СИММЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сборник научных трудов

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

СИММЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сборник научных трудов

МОСКВА 2009

УДК 519:517
ББК 22.161.6
С37

Рецензенты:

Кафедра прикладной математики (№ 31) Московского инженерно-физического института (государственного университета)

Доктор физико-математических наук, профессор *В.К. Исаев*

Отражены результаты научных исследований, ведущихся в учебных и научных учреждениях России и стран СНГ в области математического и имитационного моделирования. Все результаты касаются симметрий дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными.

Сборник статей предназначен для широкого круга специалистов, занимающихся проблемами математического моделирования и интересующихся симметриями дифференциальных уравнений.

ISBN 978-5-7417-0234-5

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник научных трудов "Симметрии дифференциальных уравнений" посвящен актуальным задачам современного группового анализа дифференциальных уравнений. В сборнике собраны статьи ведущих специалистов, работающих в высших учебных заведениях и институтах РАН России.

Изучение теоретико-групповых свойств дифференциальных уравнений связано с именем выдающегося норвежского математика Софуса Ли (1842–1899). Им была создана теория групп непрерывных преобразований. Эта теория возникла на стыке трех крупнейших математических дисциплин – теории дифференциальных уравнений, алгебры и дифференциальной геометрии. Софус Ли создавал свою теорию как аналог теории Галуа применительно к дифференциальным уравнениям. Дальнейшее развитие теории групп непрерывных преобразований связано с именем академика Л.В. Овсянникова. Им была создана крупнейшая в мире научная школа. Отметим, что термин *групповой анализ* был также введен Л.В. Овсянниковым. По инициативе Л.В. Овсянникова и благодаря стараниям его ученика Н.Х. Ибрагимова регулярно проводятся конференции, посвященные теоретико-групповым свойствам дифференциальных уравнений — Modern Group Analysis (MOGRAN). Серия конференций MOGRAN началась с двух конференций по теоретико-групповым методам механики, проходивших в г. Калгари (Канада) в 1974 году и в г. Новосибирске (СССР) в 1978 году. Последующие MOGRAN-конференции проводились (список неполный): в 1988 (Красноярск, СССР), 1989 (Баку, СССР), 1991 (Уфа, СССР), 1992 (Катания, Италия), 1993 (Сызрань, Россия), 1994 (Йоханнесбург, ЮАР), 1996 (Йоханнесбург, ЮАР), 1997 (Нордфиорд, Норвегия), 2000 (Уфа, Россия), 2002 (Москва, Россия), 2004 (Кипр), 2007 (Карлскрона, Швеция) и в 2008 (Порто, Португалия). Ближайшая конференция предполагается в июне 2009 в Уфе.

Большинство авторов настоящего сборника являются активными участниками конференций MOGRAN.

Групповой анализ дифференциальных уравнений находит широкое применение при исследовании уравнений, возникающих в различных областях механики и физики. Ему посвящена обширная литература. Классическими являются монографии Л.В. Овсянникова (1978), Н.Г. Чеботарева (1940), Л.П. Эйзенхарта (1947). Последние достижения и приложения группового анализа отражены в монографиях Н.Х. Ибрагимова (1983), П. Олвера (1989), В.И. Фущича, В.М Штелень, Н.И. Серова (1989), В.К. Андреева, О.В. Капцова, В.В. Пухначева, А.А. Родионова (1994) и др. Допускаемая исходными уравнениями группа преобразований используется для построения частных точных решений. Наиболее широко используются инвариантные относительно подгруппы допускаемой группы преобразований решения (Л.В. Овсянников (1978)). Используемые в механике сплошной среды автомодельные решения, обычно находящиеся с использованием анализа размерностей (Л.И. Седов (1978)), являются инвариантными решениями относительно преобразований растяжения зависимых и независимых переменных. Отметим, что центральное утверждение анализа размерностей (π-теорема) также может быть доказано на основе использования групп непрерывных преобразований (Н.Г. Чеботарев (1949)).

В сборнике представлены 14 статей, которые можно условно разделить на две части. В первой части рассматриваются симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом рассматриваются задачи из различных областей теоретической и прикладной механики, теории управления. Вторая часть сборника посвящена исследованию симметрий уравнений с частными производными. Рассматриваемые уравнения применяются к решению задач механики сплошной среды, исследованию различных физических моделей. В сборнике собраны статьи, представляющие как теоретическое, так и прикладное значение.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Сборник научных трудов “Симметрии дифференциальных уравнений” представляет интерес как для специалистов в области групповых свойств дифференциальных уравнений, так и специалистов в области математической физики, теоретической и прикладной механики, механики жидкости и газа, теории управления. Общность теоретико-группового подхода при исследовании различных свойств дифференциальных уравнений делает сборник полезным как математикам, работающим в физических, технических и информационных направлениях, так и специалистам по экспериментальным и численным методам.

Авторы благодарят А.Г. Сенаторова за содействие в издании настоящего сборника.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 517.956

А.В. Аксенов
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет
aksenov@mech.math.msu.su

СИММЕТРИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ[1]

Приведен обзор полученных ранее результатов. Представлено решение задачи нахождения симметрий линейных неоднородных дифференциальных уравнений с δ-функцией в правой части. Приведен алгоритм построения инвариантных фундаментальных решений. В качестве примера применения алгоритма рассмотрены неоднородные с δ-функцией в правой части классические уравнения математической физики: одномерное уравнение теплопроводности, двумерное бигармоническое уравнение, двумерное волновое уравнение и трехмерное уравнение Лапласа. Найдены их симметрии и с их помощью построены новые нетривиальные параметрические семейства фундаментальных решений. Изложен метод построения функции Римана на основе использования симметрий фундаментальных решений. Рассмотрен пример построения функции Римана.

Введение. Групповой анализ дифференциальных уравнений находит широкое применение при исследовании уравнений математической физики. Ему посвящена обширная литература. Классическими являются монографии Л.В. Овсянникова, Н.Г. Чеботарева, Л.П. Эйзенхарта [1–5]. Последние достижения и приложения группового анализа отражены в монографиях [6–20]. Допускаемая исходными уравнениями группа пре-

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 06-01-00707 и 08-01-00401) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-610.2008.1).

образований используется для построения частных точных решений. Наиболее широко используются инвариантные относительно подгруппы допускаемой группы преобразований решения [1]. Используемые в механике сплошной среды автомодельные решения, обычно находящиеся с использованием анализа размерностей [21], являются инвариантными решениями относительно преобразований растяжения зависимых и независимых переменных. Отметим, что центральное утверждение анализа размерностей (π-теорема) также может быть доказано на основе использования групп непрерывных преобразований [22].

Было замечено, что фундаментальные решения классических линейных уравнений математической физики (например, уравнение Лапласа, волновое уравнение, уравнение теплопроводности) обычно являются инвариантными решениями (см., например, [23, 24]). Фундаментальные решения требуют использования аппарата теории обобщенных функций [25–30]. Это, в свою очередь, потребовало обобщения теории локальных групп преобразований в пространстве обобщенных функций [31].

В работах [32–35] был предложен метод нахождения симметрий линейных неоднородных дифференциальных уравнений с δ-функцией в правой части, приведен алгоритм построения инвариантных фундаментальных решений. Отметим, что в этих работах для нахождения симметрий уравнений с δ-функцией в правой части использовались конечные преобразования.

Примеры построения инвариантных фундаментальных решений приведены в работах [24, 35–41].

В работе [42] применительно к частному гиперболическому уравнению второго порядка с двумя независимыми переменными Б. Риман предложил "метод интегрирования Римана", получивший в дальнейшем широкое развитие [43, 44]. Для применения метода необходимо построить так называемую функцию Римана, являющуюся решением специальной характеристической задачи Коши. Общего метода построения функции Римана не существует. В работе [45] дан подробный анализ шести известных способов построения функции Римана для частных типов уравнений. Например, один из способов был предложен Ж. Адамаром. Им было показано, что функция Римана совпадает с коэффициентом при логарифмическом члене в элементарном решении уравнения [46]. Н.Х. Ибрагимовым [47] на основе использования результатов Л.В Овсянникова по групповой классификации однородных гиперболических уравнений второго порядка [2] было предложено находить функцию Римана с помощью симметрий уравнения.

В настоящей работе показана инвариантность функции Римана относительно симметрий фундаментальных решений и предложен метод ее построения.

1. Нахождение симметрий линейных дифференциальных уравнений с δ-функцией в правой части. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с частными производными p-го порядка:

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{p} A_\alpha(x)\, D^\alpha u = 0\,, \qquad x \in R^m\,. \tag{1}$$

Здесь приняты стандартные обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ – мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$,

$$D^\alpha \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^{\alpha_m}\,.$$

Фундаментальные решения уравнения (1) являются решениями уравнения

$$Lu = \delta(x - x_0)\,. \tag{2}$$

В работе [48] было показано, что линейное однородное уравнение (1) может допускать операторы симметрии только сле-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

дующего вида:

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u}\,, \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0\,.$$

Основная алгебра Ли операторов симметрии уравнения (1) как векторное пространство есть прямая сумма двух подалгебр: подалгебры, состоящей из операторов вида

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \zeta(x)\,u\,\frac{\partial}{\partial u}\,, \tag{3}$$

и бесконечномерной подалгебры, порожденной операторами

$$X = \varphi(x)\,\frac{\partial}{\partial u}\,, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ – произвольное решение уравнения (1). Отметим, что операторы (4), очевидно, являются операторами симметрии уравнения (2). В дальнейшем рассматриваются лишь операторы вида (3).

Определение 1. *Симметриями уравнения* (2) *называются преобразования, переводящие любое решение уравнения* (2) *в его решение. При этом предполагается, что точка* $x = x_0$ *является неподвижной.*

Симметрии оставляют инвариантным вид уравнения (2). Обозначим через $\underset{p}{X}$ продолжение порядка p оператора (3).

Предложение 1. *Для того чтобы инфинитезимальный оператор вида* (3) *являлся оператором симметрии уравнения* (1)*, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $\lambda = \lambda(x)$*, удовлетворяющая тождеству*

$$\underset{p}{X}(Lu) \equiv \lambda(x)\,Lu \tag{5}$$

для любой функции $u = u(x)$ *из области определения уравнения* (1).

Справедливость предложения 1 следует из структуры формул продолжения [1] для инфинитезимального оператора вида (3).

Сформулируем основной результат работы [35].

Теорема 1. *Алгебра Ли операторов симметрии уравнения* (2) *является подалгеброй алгебры Ли операторов симметрии уравнения* (1), *выделяемой соотношениями*

$$\xi^i(x_0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m\,, \tag{6}$$

$$\lambda(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x_0^i} = 0\,. \tag{7}$$

Замечание 1. В работе [39, p. 61] вместо условия (7) предложено другое условие. Авторы использовали определение симметрии, справедливое только для линейных дифференциальных уравнений [20], и для получения своего условия применяли инфинитезимальный критерий инвариантности дифференциального уравнения. Подчеркнем, что в работе [35] при доказательстве теоремы 1 использовались конечные (не инфинитезимальные) преобразования левой и правой частей линейного дифференциального уравнения с δ-функцией в правой части.

Определение 2. *Симметриями фундаментальных решений* (*или симметриями уравнения* (2)) *будем называть симметрии уравнения* (1), *удовлетворяющие соотношениям* (6), (7).

Сформулируем алгоритм нахождения фундаментальных решений на основе использования симметрий:

1. Нахождение общего вида оператора симметрии линейного дифференциального уравнения (1) и соответствующей ему функции $\lambda(x)$, удовлетворяющей тождеству (5).
2. Получение на основе ограничений (6), (7) алгебры Ли операторов симметрии уравнения (2).

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

3. Построение инвариантных фундаментальных решений с помощью симметрий уравнения (2).
4. Получение новых фундаментальных решений из известных с помощью симметрий уравнения (2) (производство решений).

Замечание 2. При нахождении обобщенных инвариантных фундаментальных решений необходимо решать редуцированные уравнения (эти уравнения записываются в инвариантах соответствующих групп преобразований) в классе обобщенных функций.

Замечание 3. Построение фундаментальных решений с помощью симметрий линейных уравнений с δ-функцией в правой части особенно эффективно для многомерных линейных уравнений (даже с постоянными коэффициентами) и для уравнений с переменными коэффициентами, когда традиционный метод интегральных преобразований неприменим.

2. Примеры построения инвариантных фундаментальных решений. Рассмотрим несколько примеров нахождения симметрий фундаментальных решений и построения инвариантных фундаментальных решений классических уравнений математической физики.

Пример 1. Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{8}$$
Фундаментальные решения уравнения теплопроводности удовлетворяют уравнению
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x,t)\,. \tag{9}$$

Выпишем конечномерную часть базиса алгебры Ли операторов симметрии уравнения (8) [49]:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}\,,$$
$$X_4 = 4xt\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u}\,,$$
$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}\,, \qquad X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Найдем операторы симметрии, допускаемые уравнением (9). Для этого запишем общий вид оператора симметрии, допускаемого уравнением (8), $X = \sum a_i X_i \quad (i = 1, \ldots, 6)$ или

$$\begin{aligned} X = (a_1 + a_3x + 4a_4xt + 2a_5t)\frac{\partial}{\partial x} + \\ + (a_2 + 2a_3t + 4a_4t^2)\frac{\partial}{\partial t} - \big[a_4(x^2+2t) + a_5x - a_6\big]u\frac{\partial}{\partial u}\,, \end{aligned} \tag{10}$$

где a_i $(i = 1, \ldots, 6)$ – произвольные постоянные. Оператору симметрии (10) соответствует функция $\lambda(x,t)$

$$\lambda = -\big[2a_3 + a_4(x^2+10t) + a_5x - a_6\big]\,.$$

Тогда, используя теорему 1, находим

$$a_1 = a_2 = 0\,, \qquad a_3 + a_6 = 0\,.$$

В результате получаем следующее предложение.

Предложение 2. *Уравнение* (9) *допускает алгебру Ли операторов симметрии с базисом конечномерной части*

$$\begin{aligned} Y_1 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}\,, \\ Y_2 &= 4xt\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u}\,, \\ Y_3 &= 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности известно (см. [28, с. 198]) :

$$u = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \,, \tag{12}$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда. Очевидно, что оно является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, соответствующей оператору симметрии Y_1 (оператору симметрии Y_1 соответствует однопараметрическая группа неоднородных растяжений $x' = e^a\, x$, $t' = e^{2a}\, t$, $u' = e^{-a}\, u$, где a – групповой параметр).

Покажем, что фундаментальное решение (12) является инвариантным относительно однопараметрических групп преобразований, соответствующих операторам симметрии Y_2, Y_3. Оператору симметрии Y_2 соответствует однопараметрическая группа преобразований [7, с. 166] :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{1-4at}\,, \\ t' &= \frac{t}{1-4at}\,, \\ u' &= u\sqrt{1-4at}\, e^{-\frac{ax^2}{1-4at}}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Непосредственной проверкой проверяется инвариантность фундаментального решения (12) относительно однопараметрической группы преобразований (13). Аналогично, оператору симметрии Y_3 соответствует однопараметрическая группа преобразований [7, с. 166] :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{1-4at}\,, \qquad t' = t\,, \\ u' &= u\, e^{-ax-a^2 t}\,, \end{aligned} \tag{14}$$

и фундаментальное решение (12) инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований (14).

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Предложение 3. *Фундаментальное решение* (12) *инвариантно относительно группы преобразований, соответствующей алгебре Ли операторов симметрии с базисом* (11).

Пример 2. Рассмотрим двумерное бигармоническое уравнение

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0\,. \tag{15}$$

Фундаментальные решения двумерного бигармонического уравнения удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \delta(x, y)\,. \tag{16}$$

Выпишем конечномерную часть базиса алгебры Ли операторов симметрии уравнения (15) [16, с. 324; 50] :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

$$X_4 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad X_5 = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xu\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

$$X_6 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y} + 2yu\frac{\partial}{\partial u}\,, \qquad X_7 = u\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Найдем операторы симметрии, допускаемые уравнением (16). Для этого запишем общий вид оператора симметрии, допускаемого уравнением (15), $X = \sum a_i X_i \quad (i = 1, \ldots, 7)$ или

$$\begin{aligned} X = \bigl[a_1 + a_3 x + a_4 y + a_5(x^2 - y^2) + 2a_6 xy\bigr]\frac{\partial}{\partial x} &+ \\ + \bigl[a_2 + a_3 y - a_4 x + 2a_5 xy + a_6(y^2 - x^2)\bigr]\frac{\partial}{\partial y} &+ \\ + (2a_5 x + 2a_6 y + a_7)u\frac{\partial}{\partial u}&\,, \end{aligned} \tag{17}$$

где a_i $(i = 1, \ldots, 7)$ – произвольные постоянные. Оператору симметрии (17) соответствует функция $\lambda(x, y)$

$$\lambda = a_7 - 4a_3 - 6a_5 x - 6a_6 y\,.$$

Тогда, используя теорему 1, находим

$$a_1 = a_2 = 0\,, \qquad a_7 - 2a_3 = 0\,.$$

Предложение 4. *Уравнение* (16) *допускает алгебру Ли операторов симметрии с базисом конечномерной части*:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2u\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
&Y_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,,\\
&Y_3 = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xu\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
&Y_4 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y} + 2yu\frac{\partial}{\partial u}\,.
\end{aligned}$$

Фундаментальное решение бигармонического уравнения известно (см. [51, с. 177]) :

$$u = \frac{x^2 + y^2}{16\pi}\,\ln\,(x^2 + y^2)\,. \tag{18}$$

Оператору симметрии Y_1 соответствует однопараметрическая группа неоднородных растяжений $x' = e^a\,x$, $t' = e^a\,t$, $u' = e^{2a}\,u$, где a – групповой параметр. Под действием этой однопараметрической группы фундаментальное решение (18) преобразуется в фундаментальное решение:

$$u = \frac{x^2 + y^2}{16\pi}\left[\ln\,(x^2 + y^2) + 2a\right].$$

Очевидно, что решение (18) инвариантно относительно однопараметрической группы вращений, соответствующей оператору симметрии Y_2.

Рассмотрим оператор симметрии Y_3. Оператору симметрии Y_3 соответствует однопараметрическая группа преобразований:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - a(x^2+y^2)}{1-2ax+a^2(x^2+y^2)}\,, \\ y' &= \frac{y}{1-2ax+a^2(x^2+y^2)}\,, \\ u' &= \frac{u}{1-2ax+a^2(x^2+y^2)}\,, \end{aligned} \tag{19}$$

где a – групповой параметр.

Под действием однопараметрической группы преобразований (19) фундаментальное решение (18) преобразуется в нетривиальное фундаментальное решение:

$$u = \frac{[x-a(x^2+y^2)]^2+y^2}{16\pi[1-2ax+a^2(x^2+y^2)]}\cdot\ln\left[\frac{\big(x-a(x^2+y^2)\big)^2+y^2}{\big(1-2ax+a^2(x^2+y^2)\big)^2}\right]. \tag{20}$$

Аналогично можно рассмотреть оператор симметрии Y_4. Оператору симметрии Y_4 соответствует однопараметрическая группа преобразований:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{1-2ay+a^2(x^2+y^2)}\,, \\ y' &= \frac{y - a(x^2+y^2)}{1-2ay+a^2(x^2+y^2)}\,, \\ u' &= \frac{u}{1-2ay+a^2(x^2+y^2)}\,, \end{aligned} \tag{21}$$

где a – групповой параметр.

Под действием однопараметрической группы преобразований (21) фундаментальное решение (18) преобразуется в нетривиальное фундаментальное решение:

$$u = \frac{1}{16\pi}\cdot\frac{x^2+\big(y-a(x^2+y^2)\big)^2}{1-2ay+a^2(x^2+y^2)}\cdot\ln\left[\frac{x^2+\big(y-a(x^2+y^2)\big)^2}{\big(1-2ay+a^2(x^2+y^2)\big)^2}\right]. \tag{22}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Замечание 4. Можно рассмотреть композицию преобразований (19), (21). Тогда вместо однопараметрических семейств (20), (22) фундаментальных решений бигармонического уравнения можно получить двухпараметрическое семейство фундаментальных решений.

Пример 3. Рассмотрим двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{23}$$

Фундаментальные решения двумерного волнового уравнения удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \delta(x, y, t)\,. \tag{24}$$

Выпишем конечномерную часть базиса алгебры Ли операторов симметрии уравнения (23) (см. [7, с. 171]):

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial t}\,,\\
&X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + t\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad X_5 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,,\\
&X_6 = t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad X_7 = t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}\,,\\
&X_8 = (x^2 - y^2 + t^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xt\frac{\partial}{\partial t} - xu\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
&X_9 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2 + t^2)\frac{\partial}{\partial y} + 2yt\frac{\partial}{\partial t} - yu\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
&X_{10} = 2xt\frac{\partial}{\partial x} + 2yt\frac{\partial}{\partial y} + (x^2 + y^2 + t^2)\frac{\partial}{\partial t} - tu\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
&X_{11} = u\frac{\partial}{\partial u}\,.
\end{aligned}$$

Найдем операторы симметрии, допускаемые уравнением (24).

Для этого запишем общий вид оператора симметрии, допускаемого уравнением (23), $X = \sum a_i\, X_i \quad (i = 1, \ldots, 11)$ или

$$\begin{aligned} X = \big[a_1 + a_4x + a_5y + a_6t + a_8(x^2 - y^2 + t^2) + \\ + 2a_9xy + 2a_{10}xt\big]\,\frac{\partial}{\partial\, x} + \\ + \big[a_2 + a_4y - a_5x + a_7t + 2a_8xy + \\ + a_9(y^2 - x^2 + t^2) + 2a_{10}yt\big]\,\frac{\partial}{\partial\, y} + \\ + \big[a_3 + a_4t + a_6x + a_7y + 2a_8xt + 2a_9yt + \\ + 2a_{10}(x^2 + y^2 + t^2)\big]\,\frac{\partial}{\partial\, t} - \\ - (a_8x + a_9y + a_{10}t - a_{11})u\,\frac{\partial}{\partial\, u}\,, \end{aligned} \tag{25}$$

где a_i $(i = 1, \ldots, 11)$ – произвольные постоянные. Оператору симметрии (25) соответствует функция $\lambda(x, y, t)$

$$\lambda = -2a_4 - 5(a_8x + a_9y + a_{10}t) + a_{11}\,.$$

Тогда, используя теорему 1, находим

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0\,, \qquad a_4 + a_{11} = 0\,.$$

В результате получаем следующее предложение.

Предложение 5. *Уравнение* (24) *допускает алгебру Ли операторов симметрии с базисом конечномерной части*:

$$\begin{aligned} &Y_1 = x\frac{\partial}{\partial\, x} + y\frac{\partial}{\partial\, y} + t\frac{\partial}{\partial\, t} - u\frac{\partial}{\partial\, u}\,, \\ &Y_2 = y\frac{\partial}{\partial\, x} - x\frac{\partial}{\partial\, y}\,, \\ &Y_3 = t\frac{\partial}{\partial\, x} + x\frac{\partial}{\partial\, t}\,, \end{aligned}$$

$$Y_4 = t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}\,,$$
$$Y_5 = (x^2 - y^2 + t^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xt\frac{\partial}{\partial t} - xu\frac{\partial}{\partial u}\,,$$
$$Y_6 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2 + t^2)\frac{\partial}{\partial y} + 2yt\frac{\partial}{\partial t} - yu\frac{\partial}{\partial u}\,,$$
$$Y_7 = 2xt\frac{\partial}{\partial x} + 2yt\frac{\partial}{\partial y} + (x^2 + y^2 + t^2)\frac{\partial}{\partial t} - tu\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Фундаментальное решение двумерного волнового уравнения известно (см. [28, с. 200]) :

$$u = \frac{\theta(t - \sqrt{x^2 + y^2})}{2\pi\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}\,. \tag{26}$$

Оператору симметрии Y_1 соответствует однопараметрическая группа неоднородных растяжений $x' = e^a\,x$, $y' = e^a\,y$, $t' = e^a\,t$, $u' = e^{-a}\,u$, где a – групповой параметр. Фундаментальное решение (26) инвариантно относительно действия этой однопараметрической группы преобразований.

Оператору симметрии Y_2 соответствует однопараметрическая группа вращений в плоскости (x,y) :

$$\begin{aligned} x' &= x\cos a + y\sin a\,,\\ y' &= -x\sin a + y\cos a\,,\\ t' &= t\,, \qquad u' = u\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Оператору симметрии Y_3 соответствует однопараметрическая группа гиперболических вращений в плоскости (x,t) :

$$\begin{aligned} x' &= x\,\mathrm{ch}\,a + t\,\mathrm{sh}\,a\,,\\ t' &= x\,\mathrm{sh}\,a + t\,\mathrm{ch}\,a\,,\\ y' &= y\,, \qquad u' = u\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Оператору симметрии Y_4 соответствует однопараметрическая группа гиперболических вращений в плоскости (y,t) :

$$\begin{aligned} y' &= y\,\mathrm{ch}\,a + t\,\mathrm{sh}\,a\,, \\ t' &= y\,\mathrm{sh}\,a + t\,\mathrm{ch}\,a\,, \\ x' &= x\,, \qquad u' = u\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Фундаментальное решение (26) инвариантно относительно действия однопараметрических групп преобразований (27), (28), (29).

Оператору симметрии Y_5 соответствует однопараметрическая группа преобразований [7, с. 172] :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + a(t^2 - x^2 - y^2)}{1 - 2ax - a^2(t^2 - x^2 - y^2)}\,, \\ y' &= \frac{y}{1 - 2ax - a^2(t^2 - x^2 - y^2)}\,, \\ t' &= \frac{t}{1 - 2ax - a^2(t^2 - x^2 - y^2)}\,, \\ u' &= \sqrt{1 - 2ax - a^2(t^2 - x^2 - y^2)}\,u\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Под действием однопараметрической группы преобразований (30) фундаментальное решение (26) преобразуется в нетривиальное фундаментальное решение:

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1 - 2ax - a^2(t^2 - x^2 - y^2)}{t^2 - [x + a(t^2 - x^2 - y^2)]^2 - y^2}} \times \\ \times\,\theta\Big(t - \sqrt{[x + a(t^2 - x^2 - y^2)]^2 + y^2}\Big)\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Можно показать, что оператору симметрии Y_6 соответствует однопараметрическая группа преобразований:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x}{1-2ay-a^2(t^2-x^2-y^2)}\,,\\
y' &= \frac{y+a(t^2-x^2-y^2)}{1-2ay-a^2(t^2-x^2-y^2)}\,,\\
t' &= \frac{t}{1-2ay-a^2(t^2-x^2-y^2)}\,,\\
u' &= \sqrt{1-2ay-a^2(t^2-x^2-y^2)}\,u\,.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Под действием однопараметрической группы преобразований (32) фундаментальное решение (26) преобразуется в нетривиальное фундаментальное решение:

$$
\begin{aligned}
u = \frac{1}{2\pi}&\sqrt{\frac{1-2ay-a^2(t^2-x^2-y^2)}{t^2-x^2-[y+a(t^2-x^2-y^2)]^2}}\times\\
&\times\theta\Big(t-\sqrt{x^2+[y+a(t^2-x^2-y^2)]^2}\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Можно показать, что оператору симметрии Y_7 соответствует однопараметрическая группа преобразований:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x}{1-2at+a^2(t^2-x^2-y^2)}\,,\\
y' &= \frac{y}{1-2at+a^2(t^2-x^2-y^2)}\,,\\
t' &= \frac{t-a(t^2-x^2-y^2)}{1-2at+a^2(t^2-x^2-y^2)}\,,\\
u' &= \sqrt{1-2at+a^2(t^2-x^2-y^2)}\,u\,.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Под действием однопараметрической группы преобразований (34) фундаментальное решение (26) преобразуется в нетриви-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

альное фундаментальное решение:

$$u = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1-2at+a^2(t^2-x^2-y^2)}{[t-a(t^2-x^2-y^2)]^2-x^2-y^2}}\times \\ \times\,\theta\Big(t-a(t^2-x^2-y^2)-\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,. \tag{35}$$

Замечание 5. Можно рассмотреть композицию преобразований (30), (32), (34). Тогда вместо однопараметрических семейств (31), (33), (35) фундаментальных решений двумерного волнового уравнения можно получить трехпараметрическое семейство фундаментальных решений.

Пример 4. Рассмотрим трехмерное уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\,. \tag{36}$$

Фундаментальные решения трехмерного уравнения Лапласа удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\delta(x,y,z)\,. \tag{37}$$

Выпишем конечномерную часть базиса алгебры Ли операторов симметрии уравнения (36) (см. [6, с. 94]):

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}\,,\qquad X_2=\frac{\partial}{\partial y}\,,\qquad X_3=\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

$$X_4=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\,,\qquad X_5=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

$$X_6=z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\,,\qquad X_7=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

$$X_8=(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial}{\partial x}+2xy\frac{\partial}{\partial y}+2xz\frac{\partial}{\partial z}-xu\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

$$X_9=2xy\frac{\partial}{\partial x}+(y^2-x^2-z^2)\frac{\partial}{\partial y}+2yz\frac{\partial}{\partial z}-yu\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

$$X_{10} = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z} - zu\frac{\partial}{\partial u}\,,$$
$$X_{11} = u\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Найдем операторы симметрии, допускаемые уравнением (37). Для этого запишем общий вид оператора симметрии, допускаемого уравнением (36), $X = \sum a_i\,X_i \quad (i = 1, \ldots, 11)$ или

$$\begin{aligned} X = \big[&a_1 + a_4x + a_5y + a_6z + a_8(x^2 - y^2 - z^2) + \\ &\qquad + 2a_9xy + 2a_{10}xz\big]\frac{\partial}{\partial x} + \\ + \big[&a_2 + a_4y - a_5x + a_7z + 2a_8xy + \\ &\qquad + a_9(y^2 - x^2 - z^2) + 2a_{10}yz\big]\frac{\partial}{\partial y} + \\ + \big[&a_3 + a_4z - a_6x - a_7y + 2a_8xz + 2a_9yz + \\ &\qquad + a_{10}(z^2 - x^2 - y^2)\big]\frac{\partial}{\partial z} - \\ &\qquad - (a_8x + a_9y + a_{10}z - a_{11})u\,\frac{\partial}{\partial u}\,, \end{aligned} \tag{38}$$

где a_i $(i = 1, \ldots, 11)$ – произвольные постоянные. Оператору симметрии (38) соответствует функция $\lambda(x, y, z)$

$$\lambda = -2a_4 - 5(a_8x + a_9y + a_{10}z) + a_{11}\,.$$

Тогда, используя теорему 1, находим

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0\,, \qquad a_4 + a_{11} = 0\,.$$

В результате получаем следующее предложение.

Предложение 6. *Уравнение* (37) *допускает алгебру Ли*

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

операторов симметрии с базисом конечномерной части:

$$Y_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

$$Y_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

$$Y_3 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

$$Y_4 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

$$Y_5 = (x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xz\frac{\partial}{\partial z} - xu\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

$$Y_6 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial y} + 2yz\frac{\partial}{\partial z} - yu\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

$$Y_7 = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z} - zu\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Фундаментальное решение трехмерного уравнения Лапласа известно (см. [28, с. 202]) :

$$u = -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,. \tag{39}$$

Оператору симметрии Y_1 соответствует однопараметрическая группа неоднородных растяжений $x' = e^a\,x$, $y' = e^a\,y$, $t' = e^a\,t$, $u' = e^{-a}\,u$, где a – групповой параметр. Фундаментальное решение (39) инвариантно относительно действия этой однопараметрической группы преобразований.

Операторам симметрии Y_2, Y_3, Y_4 соответствуют однопараметрические группы вращений в плоскостях (x, y), (x, z), (y, z) соответственно. Фундаментальное решение (39) инвариантно относительно действия этих однопараметрических групп преобразований.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Можно показать, что оператору симметрии Y_5 соответствует однопараметрическая группа преобразований:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - a(x^2+y^2+z^2)}{1-2ax+a^2(x^2+y^2+z^2)}\,, \\ y' &= \frac{y}{1-2ax+a^2(x^2+y^2+z^2)}\,, \\ z' &= \frac{z}{1-2ax+a^2(x^2+y^2+z^2)}\,, \\ u' &= \sqrt{1-2ax+a^2(x^2+y^2+z^2)}\,u\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Под действием однопараметрической группы преобразований (40) фундаментальное решение (39) преобразуется в нетривиальное фундаментальное решение:

$$u = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{1-2ax+a^2(x^2+y^2+z^2)}{[x-a(x^2+y^2+z^2)]^2+y^2+z^2}}\,. \tag{41}$$

Можно показать, что оператору симметрии Y_6 соответствует однопараметрическая группа преобразований:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{1-2ay+a^2(x^2+y^2+z^2)}\,, \\ y' &= \frac{y - a(x^2+y^2+z^2)}{1-2ay+a^2(x^2+y^2+z^2)}\,, \\ z' &= \frac{z}{1-2ay+a^2(x^2+y^2+z^2)}\,, \\ u' &= \sqrt{1-2ay+a^2(x^2+y^2+z^2)}\,u\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Под действием однопараметрической группы преобразований (42) фундаментальное решение (39) преобразуется в нетривиальное фундаментальное решение:

$$u = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{1-2ay+a^2(x^2+y^2+z^2)}{x^2+[y-a(x^2+y^2+z^2)]^2+z^2}}\,. \tag{43}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Можно показать, что оператору симметрии Y_7 соответствует однопараметрическая группа преобразований:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x}{1 - 2az + a^2(x^2 + y^2 + z^2)}\,,\\
y' &= \frac{y}{1 - 2az + a^2(x^2 + y^2 + z^2)}\,,\\
z' &= \frac{z - a(x^2 + y^2 + z^2)}{1 - 2az + a^2(x^2 + y^2 + z^2)}\,,\\
u' &= \sqrt{1 - 2az + a^2(x^2 + y^2 + z^2)}\, u\,.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Под действием однопараметрической группы преобразований (44) фундаментальное решение (39) преобразуется в нетривиальное фундаментальное решение:

$$
u = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{1 - 2az + a^2(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + [z - a(x^2 + y^2 + z^2)]^2}}\,. \tag{45}
$$

Замечание 6. Можно рассмотреть композицию преобразований (40), (42), (44). Тогда вместо однопараметрических семейств (41), (43), (45) фундаментальных решений трехмерного уравнения Лапласа можно получить трехпараметрическое семейство фундаментальных решений.

3. Метод построения функции Римана на основе использования симметрий фундаментальных решений. Рассмотрим общее линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$
Lu = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y)\,. \tag{46}
$$

Метод Римана основывается на следующем тождестве:

$$
2(vLu - uL^*v) = (vu_y - uv_y + 2auv)_x + (vu_x - uv_x + 2buv)_y
$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

и вытекающей из него формулы Грина:

$$2\iint\limits_G (vLu - uL^*v)\,dxdy = \oint\limits_\Gamma [-(vu_x - uv_x + 2buv)\,dx + \\ + (vu_y - uv_y + 2auv)\,dy].$$

Здесь $L^*v = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv$ – сопряженное с Lu дифференциальное выражение; G – область интегрирования с кусочно-гладким контуром Γ.

Метод Римана сводит задачу интегрирования уравнения (46) к построению вспомогательной функции Римана $v = R(x,y;x',y')$, удовлетворяющей однородному сопряженному уравнению (по переменным x,y):

$$L^*R = 0$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$\begin{aligned} &(R_y - aR)\big|_{x=x'} = 0\,, \\ &(R_x - bR)\big|_{y=y'} = 0\,, \\ &R(x',y';x',y') = 1\,. \end{aligned}$$

С помощью функции Римана для уравнения (46) строятся общие решения задачи Коши и характеристической задачи Коши (задачи Гурса).

Функция Римана обладает следующим свойством взаимности:

$$R^*(x,y;x',y') = R(x',y';x,y)\,, \tag{47}$$

где $R^*(x,y;x',y')$ – функция Римана сопряженного уравнения, которая является решением следующей характеристической задачи Коши:

$$\begin{aligned} &LR^* = 0\,, \\ &(R^*_y + aR^*)\big|_{x=x'} = 0\,, \\ &(R^*_x + bR^*)\big|_{y=y'} = 0\,, \\ &R^*(x',y';x',y') = 1\,. \end{aligned} \tag{48}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Оператор симметрии однородного уравнения (46) имеет вид [52] :

$$X = \xi^1(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(y)\,\frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x,y)\,u\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

и при этом должны быть выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial(b\,\xi^1)}{\partial x} + \xi^2\,\frac{\partial b}{\partial y} = 0\,,\\
&\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial(a\,\xi^2)}{\partial y} + \xi^1\,\frac{\partial a}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} + a\,\frac{\partial\zeta}{\partial x} + b\,\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial(c\,\xi^1)}{\partial x} + \frac{\partial(c\,\xi^2)}{\partial y} = 0\,.
\end{aligned} \tag{49}$$

Функция $\lambda = \lambda(x,y)$, удовлетворяющая тождеству $\underset{2}{X}(Lu) \equiv$ $\equiv \lambda\,Lu$, имеет вид

$$\lambda = \zeta - \frac{d\,\xi^1}{d\,x} - \frac{d\,\xi^2}{d\,y}\,. \tag{50}$$

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \delta(x - x')\,\delta(y - y')\,, \tag{51}$$

описывающее фундаментальные решения однородного уравнения (46). Тогда операторы симметрии фундаментальных решений (или симметрии уравнения (51)) удовлетворяют в силу теоремы 1 следующим дополнительным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&\xi^1(x') = 0\,, \qquad \xi^2(y') = 0\,,\\
&\lambda(x',y') + \frac{d\,\xi^1(x')}{d\,x'} + \frac{d\,\xi^2(y')}{d\,y'} = 0\,.
\end{aligned} \tag{52}$$

Покажем, что соотношения на характеристиках для задачи Коши (48) инвариантны относительно оператора симметрии (48) при условиях (52). Отметим, что характеристики $x = x'$,

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

$y = y'$ инвариантны относительно операторов симметрии фундаментальных решений. Из соотношений (50) и (52) следует, что $\zeta(x', y') = 0$. Это означает инвариантность последнего соотношения характеристической задачи Коши (48).

Запишем условие инвариантности соотношения на характеристике $x = x'$:

$$\underset{1}{X}(u_y + au)\Big|_{\substack{x = x' \\ u = R^*}} = 0$$

или

$$\left\{\left(\zeta - \frac{d\xi^2}{dy}\right)(u_y + au) + \right.$$
$$\left. + u\left[\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial(a\,\xi^2)}{\partial y} + \xi^1\frac{\partial a}{\partial x}\right]\right\}\Big|_{\substack{x = x' \\ u = R^*}} = 0\,. \tag{53}$$

Условие инвариантности (53) выполнено в силу второго соотношения (49). Аналогично доказывается инвариантность соотношения на характеристике $y = y'$.

Таким образом, доказана теорема, представляющая основной результат работы [53].

Теорема 2. *Симметрии фундаментальных решений линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными оставляют инвариантной функцию Римана сопряженного уравнения.*

Из теоремы 2 следует, что функция Римана сопряженного уравнения является инвариантным относительно симметрий фундаментальных решений решением исходного уравнения. Тогда функция Римана исходного уравнения находится из соотношения взаимности (47).

Сформулируем алгоритм построения функции Римана на основе использования симметрий фундаментальных решений:

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

1. Нахождение симметрий линейного однородного уравнения (46).
2. Вычисление симметрий фундаментальных решений.
3. Построение инвариантных решений с помощью симметрий фундаментальных решений.
4. Выделение функции Римана из найденных инвариантных решений, используя условие непрерывности функции Римана и ее первых производных в точке (x', y') и условие, что $R(x', y'; x', y') = 1$.

Замечание 7. Данный алгоритм позволяет находить функцию Римана гиперболического уравнения, не переходя к характеристическим переменным. Это подчеркивает инвариантную природу данного метода построения функции Римана.

4. Пример построения функции Римана. Рассмотрим уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2\lambda + 1}{r}\,\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0\,. \tag{54}$$

Построим функцию Римана уравнения (54). При этом не будем переходить к характеристическим переменным.

Предложение 7. *Уравнение* (54) *допускает при* $\lambda \neq \pm 1/2$ *следующий базис алгебры Ли операторов симметрии*:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = \frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad Y_2 = r\,\frac{\partial}{\partial r} + z\,\frac{\partial}{\partial z}\,,\\
&Y_3 = 2rz\,\frac{\partial}{\partial r} + (r^2 + z^2)\,\frac{\partial}{\partial z} - (2\lambda + 1)zt\,\frac{\partial}{\partial t}\,,\\
&Y_4 = t\,\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad Y_\infty = b(r, z)\frac{\partial}{\partial t}\,,
\end{aligned}$$

где $b(r, z)$ – произвольное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + \frac{(2\lambda + 1)}{r}\,\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0\,.$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2\lambda + 1}{r}\,\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \delta(r - r_0)\delta(z - z_0)\,. \qquad (55)$$

Предложение 8. *Уравнение* (55) *допускает оператор симметрии*

$$Y = 2r(z-z_0)\,\frac{\partial}{\partial r} + \left[r^2 + (z - z_0)^2 - {r_0}^2\right]\,\frac{\partial}{\partial z} - (2\lambda+1)(z-z_0)t\,\frac{\partial}{\partial t}\,. \qquad (56)$$

Построим инвариантное относительно оператора симметрии (56) решение уравнения (54).

Предложение 9. *Оператор симметрии* (56) *имеет два функционально независимых инварианта*

$$\xi = \frac{r^2 - (z - z_0)^2 + {r_0}^2}{2rr_0}\,, \qquad \tau = r^{\lambda+\frac{1}{2}}\,t\,.$$

Инвариантные решения уравнения (54) ищем в виде

$$\tau = f(\xi)\,,$$

или

$$t = r^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,f(\xi)\,.$$

Предложение 10. *Решения Эйлера–Пуассона–Дарбу* (54), *инвариантные относительно оператора симметрии* (56), *имеют следующий вид*:

$$t = r^{-\lambda-\frac{1}{2}}\left[C_1\,P_{-\lambda-\frac{1}{2}}\,(\xi) + C_2\,Q_{-\lambda-\frac{1}{2}}\,(\xi)\right], \qquad (57)$$

где $P_{-\lambda-1/2}\,(\xi)\,,\;\; Q_{-\lambda-1/2}\,(\xi)$ *– функции Лежандра первого и второго рода* [54]; C_1, C_2 *– произвольные постоянные.*

Из инвариантных решений (57) можно легко выделить функцию Римана уравнения (54).

