

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК



В.А.Фрост

# Уравнение для корреляционной функции скаляра и расчет турбулентных чисел Шмидта и Шервуда

Препринт № 856



МОСКВА 2008 год

## Аннотация

Метод моментов используется для уточнения ранее найденного замыкания уравнения для корреляционной функции скаляра (КФС). Скаляр предполагается пассивным, то есть не влияющим на параметры турбулентности. Найденны условия применимости ранее найденного метода замыкания. Тензорная форма записи соотношений для потока и третьих моментов позволяет получать неізотропное распределение скалярной диссипации. В отличие от предыдущего предлагаемый подход позволяет определять пространственное распределение коэффициента турбулентной диффузии.

Параметры турбулентного поля, необходимые для расчета распределения скаляра в плоском канале, на границах которого заданы значения величины скаляра, определяются по экспериментальным данным Ж. Конт-Белло. Рассчитаны распределения средних, интенсивностей пульсаций, скалярной диссипации и турбулентного числа Шмидта. Получена также зависимость числа Шервуда от величины молекулярного коэффициента диффузии (числа Шмидта).

Ключевые слова: турбулентность, молекулярный перенос, скалярная диссипация, число Шмидта, число Шервуда.

## Abstract

The method of the moments is used to make more accurate before the found closing of the equation for correlation function of a scalar. The scalar is supposed passive, that is not influencing on parameters of turbulence. Conditions of applicability before the found method of closing are found. The tensor form for a flux and the third moments allows to receive non-isotropic distribution scalar dissipation. Unlike previous the offered approach allows to define spatial distribution of turbulent diffusivity.

The turbulent field parameters necessary for calculation of distribution of a scalar in the plane channel, which boundary values of the scalar are given, are defined on experimental data J.Comte-Bellot. Distributions of averages, intensity of fluctuations scalar dissipation and the turbulent Schmidt number are calculated. Dependence of the Scherwood number on molecular diffusivity (Schmidt number) is received also.

Keywords: turbulence, molecular transfer, scalar dissipation, the turbulent Schmidt number, the Scherwood number.

# 1 Введение

Данный препринт посвящен продолжению исследований по использованию уравнения для корреляционной функции скалярного поля (УКФС) для описания различных режимов турбулентных течений [1, 2, 3]. Ранее была найдена некоторая процедура замыкания УКФС, использующая корреляционную функцию поля скорости. Это замыкание было построено путем сложной цепочки рассуждений, точность и условия применимости которых хотелось бы определить. В данном препринте замыкание УКФС строится на основании метода моментов, основанного на упрощенной системе динамических уравнений. Удалось не только подтвердить ранее найденную форму третьих моментов, но и уточнить некоторые предположения. Оказалось, что гипотеза Прандтля выполняется только при выполнении большого числа предположений, таких как равенство нулю некоторых третьих моментов, семиинварианта четвертого порядка и др. Обнаружена связь коэффициента турбулентной диффузии и скалярной диссипации. Наиболее существенным оказалось уточнение источниковых членов в УКФС. Кроме того, выражение для третьих моментов удалось записать в тензорной форме, что позволяет производить оценку влияния возможной неизотропии скалярной диссипации на течение.

Во второй части препринта для иллюстрации возможности использования УКФС приведены результаты расчета параметров скалярного поля в плоском канале. Необходимые для расчета параметры потока вычисляются по экспериментальным данным [4]. Показано, что имеющийся объем экспериментальных данных достаточен для проведения вычислений. Трудности возникают только при определении коэффициента турбулентного трения и внутреннего масштаба турбулентного поля, для которых пришлось применять искусственное сглаживание результатов. Кроме того с целью уменьшения вычислительных трудностей в расчете использовалось несколько увеличенное значение для внутреннего масштаба турбулентного поля скорости. Проведенные вычисления позволили получить распределение по каналу средних значений и интенсивностей пульсаций скаляра, скалярной диссипации и турбулентного числа Шмидта. Получена также зависимость числа Шервуда (аналог числа Нуссельта для массопереноса) от числа Шмидта, построенного по термодинамическим свойствам среды.

Построенное решение иллюстрирует возможности подхода, основанного на УКФС. Материал, изложенный в препринте, повторяет содержание доклада, доложенного на семинаре "Численное моделирование процессов тепло- и массообмена"(рук. В.И.Полежаев, Г.С.Глушко) 18 февраля 2008 г.

## 2 Список аббревиатур и используемых обозначений

$B_{rr}(\mathbf{x})$  – корреляционная функция продольной компоненты турбулентной скорости;

$c(\mathbf{x}_{1|2}, t)$  – мгновенное значение скаляра;

$C(\mathbf{x}_{1|2})$  – среднее значение скаляра;

$c'(\mathbf{x}_{1|2}, t) = c(\mathbf{x}_{1|2}, t) - C(\mathbf{x}_{1|2})$  – отклонение мгновенного значения скаляра от среднего;

$D_{rm}$  – коэффициент вихревой диффузии (декорреляции)

$D_T(\mathbf{x}_{1|2}, t)$  – коэффициент турбулентной диффузии;

$Dm$  – молекулярный коэффициент диффузии;

$div_{r|\eta}(\mathbf{u})$  – дивергенция вектора аргумента по переменной, обозначенной индексом;

$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  – вектор, соединяющий точки  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ ;

$r, \theta, \phi$  – сферические переменные;

$R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$  – корреляционная функция скалярного поля;

$t$  – время;

$U_{1|2}$  – средняя скорость в соответствующих точках;

$\mathbf{x}_{1|2}$  – пространственная координата рассматриваемых точек;

$\mathbf{z}|\eta = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$  – положение центра отрезка, связывающего точки  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ ;

$\lambda$  – микромасштаб турбулентного поля скорости;

$\nu_m$  – коэффициент кинематической вязкости среды ( $\text{м}^2/\text{с}$ )

$\nu_T$  – коэффициент турбулентного трения ( $\frac{\langle uv \rangle}{\partial U / \partial y}$ )

$\mathbf{q}$  – вектор потока скаляра

$Sc_m$  – число Шмидта ( $\frac{\nu_m}{D_m}$ )

$Sc_T$  – турбулентное число Шмидта ( $\frac{\nu_T}{D_T}$ )

$Sw$  – число Шервуда, диффузионный аналог числа Нусельта ( $\frac{q \cdot L}{D_m \cdot (C(2) - C(0))}$ )

$\langle \dots \rangle$  – усреднение по реализациям или по времени для стационарных в среднем величин.

