbf{I} - \mathbf{K}$, стоящий при $\dot{\beta}$ в уравнении (5.19). Как в терминах оператора $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ охарактеризовать притягивающие центры на \mathfrak{N}_∞ ?

§ 6 Плоские течения с минимальным отношением экстремальных значений давления на свободной границе

1. Как было отмечено в Примечании 32, обозначенная в заголовке тема — это лишь одна из возможных интерпретаций задачи на минимум

$$\Phi(\gamma) = \max_{P \in \gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(P) \right| \bigg/ \min_{P \in \gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(P) \right| \rightarrow \inf \quad (6.1)$$

отношения экстремальных значений модуля градиента гармонической функции $\Omega = \Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^2$ на ее искомой линии уровня γ . В данном параграфе рассматривается конкретный пример такой задачи, обозначенный в пункте 7 Введения. В этом примере функция u является вещественной частью функции $w = u + iv$, которая осуществляет однолистное отображение односвязной центрально-симметричной области $\Omega = \Omega_\gamma \subset \mathbb{C}$ (см. рис. 5) на прямоугольник $Q = \{|u| < \mu, |v| < 1\}$ и при этом

$$u = \pm \mu \quad \text{на } \gamma_\pm, \quad v = -1 \quad \text{на } M_3 M_0 \quad \text{и} \quad v = 1 \quad \text{на } M_1 M_2. \quad (6.2)$$

Здесь μ — заданное число, а односвязная область Ω_γ ограничена отрезками $M_3 M_0, M_1 M_2$ (см. рис. 5) и центрально-симметричными кривыми $\gamma = \gamma_+$ и γ_- .

В этом пункте мы уточним класс рассматриваемых кривых γ и получим формулу для кривой $\hat{\gamma}$, доставляющей минимум функционалу (6.1) (предполагая ее существование). Теорема о существовании кривой $\hat{\gamma}$ доказывается в пункте 2.

В разделе 37 учебника [66] приведен простой пример кусочно-аналитической кривой Γ класса C^1 (в точке сопряжения аналитических дуг), для которой $\Phi(\Gamma) = \infty$. Ограничимся поэтому кривыми Γ класса $C^{k+1, \lambda}$, фиксируя то или иное целое $k \geq 0$ и число $\lambda \in (0, 1)$. Это эквивалентно тому, что функция

$$N : \gamma \ni P_s \mapsto N(s), \quad (6.3)$$

задающая угол $N(s)$ (см. рис. 5а) между осью x и нормалью к кривой γ в точке $P_s \in \gamma$, отстоящей вдоль γ на расстоянии s от точки M_0 , удовлетворяет двум условиям:

- 1) $N \in C^{k, \lambda}(I)$, где⁸⁴ $I = [0, |\gamma|]$, а $|\gamma|$ — длина кривой γ ;
- 2) $N(0) = N(|\gamma|) = 0$ (т.е. кривая Γ пересекается под прямым углом с отрезками $M_3 M_0$ и $M_1 M_2$).

Зафиксировав целое $k \geq 0$ и $\lambda \in (0, 1)$, будем рассматривать задачу минимизации функционала (6.1) на множестве $G = G^{k, \lambda}$ кривых γ класса $C^{k+1, \lambda}$, для которых справедливо условие (6.2).

С инженерной точки зрения иногда разумно фиксировать также допустимый диапазон $[m, M]$ значений функции N :

$$m \leq N(s) \leq M \quad \forall P_s \in \gamma, \quad (N(0) = N(|\gamma|) = 0 \in [m, M]). \quad (6.5)$$

Соответствующий ограничению (6.5) подкласс кривых из множества $G^{k, \lambda}$ можно было бы обозначить через $G = G^{k, \lambda}(m, M)$. Однако доказательства приводимых ниже теорем не зависят от того, фиксирован или нет диапазон

⁸⁴Напомним, что норма в $C^{k, \lambda}(I)$ есть $\|f\|_{k, \lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_k + [f^{(k)}]_\lambda$, где

$$\|f\|_k = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{t \in I} |f^{(j)}(t)|, \quad [f^{(k)}]_\lambda = \sup_{t_k \in I, 0 < |t_1 - t_2| \leq 1} \frac{|f^{(k)}(t_1) - f^{(k)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\lambda}, \quad (6.4)$$

а $f^{(j)}$ — j -ая производная функции f .

$[m, M]$. Поэтому для краткости формулировок класс $G = G^{k,\lambda}(m, M)$ будем в дальнейшем обозначать также через $G = G^{k,\lambda}$.

Пусть функция $B : Q \ni w \mapsto B(u, v) \in \mathbb{R}$ есть решение задачи

$$\Delta B = 0 \quad \text{в } Q, \quad B(u, \pm 1) = 0, \quad B(\pm \mu, v) = \beta(\pm v). \quad (6.6)$$

Здесь $\beta : [-1, 1] \ni v \mapsto \beta(v)$, где

$$\beta(v) = N(s(v)), \quad s : [-1, 1] \ni v \mapsto s(v) = \int_{-1}^v e^{\alpha(\eta)} d\eta, \quad \alpha(v) = A(\mu, v), \quad (6.7)$$

а функция A гармонически-сопряжена к B . Функция A определена с точностью до аддитивной константы. Рассмотрим отображение

$$z : Q \ni w = u + iv \mapsto z(w) = \int_{\mu-i}^w \exp[A(u, v) + iB(u, v)] dw \in \Omega_\gamma. \quad (6.8)$$

и определяемую им кривую

$$z(\mu, \cdot) : [-1, 1] \ni v \mapsto z(\mu, v) = i \int_{-1}^v \exp[\alpha(\eta) + i\beta(\eta)] d\eta. \quad (6.9)$$

Лемма 6.1 *Кривая (6.9) принадлежит классу допустимых кривых $G^{k,\lambda}$ тогда и только тогда, когда $F_1(\alpha, \beta) = 0$, $F_2(\alpha, \beta) = 0$, где*

$$F_1(\alpha, \beta) = \rho - \int_{-1}^1 e^{\alpha(v)} \cos \beta(v) dv, \quad F_2(\alpha, \beta) = 1 + \int_{-1}^1 e^{\alpha(v)} \sin \beta(v) dv, \quad (6.10)$$

а ρ - ордината точки $M_1(1, \rho)$ (см. рис. 5).

♡ Нужно лишь проверить, что конец $z(\mu, 1)$ кривой (6.9) имеет координаты $(1, \rho)$. Но именно это свойство выражают формулы (6.10). \square

Предположим, что существует кривая $\hat{\gamma}$, на которой достигается минимум функционала (6.1). Обозначим через $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ те функции α и β (определенные формулами (6.7)), которым соответствуют эта кривая $\hat{\gamma}$.

Теорема 6.1 *Функции $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ дают решение задачи*

$$F_0(\alpha) \rightarrow \inf, \quad F_1(\alpha, \beta) = 0, \quad F_2(\alpha, \beta) = 0, \quad (6.11)$$

где

$$F_0(\alpha) = \alpha^+ - \alpha^-, \quad \alpha^+ = \max_{|v| \leq 1} \alpha(v), \quad \alpha^- = \min_{|v| \leq 1} \alpha(v). \quad (6.12)$$

♡ Обозначим $\Im w(P_s)$ через v_s , т.е. $w(P_s) = \mu + iv_s$. Имеем

$$|\nabla u(P_s)| = \left| \frac{dz}{dw} \right|_{w=\mu+iv_s}^{-1}.$$

Тем самым, $\ln |\nabla u(P_s)| = -\alpha(v_s)$. Поэтому

$$\ln \left[\max_{P \in \gamma} |\nabla u(P)| \right] / \left[\min_{P \in \gamma} |\nabla u(P)| \right] = \max_{|v| \leq 1} (-\alpha(v)) - \min_{|v| \leq 1} (-\alpha(v)) = -\alpha^- + \alpha^+. \quad \square$$

2. Справедлива

Теорема 6.2 ¹⁰. При любом целом $k \geq 0$ и любых числах $L > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ функционал Φ , определенный формулой (6.1), достигает минимум на множестве

$$G_L^{k,\lambda} = \{\gamma \in G^{k,\lambda} \mid [N^{(k)}]_\lambda \leq L\}, \quad (6.13)$$

если

$$\max N - \min N \leq \pi. \quad (6.14)$$

Соответствующая кривая $\hat{\gamma}$ определяется формулой (6.9) по решению $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ задачи (6.11).

²⁰. Если функция $\hat{\beta}$ (она зависит от параметра $\mu = u|_\gamma$) такова, что⁸⁵

$$K(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \|\hat{\beta}\|_{C^4} < \infty \quad \text{при} \quad \mu > 0,$$

то существует константа C и функция $\mu \mapsto C(\mu)$, удовлетворяющая условию $|C(\mu)| \leq C \cdot K(\mu)$, что

$$\Phi(\hat{\gamma}) = \inf_{\gamma \in G} \Phi(\gamma) \stackrel{(6.12)}{=} \exp(\hat{\alpha}^+ - \hat{\alpha}^-) \stackrel{\mu \rightarrow 0}{=} \exp\left(\frac{C_{-1}}{\mu} + C_0 + C_1\mu + C(\mu)\mu^2\right), \quad (6.15)$$

где $\hat{\alpha}^+ = \max_{|v| \leq 1} \hat{\alpha}(v)$, $\hat{\alpha}^- = \min_{|v| \leq 1} \hat{\alpha}(v)$, а

$$C_{-1} = \max_{|v| \leq 1} D_{-1}(v) - \min_{|v| \leq 1} D_{-1}(v), \quad D_{-1}(v) = \frac{1}{2} \int_{-1}^v (\hat{\beta}(-\eta) - \hat{\beta}(\eta)) d\eta. \quad (6.16)$$

Если к тому же функция $\hat{\beta}$ еще и четна⁸⁶, то

$$C_{-1} = C_0 = 0, \quad C_1(v) = \max_{|v| \leq 1} \hat{\beta}'(v) - \min_{|v| \leq 1} \hat{\beta}'(v). \quad (6.17)$$