Предложение 11. *Функция Римана уравнения* (54) *имеет следующий вид*:

$$R(r,z;r_0,z_0) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}} P_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\xi)\,. \qquad (58)$$

Замечание 8. Функция Римана (58) описывает с точностью до постоянного множителя t_0 решение характеристической задачи для взаимного проникновения двух центрированных волн разрежения [55].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 400 с.
2. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 240 с.
3. *Овсянников Л.В.* Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1966. 132 с.
4. *Чеботарев Н.Г.* Теория групп Ли. М.–Л.: Государственное изд-во технико-теоретической лит-ры, 1940. 396 с.
5. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М.: Изд-во ИЛ, 1947. 360 с.
6. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 280 с.
7. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.
8. *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев: Наукова думка, 1989. 336 с.
9. *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико–групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: ВО Наука, 1994. 319 с.
10. *Андреев В.К., Бублик В.В., Бытев В.О.* Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003. 352 с.
11. *Киряков П.П., Сенашов С.И., Яхно А.Н.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 192 с.
12. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Edited by N.H. Ibragimov. CRC Press. USA :

Vol. 1. Symmetries, exact solutions, and conservation laws. 1994. 429 p.
Vol. 2. Applications in engineering and physical sciences. 1995. 546 p.
Vol. 3. New trends in theoretical developments and computational methods. 1996. 536 p.

13. *Ibragimov N.H.* Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons Ltd. Great Britain. 1999. 347 p.
14. *Ibragimov N.H.* Introduction to Modern Group Analysis. Ufa: Изд-во "Тау". 2000. 113 p.
15. *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. Springer–Verlag New York, Inc. 1989. 412 p. (Applied Mathematical Sciences. Vol. 81).
16. *Bluman G.W., Anco St.C.* Symmetry and Integration Methods for Differential Equations. Springer–Verlag New York, Inc. 2002. 419 p. (Applied Mathematical Sciences. Vol. 154).
17. *Cantwell Br. J.* Introduction to Symmetry Analysis. Cambridge. Cambridge University Press. 2002. 654 p.
18. *Euler N., Steeb W.–H.* Continuous Symmetries, Lie Algebras and Differential equations. Leipzig. Wissenschaftsverlag. 1992. 320 p.
19. *Hydon P.E.* Symmetry Methods for Differential Equations. A Beginner's Guide. Cambridge. Cambridge University Press. 2000. 213 p.
20. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981. 344 с.
21. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. 10-е издание. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 432 с.
22. *Чеботарев Н.Г.* Доказательство π–теоремы. Собрание сочинений. Т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1949. С. 414–416.
23. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989. 44 с. (Новое в жизни, науке, технике. Серия Математика, кибернентика. № 8).
24. *Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи математических наук. 1992. Т. 47. Вып. 4. С. 83–144.
25. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Обобщенные функции. Выпуск 1. М.: Государственное изд-во физико-математической лит-ры, 1958. 439 с.
26. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. Обобщенные функции. Выпуск 2. М.: Государственное изд-во физико-математической лит-ры, 1958. 307 с.
27. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции. Выпуск 3. М.: Государственное изд-во физико-математической лит-ры, 1958. 274 с.
28. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 320 с.
29. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функ-

ций. Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976. 312 с.
30. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
31. *Берест Ю.Ю.* Слабые инварианты локальных групп преобразований // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 10. С. 1796–1803.
32. *Аксенов А.В.* Симметрии и фундаментальные решения многомерного обобщенного осесимметрического уравнения Лапласа. IX коллоквиум "Современный групповой анализ. Методы и приложения". Нижний Новгород, 24–30 июня 1992 г.: Тезисы докладов. Нижний Новгород: НИРФИ, 1992. С. 3.
33. *Аксенов А.В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Успехи математических наук. 1994. Т. 49. Вып. 4. С. 143–144.
34. *Аксенов А.В.* Симметрии фундаментальных решений линейных уравнений с частными производными. В кн.: Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика. М.: Изд-во Московского университета, 1994. С. 213–215.
35. *Аксенов А.В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН. 1995. Т. 342. № 2. С. 151–153.
36. *Берест Ю.Ю.* Групповой анализ линейных дифференциальных уравнений в обобщенных функциях и построение фундаментальных решений // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 11. С. 1958–1970.
37. *Berest Yui Yu., Ibragomov Nail H.* Group Theoretic Determination of Fundamental Solutions // Lie Groups and their Applications. 1994. Vol. 1. № 2. P. 65–80.
38. *Берест Ю.Ю.* Построение фундаментальных решений для гюйгенсовых уравнений как инвариантных решений // Доклады АН СССР. 1991. Т. 317. № 4. С. 786–789.
39. *Berest Y.Y., Ibragimov N.H. and Oganesyan A.O.* Conformal invariance, Huygens principle and fundamental solutions for scalar second order hyperbolic equations. In: Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics. Edited by N.H. Ibragimov et al. Kluwer Academic Publishers. 1993. P. 55–69.
40. *Аксенов А.В.* Симметрии и фундаментальные решения многомерного обобщенного осесимметрического уравнения Лапласа // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1697–1700.
41. *Аксенов А.В.* Периодические инвариантные решения уравнений абсолютно неустойчивых сред // Известия АН. Механика твердого тела. 1997. № 2. С. 14–20.
42. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды // В кн.: Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. С. 376–395.

43. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. II. Paris. 2 ed. 1915 (1 ed., 1888). 579 p.
44. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. III. ч. 1. М.–Л.: ГТТИ, 1933. 276 с.
45. *Copson E.T.* On the Riemann–Green Function // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957/58. V. 1 P. 324–348.
46. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 352 с.
47. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа. М.: Знание, сер. Математика и кибернетика, 1991. № 7. 48 с.
48. *Bluman G.* Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1990. Vol. 145. N. 1. P. 52–62.
49. *Lie S.* Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen // Archiv der Mathematik. 1881. Bd. 6. Heft 3. S. 328–368.
50. *Bluman G.W., Gregory R.D.* On transformations of the biharmonic equation // Mathematica. 1985. Vol. 32. Pp. 118–130.
51. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений М.–Л.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948. 296 с.
52. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнения С.А. Чаплыгина // Журнал прикладной механики и технической физики. 1960. № 3. С. 126–145.
53. *Аксенов А.В.* Метод построения функции Римана гиперболического уравнения второго порядка // Тезисы докладов международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа. 28 мая–2 июня 2007. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2007. С. 47–48.
54. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. 296 с.
55. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во ИЛ, 1950. 426 с.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 517.92

А.В. Беляев
Донецкий институт рынка и социальной политики
nika@vnet.dn.ua

ОБ ОДНОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО УСЛОВИЯМ ГЕССА

Доказано отсутствие однозначных решений задачи о движении тяжелого твердого тела, удовлетворяющего условиям Гесса, при отличном от нуля интеграле Гесса.

Задача о движении тяжелого твердого тела задается уравнениями, полученными Эйлером и Пуассоном:

$$\begin{cases} A\dot{p} = Ap \times p + \gamma \times r, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times p, \end{cases} \tag{0.1}$$

здесь $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{C}^3$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{C}^3$, $r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$, $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $0 < A_i < A_j + A_k$ для различных i, j, k.

Эти уравнения (см., например, [1]), называемые далее уравнениями Эйлера–Пуассона, задают закон изменения угловой скорости p вращения тела и вектора силы тяжести γ в координатах, связанных с телом, в которых оператор инерции A имеет диагональный вид.

Уравнения Эйлера–Пуассона при всех значениях исходных параметров имеют три первых интеграла:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\langle Ap, p\rangle + \langle \gamma, r\rangle\,, \quad \mathcal{M} = \langle Ap, \gamma\rangle\,, \quad \mathcal{T} = \langle \gamma, \gamma\rangle\,.$$

Вообще говоря, этих интегралов недостаточно для полной

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

интегрируемости системы, но при специальных условиях на параметры задачи дополнительный четвертый интеграл может существовать.

В настоящее время известно 14 общих и частных решений задачи, приведенных в монографии [1] и обзоре [2]. Невыясненным остается вопрос о существовании новых частных решений.

Несколько сужая поиск, мы желаем найти полный список однозначных решений рассматриваемой задачи (см. [3]). Для этого мы используем идею Ковалевской [4], рассмотревшей решения уравнений Эйлера–Пуассона как функции комплексного переменного в особых точках комплексной плоскости времени, а также идею факторизации фазового пространства ([5]) для его компактификации. Это дает возможность получить полную классификацию особых точек решений уравнений Эйлера–Пуассона, на основе которой и строится классификация однозначных решений [5–7]. Для ряда случаев получены полные списки однозначных решений в [8–11].

Случай Гесса ([12]), задаваемый интегралом

$$\mathcal{I} = \langle Ap, r \rangle = 0, \tag{0.2}$$

интересен тем, что при выполнении условий Гесса на твердое тело

$$A_1 B_{23} r_1^2 = A_2 B_{31} r_2^2, \quad r_3 = 0, \tag{0.3}$$

некоторые особые точки оказываются однозначными при всех значениях свободных параметров. Это является причиной существования однозначных решений, полный список которых имеется в [13]. Доказательство полноты этого списка приведено в [9].

В случае, когда функция $\mathcal{I}$ отлична от нуля, она уже не является первым интегралом, но однозначность особых точек сохраняется, а значит остается возможность существования однозначных решений. Поиск таких решений и является той задачей, которую мы решаем в настоящей статье. Мы доказываем,

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

что не существует однозначных решений задачи о движении тяжелого твердого тела, удовлетворяющего условиям Гесса при отличном от нуля интеграле Гесса.

Далее для краткости эту задачу мы называем задачей Гесса.

Определение 1. *Следующая алгебраическая система:*

$$\begin{cases} A\overset{\sim 0}{p}\times\overset{\sim 0}{p}+\overset{\sim 0}{\gamma}\times r+A\overset{\sim 0}{p}=0, \\ \overset{\sim 0}{\gamma}\times\overset{\sim 0}{p}+2\overset{\sim 0}{\gamma}=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

называется характеристической системой для уравнений Эйлера–Пуассона.

Теорема 1. ([6]) *Пусть выполнено условие* $\prod_\sigma(B_{12}r_1)\neq 0$. *Тогда характеристическая система* (1.1) имеет ровно восемь корней с учетом их кратностей, которые могут быть найдены при условии решения уравнения восьмой степени:

$$\mathcal{P}(\varrho)=\sum_\sigma[r_1^4B_{23}^2(A_1-\varrho)^4(2A_2-\varrho)^2(2A_3-\varrho)^2-$$

$$-2r_2^2r_3^2B_{12}B_{31}(A_2-\varrho)^2(A_3-\varrho)^2(2A_1-\varrho)\prod_\sigma(2A_1-\varrho)]=0,$$

$$\overset{\sim 0}{p}_1=\sqrt{\frac{(2A_2-\varrho)(2A_3-\varrho)}{B_{12}B_{31}}},\ \sigma,\quad \overset{\sim 0}{\gamma}=-(A\overset{\sim 0}{p}\times\overset{\sim 0}{p})\left\langle\overset{\sim 0}{p},r\right\rangle^{-1},$$

здесь σ означает циклическую перестановку индексов (1,2,3), $B_{ij}=A_i-A_j$. При этом каждому корню ϱ_k полинома $\mathcal{P}(\varrho)$ соответствует ровно одно решение $(\overset{\sim 0}{p},\overset{\sim 0}{\gamma})$ характеристической системы. Доказательство теоремы 1 приведено в [6].

Теорема 2. *Асимптотика α-особых точек имеет следующий вид:*

$$\begin{cases} p(t)=\overset{\sim 0}{p}t^{-1}+\alpha_1u_1+\sum_0^2\psi_it\ln^it+\sum_2^4\alpha_iv_it+o(t), \\ \gamma(t)=\alpha_1v_1t^{-1}+\kappa_1\overset{\sim 0}{p}\ln t+\kappa_0v_1+\alpha_4\overset{\sim 0}{p}+t\sum_0^2\chi_i\ln^it+ \\ +\alpha_5v_{-1}t+o(t), \end{cases}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

здесь $(\overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{\gamma})$ – *α-решения характеристической системы* (1.1), $\alpha_1, ...\alpha_5$ – свободные параметры, $u_1, v_i, \psi_i, \chi_i, \kappa_i$ выражаются через A_i, r_i.

Асимптотика β-особых точек имеет следующий вид:

$$\begin{cases} p(t) = \overset{\sim 0}{p} t^{-1} + \beta_0 u_0 t^{\lambda_0 - 1} + \beta^0 u^0 t^{\lambda^0 - 1} + \beta_2 u_2 t + \beta_3 u_3 t^2 + \\ + \beta_4 u_4 t^3 + ... + \sum\limits_{i+j \geq 2} \beta_0^i (\beta^0)^j \psi_{ij} t^{i\lambda_0 + j\lambda^0 - 1} + ..., \\ \gamma(t) = \overset{\sim 0}{\gamma} t^{-2} + \beta_0 v_0 t^{\lambda_0 - 2} + \beta^0 v^0 t^{\lambda^0 - 2} + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 t + \\ + \beta_4 v_4 t^2 + ... + \sum\limits_{i+j \geq 2} \beta_0^i (\beta^0)^j \chi_{ij} t^{i\lambda_0 + j\lambda^0 - 2} + ..., \end{cases}$$

здесь $(\overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{\gamma})$ – β-решения характеристической системы (1.1), $\beta_i, \beta_0, \beta^0$ – свободные параметры, $u_i, v_i, \psi_{ij}, \chi_{ij}$ выражаются через $A_i, r_i, \overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{\gamma}$.

Доказательство теоремы 2 приведено в [7].

2. Особые точки решений задачи Гесса

Исходя из результатов, сформулированных в Теоремах 1 и 2, получаем аналогичные им предложения для задачи Гесса.

Предложение 1. *В задаче Гесса полином* $\mathcal{P}(\varrho)$ *имеет вид*

$$\mathcal{P}(\varrho) = (\varrho\,(\varrho^2 - 2\varrho\,(A_1 + A_2) + 3A_2A_1)(\varrho - 2A_3))^2.$$

Предложение 2. *Асимптотика однозначных α-особых точек удовлетворяет условию* $\langle A \overset{\sim 0}{p}, r\rangle = 0$ *и имеет следующий вид:*

$$\begin{cases} p(t) = \overset{\sim 0}{p} t^{-1} + \dfrac{\alpha_1}{2} \langle \overset{\sim 0}{p}, r\rangle \overset{\sim 0}{p} + \sum\limits_{2}^{4} \alpha_i v_i t + o(t), \\ \gamma(t) = \alpha_1 A \overset{\sim 0}{p} t^{-1} - \dfrac{\alpha_1^3}{2} \langle \overset{\sim 0}{p}, r\rangle A \overset{\sim 0}{p} + \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} + \alpha_5 v_{-1} t + o(t), \end{cases}$$

здесь $\alpha_1, ...\alpha_5$ *– свободные параметры,* v_i *выражаются через* $A_i, r_i,$ *и* $\overset{\sim 0}{p}$ *–* α*-решения характеристической системы* (1.1).

Параметры λ_0, λ^0 для корней полинома $\mathcal{P}(\varrho)$ β-особых точек равны:

$$\begin{aligned}
&\varrho = 0, \quad \lambda_0 = -2, \quad \lambda^0 = 3,\\
&\varrho = 2A_3, \quad \lambda_0 = \pm ki, \quad \lambda^0 = 1 \mp ki, \quad k = \frac{4B_{23}B_{31}}{A_1A_2},\\
&\varrho^2 - 2\varrho\,(A_1 + A_2) + 3A_2A_1 = 0, \quad \lambda_0^{(0)} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - S},
\end{aligned}$$

$$S = ((A_1 + A_2 - A_3)(4A_1^2 + 4A_2^2 - 2A_1A_3 - 2A_2A_3 - A_1A_2)\varrho -$$

$$-3A_2A_1(2\sum_\sigma(A_1^2) + A_1A_2 - 3A_1A_3 - 3A_2A_3))/\prod_\sigma(A_1(A_3 - \varrho)).$$

Замечание 1. *Параметры асимптотики* λ_0, λ^0 *сопряженных* β*-особых точек при* $\varrho = 2A_3$ *являются заведомо не целыми и приводят к ветвлению. Следовательно, для однозначных решений* β_0, β^0 *равны нулю. В этом случае первые интегралы* $\mathcal{H}, \mathcal{M}, \mathcal{T}$ *однозначно определяют единственное однозначное решение с соответствующей особой точкой. Это решение относится к случаю Гесса* $\langle A\overset{\sim 0}{p}, r\rangle = 0$ *и рассмотрено в* [9]. Следовательно, однозначные решения $\langle A\overset{\sim 0}{p}, r\rangle \neq 0$ не содержат особых точек $\varrho = 2A_3$.

Теорема 3. *Параметры* λ_0, λ^0, *соответствующие корням* ϱ_1, ϱ_2 *полинома*

$$\varrho^2 - 2\varrho\,(A_1 + A_2) + 3A_2A_1 = 0, \tag{2.1}$$

не могут быть одновременно целыми ни при каких значениях параметров A_1, A_2, A_3 *твердого тела.*

Доказательство. Корни полинома (2.1) равны

$$\varrho_{1,2} = A_1 + A_2 \pm D,$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

где $D = \sqrt{A_1^2 - A_1A_2 + A_2^2}$. Обозначим

$$s = S(\varrho_1) + S(\varrho_2),\ d = S(\varrho_1) - S(\varrho_2).$$

Если параметры λ_0, λ^0 целые, то целыми будут и числа s, d. При этом мы заменяем $A_1 = a,\ A_2 = b,\ A_3 = 1$, что не ограничивает общности, так как степень однородности S равна нулю.

$$s = -\frac{4(a+b-1)(a^2-ab+b^2)}{ab},$$

$$d = \frac{2D(2a^2+2b^2+ab-2a-2b)}{ab}.$$

Чтобы избавиться от корня D, рассмотрим еще одно представление некоторого целого числа

$$d^2 - s^2 - 12s = a^2 - ab + b^2.$$

Мы имеем систему

$$\begin{cases} a^2 - ab + b^2 = n_1, \\ \dfrac{a+b-1}{ab} = \dfrac{n_2}{n_1}, \end{cases}$$

в которой числа n_1, n_2 – целые. Делая замену

$$a = u + v,\ b = u - v,$$

получаем

$$\begin{cases} u^2 + 3v^2 = n_1, \\ 4n_2u^2 + 24n_1u - 12n_1 - n_1n_2 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Подставляя из первого уравнения системы u^2 во второе и учитывая, что $2u = a + b > 1$, получим $4v^2 - n_1 > 0$. Поскольку $4v^2 = (a-b)^2 < 1$, мы получаем $n_1 < 1 \Longrightarrow n_1 = 0$, что противоречит первому уравнению системы (2.2). □

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Определение 2. *Будем называть β-особую точку определяющей, если ее асимптотика такова, что параметры λ_0, λ^0 не являются целыми.*

Смысл этого определения заключается в том, что, если в однозначном решении рассматриваемой задачи (0.1) встречаются хотя бы две такие особые точки, решение обязательно периодично; если есть три такие точки, не лежащие на одной прямой, то решение – двоякопериодично. Это объясняется тем, что в асимптотике определяющей β-точки коэффициенты при t^{λ_0}, t^{λ^0} равны нулю в силу однозначности решения, а оставшиеся 3 параметра однозначно определяются значениями трех первых интегралов решения.

Теорема 4. *Параметры λ_0, λ^0, соответствующие корням ϱ_1, ϱ_2 полинома* (2.1), не могут равняться 0, 1, 2 или 3 ни при каких значениях параметров твердого тела.

Доказательство этой теоремы представляет собой несложную проверку, поскольку в рассматриваемой задаче Гесса характеристическая система (1.1) полностью решается.

3. Теорема об однозначных решениях задачи Гесса

Теорема 5. *Не существует однозначных решений задачи Гесса, не имеющего ни одной определяющей β-особой точки.*

Доказательство. Как следует из результатов предыдущего параграфа, однозначные решения без определяющей особой точки могут иметь три пары сопряженных особых точек: α-особые точки, β-особые точки ($\varrho = 0$) и β-особые точки ($\mathcal{P}(\varrho) = 0$). Для первых двух пар особых точек функция (Ap, r), как функция времени, имеет нуль первого порядка в окрестностях этих точек, для третьей пары можно подобрать вектор $c \in \mathbb{R}^3$ так, что тем же свойством обладает функция (Ap, c). Тогда функция $J = (Ap, r)\ (Ap, c)$ вообще не имеет особенностей и поэтому является целой. Рассуждение, аналогичное приведенному в [5] (теорема 3.11), влечет равенство этой функции константе, то есть функция J оказывается первым интегралом. Ее произ-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

водная с точностью до коэффициента равна

$$(Ap,r)(B_{23}p_3r_1(Ap,c)+A_2r_2(p_3(B_{23}c_1p_2+B_{31}c_2p_1)+B_{12}c_3p_1p_2+$$

$$+(c_2\gamma_3-c_3\gamma_2)r_1-(c_1\gamma_3-c_3\gamma_1)r_2))=0.$$

Так как функция J отлична от нуля, то первым интегралом должна быть и функция $\dot{J}/(Ap,r)$. Далее, подставляя в эту функцию асимптотики особых точек, убеждаемся, что это не так. $\square$

Теорема 6. *Пусть решение* $p(t),\gamma(t)$ *уравнений Эйлера–Пуассона* (0.1) имеет хотя бы одну определяющую β-особую точку. Тогда это решение имеет представление

$$\begin{cases} p(t)=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{N}}\overset{\sim 0}{p}_{\alpha}\,\mathfrak{f}(t-t_\alpha)+\sum\limits_{\beta\in\mathfrak{M}}\overset{\sim 0}{p}_{\beta}\,\mathfrak{f}(t-t_\beta)+p_0, \\ \gamma(t)=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{N}}A\,\overset{\sim 0}{p}_{\alpha}\,\lambda_\alpha\mathfrak{f}(t-t_\alpha)-\sum\limits_{\beta\in\mathfrak{M}}\overset{\sim 0}{\gamma}_{\beta}\,\dot{\mathfrak{f}}(t-t_\beta)+\gamma_0, \end{cases} \qquad (3.1)$$

где функция $\mathfrak{f}(t)$ есть t^{-1}, $\mathrm{ctg}(t)$, $\mathrm{cth}(t)$ или ζ-функция Вейерштрасса, $\{(\overset{\sim 0}{p}_{\alpha(\beta)},\overset{\sim 0}{\gamma}_{\alpha(\beta)})\}$ – $\alpha(\beta)$-решения характеристической системы (1.1), $\mathfrak{N},\mathfrak{M}$ – конечные множества интексов, нумерующих α,β – особые точки решения, λ_α – свободные параметры, p_0, γ_0 – подходящие константы.

Доказательство. Предположим, что рассматриваемое решение содержит одну определяющую особую точку. Если оставшихся особых точек бесконечное число, то существует предельное однозначное решение без определяющей особой точки, что невозможно по доказанной теореме. Разница между имеющимся решением и представлением (3.1) может быть только константой в силу рассуждения из [5] (теорема 3.11).

Если решение имеет две определяющие особые точки, то оно периодично. Предположим, что оно не двоякопериодично. Тогда в полосе периода будет конечное число не определяющих

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

особых точек, а иначе мы повторяем выше приведенное рассуждение.

Наконец, если решение имеет три определяющие особые точки, не лежащие на одной прямой, то решение двоякопериодично с конечным числом особых точек в параллелограмме периодов. □

Теорема 7. *Не существует однозначных решений задачи Гесса при отличном от нуля интеграле Гесса.*

Доказательство. Если решение имеет вид (3.1), причем функция $\mathfrak{f}(t)$ равна t^{-1}, $\mathrm{ctg}(t)$, $\mathrm{cth}(t)$, то определяемая им траектория обязательно входит в особую точку дифференциальных уравнений (0.1), асимптотика которой вычисляется по асимптотикам особых точек решения с точностью до неизвестных координат t_α, t_β этих точек. С другой стороны, та же асимптотика вычисляется, исходя из системы (0.1). Сравнивая полученные таким образом асимптотики, убеждаемся, что полученные условия согласования асимптотик не могут быть выполнены.

Если решение двоякопериодическое, то сумма вычетов особых точек в параллелограмме периодов должна равняться нулю ([14]). Но тогда в рассматриваемом решении не должно быть α-точек. Этот случай рассмотрен в [11], где доказано, что однозначных решений соответствующего вида нет. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. — Киев: Наукова думка, 1978.
2. *Лесина М.Е., Кудряшова Л.В.* О некоторых направлениях исследований в донецкой школе динамики твердого тела // Механика твердого тела. Институт прикл. матем. и мех. НАН Украины. — 2000. — Т. 30. — С. 35—68.
3. *Belyaev A.V.* On single-valued solutions of the Euler – Poisson's equations // Mat. Studii. — 2001. — Т. 15. — №1. — С. 93—104.

4. *Ковалевская С.В.* Научные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1948.
5. *Belyaev A.V.* The factorization of the flow defined by the Euler–Poisson's equations // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2001. — T. 7. — №4. P. 18—30.
6. *Belyaev A.V.* The characteristic system for the Euler–Poisson's equations // Nonlinear Boundary problems. National Academy of Sciences of Ukraine institute of Appl. Math and Mech. — 1999. — №9. — P. 135—147.
7. *Беляев А.В.* Асимптотика решений уравнений Эйлера–Пуассона в особых точках решений // Математическая физика. Анализ. Геометрия. — 2001. — Т. 8. — №2. — С. 128—142.
8. *Belyaev A.V.* The entire solutions of the Euler – Poisson's Equations // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56 — №5. — С. 677—686.
9. *Belyaev A.V.* Analytic properties of the solutions of the Euler – Poisson equations in the Hessian case // Ukr. Math. Bull. — 2005. — V. 2. — №3. — P. 301—321.
10. *Беляев А.В.* О решениях уравнений Эйлера – Пуассона в эллиптических функциях Якоби // Нелинейные граничные задачи. Инст. прикл. матем. и мех. НАН УССР. — 2001. — Т. 11. — С. 9—18.
11. *Belyaev A.V.* On solutions of the Euler – Poisson's equations which are linear combinations of $\zeta-$ and $\rho-$functions of Weierstrass // Mat. Studii. — 2002. — V. 18. — №2. — P. 187—196.
12. *Hess W.* Uber die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. — 1890. — 37. — H. 2. — S. 153—181.
13. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. — Киев: Наукова думка, 1992.
14. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. — М.: Мир, 1979.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 531.36

Л.А.Бурлакова
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
irteg@icc.ru

К ВОПРОСУ О ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ[2]

Обсуждаются проблемы, связанные с решением задачи стабилизации потенциальных систем гироскопическими силами.

1. Постановка задачи. Матричное уравнение Ляпунова

Рассматривается задача об устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения

$$M\ddot{x} \ + G\dot{x} \ + Kx \ = Q(x,\dot{x}) \ , \tag{1}$$

где $M = M^T > 0$, $G = -G^T$, $K = K^T$ – $(n \times n)$ матрицы гироскопических и потенциальных сил; x, $\dot{x}$ – $(1 \times n)$ матрицы координат и скоростей; $Q(x,\dot{x})$ – матрица-столбец нелинейных сил, $Q(0,0) = 0$.

Система (1) является критической по Ляпунову. Для таких систем актуальной является задача о стабилизации гироскопическими силами [1], [2] . Эта задача имеет важное прикладное значение, но до сих пор не получила полного решения [3]. Большое внимание задаче устойчивости и стабилизации гироскопических систем уделено в монографии [4]. Краткий обзор результатов, полученных для этой задачи методом функций Ляпунова, приведен в статье [5].

Введем функцию V :

$$V = \dot{x}^T N\dot{x} + x^T Lx + x^T B^T \dot{x} + \dot{x}^T B\, x + F(x,\dot{x}) \ , \tag{2}$$

[2]Работа поддержана ИНТАС-СО РАН, грант 06-1000013-9019

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

здесь $F(x,\dot{x})$ – функция порядка (степени) более двух,

$$L = L^T, \qquad N = N^T \ .$$

Вычислим производную от функции (2) для уравнения (1) и представим ее в виде

$$\dot{V} \ = \dot{x}^T W_1 \dot{x} \ + x^T W_2 x \ + \dot{x}^T W_3 \, x \ + \ x^T W_3^T \dot{x} \ + \Phi(x,\dot{x}) \ ,$$

здесь $\Phi(y)$ – нелинейная функция, порядок которой более двух. Тогда получим систему уравнений :

$$\begin{gathered}
B + B^T + G\,M^{-1}N - N\,M^{-1}G = W_1;\\
K\,M^{-1}N - N\,M^{-1}K + B^T M^{-1}G + G\,M^{-1}B = W_3 - W_3^T;\\
W_2 + K\,M^{-1}B + B^T M^{-1}K = 0;\\
2L = K\,M^{-1}N + N\,M^{-1}K + B^T M^{-1}G - G\,M^{-1}B + W_3 + W_3^T;\\
Q^T M^{-1}(N\dot{x} + Bx) \ + \ (\dot{x}^T N \ + \ x^T B^T) M^{-1} Q \ + \ (\partial F/\partial x)\dot{x} - \\
- (\partial F/\partial \dot{x}) M^{-1}(G\dot{x} \ + \ K\,x - Q) \ = \ \Phi(x,\dot{x}).
\end{gathered} \tag{3}$$

Система (3) является расширенным вариантом матричного уравнения Ляпунова. В стандартной ситуации уравнение Ляпунова используется для получения функции Ляпунова при исследовании асимптотической устойчивости. В рассматриваемом случае для линейных систем возможна только устойчивость, и наиболее эффективной функцией Ляпунова является знакоопределенный первый интеграл системы (1). В общем случае нельзя выразить в матричном виде общее решение системы (3) [6]. Рассмотрим некоторые варианты для системы (3).

Вариант 1. Пусть $N = 0$. Если $B = -B^T$, то обязательно $W_1 = 0$. Если $B = B^T$, то $W_1 = 2B$ и по заданному W_1 найдутся W_2, W_3. Если матрица B общего вида, то

$$B = 1/2W_1 + \Gamma,$$

где $\Gamma = -\Gamma^T$ — произвольная косо-симметричная матрица, и по заданной матрице W_1 найдется

$$W_3 - W_3^T = (1/2W_1 - \Gamma)M^{-1}G + GM^{-1}(1/2W_1 + \Gamma),$$

ISBN 978–5–7417–0234–5

$$W_2 = -K\,M^{-1}(1/2W_1 + \Gamma) - (1/2W_1 - \Gamma)M^{-1}K.$$

Пример 1. Зададим $W_1 = 2M$. Тогда для системы (3) имеем решение $N = 0$, $B = M$, $W_3 = G + \epsilon G^*$, $L = \epsilon G^*$. Следовательно, для уравнения (1) можем записать соотношение

$$\frac{d}{dt}(x^T M\dot{x} + \epsilon x^T G^* x) = (\dot{x} + M^{-1}Px)^T M(\dot{x} + M^{-1}Px) -$$

$$-x^T A_1 x + x^T Q,\ (2P = \epsilon G^* + \epsilon G^{*T} + G,\ A_1 = K + P^T M^{-1}P),$$

где ϵ — произвольное число (> 0 или ≤ 0); G^* — матрица такая, что $G = G^* - G^{*T}$, причем все элементы в G^* ниже диагонали равны нулю. В соответствии с теоремой Ляпунова о неустойчивости из этого соотношения следует теорема:

Теорема 1 . *Если*

$$A_1 = K + 1/4(\epsilon G^{*T} + \epsilon G^* + G)^T M^{-1}(\epsilon G^{*T} + \epsilon G^* + G) < 0,$$

где ϵ — произвольное число, то решение $\dot{x} = x = 0$ системы (1) неустойчиво при любых нелинейных силах.

При $\epsilon = 0$ из теоремы 1 следует известный результат [7]: тривиальное решение системы (1) неустойчиво, если

$$4K - GM^{-1}G < 0.$$

Если $4K - GM^{-1}G = 0$, то для линейного уравнения (1) имеем следующую цепочку соотношений:

$$\frac{d}{dt}(x^T M\,x)/2 = x^T M\dot{x} = \tilde{V}_1\ ,$$

$$\dot{\tilde{V}}_1 = \dot{x}^T M\dot{x} - x^T G\dot{x} - 1/4x^T GM^{-1}Gx\ =\ \tilde{V}_2\ ,\quad \dot{\tilde{V}}_2 = 0.$$

Система допускает первый интеграл $\tilde{V}_2 = c_1$, и из приведенной последовательности соотношений следует

$$x^T M\,x = c\,t^2 + c_2 t + c_3,$$

т.е. имеет место неустойчивость по $\dot{x}$, x . Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Если* $4K - GM^{-1}G \leq 0$ *, то линейная система* (1) неустойчива.

Из теорем 1 и 2 можно получить достаточные условия, при которых невозможна гироскопическая стабилизация неустойчивой потенциальной системы. В частности, если линейная потенциальная система имеет нечетную степень неустойчивости ($\det K < 0$), то гироскопическая стабилизация невозможна [1].

Вариант 2. Пусть $N \neq 0$. Если $B = 0$, то $W_2 = 0$. Если $B = -B^T$, то для первого уравнения (3) по заданному W_1 решение для N всегда существует. Система, соответствующая третьему уравнению (3), может быть не совместной. Если $B = B^T$, то по заданным матрицам W_1, W_2 определятся матрицы N, B, W_3. Если B — матрица произвольной структуры, то по заданной матрице W_2 всегда найдется решение для матрицы B (не единственное). Подставим это решение в первое уравнение (3), из которого найдем решение для N. Оставшееся уравнение (3) служит для выбора W_3. Если выбрать $W_3 = K\,M^{-1}N + B^T M^{-1}G$, то получим $L = W_3 + W_3^T$.

2. Первые интегралы и теоремы об устойчивости

Пусть $W_i = 0\,(i = 1, 2, 3)$. Тогда из (3) получим условия существования первого интеграла линейной системы (1). Для нелинейной системы к (3) можно присоединить уравнения:

$$\dot{x}^T((\partial F/\partial x) + 2N\,M^{-1}Q + GM^{-1}(\partial F/\partial \dot{x})) \equiv 0,$$
$$x^T(2B^T M^{-1}Q - K\,M^{-1}(\partial F/\partial \dot{x})) \equiv 0, \quad Q^T M^{-1}(\partial F/\partial \dot{x}) \equiv 0 \tag{4}$$

как достаточные условия для того, чтобы $\Phi(x, \dot{x}) \equiv 0$. Уравнения (4) служат для определения функции $F(x, \dot{x})$, если она существует, или для нахождения Q , при которых функция (2) является первым интегралом.

Система (3) при $W_i = 0$ всегда имеет кроме тривиального решения $N = 0$, $B = 0\,(B^T = 0)$ множество решений. Если существует нетривиальное решение N^*, B^*, то решением являются

$$(i) \qquad N_1^* = N^* \pm N^{*T},\; B_1^* = B^* \pm B^{*T},$$

$$(ii) \qquad N^{**} = \mathcal{P}N^*\mathcal{Q}^T + \mathcal{Q}N^*\mathcal{P}^T,\; B^{**} = \mathcal{P}^T B^* \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^T B^* \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ – матрицы, перестановочные с $M^{-1}G,\ M^{-1}K$.

Утверждение. *Линейная система* (1) имеет $n_1 \geq n$ независимых квадратичных первых интегралов.

Выпишем некоторые решения системы (3) и первые интегралы в матричном виде, так как решение конкретных задач может быть осложнено громоздкостью вычислений.

Известно, для системы (3) ($W_i = 0$) существуют решения:
a) $N = M, B = 0$, тогда $L = K$, и, следовательно, линейная система (1) имеет интеграл энергии

$$h = V_1 = \dot{x}^T M \dot{x} \ + \ x^T K\, x \ = \text{const} \; ; \tag{5}$$

b) $N = K - G\, M^{-1} G,\ B = G^T M^{-1} K,\ L = K\, M^{-1} K + G\, M^{-1} G$; этому решению соответствует интеграл линейной системы:

$$V_2 = \dot{x}^T K \dot{x} + (K\, x + G\dot{x})^T M^{-1} (K\, x + G\dot{x}) = \text{const}; \tag{6}$$

c) $N = M\, K^{-1} M,\ B = M\, K^{-1} G$; тогда первый интеграл линейной системы имеет вид:

$$V_3 = \dot{x}^T M\, K^{-1} M \dot{x} + x^T (M - G K^{-1} G) x + 2\dot{x}^T M K^{-1} G\, x = \text{const}.$$

Для нелинейной системы (1) интеграл энергии

$$h_1 = h - U(x) = \text{const}$$

имеет место, если нелинейные силы являются гироскопическими и/или потенциальными $Q_p = -\partial U(x)/\partial x$. Это следует из уравнений (4).

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Рассмотрим другие решения системы (3) ($W_i = 0$).

2.1. $B = 0$, $N = N^*$, где N^* удовлетворяет уравнениям $G\,M^{-1}N - N\,M^{-1}G = 0$, $\quad K\,M^{-1}N - N\,M^{-1}K = 0$.

Пусть на матрицы системы (1) наложено одно из следующих ограничений:

$$(i) \quad G\,M^{-1}K = K\,M^{-1}G; \tag{7}$$

$$(ii) \quad G\,M^{-1}K = -K\,M^{-1}G; \tag{8}$$

$$(iii) \quad K(M^{-1}G)^2 = (G\,M^{-1})^2K, \tag{9}$$

и одновременно не выполняются условия $\det G = 0,\ \det K = 0$.

2.1.1. $N^* = (GM^{-1})^{p-1}GM^{-1}G(M^{-1}G)^{p-1}$ $(p = 0, 1, \ldots)$; решение имеет место при выполнении любого из условий (7) — (9). Этому решению соответствует первый интеграл линейной системы

$$V_4 = \dot{x}^T(G\,M^{-1})^{p-1}G\,M^{-1}G(M^{-1}G)^{p-1}\dot{x}+$$
$$+\,x^TK(M^{-1}G)^{2p}x \;=\; \mathrm{const}.$$

2.1.2. $N^* = (G\,M^{-1})^pK\,M^{-1}K(M^{-1}G)^p$; решение имеет место при выполнении (7) или (8). Этому решению соответствует первый интеграл линейной системы

$$V_5 = \dot{x}^T(G\,M^{-1})^pK\,M^{-1}K(M^{-1}G)^p\dot{x}+$$
$$+\,x^T(G\,M^{-1})^pK\,M^{-1}K\,M^{-1}K(M^{-1}G)^px = \mathrm{const}\ \text{при}\ (7);$$
$$V_5 = \dot{x}^T(G\,M^{-1})^pK\,M^{-1}K(M^{-1}G)^p\dot{x}\,+$$
$$+(-1)^p\,(x^T(GM^{-1})^pKM^{-1}KM^{-1}K(M^{-1}G)^px) = \mathrm{const}\ \text{при}\ (8);$$

2.1.3.

$$N^* = (GM^{-1})^p(KM^{-1})^mK(M^{-1}K)^m(M^{-1}G)^p\,(p, m = 0, 1, \dots\,);$$

решение имеет место, если

$$(GM^{-1})^{2p+1}K(M^{-1}K)^{2m} = (KM^{-1})^{2m}K(M^{-1}G)^{2p+1}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

и для четного p выполнено условие (9), а для нечетного p выполнено (7) или (8). Этому решению соответствует интеграл линейной системы

$$V_6 = \dot{x}^T (GM^{-1})^p (KM^{-1})^m K (M^{-1}K)^m (M^{-1}G)^p \dot{x} +$$

$$+ x^T (GM^{-1})^p (KM^{-1})^m K M^{-1} K (M^{-1}K)^m (M^{-1}G)^p = \text{const}.$$

2.2. Пусть $N^* = 0$. Тогда система (3) имеет решения $B = -B^T$:

2.2.1. $B = (GM^{-1})^p G (M^{-1}G)^p$ $(p = 0, 1, \ldots)$; решение имеет место при выполнении условия (7) . Этому решению соответствует первый интеграл линейной системы

$$V_7 = 2\dot{x}^T (G\,M^{-1})^p G (M^{-1}G)^p x + x^T G (M^{-1}G)^{2p+1} x = \text{const}\,. \tag{10}$$

2.2.2. $B = (K\,M^{-1})^m G (M^{-1}K)^m$ $(m = 0, 1, \ldots)$; решение имеет место при выполнении условия (7) . Этому решению соответствует первый интеграл линейной системы

$$V_8 = 2\dot{x}^T (K\,M^{-1})^m G (M^{-1}K)^m x +$$

$$+ x^T G M^{-1} G)(K\,M^{-1})^m G (M^{-1}K)^m x = \text{const}\,.$$

2.2.3. $B = G\,M^{-1}K$, решение имеет место при выполнении условия (7). Этому решению соответствует первый интеграл линейной системы:

$$V_9 = 2\dot{x}^T G\,M^{-1} K x - x^T G\,M^{-1} K\,M^{-1} G x = \text{const};$$

2.2.4. $B = G\,K^{-1} M$ $(detK \neq 0)$ при выполнении условия (7); этому решению соответствует первый интеграл линейной системы:

$$V_{10} = 2\dot{x}^T M\,K^{-1} G x - x^T G\,K^{-1} G\,x = \text{const};$$

2.2.5. $B = M\,K^{-1} G\,M^{-1} G\,M^{-1} G$; решение имеет место, если $detK \neq 0$, $detG \neq 0$, (i) выполнено (7) или (ii) выполнены

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

условия (9) и $(G\,M^{-1})^3K = K(M^{-1}G)^3$. Этому решению соответствует первый интеграл линейной системы:

$$V_{11} = 2\dot{x}^T M\,K^{-1}G\,M^{-1}G\,M^{-1}G\,x =$$

$$= -x^T G\,K^{-1}G\,M^{-1}G\,M^{-1}G\,x = \mathrm{const};$$

2.2.6. $B = MG^{-1}K$; решение имеет место, если $\det G \neq 0$ и выполнено (7). Этому решению соответствует первый интеграл линейной системы:

$$V_{12} = 2\dot{x}^T K\,G^{-1}M\,x\ - x^T K\,x = \mathrm{const};$$

Решения группы 2.2 интересны тем , что дают интегралы линейной системы, которые сохраняются и для нелинейной системы (1), если нелинейные силы $Q(x)$ удовлетворяют второму уравнению (4): $x^T B^T M^{-1}Q = 0$. Для интегралов (10) и V_8, V_9 этому уравнению удовлетворяет $Q = f'(x^T M\,x)M\,x$ (где $f'(x^T Mx)$– скалярная функция); для интегралов V_7 (при $p = 0$) и V_{10}, V_{11}, V_{12} этому уравнению удовлетворяет

$$Q = f'(x^T K\,x)K\,x$$

(где $f'(x^T K\,x)$– скалярная функция) [8].

