

ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В КОНФОРМНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2008 г. Р. В. ШАМИН

Аннотация. Изучаются задачи математической гидродинамики со свободной поверхностью в конформных переменных. Рассмотрены вопросы аналитической разрешимости в шкале гильбертовых пространств, численные методы для получения приближенных решений. Рассматриваются вопросы конструктивной оценки времени существования решений. Изучаются вопросы применения математической статистики к вопросам разрешимости нелинейных уравнений. Приведены многочисленные вычислительные эксперименты, демонстрирующие методы настоящей работы. Многие полученные результаты могут быть применены не только к задачам гидродинамики со свободной поверхностью, но и абстрактным задачам Коши—Ковалевской в шкалах банаховых пространств.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Глава 1. Уравнения идеальной жидкости	14
1.1. Уравнения движения идеальной жидкости	14
1.2. Двумерное течение	16
1.3. Поверхностные волны идеальной жидкости	17
Глава 2. Применение конформных переменных	19
2.1. Уравнения в конформных переменных, разрешенных относительно производных по времени	19
2.2. Уравнения Дьяченко	20
2.3. Уравнения для конечной глубины	22
2.4. Уравнения, описывающие стационарные волны	24
Глава 3. Корректность уравнений в конформных переменных	25
3.1. Шкалы функциональных пространств	25
3.2. Существование и единственность решений	26
3.3. Минимальная гладкость решений	28
Глава 4. Эволюционные уравнения в шкалах гильбертовых пространств	30
4.1. Описание абстрактного проекционного метода	30
4.2. Обоснование абстрактного проекционного метода	31
4.3. Случай шкалы гильбертовых пространств	33
Глава 5. Численные методы в теории поверхностных волн	34
5.1. Применение проекционного метода	34
5.2. Применение теории регуляризации	36
5.3. Регуляризация метода прямых в условиях машинной точности	39
5.4. Применение сплайн-аппроксимации	47
Глава 6. Конструктивная оценка времени существования решений	50
6.1. Оценка времени существования решений на компактных множествах	50
6.2. Оценка времени существования решений по невязке	52
6.3. Оценочные функционалы	55
6.4. Оценка времени существования поверхностных волн идеальной жидкости	56
Глава 7. Применение методов статистики в численных экспериментах	57

Работа выполнена при поддержке гранта НШ-7550.2006.2 и грантов РФФИ 07-01-00268-а, 07-05-00648-а, 07-05-92211-НЦНИЛ_а.

©2008 РУДН

7.1. Статистическое исследование времени существования решений со случайными начальными данными	57
7.2. Статистическая проверка гипотез о существовании решений	58
Глава 8. Дополнительные результаты	72
8.1. О глобальных решениях уравнений, описывающих гладкие волны	72
8.2. Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в условиях знакопеременного поля тяжести	72
8.3. О «волнах-убийцах»	74
Глава 9. Некоторые вопросы программирования численных методов	75
9.1. Общая схема программы моделирования поверхностных волн	75
9.2. Программа расчета стационарных волн	76
9.3. Программа расчета поверхностных волн идеальной жидкости	82
9.4. Программа расчета поверхностных волн идеальной жидкости на конечной глубине	92
9.5. Вопросы визуализации результатов расчетов поверхностных волн	97
Глава 10. Проведение вычислительных экспериментов в теории поверхностных волн	97
10.1. Вычислительный эксперимент: построение бегущих волн	97
10.2. Вычислительный эксперимент: стоячие волны	101
10.3. Вычислительный эксперимент: стационарные волны	105
10.4. Моделирование обрушивающейся волны	108
10.5. Моделирование неустойчивости Релея—Тейлора	116
10.6. Моделирование динамики по идеальной жидкости в условиях вибрации	117
10.7. Моделирование волн-убийц	122
Глава 11. Приложения	131
11.1. Определения и некоторые факты из теории интерполяции банаховых пространств	131
11.2. Построение конформных отображений	132
11.3. Программа вычисления быстрого преобразования Фурье	134
11.4. Протокол эксперимента для построения функции распределения	138
Список литературы	142

ВВЕДЕНИЕ

Волны на поверхности жидкости относятся к наиболее частым явлениям на нашей планете. В то же время изучение математических вопросов динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью сопряжено со многими трудностями. К известным трудностям математической гидродинамики добавляются еще трудности, связанные с тем, что область, занимаемая жидкостью, сама является неизвестной. В последнее время особой популярностью пользуются уравнения Навье—Стокса, описывающие течение вязкой несжимаемой жидкости. Однако математические вопросы, связанные с изучением течения идеальной (невязкой) жидкости, описываемые уравнениями Эйлера, также являются во многом нерешенными и трудными. Как мы увидим в главе 1, вода (в том числе и морская) имеет очень небольшой коэффициент вязкости. Поэтому мы изучаем поверхностные волны идеальной жидкости. При этом трудности при изучении уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, возникают как при доказательстве теорем о существовании решений, так и при численном моделировании.

Современная теория дифференциальных уравнений и математической физики немыслима без теорем о существовании и единственности решений рассматриваемых уравнений. Однако само понятие уравнения возникло для того, чтобы *найти решение* уравнения. Что касается дифференциальных уравнений (особенно в частных производных), то лишь малая часть этих уравнений может быть *решена* в классическом смысле. В этой ситуации теоретическая математика концентрировала свои усилия на доказательстве теорем существования и изучении качественной теории дифференциальных уравнений, а вычислительная математика занимается нахождением приближенных решений. Численные методы берут свое начало в древней математике. С появлением вычислительной техники и ее колоссальным ростом в XX веке, вычислительная математика получила новое рождение. Стало доступным проведение невиданных ранее вычислительных опытов. В самой математике и во многих современных науках все более активно используются *вычислительные эксперименты*. С помощью компьютерной техники были получены многие новые результаты и в теоретической математике.

Одной из целей настоящей работы является развитие методов проведения вычислительных экспериментов в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Разумеется, из всего разнообразия уравнений в частных производных мы исследуем эволюционные уравнения первого порядка, которые можно назвать обобщенными системами Коши—Ковалевской. Именно к этим системам сводятся рассматриваемые нами уравнения, описывающие течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Основной нашей идеей является получение таких теоретических результатов, которые дают возможность делать доказательные выводы о разрешимости уравнений, исходя из наблюдений вычислительных опытов. Актуальность этих результатов обусловлена тем, что относительно рассматриваемых уравнений мы знаем лишь локальную разрешимость по времени. Следовательно, для моделирования динамики поверхностных волн мы вынуждены использовать результаты численных расчетов, не имея априорной информации о существовании решений. Наш подход состоит в том, чтобы после проведения вычислительных экспериментов получать результаты о разрешимости из полученных данных численных расчетов. Подчеркнем, что хотя мы и пользуемся результатами численных расчетов, но получаемые нами выводы о разрешимости уравнений являются доказательными. В этой ситуации принципиальное значение имеет корректность программ, используемых в расчетах. Обычно вопросу доказательства правильности программ не уделяется должное внимание. В нашей работе мы приводим листинги основных частей программ с целью дать возможность читателю проверить корректность наших результатов.

В настоящей работе мы рассматриваем два подхода к конструктивной оценке времени существования решений эволюционных уравнений: детерминированный и статистический. Первый подход основан на анализе приближенных решений с целью получения доказательных выводов о разрешимости уравнений на рассматриваемом временном интервале. В этой ситуации мы исследуем индивидуальные решения. Преимуществом такого подхода является то, что мы получаем результат «до числа».

Другой наш подход — статистический. В этом случае мы предполагаем, что, наряду с основным уравнением, у нас есть схема получения приближенных решений, которые сходятся к точному

решению в случае его существования. Более точно, мы будем предполагать, что если все приближенные решения принадлежат некоторому компактному множеству M , то решение исходного уравнения существует и эта последовательность приближенных решений сходится к точному решению. Если решение уравнения не существует, то, начиная с некоторого номера n , приближенные решения выйдут из множества M . Наша идея состоит в том, что наблюдая лишь конечное множество приближенных решений $1, 2, \dots, N$, которое принадлежит множеству M , мы можем сделать вывод о том, что и вся последовательность принадлежит M с вероятностью $F(N)$, где F есть функция распределения нашей вероятности. Вопрос о выборе конкретной функции распределения вероятности может быть решен с помощью проведения серий вычислительных экспериментов. Конечно, решать вопрос о существовании решений с помощью вероятности необычно для теории дифференциальных уравнений. Однако при моделировании физических процессов, когда сами исходные данные получаются с определенной вероятностью, получение результатов о разрешимости с высокой вероятностью является вполне удовлетворительным. При этом заметим, что наши результаты имеют строгое математическое обоснование.

Как известно, уравнения гидродинамики со свободной границей могут быть представлены в различных формах. Мы работаем с уравнениями в конформных переменных. Использование конформных переменных в математической гидродинамике является традиционным. В настоящей работе мы работаем с уравнениями Дьяченко, которые были введены в работах [49, 62]. Эти уравнения были получены А. И. Дьяченко с целью упростить вид уравнений в конформных переменных. Однако многочисленные численные эксперименты с этими уравнениями показали их высокую эффективность. С помощью численных схем, реализованных для этих уравнений, удалось провести ряд важных вычислительных экспериментов в задачах океанологии, математической физики и гидродинамики.

Основные результаты об оценке времени существования решений относятся к абстрактным дифференциальным уравнениям, однако наши предположения выполнены для уравнений в конформных переменных, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости. Поэтому наши абстрактные результаты имеют интересные приложения в сложных и нерешенных задачах математической гидродинамики.

Течение идеальной жидкости со свободной поверхностью описывается системами нелинейных дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений в частных производных. Причем трудности возникают как при исследовании разрешимости этих уравнений, так и при численном моделировании. В настоящей работе рассматриваются нестационарные уравнения, описывающие динамику тяжелой идеальной жидкости со свободной поверхностью, занимающей двумерную область. Поскольку нас в первую очередь интересует динамика поверхностных волн, мы будем рассматривать потенциальное течение жидкости.

Целью настоящей работы является последовательное изучение результатов о разрешимости уравнений, описывающих динамику идеальной жидкости, в классах аналитических функций, получение различных численных методов для получения приближенных решений, а также обоснование методов проведения вычислительных экспериментов. Мы изучаем наши уравнения в классах аналитических функций. Для доказательства разрешимости мы сводим задачу описания нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью к эволюционной задаче в шкале гильбертовых пространств. Полученную эволюционную задачу мы сводим к абстрактной системе Коши—Ковалевской. Для этих систем используем известные результаты о локальной по времени разрешимости. На следующем шаге исследования разрешимости наших уравнений мы получаем результаты уже о существовании аналитических решений на конечном интервале по времени. Для рассматриваемых функциональных классов мы строим конструктивные методы, позволяющие гарантированно оценить время существования аналитических решений. Для получения этой оценки «до числа» нам необходимо использовать численные методы, позволяющие приближенно решать наши уравнения с большой точностью. Для этой цели в настоящей работе мы уделяем много внимания различным численным методам, позволяющим получать приближенные решения. Рассматриваемые численные методы, как правило, относятся к проекционным методам, применяемым для решения эволюционных уравнений в бесконечномерных пространствах. При конструировании проекционных методов мы используем различные методы дискретизации уравнений по пространственным переменным. Использование численных методов для расчетов динамики

идеальной жидкости со свободной поверхностью сталкивается с серьезными трудностями, связанными с вычислительной неустойчивостью, возникающей в процессе расчетов. Поэтому в работе уделяется много внимания не только алгоритмам численных методов, но и технике программирования предложенных численных методов. В настоящей работе приведены результаты различных вычислительных экспериментов в теории поверхностных волн идеальной жидкости. С одной стороны, результаты этих вычислительных экспериментов дают отличную иллюстрацию к изложенным в работе теоретическим положениям, а с другой стороны, эти результаты имеют доказательную силу.

Идея применения доказательных вычислений в задачах гидродинамики со свободной поверхностью была реализована еще в работах известного специалиста в области вычислительной математики К. И. Бабенко. В работах [4, 5] рассматривался вычислительный эксперимент в теории поверхностных волн идеальной жидкости, результаты которого имеют доказательную силу. В последнее время темпы развития компьютерной техники и вычислительных технологий достигли фантастических горизонтов. Появились принципиально новые возможности для проведения вычислительных экспериментов. В настоящей работе предпринята попытка развить теоретические результаты в области обоснования вычислительных экспериментов с целью придания численным опытам доказательной силы. Для этого нами рассматривается нелинейная эволюционная задача в шкале абстрактных пространств. Используя результаты о локальной по времени разрешимости для этой задачи, а также обоснованные численные методы, мы строим методы, позволяющие получить результаты о существовании аналитических решений на конечном временном интервале. Важное требование, которое мы предъявляем к этим методам, состоит в том, чтобы эти методы были конструктивно реализуемыми. Полученные результаты для абстрактных эволюционных уравнений мы применяем к задаче описания нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью.

Одной из принципиально важных проблем в теории поверхностных волн идеальной жидкости является задача об оценке времени существования гладких решений, описывающих динамику поверхностных волн. С одной стороны, известные результаты о разрешимости этих задач гарантируют существование решений лишь на достаточно малом временном интервале (см. [24, 25, 40, 42, 60]). С другой стороны, не стоит надеяться на существование глобальных решений полной нелинейной задачи для всех начальных данных, т.к. по физике дела поверхностные волны имеют обыкновение разрушаться за конечное время. Многие численные опыты также подтверждают возможности образования особенностей у гладких решений за конечное время. Известные результаты о локальной разрешимости не дают возможности оценить время существования решений. В настоящей работе мы рассматриваем методы, позволяющие получать такую оценку на основе численных опытов для индивидуальных решений. Исследование индивидуальных решений позволяет получать оценку вплоть до числа.

В первой главе мы рассматриваем основные уравнения, описывающие движение идеальной жидкости. Фиксируем те допущения относительно жидкости, которые используем на протяжении всей работы. Поскольку мы работаем с переменными Эйлера, мы начинаем рассмотрение с уравнений Эйлера в трехмерном случае. Однако в нашей работе мы рассматриваем двумерное течение жидкости, поэтому в пункте 1.2 мы рассматриваем уравнения Эйлера в двумерном случае. В этом случае имеет смысл перейти к переменным «вихрь — функция тока».

В разделе 1.3 мы рассматриваем систему уравнений, описывающую нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью и бесконечным дном в физических координатах.

Во второй главе мы начинаем рассматривать применение конформных переменных к задаче описания динамики поверхностных волн. Применение конформных преобразований является традиционным в задачах гидродинамики. Однако классические результаты относятся к описанию стационарного течения идеальной жидкости. В задачах гидродинамики со свободной поверхностью конформные преобразования позволяют избежать основной трудности — неизвестности области, ограниченной свободной поверхностью, в которой рассматривается уравнение. Идея использования конформных переменных состоит в том, что неизвестная область отображается на область с известной геометрией, при этом получается уравнение на конформное преобразование. Использование конформных переменных для нестационарных задач сталкивается с рядом серьезных трудностей

как при теоретическом изучении, так и при численном моделировании. Проблемы при численном моделировании связаны с вычислительной неустойчивостью приближенных схем.

В разделе 2.1 мы приводим систему интегро-дифференциальных уравнений, разрешенную относительно производных по времени. Эта система была получена в работе [13]. Однако практика использования этих уравнений для численного моделирования динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью показала, что при использовании численных схем, содержащих более 256 точек на период по пространственным переменным, счет по численной схеме быстро разрушается. Как видно из самих уравнений (2.1.2)–(2.1.3), в правых частях этих уравнений содержится операция деления функций. Стремясь избавиться от операции деления и упростить уравнения (2.1.2)–(2.1.3), А. И. Дьяченко получил эквивалентные уравнения в других переменных. Эти уравнения, названные впоследствии уравнениями Дьяченко, рассматриваются в разделе 2.2.

Система уравнений (2.2.4), также как и уравнения (2.1.2)–(2.1.3), представляет собой нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, разрешенную относительно производных по времени. Искомые функции в уравнениях (2.2.4) не имеют прямого физического смысла, однако представляют собой аналитические (по пространственным переменным) функции, через которые может быть восстановлено конформное преобразование области, ограниченной свободной поверхностью, и в конечном счете — физические переменные, описывающие динамику идеальной жидкости со свободной поверхностью.

Практика использования уравнений Дьяченко в моделировании динамики поверхностных волн идеальной жидкости показала, что эти уравнения оказались чрезвычайно удобными для численной реализации. Использование уравнений (2.2.4) имеет ряд существенных преимуществ, таких как:

1. вычислительная устойчивость численных схем при использовании очень точных схем;
2. простота вычисления правых частей уравнений (2.2.4);
3. возможность эффективно использовать дискретное преобразование Фурье.

К недостаткам уравнений (2.2.4) можно отнести необходимость перехода к физическим переменным для вычисления механической энергии жидкости и других параметров.

Относительно высокой эффективности следует заметить, что в вычислительных экспериментах, проводимых В. Е. Захаровым и А. И. Дьяченко, использовались численные схемы, содержащие более 2×10^6 точек на период по пространственным переменным. Помимо возможности использовать большое количество узловых точек в расчетных числовых схемах, уравнения (2.2.4) позволяют проводить вычисления на больших временных интервалах.

Если при дискретизации уравнений по пространственной переменной пользоваться дискретным преобразованием Фурье, то вычисление сингулярного интегрального оператора Гильберта может быть выполнено очень эффективно. Операция дифференцирования также может быть выполнена с высокой точностью с использованием дискретного преобразования Фурье. Для увеличения скорости расчетов часто имеет смысл применять алгоритмы быстрого преобразования Фурье.

К сожалению, уравнения (2.2.4) не могут быть просто обобщены на случай конечной глубины. В разделе 2.3 мы приводим эволюционные уравнения в конформных переменных, описывающие динамику поверхностных волн в случае конечного дна.

В разделе 2.4 мы рассматриваем уравнения, позволяющие находить решения, описывающие стационарные волны. Для этих волн существует такая подвижная система координат, в которой эти волны неподвижны. Эти уравнения представляют собой бесконечную систему нелинейных уравнений, содержащую единственный параметр — скорость бегущей волны. Известно, что не при всех значениях этого параметра существует единственное решение, описывающее бегущую волну.

В главе 3 мы изучаем вопросы существования и единственности решений уравнений в конформных переменных, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Мы рассматриваем аналитические (по временной переменной) решения в шкалах аналитических (по пространственной переменной) функций.

В разделе 3.1 мы вводим шкалу банаховых пространств аналитических решений и рассматриваем свойства этой шкалы. Шкала строится таким образом, чтобы в каждом пространстве из этой шкалы были непрерывны операции умножения и применения оператора Гильберта. Эти и другие свойства шкалы пространств обеспечивают сведение рассматриваемых уравнений к системам Коши—Ковалевской.

В разделе 3.2 мы применяем абстрактную теорему Ниренберга—Нисиды [29, с. 220]. Эта теорема может быть применена к абстрактным системам Коши—Ковалевской для доказательства локальных по времени теорем существования и единственности аналитических решений. Поскольку мы имеем решение в шкале пространств аналитических функций, наши решения являются бесконечно дифференцируемыми как по пространственной, так и по временной переменной. Эта гладкость используется в дальнейшем для доказательства сходимости численных методов.

В разделе 3.3 мы рассматриваем вопрос о минимальной гладкости решений, которые могут иметь уравнения (2.2.4). Рассмотрение негладких решений имеет смысл для обоснования вычислительных схем. Для рассматриваемого класса решений мы выясняем вопрос о пространстве начальных данных, соответствующих выбранному классу функций. Для этого мы необходимо применяем теорию интерполяции банаховых пространств.

В главе 4 мы рассматриваем абстрактные нелинейные уравнения в шкалах гильбертовых пространств. Основным инструментом при исследовании эволюционных уравнений в гильбертовых пространствах для нас является проекционный метод. В основе этого метода лежит идея сведения уравнения в гильбертовом пространстве к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого мы фиксируем ортонормируемый базис в гильбертовом пространстве. Выбор этого базиса определяет способ дискретизации уравнения по пространственным переменным.

В разделе 4.1 мы рассматриваем абстрактный проекционный метод. В следующем разделе 4.2 мы даем обоснование проекционного метода. Доказывается, что если исходное уравнение имеет решение, то и приближенные решения, полученные с помощью проекционного метода, сходятся к точному решению. В этом разделе мы впервые используем метод невязки, который мы будем использовать часто в ходе нашей работы. В разделе 4.3 мы продолжаем рассмотрение проекционного метода в случае шкалы гильбертовых пространств.

Глава 5 посвящена последовательному изучению численных методов для уравнений Дьяченко. Основной метод для построения приближенных решений — это метод невязки. В этой главе приведены эффективные схемы для получения приближенных решений и доказана сходимость получаемых приближенных решений к точному решению, если исходное уравнение имеет решение.

В разделе 5.1 мы применяем абстрактный проекционный метод для системы уравнений (2.2.4). В частности, в этом разделе приведена система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая используется этой главе для получения приближенных решений. В следующем разделе 5.2 мы применяем идеи теории регуляризации некорректных задач А. Н. Тихонова для доказательства сходимости наших численных методов. Рассматриваются методы невязки и квазирешений в применении к нашим задачам. В этом разделе мы приводим эффективные схемы для построения приближенных решений.

В разделе 5.3 рассматривается серьезная проблема, возникающая при реализации проекционного метода на современных компьютерах. Как известно, вещественные числа в условиях машинной арифметики аппроксимируются конечным набором рациональных чисел. Причем машинная арифметика с плавающей запятой хотя и имеет стандартную спецификацию, но часто представляет для математиков неожиданную и серьезную проблему. В частности, многие формулы алгебры могут нарушаться вследствие использования машинной арифметики. Как известно, простейшая операция вычитания двух чисел становится некорректной, если оба числа велики по модулю, а их разность близка к нулю. При численном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений большого порядка может возникать вычислительная неустойчивость. В наших задачах этот эффект особенно проявляется благодаря использованию алгоритмов быстрого преобразования Фурье. При использовании этого алгоритма те коэффициенты, которые должны быть нулями, реально заменяются числами порядка машинного эпсилон — для чисел с двойной точностью на 32-х разрядных процессорах машинное эпсилон порядка 10^{-15} — 10^{-17} . Ясно, что если мы к коэффициентам ряда Фурье (сходящемуся) прибавим числа, которые не убывают с ростом номера коэффициента ряда, то частичные суммы такого ряда не будут сходиться ни в каком случае.

Вопрос о корректной работе с ошибками машинной арифметики является краеугольным камнем для всей вычислительной математики, но становится принципиальным в случае доказательных вычислительных экспериментов. Одним из кардинальных способов решения этой проблемы является использование интервального анализа, см. [16, 44]. Интервальный анализ — сравнительно молодое направление вычислительной математики, но уже имеющее много важных достижений.

К недостаткам этого подхода следует отнести необходимость специального программирования и неэкономность получающихся программ. В настоящей работе (в разделе 5.3) приведены более простые алгоритмы, которые используются при моделировании задач гидродинамики со свободной поверхностью. Грубо говоря, наш подход состоит в том, чтобы те числа, которые по модулю меньше заранее выбранного порога, приравнивать нулю в ходе вычислений. Мы приводим примеры реальных задач, в которых используются наш подход, и в которых возникает вычислительная неустойчивость, если применять стандартные методы. Показано также, что наш метод имеет обоснование в свете идей теории регуляризации некорректных задач.

В разделе 5.4 мы рассматриваем применение сплайн-аппроксимации для нахождения численных решений. Мы рассматриваем кубические сплайны для периодических функций. Как известно, кубические сплайны являются мощным средством вычислительной математики. Для наших задач применение сплайнов интересно в свете исследования поверхностных волн, динамика которых приводит к обрушению или образованию особенностей. В таких случаях применение методов Фурье становится затруднительным в силу ухудшения сходимости ряда Фурье при потере гладкости функции, которую этот ряд изображает. Однако при отказе от применения преобразования Фурье мы сразу сталкиваемся со сложной задачей вычисления оператора Гильберта, который фигурирует во всех наших уравнениях. Действительно, для функции, представленной рядом Фурье, вычисление оператора Гильберта — простейшая операция, а вычисление сингулярного интегрального оператора требует вычисления несобственных интегралов, существующих лишь в смысле главного значения. Для вычислительной математики это (особенно в условиях машинной точности) представляет собой сложную задачу. Однако в разделе 5.4 мы приводим формулы, позволяющие вычислять оператор Гильберта для периодических функций с помощью кубических сплайнов корректным и сравнительно простым способом.

Глава 6, посвященная конструктивной оценке времени существования решений, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, является одной из наиболее важных глав настоящей работы. В этой главе приведены результаты, позволяющие проводить доказательные вычислительные эксперименты. Одной из самых сложных задач в теории поверхностных волн идеальной жидкости является вопрос о времени существования решений, описывающих нестационарные поверхностные волны. Действительно, известные теоремы о разрешимости этих уравнений гарантируют существование решений лишь на достаточно малом интервале по времени. С другой стороны, по физике дела поверхностные волны, как правило, имеют конечное время жизни. Это же убедительно демонстрируется многочисленными вычислительными экспериментами. Следовательно, при отсутствии глобальных по времени решений на первый план выходит задача об определении времени существования решений. Подход, который используется в нашей работе, подразумевает исследование времени существования индивидуальных решений. Таким образом наша задача формулируется следующим образом: при фиксированных начальных данных из подходящего класса определить с точностью до числа оценку времени существования решений (из выбранного класса), а также дать оценку погрешности для полученной оценки.

Для решения этой задачи мы применяем разработанный ранее метод невязки для получения приближенных решений. Исходная бесконечномерная система (интегро-дифференциальных уравнений в частных производных) заменяется последовательностью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом с помощью конструктивных методов мы получаем числовую последовательность, которая является оценкой времени существования решений исходной системы. Для проведения доказательных вычислений мы также рассматриваем специальные оценочные функционалы.

В разделах 6.1 и 6.2 мы устанавливаем теоремы, позволяющие оценивать время существования аналитических решений уравнений методом сведения к конечномерным системам обыкновенных дифференциальных уравнений. В этих разделах мы рассматриваем уже многократно упоминавшийся метод невязки на компактных множествах. Полученные теоремы относятся к абстрактным системам Коши—Ковалевской, однако для «целевых» уравнений (2.2.4), описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, наши результаты являются вполне конструктивными. Для практического проведения вычислительных экспериментов в разделах 6.3 и 6.4 мы рассматриваем методы оценки времени существования решений «на лету» с

помощью оценочных функционалов. Эти методы являются легко реализуемыми в реальных вычислениях. Значения этих оценочных функционалов имеют непосредственный смысл — они оценивают расстояние особенностей аналитических функций (решений исходной системы) до вещественной оси. Отметим, что методы оценочных функционалов использовались в реальных вычислительных экспериментах, проводившихся в Институте океанологии им. П. П. Ширшова РАН.

Несмотря на то, что наши методы оценки времени существования решений предполагают реализацию данных процедур с помощью компьютерной техники, сами результаты являются теоретическими. Действительно, все описываемые процедуры можно (потенциально) реализовать с помощью конечного числа элементарных арифметических операций.

В главе 7 мы рассматриваем вопрос об оценке времени существования решений нелинейных эволюционных уравнений с другой стороны. А именно, мы применяем методы математической статистики для исследования разрешимости нелинейных уравнений. И хотя методы этой главы способны дать ответ о существовании решений лишь с определенной вероятностью, для практики в прикладных задачах ответы, получаемые с помощью статистики, являются не менее ценными.

В разделе 7.1 мы рассматриваем одну нерешенную проблему в теории поверхностных волн. Существуют ли достаточно малые шары в пространстве начальных данных такие, что для каждого начального условия из этих шаров существует глобальное по времени решение задачи (2.2.4)? И хотя мы не имеем ответа на этот вопрос, в разделе 7.1 мы показываем, что серии вычислительных экспериментов подтверждают эту гипотезу.

В разделе 7.2 мы формулируем вопрос о существовании решений в свете гипотезы, к которой в дальнейшем применяем методы статистической проверки этой гипотезы. Как и в большинстве глав нашей работы, мы начинаем рассмотрение с абстрактного случая. Мы рассматриваем уравнение

$$Ax = y,$$

где $x \in X$, $y \in Y$, а X , Y являются банаховыми пространствами, оператор A является непрерывным, $A : X \rightarrow Y$. Мы ищем решения из компактного множества $M \subset X$, а правая часть выбрана из множества $Q \subset Y$.

Среди предположений относительно абстрактного нелинейного уравнения мы рассматриваем следующее:

1. для любого фиксированного $y \in Q$ и $n \geq 1$ существует единственное приближенное решение x_n .
2. если последовательность приближенных решений x_n принадлежит множеству M при всех $n \geq 1$, то для рассматриваемой правой части решение существует, и последовательность приближенных решений сходится к этому решению.

Следовательно, для тех правых частей, для которых не существует решения, найдется такой номер $n_0 \geq 1$, что $x_{n_0} \notin M$, но $x_n \in M$ при $n < n_0$. Конструктивно, рассматривая лишь конечный набор элементов x_n , мы не можем убедиться, принадлежит ли вся последовательность множеству M или нет. Однако можно построить функцию распределения вероятности F , которая определяет вероятность номера n_0 при случайно выбранном элементе y таком, что решения не существует. Мы можем пользоваться этой функцией распределения вероятностей следующим образом: пусть мы наблюдаем N приближенных решений таких, что x_n , $n = 1, \dots, N$; тогда с вероятностью $F(N)$ и вся последовательность приближенных решений принадлежит множеству M .

В разделе 7.2 мы приводим точные определения изложенной схемы, показываем, каким образом может быть построена функция распределения. Заметим, что такой подход может быть развит с помощью идей теории распознавания образов.

В главе 8 приведены различные отдельные дополнительные результаты, которые получены благодаря нашей теории.

В разделе 8.1 мы рассматриваем вопрос о существовании глобальных решений уравнений, описывающих поверхностные волны на воде. Мы получаем простой, но важный для океанологии качественный результат — если решение существует глобально по времени и остается аналитическим, то это решение в определенном смысле должно стремиться к периодическому (по времени) решению.

В разделе 8.2 рассмотрены вопросы динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью в условиях знакопеременного ускорения силы тяжести. Известно, какие сложности доставляют

исследования динамики жидкости со свободной поверхностью, когда ускорение силы тяжести принимает отрицательные значения. Оказывается, что уравнения (2.2.4) позволяют эффективно проводить численное моделирование и в этом случае. Знакопеременное значение ускорения свободного падения имеет смысл рассматривать при моделировании динамики жидкости в условиях вибрации.

Наконец, в разделе 8.3 мы рассказываем об интересном явлении в океане — о «волнах-убийцах». Уравнения Дьяченко были использованы для прямого численного моделирования волн-убийц и проведения важных вычислительных экспериментов в этой области.

Глава 9 полностью посвящена вопросам программирования тех численных методов, которые рассматривались в нашей работе. Обычно в вычислительной математике вопросы программирования численных методов считаются техническими. Однако в задачах математической гидродинамики само программирование численных методов может таить в себе немало опасностей и проблем. Об одной такой проблеме — о машинной арифметике — мы уже рассказывали. Поэтому, чтобы осветить вопрос о построении приближенных решений, необходимо не только описать математические процедуры, но и привести реализацию их на реальных компьютерах. Существует и еще один важный аргумент в пользу приведения листингов программ в настоящей работе. Поскольку мы рассматриваем вычислительные эксперименты, имеющие доказательную силу, для потенциальной проверки корректности наших экспериментов листинги программ являются частью доказательных экспериментов.

Среди многообразия языков программирования мы выбрали стандартный язык C++. Этот выбор обусловлен следующим рядом обстоятельств. Во-первых, это современный и мощный язык программирования. Во-вторых, для этого языка есть стандарты, которые поддерживаются большинством компиляторов. В-третьих, этот язык является традиционным для программ со свободным распространением, в частности, для операционных систем на основе Linux. Эффективность этого языка подтверждается и наличием превосходных оптимизирующих компиляторов.

Первой программой, которую мы рассматриваем, является программа построения решений уравнений, описывающих стационарные (бегущие, прогрессивные) волны идеальной жидкости. Существует много различных уравнений, описывающих стационарные волны идеальной жидкости, мы пользуемся уравнениями, полученными в работе [13]. Эти уравнения записаны для коэффициентов Фурье, которые записаны в форме, удобной для применения итерационных процедур. Однако прямое использование итерационных процедур сталкивается с вычислительной неустойчивостью. Поэтому в этом разделе мы описываем модифицированную итерационную процедуру.

Основная программа для расчета поверхностных волн идеальной жидкости приведена в разделе 9.3. В этом разделе мы приводим подробно комментированные листинги основных функций. При этом рассказываем о «подводных камнях». В частности мы рассказываем об эффекте «ализинга» — наложения гармоник при использовании дискретного преобразования Фурье. Игнорирование этого эффекта приводит к быстрому развалу численной схемы.

В следующем разделе 9.4 мы рассматриваем программирование численных методов для приближенного решения уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости с конечной глубиной. В этом случае мы используем уравнения, полученные в разделе 2.3. Численные методы для этих уравнений имеют ряд особенностей для программирования. Так, при реализации метода прямых возникает вычислительная неустойчивость, и для регуляризации счета необходимо применять процедуры, описанные в разделе 5.3.

В последнем разделе 9.5 мы кратко рассматриваем способы визуализации результатов расчета нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью.

Исходные тексты всех программ, которые упоминаются в нашей работе можно найти на специальном сайте автора www.cals.ru.

В обширной главе 10 приведены различные вычислительные эксперименты в теории поверхностных волн идеальной жидкости. Разделы этой главы построены по однотипной схеме:

1. общее описание эксперимента;
2. параметры вычислительного эксперимента;
3. графики, полученные в ходе эксперимента;
4. комментарии к графикам и выводы вычислительного эксперимента.

В разделе 10.1 описан вычислительный эксперимент, в котором строятся бегущие волны идеальной жидкости. Приведены различные результаты при варьировании глубины и скорости бегущей волны. При этом использована программа, описанная в разделе 9.2.

В разделе 10.2 мы делаем первую проверку нашей основной программы, описанной в разделе 9.3. Мы рассматриваем стоячие волны идеальной жидкости. Это нестационарный режим течения жидкости со свободной поверхностью. Результаты вычислительного эксперимента показывают хорошее совпадение численных расчетов с ожидаемой картиной течения.

В разделе 10.3 мы рассматриваем моделирование стационарных волн идеальной жидкости. Для демонстрации качества численного моделирования мы проводим вычислительный эксперимент на большом временном интервале, равном примерно тысяче периодов стационарных волн.

В следующем разделе 10.4 мы рассматриваем вычислительный эксперимент, в ходе которого поверхностная волна претерпевает обрушение. В этом случае мы наблюдаем конечное время существования решения у уравнений (2.2.4). В этом эксперименте мы применяем методы оценки времени существования, которые мы изучали в главе 6. Приводим графики оценочных функционалов. Показано, что наши методы конструктивной оценки времени существования хорошо работают на практике и дают хорошее совпадение с ранее полученными (в других работах) оценками времени существования.

Раздел 10.5 посвящен моделированию неустойчивости Релея—Тейлора. Режим неустойчивости Релея—Тейлора является хорошей проверкой наших методов, поскольку решения, описывающие релей-тейлоровскую неустойчивость быстро разрушаются. Мы демонстрируем, что уравнения Дьяченко (2.2.4) оказались удачными и в этом сложном случае. Мы наблюдаем нелинейную стадию развития неустойчивости Релея—Тейлора.

Следующий раздел 10.6 примыкает к разделу, посвященному неустойчивости Релея—Тейлора, поскольку в нем мы рассматриваем течение идеальной жидкости при знакопеременном ускорении свободного падения. Более точно, мы рассматриваем два вычислительных эксперимента, в которых изучается поведение жидкости со свободной поверхностью в условиях вибрации. Мы наблюдаем разрушение решений и замысловатую картину профиля свободной поверхности. Графики со значениями оценочных функционалов демонстрируют правомерность наших вычислительных экспериментов.

Последний раздел 10.7 посвящен вычислительным экспериментам, в ходе которых мы наблюдаем интересный океанологический эффект — «волны-убийцы». Для их моделирования мы используем точные уравнения гидродинамики. В приведенных экспериментах мы генерируем случайные начальные условия, после чего решаем уравнения (2.2.4) на достаточно большом временном интервале. В ходе решения отслеживаем критерии волн-убийц. Показываем, что в наших экспериментах возникают волны экстремальной амплитуды. Мы приводим их спектры и профили поверхности.

В последней главе 11 мы приводим факты, которые используются в ходе изложения, но относятся к другим разделам математики. Также мы приводим в приложении реальный протокол вычислительного эксперимента, который использовался в главе 7.

В разделе 11.1 мы приводим определения теории интерполяции банаховых пространств. Результаты теории интерполяции банаховых пространств позволяют получить точные пространства для начальных данных эволюционных уравнений. В разделе 3.3 для определения минимальной гладкости решений уравнений (2.2.4) мы используем результаты теории интерполяции банаховых пространств.

В разделе 11.2 мы рассматриваем численные методы построения конформных отображений областей, занимаемых жидкостью со свободной поверхностью, в нижнюю комплексную полуплоскость. Такие преобразования мы использовали при переходе к уравнениям в конформных переменных. В этом разделе приведена итерационная процедура, с помощью которой можно конструктивно строить эти отображения. Приведены результаты работы предлагаемых процедур.

В разделе 11.3 мы приводим листинг программы, которая эффективно реализует быстрое преобразование Фурье. Мы используем именно этот модуль быстрого преобразования Фурье, который был разработан И. Кантором. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье хорошо известны и описаны во многих книгах по вычислительной математике, однако для эффективной реализации этого алгоритма требуется большое искусство программирования.

В приложении 11.4 мы приводим реальный протокол серии вычислительных экспериментов с целью построения функции распределения.

Многие результаты, приведенные в настоящей работе, излагаются на специальном курсе «Компьютерное моделирование нелинейных волновых процессов», который читается автором в магистратуре в Российском университете дружбы народов.

Благодарности Прежде всего я выражаю искреннюю и глубокую благодарность своему учителю — профессору Александру Леонидовичу Скубачевскому. Именно работа под его руководством сделала меня математиком. И в то же время, дружеское и отеческое отношение к своим ученикам оказало очень важное влияние на мою жизнь.

Моя работа в области поверхностных волн на воде осуществляется под руководством и при внимательном отношении академика РАН Владимира Евгеньевича Захарова, случайное знакомство с которым привело меня в этот увлекательный мир математической гидродинамики, за что я выражаю ему глубокую благодарность.

Мне приятно выразить искреннюю благодарность А. И. Дьяченко, с которым меня связывает многолетняя и интересная работа, и дружеской поддержкой которого я постоянно пользовался. Многие результаты я имел возможность обсуждать с член-корреспондентом РАН Е. А. Кузнецовым, за что я выражаю ему свою благодарность. Выражаю свою благодарность член-корреспонденту РАН В. В. Пухначеву и профессору А. В. Фурсикову за внимание к моей работе.

Результаты, изложенные в этой работе, были получены в Лаборатории нелинейных волновых процессов Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН. Я выражаю благодарность заведующему нашей лабораторией Б. Н. Филюшкину и сотрудникам: Н. Г. Кожелуповой, Н. Л. Галеркиной, С. И. Бадулину, В. И. Шрире, В. В. Геогджаеву.

Я выражаю благодарность преподавателям и сотрудникам кафедры дифференциальных уравнений и математической физики Российского университета дружбы народов: О. В. Савенковой, Е. М. Варфоломееву, М. А. Скрябину, Д. С. Хованскому, В. А. Попову, Н. Б. Журавлеву, Л. Е. Росовскому, О. Э. Зубелевичу, А. В. Краснослободцеву, М. Ф. Сухнину. Я благодарен студентке магистратуры нашей кафедры А. М. Лучанской за особое внимание на лекциях, которое способствовало улучшению материала.

Часть настоящей работы была написана на борту научно-исследовательского судна «Академик Иоффе» во время научной экспедиции в районе пролива Дрейка в 2007 году, за что я благодарен капитану судна Г. А. Посконному.

Я выражаю сердечную благодарность своей жене Нигоре Шаминой за терпение и понимание во время написания монографии.

Автор с благодарностью примет замечания по адресу: www.shamin.ru

ГЛАВА 1

УРАВНЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

1.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Наша работа посвящена математической гидродинамике, поэтому мы будем рассматривать движение жидкости исключительно с механической точки зрения, игнорируя химические и другие физические процессы и свойства жидкости. Начнем с ряда упрощающих предположений, которые позволят нам построить математическую модель движения жидкости. Во-первых, мы будем считать жидкость сплошной и однородной средой, и описывать состояние жидкости, занимающей объем $Q \subset \mathbb{R}^3$ мы будем с помощью поля скоростей: $\vec{v}(x) = (v^1(x), v^2(x), v^3(x))$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in Q$. Переменные $\vec{v}(x)$ называются переменными Эйлера. Поскольку мы будем рассматривать нестационарное течение жидкости, поле скоростей будет зависеть от времени: $\vec{v} = \vec{v}(x, t)$, объем области также может зависеть от времени (в частности, в задачах со свободной поверхностью): $Q = Q(t)$. Во-вторых, мы будем считать жидкость несжимаемой. В терминах поля скоростей этот

факт выражается формулой

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, t) = v_{x_1}^1 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^3 = 0, \quad x \in Q(t). \quad (1.1.1)$$

Условие (1.1.1) доставляет значительные трудности при теоретическом изучении уравнений, а также при проведении численных расчетов. В-третьих, мы будем рассматривать жидкости при отсутствии вязкости. Известно, что такая обычная жидкость, как, например, вода, имеет очень небольшой коэффициент вязкости¹: $\nu = 1,005 \cdot 10^{-3}$ Па · с, для сравнения глицерин имеет коэффициент вязкости $\nu = 4,22$ Па · с, см. [22]. Исключение из рассмотрения вязкости жидкости (принятие коэффициента вязкости равного нулю) означает не только изменение коэффициента в уравнениях, но и изменение самих уравнений и граничных условий. Следовательно, пренебрежение коэффициентом вязкости может подвергаться критике, однако нашей целью является изучение поверхностных волн идеальной жидкости.

Так как мы будем изучать поверхностные волны, то будем рассматривать тяжелую жидкость, находящуюся в однородном поле силы тяжести. Наша жидкость будет обладать однородной плотностью. В некоторых разделах, посвященных неустойчивости Релея—Тейлора, мы будем рассматривать движение жидкости в отрицательном поле тяжести.

Перейдем к основным уравнениям, описывающим динамику идеальной несжимаемой жидкости. Для описания течения жидкости мы выбрали эйлеровы координаты. В этих координатах динамика идеальной жидкости описывается системой уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} v_t^1 + v^1 v_{x_1}^1 + v^2 v_{x_2}^1 + v^3 v_{x_3}^1 + p_{x_1} = F^1(x, t), \\ v_t^2 + v^1 v_{x_1}^2 + v^2 v_{x_2}^2 + v^3 v_{x_3}^2 + p_{x_2} = F^2(x, t), \\ v_t^3 + v^1 v_{x_1}^3 + v^2 v_{x_2}^3 + v^3 v_{x_3}^3 + p_{x_3} = F^3(x, t), \\ v_{x_1}^1 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^3 = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in Q(t), \quad (1.1.2)$$

где $\vec{F}(x, t) = (F^1, F^2, F^3)$ есть внешняя сила, действующая на жидкость, скалярная функция $p(x, t)$ называется давлением. Неизвестными в этой системе уравнений является поле скоростей $\vec{v}(x, t)$ и давление $p(x, t)$.

Система уравнений Эйлера (1.1.2) должна быть дополнена граничными и начальными условиями. Предположим, что объем жидкости остается неизменным во времени и ограничен границей, сквозь которую жидкость не может протекать. Эту границу обозначим Γ . Мы будем считать, что поверхность Γ не имеет самопересечений. За исключением специально оговоренных случаев, мы будем предполагать, что поверхность Γ является кусочно-гладкой и при почти всех $x \in \Gamma$ определен вектор внешней нормали $\vec{n}(x)$. Условие непротекания через границу означает, что нормальная скорость на границе равна нулю

$$(\vec{n}(x), \vec{v}(x, t))_{\mathbb{R}^3} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (1.1.3)$$

Граничные условия на свободной границе существенно отличаются от условий непротекания. Эти условия мы подробно обсудим чуть позже. Заметим, что при рассмотрении задач гидродинамики, возникающих в океанологии, области, занимаемые жидкостью, часто имеют огромные размеры, поэтому при численном моделировании удобно использовать периодические граничные условия.

Несмотря на то, что в систему (1.1.2) не входит производная по времени от давления, уравнения Эйлера являются эволюционной системой с выделенной переменной t , означающей время. При изучении динамики эволюционных систем необходимо задавать начальные условия

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, 0) &= \vec{v}_0(x), \\ p(x, 0) &= p_0(x). \end{aligned} \quad (x \in Q) \quad (1.1.4)$$

Поскольку давление $p(x, t_0)$ может быть определено по полю скоростей $\vec{v}(x, t_0)$ при фиксированном t_0 , начальные условия (1.1.4) должны удовлетворять соответствующим условиям согласования.

¹В Международной системе (СИ) единицей вязкости является паскаль-секунда: $1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 1 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$

Система уравнений Эйлера представляет собой очень сложную математическую задачу как в плане доказательства теорем о существовании и единственности решений этой системы, так и с вычислительной точки зрения. В двумерном случае результаты о разрешимости уравнений Эйлера получены в работах [45,50]. В трехмерном случае до настоящего момента результатов о глобальной (по времени) разрешимости уравнения Эйлера неизвестно. Существование решений на достаточно малом временном интервале в трехмерном случае рассматривалось в работах [12,53].

1.2. ДВУМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Двумерный случай существенно отличается от трехмерного случая. В двумерной ситуации мы можем ввести другие переменные, значительно более подходящие для численного счета. Предположим, что $v^3 \equiv 0$, $p_{x_3} \equiv 0$, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} v_t^1 + v^1 v_{x_1}^1 + v^2 v_{x_2}^1 + p_{x_1} = F^1(x, t), \\ v_t^2 + v^1 v_{x_1}^2 + v^2 v_{x_2}^2 + p_{x_2} = F^2(x, t), \\ v_{x_1}^1 + v_{x_2}^2 = 0. \end{cases} \quad (x, t) \in Q(t), \quad (1.2.1)$$

Введем вихрь по формуле

$$\xi = v_{x_1}^2 - v_{x_2}^1. \quad (1.2.2)$$

Предполагая, что все функции имеют нужную гладкость, исключим давление из системы уравнений (1.2.1), учитывая, что $p_{x_1 x_2} = p_{x_2 x_1}$. Для этого первое уравнение дифференцируем по переменной x_2 , второе — по x_1 , и вычитаем первое уравнение из второго. Получаем одно уравнение

$$\xi_t + v_{x_1}^1 \xi + v^1 \xi_{x_1} + v_{x_2}^2 \xi + v^2 \xi_{x_2} = F_{x_2}^1 - F_{x_1}^2.$$

Теперь, учитывая уравнение несжимаемости жидкости, имеем уравнение

$$\xi_t + v^1 \xi_{x_1} + v^2 \xi_{x_2} = F_{x_2}^1 - F_{x_1}^2. \quad (1.2.3)$$

Для решения уравнения (1.2.3) необходимо уметь восстанавливать вектор скорости \vec{v} по вихрю ξ . С этой целью введем функцию тока $\psi(x, t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_{x_2} &= v^1, \\ \psi_{x_1} &= -v^2. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Дифференцируя первое соотношение по x_2 , а второе — по x_1 , после чего складывая эти уравнения, получаем

$$-\Delta \psi = \xi. \quad (1.2.5)$$

С уравнением Лапласа (1.2.5) нужно связать соответствующие граничные условия, например, периодические. После чего эту задачу можно решить численно, а иногда и точно.

В качестве примера точного нетривиального решения рассмотрим стационарное решение задачи (1.2.3)–(1.2.5). Пусть $Q = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ есть квадрат. Предположим, что наше течение 2π -периодично по переменным x_1, x_2 . Таким образом, будем рассматривать периодические граничные условия. В качестве начального условия выберем

$$\xi_0(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin x_2, \quad (1.2.6)$$

а внешнюю силу будем считать равной нулю:

$$F_1 = 0 \quad F_2 = 0.$$

Из уравнения, учитывая периодические граничные условия, получаем, что

$$\psi = \sin x_1 \sin x_2.$$

Согласно формулам (1.2.4), имеем:

$$\begin{aligned} v^1 &= \sin x_1 \cos x_2, \\ v^2 &= -\cos x_1 \sin x_2. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнение (1.2.3), мы видим, что

$$\xi_t = 0.$$

Следовательно, решение $\xi(x, t) = \sin x_1 \cos x_2$ является решением задачи (1.2.3)–(1.2.5) с начальным условием (1.2.6) и периодическими граничными условиями. На рис. 1.2.1 приведем поле скоростей, отвечающее этому решению.

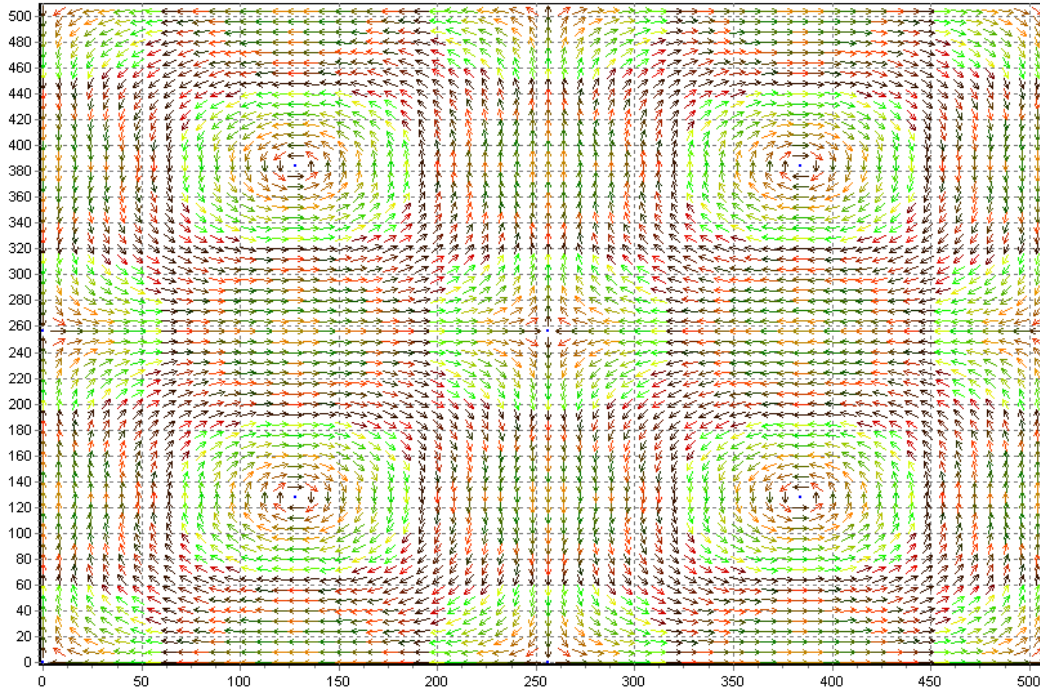


Рис. 1.2.1. Поле скоростей при $\xi_0 = \sin x_1 \sin x_2$

1.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

С этого момента мы будем рассматривать двумерное течение идеальной жидкости со свободной границей и бесконечно глубоким дном. Конкретнее, пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y) , ограниченную свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\infty < y < \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что движение жидкости является потенциальным, т. е. существует функция $\Phi(x, y, t)$ такая, что поле скоростей \vec{v} задается по формуле

$$\vec{v}(x, y, t) = \nabla \Phi(x, y, t).$$

Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi(x, y, t) = 0. \quad (1.3.1)$$

Будем рассматривать движение жидкости в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения g .

Уравнение (1.3.1) является простейшим линейным уравнением в частных производных, однако особая сложность в изучении поверхностных волн заключается в нелинейных граничных условиях. Тем более, что неизвестной (и искомой) функцией является не только потенциал скоростей, но профиль и волны — свободная поверхность, которая задается функцией $\eta(x, t)$.

Рассмотрим граничные условия. Во-первых, это так называемое кинематическое условие:

$$(\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0. \quad (1.3.2)$$

Во-вторых, динамическое условие:

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gy \right) |_{y=\eta(x,t)} = 0. \quad (1.3.3)$$

Это условие означает, что давление на свободной поверхности должно быть равно нулю. Напомним, что мы рассматриваем исключительно гравитационные поверхностные волны, исключая из нашей модели внешнее воздействие (ветер, флотирующие объекты). В-третьих, на дне должно быть выполнено условие непротекания, т. е. вертикальная компонента скорости v^2 должна быть равна нулю при $y \rightarrow -\infty$:

$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0. \quad (1.3.4)$$

По переменной x мы будем рассматривать периодические краевые условия. Поскольку мы рассматриваем нестационарную задачу, необходимо задать начальные условия для Φ и η :

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y). \quad (1.3.5)$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x). \quad (1.3.6)$$

Задача (1.3.1)–(1.3.6) представляет собой замкнутую систему уравнений. В различных функциональных классах эта задача изучалась во многих работах. Рассматривались также обобщения этой задачи на трехмерный случай. Не претендуя на полноту библиографических ссылок, приведем лишь некоторые работы: [24–26, 47, 60]. В приведенных работах доказана корректность задачи (1.3.1)–(1.3.6), в частности, было доказано существования решений этой задачи на достаточно малом временном интервале. Реальные и численные эксперименты убедительно показывают, что явление обрушения волн и/или образования особенностей за конечное время возникает для большинства волн. Поэтому проблема оценки времени существования решений, описывающих нелинейную динамику поверхностных волн, является принципиальной.

Система (1.3.1)–(1.3.6) является консервативной, т.е. сохраняющей полную механическую энергию. Полная энергия состоит из суммы кинетической T и потенциальной U энергий. Приведем формулы для вычисления энергии:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx \int_{-\infty}^{\eta(x,t)} |\nabla \Phi|^2 dy,$$

$$U = \frac{g}{2} \int_0^{2\pi} \eta^2(x, t) dx.$$

Удобно ввести величину $\Psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности (см. [13]). В работе [14] было установлено, что переменные η и Ψ являются канонически сопряженными величинами, т. е.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Psi},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \eta},$$

где гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости $H = T + U$.

В работе [37] система уравнений (1.3.1)–(1.3.6), включая граничные условия, получена из вариационных принципов.

ГЛАВА 2

ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. УРАВНЕНИЯ В КОНФОРМНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ ПО ВРЕМЕНИ

Задача (1.3.1)–(1.3.6) является достаточно сложной для непосредственного изучения. Следуя работе [13], перепишем задачу (1.3.1)–(1.3.6) в других обозначениях. В этой главе мы будем рассматривать 2π -периодические граничные условия по переменной x . Уравнения, рассматриваемые в настоящей главе, могут быть записаны и без перехода к периодическим граничным условиям, однако при рассмотрении численных методов решения этих уравнений периодические условия являются гораздо удобнее. Заметим, что для моделирования мелкомасштабных явлений в океане переход к периодическому случаю не ограничивает общности.

Сделаем несколько предположений относительно области, занимаемой жидкостью в начальный момент времени ($t = 0$). В предыдущей главе мы предполагали, что свободная поверхность идеальной жидкости ограничена однозначной непрерывной функцией $\eta(x, t)$. Если условие непрерывности является физически необходимым, то требование однозначности этой функции возникло из уравнений (1.3.1)–(1.3.6). В то же время волновое движение жидкости может иметь свободную поверхность, не имеющую однозначной проекции на ось x . Одним из важных особенностей подхода к теории волн идеальной жидкости с помощью конформных переменных является то, что уравнения в конформных переменных допускают параметрическое задание свободной поверхности. Итак, предположим, что наша жидкость ограничена свободной поверхностью, заданной геометрическим местом точек:

$$\{(x(u, t), y(u, t)) : u \in [0, 2\pi], t > 0\},$$

где $x(u, t)$, $y(u, t)$ суть непрерывные функции. Мы считаем, что свободная поверхность является 2π -периодичной вдоль оси x . В связи с этим считаем, что

$$\begin{aligned} x(0, t) &= 0, \\ x(2\pi, t) &= 2\pi, \\ y(0, t) &= y(2\pi, t). \end{aligned}$$

Помимо непрерывности функций x , y мы будем предполагать, что свободная поверхность не имеет точек самопересечений. В дальнейшем мы уточним гладкость функций x , y , а сейчас заметим, что в силу теоремы Римана мы можем совершить конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y) в полуплоскость в переменных (u, v) :

$$\begin{aligned} 0 &< u < 2\pi, \\ -\infty &< v < 0. \end{aligned}$$

После преобразования поверхность $\eta(x, t)$ может быть представлена в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} y &= y(u, t), \\ x &= u + \tilde{x}(u, t), \end{aligned}$$

где $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны оператором Гильберта

$$\begin{aligned} y &= H[\tilde{x}], \\ \tilde{x} &= -H[y]. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Оператор Гильберта представляет собой сингулярный интегральный оператор, определенный (для периодических функций) по формуле

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} f(u') \operatorname{ctg} \left(\frac{u' - u}{2} \right) du'.$$

В образах коэффициентов Фурье оператор Гильберта имеет очень простой вид:

$$H \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{iku} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i \operatorname{sign}(k) a_k e^{iku}.$$

В главах, посвященных численному моделированию, мы рассмотрим эффективные способы приближенного вычисления оператора Гильберта на равномерных и неравномерных сетках. Подробнее о свойствах оператора Гильберта см. [35].

Как показано в работе [13], переменные $y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$, где $\Psi(u, \cdot)$ является значением потенциала скоростей на свободной поверхности, полностью описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$y_t = y_u H \left[\frac{H[\Psi_u]}{J} \right] - x_u \frac{H[\Psi_u]}{J}, \quad (2.1.2)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + (H[\Psi_u])^2}{2J} + H \left[\frac{H[\Psi_u]}{J} \right] \Psi_u + \frac{H[\Psi_u]}{J} H[\Psi_u] - gy, \quad (2.1.3)$$

где $J = x_u^2 + y_u^2$ — якобиан отображения. С уравнениями связываются 2π -периодические граничные условия по переменной u и начальные условия

$$y(u, 0) = y_0(u), \quad (2.1.4)$$

$$\Psi(u, 0) = \Psi_0(u). \quad (2.1.5)$$

Заметим, что в силу соотношений (2.1.1), функция x , для вычисления J , однозначно восстанавливается по функции y . Несмотря на некоторую громоздкость уравнений (2.1.2)–(2.1.3), эти уравнения разрешены относительно производных по времени. Следовательно, мы имеем эволюционную задачу, которую можно пытаться численно решать методом Фурье. Однако, как показали вычислительные опыты, применение стандартных численных схем к этим уравнениям натывается на серьезные трудности, связанные с численной неустойчивостью вычислительного процесса. В пункте 5.3 мы покажем, что эти трудности связаны главным образом с погрешностями машинных вычислений. В этом же пункте мы рассмотрим способы регуляризации вычислительного процесса в условиях машинной точности.

В следующем пункте мы рассмотрим уравнения, названные уравнениями Дьяченко, которые являются следствием уравнений (2.1.2)–(2.1.3). При этом новые уравнения будут иметь значительно более простой вид и будут значительно более подходить для теоретического и численного анализа.

2.2. УРАВНЕНИЯ ДЬЯЧЕНКО

Как оказалось (см. [62]), уравнения (2.1.2)–(2.1.3) можно переписать в более удобной форме. Образует пару комплексных функций

$$z(w, t) = x(w, t) + iy(w, t)$$

и

$$\Pi(u, t) = \Psi(u, t) + iH[\Psi(u, t)],$$

где $w = u + iv$. Введем новые переменные $R(w, t)$ и $V(w, t)$ по следующим формулам:

$$R(w, t) = \frac{1}{z_w}$$

и

$$V(w, t) = i \frac{\Pi_w}{z_w}.$$

Функции R и V аналитичны в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим условиям:

$$R(w, t) \rightarrow 1, \quad |w| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} w \leq 0,$$

$$V(w, t) \rightarrow 0, \quad |w| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} w \leq 0.$$

Как показано в работе [62], функции R и V удовлетворяют следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$R_t = i(UR_w - U_w R), \quad (2.2.1)$$

$$V_t = i(UV_w - B_w R) + g(R - 1), \quad (2.2.2)$$

где

$$U = P(V\bar{R} + \bar{V}R), B = P(V\bar{V}), P = \frac{1}{2}(I + iH) \quad (2.2.3)$$

Эти уравнения называются уравнениями Дьяченко.

Уравнения (2.2.1)–(2.2.2) справедливы в нижней полуплоскости комплексной области, однако нас будут интересовать решения лишь на вещественной оси при $v = 0$. Приведем окончательную постановку задачи:

$$R_t(u, t) = i(U(u, t)R_u(u, t) - U_u(u, t)R(u, t)),$$

$$V_t(u, t) = i(U(u, t)V_u(u, t) - B_u(u, t)R(u, t)) + g(R(u, t) - 1),$$

$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < t < T, \quad (2.2.4)$$

$$R(0, t) = R(2\pi, t), \quad V(0, t) = V(2\pi, t), \quad 0 < t < T,$$

$$R(u, 0) = R_0(u), \quad V(u, 0) = V_0(u), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Решая систему (2.2.4), мы получаем функции $R(u, t)$ и $V(u, t)$. Покажем как с помощью этих функций восстановить свободную поверхность и значение потенциала на свободной поверхности. Воспользуемся следующим представлением для функций R, V :

$$R(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)e^{-iku},$$

$$V(u, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)e^{-iku}.$$

Тогда для функции $\frac{1}{R}$ имеет место представление

$$\frac{1}{R} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)e^{-iku}.$$

Значения коэффициентов c_k несложно получить рекуррентно из соотношения

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)e^{-iku}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)e^{-iku}\right) = 1.$$

Умножением рядов можно получить разложение

$$-i \frac{V(u, t)}{R} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)e^{-iku}.$$

Теперь восстановим функцию $z(u, t)$ следующим образом:

$$z(u, t) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t)e^{-iku},$$

а функцию $\Pi(u, t)$ — по формуле

$$\Pi(u, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} d_k(t)e^{-iku}.$$

Свободную поверхность мы получим как геометрическое место точек по следующему правилу:

$$\Gamma(t) = \{(\operatorname{Re} z(u, t), \operatorname{Im} z(u, t)) : u \in (0, 2\pi)\}.$$

Значение потенциала на свободной поверхности находится по формуле

$$\Psi(u, t) = \operatorname{Re} \Pi(u, t).$$

В дальнейшем мы не раз убедимся, что уравнения (2.2.4) являются очень удобными для теоретического и численного анализа. Заметим, что вид этих уравнений получен в предположении бесконечно глубокой воды. Форму этих уравнений можно распространить на случай конечной глубины, однако получаемые при этом уравнения теряют многие «хорошие качества», в частности устойчивости вычислительного процесса при численном моделировании. Заметим также, что функции R и V хотя и полностью описывают динамику жидкости со свободной поверхностью, но не имеют прямого физического смысла, и, как следствие, законы сохранения (например, энергии) напрямую не могут быть записаны в переменных R , V , хотя через переменные Ψ и z , которые также являются конформными, можно выписать законы сохранения энергии. Мы приведем эти формулы в следующем пункте.