Доказательство

¹⁰. Прежде всего, отметим, что условие (6.14) на функцию N обеспечивает однолиственность отображения (6.8) (ср. лемму 2.6 в параграфе §2). Пусть $\gamma_j \in G_L^{k,\lambda}$ и $\Phi(\gamma_j) \rightarrow \inf$ на $G_L^{k,\lambda}$, а функции N_j , s_j , α_j и β_j , соответствующие γ_j , определены по формулам (6.3) и (6.7). Так как $\max_v |\alpha_j(v)|$ ограничен⁸⁷ при любых j некоторой константой C_0 , то

$$|s_j(v) - s_j(v_0)| = \int_{v_0}^v \left| \frac{dz_j}{dw} \right|_{w=\mu+i\eta} d\eta = \int_{v_0}^v e^{\alpha_j(\eta)} d\eta \leq e^{C_0} |v - v_0|.$$

Поэтому, учитывая то, что $\beta_j(v) = N_j(s_j(v))$, а $[N^{(k)}]_\lambda \leq L$, получаем

$$|\beta_j^{(k)}(v) - \beta_j^{(k)}(v_0)| \leq L |s_j(v) - s_j(v_0)|^\lambda \leq L e^{C_0} |v - v_0|^\lambda.$$

Таким образом, согласно теоремам Харди–Литтльвуда и Привалова⁸⁸, изложенным, например, в [28] (см. также [23]), существует такая константа $C \geq L \exp C_0$, что при $0 < \tau < \lambda$

$$\|\alpha_j\|_{k,\tau} \leq \|\alpha_j\|_{k,\lambda} \leq C, \quad \|\beta_j\|_{k,\tau} \leq \|\beta_j\|_{k,\lambda} \leq C \quad \text{для любых } j \geq 1. \quad (6.18)$$

Поскольку $C^{k,\lambda}[-1, 1]$ компактно вложено в $C^{k,\tau}[-1, 1]$, можно считать, что α_j и β_j сходятся в $C^{k,\tau}[-1, 1]$ соответственно к $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$. Имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow \lambda} \|\hat{\alpha}\|_{k,\tau} \stackrel{(6.4)}{=} \|\hat{\alpha}\|_{k,\lambda} \leq C, \quad \lim_{\tau \rightarrow \lambda} \|\hat{\beta}\|_{k,\tau} \stackrel{(6.4)}{=} \|\hat{\beta}\|_{k,\lambda} \leq C, \quad (6.19)$$

⁸⁵Можно показать [40], что $\overline{\lim}_{\mu \rightarrow 0} \|\hat{\beta}\|_{C^4} = \infty$, если кривые $\hat{\gamma}_-$ и $\hat{\gamma}_+$ стягиваются при $\mu \rightarrow 0$ к некоторой кривой γ_0 .

⁸⁶Если $\hat{\beta}$ четна при одном значении μ , то она четна при всех μ . Отметим [40], что четной функции $\hat{\beta}$ соответствует кривая $\hat{\gamma}$, которая не(!) является центрально-симметричной.

⁸⁷В противном случае, последовательность $|\nabla u_j|_{\gamma_j}$ равномерно стремится либо к нулю, либо к бесконечности, что противоречит условию $\int_\gamma (\partial u / \partial \nu) d\gamma = 2$, следующему из (6.2).

⁸⁸Теорему Привалова следует применить к мнимой части функции $d^k(A + iB)/dw^k$, а затем проинтегрировать k раз граничное значение вещественной части этой функции.

поэтому функции $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ определяют кривую $\hat{\gamma} \in G_L^{k,\lambda}$, доставляющую минимум функционалу (6.1) на множестве $G_L^{k,\lambda}$, ибо функционалы F_1, F_2 и F_0 , определенные формулами (6.10) и (6.12), непрерывны относительно равномерной сходимости⁸⁹.

2⁰. Формулы (6.15)–(6.17) для $\Phi(\hat{\gamma}(\mu))$ при $\mu \rightarrow 0$ выводятся [40] с использованием явной формулы для гармонической в полосе $\Pi = \{u + iv \in \mathbb{C} \mid |u| < \mu\}$ функции b , равной нулю на границе Π при $|v| > 3$ и такой, что

$$b(-\mu, v) = b(\mu, -v), \quad b(\mu, v) = \beta(v) \quad \text{при } |v| \leq 3 \quad (6.20)$$

где $\beta(v \pm 2k) = \hat{\beta}(v)$ для $|v| \leq 1$ и $k = 0, \pm 1$. Соответствующие выкладки занимают две страницы в работе [40].

3. Некоторые открытые вопросы.

1. Пусть функция N имеет конечное число локальных экстремумов. Достигается ли в этом случае минимум функционала (6.1) на кривых класса $C^{1,\lambda}$?

2. Пусть кривая $\hat{\gamma}$ доставляет минимум функционалу (6.1) на кривых класса $C^{1,\lambda}$. При каких условиях на функцию N можно утверждать, что эта кривая принадлежит классу $C^{1,\sigma}$ с $\sigma \in (\lambda, 1)$?

§ 7 Обтекание по схеме Кирхгофа криволинейного частично абсорбируемого препятствия и оценка максимального возможного КПД турбин в открытом потоке и, в частности, турбины Горлова

1. Как было отмечено во Введении, эффективность турбины в открытом потоке (рек, океанских приливов и течений) зависит от того, насколько удалось конструктору найти “золотую середину” между двумя противоположными факторами: с одной стороны, — не создавать потоку чрезмерное сопротивление (чтобы как можно большая его часть проходила через турбину), а с другой, — создать на его пути через турбину сопротивление ротора турбины, преодолевая которое он бы максимально отдавал свою энергию на его вращение.

Следуя [136]–[138], будем моделировать турбину, как препятствие, частично абсорбирующее поток. Обозначим через

$$\vec{V} = (V_x, V_y) : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \vec{V}(x, y) = \nabla u(x, y)$$

скорость потока несжимаемой жидкости, частично обтекающей это препятствие. Рассмотрим схему обтекания, когда за препятствием образуется зона застоя (стагнации: $\vec{V}(x, y) \equiv 0$), иначе говоря каверна (полость по отношению к движению). Пусть, для простоты, каверна простирается до бесконечности⁹⁰ (схема Кирхгофа; см. рис. 16). Через Ω обозначим область течения (т.е. область, внешнюю относительно каверны). Будем считать, что

$$\vec{V}(x, y) \rightarrow (V_\infty, 0) = (1, 0) \quad \text{при } \Omega \ni z = x + iy \rightarrow \infty. \quad (7.1)$$

Геометрию препятствия представим в виде самонепересекающейся незамкнутой кривой Γ , длина которой (в выбранной системе единиц измерения⁹¹) равна 1. Обозначим одну из крайних точек кривой через P_0 , а через P_s , где $s \in [0, 1]$, ту точку на Γ , расстояние до которой, измеренное вдоль Γ от P_0 , равно s . Будем считать, что ординаты y_0 и y_1 крайних точек P_0 и P_1 кривой Γ подчинены условию

$$D(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1 - y_0) > 0. \quad (7.2)$$

⁸⁹Отметим, что $|F_0(\alpha) - F_0(\hat{\alpha})| \leq 2\|\alpha - \hat{\alpha}\|_0$, так как $|\min \alpha - \min \hat{\alpha}| \leq \|\alpha - \hat{\alpha}\|_0$.

⁹⁰Авторы книги [26] отмечают (на стр. 11), что согласно результатам численных расчетов, форма каверны слабо влияет на распределение давления на обтекаемом теле в реальном диапазоне изменения числа кавитации Q . Этот факт строго обоснован в [20] для малых Q .

⁹¹Плотность жидкости тоже нормируем: она будет считаться равной единице.

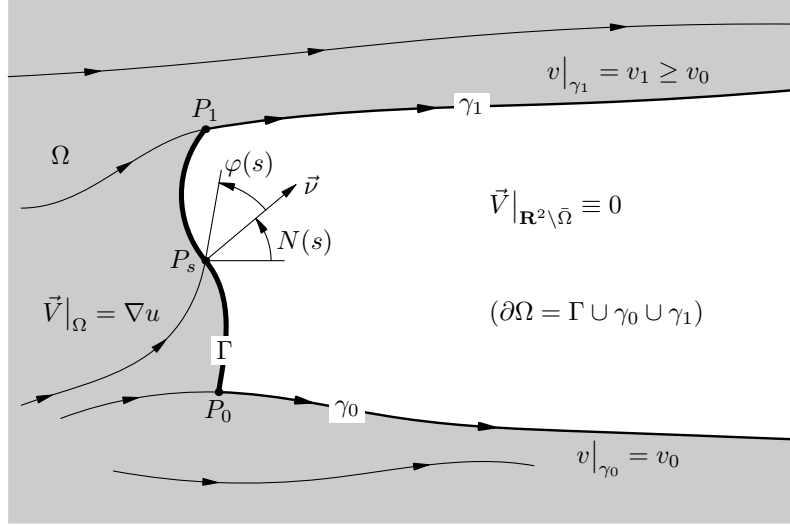


Рис. 16. Область течения $\Omega = \Omega_\Gamma$ и препятствие Γ , частично поглощающий набегающий поток и снабженное устройством, задающим направление вектора скорости $\vec{V}(s)$ в каждой точке $P_s \in \Gamma$, а именно: угол $\varphi(s) \in [-\pi/2, \pi/2]$ между нормалью $\vec{n}(s)$ к Γ (направленной в сторону каверны) и вектором $\vec{V}(s)$ (s — натуральный параметр точки P_s); $N(s)$ — угол между осью x и нормалью $\vec{n}(s)$ к Γ в точке P_s .