2.3. Если $\det G \neq 0$ и $K\,M^{-1}G\,M^{-1}K\,G^{-1}M =$ $= M\,G^{-1}K\,M^{-1}G\,M^{-1}K$, $(G\,M^{-1})^2K = K(M^{-1}G)^2$, то линейная система (1) допускает первый интеграл

$$V_{13} = \ \dot{x}^T G^T M^{-1}K\,G^{-1}M\dot{x}\ +\ 2x^T K\,M^{-1}G\dot{x} +$$

$$+ x^T(K\,M^{-1}G\,M^{-1}G\ -\ K\,M^{-1}G\,M^{-1}K\,G^{-1}M)x = \mathrm{const}.$$

Если M — единичная матрица, этот интеграл совпадает с [5].

Из теорем второго метода Ляпунова следует: если $K > 0$, то тривиальное решение линейной (и при потенциальных и/или гироскопических нелинейных силах) системы (1) устойчиво по переменным $\dot{x}, x$ [4]. При этом в качестве функции Ляпунова выбран интеграл энергии (5). Если матрица K не является

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

определенно положительной, образуем связку (пучок) интегралов. Условия знакоопределенности этого пучка дают достаточные условия устойчивости рассматриваемой критической системы и условия гироскопической стабилизации.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = V_2 - \beta h = \dot{x}^T(K - G\,M^{-1}G - \beta M)\dot{x} - \dot{x}^T G\,M^{-1}Kx+$$
$$+x^T K\,M^{-1}G\dot{x} + x^T(K\,M^{-1}K - \beta K)x\ .$$

Условия Сильвестра определенной положительности этой формы можно записать в виде:

$$KM^{-1}K - \beta K > 0,$$
$$K - \beta M - GM^{-1}G + GM^{-1}K(K - \beta M)^{-1}G > 0.$$

Полученные неравенства содержат неопределенный множитель β . Если β задать произвольно, то условия устойчивости могут быть грубыми. Следуя [2], отметим, что условия существования β для выполнения выписанных неравенств являются достаточными условиями устойчивости тривиального решения линейной системы (1). Следовательно, справедлива теорема [8]:

Теорема 3. *Если существует такое β, что*

$$KM^{-1}(\ K - \beta M\ ) > 0,$$
$$(\ K - \beta M\ )\ - GM^{-1}G\ +\ GM^{-1}K(\ K - \beta M\ )^{-1}G > 0,$$

то линейная система (1) устойчива по x, $\dot{x}$.

Как показывает пример, рассмотренный ниже, теорема 3 дает условия устойчивости, близкие к необходимым.

Если в теореме Ляпунова об устойчивости использовать связку интегралов (5) и (10) (при $p = 0$), затем применить теорему 2, то докажем, что справедлива теорема:

Теорема 4. *Если* $GM^{-1}K - KM^{-1}G = 0$ *, условие*

$$4K - GM^{-1}G > 0$$

является достаточным условием устойчивости линейной системы (1) по переменным x, $\dot{x}$. Это условие является и необходимым [9].

Условия теоремы 4 являются достаточными для устойчивости тривиального решения нелинейной системы (1) с ограничением (7), если $Q = f'(y)Mx$, где $y = x^T Mx$, $f'(y) = \partial f(y)/\partial y$ или $Q = f'(z)Kx$, где $z = x^T Kx$, $f'(z) = \partial f(z)/\partial z$.

Если полученный первый интеграл не является знакоопределенным, то можно рассмотреть в качестве функции Ляпунова комбинацию: $V = \sum V_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Тогда необходимо проверить на совместность уравнения $V_i = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$.

3. Стабилизация системы с тремя степенями свободы

Рассмотрим задачу о стабилизации неустойчивых равновесий зарядов в электрическом поле $\mathbf{E}$ стационарным (сильным) магнитным полем $\mathbf{H}$ [10].

Дифференциальные уравнения движения в первом приближении имеют вид

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\partial\varphi/\partial\mathbf{x} \ + \ [\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{H}]; \varphi = (A\mathbf{x}, \mathbf{x})/2 \ , \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3). \quad (11)$$

Здесь $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Для заряда $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, так как $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Если это равенство не имеет место, то это общая гироскопическая система. Особенностью таких систем с нечетным числом степеней свободы является то, что определитель гироскопических сил равен нулю. В работе [10] получены для системы условия устойчивости по характеристическому уравнению (без анализа) и достаточные условия устойчивости при больших магнитных силах, но их оценка не проведена. Пусть общая гироскопическая система такова, что

$$a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad a_3 > 0.$$

Система допускает три первых интеграла, квадратичных по переменным x, $\dot{x}$.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Построим связку интегралов $V = V_2+\alpha V_1$. Условия Сильвестра положительной знакоопределенности формы V (условия теоремы 3) имеют вид

$$a_1a_2a_3\Delta^2 > 0,\ a_1\left(\alpha + a_1\right) > 0,$$

$$a_1\left(\alpha + a_1\right)a_2\left(\alpha + a_2\right) > 0,\ a_1\left(\alpha + a_1\right)a_2\left(\alpha + a_2\right)a_3\left(\alpha + a_3\right) > 0,$$

$$a_1\left(\alpha + a_1\right)a_2a_3(\alpha^3 + \alpha^2(a_1 + a_2 + a_3 + H_2^2 + H_3^2)+$$
$$+\alpha(a_1a_3 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_2H_2^2 + a_3H_3^2) + a_1a_2a_3) > 0,$$
$$a_1a_2a_3\left(\alpha^2 + \alpha a_1 + \alpha a_2 + a_1a_2 + \alpha H_3^2\right)\Delta > 0, \qquad (12)$$

здесь

$$\Delta = ((a_1a_2a_3 + \alpha(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1H_1^2 + a_2H_2^2 + a_3H_3^2)+$$
$$+(a_1 + a_2 + a_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) + \alpha^3)$$

совпадает с характеристическим полиномом системы (11). Как показывает анализ этих неравенств, параметр α для выполнения (12) существует, если выполнены условия существования различных действительных отрицательных корней у полинома $\Delta = 0$. Тогда все корни характеристического уравнения различные и чисто мнимые, и система (11) устойчива в критическом случае. Достаточные условия из теоремы 3 совпадают с необходимыми (без границы). Такой же результат мы получим, если будем использовать связку $W = \mu h + V_3$.

Пусть $a_1 = a_2 = -1, a_3 = 2\ H_1^2 = H_2^2 = 10$, тогда система неравенств (12)

$$-(-1+\alpha) > 0,\ (-1+\alpha)^2 > 0,\ (-1+\alpha)^2(2+\alpha) > 0,$$
$$(-1+\alpha)\left(2 - 13\alpha + 10\alpha^2 + \alpha^3 + 2\alpha H_3^2 + \alpha^2 H_3^2\right) > 0,$$
$$\left(1 - 2\alpha + \alpha^2 + \alpha H_3^2\right)\left(2 - 23\alpha + 20\alpha^2 + \alpha^3 + 2\alpha H_3^2 + \alpha^2 H_3^2\right) > 0,$$
$$\left(2 - 23\alpha + 20\alpha^2 + \alpha^3 + 2\alpha H_3^2 + \alpha^2 H_3^2\right)^2 > 0$$

имеет решение:

$$-2 < \alpha < 0,\ H_3^2 > \frac{-2 + 23\alpha - 20\alpha^2 - \alpha^3}{2\alpha + \alpha^2}.$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

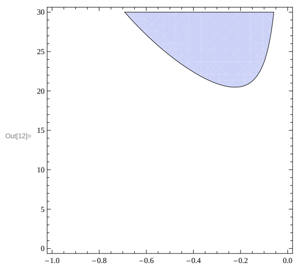

Рис. 1

Графическое представление этого решения дано на рисунке 1. Минимальное значение для H_3^2 достигается при $\alpha = -0.223537$, равном корню уравнения $(-4 - 4\alpha + 63\alpha^2 + 4\alpha^3 + \alpha^4) = 0$. Следовательно, при $H_1^2 = H_2^2 = 10$, $H_3^2 > 20.472$ система (11) устойчива в критическом по Ляпунову случае.

Известно [2], что гироскопическая устойчивость разрушается при действии диссипативных сил $B\dot{x}$ $(B = B^T)$ с полной диссипацией, когда форма $\dot{x}^T B\dot{x}$ определенно положительна. Но возможно неустойчивую потенциальную систему стабилизировать до асимптотической устойчивости действием гироскопических сил и сил со знакопеременной матрицей B.

Пусть в системе (11) дополнительно действуют силы $B\dot{x}$, где $B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\lambda^6 + \lambda^5 c_1 + \lambda^4 c_2 + \lambda^3 c_3 + \lambda^2 c_4 + \lambda\, c_5 + c_6, \tag{13}$$

где

$$c_1 = b_1+b_2+b_3, c_2 = a_1+a_2+a_3+b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3+H_1^2+H_2^2+H_3^2,$$

$$c_3 = (a_2 + a_3)b_1 + (a_1 + a_3)b_2 + (a_1 + a_2)b_3 + b_1b_2b_3 + b_1H_1^2+$$
$$+b_2H_2^2 + b_3H_3^2,$$

$$c_5 = a_2a_3b_1 + a_1a_3b_2 + a_1a_2b_3,$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

$$c_4 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_3b_1b_2 + a_2b_1b_3 + a_1b_2b_3 + a_1H_1^2+$$
$$+a_2H_2^2 + a_3H_3^2,\ c_6 = a_1a_2a_3.$$

Вещественные части всех корней уравнения (13) отрицательны, если выполнены условия Льенара–Шипара:

$$c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad c_3 > 0, c_4 > 0, \quad c_5 > 0, \quad c_6 > 0,$$

$$\Delta_5 = c_1c_2c_3c_4c_5 - c_3^2c_4c_5 - c_1^2c_4^2c_5 - c_1c_2^2c_5^2 + c_2c_3c_5^2+$$
$$+2c_1c_4c_5^2 - c_5^3 - c_1c_2c_3^2c_6 + c_3^3c_6 + c_1^2c_3c_4c_6 + 2c_1^2c_2c_5c_6-$$
$$-3c_1c_3c_5c_6 - c_1^3c_6^2 > 0,$$
$$\Delta_3 = c_1c_2c_3 - c_3^2 - c_1^2c_4 + c_1c_5 > 0.$$

Разрешая эту систему неравенств относительно коэффициентов b_i, получим условия стабилизации гироскопически устойчивой системы. Пусть в системе (11) параметры имеют следующие значения: $a_1 = a_2 = -1, a_3 = 2$, $H_1^2 = H_2^2 = 10$, $H_3^2 = 30$ (потенциальная система устойчива в линейном приближении за счет гироскопических сил) и $b_1 = 0$. Тогда система неравенств Льенара–Шипара:

$$b_2 + b_3 > 0,\ -2b_2 + b_3 > 0,$$

$$50 + b_2b_3 > 0,\ 37 - b_2b_3 > 0,$$
$$11b_2 + 28b_3 > 0,$$
$$-45400b_2^3 - 125230b_2^2b_3 - 740b_2^4b_3-$$
$$-77200b_2b_3^2 - 1980b_2^3b_3^2 + 20b_2^5b_3^2-$$
$$-12000b_3^3 - 3460b_2^2b_3^3 + 70b_2^4b_3^3-$$
$$-1200b_2b_3^4 + 20b_2^3b_3^4 - 30b_2^2b_3^5 > 0,$$

$$390b_2^2 + 1259b_2b_3 + 12b_2^3b_3 +$$
$$+580b_3^2 + 41b_2^2b_3^2 + 29b_2b_3^3 > 0$$

дает интервал $-2.01828 < b_2 < 0$; коэффициент $b_3 > 0$. При $b_2 = -1$ имеем $1.87647 < b_3 < 19.1631$; при $b_2 = -2$: $5.38249 < b_3 < 6.6987$; при $b_2 = -0.1$: $0.179709 < b_3 < 0.414005$ и $199.364 < b_3 < 199.924$. Следовательно, добавление ускоряющей силы по координате x_1 и диссипативной силы по координате x_3 может сделать систему асимптотически устойчивой независимо от нелинейных сил $Q(\dot{x}, x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomson, W., Tait, P.* Treatise on Natural Philosophy. Part 1. Cambridge University Press. 1879.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 586 с.
3. *Кузъмин П.А.* Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука, 1973. 206 с.
4. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974.
5. *Булатович Р.М.* Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем в случаях, когда потенциальная энергия имеет максимум // ПММ, —1997.—Том 61.— Вып. 3. — С. 385—389.
6. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
7. *Hagedorn P.* Über die Instabilität konservativer Systeme mit gyroskopischen Kräften.// Arch.Rat.Mech.Anal. — 1975. — Vol. 58. — No 1. — P. 1—9.
8. *Banshchikov A., Burlakova L.* Application of computer algebra in problems on stabilization of gyroscopic systems. В кн.– Computer Algebra in Scientific Computing/CASC 2000,V.Ganzha,...(eds.) Springer, 2000.—P. 35—47.
9. *Huscyin K., Hagedorn P., Teschner W.* On the stability of linear conservative gyroscopic systems // Journal of Applied Mathematics and Physics.— 1983.— Vol. 34.—No 6.— P. 807—815.

10. *Козлов В.В.* О стабилизации неустойчивых равновесий зарядов сильными магнитными полями // ПММ, — 1997. — Т 61. — Вып. 3. — С. 390—397.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 531:532

А.Н. Голубятников
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
golubiat@mail.ru

МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ СРЕД С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ[3]

Рассматриваются приложения понятия аффинной симметрии к построению анизотропных моделей механики сплошной среды при наличии геометрических связей. Теория основана на классификации моделей сред по группам нечувствительности – непрерывным подгруппам полной группы трехмерных линейных преобразований – с вычислением их инвариантов, составленных из лагранжевых компонент метрического тензора. Приведена таблица возможных вариантов, которая содержит около 100 типов симметрий (считая по одной как отдельные группы, так и непрерывные серии). Исследован вопрос о сильных разрывах, согласованных со связями. При наличии связей во всех случаях симметрии указан класс точных решений уравнений движения среды с однородной деформацией. Рассматривается плоская задача для моделей с однопараметрическими группами симметрий. Показано, что в этом случае построение решения сводится к анализу линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами. В качестве примера дано решение задачи о стационарном обтекании препятствия несжимаемой волокнистой средой.

Введение. Этап построения моделей анизотропных сплошных сред и полей с ортогональными симметриями был, по-существу, завершен в работе В.В. Лохина и Л.И. Седова [1], где было выполнено полное описание тензорных инвариантов подгрупп ортогональной группы O_3. Эти результаты, как из-

[3]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00026, 08-01-00401) и грантом Президента РФ (проекты НШ-610.2008.1).

вестно, нашли широкое применение в самых различных вопросах механики, физики, химии и биологии.

Дальнейшее развитие теории симметрии, связанное с исследованием более широкого класса преобразований и их инвариантов – аффинных симметрий, включающих кроме ортогональных преобразований также растяжения и сдвиги, было предложено в работах [2, 3], посвященных теории анизотропных жидкостей и жидких кристаллов. Однако в этих работах были использованы лишь отдельные подгруппы полной группы трехмерных линейных преобразований GL_3. Позже автором данной работы была дана полная классификация таких подгрупп, как непрерывных, так и с учетом дискретных элементов конечного порядка, а также их инвариантов. На этом пути была построена общая теория анизотропных сплошных сред и их взаимодействий с электромагнитным полем (см. работы [4, 5, 6]).

Эти исследования значительно расширили представления о возможных видах материальной симметрии сплошных сред, в том числе, дали более уточненное описание анизотропии в теории мягких сред типа жидких кристаллов, магнитных и поляризующихся жидкостей, коллоидных растворов, наномеханических материалов и других естественных или искусственных структурных образований.

Отдельно следует выделить приложения аффинной симметрии к теории анизотропно жестких материалов как сред с полным набором, при заданной группе симметрии, геометрических связей. Сюда относятся, например, абсолютно твердое тело, несжимаемая жидкость и др. При этом тензор напряжений, помимо дисторсии, содержит также искомые множители Лагранжа, например, давление. Возможны, конечно, и смешанные виды сред типа несжимаемого упругого материала.

Наличие линейной группы симметрии и соответствующих ограничений на закон движения приводит, вообще говоря, как к конечномерным, так и бесконечномерным множествам воз-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

можных движений. Простейшим примером, кроме известных движений абсолютно твердого тела, является инвариантность свойств среды относительно однопараметрической группы однородных трехосных растяжений, которая приводит к движению на 10-параметрической группе конформных преобразований.

Важным классом решений уравнений движения со связями можно считать решения с однородной деформацией, что показывает полную совместность уравнений для всех случаев симметрии.

Для трехмерных движений полное решение уравнений геометрических связей представляется сложным. Ниже разработан алгоритм решения задач с плоским законом движения для сред, обладающих двумерными однопараметрическими группами симметрии. В это случае два уравнения связей, представляющие собой уравнения первого порядка, квадратичные по производным, могут быть сведены к линейной системе с постоянными коэффициентами. Затем из уравнений движения определяются множители Лагранжа. В частности, в случае группы всесторонних растяжений получаются уравнения Коши–Римана.

1. Аффинная симметрия

Построение моделей тесно связано с наложением определенных свойств инвариантности на вид уравнений: кинематической симметрии наблюдателя, внешних силовых полей и энергетических воздействий, а также материальной симметрии, отвечающей преобразованиям выделенного репера или, просто, лагранжевых переменных.

Так, для "простых"сред удельная внутренняя энергия имеет вид

$$U = U(S, g_{\alpha\beta}), \tag{1.1}$$

где S – удельная энтропия, $g_{\alpha\beta} = \delta_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta$ – сопутствующие компоненты метрического тензора, $x^i_\alpha = \partial x^i / \partial \xi^\alpha$ – элементы

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

матрицы дисторсии, $x^i = x^i(\xi^\alpha, t)$ – закон движения среды в эйлеровых декартовых координатах x^i и лагранжевых координатах ξ^α; $i, \alpha = 1, 2, 3$, t – время.

Ниже при исследовании общих вопросов структуры функции (1.1) мы рассмотрим только непрерывные подгруппы полной линейной группы, классификация которых приведена в [6], и дадим результаты вычислений инвариантов $I_s(q_{\alpha\beta})$, составленных из компонент симметричного тензора второго ранга $\mathbf{q}$ (табл. 1). При задании вида функции $U = U(S, I_s)$ следует положить $\mathbf{q} = \mathbf{g}$.

В табл. 1 в первом столбце указано число независимых параметров a^k, $k = 1, \ldots, r$, группы (ее размерность), во втором – порядковый номер, далее – матрицы C_k, которые образуют базис алгебры Ли как линейного пространства, содержащего бесконечно малые преобразования в окрестности единичного элемента группы E. Матрицы C_k выражены через элементарные матрицы e^α_β, у которых на пересечении α-й строки и β-го столбца стоит 1, остальные элементы равны нулю. Общий вид конечного преобразования группы $A(a)$ имеет вид матричной экспоненты

$$A(a) = \exp(a^k C_k) = E + a^k C_k + \frac{1}{2}(a^k C_k)^2 + \cdots \tag{1.2}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование. Оператор $d = e^1_1 + e^2_2 + e^3_3$ отвечает однородному растяжению. Величины x, y, z – параметры непрерывных или дискретных серий подгрупп. Ограничения на них указаны в таблице. Величина $q = \det(q^{\alpha\beta})$ и $(q^{\alpha\beta}) = (q_{\alpha\beta})^{-1}$ как матрицы.

По сравнению с работой [6] здесь проведено уточнение параметра z группы $G_{2.8}$, исправлена опечатка в инвариантах группы $G_{4.4}$.

Вычисление инвариантов связано с решением системы уравнений вида

$$\sum_{r\le l}\left(C^p_{r(k)}q_{pl}+C^p_{l(k)}q_{rp}\right)\frac{\partial I}{\partial q_{rl}}=0, \tag{1.3}$$

в которую входят матрицы C_k; $l,p,r=1,2,3$.

Классификация дана с точностью до сопряженности в полной линейной группе. В принципе группа симметрии может быть группой преобразований векторов некоторого выделенного репера [6], меняющегося от точки к точке. Однако далее предполагается, что эти преобразования есть просто линейные преобразования некоторого фиксированного класса лагранжевых координат, например, выбранных как начальные декартовы $\xi^\alpha=x^\alpha_0$, $\alpha=1,2,3$, так что начальная метрика $g^0_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$, плотность $\rho=\rho_0/|x^i_\alpha|$ и т.д. Здесь и далее нулем отмечено начальное состояние.

В приложениях, в зависимости от ситуации, группа может иметь вид $hA(a)h^{-1}$, где h – постоянная матрица, $A(a)$ – одна из канонических матриц (1.2) в соответствии с табл. 1. Такие среды можно назвать средами с однородной симметрией. Ниже будем для простоты предполагать, что $h=E$. Однако часто приходится иметь дело просто с переменным вмороженным репером. В этом случае удобней записывать уравнения в эйлеровых координатах x^i.

2. Анизотропно жесткие среды

Если на движение среды наложены связи вида

$$I_s(g_{\alpha\beta})=I_s(\delta_{\alpha\beta})\equiv I^0_s, \tag{2.1}$$

где I_s – один или несколько инвариантов одной из подгрупп полной линейной группы, указанных в табл. 1, то соответствующие инварианты выпадут из формулы для внутренней энергии, а также упростится вид диссипации.

Такие связи можно назвать геометрическими. В отличие от механики систем с конечным числом степеней свободы их

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

нельзя назвать голономными, так как уже интегрирование таких связей часто представляет собой отдельную большую проблему. Конечно, в механике сплошной среды могут возникать и динамические связи, в которые входит тензор скоростей деформаций. Последние мы здесь рассматривать не будем.

Групповая классификация позволяет упорядочить процессы наложения или разрушения связей, а в некоторых важных случаях свести их интегрирование к простым уравнениям в частных производных. При решении практических задач наложение связи на решение (иногда с небольшим изменением системы уравнений) может привести к существенному упрощению решения. Так, например, при анализе дозвукового стационарного обтекания тела можно использовать вместо модели сжимаемого газа модель несжимаемой жидкости и т.д.

Отдельно следует выделить теорию полностью анизотропно жестких материалов, подчиненных всем геометрическим связям с данной группой симметрии, внутренняя энергия которых зависит лишь от энтропии $U = U(S)$ и вообще не дает вклада в уравнения движения. Сюда относятся, например, абсолютно твердое тело, несжимаемая жидкость и др. Такого рода модели могут применяться к построению общей теории хрупкого разрушения материалов, начиная с абсолютно твердого тела и кончая "пылью" — средой без механических напряжений, путем постепенного разрушения связей. Здесь возникают как проблемы разрешимости уравнений связей, так и вопросы полного решения конкретных задач.

Обратимся к моделям полностью жестких сред. Если для простоты ограничиться процессами без вязкого сопротивления и опустить уравнение притока тепла, которое может быть решено на последующем этапе, система уравнений примет вид

$$I_s(x^i_\alpha x^j_\beta \delta_{ij}) = I^0_s, \qquad \rho_0 x_{i,tt} = \rho_0 F_i - \left(\lambda^s \frac{\partial I_s}{\partial x^i_\alpha}\right)_\alpha, \tag{2.2}$$

где F_i – заданная массовая сила, индексы α, β, t обозначают производные.

Здесь интересны случаи, когда число механических связей, содержащих лишь компоненты метрического тензора, больше или равно размерности пространства. При этом мы полностью, во всяком случае с точностью до краевых условий, можем определить закон движения среды. Пример абсолютно твердого тела, когда имеется 6 связей, показывает, что здесь также существенны интегральные соотношения, содержащие внешние силовые воздействия.

В указанных случаях возможны разрывы производных закона движения среды x^i_α. Необходимые условия на разрыве дает непрерывность значений инвариантов

$$[I_s(g^{\alpha\beta})] = 0. \tag{2.3}$$

Следует учитывать, что в силу непрерывности лагранжевых переменных $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x,t)$ скачки производных $\xi^\alpha_i = \partial\xi^\alpha/\partial x^i$ равны $[\xi^\alpha_i] = [\xi^\alpha_n]n_i$, где n_i – единичная нормаль к поверхности разрыва. Таким образом, например, скачок

$$[g^{\alpha\beta}] = [\xi^\alpha_n \xi^\beta_n] \tag{2.4}$$

и т.п.

3. Решения с однородной деформацией

В общем случае уравнения связей $I_s(g_{\alpha\beta}) = I_s(\delta_{\alpha\beta})$ могут быть представлены в виде

$$x^i_\alpha = O^i_\beta(\theta) A^\beta_\alpha(a), \tag{3.1}$$

где $O(\theta)$ – ортогональная матрица, зависящая от трех параметров вращения θ^m, и $A(a)$ – матрица группы материальной симметрии среды, зависящая от r параметров a^k.

Рассмотрим класс решений уравнений (3.1) при отсутствии массовых сил ($F_i = 0$). Будем предполагать, что

$$x^i = b^i(t) + l^i_\alpha(t)\xi^\alpha, \qquad l^i_\alpha = O^i_\beta(\theta(t)) A^\beta_\alpha(a(t)),$$

$$\lambda^s = L^s(t) + M^s_\alpha(t)\xi^\alpha + N^s_{\alpha\beta}(t)\xi^\alpha\xi^\beta. \qquad (3.2)$$

Подставляя формулы (3.2) в уравнения (3.1) и приравнивая при степенях ξ^α, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\delta_{ij}\frac{d^2\, b^j}{dt^2} + M^s_\alpha\frac{\partial I_s}{\partial l^i_\alpha} = 0, \qquad \delta_{ij}\frac{d^2\, l^j_\beta}{dt^2} + 2N^s_{\alpha\beta}\frac{\partial I_s}{\partial l^i_\alpha} = 0, \qquad (3.3)$$

где используется матрица $(g_{\alpha\beta}) = (\delta_{ij}l^i_\alpha l^j_\beta)$.

Число этих уравнений обычно значительно меньше числа неизвестных. Необходимые функции времени должны задаваться краевыми условиями. В частности, для несжимаемой жидкости, когда число связей равно 1 ($r = 8$), произвол составляет 9 функций времени t.

Данный класс решений, обобщающий случай движения твердого тела с шестью степенями свободы, указывает на существование решения при всех возможных видах связей, формулировка которых основана на представлениях о материальных симметриях, представленных в табл. 1.

4. Плоское движение

Рассмотрим случай плоского движения с однопараметрическими группами нечувствительности. Этот класс решений для несжимаемых анизотропно жестких сред рассматривался в работе [7]. В этой работе обсуждались вопросы интегрирования уравнений при наличии сильных разрывов и было дано решение задачи о стационарном обтекании препятствия средой, состоящей из нерастяжимых нитей. Однако полного анализа уравнений связей еще проведено не было.

Покажем, что в этом случае уравнения связей вместе с уравнениями движения всегда могут быть эффективно проинтегрированы. Здесь имеется 3 типа однопараметрических симметрий: 1) вращение с однородным растяжением, 2) сдвиг с однородным растяжением и без него, а также 3) двуосное растяжение.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Приведем соответствующие канонические типы матриц конечных преобразований $A(a)$. Отдельно указана матрица вращений $O(\theta)$.

$$1)\quad \begin{pmatrix} e^{xa}\cos a & e^{xa}\sin a \\ -e^{xa}\sin a & e^{xa}\cos a \end{pmatrix};\qquad 2)\quad \begin{pmatrix} e^{xa} & e^{xa}a \\ 0 & e^{xa} \end{pmatrix};\qquad (4.1)$$

$$3)\quad \begin{pmatrix} e^{a} & 0 \\ 0 & e^{xa} \end{pmatrix}\quad O=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Для первого типа параметр серии групп $x \geq 0$, для второго $x = 0; 1$ и для третьего $-1 \leq x \leq 1$.

Имеются следующие инварианты:

$$1)\quad (g_{11}+g_{22})^2 g,\quad g\exp\left(2x\,\mathrm{arctg}\frac{2g_{12}}{g_{11}-g_{22}}\right),\quad g=\det(g^{\alpha\beta});$$

$$2)\quad g_{11}^2 g,\quad g_{11}\exp\left(-\frac{2x\,g_{12}}{g_{11}}\right);\qquad 3)\quad g_{12}^2 g,\quad g_{22}g_{11}^{-x}.$$

Используем уравнения связи в виде (3.1), где a, θ – функции ξ^α (переменную t опускаем). Очевидно, первый случай при $x \neq 0$, благодаря перемножению матриц $O(\theta)$ и $A(a)$ и линейной замене параметров, сводится к третьему случаю с $x = 1$, что приводит к конформным преобразованиям $x^i = x^i(\xi^\alpha)$ (в этом случае вид метрического тензора конформно-плоский), удовлетворяющим уравнениям Коши–Римана.

Если же в первом случае $x = 0$, то можно вообще считать матрицу $A = E$ (т.к. происходит перемножение ортогональных матриц). В этом случае мы имеем дело с твердотельным движением, когда параметр $\theta = \theta(t)$.

В остальных случаях система (3.1) может быть решена различными способами, например исключением x^i. При этом получается система квазилинейных уравнений первого порядка для a и θ. Далее, исключая θ, получим равенство нулю тензора кривизны пространства как уравнение для a.

Можно также искать общее решение, используя переменные a и θ как параметры, в виде

$$\begin{cases} x^i = O^i_\beta \left(A^\beta_\alpha\, \xi^\alpha + q^\beta \Big(a, \theta)\right), \\ 0 = dO^i_\beta/d\theta \left(A^\beta_\alpha \xi^\alpha + q^\beta\right) + O^i_\beta\, \partial q^\beta/\partial\theta, \\ 0 = O^i_\beta \left(dA^\beta_\alpha/da\, \xi^\alpha + \partial q^\beta/\partial a\right). \end{cases} \tag{4.2}$$

Имея в виду невырожденность матриц $dO/d\theta$ и A, из второго уравнения выразим вектор

$$\boldsymbol{\xi} = -A^{-1}\left(\mathbf{q} + (dO/d\theta)^{-1} O\, \mathbf{q}_\theta\right) \tag{4.3}$$

и подставим его в третье, умноженное слева на матрицу O^{-1}. Тогда в векторном виде имеем

$$\mathbf{q}_a = dA/da\, A^{-1}\left(\mathbf{q} + (dO/d\theta)^{-1} O\, \mathbf{q}_\theta\right). \tag{4.4}$$

В силу свойства коммутативности всякой однопараметрической группы Ли линейных преобразований при таком выборе параметра, когда операция умножение элементов группы сводится к сложению значений параметра, имеет место постоянство матрицы $A^{-1} dA/da = \mathrm{const}$, которая является матрицей C бесконечно малого преобразования (п. 1). То же – и для матрицы O.

В результате получим следующие линейные уравнения для вектора $q^\beta(a, \theta)$, причем с постоянными коэффициентами, ограничившись вторым и третьим случаями:

$$2) \qquad \mathbf{q}_a = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}_\theta + \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mathbf{q}. \tag{4.5}$$

$$3) \qquad \mathbf{q}_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}_\theta + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mathbf{q}. \tag{4.6}$$

Решив уравнения (4.5), (4.6), затем из соотношения (4.3) и первого из равенств (4.2) находим в неявной форме

$$x^i = x^i(a, \theta), \quad \xi^\alpha = \xi^\alpha(a, \theta).$$

Исследование типов уравнений (4.5), (4.6) дает следующее. Уравнения (4.5) при $x = 0$ имеют вырожденный гиперболический тип, причем решение имеет вид

$$q^1 = f(\theta) + g(a + \theta), \qquad q^2 = f'(\theta).$$

При $x = 1$ эта система – эллиптическая.

Уравнения (4.6) при $x < 0$ имеют гиперболический тип; при $x = 0$ – вырожденный гиперболический, причем решение имеет вид

$$q^1 = f'(\theta) + g(\theta)e^a, \qquad q^2 = f(\theta),$$

а при $x > 0$ система – эллиптическая.

После определения закона движения среды для двух множителей Лагранжа в силу уравнений движения мы имеем просто два линейных уравнения с переменными коэффициентами.

5. Обтекание препятствия

В качестве примера приведем решение плоской стационарной задачи об обтекании абсолютно твердого кругового препятствия несжимаемой однородной средой, состоящей из нерастяжимых нитей. В этом случае мы имеем группу симметрии G_1 второго типа (4.1) при $x = 0$.

В эйлеровых переменных уравнения имеют вид

$$\nabla_i v^i = 0, \qquad v^j \nabla_j |\mathbf{A}| = 0, \qquad v^j \nabla_j A^i = A^k \nabla_k v^i, \qquad (5.1)$$

$$\rho v^j \nabla_j v^i + \nabla_k \left(p\delta^{ik} + qA^i A^k \right) = 0.$$

Здесь вектор $\mathbf{v}$ – скорость, вектор $\mathbf{A}$, характеризующий анизотропию, вморожен в среду, p – давление и q – дополнительный множитель Лагранжа.

Рассмотрим декартову систему координат x, y с началом в центре препятствия. Пусть слева от него имеется однородный поступательный поток, направленный вдоль оси x со скоростью V_∞, параллельной вектору анизотропии $\mathbf{A} = (1, 0)$, а также $p = q = 0$. Тогда в силу вмороженности всегда будем иметь $A^i = v^i/V_\infty$.

Если $\psi(x, y)$ есть функция тока, то

$$v^i = \epsilon^{ij}\nabla_j\psi, \qquad \nabla_i\psi\nabla^i\psi = V_\infty^2, \tag{5.2}$$

где ϵ^{ij} – двумерный тензор Леви–Чивита.

Ограничимся анализом обтекания передней части препятствия ($x < 0$). В отличие от изотропной несжимаемой жидкости непрерывное обтекание невозможно. Из условия типа (2.4) при $\xi^2 = \psi$ (с учетом соотношений $g^{22} = g\,g_{11}$, $g = 1$, $g_{11} = |\mathbf{A}|^2 = 1$) линия разрыва может быть направлена только вдоль биссектрисы скачка вектора $\mathbf{A}$.

Пусть в полярных координатах r, θ $\;(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ уравнение границы препятствия имеет вид $r = R$. Тогда в областях, ограниченных этой окружностью и двумя параболами, выходящими из передней точки препятствия,

$$y = \pm(x^2 - R^2)/(2R),$$

как линиями разрыва, имеем

$$\psi_\pm = \pm V_\infty(r - R). \tag{5.3}$$

Уравнения (5.1) имеют интеграл Бернулли:

$$\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{p + q}{\rho} = h(\psi) \tag{5.4}$$

и легко интегрируются. Две произвольные функции находятся из условия сохранения потока количества движения

$$[\rho\mathbf{v}v_n + p\mathbf{n} + q\mathbf{A}A_n] = 0. \tag{5.5}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Тогда распределение напряжений позади линий разрывов есть

$$p = \rho V_\infty^2 \left[1 - \frac{R}{r} \ln \frac{r(1 - |\sin\theta|)}{R} + \frac{R|\sin\theta|}{r(1 - |\sin\theta|)} \right],$$

$$q = -p - \rho V_\infty^2 \frac{R}{r}.$$

Важной особенностью данной задачи является присутствие при $\theta = \pi/2$ бесконечного значения компоненты перерезывающего напряжения $p^{rr} = -p$. Если выставить какой-нибудь критерий разрушения, например, вида $p = K$, где K – постоянная, то получим границу области существования данного решения, справа от которой надо уже применять другую модель среды, например, если происходит разрушение волокнистой структуры, изотропную несжимаемую жидкость. Правда, дальнейшее течение будет в этом случае вихревым и достаточно сложным.

Заключение. Обсудим кратко вопросы исследований, оставшихся за пределами данной работы. Прежде всего необходим полный анализ гиперболичности уравнений (с четырьмя независимыми переменными), полученных анизотропно жестких моделей, которые связаны с распространением слабых разрывов и термодинамической устойчивостью среды, особенно когда закон движения полностью определяется условиями жесткости. Это может служить средством отбора моделей, пригодных для описания действительности, в противном случае такие среды при бездиссипативном подходе мгновенно саморазрушаются. Проведение анализа условий на сильных разрывах, согласованных с уравнениями связей. Формулировка физически обоснованных силовых критериев разрушения. А также согласование с моделями вязко-упруго-пластических нежестких или частично жестких сред.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Т а б л и ц а 1

Непрерывные подгруппы полной линейной группы

dim	N^0	Алгебра Ли	Инварианты
1	1	$x(e_1^1+e_2^2)+ye_3^3+e_2^1-e_1^2$, $x\ge 0$	$q_{33}(q_{11}+q_{22})^2q, q_{33}q^{33}$, $(q_{11}+q_{22})\exp(-x\mathrm{arctg}\frac{2q_{12}}{q_{11}-q_{22}})$, $(q_{11}+q_{22})^yq_{33}^{-x}, (q_{11}+q_{22})(q^{11}+q^{22})$
	2	$x(e_1^1+e_2^2)+ye_3^3+e_2^1$, $x=0;1$	$q_{33}q_{11}^2q, q_{11}q_{13}^2q, q_{13}q^{23}$, $q_{11}\exp(-\frac{2xq_{12}}{q_{11}}), q_{33}\exp(-\frac{2yq_{12}}{q_{11}})$,
	3	$e_1^1+xe_2^2+ye_3^3$, $1\ge x\ge y$	$q_{11}q_{22}q_{12}^{-2}, q_{11}q_{33}q_{13}^{-2}, q_{22}q_{33}q_{23}^{-2}$, $q_{22}q_{11}^{-x}, q_{33}q_{11}^{-y}$,
	4	$xd+e_2^1+e_3^2$, $x=0;1$	$q_{11}^3q, q_{11}q^{33}, (q_{22}-2q_{13})q^{33}$, $q_{11}q^{23}+q_{12}q^{33}, q^{33}\exp(\frac{2xq_{12}}{q_{11}})$
2	1	$x(e_1^1+e_2^2-2e_3^3)+e_2^1-e_1^2$, d, $x\ge 0$	$q_{33}(q_{11}+q_{22})^2q, q^{33}(q^{11}+q^{22})^2q^{-1}$, $q_{33}q^{33}, q_{33}^3q\exp(6x\mathrm{arctg}\frac{2q_{12}}{q_{11}-q_{22}})$,
	2	$x(e_1^1+e_2^2-2e_3^3)+e_2^1, d$, $x=0;1$	$q_{33}q_{11}^2q, q_{11}q_{13}^2q^{1/2}, q_{13}q^{23}$, $q_{11}^3q\exp(-\frac{6xq_{12}}{q_{11}})$
	3	$e_1^1+xe_2^2-(1+x)e_3^3, d$, $-1/2<x\le 1$	$q_{11}q_{23}^2q, q_{22}q_{13}^2q, q_{11}q_{22}q_{33}q$, $(q_{33}q_{11}^{1+x})^3q^{2+x}$,
	4	$e_2^1+e_3^2, d$	$q_{11}^3q, q^{-1}(q^{33})^3, (q_{22}-2q_{13})^3q$, $q_{11}q^{23}+q_{12}q^{33}$
	5	$e_1^1+e_2^2-2e_3^3+yd$, $e_2^1-e_1^2+zd$	$q_{33}(q_{11}+q_{22})^2q, q^{-1}q^{33}(q^{11}+q^{22})^2$, $q_{33}q^{33}, q_{33}^{3y}q^{y-2}\exp(-6z\mathrm{arctg}\frac{2q_{12}}{q_{11}-q_{22}})$,
	6	$e_1^1-e_2^2+yd$, $e_1^1-e_3^3+zd$	$q_{11}q_{23}^2q, q_{22}q_{13}^2q, q_{11}q_{22}q_{33}q$, $q_{11}^{-3y}q_{33}^{3(z-y)}q^{-1-2y+z}$
	7	$e_2^1+e_3^2+yd, e_3^1+zd$, $y=0;1, z=0;1$	$q_{11}^3q, q^{-1}(q^{33})^3, q_{11}q^{23}+q_{12}q^{33}$ $q^{33}\exp(\frac{2yq_{12}+z(2q_{13}-q_{22})}{q_{11}})$
	8	$e_1^1+e_2^2-2e_3^3+yd, e_2^1+zd$, $z=0;y$	$q_{33}q_{11}^2q, q_{11}q_{13}^2q, q_{13}q^{23}$, $q_{11}^{3y}q^{1+y}\exp(\frac{6zq_{12}}{q_{11}})$,
	9	e_2^1+yd, e_3^1+zd, $y=0;1, z=0;1$	$q_{11}^3q, q^{-1}(q^{22})^3, q^{-1}(q^{23})^3$, $q^{11}\exp(-\frac{2(yq_{12}+zq_{13})}{q_{11}})$
	10	e_3^1+yd, e_3^2+zd, $y=0;1, z=0;1$	$q_{11}^3q, q_{12}^3q, q_{22}^3q$, $q^{11}\exp(-\frac{2yq_{13}}{q_{11}}+\frac{2zq^{23}}{q^{33}})$
	11	$e_2^1+e_3^2, e_1^1-e_3^3+yd$	$(q^{33})^3q_{11}^{-3}q^{-2}, (q_{22}-2q_{13}))^2q$, $q_{11}^{3y}q^{1+y}, q^{-1}q_{11}^{-3}(q_{11}q^{23}+q_{12}q^{33})^2$
	12	$e_2^1, xe_1^1+(1+x)e_2^2-$ $-(1+2x)e_3^3+yd$	$q_{13}^2q_{11}^{-1}q_{33}^{-1}, (q^{23})^2q_{11}^{-1}q^{-1}$, $(q_{13}q^{23})^{6y}q^{-1}, q_{33}^xq_{11}^{1+2x}q^{x+1/3}$
	13	$e_3^1, e_1^1+e_2^2-2e_3^3+e_2^1+yd$	$(q^{23})^3q_{11}^{-3}q^{-2}, q^{33}q_{11}^{-2}q^{-1}, q_{11}^{3y}q^{1+y}$, $q_{11}^3q\exp(-\frac{6q_{12}}{q_{11}})$
	14	$e_3^1, -2e_1^1+e_2^2+e_3^3+e_3^2+yd$	$q_{11}q_{22}^2q, q_{12}^4q_{11}^{-1}q, q_{11}^{3y}q^{y-2}$, $q^{-1}(q^{33})^3\exp(-\frac{6q^{23}}{q^{33}})$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Т а б л и ц а 1 (продолжение)