2.3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Перейдем к рассмотрению нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью и конечной глубиной.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y) , ограниченную свободной поверхностью

$$-\bar{h} < y < \eta(x, t),$$

$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем:

$$v(x, y, t) = \nabla \Phi(x, y, t),$$

где $v(x, y, t)$ — двумерное поле скоростей, $\Phi(x, y, t)$ — потенциал. Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} v = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi(x, y, t) = 0.$$

С этим уравнением связываются следующие граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} (\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ \left(\Phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gy \right)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ \Phi_y|_{y=-\bar{h}} &= 0, \eta|_{t=0} = \eta_0(x), \\ \Phi|_{t=0} &= \Phi_0(x, y). \end{aligned}$$

Здесь g — ускорение поля тяжести.

Удобно ввести величину $\Psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности (см. [13]). В. Е. Захаровым было установлено, что переменные η и Ψ являются канонически сопряженными величинами, т. е.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Psi},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \eta},$$

где гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости $H = T + U$,

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\bar{h}}^{\eta(x,t)} |\nabla \Phi|^2 dy,$$

$$U = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(x, t) dx.$$

Следуя работе [13], совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y) в полупространство в переменных (u, v)

$$\begin{aligned} -\infty < u < \infty, \\ -h < v < 0. \end{aligned}$$

После преобразования поверхность $\eta(x, t)$ может быть представлена в параметрическом виде

$$\begin{aligned} y &= y(u, t), \\ x &= u + \tilde{x}(u, t). \end{aligned}$$

Переменные $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны соотношением

$$y = R[\tilde{x}],$$

где R — интегральный оператор вида

$$R[f](u) = \frac{1}{2h} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{\sinh(\pi/2h(u' - u))} du'.$$

Обратный к R оператор T имеет вид

$$T[f](u) = \frac{1}{h} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{1 - e^{-\pi/(h(u-u'))}} du'.$$

Как показано в работе [13], переменные $y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$ полностью описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегро-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных по времени:

$$y_t = -y_u T \left[\frac{R[\Psi_u]}{J} \right] + x_u \frac{R[\Psi_u]}{J}, \quad (2.3.1)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 - (R[\Psi_u])^2}{2J} - T \left[\frac{R[\Psi_u]}{J} \right] \Psi_u - gy, \quad (2.3.2)$$

где $J = x_u^2 + y_u^2$ — якобиан отображения.

Уравнения (2.3.1)–(2.3.2) мы будем рассматривать с периодическими граничными условиями. Пусть $u \in (0, 2\pi)$, а функции y, Ψ представлены в виде:

$$y(u, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t) e^{iku},$$

$$\Psi(u, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k(t) e^{iku}.$$

Операторы R и T в фурье-представлении имеют простой вид:

$$y_k = R_k \tilde{x}_k, \quad R_k = i \operatorname{th} kh,$$

$$\tilde{x}_k = T_k y_k, \quad T_k = -i \operatorname{cth} kh.$$

Операция дифференцирования по переменной u в Фурье-представлении имеет обычный вид:

$$D_k = ik.$$

Для вычисления операторов R , T , D можно применять быстрое преобразование Фурье.

2.4. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

Среди поверхностных волн наиболее исследованными являются стационарные волны. Стационарные волны изучались во многих работах, среди которых отметим основополагающие в теории стационарных волн: [27, 28, 51, 56]. Приведем уравнения в конформных переменных, рассмотренных выше, для определения профиля стационарных волн.

Под стационарными или бегущими волнами мы будем понимать такие решения уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, которые могут быть записаны в форме

$$f(u, t) = F(u - ct),$$

где c — скорость бегущей волны.

Параметрами для симметрических стационарных волн является период, который мы будем считать равным $\frac{2\pi}{k}$, где k — целое число, и постоянная скорость стационарной волны, которую обозначим c .

Профиль стационарной волны будем искать в виде

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nku.$$

Введем обозначение

$$S_n = \frac{1}{kn}.$$

Как показано в работе [13], коэффициенты a_n удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений с параметром λ

$$(\lambda^2 - gS_1)a_1 = \frac{g}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{S_1(S_m + S_{m+1})}{S_m S_{m+1}} \right) a_m a_{m+1}, \quad (2.4.1)$$

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - gS_n)a_n &= \frac{g}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{S_n(S_m + S_{m+n})}{S_m S_{m+n}} \right) a_m a_{m+n} + \\ &+ \frac{g}{4} \sum_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{S_n(S_m + S_{n-m})}{S_m S_{n-m}} \right) a_m a_{n-m}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Коэффициент a_0 вычисляется по формуле:

$$a_0 = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{S_n}. \quad (2.4.3)$$

Параметр λ связан со скоростью стационарной волны c следующим образом

$$\lambda^2 = \left(1 - 2 \left\langle 1 - \frac{1}{|z_u|^2} \right\rangle \right) c^2, \quad (2.4.4)$$

где угловые скобки означают усреднение по периоду.

После решения системы уравнений (2.4.1)–(2.4.3) мы находим y и $z = u - H[y] + y$. Зная z и параметр λ , мы можем из соотношения (2.4.4) найти скорость c .

После того как мы нашли профиль стационарной волны, мы можем найти и значение потенциала на границе из формулы (см. [13])

$$cy_u = H\Psi_u. \quad (2.4.5)$$

Как известно, решение системы (2.4.1)–(2.4.2) существует не для всех значений параметра. Еще в работе Стокса [56] был получен результат о предельной волне. Им было показано, что при увеличении скорости стационарных гравитационных волн происходит заострение гребней и образуется угол, равный 120° .

Уравнения (2.4.1)–(2.4.3) представляют собой бесконечную систему нелинейных уравнений. Решения этих уравнений являются коэффициентами Фурье. В случае докритического значения скорости профиль поверхностной волны является аналитической функцией, а коэффициенты ряда Фурье стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью. Поэтому для приближенного решения уравнений (2.4.1)–(2.4.3) можно положить $a_n = 0$ при $n > N$, для достаточно большого значения N .

Уравнения (2.4.1)–(2.4.3) записаны в форме, удобной для решения итерационными методами, однако на этом пути возникают вычислительные трудности. В разделе 9.2 мы предложим устойчивые алгоритмы для численного решения уравнений (2.4.1)–(2.4.3).

ГЛАВА 3

КОРРЕКТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ В КОНФОРМНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. ШКАЛЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $Q_s = \{w = u + iv : 0 < u < 2\pi, |v| < s\}$ — область в \mathbb{C} , $0 < s < \infty$. Введем шкалу банаховых пространств пространств E_s следующим образом: пространство E_s состоит из сужений на Q_s функций, аналитических в полосе $\{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} w| < s\}$, 2π -периодических по переменной u и вещественных при $v = 0$, с конечной нормой

$$\|f\|_{E_s} = \left(\sup_{|v| \leq s} \|f\|_{W_2^1(0, 2\pi)}^2 \right)^{1/2},$$

где $W_2^1(0, 2\pi)$ — пространство Соболева первого порядка. Для сокращения письма норму в пространстве E_s будем обозначать через $\|\cdot\|_s$.

Лемма 3.1.1. Пусть $f, g \in E_s$. Тогда

$$fg \in E_s$$

и

$$\|fg\|_s \leq c \|f\|_s \|g\|_s.$$

Доказательство. Оценим норму $\|fg\|_s$:

$$\|fg\|_s^2 \leq \sup_{|v| \leq s} (\|fg\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 + \|f'g\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 + \|fg'\|_{L_2(0, 2\pi)}^2).$$

Оценим отдельные слагаемые с помощью теоремы вложения Соболева:

$$\sup_{|v| \leq s} \|fg\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 \leq c_1 \sup_{|v| \leq s} \|f\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 \|g\|_{C[0, 2\pi]}^2 \leq c_2 \|f\|_s^2 \|g\|_s^2.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично:

$$\begin{aligned} \sup_{|v| \leq s} \|f'g\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 &\leq c_3 \sup_{|v| \leq s} \|f'\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 \|g\|_{C[0, 2\pi]}^2 \leq c_4 \|f\|_s^2 \|g\|_s^2, \\ \sup_{|v| \leq s} \|fg'\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 &\leq c_5 \sup_{|v| \leq s} \|f\|_{C[0, 2\pi]}^2 \|g'\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 \leq c_6 \|f\|_s^2 \|g\|_s^2. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.1.2. Пусть f_1, f_2, g_1, g_2 принадлежат шару радиуса $M > 0$ в пространстве E_s . Тогда имеет место неравенство

$$\|f_1g_1 - f_2g_2\|_s \leq c(M) (\|f_1 - f_2\|_s + \|g_1 - g_2\|_s).$$

Доказательство. В силу леммы 3.1.1 имеем

$$\begin{aligned} \|f_1g_1 - f_2g_2\|_s &= \|f_1g_1 - f_1g_2 + f_1g_2 - f_2g_2\|_s \leq \|f_1(g_1 - g_2)\|_s + \\ &+ \|(f_1 - f_2)g_2\|_s \leq c(M) (\|f_1 - f_2\|_s + \|g_1 - g_2\|_s). \end{aligned}$$

□

Рассмотрим оператор Гильберта, который, напомним, для периодических функций вводится следующим образом:

$$\mathbf{H}[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} f(u') \operatorname{ctg} \left(\frac{u' - u}{2} \right) du'.$$

Лемма 3.1.3. *Оператор Гильберта непрерывен в пространстве E_s и*

$$\|\mathbf{H}f\|_s = \|f\|_s$$

для любой $f \in E_s$.

Доказательство. Пусть $f \in E_s$. Тогда для нормы $\|f\|_s$ имеем следующее представление

$$\|f\|_s^2 = \sup_{|v| \leq s} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^2 e^{2kv} |f_k|^2 \right),$$

где f_k суть коэффициенты Фурье. Поскольку

$$\mathbf{H}[e^{iku}] = i \operatorname{sign}(k) e^{iku},$$

имеем

$$\|\mathbf{H}f\|_s^2 = \sup_{|v| \leq s} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^2 e^{2kv} |i \operatorname{sign}(k) f_k|^2 \right) = \|f\|_s^2.$$

□

Введем пространство \tilde{E}_s состоящее из функций аналитических в области

$$\Pi = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : 0 < u < 2\pi, |v| < s\}$$

и 2π -периодических по переменной u со скалярным произведением:

$$(f, g)_{\tilde{E}_s} = \int_{\Pi} f(w) \overline{g(w)} dw.$$

Пространство \tilde{E}_s является гильбертовым пространством (см. [10, теорема 1, гл. 1]). Очевидно, что вложение $E_s \subset \tilde{E}_s$ является непрерывным. С другой стороны, для любых $s' > 0$ и $s > s'$ имеет место непрерывное вложение $\tilde{E}_s \subset E_{s'}$.

3.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ

Распишем уравнения (2.2.4) в вещественной форме при $v = 0$. Пусть $R = R_1 + iR_2$, $V = V_1 + iV_2$. Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= U'_1 R_2 + U'_2 R_1 - U_1 R'_2 - U_2 R'_1, \\ \dot{R}_2 &= U_1 R'_1 + U_2 R'_2 - U'_1 R_1 + U'_2 R_2, \\ \dot{V}_1 &= B'_1 R_2 + B'_2 R_1 - U_1 V'_2 - U_2 V'_1 + g(R_1 - 1), \\ \dot{V}_2 &= U_1 V'_1 + U_2 V'_2 - B'_1 R_1 + B'_2 R_2 + gR_2, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 V_1 + R_2 V_2, \\ U_2 &= \mathbf{H}[R_1 V_1 + R_2 V_2], \\ B_1 &= \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2), \\ B_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{H}[V_1^2 + V_2^2]. \end{aligned}$$

Запишем уравнения (3.2.1) в векторной форме. Через E_s^4 обозначим пространство $\prod_{l=1}^4 E_s$, где \prod означает прямое произведение пространств. Введем отображение $F : E_s^4 \rightarrow E_s^4$, порожденное правой частью уравнений (3.2.1). Введем обозначение $W = [R_1, R_2, V_1, V_2]^T$. Тогда имеем следующую запись уравнений

$$\dot{W} = F(W). \quad (3.2.2)$$

Уравнение (3.2.2) будем рассматривать с начальным условием

$$W(0) = W_0 \quad (3.2.3)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} R_{10} &= 1, R_{10} = 0, \\ V_{10} &= 0, V_{20} = 0, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

где $R_{10}, R_{20}, V_{10}, V_{20}$ суть коэффициенты Фурье функций R_1, R_2, V_1, V_2 , соответствующие $k = 0$.

Определение 3.2.1. Функция $W(t) = [R_1(t), R_2(t), V_1(t), V_2(t)]^T$, аналитичная на $[0, T)$ со значениями в E_s^4 ($s > 0$), называется *аналитическим решением* задачи (3.2.2)–(3.2.4), если W удовлетворяет (3.2.2)–(3.2.4).

Теорема 3.2.1. Пусть $W_0 \in E_{s_1}^4$ и W_0 удовлетворяет условиям (3.2.4). Тогда для любого $s_2 \in (0, s_1)$ существует $T = T(s_2)$ такое, что при $t \in (0, T)$ существует единственное аналитическое решение задачи (3.2.2)–(3.2.4).

Доказательство. Выберем произвольные s, s' такие, что $0 < s' < s < s_1$. Пусть $W_1, W_2 \in E_s^4$ и $\|W_1\|_{E_s^4} < M$, $\|W_2\|_{E_s^4} < M$. Покажем, что оператор F удовлетворяет условию

$$\|F(W_1) - F(W_2)\|_{E_{s'}^4} \leq c(M) \frac{\|W_1 - W_2\|_{E_s^4}}{s - s'}. \quad (3.2.5)$$

Функция $f \in E_s$ может быть представлена рядом Фурье

$$f(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikw},$$

тогда

$$f'(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik) f_k e^{ikw}.$$

Учитывая, что функция $\operatorname{Im} f = 0$ при $v = 0$, имеем $f_k = \bar{f}_{-k}$. Из оценки

$$k^2 e^{2|k|s} \leq \frac{e^2}{(s - s')^2} e^{2|k|s}$$

следует, что

$$\|f'\|_{s'} \leq c_1 \frac{\|f\|_s}{s - s'}.$$

Отсюда и из лемм 3.1.2, 3.1.3 следует (3.2.5).

Рассмотрим вспомогательную задачу относительно W_a в E_s^4 :

$$\dot{W}_a = F(W_a + W_0), \quad (3.2.6)$$

$$W_a(0) = 0. \quad (3.2.7)$$

В силу оценки (3.2.5), к задаче (3.2.6), (3.2.7) применима теорема Ниренберга–Нисиды [29, с. 220]. Вследствие этой теоремы существует $T = T(s_2) > 0$ такое что при $t \in (0, T)$ существует единственное аналитическое решение задачи (3.2.6), (3.2.7). Тогда функция $W(t) = W_a(t) + W_0$

будет аналитическим решением задачи (3.2.2), (3.2.3). Нужно показать, что функция W удовлетворяет условию (3.2.4). По условию теоремы, начальное условие W_0 удовлетворяет этому условию. С другой стороны, пусть $A \in E_s^4$. Тогда для функции $B = F(A) \in E_s^4$ имеет место

$$\begin{aligned} B_{10} &= 0, \\ B_{20} &= 0, \\ B_{30} &= 0, \\ B_{40} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция W удовлетворяет условию (3.2.4). \square

В приложениях при численном моделировании удобно работать с решениями на вещественной оси в пространствах Соболева. Пусть $Q = (0, 2\pi) \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ — прямоугольник в \mathbb{R}^2 . Следствием теоремы 3.2.1 является следующая теорема.

Теорема 3.2.2. Пусть $[R_1, R_2, V_1, V_2]^T$ — аналитическое решение задачи (3.2.2)–(3.2.4) при $t \in [0, T]$. Тогда при $v = 0$ для любого $k \geq 1$ имеем $R_1, R_2, V_1, V_2 \in W_2^k(Q)$.

3.3. МИНИМАЛЬНАЯ ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ

В настоящей главе мы изучали аналитические решения задачи (2.2.4). В этом разделе мы будем предполагать минимальные требования на начальную функцию. Соответственно, мы дадим более общее (менее гладкое) определение решения задачи (2.2.4). Заметим, что теоремы о корректной разрешимости задачи (2.2.4) требуют существенной гладкости (аналитичности) от начального условия. С другой стороны, для обоснования численных схем полезно рассматривать решения с меньшей гладкостью.

Будем рассматривать решения из пространства $\widetilde{W}_4^1(Q)$. Поскольку мы имеем дело с начальными задачами для эволюционных уравнений, необходимо определить класс начальных функций, для которых можно корректно определить след при $t = 0$. Вопросы конструктивного определения пространств начальных данных рассматривались, в частности, в [38]. В этой работе было показано, что исчерпывающий ответ на вопрос о пространствах начальных данных можно дать в терминах теории интерполяции банаховых пространств, см. [21, 36]. Основные обозначения и определения из теории интерполяции банаховых пространств мы привели в приложении 11.1.

Мы будем рассматривать пространство Соболева $\widetilde{W}_4^1(0, 2\pi)$ с периодическими условиями. Это пространство получено пополнением функций

$$\{f \in C^1[0, 2\pi] : f(0) = f(2\pi)\}$$

по норме пространства $W_4^1(0, 2\pi)$

$$\|f\|_{W_4^1(0, 2\pi)} = \left(\int_0^{2\pi} (|f(x)|^4 + |f'(x)|^4) dx \right)^{1/4}.$$

Пусть пространство $[L_4(0, 2\pi), \widetilde{W}_4^1(0, 2\pi)]_{1/2}$ есть интерполяционное пространство, см. приложение 11.1. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3.1. Пусть $F \in \widetilde{W}_4^1(Q)$. Тогда след функции $F(u, t)$ при $t = 0$ принадлежит пространству $[L_4(0, 2\pi), \widetilde{W}_4^1(0, 2\pi)]_{1/2}$.

Пусть $\varphi \in [L_4(0, 2\pi), \widetilde{W}_4^1(0, 2\pi)]_{1/2}$. тогда существует функция $F \in \widetilde{W}_4^1(Q)$ такая, что $F|_{t=0} = \varphi$.

Из теоремы 3.3.1 видно, что если мы хотим рассматривать решения из пространства $\widetilde{W}_4^1(Q)$, то начальные функции R_0, V_0 мы должны рассматривать из пространства $[L_4(0, 2\pi), \widetilde{W}_4^1(0, 2\pi)]_{1/2}$.

Введем функционал невязки для задачи (2.2.4):

$$\begin{aligned} J(R, V) &= \|R_t - i(UR_u - U_u R)\|_{L_1(Q)} + \|V_t - i(UV_u - B_u R) - g(R - 1)\|_{L_1(Q)} + \\ &+ \|R|_{t=0} - R_0\|_{L_1(0, 2\pi)} + \|V|_{t=0} - V_0\|_{L_1(0, 2\pi)}, \end{aligned}$$

где функции U и B определены по формулам

$$U = \frac{1}{2}(I + iH)(R\bar{V} + \bar{R}V), B = \frac{1}{2}(I + iH)(V\bar{V}).$$

Лемма 3.3.1. *Функционал J непрерывен на $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$.*

Доказательство. Пусть $R^k, V^k \in \widetilde{W}_4^1(Q)$, $R^k \rightarrow R$, $V^k \rightarrow V$ в $\widetilde{W}_4^1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$. В силу непрерывности оператора дифференцирования $D_t : \widetilde{W}_4^1(Q) \rightarrow L_1(Q)$ имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_t^k - R_t\|_{L_1(Q)} = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|V_t^k - V_t\|_{L_1(Q)} = 0.$$

Пусть

$$W^k = \bar{R}^k V^k + \bar{V}^k R^k$$

и

$$W = \bar{R}V + \bar{V}R.$$

Эти функции принадлежат гильбертову пространству $\widetilde{W}_2^1(Q)$. В силу непрерывности операторов дифференцирования

$$D_t : \widetilde{W}_2^1(Q) \rightarrow L_2(Q)$$

и

$$D_u : \widetilde{W}_2^1(Q) \rightarrow L_2(Q),$$

теоремы Лебега о предельном переходе и неравенства Гельдера имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|W^k - W\|_{\widetilde{W}_2^1(Q)}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q (|W^k - W|^2 + |D_t W^k - D_t W|^2 + |D_u W^k - D_u W|^2) du dt = 0.$$

Представим функцию W^k в виде

$$W^k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^k(t) e^{imu},$$

где ряд сходится в пространстве $\widetilde{W}_2^1(Q)$. Применяя к W^k оператор P , мы видим, что

$$U^k = \frac{1}{2} c_0^k(t) + \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m^k(t) e^{imu}.$$

Линейный оператор P непрерывен в пространстве $\widetilde{W}_2^1(Q)$, поэтому $U^k \rightarrow U$ в $\widetilde{W}_2^1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$.

Так как

$$\begin{aligned} \|U^k R_u^k\|_{L_1(Q)} &\leq \|U^k\|_{L_2(Q)} \|R_u^k\|_{L_2(Q)}, \\ \|U_u^k R^k\|_{L_1(Q)} &\leq \|U_u^k\|_{L_2(Q)} \|R^k\|_{L_2(Q)}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} U^k R_u^k &\rightarrow U R_u, \\ U_u^k R^k &\rightarrow U_u R \end{aligned}$$

в $L_1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$.

Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} U^k V_u^k &\rightarrow U V_u, \\ B_u^k R^k &\rightarrow B_u R \end{aligned}$$

в $L_1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$. □

Определение 3.3.1. Пару функций $R^*, V^* \in \widetilde{W}_4^1(Q)$ назовем *решением* задачи (2.2.4), если $J(R^*, V^*) = 0$.

Легко видеть, что аналитическое решение задачи (2.2.4) является и решением в смысле определения 3.3.1. Однако вопрос о существовании решения для начальных данных из пространства $\left[\widetilde{W}_4^1(0, 2\pi), L_4(0, 2\pi)\right]_{1/2}$ является открытым.

ГЛАВА 4

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ШКАЛАХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

4.1. ОПИСАНИЕ АБСТРАКТНОГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА

Система (2.2.4) является эволюционной системой интегро-дифференциальных уравнений, разрешенной относительно производных по времени. Рассматриваемая система представляет собой бесконечномерную систему. Как правило непосредственное нахождение решений таких систем нам недоступно. Поэтому мы будем изучать системы этих уравнений с помощью аппроксимации бесконечномерных систем конечномерными системами, которые представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получаемые при этом нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений мы можем исследовать численно, находя приближенные решения. В настоящей работе изучаются методы, позволяющие делать доказательные выводы об исходной системе, наблюдая приближенные решения.

Рассмотрим постановку абстрактной задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве.

Пусть H, V являются комплексными банаховыми пространствами. Предположим, что имеет место непрерывное вложение $V \subset H$. Будем предполагать, что пространства H и V являются сепарабельными.

Введем непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор

$$A : V \rightarrow H.$$

Будем рассматривать абстрактную задачу Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве H :

$$\begin{aligned} h_t(t) &= Ah(t), \quad t > 0, \\ h(0) &= \varphi, \quad \varphi \in V. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Определение 4.1.1. Функция $h \in C^1([0, T]; V)$, удовлетворяющая (4.1.1), называется *решением* задачи (4.1.1) на отрезке $[0, T]$.

В настоящей главе мы не изучаем вопрос о существовании и единственности решений задачи (4.1.1). Разумеется, для произвольного оператора A и начального условия $\varphi \in V$ задача может не иметь решений или иметь не единственное решение. Чтобы гарантировать существование и единственность решений задачи (4.1.1), необходимо накладывать дополнительные условия на оператор A . В настоящей работе в главе 3 мы использовали теорему Ниренберга—Нисиды.

Характерным случаем при изучении уравнений вида (4.1.1) является существование единственного решения на достаточно малом временном интервале. При этом время существования решения не может быть получено из абстрактных теорем, гарантирующих существование решений.

Рассмотрим абстрактный проекционный метод сведения системы уравнений (4.1.1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предположим, что для любого $N > 0$ существует N -мерное подпространство $H^N \subset H$ такое, что $H^N \subset W$, где W — банахово пространство, компактно вложенное в V . Через $P_N : H \rightarrow H^N$ обозначим проектор. Предположим, что конечномерные пространства H^N выбраны так, что для любого $\psi \in W$ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(I - P_N)\psi\|_H = 0. \tag{4.1.2}$$

Рассмотрим конечномерную аппроксимацию для задачи (4.1.1) для функции $h^N \in H^N$

$$\begin{aligned} h_t^N(t) &= P_N A h^N(t), \quad t > 0, \\ h^N(0) &= P_N \varphi. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Задача (4.1.3) является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений N -го порядка. Действительно, функция $h^N(t)$ принадлежит конечномерному пространству H^N при фиксированном t . Поскольку в конечномерном пространстве можно ввести базис, обозначим для пространства H^N базис через $\{e_1^N, e_2^N, \dots, e_N^N\}$. Так как мы не предполагали, что пространство является гильбертовым, то базисные элементы e_k^N , вообще говоря, зависят от N . Поэтому, для функции h^N имеет место следующее представление:

$$h^N(t) = \sum_{k=1}^N h_k^N(t) e_k^N.$$

Следовательно, функция h^N полностью задается набором числовых функций

$$\{h_1^N(t), h_2^N(t), \dots, h_N^N(t)\}.$$

В дальнейшем задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решается численно, как правило, стандартными методами, например, методами Рунге—Кутты. Для нелинейных задач имеет смысл пользоваться явными и одношаговыми методами. Эти методы требуют вычисления лишь правых частей уравнения (4.1.3), без необходимости решать системы (линейных или нелинейных) алгебраических уравнений.

4.2. ОБОСНОВАНИЕ АБСТРАКТНОГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА

Доказывать сходимость приближенных решений, полученных с помощью проекционного метода мы будем в предположении существования решения основной задачи (4.1.1). Последняя оговорка принципиальна для нашего изложения, поскольку наш приближенный метод не позволяет доказывать существования решений исходной системы.

Теорема 4.2.1. *Предположим, что на отрезке $[0, T]$ существует единственное решение h задачи (4.1.1) такое, что $h(t) \in W$ при $t \in [0, T]$. Пусть также на отрезке $[0, T]$ существуют единственные решения h^N задачи (4.1.3) при всех $N > 0$ такие, что h^N принадлежат ограниченному множеству пространства W .*

Тогда приближенные решения h^N сходятся к решению h в пространстве $C([0, T]; H)$, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|h^N - h\|_{C([0, T]; H)} = 0. \quad (4.2.1)$$

Доказательство. Введем функционал невязки для задачи (4.1.1) следующим образом:

$$J(h) = \left\| h(t) - \varphi - \int_0^t A h(s) ds \right\|_{C([0, T]; H)}.$$

Этот функционал определен на всем $C([0, T]; V)$ и легко видеть, что он является непрерывным на этом пространстве. При этом легко видеть, что если h^* — решение задачи (4.1.1), то $J(h^*) = 0$. В дальнейшем мы покажем и обратное — если для некоторого $h \in C([0, T]; V)$ функционал $J(h) = 0$, то функция h является решением задачи (4.1.1).

Последовательность решений $h^N(t)$ лежит в ограниченном множестве пространства W при всех $t \in [0, T]$. Так как пространство W компактно вложено в V , то в силу обобщенной теоремы Арцела ([17, теорема 7, гл. 2]) последовательность h^N является предкомпактной в пространстве $C([0, T]; V)$ и, следовательно, из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность h^{N_m} , сходящуюся в V . Обозначим предел этой подпоследовательности через h^* . В силу

непрерывности функционала J имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} J(h^{N_m}) = J(h^*)$. Покажем, что $J(h^*) = 0$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} J(h^{N_m}) &= \max_{t \in [0, T]} \left\| h^{N_m}(t) - \varphi - \int_0^t A h^{N_m}(s) ds \right\|_H = \\ &= \left\| P_{N_m} \varphi - \varphi + \int_0^t P_{N_m} A h^{N_m}(s) ds - \int_0^t A h^{N_m}(s) ds \right\|_H \leq \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \|P_{N_m} \varphi - \varphi\|_H + \max_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t (P_{N_m} A h^{N_m}(s) - A h^{N_m}(s)) ds \right\|_H. \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t (P_{N_m} A h^{N_m}(s) - A h^{N_m}(s)) ds \right\|_H &= \max_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t (I - P_{N_m}) A h^{N_m}(s) ds \right\|_H \leq \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \int_0^t \|(I - P_{N_m}) A h^{N_m}(s)\|_H ds. \end{aligned}$$

Так как $A h^{N_m}(t)$ принадлежит ограниченному множеству в H , то равномерно по $t \in [0, T]$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(I - P_{N_m}) A h^{N_m}(t)\|_H = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(h^{N_m}) = 0.$$

Покажем, что если $J(h^*) = 0$, то h^* есть решение задачи (4.1.1). Действительно, имеем

$$h^*(t) = \int_0^t A h^*(s) ds + \varphi. \quad (4.2.2)$$

В правой части у нас функция, непрерывно дифференцируемая по t , со значениями в V , следовательно, функция $h^*(t)$ принадлежит пространству $C^1([0, T]; V)$. Дифференцируя (4.2.2), мы видим, что h^* удовлетворяет уравнению (4.1.1). Непосредственно проверяется, что $h^*(0) = \varphi$.

Покажем теперь, что и сама последовательность $\{h^N\}$ сходится к h^* . В самом деле, имеем

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \|h^N - h^*\|_{C([0, T]; H)} \geq 0.$$

Пусть

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \|h^N - h^*\|_{C([0, T]; H)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|h^{N_p} - h^*\|_{C([0, T]; H)}.$$

В силу компактности вложения

$$C^1([0, T]; V) \subset C([0, T]; H)$$

можем считать, что h^{N_p} сходится к некоторой функции v^* . Рассуждениями, аналогичными рассуждениям, приведенным выше, получаем, что v^* является решением задачи (4.1.1). Однако, согласно предположению, задача (4.1.1) имеет единственное решение, следовательно, $v^* = h^*$. Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|h^N - h^*\|_{C([0, T]; H)} = 0.$$

□

Теорема 4.2.1 содержит различные условия, которые могут показаться абстрактными и трудно-проверяемыми, однако в случае задачи (2.2.4) в силу теоремы 3.2.1 эти условия выполнены.

4.3. СЛУЧАЙ ШКАЛЫ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Абстрактные эволюционные уравнения часто рассматриваются в шкалах пространств. В частности, к этому случаю относятся уравнения, для которых выполнена теорема Ниренберга—Нисиды. Наша система уравнений (2.2.4) тоже может быть рассмотрена в шкалах гильбертовых пространств.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения в гильбертовых шкалах и соответствующую конечномерную аппроксимацию.

Пусть теперь H_0 — сепарабельное гильбертово пространство. Зафиксируем ортонормированный базис e_k . Тогда для элемента $u \in H_0$ через $\{u_k\}$ будем обозначать коэффициенты Фурье по базису $\{e_k\}$. Следовательно, имеем

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k, \quad u_k = (u, e_k)_{H_0}.$$

Построим шкалу гильбертовых пространств H_s , $s \geq 0$, следующим образом:

$$H_s = \left\{ u \in H_0 : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 e^{2sk} < \infty \right\}.$$

Скалярное произведение в H_s введем по формуле

$$(u, v)_{H_s} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \bar{v}_k e^{2sk}.$$

Мы будем рассматривать функции числового аргумента со значениями в H_s . Введем соответствующие пространства. Через $C^k([0, T]; H_s)$, $0 < T < \infty$, обозначим пространство k раз непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ функций со значениями в H_s с нормой

$$\|u\|_{C^k([0, T]; H_s)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H_s} + \sum_{m=1}^k \max_{t \in [0, T]} \|u^{(m)}(t)\|_{H_s}.$$

Через $C^0([0, T]; H_s) = C([0, T]; H_s)$ будем обозначать непрерывные на $[0, T]$ функции. Очевидно, что функцию $u \in C([0, T]; H_s)$ можно представить в виде

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k,$$

где $u_k(t)$ суть непрерывные на $[0, T]$ числовые функции.

Рассмотрим, вообще говоря, нелинейный оператор A , определенный в шкале H_s . Будем предполагать, что оператор $A : H_s \rightarrow H_{s'}$ непрерывен при любых $s > s' > 0$.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$\dot{u}(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad (4.3.1)$$

$$u(0) = \varphi \in H_0. \quad (4.3.2)$$

Определение 4.3.1. Функция $u \in C^1([0, T]; H_s)$, $s > 0$, называется s -решением.

Для гарантирования существования s -решения необходимо накладывать дополнительные условия на оператор A . Заметим, что необходимым условием существования s -решения является условие $\varphi \in H_s$. Задача (4.3.1)–(4.3.2) в шкалах пространств рассматривалась в работах многих авторов: Т. Нисида, Л. Ниренберг, Ф. Трев, Л. В. Овсянников и др., см. [29, 30, 54, 58]. В частности, были получены условия, гарантирующие существование решений на достаточно малом временном интервале.

Конечномерные аппроксимации u^N , рассматриваемые в предыдущем разделе, могут быть получены проекционным методом. Опишем этот метод. Пусть H_0^N — N -мерное пространство, порожденное линейными комбинациями элементами $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$. Через $P_N : H_0 \rightarrow H_0^N$ будем

обозначать проектор $P_N \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right) = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k$. В дальнейшем без оговорок будем подразумевать вложение $H_0^N \subset H_0$.

Для фиксированного $N > 0$ будем рассматривать следующую задачу относительно $u^N(t) = \sum_{k=1}^N u_k^N(t) e_k$:

$$\dot{u}^N(t) = P_N A u^N(t), \quad t > 0, \quad (4.3.3)$$

$$u^N(0) = P_N \varphi. \quad (4.3.4)$$

Так как функция u^N полностью определяется набором числовых функций $(u_1^N(t), \dots, u_N^N(t))^T$, то задачу (4.3.3)–(4.3.4) можно переписать в виде системы N -го порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $(u_1^N(t), \dots, u_N^N(t))^T$. Введем множество $M_{q,s}^N \subset \mathbb{C}^N$ при $q > 0$, $s > 0$, следующим образом:

$$M_{q,s}^N = \left\{ (u_1^N, \dots, u_N^N) \in \mathbb{C}^N : |u_k^N| \leq q e^{-sk} \right\}.$$

Будем предполагать, что q и s_1 выбраны так, что

$$P_N \varphi \in \text{int } M_{q,s_1}^N,$$

где через $\text{int } M_{q,s_1}^N$ обозначена внутренность множества M_{q,s_1}^N .

Рассмотрим отображение $F^N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, задаваемое правой частью уравнения (4.3.3):

$$(F^N((\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T))_i = \left(A \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \right), e_i \right)_H.$$

Будем предполагать, что функция F^N удовлетворяет условию Липшица на множестве M_{q,s_1}^N . Такое предположение гарантирует существование единственного решения задачи Коши (4.3.3)–(4.3.4) в M_{q,s_1}^N .

Покажем, что схема аппроксимации для уравнений в гильбертовых шкалах включается в схему конечномерной аппроксимации, описанную в пунктах 4.1 и 4.2.

Пусть начальное условие в задаче (4.3.1)–(4.3.2) принадлежит пространству H_{s_1} , где $s_1 > 0$. Пусть выбрано положительное число s_2 такое, что $s_1 > s_2 > 0$. В качестве пространства H возьмем пространство H_0 , за пространство V примем пространство H_{s_2} , а в качестве пространства W выберем пространство H_{s_1} . Наша гильбертова шкала H_s является компактной шкалой, т.е. для любых $s_1 > s_2 > 0$ вложение

$$H_{s_1} \subset H_{s_2}$$

является компактным. Это следует из критерия компактности в пространстве l_2 , см. [23, с. 248]. Таким образом мы видим, что тройка пространств H_0 , H_{s_2} , H_{s_1} соответствует тройке H , V , W в обозначениях разделов. 4.1, 4.2.

ГЛАВА 5

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

5.1. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА

В главе 4 мы рассмотрели проекционные методы сведения бесконечномерных систем уравнений к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей главе мы рассмотрим реализацию численных методов на основе проекционного метода.

Опишем проекционный метод для задачи (2.2.4) с использованием рядов Фурье. Пусть $N \geq 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать

в виде

$$R^N(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^N r_k^N(t) e^{-iku}, \quad (5.1.1)$$

$$V^N(u, t) = \sum_{k=1}^N v_k^N(t) e^{-iku}.$$

Использование представления в виде конечных сумм Фурье (5.1.1) имеет существенные преимущества. Действительно, пусть

$$f = \sum_{k=0}^N f_k e^{-iku}.$$

Тогда

$$f_u = \sum_{k=1}^N (-ik) f_k e^{-iku}.$$

Еще более эффективно вычисляется оператор P . Для

$$g = \sum_{k=-N}^N g_k e^{-iku}$$

имеем

$$P[g] = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^N g_k e^{-iku}.$$

Поскольку операция умножения функций не является замкнутой в классе функций (5.1.1), введем бинарную операцию «*», которая является замкнутой для множества функций вида (5.1.1). Пусть

$$A = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-iku},$$

$$B = \sum_{k=-N}^N b_k e^{-iku}.$$

Тогда для $C = AB$ имеем

$$C = \sum_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}.$$

Операцию «*» введем следующим образом

$$A * B = \sum_{k=-N}^N c_k e^{-iku},$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции C .

Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений

$$R_t^N = i (U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \quad (5.1.2)$$

$$V_t^N = i (U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g (R^N - 1),$$

где

$$U^N = P (V^N * \bar{R}^N + \bar{V}^N * R^N), B = P (V^N * \bar{V}^N).$$

Покажем, что описанный метод укладывается в схему, рассмотренную в разделах 4.1, 4.2. Для этого мы будем пользоваться шкалами банаховых пространств, введенных в разделе 3.1. Пусть начальные условия принадлежат пространству $E_{s_1}^4$. Тогда выберем любое s_2 из интервала $(0, s_1)$. В качестве пространства H возьмем E_0^4 , в качестве V — пространство $E_{s_2}^4$. По определению шкалы E_s^4 функции из пространства E_s^4 могут быть представлены рядами Фурье. Следовательно за

проекционный оператор P_N мы возьмем оператор проектирования на конечные суммы рядов Фурье по тригонометрическим базисным функциям e^{iku} . Именно такое проектирование использовано в 5.1.2. Наконец, в качестве пространства W возьмем пространство $E_{s'}^4$, где $s_2 < s' < s_1$. Чтобы гарантировать, что функции $h^N(t)$ остаются в ограниченном множестве пространства W при всех $t \in (0, T)$ будем требовать, чтобы приближенные решения удовлетворяли условиям типа

$$\begin{aligned} |r_k^N(t)| &\leq M e^{-2s'k}, \\ |v_k^N(t)| &\leq M e^{-2s'k}, \end{aligned}$$

где $M > 0$. Заметим, что при практическом применении проекционного метода следить за этими условиями нет необходимости, поскольку случай выхода решения из шкалы E_s^4 будет легко обнаружен в ходе вычислений.

5.2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Рассмотренный проекционный метод является наиболее эффективным для решения системы уравнений (2.2.4). Принципиальным для доказательства сходимости проекционного метода было использование базиса Фурье. Однако использование рядов Фурье (дискретного преобразования Фурье) имеет ряд недостатков. Во-первых, для эффективного вычисления прямого и обратного дискретного преобразования Фурье (в том числе и с использованием алгоритмов быстрого преобразования Фурье) мы вынуждены использовать только равномерную сетку по переменной u . Во-вторых, сходимость рядов Фурье очень чувствительна к гладкости функций. Поэтому образование особенности даже в одной точке влечет за собой необходимость существенного увеличения количества коэффициентов Фурье, участвующих в расчете. Методы дискретизации на основе тригонометрических рядов Фурье практически неприменимы для исследования режимов образования особенностей у решений.

В настоящем пункте мы дадим обоснование абстрактного метода дискретизации для задачи (2.2.4). На основании изложенных ниже теорем в следующем пункте мы рассмотрим численный метод с использованием кубических сплайнов для дискретизации по переменной u . Методы сплайн-приближения могут быть эффективными при численном исследовании задач на неравномерной сетке.

Доказательство сходимости приближенной схемы будем проводить методом минимизации невязки. При этом будут использоваться результаты теории регуляризации А. Н. Тихонова некорректных задач. В дальнейшем будем предполагать существование и единственность гладкого решения задачи (2.2.4).

Предположение 1. Пусть R_0, V_0 таковы, что существует единственное решение задачи (2.2.4), обозначаемое R^*, V^* , где R^* и V^* принадлежат $\widetilde{W}_2^2(Q)$.

Введем функционал

$$\Omega(R, V) = \|R\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)}^2 + \|V\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)}^2,$$

определенный на всем $\widetilde{W}_2^2(Q)$.

Лемма 5.2.1. Функционал Ω является стабилизатором для задачи (2.2.4), т. е. выполнены следующие условия:

1. $\Omega(R, V) \geq 0$;
2. множество $\Omega_M = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq M\}$ является предкомпактным в $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$, т. е. из любой последовательности из Ω_M можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$;
3. R^*, V^* принадлежат области определения Ω .

Доказательство. Пункт 1 следует из определения Ω , пункт 2 следует из теоремы Реллиха—Кондрашова о компактности вложения пространств Соболева [33], пункт 3 следует из предположения 1. \square

Приведем абстрактную приближенную схему, а потом рассмотрим способы ее конструктивной реализации.

Обозначим $\Omega^* = \Omega(R^*, V^*)$. Введем две числовые последовательности $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$, $\alpha_k \rightarrow 0$, $\beta_k \rightarrow 0$. Введем множество

$$\Omega_k = \left\{ (R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq \Omega^* + \beta_k \right\}.$$

Последовательность $\{R_k, V_k\}$ будем определять из условий

$$J(R_k, V_k) \leq J_k^* + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.2.1)$$

где $J_k^* = \inf_{\Omega_k} J(R, V)$.

Теорема 5.2.1. Пусть выполнено предположение 1. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(R_k, V_k) = 0$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|R_k - R^*\|_{\widetilde{W}_4^1(Q)} &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|V_k - V^*\|_{\widetilde{W}_4^1(Q)} &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из [8, теорема 1, гл. 2, раздел 7]. \square

Схема (5.2.1) является не вполне конструктивной, поскольку неизвестно значение Ω^* . Тем не менее, существуют конструктивные методы реализации этой схемы (см. [8, гл. 2, раздел 7, п. 3]). Для удобства читателя приведем, следуя изложению [8], такую схему для задачи (5.2.1).

Будем предполагать, что известно такое число M , что $\Omega(R^*, V^*) \leq M$. В качестве начального приближения произвольно зададим число $\gamma_0 > 0$ и функции $R_0, V_0 \in \widetilde{W}_2^2(Q)$. Пусть уже сделано $n - 1$ шагов и найдены γ_{n-1} и $R_{n-1}, V_{n-1} \in \widetilde{W}_2^2(Q)$. Положим $\gamma_n = 2^{-1}\gamma_{n-1}$, а R_n, V_n найдем как решение следующей экстремальной задачи:

$$J^* = \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(R_n, V_n) \leq J^* + \gamma_n,$$

где $(R_n, V_n) \in \Omega_M$, $\Omega_M = \left\{ (R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq M \right\}$.

Далее проверяем неравенство

$$J(R_n, V_n) > \gamma_n. \quad (5.2.2)$$

Если неравенство (5.2.2) не выполнено, то повторяем процесс. Как показано в [8], неравенство (5.2.2) выполнится обязательно, если только $\Omega^* \neq 0$. Случай $\Omega^* = 0$ соответствует тривиальному решению, которое невозможно в задаче (2.2.4).

Итак, пусть при $n = N_0$ выполнено неравенство (5.2.2). Дальнейшие приближения будем искать с помощью другого итерационного процесса. Положим

$$\begin{aligned} \omega_{0,n} &= 2^{-n}M, \\ \gamma_{0,n} &= 2^{-(n+1)}\gamma_{N_0}, \quad n = 0, 1, \dots, \\ \Omega_{0,n} &= \left\{ (R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) < \omega_{0,n} \right\}. \end{aligned}$$

Найдем $R_{0,n}, V_{0,n}$ и $\tilde{R}_{0,n}, \tilde{V}_{0,n}$ как решения задач:

$$\begin{aligned} J_{0,n}^* &= \inf_{\Omega_{0,n}} J(R, V) \leq J(R_{0,n}, V_{0,n}) \leq J_{0,n}^* + \gamma_{0,n}, \\ J_M^* &= \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(\tilde{R}_{0,n}, \tilde{V}_{0,n}) \leq J_M^* + \gamma_{0,n}, \end{aligned}$$

и при каждом $n = 0, 1, \dots$ будем проверять неравенство

$$J(R_{0,n}, V_{0,n}) - J(\tilde{R}_{0,n}, \tilde{V}_{0,n}) > \gamma_{0,n}.$$

Известно (см. [8]), что найдется такой номер n_k ($k = 0$), что это неравенство выполнится.

Положим $\omega_k = \omega_{k,n_k}$, $\gamma_k = \gamma_{k,n_k}$, $R_k = R_{k,n_k}$, $V_k = V_{k,n_k}$. Следующие шаги повторяются со значениями ω_{k+1} и $\gamma_{k+1,n}$:

$$\begin{cases} \omega_{k+1,n} = \omega_k + (M - \omega_k)2^{-n}, \\ \gamma_{k+1,n} = \gamma_k 2^{-(n+1)}, \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Положим $\Omega_{k,n} = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq \omega_{k,n}\}$; при фиксированном k найдем $R_{k,n}$, $V_{k,n}$, $\tilde{R}_{k,n}$, $\tilde{V}_{k,n}$, такие, что

$$\begin{aligned} J_{k,n}^* &= \inf_{\Omega_{k,n}} J(R, V) \leq J(R_{k,n}, V_{k,n}) \leq J_{k,n}^* + \gamma_{k,n}, \\ J_M^* &= \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(\tilde{R}_{k,n}, \tilde{V}_{k,n}) \leq J_M^* + \gamma_{k,n}, \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

и при каждом $n = 0, 1, \dots$ будем проверять неравенство

$$J(R_{k,n}, V_{k,n}) - J(\tilde{R}_{k,n}, \tilde{V}_{k,n}) > \gamma_{k,n}.$$

После того как будет найден n_k , пересчитываем по схеме (5.2.3)–(5.2.4). Последовательность R_k, V_k сходится к решению в смысле теоремы 5.2.1.

Нами была описана схема для вычисления приближенного решения. Однако эта схема требует находить условный экстремум функционала, что является технически сложной задачей. Сейчас мы опишем эффективную реализацию решения задачи (5.2.4). Для этого будем использовать аппроксимацию решения гладкими сплайнами.

Предположим, что в некоторой области Q задан конечный набор несовпадающих точек x_1, x_2, \dots, x_N , и в каждой точке x_i задано число y_i . Поставим задачу отыскания интерполяционных сплайн-функций $\sigma \in \widetilde{W}_2^2(Q)$ из условия

$$\min_{\sigma(x_i)=y_i} \left\{ \int_Q (|\sigma_{uu}|^2 + 2|\sigma_{ut}|^2 + |\sigma_{tt}|^2) du dt \right\}. \quad (5.2.5)$$

Задача (5.2.5) имеет единственное решение, более того, существуют очень эффективные методы построения сплайна σ по набору точек $\{(x_i, y_i)\}$ (см. [1, 7]).

Для каждого $N > 0$ зафиксируем определенную систему точек $S_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \overline{Q}$ таким образом, чтобы S_N образовывала ε_N -сеть, $\varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Через Θ_N обозначим множество всех сплайн-функций, построенных на сетке S_N . По определению $\Theta_N \subset \widetilde{W}_2^2(Q)$. Введем отображение $Q_N : \widetilde{W}_2^2(Q) \rightarrow \Theta_N$ по следующему правилу: функция из $\widetilde{W}_2^2(Q)$ сужается на сетку S_N , что возможно в силу теоремы вложения Соболева, а затем строится сплайн по правилу (5.2.5). Для любой функции $f \in \widetilde{W}_2^2(Q)$ имеет место (см. [7, пункт 4.3]) соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - Q_N f\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)} = 0. \quad (5.2.6)$$

Функциональное пространство Θ_N является конечномерным, а следовательно, пригодным для проведения вычислений. Покажем, что с помощью аппарата сплайнов можно осуществить аппроксимацию экстремальных задач.

Рассмотрим задачу поиска минимизирующей последовательности для задачи

$$\inf_{\widetilde{W}_2^2(Q)} J(R, V) = 0. \quad (5.2.7)$$

Введем последовательность конечномерных задач

$$I_N^* = \inf_{\Theta_N} J(R, V), \quad N = 1, 2, \dots \quad (5.2.8)$$

Теорема 5.2.2. *Последовательность задач (5.2.8) аппроксимирует задачу (5.2.7) по функции, т. е.*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N^* = 0.$$

Доказательство. Пусть $R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q)$. Тогда в силу леммы 3.3.1 и (5.2.6) имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (J(Q_N(R), Q_N(V)) - J(R, V)) = 0.$$

Из этого равенства по теореме [8, 1.1, гл. 3] следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N^* = 0.$$

□

Решение задачи (5.2.8) при фиксированном N может быть эффективно найдено следующим образом. Сначала находим с помощью разностных методов решение задачи (2.2.4) (см. [13]), а затем по значениям в узлах сетки строим сплайн. Нужной точности решения задачи (5.2.8) всегда можно добиться выбором соответствующей сетки.

Итак, пусть найдено приближенное решение R_N, V_N задачи (5.2.7). Представим это приближенное решение в виде рядов

$$R_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k(t) e^{iuk},$$

$$V_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v^k(t) e^{iuk}.$$

В схеме, описанной выше, нам нужно решать задачи типа (5.2.7) с ограничениями

$$\Omega(R_N, V_N) \leq M. \quad (5.2.9)$$

Если неравенство (5.2.9) не выполнено для решения задачи (5.2.7), то получим решение задачи (5.2.7), (5.2.9) с помощью операторов $T_M : \widetilde{W}_2^2(Q) \rightarrow \widetilde{W}_2^2(Q)$ по формуле

$$T_M \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-iku} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k f_k e^{-iku},$$

где коэффициенты λ_k равны единице при малых $|k|$ и быстро убывают при больших $|k|$. В силу гладкости решений коэффициенты r^k, v^k убывают по соответствующим нормам достаточно быстро с ростом $|k|$. Следовательно, оператор T_M можно выбрать таким образом, чтобы удовлетворить условию (5.2.9).

5.3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МЕТОДА ПРЯМЫХ В УСЛОВИЯХ МАШИННОЙ ТОЧНОСТИ

Погрешности округлений при вычислениях являются принципиальной проблемой вычислительной математики. Одним из возможных способов преодоления трудностей проведения вычислений в условиях машинной точности является применение методов интервального анализа (см., например, [2, 16, 44]). Однако использование интервального исчисления требует специального программирования численных методов, снижает скорость вычислений и требует увеличения объема оперативной памяти. В настоящей работе предложен один простой и эффективный способ «борьбы» с особенностями машинной точности. Этот способ является одним из вариантов спектрального фильтра. В тоже время предлагаемый метод можно трактовать, как регуляризацию некорректных задач по методу квазирешений. По сравнению с другими спектральными фильтрами этот метод является более эффективным в рассматриваемых задачах. Разумеется, предложенный подход может быть эффективным лишь в некоторых вычислительных задачах. В настоящей работе рассматривается применение численных методов для получения приближенных решений систем уравнений, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, где с помощью нашего подхода удалось получить важные результаты в задачах океанологии и математической гидродинамики.

Мы используем методы прямых для сведения уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная после дискретизации по пространственным переменным система обыкновенных уравнений решается стандартным методом Рунге—Кутты 4-го порядка. При вычислении правых частей этих уравнений мы используем методы быстрого преобразования Фурье, при реализации которых возникают основные погрешности вычислений.

В рассматриваемых примерах мы сталкиваемся с вычислительной неустойчивостью, возникающей вследствие погрешностей округления. В настоящем пункте мы рассматриваем модификацию метода прямых, позволяющую в ряде случаев избежать вычислительной неустойчивости.

Мы рассматриваем применение к следующим задачам гидродинамики со свободной поверхностью: течение идеальной жидкости со свободной поверхностью с конечной глубиной и начальную стадию неустойчивости Релея—Тейлора, где рассматривается граница между тяжелой идеальной жидкостью и вакуумом в условии, когда жидкость находится над вакуумом. В начальный момент свободной поверхности придается возмущение и исследуется развитие релей-тейлоровской неустойчивости. Эта модель является классическим примером неустойчивости (см., например, [15, 57]).

Необходимо отметить, что предлагаемый метод не в полной мере подавляет численную неустойчивость в задачах гидродинамики со свободной поверхностью, а лишь «продлевает жизнь» численной схеме.

Начнем с абстрактной постановки задачи. Эта аналогичная постановка нами уже была рассмотрена в главе 4, но для удобства мы приведем еще раз постановку в тех терминах, которые будем использовать в настоящем пункте.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим в H , вообще говоря, нелинейный оператор A , определенный на подпространстве $D \subset H$. Предположим, что в H можно выбрать ортонормированный в H базис $\{\varphi_k\} \subset D$.

Через $C^k([0, T]; H)$, $0 < T < \infty$, обозначим пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на $[0, T]$ со значениями в H с нормой

$$\|u\|_{C^k([0, T]; H)} = \max_{t \in [0, T]} \left(\|u(t)\|_H + \|u^{(k)}(t)\|_H \right).$$

Будем рассматривать абстрактную задачу Коши

$$\begin{aligned} u'(t) &= A[u(t)], \quad t \in [0, T], \\ u(0) &= \psi, \quad \psi \in H. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Определение 5.3.1. Функция $u \in C^1([0, T]; H)$, удовлетворяющая (5.3.1) и такая, что $u(t) \in D$ при $t \in [0, T]$, называется *решением* задачи (5.3.1).

Рассмотрим проекционный метод сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для задачи (5.3.1). Для конечного N введем проектор $P_N : H \rightarrow H$ по формуле

$$P_N \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k.$$

При фиксированном N будем рассматривать функцию $u^N(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^N(t) \varphi_k$, при $\alpha_k^N \in C^1[0, T]$, являющуюся решением задачи Коши

$$\begin{aligned} (u^N)'(t) &= P_N(A[u(t)]), \quad t \in [0, T], \\ u^N(0) &= P_N \psi. \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Функция u^N полностью определяется вектор-функцией $\alpha^N(t) = (\alpha_1^N(t), \dots, \alpha_N^N(t))^T$. Перепишем задачу (5.3.2) в виде системы N -го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений относительно α^N . Обозначим

$$F(\alpha^N) = (F_1(\alpha^N), \dots, F_N(\alpha^N))^T,$$

где

$$F_k(\alpha^N(t)) = \left(A \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i^N(t) \varphi_i \right], \varphi_k \right)_H.$$

Будем рассматривать следующую систему уравнений, эквивалентную (5.3.2):

$$\begin{aligned} (\alpha^N)'(t) &= F(\alpha^N(t)), \quad t \in [0, T], \\ \alpha^N(0) &= \psi^N, \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

где

$$\begin{aligned}\psi^N &= (\psi_1, \dots, \psi_N)^T, \\ \psi_k &= (\psi, \varphi_k)_H.\end{aligned}$$

Правую часть в уравнении (5.3.3) можно трактовать как функцию $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Приведем схему Рунге—Кутты 4-го порядка для системы (5.3.3). Через τ обозначим шаг по переменной t . Соответственно, $t_m = m\tau$, $m = 0, \dots, M$. Будем предполагать, что на рассматриваемом интервале существует единственное решение задачи (5.3.3). Численные решения будем получать по следующей формуле:

$$\begin{aligned}\alpha^N(t_m) &= \alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= F(\alpha^N(t_{m-1})), \\ k_2 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{2}k_1), \\ k_3 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{2}k_2), \\ k_4 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \tau k_3), \\ m &= 1, \dots, M.\end{aligned}\tag{5.3.4}$$

В реальности при вычислениях на ЭВМ по схеме (5.3.4), как правило, возникают ошибки в силу ограниченной машинной точности. Основной источник ошибок — вычисление функции F . Элементы вектора α^N трактуются как коэффициенты ряда Фурье, поэтому погрешности в вычислении этой функции могут повлечь катастрофические последствия для проведения расчетов. Типичной является ситуация, когда по модулю эти коэффициенты быстро стремятся к нулю. При этом приходится проводить вычисления с числами по модулю значительно меньшими гарантированных значащих цифр. Вычисляя по схеме (5.3.4), мы наблюдаем значения $\tilde{\alpha}^N$, которые связаны с точными значениями следующим соотношением:

$$|\alpha^N(t_m) - \tilde{\alpha}^N(t_m)| = \delta_m^N, \quad m = 1, \dots, M.$$

Конкретные значения $\tilde{\alpha}^N(t_m)$ зависят от реализации счета по схеме (5.3.4). Мы будем говорить, что последовательность $\alpha^N(t_m)$ является вычислительно неустойчивой, если числовая последовательность δ_m^N не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. В этом случае относительная погрешность вычисления α^N быстро стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.

В ситуации вычислительной неустойчивости мы не можем произвольно увеличивать число N , а должны согласовывать его с уровнем ошибок вычислений. Это стандартная ситуация в теории некорректных задач. Выбор размерности аппроксимирующей системы (числа N) оптимальным образом представляет собой трудную задачу. Предложим простой алгоритм, который позволит нам обеспечивать выбор N близким к оптимальному.

Пусть выбрано число $q > 0$. Введем функцию $R_q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ по формуле

$$R_q(x_1, x_2, \dots, x_N) = (r_q(x_1), r_q(x_2), \dots, r_q(x_N)),$$

где

$$r_q(x) = \begin{cases} x, & |x| > q \\ 0, & |x| \leq q \end{cases}.$$

Величины α^N будем рассчитывать по формуле

$$\alpha^N(t_m) = R_q(\alpha^N(t_{m-1}) + \tau/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)).\tag{5.3.5}$$

Величины k_1, k_2, k_3, k_4 вычисляются согласно схеме (5.3.4). Выбор параметра $q > 0$ осуществляется из эмпирических соображений. Имеет смысл выбирать q на порядок больше чем максимальное из значений δ_m .

Использование формулы (5.3.5) не вызывает сложности при программировании предлагаемой процедуры.

Покажем, что алгоритм, задаваемый формулой (5.3.5), является одной из реализаций метода квазирешений в теории регуляризации некорректных задач. Сделаем следующие предложения о разрешимости задач (5.3.1), (5.3.3).

Условие 5.3.1. Пусть существует $T > 0$ такое, что:

1. при $t \in [0, T]$ существует единственное решение задачи (5.3.1).
2. решение задачи (5.3.1) принадлежит пространству $C^2([0, T]; D_1)$, где множество D_1 компактно в D .
3. для достаточно больших N при $t \in [0, T]$ существует единственное решение задачи (5.3.2) и это решение принадлежит пространству $C^2([0, T]; D_1)$.

Методы, позволяющие проверить выполнение условий 5.3.1, получены в работах [40, 41].

Введем функционал невязки для задачи (5.3.1) по формуле

$$J(u) = \|u' - A[u]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|u(0) - \psi\|_H^2.$$

Легко можно убедиться, что функционал $J : C^1([0, T]; D) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывный. Функция $u \in C^1([0, T]; D)$ является решением задачи (5.3.1) тогда и только тогда, когда $J(u) = 0$.

В условии 5.3.1 задача нахождения приближенных решений задачи (5.3.1) может быть сведена к задаче нахождения последовательности u^l , минимизирующей функционал J на множестве $C^2([0, T]; D_1)$. Строить минимизирующую последовательность можно с помощью решений задачи (5.3.2).

Теорема 5.3.1. Пусть выполнено условие 5.3.1. Тогда имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J(u^N) = 0,$$

где u^N суть решения задачи (5.3.2). Более того, $\|u^N - u^*\|_{C^1([0, T]; D)} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, где u^* — решение задачи (5.3.1).

Доказательство. Подставим приближенные решения u^N в функционал невязки

$$\begin{aligned} J(u^N) &= \|(u^N)' - A[u^N]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|u^N(0) - \psi\|_H^2 = \\ &= \|(u^N)' - P_N A[u^N] - (I - P_N)A[u^N]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k|^2 = \\ &= \|(I - P_N)A[u^N]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k|^2. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в последней сумме стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Рассмотрим величину

$$\|(I - P_N)A[u^N]\|_{C([0, T]; H)}^2 = \max_{t \in [0, T]} \sum_{k=N+1}^{\infty} |(A[u^N], \varphi_k)_H|^2. \quad (5.3.6)$$

Так как при всех $t \in [0, T]$ имеем $u^N(t) \in D_1$, то в силу компактности D_1 в D и непрерывности оператора $A : D \rightarrow H$ получаем, что множество $A[u^N(t)]$ ограничено в H равномерно по N и $t \in [0, T]$. Поэтому величина (5.3.6) также стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

В силу компактности вложения пространства $C^2([0, T]; D_1)$ в $C^1([0, T]; D)$ из последовательности u^N можно извлечь подпоследовательность u^{N_p} , сходящуюся в $C^1([0, T]; D)$. Легко видеть, что ее пределом является единственное решение задачи (5.3.1) — функция u^* . Действительно, из непрерывности функционала J следует, что $J\left(\lim_{N_i \rightarrow \infty} u^{N_i}\right) = \lim_{N_i \rightarrow \infty} J(u^{N_i}) = 0$.