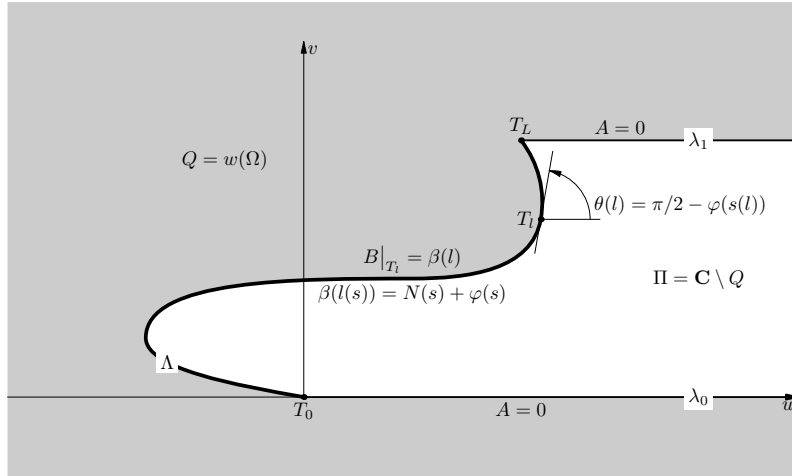


Рис. 17. Граничные условия функции $A + iB \stackrel{\text{def}}{=} \ln dz/dw : Q = w(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ на $\partial Q = \Lambda \cup \lambda_0 \cup \lambda_1 \subset \Pi = \mathbb{C} \setminus Q$.

Кривая Γ полностью определяется функцией $N : [0, 1] \ni s \mapsto N(s) \in \mathbb{R}$, задающей угол $N(s)$ между осью x и нормалью $\vec{\nu}(s)$ к Γ в точке $P_s \in \Gamma$. Будем предполагать, что⁹²

$$|N(s)| \leq \pi/2 \quad \forall s \in [0, 1] \quad (7.3)$$

и что срыв линий тока γ_0 и γ_1 , охватывающих каверну, происходит с крайних точек P_0 и P_1 кривой Γ .

Мощность турбины не превосходит той мощности, которую поглощает препятствие. Последняя (при тех или иных предположениях) может быть выражена интегралом вида

$$\int_{\Gamma} f(s, V_{\nu}(s), V_{\tau}(s)) d\Gamma, \quad f \in C(\Gamma \times \mathbb{R}^2). \quad (7.4)$$

Здесь $V_{\nu} = \vec{V} * \vec{\nu}$ (соответственно, $V_{\tau} = \vec{V} * \vec{\tau}$) — это скалярное произведение векторов \vec{V} и $\vec{\nu} = (\cos N, \sin N)$, (соответственно, \vec{V} и $\vec{\tau} = (-\sin N, \cos N)$).

Как максимизировать эту мощность? Будем считать, что для этого (кроме возможности выбора кривой Γ , заданной функцией N) можно в каждой точке $P_s \in \Gamma$ фиксировать то или иное направление вектора скорости $\vec{V}(s)$ поглощаемого потока, а именно: угол $\varphi(s) \in [-\pi/2, \pi/2]$ между нормалью $\vec{\nu}(s)$ к Γ (направленной в сторону каверны) и вектором $\vec{V}(s)$.

Ответы на вопросы о максимизации поглощаемой мощности могут служить ориентиром при разработке "наилучшей" конструкции турбины. Такова мотивация постановки как задачи

$$\mathfrak{F}_1(\Gamma, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} f(s, V_{\nu}(s), V_{\tau}(s)) d\Gamma \rightarrow \sup, \quad (7.5)$$

так и задач следующего типа

$$\mathfrak{F}_2(\Gamma, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{F}_1(\Gamma, \varphi)}{D(\Gamma)} \rightarrow \sup, \quad \mathfrak{F}_3(\Gamma, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{F}_1(\Gamma, \varphi)}{H(\Gamma)} \rightarrow \sup, \quad (7.6)$$

где⁹³ $D(\Gamma)$ уже было определено в (7.2), а

$$H(\gamma) = \sup_{P_s=(x_s, y_s) \in \Gamma} |x(s) - x(0)|. \quad (7.7)$$

Задачи (7.5)–(7.6) сформулированы в терминах функции \vec{V} , определенной в области Ω со свободной границей $\gamma_0 \cup \gamma_1$, не являющейся непосредственно варьируемым аргументом функционалов \mathfrak{F}_k ($k = 1 \div 3$). В следующем пункте эти задачи переформулированы в терминах функции Гельмгольца-Кирхгофа, что позволяет преодолеть трудности, связанные с наличием свободной границы области Ω . Там же устанавливаются теоремы о разрешимости и приводятся формулы, представляющие решения задач.

2. В односвязной области Ω введем функцию $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, гармонически-сопряженную к функции u . Зафиксировав равенством $w(P_0) = 0$ аддитивную константу аналитического отображения

$$w : \Omega \ni z = x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{C},$$

найдем образ $Q = w(\Omega)$ области Ω и образ $\Lambda \cup \lambda_0 \cup \lambda_1 = w(\partial\Omega)$ ее границы $\partial\Omega = \Gamma \cup \gamma_0 \cup \gamma_1$.

Лемма 7.1 *Кривая $\Lambda = w(\Gamma)$ задается формулой*

$$\Lambda = \{w(P_s) = u(P_s) + iv(P_s), \quad [0, 1] \ni s \mapsto P_s \in \Gamma\}, \quad \text{где} \quad (7.8)$$

$$u(P_s) = \int_0^s V(r) \sin \varphi(r) dr, \quad v(P_s) = \int_0^s V(r) \cos \varphi(r) dr \quad (7.9)$$

($v(P_s)$ — неубывающая функция $s \in [0, 1]$), а⁹⁴ $V(s) = |\vec{V}(P_s)|$.

⁹²Ограничение (7.3) можно ослабить. Однако оно вполне естественно и благодаря ему кривая Γ самонепересекается (допускаются "складки" в виде берегов горизонтальных разрезов) и ее проекция на ось Oy автоматически совпадает с отрезком $[y_0, y_1]$.

⁹³Число $D(\Gamma)/2$ есть мощность (не возмущенного препятствием) равномерного потока $V_0 = (1, 0)$, протекающего в пределах сечения, совпадающего с проекцией кривой Γ на ось Oy .

⁹⁴Подчеркнем, что $|\vec{V}(P_s)|$ — искомая величина как в задаче (7.5), так и в задачах (7.6).

♡ Пусть ds - дифференциал дуги кривой Γ . Тогда (см. рис. 16)

$$dx = -\sin N ds, \quad dy = \cos N ds.$$

С другой стороны, $\vec{V} = (u_x, u_y)$ и потому

$$v_x = -u_y = -|\vec{V}| \sin \beta, \quad v_y = u_x = |\vec{V}| \cos \beta,$$

где $\beta = N + \varphi$ угол между осью x и вектором \vec{V} . Следовательно,

$$du = u_x dx + u_y dy = |\vec{V}| \sin \varphi ds, \quad dv = v_x dx + v_y dy = |\vec{V}| \cos \varphi ds.$$

Очевидно, что в w -плоскости линии тока γ_0 и γ_1 представляются лучами

$$\lambda_0 = \{u \geq u(P_0), v = v(P_0)\} \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \{u \geq u(P_1), v = v(P_1)\}. \quad \square$$

Обозначим через T_l ту точку на кривой Λ , расстояние до которой, измеренное вдоль Λ от ее крайней точки $w(P_0) = 0$, равно l . Заметим, что $T_{l(s)} = w(P_s)$, где s - натуральный параметр точки $P_s \in \Gamma$, а

$$l(s) \stackrel{(7.8)-(7.9)}{=} \int_0^s V(r) dr, \quad s \in [0, 1], \quad (7.10)$$

где априори неизвестная функция $s \mapsto V(s) = |\vec{V}(P_s)|$ является искомой как в задаче (7.5), так и в задачах (7.6). В случае задачи (7.5) это относится и к длине $L = l(1)$ кривой Λ . Отметим, что $L \leq 1$, поскольку $V \leq 1$.

Не уточняя здесь функциональные классы, к которым принадлежат аргументы функционалов \mathfrak{F}_k , будем считать, что они таковы, что функция l строго монотонна. Тогда, учитывая, что $l'(s) \geq 0 \forall s \in [0, 1]$, а $\vec{V}_\infty = (1, 0)$, получим, согласно принципу сохранения границ [66], что отображение $w : z \mapsto w(z)$ однолистно отображает область Ω на область $Q = w(\Omega)$, дополнительную к (замкнутой в \mathbb{C}) "полу"полосе Π , лежащей между лучами λ_0 , λ_1 и ограниченной слева кривой Λ .

Поскольку функция $l : s \mapsto l(s)$ строго монотонна, она имеет обратную, которая выражается формулой

$$s : [0, L] \ni l \mapsto s(l) = \int_0^l e^{A(u_l, v_l)} dl. \quad (7.11)$$

Здесь и ниже (u_l, v_l) - координаты точки $T_l \in \Lambda$, а A - это вещественная часть функции Гельмгольца-Кирхгофа

$$A + iB : Q = w(\Omega) \ni w = u + iv \mapsto A(u, v) + iB(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{dz}{dw} \in \mathbb{C}, \quad (7.12)$$

определенной в односвязной области Q . Непосредственно из формул (7.9) следует

Лемма 7.2 *Кривая Λ полностью определяется функцией*

$$\theta : [0, L] \ni l \mapsto \theta(l) = \pi/2 - \varphi(s(l)) \in [0, \pi], \quad (7.13)$$

задающей как длину $L = |\Lambda|$ этой кривой, так и угол $\theta(l)$ между осью Ou и касательной к ней в точке $T_l \in \Lambda$.