dim	N^0	Алгебра Ли	Инварианты
3	1	$e_1^1+e_2^2-2e_3^3,$	$q_{33}(q_{11}+q_{22})^2q, q_{33}q^{33},$
		$e_2^1-e_1^2, d$	$q^{33}(q^{11}+q^{22})^2q^{-1}$
	2	e_1^1, e_2^2, e_3^3	$q_{11}q_{22}q_{33}q, q_{11}q_{23}^2q, q_{22}q_{13}^2q$
	3	$e_2^1+e_3^2, e_3^1, d$	$q_{11}^3q, q^{-1}(q^{33})^3, q_{11}q^{23}+q_{12}q^{33}$
	4	$e_1^1+e_2^2-2e_3^3, e_2^1, d$	$q_{11}^2q_{33}q, q_{11}q_{13}^2q^{-1}, q_{13}q^{23}q$
	5	e_2^1, e_3^1, d	$q_{11}^3q, q^{-1}(q^{22})^3, q^{-1}(q^{23})^3$
	6	e_3^1, e_3^2, d	$q_{11}^3q, q_{12}^3q, q_{22}^3q$
	7	$e_1^1-e_3^3, e_2^1+e_3^2, d$	$(q_{33})^3q_{11}^{-3}q^{-2}, (q_{22}-2q_{13})^3q,$
			$q^{-1}(q_{11}q^{23}+q_{12}q^{33})q_{11}^{-3}$
	8	$xe_1^1+(1+x)e_2^2-(1+2x)e_3^3,$	$q_{11}q_{33}q_{13}^{-2}, q_{33}^xq_{11}^{1+2x}q^{x+1/3},$
		e_2^1, d	$(q^{23})^2q_{11}^{-1}q^{-1}$
	9	$e_1^1+e_2^2-2e_3^3+e_2^1,$	$(q^{23})^3q_{11}^{-3}q^{-2}, q^{33}q_{11}^{-2}q^{-1},$
		e_3^1, d	$q_{11}^3q\exp(-\frac{6q_{12}}{q_{11}})$
	10	$-2e_1^1+e_2^2+e_3^3+e_3^2,$	$q_{11}q_{22}^2q, q_{12}^4q_{11}^{-1}q,$
		e_3^1, d	$q^{-1}(q^{33})^3\exp(-\frac{6q^{23}}{q^{33}})$
	11	$e_2^1+e_3^2, e_3^1,$	$q_{11}^{3y}q^{1+y}, q_{11}^{y-1}(q^{33})^{y+1},$
		$e_1^1-e_3^3+yd$	$(q_{11}q^{23}+q_{12}q^{33})^{2(1+y)}q_{11}^{-3}$
	12	$e_2^1, e_1^1-e_2^2+yd,$	$q_{11}q_{33}q_{13}^{-2}, (q^{23})^2q_{11}^{-1}q^{-1},$
		$e_1^1-e_3^3+zd$	$(q_{13}q^{23})^{6y}q_{33}^{3(y-2z)}q^{2+y-2z}$
	13	$-(1+x)e_1^1+xe_2^2+e_3^3+yd,$	$(q^{23})^2q_{11}^{-1}q^{-1}, q_{11}^{3y}q^{-1-x+y},$
		$e_2^1, e_3^1, \quad \lvert x\rvert\le 1, x\ne -1/2$	$(q^{22})^{3(1+x)}q_{11}^{-3x}q^{-(1+2x)}$
	14	$e_1^1+e_2^2-2e_3^3+zd,$	$(q^{23})^2q_{11}^{-1}q^{-1}, q_{11}q^{22},$
		$e_2^1+yd, e_3^1, \quad y=0;1$	$q_{11}^{3z}q^{1+z}\exp(\frac{6yq_{12}}{q_{11}})$
	15	$e_3^1, e_2^1+yd, e_3^2+zd,$	$q_{11}^3q, (q^{33})^3q^{-1},$
		$y=0;1, z=0;1$	$q_{11}\exp(-\frac{2yq_{12}}{q_{11}}+\frac{2zq^{23}}{q^{33}})$
	16	$-2e_1^1+e_2^2+e_3^3+e_3^2+yd,$	$(q^{33})^2q_{11}^{-1}q^{-1}, q_{11}^{3y}q^{y-2},$
		e_2^1, e_3^1	$q^{-1}(q^{33})^3\exp(-\frac{6q^{23}}{q^{33}})$
	17	$x(-2e_1^1+e_2^2+e_3^3)+$	$(q^{22}+q^{33})^2q_{11}^{-1}q^{-1}, q_{11}^{3y}q^{-2x+y},$
		$+e_3^2-e_2^3+yd, e_2^1, e_3^1$	$(q_{11})^3q\exp(6x\operatorname{arctg}\frac{2q^{23}}{q^{22}-q^{33}})$
	18	$xe_1^1+e_2^2-(1+x)e_3^3+yd,$	$q_{11}q_{22}q_{12}^{-2}, q_{11}^3q_{22}^{-3x}q^{1-x},$
		$e_3^1, e_3^2, \quad \lvert x\rvert\le 1, x\ne -1/2$	$(q_{11}q_{12}^2)^{3y}q^{1+2x+3y}$
	19	$e_1^1-2e_2^2+e_3^3+zd,$	$q_{11}q_{22}q_{12}^{-2}, q_{11}^2q_{22}q,$
		e_3^1+yd, e_3^2	$q_{11}^{3z}q^{1+z}\exp(\frac{6yq_{13}}{q_{11}})$
	20	$e_1^1+e_2^2-2e_3^3+e_2^1+yd,$	$q^{33}q_{11}^{-2}q^{-1}, q_{11}^{3y}q^{1+y},$
		e_3^1, e_3^2	$q_{11}^3q\exp(-\frac{6yq_{12}}{q_{11}})$
	21	$x(e_1^1+e_2^2-2e_3^3)+$	$q^{33}(q_{11}+q_{22})^{-2}q^{-1}, (q^{33})^{3y}q^{2x-y},$
		$+e_2^1-e_1^2+yd, e_3^1, e_3^2$	$q^{-1}(q^{33})^3\exp(-6x\operatorname{arctg}\frac{2q_{12}}{q_{11}-q_{22}})$
	22	$e_2^1+e_1^2, e_3^1+e_1^3, e_3^2-e_2^3$	$q, q_{11}-q_{22}-q_{33}, q^{11}-q^{22}-q^{33}$
	23	$e_1^1-e_2^2, e_2^1, e_1^2$	q, q_{33}, q^{33}
	24	$e_2^1-e_1^2, e_3^2-e_2^3, e_1^3-e_3^1$	$q, q_{11}+q_{22}+q_{33}, q^{11}+q^{22}+q^{33}$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Т а б л и ц а 1 (продолжение)

dim	N^0	Алгебра Ли	Инварианты
4	1	$e_2^1+e_1^2, e_3^1+e_1^3, e_3^2-e_2^3, d$	$(q_{11}-q_{22}-q_{33})^3 q, q^{-1}(q^{11}-q^{22}-q^{33})^3$
	2	$e_1^1-e_2^2, e_2^1, e_1^2, d$	$(q_{33})^3 q, q^{-1}(q^{33})^3$
	3	$e_2^1-e_1^2, e_3^2-e_2^3, e_1^3-e_3^1, d$	$(q_{11}+q_{22}+q_{33})^3 q, q^{-1}(q^{11}+q^{22}+q^{33})^3$
	4	$e_2^1+e_3^2, e_3^1, e_1^1-e_3^3, d$	$(q^{33})^3 q^{-2} q_{11}^{-3}, q^{-1}(q_{11}q^{23}+q_{12}q^{33})^2 q_{11}^{-3}$
	5	$e_2^1, e_1^1, e_2^2, e_3^3$	$q_{11}q_{33}q_{13}^{-2}, (q^{23})^2 q_{11}^{-1} q^{-1}$
	6	$-(1+x)e_1^1+xe_2^2+e_3^3, e_2^1,$ $e_3^1, d, \quad x \le 1$	$(q^{23})^2 q_{11}^{-1} q^{-1}, (q^{22})^{3(1+x)} q_{11}^{-3x} q^{-(1+2x)}$
	7	$x(-2e_1^1+e_2^2+e_3^3)+e_3^2, e_2^1,$ $e_1^3, d \quad x=0;1$	$(q^{33})^2 q_{11}^{-1} q^{-1}, q^{-1}(q^{33})^3 \exp(-\frac{6xq^{23}}{q^{33}})$
	8	$x(-2e_1^1+e_2^2+e_3^3)+$ $+e_3^2-e_2^3, e_2^1, e_3^1, d$	$(q^{22}+q^{33})^2 q_{11}^{-1} q^{-1},$ $(q_{11})^3 q \exp(6x\mathrm{arctg}\frac{2q^{23}}{q^{22}-q^{33}})$
	9	$xe_1^1+e_2^2-(1+x)e_3^3,$ $e_3^1, e_3^2, d \quad x \le 1$	$q_{11}q_{22}q_{12}^{-2}, q_{11}^3 q_{22}^{-3x} q^{1-x}$
	10	$e_1^1+e_2^2-2e_3^3+e_2^1, e_3^1, e_3^2, d$	$q^{33}q_{11}^{-2}q^{-1}, q_{11}^3 q \exp(-\frac{6q_{12}}{q_{11}})$
	11	$x(e_1^1+e_2^2-2e_3^3)+e_2^1-e_1^2$ e_3^1, e_3^2, d	$q^{33}(q_{11}+q_{22})^{-2}q^{-1},$ $q^{-1}(q^{33})^3 \exp(-6x\mathrm{arctg}\frac{2q_{12}}{q_{11}-q_{22}})$
	12	$e_1^1-e_2^2+yd, e_2^2-e_3^3+zd,$ e_2^1, e_3^1	$(q^{23})^2 q_{11}^{-1} q^{-1}, (q^{33})^{3z} q_{11}^{3y} q^{1+y-z}$
	13	$-2e_1^1+e_2^2+e_3^3+yd,$ $e_3^2-e_2^3+zd, e_2^1, e_3^1$	$(q^{22}+q^{33})^2 q_{11}^{-1} q^{-1},$ $(q_{11})^{3y} q^{y-1} \exp(-3z\mathrm{arctg}\frac{2q^{23}}{q^{22}-q^{33}})$
	14	$e_1^1-e_2^2+yd, e_2^2-e_3^3+zd,$ e_3^1, e_3^2	$q_{11}q_{22}q_{12}^{-2}, q_{11}^{3z} q_{12}^{6y} q_{22}^{3(z-y)} q^{1+y+2z}$
	15	$e_1^1+e_2^2-2e_3^3+yd,$ $e_2^1-e_1^2+zd, e_3^1, e_3^2$	$(q_{11}+q_{22})^2 (q^{33})^{-1} q,$ $(q^{33})^{3y} q^{2-y} \exp(6z\mathrm{arctg}\frac{2q_{12}}{q_{11}-q_{22}})$
	16	$e_1^1-e_2^2+yd, e_2^1, e_3^1, e_3^2$	$(q^{33})^3 q^{-1}, q_{11}^{3y} q^{1+y}$
	17	$-(1+x)e_1^1+xe_2^2+e_3^3+yd,$ $e_2^1, e_3^1, e_3^2 \quad x<1, x \ne -1/2$	$(q^{33})^{3(1+x)} q_{11}^{-3} q^{-(2+x)}, q_{11}^{-3y} q^{1+x-y}$
	18	$e_1^1+e_2^2-2e_3^3+yd,$ e_2^1+zd, e_3^1, e_3^2	$q^{33}q_{11}^{-2}q^{-1}, (q_{11})^{3y} q^{1+y} \exp(6z\frac{q_{12}}{q_{11}})$
	19	$-2e_1^1+e_2^2+e_3^3+yd, e_2^1,$ e_3^1, e_3^2+zd	$(q^{33})^2 q_{11}^{-1} q^{-1}, q_{11}^{3y} q^{y-2} \exp(\frac{12zq^{23}}{q^{33}})$
	20	$e_1^1-e_2^2, e_2^1, e_1^2, e_2^2-e_3^3+yd$	$q_{33}q^{33}, q_{33}^{3y} q^{y-1}$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Т а б л и ц а 1 (продолжение)

dim	N^0	Алгебра Ли	Инварианты
5	1	$e_2^1, e_3^1, e_1^1, e_2^2, e_3^3$	$(q^{23})^2 q_{11}^{-1} q^{-1}$
	2	$e_2^1, e_3^1, -2e_1^1 + e_2^2 + e_3^3,$ $e_3^2 - e_2^3, d$	$(q^{22} + q^{33}))^2 q_{11}^{-1} q^{-1}$
	3	$e_3^1, e_3^2, e_1^1, e_2^2, e_3^3$	$q_{11} q_{22} q_{12}^{-2}$
	4	$e_3^1, e_3^2, e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3,$ $e_2^1 - e_1^2, d$	$q^{33}(q_{11} + q_{22})^{-2} q^{-1}$
	5	$e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_1^1 - e_2^2, d$	$(q^{33})^3 q^{-1}$
	6	$-(1+x)e_1^1 + xe_2^2 + e_3^3,$ $e_2^1, e_3^1, e_3^2, d, \quad x \leq 1$	$(q^{33})^{3(1+x)} q_{11}^{-3} q^{-(2+x)}$
	7	$e_2^1, e_1^2, e_1^1, e_2^2, e_3^3$	$q_{33} q^{33}$
	8	$e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_1^1 - e_2^2 + yd$ $e_2^2 - e_3^3 + zd$	$(q^{33})^{3z} q_{11}^{3y} q^{1+y-z}$
	9	$e_2^1, e_1^2, e_3^1, e_3^2, e_1^1 - e_2^2$	q, q^{33}
	10	$e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_2^3, e_2^2 - e_3^3$	q, q_{11}
6	1	$e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_1^1, e_2^2, e_3^3$	1
	2	$e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_1^2, e_1^1 - e_2^2, d$	$q^{-1}(q^{33})^3$
	3	$e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_2^3, e_2^2 - e_3^3, d$	$q_{11}^3 q$
	4	$e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_1^2, e_1^1 - e_2^2, e_3^3 + yd$	$q^{-(1+y)}(q^{33})^{1+3y}$
	5	$e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_2^3, e_2^2 - e_3^3, e_1^1 + yd$	$q^{1+y} q_{11}^{1+3y}$
7	1	$e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_1^2, e_1^1, e_2^2, e_3^3$	1
	2	$e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_2^3, e_1^1, e_2^2, e_3^3$	1
8	1	$e_2^1, e_1^2, e_3^1, e_1^3, e_3^2, e_2^3, e_1^1 - e_2^2,$ $e_2^2 - e_3^3$	q
9	1	$e_1^1, e_2^2, e_3^3, e_2^1, e_1^2, e_3^1, e_1^3, e_3^2, e_2^3$	1

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лохин В.В.*, *Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. — 1963. — Т. 27. — Вып. 3. — С. 393—417.
2. *Coleman B.D.* Simple liquid crystals // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1965. — V. 20. — No. 1. — P. 41—58.
3. *Wang C.-C.* A general theory of subfluids // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1965. — V. 20. — No. 1. — P. 1—40.
4. *Голубятников А.Н.* Непрерывные группы симметрии жидких кристаллов // Докл. АН СССР. — Т. 240. — No. 2. — С. 298—301.
5. *Голубятников А.Н.* Аффинная симметрия сплошных сред. М.: Изд-во МГУ, 2001. 94 с.
6. *Голубятников А.Н.* Симметрии сплошных сред // Успехи механики. — 2003. — Т. 2. — No. 1. — С. 126—183.
7. *Голубятников А.Н.* Плоские течения анизотропно несжимаемых материалов // Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа: Сб. ст. / МИХМ. — М., 1980. С. 116—122.

Получено 19.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 532.517.4

И.А. Ефремов, О.В. Капцов, Г.Г. Черных
СФУ, ИВМ СО РАН, ИВТ СО РАН
kaptsov@icm.krasn.ru, chernykh@ict.nsc.ru

СИММЕТРИИ И РЕШЕНИЯ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ[4]

В работе найдены группы симметрий двух моделей турбулентности. На основе группового анализа построены автомодельные решения и произведено сопоставленние полученных решений с экспериментальными данными.

Рассмотрим сначала модель плоского турбулентного следа [1–9] в пассивно стратифицированной среде. Для описания течения используется следующая система уравнений:

$$u_0\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{1}$$

$$u_0\frac{\partial k}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(c_\mu\frac{k^2}{e}\frac{\partial k}{\partial y})+w\frac{\partial u_1}{\partial y}-e, \tag{2}$$

$$u_0\frac{\partial e}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(c_\mu\frac{k^2}{e}\frac{\partial e}{\partial y})+\frac{e}{k}(c_1w\frac{\partial u_1}{\partial y}-c_2e), \tag{3}$$

$$u_0\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(c_s\frac{k^2}{e}\frac{\partial w}{\partial y})-c_{f1}\frac{e}{k}w+c_{f2}k\frac{\partial u_1}{\partial y}, \tag{4}$$

$$u_0\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(c_\rho\frac{k^2}{e}\frac{\partial \rho}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial y}\frac{c_\rho k^2}{e}, \tag{5}$$

[4]Работа поддержана РФФИ, гранты 07-01-00489, 07-01-00363

$$u_0\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(c_\theta\frac{k^2}{e}\frac{\partial\theta}{\partial y}) + 2c_\rho\frac{k^2}{e}(\frac{\partial\rho}{\partial y} - 1)^2 - c_T\frac{\theta e}{k}, \qquad (6)$$

где u_0 – скорость набегающего потока, u_1 – осредненный дефект продольной компоненты скорости, k – кинетическая энергия турбулентности, e – скорость диссипации кинетической энергии, w – касательное турбулентное напряжение Рейнольдса, ρ – осредненный дефект плотности, $\theta = \overline{\rho'^2}$ – дисперсия флуктуаций плотности; черта означает осреднение; $\sigma = 1.3$, $c_\mu = 0.09$, $c_s = 0.09$, $c_1 = 1.44$, $c_2 = 1.92$, $c_{f1} = 2.8$, $c_{f2} = 0.252$, $c_\rho = 0.208$, $c_\theta = 0.087$, $c_T = 1.25$ – эмпирические константы. В дальнейшем считаем скорость набегающего потока равной единице. Первые четыре уравнения системы представляют собой уравнения трехпараметрической модели турбулентности [3] в приближении дальнего следа [1]. Уравнения (5) — (6) описывают трансформацию поля плотности под действием турбулентной диффузии. Замыкание осуществлено с применением простейшей градиентной гипотезы; используется также приближение дальнего следа. Слагаемые, содержащие в качестве сомножителей коэффициенты ламинарной вязкости и диффузии отброшены в предположении малости — рассматривается развитое турбулентное течение.

Для системы (1) — (6) ставятся следующие краевые условия:

а) условия невозмущенного потока

$$u_1 = k = e = w = \rho = \theta = 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty; \qquad (7)$$

б) условия симметрии

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial\theta}{\partial y} = w = \rho = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \qquad (8)$$

Стандартными методами [10] находим базис алгебры Ли для системы (1) — (6):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial \rho},$$

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} - u_1\frac{\partial}{\partial u_1} - 2k\frac{\partial}{\partial k} - 3e\frac{\partial}{\partial e} - 2w\frac{\partial}{\partial w},$$

$$X_6 = y\frac{\partial}{\partial y} + u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + 2k\frac{\partial}{\partial k} + 2e\frac{\partial}{\partial e} + 2w\frac{\partial}{\partial w} + \rho\frac{\partial}{\partial \rho} + 2\theta\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Перейдем к редукции системы (1)–(6) и построению инвариантных решений. Рассмотрим допускаемый оператор растяжения

$$x\partial_x + \alpha y\partial_y + (\alpha-1)u_1\partial_{u_1} + 2(\alpha-1)k\partial_k +$$

$$+(2\alpha-3)e\partial_e + 2(\alpha-1)w\partial_w + \alpha\rho\partial_\rho + 2\alpha\theta\partial_\theta,$$

где α – произвольная постоянная. Решение системы (1) – (6), инвариантное относительно преобразования, порожденного этим оператором, имеет вид

$$u_1 = x^{\alpha-1}U(t), \qquad k = x^{2\alpha-2}K(t), \qquad e = x^{2\alpha-3}E(t),$$

$$w = x^{2\alpha-2}W(t), \qquad \rho = x^{\alpha}H(t), \qquad \theta = x^{2\alpha}R(t), \tag{9}$$

где $t = \dfrac{y}{x^\alpha}$ – автомодельная переменная.

Подставляя представление (9) в исходную систему (1) – (6), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Редуцированная система допускает первый интеграл

$$W = -\alpha tU + b_1. \qquad b_1 \in R. \tag{10}$$

Из краевых условий (7), (8) системы (1) – (6) следует, что $b_1 = 0$.

Учитывая (10), приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U'' = \frac{(\alpha-2)EU - \alpha tEU'}{c_s K^2} + \frac{c_{f1}E^2U}{c_s K^3} +$$

$$+\frac{c_{f2}EU'}{c_s \alpha tK} - \frac{2U'}{t} + (\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K})(U' + \frac{U}{t}),$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

$$E'' = \frac{\sigma((2\alpha-3)E^2K - \alpha tEE'K + c_1\alpha tE^2UU' + c_2E^3)}{c_\mu K^3} +$$

$$+E'(\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K}),$$

$$K'' = \frac{(2\alpha-2)EK + \alpha tE(UU' - K') + E^2}{c_\mu K^2} + K'(\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K}), \tag{11}$$

$$H'' = \frac{E\alpha(H - tH')}{c_\rho K^2} + (1 - H')(\frac{2K'}{K} - \frac{E'}{E}),$$

$$R'' = \frac{E\alpha(2R - tR')}{c_\theta K^2} - R'(\frac{2K'}{K} - \frac{E'}{E}) + \frac{2c_\rho}{c_\theta}(H' - 1)^2 + \frac{c_T RE^2}{c_\theta K^3}.$$

Для системы (11) ставим следующие краевые условия:

$$W(0) = H(0) = 0, \quad U'(0) = K'(0) = E'(0) = R'(0) = 0, \tag{12}$$

$$U(0.45) = K(0.45) = E(0.45) = W(0.45) =$$
$$= H(0.45) = R(0.45) = 0. \tag{13}$$

Поскольку система (11) допускает оператор растяжения

$$t\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial U} + 2K\frac{\partial}{\partial K} + 2E\frac{\partial}{\partial E} + 2W\frac{\partial}{\partial W} + H\frac{\partial}{\partial H} + 2R\frac{\partial}{\partial R},$$

то граничные условия (13) можно ставить в любой ненулевой точке.

Интегрируя уравнение (1) по y от $-\infty$ до $+\infty$, получим закон сохранения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_1 dy = \text{const}, \tag{14}$$

при условии, что $w \to 0$ при $y \to \infty$.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Используя закон сохранения (14) и представление (9) для функции u_1, находим $\alpha = 1/2$. Следовательно, автомодельная переменная t равна $y/x^{1/2}$. Такая автомодельность согласуется с экспериментальными данными [1] и известными представлениями о законах автомодельного вырождения плоских следов.

Для решения системы (11) с краевыми условиями (12), (13) нами был использован метод стрельбы. Дополнительные сложности возникают из-за того, что при $t = 0$ и $t = 0.45$ система (11) имеет особенности. Автомодельные решения для системы (1) – (4) построены в работе [11].

Теперь рассмотрим дальний турбулентный след за нагретым цилиндром. Для описания течения привлекается следующая математическая модель:

$$u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(c_\mu \frac{k^2}{e}\frac{\partial u_1}{\partial y}), \tag{15}$$

$$u_0\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(c_\mu \frac{k^2}{e}\frac{\partial k}{\partial y}) + c_\mu \frac{k^2}{e}(\frac{\partial u_1}{\partial y})^2 - e, \tag{16}$$

$$u_0\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{c_\mu}{\sigma}\frac{k^2}{e}\frac{\partial e}{\partial y}) + c_\mu c_1 k(\frac{\partial u_1}{\partial y})^2 - c_2\frac{e^2}{k}, \tag{17}$$

$$u_0\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial(\overline{v'T'})}{\partial y}, \tag{18}$$

$$u_0\frac{\partial(\overline{v'T'})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}c_{1\rho}\frac{k^2}{e}\frac{\partial(\overline{v'T'})}{\partial y} - \frac{2k}{3}\frac{\partial T}{\partial y} - c_{1T}\frac{e}{k}\overline{v'T'}, \tag{19}$$

$$u_0\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}c_{1\rho}\frac{k^2}{e}\frac{\partial(\overline{T'^2})}{\partial y} - 2\overline{v'T'}\frac{\partial T}{\partial y} - c_T\frac{e}{k}\overline{T'^2}, \tag{20}$$

где u_0 – по-прежнему скорость набегающего потока, u_1 – дефект осредненной продольной компоненты скорости, k – кинетическая энергия турбулентности, e – скорость диссипации кинетической энергии, T – осредненная температура, $\overline{v'T'}$

– турбулентный поток тепла, $\overline{T'^2}$ – дисперсия флуктуаций температуры. Эмпирические константы модели

$$\sigma = 1.3, \quad c_\mu = 0.09, \quad c_1 = 1.43, \quad c_2 = 1.92,$$
$$c_T = 1.25, \quad c_{1\rho} = 0.087, \quad c_{1T} = 3.2.$$

В дальнейшем, как и ранее, считаем скорость набегающего потока равной единице. Первые три уравнения системы – уравнения классической $(k-\varepsilon)$ модели турбулентности в приближении дальнего следа. Уравнения (18) — (20) описывают трансформацию поля температуры под воздействием турбулентной диффузии в следе.

Для системы (15) — (20) ставятся следующие краевые условия:

а) условия невозмущенного потока

$$u_1 = k = e = T = \overline{v'T'} = \overline{T'^2} = 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty; \tag{21}$$

б) условия симметрии

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial y} = \overline{v'T'} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \tag{22}$$

Находим базис алгебры Ли для системы (15) — (20):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial T},$$
$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} - u_1\frac{\partial}{\partial u_1} - 2k\frac{\partial}{\partial k} - 3e\frac{\partial}{\partial e} + T\frac{\partial}{\partial T} + 2\overline{T'^2}\frac{\partial}{\partial \overline{T'^2}},$$
$$X_6 = y\frac{\partial}{\partial y} + u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + 2k\frac{\partial}{\partial k} + 2e\frac{\partial}{\partial e} - T\frac{\partial}{\partial T} - 2\overline{T'^2}\frac{\partial}{\partial \overline{T'^2}},$$
$$X_7 = T\frac{\partial}{\partial T} + 2\overline{T'^2}\frac{\partial}{\partial \overline{T'^2}} + \overline{v'T'}\frac{\partial}{\partial \overline{v'T'}}.$$

Перейдем к редукции системы (15) — (20) и построению инвариантных решений. Рассмотрим допускаемый оператор растяжения

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

$$x\partial_x + \alpha y\partial_y + (\alpha-1)u_1\partial_{u_1} + 2(\alpha-1)k\partial_k + (2\alpha-3)e\partial_e +$$

$$+(\beta-\alpha+1)T\partial_T + \beta\overline{v'T'}\partial_{\overline{v'T'}} + 2(\beta-\alpha+1)\overline{T'^2}\partial_{\overline{T'^2}},$$

где α, β – произвольные постоянные. Решение системы (15) – (20), инвариантное относительно преобразования, порожденного этим оператором, имеет вид

$$u_1 = x^{\alpha-1}U(t), \qquad k = x^{2\alpha-2}K(t), \qquad e = x^{2\alpha-3}E(t),$$

$$T = x^{\beta-\alpha+1}G(t), \qquad \overline{v'T'} = x^{\beta}M(t), \qquad \overline{T'^2} = x^{2\beta-2\alpha+2}F(t), \tag{23}$$

где $t = \dfrac{y}{x^\alpha}$ – автомодельная переменная.

Интегрируя уравнения (15) и (18) по y от $-\infty$ до $+\infty$, имеем два закона сохранения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_1 dy = \text{const},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} T dy = \text{const}, \tag{24}$$

при условии, что $\overline{v'T'} \to 0$ и $\dfrac{k^2}{e}\dfrac{\partial u_1}{\partial y} \to 0$ при $y \to \infty$.

В силу (24) и представления (23) для функций u_1, T находим $\alpha = 1/2$, $\beta = -1$.

Подставляя представление (23) в систему (15) – (20), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система имеет два первых интеграла, которые с учетом краевых условий дают следующие соотношения:

$$\frac{c_\mu U' K^2}{E} + \frac{1}{2}tU = 0, \tag{25}$$

$$M = \frac{1}{2}tG. \tag{26}$$

Используя (25),(26), приходим к системе

$$\frac{c_\mu U^{'} K^2}{E} + \frac{1}{2}tU = 0,$$

$$K^{''} = \frac{1}{c_\mu}(\frac{E^2}{K^2} - \frac{E}{K} - \frac{tK^{'}E}{2K^2}) + K^{'}(\frac{E^{'}}{E} - \frac{2K^{'}}{K}) - {U^{'}}^2,$$

$$E^{''} = E^{'}(\frac{E^{'}}{E} - \frac{2K^{'}}{K}) - c_1\sigma\frac{{U^{'}}^2 E}{K} + \frac{\sigma}{c_\mu}(\frac{c_2E^3}{K^3} - \frac{2E^2}{K^2} - \frac{tE^{'}E}{2K^2}), \tag{27}$$

$$G^{''} = (\frac{E^{'}}{E} - \frac{2K^{'}}{K})(G^{'} + \frac{G}{t}) + \frac{G^{'}(\frac{4E}{3Kc_{1\rho}} - 2)}{t} +$$

$$+\frac{GE(\frac{c_{1T}E}{K} - 3/2)}{c_{1\rho}K^2} - \frac{tEG^{'}}{2c_{1\rho}K^2},$$

$$F^{''} = F^{'}(\frac{E^{'}}{E} - \frac{2K^{'}}{K}) - \frac{E(F + \frac{1}{2}tF^{'})}{K^2c_{1\rho}} + \frac{tGG^{'}E}{c_{1\rho}K^2} + \frac{c_TFE^2}{c_{1\rho}K^3}.$$

Краевые условия для системы (27) выглядят следующим образом:

$$K'(0) = E'(0) = G'(0) = F'(0) = 0, \tag{28}$$

$$U(0.45) = K(0.45) = E(0.45) = G(0.45) = F(0.45) = 0. \tag{29}$$

Заметим, что система (27) допускает оператор растяжения

$$t\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial U} + 2K\frac{\partial}{\partial K} + 2E\frac{\partial}{\partial E} + 2G\frac{\partial}{\partial G} + 2F\frac{\partial}{\partial F}.$$

Система (27) имеет особенности в точках $t = 0$ и $t = 0.45$, поэтому для решения задачи (27) с краевыми условиями (28), (29) нами был также использован метод стрельбы.

Основные результаты работы сводятся к следующему. Выполнен теоретико-групповой анализ математических моделей дальнего плоского турбулентного следа за цилиндром в пассивно-стратифицированной среде и следе за нагретым цилиндром. Построены автомодельные решения, удовлетворительно согласующиеся с экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хинце И.О.* Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963.
2. *Курбацкий А. Ф., Онуфриев А. Т.* Моделирование турбулентного переноса импульса в следе за цилиндром с привлечением уравнений для третьих моментов // Журн. прикладной механики и технической физики. — 1979. — №6. — С. 99—107.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
4. *Букреев В. И., Деменков А. Г., Костомаха В. А., Черных Г. Г.* Распространение тепла от линейного источника в плоском турбулентном следе // Прикладная механика и техническая физика. — 1996. № 5. — С. 115—126.
5. *Гиневский А. С.* Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969. — 400 с.
6. *Chernykh G. G., Demenkov A. G.* Numerical models of jet flows of a viscous incompressible fluid // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 1997. V. 12, № 2. P. 111—125.
7. *Freymuth P., Uberoi M S.* Structure of temperature fluctuations in the turbulent wake behind a heated cylinder // Phys. Fluids. — 1971. V. 14, No. 12, P. 2574—2580.
8. *Бабенко В. А.* Моделирование квазиоднородной свободной турбулентности в стратифицированных и реагирующих потоках. Автореферат дисс. на соиск. уч. степени докт. физ.-мат. наук, 2001, ИТМО им. А.В. Лыкова НАНБ. 40 с.
9. *Durbin P. A., Hunt J. C. R., Firth D.* Mixing by a turbulent wake of a uniform temperature gradient in the approach flow // Phys. Fluids. —

1982. V. 25, №. 4. P. 588—591.

10. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. — 399 с.

11. *Капцов О.В., Ефремов И.А., Шмидт А.В.* Автомодельные решения модели второго порядка дальнего турбулентного следа // Прикладная механика и техническая физика. — 2008. № 2. Т. 49. — С. 74—78.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 519.71

В.И. Елкин
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Российской академии наук
vl_elkin@ccas.ru

ВНУТРЕННИЕ СИММЕТРИИ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ [5]

Изучаются симметрии нелинейных управляемых систем: преобразования фазовых переменных, переводящие решения в решения. На основе симметрий доказываются условия, при которых управляемая система допускает декомпозицию.

Рассматриваются нелинейные системы, которые линейны по управлениям, т.е. системы вида

$$\dot{y} = f(y)u, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r. \tag{1}$$

Здесь y — фазовые переменные, u — управления, M — фазовое пространство системы, являющееся областью. Предполагается, что f — $n \times r$-матрица, столбцы которой f_α, $\alpha = 1, \ldots, r$ — гладкие векторные поля и $\operatorname{rank} f(y) = \mathrm{const}$. Решением или фазовой траекторией системы (1) называется непрерывная кусочно-гладкая функция $y(t)$, для которой существует такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, что функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (1).

Симметрии систем вида (1) определим как автоморфизмы в категории $\mathcal{SAS}$. Объектами этой категории являются системы вида (1), а морфизмы определяются следующим образом. Рассмотрим наряду с системой (1) систему

$$\dot{x} = g(x)v, \quad x \in L \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^s. \tag{2}$$

[5]Работа поддержана РФФИ, грант 07-01-00217

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Гладкое отображение $\psi\colon M \to L$ называется морфизмом системы (1) в систему (2), если как только $y(t)$ — решение системы (1), соответствующее управлению $u(t)$, то $x(t) = \psi(y(t))$ — решение системы (2), соответствующее некоторому управлению $v(t)$. Морфизм ψ называется изоморфизмом, если ψ — диффеоморфизм и ψ^{-1} — морфизм. Изоморфные системы называются также эквивалентными. Изоморфизм $\psi\colon M \to M$ системы (1) на себя называется автоморфизмом или симметрией системы (1) в категории $\mathbb{SAS}$. Таким образом, симметрией системы (1) в категории $\mathbb{SAS}$ называется диффеоморфизм $\psi\colon M \to M$, переводящий решение $y(t)$ системы (1), соответствующее управлению $u(t)$, в некоторое решение $y'(t) = \psi(y(t))$ системы (1), соответствующее, вообще говоря, другому управлению $u'(t)$. Далее, в более общем смысле под симметриями понимаются также локальные диффеоморфизмы, переводящие решения в решения. Нас будут интересовать такие локальные однопараметрические группы $s^\tau, \tau \in \mathbb{R}^1$, что каждый локальный диффеоморфизм s^τ является симметрией. Векторные поля, порождающие однопараметрические группы симметрий, называются инфинитезимальными симметриями системы (1). Про такие векторные поля говорят также, что они допускаются системой (1). Для формулировки условия, которому должны удовлетворять инфинитезимальные симметрии, следует ввести некоторые дифференциально-геометрические понятия, связанные с системой (1).

Ассоциированным распределением системы (1) называется распределение D, порождаемое векторными полями f_α, т.е. $D(y) = \mathrm{span}\{f_\alpha(y), \alpha = 1, \dots, r\} \subset TM_y$, где TM_y — касательное пространство векторов в точке $y \in M$. (Векторные поля $f_\alpha(y), \alpha = 1, \dots, r$ также называются ассоциированными.) Величина $\dim D(y)$ называется рангом D в точке $y \in M$. Без ограничения общности будем считать, что $\dim D(y) = r$, т.е. векторные поля f_α являются линейно несвязанными и составляют базис в каждом линейном пространстве векторов $D(y)$,

$y \in M$. Такие семейства полей называются базисными для распределения D. Базисные семейства определены, конечно, неоднозначно. С помощью любого базисного семейства векторных полей распределения D можно построить некоторую управляемую систему вида (1), используя эти поля в качестве ассоциированных. Все такие системы будут эквивалентны в категории $\mathcal{SAS}$. Говорят, что векторное поле ξ принадлежит распределению D и пишут $\xi \in D$, если $\xi(y) \in D(y)\ \forall y \in M$. Следовательно, каждое такое поле выражается в виде линейной комбинации (с переменными коэффициентами) векторных полей любого базисного семейства.

Ассоциированным кораспределением системы (1) называется кораспределение K, являющееся двойственным кораспределением к D, т.е. $K = D^{\perp}$. Таким образом, K порождается в каждой точке $y \in M$ такими формами Пфаффа (ковекторами) $\omega \in TM_y^*$, где TM_y^* — кокасательное пространство области M в точке $y \in M$, что $\omega(\xi) = 0\ \forall \xi \in D(y)$. Обычно базисное семейство форм Пфаффа ω^k, $k = 1, \ldots, q = n - r$ кораспределения K записывают в виде системы Пфаффа:

$$\omega^k = \omega_i^k(y)dy^i = 0, \qquad k = 1, \ldots, q = n - r. \tag{3}$$

(Здесь и далее по повторяющемуся индексу производится суммирование.) Формально соотношения (3) можно получить из (1) исключением переменных u и умножением на dt. Для дифференциальных форм $\omega^k = \omega_i^k(y)dy^i$, $k = 1, \ldots, q$ выполняется условие $\operatorname{rank} \|\omega_i^k(y)\| = q$. Поэтому они определяют в каждой точке $y \in M$ линейно независимые ковекторы $\omega^k(y) \in TM_y^*$. В этом случае говорят, что дифференциальные формы $\omega^k = \omega_i^k(y)dy^i$ и соответствующая система Пфаффа являются линейно несвязанными. Система уравнений Пфаффа (3) называется ассоциированной системой Пфаффа управляемой системы (1). Она связана с ассоциированным семейством векторных полей соотношениями

$$\omega_i^k(y) f_\alpha^i(y) = 0. \tag{4}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Соотношения (4) позволяют переходить от вида (1) к двойственному представлению (3) и наоборот (неоднозначно, но при этом получаются эквивалентные объекты).

Вернемся к системе (1). Справедлива

Теорема 1 [1]. *Векторное поле* ξ *является инфинитезимальной симметрией системы* (1) тогда и только тогда, когда $[\xi, D] \subset D$ (т.е. $[\xi, \eta] \subset D \ \forall \eta \in D$).

Под внутренними симметриями будем понимать преобразования из однопараметрических групп, порождаемых инфинитезимальными симметриями ξ, принадлежащими ассоциированному распределению D, т.е. $\xi \in D$. Такого рода инфинитезимальные симметрии также будем называть внутренними. Внутренние симметрии ответственны за важную декомпозицию системы (1), к рассмотрению которой и переходим.

Заметим, внутренние инфинитезимальные симметрии порождают так называемое характеристическое распределение CD ассоциированного распределения D. Двойственное кораспределение $(CD)^{\perp}$ является характеристическим кораспределением CK ассоциированного кораспределения K. Особенностью CK является конструктивность его нахождения. Оказывается [2], что CK порождается системой Пфаффа, состоящей из уравнений (3) и уравнений

$$\omega^k_{i[j}\omega^1_{j_1}\dots\omega^q_{j_q]}\,dy^i = 0, \tag{5}$$

$$k = 1, \dots, q, \quad 1 \le j < j_1 < \dots < j_q \le n.$$

Здесь

$$\omega^k_{ij} = \frac{\partial \omega^k_j}{\partial y^i} - \frac{\partial \omega^k_i}{\partial y^j},$$

а квадратные скобки означают, что произведено альтернирование по заключенным в них индексам, т. е. над индексами $j, j_1, \dots, j_q$ в произведении $\omega^k_{ij}\omega^1_{j_1}\dots\omega^q_{j_q}$ сделано $(q+1)!$ перестановок и взята сумма полученных выражений, причем выражения, полученные при помощи нечетных перестановок, взяты с обратным знаком. Эту операцию можно записать в виде формулы

$$\omega^k_{i[j}\omega^1_{j_1}\dots\omega^q_{j_q]} = \begin{vmatrix} \omega^k_{ij} & \omega^k_{ij_1} & \dots & \omega^k_{ij_q} \\ \omega^1_j & \omega^1_{j_1} & \dots & \omega^1_{j_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^q_j & \omega^q_{j_1} & \dots & \omega^q_{j_q} \end{vmatrix}.$$

Ранг CK, равный максимальному числу линейно несвязанных уравнений Пфаффа в системе уравнений Пфаффа (3), (5), называется классом кораспределения K и обозначается через $\mathrm{class}K$. Будем считать, что он постоянный в области M. Класс определяет следующее важное свойство кораспределения K:

Теорема 2 [2]. *Пусть* $\mathrm{class}K = p$. *Тогда в некоторой системе координат* $x^1,\dots,x^n$ *кораспределение* K *(локально) порождается базисной системой Пфаффа, зависящей только от* p *переменных:*

$$\Omega^k = \Omega^k_j(x^1,\dots,x^p)dx^j = 0, \quad k = 1,\dots,q, \quad j = 1,\dots,p, \tag{6}$$

причем класс определяет минимальное число p *среди всевозможных систем координат.*

Рассмотрим теперь в системе координат $x^1,\dots,x^n$ соотношения типа (4) для определения ассоциированных полей g_β, $\beta = 1,\dots,r$ управляемой системы $\dot{x} = g(x)v$, для которой система Пфаффа (6) является двойственным представлением. В переменных $x^1,\dots,x^p$ из соотношения $\Omega^k_j(x^1,\dots,x^p)g^j = 0$ можно получить $p-q$ линейно несвязанных полей. Расширим их до векторных полей в пространстве переменных $x^1,\dots,x^n$, полагая недостающие компоненты, равными нулю. Добавляя к этому семейству векторные поля $\partial/\partial x^{p+1},\dots,\ \partial/\partial x^n$, получим искомые ассоциированные поля. Очевидно, что соответствующая управляемая система будет иметь вид

$$\dot{x}_1 = g(x_1)v_1, \tag{7}$$

$$\dot{x}_2 = v_2. \tag{8}$$

Здесь $x_1 = (x^1, \ldots, x^p)$, $x_2 = (x^{p+1}, \ldots, x^n)$, $v_1 = (v^1, \ldots, v^{p-q})$, $v_2 = (v^{p-q+1}, \ldots, v^r)$. По построению система (7), (8) эквивалентна системе (1). Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть класс ассоциированного кораспределения управляемой системы* (1) равен $p < n$. Тогда система (1) (локально) эквивалентна системе вида (7), (8).