$\bar{R}$  – безразмерные корреляционные функции

Аббревиатуры:

КФС – корреляционная функция скалярного поля

УКФС – уравнение для корреляционной функции скалярного поля

КФПС – корреляционная функция поля скорости

## 3 Замыкание УКФС на основе метода моментов

### 3.1 Постановка задачи

Рассматривается перенос пассивной, то есть не влияющей на параметры поля скорости, примеси (скаляра) в турбулентном потоке постоянной плотности. Все необходимые сведения о турбулентном поле предполагаются известными. В принципе, в потоке возможно изменение значения скаляра в результате химической реакции, зависимость для скорости которой предполагается известной. Но в данном исследовании эти изменения не рассматриваются.

Целью является получение такой формы УКФС, которая наиболее совпадает с полученной ранее. Такой подход позволяет не только сохранить полученный ранее опыт решения УФКС, но и выявить все использованные при выводе предположения, что позволяет увидеть возможные пути уточнения модели.

Приведенный ниже вывод получен при следующих предположениях:

1. Плотность среды постоянна.
2. Химическая реакция не рассматривается.
3. Турбулентность стационарна, однородна и изотропна.
4. Среднее поле скорости однородно, что позволяет исключить его из рассмотрения.
5. Моментами высших порядков пренебрегается.
6. Предполагается равновесие между диссипативными и источниковыми членами.
7. Семиинвариант четвертого порядка  $\langle u_i u_j c_1 c_2 \rangle = 0$ .
8. Параметры переноса определяются в условиях отсутствия переноса. Похожая ситуация имеет место в молекулярной физике при вычислении коэффициентов переноса.

### 3.2 Вывод необходимых уравнений

Основной целью этого раздела является построение нового способа замыкания УКФС. Ранее при получении замкнутой формы этого уравнения использовалась гипотеза Прандтля и некоторые соображения, условия применимости которых совершенно неясны. Одной из возможностей более формального

подхода является метод моментов, который не только позволяет получить замкнутую форму необходимых нам уравнений, но и выявить основные предположения и ограничения способа замыкания, возникающие взаимозависимости и т. п.

### 3.2.1 Основы метода моментов и уравнение для потока

Наиболее просто проследить возможности метода моментов на примере уравнения для потока.

Исходным для дальнейшего является уравнение молекулярного переноса скаляра  $c$ :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u'_j \frac{\partial c}{\partial x_j} + Dm \frac{\partial c}{\partial x_j^2} \quad (1)$$

из которого для случая постоянной плотности усреднением получается уравнение для среднего значения:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -U_j \frac{\partial C}{\partial x_j} - \langle u'_j \frac{\partial c'}{\partial x_j} \rangle + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + Dm \frac{\partial C}{\partial x_j^2} \quad (2)$$

Здесь  $u'$  и  $c'$  пульсации,  $U$  и  $C$  - средние,  $\mathbf{q} = \langle \mathbf{u}' c' \rangle$  вектор потока скаляра.

Уравнение для КФС в однородных условиях при отсутствии химических превращений, записанное в переменных  $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ , будет:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{r}, t) + 2 \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \langle (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) c(\mathbf{x}_1, t) c(\mathbf{x}_2, t) \rangle = \\ Dm \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} R(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{r}, t) + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{r}, t) \right) + \\ (\langle c'_1 u'_2 \rangle + \langle c'_2 u'_1 \rangle) \frac{dC(\mathbf{x})}{dx} \Big|_{\mathbf{x}_1} \frac{dC(\mathbf{x})}{dx} \Big|_{\mathbf{x}_2} \end{aligned} \quad (3)$$

Использующиеся в дальнейшем уравнения динамической системы для переменных  $u'$  и  $c'$  (средняя скорость  $U$  тождественно равна нулю) будут:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} = -\alpha u'_i \quad (4)$$

$$\frac{\partial c'}{\partial t} = -\beta c' - u'_j \frac{\partial C}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial c'}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (5)$$

Здесь использованы простейшие ланжевенковские представления для диссипативных членов. Связь величин  $\alpha$  и  $\beta$  с распределением КФС определяется из соотношений для скоростей диссипации, полученных из точных уравнений и уравнений системы (4) и (5):

$$\alpha = \nu_m \cdot \Delta_r(R_{uu})|_{r=0} \quad (6)$$

$$\beta = D_m \cdot \Delta_r(R_{cc})|_{r=0} \quad (7)$$

Здесь  $\nu_m$  и  $D_m$  – молекулярные коэффициенты динамической вязкости и диффузии. Такая связь позволяет говорить о величинах  $\alpha$  и  $\beta$  как о характерных обратных временах диссипативных процессов, что полностью соответствует смыслу их введения в динамические уравнения (4) и (5).

Уравнение (5) получено вычитанием (2) из (1). Сохранение в уравнении (4) членов второго порядка не влияет на полученные далее результаты. Уравнения (4) и (5) могут прояснить условия, при которых справедлива гипотеза Прандтля для турбулентного переноса.