В самом деле, покажем, что сама последовательность решений u^N сходится к u^* . Пусть $\limsup_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0, T]; D)} = \lim_{N_q \rightarrow \infty} \|u^{N_q} - u^*\|_{C^1([0, T]; D)}$. В силу компактности в $C^1([0, T]; D)$ подпоследовательности u^{N_q} можно считать, что эта подпоследовательность имеет пределом v^* . Но

тогда v^* тоже будет решением задачи (5.3.1), а значит, имеем $v^* = u^*$. В итоге получаем, что $\limsup_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0,T];D)} = 0$. Следовательно, имеем $\lim_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0,T];D)} = 0$. \square

Теорема 5.3.1 является обоснованием известного в теории регуляризации некорректных задач метода квазирешений. В этой теореме рассматривается последовательность решений задач (5.3.2), однако вместо функций u^N , которые на практике недостижимы, можно рассматривать различные приближения в пространстве $C^2([0,T];D_1)$. Эти приближения можно получать с помощью метода Рунге—Кутты (5.3.4) и подходящего метода интерполяции по переменной t .

Пусть фиксировано достаточно большое N . Через u^{NM} обозначим последовательность полученную по схеме (5.3.4) по M точкам и последующим интерполированием с использованием стандартных кубических сплайнов по узлам $\{t_m\}$. Соответственно, через u_q^{NM} , $q > 0$, обозначим аналогичную последовательность, полученную по схеме (5.3.5).

Теорема 5.3.2. *Допустим, что имеет место условие 5.3.1. Предположим также, что u^{NM} , $u_q^{NM} \in C^2([0,T];D_1)$ и*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|u^{NM} - u^N\|_{C^2([0,T];D_1)} = 0$$

при фиксированном N . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют N , M такие, что

$$J(u^{NM}) < \varepsilon,$$

также существуют (возможно, другие) N , M и $q > 0$ такие, что

$$J(u_q^{NM}) < \varepsilon.$$

Доказательство. По утверждению теоремы 5.3.1 существует такой номер N_0 , что $J(u^N) < \varepsilon/2$ для всех $N \geq N_0$. Введем обозначение

$$\Delta^{NM} = u^{NM} - u^N.$$

Из предположений теоремы следует, что $\Delta^{NM} \in C^2([0,T];D_1)$. Заметим, что по построению $u^{NM}(0) = u^N$. Имеем

$$\begin{aligned} J(u^{N_0M}) &= J(u^{N_0} + \Delta^{N_0M}) = \|(u^{N_0})' - A[u^{N_0} + \Delta^{N_0M}] + (\Delta^{N_0M})'\|_{C([0,T];H)}^2 + \\ &+ \|u^{N_0}(0) - \psi\|_H^2 \leq \|(u^{N_0})' - A[u^{N_0} + \Delta^{N_0M}]\|_{C([0,T];H)}^2 + \|(\Delta^{N_0M})'\|_{C([0,T];H)}^2 + \|u^{N_0}(0) - \psi\|_H^2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|\Delta^{N_0M}\|_{C^2([0,T];D_1)} = 0$$

и в силу непрерывности оператора $A : D \rightarrow H$ существует такое M_0 , что при всех $M \geq M_0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|(\Delta^{N_0M})'\|_{C([0,T];H)}^2 &\leq \varepsilon/4, \\ |J(u^{N_0}) - \|(u^{N_0})' - A[u^{N_0} + \Delta^{N_0M}]\|_{C([0,T];H)}^2| &\leq \varepsilon/4. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $N > N_0$ и $M > M_0$ имеем

$$J(u^{NM}) \leq \varepsilon.$$

Пусть теперь N_1 и M_1 таковы, что $J(u^{N_1M_1}) < \varepsilon/2$. Обозначим

$$\Delta_q^{NM} = u_q^{NM} - u^{NM}.$$

По построению функций u_q^{NM} и в силу свойств кубических сплайнов имеем

$$\lim_{q \rightarrow 0} \|\Delta_q^{NM}\|_{C^2([0,T];D_1)} = 0.$$

Оценим значение функционала $J(u_q^{N_1M_1})$. Можно видеть, что в силу непрерывности функционала $J : C^1([0,T];D) \rightarrow \mathbb{R}$ существует такое $q_0 > 0$, что для всех $q < q_0$ имеем

$$|J(u^{N_1M_1}) - J(u_q^{N_1M_1})| = |J(u^{N_1M_1}) - J(u^{N_1M_1} + \Delta_q^{N_1M_1})| < \varepsilon/2.$$

Следовательно, при всех $N > N_1$, $M > M_1$, $q < q_0$ выполнено неравенство

$$J(u_q^{NM}) \leq \varepsilon.$$



Теорема 5.3.2 дает возможность строить минимизирующую последовательность для функционала J с помощью приближений u_q^{NM} , которые можно строить конструктивно. А теорема 5.3.1 гарантирует, что минимизирующая последовательность сходится к решению задачи (5.3.1). В конкретных приложениях условия теорем 5.3.1, 5.3.2 часто могут быть легко проверены. В частности, в задачах гидродинамики со свободной поверхностью, которые мы рассматриваем, эти условия выполнены.

Численный эксперимент 1. Рассмотрим стоячие волны идеальной жидкости с конечной глубиной. Выберем следующие параметры: глубина $h = 6,0$, ускорение свободного падения $g = 1,0$, шаг по времени $\tau = 0,001$. В качестве начальных условий возьмем следующие функции:

$$y(0, u) = 0,01 \cos u, \quad \Psi(0, u) = 0.$$

Аппроксимируем ряды (2.3) конечными суммами с $N = 512$ слагаемыми и будем применять численные схемы, описанные выше. Мы будем рассматривать спектры решений в логарифмическом масштабе: по оси абсцисс будем откладывать номер гармоники k , а по оси ординат — $\lg |y_k|$ и $\lg |\Psi_k|$. Приведем результаты численного эксперимента, которому был присвоен номер **ZF-2-3** в системе учета вычислительных экспериментов www.calcs.ru. В этом эксперименте расчет проводился по схеме (5.3.4) — на рис. 5.3.1 показан спектр решения при $t = 20,0$.

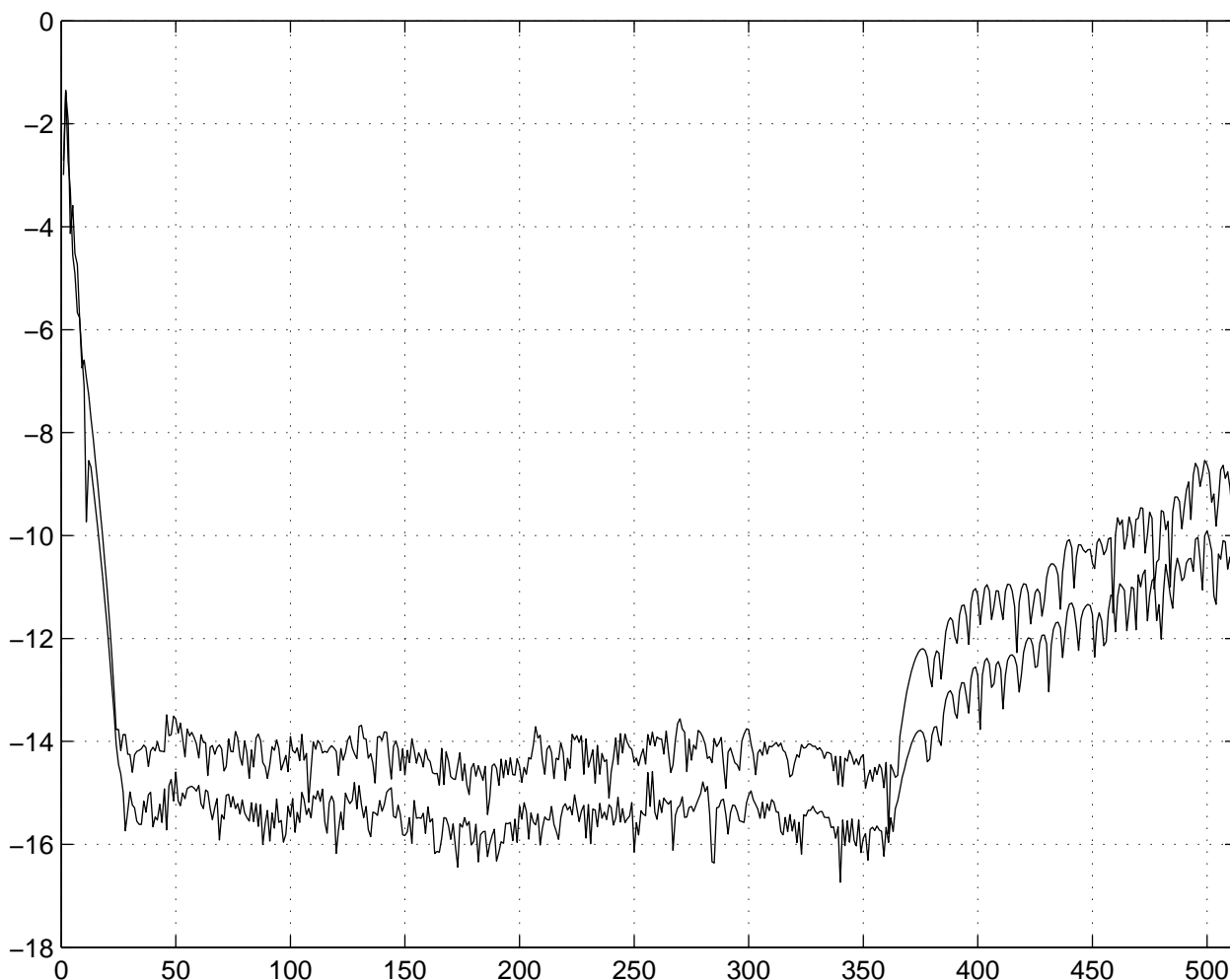


Рис. 5.3.1. Счет по схеме (5.3.4), $t = 20,0$

Гармоники с номерами от 0 до 25 характеризуют собственно решение, горизонтальная часть спектра с гармониками от 26 до 360 обусловлена конечностью машинной точности при вычислениях. Растущая часть спектра с гармониками от 360 до 511 — результат вычислительной неустойчивости схемы (5.3.4) в условиях машинной точности.

В численном эксперименте **ZF-2-4** применялась модифицированная схема метода прямых (5.3.5), с выбранным $q = 10^{-12}$, с теми же начальными условиями. На рис. 5.3.2 показан спектр решения при $t = 100, 0$. В отличие от случая на рис. 5.3.1, здесь мы не наблюдаем вычислительной

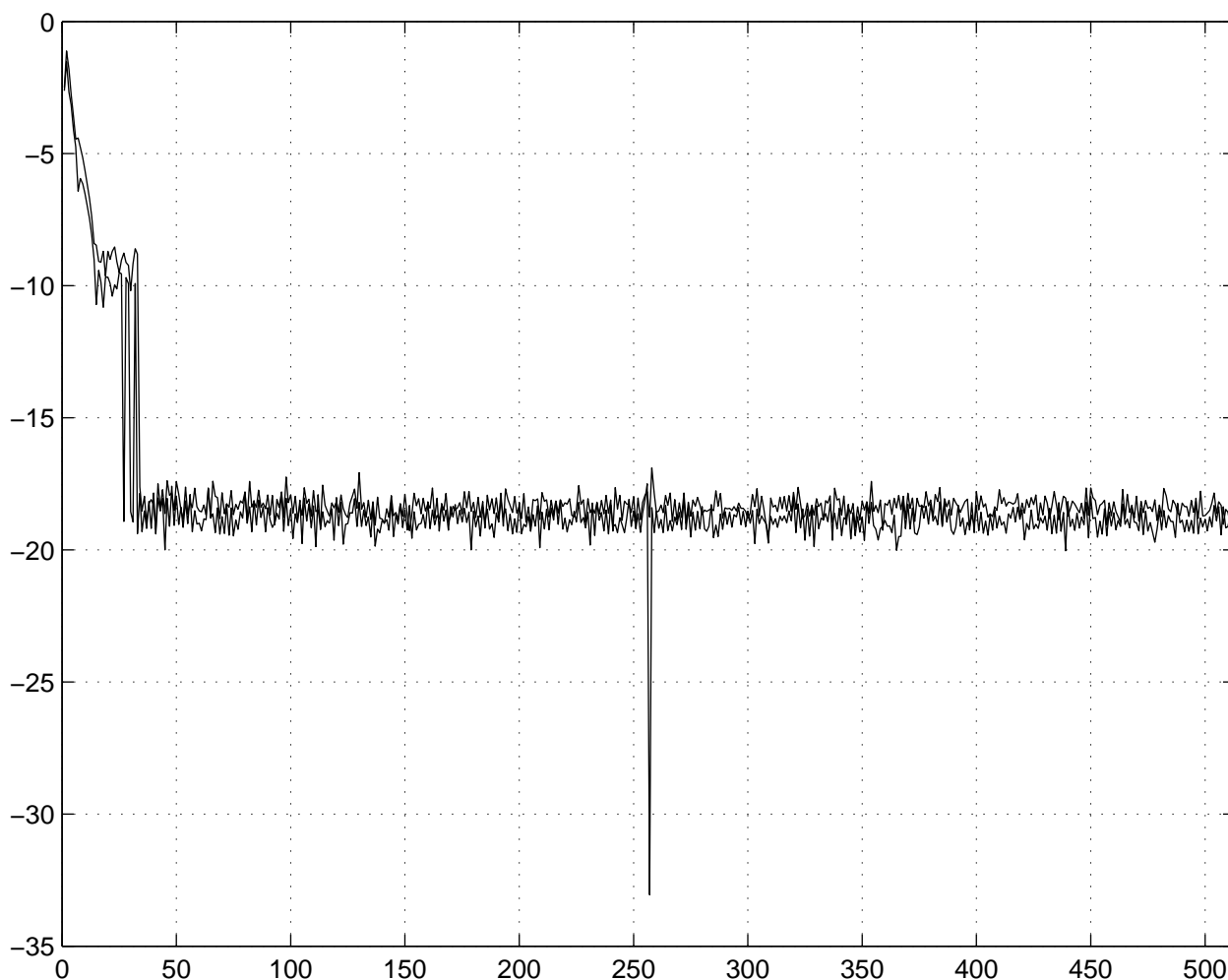


Рис. 5.3.2. Счет по схеме (5.3.5), $t = 100, 0$

неустойчивости.

Численный эксперимент 2. Для проведения численных расчетов будем использовать метод прямых, принимая $N = 512$. Выберем следующие параметры: ускорение свободного падения $g = -10, 0$, шаг по времени $\tau = 0, 0001$. В качестве начальных условий возьмем следующие функции:

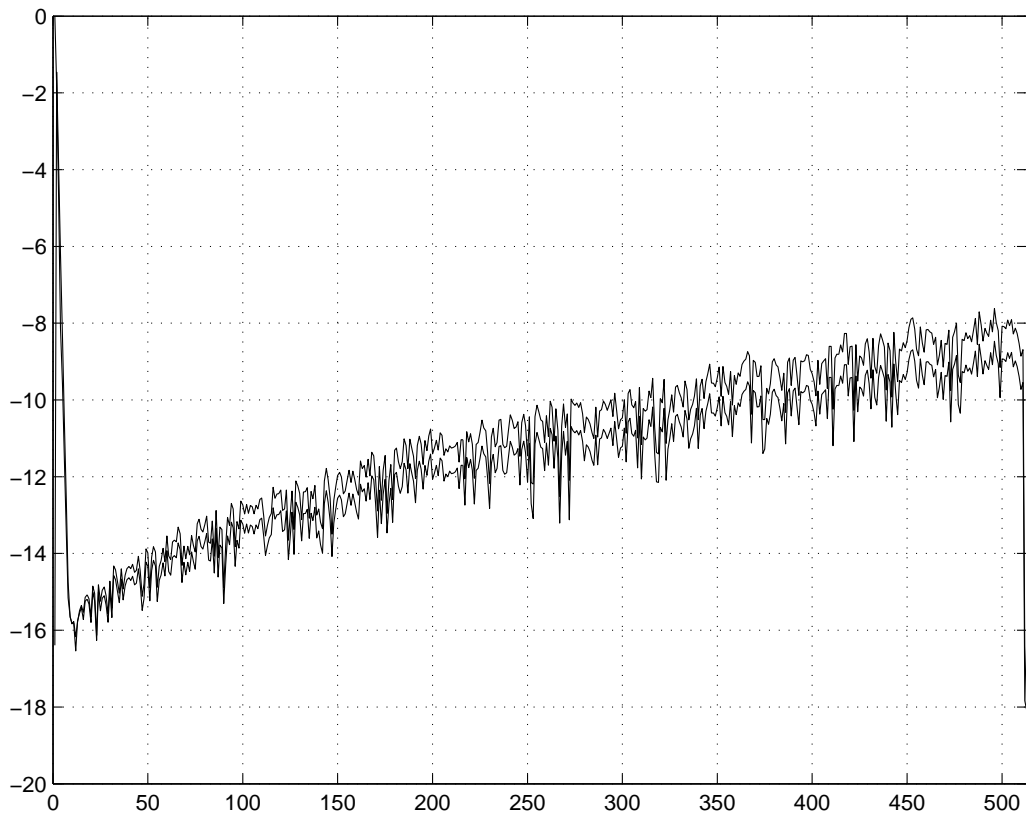
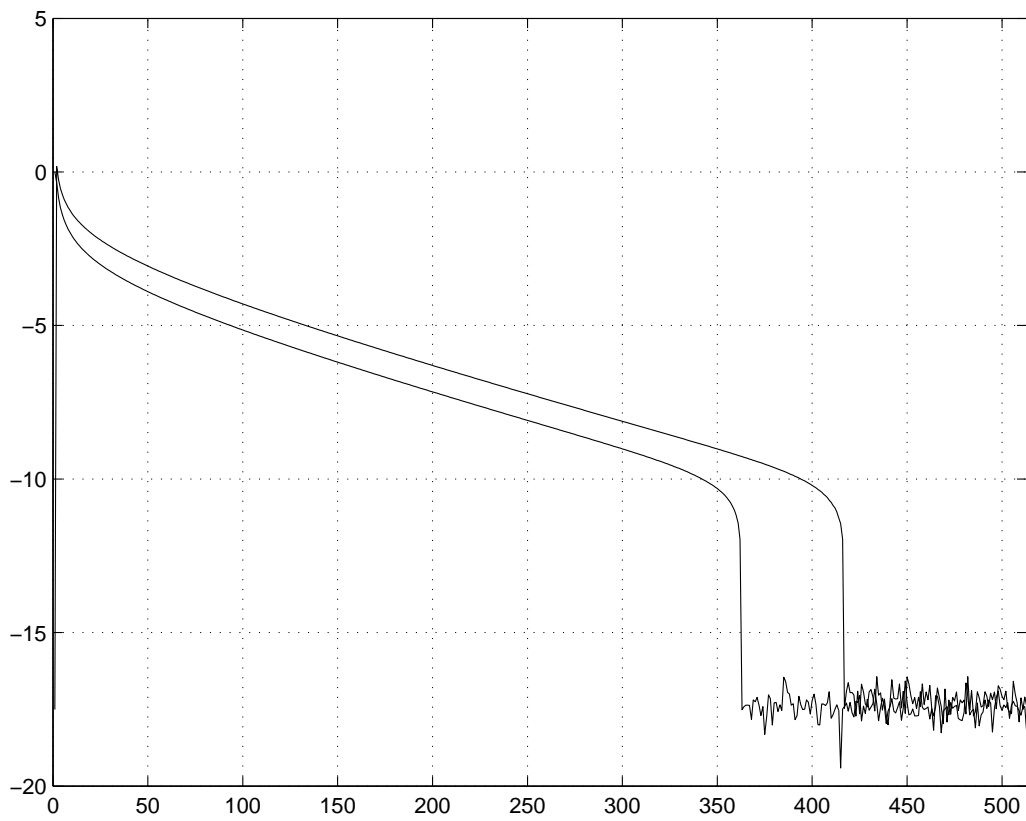
$$R(0, w) = 1 + 0, 01 \exp(-iw), \quad V(0, w) = 0.$$

Проведем результаты численного эксперимента **RT-3-5**, где расчет проводился по схеме (5.3.4). На рис. 5.3.3 показан спектр решения при $t = 0, 3$.

Первые гармоники от 0 до 10 характеризуют решение, а возрастающие по модулю гармоники (от 10) выражают факт неустойчивости. В данном примере мы сталкиваемся с неустойчивостью самих уравнений. Возникающие погрешности вычислений быстро разрушают численный счет.

В численном эксперименте **RT-3-6** проверим нашу модифицированную схему (5.3.5) в этом случае с параметром $q = 10^{-12}$. На рис. 5.3.4 показан спектр решения при $t = 1, 55$.

Здесь мы не наблюдаем какой-либо вычислительной неустойчивости. Разумеется, дальнейший счет по схеме (5.3.5) требует увеличения размерности N и приводит к разрушению гладкого

Рис. 5.3.3. Счет по схеме (5.3.4), $t = 0,3$ Рис. 5.3.4. Счет по схеме (5.3.5), $t = 1,55$

решения, но это следствие неустойчивости течения Релея—Тейлора. На рис. 5.3.5 показан профиль свободной поверхности течения при $t = 1,55$.

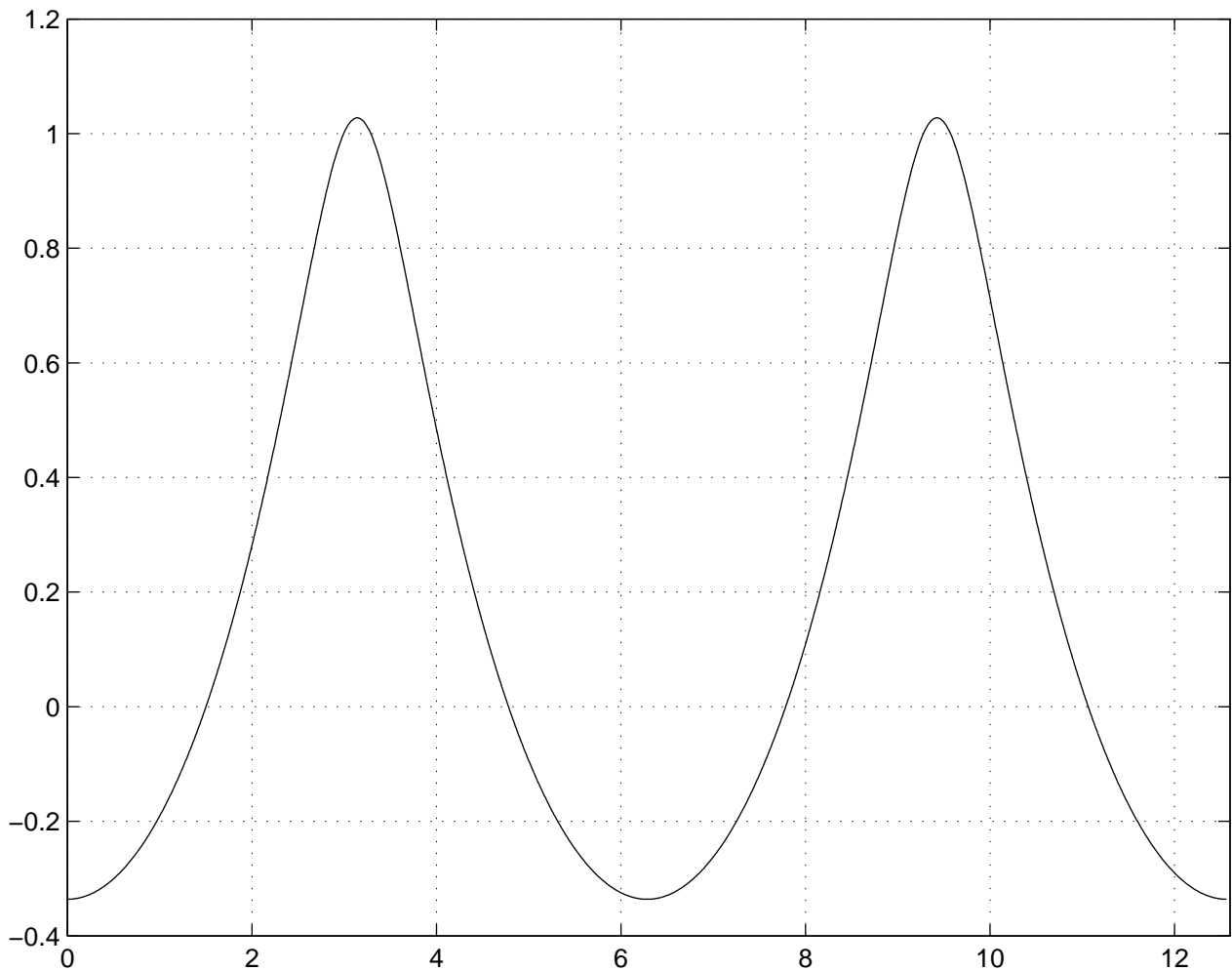


Рис. 5.3.5. Профиль свободной поверхности при $t = 1,55$

5.4. ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

Для организации счета методом прямых, описанным в 4.1, основным моментом является способ дискретизации пространственных переменных. Выше мы подробно рассматривали методы дискретизации на основе рядов Фурье. К тому есть много оснований. Наши искомые решения (по пространственным переменным) являются периодическими аналитическими функциями.

Хорошо известно, что для таких функций оптимальным способом табулирования является использование коэффициентов Фурье, см. [3]. Действительно, коэффициенты рядов Фурье для таких функций по модулю убывают по экспоненциальному закону, а это значит, что обрывая ряды, мы допускаем, вообще говоря, небольшую ошибку. Другим принципиальным моментом, диктующим применение рядов Фурье является необходимость вычислять оператор Гильберта. Оператор Гильберта представляет собой сингулярный интегральный оператор, который выражается через интеграл в смысле главного значения. Вычисление этого интеграла от функции, заданной значениями на сетке, приводит к серьезным вычислительным проблемам. Вычисление оператора Гильберта от функции, заданной рядом Фурье, является очень простым. Вычисление производных также выгодно производить через ряды Фурье.

Несмотря на многие достоинства дискретизации с помощью рядов Фурье, у этого метода имеются и серьезные недостатки. Первый недостаток заключается в том, что реализуя разложение в

ряд Фурье через дискретное преобразование Фурье, мы вынуждены рассматривать функции, заданные на равномерной сетке. С другой стороны, достоинства рядов Фурье быстро тают в случае, когда гладкость функции начинает нарушаться. Если в ходе вычислений у решения возникнет особенность хотя бы в одной точке, то сходимость рядов Фурье резко изменится. При этом нам придется увеличивать равномерную сетку как вблизи сингулярной точки, так и на гладких участках решения. Очевидно, что для работы с решениями, имеющими точки нарушения гладкости, целесообразно использовать неравномерные сетки. Для этого нам потребуется использовать другие способы дискретизации решений.

В этом разделе мы рассмотрим методы дискретизации на основе кубических сплайнов с периодическими условиями. Такие сплайны мы уже рассматривали в предыдущем пункте с теоретической точки зрения, а сейчас мы рассмотрим, как это можно реализовать в наших задачах. Мы выбрали кубические сплайны по следующим причинам:

1. наличие эффективных и экономичных способов построения кубических сплайнов (метод прогонки);
2. хорошие аппроксимативные свойства кубических сплайнов;
3. численная устойчивость при вычислении параметров сплайнов;
4. возможность корректно вычислять производные и оператор Гильберта.

Многие из этих (и других) приятных свойств кубических сплайнов хорошо известны и описаны в соответствующей литературе, см. [1, 7]. Однако кубические сплайны с периодическими условиями можно использовать и для вычисления оператора Гильберта. Точнее, кубический сплайн (только для периодических условий!) допускает форму записи в виде ряда Фурье, где коэффициенты выражаются через параметры сплайна. Принципиальным моментом является то, что сплайн может быть задан на произвольной сетке, в том числе и неравномерной.

Мы рассмотрим лишь самые простые определения и факты из теории сплайнов. В частности, мы будем пользоваться известными теоремами о существовании и единственности кубических сплайнов с периодическими условиями. Мы будем рассматривать сетки без кратных узлов, поэтому сплайн однозначно задается своими значениями в узлах сетки. При этом мы можем вычислить любые коэффициенты кубического многочлена между узловыми точками.

Рассмотрим метод дискретизации с помощью сплайнов. Для любого $N > 0$ зафиксируем разбиение отрезка $[0, 2\pi]$

$$\Delta^N : \quad 0 = u_0^N < u_1^N < \dots < u_{N-1}^N < u_N^N = 2\pi.$$

Мы не требуем от сетки равномерности. При увеличении параметра дискретизации N мы также не требуем, чтобы разбиения Δ^N были вложенными. Через $|\Delta^N|$ обозначим диаметр разбиения, т.е. величину $\max \{u_k^N - u_{k-1}^N : k = 1, \dots, N\}$. Через S^N обозначим евклидово пространство векторов, состоящих из N комплексных чисел. Элементы $s \in S^N$ будем интерпретировать как кубические сплайны с периодическими условиями, заданные на сетке Δ^N и принимающие значения в узлах сетки

$$s(u_k^N) = s_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

При этом будем считать элементы S^N функциями, заданными на $[0, 2\pi]$, причем $S^N \subset C^2[0, 2\pi]$. Пусть задан произвольный непрерывный оператор

$$T : C^2[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi].$$

Тогда под записью $Ts = \tilde{s}$, где $s \in S^N$, мы будем понимать числовой вектор $\tilde{s} \in S^N$, заданный значениями непрерывной функции (но уже не сплайна!) $f(u) = Ts(u)$ на сетке Δ^N . Арифметические операции между сплайнами, а также прибавление константы определим очевидным образом, как покомпонентную операцию между значениями векторов из S^N .

Введем оператор проектирования функции из пространства $C[0, 2\pi]$ в пространство сплайнов S^N следующим образом:

$$P_S^N : f(u) = (f(u_1^N), f(u_2^N), \dots, f(u_N^N))^T.$$

Заметим, что, вообще говоря, мы не требуем от функции периодичности, поскольку сплайн (периодический) может быть построен по любому вектору из N чисел.

Система интегро-дифференциальных уравнений (2.2.4) может быть аппроксимирована следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} R_t^N &= i(U^N R_u^N - U_u^N R^N), \\ V_t^N &= i(U^N V_u^N - B_u^N R^N) + g(R^N - 1), \\ U^N &= P(V^N \bar{R}^N + \bar{V}^N R^N), \\ B &= P(V^N \bar{V}^N). \end{aligned} \quad t > 0, \quad (5.4.1)$$

Уравнения (5.4.1) необходимо дополнить начальными условиями:

$$\begin{aligned} R^N(0) &= P_S^N R_0(u), \\ V^N(0) &= P_S^N V_0(u). \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

При фиксированном t решения системы (5.4.1)–(5.4.2) интерпретируются как сплайны из пространства S^N .

Пусть на временном отрезке $[0, T]$ существует единственное решение системы (2.2.4), а разбиение таково, что $\lim_{N \rightarrow \infty} |\Delta^N| = 0$ при N , стремящемся к бесконечности. Тогда приближенные решения задачи Коши (5.4.1)–(5.4.2) стремятся к решениям соответствующей системы (2.2.4). Это следует из свойств сходимости кубических сплайнов и результатов раздела 5.2.

При численном решении задачи Коши (5.4.1)–(5.4.2) явными методами Рунге—Кутта нам понадобится вычислять правую часть уравнения (5.4.1). При этом вычислении мы встречаемся с арифметическими операциями, однократным дифференцированием, а также оператором Гильберта. Если с арифметическими операциями и дифференцированием с помощью сплайнов проблем не возникает, то алгоритм вычисления оператора Гильберта следует оговорить особо.

Мы легко умеем вычислять оператор Гильберта от функций, разложенных в ряды Фурье. Поэтому сначала покажем, как кубический сплайн с периодическими условиями может быть выражен через коэффициенты Фурье.

Введем периодическую на $[0, 2\pi]$ функцию $D(u)$ по формуле

$$D(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^4}.$$

Для произвольного сплайна $s \in S^N$ можно однозначно вычислить разрывы третьей производной в узлах сетки. Так как между узлами сетки сплайн является многочленом третьей степени, то третья производная между узлами есть константа. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \beta_i &= s'''(u_i^N + 0) - s'''(u_i^N - 0), \quad i = 1, \dots, N, \\ \beta_0 &= \int_0^{2\pi} s(u) du. \end{aligned}$$

Оказывается, разрывы третьей производной в узлах задают сплайн с точностью до интеграла по отрезку $[0, 2\pi]$. В силу [18, гл. 1, следствие 1.1.6] кубический сплайн с периодическими условиями может быть представлен по формуле

$$s(u) = \beta_0 + \sum_{i=1}^N \beta_i D(u - u_i). \quad (5.4.3)$$

При этом

$$\sum_{i=1}^N \beta_i = 0.$$

Рассмотрим действие оператора Гильберта на сплайн, представленный формулой (5.4.3). В силу линейности имеем

$$H[s](u) = \sum_{i=1}^N \beta_i H[D](u - u_i).$$

Функция $H[D]$ уже может быть легко вычислена, поскольку ядро D представлено рядом Фурье. Действительно,

$$H[D] = - \sum_{k=1}^N \frac{\sin ku}{k^4}. \quad (5.4.4)$$

В реальных вычислениях, разумеется, ряд (5.4.4) должен быть заменен конечной суммой.

Заметим, что численное решение задачи (2.2.4) с помощью сплайнов требует значительно большего искусства от вычислителя нежели с использованием рядов Фурье. Однако это может быть необходимым для вычисления режимов обрушения поверхностных волн и образования особенностей.

ГЛАВА 6

КОНСТРУКТИВНАЯ ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

В главе 3 мы рассматривали теоремы, гарантирующие существование и единственность решений уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости. Однако в этих теоремах установлено существование решений лишь на достаточно малом временном интервале. Аналогичные результаты, полученные в других работах, посвященных существованию решений уравнений, описывающих течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, тоже гарантируют существование решений только на достаточно малом временном интервале, см., например, [24, 26, 60].

В настоящей главе мы рассмотрим различные методы, позволяющие оценить время существования решений, описывающих поверхностные волны. Мы будем формулировать сначала результаты для абстрактных эволюционных уравнений, а потом покажем, как эти результаты применить к уравнениям гидродинамики со свободной поверхностью.

6.1. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ НА КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Введем величину

$$T_M^N = \sup\{T \geq 0 : \text{на } [0, T] \text{ существует решение задачи (4.3.3)–(4.3.4) в } M_{q,s_1}^N\}.$$

Рассмотрим верхний предел

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} T_M^N = T_M.$$

Теорема 6.1.1. *Предположим, что задача (4.3.1)–(4.3.2) не может иметь более одного s -решения. Пусть $T_M > 0$, $T' < T_M$. Тогда существует такая подпоследовательность N_l , что $T_M^{N_l} > T'$ и для любого $s_2 > 0$, $s_2 < s_1$*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|u^{N_l} - u\|_{C([0, T']; H_{s_2})} = 0, \quad (6.1.1)$$

где u есть s_2 -решение задачи (4.3.1)–(4.3.2).

Доказательство. Для сокращения письма введем обозначения для пространств: $H = H_0$, $V = H_{s_2}$ и введем множество

$$M = \left\{ u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k : |u_k| \leq q e^{-s_1 k} \right\}.$$

Легко видеть, что множество M компактно в V , а пространство V компактно вложено в H .

По определению верхнего предела существует такая подпоследовательность N_l , что $T_M^{N_l} > T'$.

Рассмотрим функционал невязки

$$J(u) = \left\| u(t) - \varphi - \int_0^t Au(s)ds \right\|_{C([0, T'_k]; H)}$$

на пространстве $C([0, T']; V)$. Очевидно, что этот функционал непрерывный. Так как u^{N_l} являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, то $u^{N_l} \in C^1([0, T']; M)$. В силу обобщенной теоремы Арцела ([17, теорема 7, гл. 2]) последовательность $\{u^{N_l}\}$ предкомпактна в $C([0, T']; V)$. Следовательно, существует подпоследовательность u^{N_m} , сходящаяся в $C([0, T']; V)$ к u^* . В силу непрерывности функционала J имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} J(u^{N_m}) = J(u^*)$. Покажем, что $J(u^*) = 0$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} J(u^{N_m}) &= \max_{t \in [0, T']} \left\| u^{N_m}(t) - \varphi - \int_0^t Au^{N_m}(s)ds \right\|_H = \\ &= \left\| P_{N_m}\varphi - \varphi + \int_0^t P_{N_m}Au^{N_m}(s)ds - \int_0^t Au^{N_m}(s)ds \right\|_H \leq \\ &\leq \max_{t \in [0, T']} \|P_{N_m}\varphi - \varphi\|_H + \max_{t \in [0, T']} \left\| \int_0^t (P_{N_m}Au^{N_m}(s) - Au^{N_m}(s))ds \right\|_H. \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое

$$\begin{aligned} &\max_{t \in [0, T']} \left\| \int_0^t (P_{N_m}Au^{N_m}(s) - Au^{N_m}(s))ds \right\|_H = \\ &= \max_{t \in [0, T']} \left\| \int_0^t ((I - P_{N_m})Au^{N_m}(s)) \right\|_H \leq \max_{t \in [0, T'_k]} \int_0^t \|(I - P_{N_m})Au^{N_m}(s)\|_H ds. \end{aligned}$$

Так как $Au^{N_m}(t)$ принадлежит ограниченному множеству в V , то равномерно по $t \in [0, T']$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(I - P_{N_m})Au^{N_m}(t)\|_H = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(u^{N_m}) = 0.$$

При каждом $t \in [0, T']$ имеем $u^{N_m}(t) \in M$. В виду замкнутости M мы получаем, что $u^*(t) \in M$ при всех $t \in [0, T'_k]$. Таким образом u^* является s_2 -решением задачи (4.3.1)–(4.3.2) на $[0, T']$.

Покажем теперь, что $\{u^{N_l}\}$ сходится к u^* . В самом деле, имеем

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} \|u^{N_l} - u^*\|_{C([0, T']; H)} \geq 0.$$

Пусть

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \|u^{N_l} - u^*\|_{C([0, T']; H)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{N_p} - u^*\|_{C([0, T']; H)}.$$

В силу компактности вложения

$$C^1([0, T']; V) \subset C([0, T']; H)$$

можем считать, что u^{N_p} сходится к некоторой функции v^* . Рассуждениями, аналогичными выше, получаем, что v^* является s_2 -решением задачи (4.3.1)–(4.3.2). Однако согласно предположению задача (4.3.1)–(4.3.2) имеет единственное решение, следовательно, $v^* = u^*$. Поэтому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|u^{N_l} - u^*\|_{C([0, T']; H)} = 0.$$

□

6.2. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПО НЕВЯЗКЕ

Результаты предыдущего пункта можно существенно улучшить, если использовать методы оценки величины невязки. Будем рассматривать задачу (4.1.1). С этой задачей будем рассматривать функционал невязки на отрезке $[0, t]$ при $t \in [0, T]$, где T — фиксированное положительное число. Введем следующую функцию

$$J(t) = \inf_{u \in C([0, t]; V)} \max_{t' \in [0, t]} \left\| u(t') - \varphi - \int_0^{t'} Au(s) ds \right\|_{C([0, t]; H)},$$

где пространства H, V были определены в пункте 4.1.

Сделаем несколько замечаний относительно функции $J(t)$. Во-первых, мы считаем, что начальный элемент φ фиксирован во всех наших рассуждениях. Во-вторых, функция $J(t)$ определена для всех $t \geq 0$. В-третьих, в силу абсолютной непрерывности интеграла Бохнера, функция J является непрерывной функцией. В-четвертых, легко видеть, что эта функция является монотонно (но не строго) возрастающей функцией. Наконец, если задача 4.1.1 имеет решение на отрезке $[0, T]$, то функция J равна нулю на этом отрезке. Верно и обратное, если функция J равна нулю на отрезке $[0, T]$, то задача 4.1.1 имеет решение (возможно не единственное) на отрезке $[0, T]$.

Вместе с задачей (4.1.1) будем рассматривать и конечномерную задачу (4.1.3). Соответственно, введем и функционал невязки $J^N(t)$:

$$J^N(t) = \inf_{u \in C([0, t]; V)} \max_{t' \in [0, t]} \left\| u(t') - P_N \varphi - \int_0^{t'} P_N A u(s) ds \right\|_{C([0, t]; H)}.$$

Лемма 6.2.1. Для любых $\varphi \in H$ и $t \geq 0$ существует такая положительная сходящаяся к нулю последовательность $\alpha_N(t, \varphi) = \alpha_N(t)$, что

$$|J(t) - J^N(t)| \leq \alpha_N(t). \quad (6.2.1)$$

Доказательство. Через $J(u, t)$ и $J_N(u, t)$ обозначим следующие функционалы:

$$J(u, t) = \max_{t' \in [0, t]} \left\| u(t') - \varphi - \int_0^{t'} Au(s) ds \right\|_{C([0, t]; H)},$$

$$J^N(u, t) = \max_{t' \in [0, t]} \left\| u(t') - P_N \varphi - \int_0^{t'} P_N A u(s) ds \right\|_{C([0, t]; H)}.$$

Для фиксированных N и $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} J(u, t) &= \max_{t' \in [0, t]} \left\| u(t') - \varphi - \int_0^{t'} Au(s) ds \right\|_{C([0, t]; H)} = \\ &= \max_{t' \in [0, t]} \left\| u(t') - P_N \varphi + (P_N - I)\varphi - \int_0^{t'} P_N A u(s) ds + \int_0^{t'} (P_N - I) A u(s) ds \right\|_{C([0, t]; H)} \leq \\ &\leq J^N(u, t) + \|(I - P_N)\varphi\|_{C([0, t]; H)} + \max_{t' \in [0, t]} \left\| \int_0^{t'} (I - P_N) A u(s) ds \right\|_{C([0, t]; H)} \end{aligned}$$

Второе слагаемое $\|(I - P_N)\varphi\|_{C([0, t]; H)}$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, а третье оценивается рассуждениями, аналогичными рассуждениям в доказательстве теоремы 6.1.1. Таким образом, существует положительная сходящаяся к нулю при фиксированном t и $N \rightarrow \infty$ последовательность $\alpha_N^1(t)$ такая, что

$$J(u, t) - J^N(u, t) \leq \alpha_N^1(t). \quad (6.2.2)$$

Аналогично доказывается существование положительной сходящейся к нулю последовательности $\alpha_N^2(t)$ такой, что

$$J^N(u, t) - J(u, t) \leq \alpha_N^2(t). \quad (6.2.3)$$

Из неравенств (6.2.2), (6.2.3) следует, что существует такая последовательность $\beta_N(t)$, что

$$J(u, t) = J^N(u, t) + \beta_N(t),$$

причем $|\beta_N(t)| \leq \max\{\alpha_N^1(t), \alpha_N^2(t)\}$. Поскольку последовательность $\beta_N(t)$ не зависит от u , имеем

$$\left| \inf_{u \in C([0, t]; V)} J(u, t) - \inf_{u \in C([0, t]; V)} J^N(u, t) \right| \leq |\beta_N(t)|.$$

Остается только заметить, что

$$\inf_{u \in C([0, t]; V)} J(u, t) = J(t)$$

и

$$\inf_{u \in C([0, t]; V)} J^N(u, t) = J^N(t).$$

□

Пусть $a(t)$, $a_n(t)$ — непрерывные неубывающие функции на $[0, \mathbb{T}]$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 6.2.1. Существует такое число $t^* \in (0, \mathbb{T}]$, что $a(t) = 0$ при $t \in [0, t^*]$ и $a(t) > 0$ при $t > t^*$, если $t^* \neq \mathbb{T}$.

Условие 6.2.2. Существует такая числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, что $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ и

$$|a(t) - a_n(t)| \leq \alpha_n, \quad t \in [0, \mathbb{T}], \quad n > 0. \quad (6.2.4)$$

Построим числовую последовательность t_n следующим образом

$$t_n = \min\{\mathbb{T}, \max\{t : a_n(t) = \alpha_n\}\}.$$

Лемма 6.2.2. Пусть выполнены условия 6.2.1 и 6.2.2. Тогда

$$t_n \geq t^*, \quad n \geq 1.$$

Доказательство. В силу неравенства (6.2.4) имеем оценку

$$a_n(t) \leq \alpha_n, \quad t \in [0, t^*]. \quad (6.2.5)$$

Если $t_n = \mathbb{T}$, то утверждение леммы очевидно. Предположим, что существует такое $\tilde{t} \in (0, \mathbb{T})$, что $a_n(\tilde{t}) = \alpha_n$, тогда в силу оценки (6.2.5) и неубывания функции a_n имеем, что

$$a_n(t) = \alpha_n, \quad t \in [\tilde{t}, t^*].$$

Отсюда следует, что $a_n(t^*) = \alpha_n$, т. е. $t_n \geq t^*$. □

Теорема 6.2.1. Пусть выполнены условия 6.2.1, 6.2.2. Тогда последовательность t_n сходится к t^* .

Доказательство. Поскольку $t^* \leq t_n \leq \mathbb{T}$, существует подпоследовательность t_{n_m} такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_{n_m} = t'.$$

Видим, что $t' \geq t^* > 0$. Для любого ε такого, что $0 < \varepsilon < t'$, существует такое M , что при $m > M$ имеем

$$\max_{t \in [0, t' - \varepsilon]} |a(t) - a_{n_m}(t)| \leq \alpha_{n_m}.$$

Так как $t_n \geq t^*$, то при $t \in [0, t' - \varepsilon]$ имеем

$$a_{n_m}(t) \leq \alpha_{n_m}.$$

Отсюда следует, что $a_{n_m} \rightrightarrows 0$ (сходится равномерно) при $t \in [0, t' - \varepsilon]$. В силу условия 6.2.1 из единственности равномерного предела получаем, что $a(t) = 0$ при $t \in [0, t' - \varepsilon]$. Следовательно, $t^* \geq t' - \varepsilon$. В силу произвольности ε имеем $t^* \geq t'$. Из леммы 6.2.2 следует, что $t^* \leq t' \leq t^*$ или $t' = t^*$. Беря в качестве подпоследовательности t_{n_m} подпоследовательности, сходящиеся к верхнему и нижнему пределам, видим, что последовательность t_n сходится к t^* . □

Рассмотрим вопрос об оценке скорости сходимости последовательности t_n при $n \rightarrow \infty$.

Введем в рассмотрение множества $\{t : a(t) - \alpha_n = \alpha_n\}$, которые обозначим через I_n , $n \leq 1$. Введем числовую последовательность

$$\beta_n = \begin{cases} \max I_n, & I_n \neq \emptyset; \\ \mathbb{T}, & I_n = \emptyset. \end{cases}$$

Лемма 6.2.3. Пусть выполнены условия 6.2.1, 6.2.2. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = t^*.$$

Доказательство. В случае, когда $t^* = \mathbb{T}$, последовательность β_n является стационарной: $\beta_n = \mathbb{T}$. Рассмотрим случай $t^* < \mathbb{T}$. Так как $a(\mathbb{T}) > 0$, то существует такой номер N , что при $n > N$ имеет место $a(\mathbb{T}) > 2\alpha_n$. Для таких номеров $I_n \neq \emptyset$, действительно, непрерывная функция $a(t)$, равная нулю при $t = 0$, достигает значения $2\alpha_n$ хотя бы в одной точке. Введем числовую функцию $\mathring{a}^{-1}(x) = \max\{t : a(t) = x\}$. Так как функция $a(t)$ непрерывна на $[0, \mathbb{T}]$, то функция $\mathring{a}^{-1}(x)$ непрерывна на $[0, a(\mathbb{T})]$. В рассматриваемом случае для достаточно больших n последовательность β_n может быть задана по формуле

$$\beta_n = \mathring{a}^{-1}(2\alpha_n).$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathring{a}^{-1}(x) = \mathring{a}^{-1}(0) = t^*.$$

□

Теорема 6.2.2. Пусть выполнены условия 6.2.1, 6.2.2. Тогда для последовательности t_n имеет место оценка

$$t^* \leq t_n \leq \beta_n. \quad (6.2.6)$$

Доказательство. Нижняя оценка в неравенстве 6.2.6 следует из леммы 6.2.2. Пусть $I_n \neq \emptyset$. Для произвольного $\tilde{t} > \beta_n$ в силу монотонности функции $a(t)$ имеем

$$a(\tilde{t}) - \alpha_n > \alpha_n.$$

Это означает, что $a_n(\tilde{t}) > \alpha_n$. Учитывая монотонность функции a_n , получаем, что $\tilde{t} > t_n$. В силу произвольности $\tilde{t} > \beta_n$ заключаем, что

$$t_n \leq \beta_n.$$

В случае, когда $I_n = \emptyset$, мы имеем очевидную оценку

$$t_n \leq \beta_n = \mathbb{T}.$$

□

Следствие 6.2.1. Пусть выполняются условия 6.2.1, 6.2.2 и пусть $t^* = \mathbb{T}$. Тогда последовательность t_n является стационарной

$$t_n = \mathbb{T}.$$

При исследовании времени существования решений уравнения (4.1.1) мы в качестве функции $a(t)$ возьмем функцию $J(t)$, а в качестве функций $a_n(t)$ возьмем функции $J^n(t)$. Предположим, что существует такое t_0 , что задача (4.1.1) имеет решение при $t \in [0, t_0]$. Тогда для выбранных функций $a(t)$, $a_n(t)$ условие 6.2.1 будет выполнено. Лемма 6.2.1 гарантирует выполнение условия 6.2.2. Таким образом, к функционалам невязки можно применять теоремы 6.2.1, 6.2.2. В приложениях мы можем конструктивно наблюдать начальные элементы последовательности t_n , а теорема 6.2.1 гарантирует сходимость этой последовательности к числу t^* . Соответственно на отрезке $[0, t^*]$ будет существовать решение задачи 4.1.1 для рассматриваемого начального условия φ . Так как вся последовательность t_n нам обычно не известна, то для приложений необходима оценка скорости сходимости последовательности. Такую оценку нам может дать теорема 6.2.2. Конечно, для построения последовательности β_n нам необходимо знать свойства функции $a(t)$, которая часто является неизвестной, однако для построения β_n нет необходимости знать приближенные решения, а лишь априорную оценку невязки приближенных решений. В вычислительной практике характерной является ситуация, когда выполняются условия следствия 6.2.1 и последовательность t_n является стационарной.

6.3. ОЦЕНОЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Введем числовую функцию на элементах пространства H_s следующим образом:

$$\nu(u) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_k|}{k},$$

допуская значения $\nu = -\infty$. В случае когда существует такой номер K , что $u_k = 0$ при $k > K$, полагаем $\nu(u) = -\infty$.

Лемма 6.3.1. Пусть $u \in H_s$. Тогда $\nu(u) \leq -s$.

Доказательство. Последовательность u_k можно представить в виде $u_k = \alpha_k e^{-sk}$, где последовательность $\{\alpha_k\} \in l_2$. Действительно,

$$\|\alpha_k\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 e^{2sk} = \|u\|_{H_s}^2.$$

Поскольку

$$\ln |u_k| = \ln |\alpha_k| - sk$$

и при достаточно больших k имеем $\ln |\alpha_k| < 0$, видим, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_k|}{k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\alpha_k|}{k} - s \leq -s.$$

□

Введем еще функцию $\nu_k(u)$, заданную на элементах H_s , следующим образом

$$\nu_k(u) = \begin{cases} \frac{\ln |u_k|}{k}, & u_k \neq 0 \\ -\infty, & u_k = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность $\{u^N\} \subset H_s$, где $u^N = \sum_{k=1}^N u_k^N e_k$.

Теорема 6.3.1. Пусть $\lim_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u\|_{H_s} = 0$ для $u \in H_s$. Предположим, что

$$\nu(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_k|}{k} = -s \neq -\infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C_\varepsilon > 0$ не зависящая от N и k такая, что

$$|\nu_k(u^N) - \nu(u)| \leq C_\varepsilon \frac{1}{k} + \varepsilon, \quad k \leq N,$$

исключая k , N для которых $u_k^N = 0$.

Доказательство. Поскольку $\nu(u) = -s$, существует $C_0 > 0$ и такая числовая последовательность $\gamma_k > 0$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_k)^{-1} e^{ks} |u_k| = C_0,$$

причем для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_{1\varepsilon}$ такая, что

$$\gamma_k \leq C_{1\varepsilon} e^{-\varepsilon k}. \quad (6.3.1)$$

Следовательно,

$$|u_k| = (C_0 + \delta_k) \gamma_k e^{-ks},$$

где $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В силу сходимости u^N к u в H_s следует, что $u_k^N \rightarrow u_k$, при $N \rightarrow \infty$. Поэтому для фиксированного k существует последовательность $\Delta_k^N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ такая, что

$$|u_k^N| = (C_0 + \delta_k + \Delta_k^N) \gamma_k e^{-sk}.$$

Пусть $N_0 > 0$ такая, что при $N > N_0$, $k > N_0$ имеем

$$|\delta_k + \Delta_k^N| < \frac{C_0}{2}.$$

Учитывая (6.3.1), имеем оценку

$$\begin{aligned} |\nu_k(u^N) - \nu(u)| &= \left| \frac{\ln |C_0 + \delta_k + \Delta_k^N|}{k} + \frac{\ln \gamma_k}{k} - s + s \right| \leq \\ &\leq \frac{|\ln(2C_0)|}{k} + \frac{|\ln C_{1\varepsilon}|}{k} + \varepsilon \leq C_\varepsilon \frac{1}{k} + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

6.4. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В настоящем пункте мы покажем, как методы предыдущих пунктов могут быть применены к задаче (2.2.4).

Для построения конструктивной оценки времени существования бесконечномерной системы необходимо аппроксимировать эту систему конечномерной системой. Мы будем использовать аппроксимационную схему, описанную в разделе 4.3. Приведем еще раз эту численную схему применительно к задаче (2.2.4). Пусть $N \geq 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^N r_k(t) e^{-iku}, \quad V^N(u, t) = \sum_{k=1}^N v_k(t) e^{-iku}. \quad (6.4.1)$$

Использование представления в виде конечных сумм Фурье (6.4.1) имеет существенные преимущества. Действительно, пусть $f = \sum_{k=1}^N f_k e^{-iku}$. Тогда $f_u = \sum_{k=1}^N (-ik) f_k e^{-iku}$. Еще более эффективно вычисляется оператор P . Для $g = \sum_{k=-N}^N g_k e^{-iku}$ имеем $P[g] = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^N g_k e^{-iku}$. Введем бинарную операцию «*», которая является замкнутой для множества функций вида (6.4.1).

Пусть $A = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-iku}$, $B = \sum_{k=-N}^N b_k e^{-iku}$. Тогда для $C = AB$ имеем $C = \sum_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}$.

Операцию «*» введем следующим образом: $A * B = \sum_{k=-N}^N c_k e^{-iku}$, где c_k — коэффициенты Фурье функции C .

Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений

$$\begin{aligned} R_t^N &= i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \\ V_t^N &= i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

где $U^N = P(V^N * \bar{R}^N + \bar{V}^N * R^N)$, $B = P(V^N * \bar{V}^N)$.

Система (6.4.2) решается явным методом Рунге—Кутты 4-го порядка точности по переменной t . Будем предполагать, что начальные функции R_0 и V_0 принадлежат пространству $E_{s_1}^4$, $s_1 > 0$.

Наряду с вычислением функций R^N , V^N , будем еще вычислять числовую функцию $\nu_k^N(t)$, определенную следующим образом:

$$\nu_k^N(t) = \min \left\{ \frac{|\ln |R_k^N(t)||}{k}, \frac{|\ln |V_k^N(t)||}{k} \right\}, \quad k \leq N,$$

предполагая, без ограничения общности, что $R_k^N(t) \neq 0$, $V_k^N(t) \neq 0$.

Функция ν_k^N аппроксимирует функцию $\nu(t)$, построенную по точным решениям системы (2.2.4) функциям $R(t)$ и $V(t)$:

$$\nu(t) = \min \left\{ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|\ln |R_k||}{k}, \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|\ln |V_k||}{k} \right\}.$$

Функция ν имеет естественную интерпретацию. Функции R , V являются аналитическими в нижней комплексной полуплоскости и имеющими особенности в верхней полуплоскости. Значение функции ν определяет расстояние особенностей до вещественной оси. До тех пор пока $\nu > s_0$,

$s_1 > s_0 > 0$, система (2.2.4) имеет s_0 -решение. Функция ν оценивается через функцию ν_k^N с помощью теоремы 6.3.1. Функцию $\nu_k^N(t)$ будем называть оценочной функцией.

ГЛАВА 7

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СТАТИСТИКИ В ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Как мы уже отмечали, вопрос о существовании решений уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, является достаточно сложным. В главе 6 мы рассматривали методы, позволяющие делать достоверные выводы о существовании решений на заданном временном интервале. Эти выводы следовали из результатов численного моделирования наших уравнений. Однако найти класс начальных данных, для которых решения существовали бы на заданном интервале, пока не удастся. В настоящей главе мы рассмотрим некоторые статистические методы анализа вычислительных экспериментов.

7.1. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Начнем с вопроса о существовании достаточно малого шара (в разумной метрике) в пространстве начальных данных такого, что для всех начальных данных из этого шара соответствующие решения являются глобальными решениями, т.е. существуют при всех $t > 0$. Этот вопрос как одна из основных нерешенных проблем теории поверхностных волн был поставлен В. Крэйгом в [48] на Международной конференции «Математическая гидродинамика», Москва-2006. В нашей работе мы дадим некоторое подтверждение гипотезы о существовании малого шара в пространстве решений, для начальных данных из которого существуют глобальные решения.

Опишем схему нашего вычислительного эксперимента.

1. выбираем временной интервал, на котором будем исследовать наши решения — фиксируем положительное число T ;
2. выбираем параметр дискретизации — фиксируем число $N > 1$;
3. фиксируем положительное число β ;
4. выбираем число α такое, что $0 < \alpha < \beta$;
5. строим случайные начальные данные следующим образом:

$$R_0(u) = 1 + \sum_{k=1}^N (\xi_k^r e^{-\alpha k}) e^{-iuk}, \quad (7.1.1)$$

$$V_0(u) = \sum_{k=1}^N (\xi_k^v e^{-\alpha k} i) e^{-iuk},$$

где $\xi_k^r, \xi_k^v, k = 1, 2, \dots, N$ суть независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[-1, 1]$;

6. находим численные решения задачи (2.2.4) с начальными условиями, выбранными на предыдущем шаге;
7. нахождение численного решения прекращаем в при выполнении одного из двух условий:
 - (а) $t = T$;
 - (б) на текущем шаге по времени нарушено одно из условий:

$$|r_k^N(t)| \leq e^{-\beta k},$$

$$|v_k^N(t)| \leq e^{-\beta k} \quad (7.1.2)$$

для всех $k = 1, \dots, N$ и $t < T$;

8. в первом случае считаем, что эксперимент закончился «неудачей», а во втором случае будем считать, что эксперимент закончился «успешно».

Считая, параметры T , N , β фиксированными, мы имеем случайное событие $\kappa(\alpha)$, зависящее от параметра α . Это случайное событие может принимать два взаимоисключающих значения: «успех» и «неудача». Припишем значению «успех» числовое значение 1, а значению «неудача» — числовое значение 0. Таким образом будем рассматривать случайную величину $\kappa(\alpha)$. Эта случайная величина имеет биномиальное распределение. С вероятностью p_α она принимает значение 1 и с вероятностью $q_\alpha = 1 - p_\alpha$ она принимает значение 0. Так как наша случайная величина зависит от параметра, то можно говорить о случайной функции, заданной на множестве $\Omega \subset (0, \beta)$.

Разумеется, мы не знаем истинного распределения вероятностей случайной величины $\kappa(\alpha)$, поэтому мы будем получать статистические оценки для вероятностей p_α и q_α , проводя серии вычислительных экспериментов. Как известно, см. [19,32], наиболее употребительной оценкой вероятности события является его частота появления. Эта оценка является состоятельной несмещенной оценкой с минимальной дисперсией. В дополнение к полученной оценке вероятности «успеха» (выхода численного решения из исследуемой области, т.е. нарушения неравенств (7.1.2)) мы будем вычислять доверительный интервал для нашей оценки.

Опишем параметры наших вычислительных экспериментов.

Исследуемый временной интервал	[0, 10]
Параметр дискретизации	1024
Шаг по времени	0,001
Параметр β	0,040475
Количество серий вычислений	1000

Параметр β выбран из условия

$$\beta = -\frac{\ln 10^{-9}}{(N/2)}.$$

Переменный параметр α мы будем выбирать из множества $\Omega = \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5\}$. Для каждого значения параметра α мы проведем серию из 1000 испытаний. На основе этой выборки мы оценим вероятность того, что на отрезке $[0, 10]$ решение из класса (7.1.1) нарушит условие (7.1.2).

На рис. 7.1.1 приведена зависимость вероятности p_α от значения параметра α . Как и следовало ожидать, с увеличением параметра α вероятность «успехов», т.е. нарушения условий (7.1.2), уменьшается. При проведении опытов при значениях $\alpha = 0,5$, $\alpha = 0,6$ из серии 1000 испытаний нами было зарегистрировано 1000 «успехов», т.е. во всех случаях было нарушено условие 7.1.2. С другой стороны, при $\alpha = 1,5$ из 1000 испытаний нами не было зарегистрировано ни одного случая «успеха». На рис. 7.1.2 приведен доверительный интервал для оценки вероятности. Уровень значимости был выбран 95%.

С увеличением параметра α не только уменьшается вероятность «успеха», но и возрастает среднее время при котором нарушается условие (7.1.2). График этой зависимости приведен на рис. 7.1.3.

Рассмотрим также зависимость средней энергии волн, решения которых нарушали условие (7.1.2), от значения параметра α . Как и следовало ожидать, с увеличением значения параметра α средняя энергия убывает.

Интересно посмотреть зависимость вероятности «успехов» от энергии волн. Эта зависимость приведена на рис. 7.1.5.

Рассмотрим еще зависимость среднего времени решений, которые нарушали условие (7.1.2), от энергии волн. Эта зависимость приведена на рис. 7.1.6. Для краткости мы будем говорить о времени разрушения волн.

В следующем разделе мы используем результаты наших экспериментов для нового метода исследования существования решений задачи (2.2.4).

7.2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ

В настоящем разделе мы рассмотрим методы, позволяющие проверять гипотезы о существовании решений нелинейных уравнений, с использованием идей статистической проверки гипотез.