Обратим внимание на то, что системы (7), (8) независимы как по фазовым переменным, так и по управлению, причем система (8) имеет тривиальный вид. Таким образом, декомпозиция (7), (8) как бы отделяет от исходной системы тривиальную часть. Это позволяет при исследовании той или иной задачи управления, связанной с системой (1), разложить эту задачу на две: тривиальную, связанную с системой (8), и нетривиальную, связанную с системой (7). Можно сказать, что класс ассоциированного кораспределения системы (1) является инвариантом, характеризующим степень нетривиальности этой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Симметрии и классификация. М.: Фазис, 2006. 240 с.
2. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 354 с.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 531.36

В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
irteg@icc.ru, titor@icc.ru

АНАЛИЗ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ[6]

Для вполне интегрируемых систем, уравнения движения которых допускают полиномиальный первый интеграл четвертой степени, рассмотрены задачи выделения стационарных решений, инвариантных многообразий стационарных движений и исследования их на устойчивость по Ляпунову. Для решения вычислительных задач использовались средства системы компьютерной алгебры Mathematica.

Рассмотрим динамическую систему [1], дифференциальные уравнения которой имеют вид:

$$\dot{s}_1 = -\alpha^2 r_2 r_3 + \alpha r_1 s_2 - (\beta r_3 - s_2)(\beta r_2 + s_3),\ \dot{s}_2 =$$

$$= (\alpha^2+\beta^2) r_1 r_3 - (\alpha r_1 + \beta r_2) s_1 + (\alpha r_3 - s_1) s_3,\ \dot{s}_3 = (\beta r_1 - \alpha r_2) s_3,$$

$$\dot{r}_1 = r_2(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2 s_3) - r_3 s_2 - ((\alpha^2+\beta^2) r_3 s_2 + \beta s_3^2) x,$$

$$\dot{r}_2 = r_3 s_1 - r_1(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2 s_3) + ((\alpha^2+\beta^2) r_3 s_1 + \alpha s_3^2) x,$$

$$\dot{r}_3 = r_1 s_2 - r_2 s_1 + (\beta s_1 - \alpha s_2) s_3 x. \qquad (1)$$

Уравнения (1) допускают следующие первые интегралы:

$$2V_0 = (s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + 2(\alpha r_1 + \beta r_2) s_3 - (\alpha^2+\beta^2) r_3^2 = 2h,$$

$$V_1 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = c_1,$$

$$V_2 = x(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = c_2,$$

[6]Работа поддержана INTAS-CO РАН, грант 06-1000013-9019

$$2V_3 = (r_1s_1 + r_2s_2)\Big((\alpha^2+\beta^2)(r_1s_1+r_2s_2)+$$
$$+2(\alpha s_1+\beta s_2)s_3\Big) + s_3^2(s_1^2+s_2^2+$$
$$+(\alpha r_1+\beta r_2+s_3)^2\Big) + x s_3^2(\beta s_1-\alpha s_2)^2 = 2c_3. \qquad (2)$$

Здесь s_i, r_i – компоненты двух трехмерных векторов, α, β, x – постоянные.

Случаи $x > 0$ и $x < 0$ соответствуют уравнениям Эйлера на алгебрах Ли $so(4)$ и $so(3,1)$. При $x = 1$ уравнения (1) совпадают с уравнениями Пуанкаре–Жуковского, описывающими движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной вихревой несжимаемой жидкостью, а при $x = 0$ рассматриваемая система соответствует интегрируемому случаю в задаче Кирхгофа [2].

Уравнения (1) исследовались в работах [3]–[5]. В них проведен бифуркационный анализ данной системы для алгебр Ли $e(3)$ и $so(4)$.

Нами рассмотрена задача выделения решений уравнений (1), на которых элементы алгебры первых интегралов задачи принимают стационарное значение. Такие решения мы называем стационарными. Для уравнений (1) мы находим стационарные решения и инвариантные многообразия стационарных движений (ИМСД). Для случая $x = 0$ проведено исследование полученных стационарных решений и ИМСД на устойчивость на основе методов Ляпунова. Для произвольного x рассмотрена задача получения “резонансных” ИМСД.

1. Выделение стационарных решений и инвариантных многообразий стационарных движений

1.1. Случай $x = 0$

Дифференциальные уравнения (1) и первые интегралы (2) при $x = 0$ примут вид

$$\dot{s}_1 = -\alpha^2 r_2 r_3 + \alpha r_1 s_2 - (\beta r_3 - s_2)(\beta r_2 + s_3),\ \dot{s}_2 = (\alpha^2+\beta^2) r_1 r_3 -$$
$$-(\alpha r_1 + \beta r_2) s_1 + (\alpha r_3 - s_1) s_3,\ \dot{s}_3 = (\beta r_1 - \alpha r_2) s_3,$$
$$\dot{r}_1 = r_2(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2 s_3) - r_3 s_2,\ \dot{r}_2 = r_3 s_1 - r_1(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2 s_3),$$
$$\dot{r}_3 = r_1 s_2 - r_2 s_1. \tag{3}$$

$$2V_0 = (s_1^2 + s_2^2 + 2 s_3^2) + 2(\alpha r_1 + \beta r_2) s_3 - (\alpha^2+\beta^2) r_3^2 = 2h,$$
$$V_1 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = c_1, \quad V_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = c_2,$$
$$2V_3 = (r_1 s_1 + r_2 s_2)((\alpha^2+\beta^2)(r_1 s_1 + r_2 s_2) + 2(\alpha s_1 + \beta s_2) s_3) +$$
$$+ s_3^2(s_1^2 + s_2^2 + (\alpha r_1 + \beta r_2 + s_3)^2) = 2c_3. \tag{4}$$

Здесь переменные s_i, r_i приобретают следующий физический смысл: $s = (s_1, s_2, s_3)$, $r = (r_1, r_2, r_3)$ представляют собой (с точностью до линейного преобразования) векторы "импульсивного момента" и "импульсивной силы" соответственно.

Для уравнений (3) рассмотрим задачу выделения стационарных решений и инвариантных многообразий стационарных движений. Для ее решения будем использовать метод Рауса–Ляпунова и его модификации [6], [7].

В соответствии с указанным методом из базовых первых интегралов задачи образуются некоторые их комбинации — семейства первых интегралов K. Мы ограничимся линейными комбинациями первых интегралов (для полного анализа стационарных множеств нужно использовать и нелинейные комбинации (см. [6])):

$$K = \lambda_0 V_0 - \lambda_1 V_1 - \frac{\lambda_2}{2} V_2 - \lambda_3 V_3 \quad (\lambda_i = \mathrm{const}). \tag{5}$$

Запишем условия стационарности K по переменным s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3:

$$\partial K/\partial s_1 = \lambda_0 s_1 - \lambda_1 r_1 - \lambda_3[(\alpha^2+\beta^2)r_1(r_1 s_1 + r_2 s_2)+$$
$$+s_1 s_3(\alpha r_2 + \beta r_1) + s_2 s_3(2\alpha r_1 + s_3)] = 0,$$
$$\partial K/\partial s_2 = \lambda_0 s_2 - \lambda_1 r_2 - \lambda_3[(\alpha^2+\beta^2)r_2(r_1 s_1 + r_2 s_2)+$$
$$+s_1 s_3(\alpha r_2 + \beta r_1) + s_2 s_3(2\beta r_2 + s_3)] = 0,$$
$$\partial K/\partial s_3 = \lambda_0(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2 s_3) - \lambda_1 r_3 -$$
$$-\lambda_3[(r_1 s_1^2 \alpha s_1 + \beta s_2)(s_1 r_1 + s_2 r_2)+$$
$$+s_3(\alpha r_1 + \beta r_2)^2 + s_3(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + 3s_3^2(\alpha r_1 + \beta r_2)] = 0,$$
$$\partial K/\partial r_1 = \lambda_0 \alpha s_3 - \lambda_1 s_1 - \lambda_2 r_1 - \lambda_3[(\alpha^2+\beta^2)s_1(r_1 s_1 + r_2 s_2)+$$
$$+\alpha s_3^2(\beta r_2 + \alpha r_1) + \alpha s_3(s_1^2 + s_2^2) + \beta\lambda_3 s_1 s_2 s_3] = 0,$$
$$\partial K/\partial r_2 = -\lambda_0 \beta s_3 + \lambda_1 s_2 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3[(\alpha^2+\beta^2)s_2(s_1 r_1 + r_2 s_2)+$$
$$+s_2 s_3(\alpha s_1 + \beta s_2) + \beta s_3^2(\alpha r_1 + \beta r_2) + \beta s_3^3] = 0,$$
$$\partial K/\partial r_3 = -((\alpha^2+\beta^2)\lambda_0 + \lambda_2)r_3 + \lambda_1 s_3 = 0. \qquad (6)$$

Согласно [7], решения уравнений (6) определяют семейства стационарных решений и семейства ИМСД дифференциальных уравнений (3), соответствующих семейству первых интегралов K. Задача выделения стационарных решений и ИМСД для (3), таким образом, сводится к нахождению решений системы нелинейных алгебраических уравнений (6).

Существует ряд методов (см. [8], [9] и библиографию) решения подобных систем в аналитическом виде. В последнее десятилетие в компьютерной алгебре широкое распространение получил метод базисов Гребнера [10], который позволяет привести систему нелинейных алгебраических уравнений к виду, удобному для ее решения, например, когда решения уравнений можно получить последовательным исключением переменных. Программная реализация метода базисов Гребнера имеется во

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

многих системах компьютерной алгебры. В предлагаемой работе для построения базиса Гребнера системы (6) использовалась программа "GroebnerBasis" системы *Mathematica*. Все вычисления проводились на Pentium 1100 MHz (256 MB RAM) в среде Windows XP.

Предварительно были проведены простейшие преобразования уравнений (6): с помощью последнего линейного уравнения исключена переменная r_3 из оставшихся уравнений системы. Базис Гребнера, построенный для получившейся в результате такого преобразования системы уравнений, имеет вид:

$$f_1(s_1,s_2,s_3,r_1)=0,\ f_2(s_1,s_2,s_3,r_2)=0,\ (a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3)\times$$
$$\times(a_4+a_5s_1^2+a_6s_2^2+a_7s_1s_3+a_8s_2s_3+a_9s_3^2)=0,$$
$$s_3\ (b_1s_1+b_2s_3)(b_3+b_4s_1^2+b_5s_2^2+b_6s_1s_3+b_7s_2s_3+b_8s_3^2)=0,$$
$$s_3\ f_3(s_1,s_2,s_3)=0,\ f_4(s_1,s_2,s_3)=0,\ f_5(s_1,s_2,s_3)=0,$$
$$s_3\ f_6(s_1,s_2,s_3)=0,\ f_7(s_1,s_2,s_3)=0,\ s_3\ f_8(s_1,s_2,s_3)=0, \quad (7)$$

где f_i $(i=1,\ldots,8)$ – полиномы 4—6 степени относительно r_j, s_j; a_i, b_j $(i=1,\ldots,9)$, $(j=1,\ldots,8)$ – некоторые выражения от λ_i, α, β. Время вычисления составило 14.13 мин.

Как видно из (7), данная система уравнений факторизуется, то есть разделяется на несколько подсистем, которые можно исследовать по-отдельности. Для каждой подсистемы был построен базис Гребнера. Последнее позволило провести некоторый качественный анализ множества решений каждой подсистемы (например, получить ответ на вопрос о совместности подсистемы уравнений, конечное или бесконечное число решений имеет подсистема и др.) и найти сами решения.

Следует отметить, что данный подход позволяет установить общее число решений системы, которое включает и действительные, и комплексные решения, так как все вычисления проводятся над полем **C**. Поскольку нас интересуют только действительные решения, то из найденных решений были выделены именно такие. Удалось установить, что исследуемая система

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

уравнений (7) (и, следовательно, (6)) имеет бесконечное число решений (переменная s_3 входит в решения одной из подсистем как свободная, что равносильно существованию у системы (3) инвариантных многообразий). Всего было выделено 21 решение (включая инвариантные многообразия). Ниже приведены некоторые из полученных решений:

$$\Big\{\{r_1 = \pm\frac{\beta\sqrt{\lambda_0 p_1}}{\bar a\sqrt{\lambda_2\lambda_3}},\ r_2 = \mp\frac{\alpha\sqrt{\lambda_0 p_1}}{\bar a\sqrt{\lambda_2\lambda_3}},\ r_3 = 0,\ s_1 = \mp\frac{\beta\sqrt{p_1}}{\bar a\sqrt{-\lambda_3}},$$

$$s_2 = \pm\frac{\alpha\sqrt{p_1}}{\bar a\sqrt{-\lambda_3}},\ s_3 = 0\},\ \{r_1 = \mp\frac{\beta\sqrt{\lambda_0 p_2}}{\bar a\sqrt{-\lambda_2\lambda_3}},\ r_2 = \pm\frac{\alpha\sqrt{\lambda_0 p_2}}{\bar a\sqrt{-\lambda_2\lambda_3}},$$

$$r_3 = 0,\ s_1 = \pm\frac{\beta\sqrt{p_2}}{\bar a\sqrt{\lambda_3}},\ s_2 = \mp\frac{\alpha\sqrt{p_2}}{\bar a\sqrt{\lambda_3}},\ s_3 = 0\}\Big\}, \tag{8, 9}$$

$$\{s_1 = -\frac{\alpha\lambda_1 s_3}{\bar a\lambda_0},\ s_2 = -\frac{\beta\lambda_1 s_3}{\bar a\lambda_0},\ r_1 = \frac{\lambda_0 - \lambda_3 s_3(\beta r_2 + s_3)}{\alpha\lambda_3 s_3},$$

$$r_3 = -\frac{\lambda_1 s_3}{\bar a\lambda_0}\} \text{ и } \lambda_2 = 0, \tag{10}$$

$$\{r_1 = -\frac{2\alpha\lambda_0^2 s_3}{\bar a\lambda_0^2 - \lambda_1^2},\ r_2 = -\frac{2\beta\lambda_0^2 s_3}{\bar a\lambda_0^2 - \lambda_1^2},\ r_3 = -\frac{2\lambda_0\lambda_1 s3}{\bar a\lambda_0^2 - \lambda_1^2},$$

$$s_1 = -\frac{2\alpha\lambda_0\lambda_1 s_3}{\bar a\lambda_0^2 - \lambda_1^2},\ s_2 = -\frac{2\beta\lambda_0\lambda_1 s_3}{\bar a\lambda_0^2 - \lambda_1^2}\} \text{ и } \lambda_2 = -\frac{1}{2}\bar a\lambda_0 - \frac{\lambda_1^2}{2\lambda_0},\ \lambda_3 = 0, \tag{11}$$

$$\{r_1 = -\frac{\alpha s_3}{\alpha^2 + \beta^2},\ r_2 = -\frac{\beta s_3}{\alpha^2 + \beta^2},\ r_3 = \frac{\lambda_0 s_3}{\lambda_1},\ s_1 = -\frac{\alpha\lambda_1 s_3}{\bar a\lambda_0},$$

$$s_2 = -\frac{\beta\lambda_1 s_3}{\bar a\lambda_0}\} \text{ и } \lambda_2 = -\bar a\lambda_0 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0}, \tag{12}$$

$$\{r_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}s_1,\ r_2 = -\frac{\alpha\lambda_0}{\beta\lambda_1}s_1,\ r_3 = 0,\ s_2 = -\frac{\alpha}{\beta}s_1,\ s_3 = 0\}$$

$$\text{и } \lambda_2 = -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0},\ \lambda_3 = 0. \tag{13}$$

Здесь и далее для более компактной записи формул использованы следующие обозначения:

$$p_1 = \lambda_2 + \lambda_1\sqrt{-\lambda_2/\lambda_0}, \quad p_2 = -\lambda_2 + \lambda_1\sqrt{-\lambda_2/\lambda_0}, \quad \bar{a} = \alpha^2 + \beta^2.$$

Решения (9) являются семействами стационарных решений системы дифференциальных уравнений (3). С механической точки зрения элементы данных семейств можно проинтерпретировать как винтовые движения твердого тела в жидкости.

Решения (10) – (13) представляют семейства ИМСД системы дифференциальных уравнений (3). С геометрической точки зрения, элементы каждого семейства ИМСД (11) – (13) – при фиксированных значениях параметров $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – определяют прямые, лежащие в R^6 на пересечении 5-ти гиперплоскостей. Кроме того, поскольку на каждом семействе ИМСД (11), (12) определено векторное поле вида $\dot{s}_3 = 0$, а на ИМСД (13) – $\dot{s}_1 = 0$, то каждая точка данных прямых будет вырожденным стационарным решением исходных дифференциальных уравнений. Последнее означает, что на этих решениях якобиан уравнений (6) тождественно равен нулю.

Аналогично, элементы семейства ИМСД (10) (при фиксированных значениях параметров λ_i) определяют в R^6 поверхности размерности 2. Каждая такая поверхность лежит на пересечении 3-х гиперплоскостей и поверхности 2-го порядка.

1.2. Об инвариантных многообразиях в случае произвольного x

Рассмотрим задачу выделения инвариантных многообразий системы (1) в случае произвольного x. Ограничимся здесь выделением “резонансных” ИМСД с помощью следующей процедуры.

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \quad \ldots, x_n)$$

допускает два первых интеграла: $V(x) = c_1,\ W(x) = c_2$.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Рассмотрим некоторое гладкое многообразие, определяемое уравнениями

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \dots, k). \tag{14}$$

Исключим с помощью уравнений $\varphi_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$ k переменных x_i $(i = 1, \dots, k)$ из первых интегралов и уравнений движения. В результате первые интегралы примут вид:

$$\bar{V} = \bar{V}(\varphi_1, \dots, \varphi_k, x_{k+1}, \dots, x_n),$$
$$\bar{W} = \bar{W}(\varphi_1, \dots, \varphi_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Пусть на многообразии (14) между интегралами $\bar{V}$ и $\bar{W}$ существует некоторое полиномиальное соотношение, например:

$$\bar{V}^2(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) = \bar{W}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n). \tag{15}$$

Рассмотрим линейную связку наших первых интегралов

$$\bar{K} = \bar{V}(\varphi_1, \dots, \varphi_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - \lambda \bar{W}(\varphi_1, \dots, \varphi_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Тогда справедлива

Теорема. *Если при некоторых значениях λ система уравнений*

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi_j} - \lambda \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varphi_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, k)$$

удовлетворяется при любых $x_{k+1}, \dots, x_n$ на многообразии $\varphi_j = 0$ $(j = 1, \dots, k)$ и имеет место соотношение (15)*, то дифференциальные уравнения имеют семейство инвариантных многообразий*

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \ (j = 1, \dots, k), \quad \bar{V}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) = c_1,$$

на которых функция $\bar{K}$ принимает стационарное значение.

Воспользуемся данной теоремой для выделения ИМСД в нашем случае. Для этого запишем равенство $V_0^2 = V_3$ для первых интегралов уравнений (1):

$$s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + 2s_3(\alpha r_1 + \beta r_2) - (\alpha^2 + \beta^2) r_3^2)^2 =$$
$$= (r_1 s_1 + r_2 s_2)\Big(\bar{a}(r_1 s_1 + r_2 s_2) + 2(\alpha s_1 + \beta s_2) s_3\Big) +$$
$$+ s_3^2\Big(s_1^2 + s_2^2 + (\alpha r_1 + \beta r_2 + s_3)^2\Big) + x s_3^2 (\beta s_1 - \alpha s_2)^2.$$

Из последнего выражения видно, что равенство выполняется, например, при $s_1 = s_2 = r_3 = 0$. Легко проверить, что условия приведенной выше теоремы здесь удовлетворяются, и уравнения (1) имеют семейство ИМСД:

$$s_1 = s_2 = r_3 = 0, \;\; s_3(s_3 + (\alpha r_1 + \beta r_2)) = \lambda^{-1} = c_3. \qquad (16)$$

Элементы этого семейства ИМСД существуют при всех значениях параметра x, а дифференциальные уравнения на них определяют периодические движения. Такого вида периодические движения для уравнений Кирхгофа обсуждались в [11].

3. О бифуркации и устойчивости стационарных решений и инвариантных многообразий

В этом разделе представлены некоторые результаты качественного анализа полученных решений уравнений (3). Мы ограничились здесь рассмотрением задачи ветвления и устойчивости семейств стационарных решений и инвариантных многообразий в окрестности тривиального решения. Для исследования устойчивости решений мы применяли методы Ляпунова. Для решения систем неравенств, возникающих в процессе исследования устойчивости, был использован пакет “Algebra‘ InequalitySolve‘” системы *Mathematica*.

3.1. О бифуркации решений в окрестности тривиального решения

Поставим задачу определить семейства стационарных решений и ИМСД, примыкающих к тривиальному решению системы (3).

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Необходимые условия существования интересующих нас решений, соответствующих семейству первых интегралов K (5), можно получить, приравнивая к нулю якобиан системы (6), вычисленный при $r_i = 0, s_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Этот якобиан при указанных условиях можно записать так:

$$J = (\lambda_1^2 + \lambda_0\lambda_2)(\bar{a}\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_0\lambda_2)(\bar{a}\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + 2\lambda_0\lambda_2).$$

Полагая $J = 0$, найдем выражения для λ_2 как функции остальных параметров λ_i:

$$1)\ \lambda_2 = -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0},\ 2)\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}\bar{a}\lambda_0 - \frac{\lambda_1^2}{2\lambda_0},\ 3)\ \lambda_2 = -\bar{a}\lambda_0 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0}. \quad (17)$$

Последние и будут условиями, при которых можно получить нужные нам семейства стационарных решений и ИМСД как решения уравнений стационарности (6).

Сравнивая ограничения на λ_i (при которых были получены семейства ИМСД (11)–(13)) с (17), можно заключить, что данные семейства ИМСД примыкают к 0-му решению (точнее, инвариантные многообразия, входящие в семейства, при всяком фиксированном наборе параметров λ_i просто пересекают тривиальное решение).

При $\lambda_1 = 0$ к 0-му решению будет примыкать подсемейство семейства ИМСД (10):

$$\{s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ r_1 = \frac{\lambda_0 - \lambda_3 s_3(\beta r_2 + s_3)}{\alpha\lambda_3 s_3},\ r_3 = 0\}.$$

Легко проверить, что первые два семейства стационарных решений (9) примыкают к тривиальному решению при

$$\lambda_2 = -\lambda_1^2/\lambda_0.$$

Последнее соответствует первому условию (17). Для последних 2-х семейств стационарных решений (9) таким условием будет $\lambda_2 = \lambda_1 = -\lambda_0$. Как легко видеть, первое условие (17) также выполняется, когда указанное соотношение между параметрами имеет место.

Таким образом, мы указали семейства ИМСД и семейства стационарных решений (определяемые условиями стационарности (6)), которые примыкают к тривиальному решению при всех соотношениях на параметры λ_i (17).

Представляет интерес исследование устойчивости, примыкающих к 0-му решению семейств стационарных решений и инвариантных многообразий. Отметим, что само нулевое решение устойчиво по Ляпунову. Получение достаточных условий его устойчивости, как условий знакоопределенности полинома K с использованием компьютерной техники, достаточно тривиально и поэтому мы приводим только сами условия.

Достаточные условия устойчивости 0-го решения выглядят так:

$$\lambda_0 > 0 \wedge \sqrt{-\lambda_0\lambda_2} > \lambda_1 \wedge \lambda_1 + \sqrt{-\lambda_0\lambda_2} > 0 \wedge$$
$$\wedge\Big((\alpha \neq 0 \wedge (\alpha^2+\beta^2)\lambda_0+\lambda_2 < 0) \vee (\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \beta^2\lambda_0+\lambda_2 < 0)\Big).$$

Простой анализ последних условий показывает, что они сводятся к требованию $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ и, следовательно, всегда выполняются.

3.2. Об устойчивости стационарных решений

Исследуем на устойчивость по первому приближению элементы 1-го семейства стационарных решений (9). В соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости по 1-му приближению запишем для уравнений (3), линеаризованных в окрестности исследуемого решения, характеристическое уравнение:

$$\Big(\lambda^4 - \frac{(2(\alpha^2+\beta^2)\lambda_0+\lambda_2)(1-\lambda_1/\sqrt{-\lambda_0\lambda_2})}{(\alpha^2+\beta^2)a\lambda_3}\lambda^2 +$$
$$+\frac{\lambda_0((\alpha^2+\beta^2)\lambda_0+\lambda_2)(1-\lambda_1/\sqrt{-\lambda_0\lambda_2})^2}{(\alpha^2+\beta^2)a\lambda_3}\Big)\lambda^2 = 0. \qquad (18)$$

Уравнение (18) имеет четыре ненулевых и два нулевых корня:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\lambda_0 + \lambda_1\sqrt{-\lambda_0/\lambda_2}}}{\sqrt{\lambda_3}},\ \lambda = -\frac{\sqrt{\lambda_0 + \lambda_1\sqrt{-\lambda_0/\lambda_2}}}{\sqrt{\lambda_3}},$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{(\bar{a}\lambda_0 + \lambda_2)(1 - \lambda_1/\sqrt{-\lambda_0\lambda_2})}}{\sqrt{\bar{a}\lambda_3}},$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{(\bar{a}\lambda_0 + \lambda_2)(1 - \lambda_1/\sqrt{-\lambda_0\lambda_2})}}{\sqrt{\bar{a}\lambda_3}},\ \lambda = 0,\ \lambda = 0.$$

При выполнении следующих условий:

$$\lambda_0 < 0 \wedge \lambda_2 > 0 \wedge \lambda_3 < 0 \wedge -\sqrt{-\lambda_0\lambda_2} \leq \lambda_1 < \sqrt{-\lambda_0\lambda_2} \vee$$

$$\vee\ \lambda_0 > 0 \wedge \lambda_2 < 0 \wedge \lambda_3 > 0 \wedge -\sqrt{-\lambda_0\lambda_2} < \lambda_1 \leq \sqrt{-\lambda_0\lambda_2} \quad (19)$$

хотя бы один корень из первой пары корней будет вещественным и положительным. Соответствующие условия для второй пары корней имеют более громоздкий вид и мы их здесь не приводим.

Таким образом, при выполнении, например, условий (19) элементы рассматриваемого семейства стационарных решений будут неустойчивыми.

Попытаемся теперь получить необходимые условия устойчивости исследуемого решения.

Среди корней характеристического уравнения (18) есть нулевые кратные корни. Проверка показала, что этим корням соответствует диагональная жорданова форма матрицы линеаризованной системы уравнений. Следовательно, устойчивость исследуемого решения в этом случае возможна, если биквадратное уравнение (1-й сомножитель в уравнении (18)) имеет только нулевые и чисто мнимые корни. Корни биквадратного уравнения будут удовлетворять этому требованию при выполнении, например, следующих условий на параметры задачи.
При $\lambda_3 < 0$:

$$(\sqrt{-\lambda_0\lambda_2} = \lambda_1 \wedge ((\alpha \neq 0 \wedge\ \lambda_0 + \lambda_2/\bar{a} > 0)\vee$$
$$\vee(\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \lambda_0 + \lambda_2/\bar{a} > 0)) \wedge\ (\lambda_2 < 0 \vee (\lambda_2 > 0 \wedge \lambda_0 < 0)))\vee$$
$$\vee(\sqrt{-\lambda_0\lambda_2} \leq \lambda_1 \wedge ((\alpha \neq 0 \wedge \lambda_0 + \lambda_2/\bar{a} \leq 0)\vee$$
$$\vee\ (\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \lambda_0 + \lambda_2/\beta^2 \leq 0)) \wedge (\lambda_2 > 0\vee$$
$$\vee(\lambda_0 > 0 \wedge\ \lambda_2 < 0))).$$

При $\lambda_3 > 0$:

$$\lambda_1 + \sqrt{-\lambda_0\lambda_2} \leq 0 \wedge ((\alpha \neq 0 \wedge \lambda_0 + \lambda_2/\bar{a} \leq 0)\vee$$
$$\vee(\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \lambda_0 + \lambda_2/\beta^2 \leq 0)) \wedge\ (\lambda_2 > 0 \vee (\lambda_0 > 0 \wedge \lambda_2 < 0)).$$

Последнее означает, что имеет место устойчивость в линейном приближении элементов исследуемого семейства решений.

Аналогичные результаты были получены и для остальных семейств стационарных решений (9).

3.3. Об устойчивости инвариантных многообразий

Для исследования устойчивости инвариантных многообразий (10) – (13) использовался метод Рауса–Ляпунова. Здесь приведены некоторые результаты исследования на устойчивость элементов семейства ИМСД (12) указанным методом.

Векторное поле на элементах этого семейства описывается уравнением

$$\dot{s}_3 = 0, \tag{20}$$

которое получается из уравнений (3) с помощью выражений (12).

Как было отмечено выше, геометрически рассматриваемое семейство ИМСД представляет собой некоторые прямые в R^6, каждая точка которых соответствует вырожденному стационарному решению уравнений (3). Введем в качестве параметра на данном семействе ИМСД: $s_3 = s_3^0 = \text{const}$.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Исследуем на устойчивость решения, принадлежащие семейству ИМСД (12), указанным выше методом. Вторая вариация K в окрестности решения, соответствующего s_3^0, в отклонениях

$$z_1 = r_1 + \frac{\alpha s_3}{\bar{a}},\ z_2 = r_2 + \frac{\beta s_3}{\bar{a}},\ z_3 = r_3 - \frac{\lambda_0 s_3}{\lambda_1},\ z_4 = s_1 + \frac{\alpha\lambda_1 s_3}{\bar{a}\lambda_0},$$

$$z_5 = s_2 + \frac{\beta\lambda_1 s_3}{\bar{a}\lambda_0},\ z_6 = s_3 - s_3^0$$

запишется так:

$$\delta^2 K = a_1 z_1^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2 + a_4 z_3^2 + a_5 z_1 z_4 + a_6 z_4^2 + a_7 z_2 z_5 + a_8 z_4 z_5 +$$
$$+ a_9 z_5^2 + a_{10} z_1 z_6 + a_{11} z_2 z_6 + a_{12} z_3 z_6 + a_{13} z_6^2,$$

а соответствующие вариации первых интегралов V_0, V_1, V_2 соответственно

$$\delta V_0 = (b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + b_4 z_4 + b_5 z_5 + b_6 z_6) s_3^0 = 0,$$

$$\delta V_2 = (b_{13} z_1 + b_{14} z_2 + b_{15} z_3) s_3^0 = 0,$$

$$\delta V_1 = (b_7 z_1 + b_8 z_2 + b_9 z_3 + b_{10} z_4 + b_{11} z_5 + b_{12} z_6) s_3^0 = 0. \quad (21)$$

Здесь a_i, b_i — некоторые выражения от λ_i, α, β.

Полагая $s_3^0 \neq 0$, исключим переменные z_1, z_5 с помощью уравнений (21) (среди которых только два независимые) из $\delta^2 K$. В результате получим квадратичную форму:

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

$$\delta^2\tilde{K} = \frac{\bar{a}(\bar{a}\lambda_0^2+\lambda_1^2)}{2\alpha^2\lambda_0}z_2^2 - \frac{\beta\bar{a}(\bar{a}\lambda_0^2+\lambda_1^2)}{\alpha^2\lambda_1}z_2z_3+$$

$$+\frac{1}{2\alpha^2\lambda_0\lambda_1^2}(\lambda_0^4(\alpha^6+3\alpha^2\beta^2\bar{a}+\beta^6)+$$

$$+\lambda_0^2\lambda_1^2(\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4)+\alpha^2\lambda_1^4-\alpha^2\bar{a}(\bar{a}\lambda_0^2+\lambda_1^2)\lambda_0\lambda_3 s_3^{0^2})z_3^2+$$

$$+(\frac{\alpha\lambda_1}{\beta}+\frac{\beta\lambda_1}{\alpha})z_2z_4 - \frac{\bar{a}\lambda_0}{\alpha}z_3z_4 + \frac{\bar{a}(\lambda_0-\lambda_3 s_3^{0^2})}{2\beta^2}z_4^2-$$

$$-\frac{\alpha\bar{a}\lambda_0(\lambda_0-\lambda_3 s_3^{0^2})}{\beta^2\lambda_1}z_4z_6 + \frac{1}{\lambda_0\lambda_1}(\lambda_0(\bar{a}\lambda_0^2-\lambda_1^2)-$$

$$-(\bar{a}\lambda_0^2+\lambda_1^2)\lambda_3 s_3^{0^2})z_3z_6 - \frac{\bar{a}\lambda_0}{\beta}z_2z_6 + \frac{1}{2\beta^2\bar{a}\lambda_0^2\lambda_1^2}(\lambda_0^3(\bar{a}^3\lambda_0^2+2\beta^2\bar{a}\lambda_1^2)-$$

$$-(\alpha^2\bar{a}^2\lambda_0^4+\beta^2\bar{a}\lambda_0^2\lambda_1^2+\beta^2\lambda_1^4)\lambda_3 s_3^{0^2})z_6^2.$$

Условия знакоопределенности $\delta^2\tilde{K}$ будут достаточными условиями устойчивости исследуемых решений. Записанные в форме неравенств Сильвестра, они имеют вид

$$1)\ \frac{\bar{a}(\bar{a}\lambda_0^2+\lambda_1^2)}{2\alpha^2\lambda_0} > 0,$$

$$2)\ \frac{\bar{a}(\bar{a}\lambda_0^2+\lambda_1^2)}{4\alpha^2\lambda_0^2\lambda_1^2}\Big(\lambda_1^4+\alpha^4\lambda_0^3(\lambda_0-\lambda_3 s_3^{0^2})+\beta^4\lambda_0^3(\lambda_0-\lambda_3 s_3^{0^2})+$$

$$+\beta^2\lambda_0\lambda_1^2(\lambda_0-\lambda_3 s_3^{0^2})+\alpha^2\lambda_0(2\beta^2\lambda_0^2+\lambda_1^2)(\lambda_0-\lambda_3 s_3^{0^2})\Big) > 0,$$

$$3)\ \frac{\bar{a}^2(\bar{a}\lambda_0^3-(\bar{a}\lambda_0^2+\lambda_1^2)\lambda_3 s_3^{0^2})}{8\alpha^2\beta^2\lambda_0^2\lambda_1^2}\Big(\lambda_1^4+\alpha^4\lambda_0^3(\lambda_0-\lambda_3 s_3^{0^2})+$$

$$+\beta^4\lambda_0^3(\lambda_0-\lambda_3 s_3^{0^2})+\beta^2\lambda_0\lambda_1^2(\lambda_0-\lambda_3 s_3^{0^2})+\alpha^2\lambda_0(2\beta^2\lambda_0^2+$$

$$+\lambda_1^2)(\lambda_0-\lambda_3 s_3^{0^2})\Big) > 0,$$

$$4)\ \frac{\bar{a}(\bar{a}\lambda_0^2+\lambda_1^2)^3(\bar{a}\lambda_0^3-(\bar{a}\lambda_0^2+\lambda_1^2)\lambda_3 s_3^{0^2})^2}{16\alpha^2\beta^2\lambda_0^4\lambda_1^4} > 0. \qquad (22)$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Неравенства (22) совместны при выполнении следующих условий:

$$\alpha < 0 \wedge (\beta < 0 \wedge p \vee \beta > 0 \wedge p) \vee \alpha > 0 \wedge (\beta < 0 \wedge p \vee \beta > 0 \wedge p),$$

где

$$p = \lambda_0 > 0 \wedge \Big(\lambda_1 < 0 \wedge (\lambda_3 \leq 0 \vee -\frac{\bar{a}\lambda_0^{3/2}}{\sqrt{(\bar{a}\lambda_0^2 + \lambda_1^2)\lambda_3}} < s_3^0 <$$

$$< \frac{\bar{a}\lambda_0^{3/2}}{\sqrt{(\bar{a}\lambda_0^2 + \lambda_1^2)\lambda_3}}) \vee \ \lambda_1 > 0 \wedge (\lambda_3 \leq 0 \vee -\frac{\bar{a}\lambda_0^{3/2}}{\sqrt{(\bar{a}\lambda_0^2 + \lambda_1^2)\lambda_3}} <$$

$$< s_3^0 < \frac{\bar{a}\lambda_0^{3/2}}{\sqrt{(\bar{a}\lambda_0^2 + \lambda_1^2)\lambda_3}})\Big).$$

Таким образом, устойчивыми в смысле Ляпунова будут только те исследуемые решения, принадлежащие элементам семейства ИМСД (12), для которых параметр s_3^0 удовлетворяет последним условиям.

Аналогичное исследование на устойчивость было проведено и для семейств ИМСД (11), (13), на которых векторное поле описывается уравнениями $\dot{s}_3 = 0$ и $\dot{s}_1 = 0$ соответственно. Здесь для решений, принадлежащих элементам семейств данных ИМСД, получены условия неустойчивости и устойчивости по 1-му приближению. Для того чтобы получить достаточные условия устойчивости методом Рауса–Ляпунова здесь требуется привлечение членов порядка выше 2-го в разложении интеграла K. В данной работе эта задача не рассматривалась.

Таким образом, результаты анализа стационарных решений (9) и ИМСД (11) – (13) показывают, что к устойчивому 0-му решению примыкают как устойчивые, так и неустойчивые семейства стационарных решений и ИМСД. Простых закономерностей смены устойчивости, примыкающих к нулевому решению рассмотренных семейств решений, нам установить не удалось.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Для ИМСД (10), векторное поле на котором описывается уравнениями

$$\dot{r}_2 = \frac{\lambda_3(\alpha^2\lambda_1^2 + \bar{a}\lambda_0^2)s_3^4 + \beta\bar{a}\lambda_0^2(\lambda_3 s_3^2 + \lambda_0)r_2 s_3 - \bar{a}\lambda_0^4}{\alpha\bar{a}\lambda_0^2\lambda_3 s_2^3},$$

$$\dot{s}_3 = \frac{\beta\lambda_0 - \lambda_3(\bar{a}r_2 + \beta s_3)s_3}{\alpha\lambda_3}, \qquad (23)$$

допускающими первый интеграл

$$V = r_2^2 + \frac{\lambda_1^2 s_3^2}{\bar{a}^2\lambda_0^2} + \frac{(\lambda_0 - \lambda_3(\beta r_2 + s_3)s_3)^2}{\alpha^2\lambda_3^2 s_3^2},$$

рассмотрена задача выделения и исследования на устойчивость методом Рауса–Ляпунова стационарных решений 2-го уровня. Приведем полученные здесь результаты.

Уравнения (23) имеют следующие семейства стационарных решений:

$$\{\{r_2 = \pm\frac{\beta p_1}{\bar{a}^{5/4}\sqrt{\lambda_3}p_3^{3/4}},\ s_3 = \pm\frac{\bar{a}^{1/4}\lambda_0}{\sqrt{\lambda_3}p_3^{1/4}}\},\ \{r_2 = \pm\frac{\beta p_2}{\bar{a}^{5/4}\sqrt{-\lambda_3}p_3^{3/4}},$$

$$s_3 = \mp\frac{\bar{a}^{1/4}\lambda_0}{\sqrt{-\lambda_3}p_3^{1/4}}\}, \qquad (24)$$

где

$$p_1 = \lambda_1^2 + \lambda_0(\bar{a}\lambda_0 - \sqrt{\bar{a}p_3}), \quad p_2 = \lambda_1^2 + \lambda_0(\bar{a}\lambda_0 + \sqrt{\bar{a}p_3}),$$

$$p_3 = \bar{a}\lambda_0^2 + \lambda_1^2.$$

Достаточными условиями устойчивости, например, элементов 1-го семейства стационарных решений (24) будут: $\alpha \neq 0$, $\lambda_0 \neq 0$ и $\lambda_3 > 0$.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколов В.В.* Новый интегрируемый случай на so(4) // Доклады РАН. — 2001. — Т. 381. — №5. — С. 614—615.
2. *Соколов В.В.* Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа // Теоретическая и математическая физика. — 2001. — Т. 129. — №1. — С. 31—37.
3. *Рябов П.Е.* Бифуркации первых интегралов в случае Соколова // Теоретическая и математическая физика. — 2003. — Т. 134. — №2. — С. 207—226.
4. *Морозов В. П.* Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова // Матем. сборник. — 2004. — Т. 195. — №3. — С. 69—114.
5. *Хагигатдуст Г.* Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли so(4) // Доклады РАН. — 2005. — Т. 401 — №5. — С. 599—602.
6. *Румянцев В.В.* Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // Прикладная математика и механика. — 1995. — Т.59. — №6. — С. 916—921.
7. *Иртегов В.Д.* Инвариантные многообразия стационарных движений и их устойчивость. — Новосибирск: Наука, 1985.
8. *Быков В.И., Кытманов А.И., Лазман М.З.* Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов. — Новосибирск: Наука, 1991.
9. *Aubry P. and Maza M.M.* Triangular Sets for Solving Polynomial Systems: a Comparative Implementation of Four Methods // J. Symbolic Computation. — 1999. — №28. — P. 125—154.
10. *Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. — М.: Мир, 2000.
11. *Новиков С.П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника–Шнирельмана–Морса (ЛШМ) // Функциональный анализ и его приложения. — 1981. — Т. 15. — № 3. — С. 54—66.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 532.526

А.Н. Кусюмов, Е.В. Романова
Казанский государственный технический
университет им. А.Н. Туполева
postbox7@mail.ru, Lenarom2004@mail.ru

ТЕЧЕНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ, ОГРАНИЧЕННОЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассматривается задача моделирования течения около поверхности вращающегося диска, ограниченного поверхностью замкнутого объема, на основе уравнений Навье–Стокса. Частным случаем данной постановки задачи является задача о вращении бесконечного диска в неограниченном пространстве. В этом случае использование симметрий имеет сугубо прикладной смысл: система уравнений допускает группу непрерывных пребразований и сводится к фактор-системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи в общем случае строится с помощью пакета "Fluent"и сравнивается с решением фактор-системы.

Рассматривается стационарное течение между двумя дисками, ограниченное боковой цилиндрической поверхностью. Рассматривается случай, когда один из дисков является неподвижным, а другой диск вращается с заданной угловой скоростью.

Математическая модель задачи определяется уравнениями Навье–Стокса. Вследствие осевой симметрии течения уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрических координатах упрощаются и принимают вид [1]:

$$u\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right],$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

$$u\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{uv}{r}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right], \tag{1}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Здесь u — скорость в радиальном направлении, v — скорость в окружном направлении, w — скорость в осевом направлении, r — расстояние от оси вращения диска, z — координата вдоль оси вращения жидкости.

Граничные условия к системе (1) запишем в форме

$$u(r,0)=0,\ v(r,0)=r\omega,\ w(r,0)=0,\ (0\le r<r_0);$$

$$u(r,z_k)=0,\ v(r,z_k)=0; \tag{2}$$

$$u(r_0,z)=0,\ v(r_0,z)=0,\ w(r_0,z)=0,$$

где ω — частота вращения, r_0 — радиус цилиндрической боковой поверхности, z_k — расстояние между дисками.