### 3.3 Уравнение для потока скаляра

Перекрестное умножение уравнений (4) и (5) на соответствующие отклонения  $c'$  и  $u'$ , сложение результатов и усреднение приводит к уравнению для компонент вектора потока  $q_i$ :

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -(\alpha + \beta)q_i - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \frac{\partial c'}{\partial x_j} \rangle \quad (8)$$

В случае равновесия между диссипативными и порождающими слагаемыми и пренебрежения третьими моментами получаем закон Фика:

$$q_i = -\frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{\alpha + \beta} \frac{\partial C}{\partial x_j} \quad (9)$$

Это соотношение может быть записано как скалярное произведение одноточечного тензора корреляций скорости  $\mathbf{R} = \langle u'_i u'_j \rangle$  на вектор градиента среднего поля.

$$q_i = -\frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{grad} C)}{\alpha + \beta} \quad (10)$$

Такой подход позволяет определить тензор турбулентной диффузии, который определяется диссипативными процессами и характеристиками турбулентного поля скорости. В предыдущих исследованиях коэффициент турбулентной диффузии являлся внешним параметром, который было необходимо определять из дополнительных соображений.

Относительно третьих моментов, опущенных при получении (9). Для случая изотропной и однородной турбулентности, переноса, происходящего только вдоль одной из осей (например  $i$ ), и независимости решения от остальных переменных, не равен нулю может быть только один третий момент  $\langle u_i'^2 c' \rangle$ . Остальные либо равны нулю сами либо равны нулю их пространственная производная.

### 3.4 Уравнение для двухточечного момента $\langle c_2 v_1 \rangle$

Для уточнения представления источникового члена в УКФС нам потребуется уравнение для двухточечного момента  $\langle c_2 v_1 \rangle$ , в который входят отклонения скорости и скаляра в различных точках. Как и ранее выполняя перекрестное умножение уравнений (4) и (5), сложение и усреднение, получим:

$$\frac{\partial \langle c_2 v_1 \rangle}{\partial t} = -(\alpha + \beta_2) \langle c_2 v_1 \rangle - \langle u'_{1,i} u'_{2,j} \rangle \frac{\partial C_2}{\partial x_{2,j}} - \langle u_i u_j \frac{\partial c'_2}{\partial x_{2,j}} \rangle \quad (11)$$

Пренебрегая третьими моментами и предполагая равновесие между порождением и диссипацией, получим аналог уравнения (10):

$$\langle c_2 v_1 \rangle = - \frac{(\mathbf{R}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{grad} C_2)}{\alpha + \beta_2} \quad (12)$$

Это соотношение для однородного турбулентного поля скорости ( $\alpha = invar$ ) может быть записано в форме:

$$\langle c_2 v_1 \rangle = \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{q}_2 \quad (13)$$

Приведенные выкладки в следующем параграфе будут применены для проверки эвристически найденного замыкания уравнения для корреляционной функции скалярного поля (КФС).

### 3.5 Третьи моменты в уравнении для КФС

Для замыкания уравнения для КФС в [1] использовалась гипотеза Прандтля для совместного момента следующего порядка:

$$\mathbf{M}_{ccu} = \langle (\mathbf{u}'_2 - \mathbf{u}'_1) c'(\mathbf{x}_1, t) c'(\mathbf{x}_2, t) \rangle \quad (14)$$

$$(15)$$

который также как поток, рассмотренный ранее, является вектором. Здесь  $u'_{1|2} = u'(\mathbf{x}_{1|2})$ .



Методом, примененным в предыдущем разделе, получим уравнение для  $\mathbf{M}_{ccu}$ . Производя соответствующие умножения и складывая результаты, получим после усреднения:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{ccu}}{\partial t} = -(\alpha + \beta_1 + \beta_2) \mathbf{M}_{ccu} - (\langle \mathbf{u}_2 u_{j,1} \rangle - \langle \mathbf{u}_1 u_{j,1} \rangle) \left( \frac{\partial \langle c_1 c_2 \rangle}{\partial x_{j,2}} - \frac{\partial \langle c_1 c_2 \rangle}{\partial x_{j,1}} \right) \quad (16)$$

При выводе этого уравнения предполагалось, что все поле турбулентности однородно ( $\alpha = \text{invar}$ ), плотность постоянна и семиинвариант четвертого порядка  $\langle u_i u_j c_1 c_2 \rangle$  равен нулю. Это позволяет разнести скаляр и скорости по разным операторам усреднения. Кроме того, в уравнении (16) предполагается, что поток скаляра отсутствует. Это напоминает типичную ситуацию с определением коэффициента молекулярного переноса, когда коэффициент переноса вычисляется при отсутствии собственно переноса.

Чтобы сделать переход к тензорной форме более ясным, удобно перейти к переменным  $(r_x, r_y, r_z; \mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ , в которых покомпонентное представление операций наиболее наглядно. В результате имеем соотношение:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{ccu}}{\partial t} = -(\alpha + \beta_1 + \beta_2) \mathbf{M}_{ccu} - 2(\langle \mathbf{u}_2 u_{j,2} \rangle - \langle \mathbf{u}_2 u_{j,1} \rangle) \frac{\partial \langle c_1 c_2 \rangle}{\partial r_j} \quad (17)$$

которое может быть переписано тензорной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{ccu}}{\partial t} = -(\alpha + \beta_1 + \beta_2) \mathbf{M}_{ccu} - 2(\mathbf{R}(0) - \mathbf{R}(r)) \mathbf{grad}_r \langle c_1 c_2 \rangle \quad (18)$$

Здесь  $\mathbf{R}$  - тензор корреляций скорости.