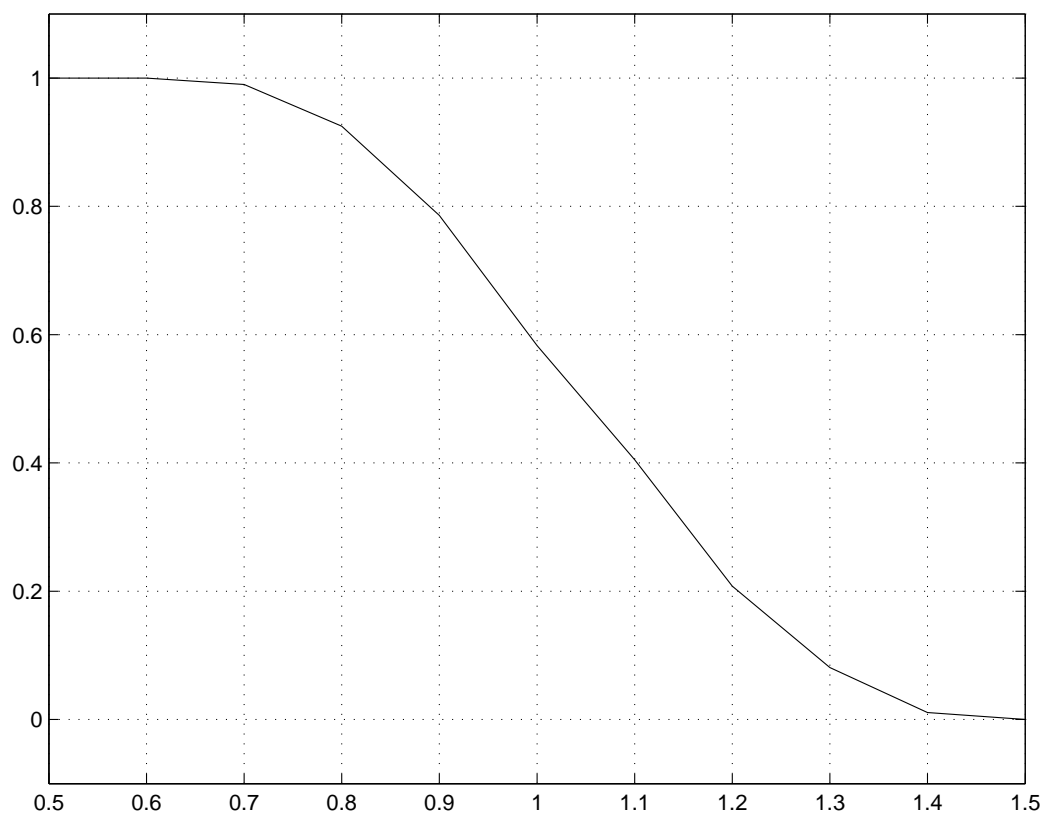


Рис. 7.1.1. Оценка вероятности

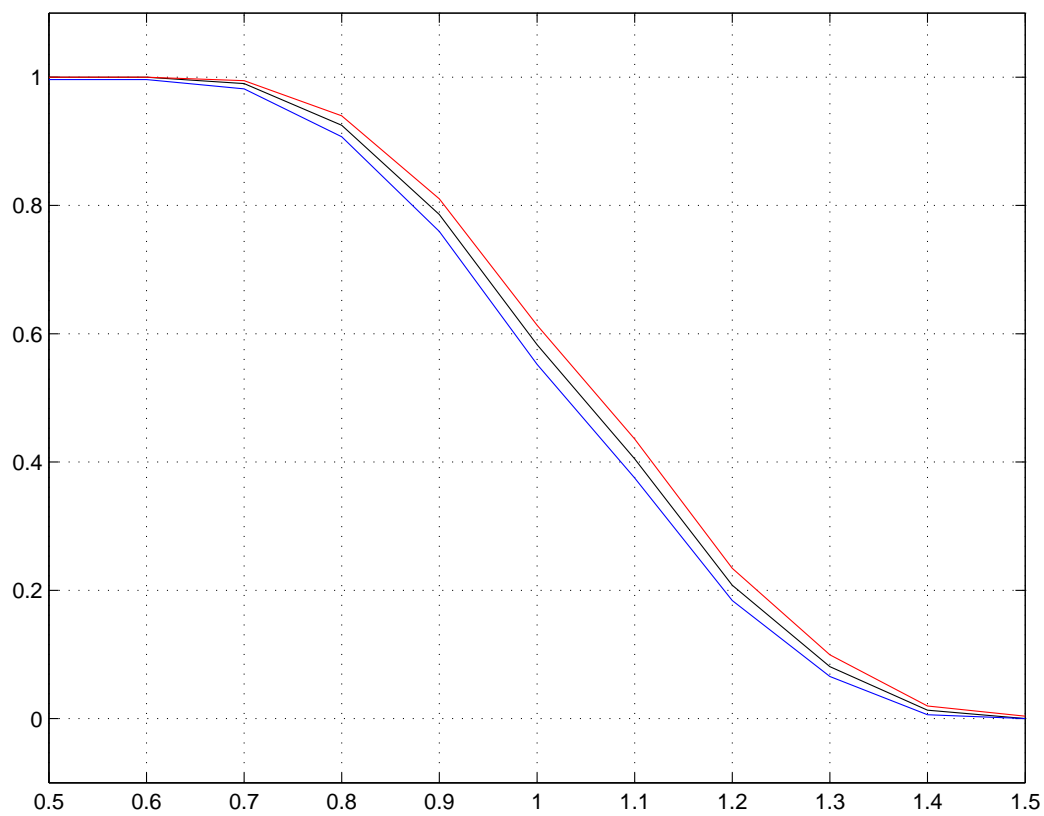


Рис. 7.1.2. Доверительный интервал (95%)

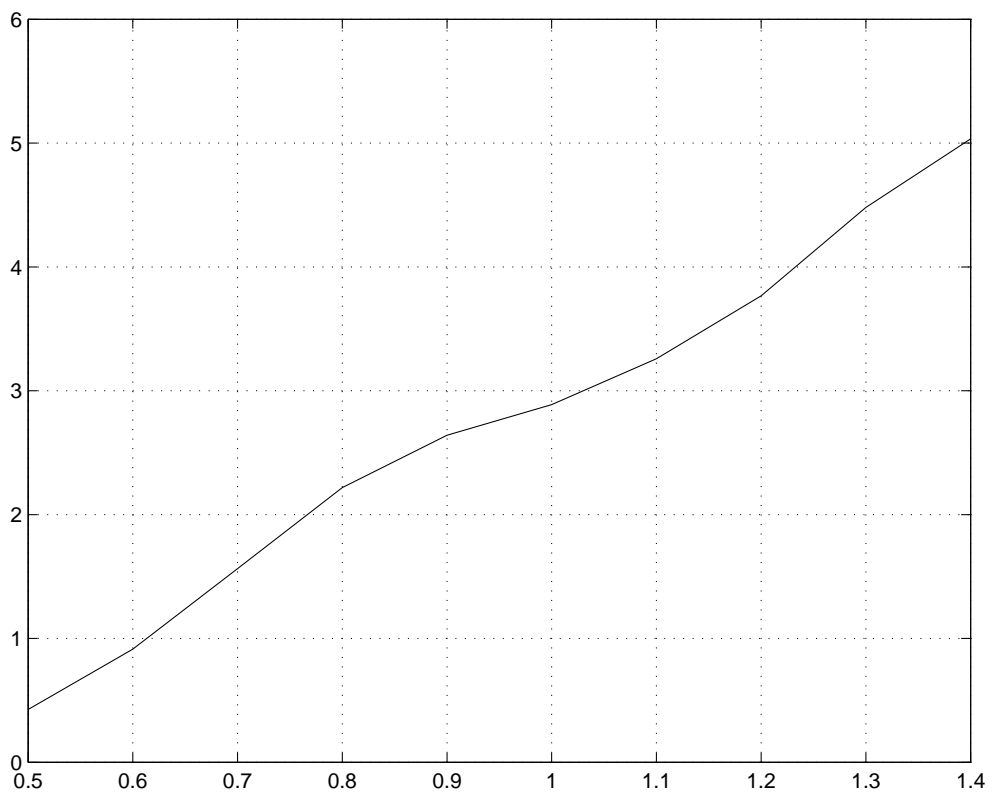


Рис. 7.1.3. Среднее время разрушения решений

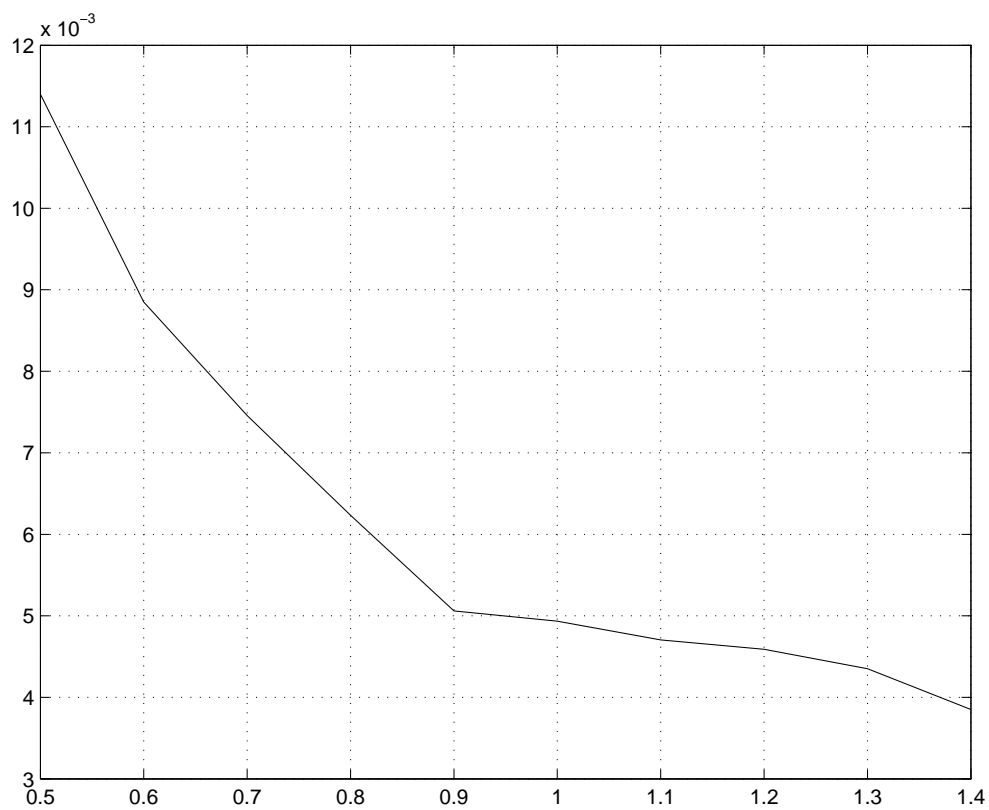


Рис. 7.1.4. Распределение энергии волн

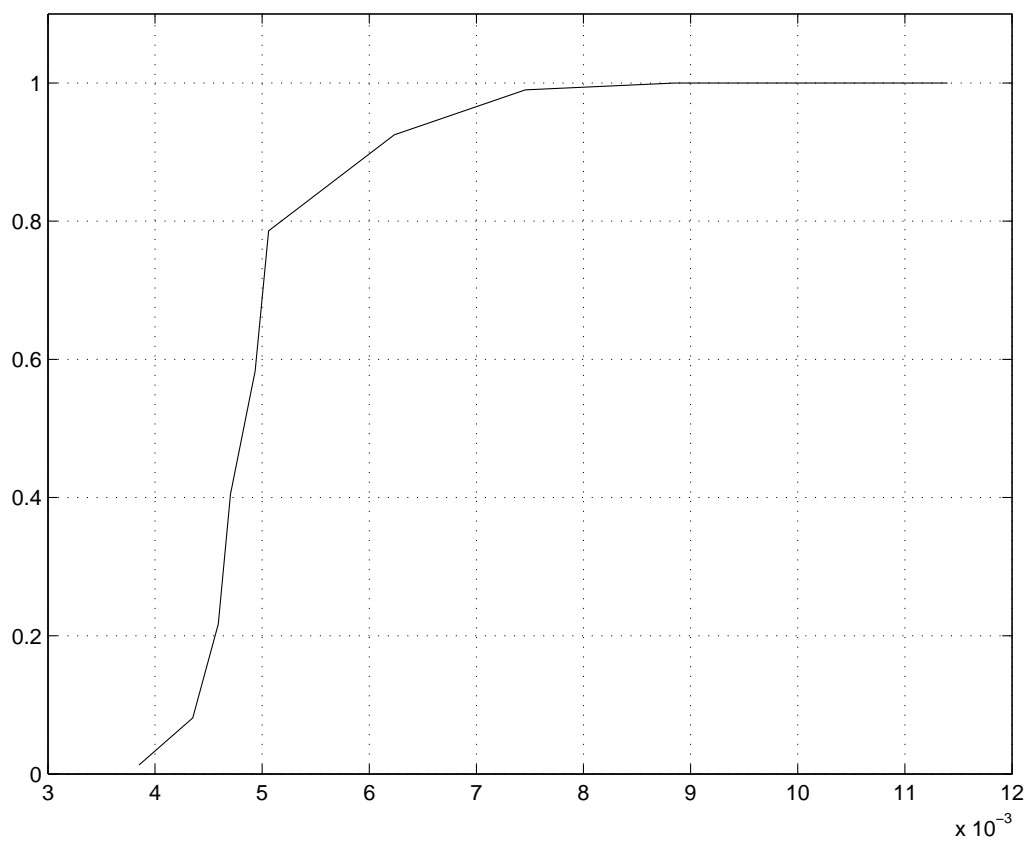


Рис. 7.1.5. Зависимость среднего времени разрушения волн от энергии

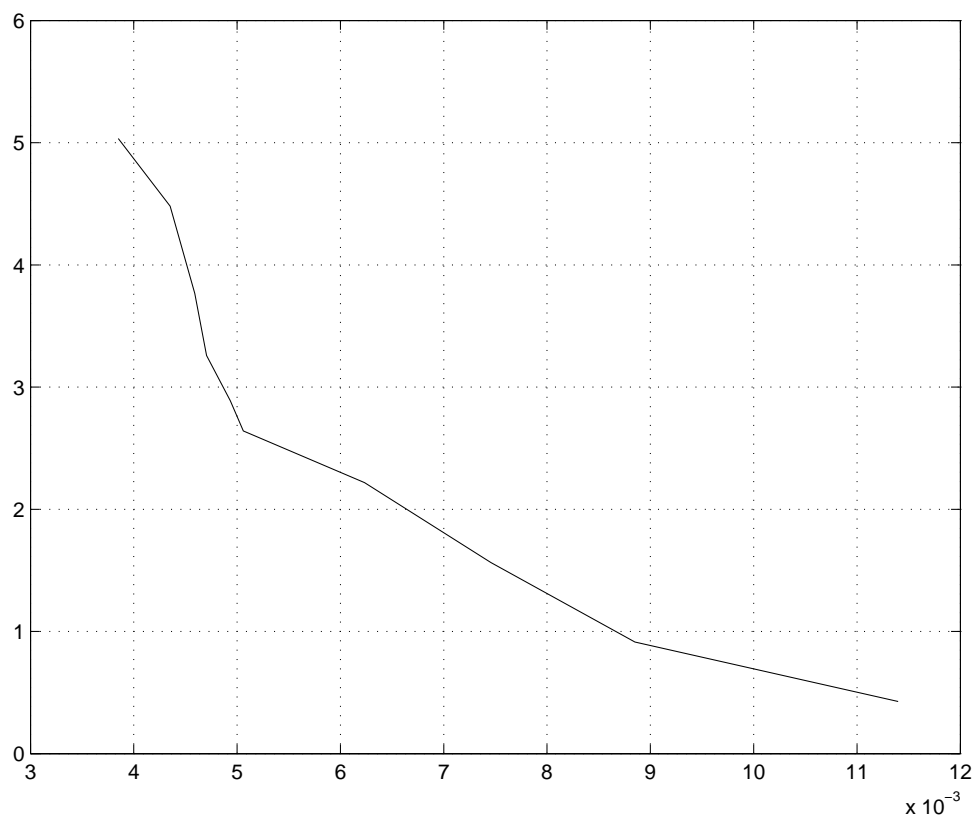


Рис. 7.1.6. Зависимость среднего времени разрушения волн от энергии

При исследовании нелинейных уравнений мы часто оказываемся в ситуации, когда теоремы о существовании решений не могут быть применены к конкретным ситуациям, возникающим в приложениях.

При этом единственным способом исследования этих уравнений является численное моделирование. После проведения вычислительных экспериментов полученные результаты подвергаются экспертизе на соответствие экспериментальным данным или различным физическим представлениям. В случае, если результаты вычислительных экспериментов признаются адекватными, то делается вывод о достоверности проведенных численных экспериментов. Видно, что в описанной схеме роль математики состоит лишь в том, чтобы обосновать сходимость применяемых численных схем. Однако основной вопрос — существует ли решение, которое мы моделируем, часто остается нерешенным. Другим принципиальным моментом является то обстоятельство, что, пытаясь делать выводы о существовании решений уравнений (часто в бесконечномерных пространствах), мы имеем в качестве результатов численных экспериментов лишь решения, принадлежащие конечномерным пространствам. Точнее, конечным и дискретным множествам конечномерных пространств. В настоящем разделе мы рассмотрим метод, позволяющий делать доказательные выводы о существовании решений. В качестве «платы» за попытку исследовать поведение бесконечномерных систем с помощью дискретных решений мы будем получать наши выводы с заранее определенной вероятностью. Заметим, что для прикладных расчетов, когда исходные данные заданы с погрешностью, а сами модели являются часто приближенными, получение вывода о существовании решения с большой долей вероятности является вполне достаточным.

Мы начнем наше рассмотрение с абстрактного случая, а потом рассмотрим его применение для задачи оценки времени существования решений уравнений (2.2.4).

Пусть X, Y — банаховы пространства. Будем рассматривать непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор

$$A : X \rightarrow Y.$$

Для заданного элемента $y \in Y$ рассмотрим уравнение

$$Ax = y. \quad (7.2.1)$$

Мы будем искать решение не во всем пространстве X , а лишь на заданном подмножестве $M \subset X$. Таким образом, под решением задачи (7.2.1) мы будем понимать элемент $x \in M$, на котором выполняется равенство (7.2.1). Правую часть (элемент y) мы также будем считать принадлежащем не всему пространству Y , а множеству $Q \subset Y$.

Предположим, что мы имеем определенный алгоритм, позволяющий находить последовательность x_n , для любого конечного $n = 1, 2, \dots$. При этом последовательность x_n принадлежит пространству X , т.е. $\{x_n\} \subset X$.

Относительно последовательности x_n мы будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 7.2.1. Если имеет место вложение

$$\{x_n\} \subset M,$$

то при заданном элементе $y \in Q$ решение задачи (7.2.1) существует, это решение x принадлежит множеству M и имеет место соотношение

$$\|x_n - x\|_X \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Условие 7.2.1 означает, что наш алгоритм дает нам приближенные решения уравнения (7.2.1) в случае, когда решение нашей задачи существует при заданной правой части $y \in Q$. Заметим также, что можно требовать принадлежности $x_n \in M$ начиная с достаточно большого значения n .

В реальности мы обычно не можем знать всю последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$. Как правило, мы имеем лишь конечное множество $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Задача состоит в том, чтобы по конечным наблюдениям $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$, сделать статистический вывод о принадлежности множеству M всей последовательности $\{x_n\}$ и, соответственно, сделать вывод о существовании решения задачи (7.2.1) для заданной правой части $y \in Q$.

Предположим, что мы нашли первые N членов последовательности x_n и видим, что $x_n \in M$ при $n = 1, 2, \dots, N$. С какой вероятностью вся последовательность x_n принадлежит множеству M ?

Прежде чем искать ответ на это вопрос, мы должны определить вероятностное пространство, относительно которого мы будем вычислять вероятность.

Предположим, что элемент y такой, что задача (7.2.1) не имеет решения. Тогда по условию 7.2.1 существует такой номер $N_1 \geq 1$, что $x_{N_1} \notin M$. Введем величину $\nu(y)$, принимающую целые значения \mathbb{N} . Значение $\nu(y)$ определяется по формуле

$$\nu(y) = \min\{n : x_n \notin M\}.$$

Будем рассматривать ν в качестве случайной величины. Для этого нам необходимо задать функцию распределения $F(n)$. Конечно, мы не можем знать точную функцию распределения, поэтому для построения этой функции мы будем использовать статистические методы.

Опишем схему построения функции распределения.

1. фиксируем множества M и Q ;
2. фиксируем достаточно большое целое число N ;
3. фиксируем целое число $T > 0$;
4. выбираем произвольный элемент $y \in Q$;
5. если $x_n \in M$, $n = 1, 2, \dots, N$, то переходим к шагу 3;
6. находим $\nu(y)$;
7. если найдено $\nu(y)$ меньше чем T , переходим к шагу 3;

В итоге мы имеем выборку S значений ν . Объем этой выборки равен T .

Замечание 7.2.1. При описанной выше схеме предполагается, что за конечное число шагов возможно набрать выборку нужного объема, см. раздел 7.1.

Функцию распределения зададим следующим образом

$$F(n) = \frac{\#\{\nu \in S : \nu \leq n\}}{T},$$

где $\#$ означает мощность множества. Таким образом, вероятность распределения случайной величины ν задаем с помощью частоты.

Определение 7.2.1. Будем говорить, что задача (7.2.1) *имеет решение* (для фиксированного y) с ν -вероятностью α , если

$$\alpha = 1 - F(N'),$$

где F есть функция распределения вероятностей, и для всех $n = 1, 2, \dots, N'$ имеет место

$$x_n \in M.$$

Определение 7.2.2. Решение, существующее с ν -вероятностью единица, будем называть *существующим почти на верное*.

Заметим, что в этом определении число N' может быть как меньше N , так и больше. Очевидно, что если $N' \geq N$, то ν -вероятность всегда будет равна единице.

Замечание 7.2.2. Разумеется, если мы получили, что решение существует ν почти на верное, это еще не значит, что решение задачи (7.2.1) существует на самом деле.

На адекватность наших статистических выводов влияет объем выборки T при построении функции распределения и число N . Чем больше объем выборки T и число N , тем более адекватным будут наши выводы.

Проиллюстрируем наши идеи на примере задачи (2.2.4). Систему уравнений (2.2.4) можно записать в форме (7.2.1). Однако идеи изложенные выше не зависят от конкретной формы записи уравнения. Вместо рассмотрения правых частей уравнения (7.2.1) элемента y мы будем рассматривать начальные функции R_0, V_0 .

Для построения функции распределения мы используем результаты вычислительных экспериментов в разделе 7.1.

Множество Q определим следующим образом:

$$|r_k^N(t)| \leq e^{-\beta k},$$

$$|v_k^N(t)| \leq e^{-\beta k}$$

для всех $k = 1, \dots, 1024$ и $t < 10,0$, где

$$\beta = -\frac{\ln 10^{-9}}{(1024/2)} \approx 0,040475.$$

Соответственно, множества M будем определять через числовой параметр $\alpha > 0$ следующим образом

$$|r_k^N(t)| \leq e^{-\alpha k},$$

$$|v_k^N(t)| \leq e^{-\alpha k}$$

для всех $k = 1, \dots, 1024$ и $t < 10,0$.

В нашем эксперименте число T будет выбрано в зависимости от различных экспериментов при разных α . Приближения x_n мы будем выбирать из условия

$$N = 64 \cdot 2^n, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Опишем параметры наших новых вычислительных экспериментов, основанных на предыдущих результатах.

Номер эксперимента	Параметр α	число T
1	0,7	990
2	0,8	925
3	0,9	583
4	1,0	583
5	1,1	405
6	1,2	208
7	1,3	81

Приведем плотности и функции распределения F для исследованных случаев.

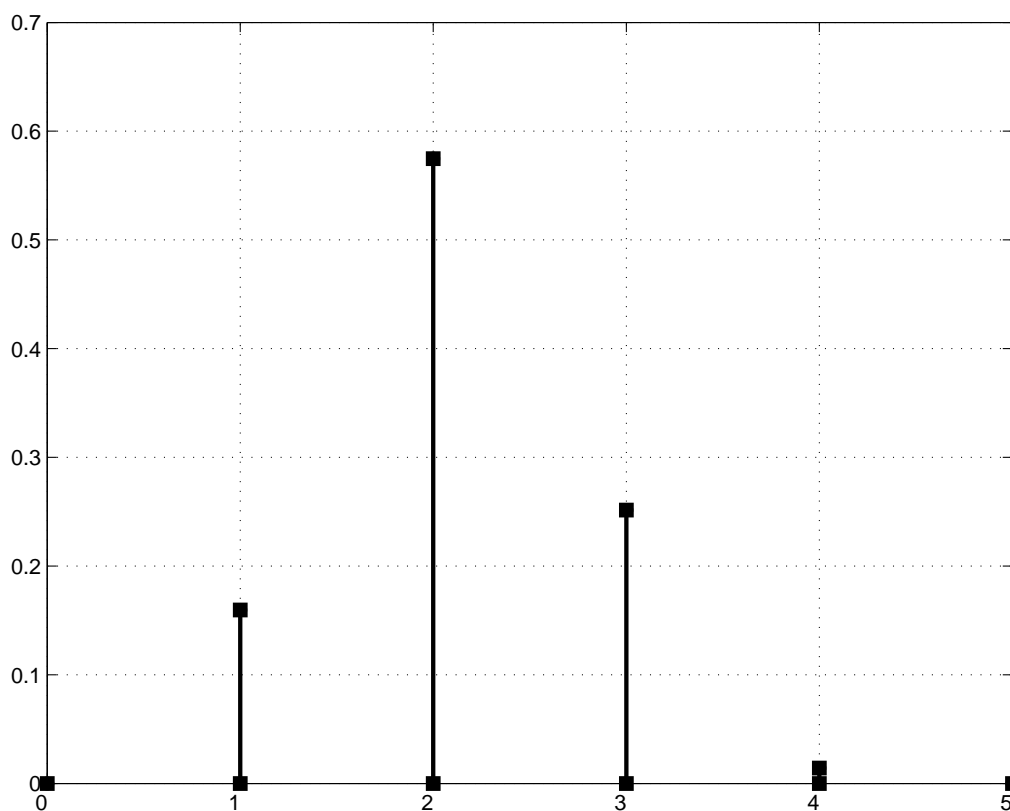


Рис. 7.2.1. Эксперимент №1, плотность распределения

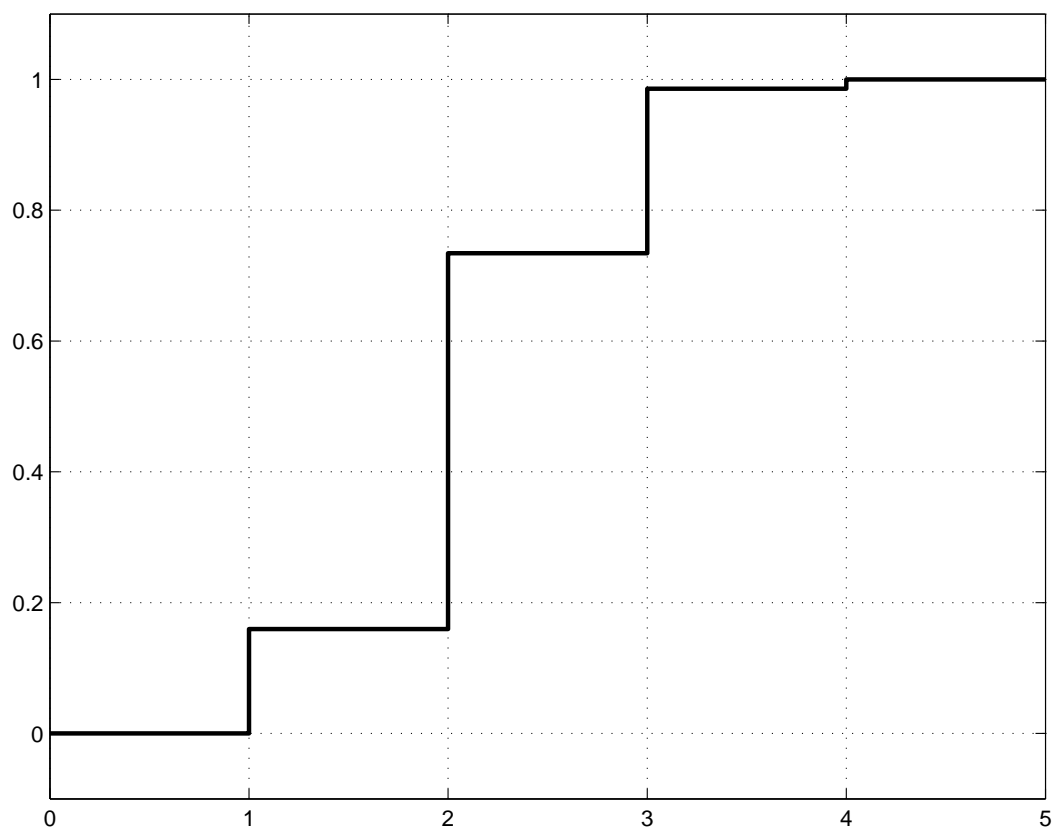


Рис. 7.2.2. Эксперимент №1, функция распределения

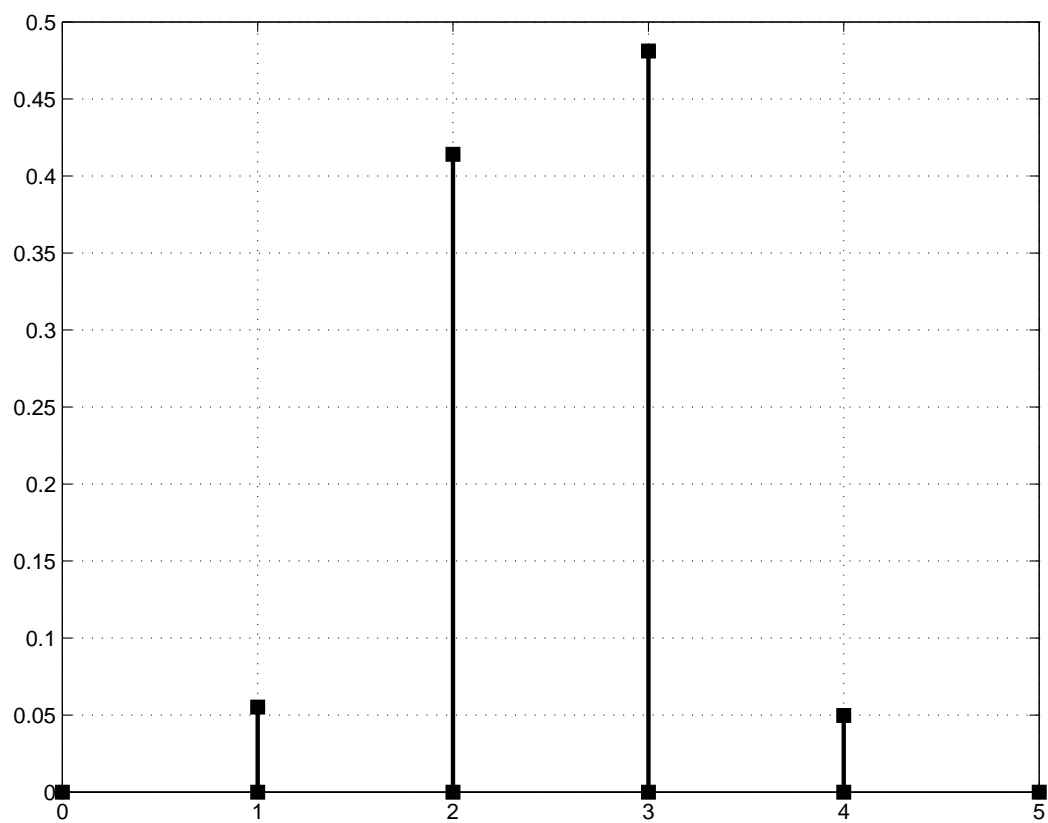


Рис. 7.2.3. Эксперимент №2, плотность распределения

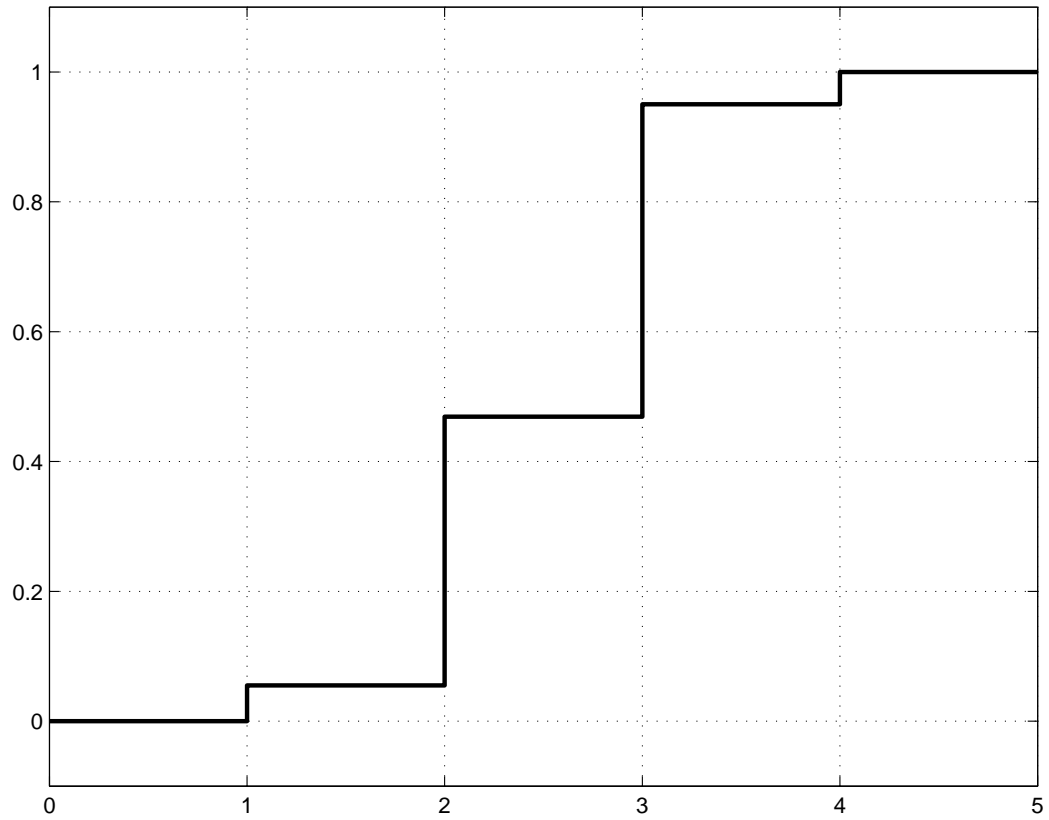


Рис. 7.2.4. Эксперимент №2, функция распределения

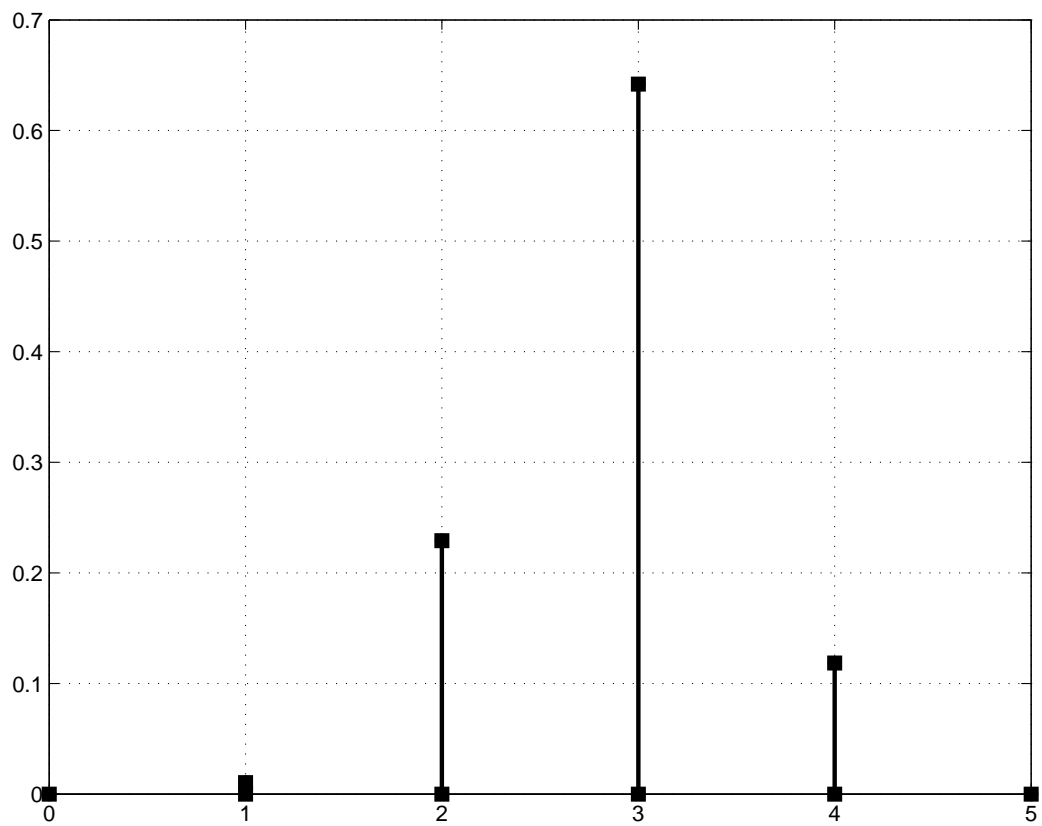


Рис. 7.2.5. Эксперимент №3, плотность распределения

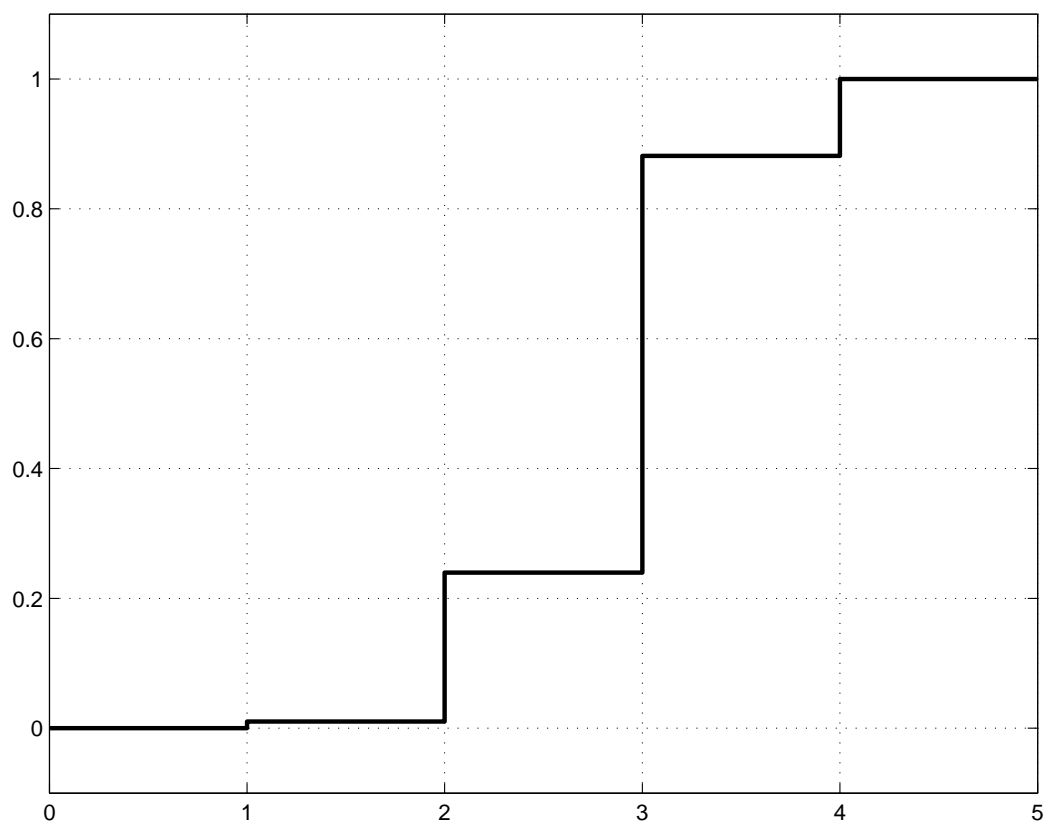


Рис. 7.2.6. Эксперимент №3, функция распределения

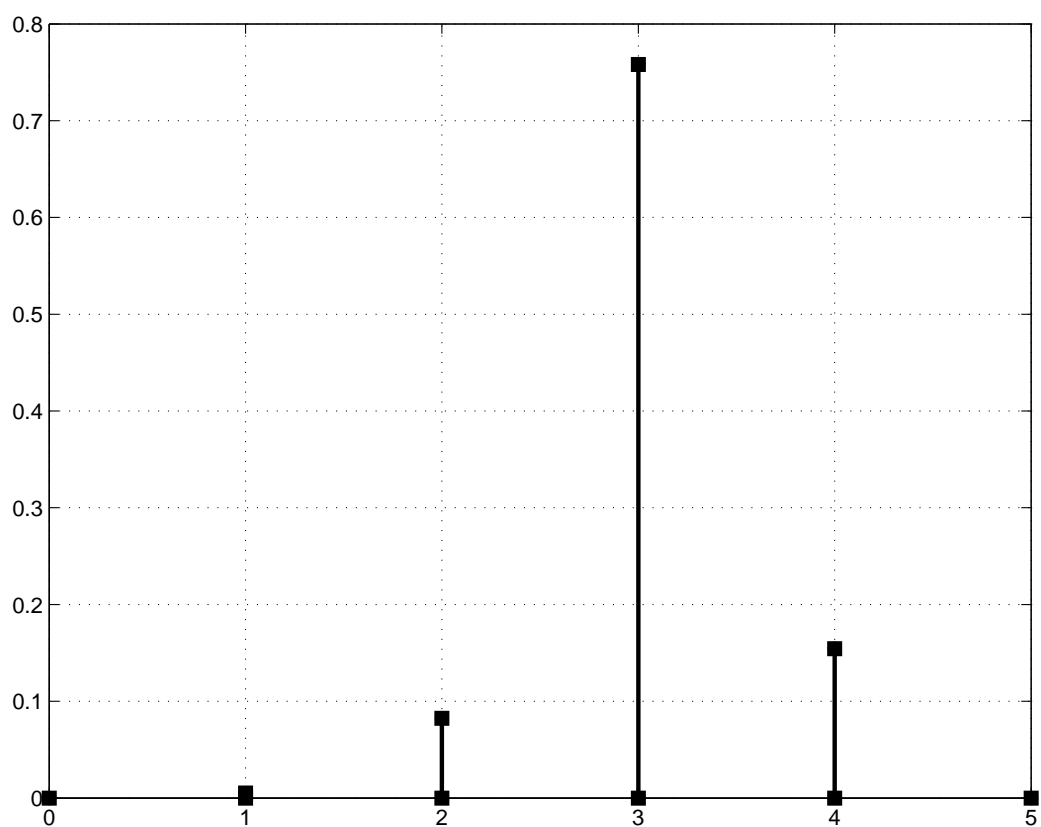


Рис. 7.2.7. Эксперимент №4, плотность распределения

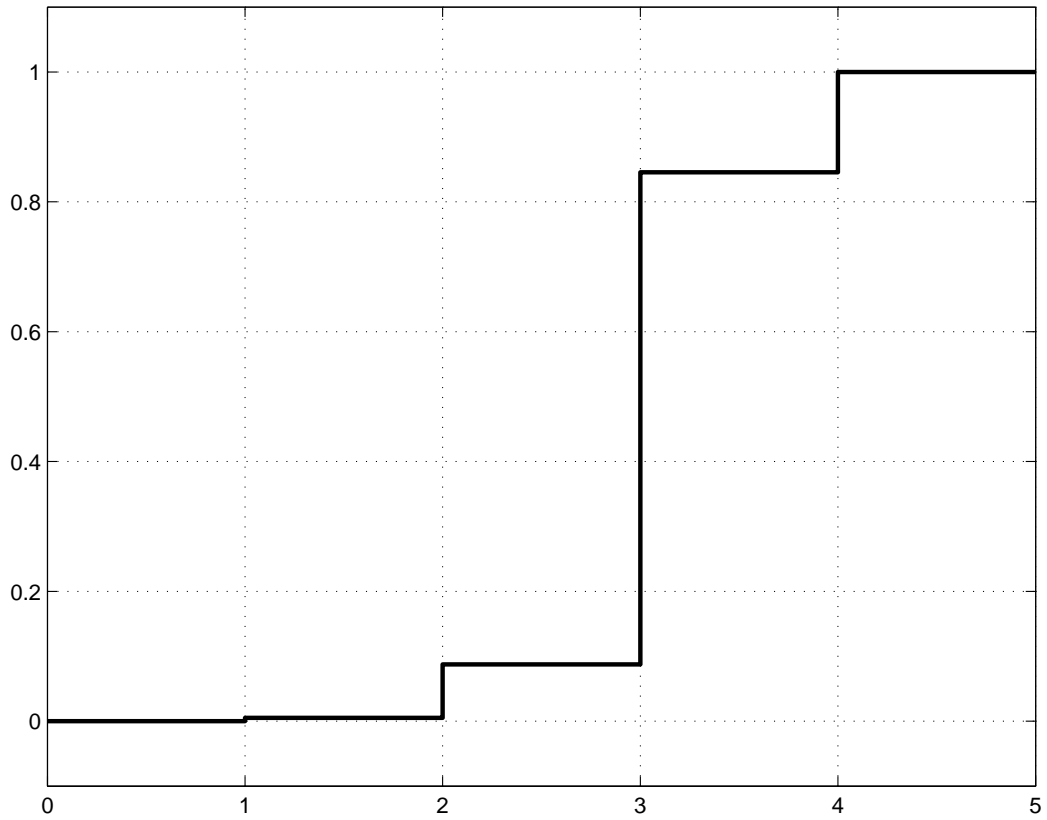


Рис. 7.2.8. Эксперимент №4, функция распределения

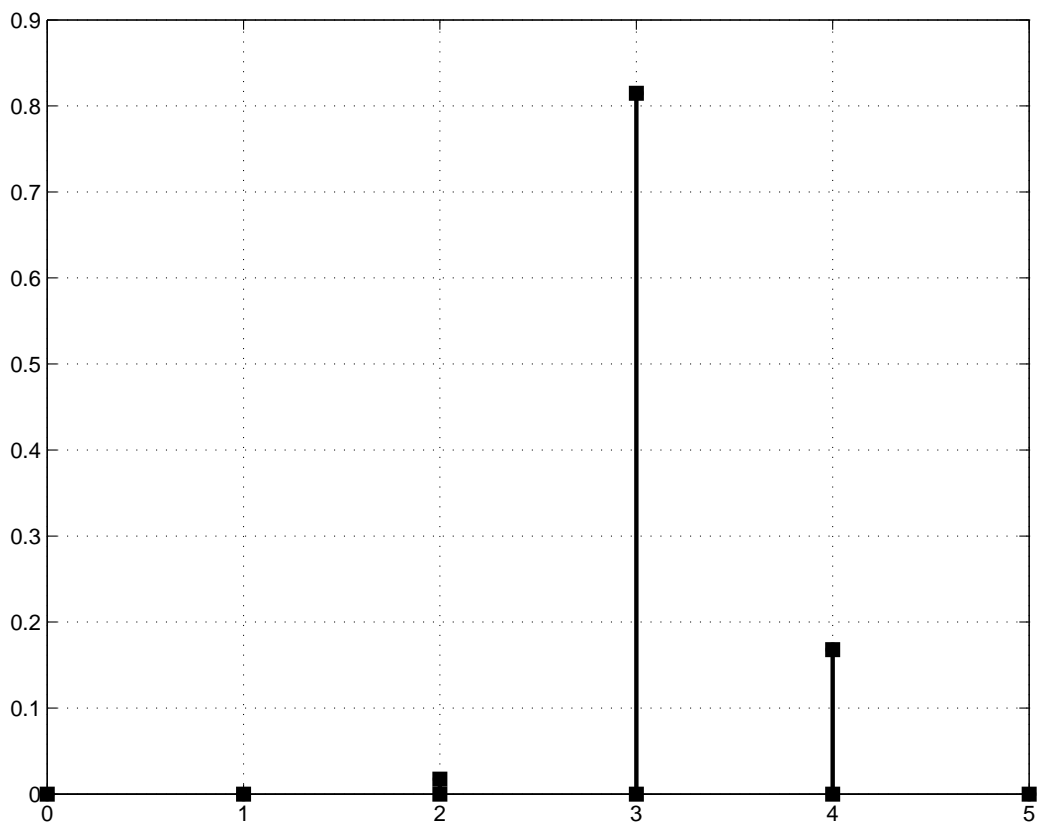


Рис. 7.2.9. Эксперимент №5, плотность распределения

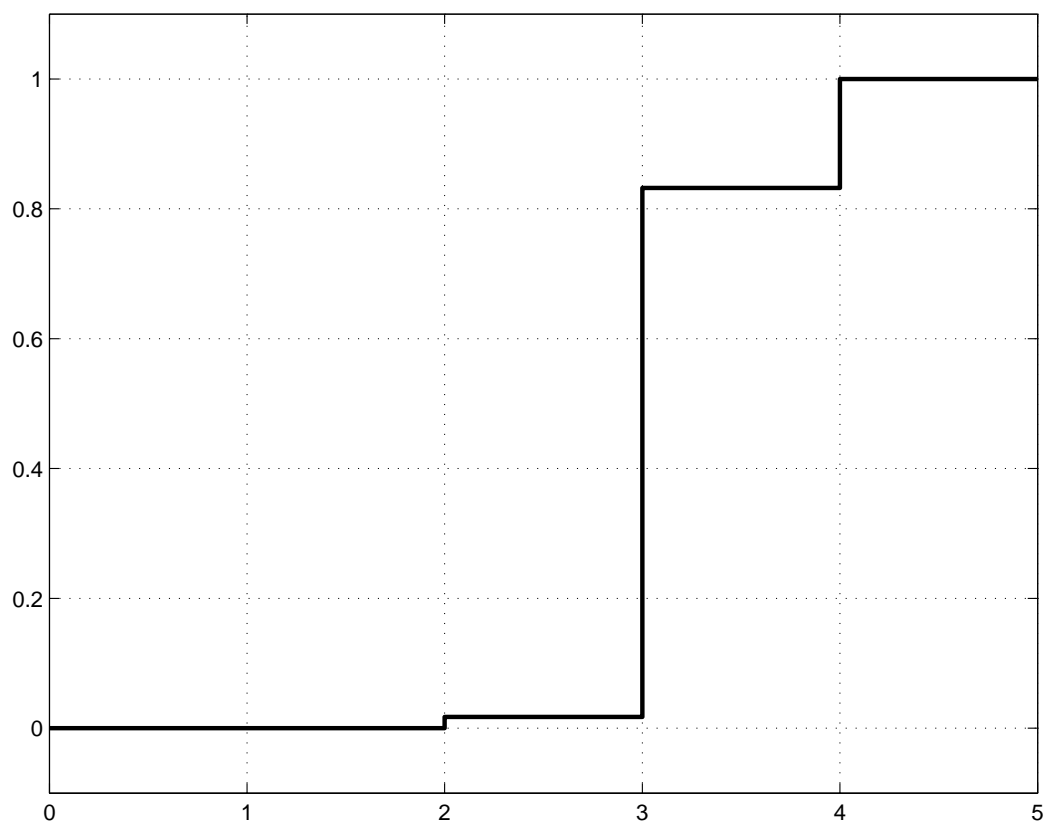


Рис. 7.2.10. Эксперимент №5, функция распределения

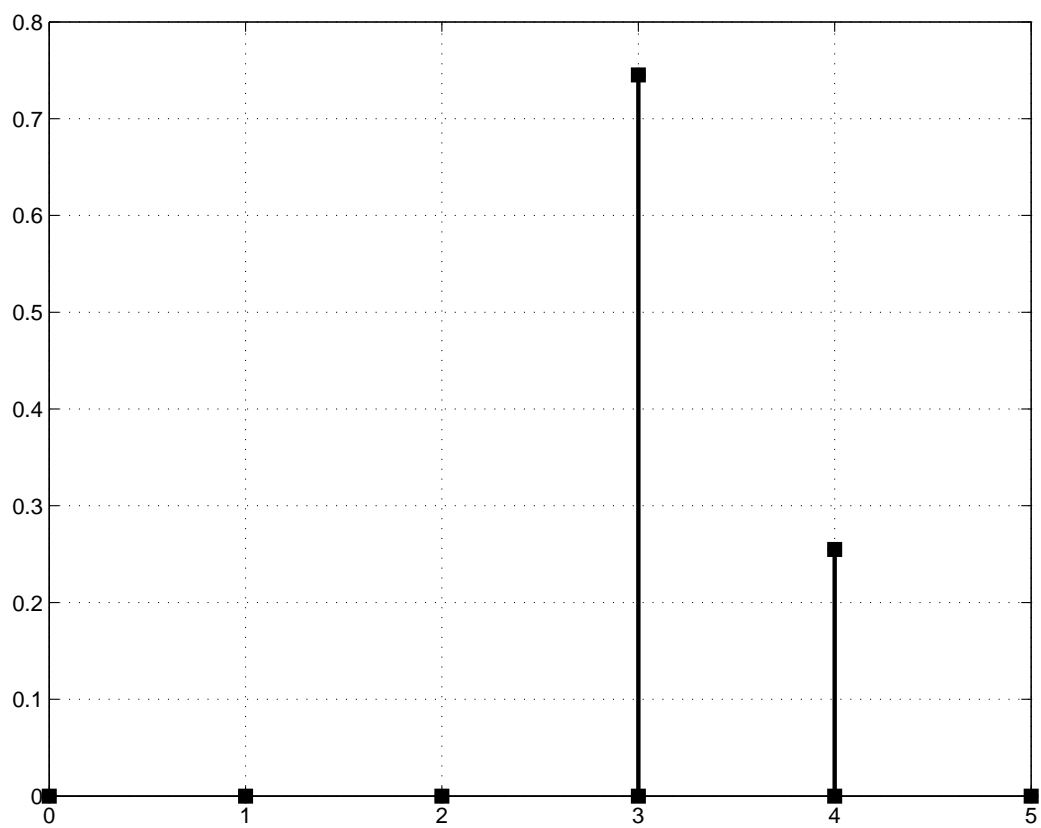


Рис. 7.2.11. Эксперимент №6, плотность распределения

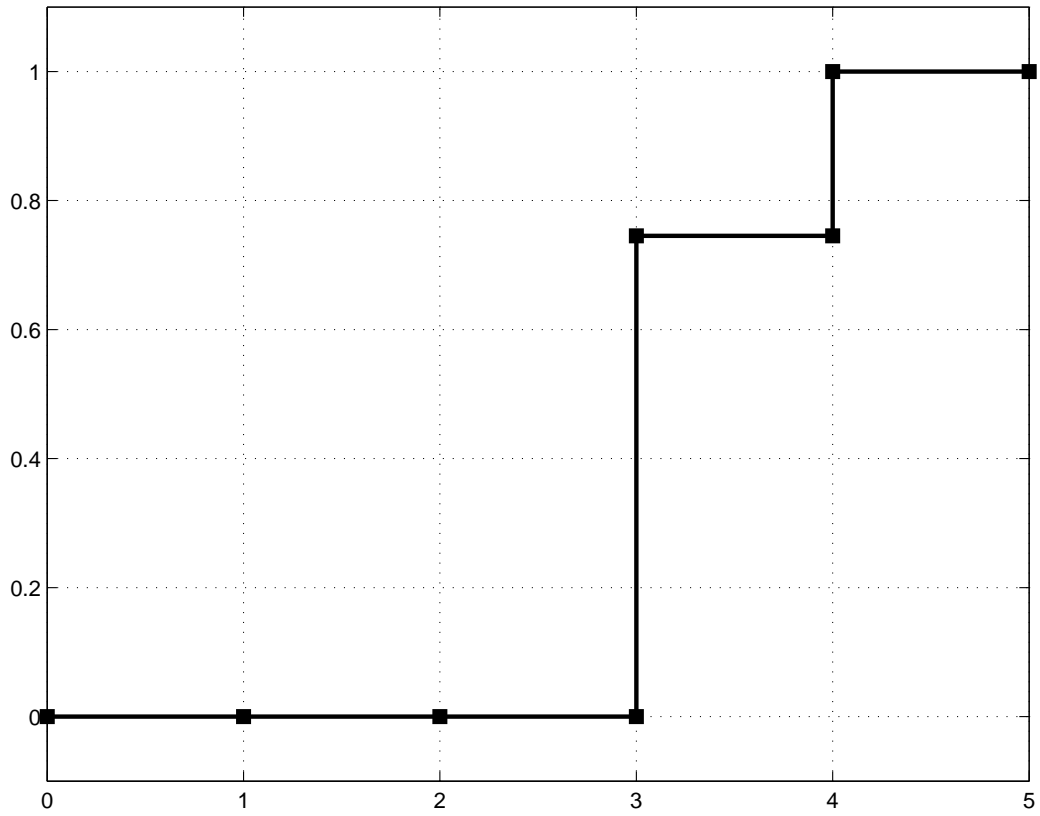


Рис. 7.2.12. Эксперимент №6, функция распределения

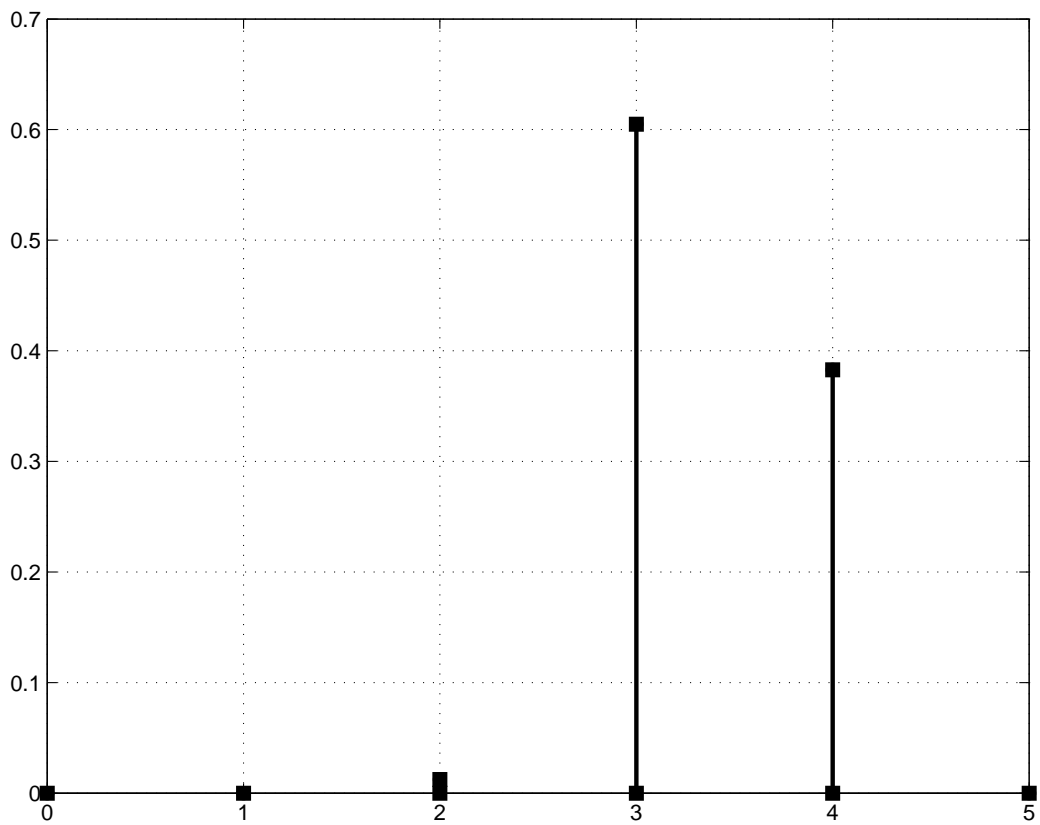


Рис. 7.2.13. Эксперимент №7, плотность распределения

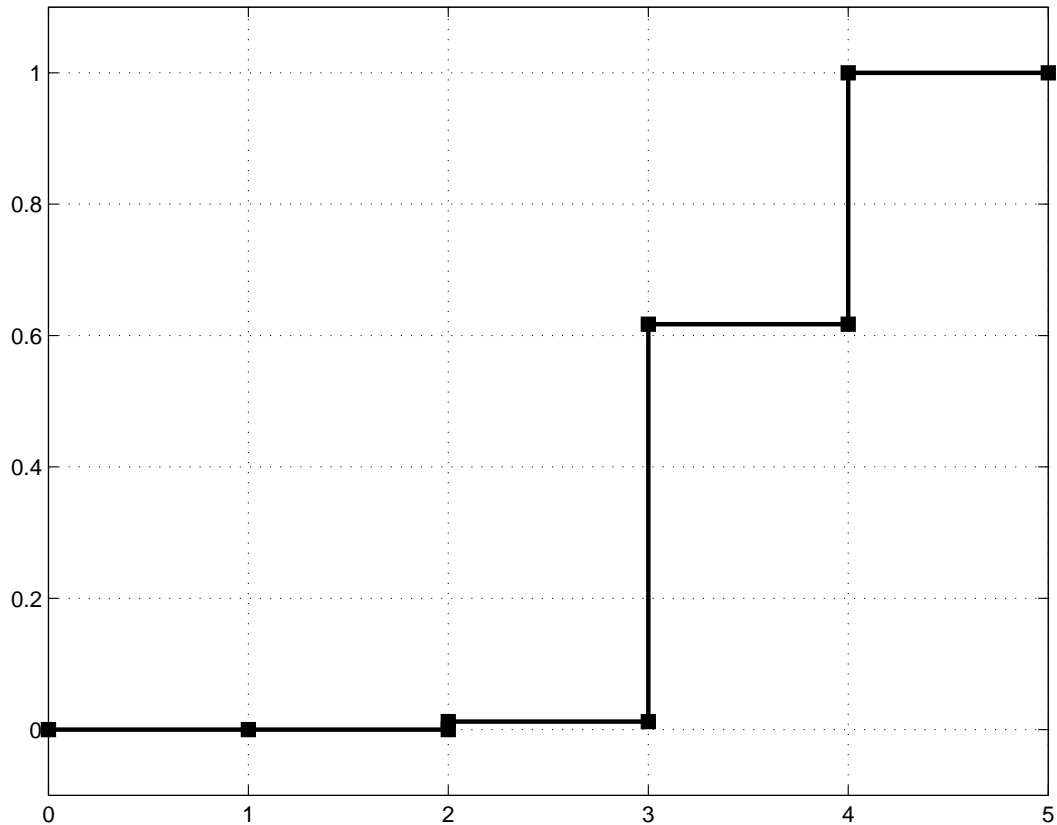


Рис. 7.2.14. Эксперимент №7, функция распределения

Построенные нами функции распределения позволяют вычислять ν -вероятность существования решений задачи (2.2.4) по результатам численного моделирования.