Предположим в начале, что ограничивающая боковая цилиндрическая поверхность удалена на бесконечно большое расстояние от оси вращения, т.е. $r_0=\infty$. В этих условиях боковая цилиндрическая поверхность не оказывает влияния на течение жидкости и рассматриваемая задача эквивалентна задаче течения жидкости между двумя бесконечными дисками. Тогда граничные условия к системе (1) можно переписать в виде

$$u(r,0)=0,\ v(r,0)=r\omega,\ w(r,0)=0;$$

$$u(r,z_k)=0,\ v(r,z_k)=0.$$

Введем безразмерное расстояние от поверхности вращающегося диска $\zeta=z/\delta$, где $\delta=\sqrt{\nu/\omega}$. Отсюда

$$\zeta=z\sqrt{\omega/\nu}. \tag{3}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Преобразованная система (1) допускает группу непрерывных преобразований с оператором

$$X = r\frac{\partial}{\partial r} + u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}. \tag{4}$$

Инвариантные переменные группы с оператором (4) можно записать в виде (переменные Кармана)

$$u = r\omega F(\zeta),\ v = r\omega G(\zeta),\ w = \sqrt{\nu\omega}H(\zeta), \tag{5}$$

$$p = p(z) = \rho\nu\omega P(\zeta),$$

где F, G, H и P — безразмерные функции переменной ζ.

После подстановки (5) в систему (1), с учетом (3), получим систему дифференциальных уравнений для определения функций F, G, H и P:

$$\begin{gathered} 2F + H' = 0, \\ F^2 + F'H - G^2 - F'' = 0, \\ 2FG + HG'' - G'' = 0, \\ P' + HH' + 2F' = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Граничные условия для системы (6) примут вид

$$F(0) = 0,\ G(0) = 1,\ H(0) = 0,\ P(0) = 0; \tag{7}$$

$$F(\zeta_k) = 0,\ G(\zeta_k) = 0,$$

где ζ_k — безразмерное расстояние от поверхности вращающегося диска.

Решение задачи (6), (7) приведено в [1] для случая $\zeta_k = \infty$ (течение около вращающегося бесконечного диска), а решение задачи (6), (7) для случая конечного расстояния между дисками рассматривалось, например, в [2].

Касательное напряжение на поверхности вращающегося диска определяется величиной $G'(0)$ (производная безразмерной окружной скорости). Из [1] следует, что $G'(0) = -0,616$ при $\zeta_k = \infty$.

В полной постановке задача (1), (2) решалась численно с помощью пакета "FLUENT"(версия 6.2.16). Диаметр дисков полагался r_0= 1 м, угловая частота вращения ω = 0,01 рад/с. В качестве рабочей жидкости рассматривалась вода с плотностью ρ = 998,2 кг/м^3, динамическим коэффициентом вязкости μ = 0,00103 кг/м·с.

Число Рейнольдса Re_w, вычисленное при указанных параметрах течения, составляло

$$Re_w = R^2\omega/\nu = 9,708 \cdot 10^3.$$

Неподвижный диск располагался на достаточно большом удалении от вращающегося диска: z_k = 1 м. При этом условии влияние верхнего диска на характеристики течения около вращающегося диска невелико и можно предполагать, что на относительно небольшом расстоянии от оси вращения характеристики течения близки к характеристикам течения около одиночного вращающегося неограниченного диска.

Для сравнения результатов численного моделироавания задачи (1), (2) с результатами решения задачи (6), (7) определим безразмерную окружную скорость течения $\overline{v}$ и производную $\overline{v}_\zeta$ безразмерной окружной скорости:

$$\overline{v} = \frac{v\omega}{r},\ \overline{v}_\zeta = \frac{\partial\overline{v}}{\partial\zeta}.$$

Сравним величину $\overline{v}_\zeta(r, 0)$ с безразмерной окружной скоростью $G'(0)$ на поверхности неограниченного вращающегося диска. Результаты расчета $\overline{v}_\zeta(r, 0)$ представлены в таблице 1.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Т а б л и ц а 1

r	0,1	0,5	0,8	0,9	0,95	0,97	0,99
$\overline{v}_\zeta$	$-0,594$	$-0,594$	$-0,594$	$-0,583$	$-0,538$	$-0,444$	$-0,31$

Из сравнения результатов расчета следует, что результаты решения задачи с помощью пакета "FLUENT"(при определенном выше Re_w) хорошо совпадают с решением, представленным в [1], в области достаточно большого интервала изменения радиальной координаты r (от 0 до 0,9). Таким образом, при исследовании течения между вращающимися дисками, ограниченном цилиндрической поверхностью, для оценки момента сопротивления вращающегося диска в первом приближении можно использовать решения фактор-системы, полученной в условиях неограниченного цилиндрической поверхностью потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. — 712 с.
2. *Романова Е.В.* Характеристики ламинарного течения между двумя вращающимися дисками при различных числах Рейнольдса//Труды конф. “Математическое моделирование и краевые задачи”. Самара. — 2007. — С. 223—225.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 512.622+512.816

В.И. Лёгенький
Институт проблем математических машин и систем НАНУ
victor.lehenkyi@gmail.com

О РАССЛОЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Изучаются группы, допускаемые алгебраическими уравнениями, и анализируются алгоритмы расслоения уравнений по найденным группам.

Введение. Хорошо известно, что исследование процессов, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа, может быть сведено к анализу алгебраических уравнений. Характеристические многочлены, передаточные функции, границы устойчивости в пространстве параметров – все эти объекты анализа классической теории автоматического управления – так или иначе связаны с алгебраическими уравнениями. В последнее время было опубликовано ряд работ (см., например, [11, 12]), в которых предпринята попытка упрощения (редукции) возникающих алгебраических уравнений с помощью анализа размерностей исходной дифференциальной системы (П-теоремы). Последняя, с точки зрения теории непрерывных групп преобразований, является инструментом выявления хотя и весьма важной, но все же достаточно узкой группы однородных растяжений. Поэтому представляет интерес изучение этого вопроса с более широких позиций, а именно – с точки зрения изучения группы эквивалентностей, действующей в пространстве "переменные–параметры".

В настоящей статье коснемся классической проблемы поиска корней алгебраического уравнения

$$F(x, \mathbf{a}) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \qquad (1)$$

Здесь и в дальнейшем для простоты будем полагать $a_n = 1$. Алгоритмически подходы к решению этой задачи разнятся в зависимости от наших предположений о коэффициентах $(a_{n-1}, \ldots, a_0)$ уравнения (1). Если коэффициенты имеют конкретные числовые значения (или, как принято говорить в групповом анализе, задана специализация уравнения (1)), то для решения задачи нам достаточно иметь устойчивый численный алгоритм, который позволяет находить корни с приемлемой точностью. Подобные алгоритмы имплементированы в большинство современных математических пакетов. Например, в системе MAPLE-12 компании Maplesoft (Canada) есть специальный инструмент (Precalculus->Polynomials and Roots), при вводе в поле которого некоторого уравнения вида (1) с заданными коэффициентами строится соответствующий график и производится автоматическое вычисление всех его действительных корней. Если же считать, что коэффициенты уравнения (1) заданы в самом общем, т.е. буквенном виде, то возникает проблема поиска некоей формулы $x = x(\mathbf{a})$, связывающей корни уравнения (1) с его коэффициентами. Многовековая история решения этой проблемы имеет, как известно, весьма скромные результаты: в общем случае при $n \geq 5$ решений в радикалах не существует. Тем не менее попытки решения этой проблемы привели к открытию важных инструментов анализа – резольвент Лагранжа, групп Галуа и т.д. А, кроме того, между этими двумя полярными подходами проявилась некая "промежуточная" стратегия, а именно – с помощью эквивалентных преобразований привести уравнение (1) к последовательности более простых задач, содержащих, по возможности, меньшее число параметров и уравнений более низкого порядка. Анализируя возможные здесь подходы, Ф. Клейн писал [7, с. 152]:

"Предметом каждого из них является изучение корней общего уравнения пятой степени как функций коэффициентов уравнения. Оба исходят из идеи упростить эти функции так, чтобы вместо пяти коэффициентов уравнения можно было ввести меньшее количество независимых величин. Различают только используемые для этой цели средства: в первом случае

– это преобразование уравнений [7], а во втором – построение резольвент".

Что же касается возможности применения к анализу проблемы групп непрерывных преобразований С. Ли, то Ф. Клейн подобной перспективы не видел. Он отмечал [7, с. 20]:

"Хотя теория таких групп весьма интересна и важна во многих отношениях, в наших исследованиях она не будет играть роли".

Первым, кто нарушил этот прогноз Ф. Клейна, был, вероятно, Л. Диксон, посвятивший завершающую часть работы [13] анализу инвариантов бинарных форм. Ему же принадлежит идея вовлечь в групповые преобразования коэффициенты. Он назвал эту расширенную группу "Total group". В современной литературе прижился другой термин – “Группа эквивалентностей”, а работу Л. Диксона по непонятным причинам не цитируют в данном контексте. Тем не менее общую тенденцию последнего времени можно охарактеризовать как взаимопроникновение идей дискретно-группового анализа в теорию дифференциальных уравнений (отметим, прежде всего, работы В.Ф. Зайцева, см., например, [4]), а идей групп непрерывных преобразований – в теорию алгебраических уравнений (см., например, работу Н.Х. Ибрагимова [5] и П. Олвера и И. Берченко [10]). В развитие этих идей написана и настоящая работа.

1. Необходимые определения

Дальнейший анализ будем проводить на инфинитезимальном уровне, т.е. характеризовать непрерывную группу с помощью инфинитезимального оператора

$$X = \xi(x)\partial_x + \varphi^i(\mathbf{a})\partial_{a_i}, \tag{2}$$

а симметрию многообразия $F(x, \mathbf{a}) = 0$ понимать в классическом смысле:

$$XF|_{F=0} = 0, \quad (XF = \lambda(x, \mathbf{a})F). \tag{3}$$

Здесь условие $F = 0$ после черты означает, как всегда, "переход на многообразие $F = 0$". Однако в случае исследования алгеб-

[7]Имеются в виду преобразования Чирнгауза.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

раических (не дифференциальных) многообразий, для точного его выполнения нам потребуется привлечь еще одно понятие, а именно – понятие результанта. Напомним [6, с.8–9], что если для полиномов

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{4}$$

и

$$g(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \tag{5}$$

составить матрицу коэффициентов M порядка $(m+n)\times(m+n)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & & \dots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & b_{m-1} & \dots & \dots & b_1 & b_0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{m-1} & \dots & & \dots & b_0 & 0 \\ \vdots & & & \dots & & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & & b_0 & \dots & & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & & b_0 & 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n \end{array},$$

то выражение

$$\mathcal{R}(f,g) = (-1)^{n(n-1)/2} \det M \tag{6}$$

называется **результантом** (в форме Сильвестра) полиномов f и g. Соответственно субрезультанты определяются как определители матриц, полученных в результате вычеркивания соответствующих столбцов и строк матрицы M (см., например, [6, с. 19–25]), а дискриминант – как результант полинома F и его производной F' (так как в рассматриваемом случае $a_n = 1$). В этих терминах свойство двух полиномов иметь k общих корней характеризуется как равенство нулю соответствующего числа субрезультантов: $\mathcal{R}^{(j)} = 0, (j = \overline{0, k-1})$. Именно это условие мы будем использовать при "переходе на многообразие".

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

2. Идея расслоения

Расслоение, т.е. представление (декомпозиция) исходного уравнения в виде некоторой эквивалентной системы уравнений более простого вида, используется в явном или неявном виде давно. Различие – в понятии об эквивалентности и используемой терминологии. [8] Цель рассмотрения нижеупомянутых примеров – несколько унифицировать технику расслоения с использованием вышеприведенных определений.

Итак, рассмотрим, например, уравнение

$$f = x^4 + ax^2 + 1 = 0. \tag{7}$$

Сразу видно, что оно – биквадратное (допускается симметрия отражений $\hat{x} = -x$) и расслаивается в систему

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 0, \\ y^2 + ay + 1 &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где y – есть не что иное, как инвариант (минимальный) допускаемой группы отражений, второе уравнение системы (8) – разрешающее уравнение, а первое уравнение – единственное уравнение автоморфной системы. Возникает вопрос: единственно ли такое расслоение? Ответ: нет. Действительно, на уравнение (7) можно смотреть как на возвратное (допускается симметрия инверсий $\hat{x} = 1/x$). Тогда минимальный инвариант этой группы может быть взят в виде $y = x + 1/x$. Теперь расслоение исходного уравнения уже не столь тривиальная задача. Например, в работе [4, с. 32] предлагается несколько путаный алгоритм: деление уравнения (7) на x^2 и последующее его преобразование к виду, содержащему только y и его степени. Более точный рецепт состоит в том, чтобы переписать уравнение для инварианта в виде

$$g = x^2 - yx + 1 = 0 \tag{9}$$

[8] Например, в работе В.Ф. Зайцева [4, с. 32–33] используется термин "система специального вида".

и получить разрешающее уравнение на y, воспользовавшись условием $\mathcal{R}(f,g,x)=0$. Для нашего примера получим

$$x^2 - yx + 1 = 0,$$
$$y^2 + a - 2 = 0. \tag{10}$$

Подобным образом может быть получено и расслоение для еще одной симметрии этого уравнения ($\hat{x} = -1/x$).

В этом же духе можно трактовать и использование симметрических многочленов при решении систем алгебраических уравнений и т.д. Заметим, что расслоение по дискретной группе – это "расслоение порядка": разрешающее уравнение содержит те же коэффициенты, что и исходное, но его порядок – ниже порядка исходного уравнения. Резольвенты Лагранжа для уравнений 3-го и 4-го порядков также укладываются в эту схему (есть даже терминологическое сходство – "разрешающее уравнение"и "резольвента"имеют один и тот же смысл). В нашей работе несколько иная цель – проанализировать возможные “параметрические расслоения”, когда уравнения разрешающей системы имеют тот же порядок, но содержат меньшее число параметров.

3. Основной результат

Предложение 1. Алгебраическое уравнение n-й степени (1) допускает трехмерную алгебру (эквивалентностей) с образующими:

$$X_1 = \partial_x - n\partial_{a_{n-1}} - \sum_{k=2}^{n}(n-k+1)a_{n-k+1}\partial_{a_{n-k}},$$
$$X_2 = x\partial_x + \sum_{k=1}^{n} k a_{n-k}\partial_{a_{n-k}}, \tag{11}$$
$$X_3 = x^2\partial_x + \sum_{k=1}^{n-1}\Big((k+1)a_{n-k-1} - a_{n-1}a_{n-k}\Big)\partial_{a_{n-k}} - a_0 a_{n-1}\partial_{a_0}.$$

Доказательство[9]. Действие оператора (2) на уравнение (1) приводит к соотношению $G(x, \mathbf{a}) = \xi(x)\partial F/\partial x + \varphi^i(\mathbf{a})\partial F/\partial a$, в котором $(n+1)$ неизвестных функций ξ, φ^i. Поскольку $\xi(x)$ – функция единственной переменной, то она должна быть взята в виде $\xi(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$ (максимальная группа на прямой – проективная). Далее, переход на многообразие F для G означает выполнение n условий $\mathcal{R}^{(j)}(F, G, x) = 0$[10], $j = \overline{0, n-1}$, из которых и найдены недостающие n значений

$$\varphi^i = \varphi^i(\mathbf{a}, C_1, C_2, C_3).$$

Из таблицы коммутаторов алгебры:

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3,$$

следует, что группа эквивалентностей алгебраического уравнения n-й степени изоморфна группе $SL(2)$, которая, как известно, неразрешима.

4. Пример

Приведем дословно несколько наивный, но в тоже время весьма поучительный пример из книги Блехмана и соавторов [1, с. 198–199].

"Пусть, например, – отмечают авторы указанной работы, – мы хотим составить таблицу, по которой можно было бы решать полное кубическое

[9] Оператор X_1 с учетом значения $a_n = 1$ может быть записан в более компактной форме: $X_1 = \partial_x - \sum_{k=1}^n (n-k+1) a_{n-k+1} \partial_{a_{n-k}}$; аналогично, оператор X_3 с учетом значения $a_{-1} = 0$ может быть записан как $X_3 = x^2\partial_x + \sum_{k=1}^n \Big((k+1)a_{n-k-1} - a_{n-1}a_{n-k}\Big)\partial_{a_{n-k}}$. Эти же операторы, записанные в терминах корней $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для уравнения $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = 0$, примут вид:

$$X_1 = \partial_x + \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}, \quad X_2 = x\partial_x + \sum_{k=1}^n x_k \partial_{x_k}, \quad X_3 = x^2\partial_x + \sum_{k=1}^n x_k^2 \partial_{x_k}.$$

[10] Третий аргумент в скобках (x) означает исключаемую переменную, часто такое обозначение применяют в системах аналитических вычислений.

уравнение
$$a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0. \tag{12}$$
Если допустить, что каждый из параметров a_i ($i = \overline{0,3}$) может принимать 50 значений, а это не так уж много, то всего получится $50^4 \cong 6 \cdot 10^5$ комбинаций этих значений. Средней ЭЦВМ для выдачи результатов потребуется около месяца непрерывной работы (основное время будет уходить на печать), в результате чего получится набор рулонов лент общей длиной в 200 км и весом в 2 тонны ... На самом деле положение с таблицей для решения уравнения (12) совсем не такое уж печальное. С помощью подстановки
$$z = -\frac{a_2}{3a_3} + \hat{z}q^{1/3}, \quad q = \frac{a_0}{a_3} - \frac{a_2a_1}{3a_3^2} + \frac{2a_2}{27a_3^3}, \tag{13}$$
можно перейти к уравнению
$$\hat{z}^3 + r\hat{z} + 1 = 0, \quad r = \left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3^2}\right) q^{-2/3}, \tag{14}$$
содержащему всего один параметр r; таблицу значений решений последнего уравнения в зависимости от этого параметра уже нетрудно составить с помощью ЭЦВМ, даже если ему придать не 50, а 5000 значений. В результате решение уравнения (12) будет находиться с помощью двух одновходовых таблиц (кубических корней и $\hat{z}(r)$) и простых арифметических действий; это, конечно, несравненно проще, чем применение таблицы с четырьмя входами".

Проинтерпретируем приведенный пример с точки зрения полученного выше результата. Во-первых, следует заметить, что из четырех коэффициентов (a_0, a_1, a_2, a_3) существенными (в смысле работы [9, с. 16–19]) являются только три (в настоящей работе принято $a_n = 1$). Тогда уравнение (12) допускает, в соответствии с (11), операторы:
$$\begin{gathered} X_1 = \partial_z - 3\partial_{a_2} - 2a_2\partial_{a_1} - a_1\partial_{a_0}, \\ X_2 = z\partial_z + a_2\partial_{a_2} + 2a_1\partial_{a_1} + 3a_0\partial_{a_0}, \qquad (15) \\ X_3 = z^2\partial_z + \left(2a_1 - (a_2)^2\right)\partial_{a_2} + (3a_0 - a_1a_2)\partial_{a_1} - a_2a_0\partial_{a_0}. \end{gathered}$$
Можно убедиться, что замены (13) – (14) есть не что иное, как расслоение исходной системы с помощью инвариантов операторов X_1, X_2. Возникает естественный вопрос о возможности

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

дальнейшего расслоения с использованием не задействованного оператора X_3. Для анализа такой возможности представим его в новых переменных $(\hat{z}, r)$. Получим

$$X_3 = (9\hat{z}^2 + 2\hat{z}r^2 + 6r)\partial_{\hat{z}} + (27 + 4r^3)\partial_r. \tag{16}$$

Теперь ясно, что для определения инварианта оператора X_3 нам придется проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{d\hat{z}}{dr} = \frac{9\hat{z}^2 + 2\hat{z}r^2 + 6r}{27 + 4r^3}, \tag{17}$$

которое является уравнением Риккати. Попытки найти решение указанного уравнения в известной автору справочной литературе к успеху не привели. Заметим, что коэффициент при ∂_r в формуле (16) есть не что иное, как дискриминант уравнения (12).

Заключительные замечания

Другие возможные приложения найденных операторов симметрии возникают при рассмотрении "усеченных" (без "x") вариантов (будем обозначать их как $\tilde{X}_i$). В частности, справедливы следующие утверждения:

Предложение 2. Уравнение для результанта двух полиномов (6) $\mathcal{R} = 0$ инвариантно относительно трехмерной алгебры $\tilde{Z} = C_1\tilde{Z}_1 + C_2\tilde{Z}_2 + C_3\tilde{Z}_3$, где $\tilde{Z}_i = \tilde{X}_i + \tilde{Y}_i$, а $\langle \tilde{X}_i, \tilde{Y}_i \rangle$ – соответствующие "усеченные"операторы симметрии соответствующих уравнений.

Предложение 2 может быть использовано при анализе границ устойчивости многочленов в пространстве их коэффициентов (условия Льенара–Шипара, см., например, [3]). Например, при $n = 3$ граница устойчивости (критерий Вышнеградского) имеет вид $a_2a_1 - a_0 = 0$, которое есть не что иное, как условие Предложения 2 для полиномов $f = a_2x^2 + a_0$ и $g = x^2 + a_1$.

Предложение 3. Уравнение для дискриминанта полинома (1) $\mathcal{D} = 0$ инвариантно относительно трехмерной алгебры "усеченных" операторов $\tilde{X}_i$.

Относительно Предложения 3 сделаем следующее замечание: при $n = 2$ имеет место ситуация, когда условие $\mathcal{D} = 0$ – т.н. "вырожденный инвариант". Действительно, в этом случае, $\mathcal{D} = (a_1)^2 - 4a_0$, а операторы симметрии имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= -2\partial_{a_1} - a_1\partial_{a_0}, \\ \tilde{X}_2 &= a_1\partial_{a_1} + 2a_0\partial_{a_0}, \\ \tilde{X}_3 &= (2a_0 - (a_1)^2)\partial_{a_1} - a_0a_1\partial_{a_0}. \end{aligned} \tag{18}$$

В общем случае они связаны: $a_0\tilde{X}_1 + a_1\tilde{X}_2 + \tilde{X}_3 = 0$, однако при $\mathcal{D} = 0$ ранг соответствующей матрицы коэффициентов становится равным единице, и, следовательно, $\mathcal{D} = 0$ – вырожденный инвариант.

Автор выражает признательность проф. П. Олверу за помощь с литературой и проф. А. Утешеву за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – Киев: Наукова думка, 1976. – 270 с.
2. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
3. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем.– М.: Наука, 1979. – 304 с.
4. *Зайцев В. Ф.* Введение в современный групповой анализ. Ч. 1. Группы преобразований на плоскости. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 1996. – 40 с.
5. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. – М.: Знание, 1989. – 48 с.
6. *Калинина Е.А., Утешев А.Ю.* Теория исключения – СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. – 72 с.
7. *Клейн Ф.* Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

8. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов. – М.: Мир, 1987. – 312 с.
9. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947. – 359 с.
10. *Berchenko I., Olver P.* Symmetries of Polynomials, J. Symbolic Computation (2000), 29. P. 485–514.
11. *Brennan S., Alleyne A.* Dimensionless Robust Control With Application to Vehicles, IEEE Trans. on Control Systems Technology, Vol. 13, № 4, July 2005. P. 624–630.
12. *Brennan S., Alleyne A.* Using a scale testbed: controller design and evaluation. IEEE Control Systems Magazine, 2001; 21: 15–26.
13. *Dickson L.E.* Differential equations from the group standpoint, Annals of Math., 1924, ser. 2, 25. P. 287–378.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 512.622+512.816+53.072.2

В.И. Лёгенький[†], *Г.Н. Яковенко*[‡]
[†] Институт проблем математических машин и систем НАНУ
victor.lehenkyi@gmail.com
[‡] Московский физико-технический институт (госуниверситет)
yakovenko_ g@mtu-net.ru

БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ: ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД

Предлагается трансформация (обобщение) задачи о введении безразмерных переменных к задаче о минимально-параметрической форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами и развивается алгоритм решения этой задачи на основе теории группового расслоения.

Введение. Как может показаться из названия, в статье пойдет речь о том, как вводить безразмерные переменные. Это не совсем так. Дело в том, что введение безразмерных переменных достаточно часто воспринимается как некий промежуточный акт, позволяющий несколько упростить дальнейшие выкладки. Показательно в этом смысле замечание авторов книги [12, с. 90]: “Существенным шагом в процессе преобразования модели является ее приведение к безразмерному виду. При этом часто достигается уменьшение числа параметров”. Итак, что же все-таки является целью – обезразмерить переменные или уменьшить количество параметров модели? Непредвзятый взгляд на этот вопрос подсказывает, что цель состоит именно в уменьшении числа параметров, а обезразмеривание – всего лишь средство, которое позволяет в ряде случаев достичь именно такого результата. Поэтому сразу же уточним постановку задачи. Пусть задана система обыкновенных дифферен-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

циальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где t – время, x^i – фазовые координаты, $\mathbf{p} = (p^1, \ldots, p^r)$ – r-мерный вектор параметров. Наша задача будет состоять в том, чтобы указать конструктивный алгоритм введения таких новых переменных и параметров,

$$\hat{t} = \hat{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \hat{x}^i = \hat{x}^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \hat{p}^s = \hat{p}^s(\mathbf{p}), \tag{2}$$

при котором число новых параметров (s) в преобразованной модели

$$\frac{d\hat{x}^i}{d\hat{t}} = \hat{f}^i(\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) \tag{3}$$

было бы по возможности меньше, чем в исходной: $s < r$. Иногда (см., напр., [15, с. 42]) эту задачу называют "задачей приведения к минимально-параметрической форме".

1. Редукция модели к минимально-параметрической форме как задача группового расслоения

Наш подход к задаче редукции будет опираться на теорию группового расслоения, основы которой были заложены еще самим С. Ли и впоследствии развиты в работах Л.В. Овсянникова [7, 8] и Ю.Н. Павловского [9, 10]. Существо метода состоит в том, что если исходная система дифференциальных уравнений допускает некоторую непрерывную группу преобразований G, то она (система уравнений) может быть эквивалентным образом представлена в виде разрешающей и автоморфной системы. Разрешающая система содержит только инварианты (в том числе дифференциальные) группы G и описывает поведение фактор-множества множества решений по действию G, а автоморфная система описывает множество решений внутри классов. Корректное применение техники группового расслоения предполагает два ключевых действия: во-первых, мы должны описать точно класс исследуемых объектов (т.е. зафиксировать класс анализируемых дифференциальных уравнений), а во-вторых, ввести на этом классе отвечающее нашим целям понятие об эквивалентности (на инфинитезимальном уровне это означает зафиксировать класс операторов симметрии). Для удовлетворения первому требованию мы допишем к нашей системе (1) дополнительную систему:

$$\frac{dp^j}{dt} = 0, \quad j = \overline{1, r}, \tag{4}$$

фиксирующую тот факт, что входящие в систему уравнений (1) параметры – константы. Выбор класса операторов – более сложная задача, и мы остановимся на ней подробнее. На этом пути нам придется идти, по меткому выражению Р. Беллмана, "узкой тропой между Западнями Переупрощения и Болотом Переусложнения" [1, с. 11]. Сразу же заметим, что наиболее общий класс точечных операторов симметрии может быть задан в виде

$$X = \tau(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\partial_t + \xi^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\partial_{x^i} + \eta^j(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\partial_{p^j}, \tag{5}$$

где (τ, ξ^i, η^j) – дифференцируемые функции указанных аргументов. Для упрощения дальнейшего анализа введем систему следующих обозначений. Во-первых, обозначив $t = x^0$, отнесем время к координатам. Тогда указанный выше оператор примет более простой вид:

$$X = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{p})\partial_{x^i} + \eta^j(\mathbf{x}, \mathbf{p})\partial_{p^j}, \tag{6}$$

только индекс i уже будет пробегать все значения от 0 до n. Теперь различные подалгебры этой алгебры симметрий будут отличаться функциональной зависимостью коэффициентов $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot)$. Для удобства ссылок на эти подалгебры будем характеризовать их специальным индексом внизу оператора X, а именно: в квадратных скобках через запятую будем перечислять параметры, от которых зависят коэффициенты $\xi(\cdot), \eta(\cdot)$. Будем отмечать при этом нулевые значения коэффициентов знаком $\emptyset$ ("пустое множество").

Таблица 1

Подалгебры и их свойства

Обозн.	Свойства
$X_{[\mathbf{xp},\mathbf{xp}]}$	Алгебра симметрий систем (1)+(4). В общем случае – бесконечномерна. Из-за наличия в ней подалгебры $X_{[\mathbf{xp},\emptyset]}$, ее вычисление неэффективно.
$X_{[\mathbf{xp},\mathbf{p}]}$	Классическая (в смысле Л.В. Овсянникова) алгебра эквивалентностей уравнения (1). Ее вычисление может стать эффективным при вычислении симметрий ОДУ высших порядков, т.е. тогда, когда алгебра $X_{[\mathbf{xp},\emptyset]}$ становится конечномерной.
$X_{[\mathbf{xp},\emptyset]}$	Алгебра точечных симметрий уравнения (1). Коэффициенты ее операторов могут быть вычислены по первым интегралам системы (1), поэтому задача их нахождения не проще задачи интегрирования исходной системы.
$X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$	Проектируемая алгебра (координаты x и параметры p меняются раздельно). В случае, если все параметры существенны, – конечномерна. Наиболее известна ее подалгебра однородных растяжений, для размерных переменных ее существование гарантируется Пи-теоремой.
$X_{[\mathbf{x},\emptyset]}$	"Фазовое" ядро алгебры $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$ допускается системой при любых значениях параметров; если параметры "управляющие" (не существует первого интеграла, не зависящего от параметра), алгебра конечномерна.
$X_{[\emptyset,\mathbf{p}]}$	"Параметрическое" ядро алгебры $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$ допускается системой при любых значениях фазовых координат. Ее наличие свидетельствует о "несущественности" части параметров; играет ключевую роль в т.н. проблеме "параметрической идентифицируемости".

Тогда, например, в этих обозначениях оператору (5) соответствует класс $X_{[\mathbf{xp},\mathbf{xp}]}$, оператору $X = \xi^i(\mathbf{x})\partial_{x^i} + \eta^j(\mathbf{p})\partial_{p^j}$ – класс $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$, а оператору $X = \xi^i(\mathbf{x},\mathbf{p})\partial_{x^i}$ – класс $X_{[\mathbf{xp},\emptyset]}$ и т.п.[11]

[11] В работе [9] были предложены буквенные обозначения для различных подалгебр: $A_0, A, K, B, L, \ldots$, однако их ассоциативные обозначения были понятны только весьма узкому кругу специалистов.

Алгоритмы вычисления и свойства различных подалгебр исследовались в связи с различными задачами – интегрируемости, управляемости, идентифицируемости [2–6, 8–10]. Кратко эти результаты суммированы в таблице 1.

Выявленные свойства и опыт решения прикладных задач позволяют рекомендовать следующий алгоритм группового расслоения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами.

1. Вычисляем алгебру $X_{[\emptyset,\mathbf{p}]}$ и "избавляемся" от несущественных параметров.

2. Вычисляем подалгебру однородных растяжений, гарантированную Пи-теоремой; обезразмериваем систему, тем самым уменьшая число параметров.

3. Для редуцированной системы находим алгебру $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$, по которой производится окончательное расслоение.

При небольшом количестве параметров этапы 2 и 3 могут быть объединены.

2. Пример

Рассмотрим математическую модель движения воздушного шара в вертикальной плоскости [11]. Ограничимся рассмотрением движения его центра масс под действием следующих сил: силы тяжести (G), архимедовой силы (F_A) и силы аэродинамического сопротивления (F_x). Силы через параметры движения и среды выражаются следующим образом:

$$G = mg, \quad F_A = gW\rho(h), \quad F_x = \frac{\rho(h)c_xS}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2.$$

В приведенных формулах приняты обозначения: h – высота подъема шара, dh/dt – вертикальная скорость, m – масса, g – ускорение свободного падения, W – объем шара, c_x – коэффициент лобового сопротивления, S – характерная площадь сопротивления (площадь Миделя). Зависимость плотности воздуха от высоты будем полагать экспоненциальной: $\rho(h) = \rho_0 e^{-\lambda h}$, где ρ_0 – плотность воздуха на нулевой высоте, λ – коэффициент. Сила тяжести направлена вниз, архимедова сила – вверх, а сила аэродинамического сопротивления всегда направлена “против движения”, т.е. ее корректный учет в уравнениях движения требует введения множителя $-\mathrm{sign}(dh/dt)$. Однако для наших целей этот факт не имеет принципиального значения и мы ограничимся рассмотрением только этапа подъема шара, когда сила аэродинамического сопротивления направлена вниз и, следовательно, будет учтена в уравнениях движения со знаком минус. Теперь уравнение движения может быть записано в виде

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg + gW\rho_0 e^{-\lambda h} - \frac{\rho_0 c_x S}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 e^{-\lambda h}. \qquad (7)$$

Итак, наша модель содержит семь параметров: m, g, W, ρ_0, c_x, S, λ. Поставим задачу о приведении нашей модели к минимально-параметрической форме.

Дополнительно предположим, что воздушный шар представляет собой однородное тело радиуса R с плотностью ρ_b. Тогда величина площади, определяющая его аэродинамическое сопротивление, определится как $S = \pi R^2$, объем как $W = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}RS$, а масса соответственно как $m = \rho_b W = \frac{4}{3}\rho_b RS$. Теперь видно, что каждый член уравнения (7) содержит в качестве множителя величину S. С точки зрения развитой выше теории это означает, что уравнение допускает бесконечномерный оператор симметрии $X_1 = \varphi(S)\partial_S$, а сам параметр S является несущественным. Следовательно, каждый член уравнения движения может быть сокращен на величину множителя S, а само уравнение примет вид

$$\frac{4}{3}\rho_b R\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{4}{3}\rho_b Rg + g\frac{4}{3}R\rho_0 e^{-\lambda h} - \frac{\rho_0 c_x}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 e^{-\lambda h}. \qquad (8)$$

Полученное уравнение, которое уже содержит 6 параметров,

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

допускает два оператора из алгебры $X_{[\emptyset,\mathbf{p}]}$, а именно:

$$X_2 = \rho_b \partial_{\rho_b} + \rho_0 \partial_{\rho_0}, \quad X_3 = R\partial_R + c_x \partial_{c_x}. \tag{9}$$

Это означает, что из четырех параметров ρ_b, ρ_0, R, c_x можно образовать два существенных, которые являются инвариантами указанных операторов:

$$p_1 = \frac{\rho_0}{\rho_b}, \quad p_2 = \frac{3c_x}{8R}.$$

Переписывая уравнение (8) в виде двух уравнений (системы) первого порядка, с учетом обозначений для p_1, p_2 получим

$$\frac{dh}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = -g + gp_1 e^{-\lambda h} - p_2 p_1 V^2 e^{-\lambda h}. \tag{10}$$

В этой системе уже все четыре параметра (g, p_1, p_2, λ) существенны. Это означает, что дальнейшее расслоение возможно с привлечением операторов симметрии из более общего класса $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$, т.е. выполнение пунктов 2–3 предлагаемого алгоритма. Можно показать [12], что максимальной алгеброй инвариантности (симметрий) системы (10) в классе $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$ является 4-мерная алгебра с образующими:

$$\begin{gathered} X_4 = h\partial_h + V\partial_V - p_2\partial_{p_2} + g\partial_g - \lambda\partial_\lambda, \\ X_5 = t\partial_t - V\partial_V - 2g\partial_g, \\ X_6 = \partial_h + \lambda p_1 \partial_{p_1}, \\ X_7 = \partial_t. \end{gathered} \tag{11}$$

В полученной алгебре симметрий оператор X_7 принадлежит классу $X_{[\mathbf{x},\emptyset]}$, а оставшиеся операторы X_4, X_5, X_6 могут быть

[12] Вычисление симметрий производится на основе классического алгоритма Ли; в возможности довести расчеты “до конца” принципиальной является именно “проектируемость”, т.е. различная зависимость коэффициентов искомых операторов от координат и параметров.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

использованы для дальнейшего расслоения. Операторы X_4, X_5 – это классические операторы однородных растяжений, которые могут быть получены на основе известной Пи-теоремы (“соображений размерности”): оператор X_4 характеризует инвариантность уравнений к изменению масштаба “длины”, а оператор X_5 – “времени”. Попутно заметим, что к операторам алгебры тоже применимо понятие размерности: например, операторы X_4, X_5 – “безразмерные” операторы, размерность оператора $[X_7] = c^{-1}$, а $[X_4] = m^{-1}$. Этот факт может быть использован при проверке вычисленных операторов: если слагаемые оператора имеют разную размерность, то это означает, что при вычислении была допущена ошибка.

Расслоение проведем в два этапа. На первом этапе используем инварианты операторов X_4, X_5. Их можно определить так, как это принято делать в “анализе размерностей”. Матрица коэффициентов операторов A (“матрица размерностей”) примет вид

$$A = \begin{array}{c} \\ X_2 \Rightarrow \\ X_1 \Rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} t & h & V & p_2 & g & \lambda \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array},$$

а матрица решений B (нуль-пространство) уравнения $Ay = 0$ соответственно запишется в в виде

$$B = \begin{array}{c} \\ t \\ h \\ V \\ p_2 \\ g \\ \lambda \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \hat{t} & \hat{h} & \hat{V} & \hat{p}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Столбцы матрицы – это искомые векторы y, а элементы этих столбцов – показатели степени соответствующих координат и параметров. Инварианты операторов X_4, X_5 получаются таки-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

ми:

$$\hat{t} = t\sqrt{\lambda g}, \quad \hat{h} = \lambda h, \quad \hat{V} = V\sqrt{\frac{\lambda}{g}}, \quad \hat{p_2} = p = \frac{p_2}{\lambda}.$$

Система (10) в этих переменных принимает вид

$$\frac{d\hat{h}}{d\hat{t}} = \hat{V}, \quad \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = -1 + (1 - p\hat{V}^2)p_1 e^{-\hat{h}}, \tag{12}$$

и в ней осталось только два параметра – (p, p_1). С помощью еще незадействованного оператора X_6, который в новых переменных принимает вид

$$\hat{X}_6 = \partial_{\hat{h}} + p_1\partial_{p_1}, \tag{13}$$

дополнительное преобразование (инвариант оператора $\hat{X}_6$) можно представить в виде

$$h^* = \hat{h} - \ln p_1 = \lambda h - \ln\frac{\rho_0}{\rho_b}, \tag{14}$$

а исходная система (7) примет окончательный вид:

$$\frac{dh^*}{d\hat{t}} = \hat{V}, \quad \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = -1 + (1 - p\hat{V}^2)e^{-h^*}, \tag{15}$$

с единственным параметром $p = \frac{3c_x}{8R\lambda}$. Поскольку параметр p не зависит от плотности заполняющего шар газа ρ_b, можно сказать, что в приведенном расслоении нам удалось отделить "форму" (т.е. размеры шара R и коэффициент c_x) от "содержания" (точнее – наполнения шара). Другими словами, для моделирования движения воздушных шаров одинакового размера, но с разными "наполнителями", достаточно использовать модель (15) с одним и тем же значением коэффициента p. Это, в известном смысле, реализует идею, высказанную в работе [16].

Заключение. По мнению авторов, алгоритм группового расслоения создает адекватную методологическую основу для решения задач приведения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами к минимально-параметрическому виду. Ключевая роль в этой процедуре принадлежит классу операторов симметрии вида $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$, которые могут быть эффективно вычислены с помощью алгоритма Ли. Предложенный в статье алгоритм расслоения позволяет также легко акцептировать классические результаты, которые могут быть получены на основе Пи-теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. – М.: Изд–во ИЛ, 1960. – 400 с.
2. *Кунцевич А.Д., Кудашев В.Р., Спивак С.И., Горский В.Г.* Групповой анализ идентифицируемости параметров математической модели нестационарной химической кинетики // Докл. РАН – 1992. – Т. 326, № 4. – С. 658–661.
3. *Легенький В.И.* Точечные симметрии и управляемость динамических систем с управлением // Доклады НАН Украины. – 1995. – N 3. – С. 15–17.
4. *Легенький В.И.* О минимально–параметрической форме уравнений движения летательных аппаратов // Прикл. механика. – 1995. – N 10. – С. 81–87.
5. *Легенький В.И.* Теоретико-групповой критерий редукции уравнения $G(t,x,\dot{x},\ldots)+\varepsilon F(t,x,\dot{x},\ldots)=0$ к виду $G(\hat{t},\hat{x},\hat{\dot{x}},\ldots)=0$ // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 2. С. 94–102.
6. *Легенький В.И.* П-теорема в проблеме параметрической редукции динамических систем. В кн.: Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики // Зб. праць Інституту математики НАН України. Т. 3, № 2. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. С. 187–196.
7. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

8. *Овсянников Л.В.* О свойстве X-автономии // Докл. РАН. – 1993. – Т. 330, № 5. – С. 559–561.
9. *Павловский Ю.Н., Яковенко Г.Н.* Группы, допускаемые динамическими системами. – В кн.: Методы оптимизации и их приложения. – Новосибирск: Наука, 1982. – С. 155–189.
10. *Павловский Ю.Н.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании // Матем. моделирование. 1991. Т. 3, № 6. С. 93–122.
11. *Рыжиков Ю.И.* Современный Фортран. СПб.: Корона принт, 2004. – 288 с.
12. *Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. – М.: Мир, 1991. – 368 с.
13. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947. – 359 с.
14. *Яковенко Г.Н.* Симметрии уравнений Гамильтона и Лагранжа. – М.: МЗ Пресс, 2006. – 120 с.
15. *Seshadri R., Na T.Y.* Group Invariance in Engineering Boundary Value Problems. – Springer–Verlag New York Inc., 1985. – 224 p.
16. *Sonin A. A.* A Generalization of the Π–Theorem and Dimensional Analysis. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS), Vol. 101. No. 23. (Jun. 8, 2004). P. 8525–8526.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 519.71

Ю.Н. Павловский
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
jpvlsk@redline.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ИХ РЕДУКЦИИ И СИММЕТРИИ[13]

Рассматриваются математические модели процессов, которые являются совокупностью соотношений между его характеристиками. Характеристики разделены на внутренние, значения которых намереваются узнать с помощью модели, и внешние, от которых внутренние характеристики зависят, но обратной зависимости в пределах необходимой точности не имеет места. Модели считаются замкнутыми, что означает возможность определить из соотношений модели внутренние характеристики, если известны внешние. Факт независимости внешних характеристик от внутренних, который называется здесь "гипотезой об инвариантности" или "инвариантностью", лежит в основе многих моделей, а некоторые из них являются просто записью этого факта. Обсуждается положение, состоящее в том, что "инвариантность" связана с симметриями реального мира, причем инвариантами этих симметрий являются внешние характеристики модели.