Фактически соотношение (18) получено в условиях, когда поле скаляра однородно. Для получения соотношения, соответствующего закону Фика, надо предположить равновесие процессов порождения и диссипации и изотропию турбулентности.

$$(\alpha + \beta_1 + \beta_2) \mathbf{M}_{ccu} = -2 \langle u'^2 \rangle (1 - \bar{\mathbf{R}}) \mathbf{grad}_r \langle c_1 c_2 \rangle \quad (19)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{R}}$  нормированная корреляционная функция поля скорости

В целом получено хорошее совпадение с результатом, полученным ранее [1, 2]. Удалось получить условия, при которых данный подход точен, и увидеть пути его уточнения. Отличие обнаружено только в описании третьего момента в неоднородном поле турбулентного переноса. Ранее предлагалось использовать сумму коэффициентов турбулентной диффузии, что казалось естественным для диффузии двух независимых частиц. В однородном поле ( $\beta = \text{invar}$ ),

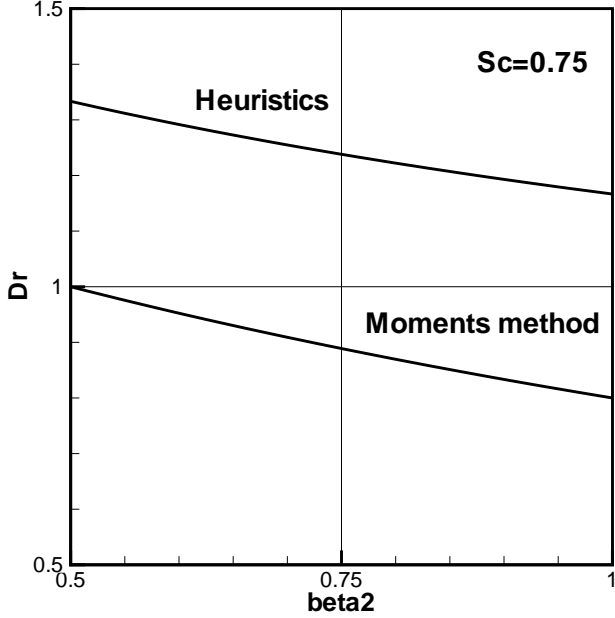


Рис. 1: Сравнение предсказанного и вычисленного значения фактора, учитывающего неоднородность переноса

естественно, наблюдается полное соответствие. На рис. 1 приведено сравнение величины  $D(x + r/2) + D(x - r/2)$ , предложенной ранее, с соответствующей величиной из уравнения (19).

Наибольшее отличие обнаружено в источниковых членах. Ранее предполагалось, что двухточечный момент  $\langle c_2 v_1 \rangle$  совпадает по величине с потоком скаляра, теперь эта ошибка устранена. И в источникный член вошла КФПС.

Член с моментом третьего порядка в УКФС с учетом выше приведенного будет:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\alpha + \beta_1 + \beta_2)r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} (1 - f) r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r, \theta) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (1 - f - 2/2 \frac{\partial f}{\partial r}) R(r, \theta) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (1 - f - 2/2 \frac{\partial f}{\partial r}) R(r, \theta) \cotan(\theta) \right) \quad (20) \end{aligned}$$

Здесь использованы представления для градиента в сферических переменных, в которых корреляционный тензор однородного и изотропного поля ско-

рости выражается наиболее просто:

$$\mathbf{grad}_r = \left( \frac{\partial}{\partial r} \langle c_1 c_2 \rangle, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \langle c_1 c_2 \rangle, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \langle c_1 c_2 \rangle \right), \quad (21)$$

для тензора  $\mathbf{1} - \overline{\mathbf{R}}$

$$\mathbf{1} - \overline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 - f & 0 & 0 \\ 0 & 1 - f - r/2 \frac{\partial f}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - f - r/2 \frac{\partial f}{\partial r} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

выражение для дивергенции в сферических переменных:

$$\text{div}(\mathbf{a}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (23)$$

и предположение о независимости КФС от переменной  $\phi$ .

Соотношение (20) позволяет получить распределение скалярной диссипации с учетом возможной неизотропности.

Наиболее важное отличие полученной формы третьих моментов связано с зависимостью величины  $\beta$  от распределения КФС и ее влиянием на коэффициент турбулентной диффузии. Это не позволяет разделить задачи о расчете среднего поля и КФС, и требует использование метода установления для численных расчетов. Однако при сильной зависимости времени расчета от количества уравнений метод установления может оказаться более выгодным.

### 3.6 Описание турбулентного поля

Упомянутая выше зависимость величин  $\beta$  от распределения КФС не позволяет сохранить метод описания турбулентного переноса, использованный ранее. Ранее предполагалось, что распределение коэффициента диффузии не зависит от распределения КФС и может быть задано заранее. Теперь необходимо знать не только интенсивность турбулентности  $\langle u'^2 \rangle$  и ее микромасштаб  $\lambda$ , но и коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$ :

$$\nu_T = \langle uv_i \rangle / \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (24)$$

который в рамках рассматриваемой модели необходим для определения параметра  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\langle u'^2 \rangle}{2\nu_T} \quad (25)$$

Для начала расчетов необходимо определение также параметра  $\beta$ , который может быть вычислен, если предположить, что нам известно или задано значение турбулентного числа Шмидта  $Sc_T$ . Выражая коэффициент турбулентной диффузии из (9), получим:

$$Sc_T = \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} \quad (26)$$

Некие физические соображения, высказываемые во многих ранних публикациях (см. например [5, 6]), приводят к соотношению  $\beta = 0.5\alpha$ , что соответствует значению числа Шмидта равному 0.75. Это позволяет определить начальное значение параметра  $\beta$ . В дальнейшем в процессе расчетов будет определено действительное распределение этого параметра, распределение коэффициента турбулентной диффузии и числа Шмидта, которое уже не будет постоянным.

## 4 Расчет процесса переноса в плоском канале

Возможности, возникающие при использовании УКФС, будут проиллюстрированы на примере, соответствующем экспериментальным исследованиям [4].