Однако в случае, если максимальный номер приближения x_{n_1} совпадает с числом N , мы всегда будем получать результат, что решение существует ν почти наверное. В этом случае мы можем оценить вероятность существования решения с использованием статистических критериев проверки гипотез. Приведем таблицу, в которой приведем вероятности существования решений с уровнем значимости 0,95% таких, что

$$x_n \in M, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Номер эксперимента	Вероятность существования решения
1	0,9961
2	0,9959
3	0,9951
4	0,9935
5	0,9906
6	0,9819
7	0,9547

Из этой таблицы видно, что если мы наблюдаем, что наше *численное решение* удовлетворяет условиям

$$x_n \in M, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

то с достаточно большой вероятностью можно утверждать, что *истинное решение* существует для выбранных начальных данных.

ГЛАВА 8

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

8.1. О ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ГЛАДКИЕ ВОЛНЫ

При изучении решений задачи (2.2.4) мы пользовались шкалами гильбертовых пространств, см. гл. 3. Так как вложение пространств

$$H_{s_1} \subset H_{s_2}$$

является компактным при любых $s_1 > s_2 > 0$, то, рассматривая решения задачи (2.2.4), принадлежащие множеству

$$\begin{aligned} |r_k(t)| &\leq ce^{-sk}, \\ |v_k(t)| &\leq ce^{-sk} \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

при некоторых $c > 0$ и $s > 0$, мы будем иметь решения, принадлежащие компактному множеству. Следовательно, можно применить рассуждения, аналогичные теореме Пуанкаре относительно решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, лежащих в компактном множестве.

Обозначим через M множество (8.1.1).

Лемма 8.1.1. Пусть функции $R(u, t)$ и $V(u, t)$ принадлежат множеству M при всех $t \geq 0$. Тогда существуют такие функции $\tilde{R}(u)$ и $\tilde{V}(u)$, принадлежащие пространству H_{s_0} , и такая последовательность времен t_l , что

$$t_l \rightarrow \infty, \quad l \rightarrow \infty$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \|R(u, t_l) - \tilde{R}(u)\|_{H_{s_0}} &= 0, \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \|V(u, t_l) - \tilde{V}(u)\|_{H_{s_0}} &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. По определению шкалы H_s и в силу компактности этой шкалы множество M является компактом в пространстве H_{s_0} при $s_0 < s^2$. Поэтому и множество $M \times M$ компактно в пространстве $H_{s_0} \times H_{s_0}$.

Следовательно, из последовательности

$$(R(u, n), V(u, n)) \in M \times M, \quad n = 1, 2, \dots,$$

можно извлечь сходящуюся в $H_{s_0} \times H_{s_0}$ подпоследовательность $(R(u, t_l), V(u, t_l))$. \square

В силу леммы 8.1.1 мы можем получить следующий результат относительно поверхностных волн: *поверхностная волна либо обрушивается за конечное время, либо асимптотически стремится к периодической (по времени) волне при $t \rightarrow \infty$* . Под обрушением волны в данном случае мы понимаем выход решения уравнений (2.2.4) из множества M .

8.2. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ ЗНАКОПЕРЕМЕННОГО ПОЛЯ ТЯЖЕСТИ

В рассматриваемых нами уравнениях (2.2.4) содержится единственный параметр — ускорение свободного падения g . Случай положительного параметра g соответствует случаю однородной тяжелой жидкости. Если положить $g = 0$, то мы получим случай течения идеальной жидкости в условиях невесомости. Однако при моделировании нелинейной динамики идеальной жидкости часто возникают задачи исследования поведения жидкости в условиях вибрации. Для моделирования этих режимов необходимо рассматривать в качестве параметра g функцию, зависящую от времени. Причем в ряде случаев ускорение свободного падения может менять знак с течением времени. В разделе 5.3 мы уже встречались с неустойчивостью Релея—Тейлора, соответствующей $g = -10.0$. В случае, если параметр g является отрицательным, соответствующая модель, описываемая уравнениями (2.2.4), обладает неустойчивостью, поэтому при численном исследовании таких моделей

возникают сложности. Мы покажем, что уравнения Дьяченко (2.2.4) оказываются очень удобными для численного моделирования неустойчивости Релея—Тейлора и моделирования динамики поверхностных волн идеальной жидкости со свободной поверхностью в условиях вибрации.

В настоящем разделе мы будем рассматривать случай, когда ускорение свободного падения g является функцией времени:

$$g = g(t).$$

Определим класс функций g , для которых остается верным теорема 3.2.1. Эта теорема опирается в свою очередь на теорему Ниренберга—Нисиды ([29, с. 220]). Следовательно, на функцию g следует наложить такие условия, чтобы к модифицированному уравнению (2.2.4) также была применима теорема Ниренберга—Нисиды.

Определим класс функций G^A следующим образом:

$$G^A = \{g - \text{аналитична на } (0, \infty) : \text{существует } M > 0 \text{ такое, что } |g(t)| \leq M \text{ при } t \geq 0\}.$$

Аналогично системе уравнений (3.2.1) приведем систему уравнений с переменным g .

$$\begin{aligned}\dot{R}_1 &= U'_1 R_2 + U'_2 R_1 - U_1 R'_2 - U_2 R'_1, \\ \dot{R}_2 &= U_1 R'_1 + U_2 R'_2 - U'_1 R_1 + U'_2 R_2, \\ \dot{V}_1 &= B'_1 R_2 + B'_2 R_1 - U_1 V'_2 - U_2 V'_1 + g(t)(R_1 - 1), \\ \dot{V}_2 &= U_1 V'_1 + U_2 V'_2 - B'_1 R_1 + B'_2 R_2 + g(t)R_2,\end{aligned}\tag{8.2.1}$$

где

$$\begin{aligned}U_1 &= R_1 V_1 + R_2 V_2, \\ U_2 &= H[R_1 V_1 + R_2 V_2], \\ B_1 &= \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2), \\ B_2 &= \frac{1}{2}H[V_1^2 + V_2^2].\end{aligned}$$

Аналогично задаче (3.2.2)–(3.2.4) мы запишем уравнение (8.2.1) в векторной форме:

$$\dot{W} = F(W).\tag{8.2.2}$$

Уравнение (3.2.2) будем рассматривать с начальным условием

$$W(0) = W_0\tag{8.2.3}$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned}R_{10} &= 1, \\ R_{20} &= 0, \\ V_{10} &= 0, \\ V_{20} &= 0,\end{aligned}\tag{8.2.4}$$

где $R_{10}, R_{20}, V_{10}, V_{20}$ суть коэффициенты Фурье функций R_1, R_2, V_1, V_2 , соответствующие $k = 0$.

Теорема 8.2.1. Пусть $W_0 \in E_{s_1}^4$, W_0 удовлетворяет условиям (8.2.4) и $g \in G^A$. Тогда для любого $s_2 \in (0, s_1)$ существует $T = T(s_2)$ такое, что при $t \in (0, T)$ существует единственное аналитическое решение задачи (8.2.2)–(8.2.4).

Доказательство теоремы (8.2.1) аналогично доказательству теоремы (3.2.1) с учетом условий на функцию g .

Требования аналитичности на функцию g могут быть ослаблены до непрерывности и ограниченности на $[0, \infty)$. В случае, когда функция g только ограничена, мы уже не можем рассчитывать на аналитичность по t решения задачи (8.2.2)–(8.2.4). В этом случае нам нужно дать определение непрерывно дифференцируемого решения задачи (8.2.2)–(8.2.4).

Определение 8.2.1. Функция $W(t) = [R_1(t), R_2(t), V_1(t), V_2(t)]^T$, непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ со значениями в E_s^4 ($s > 0$), называется *непрерывно дифференцируемым решением* задачи (3.2.2)–(3.2.4), если W удовлетворяет (3.2.2)–(3.2.4).

Определим класс функций G^D следующим образом:

$$G^D = \{g \in C^1[0, \infty) : \text{существует } M > 0 \text{ такое, что } |g(t)| \leq M \text{ при } t \geq 0\}.$$

Соответственно имеет место теорема, аналогична теореме 8.2.1.

Теорема 8.2.2. Пусть $W_0 \in E_{s_1}^4$, W_0 удовлетворяет условиям (8.2.4) и $g \in G^D$. Тогда для любого $s_2 \in (0, s_1)$ существует $T = T(s_2)$ такое, что при $t \in (0, T)$ существует единственное непрерывно дифференцируемое решение задачи (8.2.2)–(8.2.4).

В разделе 10.5 мы проведем вычислительные эксперименты с целью моделирования неустойчивости Релея—Тейлора. В этих экспериментах мы используем следующую функцию ускорения свободного падения:

$$g(t) = -10, 0.$$

Более интересную функцию ускорения свободного падения мы используем в разделе 10.6, где мы исследуем динамику идеальной жидкости со свободной поверхностью в условиях вибрации. В этом разделе мы используем следующие функции ускорения свободного падения:

$$g(t) = 1, 0 + A \sin(\omega t + \varphi).$$

Если амплитуда A по модулю больше 1.0, то в процессе моделирования функция g будет принимать отрицательные значения и мы будем моделировать неустойчивое поведение динамики поверхностных волн.

8.3. О «ВОЛНАХ-УБИЙЦАХ»

«Под термином «волны-убийцы» понимаются волны большой амплитуды, неожиданно появляющиеся на морской поверхности как бы из ниоткуда и так же быстро исчезающие. На английском языке для их обозначения используют термины «freak, rogue or giant waves». Долгое время волны-убийцы являлись предметом морского фольклора. В рассказах бывалых моряков о волнах-убийцах их форма представляется разной: иногда говорят о «стене воды» или о «дырке в море», или о нескольких больших волнах («трех сестрах»)...

За последние примерно 30-50 лет волны-убийцы перешли из разряда фольклора в реальность, и их существование, после получения инструментальных данных, можно считать доказанным.» [20]. Этими словами начинается монография, посвященная волнам-убийцам. И хотя факт существования таких волн является признанным, единой теории возникновения гигантских волн пока не существует. Тем более, что эти волны были отмечены в самых различных ситуациях Мирового океана: на глубокой и мелкой воде, при наличии течений и без, при штормах и вне зоны штормов. Вероятно, волны-убийцы могут возникать в силу различных причин (как изученных, так и нет). Наша задача — показать возможность возникновения волн аномальной амплитуды в ходе нелинейной динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. Для решения этой задачи нам необходимо производить расчеты с большой точностью и на больших временных интервалах. Это становится возможным именно благодаря свойствам уравнений Дьяченко, которые были изучены в настоящей работе.

Прежде чем дать определение волне-убийце, заметим, что единого определения, используемого в океанологии, нет. Мы будем использовать амплитудный критерий:

Определение 8.3.1. Пусть на интервале $[0, T]$ существует решение задачи (1.3.1)–(1.3.6). Мы будем говорить, что при $t = t_F$ обнаружена волна-убийца, если

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |\eta(x, t_F)| \geq 3 \frac{1}{T} \int_0^T \max_{x \in [0, 2\pi]} |\eta(x, t)| dt. \quad (8.3.1)$$

Таким образом, мы считаем волной-убийцей такую волну, модуль амплитуды которой втрое превышает средний модуль амплитуды в рассматриваемом эксперименте.

Заметим, что в работах [61, 62] рассматривались вычислительные эксперименты, в которых волны-убийцы наблюдались как модуляционная неустойчивость прогрессивных волн Стокса.

В разделе 10.7 мы приведем результаты вычислительных экспериментов, в которых наблюдались волны-убийцы согласно нашему определению. Общий план этих экспериментов таков:

1. выбираем гладкие случайные начальные R_0 и V_0 ;
2. находим приближенные решения уравнений (2.2.4) при $t \in [0, 7000]$. Если решения при выбранных начальных данных не существует, то перейти к пункту 1;
3. рассчитываем средний модуль амплитуды и максимальный модуль амплитуды при $t \in [0, T]$.

С помощью формулы (8.3.1) проверяем наличие волны-убийцы.

Важным показателем волны-убийцы является ее максимальная крутизна. Под крутизной волны мы понимаем производную от профиля поверхности: $\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}$. В экспериментах, представленных в разделе 10.7, максимальная крутизна волны-убийцы наблюдалась порядка $0,3 - 0,325$, что соответствует довольно крутой (нелинейной) волне.

Конечно, моделируемая нами ситуация далека от реальных океанических волн, однако наши эксперименты показывают, что нелинейная динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью способна привести к образованию волн экстремальной амплитуды.

ГЛАВА 9

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

В настоящей главе мы рассмотрим некоторые вопросы программирования численных методов, описанных в главе 5. При использовании современных компьютеров и программных средств возникают различные аспекты и нюансы при программировании численных методов. Исходные тексты программ, которые упоминаются в нашей работе, можно найти на специальном сайте www.calcs.ru, однако для удобства мы воспроизведем ключевые моменты этих программ в виде комментированных листингов.

9.1. ОБЩАЯ СХЕМА ПРОГРАММЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Для моделирования поверхностных волн нам необходимо численно решать систему уравнений (2.2.4) по численным схемам, описанным в главе 5. Однако полноценное моделирование физических процессов подразумевает не только нахождение численных решений, но и визуализацию результатов. Тем более, что мы имеем дело с динамикой поверхностных волн, т.е. нестационарным процессом. Для восприятия качественного поведения динамики поверхностных волн необходимо привлекать средства для мультипликационной визуализации полученных результатов. С другой стороны, помимо зрительного восприятия динамики поверхностных волн необходимо отображать также и «невидимые» значения, такие как спектр в логарифмическом масштабе и оценочные функционалы.

Учитывая, что проведение численных расчетов в теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными сопряжено с большим объемом вычислений, программы расчета должны быть максимально оптимизированы по скорости выполнения. Поэтому всю обработку и визуализацию результатов мы будем проводить в отдельной программе. Вычислительные эксперименты мы будем проводить в следующей последовательности:

1. подготовка начальных данных;
2. вычисление приближенных решений системы уравнений, описывающих динамику поверхностных волн;
3. визуализация (мультипликация) динамики поверхностных волн;
4. вычисление оценочных функционалов по приближенным решениям с целью оценки времени существования решений.

Для задания начальных данных в нашей программе предусмотрены две возможности: во-первых, задание спектра начальных данных в самой программе, во-вторых, задание спектра из файла. Первая возможность удобна в случае, когда необходимо проводить вычислительные эксперименты с начальными данными, в которых спектр может быть задан формулой. Вторая возможность

используется для продолжения расчетов, проведенных ранее, для загрузки начальных данных, полученных с помощью другой программы.

9.2. ПРОГРАММА РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН

Рассмотрим программу для расчета профиля стационарной гравитационной волны, описываемой уравнениями (2.4.1)–(2.4.3).

Программа построена на итерационном алгоритме. Решение представляется N -мерным вещественным вектором. Обозначим этот вектор через a . Оператор, задающий уравнения (2.4.1)–(2.4.2), обозначим через A . Будем считать, что оператор A все гармоники, большие N , обнуляет. Оператор A можно понимать как функцию $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Тогда уравнения (2.4.1)–(2.4.2) можно записать в виде

$$a = A[a]. \quad (9.2.1)$$

Сама форма уравнения (9.2.1) подсказывает итерационную численную схему. Однако вычисления по схеме

$$a^i = A[a^{i-1}],$$

где a^0 — произвольное начальное приближение, проводить невозможно, т.к. итерации быстро расходятся.

Предложим следующую численную схему:

$$\begin{aligned} \tilde{a}^i &:= A[\tilde{a}^{i-1}], \\ \lambda^i &:= \|\tilde{a}^i\|, \\ \tilde{a}^i &:= \tilde{a}^i / \lambda^i. \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

Операция "!=" означает присвоение. Вычисления по формулам (9.2.2) будем производить до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$|\lambda^i - \lambda^{i-1}| < \varepsilon,$$

где ε — заранее выбранное число.

После вычисления \tilde{a} решение системы (9.2.1) найдем по формуле

$$a = \tilde{a} / \lambda,$$

где λ — последний коэффициент, вычисленный до остановки итераций. Эта формула справедлива в силу квадратичной нелинейности в операторе A .

Приведем листинг программы, к которой реализована указанная процедура.

```
#include <cmath>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <stdlib.h>

using namespace std;

typedef double tx; // the main real type

typedef struct {
    tx x, y;
} txy;

const tx pi = 3.1415926535897932384626433832795;
const tx pi2 = 6.283185307179586476925286766559;
const long NN = 512; // the number of harmonics
const int K = 1; // the number of waves per period
enum type_norm {e, m}; // the type of a norm in Euclidean space
```

```

tx *ak, *ak1; // operational arrays

tx h = -1.0; // the depth. If it is negative, then it is infinite

tx c = 1.1; // the "speed" parameter

tx la_stop_eps = 1e-12; // the criteria to stop the iteration process

const long count_iter = 10000; // maximum number of iterations

tx tanhh(tx x) // the quick computation of tanh
{
    if(x < 20.0)
    {
        return tanh(x);
    }
    else
    {
        return 1.0;
    }
}

tx la; // an iteration coefficient

// computation of the coefficient in the equation
tx S(int n)
{
    tx res;
    tx nn;
    int nk;
    nk = n*K; // take into consideration the number of waves per period
    nn = double(nk);

    if (h < -0.001)
    {
        res = 1.0/nn; // the case of the infinite depth
        return res;
    }
    else
    {
        return tanhh(nn*h)/nn; // the finite depth
    }
}

// function taking into consideration the finite dimension of the system
void a2(tx *aa, int n, tx x)
{
    if((n <= NN)&&(n>=1))
    {
        aa[n] = x;
    }
}

```

```

// function taking into consideration the finite dimension of the system
tx a(tx *aa, int n)
{
    if (n > NN)
    {
        return 0;
    }
    else
    {
        return aa[n];
    }
}

// computation of a zero coefficient
void compl_a0(tx *aa)
{
    int i;
    tx a_0, a_00, a0;
    a0 = 0;
    a_0 = 0;

    for (i = 1; i < NN; i++)
    {
        a_00 = (a(aa, i)*a(aa, i))/S(i);
        a_0 = a_0 + a_00;
        a0 = a0 + (a(aa, i)*a(aa, i)) / S(i);
    }

    a0 = (-0.5)*a0;
    aa[0] = a0;

    cout << "\n a0 = " << a0 << "\n"; // print
}

// computation of coefficients of the equation
tx alpha1(int n, int m)
{
    tx s1, s2;

    s1 = S(n)*(S(m) + S(n+m));
    s2 = S(m)*S(n+m);

    return 1.0 + s1/s2;
}

// computation of coefficients of the equation
tx alpha2(int n, int m)
{
    tx s1, s2;

    s1 = S(n)*(S(m) + S(n-m));
    s2 = S(m)*S(n-m);

```

```

    return 1.0 + s1/s2;
}

// The initial data before iterations
void init_static()
{
    int i;

    // zero everything
    for (i=1;i<=NN;i++)
    {
        a2(ak, i, 0.);
        a2(ak1, i, 0.);
    }

    // select the initial approximation
    a2(ak, 1, 1.5);
    a2(ak, 2, 1.5);
}

// the function computing the norm
tx norm(tx *aa, type_norm tn)
{
    tx res;
    tx max, s1;
    int n;
    res = -1.0;

    if (tn == e)
    {
        // compute Euclidean norm
        res = 0;
        for(n=1; n <= NN; n++)
        {
            s1 = a(aa, n);
            res = res + s1*s1;
        }

        res = sqrt(res);
    }

    if (tn == m)
    {
        // compute the norm as a maximum
        res = fabs(a(aa, 1));
        for(n=2; n <= NN; n++)
        {
            max = fabs(a(aa, n));

            if(max > res)
            {
                res = max;
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    return res;
}

// to norm a solution
void step_la()
{
    int n;
    tx s;

    for(n=1;n<=NN;n++)
    {
        s = a(ak1, n);
        a2(ak, n, s/la);
    }
}

// multiple by the coefficient at the end of iterations
// "denorm" the solution
void mult_la(tx *aa, tx la)
{
    int n;
    tx s;

    for(n=1;n<=NN;n++)
    {
        s = a(aa, n);
        a2(aa, n, s/la);
    }
}

// the main iteration procedure
void A()
{
    tx s1, s2, s3, s4;
    tx res;
    int n, m;

    for(n=1; n <= NN; n++)
    {
        s1 = 0;

        for(m=1; m <= NN; m++)
        {
            s1 = s1 + alpha1(n, m)*a(ak, m)*a(ak, m+n);
        }

        s1 = s1 / 2.0;
        s2 = 0;

        for(m=1; m <= (n-1); m++)
        {
            s2 = s2 + alpha2(n, m)*a(ak, m)*a(ak, n-m);
        }
    }
}

```

```

    s2 = s2 / 4.0;
    s3 = c - S(n);
    s4 = (s1 + s2) / s3;
    a2(ak1, n, s4);
}
}

int main(int argc, char* argv[])
{
    tx laa;
    tx s1, s2;
    int i, j;
    int n;

    c = c / double(K);

    ak = new tx[NN + 2]; // give memory for dynamic array
    ak1 = new tx[NN + 2];

    init_static(); // initialise the initial approximation

    laa = -1;
    la = 1;

    // begin the iteration procedure
    // make no more then count_iter+1 iterations
    for(i=1;i<=count_iter+1;i++)
    {
        A(); // iteration step

        s1 = norm(ak1, e); // compute norms of solutions
        s2 = norm(ak, e); // Euclidean norms

        laa = la;
        la = s1;

        cout << "\n i = " << i << " la = " << la; //to print the coefficient

        step_la(); // norm

        if (fabs(la-laa)<la_stop_eps)
        {
            break;
            // if the coefficient is less then a critical threshold
            //then stop
        }
    }

    mult_la(ak, la); // "denorm" the solution
    compl_a0(ak); // compute a_0

    // save the solution in a text file
    ofstream fa("static_a.txt");

```

```

    for(i=0; i < NN; i++)
    {
        fa << (ak[i]) << "\n";
    }

    fa.close();

// save the solution in a binary file
    FILE *out, *in;
    out = fopen("static.dat", "wb");
    fwrite(ak, sizeof(tx), NN, out);
    fclose(out);

    delete [] ak; // clear the memory
    delete [] ak1;

    return 0;
}

```

Заметим, что этот исходный текст и откомпилированную версию можно найти на сайте <http://www.calcs.ru/>.

9.3. ПРОГРАММА РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Начнем с того, что приведем текст головной программы, снабженный комментариями.

```

#include <cmath>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <stdlib.h>
#include "FFTW/fftw.cpp" // модуль БПФ

typedef double tx; // the real data type
typedef Complex tc; // the complex data type

const double pi=3.1415926535897932384626433832795;
const double pi2=6.283185307179586476925286766559; // pi2=2*pi

const int N = 4096; // the dimension of the discretisation
double g=10.0; // the free fall acceleration
double eps = 0.0001; // the time step
double t_stop = 7000; // the final time of the counting
const int view_factor = 100; // to show the progressor
int view_factor2 = 0;
int view_factor3 = 0;

double t = 0; // a time variable
int iter = 0; // the number of a time step

#include "link.cpp" // the unit of the main arrays
#include "func.cpp"; // the unit of the main operations over arrays
#include "visio.cpp" // the unit of computing of the energy
// and saving of actual results
#include "runge.cpp" // the main unit of Rounge--Coutta scheme

```



```

#include "explore.cpp" // the unit of loading of initial data

int main(int argc, char* argv[])
{
    view_factor2 = view_factor / 50;
    view_factor3 = view_factor / 10;

    if(argc <= 1)
    {
        explore_build(); // there is no parameters given so we
// construct initial data
    }
    else
    {
        explore2(argv[1]); // load initial data from a file given by
// a parameter
    }

    runge(); // begin the calculation

    return 0;
}

```

Во внешнем файле `<FFTW/fftw.cpp>` реализованы подпрограммы для вычисления быстрого преобразования Фурье.

Так как мы придерживаемся модульного построения нашей программы, то глобальные переменные мы вынесли в отдельный файл `<link.cpp>`. Опишем основные глобальные переменные. В переменных $R[N]$, $V[N]$, являющихся N -мерными комплексными массивами, хранится информация о коэффициентах Фурье искоемых решений. В каждый момент времени (соответствующий шаг цикла программы) в этих массивах хранится информация о текущем решении. Напомним, что текущее время в нашей программе хранится в переменной t , а номер итерации в переменной $iter$.

Для вычисления правых частей уравнений (2.2.4) нам понадобятся производные от функций R , V , которые хранятся в переменных $dR[N]$, $dV[N]$. Как известно, для реализации явного метода Рунге—Кутты 4-го порядка нам необходимо вычислять правую часть четыре раза на каждой итерации. Эти вычисления мы будем хранить в переменных $R1[N]$, $R2[N]$, $R3[N]$, $R4[N]$, $V1[N]$, $V2[N]$, $V3[N]$, $V4[N]$.

В переменных $U[N]$, $dU[N]$, $B[N]$, $dB[N]$ мы будем хранить функции U , B , а также их производные. Другие переменные носят вспомогательный характер для вычисления полной энергии и получения физических переменных, необходимых для визуализации профиля поверхностной волны.

В модуле `<func.cpp>` реализованы некоторые сервисные функции для поддержки операций с «функциями-массивами».

В ходе вычислений нам необходимо сохранять текущие переменные. Для контроля над ходом вычислений необходимо вычислять значения полной энергии. К сожалению, непосредственно в переменных R , V энергия не вычисляется, поэтому нам необходимо переходить к физическим переменным. Блок вычисления физических переменных и энергии реализован в файле `<visio.cpp>`. Приведем выдержки из этого модуля.

```

// computation of the energy and saving of the
//actual condition
void do_visio(double t, int iter) {
    int i, j, k, m;
    tc c0;

    c0.r = 0;
    c0.i = 0;

```

```

// computation the function dZ which is a derivative from Z
dZ[0].r = 1;
dZ[0].i = 0;

for(k=1;k<N;k++)
{
    dZ[k].r = 0;
    dZ[k].i = 0;

    for(m=1;m<=k;m++)
    {
        dZ[k] = dZ[k] - R[m]*dZ[k-m];
    }
}

tc ik, c_i;

c_i.r = 0;
c_i.i = -1;

// Computation of the derivative from the potential on the
//boundary
for(k=0;k<N;k++)
{
    dP[k].r = 0;
    dP[k].i = 0;

    for(m=0;m<=k;m++)
    {
        dP[k] = dP[k] + V[m]*dZ[k-m];
    }

    dP[k] = c_i*dP[k];
}

// integrating to compute Z and the potential

Z[0].r = 0;
Z[0].i = 0;
P[0].r = 0;
P[0].i = 0;

for(k=1;k<N;k++)
{
    ik.r = 0;
    ik.i = 1.0/double(k);

    Z[k] = ik*dZ[k];
    P[k] = ik*dP[k];
}

for(k=0;k<N;k++)
{

```

```

    xu[k].r = 0.5*dZ[k].r;
    xu[k].i = 0.5*dZ[k].i;

    y[k].r = 0.5*Z[k].i;
    y[k].i = -0.5*Z[k].r;
}

xu[0].r = 2*xu[0].r;
y[0].r = 2*y[0].r;

tc a, b;

// compute the energy
for(i=0;i<N;i++)
{
    y2[i] = c0;
}

tc buf;

for(i=(-N+1);i<N;i++)
{
    for(j=(-N+1);j<N;j++)
    {
        if(abs(i+j) > N)
        {
            continue;
        }

        buf = e_y(i)*e_y(j);

        if((i+j)>=0)
        {
            y2[i+j] = y2[i+j] + buf;
        }
    }
}

TT = 0;
UU = 0;
EE = 0;

for(k=0;k<N;k++)
{
    TT=TT+(P[k].r*P[k].r+P[k].i*P[k].i)*k;
}

TT = 0.5*TT;

for(k=0;k<N;k++)
{
    UU=UU+y2[k].r*xu[k].r+y2[k].i*xu[k].i;
}

```

```

UU = g*UU;

for(k=0;k<N/2;k++)
{
    z[k] = Z[k];
    zu[k] = dZ[k];

    F[k] = P[k];
    Fu[k] = dP[k];
}

for(k=N/2;k<N;k++)
{
    z[k] = c0;
    zu[k] = c0;

    F[k] = c0;
    Fu[k] = c0;
}

// prepare variables on x-space
HH(Fu);
FFTW(z, -1);
FFTW(zu, -1);
FFTW(F, -1);
FFTW(Fu, -1);

EE = TT + UU;

// save results of actual computings
char name[255];

// prepare a unique name of a file for an actual step
sprintf(name, "w%d.rv", iter/view_factor);

i=0;
FILE *out;
out = fopen(name, "wb");
fwrite(&N, sizeof(int), 1, out); // the dimension of the discretisation
fwrite(&iter, sizeof(int), 1, out); // the number of a step
fwrite(&i, sizeof(int), 1, out); // reserved
fwrite(&i, sizeof(int), 1, out); // reserved
fwrite(&t, sizeof(double), 1, out); // actual time
fwrite(&EE, sizeof(double), 1, out); // the whole energy
fwrite(&TT, sizeof(double), 1, out); // the kinetic energy
fwrite(&UU, sizeof(double), 1, out); // the potential energy
fwrite(R, sizeof(tc), N, out); // the spectrum of the function R
fwrite(V, sizeof(tc), N, out); // the spectrum of the function V
fwrite(z, sizeof(tc), N, out); // the free surface
// in the parametric form
fclose(out);
}

```

Теперь рассмотрим блок построения начальных условий в файле `<explore.cpp>`. В этом модуле реализованы три функции для загрузки начальных данных:

1. `explore()` — загрузка начального условия, отвечающего бегущей волне, подготовленного заранее;
2. `explore2()` — загрузка начального условия, сохраненного ранее для продолжения расчета;
3. `explore_build()` — построение «своего» начального условия.

Основная расчетная процедура реализована в файле `<runge.cpp>`.

```
void calc(tc *Rr, tc *Vv); // computing of the right-hand side
void shift(tc *Rr, tc *Vv, double k); // a shift for R.--C.
```

```
const double l6 = 1.0/6.0; // a multiplier for R.---C.
double sp;
```

```
void runge()
{
    int i;
    int proc = 10;

    do_visio(t, iter); // to show the initial energy and
    // save initial data

    while(t < t_stop)
    {
        // save actual variables
        for(i=0; i < N; i++)
        {
            aR[i] = R[i];
            aV[i] = V[i];
        }

        // compute the right-hand side
        calc(R1, V1);

        // shift and compute the right-hand side
        shift(R1, V1, 0.5);
        calc(R2, V2);

        // shift and compute the right-hand side
        shift(R2, V2, 0.5);
        calc(R3, V3);

        // shift and compute the right-hand side
        shift(R3, V3, 1.0);
        calc(R4, V4);

        // make a time step according to Runge-Coutta method
        for(i=0; i < N; i++)
        {
            R[i].r = aR[i].r + (R1[i].r + 2.0*R2[i].r +
            2.0*R3[i].r + R4[i].r)*l6;
            R[i].i = aR[i].i + (R1[i].i + 2.0*R2[i].i +
            2.0*R3[i].i + R4[i].i)*l6;
            V[i].r = aV[i].r + (V1[i].r + 2.0*V2[i].r +
            2.0*V3[i].r + V4[i].r)*l6;
            V[i].i = aV[i].i + (V1[i].i + 2.0*V2[i].i +
            2.0*V3[i].i + V4[i].i)*l6;
```

```

    }

    iter++; // compute a time step
    t = t + eps; // count time

// mark a progressor
    if(!(iter % view_factor))
    {
        cout << "100%";
        proc = 10;
    }
    else
    {
        if(!(iter % view_factor2))
        {
            cout << ".";
        }
        if(!(iter % view_factor3))
        {
            cout << proc << "%";
            proc = proc + 10;
        }
    }

// if a step is multiple view_factor, then we compute the energy
// and save the actual result
    if(!(iter % view_factor))
    {
// compute the energy and save the actual result
        do_visio(t, iter);
// compute the absolute value of a leading harmonic
        sp = sqrt(R[N-2].r*R[N-2].r + R[N-2].i*R[N-2].i +
            V[N-2].r*V[N-2].r + V[N-2].i*V[N-2].i);
// map the energy and the absolute value of a leading harmonic
        cout << t << "\t" << EE << "\t" <<
            TT << "\t" << UU << "\t" << sp << "\n";
    }
}

void shift(tc *Rr, tc *Vv, double k)
{
    int i;

// shift according to R.--C. method
    for(i=0; i < N; i++)
    {
        R[i].r = aR[i].r + k*Rr[i].r;
        R[i].i = aR[i].i + k*Rr[i].i;
        V[i].r = aV[i].r + k*Vv[i].r;
        V[i].i = aV[i].i + k*Vv[i].i;
    }
}

```

```

// compute functions U, dU and dB
void build() {
    int k, m;
    tc ik;

    for(k=0; k < N; k++)
    {
        B[k].r = 0;
        B[k].i = 0;
        U[k].r = 0;
        U[k].i = 0;

        for(m=0; m < (N - k); m++)
        {
            U[k] = U[k] + R[m+k]*conj(V[m]) + V[m+k]*conj(R[m]);
            B[k] = B[k] + V[m+k]*conj(V[m]);
        }

        ik.r = 0;
        ik.i = -k;

        dU[k] = ik*U[k];
        dB[k] = ik*B[k];
    }

    // multiple a zero harmonic by 0.5
    U[0].r = 0.5*U[0].r;
    U[0].i = 0.5*U[0].i;
    B[0].r = 0.5*B[0].r;
    B[0].i = 0.5*B[0].i;
}

// compute the right-hand side
void calc(tc *Rr, tc *Vv) {
    build();

    tc c_i, c_l, c_g, ik;
    int k, m;

    // compute derivatives dR and dV
    for(k = 0; k < N; k++)
    {
        ik.r = 0;
        ik.i = -k;

        dR[k] = ik*R[k];
        dV[k] = ik*V[k];
    }

    c_i.r = 0;
    c_i.i = 1;
    c_g.r = g;
    c_g.i = 0;
}

```

```

// compute the right-hand side
for(k = 0; k < N; k++)
{
    Rr[k].r = 0;
    Rr[k].i = 0;
    Vv[k].r = 0;
    Vv[k].i = 0;

    for(m=0; m <= k; m++)
    {
        Rr[k] = Rr[k] + U[m]*dR[k-m] - dU[m]*R[k-m];
        Vv[k] = Vv[k] + U[m]*dV[k-m] - dB[m]*R[k-m];
    }

    Rr[k] = c_i*Rr[k];
    Vv[k] = c_i*Vv[k] + c_g*R[k];
}

Vv[0].r = Vv[0].r - g;

// multiply the result we got by the time step
for(k=0; k < N; k++)
{
    Rr[k].r = eps*Rr[k].r;
    Rr[k].i = eps*Rr[k].i;
    Vv[k].r = eps*Vv[k].r;
    Vv[k].i = eps*Vv[k].i;
}
}

```

В этом модуле реализована явная схема Рунге—Кутта 4-го порядка для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Наиболее важная функция этого модуля — `void calc(tc *Rr, tc *Vv)`. Задачей этой функции является вычисление правой части уравнений от текущего значения функций $R[N]$, $V[N]$. Результат этой функции сохраняется в массивах, заданных параметрами Rr , Vv . В начале этой функции осуществляется вызов функции `build()` для построения функций $U[N]$, $B[N]$. Для вычисления функций используется схема умножения коэффициентов Фурье, описанная в разделе 5.1.

Приведенная программа позволяет получать приближенные решения, описывающие динамику поверхностных волн. Однако при больших N скорость выполнения этой программы быстро снижается. Несложно видеть, что количество арифметических операций имеет порядок N^2 . Не приводя точных оценок (которые несложно получить), заметим, что в ходе вычисления правых частей (в функции `calc()`) мы встречаемся в двойными вложенными циклами длины N . Основой «тормоз» вычислений — вычисление умножений. С использованием алгоритмов БПФ количество операций можно существенно сократить. Для это мы должны интерпретировать массивы $R[N]$, $V[N]$ не как коэффициенты Фурье, а как значение функций на равномерной сетке на отрезке $[0, 2\pi]$. Коэффициенты дискретного преобразования Фурье и значения на равномерной сетке могут быть ассоциированы между собой функцией БПФ — `FFTW()`.

Общая схема программы «на БПФ» имеет аналогичную структуру. Приведем лишь листинги функций `calc()`, `build()`.

```

void build()
{
    int i;

    for(i=0; i < N; i++)
    {

```



```

        dB[i].r = V[i].r*V[i].r + V[i].i*V[i].i;
        dB[i].i = 0;
        U[i].r = 2.0*(V[i].r*R[i].r + V[i].i*R[i].i);
        U[i].i = 0;
    }

// apply the integral operator P
    FFTW(dB, 1);
    FFTW(U, 1);

    dB[0].r = 0.5*dB[0].r;
    dB[0].i = 0;
    U[0].r = 0.5*U[0].r;
    U[0].i = 0;

    for(i=NN; i < N; i++)
    {
        dB[i].r = 0;
        dB[i].i = 0;
        U[i].r = 0;
        U[i].i = 0;
    }

    move(dU, U);
// differentiation
    Diff(dB);
    Diff(dU);
    FFTW(dB, -1);
    FFTW(dU, -1);
    FFTW(U, -1);
}

void calc(tc *Rr, tc *Vv)
{
    tc ci, cc;
    int n;

    ci.r = 0;
    ci.i = eps;

    build(); // построить функции U, B

// find derivatives from actual variables
    move(dR, R);
    do_D(dR);
    move(dV, V);
    do_D(dV);

// compute the right-hand part
    for(n=0; n < N; n++)
    {
        Rr[n].i = eps*(cm_r(U[n], dR[n]) - cm_r(dU[n], R[n]));
        Rr[n].r = -eps*(cm_i(U[n], dR[n]) - cm_i(dU[n], R[n]));
        cc.r = cm_r(U[n], dV[n]) - cm_r(R[n], dB[n]);
    }
}

```

```

    cc.i = cm_i(U[n], dV[n]) - cm_i(R[n], dB[n]);
    Vv[n].i = eps*cc.r;
    Vv[n].r = -eps*cc.i;
    Vv[n].r = Vv[n].r + eps*g*(R[n].r - 1.0);
    Vv[n].i = Vv[n].i + eps*g*R[n].i;
}

// nule a part of harmonics to avoid the effect of alliasing
FFTW(Rr, 1);
FFTW(Vv, 1);

for(n=NN-1; n < N; n++)
{
    Rr[n].r = 0;
    Rr[n].i = 0;

    Vv[n].r = 0;
    Vv[n].i = 0;
}

FFTW(Rr, -1);
FFTW(Vv, -1);
}

```

При умножении двух функций, заданных значениями на сетке и последующим дискретным преобразованием Фурье, мы можем встретиться (обязательно!) с эффектом аллиазинга (наложения). Известно, что для адекватного представления функции $\sin kx$ дискретным преобразованием Фурье необходимо задать эту функцию на сетке, содержащей как минимум $2k$ точек. Предположим, что мы рассматриваем равномерную сетку из N точек. Если мы рассмотрим функцию $f(x) = \sin(N/2 - 1)x$, квадрат этой функции будет представлен гармониками $\sin(N - 2)x$, которые уже не могут быть адекватно представлены дискретным преобразованием Фурье. Однако сам алгоритм может быть выполнен. При этом те гармоники, которые «не уместились» в сетке, найдут отражение через другие гармоники с меньшей частотой. Обычный прием для избежания этих проблем — использование заведомо большей сетки. Однако в нашем случае эффект аллиазинга приводит к более катастрофическим последствиям. Дело в том, что по определению функций R и V эти функции должны быть ограниченными и аналитическими функциями в нижней полуплоскости, следовательно, разложения этих функций в преобразование Фурье должны содержать гармоники с отрицательными показателями. Эффект аллиазинга приводит к тому, что в ходе вычисления правых частей могут появиться гармоники с положительными показателями. Для того, чтобы этого избежать, в функции `calc()` мы принудительно обнуляем гармоники с положительными показателями. Если убрать этот фрагмент, то можно наблюдать быстрый распад численной схемы.

Еще одна особенность использования алгоритмов БПФ — это появление ошибок округления. При использовании чисел с двойной точностью на 32-х разрядных компьютерах возникают ошибки округления по модулю порядка 10^{-15} – 10^{-17} , причем эти ошибки практически не зависят от номера гармоник.

9.4. ПРОГРАММА РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ НА КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЕ

При изучении течения идеальной жидкости со свободной поверхностью на конечной глубине мы не можем использовать уравнения Дьяченко (2.2.4), а вынуждены работать с уравнениями (2.3.1)–(2.3.2), описанными в разделе 2.3. При численной реализации этих уравнений возникают серьезные трудности, поскольку из-за ошибок округления возникает вычислительная неустойчивость. Отметим, что этих проблем не возникает при работе с уравнениями (2.2.4). В разделе 5.3 мы рассматривали методы решения уравнений в условиях машинной точности. В настоящем разделе мы опишем программную реализацию численных методов решения уравнений (2.3.1)–(2.3.2).

Так как общая схема этой программы во многом совпадает со схемой программы, описанной в предыдущем разделе, то мы опишем лишь наиболее характерные фрагменты программы.

Головная программа в основном совпадает с предыдущей программой, приведем лишь некоторые новые переменные:

```
double depth = 6.0;
```

```
double q = 1e-24;
```

Переменная `depth` задает конечную глубину, а переменная `q` — это параметр регуляризации, подробно описанный в разделе 5.3.

Приведем основное тело программы, где реализована процедура нахождения численного решения задачи (2.3.1)–(2.3.2). Основными рабочими переменными, в которых ведется расчет, являются `y[NN*2]`;

```
F[NN*2];
```

Переменная `y` соответствует мнимой части конформной переменной z , а переменная `F` описывает вещественную часть переменной Φ .

```
void calc(tc *yy, tc *FF); // computation of right-hand sides
```

```
void shift(tc *yy, tc *FF, double k); // a fuction
// which is specific for Rounge--Coutta method
```

```
void do_runge()
```

```
{
    int i,j;
    int proc = 10;

    double m;

    do_visio(t, iter);

    // the main cicle
    while(t < t_stop+1)
    {
        for(i=0; i < N; i++)
        {
            ay[i] = y[i];
            aF[i] = F[i];
        }

        // computation of right-hand sides and shift of R.-C.

        calc(y_1, F_1);

        shift(y_1, F_1, 0.5);
        calc(y_2, F_2);

        shift(y_2, F_2, 0.5);
        calc(y_3, F_3);

        shift(y_3, F_3, 1.0);
        calc(y_4, F_4);

        // sum of R.-C. variables
```

```

for(i=0; i < N; i++)
{
    y[i].r = ay[i].r + (y_1[i].r + 2.0*y_2[i].r
    + 2.0*y_3[i].r + y_4[i].r)/6.0;
    y[i].i = ay[i].i + (y_1[i].i + 2.0*y_2[i].i
    + 2.0*y_3[i].i + y_4[i].i)/6.0;

    F[i].r = aF[i].r + (F_1[i].r + 2.0*F_2[i].r
    + 2.0*F_3[i].r + F_4[i].r)/6.0;
    F[i].i = aF[i].i + (F_1[i].i + 2.0*F_2[i].i
    + 2.0*F_3[i].i + F_4[i].i)/6.0;
}

// it is necessary to find Fourier formation of variables y and F
// to compute a zero harmonic

FFTW(y, 1);
FFTW(F, 1);

double y0 = 0;
double s;

for(i=1;i<NN;i++)
{
    y0=y0+double(i)*cth(double(i)*depth)*(y[i].r*y[i].r
    +y[i].i*y[i].i);
}

y[0].r = (-1.0)*y0*2.0;//*pi2; // computation of a zero harmonic
y[0].i = 0;

// using Fourier coefficients from arrays y and F
// we conduct the regularisation with help of the parameter q

for(i=0;i<N;i++)
{
    // compute the squared absolute value of a coefficient
    // in Fourier formation
    m = y[i].r*y[i].r + y[i].i*y[i].i;

    if(m<q)//in the case when the absolute value of a coefficient
    // is less than the threshold q, then to zero it
    {
        y[i].r = 0;
        y[i].i = 0;
    }

    // compute the squared absolute value of a coefficient
    // in Fourier formation
    m = F[i].r*F[i].r + F[i].i*F[i].i;
    if(m<q)//in the case when the absolute value of a coefficient
    // is less than the threshold q, then to zero it

```

```

        {
            F[i].r = 0;
            F[i].i = 0;
        }

    }

    // inverse Fourier transform
    FFTW(F, -1);
    FFTW(y, -1);

    iter++;

    t = t + t_eps;

    if(!(iter % view_factor))
    {
        do_visio(t, iter);
        cout << "100%";
        cout << t << "\t" << EE << "\t" << TT << "\t" << UU << "\t" << "\n";
        proc = 10;
    }
    else
    {
        if(!(iter % view_factor2))
        {
            cout << ".";
        }

        if(!(iter % view_factor3))
        {
            cout << proc << "%";
            proc = proc + 10;
        }
    }

}

}

void shift(tc *yy, tc *FF, double k)
{
    int i;

    for(i=0; i < N; i++)
    {
        y[i].r = ay[i].r + k*yy[i].r;
        y[i].i = ay[i].i + k*yy[i].i;

        F[i].r = aF[i].r + k*FF[i].r;
        F[i].i = aF[i].i + k*FF[i].i;
    }
}

```

```

tc buff[NN*2];
tx ta1, ta2;

void calc(tc *yy, tc *FF)
{
    int i;

    // computation of the derivative of y
    move(yu, y);
    do_D(yu);

    // construction of the function x over the variable y
    move(xu, yu);
    do_T(xu);

    // computing of the absolute value of the Jacobian for
    //the conformal transform J
    for(i=0;i<N;i++)
    {
        J[i].r = 1.0 + 2.0*xu[i].r + xu[i].r*xu[i].r + yu[i].r*yu[i].r;
        J[i].i = 0;
    }

    // computation of a derivative from a potential
    //on the boundary
    move(Fu, F);
    do_D(Fu);

    move(Pu, Fu);
    do_R(Pu);

    // computation of the right-hand side of the equation

    for(i=0;i<N;i++)
    {
        PJ[i].r = Pu[i].r / J[i].r;
        PJ[i].i = 0;
    }

    move(TPJ, PJ);
    do_T(TPJ);

    for(i=0;i<N;i++)
    {
        TFPJ[i].r = Fu[i].r*Pu[i].r;
        TFPJ[i].i = 0;
    }

    do_T(TFPJ);

    for(i=0;i<N;i++)
    {

```

```

        yy[i].r = (-1.0)*(yu[i].r*TPJ[i].r + (1.0 + xu[i].r)*PJ[i].r);
        yy[i].i = 0;
    }

    for(i=0;i<N;i++)
    {
        FF[i].r = -Gg*y[i].r - (Fu[i].r*Fu[i].r
        - Pu[i].r*Pu[i].r)/(2.0*J[i].r) - Fu[i].r*TPJ[i].r;
        FF[i].i = 0;
    }

    // multiplication by the time step

    for(i=0;i<N;i++)
    {
        yy[i].r = t_eps*yy[i].r;
        yy[i].i = 0;

        FF[i].r = t_eps*(FF[i].r);
        FF[i].i = 0;
    }
}

```

9.5. ВОПРОСЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

С первого взгляда может показаться, что основным при визуализации является представление графика профиля поверхностной волны. Однако для анализа хода вычислений, а также для анализа динамики поверхностных волн значительно более важным являются спектры решений в логарифмическом масштабе. Как правило по поведению спектра можно судить о «качестве» решения. Если мы рассматриваем случай, когда решение принадлежит классам аналитических функций (а именно такие решения рассматриваются в главе 3), то логарифмические спектры должны асимптотически убывать как линейная функция. Однако часто (особенно при применении БПФ) спектры, которые мы отображаем, содержат ошибки округления. Это приводит к тому, что спектры имеют «горизонтальные хвосты».

Так как мы рассматриваем нестационарные решения, то при визуализации мы будем использовать элементы мультипликации. Реализацию программы для визуализации мы будем осуществлять с использованием системы Borland Delphi 7.0 (конкретная версия не имеет принципиального значения). Основной компонент, который мы будем использовать для построения графиков — TChart. Описание техники программирования в Borland Delphi выходит за рамки нашей книги. Заметим, что на сайте нашей книги <http://www.calcs.ru/> размещены исходные тексты и откомпилированные модули не только для расчетов, но и визуализации результатов.

ГЛАВА 10

ПРОВЕДЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

10.1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ: ПОСТРОЕНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН

В разделе 2.4 мы привели уравнения, описывающие бегущие волны на конечной (и бесконечной) глубине. В разделе 9.2 мы описали программу, реализующую численный метод нахождения

приближенных решений этих уравнений. В настоящем разделе мы приведем результаты вычислительных экспериментов.

Наши эксперименты имеют два параметра: глубину и скорость бегущей волны. Всего было проведено 6 серий экспериментов.

Номер эксперимента	глубина	скорость
1	0,2	0,2
2	0,2	0,3
3	1,0	0,8
4	1,0	1,0
5	6,0	1,1
6	6,0	1,3

Приведем логарифмические графики наших экспериментов (рис. 10.1.1–10.1.6).

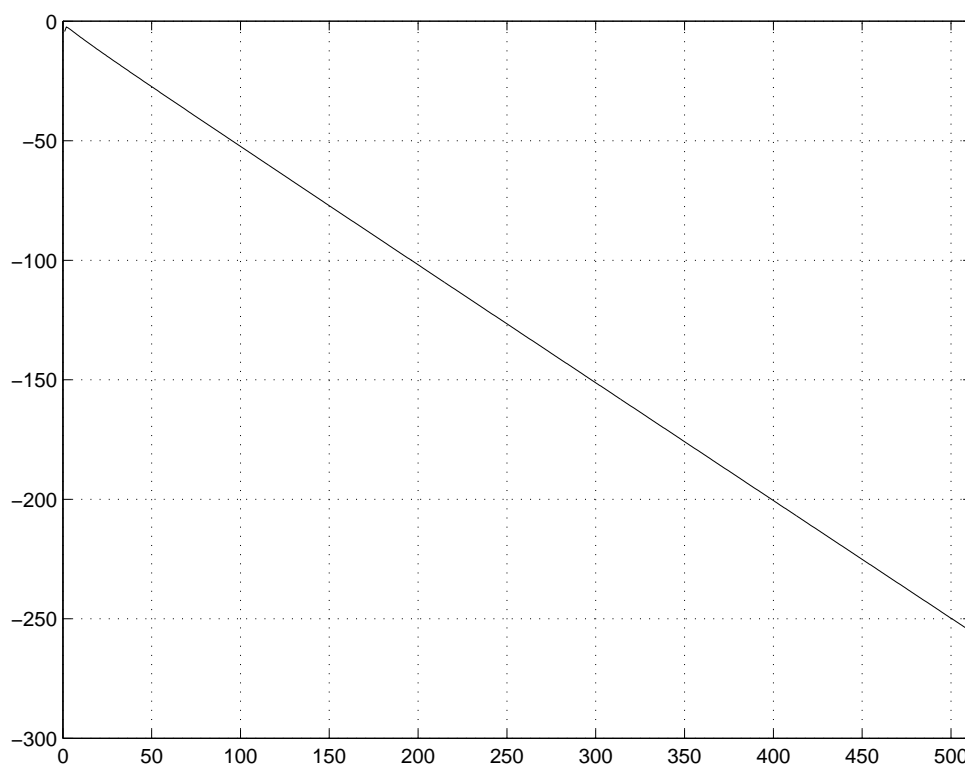


Рис. 10.1.1. Эксперимент №1: спектр в логарифмическом масштабе

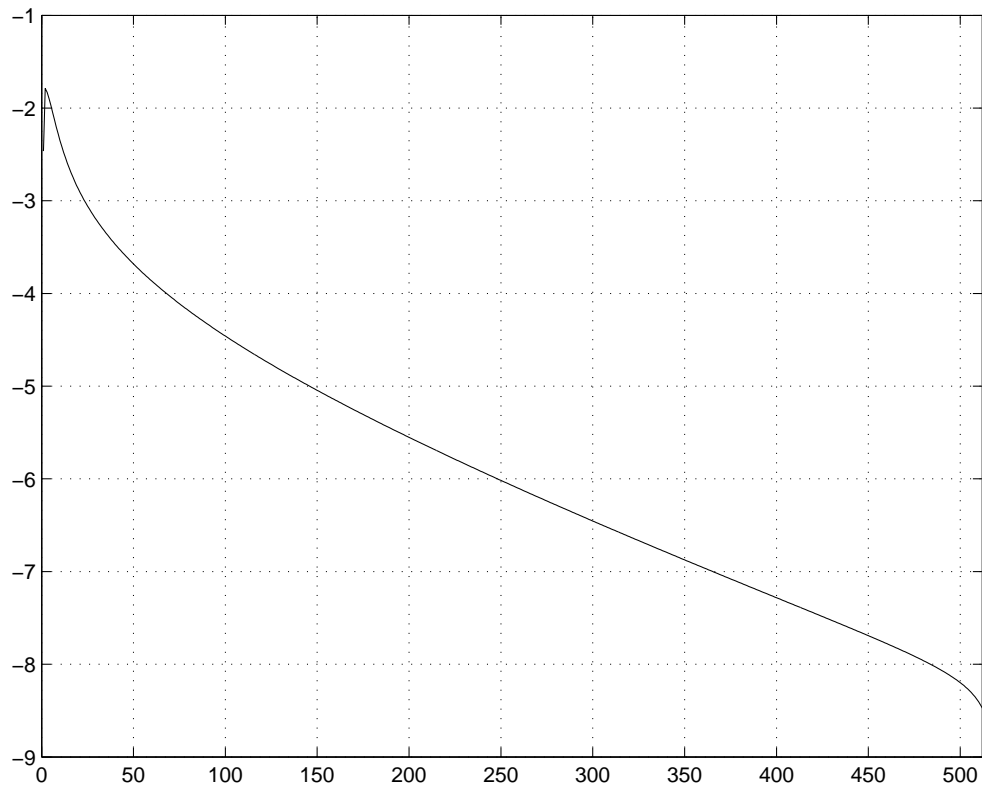


Рис. 10.1.2. Эксперимент №2: спектр в логарифмическом масштабе

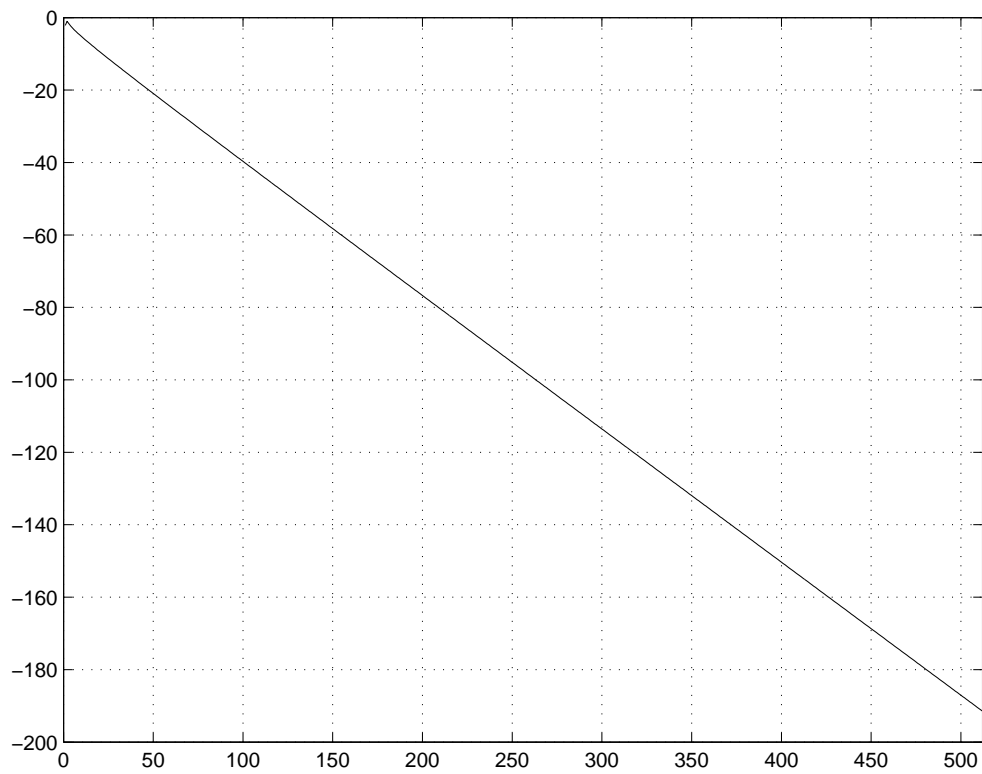


Рис. 10.1.3. Эксперимент №3: спектр в логарифмическом масштабе

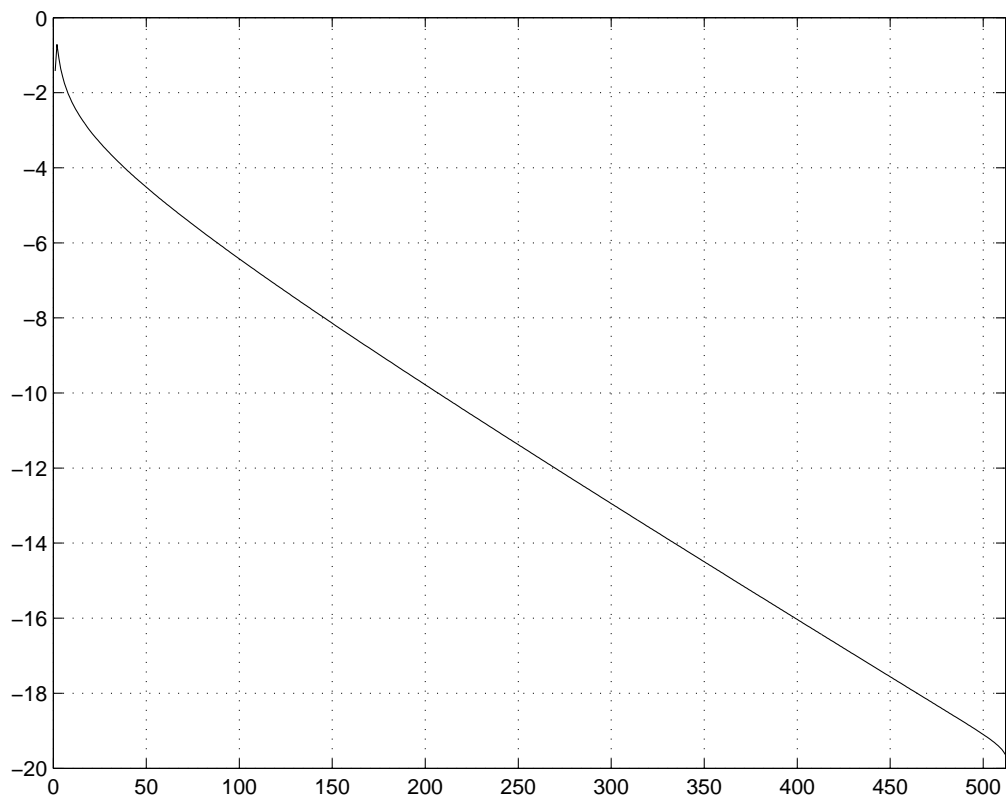


Рис. 10.1.4. Эксперимент №4: спектр в логарифмическом масштабе

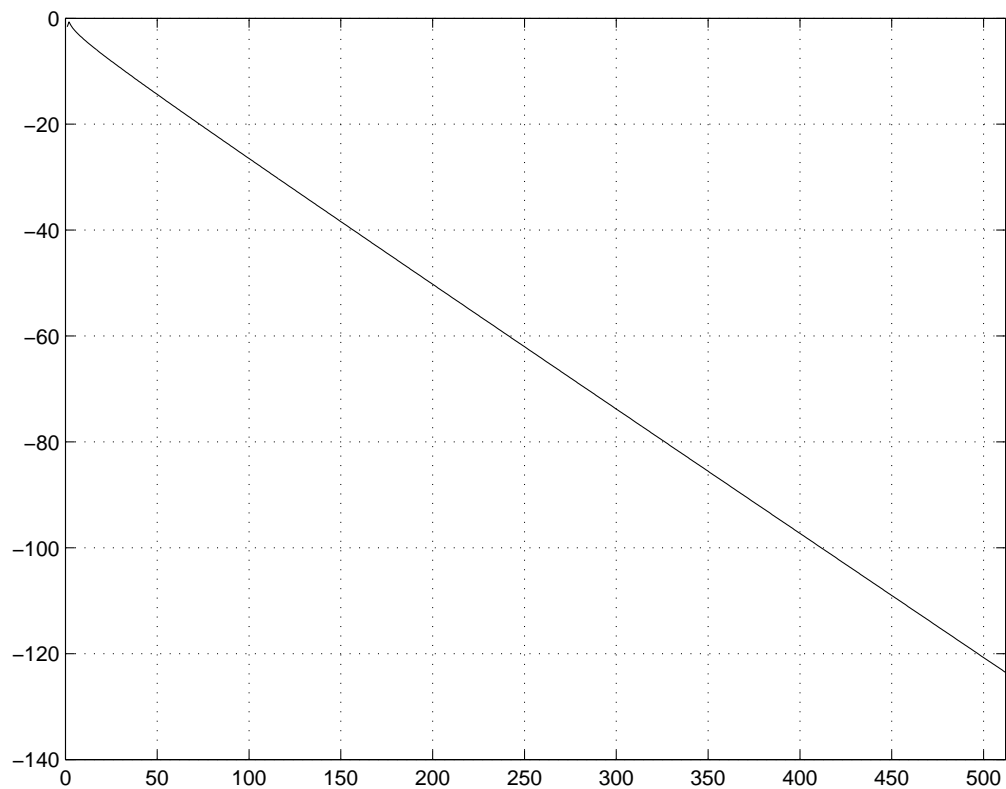


Рис. 10.1.5. Эксперимент №5: спектр в логарифмическом масштабе

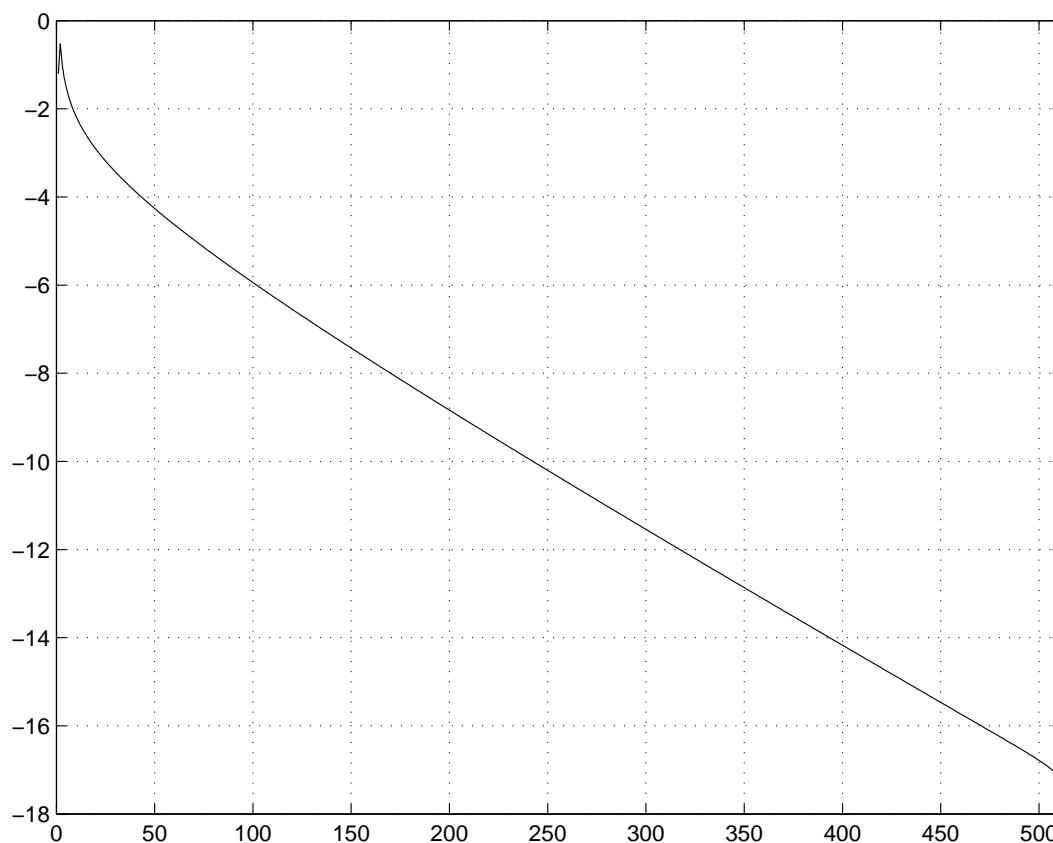


Рис. 10.1.6. Эксперимент №6: спектр в логарифмическом масштабе

10.2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ: СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим поверхностные волны, у которых горизонтальная координата поля скоростей равна нулю. В частности, мы рассмотрим динамику поверхностных волн, выбрав в качестве начальных условий отклонение свободной поверхности и нулевое распределение скоростей. Как мы увидим, такие волны являются периодическими во времени. Это один из самых простых режимов динамики поверхностных волн, который очень удобен для тестирования наших программ.