Соотношения

$$dy^i/dt = f^i(t, y^1, \ldots, y^n, u),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,\ (t, y) \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}, \tag{1}$$

считаются моделью некоторого процесса, в которой $y^1, \ldots, y^n$ — ее внутренние характеристики, u — совокупность внешних характеристик. Это означает, что характеристики y не влияют на u. Природа внешних характеристик нас не будет интересовать.

[13]Работа поддержана РФФИ, грант 07-01-00217.

В частности, это могут быть и управления. Считается, что значения u принадлежат некоторому множеству U, относительно которого не делается никаких предположений. Считается, что правые части (1) определены в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ при любых $u \in U$ и столь гладки, что все дальнейшие рассуждения и операции корректны. Пусть формулы

$$y^i = F^i(t, C^1, ..., C^n, u), i = 1, ..., n \tag{2}$$

дают общее решение системы (1) при каждом фиксированном u из U. Считается, что функции (2) определены в некоторой области $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, при любых $u \in U$ являются достаточно гладкими в ней, при любых (t, C) из E и при любых $u \in U$ имеет место

$$det|\frac{\partial F^i}{\partial C^j}| \neq 0, \tag{3}$$

и соответствующие (t, C) из E в силу (2) значения

$$(t, y) = (t, F(t, C, u))$$

принадлежат D.

Далее области, в которых определены появляющиеся в рассмотрении функции, не будут более конкретизироваться. Будет считаться, что такие области не пусты. Разрешая (2) относительно C, получим n независимых первых интегралов

$$C^i = \Phi^i(t, y^1, ..., y^n, u), i = 1, ..., n \tag{4}$$

системы (1).

Перейдем в (1) к новым переменным $C^1, ..., C^n$ по формулам (4). Система (1) примет вид

$$dC^i/dt = 0, i = 1, ..., n. \tag{5}$$

Совокупность преобразований вида

$$C'^i = C^i + a^i, i = 1, ..., n, t' = t, (t, C) \in E, \tag{6}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

где $a^i, i = 1, ..., n$ — параметры преобразований, является локальной группой L симметрий системы (5) [1]. Локальность преобразований группы (6) состоит в том, что каждому значению параметра $a = (a^1, ..., a^n)$ соответствует, вообще говоря, своя, содержащаяся в E область E_a определения преобразования (6), а также область E'_a значений этого преобразования, так что преобразование $C' = C + a + b$ определено, когда имеет место $a \in E_a, b \in E_b, a + b \in E_{a+b}$. Запишем локальную группу (6) в исходных переменных $t, y^1, ..., y^n$:

$$\Phi^i(t, y', u) = \Phi^i(t, y, u) + a^i, i = 1, ..., n \tag{7}$$

или, разрешая (7) относительно y',

$$y'^i = F^i(t, \Phi^1(t, y, u) + a^1, ..., \Phi^n(t, y, u) + a^n), i = 1, ..., n. \tag{8}$$

Очевидно, что формулы (8) дают локальную n-параметрическую группу автоморфизмов системы (1), поскольку на любом решении системы (1) первые интегралы $(\Phi^1(t, y, u), ..., \Phi^n(t, y, u))$ принимают постоянные значения и преобразования (8) "сдвигают" константы интегрирования, определяющие решение

$$y(t) = (y^1(t), ..., y^n(t)).$$

Далее рассматривается случай, когда существует сохраняющая t невырожденная замена:

$$z^k = I^k(t, y^1, ..., y^n, u), k = 1, ..., m, \tag{9}$$

$$x^l = J^l(t, y^1, ..., y^n, u), l = 1, ..., n - m, \tag{10}$$

где $0 < m < n$, такая, что система (1) в переменных (9), (10) принимает вид

$$dz^k/dt = \varphi^k(t, z^1, ..., z^m, u),\ i = 1, 2, ..., n, \tag{11}$$

$$dx^l/dt = \psi^l(t, z^1, ..., z^m, x^1, ..., x^{n-m}, u),\ l = 1, 2, ..., n - m. \tag{12}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Общее решение системы (11),(12) можно записать в виде

$$z^k = P^k(t, A^1, ..., A^m, u), k = 1, ..., m, \tag{13}$$

$$x^l = S^l(t, A^1, ..., A^m, B^1, ..., B^{n-m}, u), l = 1, ..., n - m. \tag{14}$$

Разрешая (13),(14) относительно $A^1, ..., A^m, B^1, ..., B^{n-m}$, получим первые интегралы системы (11), (12):

$$A^k = G^k(t, z^1, ..., z^m, u), k = 1, ..., m, \tag{15}$$

$$B^l = H^l(t, z^1, ..., z^m, x^1, ..., x^{n-m}, u), l = 1, 2, ..., n - m. \tag{16}$$

В координатах (15), (16) система (11), (12) имеет вид

$$dA^k/dt = 0, k = 1, ..., m, \tag{17}$$

$$dB^l/dt = 0, l = 1, 2, ..., n - m. \tag{18}$$

Локальная n-параметрическая группа симметрий системы (17), (18) имеет вид

$$A'^k = A^k + a^k, k = 1, ..., m, \tag{19}$$

$$B'^l = B^l + b^l, l = 1, 2, ..., n - m. \tag{20}$$

Группа (19), (20) в переменных $(t, z^1, ..., z^m, x^1, ..., x^{n-m})$ имеет вид

$$G^k(t, z'^1, ..., z'^m, u) = G^k(t, z^1, ..., z^m, u) + a^k, \quad k = 1, ..., m, \tag{21}$$

$$S^l(t, z'^1, ..., z'^m, x'^1, ..., x'^{n-m}, u) =$$

$$= S^l(t, z^1, ..., z^m, x^1, ..., x^{n-m}, u) + b^l, \quad l = 1, 2, ..., n - m. \tag{22}$$

Разрешая (21), (22) относительно $z'^1, ..., z'^m, x'^1, ..., x'^{n-m}$, получим следующую запись группы (19), (20):

$$\begin{gathered} z'^k = P^k(t, G^1(t, z, u) + a^1, ..., G^m(t, z, u) + a^m), \quad k = 1, ..., m, \\ x'^l = S^l(t, G^1(t, z, u) + a^1, ..., G^m(t, z, u) + a^m, \end{gathered} \tag{23}$$

$$H^1(t,z,x,u)+b^1,...,H^{n-m}(t,z,x,u)+b^{n-m}l=1,...,n-m. \quad (24)$$

Если подставить в (23), (24) вместо z и x их выражения через y по формулам (9), (10), то получим группу симметрий исходной системы (1). Эту группу обозначим через Г. Через $\widetilde{\Gamma}$ обозначим подгруппу группы Г, которая соответствует нулевым значениям параметров $a^k, k = 1,...,m$. Из (23) следует, что полным набором независимых инвариантов подгруппы $\widetilde{\Gamma}$ в координатах $t, z^1,...,z^m, x^1,...,x^{n-m}$ являются функции $z^k, k = 1,...,m.$, поскольку из (23) при $a^k = 0,\ k = 1,...,m$ следует $z'^k = z^k,\ k = 1,...,m$. Значит, в переменных $t, y^1,...,y^n$ полным набором инвариантов группы $\widetilde{\Gamma}$ будут функции (9):

$$z^k = I^k(t, y^1,...,y^n, u), k = 1,...,m.$$

Итак, если система (1) заменой (9), (10) приводится к виду (11), (12), то в группе симметрий системы (1) имеется подгруппа, инвариантами которой являются функции (9).

Обратное утверждение имеет место в следующей форме. Если у системы (1) имеется непрерывная группа Ли Г сохраняющих t симметрий, полный набор независимых инвариантов которой дается формулами (9), то некоторой заменой переменных вида (9), (10) система (1) приводится к виду (11), (12) [2]. Для этого к (9) нужно добавить гладкие функции (10) так, чтобы замена (9), (10) была невырождена, что всегда возможно. В самом деле, пусть

$$X_\alpha = \theta^i_\alpha(t,y,u)\frac{\partial}{\partial y^i},\ \alpha = 1,...,A, \quad (25)$$

оператор группы Г. Поскольку операторы (25) по условию допускаются системой (1), то имеет место

$$(X_0, X_\alpha) = 0,\ \alpha = 1,...,A, \quad (26)$$

где X_0 — оператор, ассоциированный с системой (1):

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + f^i(t,y,u)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Отсюда вытекает, что $X_\alpha(X_0(I^k)) = 0$. Значит переход в (1) к переменным, полученным добавлением к инвариантам (9) произвольным образом функций (10), так только, чтобы замена (9), (10) была невырождена, приведет систему (1) к виду (11), (12).

Представим себе следующую ситуацию. Пусть необходимо составить модель, с помощью которой можно было бы прогнозировать изменение со временем значений характеристики x^1, фигурирующей в системе (12). При этом модель (1) неизвестна, в связи с чем эта модель будет именоваться 'природой' или "надмоделью". В этих условиях для составления нужной модели необходимо обнаружить, что на характеристику x^1 оказывают влияние характеристики $x^1, ..., x^{n-m}$ реального мира, а также его характеристики $z^1, ..., z^m$. При этом характеристики $x^1, ..., x^{n-m}$ образуют систему взаимно влияющих друг на друга характеристик. В то же время характеристики $x^1, ..., x^{n-m}$ на $z^1, ..., z^m$ не влияют, т.е. характеристики $z^1, ..., z^m$ должны быть внешними в составляемой модели. Далее нужно определить каким-то образом функции $\psi^l(t, z^1, ..., z^m, x^1, ..., x^{n-m})$, $l = 1, 2, ..., n-m$, дающие значения скоростей изменения характеристик $x^1, ..., x^{n-m}$.

Тот факт, что модель (12) взаимно однозначно связана с группой симметрий модели (1), инвариантами которой являются характеристики $z^1, ..., z^m$, можно сформулировать в следующей форме: в основе факта существования модели (12) лежит некоторая симметрия "природы", инвариантами которой являются фигурирующие в ней внешние характеристики. Автор выдвигает гипотезу, состоящую в том, что высказанное утверждение относится не только к моделям, являющимся системами дифференциальных уравнений, но и ко всем моделям реальных процессов, относящихся к тому их классу, который был описан в начале статьи. Напомним, что речь шла о замкнутых моделях процессов, в основе которых лежит гипотеза об инвариантности.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

При всяком фиксированном значении u существует замена переменных (9), (10), приводящая систему (1) к виду (11), (12). При этом правые части системы (11), (12) можно задать "практически" произвольно. При заданной системе (1) и заданных правых частях системы (11), (12) замена (9), (10) определяется с некоторым не очень существенным произволом. С другой стороны, при заданных функциях (10) не обязательно существуют функции (9), приводящие (1) к виду (11), (12), так что составление модели, с помощью которой можно получить прогноз характеристик $x^1, ..., x^{n-m}$, вообще говоря, приводит к системе, эквивалентной системе (1). В этом случае внешними характеристиками в составленной модели будут u. Если высказанная выше гипотеза верна, то наличие в модели (1) внешних характеристик u определяется симметриями "природы", но уже по отношению к модели (1). Таким образом, в "природе" имеет место некоторая иерархия симметрий, которую должны отражать имеющиеся в нашем распоряжении модели.

Соотношения (11), (12) можно трактовать как декомпозицию модели (1) [3–5]. Система (11) в этой декомпозиции является фактор-объектом [3], система (12) — совокупностью подобъектов, параметризованную решениями фактор-объекта. Переход от исходного объекта к его подобъекту или фактор-объекту в [4] предложено называть "редукцией" исходного объекта. В [5] понятие о редукции сформулировано в рамках бурбаковского формализма: P-редукция есть подобъект объекта, F-редукция есть его F-объект, PF-редукция есть F-объект P-объекта, FP-редукция есть P-объект F-объекта и так далее.

Возвратимся к проблеме составления модели, с помощью которой можно дать прогноз изменения со временем характеристики x^1. Для этого достаточно воспользоваться моделью (12). Нужно только знать фигурирующие в ней внешние характеристики, в частности, характеристики $z^1, ..., z^m$. При известных $z^1, ..., z^m$ модель (12) является подобъектом модели (1) или ее P-редукцией. Не исключено, что система (12) при заданных функциях $z^1(t), ..., z^m(t)$ в свою очередь допускает декомпозицию. Если среди характеристик фактор-объекта, участвующего в этой декомпозиции присутствует характеристика x^1, то модель, с помощью которой прогнозируется ее изменение, еще более упрощается. Эта последняя модель является PF-декомпозицией модели (1). Если представить себе, что сама модель (1) является F-объектом по отношению к некоторой "надмодели", то модель для прогноза характеристики x^1 становится FPF-редукцией этой "надмодели".

Из всех выполненных построений и рассуждений делается вывод, носящий методологический и, конечно, интуитивный характер: имеющиеся в нашем распоряжении математические модели являются редукциями по отношению к некоторой "надмодели" и основаны на иерархии симметрий, имеющих место в природе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.— 399 с.
2. *Яковенко Г.Н.* Групповые свойства динамических систем. М.: МФТИ, — 1994. — 108 с.
3. *Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М.: Фазис, 1998. — 272 с.
4. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997. — 317 с.
5. *Павловский Ю.Н.* Редукции и декомпозиции математических моделей и объектов. ДАН, 2008.— Т. 418, № 5. — С.592—595.
6. *Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г.* Введение в геометрическую теорию декомпозиции. М.: Фазис, 2006.— 169 с.
7. *Elkin V.I., Pavlovsky J.N.* Decomposition of models of control processes. Journal of Mathematical science. 1998. — Vol. 88.— No. 5.— P. 723—761.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 519.71

Ю.Н. Павловский
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
jpvlsk@redline.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕКОМПОЗИЦИИ И СИММЕТРИЙНОЕ СВОЙСТВО СЕМЕЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ[14]

На конспективном уровне излагается геометрическая теория декомпозиции. Симметрийным свойством семейств отображений называется факт, состоящий в том, что с каждой подгруппой группы их автоморфизмов ассоциируется их факторизация, а с каждой факторизацией — их декомпозиция на дизъюнктивную сумму. Отмечается связь симметрийного свойства с групповым анализом дифференциальных уравнений, а также с проблемами управляемости, наблюдаемости, реализации, инвариантности динамических систем с управлениями.

1. Поскольку симметрийное свойство семейств отображений формулируется с помощью понятия "декомпозиция на дизъюнктивную сумму", в разделах 1–7 предпринимается попытка дать представление о языковой среде [1–14], в которой возникает это понятие. В рамках этой среды реализуется следующий подход к проблеме декомпозиции математических объектов и моделей: объект, модель загружается в класс в некотором смысле "родственных" объектов, где определено понятие об изоморфизме и его декомпозицией считается его сохраняющееся при изоморфизмах "представление" с помощью семейства в некотором смысле более "простых" объектов из данного класса, причем по этому "представлению" исходный объект должен восстанавливаться однозначно. Ниже будут даны точные экви-

[14]Работа поддержана РФФИ, грант 07-01-00217.

валенты тому, что здесь сказано.

Эта среда, которая будет называться геометрической теорией декомпозиции, возникла из практических потребностей. В отделе Имитационные системы ВЦ РАН, который возглавляет автор, ведутся работы по продвижению средств математического имитационного компьютерного моделирования в новые сложные области исследований и практической деятельности. Одним из главных направлений работы является составление моделей сложных управляемых систем, главным образом организационно-технических и социально-экономических, по заказам ведомств, организаций. И не только составление моделей, но и их компьютерная реализация в форме имитационных систем и внедрение технологии имитационного компьютерного моделирования в практику деятельности соответствующих организаций. Приведем некоторые примеры моделей и соответствующих имитационных систем: имитация экономической динамики древнегреческих полисов (с целью понять причины Пелопоннесской войны в 431–404 г.д.н.э. [15]), имитация процессов проектирования, производства, эксплуатации сложных технических систем (с целью согласования различных сторон этих процессов) [16], имитация функционирования противоракетной обороны, основанной на технологии “бриллиантовых камней” (с целью изучения ее возможностей) [17] и т.д. Модели реальных процессов и соответствующие имитационные системы получаются сложными. В связи с этим возникло желание ориентироваться в вопросе о том, когда модель сложного процессса можно “представить” эквивалентно (изоморфно) с помощью семейства более простых моделей. Ниже характеризуется простое “ядро” геометрической теории декомпозиции: некоторые важные обобщения выходят за рамки статьи.

2. **В качестве инструментального средства** при разработке геометрической теории декомпозиции использовался **бурбаковский формализм** [18], поскольку в нем имеются удобные средства для формализации понятий, которые выше

использовались для описания подхода к проблеме декомпозиции.

В частности, “класс родственных объектов” формализуется с помощью понятия **род структуры**. Род структуры в бурбаковском формализме с содержательной точки зрения описывает “устройство” математического объекта (модели), трактуемого по Н. Бурбаки как множество, снабженное “структурой”. С формальной точки зрения род структуры является записью в том смысле, в котором это понятие определяется, например, в языке программирования Паскаль.

Ниже написан взятый в ломаные скобки род структуры, обозначенный Σ. Поля записи Σ разделены точкой с запятой, необязательные, как это принято, взяты в квадратные скобки:

$$\Sigma =< X;\ [(A,\omega)]; \sigma \subset (X,A); [R(X,\sigma,A,\omega)] > .$$

Поясним синтаксис и семантику полей рода структуры Σ. Первое поле X называется базисным множеством. Синтаксически X — буква или несколько букв, разделенных запятыми. Для простоты далее будет считаться, что базисное множество одно. Второе необязательное поле — вспомогательный бурбаковский математический объект. Что такое бурбаковский математический объект, будет определено ниже с помощью понятия “род структуры”. Здесь имеет место обычная рекурсия. Вспомогательных объектов может быть несколько, тогда они разделяются запятыми. Третье поле называется соотношением типизации. Их тоже может быть несколько, тогда они разделяются запятыми. Слева в соотношении типизации стоит буква, которая и есть структура, которой снабжается X. Справа стоит множество, построенное по схеме S из основного и вспомогательного с помощью двух операций: взятия множества частей и прямого произведения. Поясним, что такое схема. Схемой базисного множества X считается число 1, схемой множества A, фигурирующего во вспомогательном объекте, считается число 2, схемой булеана $\beta(X)$ является знакосочетание $\beta(1)$, схемой прямого произведения $X \times A$ является знакосочетание 1×2 и т.д.. Для иллюстрации этих поясненний в приведенном ниже списке выписаны множества, построенные из базисного и вспомогательного с помощью операций взятия множества частей и прямого произведения, а над этими множествами написаны их схемы.

$$\overset{1}{X}, \quad \overset{2}{A}, \quad \overset{\beta(1)}{\beta(X)}, \quad \overset{1\times 2}{X \times A}, \qquad \overset{\beta(1\times 2)}{\beta(X \times A)}\ .$$

Пусть имеется множество X' и отображение $f : X \to X'$. Пусть имеется схема S и множество $S(X, A)$, построенное по этой схеме, а также множество $S(X', A)$, построенное по той же схеме. Отображение $f : X \to X'$ и тождественное отображение $id_A : A \to A$ множества A в себя всегда можно распространить по схеме S до отображения $S(f, id_A) : S(X, A) \to S(X', A)$. Ниже приводится иллюстрация сказанного:

$$\begin{array}{cccccc} & X & & A & & S(X,A) \\ f & \downarrow & id_A & \downarrow & S(f, id_A) & \downarrow \\ & X' & & A & & S(X',A) \end{array}$$

Для того чтобы определить все такие распространения, достаточно определить распространение отображений

$$f_1 : X_1 \to X_1' \quad f_2 : X_2 \to X_2'$$

на прямое произведение

$$f_1 \times f_2 : X \times X_2 \to X_1' \times X_2'.$$

Оно дается формулой $f_1 \times f_2(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Нужно также определить распространение $\beta(f) : \beta(X) \to \beta(X')$ отображения $f : X \to X'$ на множество частей. Оно дается формулой $\beta(f)(U) = f(U)$.

Последнее поле рода структуры является соотношением, называемым аксиомой этого рода структуры, предъявлющим к структуре σ некоторые требования. Аксиома $A(X, \mathbb{A}, \sigma)$ рода структуры должна быть биективно переносима:

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

$(f : X \to X'$ — биекция$) \Rightarrow (A(X, \mathbb{A}, \sigma) \Leftrightarrow A(X', \mathbb{A}, \sigma'))$, где $\sigma' = S(f, id_A)(\sigma)$.

Примеры родов структур:

$< X; \sigma \subset X \times X >$ — род структуры бинарного отношения (ориентированного графа).

$< X; \sigma \subset X \times X; (\forall x \in X)(\exists! x' \in X)((x, x') \in \sigma) >$ — род структуры отображения множества в себя.

$< X; \sigma \subset X \times X;$ σ рефлексивно, симметрично, транзитивно$>$ — род структуры отношения эквивалентности.

$< X; \sigma \subset X \times X;$ σ рефлексивно, антисимметрично, транзитивно$>$ — род структуры частичного порядка.

$< X, Y; \sigma \subset X \times Y; (\forall x \in X)(\exists! y \in Y)((x, y \in \sigma) >$ — род структуры отображения множеств.

$< X; \sigma \subset X \times X \times X;$ σ задает на X всюду определенную алгебраическую операцию, с нейтральным элементом, относительно которой каждый элемент обратим$>$ — род структуры абстрактной группы.

Отметим также род структуры действия на множестве X абстрактной группы (G, ω), трактуемой как вспомогательное множество,

$< X; (\mathbb{G}, \omega); \sigma \subset \mathbb{G} \times X \times X; A(X, \sigma, \mathbb{G}, \omega) >$,

род структуры линейного векторного пространства над полем $(\mathbb{C}, \lambda, \mu)$, комплексных чисел,

$< X; (\mathbb{C}, \lambda, \mu); \sigma \subset X \times X \times X \wedge \omega \subset \mathbb{C} \times X \times X; A(X, \sigma, \mathbb{C}, \lambda, \mu) >$

род струкуры линейного оператора в линейном векторном пространстве над полем комплексных чисел.

$< X; (\mathbb{C}, \lambda, \mu); \sigma \subset X \times X \times X \wedge \omega \subset \mathbb{C} \times X \times X; \wedge \omega \subset$ $\subset X \times X; A(X, \sigma, \omega, \mathbb{C}, \lambda, \mu) >$.

Известные аксиомы этих родов структуры вследствие их громоздкости не выписываются.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

3. Математический объект — это экземпляр записи рода структуры Σ. Именно, пусть имеется пара (E, τ) множеств и для них выполняется соотношение $\tau \subset S(E, \mathbb{A})$ типизации рода структуры Σ и ее аксиома $A(E, \mathbb{A}, \tau)$. Тогда пара (E, τ) называется Σ-объектом, или про нее говорят, что множество E снабжено структурой τ рода Σ, или, что τ есть структура рода Σ на множестве E.

С каждым родом структуры, таким образом, ассоциируется класс Σ-объектов. В этом классе единым образом для всех родов структур определяется понятие об изоморфизме: биекция $f : E \to E'$ называется изоморфизмом Σ-объекта (E, τ) в Σ-объект (E', τ'), если имеет место $\tau' = S(f, id_{\mathbb{A}})(\tau)$, где $S(f, id_{\mathbb{A}}) : S(E, \mathbb{A}) \to S(E', \mathbb{A})$ — распространение отображения $f : E \to E'$ и тождественного отображения множества A по схеме S.

С каждым Σ-объектом ассоциируется множество $Aut(E, \tau)$ его автоморфизмов. Оно снабжается структурой $GA(E, \tau)$ рода абстрактной группы, продуцируя тем самым абстрактную группу

$$(Aut(E, \tau), GA(E, \tau),$$

а множество E снабжается структурой $TA(E, \tau))$ действия этой группе на нем. Тем самым продуцируется группа преобразований

$$(E, Aut(E, \tau), GA(E, \tau), TA(E, \tau)),$$

которая называется группой симметрий объекта (E, τ).

4. Для того чтобы воспользоваться средствами геометрической теории декомпозиции, необходимо в классе Σ-объектов ввести бурбаковские морфизмы, т.е. с каждой парой $((E, \tau),(E', \tau'))$ сопоставить множество $M(E, \tau, E', \tau')$ отображений из E в E', называемых морфизмами так, чтобы суперпозиция морфизмов была морфизмом и биекция тогда и только тогда была изоморфизмом, когда она и обратная к ней — морфизмы.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Все конструкции геометрической теории декомпозиции вводятся с помощью морфизмов. Возникающая среда родственна среде теории категорий [19], но не сводится к ней. Соотношение между теорией категорий и геометрической теорией декомпозиции изучалось, но изложение результатов этого изучения выходит за рамки статьи. Скажем лишь, что теория категорий тривиальным образом доступна из геометрической теории декомпозиции, поскольку класс Σ-объектов с бурбаковскими морфизмами удовлетворяет аксиомам теории категорий. В геометрической теории декомпозиции теория категорий совершенно не используется.

5. Характеризуемая языковая среда основана только на двух двойственных друг другу понятиях: понятиях о **P-декомпозиции и F-декомпозиции**.

Определение. *Пусть* (E,τ) — Σ*-объект. Семейство*

$$((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I},$$

где (E_i,τ_i) — Σ*-объекты,* $f_i : E_i \to E$ *морфизмы, называется P-декомпозицией объекта* (E,τ)*, реализуемой семейством* $((E_i,\tau_i))_{i\in I}$*, посредством морфизмов* $(f_i)_{i\in I}$*, если для всякого* Σ*-объекта* (E',τ') *и всякого отображения* $g : E \to E'$ *имеет место:* $(\forall\, i)(g\circ f_i)$ *– морфизмы* $\Rightarrow g$ *– морфизм. Декомпозиция называется конечной, если множество* I *конечно, тривиальной, если в семействе* $(f_i)_{i\in I}$ *имеется изоморфизм. Двойственным образом определяется F-декомпозиция* Σ*-объекта* (E,τ).

Ниже приводится схема, поясняющая определение P- и F-декомпозиций.

$$(E_i,\tau_i)_{i\in I}\xrightarrow{f_i}(E,\tau)\xrightarrow{g}(E',\tau')|(E',\tau')\xrightarrow{g}(E,\tau)\xrightarrow{f_i}(E_i,\tau_i)_{i\in I}.$$

Из приведенных определений сразу следует, что, если Σ-объект (E,τ) обладает декомпозицией (если вид — P или F, декомпозиции не указывается, то формулируемое утверждение или вводимая конструкция относятся к обоим видам декомпозиции), то всякий изоморфный объект обладает декомпозици-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

ей, реализуемой тем же семейством, а морфизмы нужно умножить на изоморфизм, справа или слева — в зависимости от того, о P- или F-декомпозиции идет речь. Кроме того, столь же тривиальным является то, что по своей декомпозиции Σ-объект (E, τ) восстанавливается единственным образом: существует не более одной структуры на множестве E, для которой заданное семейство $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$ является его декомпозицией.

Определение. *Пусть* (E, τ) *— Σ-объект,* $(\prod_{i\in I}^d E_i, \tau^d)$ *— декартово произведение семейства множеств* $(E_i)_{i\in I}$*,*

$$pr_i : \prod\nolimits_{i\in I}^d E_i \to E_i$$

— канонические проекции. Σ-объект $(\prod_{i\in I}^d E_i, \tau^d)$ *называется декартовым произведением семейства* $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$ *Σ-объектов, если семейство* $((E_i, \tau_i), pr_i)_{(i\in I)}$ *является F-декомпозицией для* $(\prod_{i\in I}^d E_i, \tau^d)$*. Двойственным образом определяется дизъюнктивная сумма семейства* $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$*.*

Ниже приводится схема, поясняющая сформулированные определения:

$$(E', \tau') \xrightarrow{g} (\prod\nolimits_{i\in I}^d E_i, \tau^d) \xrightarrow{pr_i} (E_i, \tau_i) | (E_i, \tau_i) \xrightarrow{j_i}$$

$$\xrightarrow{j_i} (\sum\nolimits_{i\in I}^c E_i, \tau^c) \xrightarrow{g} (E', \tau').$$

Напомним, что дизъюнктивная сумма $\sum_{i\in I}^c E_i$ семейства множеств $(E_i)_{i\in I}$ есть $\bigcup_{i\in I} E_i \times \{i\}$.

Определение. *Пусть* (E, τ) *— Σ-объект,* $\widetilde{E}$ *— подмножество множества* E*,* $\omega : \widetilde{E} \to E$ *— каноническая инъекция. Σ-объект* $(\widetilde{E}, \widetilde{\tau})$ *называется P-объектом Σ-объекта* (E, τ)*, если семейство* $((E, \tau), \omega))$ *является F-декомпозицией для* $(\widetilde{E}, \widetilde{\tau})$*. Двойственным образом определяется F-объект объекта* (E, τ)*. (Вместо подмножества множества* E *в двойственном определении фигурирует его фактор-множество по некоторому*

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

отношению Q, вместо канонической инъекции — каноническая проекция π.)

Приводимая ниже схема поясняет сформулированное определение:

$$(\widetilde{E}, \widetilde{\tau}) \ \xrightarrow{\omega} \ (E, \tau) \ \ | \ \ (E, \tau) \ \xrightarrow{\pi} \ (E_Q, \tau_Q).$$

С каждым Σ-объектом ассоциируется класс P-декомпозиций и класс F-декомпозиций. На этих классах можно ввести три 'стандартных' отношения. Здесь будут упомянуты два.

Определение. *Пусть $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$ и $((E'_i, \tau'_i), f'_i)_{i \in I}$ — две P-декомпозиции Σ-объекта (E, τ) с одним и тем же множеством индексов. Если существует семейство отображений $(h_i)_{i \in I}$, такое, что имеет место $f_i = f'_i \circ h_i$, то декомпозиция $((E'_i, \tau'_i), f'_i)_{i \in I}$ называется более близкой к объекту (E, τ), чем декомпозиция $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$. Двойственным образом определяется отношение "более близкая на классе" F-декомпозиций Σ-объекта (E, τ).*

Ниже приводится схема, поясняющее это определение:

$$(E_i,\tau_i) \xrightarrow{h_i} (E'_i,\tau'_i) \xrightarrow{f'_i} (E,\tau) | (E,\tau) \xrightarrow{f'_i} (E'_i,\tau'_i) \xrightarrow{h_i} (E_i,\tau_i).$$

Определение. *Пусть $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$ и $((E_j, \tau_j), f_j)_{j \in J}$ — две P-декомпозиции Σ-объекта (E, τ), причем $J \subset I$. Тогда декомпозиция $((E_j, \tau_j), f_j)_{j \in J}$ Σ-объекта (E, τ) называется более простой, чем декомпозиция $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$.*

Определение. *Σ-объект (E, τ) называется **P-компактным**, если для всякой его P-декомпозиции существует более простая конечная P-декомпозиция. Σ-объект (E, τ) называется **F-компактным**, если для всякой его F-декомпозиции существует более простая конечная F-декомпозиция.*

Компактность топологического пространства относительно непрерывных морфизмов есть его P-компактность.

Пусть $f : (E, \tau) \to (E', \tau')$ — морфизм из Σ-объекта (E, τ) в Σ-объект (E', τ'). Как отображение, морфизм f каноническим

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

образом разлагается на суперпозицию проекции, биекции, инъекции: $f = \omega \circ b \circ \pi$. Если на фактор-множестве E_Q множества E по ассоциированному с f отношению эквивалентности Q существует F-объект объекта (E, τ), на множестве $f(E)$ существует P-объект объекта (E', τ'), то биекция b обязательно является морфизмом, но не обязательно — изоморфизмом. Если b является морфизмом, то морфизм f называется PF-морфизмом, если b — изоморфизм, то f называется HPF-морфизмом. Если все морфизмы являются PF-морфизмами, то род структуры относительно этих морфизмов называется PF-родом структуры, если все морфизмы являются HPF-морфизмами, то род структуры относительно этих морфизмов называется HPF-родом структуры. Ниже приводится поясняющая ситуацию схема:

$$(E,\,\tau) \xrightarrow{\pi} (E_Q, \tau_Q) \xrightarrow{b} (f(E),\,\widetilde{\tau}') \xrightarrow{\omega} (E',\,\tau').$$

В PF- , а значит, и в HPF-родах структур, с каждой P-декомпозицией ассоциируется более близкая к объекту декомпозиция, реализуемая его P-объектами, посредством канонических инъекций. Аналогично, в PF- , а значит, и в HPF-родах структур, с каждой F-декомпозицией ассоциируется более близкая к объекту декомпозиция, реализуемая его F-объектами, посредством канонических проекций. Поэтому в этих родах структур свойство объектов иметь декомпозиции исчерпывающим образом описывается множеством его P-объектов и множеством его F-объектов.

6. Существуют “естественные” способы ввести морфизмы в класс Σ-объектов [11], а среди них — естественный канонический.

Определение. *Отображение* $f : (E, \tau) \to (E', \tau')$ *Σ-объекта* (E, τ) *в Σ-объект* (E', τ') *называется естественным каноническим морфизмом (ЕКМ), если имеет место* $S(f, id_A)(\tau) \subset \tau'$.

Примеры ЕКМ

1. Для отображений $f : X \to Y \;\; f' :' X \to Y'$ ЕКМ есть пара отображений $m_X : X \to X', \quad m_Y : Y \to Y'$, таких, что

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

$m_Y \circ f = f' \circ m_X$.

2. Для упорядоченных множеств ЕКМ — монотонные отображения.

3. Для алгебраических объектов ЕКМ — гомоморфизмы.

4. Для топологических пространств ЕКМ зависит от аксиом, которыми задается топология. Если топология задается указанием открытых множеств, то ЕКМ — открытые отображения. Если топология задается указанием замкнутых множеств, то ЕКМ — замкнутые отображения. Если топология задается указанием пар (подмножество, его точка прикосновения), то ЕКМ — непрерывные отображения. И так далее.

5. Для линейных векторных пространств ЕКМ — линейные отображения.

6. Для групп преобразований ЕКМ — эквивариантные отображения.

7. Для дифференцируемых многообразий ЕКМ — гладкие отображения отображения.

Все известные автору роды структур относительно ЕКМ являются или PF- или HPF-родами структур. То, что в теориях конкретных объектов именуется подобъектами суть P-объекты относительно ЕКМ, соответственно фактор-объекты суть F-объекты относительно ЕКМ.

Далее рассматриваются роды структур с естественными каноническими морфизмами, являющиеся PF- или HPF-родами структур. В таких родах структур способность объекта (E, τ) иметь декомпозиции исчерпывающим образом описывается множеством $P(E, \tau)$ подобъектов, множеством $F(E, \tau)$ фактор-объектов, множеством $PD(E, \tau)$ P-декомпозиций, реализуемых подобъектами, множеством $FD(E, \tau)$ F-декомпозиций, реализуемых фактор-объектами. Эти множества естественным образом снабжаются структурами, соответственно

$$V(E, \tau), W(E, \tau), SPD(E, \tau), SFD(E, \tau),$$

частичного порядка. Эти множества, снабженные указанными структурами, называются декомпозиционными структурами объекта.

Пусть $(\widetilde{E}_i,\widetilde{\tau}_i)_{i\in I}$ — P-декомпозиция для (E,τ) (сейчас уже нет смысла упоминать про канонические инъекции, посредством которых реализуется P-декомпозиция), такая, что семейство $(\widetilde{E}_i)_{i\in I}$ является классами эквивалентности по некоторому отношению эквивалентности Q. Если рассматриваемый род структуры является родом с дизъюнктивной суммой, то объект (E,τ) изоморфен дизъюнктивной сумме семейства

$$\widetilde{E}_i,\widetilde{\tau}i)_{i\in I}$$

своих подобъектов. В этом случае декомпозиция $(\widetilde{E}_i,\widetilde{\tau}i)_{i\in I}$ называется декомпозицией на дизъюнктивную сумму, а отношение Q — CC-декомпозирующим. Тем самым появляется множество $CC(E,\tau)$ декомпозиций на дизъюнктивную сумму, которое снабжается структурой $CV(E,\tau)$ частичного порядка по включению CC-декомпозирующих отношений. Двойственной конструцией для декомпозиции на дизъюнктивную сумму является декомпозиция на декартово произведение. Множество таковых обозначается $DP(E,\tau)$. Оно снабжается структурой $CW(E,\tau)$ частичного порядка. Возникшие объекты

$$(CC(E,\tau),CV(E,\tau)),\quad (DP(E,\tau),CW(E,\tau))$$

также называются декомпозиционными структурами.

В характеризуемой среде возникают по крайней мере 6 типов “простоты” объекта (E,τ): P-простота, F-простота, PD-простота, FD-простота, CC-простота, DP-простота — когда соответствующие декомпозиционные структуры состоят из единственного элемента (они не пусты, поскольку объект (E,τ) является посредством тождественного отображения своими тривиальными подобъектом, фактор-объектом, P-декомпозицией, F-декомпозицией, декомпозицией на дизъюнктивную сумму и декомпозицией на декартово произведение).

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Часть содержания теорий конкретных математических объектов трактуется как изучение их декомпозиций и, в частности, декомпозиционных структур относительно ЕКМ. Для подтверждения этого утверждения переведем на язык геометрической теории декомпозиции некоторые хорошо известные понятия.

Открытому покрытию топологического пространства соответствует P-декомпозиция этого пространства на подобъекты относительно как непрерывных, так и открытых морфизмов, индуцируемых исходным пространством на множествах покрытия. **Компактность** топологического пространства — свойство его декомпозиционной PD-структуры. **Биективная циклическая подстановка конечного множества** ⇔ P-простое отображение в себя. **Простая группа, простая алгебра** ⇔ F-простые объекты. **Простое поле** ⇔ P-простой объект. **Любое поле** — F-простой объект. **Любая абстрактная группа** — CC-простой объект. **Связное топологическое пространство** ⇔ CC-простой объект. **Связный граф** ⇔ CC-простой объект. **Транзитивная группа преобразований** ⇔ P-простой объект. **Примитивная группа преобразований** ⇔ F-простой объект. **Нильпотентный оператора A в ЛВП** ⇔ CC-простой объект, если трактовать его как отображение в себя абстрактного множества. Семейство транзитивных групп преобразований, генерируемых группой преобразований на классах эквивалентности по ассоциированному с ней отношению эквивалентности — **максимальная CC-декомпозиция** этой группы преобразований на CC-простые подобъекты. Жорданово представление линейного оператора **A** в конечномерном ЛВП над $\mathbb{C}$ — **максимальная DP-декомпозиция A** на декартово произведение DP-простых факторобъектов. Нетривиализуемое расслоение дифференцируемого многообразия — такая **P-декомпозиция DP-простого объекта, каждый элемент которой не является DP-простым.**

7. Для произвольных отображений, их семейств, для отображений в себя, их семейств (в частности, для групп преоб-

разований) имеет место следующий факт, который далее будет именоваться "симметрийным" свойством этих объектов. С каждой подгруппой группы симметрий объекта, соответствующей некоторой подгруппе группы автоморфизмов объекта, трактуемой как абстрактная группа, ассоциируется факторизация этого объекта, а с каждой факторизацией — его декомпозиция на дизъюнктивную сумму. Ниже приведена схема, иллюстрирующая симметрийное свойство указанных объектов:

$$P(Aut(E,\tau), GA(E,\tau)) \overset{PAS}{\rightarrow} (E, Aut(E,\tau), GA(E,\tau), TA(E,\tau)),$$
$$P(E, Aut(E,\tau), GA(E,\tau), TA(E,\tau)) \overset{PSF}{\rightarrow} F(E,\tau) \overset{FCC}{\rightarrow} CC(E,\tau).$$

Поскольку множество решений произвольной системы дифференциальных уравнений можно трактовать как семейство отображений, то симметрийное свойство можно сформулировать в терминах диференциальных уравнений, где оно соответствует некоторым конструкциям и утверждениям группового анализа дифференциальных уравнений [20]. В частности, пусть система обыкновенных уравнений

$$dy^i/dt = f^i(t, y^1, ..., y^n),\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n,$$

сохраняющим t диффеоморфизмом

$$z = \Phi(t,y) \quad x = \Psi(t,y)$$

приводится к виду

$$dz^k/dt = \phi^k(t, z^1, ..., z^m),\ k = 1,\ ...,\ m,$$
$$dx^l/dt = \psi^l(t, z^1, ..., z^m, x^1, ..., x^{n-m}),\ l = 1, ..., n-m.$$

Тогда первая система в этом представлении есть фактор-объект исходной системы относительно ЕКМ, которые в данном случае есть гладкие отображения фазовых пространств, переводящие решения в решения. Если любое решение фактор-объекта подставить во вторую систему, то получится подобъект исходной системы, а вся совокупность полученных таким образом подобъектов является декомпозицией исходной системы на дизъюнктивную сумму. Указанная декомпозиция исходной системы является иллюстрацией симметрийного свойства. Этой декомпозиции ссоответствует подгруппа группы автоморфизмов исходной системы.

8. Система

$$dy^i/dt = f^i(t, y^1, \ldots, y^n, u, v),\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

$$(t, y) \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}; u \in U \subset \mathbb{R}^r; v \in V \subset \mathbb{R}^s,$$

трактуется как модель управляемого процесса.

С (1) сопоставляется семейство систем дифференциальных уравнений, возникающих, когда u и v в (1) пробегают соответственно U и V.

Пусть диффеоморфизмом

$$z = \Phi(t, y) \quad x = \Psi(t, y) \tag{2}$$

система (1) приводится к виду

$$dz^k/dt = \phi^k(t, z^1, \ldots, z^m, u),\ k = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$dx^l/dt = \psi^l(t, z^1, \ldots, z^m, x^1, \ldots, x^{n-m}, u, v),\ l = 1, \ldots, n-m. \tag{4}$$

С представлением (3), (4) системы (1) связана ее декомпозиция на дизъюнктивную сумму подобъектов, возникающих при подстановке в (4) решений фактор-объекта (3). Это представление является иллюстрацией симметрийного свойства исходной системы: ему соответствует подгруппа группы автоморфизмов системы (1). С декомпозицией (3), (4) управляемой системы (1) ассоциируются следующие классические проблемы теории управления.

А. Управляемость. Если фактор-объект (3) системы (1) не содержит управлений:

$$dz^k/dt = \phi^k(t, z^1, \ldots, z^m),\ k = 1, \ldots, m,$$

то исходная система (1) неуправляема, поскольку у нее имеются первые интегралы, независящие от управлений [21].

Б. Наблюдаемость. Если при функционировании системы (1) наблюдаются характеристики $z = I(t, y)$, фигурирующие в фактор-объекте, то исходная система, очевидно, ненаблюдаема [21,28].

В. Реализация. Фактор-объект является решением задачи реализации для (1) относительно выходов $z = I(t, y)$ [21,28].