Исследования [4] проводились в канале:  $0.18 \times 2.4 \times 12 \text{ м}^3$ . Диапазон параметров:

1. Динамическая вязкость  $\nu_m = 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$
2. Максимальные осредненные скорости: 10.5; 22.2; 42.8 м/с
3. Числа Рейнольдса: 57 000; 120 000; 230 000;
4. Динамическая скорость: 39, 80 и 136 см/с

Расчеты проводятся в предположении, что число Рейнольдса равно  $\cdot 10^5$ . В качестве характерного масштаба длины  $L_H$  выбираем полуширину канала. В нашем случае  $L_H = 0.09 \text{ м}$ . Это позволяет вычислить скорость в центре канала  $U_0 = Re \cdot \nu/H = 10 \text{ м/с}$ . Что, в свою очередь, позволяет, используя вычисленное по экспериментальным данным значение производной от средней скорости, определить конкретное значение динамической скорости  $u_f = \sqrt{\nu \cdot \partial U / \partial z|_w} = 0.31 \text{ м/с}$ . Эти параметры необходимы для пересчета данных [4], приведенных в различных безразмерных формах.

## 4.1 Подготовка исходных данных

Полученные выше соотношения для турбулентных коэффициентов переноса и вязкости уже не позволяют задать произвольно коэффициент турбулентной диффузии. По-этому для иллюстрации возможностей нашего подхода требуется использование конкретных данных о поведении турбулентности. Результаты перевода данных экспериментального исследования [4] в форму, позволяющую их использовать при вычислениях, приведены ниже.

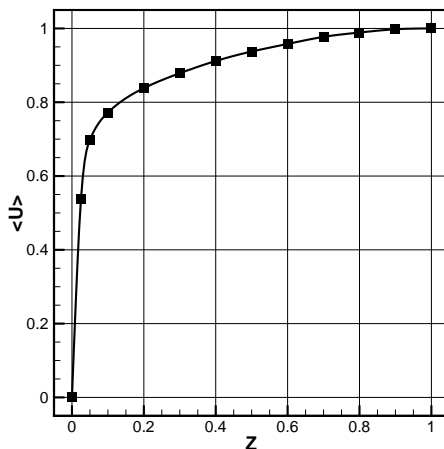


Рис. 2: Распределение по ширине канала осредненной скорости потока

Точки на кривых соответствуют максимальному значению числа Рейнольдса, меняющемуся для используемых данных в диапазоне  $(1.2 \div 2.3 \cdot 10^5)$ . Кривые получены при помощи сплайн-интерполяции, использовавшей 13 точек, взятых с графиков [4], что позволило при расчетах воспринимать эти данные как непрерывные функции, то есть получать необходимые нам величины при любых значениях параметров. Это необходимо при использовании некоторых процедур из библиотеки IMSL.

Распределение внутреннего масштаба поля скорости определялось по распределению коэффициента турбулентной вязкости, интенсивности турбулентности и др. Интересно, что вычисленный коэффициент турбулентной вязкости примерно в 400 раз превосходит молекулярный коэффициент.

При определении коэффициента турбулентной вязкости по экспериментальным данным мы сталкиваемся с проблемой точности определения производных по данным, взятым по достаточно редким таблицам. Необходимо применять различные способы сглаживания. На рис. 4 приведены непосред-

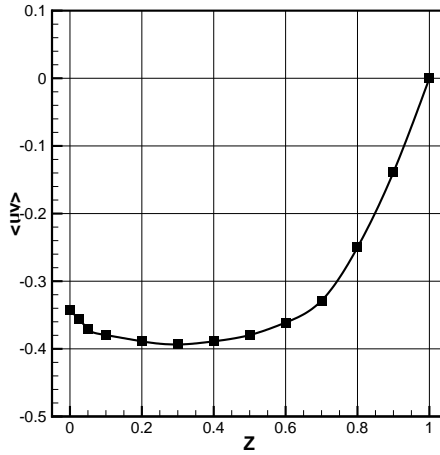


Рис. 3: Распределение по ширине канала турбулентного трения

ственно рассчитанное распределение и распределение после сглаживания. Аналогичная проблема возникает при определении внутренних масштабов (рис. 5). Полученные величины внутреннего масштаба соответствуют приведенным в [4] спектрам, хотя и несколько превышают предельные для спектра размеры. Была предпринята попытка, аппроксимировать КФПС вблизи нуля экспоненциальной кривой, что позволило бы определить внутренний масштаб скаляра непосредственно. Но это не удалось, так как расхождение экспериментальной кривой и аппроксимации не было обнаружено. Ни масштаб графика, ни экспериментальные возможности не позволили это сделать. Поэтому для расчетов КФПС строится следующим образом. Внутренний масштаб поля скорости задается из дополнительных соображений. Это значение используется при описании поведения КФПС около нуля, где КФПС задается параболой  $1 - r^2/(2\lambda^2)$ , а экспериментальная функция сдвигается в сторону больших  $r$  так, чтобы обеспечить касание к этой параболе. Полученное значение сдвига используется при построении сплайн-интерполяции. Результат такого построения и сравнение с экспериментальной кривой приведен на рис. 6. Пунктирная прямая на рисунке показывает место, в котором производится склейка. Эта процедура связана с удовлетворением требований к коэффициенту вихревой диффузии. Для того, чтобы под действием поля скорости не происходило бы изменения интенсивностей пульсаций скаляра, надо чтобы при  $r \rightarrow 0$   $D_{rm} \sim r^2$ , что возможно только при  $\frac{\partial R_{cc}}{\partial r}|_{r=0} = 0$ .