Найдем граничные значения функции Гельмгольца-Кирхгофа. Легко видеть, что

$$A = 0 \quad \text{на лучах} \quad \lambda_0 = w(\gamma_0) \text{ и } \lambda_1 = w(\gamma_1). \quad (7.14)$$

Действительно, положение линий тока γ_0 и γ_1 определяется равенством давления на них как со стороны потока, так и со стороны каверны. В каверне давление постоянно. Поэтому, в силу интеграла Бернулли, $|\nabla u| = V_\infty = 1$ на γ_0 и γ_1 . Остается вспомнить, что $A(u, v) = -\ln |w'_z(z)|_{z=w}$. Столь же просто устанавливается формула

$$B(u_l, v_l) = \beta(l), \quad \text{где} \quad \beta(l)|_{l=l(s)} \stackrel{\text{def}}{=} N(s) + \varphi(s). \quad (7.15)$$

В самом деле, $\cos \varphi du \stackrel{(7.9)}{=} \sin \varphi dv$ и потому

$$B = \arg dz - \arg dw = (\pi/2 + N) - (\pi/2 - \varphi).$$

Наконец, на бесконечности имеем

$$A + iB \rightarrow A_\infty = 0 \quad \text{при} \quad Q \ni w \rightarrow \infty, \quad (7.16)$$

поскольку $\vec{V} \rightarrow (1, 0)$ при $\Omega \ni z \rightarrow \infty$.

НВ. Удобно нормировать длину L кривой Λ с помощью замены $(\xi, \eta) = (u/L, v/L)$. Всюду в дальнейшем будем считать, что такая замена выполнена. Однако новые переменные (ξ, η) будут, по-прежнему, обозначаться через (u, v) .

Анонсированная выше переформулировка задач (7.5)–(7.6) в терминах функции Гельмгольца-Кирхгофа базируется на нижеследующих леммах⁹⁵.

Лемма 7.3 $\mathfrak{F}_1(\Gamma, \varphi) = \mathfrak{G}_1(\theta, \beta)$, где (с учетом замечания **НВ**)

$$\mathfrak{G}_1(\theta, \beta) = L \int_0^1 f \left(s, e^{-A(u_l, v_l)} \cos \varphi(s), e^{-A(u_l, v_l)} \sin \varphi(s) \right) \Big|_{s \stackrel{(7.11)}{=} s(l)} e^{A(u_l, v_l)} dl, \quad (7.17)$$

а (u_l, v_l) — координаты точки $T_l \in \Lambda$.

♡ Действительно, якобиан отображения $z \mapsto w(z)$ равен e^A , а

$$\vec{V}(x, y) = \exp(-A(u, v) + iB(x, y)), \quad \text{где} \quad u + iv = w(x + iy). \quad \square \quad (7.18)$$

Лемма 7.4 $D(\Gamma) = \mathfrak{D}(\theta, \beta)$, где (с учетом замечания **НВ**)

$$\mathfrak{D}(\theta, \beta) = L \int_0^1 e^{A(u_l, v_l)} \cos N(s) \Big|_{s \stackrel{(7.11)}{=} s(l)} dl. \quad (7.19)$$

♡ Имеем $du = dl \cos \theta$, $dv = dl \sin \theta$, $\beta \stackrel{(7.15)}{=} N + \varphi$. Поэтому

$$\mathfrak{D}(\theta, \beta) = \int_\Lambda e^A [\cos B dv + \sin B du] \stackrel{(7.13)}{=} L \int_0^1 e^{A(u_l, v_l)} \cos N(s) \Big|_{s \stackrel{(7.11)}{=} s(l)} dl. \quad \square$$

Точно также доказывается

Лемма 7.5 $H(\Gamma) = \mathfrak{H}(\theta, \beta)$, где (с учетом замечания **НВ**)

$$\mathfrak{H}(\theta, \beta) = L \sup_{0 \leq l \leq 1} \left| \int_0^l e^{A(u_l, v_l)} \sin N(s) \Big|_{s \stackrel{(7.11)}{=} s(l)} dl \right|. \quad (7.20)$$

Хотя $\mathfrak{D}(\theta, \beta)$ и $\mathfrak{H}(\theta, \beta)$ представлены в формулах (7.19) и (7.20) через функцию A , зависящую от β и θ (т.е. кривой Λ , на которой функция $B : Q \rightarrow \mathbb{C}$, гармонически-сопряженная к A , равна β) однако и $\mathfrak{D}(\theta, \beta)$, и $\mathfrak{H}(\theta, \beta)$ зависят лишь от кривой Γ и выражают ее геометрические характеристики: "размер" по вертикали и горизонтальное "отклонение" от вертикали $x = 0$.

Предыдущие построения (см. (7.11)–(7.16) и леммы 7.3–7.5) показывают, что верна следующая

Теорема 7.1 Пусть функциональные классы, на которых рассматриваются функционалы

$$\mathfrak{F}_1(\Gamma, \varphi), \quad \mathfrak{F}_2(\Gamma, \varphi), \quad \mathfrak{F}_3(\Gamma, \varphi) \quad (7.21)$$

⁹⁵ Напомним, что $N(s)$ есть угол между осью x и нормалью к Γ в точке $P_s \in \Gamma$; $\theta(\cdot) = \pi/2 - \varphi(s(\cdot))$, а $\beta(s) = N(s) + \varphi(s)$ — это то значение, которое принимает функция B (гармонически-сопряженная к A) в точке $w(P_s)$.

(заданные формулами (7.5) - (7.6)), таковы, что отображение $w : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{Q}$ гомеоморфно, а в Ω оно однолистно. Пусть $(\widehat{\theta}_k, \widehat{\beta}_k)$ - решение задачи

$$\mathfrak{G}_k(\theta, \beta) \rightarrow \sup, \quad (7.22)$$

где функционал $\mathfrak{G}_1(\theta, \beta)$ определен формулой (7.17), а⁹⁶

$$\mathfrak{G}_2(\theta, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{G}_1(\theta, \beta)}{\mathfrak{D}(\theta, \beta)}, \quad \mathfrak{G}_3(\theta, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{G}_1(\theta, \beta)}{\mathfrak{H}(\theta, \beta)}. \quad (7.23)$$

Тогда задача

$$\mathfrak{F}_k(\Gamma, \varphi) \rightarrow \sup, \quad (7.24)$$

имеет решение $(\widehat{\Gamma}_k, \widehat{\varphi}_k)$ и пара функций $(\widehat{N}_k, \widehat{\varphi}_k)$, представляющая это решение, определяется следующим образом

$$\widehat{N}_k(s)|_{s=s_k(l)} = B(s_k(l)), \quad \widehat{\varphi}_k(s)|_{s=s_k(l)} = \pi/2 - \widehat{\theta}(s_k(l)). \quad (7.25)$$

Здесь функция s_k определена согласно формуле (7.11), а фигурирующая в этой формуле функция Гельмгольца-Кирхгофа $A + iB : Q \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям (7.14)–(7.16), где в качестве функции β (в формуле (7.15)) взята функция β_k .

3. Приведем простейший (но полезный с точки зрения численного анализа) пример, когда выполнены предположения теоремы 7.1, т.е. отображение $w : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{Q}$ гомеоморфно и однолистно в Ω , а задачи (7.22) разрешимы. Определим с этой целью множество \mathfrak{M}_ρ по заданному натуральному числу M и положительному числу ρ . Множество \mathfrak{M}_ρ – это класс кусочно-постоянных функций

$$\theta \in L^\infty((0, L); \mathbb{R}) \quad \text{и} \quad \beta \in L^\infty((0, L); \mathbb{R}),$$

каждая из которых характеризуется тремя M -мерными векторами

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_M), \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_M) \quad \text{и} \quad \vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_M), \quad (7.26)$$

такими, что (для любого $j = 1 \div M$)

$$\sigma_j \geq \rho > 0, \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^M \sigma_j \leq 1/\rho, \quad \theta_j = \pi/2 - \varphi_j, \quad \beta_j = N_j + \varphi_j, \quad (7.27)$$

где числа φ_j, N_j , (где $j = 1 \div M$) удовлетворяют условиям⁹⁷

$$|\varphi_j| \leq \pi/2, \quad |N_j| \leq \pi/2, \quad (7.28)$$

а

$$|\beta_{j+1} - \beta_j| \leq \pi - \rho \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq M - 1. \quad (7.29)$$

Элемент (θ, β) множества \mathfrak{M}_ρ определяется так:

$$\theta(l) = \theta_j, \quad \beta(l) = \beta_j \quad \text{при} \quad l_{j-1} < l < l_j \quad \text{для} \quad j = 1 \div M. \quad (7.30)$$

Здесь

$$l_0 = 0, \quad l_1 = \sigma_1, \quad \dots, \quad l_j = l_{j-1} + \sigma_j, \quad \dots, \quad l_M = L. \quad (7.31)$$

Пара $(\theta, \beta) \in \mathfrak{M}_\rho$ определяет в свою очередь

1) ломанную⁹⁸ $\Lambda = \cup \Lambda_j$, составленную из отрезков Λ_j , j -ый из которых имеет длину σ_j , наклонен к оси Ou под углом $\theta_j \in [0, \pi]$ и примыкает к отрезку Λ_{j-1} (отрезок Λ_1 исходит из начала координат $(u, v) = (0, 0)$);

2) значение функции B на Λ_j , а именно: $B|_{\Lambda_j} = \beta_j$.

Тем самым, пара $(\theta, \beta) \in \mathfrak{M}$ задает (в соответствии с формулами (7.14)–(7.16)) ту или иную функцию Гельмгольца–Кирхгофа $A + iB$.

⁹⁶Функционалы, определенные формулой (7.23), не зависят от длины кривой Λ . Для этих функционалов областью определения функции θ можно считать отрезок $[0, 1]$.

⁹⁷Ср. Примечание 92.

⁹⁸Кривая Λ характеризует (см. рис. 17) область определения Q функции $A + iB$.

Теорема 7.2 Задачи (7.22) имеют решение на множестве $\mathfrak{M}_{\rho,\sigma}$, а отображение

$$\overline{Q} \ni w \mapsto z(w) = \int_0^w e^{A+iB} dw \overline{\Omega}$$

гомеоморфно и в Q оно однолистно.