Г. Инвариантность. Очевидно, что наличие декомпозиции (3), (4) системы (1) означает, что управлениями v, фигурирующими в (4), нельзя повлиять на характеристики $z = I(t, y)$. Такая ситуация называется в теории управления "инвариантностью". Это свойство управляемых процессов было обнаружено экспериментально в 30-х годах прошлого столетия при конструировании систем управления техническими объектами. Возникла так называемая *теория инвариантности* , имевшая драматическую судьбу [22–27]. В настоящее время основные проблем этой теории решены [21, 28–31]. Одной из основных задач теории инвариантности является следующая: предъявлена система (1). Необходимо узнать, обладает ли она свойством "инвариантности" , т.е. существуют ли у системы фазовые характеристики, независящие от части управлений. Эта проблема является примером того, как некоторая проблема "тривиализуется" в рамках определенной языковой среды (всякая проблема тривиализуется в рамках соответствующей языковой среды). В самом деле, возникшие в геометрической теории декомпозиции языковые средства позволяют указать путь решения сформулированной проблемы. Декомпозиция (3), (4) является "проявлением" симметрийного свойства и за нее "отвечает" подгруппа группы симметрий объекта (1). Для координат инфинитезимальных операторов, характеризующих эту подгруппу в силу того, что ее инварианты $z = I(t, y)$ не зависят от управлений, можно выписать систему дифференциальных уравнений в частных производных. Эта система сильно переопределена. Дописывая к ней условия совместности, можно конструктивно установить, обладает ли система (1) такими свойствами [28–31].

Д. Возможность иерархизовать управление процессом. Декомпозиция (3), (4) позволяет предложить для управления процессом, который описывается системой (1), двухуровневую организацию. Ее верхний уровень ставит цель в терминах характеристик $z = I(t, y)$ и добивается ее исполнения с помощью выбора управлений u. Получив свои управления и фазовые переменные, он "спускает" свои решения на нижний уровень, т.е. в систему (4). Поскольку в (4) имеется ресурс управления v, то нижний уровень может также поставить себе цель и добиться ее исполнения. Возможны, конечно, более сложные иерархические организации, основанные на симметрийных свойствах системы (1). Их множество описывается соответствующей декомпозиционной структурой системы (1).

Заметим, что существование декомпозиции вида (3), (4) является "исключительным" свойством системы (1). "Произвольная" система никаких декомпозиций вида (3), (4) не допускает. В то же время управление достаточно сложными управляемыми системами, обладающими информационными возможностями, т.е. способностью измерять в процессе своего функционирования некоторые свои характеристики $m = I(t, y)$ и некоторые характеристики v окружающего мира, иерархизовано. Это в рамках описываемой языковой среды трактуется следующим образом: достаточно сложные управляемые системы, обладающие информационными возможностями, часть своих управлений u назначают функциями измеряемых в процессе функционирования характеристик: $u = u(I(t, y), v, w)$. Такое назначение управлений называется "управлением с помощь обратных связей" или "синтезом управлений". Здесь w — "новые" управления, которые привносятся в систему обратными связями, если имеются соответствующие конструктивные и энергетические возможности. Для очень сложных систем имеется

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

фундаментальная цель такого назначения. Она состоит в том, чтобы сделать некоторую совокупность

$$C^k = \Phi^k(t, y), k = 1,\ 2,\ ...,\ a, \qquad (5)$$

своих характеристик постоянной. Эту совокупность естественно назвать “внутренней средой системы”, а обратные связи, реализующие их постоянство, — механизмами гомеостаза, “охраняющими” внутреннюю среду. В результате исходная система (1) становится изоморфной системе

$$dC^k/dt = 0,\ k = 1,\ 2,\ ...,\ a, \qquad (6)$$

$$dz^l/dt = \varphi^l(t, C, z^1, ..., z^{n-a}, w_1, v),\ l = 1,\ 2,\ ...,\ n - a, \qquad (7)$$

где

$$z^j = Z^j(t, y), l = 1,\ 2,\ ...,\ n - a,$$

вместе с (5) образуют невырожденную замену в системе (1). Оставшийся в (7) управленческий ресурс можно вновь подвергнуть синтезу так, чтобы система (7) приобрела декомпозицию, удобную для достижения иерархии целей, ценностей, предпочтений, стоящих перед системой. У достаточно сложных управляемых систем механизмы гомеостаза и синтез управлений, придающие системе нужную структуру, **встроены** в систему. Поэтому при попытках составить модель функционирования такой системы необходимо понять, какими механизмами (обратными связями) поддерживается внутренняя среда системы и ее структура.

Сформулированное положение носит методологический характер. Тем не менее именно это положение имеет наибольшую практическую пользу при составлении моделей сложных управляемых систем. Поэтому автор считает это положение основным результатом геометрической теории декомпозиции.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павловский Ю.Н.* Декомпозиция снабженных структурой множеств на свободную сумму и прямое произведение // ДАН. — 1995. — Т. 340, № 3. — С. 314–316.
2. *Павловский Ю.Н.* О P- и F-декомпозициях Σ объектов // ДАН. — 1996. — Т. 351, № 5. — С. 603–605.
3. *Павловский Ю.Н.* О декомпозициях снабженных структурой над подчиненными структурами // ДАН. — 1997. — Т. 357, № 5. — С. 589–591.
4. *Павловский Ю.Н.* О шкалах родов структур // ДАН. — 1998. — Т. 363, № 2. — С.163–165.
5. *Павловский Ю.Н.* О HPF- и PF-морфизмах // ДАН. — 1999. — Т. 369, № 6. — С. 745–746.
6. *Павловский Ю.Н.* О декомпозиционном методе построения образов подмножеств снабженных структурой множеств // ДАН. — 2000. — Т. 374, № 4. — С. 450–452.
7. *Павловский Ю.Н.* Об одном декомпозиционном подходе к построению образов изображений // ДАН. — 2003. — Т. 392, № 6. — С. 733–735.
8. *Павловский Ю.Н.* О декомпозиционных структурах математических объектов // ДАН. — 2004. — Т. 399, № 1. — С. 15–17.
9. *Павловский Ю.Н.* Декомпозиции и аттракторы динамических систем, ассоциированные с отображениями в себя // ДАН. — 2005. — Т. 404, № 2. — С. 159–161.
10. *Павловский Ю.Н.* Редукции и декомпозиции математических объектов и моделей // ДАН. — 2008. — Т. 418, № 5. — С. 592–595.
11. *Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М.: Фазис, 1998. — 272 с.
12. *Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г.* Шкалы родов структур, термы и соотношения, сохраняющиеся при изоморфизмах. М.: ВЦ РАН, 2003. — 93 с.
13. *Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г.* Введение в геометрическую теорию декомпозиции. М.: Фазис, 2006. — 169 с.
14. *Elkin V.I., Pavlovsky J.N.* Decomposition of models of control processes // Journal of Mathematical science. — Vol. 88., No. 5. — P. 723–761, 1998.

15. *Гусейнова А.С., Павловский Ю.Н., Устинов В.А.* Опыт имитационного моделирования исторического процесса. М.: Наука, 1985. — 158 с.
16. *Григоров Ю.Н., Данилов П.В., Павловский Ю.Н.* Проблемы использования математического моделирования в народном хозяйстве (на примере моделей возрастных парков технических систем) // Математическое моделирование. — Т. 4, № 4, 1991. — С. 57–68.
17. *Моисеев Н.Н., Левиков А.А., Павловский Ю.Н., Черевков К.В.* Новый виток гонки вооружений или новое мышление // Политические исследования. 1991. — № 5. — С. 5–14.
18. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1965. — 456 с.
19. *Букур И., Деляну А.* Теория категорий. М.: Мир, 1972. — 259 с.
20. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 399 с.
21. *Яковенко Г.Н.* Теория управления регулярными системами — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 264 с.
22. *Щипанов Г.В.* Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика — 1939. — № 1. — С. 49–66.
23. *Ишлинский А.Ю.* Вступительное слово при открытии совещания. В кн. Труды первого Всесоюзного совещания по теории инвариантности. Киев.: АН УССР, — 1959. — С. 5–9.
24. *Петров Б.Н.* Принцип инвариантности и условия его применения при расчете линейных и нелинейных систем. В кн. Труды I Международного конгресса по автоматическому управлению. М.: Наука, — 1961. — С. 259–271.
25. *Кухтенко А.И.* Проблема инвариантности в автоматике. Киев: Гостехиздат УССР, — 1963. — 125 с.
26. *Розоноэр Л.И.* Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления//Автоматика и телемеханика. 1963. — № 6. — С. 744–756.
27. *Величенко В.В.* О вариационном методе в проблеме инвариантности управляемых систем. Автоматика и телемеханика. — 1972. № 4. — С. 22–35.
28. *Елкин В.И.* Реализация, инвариантность и автономность нелинейных управляемых динамических систем//Автоматика и телемеханика. 1981, № 7. — С. 36–44.

29. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, — 1997. — 317 с.
30. *Елкин В.И.* Методы алгебры и геометрии в теории управления. Аффинные распределения и аффинные системы. М.: МФТИ, 1996. — 256 с.
31. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Декомпозиция и инвариантность по возмущениям. М.: Фазис, 2003. — 207 с.
32. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции при управлении механическими системами//ДАН. — 1988. — Т. 300, № 2. — С. 300–303.

Получено 26.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 517.9

В.Ф. Зайцев, Л.В. Линчук
Российский государственный педагогический
университет им. А.И. Герцена
valentin_zaitsev@mail.ru, lidiya_linchuk@mail.ru

СОВРЕМЕННЫЙ ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ – УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных предлагается универсальный подход к описанию симметрий на основе задания правил дифференцирования нелокальных переменных.

На протяжении более чем столетней истории любое направление в науке претерпевает существенную эволюцию, затрагивающую все сферы деятельности отрасли – идеологию, теорию, методы и алгоритмы. Не избежал этого и групповой анализ дифференциальных уравнений – предложенный в конце XIX века Софусом Ли подход к точному интегрированию, основанный на инвариантности уравнений относительно непрерывных групп преобразований. В более широком смысле ключевым является наличие симметрии модели, описываемой дифференциальным уравнением, и учет этой симметрии, по существу, является одним из условий адекватности математического описания изучаемого процесса. Это обстоятельство сближает чисто теоретическую дисциплину – групповой анализ – с многочисленными приложениями. К тому же предложенная С. Ли техника – переход к инфинитезимальному оператору – позволяет построить регулярный замкнутый алгоритм поиска группы, допускаемой дифференциальным уравнением.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

К концу XX века потенциал, заложенный 100 лет назад, оказался почти исчерпанным. Подавляющее большинство новых результатов достигалось не за счет внутренних ресурсов теории, а за счет ее экспансии – группового анализа ранее не исследованных уравнений, в первую очередь из прикладных областей, в которых групповой анализ ранее не применялся. Однако оставались немногочисленные, но яркие примеры проинтегрированных уравнений, для которых методы группового анализа оказались неэффективными. Эпизодически (в частности, в промежуточных выкладках) возникали операторы, структура которых "не укладывалась" в рамки привычных локальных представлений [1, 2] – наряду с "обычными" переменными (x, y, y' и т. д.) в координаты оператора входили "нелокальные" переменные, например, полные интегралы – обращения полных производных (D_x^{-1}). При этом стройность построений группового анализа несколько нарушается – нам, как правило, не удается решить уравнения Ли и восстановить группу по инфинитезимальному оператору (что, в свою очередь, не позволяет "размножать" неинвариантные частные решения исходного уравнения, если они известны). Но основная идея оставалась незыблемой – если можно найти базис инвариантов (а для экспоненциального нелокального оператора – ЭНО – это так), то можно и понизить порядок уравнения, перейдя к инвариантам как к новым переменным. С точки зрения поиска координат инфинитезимального оператора переход к нелокальным переменным является вполне естественным – это полная аналогия обобщения решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ): от элементарных функций к квадратурам.

Вполне логичен и следующий шаг – ни у кого не возникает неудобства, если решение ОДУ выражено, например, в функциях Бесселя: дальнейшим обобщением квадратур является представление в терминах решений линейных ОДУ с переменными коэффициентами. Точно так же координаты оператора (точнее, входящие в них "нелокальные" переменные) можно задавать не явной формулой, а **правилами дифференцирования**, которые представляют собой систему уравнений в полных производных (для обыкновенных дифференциальных уравнений) и в полных частных производных (для уравнений в частных производных) [3]. Эти переменные, в принципе, можно представить в виде рядов (вспомним определения специальных функций).

Легко видеть, что предлагаемый нами подход полностью содержит в себе как классические методы, так и метод, использующий нелокальные операторы, – координаты любого допускаемого оператора являются решениями линейных уравнений в полных производных, но не любое такое решение представимо в виде полного интеграла или суперпозиции полных интегралов. Мы уже не говорим о том, что в ряде случаев даже наличие решения в виде полного интеграла не гарантирует упрощение исходного уравнения.

Вместе с тем сохраняется основное преимущество группового анализа – его алгоритмичность. Действительно, хорошо известно, что любое уравнение может быть записано в инвариантах допускаемого оператора. Для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) это означает, что оно факторизуется на систему более простых уравнений, а следовательно, можно существенно упростить процессы интегрирования и исследования свойств исходного ОДУ. Если целью поиска допускаемого оператора является факторизация исходного ОДУ, то **требование явного вида допускаемого оператора является избыточной информацией**. Покажем это.

Рассмотрим процедуру факторизации ОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

с помощью оператора вида

$$X = \Phi(x, y, y', \ldots)\partial_y, \tag{2}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

где Φ – функция конечного или бесконечного числа переменных. Сначала мы должны найти оператор (2), допускаемый уравнением (1), решив определяющее уравнение

$$\Phi\frac{\partial F}{\partial y}+D_x\Phi\frac{\partial F}{\partial y'}+\,\ldots\,+D_x^{n-1}\Phi\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}-D_x^n\Phi\bigg|_{[y^{(n)}=F]}=0. \tag{3}$$

Если нам удалось найти Φ в явном аналитическом виде, мы переходим к вычислению инвариантов допускаемого оператора (2). Инварианты удовлетворяют уравнению

$$\Phi\frac{\partial J}{\partial y}+D_x\Phi\frac{\partial J}{\partial y'}+\,\ldots\,+D_x^{n-1}\Phi\frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]}=0. \tag{4}$$

Выберем из найденного множества решений уравнения (4) решение

$$J=J(x,y,y',\,\ldots\,,y^{(k)}),\quad (k<n),$$

старшая производная в котором имеет наименьший порядок (этот инвариант называется младшим). Тогда исходное уравнение (1) можно записать в виде фактор-системы [4]:

$$\begin{cases} u=J(x,y,y',\,\ldots\,,y^{(k)}),\\ u^{(n-k)}=G(x,u,u',\,\ldots\,,u^{(n-k-1)}). \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что уравнения (3) и (4) имеют схожую структуру, а именно, в них линейно входит функция Φ и ее полные производные, с той лишь разницей, что в уравнении (3) функция Φ является искомой, а в уравнении (4) считается известной. Если поделить эти уравнения почленно на Φ, получим выражения, в которые функция Φ входит лишь в виде отношений

$$\frac{D_x\Phi}{\Phi},\frac{D_x^2\Phi}{\Phi},\,\ldots\,,\frac{D_x^n\Phi}{\Phi}.$$

Следовательно, для поиска фактор-системы нам достаточно знать эти отношения, а не искать собственно функцию Φ. Более того, достаточно знать лишь первое отношение, так как

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

остальные могут быть получены из него простым дифференцированием.

Если, например, отношение $D_x\Phi/\Phi = \zeta(x,y,y')$, то мы получаем определение ЭНО в каноническом виде:

$$X = \exp\left(\int \zeta(x,y,y')\,dx\right)\partial_y.$$

В данном случае мы восстанавливаем явный вид функции Φ (квадратурой), хотя для факторизации, как мы показали, это не принципиально, и вид оператора не имеет значения ни для прямой, ни для обратной задачи, а ключевую роль играет выражение $D_x\Phi = \zeta(x,y,y')\Phi$, которое можно назвать **правилом дифференцирования** функции Φ.

Введём в рассмотрение оператор вида

$$X = \Phi\partial_y, \quad \text{где} \quad \Phi = \sum_{i=1}^{k} \xi_i(x,y,y',\,\ldots\,,y^{(p)})A_i, \tag{6}$$

где A_i $(i = 1,\,\ldots\,,k)$ – нелокальные переменные, правила дифференцирования которых задаются линейными выражениями

$$D(A_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x,y,y',\,\ldots\,,y^{(p)})A_j. \tag{7}$$

По сути, эти правила дифференцирования задают правило дифференцирования координаты оператора Φ.

Предположим, что необходимо найти оператор (6), допускаемый заданным ОДУ n-го порядка (1). Для этого мы можем составить определяющее уравнение по формуле (3), которое в силу линейности, а также в силу линейности правил дифференцирования (7) будет имеет вид

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i(x,y,y',\,\ldots\,,y^{(n-1)})A_i = 0.$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Так как нелокальные переменные являются независимыми, то мы можем расщепить это уравнение до системы

$$\begin{cases} \beta_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_k(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения уже не содержат нелокальных переменных, а поэтому из них могут быть найдены функции ξ_{ij} и $\alpha_i(x, y, y', \dots, y^{(p)})$, задающие оператор (6). Если найденный оператор имеет нетривиальный инвариант порядка ниже n, то можно построить фактор-систему исходного ОДУ. Этот инвариант может быть найден из соотношения (4), которое по аналогии с определяющим уравнением имеет линейную структуру, а следовательно, будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\gamma_{i0}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \frac{\partial J}{\partial y} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \gamma_{i(n-1)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}} \right) A_i = 0.$$

Расщепив это уравнение по нелокальным переменным, мы получаем систему для поиска инвариантов

$$\begin{cases} \gamma_{10}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \dfrac{\partial J}{\partial y} + \dots \\ \qquad \dots + \gamma_{1(n-1)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{k0}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \dfrac{\partial J}{\partial y} + \dots \\ \qquad \dots + \gamma_{k(n-1)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}} = 0. \end{cases}$$

Если эта система имеет только тривиальное решение, то найденный оператор оказывается пустым с точки зрения факторизации, в противном случае можно построить фактор-систему (5).

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Существенным упрощением указанного алгоритма является то, что число нелокальных переменных и порядок производных p можно ограничить порядком уравнения (1), а координату оператора Φ можно считать равной одной из нелокальных переменных. Эти условия никак не ограничивают универсальность этого метода, так как и в этом случае операторов вида (6) оказывается достаточным для построения всех фактор-систем заданного ОДУ. Более того, тип факторизации определяется числом нелокальных переменных. Поэтому если заранее задать структуру фактор-системы, то тем самым можно сузить класс искомых допускаемых операторов.

Так, например, все фактор-системы ОДУ 3-го порядка

$$y''' = F(x, y, y', y'')$$

вида

$$\begin{cases} u = J(x, y, y', y''), \\ u' = G(x, u) \end{cases}$$

могут быть найдены с помощью операторов вида

$$X = A\partial_y, \qquad \begin{cases} D_x A = B, \\ D_x B = \alpha(x, y, y', y'')A + \beta(x, y, y', y'')B. \end{cases}$$

В качестве примера приведем решение прямой задачи для ОДУ 2-го порядка

$$y'' = (xy^{-3} + x^{-1})y'$$

в классе операторов

$$X = A\partial_y,$$

где правило дифференцирования нелокальной переменной A:

$$D_x A = \alpha(x, y)A.$$

Соответствующее определяющее уравнение имеет вид

$$A\left[(\alpha'_y + 3xy^{-4})y' + \alpha'_x + \alpha^2 - (xy^{-3} + x^{-1})\alpha\right] = 0.$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Расщепив по переменной y' выражение в квадратных скобках, получаем систему

$$\begin{cases} \alpha'_y + 3xy^{-4} = 0, \\ \alpha'_x + \alpha^2 - (xy^{-3} + x^{-1})\alpha = 0, \end{cases}$$

решением которой будет

$$\alpha = xy^{-3}.$$

Используя полученный результат, найдем дифференциальный инвариант допускаемого оператора $J = J(x, y, y')$ из уравнения

$$J_y + xy^{-3} J_{y'} = 0.$$

Его решение

$$J = y' + \frac{x}{2y^2}.$$

Отсюда вытекает, что исходное уравнение факторизуется следующим образом:

$$\begin{cases} u = y' + \dfrac{x}{2y^2}, \\ xu' - u = 0. \end{cases}$$

Для уравнений в частных производных (УрЧП) классические алгоритмы приводят не к понижению порядка, а к понижению размерности [5]. При этом мы находим не общее, а некоторый класс частных решений, зато найденные решения инвариантны относительно допускаемых групп, что существенно повышает их прикладную зна́чимость.

Тем не менее ряд технологий, разработанных для ОДУ (в том числе теоремы о факторизации), можно с успехом применять и для УрЧП. Как было показано в [3], УрЧП 2-го порядка

$$u_{xx} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}) \tag{8}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

можно представить в виде фактор-системы

$$\begin{cases} w = w(x, y, u, u_x, u_y), \\ w_x = G(x, y, w, w_y) \end{cases} \tag{9}$$

с помощью оператора

$$X = A\partial_u,$$

где нелокальная переменная A определяется правилами дифференцирования

$$\begin{cases} D_x A = \alpha(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy})A, \\ D_y A = \beta(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy})A. \end{cases}$$

В такой формулировке эта задача достаточно сложно решается, так как зависимость функций α и β практически от всех производных, входящих в уравнение (8), не даёт возможность расщепить определяющее уравнение и найти искомый оператор. Но практика показывает, что если всё же удалось найти допускаемый оператор, то в результате мы находим целый класс операторов, среди которых либо много "пустых", т.е. не дающих никакой факторизации, либо много таких, которые порождают одну и ту же фактор-систему. Поэтому естественным образом возникает задача поиска условий на структуру коэффициентов α и β, при которых мы бы находили все фактор-системы, но не получали "лишних" операторов.

Если допускаемый оператор найден, то для построения фактор-системы (9) нам нужно найти его дифференциальный инвариант 1-го порядка из уравнения

$$w_u + \alpha w_{u_x} + \beta w_{u_y} = 0.$$

Примером может служить факторизация уравнения Монжа–Ампера [6]:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{a^2}{(y+b)^4}.$$

Инвариантами допускаемого оператора являются функции

$$U = \Psi_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{a}{y+b},\ x\frac{\partial w}{\partial x} + (y+b)\frac{\partial w}{\partial y} - u + \frac{ax}{y+b} \right),$$

$$V = y, \quad T = \frac{\partial w}{\partial x},$$

где $\Psi_1(z_1, z_2)$ – произвольная функция. Исходное уравнение может быть записано в инвариантах в виде линейного уравнения в частных производных первого порядка

$$(V+b)^2 \frac{\partial U}{\partial V} + a\frac{\partial U}{\partial T} = 0,$$

решение которого имеет вид

$$U = \Phi_1 \left(T + \frac{a}{V+b} \right).$$

Таким образом, исходное уравнение Монжа–Ампера сводится к уравнению в частных производных первого порядка:

$$\Psi \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{a}{y+b},\ x\frac{\partial w}{\partial x} + (y+b)\frac{\partial w}{\partial y} - u + \frac{ax}{y+b} \right) = 0,$$

где $\Psi(z_1, z_2)$ – произвольная функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа. — М.: Знание, сер. Математика и кибернетика, 1991. №7. — 48 с.
2. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 640 с.
3. *Линчук Л.В.* Факторизация обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных // Материалы научной конференции “Герценовские чтения — 2006”. — СПб.: БАН, 2006. — С. 108—115.

4. *Зайцев В.Ф.* Формальные операторы и теоремы о факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды III Международной конференции “Симметрии и дифференциальные уравнения”. — Красноярск, 2002. — С. 101—105.
5. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: Физматлит, 2005. — 256 с.
6. http://eqworld.ipmnet.ru.

Получено 01.08.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

УДК 519.71

Г.Н. Яковенко
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
yakovenko_g@mtu-net.ru

ДЕСЯТЬ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ — СЛЕДСТВИЕ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ДИВЕРГЕНТНЫХ СИММЕТРИЙ[15]

Рассматривается случай однопараметрического семейства (не обязательно группы) дивергентных симметрий лагранжевой системы. Показывается, что этому случаю в отличие от теоремы Нётер и теоремы Бессель-Хагена соответствует семейство первых интегралов, в котором может содержаться несколько независимых первых интегралов. Приводится пример, когда однопараметрическое семейство порождает десять первых интегралов, соответствующих законам сохранения в консервативной замкнутой системе полной механической энергии, вектора импульса, вектора момента импульса и вектора Галилея.

Для вычисления первого интеграла по теореме Эмми Нётер [1, 2] или её обобщению теореме Бессель-Хагена [2, 3] требуется, чтобы уравнения Лагранжа допускали однопараметрическую группу вариационных или более общих дивергентных симметрий (определения даны ниже). Изучается случай, когда уравнения Лагранжа допускают гладкое семейство (не обязательно группу) дивергентных симметрий [2–4]. Возможный эффект: по однопараметрическому семейству вычисляется несколько независимых первых интегралов. В приведённом примере — десять. В основу настоящей работы легли статьи [5–9]. Далее

[15]Работа поддержана РФФИ, грант 07-01-00217.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

предполагается, что участвующие в построениях функции достаточно гладкие. Рассуждения, определения, утверждения — локальны.

Семейство преобразований

$$\begin{aligned} &\widehat{t} = \widehat{t}\,(t, q, \tau)\,, \\ &\widehat{q}_i = \widehat{q}_i\,(t, q, \tau)\,, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{1}$$

есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{t}}{d\tau} &= \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \\ \frac{d\widehat{q}_i}{d\tau} &= \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{dR}{d\tau} &= r\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \end{aligned} \tag{2}$$

при начальных условиях

$$\widehat{t}\,(0) = t, \qquad \widehat{q}_i\,(0) = q_i, \qquad R\,(0) = 0. \tag{3}$$

Определение 1. Отдельно взятое преобразование семейства (1) называется *преобразованием дивергентной симметрии* лагранжевой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{4}$$

определённой функцией Лагранжа $L\,(t, q, \dot{q})$, если существует такая функция $R\,(t, q)$, что преобразование связано с функцией Лагранжа соотношением

$$L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{d\widehat{q}}{d\widehat{t}}\right)\frac{d\widehat{t}}{dt} + \frac{dR}{dt} = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right). \tag{5}$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Если в (5) $R \equiv 0$, преобразование называется *вариационной симметрией.*

Замечание 1. Для проверки условия (5) требуется, во-первых, убедиться, что после перехода к переменным t, q_i при некоторых функциях $f(t,\, q)$, $g_i(t,\, q)$ справедливо соотношение

$$L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) - L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{d\widehat{q}}{d\widehat{t}}\right)\frac{d\widehat{t}}{dt} = f(t,\, q) + \sum_{i=1}^{n} g_i(t,\, q)\dot{q}_i,$$

во-вторых, для функций $f(t,\, q)$, $g_i(t,\, q)$ тождественно выполняются равенства

$$\frac{\partial f(t,\, q)}{\partial q_i} = \frac{\partial g_i(t,\, q)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial g_j(t,\, q)}{\partial q_i} = \frac{\partial g_i(t,\, q)}{\partial q_j}, \qquad i,\, j = \overline{1,\, n}.$$

Функция $R\,(t, q)$ — решение вполне интегрируемой системы

$$\frac{\partial R}{\partial t} = f(t,\, q), \qquad \frac{\partial R}{\partial q_i} = g_i(t,\, q), \qquad i = \overline{1,\, n}.$$

Теорема 1. Пусть преобразования (1) и лагранжева система с функцией Лагранжа $L\,(t, q, \dot{q})$ удовлетворяют условию (5) дивергентной симметрии. Тогда у системы есть семейство первых интегралов

$$w\,(t, q, \dot{q}, \tau) = \sum_{i=1}^{n} p_i \eta_i\,(t, q, \tau) - \xi\,(t, q, \tau)\, H + r\,(t, q, \tau)\,, \qquad (6)$$

где $\xi\,(t, q, \tau)$**,** $\eta_i\,(t, q, \tau)$**,** $r\,(t, q, \tau)$ — функции из (2), p_i и H — соответствующие системе обобщенные импульсы и функция Гамильтона [4]:

$$\begin{gathered} p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \\ H\,(t, q, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L\,(t, q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\,(t, q, \dot{q}). \end{gathered} \qquad (7)$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

□ Потребуются формулы (учтены перестановочность дифференцирования по независимым переменным τ и t и уравнения (2))

$$\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{t}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\widehat{t}}{d\tau} = \frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt} = \frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}, \tag{8}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dR}{d\tau} = \frac{dr\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt} = \frac{dr\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{q}_i}{d\widehat{t}} = \frac{d}{d\tau}\frac{\dfrac{d\widehat{q}_i}{dt}}{\dfrac{d\widehat{t}}{dt}} = \frac{\left(\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{d\widehat{q}_i}{dt}\right)\dfrac{d\widehat{t}}{dt} - \dfrac{d\widehat{q}_i}{dt}\left(\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{d\widehat{t}}{dt}\right)}{\left(\dfrac{d\widehat{t}}{dt}\right)^2} = \\
= \frac{\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{d\widehat{q}_i}{d\tau}\right)\dfrac{d\widehat{t}}{dt} - \dfrac{d\widehat{q}_i}{dt}\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{d\widehat{t}}{d\tau}\right)}{\left(\dfrac{d\widehat{t}}{dt}\right)^2} = \\
= \frac{\dfrac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt}\dfrac{d\widehat{t}}{dt} - \dfrac{d\widehat{q}_i}{dt}\dfrac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt}}{\left(\dfrac{d\widehat{t}}{dt}\right)^2} = \\
= \frac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}} - \frac{d\widehat{q}_i}{d\widehat{t}}\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Потребуется также формула [4]

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{dH}{dt}. \tag{11}$$

Продифференцируем условие (5) по τ (учтены уравнения (2), (4) и формулы (8) — (11)):

$$\left\{\frac{\partial L}{\partial \widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \widehat{q}_i}\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i}\left(\frac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}-\dot{\widehat{q}}_i\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\right)\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}+$$

$$+L\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}+\frac{dr(\widehat{t},\widehat{q},\tau)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}=$$

$$=\left\{\frac{\partial L}{\partial \widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\widehat{t}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i}\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i}\left(\frac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}-\dot{\widehat{q}}_i\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\right)\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}+$$

$$+L\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}+\frac{dr(\widehat{t},\widehat{q},\tau)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}\overset{(8)}{=}$$

$$=\left\{-\frac{dH}{d\widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\frac{d}{d\widehat{t}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i}\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i}\dot{\widehat{q}}_i-L\right)\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}+\frac{dr(\widehat{t},\widehat{q},\tau)}{d\widehat{t}}\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}\overset{(9)}{=}$$

$$=\left\{-\frac{dH}{d\widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\frac{d}{d\widehat{t}}\sum_{i=1}^{n}\widehat{p}_i\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)-\right.$$

$$\left.-H\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}+\frac{dr(\widehat{t},\widehat{q},\tau)}{d\widehat{t}}\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}=$$

$$=\frac{d}{d\widehat{t}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\widehat{p}_i\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)-\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)H+r(\widehat{t},\widehat{q},\tau)\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}=0.$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

Как следует из (3), при малых значениях τ выполняется $d\widehat{t}/dt \neq 0$, поэтому на решениях лагранжевой системы, соответствующей функции Лагранжа $L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \dot{\widehat{q}}\right)$, сохраняется формула, находящаяся в фигурных скобках последнего выражения, что доказывает наличие первого интеграла (6) для лагранжевой системы с функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$. ■

Замечание 2. Совокупность симметрий, которая не является группой, рассматривалась ранее (например, в [10, с. 81; 11, с. 106]), но для построения первого интеграла привлекалась только инфинитезималь — правые части системы (2) при $\tau = 0$, — не приводящая к семейству (6) первых интегралов.

Пример 1. Положение материальных точек замкнутой консервативной системы задаётся в ортогональной декартовой системе координат

$$\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}.$$

Потенциальная энергия $\Pi(r_{ik})$ зависит только от расстояний r_{ik} между точками:

$$r_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2.$$

Функция Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) - \Pi(r_{ik}). \qquad (12)$$

Обобщённые импульсы:

$$p_i^x = m_i\dot{x}_i, \quad p_i^y = m_i\dot{y}_i, \qquad p_i^z = m_i\dot{z}_i. \qquad (13)$$

Функция Гамильтона:

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) + \Pi(r_{ik}). \qquad (14)$$

Для введённой в примере материальной системы известна десятипараметрическая группа симметрий [12] — группа Галилея:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{t} = t + \tau_1, && \widehat{x}_i = x_i + \tau_2, \quad \widehat{y}_i = y_i + \tau_3,\\
& && \widehat{z}_i = z_i + \tau_4;\\
&\widehat{t} = t, && \widehat{x}_i = x_i, \quad \widehat{y}_i = y_i \cos\tau_5 - z_i \sin\tau_5,\\
& && \widehat{z}_i = y_i \sin\tau_5 + z_i \cos\tau_5;\\
&\widehat{t} = t, && \widehat{x}_i = x_i \cos\tau_6 - z_i \sin\tau_6, \quad \widehat{y}_i = y_i,\\
& && \widehat{z}_i = x_i \sin\tau_6 + z_i \cos\tau_6;\\
&\widehat{t} = t, && \widehat{x}_i = x_i \cos\tau_7 - y_i \sin\tau_7,\\
& && \widehat{y}_i = x_i \sin\tau_7 + y_i \cos\tau_7, \quad \widehat{z}_i = z_i;\\
&\widehat{t} = t, && \widehat{x}_i = x_i + t\tau_8, \quad \widehat{y}_i = y_i + t\tau_9,\\
& && \widehat{z}_i = z_i + t\tau_{10}.
\end{aligned}
$$

Специализация параметров $\tau_1 = \tau^3$, $\tau_2 = 0$, $\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0$, $\tau_5 = \tau$, $\tau_6 = \dfrac{\pi}{2}\tau$, $\tau_7 = 0$, $\tau_8 = 0$, $\tau_9 = 0$, $\tau_{10} = \tau^4$ и суперпозиция в следующей последовательности: τ_5, τ_6, τ_{10}, τ_1 — приводит к однопараметрическому семейству (1) преобразований

$$
\begin{aligned}
&\widehat{t} = t - \tau^3,\\
&\widehat{x}_i = x_i \cos\frac{\pi}{2}\tau - (y_i \sin\tau + z_i \cos\tau)\sin\frac{\pi}{2}\tau,\\
&\widehat{y}_i = y_i \cos\tau - z_i \sin\tau,\\
&\widehat{z}_i = x_i \sin\frac{\pi}{2}\tau + (y_i \sin\tau + z_i \cos\tau)\cos\frac{\pi}{2}\tau + t\tau^4.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Условие (5) дивергентной симметрии удовлетворяется при (см. замечание 1)

$$
\begin{aligned}
R \;=\; & -\sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ x_i \sin\frac{\pi}{2}\tau + (y_i \sin\tau + z_i \cos\tau)\cos\frac{\pi}{2}\tau \right\} \tau^4 -\\
& -\tfrac{1}{2} t\tau^8 \sum_{i=1}^{N} m_i.
\end{aligned}
$$

Функции $\widehat{t}$, $\widehat{x}_i$, $\widehat{y}_i$, $\widehat{z}_i$, R есть решение системы дифференци-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

альных уравнений (2), (3):

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{t}}{d\tau} &= \xi &&= -3\tau^2,\\
\frac{d\widehat{x}_i}{d\tau} &= \eta_i^x &&= \left\{\left(\widehat{t}+\tau^3\right)\tau^4-\widehat{z}_i\right\}\frac{\pi}{2}-\widehat{y}_i\sin\frac{\pi}{2}\tau,\\
\frac{d\widehat{y}_i}{d\tau} &= \eta_i^y &&= \widehat{x}_i\sin\frac{\pi}{2}\tau-\widehat{z}_i\cos\frac{\pi}{2}\tau+\\
&&& +(\ \widehat{t}+\tau^3\ )\,\tau^4\cos\frac{\pi}{2}\tau,\\
\frac{d\widehat{z}_i}{d\tau} &= \eta_i^z &&= \widehat{x}_i\frac{\pi}{2}\tau+\widehat{y}_i\cos\frac{\pi}{2}\tau+4\left(\widehat{t}+\tau^3\right)\tau^3,\\
\frac{dR}{d\tau} &= r &&= -\frac{\pi}{2}\tau^4\sum_{i=1}^{N}m_i\widehat{x}_i-\tau^4\sum_{i=1}^{N}m_i\widehat{y}_i\cos\frac{\pi}{2}\tau-\\
&&& -4\tau^3\sum_{i=1}^{N}m_i\widehat{z}_i
\end{aligned} \tag{16}$$

при начальных условиях (3). Отметим, что функции в правой части системы (16) не выражаются в виде $\varphi_i(\tau,x)=f_i(x)h(\tau)$ ($h(\tau)$ — скалярная функция), поэтому семейство (15) не есть группа.

Первый интеграл (6) с учётом (13), (14), (16) равен

$$\begin{aligned}
w(\tau) &= K_x\cos\frac{\pi}{2}\tau-\frac{\pi}{2}K_y+K_z\sin\frac{\pi}{2}\tau+\\
&+ P_x\tau^7+P_y\tau^7\cos\frac{\pi}{2}\tau+4P_z\tau^6+\\
&+ G_x\tau^4+G_y\tau^4\cos\frac{\pi}{2}\tau+4G_z\tau^3+3H\tau^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

Введены обозначения для проекций кинетического момента $\mathbf{K}_O$, импульса **P**, вектора Галилея **G**:

$$
\begin{aligned}
&K_x = \sum_{i=1}^{N} m_i\,(y_i\dot z_i - z_i\dot y_i),\\
&K_y = \sum_{i=1}^{N} m_i\,(z_i\dot x_i - x_i\dot z_i), \quad K_z = \sum_{i=1}^{N} m_i\,(x_i\dot y_i - y_i\dot x_i),\\
&P_x = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot x_i, \qquad P_y = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot y_i, \qquad P_z = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot z_i,\\
&G_x = P_x t - m x_c, \quad G_y = P_y t - m y_c, \quad G_z = P_z t - m z_c.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Подстановка в (17) $\tau = \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm5$ приводит к алгебраической системе из 10 уравнений и к выводу, что механическая система с функцией Лагранжа (12) обладает десятью первыми интегралами: функцией Гамильтона (14) и функциями (18). Отметим, что если путь в пространстве параметров выбрать "не мудрствуя лукаво": $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = 0$, $\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0$, $\tau_5 = \tau$, $\tau_6 = \tau$, $\tau_7 = 0$, $\tau_8 = 0$, $\tau_9 = 0$, $\tau_{10} = \tau$, то семейство первых интегралов, аналогичное (16), содержало бы только четыре функционально независимых первых интеграла: H, K_x, K_y, G_z.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme. Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1918. S. 235 — 257. (Перевод в кн.: Вариационные принципы механики. — М.: Физматгиз, 1959. С. 611—630.)
2. *Яковенко Г.Н.* Симметрии уравнений Гамильтона и Лагранжа. — М.: Изд. МЗ Пресс, 2006. 120 с.
3. *Bessel-Hagen E.* Über die Erhaltungsätze der Electrodynamic // Math. Ann., 1921. Bd. 84. S. 258—276.
4. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. — 238 с.
5. *Яковенко Г.Н.* Модификация теоремы Эмми Нётер на случай негрупповых симметрий // Механика твёрдого тела. — 2005. — Вып. 35. — С. 92—97.

6. *Яковенко Г.Н.* К теореме Эмми Нётер: “одним махом семерых убивахом” // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. “Герценовские чтения – 2006”. — СПб., 2006. — С. 112—119.
7. *Яковенко Г.Н.* Синергетический вариант теоремы Бессель-Хагена // Синергетические идеи в образовании: Сборник научных трудов Первой Всероссийской научно-практической конференции “Образование. Синергетика и новое мировидение”. 13—15 апреля 2006 г. / Под ред. Н.В. Аммосовой, Б.Б. Коваленко. — Астрахань: Изд-во АИПКП, 2006. С. 63—68.
8. *Яковенко Г.Н.* Теорема Эмми Нётер — негрупповой вариант // Современные методы физико-математических наук. Труды международной конференции. 9—14 октября 2006 г., Орёл. Т. 1. — Орёл: Издательство ОГУ, 2006. С. 140—143.
9. *Яковенко Г.Н.* Теорема Нётер–Бессель-Хагена — концентрированный вариант // Труды IX Международной Четаевской конференции “Аналитическая механика, устойчивость движения и управление движением” (Иркутск, 12—16 июня 2007 г.), Т. 2 / Иркутск: ИДСТУ РАН СО, 2007. С. 321—326.
10. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное вычисление. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 228 с.
11. *Татаринов Я.В.* Лекции по классической динамике. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.—296 с.
12. *Engel F.* Über zehn algemeinen Integrale der klassischen Mechanik, Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1916. S. 270—275.

Получено 10.08.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

СОДЕРЖАНИЕ

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2009

СИММЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сборник научных трудов

Редакторы *В.А. Дружинина, И.А. Волкова, О.П. Котова*
Корректор *И.А. Волкова*

Подписано в печать 28.10.2008. Формат $60 \times 90/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 12,0. Уч.- изд. л. 11,8. Тираж 300 экз. Заказ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов
в ГУП МО «Орехово-Зуевская типография»
142603, Московская область, г. Орехово-Зуево, ул. Дзержинского, д. 1

В январе 2009 года исполняется 70 лет ответственному редактору настоящего сборника профессору кафедры теоретической механики Московского физико-технического института, доктору физико-математических наук Геннадию Николаевичу Яковенко. На кафедре Г.Н. Яковенко читает основной курс «Теоретическая механика» и ведет семинарские занятия. Научные интересы Г.Н. Яковенко связаны с изучением симметрий дифференциальных уравнений в различных вопросах механики и теории управления. В механике Г.Н. Яковенко обобщил теорему Эмми Нётер на случай нестандартных симметрий. В теории управления Г.Н. Яковенко ввёл понятие *L*-систем, которые по сравнению с произвольными управляемыми системами обладают рядом особенных свойств. За 45 лет научно-педагогической деятельности Г.Н. Яковенко опубликовал более 200 работ. За последние 5 лет (2004–2008 годы) опубликовано 6 книг, 32 научные статьи, принято участие (с публикацией) в 27 научных конференциях.

Коллектив МФТИ и авторы сборника сердечно поздравляют Геннадия Николаевича с юбилеем и желают ему доброго здоровья, новых творческих достижений.

ISBN 5-7417-0234-1
9 785741 702345