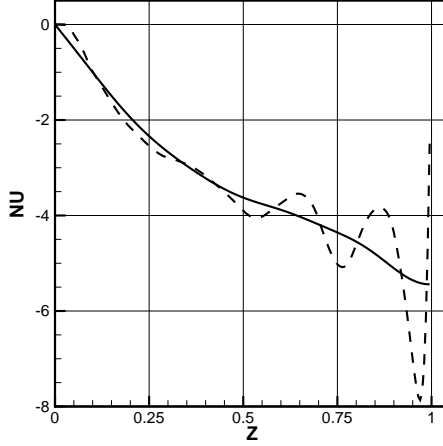


Рис. 4: Распределение по ширине канала турбулентного коэффициента трения, вычисленного по экспериментальным данным.

## 4.2 Результаты расчетов

Так как расчеты носят иллюстративный характер, то с целью упрощения расчетов, мы не будем принимать во внимание возможную неизотропию скалярной диссипации. Ранее [1] было показано, что такое упрощение не вносит принципиальных отличий в решение. В этом случае, пренебрегая зависимостью КФС от угла  $\theta$  и полагая его равным нулю, мы получаем возможность уменьшить число независимых переменных.

Система уравнений, описывающая перенос примеси в плоском канале, состоит из уравнения для среднего поля  $C(z)$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} (D_T(z) + Dm) \frac{\partial}{\partial z} C(z) = 0 \quad (27)$$

и уравнения для КФС  $R_{cc} = R_{cc}(z, r, \theta)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (D(z) + Dm) \frac{\partial}{\partial z} R_{cc} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (D_{rm} + 2Dm) \frac{\partial}{\partial r} R_{cc} \\ & + \bar{R}_{uu}(r) (D_T(z + r/2) + D_T(z - r/2)) \frac{dC(z)}{dz} \Big|_{z+r/2} \frac{dC(z)}{dz} \Big|_{z-r/2} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $D_T$  коэффициент турбулентной диффузии, вычисляемый по соотношению:

$$D_T(z) = \frac{\langle u_2'^2 \rangle}{\alpha(z) + \beta(z)} \quad (29)$$

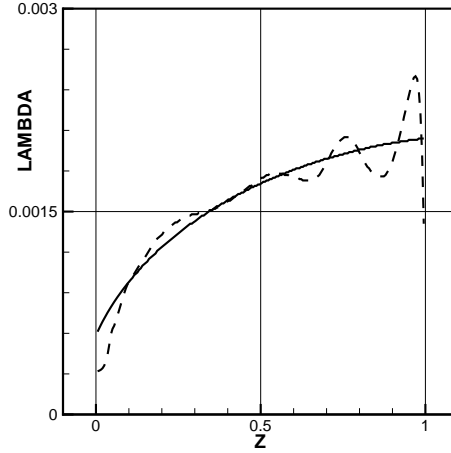


Рис. 5: Распределение по ширине канала вычисленного по экспериментальным данным внутреннего масштаба поля скорости

$D_{rm}$  - коэффициент вихревой диффузии <sup>1</sup>

$$D_{rm} = \left[ \frac{2\langle u_2'^2 \rangle}{\alpha(z) + \beta(z + r/2) + \beta(z - r/2)} \right] (1 - \bar{R}) + 2Dm \quad (30)$$

Величина  $\beta(z)$  определяется соотношением (7).

#### 4.2.1 Расчетная область и граничные условия

Уравнение для среднего решается на интервале  $z = (0, 2)$  с граничными условиями:

$$z = 0, \quad C(0) = 0; \quad z = 2, \quad C(2) = 1. \quad (31)$$

Уравнение для КФС решается на треугольнике  $r \geq 0, \quad z \subseteq (0, 2), \quad r \leq \min(z, 2 - z)$  с граничными условиями:

$$\begin{aligned} r = 0, \quad \frac{\partial R_{cc}(z, 0)}{\partial r} &= 0; \\ r = \min(z, 2 - z), \quad R_{cc}(z, r) &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

<sup>1</sup>Этот термин введен Э. О'Брайеном [7] и использовался при расчетах УКФС в однородных условиях [8]. Нам кажется, что термин "коэффициент декорреляции" является более точным.



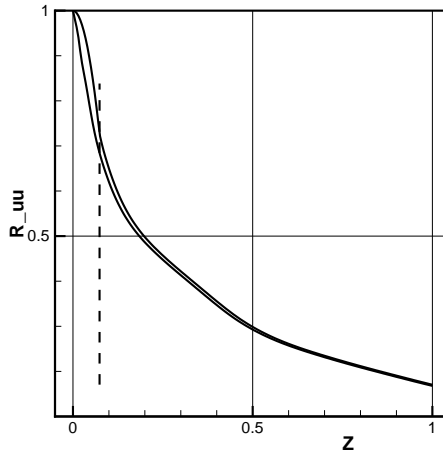


Рис. 6: Корреляционная функция поля скорости (КФПС) как функция продольного расстояния

Решение строилось при помощи процедур DBVPFD для среднего поля и DLSLXG для КФС, взятых из библиотеки IMSL. Первая, из которых реализовывала метод Ньютона для краевой задачи с автоматическим выбором сетки, вторая, – прямой способ обращения разреженной матрицы при помощи LU факторизации с использованием стратегии Марковица. Метод не очень быстрый, но единственный из многих испытанных, который обеспечивал получение симметричного решения. Решение строилось посредством организации циклов, в каждом из которых сначала рассчитывалось среднее поле, которое использовалось затем при расчете источниковых членов в уравнении для КФС. Оказалось, что 10 циклов достаточно для получения сходимости.

Определяемые в процессе расчета распределения величины  $\beta(z)$  позволяют получить распределение турбулентного числа Шмидта по сечению канала (26). Величина  $n$ , приведенная на рис. 7, соответствует номеру цикла. Видно, что основная форма распределения получается уже на первом цикле, а при  $n = 10$  практически достигается сходимость к искомому решению.