В силу условий (7.28)–(7.29) (ср. Замечания 1.2–1.3 и Предложение 3.1 работы [5]), справедливо включение $e^{\pm A}|_{\Delta} \in L^1(\Delta)$. Остается заметить, что условие $\sigma_j \geq \rho > 0$ (см. (7.27)) обеспечивает также непрерывность функционалов (7.17) и (7.23) относительно компонент векторов (7.26).

4. Некоторые открытые вопросы.

1. Каковы численные характеристики решений задач (7.24) на классах ломаных кривых, определенных в пункте 3?
2. Каково максимальное КПД турбины при более общих моделях, включающих в себя иные типы граничных управлений и/или учет влияния вихревых особенностей?

§ Список литературы

- [1] Л.Н. Александров (1985) *Кинетика кристаллизации и перекристаллизации полупроводниковых пленок*. “Наука”, Новосибирск.
- [2] В.И. Арнольд (2000) *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, 2-ое изд. Удмурд. гос. унив-т.
- [3] В.И. Арнольд (2002) И.Г. Петровский, топологические проблемы Гильберта и современная математика *УМН*, Т. 57, вып. 4, 197–207.
- [4] Л.А. Арцимович, В.Д. Шафранов (1972) Токамак с некруглым сечением плазменного витка. *Письма в ЖЭТФ*, Т. 15, № 1, 72–76.
- [5] А. Баджади, А.С. Демидов (1983) Теоремы существования, несуществования и регулярности в одной задаче со свободной границей. *Матем. сборник АН СССР*, Т. 122(164), №1(9), 64–81.
- [6] С.И. Безродных, В.И. Власов (2002) Задача Римана - Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, Т. 42, №3, 277–312.
- [7] С.И. Безродных, В.И. Власов (2006) Задача Римана–Гильберта в областях сложной формы и ее приложение. *Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the XV Crimean Autumn Mathematical School-Symposium* **16**, p. 51-61.
- [8] Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер (1966) *Уравнения с частными производными*. “Мир”, Москва.
- [9] *⁹⁹ Г. Биркгоф (1963) *Гидродинамика*. 2-ое изд., ИЛ, Москва.
- [10] * Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло (1964) *Струи, следы и каверны*. “Мир”, Москва.
- [11] О.И. Богоявленский (2000) Точные глобальные равновесия плазмы. *УМН*, Т. 55, № 3, 63–100.
- [12] К.В. Брушлинский, В.В. Савельев (1999) Магнитные ловушки для удержания плазмы. *Матем. моделирование*, Т. 11, № 5, 3–36.
- [13] П.Н. Вабищевич, Л.М. Дектярев, Ю.Ю. Пошехонов (1979) Численное решение прямой и обратной задачи МГД-равновесия с поверхностным током. *Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша*, № 9.
- [14] А.Д. Валиев, А.С. Демидов (1997) О неотрицательных тригонометрических полиномах с фиксированным средним, проходящих через заданные точки. *Матем. заметки*, **62**, № 3, 468–471.

⁹⁹Книги, отмеченные * имеются (возможно в ином издании) на свободнодоступном сайте EqWorld — Мир математических уравнений <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>

- [15] О.А. Васильева, А.С. Демидов (1999) Конечноточечная модель задачи Стокса–Лейбензона для Хил–Шоу течения. *Фундаментальная и прикладная матем.*, Т. 5, № 5, 67–84.
- [16] В.Н. Видарович, А.Е. Вальпян, Г.М. Курдюмов (1976) *Направленная кристаллизация и физико-химический анализ*. “Химия”, Москва.
- [17] Ю.П. Виноградов, П.П. Куфарев (1948) Об одной задаче фильтрации. *Прикл. Матем. Мех.*, Т. 12, № 2, 181–198.
- [18] М.И. Вишик, С.Л. Соболев (1956) Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. *ДАН СССР*, Т. 111, № 3, 521–523.
- [19] В.И. Власов (1987) Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: Изд-во ВЦ АН СССР.
- [20] В.И. Власов (1989) Вариация конформного отображения при сингулярном деформировании области и ее приложение к теории струй *Аналитические и численные методы решения задач математической физики*. М.: Изд-во ВЦ АН СССР. С. 41–48.
- [21] В.И. Власов, А.Б. Пальцев (2003) Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях с узкой щелью. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, Т. 43, №12, 1789–1805.
- [22] Л.А. Галин (1945) Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. *ДАН СССР*, Т. 47, № 4, 250–253.
- [23] Дж. Гарнетт (1984) *Ограниченные аналитические функции*. “Мир”, Москва.
- [24] Ф.Д. Гахов (1977) *Краевые задачи*. “Наука”, Москва.
- [25] Д. Гилбарг, Дж. Серрин (1951) Свободные поверхности и струи в теории кавитации. *Механика, период. сб. переводов*, № 2, 53–63.
- [26] Л.В. Гогиш, Г.Ю. Степанов (1990) *Отрывные и кавитационные течения*. “Наука”, Москва.
- [27] С.К. Годунов (1971) *Уравнения математической физики*. 2-ое изд., “Наука”, Москва.
- [28] Г.М. Голузин (1966) *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. 2-ое изд., “Наука”, Москва.
- [29] М.И. Гуревич (1979) Теория струй идеальной жидкости. *Отрывные и кавитационные течения*. 2-ое изд., “Наука”, Москва.
- [30] В.Г. Данилов, Г.А. Омелянов, Е.В. Радкевич (1995) Асимптотическое решение системы фазового поля и модефицированная задача Стефана. *Дифф. уравнения* Т. 31, № 3, С. 483–491.
- [31] И.И. Данилюк (1972) Об интегральных функционалах с переменной областью интегрирования. *Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова*, Т. 118.
- [32] А.С. Демидов (1970) Асимптотика решений краевых задач для линейного эллиптического уравнения 2-го порядка с коэффициентами, имеющими “всплеск”. *Труды ММО*, Т. 23, 77–112.
- [33] А.С. Демидов (1975) Асимптотика решения краевой задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений с малым параметром при старшем операторе. *Труды ММО*, Т. 32, 119–146.
- [34] А.С. Демидов (1978) Об одной задаче со свободной границей в теории равновесной плазмы. *Труды семинара им. И.Г. Петровского*, Т. 4, 65–82.
- [35] А.С. Демидов (1996) Полная асимптотика решения задачи Дирихле для 2-мерного уравнения Лапласа с быстро осцилирующими граничными данными. *Доклады РАН*, Т. 346, № 6, 732–734.

- [36] А.С. Демидов (1998) Полигональная модель для течения Хил-Шоу. *Успехи Матем. Наук*, Т. 53, № 4, 195–196.
- [37] А.С. Демидов (2000) Об обратной задаче для уравнения Грэда–Шафранова с аффинной правой частью. *Успехи Матем. Наук*, Т. 55, № 6, 131–132.
- [38] А.С. Демидов (2002) Об эволюции слабого возмущения окружности в задаче о течении Хил-Шоу. *Успехи Матем. Наук*, Т. 57, № 6, 177–178.
- [39] А.С. Демидов (2004) Метод Гельмгольца–Кирхгофа и плоское цикло-периодическое течение с вихревыми особенностями за препятствием. *Intern. Confer. "Diff. Equations & Related Topics" dedicated to I.G. Petrovskii. Book of Abstracts, Moscow*, p.51.
- [40] А.С. Демидов (2005) О минимуме непрерывных функционалов от производных гармонической функции, параметризованной ее искомой линией уровня и/или другими граничными данными. *Современная математика и ее приложения*, **24**, Динамические системы и оптимизация, 35–50.
- [41] А.С. Демидов (2006) Метод Гельмгольца–Кирхгофа и граничное управление при обтекании плоским потоком. *Фундам. и прикладная математика*, Т. 12, № 4, 65–77.
- [42] А.С. Демидов (2007) О реконструкции полиномиальных нелинейностей в уравнениях математической физики. *Intern. Confer. "Diff. Equations & Related Topics" dedicated to I.G. Petrovskii. Book of Abstracts, Moscow*, 73–74.
- [43] А.С. Демидов, Л.Е. Захаров (1974) Прямая и обратная задачи в теории равновесия плазмы. *Успехи Матем. Наук*, Т. 29, № 6, 203.
- [44] А.С. Демидов, А.А. Созыкин (1986) Об одной экстремальной задаче со свободной границей. *Успехи Матем. Наук*, Т. 41, № 4, 190–191.
- [45] А.С. Демидов, Ж. Мвамбакана, И.А. Федотов (2005) Альтернирующий метод Шварца для эллиптических краевых задач, удовлетворяющих принципу максимума. *Математические заметки*, Т. 77, № 4, 622–624.
- [46] А.С. Демидов, А.С. Кочуров и А.Ю. Попов (2008) Примеры единственности и неединственности решения обратной задачи для уравнения Грэда–Шафранова в областях с гладкой границей. *Труды семинара им. И.Г. Петровского* (принято к печати).
- [47] С.С. Демидов (1976) О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в XVIII веке. *Историко-математические исследования*, Вып. XXI, "Наука", Москва, p.158–182.
- [48] Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров (1993) *Математическое моделирование плазмы*. "Наука", Москва.
- [49] А.И. Дьяченко, В.И. Захаров, Е.А. Кузнецов (1996) Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости. *Физика плазмы*, Т. 22, № 10, 916–929.
- [50] В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник (1993) *Усреднение дифференциальных операторов*. "Физико-матем. лит-ра", Москва.
- [51] Н.Е. Жуковский (1890) Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в дух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной границе. *Матем. сборник*, Т. XV, вып. 1, 121–278 (см. также Собрание сочинений, Т. II, ГИТТЛ, М.-Л., 1949г.).
- [52] Ф.С. Зайцев (2005) *Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы*. "Наука", Москва.
- [53] А.К. Звонкин, М.А. Шубин (1984) Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений. *УМН*, Т. 39, №2, 77-127.