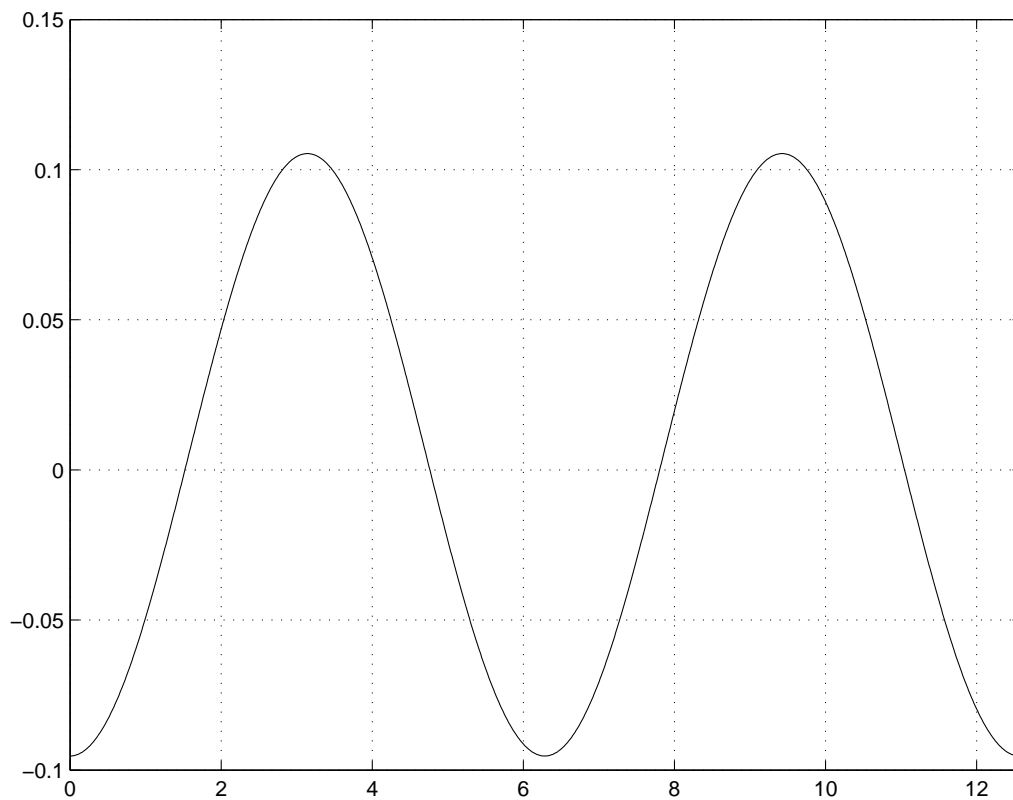
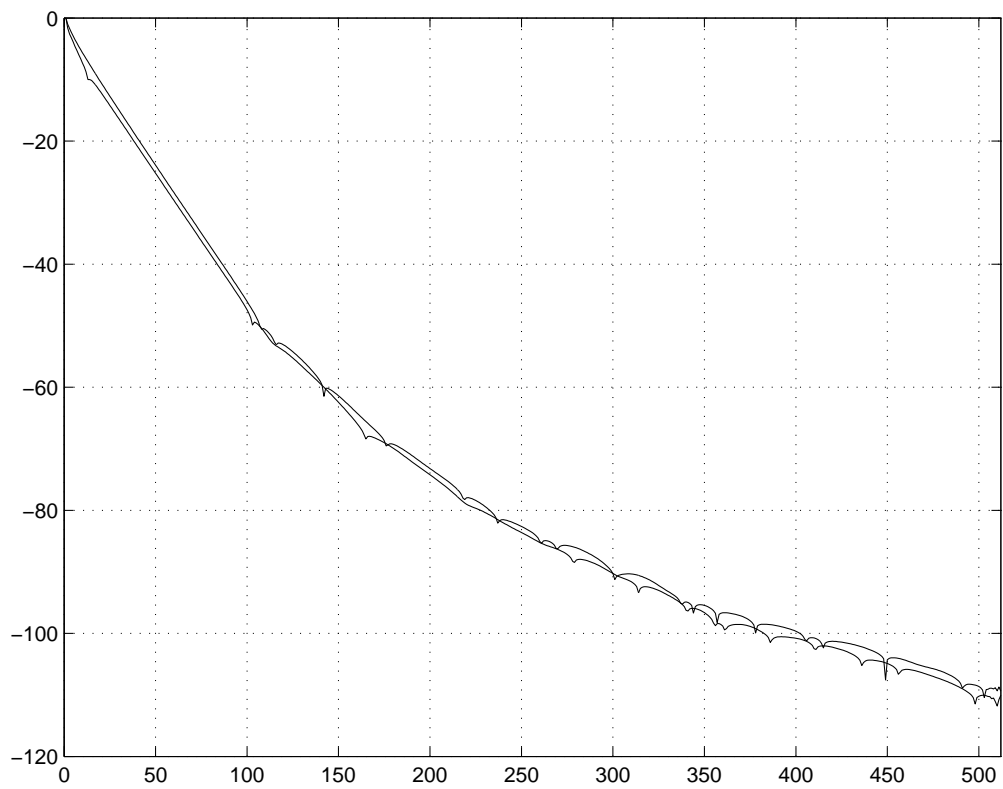
В этом эксперименте мы будем использовать программу без использования БПФ.

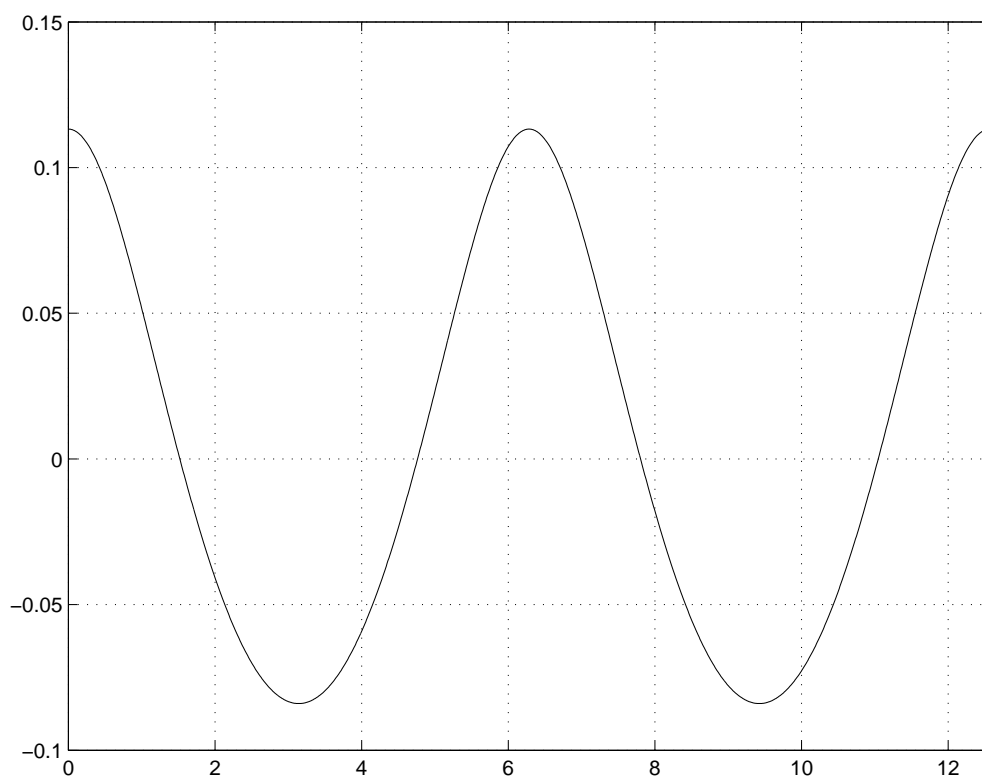
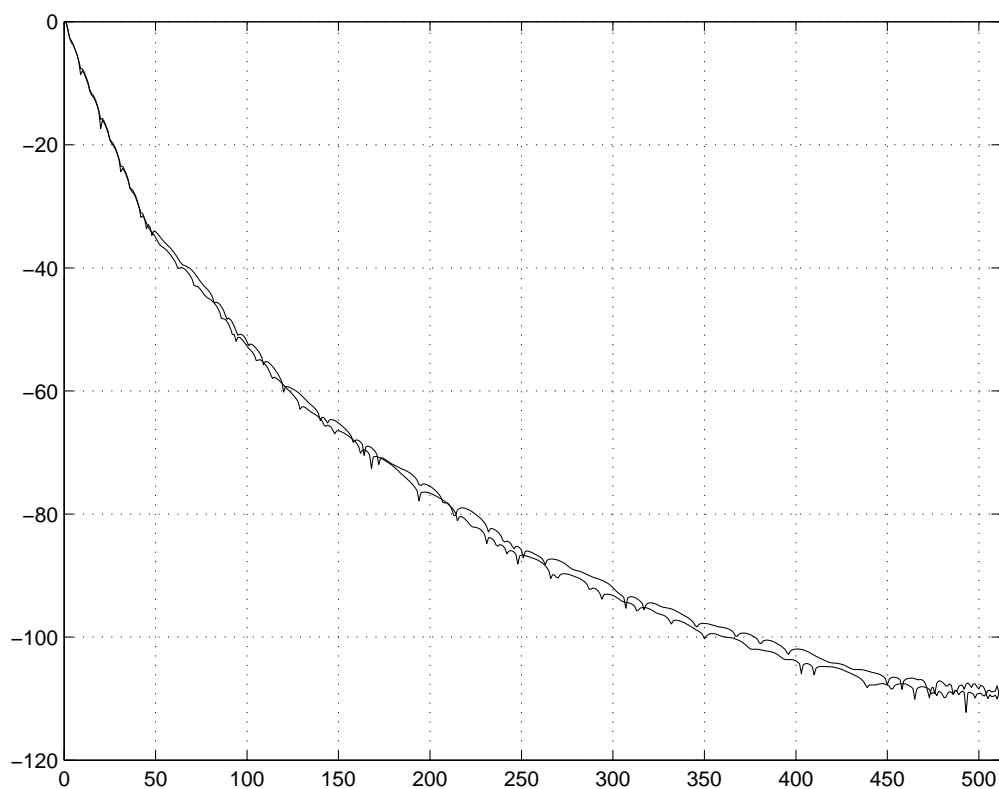
Опишем параметры нашего вычислительного эксперимента:

1. количество гармоник, участвующих в расчете: $N = 512$;
2. шаг по времени: $\tau = 0,004$;
3. ускорение свободного падения: $g = 1,0$;
4. начальное условие: $R(u, 0) = 1 + 0,1e^{-iu}$, $V(u, 0) = 0$.

Приведем профиль начальной волны при $t = 0$ на рис. 10.2.1. На рис. 10.2.2 приводим спектр решения при $t = 60$. Приведем и профиль волны при $t = 60$ на рис. 10.2.3.

Продолжим наш эксперимент. На рис. 10.2.4 и 10.2.5 приведем спектр и профиль волны при $t = 150$. Для контроля наших вычислений приведем график изменения полной энергии на рис. 10.2.6. В реальности полная энергия сохраняется, поэтому наблюдаемые колебания на рис. 10.2.6 — следствия погрешностей вычислений. Однако тот факт, что средний уровень наблюдаемой полной энергии остается одинаковым, а колебания относительно невелики (в рамках погрешностей), подтверждает достоверность наших вычислений. Для того, чтобы представить динамику наших волн, приведем на отдельном рис. 10.2.7 изменение потенциальной и кинетической энергий. Поскольку потенциальная и кинетическая энергии сильно осциллируют, приведем лишь первые 50 отсчетов. Как и следовало ожидать, в случае стоячих волн уровни кинетической и потенциальной энергий находятся в противофазе. Максимум потенциальной энергии соответствует минимуму (равному нулю) кинетической энергии, и наоборот.

Рис. 10.2.1. Профиль начальной волны при $t = 0$ Рис. 10.2.2. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 60$

Рис. 10.2.3. Профиль волны при $t = 60$ Рис. 10.2.4. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 150$

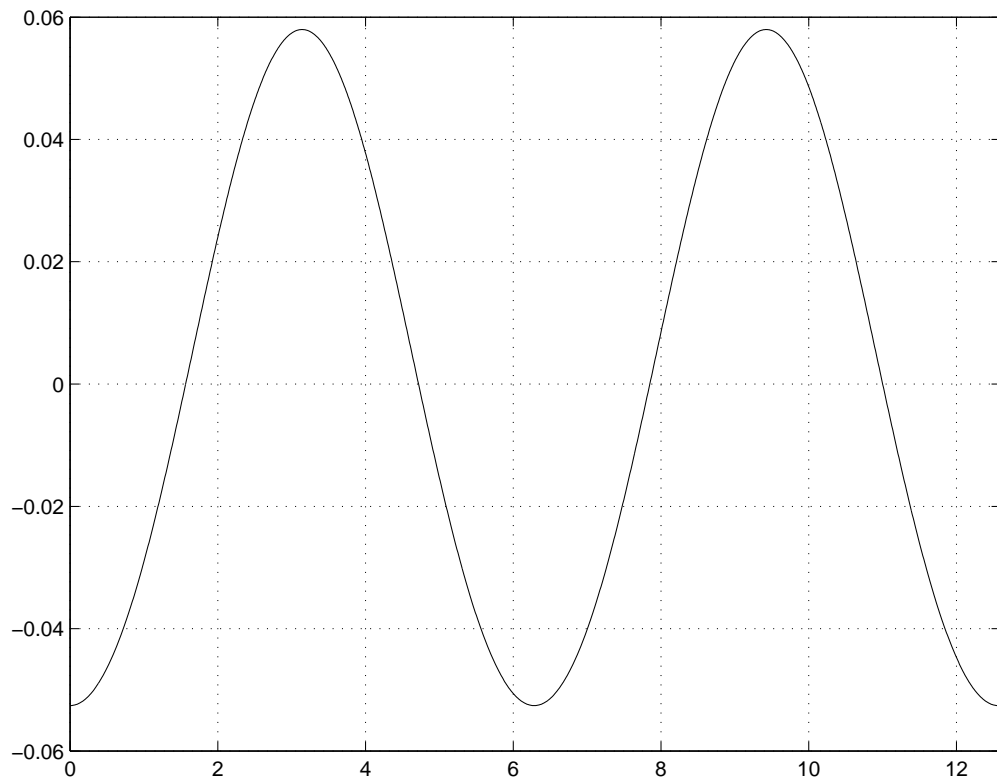
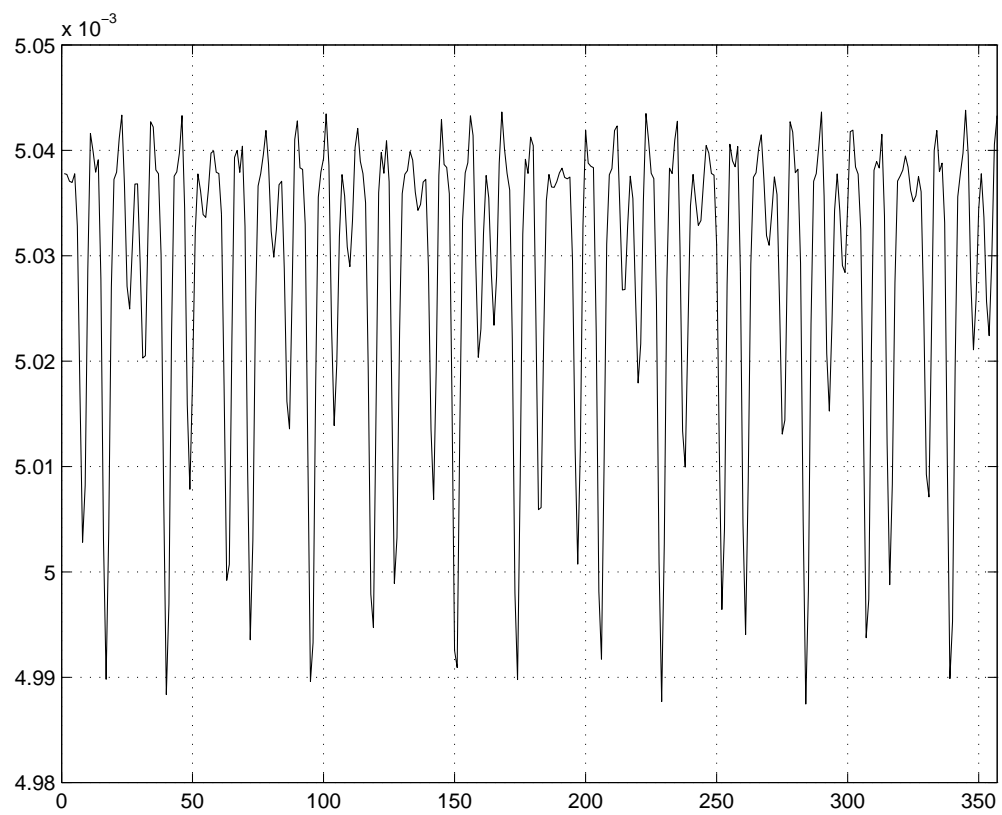
Рис. 10.2.5. Профиль волны при $t = 150$ 

Рис. 10.2.6. Изменение энергии в расчетах стоячих волн

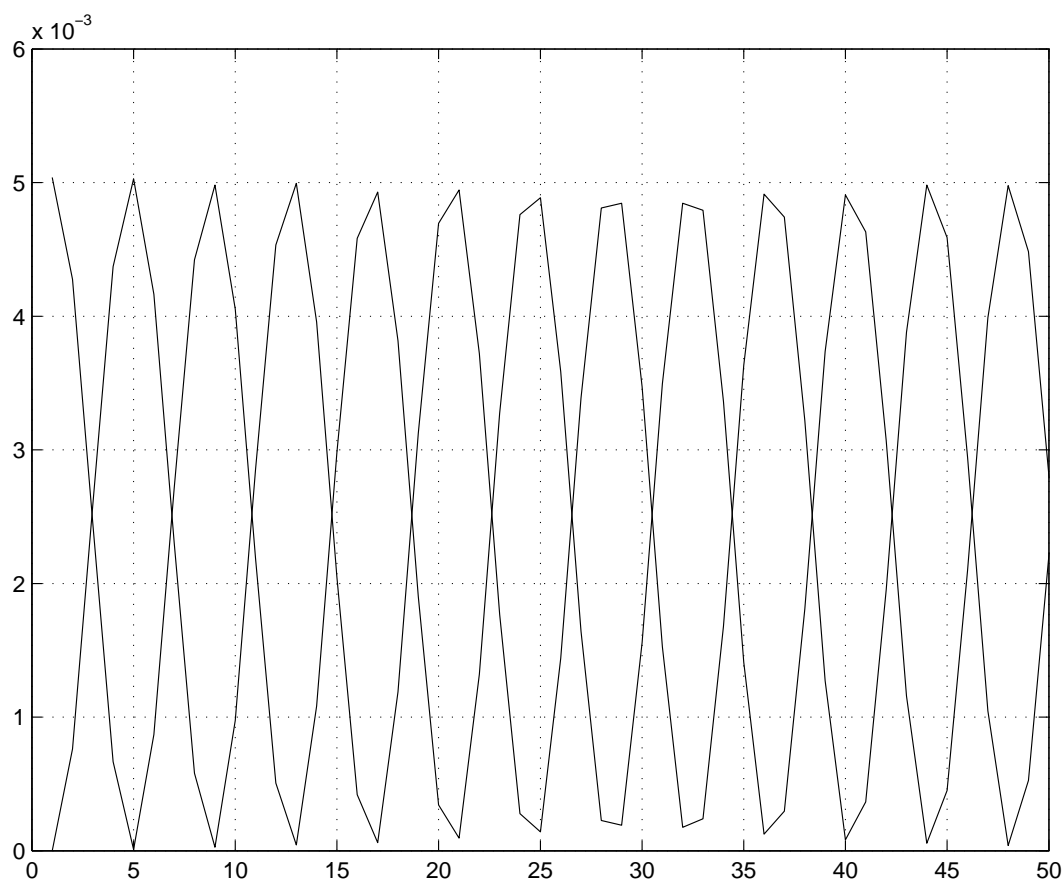


Рис. 10.2.7. Потенциальная и кинетическая энергии в расчетах стоячих волн

10.3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ: СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

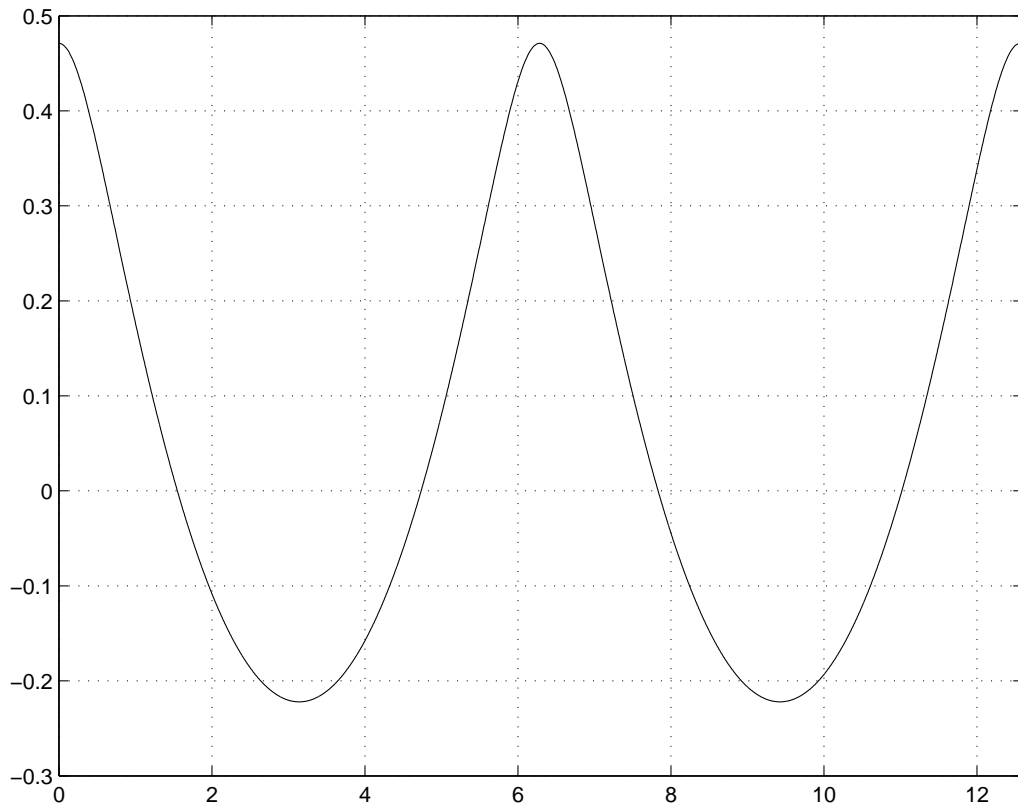
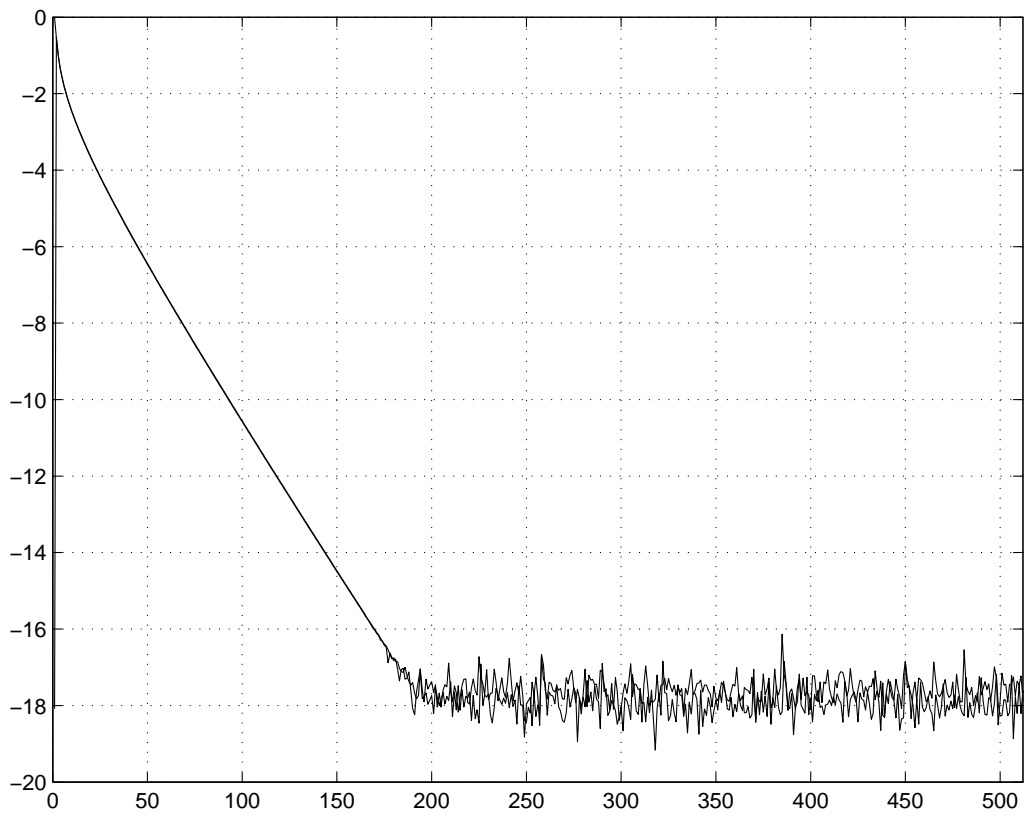
Еще в середине 19-го века Стоксом были исследованы стационарные волны. В случае этих волн существует система координат, движущаяся с постоянной скоростью, в которой поверхностные волны неподвижны. Стационарные волны прекрасно подходят для проверки программы для численного решения.

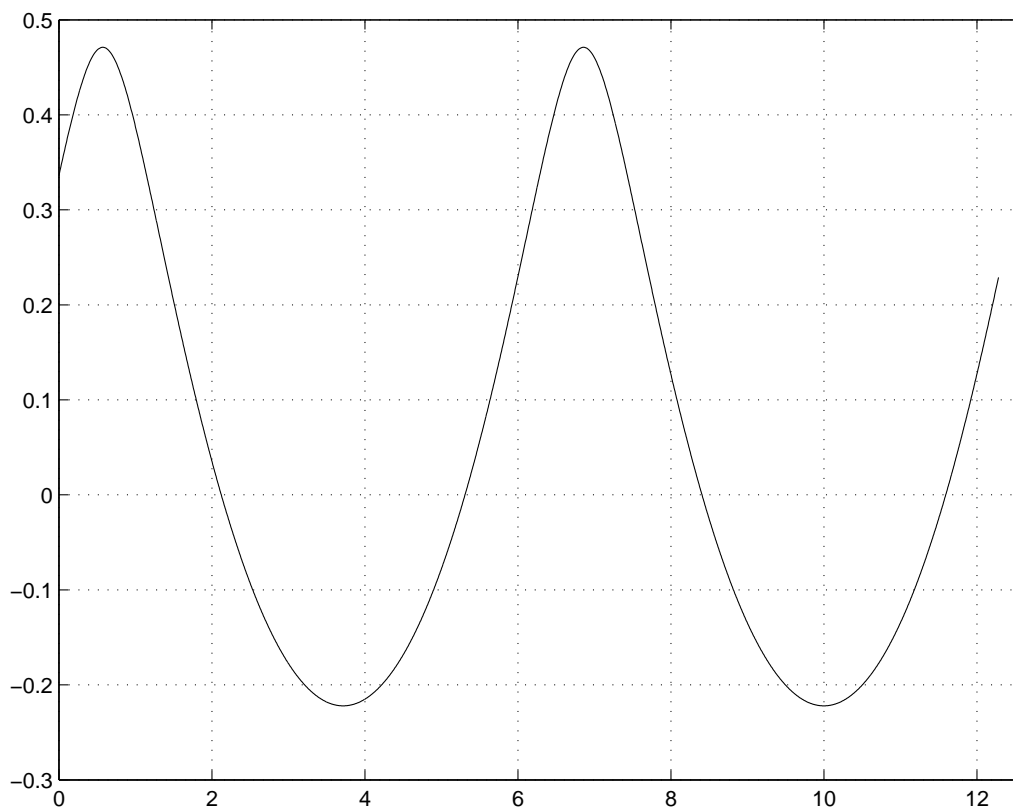
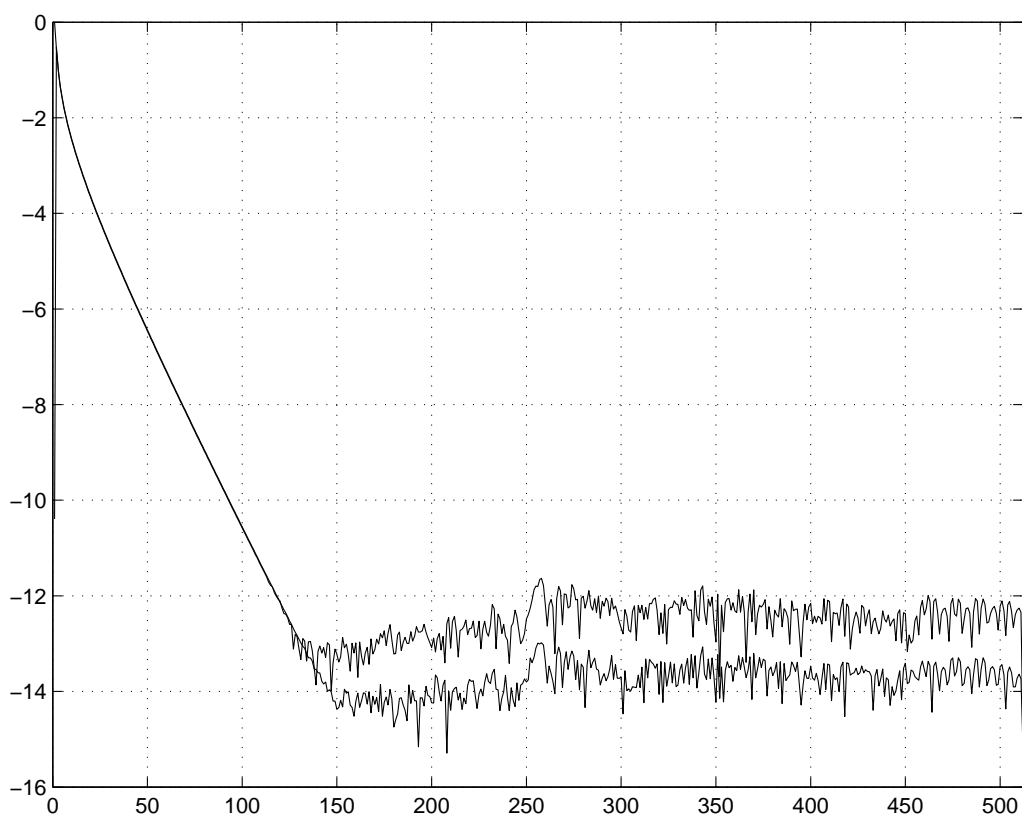
Мы воспользуемся начальным условием, соответствующим стационарной волне, сообщенным нам А. И. Дьяченко. Файл с этими начальными условиями можно найти на сайте <http://www.calcs.ru/>.

Для расчетов будем использовать программу с использованием быстрого преобразования Фурье. Опишем параметры нашего вычислительного эксперимента:

1. количество гармоник, участвующих в расчете: $N = 1024$;
2. шаг по времени: $\tau = 0,004$;
3. ускорение свободного падения: $g = 1,0$;
4. начальное условие — стационарное решение.

Приведем профиль начальной волны и спектр решения при $t = 0$ на рис. 10.3.1, 10.3.2. Поскольку наша цель состоит в проверке нашей программы, мы проведем расчеты на большом временном интервале. На рис. 10.3.3 и 10.3.4 приведем профиль волны и спектр решения при $t = 7000$. Это соответствует примерно тысяче периодов. Мы видим, что старшие гармоники спектра несколько возрастают вследствие погрешностей вычислений. Однако это возрастание не носит катастрофического характера, и счет может быть продолжен. Еще одним контролем корректности наших расчетов является контроль энергии. На рис. 10.3.5 приводим график полной, кинетической и потенциальной энергий. Мы видим, что уровень энергии и полной, и кинетической, и потенциальной остается одинаковым со временем. Это согласуется с динамикой стационарных волн.

Рис. 10.3.1. Профиль начальной волны при $t = 0$ Рис. 10.3.2. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 0$

Рис. 10.3.3. Профиль волны при $t = 7000$ Рис. 10.3.4. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 7000$

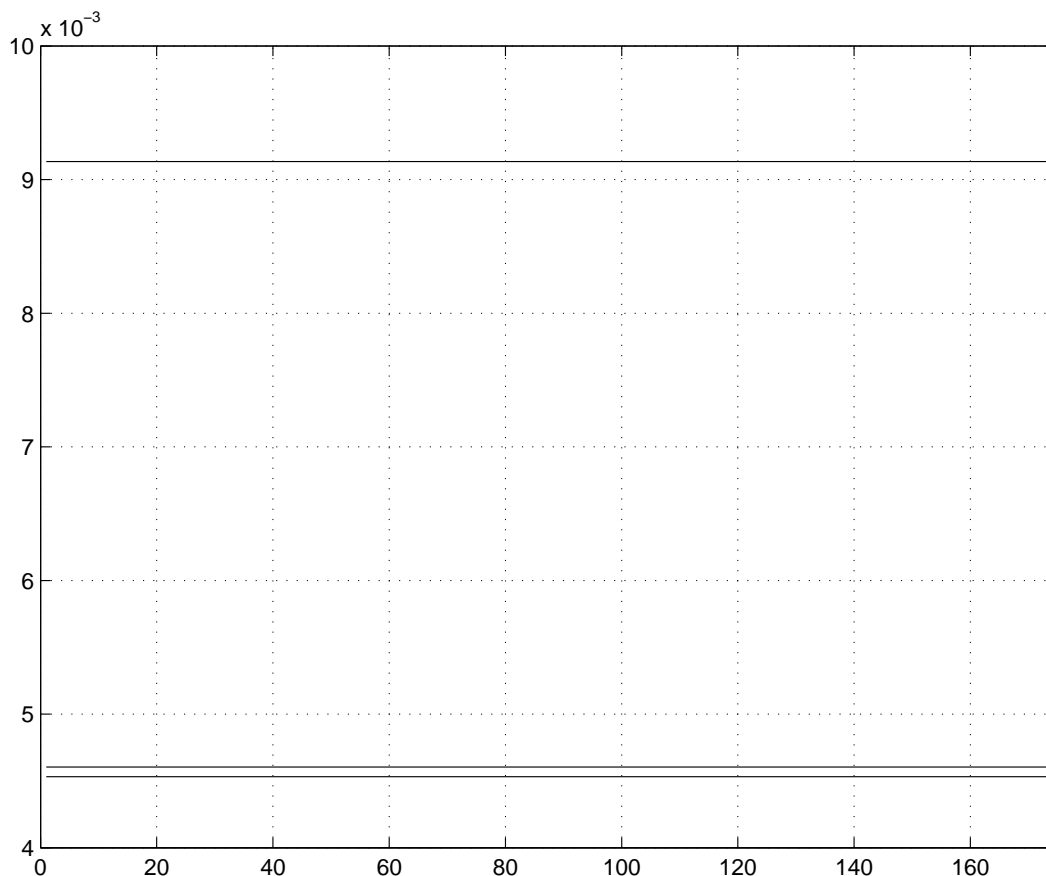


Рис. 10.3.5. Уровень энергии

10.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРУШИВАЮЩЕЙСЯ ВОЛНЫ

В предыдущих вычислительных экспериментах мы рассматривали поверхностные волны, которые существуют при всех $t \geq 0$. Как правило, поверхностные волны идеальной жидкости имеют обыкновение обрушиваться, либо у этих волн возникают особенности за конечное время. В настоящем эксперименте мы проведем моделирование обрушивающейся волны. Так как время существования решений, описывающих эти волны, конечно, то мы применим методы оценки времени существования решений, которые были разработаны в главе 6.

Мы рассмотрим пример обрушивающейся волны из работы [62] и сравним качественные и количественные результаты.

В этом вычислительном эксперименте мы будем использовать программу расчета поверхностных волн с использованием быстрого преобразования Фурье.

Опишем параметры нашего вычислительного эксперимента:

1. количество гармоник, участвующих в расчете: $N = 4096$;
2. шаг по времени: $\tau = 0,0001$;
3. ускорение свободного падения: $g = 10,0$;
4. начальное условие: $R(u, 0) = 1 + 0,28e^{-iu}$, $V(u, 0) = -0,28\sqrt{g}e^{-iu}$.

В работе [62] утверждается, что у волны, описываемой этим начальным условием, образуется особенность за время порядка $t = 2,0$. Проверим это утверждение с помощью оценочных функционалов, которые мы ввели в главе 6.

Первым делом приведем профиль начальной волны на рис. 10.4.1.

Начнем расчеты по указанной схеме и приведем спектр решений и профили поверхностных волн на графиках 10.4.2–10.4.9. Для контроля вычислений приведем график энергий: кинетической, потенциальной и полной на рис 10.4.10.

Из рассмотрения поведения спектра решения можно сделать эмпирический вывод, что у решения возникает особенность при $t = 2, 0$. Используя оценочные функционалы, введенные в главе 6, мы можем подтвердить этот вывод доказательно. Приведем графики функции ν_k^N от решений R и V при различных значениях t , см. рис. 10.4.10–10.4.14. Мы видим, что при значениях $t = 0, 5$, $t = 1, 0$, $t = 1, 5$ значения оценочных функционалов отделены от нуля. А при $t = 2, 0$ мы наблюдаем стремление оценочного функционала к нулю, что говорит об образовании особенности у решений при $t = 2, 0$. Дальнейшие вычисления этого решения проводить уже нельзя.

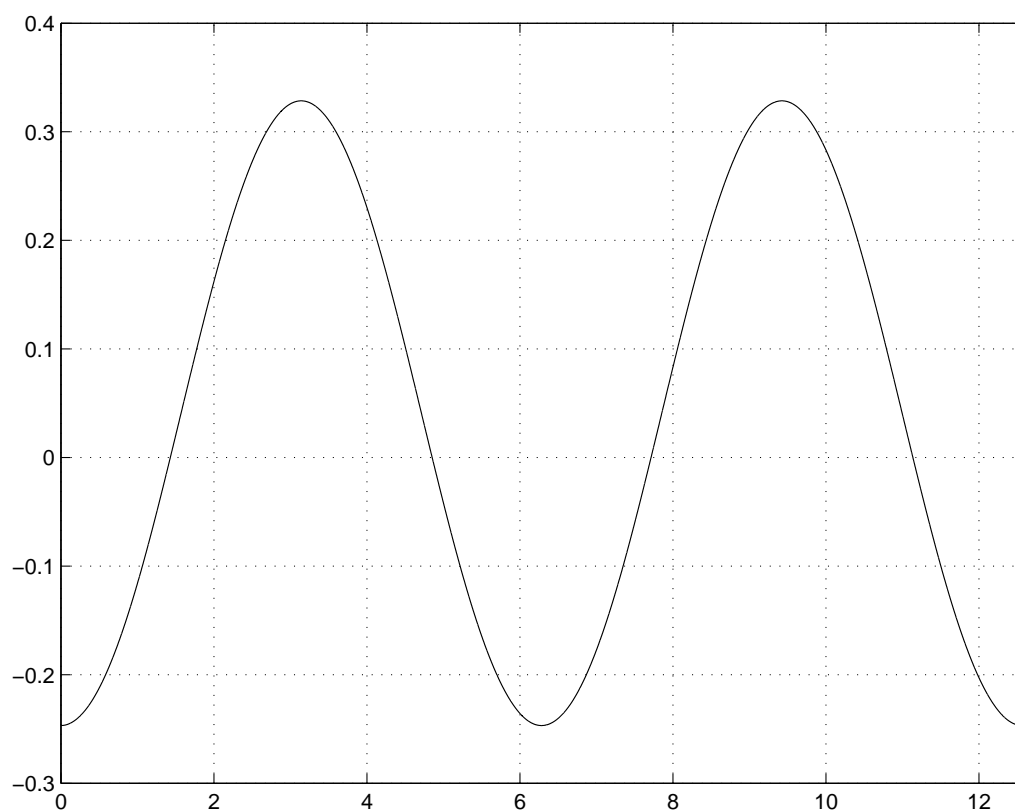


Рис. 10.4.1. Профиль начальной волны

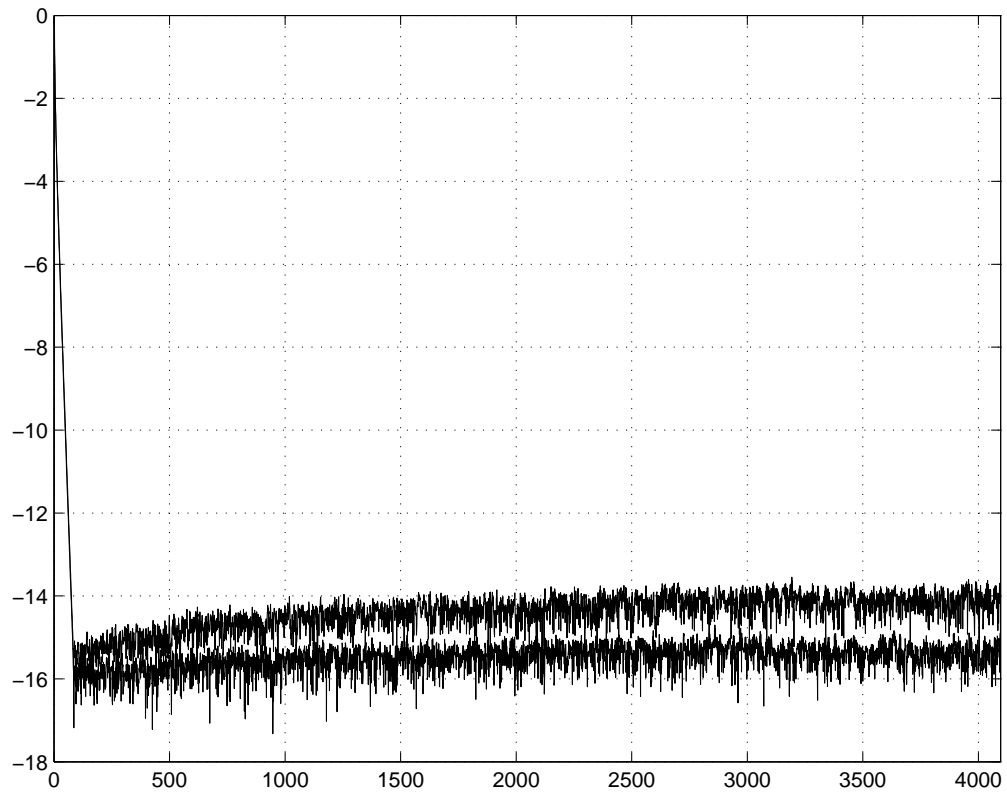


Рис. 10.4.2. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 0,50$

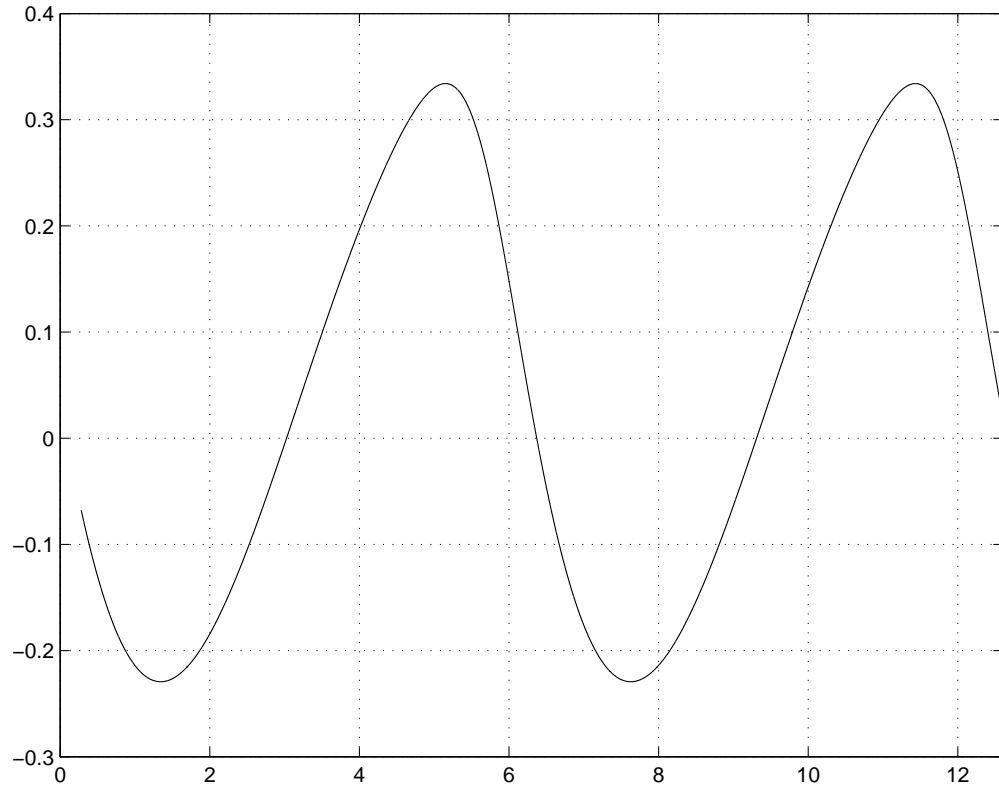


Рис. 10.4.3. Профиль волны при $t = 0,50$

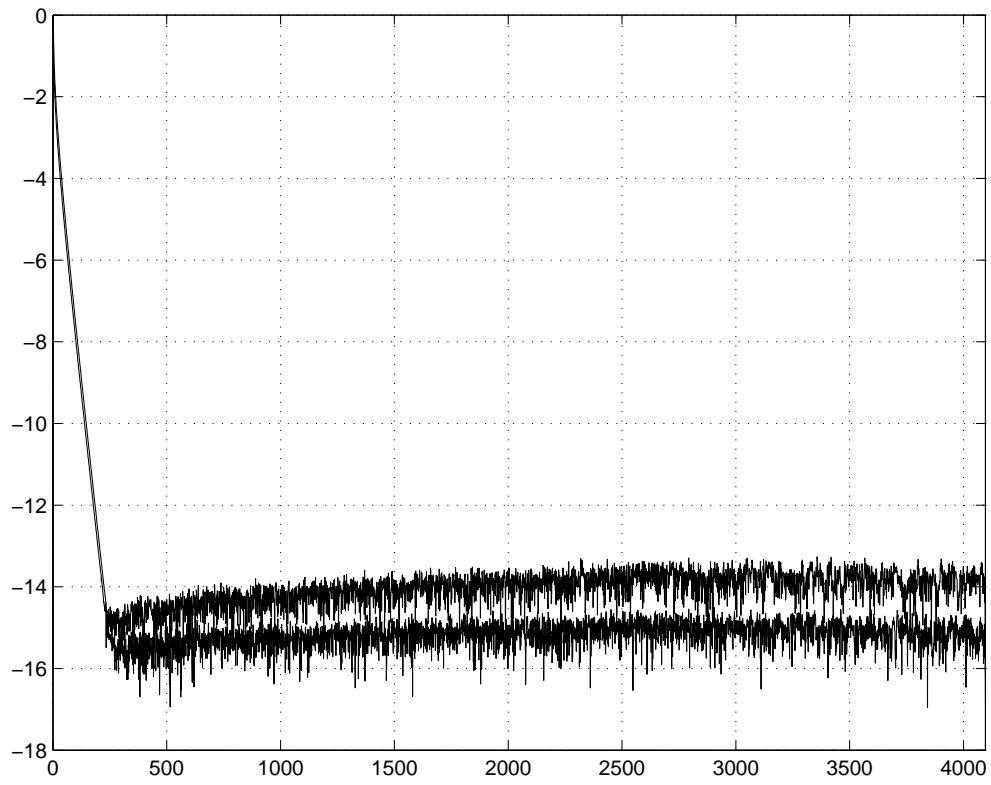


Рис. 10.4.4. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 1,0$

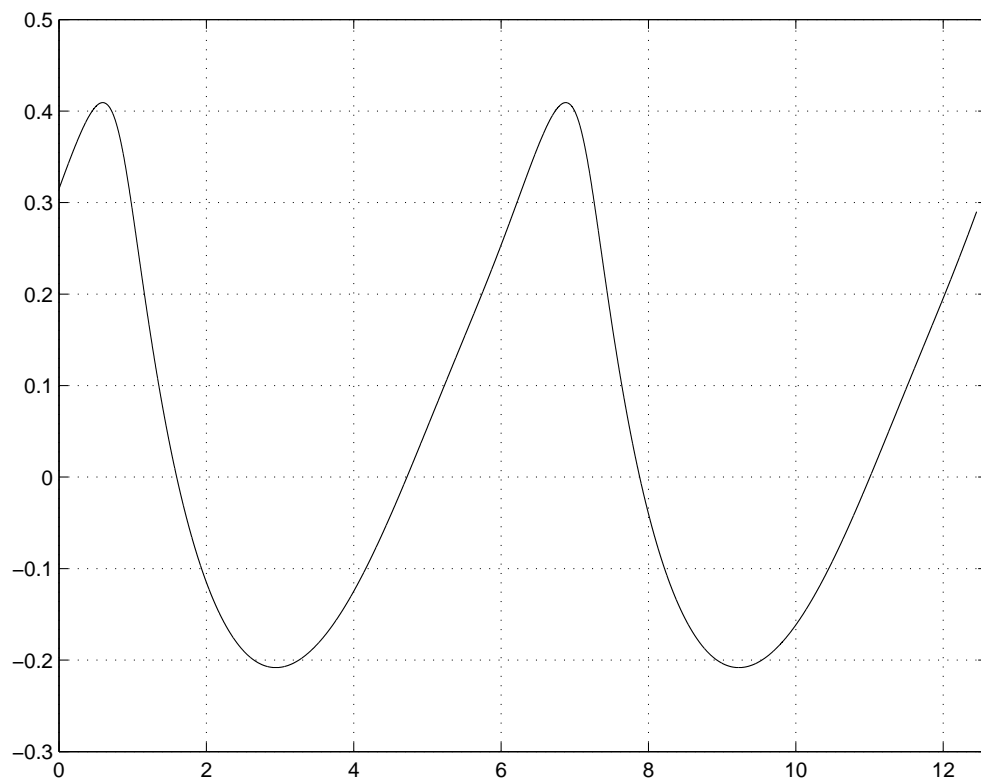
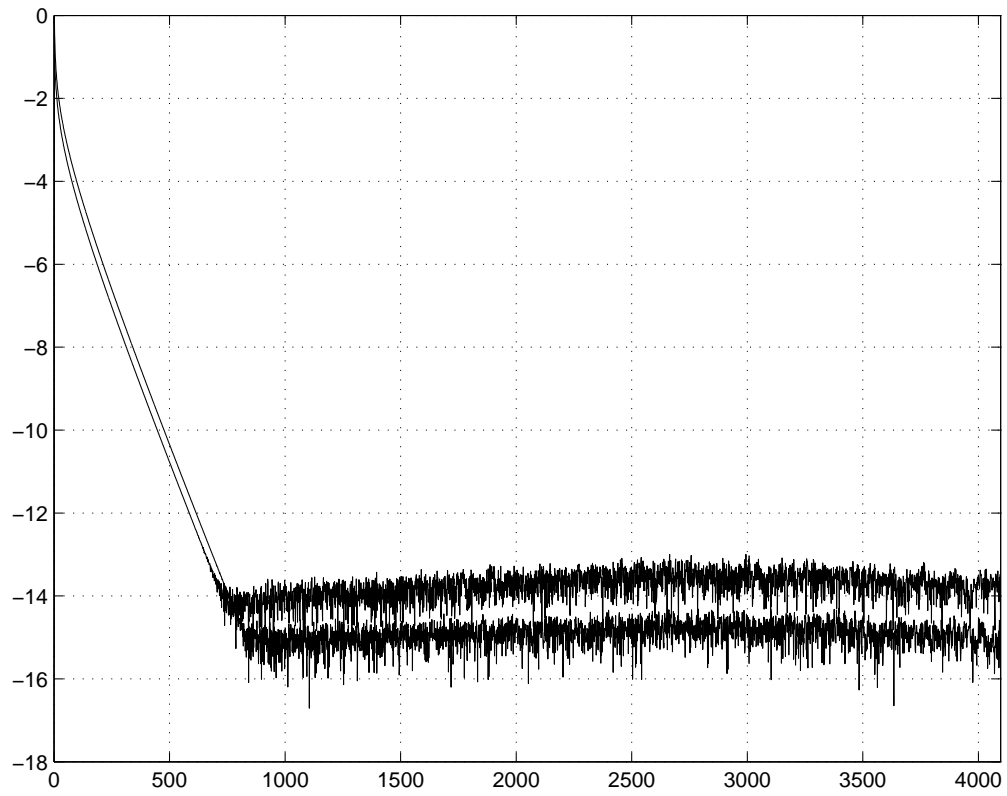
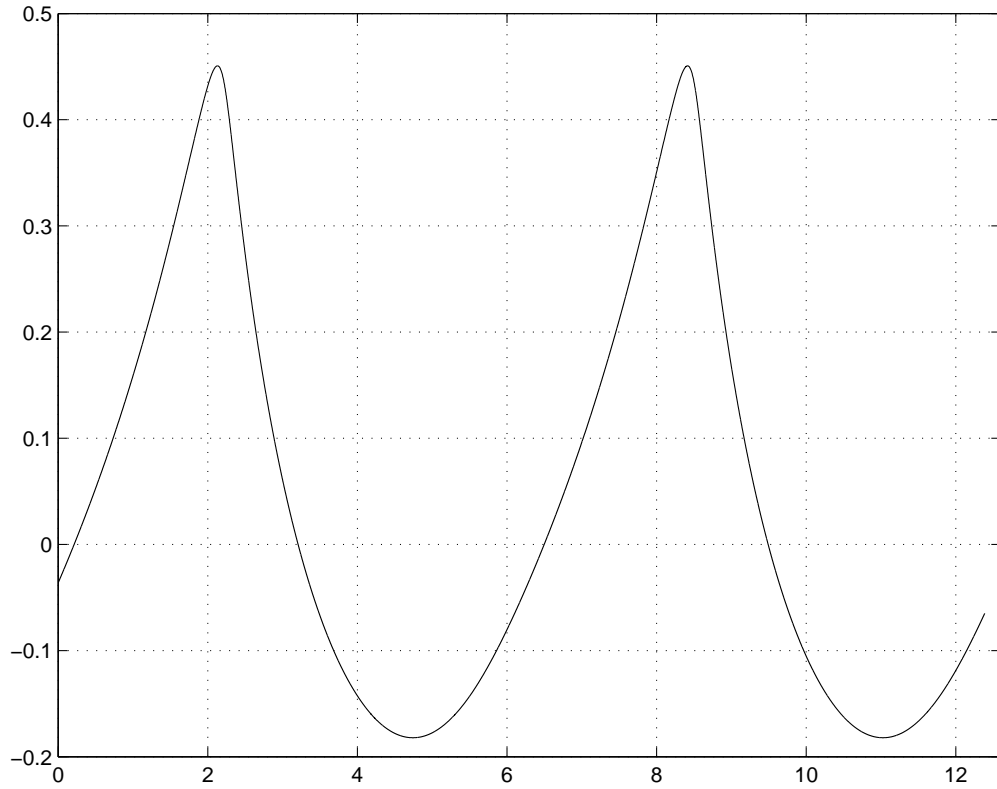


Рис. 10.4.5. Профиль волны при $t = 1,0$

Рис. 10.4.6. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 1,5$ Рис. 10.4.7. Профиль волны при $t = 1,5$