На рис. 8 приведено распределение коэффициента турбулентной диффузии. Кривая, соответствующая  $n = 0$ , представляет исходное распределение, полученное в предположении, что число  $Sc_T = 0.75$ . Любопытно, что найденное распределение по форме очень близко начальному.

На рис. 9 приведено распределение обратной величины характерного времени  $\beta$ , что позволяет определить распределение по каналу интенсивности перемешивания (микросмешения). Любопытно, что смешение максимально вбли-

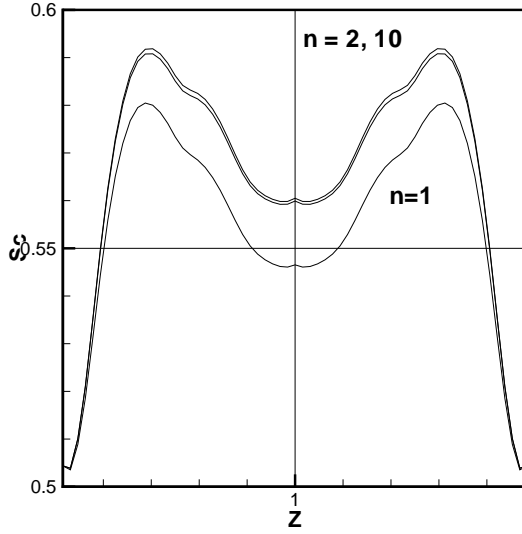


Рис. 7: Распределение по ширине канала турбулентного числа Шмидта

зи стенок, что естественно связано с зоной больших градиентов среднего поля. Но второй максимум, соответствующий границе погранслоя, требует дополнительного объяснения.

На рис. 10 приведена зависимость турбулентного потока  $q$  от молекулярного коэффициента диффузии  $D_m$ . На рисунке также изображена кривая, позволяющая оценить показатель степени  $p$  в законе  $q \sim D_m^p$ . Полученное значение  $p = 0.44$  соответствует степени 0.56 в соотношении, связывающем число Шервуда (аналог числа Нусельта) с молекулярным числом Шмидта.

При значительно больших значениях коэффициента  $D_m$  распределение средних должно вырождаться в прямую линию (см. рис. 11<sup>2</sup>). При этом величина потока будет прямо пропорциональна величине  $D_m$ , что соответствует тому, что значение числа Шервуда станет равно единице.

<sup>2</sup>Значения величины  $Dm$  от кривой к кривой отличаются в десять раз

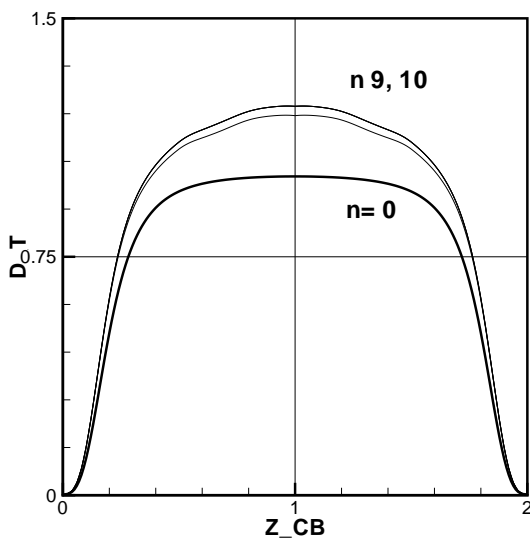


Рис. 8: Распределение по ширине канала турбулентного коэффициента диффузии

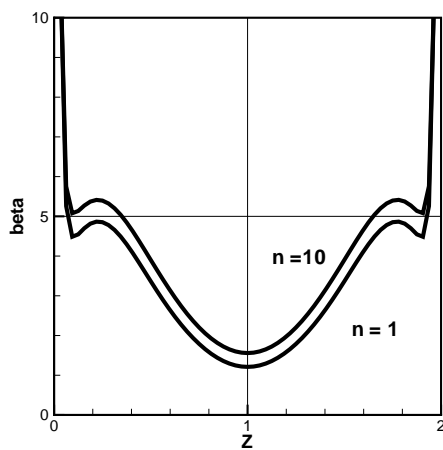


Рис. 9: Распределение по ширине канала обратной величины характерного времени  $\beta$

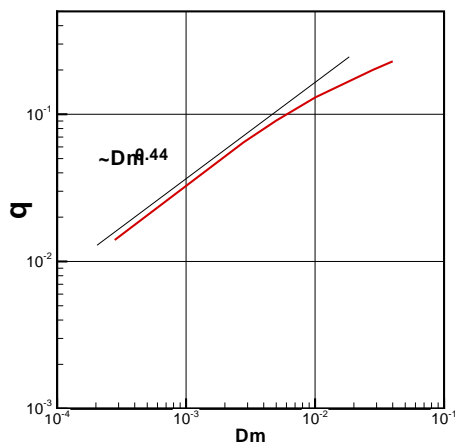


Рис. 10: Зависимость турбулентного потока от молекулярного коэффициента диффузии.