- [54] К. Иосида (1967) *Функциональный анализ*. “Мир”, Москва.
- [55] Е.Н. Каблов (2001) *Литые лопатки газотурбинных двигателей*. “МИСИС”, Москва.
- [56] Эти слова сказал мне в личной беседе Б.Б. Кадомцев после своего единственного доклада на семинаре И.М. Гельфанда в МГУ. Хотя этот доклад, состоявшийся, помнится, весной 1983 года, остался в памяти многих, не только математиков, но и физиков, переполнивших тогда аудиторию 14-08, мне не удалось найти того, кто смог бы уточнить дату доклада. Но за подлинность фразы Б.Б. Кадомцева я ручаюсь. Впрочем, возможно, эти слова были сказаны, чтобы поддержать меня, поскольку в разговоре с Б.Б. Кадомцевым я выразил скепсис относительно какой-либо значимости для физиков своих результатов по задаче о равновесии плазмы.
- Я.Б. Зельдович поведал М.И. Зеликину протиположное суждение А.Б. Мигдала: “Физика есть искусство обходиться без математики”.
- На мой взгляд, оба знаменитых физика правы: их афоризмы — две стороны одной медали.
- [57] А. Картан (1963) *Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных*. “ИЛ”, Москва.
- [58] В.В. Козлов (1998) *Общая теория вихрей*. “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск.
- [59] * Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе (1963) *Теоретическая гидромеханика*. 6-ое изд. (в двух частях), “Физматгиз”, Москва.
- [60] П.Я. Кочина /П.Я. Полубаринова-Кочина/ (1991). *Избранные труды. Гидродинамика и теория фильтрации*. “Наука”, Москва.
- [61] П.Я. Кочина, А.Р. Шкирич (1954) К вопросу о перемещении контура нефтеносности (эксперимент) *Известия АН СССР, отд. технич. наук*, №11, 105–107.
- [62] Р.Курант (1962) *Уравнения с частными производными*, “Мир”, Москва.
- [63] П.П. Куфарев (1948) Решение задачи о контуре нефтеносности для круга. *ДАН СССР*, Т. 60, №8, 1333-1334.
- [64] М.А. Лаврентьев (1938) О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй. *Матем. Сборник*, 4(46), вып. 3, 391-458.
- [65] М.А. Лаврентьев (1962) *Вариационный метод в краевых задачах для эллиптических систем уравнений эллиптического типа*. Изд-во АН СССР, Москва.
- [66] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат (1973) *Методы теории функций комплексного переменного*. 4-ое изд., “Наука”, Москва.
- [67] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат (1977) *Проблемы гидродинамики и их математические модели*. 2-ое изд., “Наука”, Москва.
- [68] * Г. Ламб (2003) *Гидродинамика*. (в двух частях), “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск.
- [69] * Л.Д. Ландау, Лившиц (1954) *Механика сплошных сред*. “Гостехиздат”, Москва.
- [70] * Л.Д. Ландау, Лившиц (1974) *Квантовая механика*. “Наука”, Москва.
- [71] Л.С. Лейбензон (1934) *Нефтепромысловая механика*. Часть II, Нефтеиздат, Москва.
- [72] Н.Н. Лузин (1935) Функция. *Большая Советская энциклопедия*, т.59, стр. 314–324. Эта статья вошла также в его посмертные Избранные труды, 1959, Т. 3, АН СССР, Москва (однако “прилизывание” ряда пассажей оригинала несколько подпортило его).

- [73] Э. Мадженес (1966) Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных. *УМН* Т. 21, № 2, 169–218.
- [74] С.Н. Мергелян (1956) Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа. *УМН* Т. 11, № 5, 3–26.
- [75] С.Г. Михлин (1962) *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, "Физматгиз", Москва.
- [76] В.Н. Монахов (1977) *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений*. 2-ое изд., "Наука", Новосибирск.
- [77] Н.И. Мусхелишвили (1933) *Некоторые задачи теории упругости*. АН СССР, Ленинград.
- [78] Н.И. Мусхелишвили (1968) *Сингулярные интегральные уравнения*. "Наука", Москва.
- [79] И.П. Натансон (1974) *Теория функций вещественной переменной*. 3-е изд., "Наука", Москва.
- [80] А.И. Некрасов (1922) О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга. *Изв. Иваново-Вознесенского политехн. ин-та*, № 5.
- [81] И. Ньютон (1989) *Математические начала натуральной философии*. 3-ое изд. перевода на русский, "Наука", Москва.
- [82] Л. Ниренберг (1977) *Лекции по нелинейному функциональному анализу*. "Мир", Москва.
- [83] Дж.Р. Окендон, С.Д. Ховисон (2002) Кочина и Хиле-Шоу в современной математике, естественных науках и технике. *Прикл. Мат. и Механика*, Т. 66, вып. 3, 515–524.
- [84] П.И. Плотников, В.Н. Старовойтов (1993) Задача Стефана, как предел системы фазового поля. *Дифф. уравнения*, Т. 29, № 3, 461–471.
- [85] П.Я. Полубаринова-Кочина (1945) К вопросу о перемещении контура нефтеносности. *Доклады АН СССР*, Т. 47, № 4, 254–257.
- [86] П.Я. Полубаринова-Кочина (1945) О неустановившихся движениях в теории фильтрации: О перемещении контура нефтеносности. *Прикл. Матем. и Мех.*, Т. 9, вып. 1, 79–90.
- [87] В.Л. Поляченко, А.М. Фридман (1976) *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*. "Наука", Москва.
- [88] Л.И. Седов (1995) *Механика сплошной среды*, в 2-х томах, 5-е изд., "Наука", Москва.
- [89] Дж. Серрин (1963) *Математические основы классической механики жидкостей*. ИЛ, Москва.
- [90] К.С. Славин (1988) Гладкая квазилинейная задача с малым параметром. *Доклады Московской конференции по химии и хим. технологии* (МКХТ-88), Москва, ВИНТИ (217-В90), 10–17.
- [91] А. Фридман (1990) *Вариационные принципы и задачи со свободными границами*, пер. с англ., "Наука", Москва.
- [92] С.А. Чаплыгин (1902) О газовых струях. *Учен. записки Отд. физ-мат. наук Моск. ун-та* (см. также Полное собрание Сочинений, Т. II, АН СССР, Ленинград, 1933).
- [93] Р.В. Шамин (2006) О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью. *Доклады РАН*, Т. 406, № 5, 614–615.
- [94] В.Д. Шафранов (1957) О магнитогидродинамических равновесных конфигурациях. *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, Т. 33, №3(9), 710–722. [Soviet Physics JETP, **6**, (1958)].

- [95] Д.А. Эфрос (1946) Гидродинамическая теория плоскопараллельных кавитационных течений. *ДАН СССР*, Т. 51, № 4, 263–266.
- [96] В.И. Юдович (1963) Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости. *ЖВММФ*, Т. 3, 1032–1066.
- [97] A. Acker (1989) On the qualitative theory of parametrized families of free boundaries. *J. Reine Angew. Math.*, V. 393, 134–169.
- [98] J.F. Agassant, P. Avenas, J.Ph. Sergent, P.J. Carreau (1991) *Polymer processing*. Hanser Publishers, Munich, Vienna, New York.
- [99] M.C Altan, St. Luckhaus (1990) A review of fiber-reinforced injection molding: flow kinematic and particle orientation. *Journ. of Thermoplastics Composite Materials*, **3**, 275–313.
- [100] A. Antontsev, A.M. Meirmanov, V. Yurinsky (1999) Hele-Shaw flow in two dimensions: Global-in-time classical solutions. *Universidade da Beira Interior, Portugal*, preprint **6**.
- [101] R. Aymar, P. Barabaschi, Y. Shimomura (2002) The ITER design. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **44**, 519–565.
- [102] D.G. Baird, D.I. Collias (1995) *Polymer processing, principles and design*. Butterworth-Heinemann, Newton.
- [103] H. Berestycki, H. Brezis (1976) Sur certains problèmes de frontière libre. *C.R. Acad. Sci. Paris* **283**, Série A, 1091–1094.
- [104] H. Berestycki, H. Brezis (1980) On a free boundary problem arising in plasma physics. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* **4**, 415–436.
- [105] E. Beretta, M. Vogelius (1991) An inverse problem originating from magnethydrodynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **115**, 137–152.
- [106] E. Beretta, M. Vogelius (1992) An inverse problem originating from magnethydrodynamics, II. The case of the Grad–Shafranov equation. *Indiana Univ. Math. J.* **41**, 1081–1118.
- [107] E. Beretta, M. Vogelius (1995) An inverse problem originating from magnethydrodynamics, III. Domains with corners of arbitrary angles. *Asymptotic Analysis* **11**, 289–315.
- [108] A. Beurling (1957) On free-boundary problems for the Laplace equation. *Semin. on Analytic Functions.*, N.Y. Inst. Adv. Study, V.I, 248–263.
- [109] J. Blum (1989) *Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics* (With Applications to Tokamaks). Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore. John Wiley & Sons.
- [110] J. Blum, H. Buvat (1997) An inverse problem in plasma physics: the identification of the current density profile in a tokamak. *IMA volumes in mathematics and its applications* **92**, Springer-Verlag, 17–36 (см. также www.inria.fr/rapportsactivite/RA2002/idopt/bibliographie.html).
- [111] L.E.J. Brauer (1912) Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* **71**, 97–115.
- [112] L.A. Caffarelli, G. Spruck (1982) Convexity properties of solutions of some classical variational problems. *Commun. in P.D.E.* **7**, 1337–1379.
- [113] G. Caginalp (1989) Stefan and Hele-Shaw type problems as asymptotics limits of the phase field equations. *Physics Review A* **39**, No. 11, 5887–5896.
- [114] G. Caginalp, X. Chen (2000) Convergence of the phase field model to its sharp interface limits. *Eur. J. Appl. Math.* **12**, 20–42.