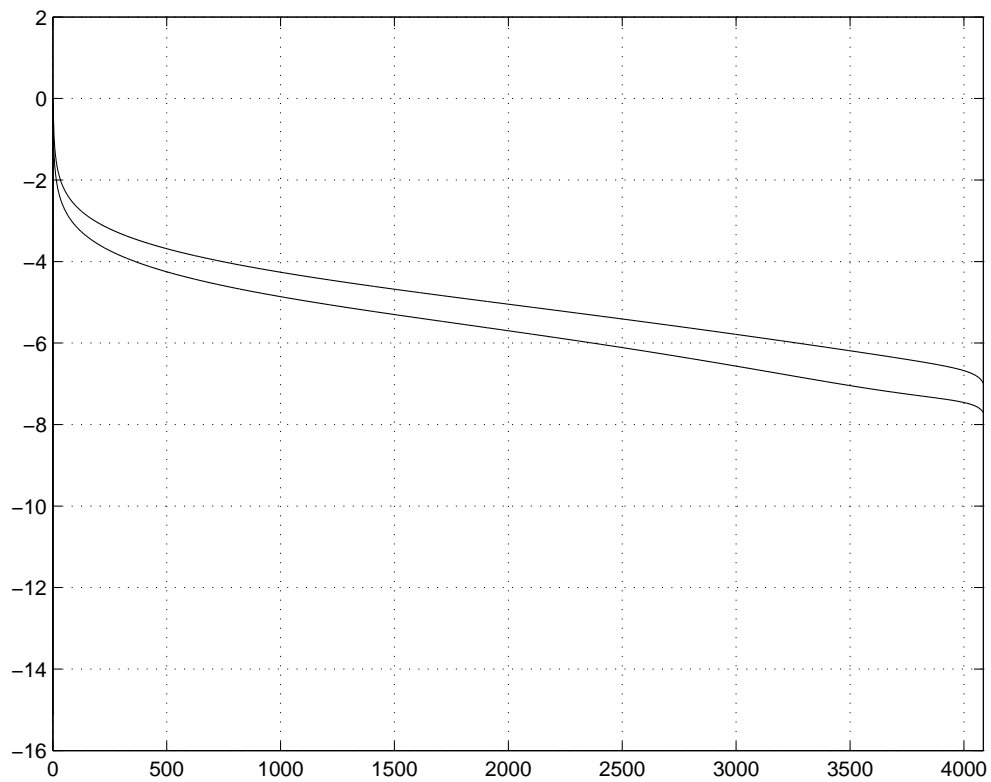


Рис. 10.4.8. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 2,0$

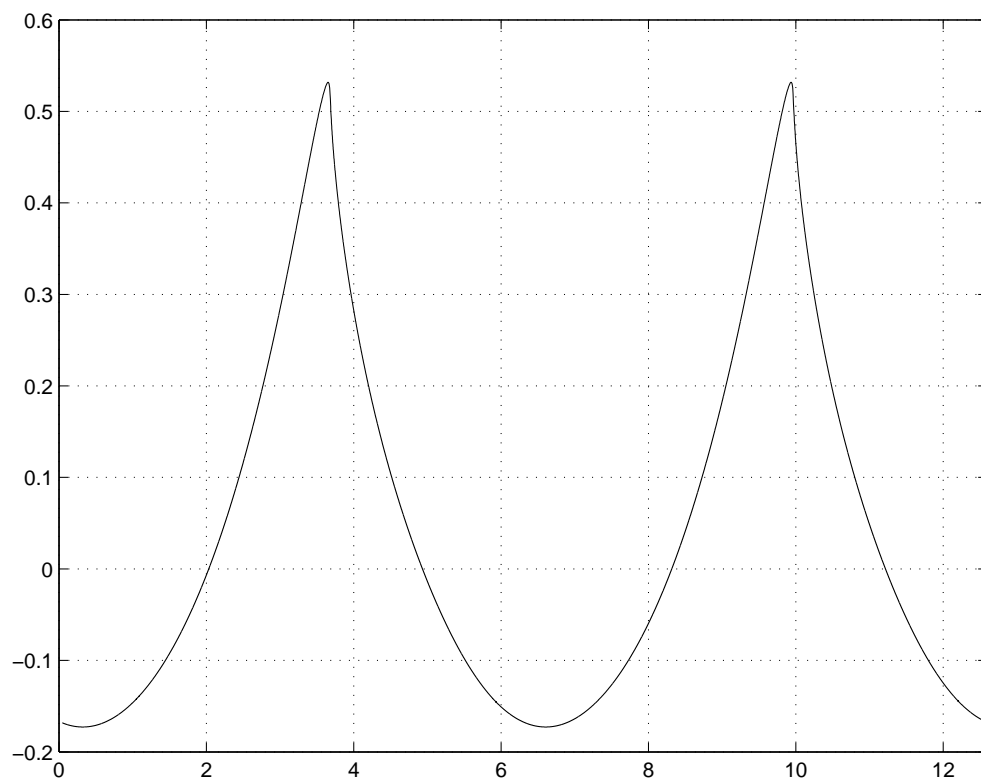


Рис. 10.4.9. Профиль волны при $t = 2,0$

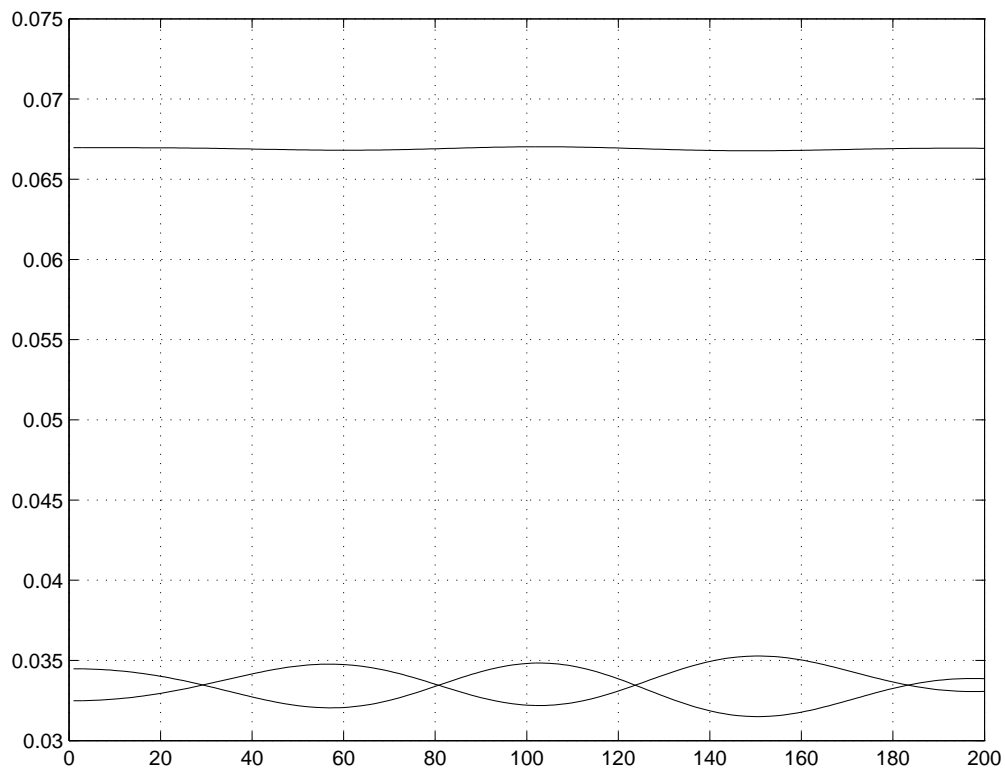
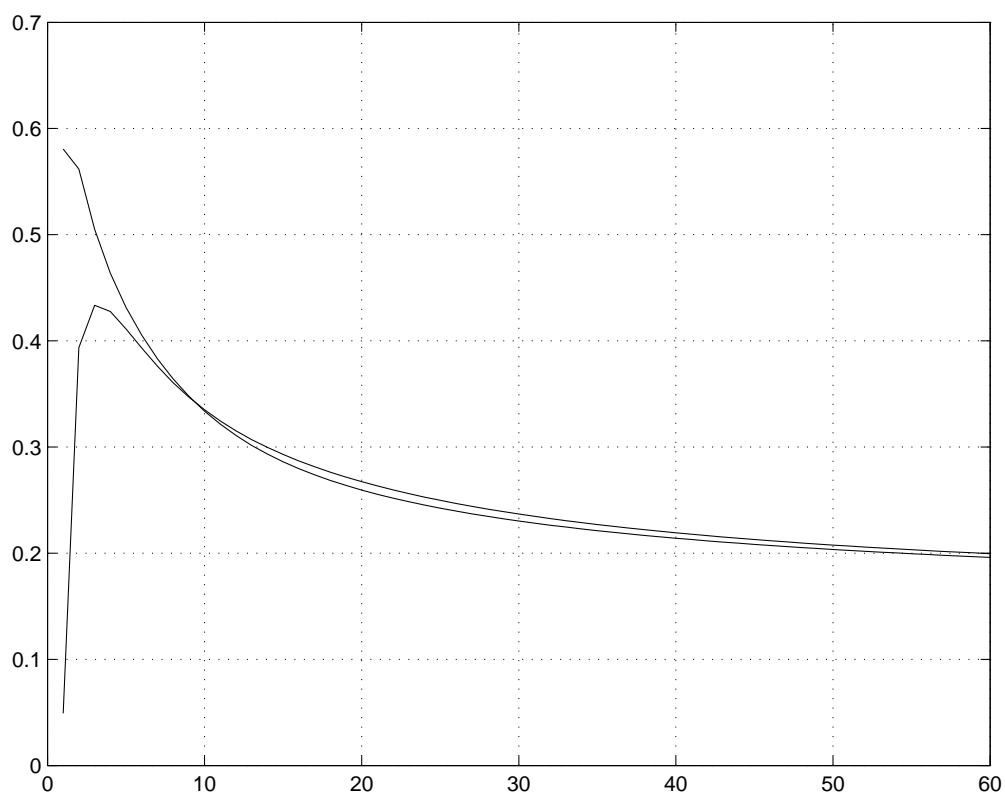
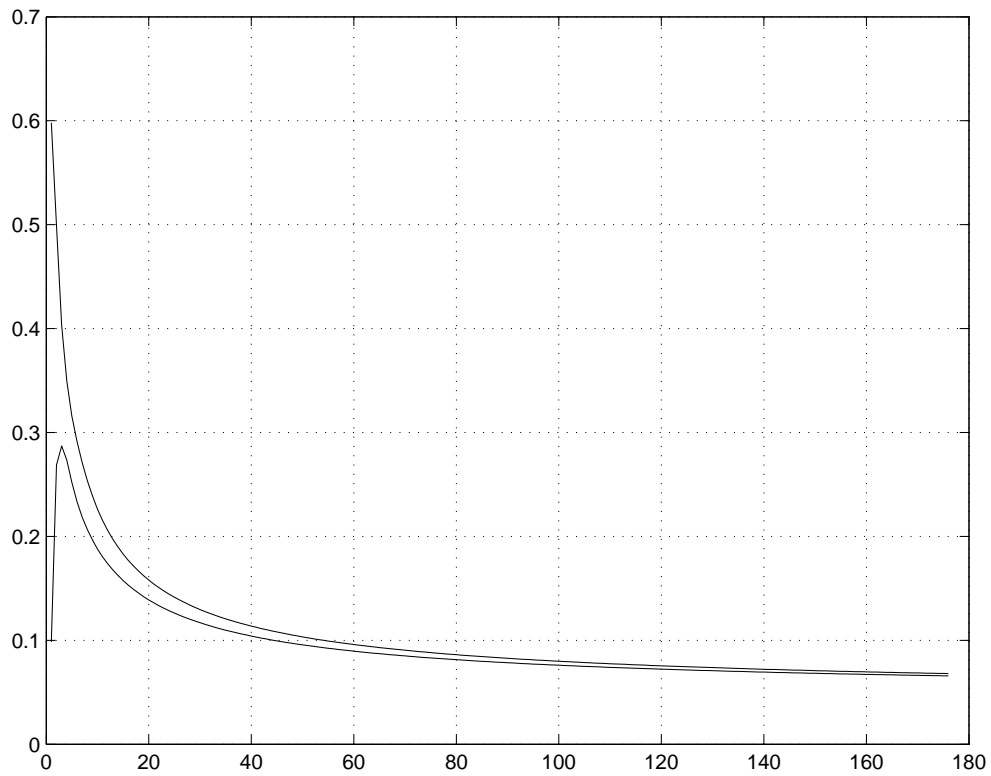
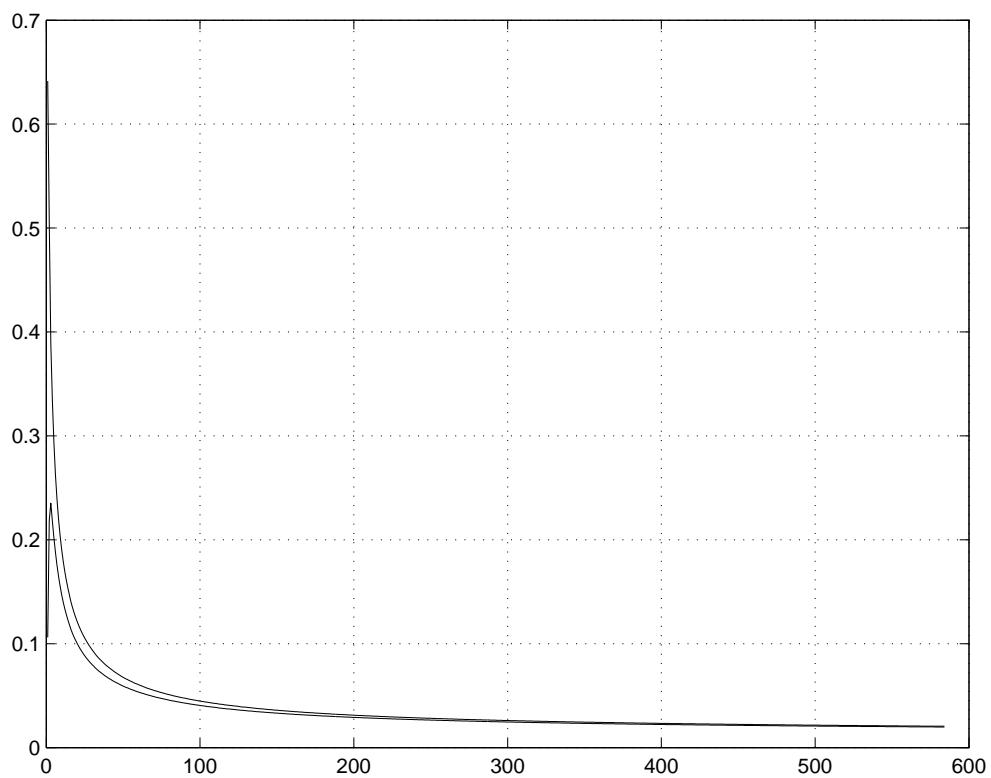
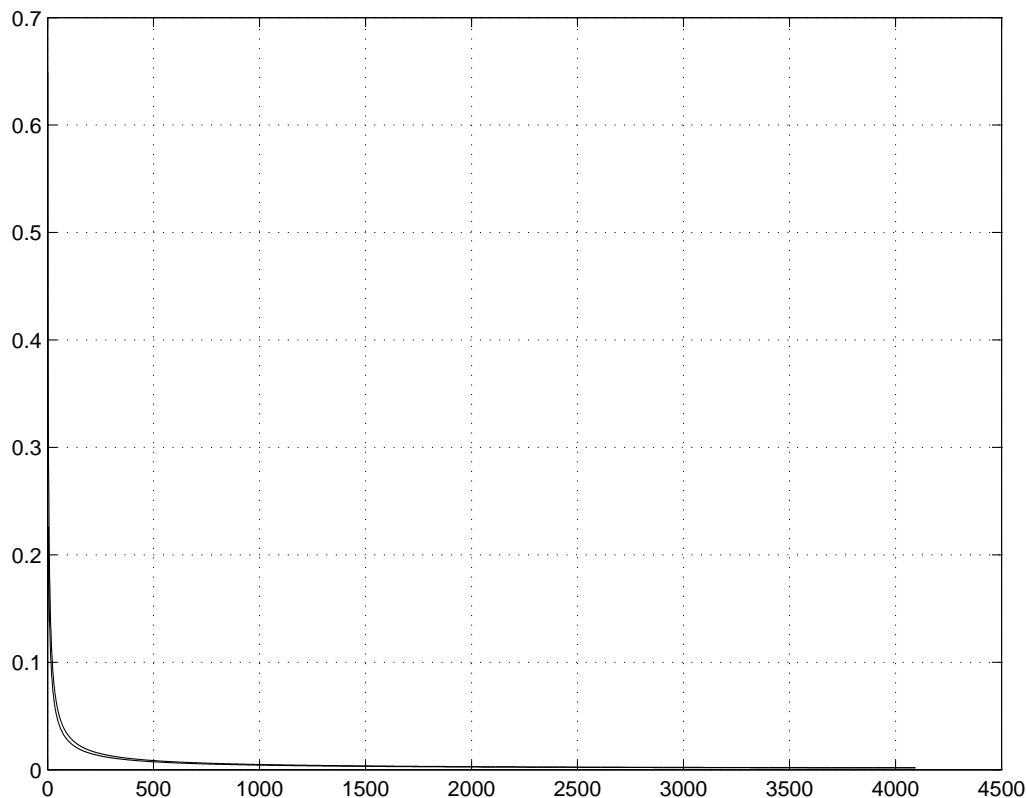


Рис. 10.4.10. Изменение энергии при моделировании обрушивающейся волны

Рис. 10.4.11. Значения оценочного функционала при $t = 0, 50$

Рис. 10.4.12. Значения оценочного функционала при $t = 1,00$ Рис. 10.4.13. Значения оценочного функционала при $t = 1,50$

Рис. 10.4.14. Значения оценочного функционала при $t = 2,00$

10.5. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЕЯ—ТЕЙЛОРА

Под неустойчивостью Релея—Тейлора мы понимаем течение жидкости (в нашем случае идеальной) со свободной поверхностью, когда ускорение свободного падения имеет отрицательное значение. Физически это эквивалентно рассмотрению интерфейса тяжелая жидкость—вакуум, когда жидкость находится сверху. Модель релей-тейлоровской неустойчивости не имеет непосредственного отношения к задачам океанологии, но имеет большое значение в теории гидродинамики со свободной поверхностью. Мы используем эту модель для апробации наших методов оценки времени существования решений, поскольку решения, соответствующие релей-тейлоровской неустойчивости, быстро разрушаются.

Как следует из самого названия, течение Релея—Тейлора является неустойчивым по физике дела. Впервые это течение было рассмотрено в работе [57]. Другие работы по исследованию релей-тейлоровской неустойчивости можно найти в [6, 15, 52] и приведенной там библиографии.

Численное решение неустойчивых задач представляет собой сложную задачу. Регуляризации некорректных (неустойчивых) задач посвящена отдельная наука. Мы в главе 5 использовали некоторые факты теории некорректных задач для доказательства сходимости численных схем. Однако из этого, вообще говоря, еще не следует, что процедуры, разработанные в главе 9, можно «безболезненно» применять в случае релей-тейлоровской неустойчивости. Например, применение программы с использованием быстрого преобразования Фурье приводит к быстрому разрушению численной схемы из-за ошибок округления. В тоже время, если использовать программу «без БПФ», то можно, благодаря удачной форме уравнений Дьяченко, наблюдать развитие неустойчивости Релея—Тейлора.

Опишем параметры нашего вычислительного эксперимента:

1. количество гармоник, участвующих в расчете: $N = 1024$;
2. шаг по времени: $\tau = 0,001$;
3. ускорение свободного падения: $g = -10,0$;
4. начальное условие: $R(u, 0) = 1 + 0,01e^{-iu}$, $V(u, 0) = 0$.

Вычисления проводим программой, не использующей быстрое преобразование Фурье. Профиль начальной волны не сильно отличается от предыдущих начальных условий. Приводим его на рис. 10.5.1. При $t = 1,0$ мы видим увеличение амплитуды профиля поверхностной волны на рис. 10.5.2. При этом спектр решения в логарифмическом масштабе ведет себя как линейная функция, что означает, что на этом этапе решение еще представлено аналитическими функциями, см. рис. 10.5.3. Продолжим счет. Рассмотрим профиль и логарифмический спектр решения при $t = 1,5$, см. рис. 10.5.4, 10.5.5. Амплитуда профиля поверхностной волны продолжает расти, при этом мы наблюдаем характерное для неустойчивости Релея—Тейлора вытягивание горбов. Спектр решения в логарифмическом масштабе до сих пор демонстрирует линейную форму. Однако дальнейший счет приводит к быстрому разрушению решения. Действительно, рассмотрим профиль поверхностной волны и спектр уже при $t = 1,6$ на рис. 10.5.6, 10.5.7. Дальнейший счет становится практически невозможным из-за катастрофического развала решения. Понять, что мы «подошли к краю решения», можно из графиков оценочных функционалов на рис. 10.5.8, 10.5.9, 10.5.10.

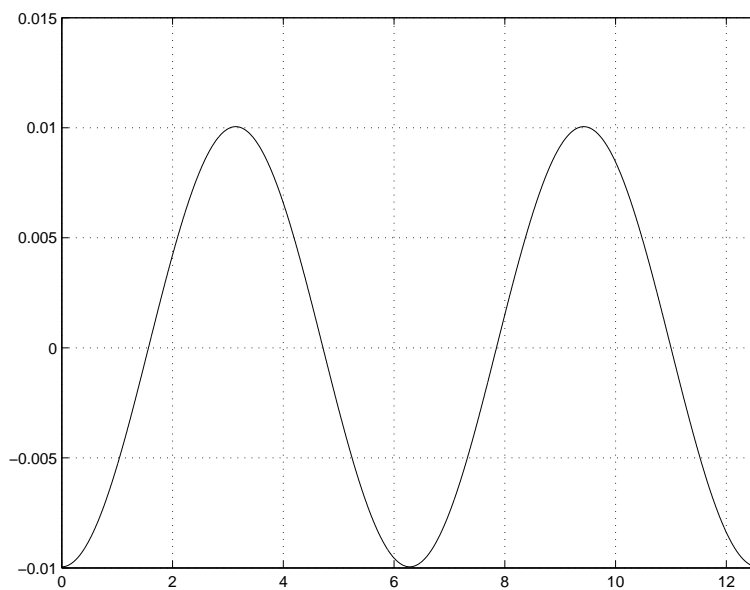


Рис. 10.5.1. Начальное условие

10.6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПО ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ВИБРАЦИИ

В предыдущем пункте мы рассматривали численные эксперименты по развитию неустойчивости Релея—Тейлора. Было показано, что решения, соответствующие этим моделям, быстро разрушаются. В настоящем пункте мы рассмотрим динамику идеальной жидкости со свободной поверхностью в условиях вибрации. Если в экспериментах по неустойчивости Релея—Тейлора значение ускорения свободного падения было отрицательным, то в настоящих экспериментах это значение будет меняться периодически по гармоническому закону.

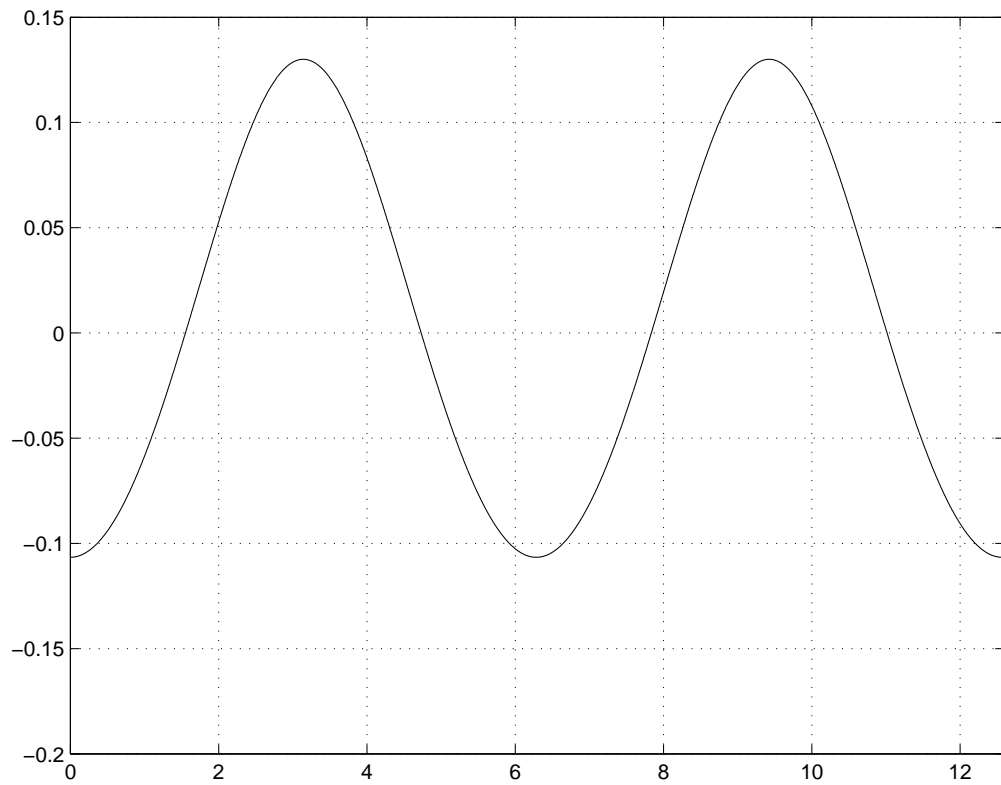
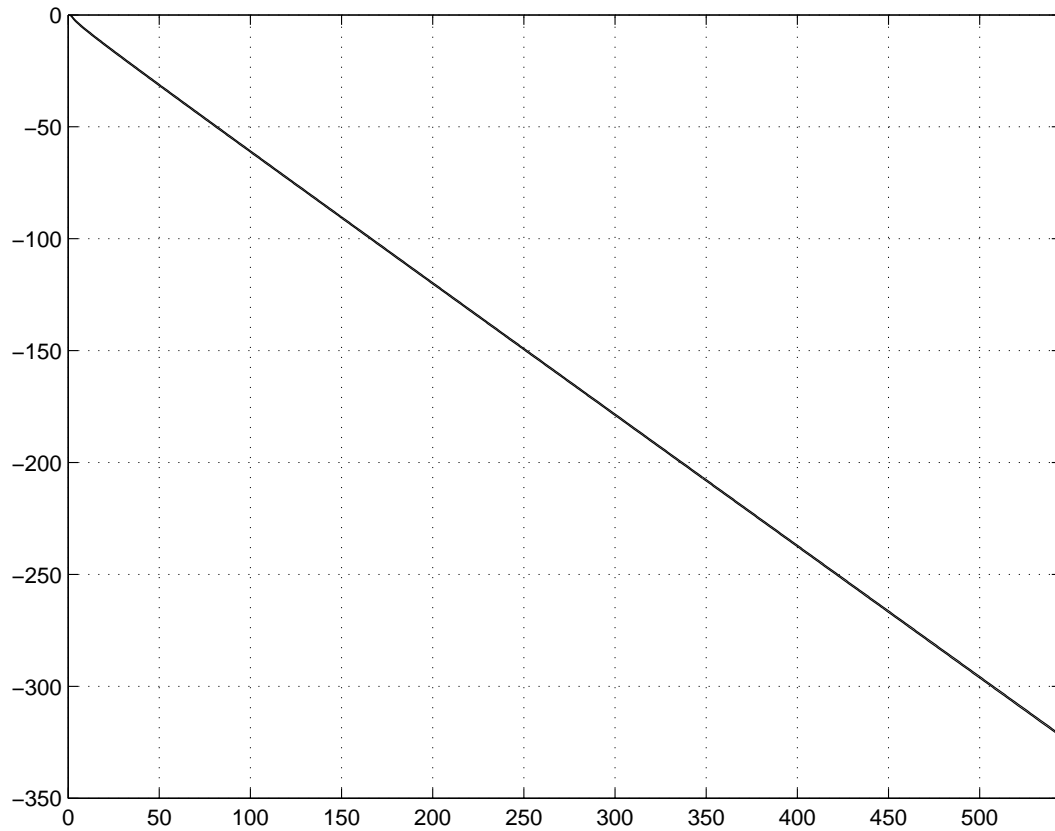
В рассматриваемых экспериментах с переменным ускорением силы тяжести величина g принимает как положительные, так и отрицательные значения, поэтому в этом случае также наблюдается неустойчивость Релея—Тейлора и решения разрушаются.

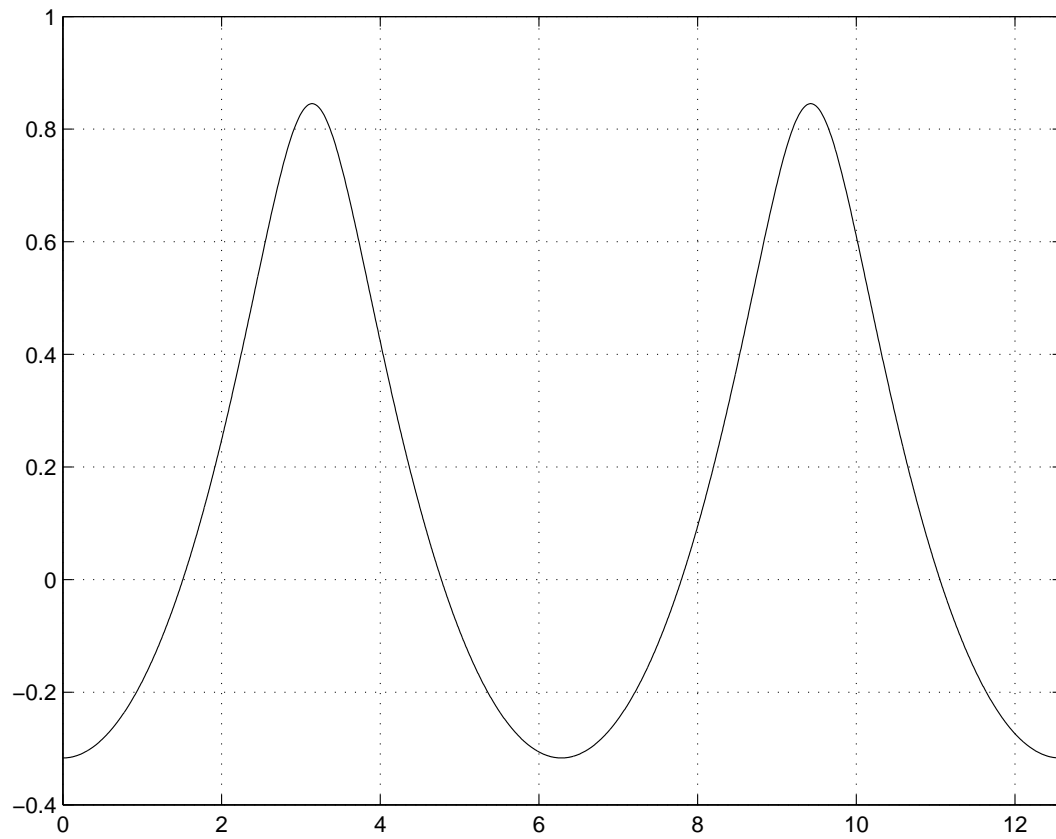
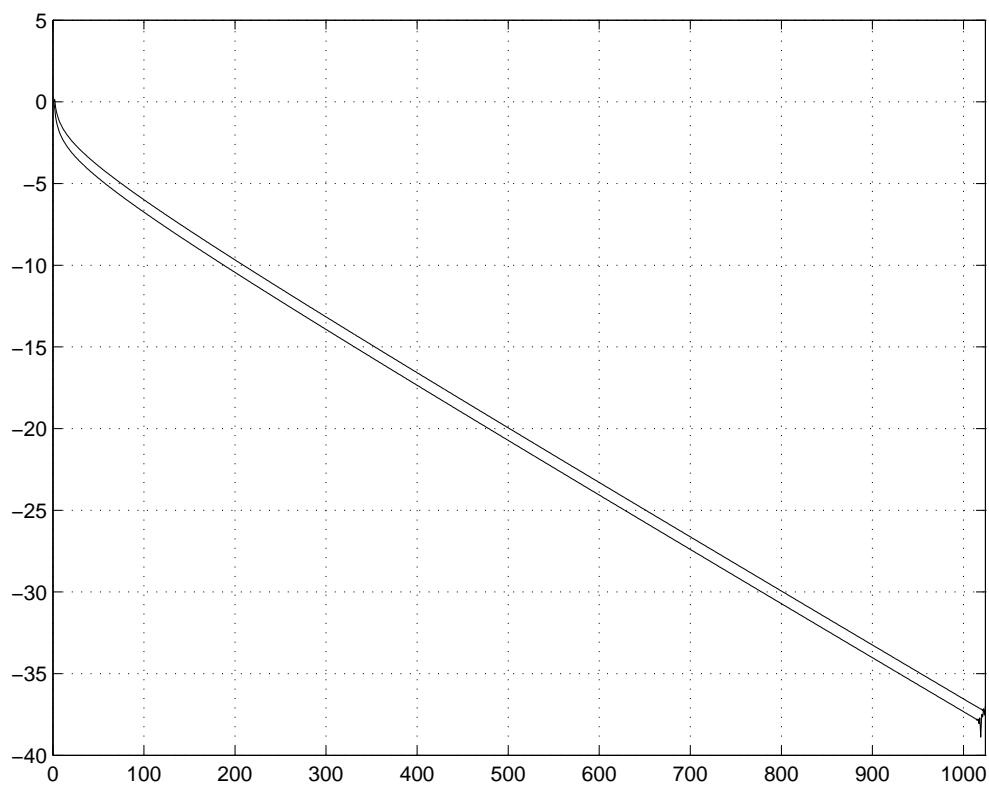
Опишем параметры нашего первого вычислительного эксперимента:

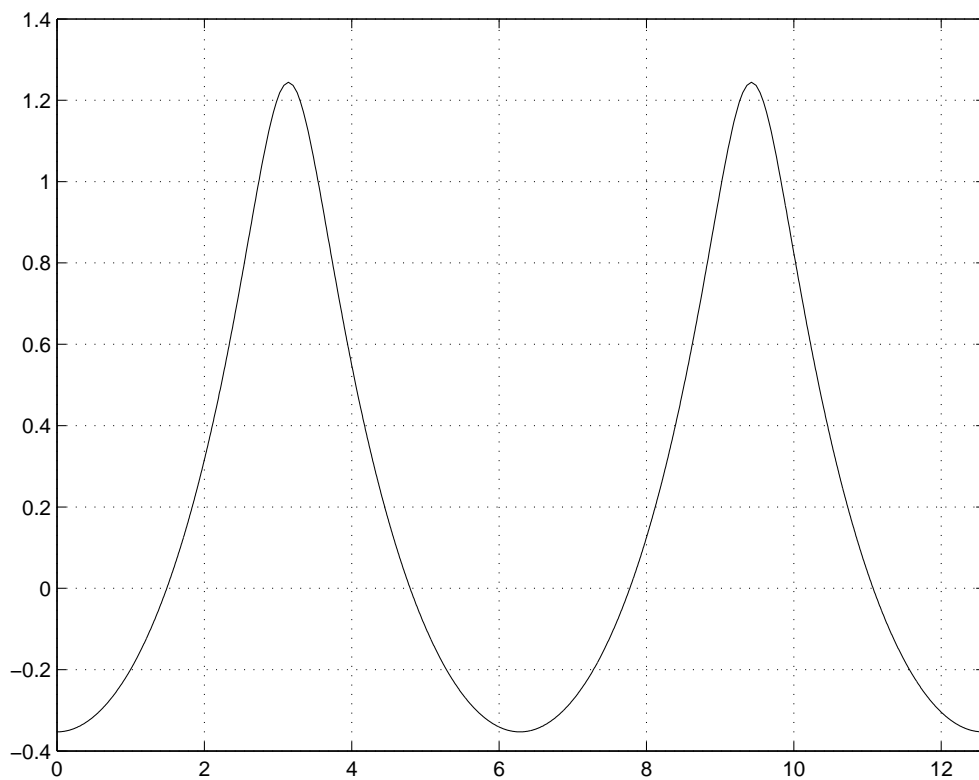
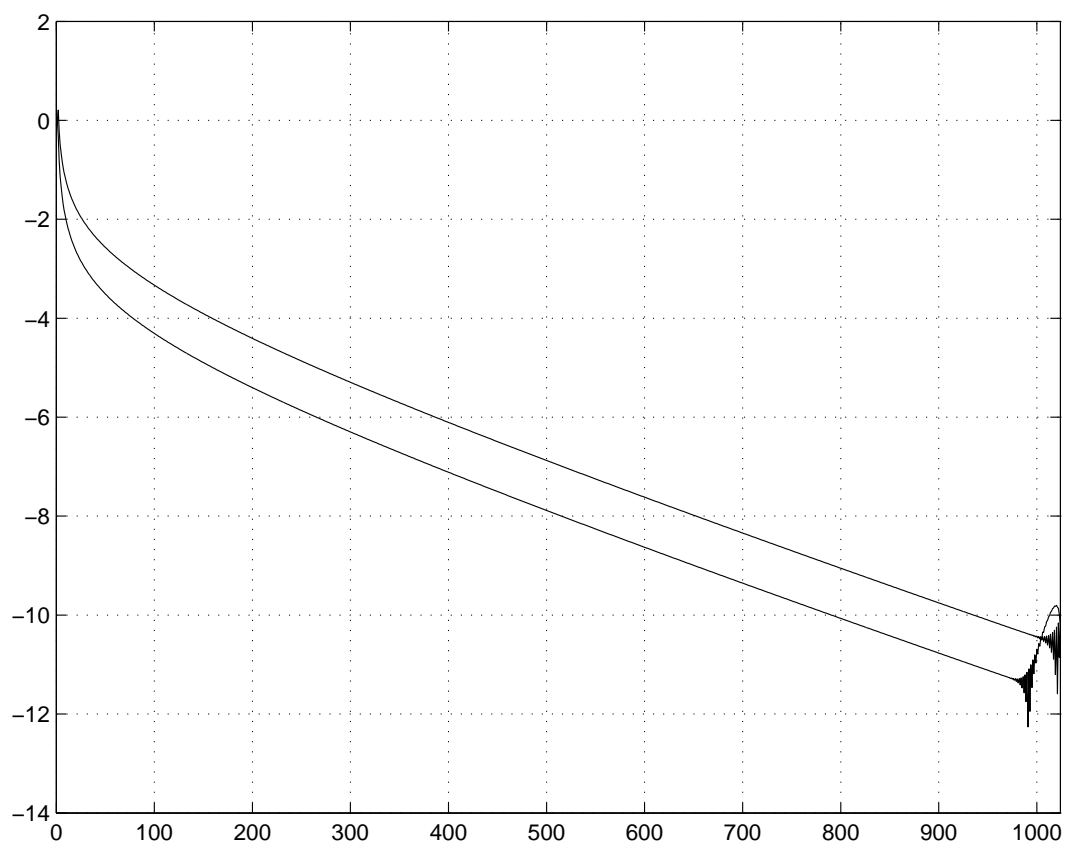
1. количество гармоник, участвующих в расчете: $N = 256$;
2. шаг по времени: $\tau = 0,001$;
3. начальное условие: $R(u, 0) = 1 + 0,01e^{-iu}$, $V(u, 0) = 0$;
4. закон изменения ускорения силы тяжести:

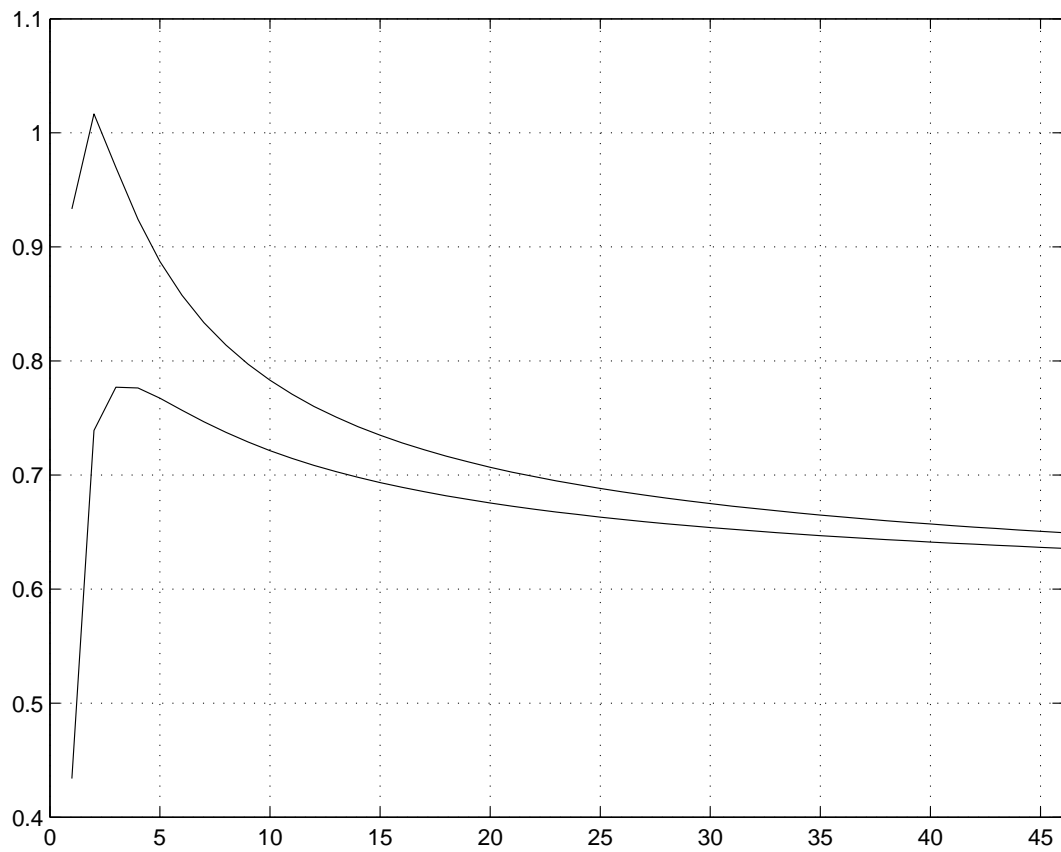
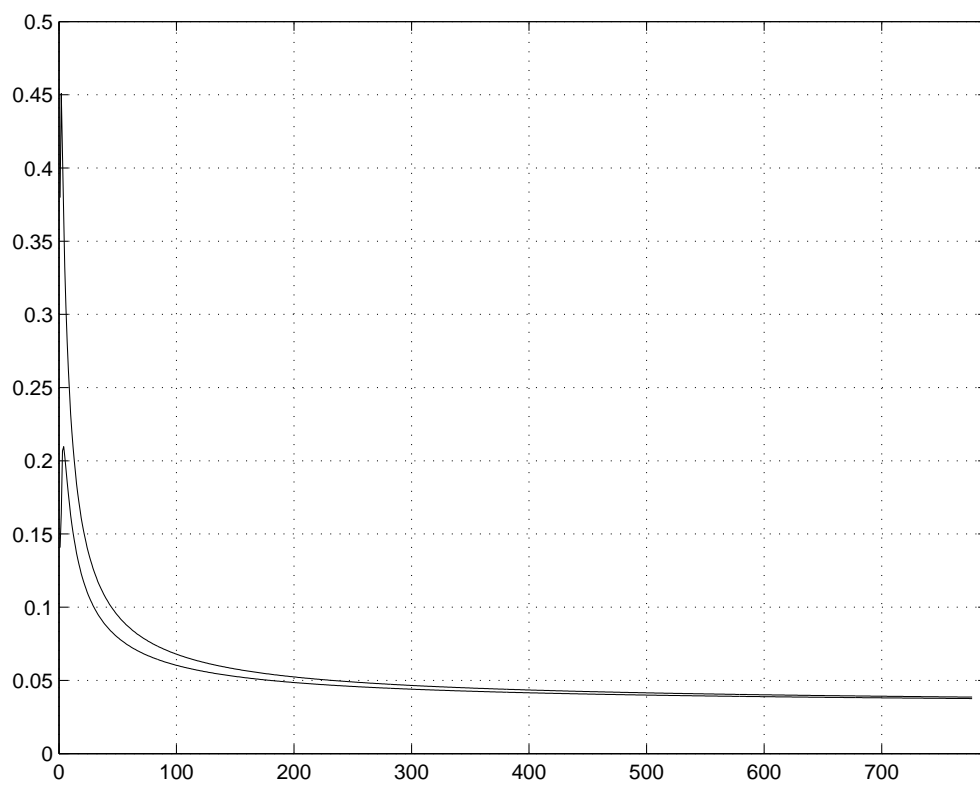
$$g(t) = 10.0 + 20,0 * \sin(5t).$$

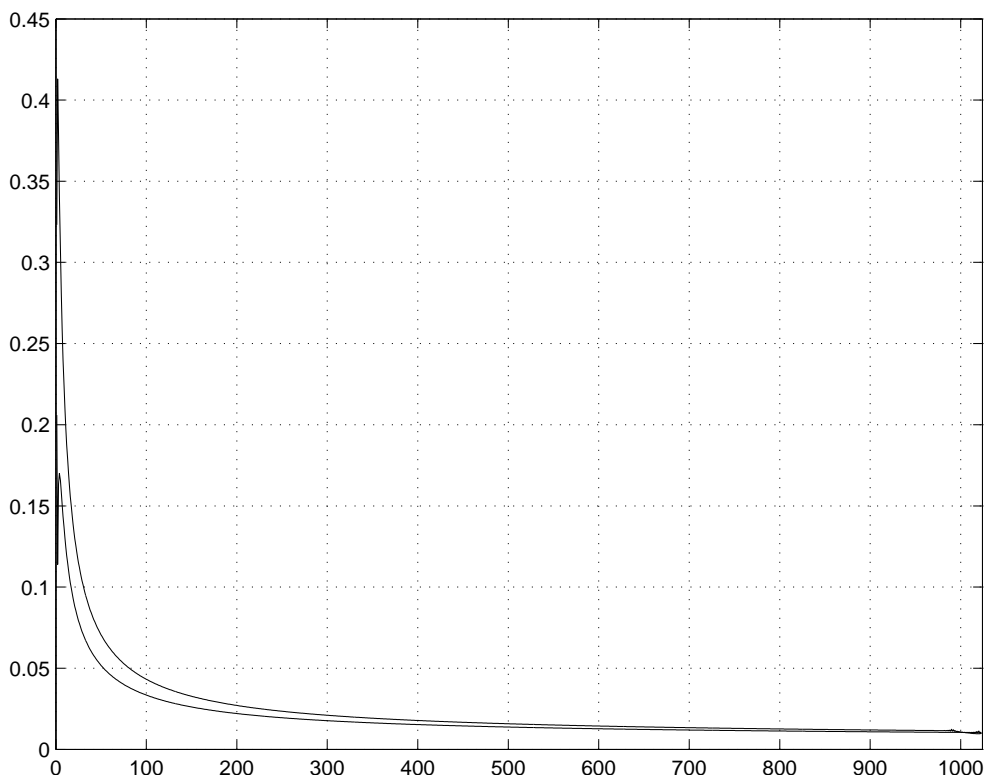
Вычисления проводим программой, не использующей быстрое преобразование Фурье. Профиль начальной волны выбран таким же, как и в экспериментах, описанных в разделе 10.5, см. рис. 10.5.1.

Рис. 10.5.2. Профиль поверхностной волны при $t = 1,0$ Рис. 10.5.3. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 1,0$

Рис. 10.5.4. Профиль поверхностной волны при $t = 1,5$ Рис. 10.5.5. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 1,5$

Рис. 10.5.6. Профиль поверхностной волны при $t = 1,6$ Рис. 10.5.7. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 1,6$

Рис. 10.5.8. Значение оценочного функционала при $t = 1,0$ Рис. 10.5.9. Значение оценочного функционала при $t = 1,5$

Рис. 10.5.10. Значение оценочного функционала при $t = 1, 6$

На рис. 10.6.1 приведен профиль поверхности при $t = 3, 6$. Спектр решения при $t = 3, 6$ приведен на рис. 10.6.2. На рис. 10.6.3 приведены значения оценочных функционалов.

Приведем параметры нашего второго вычислительного эксперимента:

1. количество гармоник, участвующих в расчете: $N = 1024$;
2. шаг по времени: $\tau = 0,001$;
3. начальное условие: $R(u, 0) = 1 + 0,01e^{-iu}$, $V(u, 0) = 0$;
4. закон изменения ускорения силы тяжести:

$$g(t) = 10,0 + 20,0 * \sin(25t).$$

В этом эксперименте частота изменения величины g увеличена в 5 раз. Вычисления также проводим программой, не использующей быстрое преобразование Фурье. Профиль начальной волны выбран таким же как и в предыдущем эксперименте.

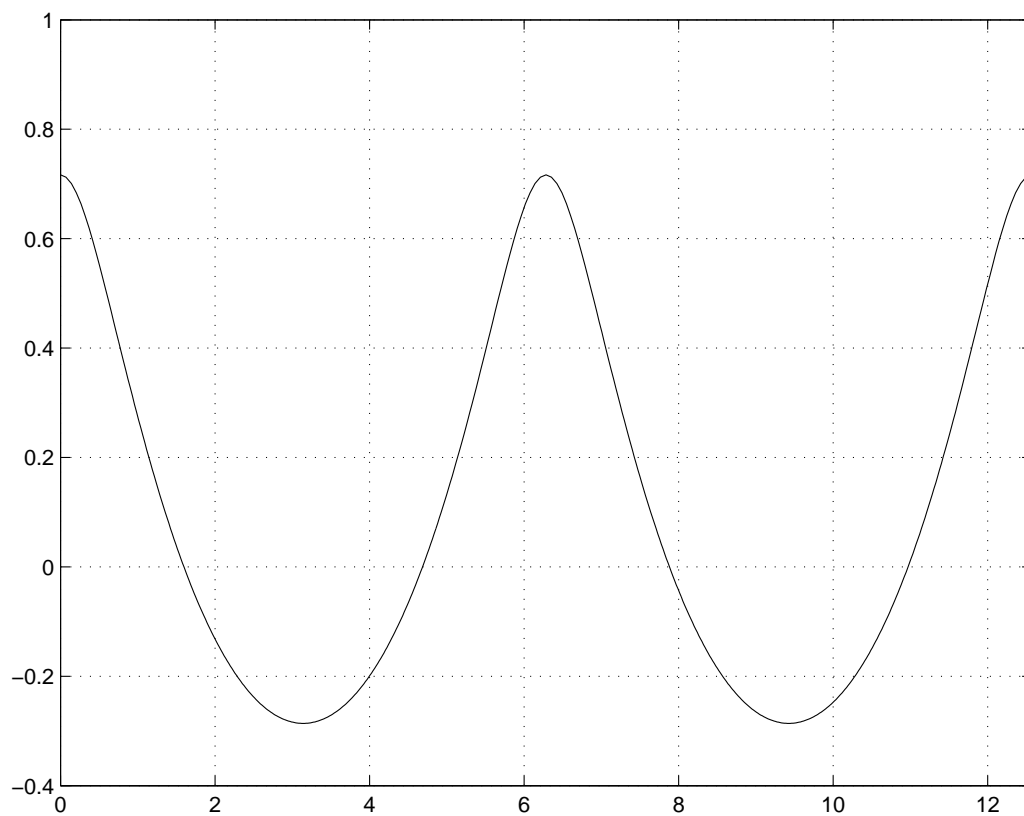
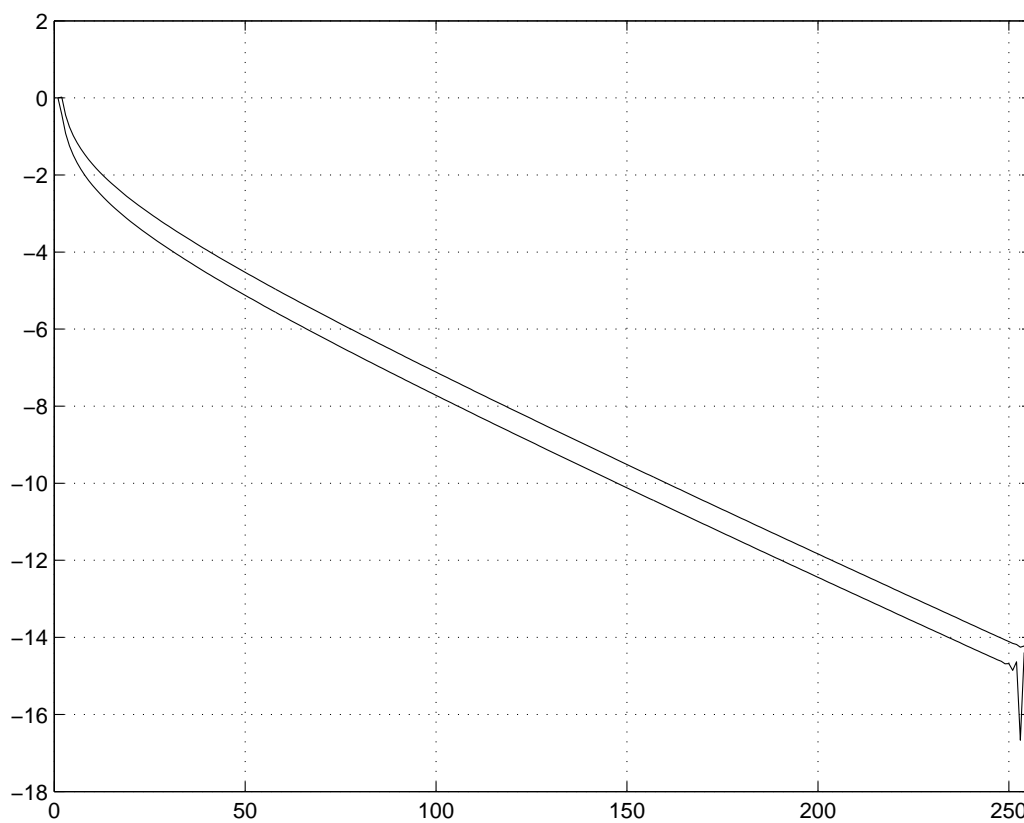
На рис. 10.6.4 приведен профиль поверхности при $t = 11,5$. Спектр решения при $t = 11,5$ приведен на рис. 10.6.5. На графике 10.6.6 приведены значения оценочных функционалов.

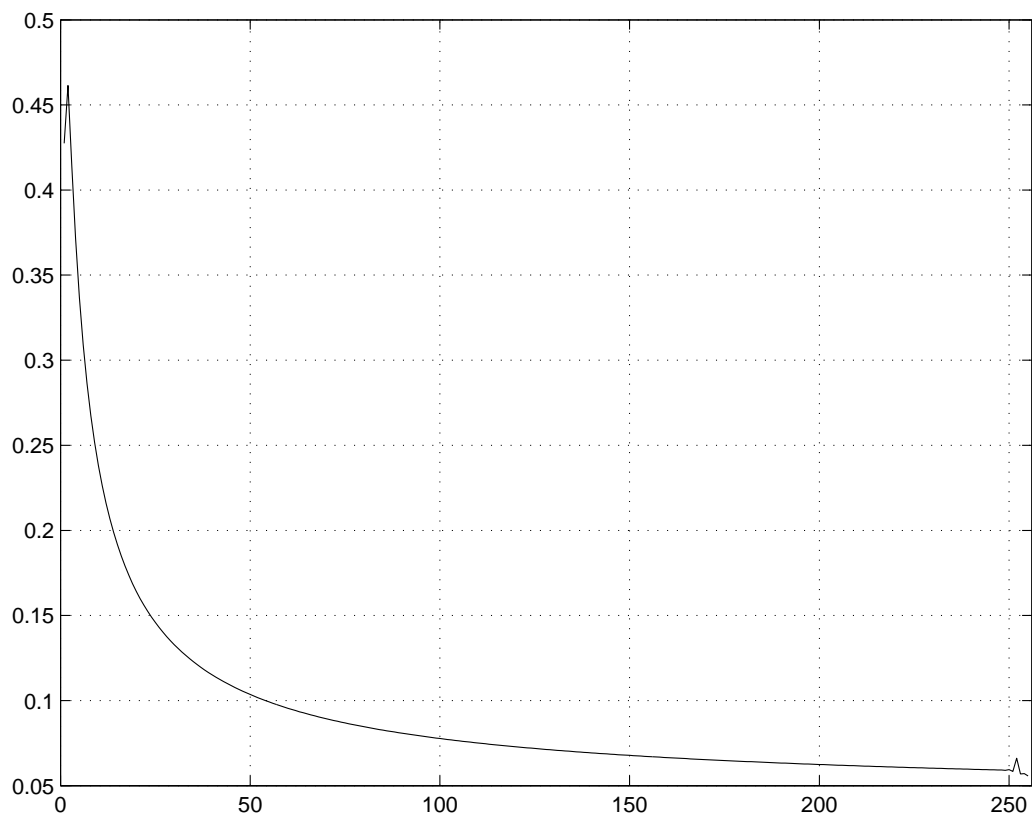
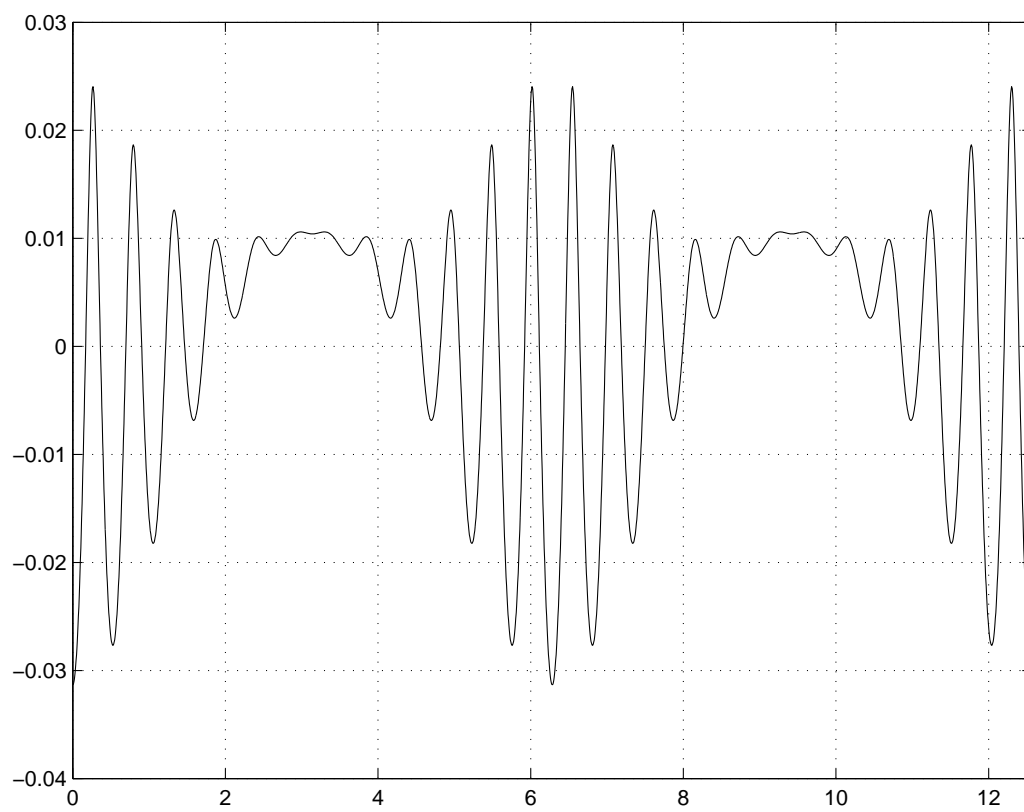
10.7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН-УБИЙЦ

В настоящем разделе мы опишем два вычислительных эксперимента, в ходе которых мы обнаружим возникновение волн-убийц. Об этих волнах мы рассказывали в разделе 8.3.

Опишем параметры первого эксперимента.

1. Количество гармоник, участвующих в расчете: $N = 1024$.
2. Шаг по времени: $\tau = 0,001$.
3. Ускорение свободного падения: $g = 1,0$.
4. Начальное условие: функции $R(u, 0)$ и $V(u, 0)$ выбирались случайным образом. Спектр в логарифмическом масштабе начальных функций приведен на рис. 10.7.1, на рис. 10.7.2 приведен профиль начальной волны.

Рис. 10.6.1. Профиль поверхностной волны при $t = 3,6$ Рис. 10.6.2. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 3,6$

Рис. 10.6.3. Значения оценочных функционалов при $t = 3, 6$ Рис. 10.6.4. Профиль поверхностной волны при $t = 11, 5$

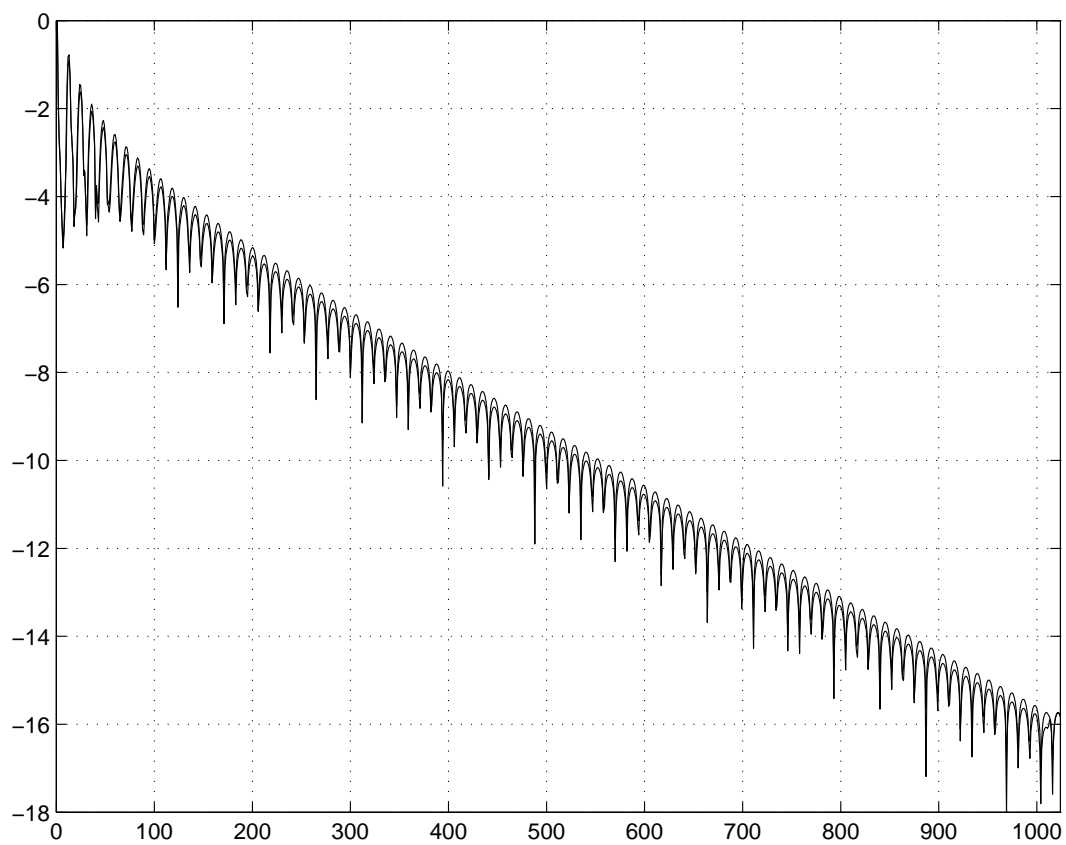


Рис. 10.6.5. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 11,5$

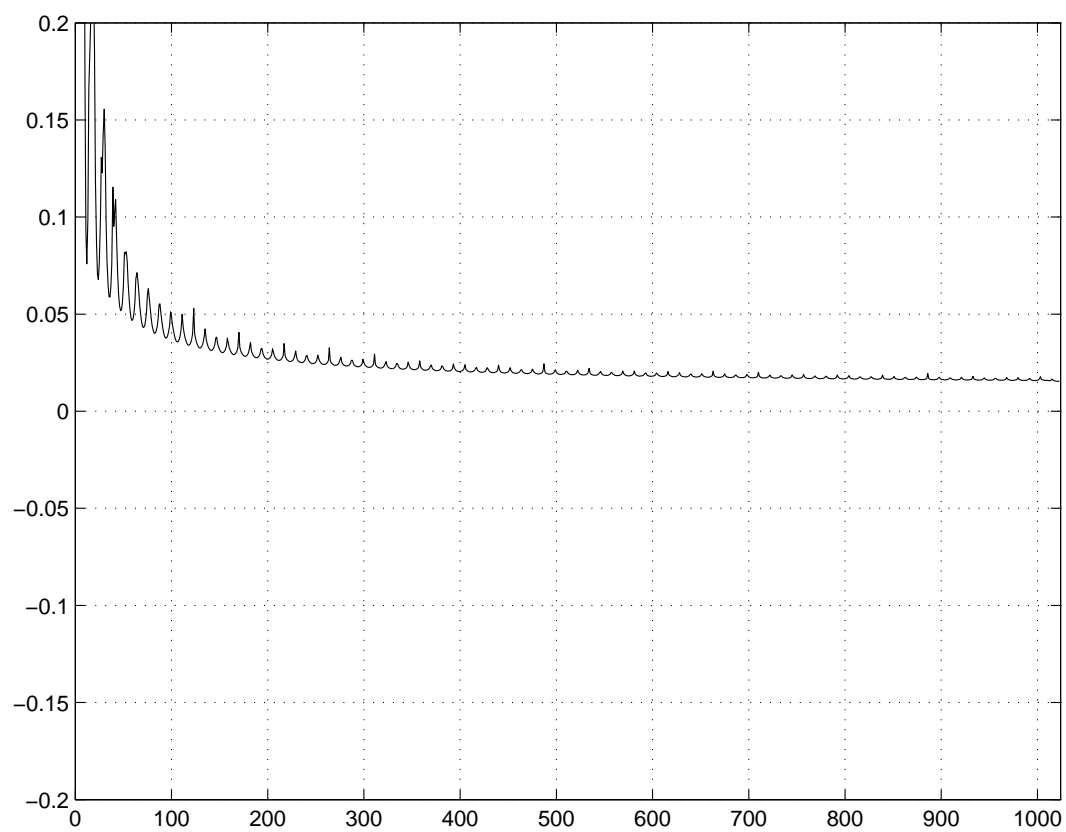


Рис. 10.6.6. Значения оценочных функционалов при $t = 11,5$

Расчет проводился при $t \in [0, 7000]$. Среднее значение амплитуды

Среднее значение амплитуды, $\frac{1}{T} \int_0^T \max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t) dt$:	0,003226439512
Максимальное значение амплитуды, $\max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t_F) $:	0,0136893619
$\max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t_F) / \frac{1}{T} \int_0^T \max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t) dt$:	4,242869535812
Время, при котором достигнута волна-убийца:	6832,0
Максимум крутизны волны-убийцы:	0,297

На рис. 10.7.3 и 10.7.4 приведены спектр в логарифмическом масштабе и профиль волны-убийцы. В силу важности численных экспериментов, касающихся волн-убийц, приведем еще один вычислительный эксперимент.