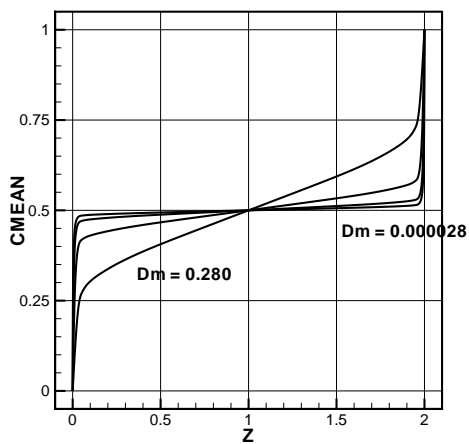


Рис. 11: Распределение  $C$  по ширине канала

## 5 Заключение

Использование метода моментов для упрощенной системы уравнений позволило подтвердить ранее найденную замкнутую форму уравнения для корреляционной функции скаляра. При сохранении общего вида уравнения удалось уточнить описание влияния турбулентного поля скорости на процесс декорреляции скалярного поля. Оказалось, что сохранить ранее полученную форму УКФС удастся только при выполнении ряда предположений, среди которых есть естественные:

1. постоянство плотности;
2. стационарность, однородность и изотропия турбулентности.
3. однородность среднего поля скорости;

так и затрагивающие принципиальные стороны явления:

1. равенство нулю некоторых моментов высших порядков;
2. равновесие между диссипативными и источниковыми членами.
3. равенство нулю семиинварианта четвертого порядка  $\langle u_i u_j c_1 c_2 \rangle = 0$ .
4. отсутствие влияния собственно переноса на его параметры. Похожая ситуация при вычислении коэффициентов переноса имеет место в молекулярной физике.

Несмотря на большое количество условий, ситуация с УКФС стала более определенной. Ясно, где искать пути устранения возможных расхождений теории с экспериментом или с результатами DNS. Так, например, известно [9], что при отсутствии равновесия между диссипативными и источниковыми членами необходимо рассматривать уравнения для потока или третьих моментов с сохранением эволюционных членов.

Другое отличие относится к виду источниковых членов в УКФС. Найдена их форма, содержащая КФПС.

Для иллюстрации возможностей подхода проведен расчет УКФС в плоском канале с использованием экспериментальных данных Ж. Конт-Белло [4]. Рассчитаны распределения по ширине канала турбулентного числа Шмидта, турбулентного коэффициента диффузии и турбулентной диссипации. Полученная зависимость турбулентного потока скаляра от молекулярного коэффициента диффузии позволила определить зависимость турбулентного числа Шервуда (аналог числа Нусельта) от числа Шмидта.

Работа поддержана программой ОЭММПУ №1 "Интегрированные модели физической механики".

# Список литературы

1. V.P. Krasitskii, V.A. Frost, Fluid Dynamics, 42(2) (2007) 190–200.
2. Красицкий В.П., Фрост В.А. Уравнение для корреляционной функции и плотность распределения вероятности скаляра в турбулентных реагирующих потоках. Препринт №833. М.: ИПМех РАН, 2007. 20 с.
3. Бабенко В.А., Фрост В.А. Зависимость скалярной диссипации от химических превращений в турбулентных реагирующих потоках. Препринт №840. М.: ИПМех РАН, 2007. 30 с.
4. G. Comte-Bellot, Ecoulement Turbulent entre deux Parois Paralleles. PSeTdMdA, Paris, 1965 P.175. (перевод: Ж. Конт-Белло, Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. Мир, Москва, 1968.)
5. Лушик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Уравнения переноса для характеристик турбулентности: модели и результаты расчетов. Итоги науки и техники, МЖГ, 1988, т. 22, с 3-61.
6. Фрост В.А. Описание процессов смешения в турбулентных потоках переменной плотности. Препринт №483. М.: ИПМех РАН, 1990. 28 с.
7. V. Eswaran, E. E. O'Brien, A. Deckert, Combust. Sci. Technol. 65(1) (1989) 1–18.
8. K. Tsai, E. E. O'Brien, Phys. Fluids A5(11) (1993) 2901–2910.
9. Fedorov A., Frost V., Kaminsky V. Turbulent transfer modeling in flows with chemical reactions // Transport phenomena in combustion: Proc. 8th Intern. Symp: Ed. by S.H. Chan San Francisco: Taylor and Francis. 1995. V. 2. P. 933-944.

# Список иллюстраций

- |   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Сравнение предсказанного и вычисленного значения фактора, учитывающего неоднородность переноса . . . . .             | 10 |
| 2 | Распределение по ширине канала осредненной скорости потока   | 13 |
| 3 | Распределение по ширине канала турбулентного трения . . . .  | 14 |
| 4 | Распределение по ширине канала турбулентного коэффициента трения, вычисленного по экспериментальным данным. . . . .  | 15 |
| 5 | Распределение по ширине канала вычисленного по экспериментальным данным внутреннего масштаба поля скорости . . . . . | 16 |

6	Корреляционная функция поля скорости (КФПС) как функция продольного расстояния . . . . .	17
7	Распределение по ширине канала турбулентного числа Шмидта . . . . .	18
8	Распределение по ширине канала турбулентного коэффициента диффузии . . . . .	19
9	Распределение по ширине канала обратной величины характерного времени $\beta$ . . . . .	19
10	Зависимость турбулентного потока от молекулярного коэффициента диффузии. . . . .	20
11	Распределение $C$ по ширине канала . . . . .	20

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Список аббревиатур и используемых обозначений</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Замыкание УКФС на основе метода моментов</b>	<b>5</b>
3.1	Постановка задачи . . . . .	5
3.2	Вывод необходимых уравнений . . . . .	5
3.2.1	Основы метода моментов и уравнение для потока . . . . .	6
3.3	Уравнение для потока скаляра . . . . .	7
3.4	Уравнение для двухточечного момента $\langle c_2 v_1 \rangle$ . . . . .	8
3.5	Третьи моменты в уравнении для КФС . . . . .	8
3.6	Описание турбулентного поля . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Расчет процесса переноса в плоском канале</b>	<b>12</b>
4.1	Подготовка исходных данных . . . . .	13
4.2	Результаты расчетов . . . . .	15
4.2.1	Расчетная область и граничные условия . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>21</b>

Владимир Андреевч Фрост  
Институт проблем механики, РАН

Уравнение для корреляционной функции скаляра и  
расчет турбулентных чисел Шмидта и Шервуда

**Подписано к печати 06.03.2008. Заказ № 6-2008. Тираж 30 экз.**

---

Отпечатано на ризографе Института проблем механики РАН  
119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, к. 1.

---