- [115] S.J. Chapman (1999) On the role of Stokes lines in the selection of Saffman–Taylor fingers with small surface tension. *Eur. J. Appl. Math.* **10**, №3, 513–534.
- [116] L.J. Cummings, J.R. King (2004) Hele-Shaw flow with a point sink: generic solution breakdown. *Eur. J. Appl. Math.* **15**, 1–37.
- [117] R. Danchin (2006) Axisymmetric incompressible flows with bounded vorticity. *Int. Conference “Math. Hydrodynamics”. Abstracts.* Moscow, 24–26.
- [118] R. Dalmasso (2000) An inverse problem for an elliptic equation with an affine form. *Math. Ann.* **316**, 771–792.
- [119] A.S. Demidov (1975) The form of a steady plasma subject to the skin effect in a tokamak with non-circular cross-section. *Nuclear Fusion* **15**, 765–768.
- [120] A.S. Demidov (1977) Sur la perturbation “singulière” dans un problème à frontière libre. Proceedings of the Conference held in Lyon, 1976, *Lect. Notes Math.* **594** 123–130.
- [121] A.S. Demidov (1978) Equilibrium form of a steady plasma. *Physics of Fluids* **21**, 902–904.
- [122] A.S. Demidov (1980) Configurations du plasma stationnaire équilibré. *Proceedings of a seminar held in Pavia, 1979*, V. I, Roma, 467–485.
- [123] A.S. Demidov (2000) Some Applications of the Helmholtz-Kirchhoff Method. (Equilibrium Plasma in Tokamaks, Hele-Shaw Flow, and High-Frequency Asymptotics) *Russian J. Math. Ph.*, V. 7, No. 2, 166–186.
- [124] * A.S. Demidov (2001) *Generalized Functions in Mathematical Physics: Main Ideas and Concepts*, Nova Science Publishers, serie “Horizons in World Physics”, Vol. 237, New York.
- [125] A.S. Demidov (2004) Evolution of a perturbation of a circle in a problem for Hele-Shaw flows. *Journ. of Math. Sciences*, **123**, No. 8, 4381–4403 (<http://www.wkap.nl/journalhome.htm/1072-3374>).
- [126] A.S. Demidov (2006) Evolution of a perturbation of a circle in a problem for Hele-Shaw flows. Part II *Journ. of Math. Sciences*, **139**, No. 6, 7064–7078.
- [127] A.S. Demidov, J.-P. Lohéac (2001) A quasi-contour model of Stokes-Leibenson problem for Hele-Shaw flows. *CNRS UMR 5585 preprint 328*.
- [128] A.S. Demidov, J.-P. Lohéac (2002) On the evolution near some attractive manifold in a problem for the Hele-Shaw flows. *Abstracts of International conference "Mathematical ideas of P.L. Chebyshev and their application for modern problems of natural sciences" (Obninsk, Russia, May 2002, 14-18)*, 37–38.
- [129] A.S. Demidov, J.-P. Lohéac (2003) The Stokes–Leibenson Problem for Hele-Shaw Flows. *Patterns and Waves* (Eds. A. Abramian, S. Vaculenko, V. Volpert), Saint Peresburg, 103–124.
- [130] A.S. Demidov, M. Moussaoui (2004) An inverse problem originating from magnetohydrodynamics. *Inverse Problems* **20**, No. 1, 137–154.
- [131] A.S. Demidov, V.V. Petrova, V.M. Silantiev (1996) On inverse and direct free boundary problems in the theory of plasma equilibrium in a Tokamak. *C.R. Acad. Sci. Paris* **323** Série I, 353–358.
- [132] S.Yu. Dobrokhotov, S.Ya. Sekerzh-Zenkovich, B. Tirozzi, B. Volkov (2006) Explicit asymptotics for tsunami waves in framework of the piston model. *Rus. J. Earth. Sci.*, **8**, ES4003, doi: 10.2205/2006 ES000215.
- [133] A. Dutrifoy (1999) Existence globale en temps de solutions hélicoïdales des équations d’Euler. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math.*, **329**, 653–656.

- [134] J. Escher, G. Simonett (1997) Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw models. *SIAM J. Math. Anal.*, **28**, No. 5, 1028–1047.
- [135] J.P. Freidberg (1987) *Ideal Magnetohydrodynamics*, Plenum, New York.
- [136] A.N. Gorban', A.N. Gorlov, V.M. Silantyev (2001) Limits of the Turbine Efficiency for Free Fluid Flow. *Journal of Energy Resources Technology* **123**, no. 4, December, 311–317.
- [137] A. Gorban', M. Braverman, V. Silantyev (2002) Modified Kirchhoff flow with a partially penetrable obstacle and its application to the efficiency of free flow turbines. *Mathematical and Computer Modelling* **35**, no. 13, June, 1371–1375.
- [138] A.N. Gorban', V.M. Silantyev (2002) Riabouchinsky flow with partially penetrable obstacle. *Mathematical and Computer Modelling* **35**, no. 13, June, 1365–1370.
- [139] A.M. Gorlov (1995) The Helical turbine: a new idea for low-head hydropower. *Hydro Review*, **14**, No.5, 44–50.
- [140] A.M. Gorlov (1998) Helical turbine for the Gulf Stream. *Marine Technology*, **35**, No.3, 175–182.
- [141] H. Grad, H. Rubin (1958) Hydromagnetic equilibria and force-free fields. *Proceedings of the 2nd United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Geneva, Vol. 31, 190–. Columbia University Press, New York (1959).
- [142] B. Gustafsson (1985) Applications of variational inequalities to a moving boundary problem for Hele-Shaw flows. *SIAM J. Math. Analysis* **16**, 279–300.
- [143] B. Gustafsson, A. Vasil'ev (2004) *Conformal and Potential Analysis in Hele-Shaw cells*, Stockholm-Valparaíso.
- [144] H.S. Hele-Shaw (1898) The flow of water *Nature*, **58**, No. 1489, 34–36.
- [145] H. Helmholtz (1868) Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. *Prussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin Monatsberichte der Königlich*, 215–228 (это издание есть в Фундаментальной библиотеке МГУ). Имеется русский перевод 1902г. (в московском изд-ве ПАЛЛА Σ) “Н. Helmholtz. Два исследования по гидродинамике. I. О вихревом движении. II. О прерывном движении жидкости. Перевод под редакцией С.А. Чаплыгина, професс. Императорского Московского Инженерного Училища”.
- [146] H. Helmholtz (1882-1895) *Wissenschaftliche abhandlungen*, Leipzig–J.A.Barth.
- [147] S.D. Howison, J.R. Ockendon (1999) Papers from the conference held in Oxford. *Euro. J. of Applied Mathematics*, **10**, 511–709.
- [148] T. Kato (1967) On classical solutions of the two dimensional non stationary Euler Equation. *Archive Rat. Mech. Anal.* **25**, 188–200.
- [149] D. Kinderlehrer, L. Nirenberg (1977) Regularity in free boundary problems. *Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa*, Serie IV, **4** No. 1, 373–391.
- [150] D. Kinderlehrer, G. Spruck (1978) Regularity in free boundary problems. *Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa*, Serie IV, **5** No. 1, 131–148.
- [151] G. Kirchhoff (1869) Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. *J. reine angew. Math. Grell*. Berlin **70**, 269–298 (см. также: *Механика. Лекции по математической физике*, АН СССР, Москва, 1962).
- [152] T. Levi-Civita (1907) Scie e leggi di resistenza. *Rend. Circolo Math. Palermo*, **23**, 1–37.
- [153] J. Leray (1933) Étude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *J. Math. Pure Appl.*, **12**, No. 9, 1–82.

- [154] J. Leray (1934) Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, **63**: 3-4, 193–248.
- [155] J. Leray (1935) Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des poutres. *Comment. Math. Helvetici*, **8**, 149–180, 250–263.
- [156] J. Leray, J. Schauder (1933) . *C.R. Acad. Sci. Paris* **197**, Série A, 115.
- [157] J. Leray, J. Schauder (1934) Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Normale supér.* **13**, 45–78 (русск. перевод в УМН (1946) Т.1, вып. 3–4, 71–95).
- [158] J. Leray, J.L. Lions (1965) Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty–Browder. *Bull. Soc. Math. France*, **93**, 97–107.
- [159] J.-L. Lions, E. Magenes (1971) *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, “Мир”, Москва.
- [160] Y. Liu (1995) The equilibrium plasma subject to skin effect. *SIAM J. Math. Anal.*, **26**, No. 5(Sept.), 1157–1183.
- [161] T.C. Luce (2005) Development of steady-state advanced tokamak research in the DIII-D tokamak. *Fusion Science and Technology*, **48**, No. 10(Oct.), 1212–1225.
- [162] R. Lüst, A. Schlüter (1957) Axialsymmetrische magnetohydrodynamische Gleichgewichtskonfigurationen. *Zeitschrift für Naturforschung*, **12A**, 850.
- [163] A.M. Meirmanov, B. Zaltzman (2002) Global in time solution to the Hele-Shaw problem with a change of topology. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*, **13**, 431–447.
- [164] J. Mossino (1982) A priori estimates for a model of Grad–Mercier type in plasma confinement. *Appl. Anal.*, Vol. 13, №№ 3, 185–207.
- [165] J. Mossino (1987) Isoperimetric inequalities and nonexistence resultat for the Grad-Shafranov equations. *Nonlinear Anal.*, Vol. 11, No 2, 231–244.
- [166] N. Neuss, M. Neuss-Radu, A. Mikelić (2006) Effective laws for the Poisson equation on domains with curved oscillating boundaries *Applicable Analysis*, Vol. 85, No. 5, 479–502.
- [167] J.R. Ockendon (1980) Linear and nonlinear stability of a class of moving boundary problems. *Proceedings of a seminar held in Pavia, 1979*, v. II, Roma, 443–478.
- [168] G. Prokert (1999) On evaluation equations for moving domains. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* **18**, No. 1, 67–95.
- [169] J.-P. Puel (1977) Sur un problème de valeur propre non linéaire et de frontière libre. *C.R. Acad. Sci. Paris* **284** Série A, 861–863.
- [170] V.D. Pustovitov (2001) Magnetic diagnostics: General principles and the problem of reconstruction of plasma current and pressure profiles in toroidal systems. *Nuclear Fusion*, **41**, No. 6, 721–30.
- [171] D. Riabouchinsky (1920) On steady fluid motion with free surface. *Proc. London Math. Soc.* **19**, 206–215.
- [172] S. Richardson (1972) Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel. *J. Fluid Mech.* **56**, 609–618.
- [173] P.G. Saffman, G.I. Taylor (1958) The penetration of a fluid into a porous medium of Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. Royal Soc. A*, **245**, 312–329.
- [174] D.G. Schaffer (1977) Non-uniqueness in the equilibrium shape of a confined plasma. *Commun. P.D.E.* **2** 587–600.