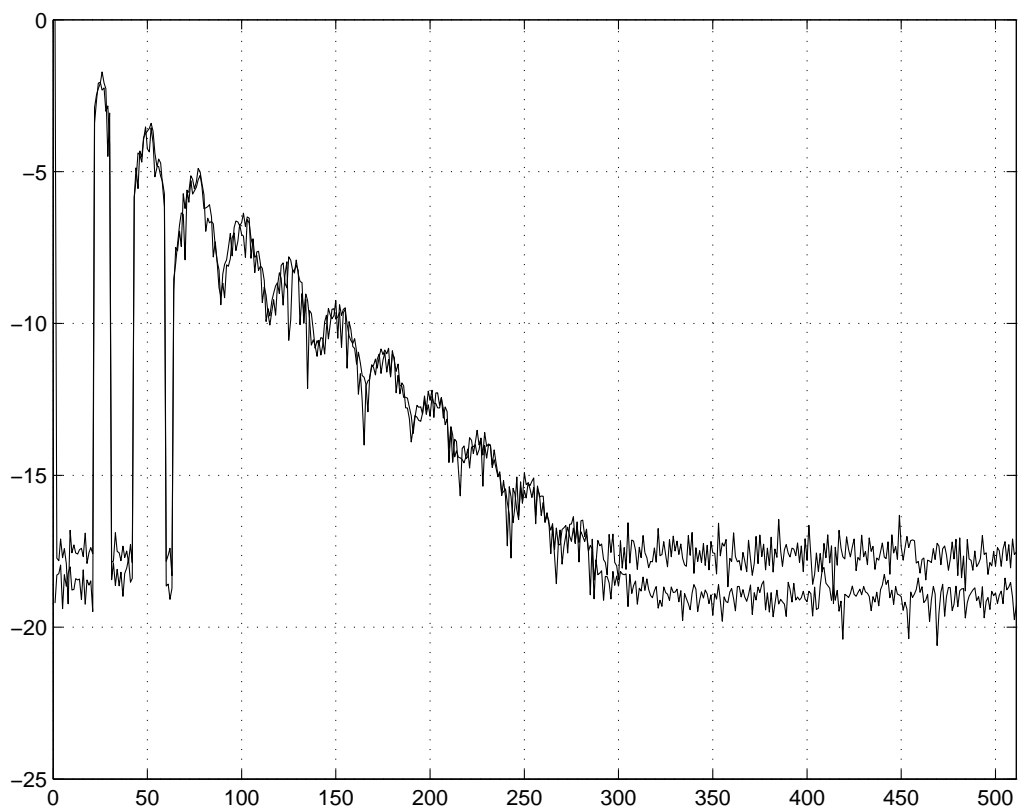
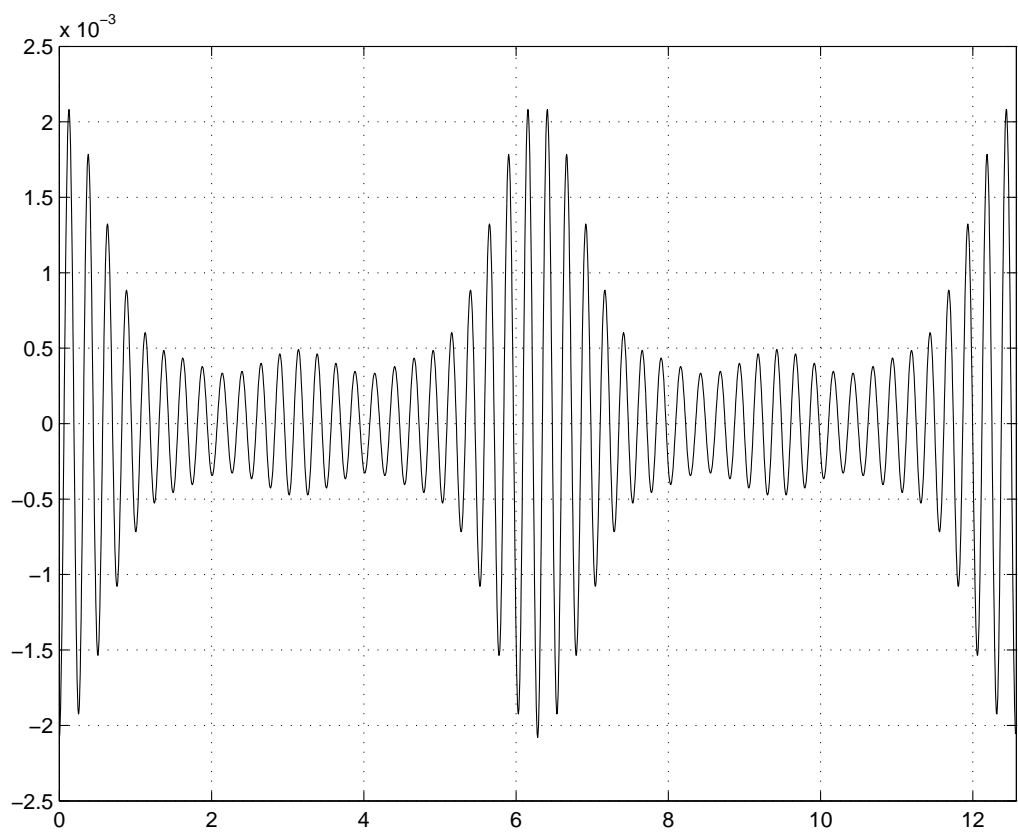
Опишем параметры второго эксперимента.

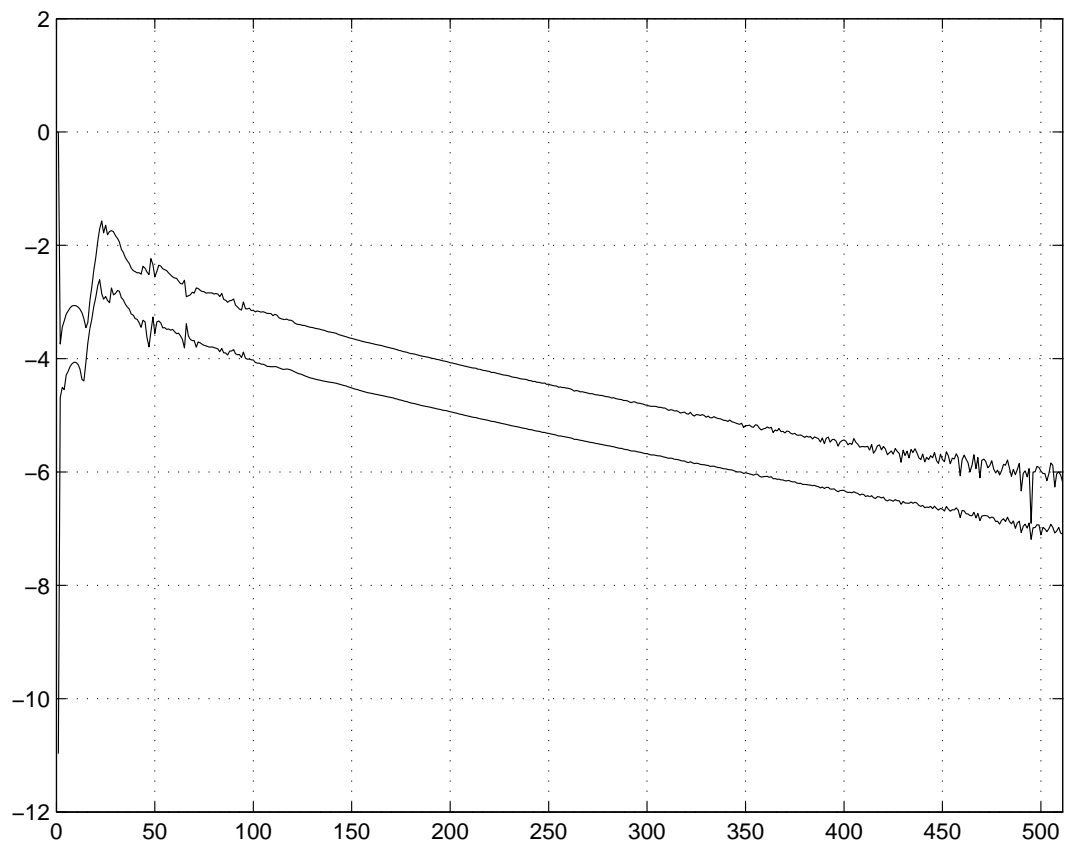
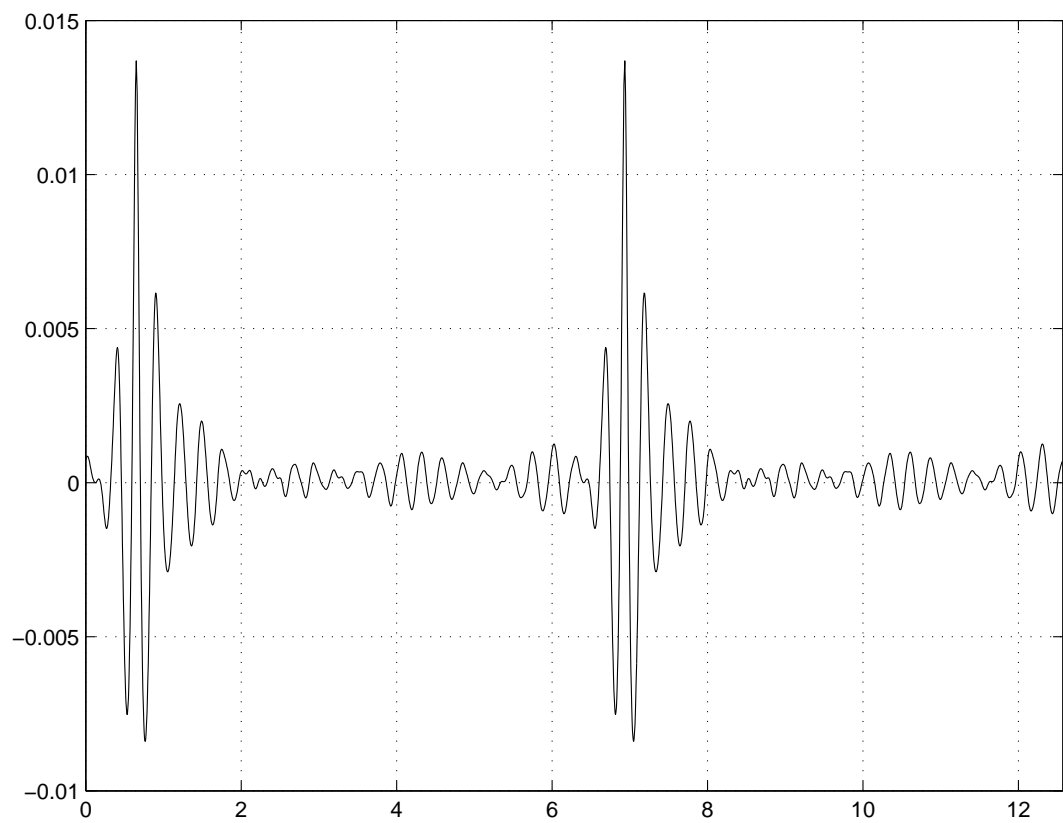
1. количество гармоник, участвующих в расчете: $N = 1024$;
2. шаг по времени: $\tau = 0,001$;
3. ускорение свободного падения: $g = 1,0$;
4. начальное условие: функции $R(u, 0)$ и $V(u, 0)$ выбирались случайным образом. Спектр в логарифмическом масштабе начальных функций приведен на рис. 10.7.5, на рис. 10.7.6 приведен профиль начальной волны.

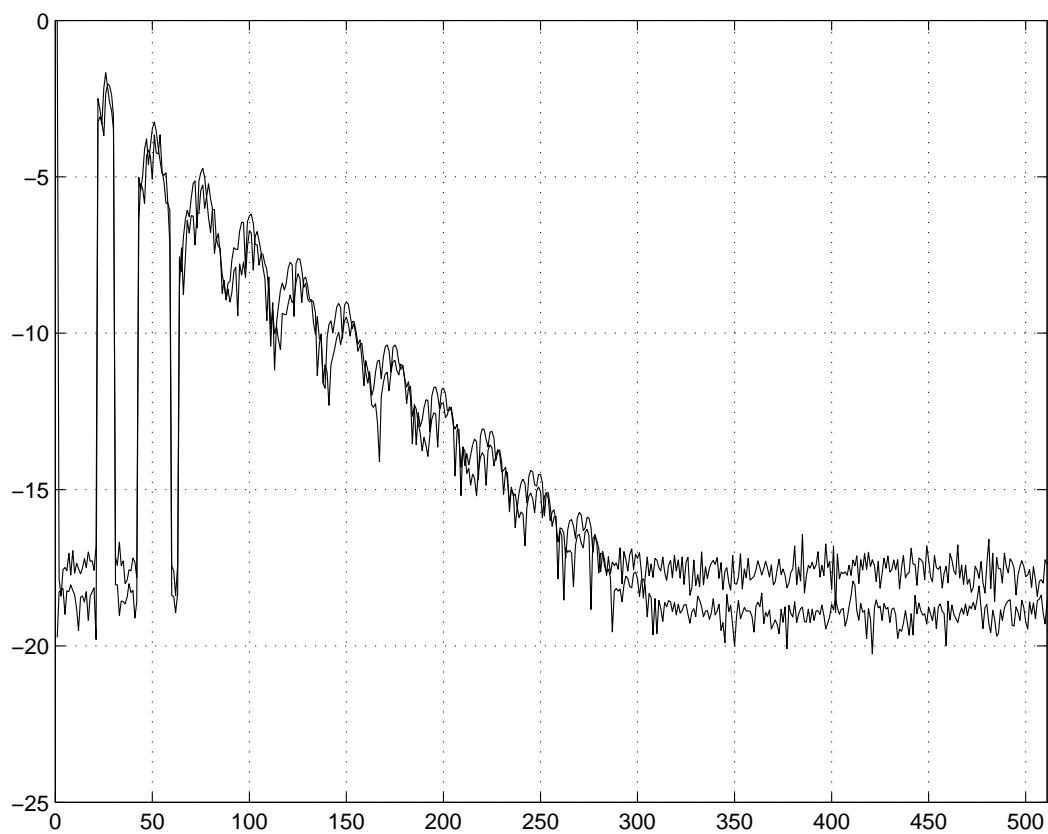
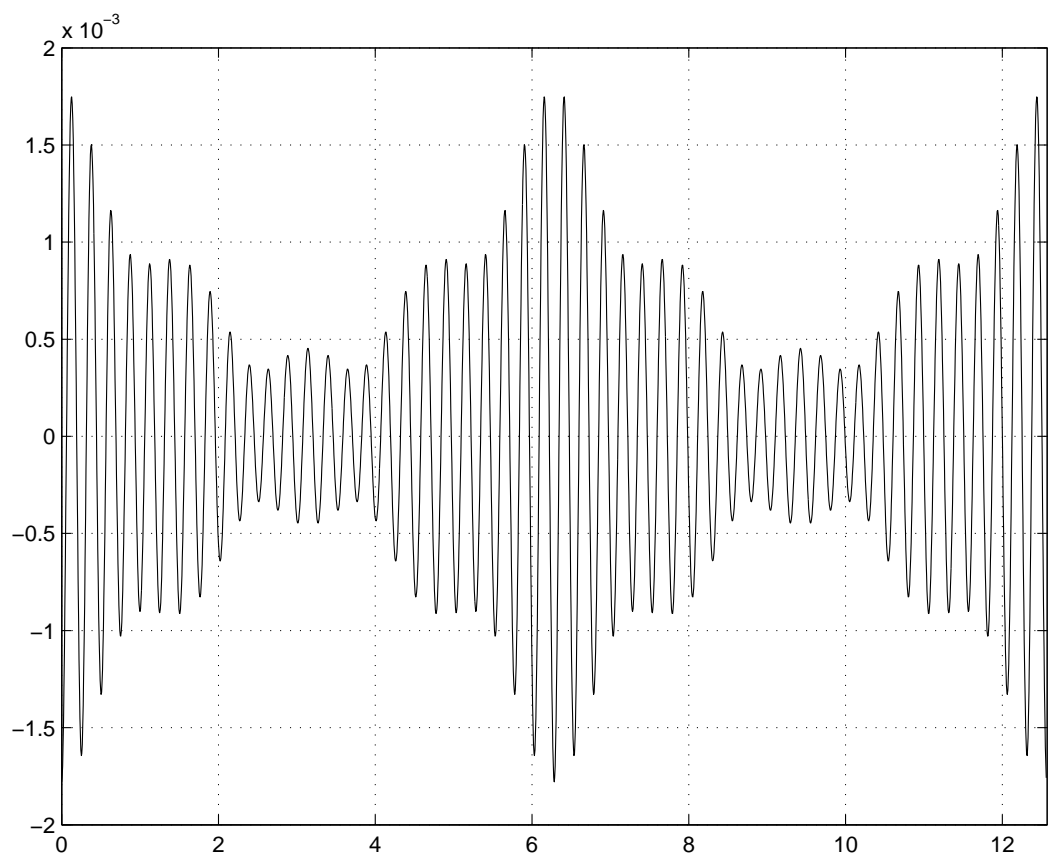
Расчет проводился при $t \in [0, 7000]$. Среднее значение амплитуды

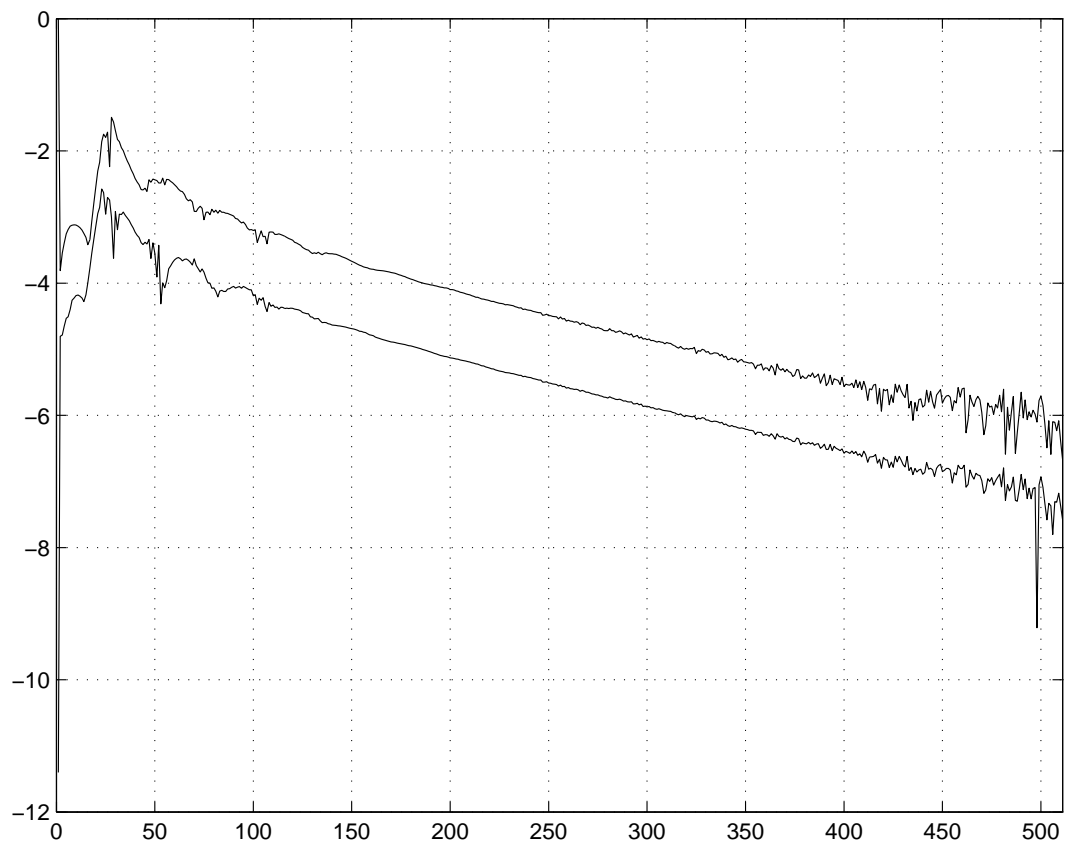
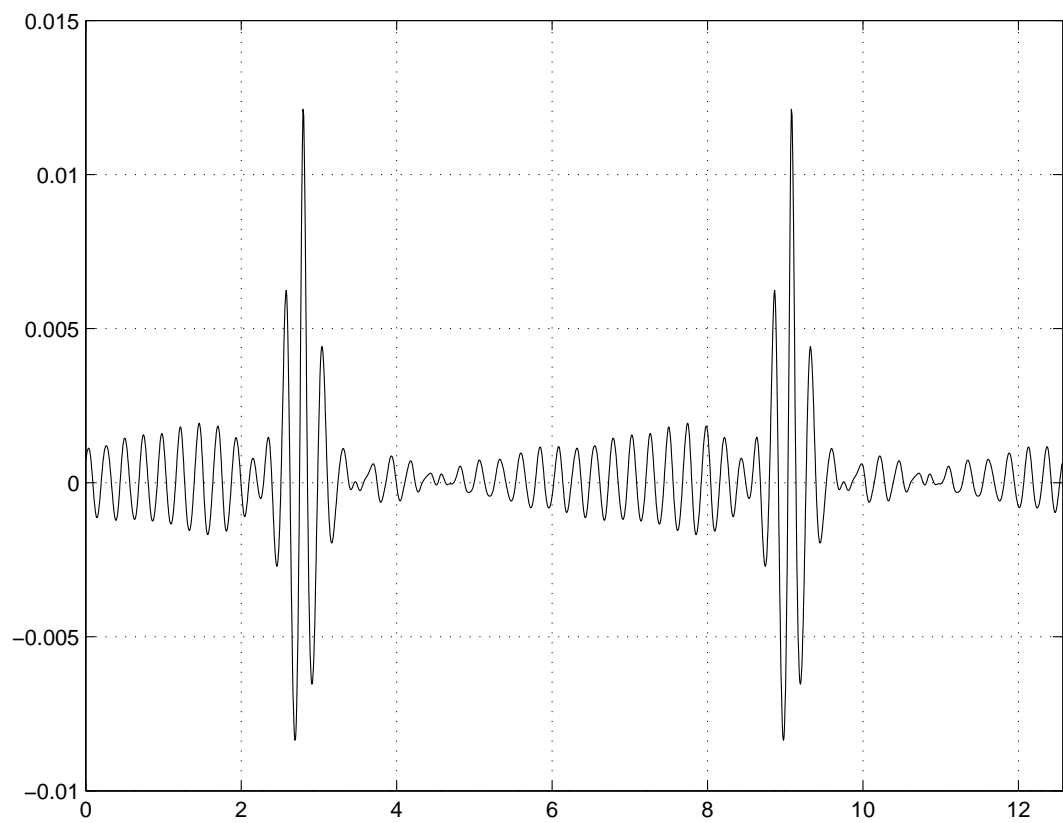
Среднее значение амплитуды, $\frac{1}{T} \int_0^T \max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t) dt$:	0,002816220421
Максимальное значение амплитуды, $\max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t_F) $:	0,012116236705
$\max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t_F) / \frac{1}{T} \int_0^T \max_{x \in [0, 2\pi]} \eta(x, t) dt$:	4,302304114285
Время, при котором достигнута волна-убийца	4252,0
Максимум крутизны волны-убийцы	0,325

На рис. 10.7.7 и 10.7.8 приведены спектр в логарифмическом масштабе и профиль волны-убийцы.

Рис. 10.7.1. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 0,0$ Рис. 10.7.2. Профиль поверхностной волны при $t = 0,0$

Рис. 10.7.3. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 6832, 0$ Рис. 10.7.4. Профиль поверхностной волны при $t = 6832, 0$

Рис. 10.7.5. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 0,0$ Рис. 10.7.6. Профиль поверхностной волны при $t = 0,0$

Рис. 10.7.7. Спектр решения в логарифмическом масштабе при $t = 4252, 0$ Рис. 10.7.8. Профиль поверхностной волны при $t = 4252, 0$

ГЛАВА 11

ПРИЛОЖЕНИЯ

11.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ ИЗ ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ
БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В настоящем приложении мы приведем определения и некоторые факты из теории интерполяции банаховых пространств. Эта теория необходима для построения пространств начальных данных для эволюционных (как линейных, так и нелинейных) уравнений.

Рассмотрим отделимое линейное топологическое пространство \mathbb{X} . Пусть X_1 и X_2 — банаховы пространства, принадлежащие пространству \mathbb{X} . причем вложения

$$X_1 \subset \mathbb{X}$$

и

$$X_2 \subset \mathbb{X}$$

непрерывны. Введем еще два пространства:

$$X_1 + X_2 = \{a \in \mathbb{X} : a = a_1 + a_2, \text{ где } a_i \in X_i, i = 1, 2\}$$

и

$$X_1 \cap X_2.$$

Если эти пространства наделить нормами

$$\|a\|_{X_1 \cap X_2} = \max\{\|a\|_{X_1}, \|a\|_{X_2}\}$$

и

$$\|a\|_{X_1 + X_2} = \inf\{\|a_1\|_{X_1} + \|a_2\|_{X_2} : a = a_1 + a_2, a_i \in X_i, i = 1, 2\},$$

то эти пространства будут банаховыми.

Легко видеть, что имеют место следующие непрерывные вложения:

$$X_1 \cap X_2 \subset X_i \subset X_1 + X_2 \subset \mathbb{X}, \quad i = 1, 2.$$

Определение 11.1.1. Банахово пространство X называется *промежуточным пространством* между X_1 и X_2 , если оно удовлетворяет соотношению

$$X_1 \cap X_2 \subset X \subset X_1 + X_2.$$

Для построения промежуточных пространств между X_1 и X_2 воспользуемся методом Петре [36, 46, 55]. Введем функционал для положительного t и $a \in (X_1 + X_2)$

$$K(t, a) = \inf\{(\|a_1\|_{X_1} + t\|a_2\|_{X_2}) : a = a_1 + a_2, a_i \in X_i, i = 1, 2\}.$$

Пусть θ и q суть вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \theta < 1,$$

и

$$1 \leq q \leq \infty.$$

Через $(X_1, X_2)_{\theta, q}$ обозначим подмножество всех $a \in (X_1 + X_2)$, для которых норма

$$\|a\|_{(X_1, X_2)_{\theta, q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} (t^{-\theta} K(t, a)), & q = \infty \end{cases}$$

конечна. Будем рассматривать подмножество $(X_1, X_2)_{\theta, q}$ как нормированное пространство. Имеет место следующая теорема.

Теорема 11.1.1. Для любых $0 < \theta < 1$ и $1 \leq q \leq \infty$ пространство $(X_1, X_2)_{\theta, q}$ является банаховым пространством, промежуточным между X_1 и X_2 .

В случае, когда $q = 1/2$ мы пространство $(X_1, X_2)_{\theta, q}$ будем обозначать через $[X_1, X_2]_\theta$.

Теорема 11.1.2. Для любого $0 < \theta < 1$ пространство $[X_1, X_2]_\theta$ является гильбертовым пространством.

11.2. ПОСТРОЕНИЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В главе 2 мы использовали конформные переменные, для чего нам необходимо было совершать конформное преобразование области, занимаемой жидкостью со свободной поверхностью в полосу. И хотя теорема Римана о конформном преобразовании гарантирует существования такого отображения, эта теорема ничего не говорит о том как осуществить это преобразование на практике. В частности, как найти численное приближение этого преобразования. В настоящем разделе мы приведем формулы, которые можно использовать для приближенного построения конформных преобразований в нашем случае.

Рассмотрим две комплексные координаты: $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Исходная область задана в переменных x и y следующим образом:

$$Z = \{z : 0 < x < 2\pi, -\infty < y < \eta(x)\},$$

где $\eta(x)$ есть заданная 2π -периодическая функция, задающая свободную поверхность. Нам необходимо отобразить эту область в область переменных u и v :

$$W = \{w : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < 0\},$$

причем это конформное отображение $z = z(w)$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$z'(iv) = z'(2\pi + iv)$$

и

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} z'(u + iv) = 1.$$

Следовательно, это отображение должно иметь вид

$$z(w) = w + \tilde{x}(w) + H[\tilde{x}(w)],$$

где функция $\tilde{x}(w)$ имеет вид:

$$\tilde{z}(w) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-i w k},$$

а H — интегральный оператор Гильберта.

Введем обозначение $\tilde{y} = \tilde{x}$. Тогда функцию z можно записать в виде $z(w) = w + \tilde{x}(w) + i\tilde{y}(w)$. Очевидно, что для задания функции z достаточно задать либо функцию \tilde{x} , либо \tilde{y} . Так как по построению функции $z(w)$ имеет место соотношение

$$\{(x, \eta(x)) : x \in (0, 2\pi)\} = \{(u + \tilde{x}, \tilde{y}(u)) : 0 < u < 2\pi\},$$

то

$$\tilde{y}(u) = \eta(u + \tilde{x}(u)). \quad (11.2.1)$$

Учитывая, что $\tilde{x} = -H[\tilde{y}]$, из соотношения (11.2.1) можно получить нелинейное интегральное уравнение

$$\tilde{y}(u) = \eta(u - H[\tilde{y}](u)) \quad (11.2.2)$$

относительно функции \tilde{y} .

Для приближенного решения уравнения (11.2.2) можно применять итерационную процедуру. Пусть уже найдена функция \tilde{y}_n . Тогда следующее приближение \tilde{y}_{n+1} будем находить по следующей формуле:

$$\tilde{y}_{n+1}(u) = \eta(u - H[\tilde{y}_n](u)). \quad (11.2.3)$$

Сходимость процедуры (11.2.3) зависит от свойств функции η . Приведем результаты численных экспериментов для проверки нашей процедуры.

В первой серии экспериментов мы использовали следующую функцию η :

$$\eta(x) = 0,5 * \sin(x).$$

Номер эксперимента	количество итераций	$\max_{u \in [0, 2\pi]} \eta(u - H[\tilde{y}](u)) - \tilde{y}(u) $
1	10	0,00010694
2	15	$2,93416 \cdot 10^{-6}$
3	20	$7,4807 \cdot 10^{-8}$
4	25	$2,20651 \cdot 10^{-9}$
5	30	$5,89234 \cdot 10^{-11}$
6	40	$5,02029 \cdot 10^{-14}$
7	50	$3,33067 \cdot 10^{-16}$
8	100	$3,88578 \cdot 10^{-16}$

Мы видим, что процедура (11.2.3) сходится достаточно быстро, и несколькими десятками итераций мы получаем приближенное решение задачи (11.2.2) с машинной точностью. На рис. 11.2.1 мы приводим график решения \tilde{y}_{100} .

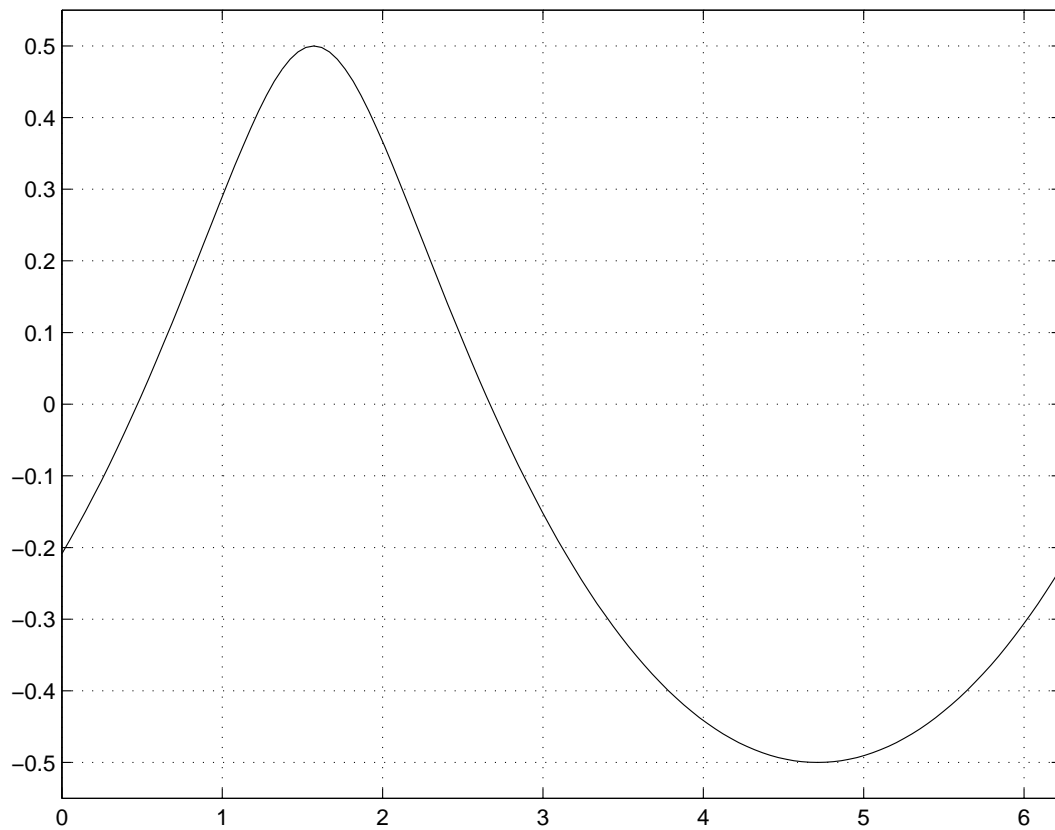


Рис. 11.2.1

Чтобы исследовать скорость сходимости нашей итерационной процедуры, приведем результаты еще одной серии экспериментов. В этой серии мы используем следующую функцию $\eta(x)$:

$$\eta(x) = 0,99 * \sin(x).$$

В таблице, следующей ниже, приведены результаты наших экспериментов.

Номер эксперимента	количество итераций	$\max_{u \in [0, 2\pi]} \eta(u - H[\tilde{y}](u)) - \tilde{y}(u) $
1	10	0,181737000
2	100	0,022576200
3	200	0,005864380
4	300	0,001742930
5	400	0,000540853
6	500	0,000170550
7	1000	$5,60888 \cdot 10^{-7}$
8	10000	$2,63678 \cdot 10^{-15}$

Мы видим, что, хотя скорость сходимости резко ухудшилась, наша процедура вполне выполнена. В случае функции $\eta(x) = A * \sin(s)$, для $A > 1$ процедура 11.2.3 расходится.

11.3. ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

С любезного разрешения Ильи Кантора, автора сайта, содержащего большое количество алгоритмов — algotist.manual.ru, мы публикуем исходные тексты процедуры, реализующей быстрое преобразование Фурье. Эти функции были успешно использованы нами на протяжении многих лет.

Файл `<fftw_g.cpp>`.

```
#if 0
Функции и объявления общего назначения.
#endif

#ifndef GENERAL_H_INCLUDED_
#define GENERAL_H_INCLUDED_

#include <ctime>

#define CACHE_HALF 65536

#define CONST_PI      3.1415926535897932384626433832
#define CONST_SQRT_2  0.7071067811865475244008443621
#define CONST_SQRT2   1.4142135623730950488016887242

#define max(x,y) ((x) > (y) ? (x) : (y))
#define min(x,y) ((x) < (y) ? (x) : (y))

typedef double real;
typedef unsigned long ulong;
typedef unsigned short ushort;

#endif

Файл <fftw_c.cpp>.

#ifndef COMPLEX_H_INCLUDED_
#define COMPLEX_H_INCLUDED_

class Complex {
public:
    real r, i;
    Complex(void) { }
    Complex(real a, real b) { r=a; i=b; }
```

```

inline const Complex operator+(const Complex &c) const {
return Complex( r + c.r, i + c.i);
}
inline const Complex operator-(const Complex &c) const {
return Complex( r - c.r, i - c.i);
}
inline const Complex operator*(const Complex &c) const {
return Complex( r*c.r - i*c.i, r*c.i + i*c.r);
}
inline const Complex operator/(const real &divisor) const {
return Complex( r/divisor, i/divisor);
}

};

inline const Complex conj(const Complex &c) {
return Complex( c.r, -c.i);
}

#endif

Файл <fftw.cpp>.

#define TRIG_VARS
    ulong TLen,TNdx;int TDir;
    Complex PRoot,Root;

#define INIT_TRIG(LENGTH,DIR)
    TNdx=0;TLen=(LENGTH);TDir=(DIR);
    PRoot.r=1.0;PRoot.i=0.0;
    Root.r=sin(CONST_PI/((LENGTH)*2.0));
    Root.r=-2.0*Root.r*Root.r;
    Root.i=sin(CONST_PI/(LENGTH))*(DIR);

#define NEXT_TRIG_POW
    if (((++TNdx)&15)==0) {
        real Angle=(CONST_PI*(TNdx))/TLen;
        PRoot.r=sin(Angle*0.5);
        PRoot.r=1.0-2.0*PRoot.r*PRoot.r;
        PRoot.i=sin(Angle)*(TDir);
    } else {
        Complex Temp;
        Temp=PRoot;
        PRoot = PRoot*Root;
        PRoot = PRoot+Temp;
    }

inline ulong rev_next(ulong r, ulong n) {
    do {
        n = n >> 1;
        r = r^n;
    } while ( (r&n) == 0);
    return r;
}

```

```

void FFTReOrder(Complex *Data, ulong Len) {
    Complex temp;
    if (Len <= 2) return;
    ulong r=0;
    for (ulong x=1; x<Len; x++) {
        r = rev_next(r, Len);
        if (r>x) { temp=Data[x]; Data[x]=Data[r]; Data[r]=temp; }
    }
}

```

```

void IFFT_T(Complex *Data, ulong Len, int Dir) {
    ulong Step, HalfStep;
    ulong b;
    TRIG_VARS;

    Step = 1;
    while (Step < Len) {
        HalfStep = Step;
        Step *= 2;

        INIT_TRIG(HalfStep, Dir);

        for (b = 0; b < HalfStep; b++) {
            ulong L,R;
            for (L=b; L<Len; L+=Step) {
                Complex TRight,TLeft;
                R=L+HalfStep;
                TLeft=Data[L];TRight=Data[R];
                TRight = TRight * PRoot;
                Data[L] = TLeft + TRight;
                Data[R] = TLeft - TRight;
            }
            NEXT_TRIG_POW;
        }
    }
}

```

```

void FFT_T(Complex *Data, ulong Len, int Dir) {
    ulong k;

    TRIG_VARS;

    if (Len <= (CACHE_HALF/sizeof(Complex)) ) {
        IFFT_T(Data, Len, Dir);
        return;
    }

    Len /= 2;

```

```

INIT_TRIG(Len, Dir);

FFT_T(Data, Len, Dir);
FFT_T(Data+Len, Len, Dir);

for (k=0; k<Len; k++) {
    Complex b,c;
    b=Data[k];
    c = Data[k+Len] * PRoot;
    Data[k] = b + c;
    Data[k+Len] = b - c;
    NEXT_TRIG_POW;
}

}

void RealFFT(real *ddata, ulong Len, int Dir) {
    ulong i, j;
    Complex *Data=(Complex*)ddata;
    TRIG_VARS;

    Len /= 2;

    if (Dir > 0) {
        FFTReOrder(Data, Len);
        FFT_T(Data, Len, 1);
    }

    INIT_TRIG(Len, Dir);
    NEXT_TRIG_POW;

    for (i = 1, j = Len - i; i < Len/2; i++, j--) {
        Complex p1,p2,t;
        t = conj(Data[j]);
        p1 = Data[i] + t;
        p2 = Data[i] - t;
        p2 = p2 * PRoot;

        t = Complex(-Dir*p2.i, Dir*p2.r);

        Data[i] = p1 - t;
        Data[j] = p1 + t;
        Data[j] = conj(Data[j]);

        Data[i] = Data[i]/2;
        Data[j] = Data[j]/2;

        NEXT_TRIG_POW;
    }

    {
        real r,i;
        r=Data[0].r;i=Data[0].i;
        Data[0] = Complex(r+i,r-i);
    }
}

```

```

if (Dir < 0) {
    Data[0] = Data[0]/2.0;
    FFTReOrder(Data, Len);
    FFT_T(Data, Len, -1);
}
}

```

11.4. ПРОТОКОЛ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Приведем протокол одного из вычислительных экспериментов, описанных в главе 7.

Исследуемый временной интервал	[0, 10]
Параметр дискретизации	1024
Шаг по времени	0.001
Параметр β	0.040475
Параметр α	1.2
Количество серий вычислений	1000

В протоколе использованы следующие обозначения:

exp_nn	номер эксперимента в серии
t	время выхода решения из множества (7.1.2)
k	номер гармоники
E	полная энергия

Запись протокола:

```

exp_nn = 21 t = 4.611000 k = 497 E = 0.004714
exp_nn = 24 t = 4.328000 k = 496 E = 0.004239
exp_nn = 25 t = 5.554000 k = 496 E = 0.002891
exp_nn = 26 t = 4.328000 k = 496 E = 0.004239
exp_nn = 28 t = 3.394000 k = 497 E = 0.005337
exp_nn = 29 t = 5.487000 k = 499 E = 0.003959
exp_nn = 30 t = 2.764000 k = 506 E = 0.006435
exp_nn = 32 t = 3.301000 k = 497 E = 0.005262
exp_nn = 52 t = 3.375000 k = 498 E = 0.005246
exp_nn = 60 t = 3.626000 k = 495 E = 0.003735
exp_nn = 62 t = 4.265000 k = 496 E = 0.004923
exp_nn = 63 t = 4.582000 k = 495 E = 0.003362
exp_nn = 66 t = 3.375000 k = 498 E = 0.005246
exp_nn = 67 t = 2.796000 k = 506 E = 0.005900
exp_nn = 69 t = 4.348000 k = 495 E = 0.005385
exp_nn = 70 t = 4.312000 k = 497 E = 0.004483
exp_nn = 72 t = 4.578000 k = 494 E = 0.004190
exp_nn = 74 t = 4.116000 k = 494 E = 0.005928
exp_nn = 76 t = 2.881000 k = 506 E = 0.005452
exp_nn = 77 t = 3.757000 k = 495 E = 0.006162
exp_nn = 89 t = 3.728000 k = 496 E = 0.004127
exp_nn = 97 t = 4.001000 k = 506 E = 0.004278
exp_nn = 98 t = 3.975000 k = 495 E = 0.004995
exp_nn = 104 t = 2.371000 k = 509 E = 0.004169
exp_nn = 106 t = 3.491000 k = 495 E = 0.003356
exp_nn = 107 t = 2.750000 k = 497 E = 0.004718
exp_nn = 109 t = 2.576000 k = 505 E = 0.006078
exp_nn = 123 t = 3.391000 k = 497 E = 0.003638
exp_nn = 125 t = 4.327000 k = 495 E = 0.004427

```



```
exp_nn = 134 t = 2.935000 k = 506 E = 0.004657
exp_nn = 136 t = 4.076000 k = 495 E = 0.003636
exp_nn = 138 t = 4.421000 k = 496 E = 0.002847
exp_nn = 140 t = 4.164000 k = 501 E = 0.004172
exp_nn = 149 t = 2.893000 k = 497 E = 0.004242
exp_nn = 150 t = 5.259000 k = 497 E = 0.004269
exp_nn = 152 t = 6.532000 k = 510 E = 0.003269
exp_nn = 154 t = 4.483000 k = 496 E = 0.004321
exp_nn = 159 t = 3.764000 k = 497 E = 0.005018
exp_nn = 163 t = 3.621000 k = 496 E = 0.004522
exp_nn = 165 t = 4.511000 k = 497 E = 0.004418
exp_nn = 167 t = 3.955000 k = 496 E = 0.004798
exp_nn = 168 t = 3.146000 k = 497 E = 0.005035
exp_nn = 175 t = 3.453000 k = 497 E = 0.006196
exp_nn = 185 t = 3.442000 k = 497 E = 0.004553
exp_nn = 189 t = 3.366000 k = 500 E = 0.004989
exp_nn = 193 t = 4.083000 k = 495 E = 0.004013
exp_nn = 198 t = 2.881000 k = 497 E = 0.003527
exp_nn = 202 t = 2.274000 k = 510 E = 0.003793
exp_nn = 206 t = 2.734000 k = 509 E = 0.004331
exp_nn = 208 t = 2.999000 k = 501 E = 0.005031
exp_nn = 209 t = 2.592000 k = 505 E = 0.004786
exp_nn = 213 t = 2.534000 k = 505 E = 0.005878
exp_nn = 215 t = 3.750000 k = 497 E = 0.005254
exp_nn = 217 t = 4.495000 k = 496 E = 0.004295
exp_nn = 218 t = 3.839000 k = 497 E = 0.004958
exp_nn = 233 t = 5.268000 k = 495 E = 0.004638
exp_nn = 235 t = 3.105000 k = 499 E = 0.005309
exp_nn = 239 t = 2.867000 k = 497 E = 0.003689
exp_nn = 243 t = 4.098000 k = 495 E = 0.003893
exp_nn = 245 t = 3.657000 k = 503 E = 0.005769
exp_nn = 249 t = 2.550000 k = 505 E = 0.004648
exp_nn = 253 t = 3.659000 k = 496 E = 0.005914
exp_nn = 257 t = 5.120000 k = 496 E = 0.003721
exp_nn = 265 t = 3.020000 k = 498 E = 0.004465
exp_nn = 270 t = 3.334000 k = 498 E = 0.005328
exp_nn = 271 t = 3.394000 k = 497 E = 0.004367
exp_nn = 272 t = 3.392000 k = 496 E = 0.005363
exp_nn = 274 t = 5.683000 k = 496 E = 0.002417
exp_nn = 279 t = 2.777000 k = 506 E = 0.004211
exp_nn = 283 t = 2.870000 k = 497 E = 0.004957
exp_nn = 287 t = 5.780000 k = 496 E = 0.004084
exp_nn = 298 t = 3.203000 k = 498 E = 0.004068
exp_nn = 306 t = 3.668000 k = 496 E = 0.004495
exp_nn = 314 t = 4.106000 k = 496 E = 0.003326
exp_nn = 317 t = 3.023000 k = 507 E = 0.005197
exp_nn = 331 t = 3.051000 k = 498 E = 0.006472
exp_nn = 343 t = 4.905000 k = 496 E = 0.002809
exp_nn = 346 t = 4.553000 k = 495 E = 0.004364
exp_nn = 350 t = 2.583000 k = 505 E = 0.006342
exp_nn = 358 t = 3.673000 k = 498 E = 0.005429
exp_nn = 366 t = 4.014000 k = 496 E = 0.003878
exp_nn = 370 t = 2.989000 k = 499 E = 0.005130
exp_nn = 372 t = 4.131000 k = 500 E = 0.004233
```

exp_nn = 377 t = 4.635000 k = 497 E = 0.005086
exp_nn = 380 t = 3.191000 k = 497 E = 0.004842
exp_nn = 383 t = 3.092000 k = 498 E = 0.003727
exp_nn = 387 t = 3.612000 k = 496 E = 0.005452
exp_nn = 400 t = 3.774000 k = 497 E = 0.004417
exp_nn = 403 t = 4.189000 k = 496 E = 0.004004
exp_nn = 406 t = 6.083000 k = 510 E = 0.003372
exp_nn = 414 t = 3.087000 k = 499 E = 0.006479
exp_nn = 417 t = 2.578000 k = 506 E = 0.003587
exp_nn = 419 t = 4.359000 k = 496 E = 0.004033
exp_nn = 426 t = 4.070000 k = 497 E = 0.004098
exp_nn = 430 t = 3.103000 k = 498 E = 0.005163
exp_nn = 432 t = 3.843000 k = 495 E = 0.005338
exp_nn = 433 t = 2.970000 k = 506 E = 0.006127
exp_nn = 437 t = 4.150000 k = 494 E = 0.003856
exp_nn = 441 t = 2.752000 k = 505 E = 0.006704
exp_nn = 443 t = 2.463000 k = 505 E = 0.004855
exp_nn = 447 t = 3.468000 k = 498 E = 0.006014
exp_nn = 451 t = 2.516000 k = 506 E = 0.004136
exp_nn = 460 t = 4.419000 k = 496 E = 0.003801
exp_nn = 472 t = 3.777000 k = 495 E = 0.004023
exp_nn = 474 t = 3.043000 k = 496 E = 0.004892
exp_nn = 478 t = 2.750000 k = 506 E = 0.005306
exp_nn = 486 t = 5.828000 k = 501 E = 0.004233
exp_nn = 488 t = 2.855000 k = 506 E = 0.003712
exp_nn = 492 t = 3.495000 k = 497 E = 0.004177
exp_nn = 496 t = 2.678000 k = 506 E = 0.003793
exp_nn = 502 t = 5.311000 k = 496 E = 0.003751
exp_nn = 516 t = 4.219000 k = 495 E = 0.005565
exp_nn = 517 t = 4.570000 k = 497 E = 0.004592
exp_nn = 521 t = 3.451000 k = 497 E = 0.003575
exp_nn = 525 t = 2.761000 k = 506 E = 0.004731
exp_nn = 528 t = 3.003000 k = 506 E = 0.005396
exp_nn = 532 t = 2.860000 k = 506 E = 0.007272
exp_nn = 536 t = 2.557000 k = 506 E = 0.003920
exp_nn = 541 t = 4.142000 k = 495 E = 0.004678
exp_nn = 548 t = 3.120000 k = 497 E = 0.006294
exp_nn = 552 t = 5.587000 k = 499 E = 0.005172
exp_nn = 559 t = 2.509000 k = 507 E = 0.003904
exp_nn = 562 t = 3.475000 k = 497 E = 0.006087
exp_nn = 567 t = 5.814000 k = 498 E = 0.004694
exp_nn = 568 t = 4.273000 k = 495 E = 0.004892
exp_nn = 572 t = 3.458000 k = 497 E = 0.006580
exp_nn = 576 t = 2.441000 k = 507 E = 0.005684
exp_nn = 586 t = 4.773000 k = 495 E = 0.004502
exp_nn = 597 t = 3.649000 k = 496 E = 0.005637
exp_nn = 607 t = 2.784000 k = 504 E = 0.006907
exp_nn = 611 t = 3.003000 k = 507 E = 0.005070
exp_nn = 612 t = 3.722000 k = 496 E = 0.004060
exp_nn = 613 t = 3.484000 k = 494 E = 0.003410
exp_nn = 614 t = 5.042000 k = 495 E = 0.003760
exp_nn = 618 t = 2.474000 k = 506 E = 0.006986
exp_nn = 622 t = 2.947000 k = 505 E = 0.005592
exp_nn = 624 t = 3.427000 k = 496 E = 0.003698

```
exp_nn = 626 t = 2.945000 k = 496 E = 0.005046
exp_nn = 630 t = 3.070000 k = 498 E = 0.005674
exp_nn = 634 t = 4.316000 k = 494 E = 0.004034
exp_nn = 639 t = 4.367000 k = 496 E = 0.004597
exp_nn = 643 t = 5.226000 k = 496 E = 0.003858
exp_nn = 646 t = 3.028000 k = 497 E = 0.003990
exp_nn = 648 t = 3.844000 k = 495 E = 0.005084
exp_nn = 656 t = 3.942000 k = 496 E = 0.003970
exp_nn = 660 t = 3.619000 k = 494 E = 0.002835
exp_nn = 664 t = 3.488000 k = 495 E = 0.005261
exp_nn = 665 t = 3.492000 k = 498 E = 0.004485
exp_nn = 666 t = 3.875000 k = 497 E = 0.003460
exp_nn = 673 t = 2.315000 k = 506 E = 0.003621
exp_nn = 675 t = 4.423000 k = 496 E = 0.004328
exp_nn = 681 t = 4.325000 k = 496 E = 0.004340
exp_nn = 684 t = 2.974000 k = 497 E = 0.004821
exp_nn = 686 t = 2.700000 k = 505 E = 0.006008
exp_nn = 688 t = 3.205000 k = 496 E = 0.004538
exp_nn = 702 t = 4.145000 k = 495 E = 0.004247
exp_nn = 703 t = 2.578000 k = 506 E = 0.003653
exp_nn = 707 t = 3.374000 k = 496 E = 0.004393
exp_nn = 708 t = 4.281000 k = 496 E = 0.003668
exp_nn = 710 t = 2.485000 k = 505 E = 0.006415
exp_nn = 712 t = 2.951000 k = 506 E = 0.006516
exp_nn = 713 t = 4.498000 k = 497 E = 0.004273
exp_nn = 717 t = 2.579000 k = 508 E = 0.003338
exp_nn = 719 t = 4.598000 k = 495 E = 0.004446
exp_nn = 722 t = 6.003000 k = 497 E = 0.004151
exp_nn = 727 t = 3.561000 k = 495 E = 0.005018
exp_nn = 731 t = 3.102000 k = 497 E = 0.005710
exp_nn = 755 t = 4.314000 k = 494 E = 0.003439
exp_nn = 759 t = 5.706000 k = 498 E = 0.003663
exp_nn = 762 t = 3.683000 k = 496 E = 0.003748
exp_nn = 763 t = 3.340000 k = 498 E = 0.005156
exp_nn = 765 t = 4.506000 k = 495 E = 0.005126
exp_nn = 770 t = 3.845000 k = 495 E = 0.004119
exp_nn = 779 t = 5.993000 k = 498 E = 0.003455
exp_nn = 782 t = 3.789000 k = 495 E = 0.004295
exp_nn = 783 t = 2.817000 k = 504 E = 0.005931
exp_nn = 787 t = 4.373000 k = 495 E = 0.004661
exp_nn = 788 t = 3.878000 k = 496 E = 0.003426
exp_nn = 801 t = 3.993000 k = 494 E = 0.004624
exp_nn = 809 t = 3.506000 k = 495 E = 0.005808
exp_nn = 813 t = 3.417000 k = 496 E = 0.005893
exp_nn = 816 t = 2.566000 k = 505 E = 0.004573
exp_nn = 824 t = 4.335000 k = 495 E = 0.002378
exp_nn = 826 t = 2.949000 k = 497 E = 0.004588
exp_nn = 829 t = 4.349000 k = 497 E = 0.003667
exp_nn = 830 t = 3.135000 k = 497 E = 0.003378
exp_nn = 832 t = 3.016000 k = 499 E = 0.005524
exp_nn = 834 t = 5.935000 k = 497 E = 0.003043
exp_nn = 856 t = 6.372000 k = 499 E = 0.004478
exp_nn = 857 t = 3.550000 k = 497 E = 0.006375
exp_nn = 859 t = 2.575000 k = 505 E = 0.005891
```

```

exp_nn = 866 t = 4.453000 k = 496 E = 0.003953
exp_nn = 867 t = 2.928000 k = 495 E = 0.004748
exp_nn = 869 t = 3.923000 k = 495 E = 0.004547
exp_nn = 871 t = 4.651000 k = 495 E = 0.004781
exp_nn = 887 t = 3.095000 k = 499 E = 0.003543
exp_nn = 890 t = 2.615000 k = 505 E = 0.005614
exp_nn = 908 t = 2.770000 k = 506 E = 0.005641
exp_nn = 909 t = 4.620000 k = 495 E = 0.004182
exp_nn = 915 t = 3.576000 k = 495 E = 0.005756
exp_nn = 918 t = 4.584000 k = 496 E = 0.004555
exp_nn = 934 t = 3.211000 k = 495 E = 0.004196
exp_nn = 938 t = 3.931000 k = 496 E = 0.003062
exp_nn = 940 t = 3.006000 k = 501 E = 0.005076
exp_nn = 943 t = 5.957000 k = 497 E = 0.003381
exp_nn = 944 t = 2.878000 k = 504 E = 0.004640
exp_nn = 946 t = 4.714000 k = 495 E = 0.004193
exp_nn = 948 t = 5.827000 k = 500 E = 0.004097
exp_nn = 949 t = 3.716000 k = 497 E = 0.004053
exp_nn = 954 t = 4.456000 k = 495 E = 0.003101
exp_nn = 962 t = 3.042000 k = 496 E = 0.004413
exp_nn = 970 t = 3.229000 k = 496 E = 0.003339
exp_nn = 974 t = 3.704000 k = 495 E = 0.003428
exp_nn = 976 t = 3.784000 k = 499 E = 0.005697
exp_nn = 989 t = 5.277000 k = 496 E = 0.002446
exp_nn = 994 t = 6.022000 k = 496 E = 0.004047
exp_nn = 996 t = 5.467000 k = 496 E = 0.002590

```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир, 1972.
2. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987.
3. Бабенко К. И. Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.
4. Бабенко К. И., Петрович В. Ю., Рахманов А. И. Вычислительный эксперимент в теории поверхностных волн конечной амплитуды// Докл. АН. — 1988. — 302, №4. — С. 781–785.
5. Бабенко К. И., Петрович В. Ю., Рахманов А. И. О доказательном эксперименте в теории поверхностных волн конечной амплитуды// Докл. АН. — 1988. — 303, №5. — С. 1033–1037.
6. Белоцерковский О. М., Опарин А. М. Численный эксперимент в турбулентности: От порядка к хаосу. — М.: Наука, 2001.
7. Василенко В. А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. — Новосибирск: Наука, 1983.
8. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
9. Воинов В. В., Воинов О. В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями// Докл. АН. — 1975. — 221, № 3. — С. 559–562.
10. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексных областях. — М.: Мир, 1986.
11. Гарипов Р. М. Неустойчившиеся волны над подводным хребтом// Докл. АН. — 1965. — 161, № 3. — С. 547–550.
12. Гюнтер Н. М. Об основной задаче гидродинамики// Известия Физико-математического института им. В. А. Стеклова. — 1927. — 2. — С. 1–168.
13. Дьяченко А. И., Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости// Физика плазмы. — 1999. — 22, № 10. — С. 916–928.
14. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости// Прикладная механика и теоретическая физика. — 1968. — № 2. — С. 86–94.
15. Инногамов Н. А. Турбулентная стадия тейлоровской неустойчивости// Письма ЖТФ. — 1978. — 4, № 12. — С. 743–747.
16. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986.
17. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. — М.: Физматлит, 2004.

18. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближений. — М.: Наука, 1984.
19. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.
20. Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. — Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. университет, 2004.
21. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
22. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003.
23. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
24. Налимов В. И. Априорные оценки решений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их приложения к задаче Коши—Пуассона// Докл. АН. — 1969. — 189, № 1. — С. 45–49.
25. Налимов В. И. Задача Коши—Пуассона// Динамика сплошной среды. — 1974. — 18. — С. 104–210.
26. Налимов В. И. Нестационарные вихревые волны// Сиб. мат. журн. — 1996. — 37, № 6. — С. 1356–1366.
27. Некрасов А. И. О волнах установившегося вида// Известия Иваново-Вознесенского политехнического института. — 1921. — 3. — С. 52–65.
28. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. — М.: Издательство АН СССР, 1951.
29. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.
30. Овсянников Л. В. Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств// Докл. АН. — 1971. — 200, № 4. — С. 789–792.
31. Протопопов Б. Е. Численное моделирование поверхностных волн в канале переменной глубины// Вычислительные методы прикладной гидродинамики. — 1988. — 84. — С. 91–105.
32. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Физматлит, 2002.
33. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
34. Солонников В. А. Разрешимость задачи об эволюции вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью, на конечном интервале времени// Алгебра и анализ. — 1991. — 1. — С. 222–257.
35. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.
36. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
37. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
38. Шамин Р. В. О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Мат. сб. — 2003. 194, № 9. — С. 1411–1426.
39. Шамин Р. В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью// Сиб. журн. выч. мат. — 2006. — 9, № 4. — С. 325–340.
40. Шамин Р. В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью// Докл. АН. — 2006. — 406, № 5. — С. 112–113.
41. Шамин Р. В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши—Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 21. — С. 133–148.
42. Шамин Р. В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. — М.: Наука, 2008.
43. Шамин Р. В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны// Докл. АН. — 2008. — 418, № 5. — С. 112–113.
44. Шокин Ю. И. Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981.
45. Юдович В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости// Журнал выч. мат. и мат. физ. — 1963. — 3, № 6. — С. 1032–1066.
46. Butzer P. L., Berens H. Semi-groups of operators and approximations. — New York: Springer-Verlag, 1967.
47. Craig W., Sulem C. Numerical simulation of gravity waves// J. Comput. Phys. — 1993. — 108. — С. 73–83.
48. Craig W., Wayne C. E. Mathematical aspects of surface water waves// Round Table «Open Problems» Int. Workshop Math. Hydrod., Moscow, June 12–17. — 2006.
49. Dyachenko A. I., Kuznetsov E. A., Spector M. D., Zakharov V. E. Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping)// Phys. Lett. A. — 1996. — 221. — С. 73–79.
50. Kato T. On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation// ARMA. — 1967. — 25. — С. 188–200.
51. Levi-Civita T. Determination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie// Math. Ann. — 1925. — 93. — С. 264–314.

52. *Lewis D. J.* The instability of liquid surface when accelerated in direction perpendicular to their planes. II// *Proc. Roy. Soc. Sect. A.* — 1950. — 202, № 1068. — С. 81–96.
53. *Lichtenstein L.* Grundlagen der Hydromechanik. — Berlin, 1929.
54. *Nishida T.* A note on a theorem of Nirenberg// *J. Differential Geom.* — 1977. — 12. — С. 629–633.
55. *Peetre J.* Introduction to interpolation, Lecture notes, Department of Mathematics. — Lund, 1966.
56. *Stokes G. G.* Mathematical and physical papers. Cambridge University Press. — 1. — 1880.
57. *Taylor G.* The instability of liquid surface when accelerated in direction perpendicular to their planes. I// *Proc. Roy. Soc. Sect. A.* — 1950. — 201, № 1065. — С. 192–196.
58. *Treves F.* Ovsyannikov theorem and hyperdifferential operators. — Rio de Janeiro, Instituto de Mathematica Pure e Aplicada, 1968.
59. *Tsai W., Yue D.* Computations of nonlinear free-surface flows// *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 1996. — 28. — С. 249–278.
60. *Wu S.* Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D// *J. Amer. Math. Soc.* — 1999. — 12, № 2. — С. 445–495.
61. *Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Prokofiev A. O.* Freak waves as nonlinear stage of Stokes wave modulation instability// *Eur. J. Mech. B Fluids.* — 2006. — 25. — С. 677–692.
62. *Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A.* New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface// *Eur. J. Mech. B Fluids.* — 2002. — 21. — С. 283 – 291.

Роман Вячеславович Шамин
Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН
Лаборатория нелинейных волновых процессов
E-mail: roman@shamin.ru