- [175] M. Sermange (1979) Une méthode numérique en bifurcation: application à une problème à frontière libre de la physique des plasmas. *Appl. Math. fnd Opt.* **5**, 127–151.
- [176] M. Sermange (1980) Bifurcation of free boundary plasma equilibria. *Duke Math. J.* **47** 923–942.
- [177] J. Serrin (1971) A symmetry problem in potential theory. *Arch. Rational. Mech. Anal.* **43** 304–18.
- [178] M.J. Shelley, F.-R. Tian, K. Wlodarsky (1997) Hele-Shaw flow and pattern in a time-dependent gap. *Nonlinearity* **10** 1471–1495.
- [179] J. Steinbach (2002) *A Variational Inequality Approach to the free Boundary Problems with Applications in Mould Filling*, Intern. Series of Numerical Math., **136** Birkhäuser Verlag Basel/Switzeizerland.
- [180] G.G. Stokes (1898) Mathematical Proof of the Identity of the Stream-Lines obtained by means of Viscous Film with those of a Perfect Fluid moving in Two Dimensions. *Brit. Ass. Rep.* 143 (Papers, V, 278).
- [181] R. Temam (1975) A non-linear eigenvalue problem: The shape at equilibrium of a confined plasma. *Arch. Ration. Mech.* **60**, №1, 51–73.
- [182] R. Temam (1977) Remarks on a free boundary problem arising in plasma physics. *Commun. P.D.F.* **2**, №6, 563–585.
- [183] B.W. Thompson (1968) Secondary flow in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.* **31**, Part 2, 379–395.
- [184] B.G. Thomas, Ch. Beckermann (1998) *Modeling of casting, welding advanced solidification processes* San Diego, California.
- [185] M.P. Tulin (1964) Supercavitating flow-small-perturbation theory. *J. Ship. Res.* **7**, No. 3 (см. также Труды Международ. симп. в Тбилиси 1963, Т. 2 – М.: Наука, 1965, 403–439).
- [186] V.I. Vlasov (1996) Multipole method for solving some boundary value problems in complex-shaped domains. *Zeitschr. Angew. Math. Mech.* **V. 76.**, Suppl. 1, 279–282.
- [187] M. Vogelius (1994) An inverse problem for the equation $\Delta u = -cu - d$. *Ann. Inst. Fourier* **44**, No. 4, 1181–1209.
- [188] H. Villat (1911) Sur la résistance des fluides. *Ann. Sci. École Normale supér.* **28**, 203–240.
- [189] A. Weinstein (1924) Ein hydrodynamischer Unitätssatz. *Math. Z.* **19**, Band 3,4 265–275.
- [190] W. Wolibner (1933) Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. *Math. Zeitschrift* **37** Band 5, 698–726.
- [191] L.E. Zakharov (2007) The theory of variances of equilibrium reconstruction. (<http://w3.pppl.gov/~zakharov>).
- [192] V.E. Zakharov, A.I. Dyachenko, O.A. Vasilyev (2002) New Method for Numerical Simulation of a Nonstationary Potential Flow of Incompressible Fluid with a Free surface. *Europ. J. Mech. B. Fluids* **21**, №3, 283–291.

Особое замечание. «Отстоим?!», или о причине Примечания-сноски 30.

До 1968 года имя английского морского инженера Генри Хиле-Шоу (1854–1941) изредка упоминалось в научной литературе. Он сконструировал гребной винт (пропеллер) с переменным шагом и так называемую ячейку Хиле-Шоу [144] (см. также [68, 173]). Она представляет собой две параллельные стеклянные пластины с малым зазором между ними, в который направляется поток жидкости. Оказалось, что таким образом можно наблюдать линии тока плоского потенциального течения, например, при обтекании того или иного препятствия.

Но вот наступил 1968 г. и появилась публикация Б.У. Томсона [183], который приехал в Лондон из Мельбурна писать диссертацию по теме ячейки Хиле-Шоу (об уточнении характеристик течения, возникающих в связи с условием прилипания к помещенному в ячейку препятствия). Б.У. Томсон и стал (это признает сам Дж.Р. Окендон в [167]) автором термина “течение Хиле-Шоу”. В [183] этот термин употреблен почти случайно, один лишь раз (это не цитата из песни, это действительно так). И тем не менее, одного этого случайного паса было достаточно для опытной команды, возглавляемой Дж.Р. Окендоном, чтобы превратить этот термин в “бренд” (это же не какая-то ячейка в каком-то приборе, а течение!). События разворачивались просто гениально (чуть ниже читатель поймет, почему я об этом так подробно пишу). В 1972 г. вышла работа С. Ричарсона [172], где этот термин впервые был вынесен в заглавие статьи. Уже это привлекло внимание (что это за течение?). Но самое главное, в статье были получены прекрасные результаты. Об одном из них было сказано при доказательстве теоремы 5.3. Почин Ричардсона подхватила вся команда Окендона–Хаунсона. В результате термин “течение Хиле-Шоу” стал ключевым словом для тысяч публикаций. Не все, правда, при этом осознавали, что Хиле-Шоу — это не два человека, а один инженер-конструктор. Но это детали. А главное то, что к тематике, связанной с течением Хиле-Шоу (интересной как с чисто математической, так и с прикладной точки зрения) обратились математики и механики многих стран и были получены важные результаты (см., в частности, [147]). Кроме того, попутно имя еще одного англичанина стало знаковым.

Все это была преамбула, цель которой подчеркнуть контраст с тем, что вызывает (выражаясь дипломатическим языком) определенную озабоченность и ради чего я пишу это *Особое замечание*. Речь не столько о скромности многих наших российских классиков, сколько о копировании (а потому и поддержке) тех вводимых на Западе названий важнейших методов, теорем, лемм, понятий, которые не отражают существенный, а зачастую основополагающий вклад в эти субстанции наших первопроходцев. Почему, к примеру, нужно поддерживать употребление термина “Multigrid-method”, а не внедрить в численный анализ термин “метод Бахвалова–Федоренко”, или, что вернее, “метод Федоренко–Бахвалова”. Можно сказать и так: “Fedorenko's multigrid-method”. Ведь говорим, например, об альтернирующем методе Шварца [45]. Говорим же (и совершенно обоснованно) об эллиптических и гиперболических системах по Петровскому, об эллиптических системах по Дуглису–Ниренбергу, гиперболических системах по Лере–Волевицу. Но много ли тех (даже из российских математиков), кто назовет имя того, кому Математика обязана как самим понятием сильно эллиптические системы, так и основополагающими для них результатами? Если студент, пожелавший найти ответ на этот вопрос, заглянет, скажем, в предметный указатель популярного у нас учебника [54] и откроет соответствующую страницу, то он увидит лишь имя Гординга. Жаль, что студент не узнает, что первоначально усиленное неравенство Гординга для функций с малым носителем было доказано М.И. Вишиком для введенных им сильно эллиптических систем. К чести Гординга, сам он признавал принципиальный вклад М.И. Вишика в то, что называется неравенством Гординга. А что знают некоторые “продвинутые” зарубежные математики о И.Г. Петровском? Слава Богу, хоть что-то (см. по этому поводу [3]), ибо есть термин “2b-параболические по Петровскому системы”. Так почему же (вопреки почину Лере и Лионса [158]) нужно опускать в соответствующем термине имя того, кто первый получил важнейшие результаты для введенных им квазилинейных сильно эллиптических систем, называемых (после аксиоматизации их свойств) “p-монотонными операторами” и ассоциируемых нередко, особенно на Западе, лишь с именами Браудера и Минти? Почему надо употреблять термин “лемма Лакса–Мильграма”, а не говорить, скажем, о ВЛМ-лемме, покорно “забывая” (в противовес мнению самого Лакса) о первом (т.е. М.И. Вишике), кто установил соответствующий результат? Речь не о том, чтобы продолжить такого сорта вопросы (это сделать легко). Речь об уважении к авторам важнейших понятий, результатов, методов и о необходимости отстаивать их приоритет и, в частности, приоритет соотечественников, упоминая их имена в соответствующих названиях теорем, лемм, методов, понятий. Ведь смогли же, когда захотели, приучить (не только иностранцев, но и самих себя) говорить, скажем, о формуле Остроградского–Гаусса (полученной Остроградским в 1835 г. и спустя 6 лет Гауссом в несколько специализированном виде, не содержащем выражения для дивергенции), о разложении по собственным функциям краевых задач, как о теореме Стеклова (1896 г.) и т.д. Конечно, не все так печально. У всех на слуху уравнение Гельфанда–Левитана, принцип максимума Понтрягина, индекс Арнольда–Маслова и т.д. Но надо исправлять допущенные промахи, особенно в отношении авторов, себя не рекламирующих. В современных условиях, как на это обратил мое внимание А.Г. Кушниренко, для этого есть дополнительные возможности, а именно: признанные мировые справочные ресурсы, та же Википедия (свободная многоязычная интернет-энциклопедия, в которой каждый может создать, изменить или дополнить любую статью). Поэтому можно и нужно не только в публикациях пропагандировать соответствующие названия лемм, теорем, понятий, но и дополнительно брать на себя труд самим участвовать (и помогать историкам математики) в пополнении интернет-сайтов правильной информацией по вопросам, которые касаются приоритета наших соотечественников.